



國立臺灣大學工學院機械工程學研究所

碩士論文

Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis

壓電薄板複合薄膜聲振研究之最佳化設計

Optimal Design of Sound Quality

on Piezoelectric Plates Composite with Membrane by

Vibroacoustic Analysis

黃御宸

Yu-Chen Huang

指導教授：黃育熙 博士

Advisor: Yu-Hsi Huang, Ph.D.

中華民國111年6月

June, 2022

國立臺灣大學碩士學位論文
口試委員會審定書

壓電薄板複合薄膜聲振研究之最佳化設計
Optimal Design of Sound Quality by Vibroacoustic
Analysis on Piezoelectric Plates Composite with Membrane

本論文係黃御宸君 (R09522504) 在國立臺灣大學機械工程學系
完成之碩士學位論文，於民國 111 年 6 月 15 日承下列考試委員審查
通過及口試及格，特此證明

口試委員：

黃育熙 (簽名)
(指導教授)

王昭男

馬劍清

江信遠

系主任

柯沛群 (簽名)

致謝



本論文得以順利完成，首先要先感謝細心指導的黃育熙教授，這兩年的碩士研究裡老師給與我們高度的肯定與自由，並適時提供建議與想法，讓我們在研究上能夠依循著自己的研究興趣，結合實驗室專業的知識與技術，無憂無慮的鑽研各種問題，能遇到如此優質的指導教授，只能以祖上有德、三生有幸來形容了。

感謝王昭男教授、馬劍清教授和江信遠博士擔任學生的口試委員，提供許多寶貴的建議，使本論文能夠更加嚴謹完整。王昭男教授開設的「基本聲學」與「電聲學」課程內容豐富，在老師的循循善誘下讓我受益匪淺，對於聲學的研究上有極大的幫助；感謝馬劍清教授實驗室所傳承的振動理論與實驗技術，這些研究成果無疑是本研究重要的基礎；江信遠博士在聲學元件與聲學量測給予偌大的協助，感謝學長無私的經驗分享與指教。

感謝實驗室的各位夥伴，謝謝健佑學長實驗方面的經驗與想法，並且分享許多乙醇相關的知識，讓我可以少走許多的冤枉路；胤軒學長，雖然現在已經遠走他鄉了，不過非常感謝在碩一時給予的意見與幫助；感謝新承、哲睿學長在學期間的種種；感謝一同奮鬥的秀宜、國勛和浩安，相互扶持又互相扯淡，一來一往為實驗室帶來了輕鬆的氣氛與許多的趣味，讓我知道照顧身體的重要性，和時間管理的分配技巧；感謝碩一的學弟們，振原、奕安、揚開、明杰和家雋，後起之輩的實力真的是不容小覷，祝你們能夠順利完成碩士學位，讓實驗室發揚光大；特別感謝繃膜兄弟--振原、奕安，在聲學元件製作與實驗的幫忙，私心希望你們兩隻小色狗能夠把聲學的研究主題做的青出於藍，才能光宗耀祖；謝謝亦師亦友的室友昇佑，剛好同是做聲學相關題目，從大學以來不斷互相砥礪、玩耍與成長。

最後感謝我的家人多年來的栽培，給予我無限的支持，做我最堅強的後盾，在我疲憊無助時，有一個溫暖的避風港，讓我可以逍遙自在的在台北專心做研究。這份論文得以完成，受到許多師長及朋友的相助與幫忙，在此獻上我最高的謝意，感謝各位，有你們真好，大恩大德莫此難忘。

中文摘要

本研究利用壓電薄板複合薄膜作為耳機的新型驅動元件，透過理論解析結合無網格基本解數值方法、有限元素法數值模擬與實驗量測，探討壓電陶瓷薄板複合薄膜的面外振動、聲學特性。首先討論壓電薄板於自由邊界條件下的振動特性，接著探討具有特定張力於固定邊界條件下的薄膜振動特性，最後以壓電陶瓷薄板於類自由邊界條件與薄膜複合之結構，探討串聯型壓電雙層矩形陶瓷薄板複合矩形薄膜元件之結構振動與聲學特性。

實驗量測的部分使用全域式電子斑點干涉術(Electronic Speckle Pattern Interferometry, ESPI)、雷射都卜勒振動儀(Laser Doppler Vibrometer, LDV)兩種實驗技術分析面外振動特性；無響室(Anechoic Room)、人工耳(Artificial Ear)實驗則分別對自由音場與封閉音場進行聲學量測。自由音場以理論、數值模擬與實驗三種分析方法，包含利用 LDV 量測振動位移配合聲學理論得到對應的聲響曲線，以及使用有限元素模型於自由聲場下進行模擬，並與無響室實際量測結果進行比較，以驗證聲振耦合理論所計算的實驗結果和有限元素法的準確性。由於封閉音場的邊界條件非常複雜，因此以有限元素法與人工耳實驗兩者相互比較，以佐證模型建立方法的正確性。

綜合前述分析方法，由於實驗設計相對於模擬需耗費較大的成本，故本研究利用數值模擬分析結合田口法對聲學元件尺寸進行最佳化分析，藉由改變矩形壓電陶瓷薄板與薄膜長寬的設計變數，對聲壓曲線進行改善，並分析各變數對聲學響應之靈敏度，達到尺寸最佳化展現具有良好聲壓曲線的揚聲器設計。本研究結合理論解析、數值分析與實驗量測，並使用田口法最佳化設計於壓電陶瓷薄板複合薄膜的聲學元件設計，可以應用於新型揚聲器最佳化聲場增益特性之聲音品質的開發。

關鍵字：壓電平板、疊加法、薄膜、無網格法、基本解法、聲學元件、聲固耦合分析、田口法最佳化

ABSTRACT

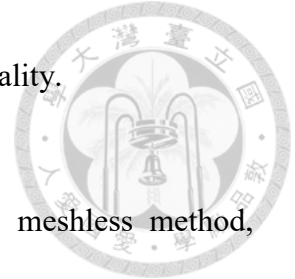
In this research, piezoelectric plate composite membrane is used as a new type of earphones. In this paper, the out-of-plane vibration and acoustic properties of piezoelectric ceramic plate composite with membrane are discussed by theoretical analysis, meshless numerical method, finite element method (FEM) and experimental measurements. The vibration characteristics of piezoelectric plates on the free boundary conditions and the vibration characteristics of membranes with specific tension on the fixed boundary are both analyzed by theoretical analysis and numerical calculation. The vibroacoustic characteristics of the piezoelectric rectangular bimorph composite with rectangular membrane is studied and is used to optimize design on earphone.

Experimental measurements are used by two experimental techniques to determine the out-of-plane vibration characteristics. First, the Electronic Speckle Pattern Interferometry (ESPI) can measure the vibration mode shape and the correspondent resonant frequency. The Laser Doppler Vibrometer (LDV) can perform the single-point vibrating displacement. The anechoic room and artificial ear are used to obtain acoustic measurements. The sound quality in free field is determined by FEM and vibration experimentally measurement coupled with acoustic theory. Using the LDV to measure the vibrating displacement and substituting it into the Rayleigh's integral to get the sound pressure level curve. The results from vibroacoustic are verified with the measurement by the anechoic chamber. Those experimental measurements are also compared with the results from FEM. In the development of earphone, the FEM model is established and modified according to the pressure-field sound measurement by artificial ear.

Since the experimental design is more time-consuming and expensive, the Taguchi method is used to optimize the sound quality of the acoustic element in the study. The variable sensitivity is utilized to optimize the response of sound pressure level (SPL), and

the size of loudspeaker figures out the achievement in high sound quality.

Keywords: piezoelectric plate, superposition method, membrane, meshless method, method of fundamental solutions, acoustic element, vibroacoustic analysis, Taguchi method



目錄



論文口試委員審定書	I
致謝	II
中文摘要	III
ABSTRACT	IV
目錄	VI
圖目錄	IX
表目錄	XIV
符號表	XVI
第一章 緒論	1
1.1 研究動機	1
1.2 文獻回顧	2
1.3 論文內容簡介	8
第二章 實驗原理與架設	11
2.1 雷射都卜勒測振儀	11
2.2 電子斑點干涉術	14
2.3 無響室量測	22
2.4 人工耳量測	24
2.5 聲學元件設計與製作流程	26
2.5.1 聲學元件製作方式	26
2.5.2 聲學元件的設計	28
第三章 基本理論與方法	37
3.1 壓電材料薄板基本理論	37
3.1.1 力學假設	40
3.1.2 電學假設	42
3.1.3 壓電薄板統御方程式之推導	45
3.2 無網格法	52

3.2.1 基本解法.....	53
3.3 聲學基本理論.....	54
3.4 田口法最佳化.....	58
第四章 壓電矩形薄板振動特性分析.....	60
4.1 疊加法.....	60
4.2 自由邊界之疊加法理論.....	62
4.3 串聯型雙層壓電矩形板面外振動理論與數值分析之比較.....	83
4.3.1 試片規格.....	83
4.3.2 有限元素數值分析.....	83
4.3.3 串聯型雙層壓電矩形板於自由邊界面外振動理論解析與數值分析之比較.....	84
第五章 薄膜振動特性分析.....	87
5.1 薄膜的統御方程式.....	87
5.2 矩形薄膜之自由振動分析.....	88
5.2.1 矩形薄膜之自由振動理論解析.....	89
5.2.2 矩形薄膜之自由振動基本解法.....	90
5.2.3 矩形薄膜之自由振動有限元素數值分析.....	92
5.2.4 試片規格.....	93
5.2.5 矩形薄膜振動理論解析與數值分析之比較.....	94
5.3 矩形環薄膜之自由振動分析.....	97
5.3.1 環形薄膜之自由振動理論解析.....	97
5.3.2 矩形環、環形薄膜之自由振動基本解法.....	98
5.3.3 矩形環、環形薄膜之自由振動有限元素數值分析.....	101
5.3.4 試片規格.....	102
5.3.5 矩形環、環形薄膜振動理論解析與數值分析之比較.....	103
第六章 串聯型雙層壓電矩形薄板複合薄膜振動分析.....	108
6.1 壓電薄板複合薄膜非耦合振動分析.....	108

6.1.1 壓電圓盤複合薄膜理論解析.....	108
6.1.2 壓電複合薄膜基本解法.....	109
6.1.3 壓電薄板複合薄膜有限元素數值分析.....	111
6.1.4 試片規格.....	112
6.1.5 壓電薄板複合薄膜非耦合振動理論解析與數值分析之比較.....	112
6.2 壓電薄板複合薄膜耦合振動分析	117
6.2.1 壓電薄板複合薄膜疊加法結合基本解法.....	117
6.2.2 壓電薄板複合薄膜有限元素數值分析.....	119
6.2.3 試片規格.....	119
6.2.4 壓電薄板複合薄膜耦合振動理論解析與數值分析之比較.....	119
第七章 聲學元件聲學特性分析、實驗量測與最佳化	122
7.1 無限大障板下的自由音場之聲學特性分析	122
7.1.1 無限大障板下的自由音場之聲學理論.....	123
7.1.2 集中參數測量法 (LPM)	126
7.1.3 分佈參數測量法 (DPM)	127
7.1.4 無限大障板下的自由音場之有限元素法分析.....	127
7.1.5 無限大障板下的自由音場實驗量測與數值分析之比較.....	131
7.2 封閉音場之聲學特性分析	140
7.2.1 封閉音場之有限元素分析.....	140
7.2.2 多孔彈性波理論.....	146
7.2.3 封閉音場實驗量測與數值分析之比較.....	149
7.2.4 串聯型雙層壓電矩形薄板複合矩型薄膜聲學元件之最佳化.....	152
7.2.5 最佳化串聯型雙層壓電矩形薄板複合矩型薄膜之聲學元件(D)之聲學特性.....	179
第八章 結論與未來展望	185
8.1 結論	185
8.2 未來展望	187
參考文獻	189

圖目錄



圖 2-1	LDV-OFV505	12
圖 2-2	聲光調製器基本構造.....	13
圖 2-3	LDV 內部光路圖	13
圖 2-4	ESPI 水平面外架設圖	19
圖 2-5	ESPI 垂直面外架設圖	20
圖 2-6	電子斑點干涉術水平面外架設-薄膜受揚聲器激振	21
圖 2-7	電子斑點干涉術水平面外架設-複合聲學元件	21
圖 2-8	無響室測量示意圖(虛線部分為無響室區域).....	22
圖 2-9	障板規格示意圖(AES2-1984 r2003 標準規範).....	23
圖 2-10	無響室實際量測圖	23
圖 2-11	人工耳(GRAS 43AG-9 Hi-Res Ear Simulator)	24
圖 2-12	多功能聲音校準器(G.R.A.S. 42AG)	25
圖 2-13	人工耳實際量測圖	25
圖 2-14	聲學元件製作流程圖	26
圖 2-15	繃膜治具.....	27
圖 2-16	AB 接著型導電銀膠	28
圖 2-17	並聯型雙層壓電圓盤複合環形薄膜之聲學元件(A)結構示意圖	29
圖 2-18	並聯型雙層壓電圓盤複合環形薄膜之聲學元件(A)成品圖	29
圖 2-19	串聯型雙層壓電圓環複合厚圓形薄膜之聲學元件(B)結構示意圖	31
圖 2-20	串聯型雙層壓電圓環複合厚圓形薄膜之聲學元件(B)成品圖	32
圖 2-21	串聯型雙層壓電矩形薄板複合矩型薄膜之聲學元件(C)結構示意圖	33
圖 2-22	串聯型雙層壓電矩形薄板複合矩型薄膜之聲學元件(C)成品圖	34
圖 2-23	最佳化串聯型雙層壓電矩形薄板複合矩型薄膜之聲學元件(D)結構示意圖	35

圖 2-24	最佳化串聯型雙層壓電矩形薄板複合矩型薄膜之聲學元件(D)成品圖 ..	36
圖 3-1	中面示意圖	40
圖 3-2	串聯型雙晶片串聯型電極連接(SBS).....	47
圖 3-3	串聯型雙晶片並聯型電極連接(SBP).....	47
圖 3-4	並聯型雙晶片串聯型電極連接(PBS).....	47
圖 3-5	並聯型雙晶片並聯型電極連接(PBP).....	47
圖 3-6	(a)元素法局部單元形函數 (b)無網格法全局座標近似函數	52
圖 3-7	基本解法求解流程圖	54
圖 3-8	體積元壓力示意圖	57
圖 3-9	體積元流量示意圖	57
圖 3-10	田口法實施流程圖	59
圖 4-1	薄板自由體及受力圖	61
圖 4-2	自由邊界疊加法分解等效圖	62
圖 4-3	特徵矩陣與邊界關係圖	72
圖 4-4	特徵矩陣詳細說明圖	75
圖 4-5	極化方向設定圖	84
圖 5-1	單位面積薄膜張力圖	87
圖 5-2	矩形薄膜示意圖	89
圖 5-3	源點、邊界點示意圖	91
圖 5-4	矩形薄膜佈點示意圖	92
圖 5-5	薄膜基本設定圖	93
圖 5-6	環形薄膜示意圖	97
圖 5-7	雙連通源點、邊界點示意圖	99
圖 5-8	環形薄膜佈點示意圖	101
圖 5-9	矩形環薄膜佈點示意圖	101

圖 5-10	矩形環網格示意圖.....	102
圖 6-1	剛體壓電複合薄膜示意圖.....	108
圖 6-2	壓電薄板複合薄膜正交方向示意圖.....	110
圖 6-3	壓電複合薄膜模型示意圖.....	111
圖 6-4	壓電複合薄膜耦合面設定圖.....	111
圖 6-5	壓電薄板複合薄膜耦合流程圖.....	117
圖 7-1	自由音場振動、聲學量測方法示意圖[55].....	123
圖 7-2	振膜固定於無限大障板示意圖.....	123
圖 7-3	脈動球源輻射示意圖.....	124
圖 7-4	點聲源於牆邊示意圖.....	125
圖 7-5	DPM 量測佈點示意圖.....	127
圖 7-6	聲場模擬幾何模型示意圖.....	128
圖 7-7	完美匹配層設定圖.....	128
圖 7-8	聲學元件的邊界條件示意圖.....	129
圖 7-9	聲學-結構邊界設定圖.....	129
圖 7-10	聲波網格示意圖.....	130
圖 7-11	聲場模擬網格剖面圖.....	130
圖 7-12	自由音場聲壓分佈示意圖.....	131
圖 7-13	聲學元件(A)自由音場實驗量測與數值分析圖.....	137
圖 7-14	聲學元件(B)自由音場實驗量測與數值分析圖.....	138
圖 7-15	聲學元件(C)自由音場實驗量測與數值分析圖.....	139
圖 7-16	Model-1 幾何模型示意圖.....	141
圖 7-17	耳殼、耳道與臉頰曲線模型圖.....	141
圖 7-18	Model-1 各部件標示圖.....	142
圖 7-19	Model-1 完美匹配層設置圖.....	142

圖 7-20	耳鼓阻抗模型示意圖.....	143
圖 7-21	Model-1 網格分佈圖.....	143
圖 7-22	人耳聲壓分佈圖.....	144
圖 7-23	Model-2 幾何模型示意圖.....	144
圖 7-24	Model-2 各部件標示圖.....	145
圖 7-25	耳道、耳鼓等效電路模型圖.....	145
圖 7-26	Model-2 網格分佈圖.....	146
圖 7-27	多孔材料示意圖.....	146
圖 7-28	封閉音場實驗量測與數值分析圖.....	151
圖 7-29	聲學元件(C)之 SPL 曲線圖.....	152
圖 7-30	聲學元件理想機能示意圖.....	153
圖 7-31	因子對品質特性反應圖(20-10000Hz).....	158
圖 7-32	僅計算頻段 50-1000Hz 斜率(1)反應圖.....	167
圖 7-33	計算頻段 50-1000Hz 斜率與方均根誤差之積(2)反應圖.....	167
圖 7-34	計算頻段 50-1000Hz 並去除波谷(3)反應圖.....	168
圖 7-35	50-1000Hz 最佳化組合之 SPL 曲線圖.....	169
圖 7-36	僅計算頻段 50-2000Hz 斜率(1)反應表.....	170
圖 7-37	計算頻段 50-2000Hz 斜率與方均根誤差之積反應圖.....	170
圖 7-38	計算頻段 50-2000Hz 並去除波谷(3)反應圖.....	171
圖 7-39	50-2000Hz 最佳化組合之 SPL 曲線圖.....	172
圖 7-40	僅計算頻段 100-1000Hz 斜率(1)反應圖.....	173
圖 7-41	計算頻段 100-1000Hz 斜率與方均根誤差之積(2)反應圖.....	173
圖 7-42	計算頻段 100-1000Hz 並去除波谷(3)反應圖.....	174
圖 7-43	100-1000Hz 最佳化組合之 SPL 曲線圖.....	175
圖 7-44	僅計算頻段 100-2000Hz 斜率(1)反應圖.....	176

圖 7-45	計算頻段 100-2000Hz 斜率與方均根誤差之積(2)反應圖	176
圖 7-46	計算頻段 100-2000Hz 並去除波谷(3)反應圖	177
圖 7-47	100-2000Hz 最佳化組合之 SPL 曲線圖	178
圖 7-48	最佳化串聯型雙層壓電矩形薄板複合矩型薄膜之耳罩式耳機	180
圖 7-49	最佳化前後聲學元件實驗、模擬聲壓曲線圖	181
圖 7-50	總諧波失真示意圖	182
圖 7-51	最佳化前後聲學元件聲壓曲線、總諧波失真圖	183
圖 7-52	Kyocera 壓電薄膜揚聲器實體圖(Photo: LG Electronics, Kyocera)	184
圖 7-53	最佳化聲學元件與 Kyocera 聲學元件之聲壓曲線比較圖	184

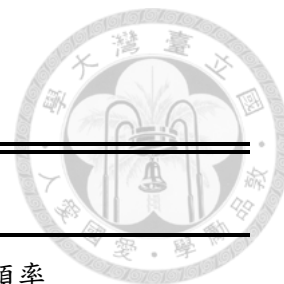
表目錄



表 2-1	人工耳麥克風規格表.....	25
表 2-2	並聯型雙層壓電圓盤複合環形薄膜之聲學元件(A)相關參數	30
表 2-3	串聯型雙層壓電陶瓷圓環複合厚圓形薄膜之聲學元件(B)相關參數	32
表 2-4	串聯型雙層壓電矩形薄板複合矩型薄膜之聲學元件(C)相關參數	34
表 2-5	最佳化串聯型雙層壓電矩形薄板複合矩型薄膜之聲學元件(D)相關參數	36
表 3-1	壓電陶瓷材料(PSI-5A4E)參數.....	51
表 4-1	薄板自由邊界理論與模擬對照表(a)	85
表 4-2	薄板自由邊界理論與模擬對照表(b)	86
表 5-1	靜電薄膜材料參數.....	93
表 5-2	矩形薄膜固定邊界理論、數值方法對照表(a)	95
表 5-3	薄膜固定邊界理論、數值方法對照(b)	96
表 5-4	PVC 薄膜材料參數.....	102
表 5-5	環形薄膜固定邊界理論、數值方法對照表(a)	104
表 5-6	環形薄膜固定邊界理論、數值方法對照表(b)	105
表 5-7	矩形環薄膜固定邊界理論、數值方法對照表(a)	106
表 5-8	矩形環薄膜固定邊界理論、數值方法對照表(b)	107
表 6-1	壓電圓盤複合薄膜非耦合理論、數值方法對照表(a)	113
表 6-2	壓電圓盤複合薄膜非耦合理論、數值方法對照表(b)	114
表 6-3	壓電矩形薄板複合薄膜非耦合理論、數值方法對照表(a)	115
表 6-4	壓電矩形薄板複合薄膜非耦合理論、數值方法對照表(b)	116
表 6-5	壓電矩形薄板複合薄膜耦合理論、數值方法對照表(a)	120
表 6-6	壓電矩形薄板複合薄膜非耦合理論、數值方法對照表(b)	121
表 7-1	空氣材料參數.....	128

表 7-2	聲學元件(A)共振頻率對照表	134
表 7-3	聲學元件(B)共振頻率對照表	135
表 7-4	聲學元件(C)共振頻率對照表	136
表 7-5	四因子五水準對應表	154
表 7-6	L25 直交表(四因子)	155
表 7-7	A2B1C2D3 組合對照表	156
表 7-8	田口法 A、B 因子模擬結果表(20-10000Hz)	157
表 7-9	因子對品質特性反應表(20-10000Hz)	158
表 7-10	田口法模擬結果對照表	160
表 7-11	僅計算頻段 50-1000Hz 斜率(1)反應表	161
表 7-12	計算頻段 50-1000Hz 斜率與方均根誤差之積(2)反應表	161
表 7-13	計算頻段 50-1000Hz 並去除波谷(3)反應表	162
表 7-14	僅計算頻段 50-2000Hz 斜率(1)反應表	162
表 7-15	計算頻段 50-2000Hz 斜率與方均根誤差之積(2)反應表	163
表 7-16	計算頻段 50-2000Hz 並去除波谷(3)反應表	163
表 7-17	僅計算頻段 100-1000Hz 斜率(1)反應表	164
表 7-18	計算頻段 100-1000Hz 斜率與方均根誤差之積(2)反應表	164
表 7-19	計算頻段 100-1000Hz 並去除波谷(3)反應表	165
表 7-20	僅計算頻段 100-2000Hz 斜率(1)反應表	165
表 7-21	計算頻段 100-2000Hz 斜率與方均根誤差之積(2)反應表	166
表 7-22	計算頻段 100-2000Hz 並去除波谷(3)反應表	166

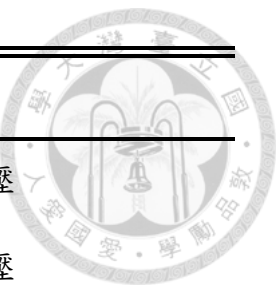
符號表



符號	定義
f_a	聲波的頻率
V_a	聲波在材料中傳遞的速度
λ	波長
I_O	物體光之光強度
I_R	參考光之光強度
ϕ_O	物體光與參考光之相位差
ω	振動的角頻率
θ_0	物體光與觀測方向之夾角
$\tilde{U}$	壓電之能量密度
T_{ij}	應力場
S_{ij}	應變場
E_i	電場
D_i	電位移場
$\tilde{H}$	電焓密度
c_{pq}^E	固定電場下壓電應力常數
ε_{ik}^S	固定應變下介電系數
e_{iq}	壓電應力常數
s_{pq}^E	固定電場下壓電柔性常數

符號	定義
d_{ip}	壓電應變常數
ε_{ik}^T	固定應力下介電系數
h_p	壓電陶瓷層厚度
U_i	位移場
u_i	中面位移場
D_i	電位移場
$\phi^{(u)}、\phi^{(l)}$	上、下層壓電陶瓷電位
$V_p^{(u)}、V_p^{(l)}$	上、下層壓電陶瓷電位差
M_{ij}	彎矩場
ρ	密度
D_{ij}	等效剛性
ν	等效普松比
Ω	計算區域
p	聲壓
v	質點速度
ρ'	密度變化量
P_0	靜態壓力
c_0	聲速

符號	定義
ρ_0	靜態密度
ξ	質點位移
s_ρ	密度相對變化量
c_p	定壓比熱
c_v	定容比熱
$\bar{W}$	無因次化中面面外位移場
W	面外位移場
V_{ij}	等效剪力
Q_{ij}	側向剪力
ϕ	長寬比
T	單位長度之張力
J_n	第一類 n 階貝索函數
Y_n	第二類 n 階貝索函數
$H_n^{(2)}$	第二類 n 階漢克爾函數
M_p	壓電平板之重量
Z_s	聲學特性阻抗
U	體積速度
S_D	推出空氣之截面積



符號	定義
P_e	有效聲壓
P_{ref}	參考聲壓
ρ_f	流體密度
ρ_d	固體密度
ρ_{av}	多孔彈性材料等效密度
μ_f	流體黏度
ε_p	孔隙率
P_f	流體孔隙壓力
κ	滲透率
ρ_c	複密度
α_B	Biot-Willis 係數
ε_{vol}	體積應變
M	Biot 模量
χ_f	流體可壓縮性
K_d	排水體積模量
L_v	黏性特徵長度
L_{th}	熱特性長度



第一章 緒論

1.1 研究動機

現今科技不斷朝著輕薄化的趨勢發展，揚聲器微型化的需求與日俱增，因此各家廠商紛紛投入超薄型揚聲器的研究，應用於攜帶式的 3C 產品，如平板、手機、耳機等。隨著可攜帶式電子裝置的盛行與視聽娛樂的興起，音樂逐漸成為生活不可分離的一部份，發聲元件不斷演進，發展至今日近乎每個人都擁有的耳機，改革了人們聆聽音樂的方式，耳機的發明無疑是歷史上重大的里程碑。

耳機是一種能將電信號轉換為聲信號的換能器，耳機本身的單體結構會影響音質的性能優劣。根據發聲原理可以劃分為兩類：動圈式耳機是最常見的市售耳機，當電流在線圈中流動時，其周圍會產生磁場，磁效應會引發中心固定的永久磁鐵相互作用，相吸、相斥的簡諧運動能將聲波傳遞至空氣中進而產生聲音，動圈式單體具有更深、更豐富的低頻響應，而由於永久磁鐵的設計，因此具有體積大、重量重、效率低等缺點；靜電式耳機發聲原理是將振膜置於兩極板形成的靜電場中，透過音頻訊號使靜電場產生變化，驅動振膜振動進而發聲，此類耳機靈敏度高、低失真，但高電壓的驅動方式不易達成，需要額外的專用放大器，造就耳機價格昂貴，無法滿足普通消費者的需求。

因此本研究利用壓電材料複合薄膜的方式，以壓電材料作為新的驅動元件，將壓電的振動行為延伸，激振薄膜，使整個元件產生振動發出聲音。利用理論分析、無網格法和有限元素法探討聲學元件的振動問題，能夠以振動的基頻設計結構的幾何尺寸，並透過聲學有限元素法模擬和實驗，結合田口法進行結構最佳化，找出聲學元件之特性尺寸，期望能突破傳統揚聲器深沉厚重的限制，同時避免複雜的電路和電池設計，具有攜帶性輕量化的優勢，符合現今電子元件輕薄化的發展趨勢，設計出低、中、高三頻均衡，高響度、高音質的耳機聲學元件。



1.2 文獻回顧

聲音和振動充斥在日常生活中，視覺和聽覺刺激是從外界獲取訊息的主要來源，聲音是一種由振動產生的能量，當物體振動時，會引起周圍的介質運動，介質的分子又與相鄰分子相互碰撞，導致聲波振動透過介質傳遞到耳膜或感測元件，因此，聲音和振動特性對於結構、環境和影音娛樂的產品至關重要，兩者息息相關，唯有從振動的角度才能更完整的從根本改善聲學問題。

2011 年 Kim [1] 等人進行壓電薄膜型揚聲器的聲學研究，當中提到幾何效應對揚聲器性能的影響，利用壓電薄膜揚聲器的尺寸函數評估聲學性能，進一步提高揚聲器於低頻範圍的性能。因此，本文使用壓電薄板複合薄膜作為研究之聲學元件，「薄板」和「薄膜」兩種結構元件皆屬於連體系統振動(vibrations of continuous systems)的研究範疇，一維的樑(beam)可以推廣衍生到二維的薄板(thin plate)，為四階偏微分系統；一維的弦(string)可以推廣衍生至二維的薄膜(membrane)，為二階偏微分系統，兩者的振動特性有極大的區別。1948 年 Morse [2] 在其著作中以振動學分析，闡述薄板振動時的恢復力(restoring force)來自於其自身板的剛性；薄膜振動時的恢復力則是透過外加的張力(tension)來平衡，兩者的振動機制不同，因此本文分別以理論解析、無網格法、有限元素法和實驗量測探討壓電陶瓷薄板、實心薄膜、空心薄膜和複合材料的結構振動特性與聲學特性的關聯性，並相互驗證方法的可行性和準確性。

壓電材料的起源可追溯自西元 1880 年 Pierre 及 Jacques [3] 兄弟於天然水晶中發現壓電效應，發展至今製程設備與製造技術不斷進步，壓電元件相繼的被開發出來，鑒於壓電材料高效能的機電轉換效率，因此廣泛的被應用於精密工業或檢測儀器設備中，例如印表機噴墨頭、超音波檢測探頭、超音波雷達感測器以及超音波馬達等。於工業的應用大多是利用壓電效應之機電轉換與諧振特性，以下將探討壓電材料的機械特性之相關文獻。1946 年 Cady [4] 發表有關壓電諧振器的書籍著作，為壓電晶體應用於振盪器的先驅之一。1950 年 Mason [5] 將壓電晶體的振動特性模

擬成等效電路。1969 年 Tiersten [6]提出完整的線性壓電理論，文中利用電彈方程式及變分法推導出壓電平板振動特性的本構方程式。1972 年 Mindlin [7]利用變分法推導石英壓電平板的二維本構方程式。1987 年 IEEE Standard [8]中已完整敘述壓電材料的四種本構方程式（d-form、e-form、g-form 與 h-form），並詳細規範壓電材料以共振法量測材料常數的方法。1994 年 Rogacheva [9]在其著作書籍中探討不同極化方向之壓電平板與薄殼振動問題，並提出平面應力與應變相關問題的假設。

圓盤及圓環的平板振動問題，因為具有較簡單且對稱之幾何形狀，使其不論在理論分析推導或實驗都較為常見且容易，2000 年 Chang [10] 推導壓電陶瓷圓環的電彈理論，分析靜態位移、共振及反共振頻率與動態機電耦合係數，應用數值計算不同的幾何變數並加以探討。2003 年林育志[11]以 AF-ESPI 配合 LDV 量測技術及阻抗分析探討壓電陶瓷複合層板與壓電雙晶片的振動特性，實驗結果與有限元素法分析有良好的對應性。2004 年何祥瑋[12]以薄板理論解析單層壓電圓盤及圓環於不同邊界條件下的振動特性，並與有限元素法分析比較。2005 年 Huang [13]以薄板理論解析對稱形式壓電雙晶複合等向性材料的振動特性，並與有限元素法分析及實驗量測比較。2009 年黃育熙[14]以 ESPI、LDV 與阻抗分析配合有限元素法，量測並聯型、串聯型壓電陶瓷雙晶片於不同電極連接方式下的三維振動特性，並與理論解析、有限元素法相互驗證討論實驗量測之結果。2017 年許松逸[15]透過理論分析及有限元素法數值計算，探討壓電陶瓷圓盤及圓環在單層、雙層堆疊及雙層堆疊複合等向性材料於不同邊界條件的振動特性，並且設計並聯型雙層壓電圓環複合等向性材料於自由邊界下三維耦合特性的尺寸參數，並以實驗驗證理論之準確性。

有關矩形平板振動的相關議題已有百年的歷史，Leissa [16]利用雙向的梁函數組成的基底函數，解析複雜邊界條件的振動問題，求得薄板面外位移場的近似解，具有分析流程較為簡易的優勢。Gorman [17]提出以疊加法分別解析單邊固定與全



自由的等向性薄板振動問題，修正了梁函數法無法準確處理複雜邊界的問題。1990 年 Kim [18] 等人探討矩形板受到集中質量與點、線彈簧支撐下的彎曲振動行為。2009 年吳亦莊[21]應用疊加法，將壓電陶瓷矩形薄板的材料參數以等效剛性的方式代入等向性矩形平板計算，求得壓電矩形平板於全自由與懸臂板之面外位移級數解，並以有限元素法驗證理論計算的正確性。2012 年 Huang 和 Ma [22] 利用實驗量測和數值分析研究壓電薄殼的耦合振動特性。2019 年王惠儀[23]利用梁函數法求解壓電薄板在自由、懸臂以及彈性邊界下的面外振動特性。2021 年陳新承[24]以疊加法理論解析探討壓電陶瓷雙晶片在彈簧邊界下的面外振動特性，並利用錐形彈簧的非線性特性，改變壓電試片的共振頻率以對應到環境的激振頻率。

關於薄膜的研究1998年Laura, Rossit, Malfa [25]提出了具有不連續變化厚度的複合雙連接膜於橫向振動之解析解。2001年Jabareen, Eisenberger [26]提出圓形和圓環薄膜的對稱(axisymmetric)和非對稱(antisymmetric)模態之確切解，其中材質密度的變動以分段多項式表示，利用動態剛性矩陣(dynamic stiffness matrix)方法計算薄膜的振動頻率，並呈現模態圖形結果。2007年Rao [27]在其著作書籍中推導整理了圓形、矩形薄膜於自由振動系統下之波動方程式。

由上述文獻知道薄膜的控制方程式為二維的波動方程式，即亥姆霍茲方程(Helmholtz equation)，因此本論文利用無網格的方式進行求解，無網格法最初的想法可以追溯到用於模擬天體物理現象的光滑粒子流體動力學(smoothed-particle hydrodynamics, SPH)方法[28]，在眾多的文獻中提到許多基於域的方法，例如 element-free Galerkin methods [29]、domain-based methods [30]；以及基於邊界的方法，例如 boundary node method [31]、meshless local Petrov-Galerkin approach [32]、RBF approach[33]、和 boundary knot method (BKM) [34]。基本解法是基於徑向基函數的無網格數值方法，1964 年 Kupradze [35]提出基本解法的基本概念，推導數學物理中極限問題的近似解。2001 年 Karageorghis [36]利用基本解法求解亥姆霍茲方程的特徵值問題。2004 年 Chen [37]提出利用基本解計算多連通薄膜的特徵問題。

2006 年 Tsai [38]將基本解法應用於具孔洞與不具孔洞的薄膜特徵值問題。

薄膜結構被廣泛的應用於日常之中，特別是揚聲器等聲學元件更是扮演了至關重要的角色，相關的研究層出不窮，1987年Streng [39]建立推拉式靜電揚聲器在自由音場運動的數學模型，並說明薄膜張力和密度、輻射阻抗等參數對頻率響應的影響。2006年Mellow, Kärkkäinen [40]提出改善方法，找出解析解，消除數值積分和最小平方法的誤差，提升計算速度和準確度，並擴及到圓形靜電揚聲器在無限障板的聲輻射。另外同時也透過有限元素分析模擬圓形靜電揚聲器於沒有和帶有無限障板之頻率響應特性，並與理論解析相互驗證。2016年Huang, Chiang [41]以具有導電層的圓形和環形薄膜分別夾於一對透明的ITO孔極板間所製作而成的兩組推拉式靜電揚聲器，並利用雷射光學系統與傳統聲學測量進行比較，可發現在振動模態和聲輻射特性方面呈現高度的一致性。

電子斑點干涉術 (Electronic Speckle Pattern Interferometry, ESPI) 量測，它擁有即時、非接觸、全域式量測的優點，並可同時量測試片振動時的共振頻率及模態振形，這項光學技術是由底片顯影的全相術 (Holography) 演變而來，全相術為 Dennis Gabor 在 1948 年提出之記錄物體三維資訊的量測技術，當時由於缺乏理想的同調性光源，因此無法有顯著的進展，直到 1960 年代雷射發明以後，Leith 及 Upatnieks [42]將雷射應用到全相術中，此技術得到突破性的進展。1971 年 Butters 與 Leendertz [43]先將 ESPI 應用於圓板的振動模態量測上。1976 年 Hogmoen 及 Lokberg [44]利用參考光相位調制技術 (Reference Beam Modulation) 於 ESPI 量測系統，提高對物體微小振動振幅及相位的量測能力與影像解析度。1982 年 Wykes et al.[45]將 ESPI 技術應用於物體表面振動的靜態及動態量測上。1996 年 Wang et al.[46]提出振幅變動電子斑點干涉術 (Amplitude-Fluctuation Electronic Speckle Pattern Interferometry, AF-ESPI)，且比較影像訊號相減法 (Video-Signal-Subtraction Method)、影像訊號相加法 (Video-Signal-Addition Method) 和 AF-ESPI，三種運算處理方法，並在文中推導 AF-ESPI 之基本理論，其中 AF-ESPI 之原理與影像訊

號相減類似，只是參考影像為動態中抓取，可簡化量測的步驟與複雜性，並將 AF-ESPI 應用於面外量測單邊固定複合材料平板來比較三種影像處理法，認為 AF-ESPI 動態即時相減技術大幅提升了條紋清晰度與解析度。1998 年馬劍清和黃吉宏 [47] 以 AF-ESPI 及 FEM 對各類型壓電平板的振動以及切割電極的壓電陶瓷平板之三維振動特性進行詳細討論。2003 年黃育熙和馬劍清 [48] 以 AF-ESPI 配合 LDV (Laser Doppler Vibrometer) 量測石英壓電材料在不同切面所造成的頻率響應以及振動特性。本論文主要採用全域式實驗量測方法，即為 AF-ESPI 技術。

雷射都卜勒振動儀 (Laser Doppler Vibrometer, LDV)，是使用都卜勒效應 (Doppler effect)，當一個波接觸到處於運動狀態下的物體表面時，反射後的頻率會與原先的入射波頻率有所差異，頻率差異與物體移動速度成正比。此量測技術可以精確量測質點之位移與速度，為非接觸式的單點光學量測系統。2006 年 Ma et al. [49] 於複合材料中埋置壓電陶瓷材料並探討其動態特性，除了使用 AF-ESPI 實驗量測技術搭配有限元素法數值計算研究其振動特性外，同時使用 LDV 驗證試片共振頻率的準確性。

本研究探討壓電平板複合薄膜的結構振動性質與聲學元件之頻率響應特性，由於複合結構是由兩種剛性差異非常大的元件組成，壓電陶瓷相對薄膜可視為不變形的剛體。2003 年 Wang [51] 針對一個自由且剛性的圓盤附著於環形薄膜上，假設薄膜的張力是足夠大，圓盤的重量會引起薄膜的小變形，使結構具有非耦合的特性，並且探討對自然頻率的影響。2006 年 Pinto [52] 對於複合材料的模型進行振動的理論解析，假設中心圓盤的質量相對薄膜而言很大，將邊界條件近似於圓環薄膜之內、外邊界固定，並以電容式麥克風於真空中之實驗數據與理論解進行相互驗證。2013 年 Kim et al. [53] 製作超薄壓電微型聲學致動器 (ultra-thin piezoelectric micro-acoustic actuator)，藉由 LDV 測量得到振動模態，以及聲學測量得到頻率響應，並透過改變彈性體質量來改善壓電揚聲器的頻率響應。2016 年林揚中和莊沅隴和黃育熙 [54] 利用雙層串聯型壓電圓盤搭配薄膜以壓電為類自由邊界條件條件，



設計不同尺寸之壓電片作為驅動源的聲學元件，探討振動與聲學響應間的關係。2017 年江信遠和黃育熙[55]製作雙層壓電圓板複合薄膜之揚聲器，以理論解析壓電圓形薄板的共振頻率，搭配使用集中參數測量法(Lumped Parameter Measurement, LPM)、分佈參數測量法(Distributed Parameter Measurement, DPM)測量振膜實際的位移振幅和模態並預估聲壓大小，利用無響室聲學測量(Acoustic Measurement, AM)方法測量聲壓曲線去驗證，從中了解揚聲器的振動與聲輻射之間的關係。2019 年陳冠宇[37]製作了雙層壓電圓盤複合環形 PVC 薄膜以及雙層壓電圓環複合圓形單面濺鍍金屬的高分子薄膜的兩款聲學元件，探討了壓電平板複合薄膜在不同邊界下的適用性，以及有限元素聲場模擬的建立和薄膜張力反算的方法，了解聲學元件設計的流程和設計方向。2021 年張哲睿[56]透過理論分析和有限元素法數值模擬，探討串聯型雙層壓電陶瓷圓環複合圓形薄膜結構之振動與聲學特性，並提出聲壓理論分析，利用 LDV 量測實際位移後，帶入雷利積分公式討論模態對頻率響應的貢獻，可應用於新型揚聲器最佳化聲場增益特性之聲音品質的開發。

本文接著將田口法應用於數值模擬的最佳化設計，田口法(Taguchi Method)是由田口玄一博是最早於 1950 年代提出，起初大量被日本公司使用，在 1950 年代末，田口博士出版了「實驗設計」一書。田口法起初應用於生產上，之後經過不斷的修編與改進，直到 1970 年代，田口法逐漸被應用在產品設計上。1980 年，田口博士造訪美國貝爾實驗室，並成功將田口法建立於實驗室中，此後許多企業都開始使用田口法進行產品生產與設計，本文之田口法參考李輝煌[63]所出版的書籍。



1.3 論文內容簡介

本論文主旨係利用壓電平板複合薄膜的設計作為新型的聲學元件，以壓電陶瓷薄板為發聲的驅動源，複合薄膜材料能使揚聲器有更佳的頻率響應。振動方面以理論解析、無網格法、有限元素法進行探討，相互驗證方法計算的結果，確保其準確性，首先分別針對兩大材料進行分析。壓電陶瓷試片以薄板理論簡化，計算其等效參數，導入疊加法的概念將壓電薄板拆成多塊結構計算再將其疊加，求取壓電薄板的面外共振頻率和模態振形。為了能適應各種幾何形狀外型的薄膜，提出了無網格法的解決方案，求得自然頻率與模態形狀，接著將壓電薄板以類自由邊界複合於薄膜，討論其振動特性。對於聲場的部份，分為兩種環境進行討論，自由音場環境以有限元素法 (Finite element method, FEM)、集中參數測量法 (Lumped Parameter Measurement, LPM)、分佈參數測量法 (Distributed Parameter Measurement, DPM)、全像式電子斑點干涉術 (Electronic Speckle Pattern Interferometry, ESPI)、無響室聲學測量 (Acoustic Measurement, AM) 進行結構的振動與聲場聲壓之評估，分析實際振動情況和聲學響應之間的關係。封閉音場模擬人耳配戴耳罩式耳機的環境，利用有限元素法 (FEM)、人工耳量測的方式分析聲學元件在具有空氣腔體的聲學表現。最後使用田口法對壓電矩形薄板複合薄膜的聲學元件進行最佳化分析，找出結構之特性尺寸，設計出符合目標之新型揚聲器。以下將說明本研究各章節的主要內容。

第一章介紹本研究的研究動機、背景，回顧壓電、薄膜、無網格法和實驗量測技術之相關研究，最後簡單說明各章節內容及重點。

第二章介紹本研究的實驗系統架設，說明各量測儀器的基本原理。首先介紹用於振動量測的雷射都卜勒測振儀 (LDV)，測量單點面外動態位移，能以掃頻方式量測動態訊號獲取待測物之速度頻譜；雷射電子斑點干涉術 (ESPI)，透過光學鏡頭和光路架設拍攝物體之模態振形。接著介紹聲學量測，選擇在無響室，有障板的條件環境下量測揚聲器之聲壓曲線，評估元件在自由音場的聲學特性；具有耳殼的



人工耳量測能夠模擬人耳實際聆聽的感受，耳機與頰板形成的封閉空間使揚聲器在低頻的特性改變。最後介紹本研究探討之聲學元件，包含元件的製作方式及流程，並詳細介紹四種聲學元件的尺寸規格及材料參數。

第三章介紹本研究所使用的基本理論與方法，壓電基本理論以線性壓電的電學假設、機電轉換以及熱力學定律得到壓電材料之本構方程式，透過薄板假設推導出壓電薄板之統御方程式和等效平板參數；無網格法能夠適應各種幾何形狀，無需生成複雜的網格，僅需要邊界散點的離散信息，且逼近函數是高階連續的，本論文使用無網格法中的基本解法作為求解偏微分方程式的方法；聲學基本理論基於非黏性可壓縮流的假設進行數學推導，分析流體介質與聲場的關係；最後簡單介紹田口法的最佳化方法與其實施流程，此方法以統計學的方式進行分析，能夠達到低成本、高效益的效果。

第四章介紹壓電陶瓷薄板的自由振動，引入疊加法的概念並根據第三章推導之等效材料參數，探討自由邊界下的壓電平板振動特性，將計算之面外共振頻率與模態振形與商用有限元素軟體相互比較，確保方法的正確性。

第五章介紹薄膜的自由振動，首先以理論解析、無網格基本解法和有限元素法分析實心的矩形薄膜與中心挖洞的空心環型薄膜，比較自然頻率、模態振形的結果，相互驗證方法的可行性和準確性。進一步探討難以計算解析解的矩形環薄膜，以基本解法計算振動特性，並與商用有限元素軟體進行比較。

第六章將探討壓電薄板複合薄膜的結構自然振動，結合第四章、第五章的推導結果，壓電薄板以類自由邊界複合薄膜，振動的行為可分為兩種模式，將壓電視為不會變形之剛體的非耦合模態，利用基本解法進行分析，探討環形及矩形環的共振特性；以及壓電主導進而影響薄膜的耦合模態，利用疊加法結合基本解法的方式計算壓電矩形薄板複合薄膜的特徵頻率及模態形狀，並與有限元素法比較。

第七章介紹聲學元件的測量方式及最佳化的方法，首先討論自由音場，以第三章聲學的基本理論為基礎進行推導，能夠搭配 LDV 量測之位移訊號，計算出聲學



元件的聲壓響應，此方法用於單點量測的集中參數測量法 (LPM) 和全域多點量測的分佈參數測量法 (DPM)，同時使用商用套裝有限軟體建立聲學模型，配合 ESPI[®] 分析結構的特性，並與實際無響室量測的聲壓曲線相互比較。接著探討封閉音場，利用有限元素法建立兩種模型，具有耳殼的模型，能夠觀察聲壓於耳朵、臉頰的分佈；等效電聲學的模型，有著較小、較簡易的計算域，能夠有佳的效率，快速得到聲學元件於封閉音場的聲壓曲線，並比較與實際人工耳量測之結果。最後利用田口法的最佳化，結合自由音場的有限元素法模擬，簡易評估聲學元件的聲學表現，並以較少的實驗組數，透過統計學的方式設計出符合目標之聲學元件。

第八章為研究之成果總結，針對本論文設計之最佳化聲學元件進行分析，並在未來展望中提供可改良的方向，理論分析或是實驗設計上更精進的方式。

第二章 實驗原理與架設



本章介紹本研究所使用到的實驗儀器及架設方式。雷射都卜勒測振儀 (Laser Doppler Vibrometer, LDV)，利用都卜勒效應，以掃頻的方式進行單點量測，並透過快速傅立葉轉換 (FFT) 將時域轉為頻域，得到試片的面外振動頻率響應，對應的相對峰值即為共振頻率；電子斑點干涉術 (Electronic Speckle Pattern Interferometry, ESPI)，係利用光學的原理量測全域模態振形的非接觸式光學技術，本研究主要用於量測試片面外方向振動特性；無響室量測 (Anechoic Room)，模擬無限遠空間的音場，並在有障板的條件下，使用麥克風進行測量待測物之聲壓曲線；人工耳量測 (Artificial Ear)，模擬實際人耳聽到的聲音表現，設有仿真的人工耳廓，並與人耳有相似的聲阻抗，主要用於量測插入式耳機和耳罩式耳機。

2.1 雷射都卜勒測振儀

雷射都卜勒測振儀 (Laser Doppler Vibrometer, LDV) 利用都卜勒效應 (Doppler effect)，當雷射光的波接觸到處於運動狀態下的物體表面時，反射後的頻率會與入射波的頻率有所差異，而物體移動的速度與頻率的變化成正比，因此 LDV 測量技術可以精確量測出單點之位移與速度，是一種非接觸式的光學量測系統。

本研究使用 Polytec 公司所生產之 LDV，型號為 OFV-505，如圖 2-1 所示，主要使用聲光調製器 (Acousto-Optic Modulator, AOM) 系統或稱為布拉格盒 (Bragg Cell) 進行量測，其原理為聲波在晶體材料內傳遞，晶體材料之折射率受到聲波傳遞的影響產生變化，進一步的影響到光的行為，此稱為聲光效應，如圖 2-2 所示，在晶體材料的兩端連接一個轉換器與減振器，由轉換器產生聲波，在晶體材料內傳遞，最後傳遞至減振器吸收聲波，當雷射光穿透此晶體材料時，便可調整聲波之頻率來調整光波的繞射角度，以這樣的幾何形狀傳遞聲波可以調製數兆赫茲的頻寬。

假設轉換器所產生之聲波的頻率為 f_a ，而聲波在材料中的傳遞速率為 V_a ，則晶體材料中折射率改變的週期為：

$$T = \frac{V_a}{f_a} \quad (2-1)$$

假設入射光的波長為 λ_0 ，晶體材料折射率為 n ，則入射光在晶體材料裡傳遞時其波長變為：

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad (2-2)$$

一般而言繞射角之角度都很小，便可以假設 $\sin \theta_B = \theta_B$ ，再使用 Bragg 繞射公式求得繞射角：

$$\theta_B = \frac{\lambda}{2T} = \lambda \frac{f_a}{2V_a} \quad (2-3)$$

光路圖如圖 2-3 所示，雷射光藉由分光鏡分為兩道光，其中一道入射光經由 Bragg Cell 調整出適當之頻率，最後傳導至檢測器（Detector），另一道光傳至待測試片（Sample），當物體在振動時，其反射光頻率會與入射光頻率不同，並且反射光透過分光鏡傳導至檢測器，便可獲得兩道光的頻率差異進而量測出速度。



圖 2-1 LDV-OFV505

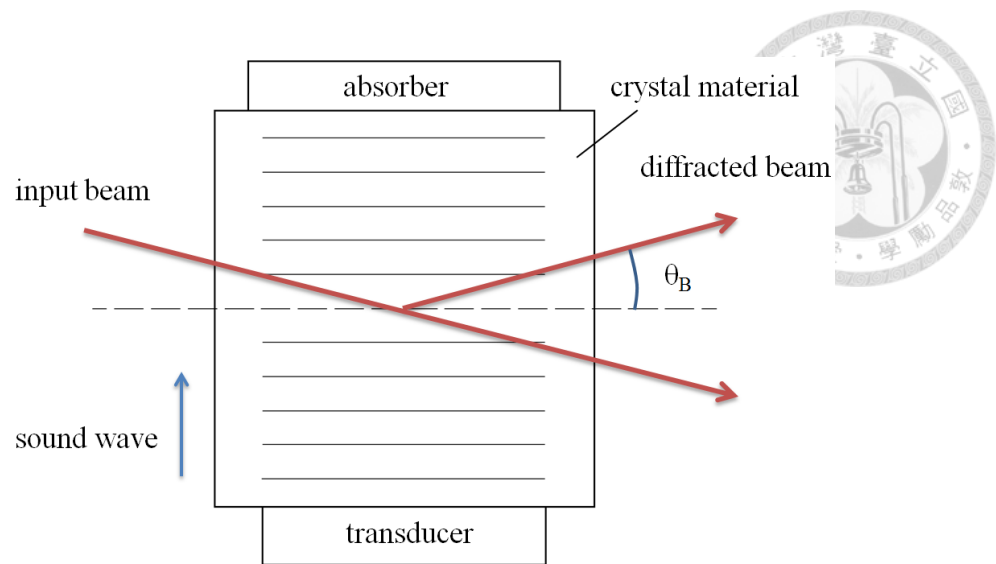


圖 2-2 聲光調製器基本構造

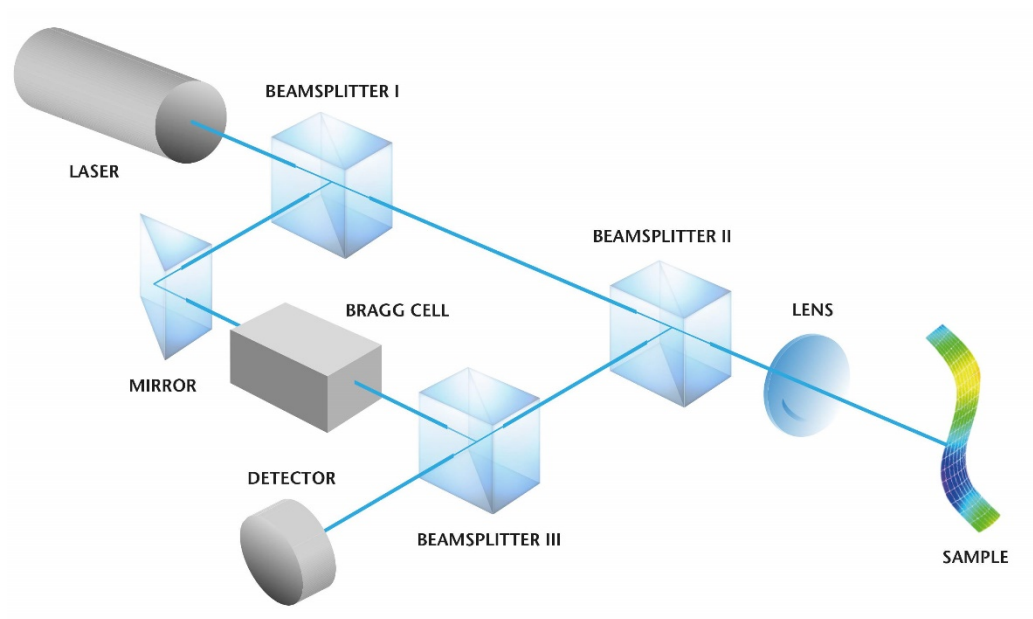


圖 2-3 LDV 內部光路圖



2.2 電子斑點干涉術

電子斑點干涉術 (Electronic Speckle Pattern Interferometry, ESPI) 由全相術 (Holography) 演變而來，該技術是利用影像感測元件 (Charge-Coupled Device, CCD) 與電子處理技術記錄低空間頻率 (Low Spatial Frequency) 全場成像圖形，可用來量測物體表面靜態及動態變形。原理是利用兩道同調的光源射向待測物及參考平面，當待測物表面變形時，待測物表面上的光點會產生微小的位移變化，使其與參考面之光點有光程差進而產生干涉條紋，並藉由兩道光之光程差的變化得到待測物的變形資料，達到即時的位移成像，大幅降低了全像術照片沖洗與重建的繁瑣步驟與時間。干涉後影像強度的調制項就能將因待測物表面變形而產生的相變化包含在內，由於調制項中是以光波長作為量測基準，因此精度可達到光波長的等級約為次微米，由於 ESPI 要求光源的同調性，故本論文採用同調性較佳的氦雷射。ESPI 有著非接觸式、全域式以及即時性等優點，僅需簡單的架設及校正即可進行實驗量測。

ESPI 量測振動時常用的方法為均時法 (Time-Averaging Method)，特點是在 CCD 的曝光時間內擷取振動中物體在不同時間的影像，以數學關係式表示所得到的干涉條紋皆是以零階貝索函數 (zero-order Bessel Function) 所組成，在圖形中干涉影像最亮的部分為節線區 (nodal line) 表示位移為零，而亮暗相間的條紋為等位移線的分佈，故可由全場干涉圖形直接獲得振動位移的分佈情形。ESPI 量測三維變形，根據光學架設不同可以量測到兩個方向的位移：待測物與待測物表面垂直位移的面外架設；以及待測物與待測物表面平行位移的面內架設。將面外及面內所得到的實驗量測資訊結合即為待測物完整的三維變形。

本研究主要探討振動與聲學的關係，而聲學理論中面外的振動尤其重要，因此以面外振動量測為主，以下針對面外振動量測系統進行詳細的理論介紹及系統架設與量測方法，面外振動可分為水平式架設、垂直式架設，如圖 2-4、圖 2-5 所示，紅線為雷射所產生的光路徑，雷射光束首先經過空間濾波器 (Spatial Filter) 再經由擴

束鏡擴大光束，再利用了分光元件(Beam Splitter)分出兩道光束，其中一道光束投射向待測物表面，這道光束為物體表面上的霧光；另一道光束則擴散至參考平面(Reference plane)，而參考平面上的漫射造成一種光斑式的參考光(Speckled Reference Beam)，此道光束接著會反射在與 CCD 相機同軸的分光元件，這種漫射至平面再投射於分光元件的方式可避免鏡面光產生光暈現象以增強干涉影像的品質。這道參考光會與投影在待測物體的物光同軸入射並聚焦於 CCD 相機的感光平面上，產生干涉影像資訊，訊號進入電腦後經過即時影像相減的軟體進行處理，即可快速的在電腦螢幕上顯示出干涉條紋的圖形。主要用於薄膜受揚聲器激振的面外振動量測，如圖 2-6 所示，以及複合聲學元件的面外振動量測，如圖 2-7 所示。

接著說明 ESPI 量測的基本理論[58]，假設待測物振動前在成像平面(Image Plane)上的某點之光強度為：

$$I_1 = I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} \cos \phi_O \quad (2-4)$$

其中 I_O 是物體光之光強度， I_R 是參考光之光強度， ϕ_O 為物體光與參考光的相位差。待測物開始振動後，該點散射的物光假設有一相位角差 $\Delta\phi$ 變化量，若物體此時振幅為 A ，且 θ_0 為物體光與觀測方向（垂直於物體表面之方向）之夾角，振動的角頻率為 ω ，則此相位差可表示為：

$$\phi_O = \frac{2\pi}{\lambda}(1 + \cos \theta_0)A \cos \omega t = \Gamma A \cos \omega t \quad (2-5)$$

令 $\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda}(1 + \cos \theta_0)$ 為靈敏度向量的值，其大小與系統架設相關，架設的角度 θ_0 愈接近 0° 時靈敏度愈大，其中 λ 為雷射光的光波波長。

由於CCD在取像時間內，會不斷累積該物體在不同時刻的振動影像，而均時法的概念可視為直接對影像累加後，對時間平均，因此當物體處於振動狀態時，CCD影像所擷取之光強度 I_2 為取像時間週期的平均值：

$$I_2 = I_O + I_R + \frac{2}{\tau} \sqrt{I_O I_R} \int_0^\tau \cos(\phi_0 + \Gamma A \cos \omega t) dt \quad (2-6)$$

對(2-6)式進行簡化可得到：

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \cos(\phi_0 + \Gamma A \cos \omega t) dt &= \text{Re} \left[\int_0^\tau \exp(i\phi_0 + i\Gamma A \cos \omega t) dt \right] \\ &= \text{Re} \left[e^{i\phi_0} \int_0^\tau \exp(i\Gamma A \cos \omega t) dt \right] \\ &= \text{Re} \left[e^{i\phi_0} \int_0^\tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\Gamma A) e^{in(\frac{\pi}{2} - \omega t)} dt \right] \\ &= \text{Re} \left[e^{i\phi_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\Gamma A) e^{in(\frac{\pi}{2} - \omega t)} \frac{e^{-in\omega\tau} - 1}{-in\omega} \right] \end{aligned} \quad (2-7)$$

其中 τ 為CCD擷取影像時間，若 $\tau = \frac{2k\pi}{\omega}$ 或 $\tau \gg \frac{2k\pi}{\omega}$ ，除非 $n=0$ ，否則其值為

0，故可將簡化式子改寫：

$$\int_0^\tau \cos(\phi_0 + \Gamma A \cos \omega t) dt = \tau J_0(\Gamma A) \cos \phi_0 \quad (2-8)$$

因此，光強度 I_2 為：

$$I_2 = I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} (\cos \phi_0) J_0(\Gamma A) \quad (2-9)$$

其中 $J_0(\Gamma A)$ 為零階貝索函數(Bessel Function)，由(2-8)可知貝索函數中包含了振幅 A ，但因前面兩項為直流項：物光光強 I_O 與參考光強 I_R 相對較大，使調節項貝索函數所包含的振幅在量測結果中較不明顯，為了解決直流項之影響，電子斑點干涉術的量測採用微動裝置，來變更參考光的光行程，可使(2-8)式中的 $\cos \phi_0$ 變成 $\cos(\phi_0 + \pi)$ ，再利用影像加減法將兩張振動影像光場 I_1 、 I_2 進行相減，即能消除直流項並使調節項 $J_0(\Gamma A)$ 較易呈現其特徵，但必須在光程控制上非常精準，控制光程的微動裝置也相對昂貴。因此 1996 年，清華大學王偉中教授[46]提出振動變動電子斑點干涉術(Amplitude-Fluctuation Electronic Speckle Pattern Interferometry, AF-

ESPI)，利用兩張具有適當變化之振動影像相減，即可得到穩態之全場位移干涉圖形，改良了設備成本與實驗的複雜性。

AF-ESPI 的面外光學架設方式與 ESPI 的差別在於是將具有適當變化之影像進行影像相減處理。假設試片振動時第一張已有振動振幅影像光強為：

$$I_1 = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left\{ I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} \cos \left[\phi_O + \frac{2\pi}{\lambda} (1 + \cos \theta_0) A \cos \omega t \right] \right\} dt \quad (2-10)$$

令靈敏度 $\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda} (1 + \cos \theta_0)$ ，參照影像相減法推導，則(2-9)式的光強度 I_1 ：

$$I_1 = I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} (\cos \phi_O) J_0(\Gamma A) \quad (2-11)$$

在待側物振動中取第二張影像，與之前擷取的 I_1 影像相比，振幅產生微量的變化，將第二張影像的光強度表示為：

$$I_2 = \frac{1}{\tau} \left\{ \int_0^\tau I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} \cos [\phi_O + \Gamma(A + \Delta A) \cos \omega t] dt \right\} \quad (2-12)$$

其中

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \cos [\phi_O + \Gamma(A + \Delta A) \cos \omega t] dt \\ &= \text{Re} \left\{ e^{i\phi_O} \int_0^\tau \exp[i\Gamma(A + \Delta A) \cos \omega t] dt \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ e^{i\phi_O} \int_0^\tau \exp(i\Gamma A \cos \omega t) \exp(i\Gamma \Delta A \cos \omega t) dt \right\} \end{aligned} \quad (2-13)$$

對 $\exp[i\Gamma \Delta A \cos \omega t]$ 進行泰勒展開，假設忽略三次以上之高次項，並將其代入進行積分得到：

$$\int_0^\tau \cos [\phi_O + \Gamma(A + \Delta A) \cos \omega t] dt = \tau \left[1 - \frac{1}{4} \Gamma^2 (\Delta A)^2 \right] J_0(\Gamma A) \quad (2-14)$$

而(2-11)式中的第二張影像光強度則可改寫為：

$$I_2 = I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} (\cos \phi_O) \left[1 - \frac{1}{4} \Gamma^2 (\Delta A)^2 \right] J_0(\Gamma A) \quad (2-15)$$

將第二張影像與第一張影像相減消去直流項，即(2-13)減去(2-10)式，並經整流後顯示在螢幕上，相減後的影像光強度為：

$$I = 2\sqrt{I_O I_R} \left| \frac{1}{4} \Gamma^2(\Delta A)^2 J_0(\Gamma A) \cos \phi_0 \right| = \frac{\sqrt{I_O I_R}}{2} \left| \Gamma^2(\Delta A)^2 J_0(\Gamma A) \cos \phi_0 \right| \quad (2-16)$$

由(2-14)得知振動振幅為 $|J_0(\Gamma A)|$ 所控制，並利用零階貝索函數的特性，當振幅 $A=0$ 時， $|J_0(\Gamma A)|$ 有最大值，實驗上可對應量測物體振動時位移為零的節線即為影像最亮的區域。

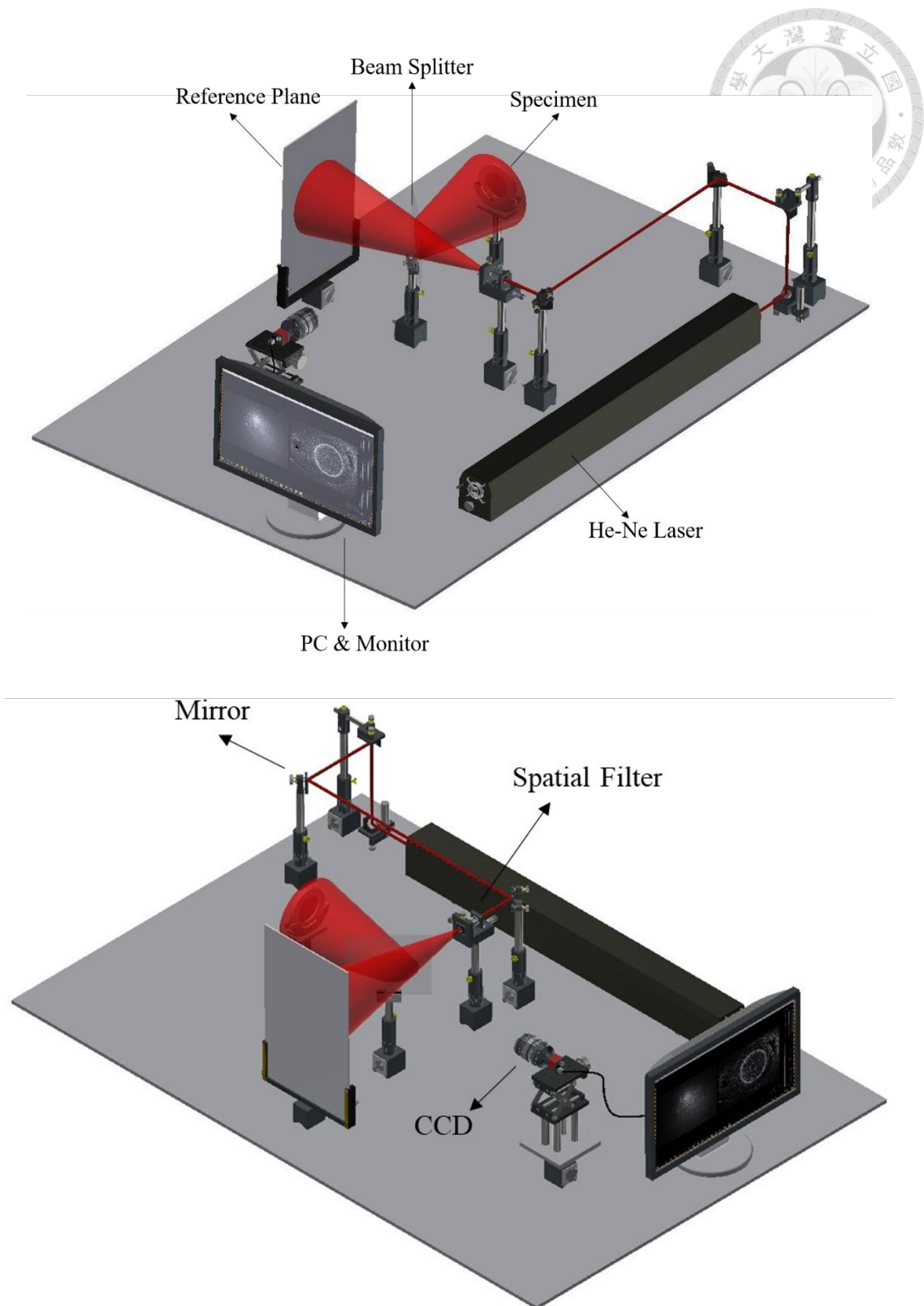


圖 2-4 ESPI 水平面外架設圖

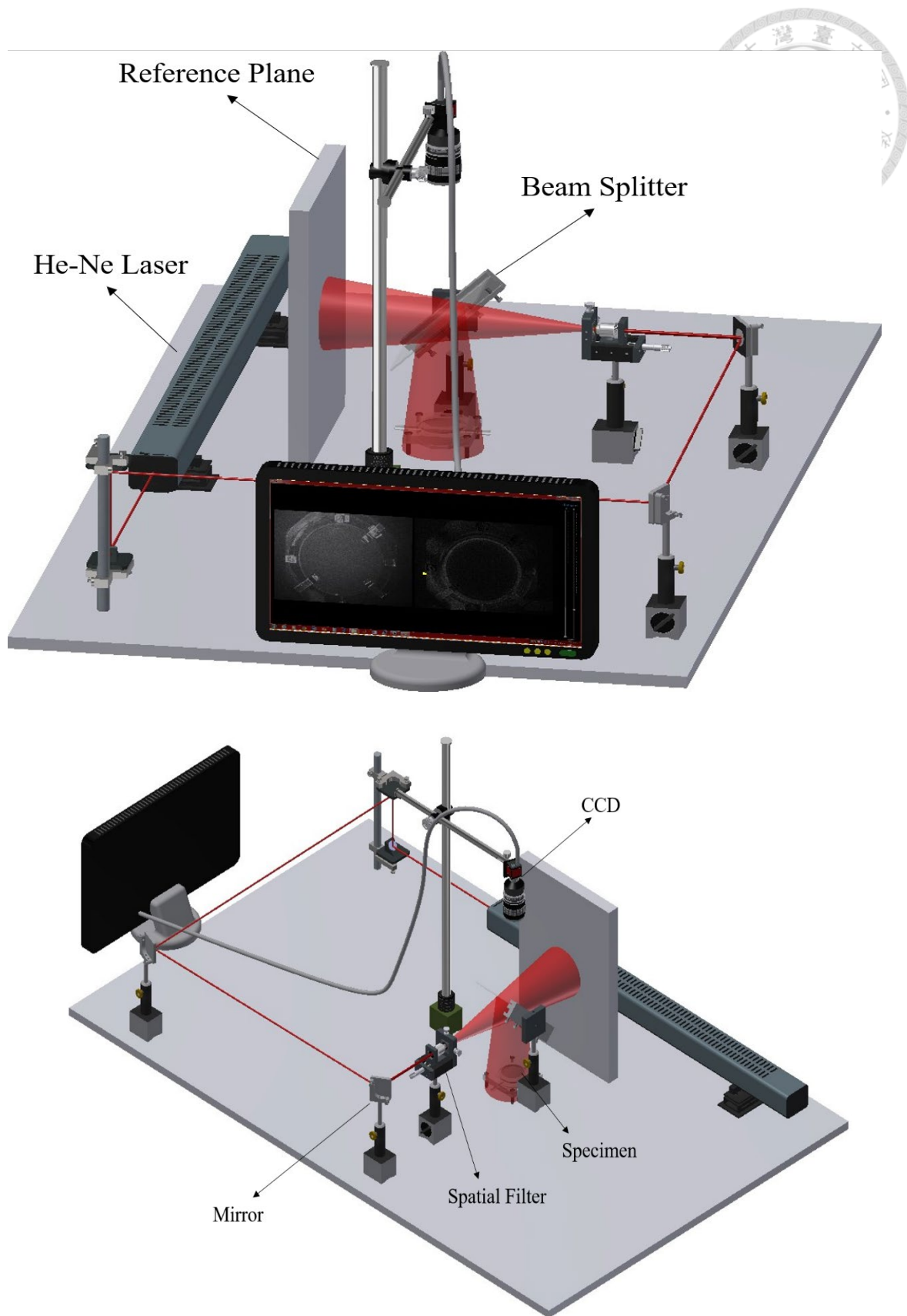


圖 2-5 ESPI 垂直面外架設圖

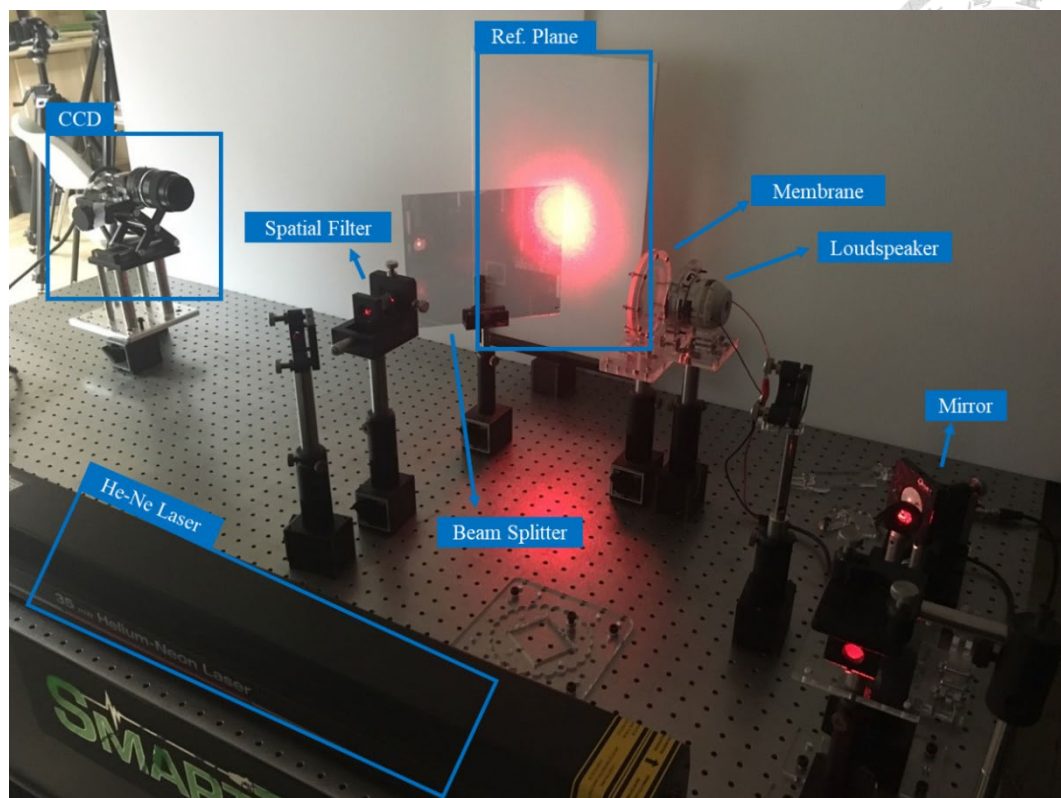


圖 2-6 電子斑點干涉術水平面外架設-薄膜受揚聲器激振

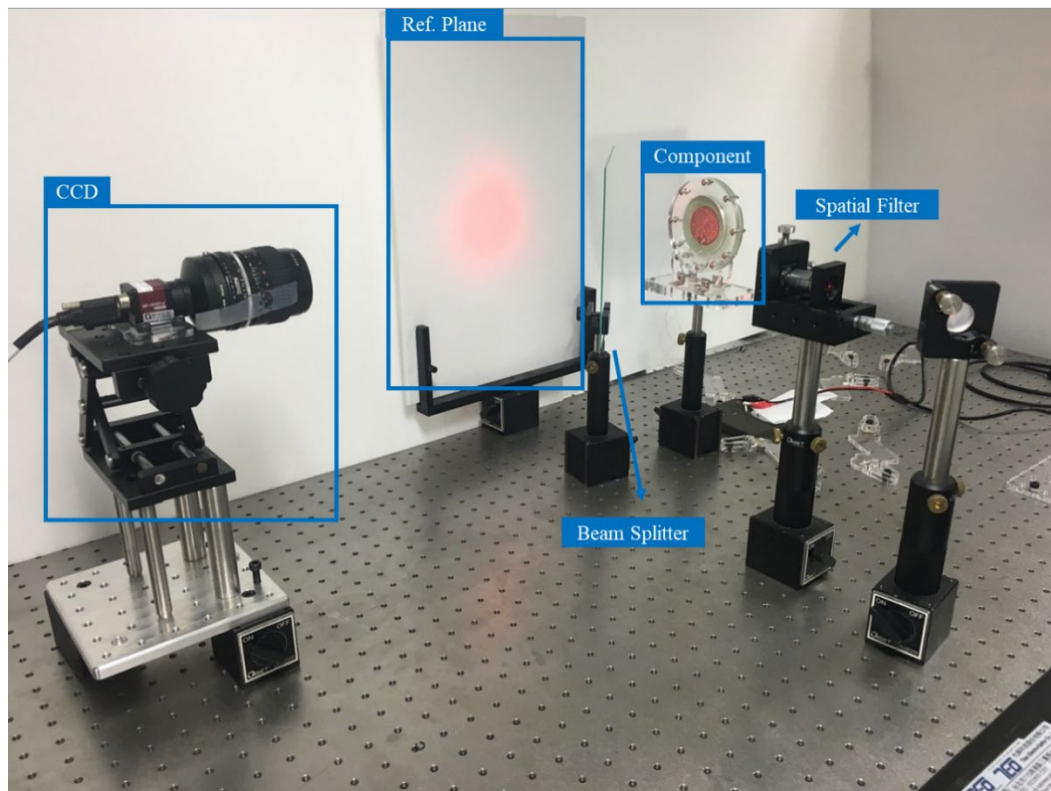


圖 2-7 電子斑點干涉術水平面外架設-複合聲學元件



2.3 無響室量測

無響室量測 (Anechoic Room)，為模擬理想無窮遠的聲場環境，在環境內周圍設有吸音結構材料，使無響室達到接近完全無反射的自由音場，並利用麥克風測量聲壓，如圖 2-8 所示。規範採用音響工程協會(Audio Engineering Society, Inc.) 發行 AES2-1984 (r2003)標準方法，使用障板規格是 1650×1350 [mm]，如圖 2-9 所示；麥克風規格為 4191 1/2-inch (12.7-mm) free-field microphone (200 V polarization with Type 2669-C preamplifier)，3-40k (Hz)動態頻率範圍，製造商為 Bruel & Kjaer Sound & Vibration Measurement A/S., Naerum, Denmark。無響室的最低截止頻率是 80Hz(根據 ISO 3745 和 ANSI 12.35 測試標準)，測試環境室溫是 ，相對溼度在 30%至 70% 之間。

本研究量測方式是將聲學元件固定於障板上，並使其與麥克風水平量測距離為 10cm，給定 1/24 八音帶的 20~20000Hz 掃頻訊號後，經由快速傅立葉轉換可以獲得對應之聲壓頻率響應曲線，實際架設如圖 2-10 所示。

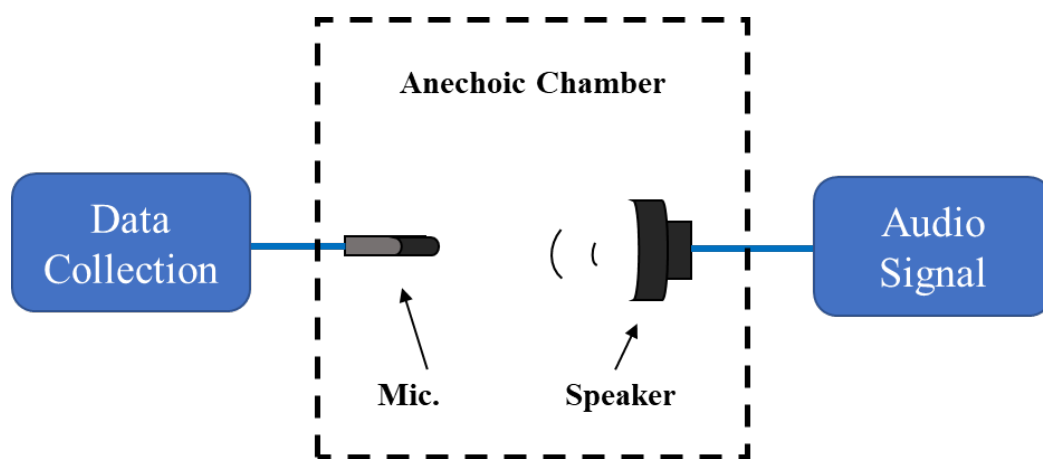


圖 2-8 無響室測量示意圖(虛線部分為無響室區域)

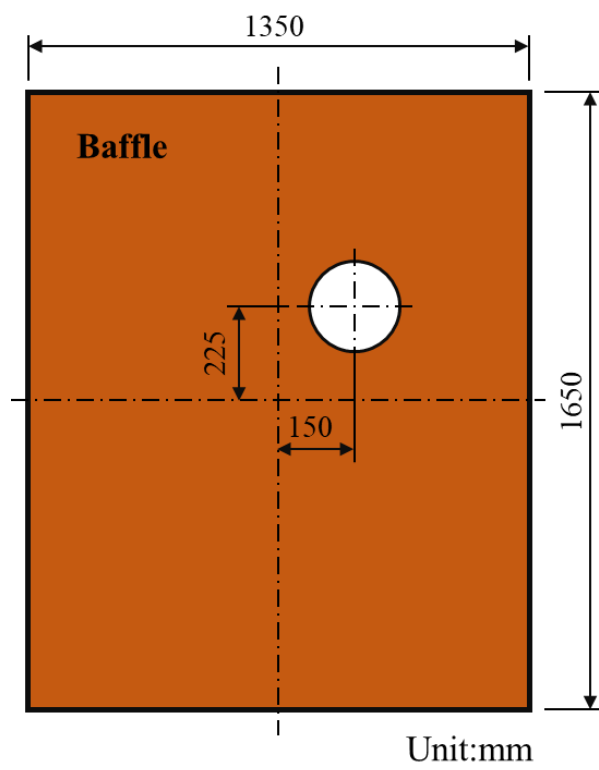


圖 2-9 障板規格示意圖(AES2-1984 r2003 標準規範)

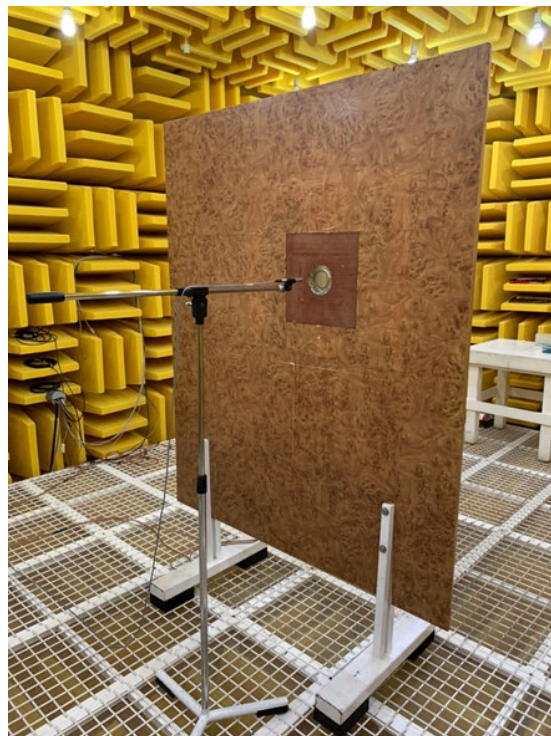


圖 2-10 無響室實際量測圖

2.4 人工耳量測

人工耳 (Artificial Ear) 用於測試插入式、耳掛式或是耳罩式耳機的頻率響應、失真和洩漏，人工耳下方設有麥克風，其與鼓膜有相似的聲學阻抗以模擬人耳鼓實際的聽感；上方裝有仿真的右人耳、及夾具，可以使量測耳罩式耳機時更貼近真實配戴的情況。本研究選用的型號為 GRAS 43AG-9 Hi-Res Ear Simulator，如圖 2-11 所示，詳細規格見表 2-1，符合國際電工委員會 IEC60318-4 標準。搭配聲音校準器 (G.R.A.S. 42AG Multifunction Sound Calibrator, Class 1)，如圖 2-12 所示，並以 94dB (SPL)、1kHz (Frequency) 標準規格進行麥克風的校正。將本研究所製作的聲學元件裝上耳墊後，放置於頰板(cheek plate)上並罩住右人體耳廓(pinna)，使中間形成一封閉音場空間。輸入電訊號，透過人工耳內的麥克風量測頻率響應、失真等聲學參數，實際架設如圖 2-13 所示。



圖 2-11 人工耳(GRAS 43AG-9 Hi-Res Ear Simulator)

表 2-1 人工耳麥克風規格表

GRAS 43AG-9 Hi-Res Ear Simulator	
Sensitivity	1.6(mv/Pa)
Dynamic range lower limit	44(dB)
Dynamic range upper limit	169(dB)
Frequency range	100-50000(Hz)



圖 2-12 多功能聲音校準器(G.R.A.S. 42AG)

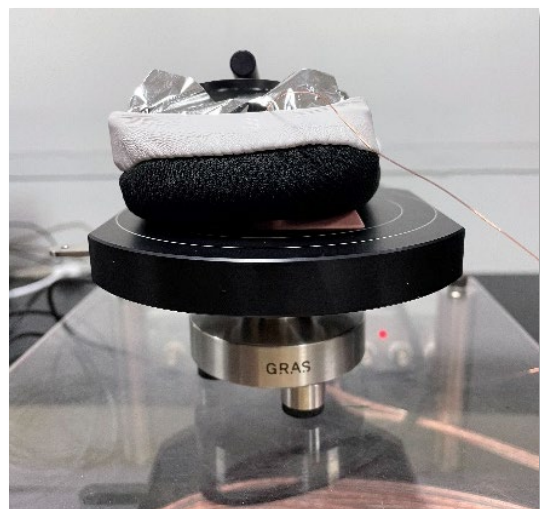
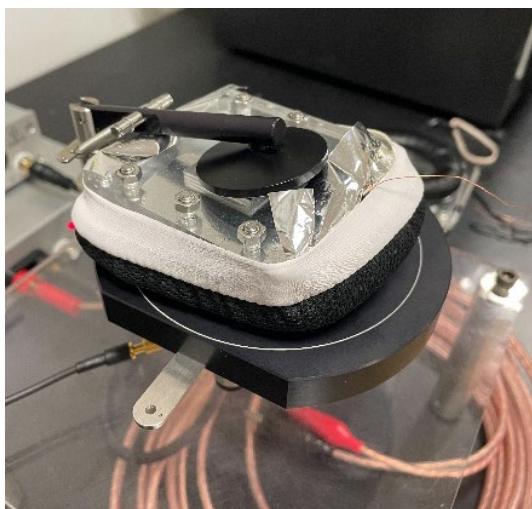


圖 2-13 人工耳實際量測圖

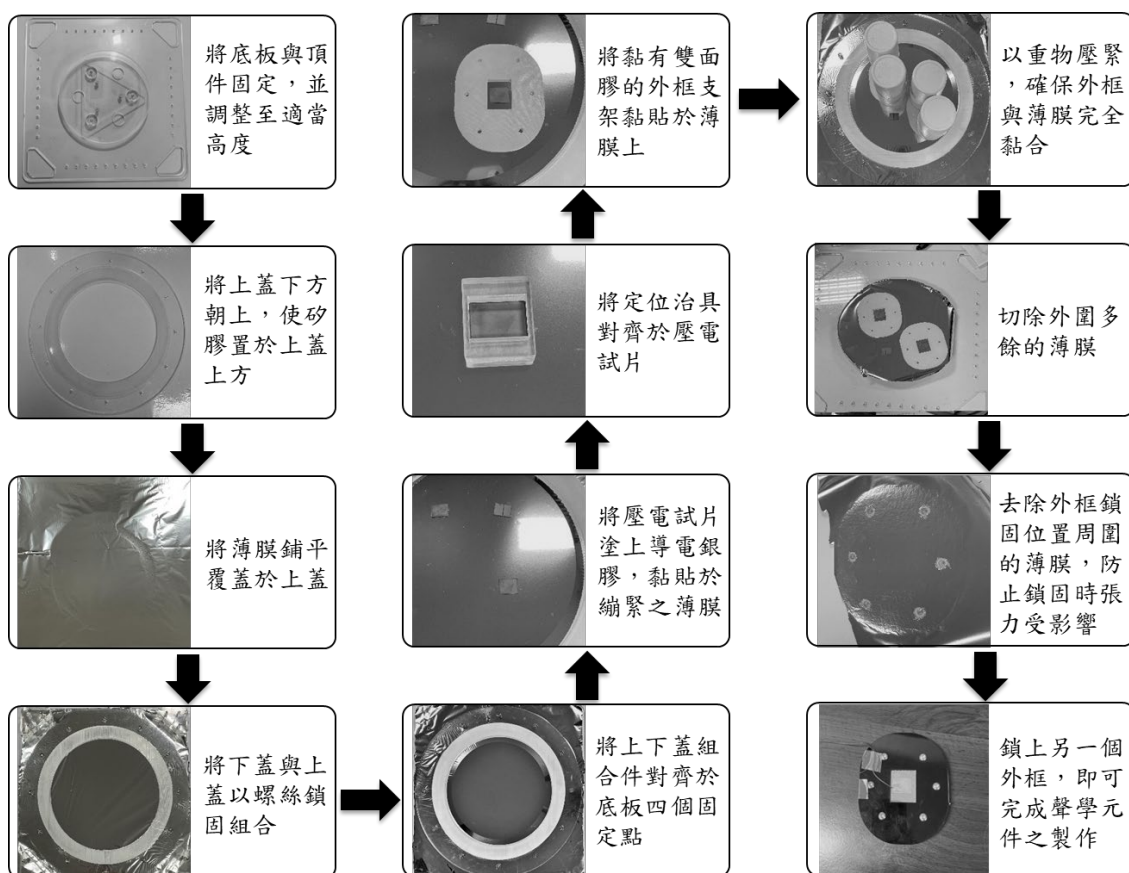


2.5 聲學元件設計與製作流程

本研究使用壓電陶瓷作為新的聲音驅動元件，利用壓電材料的逆壓電效應，輸入交流電訊號使壓電產生機械振動，複合薄膜材料，將壓電材料的振動行為延伸至薄膜，進而推動空氣產生聲音，使壓電平板複合薄膜的聲學元件能夠有更響亮、更平衡的聲音響應。透過成熟的繃膜、複合製程方式，將技術應用於耳罩式耳機，並設計不同幾何形狀和尺寸的聲學元件，探討壓電複合薄膜的幾何尺寸特性，期望得到結構最佳化，達到輕量化、輕薄化的效果。

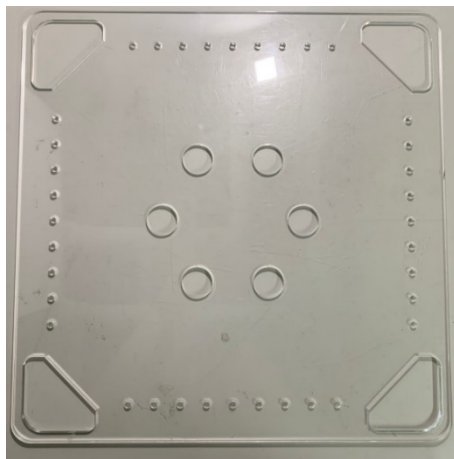
2.5.1 聲學元件製作方式

本章節介紹聲學元件的製作方式，分成兩部分：使薄膜具有特定張力的繃膜製程方式，以及壓電複合薄膜黏貼的材料與方法，流程如圖 2-14 所示。

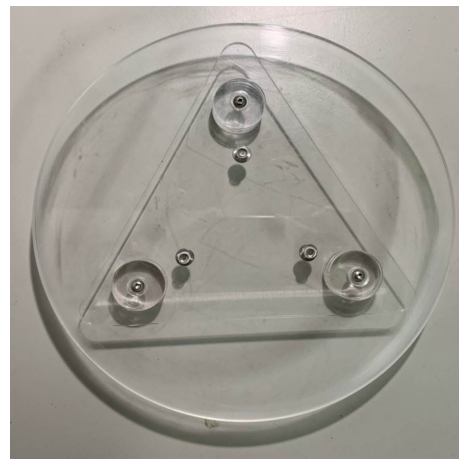


繃膜製程

為了使薄膜具有均勻的張力，本研究設計以下治具，由四個部分所組成，分別為底板、頂件、上蓋與下蓋，如圖 2-15 所示，設計的概念是利用高度差，調整高低控制位移可以改變對薄膜施加的張力。前置作業須將底板與頂件固定好並調整至適當高度，首先將薄膜鋪平於上蓋，其中的矽膠能起到固定防滑的效果，接著將下蓋與上蓋以螺絲鎖緊固定，再將此上下蓋組合併對齊於底板四個定位點，由於中心頂件的高度會略高於上下蓋夾緊的薄膜產生高度差，所以會使薄膜形成張力。



(a)底板



(b)頂件



(c)上蓋



(d)下蓋

圖 2-15 繃膜治具

黏貼方式

由於本研究主要使用的是單層導電的靜電薄膜，因此需要導通的黏合膠以利後續壓電片的接線導電作業，本研究選用雙圓科技股份有限公司的 AB 接著型導電銀膠，產品型號 OP-928，自然固化無須額外加熱，如圖 2-16 所示。得到具有張力的薄膜後，將壓電片塗上導電銀膠，黏貼於繃緊的薄膜，等黏著劑固化後套上定位治具，最後將黏有雙面膠的外框支撐架黏貼於薄膜上，切除多餘的薄膜，鎖上另一個外框架後就可以得到壓電複合薄膜的聲學元件。



圖 2-16 AB 接著型導電銀膠

2.5.2 聲學元件的設計

透過聲學元件的製作設計出四款不同幾何形狀、尺寸的聲學元件，其中兩款由陳冠宇[56]、張哲睿製[57]製作，另外兩款為本研究矩型結構於最佳化前、最佳化後所設計製作的聲學元件，所有聲學元件皆供應 3V_{pp} 之電壓大小。

(1) 並聯型雙層壓電圓盤複合環形薄膜之複合聲學元件(A)

此聲學元件由陳冠宇[56]製作，由「雙層壓電陶瓷圓盤」和「環形薄膜」組成，其結構示意圖如圖 2-17 所示。雙層壓電陶瓷圓盤材料為美國 Piezo. System Inc. 出產的鈦鉛酸鉛 (PZT)，商品型號為 PSI-5A4E，原始規格品直徑為 63.5mm、單層厚度為 0.1905mm。透過雷射切割成直徑為 45mm 的尺寸，將上下層的壓電圓盤為並聯型排列以相同極化方向進行堆疊並自行黏合(黏著劑為環氧樹脂)。環形薄膜材料為 PVC 聚合物薄膜，厚度為 $h_m = 0.011\text{mm}$ ，外徑為 35mm，內徑為 19.5mm。詳細材料參數見表 2-2。

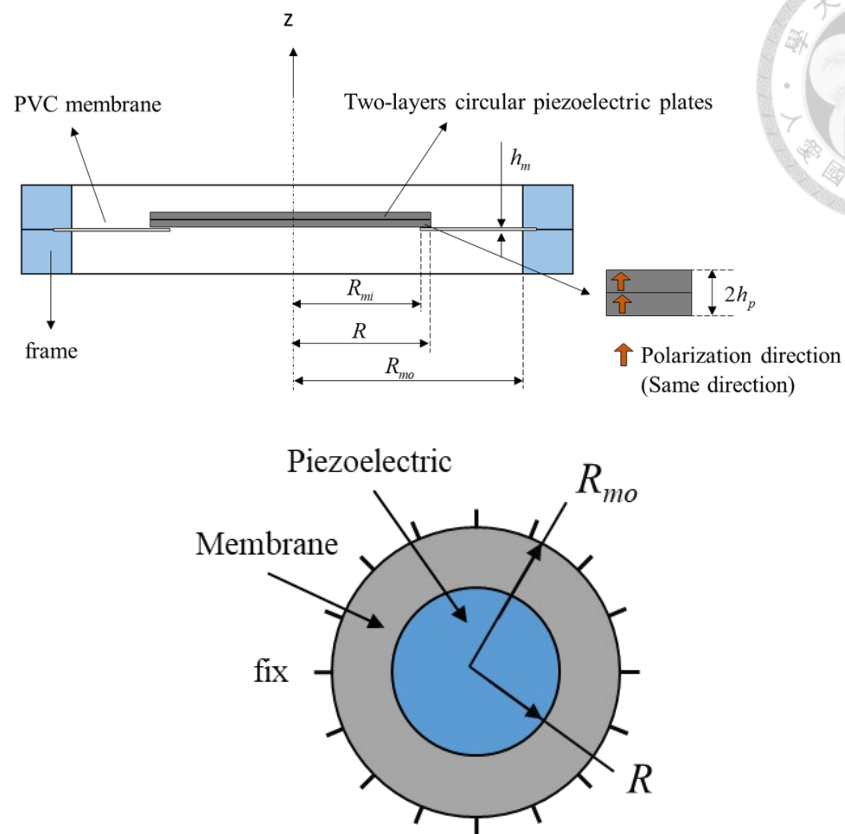


圖 2-17 並聯型雙層壓電圓盤複合環形薄膜之聲學元件(A)結構示意圖

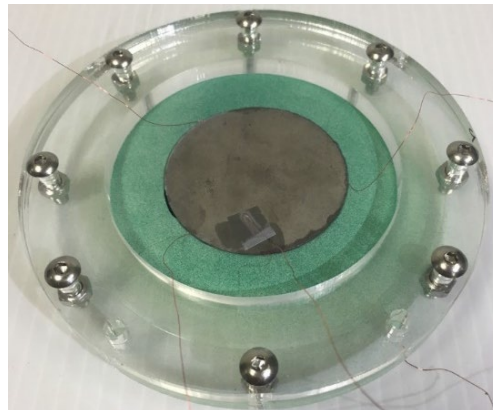


圖 2-18 並聯型雙層壓電圓盤複合環形薄膜之聲學元件(A)成品圖

表 2-2 並聯型雙層壓電圓盤複合環形薄膜之聲學元件(A)相關參數

Property		Values
For two-layered piezoelectric disk		
Radius(mm)	R	22.5
Thickness(mm)	$2h_p$	0.381
For annular membrane		
Outer radius(mm)	R_{mo}	35
Inner radius(mm)	R_{mi}	19.5
Thickness(mm)	h_m	0.011
Density (kg/ m ³)	ρ_m	1230
Elastic Modulus (GPa)	E	0.841
Poisson's ratio	ν_m	0.3

(2) 串聯型雙層壓電圓環複合圓形薄膜之複合聲學元件(B)

此聲學元件由張哲睿[57]製作，由「雙層壓電陶瓷圓環」和「圓形薄膜」所組成，其結構示意圖如圖 2-19 所示。雙層壓電圓之壓電材料的材質為鈦鉛酸鉛 (PZT)，由壓電試片生產公司 Piezo. System Inc. 客製化製作串聯型雙層壓電圓環，上下兩層的極化方向相反進行堆疊，外徑為 63.5mm，內徑為 53.5mm，厚度為 0.381mm。圓形薄膜的材質是聚合物單面濺鍍金屬的高分子薄膜，單面濺鍍導電層，厚度為 0.009mm，直徑為 70mm。詳細材料參數見表 2-3。

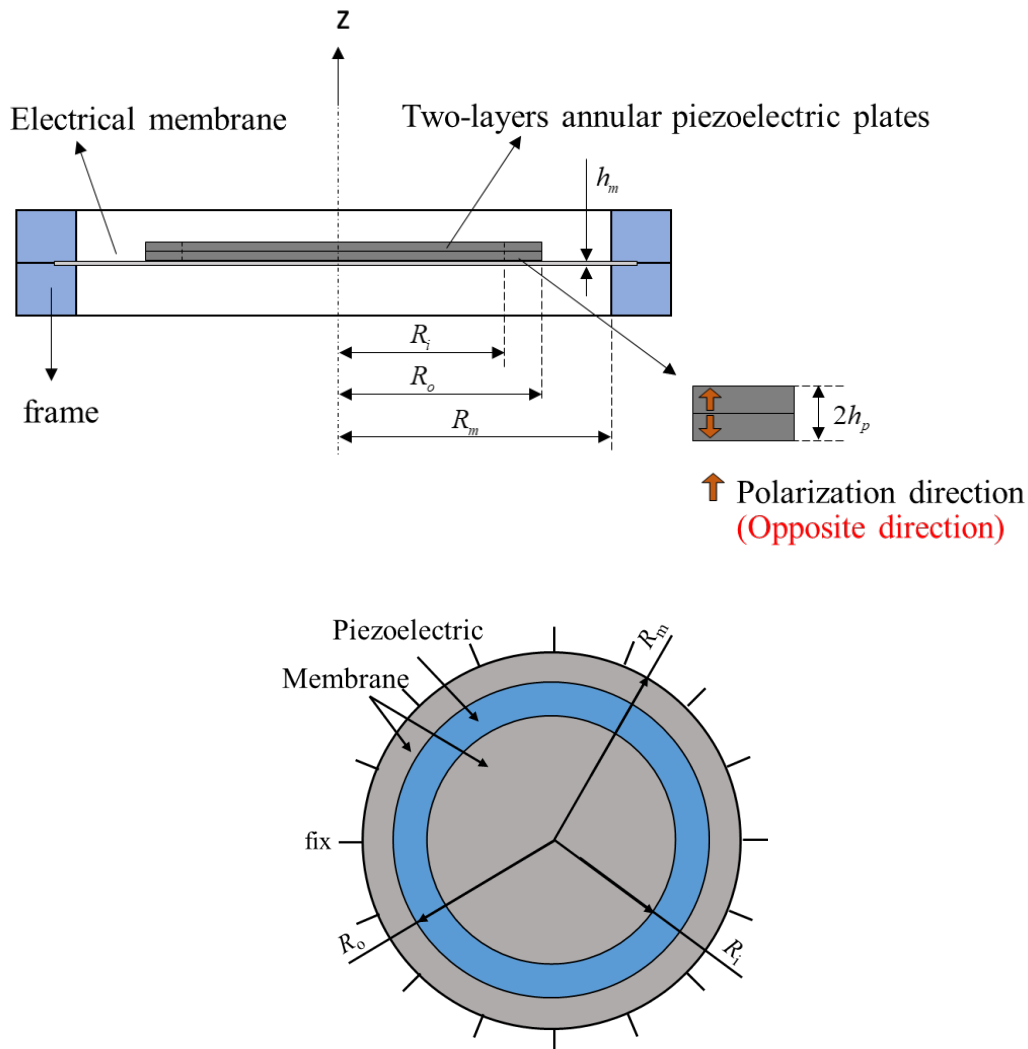


圖 2-19 串聯型雙層壓電圓環複合厚圓形薄膜之聲學元件(B)結構示意圖

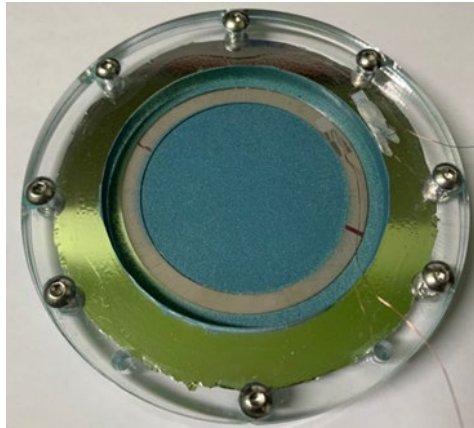


圖 2-20 串聯型雙層壓電圓環複合厚圓形薄膜之聲學元件(B)成品圖

表 2-3 串聯型雙層壓電陶瓷圓環複合厚圓形薄膜之聲學元件(B)相關參數

Property		Values
For two-layered piezoelectric annular disk		
Outer radius(mm)	R_o	31.75
Inner radius(mm)	R_i	26.75
Thickness(mm)	$2h_p$	0.381
For membrane		
Radius(mm)	R_m	35
Thickness(mm)	h_m	0.009
Density (kg/ m ³)	ρ_m	1340
Tension (N / m)	T	14.4
Elastic Modulus (GPa)	E	2.012
Poisson's ratio	ν_m	0.3

(3) 串聯型雙層壓電矩形薄板複合矩型薄膜之複合聲學元件(C)

此聲學元件為本研究所製作，由「雙層壓電陶瓷矩型薄板」和「矩形薄膜」所組成，其結構示意圖如圖 2-21 所示。雙層壓電陶瓷矩型薄板的材料為美國 Piezo. System Inc. 出產的鈦鋯酸鉛 (PZT)，商品型號為 PSI-5A4E，原始規格品長為 63.5mm，寬為 31.8mm，單層厚度為 0.1905mm，共兩層總厚度為 0.381mm，上下層的壓電平板為串聯型以相反極化方向進行堆疊。環形薄膜的材料為高分子聚合物靜電薄膜，單邊濺鍍導電層，厚度為 0.011mm，長為 75mm，寬為 60mm。詳細材料參數見表 2-4。而矩形的壓電薄板具有尖銳的角點，但經由後續的實驗結果來看，此問題在振動時並不會造成複合薄膜有損壞的問題。

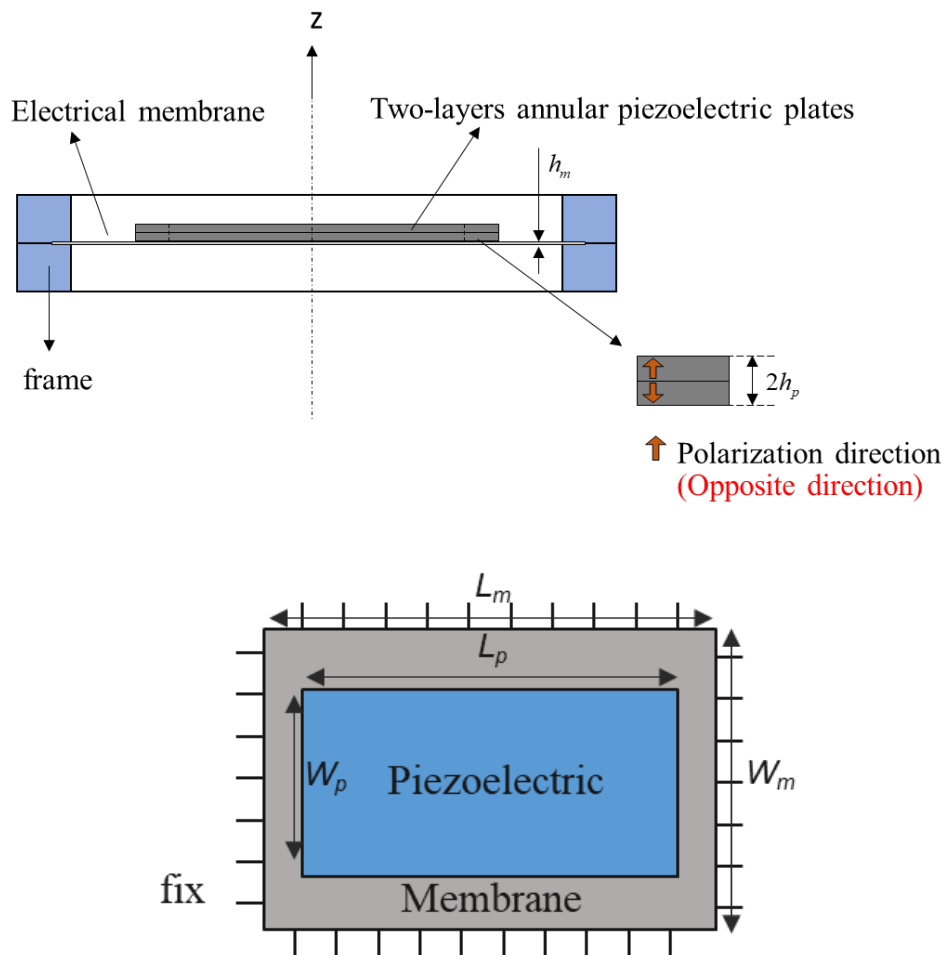


圖 2-21 串聯型雙層壓電矩形薄板複合矩型薄膜之聲學元件(C)結構示意圖

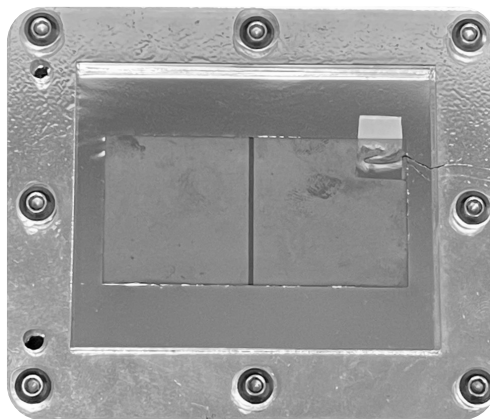


圖 2-22 串聯型雙層壓電矩形薄板複合矩型薄膜之聲學元件(C)成品圖

表 2-4 串聯型雙層壓電矩形薄板複合矩型薄膜之聲學元件(C)相關參數

Property		Values
For two-layered piezoelectric plate		
Length(mm)	L_p	63.5
Width(mm)	W_p	31.8
Thickness(mm)	$2h_p$	0.381
For membrane		
Length(mm)	L_m	75
Width(mm)	W_m	60
Thickness(mm)	h_m	0.011
Density (kg/ m ³)	ρ_m	1340
Tension (N / m)	T	14.4
Elastic Modulus (GPa)	E	2.012
Poisson's ratio	ν_m	0.3

(4) 最佳化串聯型雙層壓電矩形薄板複合矩型薄膜之複合聲學元件(D)

此聲學元件為本研究所製作，組合與元件(C)相同，由「雙層壓電陶瓷矩形薄板」和「矩形薄膜」所組成，利用田口法對幾何尺寸做最佳化處理，得到特性尺寸，其結構示意圖如圖 2-23 所示，並設計成耳罩式耳機，如圖 2-24。

雙層壓電陶瓷矩型薄板的材料為美國 Piezo. System Inc. 出產的鈦鉛酸鉛 (PZT)，商品型號為 PSI-5A4E，將原始規格品利用 CO_2 雷射切割成長為 21.17mm，寬為 15.9mm，單層厚度為 0.1905mm，共兩層總厚度為 0.381，上下層的壓電平板為串聯型以相反極化方向進行堆疊。環形薄膜的材料為高分子聚合物靜電薄膜，單邊濺鍍導電層，厚度為 0.011mm，長為 25mm，寬為 30mm。詳細材料參數見表 2-5。

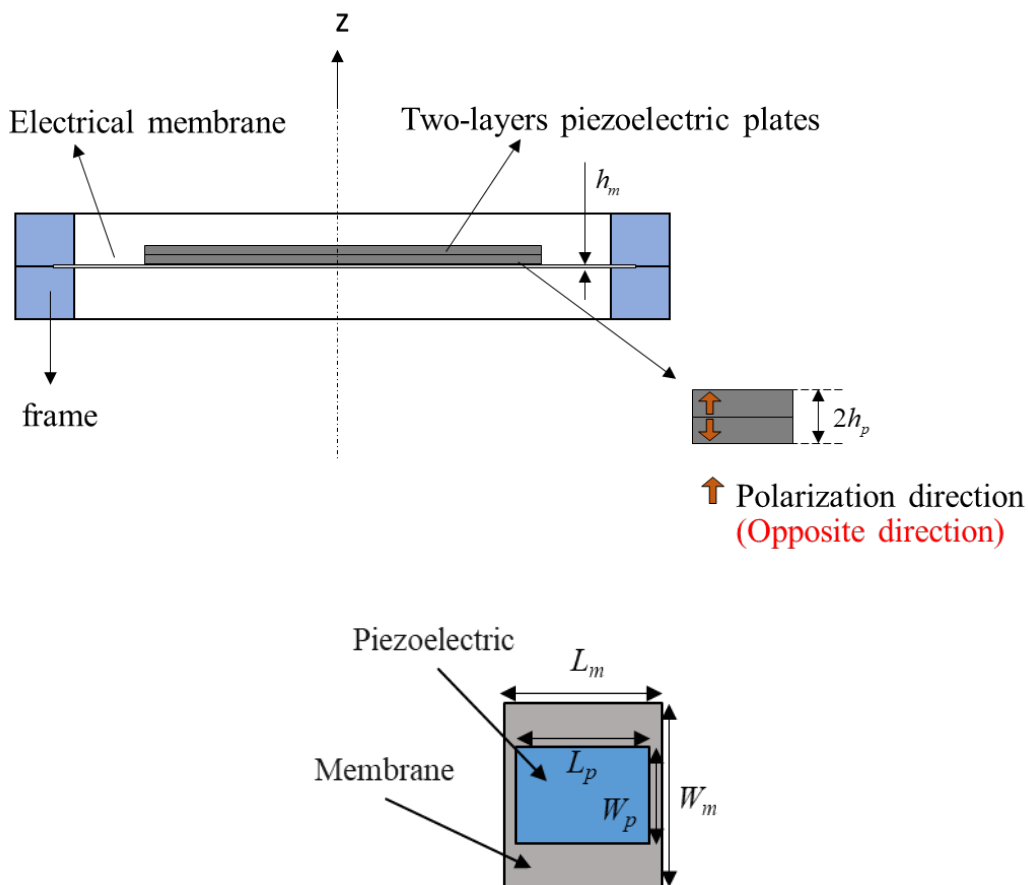


圖 2-23 最佳化串聯型雙層壓電矩形薄板複合矩型薄膜之聲學元件(D)結構示意圖



圖 2-24 最佳化串聯型雙層壓電矩形薄板複合矩型薄膜之聲學元件(D)成品圖

表 2-5 最佳化串聯型雙層壓電矩形薄板複合矩型薄膜之聲學元件(D)相關參數

Property		Values
For two-layered piezoelectric plate		
Length(mm)	L_p	21.7
Width(mm)	W_p	15.9
Thickness(mm)	$2h_p$	0.381
For membrane		
Length(mm)	L_m	25
Width(mm)	W_m	30
Thickness(mm)	h_m	0.011
Density (kg/ m ³)	ρ_m	1340
Tension (N / m)	T	14.4
Elastic Modulus (GPa)	E	2.012
Poisson's ratio	ν_m	0.3

第三章 基本理論與方法



本章節首先介紹壓電材料薄板基本理論，探討壓電機電轉換關係，並根據壓電理論基礎帶入克希荷夫薄板假設 (Kirchhoff plate theory) 和電學假設推導統御方程式。接著介紹本研究所使用的數值方法—無網格法中的基本解法，比較與有限元素法的差異，簡介此方法實踐的流程。最後介紹聲學的基本理論，討論聲學基本假設、聲波的基本性質。

3.1 壓電材料薄板基本理論

壓電是一種能將電能與機械能互換的材料，常見的壓電材料有壓電單晶體、壓電多晶體(壓電陶瓷)、壓電聚合物和壓電複合材料四種，本研究使用壓電陶瓷材料。壓電效應分為兩種，對壓電材料施加壓力使表面產生電荷的正電壓效應 (direct piezoelectric effect)，主要用於感測器；而相反的，對壓電材料施加電場進而產生變形則稱為逆壓電效應 (convers piezoelectric effect)，主要用於致動器。假設壓電為線性材料進行推倒，利用能量守恆與熱力學第一定律得到關係式：

$$\delta \tilde{U} = T_{ij} \delta S_{ij} + \tilde{E}_i \delta D_i \quad (3-1)$$

其中 $\tilde{U}$ 為壓電之能量密度(Energy Density for Piezoelectric Material)， T_{ij} 為應力(Stress)， S_{ij} 為應變(Strain)， $\tilde{E}_i$ 為電場(Electric Field)， D_i 為電位移(Electric Displacement)。

定義電焓密度 $\tilde{H}$ (electric enthalpy) 為

$$\tilde{H} = \tilde{U} - \tilde{E}_i D_i \quad (3-2)$$

將(3-2)微分並帶入(3-1)可得到

$$\delta \tilde{H} = T_{ij} \delta S_{ij} - \tilde{E}_i \delta D_i \quad (3-3)$$

$\tilde{H}(S_{ij}, E_i)$ 焓密度為 S_{ij} 、 $\tilde{E}_i$ 之函數，將之微分可得到



$$\delta \tilde{H} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial S_{ij}} \delta S_{ij} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{E}_i} \delta \tilde{E}_i \quad (3-4)$$

比較(3-3)和(3-4)可得到

$$T_{ij} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial S_{ij}} \quad D_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{E}_i} \quad (3-5)$$

在線性壓電理論的假設下，焓密度 $\tilde{H}$ 可表示為

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} c_{ijkl}^E S_{ij} S_{kl} - e_{kij} \tilde{E}_k S_{ij} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^S \tilde{E}_i \tilde{E}_j \quad (3-6)$$

其中 c_{ijkl}^E 為固定電場下的彈性常數 (elastic constants)， ε_{ij}^S 為固定應變下之介電常數 (dielectric constants)， e_{kij} 為壓電應力常數 (piezoelectric stress constants)。

將(3-6)代入(3-5)後，偏微分得到壓電之本構方程式

$$\begin{cases} T_{ij} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k \\ D_i = e_{ikl} S_{kl} + \varepsilon_{ij}^S E_j \end{cases} \quad (3-7)$$

將矩陣表示法 (matrix notation) 取代張量表示法 (tensor notation)

$$T_{ij} = T_p, \quad c_{ijkl}^E = c_{pq}^E, \quad e_{ikl} = e_{iq} \quad (3-8)$$

其中下標 p, q 為 1~6，分別對應 11, 22, 33, 23, 13, 12，且當 $q=1,2,3$ 時 $S_{kl} = S_q$ ，

$q=4,5,6$ 時 $S_{kl} = S_q$ 。

即可將(3-7)改寫為

$$\begin{cases} T_p = c_{pq}^E S_q - e_{kp} E_k \\ D_i = e_{iq} S_q + \varepsilon_{ik}^S E_k \end{cases} \quad (3-9)$$

若以應力與電場為變數，則可將壓電本構方程式改寫為

$$\begin{cases} S_p = s_{pq}^E T_q - d_{ip} E_i \\ D_i = d_{iq} T_q + \varepsilon_{ij}^T E_j \end{cases} \quad (3-10)$$

其中 s_{pq}^E 為固定電場下之柔性常數 (compliance constants) , d_{ip} 為壓電常數

(piezoelectric constants) , ε_{ij}^T 為固定應力下之介電常數。而(3-9)式及(3-10)式中的

材料常數關係可藉由以下得到：

$$\begin{aligned} s_{pq}^E c_{qp}^E &= 1, s_{pq}^D c_{qp}^D = 1 \\ s_{pq}^D &= s_{pq}^E - d_{ip} g_{pk}, \varepsilon_{ik}^T = \varepsilon_{ik}^S + d_{ip} e_{pk} \\ d_{ip} &= e_{iq} s_{qp}^E \end{aligned} \quad (3-11)$$

固定電場下的楊氏模數可搭配浦松比轉為三個柔性係數，可表示為

$$s_{11}^E = \frac{1}{Y_{11}^E}, s_{33}^E = \frac{1}{Y_{33}^E}, s_{12}^E = -\nu s_{11}^E, s_{66}^E = 2(s_{11}^E - s_{12}^E) \quad (3-12)$$

壓電材料常數與機電耦合係數的關係為 $d_{ij}^2 = k_{ij}^2 \varepsilon_{ii}^T s_{jj}^E$ ，擷取部分壓電係數與柔

順係數的轉換條件，如 $d_{15}^2 = k_{15}^2 \varepsilon_{11}^T s_{55}^E$ ，因此

$$s_{55}^E = \frac{d_{15}^2}{k_{15}^2 \varepsilon_{11}^T} = s_{44}^E \quad (3-13)$$

固定電場與固定電位移的柔性係數的關係為

$$s_{13}^E = s_{13}^D (1 - k_{31}^2) + k_{31} k_{33} \sqrt{s_{11}^E s_{33}^E} \quad (3-14)$$

本研究使用的壓電材料為橫向等向材料(Transversely Isotropic)，極化方向在 3 方向，

套入此材料特性後將(3-7)式以矩陣法表示壓電陶瓷的本構方程式：

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

其中 $c_{66}^E = \frac{c_{11}^E - c_{12}^E}{2}$ 。

壓電陶瓷雙晶片由上下兩片壓電陶瓷組成，下列兩組方程式分別代表上下層壓電的本構方程式，上標為 (u) 的為上層壓電，上標為 (l) 的為下層壓電。以全域坐標系表示若極化方向相反，機電耦合係數 (e) 必須加上一個負號。

$$\begin{cases} T_{ij}^{(u)} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij}^{(u)} E_k^{(u)} \\ D_i^{(u)} = e_{ikl}^{(u)} S_{kl} + \varepsilon_{ij}^S E_j^{(u)} \end{cases} \quad (3-16)$$

$$\begin{cases} T_{ij}^{(l)} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij}^{(l)} E_k^{(l)} \\ D_i^{(l)} = e_{ikl}^{(l)} S_{kl} + \varepsilon_{ij}^S E_j^{(l)} \end{cases} \quad (3-17)$$

3.1.1 力學假設

本研究使用之壓電陶瓷雙晶片，總厚度 $2h_p$ 遠小於長度 a 與寬度 b ，因此將其視為薄板，如圖 3-1 所示，根據柯西荷夫薄板理論 (Kirchhoff plate theory) 的假設，將三維問題簡化成二維中性面與厚度方向問題。

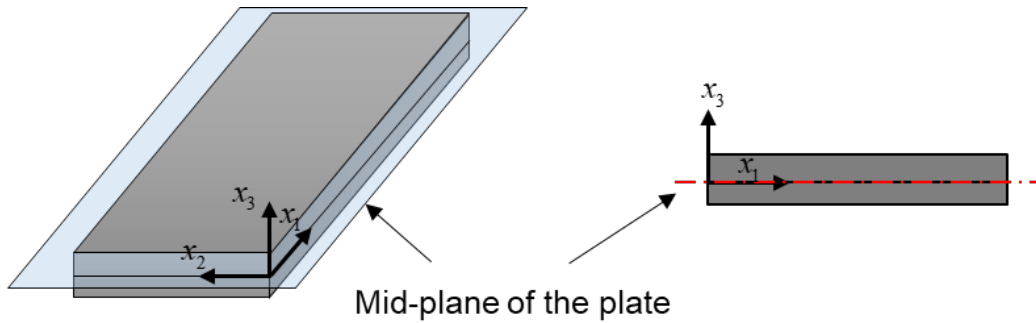


圖 3-1 中面示意圖

- I. 垂直於平板中面的直線變形後仍為直線，且與中面保持垂直，不考慮厚度方向的剪應變

$$S_4 = S_5 = 0 \quad (3-18)$$

- II. 垂直中面方向的正向應力遠小於平行於中面的剪應力

$$T_3 = 0 \quad (3-19)$$

- III. 薄板面外變形時中面不受拉伸，沒有面內方向的變形

- IV. 忽略轉動慣性力矩



根據以上四點假設，將三維位移場 U 以二維位移場 u 描述

$$\begin{aligned} U_1(x_1, x_2, x_3) &= u_1(x_1, x_2) - x_3 u_{3,1}(x_1, x_2) \\ U_2(x_1, x_2, x_3) &= u_2(x_1, x_2) - x_3 u_{3,2}(x_1, x_2) \\ U_3(x_1, x_2, x_3) &= u_3(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (3-20)$$

應變-位移關係式

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}) \quad (3-21)$$

將(3-20)代入(3-21)，應變以中面位移場表示

$$\begin{aligned} S_1 &= S_{11} = u_{1,1} - x_3 u_{3,11} \\ S_2 &= S_{22} = u_{2,2} - x_3 u_{3,22} \\ S_3 &= S_{33} = u_{3,3} \\ S_6 &= 2S_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} - 2x_3 u_{3,12} \end{aligned} \quad (3-22)$$

由(3-20)得知 u_3 與厚度方向無關，因此對厚度方向微分後為零，然而 S_3 的影響不可忽略，以上層壓電為例，將薄板假設條件式(3-19)代入本構方程式(3-16)可得

$$S_3 = -\frac{c_{13}^E}{c_{33}^E}(S_1 + S_2) + \frac{e_{33}}{c_{33}^E} E_3^{(u)} \quad (3-23)$$

並將(3-23)代回(3-16)本構方程式可得薄板假設下壓電之本構方程式

$$\begin{bmatrix} T_1^{(u)} \\ T_2^{(u)} \\ T_4^{(u)} \\ T_5^{(u)} \\ T_6^{(u)} \\ D_1^{(u)} \\ D_2^{(u)} \\ D_3^{(u)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11}^E & \bar{c}_{12}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{e}_{31} \\ \bar{c}_{12}^E & \bar{c}_{11}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \epsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{11}^S & 0 \\ \bar{e}_{31} & \bar{e}_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\epsilon}_{33}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ E_1^{(u)} \\ E_2^{(u)} \\ E_3^{(u)} \end{bmatrix} \quad (3-24)$$

其等效壓電材料參數

$$\bar{c}_{11}^E = c_{11}^E - \frac{(c_{13}^E)^2}{c_{33}^E}, \quad \bar{c}_{12}^E = c_{12}^E - \frac{(c_{13}^E)^2}{c_{33}^E}, \quad \bar{e}_{31} = e_{31} - e_{33} \frac{c_{13}^E}{c_{33}^E}, \quad \bar{\epsilon}_{33}^S = \epsilon_{33}^S + \frac{(e_{33})^2}{c_{33}^E} \quad (3-25)$$

將(3-24)矩陣式展開後可得



上層壓電：

$$\begin{cases} T_1^{(u)} = \bar{c}_{11}^E (u_{1,1} - x_3 u_{3,11}) + \bar{c}_{12}^E (u_{2,2} - x_3 u_{3,22}) - \bar{e}_{31}^{(u)} E_3^{(u)} \\ T_2^{(u)} = \bar{c}_{12}^E (u_{1,1} - x_3 u_{3,11}) + \bar{c}_{11}^E (u_{2,2} - x_3 u_{3,22}) - \bar{e}_{31}^{(u)} E_3^{(u)} \\ T_4^{(u)} = e_{15}^{(u)} \tilde{E}_1^{(u)} \\ T_5^{(u)} = e_{15}^{(u)} \tilde{E}_2^{(u)} \\ T_6^{(u)} = c_{66}^E (u_{1,2} - u_{2,1} - 2x_3 u_{3,12}) \\ D_1^{(u)} = \varepsilon_{11}^S \tilde{E}_1^{(u)} \\ D_2^{(u)} = \varepsilon_{11}^S \tilde{E}_2^{(u)} \\ D_3^{(u)} = \bar{e}_{31}^{(u)} (u_{1,1} - x_3 u_{3,11}) + \bar{e}_{31}^{(u)} (u_{2,2} - x_3 u_{3,22}) + \varepsilon_{33}^S E_3^{(u)} \end{cases} \quad (3-26)$$

下層壓電：

$$\begin{cases} T_1^{(l)} = \bar{c}_{11}^E (u_{1,1} - x_3 u_{3,11}) + \bar{c}_{12}^E (u_{2,2} - x_3 u_{3,22}) - \bar{e}_{31}^{(l)} E_3^{(l)} \\ T_2^{(l)} = \bar{c}_{12}^E (u_{1,1} - x_3 u_{3,11}) + \bar{c}_{11}^E (u_{2,2} - x_3 u_{3,22}) - \bar{e}_{31}^{(l)} E_3^{(l)} \\ T_4^{(l)} = e_{15}^{(l)} \tilde{E}_1^{(l)} \\ T_5^{(l)} = e_{15}^{(l)} \tilde{E}_2^{(l)} \\ T_6^{(l)} = c_{66}^E (u_{1,2} - u_{2,1} - 2x_3 u_{3,12}) \\ D_1^{(l)} = \varepsilon_{11}^S \tilde{E}_1^{(l)} \\ D_2^{(l)} = \varepsilon_{11}^S \tilde{E}_2^{(l)} \\ D_3^{(l)} = \bar{e}_{31}^{(l)} (u_{1,1} - x_3 u_{3,11}) + \bar{e}_{31}^{(l)} (u_{2,2} - x_3 u_{3,22}) + \varepsilon_{33}^S E_3^{(l)} \end{cases} \quad (3-27)$$

3.1.2 電學假設

將上述根據薄板假設的壓電材料代入以下電學假設：

- I. 由於壓電材料為介電材料，假設壓電材料內部無自由電荷，在靜電學中套用高斯定律後可得：

$$D_{i,i}^{(u)} = D_{i,i}^{(l)} = 0 \quad (3-28)$$

- II. 於總厚度 $2h_p$ 遠小於長度 a 與寬度 b ，主要極化方向為 x_3 方向

$$E_1^{(u)} = E_1^{(l)} = E_2^{(u)} = E_2^{(l)} = 0 \quad (3-29)$$

- III. 假設上下層電位函數在厚度方向呈二次方變化



$$\begin{aligned}\phi^{(u)} &= [\phi_0^{(u)} + x_3 \phi_1^{(u)} + x_3^2 \phi_2^{(u)}], & 0 < x_3 < h_p \\ \phi^{(l)} &= [\phi_0^{(l)} + x_3 \phi_1^{(l)} + x_3^2 \phi_2^{(l)}], & -h_p < x_3 < 0\end{aligned}\quad (3-30)$$

電場-電位關係式：

$$E_i^{(u)} = -\phi_{,i}^{(u)}, \quad E_i^{(l)} = -\phi_{,i}^{(l)} \quad (3-31)$$

將(3-31)帶入式(3-26)、(3-27)可得：

$$\frac{\partial D_3^{(u)}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial D_3^{(l)}}{\partial x_3} = 0 \quad (3-32)$$

由(3-32)可得知 $D_3^{(u)}$ 、 $D_3^{(l)}$ 並非厚度方向的函數，將(3-26)、(3-27)對厚度積分

$$\begin{aligned}h_p D_3^{(u)} &= h_p \bar{e}_{31}^{(u)} (u_{1,1} + u_{2,2}) - \frac{1}{2} \bar{e}_{31}^{(u)} (h_p)^2 (u_{3,11} + u_{3,22}) \\ &\quad + \bar{e}_{33}^S \left[\left(-\phi^u \Big|_{x_3=h_p} \right) - \left(-\phi^u \Big|_{x_3=0} \right) \right]\end{aligned}\quad (3-33)$$

$$\begin{aligned}h_p D_3^{(l)} &= h_p \bar{e}_{31}^{(l)} (u_{1,1} + u_{2,2}) + \frac{1}{2} \bar{e}_{31}^{(l)} (h_p)^2 (u_{3,11} + u_{3,22}) \\ &\quad + \bar{e}_{33}^S \left[\left(-\phi^{(u)} \Big|_{x_3=-0} \right) - \left(-\phi^{(u)} \Big|_{x_3=-h_p} \right) \right]\end{aligned}\quad (3-34)$$

假設上下層電位差為 $V_p^{(u)}$ 、 $V_p^{(l)}$ ，將(3-33)、(3-34)化簡可得

$$D_3^{(u)} = \bar{e}_{31}^{(u)} (u_{1,1} + u_{2,2}) - \frac{1}{2} \bar{e}_{31}^{(u)} (h_p) (u_{3,11} + u_{3,22}) - \frac{\bar{e}_{33}^S}{h_p} V_p^{(u)} \quad (3-35)$$

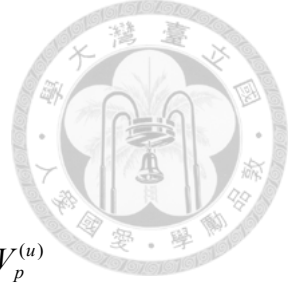
$$D_3^{(l)} = \bar{e}_{31}^{(l)} (u_{1,1} + u_{2,2}) + \frac{1}{2} \bar{e}_{31}^{(l)} (h_p) (u_{3,11} + u_{3,22}) - \frac{\bar{e}_{33}^S}{h_p} V_p^{(l)} \quad (3-36)$$

將(3-35)與(3-26)比對，將(3-36)與(3-27)比對可得電場以位移場及電位差表示式。

$$E_3^{(u)} = \frac{\bar{e}_{31}^{(u)}}{\bar{e}_{33}^S} (u_{3,11} + u_{3,22}) x_3 - \frac{1}{2} \frac{\bar{e}_{31}^{(u)}}{\bar{e}_{33}^S} (h_p) (u_{3,11} + u_{3,22}) - \frac{1}{h_p} V_p^{(u)} \quad (3-37)$$

$$E_3^{(l)} = \frac{\bar{e}_{31}^{(l)}}{\bar{e}_{33}^S} (u_{3,11} + u_{3,22}) x_3 + \frac{1}{2} \frac{\bar{e}_{31}^{(l)}}{\bar{e}_{33}^S} (h_p) (u_{3,11} + u_{3,22}) - \frac{1}{h_p} V_p^{(l)} \quad (3-38)$$

將(3-37)與(3-38)代回(3-26)、(3-27)可得套用薄板理論後壓電陶瓷的應力場以



位移場與電壓表示的關係式：

上層壓電：

$$T_1^{(u)} = \bar{c}_{11}^E u_{1,1} + \bar{c}_{12}^E u_{2,2} + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{2\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p)(u_{3,11} + u_{3,22}) + \frac{\bar{e}_{31}^{(u)}}{h_p} V_p^{(u)} - x_3 \left[\left(\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,11} + \left(\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,22} \right] \quad (3-39)$$

$$T_2^{(u)} = \bar{c}_{12}^E u_{1,1} + \bar{c}_{11}^E u_{2,2} + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{2\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p)(u_{3,11} + u_{3,22}) + \frac{\bar{e}_{31}^{(u)}}{h_p} V_p^{(u)} - x_3 \left[\left(\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,11} + \left(\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,22} \right] \quad (3-40)$$

$$T_6^{(u)} = c_{66}(u_{1,2} + u_{2,1} - 2x_3 u_{3,12}) \quad (3-41)$$

下層壓電：

$$T_1^{(l)} = \bar{c}_{11}^E u_{1,1} + \bar{c}_{12}^E u_{2,2} + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{2\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p)(u_{3,11} + u_{3,22}) - \frac{\bar{e}_{31}^{(l)}}{h_p} V_p^{(l)} - x_3 \left[\left(\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,11} + \left(\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,22} \right] \quad (3-42)$$

$$T_2^{(l)} = \bar{c}_{12}^E u_{1,1} + \bar{c}_{11}^E u_{2,2} + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{2\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p)(u_{3,11} + u_{3,22}) - \frac{\bar{e}_{31}^{(l)}}{h_p} V_p^{(l)} - x_3 \left[\left(\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,11} + \left(\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,22} \right] \quad (3-43)$$

$$T_6^{(l)} = c_{66}(u_{1,2} + u_{2,1} - 2x_3 u_{3,12}) \quad (3-44)$$



3.1.3 壓電薄板統御方程式之推導

將(3-39)~(3-41)對厚度積分，可得上層壓電陶瓷之彎矩以位移場及電位差表示

為下式

$$\begin{aligned}
 M_{11}^{(u)} &= \int_0^{h_p} T_1^{(u)} x_3 dx_3 \\
 &= \frac{1}{2} (h_p^2) \left[\bar{c}_{11}^E u_{1,1} + \bar{c}_{12}^E u_{2,2} + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{2\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p) (u_{3,11} + u_{3,22}) + \frac{\bar{e}_{31}^{(u)}}{h_p} V_p^{(u)} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{3} (h_p)^3 \left[\left(\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,11} + \left(\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,22} \right]
 \end{aligned} \tag{3-45}$$

$$\begin{aligned}
 M_{22}^{(u)} &= \int_0^{h_p} T_2^{(u)} x_3 dx_3 \\
 &= \frac{1}{2} (h_p^2) \left[\bar{c}_{12}^E u_{1,1} + \bar{c}_{11}^E u_{2,2} + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{2\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p) (u_{3,11} + u_{3,22}) + \frac{\bar{e}_{31}^{(u)}}{h_p} V_p^{(u)} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{3} (h_p)^3 \left[\left(\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,11} + \left(\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,22} \right]
 \end{aligned} \tag{3-46}$$

$$\begin{aligned}
 M_{12}^{(u)} &= \int_0^{h_p} T_6^{(u)} x_3 dx_3 \\
 &= \frac{1}{2} c_{66} (h_p^2) (u_{1,2} + u_{2,1}) - \frac{2}{3} c_{66} (h_p)^3 u_{3,12}
 \end{aligned} \tag{3-47}$$

將(3-39)~(3-41)對厚度積分，可得下層壓電陶瓷之彎矩以位移場及電位差表示式

$$\begin{aligned}
 M_{11}^{(l)} &= \int_{-h_p}^0 T_1^{(l)} x_3 dx_3 \\
 &= \frac{1}{2} (-h_p^2) \left[\bar{c}_{11}^E u_{1,1} + \bar{c}_{12}^E u_{2,2} + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{2\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p) (u_{3,11} + u_{3,22}) - \frac{\bar{e}_{31}^{(l)}}{h_p} V_p^{(l)} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{3} (-h_p)^3 \left[\left(\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,11} + \left(\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,22} \right]
 \end{aligned} \tag{3-48}$$



$$\begin{aligned}
 M_{22}^{(l)} &= \int_{-h_p}^0 T_2^{(l)} x_3 dx_3 \\
 &= \frac{1}{2} - h_p^2 \left[\bar{c}_{12}^E u_{1,1} + \bar{c}_{11}^E u_{2,2} + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{2\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p)(u_{3,11} + u_{3,22}) - \frac{\bar{e}_{31}^{(l)}}{h_p} V_p^{(l)} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{3} (-h_p)^3 \left[\left(\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,11} + \left(\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,22} \right]
 \end{aligned} \tag{3-49}$$

$$\begin{aligned}
 M_{12}^{(l)} &= \int_{-h_p}^0 T_6^{(l)} x_3 dx_3 \\
 &= \frac{1}{2} c_{66}^E (-h_p^2) (u_{1,2} + u_{2,1}) - \frac{2}{3} c_{66}^E (-h_p)^3 u_{3,12}
 \end{aligned} \tag{3-50}$$

將上述的上下層壓電彎矩場相加可得到薄板的等效總彎矩

$$\begin{aligned}
 M_{11}^{(eq)} &= \frac{1}{2} (h_p^2) \left[\frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p)(u_{3,11} + u_{3,22}) + \frac{\bar{e}_{31}^{(u)} V_p^{(u)} - \bar{e}_{31}^{(l)} V_p^{(l)}}{h_p} \right] \\
 &\quad - \frac{2}{3} (h_p)^3 \left\{ \left[\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,11} + \left[\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,22} \right\}
 \end{aligned} \tag{3-51}$$

$$\begin{aligned}
 M_{22}^{(eq)} &= \frac{1}{2} (h_p^2) \left[\frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p)(u_{3,11} + u_{3,22}) + \frac{\bar{e}_{31}^{(u)} V_p^{(u)} - \bar{e}_{31}^{(l)} V_p^{(l)}}{h_p} \right] \\
 &\quad - \frac{2}{3} (h_p)^3 \left\{ \left[\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,11} + \left[\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,22} \right\}
 \end{aligned} \tag{3-52}$$

$$M_{12}^{(eq)} = -\frac{4}{3} c_{66}^E (h_p)^3 u_{3,12} \tag{3-53}$$

由此可得知壓電材料與電壓耦合的關係，其中若壓電雙晶片為並聯型，上下壓電層極化方向相同，故 $\bar{e}_{31}^{(u)} = \bar{e}_{31}^{(l)}$ ；串聯型，上下壓電層極化方向相反，故 $\bar{e}_{31}^{(u)} = -\bar{e}_{31}^{(l)}$ 。

根據不同電極連接方式，串聯連接型則 $V_p^{(u)} = V_p^{(l)}$ ；並聯連接型則 $V_p^{(u)} = -V_p^{(l)}$ 。參考

圖 3-2~圖 3-5，若為 SBS 形式或 PBP 形式，施加電壓後會獲得更大的彎矩場，而若是 SBP 或 PBS 形式，則是會互相抵銷，施加電壓不會獲得額外的彎矩場。

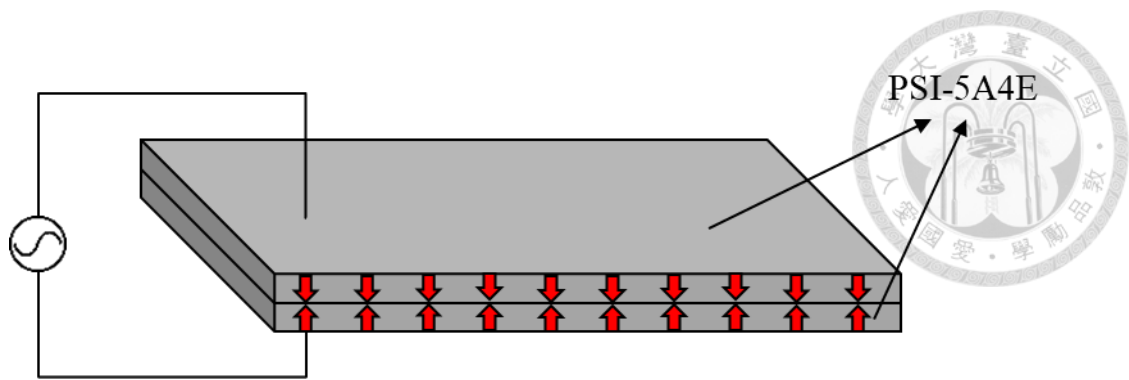


圖 3-2 串聯型雙晶片串聯型電極連接(SBS)

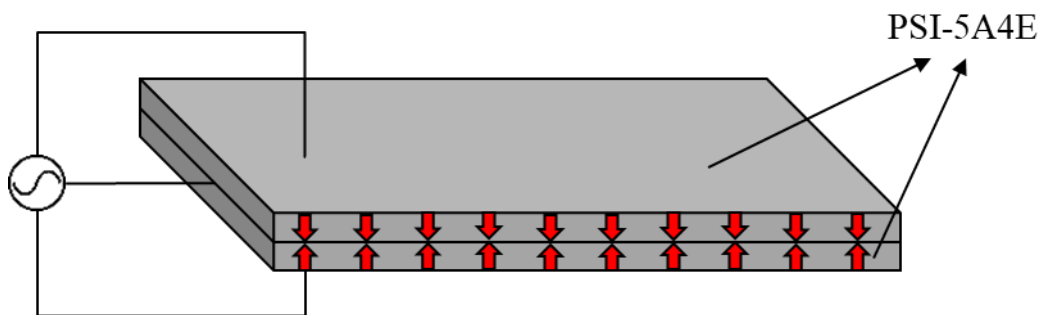


圖 3-3 串聯型雙晶片並聯型電極連接(SBP)

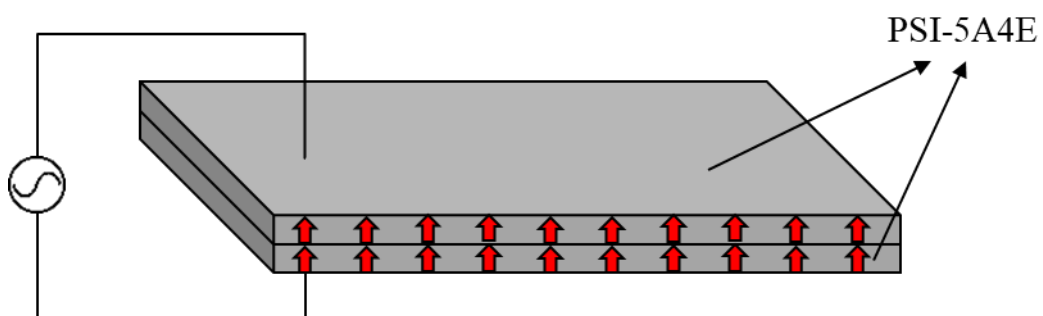


圖 3-4 並聯型雙晶片串聯型電極連接(PBS)

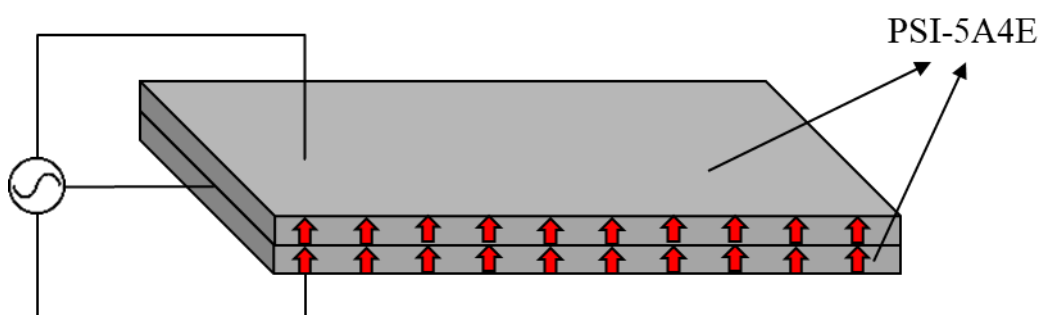


圖 3-5 並聯型雙晶片並聯型電極連接(PBP)



根據負載連接的不同，若為短路連接狀態時，上下層壓電的電壓為零，

$V_p^{(u)} = V_p^{(l)} = 0$ ，可將短路等效彎矩(3-51)、(3-52)改寫為

$$M_{11(short)}^{(eq)} = \frac{1}{2}(h_p)^3 \left[\frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} (u_{3,11} + u_{3,22}) \right] - \frac{2}{3}(h_p)^3 \left\{ \left[\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,11} + \left[\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,22} \right\} \quad (3-54)$$

$$M_{22(short)}^{(eq)} = \frac{1}{2}(h_p)^3 \left[\frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} (u_{3,11} + u_{3,22}) \right] - \frac{2}{3}(h_p)^3 \left\{ \left[\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,11} + \left[\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,22} \right\} \quad (3-55)$$

當負載趨近無窮大時，則為開路連接狀態，其流入負載的電流為零，在初始條件電荷為零的情況下，並假設壓電材料表面沒有鋪上電極的情況，壓電陶瓷上的每個點其電荷均為零，因此可令 $D_3^{(u)}$ 、 $D_3^{(l)}$ 為零，假設面外運動時中面不變形，代入(3-35)、(3-36)後得

$$V_p^{(u)} = -\frac{\bar{e}_{31}^{(u)}}{2\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p^2) (u_{3,11} + u_{3,22}) \quad (3-56)$$

$$V_p^{(l)} = -\frac{\bar{e}_{31}^{(l)}}{2\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p^2) (u_{3,11} + u_{3,22}) \quad (3-57)$$

以 SBS 為例， $\bar{e}_{31}^{(u)} = -\bar{e}_{31}^{(l)}$ ，將(3-56)、(3-57)代入(3-51)、(3-52)後得

$$M_{11(open)}^{(eq)} = -\frac{2}{3}(h_p)^3 \left\{ \left[\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,11} + \left[\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,22} \right\} \quad (3-58)$$

$$M_{22(open)}^{(eq)} = -\frac{2}{3}(h_p)^3 \left\{ \left[\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,11} + \left[\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,22} \right\} \quad (3-59)$$

由於薄板的基本假設，根據本構方程式可得知側向剪應力 T_{13} 、 T_{23} 遠小於其他分量，其引起的變形可忽略不計，然而維持平衡仍然是必要的，因此忽略轉動慣量，利用力與力矩的平衡條件式並忽略外力項可得等向性薄板在動態條件下的統御方程式

$$\frac{\partial^2 M_{11}^{(eq)}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}^{(eq)}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_{22}^{(eq)}}{\partial x_2^2} - \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = 0 \quad (3-60)$$

其中 ρ 為壓電陶瓷雙晶片的密度。

文獻[59]提到彎矩與位移、扭矩與位移的關係式為

$$M_{11} = - \left[D_{11} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right] \quad (3-61)$$

$$M_{22} = - \left[D_{22} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + D_{12} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \right] \quad (3-62)$$

$$M_{12} = -2 \left[D_{66} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \quad (3-63)$$

將 $M_{11}^{(eq)}$ 、 $M_{22}^{(eq)}$ 、 $M_{12}^{(eq)}$ 代入(3-60)後可得到以位移表示之薄板統御方程式

$$D_{11} \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^4} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_2^4} - \rho^{eq} h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = 0 \quad (3-64)$$

其中 D_{11} 為等效彎矩剛性(Equivalent bending stiffness)； D_{12} 為等效扭矩剛性，兩者在不同連接負載情況下須代入不同參數。

$$D_{66} = \frac{2}{3} h_p^3 c_{66}^E \quad (3-65)$$

短路等效剛性：

$$D_{11}^{(short)} = D_{22}^{(short)} = -\frac{1}{2}h_p^3 \frac{(\bar{e}_{31})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} + \frac{2}{3}h_p^3 \left(\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) \quad (3-66)$$

$$D_{12}^{(short)} = -\frac{1}{2}h_p^3 \frac{(\bar{e}_{31})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} + \frac{2}{3}h_p^3 \left(\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) \quad (3-67)$$

短路等效普松比(Poisson's ratio)

$$\nu^{(short)} = \frac{D_{12}^{(short)}}{D_{11}^{(short)}} \quad (3-68)$$

$$D_{11}^{(short)} = D_{12}^{(short)} + D_{66} \quad (3-69)$$

開路等效剛性：

$$D_{11}^{(open)} = D_{22}^{(open)} = \frac{2}{3}h_p^3 \left(\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) \quad (3-70)$$

$$D_{12}^{(open)} = \frac{2}{3}h_p^3 \left(\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) \quad (3-71)$$

開路等效普松比(Poisson's ratio)

$$\nu^{(open)} = \frac{D_{12}^{(open)}}{D_{11}^{(open)}} \quad (3-72)$$

$$D_{11}^{(open)} = D_{12}^{(open)} + D_{66} \quad (3-73)$$



表 3-1 壓電陶瓷材料(PSI-5A4E)參數

Material Property	Values	
Mechanical		
Density (kg/ m ³)	ρ	7800
Elastic Modulus (N/ m ²)	s_{11}^E	1.515×10^{-11}
	s_{33}^E	1.923×10^{-11}
Poisson's ratio	ν	0.31
Dielectric		
Relative Dielectric Constants(@1kHz)	$\varepsilon_{33}^T / \varepsilon_0$	1800
	$\varepsilon_{11}^T / \varepsilon_0$	1800
Dielectric Constant in Vacuum (F/ m)	ε_0	8.854×10^{-12}
Piezoelectric		
Piezoelectric strain coefficient (m/ volt)	d_{33}	3.9×10^{-10}
	d_{31}	-1.9×10^{-10}
	d_{15}	$\sim 5.5 \times 10^{-10}$
Coupling Coefficients	k_{33}	0.72
	k_{31}	0.32
	k_{15}	~ 0.55



3.2 無網格法

無網格法 (Mesh-less method) 是一種利用散點訊息計算的數值方法，此方法以應用於許多不同的領域，從典型天文問題、固體力學、流體力學、振動、熱傳分析，再到各種微分方程問題的數值解。相比有限元素法具有許多的優勢，在模型中不需要生成複雜的網格，散點離散在生成和計算會更加便利，傳統網格類的數值方法是基於每節間與其所有相鄰的交互，逼近函數式從單元自然座標轉換到全局笛卡爾座標，而無網格法是按照一些任意分佈的坐標點構造插值函數離散控制方程，逼近函數是高階連續的，可以直接使用全局笛卡爾坐標處的節點坐標，使模型建立具有連續性和完整性，如圖 3-6 所示。常見的無網格法有核方法(Kernel Methods)、移動最小二乘方法(Moving Least-Squares Approximation)和徑向基函數(Radial Basis Function, RBF)，本研究使用無網格法中基於徑向基函數(RBF)的基本解法作為分析工具。

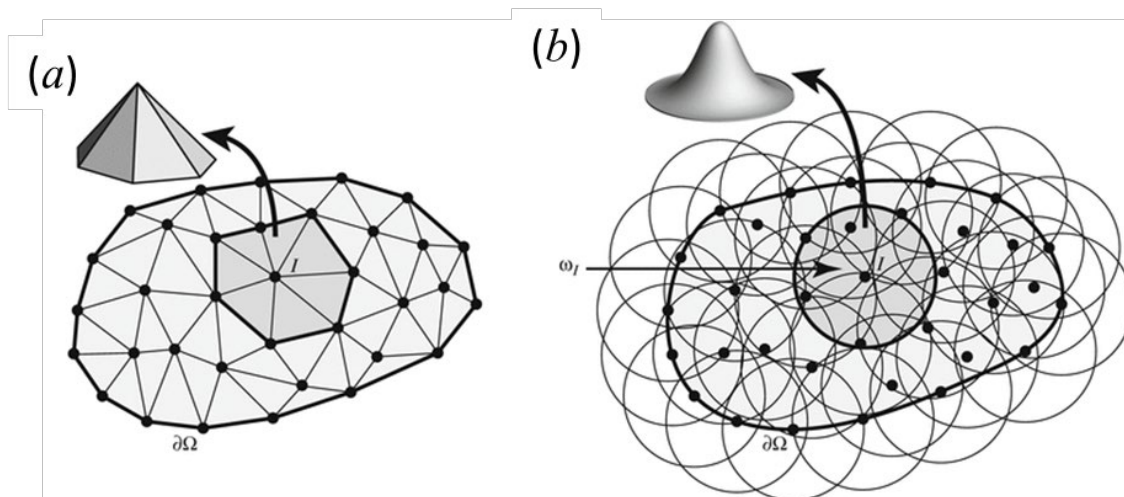


圖 3-6 (a)元素法局部單元形函數 (b)無網格法全局座標近似函數



3.2.1 基本解法

基本解法 (Method of Fundamental Solutions, MFS) 是一種以基本解為基函數求解偏微分方程的徑向基底函數(Radial Basis Function, RBF)無網格法，能將問題化簡一個維度，基本解法為了避免方法源點 (source) 的奇異性，需要在物理邊界外設置虛擬邊界，而虛擬邊界的選用具有較大的隨意性，也因此有較大的爭議，不過此法在解決無限域、薄壁結構和反算問題上能具有很大的優勢。以下簡單介紹基本解法的求解過程，以偏微分方程為例

$$\begin{aligned} Lu &= f(x, y), (x, y) \in \Omega \\ u &= g(x, y), (x, y) \in \partial\Omega_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= h(x, y), (x, y) \in \partial\Omega_N \end{aligned} \quad (3-74)$$

其中 L 是偏微分算子， Ω 代表計算區域， $\partial\Omega_D$ 和 $\partial\Omega_N$ 分別為狄利克雷 (Dirichlet) 邊界和諾伊曼 (Neumann) 邊界。

使用偏微分算子的基本解作為基函數，並假設為基本解的線性疊加，表示未知函數 u

$$u^*(x, y) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi(r_i) \quad (3-75)$$

其中 $r_i = |\bar{x} - \bar{s}|$ 表示邊界配點 $\bar{x}(x_i, y_i)$ (collocation points) 與虛擬源點 $s(s_i^x, s_i^y)$ (source points) 的距離； $\phi(\cdot)$ 為基本解並滿足 $L\phi = \delta$ ， δ 表示狄拉克函數 (Dirac function)。透過上述代數方程式可以求得唯一解，得到待定係數 α_i 進而計算出區域內任意位置的數值解。

基本解的流程圖 3-7，假設有一控制方程式，可以利用格林函數或是其他方式求出滿足問題控制方程式的基本解，得到基本解後就可以將通解表示成基本解的線性疊加，接著在求解域外佈上源點，邊界上配置邊界點，得到方程式的滿矩陣，代入邊界條件後就可求得待定係數的解，進而得到域內所有的解，本研究使用此法於薄膜的特徵問題，詳細的過程可參見 5.2.2、5.3.2。

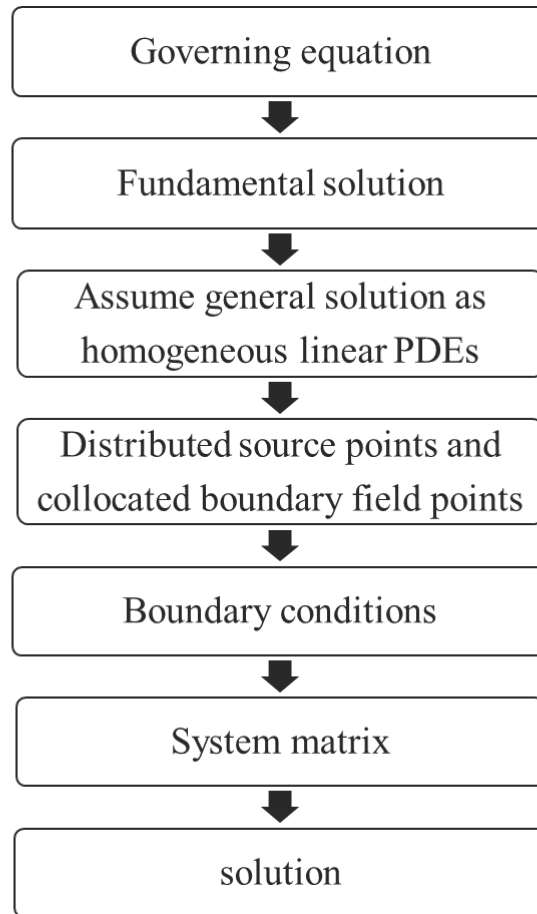


圖 3-7 基本解法求解流程圖

3.3 聲學基本理論

聲場可以透過介質中的聲壓 p 、質點速度 v 及密度變化量 ρ' 來描述。聲音在傳播的過程中，聲場各個位置都有其對應的量值，所以聲壓與空間位置有關，又聲場中每一位置的聲壓會隨時間改變，由此可知聲壓是一個空間、時間函數。本章節根據聲波的物理特性，建構聲壓隨空間、時間改變的數學關係，即為聲波動方程式 (Acoustic wave equation)。

為了簡化問題，對介質和聲波作以下假設[60]

- I. 介質為理想流體，即介質不存在黏滯性(viscosity)，聲波在傳遞的過程中沒有能量損耗。
- II. 初始速度為零，即沒有聲波擾動時，介質在宏觀上是靜止的，且介質是均質(homogeneous)的，因此靜態壓力 P_0 、靜態密度 ρ_0 皆為常數。

III. 聲波傳遞時，介質中的疏密過程為絕熱的，即過程中不會引起溫度差而產生熱交換，為絕熱過程。

IV. 介質中傳遞的是小振幅聲波，所有聲學參數皆為一階變量，聲壓 p 遠小於靜態壓力 P_0 ，即 $p \ll P_0$ ；質點速度 v 遠小於聲速 c_0 ，即 $v \ll c_0$ ；介質密度變化量 ρ' 遠小於靜態密度 ρ_0 ，即 $\rho' \ll \rho_0$ ，質點位移 ξ 遠小於聲波波長 λ ，即 $\xi \ll \lambda$ ；或密度相對變化量 $s_\rho = \frac{\rho'}{\rho_0}$ 遠小於 1，即 $s_\rho \ll 1$ 。

首先由狀態方程式(Equation of state)的絕熱系統可以知道壓力和密度有以下關係式

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (3-76)$$

其中 γ 為比熱(specific heat)。

將(3-76)式泰勒展開，並因為第(4)點密度是小變化的假設，將高階項省略，可以得

$$P = P_0 + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) \quad (3-77)$$

其中， P 為瞬時壓力(instantaneous pressure)、 P_0 為靜態壓力(equilibrium pressure)。

將(3-77)移項後並改寫，可以得到

$$P - P_0 \cong \rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) = K \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) \quad (3-78)$$

$$p = Ks \quad (3-79)$$

其中， $p = P - P_0$ 是聲壓(acoustic pressure)， $K = \rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho_0}$ 為體積模數(bulk modulus)，

$s = \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right)$ 為密度相對改變量(density condensation)。

接著利用連續方程式(Equation of continuity)，探討在 x 方向上的淨質量流入量

(influx of mass)，如圖 3-9 所示。

$$\left\{ \rho u_x - \left[\rho u_x + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx \right] \right\} dydz = -\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dV \quad (3-80)$$

利用相同方式探討 y、z 方向，可以將總淨流入量(total influx)寫為

$$-\left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \right] dV = -[\nabla \cdot (\rho \vec{u})] dV \quad (3-81)$$

總淨流入量會等於元素單元(control volume)的質量增加率，如(3-82)式，移項後化簡可以得到(3-83)式

$$-[\nabla \cdot (\rho \vec{u})] dV = \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (3-82)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (3-83)$$

從密度改變量的定義可知 $\rho = \rho_0(1+s)$ ，帶入(3-83)式後，並省略高階項，可以得到以密度改變量 s 表示的線性化的連續方程式(linearized continuity equation)

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (3-84)$$

接著利用 Euler's equation，考慮流體元素，有著 dm 的質量和 $dV = dx dy dz$ 的體積，可以將淨合力和壓力的關係表示為

$$d\vec{f} = -\nabla P dV \quad (3-85)$$

利用牛頓第二運動定律， $d\vec{f} = dm \vec{a}$ ，並將加速度以速度表示 $\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$ ，

可將(3-85)改寫為

$$-\nabla P = \rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] \quad (3-86)$$

考慮到 $|(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}| \ll \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ ，且因為 $s \ll 1$ ， ρ 可以替換成 ρ_0 ，靜態壓力 P_0 為常數，

(3-86)式可以寫成

$$-\nabla p = \rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \quad (3-87)$$

將(3-87)取散度(divergence)和(3-84)作時間的微分，將兩者結合可以整理成

$$\nabla^2 p = \rho_0 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad (3-88)$$

將 $p=Ks$ 帶入(3-88)式後，可以得到聲場波動方程式(Acoustic wave equation)

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3-89)$$

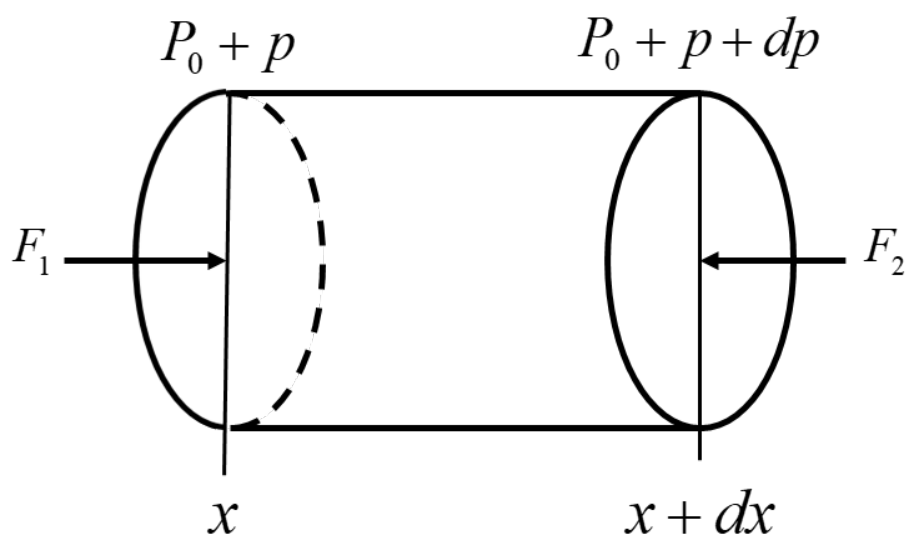


圖 3-8 體積元壓力示意圖

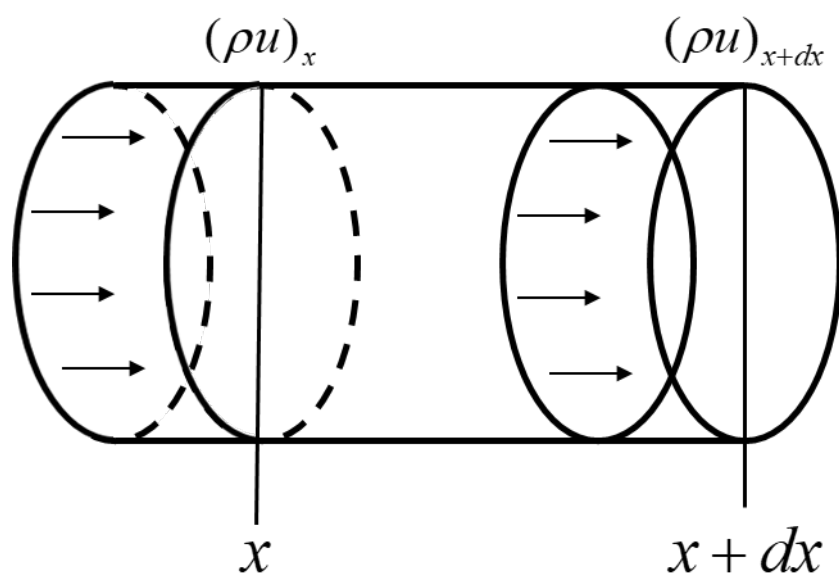


圖 3-9 體積元流量示意圖



3.4 田口法最佳化

本文最佳化設計使用田口法 (Taguchi Method) 分析，此方法是於 1950 年代由日本田口玄一博士首創的試驗設計法[63]，以統計學的方式進行分析，其最大的優勢特點在於以較少的組合取得有用的資訊，透過設計參數對產品品質的影響程度，進而獲知特定條件的最佳化組合，雖然無法如全因子法能夠找到確切的最佳化設計，但田口法可以大幅度減少傳統試誤法、全因子法所需的次數和時間外，也能找出最佳化的趨勢，可行性遠大於最佳因子法，達到品質改善及成本降低的目的，是一種低成本、高效益的質量工程方法。

田口法的實施步驟如下：

1. 選定品質特性
2. 判定品質特性之理想機能
3. 列出所有影響此品質特性的因子
4. 定出因子的水準
5. 選定適當的直交表
6. 執行模擬
7. 資料分析
8. 決定最佳化參數組合

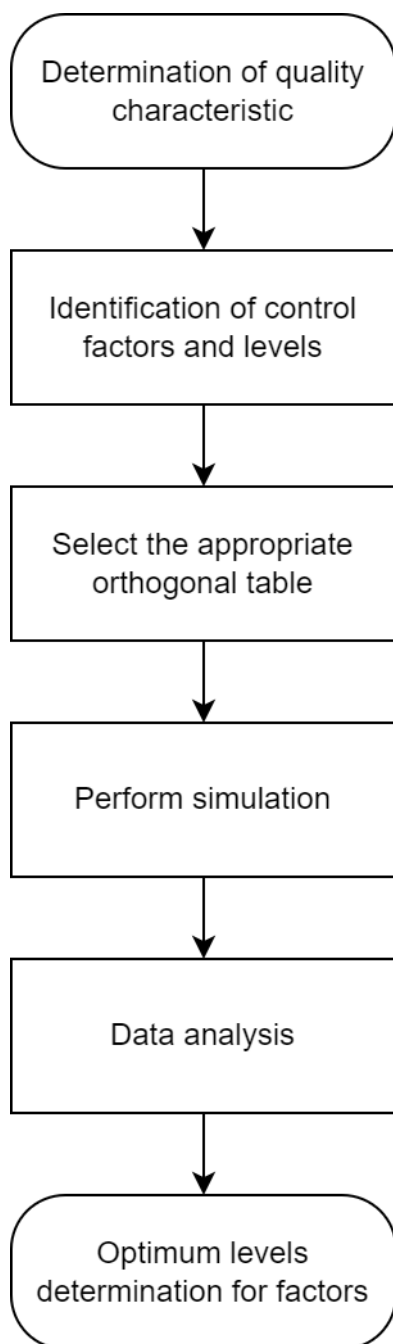


圖 3-10 田口法實施流程圖

第四章 壓電矩形薄板振動特性分析

對於聲學而言，聲壓的貢獻主要來自軸向的面外振動位移，參考文獻[56]、[57]中分別討論圓形及環型的幾何形狀，而本文選用矩形為幾何的設計形狀，因此本章節探討雙層串聯型壓電陶瓷在自由邊界的面外振動特性，包含理論、有限元素分析和實驗驗證。利用第三章的壓電薄板統御方程式、等效壓電材料參數配合疊加法進一步推導，解析對應的共振頻率及面外位移模態振型，並與有限元素法比較、相互驗證。

4.1 疊加法

由於不易找出同時滿足複雜邊界條件的薄板的解析解，因此根據 Gorman[20]以及吳亦莊[21]所推導的平板振動理論，將單塊板擴展成多個結構板，並分別討論各結構塊的邊界條件進行推倒，再將每塊結構板疊加後滿足原先單塊板剩餘的邊界條件，解析出矩形板的共振頻率與模態振型。

先將面外位移 u_3 視作簡諧運動，利用分離變數使空先與時間項分離

$$u_3(x_1, x_2, t) = \bar{W}(x_1, x_2)e^{j\omega t} \quad (4-1)$$

其中 $j = \sqrt{-1}$ ， ω 為角頻率(rad/s)。將(4-1)代入統御方程式(3-64)，忽略外力作用項的平板面外自由振動統御方程式為

$$\bar{W}_{,1111} + 2\bar{W}_{,1122} + \bar{W}_{,2222} - \frac{\rho^{eq}h\omega^2}{D_{11}}\bar{W} = 0 \quad (4-2)$$

自由邊界

薄板的自由邊界代表邊緣上的彎舉、扭矩和側向剪切力皆為零，而統御方程式是四階偏微分方程式，最多只能滿足八個邊界條件，無法完全滿足上述三個邊界條件，因此，引入 Kelvin-Kirchhoff 的等效合力邊界來描述自由邊界，如圖 4-1 所示，等效剪力 V 可用扭矩等效的側向剪力與側向剪力 Q 表示為

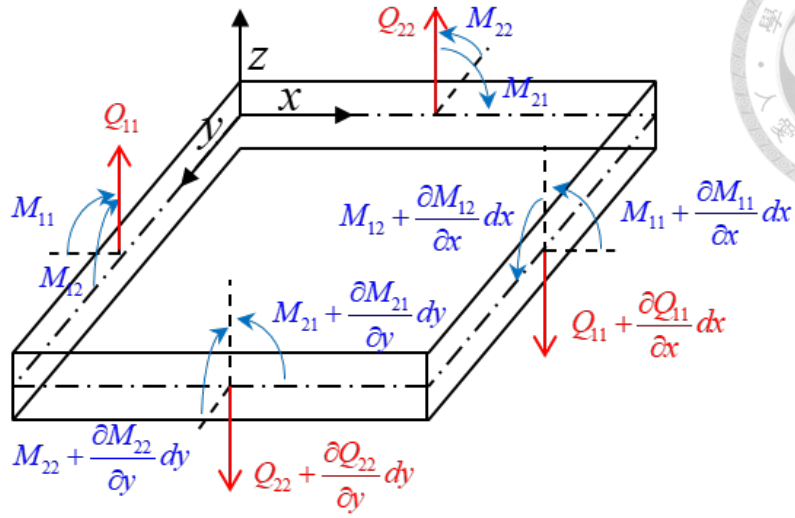


圖 4-1 薄板自由體及受力圖

$$V_{11} = Q_{11} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} dx_2 \quad (4-3)$$

$$V_{22} = Q_{22} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1} dx_1 \quad (4-4)$$

經過上述之等效後，原本由三個邊界條件變成僅需考慮兩個條件，即可充分地描述彎矩、扭矩以及側向剪力為零的狀況，自由邊界條件如下：

x_1 方向：

$$M_{11} = 0, V_{11} = \left(Q_{11} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} \right) = 0 \quad (4-5)$$

x_2 方向：

$$M_{22} = 0, V_{22} = \left(Q_{22} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (4-6)$$



將(4-2)式、彎矩 $M_{11}^{(eq)}$ 、 $M_{22}^{(eq)}$ ，等效剪力 $V_1^{(eq)}$ 、 $V_2^{(eq)}$ 進行無因次化可得

$$\left[\frac{\partial^4 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\phi^2 \partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 W(\xi, \eta)}{\phi^2 \partial \eta^4} \right] - \lambda^4 W(\xi, \eta) = 0 \quad (4-7)$$

$$\frac{M_{11}a}{D_{11}} = - \left[\frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\nu}{\phi^2} \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right] \quad (4-8)$$

$$\frac{M_{22}b^2}{aD_{11}} = - \left[\frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + \nu \phi^2 \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \right] \quad (4-9)$$

$$\frac{V_{11}a^2}{D_{11}} = - \left[\frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^3} + \frac{\nu^*}{\phi^2} \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta^2} \right] \quad (4-10)$$

$$\frac{V_{22}b^3}{D_{11}a} = - \left[\frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right] \quad (4-11)$$

其中 $\xi = \frac{x}{a}$ 、 $\eta = \frac{y}{b}$ 、 $\lambda^4 = \frac{\rho^{eq} h a^4 \omega^2}{D_{11}}$ 、 $\nu^* = 2 - \nu$ 、 $\phi = \frac{b}{a}$ 、 $\bar{W}(x, y) = aW(\xi, \eta)$ 。

4.2 自由邊界之疊加法理論

疊加法的概念是將板是為多個結構板(在自由邊界下為四個結構)，而結構區塊之邊界條件部分滿足原始邊界條件，各結構塊分別求解並疊加，得到滿足原始的界條件的特徵矩陣，求解即可計算出共振頻率與模態形狀。首先將板的等效方式表示如圖 4-2：

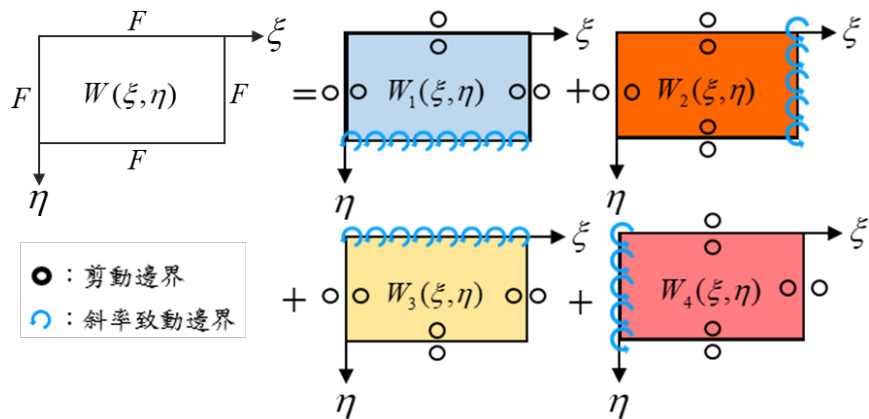


圖 4-2 自由邊界疊加法分解等效圖



(1) 第一塊結構區塊 W_1

分析第一個結構塊 W_1 ，在 $\eta=1$ 處給予一個假想的斜率邊界當作致動源，其餘部分為剪動邊界，將邊界條件寫為：

$$\left. \frac{\partial W_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0 \quad (4-12) \quad - \left[\frac{\partial^3 W_1(\xi, \eta)}{\partial \xi^3} + \frac{\nu^*}{\phi^2} \frac{\partial^3 W_1(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta^2} \right]_{\xi=0} = 0 \quad (4-13)$$

$$\left. \frac{\partial W_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = 0 \quad (4-14) \quad - \left[\frac{\partial^3 W_1(\xi, \eta)}{\partial \xi^3} + \frac{\nu^*}{\phi^2} \frac{\partial^3 W_1(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta^2} \right]_{\xi=1} = 0 \quad (4-15)$$

$$\left. \frac{\partial W_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0 \quad (4-16) \quad - \left[\frac{\partial^3 W_1(\xi, \eta)}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W_1(\xi, \eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right]_{\eta=0} = 0 \quad (4-17)$$

$$- \left[\frac{\partial^3 W_1(\xi, \eta)}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W_1(\xi, \eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right]_{\eta=1} = 0 \quad (4-18)$$

$$\left. \frac{\partial W_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = \sum_{m=0,1,\dots}^{\infty} E_{1m} \cos m\pi\xi \quad (4-19)$$

根據(4-12)~(4-15)利用 Levy 提出的級數函數，假設 W_1 為三角函數的級數展開形式

$$W_1(\xi, \eta) = \sum_{m=0,1,\dots}^{\infty} Y_{1m}(\eta) \cos m\pi\xi \quad (4-20)$$

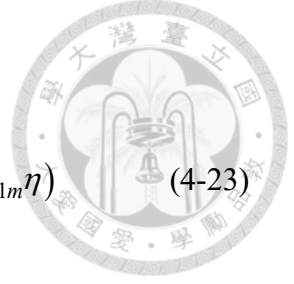
將(4-20)代入統御方程式(4-7)可得

$$\frac{\partial^4 Y_{1m}(\eta)}{\partial \eta^4} - 2\phi^2 (m\pi)^2 \frac{\partial^2 Y_{1m}(\eta)}{\partial \eta^2} + \phi^2 [(m\pi)^4 - \lambda^4] Y_{1m}(\eta) = 0 \quad (4-21)$$

令 $Y_{1m}(\eta) = e^{\alpha\eta}$ 代入(4-21)式

$$\alpha^4 - 2\phi^2 (m\pi)^2 \alpha^2 + \phi^4 [(m\pi)^4 - \lambda^4] = 0 \quad (4-22)$$

改變 λ 和 m 的值會影響解的形式， $Y_{1m}(\eta)$ 會有兩種情況，分別進行討論。



Case 1 : $\lambda^2 > (m\pi)^2$

$$Y_{1m}(\eta) = A_m \cosh(\beta_{1m}\eta) + B_m \sinh(\beta_{1m}\eta) + C_m \cos(\gamma_{1m}\eta) + D_m \sin(\gamma_{1m}\eta) \quad (4-23)$$

$$\text{其中 } \beta_{1m} = \phi \left[\lambda^2 + (m\pi)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{、} \gamma_{1m} = \phi \left[\lambda^2 - (m\pi)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

將(4-16)、(4-17)邊界條件代入(4-23)式中得到 $B_m = D_m = 0$ ，再將(4-19)邊界條件代入(4-23)式，經過計算化簡後可得

$$Y_{1m}(\eta) = E_{1m} (\theta_{1m11} \cosh \beta_m \eta + \theta_{1m12} \cos \gamma_m \eta) \quad (4-24)$$

$$\begin{cases} \theta_{1m11} = \frac{1}{(\beta_{1m} - \mathbb{Z}_{1m1} \gamma_{1m}) \sinh \beta_{1m}} \\ \theta_{1m12} = \frac{\mathbb{Z}_{1m1}}{(\beta_{1m} - \mathbb{Z}_{1m1} \gamma_{1m}) \sin \gamma_{1m}} \end{cases} \quad (4-25)$$

$$\mathbb{Z}_{1m1} = \frac{-\beta_{1m} (\beta_{1m}^2 - \nu^* \phi^2 (m\pi)^2)}{\gamma_{1m} (\gamma_{1m}^2 + \nu^* \phi^2 (m\pi)^2)} \quad (4-26)$$

Case 2 : $\lambda^2 < (m\pi)^2$

$$Y_{1m}(\eta) = A_m \cosh(\beta_{2m}\eta) + B_m \sinh(\beta_{2m}\eta) + C_m \cosh(\gamma_{2m}\eta) + D_m \sinh(\gamma_{2m}\eta) \quad (4-27)$$

$$\text{其中 } \beta_{2m} = \phi \left[\lambda^2 + (m\pi)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{、} \gamma_{2m} = \phi \left[(m\pi)^2 - \lambda^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

將(4-12)~(4-15)邊界條件代入(4-27)式中得到 $B_m = D_m = 0$ ，再將(4-16)、(4-17)邊界條件代入(4-27)式，經過計算化簡後可得

$$Y_{1m}(\eta) = E_{1m} (\theta_{1m21} \cosh \beta_{2m} \eta + \theta_{1m22} \cosh \gamma_{2m} \eta) \quad (4-28)$$

$$\begin{cases} \theta_{1m21} = \frac{1}{(\beta_{2m} + \mathbb{Z}_{1m2} \gamma_{2m}) \sinh \beta_{2m}} \\ \theta_{1m22} = \frac{\mathbb{Z}_{1m2}}{(\beta_{2m} + \mathbb{Z}_{1m2} \gamma_{2m}) \sinh \gamma_{2m}} \end{cases} \quad (4-29)$$



$$Z_{1m2} = \frac{-\beta_{2m}(\beta_{2m}^2 - \nu^* \phi^2 (m\pi)^2)}{\gamma_{2m}(\gamma_{2m}^2 - \nu^* \phi^2 (m\pi)^2)} \quad (4-30)$$

將(4-24)、(4-28)代回(4-20)得第一塊結構區塊的位移解

$$W_1(\xi, \eta) = \sum_{m=0,1,\dots}^M E_{1m} (\theta_{1m11} \cosh \beta_{1m} \eta + \theta_{1m12} \cos \gamma_{1m} \eta) \cos m\pi \xi \\ + \sum_{m=M+1,\dots}^{\infty} E_{1m} (\theta_{1m21} \cosh \beta_{2m} \eta + \theta_{1m22} \cosh \gamma_{2m} \eta) \cos m\pi \xi \quad (4-31)$$

其中 M 為能夠滿足 $\lambda^2 > (m\pi)^2$ 式的 m 的最大值。

(2) 第二塊結構區塊 W_2

在 $\xi=1$ 處給予一個假想的斜率邊界，其餘部分為剪動邊界，將邊界條件寫為：

$$\left. \frac{\partial W_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0 \quad (4-32) \quad - \left[\frac{\partial^3 W_2(\xi, \eta)}{\partial \xi^3} + \frac{\nu^*}{\phi^2} \frac{\partial^3 W_2(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta^2} \right]_{\xi=0} = 0 \quad (4-33)$$

$$\left. \frac{\partial W_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0 \quad (4-34) \quad - \left[\frac{\partial^3 W_2(\xi, \eta)}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W_2(\xi, \eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right]_{\eta=0} = 0 \quad (4-35)$$

$$\left. \frac{\partial W_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = 0 \quad (4-36) \quad - \left[\frac{\partial^3 W_2(\xi, \eta)}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W_2(\xi, \eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right]_{\eta=1} = 0 \quad (4-37)$$

$$- \left[\frac{\partial^3 W_2(\xi, \eta)}{\partial \xi^3} + \frac{\nu^*}{\phi^2} \frac{\partial^3 W_2(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta^2} \right]_{\xi=1} = 0 \quad (4-38)$$

$$\left. \frac{\partial W_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = \sum_{n=0,1,\dots}^{\infty} E_{2n} \cos n\pi \eta \quad (4-39)$$

根據(4-32)~(4-35)利用 Levy 提出的級數函數，假設 W_2 為三角函數的級數展開形式

$$W_2(\xi, \eta) = \sum_{n=0,1,\dots}^{\infty} Y_{2n}(\xi) \cos n\pi \eta \quad (4-40)$$

將 W_2 之代回統御方程式(4-7)可得

$$\phi^4 \frac{\partial^4 Y_{2n}(\xi)}{\partial \xi^4} - 2\phi^2 (n\pi)^2 \frac{\partial^2 Y_{2n}(\xi)}{\partial \xi^2} + [(n\pi)^4 - \phi^4 \lambda^4] Y_{2n}(\xi) = 0 \quad (4-41)$$



令 $Y_{2n}(\xi) = e^{\alpha\xi}$ 代入(4-41)式

$$\alpha^4 \phi^4 - 2\phi^2 (n\pi)^2 \alpha^2 + [(n\pi)^4 - \phi^4 \lambda^4] = 0 \quad (4-42)$$

由(4-42)式得知 λ 與 n 的大小會影響解的形式，讓 $Y_{2n}(\xi)$ 的解有兩種情況，首先討論 Case 1 的情況。

Case 1 : $\phi^2 \lambda^2 > (n\pi)^2$

$$Y_{2n}(\xi) = A_n \cosh(\beta_{1n}\xi) + B_n \sinh(\beta_{1n}\xi) + C_n \cos(\gamma_{1n}\xi) + D_n \sin(\gamma_{1n}\xi) \quad (4-43)$$

$$\text{其中 } \beta_{1n} = \frac{1}{\phi} \left[\phi^2 \lambda^2 + (n\pi)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma_{1n} = \frac{1}{\phi} \left[\phi^2 \lambda^2 - (n\pi)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

將(4-36)、(4-37)邊界條件代入(4-43)式中得到 $B_n = D_n = 0$ ，再將(4-38)邊界條件代入(4-43)式，經過計算化簡後可得

$$Y_{2n}(\xi) = E_{2n} (\theta_{2n11} \cosh \beta_{1n}\xi + \theta_{2n12} \cos \gamma_{1n}\xi) \quad (4-44)$$

$$\begin{cases} \theta_{2n11} = \frac{1}{(\beta_{1n} - \mathbb{Z}_{2n1}\gamma_{1n}) \sinh \beta_{1n}} \\ \theta_{2n12} = \frac{\mathbb{Z}_{2n1}}{(\beta_{1n} - \mathbb{Z}_{2n1}\gamma_{1n}) \sin \gamma_{1n}} \end{cases} \quad (4-45)$$

$$\mathbb{Z}_{2n1} = \frac{-\beta_{1n} \left(\beta_{1n}^2 - \frac{v^*}{\phi^2} (n\pi)^2 \right)}{\gamma_{1n} \left(\gamma_{1n}^2 + \frac{v^*}{\phi^2} (n\pi)^2 \right)} \quad (4-46)$$

Case 2 : $\phi^2 \lambda^2 < (n\pi)^2$

$$Y_{2n}(\xi) = A_n \cosh(\beta_{2n}\xi) + B_n \sinh(\beta_{2n}\xi) + C_n \cosh(\gamma_{2n}\xi) + D_n \sinh(\gamma_{2n}\xi) \quad (4-47)$$

$$\text{其中 } \beta_{2n} = \frac{1}{\phi} \left[\phi^2 \lambda^2 + (n\pi)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma_{2n} = \frac{1}{\phi} \left[(n\pi)^2 - \phi^2 \lambda^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$



將(4-36)、(4-37)邊界條件代入(4-47)式中得到 $B_n = D_n = 0$ ，再將(4-38)邊界條件代入

(4-47)式，經過計算化簡後可得

$$Y_{2n}(\xi) = E_{2n}(\theta_{2n21} \cosh \beta_{2n}\xi + \theta_{2n22} \cosh \gamma_{2n}\xi) \quad (4-48)$$

$$\begin{cases} \theta_{2n21} = \frac{1}{(\beta_{2n} + \mathbb{Z}_{2n2}\gamma_{2n}) \sinh \beta_{2n}} \\ \theta_{2n22} = \frac{\mathbb{Z}_{2n2}}{(\beta_{2n} + \mathbb{Z}_{2n2}\gamma_{2n}) \sinh \gamma_{2n}} \end{cases} \quad (4-49)$$

$$\mathbb{Z}_{2n2} = \frac{-\beta_{2n} \left(\beta_{2n}^2 - \frac{v^*}{\phi^2} (n\pi)^2 \right)}{\gamma_{2n} \left(\gamma_{2n}^2 - \frac{v^*}{\phi^2} (n\pi)^2 \right)} \quad (4-50)$$

將(4-44)、(4-48)代回(4-40)得第二塊結構區塊的位移解

$$\begin{aligned} W_2(\xi, \eta) = & \sum_{n=0,1,\dots}^N E_{2n}(\theta_{2n11} \cosh \beta_{2n}\xi + \theta_{2n12} \cosh \gamma_{2n}\xi) \cos n\pi\eta \\ & + \sum_{n=M+1,\dots}^{\infty} E_{2n}(\theta_{2n21} \cosh \beta_{2n}\xi + \theta_{2n22} \cosh \gamma_{2n}\xi) \cos n\pi\eta \end{aligned} \quad (4-51)$$

其中 N 為能夠滿足 $\phi^2 \lambda^2 > (n\pi)^2$ 式的 n 的最大值。

(3) 第三塊結構塊 W_3

在 $\eta=0$ 處給予一個假想的斜率邊界，其餘部分為剪動邊界，邊界條件表示如下：

$$\left. \frac{\partial W_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0 \quad (4-52) \quad - \left[\frac{\partial^3 W_3(\xi, \eta)}{\partial \xi^3} + \frac{v^*}{\phi^2} \frac{\partial^3 W_3(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta^2} \right] \Big|_{\xi=0} = 0 \quad (4-53)$$

$$\left. \frac{\partial W_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = 0 \quad (4-54) \quad - \left[\frac{\partial^3 W_3(\xi, \eta)}{\partial \xi^3} + \frac{v^*}{\phi^2} \frac{\partial^3 W_3(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta^2} \right] \Big|_{\xi=1} = 0 \quad (4-55)$$

$$\left. \frac{\partial W_3(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = 0 \quad (4-56) \quad - \left[\frac{\partial^3 W_3(\xi, \eta)}{\partial \eta^3} + v^* \phi^2 \frac{\partial^3 W_3(\xi, \eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right] \Big|_{\eta=1} = 0 \quad (4-57)$$

$$-\left[\frac{\partial^3 W_3(\xi, \eta)}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W_3(\xi, \eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta}\right]_{\eta=0} = 0 \quad (4-58)$$

$$\left.\frac{\partial W_3(\xi, \eta)}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = \sum_{m=0,1,\dots}^{\infty} E_{3m} \cos m\pi\xi \quad (4-59)$$

根據(4-52)~(4-55)假設第三結構塊的位移解為

$$W_3(\xi, \eta) = \sum_{m=0,1,\dots}^{\infty} Y_{3m}(1-\eta) \cos m\pi\xi \quad (4-60)$$

與第一結構塊解法相同，將(4-60)代回統御方程式(4-7)後，分兩種情況，再代入邊界條件後求得 $Y_{3m}(1-\eta)$ 。

Case 1 : $\lambda^2 > (m\pi)^2$

$$Y_{3m}(1-\eta) = E_{3m} \left(\theta_{3m11} \cosh[\beta_{1m}(1-\eta)] + \theta_{3m12} \cos[\gamma_{1m}(1-\eta)] \right) \quad (4-61)$$

$$\begin{cases} \beta_{1m} = \phi \left[\lambda^2 + (m\pi)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \gamma_{1m} = \phi \left[\lambda^2 - (m\pi)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (4-62)$$

$$\begin{cases} \theta_{3m11} = \frac{1}{-(\beta_{1m} - \mathbb{Z}_{3m1}\gamma_{1m}) \sinh \beta_{1m}} \\ \theta_{3m12} = \frac{\mathbb{Z}_{3m1}}{-(\beta_{1m} - \mathbb{Z}_{3m1}\gamma_{1m}) \sin \gamma_{1m}} \end{cases} \quad (4-63)$$

$$\mathbb{Z}_{3m1} = \frac{-\beta_{1m} \left(\beta_{1m}^2 - \nu^* \phi^2 (m\pi)^2 \right)}{\gamma_{1m} \left(\gamma_{1m}^2 + \nu^* \phi^2 (m\pi)^2 \right)} \quad (4-64)$$

Case 2 : $\lambda^2 < (m\pi)^2$

$$Y_{3m}(1-\eta) = E_{3m} \left(\theta_{3m21} \cosh[\beta_{2m}(1-\eta)] + \theta_{3m22} \cosh[\gamma_{2m}(1-\eta)] \right) \quad (4-65)$$



$$\begin{cases} \beta_{2m} = \phi \left[\lambda^2 + (m\pi)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \gamma_{2m} = \phi \left[(m\pi)^2 - \lambda^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (4-66)$$

$$\begin{cases} \theta_{3m21} = \frac{1}{-(\beta_{2m} + \mathbb{Z}_{3m2}\gamma_{2m}) \sinh \beta_{2m}} \\ \theta_{3m22} = \frac{\mathbb{Z}_{3m2}}{-(\beta_{2m} + \mathbb{Z}_{3m2}\gamma_{2m}) \sinh \gamma_{2m}} \end{cases} \quad (4-67)$$

$$\mathbb{Z}_{3m2} = \frac{-\beta_{2m} \left(\beta_{2m}^2 - \nu^* \phi^2 (m\pi)^2 \right)}{\gamma_{2m} \left(\gamma_{2m}^2 - \nu^* \phi^2 (m\pi)^2 \right)} \quad (4-68)$$

將(4-61)、(4-65)代回(4-60)得第一塊結構區塊的位移解

$$\begin{aligned} W_3(\xi, \eta) = & \sum_{m=0,1,\dots}^M E_{3m} \left(\theta_{3m11} \cosh[\beta_{1m}\bar{\eta}] + \theta_{3m12} \cos[\gamma_{2m}\bar{\eta}] \right) \cos m\pi\xi \\ & + \sum_{m=M+1,\dots}^{\infty} E_{3m} \left(\theta_{3m21} \cosh[\beta_{1m}\bar{\eta}] + \theta_{3m22} \cosh[\gamma_{2m}\bar{\eta}] \right) \cos m\pi\xi \end{aligned} \quad (4-69)$$

為了簡化式子，將 $\bar{\eta}$ 表示為 $1-\eta$ 。

因為第一結構塊與第三結構塊兩種例子的判斷方式是一樣的，因此這兩塊結構塊方程式的下標可以都用 m 表示，也就是第一結構塊的 β_{1m} 、 γ_{1m} 、 β_{2m} 、 γ_{2m} 與第三結構塊的 β_{1m} 、 γ_{1m} 、 β_{2m} 、 γ_{2m} 是相同的，以及 M 也是相同的。

(4) 第四塊結構塊 W_4

在 $\xi=0$ 處給予一個假想的斜率邊界，其餘部分為剪動邊界，邊界條件表示如下：

$$\left. \frac{\partial W_4(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad (4-70) \quad - \left[\frac{\partial^3 W_4(\xi, \eta)}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W_4(\xi, \eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right] \bigg|_{\eta=0} = 0 \quad (4-71)$$

$$\left. \frac{\partial W_4(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = 0, \quad (4-72) \quad - \left[\frac{\partial^3 W_4(\xi, \eta)}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W_4(\xi, \eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right] \bigg|_{\eta=1} = 0 \quad (4-73)$$

$$\left. \frac{\partial W_4(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = 0, \quad (4-74) \quad - \left[\frac{\partial^3 W_4(\xi, \eta)}{\partial \xi^3} + \frac{v^*}{\phi^2} \frac{\partial^3 W_4(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta^2} \right]_{\xi=1} = 0 \quad (4-75)$$

$$- \left[\frac{\partial^3 W_4(\xi, \eta)}{\partial \xi^3} + \frac{v^*}{\phi^2} \frac{\partial^3 W_4(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta^2} \right]_{\xi=0} = 0 \quad (4-76)$$

$$\left. \frac{\partial W_4(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \sum_{n=0,1,\dots}^{\infty} E_{4n} \cos n\pi\eta, \quad (4-77)$$

根據(4-70)~(4-73)假設第四結構塊的位移解為

$$W_4(\xi, \eta) = \sum_{n=0,1,\dots}^{\infty} Y_{4n}(1-\xi) \cos n\pi\eta \quad (4-78)$$

與第二結構塊解法相同，將(4-78)代回統御方程式(4-7)後，分兩種例子，再代入邊界條件後求得 $Y_{4n}(1-\xi)$ 。

Case 1 : $\phi^2 \lambda^2 > (n\pi)^2$

$$Y_{4n}(1-\xi) = E_{4n} \left(\theta_{4n11} \cosh[\beta_{1n}(1-\xi)] + \theta_{4n12} \cos[\gamma_{1n}(1-\xi)] \right) \quad (4-79)$$

$$\begin{cases} \beta_{1n} = \frac{1}{\phi} \left[\phi^2 \lambda^2 + (n\pi)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \gamma_{1n} = \frac{1}{\phi} \left[\phi^2 \lambda^2 - (n\pi)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (4-80)$$

$$\begin{cases} \theta_{4n11} = \frac{1}{-(\beta_{1n} - \mathbb{Z}_{4n1} \gamma_{1n}) \sinh \beta_{1n}} \\ \theta_{4n12} = \frac{\mathbb{Z}_{4n1}}{-(\beta_{1n} - \mathbb{Z}_{4n1} \gamma_{1n}) \sin \gamma_{1n}} \end{cases} \quad (4-81)$$

$$\mathbb{Z}_{4n1} = \frac{-\beta_{1n} \left(\beta_{1n}^2 - \frac{v^*}{\phi^2} (n\pi)^2 \right)}{\gamma_{1n} \left(\gamma_{1n}^2 + \frac{v^*}{\phi^2} (n\pi)^2 \right)} \quad (4-82)$$



Case 2 : $\phi^2 \lambda^2 < (n\pi)^2$

$$Y_{4n}(1-\xi) = E_{4n} \left(\theta_{4n11} \cosh[\beta_{2n}(1-\xi)] + \theta_{4n12} \cosh[\gamma_{2n}(1-\xi)] \right) \quad (4-83)$$

$$\begin{cases} \beta_{2n} = \frac{1}{\phi} \left[\phi^2 \lambda^2 + (n\pi)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \gamma_{2n} = \frac{1}{\phi} \left[(n\pi)^2 - \phi^2 \lambda^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (4-84)$$

$$\begin{cases} \theta_{4n21} = \frac{1}{-(\beta_{2n} + \mathbb{Z}_{4n2} \gamma_{2n}) \sinh \beta_{2n}} \\ \theta_{4n22} = \frac{\mathbb{Z}_{4n2}}{-(\beta_{2n} + \mathbb{Z}_{4n2} \gamma_{2n}) \sinh \gamma_{2n}} \end{cases} \quad (4-85)$$

$$\mathbb{Z}_{4n2} = \frac{-\beta_{2n} \left(\beta_{2n}^2 - \frac{v^*}{\phi^2} (n\pi)^2 \right)}{\gamma_{2n} \left(\gamma_{2n}^2 - \frac{v^*}{\phi^2} (n\pi)^2 \right)} \quad (4-86)$$

將(4-79)、(4-83)代回(4-78)得第四塊結構區塊的位移解

$$\begin{aligned} W_4(\xi, \eta) = & \sum_{n=0,1,\dots}^N E_{4n} \left(\theta_{4n11} \cosh[\beta_{1n} \bar{\xi}] + \theta_{4n12} \cosh[\gamma_{1n} \bar{\xi}] \right) \cos n\pi\eta \\ & + \sum_{n=N+1,\dots}^{\infty} E_{4n} \left(\theta_{4n21} \cosh[\beta_{2n} \bar{\xi}] + \theta_{4n22} \cosh[\gamma_{2n} \bar{\xi}] \right) \cos n\pi\eta \end{aligned} \quad (4-87)$$

為了簡化式子，將 $\bar{\xi}$ 表示為 $1-\xi$ 。

因為第二結構塊與第四結構塊兩種例子的判斷方式是一樣的，因此這兩塊結構塊

方程式的下標可以都用 n 表示，也就是第二結構塊的 β_{1n} 、 γ_{1n} 、 β_{2n} 、 γ_{2n} 與第四

結構塊的 β_{1n} 、 γ_{1n} 、 β_{2n} 、 γ_{2n} 是相同的，以及 N 也是相同的。



將(1)~(4)四塊結構版的位移解相加後可獲得總面外位移 W

$$\begin{aligned}
 W &= W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 \\
 &= \sum_{m=0,1,\dots}^M E_{1m} (\theta_{1m11} \cosh \beta_{1m} \eta + \theta_{1m12} \cos \gamma_{1m} \eta) \cos m\pi \xi \\
 &\quad + \sum_{m=M+1,\dots}^{\infty} E_{1m} (\theta_{1m21} \cosh \beta_{2m} \eta + \theta_{1m22} \cos \gamma_{2m} \eta) \cos m\pi \xi \\
 &\quad + \sum_{n=0,1,\dots}^N E_{2n} (\theta_{2n11} \cosh \beta_{1n} \xi + \theta_{2n12} \cos \gamma_{1n} \xi) \cos n\pi \eta \\
 &\quad + \sum_{n=N+1,\dots}^{\infty} E_{2n} (\theta_{2n21} \cosh \beta_{2n} \xi + \theta_{2n22} \cos \gamma_{2n} \xi) \cos n\pi \eta \\
 &\quad + \sum_{m=0,1,\dots}^M E_{3m} (\theta_{3m11} \cosh [\beta_{1m} \bar{\eta}] + \theta_{3m12} \cos [\gamma_{1m} \bar{\eta}]) \cos m\pi \xi \\
 &\quad + \sum_{m=M+1,\dots}^{\infty} E_{3m} (\theta_{3m21} \cosh [\beta_{2m} \bar{\eta}] + \theta_{3m22} \cos [\gamma_{2m} \bar{\eta}]) \cos m\pi \xi \\
 &\quad + \sum_{n=0,1,\dots}^N E_{4n} (\theta_{4n11} \cosh [\beta_{1n} \bar{\xi}] + \theta_{4n12} \cos [\gamma_{1n} \bar{\xi}]) \cos n\pi \eta \\
 &\quad + \sum_{n=N+1,\dots}^{\infty} E_{4n} (\theta_{4n21} \cosh [\beta_{2n} \bar{\xi}] + \theta_{4n22} \cos [\gamma_{2n} \bar{\xi}]) \cos n\pi \eta
 \end{aligned} \tag{4-88}$$

疊加後仍需要滿足原先矩形板在邊界上彎矩為零的條件，因此將疊加位移解代入上述各個邊界條件，並利用正交函數的特性，在左右兩側乘上相對應的三角函數，將邊界條件式整合成矩陣的形式，如圖 4-3 所示，直向為各結構塊，橫向為代入之邊界條件。

$$\begin{aligned}
 \sum M_{22}^* \Big|_{\eta=1} &= 0 \Rightarrow \\
 \sum M_{11}^* \Big|_{\xi=1} &= 0 \Rightarrow \\
 \sum M_{22}^* \Big|_{\eta=0} &= 0 \Rightarrow \\
 \sum M_{11}^* \Big|_{\xi=0} &= 0 \Rightarrow
 \end{aligned}
 \begin{bmatrix}
 A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\
 A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\
 A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\
 A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44}
 \end{bmatrix}$$

圖 4-3 特徵矩陣與邊界關係圖

$$-\left[\frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2}\right]_{\eta=0,1} = 0 \quad (4-89)$$

$$-\left[\frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2}\right]_{\xi=0,1} = 0 \quad (4-90)$$

在此示範(4-89)以 $\eta=1$ 彎矩為零的邊界，將此邊界條件代入上方疊加出的位移解(4-88)可得下式

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0,1,\dots}^M E_{1m} \left\{ \theta_{1m11} \left[\beta_{1m}^2 - \nu \phi^2 (m\pi)^2 \right] \cosh \beta_{1m} - \theta_{1m12} \left[\gamma_{1m}^2 + \nu \phi^2 (m\pi)^2 \right] \cos \gamma_{1m} \right\} \cos m\pi \xi \\ & + \sum_{m=M+1,\dots}^{\infty} E_{1m} \left\{ \theta_{1m21} \left[\beta_{2m}^2 - \nu \phi^2 (m\pi)^2 \right] \cosh \beta_{2m} + \theta_{1m22} \left[\gamma_{2m}^2 - \nu \phi^2 (m\pi)^2 \right] \cosh \gamma_{2m} \right\} \cos m\pi \xi \\ & + \sum_{n=0,1,\dots}^N E_{2n} \left\{ \theta_{2n11} \left[-(n\pi)^2 + \nu \phi^2 \beta_{1n}^2 \right] \cosh \beta_{1n} \xi + \theta_{2n12} \left[-(n\pi)^2 - \nu \phi^2 \gamma_{1n}^2 \right] \cos \gamma_{1n} \xi \right\} \cos n\pi \\ & + \sum_{n=N+1,\dots}^{\infty} E_{2n} \left\{ \theta_{2n21} \left[-(n\pi)^2 + \nu \phi^2 \beta_{2n}^2 \right] \cosh \beta_{2n} \xi + \theta_{2n22} \left[-(n\pi)^2 - \nu \phi^2 \gamma_{2n}^2 \right] \cosh \gamma_{2n} \xi \right\} \cos n\pi \\ & + \sum_{m=0,1,\dots}^M E_{3m} \left\{ \theta_{3m11} \left[\beta_{1m}^2 - \nu \phi^2 (m\pi)^2 \right] + \theta_{3m12} \left[-\gamma_{1m}^2 - \nu \phi^2 (m\pi)^2 \right] \right\} \cos m\pi \xi \\ & + \sum_{m=M+1,\dots}^{\infty} E_{3m} \left\{ \theta_{3m21} \left[\beta_{2m}^2 - \nu \phi^2 (m\pi)^2 \right] + \theta_{3m22} \left[\gamma_{2m}^2 - \nu \phi^2 (m\pi)^2 \right] \right\} \cos m\pi \xi \\ & + \sum_{n=0,1,\dots}^N E_{4n} \left\{ \theta_{4n11} \left[-(n\pi)^2 + \nu \phi^2 \beta_{1n}^2 \right] \cosh [\beta_{1n} \bar{\xi}] + \theta_{4n12} \left[-(n\pi)^2 - \nu \phi^2 \gamma_{1n}^2 \right] \cos [\gamma_{1n} \bar{\xi}] \right\} \cos n\pi \\ & + \sum_{n=N+1,\dots}^{\infty} E_{4n} \left\{ \theta_{4n21} \left[-(n\pi)^2 + \nu \phi^2 \beta_{2n}^2 \right] \cosh [\beta_{2n} \bar{\xi}] + \theta_{4n22} \left[-(n\pi)^2 - \nu \phi^2 \gamma_{2n}^2 \right] \cosh [\gamma_{2n} \bar{\xi}] \right\} \cos n\pi \\ & = 0 \end{aligned} \quad (4-91)$$

利用分佈積分可以得到下列正交函數的關係式

$$\int_0^1 \cos m\pi\eta \cos c\pi\eta d\eta = \delta_{mc}, \quad \delta_{mc} = \begin{cases} 0.5, & \text{when } (m=c) \neq 0 \\ 1, & \text{when } m=c=0 \\ 0, & \text{when } m \neq c \end{cases} \quad (4-92)$$

$$\int_0^1 \cosh \beta_m \eta \cos c\pi\eta d\eta = \frac{\beta_m \sinh \beta_m \cos c\pi}{\beta_m^2 + (c\pi)^2} \quad (4-93)$$

$$\int_0^1 \cos \gamma_m \eta \cos c\pi\eta d\eta = \frac{\gamma_m \sin \gamma_m \cos c\pi}{\gamma_m^2 - (c\pi)^2} \quad (4-94)$$

$$\int_0^1 \cosh [\beta_m (1-\eta)] \cos c\pi\eta d\eta = \frac{\beta_m \sinh \beta_m}{\beta_m^2 + (c\pi)^2} \quad (4-95)$$

$$\int_0^1 \cos [\gamma_m (1-\eta)] \cos c\pi\eta d\eta = \frac{\gamma_m \sin \gamma_m}{\gamma_m^2 - (c\pi)^2} \quad (4-96)$$

將上述式子乘上 $\cos c\pi\xi$ 再對 ξ 做積分後， c 為 $0,1,2,\dots$ 的正整數，利用上述正交函數的關係式，將其展開整合成矩陣形式，如(4-97)式中 $A_{11} \sim A_{14}$ ，以級數展開項 $M=3$ 為例，如圖 4-4 所示，同理將邊界條件(4-90) $\xi=1$ 代入疊加位移解，再乘上 $\cos c\pi\eta$ 並積分後得到 $A_{21} \sim A_{24}$ ，以此類推將所有剩餘邊界條件代入後，共可獲得 4×4 個子矩陣，並以下列特徵矩陣式表示。

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{1m} \\ E_{2n} \\ E_{3m} \\ E_{4n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-97)$$



m				n				m				n			
0	1	2		0	1	2		0	1	2		0	1	2	
c	0	-	0	0	-	-	-	-	0	0	-	-	-	-	
	1	0	-	0	-	-	-	0	-	0	-	-	-	-	
	2	0	0	-	-	-	-	0	0	-	-	-	-	-	
c	0	-	-	-	-	0	0	-	-	-	-	0	0		
	1	-	-	-	0	-	0	-	-	-	0	-	0		
	2	-	-	-	0	0	-	-	-	-	0	0	-		
c	0	-	0	0	-	-	-	-	0	0	-	-	-		
	1	0	-	0	-	-	-	0	-	0	-	-	-		
	2	0	0	-	-	-	-	0	0	-	-	-	-		
c	0	-	-	-	-	0	0	-	-	-	-	0	0		
	1	-	-	-	0	-	0	-	-	-	0	-	0		
	2	-	-	-	0	0	-	-	-	-	0	0	-		

圖 4-4 特徵矩陣詳細說明圖

$[A]$ 為將子矩陣 $A_{11} \sim A_{44}$ 組合起來的特徵矩陣， $[E]$ 為位移解中的未定係數，

下方為特徵矩陣的詳細內容，代入邊界條件可求得 A 的矩陣元素：

(1) A11 的矩陣元素為

Case 1: $\lambda^2 > (m\pi)^2$

$$\delta_{mc} \left\{ \theta_{1m11} \left[\beta_{1m}^2 - v\phi^2 (m\pi)^2 \right] \cosh \beta_{1m} - \theta_{1m12} \left[\gamma_{1m}^2 + v\phi^2 (m\pi)^2 \right] \cos \gamma_{1m} \right\} \quad (4-98)$$

Case 2: $\lambda^2 < (m\pi)^2$

$$\delta_{mc} \left\{ \theta_{1m21} \left[\beta_{2m}^2 - v\phi^2 (m\pi)^2 \right] \cosh \beta_{2m} + \theta_{1m22} \left[\gamma_{2m}^2 - v\phi^2 (m\pi)^2 \right] \cosh \gamma_{2m} \right\} \quad (4-99)$$

(2) A12 的矩陣元素為

Case 1: $\phi^2 \lambda^2 > (n\pi)^2$

$$\cos c\pi \cos n\pi \left\{ \frac{\theta_{2n11} \left[-(n\pi)^2 + \beta_{1n}^2 v\phi^2 \right]}{\beta_{1n}^2 + (c\pi)^2} \beta_{1n} \sinh \beta_{1n} + \frac{\theta_{2n12} \left[-(n\pi)^2 - \gamma_{1n}^2 v\phi^2 \right]}{\gamma_{1n}^2 - (c\pi)^2} \gamma_{1n} \sin \gamma_{1n} \right\} \quad (4-100)$$



Case 2: $\phi^2 \lambda^2 < (n\pi)^2$

$$\cos c\pi \cos n\pi \left\{ \frac{\theta_{2n21} \left[-(n\pi)^2 + \beta_{2n}^2 v\phi^2 \right]}{\beta_{2n}^2 + (c\pi)^2} \beta_{2n} \sinh \beta_{2n} + \frac{\theta_{2n22} \left[-(n\pi)^2 + \gamma_{2n}^2 v\phi^2 \right]}{\gamma_{2n}^2 + (c\pi)^2} \gamma_{2n} \sinh \gamma_{2n} \right\} \quad (4-101)$$

(3) A13 的矩陣元素為

Case 1: $\lambda^2 > (m\pi)^2$

$$\delta_{mc} \left\{ \theta_{3m11} \left[\beta_{1m}^2 - v\phi^2 (m\pi)^2 \right] - \theta_{3m12} \left[\gamma_{1m}^2 + v\phi^2 (m\pi)^2 \right] \right\} \quad (4-102)$$

Case 2: $\lambda^2 < (m\pi)^2$

$$\delta_{mc} \left\{ \theta_{3m21} \left[\beta_{2m}^2 - v\phi^2 (m\pi)^2 \right] + \theta_{3m22} \left[\gamma_{2m}^2 - v\phi^2 (m\pi)^2 \right] \right\} \quad (4-103)$$

(4) A14 的矩陣元素為

Case 1: $\phi^2 \lambda^2 > (n\pi)^2$

$$\cos n\pi \left\{ \frac{\theta_{4n11} \left[-(n\pi)^2 + \beta_{1n}^2 v\phi^2 \right]}{\beta_{1n}^2 + (c\pi)^2} \beta_{1n} \sinh \beta_{1n} + \frac{\theta_{4n12} \left[-(n\pi)^2 - \gamma_{1n}^2 v\phi^2 \right]}{\gamma_{1n}^2 - (c\pi)^2} \gamma_{1n} \sin \gamma_{1n} \right\} \quad (4-104)$$

Case 2: $\phi^2 \lambda^2 < (n\pi)^2$

$$\cos n\pi \left\{ \frac{\theta_{4n21} \left[-(n\pi)^2 + \beta_{2n}^2 v\phi^2 \right]}{\beta_{2n}^2 + (c\pi)^2} \beta_{2n} \sinh \beta_{2n} + \frac{\theta_{4n22} \left[-(n\pi)^2 + \gamma_{2n}^2 v\phi^2 \right]}{\gamma_{2n}^2 + (c\pi)^2} \gamma_{2n} \sinh \gamma_{2n} \right\} \quad (4-105)$$

(5) A15 的矩陣元素

Case 1: $\phi^2 \lambda^2 > (n\pi)^2$

$$\cos n\pi \left\{ \begin{aligned} & \frac{\theta_{5n11} \left[-(n\pi)^2 + \beta_{1n}^2 v \phi^2 \right]}{\beta_{1n}^2 + (c\pi)^2} \beta_{1n} \sinh \beta_{1n} \\ & + \frac{\theta_{5n12} \left[-(n\pi)^2 - \gamma_{1n}^2 v \phi^2 \right]}{\gamma_{1n}^2 - (c\pi)^2} \gamma_{1n} \sin \gamma_{1n} \end{aligned} \right\} \quad (4-106)$$

Case 2: $\phi^2 \lambda^2 < (n\pi)^2$

$$\cos n\pi \left\{ \begin{aligned} & \frac{\theta_{5n21} \left[-(n\pi)^2 + \beta_{2n}^2 v \phi^2 \right]}{\beta_{2n}^2 + (c\pi)^2} \beta_{2n} \sinh \beta_{2n} \\ & + \frac{\theta_{5n22} \left[-(n\pi)^2 + \gamma_{2n}^2 v \phi^2 \right]}{\gamma_{2n}^2 + (c\pi)^2} \gamma_{2n} \sinh \gamma_{2n} \end{aligned} \right\} \quad (4-107)$$

(6) A21 的矩陣元素

Case 1: $\lambda^2 > (m\pi)^2$

$$\cos m\pi \cos c\pi \left\{ \begin{aligned} & \frac{\theta_{1m11} \left[-(m\pi)^2 + \frac{v}{\phi^2} \beta_{1m}^2 \right]}{\beta_{1m}^2 + (c\pi)^2} \beta_{1m} \sinh \beta_{1m} \\ & + \frac{\theta_{1m12} \left[-(m\pi)^2 - \frac{v}{\phi^2} \gamma_{1m}^2 \right]}{\gamma_{1m}^2 - (c\pi)^2} \gamma_{1m} \sin \gamma_{1m} \end{aligned} \right\} \quad (4-108)$$

Case 2: $\lambda^2 < (m\pi)^2$

$$\cos m\pi \cos c\pi \left\{ \begin{aligned} & \frac{\theta_{1m21} \left[-(m\pi)^2 + \frac{v}{\phi^2} \beta_{2m}^2 \right]}{\beta_{2m}^2 + (c\pi)^2} \beta_{2m} \sinh \beta_{2m} \\ & + \frac{\theta_{1m22} \left[-(m\pi)^2 + \frac{v}{\phi^2} \gamma_{2m}^2 \right]}{\gamma_{2m}^2 + (c\pi)^2} \gamma_{2m} \sinh \gamma_{2m} \end{aligned} \right\} \quad (4-109)$$





(7) A22 的矩陣元素

Case 1: $\phi^2 \lambda^2 > (n\pi)^2$

$$\delta_{nc} \left\{ \theta_{2n11} \left[\beta_{1n}^2 - \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] \cosh \beta_{1n} - \theta_{2n12} \left[\gamma_{1n}^2 + \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] \cos \gamma_{1n} \right\} \quad (4-110)$$

Case 2: $\phi^2 \lambda^2 < (n\pi)^2$

$$\delta_{nc} \left\{ \theta_{2n21} \left[\beta_{2n}^2 - \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] \cosh \beta_{2n} + \theta_{2n22} \left[\gamma_{2n}^2 - \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] \cosh \gamma_{2n} \right\} \quad (4-111)$$

(8) A23 的矩陣元素

Case 1: $\lambda^2 > (m\pi)^2$

$$\cos m\pi \left\{ \begin{aligned} & \frac{\theta_{3m11} \left[-(m\pi)^2 + \frac{\nu}{\phi^2} \beta_{1m}^2 \right]}{\beta_{1m}^2 + (c\pi)^2} \beta_{1m} \sinh \beta_{1m} \\ & + \frac{\theta_{3m12} \left[-(m\pi)^2 - \frac{\nu}{\phi^2} \gamma_{1m}^2 \right]}{\gamma_{1m}^2 - (c\pi)^2} \gamma_{1m} \sin \gamma_{1m} \end{aligned} \right\} \quad (4-112)$$

Case 2: $\lambda^2 < (m\pi)^2$

$$\cos m\pi \left\{ \begin{aligned} & \frac{\theta_{3m21} \left[-(m\pi)^2 + \frac{\nu}{\phi^2} \beta_{2m}^2 \right]}{\beta_{2m}^2 + (c\pi)^2} \beta_{2m} \sinh \beta_{2m} \\ & + \frac{\theta_{3m22} \left[-(m\pi)^2 + \frac{\nu}{\phi^2} \gamma_{2m}^2 \right]}{\gamma_{2m}^2 + (c\pi)^2} \gamma_{2m} \sinh \gamma_{2m} \end{aligned} \right\} \quad (4-113)$$

(9) A24 的矩陣元素

Case 1: $\phi^2 \lambda^2 > (n\pi)^2$

$$\delta_{nc} \left\{ \theta_{4n11} \left[\beta_{1n}^2 - \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] - \theta_{4n12} \left[\gamma_{1n}^2 + \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] \right\} \quad (4-114)$$



Case 2: $\phi^2 \lambda^2 < (n\pi)^2$

$$\delta_{nc} \left\{ \theta_{4n21} \left[\beta_{2n}^2 - \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] + \theta_{4n22} \left[\gamma_{2n}^2 - \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] \right\} \quad (4-115)$$

(10) A25 的矩陣元素

Case 1: $\phi^2 \lambda^2 > (n\pi)^2$

$$\delta_{nc} \left\{ \theta_{5n11} \left[\beta_{1n}^2 - \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] - \theta_{5n12} \left[\gamma_{1n}^2 + \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] \right\} \quad (4-116)$$

Case 2: $\phi^2 \lambda^2 < (n\pi)^2$

$$\delta_{nc} \left\{ \theta_{5n21} \left[\beta_{2n}^2 - \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] + \theta_{5n22} \left[\gamma_{2n}^2 - \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] \right\} \quad (4-117)$$

(11) A31 的矩陣元素

Case 1: $\lambda^2 > (m\pi)^2$

$$\delta_{mc} \left\{ \theta_{1m11} \left[\beta_{1m}^2 - \nu \phi^2 (m\pi)^2 \right] - \theta_{1m12} \left[\gamma_{1m}^2 + \nu \phi^2 (m\pi)^2 \right] \right\} \quad (4-118)$$

Case 2: $\lambda^2 < (m\pi)^2$

$$\delta_{mc} \left\{ \theta_{1m21} \left[\beta_{2m}^2 - \nu \phi^2 (m\pi)^2 \right] + \theta_{1m22} \left[\gamma_{2m}^2 - \nu \phi^2 (m\pi)^2 \right] \right\} \quad (4-119)$$

(12) A32 的矩陣元素

Case 1: $\phi^2 \lambda^2 > (n\pi)^2$

$$\cos c\pi \left\{ \begin{aligned} & \frac{\theta_{2n11} \left[-(n\pi)^2 + \beta_{1n}^2 \nu \phi^2 \right]}{\beta_{1n}^2 + (c\pi)^2} \beta_{1n} \sinh \beta_{1n} \\ & + \frac{\theta_{2n12} \left[-(n\pi)^2 - \gamma_{1n}^2 \nu \phi^2 \right]}{\gamma_{1n}^2 - (c\pi)^2} \gamma_{1n} \sin \gamma_{1n} \end{aligned} \right\} \quad (4-120)$$



Case 2: $\phi^2 \lambda^2 < (n\pi)^2$

$$\cos c\pi \left\{ \begin{aligned} & \frac{\theta_{2n21} \left[-(n\pi)^2 + \beta_{2n}^2 v \phi^2 \right]}{\beta_{2n}^2 + (c\pi)^2} \beta_{2n} \sinh \beta_{2n} \\ & + \frac{\theta_{2n22} \left[-(n\pi)^2 + \gamma_{2n}^2 v \phi^2 \right]}{\gamma_{2n}^2 + (c\pi)^2} \gamma_{2n} \sinh \gamma_{2n} \end{aligned} \right\} \quad (4-121)$$

(13) A33 的矩陣元素

Case 1: $\lambda^2 > (m\pi)^2$

$$\delta_{mc} \left\{ \theta_{3m11} \left[\beta_{1m}^2 - v \phi^2 (m\pi)^2 \right] \cosh \beta_{1m} - \theta_{3m12} \left[\gamma_{1m}^2 + v \phi^2 (m\pi)^2 \right] \cos \gamma_{1m} \right\} \quad (4-122)$$

Case 2: $\lambda^2 < (m\pi)^2$

$$\delta_{mc} \left\{ \theta_{3m21} \left[\beta_{2m}^2 - v \phi^2 (m\pi)^2 \right] \cosh \beta_{2m} + \theta_{3m22} \left[\gamma_{2m}^2 - v \phi^2 (m\pi)^2 \right] \cosh \gamma_{2m} \right\} \quad (4-123)$$

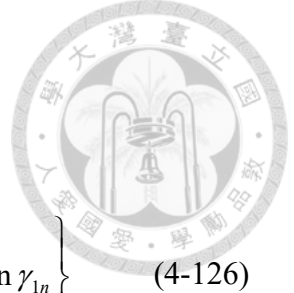
(14) A34 的矩陣元素

Case 1: $\phi^2 \lambda^2 > (n\pi)^2$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\theta_{4n11} \left[-(n\pi)^2 + \beta_{1n}^2 v \phi^2 \right]}{\beta_{1n}^2 + (c\pi)^2} \beta_{1n} \sinh \beta_{1n} \\ & + \frac{\theta_{4n12} \left[-(n\pi)^2 - \gamma_{1n}^2 v \phi^2 \right]}{\gamma_{1n}^2 - (c\pi)^2} \gamma_{1n} \sin \gamma_{1n} \end{aligned} \right\} \quad (4-124)$$

Case 2: $\phi^2 \lambda^2 < (n\pi)^2$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\theta_{4n21} \left[-(n\pi)^2 + \beta_{2n}^2 v \phi^2 \right]}{\beta_{2n}^2 + (c\pi)^2} \beta_{2n} \sinh \beta_{2n} \\ & + \frac{\theta_{4n22} \left[-(n\pi)^2 + \gamma_{2n}^2 v \phi^2 \right]}{\gamma_{2n}^2 + (c\pi)^2} \gamma_{2n} \sinh \gamma_{2n} \end{aligned} \right\} \quad (4-125)$$



(15) A35 的矩陣元素

Case 1: $\phi^2 \lambda^2 > (n\pi)^2$

$$\left\{ \frac{\theta_{5n11} \left[-(n\pi)^2 + \beta_{1n}^2 v \phi^2 \right]}{\beta_{1n}^2 + (c\pi)^2} \beta_{1n} \sinh \beta_{1n} + \frac{\theta_{5n12} \left[-(n\pi)^2 - \gamma_{1n}^2 v \phi^2 \right]}{\gamma_{1n}^2 - (n\pi)^2} \gamma_{1n} \sin \gamma_{1n} \right\} \quad (4-126)$$

Case 2: $\phi^2 \lambda^2 < (n\pi)^2$

$$\left\{ \frac{\theta_{5n21} \left[-(n\pi)^2 + \beta_{2n}^2 v \phi^2 \right]}{\beta_{2n}^2 + (c\pi)^2} \beta_{2n} \sinh \beta_{2n} + \frac{\theta_{5n22} \left[-(n\pi)^2 + \gamma_{2n}^2 v \phi^2 \right]}{\gamma_{2n}^2 + (c\pi)^2} \gamma_{2n} \sinh \gamma_{2n} \right\} \quad (4-127)$$

(16) A41 的矩陣元素

Case 1: $\lambda^2 > (m\pi)^2$

$$\cos c\pi \left\{ \begin{aligned} & \frac{\theta_{1m11} \left[-(m\pi)^2 + \frac{v}{\phi^2} \beta_{1m}^2 \right]}{\beta_{1m}^2 + (c\pi)^2} \beta_{1m} \sinh \beta_{1m} \\ & + \frac{\theta_{1m12} \left[-(m\pi)^2 - \frac{v}{\phi^2} \gamma_{1m}^2 \right]}{\gamma_{1m}^2 - (c\pi)^2} \gamma_{1m} \sin \gamma_{1m} \end{aligned} \right\} \quad (4-128)$$

Case 2: $\lambda^2 < (m\pi)^2$

$$\cos c\pi \left\{ \begin{aligned} & \frac{\theta_{2m21} \left[-(m\pi)^2 + \frac{v}{\phi^2} \beta_{2m}^2 \right]}{\beta_{2m}^2 + (c\pi)^2} \beta_{2m} \sinh \beta_{2m} \\ & + \frac{\theta_{2m22} \left[-(m\pi)^2 + \frac{v}{\phi^2} \gamma_{2m}^2 \right]}{\gamma_{2m}^2 + (c\pi)^2} \gamma_{2m} \sinh \gamma_{2m} \end{aligned} \right\} \quad (4-129)$$

(17) A42 的矩陣元素

Case 1: $\phi^2 \lambda^2 > (n\pi)^2$

$$\delta_{nc} \left\{ \theta_{2n11} \left[\beta_{1n}^2 - \frac{v}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] - \theta_{2n12} \left[\gamma_{1n}^2 + \frac{v}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] \right\} \quad (4-130)$$



Case 2: $\phi^2 \lambda^2 < (n\pi)^2$

$$\delta_{nc} \left\{ \theta_{2n21} \left[\beta_{2n}^2 - \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] + \theta_{2n22} \left[\gamma_{2n}^2 - \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] \right\} \quad (4-131)$$

(18) A43 的矩陣元素

Case 1: $\lambda^2 > (m\pi)^2$

$$\left\{ \frac{\theta_{3m11} \left[-(m\pi)^2 + \frac{\nu}{\phi^2} \beta_{1m}^2 \right]}{\beta_{1m}^2 + (c\pi)^2} \beta_{1m} \sinh \beta_{1m} + \frac{\theta_{3m12} \left[-(m\pi)^2 - \frac{\nu}{\phi^2} \gamma_{1m}^2 \right]}{\gamma_{1m}^2 - (c\pi)^2} \gamma_{1m} \sin \gamma_{1m} \right\} \quad (4-132)$$

Case 2: $\lambda^2 < (m\pi)^2$

$$\left\{ \frac{\theta_{3m21} \left[-(m\pi)^2 + \frac{\nu}{\phi^2} \beta_{2m}^2 \right]}{\beta_{2m}^2 + (c\pi)^2} \beta_{2m} \sinh \beta_{2m} + \frac{\theta_{3m22} \left[-(m\pi)^2 + \frac{\nu}{\phi^2} \gamma_{2m}^2 \right]}{\gamma_{2m}^2 + (c\pi)^2} \gamma_{2m} \sinh \gamma_{2m} \right\} \quad (4-133)$$

(19) A44 的矩陣元素

Case 1: $\phi^2 \lambda^2 > (n\pi)^2$

$$\delta_{nc} \left\{ \begin{aligned} &\theta_{4n11} \left[\beta_{1n}^2 - \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] \cosh \beta_{1n} - \theta_{4n12} \left[\gamma_{1n}^2 + \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] \cos \gamma_{1n} \\ &-K_r \left[-\theta_{4n11} \beta_{1n} \sinh \beta_{1n} + \theta_{4n12} \gamma_{1n} \sin \gamma_{1n} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4-134)$$

Case 2: $\phi^2 \lambda^2 < (n\pi)^2$

$$\delta_{nc} \left\{ \begin{aligned} &\theta_{4n21} \left[\beta_{2n}^2 - \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] \cosh \beta_{2n} + \theta_{4n22} \left[\gamma_{2n}^2 - \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] \cosh \gamma_{2n} \\ &-K_r \left[-\theta_{4n21} \beta_{2n} \sinh \beta_{2n} - \theta_{4n22} \gamma_{2n} \sinh \gamma_{2n} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4-135)$$

(20) A45 的矩陣元素

Case 1: $\phi^2 \lambda^2 > (n\pi)^2$

$$\delta_{nc} \left\{ \theta_{5n11} \left[\beta_{1n}^2 - \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] \cosh \beta_{1n} - \theta_{5n12} \left[\gamma_{1n}^2 + \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] \cos \gamma_{1n} \right\} \quad (4-136)$$

Case 2: $\phi^2 \lambda^2 < (n\pi)^2$

$$\delta_{nc} \left\{ \theta_{5n21} \left[\beta_{2n}^2 - \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] \cosh \beta_{2n} + \theta_{5n22} \left[\gamma_{2n}^2 - \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] \cosh \gamma_{2n} \right\} \quad (4-137)$$

由於特徵矩陣 $[A][E] = 0$ 且 $[A]$ 與頻率有關，在不同頻率下特徵矩陣 $[A]$ 將會有不同值，而唯有 $\det(A)$ 為零時才有非零解，此時的頻率即為共振頻率，再利用此時的特徵矩陣求得對應的特徵向量 $[E]$ ，根據特徵向量即可計算共振時的模態形狀。

4.3 串聯型雙層壓電矩形板面外振動理論與數值分析之比較

為了驗證理論方法的正確性，本節介紹串聯型雙層壓電陶瓷矩形的有限元素分析設定，以特徵頻率進行分析，計算出共振頻率和模態振形，並與商用有限元素模擬軟體相互比較，以驗證兩者的準確性。

4.3.1 試片規格

試片規格皆使用美國 Piezo.com 生產的鈦鋇酸鉛 (PZT) 商品型號為 PSI-5A4E，客製化串聯型雙層壓電，壓電板長為 63.5mm，寬為 31.88mm，單層厚度為 0.1905mm，共兩層，極化方向沿著厚度方向，上下兩層極化方向相反。所使用的壓電材料參數，如表 3-1 所示。

4.3.2 有限元素數值分析

本節有限元素分析選用 Comsol Multiphysics 5.5 的商用軟體，使用固體力學、靜電模組，以及耦合的物理量--壓電效應，並選擇特徵頻率的研究求解器。

(1) 極化方向設定

由於試片為串聯型壓電，上下兩片壓電的極化方向相反，而 Comsol 預設的極化方向為 $+z$ 方向，因此需要定義另一個沿 $-z$ 的座標軸，在左側單元件 >> 定義，設定旋轉座標系統，將尤拉角 β 旋轉 180° ，使 z 軸方向朝下，並在固體力學內設定其中一塊壓電材料的座標系統為旋轉系統。如下圖 4-5 所示。

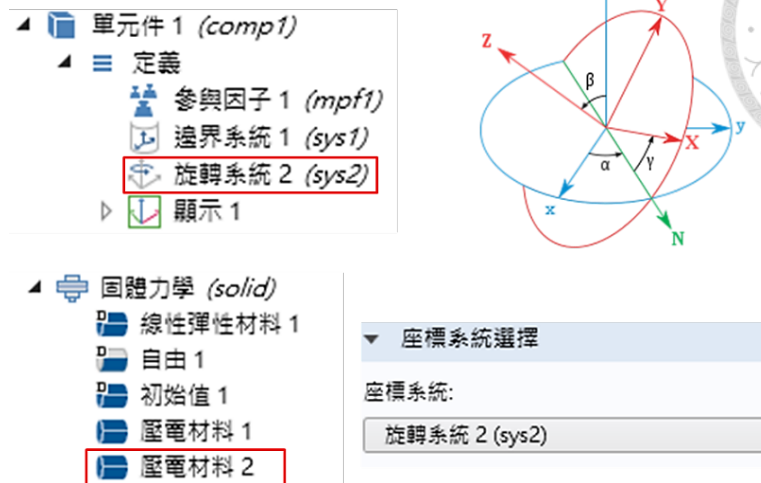


圖 4-5 極化方向設定圖

(2) 邊界條件設定

本研究主要討論自由邊界下的薄板，因此在固體力學的分析上無需施加額外的邊界條件，於靜電的物理量，分為開路和短路形式：開路模型，上、中、下三層的壓電表面皆不設定電位；短路模型則是設定上下層電位為零，而本節以開路形式為探討的模型。

4.3.3 串聯型雙層壓電矩形板於自由邊界面外振動理論解析與數值分析之比較

本節總結比較有限元素法之數值分析和 4.2 節疊加法之理論解析，探討串聯型雙層壓電矩形薄板在自由邊界條件下的振動特性，計算前八個共振頻率及其對應的模態振形，如表 4-1、表 4-2 所示，觀察兩者的結果，不論是特徵頻率，亦或是模態振形都有很高的對應性，整體的誤差不超過 0.5%，由此可驗證兩種方法的正確性與一致性。

表 4-1 薄板自由邊界理論與模擬對照表(a)

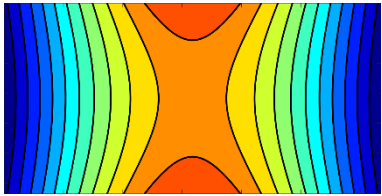
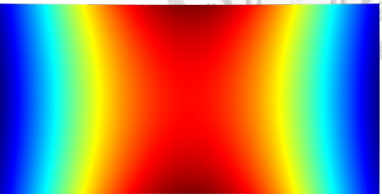
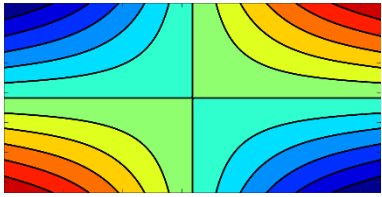
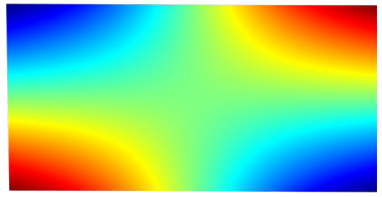
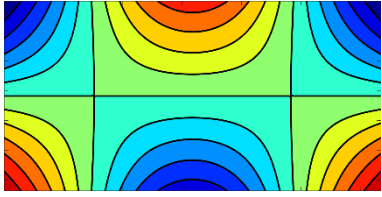
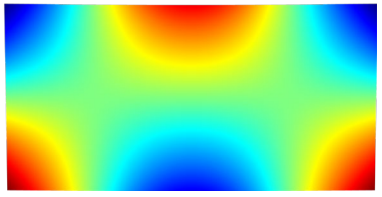
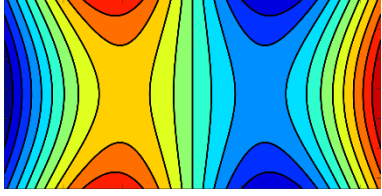
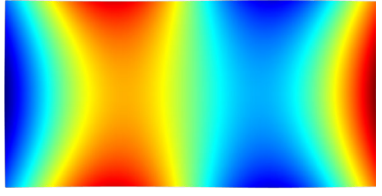
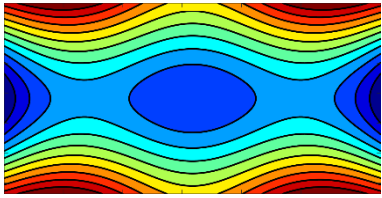
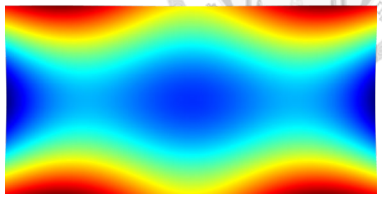
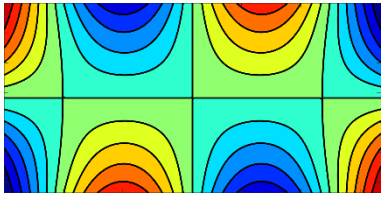
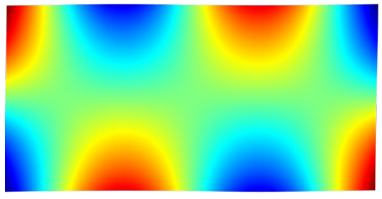
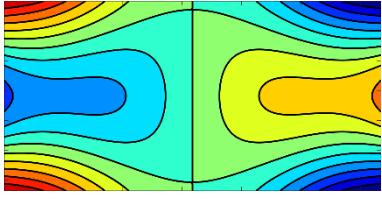
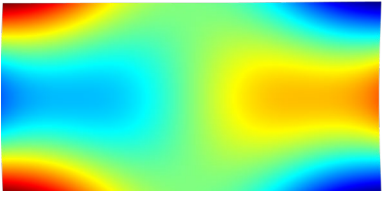
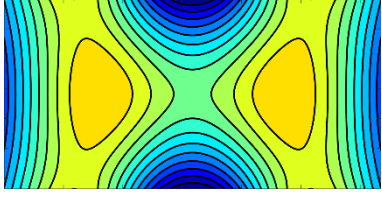
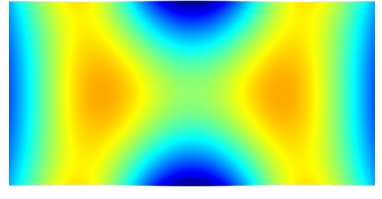
Mode		Theory	Comsol(Error)
1	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	311.45	311.34(-0.04%)
2	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	352.97	351.82(-0.33%)
3	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	795.85	792.8(-0.38%)
4	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	874.3	873.27(-0.12%)

表 4-2 薄板自由邊界理論與模擬對照表(b)

Mode		Theory	Comsol(Error)
5	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	1350.26	1348.8(-0.11%)
6	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	1421.2	1415.2(-0.42%)
7	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	1575.4	1571.7(-0.23%)
8	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	1815.89	1812(-0.21%)

第五章 薄膜振動特性分析



本章節討論平面薄膜的振動，由於膜非常的薄，因此忽略厚度假設為二維平面座標，而薄膜受外力作用後，平衡的力主要是依靠張力，因此在沒有張力的狀態下不會有振動的產生。因為推導矩形環薄膜的解析解是相當困難的，所以利用無網格法中的基本解法作為求解的工具，首先介紹薄膜的基本假設及理論，推導矩形膜的解析型式，並且使用有限元素軟體與無網格基本解法比較，相互驗證方法的可行性與準確性；接著討論中間空心的環形膜的解析解，同樣比較三者方法的對應性；最後探討矩形環膜使用基本解法求解的共振頻率、模態振形，並與有限元素法比較。

5.1 薄膜的統御方程式

薄膜是一種無法承受彎矩力的材料，需要張力來恢復所受到的力，材料本身的剛性與張力相比是微小、可以忽略的，因此本節探討附有特定張力大小，同時最外圍邊界條件為固定的薄膜振動特性。在推導之前先對薄膜進行一些基本假設：

- I. 薄膜完全可撓，因此薄膜不能承受彎矩力
- II. 薄膜內部為均勻材質，單位體積之質量為 $\rho [\text{kg/m}^3]$
- III. 薄膜每一點的單位長度張力都是 $T [\text{N/m}]$
- IV. 膜的垂直位移量很小，故薄膜中每一點的斜率變化很小，故 $\alpha \approx \beta \approx 0$ 、
 $\alpha^* \approx \beta^* \approx 0$ ，如圖 5-1 所示。

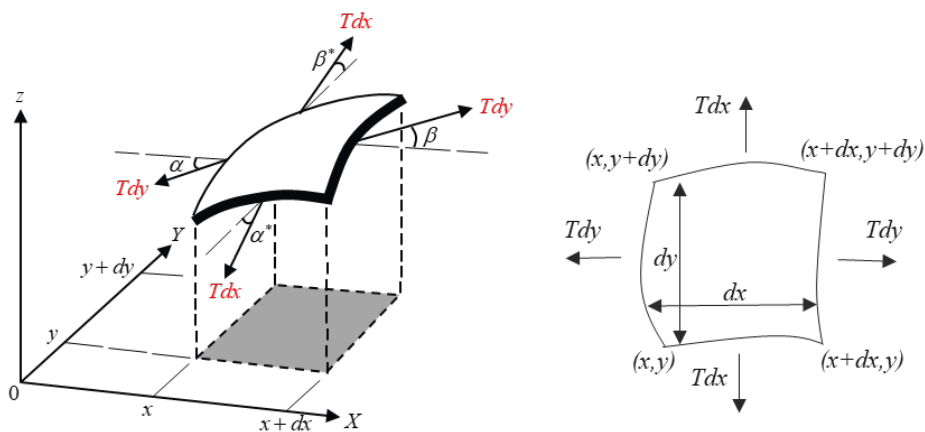


圖 5-1 單位面積薄膜張力圖

由圖 5-1 和薄膜假設，可知左端 x 軸的張力垂直分量為 $T \sin \alpha$ ，且 α 為極小值，可以求得

$$\sin \alpha \approx \tan \alpha = T \left(\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} \right)_x \quad (5-1)$$

利用上述方式，同理可推導出另外三個邊的垂直方向力，整理後可得 y 軸、 x 軸的總垂直作用力為

$$y-axis: T \left(\frac{\partial W(x, y, t)}{\partial x} \right)_{x+dx} dy - T \left(\frac{\partial W(x, y, t)}{\partial x} \right)_x dy = T \left(\frac{\partial^2 W(x, y, t)}{\partial x^2} \right) dx dy \quad (5-2)$$

$$x-axis: T \left(\frac{\partial W(x, y, t)}{\partial y} \right)_{y+dy} dx - T \left(\frac{\partial W(x, y, t)}{\partial y} \right)_y dx = T \left(\frac{\partial^2 W(x, y, t)}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (5-3)$$

將(5-2)、(5-3)合併相加後，得到作用於整個單元的總垂直力

$$F_z = T \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (5-4)$$

根據牛頓第二運動定律可推導出運動方程式

$$T \left(\frac{\partial^2 W(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W(x, y, t)}{\partial y^2} \right) dx dy = \rho h dx dy \left(\frac{\partial^2 W(x, y, t)}{\partial t^2} \right) \quad (5-5)$$

其中 h 是薄膜的厚度。再將(5-5)簡化整理，可求得薄膜的統御方程式

$$\nabla^2 W(x, y, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 W(x, y, t)}{\partial t^2} \quad (5-6)$$

其中 W 為面外振動位移， $c = \sqrt{\frac{T}{\rho h}}$ 為波速， $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 。

5.2 矩形薄膜之自由振動分析

本章節分析矩形薄膜的振動，採用卡式座標系統，長、寬分別為 a 、 b ，最外圈的邊界位移為零，如圖 5-2 所示，由 5.1 節中得知薄膜的統御方程式為二階偏微分方程式，使用理論解析、無網格法和有限元素法分別計算求得對應的振動特性。

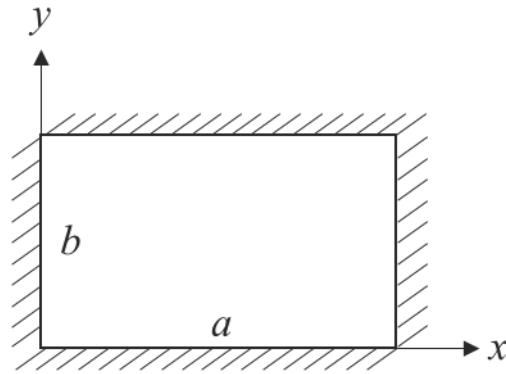


圖 5-2 矩形薄膜示意圖

5.2.1 矩形薄膜之自由振動理論解析

本節以理論解析解的方式對矩形薄膜進行求解。薄膜振動為簡諧運動，因此將面外位移 W 進行分離變數，將空間、時間分離

$$W(x, y, t) = w(x, y)e^{i\omega t} \quad (5-7)$$

將(5-7)代入薄膜的統御方程式(5-6)，消去 $e^{i\omega t}$ 項，可得

$$\nabla^2 w + \frac{\omega^2}{c^2} w = 0 \quad (5-8)$$

在此令位移 $w(x, y) = Ce^{i(\alpha x + \beta y)}$ ，利用尤拉公式可改寫成

$$\begin{aligned} w(x, y) &= (C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x)(C_3 \cos \beta y + C_4 \sin \beta y) \\ &= A_1 \cos(\alpha x) \cos(\beta y) + A_2 \cos(\alpha x) \sin(\beta y) + A_3 \sin(\alpha x) \cos(\beta y) + A_4 \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{aligned} \quad (5-9)$$

由圖 5-2 可知邊界條件為

$$\begin{cases} W(0, y, t) = 0 \\ W(a, y, t) = 0 \\ W(x, 0, t) = 0 \\ W(x, b, t) = 0 \end{cases} \quad (5-10)$$

將(5-9)、邊界條件(5-10)第一式 $w(0, y) = 0$ 和第三式 $w(x, 0) = 0$ 代入(5-8)可得

$$\begin{aligned} A_1 \cos(\beta y) + A_2 \sin(\beta y) &= 0 \\ A_1 \cos(\alpha x) + A_3 \sin(\alpha x) &= 0 \end{aligned} \quad (5-11)$$

所以 $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ ，整理後可表示為



$$w(x, y) = A \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (5-12)$$

將邊界條件(5-10)第二式 $w(a, y) = 0$ 和第四式 $w(x, b) = 0$ 代入(5-12)可分別求得

$$\begin{aligned} A \sin(\alpha a) \sin(\beta y) &= 0 \\ A \sin(\alpha x) \sin(\beta b) &= 0 \end{aligned} \quad (5-13)$$

其中 $\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$, $\beta_m = \frac{n\pi}{b}$, 最後將(5-13)的結果代入(5-9)就可以得到薄膜的特徵方程式

$$w(m, n) = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5-14)$$

將(5-9)第一式代入(5-8)可得

$$-\alpha^2 - \beta^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (5-15)$$

同樣將(5-13)的解代入(5-15)可求得特徵頻率

$$\omega(m, n) = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad (5-16)$$

其中 $m, n = 1, 2, 3, \dots$ 代表 x, y 方向的節線數量。

5.2.2 矩形薄膜之自由振動基本解法

本節介紹薄膜自由振動的基本解法(Method of Fundamental Solutions, MFS) , 求解過程如 3.2.1 節, 因此需要找出一組滿足薄膜統御方程式的基本解, 而觀察 5.2.1 節可知薄膜振動方程式為二維的亥姆霍茲方程式(Helmholtz equation), 利用格林函數得到基本解, 隨後透過源點(source)和邊界點(field)的佈置, 利用矩陣求得問題的共振頻率及模態振形。

首先求解二維亥姆霍茲方程式的基本解, 將(5-8)改寫並整理成

$$(\nabla^2 + k^2)w(x, y) = 0 \quad (5-17)$$

其中 $k = \omega / c$, 由於求解方法是利用格林函數, 因此將問題改寫成

$$(\nabla^2 + k^2)G^{2D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial G^{2D}}{\partial r} \right) + k^2 G^{2D} = -\delta(r) \quad (5-18)$$

在無窮域的邊界下, 透過格林函數可以求得基本解

$$G^{2D} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+\xi^2}}}{4\pi\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+\xi^2}} d\xi = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(k|r-r'|) \quad (5-19)$$

其中 $H_0^{(2)}(\cdot) = J_0(\cdot) + iY_0(\cdot)$ 為第二類漢克爾零階函數(Hankel function of the second kind of order zero)， r 為源點的位置， r' 為邊界點的位置，如圖 5-3 所示。並假設解為基本解線性疊加：

$$w(r_i) = \sum_{j=1}^N A_j H_0^{(2)}(k|r_i - r'_j|) \quad (5-20)$$

最外圍($\bar{r}_i = b$)位移為零的邊界條件

$$w(r_i)|_{r_i=b(x,y)} = 0 \quad (5-21)$$

接著將(5-21)代入(5-20)並利用源點與邊界點的距離關係($|r_i - r'_j|$)可得

$$\sum_{j=1}^N A_j H_0^{(2)}(k|r_i - r'_j|) = \sum_{j=1}^N A_j U_{ij} = 0 \quad (5-22)$$

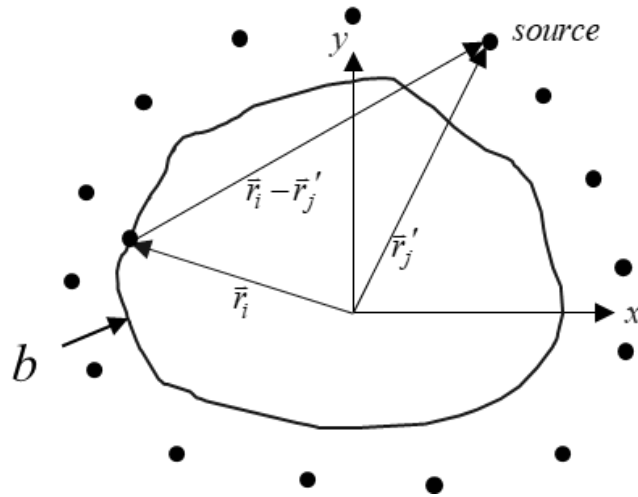


圖 5-3 源點、邊界點示意圖

改寫成 $N \times N$ 的對稱矩陣形式

$$\begin{bmatrix} U_{11} & \cdots & U_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{N1} & \cdots & U_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix} = 0 \quad (5-23)$$



由於求解的是特徵值問題，因此可以利用掃頻法求解 $\det(U_{ij}) = 0$ ，最後得到的特徵值就是共振頻率，特定係數 A 向量為對應的模態振形。而本研究探討的是矩形的薄膜，佈點情形如圖 5-4 所示，以中心為零點，源點與邊界點的點數必須一致，點數、源點距離或是形狀皆可隨意更改，本研究設定共佈置 56 個點，源點形狀為矩形，源點的長寬範圍為原邊界長度的 1.5 倍。

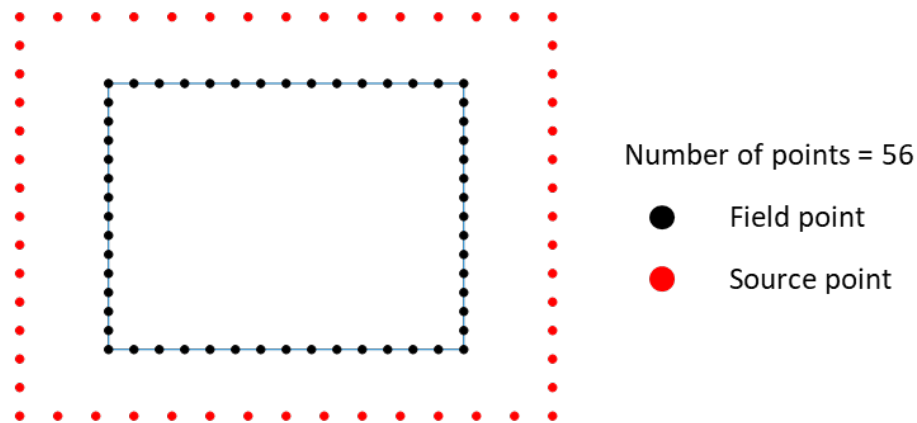


圖 5-4 矩形薄膜佈點示意圖

5.2.3 矩形薄膜之自由振動有限元素數值分析

本小節使用 Comsol Multiphysics 5.5 有限元素分析軟體，選用 3D 薄膜的物理量計算具有預張力繃緊的薄膜，對於預張力的分析過往需要分成兩步驟：先對張力進行預應力的靜力，再將結果導入特徵頻率的分析。而 Comsol 針對薄膜有額外的模組，可以直接給定張力、厚度，並設定最外圍為固定約束，對膜結構而言，任何時候不存在無應力狀態，因此其剛度和穩定性需要靠膜曲面的曲率變化和其中預應力來提高，所以需要給定初始平面力，也因此會不符合小變形的假設，所以在求解器的地方需要開啟幾何非線性才有辦法得到正確答案。設置如圖 5-5 所示。

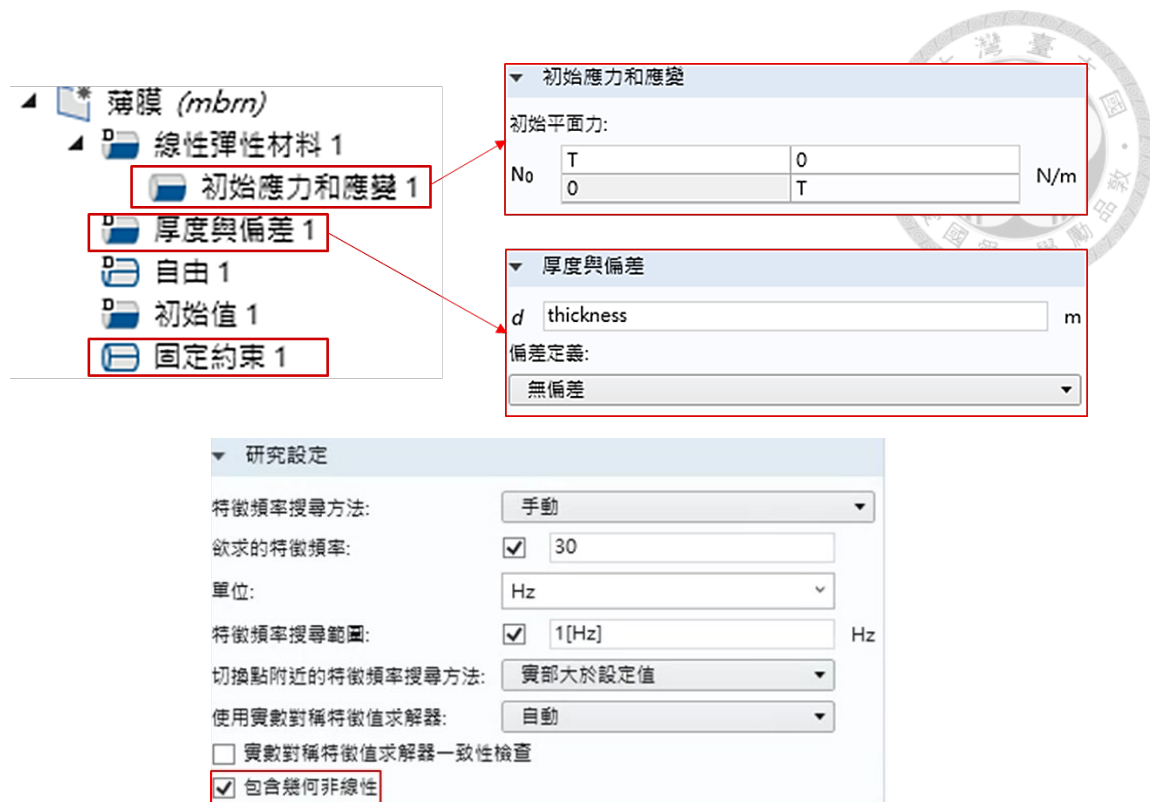


圖 5-5 薄膜基本設定圖

5.2.4 試片規格

試片規格選用高分子聚合物作為元件的薄膜，並在單層濺鍍金屬使其能夠導通，以利後續聲學元件的製作。矩形長為 75mm，寬為 60mm，厚度為 9 μ m，張力為 10N/m，靜電薄膜的材料參數參考陳冠宇[56]使用奈米壓痕機量測的結果。如下表 5-1 所示。

表 5-1 靜電薄膜材料參數

Property		Values
Density (kg/m ³)	ρ	1340
Elastic Modulus (Gpa)	E	2.012
Poisson's ratio	ν	0.3

5.2.5 矩形薄膜振動理論解析與數值分析之比較

本節比較 5.2.1 理論解析、5.2.2 基本解法和 5.2.3 有限元素數值分析，探討靜電薄膜在固定邊界條件的振動特性，計算前八個共振頻率及其對應的模態振形，如表 5-2、表 5-3 所示，觀察三者，不論是特徵頻率，亦或是模態振形都有很高的對應性，整體的誤差皆趨近於零，基本解法計算出來的結果甚至比有限元素法來的準確，由此可驗證三種方法的可行性與一致性。

表 5-2 矩形薄膜固定邊界理論、數值方法對照表(a)

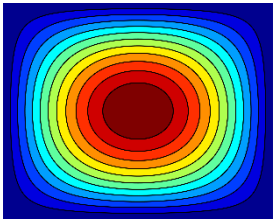
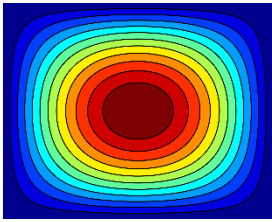
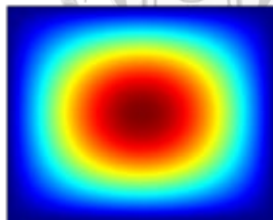
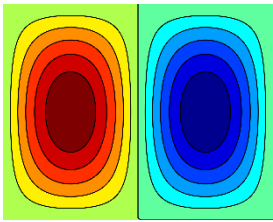
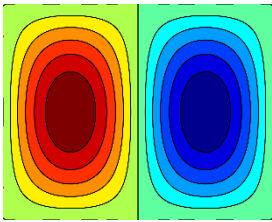
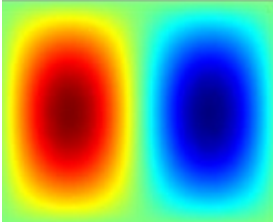
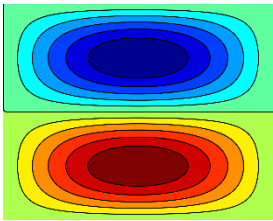
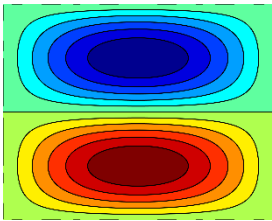
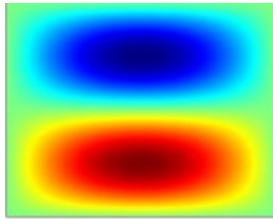
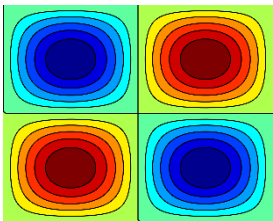
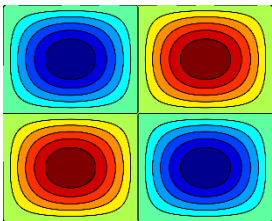
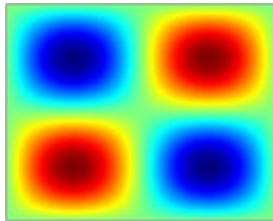
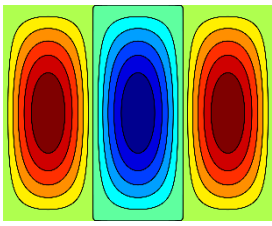
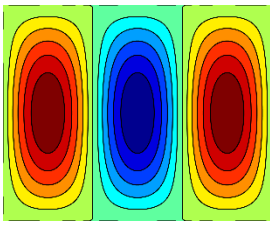
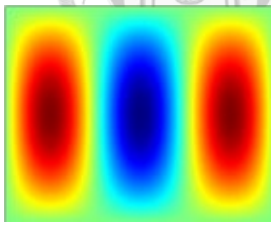
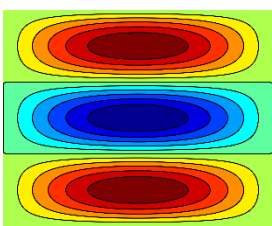
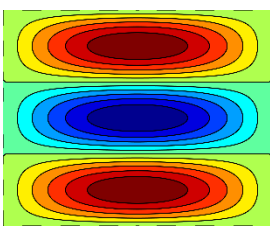
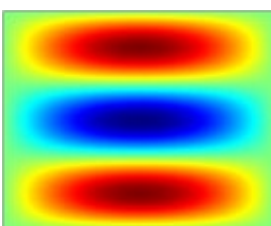
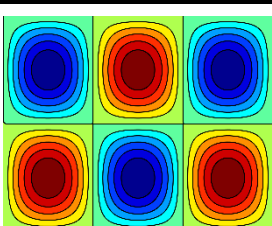
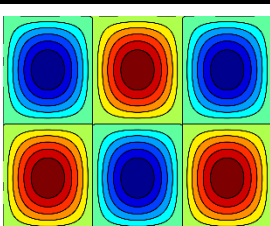
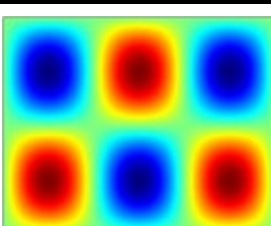
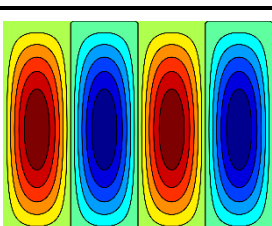
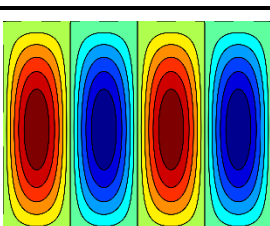
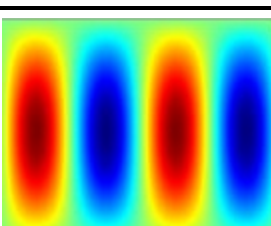
Mode		Theory	MFS(Error)	Comsol(Error)
1	Mode Shape			
	Freq (Hz)	307.3032	307.3032(0%)	307.3032(0%)
2	Mode Shape			
	Freq (Hz)	452.7621	452.7621(0%)	452.7622(0%)
3	Mode Shape			
	Freq (Hz)	516.8971	516.8971	516.8973(0%)
4	Mode Shape			
	Freq (Hz)	614.6063	614.6064(0%)	614.6065(0%)

表 5-3 薄膜固定邊界理論、數值方法對照(b)

Mode		Theory	MFS(Error)	Comsol(Error)
5	Mode Shape			
	Freq (Hz)	623.9050	623.9050(0%)	623.9054(0.0001%)
6	Mode Shape			
	Freq (Hz)	745.0469	745.0469(0%)	745.0483(0.0002%)
7	Mode Shape			
	Freq (Hz)	749.6698	749.6699(0%)	749.6703(0.0001%)
8	Mode Shape			
	Freq (Hz)	804.5041	804.5041(0%)	804.5059(0.0002%)



5.3 矩形環薄膜之自由振動分析

本章節分析矩形環薄膜的振動，也就是將 5.2 節的實心矩形薄膜具中空邊界的矩形環，由於矩形環的解析解不容易求得，因此先以環形薄膜做基本驗證，外徑 ($r=b$) 和內徑 ($r=a$) 的邊界條件位移為零，如圖 5-6 所示，使用理論解析、無網格法和有限元素法分別計算求得對應的振動特性。驗證完方法的可行性後，接著以基本解法與有限元素法分析矩形環薄膜的振動特性，以確保方法於矩形環模型的準確性。

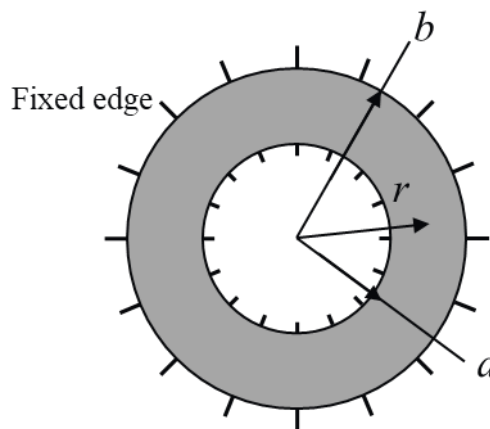


圖 5-6 環形薄膜示意圖

5.3.1 環形薄膜之自由振動理論解析

由於本節先討論環形薄膜，因此將(5-8)改寫成圓柱座標系統的形式

$$\frac{\partial^2 w(r, \theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r, \theta)}{\partial \theta^2} + k^2 w(r, \theta) = 0 \quad (5-24)$$

接著利用分離變數法求解，將 $w(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ 代入(5-24)可得到

$$\Theta(\theta) \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{\Theta(\theta)}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + \frac{R(r)}{r^2} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} + k^2 R(r) \Theta(\theta) = 0 \quad (5-25)$$

將(5-25)同乘 $\frac{r^2}{R(r)\Theta(\theta)}$ ，並整理相同變數於同一側並假設為常數 n^2 可得

$$\frac{r^2}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{r}{R(r)} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + k_d^2 r^2 = -\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} = n^2 \quad (5-26)$$

分別整理成以下兩個獨立的常微分方程式



$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + n^2\Theta(\theta) = 0 \\ R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + (k^2 - \frac{n^2}{r^2})R(r) = 0 \end{cases} \quad (5-27)$$

分別求解兩條方程式，代回 $W(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ ，可求得環形薄膜於軸向振動位移通解為

$$w(r, \theta) = [EJ_n(kr) + FY_n(kr)]\cos(n\theta + \phi) \quad (5-28)$$

其中 J_n 、 Y_n 為貝索函數。內、外徑位移為零，即邊界條件為

$$w(r, \theta)|_{r=a,b} = 0 \quad (5-29)$$

將邊界條件(5-29)代入通解(5-28)可得

$$[EJ_n(ka) + FY_n(ka)]\cos(n\theta) = 0 \quad (5-30)$$

$$[EJ_n(kb) + FY_n(kb)]\cos(n\theta) = 0 \quad (5-31)$$

求解(5-30)、(5-31)待定係數的非零解，即非係數項矩陣行列式值等於零，可得特徵方程式

$$J_n(ka)Y_n(kb) - J_n(kb)Y_n(ka) = 0 \quad (5-32)$$

軸向振動共振頻率

$$f = \frac{k}{2\pi} \sqrt{\frac{T}{h\rho}} \quad (5-33)$$

5.3.2 矩形環、環形薄膜之自由振動基本解法

在無網格法中，中空邊界問題通常稱作雙連通問題，由 5.2.2 節(5-20)可以將位移擴展為兩個部分所組成，如圖 5-7 雙連通源點、邊界點示意圖具有雙連通源點的示意，此數值計算受到兩項源點分佈的影響，其中一項是外部源點的影響，另一項則是內部源點。

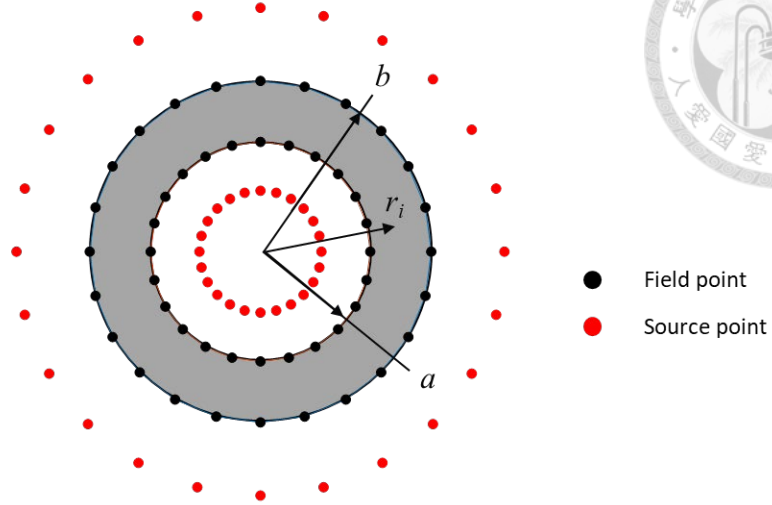


圖 5-7 雙連通源點、邊界點示意圖

可透過(5-20)將位移假設改寫為內、外兩項的相加

$$w(r_i) = \sum_{j_1=1}^{N_1} A_{j_1}^1 H_0^{(2)}(k|r_i - r_{j_1}'^{(1)}|) + \sum_{j_2=1}^{N_2} A_{j_2}^2 H_0^{(2)}(k|r_i - r_{j_2}'^{(2)}|) \quad (5-34)$$

給定內、外邊界的位移為零，即固定邊界條件，可得兩式

$$w(r_i)|_{r_i=a(x,y)} = 0 \quad (5-35)$$

$$w(r_i)|_{r_i=b(x,y)} = 0 \quad (5-36)$$

將邊界條件(5-35)、(5-36)代入(5-34)可得

$$W(r_i) = \sum_{j_1=1}^{N_1} A_{j_1}^1 H_0^{(2)}(k|r_i - r_{j_1}'^{(1)}|) + \sum_{j_2=1}^{N_2} A_{j_2}^2 H_0^{(2)}(k|r_i - r_{j_2}'^{(2)}|) = 0 \quad (5-37)$$

整理(5-37)可得

$$\sum_{j=1}^{N_1} A_j^{(1)} U_{ij}^{(1)} + \sum_{j=1}^{N_2} A_j^{(2)} U_{ij}^{(2)} = 0 \quad (5-38)$$

將(5-38)改寫為矩陣形式並簡化可得

$$\begin{aligned} [U^{11}] [A^{(1)}] + [U^{12}] [A^{(2)}] &= [0] \\ [U^{21}] [A^{(1)}] + [U^{22}] [A^{(2)}] &= [0] \end{aligned} \quad (5-39)$$



合併矩陣可得

$$\begin{bmatrix} U^{11} & U^{12} \\ U^{21} & U^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-40)$$

完整擴展矩陣可以表示為

$$\begin{bmatrix} U_{11} & \cdots & U_{1N_1} & U_{11} & \cdots & U_{1N_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{N_11} & \cdots & U_{N_1N_1} & U_{N_21} & \cdots & U_{N_2N_2} \\ U_{11} & \cdots & U_{1N_1} & U_{11} & \cdots & U_{1N_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{N_11} & \cdots & U_{N_1N_1} & U_{N_21} & \cdots & U_{N_2N_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^{(1)} \\ \vdots \\ A_{N_1}^{(1)} \\ A_1^{(2)} \\ \vdots \\ A_{N_2}^{(2)} \end{bmatrix} = 0 \quad (5-41)$$

由於求解的是特徵值問題，因此可以利用掃頻法求解 $\det(U_{ij}) = 0$ ，最後得到的特徵值就是共振頻率，待定係數 A 向量為對應的模態振形。而本研究探討環形、矩形環的薄膜，佈點情形如圖 5-8、圖 5-9 所示。虛擬源點與邊界點的佈置可以根據邊界條件調整，自由邊界需要更遠、更多的源點設置，而固定邊界則反之，本研究透過佈點的距離與點數之收斂性得到以下設置。環形的佈點配置，形狀為圓型，外部設置 24 個點，外源點距離為外部邊界外徑的 1.4 倍；內部設置 28 個點，內源點距離為內部邊界內徑的 0.5 倍。

矩形中空邊界的薄膜的無網格法解析之雙連通問題，其源點分佈、位移假設、特徵值求解方法等概念相似前述之環型膜，差別為矩形環的佈點配置形狀為矩形，但因為矩形的角落會有不連續的問題，因此需要較多的點數去近似角點，外部設置 64 個點，源點距離為外部邊界的 1.25 倍；內部設置 400 個點，源點距離為內部邊界的 0.995 倍。

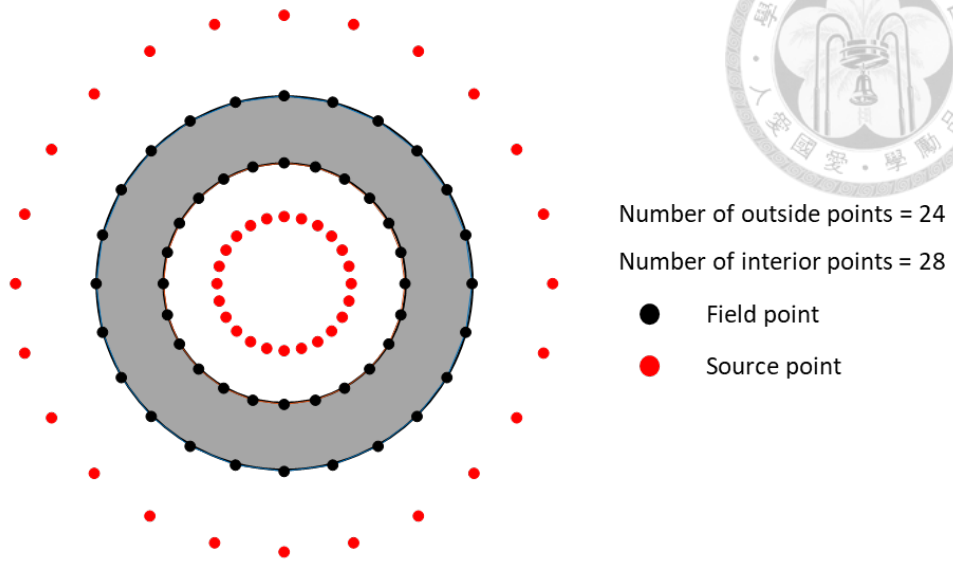


圖 5-8 環形薄膜佈點示意圖

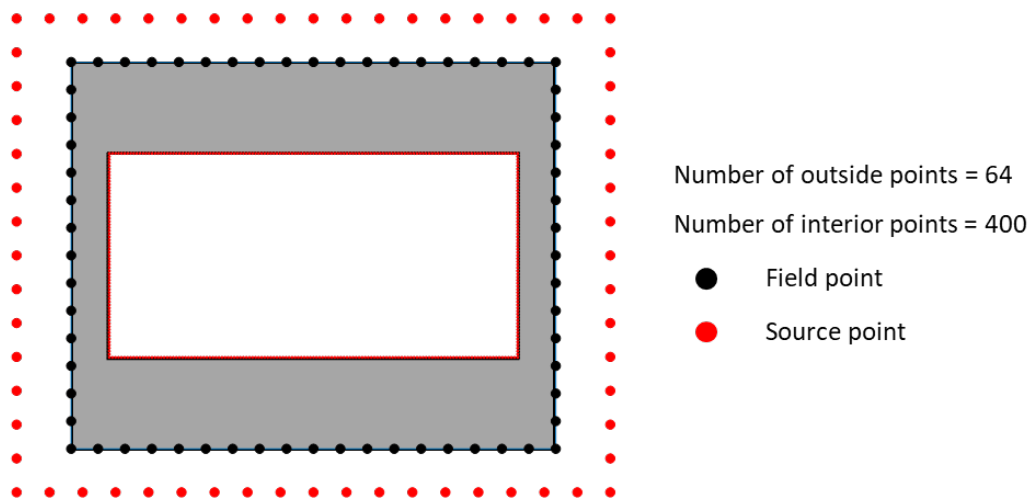


圖 5-9 矩形環薄膜佈點示意圖

5.3.3 矩形環、環形薄膜之自由振動有限元素數值分析

有限元素法的基本設置與 5.2.3 節相同，不過在矩形環的網格設定需要做額外的處理，以避免有限元素法在模態振形上會有不對稱的情形產生，首先需要將矩形環膜沿垂直、平行中心切成四塊，並選用四邊形網格，如圖 5-10 矩形環網格示意圖所示，使分析較能夠符合實際情況，不會有數值方法造成的重複模態出現。

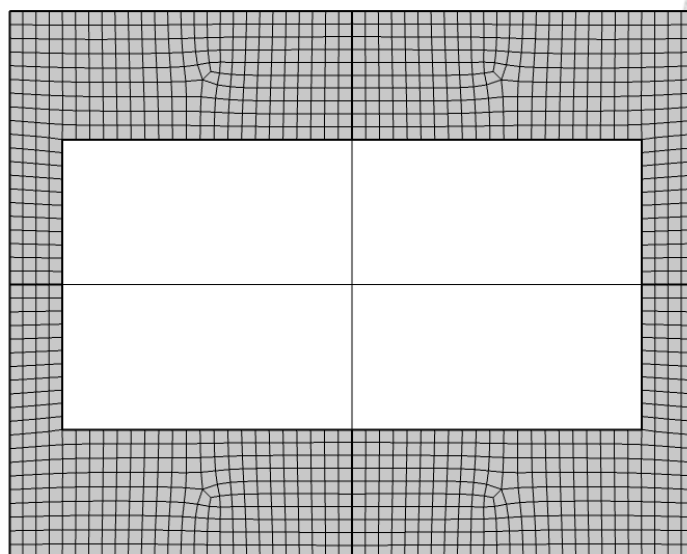
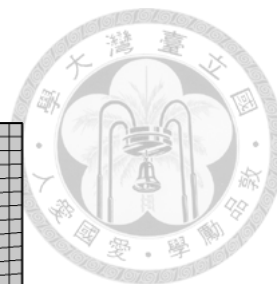


圖 5-10 矩形環網格示意圖

5.3.4 試片規格

環形薄膜選用高分子聚合物 PVC，其詳細參數如下表 5-4 所示，外徑為 35mm，內徑為 22.5mm，厚度為 11 μ m，張力為 3.546N/m。

矩形環薄膜試片規格選用高分子聚合物作為元件的薄膜，單層濺鍍金屬層，材料參數如表 5-1，外部長為 75mm，寬為 60mm，內部長為 63.5mm，寬為 31.8mm，厚度為 11 μ m，張力為 10N/m。

表 5-4 PVC 薄膜材料參數

Property		Values
Density (kg/m ³)	ρ	1230
Elastic Modulus (GPa)	E	0.841
Poisson's ratio	ν	0.3

5.3.5 矩形環、環形薄膜振動理論解析與數值分析之比較

由 5.2 節可以驗證三種方法於矩形膜振動的高度對應性，本節進一步比較理論解析、無網格基本解法和有限元素數值分析於環形、矩形環靜電薄膜在固定邊界條件的振動特性，計算前八個共振頻率及其對應的模態振形，首先討論環形膜，如表 5-5、表 5-6 所示，圖中模態振型以 (m,n) 表示， m 為節線數， n 為節圓數，三種方法不論是特徵頻率，亦或是模態振形都有極高的對應性，整體的誤差也都趨近於零，再次驗證了方法的可行性。

接著探討矩形環薄膜的振動特性，如表 5-7、表 5-8 所示，比較無網格基本解法和有限元素法的結果，整體誤差不超過 0.2%，在模態振形上也有高度的一致性，由此可證，無網格基本解法不論是環形或是具有極端角點的矩形環都可以有非常好的結果。

表 5-5 環形薄膜固定邊界理論、數值方法對照表(a)

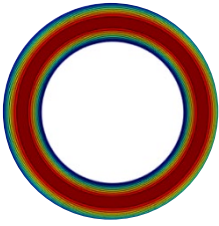
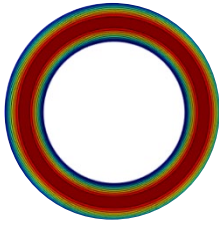
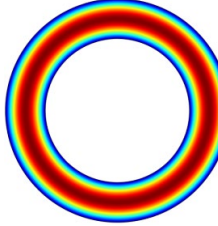
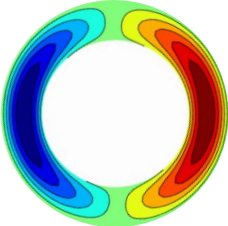
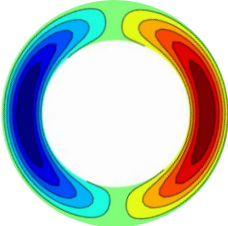
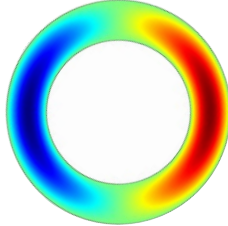
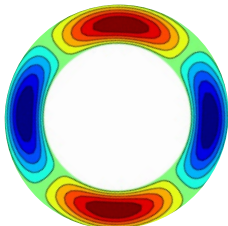
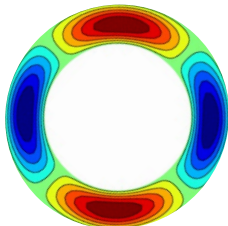
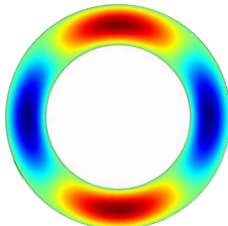
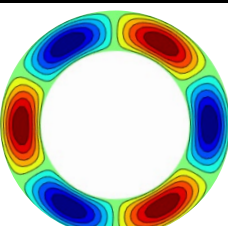
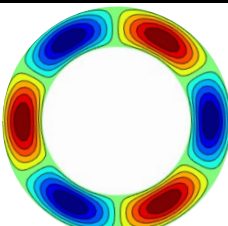
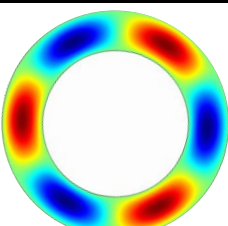
Mode		Theory	MFS(Error)	Comsol(Error)
1	Mode Shape (0,2)			
	Freq (Hz)	645.98	645.98(0%)	646.02(0.006%)
2	Mode Shape (1,2)			
	Freq (Hz)	652.31	652.28(-0.005%)	652.32(0.002%)
3	Mode Shape (2,2)			
	Freq (Hz)	670.79	670.83(0.006%)	670.87(0.012%)
4	Mode Shape (3,2)			
	Freq (Hz)	700.6	700.61(0.001%)	700.66(0.009%)

表 5-6 環形薄膜固定邊界理論、數值方法對照表(b)

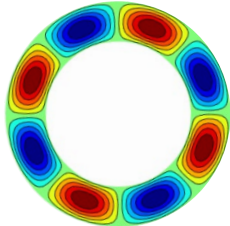
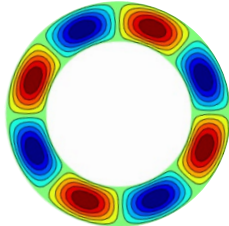
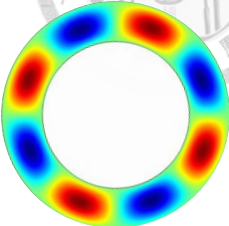
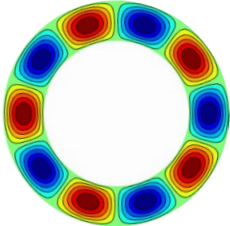
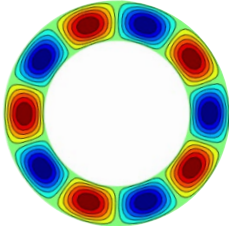
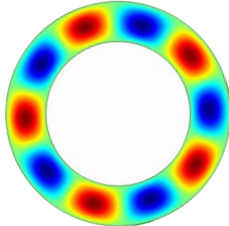
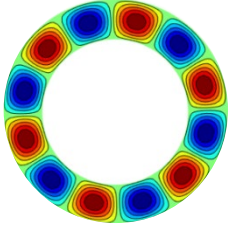
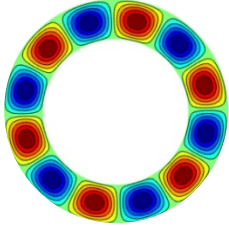
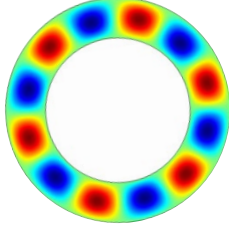
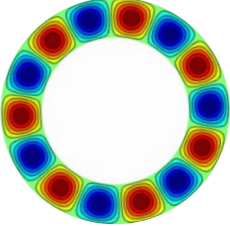
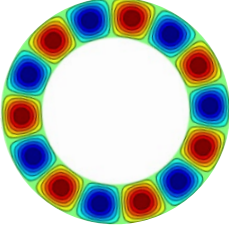
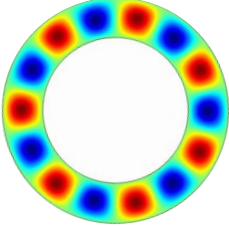
Mode		Theory	MFS(Error)	Comsol(Error)
1	Mode Shape (4,2)			
	Freq (Hz)	740.21	740.21(0%)	740.28(0.009%)
2	Mode Shape (5,2)			
	Freq (Hz)	788.06	788.1(0.005%)	788.18(0.015%)
3	Mode Shape (6,2)			
	Freq (Hz)	842.76	842.76(0%)	842.88(0.014%)
4	Mode Shape (7,2)			
	Freq (Hz)	902.9	902.88(-0.002%)	903.05(0.017%)

表 5-7 矩形環薄膜固定邊界理論、數值方法對照表(a)

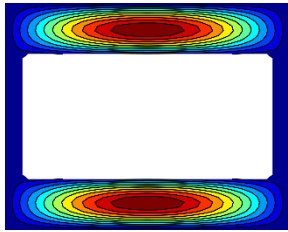
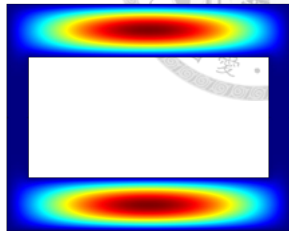
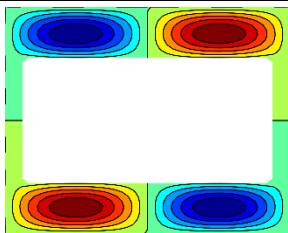
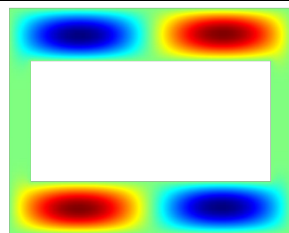
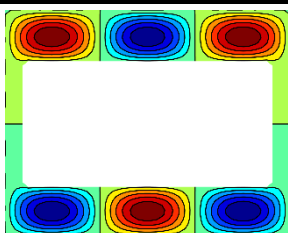
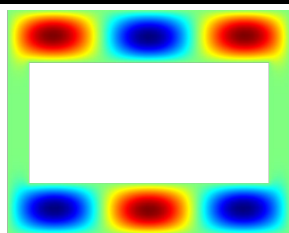
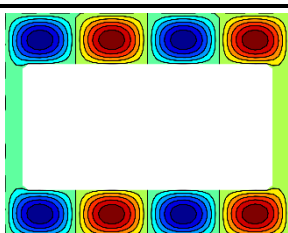
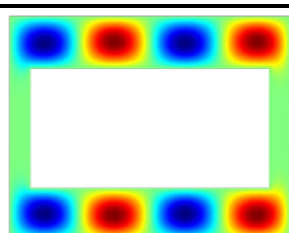
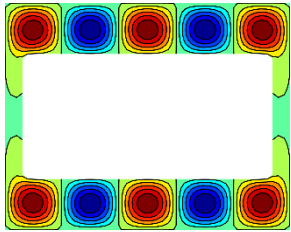
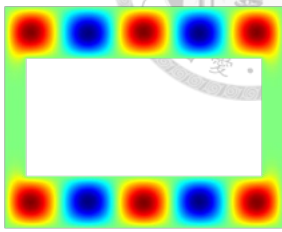
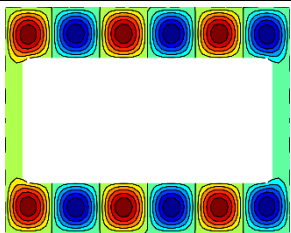
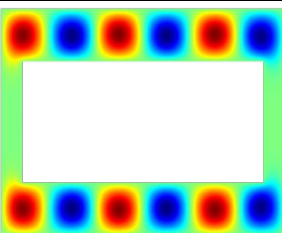
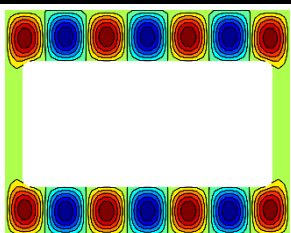
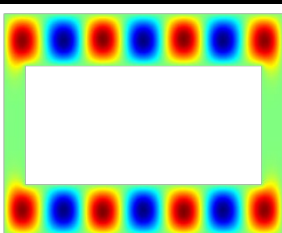
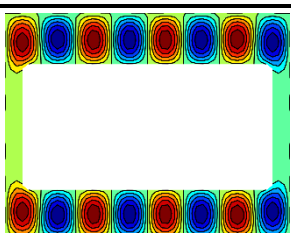
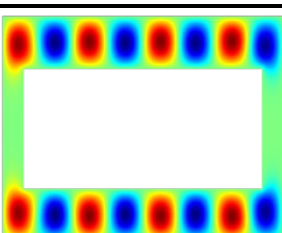
Mode		MFS	Comsol(Error)
1	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	938.37	939.52(0.12%)
2	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	985.33	985.65(0.03%)
3	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	1057.72	1058.13(0.04%)
4	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	1151.75	1152.08(0.03%)

表 5-8 矩形環薄膜固定邊界理論、數值方法對照表(b)

Mode		MFS	Comsol(Error)
5	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	1262.48	1262.78(0.02%)
6	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	1386	1386.3(0.02%)
7	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	1519.2	1519.5(0.02%)
8	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	1659.66	1659.93(0.02%)

第六章 串聯型雙層壓電矩形薄板複合薄膜振動分析

本章節討論串聯型雙層壓電矩形薄板複合薄膜振動分析，將第四章、第五章分別討論的壓電平板和高分子薄膜複合，由參考文獻[56]可以知道在複合元件的邊界條件分成兩種模態模型進行討論，其中一種特徵模態是假設中間壓電平板視為剛體，此模式可獲得活塞振動模態，而其餘的模態會類似矩形環薄膜固定邊界的非耦合振動形式；另一種則是由於壓電材料和薄膜材料的剛性相差極大，因此壓電會以類自由邊界的模式振動，且只存在壓電影響薄膜的情況，而薄膜影響壓電的動態特性則可以忽略不計。本章節會分為兩種理論假設進行推導。

6.1 壓電薄板複合薄膜非耦合振動分析

此章節為了分析活塞模態，在此將壓電視為不變形的剛體薄板，參考[52]採用薄膜中心附加剛性體進行分析，剛體的質量對薄膜的影響是相當大的，根據薄膜小位移的假設，重力作用會等於連接處 $r=a$ 面外方向的張力分量作用，薄膜的外圍邊界 $r=b$ 為固定邊界，如圖 6-1 所示，同樣先對壓電圓盤複合薄膜驗證方法的合理性與可行性，再進行壓電矩形複合薄膜的分析。

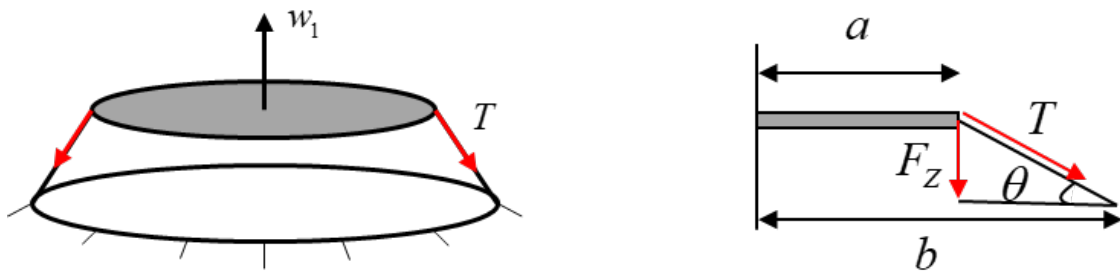


圖 6-1 剛體壓電複合薄膜示意圖

6.1.1 壓電圓盤複合薄膜理論解析

設剛體的位移為 w_1 ，並設 5.3.1 節中環形薄膜的位移(5-28)為 w_2 ，可整理成

$$w_2(r, \theta) = [EJ_n(kr) + FY_n(kr)] \cos n\theta \quad (6-1)$$



固定邊界條件下，環形膜外徑 $r=b$ 的位移為零，即

$$w_2(r, \theta)|_{r=b} = 0 \quad (6-2)$$

將邊界條件(6-2)代入位移通解(6-1)，可得

$$w_2(r, \theta) = A[Y_n(kb)J_n(kr) - J_n(kb)Y_n(kr)]\cos(n\theta) \quad (6-3)$$

觀察圖 6-1 可知壓電剛體作用的重力，會由接合處 $r=a$ 的薄膜張力來平衡，又假

設角度 θ 很小，因此可得 $\sin \theta \approx \theta = \frac{\partial W_2}{\partial n}$ ，並以牛頓第二運動定律可以表示成

$$F_z = 2\pi a T \frac{\partial W_2(r, \theta, t)}{\partial r} \bigg|_{r=a} = M_p \frac{d^2 W_1(t)}{dt^2} \bigg|_{r=a} \quad (6-4)$$

其中 M_p 是壓電圓盤的重量，而壓電與薄膜連接處需要額外的幾何約束條件，在此

給定位移、加速度連續的邊界條件。

$$w_1|_{r=a} = w_2|_{r=a} \quad (6-5)$$

$$\ddot{w}_1|_{r=a} = \ddot{w}_2|_{r=a} \quad (6-6)$$

將連續條件(6-5)、(6-6)代回(6-4)，並將位移 $W_2(r, \theta, t)$ 分離變數改寫為 $w_2(r, \theta)e^{i\omega t}$ ，

整理後可得

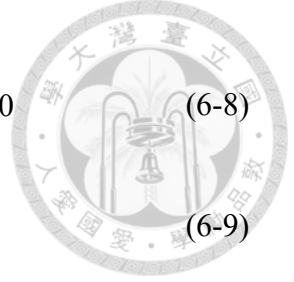
$$\begin{aligned} & 2\pi a T k \left\{ Y_n(kb) \left[-J_{n+1}(ka) + \frac{n}{ka} J_n(ka) \right] - J_n(kb) \left[-Y_{n+1}(ka) + \frac{n}{ka} Y_n(ka) \right] \right\} \\ & = -\omega^2 M_p [Y_n(kb)J_n(ka) - J_n(kb)Y_n(ka)] \end{aligned} \quad (6-7)$$

求解特徵方程式(6-7)，即可得到共振頻率與對應的模態振形。

6.1.2 壓電複合薄膜基本解法

因為無網格基本解法是透過佈點的方式進行數值運算，因此對於無網格法而言幾何形狀並不影響，可以根據佈點情形近似問題的解。利用基本解位移假設

(5-34)、邊界條件(6-2)和連續條件(6-5)、(6-6)可以表示成下列兩式



$$w_2|_{r=b} = \sum_{j_1=1}^{N_1} A_{j_1}^1 H_0^{(2)}(k|r_i - r'_{j_1}|) + \sum_{j_2=1}^{N_2} A_{j_2}^2 H_0^{(2)}(k|r_i - r'_{j_2}|) = 0 \quad (6-8)$$

$$perimeter \times T \frac{\partial w_2}{\partial n} \Big|_{r=a} = -\omega^2 M_p w_2|_{r=a} \quad (6-9)$$

其中 $perimeter$ 表示連接處 $r = a$ 的邊長總長度，對正交方向(normal)微分可以表示為

$$\frac{\partial w_2}{\partial n} = \frac{\partial w_2}{\partial x} n_x + \frac{\partial w_2}{\partial y} n_y \quad (6-10)$$

將(6-9)整理移項至同側使單側為零，並令係數之代號為 N ，振幅位移代號為 A 。同理利用 5.3.2 節的方式將(6-8)、(6-9)改寫成矩陣形式，可以得到特徵矩陣

$$\begin{bmatrix} U^{11} & U^{12} \\ N^{21} & N^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6-11)$$

利用掃頻法求解 $\det \begin{bmatrix} U^{11} & U^{12} \\ N^{21} & N^{22} \end{bmatrix} = 0$ ，求得徵值，也就是共振頻率，特徵向量 A 為對

應的模態振形。而本研究探討環形、矩形環的薄膜，佈點情形與 5.3.2 節相同，如圖 5-8、圖 5-9 所示。環形的佈點配置形狀為圓型，外部設置 24 個點，源點距離為外部邊界(外徑)的 1.4 倍；內部設置 28 個點，源點距離為內部邊界(內徑)的 0.5 倍，法線方向如圖 6-2(左)。矩形環的佈點配置，形狀為矩形，而因為矩形的角落會有不連續的問題，因此需要較多的點數去近似角點，外部設置 64 個點，源點距離為外部邊界(長寬)的 1.25 倍；內部設置 400 個點，源點距離為內部邊界的 0.995 倍，法線方向如圖 6-2(右)。

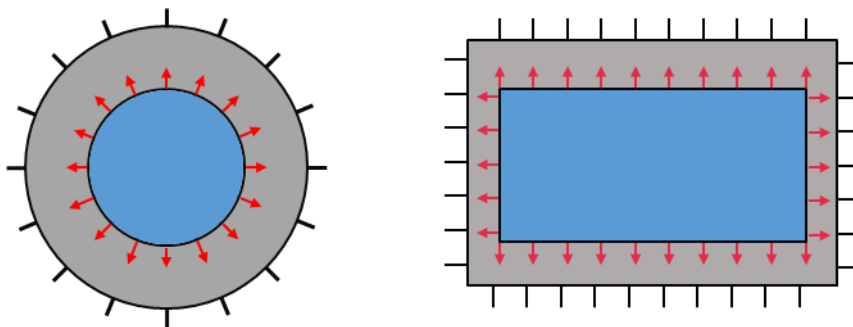


圖 6-2 壓電薄板複合薄膜正交方向示意圖



6.1.3 壓電薄板複合薄膜有限元素數值分析

本小節使用 Comsol Multiphysics 5.5 有限元素分析軟體，選用薄膜和壓電效應的物理量計算複合元件，壓電與薄膜的設定與第 4.3.2 節與第 5.3.3 節相同，在模型的建構上將壓電平板放置於薄膜上來模擬實際黏貼的情況，如圖 6-3 所示，而黏貼的部分是壓電平板與高分子薄膜的共面，因此需要定義固體力學和薄膜的多重物理量，如圖 6-4 所示。由於本節討論的是假設壓電為剛體的模態，因此選擇非耦合的模態進行比較。

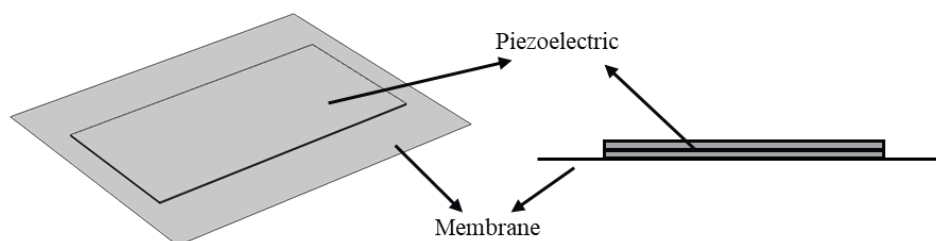


圖 6-3 壓電複合薄膜模型示意圖



圖 6-4 壓電複合薄膜耦合面設定圖



6.1.4 試片規格

壓電圓盤複合薄膜之壓電圓盤選用 PSI-5A4E，詳細材料參數如表 3-1，直徑為 45mm，雙層厚度共為 0.381mm。薄膜選用高分子聚合物 PVC，其詳細參數如表 5-4 所示，外徑為 70mm，厚度為 11 μ m，張力為 15.3N/m。

壓電矩形薄板複合薄膜之壓電矩形薄板選用材料型號 PSI-5A4E，詳細材料參數如表 3-1，長為 63.5mm，寬為 31.8mm，雙層厚度共為 0.381mm。薄膜選用高分子聚合物，單層濺鍍金屬層的靜電薄膜，其詳細參數如表 5-1 所示，長為 75mm，寬為 60mm，厚度為 11 μ m，張力為 10N/m。

6.1.5 壓電薄板複合薄膜非耦合振動理論解析與數值分析之比較

本節比較理論解析、無網格基本解法和有限元素數值分析於壓電薄板複合薄膜的非耦合振動特性，假設中心壓電平板為不會變形的剛體邊界，計算前八個共振頻率及其對應的模態振形，除了第一個模態外其餘的模態會類似第 5.3.5 節的環形與矩形環薄膜固定邊界的結果。首先討論壓電圓盤複合薄膜，如表 6-1、表 6-2 所示，其中模態振型以 (m,n) 表示， m 為節線數， n 為節圓數，三種方法不論是特徵頻率，亦或是模態振形都有極高的對應性，整體的誤差也都趨近於零，驗證了邊界的假設與方法的可行性。

接著探討壓電矩形薄板複合薄膜的非耦合振動特性，如表 6-3、表 6-4 所示，比較基本解法和有限元素法的結果，整體共振頻率誤差都非常的小，在模態振形上也有高度的一致性，不過在第一模態，也就是活塞模態的頻率誤差較大，模態振形也有些不同，推測可能是數值上的問題，由於矩形的幾何限制在角落點計算上會有向量微分的問題，不過整體還是有不錯的對應性，共振頻率若以差值比較僅差 3Hz 相差不大。由此可知，無網格基本解法可以應用於解析壓電薄板複合薄膜的非耦合振動特性，能透過振動特性的表現對聲學元件進行設計。

表 6-1 壓電圓盤複合薄膜非耦合理論、數值方法對照表(a)

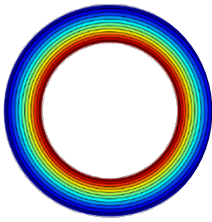
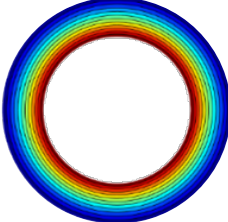
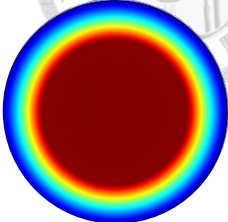
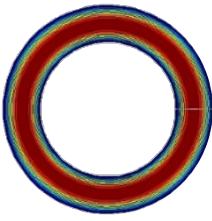
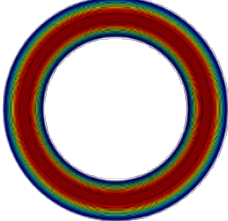
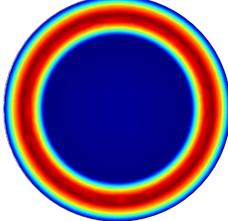
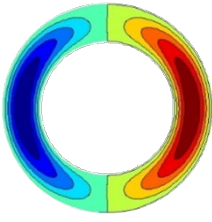
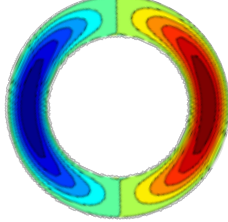
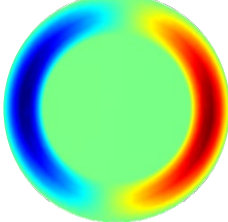
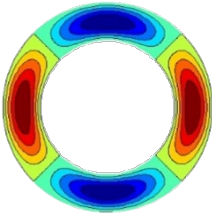
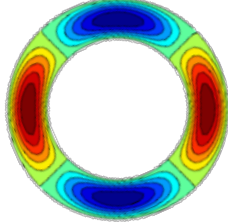
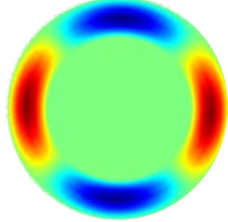
Mode		Theory	MFS(Error)	Comsol(Error)
1	Mode Shape (0,1)			
	Freq (Hz)	34	34(0%)	34(0%)
2	Mode Shape (0,2)			
	Freq (Hz)	1342	1343(0.07%)	1346(0.31%)
3	Mode Shape (1,2)			
	Freq (Hz)	1355	1356(0.07%)	1356(0.07%)
4	Mode Shape (2,2)			
	Freq (Hz)	1393	1394(0.07%)	1395(0.17%)

表 6-2 壓電圓盤複合薄膜非耦合理論、數值方法對照表(b)

Mode		Theory	MFS(Error)	Comsol(Error)
5	Mode Shape (3,2)			
	Freq (Hz)	1455	1456(0.07%)	1465(0.69%)
6	Mode Shape (4,2)			
	Freq (Hz)	1538	1538(0%)	1537(-0.1%)
7	Mode Shape (5,2)			
	Freq (Hz)	1637	1637(0%)	1637(0%)
8	Mode Shape (0,3)			
	Freq (Hz)	2689	2689(0%)	2695(0.2%)

表 6-3 壓電矩形薄板複合薄膜非耦合理論、數值方法對照表(a)

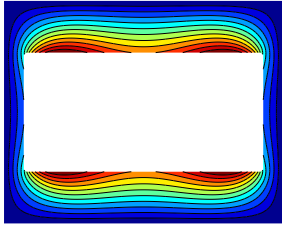
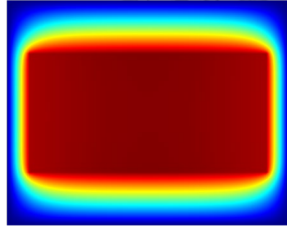
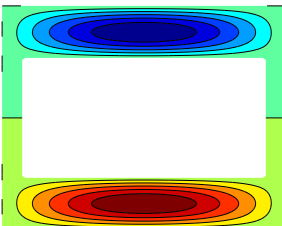
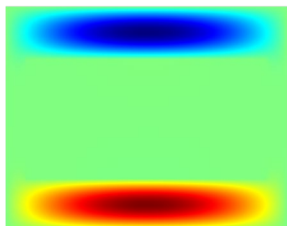
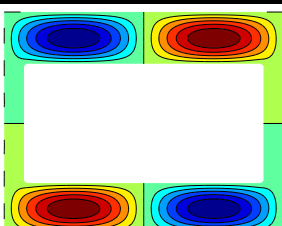
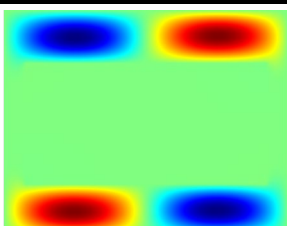
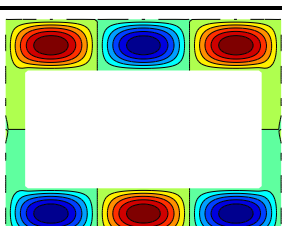
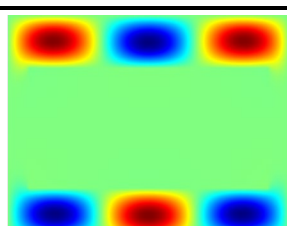
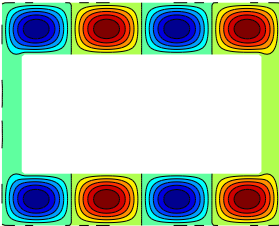
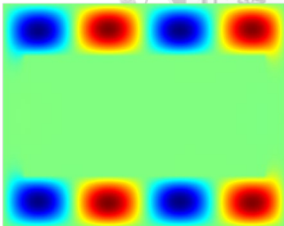
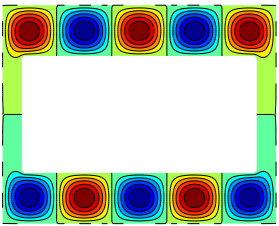
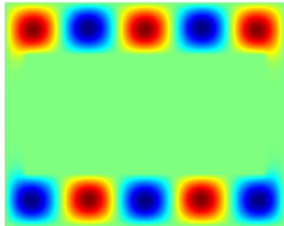
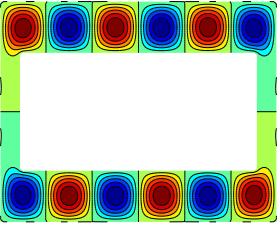
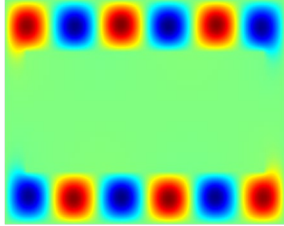
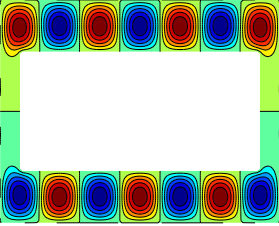
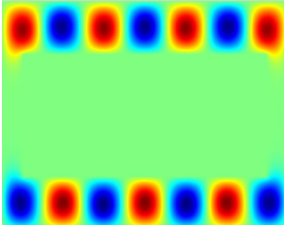
Mode		MFS	Comsol(Error)
1	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	33.56	30.78(-8.28%)
2	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	939	940.87(0.2%)
3	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	985.8	986.54(0.08%)
4	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	1058.14	1057.6(-0.05%)

表 6-4 壓電矩形薄板複合薄膜非耦合理論、數值方法對照表(b)

Mode		MFS	Comsol(Error)
5	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	1152	1152(0%)
6	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	1262.7	1262.4(-0.02%)
7	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	1386	1385.3(-0.05%)
8	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	1519	1519.4(0.03%)



6.2 壓電薄板複合薄膜耦合振動分析

前章節討論非耦合的模態，本章節進一步探討耦合的振動行為，由於壓電和薄膜的剛性相差極大，且薄膜沒有抗彎抗矩的能力，因此在耦合模態的表現，只存在壓電振動進而影響薄膜的情況，而薄膜影響固體的情形則可以忽略不計，可視為薄膜的共振無法帶動壓電平板產生變形，屬於單向耦合。本章節利用壓電覆於薄膜時是以類自由邊界作動，且不受薄膜振動影響的條件下進行推導，結合壓電薄板理論的疊加法，以及雙連通薄膜的基本解法，推導出壓電薄板覆合薄膜的耦合振動特性，並與有限元素法相互比較。

6.2.1 壓電薄板複合薄膜疊加法結合基本解法

參考文獻陳冠宇[56]中提到，耦合部分主要是由壓電薄板在自由邊界所主導，並利用位移連續的條件可以求得壓電薄板複合薄膜的解。本研究將疊加法求得的薄板共振結果代入無網格法之基本解中獲得薄膜的振動特性，流程如圖 6-5。首先利用疊加法計算求得壓電薄板的共振頻率與模態振形，由於連接處必須滿足位移連續的條件，因此將壓電薄板邊緣的位移解作為薄膜內部邊界的位移條件，而薄膜外部為固定邊界，即位移為零，最後得到完整的矩陣，透過矩陣運算可獲得整個複合元件的共振頻率及模態振形。

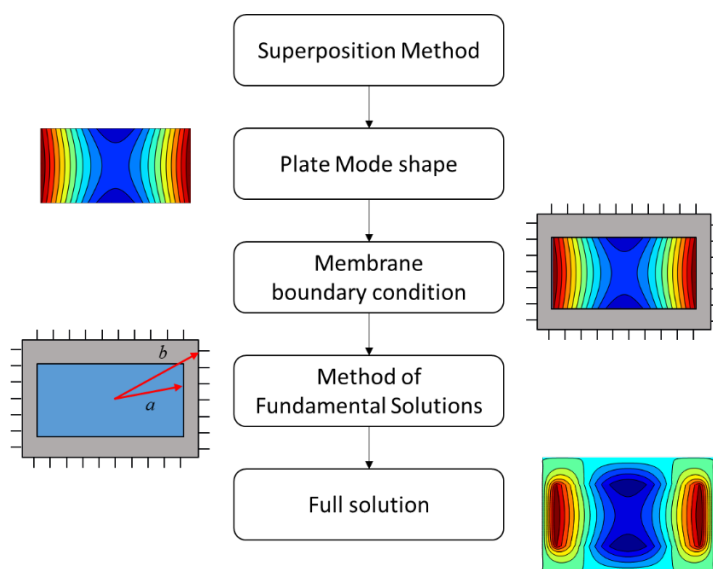


圖 6-5 壓電薄板複合薄膜耦合流程圖



由上述的流程和文獻回顧，可以列出以下邊界條件：(1) 壓電薄板的彎矩為零、(2) 壓電薄板的剪力為零、(3) 壓電與薄膜連接處為位移連續條件、(4) 薄膜外圍為固定邊界，可表示為

$$\begin{aligned} M|_{r=a} &= 0 \\ V|_{r=a} &= 0 \\ w_p|_{r=a} &= w_m|_{r=a} \\ w_m|_{r=b} &= 0 \end{aligned} \quad (6-12)$$

其中 M 代表彎矩、 V 代表剪力、 w_p 表示壓電薄板的位移、 w_m 表示薄膜的位移。

透過疊加法求得壓電矩形板於自由邊界面外振動的解，利用 $r=a$ 時的位移連續條件和 $r=b$ 位移為零的邊界條件，代入 w_2 薄膜位移(5-34)，可得

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} U_{11} & \cdots & U_{1N_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{N_11} & \cdots & U_{N_1N_1} \end{matrix} & \begin{matrix} U_{11} & \cdots & U_{1N_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{N_21} & \cdots & U_{N_2N_2} \end{matrix} \\ \begin{matrix} U_{11} & \cdots & U_{1N_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{N_11} & \cdots & U_{N_1N_1} \end{matrix} & \begin{matrix} U_{11} & \cdots & U_{1N_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{N_21} & \cdots & U_{N_2N_2} \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^{(1)} \\ \vdots \\ A_{N_1}^{(1)} \\ A_1^{(2)} \\ \vdots \\ A_{N_2}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{p_1} \\ \vdots \\ w_{p_{N_1}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6-13)$$

其中左上(黃色)、右上(淺藍色)區塊所組成的方程式為位移連續，左下(紅色)、右下(深藍色)區塊所組成的矩陣為位移為零。

將(6-13)化簡成簡單的矩陣形式

$$[U][A]=[w] \quad (6-14)$$

將 $[U]$ 移向後就可以求得向量 $[A]$

$$[A]=[U]^{-1}[w] \quad (6-15)$$

透過向量 $[A]$ 可以繪製出薄膜部分的模態振形，綜合疊加法計算出的壓電平板之位移特徵向量，組合後就可以繪製出完整的壓電複合薄膜模態振形。



6.2.2 壓電薄板複合薄膜有限元素數值分析

本節與第 6.1.3 節設置相同，使用 Comsol Multiphysics 5.5 有限元素分析軟體，選用薄膜和壓電效應的物理量計算複合元件的振動特性，壓電平板與薄膜的設定與第 4.3.2 節與第 5.3.3 節相同，在模型的建構上將壓電平板放置於薄膜上方，來模擬實際黏貼的情況，如圖 6-3 所示，而黏貼的部分是壓電與薄膜相互連接的共面，因此需要定義固體力學和薄膜的多重物理量，如圖 6-4 所示。由於本節討論的是壓電複合薄膜的單向耦合模態，因此選擇壓電平板產生變形的模態進行比較。

6.2.3 試片規格

壓電矩形薄板複合薄膜的壓電矩形薄板選用 PSI-5A4E，詳細材料參數如表 3-1，長為 63.5mm，寬為 31.8mm，雙層厚度共為 0.381mm。薄膜選用高分子聚合物，單層濺鍍金屬層的靜電薄膜，其詳細參數如表 5-1 所示，長為 75mm，寬為 60mm，厚度為 11 μ m，張力為 10N/m。

6.2.4 壓電薄板複合薄膜耦合振動理論解析與數值分析之比較

由於本研究主要討論壓電矩形平板複合薄膜的聲學元件，故本節比較理論解析結合無網格基本解法和有限元素數值分析於壓電矩形薄板複合薄膜的耦合振動特性，僅考慮薄膜受到壓電平板影響的情況，計算前八個共振頻率及其對應的模態振形，如表 6-5、表 6-6，其中黑色框線內為壓電薄板的部分，比較兩計算方法的結果，理論為二維的平面系統，有限元素法的模型為三維元素，雖然結構在理論假設與有限元素法有所差異，壓電薄板與薄膜耦合黏貼的方式也有些微不同，不過共振頻率整體誤差不超過 2.5%，在模態振形上有良好的對應性，由此可知，此結果符合忽略薄膜影響壓電的假設。綜合以上結果得知，無網格疊加法結合基本解法可應用於解析壓電薄板複合薄膜的耦合振動特性，並能透過振動特性的表現對聲學元件進行基頻的結構尺寸設計。

表 6-5 壓電矩形薄板複合薄膜耦合理論、數值方法對照表(a)

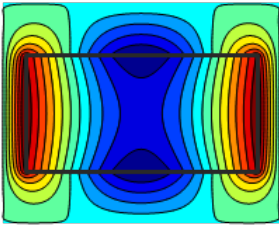
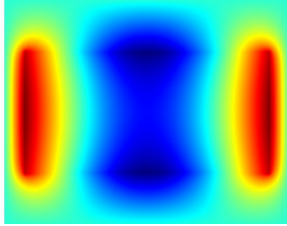
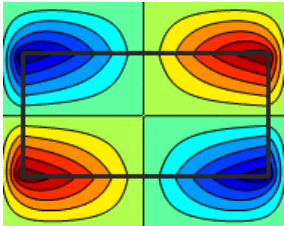
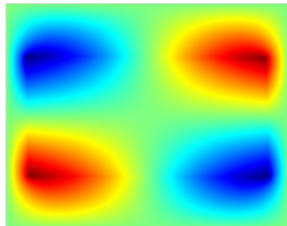
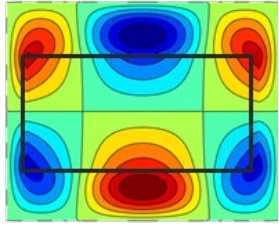
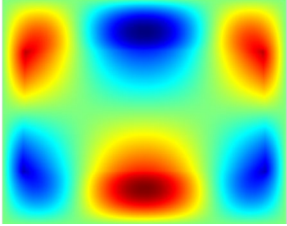
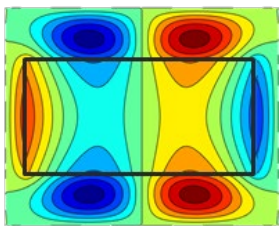
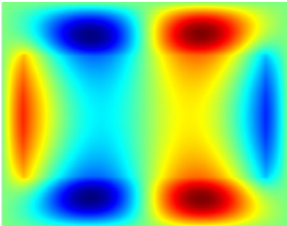
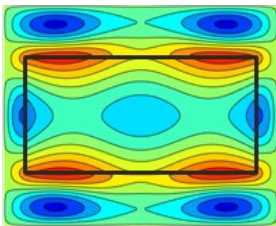
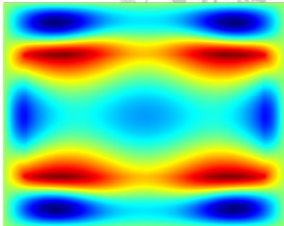
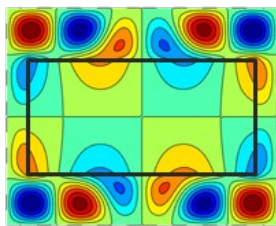
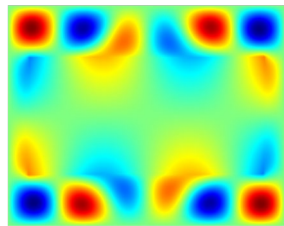
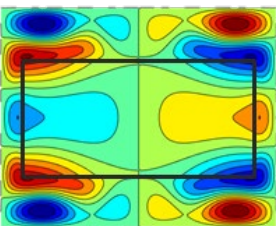
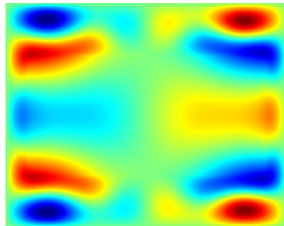
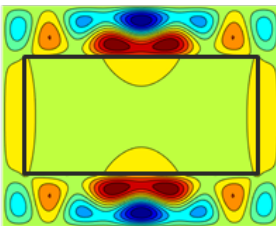
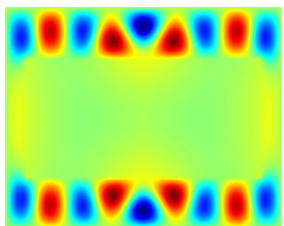
Mode		MFS	Comsol(Error)
1	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	311.45	319.07(2.45%)
2	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	352.97	357.76(1.36%)
3	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	795.85	794.29(-0.2%)
4	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	874.3	872.59(-0.2%)

表 6-6 壓電矩形薄板複合薄膜非耦合理論、數值方法對照表(b)

Mode		MFS	Comsol(Error)
5	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	1350.27	1351.4(0.08%)
6	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	1421.2	1417.9(-0.23%)
7	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	1575.4	1571.6(-0.24%)
8	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	1815.89	1807.9(-0.44%)

第七章 聲學元件聲學特性分析、實驗量測與最佳化

本章節探討圓形、環形和矩形壓電複合薄膜聲學元件的聲學特性，分為兩種環境討論，第一種為無限大障板下的自由音場環境，使用無響室量測（AM）、集中參數測量法（LPM）、分佈參數測量法（DPM）、電子斑點干涉術（ESPI）和有限元素法（FEM）模擬四種方式進行分析評估，首先利用基本聲學理論推導在無限大障板下位移與聲壓的關係，搭配雷射都卜勒測振儀（LDV）得到位移量，可以應用於集中參數測量法和分佈參數測量法，並與實際無響室量測和有限元素法相互比較。

第二種為封閉音場用於模擬人耳配戴耳罩式耳機實際聽到的感受，分析方式有人工耳實驗（Artificial Ear）和有限元素法（FEM）模擬，有限元素法設置分為兩種模型，直接建置耳殼、耳道的模型和將人耳等效成電聲學的形式，探討兩種方式與實際人工耳量測結果的對應性。

而由自由音場環境下得到的聲響曲線可以進一步獲得元件的聲音表現特性，因此利用自由音場的有限元素模擬對壓電矩形薄板複合薄膜的聲學元件進行最佳化分析，搭配 3.4 節採用田口法最佳化的方式，可以得到最佳特性尺寸及其他參數，開發出具有良好聲音表現的壓電複合薄膜聲學元件。

7.1 無限大障板下的自由音場之聲學特性分析

對於測量揚聲器的聲音表現普遍都會在自由音場的環境進行評估，透過沒有反射的空間，貼近理想無干擾的狀況。參考江信遠[55]的研究方法，評估的方式大約可分為四種：集中參數測量法、分佈參數測量法、全像式電子斑點干涉術、無響室聲學測量，如圖 7-1 所示。因此本節會先從基本聲學理論出發，推導振動位移與聲壓的關係式，搭配雷射都卜勒測振儀得到實際位移值，主要用於集中參數測量法和分佈參數測量法；電子斑點干涉術用於觀察頻率振形及振動特性；無響室聲學測量是直接利用麥克風量測實際聲壓值得到聲音響應曲線，最後探討四種量測方式與有限元素法模擬的結果。

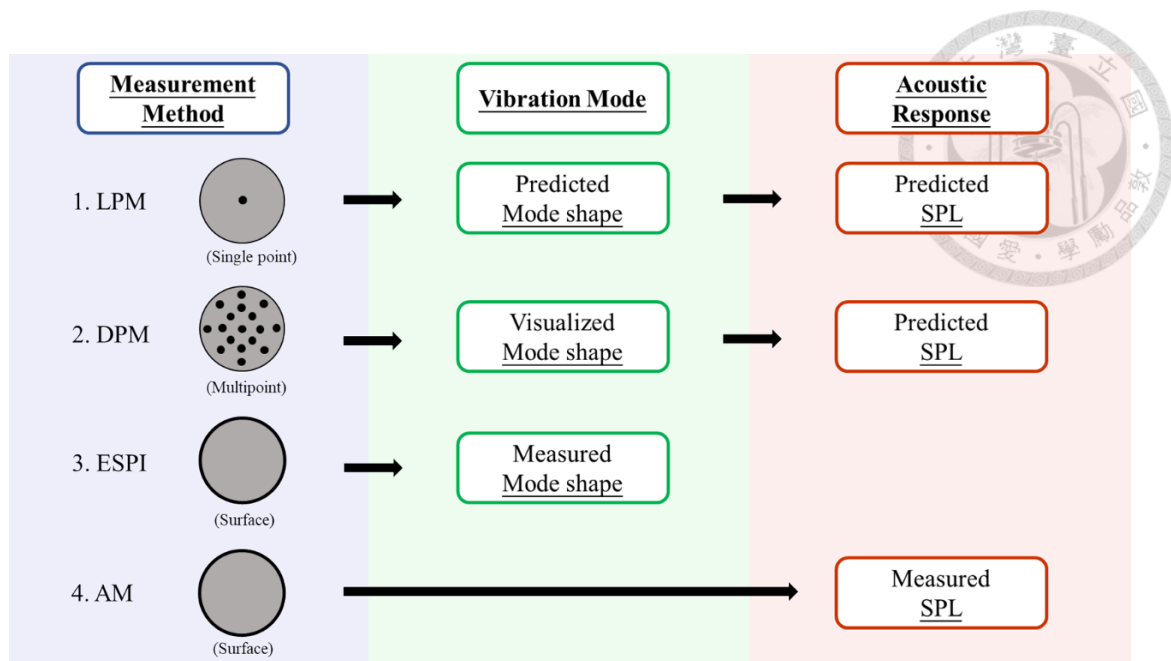


圖 7-1 自由音場振動、聲學量測方法示意圖[55]

7.1.1 無限大障板下的自由音場之聲學理論

在聲學的評估上，通常會假設一個振膜固定在平穩且剛性無限大的障板上，振膜表面每一個元素，以 v 的速度做簡諧運動，運動方向垂直於障板，如圖 7-2，首先討論脈動球源的輻射，脈動球源是進行著均勻收縮膨脹的球面聲源，並沿著徑向做同振幅、同相位的振動，如圖 7-3 所示，可以將其應用為點聲源的組合來處理任何複雜的面聲源。

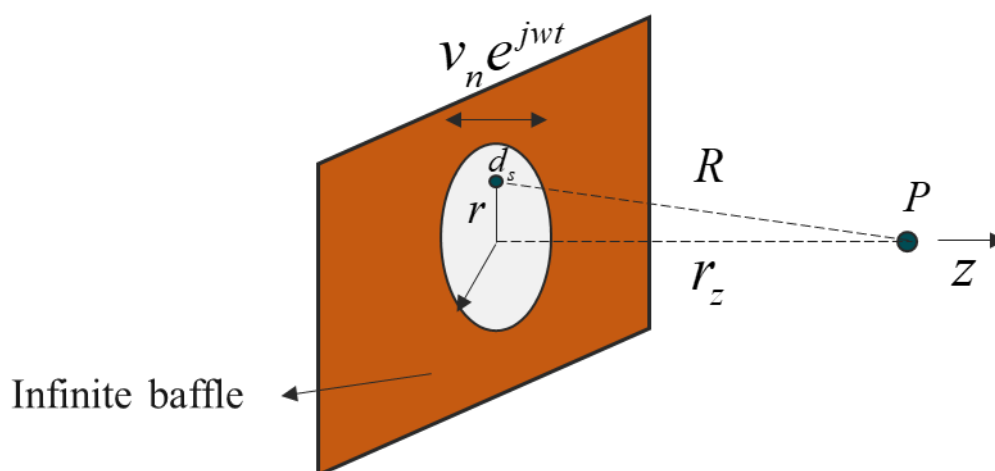


圖 7-2 振膜固定於無限大障板示意圖

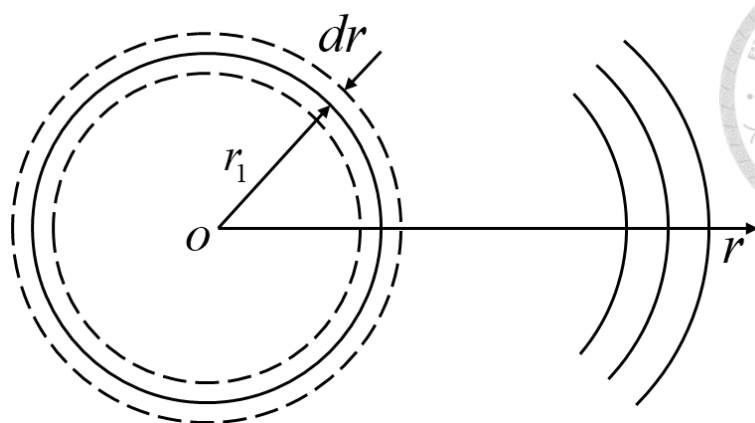


圖 7-3 脈動球源輻射示意圖

由 3.3 聲學基本理論出發利用分離變數可以得到聲學的波動方程式

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dp}{dr} \right) + k^2 p = 0 \quad (7-1)$$

求解(7-1)可以得到 $+r$ 方向的解

$$p(r) = K \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (7-2)$$

其中 K 是待定係數。同樣利用分離變數和可以整理出四條聲學的基本關係式

$$j\omega p = -\gamma P_0 \nabla \cdot \vec{u} \quad (7-3)$$

$$\nabla p = -j\omega \rho_0 \vec{u} \quad (7-4)$$

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad (7-5)$$

$$\nabla^2 \vec{u} + k^2 \vec{u} = 0 \quad (7-6)$$

其中 $\vec{u}$ 表示粒子速度。將(7-2)代入關係式(7-4)可以得到

$$u(r) = \frac{1}{j\omega \rho_0} \left(\frac{1}{r} + jk \right) K \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (7-7)$$

由聲學特性阻抗 Z_s 等於壓力 $p(r)$ / 速度 $u(r)$ 可以求得

$$Z_s = \frac{p(r)}{u(r)} = \frac{j\omega \rho_0}{\frac{1}{r} + jk} = \frac{\rho_0 c}{1 + \frac{c}{j2\pi fr}} \quad (7-8)$$

在此定義脈動球源推動的空氣體積隨時間的變化為體積速度 U ，可以整理成下式



$$U = \frac{dV}{dt} = S_D \frac{dz}{dt} = S_D u \quad (7-9)$$

其中 S_D 為推出空氣體積的截面積，即 $V = S_D z$ 。將(7-7)代入(7-9)，可得脈動球源在

$r = r_1$ 時的體積速度為

$$U = 4\pi r_1^2 u(r_1) = \frac{4\pi K}{j\omega\rho_0} \left[1 + j \frac{\omega r_1}{c} \right] e^{-jkr_1} \quad (7-10)$$

將(7-10)整理後代入(7-2)可得壓力與體積速度關係式

$$p(r) = \frac{j\omega\rho_0 U}{1 + j\omega r_1 / c} \frac{e^{-jk(r-r_1)}}{4\pi r} \quad (7-11)$$

接著假設脈動球的半徑非常小($\omega r_1 / c \ll 1$)，也就是將脈動球縮小至單極值的點聲源問題，因此可以簡化(7-11)為

$$p(r) \approx j\omega\rho_0 U \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \quad (7-12)$$

由於是考慮無限大障板的問題，因此視為音源放置牆邊，如圖 7-4 所示，可以假設有一虛擬的點聲源在原來的另一測，聲壓為原來的兩倍，可表示為

$$p(r) = j\omega\rho_0 U \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} \quad (7-13)$$

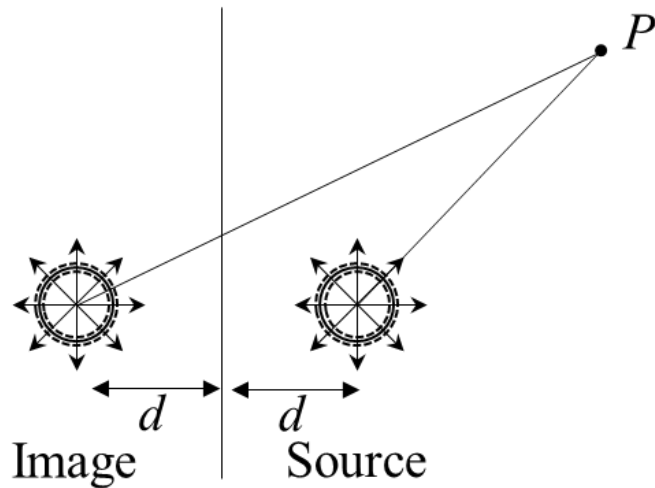


圖 7-4 點聲源於牆邊示意圖

利用速度與位移的關係式 $u = j\omega w$ 和(7-9)，可將(7-13)改寫得到聲壓位移關係式

$$p(r) = \sum -\omega^2 \rho_0 S_D w \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} \quad (7-14)$$

代入圖 7-2 的標號可以寫成

$$p = \sum -\omega^2 \rho_0 S_D w \frac{e^{-jkR}}{2\pi R} \quad (7-15)$$

得到聲壓位移關係式後，便能透過聲學元件的位移快速預估其聲音表現。

通常聲壓的量測是使用有效聲壓(effective sound pressure)，計算方式如下

$$p_e = \frac{|p(r)|}{\sqrt{2}} \quad (7-16)$$

由於聲音的動態範圍非常大，為方便判讀大小，習慣使用「分貝」來表示，單位為 dB，為對數刻度(log scale)，因此「聲壓位準(Sound Pressure Level，簡稱 SPL)」可表示為

$$SPL = 20 \log\left(\frac{p_e}{p_{ref}}\right) \quad (7-17)$$

其中 $p_{ref} = 2 \times 10^{-5}$ Pa 是空氣的參考聲壓(Reference Sound Pressure)。利用上述公式就可以利用待測物的位移估算出對應的聲壓位準，透過掃頻得到聲壓頻率響應圖。

7.1.2 集中參數測量法 (LPM)

集中參數測量法 (Lumped Parameter Measurement, LPM)，量測待測物的單點位移量，透過已建立振動的理論公式，推得整個物體的全域位移值，並利用上一節聲學理論的位移與壓力的關係式，將振動與空氣耦合計算得到聲壓。本研究參考張哲睿[57]圓形及環形聲學元件的量測、計算方法與結果，測量物體表面的位移振幅。本研究使用 2.1 節介紹的雷射都卜勒測振儀 (LDV)，以掃頻的方式測量 20~20k(Hz)的頻率範圍，得到聲壓曲線(Sound Pressure Level, SPL)。



7.1.3 分佈參數測量法 (DPM)

分佈參數測量法 (Distributed Parameter Measurement, DPM)，是量測待測物多點位移的分佈式測量方法，如圖 7-5 所示，在待測物表面佈置多個觀測點，根據量測頻率離散所需的點數，解析越高頻率的模態振形需要越多的量測點。同樣使用雷射都卜勒測振儀逐點紀錄量測點位置、振幅大小與相位，頻率範圍為 20~20k(Hz)，就可以直接繪製出物體於不同頻率的振動模態，透過聲壓位移關係式，將機械的位移場耦合至聲學的壓力場，得到對應的聲壓曲線(Sound Pressure Level, SPL)。

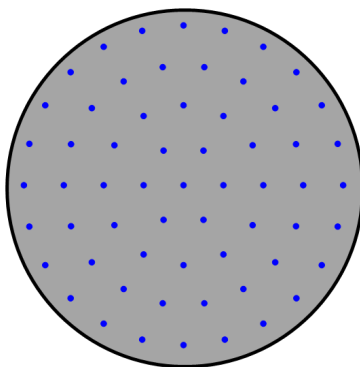


圖 7-5 DPM 量測佈點示意圖

7.1.4 無限大障板下的自由音場之有限元素法分析

本研究採用商用套裝軟體 Comsol Multiphysics 5.5 模擬無限大障板下的自由音場，使用壓電效應、薄膜及聲壓的物理量，選擇頻域研究用於計算多個頻率的簡諧激發，以掃頻的方式計算指定頻率的聲學響應，本節將詳細介紹聲場模擬的模型建立、邊界條件設置和網格的設置。

幾何模型

模擬的幾何模型如圖 7-6 所示，由於量測距離為 0.1m，因此需要一個半徑 $r_1 = 0.1\text{m}$ 的半圓形聲場空間，空氣的材料參數如表 7-1，為了模擬無限域的自由音場，在半圓形聲場外建立一層 $r_2 = 0.12\text{m}$ 的完美匹配層 (Perfectly Matched Layers, PML)，完美匹配層又稱為海綿層，用來表示無限延伸的區域以描述能量的輻射，

而聲波就滿足這種情況，當波傳到完美匹配層便會快速收斂到零，因此可以視為近乎理想的吸收體或輻射體域。軟體中選擇多入射角的波傳導的多項式伸縮類型，設定方式如圖 7-7。並將聲學元件置於聲場中央底部位置，即可完成聲場模型的建置。

表 7-1 空氣材料參數

Property-Air			
Density	ρ	1.18	kg/m ³
Velocity	c	343	m/s

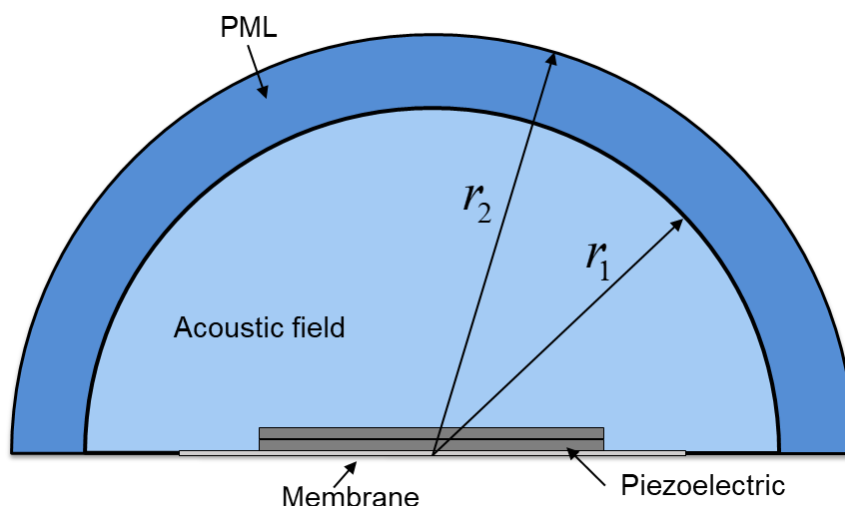


圖 7-6 聲場模擬幾何模型示意圖



圖 7-7 完美匹配層設定圖



邊界條件

聲學元件的邊界條件設置如圖 7-8，薄膜外圍為固定約束，分析採用頻域分析，需要給定激振源，因此給定壓電平板連接電壓為 3V_{pp}，根據不同聲學元件壓電連接、電路連接的方式分為並聯型並聯接與串聯型串聯接，並分別設定壓電材料與薄膜材料的聲學-結構邊界的多重物理量，如圖 7-9。

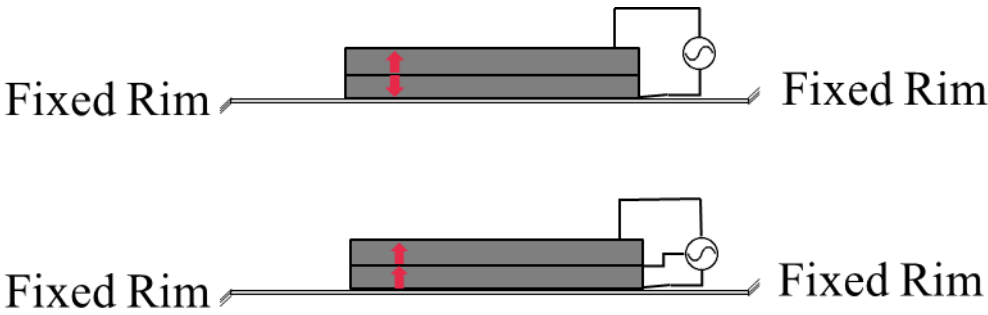


圖 7-8 聲學元件的邊界條件示意圖



圖 7-9 聲學-結構邊界設定圖

網格

如圖 7-10 所示，空間上解析每波長至少需要 10 至 12 個自由度，也就是說在二階的 Lagrange 單元中需要 5 至 6 個單元來描述，因此在聲場的網格建構上需要設定最大元素不得大於 1/5 的波長，倘若需要外部場計算則需在聲場最外圍使用邊界層給定 1 層厚度。多項式伸縮的完美匹配層厚度方向至少要 8 層網格，所以使用掃描中的分佈來設置網格厚度。建立完成的完整網格剖面如圖 7-11。

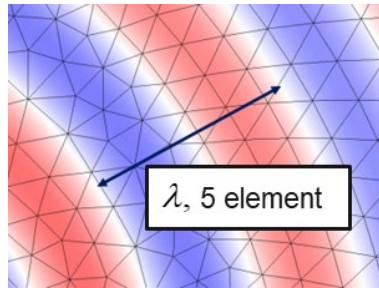


圖 7-10 聲波網格示意圖

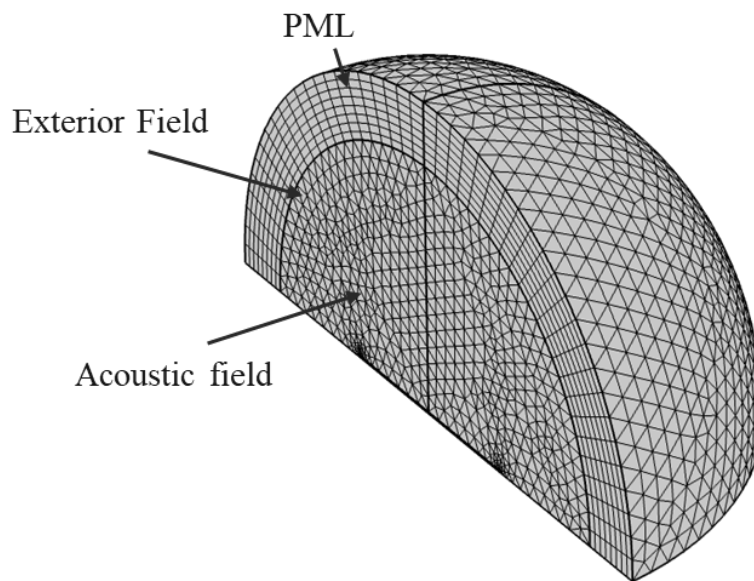


圖 7-11 聲場模擬網格剖面圖

透過上述無限大障板下的自由音場之有限元素的基本設定後，開啟包含幾何非線性以計算薄膜的部份，設定頻率範圍為 20~20k (Hz) 的 1/24 八度音進行掃頻的頻域計算，最後就可以求得聲場的音壓分佈情形，如圖 7-12 所示，觀測點設定與無響室麥克風擺放位置相同，距離聲學元件中心軸向 0.1m。

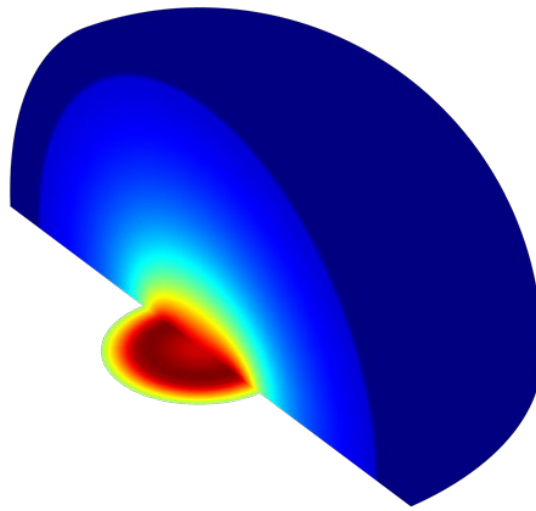


圖 7-12 自由音場聲壓分佈示意圖

7.1.5 無限大障板下的自由音場實驗量測與數值分析之比較

本節比較四種不同實驗方法和數值分析於自由音場的結果，有集中參數測量法、分佈參數測量法、全像式電子斑點干涉術、無響室聲學測量，和有限元素法模擬分析。集中參數測量法、分佈參數測量法、全像式電子斑點干涉術用於分析振動特性，可以觀測共振頻率、模態振形；集中參數測量法、分佈參數測量法、無響室聲學測量用於分析聲學特性，透過位移計算或直接量測聲學元件之聲壓響應曲線，進一步從頻率及振形的角度出發設計出具有寬頻、平滑 SPL 曲線的聲學元件。

首先討論並聯型雙層壓電圓盤複合環形薄膜之複合聲學元件(A)，使用 LPM、DPM、AM、ESPI 和 FEM 方式進行比較，觀察圖 7-13，圖中黑線部份為無響室量測的結果，比較 AM 與 LPM(圖 7-13(a))，紅色曲線為活塞模態理論公式計算的結果，適用範圍約為 20Hz~440Hz，藍色曲線為節圓模態理論公式計算的結果，適用區間約為 440Hz~2000Hz，AM 與 LPM 兩者的聲壓曲線有很高的對應性，SPL 曲線的趨勢、聲壓值相差不大；比較 AM 與 DPM(圖 7-13(b))，綠色曲線為 DPM 測量的結果，即使曲線可能因為實驗手法、相位、環境等問題而有些許的凹凸小擾動，但整體趨勢和量值皆有相當高的一致性，不論是活塞模態或是節圓模態都有良好

的一致性；比較 AM 與 FEM (圖 7-13(c))，淺藍色曲線為有限元素模擬的數值結果，可以得知 FEM 對於評估聲學元件聲壓能達到定性與定量的效果。由表 7-2 可知，對於活塞模態而言，四種方式的頻率誤差不超過 5Hz，總和圖 7-13 模態振形呈現高度相似，而對於對稱的節圓模態在頻率與振形也有良好的對應性，不過 FEM 少了 650Hz 的模態，推測可能是因為繃膜、黏貼時會有些許的誤差，而導致經由實驗數據所轉換的 AM、LPM、DPM 與 FEM 模擬的理想狀況有所不同。綜合以上結果，集中參數測量法、分佈參數測量法、全像式電子斑點干涉術、無響室聲學測量和有限元素法皆能有效的量測或評估並聯型雙層壓電圓盤複合環形薄膜之複合聲學元件(A)的振動、聲學特性。

接著討論串聯型雙層壓電圓環複合圓形薄膜之複合聲學元件(B)，選用 LPM、AM、ESPI 和 FEM 進行分析，如圖 7-14 所示。圖中黑色曲線為無響室直接量測聲壓的結果，比較 AM 與 LPM (圖 7-14(a))，紅色曲線為 LPM 以活塞模態計算的結果，由於考慮的是活塞模態的影響，因此對於環形的結構會忽略振形的相位，使得估算的結果會略高於無響室量測的結果，反共振的效果也較不明顯，但在波峰共振頻率的位置仍有不錯的對應性，能作為簡易的評估方式；比較 AM 與 FEM(圖 7-14(b))，曲線的趨勢及聲壓的大小都有高度一致性，細節也都有表現出來，而在活塞模態誤差較大，推測是薄膜張力不穩定可能發生、鬆弛現象所造成。而在共振頻率和模態振形各種方式也都有良好的表現和匹配關係，如表 7-3 所示。由於聲學元件(B)薄膜結構的佔比較高，導致 DPM 在量測多點位移訊號時會有薄膜不問定產生的雜訊，造成振幅與相位誤差較大且難以判斷，因此聲學元件(B)無法使用 DPM 作為聲學評估的方法。綜合以上結果，集中參數測量法、全像式電子斑點干涉術、無響室聲學測量和有限元素法皆能有效的量測或評估串聯型雙層壓電圓環複合圓形薄膜之複合聲學元件(B)的振動、聲學特性。

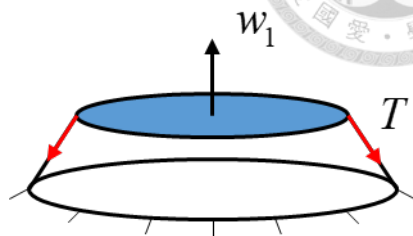
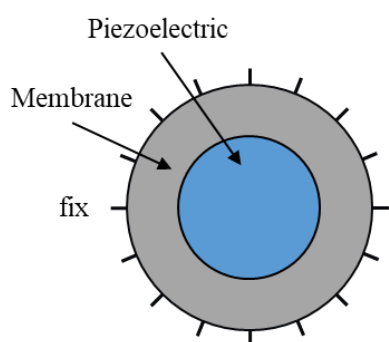
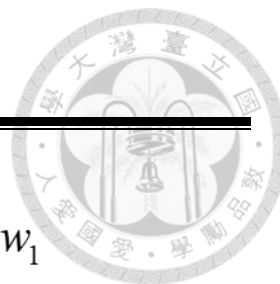
最後探討串聯型雙層壓電矩形薄板複合矩型薄膜之複合聲學元件(C)，使用 DPM、AM、ESPI 和 FEM 四種方式得到模態振形和聲壓曲線，如圖 7-15 所示。



黑色曲線為無響室量測的聲壓曲線，比較 AM 與 DPM(圖 7-15(b))，在第二共振頻率出現前有良好的對應性，而在 400Hz 之後由於薄膜量測到的訊號較不穩定，導致後半段聲壓會有上下浮動現象，不過 DPM 能透過量測多點訊號擬合出清楚的模態振形，並能與 ESPI 及 FEM 在共振頻率上也可相互對照，如表 7-4 所示；比較 AM 與 FEM(圖 7-15(c))，藍色曲線為有限元素法數值模擬的結果，結果顯示，不論在共振頻率或是反共振頻率兩者皆有不錯的一致性，由於張力不易評估，在薄膜主導的活塞模態共振頻率會有較大的誤差，壓電平板結構主導的第 2 與第 3 模態共振頻率誤差較少，最大誤差約為 5%，而模態振形則與 DPM 和 ESPI 都有良好的對應性。綜合以上結果，分佈參數測量法、全像式電子斑點干涉術、無響室聲學測量和有限元素法皆能有效的量測或評估串聯型雙層壓電矩形薄板複合矩型薄膜之複合聲學元件(C)的振動、聲學特性。

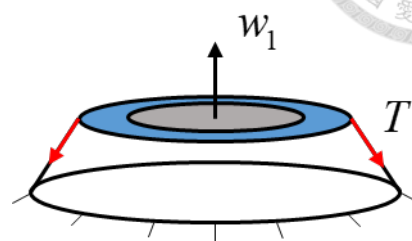
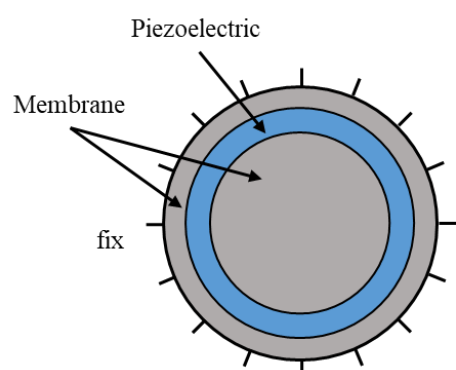
由上述三款壓電複合薄膜的聲學元件量測實驗與數值分析可以總結出以下結論，集中參數測量法、分佈參數測量法、全像式電子斑點干涉術、無響室聲學測量和有限元素法模擬分析，這幾種測量無限大障板下自由音場的方式皆能夠準確的獲得聲學元件的共振特性、聲學特性，相互比較也有高度的對應性。本研究提供多種量測聲學的選項，不同的量測方式能夠因應各種實驗環境，透過可視化的聲壓曲線和模態振形，能作為聲學元件設計參考的依據。

表 7-2 聲學元件(A)共振頻率對照表



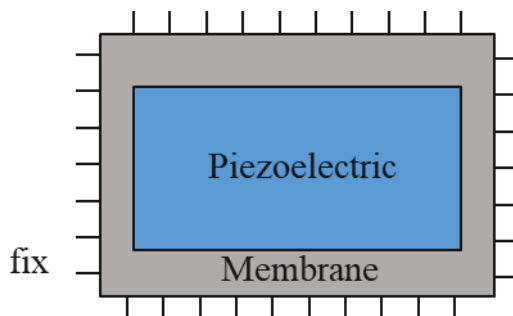
Mode	1	2	3
Anechoic room/ ESPI	39Hz	650Hz	975Hz
LPM (error)	39Hz (0%)	665Hz (2.3%)	900Hz (-7.7%)
DPM (error)	37Hz (-5%)	650Hz (0%)	1030Hz (5.6%)
FEM (error)	34Hz (-12.8%)	-	1030Hz (5.6%)

表 7-3 聲學元件(B)共振頻率對照表



Mode	1	2	3	4
Anechoic room/ ESPI	140Hz	315Hz	750Hz	852Hz
LPM (error)	127Hz (-9.29%)	297Hz (-5.71%)	682Hz (-9.07%)	796Hz (-3.52%)
FEM (error)	90Hz (-35.71%)	290Hz (-7.94%)	-	900Hz (9.09%)

表 7-4 聲學元件(C)共振頻率對照表



Mode	1	2	3
Anechoic room/ ESPI	58Hz	319Hz	350Hz
DPM (error)	40Hz (-31%)	315Hz (-1.3%)	375Hz (7.1%)
FEM (error)	37Hz (-7.5%)	307Hz (-2.5%)	344Hz (-8.3%)

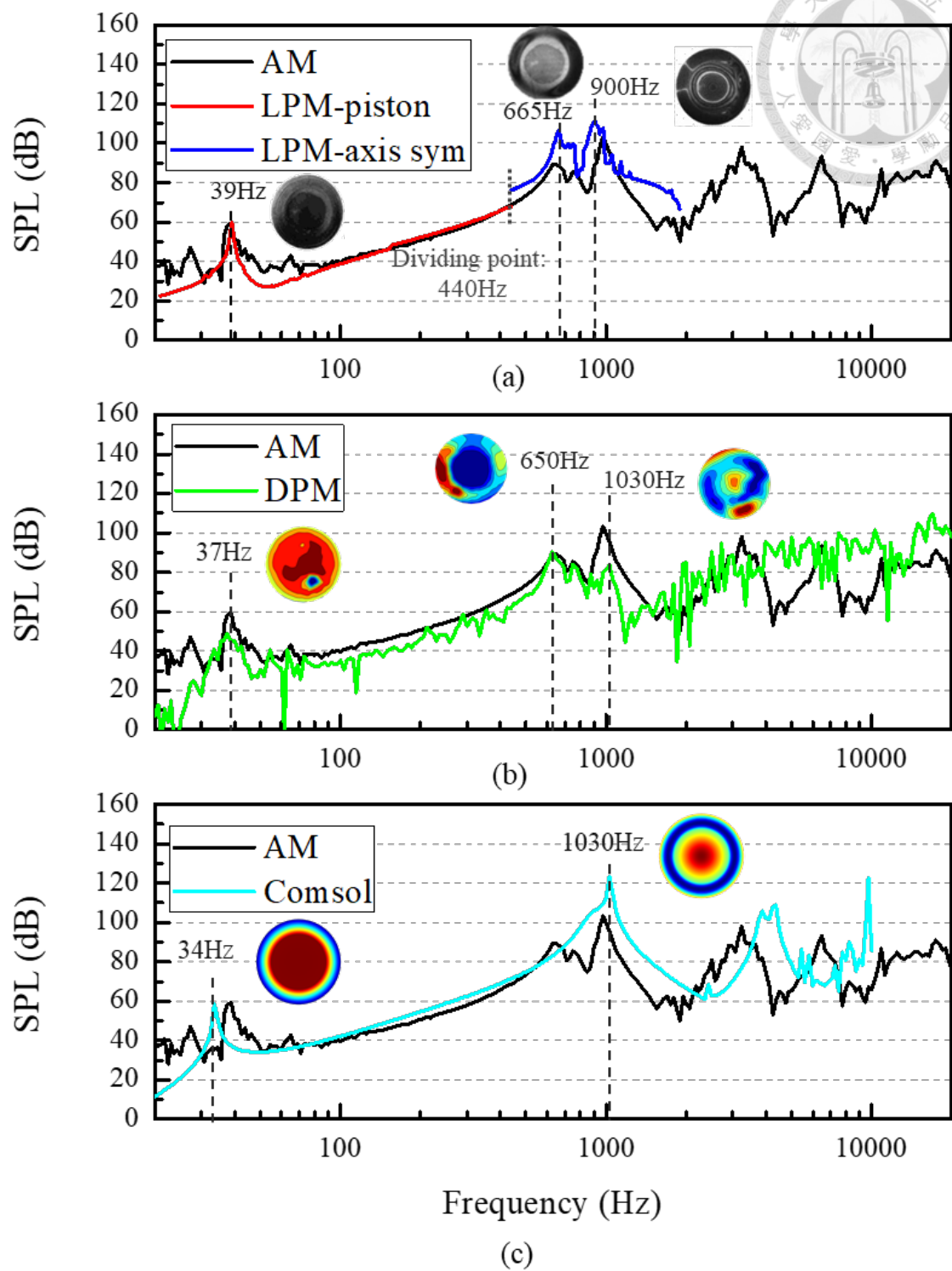


圖 7-13 聲學元件(A)自由音場實驗量測與數值分析圖

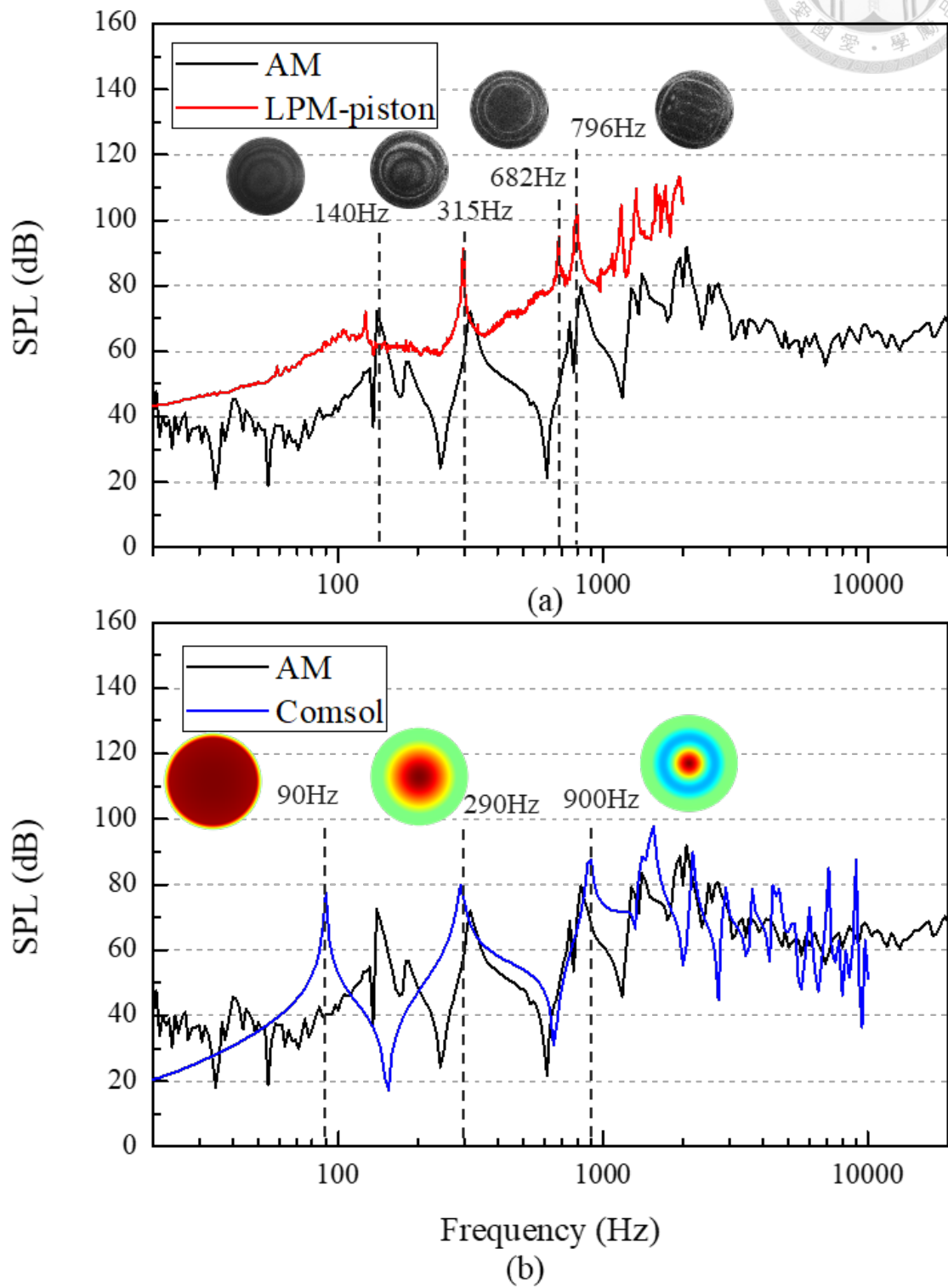


圖 7-14 聲學元件(B)自由音場實驗量測與數值分析圖

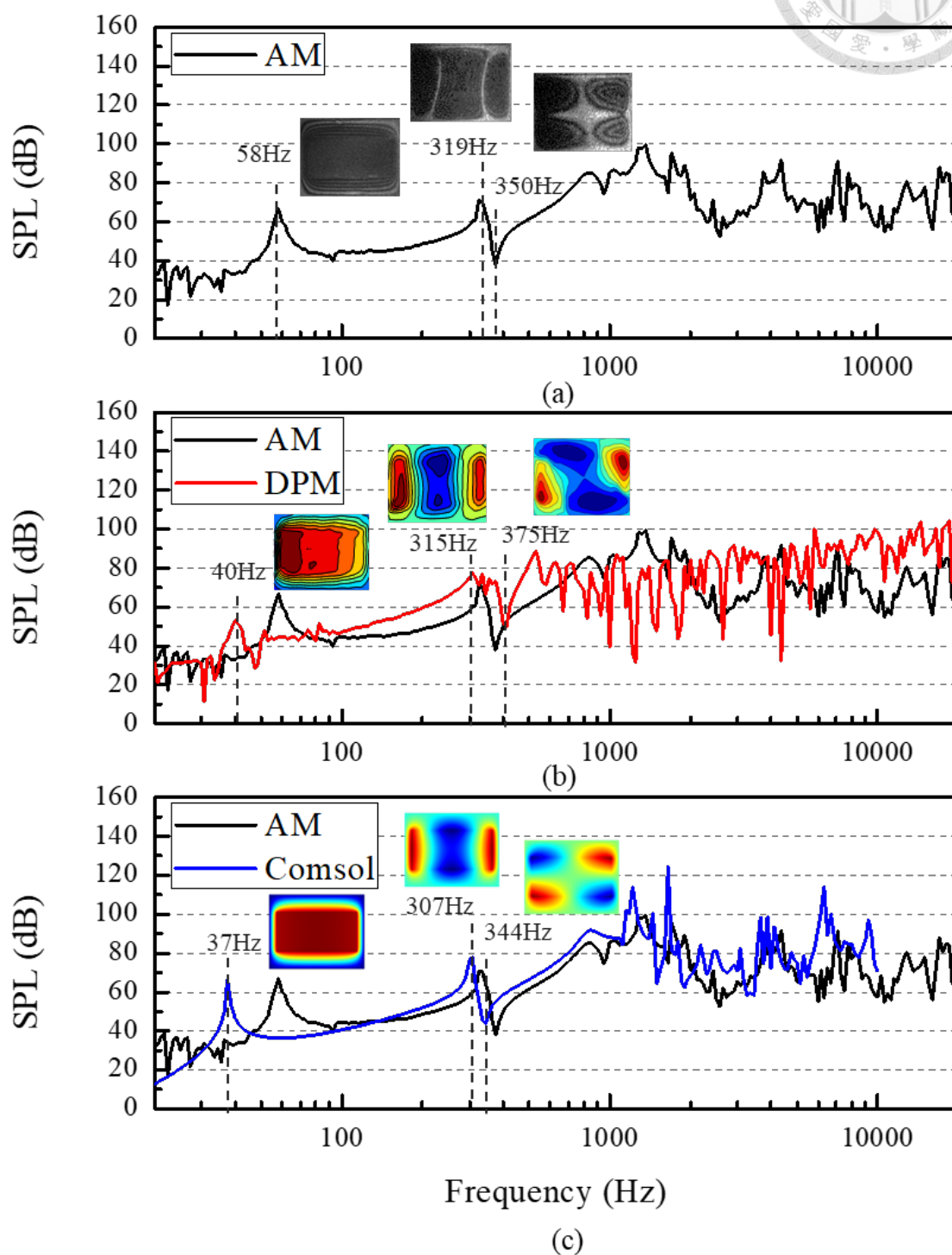


圖 7-15 聲學元件(C)自由音場實驗量測與數值分析圖



7.2 封閉音場之聲學特性分析

本研究探討耳罩式耳機的聲學元件，當耳機配戴時，會使人耳與單體之間形成密閉的空間，稱之為封閉音場或稱壓力場。人工耳實驗（Artificial Ear）可以模擬實際人耳的聽覺感受，人工耳內的麥克風與人耳的鼓膜校正為相似的聲學阻抗，上方設有仿真的耳殼能更符合實際單體聲源的反射、散射和吸收，使量測耳罩式耳機時更貼近真實聆聽時的情況。以有限元素法（FEM）模擬配戴耳罩式耳機時鼓膜的聲壓，模型的設置分為兩種（Model-1 建置耳朵耳殼與耳道的模型，Model-2 耳道以等效電路的形式的模型），使用多孔彈性波的物理量模擬耳機的耳墊，以頻率分析計算耳鼓的聲壓大小，最後相互比較有限元素法與人工耳量測於不同聲學元件的聲壓曲線。

7.2.1 封閉音場之有限元素分析

本研究使用商用套裝軟體 Comsol Multiphysics 5.5 模擬封閉音場，使用壓電效應、薄膜、聲壓和多孔彈性波的物理量，選擇頻域研究用於計算多個頻率的簡諧激發，以掃頻的方式計算指定頻率的聲學響應，本節將詳細介紹兩種模型模擬的模型建立、邊界條件設置和網格的設置，最後簡單介紹用於耳墊的多孔彈性波理論。

(1) Model-1：具耳殼結構的人工耳模型

幾何模型

本模型的建立示意圖如圖 7-16 所示，模擬實際耳機貼合於臉頰、耳朵，因此建置具有耳殼、耳道與臉頰曲線的模型，耳道長約 25mm，直徑約 7mm，如圖 7-17 所示，長 104mm、寬 94mm、厚度 20mm 的橢圓形耳墊包覆於耳朵外，並且與臉頰皮膚緊密貼合，使耳機與耳朵之間形成封閉音場，為方便計算，建立一個貼合臉頰曲線的半圓柱體作為耳機外部的聲場空間，各個材料元件的標示如圖 7-18。為了模擬無限域的自由音場，於聲場的最外圍設定完美匹配層，由於聲場的形狀類似於一個半圓柱體，因此完美匹配層需要額外的設定以確保聲波能夠完整吸收，如圖 7-19 所示。

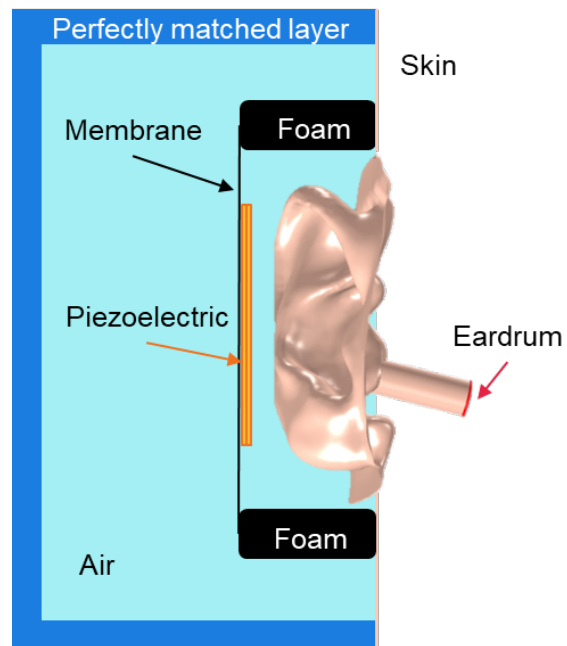


圖 7-16 Model-1 幾何模型示意圖

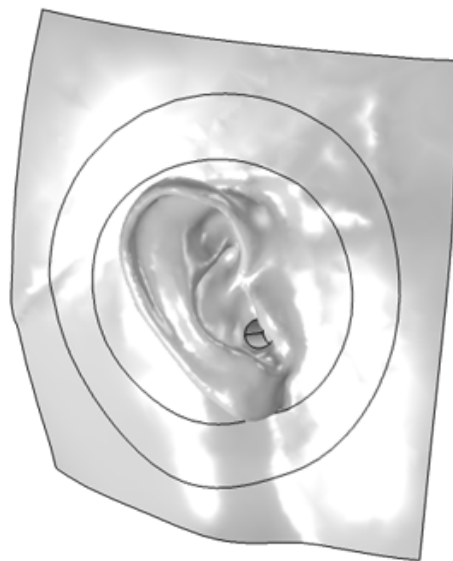


圖 7-17 耳殼、耳道與臉頰曲線模型圖

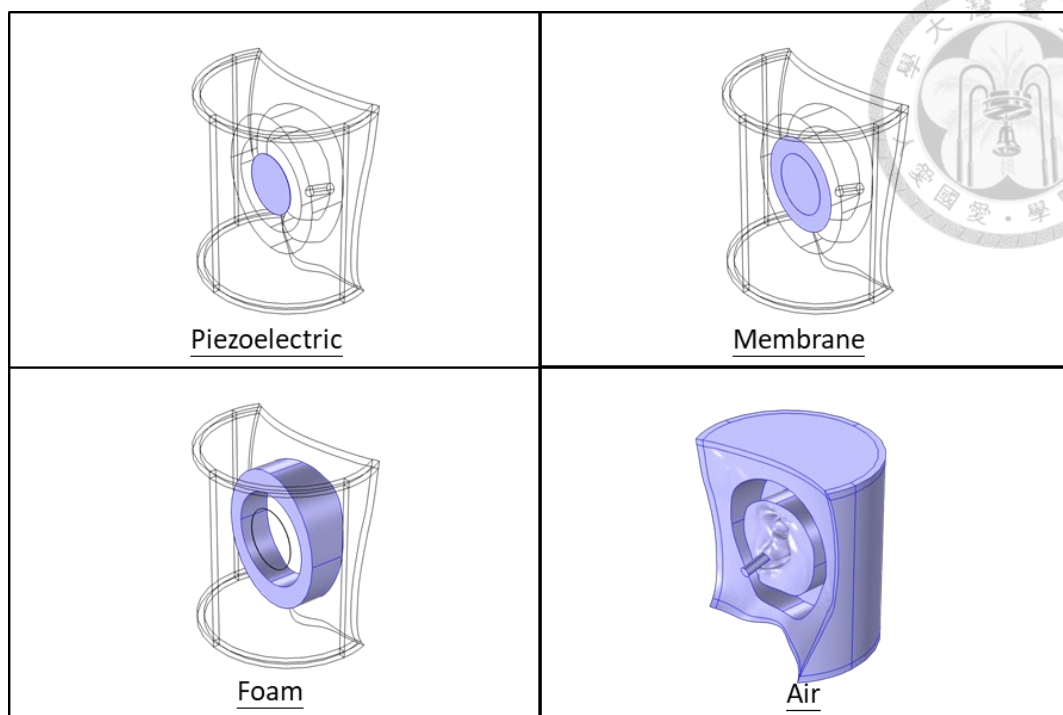
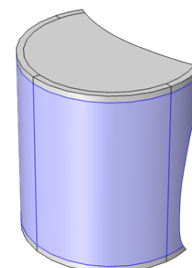


圖 7-18 Model-1 各部件標示圖

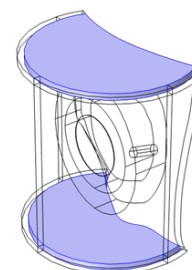
完美匹配層 1 (pml1)

	距離函數 (m)	厚度 (m)
方向 1	$\sqrt{(x-40[\text{mm}])^2 + (y-50[\text{mm}])^2} - 60[\text{mm}]$	5[mm]



完美匹配層 2 (pml2)

	距離函數 (m)	厚度 (m)
方向 1	$\text{abs}(z) - 65[\text{mm}]$	5[mm]



完美匹配層 3 (pml3)

	距離函數 (m)	厚度 (m)
方向 1	$\sqrt{(x-40[\text{mm}])^2 + (y-50[\text{mm}])^2} - \dots$	5[mm]
方向 2	$\text{abs}(z) - 65[\text{mm}]$	5[mm]

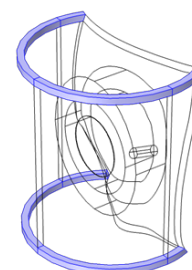


圖 7-19 Model-1 完美匹配層設置圖

邊界條件

聲學元件的基本設定與前幾章相同，壓電平板之電極連接方式根據不同元件來定義，給定 $3V_{pp}$ 電壓，薄膜外緣為固定邊界，元件與聲場耦合區域設定聲學與結構耦合邊界。臉頰和耳朵的部份，聲學阻抗類型為生理學的人膚，鼓膜的部份設定為人耳鼓的阻抗模型，如圖 7-20 所示。由於配戴耳機時，耳機的頭樑會夾緊，使得耳墊和耳朵緊密貼合，因此設定耳墊的上下為固定約束條件，其他與空氣接觸的部分為聲學與多孔材料耦合邊界。

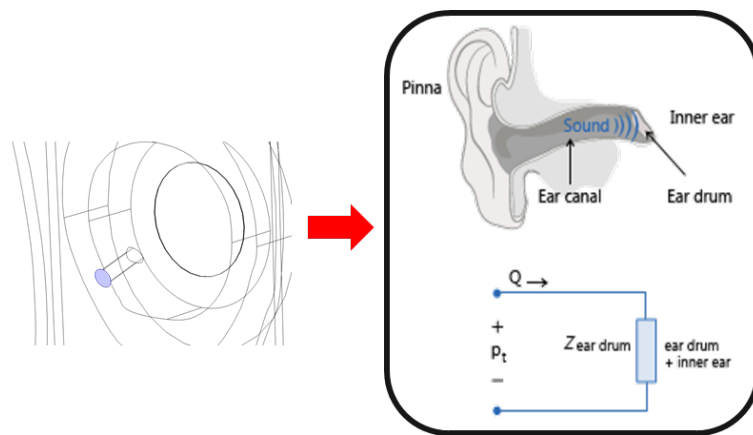


圖 7-20 耳鼓阻抗模型示意圖

網格

如 7.1.4 網格的設置基本相同，聲場的網格建構設定最大元素不得大於 $1/5$ 的波長。多項式伸縮的完美匹配層厚度方向至少要 8 層網格，所以使用掃描中的分佈來設置網格厚度。完成切割的網格如圖 7-21。

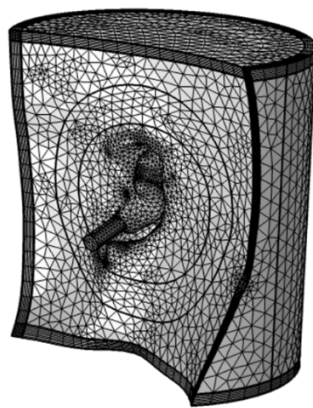


圖 7-21 Model-1 網格分佈圖

透過上述 Model-1 封閉音場的基本設定後，開啟包含幾何非線性計算薄膜的部份，設定頻率範圍為 20~20k (Hz) 的 1/24 八度音進行掃頻的頻域求解，最後就可以得到音壓分佈於耳朵、臉頰的情形，如圖 7-22 所示，觀測面選擇耳鼓的邊界，即可繪製出對應的聲壓響應曲線。

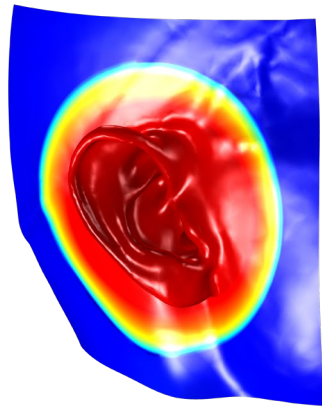


圖 7-22 人耳聲壓分佈圖

(2) Model-2：等效電路之人工耳模型

幾何模型

本模型的建立示意圖如圖 7-23 所示，簡化 Model-1 的模型，將耳道等效成電路的形式，鼓膜的直徑為 7mm，耳朵外包覆長 104mm、寬 94mm、厚度 20mm 的橢圓形耳墊，使耳機與耳朵之間形成封閉音場。各個材料標示如圖 7-24 所示，聲學元件可以自由替換不同的幾何、尺寸。

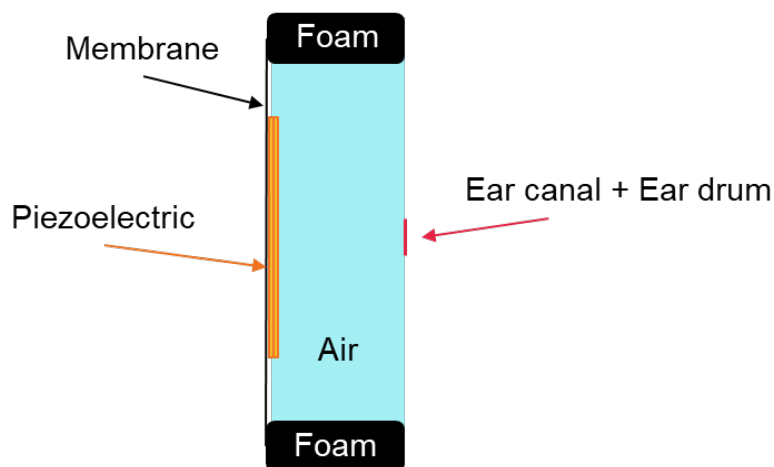


圖 7-23 Model-2 幾何模型示意圖

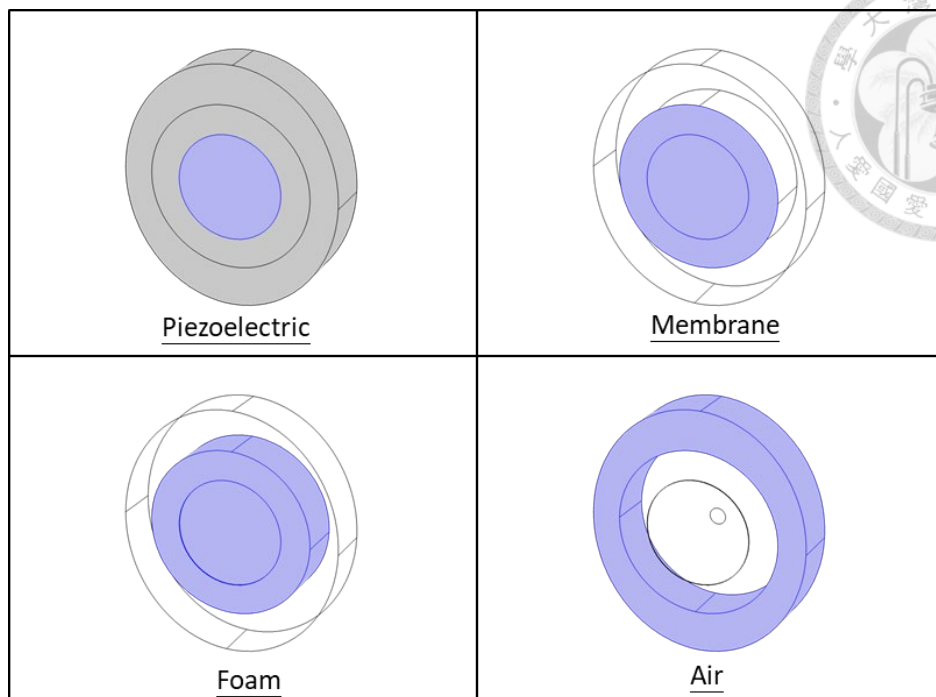


圖 7-24 Model-2 各部件標示圖

邊界條件

聲學元件的基本設定與前幾章相同，壓電平板電極連接方式根據不同元件來定義，給定 $3V_{pp}$ 電壓，薄膜外緣為固定邊界，元件與聲場耦合區域設定聲學與結構耦合邊界。Model-2 是將耳道等效成電聲學的電路形式，耳道可以視為一個管道，因此由電聲學角度可以相當於電容元件，且並聯於耳鼓的聲學阻抗，如圖 7-25 所示。由於配戴耳機時，耳機的頭樑會夾緊，使得耳墊和耳朵緊密貼合，因此設定耳墊的上下為固定約束條件，其他與空氣接觸的部分為聲學與多孔材料耦合邊界。

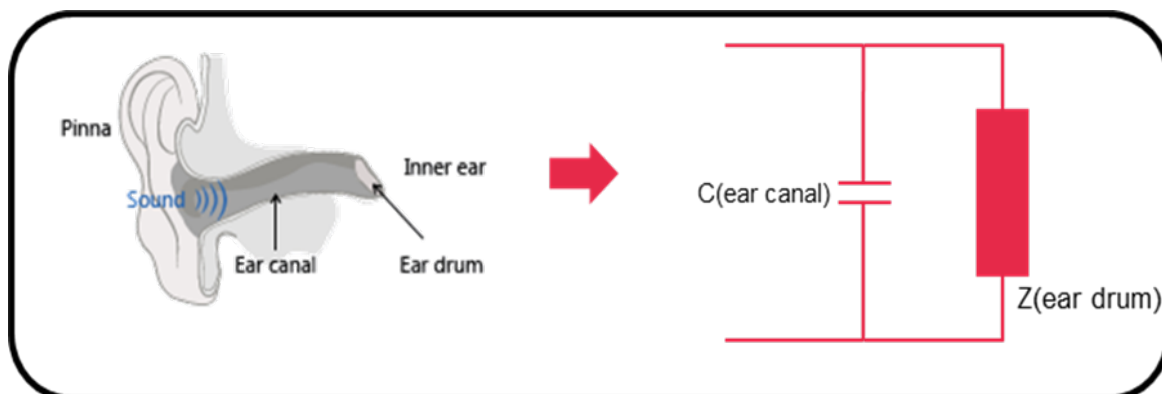


圖 7-25 耳道、耳鼓等效電路模型圖



網格

聲場的網格建構設定最大元素不得大於 $1/5$ 的波長，其餘部份則沒有特別要求，達到網格收斂性即可，網格分佈情形如圖 7-26。

透過上述 Model-2 封閉音場的基本設定後，開啟包含幾何非線性計算薄膜的部份，設定頻率範圍為 20~20k (Hz) 的 $1/24$ 八度音進行掃頻的頻域求解，觀測面選擇耳鼓的邊界，即可繪製出對應的聲壓響應曲線。

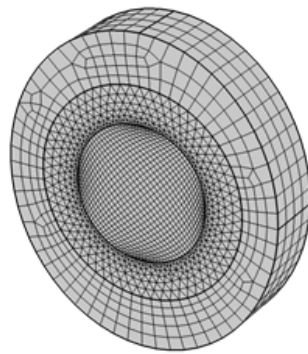


圖 7-26 Model-2 網格分佈圖

7.2.2 多孔彈性波理論

上節分析封閉音場的聲壓，運用到了多孔彈性波的物理量來模擬耳機的耳墊，因此本節將介紹多孔彈性波的理論。多孔材料是由孔隙或空隙所組成的固體結構，例如岩石、生物組織和海綿，耳墊就是屬於此類材料，如圖 7-27 所示。多孔彈性是用於描述多孔介質內流體流動和固體變形之間相互作用的現象，在壓力波和彈性波充滿空氣的多孔材料中，熱損和黏損格外重要，因此本研究使用 BIOT-ALLARD 模型可以同時考慮這兩種損失，以下將推導此模型的理論。

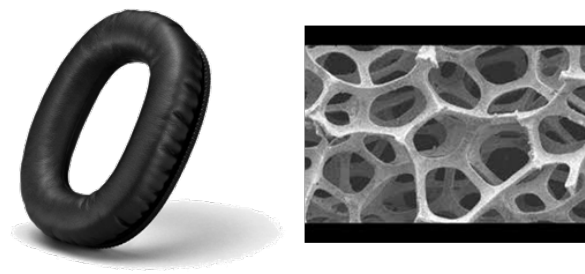


圖 7-27 多孔材料示意圖



Biot 將經典的線性彈性理論推廣到充滿流體的多孔介質，體積模量和可壓縮性與波頻率無關，可以表示為

$$\begin{aligned}\rho_{av} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u + \rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} w - \nabla \cdot \sigma &= 0 \\ \rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} u + \frac{\mu_f}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} w + \frac{\tau}{\varepsilon_p} \rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} w + \nabla p_f &= 0\end{aligned}\quad (7-18)$$

其中 u 為多孔材料的位移， σ 為總應力張量， w 為流體相對於多孔材料的位移， ρ_f 為流體密度， μ_f 為流體黏度， τ 為曲率， ε_p 為孔隙率， p_f 為流體孔隙壓力， κ 為滲透率， $\rho_{av} = \rho_d + \varepsilon_p \rho_f$ 為平均密度，其中 ρ_d 為多孔材料的密度。

將多孔材料的位移 u 和流體的位移 w 進行分離變數代入(7-18)，除去時間導數可得

$$-\rho_{av} \omega^2 u + \rho_f \omega^2 w - \nabla \cdot \sigma = 0 \quad (7-19)$$

$$-\rho_f \omega^2 u + \omega^2 \rho_c(\omega) w + \nabla p_f = 0 \quad (7-20)$$

其中 ρ_c 複密度，可以描述曲率、孔隙、流體密度和黏性阻力

$$\rho_c = \frac{\tau}{\varepsilon_p} \rho_f + \frac{\mu_f}{i\omega\kappa} \quad (7-21)$$

將(7-20)見簡化可得

$$w = \frac{1}{\omega^2 \rho_c} (\nabla p_f - \rho_f \omega^2 u) \quad (7-22)$$

將(7-22)代入(7-19)

$$-\rho_{av} \omega^2 u + \frac{\rho_f}{\rho_c} (\nabla p_f - \rho_f \omega^2 u) - \nabla \cdot \sigma = 0 \quad (7-23)$$

將總應力張量 σ 分為多孔彈性和流體的貢獻

$$\sigma = \sigma_d(u) - \alpha_B p_f \mathbf{I} \quad (7-24)$$

其中 $\mathbf{I}$ 表示單位矩陣，結合該項的積即代表孔隙壓力 p_f 僅對 σ 的對角線有貢獻，



α_B 為 Biot-Willis 係數，因此可以將(7-24)代入(7-23)寫為

$$-\left(\rho_{av} - \frac{\rho_f^2}{\rho_c}\right)\omega^2 u - \nabla \cdot (\sigma_d(u) - \alpha_B p_f \mathbf{I}) - \nabla \cdot \sigma = \frac{\rho_f}{\rho_c} \nabla p_f \quad (7-25)$$

利用體積應變 $\varepsilon_{vol} = \nabla \cdot u$ 則(7-22)和(7-25)可以整理成

$$-\nabla \cdot w = \frac{\rho_f}{M} + \alpha_B \varepsilon_{vol} \quad (7-26)$$

其中 M 為 Biot 模量，由孔隙率 ε_p 、流體可壓縮性 χ_f 、Biot-Willis 係數 α_B 和排水體

積模量 K_d 計算得出

$$\frac{1}{M} = \varepsilon_p \chi_f + \frac{\alpha_B - \varepsilon_p}{K_d} (1 - \alpha_B) \quad (7-27)$$

由參考文獻[62]可知，當包括熱損失和黏性損失時，流體可壓縮性可以代替為頻率相關表達式，黏度引起的損失由黏度表示式考慮，熱傳導引起的損失由流體可壓縮性表示式。其中，黏度表示式可表示為

$$\mu(\omega) = \mu \left(1 + \frac{4i\omega\tau_\infty^2 \mu \rho_f}{R_f^2 L_v^2 \varepsilon_p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7-28)$$

其中 L_v 為黏性特徵長度。

可壓縮性表示式：

$$\chi_f = \frac{\varepsilon_p}{\gamma P_A} \left[\gamma - (\gamma - 1) \left(1 + \frac{8\mu}{i\omega L_{th}^2 \text{Pr} \rho_f} \sqrt{1 + \frac{i\omega L_{th}^2 \text{Pr} \rho_f}{16\mu}} \right)^{-1} \right] \quad (7-29)$$

其中 L_{th} 為熱特性長度。

利用這兩條與頻率相關的表示式可以作為聲學的接口，進行具有多孔性彈性波的材料特性（耳墊）的封閉音場之頻率計算。



7.2.3 封閉音場實驗量測與數值分析之比較

本節比較人工耳實驗與有限元素法模擬，人工耳實驗直接將聲學元件附於頰板上，以夾具壓住單邊耳機仿照配戴時頭樑兩側夾持的情形，並利用麥克風測量對應之聲壓曲線；有限元素法分為兩種模型分析封閉音場，Model-1 建置仿真的耳殼、耳道、臉頰，能夠得到不同頻率下分佈於耳朵的聲壓與聲壓響應曲線，Model-2 以電聲學形式等效耳朵各部位，模型建立較為簡單，能大幅減少計算的成本。量測 A、B、C 三種聲學元件，結果如圖 7-28 所示，其中圖標標示”Pinna”為 Model-1 的仿耳分析，標示為”Equivalent”為 Model-2 的等效電路分析。

首先討論聲學元件(A)並聯型雙層壓電圓盤複合環形薄膜，如圖 7-28(a)所示，黑色曲線為人工耳量測的結果，由於封閉音場的環境作用，使得活塞模態的峰值較自由音場平滑，低頻響應增強，且頻率會有些微的偏移，藍色曲線為 Model-1 模擬的結果，比較與實際人工耳量測的結果，兩者有相似的趨勢，但封閉音場的效果較不明顯，紅色曲線為 Model-2 模擬的結果，和人工耳實驗相比，整體的趨勢和聲壓大小皆有高度的對應性，可以顯而易見的看出封閉音場的效應，鑒於 Model-2 在計算上能更有效率且封閉效應較好，因此後續以 Model-2 作為有限元素分析的模型。

聲學元件(B)為串聯型雙層壓電圓環複合圓形薄膜，如圖 7-28(b)所示，黑色曲線為人工耳測量的結果，由於有較大的薄膜面積，因此容易受封閉的壓力場作用，使低頻部份平滑，但因為環形壓電的設計，壓電區域較少，所以反向的共振頻率造成的波谷也較明顯，在高頻容易形成高低起伏的現象。紅色曲線為 Model-2 模擬的結果，曲線的走勢與人工耳量測十分相似，低頻、高頻的特色都有表現出來。

最後討論聲學元件(C)串聯型雙層壓電矩形薄板複合矩型薄膜，如圖 7-28(c)所示，黑線部份為人工耳量測的結果，實心的矩形壓電複合聲學元件與聲學元件(A)有類似的聲壓曲線，在活塞模態的頻率範圍同樣受壓力影響，使曲線趨於平滑，壓電產生的模態出現後會有凸起的峰值，高頻不穩定的聲壓源由壓電和薄膜模態的相互作用。與紅色曲線，也就是 Model-2 有限元素分析的結果，兩者不論是波峰對

應的位置或是壓力值的範圍大小都有良好的一致性。

總合以上三款壓電複合薄膜的聲學元件於封閉音場的量測實驗與數值分析，有限元素法可以有效評估聲學元件的聲學特性，Model-1 透過耳朵模型的建立，能夠模擬聲壓分佈於耳朵的情形，針對分佈狀況設計耳機單體位置及幾何，並且與人工耳量測相比也都有大致可符合的聲壓曲線；Model-2 將耳道等效為電路形式的模型，簡化耳朵複雜的模型，大幅的減少計算所需時間，封閉壓力場的效應也較顯著，與人工耳量測有較高的一致性。兩種有限元素分析的模型有各自的優缺點，不過都能有效的評估聲學元件的聲音品質，能作為聲學元件設計參考的依據，在耳機產品的開發上能省去製作的成本和量測的時間成本，設計出最佳化的聲學元件。

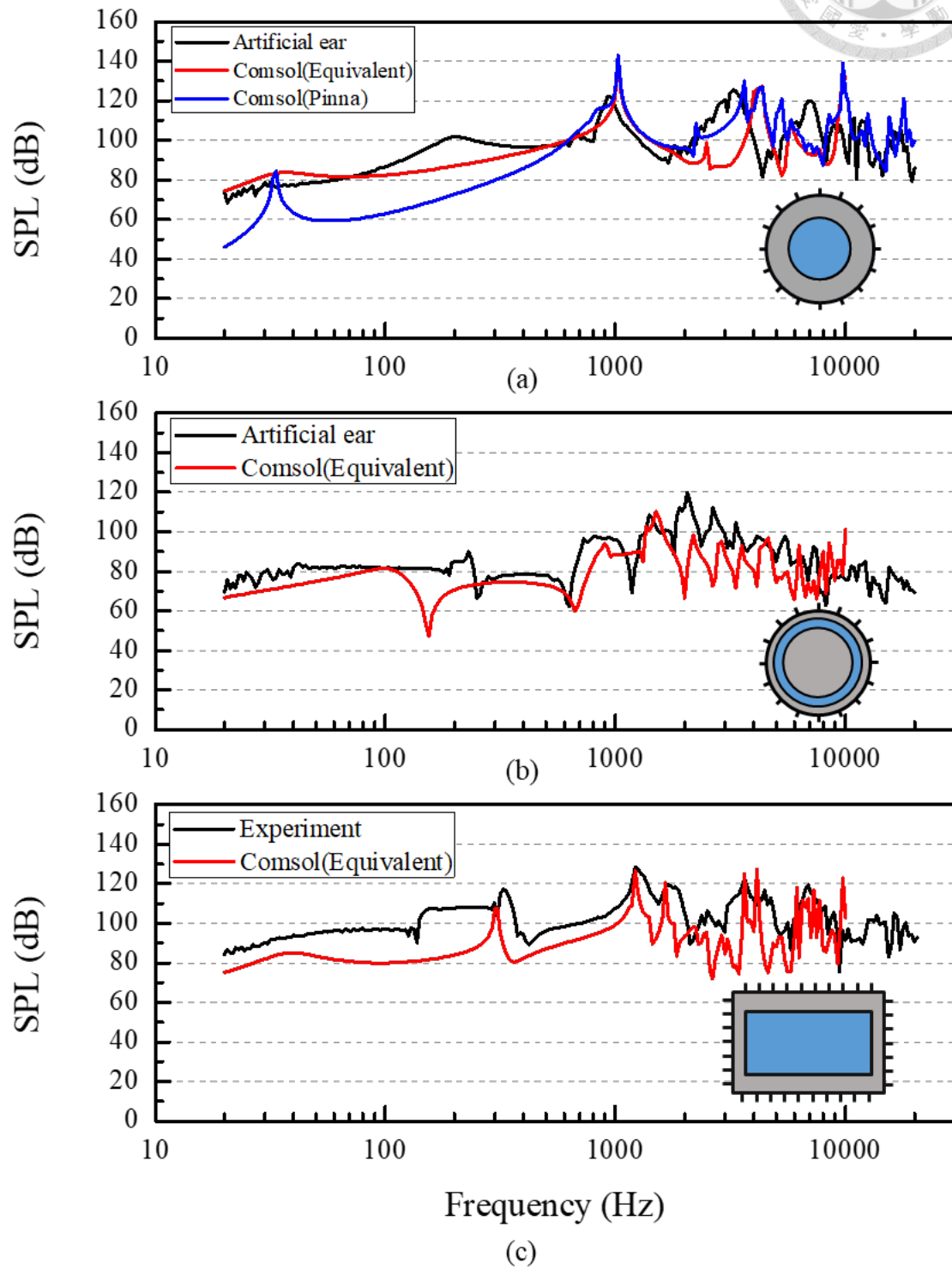


圖 7-28 封閉音場實驗量測與數值分析圖

7.2.4 串聯型雙層壓電矩形薄板複合矩型薄膜聲學元件之最佳化

本節將延續 3.4 節田口法最佳化的方式，搭配 7.1.4 無限大障板下自由音場的有限元素法分析，無限大障板下自由音場的有限元素法分析能作為聲學元件聲學特性的依據，透過模擬獲得的聲壓曲線能有效量化分析揚聲器單體的聲音表現，作為耳機單體設計的初步評估。由於聲學元件(C)有許多變異幾何參數：壓電試片的長寬尺寸與薄膜的長寬尺寸，可搭配出數種組合，因此選用田口法為最佳化的方式，能大幅降低實驗與模擬的嘗試次數，提高數據分析的效率。本節詳細介紹田口法的實施步驟和專用術語，並應用於改善串聯型雙層壓電矩形薄板複合矩型薄膜聲學元件。田口法的實施步驟如前文的圖 3-10，專用術語應用於本案例的詳細解釋說明如下

(1) 品質特性 (Quality characteristics)

在田口法的術語中，實驗之量測值或觀察值稱為「品質特性」，在本研究中最優化目標為使聲學元件的聲壓曲線越平滑越好，因此設定分析之品質特性為聲壓曲線，即 SPL 曲線，以元件(C)為例，如圖 7-29 所示，。

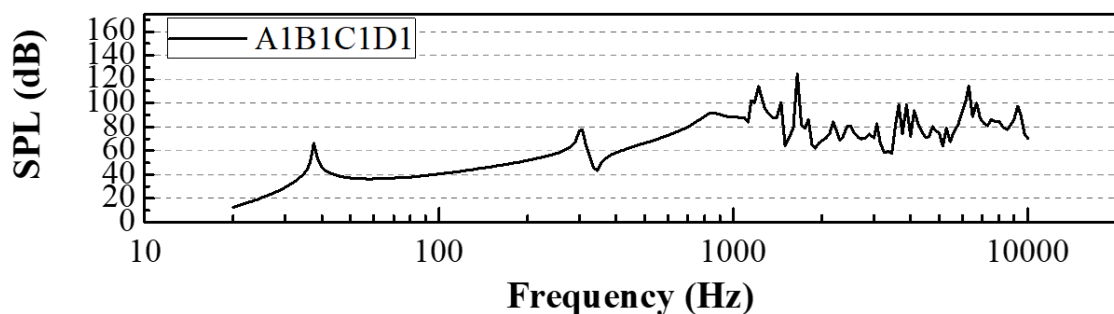


圖 7-29 聲學元件(C)之 SPL 曲線圖

(2) 理想機能 (Ideal function)

對於每一個品質特性都有其對應的理想值(ideal value)，理想值又可以稱為目標值(target value)或標稱值(nominal value)。理想機能分為四種：望小(smaller-the-better)，值越小越好，可視目標值為零；望大(larger-the-better)，值

越大越好，可視目標值為無限大；望目(nominal-the-better)，以固定靜態的目標值為標準；動態(dynamic)，目標值是變動的。對於聲壓曲線的評估並沒有常規的標準，故本研究以 SPL 曲線的線性擬合直線(fitting)的斜率大小作為判斷音質好壞的指標，理想機能為望小，期望 SPL 曲線越平越好。

如圖 7-30 所示，分為三種步驟進行分析，首先，由於聲學元件的聲壓曲線在高頻容易造成震盪的情況，進而影響判斷的結果，因此「處理程序(1)」採用特定頻率範圍的 SPL 曲線擬合直線的斜率作為理想機能，能針對設計的頻段進行分析。對於壓電複合薄膜的聲學元件而言，波谷會直接影響斜率的大小，又在設計上不希望有聲壓突然驟降的波谷產生，因此利用兩種方式懲罰此現象，「處理程序(2)」利用 SPL 曲線擬合直線的斜率乘以擬合直線的誤差方均根，以及「處理程序(3)」將設定頻率範圍內具有明顯波谷的組合移除。

- (1) Calculate the linear slope of SPL by curve fitting.
- (2) Calculate the linear slope of SPL by curve fitting multiplies RMS.
- (3) Remove cases with anti-resonance dip.

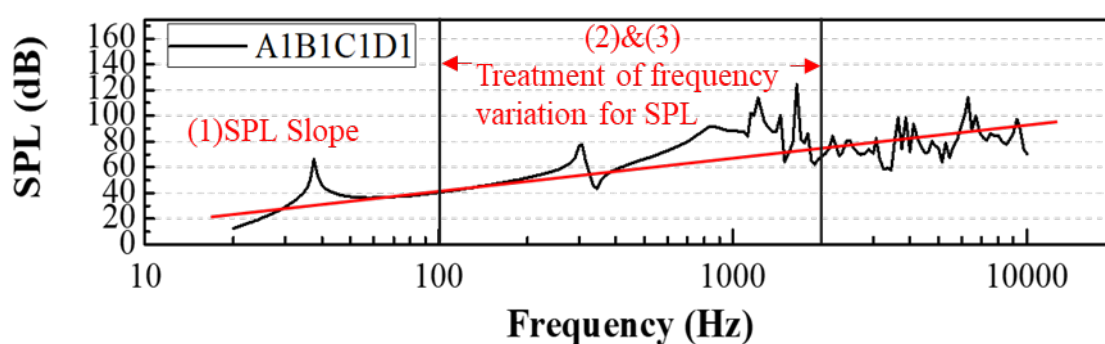


圖 7-30 聲學元件理想機能示意圖



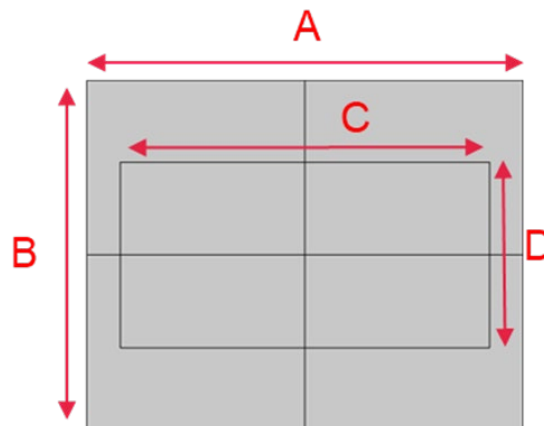
(3) 控制因子 (Control factors)

田口法之控制因子主要用來決定品質特性，藉由實驗來研究因子對品質特性可能的影響，並找出最佳的控制因子組合，完成最佳化設計。本研究控制因子分別為薄膜及壓電平板的長寬尺寸。

(4) 變動水準 (Change level)

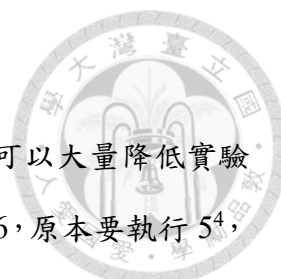
變動水準是指控制因子的變數，本研究採用五個水準，聲學元件(C)的原始尺寸為：A 薄膜長度 75mm、B 薄膜寬度 60mm、C 壓電長度 63.5mm、D 壓電寬度 31.8mm，薄膜的長寬以不同倍率關係遞減對應五個水準，壓電試片固然小於薄膜，因此透過薄膜的長度為基準設計壓電試片長寬的水準，詳細水準對應表如表 7-5。

表 7-5 四因子五水準對應表



$$L=63.5/75, W=31.8/60$$

	Level 1	Level 2	Level 3	Level 4	Level 5
A 薄膜長度(mm)	75	75/2	75/3	75/4	75/5
B 薄膜寬度(mm)	60	60/2	60/3	60/4	60/5
C 壓電長度(mm)	A*L	A*7/8*L	A*6/8*L	A*5/8*L	A*4/8*L
D 壓電寬度(mm)	B*W	B*7/8*L	B*6/8*L	B*5/8*L	B*4/8*L



(5) 直交表 (Orthogonal array)

直交表提供有系統且有效率地變動控制因子的方法，除了可以大量降低實驗成本，還可以簡化資料分析的工作。以 L25 直交表為例，如表 7-6，原本要執行 5^4 ，也就是 625 次實驗，但經由直交表可將實驗次數降低至 25 次，大幅地降低了實驗成本與時間。表格的 25 列代表的是 25 種不同的組合，即為表 7-5 中的四項因子 (A~D) 與五種水準 (Level1~Level5) 選用的種類。命名方式以下選用第 6 列為例子說明，命名為 A2B1C2D3 與表格對應的位置為紅字部分，實際進行分析的各項參數如表 7-7。

表 7-6 L25 直交表(四因子)

number \ factor	A	B	C	D
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	1	4	4	4
5	1	5	5	5
6	2	1	2	3
7	2	2	3	4
8	2	3	4	5
9	2	4	5	1
10	2	5	1	2
11	3	1	3	5
12	3	2	4	1
13	3	3	5	2
14	3	4	1	3
15	3	5	2	4
16	4	1	4	2
17	4	2	5	3
18	4	3	1	4
19	4	4	2	5
20	4	5	3	1
21	5	1	5	4
22	5	2	1	5
23	5	3	2	1
24	5	4	3	2
25	5	5	4	3

表 7-7 A2B1C2D3 組合對照表

	Level 1	Level 2	Level 3	Level 4	Level 5
A 薄膜長度(mm)	75	75/2	75/3	75/4	75/5
B 薄膜寬度(mm)	60	60/2	60/3	60/4	60/5
C 壓電長度(mm)	A*L	A*7/8*L	A*6/8*L	A*5/8*L	A*4/8*L
D 壓電寬度(mm)	B*W	B*7/8*L	B*6/8*L	B*5/8*L	B*4/8*L

(6) 反應表及反應圖 (Response table and response diagram)

依據實驗結果紀錄，可將其整理成因子反應表，並繪製成因子反應圖。其中一個因子的變動會對品質特性產生顯著的影響時，稱之為重要因子，也就是對於品質特性最敏感之因子。以下表 7-8、表 7-9 結果為例，將紅色框內部份的結果取平均後，可以得到薄膜長度於 Level 1 的因子值，同理，藍色方框內為薄膜寬度於 Level 4 的結果，以此類推可以製作出完整的反應表，並根據表格繪製出反應圖，如圖 7-31 所示，找出敏感因子及最佳化之組合。

表 7-8 田口法 A、B 因子模擬結果表(20-10000Hz)

A	Slope(20-10000)	B	Slope(20-10000)
1	10.74	1	10.74
1	13.20	2	13.20
1	14.13	3	14.13
1	15.91	4	15.91
1	19.16	5	19.16
2	13.20	1	13.20
2	14.88	2	14.88
2	16.75	3	16.75
2	17.81	4	17.81
2	14.16	5	14.16
3	15.81	1	15.81
3	17.63	2	17.63
3	17.41	3	17.41
3	14.37	4	14.37
3	16.66	5	16.66
4	16.46	1	16.46
4	17.85	2	17.85
4	15.25	3	15.25
4	17.51	4	17.51
4	18.88	5	18.88
5	18.11	1	18.11
5	15.56	2	15.56
5	17.47	3	17.47
5	17.76	4	17.76
5	18.83	5	18.83

表 7-9 因子對品質特性反應表(20-10000Hz)

SLOPE	A 薄膜長度	B 薄膜寬度	C 壓電長度	D 壓電寬度
Level 1	14.63	14.86	14.02	16.51
Level 2	15.36	15.82	15.61	15.80
Level 3	16.38	16.20	16.29	15.67
Level 4	17.19	16.67	17.12	16.16
Level 5	17.55	17.54	18.07	16.96
Delta	2.92	2.67	4.05	1.28
RANK	2	3	1	4

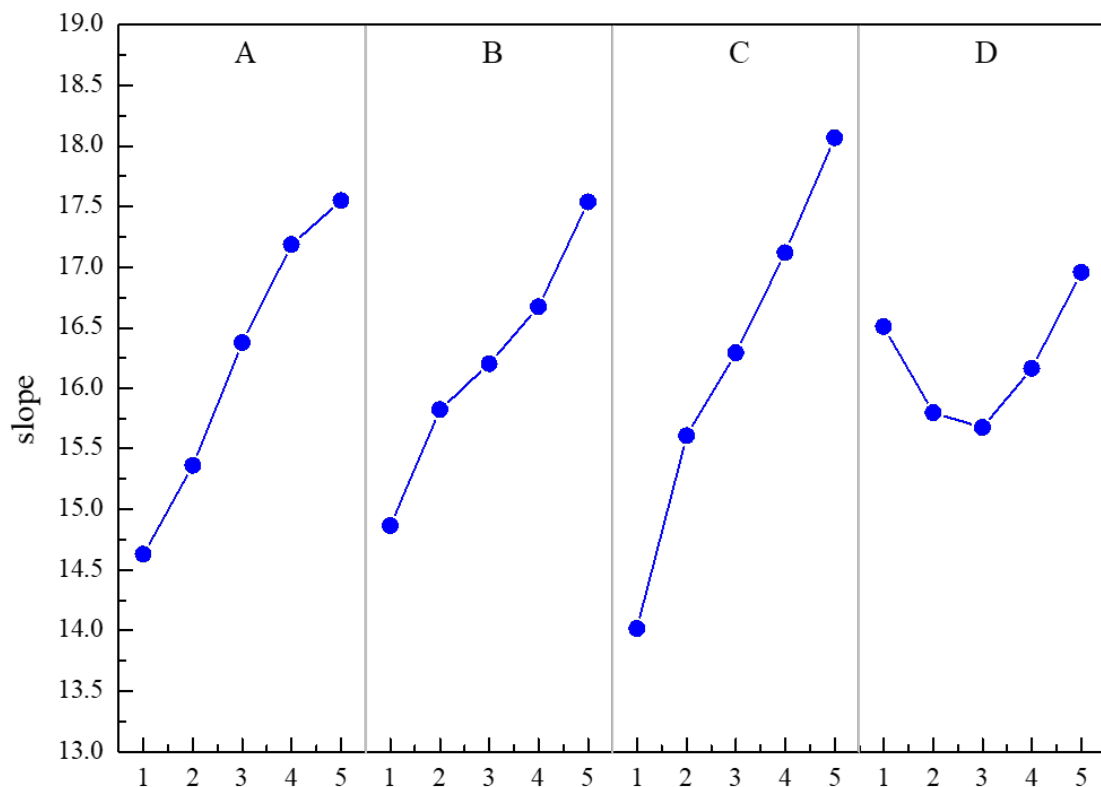


圖 7-31 因子對品質特性反應圖(20-10000Hz)

透過上述田口法最佳化的過程，模擬結果如表 7-10 所示，其中 SPL 的斜率計算頻段總共分為四個設計範圍，分別為 50-1000(Hz)、50-2000(Hz)、100-1000(Hz)、100-2000(Hz)，設計的理想機能為前文第 7.2.4 節所描述的方法，而選定這四段頻

率範圍的原因，主要是考量基頻至人耳對聲音頻率較靈敏的區段所設計。表中結果為頻率範圍 SPL 曲線擬合直線的斜率，RMS 表示擬合直線與 SPL 曲線的差值方均根，可提供「處理程序(2)」作使用，紅色標示的數值為頻率區間內有急劇下降的波谷，為「處理程序(3)」需去除的組合，繪製反應圖時則依據去除後的組合數量取其平均。利用有限元素法模擬的結果分析的田口法最佳化，可以歸納出以下結論。

四種不同頻段的結果大致相同，本研究以 50-1000(Hz)的頻率範圍為探討之例，對其結果進行分析，三種程序可以分別製作如表 7-11~表 7-13 之反應表，反應圖繪製如圖 7-32~圖 7-34 所示，從圖中最低點可以判斷最佳組合，分別為 A3B2C2D2、A3B2C1D2、A3B2C1D1，將三組組合重新建模後進行模擬，結果如圖 7-35 所示，SPL 的結果皆較原始聲學元件(C)來的平滑且基頻亦平移至更理想的頻率範圍，雖然僅計算頻段斜率進行最佳化設計(1)能得到比原聲學元件(C)還要平順的曲線，但與所有組合相比斜率並不是最小值，且結果為三者之中最差，考慮斜率與方均根誤差的積(2)之最佳化組合可得到所有組合的斜率較小值，更符合理想值的結果；去除波谷(3)得到的斜率值為所有組合中最小，同樣驗證望小的理想機能。

在不同的頻率分析範圍中，透過模擬分析之結果，選定不同頻段進行三種處理程序如表 7-14 至表 7-22 所列以及圖 7-34 至圖 7-46 所示，雖不能每次得到的結果皆是最佳的組合，但與原始聲學元件(C)相比都有一定的優化效果，尤其以去除波谷的處理程序(3)最為符合設定之理想機能，能有效設計出最佳化幾何參數。田口法中的直交表大幅的減少分析所需的組數和計算時間，利用結果製作的反應圖和反應表能一目瞭然的得到敏感因子和最佳組合，圖表中數值變化越大表示該因子對品質特性越敏感，本研究使用田口法最佳化設計出符合目標的產品，能適用於串聯型雙層壓電矩形薄板複合矩型薄膜聲學元件的設計，達到產品最佳化之效果。

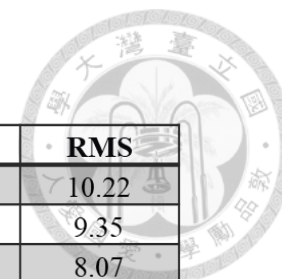
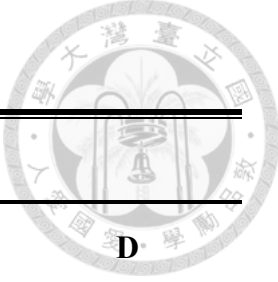


表 7-10 田口法模擬結果對照表

	20-10000	RMS	50-1000	RMS	50-2000	RMS	100-1000	RMS	100-2000	RMS
1	10.74	12.01	18.14	5.86	17.00	9.34	21.04	6.00	17.96	10.22
2	13.20	11.44	7.80	9.66	10.60	9.64	8.02	9.53	11.89	9.35
3	14.13	13.62	17.13	7.57	12.98	8.69	17.71	6.65	11.57	8.07
4	15.91	17.54	23.58	8.73	18.16	11.30	18.68	8.43	12.97	10.23
5	19.16	18.61	24.85	8.22	24.06	11.09	17.30	6.12	19.28	10.54
6	13.20	12.22	10.75	9.50	12.43	10.02	14.64	7.72	15.26	8.65
7	14.88	11.86	13.11	5.41	16.65	7.78	16.64	1.94	20.25	5.95
8	16.75	14.14	16.15	6.49	18.96	6.93	11.91	5.14	17.91	6.89
9	17.81	11.91	17.10	7.36	18.69	7.25	10.53	5.37	15.76	6.81
10	14.16	11.70	14.55	7.03	14.21	8.33	8.62	5.71	10.61	7.88
11	15.81	11.10	15.35	6.22	12.42	7.78	18.14	4.27	12.91	7.33
12	17.63	8.17	13.06	5.32	15.99	6.22	14.41	1.87	18.20	4.04
13	17.41	9.53	15.02	6.54	16.98	6.64	9.96	4.97	15.11	6.43
14	14.37	9.85	10.97	7.33	11.82	6.73	4.17	5.31	8.42	5.87
15	16.66	12.46	15.24	7.33	15.22	6.65	8.48	5.49	11.45	5.46
16	16.46	13.30	18.02	6.35	19.16	7.99	18.68	3.61	20.03	6.94
17	17.85	10.29	15.99	6.72	18.03	6.82	10.70	5.09	16.05	6.60
18	15.25	9.85	11.10	7.50	11.63	6.85	4.04	5.40	7.95	5.79
19	17.51	8.96	13.70	7.61	13.64	6.89	6.77	5.80	9.76	5.70
20	18.88	7.96	15.97	7.34	15.48	6.65	9.13	5.43	11.44	5.15
21	18.11	15.61	19.97	7.85	18.40	8.59	13.46	6.12	13.98	7.24
22	15.56	10.57	13.52	7.80	14.10	7.56	6.64	6.17	10.48	6.90
23	17.47	8.94	13.98	7.01	14.13	6.35	7.31	4.97	10.49	5.10
24	17.76	8.37	15.37	8.24	15.00	7.45	8.29	6.69	10.90	6.27
25	18.83	8.35	17.98	8.18	16.87	7.50	11.08	6.80	12.53	6.11

表 7-11 僅計算頻段 50-1000Hz 斜率(1)反應表



50-1000Hz Option1				
	A	B	C	D
Level 1	18.17	16.34	13.51	15.50
Level 2	14.15	12.52	12.14	13.96
Level 3	13.71	14.44	15.19	14.38
Level 4	14.73	15.91	17.54	16.38
Level 5	15.94	17.50	18.33	16.49
Difference	4.46	4.98	6.18	2.53
RANK	3	2	1	4

表 7-12 計算頻段 50-1000Hz 斜率與方均根誤差之積(2)反應表

50-1000Hz Option2				
	A	B	C	D
Level 1	144.27	115.02	95.53	103.35
Level 2	101.16	85.72	98.27	103.33
Level 3	91.05	102.78	107.97	113.34
Level 4	105.30	128.55	128.29	125.69
Level 5	126.78	136.48	138.50	122.85
Difference	53.22	50.76	42.97	22.35
RANK	1	2	3	4

表 7-13 計算頻段 50-1000Hz 並去除波谷(3)反應表

50-1000Hz Option3				
	A	B	C	D
Level 1	21.85	17.78	12.54	15.03
Level 2	15.23	13.92	14.30	16.14
Level 3	13.93	14.67	15.39	15.52
Level 4	14.96	16.14	17.76	16.60
Level 5	16.16	17.72	18.59	16.71
Difference	7.92	3.86	6.05	1.69
RANK	1	3	2	4

表 7-14 僅計算頻段 50-2000Hz 斜率(1)反應表

50-2000Hz Option1				
	A	B	C	D
Level 1	16.56	15.88	13.75	16.26
Level 2	16.19	15.07	13.20	15.19
Level 3	14.48	14.93	14.50	14.43
Level 4	15.59	15.46	17.83	16.01
Level 5	15.70	17.17	19.23	16.64
Difference	2.08	2.23	6.03	2.21
RANK	4	2	1	3

表 7-15 計算頻段 50-2000Hz 斜率與方均根誤差之積(2)反應表

50-2000Hz Option2				
	A	B	C	D
Level 1	169.13	138.23	108.60	117.31
Level 2	127.89	112.10	102.32	119.66
Level 3	97.91	105.28	110.73	113.27
Level 4	110.56	125.23	143.14	134.70
Level 5	118.51	143.16	159.21	139.06
Difference	71.22	37.88	56.89	25.79
RANK	1	3	2	4

表 7-16 計算頻段 50-2000Hz 並去除波谷(3)反應表

50-2000Hz Option3				
	A	B	C	D
Level 1	18.40	16.66	12.94	16.07
Level 2	17.29	16.04	14.33	17.05
Level 3	15.00	14.93	14.48	14.93
Level 4	15.59	15.46	17.83	15.00
Level 5	15.70	17.17	19.44	17.69
Difference	3.40	2.23	6.50	2.76
RANK	2	4	1	3

表 7-17 僅計算頻段 100-1000Hz 斜率(1)反應表

100-1000Hz Option1				
	A	B	C	D
Level 1	16.55	17.19	8.90	12.49
Level 2	12.47	11.28	9.04	10.71
Level 3	11.03	10.18	13.98	11.66
Level 4	9.87	9.69	14.95	12.26
Level 5	9.36	10.92	12.39	12.15
Difference	7.19	7.50	6.05	1.77
RANK	2	1	3	4

表 7-18 計算頻段 100-1000Hz 斜率與方均根誤差之積(2)反應表

100-1000Hz Option2				
	A	B	C	D
Level 1	116.70	93.31	52.06	59.11
Level 2	62.45	46.21	62.31	59.59
Level 3	44.51	57.29	66.49	76.52
Level 4	46.52	66.18	77.68	68.12
Level 5	58.10	65.28	69.74	64.94
Difference	72.20	47.11	25.63	17.41
RANK	1	2	3	4

表 7-19 計算頻段 100-1000Hz 並去除波谷(3)反應表

100-1000Hz Option3				
	A	B	C	D
Level 1	17.89	16.76	5.87	10.35
Level 2	11.92	12.10	7.52	11.24
Level 3	11.03	10.18	13.98	10.92
Level 4	9.87	9.69	14.95	12.26
Level 5	9.36	10.92	12.39	12.15
Difference	8.54	7.07	9.08	1.91
RANK	2	3	1	4

表 7-20 僅計算頻段 100-2000Hz 斜率(1)反應表

100-2000Hz Option1				
	A	B	C	D
Level 1	14.73	16.03	11.08	14.77
Level 2	15.96	15.37	11.77	13.71
Level 3	13.22	12.60	13.41	12.76
Level 4	13.05	11.56	16.33	13.32
Level 5	11.68	13.06	16.03	14.07
Difference	4.28	4.47	5.24	2.00
RANK	3	2	1	4

表 7-21 計算頻段 100-2000Hz 斜率與方均根誤差之積(2)反應表

100-2000Hz Option2				
	A	B	C	D
Level 1	144.76	130.08	87.01	95.37
Level 2	113.38	96.72	82.94	99.84
Level 3	75.46	82.71	87.14	91.43
Level 4	81.09	82.65	109.05	92.59
Level 5	74.40	96.93	122.95	109.86
Difference	70.36	47.43	40.01	18.42
RANK	1	2	3	4

表 7-22 計算頻段 100-2000Hz 並去除波谷(3)反應表

100-2000Hz Option3				
	A	B	C	D
Level 1	14.60	15.64	9.37	13.97
Level 2	14.76	14.91	10.57	15.34
Level 3	13.29	12.60	11.30	12.14
Level 4	13.05	11.56	16.33	10.79
Level 5	11.68	13.06	16.55	14.36
Difference	3.08	4.08	7.18	4.56
RANK	4	3	1	2

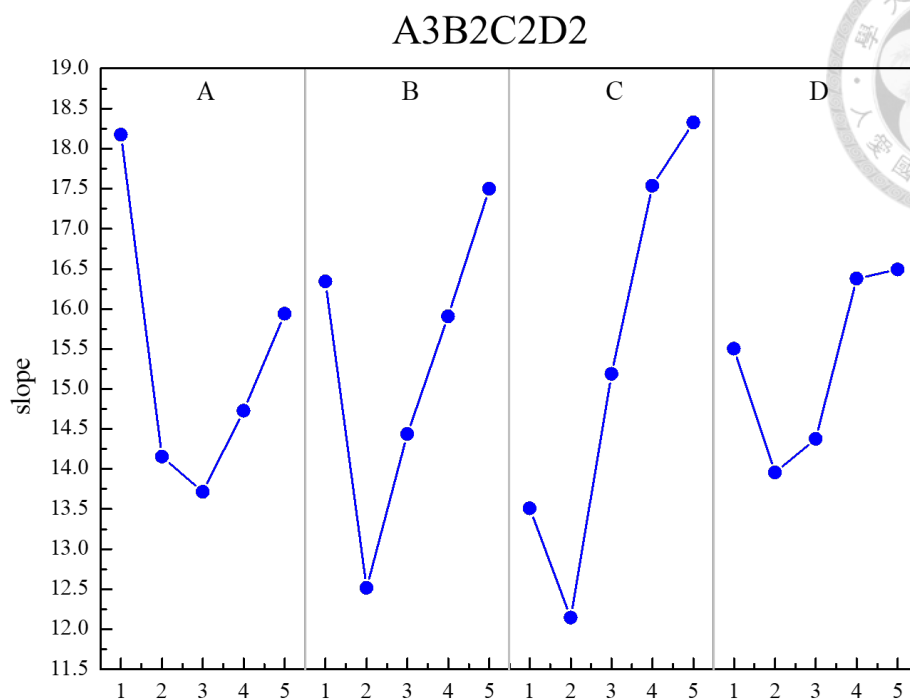


圖 7-32 僅計算頻段 50-1000Hz 斜率(1)反應圖

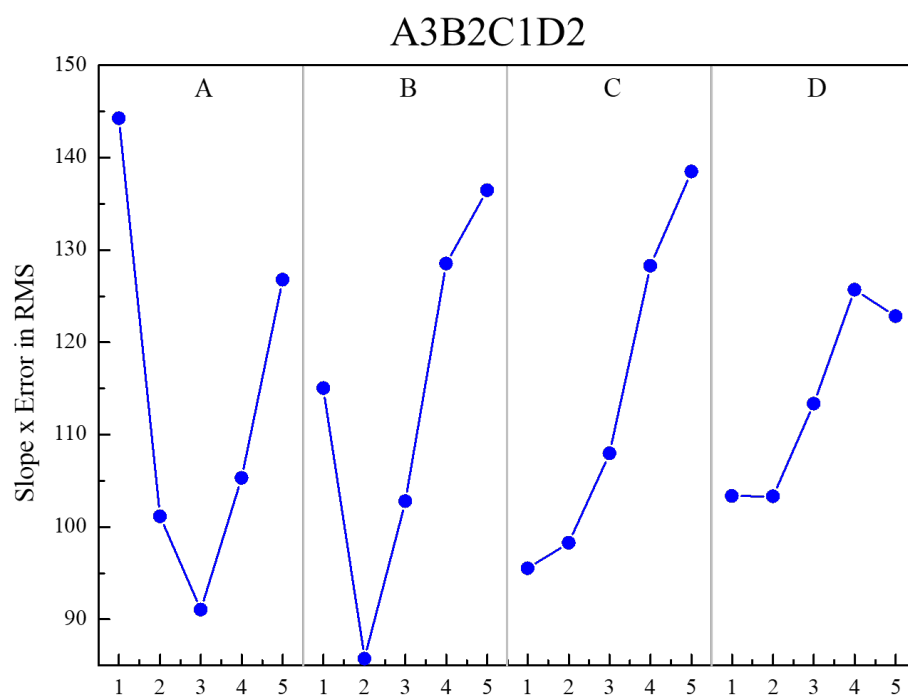


圖 7-33 計算頻段 50-1000Hz 斜率與方均根誤差之積(2)反應圖

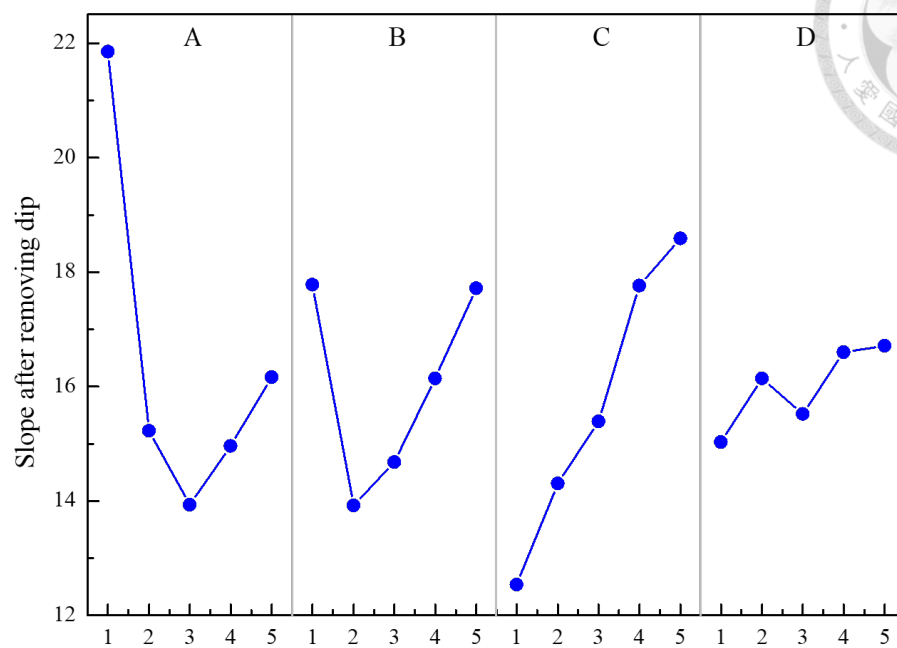


圖 7-34 計算頻段 50-1000Hz 並去除波谷(3)反應圖

Option	Slope	RMS	Slop*RMS
Origin/A1B1C1D1	18.14	5.86	106.28
(1)/A3B2C2D2	11.45	6.16	70.51
(2)/A3B2C1D2	10.24	6.32	64.77
(3)/A3B2C1D1	10.18	7.07	71.91

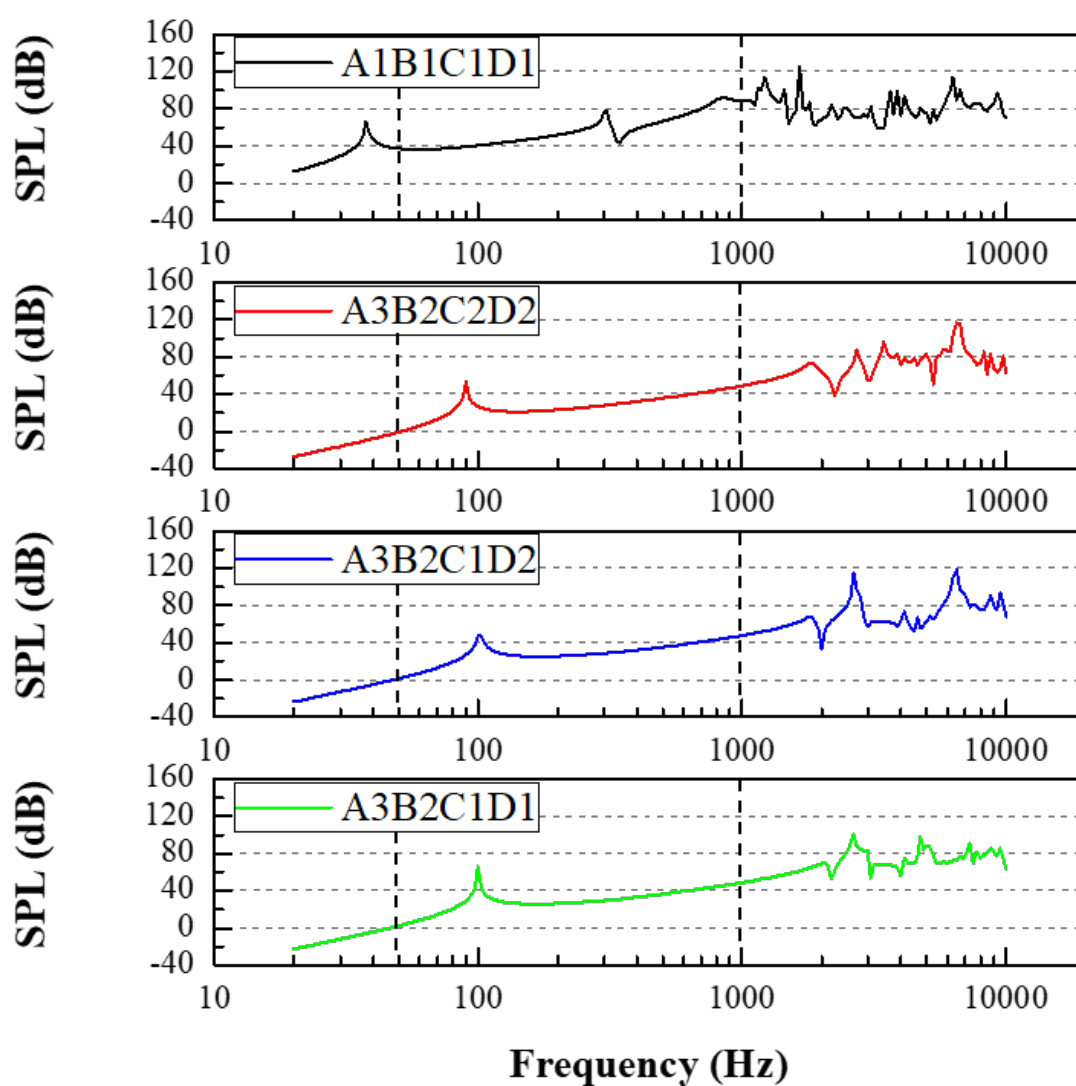


圖 7-35 50-1000Hz 最佳化組合之 SPL 曲線圖

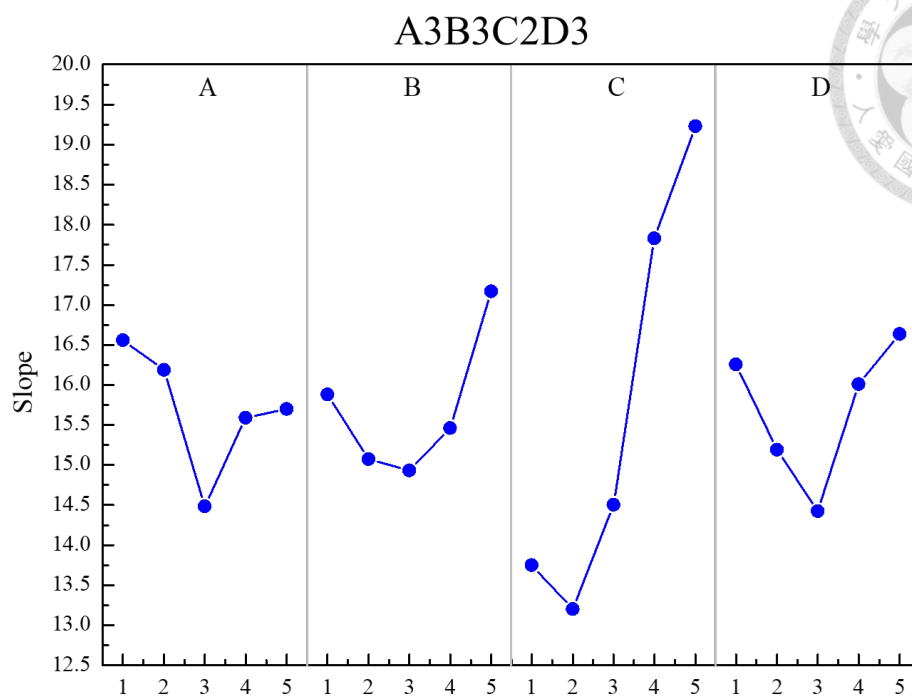


圖 7-36 僅計算頻段 50-2000Hz 斜率(1)反應表

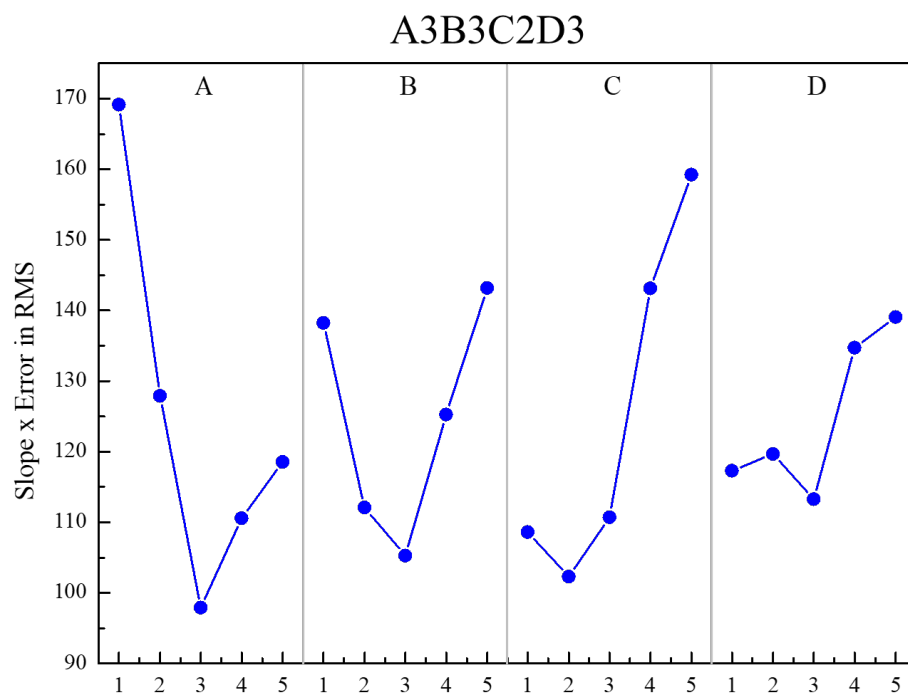


圖 7-37 計算頻段 50-2000Hz 斜率與方均根誤差之積反應圖

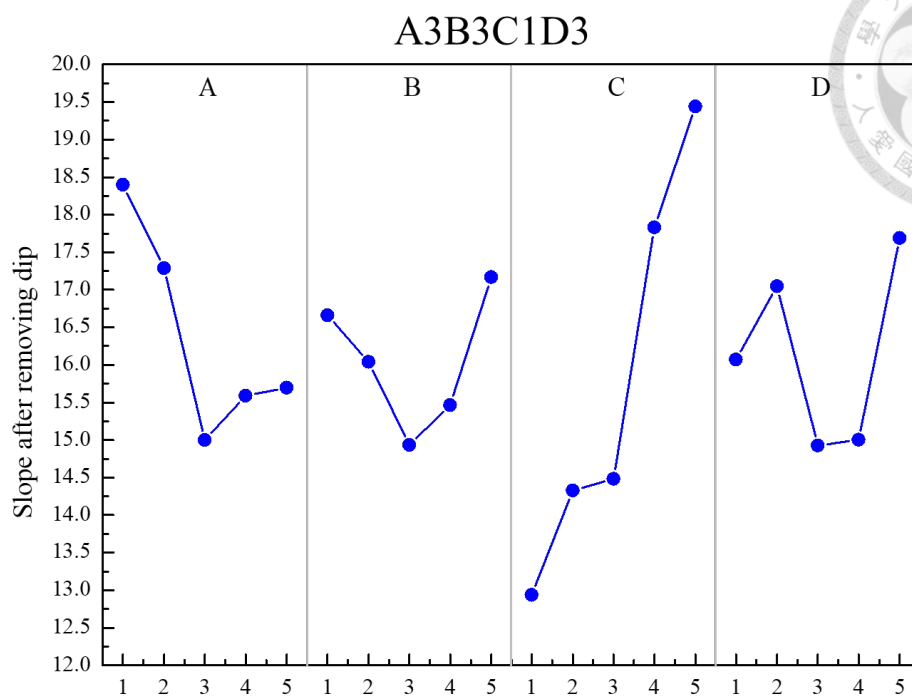


圖 7-38 計算頻段 50-2000Hz 並去除波谷(3)反應圖

Option	Slope	RMS	Slop*RMS
Origin/A1B1C1D1	17.00	9.34	158.81
(1)/A3B3C2D3	13.33	6.65	88.65
(2)/A3B3C2D3	13.33	6.65	88.65
(3)/A3B3C1D3	11.16	6.48	72.27

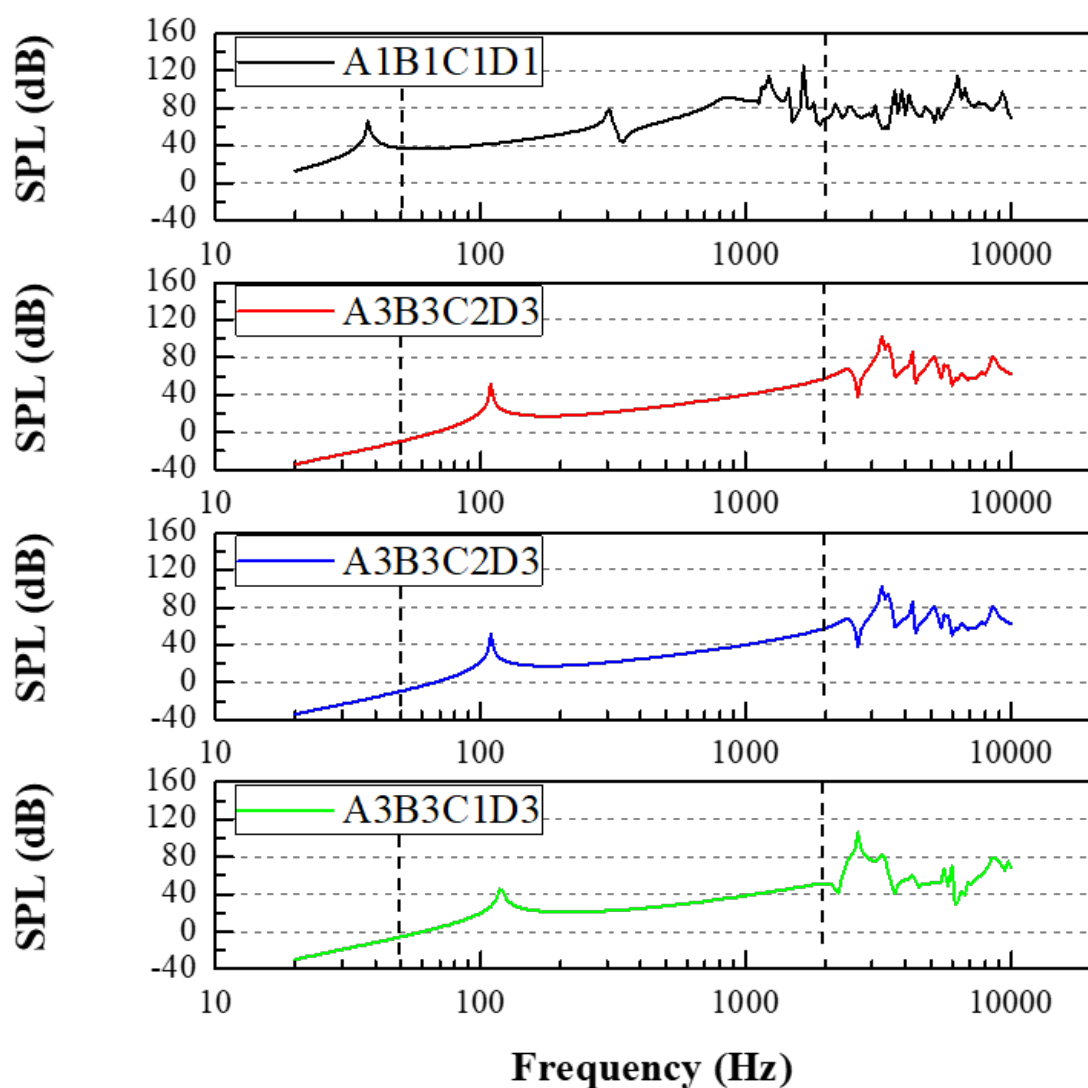


圖 7-39 50-2000Hz 最佳化組合之 SPL 曲線圖

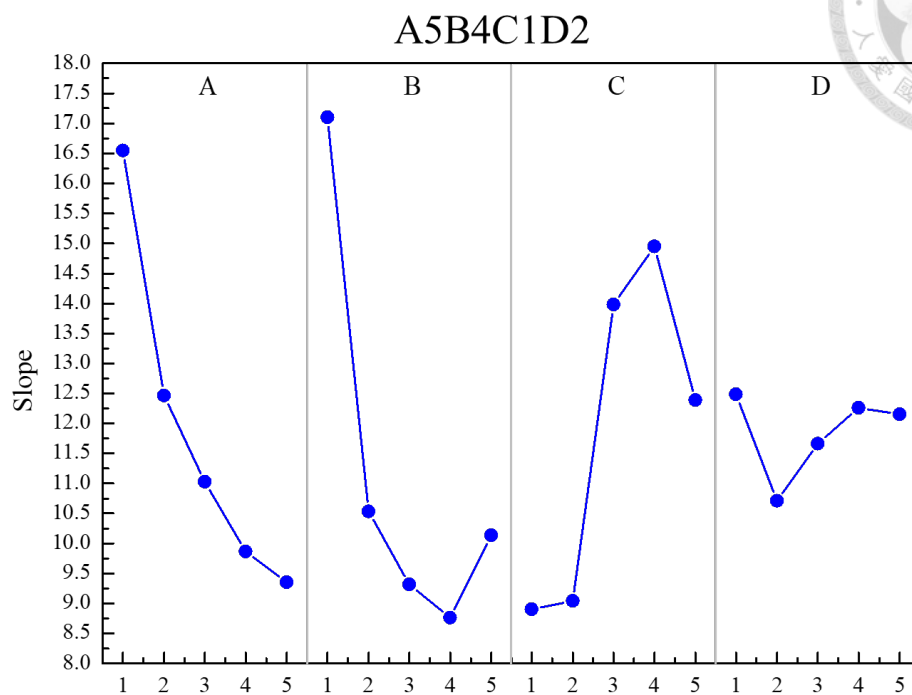


圖 7-40 僅計算頻段 100-1000Hz 斜率(1)反應圖

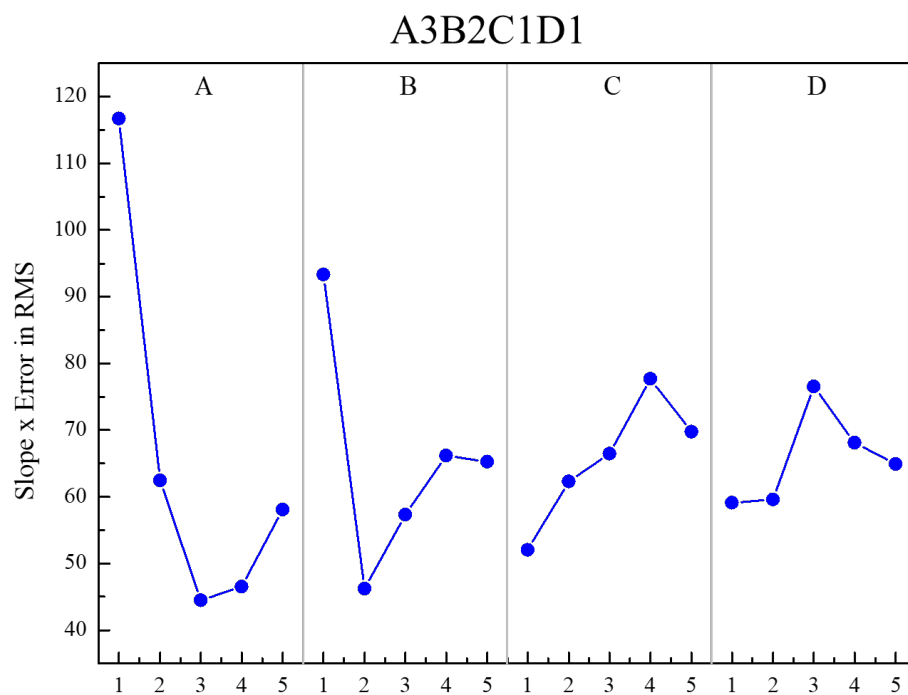


圖 7-41 計算頻段 100-1000Hz 斜率與方均根誤差之積(2)反應圖

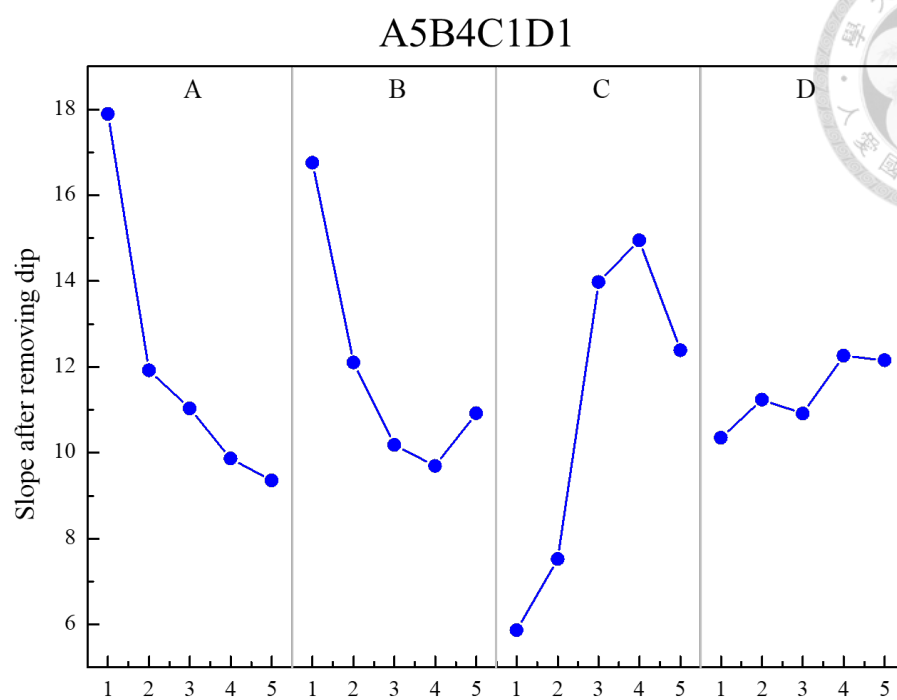


圖 7-42 計算頻段 100-1000Hz 並去除波谷(3)反應圖

Option	Slope	RMS	Slop*RMS
Origin/A1B1C1D1	21.04	6.00	126.17
(1)/A5B4C1D2	5.47	9.19	50.29
(2)/A3B2C1D1	7.41	6.07	45.02
(3)/A5B4C1D1	7.29	5.44	39.64

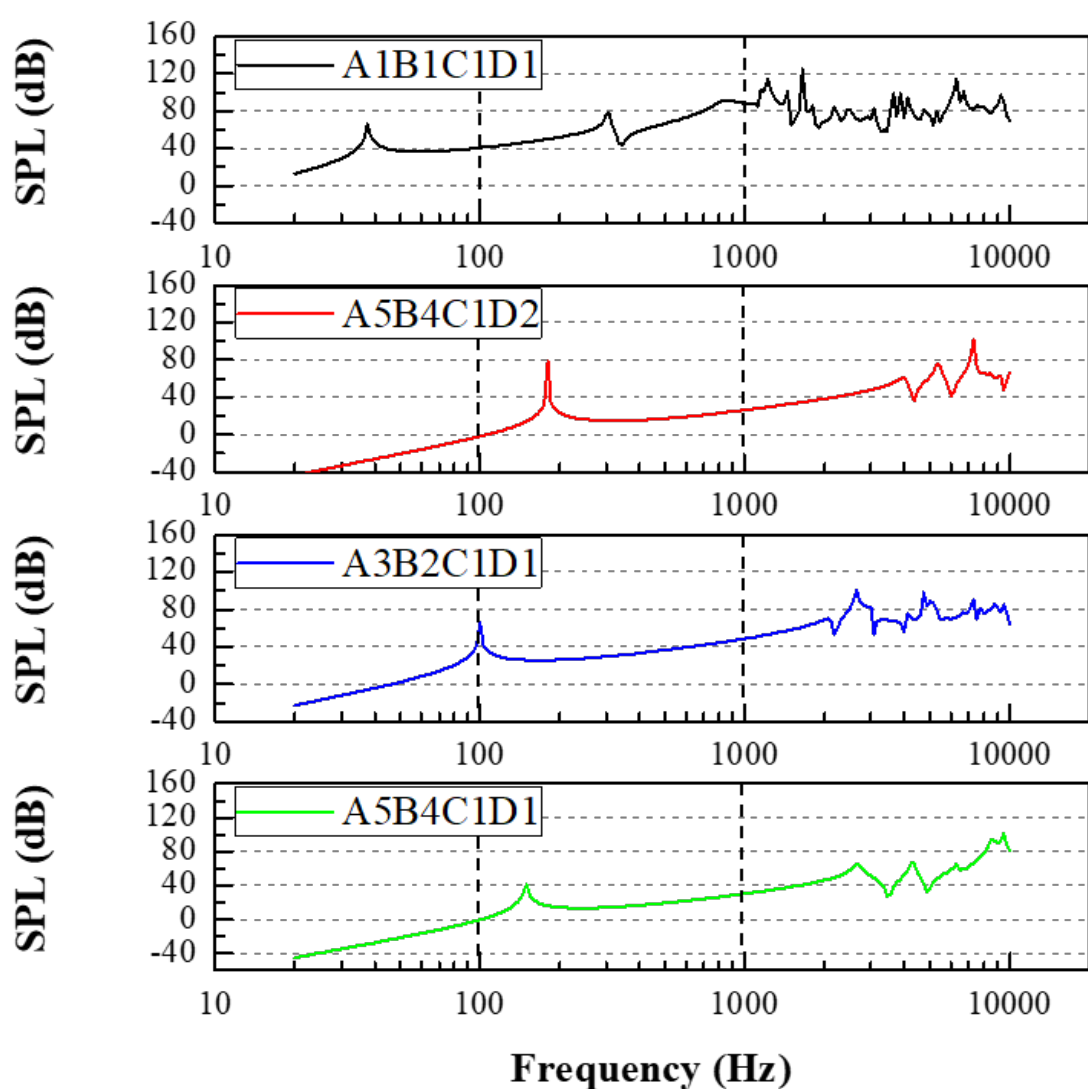


圖 7-43 100-1000Hz 最佳化組合之 SPL 曲線圖

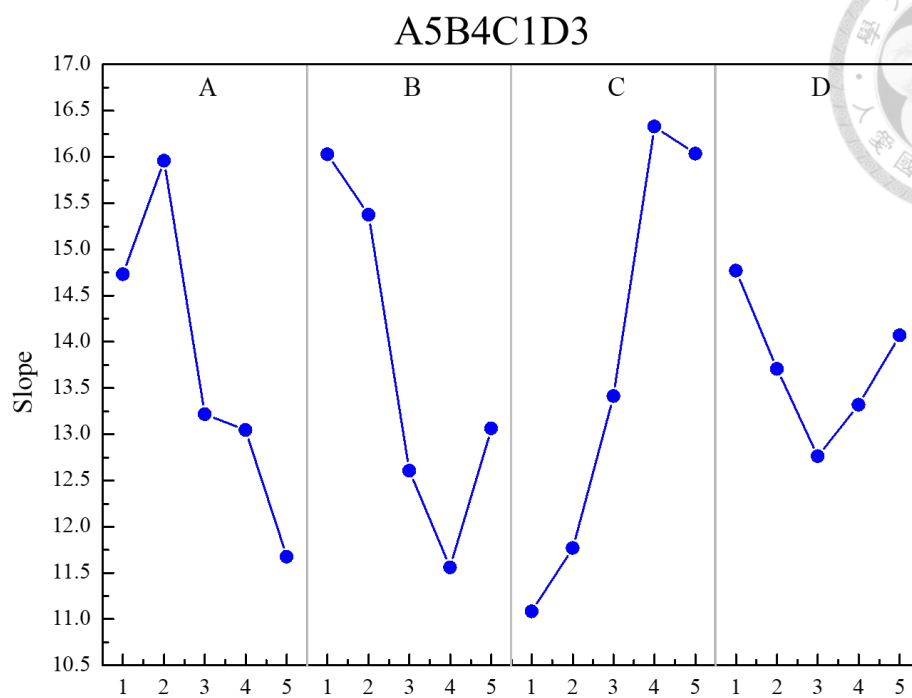


圖 7-44 僅計算頻段 100-2000Hz 斜率(1)反應圖

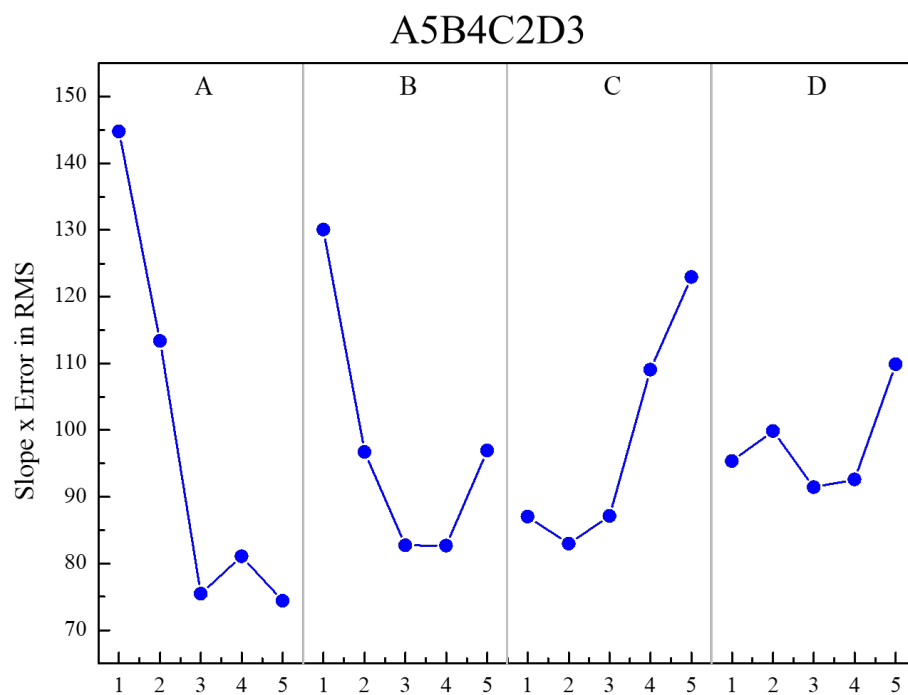


圖 7-45 計算頻段 100-2000Hz 斜率與方均根誤差之積(2)反應圖

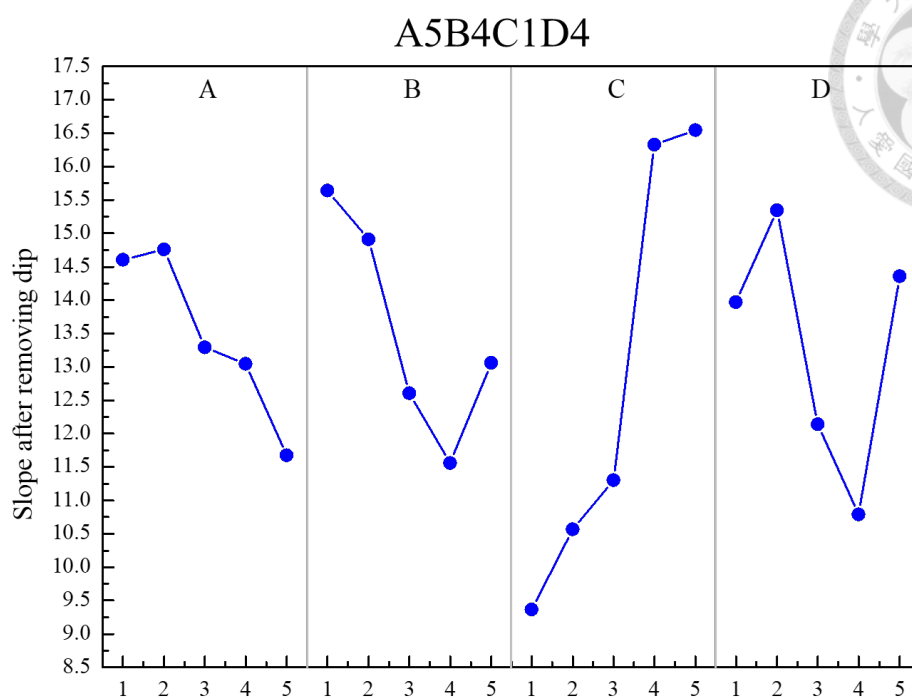


圖 7-46 計算頻段 100-2000Hz 並去除波谷(3)反應圖

Option	Slope	RMS	Slop*RMS
Origin/A1B1C1D1	21.04	6.00	126.17
(1)/A5B4C1D2	5.47	9.19	50.29
(2)/A3B2C1D1	7.41	6.07	45.02
(3)/A5B4C1D1	7.29	5.44	39.64

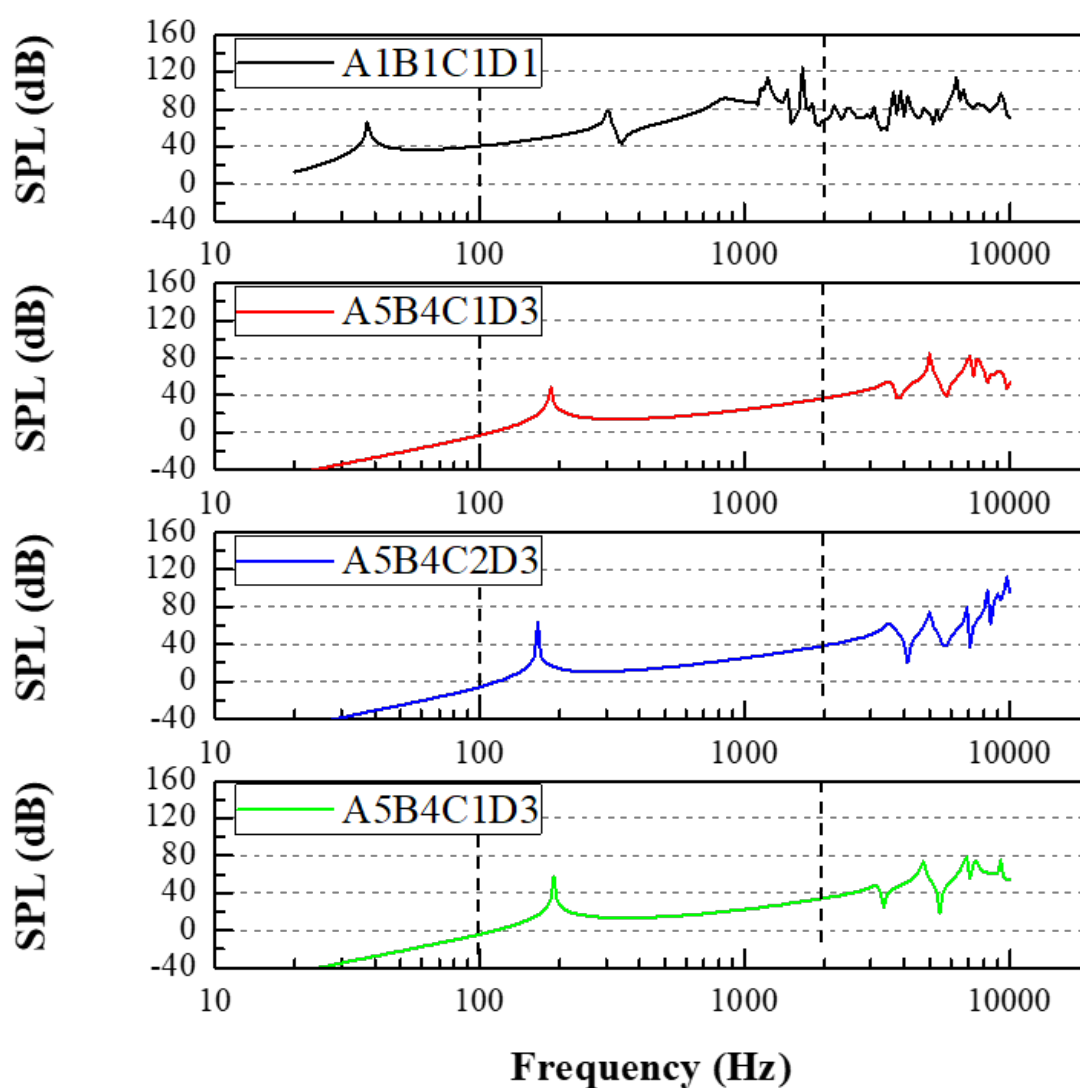


圖 7-47 100-2000Hz 最佳化組合之 SPL 曲線圖



7.2.5 最佳化串聯型雙層壓電矩形薄板複合矩型薄膜之聲學元件(D)

之聲學特性

由前一節田口法最佳化的分析結果得知，本研究選用 50-1000Hz 的頻率範圍最佳化結果，最佳化組合為 A3B2C1D1，薄膜採用靜電薄膜，其尺寸長為 25mm，寬為 30mm，厚度為 0.011mm，壓電試片使用 PSI-5A4E，長為 21.17mm，寬為 15.9mm，總厚度為 0.381mm，詳細規格見第 2.5.2 節聲學元件(D)。最佳化壓電試片尺寸為原始壓電試片的六分之一，製程方法以 CO₂ 雷射切割機低功率高速進行裁切，外框使用符合耳墊大小之壓克力，接著將各部件組合，製作出耳罩式耳機的左右單體，並安裝於耳機頭樑支架上，連接壓電片的正負極，提供左右聲道音源訊號，自製耳罩式耳機如圖 7-48 所示

如圖 7-49 所示，將最佳化結構的聲學元件(D)進行人工耳的量測，與原始聲學元件(C)比較。圖中顯示，最佳化組合在設定的頻率內，頻響曲線較原來的平緩許多，不會有忽高忽低的情況發生，並與紅色曲線，也就是有限元素法 Model-2 等效電聲學電路模擬的結果相比，也有很高的對應性，同時驗證了最佳化方法與有限元素法模擬的可行性。

對於耳機單體的量測，失真也是非常重要的一環，失真指的是輸入訊號與輸出訊號不一致，常見的有元件本身的設計、元件鬆脫、空間環境、噪音所造成的失真，本研究使用總諧波失真（Total Harmonic Distortion, THD）為主要量測的方法，當輸入的波經過系統後產生變形，使最後得到的結果不是只有單純的輸入頻率，如圖 7-50 為 THD 的失真示意，其計算公式如下

$$THD = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} V_n^2}}{V_1} \quad (7-30)$$

THD 計算時的分母為輸入頻率，分子為所有倍頻(諧波)平方總合開根號，通常以第二與第三位準的諧波佔主導。本研究透過人工耳量測聲學元件的失真率，討論最佳

化前與最佳化後的結果，如圖 7-51 所示，雖然看似最佳化前的聲學元件(C)之 THD 變動起伏較小，但在最佳化後的聲學元件(D)在約 180Hz 的活塞模態出現之前表現較差，有較嚴重的失真，但在此頻率前並非最佳化的設計頻段且已趨近於人工耳即將不靈敏的低頻範圍，觀察基頻之後的 THD，整體的失真率都比聲學元件(C)來的低。由以上描述可以得知，不論在 SPL 曲線或是失真率的聲學特性，經由田口法最佳化後的結果所製作出的聲學元件(D)皆有較佳的聲音表現，壓電材料的使用也僅僅需要原始設計元件的六分之一，同時達到節省成本和聲音品質最佳化的雙重效益。

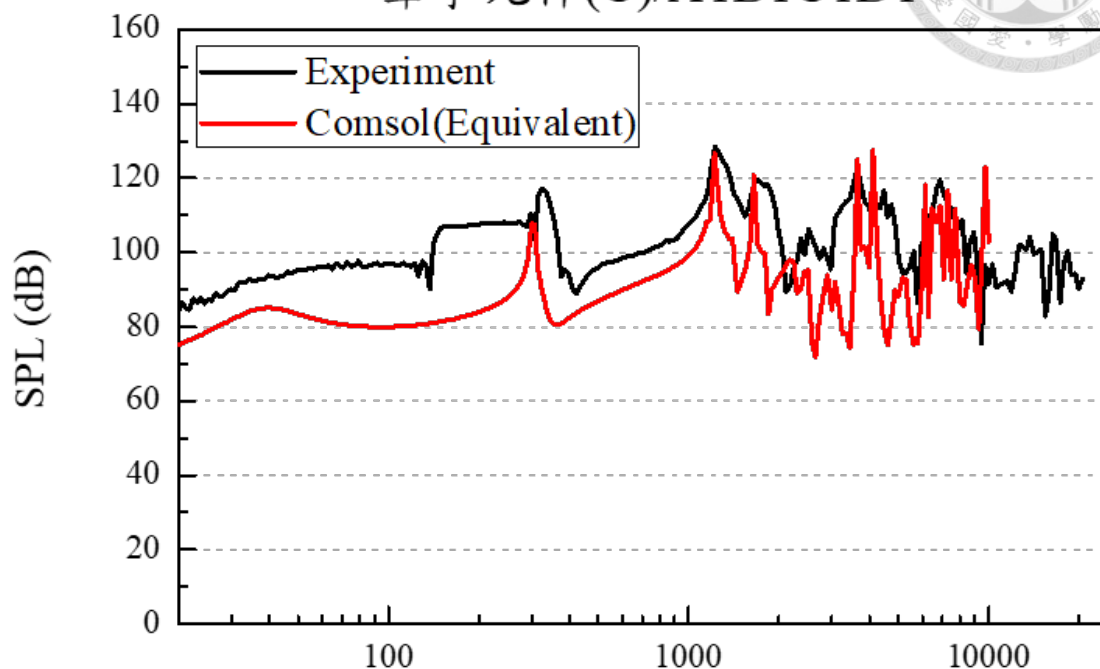
最後將最佳化後的聲學元件(D)與市售的壓電式單體進行比較，市售的單體選用京瓷公司 (Kyocera) 所開發的壓電薄膜揚聲器，如圖 7-52，此產品主要應用於電視，屬於開放音場的範疇，雖研究的聲場領域不盡相同，但利用封閉音場的人工耳量測能初步評估單體的聲音表現與性能，測量的結果如圖 7-53，黑色曲線為市售揚聲器的結果，紅色為聲學元件(D)，結果顯示，最佳化後的元件於低頻表現較好，在設定頻段內波谷出現也較少，Kyocera 單體的聲音特性主要著重於中高頻的表現。



圖 7-48 最佳化串聯型雙層壓電矩形薄板複合矩型薄膜之耳罩式耳機



聲學元件(C)/A1B1C1D1



聲學元件(D)/A3B2C1D1

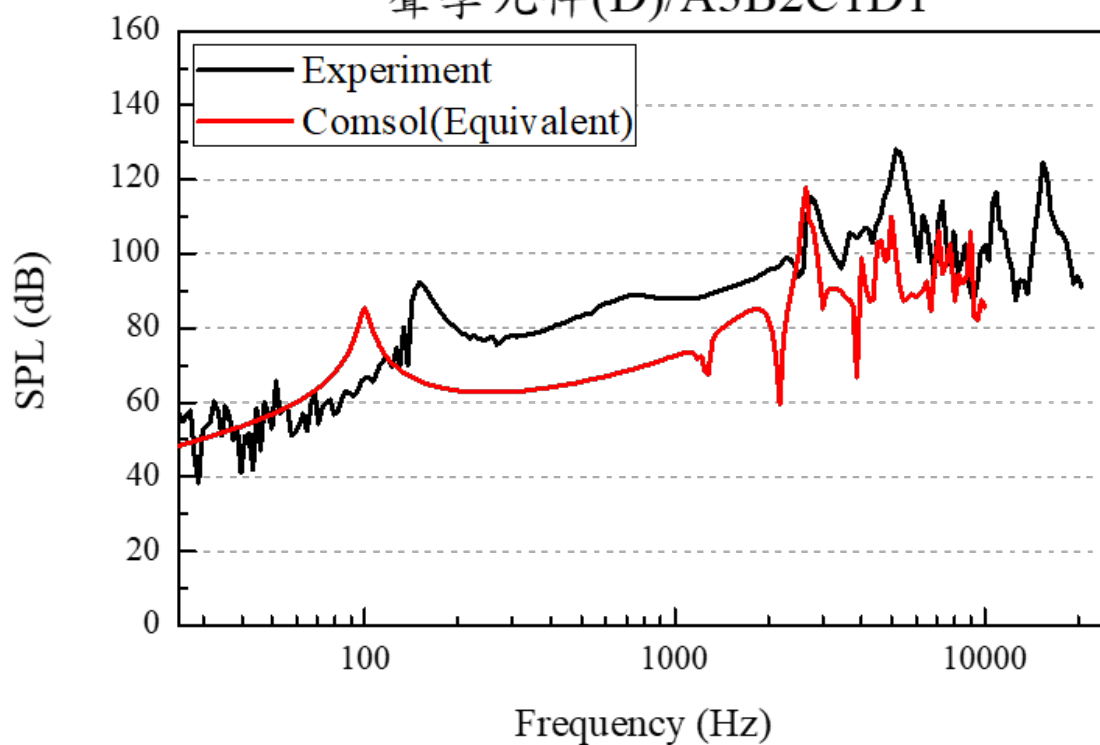


圖 7-49 最佳化前後聲學元件實驗、模擬聲壓曲線圖

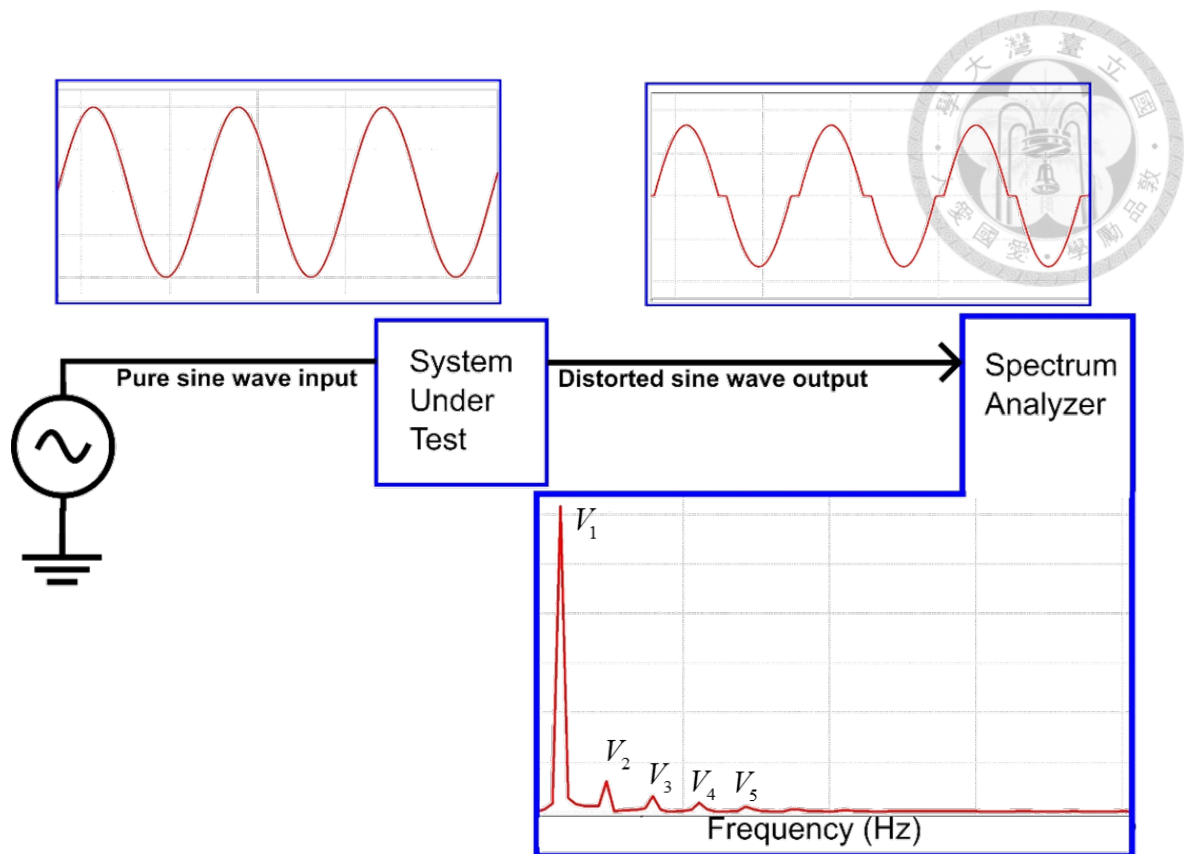


圖 7-50 總諧波失真示意圖

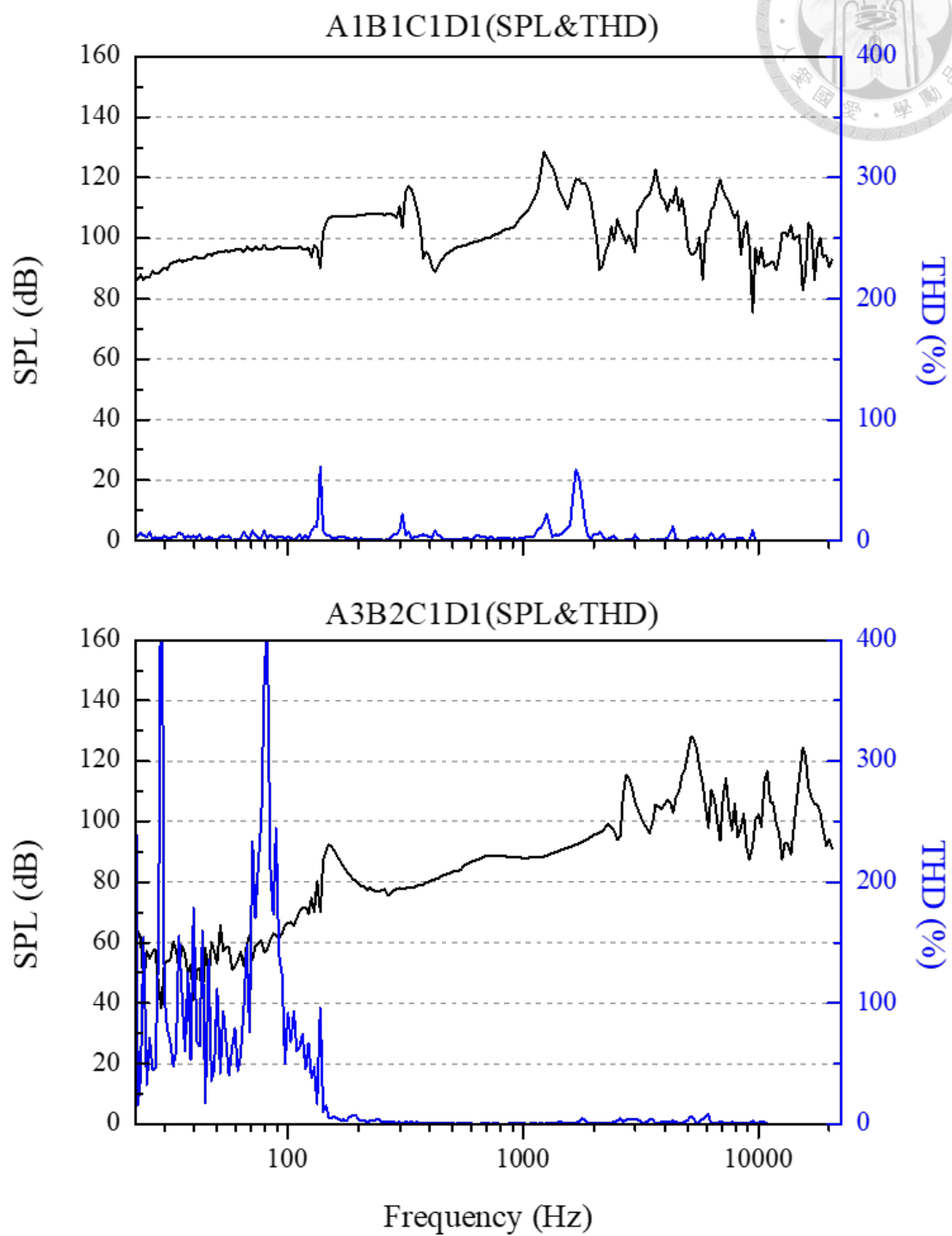


圖 7-51 最佳化前後聲學元件聲壓曲線、總諧波失真圖



圖 7-52 Kyocera 壓電薄膜揚聲器實體圖(Photo: LG Electronics, Kyocera)

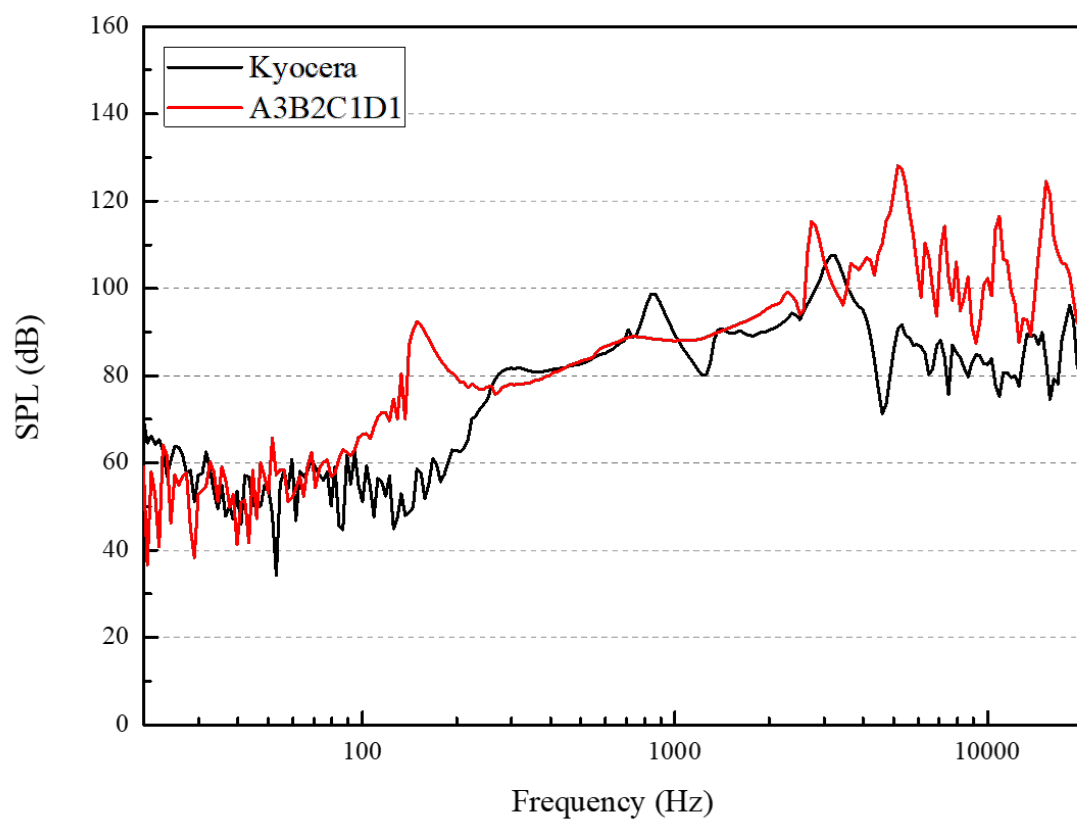


圖 7-53 最佳化聲學元件與 Kyocera 聲學元件之聲壓曲線比較圖

第八章 結論與未來展望



8.1 結論

本論文綜合理論解析、無網格法數值解析、有限元素法模擬和實驗量測，使用壓電材料作為聲學驅動元件，並複合薄膜材料，應用於耳罩式耳機。首先從振動的角度探討，分別討論薄膜與壓電陶瓷雙晶片，壓電材料利用疊加法建構矩形自由邊界的模型，計算出自然頻率與位移場模態振形，薄膜使用基本解法的無網格數值法，探討多種幾何形狀的薄膜對應之特徵頻率與模態振形，接著討論壓電複合薄膜聲學元件的振動特性，獲得聲學元件的基頻和模態振形。透過不同的實驗方法與數值模擬得到無限大障板下的自由音場聲學元件之聲壓曲線，能初步評估聲學元件的聲音表現；使用實驗量測和有限元素法的分析方式得到人耳配戴耳罩式耳機於封閉音場的聽覺感受。利用自由音場分析聲學特性針對串聯型雙層壓電矩形薄板複合矩型薄膜之聲學元件進行最佳化分析，選用田口法的最佳化方法能夠減少計算成本，並且達到聲響曲線增益的效果，設計出新型的壓電複合薄膜耳罩式耳機，本研究可以應用於新型揚聲器最佳化聲場增益特性之聲音品質的開發。以下將本研究的成果與結論整理。

1. 利用線性壓電理論、薄板理論假設，以疊加法解析自由邊界下「壓電陶瓷雙晶片」的共振頻率、面外模態振形，結果顯示理論解析與有限元素法模擬的振動特性有良好的對應性，前八個共振頻率誤差在 0.5% 以內。
2. 探討四種不同形狀的薄膜振動特性，「圓形」、「環形」和「矩形」薄膜以理論解析、無網格基本解法和有限元素法，驗證方法的可行性與準確性，共振頻率和模態振形皆有良好的對應性，無網格基本解法的結果甚至比有限元素法更近似理論解析結果，整體誤差都趨近於零。利用無網格基本解法和有限元素法計算本論文主要研究的「矩形環」薄膜，討論的共振頻率誤差不超過 0.2%，模態振形上也有高度的一致性，由此可知，無網格基本解法在雙連通問題下的環形

和具有奇異角點的矩形環都有非常好的結果，評估未來亦可應用於各種幾何形狀的薄膜結構的振動分析。

3. 針對「壓電複合薄膜」的非耦合結構振動特性，將壓電部份視為不變形的剛體，利用無網格中的基本解法計算可得到非耦合的振動結果。對於聲學最重要的就是屬於此模態形式的基頻活塞模態，整個複合元件運動行為模式是呈現活塞運動，因而能產生較大的聲壓，且通常發生在較低頻的部份，本論文在壓電圓盤複合薄膜和壓電矩形薄板複合薄膜的非耦合模態振形和自然頻率與 FEM 相比有良好的對應性。
4. 對於「壓電複合薄膜」的耦合結構振動特性。利用第三章疊加法得到的壓電面外共振頻率以及模態振形，結合第四章無網格基本解法的矩形環薄膜，可成功計算解得壓電複合薄膜的振動問題，結果與有限元素法比較，兩者的共振頻率與模態振形有很高的一致性，頻率誤差在 2.5% 以內，驗證了薄膜與壓電由於材料剛性相差甚大，只存在壓電影響薄膜，而不存在薄膜模態影響壓電平板振動的假設。
5. 本研究比較四種不同量測自由音場的方式，由結果可知，無響室量測、LPM、DPM 和有限元素模擬相互比較各個聲學元件，聲壓曲線的趨勢與量值皆有高度的一致性，可以應用於各種壓電複合薄膜的平面式振動源，不同的測量方式可以適用於不同的環境下進行聲學特性的評估，搭配 ESPI、LDV 得到的位移振形能夠作為聲學元件設計的依據。
6. 為了模擬耳機配戴時，人耳所聽見的真實感受，使用人工耳量測和有限元素法來模擬封閉音場的環境，有限元素法的分析上分為兩種模型，Model-1 具有耳殼、耳道的設計，因此可以透過求解得到聲壓於耳朵的分佈情形；Model-2 利用等效電聲學的電路模型，大幅減少建模的難度與計算區域，能夠更快速的得到聲學元件於人耳的聲音表現，結果也與人工耳量測實驗相當的吻合，可以做為產品開發評估的標準，降低實體開模的金錢成本與時間成本。

7. 本研究使用田口法的最佳化方法，透過三種處理程序設計定義對應不同的理想機制，利用模擬快速計算不同元件的頻響曲線，根據響應圖挑選出最佳組合，得到最佳特性尺寸及其他參數，成功開發聲音表現不錯的壓電複合薄膜聲學元件，結果與原先的設計相比僅需 $1/6$ 的壓電材料，就可獲得更優質的聲音表現。

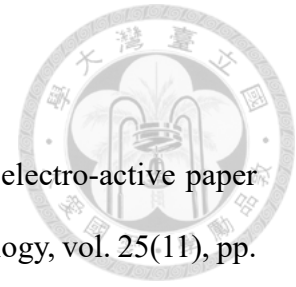
綜合以上描述可得到以下結論，傳統壓電揚聲器因受限於結構的發聲方式，使用上以單一頻率的蜂鳴器為主，而本研究使用壓電複合薄膜作為聲學元件，可以應用於耳罩式耳機與喇叭等揚聲器，並利用田口法得到最佳化尺寸，搭配無響室量測與人工耳量測，皆顯示本研究方法所製作之串聯型雙層壓電矩形薄板複合矩型薄膜聲學元件具有良好的聲壓響應曲線，能提供高音質的表現。相較於市售常見的耳機，本研究之成果與動圈式耳機相比，具有重量更輕巧，厚度更薄的優勢；與靜電式耳機相比，能夠避免複雜的電路與電源設計，本研究整體的設計製作更加精簡，期望在經過其他安全規範測試(如：聲音與電磁)、可靠度和耐久測試後，能夠作為市售耳機的另一種選擇。

8.2 未來展望

1. 探討繃膜張力的實際量值大小，使理論解析、數值方法和有限元素法計算上更有所依據，使得與實際實驗有更接近的結果，以利後續能更準確的估算複合元件的振動特性和聲學特性。
2. 改善基本解法在矩形薄膜活塞模態的奇異角點問題，和雙連通薄膜複數解所造成的虛根問題，避免求解特徵值時搜尋到錯誤的解，減少計算時間以增加計算效率。
3. 對於壓電複合薄膜的結構延伸至其他幾何形狀與結構，如壓電圓環複合橢圓形薄膜、壓電圓盤複合跑道形薄膜或壓電矩形薄板複合跑道形薄膜等，探討不同形狀對於聲場、聲壓的特性，並嘗試其他最佳化方式應用於各複合聲學元件。

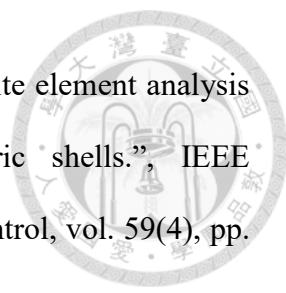
- 
5. 由電學的角度出發，透過推導電壓與位移的關係式，得到壓電的電壓-位移響應，搭配本論文所推導之位移-聲壓關係式，即可利用理論計算快速取得聲學元件的聲壓曲線。
 6. 將本研究之機械結構和聲學的理論方法轉換為電聲學形式，從壓電材料的電能轉換為機械能，再由機械能轉換至聲能，整套系統以等效電路進行研究開發，配合電路模擬軟體計算聲學相關參數。
 7. 搭配電路設計進行最佳化，利用匹配電路、前後置擴大機或是分音器等電路結構，以改善聲壓曲線，使中低音三頻聲音表現更加平衡。

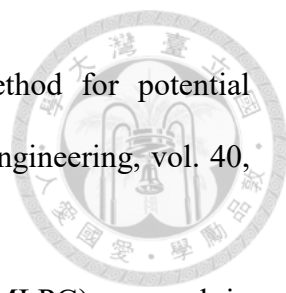
參考文獻

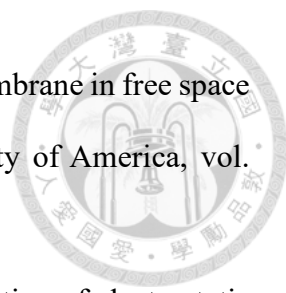


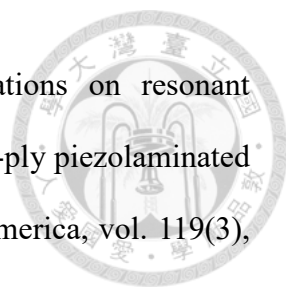
- [1] J. Kim, G.Y. Yun, J.H. Kim, J. Lee, J.H. Kim, “Piezoelectric electro-active paper (EAPap) speaker.”, *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 25(11), pp. 2763-2768, 2011.
- [2] P. M. Morse, “Acoustical Society of America, & American Institute of Physics.”, *Vibration and Sound*, vol. 468, McGraw-Hill New York, 1948.
- [3] J. Curie, a. C. P., “Development by pressure of polar electricity in hemihedral crystals with inclined faces.”, *Bull. soc. min. de France*, pp. 90-102, 1880.
- [4] W. G. Cady, “Piezoelectricity.”, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1946.
- [5] W. P. Mason, “Piezoelectric crystals and their applications to ultrasonics.”, New York: Can Nostrand, 1950.
- [6] H. F. Tiersten, “Linear piezoelectric plate vibrations: elements of the linear theory of piezoelectricity and the vibrations piezoelectric plates.”, Springer, 2013.
- [7] R. Mindlin, “High frequency vibrations of piezoelectric crystal plates.”, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 8(7), pp. 895-906, 1972.
- [8] IEEE Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control Society, in *ANSI/IEEE Std 176*, 1987.
- [9] N. N. Rogacheva, “The theory of piezoelectric shells and plates.”, CRC press, 2020.
- [10] S. Chang, B. Du, J. Lin, “Electro-elastic modeling of annular piezoceramic actuating disk transducers.”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 10(5), pp. 410-421. 1999.
- [11] 林育志, 「壓電元件於不同介質中的振動特性研究與實驗量測」, 國立臺灣大學機械工程所碩士論文, 2004。

- 
- [12] 何祥瑋，「壓電圓盤與壓電圓環共振特性的理論分析與實驗量測」，國立臺灣大學機械工程所碩士論文，2005。
- [13] C. H. Huang, "Free vibration analysis of the piezoceramic bimorph with theoretical and experimental investigation.", IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency control, vol. 52(8), pp. 1393-1403, 2005.
- [14] 黃育熙，「壓電陶瓷平板，薄殼，與雙晶片三維耦合動態特性之實驗量測，數值計算與理論解析」，國立臺灣大學機械工程所碩士論文，2009。
- [15] 許松逸，「多層壓電圓盤及圓環複合等向性材料三維振動特性之理論解析、數值分析與實驗量測」，國立臺灣科技大學機械工程所碩士論文，2018。
- [16] W. Leissa, "Vibration of plates, NASA SP-160.", US Washington. A. W. Leissa, Sound and Vibration, vol. 56, pp. 313, 1978.
- [17] D. J. Gorman, "Free vibration analysis of the completely free rectangular plate by the method of superposition.", Journal of Sound and Vibration, vol. 57(3), pp. 437-447, 1978.
- [18] C. S. Kim, P. G. Young, S. M. Dickinson, "On the flexural vibration of rectangular plates approached by using simple polynomials in the Rayleigh-Ritz method.", Journal of Sound and Vibration, vol. 143(3), pp. 379-394, 1990.
- [19] D. J. Gorman, "A general solution for the free vibration of rectangular plates with arbitrarily distributed lateral and rotational elastic edge support.", Journal of Sound and Vibration, vol. 174(4), pp. 451-459, 1994.
- [20] D. J. Gorman, "Vibration analysis of plates by the superposition method.", 1999.
- [21] 吳亦莊，「理論解析與實驗量測壓電平板的面外振動及特性探討」，國立臺灣大學機械工程所碩士論文，2009。

- 
- [22] Y. H. Huang, C. C. Ma, “Experimental measurements and finite element analysis of the coupled vibrational characteristics of piezoelectric shells.”, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency control, vol. 59(4), pp. 785-798, 2012.
- [23] 王惠儀,「應用樑函數法於壓電平板撓性邊界之振動特性分析」, 國立臺灣科技大學機械工程所碩士論文, 2019。
- [24] 陳新承,「可變剛性邊界應用於壓電平板理論之能量擷取系統」, 國立臺灣大學機械工程所碩士論文, 2021。
- [25] P. Laura, C. Rossit, S. La Malfa, “Transverse vibrations of composite, circular annular membranes: exact solution.”, Journal of Sound and Vibration, vol. 216(1), pp. 190-193, 1998
- [26] M. Jabareen, M. Eisenberger, “Free vibrations of non-homogeneous circular and annular membranes.”, Journal of Sound and Vibration, vol. 240(3), p. 409-429 , 2001.
- [27] S. S. Rao, “Vibration of continuous systems.”, New Jersey: Wiley, 2007.
- [28] R. A. Gingold, J. J. Maraghan, “Smoothed particle hydrodynamics: theory and applications to non-spherical stars.”, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 181, pp. 375-389, 1977.
- [29] T. Belystcho, Y. Lu, L. Gu, “Element free Galerkin methods.”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 37, pp. 229-256, 1994.
- [30] W. K. Liu, S. Jun, Y. F. Zhang, “Reproducing kernel particle methods.”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 20, pp. 1081-1106, 1995.

- 
- [31] Y. X. Mukherjee, S. Mukherjee, “The boundary node method for potential problems.”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, pp. 797-815, 1997.
- [32] S. N. Atluri, T. Zhu, “A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics.”, *Computational Mechanics*, vol. 22, pp.117-127, 1998.
- [33] C. S. Chen, Y. F. Rashed, M. A. Golberg, “A mesh-free method for linear diffusion equations.”, *Numerical Heat Transfer, Part B*, vol. 33, pp. 469-486, 1998.
- [34] W. Chen, “Meshfree boundary particle method applied to Helmholtz problems.”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 26(7), pp. 557-581, 2002.
- [35] V. D. Kupradze, “A method for the approximate solution of limiting problems in mathematical physics.”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 4, pp. 199- 205, 1964.
- [36] A. Karageorghis, “The method of fundamental solutions for the calculation of the eigen- values of the Helmholtz equation.”, *Applied Mathematics Letters*, vol. 14, pp. 837-842, 2001.
- [37] J. T. Chen, I. L. Chen, Y. T. Lee, “Eigensolutions of multiply connected membranes using the method of fundamental solutions.”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 29, pp. 166-174, 2004.
- [38] C. C. Tsai, et al., “The method of fundamental solutions for eigenproblems in domains with and without interior holes.”, *Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 462(2069), pp. 1443-1466, 2006.
- [39] J. Streng, “Calculation of the surface pressure on a vibrating circular stretched membrane in free space.”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 82(2), pp. 679-686, 1987.

- 
- [40] T. Mellow, L. Kärkkäinen, “On the sound field of a circular membrane in free space and an infinite baffle.”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 120(5), pp. 2460-247, 2006.
- [41] Y. H. Huang, H. Y. Chiang, “Vibrational mode and sound radiation of electrostatic speakers using circular and annular diaphragms.”, *Journal of Sound and Vibration*, vol.371, pp. 210-226, 2016.
- [42] E. N. Leith, J. Upatnieks, “Reconstructed wavefronts and communication theory.”, *JOSA*, vol. 52(10), pp. 1123-1130, 1962.
- [43] J. Butters, J. Leendertz, “Speckle pattern and holographic techniques in engineering metrology.”, *Optics Laser Technology*, vol. 3(1), pp. 26-30, 1971.
- [44] O. Lokberg, K. Hogmoen, “Use of modulated reference wave in electronic speckle pattern interferometry.”, *Journal of Physics E: Scientific Instruments*, vol. 9(10) pp. 847, 1976.
- [45] C. Wykes, “Use of electronic speckle pattern interferometry (ESPI) in the measurement of static and dynamic surface displacements.”, *Optical Engineering*, 21(3), pp. 213400, 1982.
- [46] W. C. Wang, C. H. Hwang, S. Y. Lin, “Vibration measurement by the time-averaged electronic speckle pattern interferometry methods.”, *Applied optics*, vol. 35(22), pp. 4502-4509. 1996.
- [47] 黃吉宏,「應用電子斑點干涉術探討三維壓電材料」, 國立台灣大學機械工程研究所博士論文, 1998。
- [48] 黃育熙,「壓電石英晶體之平板結構的動態特性研究」, 國立台灣大學機械工程研究所博士論文, 2013。

- 
- [49] C. C. Ma, et al., “Experimental and numerical investigations on resonant characteristics of a single-layer piezoceramic plate and a cross-ply piezolaminated composite plate.”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 119(3), pp. 1476-1486, 2006.
- [50] H. Y. Chiang, Y. H. Huang, “Experimental modeling and application of push-pull electrostatic speakers. *The Journal of the Acoustical Society of America*.”, vol. 146(4), pp. 2619-2631, 2019.
- [51] C. Wang, “Vibration of an annular membrane attached to a free, rigid core. *Journal of Sound Vibration*.”, vol. 260(4), pp. 776-782, 2003.
- [52] F. Pinto, “Analytical and experimental investigation on a vibrating annular membrane attached to a central free, rigid core. *Journal of Sound and Vibration*.”, 291(3-5), pp. 1278-1287, 2006.
- [53] H. J. Kim, W. S. Yang, K. No, “Effects of an elastic mass on frequency response characteristics of an ultra-thin piezoelectric micro-acoustic actuator.”, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 60(8), pp. 1587-1594, 2013.
- [54] 林揚中，莊沅隴，「雙層壓電圓盤複合薄膜研製近場聲學元件之耦合聲場的理論數值與實驗研究」，國立台灣科技大學機械工程實務專題報告，2016。
- [55] 江信遠，「靜電和壓電揚聲器之圓形振膜振動與聲壓研究」，國立台灣科技大學機械工程研究所博士論文，2017。
- [56] 陳冠宇，「薄膜複合壓電圓板開發近場聲學元件之理論解析、數值計算與實驗量測」，國立台灣科技大學機械工程系碩士學位論文，2019。
- [57] 張哲睿，「壓電圓環複合薄膜於聲學元件之設計開發」，國立台灣大學機械工程研究所碩士論文，2021。

- 
- [58] 林憲楊，「應用電子斑點干涉術探討三維壓電材料體及含裂紋板的振動問題」，國立臺灣大學機械工程所博士論文，1998。
- [59] R. P. Shimpi, H. G. Patel, “A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis.” *International Journal of Sound and Vibration.*”, vol. 394, pp. 545-574, 2017.
- [60] 杜功煥，朱哲民，龔秀芬，*声学基础 (上册)*. p. 3. 1981.
- [61] W. M. Leach, “Introduction to electroacoustics and audio amplifier design.”, Kendall/Hunt Publishing Company Dubuque, IA, 2003.
- [62] N. Atalla, M. A. Hamdi, R. Panneton, “Enhanced Weak Integral Formulation for the Mixed (u,p) Poroelastic Equations.”, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 109, pp 3065-3068, 2001.
- [63] 李輝煌，「田口方法--品質設計的原理與實務」，高立圖書有限公司，2000。