

國立臺灣大學工學院應用力學研究所



碩士論文

Institute of Applied Mechanics

College of Engineering

National Taiwan University

Master's Thesis

同步定位與建圖系統之設計與實現

The Design and Implementation of a Simultaneous
Localization and Mapping System

李承霖

Cheng-Lin Li

指導教授: 王立昇 博士

Advisor: Li-Sheng Wang, Ph.D.

中華民國 115 年 1 月

January, 2026

國立臺灣大學碩士學位論文

口試委員會審定書

MASTER'S THESIS ACCEPTANCE CERTIFICATE
NATIONAL TAIWAN UNIVERSITY

同步定位與建圖系統之設計與實現

The Design and Implementation of a Simultaneous Localization and Mapping System

本論文係李承霖 (R11543110) 在國立臺灣大學應用力學研究所完成之碩士學位論文，於民國 115 年 01 月 09 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明。

The undersigned, appointed by the Institute of Applied Mechanics on 9th January, 2026 have examined a Master's Thesis entitled above presented by LI, CHENG-LIN (student ID: R11543110) candidate and hereby certify that it is worthy of acceptance.

口試委員 Oral examination committee:

王立昇 王立昇 (指導教授 Advisor)

張帆人 張帆人

卓大靖 卓大靖

王和盛 王和盛

所長 Director: 陳瑞琳 陳瑞琳



致謝

本論文得以順利完成，謹此致上最誠摯的感謝。

首先，誠摯感謝指導教授王立昇老師的悉心教導。在過去這段時間裡，老師以嚴謹的治學態度與深厚的學識涵養，引領我步入學術殿堂。無論在研究方向、理論建構或實驗設計上，皆提供關鍵性的協助與啟發，使我獲益匪淺、如沐春風。也要感謝實驗室裡各位夥伴們，在研究過程中的鼎力協助與切磋討論。

此外，我要特別感謝我的父母、家人及女朋友一直以來的支持與理解。學術之路並不平坦，但幸運的是，我從未孤身一人。在無數個青燈黃卷的深夜，每每感到迷惘疲憊之時，想起你們溫暖的鼓勵，是支撐著我繼續往前走的最大力量。在此，向我最親愛的你們致以最深摯的謝意：謝謝你們體諒我因忙碌而缺席的時刻；謝謝你們在漫長的求學路上始終是我最堅實的後盾。這本論文的完成，是我們共同努力的成果，更是你們愛與陪伴的見證。

負笈台北的這些日子，由衷感謝所有曾給予我幫助的人。多年以後，或許論文的研究內容已隨時光流逝而記憶斑駁，但過程中經歷的種種暖意與教誨，我都將點滴在心。



摘要

本研究提出一套改良式同步定位與建圖 (Simultaneous Localization and Mapping, SLAM) 系統架構，以擴展卡爾曼濾波器 (Extended Kalman Filter, EKF) 為核心，針對感測器量測數據進行雜訊抑制與數據關聯機制之設計。在感測數據前處理階段，引入基於密度之聚類演算法 (Density-based spatial clustering of applications with noise, DBSCAN)，以降低感測器因不可抗力因素所產生之雜訊對後續地圖建構的影響。於數據關聯階段，本研究結合馬哈拉諾比斯距離 (Mahalanobis distance) 與歐幾里德距離 (Euclidean distance) 進行雙重判斷，達到同時考量估測不確定性與幾何距離關係，以提升地標匹配之穩定性。此外，於新地標生成流程中加入觀測次數門檻機制，僅當同一觀測連續出現達所設定之次數時，才將其納入地圖建構。實驗結果顯示，本研究所提出之方法可有效減少地圖中重複地標生成的情形，且能在雜訊環境下維持 SLAM 系統運作之強健性。

關鍵字：同步定位與建圖、擴展卡爾曼濾波器、聚類演算法、馬哈拉諾比斯距離



Abstract

This study proposes an improved Simultaneous Localization and Mapping (SLAM) system architecture, centered on the Extended Kalman Filter (EKF), with a focus on noise suppression and data association mechanisms for sensor measurements. In the sensor data preprocessing stage, a Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise (DBSCAN) algorithm is introduced to mitigate the impact of sensor noise caused by uncontrollable factors on subsequent map construction. During the data association stage, a dual-criteria approach combining Mahalanobis distance and Euclidean distance is employed to simultaneously consider estimation uncertainty and geometric proximity, thereby enhancing the stability of landmark matching. Furthermore, a threshold mechanism based on the number of observations is incorporated into the new landmark generation process, such that only observations occurring consecutively up to a preset count are incorporated into the map. Experimental results demonstrate that the proposed method effectively reduces the occurrence of duplicate landmarks in the map and maintains the robustness of

the SLAM system in noisy environments.

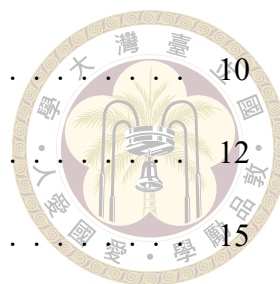
Keywords: SLAM, Extended Kalman Filter, DBSCAN, Mahalanobis distance





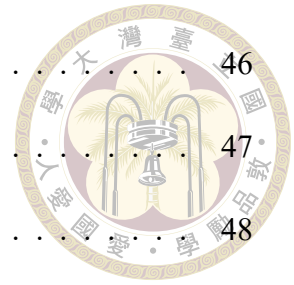
目次

| | Page |
|-----------------------------|----------|
| 口試委員會審定書 | i |
| 致謝 | ii |
| 摘要 | iii |
| Abstract | iv |
| 目次 | vi |
| 圖次 | ix |
| 表次 | xi |
| 第一章 緒論 | 1 |
| 1.1 前言與研究動機 | 1 |
| 1.2 文獻回顧 | 3 |
| 1.3 研究內容 | 5 |
| 1.4 論文架構 | 6 |
| 第二章 系統狀態估測與卡爾曼濾波器 | 7 |
| 2.1 系統狀態估測 | 7 |
| 2.2 卡爾曼濾波器基礎理論 | 8 |
| 2.2.1 狀態空間模型 | 8 |
| 2.2.2 高斯假設與線性系統前提 | 9 |



| | | |
|------------|--|-----------|
| 2.2.3 | 卡爾曼濾波器基本公式推導 | 10 |
| 2.2.4 | 卡爾曼濾波器流程 | 12 |
| 2.3 | 擴展卡爾曼濾波器 (Extended Kalman Filter, EKF) | 15 |
| 2.3.1 | 雅可比矩陣 (Jacobian matrix) | 15 |
| 2.3.2 | 非線性系統之線性化 | 16 |
| 2.3.3 | 擴展卡爾曼濾波器流程圖及模擬 | 18 |
| 第三章 | 同步定位與建圖 (SLAM) 系統設計方法 | 21 |
| 3.1 | SLAM 理論基礎與架構 | 21 |
| 3.2 | 定位與預測 | 26 |
| 3.2.1 | 無人載具差速驅動模型 | 26 |
| 3.2.2 | 狀態預測 | 28 |
| 3.3 | 觀察與地標提取 | 31 |
| 3.3.1 | 光達 (LiDAR) 感測原理與數據特性 | 31 |
| 3.3.2 | 基於密度之聚類演算法 (DBSCAN) | 32 |
| 3.4 | 數據關聯 (Data association) | 35 |
| 3.4.1 | 最近鄰方法 (Nearest-Neighbor Approach) | 35 |
| 3.4.2 | 馬哈拉諾比斯距離 (Mahalanobis distance) | 36 |
| 3.4.3 | 歐幾里德距離 (Euclidean distance) | 40 |
| 3.5 | 濾波器更新 | 42 |
| 3.5.1 | 喬列斯基分解 (Cholesky decomposition) | 43 |
| 3.6 | 地圖擴增 | 43 |
| 第四章 | 實驗設備與系統介紹 | 46 |
| 4.1 | 硬體架構 | 46 |

| | | |
|------------|---------------------|-----------|
| 4.1.1 | 差速輪無人載具 | 46 |
| 4.1.2 | 光達 | 47 |
| 4.1.3 | 控制工作站主機 | 48 |
| 4.2 | 軟體系統 | 49 |
| 4.3 | 系統架構 | 50 |
| 第五章 | 模擬與實驗結果 | 51 |
| 5.1 | 模擬結果 | 52 |
| 5.2 | 實驗結果 | 53 |
| 5.3 | 模擬與實驗結果討論 | 58 |
| 第六章 | 結論與未來展望 | 59 |
| | 參考文獻 | 60 |

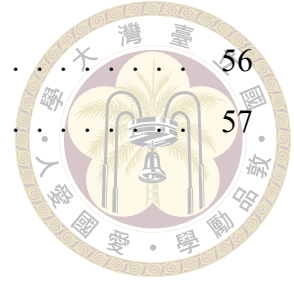




圖次

| | | |
|-----|--------------------------|----|
| 2.1 | 卡爾曼濾波器之預測及更新過程 | 14 |
| 2.2 | 擴展卡爾曼濾波器流程圖 | 18 |
| 2.3 | 擴展卡爾曼濾波器模擬 | 19 |
| 3.1 | SLAM 系統流程圖 | 22 |
| 3.2 | 載具模型示意圖 | 22 |
| 3.3 | 輪式差速無人載具 | 27 |
| 3.4 | DBSCAN 示意圖 | 33 |
| 3.5 | 歐氏距離下之地標分佈 | 37 |
| 3.6 | 馬氏距離下之地標分佈 | 37 |
| 4.1 | 差速輪無人載具 | 47 |
| 4.2 | RPLIDAR A1 光達 | 47 |
| 4.3 | 控制工作站主機 | 48 |
| 4.4 | 使用軟體 | 49 |
| 4.5 | 系統架構圖 | 50 |
| 5.1 | 地標圖示 | 51 |
| 5.2 | SLAM 模擬結果 | 52 |
| 5.3 | 實驗場景 | 53 |
| 5.4 | 起點 | 53 |
| 5.5 | 載具移動過程順序 1 | 54 |
| 5.6 | 載具移動過程順序 2 | 54 |
| 5.7 | 載具移動過程順序 3 | 55 |
| 5.8 | 載具移動過程順序 4 | 55 |

| | |
|--------------------------|----|
| 5.9 終點 | 56 |
| 5.10 SLAM 實驗所建構之地圖 | 57 |





表次

| | |
|------------------------------|----|
| 4.1 RPLIDAR A1 規格表 | 48 |
| 4.2 X550LD 規格表 | 49 |



第一章 緒論

1.1 前言與研究動機

隨著自主移動機器人 (Autonomous Mobile Robots, AMR) 與無人載具的快速發展，如何在未知或動態環境中即時獲得自身位置與周遭環境資訊，已成為機器人系統中的核心課題。同步定位與建圖 (SLAM) 技術因此受到廣泛關注，並被應用於倉儲物流、室內巡檢、服務型機器人等領域。

雖然全球衛星定位系統 (GPS) 可提供絕對位置資訊，然而在室內環境、地下空間、都市峽谷或高遮蔽場域中，GPS 訊號易受遮蔽、多重路徑效應影響，導致定位精度顯著下降，甚至無法正常運作。因此，僅依賴 GPS 並不足以滿足多數實際機器人應用需求。

相較之下，光達 (LiDAR) 具備高精度距離量測能力，能夠直接感知周遭環境幾何特徵；而輪編碼器 (Encoder) 則可提供短時間內穩定的里程計資訊。透過融合兩者資訊，可在不依賴外部定位系統的情況下，實現無人載具於未知環境中的自主定位與建圖。

而在系統實際運作與實驗過程中，常可觀察到感測器量測數據受雜訊影響而產生不穩定觀測的情形，尤其光達在光線強度較高的環境中或者天氣條件不佳，如下雨、下雪或霧霾等狀況，容易出現零散且短暫的量測點，此類量測在後續數

據關聯與地標建構流程中，可能被誤判為獨立的新地標。上述現象將導致建構新地標時產生偽陽性，使地圖結構逐漸膨脹，並增加數據關聯與狀態估測之複雜度。當地標數量持續累積時，亦可能進一步影響定位結果的穩定性，降低整體 SLAM 系統於長時間運作下的可靠度。

因此，本研究旨在探討如何透過適當的感測數據處理與數據關聯策略設計，以降低觀測雜訊對地標建構流程的影響，並提升 SLAM 系統於實際應用情境下的強健性。



1.2 文獻回顧

Durrant-Whyte 與 Bailey 將同步定位與建圖 (SLAM) [4][2][10] 問題定義為機器人在未知環境中同時估測自身位置與建立環境地圖的核心挑戰。SLAM 的困難在於位置估測與地圖建構相互依賴，必須同時處理不確定性與數據關聯問題。為解決此問題，主要方法包括基於擴展卡爾曼濾波器 (EKF) 及粒子濾波器 (Particle Filter, PF) 的濾波演算法。而 Aycok 的研究 [1] 則分析了各種適合使用於 SLAM 系統的感測器，且提出了低成本的 SLAM 實現方法。

卡爾曼濾波器 (Kalman Filter, KF) [6] 是一種廣泛應用於狀態估測的遞迴濾波器，最早由 Rudolf Emil Kalman 於 1960 年提出，用於線性系統中結合量測與模型預測以獲得最佳估測。然而，實際系統多為非線性，擴展卡爾曼濾波器 [7][9] 透過對非線性狀態轉移與觀測函數進行一階泰勒級數展開，使 KF 理論能延伸至機器人定位與導航領域。粒子濾波器 [3] 則採用蒙地卡羅取樣方法，能處理高度非線性及非高斯系統，但計算量較大，且可能出現粒子退化現象。相比之下，EKF 計算量較小、運算速度快，更適合高頻更新的系統。

在進行濾波更新前，感測器收集的環境數據往往含有雜訊，可能影響後續濾波結果。為此，引入由 Ester 等人於 1996 年提出的密度聚類演算法 (Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise, DBSCAN) [5]。DBSCAN 利用核心點、邊界點與雜訊點的鄰域密度進行分群，無需事先指定群數，能自動識別任意形狀的群集並過濾孤立雜訊點。因其在處理含雜訊感測器數據時的穩健性，DBSCAN 已廣泛應用於機器人導航、目標檢測與地圖建構等研究中。

綜上所述，SLAM 的關鍵在於同時估測位置與建構地圖，濾波器提供了可靠的狀態估測方法，而 DBSCAN 則有效處理感測器數據中的雜訊。這些方法共同為本研究使用輪編碼器與光達數據進行同步定位與建圖提供了理論與技術基礎。





1.3 研究內容

本研究旨在設計與實現一套基於輪編碼器與 2D 光達的同步定位與建圖 (SLAM) 系統，以實現無人載具在未知環境中進行定位與感知環境的任務。系統的主要流程依序包括定位與預測、觀察與地標提取、數據關聯、濾波器更新及地圖擴增。

在觀察與地標提取階段，本研究使用密度聚類演算法 (Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise, DBSCAN) 對光達數據進行處理，剔除孤立雜訊點並保留環境中具有代表性的地標，以提升後續濾波與建圖的精度。在濾波器更新階段，系統採用擴展卡爾曼濾波器 (EKF) 對輪編碼器與光達融合後的數據進行遞迴估測，得到載具的位置與姿態。在地圖擴增階段，系統針對每個新的觀測地標進行多重驗證，首先利用馬氏距離與歐氏距離雙重判斷，以同時考量估測不確定性與幾何距離關係；其次，僅在該地標被重複觀測達一定次數後，才將其新增至地圖中，避免因偶發雜訊或誤測而產生重複或錯誤地標導致系統發散。

經過數據關聯、濾波更新與嚴格地標驗證後，系統逐步建立完整且穩健的環境特徵地圖。綜合而言，本研究透過 DBSCAN 與 EKF 的結合，配合馬氏距離與歐氏距離的雙重判斷及重複觀察策略，有效地處理感測器雜訊所造成的問題，提升了 SLAM 系統的定位精度與地圖可靠性，為後續實驗驗證提供了理論與技術基礎。



1.4 論文架構

本論文共分為六個章節，各章節內容安排如下說明。

第一章為緒論，說明本研究之背景與研究動機，回顧同步定位與建圖相關文獻，並說明本研究之研究內容與整體研究方向。

第二章介紹系統狀態估測與卡爾曼濾波器之理論基礎，包含狀態空間模型、高斯假設與線性系統前提，並進一步說明擴展卡爾曼濾波器之數學推導與非線性系統線性化方法，作為後續 SLAM 系統設計之理論基礎。

第三章說明同步定位與建圖系統之設計方法，依序介紹定位與預測、觀察與地標提取、數據關聯、濾波器更新以及地圖擴增等流程，並說明 DBSCAN 聚類演算法於地標提取階段之應用，以及擴展卡爾曼濾波器於狀態更新與地圖建構中的角色。

第四章介紹本研究所使用之實驗設備與系統架構，包含差速輪無人載具、光達感測器與控制工作站主機，並說明整體軟體系統之架構與實作環境。

第五章呈現模擬與實際實驗結果，透過實驗測試情境驗證所提出 SLAM 系統之定位與建圖效能，並進行結果分析與討論。

第六章為結論與未來展望，總結本研究之成果與貢獻，並提出未來可進一步研究與改進之方向。



第二章 系統狀態估測與卡爾曼濾波器

2.1 系統狀態估測

在實際工程系統中，系統之真實狀態往往無法被直接量測，而僅能透過有限且含有雜訊之感測器數據加以推估。以無人載具為例，其位置（Position）與姿態（Attitude）等狀態資訊通常需藉由里程計或光達等感測器間接取得，然而此類量測數據容易受到感測誤差、環境干擾及模型不確定性之影響，導致單一感測器無法提供穩定且準確之狀態資訊。因此，如何在不確定性條件下，融合系統模型與感測器量測，以獲得可靠之狀態估測，成為控制與機器人領域中一項重要課題。

系統狀態估測的目的在於，透過建立系統動態模型與觀測模型，並考量過程雜訊與觀測雜訊的統計特性，以遞迴方式推估系統於各時間步之最佳狀態。相較於僅依賴即時量測，狀態估測方法能同時利用量測與模型預測結果，有效降低雜訊對估測結果之影響，並提升整體系統之穩定性與可靠度。此類方法已廣泛應用於導航、定位、控制與同步定位與建圖等問題中，並成為現代感測融合系統的核心基礎。



2.2 卡爾曼濾波器基礎理論

卡爾曼濾波器為一種遞迴式之系統狀態估測方法，主要應用於具有線性動態模型且過程雜訊與觀測雜訊可近似為高斯分布之系統。其核心概念在於結合系統模型所提供之預測資訊與感測器量測結果，於不確定性條件下對系統狀態進行最佳化估測。相較於僅依賴單一量測或模型預測，卡爾曼濾波器能有效降低雜訊影響，並提升狀態估測之穩定性與準確度。

以下將先介紹卡爾曼濾波器所採用之狀態空間模型與基本假設，並進一步說明其數學計算流程與演算法架構，最後延伸至應用於非線性系統的擴展卡爾曼濾波器。

2.2.1 狀態空間模型

卡爾曼濾波器以離散時間之狀態空間模型作為系統描述基礎，用以表達系統狀態隨時間之演化關係以及感測器量測與系統狀態之對應關係。一般而言，系統狀態轉移之狀態方程及感測器量測之觀測方程可表示為下列形式：

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad (2.1)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (2.2)$$

其中，

- \mathbf{x}_k ：系統在 k 時刻之狀態向量。
- \mathbf{F}_k ： k 時刻之狀態轉移矩陣，描述系統狀態之動態行為。



- \mathbf{B}_k : k 時刻之控制矩陣，描述控制輸入對狀態之影響。
- \mathbf{u}_k : k 時刻之控制輸入向量。
- \mathbf{z}_k : k 時刻之觀測向量。
- \mathbf{H}_k : k 時刻之觀測矩陣，描述狀態空間與觀測空間之轉換關係。
- \mathbf{w}_k : 過程雜訊，描述未建模動態或外部干擾對系統之影響。
- \mathbf{v}_k : 觀測雜訊，反映感測器量測誤差與環境干擾。

上述模型假設系統為線性系統，且雜訊統計特性已知，相關假設將於下一節中進一步說明。

2.2.2 高斯假設與線性系統前提

卡爾曼濾波器的最佳化性質依賴於兩個主要假設：過程雜訊與觀測雜訊均為期望值為零之高斯白雜訊，且系統模型為線性。具體而言，過程雜訊 \mathbf{w} 與觀測雜訊 \mathbf{v} 分別服從共變異數已知的高斯分佈：

$$\mathbf{P}(\mathbf{w}) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{v}) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}) \quad (2.4)$$

式 (2.3) 及式 (2.4) 中的 \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 分別表示過程雜訊和觀測雜訊的共變異數矩陣，上述假設的意義在於，高斯分佈可由期望值與共變異數完整描述不確定性，使卡爾曼濾波器僅需追蹤狀態的期望值與共變異數，即可獲得最小均方誤差 (Minimum mean-square error, MMSE) 之最佳估測。此外，線性系統假設確保狀態轉移與觀測



關係皆為線性，從而使估測過程可透過遞迴公式有效計算。若系統不滿足線性或高斯假設，卡爾曼濾波器之最佳性將不再成立，此時需採用擴展卡爾曼濾波器。

2.2.3 卡爾曼濾波器基本公式推導

推導卡爾曼濾波器公式的核心邏輯是透過最小化誤差共變異數矩陣的跡 (Trace) 以求得最佳的卡爾曼增益 \mathbf{K}_k 。以下推導過程假設輸入項為 0。

首先分別定義狀態方程與觀測方程：

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

令 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 為 \mathbf{x}_k 之估測值； $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ 為 \mathbf{x}_k 之先驗估測值。

$\mathbf{P}_k = E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T]$ 為誤差共變異數矩陣

$\mathbf{P}_k^- = E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T]$ 為先驗誤差共變異數矩陣

根據 $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ 和 \mathbf{z}_k 來求出 $\hat{\mathbf{x}}_k$

步驟一：預測 (Prediction)

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{F}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}$$

步驟二：更新 (Correction)



$$\nu_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{H}_k (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) + \mathbf{v}_k$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \nu_k$$

其中卡爾曼增益 \mathbf{K}_k 是透過對 $\text{tr}(\mathbf{P}_k)$ 求最小值而得出的。

首先將 \mathbf{P}_k 由定義展開：

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k(\mathbf{K}_k) &= E((\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^- - \mathbf{K}_k \nu_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^- - \mathbf{K}_k \nu_k)^T) \\ &= E((\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^- - \mathbf{K}_k(\mathbf{H}_k(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) + \mathbf{v}_k)) \\ &\quad (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^- - \mathbf{K}_k(\mathbf{H}_k(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) + \mathbf{v}_k))^T) \\ &= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T \mathbf{K}_k^T - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- + \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T \mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \end{aligned}$$

接著使用方向導數：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{tr}(\mathbf{P}_k)}{\partial \mathbf{K}_k} : \mathbf{W} &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \text{tr}(\mathbf{P}_k(\mathbf{K}_k + \varepsilon \mathbf{W})) \\ &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \text{tr}(\mathbf{P}_k^- - \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{K}_k + \varepsilon \mathbf{W})^T - (\mathbf{K}_k + \varepsilon \mathbf{W}) \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \\ &\quad + (\mathbf{K}_k + \varepsilon \mathbf{W}) \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{K}_k + \varepsilon \mathbf{W})^T \\ &\quad + (\mathbf{K}_k + \varepsilon \mathbf{W}) \mathbf{R}_k (\mathbf{K}_k + \varepsilon \mathbf{W})^T) \\ &= \text{tr}(-2\mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T \mathbf{W}^T + 2\mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T \mathbf{W}^T + 2\mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{W}^T) \\ &= 2\text{tr}([\mathbf{K}_k(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k) - \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T] \mathbf{W}^T) \end{aligned}$$

因為我們希望找到一個 \mathbf{K}_k 讓誤差最小，所以在數學上，這個導數必須為零

$$\forall \mathbf{W}, \quad \text{tr} \left([\mathbf{K}_k (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k) - \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T] \mathbf{W}^T \right) = 0$$



而這也代表著

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$$

這是卡爾曼濾波器中最著名的公式，由此可知：最佳的增益是由「先驗誤差共變異數矩陣 (\mathbf{P}^-)」與「觀測雜訊 (\mathbf{R})」的大小決定的。

2.2.4 卡爾曼濾波器流程

1. 初始化 (Initialization) :

於卡爾曼濾波器演算法之初始化階段，需先設定系統之初始狀態估測 $\hat{\mathbf{x}}_0$ ，其可依據系統先驗資訊或已知初始條件進行設定。同時，需指定初始狀態估測之誤差共變異數矩陣 \mathbf{P}_0 ，以描述初始狀態不確定性之大小。 \mathbf{P}_0 通常設為對角矩陣，其對角線上之元素代表各狀態隨機變數之初始估測誤差。此外，過程雜訊共變異數矩陣 \mathbf{Q}_k 與觀測雜訊共變異數矩陣 \mathbf{R}_k 亦需於初始化時給定，其數值反映系統模型與觀測數據之信心程度。

2. 預測 (Prediction) :

於預測階段，卡爾曼濾波器根據系統狀態轉移模型，利用前一時間步之狀態估測對目前狀態進行預測，其表示如下：

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{F}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1}$$

$\hat{\mathbf{x}}_k^-$ 為先驗狀態向量。



同時，系統狀態估測誤差共變異數矩陣亦需進行更新，以反映預測過程中所引入之不確定性，其表示如下：

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_k$$

\mathbf{P}_k^- 為先驗誤差共變異數矩陣， \mathbf{Q}_k 為過程雜訊共變異數矩陣。

3. 更新 (Correction) :

更新階段的核心在於計算卡爾曼增益 (Kalman Gain)。該增益藉由權衡「觀測雜訊共變異數矩陣 \mathbf{R}_k 」與「先驗誤差共變異數矩陣 \mathbf{P}_k^- 」的相對大小，來動態調整狀態估測值。其運作邏輯是：誤差較小的來源，在最終狀態更新中所佔的比例較高。

- 計算卡爾曼增益：

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$$

\mathbf{R}_k 為觀測雜訊共變異數矩陣。

- 狀態向量及誤差共變異數矩陣更新：

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^-$$



4. 迴圈 (Loop) :

以上為一個完整的卡爾曼濾波過程，目前估測出的狀態向量將用於下一次預測的狀態向量輸入，並重複這些步驟。

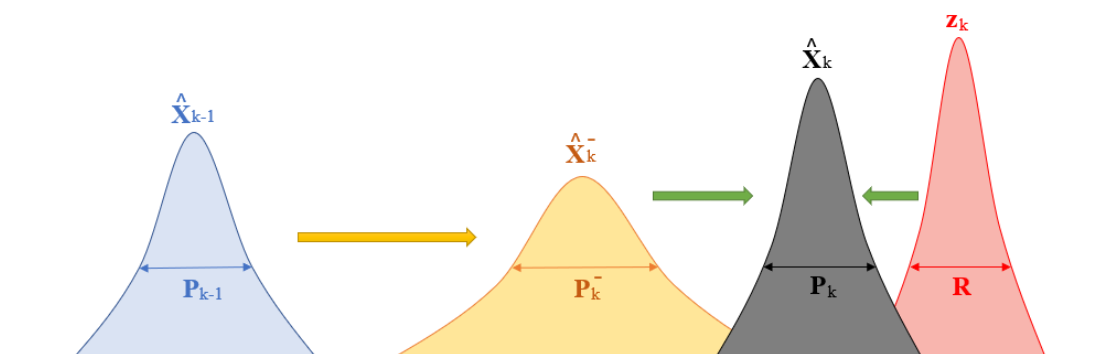


圖 2.1: 卡爾曼濾波器之預測及更新過程

圖 2.1 呈現出卡爾曼濾波器的運作過程，黃色箭頭表示由 $k-1$ 時刻估測出的狀態向量 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ 預測 k 時刻的先驗狀態向量 $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ ，接著綠色箭頭表示先驗狀態向量 $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ 與觀測向量 \mathbf{z}_k 更新後得到 k 時刻的狀態向量 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 。



2.3 擴展卡爾曼濾波器 (Extended Kalman Filter, EKF)

卡爾曼濾波器在系統模型與觀測模型皆為線性，且雜訊符合高斯分佈之假設下，可提供最佳的狀態估測結果。然而，在實際工程應用中，系統動態與觀測關係往往呈現非線性形式，例如：差速車運動學模型、無人飛行器姿態估測或雷達追蹤等，使得線性卡爾曼濾波器難以直接應用。為解決上述問題，擴展卡爾曼濾波器 (EKF) 透過對非線性系統於目前估測點進行線性化，將其近似為線性模型，進而套用卡爾曼濾波器之遞迴估測架構。

非線性系統之狀態轉移方程及觀測方程如下：

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \quad (2.6)$$

f 及 h 分別為狀態轉移函數與觀測函數，然而，這樣的型式無法直接做最佳狀態估測，必須將其線性化後才可使用。

2.3.1 雅可比矩陣 (Jacobian matrix)

在擴展卡爾曼濾波器中，非線性系統需於目前狀態估測點進行線性化處理。此時需要使用雅可比矩陣 (Jacobian matrix) 以描述向量函數對狀態變數之偏微分關係。

雅可比矩陣定義如下：



$$J = \frac{\partial A}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial x_1} & \frac{\partial A_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial A_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x_1} & \frac{\partial A_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial A_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial A_m}{\partial x_1} & \frac{\partial A_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial A_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

其中， A 為多變數向量函數。

在 EKF 中，雅可比矩陣用以近似非線性系統於當前估測點之線性關係，並取代線性卡爾曼濾波器中的狀態轉移矩陣與觀測矩陣。

2.3.2 非線性系統之線性化

在 EKF 中，系統狀態轉移模型與觀測模型可分別表示為式 (2.5) 與式 (2.6) 之非線性函數。為套用卡爾曼濾波器之遞迴估測架構，上述非線性函數需於目前狀態估測點進行一階泰勒級數展開，其雅可比矩陣分別定義為：

$$F = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$H = \frac{\partial h}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \frac{\partial h_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

式 (2.8) 及式 (2.9) 分別為狀態轉移函數與觀測函數之雅可比矩陣。

經線性化後，擴展卡爾曼濾波器可沿用卡爾曼濾波器之預測與更新架構，差異在於狀態轉移矩陣與觀測矩陣需於每一時間步根據目前狀態估測重新計算，以反映非線性系統之局部線性特性。

下列為擴展卡爾曼之預測與更新之公式：

• 預測：

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, 0)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_k$$

• 更新：

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_k^-, 0))$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^-$$

以上為擴展卡爾曼濾波器的公式，式中的 \mathbf{F} 及 \mathbf{H} 為狀態轉移函數及觀測函數之雅可比矩陣。



2.3.3 擴展卡爾曼濾波器流程圖及模擬

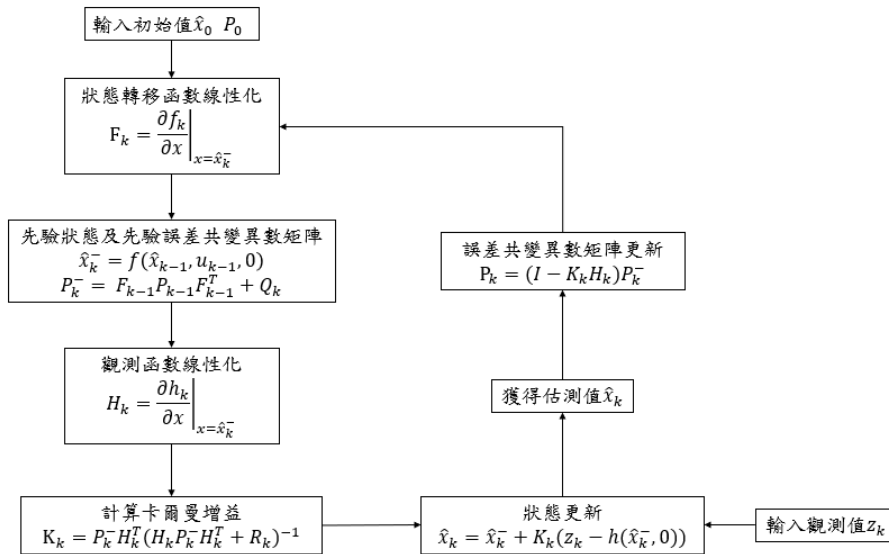


圖 2.2: 擴展卡爾曼濾波器流程圖

為了更清楚說明擴展卡爾曼濾波器於非線性系統中的實際運作流程，本研究將 EKF 之演算法步驟整理如圖 2.2 所示。與線性卡爾曼濾波器不同，EKF 於預測與更新階段皆需根據目前狀態估測，即時計算系統模型與觀測模型之雅可比矩陣，以進行非線性模型的一階線性化。

在預測階段，濾波器首先利用非線性狀態轉移函數對系統狀態進行預測，並計算對應之狀態轉移雅可比矩陣以更新誤差共變異數矩陣；當觀測數據可得時，則利用非線性觀測模型進行狀態更新，完成狀態向量與誤差共變異數矩陣之修正。上述流程於每一時間步重複執行，形成一遞迴式之非線性狀態估測系統。

圖 2.3 為模擬 EKF 應用於載具在平面之運動。

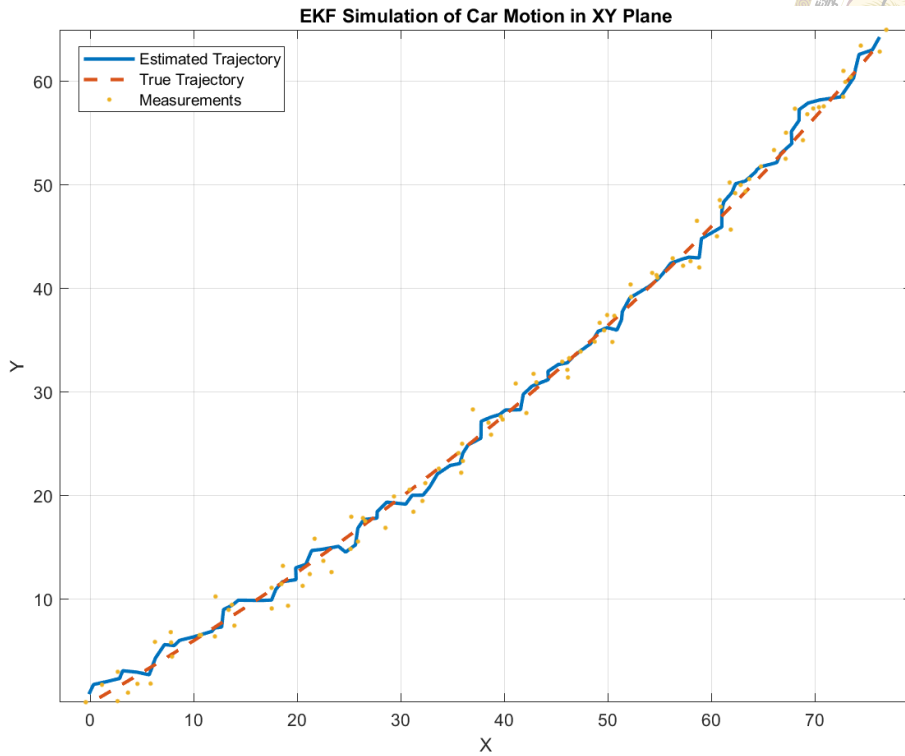


圖 2.3: 擴展卡爾曼濾波器模擬

狀態向量：

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ v_k \\ \theta_k \\ \omega_k \end{bmatrix}$$

狀態轉移方程：

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} x_k + v_k \cos(\theta_k) \Delta t \\ y_k + v_k \sin(\theta_k) \Delta t \\ v_k \\ \theta_k + \omega_k \Delta t \\ \omega_k \end{bmatrix} + \mathbf{w}_k$$

觀測方程：

$$\mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ v_k \\ \theta_k \\ \omega_k \end{bmatrix} + \mathbf{v}_k$$



由圖 2.3 可得知，藍色的估測路徑會藉由黃色點的觀測值達到修正的目的，以貼近真實路徑。



第三章 同步定位與建圖 (SLAM) 系統 設計方法

3.1 SLAM 理論基礎與架構

本章將在 Aycock 所提出的研究 [1] 基礎之上，引入新的方法，進一步提升同步定位與建圖 (SLAM) 系統的性能。在說明 SLAM 系統的各個處理步驟之前，首先需要理解系統中各項模組與矩陣如何在不同模組之間傳遞與互動。根據所構建之 SLAM 系統架構，其基本流程可分為五個主要步驟，分別為定位與狀態預測、環境觀察與地標提取、數據關聯、濾波器更新以及地圖擴增。

圖 3.1 展示單一時間步內 SLAM 系統中各模組之數據流向關係。由圖中可清楚觀察到，系統首先由里程感測器與光達感測器取得觀測數據，經由狀態預測與觀測模型進行處理後，依序完成地標提取、數據關聯與濾波器更新，最終將可信之地標資訊納入地圖中完成地圖擴增。

此外，圖中亦顯示地圖擴增模組所更新之狀態與地圖資訊，將回饋至下一時間步之狀態預測階段，使系統得以在時間序列上持續進行定位與建圖。於此流程圖中，紅色方塊代表實體感測器設備，箭線表示數據傳遞方向，而藍色方塊則對應於擴展卡爾曼濾波器 (EKF) 架構下之五個主要處理模組。

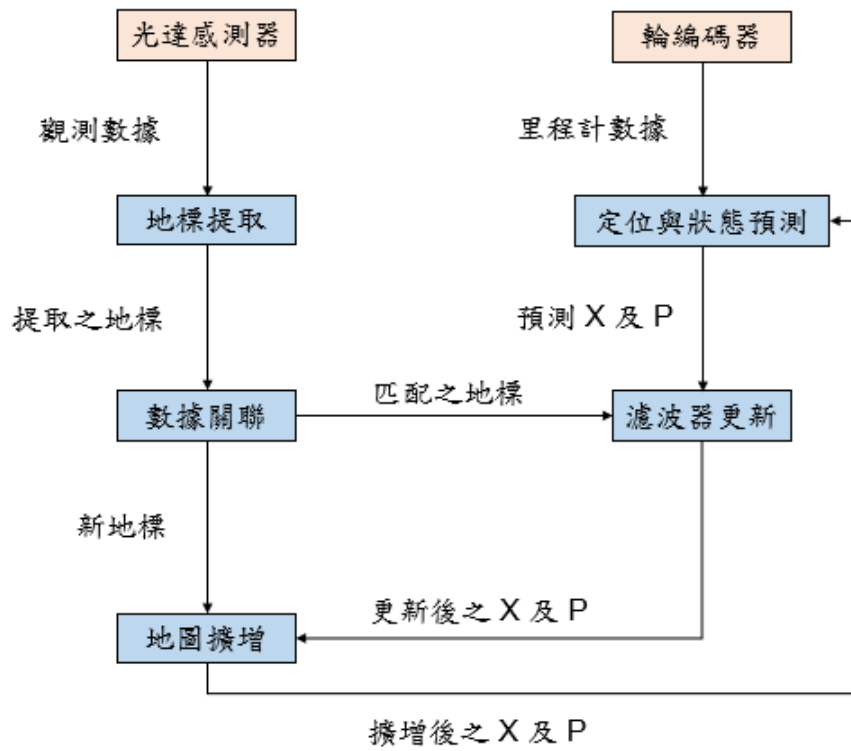


圖 3.1: SLAM 系統流程圖

圖 3.2 為本研究所使用之載具及其狀態示意圖，由圖中可知，載具分別有三個狀態 (x_r, y_r, θ_r) ，而地標的位置表示為 (x_i, y_i) 。

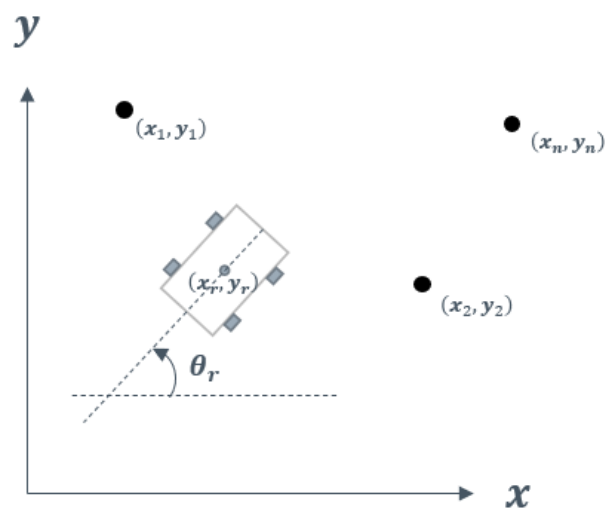


圖 3.2: 載具模型示意圖



系統狀態 (\mathbf{X}) 及誤差共變異數矩陣 (\mathbf{P}) 是整個 SLAM 系統的關鍵。 \mathbf{X} 包含載具的位置與姿態 (x_r, y_r, θ_r) 及每個地標的位置 (x_i, y_i) ， \mathbf{X} 矩陣的元素如式 (3.1) 所示：

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ \theta_r \\ x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

本研究所採用之狀態向量表示中，狀態向量內前三個元素用以描述無人載具於平面空間中的位置與姿態；其餘元素則依序表示環境中各地標之位置狀態，由第 1 個地標至第 n 個地標排列，其中 n 代表目前地圖中所包含之地標數量。

\mathbf{X} 的大小可由式 (3.2) 計算：

$$size(\mathbf{X}) = 3 + 2n \quad (3.2)$$

在同步定位與建圖系統中，誤差共變異數矩陣 \mathbf{P} 為描述系統不確定性與狀態間相關性之關鍵矩陣，亦為影響 SLAM 整體效能與穩定性之重要因素。共變異數用以衡量兩個隨機變數之間的相關程度，因此，共變異數矩陣可用來表示系統狀態中各變數之線性相依關係。



於 EKF-SLAM 系統中，共變異數矩陣同時包含無人載具自身狀態之不確定性、各地標位置之不確定性，以及載具與地標之間、不同地標彼此之間的交互相關性。換言之，該矩陣完整描述了載具狀態與環境地圖之間的統計關係。

為利於系統分析與實作，共變異數矩陣可依狀態向量之結構分割為多個子矩陣，其配置形式如式 (3.3) 所示。由於載具狀態與地標狀態之維度不同，各子矩陣之維度亦不盡相同。

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} & \dots & \dots \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \dots & \mathbf{F} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \mathbf{E} & \dots & \mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

依據狀態向量之定義，共變異數矩陣可進一步分割為多個具備明確物理意義之子矩陣。位於矩陣左上角之子矩陣 \mathbf{A} 為一 3×3 矩陣，用以描述載具位置與姿態狀態之共變異數。

與載具狀態相關之非對角子矩陣 \mathbf{B} 與 \mathbf{C} 分別表示載具狀態與第一個地標之交互共變異數，其中 \mathbf{B} 為 2×3 矩陣，而 \mathbf{C} 則為其轉置矩陣，維度為 3×2 。此類子矩陣沿共變異數矩陣之第一列與第一行依序排列，用以描述載具狀態與各地標之相關性。

位於對角線位置之子矩陣 \mathbf{D} 為一 2×2 矩陣，表示第一個地標自身之位置共變異數。相同形式之子矩陣將沿共變異數矩陣主對角線延伸，直至最末一個地標，其對應之子矩陣記為 \mathbf{G} ，用以描述最後一個地標之位置不確定性。

其餘非對角之子矩陣 **E** 與 **F** 則分別表示不同地標彼此之間的交互共變異數，且兩者互為轉置矩陣，維度皆為 2×2 。此類子矩陣依地標間之相關性分布於矩陣。其餘區域，構成完整之共變異數結構。



由這些分割子矩陣，**P** 矩陣的維度可以由式 (3.4) 計算：

$$size(\mathbf{P}) = (3 + 2n)^2 \quad (3.4)$$

由式 (3.2) 與式 (3.4) 可得知，**X** 的元素數目與 **P** 的主對角線元素數目相同皆為 $3 + 2n$ ，此乃因 **X** 向量與 **P** 矩陣分別描述載具狀態與地標狀態及彼此的不確定性。



3.2 定位與預測

在同步定位與建圖系統中，狀態預測為整體演算法的第一個處理步驟，其主要目的在於根據控制輸入或里程計資訊，推估載具於下一時間步之狀態。因此，狀態預測模型必須能夠合理描述載具的運動行為，以作為後續觀測更新與地圖建構之基礎。

3.2.1 無人載具差速驅動模型

移動機器人可採用多種不同形式之運動機構，例如步行、飛行或滾動等。其中，輪式驅動因具備結構簡單、效率高且易於實現穩定控制等優點，為行動機器人中最為常見之運動方式。相較於其他運動形式，輪式系統在靜態平衡與控制設計上亦較為容易，特別適合應用於日常環境。

本研究採用之無人載具為圖 3.3 之輪式差速驅動 (Differential drive) 平台，其配置如圖，載具前方為具有圓形黑色光達之方向；載具後方左右兩側各設置一獨立黑色驅動輪，並透過分別控制左右輪之轉速，以實現直線運動、後退運動及各種轉向動作；前方咖啡色輪為輔助輪，用於保持平衡。由於左右驅動輪可獨立控制，差速驅動架構允許載具進行原地旋轉，使其具備零轉彎半徑之運動能力，此特性在狹小或複雜環境中具有相當之實用性。基於上述差速驅動架構，本研究建立相對應之運動模型，並結合輪編碼器所提供之里程計資訊，作為 EKF-SLAM 系統中狀態預測階段之運動模型基礎。

在 SLAM 系統中，里程計資訊被用於進行載具之航位推算 (Dead reckoning)，作為狀態預測階段的主要輸入來源。系統於左右兩側驅動輪各配置一組輪編碼器，以量測輪子轉動情形，進而累積推算各輪於時間間隔內之行進距離。

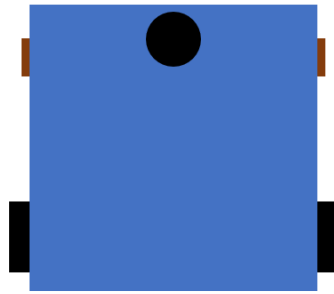


圖 3.3: 輪式差速無人載具

輪編碼器為一種用以監測輪子轉動角度或轉數之感測裝置，透過連續量測可估算輪子之位移量。在每一離散時間步中，系統根據輪編碼器所回傳之旋轉資訊，分別計算左右輪之行進距離，並由此推導載具於該時間步內之線位移與角位移。

根據純滾動差速輪載具之運動特性，線位移與角位移之計算方式如式 (3.5) 與式 (3.6) 所示，並作為狀態預測函數中運動模型之輸入，以推估無人載具於下一時間步之狀態。

$$d_{linear} = \frac{d_{rw} + d_{lw}}{2} \quad (3.5)$$

$$d_{angular} = \frac{d_{rw} - d_{lw}}{d_{wheelbase}} \quad (3.6)$$

其中， d_{rw} 與 d_{lw} 分別為右輪與左輪於時間間隔 Δt 內之行進距離，該距離由輪編碼器之旋轉量換算而得； $d_{wheelbase}$ 則為載具之輪距，定義為左右輪輪胎接地中心之間的實際幾何距離。



3.2.2 狀態預測

當線位移與角位移計算完成後，即可依據差速輪載具之運動模型，推算載具於當前時刻 k 之狀態變化量，包括位置座標 x_r, y_r 及姿態角 θ_r 。相關之狀態更新關係式如式 (3.7) 至式 (3.9) 所示，其中 $\theta_{r_{k-1}}$ 表示前一時刻 $k-1$ 時之載具姿態角，該值儲存於狀態向量 \mathbf{X} 的第 3 個元素位置。

$$\theta_{r_k} = \theta_{r_{k-1}} + d_{angular} \quad (3.7)$$

$$\Delta x_r = d_{linear} \times \cos(\theta_{r_k}) \quad (3.8)$$

$$\Delta y_r = d_{linear} \times \sin(\theta_{r_k}) \quad (3.9)$$

由式 (3.7) 至式 (3.9) 所計算之結果，可用於估測載具於單一時間步內之位置與姿態變化量，並作為狀態預測模型之輸入，以推估載具於下一時間步之先驗狀態。於擴展卡爾曼濾波器架構中，該預測模型需透過適當之數學式表示，以將里程計數據引入濾波器進行狀態推估。

以下將差速輪載具之里程計運動模型表示為一狀態轉移函數向量 \mathbf{f} ，其為一 3×1 向量，用以描述載具於時間步 k 之狀態增量，本研究僅使用狀態轉移項，並無使用控制輸入項，相關數學形式如式 (3.10) 所示。

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x_{r_{k-1}} + \Delta x_r \\ y_{r_{k-1}} + \Delta y_r \\ \theta_{r_k} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

為進一步描述狀態預測模型對系統狀態之線性化關係，需對狀態轉移函數向量 \mathbf{f} 進行一階泰勒級數展開，並計算其對狀態向量之 Jacobian 矩陣。由此可得一 3×3 之狀態轉移矩陣 \mathbf{F} ，其定義如式 (3.11) 所示，並用於共變異數矩陣之預測及更新。

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta y_r \\ 0 & 1 & \Delta x_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

最後，需建立系統之過程雜訊模型以描述里程計誤差對狀態預測之影響。過程雜訊矩陣的建構方式有多種，在此採用一加權係數 c 作為誤差調整參數，用以反映不同環境條件與硬體特性下之里程計不確定性。透過調整參數 c ，可使模型更貼近實際系統所產生之誤差行為。

根據所設定之加權係數 c 與取樣時間間隔 Δt ，建立過程雜訊共變異數矩陣 \mathbf{Q} 。該矩陣為 3×3 之對稱矩陣，用來描述機器人在位置與朝向角狀態的不確定性，其形式如式 (3.12) 所示。此雜訊矩陣將於每一時間步驟中引入擴展卡爾曼濾波器之預測階段，以提升狀態估測在實際應用中的穩定性與可靠度。

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} c\Delta x_r^2 & c\Delta x_r\Delta y_r & c\Delta x_r\Delta t \\ c\Delta y_r\Delta x_r & c\Delta y_r^2 & c\Delta y_r\Delta t \\ c\Delta t\Delta x_r & c\Delta t\Delta y_r & c\Delta t^2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

在預測階段中，擴展卡爾曼濾波器利用狀態轉移函數 \mathbf{f} 對應之 Jacobian 矩陣 \mathbf{F} ，以及過程雜訊共變異數矩陣 \mathbf{Q} 計算 k 時刻之預測狀態向量 \mathbf{X} 與對應之誤差共變異數矩陣 \mathbf{P} 。

首先， \mathbf{X} 矩陣中只有前三個元素被改變，如式 (3.13) 所示。



$$\mathbf{X}_{1:3} = \mathbf{f} \quad (3.13)$$

值得注意的是，在預測階段中，地標的位置狀態並不會進行更新，僅透過載具運動模型對自身狀態進行推估。隨後，誤差共變異數矩陣 \mathbf{P} 中左上角對應載具狀態之 3×3 子矩陣，依據式 (3.14) 進行更新，以反映由里程計不確定性所引入的誤差傳遞。

$$\mathbf{P}_{1:3,1:3} = \mathbf{F}\mathbf{P}_{1:3,1:3}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q} \quad (3.14)$$

上述更新使載具位置的不確定性會隨其運動型態及預期誤差大小而相應增加，以合理反映里程計模型所帶來的累積誤差。最後，依據式 (3.15) 對載具狀態與各地標之間的共變異數進行更新，其中 end 表示共變異數矩陣 \mathbf{P} 的維度範圍。

$$\mathbf{P}_{1:3,4:end} = \mathbf{F}\mathbf{P}_{1:3,4:end} \quad (3.15)$$

由於 \mathbf{P} 矩陣具有對稱性，因此在完成前述更新後，仍需依據式 (3.16) 對其對稱位置進行相應調整，以確保矩陣結構的一致性。

$$\mathbf{P}_{4:end,1:3} = \mathbf{P}_{1:3,4:end}^T \quad (3.16)$$

其中，該子矩陣 $\mathbf{P}_{1:3,4:end}$ 之維度為 $3 \times 2n$ ， n 表示目前地圖中所包含的地標數目。至此，即完成同步定位與建圖系統中預測步驟之全部計算流程。



3.3 觀察與地標提取

地標提取在 SLAM 當中為一項關鍵功能，其正確性將直接影響濾波器之穩定性與整體定位與建圖結果之準確度。於完成狀態預測步驟後，系統將等待來自環境感測器之觀測數據；當觀測數據取得後，即啟動地標提取流程。

由於地標提取主要屬於感測數據的前處理與特徵提取，其運作過程並非直接對擴展卡爾曼濾波器所使用之狀態向量與誤差共變異數矩陣進行運算，故難以用單一數學模型加以完整描述。然而，其整體流程仍可依據實際感測數據之處理步驟進行系統性說明。

3.3.1 光達 (LiDAR) 感測原理與數據特性

光達通常能於短時間內對大視角範圍進行多角度掃描，本研究所使用之光達感測器屬於三角測量式光達，其原理為發射雷射光束至目標物表面，並接收反射光在感測元件上的成像位置變化，透過幾何三角關係計算目標與感測器之距離。

由於光達能夠提供大量且可靠的環境量測數據，對於 SLAM 系統中的狀態估測與地標提取具有相當大的助益。然而，其硬體成本相對較高，亦為實務應用上需考量之限制因素之一。

光達之硬體成本相對較高，主要源於其具備大視角掃描能力、高掃描頻率、高角度解析度，以及能於單次掃描中同時量測不同角度方向之多個目標物。此外，部分高階光達感測器之有效量測距離可達約 30 公尺，進一步提升其於室內外環境中之適用性。

由於細小的角度解析度可產生高密度之數位距離量測數據，使得系統能夠更精確地提取環境中特徵點與地標位置，進而提升 SLAM 演算法之整體效能。基於上述優點，光達已被廣泛且成功地應用於多種 SLAM 系統中。



3.3.2 基於密度之聚類演算法 (DBSCAN)

本研究使用 DBSCAN (Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise) 聚類演算法處理光達所收集到的數據，因為感測器感知環境資訊時，常常因不可抗力之因素而帶有些許雜訊，這些雜訊將導致後續的濾波器更新產生困難甚至系統發散，故使用 DBSCAN 將雜訊去除，只留下有用的感測數據。

DBSCAN 具有以下幾項優點：

- 聚類由數據點的高密度區域組成，而密度低的區域則被視為雜訊 (Noise)。
- 不需要事先指定聚類數量，能自動辨識任意形狀的聚類。
- 適合應用在空間數據、光達掃描點雲、圖像分割等問題。

DBSCAN 有兩個主要參數：

1. ϵ (Epsilon)：鄰域半徑，用來判斷一個點周圍哪些點屬於它的鄰域。
2. MinPts：在半徑 ϵ 內需要至少多少點才能形成一個核心點。



演算法流程：

1. 種子點選取與鄰域檢查：演算法首先於數據集中隨機選取未標記之點作為種子，並以預設半徑 ϵ 檢索其鄰域內的點密度。
2. 核心點判定與簇類初始化：若鄰域內的點數達到最小閾值 MinPts ，則該點被定義為核心點，並以此建立新的聚類簇。
3. 密度可達性擴張：演算法遞迴地將核心點鄰域內的所有點納入簇中。若鄰域內包含其他核心點，則進一步合併其鄰域，實現簇類的正向擴張。
4. 雜訊識別與分類完成：所有無法經由密度路徑連接的孤立點最終被歸類為雜訊。此過程持續進行直到所有觀測點皆完成分類。

如圖 3.4 所示，此例之 MinPts 為 4，則 A 可視為一群，其餘將被視為雜訊濾除。最後，將此 A 聚類計算出平均位置並將此平均位置視為一地標。

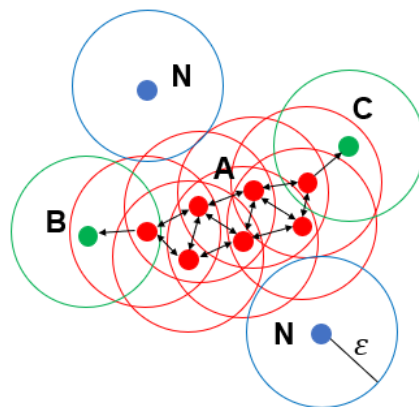


圖 3.4: DBSCAN 示意圖

經過 DBSCAN 提取出的地標結果，將以 $2 \times o$ 矩陣形式輸出給數據關聯模組，其中 o 表示當前提取出的地標數量。該矩陣記作 \mathbf{z} ，其結構如式 (3.17) 所示。

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} r_{z_1} & r_{z_2} & \dots & r_{z_o} \\ b_{z_1} & b_{z_2} & \dots & b_{z_o} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

其中，變數 b_{z_i} 表示第 i 個被提取地標的方位角 (Bearing)，即該地標相對於載具座標系的方向。變數 r_{z_i} 則表示第 i 個地標的量測距離 (Range)，即載具中心至該地標之直線距離。

此外，另一個 $2 \times o$ 矩陣 \mathbf{z}' 也提供了數據關聯過程中所需的重要資訊，其結構如式 (3.18) 所示。

$$\mathbf{z}' = \begin{bmatrix} x_{z_1} & x_{z_2} & \dots & x_{z_o} \\ y_{z_1} & y_{z_2} & \dots & y_{z_o} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

矩陣 \mathbf{z}' 與 \mathbf{z} 結構相似，但不同之處在於， \mathbf{z}' 儲存每個地標的全域座標 x 與 y 的位置。該全域位置是透過矩陣 \mathbf{z} 中的量測距離與方位角資訊，結合載具當前狀態向量 \mathbf{X} 的資訊計算而得。第 i 個地標的 $[x, y]$ 全域位置計算方式如式 (3.19) 與式 (3.20) 所示。

$$x_{z_i} = x_r + (r_{z_i} \cos(b_{z_i} + \theta_r)) \quad (3.19)$$

$$y_{z_i} = y_r + (r_{z_i} \sin(b_{z_i} + \theta_r)) \quad (3.20)$$



3.4 數據關聯 (Data association)

在完成地標提取後，下一步便是將新觀測到的地標與地圖中既有地標進行比較，亦即數據關聯。數據關聯在 SLAM 系統中的正確性將直接影響濾波器更新與地圖擴增的準確度。

實務上，地標的觀測數據可能受到觀測雜訊、遮蔽或環境複雜度的影響，因此需要採用可靠的方法來判斷新地標與現有地標之間的對應關係。本研究將依據地標的幾何位置與不確定性資訊，採用最近鄰方法 (Nearest-Neighbor Approach) 結合馬哈拉諾比斯距離 (Mahalanobis distance) 與歐幾里德距離 (Euclidean distance) 雙重判斷策略，以提高數據關聯的精確性與穩定性。

3.4.1 最近鄰方法 (Nearest-Neighbor Approach)

最近鄰方法是一種依據特徵空間（本研究為二維平面）中最短距離來比較地標的方法。在數據關聯過程中，將每個新提取的地標 $[x, y]$ 與地圖中所有既有地標的位置進行比較，並選取距離最短的地標作為候選對應。此對應地標隨後會送入數據關聯流程的下一步。

然而，並非所有提取到的地標都能直接與距離最近的存儲地標成功對應。為避免錯誤匹配，使用驗證閘 (Validation gate)，將數據關聯方法改為帶閘值的最近鄰方法。驗證閘通常依據最小閘值與最大閘值進行設定：若地標距離小於最小閘值則視為匹配，而觀測地標僅當距離大於最大閘值時才送入地圖擴增 (Map augmentation) 模組。後續將最小閘值與最大閘值分別稱為「拒絕閘 (Rejection gate)」與「擴增閘 (Augmentation gate)」。

此外，最近鄰方法中的距離計算方式亦有多種選擇，常見者包括歐氏距離 (Euclidean distance) 與馬氏距離 (Mahalanobis distance)。兩者的比較與應用細節將於本章後續進一步說明。



3.4.2 馬哈拉諾比斯距離 (Mahalanobis distance)

馬氏距離 [8] 是一種計算點與多維分佈中心之間距離的方法，它考慮了各維度數據的離散程度及彼此之間的相關性，因此在本研究中使用馬氏距離相較於單純計算歐幾里德距離 (Euclidean distance) 更適合應用於狀態具有不確定性及相關性與不同尺度的數據。

對於隨機向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ ，其期望值為 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T$ ，共變異數矩陣為 $\boldsymbol{\Sigma}$ ，馬氏距離的數學表達式定義在下列公式 (3.21)：

$$D_M = \sqrt{(\mathbf{a} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{a} - \boldsymbol{\mu})} \quad (3.21)$$

上述公式內的期望值 $\boldsymbol{\mu}$ 可替換為與 \mathbf{a} 具有相同機率分佈的隨機向量，若共變異數矩陣 $\boldsymbol{\Sigma}$ 為非單位矩陣之對角矩陣，則稱為正規化歐幾里德距離；若 $\boldsymbol{\Sigma}$ 矩陣為單位矩陣，則將簡化為歐幾里德距離。

在最近鄰演算法中使用馬氏距離計算地標間距離具有其優點與限制。其主要優點可由圖 3.5 與圖 3.6 所示之範例加以說明。

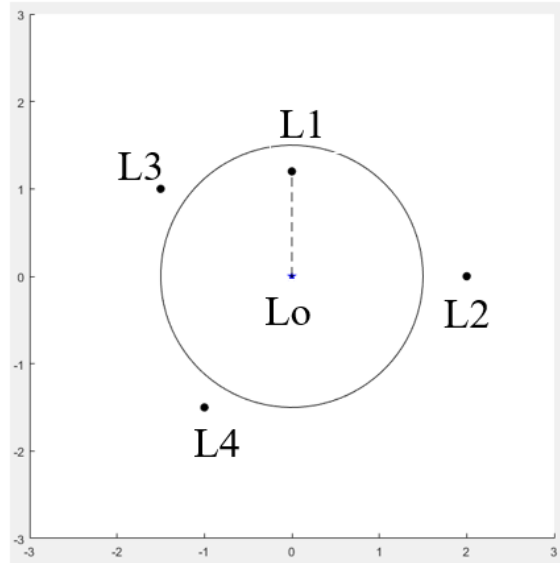


圖 3.5: 歐氏距離下之地標分佈

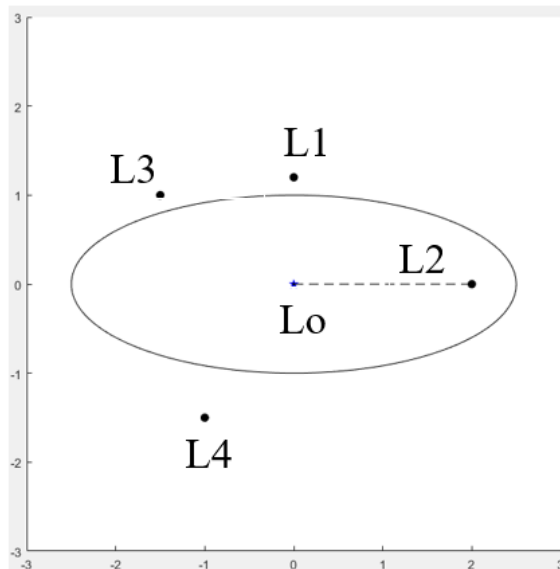


圖 3.6: 馬氏距離下之地標分佈

以標準歐氏距離計算時，觀測到的地標 L_o 可能會被判定與地標 L_1 最接近。然而，若採用馬氏距離進行計算，最近鄰實際上應為 L_2 。因此，當變數間的共變異數已知時，基於馬氏距離的最近鄰技術在數據關聯上更為可靠，能有效降低因量測誤差或地標位置不確定性所導致的錯誤匹配。

本節所採用的數據關聯演算法使用帶閾值的最近鄰方法。對每個被提取的地標，皆會計算其與地圖中所有已存地標之距離，並套用閾值判斷。地圖中存儲的地標位置資訊可由先前所述的狀態向量 \mathbf{X} 中取得。



首先，使用當前估測的載具狀態 (x_r, y_r, θ_r) 以及儲存的第 j 個地標位置 (x_j, y_j) 來預測地標的 [距離，方位]。

$$\mathbf{z}_{p_j} = \begin{bmatrix} r_{p_j} \\ b_{p_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(x_j - x_r)^2 + (y_j - y_r)^2} \\ \tan^{-1} \left(\frac{y_j - y_r}{x_j - x_r} \right) - \theta_r \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

對於每一個被提取之地標及其對應的已關聯地標，皆可計算一個如上式 (3.22) 維度為 2×1 的觀測向量 \mathbf{z}_p 。此向量作為後續觀測更新步驟之輸入。接著，計算觀測模型相對於載具狀態向量的 Jacobian 矩陣。該 Jacobian 矩陣記為 \mathbf{H} ，其維度為 $2 \times m$ ，其中 m 代表狀態向量 \mathbf{X} 的長度。矩陣 \mathbf{H} 的具體推導與計算方式如式 (3.23) 與式 (3.24) 所示。

$$\mathbf{H}_{1:2,1:3} = \begin{bmatrix} \frac{x_r - x_j}{r_{p_j}} & \frac{y_r - y_j}{r_{p_j}} & 0 \\ \frac{y_j - y_r}{r_{p_j}^2} & \frac{x_r - x_j}{r_{p_j}^2} & -1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{H}_{(1:2),(2j+2:2j+3)} = \begin{bmatrix} \frac{x_j - x_r}{r_{p_j}} & \frac{y_j - y_r}{r_{p_j}} \\ \frac{y_r - y_j}{r_{p_j}^2} & \frac{x_j - x_r}{r_{p_j}^2} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

\mathbf{H} 矩陣中剩餘的行皆以 0 填充。

在完成 \mathbf{z}_{p_j} 與觀測模型 Jacobian 矩陣 \mathbf{H} 的計算後，下一步為計算創新矩陣 (Innovation matrix) \mathbf{S} ，其結果將作為後續馬氏距離計算之關鍵依據。首先，利用式 (3.25) 計算預測地標與實際量測地標之差值，該差值向量亦稱為創新向量 (Innovation vector) \mathbf{v} ，用以描述目前量測與預測之間的偏差。

$$\mathbf{v} = \mathbf{z} - \mathbf{z}_p \quad (3.25)$$

根據式 (3.26) 計算創新矩陣 \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} = \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T + \mathbf{R} \quad (3.26)$$



由於觀測模型之 Jacobian 矩陣 \mathbf{H} 具有稀疏特性，在實際計算創新矩陣時可加以最佳化，以避免不必要的矩陣乘法運算。具體而言，矩陣中對應為零之元素不納入計算，可有效降低計算複雜度。經由最佳化後所得到之創新矩陣 \mathbf{S} 為一 2×2 矩陣。在式中， \mathbf{R} 表示觀測雜訊之共變異數矩陣，其維度同為 2×2 ，並設定為對角矩陣，用以描述觀測感測器在距離與方位角量測上的雜訊特性。此矩陣為事先定義之參數，可依據感測器性能與實驗環境進行調整。最後，為實作具驗證機制之最近鄰數據關聯方法，進一步計算關鍵判斷變數 n_{is} ，其計算方式如式 (3.27) 所示，並作為後續拒絕門檻與地標擴增判斷之依據。

$$n_{is} = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{v}} \quad (3.27)$$

式 (3.27) 之計算將針對所有已擷取之地標與地圖中對應候選地標逐一進行。所得到之 n_{is} 數值可視為兩地標間之馬氏距離，用以衡量觀測地標與既有地標在考慮共變異數情況下的相似程度。在數據關聯過程中，所有 n_{is} 皆需通過拒絕門檻 (Rejection gate) 之檢驗。當 n_{is} 小於拒絕門檻時，該地標配對即被視為一有效之關聯結果。若對於同一觀測地標存在多組候選配對同時通過拒絕門檻，則選擇其中馬氏距離最小者，作為最終之地標關聯結果。

完成數據關聯後，所有成功配對之觀測地標與地圖地標將被彙整至一矩陣 \mathbf{z}_f 中。此矩陣為一 $2 \times a$ 矩陣，其中 a 表示通過關聯判斷之地標配對數量。矩陣中每一行對應一組成功關聯之地標，其第一列與第二列分別儲存第 j 個觀測地標之量



測距離 (r_j, b_j) 。

此外，為了記錄每一觀測地標所對應之地圖地標編號，另定義一向量 \mathbf{id}_f ，用以儲存成功配對之地標識別碼。該識別碼即為地標於狀態向量 \mathbf{X} 中之索引位置，藉此可在後續濾波器更新階段中，正確存取對應之地標狀態與其共變異數。

除了已成功完成關聯之地標集合 \mathbf{z}_f 外，數據關聯程序亦會輸出潛在之新地標資訊。然而，為避免將雜訊或重複特徵誤納入地圖中，並非所有未能匹配之觀測地標皆會直接進行地圖擴增。為此，進一步引入擴增門檻 (Augmentation gate) 作為新地標建立之判斷依據。在擴增判斷過程中，仍以前述之馬氏距離指標 n_{is} 作為量化準則。當某觀測地標與地圖中所有既有地標之 n_{is} 值皆大於擴增門檻時，表示該觀測地標在統計意義上與既有地標具有足夠區隔性，因而被視為一有效之新地標，並允許加入地圖中。所有通過擴增門檻判斷之新地標將被儲存於新地標矩陣 \mathbf{z}_n 中。矩陣 \mathbf{z}_n 為一 $2 \times k$ 矩陣，其中 k 代表新加入地標之數量。其內容與 \mathbf{z}_f 類似，每一行分別紀錄第 j 個新地標之量測距離 r_j 與方位角 b_j 。由於新地標尚未與地圖中任何既有地標建立對應關係，因此不需額外定義地標識別碼向量。

3.4.3 歐幾里德距離 (Euclidean distance)

相較於馬氏距離需考慮量測不確定性與共變異數結構，歐氏距離則為一較為直觀之距離計算方式。歐氏距離可視為二維空間中兩點之幾何直線距離，其計算過程不涉及任何統計特性或外在關聯資訊，僅根據地標在平面座標系下之位置差異進行評估。具體而言，兩地標間距離係由畢氏定理推導而得，藉以反映其在空間上的實際幾何間隔。對於兩組坐標 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 和 $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ ，點 a 和點 b 之間的歐幾里得距離可以使用式 (3.28) 計算：

$$D_E = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2} \quad (3.28)$$



實務上，為了避免在地圖中重複新增相同地標，本研究在數據關聯時除了使用馬氏距離進行判斷外，進一步加入歐氏距離作為第二道檢查。具體而言，當新觀測到的地標與現有地標的馬氏距離超過預設閾值時，系統再計算其與現有地標的歐氏距離，只有當兩者皆不符合既有地標的條件時，才將其視為新的地標並新增至地圖中。此方法藉由結合馬氏距離對地標估測不確定性的考量與歐氏距離的幾何直觀性，有效降低了重複新增地標的情況。



3.5 濾波器更新

在 SLAM 的第四個主要功能為濾波器的更新步驟。此步驟可採用多種運算策略，通常涉及矩陣乘法及共變異數矩陣的反矩陣運算。濾波器更新過程中，卡爾曼增益的計算依據式 (3.29) 進行。

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}^T)^{-1} \quad (3.29)$$

卡爾曼增益 \mathbf{K} 用於決定各地標及載具位置在觀測到特定地標後應更新的幅度。該增益既可對每個觀測地標單獨計算，也可透過批次處理功能一次性計算所有數據關聯產生的地標對。在批次更新方法中，雖然矩陣規模較大且計算較複雜，但可降低運算資源的消耗並提供更多計算優化空間。本研究採用此批次更新策略，以提升運算效率與系統穩定性。

根據 Kalman 增益，新的狀態向量依照式 (3.30) 計算。

$$\mathbf{X} = \mathbf{X} + \mathbf{K}\mathbf{v} \quad (3.30)$$

在濾波器更新步驟中，卡爾曼增益 \mathbf{K} 與創新向量 \mathbf{v} 被用來計算狀態向量 \mathbf{X} 的修正值。同時，為了反映各個地標與載具狀態之間的關聯性，共變異數矩陣 \mathbf{P} 亦需更新，其計算方法如式 (3.31) 所示。

$$\mathbf{P} = \mathbf{P} - (\mathbf{P}\mathbf{H}^T\mathbf{S}^{-1})\mathbf{S}(\mathbf{P}\mathbf{H}^T\mathbf{S}^{-1})^T \quad (3.31)$$

\mathbf{X} 和 \mathbf{P} 的計算完成了狀態更新的步驟。



3.5.1 喬列斯基分解 (Cholesky decomposition)

濾波器的更新步驟中，存在可進行運算優化的可能性。在批次更新方法中，創新矩陣 \mathbf{S} 的規模會隨關聯地標數量 n 而增大，最大可達 $2n \times 2n$ 。對於小型矩陣，如 2×2 ，求反運算相對簡單，但矩陣規模增加時，直接計算反矩陣的難度呈指數增加。

Cholesky 分解可將一個對稱且正定的矩陣分解為下三角矩陣及其轉置的乘積。在本研究中，由於創新矩陣 \mathbf{S} 具有對稱且正定的性質，因此選用 Cholesky 分解求反矩陣，此方法運算效率高，可有效計算大矩陣的反矩陣，且具有良好的數值穩定性。

3.6 地圖擴增

當濾波器更新步驟完成對狀態向量 \mathbf{X} 與誤差共變異數矩陣 \mathbf{P} 的修正後，系統進入最新的狀態。接下來為了加入新觀測到的地標，狀態向量 \mathbf{X} 與誤差共變異數矩陣 \mathbf{P} 必須進行擴增。

先前計算得到的 \mathbf{z}_n 矩陣將用於新增地標的處理。對於每個新加入的地標，系統會生成兩個最終的 Jacobian 矩陣。以第 i 個地標為例，其位置資訊會依式 (3.32) 加入至增廣後的狀態向量 \mathbf{X} 中。

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ x_r + (z_{n_{i1}} \times \cos(\theta_r + z_{n_{i2}})) \\ y_r + (z_{n_{i1}} \times \sin(\theta_r + z_{n_{i2}})) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$



接下來，需對共變異數矩陣 \mathbf{P} 進行增廣。相較於狀態向量 \mathbf{X} 的增廣， \mathbf{P} 的增廣更為複雜，因為必須計算 Jacobian，以反映新地標與先前地標及載具位置之間的關聯性。首先計算的矩陣 \mathbf{G}_v 為地標預測模型對載具位置的雅可比矩陣。以第 i 個地標為例，其 \mathbf{G}_v 矩陣依式 (3.33) 計算。

$$\mathbf{G}_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z_{n_{i1}} \times \sin(\theta_r + z_{n_{i2}}) \\ 0 & 1 & z_{n_{i1}} \times \cos(\theta_r + z_{n_{i2}}) \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

第二個 Jacobian 矩陣 \mathbf{G}_z 為地標預測模型對量測值 $[range, bearing]$ 的雅可比矩陣，用於描述地標狀態隨觀測變化的線性化關係。其計算方法如式 (3.34) 所示。

$$\mathbf{G}_z = \begin{bmatrix} \cos(\theta_r + z_{n_{i2}}) & -z_{n_{i1}} \times \sin(\theta_r + z_{n_{i2}}) \\ \sin(\theta_r + z_{n_{i2}}) & z_{n_{i1}} \times \cos(\theta_r + z_{n_{i2}}) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

在完成對兩個 Jacobian 矩陣的計算後，增廣後的誤差共變異數矩陣 \mathbf{P} 會被更新。增廣操作透過在 \mathbf{P} 矩陣的底部與右側各插入兩列兩行來完成。其中，右下角的空白 2×2 子矩陣，用於表示新增地標的共變異數，其計算依式 (3.35) 進行，其中 p 為矩陣 \mathbf{P} 增廣後之維度。

$$\mathbf{P}_{(p-1:p),(p-1:p)} = \mathbf{G}_v \mathbf{P}_{(1:3),(1:3)} \mathbf{G}_v^T + \mathbf{G}_z \mathbf{R} \mathbf{G}_z^T \quad (3.35)$$

接下來，系統計算載具狀態與新增地標之間的共變異數，其計算方法如式 (3.36) 所示。

$$\mathbf{P}_{(p-1:p),(1:3)} = \mathbf{G}_v \mathbf{P}_{(1:3),(1:3)} \quad (3.36)$$

由於 \mathbf{P} 是對稱的，故：

$$\mathbf{P}_{(1:3),(p-1:p)} = \mathbf{P}_{(p-1:p),(1:3)}^T \quad (3.37)$$



新地標與既有地標之共變異數可計算如下：

$$\mathbf{P}_{(p-1:p),(4:p)} = \mathbf{G}_v \mathbf{P}_{(1:3),(4:p)} \quad (3.38)$$

最後將新地標加入地圖後的共變異數轉置：

$$\mathbf{P}_{(4:p),(p-1:p)} = \mathbf{P}_{(p-1:p),(4:p)}^T \quad (3.39)$$

如此已完成 SLAM 演算法的所有流程，接下來只需重複執行迴圈即可。



第四章 實驗設備與系統介紹

本章將介紹本研究使用之模擬與實驗所需的硬體設備及軟體系統，實驗環境為國立臺灣大學應用力學館頂樓，實驗設備有差速輪無人載具及控制工作站主機，並使用白紙包裹裝滿水的寶特瓶作為地標。

4.1 硬體架構

4.1.1 差速輪無人載具

本研究所使用之差速輪無人載具為利基科技公司所客製化產品，如圖 4.1 所示。此載具為後輪差速驅動，輪上配備輪編碼器，可監測輪胎轉速。藉由控制兩個後輪可達成直線或曲線的前進及後退；而前輪則為輔助輪用於保持平衡。另外還搭載樹莓派作為主控電腦，車頂上裝有光達。通訊方式為透過 Wi-Fi 模組與控制工作站主機連線。

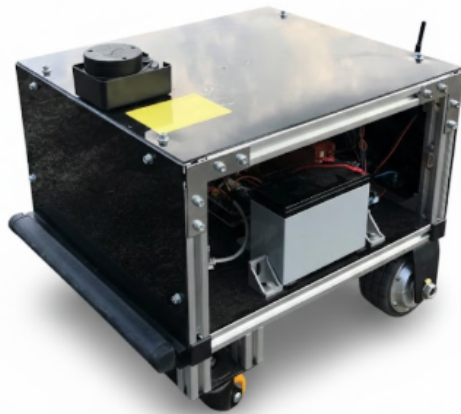


圖 4.1: 差速輪無人載具

4.1.2 光達

本研究使用 RPLIDAR A1 光達，如圖 4.2 所示。此光達採用雷射三角測量原理計算距離數據，並透過一個快速旋轉的雷射發射器與接收器掃描周圍環境，輸出二維點雲數據以供地標提取使用，其規格如表 4.1 所示。



圖 4.2: RPLIDAR A1 光達



| 項目 | 規格 |
|-------|----------------------|
| 測距範圍 | 0.15 ~ 12m |
| 掃描角度 | 360° |
| 掃描頻率 | 5.5Hz |
| 測量頻率 | $\geq 8000\text{Hz}$ |
| 角度解析度 | $\leq 1^\circ$ |
| 距離解析度 | $< 0.5\text{mm}$ |

表 4.1: RPLIDAR A1 規格表

4.1.3 控制工作站主機

本研究使用 ASUS X550LD 筆記型電腦作為控制工作站主機，MATLAB 模擬與實驗皆使用本機完成，如圖 4.3 所示。控制工作站主機透過 Wi-Fi 與無人載具連線，達成控制載具與接收載具所搭載感測器之數據，其規格如表 4.2 所示。



圖 4.3: 控制工作站主機



| 項目 | 規格 |
|-----|---------------------|
| OS | 64Bits Windows 11 |
| CPU | Intel i5-4200U |
| GPU | NVIDIA GeForce 820M |
| RAM | 8GB DDR3 |
| 硬碟 | 512GB SSD |

表 4.2: X550LD 規格表

4.2 軟體系統

本研究所使用之軟體如圖 4.4 所示。研究過程中使用 MATLAB 作為模擬的平台，後續實驗則是在 Visual Studio 環境中運行 C++ 程式語言控制載具且將感測器數據傳回 MATLAB 進行運算處理與建圖。



圖 4.4: 使用軟體



4.3 系統架構

本研究之系統架構如圖 4.5 所示，由控制工作站主機以 Wi-Fi 訊號透過無線路由器作為媒介與差速輪無人載具連線，而光達則以 UART 與載具上之主控電腦連接。如此一來，即可達成由控制工作站主機傳送控制訊號予載具，載具上的輪編碼器數據與光達數據也可即時回傳至控制工作站主機進行運算。



圖 4.5: 系統架構圖



第五章 模擬與實驗結果

本研究所設計之實驗為載具行走一個圓後回到起點。過程中，移動路徑兩旁所擺放的靜態障礙物(地標)，將會被光達感測器所察覺，並將點雲數據傳送至 DBSCAN 演算法中做地標提取，提取出的地標將作為載具自身之定位與建圖之用。

如圖 5.1 所示，地標的狀態 (x_r, y_r) 以圖中之藍色點表示；而橢圓線則是此地標狀態之共變異數所形成，用以描述此地標之不確定性。隨著地標被重複觀察到而觸發濾波更新，橢圓線將變得越來越小，也表示此地標狀態的信心程度提升。

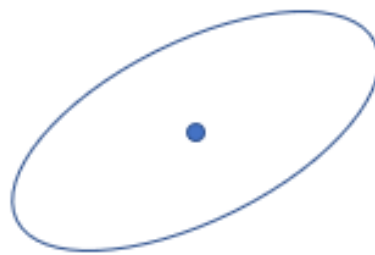


圖 5.1: 地標圖示



5.1 模擬結果

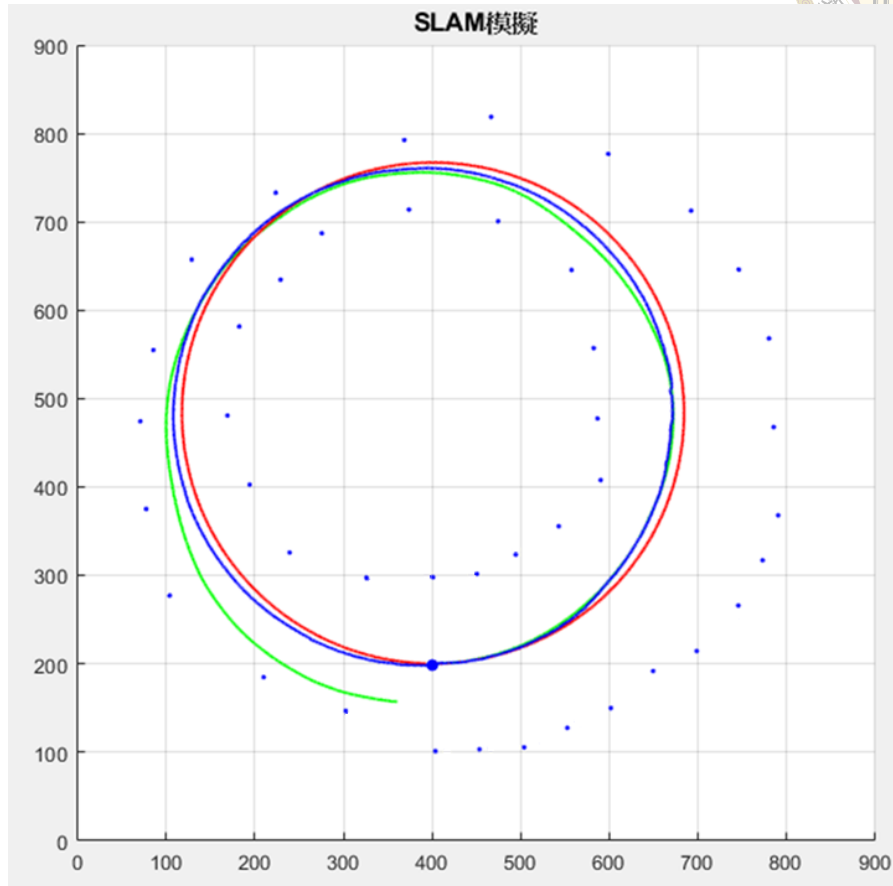


圖 5.2: SLAM 模擬結果

圖 5.2 為完成 SLAM 模擬後所得之地圖，圖中有三條軌跡，分別是真實軌跡（紅）、里程計軌跡（綠）及估測軌跡（藍）。由圖中可以看出，剛起步時由於還未觀測到足夠多的地標，故此時卡爾曼增益給予里程計所預測狀態的權重是相對較高的，所以此時藍色軌跡是往綠色軌跡靠攏的。接續走了一段路後，可以觀察到卡爾曼濾波器的功能開始顯現，藍色軌跡開始漸漸往紅色軌跡靠攏，這就是 SLAM 系統中的定位能力，相對地，綠色軌跡則已經因為累積誤差而偏移到其他方向了。

而地圖上表示地標不確定性的橢圓線在濾波的過程中，已經被多次更新而逐漸縮小，最後幾乎變成一個點，這代表此時地標位置的準確性是高的。



5.2 實驗結果

本研究之實驗於國立臺灣大學應用力學館頂樓進行，實驗場景如圖 5.3 所示，載具即將行經之路徑兩旁擺放包裹著白紙的寶特瓶作為地標。



圖 5.3: 實驗場景

如圖 5.4 所示，將載具放置於起點，並在地上用紅色粉筆做記號，等待載具繞完一圈回到起點附近時方便與終點位置作比較。



圖 5.4: 起點



圖 5.5 至圖 5.8 為載具由起點走一圈後到達終點的過程。



圖 5.5: 載具移動過程順序 1



圖 5.6: 載具移動過程順序 2



圖 5.7: 載具移動過程順序 3



圖 5.8: 載具移動過程順序 4

圖 5.9 為載具抵達終點的位置，由圖中可以看出終點與起點的位置有一點差距，不過這個結果也是可以接受的，因為載具會受到風吹、地面平整度以及輪胎打滑等諸多因素影響。



圖 5.9: 終點

圖 5.10 為上述載具繞行一圈的過程中所建立的地圖，紅色軌跡為里程計軌跡，而藍色軌跡則是 SLAM 系統所估測得出的軌跡。由此圖搭配圖 5.9 一同觀察，可以得知，相較於紅色軌跡而言，藍色軌跡顯然更加貼近載具真實的位置，紅色軌跡則因累積誤差而偏移，而實驗場景中的地標也確實地建立到此地圖中。

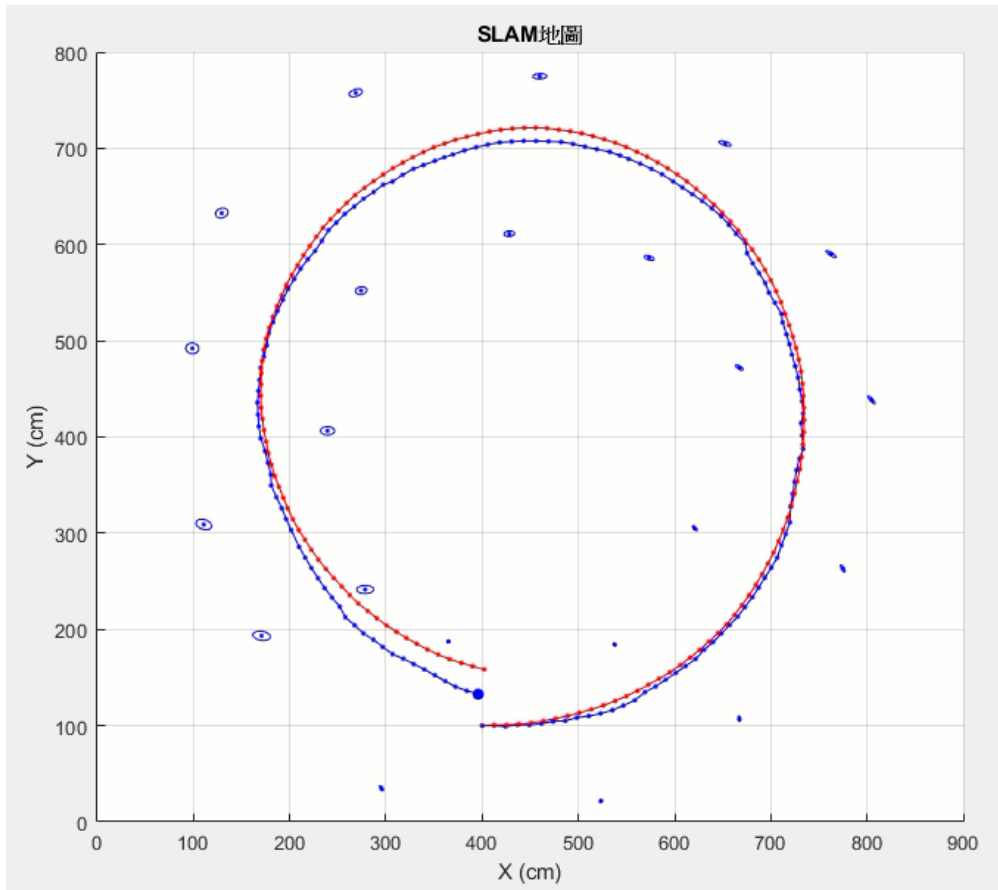


圖 5.10: SLAM 實驗所建構之地圖



5.3 模擬與實驗結果討論

本論文為同步定位與建圖系統之研究，且提出了方法改善實驗過程中可能會產生的問題。本章分別展示了 SLAM 的模擬與實驗結果，以下將就這兩項結果進行分析與實驗過程探討。

首先，在使用 MATLAB 模擬 SLAM 系統運作的過程中，由於相關的模擬環境之參數可控性高，例如雜訊幅度的設定與里程計的漂移，故模擬結果穩定性較佳，也不容易發生系統的發散；然而，在實際操作實驗時，環境變因相對於在電腦上模擬而言顯得更加複雜，例如光達感測器的雜訊，除了太陽光線亮度過強的影響以外，室外溫度過高的因素也會導致光達回傳了帶有更多雜訊的數據，這導致數據關聯的過程中系統容易因錯誤關聯而發散。此時引入了 DBSCAN 演算法，過濾掉大部分的雜訊，且在數據關聯的過程中同時使用了馬氏距離與歐氏距離進行雙重判斷後才可納入擴增地標，如此可同時具有馬氏距離的統計意義又兼具歐氏距離的直觀性，大大降低了因錯誤擴增地標而造成的系統不穩定。

實驗結果顯示，使用本研究這套 SLAM 系統進行定位與建圖，除了感測器雜訊問題所造成的地標錯誤擴增可大幅改善之外，其定位效果也比里程計更加可靠，且不必使用 GPS 訊號，特別適合用於 GPS 訊號死角之場合。



第六章 結論與未來展望

本研究提出一套基於里程計與光達感測器融合之 SLAM 系統。透過非線性運動模型與觀測模型之建立，本系統實現了完全不依賴外部訊號（如 GPS 或 UWB）的主動定位能力。在實際測試中，系統展現出良好的環境適應性，即便在 GPS 訊號阻斷的室內場域或自動化倉儲環境，仍能維持地圖構建與位姿估測。

本研究之成果主要假設環境為靜態。然而，在實際應用環境（如走廊或大廳）中，常存在行人或其他移動載具。未來可整合「運動目標檢測與跟蹤（DATMO）」技術，判斷動態障礙物，並開發過濾機制以避免動態特徵點進入狀態向量中，從而維持地圖的一致性與定位精度。由於本研究使用之光達感測器主要擷取水平面之資訊，未來可嘗試整合 3D 光達或深度相機將狀態向量由二維平面座標擴展至三維空間，這將涉及更複雜的點雲數據與特徵提取演算法，但可提供更豐富的環境資訊。最後，針對大規模環境的探測，單一載具之效率有限。未來可研究多載具協作機制，探討不同載具間如何透過通訊模組共享局部地圖（Local maps）。研究重點將在於如何處理不同座標系間的對齊問題（Map merging），實現分佈式建圖與定位，進而提升系統的整體作業效率。



參考文獻

- [1] T. M. Aycock. A simultaneous localization and mapping implementation using inexpensive hardware. The University of Alabama, 2010.
- [2] T. Bailey and H. Durrant-Whyte. Simultaneous localization and mapping (slam): Part ii. IEEE robotics & automation magazine, 13(3):108–117, 2006.
- [3] A. Doucet, N. De Freitas, N. J. Gordon, et al. Sequential Monte Carlo methods in practice, volume 1. Springer, 2001.
- [4] H. Durrant-Whyte and T. Bailey. Simultaneous localization and mapping: part i. IEEE robotics & automation magazine, 13(2):99–110, 2006.
- [5] M. Ester, H.-P. Kriegel, J. Sander, X. Xu, et al. A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise. In kdd, volume 96, pages 226–231, 1996.
- [6] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. 1960.
- [7] R. E. Kalman and R. S. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. 1961.
- [8] P. C. Mahalanobis. On the generalized distance in statistics. Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A (2008-), 80:S1–S7, 2018.

[9] P. S. Maybeck. Stochastic models, estimation, and control, volume 3. Academic press, 1982.

[10] R. Smith, M. Self, and P. Cheeseman. Estimating uncertain spatial relationships in robotics. In Machine intelligence and pattern recognition, volume 5, pages 435–461. Elsevier, 1988.

