

國立臺灣大學工學院應用力學研究所

碩士論文

Institute of Applied Mechanics

College of Engineering

National Taiwan University

Master's Thesis



建構於標準線性固體模型的黏彈波動方程式之推導並
運用於頻散之分析

Derivation of a Viscoelastic Wave Equation Based on the
Standard Linear Solid Model and Its Application to
Dispersion Analysis

陳詣峰

Yi-Fong Chen

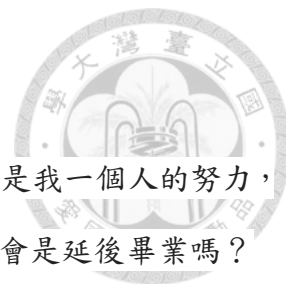
指導教授：林哲宇 博士

Advisor: Che-Yu Lin, Ph.D.

中華民國 114 年 7 月

July, 2025

誌謝



今天能夠順順利利寫完論文，我能夠有自信的說，這絕對不是我一個人的努力，要不是有其他人的默默支持，我根本無法想像我會過得怎麼樣，會是延後畢業嗎？還是會休學後再回來復讀？又或是根本不會讀研究所？現在沒人知道了。

我最感謝的是我的家人，謝謝我的媽媽拉拔我長大，教導我堪稱模範的身教以及言教，教會我人與人之間的應對進退，同時讓我自由的朝著自己想要的前進，並總是在我低潮的時候給予我鼓勵；謝謝我的阿公能夠讓我無後顧之憂地完成學業，成為我最堅實的靠山；謝謝姊姊總是陪我聊天，讓我心安定下來。

謝謝林哲宇教授在我遇到困境的時候，願意拉我一把，讓我得以完成碩士學業，並且用心的傳道授業解惑，老師帶給我的不僅是學科上的知識，還有許多人生的道理，此般的用心指導我會銘記於心，謝謝你，哲宇老師。

謝謝我最棒的知心好友兼靈魂伴侶梓晴，陪伴我度過這艱難的碩士時光，陪我吃飯、陪我聊天、陪我做很多事情，毫無疑問是我心中一大支柱，是她讓我對未來有了更多的嚮往，謝謝治平、麗珍、万颯的鼓勵與照顧，還有常常帶我去吃好吃的，讓我變得白白又胖胖，謝謝曾酷比以及黑角頭老大的溫馨陪伴，你們倆都是可愛的小東西。

碩士生涯的同學們，詠丞、楊益、名曉、丞毅、孟蓉、博堯、翊瑄、丞祐、嘉峻、集龍、翰承、逸帆、梓諭、子強，有了你們一同修課與做研究，我在學涯可以少碰到一些困難，也很順利的把學分拿到手了。每天從實驗室一起離開，去健身房運動或是去打籃球，偶爾吃吃披薩、煮煮湯圓，去迪化街逛逛等等，都是是非常令人難忘的回憶，很謝謝你們，非常高興有認識你們。

夜惑冷霜、天其緯、影天羽、蔡承雞鴨、gg 帥哥、狂暴泰坦，你們從小就是我的玩伴，雖然沒有一起唸書，我們都在玩，但你們總是幫助我放鬆心情，幫我挺過去研究卡關、考試分數不理想等等，說是你們把我送進了臺灣大學這個學術最高殿堂的也不為過，謝謝大家。

摘要

本研究針對黏彈性(viscoelasticity)材料中之波動現象進行理論推導與數值分析，發展一套以馬克士威形式之標準線性固體模型(Maxwell form of the standard linear solid model)為基礎之黏彈性波動方程式，並進一步引入分數階微積分以模擬材料之記憶效應與能量耗散特性。相較於傳統的整數階模型，分數階導數可更準確地描述材料在應力或應變歷史影響下的非局部反應行為，有效捕捉波在黏彈性介質中，因傳遞所產生之衰減(attenuation)與頻散(dispersions)等物理現象。

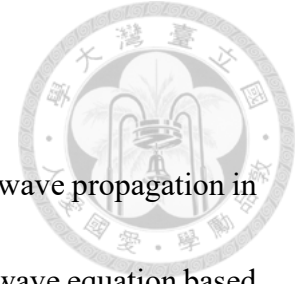
首先，回顧了黏彈性材料與波動理論之基礎，並建構含有兩組彈性模數與一黏滯係數的馬克士威標準線性固體架構。透過動量守恆定律與傅立葉轉換，本研究推導出黏彈性波動方程在頻率域下之形式，進而導出複數波數並分離其實部與虛部，透過聯立方程式得到相速度與衰減因子的解析解。此外，本研究也透過無因次化標準化處理，使得不同材料之模擬結果具可比性。

在數值模擬部分當中，本文分析了天然橡膠(NR)、生醫矽膠(GC-5)與活體豬腦等材料，觀察其在不同分數階指數 β 下波動行為的改變。結果顯示當 β 趨近0時，材料表現近似彈性；當 β 趨近1時，黏性效應增強，波速顯著頻散且能量快速衰減，完全符合物理理論之趨勢。由此可知，分數階指數 β 為一有效之控制參數，能靈活調控材料的耗散行為與頻率響應特性。

本研究所建立之模型，不僅克服了 Kelvin-Voigt 模型在高頻極限下相速度無窮之不合理問題，亦於物理表徵能力與擬合彈性上展現高度優勢。該模型具潛力應用於結構健康監測、生醫超聲影像、地震模擬與材料識別等多元領域，提供一套具備理論深度與實用價值的波動描述框架。

關鍵詞：標準線性固體模型、波動方程式、分數階導數、衰減、頻散。

Abstract



This study presents a theoretical and numerical investigation of wave propagation in viscoelastic materials, focusing on the development of a viscoelastic wave equation based on the Maxwell form of the standard linear solid (SLS) model. To account for memory effects and energy dissipation, fractional calculus is incorporated into the formulation. Compared with traditional integer-order models, the use of fractional derivatives allows for a more accurate representation of nonlocal responses influenced by stress or strain history, effectively capturing key physical phenomena such as attenuation and dispersion during wave transmission in viscoelastic media.

The study begins with a review of the theoretical foundation of viscoelasticity and wave mechanics, followed by the construction of a Maxwell form of the SLS framework comprising two elastic moduli and one viscosity coefficient. By applying momentum conservation and Fourier transform techniques, the wave equation is reformulated in the frequency domain, and the complex wavenumber is derived. Real and imaginary parts of the wavenumber are then separated to obtain analytical expressions for phase velocity and attenuation via coupled equations. Additionally, a dimensionless normalization process is implemented to ensure comparability across different materials.

In the numerical simulations, three representative materials, natural rubber (NR), biomedical silicone gel (GC-5), and in vivo porcine brain tissue, which were analyzed to

evaluate wave behavior under varying fractional-order indices β . The results demonstrate that as β approaches 0, the material behaves almost elastically; as β approaches 1, viscous effects become prominent, leading to increased dispersion and rapid energy attenuation, consistent with expected physical trends. The fractional-order index β is thus shown to be an effective control parameter for tuning frequency-dependent dissipative behavior.

The proposed model not only addresses the unrealistic high-frequency velocity divergence observed in Kelvin-Voigt model, but also exhibits superior capability in physical representation and curve-fitting accuracy. It provides a robust and flexible framework for modeling wave phenomena in viscoelastic media, with potential applications in structural health monitoring, biomedical ultrasound imaging, seismic simulation, and material characterization.

Keywords: standard linear solid model; wave equation; fractional derivative; attenuation; dispersion.

目次



誌謝	i
摘要	ii
Abstract.....	iii
目次	v
圖次	vii
表次	ix
第一章 緒論	1
1.1 研究背景與動機	1
1.2 文獻回顧	3
第二章 理論基礎與數學準備	7
2.1 一維速度場之黏性介質位移與應變率關係式	7
2.2 動量守恆方程式	9
2.3 平面波之數學表達式	12
2.4 傅立葉分析	14
2.5 鬆弛時間(relaxation time)與遲滯時間(retardation time)	16
2.6 分數階微積分與材料記憶性之關聯	19
第三章 黏彈性波動方程式之頻散(dispersion)和衰減(attenuation)推導.....	22
3.1 馬克士威標準線性固體模型(Maxwell form of the standard linear solid model) 之黏彈性波動方程式推導	23
3.1.1 模型組成與假設	23
3.1.2 整體應力與應變關係	23
3.2 整數階頻散(dispersion)和衰減(attenuation)	26
3.2.1 頻率域轉換與波動方程式之建立	26
3.2.2 整數階相速度與衰減關係式解析解	28

3.3 馬克士威標準線性固體模型(Maxwell form of the standard linear solid model)	
之分數階導數黏彈性波動方程式推導	35
3.3.1 分數階阻尼項之導入	35
3.3.2 分數階本構式整理	38
3.4 組合因子驗證	38
3.4.1 組合因子定義與傅立葉轉換	39
3.4.2 $q = 0$ 與 $q = 1$ 邊界行為分析	43
3.5 分數階頻散(dispersion)和衰減(attenuation).....	43
3.5.1 頻率域本構方程式推導	44
3.5.2 分數階相速度與衰減關係式解析解	46
3.6 衰減和相速度之標準化分析	52
第四章 數值模擬與結果分析	55
4.1 模擬方法與參數設定	55
4.2 整數階模型與分數階模型之比較	55
4.3 分數階 Kelvin-Voigt 模型和馬克士威標準線性固體模型之差異	59
4.4 材料性質對波動行為的影響	62
4.5 分數階指數與參數變化對波動行為之控制性	65
第五章 結論與未來展望	67
5.1 結論	67
5.2 未來展望	68
參考文獻	69

圖次



圖 2-1 馬克士威模型。	16
圖 2-2 Kelvin-Voigt 模型。	17
圖 2-3 馬克士威標準線性固體模型。	18
圖 3-1 黏彈性波動方程式之衰減與頻散流程圖。	22
圖 3-2 馬克士威標準線性固體模型。	23
圖 3-3 馬克士威標準線性固體模型。	35
圖 4-1 整數階導數標準線性固體模型，材料為天然橡膠(NR)，材料參數為 $E_1 = 3.9214 \text{ kPa}$ ， $E_2 = 122.68 \text{ kPa}$ 。(a) 縱軸為標準化衰減，橫軸為標準化頻率。(b) 縱軸為標準化相速度，橫軸為標準化頻率。	57
圖 4-2 分數階導數標準線性固體模型，對應了分數階指數 β 值為0、0.2、0.4、0.6、0.8以及1的情況，材料為天然橡膠(NR)，材料參數為 $E_1 = 3.9214 \text{ kPa}$ ， $E_2 = 122.68 \text{ kPa}$ 。(a) 縱軸為標準化衰減，橫軸為標準化頻率。(b) 縱軸為標準化相速度，橫軸為標準化頻率。	58
圖 4-3 Kelvin-Voigt 模型。	59
圖 4-4 中低頻分數階 Kelvin-Voigt 模型，對應了分數階指數 β 值為0、0.2、0.4、0.6、0.8以及1的情況。(a) 縱軸為標準化衰減，橫軸為標準化頻率。(b) 縱軸為標準化相速度，橫軸為標準化頻率。	60
圖 4-5 高頻分數階 Kelvin-Voigt 模型與高頻分數階馬克士威標準線性固體模型之比較。(a) 高頻分數階 Kelvin-Voigt 模型，對應了分數階指數 β 值為0、0.6、0.8以及1的情況，縱軸為標準化衰減，橫軸為標準化頻率。(b) 高頻分數階馬克士威標準線性固體模型，對應了分數階指數 β 值為0、0.2、0.4、0.6、0.8以及1的情況，縱軸為標準化衰減，橫軸為標準化頻率。	61
圖 4-6 分數階導數標準線性固體模型，對應了分數階指數 β 值為0、0.2、0.4、0.6、0.8以及1的情況，材料為模擬心肌的矽膠型黏彈性材料(GC-5	

gel)，材料參數為 $E_1 = 235 \text{ kPa}$ ， $E_2 = 42.36 \text{ kPa}$ 。(a) 縱軸為標準化衰減，橫軸為標準化頻率。(b) 縱軸為標準化相速度，橫軸為標準化頻率。63

圖 4-7 分數階導數標準線性固體模型，對應了 β 值為0、0.2、0.4、0.6、0.8以及1的情況，材料為活體狀態的五十公斤豬大腦半球，材料參數為 $E_1 = 0.503 \text{ kPa}$ ， $E_2 = 0.586 \text{ kPa}$ 。(a) 縱軸為標準化衰減，橫軸為標準化頻率。(b) 縱軸為標準化相速度，橫軸為標準化頻率。64

圖 4-8 分數階導數標準線性固體模型， ω_n 分別對應 $\frac{\omega}{\omega_0}$ 值為0、1、2、4、8和16的情況，材料為天然橡膠(NR)，材料參數為 $E_1 = 3.9214 \text{ kPa}$ ， $E_2 = 122.68 \text{ kPa}$ 。(a) 縱軸為標準化衰減，橫軸為分數階指數參數 $\beta(0 \leq \beta \leq 1)$ 。(b) 縱軸為標準化相速度，橫軸為分數階指數參數 $\beta(0 \leq \beta \leq 1)$ 。66

表次

表 2-1	整數階與分數階導數模型綜合比較.....	21
表 4-1	數值模擬所使用之材料參數表.....	55



第一章 緒論

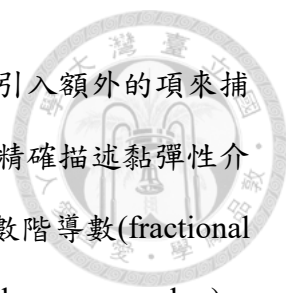


1.1 研究背景與動機

波動現象無處不在，在工程結構、自然環境以及生醫工程等各個領域當中，具有極高的重要性。舉例來說，當我們走路時，腳底與地面的輕微接觸所帶來之反饋，其實就是一種低頻振動(low-frequency vibration)；而在日常交通當中，汽車、火車等行駛所產生的震動，不僅會影響乘坐舒適度，更可能會經由地下管線、橋梁或是路面等結構傳遞，引發次級振動並造成周圍建築物的結構安全；在地震工程當中，不同岩層或地下結構之間的彈性參數與黏彈性參數差異，會導致波速產生變化，即能量衰減(attenuation)與頻散(dispersion)現象，這直接關係到了地震波的傳遞效率及最終能量分佈，上述的物理參數，對抗震建築設計具有重要的相關意義。同時，在生醫工程領域，人體各組織的動態響應，從骨骼受力、肌肉運動到血管收縮，皆受到其內在彈性特性與黏彈性特性的影響，這些物理參數不僅決定了組織的力學行為，也構成了無創檢測與診斷(如超聲成像、脈搏波分析)的物理基礎。

波動現象是如此地普遍，且在各領域應用相當廣泛，人們必須發展出能夠準確描述與分析波動的理論工具，而波動方程式(wave equation)正是其中最基本且核心的數學模型。傳統的波動方程式，也就是大學階段工程數學所教的，大多基於理想純彈性(pure elastic)假設，只考慮介質中的能量儲存與瞬間反彈；然而，現實中大部分材料都表現出黏彈性(viscoelastic)行為，即在受力時同時具備彈性特性(能量儲存)與黏性特性(能量耗散)。這種黏彈性行為使得波在傳播過程中會出現額外的能量損耗、波速衰減、相位變化以及頻散現象，而這些效應在傳統的純彈性模型中並未得到反映。

其中，頻散現象尤其重要。頻散指的是波在不同頻率下的相速度(phase velocity)或群速度(group velocity)不一致，導致波形隨著傳播距離逐漸展開或變形。從數學上看，若在純彈性介質中，波動方程式通常假設波速與頻率之間無相關，但在黏彈



性材料中，波速隨頻率變化，這就意味著在波動方程式中，必須引入額外的項來捕捉這種頻率依賴性(frequency dependence)。在實際應用上，為了精確描述黏彈性介質中波的傳播，波動方程式往往需要進行修正，例如，加入分數階導數(fractional derivative)項，使得波動方程式在頻域中得以呈現複數波數(complex wavenumber)，其中實部反映速度頻散(velocity dispersion)效應，而虛部則與能量衰減(attenuation)相關。這種修正不僅能夠更真實地模擬波形隨距離改變的過程，還能對工程設計、結構健康監測以及生醫影像等應用提供更精確的預測。若忽略頻散效應，模型預測可能會低估或錯誤反映波的實際傳播特性，進而影響安全評估或診斷精度。

為了能更真實地描述材料的黏彈性行為，最早採用的 Kelvin-Voigt 模型通過並聯彈簧(spring)與阻尼器(damper)的結構引入了阻尼效應，但其僅能模擬單一阻尼與彈性元件的行為，這對於描述複雜的應力鬆弛(stress relaxation)、長時間響應(long-term response)以及高頻衰減現象常顯不足。針對這些不足，研究人員逐步發展出了標準線性固體模型以及其延伸形式，馬克士威(Maxwell)形式的標準線性固體模型。該模型結合單獨彈簧與彈簧-阻尼器串聯後再並聯的結構，不僅更能夠完整地描述材料的瞬時彈性反應，也能捕捉長期應力鬆弛行為，從而更好地反映黏彈性介質中的頻散特性。

若是使用馬克士威形式的標準線性固體模型，並在數學推導上通過引入分數階導數進一步調節能量耗散與頻散效應，使得波動方程式能夠準確地呈現波傳播過程當中，因頻率變化而產生的速度與相位變化，那麼此模型的精準性將會大幅度提高。

因為自然界中所有介質均呈現一定程度的黏彈性行為，完美地表現純彈性行為之介質幾乎是不存在的，而波在介質中傳播時必然伴隨明顯的頻散效應，因此僅用傳統基於純彈性假設的波動方程式已難以滿足實際工程與應用的需求。所以，發展出各種基於複數彈簧和阻尼器組成之模型的黏彈性波動方程式，再進一步引入分數階導數以更加精細地描述能量耗散與頻散現象，成為當前研究的重點，希望可

以在模型中靈活調控介質的黏彈性參數，使得描述波動的頻散與衰減效應更加符合實際物理觀測，從而為結構健康監測、地震工程以及生醫診斷等應用提供更為可靠的理論依據。



1.2 文獻回顧

黏彈性波動方程式廣泛應用於地球物理與材料力學領域，用以描述波在黏彈性介質中的傳播特性，尤其是波動傳播中的頻散與衰減現象。然而，回顧相關文獻可以發現，每個時期的理論模型仍有一些不足之處，值得人們進一步深入研究，此文獻回顧著重於探討黏彈性介質之頻散與衰減現象。

Bagley 與 Torvik [1]首次提出以分數階微積分來描述黏彈性行為，成功從分子尺度理論延伸到巨觀黏彈性特性，解釋了多數聚合物材料的黏彈性行為。然而，該模型主要聚焦於聚合物材料，並未充分驗證複雜的地質材料及複合材料等。Kolsky [2]在研究中指出，衰減因子在低頻區域可滿足(1.2.1)式，但這種線性假設無法涵蓋非線性或速率相關效應，從而限制了對複雜材料的描述，低頻區域表示式為

$$\alpha_k \propto \omega^y, \quad (1.2.1)$$

其中 α_k 為衰減因子， ω 為角頻率， y 為頻率之冪次。

Moczo 與 Kristek [3]則分析了廣義 Maxwell 模型與廣義 Zener 模型，指出兩模型數學上的等價性，並為時域數值模擬中如何準確描述衰減和速度頻散現象提供了清晰的理論框架，但無法有效描述實際地質材料在全頻率範圍內的耗散與頻散現象。

Kjartansson [4]提出的恆定 Q 模型能有效描述特定頻率範圍內的耗散特性，然而此模型在低頻區域的波速表現不符合實際現象，波速趨近於零，導致該模型的應用受限，其衰減因子與頻率的關係為(1.2.2)式以及(1.2.3)式，



$$M(\omega) = M_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^\gamma, \quad (1.2.2)$$

$$\gamma = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{1}{Q} \right), \quad (1.2.3)$$

其中 $M(\omega)$ 為表示介質在角頻率 ω 下的複數模數； ω_0 為參考角頻率，用來將頻率進行無因次化； M_0 為參考模數，當 $\omega = \omega_0$ 時， $M(\omega) = M_0$ ； Q 為品質因子，是一個無因次的參數，用來描述材料能量損耗的程度， Q 值越高表示耗損越小； γ 為決定模數如何隨頻率變化的常數。

Cooper [5]探討了晶體材料中能量耗散的機制，並指出傳統的彈簧-阻尼器模型難以精準捕捉地球內部材料複雜的動態特性。故針對單一鬆弛過程，提出在描述吸收(衰減)與頻散的模型中，品質因子 Q 的倒數可表示為(1.2.4)，由於透過實驗可得在高頻和低頻時，吸收(衰減)行為有不同的方向，故證實了先前模型的不足，其形式為

$$Q^{-1} = \Delta \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}, \quad (1.2.4)$$

其中 Δ 為鬆弛強度(無因次參數)，反映鬆弛過程對材料彈性模數的貢獻程度。

Holm 與 Sinkus [6, 7]透過分數階導數 Zener 模型描述了壓縮波與剪切波的波動行為，並提出同時具有因果性和穩定性的分數階波動方程式，其表達式為(1.2.5)式，同時其衰減因子在低頻、中頻與高頻分別滿足(1.2.6)式，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 u + \tau^\beta \frac{\partial^{2+\beta} u}{\partial t^{2+\beta}} = 0, \quad (1.2.5)$$

$$\begin{cases} \text{低頻: } \alpha(\omega) \propto \omega^{1+\beta} \\ \text{中頻: } \alpha(\omega) \propto \omega^{1-\frac{\beta}{2}} \\ \text{高頻: } \alpha(\omega) \propto \omega^{1-\beta} \end{cases}, \quad (1.2.6)$$

其中 u 為介質位移； t 為時間變數； ∇^2 為拉普拉斯運算子； c 為低頻極限下的相速度； τ 為特徵鬆弛時間(relaxation time)； β 為分數階指數($0 \leq \beta \leq 1$)； $\frac{\partial^{2+\beta} u}{\partial t^{2+\beta}}$ 為負責引入頻率依賴的耗散與頻散效應的導數關係式； $\alpha(\omega)$ 為衰減因子。

Wang [8]透過廣義黏彈性波動方程，統一了純彈性與黏彈性波動描述，並提出以分數微積分參數 β 控制黏彈性特性。進一步，Wang 與 Xu [9]探討了 β 與品質因子 Q 的直接關係，提出(1.2.7)式之近似關係式，但是此廣義黏彈性波動方程式以Kelvin-Voigt 為原始模型，描述的可能不夠全面，此近似關係式為

$$Q^{-1}(\beta, \omega) = \frac{\beta \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^\beta \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)}{1 + \beta \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^\beta \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)}, \quad (1.2.7)$$

其中 Q^{-1} 為品質因子的倒數， $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$ 為參考角頻率。

Borgomano [10]的實驗結果發現，對於雙孔隙石灰岩，在低頻下其彈性模量的頻散與衰減與 Biot–Gassmann 理論預測一致。這一關係不僅決定了介質的靜態彈性性質，同時也對波的傳播速度及其頻散行為起決定作用。Borgomano 團隊的實驗顯示，在低頻下，觀測到的頻散與衰減趨勢與上述理論一致，而高頻區，因為介質中的流體來不及在孔隙內局部移動或再分布，以至於不會引起顯著的局部流動現象，故可視為未出現明顯局部流動效應。

Ni&Wang [11]發展了更全面的兩相流波動方程，傳統 Biot 理論假設固體骨架為純彈性，這在某些情況下難以捕捉實際地質材料中的能量耗散與頻散現象，他們透過加入固體骨架黏彈性特性，能有效描述快波與慢波的衰減與頻散，彌補了經典 Biot 理論的不足，並透過理論和數值模擬驗證，提供了更堅實的理論基礎。

目前黏彈性波動方程式及其衰減和頻散仍存在許多不足，特別是在描述真實地質材料的多尺度結構、異質性與微觀機制上。因此，未來需持續發展具物理意義

且更全面整合頻散與衰減特性的黏彈性波動方程式，並透過更廣泛與嚴謹的數值模擬或實驗驗證，以達到理論與實務的有效結合。



第二章 理論基礎與數學準備



2.1 一維速度場之黏性介質位移與應變率關係式

為了描述三維速度場的變形情形，我們首先引入位移場 $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 。為便於數學表達，採用愛因斯坦求和約定(Einstein summation convention)。在此基礎上，引入速度梯度(velocity gradient)之對稱部分，稱為變形率張量(deformation rate tensor)，此張量可明確表達材料內部的局部剪切與伸縮行為，是流體力學及固體力學中用以描述材料變形速率的重要物理量。而位移場 $\vec{u}$ 在基底 $\hat{e}_i\hat{e}_j$ 下的梯度表示式為(2.1.1)式，

$$\begin{aligned}\nabla\vec{u} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \hat{e}_i \hat{e}_j \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \hat{e}_1 \hat{e}_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \hat{e}_1 \hat{e}_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \hat{e}_1 \hat{e}_3 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \hat{e}_2 \hat{e}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \hat{e}_2 \hat{e}_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \hat{e}_2 \hat{e}_3 \\ &\quad + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \hat{e}_3 \hat{e}_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \hat{e}_3 \hat{e}_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \hat{e}_3 \hat{e}_3, \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

其中 u_i 為第 i 分量位移， x_j 為第 j 空間方向。將位移場 $\vec{u}$ 寫以矩陣形式表示為(2.1.2)式，

$$[\nabla\vec{u}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}. \quad (2.1.2)$$

應變張量(strain tensor)定義，此定義代表任一方向的應變速率皆由該方向的速度梯度決定，其物理上即為單位時間內材料的局部形變變化率，可由對稱梯度張量表示為



$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.1.3)$$

這是三維應變張量的一般定義，其中 ϵ_{ij} 為二階對稱張量。已知應變量隨時間的變化率即為應變率，故將(2.1.3)對時間做一階微分得到

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{d\epsilon_{ij}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.1.4)$$

其中 $v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$ 為第 i 分量的速度。

為了建立應力與變形速率之間的關係，我們採用最常見的線性本構模型，牛頓黏性流體假設。此假設認為剪應力與應變速率呈線性關係，且為不可壓縮、等溫條件和黏滯係數為常數，適用於大部分弱黏性材料的近似描述。得切應力與應變率呈線性關係為

$$\tau_{ij} = -\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = -2\eta \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (2.1.5)$$

除了剪應力之外，材料也會承受來自壓力場的力。此時需引入總應力張量 (Cauchy stress tensor)，綜合來考慮壓力(體積應力)與剪應力(偏應力)對材料的影響。可得總應力張量表示為

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = -P\delta_{ij} + 2\eta \dot{\epsilon}_{ij}, \quad (2.1.6)$$

其中 τ_{ij} 為黏性剪應力，即第 j 個方向上之流體元素的第 i 個面所受的切應力； σ_{ij} 為總應力張量(隨動應力張量)； P 為靜壓力； δ_{ij} 為單位張量； η 為動黏滯係數。若假設壓力不影響變形，忽略壓力項 $-P\delta_{ij}$ ，可得

$$\sigma_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 2\eta \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (2.1.7)$$

為簡化分析並聚焦於波動行為的走向，我們進一步考慮了一維空間下的情況。此情形下僅有單一方向的變形與應力作用，可有效說明黏彈性材料在簡化條件下的力學響應。若只考慮單一方向(x)方向，即 $i = j = k$ ，則得到一維形式之應力和應變

$$\sigma = 2\eta \frac{d\epsilon}{dt} = 2\eta \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (2.1.8)$$

其中應變可以提出，得到

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.1.9)$$

(2.1.9)式之關係將用於推導黏彈性波動方程。

2.2 動量守恆方程式

根據牛頓第二定律，連續體內微元的慣性力由其質量與加速度之積表示，整體之慣性力即體力與表面力之和。透過應力張量在單位面上的作用力表示表面力，再利用高斯散度定理，將動量守恆方程轉化為局部微分形式，此乃波動方程推導之基礎。

令位移向量場 $\vec{u}$ 在三維空間的定義如下，

$$\vec{u} = u_1(x, y, z, t)\hat{e}_1 + u_2(x, y, z, t)\hat{e}_2 + u_3(x, y, z, t)\hat{e}_3, \quad (2.2.1)$$

或簡寫為

$$\vec{u} = u_i(x, y, z, t)\hat{e}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.2.2)$$

其中 $u_i(x, y, z, t)$ 為第 i 方向的位移分量， $\hat{e}_i$ 為對應方向之單位向量。

根據牛頓第二定律(慣性力定律)，對一個微小體積單元進行分析，假設該微元為封閉的連續體，位移為 $\vec{u}$ ，體積為 V ，邊界表面為 S ，其微小質量 dm 為

$$dm = \rho dV, \quad (2.2.3)$$

其中 ρ 為密度， dV 為微小體積，則該微小體積單元因為運動產生的微小慣性力為

$$dF_i^{(\text{慣性力})} \hat{e}_i = dm \vec{a} = \rho dV \vec{a}, \quad (2.2.4)$$

其中 $dF_i^{(\text{慣性力})} \hat{e}_i$ 為微小慣性力，已知 $\vec{a} = \frac{\partial^2 u_i(t)}{\partial t^2} \hat{e}_i$ ，故可表示成

$$dF_i^{(\text{慣性力})} \hat{e}_i = \rho dV \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \hat{e}_i. \quad (2.2.5)$$

將(2.2.5)式積分到整體體積 V ，得總慣性力 $F_i^{(\text{慣性力})} \hat{e}_i$ 為

$$F_i^{(\text{慣性力})} \hat{e}_i = \int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \hat{e}_i dV. \quad (2.2.6)$$

根據動量守恆可以得知，總外力 = 質量 × 加速度，即等於慣性力，總外力是所有作用在物體上的外力之合，共有兩部分，即體力(body force)和表面力(surface traction)，體力即重力、磁力等等；表面力，即來自周圍物質施加之接觸力，故總外力可寫成以下形式，

$$F_i^{(\text{總外力})} \hat{e}_i = F_i^{(\text{慣性力})} \hat{e}_i = \int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \hat{e}_i dV = F_i^{(\text{表面力})} \hat{e}_i + F_i^{(\text{體力})} \hat{e}_i. \quad (2.2.7)$$

物體所受之表面力可由應力張量 σ_{ij} 表示，其作用在單位法向量 $\hat{n} = n_j \hat{e}_j$ 上的分量為

$$dF_i^{(\text{表面力})} \hat{e}_i = (\sigma_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j \cdot n_j \hat{e}_i) dS. \quad (2.2.8)$$

此為應力張量在單位面法向量 n_j 上的作用力分量，總和為表面力。其中 $\sigma_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j$ 為應力張量 $\tilde{\sigma}$ 的第 ij 分量， $n_j\hat{e}_j$ 為作用面單位法向量的第 j 分量， dS 為作用之微小面積，接著對表面做積分，可得總表面力為

$$F_i^{(\text{表面力})}\hat{e}_i = \int_S (\sigma_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j \cdot n_j\hat{e}_j) dS \quad (2.2.9)$$

將(2.2.9)式應用高斯散度定理將表面積分轉為體積分，可得

$$F_i^{(\text{表面力})}\hat{e}_i = \int_S (\sigma_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j \cdot n_j\hat{e}_j) dS = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \hat{e}_i dV = \int_V (\nabla \cdot \tilde{\sigma}') dV \quad (2.2.10)$$

其中 ∇ 為梯度運算子，是一個向量微分算符， $\nabla = \hat{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ ； $\tilde{\sigma}' = \sigma_{ij}\hat{e}_j\hat{e}_i$ ， $\tilde{\sigma} = \sigma_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j$ ，

$\tilde{\sigma}'$ 為 $\tilde{\sigma}$ 的轉置，由於應力張量的對稱性，即轉置下的不變性，即

$$\tilde{\sigma}' = \tilde{\sigma} \quad (2.2.11)$$

假設體力遠小於應力所造成內部力，以及波動主方向與體力方向無關，故可以忽略體力 $F_i^{(\text{體力})}$ 。將上式代回 $F_i^{(\text{慣性力})}$ 的式子，可得

$$F_i^{(\text{慣性力})}\hat{e}_i = F_i^{(\text{表面力})}\hat{e}_i \quad (2.2.12)$$

由(2.2.11)式可將(2.2.10)式寫成

$$\int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \hat{e}_i dV = \int_V \nabla \cdot \tilde{\sigma} dV \quad (2.2.13)$$

因為此式子對任意體積 V 都成立，可得局部形式(每一個點)的三維動量守恆方程式為

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \hat{e}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \hat{e}_i = \nabla \cdot \tilde{\sigma} \quad (2.2.14)$$

假設考慮的是一維且沿 x 軸傳遞的縱波，則位移僅沿一個方向，簡化為 $\vec{u} = u_1(x, t)\hat{e}_1$ ，且僅存在 σ_{11} 非零，其餘應力與位移分量皆為零，因此動量守恆方程式中僅保留 $i = j = 1$ 之項，一維動量守恆方程式可寫為

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \hat{e}_1 = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \hat{e}_1, \quad (2.2.15)$$

(2.2.15)式之單位方向向量皆可先行做消去，但為求完整性，把其保留下來。若將記號簡化為常用的一維形式，可得

$$\rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} = \nabla \cdot \tilde{\sigma}, \quad (2.2.16)$$

其中 $u(x, t)$ 為一維位移函數， $\sigma(x, t)$ 為一維正向應力， ρ 為材料密度。

2.3 平面波之數學表達式

當人們在研究波動現象時，平面波(plane wave)常被視為最基本且理想化的波動模式假設，其在均勻介質中的行為具有高度可解析性，因此被廣泛作為理論分析與數值模擬的基礎。特別是在黏彈性介質的波動分析中，平面波能提供對波速、衰減及頻散等物理性質的清晰詮釋，對於建立更廣義的波動模型至關重要。

在一維空間中，延 x 方向傳遞的單一波長，單一頻率的正弦波，在時域之表達式為

$$u(x, t) = A \cos(k(\omega)x - \omega t + \delta), \quad (2.3.1)$$

其中波數(wave number)為 $k(\omega) = \frac{2\pi}{\lambda}$ ；角頻率(angular frequency)為 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ； δ 為這個波的參考相位； A 為振幅； λ 為波長。

使用歐拉公式，可以將(2.3.1)式表達式轉換為

$$u(x, t) = \text{Re}[Ae^{i(k(\omega)x - \omega t)}e^{i\delta}] = \text{Re}[\tilde{A}e^{i(k(\omega)x - \omega t)}], \quad (2.3.2)$$

其中 $\tilde{A}$ 是複數振幅 $\tilde{A} = Ae^{i\delta}$ ，這邊省略「 Re 」，因為計算結束時取實部才有物理意義，因此可簡化為

$$u(x, t) = \tilde{A}e^{i(k(\omega)x - \omega t)}. \quad (2.3.3)$$

考慮到只取實部，故不同假設的結果皆相同，以下恆等式成立，

$$\begin{cases} e^{-ik(\omega)x} = \cos(ik(\omega)x) - i\sin(ik(\omega)x), \\ e^{ik(\omega)x} = \cos(ik(\omega)x) + i\sin(ik(\omega)x) \end{cases}, \quad (2.3.4)$$

因此，亦可採用(2.3.5)之表示法，

$$u(x, t) = \text{Re}[\tilde{A}e^{i(-k(\omega)x - \omega t)}]. \quad (2.3.5)$$

為了分析波動於頻率上的性質，本文採用傅立葉轉換之定義為

$$u(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)e^{i\omega t} dt, \quad (2.3.6)$$

經由傅立葉轉換後，可得頻率域下的位移可寫為

$$u(x, \omega) = u_0 e^{-ik(\omega)x}, \quad (2.3.7)$$

其中， u_0 為對應頻率下振幅。

涉及黏彈性質的時候，引入複數波數 $k(\omega)$ 使我們可以考慮波的衰減，複數波數 $k(\omega)$ 為

$$k(\omega) = k_{real}(\omega) - ik_{imag}(\omega), \quad (2.3.8)$$

其中實部 $k_{real}(\omega)$ 表示波的相位變化，與波的傳遞速度(即相速度)有關，為



$$k_{real}(\omega) = \frac{\omega}{v(\omega)}, v(\omega) \text{ 為相速度(phase velocity)}, \quad (2.3.9)$$

虛部 $k_{imag}(\omega)$ 表示波的衰減，隨著波的傳播距離增加，振幅會指數衰減，為

$$k_{imag}(\omega) = \alpha(\omega), \alpha(\omega) \text{ 為衰減(attenuation)}. \quad (2.3.10)$$

將(2.3.9)式、(2.3.10)式代入(2.3.8)式得複數波數表達式

$$k(\omega) = \frac{\omega}{v(\omega)} - i\alpha(\omega), \quad (2.3.11)$$

進一步將(2.3.11)式代入(2.3.7)式，可得平面波在頻率域下之數學表達式為

$$u(x, \omega) = u_0 e^{-ik(\omega)x} = u_0 e^{-i\left(\frac{\omega}{v(\omega)} - i\alpha(\omega)\right)x}, \quad (2.3.12)$$

上述結果顯示，波振幅隨 x 增加而衰減，是符合能量耗散的物理行為。

2.4 傅立葉分析

在絕大多數的物質中，特別是在黏彈性介質中，波動的傳遞會受到能量耗散與材料結構記憶效應的影響，導致波在空間中出現衰減現象，同時相速度亦隨頻率而改變，形成所謂的頻散(dispersion)。這些效應的本質均具有頻率相依特性，在時域中往往以高度非局部、積分型式出現，不易直接進行分析與求解。

因此，為了瞭解黏彈性材料對波動行為的影響機制，將波動問題轉換至頻率域是一種有效且必要的處理方式。在頻率域下，微分與摺積運算可進一步簡化為代數乘法，時間相依的材料行為可被視為頻率響應系統，複數模數、波數與相速度等量化指標亦可自然引入，是一個描述頻散與衰減的強大數學工具。

傅立葉分析提供一種將時間域函數轉換為頻率域函數的方法，本文採用其定義如下，



$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt, \quad (2.4.1)$$

其傅立葉反轉換為

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (2.4.2)$$

透過傅立葉轉換，原本在時間域中複雜的微分和積分操作，可映射為頻率域中簡單的乘法運算。舉例而言，對函數 $f(t)$ 的 n 階時間導數，滿足以下關係，

$$F\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = (i\omega)^n f(\omega), \quad (2.4.3)$$

同理，本文重要的出發公式之一，黏彈性理論常見的分數階導數也滿足

$$F\left[\frac{d^\beta f(t)}{dt^\beta}\right] = (i\omega)^\beta f(\omega), \quad (2.4.4)$$

其中 $\beta \in R^+$ ，可為非整數。

傅立葉轉換中，另一項核心性質為摺積定理，時間域的摺積關係為

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau, \quad (2.4.5)$$

在頻率域當中可簡化為

$$h(\omega) = f(\omega) \cdot g(\omega). \quad (2.4.6)$$

此一特性使得黏彈性材料之本構關係中出現的記憶核(memory kernel)可被視為頻率響應函數，使其參與波動方程時的操作更具物理直觀性與計算效率。下章將使用上述結果推導新型黏彈性波方程。



2.5 鬆弛時間(relaxation time)與遲滯時間(retardation time)

在黏彈性材料的描述中，時間常數是量化材料在應力或應變作用下回應速度的重要參數。尤其在標準線性固體模型及其組成模型，即馬克士威與 Kelvin-Voigt 模型中，常見的兩種時間常數分別為「鬆弛時間」(relaxation time)與「遲滯時間」(retardation time)。本節將釐清其物理意義、數學形式與在本研究模型中的角色。

鬆弛時間，在本篇文章記為 τ_R ，代表材料在施加固定應變後，應力隨時間衰減至其初始應力的 $\frac{1}{e}$ 倍所需的時間。該行為典型出現在圖 2-1 馬克士威模型與圖 2-3 標準線性固體模型的彈簧與阻尼串聯組中。

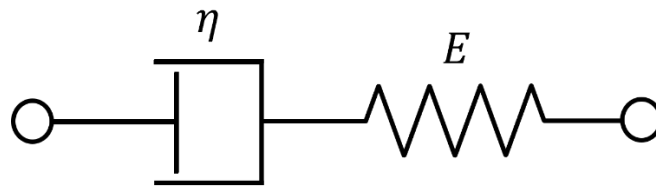


圖 2-1 馬克士威模型。

在馬克士威模型中，阻尼器與彈簧串聯，因此當施加瞬時應變時，彈簧會立即產生反應，而阻尼器則使應力逐漸鬆弛，使其表現為指數衰減，即(2.5.1)式，

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{\frac{-t}{\tau_R}}, \quad (2.5.1)$$

其中 $\tau_R = \frac{\eta}{E}$ ， η 為黏性阻尼係數， E 為彈性模數， σ_0 為初始應力，即在初始時刻($t = 0$)所承受之應力大小。 τ_R 越大，表示材料對應力的保留能力越強，亦可視為具備較強的「應力記憶性」。

遲滯時間，在本篇文章記為 τ_c ，則描述材料在施加固定應力時，應變發展至穩定值所需的時間。該行為常見於圖 2-2，Kelvin-Voigt 模型與標準線性固體模型中的彈簧-阻尼並聯組。

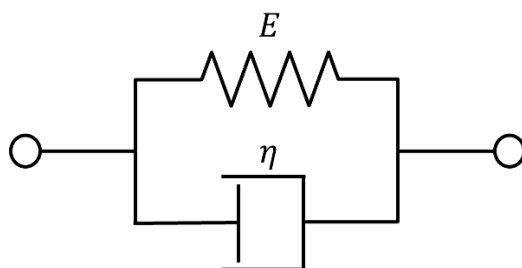


圖 2-2 Kelvin-Voigt 模型。

對於 Kelvin-Voigt 模型，應變的時間變化為(2.5.2)式，

$$\epsilon(t) = \epsilon_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}} \right), \quad (2.5.2)$$

其中 $\tau_c = \frac{\eta}{E}$ ， ϵ_{∞} 為最終穩定下來($t \rightarrow \infty$)的應變值，此處的 τ_c 表示材料延遲變形的特徵時間，反映其「變形慣性」。同樣地， τ_c 越大，則應變達到穩定所需的時間越長。

在標準線性固體模型中，圖 2-3 為馬克士威標準線性固體模型，鬆弛時間與遲滯時間同時存在，且與模型的彈簧與阻尼係數組合而得。

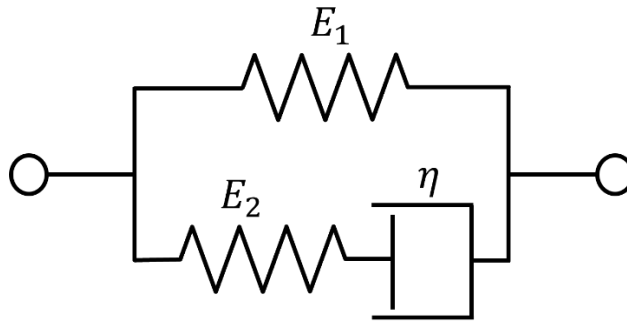


圖 2-3 馬克士威標準線性固體模型。

以馬克士威形式的標準線性固體模型為例，若上方彈簧為 E_1 ，下方串聯彈簧與阻尼器分別為 E_2 與 η ，則其本構方程為(2.5.3)式，

$$\sigma + \tau_R \frac{d\sigma}{dt} = E_1 \left(\epsilon + \tau_c \frac{d\epsilon}{dt} \right), \quad (2.5.3)$$

其中 $\tau_R = \frac{\eta}{E_2}$ ， $\tau_c = \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_1 E_2}$ 。 τ_R 來自於馬克士威元件(下方組)，表示應力的鬆弛時間； τ_c 為模型總體對應變的遲滯性。這兩個參數共同控制波動方程中複數模量的頻率響應，進而影響波的相速度與衰減。

鬆弛與遲滯時間不僅影響材料的變形行為，亦深刻決定其頻率響應。於頻率域分析中，這兩個時間常數會進入複數模數的分子與分母中，使材料呈現出黏彈性頻散(dispersion)與能量衰減(attenuation)。當 $\omega \times \tau_R \gg 1$ 或 $\omega \times \tau_c \gg 1$ 時，材料反應趨近於彈性，波速趨近高頻極限；反之則波速降低且衰減增強。因此， τ_R 與 τ_c 是建立介質黏彈波動模型時不可或缺的兩個關鍵尺度。

在分數階模型中， τ_R 與 τ_c 仍為主導參數，但其對頻率的權重將由分數階指數 β 所調控，進一步提升模型對不同材料行為的彈性與擬合能力。



2.6 分數階微積分與材料記憶性之關聯

發生黏彈性波動行為時，材料對外力刺激的反應往往不只取決於當下的應力或應變值，而會受到歷史變化的影響，這種性質稱為材料的記憶性(memory effect)。傳統整數階微積分模型(如 Kelvin-Voigt 與馬克士威模型)中，材料的應變或應力反應只與「當下」時刻的變形狀態有關，無法有效描述因延遲反應或鬆弛行為而導致的「記憶」響應。因此，若要準確模擬波在黏彈性介質中的傳播行為，需引入能表達歷史記憶效應的數學工具，即分數階微積分(fractional calculus)。

黏彈性材料的記憶性可透過應力與應變的歷史關係來數學化表示。對於線性材料，最廣義的表達形式可由波茲曼超位置原理(Boltzmann superposition principle)給出，將當下的應力視為過去應變率對材料反應的累積貢獻，展現出材料對時間的非局部性，如下，

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t-\tau) \frac{d\epsilon(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (2.6.1)$$

其中， $\sigma(t)$ 為材料在時間 t 的應力； $\epsilon(\tau)$ 為材料在歷史時間 τ 的應變； $G(t-\tau)$ 為應力鬆弛核(relaxation kernel)，描述材料對歷史應變率的敏感度，時間差越多，權重越小。

如果材料不具備記憶性，則 $G(t-\tau)$ 簡化為 $G(0)$ ，表示只有當前瞬間的應變率影響應力，即

$$\sigma(t) = G(0) \frac{d\epsilon(t)}{dt}. \quad (2.6.2)$$

這正是傳統黏滯性材料或 Kelvin-Voigt 模型的黏性分量，其特性為時間的局部性，亦即僅與當下瞬間的變形速率有關，完全忽略歷史效應。

然而，多數黏彈性材料在應力移除後，仍會展現出逐漸衰退的殘留應變或應力鬆弛行為，其曲線常呈現非指數性長尾趨勢，顯示出材料確實受到「過去之應變歷

史」的影響。因此，若希望以數學模型反映這種物理行為，則需引入能具體描述「歷史累積」的核函數。研究指出，材料的鬆弛核可採用冪次型衰減函數表示，如下，

$$G(t - \tau) = \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)} \cdot (t - \tau)^{-\beta} , \quad (2.6.3)$$

其中 β 為控制記憶強度的指數參數， $0 \leq \beta \leq 1$ ； Γ 為 Gamma 函數，用以正規化冪次核函數的尺度。將此冪次型鬆弛核代入(2.6.1)式可得

$$\sigma(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)} \int_0^t \frac{d\epsilon(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{(t - \tau)^\beta} , \quad (2.6.4)$$

這正是 Caputo 型分數階導數的數學定義，可寫為

$$D_t^\beta \epsilon(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)} \int_0^t \frac{\epsilon'(\tau)}{(t - \tau)^\beta} d\tau . \quad (2.6.5)$$

此外，雖然(2.6.5)式所定義之 Caputo 型分數階導數已與(2.6.4)式的記憶積分形式完全等價，但當建立具物理意涵之本構模型時，仍需進一步引入一個材料性質常數，以使應力 $\sigma(t)$ 與導數項之間具備正確之單位與比例關係。因此，我們於(2.6.6)式中加入一個有效黏滯性係數 η ，該模型形式可見於 Bagley 與 Torvik 於 1983 年所發表之經典方程式中，

$$\sigma(t) = \eta D_t^\beta \epsilon(t) , \quad (2.6.6)$$

其中 η 為黏滯係數，上式關係可知，應力由過去應變率的冪次加權總和所決定，是一種非局部、記憶性的材料模型。總結上述，整數階與分數階微積分模型之數學差異如表 2-1。

表 2-1 整數階與分數階導數模型綜合比較

類型	數學形式	特徵	是否具備記憶性
整數階導數模型	$\sigma(t) = \eta \frac{d\epsilon(t)}{dt}$	單一時間點之瞬時變化。	否
分數階導數模型	$\sigma(t) = \eta D_t^\beta \epsilon(t)$	與所有過去時刻的變化皆相關聯。	是

分數階導數提供了一種能自然表達材料記憶性的數學工具，透過幕次核權重函數的引入，使模型具備可調節的歷史效應強度。這種性質對於捕捉真實材料的應力鬆弛、蠕變、慢速耗散與非瞬時反應行為很重要，成為本研究採用分數階模型的主要數學依據。

第三章 黏彈性波動方程式之頻散(dispersion)與 衰減(attenuation)推導



為方便讀者掌握本章推導邏輯，圖 3-1 整理出本研究中整數階與分數階標準線性固體模型波動方程式推導、傅立葉轉換與標準化分析之完整流程。

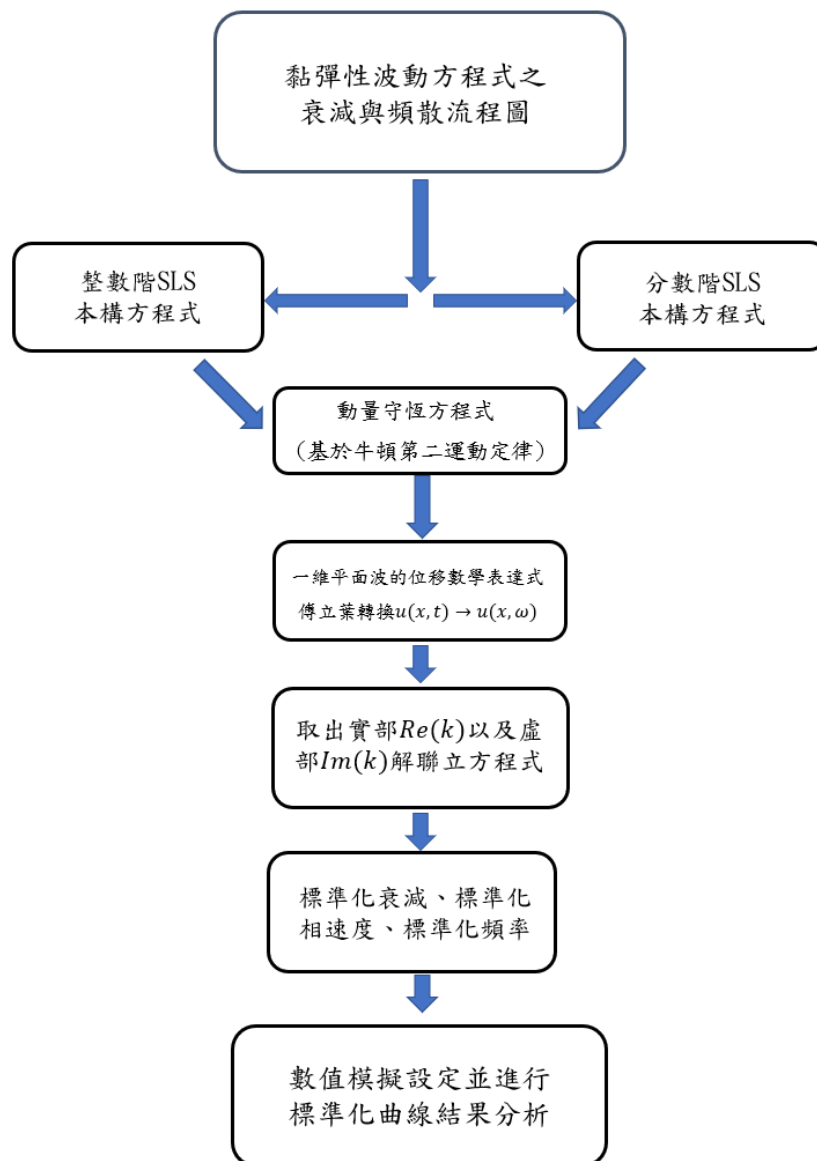


圖 3-1 黏彈性波動方程式之衰減與頻散流程圖。



3.1 馬克士威標準線性固體模型 (Maxwell form of the standard linear solid model)之黏彈性波動方程式推導

3.1.1 模型組成與假設

上排彈性元件所承受之應力記為 σ_1 ，假設 $\sigma_1 = E_1 \epsilon$ ，其中 ϵ 為整體模型之總應變；下排為馬克士威元件所承受之應力。以下將推導馬克士威標準線性固體模型之本構方程式。其中，下標1表示上排彈性元件；下標2表示馬克士威元件中的彈性元件；下標 d 表示馬克士威元件中的阻尼元件；下標 m 表示整體馬克士威元件； η 為黏滯係數； E_1 為上方彈性元件之楊氏模數， E_2 為下方彈性元件之楊氏模數。

3.1.2 整體應力與應變關係

由圖 3-2 可得整體應變為

$$\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2 + \epsilon_d = \epsilon_m, \quad (3.1.1)$$

整體應力為

$$\sigma_m = \sigma_2 = \sigma_d, \quad (3.1.2)$$

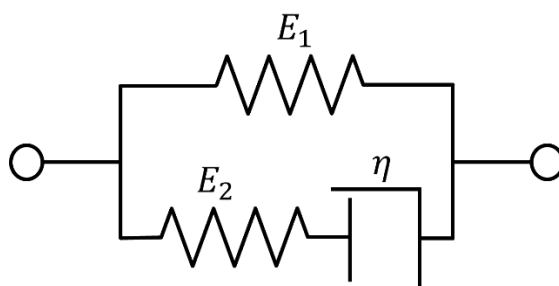


圖 3-2 馬克士威標準線性固體模型。



上方彈性元件應力為

$$\sigma_1 = E_1 \epsilon, \quad (3.1.3)$$

將(3.1.1)式兩端對時間微分，得

$$\frac{d\epsilon_m}{dt} = \frac{d\epsilon_2}{dt} + \frac{d\epsilon_d}{dt}。 \quad (3.1.4)$$

由圖 3-1 可知，馬克士威元件中彈性元件之應力為

$$\sigma_2 = E_2 \epsilon_2, \quad (3.1.5)$$

將(3.1.5)式兩端對時間微分後，整理得到

$$\frac{d\epsilon_2}{dt} = \frac{1}{E_2} \frac{d\sigma_2}{dt}。 \quad (3.1.6)$$

由圖 3-1 可知，阻尼元件(damper)的應力為

$$\sigma_d = \eta \frac{d\epsilon_d}{dt}, \quad (3.1.7)$$

將(3.1.7)式同除 η 之後，可重寫得

$$\frac{\sigma_d}{\eta} = \frac{d\epsilon_d}{dt}。 \quad (3.1.8)$$

$$\frac{d\epsilon_m}{dt} = \frac{1}{E_2} \frac{d\sigma_2}{dt} + \frac{\sigma_d}{\eta}。 \quad (3.1.9)$$

將(3.1.1)式和(3.1.2)式同時代入(3.1.9)式，可得馬克士威元件之彈性元件的應力-應變關係為

$$E_2 \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d\sigma_m}{dt} + E_2 \frac{\sigma_m}{\eta}, \quad (3.1.10)$$



又由整體應力為彈性元件與馬克士威元件之和得

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_m \circ \quad (3.1.11)$$

將(3.1.11)式代入(3.1.3)式可得

$$\sigma = E_1 \epsilon + \sigma_m , \quad (3.1.12)$$

對(3.1.12)兩端對時間微分一次，得

$$\frac{d\sigma}{dt} = E_1 \frac{d\epsilon}{dt} + \frac{d\sigma_m}{dt} , \quad (3.1.13)$$

將式(3.1.10)式代入(3.1.13)式，得

$$\frac{d\sigma}{dt} = E_1 \frac{d\epsilon}{dt} + E_2 \frac{d\epsilon}{dt} - E_2 \frac{\sigma_m}{\eta} , \quad (3.1.14)$$

將(3.1.12)代入(3.1.14)，並合併 E_1 、 E_2 得

$$\frac{d\sigma}{dt} = (E_1 + E_2) \frac{d\epsilon}{dt} - \frac{E_2}{\eta} (\sigma - E_1 \epsilon) , \quad (3.1.15)$$

將(3.1.15)等號兩端同乘 $\frac{\eta}{E_2}$ ，並整理使得應力與應變分別在不同邊即可得到

$$\sigma + \frac{\eta}{E_2} \frac{d\sigma}{dt} = E_1 \left(\epsilon + \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 E_2} \eta \frac{d\epsilon}{dt} \right) \circ \quad (3.1.16)$$

令 $\tau_R = \frac{\eta}{E_2}$ ，為鬆弛時間(relaxation time)； $\tau_c = \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_1 E_2}$ ，為遲滯時間(retardation time)，

即可得最終馬克士威標準線性固體模型之本構方程式為

$$\sigma + \tau_R \frac{d\sigma}{dt} = E_1 \left(\epsilon + \tau_c \frac{d\epsilon}{dt} \right) \circ \quad (3.1.17)$$



3.2 整數階頻散(dispersion)和衰減(attenuation)

在黏彈性材料中，波的傳播特性受到材料內部黏滯性與彈性行為交互作用的影響，進而產生頻散與振幅衰減等現象。其中，頻散是指波形中不同頻率成分於傳播過程中具有不同的速度，導致整體波形產生展開或扭曲。其具體表現為相速度(phase velocity)隨頻率改變的現象；另一方面，由於能量在傳播過程中逐漸耗散，波的振幅會隨著距離而呈指數衰減，此即為衰減。這兩種效應皆為黏彈性介質中波動傳遞的關鍵特徵。

為深入探討黏彈性波動的頻率響應行為，並定量描述相速度與衰減如何隨頻率變化，本節將以先前建立之馬克士威標準線性固體模型為基礎，對其本構方程式進行傅立葉轉換，並與動量守恆方程結合，推導出頻率域下的黏彈性波動方程式。進一步，我們將推導出與頻率相關的頻散關係與衰減表徵式，並透過標準化表達式加以整理，為後續的數值模擬與材料性質分析提供理論基礎。

3.2.1 頻率域轉換與波動方程式之建立

將(3.1.17)式兩端取傅立葉轉換(Fourier transform)，

$$F \left[\sigma(x, t) + \tau_R \frac{d\sigma(x, t)}{dt} \right] = F \left[E_1 \epsilon(t) + E_1 \tau_C \frac{d\epsilon(x, t)}{dt} \right], \quad (3.2.1)$$

計算完成可得

$$\sigma(x, \omega) + \tau_R i \omega \sigma(x, \omega) = E_1 \epsilon(x, \omega) + E_1 \tau_C i \omega \epsilon(x, \omega), \quad (3.2.2)$$

進一步整理成

$$(1 + \tau_R i \omega) \sigma(x, \omega) = (E_1 + E_1 \tau_C i \omega) \epsilon(x, \omega), \quad (3.2.3)$$

將(3.2.3)式進行整理可得



$$\sigma(x, \omega) = \frac{E_1(1 + \tau_c i\omega)}{1 + \tau_R i\omega} \epsilon(x, \omega) \circ \quad (3.2.4)$$

由牛頓第二運動定律，可得動量守恆方程式(2.2.16)式為

$$\rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} \ , \quad (3.2.5)$$

將(3.2.5)式進行傅立葉轉換得

$$\rho(i\omega)^2 u(x, \omega) = \frac{\partial \sigma(x, \omega)}{\partial x} \ , \quad (3.2.6)$$

又由應變與位移關係式之(2.1.9)式，取傅立葉轉換得

$$\epsilon(x, \omega) = \frac{\partial u(x, \omega)}{\partial x} \circ \quad (3.2.7)$$

將(3.2.4)式代入(3.2.6)式可得

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E_1(1 + \tau_c i\omega)}{1 + \tau_R i\omega} \epsilon(x, \omega) \right) = \rho(i\omega)^2 u(x, \omega) \circ \quad (3.2.8)$$

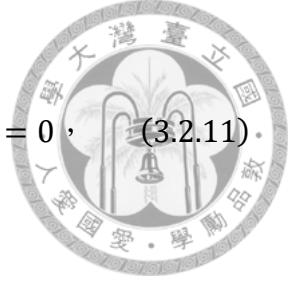
再將(3.2.7)式代入(3.2.8)式，可得頻率域下的黏彈性波動方程式

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E_1(1 + \tau_c i\omega)}{1 + \tau_R i\omega} \frac{\partial u(x, \omega)}{\partial x} \right) = \rho(i\omega)^2 u(x, \omega) \ , \quad (3.2.9)$$

將常係數項 $\frac{E_1(1 + \tau_c i\omega)}{1 + \tau_R i\omega}$ 移出，並整理可得

$$\frac{E_1(1 + \tau_c i\omega)}{1 + \tau_R i\omega} \frac{\partial^2 u(x, \omega)}{\partial^2 x} + \rho\omega^2 u(x, \omega) = 0 \circ \quad (3.2.10)$$

將平面波數學表達式(2.3.12)式之 $u(x, \omega) = u_0 e^{-i\left(\frac{\omega}{v(\omega)} - i\alpha(\omega)\right)x}$ ，代入(3.2.10)式，可得



$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{E_1(1 + \tau_c i\omega)}{1 + \tau_R i\omega} u_0 e^{-i\left(\frac{\omega}{v(\omega)} - i\alpha(\omega)\right)x} + u_0 \rho \omega^2 e^{-i\left(\frac{\omega}{v(\omega)} - i\alpha(\omega)\right)x} = 0, \quad (3.2.11)$$

對 x 做偏微分兩次後得

$$\frac{E_1(1 + \tau_c i\omega)}{1 + \tau_R i\omega} u_0 \left(\alpha^2 + i2\alpha \frac{\omega}{v} - \frac{\omega^2}{v^2} \right) e^{(-\alpha x - i\frac{\omega}{v}x)} + u_0 \rho \omega^2 e^{(-\alpha x - i\frac{\omega}{v}x)} = 0, \quad (3.2.12)$$

微分運算結束後，兩端同時消去 $u_0 e^{(-\alpha x - i\frac{\omega}{v}x)}$ ，可得

$$\frac{E_1(1 + \tau_c i\omega)}{1 + \tau_R i\omega} \left(\alpha^2 + i2\alpha \frac{\omega}{v} - \frac{\omega^2}{v^2} \right) + \rho \omega^2 = 0. \quad (3.2.13)$$

3.2.2 整數階相速度與衰減關係式解析解

接下來的推導，依序對等號左側括號與係數來展開複數乘法，最後將實部與虛部分離，得到

$$\frac{E_1(1 + \tau_c i\omega)(1 - \tau_R i\omega)}{1 + \tau_R^2 \omega^2} \left(\alpha^2 + i2\alpha \frac{\omega}{v} - \frac{\omega^2}{v^2} \right) + \rho \omega^2 = 0, \quad (3.2.14)$$

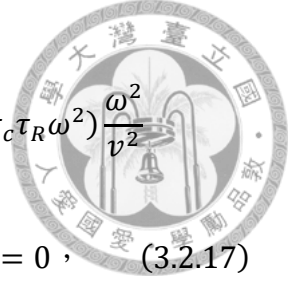
乘開整理可得

$$\frac{E_1(1 - \tau_R i\omega + \tau_c i\omega + \tau_c \tau_R \omega^2)}{1 + \tau_R^2 \omega^2} \left(\alpha^2 + i2\alpha \frac{\omega}{v} - \frac{\omega^2}{v^2} \right) + \rho \omega^2 = 0, \quad (3.2.15)$$

進一步整理得

$$\frac{E_1(1 + \tau_c \tau_R \omega^2) + iE_1\omega(\tau_c - \tau_R)}{1 + \tau_R^2 \omega^2} \left(\alpha^2 + i2\alpha \frac{\omega}{v} - \frac{\omega^2}{v^2} \right) + \rho \omega^2 = 0, \quad (3.2.16)$$

乘開來並提出 $\frac{E_1}{1 + \tau_R^2 \omega^2}$ ，得到



$$\begin{aligned} & \frac{E_1}{1 + \tau_R^2 \omega^2} \left[(1 + \tau_c \tau_R \omega^2) \alpha^2 + i(1 + \tau_c \tau_R \omega^2) 2\alpha \frac{\omega}{v} - (1 + \tau_c \tau_R \omega^2) \frac{\omega^2}{v^2} \right. \\ & \left. + i\omega(\tau_c - \tau_R) \alpha^2 - \omega(\tau_c - \tau_R) 2\alpha \frac{\omega}{v} - i\omega(\tau_c - \tau_R) \frac{\omega^2}{v^2} \right] + \rho \omega^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

將實部與虛部分離並做整理得

$$\begin{aligned} & \frac{E_1}{1 + \tau_R^2 \omega^2} \left[(1 + \tau_c \tau_R \omega^2) \left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right) - (\tau_c - \tau_R) 2\alpha \frac{\omega^2}{v} \right] + \rho \omega^2 \\ & + i \frac{E_1}{1 + \tau_R^2 \omega^2} \left[(1 + \tau_c \tau_R \omega^2) 2\alpha \frac{\omega}{v} + (\tau_c - \tau_R) \left(\omega \alpha^2 - \frac{\omega^3}{v^2} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

將(3.2.18)式之實部和虛部提出得實部關係(3.2.19)式和虛部關係(3.2.20)式

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{E_1}{1 + \tau_R^2 \omega^2} \left[(1 + \tau_c \tau_R \omega^2) \left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right) - (\tau_c - \tau_R) 2\alpha \frac{\omega^2}{v} \right] + \rho \omega^2 = 0, \end{aligned} \right. \quad (3.2.19)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & (1 + \tau_c \tau_R \omega^2) 2\alpha \frac{\omega}{v} + (\tau_c - \tau_R) \left(\omega \alpha^2 - \frac{\omega^3}{v^2} \right) = 0. \end{aligned} \right. \quad (3.2.20)$$

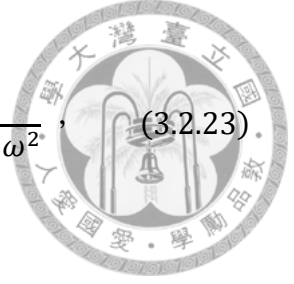
由(3.2.20)式重新整理得

$$2\alpha \frac{\omega}{v} = \frac{\omega(\tau_c - \tau_R) \left(\frac{\omega^2}{v^2} - \alpha^2 \right)}{1 + \tau_c \tau_R \omega^2}, \quad (3.2.21)$$

將(3.2.21)式代回(3.2.19)式，並進行一系列的數學化簡，目的是整理出 α 及 $\frac{\omega}{v}$ ，即

$$\begin{aligned} & \frac{E_1}{1 + \tau_R^2 \omega^2} \left[(1 + \tau_c \tau_R \omega^2) \left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right) - \right. \\ & \left. \omega(\tau_c - \tau_R) \frac{\omega(\tau_c - \tau_R) \left(\frac{\omega^2}{v^2} - \alpha^2 \right)}{1 + \tau_c \tau_R \omega^2} \right] + \rho \omega^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

兩端同乘 $\frac{1 + \tau_R^2 \omega^2}{E_1}$ ，得到



$$\left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right)(1 + \tau_c \tau_R \omega^2) + \left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right) \omega^2 (\tau_c - \tau_R)^2 \frac{1}{1 + \tau_c \tau_R \omega^2}, \quad (3.2.23)$$

進一步整理可得

$$\begin{aligned} & \left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right) \left((1 + \tau_c \tau_R \omega^2) + \omega^2 (\tau_c - \tau_R)^2 \frac{1}{1 + \tau_c \tau_R \omega^2} \right) \\ & + \frac{1 + \tau_R^2 \omega^2}{E_1} \rho \omega^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

可進一步表達為

$$\begin{aligned} & \left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right) \frac{(1 + \tau_c \tau_R \omega^2)^2 + \omega^2 (\tau_c^2 - 2\tau_c \tau_R + \tau_R^2)}{1 + \tau_c \tau_R \omega^2} \\ & + \frac{1 + \tau_R^2 \omega^2}{E_1} \rho \omega^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

經化簡後得到

$$\begin{aligned} & \left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right) \left(\frac{1 + 2\tau_c \tau_R \omega^2 + \tau_c^2 \tau_R^2 \omega^4 + \tau_c^2 \omega^2 - 2\tau_c \tau_R \omega^2 + \tau_R^2 \omega^2}{1 + \tau_c \tau_R \omega^2} \right) \\ & + \frac{1 + \tau_R^2 \omega^2}{E_1} \rho \omega^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

化簡後作整理得

$$\left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right) \frac{(1 + \tau_c^2 \omega^2)(1 + \tau_R^2 \omega^2)}{1 + \tau_c \tau_R \omega^2} + \frac{1 + \tau_R^2 \omega^2}{E_1} \rho \omega^2 = 0, \quad (3.2.27)$$

進一步消去得

$$\left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right) \frac{1 + \tau_c^2 \omega^2}{1 + \tau_c \tau_R \omega^2} + \frac{\rho \omega^2}{E_1} = 0, \quad (3.2.28)$$



等號左側留下 $\frac{\omega}{v}$ ，並將剩餘式子移去等號左側做整理得

$$\frac{\omega}{v} = \sqrt{\alpha^2 + \frac{\rho\omega^2(1 + \tau_c\tau_R\omega^2)}{E_1(1 + \tau_c^2\omega^2)}}。 \quad (3.2.29)$$

將(3.2.29)式代回(3.2.20)式可得

$$(1 + \tau_c\tau_R\omega^2)2\alpha\sqrt{\alpha^2 + \frac{\rho\omega^2(1 + \tau_c\tau_R\omega^2)}{E_1(1 + \tau_c^2\omega^2)}} + \omega(\tau_c - \tau_R)\left(\alpha^2 - \alpha^2 - \frac{\rho\omega^2(1 + \tau_c\tau_R\omega^2)}{E_1(1 + \tau_c^2\omega^2)}\right) = 0, \quad (3.2.30)$$

由上述可得

$$(1 + \tau_c\tau_R\omega^2)2\alpha\sqrt{\alpha^2 + \frac{\rho\omega^2(1 + \tau_c\tau_R\omega^2)}{E_1(1 + \tau_c^2\omega^2)}} - \omega(\tau_c - \tau_R)\frac{\rho\omega^2(1 + \tau_c\tau_R\omega^2)}{E_1(1 + \tau_c^2\omega^2)} = 0, \quad (3.2.31)$$

等號兩側取平方，可得

$$4\alpha^4 + \frac{4\alpha^2\rho\omega^2(1 + \tau_c\tau_R\omega^2)}{E_1(1 + \tau_c^2\omega^2)} - \omega^2(\tau_c - \tau_R)^2\left(\frac{\rho\omega^2}{E_1(1 + \tau_c^2\omega^2)}\right)^2 = 0, \quad (3.2.32)$$

等號兩端同除以4可得

$$\alpha^4 + \alpha^2\frac{\rho\omega^2(1 + \tau_c\tau_R\omega^2)}{E_1(1 + \tau_c^2\omega^2)} - \frac{1}{4}\omega^2(\tau_c - \tau_R)^2\left(\frac{\rho\omega^2}{E_1(1 + \tau_c^2\omega^2)}\right)^2 = 0, \quad (3.2.33)$$

利用一元二次方程式公式解可以得到

$$\alpha^2 = \frac{-\rho\omega^2(1 + \tau_c\tau_R\omega^2)}{2E_1(1 + \tau_c^2\omega^2)} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\rho\omega^2(1 + \tau_c\tau_R\omega^2)}{E_1(1 + \tau_c^2\omega^2)}\right)^2 + \omega^2(\tau_c - \tau_R)^2\left(\frac{\rho\omega^2}{E_1(1 + \tau_c^2\omega^2)}\right)^2}, \quad (3.2.34)$$

將根號內做整理得

$$\alpha^2 = \frac{-\rho\omega^2(1 + \tau_c\tau_R\omega^2)}{2E_1(1 + \tau_c^2\omega^2)} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho^2\omega^4(1 + 2\tau_c\tau_R\omega^2 + \tau_c^2\tau_R^2\omega^4 + \tau_c^2\omega^2 - 2\tau_c\tau_R\omega^2 + \tau_R^2\omega^2)}{(E_1(1 + \tau_c^2\omega^2))^2}}, \quad (3.2.35)$$

進一步整理得

$$\alpha^2 = \frac{-\rho\omega^2(1 + \tau_c\tau_R\omega^2)}{2E_1(1 + \tau_c^2\omega^2)} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho^2\omega^4(1 + \tau_c^2\omega^2)(1 + \tau_R^2\omega^2)}{E_1^2(1 + \tau_c^2\omega^2)^2}}, \quad (3.2.36)$$

經化簡後可得

$$\alpha^2 = \frac{-\rho\omega^2(1 + \tau_c\tau_R\omega^2)}{2E_1(1 + \tau_c^2\omega^2)} \pm \frac{1}{2} \frac{\rho\omega^2}{E_1} \sqrt{\frac{(1 + \tau_R^2\omega^2)}{(1 + \tau_c^2\omega^2)}}, \text{ 且負不合}, \quad (3.2.37)$$

等號兩端開根號，即得到衰減因子 α ，

$$\alpha = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{2E_1} \sqrt{\frac{(1 + \tau_R^2\omega^2)}{(1 + \tau_c^2\omega^2)}} - \frac{(1 + \tau_c\tau_R\omega^2)}{(1 + \tau_c^2\omega^2)}}. \quad (3.2.38)$$

將(3.2.38)式代回(3.2.29)式並整理得

$$\frac{\omega}{v} = \sqrt{\frac{-\rho\omega^2(1 + \tau_c\tau_R\omega^2)}{2E_1(1 + \tau_c^2\omega^2)} + \frac{\rho\omega^2}{2E_1} \sqrt{\frac{(1 + \tau_R^2\omega^2)}{(1 + \tau_c^2\omega^2)}} + \frac{\rho\omega^2(1 + \tau_c\tau_R\omega^2)}{E_1(1 + \tau_c^2\omega^2)}}, \quad (3.2.39)$$

再進一步整理，即可得到相速度與頻率的表達式 $\frac{\omega}{v}$ ，





$$\frac{\omega}{v} = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{2E_1} \sqrt{\frac{(1+\tau_R^2\omega^2)}{(1+\tau_c^2\omega^2)}} + \frac{(1+\tau_c\tau_R\omega^2)}{(1+\tau_c^2\omega^2)}} \quad (3.2.40)$$

經由波速 $c = \sqrt{\frac{E_1}{\rho}}$ ，可以代入(3.2.38)式和(3.2.41)式，得到

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{A-B}{2}} \\ \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{A+B}{2}} \end{cases}, \quad (3.2.41)$$

其中 A 和 B 為

$$A = \sqrt{\frac{(1+\tau_R^2\omega^2)}{(1+\tau_c^2\omega^2)}}, \quad (3.2.42)$$

$$B = \frac{(1+\tau_c\tau_R\omega^2)}{(1+\tau_c^2\omega^2)}. \quad (3.2.43)$$

並將其寫為標準化後的衰減(attenuation)以及相速度(phase velocity)

$$\frac{\alpha c}{\omega_0} = \frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{\frac{A-B}{2}}, \quad (3.2.44)$$

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{\frac{A+B}{2}}}, \quad (3.2.45)$$

其中， $\omega_0 = \tau_c^{-1} = \frac{E_1 E_2}{(E_1 + E_2)\eta}$ 為遲滯時間(retardation time)之倒數，並令 $\omega_n = \frac{\omega}{\omega_0}$ 和 $E_n =$

$\frac{E_1 + E_2}{E_1}$ ，得到

$$A = \sqrt{\frac{(1 + \tau_R^2 \omega^2)}{(1 + \tau_c^2 \omega^2)}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\omega_n^2}{E_n^2}}{1 + \omega_n^2}}, \quad (3.2.46)$$

$$B = \frac{(1 + \tau_c \tau_R \omega^2)}{(1 + \tau_c^2 \omega^2)} = \frac{1 + \frac{\omega_n^2}{E_n^2}}{1 + \omega_n^2}。 \quad (3.2.47)$$

(3.2.46)式與(3.2.47)式為引入標準化參數後所得之結果，代入先前推導之(3.2.44)式與(3.2.45)式，即可透過數值模擬分析頻率依賴之衰減與相速度特性。



3.3 馬克士威標準線性固體模型 (Maxwell form of the standard linear solid model) 之分數階導數黏彈性波動方程式推導



本節所討論之「分數階導數」馬克士威標準線性固體模型，與整數階模型的主要差異，在於馬克士威元件中阻尼元件的應力與應變關係改以分數階微分形式表示，其餘結構設定皆相同。以下將進行分數階導數之馬克士威標準線性固體模型之本構方程式推導。其中，下標為1之符號表示上排中的彈性元件；下標為2表示下排馬克士威元件；下標為 d 表示馬克士威元件中的阻尼元件；下標為 m 表示整體馬克士威元件； η 為黏滯係數。

3.3.1 分數階阻尼項之導入

由圖 3-3 可得整體應變為

$$\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2 + \epsilon_d = \epsilon_m \quad (3.3.1)$$

下排之應力皆相等，寫做

$$\sigma_m = \sigma_2 = \sigma_d \quad (3.3.2)$$

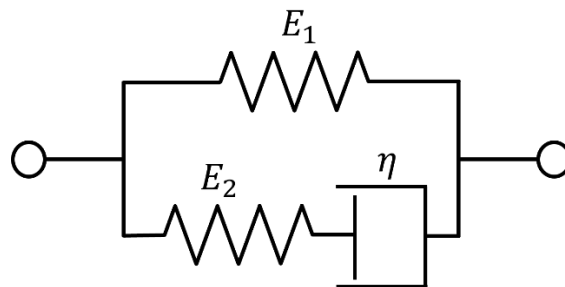


圖 3-3 馬克士威標準線性固體模型。

整體應力為

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_m \circ \quad (3.3.3)$$



假設阻尼元件應力與應變之關係為分數階形式

$$\sigma_d = \eta \frac{d^\beta \epsilon_d}{dt^\beta}, \quad (3.3.4)$$

其中 β 為分數階微分指數，表示進行了 β 次的微分，範圍為 $0 \leq \beta \leq 1$ ，對應力應變關係式，即 $\sigma_2 = E_2 \epsilon_2$ ，以時間為變數微分 β 次，可以得到

$$\frac{d^\beta \sigma_2}{dt^\beta} = E_2 \frac{d^\beta \epsilon_2}{dt^\beta}, \quad (3.3.5)$$

再由應變關係式(3.3.1)式取分數階導數，得到

$$\frac{d^\beta \epsilon_1}{dt^\beta} = \frac{d^\beta \epsilon_2}{dt^\beta} + \frac{d^\beta \epsilon_d}{dt^\beta} \circ \quad (3.3.6)$$

將(3.3.4)式和(3.3.5)式代入(3.3.6)式，進行整理後，可以得到

$$\frac{d^\beta \epsilon_1}{dt^\beta} = \frac{1}{E_2} \frac{d^\beta \sigma_2}{dt^\beta} + \frac{1}{\eta} \sigma_d, \quad (3.3.7)$$

移項整理可得

$$E_2 \frac{d^\beta \epsilon_1}{dt^\beta} = \frac{d^\beta \sigma_2}{dt^\beta} + \frac{E_2}{\eta} \sigma_d, \quad (3.3.8)$$

其中定義 $\tau_R = \frac{\eta}{E_2}$ 為應力鬆弛時間(relaxation time)，將(3.3.2)式代入(3.3.8)式並移項

得

$$\frac{d^\beta \sigma_m}{dt^\beta} = E_2 \frac{d^\beta \epsilon_1}{dt^\beta} - \frac{1}{\tau_R} \sigma_d \circ \quad (3.3.9)$$



又由 $\sigma_1 = E_1 \epsilon$ ，將(3.3.3)取分數階導數，可得

$$\frac{d^\beta \sigma}{dt^\beta} = E_1 \frac{d^\beta \epsilon}{dt^\beta} + \frac{d^\beta \sigma_m}{dt^\beta} \quad (3.3.10)$$

將(3.3.9)式代入(3.3.10)式得

$$\frac{d^\beta \sigma}{dt^\beta} = E_1 \frac{d^\beta \epsilon}{dt^\beta} + E_2 \frac{d^\beta \epsilon_1}{dt^\beta} - \frac{1}{\tau_R} \sigma_d \quad (3.3.11)$$

再將(3.3.3)式代入(3.3.11)式，並整理化簡可得

$$\frac{d^\beta \sigma}{dt^\beta} = (E_1 + E_2) \frac{d^\beta \epsilon}{dt^\beta} - \frac{1}{\tau_R} (\sigma - E_1 \epsilon) \quad (3.3.12)$$

同乘 τ_R 並移項整理，可得

$$\sigma + \tau_R \frac{d^\beta \sigma}{dt^\beta} = \tau_R (E_1 + E_2) \frac{d^\beta \epsilon}{dt^\beta} + E_1 \epsilon \quad (3.3.13)$$

將上式整理可得

$$\sigma + \tau_R \frac{d^\beta \sigma}{dt^\beta} = E_1 \left(\epsilon + \frac{(E_1 + E_2)\eta}{E_1 E_2} \frac{d^\beta \epsilon}{dt^\beta} \right) \quad (3.3.14)$$

進一步化簡為

$$\sigma + \tau_R \frac{d^\beta \sigma}{dt^\beta} = E_1 \left(\epsilon + \tau_c \frac{d^\beta \epsilon}{dt^\beta} \right) \quad (3.3.15)$$

其中 $\tau_c = \frac{(E_1 + E_2)\eta}{E_1 E_2}$ 為應力遲滯時間(retardation time)。



3.3.2 分數階本構式整理

在(3.3.16)式這個本構方程中，將(3.3.15)式預加了一個組合因子(combining factor) β 在 τ_R 和 τ_c 的指數項，用以平衡其彈性與黏彈性特性。引入這個組合因子 β ，目的是以確保當 $\beta = 0$ 時，(3.3.16)式變為純彈性模型(3.3.17)式，而當 $\beta = 1$ 時，則變為標準線性固體模型，即黏彈性模型(3.3.18)式。

$$\sigma + \tau_R^\beta \frac{d^\beta \sigma}{dt^\beta} = E_1 \left(\epsilon + \tau_c^\beta \frac{d^\beta \epsilon}{dt^\beta} \right) \quad (3.3.16)$$

當 $\beta = 0$ ，(3.3.17)式為描述純彈性模型，恢復成彈性材料本構方程式

$$\sigma = E_1 \epsilon \quad (3.3.17)$$

當 $\beta = 1$ ，(3.3.18)式為描述線性黏彈性模型，恢復到整數階標準線性固體模型本構方程式

$$\sigma + \tau_R \frac{d\sigma}{dt} = E_1 \left(\epsilon + \tau_c \frac{d\epsilon}{dt} \right) \quad (3.3.18)$$

3.4 組合因子驗證

在這個章節中，為驗證通用性，必須進一步確定組合因子是否為定義正確的，舉例，假設組合因子為 q ($0 \leq q \leq 1$)，以(3.3.16)式來說，(3.3.16)式即為 $q = \beta$ 代入(3.3.15)式之結果，現在為了驗證組合因子，將(3.3.15)式代入組合因子 q ，可以寫為以下形式，

$$\sigma(x, t) + \tau_R^q \frac{d^q \sigma(x, t)}{dt^q} = E_1 \left(\epsilon(x, t) + \tau_c^q \frac{d^q \epsilon(x, t)}{dt^q} \right) \quad (3.4.1)$$



3.4.1 組合因子定義與傅立葉轉換

由傅立葉轉換(Fourier transform)，使其可以由時域轉頻域進行分析，以下(3.4.2)式至(3.4.10)式皆為傅立葉轉換之計算，對 $\sigma(x, t)$ 取傅立葉轉換為

$$F[\sigma(x, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x, t) e^{-i\omega t} dt = \sigma(x, \omega) \circ \quad (3.4.2)$$

對 $\frac{d\epsilon(x, t)}{dt}$ 取傅立葉轉換為

$$F\left[\frac{d\epsilon(x, t)}{dt}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon(x, t)}{dt} e^{-i\omega t} dt \circ \quad (3.4.3)$$

由部份積分法之公式可知道， $udv = uv - vdu$ ，令 $u = e^{-i\omega t}$ ， $dv = \frac{d\epsilon(x, t)}{dt} dt$ ，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon(x, t)}{dt} e^{-i\omega t} dt = [\epsilon(x, t) e^{-i\omega t}]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(x, t) (-i\omega e^{-i\omega t}) dt \circ \quad (3.4.5)$$

若假設 $t \rightarrow \pm \infty$ ， $\epsilon(\infty)$ 和 $\epsilon(-\infty)$ 趨近於0，則可消去前項，得

$$F\left[\frac{d\epsilon(x, t)}{dt}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon(x, t)}{dt} e^{-i\omega t} dt = i\omega \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(x, t) e^{-i\omega t} dt = i\omega \epsilon(x, \omega) \circ \quad (3.4.6)$$

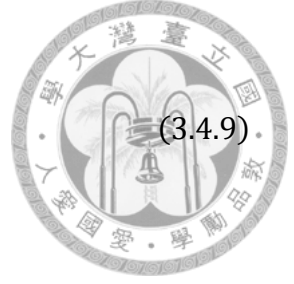
同理，分數階導數之傅立葉轉換為

$$F\left[\frac{d^\beta \epsilon(x, t)}{dt^\beta}\right] = (i\omega)^\beta \epsilon(x, \omega) \circ \quad (3.4.7)$$

根據尤拉公式(Euler's formula)可知

$$i\omega = e^{\ln(i\omega)} = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) \omega = \omega e^{\frac{\pi}{2}i} \circ \quad (3.4.8)$$

若為 β 次方，則寫為



$$(i\omega)^\beta = e^{\beta \ln(i\omega)} = \omega^\beta e^{\frac{\pi}{2}\beta i} \quad (3.4.9)$$

將(3.4.7)式代入(3.4.9)式可整理為

$$F\left[\frac{d^\beta \epsilon(x, t)}{dt^\beta}\right] = (i\omega)^\beta \epsilon(x, \omega) = \omega^\beta e^{\frac{\pi}{2}\beta i} \epsilon(x, \omega) \quad (3.4.10)$$

將(3.4.1)式兩端進行傅立葉轉換可得

$$F\left[\sigma(x, t) + \tau_R^q \frac{d^\beta \sigma(x, t)}{dt^\beta}\right] = F\left[E_1\left(\epsilon(x, t) + \tau_c^q \frac{d^\beta \epsilon(x, t)}{dt^\beta}\right)\right] \quad (3.4.11)$$

傅立葉轉換後得到

$$\sigma(x, \omega) + \tau_R^q \omega^\beta e^{\frac{\pi}{2}\beta i} \sigma(x, \omega) = E_1\left(\epsilon(x, \omega) + \tau_c^q \omega^\beta e^{\frac{\pi}{2}\beta i} \epsilon(x, \omega)\right) \quad (3.4.12)$$

將等號兩側各自的共同項提出整理，可得

$$\sigma(x, \omega) \left(1 + \tau_R^q \omega^\beta e^{\frac{\pi}{2}\beta i}\right) = E_1 \epsilon(x, \omega) \left(1 + \tau_c^q \omega^\beta e^{\frac{\pi}{2}\beta i}\right) \quad (3.4.13)$$

將方程式中的 $e^{\frac{\pi}{2}\beta i}$ 透過尤拉公式展開並做整理得

$$\begin{aligned} & \sigma(x, \omega) \left[1 + \tau_R^q \omega^\beta \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} + i \sin \frac{\beta\pi}{2}\right)\right] \\ &= E_1 \epsilon(x, \omega) \left[1 + \tau_c^q \omega^\beta \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} + i \sin \frac{\beta\pi}{2}\right)\right] \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

進一步整理可得

$$\sigma(x, \omega) \left[\left(1 + \tau_R^q \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2}\right) + i \tau_R^q \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2}\right]$$

$$= E_1 \epsilon(x, \omega) \left[\left(1 + \tau_c^q \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} \right) + i \tau_c^q \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} \right], \quad (3.4.15)$$



移項可得

$$\sigma(x, \omega) = E_1 \epsilon(x, \omega) \frac{\left(1 + \tau_c^q \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} \right) + i \tau_c^q \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2}}{\left(1 + \tau_R^q \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} \right) + i \tau_R^q \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2}}, \quad (3.4.16)$$

將等號右端分母分子同乘 $\left(1 + \tau_R^q \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} \right) - i \tau_R^q \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2}$ ，並做整理可得

$$\sigma(x, \omega) = \frac{E_1 \epsilon(x, \omega)}{\left(1 + \tau_R^q \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} \right)^2 + \left(\tau_R^q \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} \right)^2} \left\{ \left[\left(1 + \tau_c^q \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} \right) + i \tau_c^q \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} \right] \right. \\ \left. \left[\left(1 + \tau_R^q \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} \right) - i \tau_R^q \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} \right] \right\}, \quad (3.4.17)$$

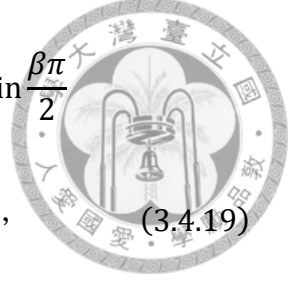
可進一步乘開整理得

$$\sigma(x, \omega) = \frac{E_1 \epsilon(x, \omega)}{\left(1 + \tau_R^q \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} \right)^2 + \left(\tau_R^q \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} \right)^2} \left[\left(1 + \tau_c^q \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} \right) \left(1 + \tau_R^q \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} \right) - \right. \\ \left. \left(1 + \tau_c^q \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} \right) \left(i \tau_R^q \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} \right) + \left(i \tau_c^q \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} \right) \left(1 + \tau_R^q \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} \right) \right. \\ \left. + \left(\tau_c^q \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} \right) \left(\tau_R^q \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} \right) \right], \quad (3.4.18)$$

由上述可得

$$\sigma(x, \omega) = \frac{E_1 \epsilon(x, \omega)}{1 + 2 \tau_R^q \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + \tau_R^{2q} \omega^{2\beta} \cos^2 \left(\frac{\beta\pi}{2} \right) + \tau_R^{2q} \omega^{2\beta} \sin^2 \left(\frac{\beta\pi}{2} \right)} \left[1 + \right. \\ \left. \tau_R^q \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + \tau_c^q \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + \tau_c^q \tau_R^q \omega^{2\beta} \cos^2 \left(\frac{\beta\pi}{2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& -i\tau_R^q \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} - i\tau_c^q \tau_R^q \omega^{2\beta} \cos \frac{\beta\pi}{2} \sin \frac{\beta\pi}{2} + i\tau_c^q \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} \\
& + i\tau_c^q \tau_R^q \omega^{2\beta} \cos \frac{\beta\pi}{2} \sin \frac{\beta\pi}{2} + \tau_c^q \tau_R^q \omega^{2\beta} \sin^2 \left(\frac{\beta\pi}{2} \right) \Big], \quad (3.4.19)
\end{aligned}$$



進一步整理得

$$\sigma(x, \omega) = E_1 \epsilon(x, \omega) \frac{1 + (\tau_c^q + \tau_R^q) \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + \tau_c^q \tau_R^q \omega^{2\beta} + i(\tau_c^q - \tau_R^q) \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2}}{1 + 2\tau_R^q \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + \tau_R^{2q} \omega^{2\beta}}, \quad (3.4.20)$$

對(3.4.20)式取模數(module)可以得到

$$|\sigma(x, \omega)| = \frac{|E_1 \epsilon(x, \omega)|}{\sqrt{\frac{\left(1 + (\tau_c^q + \tau_R^q) \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + \tau_c^q \tau_R^q \omega^{2\beta}\right)^2 + \left((\tau_c^q - \tau_R^q) \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2}\right)^2}{\left(1 + 2\tau_R^q \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + \tau_R^{2q} \omega^{2\beta}\right)^2}}}, \quad (3.4.21)$$

整理後可得

$$\begin{aligned}
|\sigma(x, \omega)| &= \frac{|E_1 \epsilon(x, \omega)|}{1 + 2\tau_R^q \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + \tau_R^{2q} \omega^{2\beta}} \left[1 + (\tau_c^q + \tau_R^q)^2 \omega^{2\beta} \cos^2 \left(\frac{\beta\pi}{2} \right) + \tau_c^{2q} \tau_R^{2q} \omega^{4\beta} \right. \\
&+ 2(\tau_c^q + \tau_R^q) \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + 2\tau_c^q \tau_R^q \omega^{2\beta} + 2(\tau_c^q + \tau_R^q) \tau_c^q \tau_R^q \omega^{3\beta} \cos \frac{\beta\pi}{2} \\
&\left. + (\tau_c^q - \tau_R^q)^2 \omega^{2\beta} \sin^2 \left(\frac{\beta\pi}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.4.22)
\end{aligned}$$

3.4.2 $q = 0$ 與 $q = 1$ 邊界行為分析

為了進一步驗證 q 的取值，是否會符合實際物理現象，將 q 分別代入 $q = 0$ 與 $q = 1$ 。



令 $q = \beta = 0$ 時，得其為純彈性，

$$|\sigma(x, \omega)| = |E_1 \epsilon(x, \omega)| \sqrt{\frac{1 + 2^2 + 1 + 2(1 + 1) + 2 + 2(1 + 1)}{(1 + 2 + 1)^2}} = |E_1 \epsilon(x, \omega)|, \quad (3.4.23)$$

令 $q = \beta = 1$ 時，得其為線性黏彈性，

$$|\sigma(x, \omega)| = \frac{|E_1 \epsilon(x, \omega)|}{1 + 2\tau_R + 2\tau_R^2 \omega^2} [1 + (\tau_R + \tau_c)^2 \omega^2 + \tau_R^2 \tau_c^2 \omega^4 + 2(\tau_R + \tau_c)\omega + 2\tau_R \tau_c \omega^2 + 2(\tau_R + \tau_c)\tau_R \tau_c \omega^3]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.4.24)$$

故可知 q 之取值正確，符合實際物理現象。

3.5 分數階頻散(dispersion)和衰減(attenuation)

本章節延續前述 3.3 節所建立之馬克士威標準線性固體模型架構，目的在推導波在材料中傳播時所產生之頻散與衰減之數學表達式。與 3.3 節不同之處在於，本節引入了分數階導數(fractional derivative)以描述黏滯行為中的記憶效應，進一步模擬更貼近實際材料之非局部性與長時間記憶特性。由於分數階微積分具備非整數階的微分操作特性，故在數學處理上顯著提升了推導的複雜度。

為了清晰呈現分數階導數對波動方程與頻率響應之影響，本節將採逐步推導方式，從本構方程式出發，結合傅立葉轉換與動量守恆方程式，導出頻率域下黏彈性波動方程式，進而推導出頻散關係與衰減。最後，將導出的結果整理為標準化形式，以利於後續的數值模擬與材料性質之比較分析。

透過本節之理論推導與計算，可更全面掌握分數階標準線性固體模型中分數階次 β 對波速與能量耗散行為之影響，也可視為對 3.3 節之整數階模型結果的推廣與延伸，進一步驗證其在黏彈性材料建模上的應用潛力。



3.5.1 頻率域本構方程式推導

針對 3.3 章節所推導之分數階標準線性固體的本構方程式(3.3.16)，將兩端進行傅立葉轉換得

$$F \left[\sigma(x, t) + \tau_R^\beta \frac{d^\beta \sigma}{dt^\beta} \right] = F \left[E_1 \left(\epsilon(x, t) + \tau_c^\beta \frac{d^\beta \epsilon}{dt^\beta} \right) \right], \quad (3.5.1)$$

將上式簡化可得

$$\sigma(x, \omega) + \tau_R^\beta (i\omega)^\beta \sigma(x, \omega) = E_1 \left(\epsilon(x, \omega) + \tau_c^\beta (i\omega)^\beta \epsilon(x, \omega) \right), \quad (3.5.2)$$

將(3.5.2)式進行整理，得應力與應變頻域關係式

$$\sigma(x, \omega) \left(1 + \tau_R^\beta (i\omega)^\beta \right) = E_1 \epsilon(x, \omega) \left(1 + \tau_c^\beta (i\omega)^\beta \right), \quad (3.5.3)$$

可移項整理得

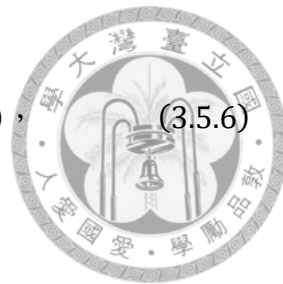
$$\sigma(x, \omega) = \frac{E_1 \left(1 + \tau_c^\beta (i\omega)^\beta \right)}{\left(1 + \tau_R^\beta (i\omega)^\beta \right)} \epsilon(x, \omega). \quad (3.5.4)$$

將(3.5.4)式代入傅立葉轉換後的動量守恆方程式，即(3.2.6)式， $\frac{\partial \sigma(x, \omega)}{\partial x} = \rho(i\omega)^2 u(x, \omega)$ ，得到

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E_1 \left(1 + \tau_c^\beta (i\omega)^\beta \right)}{\left(1 + \tau_R^\beta (i\omega)^\beta \right)} \epsilon(x, \omega) \right) = \rho(i\omega)^2 u(x, \omega), \quad (3.5.5)$$

代入應變與位移關係，即(3.2.7)式， $\epsilon(x, \omega) = \frac{\partial u(x, \omega)}{\partial x}$ ，可得頻率域的黏彈性波動方程式

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E_1(1 + \tau_c^\beta(i\omega)^\beta)}{(1 + \tau_R^\beta(i\omega)^\beta)} \frac{\partial u(x, \omega)}{\partial x} \right) = \rho(i\omega)^2 u(x, \omega), \quad (3.5.6)$$



因此可表示為

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{E_1(1 + \tau_c^\beta(i\omega)^\beta)}{(1 + \tau_R^\beta(i\omega)^\beta)} + \rho\omega^2 \right] u(x, \omega) = 0. \quad (3.5.7)$$

由(2.3.12)式 $u(x, \omega) = u_0 e^{(-\alpha(\omega)x - i\frac{\omega}{v(\omega)}x)}$ ，代入(3.5.7)式可得

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{E_1(1 + \tau_c^\beta(i\omega)^\beta)}{(1 + \tau_R^\beta(i\omega)^\beta)} u_0 e^{(-\alpha(\omega)x - i\frac{\omega}{v(\omega)}x)} + u_0 \rho\omega^2 e^{(-\alpha(\omega)x - i\frac{\omega}{v(\omega)}x)} = 0, \quad (3.5.9)$$

經由化簡可得

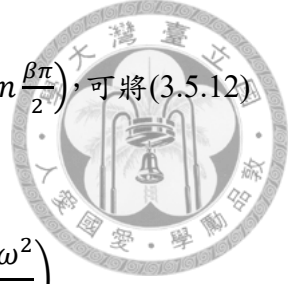
$$\begin{aligned} & \frac{E_1(1 + \tau_c^\beta(i\omega)^\beta)}{(1 + \tau_R^\beta(i\omega)^\beta)} u_0 \left(\alpha^2 + i2\alpha \frac{\omega}{v} - \frac{\omega^2}{v^2} \right) e^{(-\alpha(\omega)x - i\frac{\omega}{v(\omega)}x)} \\ & + u_0 \rho\omega^2 e^{(-\alpha(\omega)x - i\frac{\omega}{v(\omega)}x)} = 0, \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

等號兩端消去非零項 $u_0 e^{(-\alpha(\omega)x - i\frac{\omega}{v(\omega)}x)}$ ，得

$$\frac{E_1(1 + \tau_c^\beta(i\omega)^\beta)}{(1 + \tau_R^\beta(i\omega)^\beta)} \left(\alpha^2 + i2\alpha \frac{\omega}{v} - \frac{\omega^2}{v^2} \right) + \rho\omega^2 = 0, \quad (3.5.11)$$

等號兩端同乘 $(1 + \tau_R^\beta(i\omega)^\beta)$ 並做整理，可得

$$E_1(1 + \tau_c^\beta(i\omega)^\beta) \left(\alpha^2 + i2\alpha \frac{\omega}{v} - \frac{\omega^2}{v^2} \right) + \rho\omega^2 (1 + \tau_R^\beta(i\omega)^\beta) = 0, \quad (3.5.12)$$



接著，將複數表示的分數階項展開，根據 $(i\omega)^\beta = \omega^\beta \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} + i \sin \frac{\beta\pi}{2} \right)$ ，可將(3.5.12)

式整理為

$$E_1 \left(1 + \tau_c^\beta \omega^\beta \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} + i \sin \frac{\beta\pi}{2} \right) \right) \left(\alpha^2 + i 2\alpha \frac{\omega}{v} - \frac{\omega^2}{v^2} \right) + \rho \omega^2 \left(1 + \tau_R^\beta \omega^\beta \left(\cos \frac{\beta\pi}{2} + i \sin \frac{\beta\pi}{2} \right) \right) = 0, \quad (3.5.13)$$

由此可進一步推導出

$$E_1 \left(\alpha^2 + i 2\alpha \frac{\omega}{v} - \frac{\omega^2}{v^2} + \tau_c^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} \alpha^2 + i \tau_c^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} 2\alpha \frac{\omega}{v} - \tau_c^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} \frac{\omega^2}{v^2} + i \tau_c^\beta \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} \alpha^2 - \tau_c^\beta \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} 2\alpha \frac{\omega}{v} - \tau_c^\beta \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} \frac{\omega^2}{v^2} \right) + \rho \omega^2 + \rho \omega^2 \tau_R^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + i \rho \omega^2 \tau_R^\beta \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} = 0. \quad (3.5.14)$$

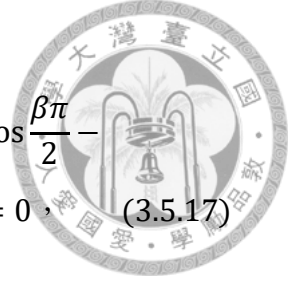
3.5.2 分數階相速度與衰減關係式解析解

將(3.5.14)式之實部與虛部分別提出，以利後續解聯立方程式，得到衰減和相速度，分別對應於(3.5.15)式以及(3.5.16)式，

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 \alpha^2 - E_1 \frac{\omega^2}{v^2} + E_1 \alpha^2 \tau_c^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} - E_1 \frac{\omega^2}{v^2} \tau_c^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} - \\ E_1 \tau_c^\beta \omega^\beta 2\alpha \frac{\omega}{v} \sin \frac{\beta\pi}{2} + \rho \omega^2 + \rho \omega^2 \tau_R^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} = 0, \end{array} \right. \quad (3.5.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 2\alpha \frac{\omega}{v} + E_1 2\alpha \frac{\omega}{v} \tau_c^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + E_1 \alpha^2 \tau_c^\beta \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} - \\ E_1 \frac{\omega^2}{v^2} \tau_c^\beta \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} + \rho \omega^2 \tau_R^\beta \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} = 0, \end{array} \right. \quad (3.5.16)$$

經由波速 $c = \sqrt{\frac{E_1}{\rho}}$ ，分別帶入上兩式得到



$$\begin{cases} c^2 \alpha^2 - c^2 \frac{\omega^2}{v^2} + c^2 \alpha^2 \tau_c^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} - c^2 \frac{\omega^2}{v^2} \tau_c^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} - \\ c^2 \tau_c^\beta \omega^\beta 2\alpha \frac{\omega}{v} \sin \frac{\beta\pi}{2} + \omega^2 + \omega^2 \tau_R^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} = 0, \quad (3.5.17) \\ c^2 2\alpha \frac{\omega}{v} + c^2 2\alpha \frac{\omega}{v} \tau_c^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + c^2 \alpha^2 \tau_c^\beta \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} - \\ c^2 \frac{\omega^2}{v^2} \tau_c^\beta \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} + \omega^2 \tau_R^\beta \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} = 0, \quad (3.5.18) \end{cases}$$

等號兩端同除以 c^2 ，得到

$$\begin{cases} \alpha^2 - \frac{\omega^2}{v^2} + \alpha^2 \tau_c^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} - \frac{\omega^2}{v^2} \tau_c^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} - \\ \tau_c^\beta \omega^\beta 2\alpha \frac{\omega}{v} \sin \frac{\beta\pi}{2} + \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \tau_R^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} = 0, \quad (3.5.19) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha \frac{\omega}{v} + 2\alpha \frac{\omega}{v} \tau_c^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + \alpha^2 \tau_c^\beta \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} - \\ \frac{\omega^2}{v^2} \tau_c^\beta \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} + \frac{\omega^2}{c^2} \tau_R^\beta \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} = 0, \quad (3.5.20) \end{cases}$$

可進一步表達為

$$\begin{cases} \left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right) \left(1 + \tau_c^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} \right) \\ - 2\alpha \frac{\omega}{v} \tau_c^\beta \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \tau_R^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} \right) = 0, \quad (3.5.21) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right) \tau_c^\beta \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} \\ + 2\alpha \frac{\omega}{v} \left(1 + \tau_c^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \tau_R^\beta \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} = 0. \quad (3.5.22) \end{cases}$$

接著，為簡化表達並利於進行聯立解，令 $\tau_R^\beta \omega^\beta = Q$ ， $\tau_c^\beta \omega^\beta = P$ ， $\frac{\beta\pi}{2} = \phi$ ，則(3.5.21)

式以及(3.5.22)式可化簡得



$$\left\{ \left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right) (1 + P \cos \phi) - 2\alpha \frac{\omega}{v} P \sin \phi + \frac{\omega^2}{c^2} (1 + Q \cos \phi) = 0 \right. , \quad (3.5.23)$$

$$\left\{ \left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right) P \sin \phi + 2\alpha \frac{\omega}{v} (1 + P \cos \phi) + \frac{\omega^2}{c^2} Q \sin \phi = 0 \right. . \quad (3.5.24)$$

由(3.5.24)式移項可得(3.5.25)式，

$$2\alpha \frac{\omega}{v} = \frac{-\frac{\omega^2}{c^2} Q \sin \phi - \left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right) P \sin \phi}{1 + P \cos \phi} , \quad (3.5.25)$$

將(3.5.25)式代回(3.5.23)式可得(3.5.26)式

$$\begin{aligned} & \left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right) (1 + P \cos \phi) + \frac{\left[\frac{\omega^2}{c^2} Q \sin \phi + \left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right) P \sin \phi \right] P \sin \phi}{1 + P \cos \phi} \\ & + \frac{\omega^2}{c^2} (1 + Q \cos \phi) = 0 , \end{aligned} \quad (3.5.26)$$

可簡化為

$$\begin{aligned} & \left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right) (1 + P \cos \phi)^2 + \frac{\omega^2}{c^2} Q P \sin^2 \phi + \left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right) P^2 \sin^2 \phi \\ & + \frac{\omega^2}{c^2} (1 + Q \cos \phi) (1 + P \cos \phi) = 0 , \end{aligned} \quad (3.5.27)$$

進一步可推得

$$\begin{aligned} & \left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right) (1 + 2P \cos \phi + P^2 \cos^2 \phi + P^2 \sin^2 \phi) + \frac{\omega^2}{c^2} Q P \sin^2 \phi \\ & + \frac{\omega^2}{c^2} (1 + P \cos \phi) (1 + Q \cos \phi) = 0 , \end{aligned} \quad (3.5.28)$$

由上述可得



$$\begin{aligned} & \left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right) (1 + 2P \cos \phi + P^2) + \frac{\omega^2}{c^2} Q P \sin^2 \phi \\ & + \frac{\omega^2}{c^2} (1 + P \cos \phi)(1 + Q \cos \phi) = 0, \end{aligned} \quad (3.5.29)$$

整理後可得

$$\begin{aligned} & \left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right) (1 + 2P \cos \phi + P^2) \\ & + \frac{\omega^2}{c^2} (Q P \sin^2 \phi + 1 + Q \cos \phi + P \cos \phi + Q P \cos^2 \phi) = 0, \end{aligned} \quad (3.5.30)$$

再進一步整理為

$$\left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right) (1 + 2P \cos \phi + P^2) + \frac{\omega^2}{c^2} (1 + Q \cos \phi + P \cos \phi + Q P) = 0, \quad (3.5.31)$$

移項整理，得到衰減 α 為

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{(1 + Q \cos \phi + P \cos \phi + Q P)}{(1 + 2P \cos \phi + P^2)}}. \quad (3.5.32)$$

將(3.5.32)式代回(3.5.23)式得到(3.5.33)式為

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{(1 + Q \cos \phi + P \cos \phi + Q P)}{(1 + 2P \cos \phi + P^2)} - \frac{\omega^2}{v^2} \right) (1 + P \cos \phi) - \\ & 2 \frac{\omega}{v} P \sin \phi \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{(1 + Q \cos \phi + P \cos \phi + Q P)}{(1 + 2P \cos \phi + P^2)}} + \frac{\omega^2}{c^2} (1 + Q \cos \phi) = 0, \end{aligned} \quad (3.5.33)$$

接著，把 $\frac{\omega^2}{c^2}$ 提出後可以得到

$$\frac{\omega^2}{c^2} \left[(1 + Q \cos \phi) - \frac{(1 + Q \cos \phi + P \cos \phi + Q P)(1 + P \cos \phi)}{(1 + 2P \cos \phi + P^2)} \right]$$

$$= 2 \frac{\omega}{v} P \sin \phi \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{(1 + Q \cos \phi + P \cos \phi + QP)}{(1 + 2P \cos \phi + P^2)}} , \quad (3.5.34)$$



等號兩端取平方後可得

$$\begin{aligned} & \frac{\omega^4}{c^4} \left[(1 + Q \cos \phi) - \frac{(1 + Q \cos \phi + P \cos \phi + QP)(1 + P \cos \phi)}{(1 + 2P \cos \phi + P^2)} \right]^2 \\ &= 4 \frac{\omega^2}{v^2} P^2 \sin^2 \phi \left[\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{(1 + Q \cos \phi + P \cos \phi + QP)}{(1 + 2P \cos \phi + P^2)} \right] , \end{aligned} \quad (3.5.35)$$

將等號右邊全部移項至等號左邊，

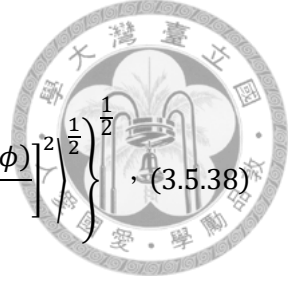
$$\begin{aligned} & 4 \frac{\omega^4}{v^4} P^2 \sin^2 \phi - 4 \frac{\omega^2}{v^2} P^2 \sin^2 \phi \frac{\omega^2}{c^2} \frac{(1 + Q \cos \phi + P \cos \phi + QP)}{(1 + 2P \cos \phi + P^2)} \\ & - \frac{\omega^4}{c^4} \left[(1 + Q \cos \phi) - \frac{(1 + Q \cos \phi + P \cos \phi + QP)(1 + P \cos \phi)}{(1 + 2P \cos \phi + P^2)} \right]^2 = 0 , \end{aligned} \quad (3.5.36)$$

由(3.5.36)式可得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\omega}{v} \right)^4 - \left(\frac{\omega}{v} \right)^2 \frac{\omega^2}{c^2} \frac{(1 + Q \cos \phi + P \cos \phi + QP)}{(1 + 2P \cos \phi + P^2)} - \frac{\omega^4}{c^4} \frac{1}{4P^2 \sin^2 \phi} \\ & \left[(1 + Q \cos \phi) - \frac{(1 + Q \cos \phi + P \cos \phi + QP)(1 + P \cos \phi)}{(1 + 2P \cos \phi + P^2)} \right]^2 = 0 . \end{aligned} \quad (3.5.37)$$

將(3.5.37)式利用一元二次方程式的公式解，來求解 $\frac{\omega}{v}$ ，可得

$$\frac{\omega}{v} = \left\{ \frac{\omega^2}{2c^2} \frac{(1 + Q \cos \phi + P \cos \phi + QP)}{(1 + 2P \cos \phi + P^2)} \pm \frac{1}{2} \left[\frac{\omega^4}{c^4} \left[\frac{(1 + Q \cos \phi + P \cos \phi + QP)}{(1 + 2P \cos \phi + P^2)} \right]^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$



$$+ \frac{\omega^4}{c^4} \frac{1}{P^2 \sin^2 \phi} \left[(1 + Q \cos \phi) - \frac{(1 + Q \cos \phi + P \cos \phi + QP)(1 + P \cos \phi)}{(1 + 2P \cos \phi + P^2)} \right]^2 \left\{ \frac{1}{2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (3.5.38)$$

由於負不合，故將(3.5.38)式取正，得(3.5.39)式

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} & \left\{ \frac{1}{2} \frac{(1 + Q \cos \phi + P \cos \phi + QP)}{(1 + 2P \cos \phi + P^2)} + \frac{1}{2} \left[\frac{(1 + Q \cos \phi + P \cos \phi + QP)^2}{(1 + 2P \cos \phi + P^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{P^2 \sin^2 \phi} \left[(1 + Q \cos \phi) - \frac{(1 + Q \cos \phi + P \cos \phi + QP)(1 + P \cos \phi)}{(1 + 2P \cos \phi + P^2)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (3.5.39) \end{aligned}$$

將(3.5.39)式代入(3.5.32)式，得

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{\omega}{c} & \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(1 + Q \cos \phi + P \cos \phi + QP)}{(1 + 2P \cos \phi + P^2)} + \frac{1}{2} \left[\frac{(1 + Q \cos \phi + P \cos \phi + QP)^2}{(1 + 2P \cos \phi + P^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{P^2 \sin^2 \phi} \left[(1 + Q \cos \phi) - \frac{(1 + Q \cos \phi + P \cos \phi + QP)(1 + P \cos \phi)}{(1 + 2P \cos \phi + P^2)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (3.5.40) \end{aligned}$$

這樣即可得到相速度表達式(3.5.39)式之 $\frac{\omega}{v}$ ，以及衰減表達式(3.5.40)式之 α ，將其寫成簡潔型式，

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{-A + B}{2}}, \quad (3.5.41)$$



$$\frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{A+B}{2}}, \quad (3.5.42)$$

其中， A 與 B 分別為(3.5.43)式以及(3.5.44)式，

$$A = \frac{(1 + Q \cos \phi + P \cos \phi + QP)}{(1 + 2P \cos \phi + P^2)} \\ = \frac{\left(1 + \tau_R^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + \tau_c^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + \tau_R^\beta \tau_c^\beta \omega^{2\beta}\right)}{\left(1 + 2\tau_c^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + \tau_c^\beta \omega^\beta\right)}, \quad (3.5.43)$$

$$B = \left\{ \left[\frac{\left(1 + \tau_R^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + \tau_c^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + \tau_R^\beta \tau_c^\beta \omega^{2\beta}\right)}{\left(1 + 2\tau_c^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + \tau_c^\beta \omega^\beta\right)} \right]^2 + \left[\frac{1 + \tau_R^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2}}{\tau_c^\beta \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2}} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\left(1 + \tau_R^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + \tau_c^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + \tau_R^\beta \tau_c^\beta \omega^{2\beta}\right) \left(1 + \tau_c^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2}\right)}{\tau_c^\beta \omega^\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} \left(1 + 2\tau_c^\beta \omega^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + \tau_c^\beta \omega^{2\beta}\right)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (3.5.44)$$

3.6 衰減和相速度之標準化分析

為了使不同材料或模型之間具有可比性，本文採用標準化參數表示頻率、衰減與相速度，使計算結果不受材料本身彈性模數、黏滯係數或密度等絕對數值影響。

為了使數據具備通用性與無因次性，將頻率以(3.6.1)式進行標準化，

$$\omega_n = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad (3.6.1)$$

並將衰減因子與相速度分別轉換為(3.6.2)式以及(3.6.3)式，

$$\alpha_n = \alpha \frac{c}{\omega_0}, \quad (3.6.2)$$



$$v_n = \frac{v}{c}, \quad (3.6.3)$$

其中彈性波速 $c = \sqrt{\frac{E_1}{\rho}}$ ； $\omega_0 = \tau_c^{-1}$ ，為遲滯時間(retardation time)之倒數， ω_n 為標準化頻率， α_n 為標準化衰減， v_n 為標準化相速度。此外定義 $E_n = \frac{E_1 + E_2}{E_1}$ ，為一個無因次化的參數。

透過標準化處理後的衰減因子與相速度，使得各種 β 值下的行為得以在統一尺度下進行比較。此舉亦有助於強化圖形繪製的直觀性與一致性，避免數值落差導致的比例扭曲。為了使分析更聚焦於材料的頻率依賴性與 β 的影響，標準化的形式有效隔離了控制參數與材料固有常數之間對結果的干擾。此外，為了使理論推導過程更為簡潔，標準化公式也有助於統整推導架構，並與現有文獻建立一致的比較基準。將(3.5.41)式以及(3.5.42)式，分別代入(3.6.2)式以及(3.6.3)式，

$$\alpha_n = \omega_n \sqrt{\frac{-A + B}{2}}, \quad (3.6.4)$$

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{A + B}{2}}}, \quad (3.6.5)$$

其中 A 和 B 為前一節所導出之函數，皆可進一步整理成與標準化頻率 ω_n 、無因次材料參數 E_n 以及與指數參數 β 有關的形式。其形式為

$$A = \frac{1 + \frac{\omega_n^\beta}{E_n^\beta} \cos \frac{\beta\pi}{2} + \omega_n^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + \frac{\omega_n^{2\beta}}{E_n^\beta}}{1 + 2\omega_n^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} + \omega_n^{2\beta}}, \quad (3.6.6)$$

$$B = \sqrt{A^2 + \frac{1}{\omega_n^{2\beta} \sin^2 \frac{\beta\pi}{2}} \left[\left(1 + \frac{\omega_n^\beta}{E_n^\beta} \cos \frac{\beta\pi}{2} \right) - A \left(1 + \omega_n^\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} \right) \right]^2}. \quad (3.6.7)$$

(3.6.6)式及(3.6.7)式顯示，標準化後的衰減與相速度只與三個無因次參數有關，分別為 β 、標準化頻率 ω_n 以及材料參數比值 E_n 。藉由此三個參數的變化，便可全面評估不同材料或模型在各種頻率下的波動特性。這不僅可簡化分析流程，更有助於建立通用的材料辨識準則與波動行為模式，有效提升本研究在理論與應用層面的廣度與深度。

第四章 數值模擬與結果分析



本章旨在將第三章推導之黏彈性波動方程式應用於具體材料情境，透過數值模擬觀察在不同模型與參數設定下，波動於黏彈性介質中傳播所展現的頻散與衰減行為，並進一步探討分數階導數所引入之記憶性如何影響波動性質的結果探討。為使不同材料之比較更具一致性與普遍性，模擬中皆採用標準化形式進行無因次分析，橫軸表示標準化頻率 $\frac{\omega}{\omega_0}$ ，縱軸分別表示標準化衰減 $\frac{\alpha}{\omega_0/c}$ 與標準化相速度 $\frac{v}{c}$ 。

4.1 模擬方法與參數設定

模擬過程中，數值模擬模型皆建構於前述的分數階導數馬克士威形式標準線性固體架構上，並透過結果對比來彰顯分數階較整數階強大的結果。針對模擬所需之材料性質，本文選擇許多種材料：天然橡膠(natural rubber, NR)、模擬心肌的黏彈性凝膠(GC-5 gel)與活體豬大腦半球等等，並以各文獻之實驗結果設定其彈性模數 E_1 、 E_2 。分數階指數 β 則在0至1之間分散取樣，以系統化的分析使用分數階後，記憶效應之影響。

表 4-1 數值模擬所使用之材料參數表

	NR	GC-5 gel	活體豬大腦半球
E_1 (kPa)	3.9214	235	0.503
E_2 (kPa)	122.68	42.36	0.586
η (kPa · s)	33.86	399.88	0.013



4.2 整數階模型與分數階模型之比較

圖 4-1 與圖 4-2 分別呈現整數階($\beta = 1$)與分數階($0 \leq \beta \leq 1$)模型下之模擬結果，材料皆設定為天然橡膠，彈性模數為 $E_1 = 3.9214 \text{ kPa}$ ， $E_2 = 122.68 \text{ kPa}$ 。圖

4-1 顯示，在整數階情況下，標準化衰減 $\frac{\alpha}{\omega_0/c}$ 隨著標準化頻率上升，增加量逐漸趨緩，雖然符合實際物理現象，但是我們忽略了材料本身由黏彈性性質帶來的記憶效應，從而導致結果過於單調；而標準化相速度 $\frac{v}{c}$ 亦由低頻處之最低值，逐步上升至高頻極限，符合經典線性黏彈性理論預期，但同樣過於單調。

相較之下，圖 4-2 展示了分數階模型下 β 對波動行為的顯著影響。隨著 β 由0逐步上升至1，衰減曲線之峰值逐漸升高，對應物理上材料黏性(記憶性)增加、能量耗散分布於更廣的頻率範圍；而相速度曲線也出現漸進式平滑上升，說明介質對高頻成分的速度提升受限，線性增長逐漸緩慢。

分數階導數的使用，使得分數階指數 β ，在0到1的範圍內，就像讓材料對自身的黏彈性性質有了等級劃分， β 值越靠近0則趨於彈性， β 值越靠近1則越趨於線性黏彈性，這證實了分數階模型在描述具慢速記憶行為(如聚合物、生醫材料)方面之優勢。

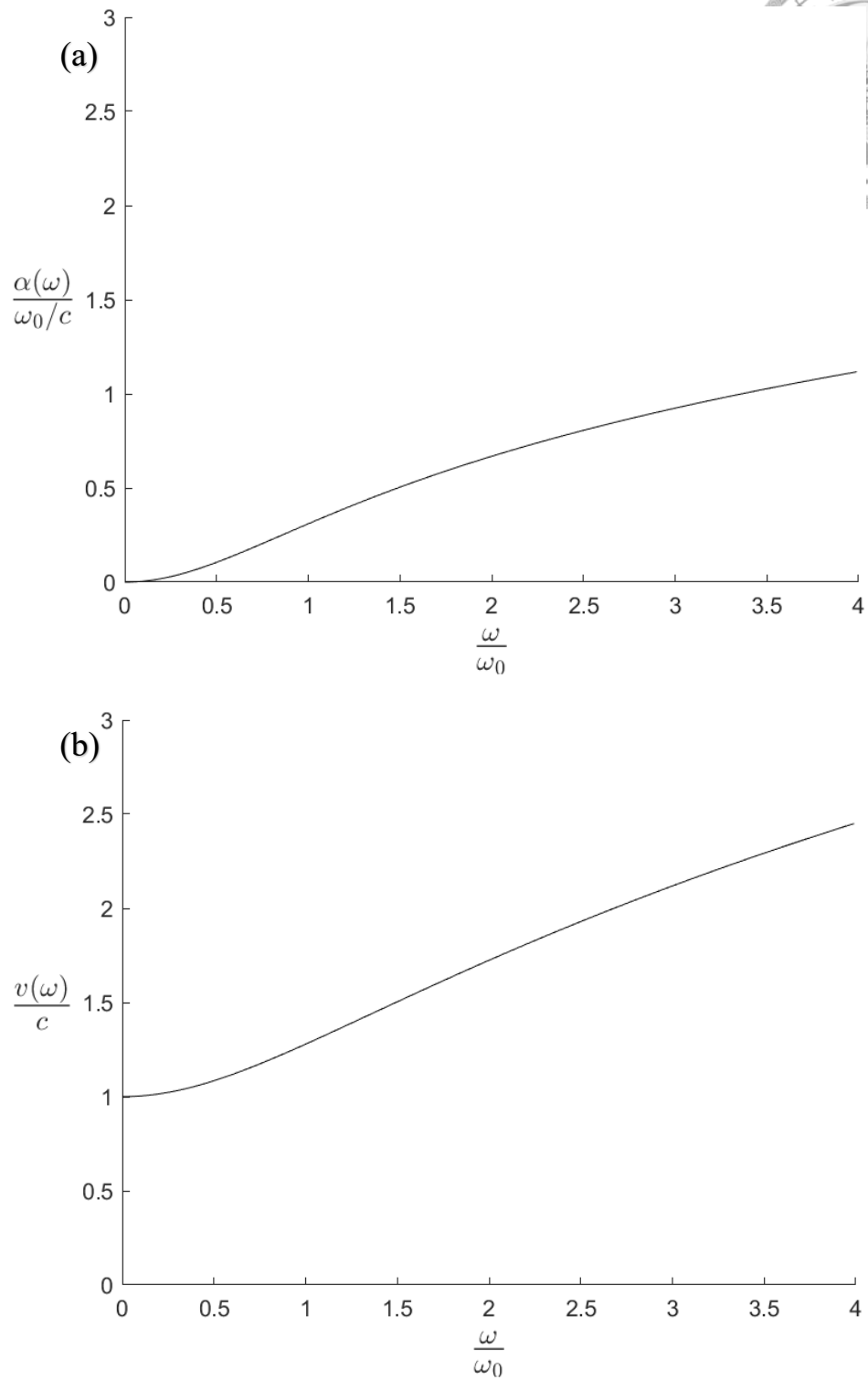
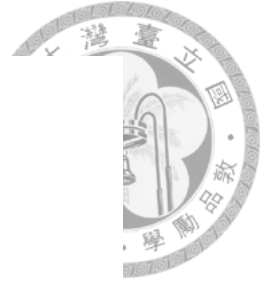


圖 4-1 整數階導數標準線性固體模型，材料為天然橡膠(NR)，材料參數為 $E_1 = 3.9214 \text{ kPa}$ ， $E_2 = 122.68 \text{ kPa}$ 。(a) 縱軸為標準化衰減，橫軸為標準化頻率。(b) 縱軸為標準化相速度，橫軸為標準化頻率。

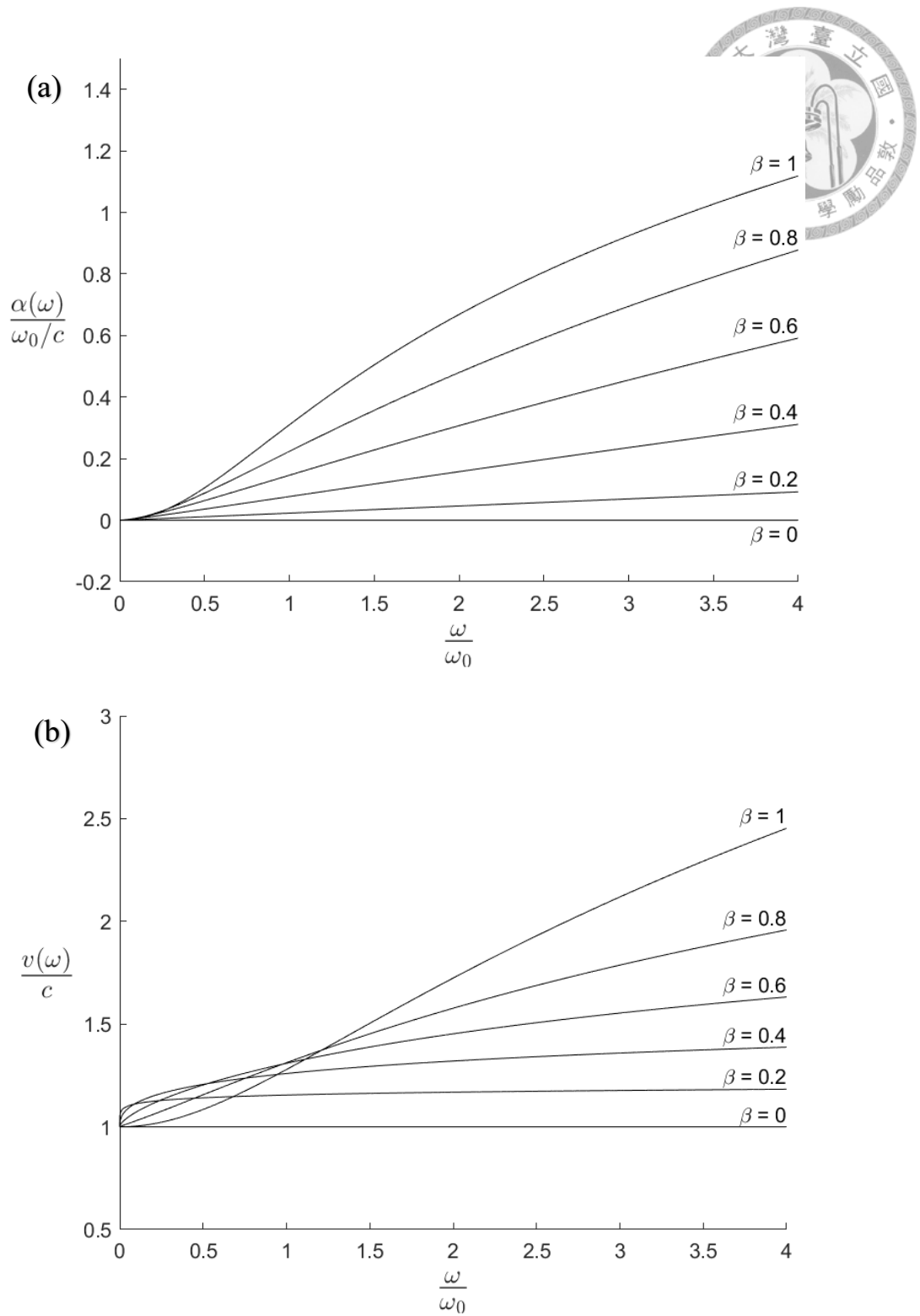


圖 4-2 分數階導數標準線性固體模型，對應了分數階指數 β 值為 0、0.2、0.4、0.6、0.8以及1的情況，材料為天然橡膠(NR)，材料參數為 $E_1 = 3.9214$ kPa， $E_2 = 122.68$ kPa。(a) 縱軸為標準化衰減，橫軸為標準化頻率。(b) 縱軸為標準化相速度，橫軸為標準化頻率。

4.3 分數階 Kelvin-Voigt 模型和馬克士威標準線性固體模型之差異



在黏彈性材料之波動建模中，Kelvin-Voigt 模型與標準線性固體模型為常見之兩種本構架構。Kelvin-Voigt 模型透過彈簧與阻尼器並聯組合，可捕捉材料在外力作用下之瞬時彈性與黏性反應，並成功引入能量耗散機制，為早期黏彈性波動研究中常見之理論基礎。然而，其在波動方程中導致相速度為頻率的遞增函數，尤其於高頻下相速度將趨近無限，與實際材料相速度通常於中高頻趨於穩定之物理行為不符。

針對上述限制，標準線性固體模型之馬克士威形式提供了更為精確的描述方式，並能同時呈現材料的瞬時彈性回應與長期鬆弛行為。特別是在引入分數階導數之後，其所導出的波動方程能自然表現出頻率相依的相速度與衰減因子，對應材料實際存在之能量耗散與記憶效應，也得出其相速度在高頻下收斂，符合實際物理行為。

因此，綜合來看，Kelvin-Voigt 與馬克士威形式之標準線性固體模型差異可發現，後者在物理意涵、數學推導與實務應用上皆展現出更佳之描述能力。本文選擇以馬克士威標準線性固體模型作為建模基礎，除可更準確捕捉黏彈性介質中的頻散與衰減特性外，亦能作為後續分數階延伸分析與材料擬合應用之理論核心。

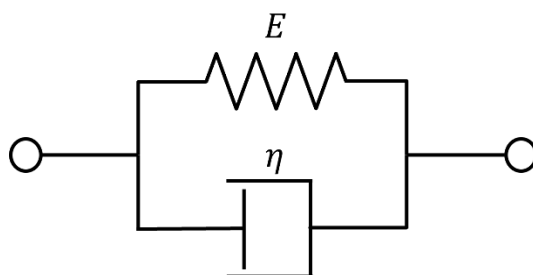


圖 4-3 Kelvin-Voigt 模型。

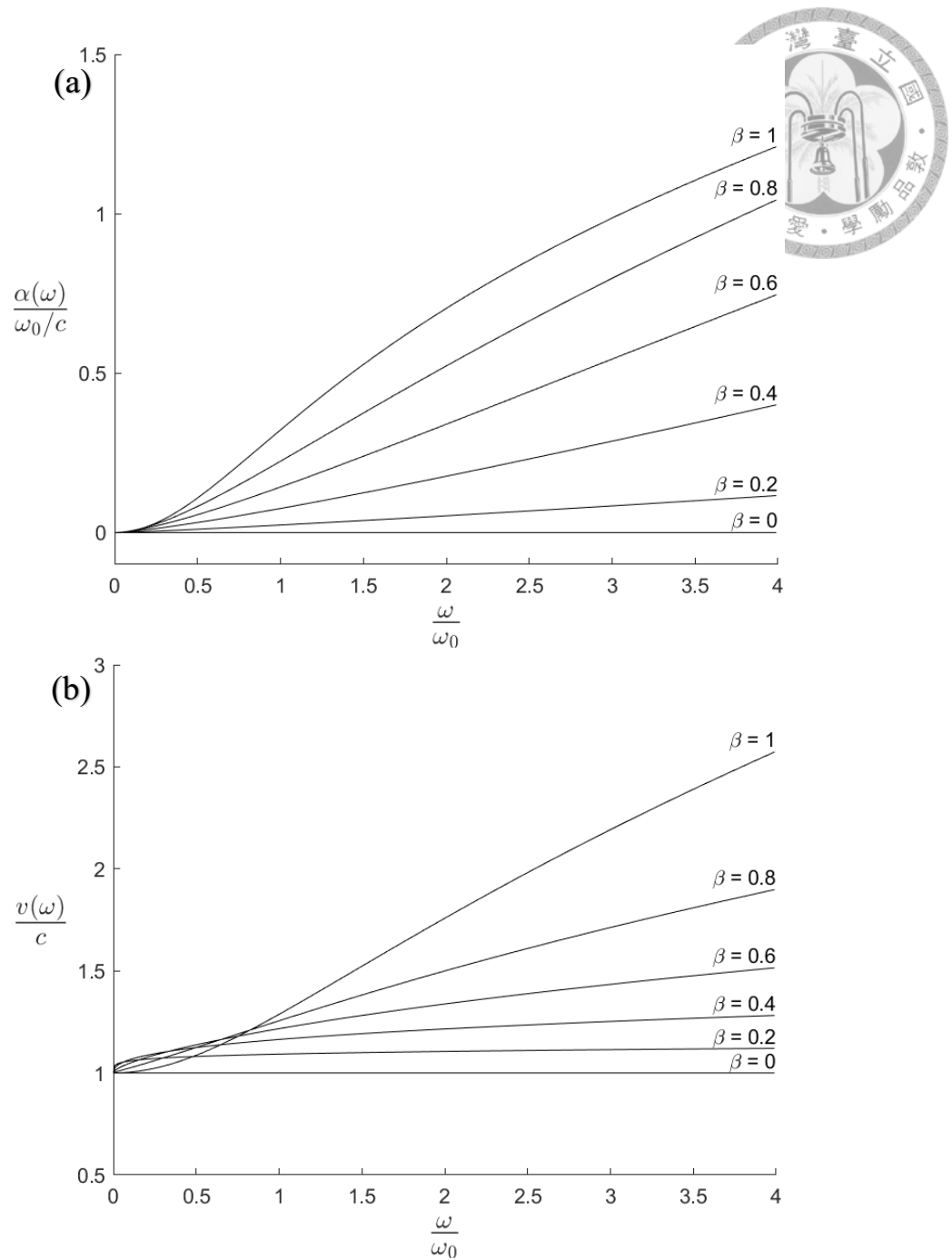


圖 4-4 中低頻分數階 Kelvin-Voigt 模型，對應了分數階指數 β 值為 0、0.2、0.4、0.6、0.8 以及 1 的情況。(a) 縱軸為標準化衰減，橫軸為標準化頻率。(b) 縱軸為標準化相速度，橫軸為標準化頻率。

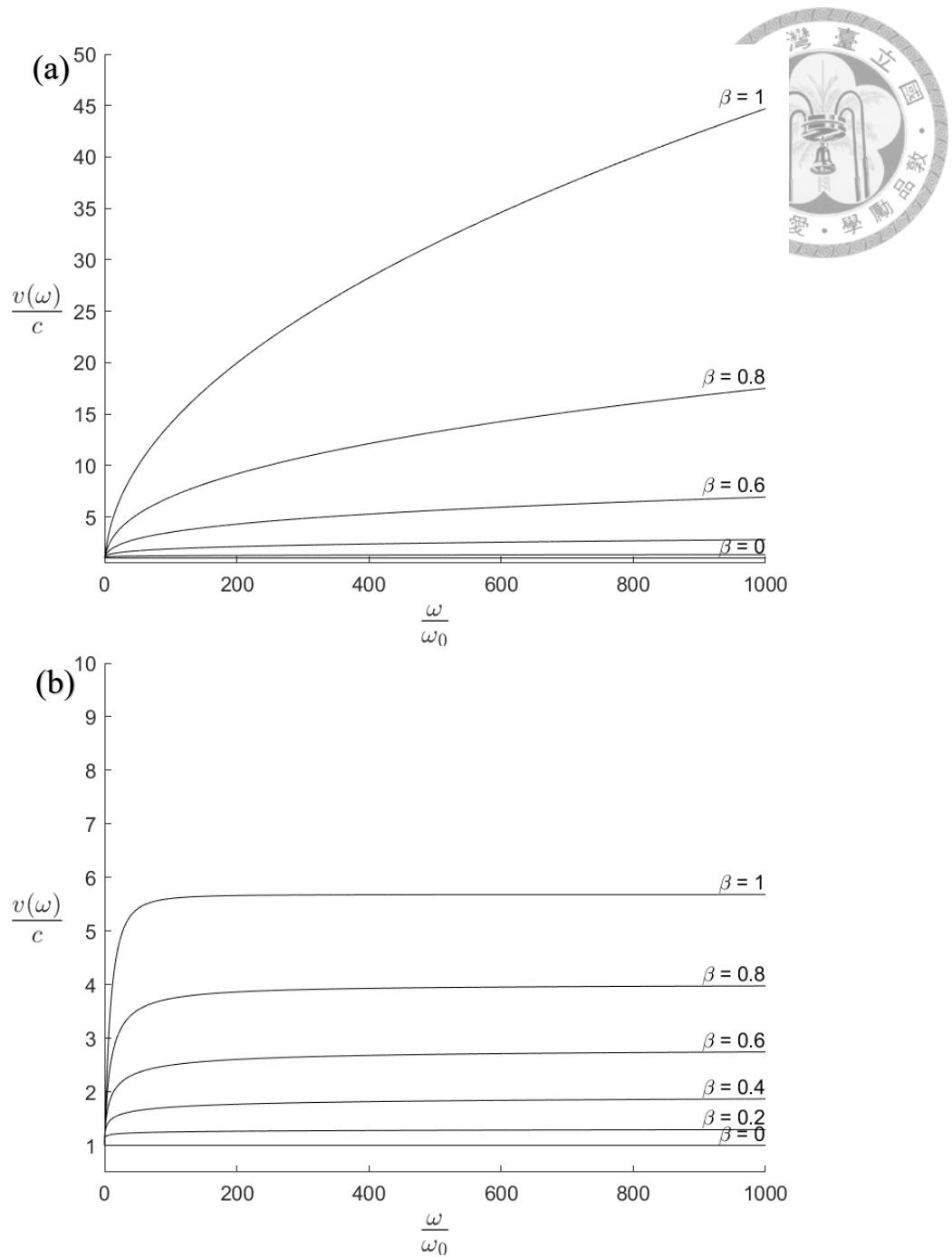


圖 4-5 高頻分數階 Kelvin-Voigt 模型與高頻分數階馬克士威標準線性固體模型之比較。(a) 高頻分數階 Kelvin-Voigt 模型，對應了分數階指數 β 值為0、0.6、0.8以及1的情況，縱軸為標準化相速度，橫軸為標準化頻率。(b) 高頻分數階馬克士威標準線性固體模型，對應了分數階指數 β 值為0、0.2、0.4、0.6、0.8以及1的情況，縱軸為標準化相速度，橫軸為標準化頻率。



4.4 材料性質對波動行為的影響

為了進一步探討材料彈性與黏性性質對波動衰減與速度的影響，本節選用兩組性質差異明顯的黏彈性材料進行模擬，GC-5 黏彈性凝膠與活體豬腦半球。這兩者不僅彈性模數相差數個數量級，其在數值模擬中也展現出完全不同的衰減與頻散行為。

根據圖 4-6 顯示，GC-5 材料的標準化衰減 $\frac{\alpha}{\omega_0/c}$ 隨頻率上升而緩慢增長，即使在標準化頻率 $\frac{\omega}{\omega_0} = 4$ 時，標準化衰減值仍未超過0.1。這代表該材料在模擬波動傳播時呈現出低耗散、緩衰型態，能量在介質中不易損失。這種行為與其材料設定($E_1 = 235$ kPa, $E_2 = 42.36$ kPa)一致，即儘管彈性模數較高，但黏性響應不強，整體能量衰減表現較為平穩。

相速度方面，GC-5 材料之標準化相速度曲線 $\frac{v}{c}$ 亦展現漸進增長的趨勢，但整體變化相對溫和，顯示其頻散特性偏弱。隨分數階指數 β 增加，雖然波速略微提升，但各條曲線變化幅度接近，表示該材料對於 β 所代表之記憶性強度並不敏感，行為偏向類彈性反應。

與 GC-5 相較，圖 4-7 之活體豬腦半球展現出完全不同的黏彈性波動特徵。在相同的標準化頻率下，其標準化衰減 $\frac{\alpha}{\omega_0/c}$ 顯著高於 GC-5，於 $\frac{\omega}{\omega_0} = 4$ 時甚至接近0.35，遠高於 GC-5 的甚至0.1都不足。這說明該材料在整個頻率範圍內皆具有高能量耗散能力，即波動於該介質中傳遞將快速衰退，顯示其黏彈性記憶機制作用強烈。

豬腦材料的衰減曲線對分數階指數 β 變動更為敏感。隨 β 上升，曲線整體提升顯著，表示該材料內部對「記憶性強弱」變化的反應非常劇烈，具高度非局部性。這種特性常見於生物組織，尤其是神經組織，其微觀結構內部存在長時間尺度的耗散過程。且豬腦材料的標準化相速度曲線 $\frac{v}{c}$ 也展現出較 GC-5 更快速的上升趨勢，且曲線間的差異隨 β 變大而更加明顯，顯示出更強烈的頻散行為。

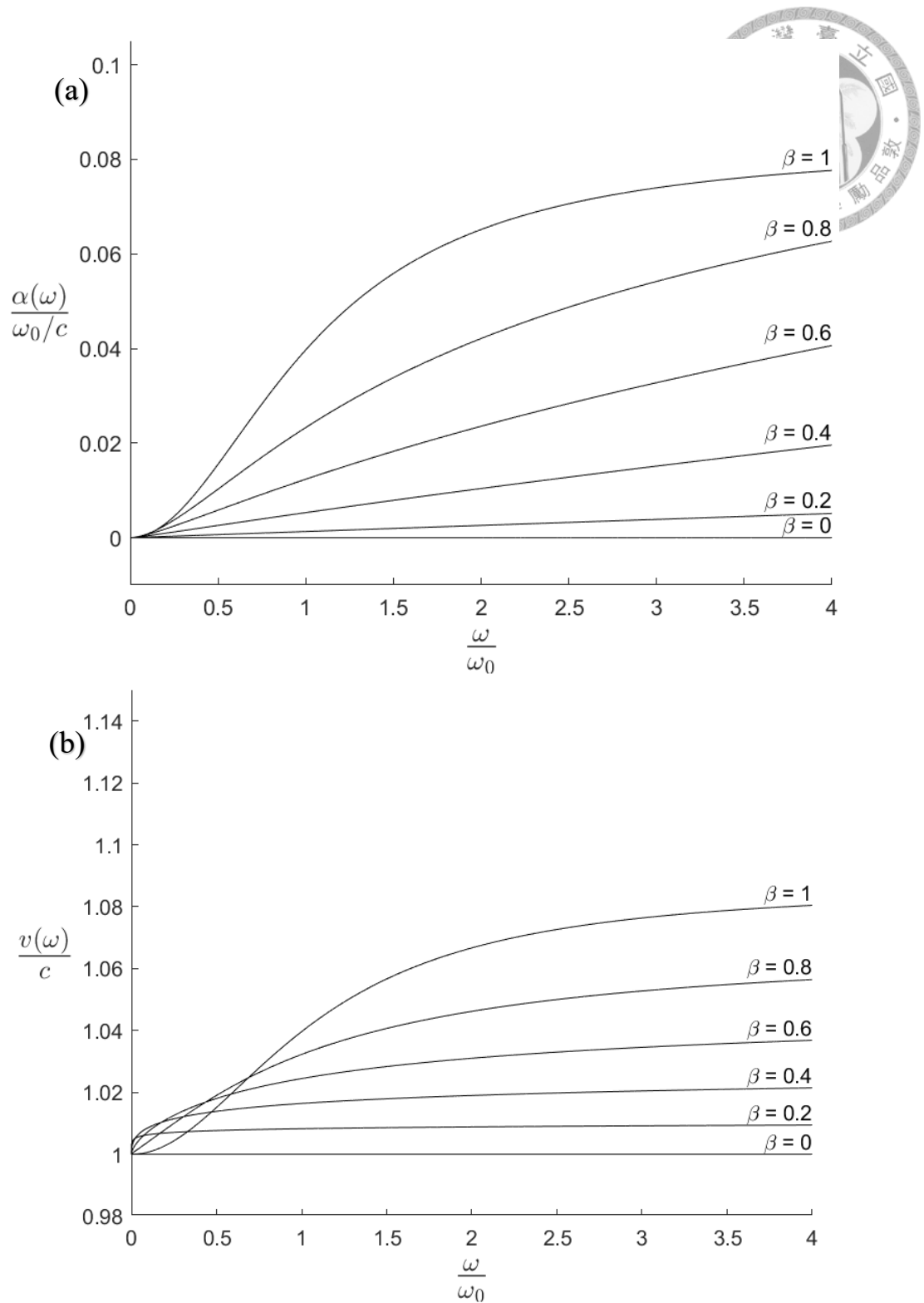


圖 4-6 分數階導數標準線性固體模型，對應了分數階指數 β 值為0、0.2、0.4、0.6、0.8以及1的情況，材料為模擬心肌的矽膠型黏彈性材料(GC-5 gel)，材料參數為 $E_1 = 235$ kPa， $E_2 = 42.36$ kPa。(a) 縱軸為標準化衰減，橫軸為標準化頻率。(b) 縱軸為標準化相速度，橫軸為標準化頻率。

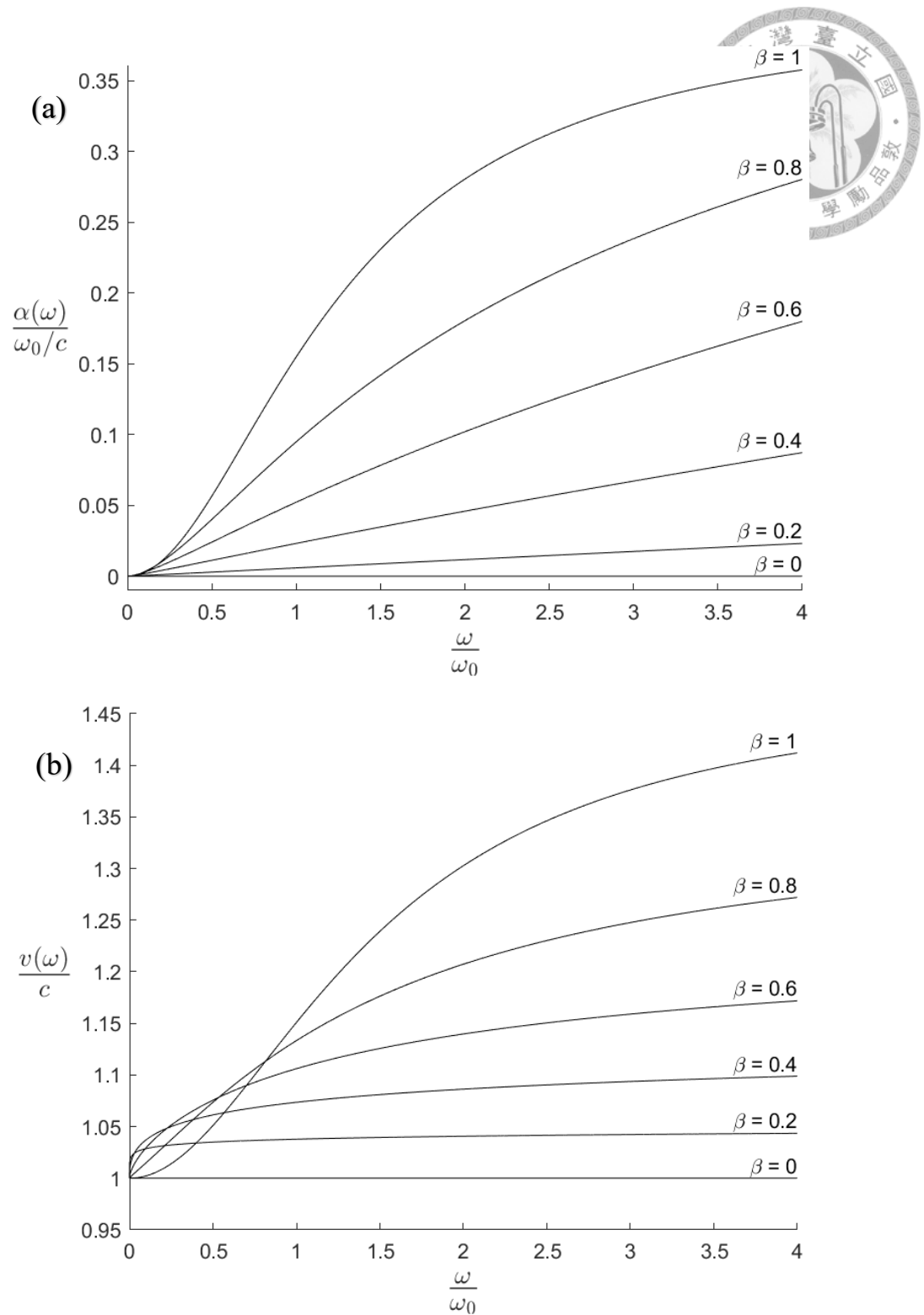


圖 4-7 分數階導數標準線性固體模型，對應了分數階指數 β 值為0、0.2、0.4、0.6、0.8以及1的情況，材料為活體狀態的五十公斤豬大腦半球，材料參數為 $E_1 = 0.503$ kPa， $E_2 = 0.586$ kPa。(a) 縱軸為標準化衰減，橫軸為標準化頻率。(b) 縱軸為標準化相速度，橫軸為標準化頻率。

4.5 分數階指數與參數變化對波動行為之控制性

圖 4-8 顯示在天然橡膠材料下，調整分數階指數 β 對標準化衰減與相速度的影響情形。當 β 趨近於0時，材料幾乎不具記憶性，衰減趨近於零、相速度變化極小，表現出近似純彈性的行為。隨著 β 增加，材料對歷史變形的累積效應逐漸加強，整體黏彈性特性越發顯著，導致衰減幅度迅速上升，並在更廣頻率範圍內持續變化；同時，相速度亦隨頻率快速提升，反映出頻散現象逐步增強。



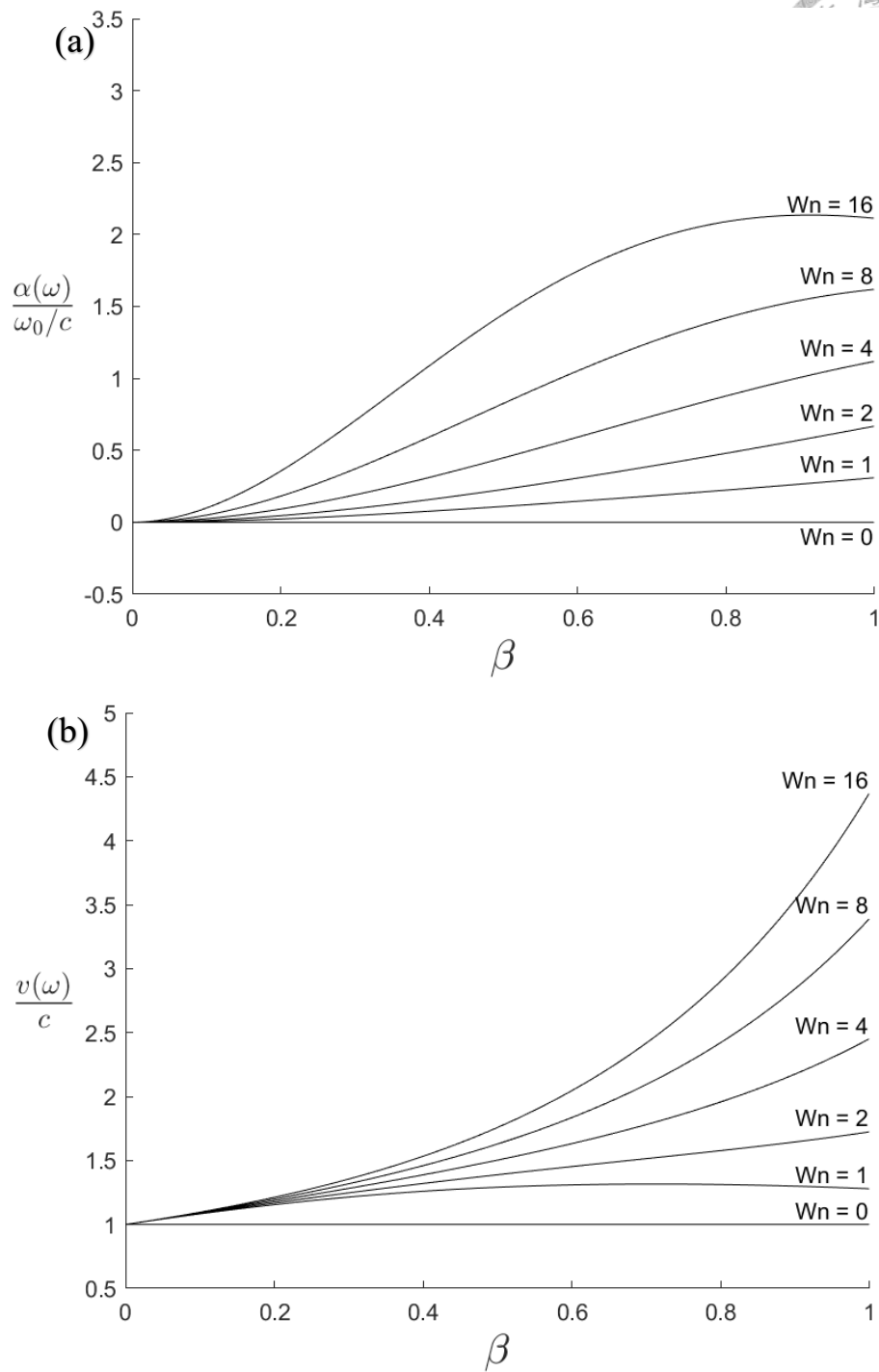


圖 4-8 分數階導數標準線性固體模型， ω_n 分別對應 $\frac{\omega}{\omega_0}$ 值為 0、1、2、4、8 和 16 的情況，材料為天然橡膠(NR)，材料參數為 $E_1 = 3.9214$ kPa， $E_2 = 122.68$ kPa。(a) 縱軸為標準化衰減，橫軸為分數階指數參數 β ($0 \leq \beta \leq 1$)。(b) 縱軸為標準化相速度，橫軸為分數階指數參數 β ($0 \leq \beta \leq 1$)。

第五章 結論與未來展望



5.1 結論

本研究針對黏彈性材料中波動現象的頻率依賴行為，建立了一套以馬克士威形式的標準線性固體模型為基礎之黏彈性波動方程式，並引入分數階微積分以表現材料的記憶性與非局部效應。透過系統性的理論推導與數值模擬，獲得以下主要結論。

1. 分數階導數增強模型通用性與物理擬合能力：相較於整數階模型，分數階導數可調控材料對歷史變形的記憶強度，使得模型在描述低頻與高頻下的衰減與相速度行為更具彈性，能涵蓋從近似彈性到強黏彈性的各種材料行為。
2. 衰減與相速度皆具明確的頻率相依特性：模型中推導出的複數波數顯示，衰減因子與相速度皆明顯受頻率影響。衰減於中高頻範圍內呈現非線性上升，反映能量耗散的頻率響應；相速度則隨頻率逐步上升，展現典型的頻散行為，且於高頻趨近穩定。
3. 分數階指數 β 對波動行為具高度調控性：透過改變分數階指數，可明顯控制衰減強度與頻散程度。當 β 趨近0，材料呈近彈性行為，衰減與頻散皆極低；而當 β 趨近1，材料則展現出顯著的耗散與相速度變異，對應於生醫或地質材料的物理特性。
4. 數值模擬驗證模型應用潛力：藉由模擬天然橡膠、GC-5凝膠與豬腦等材料之波動行為，顯示本模型可有效捕捉不同材料於不同頻率下之波傳特性，並成功反映材料內部黏滯性差異與記憶行為的效應，證實其於生醫影像、非破壞檢測與地震工程之應用潛力。
5. 本構模型精準度提升：本研究所採用之分數階馬克士威標準線性固體模型，相較於分數階 Kelvin-Voigt 模型，具備更高的物理表徵能力。其結構上不僅引入 E_1 與 E_2 兩組彈性模數，可更細緻區分材料之瞬時彈性反應與長時間鬆



弛行為，亦有效克服 Kelvin-Voigt 模型於高頻極限下相速度無限增長的不合理現象。此一模型結構提升了對材料內部力學行為的描述準確性，並使其更符合實際黏彈性材料於全頻率範圍內之波傳特性。

綜合上面所述，本研究所建立之分數階標準線性固體模型，能合理地同時描述能量耗散與頻散兩大物理特性，並透過無因次化處理使其具備通用比較性，為未來複雜黏彈性材料之建模與分析提供堅實基礎。

5.2 未來展望

本研究已建構出一套具物理基礎與高擬合彈性的分數階馬克士威標準線性固體模型，對於黏彈性材料波動行為提供了有效的數學描述。然而，為提升其在實務應用與多場域延伸上的效能，未來仍有數項發展方向值得深入探討：

1. 模型驗證與實驗對照：目前推導與模擬結果雖展現合理的頻率相依性與參數控制特性，然而未來應進一步結合實驗數據，特別是在不同頻率區段進行材料測試與波動響應比對，以驗證模型對實際材料的適用性與參數物理意涵，並提升其工程預測的準確度。
2. 三維波動推廣與異向性分析：現階段模型建立於一維平面波假設，未來可推廣至三維波動理論，進一步探討異向性材料中不同方向彈性與黏性特性對波傳行為的影響，提升模型在複雜組織或異質材料環境中的適應性。
3. 與恆定 Q 模型結合之可能性：恆定 Q 模型在地球物理領域廣泛應用，具備穩定描述特定頻率區間能量耗散特性的優勢。未來可探討將分數階導數標準線性固體模型與恆定 Q 模型進行數學結合，建立一套同時兼具記憶效應與穩定品質因子控制能力的統一波動模型，進一步提升其於地震模擬與反演問題中的應用潛力。

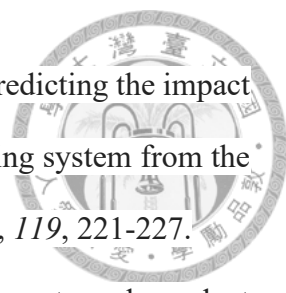
分數階黏彈性波動模型不僅具備高度的理論價值，其彈性結構與可調參數設計亦為未來跨領域應用奠定堅實基礎，值得進一步發展與深化。

參考文獻



- [1] Bagley, R. L., & Torvik, P. J. (1983). A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *Journal of Rheology*, 27(3), 201-210.
- [2] H. Kolsky, *Stress Waves in Solids*, vol. 1098. New York: Courier Corporation, 1963.
- [3] Moczo, P., & Kristek, J. (2005). On the rheological models used for time-domain methods of seismic wave propagation. *Geophysical Research Letters*, 32(1).
- [4] Kjartansson, E. (1979). Constant Q-wave propagation and attenuation. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 84(B9), 4737-4748.
- [5] Cooper, R. F. (2002). Seismic wave attenuation: Energy dissipation in viscoelastic crystalline solids. *Reviews in Mineralogy and Geochemistry*, 51(1), 253-290.
- [6] Holm, S., & Sinkus, R. (2010). A unifying fractional wave equation for compressional and shear waves. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 127(1), 542-548.
- [7] Holm, S., & Näsholm, S. P. (2011). A causal and fractional all-frequency wave equation for lossy media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 130(4), 2195-2202.
- [8] Wang, Y. (2016). Generalized viscoelastic wave equation. *Geophysical Journal International*, 204(2), 1216-1221.
- [9] Xu, Q., & Wang, Y. (2023). Determination of the viscoelastic parameters for the generalized viscoelastic wave equation. *Geophysical Journal International*, 233(2), 875-884.
- [10] Borgomano, J. V. M., Pimienta, L., Fortin, J., & Guéguen, Y. (2017). Dispersion and attenuation measurements of the elastic moduli of a dual-porosity limestone. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 122(4), 2690-2711.

- 
- [11] Ni, J., Gu, H., & Wang, Y. (2022). Seismic wave equation formulated by generalized viscoelasticity in fluid-saturated porous media. *Geophysics*, 87(2), T111-T121.
- [12] Futterman, W. I. (1962). Dispersive body waves. *Journal of Geophysical Research*, 67(13), 5279-5291.
- [13] Carcione, J. M., Kosloff, D., & Kosloff, R. (1988). Wave propagation simulation in a linear viscoacoustic medium. *Geophysical Journal International*, 93(2), 393-401.
- [14] J. M. Carcione, *Wave Fields in Real Media: Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic, Porous and Electromagnetic Media*, vol. 38. Oxford: Elsevier, 2007. r.
- [15] Näsholm, S. P., & Holm, S. (2013). On a fractional Zener elastic wave equation. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 16, 26-50.
- [16] Wang, Y. (2019). A constant-Q model for general viscoelastic media. *Geophysical Journal International*, 219(3), 1562-1567.
- [17] Morozov, I. B., Deng, W., & Cao, D. (2020). Mechanical analysis of viscoelastic models for Earth media. *Geophysical Journal International*, 220(3), 1762-1773.
- .
- [18] Mohammadian-Gezaz, S., & Karrabi, M. (2017). Study on the Stress Relaxation of Nano Clay-Rubber Nanocomposites Considering Standard Linear Solid Model. *Journal of Rubber Research*, 20(1), 20-32.
- [19] Plaseied, A., & Fatemi, A. (2008). Deformation response and constitutive modeling of vinyl ester polymer including strain rate and temperature effects. *Journal of Materials Science*, 43, 1191-1199.
- [20] Siامي, M., Jahani, K., Esmaili, P., & Rezaee, M. (2020). Investigating the influence of initial ramp on the viscoelastic parameters for cardiac muscle representative material. In *28th Annual International Conference of Iranian Society of Mechanical Engineering*.

- 
- [21] Robinovitch, S. N., Hayes, W. C., & McMahon, T. A. (1997). Predicting the impact response of a nonlinear single-degree-of-freedom shock-absorbing system from the measured step response. *Journal of Biomechanical Engineering*, 119, 221-227.
- [22] Grant, C. A., McKendry, J. E., & Evans, S. D. (2012). Temperature dependent stiffness and visco-elastic behaviour of lipid coated microbubbles using atomic force microscopy. *Soft Matter*, 8(5), 1321-1326.
- [23] Siامي, M., Jahani, K., & Rezaee, M. (2021). Identifying the parameters of viscoelastic model for a gel-type material as representative of cardiac muscle in dynamic tests. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine*, 235(10), 1205-1216.
- [24] Dauvillier, B. S., Hübsch, P. F., Aarnts, M. P., & Feilzer, A. J. (2001). Modeling of viscoelastic behavior of dental chemically activated resin composites during curing. *Journal of Biomedical Materials Research: An Official Journal of The Society for Biomaterials, The Japanese Society for Biomaterials, and The Australian Society for Biomaterials*, 58(1), 16-26.
- [25] Castaño, J., Giraldo, M. A., Montoya, Y., Montagut, Y. J., Palacio, A. F., & Jiménez, L. D. (2023). Electropneumatic system for the simulation of the pulmonary viscoelastic effect in a mechanical ventilation scenario. *Scientific Reports*, 13(1), 21275.
- [26] Pan, W., Petersen, E., Cai, N., Ma, G., Lee, J. R., Feng, Z., & Leong, K. W. (2006, January). Viscoelastic properties of human mesenchymal stem cells. In *2005 IEEE Engineering in Medicine and Biology 27th Annual Conference* (pp. 4854-4857). IEEE.
- [27] Weickenmeier, J., Kurt, M., Ozkaya, E., Wintermark, M., Pauly, K. B., & Kuhl, E. (2018). Magnetic resonance elastography of the brain: a comparison between pigs

and humans. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 77, 702-710.

- [28] Weickenmeier, J., Kurt, M., Ozkaya, E., de Rooij, R., Ovaert, T. C., Ehman, R. L., & Kuhl, E. (2018). Brain stiffens post mortem. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 84, 88-98.