

國立臺灣大學工學院土木工程學系

碩士論文



Department of Civil Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master's Thesis

考量自重之單一材料及雙材料  
改良式雙向結構最佳化演進法之研究

Improved Bi-directional Evolutionary Structural  
Optimization Method of Single Material and Dual Material  
Considering Self-Weight

張一豪

Yi-Hao Chang

指導教授：呂良正 教授

Advisor: Prof. Liang-Jenq Leu

中華民國 113 年 7 月

July, 2024



## 誌謝

本論文能順利完成，首先要感謝恩師呂良正教授，碩一聽老師講解高等結構學以及給予學長們研究上的指導時更加敬佩老師，碩二每週的 GM 也都因為老師的回饋讓我有辦法克服瓶頸且對我的研究更有方向，除了學業方面老師也時常與我們分享許多寶貴的人生經歷，總是獲益良多，非常感謝老師這兩年來照顧與教導，讓我也能夠收穫滿滿的畢業。

於論文口試期間，承蒙黃仲偉教授、宋裕祺教授以及郭世榮教授的詳加指教與建議，讓本論文的內容可以更為完備，在此感謝各位教授的協助。特別感謝黃仲偉教授於百忙之中校閱本論文內容，指正出錯誤及不足之處，讓我也能夠改正。

感謝二博帶我認識呂門，總是關心我們研究的狀況、提醒研究室的一些重要的活動、幫忙處理許多文書上的事務，也時常請我們吃飯及飲料，最後，恭喜二博今年當上了逢甲大學的教授，並祝福二博之後事業順利。感謝 R10 的鈺庭、采霏、權恩以及智傑，謝謝你們提供家產、幫忙解答課業及研究上的問題。

感謝同屆的家成、語哲及彥傑，一起度過了兩年既痛苦又充實的碩士生活，尤其是碩二時，大家總是時常一起在研究室做研究、互相討論到半夜。感謝家成扛下了所有事，不管是在 GM、學校事務、課業、研究及生活瑣碎事務，每次有甚麼事都能夠找你討論，都能夠得到很好的建議或是直接幫我處理，出去吃飯時也時常推薦了我很多好吃的餐廳讓我不會每次都只會去吃便利商店；感謝語哲每次都能回答我在 Python 上的問題，讓在碩二才開始學習 Python 的我能夠順利進行我的研究；感謝彥傑總是會分享許多有趣的怪事，也都能讓我驗證我課業上手算的結果是否正確。最後感謝研究室的各位在出門行動不是騎腳踏車載我就是借我腳踏車騎或是直接騎機車載我，讓沒有交通工具的我方便許多。這兩年在研究室的時光過得很快，但卻充滿了許多珍貴的回憶，也是我人生最豐富的一段時光，非常感謝大家。



感謝碩一的承翰、沛辰、Kero 及思穎在平常時也都與碩二的我們在研究室聊天玩樂。感謝承翰帶了許多桌遊與大家同樂，也都會說一些工程爛梗或是超爛諧音梗；感謝思穎總是會帶自己做的甜點跟泡茶給研究室的各位；感謝 Kero 總是在研究室當地縛靈讓我在做研究做到很無聊的時候有人能夠講講廢話，跟提供家教時拿到的水果；感謝沛辰會帶許多好吃的零食來給研究室的大家，進行校稿的時候也超級快速又仔細的幫我看過以及擔任口試紀錄並詳細的幫我整理口委意見。研究室因為你們變得更歡樂，你們每個人都很活潑有趣還都是學霸，未來一年換你們加油了，能力很好的你們一定都能順利做出厲害的研究。

最後感謝我的家人及女友，能接受我像個死人一樣突然消失很久才要回去找他們聯絡，雖然聽不懂我的研究到底是在幹嘛，但還是會默默聽我講完這些時間發生的所有小事，讓我發洩我的情緒，你們從小到大的栽培以及無條件的支持讓我能順利地走到今天，謝謝你們。



## 摘要

本研究著重於結構最佳化中的拓樸最佳化，以雙向結構最佳化演進法 (Bi-directional Evolutionary Structural Optimization, BESO) 為主要演算法，針對於本研究團隊過去的問題，提出改進與方法的融合，並從單一材料延伸於雙材料，同時進行多種類型之案例分析。

過去本研究團隊在使用 BESO 進行結構最佳化分析，使用各式不同的改進後都能得出良好的拓樸結果，但仍具有部分問題。首先由於 BESO 必須使用篩選投影之平滑化方法，但該方法在計算各元素間的權重時耗費大量時間，導致分析時會受限使用較小的設計領域或較大的元素去進行結構最佳化分析。其次因為過去演算法中材料內插方法皆是使用幕次內插方法，導致演算法無法考量到自重所造成影響。再者雙材料的材料分配上多是基於材料彈性模數，容易使不同材料混和在同一桿件中，但實際中較少會只考量彈性模數的將材料進行混合使用，而是透過整體設計將桿件分為受拉與受壓再搭配相應的材料進行桿件設計。最後從過去本研究團隊分析結果可知，初始元素分佈對於結構最佳化演進法系列方法結果影響顯著，同時可知使用全填滿設計領域能夠在各種案例中得到相對較優的結果。

針對以上問題本研究依序透過不同的方式進行改進與延伸。首先透過 Python 中名為”Numba”的模組 (Module) 中的”JIT”，將 Python 源代碼直接編譯成機器碼，即電腦硬體能夠直接運作之代碼形式，進而大幅縮短計算篩選投影權重的時長，使整體分析時間縮短許多，同時分析大型案例時能夠使用較為細緻的元素大小進行分析。其次透過將材料內插方法改以使用替代內插方法 (Alternative interpolation scheme) 使 BESO 在進行結構最佳化分析時能夠考量重力場，使結構在進行最佳化時更貼近實務上會使用的力量加載。再者根據前一段所述之材料分配的問題，本研究引入以應力不變量  $I_1$  分配抗拉與抗壓材料的雙材料方式，並將其與能量移除原則方法相結合，將敏感度因子進行必要修正後，即能夠拓樸出具有抗拉桿件

與抗壓桿件之結果。最後根據前一段所述之起始元素分布的影響，對於根據材料彈性模數分配之雙材料 BESO，即使是使用全填滿設計領域，兩種材料間不同的分佈與比例都會顯著的影響結果，故本研究根據單材料結果與目標體積提出三種結果較為穩定的初始元素分佈作為起始元素分佈的參考。



但即使是前段所提出較穩定之初始元素分佈，其拓樸結果與結構順從度仍有差距。為此本研究提出「目標體積變化 (Target Volume Variation)」，透過 BESO 能夠將被移除元素進行回填的特性，在迭代過程中變化目標體積，使結構最佳化結果能夠在減少目標體積時移除部分重要性較低的桿件、在增加目標體積時得到更高的自由度，進而突破原有結構形式，並同時保持或是降低其結構順從度，最後使三種結果較優的初始元素分佈與兩種基礎全填滿材料 1 與材料 2 得到相像的拓樸結果和結構順從度。

融合以上之改進於演算法中，透過大量且多樣的案例進行分析與驗證，確保其改進方法對於演算法之有效性與對於各式案例之效果，最後將所有提出之改進方法與案例分析進行整理與總結。

**關鍵字：**結構最佳化、拓樸最佳化、雙向結構最佳化演進法、自重、單一材料拓樸、抗拉壓雙材料拓樸、雙材料拓樸



# Abstract

This research focuses on topology optimization within structural optimization, using the bi-directional evolutionary structural optimization (BESO) as the primary algorithm. Building upon the previous issues for our research team, this study proposes improvements and methodological integrations, extends from single-material to dual-material applications, and conducts various case analyses.

Initially, our team employed BESO for structural optimization analyses and achieved favorable topology results after various enhancements. However, several issues remained: Firstly, BESO requires a filtering scheme to smooth the sensitivity number, which is time-consuming when calculating the weights between elements and limits the structural optimization analysis to smaller design domains or larger elements. Secondly, our past algorithms utilized a power-law material interpolation scheme for the material interpolation method, which failed to account for the impact of self-weight. Thirdly, the allocation of dual-material is primarily based on the material elastic modulus, leading to the mix of different materials within the same structural member. In practice, however, it is rare to take elastic modulus as the sole consideration when using mixed materials; rather, structural members are divided into tension members and compression members by the overall design and then applying appropriate materials for the members design. Lastly, previous analyses indicated that the initial element distribution significantly influenced the out-

comes of structural optimization evolutionary methods, and fully filled design domain consistently yielded relatively superior results across various cases.



To address these issues, this research commits to improvements and extensions sequentially. Firstly, by using “JIT” from the “Numba” module in Python, the Python source code is directly compiled into machine code, which enables direct execution by computer hardware. This measure significantly reduces the time for calculating filter scheme weights, thus shortening the overall analysis duration and allowing for finer element sizes in large case analyses. Secondly, the material interpolation method is replaced with alternative interpolation scheme, enabling BESO to take gravitational fields into account during structural optimization and making the optimized structure more practical in terms of real-world force applications. Thirdly, to address the material allocation issue mentioned earlier, this study introduces a dual-material approach that distributes tensile and compressive materials based on the sum of principal stresses, combining it with the energy removal principle method. After appropriate adjustment of the sensitivity numbers, the topology results with tensile and compressive members are achieved. Lastly, considering the initial element distribution’s impact, even with a fully filled design domain, the different distributions and proportions of the two materials significantly influence the results. Therefore, this study proposes three relatively stable initial element distributions by single-material results and target volumes as references.

However, a discrepancy still exists between the topology results for the proposed stabler initial element distributions and structural compliance. As a solution, the study introduces the “Target Volume Variation” : Taking advantage of BESO’s ability to refill removed elements, the target volume will be varied during iterations, enabling the optimized structure to remove less critical members when decreasing the target volume

and reach higher degrees of freedom when increasing. “Target Volume Variation” allows the structure to break away from the original form while maintaining or reducing structural compliance, resulting in similar topology results and structural compliance for the three initial element distributions of optimal outcomes and two basics fully filled materials 1 and 2.

The above improvements are integrated into the algorithm, and its effectiveness for various scenarios is ensured by massive and diverse case analyses and verifications. Finally, all proposed improvements and case analyses are organized and summarized.

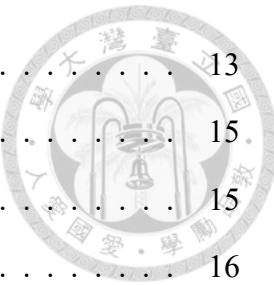
**Keywords:** Structural Optimization, Topology Optimization, Bi-directional Evolutionary Structural Optimization (BESO), Self Weight, Single Material Topology, Dual Material Topology of Tensile and Compressive, Dual Material Topology.



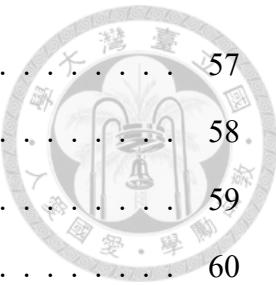


# 目次

	Page
誌謝	i
摘要	iii
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
目次	ix
圖次	xiii
表次	xv
<b>第一章 緒論</b>	<b>1</b>
1.1 研究動機 . . . . .	1
1.2 文獻回顧 . . . . .	2
1.3 研究內容 . . . . .	4
<b>第二章 最佳化問題及演進法介紹</b>	<b>5</b>
2.1 前言 . . . . .	5
2.2 最佳化問題描述 . . . . .	5
2.3 結構最佳化 . . . . .	6
2.3.1 最佳化設計 . . . . .	6
2.3.2 拓樸最佳化 . . . . .	7
2.4 雙向結構最佳化演進法 (BESO) . . . . .	8
2.4.1 最佳化設計流程 . . . . .	9
2.4.2 目標函數 . . . . .	10
2.4.3 移除準則 . . . . .	10
2.4.4 材料內插方法 . . . . .	11
2.4.5 敏感度分析 . . . . .	12



2.4.6 篩選投影	13
2.4.7 穩定策略	15
2.4.8 收斂準則	15
2.5 軟體與程式語言介紹	16
2.5.1 有限元素分析軟體 ABAQUS	16
2.5.2 程式語言 Python	17
2.6 小結	17
<b>第三章 單一材料之改良式雙向結構最佳化演進法</b>	<b>19</b>
3.1 前言	19
3.2 敏感度因子	19
3.3 下一步迭代目標體積	20
3.4 最大添加體積比例	21
3.5 收斂條件	22
3.6 材料內插方法考量自重之探討	23
3.7 最佳化分析時間改進	25
3.7.1 初步改進	25
3.7.2 主要改進	26
3.7.2.1 即時編譯 (Just-In-Time ,JIT)	26
3.7.2.2 主要改進流程	27
3.8 單一材料雙向結構最佳化演進法流程圖	28
3.9 案例分析	29
3.10 小結	51
<b>第四章 抗拉壓雙材料之改良式雙向結構最佳化演進法</b>	<b>53</b>
4.1 前言	53
4.2 方法基本假設	54
4.3 應力不變量篩選投影	55
4.4 敏感度因子	55
4.5 下一步迭代目標體積	57



4.6	最大添加體積比例 . . . . .	57
4.7	收斂條件 . . . . .	58.
4.8	抗拉壓雙材料雙向結構最佳化演進法流程圖 . . . . .	59
4.9	案例分析 . . . . .	60
4.10	小結 . . . . .	75
<b>第五章 雙材料之改良式雙向結構最佳化演進法</b>		<b>77</b>
5.1	前言 . . . . .	77
5.2	敏感度因子 . . . . .	77
5.2.1	多變量密度方法 . . . . .	77
5.2.2	兩階段材料分配 . . . . .	79
5.3	下一步迭代目標體積 . . . . .	80
5.4	最大添加體積比例 . . . . .	81
5.5	收斂條件 . . . . .	82
5.6	起始元素分佈 . . . . .	83
5.7	材料集中化 . . . . .	85
5.8	目標體積變化 . . . . .	87
5.9	雙材料雙向結構最佳化演進法流程圖 . . . . .	90
5.10	案例分析 . . . . .	91
5.11	小結 . . . . .	132
<b>第六章 結論與未來展望</b>		<b>133</b>
6.1	結論 . . . . .	133
6.1.1	雙向結構最佳化演進法 . . . . .	133
6.1.2	應用層面 . . . . .	134
6.2	未來展望 . . . . .	135
<b>參考文獻</b>		<b>137</b>
<b>附錄 A — 篩選投影權重計算程式代碼</b>		<b>141</b>
A.1	初步改進函式 . . . . .	141
A.2	主要改進程式代碼 . . . . .	142

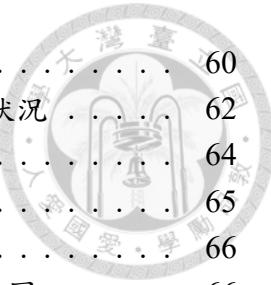
A.2.1 主程式函式 . . . . .	142
A.2.2 副程式代碼 . . . . .	143





# 圖次

2.1	比較 (a) 傳統設計方法與 (b) 最佳化設計方法 (Arora (2017)) . . . . .	7
2.2	(a) 產生棋盤化現象之結構 (b) 經過篩選投影平滑化後之結構 . . . . .	13
2.3	使用不同元素大小經篩選投影後的結果 . . . . .	14
2.4	ABAQUS 操作對話框 . . . . .	16
3.1	單一材料最大添加體積比例執行流程圖 . . . . .	21
3.2	兩種材料方法之位移比在不同設計變數下之比較圖 . . . . .	24
3.3	元素 $i$ 與元素 $(i + 3)$ 之相對距離 $r_{i(k+3)}$ 和 $r_{k(i+3)}$ 示意圖 . . . . .	25
3.4	初步改進後的權重係數計算虛擬碼 (pseudocode) . . . . .	26
3.5	Python 直譯器與 JIT 編譯器工作原理 . . . . .	27
3.6	最佳化分析時間主要改進流程圖 . . . . .	27
3.7	單一材料雙向結構最佳化演進法 (BESO) 流程圖 . . . . .	28
3.8	[例題 3-1] 設計領域示意圖 (Wang and Wang (2004)) . . . . .	29
3.9	[例題 3-2] 設計領域示意圖 (Huang and Xie (2011)) . . . . .	31
3.10	[例題 3-2] 文獻拓樸結果 (Huang and Xie (2011)) . . . . .	32
3.11	[例題 3-3] 設計領域示意圖 (Huang and Xie (2011)) . . . . .	33
3.12	[例題 3-4] 設計領域示意圖 (Huang and Xie (2011)) . . . . .	35
3.13	[例題 3-4] 對稱後完整模型 . . . . .	36
3.14	[例題 3-5] 設計領域示意圖 (Huang and Xie (2011)) . . . . .	37
3.15	[例題 3-7] 設計領域示意圖 (Xu et al. (2020)) . . . . .	39
3.16	[例題 3-6] $r_{\min}^\alpha = 3 \text{ cm}$ 之文獻拓樸結果 (Xu et al. (2020)) . . . . .	40
3.17	[例題 3-7] 設計領域示意圖 . . . . .	41
3.18	[例題 3-7] $C$ 值與體積迭代過程圖 . . . . .	42
3.19	[例題 3-8] 設計領域示意圖 . . . . .	43
3.20	[例題 3-8] $q = 10$ 對稱後拓樸結果 . . . . .	46
3.21	[例題 3-9] $1/2$ 對稱簡化設計領域示意圖 . . . . .	47
3.22	[例題 3-9] 完整設計領域示意圖 . . . . .	48
3.23	[例題 3-9] 實際橋梁照片 (參考來源：Highest Bridges.com) . . . . .	48
3.24	[例題 3-9] 完整模型對稱後拓樸結果 . . . . .	49
3.25	[例題 3-9] 加入 $1 \text{ m}$ 非設計領域模型對稱後拓樸結果 . . . . .	50
4.1	抗拉壓雙材料最大添加體積比例執行流程圖 . . . . .	57
4.2	抗拉壓雙材料雙向結構最佳化演進法 (BESO) 流程圖 . . . . .	59



4.3	[例題 4-1] 設計領域示意圖 (Huang and Xie (2011)) . . . . .	60
4.4	[例題 4-1] 「w/ 自重, $F = 0 \text{ N}$ 」案例主應力絕對值分布狀況 . . . . .	62
4.5	[例題 4-2] 設計領域示意圖 (Wang and Wang (2004)) . . . . .	64
4.6	[例題 4-2] 未加入主應力篩選半徑介面連接細節圖 . . . . .	65
4.7	[例題 4-2] $r_{\min}^s = 50 \text{ cm}$ 拓樸結果應力不變量 $I_1$ 熱圖 . . . . .	66
4.8	[例題 4-2] $r_{\min}^s = 50 \text{ cm}$ 拓樸結果過濾應力不變量 $\tilde{\sigma}_e$ 熱圖 . . . . .	66
4.9	[例題 4-2] 表 4.5 拓樸結果 $C$ 值比較圖 . . . . .	68
4.10	[例題 4-3] 設計領域示意圖 . . . . .	69
4.11	[例題 4-4] $q = 10$ 對稱後完整模型 . . . . .	71
4.12	[例題 4-4] 1/2 對稱簡化設計領域示意圖 . . . . .	72
4.13	[例題 4-4] 完整設計領域示意圖 . . . . .	73
4.14	[例題 4-4] 完整模型對稱後拓樸結果 . . . . .	74
4.15	[例題 4-4] 加入 1 m 非設計領域模型對稱後拓樸結果 . . . . .	75
5.1	彈性模數 $E$ 與相對設計變數 $x_i^j$ 關係圖 . . . . .	78
5.2	雙材料最大添加體積比例執行流程圖 . . . . .	81
5.3	對稱結構 - 集中載重單一材料拓樸結果 . . . . .	84
5.4	材料集中化示意圖 (黑色為 $E$ 較高元素、白色為 $E$ 較低元素) . . . . .	85
5.5	設計領域邊緣之中心元素示意圖 (黑色為 $E$ 較高元素、白色為 $E$ 較低元素) . . . . .	86
5.6	目標體積變化流程圖 . . . . .	89
5.7	雙材料雙向結構最佳化演進法 (BESO) 流程圖 . . . . .	90
5.8	[例題 5-1] 設計領域示意圖 . . . . .	91
5.9	[例題 5-1] 集中載重不同材料比例 Case 1 ~ Case 20 $C$ 值比較圖 . . . . .	93
5.10	[例題 5-1] 均佈載重不同材料比例 Case 1 ~ Case 20 $C$ 值比較圖 . . . . .	94
5.11	[例題 5-1] 設計領域示意圖 . . . . .	96
5.12	[例題 5-3] 設計領域示意圖 (Xu et al. (2020)) . . . . .	109
5.13	[例題 5-4] 設計領域示意圖 (Huang and Xie (2011)) . . . . .	116
5.14	[例題 4-3] 設計領域示意圖 . . . . .	122
5.15	[例題 5-6] 1/2 對稱簡化設計領域示意圖 . . . . .	127
5.16	[例題 5-6] 完整設計領域示意圖 . . . . .	127
5.17	[例題 5-6] 完整模型對稱後拓樸結果 . . . . .	130
5.18	[例題 5-6] 加入 1 m 非設計領域對稱後拓樸結果 . . . . .	131



# 表次

1.1	本研究團隊文獻回顧統整 . . . . .	3
3.1	[例題 3-1] 最大添加體積比例 $AR_{\max}$ 的影響 . . . . .	30
3.2	[例題 3-1] 第 36 步到第 38 步迭代過程 . . . . .	30
3.3	[例題 3-2] 自重載重在不同材料內插方法與不同懲罰係數之結果 .	32
3.4	[例題 3-3] 篩選投影權重計算時間比較 (設計領域總元素量 $N = 10000$ 個) . . . . .	34
3.5	[例題 3-3] 篩選投影權重計算時間比較 (設計領域總元素量 $N = 40000$ 個) . . . . .	34
3.6	[例題 3-4] 篩選投影權重計算時間比較 (設計領域總元素量 $N = 80000$ 個) . . . . .	36
3.7	[例題 3-5] 不同外力與自重比例之比較 . . . . .	38
3.8	[例題 3-6] 不同 $r_{\min}^{\alpha}$ 之拓樸結果 . . . . .	40
3.9	[例題 3-7] 不同外力之結果 . . . . .	42
3.10	[例題 3-8] 雙跨橋在不同加載狀況與不同懲罰因子 $q$ 之影響 (容許誤差 $\tau = 0.05\%$ ) . . . . .	44
3.11	[例題 3-8] 雙跨橋設置不可設計元素作為橋面板在不同加載狀況之影響 (容許誤差 $\tau = 0.01\%$ , 懲罰因子 $q = 10$ ) . . . . .	45
3.12	[例題 3-9] 完整模型拓樸結果 . . . . .	49
3.13	[例題 3-9] 加入 1 m 非設計領域模型拓樸結果 . . . . .	50
4.1	[例題 4-1] 「w/ 自重, $F = 0\text{ N}$ 」案例 $E_r$ 與 $x_r$ 之結果 . . . . .	61
4.2	[例題 4-1] 「w/ 自重, $F = 0\text{ N}$ 」案例 $x_r$ 之第 61 步至第 65 步拓樸過程 .	61
4.3	[例題 4-1] 不同外力與自重混合案例之比較 . . . . .	63
4.4	[例題 4-2] 設置應力不變量篩選半徑 $r_{\min}^s$ 之影響 . . . . .	65
4.5	[例題 4-2] $r_{\min}^{\alpha} = 40\text{ cm}$ 與不同 $r_{\min}^s$ 結果 . . . . .	67
4.6	[例題 4-3] 雙跨橋在不同加載狀況與不同懲罰因子 $q$ 之影響 . . . . .	70
4.7	[例題 4-4] 完整模型拓樸結果 . . . . .	73
4.8	[例題 4-4] 加入 1 m 非設計領域模型拓樸結果 . . . . .	74
5.1	Case 3 ~ Case 5 起始元素分布狀況 . . . . .	84
5.2	Case 6 ~ Case 20 起始元素分布狀況 . . . . .	92



5.3	集中載重案例 Case 3 ~ Case 5 與 Case 6 ~ Case 20 不同材料比例平均值比較	95
5.4	均佈載重案例 Case 3 ~ Case 5 與 Case 6 ~ Case 20 不同材料比例平均值比較	95
5.5	集中載重材料比例 (10 %, 20 %) 加入目標體積變化前後的結果	97
5.6	集中載重材料比例 (10 %, 20 %) 加入目標體積變化後與加入材料集中化 (不考量與考量設計領域邊緣長) 的結果	98
5.7	集中載重材料比例 (15 %, 15 %) 加入目標體積變化前後的結果	99
5.8	集中載重材料比例 (15 %, 15 %) 加入目標體積變化後與加入材料集中化 (不考量與考量設計領域邊緣長) 的結果	100
5.9	集中載重材料比例 (20 %, 10 %) 加入目標體積變化前後的結果	101
5.10	集中載重材料比例 (20 %, 10 %) 加入目標體積變化後與加入材料集中化 (不考量與考量設計領域邊緣長) 的結果	102
5.11	均佈載重材料比例 (10 %, 20 %) 加入目標體積變化前後的結果	103
5.12	均佈載重材料比例 (10 %, 20 %) 加入目標體積變化後與加入材料集中化 (不考量與考量設計領域邊緣長) 的結果	104
5.13	均佈載重材料比例 (15 %, 15 %) 加入目標體積變化前後的結果	105
5.14	均佈載重材料比例 (15 %, 15 %) 加入目標體積變化後與加入材料集中化 (不考量與考量設計領域邊緣長) 的結果	106
5.15	均佈載重材料比例 (20 %, 10 %) 加入目標體積變化前後的結果	107
5.16	均佈載重材料比例 (20 %, 10 %) 加入目標體積變化後與加入材料集中化 (不考量與考量設計領域邊緣長) 的結果	108
5.17	不對稱設計領域材料比例 (10 %, 40 %) 加入目標體積變化前後的結果	110
5.18	不對稱設計領域材料比例 (10 %, 40 %) 加入目標體積變化後與加入材料集中化 (不考量與考量設計領域邊緣長) 的結果	111
5.19	不對稱設計領域材料比例 (20 %, 30 %) 加入目標體積變化前後的結果	112
5.20	不對稱設計領域材料比例 (20 %, 30 %) 加入目標體積變化後與加入材料集中化 (不考量與考量設計領域邊緣長) 的結果	113
5.21	不對稱設計領域材料比例 (30 %, 20 %) 加入目標體積變化前後的結果	114
5.22	不對稱設計領域材料比例 (30 %, 20 %) 加入目標體積變化後與加入材料集中化 (不考量與考量設計領域邊緣長) 的結果	115
5.23	「w/ 自重, F = 0 N」案例材料比例 (10 %, 30 %) 加入目標體積變化前後的結果	117
5.24	「w/ 自重, F = 0 N」案例材料比例 (10 %, 30 %) 加入目標體積變化後與加入材料集中化 (不考量與考量設計領域邊緣長) 的結果	118
5.25	「w/ 自重, F = 15303.6 N」案例材料比例 (10 %, 30 %) 加入目標體積變化前後的結果	119
5.26	「w/ 自重, F = 15303.6 N」案例材料比例 (10 %, 30 %) 加入目標體積變化後與加入材料集中化 (不考量與考量設計領域邊緣長) 的結果	120
5.27	「w/o 自重, w = 10 N/m」案例加入目標體積變化前後的結果	123



5.28 「w/o 自重, $w = 10 \text{ N/m}$ 」案例加入目標體積變化後與加入材料集中化(不考量與考量設計領域邊緣長)的結果 . . . . .	124
5.29 「w/ 自重, $w = 10 \text{ N/m}$ 」案例加入目標體積變化前後的結果 . . . . .	125
5.30 「w/ 自重, $w = 10 \text{ N/m}$ 」案例加入目標體積變化後與加入材料集中化(不考量與考量設計領域邊緣長)的結果 . . . . .	126
5.31 「w/ 自重, $w = 3125 \text{ N/m}^2$ 」完整模型拓樸結果 . . . . .	128
5.32 「w/ 自重, $w = 3125 \text{ N/m}^2$ 」加入 1 m 非設計領域模型拓樸結果 . . .	129





# 第一章 緒論

## 1.1 研究動機

最佳化理論發展至今已經相當成熟，且被廣泛應用於各種領域的分析上。傳統上進行結構設計時會十分依賴結構設計團隊的經驗，在面對全新結構問題時，容易產生過分設計的問題或因錯誤經驗而導致的錯誤設計。為解決以上問題，將該結構設計問題轉換為最佳化問題並透過結構最佳化，即可以透過最佳化分析得出在一定限制條件下最符合目標之結構，同時減少設計人力成本。

結構最佳化問題可以分為兩部分：第一部分會對模型進行結構分析，透過有限元素法 (Finite element method) 求得結構順從度、元素應變能與位移向量等後續分析所需之參數資訊；第二部分則會透過最佳化演算法求得一定限制條件下該案例問題下結構的最佳解。本研究在第一部分會使用 ABAQUS 作為主要有限元素分析軟體，第二部分則會選用雙向結構最佳化演進法 (Bi-directional Evolutionary Structural Optimization, BESO) 作為主要最佳化演進法，使用對目標函數進行敏感度分析後所得之敏感度因子得出最佳元素配置狀態。

過去本研究團隊對最佳化演進法提出各種不同的改良方法，分析案例上多採用外力加載，甚少加入自重考量進行分析。本研究主要目的即是使雙向結構最佳化演進法 (BESO) 能夠考量自重之影響，進而得出加入自重後之拓樸結果；同時由於最佳化程式所花費實際時間較長，本研究對於該部分程式進行改進，期望能減少一定分析所需時長。從過去本研究團隊對於雙材料的分配方式主要是基於彈性模數  $E$  與固定材料比例，因此本研究將單一材料延伸至雙材料時，加入應力不變量  $I_1$  做為實體材料分配基礎，根據其正負號將實體材料分為抗拉與抗壓兩種材料，即得出基於能量移除原則的抗拉壓雙材料分配方法，並期望能夠得到與過去截然不同之雙材料結構形式和拓樸結果能更接近實際材料上的使用狀況。但基於

彈性模數  $E$  與固定材料比例的雙材料在材料分配上仍較有彈性且能自主控制所需之材料比例，所以本研究仍持續發展該材料分配方式，由過去本研究團隊之研究成果可知，進行雙材料雙向結構最佳化演進法時，使用不同初始元素分布對拓樸結果影響十分劇烈，因此本研究期望能夠提出不容易產生結構順從度  $C$  十分糟糕的初始元素分布。而不同初始元素分布之拓樸結果仍有差距，本研究為了打破現有的拓樸結果，使不同初始元素分布能得出相似拓樸結果或是得到更好的結構形式與結構順從度  $C$ ，提出「目標體積變化」透過改變其目標體積的方式，期望能夠得到更好的拓樸結果與結構順從度  $C$  並使不同初始元素分布能得出相似結果。

## 1.2 文獻回顧

結構最佳化設計可依照處理類型分為三大類型：尺寸最佳化 (Sizing Optimization)、形狀最佳化 (Shape Optimization) 與拓樸最佳化 (Topology Optimization)。而本研究主要研究內容為拓樸最佳化，目的為尋找設計領域中最佳的結構材料配置。在拓樸最佳化中，本研究團隊過去所使用之演算法有固體等向性懲罰函數法 (Solid Isotropic Material with Penalization, SIMP) (Bendsøe and Kikuchi(1988))、結構最佳化演進法 (Evolutionary Structural Optimization, ESO) (Xie and Steven (1993))、雙向結構最佳化演進法 (Bi-directional Evolutionary Structural Optimization, BESO) (Querin *et al.* (1998)) 以及元素交換法 (Element Exchanged Method, EEM) (Rouhi *et al.* (2010))。

其中結構最佳化系列方法皆是透過結構受外部加載時，根據敏感度因子與限制式將無效率元素逐步移除，直到達到該設計領域與限制式下最佳結構元素配置方法。結構最佳化系列中結構最佳化演進法僅能移除元素，而雙向結構最佳化演進法同時能夠移除與回填元素，也使雙向結構最佳化演進法相比於結構最佳化演進法而言更不容易陷入求解失敗的狀態。現行主要的雙向結構最佳化演進法架構主要會使用經 Huang and Xie (2007) 整理並加入篩選投影與收斂準則之改進演算法。而根據該方法，Zue and Xie (2015) 將此演算法與 Python 和 ABAQUS 相結合，使其能夠使用商業有限元素分析軟體進行有限元素分析又能夠及時擷取與回傳資料進行模型更改來實現拓樸最佳化的過程，還能簡易的進行程式編輯，不須使用第三方軟體來進行資料間的傳輸，導致迭代緩慢。

本研究團隊曾多次使用的雙向結構最佳化演算法或其相關系列方法，並針對該演算法進行多種改進方法與應用層面，如：加入材料集中化以求得較硬材料能夠更加集中（呂其翰（2010））、隨機化以求得拓樸結果能突破目前形狀的困境（郭哲宇（2011））、影響區法使其能夠減少起始元素分布的相依性與避免高應變能元素在拓樸過程被過度考量、變體積函數使元素交換法能夠在任意初始體積逐漸收斂至目標體積等改進方法（施可歲（2013））以及體積限制以使元素不會出現大量更動而產生無法收斂之狀況（黃懷寬（2022））。案例分析部分則是有求得最佳支承位置、加入多重材料、不同初始元素分布、考量 3D 案例、微結構設計、薄殼結構設計等多樣化案例分析。最佳化研究工具方面，本研究團隊也使用過多種不同的程式語言與商業有限元素分析軟體，如 Fortran（王建凱（2005））、C++（李宗豪（2005））、Matlab（施可歲（2013））以及前段有提過之 Python（連嘉玟（2017）），本研究團隊所使用的 Python 程式概念即參考自前段說明之 Zue and Xie (2015) 文獻。

本研究參考至 Zue and Xie (2015) 之程式概念，沿用使用 Python 與 ABAQUS 來進行雙向結構最佳化演進法之分析，並參考本研究團隊對演算法提出之改進，對雙向結構最佳化演進法進行後續改進與研究。

表 1.1: 本研究團隊文獻回顧統整

作者(年分)	使用之演算法	提出/改進方法	應用
徐千泰 (2009)	BESO		支承位置最佳化、 多重材料
呂其翰 (2010)	BESO	材料集中化	不同初始元素分布、 支承位置最佳化、 多重材料
郭哲宇 (2011)	BESO, EEM	隨機化、對稱性 、體積比變化	3D 案例、多重材料、 支承位置最佳化
施可歲 (2013)	EEM	影響區法、變體積函數 、材料集中化改進	不同初始元素分布、 多重材料、微結構設計
黃懷寬 (2022)	BESO	體積限制	薄殼結構設計
余鈺庭 (2023)	BESO	體積限制改進、 材料集中化改進	不同初始元素分布、 多重材料、改變設計領域



### 1.3 研究內容

第一章：闡述本研究之動機與背景，並回顧與統整介紹過去相關研究文獻。

第二章：描述何謂最佳化問題，簡述拓樸最佳化與結構最佳化，並詳細介紹雙向結構最佳化演進法之基本架構。

第三章：以雙向結構最佳化演進法為核心，並使用與本研究團隊過去使用之不同材料內插方法，進而使模型與演算法能夠考量自重且同時針對其篩選投影權重計算程式進行改進。並使用該改良後之雙向結構最佳化演進法對多種例題進行單一材料之案例分析與探討，包括：不同力量加載、不同力量與自重比例、不對稱案例、雙跨橋案例、大型 3D 案例。

第四章：以第三章之單一材料演算法做為基礎，將其延伸至抗拉壓雙材料，結合以應力不變量  $I_1$  來分配為抗拉或抗壓實體材料之方法，針對該引入之方法進行必要之敏感度因子公式修正與主應力篩選投影，並使用改良後之雙向結構最佳化演進法對第三章之例題進行抗拉壓雙材料案例分析與探討。

第五章：以第三章之單一材料演算法做為基礎，將其延伸至雙材料，根據相對密度與兩階段交換材料方式來分配兩種材料，提出較穩定之三種全填滿初始元素分布與目標體積變化來打破原有之最佳化結構並獲得更好的解。最後引入材料集中化使材料間不容易反覆交換，進而減少其迭代步數與目標體積變化執行次數，並使用改良後之雙向結構最佳化演進法對第三章之例題進行雙材料之案例分析與探討。

第六章：結論與未來展望，將本研究所有內容進行總結，並提出後續可能之改進與進一步發展之研究方向。



## 第二章 最佳化問題及演進法介紹

### 2.1 前言

本章節主要說明最佳化問題及最佳化演進法。首先對於最佳化問題進行描述，並介紹及回顧最佳化問題之數學模型 (Mathematical model)；其次簡介結構最佳化以及本研究著重之拓樸最佳化；再來詳細介紹本研究所使用的核心演進法，即雙向結構最佳化演進法 (BESO)；最後簡介本研究使用之有限元素分析軟體 ABAQUS 與程式語言 Python。

### 2.2 最佳化問題描述

為了將由眾多複雜數學條件所構成之最佳化問題釐清，需要將最佳化問題中的目標及限制條件以標準形式的方程組進行描述，而 Arora (2017) 中對一般最佳化問題的標準數學描述式定義如下：

尋找一組  $n$  維的設計變數 (Design variables  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ )，在給定的設計變數之容許範圍 (上限及下限) 內，滿足等式限制式 (Equality Constraints) 以及不等式限制式 (Inequality Constraints)，使目標函數 (Objective Function) 能夠達到極值 (Optimal)。上述定義可以用以下數學方程式表示：

Min. or Max.:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.1)$$



Subject to:

$$h_i(\mathbf{x}) = h_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.2)$$

$$g_j(\mathbf{x}) = g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, q \quad (2.3)$$

$$(x_{\min})_k \leq x_k \leq (x_{\max})_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

其中  $f(\mathbf{x})$  為目標函數， $h(\mathbf{x})$  為等式限制式， $g(\mathbf{x})$  為不等式限制式。 $p$  和  $q$  分別對應等式與不等式限制條件之數量。而在  $n$  個設計變數中， $(x_{\min})_k$  和  $(x_{\max})_k$  分別為第  $k$  個設計變數  $x_k$  之上限及下限。

最佳化問題可以從兩個角度進行分類。首先根據是否存在限制條件，可分為無束制最佳化問題 (Unconstrained Optimization Problem) 和束制最佳化問題 (Constrained Optimization Problem) 兩類。而在一般工程問題當中，除了對設計變數有範圍限制外，還需要符合實際的物理限制條件，因此多數被歸類於束制最佳化問題中。其次，根據目標函數和限制條件是否均為設計變數  $\mathbf{x}$  的線性方程式，可分為線性規劃問題 (Linear Programming Problem) 和非線性規劃問題 (Nonlinear Programming Problem) 兩種。

由於大多數結構最佳化問題皆為非線性規劃問題，因此各方程式之解析式 (Analytic Form) 難以直接求解，再加上目標函數是否為平滑連續的函數型式亦不易確認，導致過去在利用變分法 (Variational Method) 求極值之方法並不能適用於一般結構最佳化問題 (Venkayya (1993))。因此目前在求解非線性最佳化問題時，會依據目標函數之特性採用合適的數值方法 (Numerical Method)，其中大多數演算法皆透過迭代計算 (Iteration Calculation) 以逐步求得最佳解 (Optimal Solution)。

## 2.3 結構最佳化

### 2.3.1 最佳化設計

圖 2.1 說明結構最佳化方法與傳統設計方法最大的不同，在於更新設計變數時，傳統設計方法會根據過去設計時的經驗與設計需求來進行更新，但結構最佳化方法則是根據最佳化演算法理論去更新設計變數直到達到收斂。這個過程省去了人為判斷的需求，也能夠依賴電腦進行迭代分析進而節省人力，比起傳統設計方法來說更加穩定且更有效率。

一般結構最佳化流程圖為圖 2.1 (b)，進行最佳化設計前，需要將欲解決問題轉換為最佳化問題。最佳化問題首先要確立初始狀態、建立分析模型、定義設計變數、目標函數及限制條件。接著透過有限元素分析與最佳化分析交互迭代，由有限元素分析軟體提供分析結果數據，接著進行最佳化分析並給予下次迭代新的設計變數。重複該上述交互過程直至達到收斂條件，則為最佳化設計。整個最佳化過程中，最困難且耗時的部分為迭代分析過程。

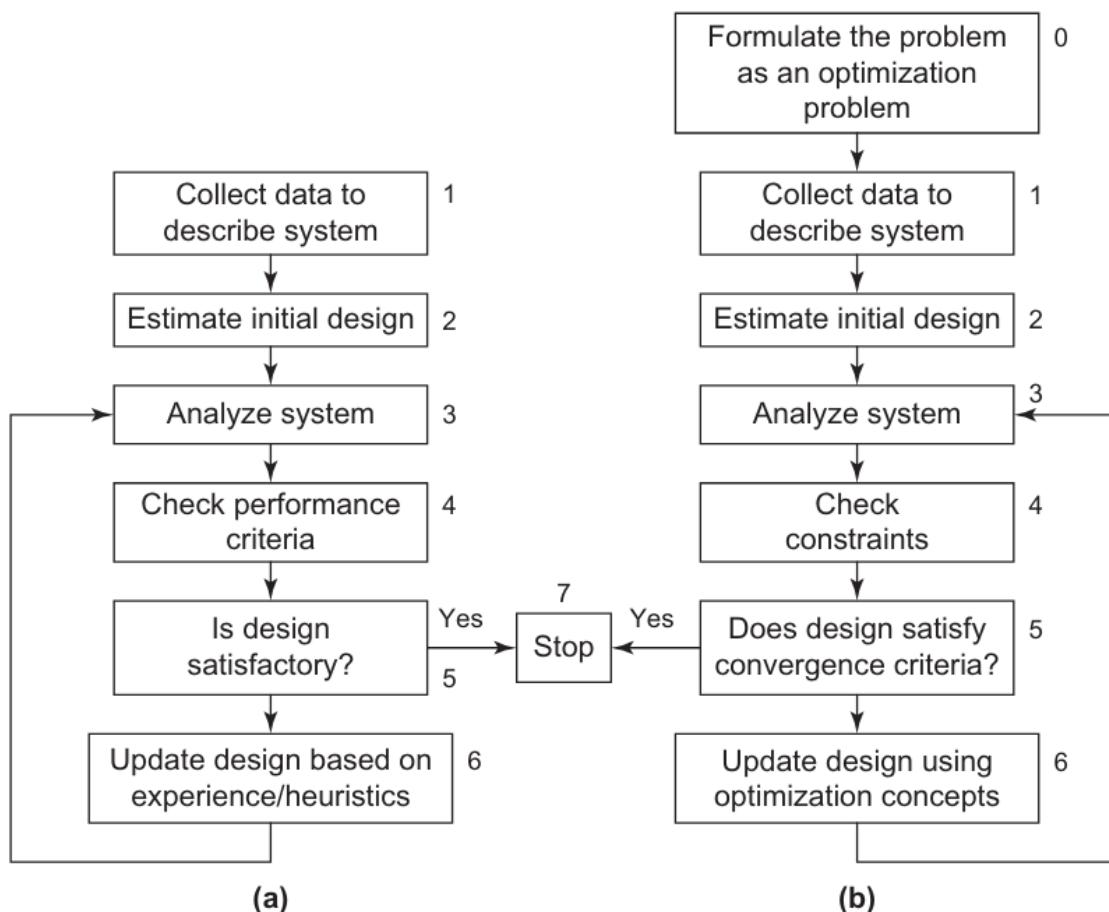


圖 2.1: 比較 (a) 傳統設計方法與 (b) 最佳化設計方法 (Arora (2017))

### 2.3.2 拓樸最佳化

結構最佳化設計可依照處理類型分為三大類型：尺寸最佳化 (Sizing Optimization)、形狀最佳化 (Shape Optimization) 與拓樸最佳化 (Topology Optimization)。三大類型的主要設計流程基本相似：定義初始模型、進行有限元素分析與最佳化分析直至滿足收斂條件，但在設計變數與演算法上則皆有不同。而本研究將以拓樸最佳化作為結構最佳化的主要設計方法。

在進行結構物設計時，工程師大多數會在符合法規要求與設計需求的同時，使用最少量的構件來完成結構物，使構件皆有較高的使用效率。而將其轉為拓樸最佳化問題時，首先要先定義設計領域，即可進行結構設計的區域；再來設置力量加載，邊界條件和約束條件；最後針對前兩步驟設定的一組設計參數並透過演算法進行迭代分析，在符合給定的條件限制與設計要求下，將設計領域中的材料在力量傳遞的重要路徑上排列，以得到相同材料用量時得到最大勁度、最有效率的結構物。進行拓樸最佳化的演算法種類繁多，本研究團隊曾使用過固體等向性懲罰函數法、結構最佳化演進法、雙向結構最佳化演進法以及元素交換法，本研究主要使用的演算法為雙向結構最佳化演進法。

## 2.4 雙向結構最佳化演進法 (BESO)

雙向結構最佳化演進法 (BESO) 是由結構最佳化演進法 (ESO) 所延伸發展的演算法。結構最佳化演進法 (ESO) 在演進的過程中能夠將無效率元素進行移除，能夠在一定的迭代步數內簡單有效的進行拓樸最佳化設計，但由於該演算法僅能夠單向的移除元素，無法將元素進行回填。因此，若是迭代後所得到的元素排列形式變化劇烈，就容易形成糟糕的拓樸結果。針對該現象，雙向結構最佳化演進法 (BESO) 便因此被提出，使被移除的元素能夠進行回填的動作，用以避免糟糕的拓樸結果或因而能形成更好的拓樸結果。

雙向結構最佳化演進法 (BESO) 最初是利用位移外插 (Displacement Extrapolation) 的方法，對相接於元素邊界但不存在元素網格處之敏感度因子進行估算，作為是否回填元素的標準。Huang and Xie (2007) 提出篩選投影來進行平滑化，使結構能夠避免棋盤格問題與網格依賴性問題，同時設立收斂準則使雙向結構最佳化演進法能夠順利收斂而非持續迭代，也將雙向結構最佳化演進法進行整理，成為現行常見之主要架構。Zue and Xie (2015) 將雙向結構最佳化演進法透過 ABAQUS 內建之 Python 程式語言模組 (Module) 進行程式撰寫，該文獻材料內插方法主要是使用幕次內插方法 (Power-law material interpolation scheme)，並透過  $E_e = x_{\min}^p$  的公式來模擬空心材料之彈性模數，以達到軟移除 (Soft-kill) 之效果，其中  $p$  為懲罰係數。Huang and Xie (2011) 使用替代內插方法 (Alternative interpolation scheme) 作為材料內插方法，使演算法能夠考量自重進行拓樸最佳化。本研究便以 Zue and Xie (2015) 所提出之程式碼作為程式基礎架構，並使用 Huang and Xie (2011) 中所使用之材料內插方法，並於本章進行詳細介紹。



## 2.4.1 最佳化設計流程

根據 Huang and Xie (2007) 所改進並整理之雙向結構最佳化演進法主要設計流程如下所示：

**Step 1：**對於邊界條件與載重設定，使用有限元素網格離散設計領域，並設定初始材料分布，設計領域可不為全填滿。

**Step 2：**根據題目選取適當之篩選半徑  $r_{min}$ 、容許誤差  $\tau$ 、體積改變比例  $ER$ 、最大添加體積比例  $AR_{max}$ 、降低收斂標準迭代步數  $N_{down}$ 、停止迭代步數  $N_{stop}$ ，並利用篩選半徑計算各元素間權重。

**Step 3：**進行有限元素分析並計算出各元素之敏感度因子。

**Step 4：**透過 Step 2 中所計算得出之篩選半徑各元素間權重，將各個元素敏感度因子進行平滑化（包括空心元素及實體元素）。

**Step 5：**對各元素敏感度因子使用穩定策略，並儲存當前敏感度因子供下一次迭代穩定策略使用。

**Step 6：**計算下一次迭代目標體積。

**Step 7：**根據敏感度因子排序結果與下一次迭代目標體積重新更新各元素使用之材料，將無效率元素轉換為空心材料，並使重要元素轉換為實體材料，直到實體體積小於等於下一次迭代目標體積。

**Step 8：**重複 Step 3 至 Step 7 直到達到實體元素目標體積  $V^*$  並滿足收斂準則與其他收斂條件，即可得到雙向結構最佳化演進法之最佳化結構元素排列。

上述步驟及介紹中提出的目標函數、敏感度因子、材料內插方法、篩選投影、穩定策略、移除準則以及收斂準則將於接下來的小節進行詳細介紹。



## 2.4.2 目標函數

本研究將目標函數訂為最小化整體結構順從度，可以用以下數學方程式表示：

Min.:

$$C(\mathbf{X}) = \mathbf{F}^T \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (2.5)$$

Subject to:

$$V^* - \sum_{e=1}^N V_e \mathbf{1}_{\{x_e \neq x_{\min}\}} \geq 0 \quad (2.6)$$

$$\mathbf{1}_{\{x_e \neq x_{\min}\}} = \begin{cases} 1, & x_e \neq x_{\min} \\ 0, & x_e = x_{\min} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{X} = \{x_e\}, \quad x_e = 1 \text{ or } x_{\min}, \quad e = 1, 2, \dots, N \quad (2.8)$$

式中， $\mathbf{U}^T$ 、 $\mathbf{K}$  及  $\mathbf{X}$  分別為結構位移、結構勁度矩陣及二元設計變數集合，式 (2.6) 為本研究之不等式限制式， $V^*$ 、 $V_e$  及  $N$  分別為目標體積、元素  $e$  之元素體積及總元素個數；式 (2.7) 為指示函數 (Indicator function)，由於空心元素並非真的從模型中被移除，只是用較軟的材料來模擬，其體積在模型中仍存在，所以需要該函數來判斷是否為實體元素。最後，本研究所使用之  $x_{\min} = 0.01$ 。

## 2.4.3 移除準則

移除準則主要可以分為能量移除準則與應力移除準則，其中應力移除準則又分成張力移除準則與壓力移除準則，主要是根據透過哪種有關於元素受力狀態的參數來區分，能量移除準則主要會使用元素應變能來當作基礎參數，會透過計算敏感度因子  $\alpha_e$  來排序元素優劣，而應力移除準則主要會使用元素主應力或是元素之有效應力 (via Mises stress) 來當作基礎參數，會透過計算元素利用率  $\eta_e = \sigma_{VM}^e / \sigma_{allow}$  來排序元素優劣，本研究主要會使用能量移除準則中的敏感度因子來當作排序元素優劣的方式，敏感度因子公式會在第 2.4.5 節推導與說明。

其中移除方式又可分為固定數量方法、固定體積比例方法和移除比例方法。本研究會使用固定體積比例方法作為移除方法。固定體積比例方法主要是以當前體積改變一定比例來作為下一步迭代之目標體積，既能夠確保每次迭代時體積的改變量為相對較小幅度的更動，並且在越接近目標體積時，會逐漸趨緩其改變幅度，以求得較佳之拓樸結果。因此，在每次交換元素前，皆需要先計算下一步迭代之目標體積；完成後，再根據敏感度因子將元素進行排序，並將敏感度因子轉換成空心元素，直到實體元素體積總和小於等於下一步迭代之目標體積為止，即得出下一步迭代之元素排列形式，也就能達到雙向結構最佳化演進法移除以及回填的目的。

#### 2.4.4 材料內插方法

材料內插方法主要是透過數學式將被移除元素以較軟材料來進行模擬，並透過二元設計變數  $x_e$  將兩者材料關係串聯，較常使用的材料內插方法為幕次內插方法 (Power-law material interpolation scheme) (Bendsøe and Sigmund(1999))，為式 (2.9) 表示，而本研究主要會使用另一種材料內插方法為替代內插方法 (Alternative interpolation scheme) (Stolpe and Svanberg(2001))，為式 (2.10) 表示，第三章第 3.6 節會詳細說明本研究需要改變材料內插方法的原因。

幕次內插方法 (Power-law material interpolation scheme) :

$$\begin{cases} \rho_e = x_e \rho^0 \\ E_e = x_e^p E^0 \\ \mathbf{k}_e = x_e^p \mathbf{k}^0 \end{cases} \quad (2.9)$$

替代內插方法 (Alternative interpolation scheme) :

$$\begin{cases} \rho_e = x_e \rho^0 \\ E_e = \frac{x_e}{1 + q(1 - x_e)} E^0 \\ \mathbf{k}_e = \frac{x_e}{1 + q(1 - x_e)} \mathbf{k}^0 \end{cases} \quad (2.10)$$



## 2.4.5 敏感度分析

在一般整體結構順從度最小化的問題中，針對元素*i*的移除，會依據對於目標函數進行敏感度分析所得之敏感度因子來將元素進行排序，根據使用替代內插方法所計算之敏感度分析過程如下表示：

透過引入拉格朗日乘數 (Lagrangian multiplier)  $\lambda$  的向量，即可使用伴隨理論 (Adjoint method) 來確定有關於力量與位移向量的敏感度因子，修改後目標函數以式 (2.11) 表示：

$$C = \mathbf{F}^T \mathbf{U} + \lambda^T (\mathbf{F} - \mathbf{K} \mathbf{U}) \quad (2.11)$$

式 (2.11) 中所加入之  $\lambda^T (\mathbf{F} - \mathbf{K} \mathbf{U})$  計算式為零，使修改目標函數與原始目標函數仍是一致的，再將修改後目標函數對  $x_e$  偏微分後可得式 (2.12)，整理後得出式 (2.13)。

$$\frac{dC}{dx_e} = \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial x_e} \mathbf{U} + \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_e} + \lambda^T \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_e} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_e} \mathbf{U} - \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_e} \right) \quad (2.12)$$

$$\frac{dC}{dx_e} = \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial x_e} (\mathbf{U} + \lambda) + (\mathbf{F}^T - \lambda^T \mathbf{K}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_e} - \lambda^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_e} \mathbf{U} \quad (2.13)$$

令  $\lambda = \mathbf{U}$  用於消除式 (2.13) 中未知的  $\partial \mathbf{U} / \partial x_e$  得式 (2.14)。

$$\frac{\partial C}{\partial x_e} = \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial x_e} (2\mathbf{U}) - \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_e} \mathbf{U} \quad (2.14)$$

假設元素變化只影響設計變數相關的自重，因此  $\partial \mathbf{F}^T / \partial x_e = V_e \rho^0 g \bar{\mathbf{f}}^T$ ，式中  $V_e$ 、 $\rho^0$  和  $g$  分別為元素體積、實體元素密度和重力加速度，而  $\bar{\mathbf{f}}$  在使用 Q4 元素時為  $\bar{\mathbf{f}} = \{0, -\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}\}^T$ ，若使用其他元素  $\bar{\mathbf{f}}$  也會因應元素平均的分配到各節點的  $y$  向，將  $\partial \mathbf{F}^T / \partial x_e$  和  $\mathbf{k}_e = [x_e/1 + q(1 - x_e)] \mathbf{k}_e^0$  代回式 (2.14) 得出式 (2.15)。

$$\frac{\partial C}{\partial x_e} = 2V_e \rho^0 g \bar{\mathbf{f}}^T \mathbf{u}_e - \frac{1+q}{[1+q(1-x_e)]^2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e^0 \mathbf{u}_e \quad (2.15)$$

最後，將式 (2.15) 經過數學式調整後可得式 (2.16)，該式也就是本研究所會使用到的敏感度因子數學式。

$$\alpha_e = \frac{-1}{2(1+q)} \frac{\partial C}{\partial x_e} = -\frac{\rho^0 g V_e}{1+q} \bar{\mathbf{f}}^T \mathbf{u}_e + \frac{C_e V_e}{2x_e[1+q(1-x_e)]} \quad (2.16)$$



## 2.4.6 篩選投影

篩選投影是將敏感度因子篩選半徑  $r_{\min}^{\alpha}$  範圍內的元素原始敏感度因子  $\alpha_e$  進行加權平均，同時能對空心元素之敏感度因子進行估算，也具有平滑化元素敏感度因子的效果，以得到過濾元素敏感度因子  $\hat{\alpha}_e$ ，而平滑化可以避免發生棋盤化現象與網格依賴性問題，棋盤化現象，如圖 2.2 所示。針對元素  $i$  之過濾元素敏感度因子  $\hat{\alpha}_i$  計算方式如下式 (2.17) 以及式 (2.18)：

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\sum_{j=1}^M w(r_{ij})\alpha_j}{\sum_{j=1}^M w(r_{ij})} = \sum_{j=1}^M \left( \frac{w(r_{ij})}{\sum_{j=1}^M w(r_{ij})} \alpha_j \right) = \sum_{j=1}^M \zeta_j \alpha_j \quad (2.17)$$

$$w(r_{ij}) = \begin{cases} r_{\min}^{\alpha} - r_{ij}, & r_{ij} < r_{\min}^{\alpha} \\ 0, & r_{ij} \geq r_{\min}^{\alpha} \end{cases} \quad (2.18)$$

式中  $\hat{\alpha}_i$  為元素  $i$  之過濾元素敏感度因子，代表以元素  $i$  為中心，敏感度因子篩選半徑  $r_{\min}^{\alpha}$  範圍內之元素  $j$  乘上其對應權重係數 (Weight factor)  $\zeta_j$  之總和值。 $\alpha_j$  為元素  $j$  之原始敏感度因子， $r_{ij}$  為元素  $j$  之中心至元素  $i$  之中心的距離， $w(r_{ij})$  為線性權重函數，而為了保持篩選投影公式的對於模型的通用性，透過使用  $w(r_{ij})$  得出元素  $i$  與所有元素 (總共為  $M$  個) 之權重係數  $\zeta_j$  來計算得出過濾元素敏感度因子  $\hat{\alpha}_i$ 。

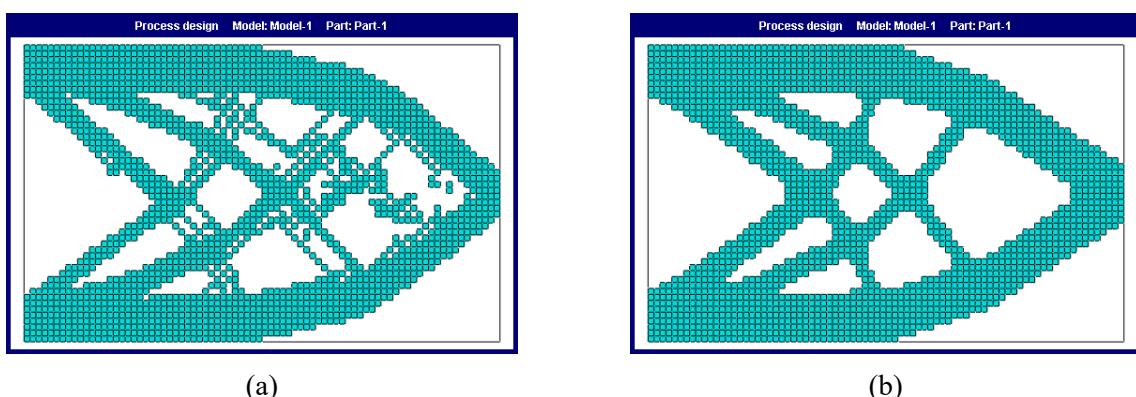


圖 2.2: (a) 產生棋盤化現象之結構 (b) 經過篩選投影平滑化後之結構

敏感度因子篩選半徑  $r_{\min}^\alpha$  的大小與桿件粗細呈正相關，採用較小的篩選半徑可以保留或是生成所需之細小桿件，但可能會使產生之最佳化結構過於複雜；而採用較大的篩選半徑會使最佳化結構產生較大桿件，但也會因為需要產生較大桿件而在迭代過程中因而產生離散結果，而得到較差的拓樸結果。篩選半徑主要取決於欲設計之桿件尺寸，同時也需要考量模型所使用之單一元素大小，而 Huang and Xie (2007) 建議篩選半徑大小可以設置大約為單一元素大小之 1~3 倍，且應當大於單一元素大小的一半尺寸，本研究也有將篩選投影應用到應力不變量  $I_1$ ，會使用到應力不變量篩選半徑  $r_{\min}^s$ ，在第四章會再詳細說明。

前面所述之網格依賴性問題是指在進行有限元素分析時，模型被切分成無數個元素，而這些元素的大小會影響有限元素分析的準確性。當切分的元素大小不當時，雙向結構最佳化演進法的後續最佳化分析可能會因為這類型的不準確而導致拓樸結果產生較大的變化。通過使用篩選投影進行對分析結果進行平滑化的動作，可以有效的避免這個問題，從而在使用不同元素大小時獲得類似的拓樸結果。如下圖 2.3 所示。

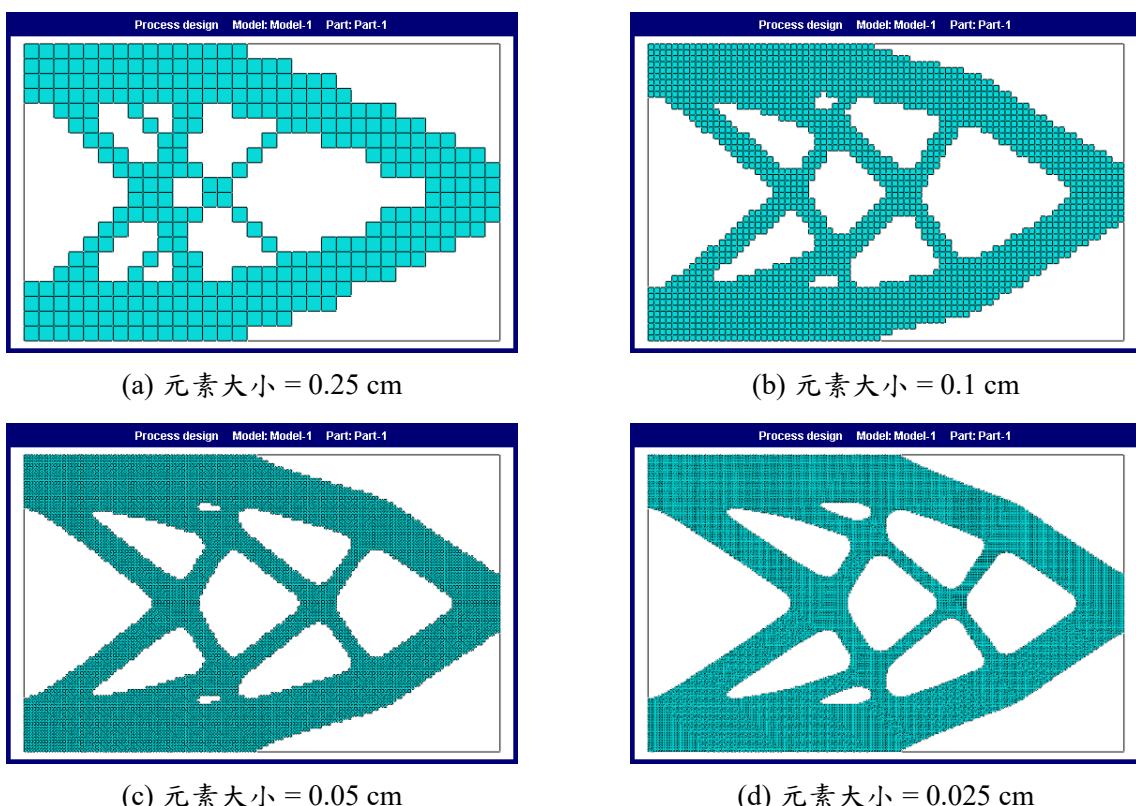


圖 2.3: 使用不同元素大小經篩選投影後的結果



## 2.4.7 穩定策略

移除與回填元素時，敏感度因子計算多為線性估計，與實際狀況會有所誤差。此外，由於忽略同時變更多個元素的交互影響，因此容易形成數個重複拓樸元素排列型式交替出現之情況，造成不停迭代而無法達到收斂準則。因此需要對元素  $i$  經篩選投影後的過濾元素敏感度因子  $\hat{\alpha}_i$  使用穩定策略來降低迭代步之間相同元素敏感度因子差異过大，其方法即是透過平均幾步迭代步數之相同元素敏感度因子來穩定其元素材料變化，進而穩定整個迭代過程。本研究主要採用平均兩步迭代步數，也就是元素  $i$  當前迭代步與前一步進行平均，即可得到平均元素敏感度因子  $\tilde{\alpha}_i$ ，如下式 (2.19)。當結構收斂後，該穩定策略對於篩選投影後的過濾元素敏感度因子幾乎沒有影響。

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{\hat{\alpha}_i^k + \hat{\alpha}_i^{k-1}}{2} \quad (2.19)$$

式中， $k$  為當前之演進步數， $\hat{\alpha}_i^k$  與  $\hat{\alpha}_i^{k-1}$  分別為元素  $i$  當前步數與前一步之過濾敏感度因子，而  $\tilde{\alpha}_i$  為元素  $i$  之平均敏感度因子。

## 2.4.8 收斂準則

由於雙向結構最佳化演進法能夠移除及回填元素，即使達到目標體積後會持續進行迭代與元素材料交換的動作，用以求得最佳拓樸結果，因此無法像在使用結構最佳化演進法時一樣，一旦達到目標體積後即停止，而是改以使用與目標函數有關之數學式來判斷迭代時結構是否已經趨近於收斂來作為標準，當考量收斂之步數  $N_{iter}$  所計算出之誤差小於容許誤差即視為達到收斂，如下式 (2.20) 表示：

$$Error = \frac{\sum_{i=1}^{N_{iter}} |C_{k-i+1} - C_{k-N_{iter}-i+1}|}{\sum_{i=1}^{N_{iter}} C_{k-i+1}} \leq \tau \quad (2.20)$$

式中， $C$  為整體結構順從度， $\tau$  為容許誤差， $N_{iter}$  為考量收斂之步數， $k$  為當前迭代步數，本研究使用之考量收斂之步數為  $N_{iter} = 5$ ，而容許誤差  $\tau$  則會使用 0.05 % 或是 0.01 % 作為收斂之誤差。

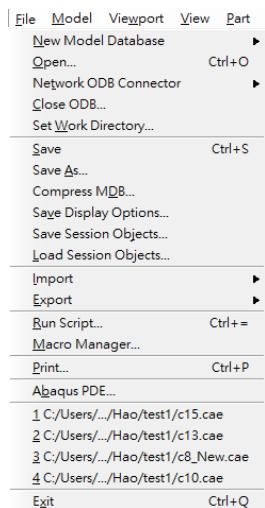
## 2.5 軟體與程式語言介紹



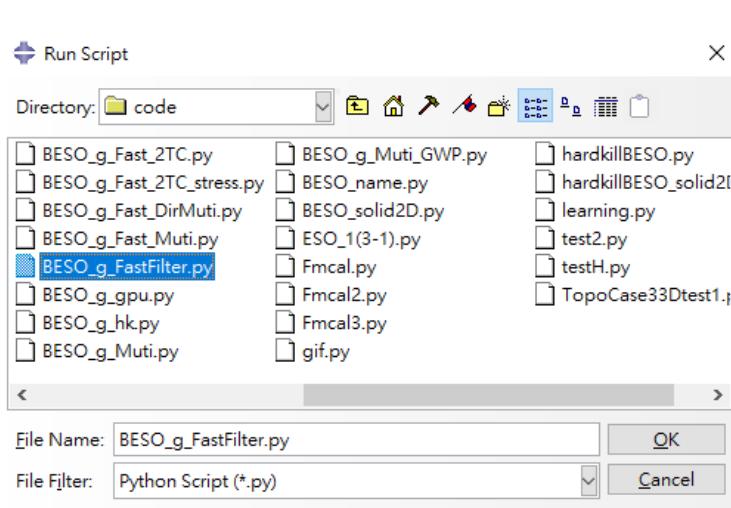
### 2.5.1 有限元素分析軟體 ABAQUS

ABAQUS 是一款應用面相當廣泛、分析模擬能力強大的有限元素軟體，不管是線性、非線性材料分析，碰撞接觸、結構破壞、多重荷載與各式邊界條件問題，同時 ABAQUS 還提供應力分析，並簡化了導熱與熱對流、質量擴散、聲學、壓電效應與電化學模擬且提供各項分析狀況的組合分析。

在此基礎上 ABAQUS 還提供給使用者 API 介面 (Application Programming Interface) 進行程式操作的部分，主要可以區分為兩部分：前後處理模組 (CAE) 提供 Python 語言進行操作以及求解器模組 (Standard Explicit, CFD) 則提供 Fortran 語言進行操作。本研究主要會使用 ABAQUS 進行初始建模、模型參數修改、向量輸出等操作，為前後處理模組 (CAE) 部分，故選擇 Python 語言作為主要程式語言。透過 ABAQUS 提供之 Python 程式碼能夠對 ABAQUS 中不同的模組進行操作，分別有零件 (Part)、材料性質 (Property)、組裝 (Assembly)、分析步驟 (Step)、交互關係 (Intersection)、載重與邊界條件 (Load)、網格 (Mesh)、最佳化分析 (Optimization)、分析工作建立 (Job) 與可視化 (Visualization) 等。在使用 Python 操作 ABAQUS 時，可以透過圖形使用者介面 (Graphical User Interface, GUI) 中的命令輸入區輸入指令或是透過腳本 (Script) 來輸入整個 Python 檔 (.py)，並使用軟體自身的 Python 直譯器進行 Python 原始碼的轉譯，最後進行 ABAQUS 軟體上的執行，操作方式為【File】→【Run Script】→【input.py】，如圖 2.4 所示。



(a) 【File】選取框



(b) 【Run Script】對話框

圖 2.4: ABAQUS 操作對話框



### 2.5.2 程式語言 Python

程式語言 Python 是一種廣泛使用的的直譯式且功能強大的高階程式語言，原因在於 Python 程式碼可讀性高、入門容易、有許多平台可供編程且不同功能之模組 (Module) 繁多，但相較於 C 語言或其他低階程式語言，其執行效率與可維護性較差，本研究使用該語言主要原因是 ABAQUS 本身就具有其各項功能在 Python 上的操作代碼，再者也能透過 Python 中眾多開發者所提供之模組 (Module) 來增加各式不同的功能，使整體分析計算都能夠有效的完成。

## 2.6 小結

本章節主要介紹本研究所使用之方法介紹，首先先針對於最佳化問題進行簡要描述，再來簡介結構最佳化中何謂最佳化設計與拓樸最佳化，接著對於本研究主要使用之雙向結構最佳化演進法進行詳細介紹，最後對於本研究所使用之軟體與程式語言進行簡單介紹。而後續章節會以此演算法作為主要架構進行延伸及改良，並對於不同案例進行分析加以進行探討，以了解其優缺點及適用性。





## 第三章 單一材料之改良式雙向結構最佳化演進法

### 3.1 前言

本章節將以雙向結構最佳化演進法為核心，透過改變材料內插方法使演算法能夠考量自重載重，使分析模型能加入自重以接近實際的加載狀況(於第 3.6 節介紹)。同時，針對於 Zue and Xie (2015) 的最佳化分析時間進行改進，使整體分析更有效率(於第 3.7 節介紹)。將考量自重的材料內插方法與改進分析時間後的雙向結構最佳化演進法應用於單一材料，並對多種案例進行分析，包含不同種類外力加載、設計領域和外力與自重的比例。

### 3.2 敏感度因子

第二章第 2.4.5 節曾介紹，一般整體結構順從度最小化問題中，會透過元素敏感度因子  $\alpha_e$ ，透過敏感度分析之敏感度因子可以使實體元素與空心元素在同一個基準下進行比較，不會因為變為空心元素後因應變能下降而無法與實體元素相比較導致無法回填，本研究將式 (2.16) 同除以元素自身體積  $V_e$ ，將其變為單位體積下的敏感度因子，元素交換時不會因為元素體積較大而使敏感度因子較大而不易被移除，使不同體積的元素能在同一基準下比較，計算方式如下式 (3.1)：

$$\alpha_e = -\frac{\rho^0 g}{1+q} \bar{\mathbf{f}}^T \mathbf{u}_e + \frac{C_e}{2x_e[1+q(1-x_e)]V_e} \quad (3.1)$$

式中， $C_e$ 、 $x_e$ 、 $q$ 、 $\rho^0$  及  $V_e$  分別為元素之結構順從度(即兩倍應變能)、設計變數、懲罰因子、實體材料密度及元素體積。



### 3.3 下一步迭代目標體積

由於雙向結構最佳化演進法是根據當前結果來決定下一步迭代時的元素排列，因此設定下一步迭代之目標體積  $V_{i+1}$  是必要的，用來防止元素變化過多導致結果離散化，第二章第 2.4.3 節中有提到會使用固定體積比例方法作為本研究的移除方法，而使用固定體積比例方法也會使當前體積越靠近目標體積時，體積變化越加趨緩，讓結果不易產生離散化結果，而下一步迭代之目標體積  $V_{i+1}$  的計算方式如下式 (3.2)：

$$V_{i+1} = \begin{cases} \max(V_i \times (1 - ER), V^*), & \text{when } V_i \geq V^* \\ V_{\text{total}} - \max((V_{\text{total}} - V_i) \times (1 - ER), V_{\text{total}} - V^*), & \text{when } V_i < V^* \end{cases} \quad (3.2)$$

式中， $V_{i+1}$ 、 $V_i$  為下一步迭代步數實體目標體積、當前迭代步數實體體積， $V^*$ 、 $V_{\text{total}}$  為目標體積、設計領域總體積 (包含空心元素體積) 及  $ER$  為體積改變比例，本研究體積改變比例  $ER$  一般會設定為 0.02 或 0.04。



### 3.4 最大添加體積比例

參考 Huang and Xie (2011) 引入最大添加體積比例  $AR_{\max}$  使用於本研究之雙向結構最佳化演進法。在進行元素移除與回填皆是透過排序所有元素來進行，可以視為將所有元素回填後再重新移除，導致可能會有大量空心元素轉換成實體元素，使元素有大量更動，如第 3.9 節中 [例題 3-1] 的表 3.2 中迭代第 36 步至第 38 步之拓樸形狀 (紅色圓圈處)，導致無法進行穩定元素交換進而無法收斂，透過使用最大添加體積比例  $AR_{\max}$  可以有效避免這樣的問題。

執行流程則為根據過濾敏感度因子  $\tilde{\alpha}_e$  分配後的結果，確定其中空心元素轉換成實體元素的體積 (即為添加體積  $AV$ ) 是否有超過最大添加體積  $AV_{\max}$ ，若沒有，則會依該結果分配材料；反之，則會將實體與空心元素各自排序，先將空心元素中敏感度因子最大者逐個轉換成實體元素直到最大添加體積  $AV_{\max}$ ，最大添加體積  $AV_{\max}$  計算方式如下式 (3.3) 表示，再將實體元素 (不包含前者所轉換之空心元素) 中敏感度因子最小者逐個轉換成空心元素直到滿足下一步迭代之目標體積，確保大部分元素能在下一步時保持相同狀態，使其達到限制部分轉變較大之迭代步元素改變量之問題，而非整體迭代過程皆限制，單一材料最大添加體積比例執行流程如圖 3.1。

$$AV_{\max} = \begin{cases} AR_{\max} \times V_i, & \text{when } V_i \geq V^* \\ AR_{\max} \times (|V_i - V^*| + V^*), & \text{when } V_i < V^* \end{cases} \quad (3.3)$$

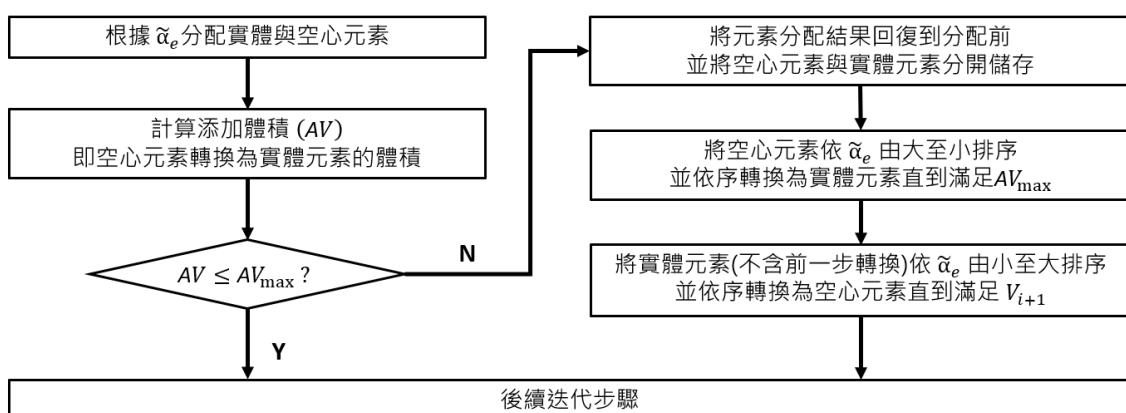


圖 3.1: 單一材料最大添加體積比例執行流程圖



### 3.5 收斂條件

第二章第 2.4.8 節中提到雙向結構最佳化演進法會持續交換元素，所以需要使用與目標函數有關之數學式來判斷迭代時結構是否已經趨近於收斂作為標準，考量收斂之步數為  $N_{iter} = 5$ 。除了收斂準則之外，同時也檢核當前目標函數值是否比前三迭代步數所得更小，也會檢核實體體積與目標體積之誤差是否小於五倍平均元素體積。

最後會將收斂條件使用降低收斂標準迭代步數  $N_{down}$  與停止迭代步數  $N_{stop}$  兩個參數將收斂條件分為三個階段：第一階段會使用上述提到之收斂條件，如下式 (3.4) 表示，第二階段則會將收斂準則中的容許誤差  $\tau$  提升至原本的十倍以放寬收斂的標準，如下式 (3.5) 表示，最後階段則是作為迭代步數的上限，如下式 (3.6) 表示。透過三階段收斂條件，即使在原標準下較難收斂的問題，也可以在第二階段時收斂，從而使拓撲結構依然能達到收斂後的結果，這樣可以避免直接停止迭代時會產生未達到收斂的結構的問題。

$$\text{when } i \leq N_{down}, \quad \begin{cases} \frac{\left| \sum_{j=1}^5 (C_{i-j+1} - C_{i-5-j+1}) \right|}{\sum_{j=1}^5 C_{i-j+1}} \leq \tau \\ C_i \leq \min(C_{i-1}, C_{i-2}, C_{i-3}) \\ |V_i - V^*| \leq 5 \times V_{average} \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\text{when } N_{stop} > i > N_{down}, \quad \begin{cases} \frac{\left| \sum_{j=1}^5 (C_{i-j+1} - C_{i-5-j+1}) \right|}{\sum_{j=1}^5 C_{i-j+1}} \leq 10 \tau \\ C_i \leq \min(C_{i-1}, C_{i-2}, C_{i-3}) \\ |V_i - V^*| \leq 5 \times V_{average} \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\text{when } i = N_{stop}, \text{ 停止迭代} \quad (3.6)$$

式中， $i$  為迭代步數， $C_i$  為第  $i$  步之結構順從度， $\tau$  為容許誤差，本研究  $\tau$  會使用 0.05 % 或 0.01 % 作為收斂之誤差， $N_{down}$  和  $N_{stop}$  分別是降低收斂標準迭代步數和停止迭代步數， $V_i$ 、 $V^*$  和  $V_{average}$  分別為當前迭代步數  $i$  之實體體積、目標體積和平均元素體積。



### 3.6 材料內插方法考量自重之探討

第二章第 2.4.4 節中有提到兩種材料內插方法，分別為幕次內插方法 (Power-law material interpolation scheme) 與替代內插方法 (Alternative interpolation scheme)，其材料方法公式分別使用式 (2.9) 和式 (2.10)。分別使用兩種材料方法計算單一 Q4 元素加載自重時的位移，單一 Q4 元素重量為式 (3.7) 表示，並將其分配到元素各節點得到力量矩陣  $\mathbf{f}_e$  為式 (3.8)

$$W_e = V_e \times g \times \rho_e = V_e \times g \times x_e \times \rho^0 \quad (3.7)$$

$$\mathbf{f}_e = V_e g x_e \rho^0 \left\{ 0, -\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4} \right\}^T \quad (3.8)$$

透過  $\mathbf{F} = \mathbf{KU}$  與式 (2.9) 和式 (2.10) 中彈性模數與勁度之公式來反推使用兩種材料方法所得之單一 Q4 元素位移矩陣  $\mathbf{u}_e$ ，使用幕次內插方法如式 (3.9) 表示，而使用替代內插方法如式 (3.10) 表示。

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{k}_e^{-1} \mathbf{f}_e = \frac{1}{x_e^p} \mathbf{k}_e^{0-1} x_e \mathbf{f}_e^0 = \frac{1}{x_e^{p-1}} \mathbf{k}_e^{0-1} \mathbf{f}_e^0 = x_e^{1-p} \mathbf{u}_e^0 \quad (3.9)$$

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{k}_e^{-1} \mathbf{f}_e = \frac{1 + q(1 - x_e)}{x_e} \mathbf{k}_e^{0-1} x_e \mathbf{f}_e^0 = [1 + q(1 - x_e)] \mathbf{k}_e^{0-1} \mathbf{f}_e^0 = [1 + q(1 - x_e)] \mathbf{u}_e^0 \quad (3.10)$$

透過式 (3.9) 與式 (3.10) 所得到之單一 Q4 元素位移矩陣  $\mathbf{u}_e$ ，比較後能發現兩式中  $\mathbf{k}_e^{0-1} \mathbf{f}_e^0$  部分一致，也同時為實體材料所得之位移矩陣  $\mathbf{u}_e^0$ ，也就能將兩式中由二元設計變數  $x_e$  所構成之公式定為幕次位移比 (Power-law displacement ratio)  $DR_p$  與替代位移比 (Alternative displacement ratio)  $DR_A$ ，如下式 (3.11) 和式 (3.12) 表示，用來得到位移矩陣  $\mathbf{u}_e$  在不同設計變數  $x_e$  下，與實體材料所得之位移矩陣  $\mathbf{u}_e^0$  的倍率。將  $DR_p$  和  $DR_A$  兩種位移比代入各自的懲罰係數  $p$  與懲罰因子  $q$  在不同的設計變數  $x_e$  來進行比較，如圖 3.2 表示。



$$DR_P = \frac{1}{x_e^{p-1}} \quad (3.11)$$

$$DR_A = 1 + q(1 - x_e) \quad (3.12)$$

由圖 3.2 可知， $DR_P$  在使用懲罰係數  $p = 2$  與  $p = 3$  時，也就是圖上橘紅色虛線與藍色虛線的部分， $x_e$  越小， $DR_P$  的值也會越大，也就是當  $x_{\min}$  設定為 0.01 或是 0.001 等極小值時，其  $DR_P$  會得到極大值，在使用幕次內插方法時就會使其加載自重時空心元素的位移矩陣  $\mathbf{u}_e$  與  $C_e$  會得到極大值，也就導致空心元素與實體元素會一直處於交換的狀態。 $DR_P$  在使用懲罰係數  $p = 1$  時，也就是圖上黃色虛線的部分，這樣兩種材料彼此之間的位移矩陣  $\mathbf{u}_e$  都是相等的，雖然這樣就能夠在部分情況使用幕次內插方法來分析自重加載的模型，但會失去材料方法對於空心材料的懲罰，進而無法得到較穩定且較好的結果。

使用替代內插方法所得之結果則不同，如圖上紫色實線與綠色實線的部分， $DR_A$  既不會在  $x_{\min}$  設定為 0.01 或是 0.001 等極小值時得到極大值，同時也不會像幕次內插方法使用懲罰係數  $p = 1$  時會失去材料方法對於材料的懲罰，而是兩者兼顧，所以本研究最後選擇使用替代內插方法作為主要材料內插方法的使用，用來考量模型在加載自重後所得之拓樸最佳化的結果。

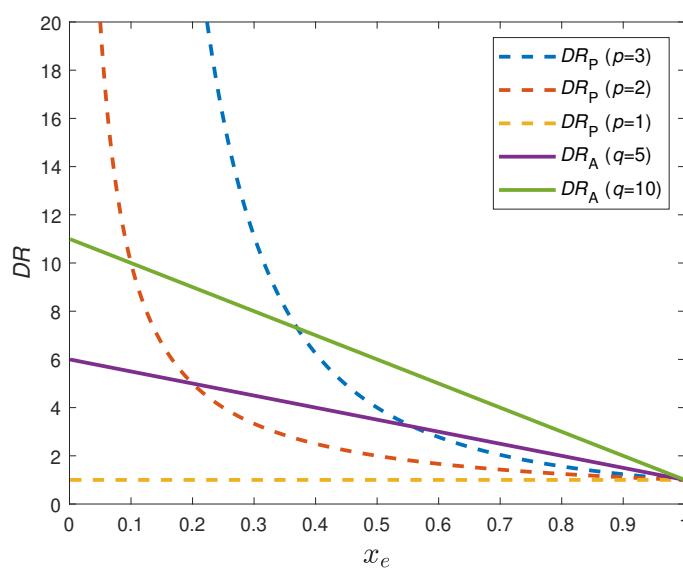


圖 3.2: 兩種材料方法之位移比在不同設計變數下之比較圖



## 3.7 最佳化分析時間改進

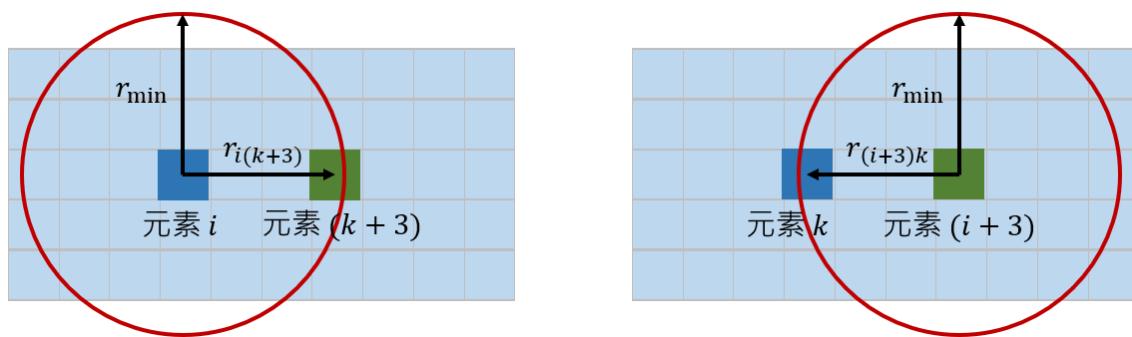
本研究所使用之主要程式碼參考 Zue and Xie (2015) 所提出之程式碼作為最佳化程式基礎架構，本節基於該程式基礎架構對於篩選投影權重程式上的計算方式進行改進，使篩選投影權重計算時長能夠有效的縮短，進而讓整體分析時長能夠縮短。

### 3.7.1 初步改進

Zue and Xie (2015) 所提出之程式碼，在計算第二章第 2.4.6 節時所提到之線性權重函數  $w(r_{ij})$  和與其相應之權重係數  $\zeta_j$  時，由於元素間的關係不會改變，該係數在迭代過程也不會改變，為減少迭代分析時間該文獻將該計算放於迭代前完成，並在每步迭代重複使用。

本研究發現整體分析時長可粗略分為篩選投影權重計算時長與最佳化迭代分析時長，且篩選投影權重計算時長所佔比重會隨元素量增多而增多，主因是原程式在計算中存在過多的重複迴圈。這些重複迴圈可分為兩部分：首先，是元素與元素本身之計算迴圈；其次，是計算元素  $i$  與元素  $(i+3)$  時的重複迴圈，兩者的距離，即  $r_{i(k+3)}$  和  $r_{(i+3)k}$  一致，如圖 3.3 所示。前述重複部分在原程式中仍會被計算，導致整體有多達  $\frac{N \times (N+1)}{2}$  的重複迴圈數，其中  $N$  為設計領域總元素量。

該程式以雙重迴圈來進行計算，外迴圈使用  $i$  作為元素編號的變動，內迴圈則使用  $k$  作為元素編號的變動，初步改進透過省略  $k \leq i$  之迴圈減少重複計算，用以將前述說明多達  $\frac{N \times (N+1)}{2}$  的迴圈數省略，便能減少權重計算時長中約一半的時長，初步改進後之計算虛擬碼 (pseudocode) 如圖 3.4 所示。



(a) 元素  $i$  與元素  $(k+3)$  計算示意圖

(b) 元素  $(i+3)$  與元素  $k$  計算示意圖

圖 3.3: 元素  $i$  與元素  $(i+3)$  之相對距離  $r_{i(k+3)}$  和  $r_{k(i+3)}$  示意圖



```
Input : 篩選半徑 Rmin、元素中心座標、元素編號  
Output : 權重係數字典 Fm  
for i in range(len(elm)):  
    n1 = elm[i]  
    k_start = i+1  
    Fm[n1][0].append(n1)  
    Fm[n1][1] = np.append(Fm[n1][1], Rmin)  
    for k in range(k_start, len(elm)):  
        n2 = elm[k]  
        dis = distance between elm[i] and elm[k]  
        if dis < Rmin:  
            d = Rmin - dis  
            Fm[n1][0].append(n2)  
            Fm[n2][0].append(n1)  
            Fm[n1][1] = np.append(Fm[n1][1], d)  
            Fm[n2][1] = np.append(Fm[n2][1], d)  
            Fm[n1][1] = np.divide(Fm[n1][1],np.sum(Fm[n1][1]))
```

圖 3.4: 初步改進後的權重係數計算虛擬碼 (pseudocode)

### 3.7.2 主要改進

主要改進會延續第 3.7.1 節之初步改進之結果，由於經過初步改進之後仍還有  $\frac{N \times (N-1)}{2}$  次迴圈數，在元素量較多的案例仍需要花費一定的時間。而因為其計算十分簡易，可使用 Python 中”Numba”模組 (Module) 的即時編譯 (Just-in-Time, JIT) 的裝飾器，透過兩者的結合就能夠有效的減少計算時間。

#### 3.7.2.1 即時編譯 (Just-In-Time ,JIT)

即時編譯 (Just-in-Time, JIT) 是一種執行代碼的方法，這種方法在程式執行過程中（在執行期）而非在執行之前進行編譯。通常，這包括原始碼或更常見的位元組碼到機器碼的轉換後直接執行。使用 JIT 編譯器時通常會不斷地分析正在執行被該裝飾器包裝後的代碼，將該包裝後代碼進行加速，由 JIT 編譯器編譯或重新編譯後所帶來的效能提高將超過編譯該代碼的開銷。

而在 Python 程式語言中，原始碼被轉換為稱為位元組碼 (Bytecode) 的中間表示形式。位元組碼不是任何特定電腦的機器碼，可以在不同硬體架構之間移植，並使用虛擬電腦進行解釋或執行位元組碼，最後在透過虛擬電腦與硬體之間的交互來讓硬體能夠執行代碼內容，雖然能保證其通用性，但程式執行效率較差。而使用”Numba”模組 (Module) 中 JIT 可以將原始碼編譯成機器碼，以便程式能夠更快地執行，如圖 3.5 表示，可以針對每個檔案、每個函式甚至任何任意代碼片段進行編譯。

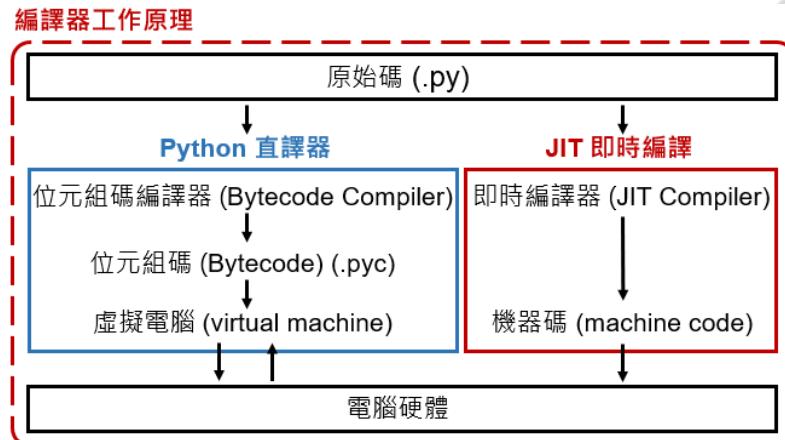


圖 3.5: Python 直譯器與 JIT 編譯器工作原理

### 3.7.2.2 主要改進流程

第二章第 2.5.1 節中提到 ABAQUS 的基本介紹與如何使用 Python 程式語言進行操作，本研究所使用之 ABAQUS 版本為 6.14 版，6.14 版的 ABAQUS 中 Python 直譯器為 2.7.3 版，因為該 Python 直譯器版本較舊，使模組 (Module) 同樣也需要安裝舊版，但舊版本的模組安裝上不僅複雜還無法使用函式較新的功能，所以本研究選擇使用 3.8.0 版 Python 直譯器來安裝 ”Numba” 的模組 (Module) 來使用 JIT，透過使用主副程式並同時切換程式環境的方式來串連不同版本直譯器，主程式為雙向結構最佳化程式中的篩選投影計算權重函式，副程式為篩選投影權重計算程式，兩者透過文字檔傳輸所需資料與計算結果，整體流程如圖 3.6 所示，該改進同樣應用於後兩章節之抗拉壓雙材料與雙材料雙向結構最佳化演進法上。

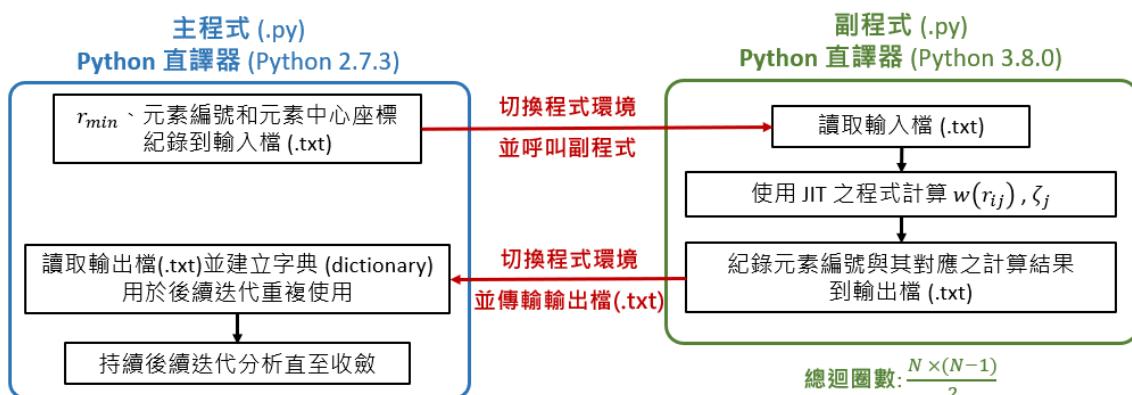


圖 3.6: 最佳化分析時間主要改進流程圖



### 3.8 單一材料雙向結構最佳化演進法流程圖

綜合前述改進方法，可以將單一材料雙向結構最佳化演進法 (BESO) 流程整理，並可以將其粗略的分為主要流程與元素交換流程：主要流程為會進行有限元素分析並輸出所需資料，並會等待元素交換流程構建新設計後判斷是否達到目標體積與是否達成收斂條件；元素交換流程會進行敏感度因子  $\alpha_e$  的後處理與材料重新分配的流程，其整體流程圖如圖 3.7 所示。

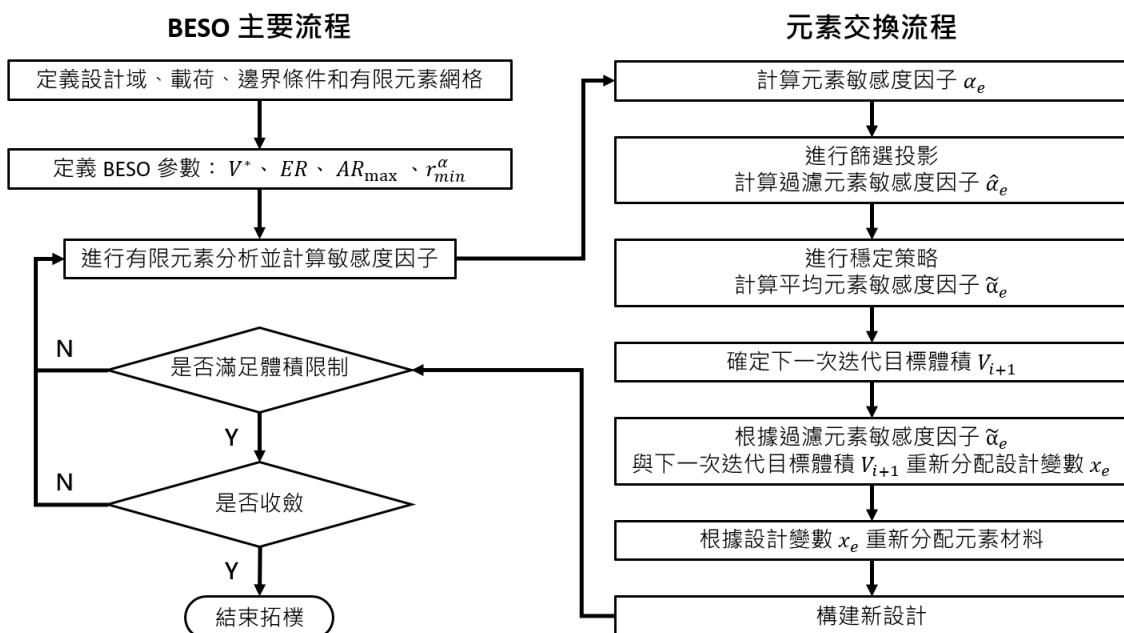


圖 3.7: 單一材料雙向結構最佳化演進法 (BESO) 流程圖



## 3.9 案例分析

### [例題 3-1]

此例題參考 Wang and Wang (2004) 的例題，其設計領域長 12 m，寬 6 m，左下角設置為鉸支承，右下角設置為滾支承，並在下方四分點位施加 15 kN 與在中點施加 30 kN 之集中載重，詳圖 3.8。材料內插方法：替代內插方法懲罰因子  $q = 5$ 。元素材料分別為實體材料與空心材料：實體材料（淺藍色元素）楊氏模數  $E = 200 \text{ GPa}$ 、泊松比  $\nu = 0.3$ 、厚度  $t = 1 \text{ cm}$ ；空心元素（不顯示）楊氏模數  $E = 3.36 \times 10^{-1} \text{ GPa}$ 、泊松比  $\nu = 0.3$ 、厚度  $t = 1 \text{ cm}$ 。此例題以平面應力分析，初始元素分布為全填滿空心材料，如表 3.1 所示，圖中黑色邊線為設計領域範圍，元素類型選用 ABAQUS 中的 CPS8 元素，將設計領域離散為相同之方形元素，元素尺寸為  $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ 。BESO 參數設定：目標體積  $V^*$  為 30 % 的設計領域、敏感度因子篩選半徑  $r_{\min}^\alpha = 40 \text{ cm}$ 、體積改變比例  $ER = 2 \%$ 、最大添加體積比例  $AR_{\max} = 2 \%, 100 \%$ （即不加入  $AR_{\max}$ ）、容許誤差  $\tau = 0.05 \%$ 、降低收斂標準迭代步數  $N_{\text{down}} = 300$  和停止迭代步數  $N_{\text{stop}} = 500$ 。該例題旨在探討「加入最大添加

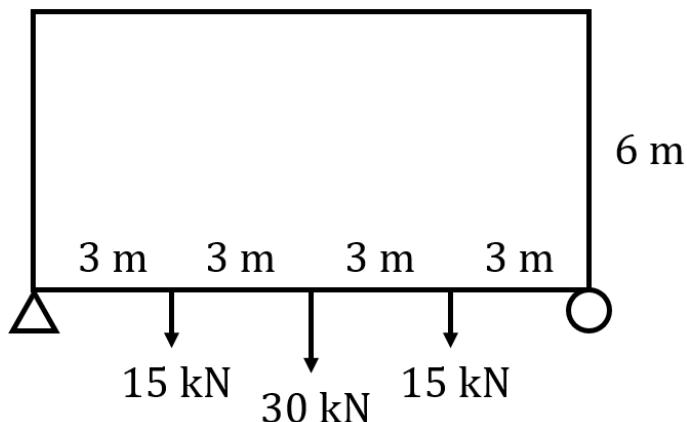


圖 3.8: [例題 3-1] 設計領域示意圖 (Wang and Wang (2004))

體積比例  $AR_{\max}$  對於全填滿空心材料起始元素分布之影響」，用以了解最大添加體積比例  $AR_{\max}$  對於分析上帶來的效益。由表 3.1 所示，若是不加入  $AR_{\max}$  使用，則會使全填滿空心材料之初始狀況即使達到停止迭代步數仍無法得到穩定的拓樸結果，在表 3.2 中顯示在迭代過程中如果不加入  $AR_{\max}$  使用，則會造成元素大量更動（紅色圓圈處），導致無法穩定交換材料進而無法得出收斂結果；加入  $AR_{\max}$  則能夠限制空心元素轉換為實體元素之數量，在過程中也會逐步隨體積限制交換數量，使分析能夠得出穩定拓樸結果。

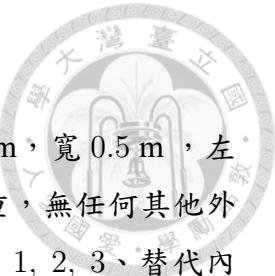


表 3.1: [例題 3-1] 最大添加體積比例  $AR_{\max}$  的影響

	加入 $AR_{\max}$	不加入 $AR_{\max}$
初始元素分布		
拓撲結果		
$C$ ( $\text{kN} \times \text{cm}$ )	1.4975	157.95
$iter$	140	500 ( $= N_{\text{stop}}$ )

表 3.2: [例題 3-1] 第 36 步到第 38 步迭代過程

$iter$	加入 $AR_{\max}$	不加入 $AR_{\max}$
第 36 步		
第 37 步		
第 38 步		



### [例題 3-2]

此例題參考 Huang and Xie (2011) 的例題，其設計領域長 1 m，寬 0.5 m，左下角設置為鉸支承，右下角設置為鉸支承，僅考量加載自重載重，無任何其他外力加載，詳圖 3.9。材料內插方法：幕次內插方法懲罰係數  $p = 1, 2, 3$ 、替代內插方法懲罰因子  $q = 5, 10$ 。元素材料分別為實體材料與空心材料：實體材料(淺藍色元素)楊氏模數  $E = 200 \text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 7.8 \times 10^{-5} \text{ kg/cm}^3$ 、厚度  $t = 1 \text{ cm}$ ；空心元素(不顯示)楊氏模數分別為  $p = 1 : E = 2 \text{ GPa}$ ,  $p = 2 : E = 2 \times 10^{-2} \text{ GPa}$ ,  $p = 3 : E = 2 \times 10^{-4} \text{ GPa}$ ,  $q = 5 : E = 3.36 \times 10^{-1} \text{ GPa}$ ,  $q = 10 : E = 1.835 \times 10^{-1} \text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 7.8 \times 10^{-7} \text{ kg/cm}^3$ 、厚度  $t = 1 \text{ cm}$ 。此例題以平面應力分析，初始元素分布為全填滿實體材料，圖中黑色邊線為設計領域範圍，元素類型選用 ABAQUS 中的 CPS4 元素，將設計領域離散為相同之方形元素，元素尺寸為  $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$ 。BESO 參數設定：目標體積  $V^*$  為 15 % 的設計領域、敏感度因子篩選半徑  $r_{\min}^\alpha = 3 \text{ cm}$ 、體積改變比例  $ER = 2 \%$ 、最大添加體積比例  $AR_{\max} = 2 \%$ 、容許誤差  $\tau = 0.05 \%$ 、降低收斂標準迭代步數  $N_{\text{down}} = 300$  和停止迭代步數  $N_{\text{stop}} = 500$ 。

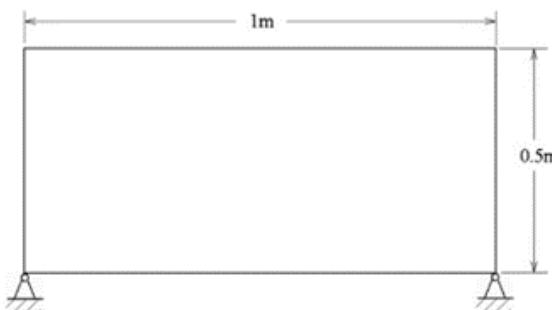


圖 3.9: [例題 3-2] 設計領域示意圖 (Huang and Xie (2011))

該例題旨在探討「模型加入自重載重在不同材料內插方法與不同懲罰係數之影響」，從表 3.3 中發現，使用幕次內插方法時，懲罰係數  $p$  越小時， $C$  也可以得到較小的值，也越容易收斂，但所得到的拓樸結果仍會產生離散結果，與第 3.6 節公式計算結果一致；使用替代內插方法時，不管是  $q = 5$  或  $q = 10$  都能夠在純自重加載下得到穩定的解，而使用  $q = 5$  雖然迭代步數  $iter$  比  $q = 10$  多，但其  $C$  值會更小，所得出之拓樸結果也與 Huang and Xie (2011) 所得出之拓樸結果相似。

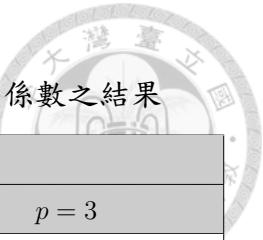


表 3.3: [例題 3-2] 自重載重在不同材料內插方法與不同懲罰係數之結果

	幕次內插方法		
懲罰係數 $p$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$
初始元素分布			
拓樸結果			
$C$ ( $\text{kN} \times \text{cm}$ )	$7.4946 \times 10^{-11}$	$5.6788 \times 10^{-10}$	$3.8149 \times 10^{-7}$
$iter$	140	303 ( $> N_{\text{down}}$ )	500 ( $= N_{\text{stop}}$ )
替代內插方法			
懲罰係數 $q$	$q = 5$		$q = 10$
初始元素分布			
拓樸結果			
$C$ ( $\text{kN} \times \text{cm}$ )	$4.2314 \times 10^{-11}$		$4.4074 \times 10^{-11}$
$iter$	145		103

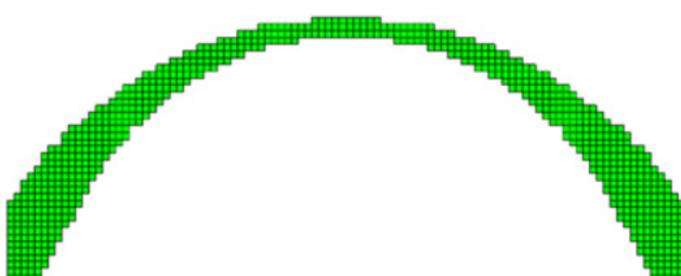
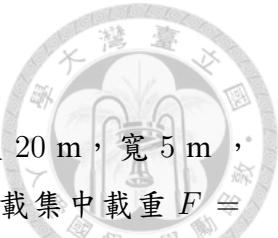


圖 3.10: [例題 3-2] 文獻拓樸結果 (Huang and Xie (2011))



### [例題 3-3]

此例題參考 Huang and Xie (2011) 的例題，其設計領域長 20 m，寬 5 m，左下角設置為鉸支承，右下角設置為滾支承，在上方中點加載集中載重  $F = 30607.2\text{ N}$ ，詳圖 3.11。材料內插方法：替代內插方法懲罰因子  $q = 5$ 。元素材料分別為實體材料與空心材料：實體材料（淺藍色元素）楊氏模數  $E = 200\text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 7.8 \times 10^{-5}\text{ kg/cm}^3$ 、厚度  $t = 100\text{ cm}$ ；空心元素（不顯示）楊氏模數  $E = 3.36 \times 10^{-1}\text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 7.8 \times 10^{-7}\text{ kg/cm}^3$ 、厚度  $t = 100\text{ cm}$ 。此例題以平面應力分析，初始元素分布為全填滿實體材料，圖中黑色邊線為設計領域範圍，元素類型選用 ABAQUS 中的 CPS4 元素，將設計領域離散為相同之方形元素，元素尺寸為  $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$  和  $5\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ ，即為設計領域總元素量  $N = 10000$  個與  $N = 40000$  個。BESO 參數設定：目標體積  $V^*$  為 40 % 的設計領域、敏感度因子篩選半徑  $r_{\min}^\alpha = 30\text{ cm}$ 、體積改變比例  $ER = 2\%$ 、最大添加體積比例  $AR_{\max} = 2\%$ 、容許誤差  $\tau = 0.05\%$ 、降低收斂標準迭代步數  $N_{\text{down}} = 300$  和停止迭代步數  $N_{\text{stop}} = 500$ 。

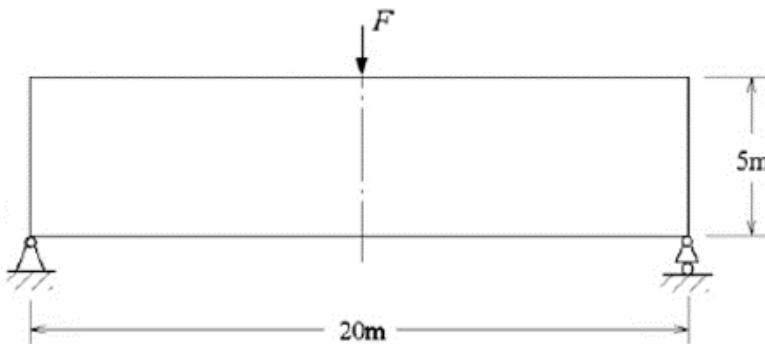


圖 3.11: [例題 3-3] 設計領域示意圖 (Huang and Xie (2011))

該例題旨在探討「分析計算時間改進」之結果比較，電腦硬體設備分別為 Intel(R) Core(TM) i7-10700 CPU @ 2.90GHz 與 NVIDIA GeForce GTX 1660 SUPER，將設計領域切分為  $N = 10000$  個與  $N = 40000$  個元素來分析平面上元素數量對時間和改進後的影響。從表 3.3 和表 3.4 中可知，相比於未改進前在  $N = 10000$  時篩選投影權重計算時長減少了  $\frac{(599.887 - 12.613)}{599.887} = 97.9\%$ ，整體分析時長減少了  $\frac{(1514.872 - 929.765)}{1514.872} = 38.63\%$ ；而在  $N = 40000$  時篩選投影權重計算時長則減少了  $\frac{(9519.649 - 77.306)}{9519.649} = 99.2\%$ ，整體分析時長減少了  $\frac{(11488.503 - 1889.652)}{11488.503} = 83.55\%$ ，分析結果表明進行改進後能有效的減少分析時間，且元素總量越多時對整體分析時間減少量越多。



表 3.4: [例題 3-3] 篩選投影權重計算時間比較 (設計領域總元素量  $N = 10000$  個)

	改進前	初步改進	主要改進
總計算迴圈數	$N^2 = 1000000000$	$\frac{N \times (N-1)}{2} = 49995000$	
初始元素分布			
拓樸結果			
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$1.0663 \times 10^{-2}$	$1.0663 \times 10^{-2}$	$1.0663 \times 10^{-2}$
$iter$	62	62	62
篩選投影權重 計算時長 (sec)	599.887	316.025	12.613
最佳化迭代 分析時長 (sec)	914.985	923.725	917.152
整體 分析時長 (sec)	1514.872	1239.75	929.765

表 3.5: [例題 3-3] 篩選投影權重計算時間比較 (設計領域總元素量  $N = 40000$  個)

	改進前	初步改進	主要改進
總計算迴圈數	$N^2 = 16000000000$	$\frac{N \times (N-1)}{2} = 799980000$	
初始元素分布			
拓樸結果			
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$1.0851 \times 10^{-2}$	$1.0851 \times 10^{-2}$	$1.0851 \times 10^{-2}$
$iter$	61	61	61
篩選投影權重 計算時長 (sec)	9519.649	5003.738	77.306
最佳化迭代 分析時長 (sec)	1968.854	2006.317	1812.346
整體 分析時長 (sec)	11488.503	7010.055	1889.652



### [例題 3-4]

此例題參考 Huang and Xie (2011) 的例題，其設計領域長 8 m，寬 8 m，高 5 m，下方四角設置為鉸支承，為節省計算時間模型以四分之一對稱進行分析，僅考量加載自重載重，無其他外力加載，詳圖 3.12。材料內插方法：替代內插方法懲罰因子  $q = 5$ 。元素材料分別為實體材料與空心材料：實體材料（淺藍色元素）楊氏模數  $E = 200 \text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 7.8 \times 10^{-5} \text{ kg/cm}^3$ ；空心元素（不顯示）楊氏模數  $E = 3.36 \times 10^{-1} \text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 7.8 \times 10^{-7} \text{ kg/cm}^3$ 。初始元素分布為全填滿實體材料，圖中黑色邊線為設計領域範圍，元素類型選用 ABAQUS 中的 C3D8 元素，將設計領域離散為相同之方形元素，元素尺寸為  $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ ，即為設計領域總元素量  $N = 80000$  個。BESO 參數設定：目標體積  $V^*$  為 5 % 的設計領域、敏感度因子篩選半徑  $r_{\min}^\alpha = 30 \text{ cm}$ 、體積改變比例  $ER = 4 \%$ 、最大添加體積比例  $AR_{\max} = 4 \%$ 、容許誤差  $\tau = 0.05 \%$ 、降低收斂標準迭代步數  $N_{\text{down}} = 300$  和停止迭代步數  $N_{\text{stop}} = 500$ 。

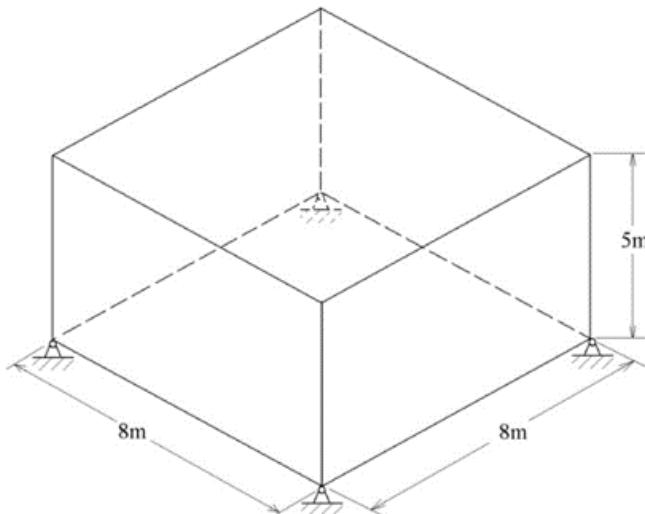


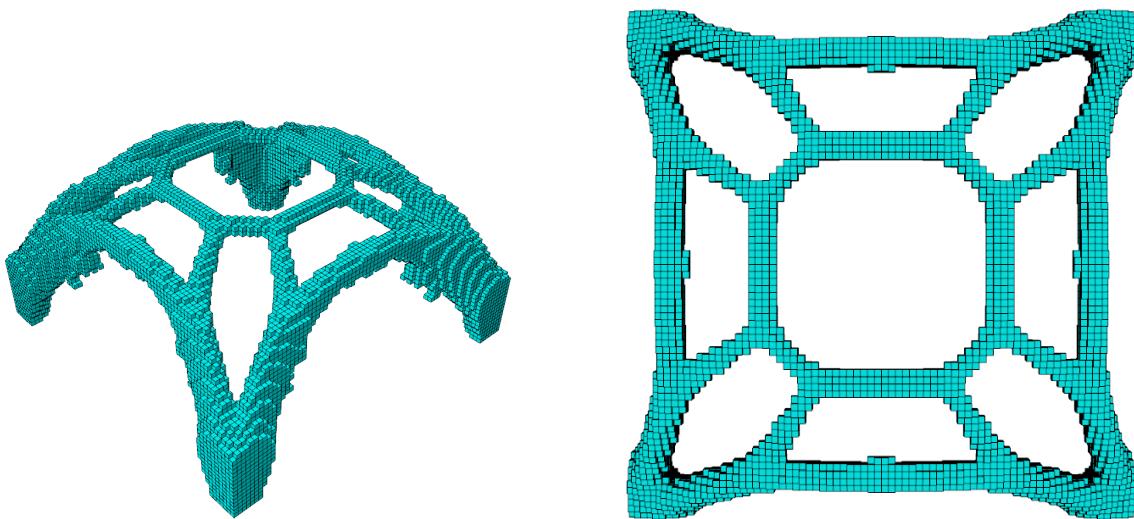
圖 3.12: [例題 3-4] 設計領域示意圖 (Huang and Xie (2011))

該例題延續上一例題之比較，但將問題轉為自重與 3D 問題，電腦硬體設備分別為 Intel(R) Core(TM) i7-10700 CPU @ 2.90GHz 與 NVIDIA GeForce GTX 1660 SUPER，同時將設計領域切分為  $N = 80000$  驗證其改進之泛用性，從表 3.6 可知，相比於未改進前，篩選投影權重計算時長減少了  $\frac{(37070.349 - 236.728)}{37070.349} = 99.4 \%$ ，整體分析時長減少了  $\frac{(44231.091 - 6695.559)}{44231.091} = 84.86 \%$ ，該案例延續上一例題同樣表明元素總量越多時該改進對整體分析時間效果越好，也表明其不管在 2D、3D 分析都能夠適用。



表 3.6: [例題 3-4] 篩選投影權重計算時間比較 (設計領域總元素量  $N = 80000$  個)

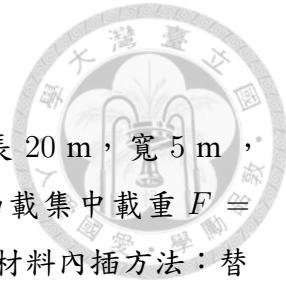
	改進前	初步改進	主要改進
總計算迴圈數	$N^2 = 6400000000$	$\frac{N \times (N-1)}{2} = 3199960000$	
初始元素分布			
拓樸結果			
$C$ (kN × cm)	$2.8033 \times 10^{-4}$	$2.8033 \times 10^{-4}$	$2.8033 \times 10^{-4}$
$iter$	99	99	99
篩選投影權重 計算時長 (sec)	37070.349	19477.935	236.728
最佳化迭代 分析時長 (sec)	7160.742	7041.562	6458.831
整體 分析時長 (sec)	44231.091	26519.497	6695.559



(a) 斜上俯視圖

(b) 上視圖

圖 3.13: [例題 3-4] 對稱後完整模型



### [例題 3-5]

此例題參考 Huang and Xie (2011) 的例題，其設計領域長 20 m，寬 5 m，左下角設置為鉸支承，右下角設置為滾支承，在上方中點加載集中載重  $F = 30607.2$  N, 15303.6 N, 3060.72 N, 0 N 與自重加載，詳圖 3.14。材料內插方法：替代內插方法懲罰因子  $q = 5$ 。元素材料分別為實體材料與空心材料：實體材料（淺藍色元素）楊氏模數  $E = 200$  GPa、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 7.8 \times 10^{-5}$  kg/cm<sup>3</sup>、厚度  $t = 100$  cm；空心元素（不顯示）楊氏模數  $E = 3.36 \times 10^{-1}$  GPa、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 7.8 \times 10^{-7}$  kg/cm<sup>3</sup>、厚度  $t = 100$  cm。此例題以平面應力分析，初始元素分布為全填滿實體材料，圖中黑色邊線為設計領域範圍，元素類型選用 ABAQUS 中的 CPS4 元素，將設計領域離散為相同之方形元素，元素尺寸為 10 cm × 10 cm。BESO 參數設定：目標體積  $V^*$  為 40 % 的設計領域、敏感度因子篩選半徑  $r_{\min}^\alpha = 30$  cm、體積改變比例  $ER = 2$  %、最大添加體積比例  $AR_{\max} = 2$  %、容許誤差  $\tau = 0.05$  %、降低收斂標準迭代步數  $N_{\text{down}} = 300$  和停止迭代步數  $N_{\text{stop}} = 500$ 。

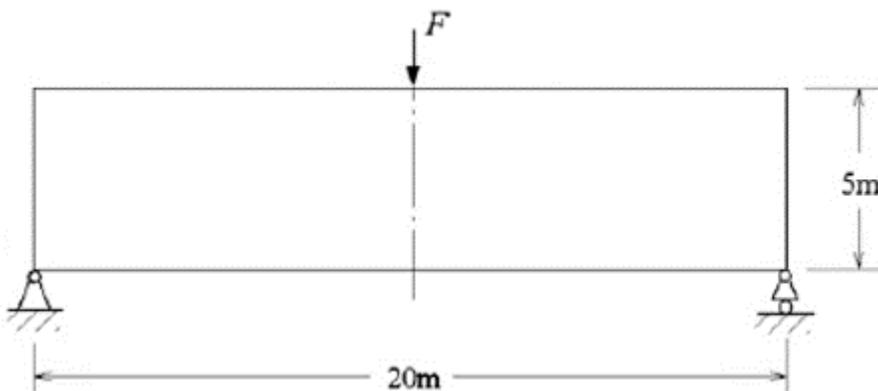
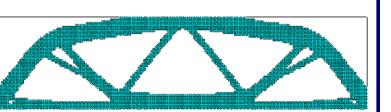
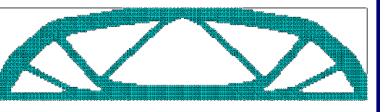
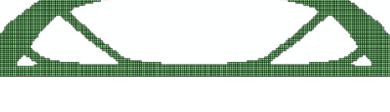


圖 3.14: [例題 3-5] 設計領域示意圖 (Huang and Xie (2011))

該例題旨在探討「加入不同外力與自重比例」之結果比較，並與 Huang and Xie (2011) 文獻結果進行比較，從表 3.7 可知當外力為自重之 10% 時，其拓樸結果會偏向由自重載重所控制，也就會與純自重結果相似；而外力為自重之 100% 時，則會偏向由外力加載控制，其結果就會與 [例題 3-3] 之外力拓樸結果相似，表明其外力與自重之比例會與拓樸結果有一定的相關性。而與 Huang and Xie (2011) 文獻結果不管是拓樸形狀上或是  $C$  值得比較也都十分相似。



表 3.7: [例題 3-5] 不同外力與自重比例之比較

載重狀況	Huang and Xie (2011) 拓樸結果	本研究拓樸結果
w/ 自重 $F = 30607.2 \text{ N}$ ( $F = 100\% \text{ 自重}$ )		 Process design Model: Model-1 Part: Part-1
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$2.82 \times 10^{-2}$	$2.8241 \times 10^{-2}$
$iter$	文獻中無提供	60
w/ 自重 $F = 15303.6 \text{ N}$ ( $F = 50\% \text{ 自重}$ )		 Process design Model: Model-1 Part: Part-1
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$1.31 \times 10^{-2}$	$1.3064 \times 10^{-2}$
$iter$	文獻中無提供	61
w/ 自重 $F = 3060.72 \text{ N}$ ( $F = 10\% \text{ 自重}$ )		 Process design Model: Model-1 Part: Part-1
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$4.8 \times 10^{-3}$	$4.896 \times 10^{-3}$
$iter$	文獻中無提供	68
w/ 自重 $F = 0 \text{ N}$ ( $F = 0\% \text{ 自重}$ )		 Process design Model: Model-1 Part: Part-1
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$3.4 \times 10^{-3}$	$3.445 \times 10^{-3}$
$iter$	文獻中無提供	68



### [例題 3-6]

此例題參考 Xu et al. (2020) 的例題，其設計領域為 L 型  $2\text{ m} \times 0.8\text{ m}$ ，上方面設置固接面，載重為在右上方點位施加  $16\text{ N}$  之集中力，詳圖 3.15。材料內插方法：替代內插方法懲罰因子  $q = 5$ 。元素材料分別為實體材料與空心材料：實體材料（淺藍色元素）楊氏模數  $E = 200\text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、厚度  $t = 1\text{ cm}$ ；空心元素（不顯示）楊氏模數  $E = 3.36 \times 10^{-1}\text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、厚度  $t = 1\text{ cm}$ 。此例題以平面應力分析，初始元素分布為全填滿實體材料，圖中黑色邊線為設計領域範圍，元素類型選用 ABAQUS 中的 CPS8 元素，將設計領域離散為相同之方形元素，元素尺寸為  $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$ 。BESO 參數設定：目標體積  $V^*$  為 50 % 的設計領域、敏感度因子篩選半徑  $r_{\min}^\alpha = 3, 6, 10\text{ cm}$ 、體積改變比例  $ER = 2\%$ 、最大添加體積比例  $AR_{\max} = 2\%$ 、容許誤差  $\tau = 0.05\%$ 、降低收斂標準迭代步數  $N_{\text{down}} = 300$  和停止迭代步數  $N_{\text{stop}} = 500$ 。

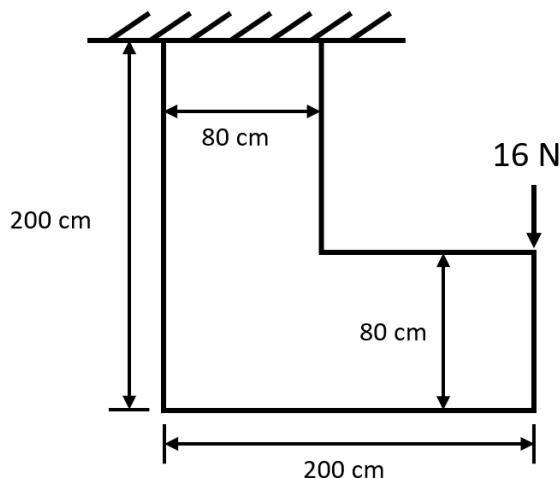


圖 3.15: [例題 3-7] 設計領域示意圖 (Xu et al. (2020))

透過設置與文獻中一樣的參數，並與文獻拓樸結果進行比較，用以確認模型之正確性，由表 3.8 所示， $r_{\min}^\alpha = 3\text{ cm}$  拓樸結果與文獻拓樸結果差異不大，但在該例題設置  $r_{\min}^\alpha = 3\text{ cm}$  時其桿件較細且桿件數過多，而透過放大敏感度因子篩選半徑  $r_{\min}^\alpha$  以得到桿件數較少同時較粗的結果，最後以  $r_{\min}^\alpha = 10\text{ cm}$  該結果進行後續第五章雙材料之結果分析，同時也能從該案例了解  $r_{\min}^\alpha$  與桿件粗細之關係。

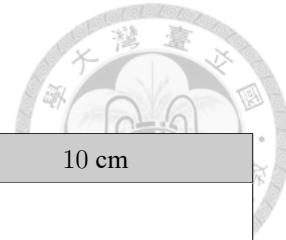
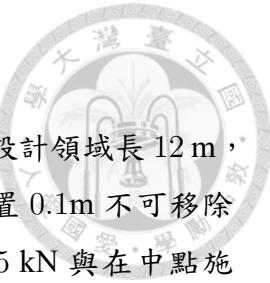


表 3.8: [例題 3-6] 不同  $r_{\min}^\alpha$  之拓樸結果

$r_{\min}^\alpha$	3 cm	6 cm	10 cm
初始元素分布			
拓樸結果			
$C$ (kN × cm)	$1.1249 \times 10^{-6}$	$1.1341 \times 10^{-6}$	$1.1475 \times 10^{-6}$
iter	51	72	69



圖 3.16: [例題 3-6]  $r_{\min}^\alpha = 3$  cm 之文獻拓樸結果 (Xu et al. (2020))

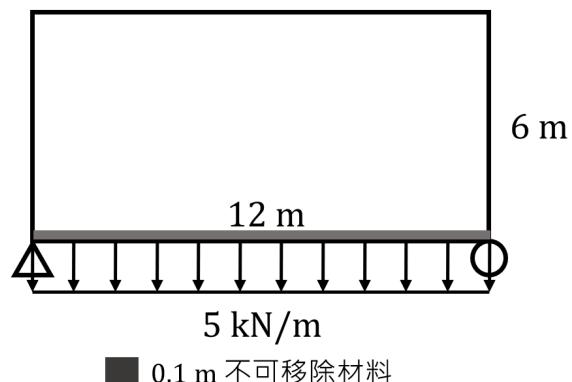


### [例題 3-7]

此例題參考 Wang and Wang (2004) 的例題與其變化例題，其設計領域長 12 m，寬 6 m，左下角設置為鉸支承，右下角設置為滾支承，下方設置 0.1m 不可移除材料作為橋面板，集中載重題目載重為在下方四分點位施加 15 kN 與在中點施加 30 kN 之集中力，詳圖 3.17 (a)；均佈載重題目載重為在下方施加 5 kN/m 均佈力，詳圖 3.17 (b)。材料內插方法：替代內插方法懲罰因子  $q = 5$ 。元素材料分別為實體材料與空心材料：實體材料（淺藍色元素）楊氏模數  $E = 200 \text{ GPa}$ 、泊松比  $\nu = 0.3$ 、厚度  $t = 1 \text{ cm}$ ；空心元素（不顯示）楊氏模數  $E = 3.36 \times 10^{-1} \text{ GPa}$ 、泊松比  $\nu = 0.3$ 、厚度  $t = 1 \text{ cm}$ 。此例題以平面應力分析，初始元素分布為全填滿實體材料，圖中黑色邊線為設計領域範圍，元素類型選用 ABAQUS 中的 CPS8 元素，將設計領域離散為相同之方形元素，元素尺寸為  $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ 。BESO 參數設定：目標體積  $V^*$  為 30 % 的設計領域、敏感度因子篩選半徑  $r_{\min}^\alpha = 40 \text{ cm}$ 、體積改變比例  $ER = 2 \%$ 、最大添加體積比例  $AR_{\max} = 8 \%$ 、容許誤差  $\tau = 0.05 \%$ 、降低收斂標準迭代步數  $N_{\text{down}} = 300$  和停止迭代步數  $N_{\text{stop}} = 500$ 。



(a) 集中載重加載 (Wang and Wang (2004))



(b) 均佈載重加載

圖 3.17: [例題 3-7] 設計領域示意圖



表 3.9: [例題 3-7] 不同外力之結果

外力狀況	集中載重	均佈載重
初始元素分布		
拓樸結果		
$C$ ( $\text{kN} \times \text{cm}$ )	$1.4868 \times 10^{-3}$	$9.7312 \times 10^{-4}$
$iter$	71	135

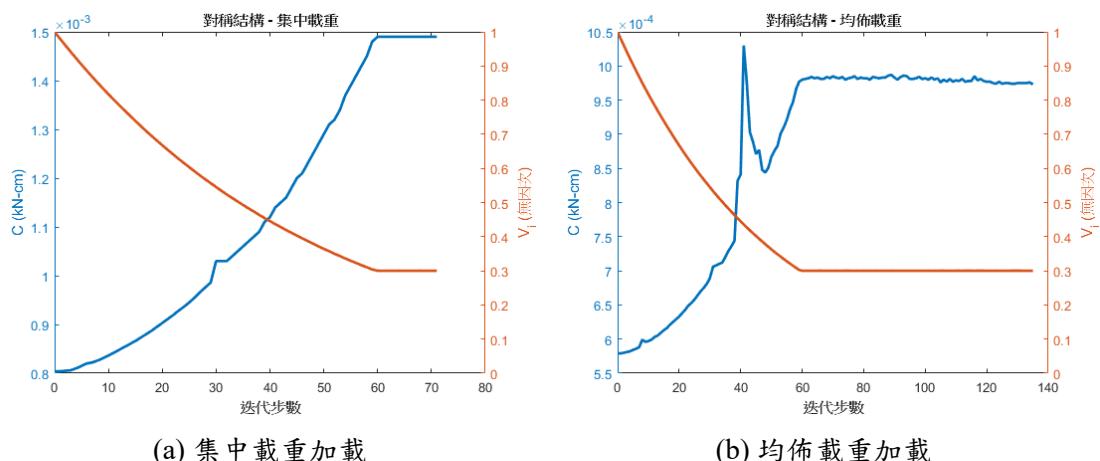
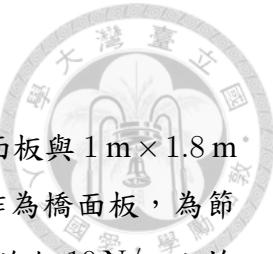


圖 3.18: [例題 3-7]  $C$  值與體積迭代過程圖



### [例題 3-8]

此例題為雙跨橋梁的例題，其設計領域為  $11.5\text{ m} \times 0.4\text{ m}$  橋面板與  $1\text{ m} \times 1.8\text{ m}$  橋墩，橋墩下方設置為固接面，上方設置  $0.1\text{ m}$  不可移除材料作為橋面板，為節省計算時間模型以二分之一對稱進行分析，載重為在橋面板上方施加  $10\text{ N/m}$  之均佈力與自重，外力為自重的  $3.7\%$ ，詳圖 3.19。材料內插方法：替代內插方法懲罰因子  $q = 5, 10$ 。元素材料分別為實體材料與空心材料：實體材料（淺藍色元素）楊氏模數  $E = 200\text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 7.8 \times 10^{-3}\text{ kg/cm}^3$ 、厚度  $t = 1\text{ cm}$ ；空心元素（不顯示）楊氏模數  $E = 3.36 \times 10^{-1}\text{ GPa}$  ( $q = 5$ )、 $1.835 \times 10^{-1}\text{ GPa}$  ( $q = 10$ )、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 7.8 \times 10^{-5}\text{ kg/cm}^3$ 、厚度  $t = 1\text{ cm}$ 。此例題以平面應力分析，初始元素分布為全填滿實體材料，圖中黑色邊線為設計領域範圍，元素類型選用 ABAQUS 中的 CPS8 元素，將設計領域離散為相同之方形元素，元素尺寸為  $2\text{ cm} \times 2\text{ cm}$ 。BESO 參數設定：目標體積  $V^*$  為  $40\%$  的設計領域、敏感度因子篩選半徑  $r_{\min}^\alpha = 5\text{ cm}$ 、體積改變比例  $ER = 4\%$ 、最大添加體積比例  $AR_{\max} = 4\%$ 、容許誤差  $\tau = 0.05\%, 0.01\%$ 、降低收斂標準迭代步數  $N_{\text{down}} = 300$  和停止迭代步數  $N_{\text{stop}} = 500$ 。

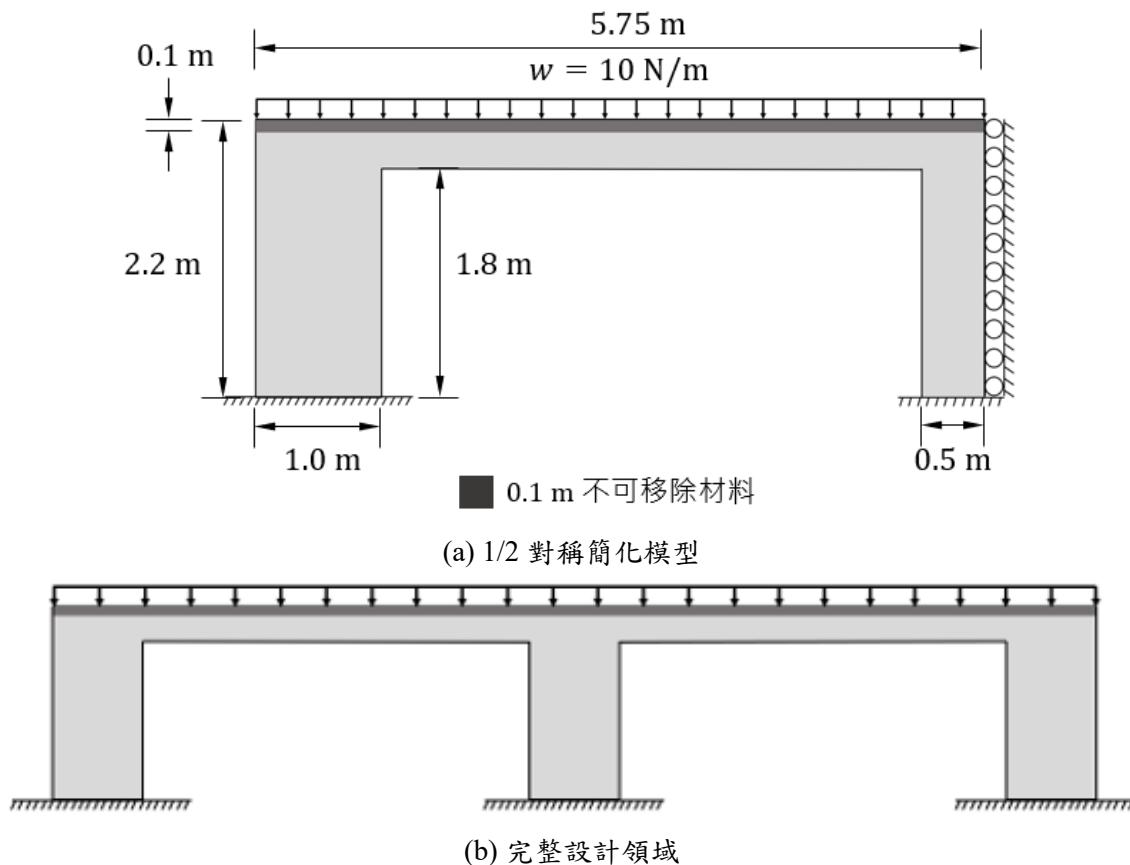


圖 3.19: [例題 3-8] 設計領域示意圖

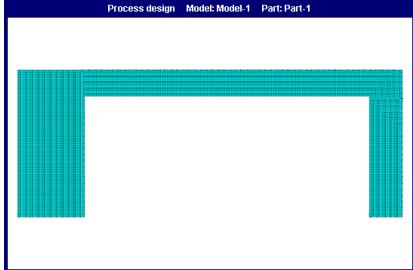
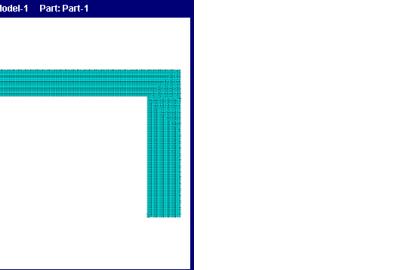
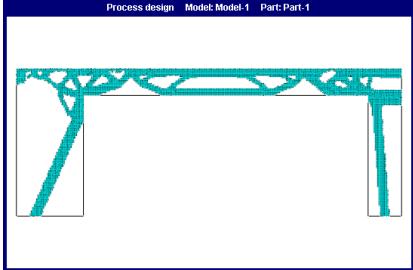
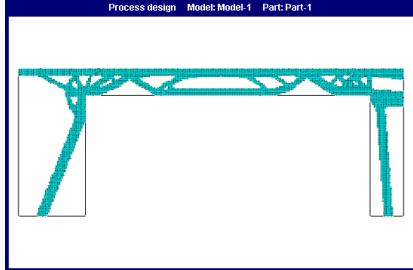
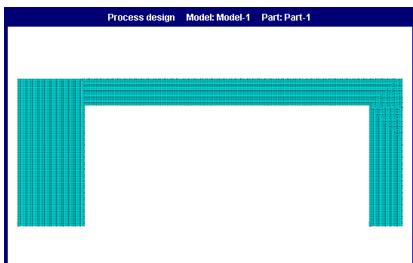
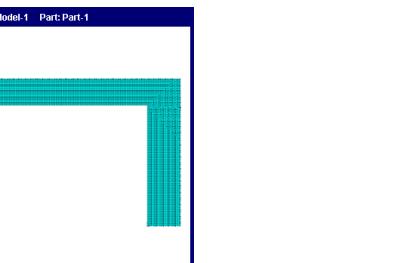
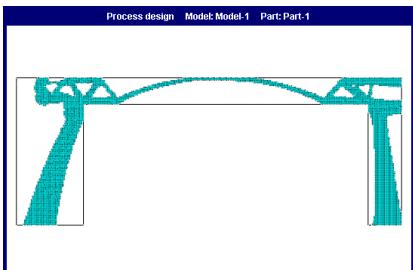
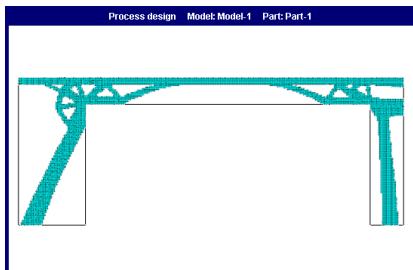


表 3.10: [例題 3-8] 雙跨橋在不同加載狀況與不同懲罰因子  $q$  之影響 (容許誤差  $\tau = 0.05\%$ )

w/o 自重, $w = 10 \text{ N/m}$		
懲罰係數 $q$	$q = 5$	$q = 10$
初始元素分布		
拓樸結果		
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$2.9187 \times 10^{-6}$	$2.8583 \times 10^{-6}$
$iter$	28	54
w/ 自重, $w = 10 \text{ N/m}$		
懲罰係數 $q$	$q = 5$	$q = 10$
初始元素分布		
拓樸結果		
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$1.811 \times 10^{-3}$	$6.7066 \times 10^{-4}$
$iter$	142	141



表 3.11: [例題 3-8] 雙跨橋設置不可設計元素作為橋面板在不同加載狀況之影響  
(容許誤差  $\tau = 0.01\%$ , 懲罰因子  $q = 10$ )

w/o 自重, $w = 10 \text{ N/m}$		
設置橋面板	無設置	設置上方 0.1 m 不可移除元素
初始元素分布		
拓樸結果		
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$2.8668 \times 10^{-6}$	$2.8583 \times 10^{-6}$
$iter$	$309 (> N_{down})$	54
w/ 自重, $w = 10 \text{ N/m}$		
設置橋面板	無設置	設置上方 0.1 m 不可移除元素
初始元素分布		
拓樸結果		
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$2.6344 \times 10^{-4}$	$6.7066 \times 10^{-4}$
$iter$	$357 (> N_{down})$	141

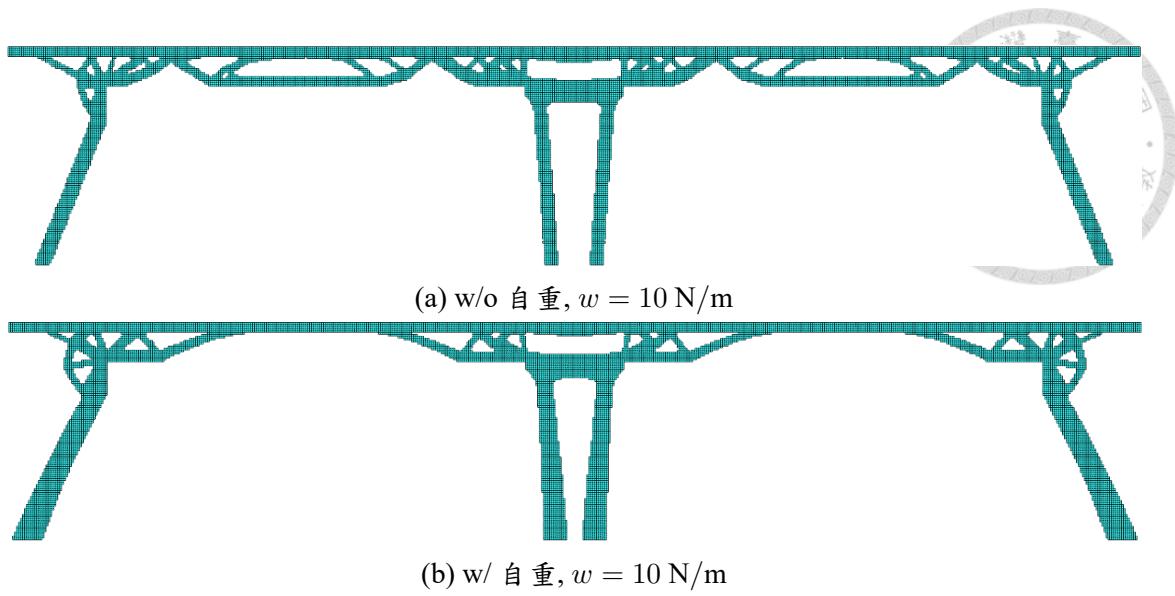


圖 3.20: [例題 3-8]  $q = 10$  對稱後拓樸結果

[例題 3-8] 旨在探討「加入自重前後比較」與「設置不可移除元素作為橋面板之影響」，由表 3.10 可知，使用  $q = 5$  對該雙跨橋案例分析時，發現同時加載均佈載重與自重的分析上，其結果因為兩種材料在  $q = 5$  時的敏感度因子十分接近，導致兩種材料會同時有大量元素交換而無法將團塊移除，而在  $q = 10$  時即可將該團塊移除進而得出較完整之拓樸結果，因為兩種材料在  $q = 10$  時敏感度因子會較為分開，而使元素交換為空心元素後不容易再次交換回實體元素。因此本研究主要仍會使用懲罰因子  $q = 5$ ，在無法移除特定團塊時才使用  $q = 10$ 。從表 3.11 可知，同時加載均佈載重與自重的分析上，因為自重加載的關係，若不設置不可移除材料則會將橋面板視為非必要元素而將其移除，而在加載均佈載重的分析上，在該案例上，也能因設置不可移除元素後而使拓樸結構更容易收斂，因此本研究後續章節案例分析會設置不可移除元素作為橋面板；最後，在圖 3.20 可以觀察加入自重後所得之區別，加入自重後在位移較大之區域元素較容易被移除，這是因為元素本身具有重量，進行敏感度因子公式計算時同時考量應變能與重量互制所產生的結果。



### [例題 3-9]

此例題為 3D 大跨距橋梁的例題，其設計領域分別為完整長 70 m，寬 16 m，高 20 m，詳圖 3.22 (a) 和在模型中央處加入 1 m 非設計領域之設計領域，詳圖 3.22 (b)，下方四角設置為鉸支承，上方設置 1.5 m 不可移除材料作為橋面板，為節省計算時間模型以二分之一對稱進行分析，詳圖 3.21，載重為在橋面板上方施加  $w = 3125 \text{ N/m}^2$  之均佈力，詳圖 3.19。材料內插方法：替代內插方法懲罰因子  $q = 5, 10$ 。元素材料分別為實體材料與空心材料：實體材料（淺藍色元素）楊氏模數  $E = 200 \text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 7.8 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ ；空心元素（不顯示）楊氏模數  $E = 3.36 \times 10^{-1} \text{ GPa}$  ( $q = 5$ )， $1.835 \times 10^{-1} \text{ GPa}$  ( $q = 10$ )、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 7.8 \times 10^{-5} \text{ kg/cm}^3$ 。初始元素分布為全填滿實體材料，圖中黑色邊線為設計領域範圍，元素類型選用 ABAQUS 中的 C3D8 元素，將設計領域離散為相同之方形元素，元素尺寸為  $50 \text{ cm} \times 50 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$ 。BESO 參數設定：目標體積  $V^*$  為 15 % 的設計領域、敏感度因子篩選半徑  $r_{\min}^\alpha = 150 \text{ cm}$ 、體積改變比例  $ER = 2 \%$ 、最大添加體積比例  $AR_{\max} = 4 \%$ 、容許誤差  $\tau = 0.01 \%$ 、降低收斂標準迭代步數  $N_{\text{down}} = 300$  和停止迭代步數  $N_{\text{stop}} = 500$ 。

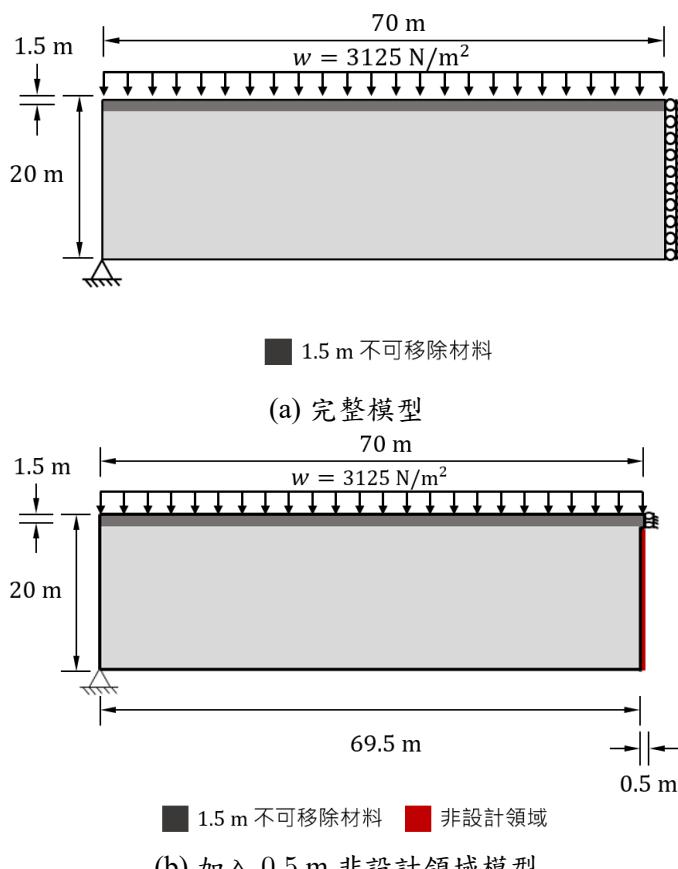


圖 3.21: [例題 3-9] 1/2 對稱簡化設計領域示意圖

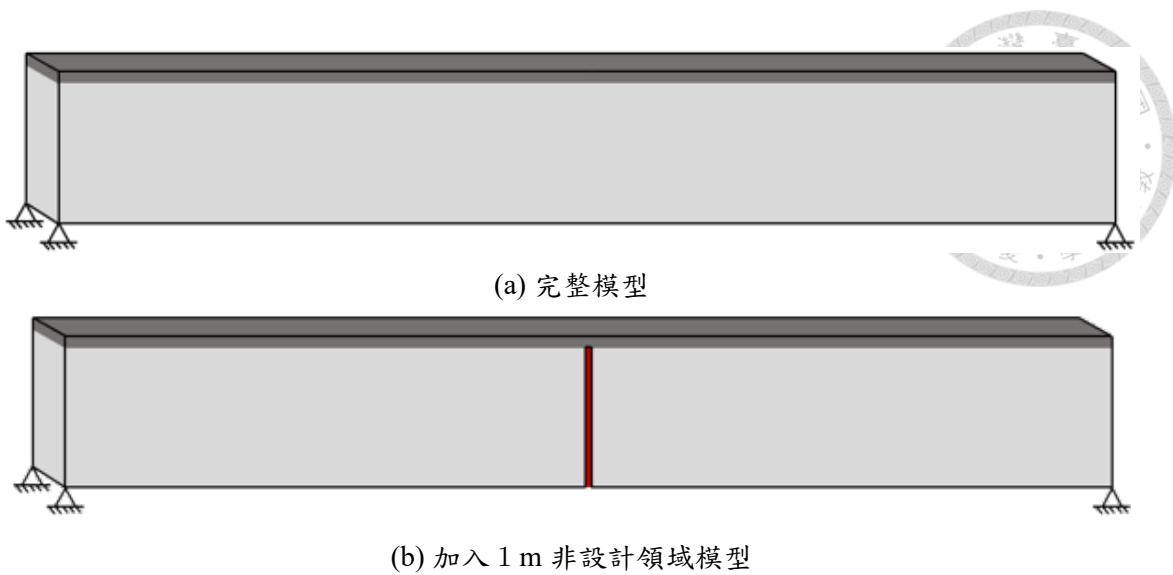


圖 3.22: [例題 3-9] 完整設計領域示意圖

**[例題 3-9]** 旨在探討「設計領域中加入不可設計區域」與「加入自重前後比較」與嘗試拓樸圖 3.23 中實際橋梁結構形式。表 3.12 與表 3.13 結果顯示加入自重前後，整體結構形式沒有過多變化，但桿件的深度變得更深，寬度則會變窄；而在加入不可設計領域後，會發現其拓樸結果會避開不可設計領域進行結構設計，也就能使用類似的設計領域拓樸出與圖 3.23 中類似的兩種上承式橋梁，所以在進行實際應用時，可以適時的加入不可設計領域用以避免部分空間無法設計桿件的問題。



(a) Rio Colorado Bridge (科羅拉多河橋)



(b) Almonte Railway Bridge (阿爾蒙特鐵路橋)

圖 3.23: [例題 3-9] 實際橋梁照片 (參考來源: HighestBridges.com)

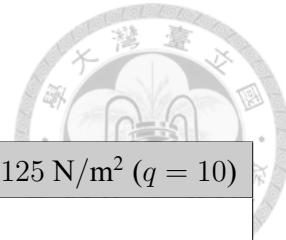


表 3.12: [例題 3-9] 完整模型拓樸結果

	w/o 自重, $w = 3125 \text{ N/m}^2 (q = 5)$	w/ 自重, $w = 3125 \text{ N/m}^2 (q = 10)$
初始元素分布		
拓樸結果		
其他視角		
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$6.3668 \times 10^1$	$3.6276 \times 10^5$
$iter$	171	225

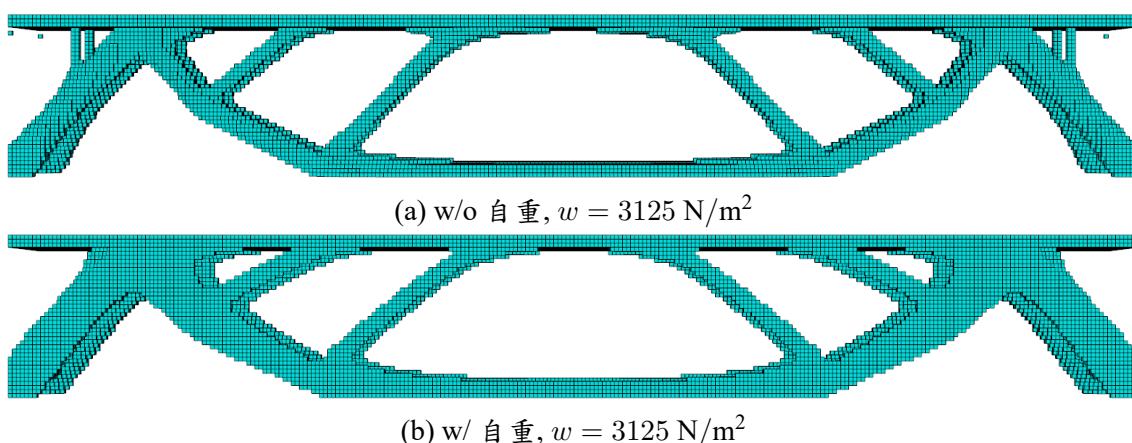


圖 3.24: [例題 3-9] 完整模型對稱後拓樸結果

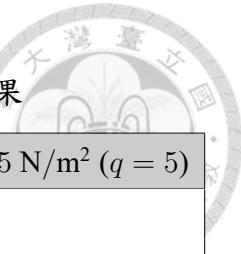
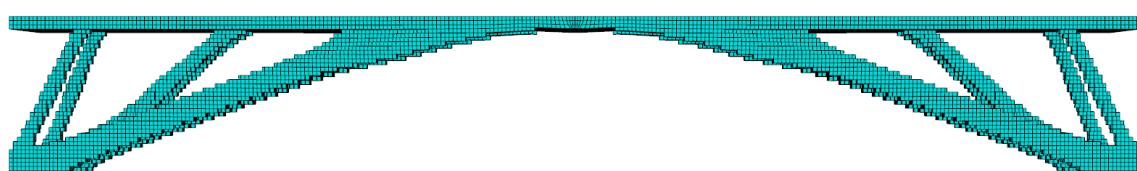
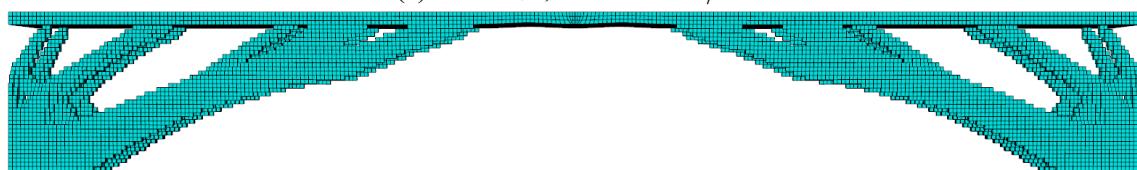


表 3.13: [例題 3-9] 加入 1 m 非設計領域模型拓樸結果

	w/o 自重, $w = 3125 \text{ N/m}^2 (q = 10)$	w/ 自重, $w = 3125 \text{ N/m}^2 (q = 5)$
初始元素分布		
拓樸結果		
其他視角		
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$1.0717 \times 10^2$	$3.9083 \times 10^5$
$iter$	177	179



(a) w/o 自重,  $w = 3125 \text{ N/m}^2$



(b) w/ 自重,  $w = 3125 \text{ N/m}^2$

圖 3.25: [例題 3-9] 加入 1 m 非設計領域模型對稱後拓樸結果



### 3.10 小結

本章詳細介紹單一材料雙向結構最佳化各部分參數設置意義與計算公式，再介紹改進理論與介紹材料內插方法之改動，最後以多種案例分析進行探討驗證。從案例分別驗證最大添加體積比例  $AR_{max}$  能夠作為演算法之移動限制，能夠穩定拓樸結果的過程，但又不會每步迭代都加以限制；對於篩選投影權重計算時長的改進是十分有效，也不會影響原本應有的結果，同時進行主要改進後對於越多的元素量的模型對於整體分析時長的折減也越多；最後則是對不同外力與自重比例、非對稱設計領域、雙跨橋、3D 大跨距設計領域等各種案例進行分析討論。





## 第四章 抗拉壓雙材料之改良式雙向結構最佳化演進法

### 4.1 前言

本研究團隊過去對雙材料通常都會使用彈性模數  $E$  與固定材料分配比例來進行兩種實體材料的分配，本章參考 Li and Xie (2021a) 將實體元素以應力不變量  $I_1$  來分配為抗拉材料與抗壓材料，土木工程領域內這兩種材料多數會使用鋼材材料與混凝土材料，也會是本章節主要使用之材料參數，但部分案例仍有些許改變。本章延續第三章的方法並結合 Li and Xie (2021a) 分配實體材料的方式，即可得到抗拉壓雙材料改良式雙向結構最佳化演進法，本章會詳細說明方法使用上的假設（於第 4.2 節介紹）、對於應力不變量  $I_1$  的後處理（於第 4.3 節介紹）以及針對敏感度因子公式上必要之修正（於第 4.4 節介紹），最後則是會進行案例分析。



## 4.2 方法基本假設

Li and Xie (2021a) 中會使用在第二章第 2.4.3 節中所提過的應力移除原則，主要會透過元素利用率  $\eta_e = \frac{\sigma_{VM}^e}{\sigma_{allow}}$  來排序元素優劣，但在考量兩種實體元素時，其方法所使用兩種材料所各自使用的容許應力值  $\sigma_{allow}$  間的比值必須與彈性模數  $E$  間的比值相同，才能使兩種材料間的元素利用率  $\eta_e$  可以在同一個量級下進行比較，這樣在材料設定上會受到一定的限制，而本研究透過修正後的敏感度因子計算式，省去容許應力值  $\sigma_{allow}$  的設定。

對於實體材料，兩種材料的分配會依照應力不變量  $I_1$  來進行判定，應力不變量計算方式如式 (4.1)，其中  $\sigma_1$  為最大主應力、 $\sigma_2$  為第二主應力和  $\sigma_3$  為最小主應力，根據式 (4.2) 所示，當  $I_1 \geq 0$  時，即認為該元素為受拉狀態，而  $I_1 < 0$  時，則認為該元素為受壓狀態，這樣就能透過該判斷將元素匹配上各自對應的抵抗材料，如鋼材與混凝土。

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} \text{抗拉材料 (鋼材),} & \text{when } I_1 \geq 0 \\ \text{抗壓材料 (混凝土),} & \text{when } I_1 < 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

根據上述材料分配的方式，該方法需要進行三點假設：

1. 選用的抗拉與抗壓的兩種材料皆要屬於等向性 (isotropic) 材料。
2. 選用的兩種材料必須分別適用於抵抗拉力或壓力，例如鋼材與混凝土。
3. 兩種材料介面處具有良好接合，能有效地傳遞兩種不同材料間的力量。



## 4.3 應力不變量篩選投影

在第二章第 2.4.6 節中有提過篩選投影會對於敏感度因子  $\alpha_e$  進行平滑化來避免棋盤化問題與網格依賴性問題，而對於應力不變量  $I_1$  同樣也需要透過篩選投影進行平滑化，以得到過濾應力不變量  $\hat{I}_1^i$ ，主要作用則是用來避免材料介面連接問題，針對元素  $i$  之過濾元素應力不變量  $\hat{I}_1^i$  計算方式如下式 (4.3) 以及式 (4.4)：

$$\hat{I}_1^i = \frac{\sum_{j=1}^M w(r_{ij}) I_1^j}{\sum_{j=1}^M w(r_{ij})} = \sum_{j=1}^M \left( \frac{w(r_{ij})}{\sum_{j=1}^M w(r_{ij})} I_1^j \right) = \sum_{j=1}^M \zeta_j I_1^j \quad (4.3)$$

$$w(r_{ij}) = \begin{cases} r_{\min}^s - r_{ij}, & r_{ij} < r_{\min}^s \\ 0, & r_{ij} \geq r_{\min}^s \end{cases} \quad (4.4)$$

式中  $\hat{I}_1^i$  為元素  $i$  之過濾元素應力不變量，代表以元素  $i$  為中心，篩選半徑  $r_{\min}^s$  範圍內之元素  $j$  乘上其對應權重係數 (Weight factor)  $\zeta_j$  之總和值。

## 4.4 敏感度因子

第二章第 2.4.5 節曾介紹過，會透過敏感度因子使實體元素與空心元素在同一個基準下進行比較，而不會因為變為空心元素後因應變能下降而無法與實體元素相比較導致無法回填，但在使用抗拉壓雙材料時由於兩種實體材料的彈性模數  $E$  與密度  $\rho$  皆不同，所以需要分別針對這兩種參數進行敏感度因子公式的修正。

本研究假設抗拉材料的彈性模數  $E$  與密度  $\rho$  都比抗壓材料大，而因為實體元素設計變數  $x_e$  皆為 1，所以需要依據對不同實體材料使用進行不同的調整，抗拉材料的元素結構順從度乘上  $E_r$ ，如式 (4.5)，而密度參數的部分則是要帶入  $\rho_t^0$ ，而對於抗壓元素和空心元素在密度參數則是要帶入  $\rho_c^0/x_r$ 。

$$E_r = \frac{E_t}{E_c} \quad (4.5)$$

$$x_r = \frac{1+q}{E_r + q} \quad (4.6)$$

抗拉材料的元素應變能乘上  $E_r$  是因為兩種材料在相同載重情況下元素應變能比會是彈性模數比的反比，這樣透過對於抗拉材料的元素應變能乘上  $E_r$  就能夠使兩種實體材料在同一標準上比較。材料密度在單一材料時會透過在第二章第 2.4.4 節中有提過材料密度與設計變數之間的關係式對實體與空心材料進行設定，單一材料時空心材料所使用之密度參數(敏感度因子公式中所使用之參數)為實體材料密度是因為對設計變數之偏微分的結果，也可將其看為將空心材料密度  $\rho_{\min}$  除以設計變數  $x_{\min}$ ，運用相同概念，只要透過式 (2.10) 中彈性模數間的關係式即可得到抗拉與抗壓材料之間的設計變數  $x_r$ ，就可透過  $x_r$  來放大彈性模數較小的實體材料(即抗壓材料)之密度作為參數使用，即可得到各自使用之敏感度因子如式 (4.7) 和式 (4.8) 表示。

抗拉材料：

$$\alpha_e = -\frac{\rho_t^0 g}{1+q} \bar{\mathbf{f}}^T \mathbf{u}_e + \frac{C_e}{2x_e[1+q(1-x_e)]V_e} \times E_r \quad (4.7)$$

抗壓材料和空心材料：

$$\alpha_e = -\frac{\rho_c^0 g}{1+q} \bar{\mathbf{f}}^T \mathbf{u}_e + \frac{C_e}{2x_e[1+q(1-x_e)]V_e} \quad (4.8)$$

式中， $C_e$ 、 $x_e$ 、 $q$ 、 $V_e$  分別為元素之結構順從度(即兩倍應變能)、設計變數、懲罰因子、元素體積； $\rho_t^0$  及  $\rho_c^0$  為抗拉材料密度及抗壓材料密度； $E_r$  及  $x_r$  實體材料彈性模數比及實體材料間設計變數，該方法所使用之設計變數  $x_e$  在抗拉與抗壓材料都為 1，而在空心元素則為 0.01。空心材料之材料設定會根據設計變數  $x_e = 0.01$  與式 (2.10) 與將抗壓材料當作實體材料來進行計算並設定。



## 4.5 下一步迭代目標體積

在第三章第 3.3 節中說明單一材料下一步迭代目標體積的計算方式與使用原因，由於該方法會依應力不變量  $I_1$  來分配兩種材料，同樣只需對實體材料計算下一步迭代目標體積，抗拉壓雙材料下一步迭代目標體積計算方式如式 (4.9) 表示

$$V_{i+1} = \begin{cases} \max(V_i \times (1 - ER), V^*), & \text{when } V_i \geq V^* \\ V_{\text{total}} - \max((V_{\text{total}} - V_i) \times (1 - ER), V_{\text{total}} - V^*), & \text{when } V_i < V^* \end{cases} \quad (4.9)$$

式中， $V_{i+1}$ 、 $V_i$  為下一步迭代步數實體目標體積、當前迭代步數實體體積， $V^*$ 、 $V_{\text{total}}$  為目標體積、設計領域總體積(包含空心元素體積)及  $ER$  為體積改變比例，本研究體積改變比例  $ER$  一般會設定為 0.02 或 0.04。

## 4.6 最大添加體積比例

第三章第 3.4 節中說明單一材料最大添加體積比例的計算方式與使用原因，只需要確定空心元素轉換成實體元素的體積是否超過最大添加體積  $AV_{\max}$ ，最大添加體積  $AV_{\max}$  如式 (4.10) 所示，抗拉壓雙材料在執行完最大添加體積比例仍需依據應力不變量  $I_1$  重新將實體材料分配為抗拉與抗壓材料，執行流程如圖 4.1。

$$AV_{\max} = \begin{cases} AR_{\max} \times V_i, & \text{when } V_i \geq V^* \\ AR_{\max} \times (|V_i - V^*| + V^*), & \text{when } V_i < V^* \end{cases} \quad (4.10)$$

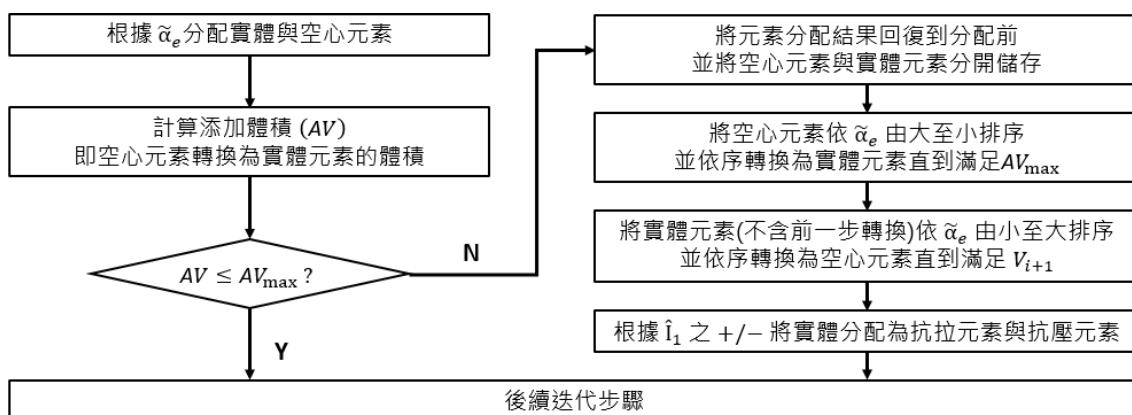


圖 4.1: 抗拉壓雙材料最大添加體積比例執行流程圖



## 4.7 收斂條件

第三章第 3.5 節中有說明單一材料收斂條件的計算方式與使用原因，而抗拉壓雙材料收斂條件的計算方式與其相同，一樣會分為三個階段進行收斂，如下表示：

$$\text{when } i \leq N_{\text{down}}, \begin{cases} \frac{\left| \sum_{j=1}^5 (C_{i-j+1} - C_{i-5-j+1}) \right|}{\sum_{j=1}^5 C_{i-j+1}} \leq \tau \\ C_i \leq \min(C_{i-1}, C_{i-2}, C_{i-3}) \\ |V_i - V^*| \leq 5 \times V_{\text{average}} \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\text{when } N_{\text{stop}} > i > N_{\text{down}}, \begin{cases} \frac{\left| \sum_{j=1}^5 (C_{i-j+1} - C_{i-5-j+1}) \right|}{\sum_{j=1}^5 C_{i-j+1}} \leq 10 \tau \\ C_i \leq \min(C_{i-1}, C_{i-2}, C_{i-3}) \\ |V_i - V^*| \leq 5 \times V_{\text{average}} \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\text{when } i = N_{\text{stop}}, \text{ 停止迭代} \quad (4.13)$$

式中， $i$  為迭代步數， $C_i$  為第  $i$  步之結構順從度， $\tau$  為容許誤差，本研究  $\tau$  會使用 0.05 % 或 0.01 % 作為收斂之誤差， $N_{\text{down}}$  和  $N_{\text{stop}}$  分別是降低收斂標準迭代步數和停止迭代步數， $V_i$ 、 $V^*$  和  $V_{\text{average}}$  分別為當前迭代步數  $i$  之實體體積、目標體積和平均元素體積。

## 4.8 抗拉壓雙材料雙向結構最佳化演進法流程圖

綜合前述材料分配方法，可以將抗拉壓雙材料雙向結構最佳化演進法(BESO)流程整理，並可以將其粗略的分為主要流程與元素交換流程：主要流程為會進行有限元素分析並輸出所需資料，並會等待元素交換流程構建新設計後判斷是否達到目標體積與是否達成收斂條件；元素交換流程會進行敏感度因子 $\alpha_e$ 與應力不變量 $I_1$ 的後處理與材料重新分配的流程，其整體流程圖如圖 4.2 所示。

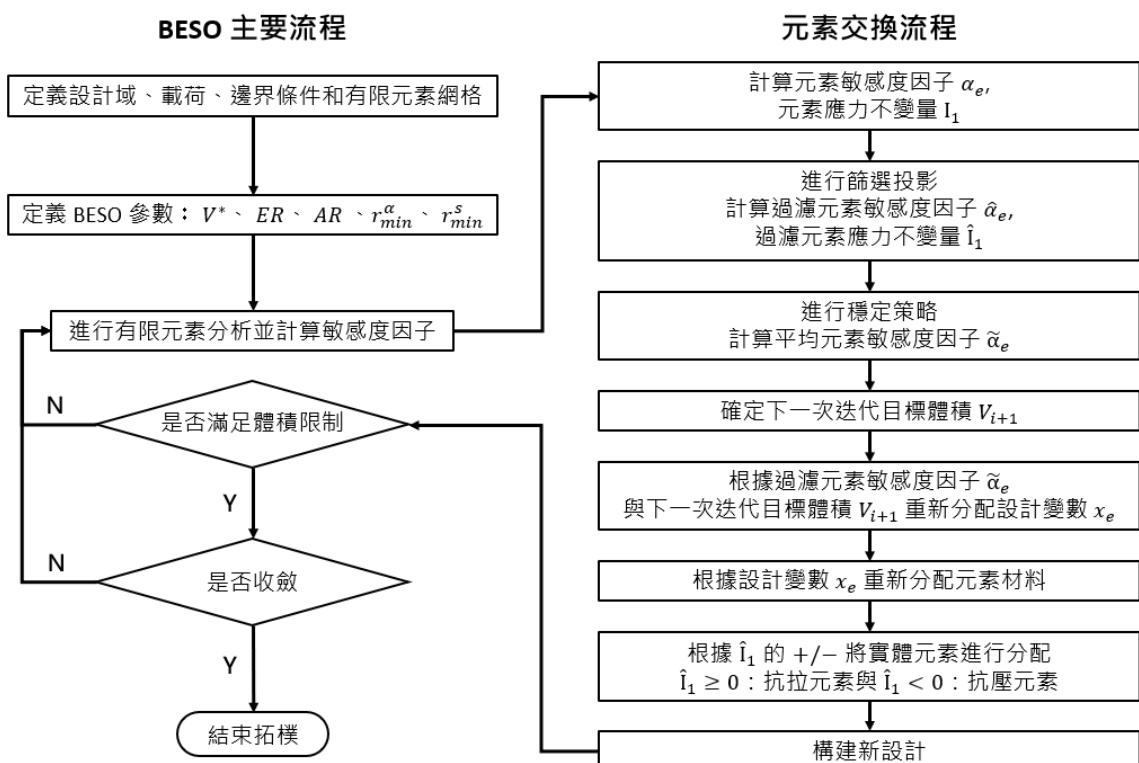


圖 4.2: 抗拉壓雙材料雙向結構最佳化演進法(BESO)流程圖



## 4.9 案例分析

### [例題 4-1]

此例題配置與 [例題 3-5] 相同，詳圖 4.3，將其延伸至抗拉壓雙材料。材料內插方法：替代內插方法懲罰因子  $q = 5$ 。元素材料分別為實體材料與空心材料：實體抗拉材料（藍色元素）楊氏模數  $E = 200 \text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 7.8 \times 10^{-5} \text{ kg/cm}^3$ 、厚度  $t = 100 \text{ cm}$ ；實體抗壓材料（綠色元素）楊氏模數  $E = 20 \text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 2.4 \times 10^{-5} \text{ kg/cm}^3$ 、厚度  $t = 100 \text{ cm}$ ；空心元素（不顯示）楊氏模數  $E = 3.36 \times 10^{-2} \text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 2.4 \times 10^{-7} \text{ kg/cm}^3$ 、厚度  $t = 100 \text{ cm}$ 。此例題以平面應力分析，初始元素分布為全填滿實體抗拉材料，圖中黑色邊線為設計領域範圍，元素類型選用 ABAQUS 中的 CPS4 元素，將設計領域離散為相同之方形元素，元素尺寸為  $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ 。BESO 參數設定：目標體積  $V^*$  為 40 % 的設計領域、敏感度因子篩選半徑  $r_{\min}^\alpha = 30 \text{ cm}$ 、應力不變量篩選半徑  $r_{\min}^s = 50 \text{ cm}$ 、體積改變比例  $ER = 2 \%$ 、最大添加體積比例  $AR_{\max} = 2 \%$ 、容許誤差  $\tau = 0.05 \%$ 、降低收斂標準迭代步數  $N_{\text{down}} = 300$  和停止迭代步數  $N_{\text{stop}} = 500$ 。

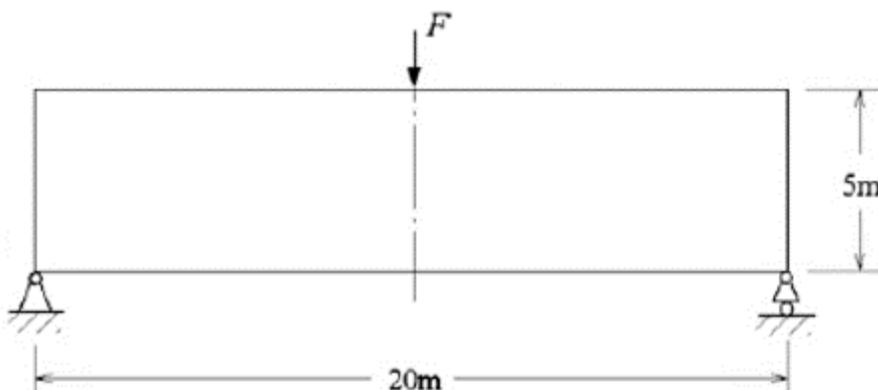


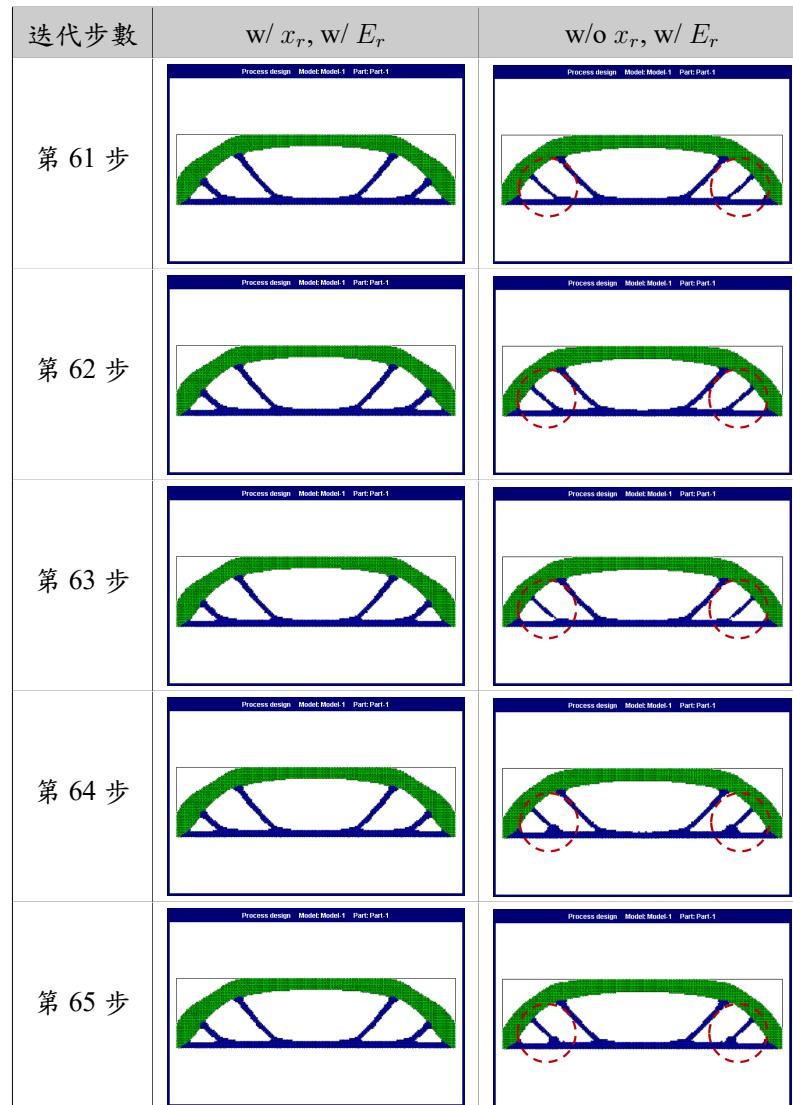
圖 4.3: [例題 4-1] 設計領域示意圖 (Huang and Xie (2011))



表 4.1: [例題 4-1]「w/ 自重,  $F = 0 \text{ N}$ 」案例  $E_r$  與  $x_r$  之結果

	w/ $x_r$ , w/ $E_r$	w/ $x_r$ , w/o $E_r$	w/o $x_r$ , w/ $E_r$
初始元素分布			
拓樸結果			
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$7.204 \times 10^{-3}$	$7.056 \times 10^{-3}$	$7.01 \times 10^{-3}$
$iter$	130	200	100
$V^t, V^c$	14.18 %, 25.84 %	10.84 %, 29.18 %	13.62 %, 26.38 %

表 4.2: [例題 4-1]「w/ 自重,  $F = 0 \text{ N}$ 」案例  $x_r$  之第 61 步至第 65 步拓樸過程



從表 4.1 與表 4.2 中可以分別看出，將敏感步因子公式加入  $E_r$  進行修正，能夠穩定移除實體元素而不會如同「w/  $x_r$ , w/o  $E_r$ 」拓樸一樣，更容易優先移除彈性模數較高之抗拉實體材料，最終形成較為零散之結構形式。而在「w/o  $x_r$ , w/  $E_r$ 」案例中，雖然表 4.1 中顯示該案例之拓樸結果穩定且  $C$  值為最小值，但從表 4.2 可以發現，若是不加入  $x_r$  之考量，在拓樸過程會相對不穩定，也可能因此容易出現離散結果，以上結果皆與第 4.4 節中公式描述皆一致，本研究對於後續分析會將敏感度因子公式加入  $E_r$  與  $x_r$  的修正。

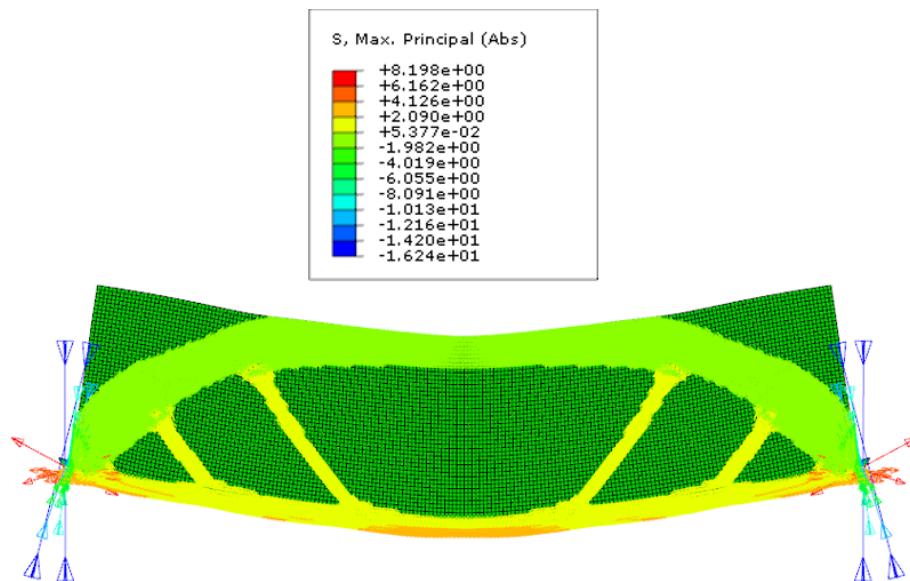
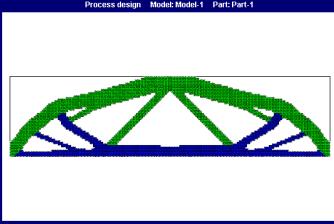
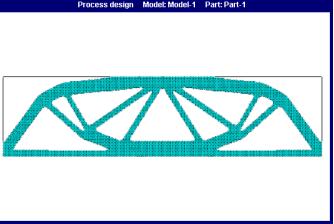
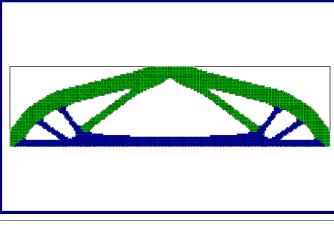
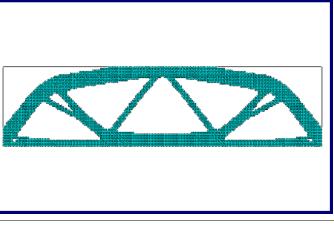
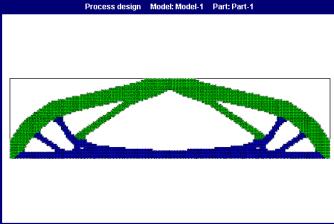
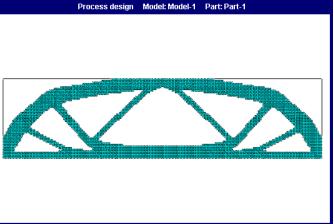
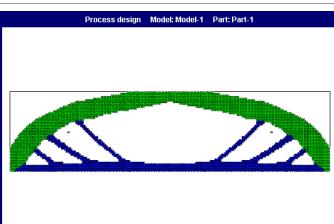
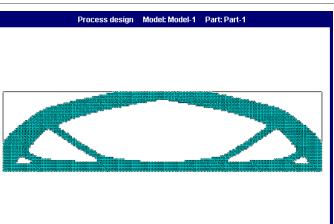


圖 4.4: [例題 4-1]「w/ 自重,  $F = 0 \text{ N}$ 」案例主應力絕對值分布狀況

從圖 4.4 ABAQUS 中所分析之絕對值最大主應力分布狀況，偏向紅色之分布主應力為正值（即為受拉），而偏向藍色則為負值（即為受壓），而從上圖所有元素之分布狀況，本案例拓樸結果如表 4.1 所示之拓樸結果，最後設定為抗拉元素分布位置都與黃色與橘色等偏向紅色之位置重疊；而抗壓元素分布位置也與綠色等偏向藍色之位置重疊，而空心材料元素的部分則不會受到過多的力量傳遞，透過該案例也能印證該抗拉壓雙材料分配是有效且能夠自主分配實體材料上的使用。

將不同外力與自重的混合案例進行抗拉壓雙材料之分析，分析結果如下表 4.3，由於無法事先了解抗拉材料與抗壓材料之比例，所以無法在題目設定事先設定外力為自重多少比例，但在不同外力與自重混合的題目依然顯示與單一材料一樣的趨勢，即外力或自重會主控拓樸結構的主要形狀，使其更偏向純自重結果或是純外力加載結果。

表 4.3: [例題 4-1] 不同外力與自重混合案例之比較

載重狀況	抗拉壓雙材料拓樸結果	單一材料拓樸結果
w/o 自重 $F = 30607.2 \text{ N}$		
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$6.2894 \times 10^{-2}$	$1.0851 \times 10^{-2}$
$iter$	66	61
$V^t, V^c$	14.46 %, 25.54 %	無
w/ 自重 $F = 30607.2 \text{ N}$		
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$1.1265 \times 10^{-1}$	$2.8241 \times 10^{-2}$
$iter$	58	60
$V^t, V^c$	14.04 %, 25.98 %	無
w/ 自重 $F = 15303.6 \text{ N}$		
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$4.4308 \times 10^{-2}$	$1.3064 \times 10^{-2}$
$iter$	61	61
$V^t, V^c$	14.56 %, 25.46 %	無
w/ 自重 $F = 3060.72 \text{ N}$		
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$1.222 \times 10^{-2}$	$4.896 \times 10^{-3}$
$iter$	48	68
$V^t, V^c$	14.78 %, 25.22 %	無



### [例題 4-2]

此例題配置與 [例題 3-7] 中集中載重題目相同，詳圖 4.5，並將其延伸至抗拉壓雙材料。材料內插方法：替代內插方法懲罰因子  $q = 5$ 。元素材料分別為實體材料與空心材料：實體抗拉材料（藍色元素）楊氏模數  $E = 200 \text{ GPa}$ 、泊松比  $\nu = 0.3$ 、厚度  $t = 1 \text{ cm}$ ；實體抗壓材料（綠色元素）楊氏模數  $E = 20 \text{ GPa}$ 、泊松比  $\nu = 0.3$ 、厚度  $t = 1 \text{ cm}$ ；空心元素（不顯示）楊氏模數  $E = 3.36 \times 10^{-2} \text{ GPa}$ 、泊松比  $\nu = 0.3$ 、厚度  $t = 1 \text{ cm}$ 。此例題以平面應力分析，初始元素分布為全填滿實體抗拉材料，圖中黑色邊線為設計領域範圍，元素類型選用 ABAQUS 中的 CPS8 元素，將設計領域離散為相同之方形元素，元素尺寸為  $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ 。BESO 參數設定：目標體積  $V^*$  為 30 % 的設計領域、敏感度因子篩選半徑  $r_{\min}^\alpha = 40 \text{ cm}$ 、應力不變量篩選半徑  $r_{\min}^s = 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 \text{ cm}$ 、體積改變比例  $ER = 2 \%$ 、最大添加體積比例  $AR_{\max} = 8 \%$ 、容許誤差  $\tau = 0.05 \%$ 、降低收斂標準迭代步數  $N_{\text{down}} = 300$  和停止迭代步數  $N_{\text{stop}} = 500$ 。

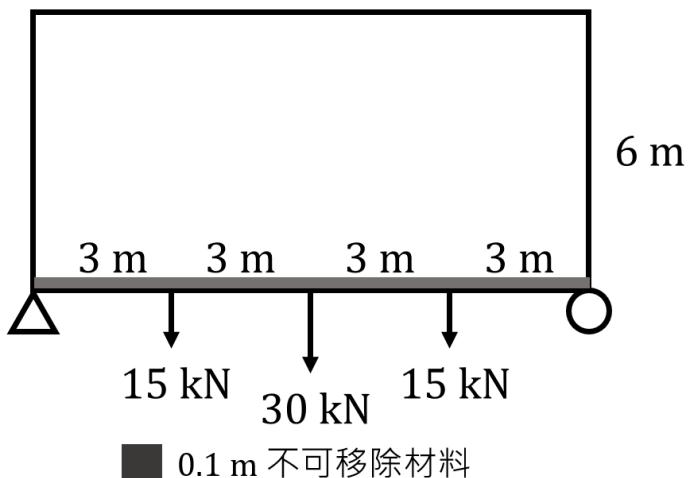


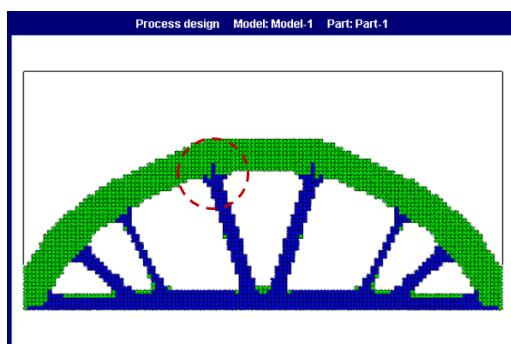
圖 4.5: [例題 4-2] 設計領域示意圖 (Wang and Wang (2004))

[例題 4-2] 旨在探討「設置應力不變量篩選半徑  $r_{\min}^s$  之影響」與「 $r_{\min}^\alpha$  與  $r_{\min}^s$  不同倍率之結果」，透過表 4.4 可以了解是否設置應力不變量篩選半徑對於模型之影響，而透過設置不同參數的  $r_{\min}^s$  了解該參數設置時應與  $r_{\min}^\alpha$  呈多少倍率範圍內之數值較為妥善，也可得到較好之結果。

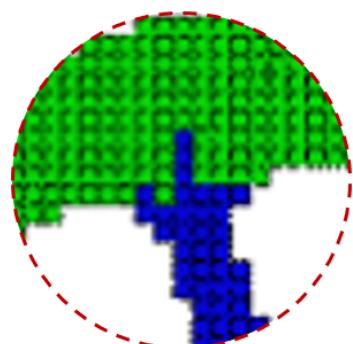


表 4.4: [例題 4-2] 設置應力不變量篩選半徑  $r_{\min}^s$  之影響

應力不變量篩選半徑	$r_{\min}^s = 50 \text{ cm}$	無設置
初始元素分布		
拓樸結果		
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$9.7130 \times 10^{-3}$	$9.6018 \times 10^{-3}$
$iter$	81	105
$V^t, V^c$	13.361 %, 16.667 %	12.472 %, 17.556 %



(a) 實體材料介面放大位置 (紅色圓圈處)



(b) 局部放大圖

圖 4.6: [例題 4-2] 未加入主應力篩選半徑介面連接細節圖

若沒有進行主應力篩選投影，則會使拓樸結果在實體材料介面上連接會產生材料混合的狀態，雖然該介面連接方式能提高整體結構勁度，使拓樸結果更偏好這樣的元素排列，如圖 4.6 (b)，但本研究希望在介面處能直接過渡材料，以貼合實際兩種材料使用時，不會在介面處混合，所以在執行抗拉壓雙材料配置時，需使用應力不變量篩選半徑避免材料介面連接問題。

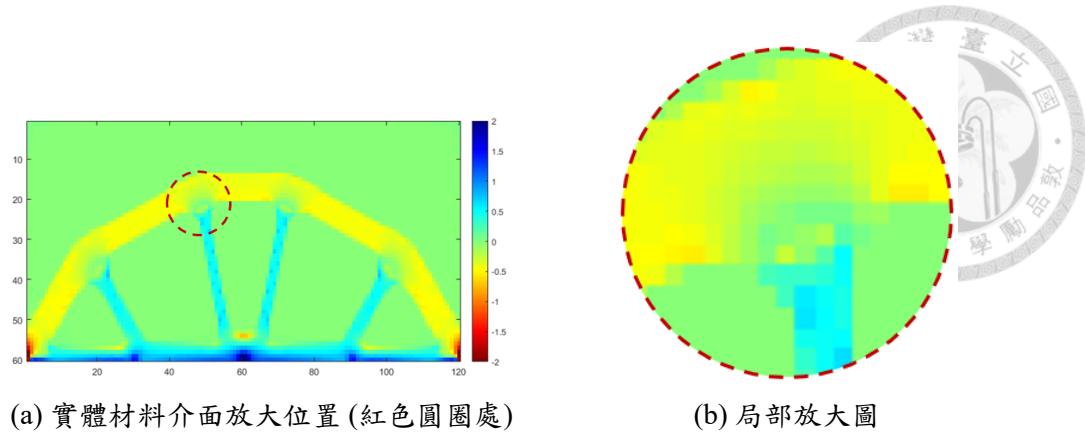


圖 4.7: [例題 4-2]  $r_{\min}^s = 50$  cm 拓樸結果應力不變量  $I_1$  热圖

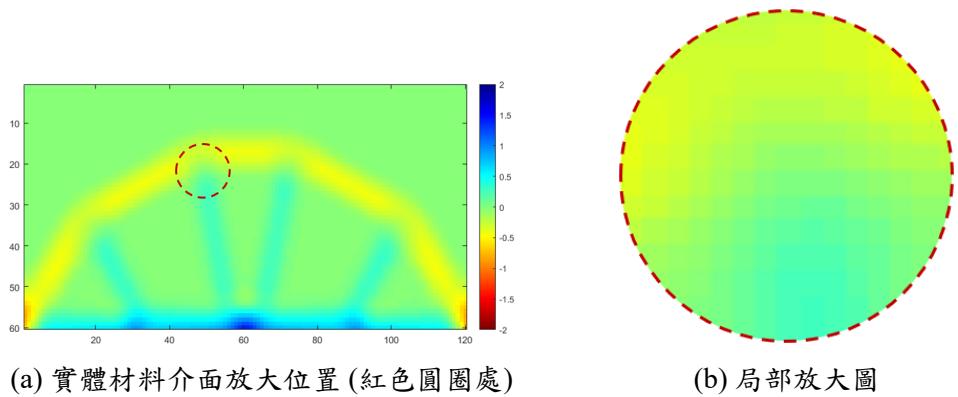


圖 4.8: [例題 4-2]  $r_{\min}^s = 50$  cm 拓樸結果過濾應力不變量  $\tilde{\sigma}_e$  热圖

將應力不變量篩選半徑  $r_{\min}^s = 50$  cm 之拓樸結果的應力不變量  $I_1$  與過濾應力不變量  $\tilde{\sigma}_e$  透過熱圖 (Heat map)，即可更視覺化的了解有無平滑化的狀態，如圖 4.7 和圖 4.8 所示，圖中更偏向藍色色域元素為受拉元素，而更偏向紅色色域的則是受壓元素，從圖 4.7 (b) 局部放大圖中可以發現，兩種色域的元素會介面清晰的混合在一起，導致拓樸過程中介面連接會逐漸產生鋸齒連接關係；而在圖 4.8 (b) 局部放大圖中，可以發現材料間的過濾應力不變量會平滑過渡，使拓樸結果會產生材料較集中之介面關係。



表 4.5: [例題 4-2]  $r_{\min}^{\alpha} = 40 \text{ cm}$  與不同  $r_{\min}^s$  結果

應力不變量篩選半徑	$r_{\min}^s = 20 \text{ cm}$	$r_{\min}^s = 30 \text{ cm}$
拓樸結果		
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$1.0544 \times 10^{-2}$	$9.9119 \times 10^{-3}$
$iter$	211	105
$V^t, V^c$	12.389 %, 17.639 %	12.972 %, 17.056 %
應力不變量篩選半徑	$r_{\min}^s = 40 \text{ cm}$	$r_{\min}^s = 60 \text{ cm}$
拓樸結果		
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$9.9888 \times 10^{-3}$	$9.8873 \times 10^{-3}$
$iter$	92	113
$V^t, V^c$	13.417 %, 16.611 %	13.417 %, 16.611 %
應力不變量篩選半徑	$r_{\min}^s = 70 \text{ cm}$	$r_{\min}^s = 80 \text{ cm}$
拓樸結果		
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$9.9431 \times 10^{-3}$	$9.7525 \times 10^{-3}$
$iter$	93	110
$V^t, V^c$	13.361 %, 16.667 %	13.056 %, 16.972 %

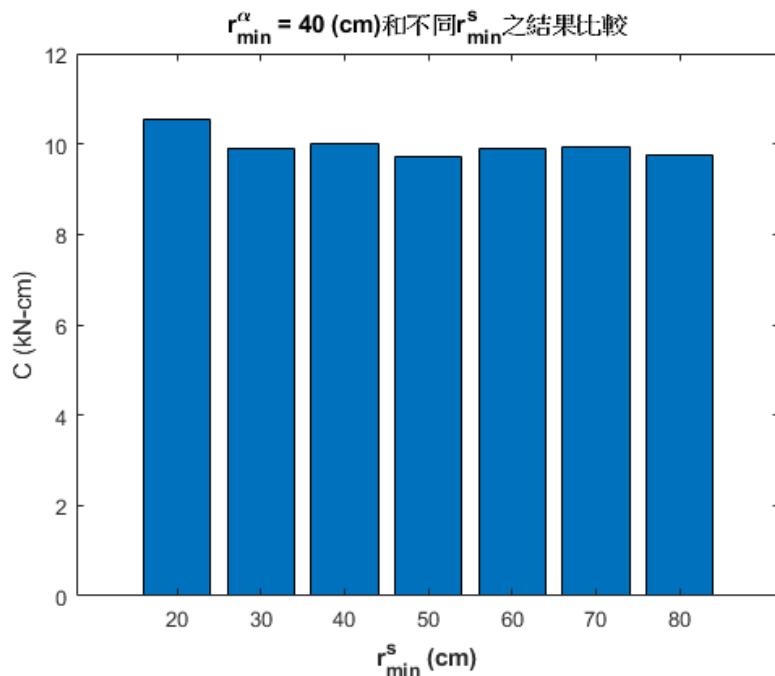


圖 4.9: [例題 4-2] 表 4.5 拓樸結果  $C$  值比較圖

從表 4.5 的拓樸結果與圖 4.9 的各應力不變量篩選半徑之  $C$  值比較圖，可以發現若是  $r_{\min}^s/r_{\min}^{\alpha} \leq 1$  則容易容易在拓樸結果上產生細小分枝，同時  $C$  值上的表現也都較差，而在  $r_{\min}^s/r_{\min}^{\alpha} > 1.5$  時雖然有機會產生較好的結果，如  $r_{\min}^s = 80 \text{ cm}$  之結果，但因為其篩選半徑較大，計算篩選半徑權重時會相對耗時；最後在  $1 < r_{\min}^s/r_{\min}^{\alpha} \leq 1.5$  的範圍內不須如此大的篩選半徑也能獲得  $C$  值表現差不多的結果，拓樸結果也不會產生細小分支狀況，因此本研究認為設置應力不變量篩選半徑  $r_{\min}^s$  時，與敏感度因子篩選半徑  $r_{\min}^{\alpha}$  之比例應介於 1 倍至 1.5 倍範圍內。



### [例題 4-3]

此例題配置與 [例題 3-8] 中相同，詳圖 4.10，並將其延伸至抗拉壓雙材料。材料內插方法：替代內插方法懲罰因子  $q = 5, 10$ 。元素材料分別為實體材料與空心材料：實體抗拉材料（藍色元素）楊氏模數  $E = 200 \text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 7.8 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ 、厚度  $t = 1 \text{ cm}$ ；實體抗壓材料（綠色元素）楊氏模數  $E = 20 \text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 2.4 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ 、厚度  $t = 1 \text{ cm}$ ；空心元素（不顯示）楊氏模數  $E = 3.36 \times 10^{-2} \text{ GPa}$  ( $q = 5$ )， $1.835 \times 10^{-2} \text{ GPa}$  ( $q = 10$ )、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 2.4 \times 10^{-5} \text{ kg/cm}^3$ 、厚度  $t = 1 \text{ cm}$ 。此例題以平面應力分析，初始元素分布為全填滿實體抗拉材料，圖中黑色邊線為設計領域範圍，元素類型選用 ABAQUS 中的 CPS8 元素，將設計領域離散為相同之方形元素，元素尺寸為  $2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$ 。BESO 參數設定：目標體積  $V^*$  為 40 % 的設計領域、敏感度因子篩選半徑  $r_{\min}^\alpha = 5 \text{ cm}$ 、應力不變量篩選半徑  $r_{\min}^s = 8 \text{ cm}$ 、體積改變比例  $ER = 4 \%$ 、最大添加體積比例  $AR_{\max} = 4 \%$ 、容許誤差  $\tau = 0.01 \%$ 、降低收斂標準迭代步數  $N_{\text{down}} = 300$  和停止迭代步數  $N_{\text{stop}} = 500$ 。

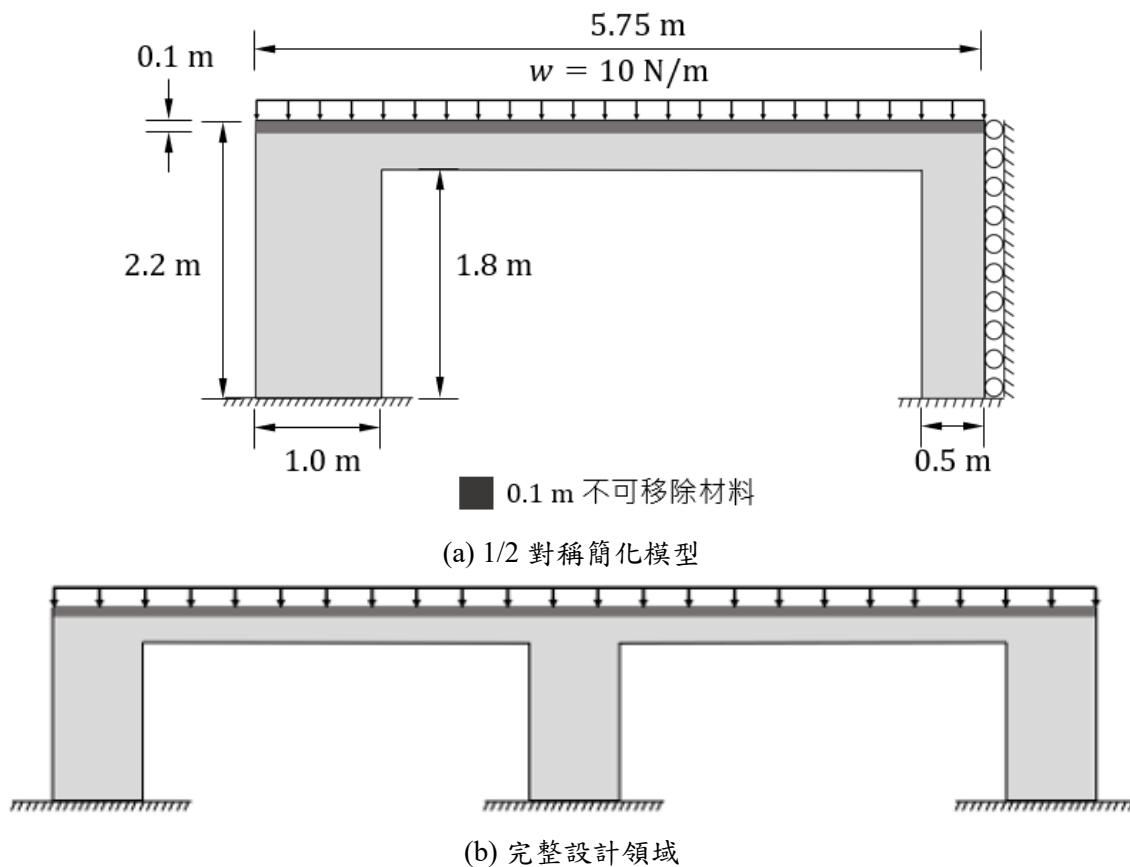


圖 4.10: [例題 4-3] 設計領域示意圖



表 4.6: [例題 4-3] 雙跨橋在不同加載狀況與不同懲罰因子  $q$  之影響

w/o 自重, $w = 10 \text{ N/m}$		
懲罰係數 $q$	$q = 5$	$q = 10$
初始元素分布		
拓樸結果		
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$1.7873 \times 10^{-5}$	$1.7739 \times 10^{-5}$
$iter$	76	140
$V^t, V^c$	11.114 %, 28.888 %	11.066 %, 28.928 %
w/ 自重, $w = 10 \text{ N/m}$		
懲罰係數 $q$	$q = 5$	$q = 10$
初始元素分布		
拓樸結果		
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$2.319 \times 10^{-3}$	$2.634 \times 10^{-3}$
$iter$	$453 (> N_{\text{down}})$	280
$V^t, V^c$	12.245 %, 27.76 %	10.747 %, 29.252 %

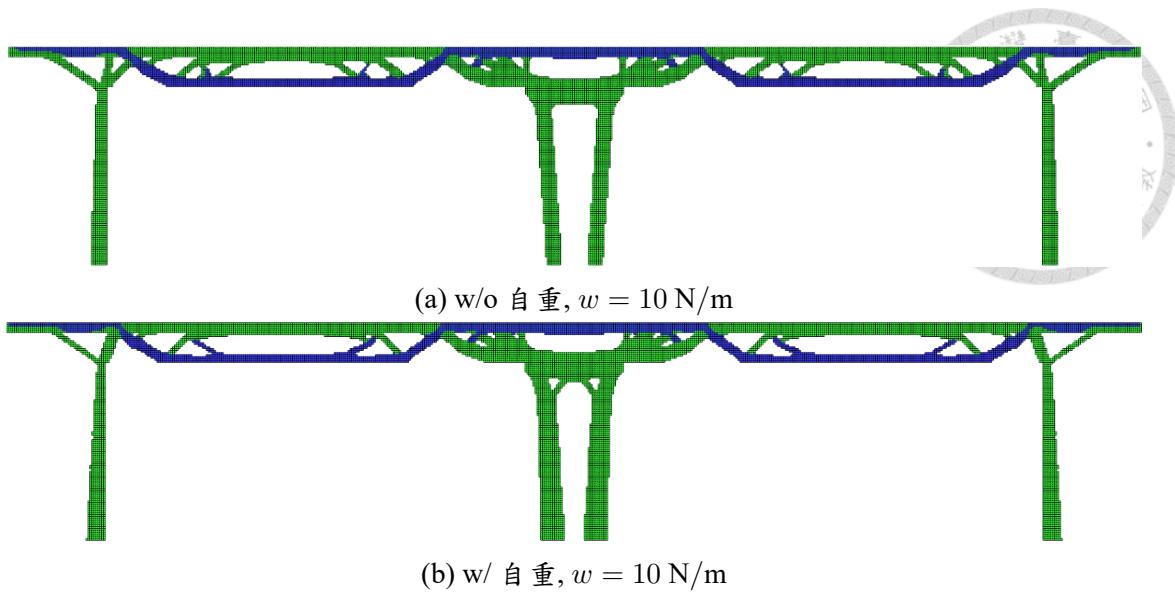


圖 4.11: [例題 4-4]  $q = 10$  對稱後完整模型

如同 [案例 3-8]，該案例加入自重後進行抗拉壓雙材料之分析結果在  $q = 5$  時也會容易出現團塊現象，因此也需要設定  $q = 10$  來獲得較為穩定的拓樸結果，但在不加入自重考量之案例不管是使用  $q = 5$  或是  $q = 10$  都能獲得穩定的拓樸結果，如表 4.6 所示；由對稱後完整模型也能看出整體抗拉與抗壓元素分布位置也與結構上受拉與受壓區一致，如圖 4.11；比較加入自重前後之結果，可以發現加入自重後跨距中央的桿件減少，以減少在高位移區的重量，整體重量也相對於單一材料整體重量也下降許多。



### [例題 4-4]

此例題配置與 [例題 3-9] 中相同，詳圖 4.12 (a) 和在模型中央處加入 1 m 非設計領域之設計領域，詳圖 4.12 (b)，並將其延伸至抗拉壓雙材料。材料內插方法：替代內插方法懲罰因子  $q = 10$ 。元素材料分別為實體材料與空心材料：實體抗拉材料（藍色元素）楊氏模數  $E = 200 \text{ GPa}$ 、泊松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 7.8 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ 、厚度  $t = 1 \text{ cm}$ ；實體抗壓材料（綠色元素）楊氏模數  $E = 20 \text{ GPa}$ 、泊松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 2.4 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ 、厚度  $t = 1 \text{ cm}$ ；空心元素（不顯示）楊氏模數  $E = 1.835 \times 10^{-2} \text{ GPa}$ 、泊松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 2.4 \times 10^{-5} \text{ kg/cm}^3$ 、厚度  $t = 1 \text{ cm}$ 。初始元素分布為全填滿抗拉實體材料，圖中黑色邊線為設計領域範圍，元素類型選用 ABAQUS 中的 C3D8 元素，將設計領域離散為相同之方形元素，元素尺寸為  $50 \text{ cm} \times 50 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$ 。BESO 參數設定：目標體積  $V^*$  為 15 % 的設計領域、敏感度因子篩選半徑  $r_{\min}^\alpha = 150 \text{ cm}$ 、應力不變量篩選半徑  $r_{\min}^s = 200 \text{ cm}$ 、體積改變比例  $ER = 2 \%$ 、最大添加體積比例  $AR_{\max} = 4 \%$ 、容許誤差  $\tau = 0.05 \%$ 、降低收斂標準迭代步數  $N_{\text{down}} = 300$  和停止迭代步數  $N_{\text{stop}} = 500$ 。

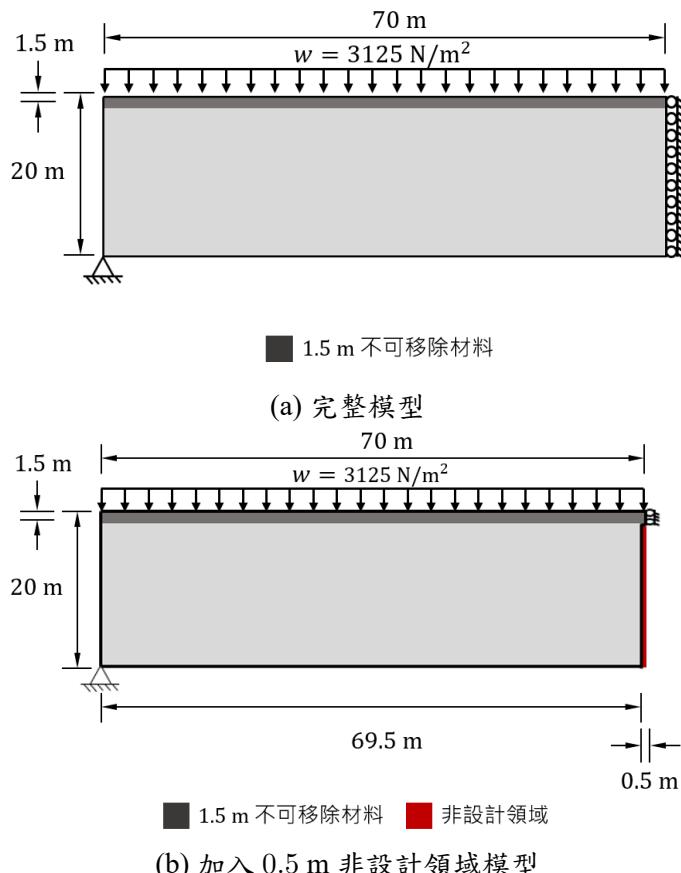


圖 4.12: [例題 4-4] 1/2 對稱簡化設計領域示意圖

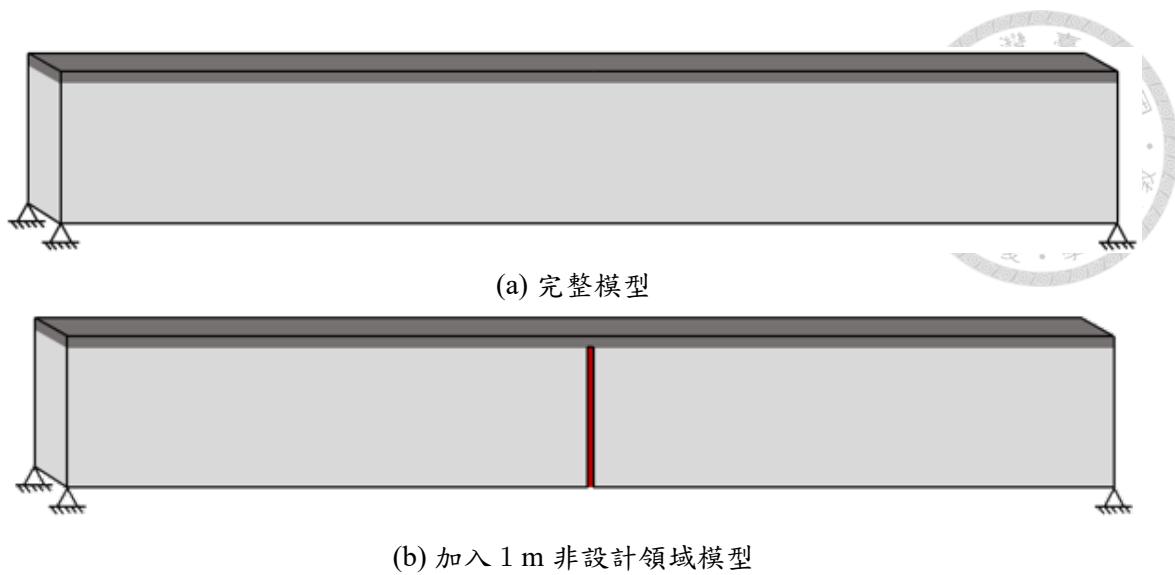


圖 4.13: [例題 4-4] 完整設計領域示意圖

表 4.7: [例題 4-4] 完整模型拓樸結果

	w/o 自重, $w = 3125 \text{ N/m}^2$	w/ 自重, $w = 3125 \text{ N/m}^2$
初始元素分布		
拓樸結果		
其他視角		
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$5.2637 \times 10^2$	$1.037 \times 10^6$
$iter$	182	166
$V^t, V^c$	5.48 %, 9.52 %	5.97 %, 9.03 %

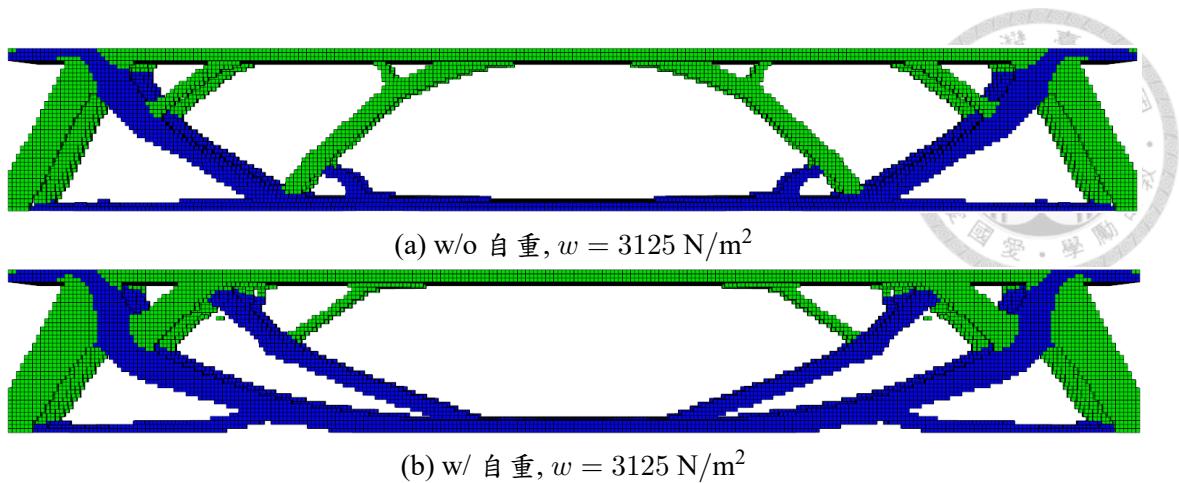


圖 4.14: [例題 4-4] 完整模型對稱後拓樸結果

表 4.8: [例題 4-4] 加入 1 m 非設計領域模型拓樸結果

	w/o 自重, $w = 3125 \text{ N/m}^2$	w/ 自重, $w = 3125 \text{ N/m}^2$
初始元素分布		
拓樸結果		
其他視角		
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$1.071 \times 10^3$	$4.3193 \times 10^5$
$iter$	140	$374 (> N_{\text{down}})$
$V^t, V^c$	0.511 %, 14.49 %	0.646 %, 14.356 %

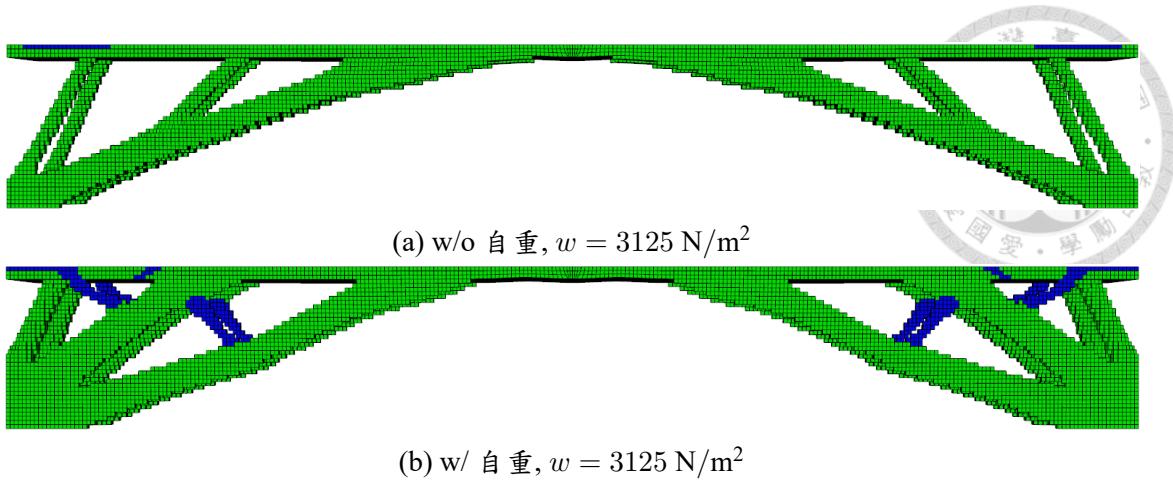


圖 4.15: [例題 4-4] 加入 1 m 非設計領域模型對稱後拓樸結果

由表 4.7 和表 4.8 可知，該案例經抗拉壓雙材料分配後，也能夠將材料分配於各自抵抗之力量上；而兩種設計領域下加入自重後，整體桿件深度都會加深，同時也會減少高位移區實體元素的保留，如單一材料分析結果一致；加入非設計領域後，能因而得到大部分為受壓之結構，因此在實際應用時，不只是能夠用不可設計區域來使桿件必須避開該位置，也能透過合適的不可設計區域設置，讓整體結構行為改變。

## 4.10 小結

本章將單一材料延伸至抗拉壓雙材料，並詳細介紹其方法的基本假設與基礎算式，也針對引入抗拉壓雙材料分配方法時所產生之問題進行敏感度因子公式的修正，不只是進行理論公式上的探討，也透過案例進行分析比較得到一致的結果，也透過案例中主應力絕對值分布狀況來確認元素分配位置與其受力狀態是否一致；而由於應力不變量的加入，需要對其進行篩選投影之後處理方式，本研究也透過案例對其進行詳細的分析比較，最後則是對雙跨橋、3D 大跨距設計領域等各種案例進行分析討論。





# 第五章 雙材料之改良式雙向結構最佳化演進法

## 5.1 前言

本章將第三章中改良後的單一材料雙向結構最佳化演進法拓展至雙材料，與第四章不同的是，本章會使用彈性模數  $E$  與固定材料分配比例來進行兩種實體材料的分配，並提出三種結果較為穩定的全填滿初始元素分佈作為起始元素分佈建議（於第 5.6 節介紹），再加入材料集中化（於第 5.7 節介紹）與以及目標體積變化（於第 5.8 節介紹）等改良方式，最後則是會進行改良後的雙材料雙向結構最佳化演進法的案例分析。

## 5.2 敏感度因子

### 5.2.1 多變量密度方法

第二章第 2.4.5 節曾介紹過，會透過敏感度因子使實體元素與空心元素在同一個基準下進行比較，而不會因為變為空心元素後因應變能下降而無法與實體元素相比較導致無法回填，如式 (3.1)。本章透過使用 Wan *et al.* (2024) 中的多變量密度方法使用彈性模數  $E$  計算中間材料的相對設計變數的方式，推導過程如下：

$$E(x_i^j) = (x_i^j)^p E_j, \quad E(x_i^j) = E(x_i^{j+1}) \quad (5.1)$$

$$(x_i^j)^p E_j = (x_i^{j+1})^p E_{j+1} \quad (5.2)$$

$$x_i^{j+1} = x_i^j \times \sqrt[p]{\frac{E_j}{E_{j+1}}} \quad (5.3)$$



將該概念延伸使用至替代內插方法 (Alternative interpolation scheme)，其推導過程如下：

$$E(x_i^j) = \frac{x_i^j}{1 + q(1 - x_i^j)} E_j, \quad E(x_i^j) = E(x_i^{j+1}) \quad (5.4)$$

$$\frac{x_i^j}{1 + q(1 - x_i^j)} E_j = \frac{x_i^{j+1}}{1 + q(1 - x_i^{j+1})} E_{j+1} \quad (5.5)$$

$$x_i^{j+1} = x_i^j \times \frac{(1 + q)E_j}{E_{j+1}(1 + q(1 - x_i^j)) + E_j \times q \times x_i^j} \quad (5.6)$$

式中， $x_i^j$  為相對設計變數，即為材料  $i$  與材料  $j$  相比較之相對設計變數，舉例來說  $x_2^1$  為材料 2 與材料 1 相比較之設計變數。

假設材料 1 彈性模數  $E_1 = 200$  GPa、材料 2 彈性模數  $E_2 = 20$  GPa、空心材料彈性模數  $E_3 = 3.34 \times 10^{-2}$  GPa 與懲罰係數  $q = 5$ ，並透過式 (5.6) 來計算中間材料之相對設計變數與  $E_e = [x_e/(1 + q(1 - x_e))] E^0$ ，其計算過程如下：

$$\begin{cases} E^0 = E_1 = 200 \text{ GPa} \Rightarrow x_1 = 1 \\ E_2 = \frac{x_2^1}{1 + q(1 - x_2^1)} E_1 \Rightarrow \frac{20}{200} = \frac{x_2^1}{1 + q(1 - x_2^1)} \Rightarrow x_2^1 = 0.4 \end{cases} \quad (5.7)$$

$$\begin{cases} x_2^2 = x_2^1 \times \frac{(1 + 5)E_1}{E_2(1 + 5(1 - x_2^1)) + E_1 \times 5 \times x_2^1} = 0.4 \times 2.5 = 1 \\ E_3 = \frac{x_3}{1 + q(1 - x_3)} E_2 \Rightarrow \frac{3.34 \times 10^{-2}}{20} = \frac{x_3}{1 + q(1 - x_3)} \Rightarrow x_3 = 0.01 \end{cases} \quad (5.8)$$

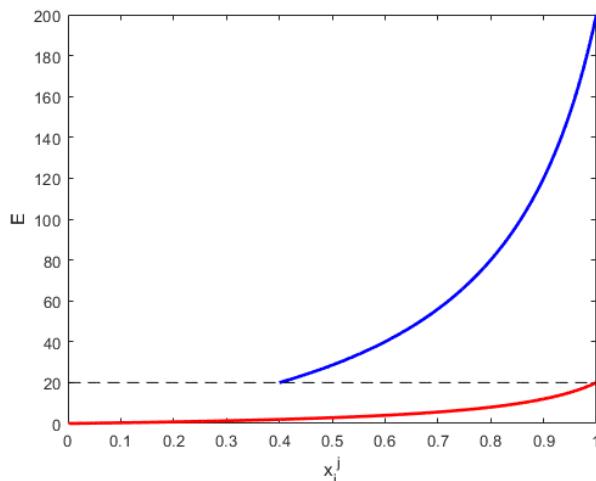


圖 5.1: 彈性模數  $E$  與相對設計變數  $x_i^j$  關係圖



## 5.2.2 兩階段材料分配

根據上一小節計算結果，可以將材料分配會依材料彈性模數  $E$  由高至低逐階分配材料，本研究主要分為兩階段來分配材料，先將實體材料分配為材料 1 與材料 2，再將材料 2 與空心材料進行分配。計算敏感度因子時也需要分別計算兩階段元素交換時所使用之第一階段敏感度因子  $\alpha_e^1$  與第二階段敏感度因子  $\alpha_e^2$ ，敏感度因子  $\alpha_e$  計算公式如式 (3.1) 表示，第一階段敏感度因子  $\alpha_e^1$  會帶入式 (5.9) 的參數來計算，第二階段敏感度因子  $\alpha_e^2$  則會帶入式 (5.10) 的參數來計算。第一階段交換根據實體元素之平均第一階段敏感度因子  $\tilde{\alpha}_e^1$  來分配材料 1 與材料 2，而第二階段則會接續第一階段分配之材料 2 與空心元素之平均第二階段敏感度因子  $\tilde{\alpha}_e^2$  來分配材料 2 與空心材料，這樣即便達到目標體積  $V^*$  與材料 1 目標體積  $V^1$  之後，材料之間仍能夠彼此交換直到達成收斂條件。

$$\begin{cases} \text{材料 1}, & x_1 = 1.0, \quad \rho^0 = \rho_1 \\ \text{材料 2}, & x_2^1 = 0.4, \quad \rho^0 = \rho_2/x_2^1 \\ \text{空心材料}, & x_3 = 0.01, \quad \rho^0 = \rho_2/x_2^1 \end{cases} \quad (5.9)$$

$$\begin{cases} \text{材料 1}, & x_1 = 1.0, \quad \rho^0 = \rho_2 \\ \text{材料 2}, & x_2^2 = 1.0, \quad \rho^0 = \rho_2 \\ \text{空心材料}, & x_3 = 0.01, \quad \rho^0 = \rho_2 \end{cases} \quad (5.10)$$



### 5.3 下一步迭代目標體積

在第三章第 3.3 節中有說明單一材料下一步迭代之目標體積的計算方式與使用原因，而在雙材料當中不只是要計算實體材料下一步迭代之目標體積  $V_{i+1}$ ，同時還要計算材料 1 之下一步迭代之目標體積  $V_{i+1}^1$ ，雙材料下一步迭代之目標體積計算方式如式 (5.11) 與式 (5.12) 表示

$$V_{i+1} = \begin{cases} \max(V_i \times (1 - ER), V^*), & \text{when } V_i \geq V^* \\ V_{\text{total}} - \max((V_{\text{total}} - V_i) \times (1 - ER), V_{\text{total}} - V^*), & \text{when } V_i < V^* \end{cases} \quad (5.11)$$

$$V_{i+1}^1 = \begin{cases} \max(V_i^1 \times (1 - ER), V^1), & \text{when } V_i^1 \geq V^1, V_i^2 \neq V^2 \\ V_{i+1} - \max(V_i^2 \times (1 - ER), V^2), & \text{when } V_i^1 < V^1, V_i^2 \neq V^2 \\ V_{i+1} - V^2, & \text{when } V_i^2 = V^2 \end{cases} \quad (5.12)$$

式中， $V_{i+1}$  與  $V_{i+1}^1$  為下一步迭代步數實體目標體積與下一步迭代步數材料 1 目標體積， $V_i$ 、 $V_i^1$  和  $V_i^2$  分別為當前迭代步數實體體積、當前迭代步數材料 1 體積和當前迭代步數材料 2 體積、 $V^*$ 、 $V^1$  和  $V^2$  分別為目標體積、目標材料 1 體積和目標材料 2 體積， $V_{\text{total}}$  和  $ER$  為設計領域總體積(包含空心元素體積)和體積改變比例，本研究體積改變比例  $ER$  一般會設定為 0.02 或 0.04。



## 5.4 最大添加體積比例

第三章第3.4節中有說明單一材料最大添加體積比例的計算方式與使用原因，由於本研究採用兩階段材料分配的方式，會透過第二階段平均元素敏感度因子 $\tilde{\alpha}_e^2$ 來進行空心元素與材料2的交換，所以只需要確定材料2元素轉換成實體元素的體積是否有超過最大添加體積 $AV_{\max}$ ，最大添加體積 $AV_{\max}$ 如式(5.13)所示，雙材料最大添加體積比例執行流程如圖5.2。

$$AV_{\max} = \begin{cases} AR_{\max} \times V_i, & \text{when } V_i \geq V^* \\ AR_{\max} \times (|V_i - V^*| + V^*), & \text{when } V_i < V^* \end{cases} \quad (5.13)$$

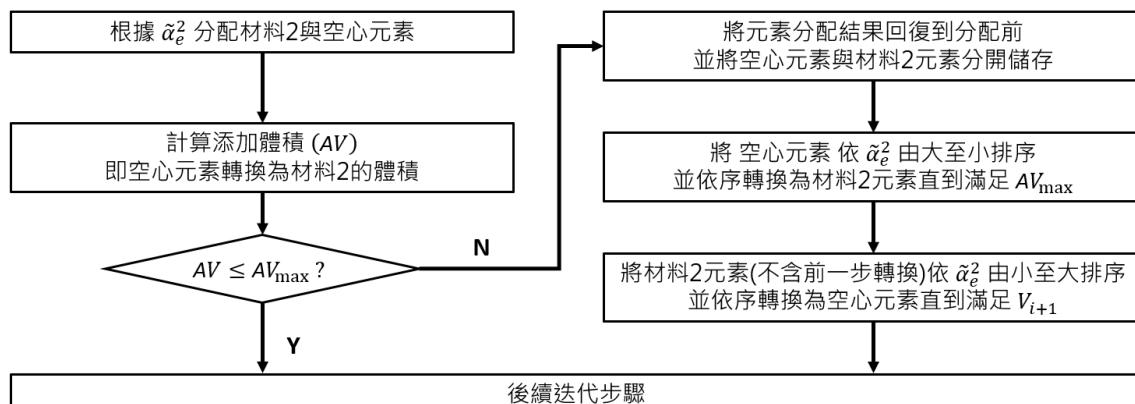


圖 5.2: 雙材料最大添加體積比例執行流程圖



## 5.5 收斂條件

第三章第 3.5 節中有說明單一材料收斂條件的計算方式與使用原因，而雙材料收斂條件需要多檢核材料 1 當前體積  $V_i^1$  與材料 1 目標體積  $V^1$  之誤差是否小於五倍平均元素體積即可，其餘計算方式皆相同，一樣會分為三個階段進行收斂，如下表示：

$$\text{when } i \leq N_{\text{down}}, \quad \begin{cases} \frac{\left| \sum_{j=1}^5 (C_{i-j+1} - C_{i-5-j+1}) \right|}{\sum_{j=1}^5 C_{i-j+1}} \leq \tau \\ C_i \leq \min(C_{i-1}, C_{i-2}, C_{i-3}) \\ |V_i - V^*| \leq 5 \times V_{\text{average}} \\ |V_i^1 - V^1| \leq 5 \times V_{\text{average}} \end{cases} \quad (5.14)$$

$$\text{when } N_{\text{stop}} > i > N_{\text{down}}, \quad \begin{cases} \frac{\left| \sum_{j=1}^5 (C_{i-j+1} - C_{i-5-j+1}) \right|}{\sum_{j=1}^5 C_{i-j+1}} \leq 10 \tau \\ C_i \leq \min(C_{i-1}, C_{i-2}, C_{i-3}) \\ |V_i - V^*| \leq 5 \times V_{\text{average}} \\ |V_i^1 - V^1| \leq 5 \times V_{\text{average}} \end{cases} \quad (5.15)$$

$$\text{when } i = N_{\text{stop}}, \text{ 停止迭代} \quad (5.16)$$

式中， $i$  為迭代步數， $C_i$  為第  $i$  步之結構順從度， $\tau$  為容許誤差，本研究  $\tau$  會使用 0.05 % 或 0.01 % 作為收斂之誤差， $N_{\text{down}}$  和  $N_{\text{stop}}$  分別是降低收斂標準迭代步數和停止迭代步數， $V_i$ 、 $V_i^1$ 、 $V^*$ 、 $V^1$  和  $V_{\text{average}}$  分別為當前迭代步數  $i$  之實體體積、當前迭代步數  $i$  之材料 1 體積、目標體積、目標材料 1 體積和平均元素體積。



## 5.6 起始元素分佈

由於雙向結構最佳化演進法在使用不同初始元素分布狀況時，其拓樸結果會有具有一定程度的變異性，所以如何選擇初始元素分布也十分重要，本研究僅探討全填滿狀況下，兩種實體材料要如何分布能夠在大部分不同的材料比例、不同的載重狀況的案例題目下得出結構順從度  $C$  相對較低，拓樸過程較為穩定，較不容易突然出現結果十分糟糕之拓樸結果。

本研究主要採用五種初始元素分布來進行後續分析：

1. **Case 1**：全填滿彈性模數  $E$  較高的材料（材料 1）。
2. **Case 2**：全填滿彈性模數  $E$  較低的材料（材料 2）。
3. **Case 3 至 Case 5**：這三種情況基於單一材料的全填滿初始元素分布的拓樸結果及目標體積來確定彈性模數  $E$  較高材料（材料 1）的初始分布位置。根據單一材料拓樸結果，將敏感度因子  $\alpha_e$  從大到小排序，並由大至小選取以下體積的元素位置：
  - **Case 3**：選取前 [材料 1 目標體積 ( $V^1$ )] 的元素位置作為材料 1 的初始分布位置。
  - **Case 4**：選取前 [材料 1 目標體積除以實體材料目標體積 ( $V^1/V^*$ )] 的元素位置作為材料 1 的初始分布位置。
  - **Case 5**：選取前 [實體材料目標體積 ( $V^*$ )] 的元素位置作為材料 1 的初始分布位置。

以對稱結構 - 集中載重案例當作 Case 3 ~ Case 5 舉例說明，該案例假設實體材料目標體積為 30 % 之設計領域，而材料 1 目標體積為 10 % 之設計領域，對稱結構 - 集中載重單一材料拓樸結果如圖 5.3 所示。

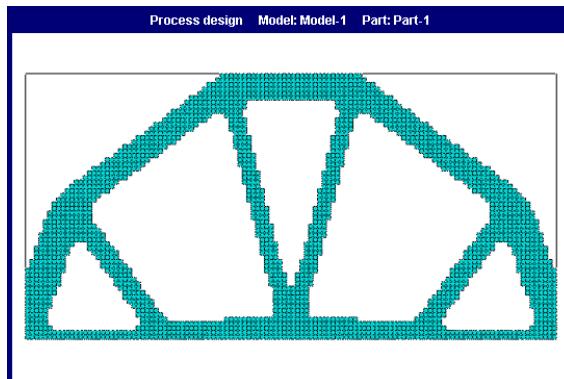


圖 5.3: 對稱結構 - 集中載重單一材料拓樸結果

將單一材料拓樸結果的所有元素根據平均敏感度因子  $\tilde{\alpha}_e$  由大至小排序，Case 3 會將單一材料排序前  $V^1 = 10\%$  的元素位置作為材料 1 的初始位置；同理 Case 4 會取  $V^1/V^* = 10\%/30\% = 33.3\%$ ；Case 5 會取  $V^* = 30\%$ ，該案例 Case 3 ~ Case 5 初始元素分布如表 5.1 所示。

表 5.1: Case 3 ~ Case 5 起始元素分布狀況

Case	起始材料 1 比例	起始元素分布狀況
Case 3	$V^1 = 10\%$	
Case 4	$V^1/V^* = 10\%/30\% = 33.3\%$	
Case 5	$V^* = 30\%$	



## 5.7 材料集中化

雙材料的雙向結構最佳化演進法容易產生材料分布較零散的問題，因此呂其翰(2010)提出「材料集中化」，將材料介面長度加入最佳化目標函數中一同考量，之後施可葳(2013)對此方法在進行簡化。材料集中化將最佳化問題變更如下：

Min.:

$$C(\mathbf{X}) + \lambda \Gamma \quad (5.17)$$

式中， $\Gamma$  為材料介面長度， $\lambda$  為材料介面長度權重，透過權重來使最佳化分析整體會更偏好最小化結構順從度或是考量材料集中化，由於改變了目標函數，根據目標函數進行敏感度分析之敏感度因子  $\alpha_e$  且材料內插方法與過去本研究團隊使用不同方法，需要重新計算集中化敏感度因子  $\bar{\alpha}_e$ ，公式如下式 (5.18) 表示。

$$\bar{\alpha}_e = -\frac{\rho^0 g}{1+q} \mathbf{f}^T \mathbf{u}_e + \frac{C_e}{2x_e[1+q(1-x_e)]V_e} + \lambda \Delta \gamma_e \quad (5.18)$$

$$\lambda \equiv \frac{\sum \alpha_e}{R_{\text{all}}} \quad (5.19)$$

$$\Delta \gamma_e = \gamma_{e,\text{hard}} - \gamma_{e,\text{soft}} \quad (5.20)$$

式中， $\gamma$  為集中化係數， $R_{\text{all}}$  為所有元素接觸面長度總和， $\gamma_{e,\text{hard}}$  為元素與相鄰較硬元素或同等彈性模數元素之介面長度， $\gamma_{e,\text{soft}}$  為元素與相鄰較軟元素之介面長度。

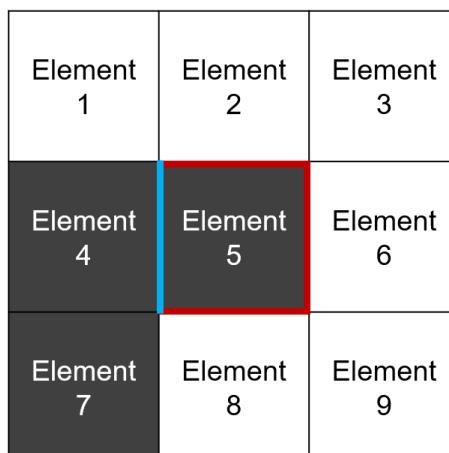


圖 5.4: 材料集中化示意圖 (黑色為  $E$  較高元素、白色為  $E$  較低元素)

以圖 5.4 為例，對元素 5(即中心元素)而言，紅線連接長度為  $\gamma_{e,soft}$ ，藍線連接長度為  $\gamma_{e,hard}$ ，計算方式如下所示：

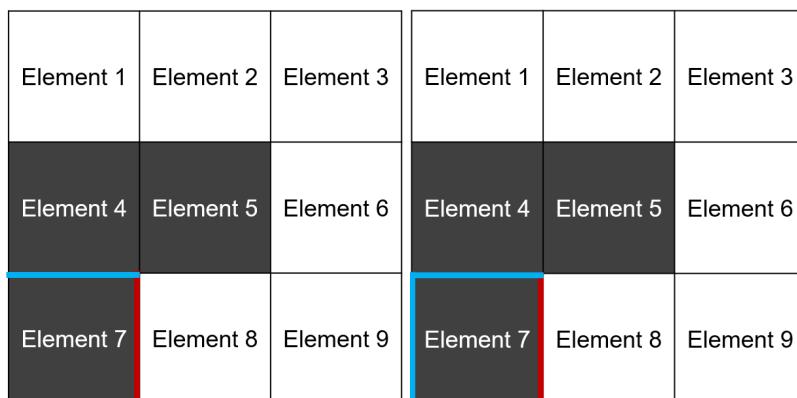
$$\Delta\gamma_e = \gamma_{e,hard} - \gamma_{e,soft} = l - 3l = -2l (< 0) \quad (5.21)$$

$$\bar{\alpha}_e = \alpha_e + \lambda\Delta\gamma_e = \alpha_e + \lambda(-2l) < \alpha_e \quad (5.22)$$

根據上述計算可以發現元素 5(即中心元素)周圍相鄰元素與中心元素相比較軟元素居多，透過計算之後得到  $\Delta\gamma_e < 0$ ，則表示敏感度因子會減少，進而使中心元素排序會下降，使其更容易較容易交換為較軟元素。反之，則更容易交換為較硬元素或保持原本較硬之元素。余鈺庭 (2023) 提出將空心元素加入較軟元素之考量中，在雙向結構最佳化演進法達目標體積後持續交換時能夠將材料 1 與材料 2 都進行集中化的動作。

本研究在交換材料時採用兩階段逐階分配材料，因此在第一階段交換材料 1 與材料 2 時，材料 1 會被材料集中化定為較硬元素，而周邊的材料 2 與空心元素皆為較軟元素，對於第一階段敏感度因子  $\alpha_e^1$  進行增減，而在第二階段交換材料 2 與空心元素時，材料 2 會被材料集中化定為較硬元素，而周邊的材料 1 被定為較硬元素、空心元素則被定為較軟元素，對於第一階段敏感度因子  $\alpha_e^2$  進行增減。

基於上述說明，可以發現當中心元素在設計領域邊緣(即元素 7)時，與設計領域邊緣相接之長度並不會被考慮，這樣會導致在邊緣之中心元素在加入材料集中化後排序會相對降低，使其更容易被交換為較軟元素，如圖 5.5 (a)。本研究在此基礎上，將較硬元素與設計領域邊緣連接之長度，加入  $\gamma_{e,hard}$  長度中考量，使其排序不會相對降低過多，進而不會被交換為較軟元素，如圖 5.5 (b)。



(a) 原長度計算方式

(b) 改進後長度計算方式

圖 5.5: 設計領域邊緣之中心元素示意圖 (黑色為  $E$  較高元素、白色為  $E$  較低元素)



## 5.8 目標體積變化

由於根據不同全填滿初始元素分布所得到之結果仍有不同，本研究以雙向結構最佳化演進法能夠回填元素之特性提出「目標體積變化」，透過在迭代過程中變化目標體積數值，使拓樸過程有更多的空間能夠去得出新的元素連接方式或移除相對無用之桿件。由於雙材料中彈性模數  $E$  較高之材料 1 所分布之位置會主要控制整體結構之結構順從度  $C$  大小，所以本研究主要會變化材料 1 之目標體積，並維持材料 2 之目標體積保持不變。整體流程能夠粗略分為減量調整目標體積部分與增量調整目標體積部分，減量調整目標體積  $\tilde{V}_{\text{minus}}$  之目標體積設定如式 (5.23) 表示，而增量調整目標體積  $\tilde{V}_{\text{add}}$  之目標體積設定如式 (5.25) 表示。

$$\tilde{V}_{\text{minus}} = \begin{cases} \tilde{V}_{\text{minus}}^* = V^* - (V^1 - V_{\text{minus}}) \\ \tilde{V}_{\text{minus}}^1 = V_{\text{minus}} \end{cases} \quad (5.23)$$

$$V_{\text{minus}} = 0.75 \times V^1 \quad (5.24)$$

$$\tilde{V}_{\text{add}} = \begin{cases} \tilde{V}_{\text{add}}^* = V^* + V_{\text{add}} \\ \tilde{V}_{\text{add}}^1 = V^1 + V_{\text{add}} \end{cases} \quad (5.25)$$

$$V_{\text{add}} = \min(1.0 - V^*, V^*/2) \quad (5.26)$$

透過五組條件進行整個流程的自動化，主要概念是透過第二章第 2.4.8 節所提到的收斂準則與十倍的  $\tau$  來判斷結構具有一定程度的穩定狀況又尚未達到收斂，並確認是否已達到當前設定之目標體積。由於無法了解各種初始元素分佈與各種題目需要執行幾次減量調整目標體積  $\tilde{V}_{\text{minus}}$  與增量調整目標體積  $\tilde{V}_{\text{add}}$  的過程才能夠達到更好的元素分布狀況，所以需要設定初始次數設定與自動化判斷次數條件，並在該執行過程中將體積改變比例  $ER$  調整為兩倍，以減少所需迭代步數。

本研究設定最少要執行兩次目標體積調整的整個過程，並最多能夠執行至五次，但若是該分析需要執行至第三次或以上則需要達成條件 2 才能執行，如式 (5.29) 所示，其中執行前結構順從度總和  $A_n$  為第  $n$  次目標體積調整執行前五步結構順從度  $C_e$  之總和，如式 (5.30) 所示，透過判斷  $A_n$  與  $A_{n-1}$  之誤差是否差超過 0.5 % 來決定是否需要繼續執行，也就是判斷結構順從度是否比上次執行前變得更大 (即元素分布狀況變差)。



$$\text{條件 1} = \begin{cases} \frac{\left| \sum_{j=1}^5 (C_{i-j+1} - C_{i-5-j+1}) \right|}{\sum_{j=1}^5 C_{i-j+1}} \leq 10 \tau \\ |V_i - V^*| \leq 5 \times V_{\text{average}} \\ |V_i^1 - V^1| \leq 5 \times V_{\text{average}} \\ G_{n-1} \leq i, \text{ when } n > 1 \& i \leq N_{\text{down}} - 50 \\ n \leq 5 \\ \text{非「目標體積變化」執行階段} \end{cases} \quad (5.27)$$

$$G_n = i + 4, \text{ 達條件 5 後計算} \quad (5.28)$$

$$\text{條件 2} = \frac{A_n - A_{n-1}}{A_{n-1}} \times 100 \% \geq 0.5 \% \quad (5.29)$$

$$A_n = \sum_{j=i-4}^i C_j, \text{ 達條件 1 後計算} \quad (5.30)$$

$$\text{條件 3} = \begin{cases} \frac{\left| \sum_{j=1}^5 (C_{i-j+1} - C_{i-5-j+1}) \right|}{\sum_{j=1}^5 C_{i-j+1}} \leq 10 \tau \\ |V_i - \tilde{V}_{\text{minus}}^*| \leq 5 \times V_{\text{average}} \quad \vee \quad i > N_{\text{minus}} \\ |V_i^1 - \tilde{V}_{\text{minus}}^1| \leq 5 \times V_{\text{average}} \end{cases} \quad (5.31)$$

$$N_{\text{minus}} = i + 49, \text{ 達條件 1 後計算} \quad (5.32)$$

$$\text{條件 4} = \begin{cases} \frac{\left| \sum_{j=1}^5 (C_{i-j+1} - C_{i-5-j+1}) \right|}{\sum_{j=1}^5 C_{i-j+1}} \leq 10 \tau \\ |V_i - \tilde{V}_{\text{add}}^*| \leq 5 \times V_{\text{average}} \\ |V_i^1 - \tilde{V}_{\text{add}}^1| \leq 5 \times V_{\text{average}} \end{cases} \quad (5.33)$$



$$\text{條件 5} = \begin{cases} |V_i - V^*| \leq 5 \times V_{\text{average}} \\ |V_i^1 - V^1| \leq 5 \times V_{\text{average}} \end{cases}$$

(5.34)

整體流程會先判斷是否達到條件 1，其中的執行間距  $G_n$  為第 n 次執行後與下次執行時的最小執行迭代步數間距，主要作用是防止其未達原始目標體積之結構順從度算入結構順從度總和  $A_n$  導致判斷錯誤，所以其步數間距設定會與執行前結構順從度總和  $A_n$  計算步數一致，若是達到條件 1 後，則會將目標體積設定減量調整目標體積  $\tilde{V}_{\text{minus}}$ ，來移除重要性較低之桿件，防止後續增加體積時持續發展該桿件，再透過條件 3(如式 (5.31)) 來決定是否將目標體積設定為增量調整目標體積  $\tilde{V}_{\text{add}}$ ，式中  $N_{\text{minus}}$  則是達成條件 1 後會立即計算，用來防止體積較低時無法滿足收斂準則而導致無法收斂，增量調整目標體積可以擴展其整體元素可交換之空間，使拓樸能夠獲得更好或差不多的元素分布狀況，最後則是透過條件 4 來將目標體積設定為原始實體目標體積  $V^*$  與原始材料 1 目標體積  $V^1$ ，最後則是使用條件 5 來判斷是否完成整個流程並計算執行間距  $G_n$ ，整體流程如圖 5.6 所示。

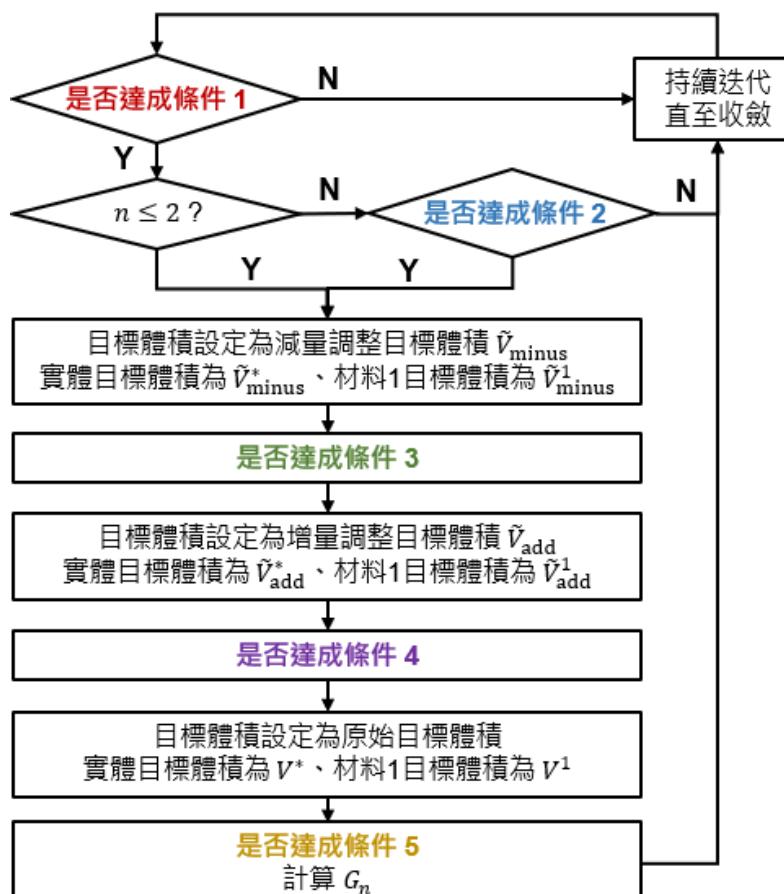


圖 5.6: 目標體積變化流程圖

## 5.9 雙材料雙向結構最佳化演進法流程圖



綜合前述改良方法，可以將雙材料雙向結構最佳化演進法 (BESO) 流程整理，並可以將其粗略的分為主要流程與元素交換流程，主要流程為會進行有限元素分析並輸出所需資料，並會等待元素交換流程構建新設計後判斷是否達到目標體積與是否達成收斂條件；元素交換流程會進行敏感度因子  $\alpha_e$  後處理並加入材料集中化與目標體積變化等改良方法，其整體流程圖如圖 5.7 所示。

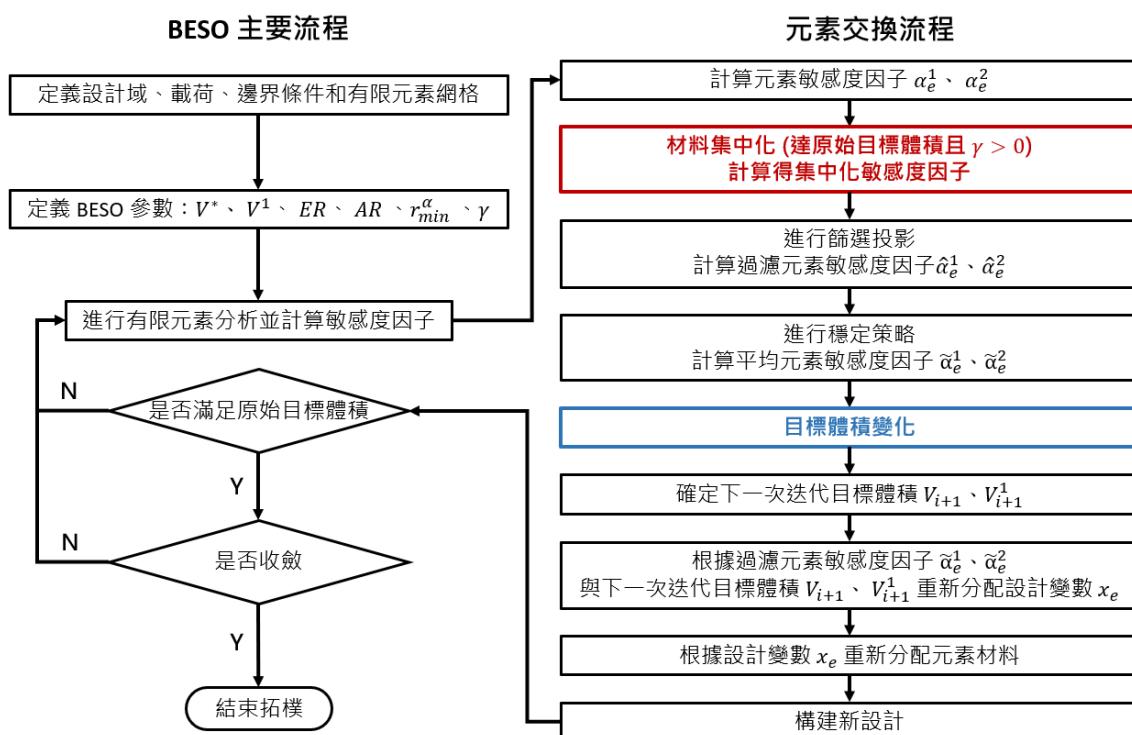


圖 5.7: 雙材料雙向結構最佳化演進法 (BESO) 流程圖



## 5.10 案例分析

### [例題 5-1]

此例題配置與 [例題 3-7] 中相同，詳圖 5.8，並將其延伸至雙材料。材料內插方法：替代內插方法懲罰因子  $q = 5$ 。元素材料分別為實體材料與空心材料：實體材料 1(藍色元素) 楊氏模數  $E = 200 \text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 7.8 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ 、厚度  $t = 1 \text{ cm}$ ；實體材料 2(綠色元素) 楊氏模數  $E = 20 \text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 2.4 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ 、厚度  $t = 1 \text{ cm}$ ；空心元素(不顯示)楊氏模數  $E = 3.36 \times 10^{-2} \text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 2.4 \times 10^{-5} \text{ kg/cm}^3$ 、厚度  $t = 1 \text{ cm}$ 。此例題以平面應力分析，圖中黑色邊線為設計領域範圍，元素類型選用 ABAQUS 中的 CPS8 元素，將設計領域離散為相同之方形元素，元素尺寸為  $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ 。BESO 參數設定：實體目標體積  $V^*$  為 30 % 的設計領域、材料 1 與材料 2 目標體積 ( $V^1, V^2$ ) 分別為 (5 %, 25 %), (10 %, 20 %), (15 %, 15 %), (20 %, 10 %), (25 %, 5 %)、敏感度因子篩選半徑  $r_{\min}^\alpha = 40 \text{ cm}$ 、體積改變比例  $ER = 2 \%$ 、最大添加體積比例  $AR_{\max} = 8 \%$ 、容許誤差  $\tau = 0.05 \%$ 、降低收斂標準迭代步數  $N_{\text{down}} = 300$  和停止迭代步數  $N_{\text{stop}} = 500$ 。

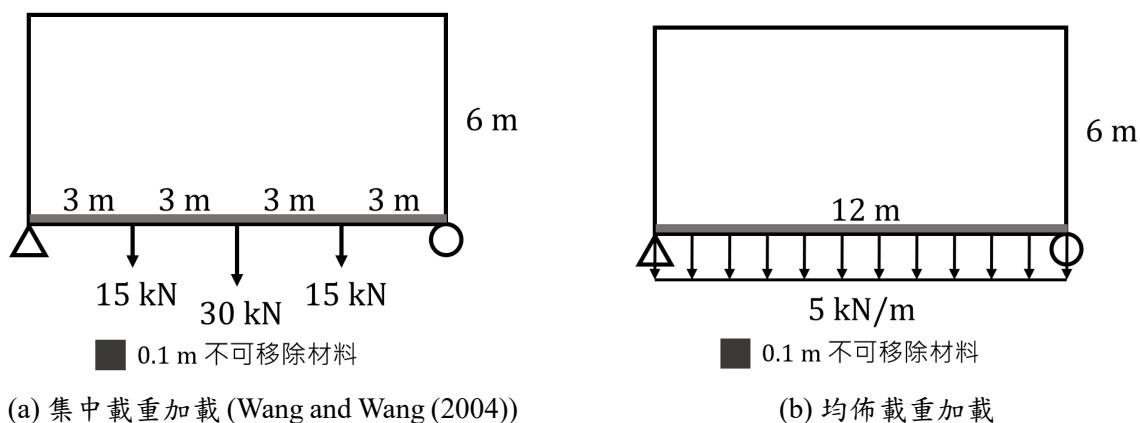


圖 5.8: [例題 5-1] 設計領域示意圖

該例題旨在討論「初始元素分布 Case 3 ~ Case 5 與其他初始元素分布之比較」，用以確定本研究所提出之初始元素分布 Case 3 ~ Case 5 相比於其他設定之初始元素分布在結構順從度  $C$  上是否能得到較為穩定的拓樸結果。本研究設定其他 15 種初始元素分布為 Case 6 ~ Case 10 由下至上以  $1/6$  寬逐漸增加材料 1；Case 11 ~ Case 15 由上至上下以  $1/6$  寬逐漸增加材料 1；Case 16 ~ Case 20 由左右向中心以  $1/12$  長逐漸增加材料 1，如表 5.2 所示。

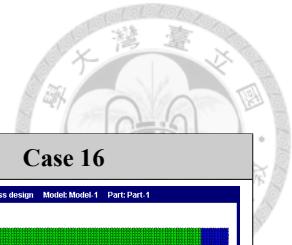


表 5.2: Case 6 ~ Case 20 起始元素分布狀況

Case 6	Case 11	Case 16
Case 7	Case 12	Case 17
Case 8	Case 13	Case 18
Case 9	Case 14	Case 19
Case 10	Case 15	Case 20

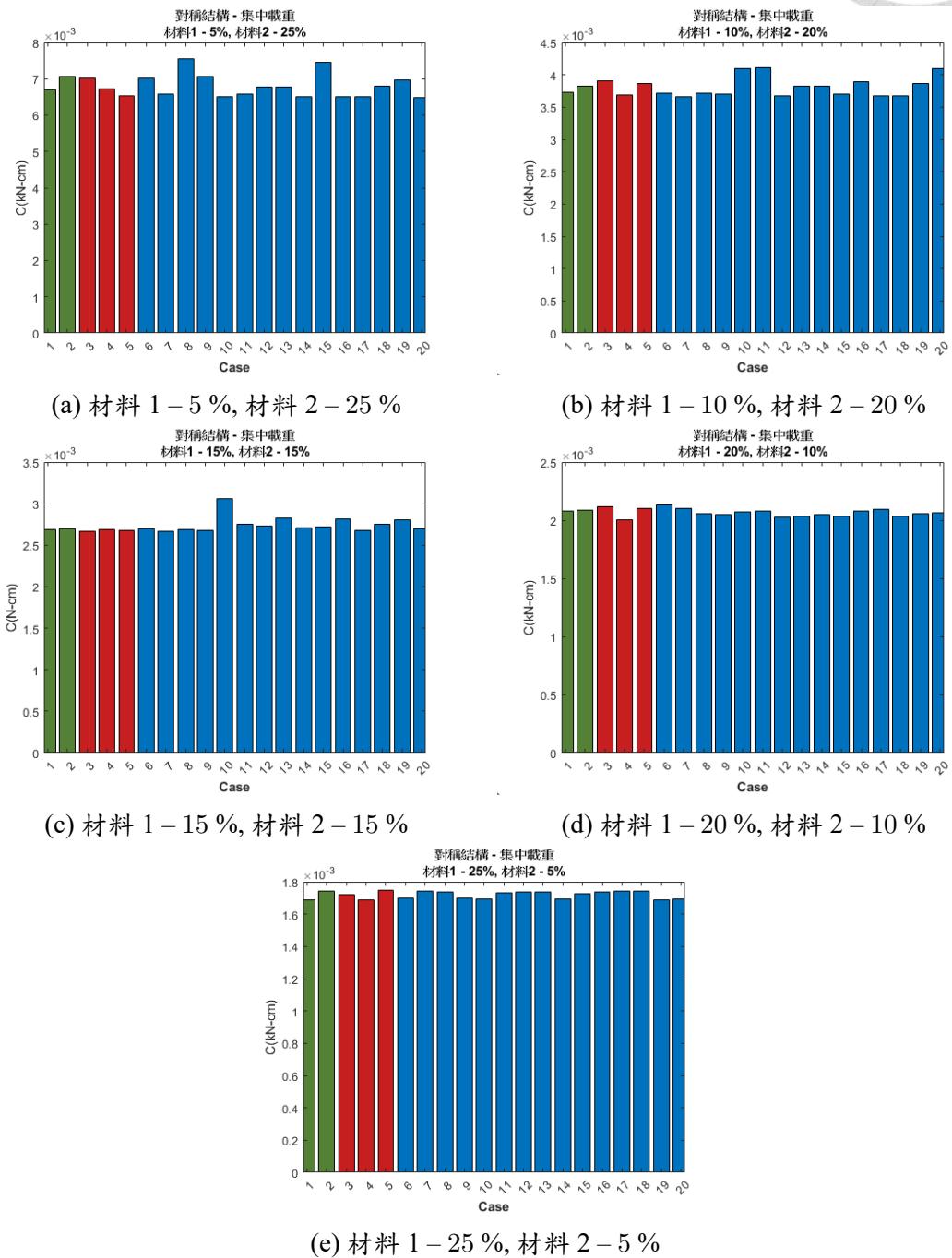


圖 5.9: [例題 5-1] 集中載重不同材料比例 Case 1 ~ Case 20  $C$  值比較圖

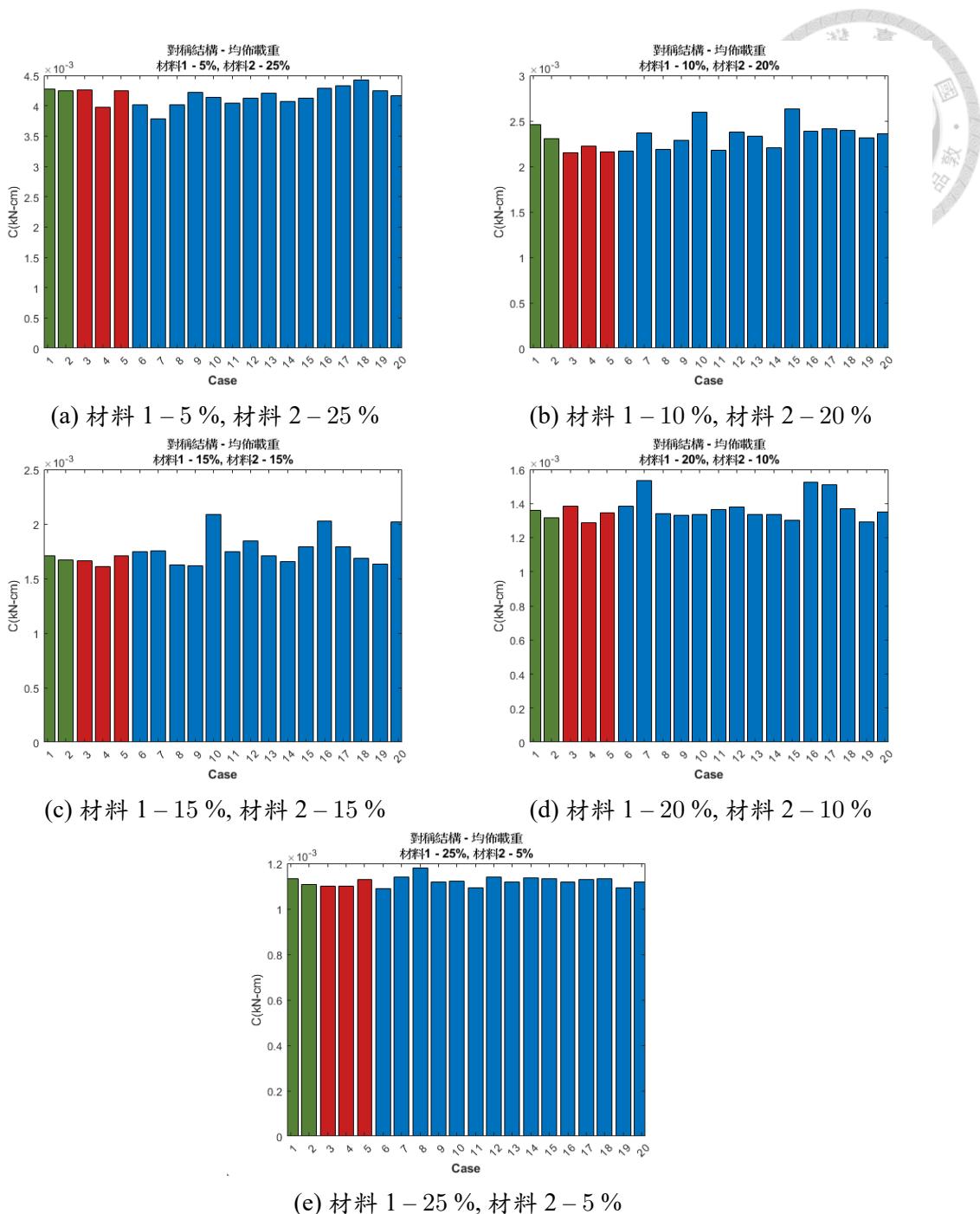


圖 5.10: [例題 5-1] 均佈載重不同材料比例 Case 1 ~ Case 20  $C$  值比較圖



表 5.3: 集中載重案例 Case 3 ~ Case 5 與 Case 6 ~ Case 20 不同材料比例平均值比較

材料分配比例	Case 3 ~ Case 5 平均值 (kN × m)	Case 6 ~ Case 20 平均值 (kN × m)	差值比 (%)
材料 1 - 5 %, 材料 2 - 25 %	$6.7653 \times 10^{-3}$	$6.8056 \times 10^{-3}$	-0.59
材料 1 - 10 %, 材料 2 - 20 %	$3.8198 \times 10^{-3}$	$3.8164 \times 10^{-3}$	0.09
材料 1 - 15 %, 材料 2 - 15 %	$2.6798 \times 10^{-3}$	$2.7527 \times 10^{-3}$	-2.65
材料 1 - 20 %, 材料 2 - 10 %	$2.0727 \times 10^{-3}$	$2.0656 \times 10^{-3}$	0.34
材料 1 - 25 %, 材料 2 - 5 %	$1.7182 \times 10^{-3}$	$1.7205 \times 10^{-3}$	-0.13

表 5.4: 均佈載重案例 Case 3 ~ Case 5 與 Case 6 ~ Case 20 不同材料比例平均值比較

材料分配比例	Case 3 ~ Case 5 平均值 (kN × m)	Case 6 ~ Case 20 平均值 (kN × m)	差值比 (%)
材料 1 - 5 %, 材料 2 - 25 %	$4.1650 \times 10^{-3}$	$4.1472 \times 10^{-3}$	0.43
材料 1 - 10 %, 材料 2 - 20 %	$2.1776 \times 10^{-3}$	$2.3461 \times 10^{-3}$	-7.18
材料 1 - 15 %, 材料 2 - 15 %	$1.6611 \times 10^{-3}$	$1.7817 \times 10^{-3}$	-6.77
材料 1 - 20 %, 材料 2 - 10 %	$1.3395 \times 10^{-3}$	$1.3788 \times 10^{-3}$	-2.85
材料 1 - 25 %, 材料 2 - 5 %	$1.1092 \times 10^{-3}$	$1.1240 \times 10^{-3}$	-1.32

$$\text{差值比}(\%) = \frac{(\text{mean}(\text{Case3} \sim \text{Case5}) - \text{mean}(\text{Case6} \sim \text{Case20}))}{\text{mean}(\text{Case6} \sim \text{Case20})} \times 100\% \quad (5.35)$$

根據上述兩種案例在五種不同材料比例 Case 1 ~ Case 20 的  $C$  值比較，從圖 5.9 與圖 5.10 可知，Case 6 ~ Case 20 在所有案例中較容易出現相比起來  $C$  值大非常多的結果且無法統計出任何相關性，而 Case 3 ~ Case 5 則較為平穩且  $C$  值較為接近；同時，將 Case 3 ~ Case 5 與 Case 6 ~ Case 20 分別計算  $C$  值平均值，再計算兩者之差值比，差值比計算為式 (5.35) 所示，差值比負值則為 Case 3 ~ Case 5  $C$  值平均值更小，反之則為 Case 6 ~ Case 20，而在表 5.3 與表 5.4 大部分皆為負值，即便有正值產生也都在 0.5 % 內，這些都印證本研究所提出之 Case 3 ~ Case 5 相比於本研究訂定之其他初始元素分布為較穩定之初始元素分布狀態，因此本研究後續研究會使用 Case 3 ~ Case 5 搭配基礎之 Case 1 和 Case 2 進行案例分析。



### [例題 5-2]

此例題配置與 [例題 5-1] 中相同，詳圖 5.9。材料內插方法：替代內插方法懲罰因子  $q = 5$ 。元素材料分別為實體材料與空心材料：實體材料 1(藍色元素) 楊氏模數  $E = 200 \text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 7.8 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ 、厚度  $t = 1 \text{ cm}$ ；實體材料 2(綠色元素) 楊氏模數  $E = 20 \text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 2.4 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ 、厚度  $t = 1 \text{ cm}$ ；空心元素(不顯示)楊氏模數  $E = 3.36 \times 10^{-2} \text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 2.4 \times 10^{-5} \text{ kg/cm}^3$ 、厚度  $t = 1 \text{ cm}$ 。此例題以平面應力分析，初始元素分布為 Case 1 ~ Case 5，圖中黑色邊線為設計領域範圍，元素類型選用 ABAQUS 中的 CPS8 元素，將設計領域離散為相同之方形元素，元素尺寸為  $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ 。BESO 參數設定：實體目標體積  $V^*$  為 30 % 的設計領域、材料 1 與材料 2 目標體積( $V^1, V^2$ )分別為 (10 %, 20 %), (15 %, 15 %), (20 %, 10 %)、敏感度因子篩選半徑  $r_{\min}^\alpha = 40 \text{ cm}$ 、體積改變比例  $ER = 2 \%$ 、最大添加體積比例  $AR_{\max} = 8 \%$ 、集中化係數  $\gamma = 0.5$ 、容許誤差  $\tau = 0.05 \%$ 、降低收斂標準迭代步數  $N_{\text{down}} = 300$  和停止迭代步數  $N_{\text{stop}} = 500$ 。

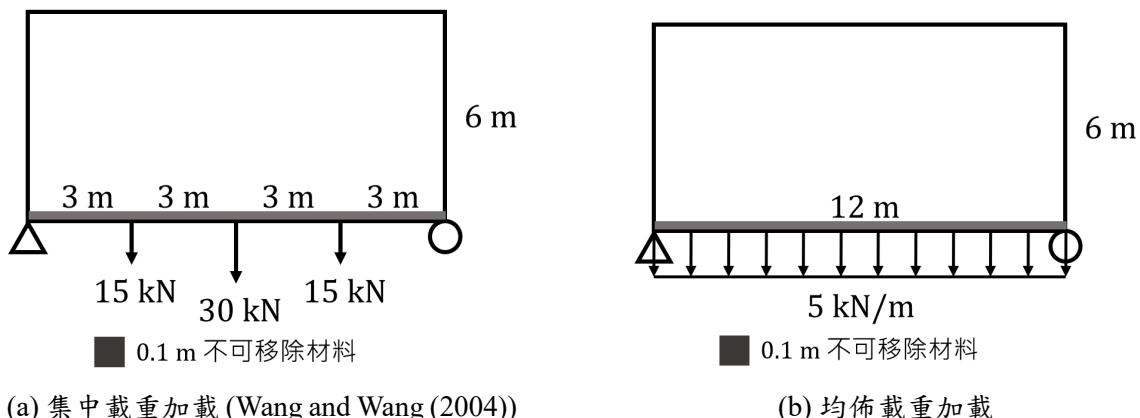


圖 5.11: [例題 5-1] 設計領域示意圖

該例題旨在討論對稱設計領域分別以集中載重與均佈載重「加入目標體積變化後的結果」與「加入目標體積變化與材料集中化(不考量設計領域邊緣長)後的結果」和「加入目標體積變化與材料集中化(考量設計領域邊緣長)後的結果」並以三種材料分配比例進行分析。



表 5.5: 集中載重材料比例 (10 %, 20 %) 加入目標體積變化前後的結果

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
初始元素分布					
起始材料比例 (%)	(100, 0)	(0, 100)	(10, 90)	(33.33, 66.67)	(30, 70)
未加入任何改進方法					
拓樸結果					
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$3.7228 \times 10^{-3}$	$3.8276 \times 10^{-3}$	$3.9113 \times 10^{-3}$	$3.6853 \times 10^{-3}$	$3.8628 \times 10^{-3}$
$iter$	289	169	99	$307(> N_{down})$	81
加入目標體積變化					
拓樸結果					
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$3.7307 \times 10^{-3}$	$3.7632 \times 10^{-3}$	$3.7169 \times 10^{-3}$	$3.6715 \times 10^{-3}$	$3.6695 \times 10^{-3}$
$iter, n$	$302(> N_{down}), 2$	$253, 2$	$301(> N_{down}), 2$	$306(> N_{down}), 2$	$309(> N_{down}), 2$



表 5.6: 集中載重材料比例 (10 %, 20 %) 加入目標體積變化後與加入材料集中化(不考量與考量設計領域邊緣長)的結果

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
初始元素分布					
起始材料比例 (%)	(100, 0)	(0, 100)	(10, 90)	(0.5, 99.5)	(33.33, 66.67)
加入目標體積變化後與加入材料集中化 ( $\gamma = 0.5$ )(不考量設計領域邊緣長)					
拓樸結果					
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$3.7192 \times 10^{-3}$	$3.6833 \times 10^{-3}$	$3.6829 \times 10^{-3}$	$3.6669 \times 10^{-3}$	$3.6835 \times 10^{-3}$
$iter, n$	258, 2	272, 2	277, 2	212, 2	236, 2
加入目標體積變化後與加入材料集中化 ( $\gamma = 0.5$ )(考量設計領域邊緣長)					
拓樸結果					
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$3.6654 \times 10^{-3}$	$3.6676 \times 10^{-3}$	$3.6611 \times 10^{-3}$	$3.6614 \times 10^{-3}$	$3.6972 \times 10^{-3}$
$iter, n$	299, 2	294, 2	195, 2	270, 3	243, 2



表 5.7: 集中載重材料比例 (15%, 15%) 加入目標體積變化前後的結果

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
初始元素分布					
起始材料比例 (%)	(100, 0)	(0, 100)	(15, 85)	(50, 50)	(30, 70)
未加入任何改進方法					
拓樸結果					
$C' (\text{kN} \times \text{cm})$	$2.6939 \times 10^{-3}$	$2.6974 \times 10^{-3}$	$2.6713 \times 10^{-3}$	$2.6884 \times 10^{-3}$	$2.6796 \times 10^{-3}$
$iter$	$305 (> N_{\text{down}})$	179	187	130	227
加入目標體積變化					
拓樸結果					
$C' (\text{kN} \times \text{cm})$	$2.6786 \times 10^{-3}$	$2.6942 \times 10^{-3}$	$2.7201 \times 10^{-3}$	$2.7216 \times 10^{-3}$	$2.7338 \times 10^{-3}$
$iter, n$	$301 (> N_{\text{down}}), 2$	234, 2	226, 2	246, 2	177, 2



表 5.8: 集中載重材料比例 (15%, 15%) 加入目標體積變化後與加入材料集中化(不考量與考量設計領域邊緣長)的結果

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
初始元素分布					
起始材料比例 (%)	(100, 0)	(0, 100)	(0, 100)	(15, 85)	(50, 50)
加入目標體積變化後與加入材料集中化 ( $\gamma = 0.5$ )(不考量設計領域邊緣長)					
拓樸結果					
$C$ (kN × cm)	$2.6885 \times 10^{-3}$	$2.6750 \times 10^{-3}$	$2.6601 \times 10^{-3}$	$2.6652 \times 10^{-3}$	$2.6618 \times 10^{-3}$
$iter, n$	231, 2	288, 2	183, 2	184, 2	200, 2
加入目標體積變化後與加入材料集中化 ( $\gamma = 0.5$ )(考量設計領域邊緣長)					
拓樸結果					
$C$ (kN × cm)	$2.7038 \times 10^{-3}$	$2.6642 \times 10^{-3}$	$2.6559 \times 10^{-3}$	$2.6733 \times 10^{-3}$	$2.6595 \times 10^{-3}$
$iter, n$	205, 2	226, 2	220, 2	190, 2	191, 2



表 5.9: 集中載重材料比例 (20 %, 10 %) 加入目標體積變化前後的結果

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
初始元素分布					
起始材料比例 (%)	(100, 0)	(0, 100)	(20, 80)	(66.67, 33.33)	(30, 70)
未加入任何改進方法					
拓樸結果					
$C$ (kN × cm)	$2.0821 \times 10^{-3}$	$2.0894 \times 10^{-3}$	$2.1169 \times 10^{-3}$	$2.0007 \times 10^{-3}$	$2.1005 \times 10^{-3}$
$iter$	170	149	156	75	81
加入目標體積變化					
拓樸結果					
$C$ (kN × cm)	$2.0068 \times 10^{-3}$	$2.0209 \times 10^{-3}$	$2.0277 \times 10^{-3}$	$2.0860 \times 10^{-3}$	$2.0284 \times 10^{-3}$
$iter, n$	$302(> N_{down}), 4$	$302(> N_{down}), 3$	$240, 3$	$303(> N_{down}), 3$	$298, 3$

表 5.10: 集中載重材料比例 (20 %, 10 %) 加入目標體積變化後與加入材料集中化 (不考量與考量設計領域邊緣長) 的結果

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
初始元素分布					
起始材料比例 (%)	(100, 0)	(0, 100)	(0, 80)	(66.67, 33.33)	(30, 70)
加入目標體積變化後與加入材料集中化 ( $\gamma = 0.5$ )(不考量設計領域邊緣長)					
拓樸結果					
$C$ (kN × cm)	$2.0887 \times 10^{-3}$	$2.0173 \times 10^{-3}$	$2.0326 \times 10^{-3}$	$2.0840 \times 10^{-3}$	$2.0192 \times 10^{-3}$
$iter, n$	$302 (> N_{down})$ , 3	$302 (> N_{down})$ , 3	188, 2	278, 3	180, 2
加入目標體積變化後與加入材料集中化 ( $\gamma = 0.5$ )(考量設計領域邊緣長)					
拓樸結果					
$C$ (kN × cm)	$2.0129 \times 10^{-3}$	$2.0997 \times 10^{-3}$	$2.0338 \times 10^{-3}$	$2.0851 \times 10^{-3}$	$2.0257 \times 10^{-3}$
$iter, n$	$303 (> N_{down})$ , 3	297, 2	188, 2	282, 3	207, 2



表 5.11: 均佈載重材料比例 (10 %, 20 %) 加入目標體積變化前後的結果

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
初始元素分布					
起始材料比例 (%)	(100, 0)	(0, 100)	(10, 90)	(33.33, 66.67)	(30, 70)
未加入任何改進方法					
拓樸結果					
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$2.4613 \times 10^{-3}$	$2.3082 \times 10^{-3}$	$2.1518 \times 10^{-3}$	$2.2259 \times 10^{-3}$	$2.1551 \times 10^{-3}$
$iter$	131	222	114	$307 (> N_{down})$	80
加入目標體積變化					
拓樸結果					
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$2.2764 \times 10^{-3}$	$2.1542 \times 10^{-3}$	$2.1567 \times 10^{-3}$	$2.2146 \times 10^{-3}$	$2.2138 \times 10^{-3}$
$iter, n$	274, 2	$301 (> N_{down}), 2$	$303 (> N_{down}), 2$	$302 (> N_{down}), 2$	286, 3

表 5.12: 均佈載重材料比例 (10 %, 20 %) 加入目標體積變化後與加入材料集中化 (不考量與考量設計領域邊緣長) 的結果

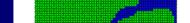
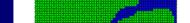
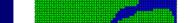
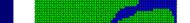
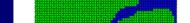
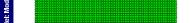
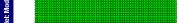
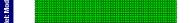
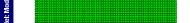
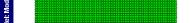
	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
初始元素分布					
起始材料比例 (%)	(100, 0)	(0, 100)	(0, 100)	(0, 100)	(0, 100)
加入目標體積變化後與加入材料集中化 ( $\gamma = 0.5$ )(不考量設計領域邊緣長)					
拓樸結果					
$C$ (kN × cm)	$2.2833 \times 10^{-3}$	$2.1566 \times 10^{-3}$	$2.1619 \times 10^{-3}$	$2.2065 \times 10^{-3}$	$2.1990 \times 10^{-3}$
$iter, n$	$301(> N_{down}), 2$	$305(> N_{down}), 2$	$255, 2$	$204, 2$	$298, 3$
加入目標體積變化後與加入材料集中化 ( $\gamma = 0.5$ )(考量設計領域邊緣長)					
拓樸結果					
$C$ (kN × cm)	$2.1917 \times 10^{-3}$	$2.1625 \times 10^{-3}$	$2.1629 \times 10^{-3}$	$2.2040 \times 10^{-3}$	$2.1714 \times 10^{-3}$
$iter, n$	$303(> N_{down}), 2$	$301(> N_{down}), 2$	$239, 2$	$206, 2$	$300, 3$

表 5.13: 均佈載重材料比例 (15 %, 15 %) 加入目標體積變化前後的結果

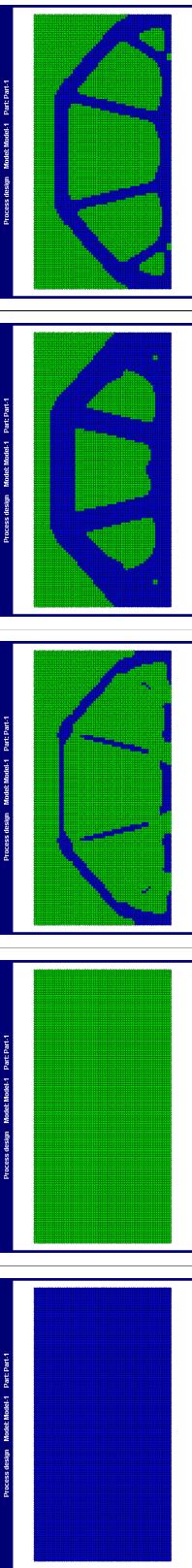
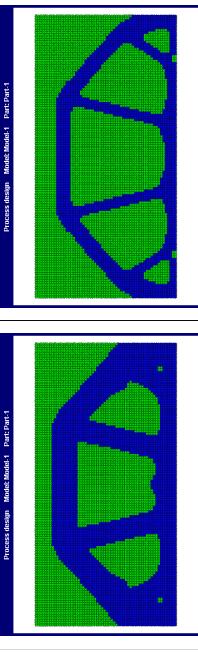
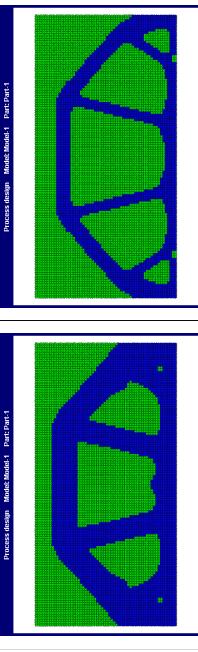
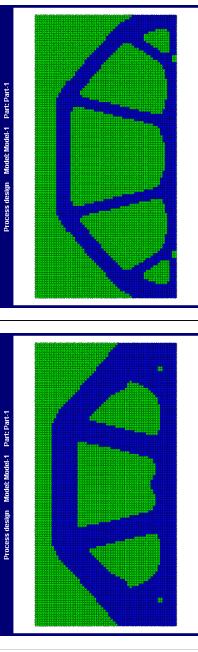
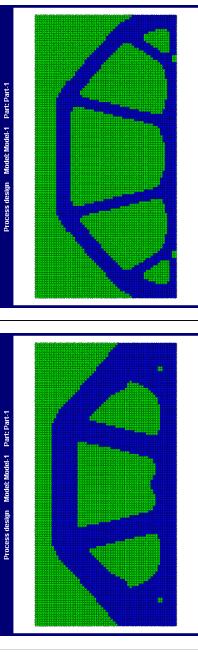
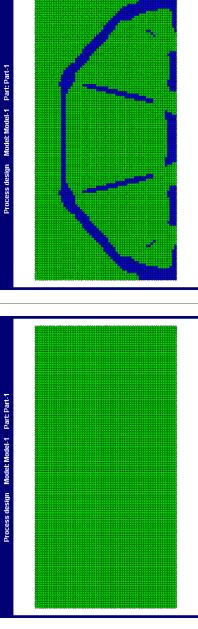
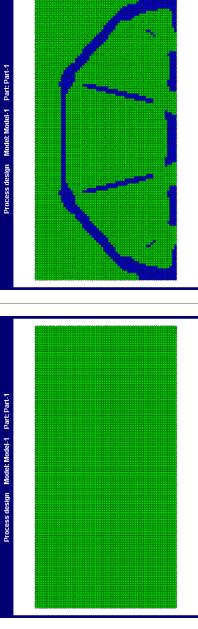
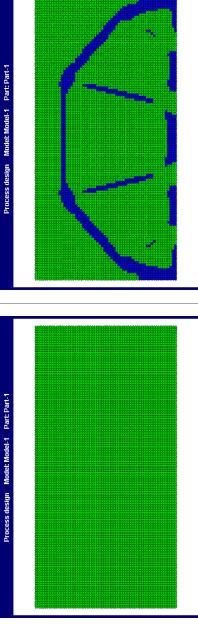
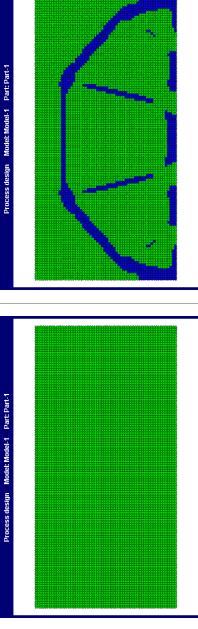
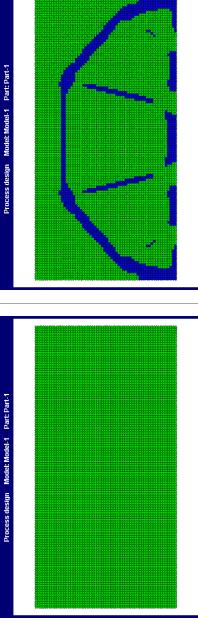
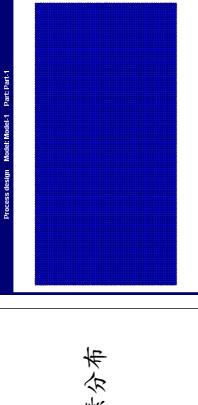
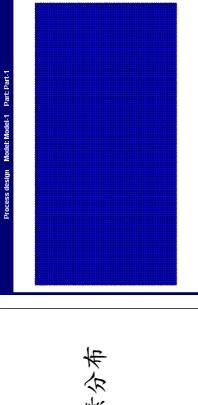
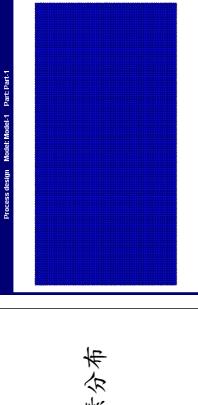
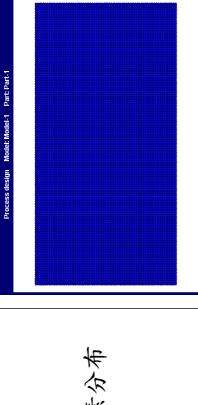
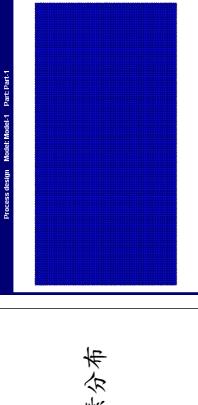
	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
初始元素分布					
起始材料比例 (%)	(100, 0)	(0, 100)	(15, 85)	(50, 50)	(30, 70)
未加入任何改進方法					
拓樸結果					
$C$ (kN × cm)	$1.7093 \times 10^{-3}$	$1.6690 \times 10^{-3}$	$1.6617 \times 10^{-3}$	$1.6099 \times 10^{-3}$	$1.7116 \times 10^{-3}$
$iter$	155	136	126	200	77
加入目標體積變化					
拓樸結果					
$C$ (kN × cm)	$1.6155 \times 10^{-3}$	$1.6460 \times 10^{-3}$	$1.6558 \times 10^{-3}$	$1.8350 \times 10^{-3}$	$1.7825 \times 10^{-3}$
$iter, n$	217, 2	$314(> N_{down})$ , 3	207, 2	$308(> N_{down})$ , 4	$314(> N_{down})$ , 3

表 5.14: 均佈載重材料比例 (15 %, 15 %) 加入目標體積變化後與加入材料集中化 (不考量與考量設計領域邊緣長) 的結果

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
初始元素分布					
起始材料比例 (%)	(100, 0)	(0, 100)	(0, 100)	(15, 85)	(50, 50)
加入目標體積變化後與加入材料集中化 ( $\gamma = 0.5$ )(不考量設計領域邊緣長)					
拓樸結果					
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$1.6279 \times 10^{-3}$	$1.5867 \times 10^{-3}$	$1.6438 \times 10^{-3}$	$1.5829 \times 10^{-3}$	$1.6547 \times 10^{-3}$
$iter, n$	289, 2	229, 2	185, 2	200, 2	$301(> N_{\text{down}}), 4$
加入目標體積變化後與加入材料集中化 ( $\gamma = 0.5$ )(考量設計領域邊緣長)					
拓樸結果					
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$1.6232 \times 10^{-3}$	$1.5782 \times 10^{-3}$	$1.6474 \times 10^{-3}$	$1.5833 \times 10^{-3}$	$1.6604 \times 10^{-3}$
$iter, n$	245, 2	287, 3	196, 2	188, 2	$303(> N_{\text{down}}), 4$

表 5.15: 均佈載重材料比例 (20 %, 10 %) 加入目標體積變化前後的結果

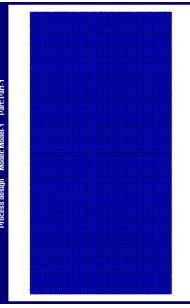
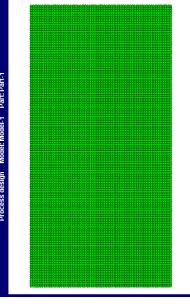
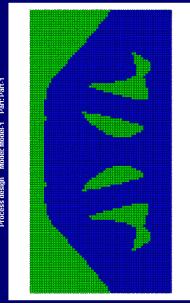
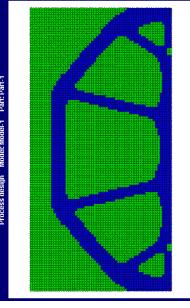
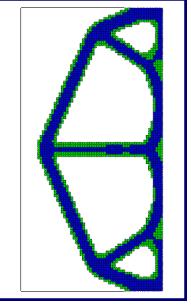
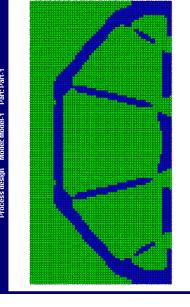
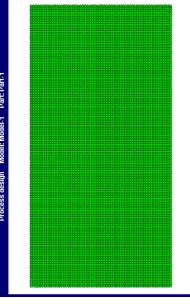
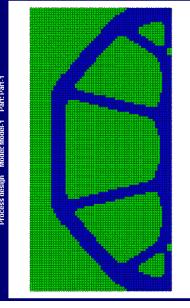
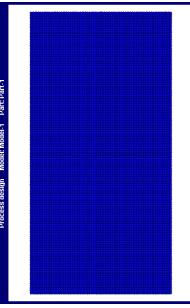
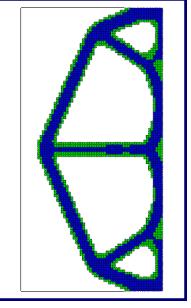
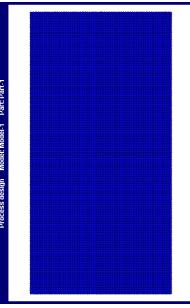
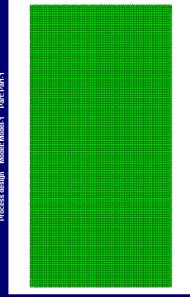
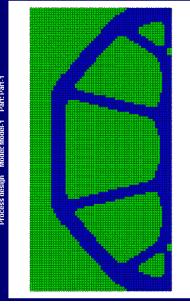
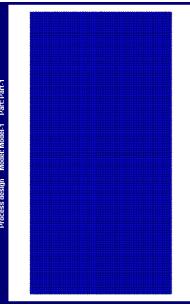
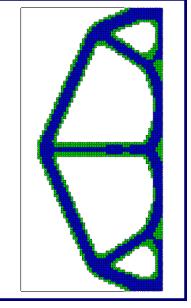
	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
初始元素分布					
起始材料比例 (%)	(100, 0)	(0, 100)	(20, 80)	(66.67, 33.33)	(30, 70)
未加入任何改進方法					
拓樸結果					
$C$ (kN × cm)	$1.3597 \times 10^{-3}$	$1.3141 \times 10^{-3}$	$1.3865 \times 10^{-3}$	$1.2858 \times 10^{-3}$	$1.3461 \times 10^{-3}$
$iter$	162	138	$308 (> N_{down})$	111	130
加入目標體積變化					
拓樸結果					
$C$ (kN × cm)	$1.3316 \times 10^{-3}$	$1.2881 \times 10^{-3}$	$1.3744 \times 10^{-3}$	$1.2793 \times 10^{-3}$	$1.3294 \times 10^{-3}$
$iter, n$	259, 2	265, 2	$303 (> N_{down}), 3$	201, 2	$305 (> N_{down}), 2$



表 5.16: 均佈載重材料比例 (20 %, 10 %) 加入目標體積變化後與加入材料集中化 (不考量與考量設計領域邊緣長) 的結果

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
初始元素分布					
起始材料比例 (%)	(100, 0)	(0, 100)	(20, 80)	(66.67, 33.33)	(30, 70)
加入目標體積變化後與加入材料集中化 ( $\gamma = 0.5$ )(不考量設計領域邊緣長)					
拓樸結果					
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$1.3284 \times 10^{-3}$	$1.2829 \times 10^{-3}$	$1.3565 \times 10^{-3}$	$1.2787 \times 10^{-3}$	$1.3223 \times 10^{-3}$
$iter, n$	211, 2	259, 2	183, 2	175, 2	246, 2
加入目標體積變化後與加入材料集中化 ( $\gamma = 0.5$ )(考量設計領域邊緣長)					
拓樸結果					
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$1.3216 \times 10^{-3}$	$1.2793 \times 10^{-3}$	$1.3577 \times 10^{-3}$	$1.2787 \times 10^{-3}$	$1.3174 \times 10^{-3}$
$iter, n$	224, 2	224, 2	172, 2	183, 2	171, 2



### [例題 5-3]

此例題配置與 [例題 3-6] 中相同，詳圖 5.12，將其延伸至抗拉壓雙材料。材料內插方法：替代內插方法懲罰因子  $q = 5$ 。元素材料分別為實體材料與空心材料：實體材料 1(藍色元素) 楊氏模數  $E = 200 \text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、厚度  $t = 1 \text{ cm}$ ；實體材料 2(綠色元素) 楊氏模數  $E = 20 \text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、厚度  $t = 1 \text{ cm}$ ；空心元素(不顯示) 楊氏模數  $E = 3.36 \times 10^{-2} \text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、厚度  $t = 1 \text{ cm}$ 。此例題以平面應力分析，初始元素分布為 Case 1 ~ Case 5，圖中黑色邊線為設計領域範圍，元素類型選用 ABAQUS 中的 CPS8 元素，將設計領域離散為相同之方形元素，元素尺寸為  $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$ 。BESO 參數設定：目標體積  $V^*$  為 50 % 的設計領域、材料 1 與材料 2 目標體積 ( $V^1, V^2$ ) 分別為 (10 %, 40 %), (20 %, 30 %), (30 %, 20 %)、敏感度因子篩選半徑  $r_{\min}^\alpha = 10 \text{ cm}$ 、體積改變比例  $ER = 2 \%$ 、最大添加體積比例  $AR_{\max} = 2 \%$ 、容許誤差  $\tau = 0.05 \%$ 、降低收斂標準迭代步數  $N_{\text{down}} = 300$  和停止迭代步數  $N_{\text{stop}} = 500$ 。

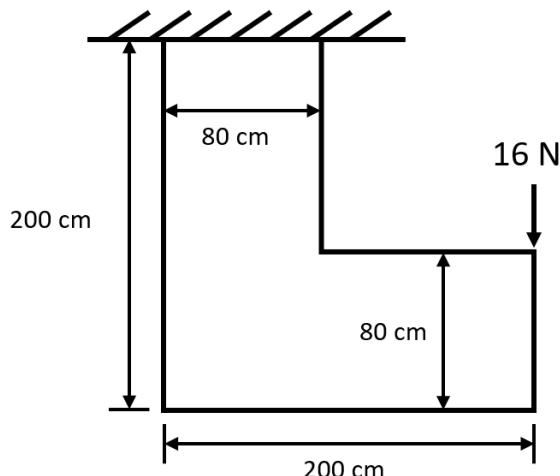


圖 5.12: [例題 5-3] 設計領域示意圖 (Xu et al. (2020))

該例題旨在討論不對稱設計領域「加入目標體積變化後的結果」與「加入目標體積變化與材料集中化(不考量設計領域邊緣長)後的結果」和「加入目標體積變化與材料集中化(考量設計領域邊緣長)後的結果」並以三種材料分配比例進行分析。



表 5.17: 不對稱設計領域材料比例 (10 %, 40 %) 加入目標體積變化前後的結果

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
初始元素分布					
起始材料比例 (%)	(100, 0)	(0, 100)	(0, 100)	(10, 90)	(20, 80)
未加入任何改進方法					
拓樸結果					
$C$ (kN × cm)	$3.6856 \times 10^{-6}$	$3.6956 \times 10^{-6}$	$3.7394 \times 10^{-6}$	$3.7510 \times 10^{-6}$	$3.7481 \times 10^{-6}$
$iter$	$306 (> N_{down})$	159	$304 (> N_{down})$	74	117
加入目標體積變化					
拓樸結果					
$C$ (kN × cm)	$3.7111 \times 10^{-6}$	$3.7201 \times 10^{-6}$	$3.7169 \times 10^{-6}$	$3.7013 \times 10^{-6}$	$3.7101 \times 10^{-6}$
$iter, n$	256, 2	178, 2	203, 2	240, 2	236, 2

表 5.18: 不對稱設計領域材料比例 (10 %, 40 %) 加入目標體積變化後與加入材料集中化(不考量與考量設計領域邊緣長)的結果

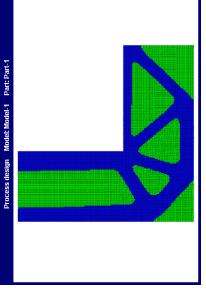
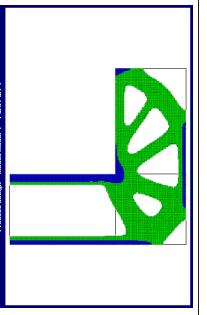
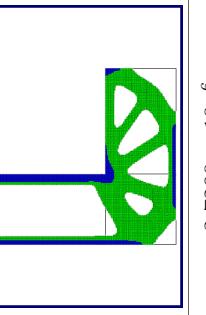
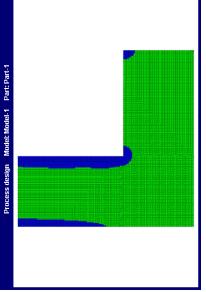
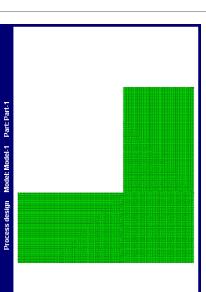
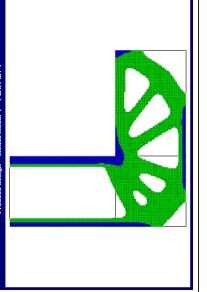
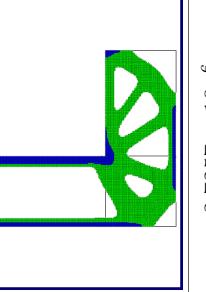
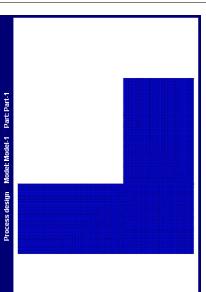
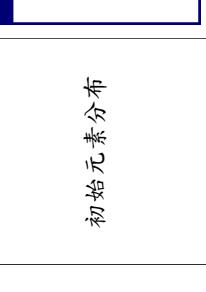
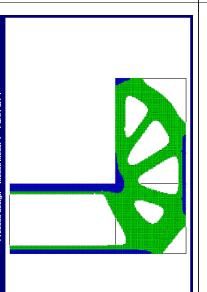
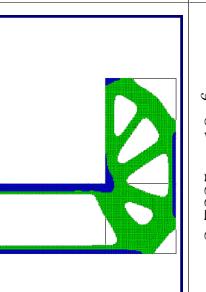
	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
初始元素分布					
起始材料比例 (%)	(100, 0)	(0, 100)	(0, 90)	(20, 80)	(50, 50)
加入目標體積變化後與加入材料集中化 ( $\gamma = 0.5$ )(不考量設計領域邊緣長)					
拓樸結果					
$C$ (kN × cm)	$3.7366 \times 10^{-6}$	$3.7281 \times 10^{-6}$	$3.7275 \times 10^{-6}$	$3.7230 \times 10^{-6}$	$3.7249 \times 10^{-6}$
$iter, n$	$305 (> N_{down})$ , 3	193, 2	184, 2	241, 3	217, 2
加入目標體積變化後與加入材料集中化 ( $\gamma = 0.5$ )(考量設計領域邊緣長)					
拓樸結果					
$C$ (kN × cm)	$3.7235 \times 10^{-6}$	$3.7261 \times 10^{-6}$	$3.7257 \times 10^{-6}$	$3.7250 \times 10^{-6}$	$3.7290 \times 10^{-6}$
$iter, n$	265, 2	255, 3	185, 2	188, 2	283, 3



表 5.19: 不對稱設計領域材料比例 (20 %, 30 %) 加入目標體積變化前後的結果

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
初始元素分布					
起始材料比例 (%)	(100, 0)	(0, 100)	(20, 80)	(40, 60)	(50, 50)
未加入任何改進方法					
拓樸結果					
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$2.3475 \times 10^{-6}$	$2.3898 \times 10^{-6}$	$2.4178 \times 10^{-6}$	$2.3642 \times 10^{-6}$	$2.2886 \times 10^{-6}$
$iter$	152	106	301 ( $> N_{down}$ )	85	303 ( $> N_{down}$ )
加入目標體積變化					
拓樸結果					
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$2.2831 \times 10^{-6}$	$2.3419 \times 10^{-6}$	$2.2612 \times 10^{-6}$	$2.3333 \times 10^{-6}$	$2.3412 \times 10^{-6}$
$iter, n$	345 ( $> N_{down}$ ), 2	209, 2	305 ( $> N_{down}$ ), 2	269, 3	304 ( $> N_{down}$ ), 3



表 5.20: 不對稱設計領域材料比例 (20 %, 30 %) 加入目標體積變化後與加入材料集中化(不考量與考量設計領域邊緣長)的結果

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
初始元素分布					
起始材料比例 (%)	(100, 0)	(0, 100)	(20, 80)	(40, 60)	(50, 50)
加入目標體積變化後與加入材料集中化 ( $\gamma = 0.5$ )(不考量設計領域邊緣長)					
拓樸結果					
$C$ (kN × cm)	$2.3274 \times 10^{-6}$	$2.2700 \times 10^{-6}$	$2.2308 \times 10^{-6}$	$2.2539 \times 10^{-6}$	$2.2606 \times 10^{-6}$
$iter, n$	$309 (> N_{down})$ , 3	269, 3	268, 2	180, 2	189, 2
加入目標體積變化後與加入材料集中化 ( $\gamma = 0.5$ )(考量設計領域邊緣長)					
拓樸結果					
$C$ (kN × cm)	$2.3493 \times 10^{-6}$	$2.2422 \times 10^{-6}$	$2.2535 \times 10^{-6}$	$2.2544 \times 10^{-6}$	$2.2566 \times 10^{-6}$
$iter, n$	289, 2	260, 3	199, 2	190, 2	249, 3



表 5.21: 不對稱設計領域材料比例 (30 %, 20 %) 加入目標體積變化前後的結果

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
初始元素分布					
起始材料比例 (%)	(100, 0)	(0, 100)	(30, 70)	(60, 40)	(50, 50)
未加入任何改進方法					
拓樸結果					
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$1.6174 \times 10^{-6}$	$1.6607 \times 10^{-6}$	$1.6879 \times 10^{-6}$	$1.6148 \times 10^{-6}$	$1.6603 \times 10^{-6}$
$iter$	71	160	47	44	54
加入目標體積變化					
拓樸結果					
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$1.6154 \times 10^{-6}$	$1.6162 \times 10^{-6}$	$1.6194 \times 10^{-6}$	$1.6150 \times 10^{-6}$	$1.6149 \times 10^{-6}$
$iter, n$	197, 2	225, 2	262, 3	181, 2	173, 2

表 5.22: 不對稱設計領域材料比例 (30 %, 20 %) 加入目標體積變化後與加入材料集中化(不考量與考量設計領域邊緣長)的結果

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
初始元素分布					
起始材料比例 (%)	(100, 0)	(0, 100)	(0, 100)	(30, 70)	(60, 40)
加入目標體積變化後與加入材料集中化 ( $\gamma = 0.5$ )(不考量設計領域邊緣長)					
拓樸結果					
$C$ (kN × cm)	$1.6174 \times 10^{-6}$	$1.6187 \times 10^{-6}$	$1.6272 \times 10^{-6}$	$1.6183 \times 10^{-6}$	$1.6185 \times 10^{-6}$
$iter, n$	200, 2	228, 2	242, 3	186, 2	175, 2
加入目標體積變化後與加入材料集中化 ( $\gamma = 0.5$ )(考量設計領域邊緣長)					
拓樸結果					
$C$ (kN × cm)	$1.6172 \times 10^{-6}$	$1.6186 \times 10^{-6}$	$1.6275 \times 10^{-6}$	$1.6191 \times 10^{-6}$	$1.6177 \times 10^{-6}$
$iter, n$	193, 2	226, 2	246, 3	184, 2	172, 2



### [例題 5-4]

此例題配置與 [例題 3-5] 相同，詳圖 5.13，將其延伸至雙材料，在上方中點加載集中載重  $F = 15303.6\text{ N}$ ,  $0\text{ N}$  與自重加載。材料內插方法：替代內插方法懲罰因子  $q = 5$ 。元素材料分別為實體材料與空心材料：實體材料 1(藍色元素) 楊氏模數  $E = 200\text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 7.8 \times 10^{-5}\text{ kg/cm}^3$ 、厚度  $t = 100\text{ cm}$ ；實體材料 2(綠色元素) 楊氏模數  $E = 20\text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 2.4 \times 10^{-5}\text{ kg/cm}^3$ 、厚度  $t = 100\text{ cm}$ ；空心元素(不顯示)楊氏模數  $E = 3.36 \times 10^{-2}\text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 2.4 \times 10^{-7}\text{ kg/cm}^3$ 、厚度  $t = 100\text{ cm}$ 。此例題以平面應力分析，初始元素分布為 Case 1 ~ Case 5，圖中黑色邊線為設計領域範圍，元素類型選用 ABAQUS 中的 CPS4 元素，將設計領域離散為相同之方形元素，元素尺寸為  $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ 。BESO 參數設定：目標體積  $V^*$  為 40 % 的設計領域、材料 1 與材料 2 目標體積 ( $V^1, V^2$ ) 分別為 (10 %, 30 %)、敏感度因子篩選半徑  $r_{\min}^\alpha = 30\text{ cm}$ 、體積改變比例  $ER = 2\%$ 、最大添加體積比例  $AR_{\max} = 2\%$ 、容許誤差  $\tau = 0.05\%$ 、降低收斂標準迭代步數  $N_{\text{down}} = 300$  和停止迭代步數  $N_{\text{stop}} = 500$ 。

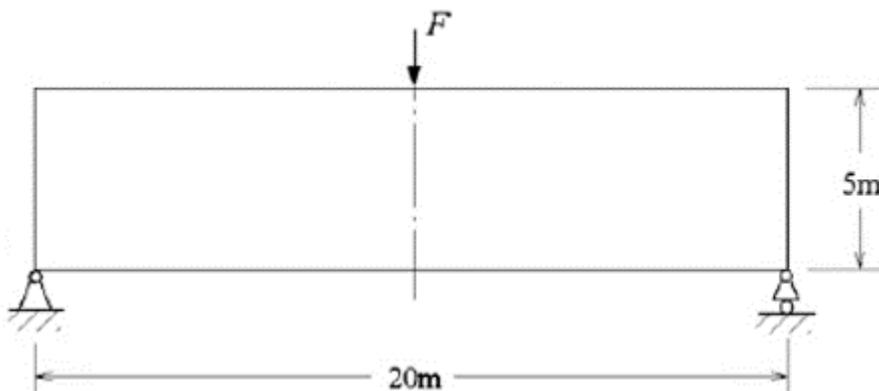


圖 5.13: [例題 5-4] 設計領域示意圖 (Huang and Xie (2011))

該例題旨在討論對稱設計領域與加入自重載重案例「加入目標體積變化後的結果」與「加入目標體積變化與材料集中化(不考量設計領域邊緣長)後的結果」和「加入目標體積變化與材料集中化(考量設計領域邊緣長)後的結果」並以一種材料分配比例進行分析。



表 5.23: 「W/自重,  $F = 0$  N」案例材料比例(10 %, 30 %)加入目標體積變化前後的結果

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
初始元素分布					
起始材料比例 (%)	(100, 0)	(0, 100)	(10, 90)	(25, 75)	(40, 60)
未加入任何改進方法					
拓樸結果					
$C$ (kN × cm)	$1.764 \times 10^{-3}$	$1.952 \times 10^{-3}$	$1.942 \times 10^{-3}$	$1.855 \times 10^{-3}$	$1.735 \times 10^{-3}$
$iter$	173	103	107	182	124
加入目標體積變化					
拓樸結果					
$C$ (kN × cm)	$1.756 \times 10^{-3}$	$1.743 \times 10^{-3}$	$1.741 \times 10^{-3}$	$1.72 \times 10^{-3}$	$1.733 \times 10^{-3}$
$iter, n$	$312 (> N_{down})$ , 3	$253$ , 2	$167$ , 3	$244$ , 3	$230$ , 2



表 5.24: 「W/自重,  $F = 0 \text{ N}_\perp$ 」案例材料比例 (10 %, 30 %) 加入目標體積變化後與加入材料集中化(不考量與考量設計領域邊緣長)的結果

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
初始元素分布					
起始材料比例 (%)	(100, 0)	(0, 100)	(10, 90)	(25, 75)	(40, 60)
加入目標體積變化後與加入材料集中化 ( $\gamma = 0.5$ )(不考量設計領域邊緣長)					
拓樸結果					
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$1.777 \times 10^{-3}$	$1.781 \times 10^{-3}$	$1.773 \times 10^{-3}$	$1.782 \times 10^{-3}$	$1.763 \times 10^{-3}$
$iter, n$	257, 2	231, 2	183, 2	194, 2	$304(> N_{down}), 3$
加入目標體積變化後與加入材料集中化 ( $\gamma = 0.5$ )(考量設計領域邊緣長)					
拓樸結果					
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$1.78 \times 10^{-3}$	$1.778 \times 10^{-3}$	$1.772 \times 10^{-3}$	$1.783 \times 10^{-3}$	$1.784 \times 10^{-3}$
$iter, n$	$318(> N_{down}), 3$	217, 2	193, 2	$306(> N_{down}), 3$	221, 2

表 5.25: 「w/ 自重,  $F = 15303.6 \text{ N}$ 」案例材料比例(10%, 30%)加入目標體積變化前後的結果

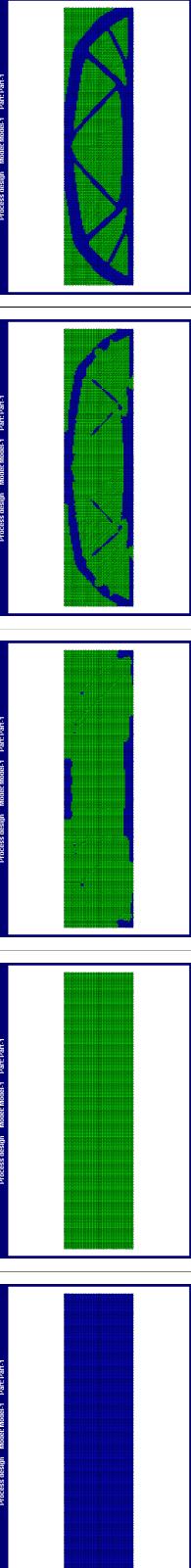
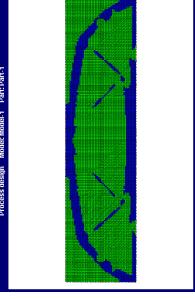
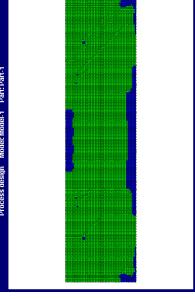
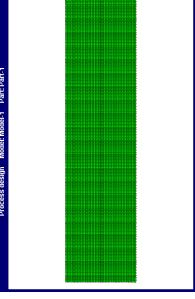
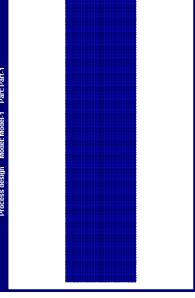
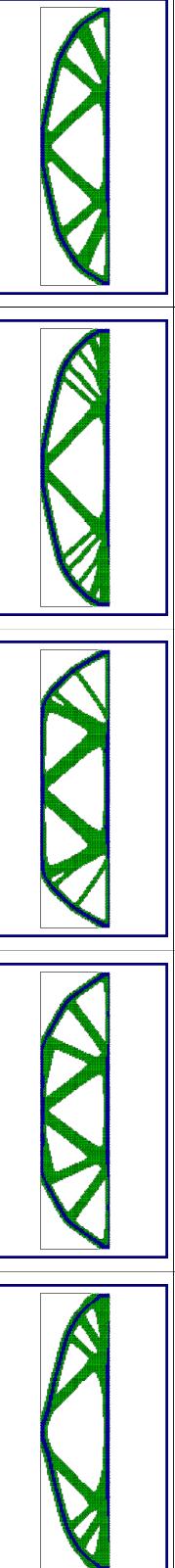
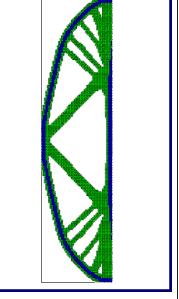
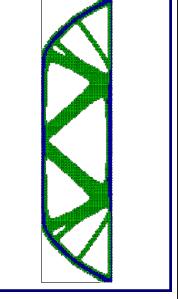
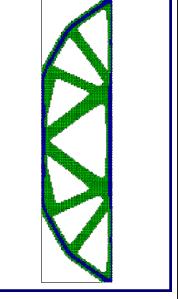
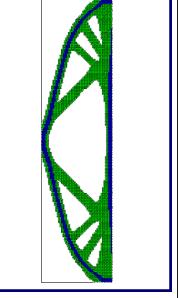
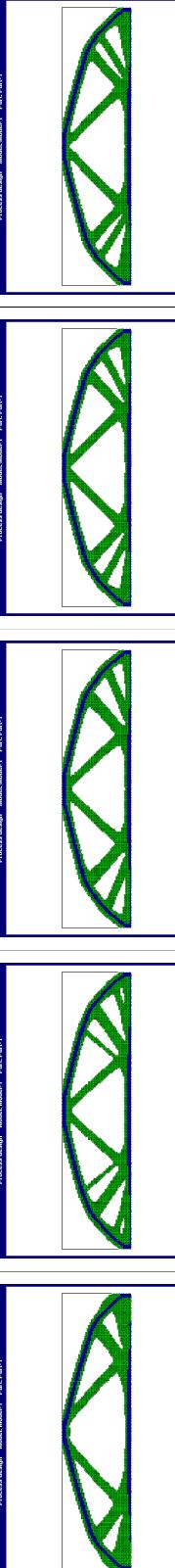
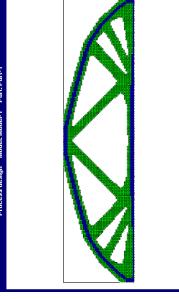
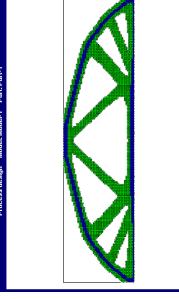
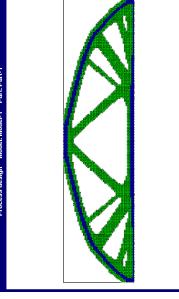
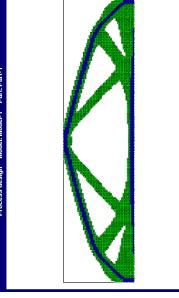
	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
初始元素分布					
起始材料比例 (%)	(100, 0)	(0, 100)	(10, 90)	(25, 75)	(40, 60)
未加入任何改進方法					
拓樸結果					
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$1.8651 \times 10^{-2}$	$1.9893 \times 10^{-2}$	$2.0126 \times 10^{-2}$	$1.8963 \times 10^{-2}$	$1.8344 \times 10^{-2}$
$iter$	132	111	96	162	81
加入目標體積變化					
拓樸結果					
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$1.8595 \times 10^{-2}$	$1.8182 \times 10^{-2}$	$1.8231 \times 10^{-2}$	$1.8093 \times 10^{-2}$	$1.8135 \times 10^{-2}$
$iter, n$	274, 2	201, 2	191, 2	172, 2	180, 2

表 5.26: 「 $w$ /自重,  $F = 15303.6\text{ N}$ 」案例材料比例(10%, 30%)加入目標體積變化後與加入材料集中化(不考量與考量設計領域邊緣長)的結果

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
初始元素分布					
起始材料比例 (%)	(100, 0)	(0, 100)	(0, 100)	(10, 90)	(25, 75)
加入目標體積變化後與加入材料集中化( $\gamma = 0.5$ )(不考量設計領域邊緣長)					
拓樸結果					
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$1.8683 \times 10^{-2}$	$1.8136 \times 10^{-2}$	$1.8251 \times 10^{-2}$	$1.8084 \times 10^{-2}$	$1.8117 \times 10^{-2}$
$iter, n$	238, 2	195, 2	196, 2	167, 2	176, 2
加入目標體積變化後與加入材料集中化( $\gamma = 0.5$ )(考量設計領域邊緣長)					
拓樸結果					
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$1.8176 \times 10^{-2}$	$1.8164 \times 10^{-2}$	$1.8283 \times 10^{-2}$	$1.8092 \times 10^{-2}$	$1.8118 \times 10^{-2}$
$iter, n$	225, 2	193, 2	186, 2	184, 2	196, 2

由 [例題 5-2] 至 [例題 5-4] 進行共同討論，首先觀察完全不加入任何改進之五種起始元素分布之結果，可以發現以大部分的案例來看可以得出以下三點結果：



1. Case 1 通常能夠得到次好的解。
2. 比較 Case 4 跟 Case 5，起始材料 1 比例較高者大部分的案例都能夠得到最好或是次好的解。

本研究則建議使用者選擇初始元素分布時，若沒有單一材料拓樸結果，可以選用 Case 1 來作為較好的初始元素分布；有單一材料拓樸結果，則可以根據使用者對於分析案例之目標體積與目標材料 1 體積的設定選擇使用 Case 4 或 Case 5 作為較好的初始元素分布。

再來觀察不加入改進與加入目標體積變化之比較，可以發現雖然會消耗更多迭代步數但能夠使拓樸結果突破目前的結構形式，使其結構順從度  $C$  能夠得到更小的值，而對於原本結構形式已經十分良好的拓樸結果來說，雖然可能會造成些微的結構順從度上升且消耗更多步數，但並不會使其產生大量的結構變化。對於整體五種案例來說，目標體積變化能夠使五種起始元素分布皆獲得相似的結構與相似的結構順從度，並且能夠針對各類案例自適應調整所需執行次數，但依然會存在部分較糟糕之拓樸結果，並且消耗步數仍然過多，仍有許多不足之處。

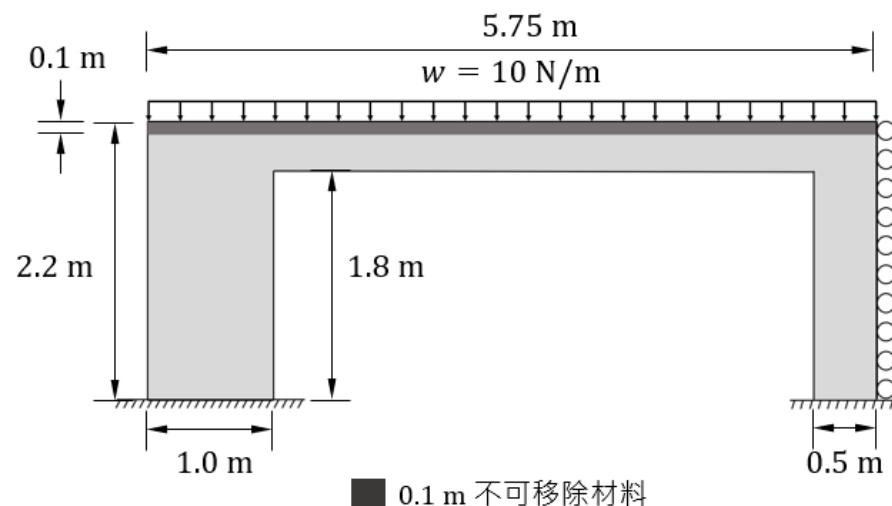
透過引入材料集中化並使其能夠考量設計領域邊緣長後並與目標體積變化同時使用後，能夠更進一步的避免部分糟糕之拓樸結果，並且大部分案例在引入材料集中化後會使用較少的迭代步數與目標體積執行次數，雖然會因為材料的集中導致其在大部分案例的結構順從度都會些微上升，或可能因此會造成一定程度的結果改變。

最後則是針對於材料集中化是否要考量設計領域邊緣長，透過大量分析可以知道，多數案例對於該改進是不受影響的或影響甚少，但在少數案例如表 5.12 中 [例題 5-2] 均佈載重 (10 %, 30 %) 的 Case 1 與表 5.26 中 [例題 5-4] 「w/ 自重,  $F = 15303.6\text{ N}$ 」(10 %, 30 %) 的 Case 1，能夠使最下部材料 1 的部分連接起來，讓整體結構順從度能得到更小的值。

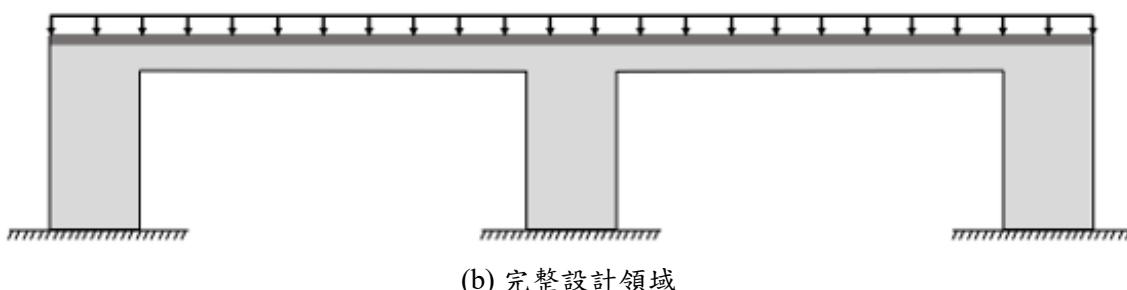


### [例題 5-5]

此例題配置與 [例題 3-8] 中相同，詳圖 5.14，並將其延伸至雙材料。材料內插方法：替代內插方法懲罰因子  $q = 5, 10$ 。元素材料分別為實體材料與空心材料：實體材料 1(藍色元素) 楊氏模數  $E = 200 \text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 7.8 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ 、厚度  $t = 1 \text{ cm}$ ；實體材料 2(綠色元素) 楊氏模數  $E = 20 \text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 2.4 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ 、厚度  $t = 1 \text{ cm}$ ；空心元素(不顯示)楊氏模數  $E = 3.36 \times 10^{-2} \text{ GPa}$ 、柏松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 2.4 \times 10^{-5} \text{ kg/cm}^3$ 、厚度  $t = 1 \text{ cm}$ 。此例題以平面應力分析，初始元素分布為 Case 1 ~ Case 5，圖中黑色邊線為設計領域範圍，元素類型選用 ABAQUS 中的 CPS8 元素，將設計領域離散為相同之方形元素，元素尺寸為  $2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$ 。BESO 參數設定：目標體積  $V^*$  為 40 % 的設計領域、材料 1 與材料 2 目標體積 ( $V^1, V^2$ ) 為 (10 %, 30 %)、敏感度因子篩選半徑  $r_{\min}^\alpha = 5 \text{ cm}$ 、體積改變比例  $ER = 4 \%$ 、最大添加體積比例  $AR_{\max} = 4 \%$ 、容許誤差  $\tau = 0.01 \%$ 、降低收斂標準迭代步數  $N_{\text{down}} = 300$  和停止迭代步數  $N_{\text{stop}} = 500$ 。



(a) 1/2 對稱簡化模型



(b) 完整設計領域

圖 5.14: [例題 4-3] 設計領域示意圖

表 5.27: 「w/o 自重,  $w = 10 \text{ N/m}_\perp$ 」案例加入目標體積變化前後的結果

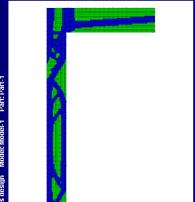
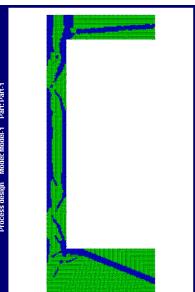
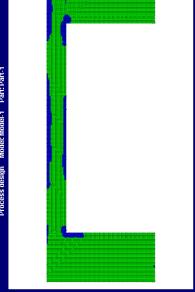
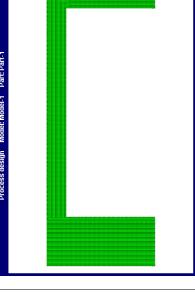
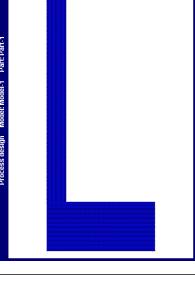
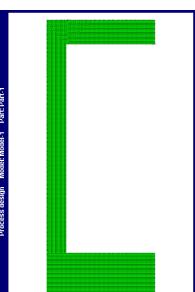
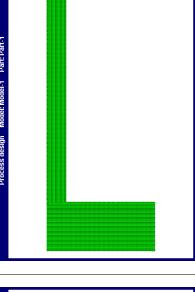
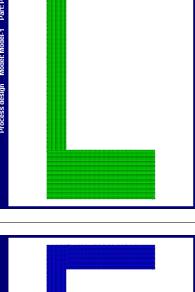
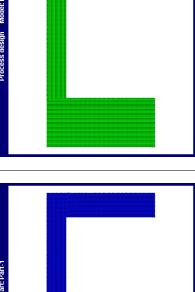
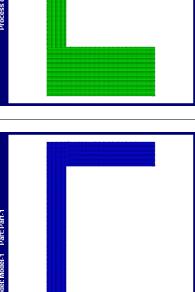
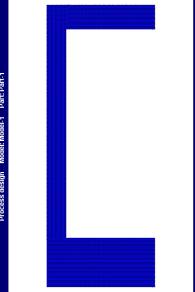
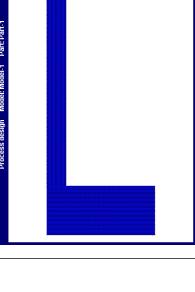
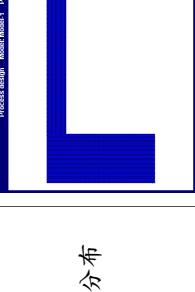
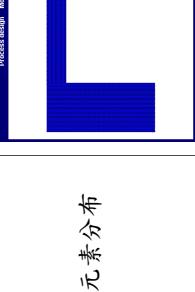
	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
初始元素分布					
起始材料比例 (%)	(100, 0)	(0, 100)	(10, 90)	(25, 75)	(40, 60)
未加入任何改進方法					
拓樸結果					
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$7.4075 \times 10^{-6}$	$7.3465 \times 10^{-6}$	$7.2789 \times 10^{-6}$	$7.3697 \times 10^{-6}$	$7.4045 \times 10^{-6}$
$iter$	69	61	93	117	50
加入目標體積變化					
拓樸結果					
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$7.3809 \times 10^{-6}$	$7.3785 \times 10^{-6}$	$7.3877 \times 10^{-6}$	$7.3921 \times 10^{-6}$	$7.4049 \times 10^{-6}$
$iter, n$	288, 3	203, 2	253, 3	224, 3	223, 3



表 5.28: 「w/o 自重,  $w = 10 \text{ N/m}_\perp$ 」案例加入目標體積變化後與加入材料集中化(不考量與考量設計領域邊緣長)的結果

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
初始元素分布					
起始材料比例 (%)	(100, 0)	(0, 100)	(10, 90)	(25, 75)	(40, 60)
加入目標體積變化後與加入材料集中化( $\gamma = 0.5$ )(不考量設計領域邊緣長)					
拓樸結果					
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$7.3734 \times 10^{-6}$	$7.3860 \times 10^{-6}$	$7.3680 \times 10^{-6}$	$7.3890 \times 10^{-6}$	$7.3793 \times 10^{-6}$
$iter, n$	203, 2	189, 2	289, 4	174, 2	280, 4
加入目標體積變化後與加入材料集中化( $\gamma = 0.5$ )(考量設計領域邊緣長)					
拓樸結果					
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$7.3999 \times 10^{-6}$	$7.3970 \times 10^{-6}$	$7.3624 \times 10^{-6}$	$7.4425 \times 10^{-6}$	$7.3877 \times 10^{-6}$
$iter, n$	174, 2	183, 2	191, 2	258, 4	168, 2

表 5.29: 「w/ 自重, w = 10 N/m」案例加入目標體積變化前後的結果

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
初始元素分布					
起始材料比例 (%)	(100, 0)	(0, 100)	(10, 90)	(25, 75)	(40, 60)
未加入任何改進方法					
拓樸結果					
$C$ (kN × cm)	$4.2177 \times 10^{-4}$	$4.4245 \times 10^{-4}$	$4.2875 \times 10^{-4}$	$4.2021 \times 10^{-4}$	$4.2142 \times 10^{-4}$
$iter$	$317(> N_{down})$	$318(> N_{down})$	35	143	$314(> N_{down})$
加入目標體積變化					
拓樸結果					
$C$ (kN × cm)	$4.4689 \times 10^{-4}$	$4.2425 \times 10^{-4}$	$8.2752 \times 10^{-4}$	$4.1685 \times 10^{-4}$	$4.2216 \times 10^{-4}$
$iter, n$	$372(> N_{down}), 2$	$356(> N_{down}), 2$	$500(= N_{stop}), 4$	$312(> N_{down}), 2$	$435(> N_{down}), 3$

表 5.30: 「 $w$ /自重,  $w = 10 \text{ N/m}$ 」案例加入目標體積變化後與加入材料集中化(不考量與考量設計領域邊緣長)的結果

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
初始元素分布					
起始材料比例 (%)	(100, 0)	(0, 100)	(10, 90)	(25, 75)	(40, 60)
加入目標體積變化後與加入材料集中化( $\gamma = 0.5$ )(不考量設計領域邊緣長)					
拓樸結果					
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$4.1082 \times 10^{-4}$	$4.4031 \times 10^{-4}$	$4.1445 \times 10^{-4}$	$4.1135 \times 10^{-4}$	$4.1561 \times 10^{-4}$
$iter, n$	248, 2	287, 2	245, 3	135, 2	233, 2
加入目標體積變化後與加入材料集中化( $\gamma = 0.5$ )(考量設計領域邊緣長)					
拓樸結果					
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$4.2848 \times 10^{-4}$	$4.1374 \times 10^{-4}$	$4.1157 \times 10^{-4}$	$4.1630 \times 10^{-4}$	$4.0979 \times 10^{-4}$
$iter, n$	298, 3	$302(> N_{\text{down}}), 3$	$301(> N_{\text{down}}), 3$	163, 2	184, 2



### [例題 5-6]

此例題配置與 [例題 3-9] 中相同，詳圖 5.15 (a) 和在模型中央處加入 1 m 非設計領域之設計領域，詳圖 5.15 (b)，並將其延伸至雙材料。材料內插方法：替代內插方法懲罰因子  $q = 5$ 。元素材料分別為實體材料與空心材料：實體抗拉材料（藍色元素）楊氏模數  $E = 200 \text{ GPa}$ 、泊松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 7.8 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ ；實體抗壓材料（綠色元素）楊氏模數  $E = 20 \text{ GPa}$ 、泊松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 2.4 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ ；空心元素（不顯示）楊氏模數  $E = 3.36 \times 10^{-2} \text{ GPa}$ 、泊松比  $\nu = 0.3$ 、 $\rho = 2.4 \times 10^{-5} \text{ kg/cm}^3$ 。初始元素分布為 Case 1 ~ Case 5，圖中黑色邊線為設計領域範圍，元素類型選用 ABAQUS 中的 C3D8 元素，將設計領域離散為相同之方形元素，元素尺寸為  $50 \text{ cm} \times 50 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$ 。BESO 參數設定：目標體積  $V^*$  為 15 % 的設計領域、材料 1 與材料 2 目標體積 ( $V^1, V^2$ ) 為 (5 %, 10 %)、敏感度因子篩選半徑  $r_{\min}^\alpha = 150 \text{ cm}$ 、體積改變比例  $ER = 2 \%$ 、最大添加體積比例  $AR_{\max} = 4 \%$ 、容許誤差  $\tau = 0.05 \%$ 、降低收斂標準迭代步數  $N_{\text{down}} = 300$  和停止迭代步數  $N_{\text{stop}} = 500$ 。

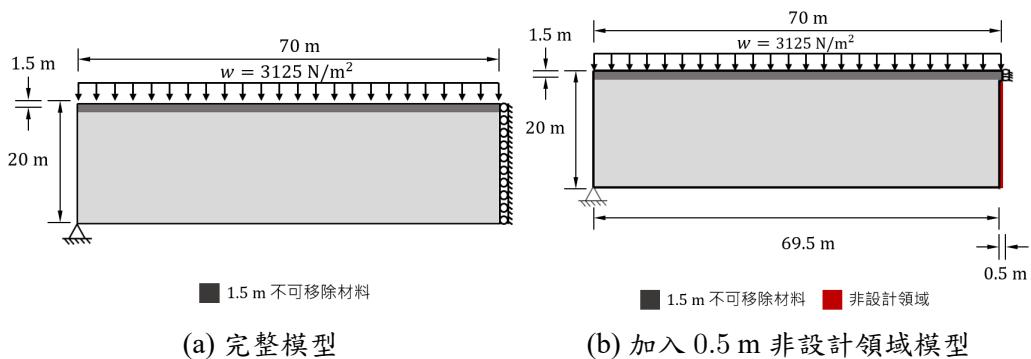


圖 5.15: [例題 5-6] 1/2 對稱簡化設計領域示意圖

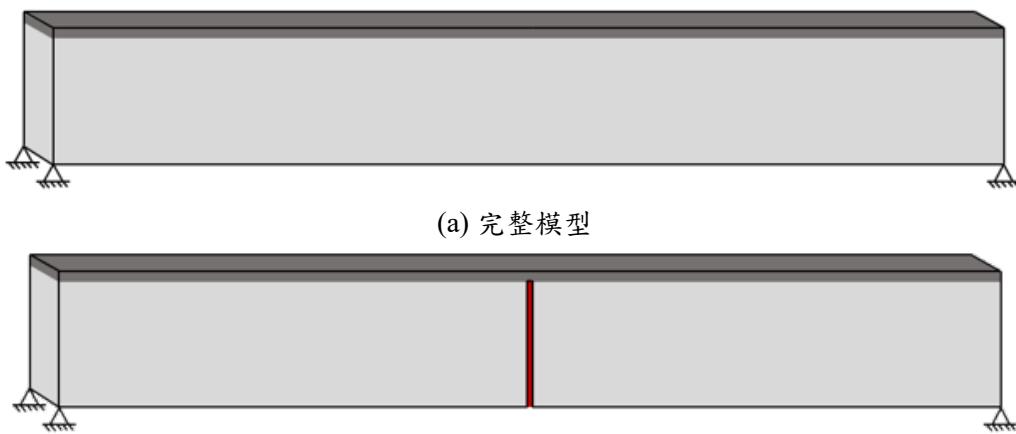


圖 5.16: [例題 5-6] 完整設計領域示意圖

表 5.31: 「 $w$ /自重,  $w = 3125 \text{ N/m}^2$ 」完整模型拓撲結果

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
初始元素分布					
起始材料比例 (%)	(100, 0)	(0, 100)	(5, 95)	(33.33, 66.67)	(15, 85)
加入目標體積變化後與加入材料集中化 ( $\gamma = 0.5$ )(考量設計領域邊緣長)					
拓撲結果					
$C' (\text{kN} \times \text{cm})$	$1.6153 \times 10^5$	$1.4553 \times 10^5$	$1.6306 \times 10^5$	$1.5531 \times 10^5$	$1.5530 \times 10^5$
$iter, n$	$306 (> N_{\text{down}}), 2$	$312 (> N_{\text{down}}), 2$	$254, 2$	$267, 2$	$284, 2$
其他角度之拓撲結果					
拓撲結果					

表 5.32: 「 $w$ /自重,  $w = 3125 \text{ N/m}^2$ 」加入 1 m 非設計領域模型拓樸結果

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
初始元素分布					
起始材料比例 (%)	(100, 0)	(0, 100)	(5, 95)	(33.33, 66.67)	(15, 85)
加入目標體積變化後與加入材料集中化 ( $\gamma = 0.5$ ) (考量設計領域邊緣長度)					
拓樸結果					
$C (\text{kN} \times \text{cm})$	$1.4440 \times 10^5$	$1.4052 \times 10^5$	$1.4750 \times 10^5$	$1.4508 \times 10^5$	$1.4902 \times 10^5$
$iter, n$	$302(> N_{\text{down}}), 2$	$287, 2$	$261, 2$	$311(> N_{\text{down}}), 3$	$314(> N_{\text{down}}), 3$
其他角度之拓樸結果					
拓樸結果					

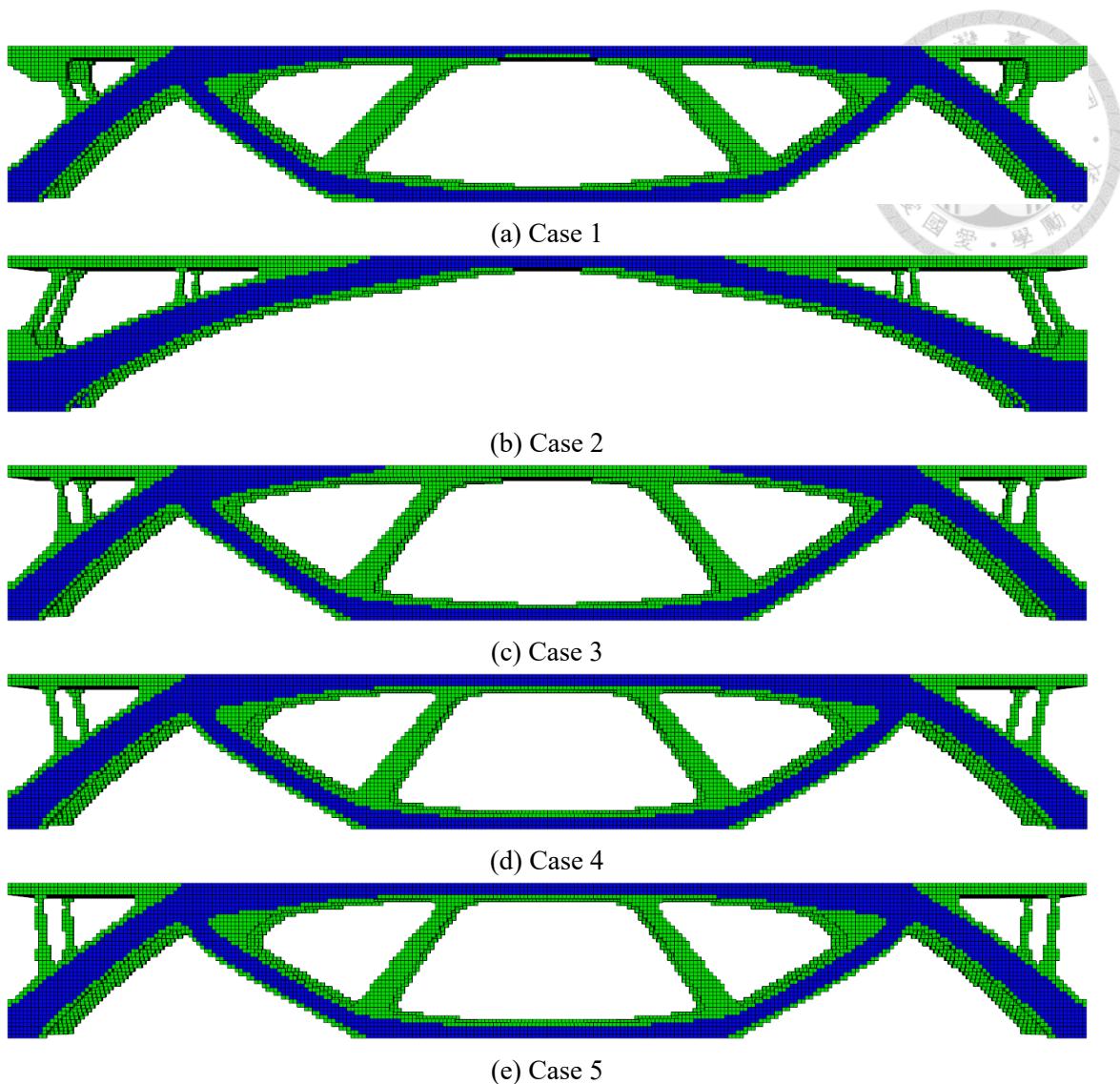


圖 5.17: [例題 5-6] 完整模型對稱後拓樸結果

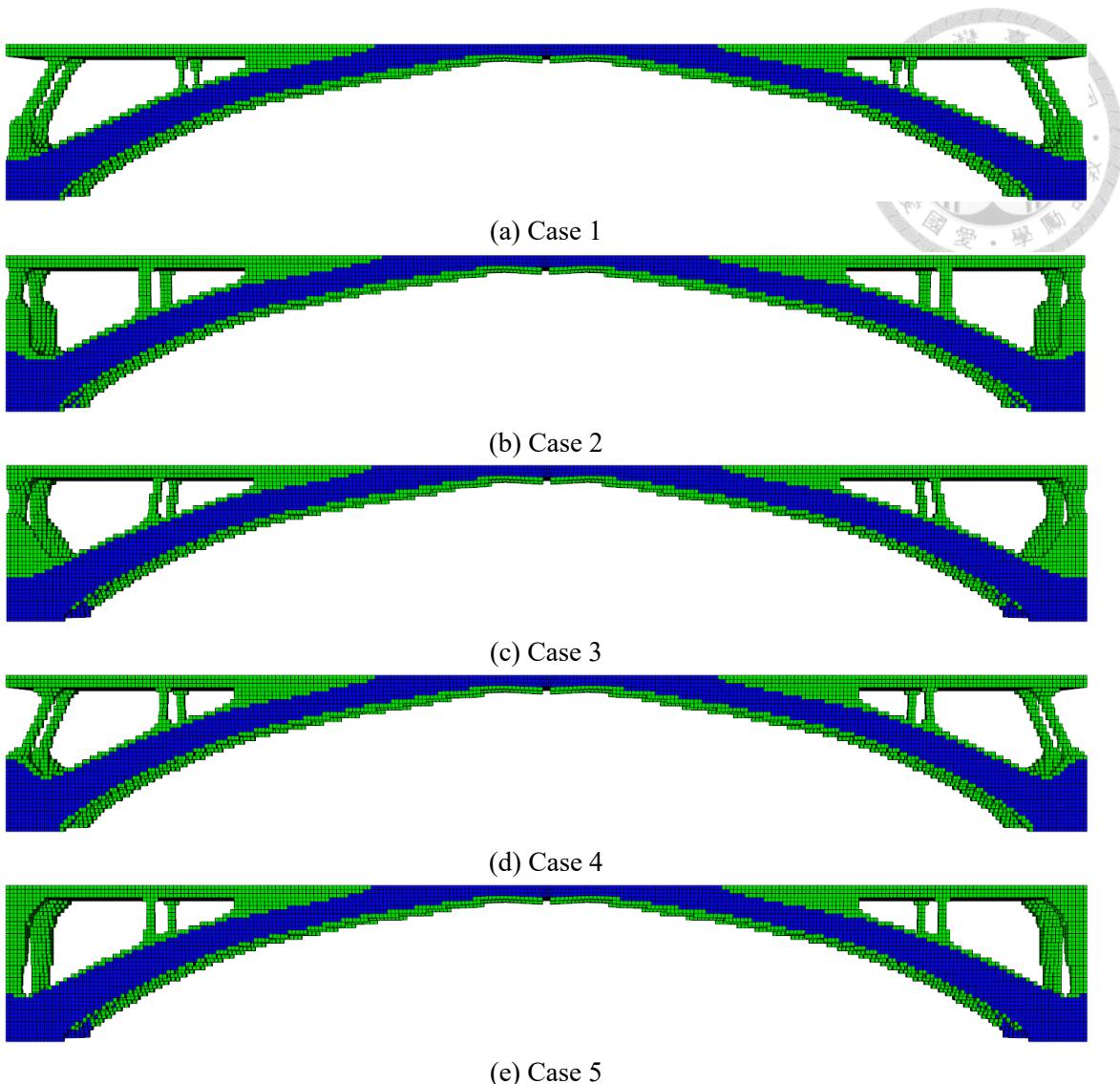


圖 5.18: [例題 5-6] 加入 1 m 非設計領域對稱後拓樸結果

由 [例題 5-5] 與 [例題 5-6] 進行共同討論，雖然都透過本研究所提出之「目標體積變化」與「材料集中化」的結合得出穩定的拓樸結果，但從表 5.30 發現在左邊的支撐桿件以及桿件上的發展仍有區別；表 5.31 中可以發現在 Case 2 得出了與其他 4 種初始元素分布截然不同的更好的結果，同時在靠近支承端的桿件也都有所區別；表 5.32 中發現靠近支承端的桿件也都有所區別，這些拓樸結果的不同也代表目前的改進雖然能產生穩定拓樸結果與有一定效果，但仍有所不足。



## 5.11 小結

本章節將單一材料延伸雙材料，首先詳細介紹延伸後所需進行之方法與公式上的改變，以及如何進行兩種材料上的分配，並詳細介紹本研究所提出之三種全填滿起始元素分布，透過大量分析案例與比較驗證其進行拓樸時的穩定性；再來介紹本研究團隊過去提出之材料集中化改進方法，並使其考量設計領域邊緣長使部分案例能夠得出更好的拓樸結果；最後則是介紹本研究所提出之目標體積變化，透過簡單的變化目標體積使結果能夠去突破目前的結構狀態，並針對五種使始元素分布、是否加入目標體積變化、加入目標體積變化與材料集中化後材料集中化是否考量設計領域邊緣長進行大量不同力量(集中載重、均佈載重、自重)加載或混合、不同設計領域，不同的材料分配比例的案例分析並進行討論與驗證，但對於較差之原始拓樸結果的效果十分有限，最後則是對雙跨橋、3D 大跨距設計領域等各種案例進行分析討論，了解本研究所提出之改進對於設計領域較嚴格、自重加載與較多元素量之案例效果同樣不夠顯著，仍有不足之處。



## 第六章 結論與未來展望

### 6.1 結論

本研究以雙向結構最佳化演進法為主軸，並以單一材料、抗拉壓雙材料與雙材料分別進行方法的改進與融合，並以多種應用案例進行分析與驗證，得到的結果如下：

#### 6.1.1 雙向結構最佳化演進法

##### 1. 使演算法能夠加入自重考量

過去本研究團隊對於在模型中加入自重進行分析也有過多次嘗試，但皆已失敗或不穩定停止研究，而本研究透過改變材料內插方法，使演算法能夠在敏感度因子上考量到自重的影響，進而得出考量自重後的拓樸結構，而本研究在第三章時進行理論上的說明與案例分析驗證，相互印證替代內插方法才能夠將使整體分析考量自重影響，並對於替代內插方法懲罰因子  $q$  進行兩種參數的分析，最後也使用該方法進行多種力量加載、3D 大型領域等案例分析，確認演算法的泛用性。

##### 2. 改進篩選投影權重計算時間

篩選投影對於雙向結構最佳化演進法中必要之方法，本研究參考之程式為保持其對於所有模型上的通用性，採用較為簡易的計算方式。本研究針對該部分進行改進，在保持程式通用性下減少其程式所需執行之迴圈數，進而去減少其計算時長，在引入 JIT 更進一步的加速該迴圈計算部分，並透過不同元素數量、不同載重形式的模型進行驗證，同時驗證其通用性，也證明該改進十分有效，且在越大量元素數量的模型分析上對整體分析時長的效果越好。



## 6.1.2 應用層面

### 1. 抗拉壓材料分配

本研究透過引入以應力不變量進行材料分配的方式，並將其與能量移除原則之雙向結構最佳化演進法相結合，進行敏感度因子公式之必要修正，使其能夠將兩種實體材料在同一水平上進行比較，而透過輸出絕對值最大主應力分布與拓樸結果上各自抵抗的材料位置進行比較，也能得出一致結果，表明該方法的有效性，而該材料分配方法有別於過去以強度區分材料，以抗拉或抗壓來分配材料更符合實際材料常見之使用狀況。

### 2. 雙材料「初始元素分布」

由於結構最佳化系列方法對於初始元素分布的反應劇烈，若是給予較不良之初始元素分布，就容易陷入局域解而無法跳脫，而過去本研究團隊皆證實全填滿初始元素分布通常較為穩定，以此為基礎透過單一材料結果與目標體積相關之材料比例來進行材料 1 的放置位置，進而提出三種全填滿初始元素分布，並透過大量案例分析確定其起始元素分布的穩定性。

### 3. 雙材料「材料集中化」

本研究引入本研究團隊所提出之材料集中化，透過考量混合材料間之介面長度，進而使強度較高之材料能更加集中，而透過將較硬材料與設計領域邊緣相接部分考量為相鄰較硬之長度，使部分案例能夠獲得更好的解，也不會過度破壞原本應有之效果。

### 4. 雙材料「目標體積變化」

由於本研究前述之三種全填滿初始分布與兩種基本全填滿材料 1 與材料 2 經分析後仍會獲得截然不同之拓樸結果，且即使給予更嚴格的收斂準則也無法突破原始的結果，為此本研究提出「目標體積變化」透過在迭代過程中減少與增加目標體積，使拓樸結果能夠先移除不重要之元素再增加整體體積獲得更多的自由度，使拓樸結果能夠突破原本結構，進而獲得更良好之結構形式，本研究也透過多種案例進行該方法之有效性，能夠在多數案例中使五種起始條件獲得接近的結構或是接近的結構順從度，但對於較差之原始拓樸結果的效果十分有限，且對於設計領域較嚴格、自重加載與較多元素量之案例效果同樣有限。



## 6.2 未來展望

本研究主要使雙向結構最佳化演進法能夠考量自重與針對其計算效率之問題進行改進，並且將其延伸至抗拉壓雙材料與雙材料兩種不同的材料分配方式，並針對雙材料提出三種較為穩定之全填滿初始元素分布，並加入「目標體積變化」與「材料集中化」進一步的去突破現有之結構形式，但「目標體積變化」改進方法仍有許多不足之處，期望後續能使其更加通用且更節省時間。

目前演算法在多數情況皆能夠得到最佳化結果，但拓樸過程仍會因為體積改變比例  $ER$  與最大體積添加比例  $AR_{max}$  設置上的不同而產生區別較大的拓樸結果或是有迭代失敗風險，期望在後續研究中能夠實現在不同參數設置下得到近似的解或解決時常有迭代失敗風險的問題，同時可以發現在雙跨橋案例中需要透過調整懲罰因子  $q$  才能得出穩定拓樸結果，因此期望後續研究能夠加入其他演算法(如模擬退火法 (Simulated annealing, SA))使懲罰因子  $q$  能夠在迭代過程自行變動至最佳參數。

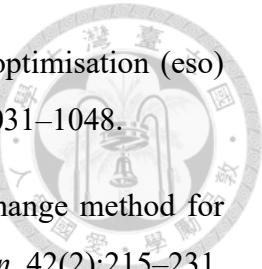
本研究雖已進行多種案例分析與探討，但本研究之結論也不足代表適用於所有情況，期待有更多樣化更實際的案例驗證演算法的泛用性。材料使用方面，過去本研究團隊與本研究皆是使用等向性彈性材料居多，期望能延伸至等向性彈塑性材料或是異向性彈性材料(如竹材、木材等)。在不等式限制式設置上，則期望能夠引入容許應力或總隱含碳上限之不等式限制式，使拓樸結構不只是只考量材料強度還能夠考量材料設計上的應力上限或是總隱含碳上限，使拓樸結果更接近現實設計考量與近代排碳量控制之趨勢。最終目標則是期望能透過拓樸演算法設計真實結構，在設計領域中設計出兼具實用性又同時符合理想構建結構的形式，並透過改變設計需求使其能依據該需求形成多種的拓樸結果。





## 參考文獻

- Arora, J. (2017). *Introduction to Optimum design*. Elsevier.
- Bendsøe, M. P. and Sigmund, O. (1999). Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of Applied Mechanics*, 69:635–654.
- Huang, X. and Xie, Y. (2007). Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 43(14):1039–1049.
- Huang, X. and Xie, Y. (2011). Evolutionary topology optimization of continuum structures including design-dependent self-weight loads. *Finite Elements in Analysis and Design*, 47:942–948.
- Kamat, M. P. (1993). *Structural Optimization: Status and Promise*. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- Li, Y., Lai, Y. P., Lu, G., Yanb, F., Wei, P., and Xie, Y. M. (2022). Innovative design of long-span steel-concrete composite bridge using multi-material topology optimization. *Engineering Structures*, 269.
- Li, Y. and Xie, Y. M. (2021a). Evolutionary topology optimization for structures made of multiple materials with different properties in tension and compression. *Composite Structures*, 259.
- Li, Y. and Xie, Y. M. (2021b). Evolutionary topology optimization of spatial steel-concrete structures. *International Association for Shell and Spatial Structures*, 62:102–110.
- Li, Y., Yuan, P. F., and Xie, Y. M. (2023). A strategy for improving the safety and strength of topologically optimized multi-material structures. *Acta Mechanica Sinica*, 39.



- Querin, O., Steven, G., and Xie, Y. (1998). Evolutionary structural optimisation (eso) using a bidirectional algorithm. *Engineering Computations*, 15(8):1031–1048.
- Rouhi, M., Rais-Rohani, M., and Williams, T. (2010). Element exchange method for topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 42(2):215–231.
- Stolpe, M. and Svanberg, K. (2001). An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 22:116–124.
- Venkayya, V. B. (1993). Introduction: historical perspective and future directions. *Structural Optimization: Status and Promise*, 150:1–10.
- Wan, C. D., Jiao, H. Y., Lv, L., and Lu, C. Y. (2024). Multi-material topology optimization based on multiple simp of variable density method. *Mechanical Science and Technology*, 38(2).
- Wang, M. Y. and Wang, X. M. (2004). "color" level sets: a multi-phase method for structural topology optimization with multiple materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:227–246.
- Xie, Y. M. (2022). Generalized topology optimization for architectural design. *Architectural Intelligence*, 1(2).
- Xie, Y. M. and Steven, G. P. (1993). A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers & structures*, 49(5):885–896.
- Xu, B., Han, Y. S., and Zhao, L. (2020). Bi-directional evolutionary topology optimization of geometrically nonlinear continuum structures with stress constraints. *Applied Mathematical Modelling*, 80:771–791.
- Zuo, Z. H. and Xie, Y. (2015). A simple and compact python code for complex 3d topology optimization. *Advances in Engineering Software*, 85:1–11.
- 王建凱 (2005)。應用有限元素套裝軟體 ABAQUS 於結構最佳化演進。國立臺灣大學土木工程學研究所碩士論文。
- 李宗豪 (2005)。以有限元素套裝軟體為分析引擎之最佳化設計系統架構開發。國立臺灣大學土木工程學研究所碩士論文。



- 徐千泰 (2009)。多重材料配置及支承位置最佳化之橋樑結構設計。國立臺灣大學  
土木工程學研究所碩士論文。
- 呂其翰 (2010)。雙向結構最佳化演進法及多重材料拓樸最佳化之探討。國立臺灣  
大學土木工程學研究所碩士論文。
- 郭哲宇 (2011)。加入隨機化之拓樸最佳化方法之研究與應用。國立臺灣大學土木  
工程學研究所碩士論文。
- 施可葳 (2013)。元素交換法於結構拓樸最佳化之改良與應用。國立臺灣大學土  
木工程學研究所碩士論文。
- 連嘉玟 (2017)。以 Python 整合有限元素軟體 ABAQUS 於板殼結構最佳化。國立  
臺灣大學土木工程學研究所碩士論文。
- 黃懷寬 (2022)。應用形狀最佳化與拓樸最佳化於薄殼結構設計。國立臺灣大學土  
木工程學研究所碩士論文。
- 余鈺庭 (2023)。應用雙向結構最佳化演進法於單一材料及雙材料結構之拓樸最佳  
化設計。國立臺灣大學土木工程學研究所碩士論文。





# 附錄 A — 篩選投影權重計算程式代碼

## A.1 初步改進函式

```
1 ## Function of preparing filter map (Fm = {elm1:[[el1,el2,...],[wf1,wf2,...]],...})
2 def preFlt2(Rmin,Elmts,Nds,Fm,Ce):
3     # 計算元素中心座標
4     elm, c0 = np.zeros(len(Elmts)), np.zeros((len(Elmts),3))
5     for i in range(len(elm)):
6         elm[i] = Elmts[i].label
7         nds = Elmts[i].connectivity
8         for nd in nds:
9             c0[i] = np.add(c0[i],np.divide(Nds[nd].coordinates,len(nds)))
10    Ce[elm[i]] = list(c0[i])
11    # 計算權重係數 Weighting factors
12    for i in range(len(elm)):Fm[elm[i]] = [[],[]]
13    for i in range(len(elm)):
14        n1 = elm[i]
15        jstart = i+1
16        Fm[n1][0].append(n1)
17        Fm[n1][1] = np.append(Fm[n1][1], Rmin)
18        for j in range(jstart,len(elm)):
19            n2 = elm[j]
20            dis = np.sqrt(np.sum(np.power(np.subtract(c0[i],c0[j]),2)))
21            if dis < Rmin:
22                d = Rmin - dis
23                Fm[n1][0].append(n2)
24                Fm[n2][0].append(n1)
25                Fm[n1][1] = np.append(Fm[n1][1], d)
26                Fm[n2][1] = np.append(Fm[n2][1], d)
27        Fm[n1][1] = np.divide(Fm[n1][1],np.sum(Fm[n1][1]))
```



## A.2 主要改進程式代碼

### A.2.1 主程式函式

```
1 ## Function of preparing filter map (Fm = {elm1: [[el1,el2,...],[wf1,wf2,...]],...})學  
2 def conpreFlt(Rmin,Elmts,Nds,Fm,Ce,Path):  
3     # 計算元素中心座標並寫入輸入檔  
4     elm, c0 = np.zeros(len(Elmts)), np.zeros((len(Elmts),3))  
5     filedatal = open( Path + 'filedata.txt','w')  
6     for i in range(len(elm)):  
7         elm[i] = Elmts[i].label  
8         nds = Elmts[i].connectivity  
9         for nd in nds:  
10             c0[i] = np.add(c0[i],np.divide(Nds[nd].coordinates,len(nds)))  
11             filedatal.write(str(int(elm[i]))+'\t'+str(c0[i,0])+'\t'+str(c0[i,1])+'\t'+str(c0[i,2])+'\n')  
12             Ce[elm[i]] = list(c0[i])  
13     filedatal.close()  
14     os.environ["PYTHONPATH"] = ""  
15     #使用者需根據副程式路徑自行更改路徑名稱  
16     subprocess.call([r'C:/Users/User/AppData/Local/Programs/Python/Python38/python.exe',  
17                     r"C:/Users/User/Desktop/Hao/code/Fmcal.py", str(Rmin), str(Path)], shell=True)  
18     #使用者需根據電腦中ABAQUS安裝環境自行更改環境路徑  
19     os.environ["PYTHONPATH"] = "C:/SIMULIA/Abaqus/6.14-1/code/python2.7/lib;C:/SIMULIA/  
20         Abaqus/6.14-1/tools/SMApy/python2.7/lib;C:/SIMULIA/Abaqus/6.14-1/code/bin;C:/  
21         SIMULIA/Abaqus/6.14-1/tools/SMApy/python2.7/lib/lib-tk;C:/SIMULIA/Abaqus/6.14-1/  
22         tools/SMApy/python2.7/lib/site-packages;C:/SIMULIA/Abaqus/6.14-1/tools/SMApy/  
23         python2.7/DLLs;."  
24     #讀取輸出檔  
25     root = 'fileFmdata.txt'  
26     with open(Path + root) as f:  
27         data = f.read()  
28         for i in range(len(elm)):Fm[elm[i]] = [[],[]]  
29         for line in data.split('\n'):  
30             if line:  
31                 id, nums, probs = line.split('\t')  
32                 Fm[int(id)][0] = ast.literal_eval(nums)  
33                 Fm[int(id)][1] = np.array(ast.literal_eval(probs))
```



## A.2.2 副程式代碼

```
1 import numpy as np
2 from numba import njit, prange
3 import sys
4 from tqdm import tqdm # 導入 tqdm
5 # 使用 JIT 裝飾器對函式進行包裝
6 @njit(parallel=True)
7 def cal(c1, i, c0, Rmin):
8     n = len(c0)
9     dis = np.zeros((1, n, 2), dtype=np.float64)
10    jstart = i+1
11    for j in prange(jstart, n):
12        d = 0.0
13        d = np.sqrt(np.sum(np.power(np.subtract(c1,c0[j]),2)))
14        dis[0, j, 0] = int(float(j))
15        dis[0, j, 1] = Rmin - d
16    return dis
17 # 讀取檔案路徑Path、元素中心座標c0、元素編號elm、篩選半徑Rmin
18 Path = str(sys.argv[2])
19 with open( Path + 'filedata.txt', "r") as f:
20     lines = f.readlines()
21 Rmin = float(sys.argv[1])
22 elm = np.zeros(len(lines))
23 c0 = np.zeros([len(lines),3])
24 i = 0
25 for line in lines:
26     s = line.split('\t')
27     elm[i] = int(s[0])
28     c0[i,0] = float(s[1])
29     c0[i,1] = float(s[2])
30     c0[i,2] = float(s[3])
31     i += 1
32 Fm = {}
33 # 計算權重係數 Weighting factors 並寫入輸出檔
34 for i in range(len(elm)):Fm[elm[i]] = [[],[]]
35 with open( Path + 'fileFmdata.txt', "w") as f:
36     # 使用 tqdm 來顯示計算進度條
37     for i in tqdm(range(len(elm)), desc="Processing", unit="element"):
38         dis = cal(c0[i], i, c0, Rmin)
39         dis = [subarr[subarr[:, 1] > 0] for subarr in dis]
40         n1 = elm[i]
41         Fm[n1][0].append(int(n1))
42         Fm[n1][1] = np.append(Fm[n1][1], Rmin)
43         for j in range(len(dis[0][:,0])):
44             n2 = elm[int(dis[0][j][0])]
45             d = dis[0][j][1]
46             Fm[n1][0].append(int(n2))
47             Fm[n2][0].append(int(n1))
48             Fm[n1][1] = np.append(Fm[n1][1], d)
49             Fm[n2][1] = np.append(Fm[n2][1], d)
50             Fm[n1][1] = np.divide(Fm[n1][1],np.sum(Fm[n1][1]))
51             f.write(str(int(n1))+'\t'+str(list(Fm[n1][0]))+'\t'+str(list(Fm[n1][1]))+'\n')
```