



國立臺灣大學工學院機械工程學研究所

碩士論文

Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master's Thesis

連續體束縛態之光柵結構應用於物理不可仿製功能

Bound states In the Continuum based optical grating structures for  
Physically Unclonable Function applications

何沅泰

Yuan-Tai Ho

指導教授：劉建豪 博士

Advisor: Chien-Hao Liu, Ph.D.

中華民國 113 年 7 月

July, 2024



## 誌謝

我第一個要感謝的是劉建豪教授，這兩年來他細心的指導對我影響深遠。每当我研究的路上遭遇瓶頸時，他都能夠給出洽當的建議和協助，使我對此研究領域有著更深一層的瞭解。在攻讀碩士學位期間，我收穫良多，這都得益於他的悉心指導，還有 Mandy 除了協助我們處理報賬之外，各項行政也是多虧有了她，才能使我們能無後顧之憂的往目標前進。

並且，我也十分慶幸我的研究路上，有陳百彥教授、陳玉彬教授、劉承揚教授的引導，當我在研究上陷入盲區的時候，有他們在旁適時的提出客觀的見解，讓我有機會能夠從不同的角度來審視我的研究。

再來，我也要感謝楊志忠教授和林建中教授對我的教導，讓我對「表面電漿子」、「半導體物理」、「雷射原理」等領域的知識有更加深入的見解，讓我在閱讀相關的文獻時，能更快的了解整篇文章的架構與背後的原理。

同時，我也要感謝 R10 的學長、R12 的學弟以及 R11 的同屆戰友們，感謝忠峻學長教我光學量測的架設、感謝慶隆學長教我模擬軟體 CST 各方面的操作、感謝築灝學長在線彈還有其他專業科目上的知識傳授、感謝恩愷學長傳授撰寫碩論的技巧、感謝柏云學長時常與我分享麥當勞的買一送一。

感謝良賢與哲賢幫忙大電腦的各項技術錯誤、感謝家銘幫忙實驗室財產的清點、感謝世瑜忙前忙後的葡萄糖量測、感謝宸溥和我一起面對計畫的壓力。

至於同屆的戰友彥善、衍安、珩育、鼎凱，要感謝的真的太多了，像是 meeting 時間的互相提醒、職缺訊息的互通有無…，最後真的只能謝天了。

最後當然要感謝我的家人們，是家人們的一路扶持，有了你們一路上的金錢與情感上的支持，我才能夠坐在現在這邊，打上這段致謝文。你們的無私奉獻與無盡愛意，是我堅強的後盾與永不止息的動力源泉。

## 中文摘要



近年來，隨著 AI 演算法與邊緣運算硬體設備快速成長，數據儲存與架構安全性的相應提高，數據的保密性與防篡改的要求亦隨之增長，除了透過軟體達成資訊保密外，物理不可仿製功能(PUF)作為一種基於硬體的安全防偽技術，利用製程中不可避免的隨機變數，如空氣、濕度、溫度等，於晶片的結構上產生微細差異。這些差異極難複製，從而降低了逆向解構風險。PUF 的獨特隨機性和不可複製性賦予晶片猶如其獨特的「指紋」。

本研究探討連續體束縛態(BIC)在 PUF 技術中的應用。內容分為三個部分，首先透過數值分析與有限元素模擬，其 BIC 的品質因子( $Q$  factor)在理論上趨近於無限大的特性，並透過改變光柵的填充因子(Fill factor)將亮模態與暗模態重疊形成奇異點(EP)，當結構尺寸發生細微的變化，模態的特徵頻率便會發生顯著改變。接著將模擬得到的反射頻譜，透過反傳立葉轉換至時域訊號，與輸入高斯雷射進行卷積，以模擬現實中身分辨識的挑戰響應對(CRP)過程。最後將接收到的訊號數位化成比特串，也就是晶片指紋，並且檢驗其隨機性、唯一性、可靠性等參數，並透過美國國家標準暨技術研究院的隨機性測試(NIST randomness test)作二次驗證，證明其可以被視為一個真正的隨機數產生器。

經過巨量數據統計分析(10k 數量)，本研究所提出之 BIC-PUF 結構可被視為一個真正的隨機數產生器，其隨機性、唯一性、可靠性參數  $E_x$ 、 $E_y$ 、 $HD_{inter}$ 、 $HD_{intra}$ ，平均值分別為 0.9595、0.9976、0.4969、0.0393；標準差分別為 0.0986、0.0032、0.0351、0.0352，並且通過了 NIST randomness test。本論文所提出之 BIC 模態 PUF 未來可以擴展至近紅外光與可見光應用。

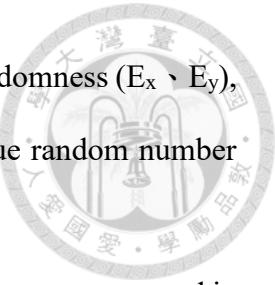
關鍵字：物理不可仿製功能、連續體束縛態、奇異點、無限大品質因子、美國國家標準技術研究所隨機性測試

## 英文摘要



In recent years, with the rapid growth of AI algorithms and edge computing hardware devices, the importance of data storage and architecture security has also increased, and the requirements for data confidentiality and anti-tampering have also increased. In addition to achieving information confidentiality through software, Physically Unclonable Function (PUF), as a hardware-based security technology, utilizes random variables that are unavoidable during the manufacturing process, such as air, humidity, temperature, etc., to produce minute differences in the structure of the chip. PUF, as a hardware-based security technology, utilizes unavoidable random variables in the manufacturing process, such as air, humidity, temperature, etc., to produce minute differences in the structure of the chip. These differences are extremely difficult to be replicated, thus reducing the risk of reverse deconstruction, and the unique randomness and non-replicability of PUFs give the chip a unique “fingerprint” as if it were a chip.

This study investigates the application of Bound states In the Continuum (BIC) in PUF technology. The content is divided into three parts, firstly, through numerical analysis and finite element simulation, the quality factor ( $Q$  factor) of the BIC theoretically tends to the infinite characteristic, and by changing the fill factor of the grating (Fill factor), the light mode and the dark mode overlap to form the Exceptional Point (EP), and when the structural dimensions change slightly, the characteristics of the modes are frequently changed. When there is a small change in the structure size, the characteristic frequency of the mode will change significantly. The simulated reflection spectrum is then converted to a time-domain signal by inverse Fourier transformation and convolved with the input Gaussian laser to simulate the Challenge-Response Pair (CRP) process of real-world body recognition. Finally, the received signals are digitized into bit

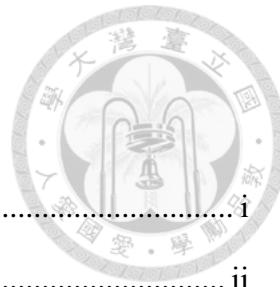


strings, i.e., chip fingerprints, and examined for parameters such as randomness ( $E_x$ 、 $E_y$ ), uniqueness ( $HD_{inter}$ ), and reliability ( $HD_{intra}$ ), and are verified as a true random number generator through the NIST randomness test.

After a huge amount of statistical analysis (10k), the BIC-PUF structure proposed in this study has  $E_x$ 、 $E_y$ 、 $HD_{inter}$ 、 $HD_{intra}$ , with mean values of 0.9595, 0.9976, 0.4969, 0.0393, and standard deviations of 0.0986, 0.0032, 0.0351, 0.0352, and has passed the NIST randomness test. The standard deviation is 0.0986, 0.0032, 0.0351, 0.0352, respectively, and has passed the NIST randomness test. The BIC mode PUF proposed in this paper can be extended to near-infrared and visible light applications in the future.

Keywords : PUF、BIC、Exceptional point、Infinite  $Q$  factor、NIST randomness test

# 目次



誌謝 .....	i
中文摘要 .....	ii
英文摘要 .....	iii
目次 .....	v
圖次 .....	vii
表次 .....	xi
符號表 .....	xii
第一章 緒論 .....	1
1.1 前言 .....	1
1.1.1 隨機性(Randomness) .....	4
1.1.2 唯一性(Uniqueness) .....	5
1.1.3 可靠性(Reliability) .....	6
1.2 研究動機 .....	6
1.3 文獻回顧 .....	12
1.3.1 物理不可仿製功能 .....	12
1.3.2 連續體束縛態 .....	18
第二章 理論 .....	25
2.1 電磁波理論 .....	25
2.1.1 馬克士威方程組 .....	25
2.1.2 折射率與介電係數 .....	26
2.2 表面電漿子理論 .....	27
2.2.1 電漿 .....	27
2.2.2 表面電漿極化子 .....	29



2.3 一維金屬光柵的光子模態 .....	32
2.4 連續體束縛態理論 .....	33
<b>第三章 設計與模擬 .....</b>	<b>35</b>
3.1 模擬軟體簡介 .....	35
3.2 有限元素模擬流程 .....	35
3.3 表面電漿極化子模態波段位置 .....	36
3.4 光子模態波段位置 .....	40
3.5 確認 BIC 耦合結果 .....	42
3.6 改變填充因子形成奇異點 .....	45
<b>第四章 分析與討論 .....</b>	<b>50</b>
4.1 獲取反射頻譜 .....	50
4.2 將反射頻譜從頻域轉為時域 .....	51
4.3 仿照現實電磁波發射接收 .....	52
4.4 數位化分析 .....	52
4.5 PUF 性能指標 .....	54
4.6 PUF 性能指標比較 .....	57
4.7 NIST randomness test 測試 .....	57
<b>第五章 結論與未來展望 .....</b>	<b>59</b>
<b>參考文獻 .....</b>	<b>60</b>

# 圖次



圖 1-1	(a)PUF 硬體身份認證應用 (b)金鑰產生過程 [3] .....	2
圖 1-2	PUF 防偽和篡改檢測示意圖 [4] .....	3
圖 1-3	PUF 密鑰生成和存儲示意圖 [5] .....	4
圖 1-4	PUF 隨機性參數示意圖 .....	5
圖 1-5	(a)不對稱雙棒結構示意圖 (b)不同尺寸結構的反射率對入射波長作圖 (c)以寬度為 112nm、長度為 300nm 為中心，取不同 $\sigma$ 標準差作高斯隨機分布 (d) 不同 $\sigma$ 標準差之下去平均的反射率對入射波長作圖 [18] .....	7
圖 1-6	傾斜橢圓、不對稱雙棒和分裂環反射率比較 [18].....	8
圖 1-7	(a)DEP (b)Standard EP (c)Traditional Wireless Setup 的電路設計與偽譜 (pseudospectrum) [3] .....	9
圖 1-8	(a)DEP (b)Standard EP (c)Traditional Wireless Setup 在相同誤差範圍下的 共振頻率不確定性 [3] .....	10
圖 1-9	(a)DEP (b)Standard EP (c)Traditional Wireless Setup 的 PUF 參數 $E_x$ 、 $E_y$ 、 $HD_{inter}$ 、 $HD_{intra}$ 比較 [3] .....	10
圖 1-10	填充因子分別為 0.3794、0.4803、0.5907 的亮模態與暗模態 [19] .....	11
圖 1-11	填充因子為 0.4803 時的共振頻率實驗與模擬對比 [19] .....	11
圖 1-12	(a)透過雷射照射材料到二維平面上再根據光強度產生金鑰 (b)不同方 向上的光強度 [11].....	12
圖 1-13	Pappu 等人的 PUF 系統的 $E_x$ [11].....	13
圖 1-14	Pappu 等人的 PUF 系統的 $HD_{inter}$ 和 $HD_{intra}$ [11] .....	13
圖 1-15	基於仲裁器的 PUF 架構圖 [20] .....	14
圖 1-16	基於光子晶體理論 PUF 的材料特性與架構圖 [21] .....	15
圖 1-17	基於光子晶體理論 PUF 的 $HD_{inter}$ 與 $HD_{intra}$ [21] .....	16



圖 1-18 (a)PUF 驗證流程圖 (b)Challenge 和 Response 在時域上的訊號 (c)Response 作取樣 (d)將取樣結果作分析得到金鑰.....	17
圖 1-19 量子阱中的擴展態和束縛態 (a)在量子阱中，當 $E > 0$ 時，存在擴展態； 在量子阱中，當 $E < 0$ 時，存在束縛態 (b)BIC 的位置 [49] .....	19
圖 1-20 光譜中的 BIC 示意圖。左邊綠色範圍是連續光譜，在它之下的是離散 光譜；右邊是各式模態傳播的特性 [32, 49] .....	20
圖 1-21 Alexander V. Kildishev 等人模擬 BIC 的結構示意圖 [34] .....	20
圖 1-22 反射率對波長與入射角角度的映射圖 (a)入射波為 TM 極化 (b)入射波 為 TE 極化[34].....	21
圖 1-23 入射波為 TE 極化、入射角為 2 度、入射波波長為 (a)405.6 nm (b)413.4 nm (c)475.1 nm (d)485.3 nm (e)541.6 nm (f)555.2 nm 的 $ E $ 分佈圖 [34] .....	22
圖 1-24 加上註記的映射圖 [34] .....	23
圖 1-25 電漿模態(藍色)和光子模態(紅色)的耦合系統 [34] .....	23
圖 1-26 填充因子對亮模態和暗模態的影響 [19] .....	24
圖 2-1 介電質-金屬表面示意圖 .....	29
圖 2-2 表面電漿極化子色散圖 .....	32
圖 2-3 一維金屬光柵示意圖 .....	32
圖 3-1 (a)空氣-金屬光柵示意圖 (b)空氣-介電質-金屬光柵示意圖 .....	37
圖 3-2 (a)空氣-金屬光柵反射頻譜 (b)空氣-金屬光柵反射頻譜局部放大 .....	37
圖 3-3 上排左至右到下排左至右金屬光柵週期分別為 400、450、500、550、 600 nm 時，入射波波長分別為 424、471、520、569、619 nm 的標準化電場 $ E $ 模擬結果 .....	38
圖 3-4 (a)空氣-介電質-金屬光柵反射頻譜 (b)空氣-介電質-金屬光柵反射頻譜 局部放大 .....	39



圖 3-5 上排左至右到下排左至右介電質折射率為 1、1.25、1.5、1.75、2、2.25 時，入射波波長分別為 424、543、662、783、905、1031nm 的標準化電場 $ E $ 模擬結果 .....	39
圖 3-6 入射角為 0 度時的反射頻譜，谷值對應的入射波長分別為 612 nm、735 nm、849 nm .....	40
圖 3-7 入射角為 2 度時的反射頻譜，谷值對應的入射波長分別為 606 nm、616 nm、725 nm、742 nm、836 nm、862 nm .....	41
圖 3-8 從上排左至右到下排左至右，入射角為 2 度，入射波波長分別為 606、616、725、742、836、862nm 的 $ E $ 模擬結果 .....	41
圖 3-9 入射波為 TE 極化的映射圖 .....	42
圖 3-10 入射波為 TM 極化的映射圖 .....	43
圖 3-11 加上註記的 TM 極化映射圖 .....	43
圖 3-12 有金屬損耗的品質因子 .....	44
圖 3-13 無金屬損耗的品質因子 .....	44
圖 3-14 填充因子 0.5 時光子模態的映射圖 .....	45
圖 3-15 填充因子 0.573 時光子模態的映射圖 .....	45
圖 3-16 填充因子 0.65 時光子模態的映射圖 .....	46
圖 3-17 填充因子 0.573 時光子模態實部 .....	47
圖 3-18 填充因子 0.573 時光子模態理論與模擬對比 .....	47
圖 3-19 填充因子 0.573 時光子模態虛部 .....	48
圖 3-20 BIC mode 共振波段實部加上誤差棒 .....	49
圖 3-21 BIC mode 共振波段虛部加上誤差棒 .....	49
圖 4-1 填充因子直方圖 .....	50
圖 4-2 其中 10 次反射頻譜疊加 .....	51



圖 4-3	反射頻譜轉時域 .....	51
圖 4-4	高斯雷射 .....	52
圖 4-5	高斯雷射與卷積後的結果結合 .....	52
圖 4-6	取樣過程 .....	53
圖 4-7	取樣後分類 .....	53
圖 4-8	取樣後轉化成 4-bits digit.....	54
圖 4-9	一條比特串 .....	54
圖 4-10	多個比特串疊加 .....	54
圖 4-11	金屬銀隨溫度改變的材料參數 [92] .....	55
圖 4-12	BIC mode 的 PUF 參數 (a) $E_x$ (b) $E_y$ (c) $HD_{inter}$ (d) $HD_{intra}$ .....	56
圖 4-13	SPP mode 的 PUF 參數 (a) $E_x$ (b) $E_y$ (c) $HD_{inter}$ (d) $HD_{intra}$ .....	56

## 表次



表 3-1	改變金屬光柵的 SPP mode 理論模擬對比 .....	38
表 3-2	改變折射率的 SPP mode 理論模擬對比 .....	40
表 3-3	光子模態理論模擬對比 .....	42
表 4-1	亂數表 .....	53
表 4-2	PUF 性能指標比較 .....	57
表 4-3	BIC PUF 之 NIST 隨機性測試結果 .....	58
表 4-4	SPP PUF 之 NIST 隨機性測試結果 .....	58



## 符號表

符號	名稱	符號	名稱
$H(x)$	熵	$\mu_0$	真空磁導率
$p_x$	x 方向數字"1"出現的機率	$J$	電流密度
$p_y$	y 方向數字"1"出現的機率	$D$	電位移
$E_x$	x 方向的熵對	$P$	電極化強度
$E_y$	y 方向的熵對	$\rho_f$	自由電荷密度
$HD_{\text{inter}}$	唯一性參數	$J_f$	自由電流密度
$HD_{\text{intra}}$	可靠性參數	$H$	磁場強度
$E$	電子能量	$n$	折射率實部
$U(r)$	位能	$c$	光在真空中的行進速度
$k$	波數	$\chi_e$	電極化率
$\theta$	入射角度	$\kappa$	消光係數
$d$	介電層厚度	$\varepsilon$	介電係數
$\Lambda$	金屬光柵週期長度	$\varepsilon_r$	相對介電係數
$ E $	標準化電場	$\lambda_D$	德拜長度
$B$	磁通密度	$T$	溫度
$\rho$	電荷密度	$N$	帶電粒子濃度
$\varepsilon_0$	真空介電係數	$\omega_p$	電漿頻率



## 第一章 緒論

### 1.1 前言

隨著科技的不斷進步，資訊安全的保護變得越來越重要，加上物聯網(IoT)時代的到來，物聯網已成為生活中不可或缺的重要基礎設施。它遍佈私人住宅和城市中，甚至在辦公室、農場、醫院...等工作場所。然而，正因其扮演著現代人生活中的重要角色，它也成為網路駭客攻擊的主要目標之一，這些攻擊意在形成大規模僵屍網路、破壞供應鏈甚至傷害用戶。其中基於 IoT 攻擊的知名例子有 2014 年出現的 Wifatch、2016 年出現的 Mirai 和 2019 年出現的 Mozi ...等[1]。因此，網路安全成為物聯網設備的關鍵特點之一。但由於物聯網設備通常價格低廉且使用壽命長，如何在這樣的基礎上提高其網路安全性是一個棘手的問題。

為了防止遭遇到先前提及的問題，科學家們提出了一項方案，該方案基於物理不可仿製功能(Physically Unclonable Function, PUF)。這種解決方案利用了 PUF 技術，進一步確保了系統的安全性和可靠性[2]。在這項解決方案中，透過每個晶片生產時難以避免的環境誤差，而無需增加過多額外成本，每個硬體模組的設計將被利用以生成其獨特的晶片指紋，從而確保每個裝置的身份識別和安全性。

PUF 可以被應用在硬體身份認證、加密通訊、防偽和竊改檢測等方面，如圖 1-1 (a)所示[3]，其主要特點是利用系統本身的隨機性來生成唯一且難以複製的金鑰。PUF 的識別功能依賴於其無法預測和複製的物理特性。當一個 PUF 設備受到特定挑戰(Challenge)時，會生成一個獨特且可重複的響應(Response)。這個過程被稱為挑戰響應對(Challenge-Response Pair, CRP)，如圖 1-1 (b)所示，每一對 CRP 都是設備的唯一特徵，並且由於物理特性的不可複製性，任何試圖仿製這些 CRP 的行為都將難以達成。因此，PUF 可以用來實現高度可靠的設備識別，確保每一個設備都能被唯一確定。



在通訊方面，PUF 技術提供了一種安全且高效的加密方法。利用 PUF 的 CRP，通訊雙方可以生成共享的密鑰，而無需事先分發密鑰。具體來說，通訊的發起方(如客戶端)向接收方(如伺服器)發送一個挑戰，接收方利用其內部的 PUF 生成對應的 Response 並將其返回給發起方。由於每個 PUF 設備之間的 CRP 都是唯一且不可預測的，這種方法能夠有效防止中間人攻擊。此外，因為每次通訊的訊息內容都不同，也就代表每次都使用不同的 Challenge，所以每次密鑰都是動態生成的，這將進一步提升了通訊的安全性和隱私性。

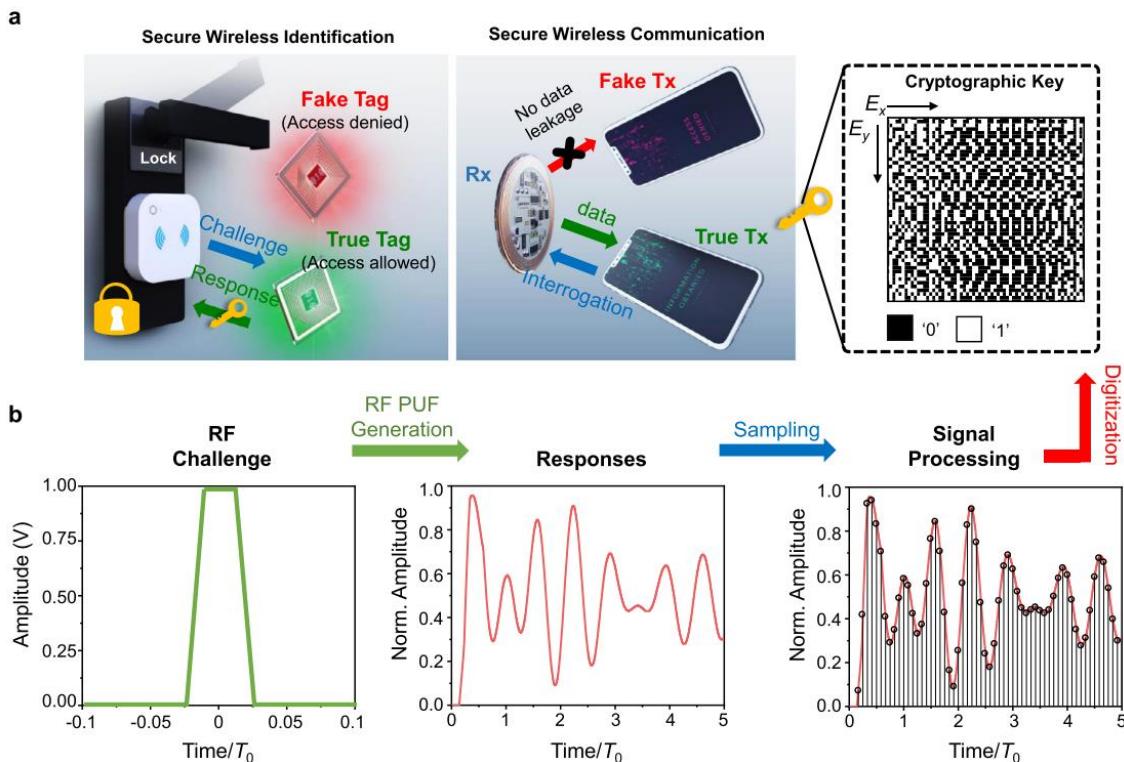


圖 1-1 (a)PUF 硬體身份認證應用 (b)金鑰產生過程 [3]

防偽和篡改檢測主要是用在產品間的辨別上，如圖 1-2 所示[4]。當一項產品大量生產，輾轉運輸後到達消費者手上，消費者可以透過產品上的 PUF label 來辨識這是否為當出下訂的實際商品，這和傳統的防偽和篡改檢測差別在於，就算是同公司同工廠同批生產線下的產品，也是可以辨別的出來，因為每張 PUF label 是獨



一無二的。且製造 PUF label 的成本極其低，但是想要逆向工程製造出一模一樣的 PUF label，所花費的成本相當高昂且難以達成。

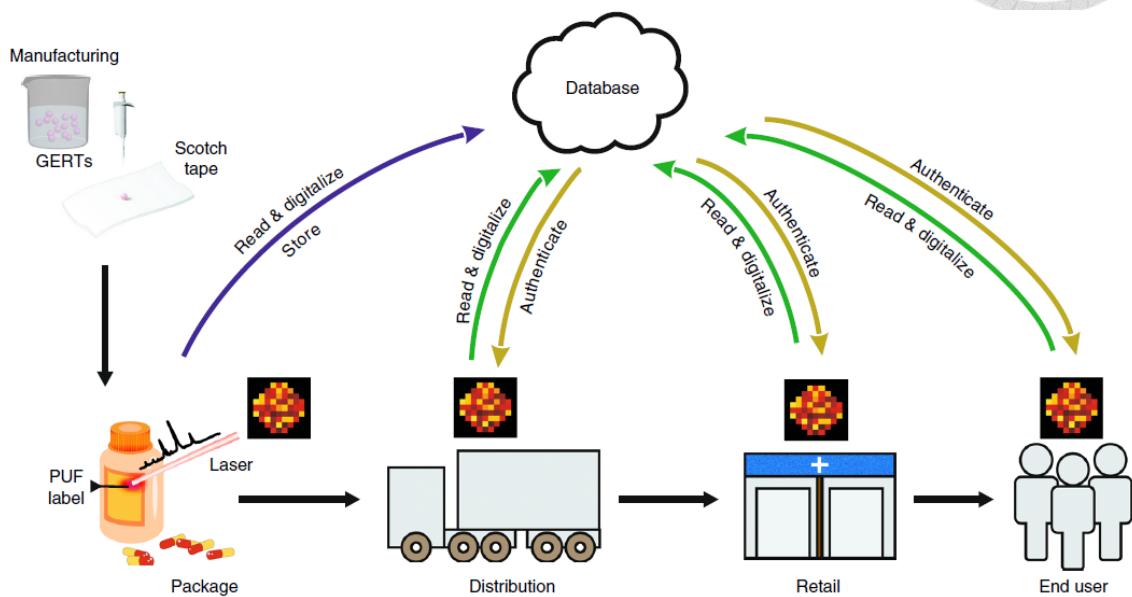


圖 1-2 PUF 防偽和篡改檢測示意圖 [4]

密鑰的生成和存儲可以如圖 1-3 所示[5]，這篇文章展現的 CRP 總共有三個，從 key1 到 key3 的金鑰分別透過光學二色性(Optical dichroism)、拉曼訊號、電阻生成。

光學二色性是指物質在不同偏振光下會有不同的反射或吸收特性。在偏振光照射下，奈米材料會產生不同的反射強度，通過測量不同偏振角度下的反射強度差異，可以生成獨特的光學密碼(dichroism key)。這種光學密碼難以被複製，可用於身份認證。

拉曼訊號是利用奈米材料的局部電漿共振效應，可以產生獨特的拉曼散射強度分佈。在樣品上隨機選取 15 個測量點，測量每個點的拉曼散射強度，將測量到的拉曼散射強度與預設的閾值進行比較，生成 0 和 1 的比特位。通過這 15 個比特位，便可以生成一個個獨特的金鑰。



最後電阻生成是指在 PUF 標籤上至少製造 6 個電極，選擇 2 對電極對來測量電流。電極對的組合數量為 C6 取 2，共 15 對。測量電極對之間的電阻值，並與預設的閾值(如平均電阻值)進行比較。根據比較結果將電阻值數字化為 0 或 1，生成 15 位的電阻金鑰。

這種一個裝置可以生成多種挑戰響應對的 PUF，又被稱為強 PUF，雖然並沒有一個絕對的分界點區分強 PUF、弱 PUF，但根據現有文獻[6-8]，一般認為弱 PUF 的 CRP 數量在幾百到幾千，而強 PUF 則應具有百萬級別甚至更高的 CRP 數量，這篇文獻的 CRP 數量在  $2^{45}$ ，也確實符合現今的分類。

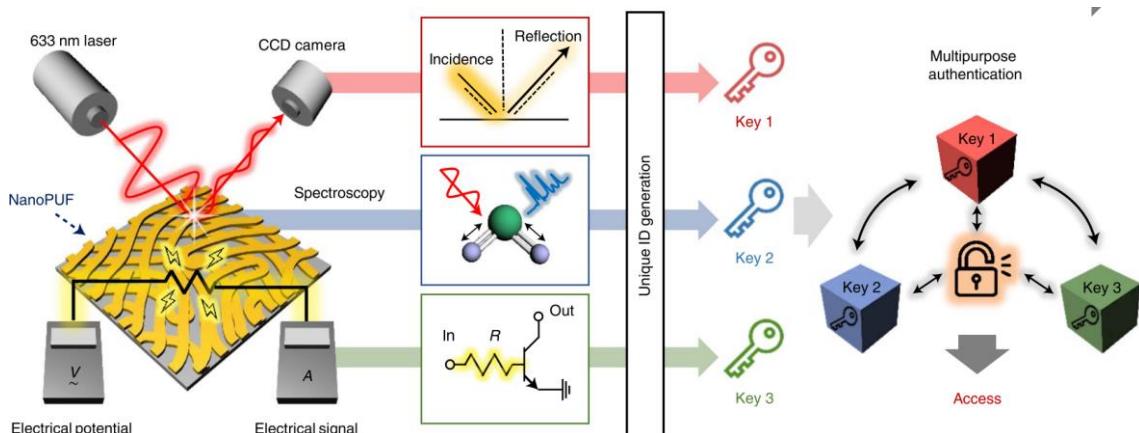


圖 1-3 PUF 密鑰生成和存儲示意圖 [5]

### 1.1.1 隨機性(Randomness)

在訊息理論中，熵衡量的是訊息的平均不確定性或訊息量。Shannon, C. E.於 1948 年透過式(1.1)定義了熵[9]，藉此我們可以延伸定義出一組熵對(entropy pair)[3]，來描述隨機性，如(1.2)、(1.3)所示：

$$H(X) = -\sum_{i=1}^n P(x_i) \log_2 P(x_i) \quad (1.1)$$

$$E_x = -[p_x \log_2 p_x + (1-p_x) \log_2 (1-p_x)] \quad (1.2)$$



$$E_y = -[p_y \log_2 p_y + (1-p_y) \log_2 (1-p_y)] \quad (1.3)$$

其中  $p_x$ 、 $p_y$  是分別沿著  $x$ 、 $y$  方向，數字 "1" 出現的機率，這邊將沿著  $x$  方向定義成同一裝置所產生的 bits 數字 "1" 出現的機率、沿著  $y$  方向定義成同一位置不同裝置數字 "1" 出現的機率，如，理論上若是真正的隨機源所產生的 0101 字串，當數量越多 "1" 和 "0" 出現的機率應該會越趨近於 0.5，將其代入公式，可以知道  $E_x$ 、 $E_y$  越接近 1，代表此系統越接近真正的隨機源。

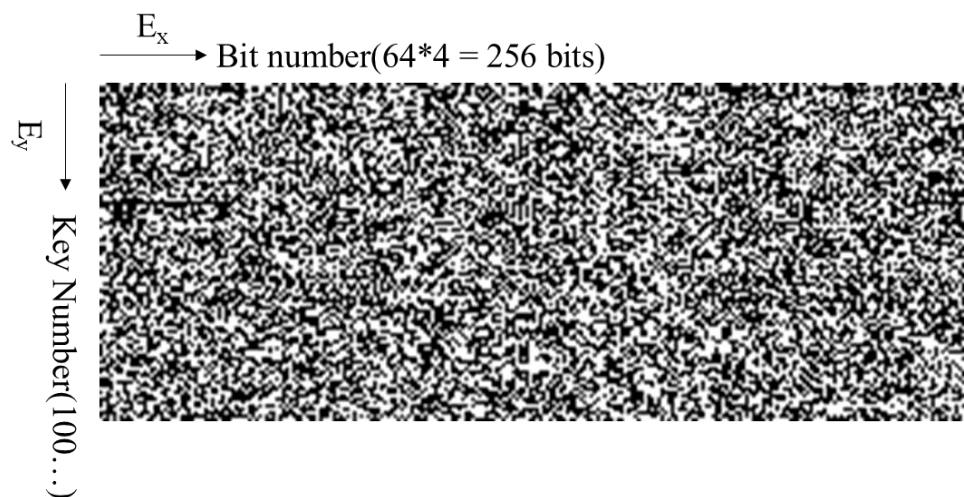


圖 1-4 PUF 隨機性參數示意圖

從公式上可以觀察到，這種計算方式並不能考慮到 "1" 和 "0" 出現的位置和順序，所以後續將會採用 National Institute of Standards and Technology(NIST) Randomness Test，作為隨機性的二次驗證[10]。

### 1.1.2 唯一性(Uniqueness)

唯一性指不同裝置 Response 的不同比特(bits)數量佔比，如果是兩個獨立的裝置，他們相同的比特數應該會佔全部比特數的一半，用數學式可以表示成[11]：



$$HD_{\text{inter}} = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\sum_{l=1}^L (K_{i,l} \oplus K_{j,l})}{L}$$

其中  $N$  代表有多少個裝置； $L$  是一個比特串(bitstrings)有多少比特數或者說一個裝置可以產生多少比特數； $K_{i,l}$  是第  $i$  個裝置的第  $l$  個比特數； $\oplus$  是互斥或(XOR)邏輯運算元。

假設現在有  $N=100$  個裝置，那理應會有  $\frac{N(N-1)}{2}=5050$  個結果，這些結果的

平均值應該要越接近 0.5、標準差越接近 0，代表唯一性越好。

### 1.1.3 可靠性(Reliability)

可靠性指對同一裝置，不同環境(如：溫度[12, 13]、濕度、時間)下，Response 不同比特(bits)數量佔比，用數學式可以表示成：

$$HD_{\text{intra}} = \frac{1}{M} \sum_{q=1}^M \frac{\sum_{l=1}^L (K_l \oplus K_{q,l})}{L} \quad (1.5)$$

其中  $M$  代表有幾種不同的環境測試。一個可靠性好的隨機源，這些結果的平均值越接近 0、標準差越接近 0，代表可靠性越好。

## 1.2 研究動機

雖然現今已經有著重多針對 PUF 發表的期刊、論文，但大部分主要著重在製程上的隨機誤差影響材料參數的改變[14-16]，或是隨機誤差所帶來的距離差異影響等效電容值，進而對其共振頻率造成影響[3, 17]。

從前面的背景介紹，可以得知在相同的製程誤差範圍下，響應有越大的變化，PUF 的性能越好，2021 年 J. Kühne 等人主要是探討製造公差對 BIC 光學性能的影



響[18]，如圖 1-5 所示。該研究引入了一種模擬與實驗方法來預測奈米加工的變化如何影響不同 BIC 的光學性能。通過比較已建立的 BIC 晶胞幾何形狀，研究發現，即使是微小的製造引起的變化也會顯著影響 BIC 共振幅度和品質因子，其中傾斜橢圓的影響最大，其次是不對稱雙棒最後是分裂環，從左到右依序如圖 1-6 所示。

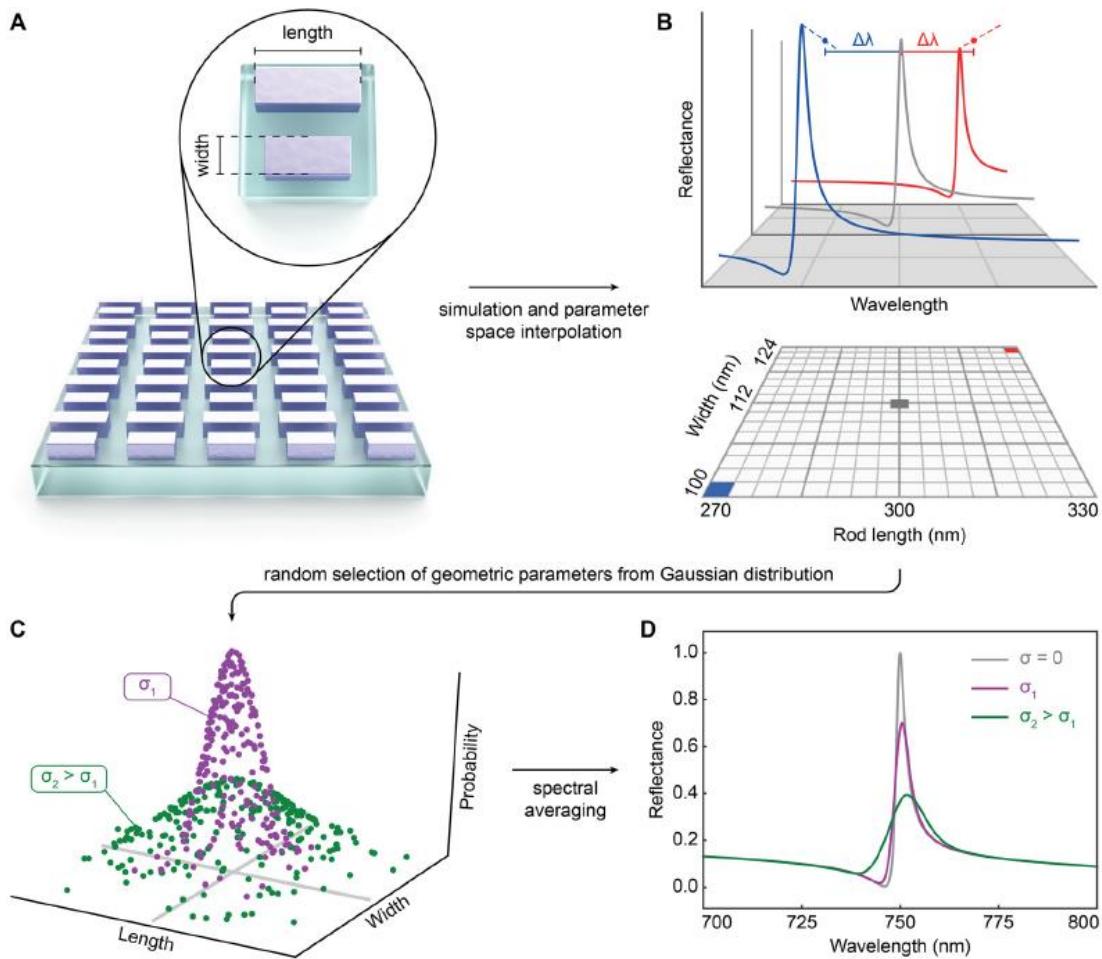


圖 1-5 (a)不對稱雙棒結構示意圖 (b)不同尺寸結構的反射率對入射波長作圖 (c)以寬度為 112nm、長度為 300nm 為中心，取不同  $\sigma$  標準差作高斯隨機分布 (d) 不同  $\sigma$  標準差之下去平均的反射率對入射波長作圖 [18]

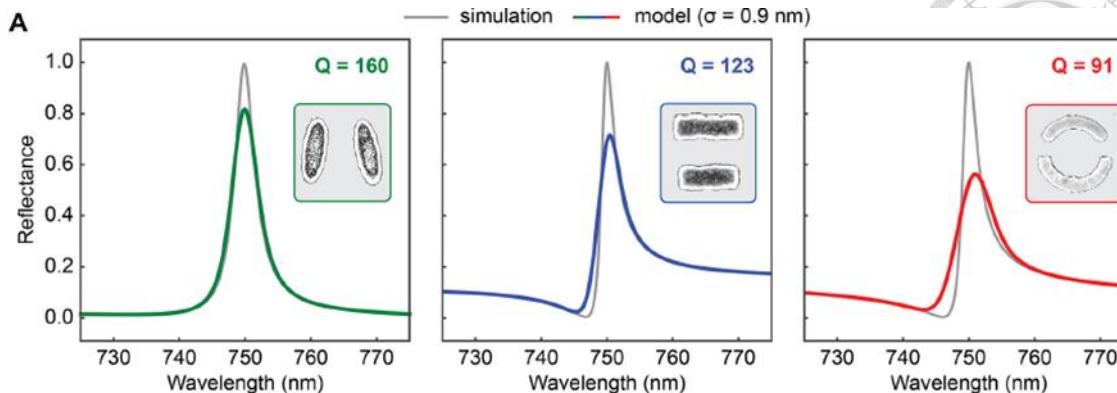
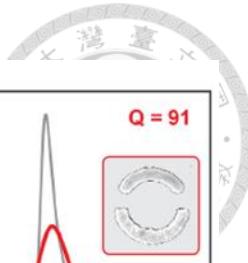


圖 1-6 傾斜橢圓、不對稱雙棒和分裂環反射率比較 [18]

其中圖 1-5 (a)是不對稱雙棒結構示意圖，(b)上半部的圖是三條反射率對入射波長作圖，藍線、灰線、紅線分別對應到不對稱雙棒的不同結構，依次分別為寬度 100、112、124nm；長度 270、300、330nm 的結構，(c)是以寬度為 112nm、長度為 300nm 為中心，取不同  $\sigma$  標準差作高斯隨機分布，將這些不同尺寸的結構進行模擬，並把得到的反射率取平均得到(d)，這篇文獻主要提供了一套研究 BIC 時可執行的模擬與實驗方法，作為研究 BIC PUF 的一個新的切入點。

M. Yang 等人在 2023 年發表了一篇期刊[3]，研究了當系統中導入了奇異點(Exceptional Point, EP)或是發散奇異點(Divergent Exceptional Point, DEP)時，如圖 1-7 左側所示，附近的特徵值劇烈分岔會如何增強隨機熵，從而為生成加密密鑰提供了良好的熵源。這種新方法可以提高無線通訊的安全性和防偽應用。

相較於 Traditional Wireless 電路設計中的 Tx 端，Standard EP 的 Tx 端等效電路為 RLC 電路，其特徵值(eigenspectra)在奇異點(exceptional point, EP)附近有較大的不確定性。而 DEP 電路設計中的 Tx 端在 Standard EP 的基礎上新增了一 LC 電路，使其成為"-RLC"振盪器。"-RLC"振盪器是一種主動式發射器，其具有負電阻，可以產生自發振盪，這是 DEP 電路設計的關鍵特徵。

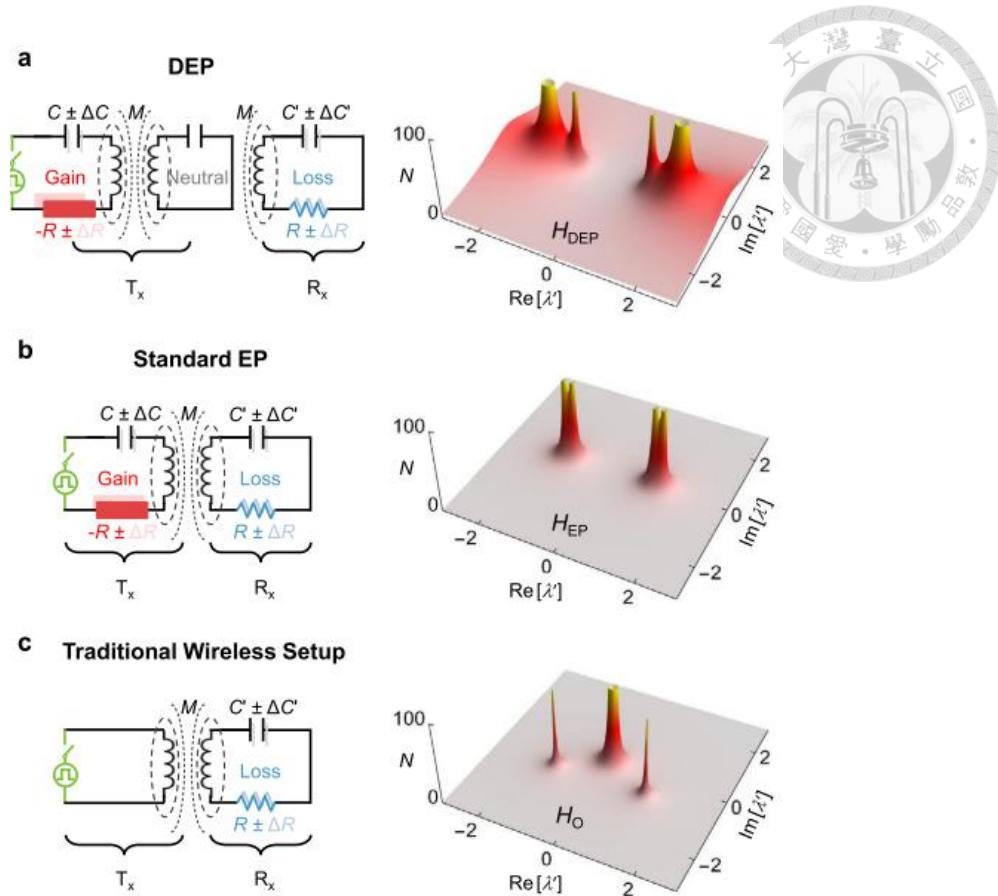


圖 1-7 (a)DEP (b)Standard EP (c)Traditional Wireless Setup 的電路設計與偽譜  
(pseudospectrum) [3]

圖 1-7 右側的偽譜(pseudospectra)是共振頻率的實部虛部分佈圖，可以觀察到最上面 DEP 的分佈相較於下面兩者有著更為廣泛的分布，也就是變化更為劇烈，更清楚的比較可以從圖 1-8 看出，圖 1-8 是當在相同製程誤差 ( $\pm 0.001\sim 0.05\%$ ) 的高斯隨機分布下，共振頻率的誤差棒(error bar)，誤差棒越大代表變化的越劇烈，可以看出在接近 DEP 或是 EP 時的誤差棒最大，而 DEP 相較於 EP 則有更大的誤差棒。而當變化的越劇烈，其代表 PUF 性能的參數也就表現得越好，如圖 1-9 所示。

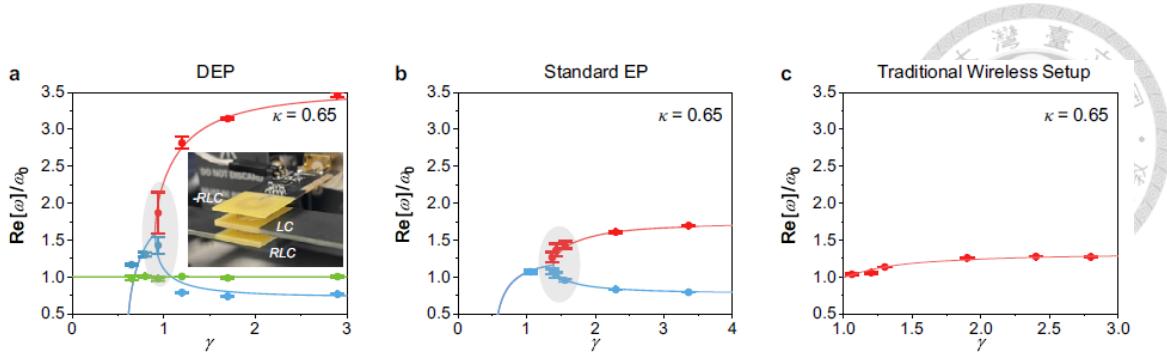


圖 1-8 (a)DEP (b)Standard EP (c)Traditional Wireless Setup 在相同誤差範圍下的共振頻率不確定性 [3]

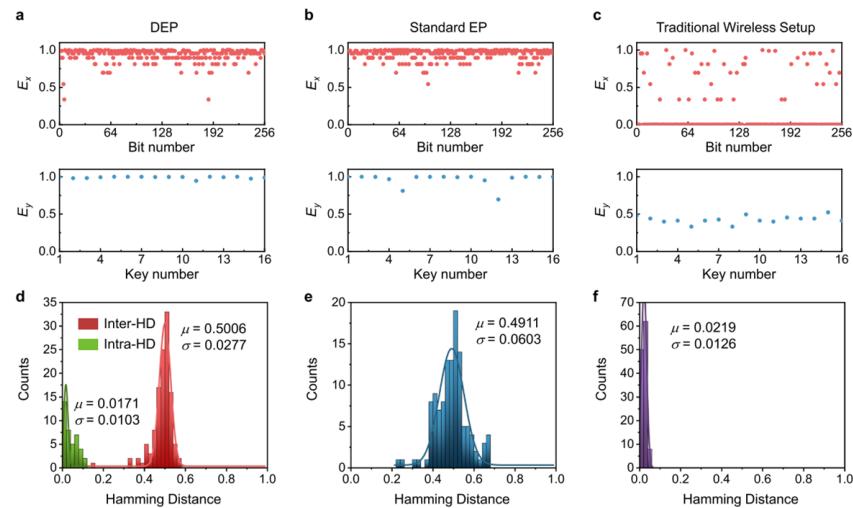


圖 1-9 (a)DEP (b)Standard EP (c)Traditional Wireless Setup 的 PUF 參數  $E_x$ 、 $E_y$ 、 $HD_{inter}$ 、 $HD_{intra}$  比較 [3]

這篇文章主要提供了本論文研究 BIC 在 PUF 上的應用時，可以把試著導入 EP，並且提供了各種描述 PUF 性能參數的計算方式。

最後這篇由 L. Ferrier 等人於 2022 年所發表的期刊[19]，透過改變結構中金屬光柵的填充因子，完善的講述了 BIC 的亮模態與暗模態重疊形成 EP 的過程，如圖 1-10 所示，其中金屬光柵的填充因子是指金屬光柵中金屬部分在整個光柵周期內所占的比例。



圖 1-10 從左到右的填充因子分別為 0.3794、0.4803、0.5907，圖 1-11 是填充因子為 0.4803 重複多次製程與量測後，得到的共振頻率實部與虛部並作成 error bar 的實驗結果與模擬對照。

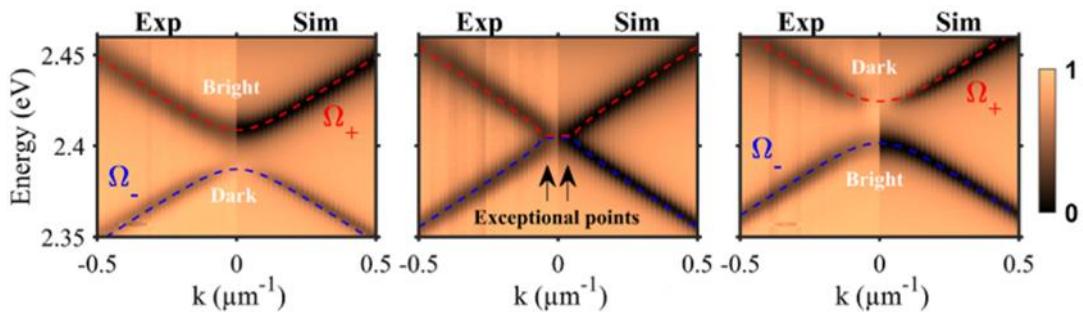


圖 1-10 填充因子分別為 0.3794、0.4803、0.5907 的亮模態與暗模態 [19]

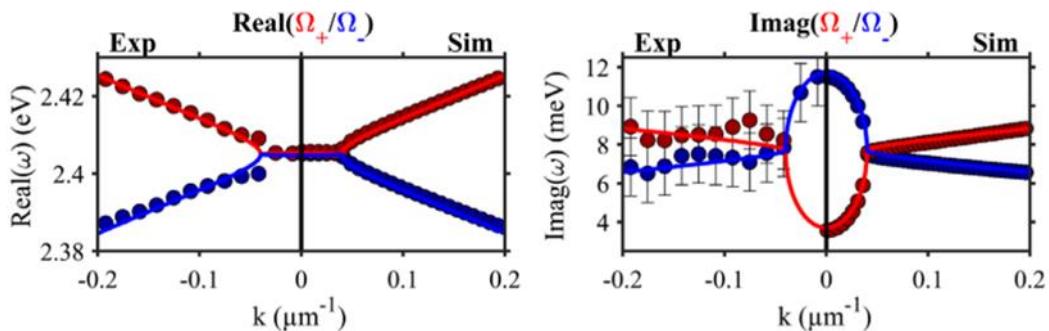


圖 1-11 填充因子為 0.4803 時的共振頻率實驗與模擬對比 [19]

至此，本論文將研究如何透過金屬光柵填充因子調整暗模態和亮模態的位置，使 BIC 系統中導入 EP 的形成，接著將製程中的環境誤差作為變數模擬，將得到的 Response 取樣分析，觀察其 PUF 性能與其他模態和上述文獻的 PUF 的對比。



## 1.3 文獻回顧

### 1.3.1 物理不可仿製功能

PUF 的概念最早可以追溯到由 Pappu 等人於 2001 年提出的”Physical One-Way Functions”的概念[11]，其對物理單向函數的定義是：製造成本低廉，但複製難度極高，且沒有緊湊的數學標記法，本質上具有防篡改性。傳統加密方法則是基於數論，使用一種易於正向評估但在沒有額外信息的情況下難以反向計算的函數，例如大質數相乘和離散對數問題。傳統加密方法面臨技術、基本和實際挑戰，而物理單向函數則提供了一種新的加密途徑，通過利用凝聚輻射的散射來生成固定長度的密鑰，從而解決了傳統加密方法所面臨的問題。從圖 1-12 可以看的出來，已經有現今辨識 PUF 的雛型。

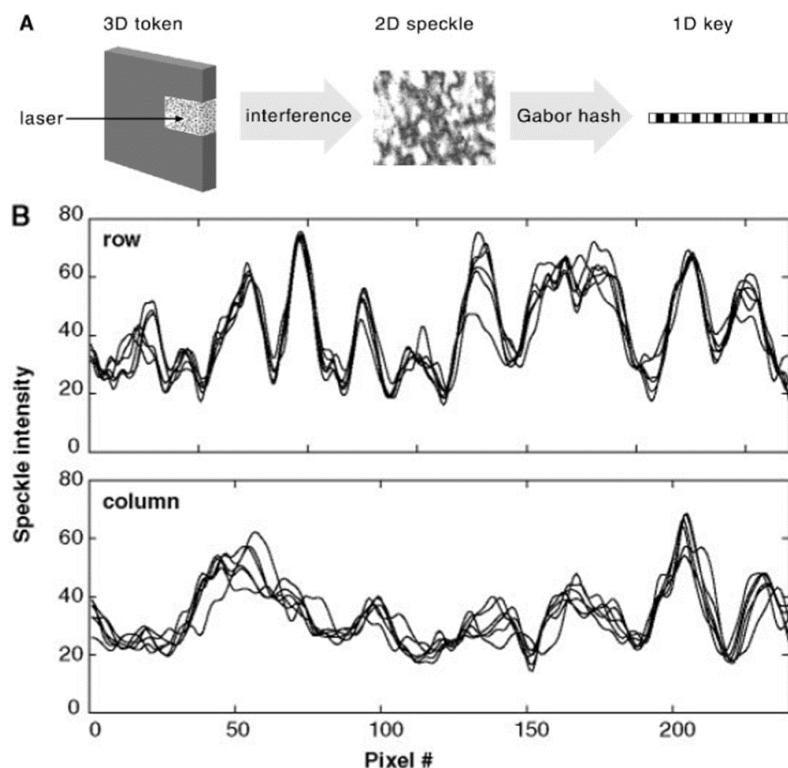


圖 1-12 (a)透過雷射照射材料到二維平面上再根據光強度產生金鑰 (b)不同方向上的光強度 [11]

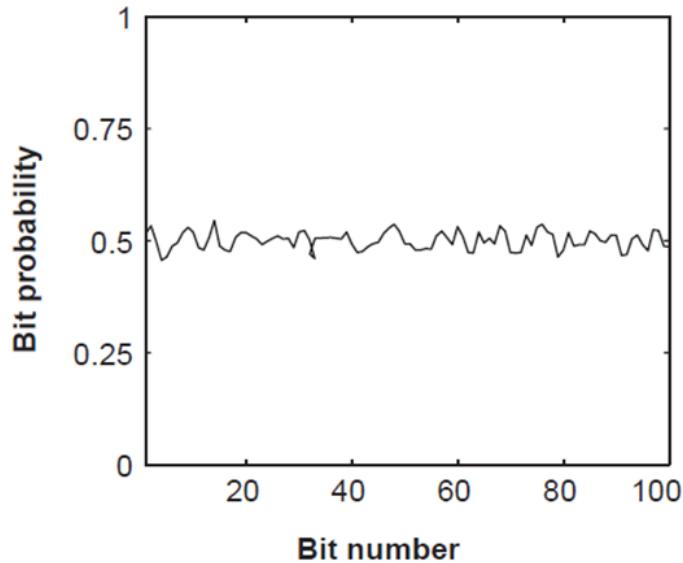


圖 1-13 Pappu 等人的 PUF 系統的  $E_x$  [11]

因為當時 PUF 性能參數的定義還沒有統一，所以 Pappu 等人並未給出同一位置不同裝置方向隨機性的  $E_y$ ，但有給出同一裝置所產生的 bits 的隨機性  $E_x$ ，其平均值為 1，如圖 1-13 所示。

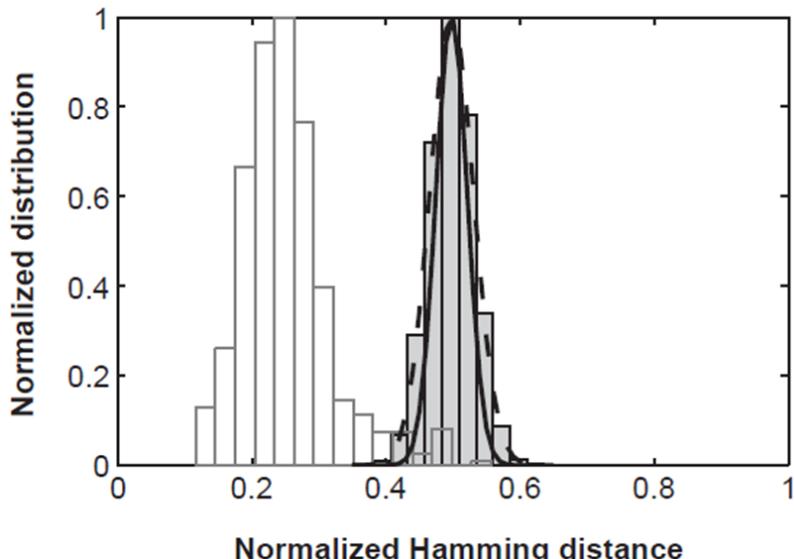


圖 1-14 Pappu 等人的 PUF 系統的  $HD_{inter}$  和  $HD_{intra}$  [11]

圖 1-14 中深色的長條圖代表不同 PUF 設備之間的比較，也就是  $HD_{inter}$ ，而淺色的長條圖代表同一 PUF 裝置在重複幾次量測後的比較，越接近 0 代表越穩定，也就是  $HD_{intra}$ 。圖 1-14 中  $HD_{inter}$  的平均值是 0.50、標準差是 0.0011； $HD_{intra}$  的平均值是 0.25、標準差是 0.0047，所以可以得出 Pappu 等人的 PUF 系統唯一性不錯，但是可靠性有待加強。

現今 PUF 的種類主要有分為 Silicon PUF、Memory PUF、Optical PUF、Magnetic PUF，後文將介紹 PUF 的發展歷程，接下來將以 Silicon PUF 和 Optical PUF 作為代表介紹。

目前第一批在矽晶片上考量 PUF 技術的是 2005 年由 Daihyun Lim 等人所製造 [20]，透過在矽晶片中建構基於仲裁器的 PUF，並對其識別能力、可靠性和安全性進行了深入研究。研究結果和理論探討均指出，這些晶片之間存在著足夠大的差異，使得它們能夠在各種實際環境變化，如溫度和電源電壓的範圍內，以安全可靠的方式進行識別。這項研究顯示了 PUF 的實現可行性。這也意味著 PUF 有著應用的潛力，能夠在實際系統中得到廣泛應用。

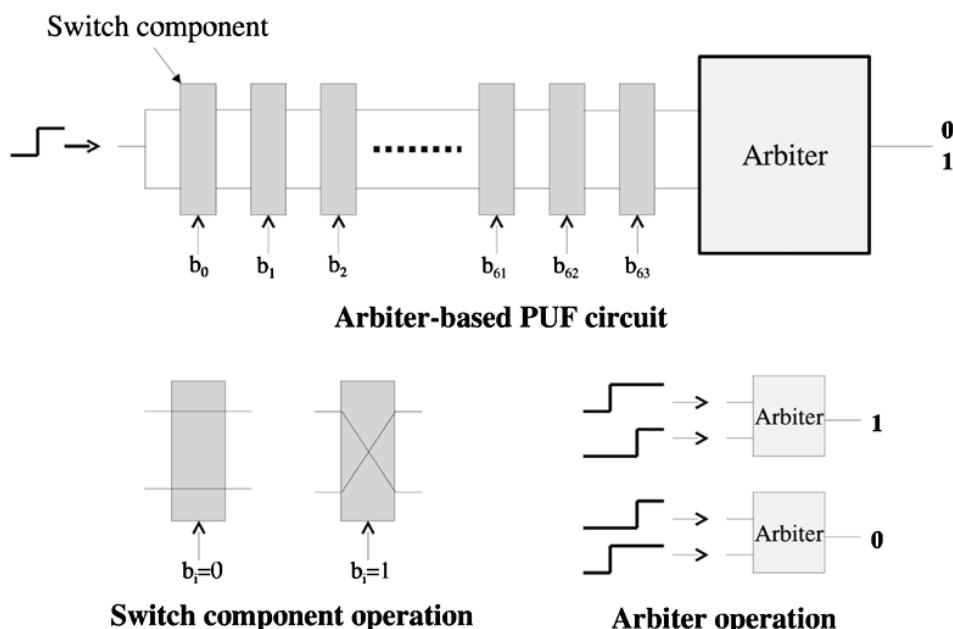


圖 1-15 基於仲裁器的 PUF 架構圖 [20]



經過十幾年的發展後，基於各種理論的 PUF 也陸續被研究出來，2018 年 X. lu 和 L. Hong 等人發表了基於光子晶體理論所構思的 PUF。光子晶體（Photonic Crystals）是一種具有周期性介電質常數或折射率的光學材料。光子晶體的周期性結構會改變光的能帶結構，從而影響光的傳播性質。

前篇文章的環境隨機變數是材料的微觀結構和光源的設定，這篇文章的環境隨機變數包括光子晶體的結構，如金屬寬度、間距和每個元件的水平元素數量，這些參數最後會影響材料的能帶結構。

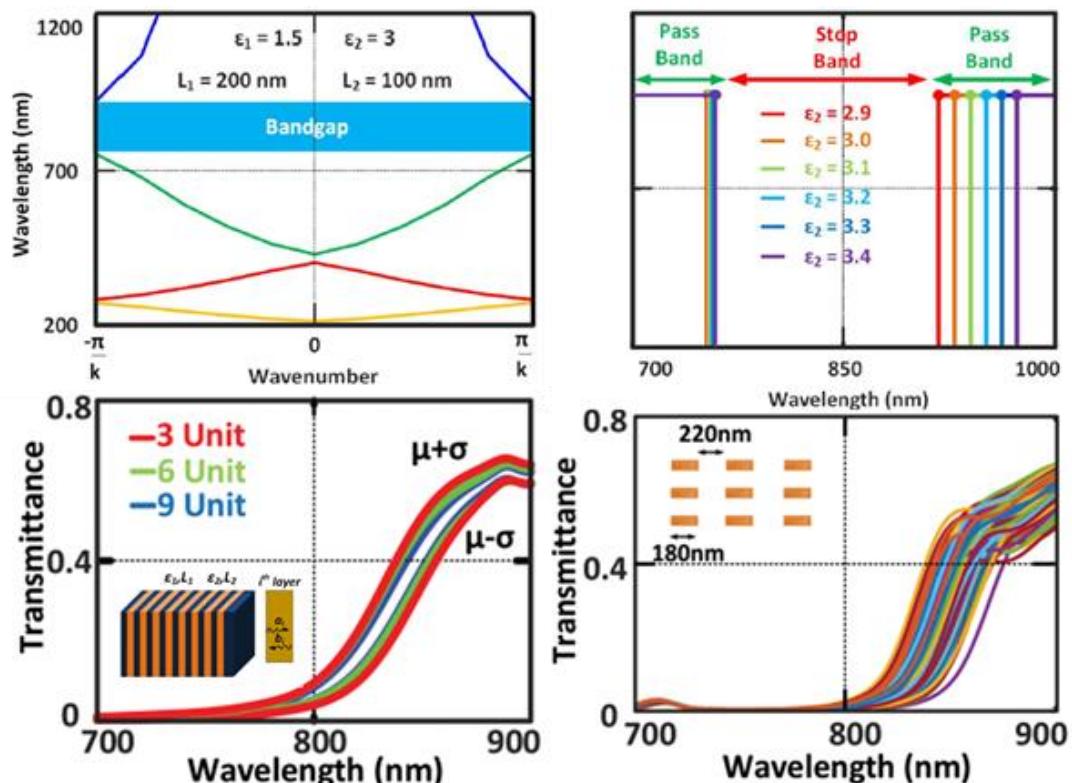


圖 1-16 基於光子晶體理論 PUF 的材料特性與架構圖 [21]

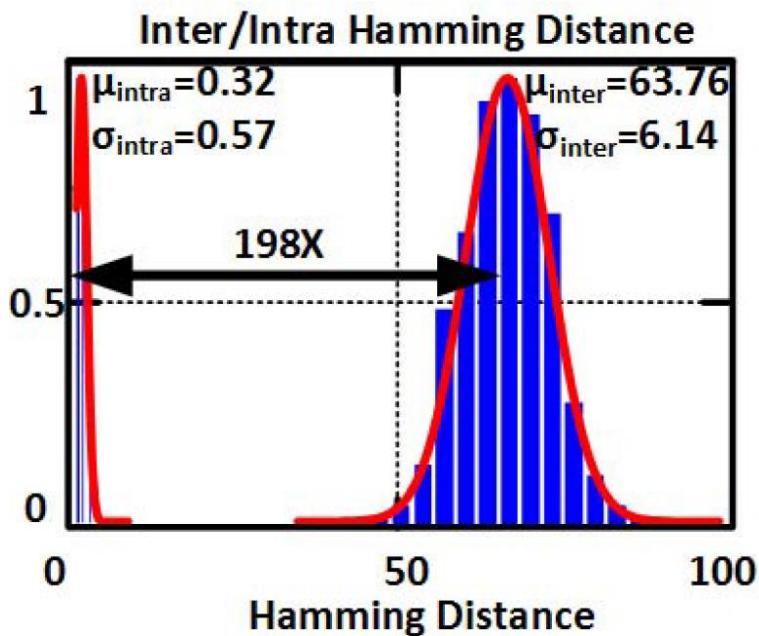


圖 1-17 基於光子晶體理論 PUF 的  $\text{HD}_{\text{inter}}$  與  $\text{HD}_{\text{intra}}$  [21]

上述文獻的  $\text{HD}_{\text{inter}}$  平均值為 0.6376、標準差為 0.0614； $\text{HD}_{\text{intra}}$  平均值 0.0032、標準差為 0.0057，表示光子晶體在物理不可仿製功能上的穩定性是好的，但是隨機性還有很大的進步空間。

M. Yang 等人在 2023 年提出基於電路構想的 PUF，主要是以隨機誤差所帶來的距離差異會影響等效電容值，進而對其共振頻率造成影響為基礎，進而衍生應用的 PUF，雖然此理論已經有被應用過，但是這篇不同的是透過在等效電路中加入新的 LC 電路，使形成共振頻率的 EP 變得更為發散，變成 Divergent Exceptional Point(DEP)，如圖 1-7 所示。

最後這篇文獻 DEP 的  $E_x$ 、 $E_y$ 、 $\text{HD}_{\text{inter}}$ 、 $\text{HD}_{\text{intra}}$  的平均值分別為 0.93、0.99、0.4974、0.0180；EP 的分別為 0.94、0.96、0.4911，沒有  $\text{HD}_{\text{intra}}$ ；Traditional Wireless 的分別為 0.43、0.23、0.0219，沒有  $\text{HD}_{\text{intra}}$ ，如圖 1-9 所示。表示導入 DEP 或是 EP 在物理不可仿製功能上的隨機性、唯一性與可靠性都有良好的表現。



在統整了有關 PUF 的各式期刊後可以歸納出，對於 PUF 的定義較為廣泛的是利用製造過程中設備自然產生的微小變化，這些改變在每個設備間是獨一無二的，通過給定的訊號發出，如電磁波、電壓...等，每個設備反射回傳的訊號因為上述的微小變化，導致每個回傳的訊號都有所差別，這樣每個訊號的發出回傳便形成了一個個獨一無二的 CRP，流程如圖 1-18 (a)所示。首先給出了一個高斯雷射當作是 Challenge，在經過了設備反射後，回傳了一個 Response 訊號，如圖(b)，再將得到的訊號做取樣(sampling)，如圖(c)，最後便可以得到這個裝置的晶片指紋，如圖(d)所示。這些 CRP 可以是各式各樣的訊號，如時域或頻域中的電壓訊號[22-24]、光學訊號[25-27]。

這種獨特性使得 PUFs 能夠生成用於加密的金鑰，這不僅提高了系統的安全性，還為系統提供了一種有效的安全防護機制，能夠有效地防止未經授權的訪問和資料洩露，從而提升整體系統的安全性。

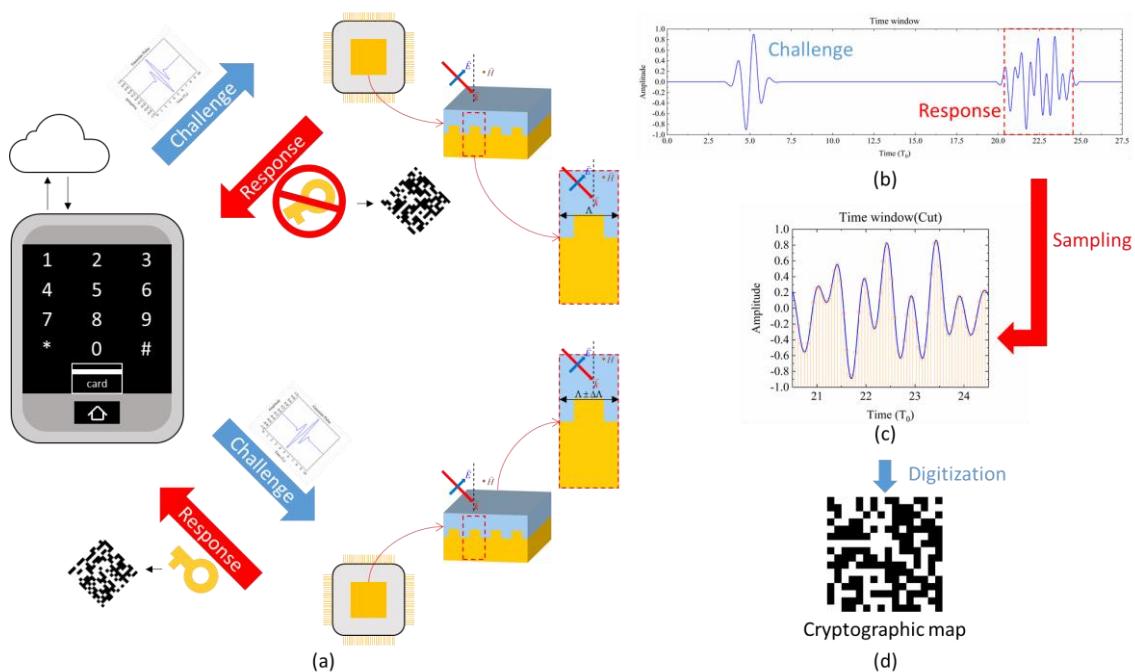


圖 1-18 (a)PUF 驗證流程圖 (b)Challenge 和 Response 在時域上的訊號  
(c)Response 作取樣 (d)將取樣結果作分析得到金鑰



將上述作總結，PUF 實際上是兩種加密方式的融合：單向函數和隨機源，後者是 PUF 的行為不可預測的源頭，後面將介紹本文採用的隨機源：連續體束縛態。

### 1.3.2 連續體束縛態

在量子力學領域，束縛態(quantum states)通常是指電子能量低於位能勢壘，導致電子被束縛在量子阱內的離散狀態，如圖 1-19 (a)  $E < 0$  所示，其中  $E$  代表的是電子能量、 $U(r)$  代表的是位能。在這種狀態下的波函數在無限遠處的機率為零。另一方面，當電子擁有足夠的逃逸能量時，便會形成擴展態(extented states)，如圖 1-19 (a)  $E > 0$  所示，其能量會向外耦合，波函數會延伸到無窮大，也就是在任何位置都有機率觀察到電子的存在，形成擴展波。

然而，1929 年，von Neumann 和 Wigner 二位發現了一種特殊的情況[28]，如圖 1-19 (b) 所示。在三維(3D)位能勢壘中，電子的波函數可以延伸到位能勢壘的邊界之外，但電子的能量卻不受影響。相反，電子在擴展區域將以束縛態(bound state)的方式存在，即所謂的 BIC。

這些 electronic BIC 是人工特徵態，由於這種系統的結構是以目標為導向，且之間的束縛關係極易受到空間的干擾，因此在沒有理論的推導輔助下，很難直接透過實驗發現它們極具挑戰性[29-31]，這也導致在被理論推導發現以前從未被人發現過。但自從最初的預測被提出之後，人們已經成功在許多各式各樣的材料系統中發現了 BIC 的存在[32]，像是在光子晶體(photonics crystals)[33-45]、光波導(optical waveguides)[46-48] 等材料中。

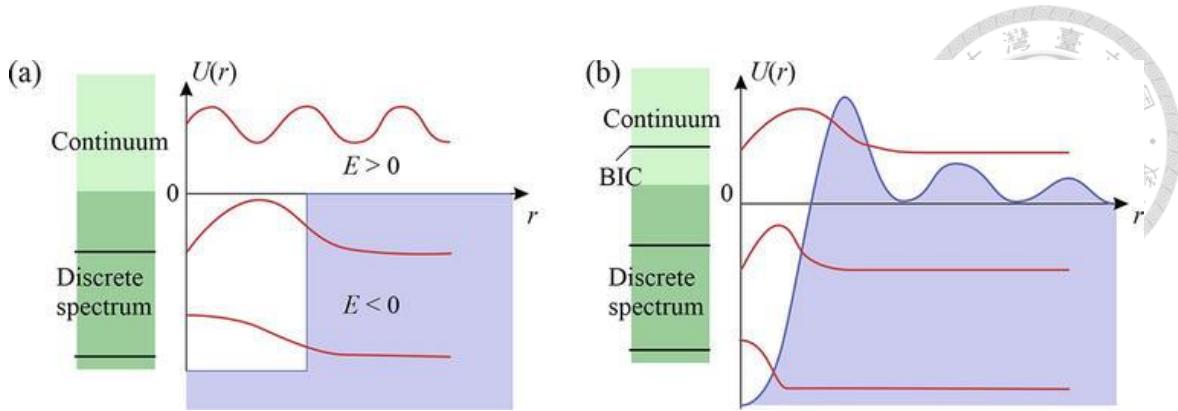


圖 1-19 量子阱中的擴展態和束縛態 (a)在量子阱中，當  $E > 0$  時，存在擴展態；  
在量子阱中，當  $E < 0$  時，存在束縛態 (b)BIC 的位置 [49]

上段主要聚焦在波函數形式上的表現，這段將主要放在 BIC 在空間中傳播的表現，根據傳統的波理論，開放系統中是否存在束縛態取決於波的頻率。如果波的頻率低於連續光譜的最低頻率，就會以離散的束縛狀態存在，因為沒有可用的輻射路徑。相反，如果波的頻率在連續光譜內，就會在輻射區域內表現為振盪，並最終消散到無窮大。

然而 BIC 的概念挑戰了人們對狀態結合機制的傳統理解。BIC 的頻率在連續光譜範圍內，但擁有無限高的品質因子，不會發生輻射洩漏，圖 1-20 便主要描述這一現象，其中綠色範圍是連續光譜，在它之下的是離散光譜[32, 49]。

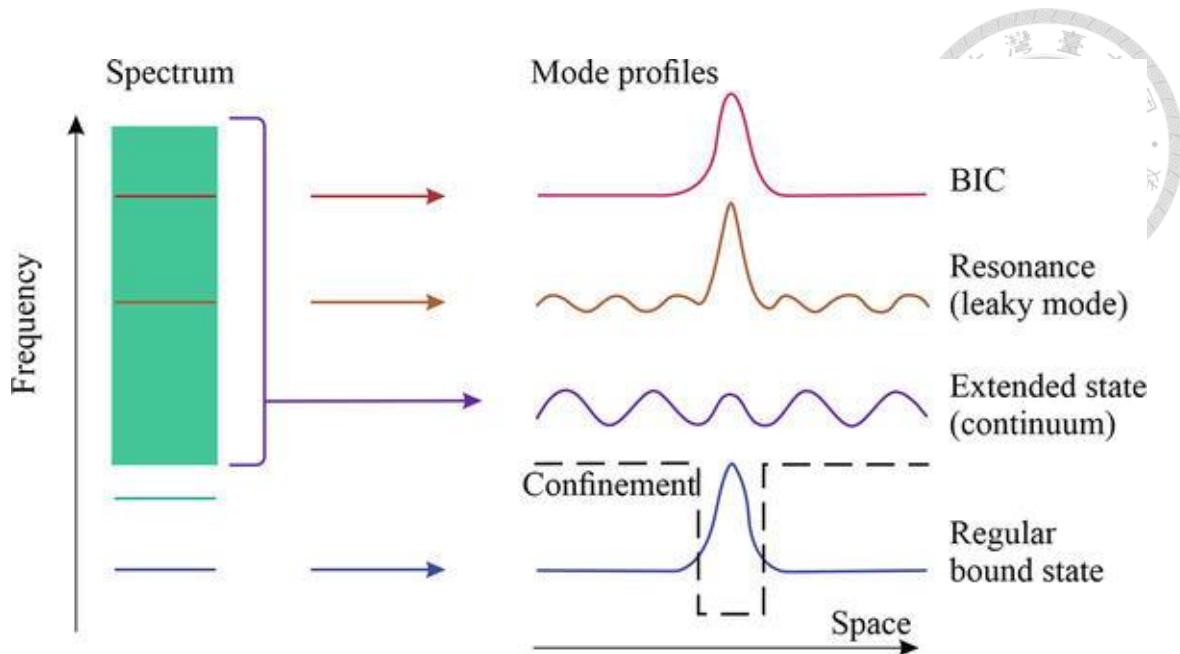


圖 1-20 光譜中的 BIC 示意圖。左邊綠色範圍是連續光譜，在它之下的是離散光譜；右邊是各式模態傳播的特性 [32, 49]

至今，被發現的 BIC 種類有：Wigner-von Neumann's BIC、Fabry-Perot BICs[50-55]、Single-resonance parametric BICs[56-59]、Separable BICs[60, 61]、symmetry-protected BIC[56, 62-64]和 Friedrich-Wintgen BIC[65-71]。

接下來將透過這篇參考文獻[34]介紹較常見的兩種 BIC：symmetry-protected BIC 和 Friedrich-Wintgen BIC。2018 年，Alexander V. Kildishev 等人，在矽基板上方鋪上了一層金屬光柵，材料為銀，並在這之上再覆蓋一層玻璃，材料為二氧化矽，折射率  $n = 2.25$ ，結構如圖 1-21 所示：

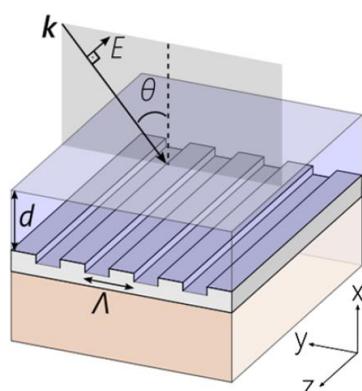


圖 1-21 Alexander V. Kildishev 等人模擬 BIC 的結構示意圖 [34]



在設計模擬的過程中，為了避免電漿模態(plasmonic modes)[72-80]的干擾，他們先使用 TE 極化的電磁波當作入射波，目的是要先單獨觀察光子模態(photon modes)，得到圖 1-22 (b)的映射圖：

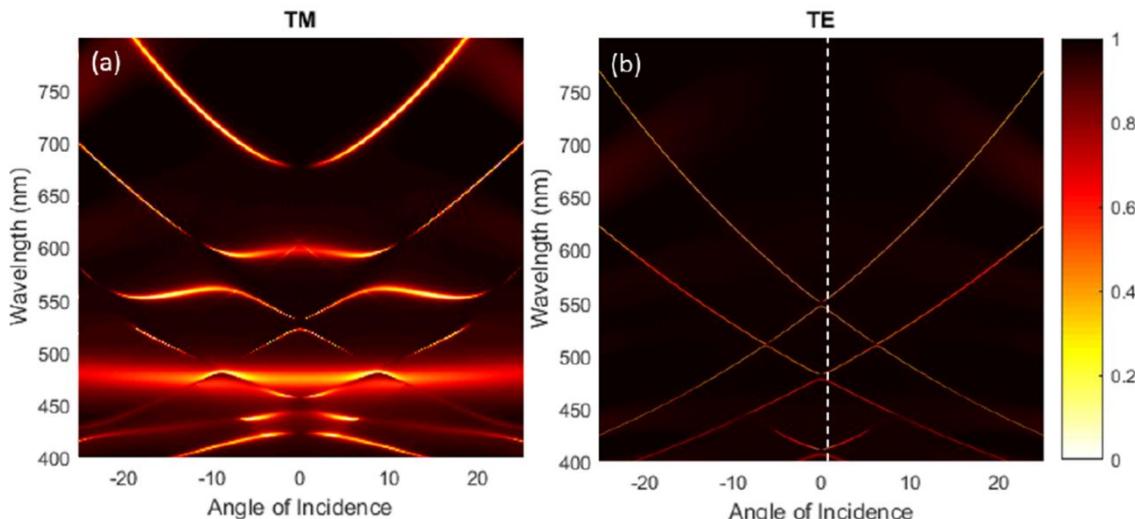


圖 1-22 反射率對波長與入射角角度的映射圖 (a)入射波為 TM 極化 (b)入射波為 TE 極化[34]

圖 1-22 (b)的白色虛線代表到入射角角度等於 2 度時，借此觀察模態在入射角角度為 2 度時的電場圖分布，如圖 1-23 所示，其中  $|E|$  代表的是電場的絕對值， $|E| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$ ，發現波段位置和電場分佈與理論相符[44, 81-83]，是我們要找的光子模態。

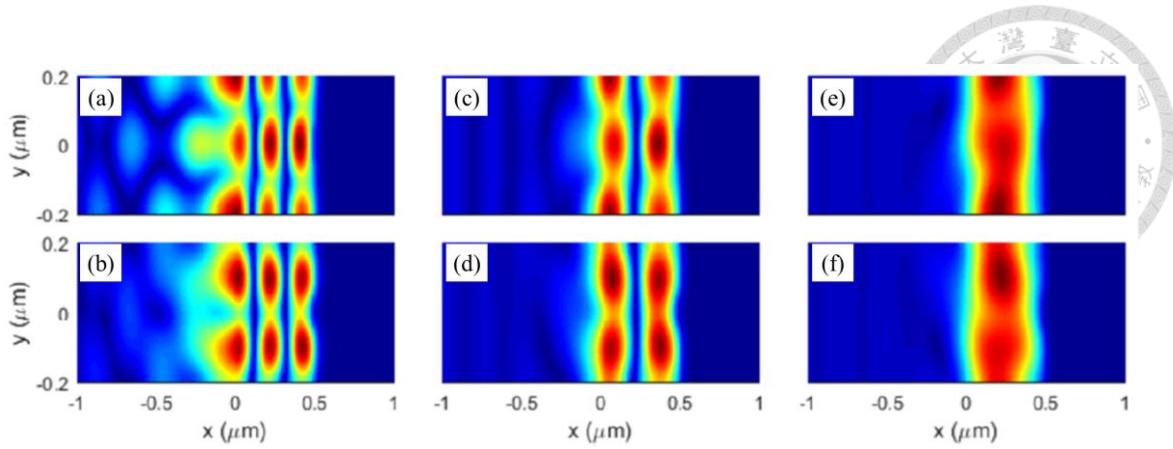


圖 1-23 入射波為 TE 極化、入射角為 2 度、入射波波長為 (a)405.6 nm (b)413.4 nm (c)475.1 nm (d)485.3 nm (e)541.6 nm (f)555.2 nm 的  $|E|$  分佈圖 [34]

確定了光子模態後，將入射波改為 TM 極化的電磁波，得到圖 1-22 (a)的映射圖，詳細對比圖 1-22 (a)與(b)的差異處，可以觀察到對稱保護 BIC 和 F-W BIC 分別位於圖 1-24 中的紅色虛線圈與白色虛線圈，藍色虛線圈也屬於對稱保護 BIC 但是是由電漿模態單獨形成的，而紅色虛線圈則是由分裂的光子模態，在角度為零時重疊耦合而成的，分別稱為亮模態(bright mode)和暗模態(dark mode)，在角度零度時會消失的稱為暗模態。

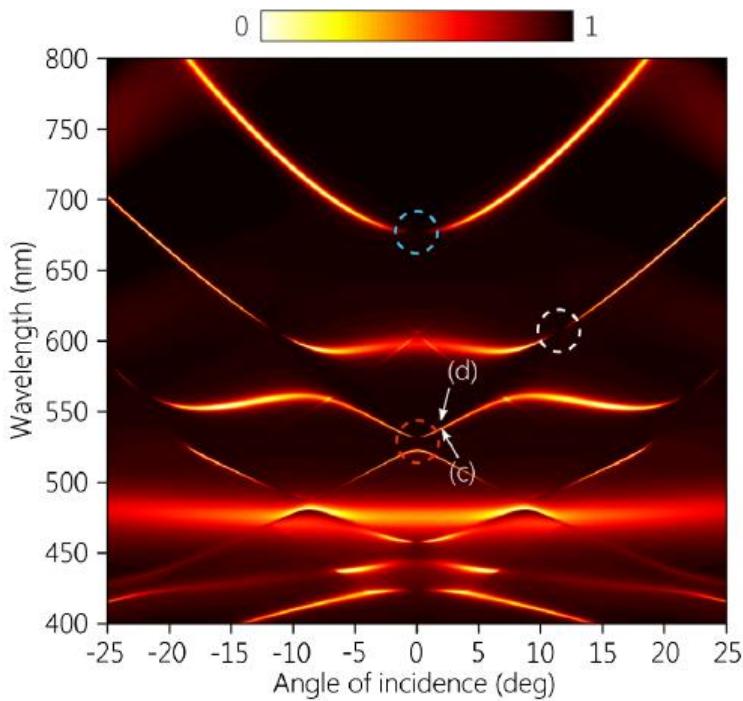


圖 1-24 加上註記的映射圖 [34]

F-W BIC 是因為電漿模態和光子模態在入射角為 11.4 度時產生強耦合，若是沒發生強耦合的話，電漿模態和光子模態應該會沿著自己原本的理論解延伸，如所示，原本的理論解可以透過特徵頻率求解找到。

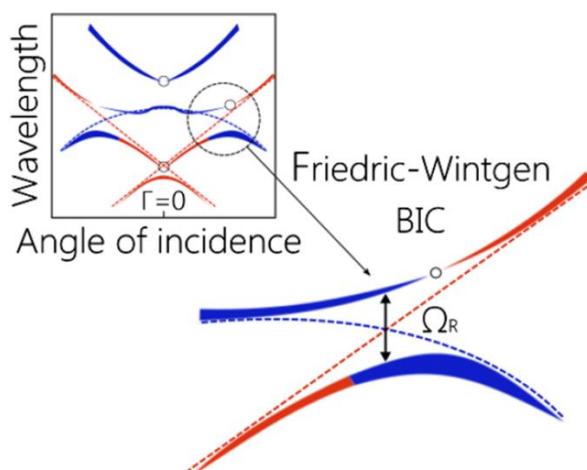


圖 1-25 電漿模態(藍色)和光子模態(紅色)的耦合系統 [34]



知道對稱保護 BIC 如何產生後，Ferrier、Lydie 以及 Bouteyre, Paul 等研究者透過模擬和實驗進行研究，說明填充因子對對稱保護 BIC 的亮模態和暗模態的影響，並透過調整填充因子使兩者在入射角接近零度時重合，形成 EP[19]，如圖 1-26 所示：

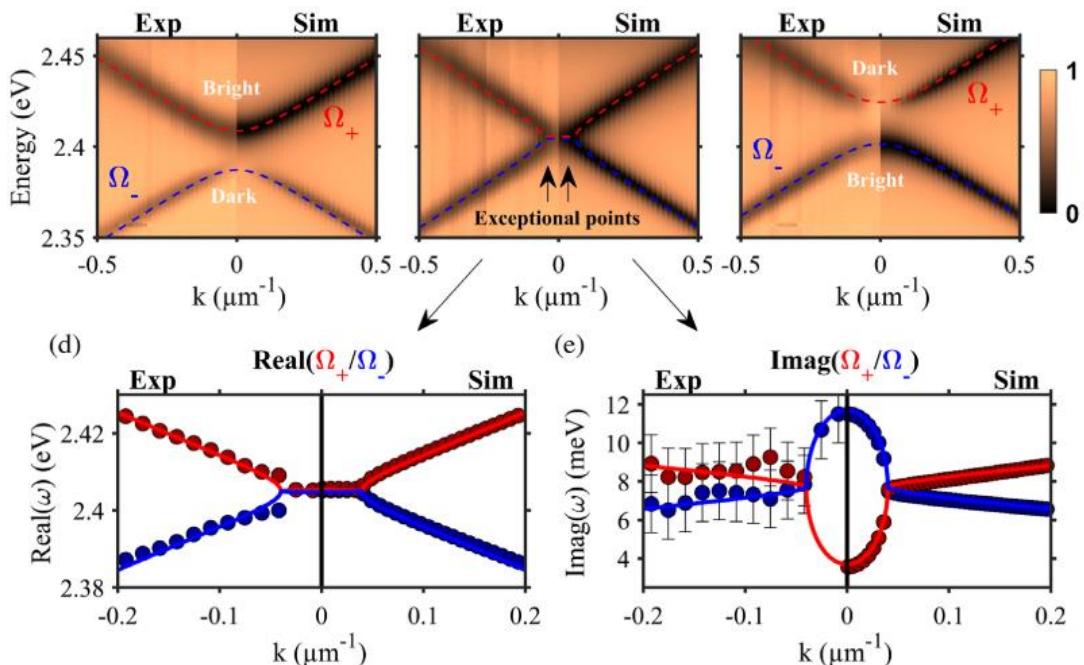


圖 1-26 填充因子對亮模態和暗模態的影響 [19]

哈密頓數學式內，對稱保護 BIC 的兩個特徵模態在空間性上是奇偶相反的，因此暗模態不能與輻射連續體耦合，其輻射損耗為零[84-86]。所以當改變結構的尺寸，也就是填充因子時，就有可能使亮模態和暗模態重疊形成 EP。

## 第二章 理論



### 2.1 電磁波理論

#### 2.1.1 馬克士威方程組

本篇論文中是用平面波進行模擬，馬克士威方程組可以用來描述電磁波在傳播中的過程，其微分形式可用下列四式(2.1)至(2.4)表示：

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (2.4)$$

其中  $E$  是電場，單位為  $[V/m]$ ； $B$  是磁通密度，單位為  $[V \cdot s/m^2]$ ； $\rho$  是電荷密度，單位為  $[C/m^3]$ ； $\epsilon_0$  是真空介電係數，是一常數，單位為  $[F/m]$ ，又等效為  $[C/(m \cdot V)]$ ； $\mu_0$  是真空磁導率，是一常數，單位為  $[H/m]$ ，又等效為  $[(V \cdot s)/(A \cdot m)]$ ； $J$  是電流密度，單位為  $[A/m^2]$ 。

有介電質時，因為介質內部的正電荷和負電荷有相對位移，進而形成電偶極子 (electric dipole)，也就是電極化，因此上述(2.1)、(2.4)式應改寫成：

$$\nabla \cdot D = \rho_f \quad (2.5)$$

$$\nabla \times H = J_f + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (2.6)$$

其中  $D$  是電位移，單位是  $[C/m^2]$ ，可定義成：

$$D \equiv \epsilon_0 E + P \quad (2.7)$$



$P$  為電極化強度，依照介質不同而變化； $\rho_f$  是自由電荷密度； $J_f$  是自由電流密度；

$H$  是磁場強度，單位為  $[A/m]$ ，和  $B$  磁通密度可表示成：

$$B \equiv \mu H \quad (2.8)$$

### 2.1.2 折射率與介電係數

在光學中，折射率是描述介質對光傳播速度變化的一個參數。當光線從介質一進入另一個不同材料介質二時，由於光在兩種介質中行進速度有所不同，光線會發生折射，根據司乃耳定律可表示成：

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (2.9)$$

$$v = \frac{c}{n} \quad (2.10)$$

其中  $n$  是折射率的實部； $\theta$  為入射角或是折射角； $v$  是光線在介質中的行進速度； $c$  是光在真空中的行進速度。

若考慮能量的增損，折射率可進而表示成  $n + i\kappa$ ，其中  $\kappa$  為折射率虛部，通常又被稱為消光係數(extinction coefficient)，虛部為正代表會吸收光的能量，若虛部為負則代表對光的有放大效應，通常會在如雷射腔(cavity)等材料結構中看到。

介電係數 (permittivity) 又稱為介電常數或是電容率，是描述介質中電場與電位移轉換的物理量，如(2.7)式所示。介電係數越大，代表在相同的電場下能會集更多的電荷，其數學式可表示成：

$$P \equiv \chi_e \epsilon_0 E \quad (2.11)$$

$$D = (1 + \chi_e) \epsilon_0 E = \epsilon E = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 E \quad (2.12)$$

其中  $\chi_e$  是電極化率； $\epsilon$  是介電係數； $\epsilon_r$  是相對介電係數。



折射率與介電係數之間的聯繫在於馬克士威方程組和介質中的電磁波傳播。

在介質中，介質的介電係數和磁導率會影響電場的行進速度，從而影響光的行進速度，進而影響折射率，根據推導可得[87]：

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (2.13)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \quad (2.14)$$

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r\mu_r} \quad (2.15)$$

若材料不是鐵電材料(鐵、鈷、鎳...等)， $\mu_r$  可近似為 1，(2.15)式可改寫為我們常見的：

$$n^2 = \epsilon_r \quad (2.16)$$

將折射率與介電係數用複數的表示形式，可以寫成：

$$n = n + i\kappa \quad (2.17)$$

$$\epsilon = \epsilon' + i\epsilon'' \quad (2.18)$$

$$\epsilon' = n^2 - \kappa^2 \quad (2.19)$$

$$\epsilon'' = 2n\kappa \quad (2.20)$$

## 2.2 表面電漿子理論

### 2.2.1 電漿

電漿(plasma)是用來描述物質的一種型態，與我們常見的氣體、液體和固體有所不同，電漿是由一團正離子、負離子、遊離電子以及中性粒子所形成的一種物質型態。若不受外界其餘電磁波干擾(被遮罩)，電量  $Q$  在  $\vec{r}$ ， $\vec{r}$  位置的電位可表示成：



$$\phi(\vec{r}) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} e^{-|\vec{r} - \vec{r}'|/\lambda_D} \quad (2.21)$$

其中  $\lambda_D$  是德拜長度(Debye length)。

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k T}{N e^2}} \quad (2.22)$$

其中  $k$  是波茲曼常數(Boltzmann constant)，單位是  $[J/K]$ ； $T$  是溫度，單位是  $[K]$ ；

$e$  是基本電荷，單位是  $[C]$ ； $N$  是帶電粒子濃度，單位是  $[1/m^3]$ 。

電漿本身具有一種趨向回到電中性的特性，這導致它以一個固定的角頻率進行震盪，此頻率也叫做電漿頻率(plasma frequency)[88]：

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}} \quad (2.23)$$

而一個電漿應滿足下列三個條件[89, 90]：

第一，電漿的形成需要確保帶電粒子之間距離足夠接近，以便彼此之間產生集體效應。這意味著在一個空間內，帶電粒子的彼此作用範圍內，平均有多於一顆帶電粒子存在。

$$N_D \gg 1 \quad (2.24)$$

第二，描述電漿的尺度必須大於電荷作用尺度(德拜長度)，以克服遮罩效應，使得帶電粒子之間彼此的引力趨於零。

$$\lambda_D \ll L \quad (2.25)$$

第三，電漿頻率必須高於粒子碰撞率，確保系統的性質由集體效應而不是碰撞所主導，若是碰撞為主會導致能量從動能逐漸轉變成熱能。

$$\omega_p > \gamma \quad (2.26)$$



## 2.2.2 表面電漿極化子

當一個平面 p 波或者說 TM 波接觸到介電質-金屬表面時，如圖 2-1 所示，

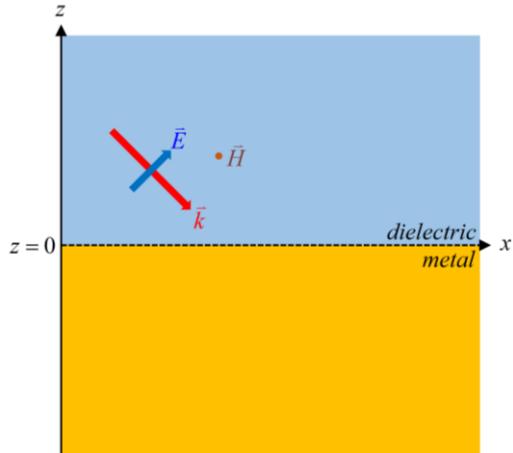


圖 2-1 介電質-金屬表面示意圖

並假設在無其他外部來源( $\rho = 0$ 、 $J = 0$ )的情況下：

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0, E_y = H_x = H_z = 0 \quad (2.27)$$

在  $z \geq 0$  時：

$$\vec{H}_d = (0, H_{y,d}, 0) e^{(k_{x,d}x + k_{z,d}z - \omega t)i} \quad (2.28)$$

$$\vec{E}_d = (E_{x,d}, 0, E_{z,d}) e^{(k_{x,d}x + k_{z,d}z - \omega t)i} \quad (2.29)$$

在  $z \leq 0$  時：

$$\vec{H}_m = (0, H_{y,m}, 0) e^{(k_{x,m}x - k_{z,m}z - \omega t)i} \quad (2.30)$$

$$\vec{E}_m = (E_{x,m}, 0, E_{z,m}) e^{(k_{x,m}x - k_{z,m}z - \omega t)i} \quad (2.31)$$

再假設金屬不是磁性金屬(鐵、鈷、鎳...等)， $\mu$  可近似為  $\mu_0$ ，馬克士威方程組(2.3)、

(2.4)式可進一步改寫成：

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2.32)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.33)$$



在  $z=0$  時，根據連續性條件： $E_{x,d} = E_{x,m}$  和  $H_{y,d} = H_{y,m}$ ，得到：

$$k_{x,d} = k_{x,m} = k_x \quad (2.34)$$

將(2.28)~(2.31)式帶入(2.33)式，在  $z=0$  時：

$$-ik_{z,d}H_{y,d} = i\omega\epsilon_0\epsilon_dE_{x,d} \quad (2.35)$$

$$ik_{z,m}H_{y,m} = i\omega\epsilon_0\epsilon_dE_{x,m} \quad (2.36)$$

根據  $H_{y,d} = H_{y,m}$  和(2.35)、(2.36)式可以得到：

$$\begin{cases} H_{y,d} - H_{y,m} = 0 \\ \frac{k_{z,d}}{\epsilon_d}H_{y,d} + \frac{k_{z,m}}{\epsilon_m}H_{y,m} = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

將無意義解( $H_{y,d} = 0$ 、 $H_{y,m} = 0$ )排除， $k_{z,d}$ 、 $k_{z,m}$ 的關係應為：

$$\frac{k_{z,d}}{\epsilon_d} = \frac{k_{z,m}}{\epsilon_m} \quad (2.38)$$

若要將無意義解( $k_{z,d} = 0$ 、 $k_{z,m} = 0$ )排除， $\epsilon_d$ 和 $\epsilon_m$ 正負號應相反，也就是

金屬的介電係數的實部應該要是負數。

同時波數與角頻率的關係為：

$$k = \frac{2\pi n}{\lambda} = \frac{2\pi nf}{c} = n \frac{\omega}{c} \quad (2.39)$$

$$k^2 = n^2 \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 = \epsilon \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \quad (2.40)$$

透過(2.38)、(2.40)式，我們知道：

$$k_d^2 = k_x^2 + k_{z,d}^2 = \epsilon_d \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \quad (2.41)$$

$$k_m^2 = k_x^2 + k_{z,m}^2 = \epsilon_m \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \quad (2.42)$$



結合(2.41)、(2.42)式最後得到：

$$k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_d \epsilon_m}{\epsilon_d + \epsilon_m}} \quad (2.43)$$

透過德汝德模型(Drude model)，一物質的介電係數可表示成：

$$\epsilon_r = \epsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} (\text{lossless}) \quad (2.44)$$

$$\epsilon_r = \epsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)} (\text{with loss}) \quad (2.45)$$

在不考慮金屬損耗的情況下，當  $\omega$  趨近於  $\frac{\omega_p}{\sqrt{\epsilon_\infty + \epsilon_m}}$  時， $k_x$  會趨近於無限大，我們可

以稱此時的角頻率為  $\omega_{SPP}$ 。

$$\omega_{SPP} = \frac{\omega_p}{\sqrt{\epsilon_\infty + \epsilon_2}} (\text{lossless}) \quad (2.46)$$

有了以上資訊畫出能量對波數的圖後，可以發現 SPP dispersion 的線並沒有落在光錐(light cone)內，所以需要在結構上增加金屬光柵來進行動量補償(momentum compensation)。

$$k_{compensation} = \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (2.47)$$

其中  $\Lambda$  是金屬光柵的週期長度。

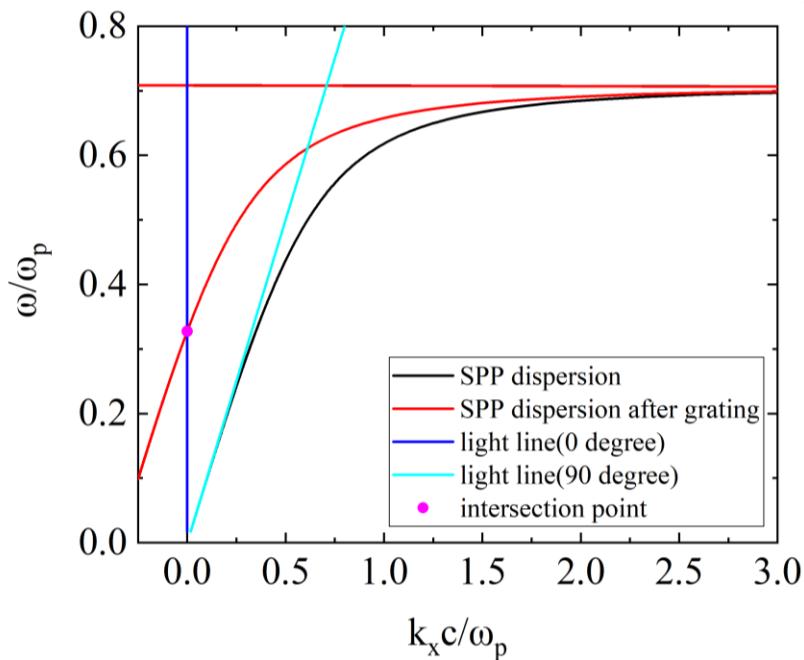


圖 2-2 表面電漿極化子色散圖

最後根據動量補償後的 SPP dispersion 和根據入射角度變化的 light line 交點，就可以找到實際 SPP mode 發生的波段。

### 2.3 一維金屬光柵的光子模態

如果考慮厚度為  $d$  的介質厚度，如圖 2-3 所示

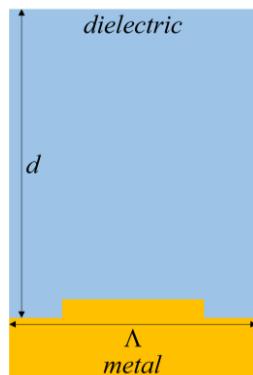


圖 2-3 一維金屬光柵示意圖

能夠存在的共振模態應有  $2\pi$  整數倍的往返相位變化[82, 83]

$$k_{\perp} = \frac{m \cdot 2\pi}{2d}, m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.48)$$

由光柵所提供的動量補償為



$$k_{\parallel} = \frac{2\pi \cdot l}{A}$$

其中  $l$  是衍射階數；  $A$  是光柵週期長度

此衍射模式所形成的光子模態(photon mode)的共振波長為

$$\lambda = \frac{2\pi n}{\sqrt{k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2}} \quad (2.50)$$

## 2.4 連續體束縛態理論

根據時間耦合模態理論(Temporal Coupled-Mode Theory, TCMT)，對稱保護 BIC 的亮模態和暗模態耦合到同一輻射通道時，共振振幅可以由哈密頓(Hamiltonian)表示：

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_1 & \tilde{\xi} \\ \tilde{\xi} & \tilde{\omega}_2 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

其中  $\tilde{\omega}_{1,2} = \omega_{1,2} - i(\gamma_{1,2}^r + \gamma_{1,2}^{\text{int}})$ ；  $\tilde{\xi} = \xi - i\sqrt{\gamma_1^r \gamma_2^r}$ ；  $\omega_{1,2}$  是兩個模態的共振頻率；  $\gamma_{1,2}^r$  是兩模態的輻射率(radiation rate)；  $\gamma_{1,2}^{\text{int}}$  是非耦合模式的內在損耗；  $\tilde{\xi}$  是兩模態的近場耦合係數(near field coupling coefficient)。

為了簡化推導，假設  $\gamma_{1,2}^{\text{int}} = 0$  (no intrinsic loss)，接著將  $\hat{H}$  帶入特徵方程式：

$$|H - \omega I| = \omega^2 - (\omega_1 - i\gamma_1^r + \omega_2 - i\gamma_2^r)\omega + (\omega_1 - i\gamma_1^r)(\omega_2 - i\gamma_2^r) - \tilde{\xi}^2 \quad (2.52)$$

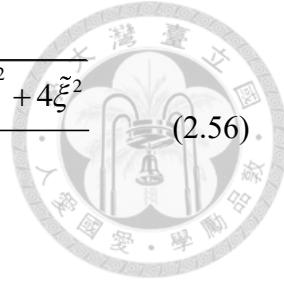
其中  $I$  為單位矩陣，假設(2.52)式的解為  $Y_1$ 、 $Y_2$ ，可以得到：

$$Y_1 + Y_2 = \omega_1 - i\gamma_1^r + \omega_2 - i\gamma_2^r \quad (2.53)$$

$$Y_1 Y_2 = (\omega_1 - i\gamma_1^r)(\omega_2 - i\gamma_2^r) - \tilde{\xi}^2 \quad (2.54)$$

令  $Y_1 = \omega_1 - i\gamma_1^r + X$ 、 $Y_2 = \omega_2 - i\gamma_2^r - X$ ，並代入(2.54)式，得到：

$$X^2 - [(\omega_2 - i\gamma_2^r) - (\omega_1 - i\gamma_1^r)]X - \tilde{\xi}^2 \quad (2.55)$$



$$X = \frac{(\omega_2 - i\gamma^r_2) - (\omega_1 - i\gamma^r_1) \pm \sqrt{[(\omega_2 - i\gamma^r_2) - (\omega_1 - i\gamma^r_1)]^2 + 4\tilde{\xi}^2}}{2} \quad (2.56)$$

將(2.56)式代回  $Y_1$ 、 $Y_2$ ，可得到最終結果

$$\omega_{1,2} = \omega_{ave} - i\gamma_{ave} \pm \sqrt{(\omega_{diff} - i\gamma_{diff})^2 + \xi^2} \quad (2.57)$$

其中

$$\omega_{ave} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (2.58)$$

$$\gamma_{ave} = \frac{\gamma^r_1 + \gamma^r_2}{2} \quad (2.59)$$

$$\omega_{diff} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad (2.60)$$

$$\gamma_{diff} = \frac{\gamma^r_1 - \gamma^r_2}{2} \quad (2.61)$$

$Q$  factor 的透過共振頻率實部除以兩倍的共振頻率虛部計算得出

$$Q \text{ factor} = \frac{\omega}{2 \times \gamma} \quad (2.62)$$

### 第三章 設計與模擬



#### 3.1 模擬軟體簡介

COMSOL 是一家使用者眾多的多重物理量模擬軟體，該軟體作為一款強大的電腦輔助工程(Computer Aided Engineering, CAE)軟體，主要以有限元素方法(Finite Element Method, FEM)解決各種物理方程，包括線彈性力學、熱傳導、化學反應以及流體力學等。其介面直觀易用，使用者可以通過繪製幾何圖形、設置邊界條件和物理模型來類比實際生活中的各種現象。除此之外，COMSOL Multiphysics 還支援不同領域模型的耦合求解，如通過固體力學模型設置聲學變形條件，或者先通過電磁模型求解層狀結構的電磁波特性，再使用光電模型計算材料的光電效應。在電磁波模擬方面，COMSOL Multiphysics 提供了多種求解方法，除了前面提到的有限元素法外，還包括了矩量法(Method of Moments, MoM)和時域差分有限法(Finite-Difference Time-Domain method, FDTD)...等。在特定波長下，可使用頻域求解器對電場回應進行分析，其基於有限元素法，建立在馬克士威方程的基礎上。通過這些功能，用戶能夠獲得穩態與暫態的結果，對電磁場進行準確的模擬分析。

#### 3.2 有限元素模擬流程

首先會使用空氣-金屬光柵和空氣-介電質-金屬光柵的結構，入射波設定為 TM 極化的電磁波，用以確認理論和模擬的 SPP mode 波段位置在何處，目的為映射圖上有多模態的呈現時，能夠確定哪個是 SPP mode。

接著會繼續使用空氣-介電質-金屬光柵的結構，入射波設定為 TE 極化的電磁波，用以確認理論和模擬的光子模態波段位置在何處，可在映射圖上有多模態的呈現時，能夠確定哪個是光子模態。



之後會使用空氣-介電質-金屬光柵的結構，入射波設定為 TM 極化的電磁波，用以確認 SPP、BIC mode 與其 bright mode 和 dark mode 波段位置在何處，並改變填充因子使亮模態和暗模態重疊在一起形成 EP。

最後用特徵頻率求解得到用以描述半經驗公式的參數，並代入(2.57)式，確認理論公式解和模擬結果模態趨勢是否一致。

### 3.3 表面電漿極化子模態波段位置

模擬結構圖如圖 3-1 (a)所示，先以空氣-金屬光柵結構模擬，入射波設定為 TM 極化的電磁波、入射角為 0 度、金屬厚度為 200 nm、光柵深度為 50 nm、填充因子為 0.5、空氣層厚度設定為入射波最小波長的四分之一，這是為了避免入射波在空氣層內形成駐波，產生其他模態，而金屬光柵週期長度從 400 nm 以 50 nm 為間隔持續到 600 nm，觀察在這過程中，SPP mode 的波段變化，最後得到反射頻譜如圖 3-2 所示。

提取每個谷值發生時的電場分布圖，如圖 3-3 所示，和文獻中的圖做對比，可以確認這就是 SPP mode 的電場分布，確認後擷取每個 SPP mode 發生時的波段位置，將 Matlab 理論計算的共振波長和 COMSOL 模擬得到的共振波長的差除以 Matlab 理論計算的共振波長得到 error，如(3.1)式所示，理論模擬對比如表 3-1 所示。

$$error = \frac{|Matlab\text{理論計算的共振波長}-COMSOL\text{模擬得到的共振波長}|}{Matlab\text{理論計算的共振波長}} \quad (3.1)$$

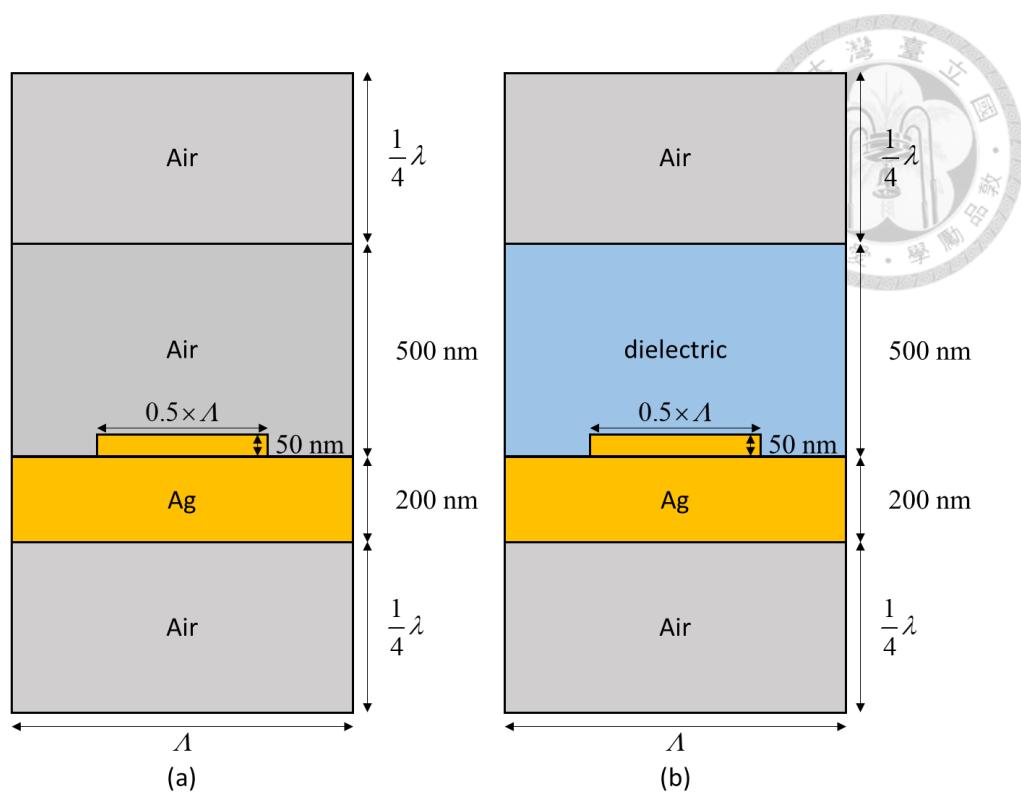


圖 3-1 (a)空氣-金屬光柵示意圖 (b)空氣-介電質-金屬光柵示意圖

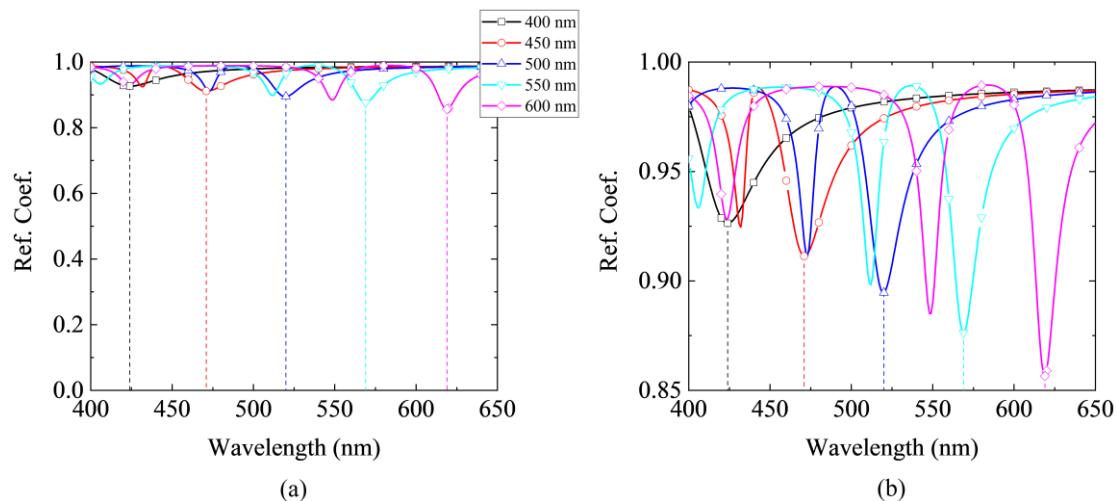


圖 3-2 (a)空氣-金屬光柵反射頻譜 (b)空氣-金屬光柵反射頻譜局部放大

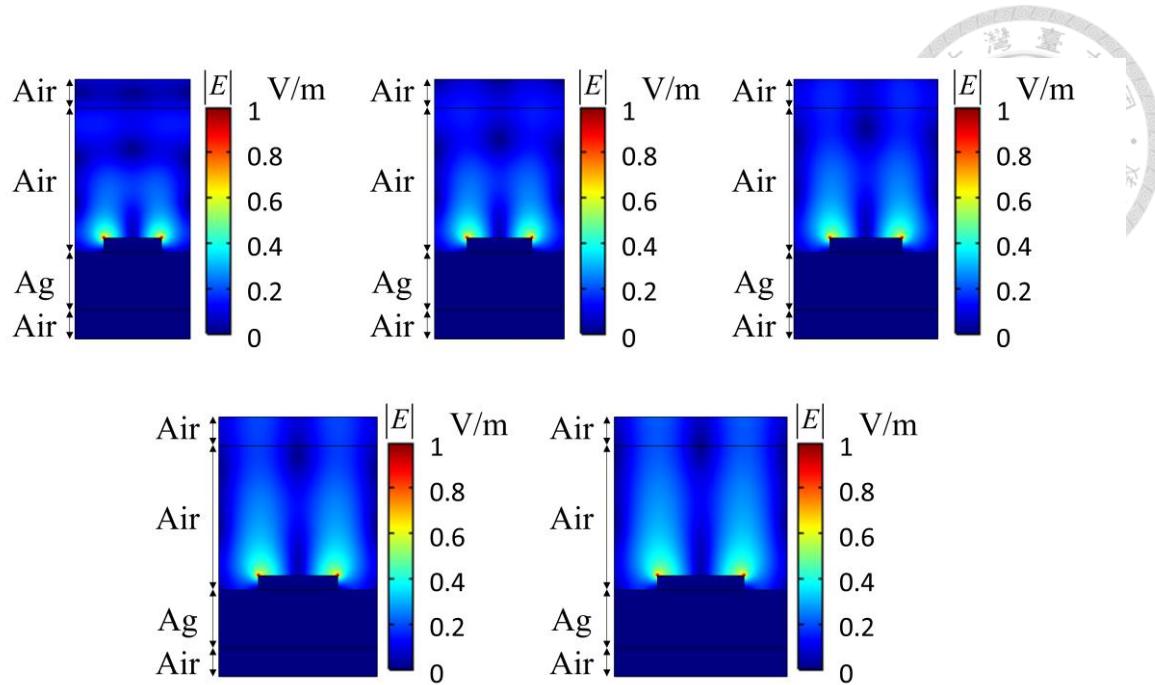


圖 3-3 上排左至右到下排左至右金屬光柵週期分別為 400、450、500、550、600 nm 時，入射波波長分別為 424、471、520、569、619 nm 的標準化電場  $|E|$  模

### 擬結果

表 3-1 改變金屬光柵的 SPP mode 理論模擬對比

週期長度( $\Lambda$ ) (nm)	Matlab 理論計算的 共振波長 (nm)	COMSOL 模擬得到的 共振波長 (nm)	error
400	426	424	0.0047
450	473	471	0.0042
500	521	520	0.0019
550	569	569	0.0000
600	617	619	0.0032

接著加入介電質如圖 3-1 (b)所示，增加厚度為 500 nm 的介電質，其他結構和圖 3-1 (a)一樣，介電質折射率( $n$ )以 0.25 為間距從 1 到 2.25 分佈，得到的反射頻譜如圖 3-4 所示，提取每個谷值發生時的電場分布圖，如圖 3-5 所示，確認是 SPP mode 的電場分布。擷取 SPP 波段位置後，理論模擬對比如表 3-2 所示，可以看到隨著介電質的折射率增大，所使用的公式漸漸開始出現誤差，這是因為本文(2.46)



式只考慮金屬光柵的週期長度，而真正的 SPP mode 的波段還會受金屬光柵的填充因子與光柵深度等影響。

但我們先獲得了表 3-2 的資訊，以後在更多的模態參雜進來時，可以更有效的幫助我們辨別各模態的波段位置。

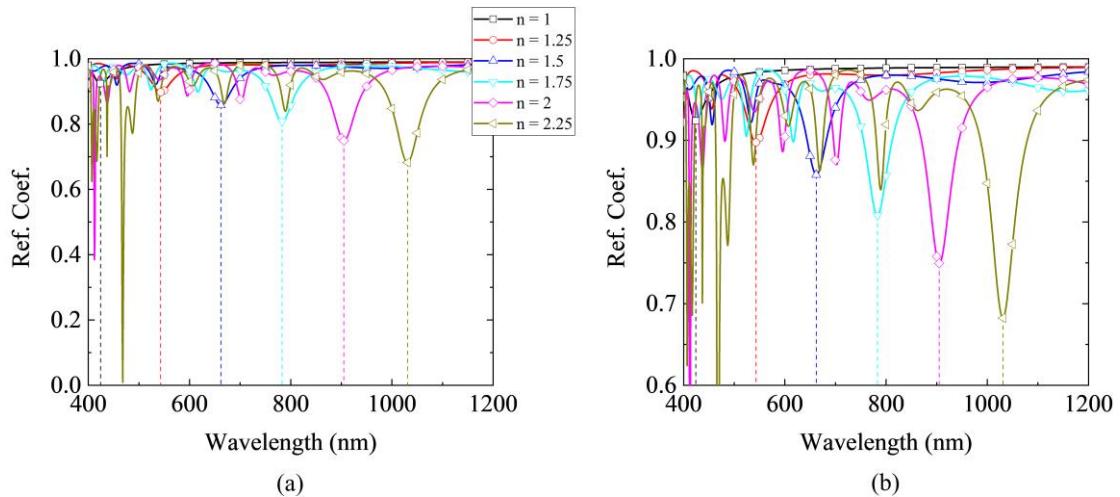


圖 3-4 (a)空氣-介電質-金屬光柵反射頻譜 (b)空氣-介電質-金屬光柵反射頻譜局

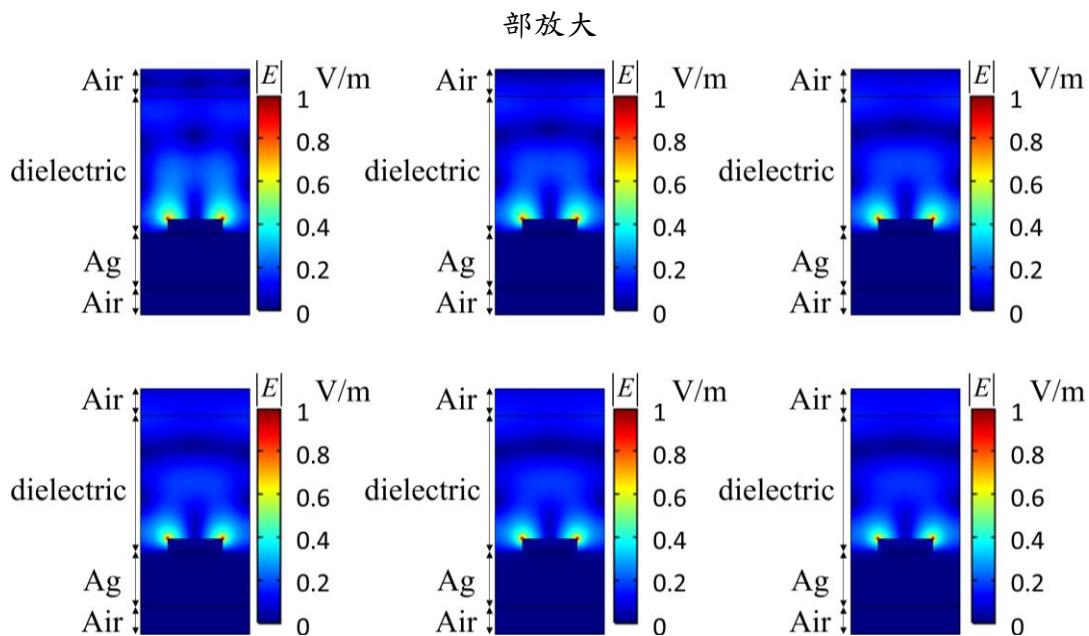


圖 3-5 上排左至右到下排左至右介電質折射率為 1、1.25、1.5、1.75、2、2.25

時，入射波波長分別為 424、543、662、783、905、1031nm 的標準化電場  $|E|$  模

### 擬結果

表 3-2 改變折射率的 SPP mode 理論模擬對比

折射率	Matlab 理論計算的 共振波長 (nm)	COMSOL 模擬得到的 共振波長 (nm)	error
1.00	426	424	0.0047
1.25	532	543	0.0207
1.50	637	662	0.0392
1.75	743	783	0.0538
2.00	849	905	0.0660
2.25	954	1031	0.0807



### 3.4 光子模態波段位置

模擬結構同圖 3-1 (b)，但不同的是入射波設定為 TE 極化的電磁波，入射角設定為 0 度和 2 度，得到如圖 3-6、圖 3-7 所示。將圖 3-7 谷值發生時的電場分布圖提取出來，如圖 3-8 所示，和文獻的圖(圖 1-23)作對比後，確認這些就是光子模態。

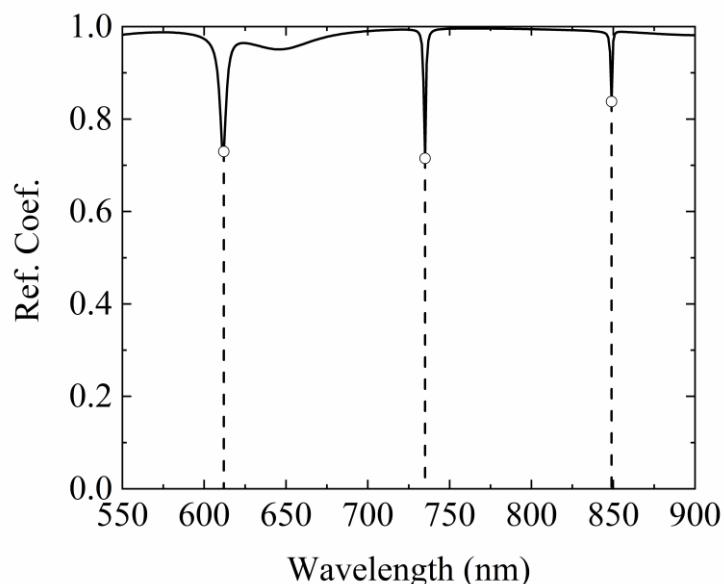


圖 3-6 入射角為 0 度時的反射頻譜，谷值對應的入射波長分別為 612 nm、735 nm、849 nm

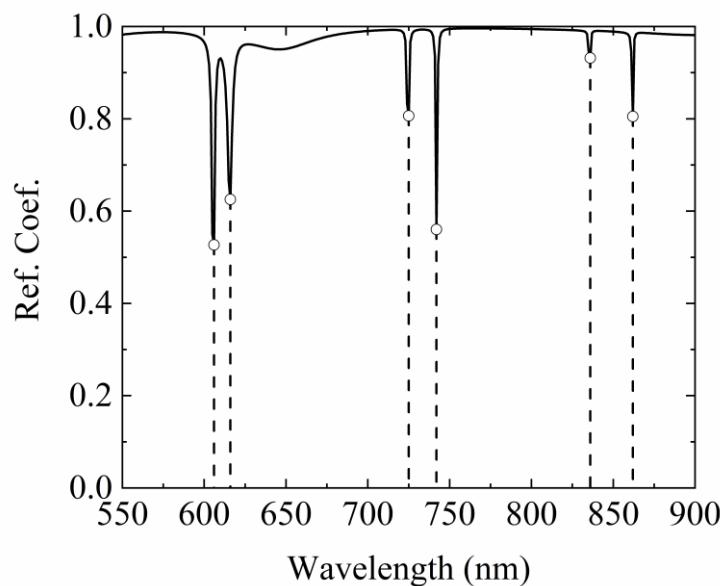


圖 3-7 入射角為 2 度時的反射頻譜，谷值對應的入射波長分別為 606 nm、616 nm、725 nm、742 nm、836 nm、862 nm

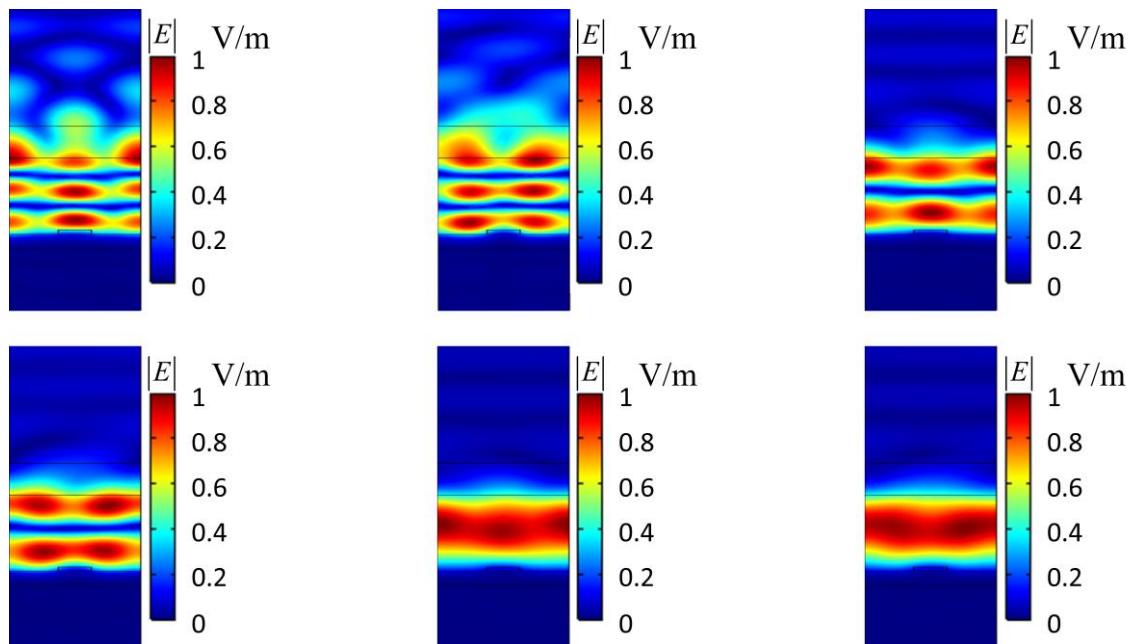


圖 3-8 從上排左至右到下排左至右，入射角為 2 度，入射波波長分別為 606、616、725、742、836、862nm 的  $|E|$  模擬結果



在確認了光子模態的位置後，在模擬中導入入射角的角度 parameter sweep，得到如圖 3-9 的映射圖，將圖中的光子模態波段擷取後，和(2.50)式對比後得到表 3-3，方便後續判讀。

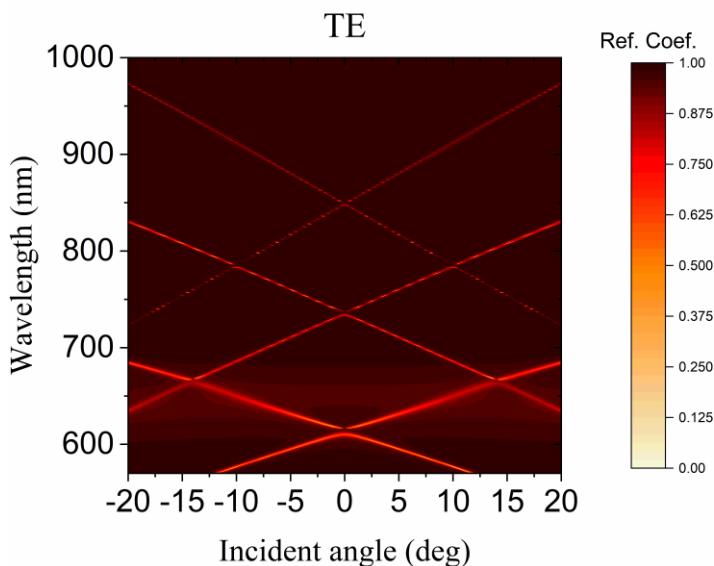


圖 3-9 入射波為 TE 極化的映射圖

表 3-3 光子模態理論模擬對比

第#模態	Matlab 理論計算 的共振波長 (nm)	COMSOL 模擬得到 的共振波長 (nm)	error
1	835.6	849	0.0160
2	702.8	736	0.0472
3	576.2	612	0.0621

### 3.5 確認 BIC 耦合結果

透過前面兩小節，大致確定各模態的分佈位置後，使用圖 3-1 (b)之結構，只是空氣層設定為 1.3 倍的入射波波長，入射波設定為 TM 極化，介電質折射率設為 2.25，得到反射率對波長與角度的映射圖，如圖 3-10 所示。透過圖 3-9 和表 3-2 我們可以很輕易的判斷各模態的位置和對稱保護 BIC 和 F-W BIC 的位置，如圖



3-11 所示，綠色虛線圈是光子模態對稱保護 BIC、藍色虛線圈是 F-W BIC、橘色虛線圈是電漿模態對稱保護 BIC。

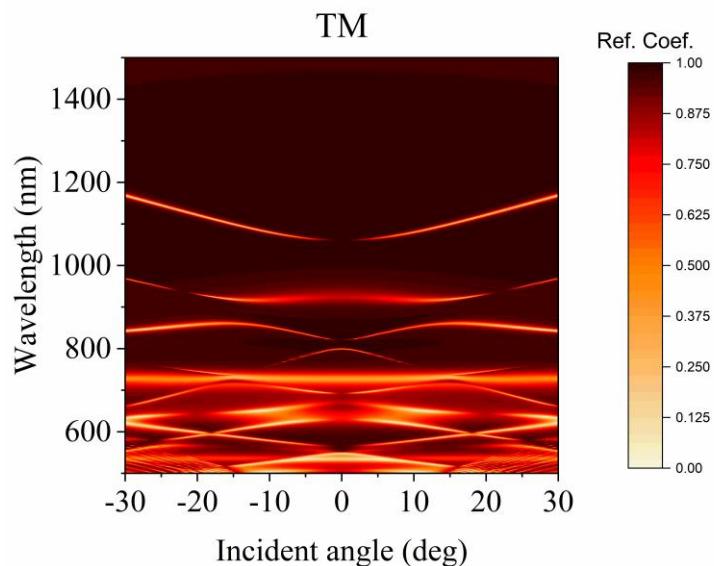


圖 3-10 入射波為 TM 極化的映射圖

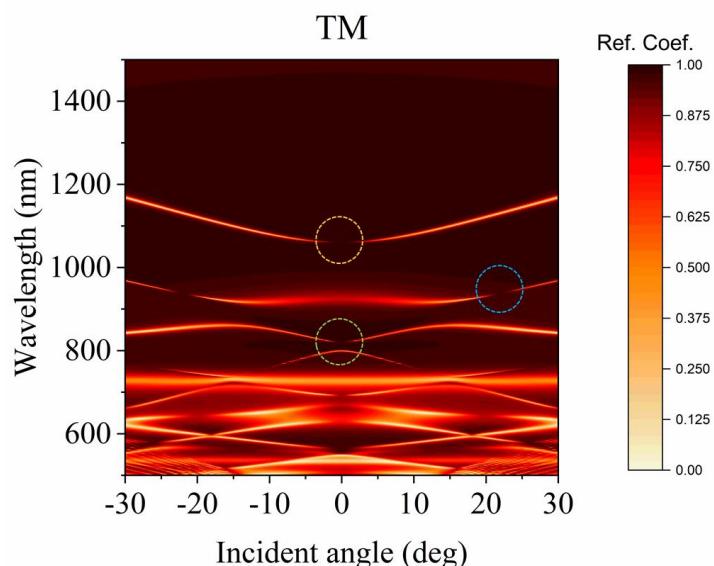


圖 3-11 加上註記的 TM 極化映射圖



確認了 BIC 的位置後，接著計算了 800nm 附近，入射角從 -3 度到 3 度的品質因子，如圖 3-12 所示，可以看到越接近入射角 0 度的位置，品質因子越大。若在 COMSOL 模擬中，將金屬損耗設為零，以相同的方式模擬，可以得到如圖 3-13 所示，理論上趨於無限大的品質因子，當角度為零時， $Q$  factor 顯示的結果為無限大。

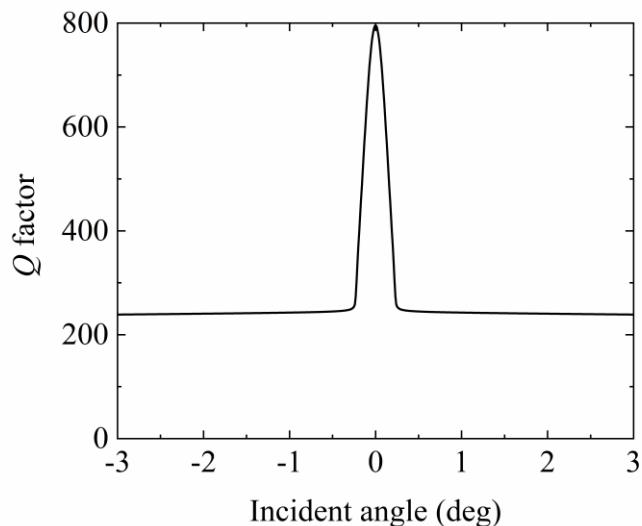


圖 3-12 有金屬損耗的品質因子

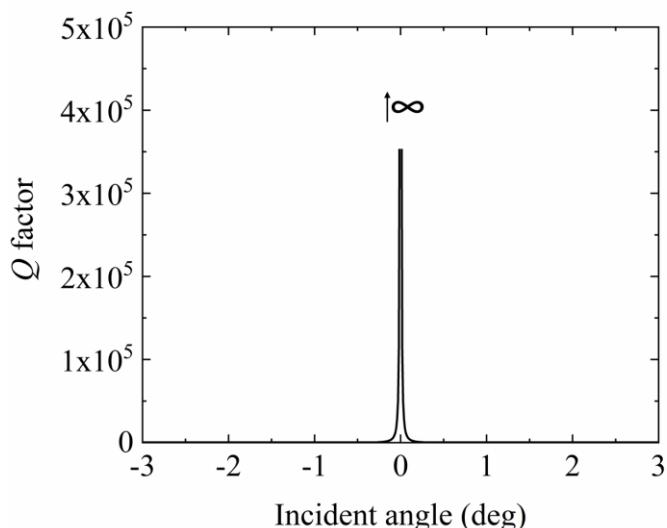


圖 3-13 無金屬損耗的品質因子



### 3.6 改變填充因子形成奇異點

透過圖 3-11 可以很清楚的看到光子模態對稱保護 BIC 和 SPP 模態與光子模態形成的 F-W BIC，接下來透過改變填充因子使對稱保護 BIC 的亮模態和暗模態重合形成 EP，過程如圖 3-14 到圖 3-16 所示。

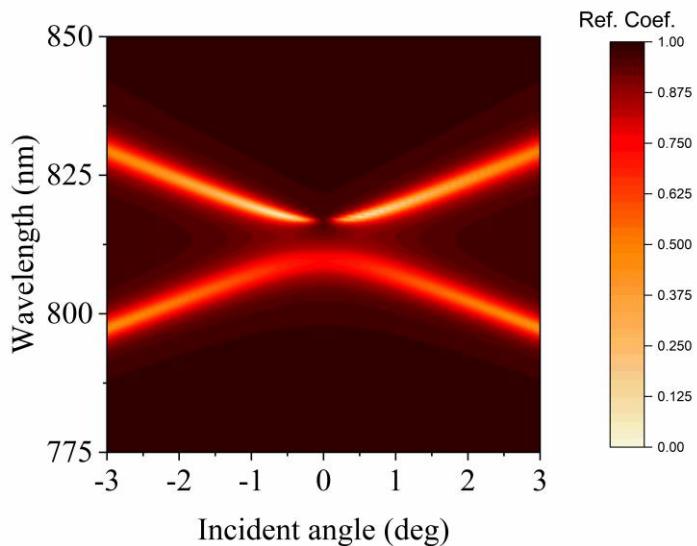


圖 3-14 填充因子 0.5 時光子模態的映射圖

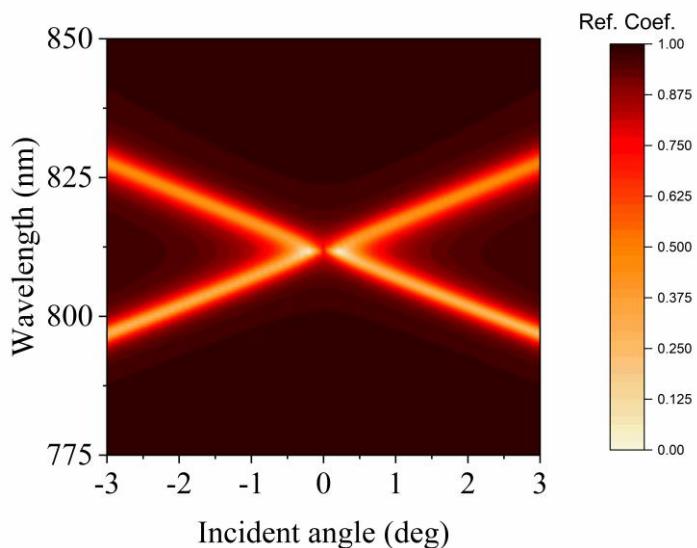


圖 3-15 填充因子 0.573 時光子模態的映射圖

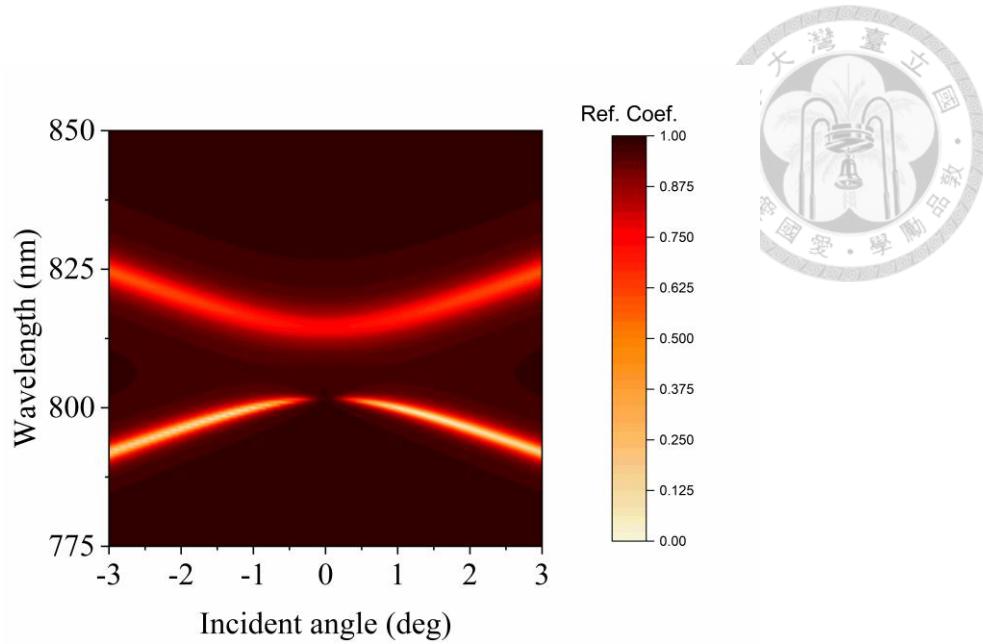


圖 3-16 填充因子 0.65 時光子模態的映射圖

可以看到當填充因子為 0.573 時，亮模態和暗模態重合在一起，在入射角為 0.28 時形成 EP，並且透過特徵頻率求解得到(2.57)式的各項參數  $\omega_1 = 2\pi \times 369.31\text{E}12$ 、 $\omega_2 = 2\pi \times 369.34\text{E}12$ 、 $\gamma_1 = 2\pi \times 0.2110\text{E}12$ 、 $\gamma_2 = 2\pi \times 1.2887\text{E}12$ ，單位皆為  $[\text{rad/s}]$ ，將上述參數帶入(2.57)式後可以發現模態趨勢理論和模擬吻合，如圖 3-17 所示，粉線和藍線為公式計算結果，再將圖 3-17 和圖 3-15 疊加，得到圖 3-18 作理論與模擬對比，可以發現兩張圖吻合。若將參數帶入(2.57)式也可得到模態虛部，如圖 3-19 所示，我們將圖 3-18 和圖 3-19 與參考文獻圖 1-26 做對比，便可以確定這是由 BIC 形成的 EP。

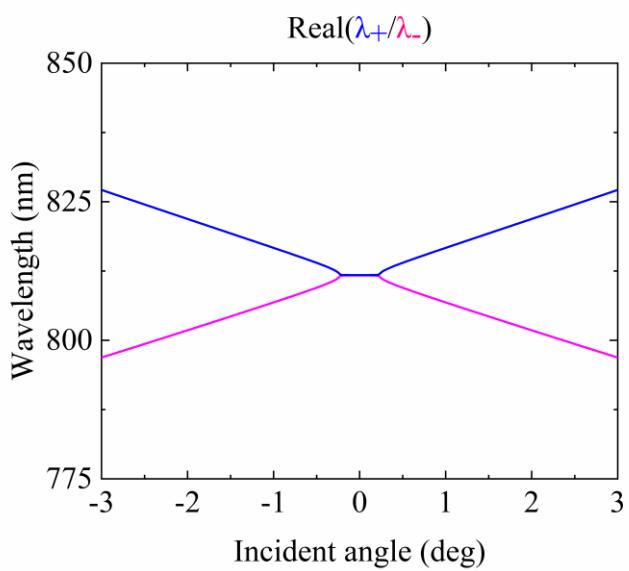


圖 3-17 填充因子 0.573 時光子模態實部

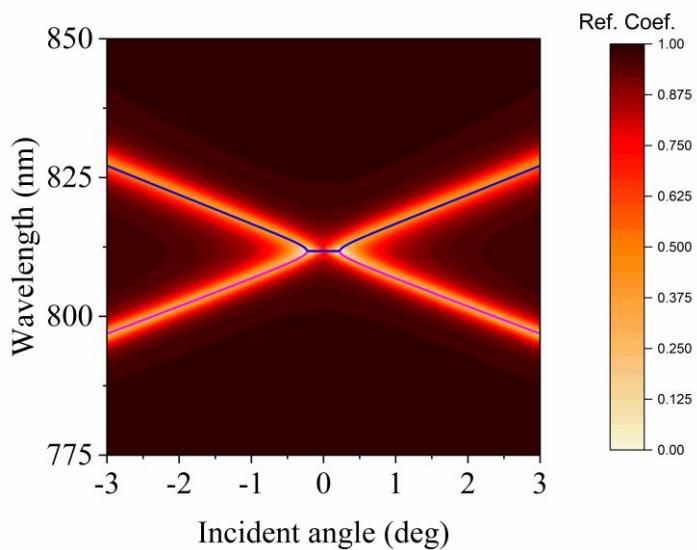


圖 3-18 填充因子 0.573 時光子模態理論與模擬對比

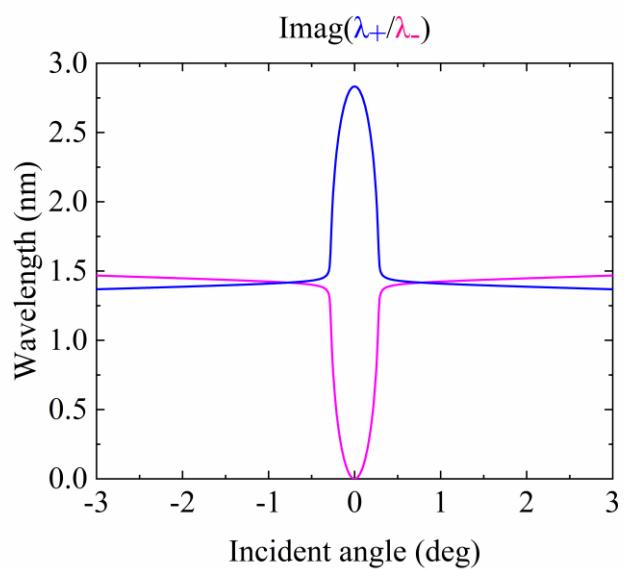


圖 3-19 填充因子 0.573 時光子模態虛部

在確定了 EP 的位置之後，先以  $ff = 0.573$  為中心，標準差為 3.3%的高斯隨機分佈下[91]，得到 100 個隨機的填充因子值，再放進 Comsol 作模擬，因為入射角度正的和負的結果一樣，所以將右半邊放加入誤差前的模擬結果，左半邊放入加入誤差後的模擬結果方便比較。可以看到如圖 3-20 和圖 3-21 所示，共振波段實部有相當大的漂移，大約有 4%到 6%的誤差，虛部的部分因為入射角接近 0 的時候變化太大，導致誤差棒不明顯，但也有 4%到 6%的誤差。

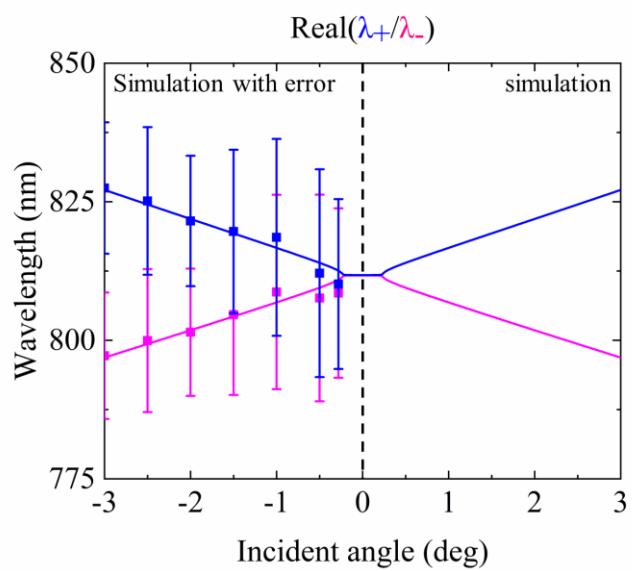


圖 3-20 BIC mode 共振波段實部加上誤差棒

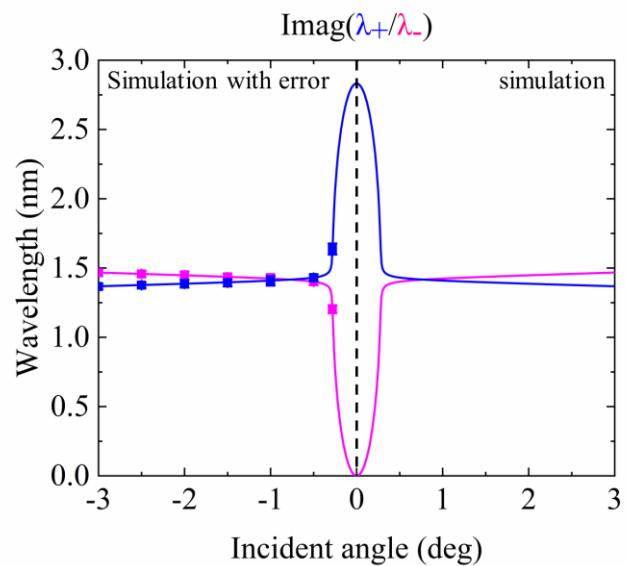


圖 3-21 BIC mode 共振波段虛部加上誤差棒

## 第四章 分析與討論



### 4.1 獲取反射頻譜

透過圖 3-18 知道了 EP 形成的位置後，以  $ff = 0.573$  為中心，標準差為 3.3% 的高斯隨機分佈下，得到 10k 個隨機的填充因子值，結果如圖 4-1 所示。

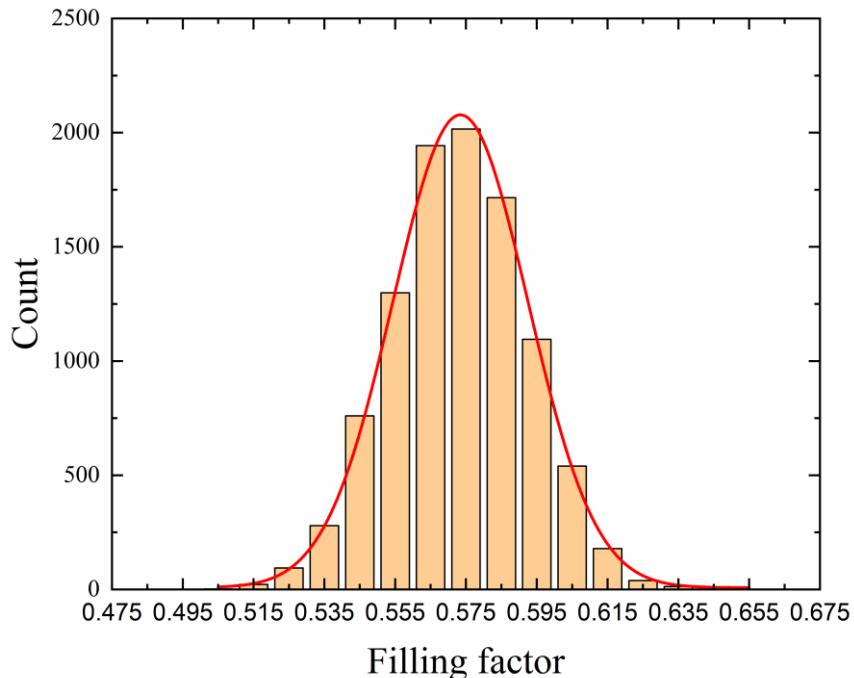


圖 4-1 填充因子直方圖

設定 3.3% 的誤差是根據這篇文獻[91]，為了要符合 IOT 成本低廉的特性，所以根據這篇 6-bits 45 nm 製成的工藝，其量測的 DNL(Differential NonLinear) 和 INL(Interger NonLinear) 分別為 -0.8/1.0 和 -1.0/0.9 LSB，若要將其轉換成熟悉的表示方式，我們首先要看 INL，轉換過程如式(4.1)：

$$\frac{|0.9 - (-1.0)|}{2^6} = 2.97\% \quad (4.1)$$

又因為 DNL 達到 1.0，有可能會造成丟碼現象(Missing Codes)，將這現象考慮進去後，最後將誤差設定為 3.3%。將這 10k 個結果丟入 COMSOL 內進行模擬，得到反



射頻譜，如圖 4-2 所示，這邊只給出 10 組疊加結果表示，但實際上會獲得 10k 個反射頻譜。

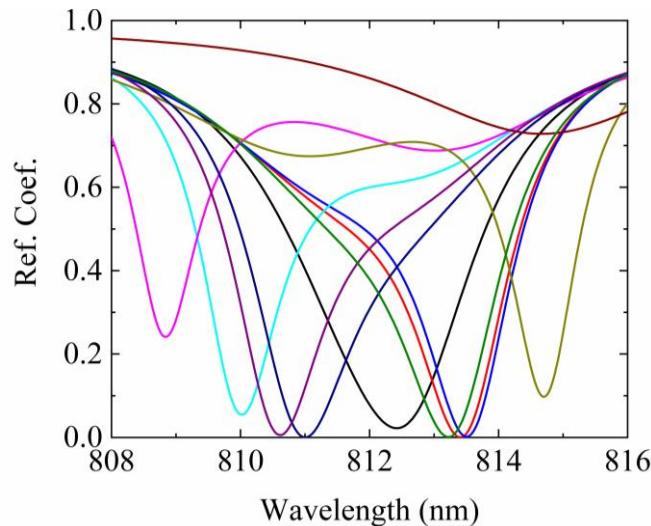


圖 4-2 其中 10 次反射頻譜疊加

## 4.2 將反射頻譜從頻域轉為時域

透過反傅立葉轉換將反射頻譜從頻域轉換到時域可以得到圖 4-3。頻率取樣間隔  $f_s$  為 0.1 THz， $T_0$  為 BIC 頻率中心的倒數， $T_0 = \frac{1}{369.325 \times 10^{12}} = 2.7076 \times 10^{-15} [s]$ 。

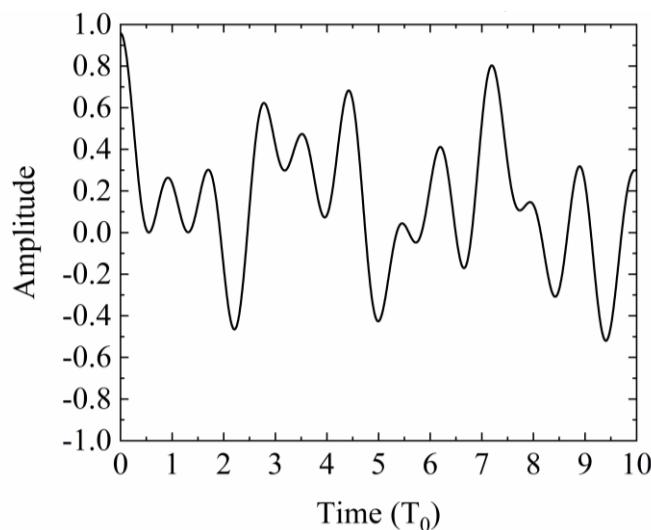


圖 4-3 反射頻譜轉時域



### 4.3 仿照現實電磁波發射接收

將高斯雷射，如圖 4-4 所示，和轉到時域的反射譜作卷積，以模擬現實質詢-響應的過程，最後得到的卷積結果為響應，如圖 4-5 所示。

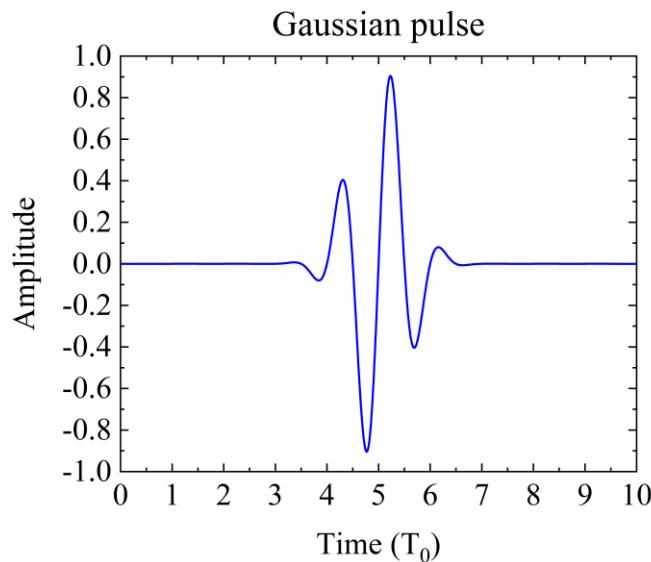


圖 4-4 高斯雷射

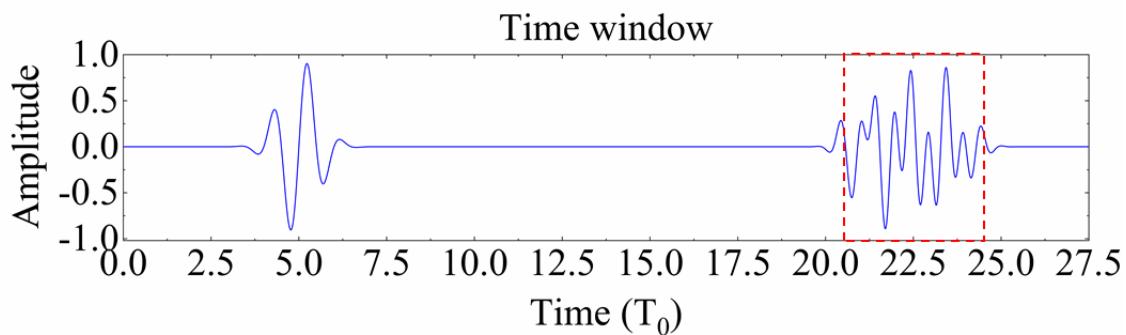


圖 4-5 高斯雷射與卷積後的結果結合

### 4.4 數位化分析

將圖 4-5 的結果作取樣，以等間距採取 64 個取樣點，過程如圖 4-6 所示。並且將每個取樣點的結果依照亂數表，如表 4-1 所示，轉化成 4-bits digit，最後結果如圖 4-8。

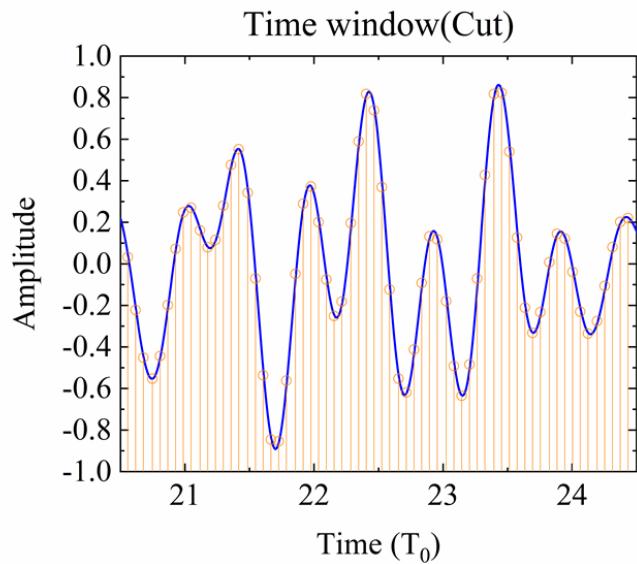


圖 4-6 取樣過程

表 4-1 亂數表

Amplitude	decimal	4-bit digits	Amplitude	decimal	4-bit digits
-1.000<=x<-0.875	0	0000	0.000<=x<0.125	8	1000
-0.875<=x<-0.750	1	0001	0.125<=x<0.250	9	1001
-0.750<=x<-0.625	2	0010	0.250<=x<0.375	10	1010
-0.625<=x<-0.500	3	0011	0.375<=x<0.500	11	1011
-0.500<=x<-0.375	4	0100	0.500<=x<0.625	12	1100
-0.375<=x<-0.250	5	0101	0.625<=x<0.750	13	1101
-0.250<=x<-0.125	6	0110	0.750<=x<0.875	14	1110
-0.125<=x<-0.000	7	0111	0.875<=x<1.000	15	1111

7	5	3	2	3	5	8	11	11	10	8	6	6	7	8	9
8	5	2	0	0	3	8	12	15	15	12	8	4	3	4	6
8	9	7	4	1	0	1	5	11	15	0	13	10	5	2	2
4	7	9	8	7	4	2	2	4	7	10	12	12	10	8	6

圖 4-7 取樣後分類

0111010100110010001101011000101110111010100001100110011110001001  
10000101001000000000001110001100111111110010000100001101000110  
100010010111010000010000000101011011111000011011010010100100010  
010001110011000011101000010001001000111101011001100101010000110



圖 4-8 取樣後轉化成 4-bits digit

每一次模擬，都可以得到一條  $64 \times 4 = 256$  bits 的比特串(bitstream)，如圖 4-9 所示。

圖 4-9 一條比特串

## 4.5 PUF 性能指標

透過前面的流程說明可以知道，一次模擬可以產生一條隨機的比特串，當模擬的次數夠多後，如圖 4-10，便可以做整體的 PUF 性能分析。

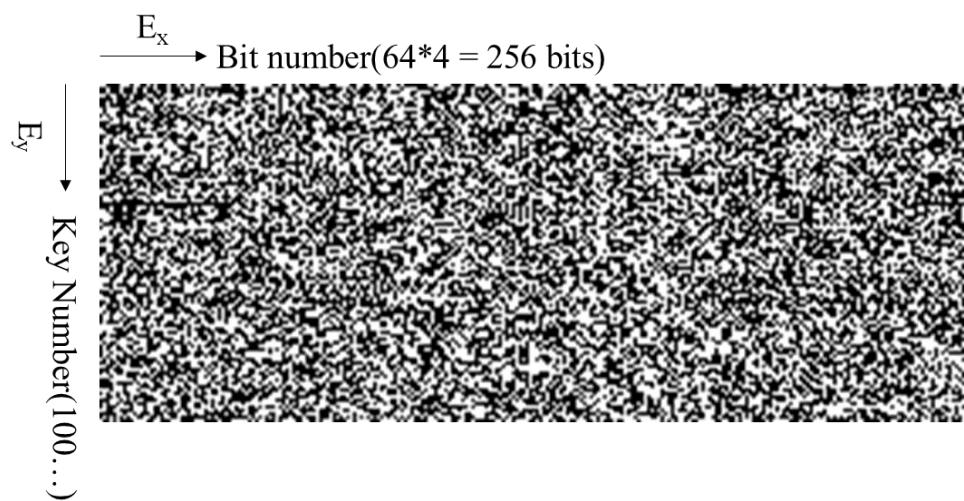


圖 4-10 多個比特串疊加



根據公式，可以得到圖 4-12 中的四張圖，其中  $E_x$  的平均值為 0.9595、標準差為 0.0986； $E_y$  的平均值為 0.9976、標準差為 0.0032； $HD_{inter}$  的平均值為 0.4969、標準差為 0.0360； $HD_{intra}$  的平均值為 0.0375、標準差為 0.0306。圖 4-12 中  $HD_{intra}$  的環境變數導入了溫度的變化，金屬銀的材料參數變化如圖 4-11 所示[92]。

最後為了展現 BIC 模態的與其他模態的差別，本論文針對單一 SPP 模態也做了 PUF 性能分析，如圖 4-13 所示，其中  $E_x$  的平均值為 0.1919、標準差為 0.2324； $E_y$  的平均值為 0.9958、標準差為 0.0017； $HD_{inter}$  的平均值為 0.0578、標準差為 0.0449； $HD_{intra}$  的平均值為 0.0482、標準差為 0.0512。可以發現除了  $E_y$  的表現仍維持的良好以外，其他的數據表示，雖然在個別單一的裝置中，"0" 和 "1" 的比特數目大致相同，但是當我們拿兩個不同的裝置互相比較時，會發現他們相似程度極高，也就是說如果駭客獲得了其中一個裝置的金鑰，那麼就極其可能可以得知其它裝置的金鑰，這與我們設計 PUF 的理念是背道而馳的。

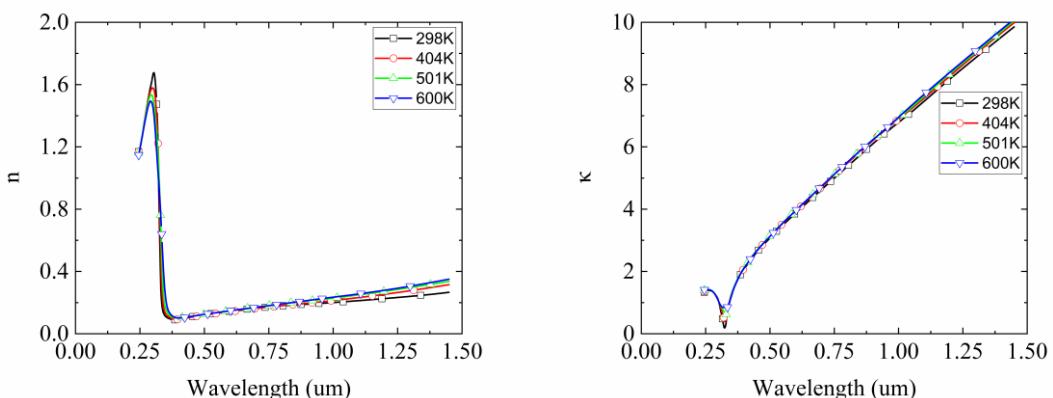


圖 4-11 金屬銀隨溫度改變的材料參數 [92]

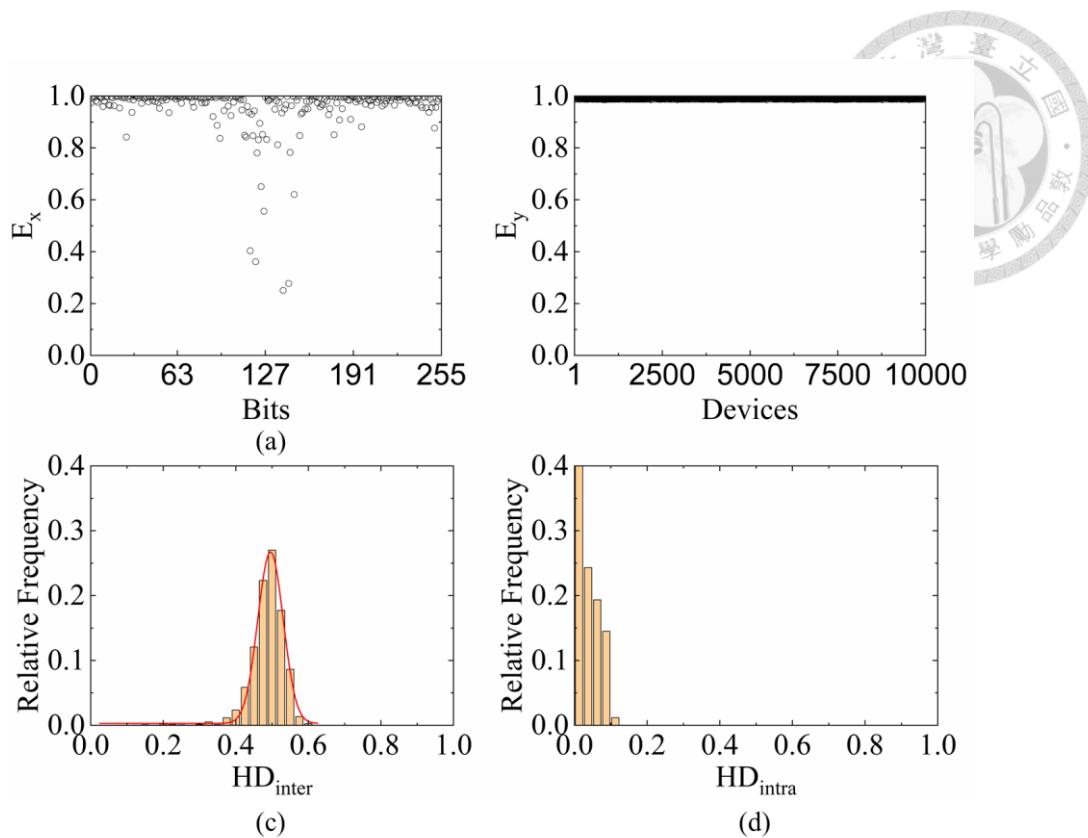


圖 4-12 BIC mode 的 PUF 參數 (a) $E_x$  (b) $E_y$  (c) $HD_{inter}$  (d) $HD_{intra}$

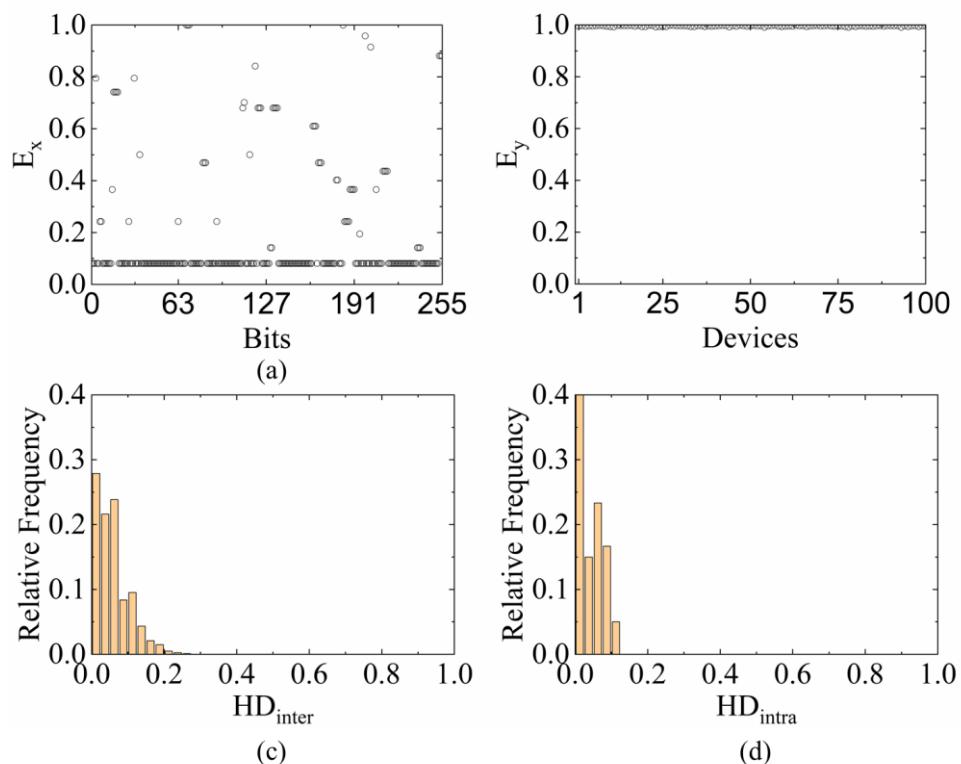


圖 4-13 SPP mode 的 PUF 參數 (a) $E_x$  (b) $E_y$  (c) $HD_{inter}$  (d) $HD_{intra}$



## 4.6 PUF 性能指標比較

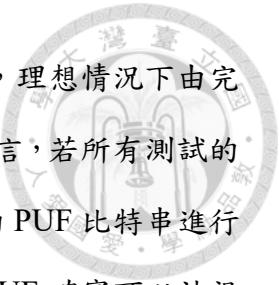
透過圖 4-12、圖 4-13 和文獻回顧的 PUF 性能參數比較整理成表 4-2，當中以 BIC 為設計基礎的 PUF，在  $E_x$  和  $E_y$  的表現上是最優異的，也就是說在單一裝置的”1”和”0”的數目分布與不同裝置同一位置的”1”和”0”的數目分布是夠隨機的，而  $HD_{inter}$  雖然相較於 DEP 是略為遜色的，但是也是要優於其他種類的 PUF 的，最後  $HD_{intra}$  表現也是只低於 DEP 而已。

表 4-2 PUF 性能指標比較

PUF 種類	$E_x$	$E_y$	$HD_{inter}$	$HD_{intra}$
Photonic Crystals [21]	-	-	0.6376	0.3200
DEP [3]	0.93	0.99	0.4974	0.0180
EP [3]	0.94	0.96	0.4911	-
Traditional Wireless [3]	0.43	0.23	0.0219	-
BIC	0.9595	0.9976	0.4969	0.0393
SPP	0.1919	0.9958	0.0578	0.0482

## 4.7 NIST randomness test 測試

一個極為優越的 PUF 被視為可被納入真正隨機數發生器(True Random Number Generator, TRNG)的行列。在密碼學領域，比特串的隨機性極為關鍵。美國國家標準技術研究所(NIST)所提出的隨機性測試，旨在驗證一個或多個比特串的真正隨機性，透過機率函數對二進位比特串進行多方面的檢驗。舉例來說，其中一項測試為頻率測試，專注於評估比特串中 0 和 1 出現的比例。然而，若同一序列的前半部分全為 0 或全為 1，或者 0 和 1 的出現呈現週期性，則該序列可能缺乏真正隨機性。



對於這些測試，P-value 是指在評估測試的非隨機性特徵時，理想情況下由完美的隨機數發生器所生成的比特串低於測試結果的機率。一般而言，若所有測試的 P 值均大於 0.01，則可將 PUF 視為真正的隨機發生器。對前述的 PUF 比特串進行 NIST 隨機性測試後，結果從表 4-3 中佐證，基於 BIC 而成的 PUF 確實可以被視為真正的亂數發生器，除了都有通過表中的測試外，P-value 的值也都大於 0.01。

表 4-3 BIC PUF 之 NIST 隨機性測試結果

NIST	P-value	Pass or not
Frequency	0.9601	yes
BlockFrequency	0.5345	yes
CumulativeSums	0.5110	yes
CumulativeSums	0.5046	yes
Runs	0.4530	yes
LongestRun	0.1149	yes
FFT	0.9770	yes
NonOverlappingTemplate(m=5)	0.8683	yes
ApproximateEntropy(m=3)	0.1217	yes
Serial_1(m=4)	0.6503	yes
Serial_2(m=4)	0.3851	yes

表 4-4 SPP PUF 之 NIST 隨機性測試結果

NIST	P-value	Pass or not
Frequency	0.8906	yes
BlockFrequency	0.4403	yes
CumulativeSums	0.4616	yes
CumulativeSums	0.2913	yes
Runs	0.1706	yes
LongestRun	0.1008	yes
FFT	0.9900	yes
NonOverlappingTemplate(m=5)	0.9977	yes
ApproximateEntropy(m=3)	0.4522	yes
Serial_1(m=4)	0.0085	no
Serial_2(m=4)	0.0089	no



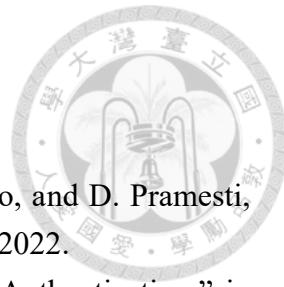
## 第五章 結論與未來展望

本篇論文透過計算，確認了表面電漿極化子模態和光子模態預期會出現的波段位置，並透過最佳化設計，使對稱保護 BIC 的暗模態和亮模態在入射角為 0 度時的波段位置重疊，便可形成奇異點，最後經由特徵頻率求解，確認其與理論公式吻合。

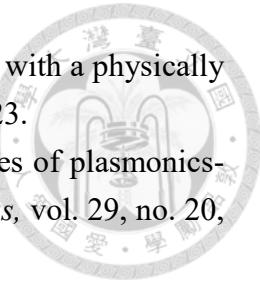
由於 BIC 具有品質因子理論上趨近無限大的特性，這導致共振波段對材料結構的微小變化非常敏感，因此可以利用這一特性來應用於 PUF 上，將眾多不同填充因子的一維金屬光柵結構的反射頻譜作反傅立葉轉換，並和高斯雷射作卷積，以模擬現實電磁波發射接收的過程，再將接收到的回應做數位化分析後，得到 10k 組比特串，將其化為 PUF 性能指標  $E_x$ 、 $E_y$ 、 $HD_{inter}$ 、 $HD_{intra}$ ，其平均值分別為 0.9595、0.9976、0.4969、0.0393；標準差分別為 0.0986、0.0032、0.0351、0.0352，且通過了 NIST 隨機性測試。並透過比較 BIC 與一般共振模態的 PUF 性能指標，證明本研究提出之概念，優於一般光學共振模態且具有可調變性，可以將應用波段延伸至可見光或是遠紅外光的波段。

後續可以使用卷積式機器學習等方式嘗試破解，藉此以別的角度驗證此 PUF 金鑰的防破解性。在材料上的改進可以選擇將介電層的材料改成鈣鈦礦( $\text{CaTiO}_3$ , Perovskite)或是陽極氧化鋁(Anodic Aluminum Oxide, AAO)。鈣鈦礦可預期的改進有兩點，一是相較於玻璃，鈣鈦礦的材料參數對製作過程中溶液濃度、溫度、溼度更加敏感，二是鈣鈦礦相較於玻璃有更高的  $k$  值，預期能增強模態在其共振波段的表現；陽極氧化鋁的特點其本身多孔性材料的特性，本身孔洞密度會極大的影響整體材料的介電係數，而孔洞密度又和電解過程中的電壓、電流、溫度、時間和電解液有著密切的關係，兩者在唯一性上預期有更好的表現。

## 參考文獻



- [1] A. Rahmatulloh, G. Ramadhan, I. Darmawan, N. Widiyasono, and D. Pramesti, “Journal of semiconductors,” *JOIV*, vol. 6, pp. 623-628, Sep. 2022.
- [2] R. Maes, “Chapter 5: PUF-Based Entity Identification and Authentication,” in *Physically Unclonable Functions: Constructions Properties and Applications*. New York: Springer, 2013.
- [3] M. Yang, L. Zhu, Q. Zhong, R. El-Ganainy, and P.-Y. Chen, “Spectral sensitivity near exceptional points as a resource for hardware encryption,” *Nat. Commun.*, vol. 14, no. 1, p. 1145, Feb. 2023.
- [4] Y. Gu, C. He, Y. Zhang, L. Lin, B. D. Thackray, and J. Ye, “Gap-enhanced Raman tags for physically unclonable anticounterfeiting labels,” *Nat. Commun.*, vol. 11, no. 1, p. 516, Jan. 2020.
- [5] J. H. Kim *et al.*, “Nanoscale physical unclonable function labels based on block copolymer self-assembly,” *Nat. Electron.*, vol. 5, no. 7, pp. 433-442, Jul. 2022.
- [6] C. Wachsmann and A.-R. Sadeghi, “Physically unclonable functions (PUFs): applications, models, and future directions,” *Synth. Lect. Inf. Secur. Privacy Trust*, vol. 9, pp. 1-91, Dec. 2014.
- [7] S.-W. Lee *et al.*, “designing secure PUF-based authentication protocols for constrained environments,” *Sci. Rep.*, vol. 13, no. 1, p. 21702, Dec. 2023.
- [8] C. Herder, M. D. Yu, F. Koushanfar, and S. Devadas, “Physical unclonable functions and applications: A tutorial,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 102, no. 8, pp. 1126-1141, 2014.
- [9] C. E. Shannon, “A mathematical theory of communication,” *BSTJ*, vol. 27, no. 3, pp. 379-423, 1948.
- [10] B. Lawrence *et al.*, “A Statistical Test Suite for Random and Pseudorandom Number Generators for Cryptographic Applications,” National Institute of Standards and Technology, 2010.
- [11] R. Pappu, B. Recht, J. Taylor, and N. Gershenfeld, “Physical one-way functions,” *AAAS*, vol. 297, no. 5589, pp. 2026-2030, 2002.
- [12] L. Ding *et al.*, “Near zero temperature coefficient of resistivity in antiperovskite Mn<sub>3</sub>Ni<sub>1-x</sub>Cu<sub>x</sub>N,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 99, no. 25, 2011.
- [13] J. Jiang, W. Shu, and J. S. Chang, “A 5.6 ppm/°C temperature coefficient, 87-dB PSRR, sub-1-V voltage reference in 65-nm CMOS exploiting the zero-temperature-coefficient point,” *IEEE J. Solid-State Circuits*, vol. 52, pp. 623-633, 2017.



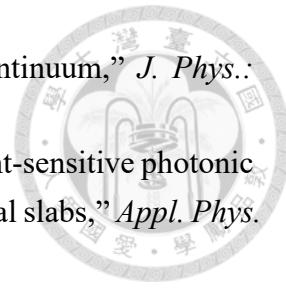
- [14] S. Daqiqeh Rezaei *et al.*, “Tri-functional metasurface enhanced with a physically unclonable function,” *Mater. Today*, vol. 62, pp. 51-61, Jan. 2023.
- [15] J. E. Villegas, B. Paredes, and M. Rasras, “Experimental studies of plasmonics-enhanced optical physically unclonable functions,” *Opt. Express*, vol. 29, no. 20, pp. 32020-32030, Sep. 2021.
- [16] R. A. John *et al.*, “Halide perovskite memristors as flexible and reconfigurable physical unclonable functions,” *Nat. Commun.*, vol. 12, no. 1, p. 3681, Jun. 2021.
- [17] F. B. Tarik, A. Famili, Y. Lao, and J. D. Ryckman, “Robust optical physical unclonable function using disordered photonic integrated circuits,” *J. Nanophotonics*, vol. 9, no. 9, pp. 2817-2828, 2020.
- [18] J. Kühne, J. Wang, T. Weber, L. Kühner, S. A. Maier, and A. Tittl, “Fabrication robustness in BIC metasurfaces,” *J. Nanophotonics*, vol. 10, no. 17, pp. 4305-4312, 2021.
- [19] L. Ferrier *et al.*, “Unveiling the enhancement of spontaneous emission at exceptional points,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 129, p. 083602, Aug. 2022.
- [20] L. Daihyun, J. W. Lee, B. Gassend, G. E. Suh, M. v. Dijk, and S. Devadas, “Extracting secret keys from integrated circuits,” *IEEE Trans. Very Large Scale Integr. VLSI Syst.*, vol. 13, no. 10, pp. 1200-1205, 2005.
- [21] X. lu, L. Hong, and K. Sengupta, “CMOS optical PUFs using noise-immune process-sensitive photonic crystals incorporating passive variations for robustness,” *IEEE J. Solid-State Circuits*, vol. PP, pp. 1-13, Aug. 2018.
- [22] J. Schindler, A. Li, M. C. Zheng, F. M. Ellis, and T. Kottos, “Experimental study of active LRC circuits with PT symmetries,” *Phys. Rev. A: At. Mol. Opt. Phys.*, vol. 84, no. 4, p. 040101, Oct. 2011.
- [23] Z. Lin, J. Schindler, F. M. Ellis, and T. Kottos, “Experimental observation of the dual behavior of PT-symmetric scattering,” *Phys. Rev. A: At. Mol. Opt. Phys.*, vol. 85, no. 5, p. 050101, May 2012.
- [24] S. Assawaworrarit, X. Yu, and S. Fan, “Robust wireless power transfer using a nonlinear parity-time-symmetric circuit,” *Nature*, vol. 546, no. 7658, pp. 387-390, Jun. 2017.
- [25] R. El-Ganainy, K. G. Makris, M. Khajavikhan, Z. H. Musslimani, S. Rotter, and D. N. Christodoulides, “Non-Hermitian physics and PT symmetry,” *Nat. Phys.*, vol. 14, no. 1, pp. 11-19, Jan. 2018.
- [26] L. Feng, R. El-Ganainy, and L. Ge, “Non-Hermitian photonics based on parity-time symmetry,” *Nature Photonics*, vol. 11, pp. 752-762, Dec. 2017.
- [27] S. K. Özdemir, S. Rotter, F. Nori, and L. Yang, “Parity-time symmetry and exceptional points in photonics,” *Nat. Mater.*, vol. 18, no. 8, pp. 783-798, Aug.



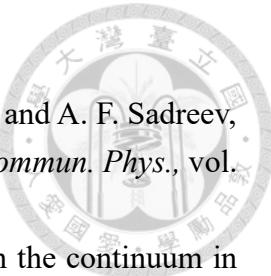
- 2019.
- [28] J. von Neumann and E. P. Wigner, “Über merkwürdige diskrete Eigenwerte,” in *The Collected Works of Eugene Paul Wigner*, A. S. Wightman Ed. Berlin: Springer, 1993.
  - [29] D. R. Herrick, “Construction of bound states in the continuum for epitaxial heterostructure superlattices,” *Phys. B+C*, vol. 85, no. 1, pp. 44-50, Nov. 1976.
  - [30] F. H. Stillinger, “Potentials supporting positive-energy eigenstates and their application to semiconductor heterostructures,” *Phys. B+C*, vol. 85, no. 2, pp. 270-276, Dec 1976.
  - [31] F. Capasso, C. Sirtori, J. Faist, D. L. Sivco, S.-N. G. Chu, and A. Y. Cho, “Observation of an electronic bound state above a potential well,” *Nature*, vol. 358, no. 6387, pp. 565-567, Aug. 1992.
  - [32] C. W. Hsu, B. Zhen, A. D. Stone, J. D. Joannopoulos, and M. Soljačić, “Bound states in the continuum,” *Nat. Rev. Mater.*, vol. 1, no. 9, p. 16048, Jul. 2016.
  - [33] I. S. Chung and A. Taghizadeh, “Reciprocal-space engineering of quasi-bound states in the continuum in photonic crystal slabs for high-Q microcavities,” in *International Conference on Transparent Optical Networks*, Jul. 2017.
  - [34] S. I. Azzam, V. M. Shalaev, A. Boltasseva, and A. V. Kildishev, “Formation of bound states in the continuum in hybrid plasmonic-photonic systems,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 121, no. 25, p. 253901, Dec. 2018.
  - [35] A. Cerjan *et al.*, “Using symmetry bandgaps to create a line of bound states in the continuum in 3D photonic crystals,” in *Conference on Lasers and Electro-Optics Europe & European Quantum Electronics Conference*, Jun. 2021.
  - [36] Y. Feng *et al.*, “On-chip high-sensitivity ultrasound detector based on the high-Q bound states in the continuum in chalcogenide glass photonic crystal slab,” in *2021 Opto-Electronics and Communications Conference*, Jul. 2021.
  - [37] J. M. Fitzgerald, S. K. Manjeshwar, W. Wieczorek, and P. Tassin, “Nanophotonic structures for cavity optomechanics,” in *Conference on Lasers and Electro-Optics Europe & European Quantum Electronics Conference*, Jun. 2021.
  - [38] Z. Han, C. Wang, Z. Gou, and H. Tian, “High figure of merit magnetic field sensor based on photonic crystal slab supporting quasi bound states in the continuum,” in *Institute of Electrical and Electronics Engineers International Conference on Network Intelligence and Digital Content*, Nov. 2021.
  - [39] D. V. Yurasov *et al.*, “Photonic BICs in Si structures with Ge self-assembled quantum dots,” in *Institute of Electrical and Electronics Engineers Photonics Conference*, Oct. 2021.
  - [40] J. Zhang, W. Liu, B. Pan, D. Dai, and Y. Shi, “High Q nanobeam cavity based on



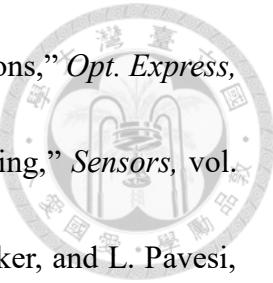
- etchless lithium niobate integrated platform,” in *International Conference on Optical Communications and Networks*, Aug. 2021.
- [41] Y. Gong *et al.*, “Monolithically integrated microcavity lasers on silicon,” in *Asia Communications and Photonics Conference*, Nov. 2022.
- [42] L. Kang, Y. Wu, S. D. Campbell, D. H. Werner, X. Ma, and S. Lan, “Generating high-harmonic optical vortex beams from photonic bound states in the continuum,” in *Institute of Electrical and Electronics Engineers International Symposium on Antennas and Propagation and USNC-URSI Radio Science Meeting*, Jul. 2022.
- [43] L. Pilozzi, M. Missori, and C. Conti, “Fano to BIC resonances transitions in 3D printed photonic crystals,” in *Conference on Lasers and Electro-Optics Europe & European Quantum Electronics Conference*, Jun. 2023.
- [44] Z. Yu *et al.*, “Fundamentals and applications of photonic waveguides with bound states in the continuum,” *J. Semicond.*, vol. 44, no. 10, p. 101301, Mar. 2023.
- [45] W. Zhao, W. Wang, Z. x. Chen, X. Luan, J. l. Kou, and Y. q. Lu, “Evolution of degenerate pairs of bound states in the continuum with broken symmetry,” *IEEE Photonics J.*, vol. 16, no. 2, pp. 1-7, 2024.
- [46] Y. V. Kartashov, C. Milian, V. V. Konotop, and L. Torner, “PT-symmetric bound states in the continuum,” in *International Conference Laser Optics*, Jun. 2018.
- [47] K. Han and V. Aksyuk, “Bound states in the continuum in heterogeneous lithium niobate and silicon nitride waveguide,” in *Conference on Lasers and Electro-Optics*, May 2023.
- [48] Z. Ma, Y. Fu, Y. Wan, H. Cao, J. Wang, and Y. Zhang, “Bound state in the continuum enabled ultralong silicon waveguide grating antennas for integrated LiDAR applications,” in *Asia Communications and Photonics Conference/International Photonics and Optoelectronics Meetings*, Nov. 2023.
- [49] Z. Yaoxian, “Two-Dimensional Photonic Crystals Applied in High-Performance Meta-Systems,” in *Recent Advances and Trends in Photonic Crystal Technology*, G. Amit Kumar and K. Ajay Eds. Rijeka: IntechOpen, 2023.
- [50] G. Cattapan and P. Lotti, “Bound states in the continuum in two-dimensional serial structures,” *EPJB*, vol. 66, no. 4, pp. 517-523, Dec. 2008.
- [51] A. F. Sadreev, E. N. Bulgakov, and I. Rotter, “Trapping of an electron in the transmission through two quantum dots occupied by a wire,” *JETP Lett.*, vol. 82, no. 8, pp. 498-503, Oct. 2005.
- [52] S. Díaz-Tendero, A. G. Borisov, and J.-P. Gauyacq, “Extraordinary electron propagation length in a metallic double chain supported on a metal surface,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 102, no. 16, p. 166807, Apr. 2009.
- [53] A. F. Sadreev, D. N. Maksimov, and A. S. Pilipchuk, “Gate controlled resonant



- widths in double-bend waveguides: bound states in the continuum," *J. Phys.: Condens. Matter*, vol. 27, no. 29, p. 295303, Jul. 2015.
- [54] W. Suh, M. F. Yanik, O. Solgaard, and S. Fan, "Displacement-sensitive photonic crystal structures based on guided resonance in photonic crystal slabs," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 82, no. 13, pp. 1999-2001, 2003.
- [55] A. M. Chernyak, M. G. Barsukova, A. S. Shorokhov, A. I. Musorin, and A. A. Fedyanin, "Bound states in the continuum in magnetophotonic metasurfaces," *JETP Lett.*, vol. 111, no. 1, pp. 46-49, Jan. 2020.
- [56] B. Zhen, C. W. Hsu, L. Lu, A. D. Stone, and M. Soljačić, "Topological nature of optical bound states in the continuum," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 113, no. 25, p. 257401, Dec. 2014.
- [57] M. McIver, C. M. Linton, P. McIver, J. Zhang, and R. Porter, "Embedded trapped modes for obstacles in two-dimensional waveguides," *QJMAM*, vol. 54, no. 2, pp. 273-293, 2001.
- [58] C. M. Linton and K. Ratcliffe, "Bound states in coupled guides. I. two dimensions," *J. Math. Phys.*, vol. 45, no. 4, pp. 1359-1379, 2004.
- [59] Y. Chen, Z. Shen, X. Xiong, C.-H. Dong, C.-L. Zou, and G.-C. Guo, "Mechanical bound state in the continuum for optomechanical microresonators," *New J. Phys.*, vol. 18, no. 6, p. 063031, Jun. 2016.
- [60] M. Robnik, "A simple separable hamiltonian having bound states in the continuum," *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 19, no. 18, p. 3845, Dec. 1986.
- [61] N. Prodanović, V. Milanović, Z. Ikonić, D. Indjin, and P. Harrison, "Bound states in continuum: quantum dots in a quantum well," *Phys. Lett. A*, vol. 377, no. 34-36, pp. 2177 - 2181, 2013.
- [62] Z. Sadrieva, K. Frizyuk, M. Petrov, Y. Kivshar, and A. Bogdanov, "Multipolar origin of bound states in the continuum," *Phys. Rev. B: Condens. Matter*, vol. 100, no. 11, p. 115303, Sep. 2019.
- [63] Y. Plotnik *et al.*, "Experimental observation of optical bound states in the continuum," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 107, no. 18, p. 183901, Oct. 2011.
- [64] J. Lee *et al.*, "Observation and differentiation of unique high-Q optical resonances near zero wave vector in macroscopic photonic crystal slabs," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 109, no. 6, p. 067401, Aug. 2012.
- [65] E. N. Bulgakov and D. N. Maksimov, "Avoided crossings and bound states in the continuum in low-contrast dielectric gratings," *Phys. Rev. A: At. Mol. Opt. Phys.*, vol. 98, no. 5, p. 053840, Nov. 2018.
- [66] S.-G. Lee, S.-H. Kim, and C.-S. Kee, "Bound states in the continuum (BIC) accompanied by avoided crossings in leaky-mode photonic lattices," *J.*



- Nanophotonics*, vol. 9, no. 14, pp. 4373-4380, 2020.
- [67] P. S. Pankin, B. R. Wu, J. H. Yang, K. P. Chen, I. V. Timofeev, and A. F. Sadreev, “One-dimensional photonic bound states in the continuum,” *Commun. Phys.*, vol. 3, no. 1, p. 91, May 2020.
- [68] A. F. Sadreev, E. N. Bulgakov, and I. Rotter, “Bound states in the continuum in open quantum billiards with a variable shape,” *Phys. Rev. B: Condens. Matter*, vol. 73, no. 23, p. 235342, Jun. 2006.
- [69] V. A. Sablikov and A. A. Sukhanov, “Helical bound states in the continuum of the edge states in two dimensional topological insulators,” *Phys. Lett. A*, vol. 379, no. 30, pp. 1775-1779, Sep. 2015.
- [70] A. A. Lyapina, D. N. Maksimov, A. S. Pilipchuk, and A. F. Sadreev, “Bound states in the continuum in open acoustic resonators,” *J. Fluid Mech.*, vol. 780, pp. 370-387, 2015.
- [71] H. Friedrich and D. Wintgen, “Physical realization of bound states in the continuum,” *Phys. Rev. A: At. Mol. Opt. Phys.*, vol. 31, no. 6, pp. 3964-3966, Jun. 1985.
- [72] B. J. Lee, L. P. Wang, and Z. M. Zhang, “Coherent thermal emission by excitation of magnetic polaritons between periodic strips and a metallic film,” *Opt. Express*, vol. 16, no. 15, pp. 11328-11336, Jul. 2008.
- [73] C. Zhao, J. Zhang, and Y. Liu, “Light manipulation with encoded plasmonic nanostructures,” *Eur. Phys. J. Appl. Metamater.*, vol. 1, p. 6, 2014.
- [74] Z. M. Zhang and L. P. Wang, “Measurements and modeling of the spectral and directional radiative properties of micro/nanostructured materials,” *Int. J. Thermophys.*, vol. 34, no. 12, pp. 2209-2242, Dec. 2013.
- [75] T. Iqbal *et al.*, “Optimization of 1D plasmonic grating of nanostructured devices for the investigation of plasmonic bandgap,” *Plasmonics*, vol. 14, no. 3, pp. 775-783, Jun. 2019.
- [76] B. Zhao, J. M. Zhao, and Z. M. Zhang, “Resonance enhanced absorption in a graphene monolayer using deep metal gratings,” *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 32, no. 6, pp. 1176-1185, Jun. 2015.
- [77] A. Sathukarn *et al.*, “The simulation of a surface plasmon resonance metallic grating for maximizing THz sensitivity in refractive index sensor application,” *Int. J. Opt.*, vol. 2020, p. 3138725, Jan. 2020.
- [78] A. Polemi and K. L. Shuford, “Transmission line equivalent circuit model applied to a plasmonic grating nanosurface for light trapping,” *Opt. Express*, vol. 20, no. S1, pp. A141-A156, Jan. 2012.
- [79] Y.-B. Chen and F.-C. Chiu, “Trapping mid-infrared rays in a lossy film with the



- Berreman mode, epsilon near zero mode, and magnetic polaritons,” *Opt. Express*, vol. 21, no. 18, pp. 20771-20785, Sep. 2013.
- [80] G. Stocker *et al.*, “Ultra-narrow SPP generation from Ag grating,” *Sensors*, vol. 21, no. 21, p. 6993, 2021.
- [81] S. Signorini, M. Finazzer, M. Bernard, M. Ghulinyan, G. Pucker, and L. Pavesi, “Silicon photonics chip for inter-modal four wave mixing on a broad wavelength range,” *Front. Phys.*, vol. 7, Sep. 2019.
- [82] P. Bermel, C. Luo, L. Zeng, L. C. Kimerling, and J. D. Joannopoulos, “Improving thin-film crystalline silicon solar cell efficiencies with photonic crystals,” *Opt. Express*, vol. 15, no. 25, pp. 16986-17000, Dec. 2007.
- [83] Z. Yu, A. Raman, and S. Fan, “Fundamental limit of nanophotonic light trapping in solar cells,” *PNAS*, vol. 107, no. 41, pp. 17491-17496, 2010.
- [84] B. Zhen *et al.*, “Spawning rings of exceptional points out of Dirac cones,” *Nature*, vol. 525, no. 7569, pp. 354-358, Sep. 2015.
- [85] L. Lu, Q. Le-Van, L. Ferrier, E. Drouard, C. Seassal, and H. S. Nguyen, “Engineering a light matter strong coupling regime in perovskite-based plasmonic metasurface: quasi-bound state in the continuum and exceptional points,” *Photon. Res.*, vol. 8, no. 12, pp. A91-A100, Dec. 2020.
- [86] S.-G. Lee and R. Magnusson, “Band flips and bound-state transitions in leaky-mode photonic lattices,” *Phys. Rev. B: Condens. Matter*, vol. 99, no. 4, p. 045304, Jan. 2019.
- [87] H. A. Haus, “Chapter 1: Maxwell's Equations of Isotropic Media and Some Important Identity,” in *Waves and fields in optoelectronics*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1984.
- [88] E. C. Jordan and K. G. Balmain, “Chapter 9: Interaction of Fields and Matter,” in *Electromagnetic waves and radiating systems*, Second edition ed. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1968.
- [89] F. F. Chen, “Chapter 1: Introduction,” in *Introduction to plasma physics and controlled fusion*, Second edition ed. New York: Plenum Press, 1984.
- [90] J. D. Jackson, “Chapter 10: Magnetohydrodynamics and Plasma Physics,” in *Classical Electrodynamics*, Third edition ed. New York: Wiley, 1999.
- [91] M. W. Chen, L. R. Carley, and D. S. Ricketts, “A Process-technology-scaling-tolerant pipelined ADC architecture achieving 6-bit and 4 GS/s ADC in 45nm CMOS,” *IEEE Access*, pp. 16-18, Jan. 2014.
- [92] M. Ferrera, M. Magnozzi, F. Bisio, and M. Canepa, “Temperature-dependent permittivity of silver and implications for thermoplasmonics,” *Phys. Rev. Mater.*, vol. 3, no. 10, p. 105201, Oct. 2019.