

國立臺灣大學工學院工程科學及海洋工程學系



碩士論文

Department of Engineering Science and Ocean Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master's Thesis

空氣耦合超音波換能器開發

Development of Air-Coupled Ultrasonic Transducers

卓政穎

Cheng-Ying Cho

指導教授：宋家驥 博士

Advisor: Chia-Chi Sung, Ph.D.

中華民國 114 年 7 月

July, 2025

誌謝



兩年的碩士生涯轉瞬即逝，回首這段充滿挑戰與收穫的旅程，我滿懷感激。本論文得以順利完成，有賴眾多師長及親友的指導與鼎力相助，於此致上最誠摯的感謝。

首先，感謝我的指導教授 宋家驥博士，在研究上給予許多指導與啟發，且總是不厭其煩地與我討論，使我獲益良多。也感謝老師課餘時間邀請我和老師們一起打球，使我在努力研究之餘有抒發壓力的快樂時光。

其次，感謝振動與超音波實驗室的學長 裕峰、柏宏、奕忠和華丰涼祺，給予我許多照顧與指導，在我研究過程中提供新想法與建議，讓我的研究內容更加紮實豐富；我們也時常一同聚餐、玩桌遊、觀看賽事轉播以及玩荒野亂鬥，感謝各位學長，使我度過充滿歡笑且充實的碩士生活。

此外，感謝父母與小黑給我無限的支持與鼓勵，使我能無後顧之憂的投入學術研究，家是最好的避風港；感謝郁潔的陪伴與支持，為我在高壓嚴謹的碩士研究生生活中注入美麗的色彩，未來將會繼續相互扶持，一起成長！

最後，感謝所有我遇見的人，一切的經歷都將成為成長的軌跡，讓我更有自信面對未來的挑戰。

中文摘要



本論文針對 50kHz 壓電超音波換能器(Piezoelectric Ultrasonic Transducer, PUT)進行研究，選用 PZT 壓電圓片作為核心元件，以有限元素模擬、理論方程式與實驗驗證，系統性探討 PZT 之阻抗頻譜、聲束指向性及軸向聲壓衰減特性。

本研究建立之阻抗頻譜模擬與實驗量測值平均誤差僅 1.19%，建立之複合振動模態指向性模型相較活塞振動理論模型更能反映實際聲場分布，軸向聲壓衰減模型與理論衰減曲線擬合 $R^2 > 0.99$ ，顯示本研究之模型可準確描述聲波在空氣中的衰減行為。

此外，本研究亦對撓曲式超音波換能器(Flexural Ultrasonic Transducer, FUT)進行模擬分析，透過與文獻數據比對，成功驗證 FUT 模型在阻抗、振動模態與指向性上的準確性。基於此模型，本研究進一步進行 FUT 外殼尺寸變化參數研究，確定 FUT 之第一共振頻率主要由其外殼頂板半徑與厚度主導，為頻率設計提供明確的物理依據。

綜上所述，本論文成功整合多項物理特性模擬與驗證方法，為兩種空氣耦合超音波換能器提供精確且系統性的分析與預測架構，可有效縮短開發時程與實驗成本。

關鍵字：空氣耦合超音波換能器、壓電材料、有限元素模擬、阻抗頻譜、振動模態、聲束指向性

Abstract



This study systematically investigates a 50 kHz piezoelectric ultrasonic transducer (PUT), using a PZT piezoelectric disk as the core element. Through finite element simulation, theoretical modeling, and experimental verification, the impedance spectrum, beam directivity, and axial sound pressure attenuation characteristics are thoroughly analyzed.

The simulation and experimental results of impedance spectra show excellent agreement, with an average error of only 1.19%. Additionally, the established compound vibration-mode directivity model demonstrates improved accuracy compared to the traditional piston vibration theory model. The axial sound pressure attenuation model fits exceptionally well with theoretical attenuation curves ($R^2 > 0.99$), confirming that the proposed model accurately represents ultrasonic attenuation in air.

Furthermore, this research conducts a simulation-based study on flexural ultrasonic transducers (FUT). The accuracy of the FUT model in terms of impedance, vibration modes, and directivity is successfully verified against existing literature. Based on this validated model, a parametric study on FUT housing dimensions is conducted, indicating that the fundamental resonance frequency is primarily governed by the radius and thickness of its top plate, providing clear physical guidelines for frequency-oriented design.

In summary, this thesis successfully integrates multiphysics simulation and experimental verification, offering precise and systematic analytical frameworks for both PUT and FUT. These results effectively reduce development time and experimental costs.

Keywords: Air-coupled ultrasonic transducer, Piezoelectric material, Finite element simulation, Impedance spectrum, Vibration mode, Sound beam directivity

目次



誌謝	i
中文摘要	ii
Abstract.....	iii
目次	iv
圖次	vi
表次	viii
Chapter 1 緒論	1
1.1 研究動機與目的	1
1.2 論文架構	2
Chapter 2 背景理論與文獻回顧	3
2.1 壓電材料	3
2.1.1 壓電效應	3
2.1.2 阻抗頻譜與振動模態	5
2.2 空氣耦合超音波換能器	7
2.2.1 壓電超音波換能器 (PUT).....	7
2.2.2 撓曲式超音波換能器 (FUT).....	13
2.3 超音波衰減理論	15
Chapter 3 研究方法與架構	16
3.1 研究流程	16
3.1.1 PUT 研究流程.....	17
3.1.2 FUT 研究流程.....	17
3.2 有限元素模型建構	17
3.2.1 PZT 元件模型設定	17
3.2.2 FUT 參考模型設定.....	19
3.2.3 FUT 尺寸參數變化模型.....	20
3.3 PZT 實驗量測架構與儀器	23
3.3.1 阻抗頻譜	23
3.3.2 軸向聲壓衰減	24

3.4 理論模型應用方法	26
3.4.1 活塞振動理論	26
3.4.2 聲波衰減理論	26
3.4.3 薄板振動理論	27
Chapter 4 PZT 特性分析與模型驗證	27
4.1 阻抗頻譜與振動模態	27
4.2 聲束指向性	29
4.3 軸向聲壓衰減	31
Chapter 5 FUT 模型與參數分析	34
5.1 FUT 參考模型驗證與探討	34
5.1.1 阻抗頻譜模型驗證	34
5.1.2 振動模態模型驗證	35
5.1.3 聲場模型探討與驗證	36
5.2 尺寸變化參數模型	38
5.2.1 尺寸參數變動設計	38
5.2.2 第一共振頻率與尺寸變化關係	39
5.2.3 參數模型與薄板理論	41
Chapter 6 結論與未來展望	42
6.1 結論	42
6.2 未來展望	43
參考文獻	44

圖次



圖 2- 1 Voigt 編號在卡氏座標中的方向	4
圖 2- 2 共振峰 f_m 與反共振峰 f_n	5
圖 2- 3 壓電圓片阻抗頻譜與振動模態示意圖	6
圖 2- 4 PUT 內部構造與核心振動元件	7
圖 2- 5 振鈴效應示意圖	8
圖 2- 6 PZT 與空氣介質示意圖	9
圖 2- 7 波束指向性	10
圖 2- 8 活塞理論推導	10
圖 2- 9 FUT 內部構造與核心振動元件	13
圖 3- 1 研究流程說明	16
圖 3- 2 PZT 建模與網格設定示意圖	17
圖 3- 3 PZT 聲場模型建模流程示意圖	18
圖 3- 4 FUT 尺寸參數[9]	19
圖 3- 5 本研究參考[9]建立 1:1 之 FUT 參考模型	19
圖 3- 6 FUT 聲場模型建模流程示意圖	20
圖 3- 7 FUT 初始外殼結構示意圖	21
圖 3- 8 FUT 初始外殼模型與構造示意圖	21
圖 3- 9 FUT 薄板(0,0)模態(第一模態)示意圖	21
圖 3- 10 FUT 外殼尺寸變化的四種方法示意圖	22
圖 3- 11 本研究選用之 PZT 壓電圓片	23
圖 3- 12 ZX80A 阻抗分析儀	23
圖 3- 13 PZT 軸向聲壓量測實驗架構	24
圖 3- 14 Tektronix AFG 2021 函數產生器	24
圖 3- 15 PCB 378C01 麥克風	25
圖 3- 16 PCB 378C01 之頻率響應曲線	25
圖 3- 17 PCB 48211 感測器訊號調節	25
圖 3- 18 Keysight DSOX3034A 示波器	26
圖 4- 1 PZT 阻抗頻譜模型	27

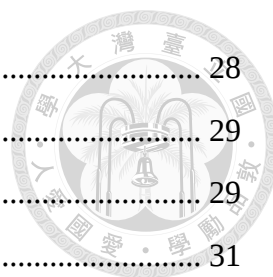


圖 4-2 PZT 在 50kHz 時的振動模態	28
圖 4-3 PZT 在 50kHz 時的聲場輻射模型	29
圖 4-4 波束指向性與活塞理論指向性模型比較	29
圖 4-5 PZT 軸向聲壓衰減模型	31
圖 4-6 軸向聲壓衰減模型與實驗量測值比較	31
圖 4-7 衰減理論公式擬合模擬與實驗結果	32
圖 5-1 (左)阻抗頻譜模擬與(右)文獻[9]數據對照圖	34
圖 5-2 (左)振動模態模擬與(右)文獻[9]模態比較	35
圖 5-3 FUT 在 20kHz 與 97kHz 時的聲場模型	36
圖 5-4 FUT 在 20kHz 與 97kHz 時的指向性模型	36
圖 5-5 第二模態指向性模型與文獻[9]	37
圖 5-6 FUT 構造說明(側視圖)	38
圖 5-7 方法 A 之頻率變化趨勢	39
圖 5-8 方法 B 之頻率變化趨勢	39
圖 5-9 方法 C 之頻率變化趨勢	40
圖 5-10 方法 D 之頻率變化趨勢	40

表次



表 2-1 壓電方程式符號.....	3
表 2-2 Voigt 編號簡化規則.....	4
表 2-3 聲阻抗公式符號.....	8
表 2-4 反射係數與透射係數符號說明.....	9
表 2-5 活塞理論符號表.....	11
表 2-6 薄板理論方程式與撓曲剛度符號表.....	14
表 2-7 模態方程式符號表.....	14
表 3-1 FUT 外殼尺寸變化的四種方法.....	22
表 4-1 PZT 各共振點頻率值.....	28
表 4-2 指向性模型與活塞理論指向性差異.....	30
表 4-3 模擬聲壓值與實驗量測值比較.....	32
表 4-4 擬合參數比較.....	32
表 4-5 空氣吸收係數 α 比較.....	33
表 5-1 振點頻率模擬值與文獻數據比較.....	34
表 5-2 指向性參數比較.....	37



Chapter 1 緒論

1.1 研究動機與目的

超音波技術廣泛應用於非破壞性結構檢測、半導體量測、倒車雷達、醫療影像以及海洋探測等領域，其感測系統核心為超音波換能器。本研究著重探討壓電超音波換能器，利用壓電效應達成電能與機械能的雙向轉換，進行訊號發射與接收。

由於超音波在空氣中衰減迅速，過去相關研究多聚焦於固體或液體耦合換能器(如結構無損檢測儀、水聽器)。隨著工業自動化與無人系統(如自駕車、機器人、無人機)對非接觸式距離感測需求增長，空氣耦合超音波換能器的開發已成為當前重要研究方向。

然而，空氣耦合換能器的開發面臨諸多挑戰。傳統研發流程多依賴反覆的實作與量測，開發週期長且實驗成本高昂。此外，理論層面(如活塞振動理論)可能因其理想化的假設，而無法精確描述元件所產生的真實聲場。另一方面，對於結構較為複雜的 FUT，其外殼幾何尺寸與共振頻率之間的物理關係尚待系統性的歸納。為因應上述挑戰，本論文旨在整合有限元素模擬、實驗量測與理論模型，建立一套系統化的分析與設計方法。具體研究目的由換能器種類區分如下：

1. PUT：建立一高精度的有限元素模型，並透過阻抗頻譜、聲束指向性與軸向聲壓衰減三方面的實驗與理論進行交叉驗證，以期能更真實地反映其物理特性，並彌補傳統活塞理論的不足。
2. FUT：首先建立一經驗證、高準確度的 FUT 有限元素模型。以此為基礎，進一步進行系統性的外殼尺寸參數研究，以歸納出其幾何結構與共振頻率之間的明確物理關係，為 FUT 的頻率設計提供可靠的依據。

最終目標為將上述研究成果整合為適用於空氣耦合換能器的分析與預測架構，以期能有效縮短未來相關元件的開發時程與實驗成本。



1.2 論文架構

Chapter 1 緒論

此章節闡述研究背景與動機，並提供本論文後續章節之內容簡介。

Chapter 2 背景理論與文獻回顧

此章節旨在介紹與本研究相關的理論基礎與文獻回顧。其中包含壓電材料、壓電效應、阻抗頻譜與振動模態的定義；接著詳細兩種空氣耦合超音波換能器之構造、運作原理與相關理論；如活塞理論、薄板振動理論與超音波的衰減理論。

Chapter 3 研究方法與架構

此章節詳細說明本論文進行研究的方法與過程順序。首先以流程圖展現 PUT 與 FUT 的個別研究步驟，並敘述如何在 COMSOL 中建構有限元素模型。此外，本章介紹本論文中 PZT 聲壓實驗量測架構，包含所使用的儀器與量測方法。最後說明如何應用前一章的理論模型與本研究建立之實驗與有限元素模型進行驗證。

Chapter 4 PZT 特性分析與模型驗證

此章節聚焦於 PUT 內部之核心元件 PZT，並透過實驗與理論模型的雙重驗證，證明本研究建構之有限元素模型的準確性。主要分析內容包含 PZT 之阻抗頻譜、振動模態、聲束指向性與軸向聲壓衰減。

Chapter 5 FUT 模型與參數分析

此章節聚焦於 FUT 的模擬分析，首先依據參考文獻設計 1:1 之 FUT 有限元素參考模型，並與文獻數據進行詳細驗證(包含阻抗、模態與指向性均與文獻數據高度吻合)，以此基礎進一步建立尺寸變化參數模型，透過系統性地改變 FUT 外殼的幾何尺寸，探討其對第一共振頻率的影響。

Chapter 6 結論與未來展望

此章為全文的總結，精要歸納前述第四章與第五章之研究成果與貢獻，並基於本論文現有成果，提出數個具體且具深度的未來研究方向，為後續研究提供參考。

Chapter 2 背景理論與文獻回顧



2.1 壓電材料

在 1880 年，Pierre Curie 與 Jacques Curie 在進行晶體實驗時，發現石英(Quartz)與電氣石(Tourmaline)等結構非對稱之晶體材料受應力作用時，其晶體表面會產生電荷，且當應力方向相反時電荷極性也會隨之相反，此現象稱為壓電效應(Piezoelectric effect)。1951 年，東京工業大學的物理學家 Yutaka Takagi、Gen Shirane 與 Etsuro Sawaguchi 合成 PZT(銻鈦酸鉛)壓電陶瓷材料[1]，優異的壓電性能與耐受溫度使其廣泛應用於超音波換能器、加速度規與壓力感測器等工業儀器。

2.1.1 壓電效應

當壓電材料受應力作用時，其內部晶格產生形變造成電偶極距變化進而產生電位差，此現象稱為正壓電效應；反之當壓電材料受電場作用時，造成其電偶極距變化進而產生形變，此現象則稱之逆壓電效應，上述現象可由壓電方程式進行描述，如(式 2-1)與(式 2-2)所示，各參數物理意義如表 2-1。

$$D_i = d_{ikl}T_{kl} + \epsilon_{ik}^T E_k \quad (\text{式 2-1})$$

$$S_{ij} = s_{ijkl}^E T_{kl} + d_{kij} E_k \quad (\text{式 2-2})$$

表 2-1 壓電方程式符號

符號	物理意義
D_i 電位移向量	材料中單位面積所攜帶的電荷密度分量
d_{ikl}, d_{kij} 壓電係數張量	機電轉換的耦合係數
T_{kl} 應力張量	作用於材料的機械應力
ϵ_{ik}^T 介電常數張量	材料在機械應力固定時的介電特性
E_k 電場向量	外加於材料的電場強度
S_{ij} 應變張量	材料因機械或電場作用而產生的變形
s_{ijkl}^E 順性係數張量	材料在電場固定時的應力應變關係



$$D_i = d_{ij}T_j + \epsilon_{ik}^T E_k \quad (\text{式 2-3})$$

$$S_{ij} = s_{ij}^E T_j + d_{jk}^t E_k \quad (\text{式 2-4})$$

由於應力與應變張量具對稱性，可將剪切分量合併，因此上述壓電方程式可採用 Voigt notation 簡化表示為(式 2-3)與(式 2-4)其編號規則(圖 2-1)與表 2-2。

表 2-2 Voigt 編號簡化規則

Tensor Index	Voigt Index
11	1
22	2
33	3
23, 32	4
13, 31	5
12, 21	6

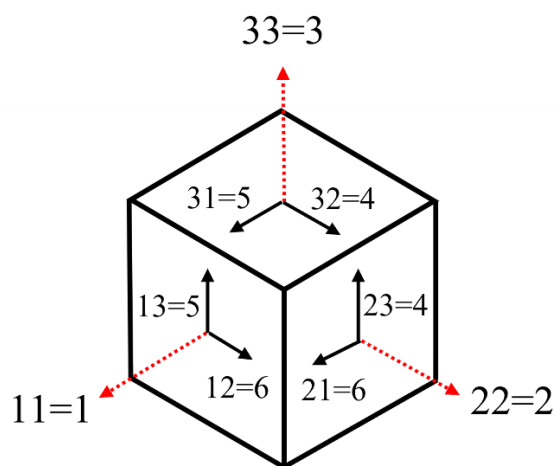


圖 2-1 Voigt 編號在卡氏座標中的方向

壓電方程式以 Voigt 形式合併後可表述為矩陣式如(式 2-5)與(式 2-6)，便於 FEA 軟體進行壓電模擬求解，其矩陣展開式如(式 2-7)與(式 2-8)。



$$D = [\epsilon^T]E + [d]T \quad (\text{式 2-5})$$

$$S = [d]^t E + [s^E]T \quad (\text{式 2-6})$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^T & \epsilon_{12}^T & \epsilon_{13}^T \\ \epsilon_{21}^T & \epsilon_{22}^T & \epsilon_{23}^T \\ \epsilon_{31}^T & \epsilon_{32}^T & \epsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} \quad (\text{式 2-7})$$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \\ d_{14} & d_{24} & d_{34} \\ d_{15} & d_{25} & d_{35} \\ d_{16} & d_{26} & d_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & s_{14}^E & s_{15}^E & s_{16}^E \\ s_{21}^E & s_{22}^E & s_{23}^E & s_{24}^E & s_{25}^E & s_{26}^E \\ s_{31}^E & s_{32}^E & s_{33}^E & s_{34}^E & s_{35}^E & s_{36}^E \\ s_{41}^E & s_{42}^E & s_{43}^E & s_{44}^E & s_{45}^E & s_{46}^E \\ s_{51}^E & s_{52}^E & s_{53}^E & s_{54}^E & s_{55}^E & s_{56}^E \\ s_{61}^E & s_{62}^E & s_{63}^E & s_{64}^E & s_{65}^E & s_{66}^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} \quad (\text{式 2-8})$$

2.1.2 阻抗頻譜與振動模態

壓電材料受交流電場作用時會因逆壓電效應產生振動。此電機耦合特性會反映於其電阻抗(Electrical Impedance)。當交流電場頻率接近材料自然頻率時，其阻抗值會產生急劇變化，形成共振峰(Resonance)與反共振峰(Anti-Resonance)，此阻抗隨頻率變化之關係圖譜，稱為阻抗頻譜(如圖 2-2)。

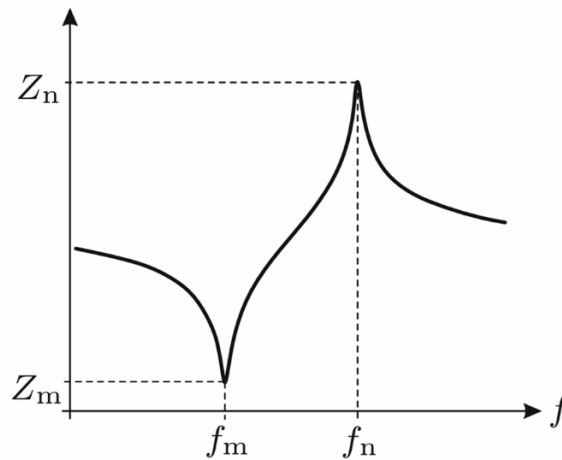


圖 2-2 共振峰 f_m 與反共振峰 f_n

阻抗用於描述PZT對交流電場的阻礙作用，定義為電壓與電流相量(Phasor)之比，單位為 Ω 歐姆。其中 ϕ_V 與 ϕ_I 分別代表電壓與電流相量之相位角， ω 代表交流電頻率(式 2-9)。在 PZT 的阻抗頻譜中，縱軸以阻抗幅值表示(式 2-10)。

$$Z(j\omega) = \frac{V(j\omega)}{I(j\omega)} = \frac{Ve^{j\phi_V}}{Ie^{j\phi_I}} = \frac{V}{I} e^{j(\phi_V - \phi_I)} \quad (\text{式 2-9})$$

$$|Z(j\omega)| = \left| \frac{Ve^{j\phi_V}}{Ie^{j\phi_I}} \right| = \frac{V}{I} \quad (\text{式 2-10})$$

阻抗頻譜中的各共振峰對應各個振動模態(Vibration Modes)，本研究針對圓片狀(Disk)之 PZT 進行阻抗頻譜分析，圖 2-3 為直徑 $d=30\text{mm}$, 厚度 $t=2\text{mm}$ 之 PZT 之阻抗頻譜與振動模態示意圖[2]，低頻共振點時(70kHz)，PZT 圓片振動模態主要呈徑向特徵(Radial Mode)。隨著頻率不斷增大，開始呈現徑向與厚度的複合模態(Coupled Mode)。最終達特定頻率時，其共振點(1MHz)呈厚度模態(Thickness Mode)，此模態於阻抗頻譜中通常為全局極小值，對應能量高度集中之共振現象。

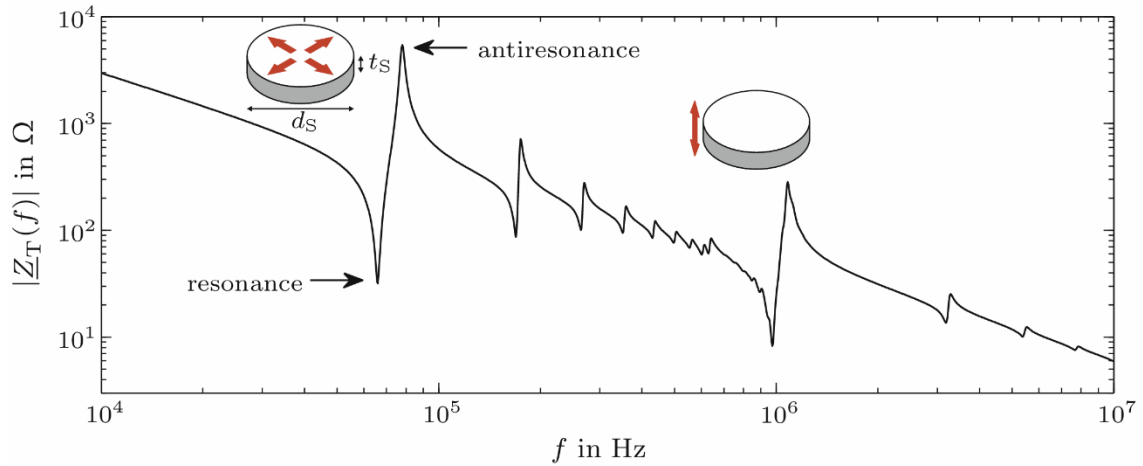


圖 2-3 壓電圓片阻抗頻譜與振動模態示意圖

理論上，厚度模態能更有效的進行軸向聲波的輻射，然因厚度模態頻率遠高於第一階共振頻率(First Mode)，於空氣中將遭遇嚴重的能量衰減(超音波衰減機制詳見第 2.3 節)。此外，第一共振模態阻抗值通常為次低的全局極小值，亦具良好換能效率。因此，綜合考量能量衰減、換能效率與實際量測需求，空氣耦合超音波換能器多以第一階共振模態為工作頻率，以在合理的量測距離內獲得足夠的聲壓輸出。



2.2 空氣耦合超音波換能器

本研究針對 PUT 與 FUT 兩種空氣耦合超音波換能器進行分析，因此本章節將以數學理論方程式詳細描述兩者的振動原理，並介紹其內部構造。

2.2.1 壓電超音波換能器 (PUT)

PUT (Piezoelectric Ultrasonic Transducer) 主要應用於液位偵測、超音波成像、半導體薄膜厚度量測領域，其波束指向性較高，因此利於進行精密的量測。其構造由外殼、導線、背膠層、PZT 以及聲阻抗匹配層組成(圖 2- 4)。其中，背膠層 (Backing Layer) 用於降低振鈴效應(Ringing Effect)，抑制回波訊號的殘餘響應；PZT 為核心振動元件，用於進行訊號的發射與接收；聲阻抗匹配(Matching Layer)層用於改善 PZT 與空氣之間，聲阻抗嚴重失配的問題。後續將針對振鈴效應及聲阻抗進行理論說明。

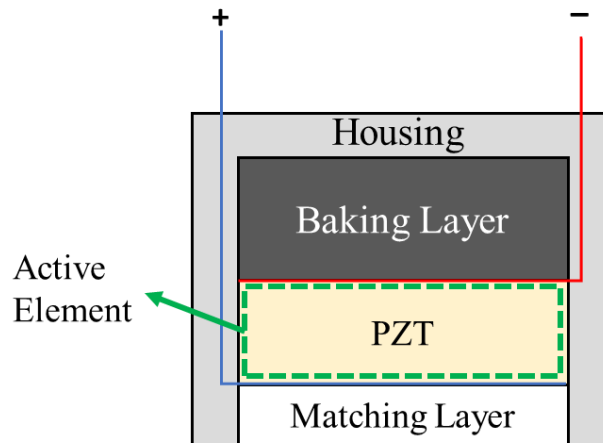


圖 2- 4 PUT 內部構造與核心振動元件

換能器利用超音波發射時間與回波接收時間差進行距離計算(式 2- 11)，此方法稱為時差法(Time of Flight, ToF)。其中，D 為換能器與目標物距離；T 為空氣溫度；t 為聲波發射與接收時間差。由於接收訊號為發射至目標物後，再反射回換能器之訊號，因此時間 t 在計算過程中需以一半長進行計算。

$$D = (334.1 + 0.6T) \times \frac{t}{2} \quad (\text{式 2- 11})$$

換能器利用 ToF 進行距離量測時，使用脈衝交流電激發換能器使其產生瞬態振動，此振動訊號並不會立即消失，而是隨時間逐步衰減(圖 2-5)，此現象稱為振鈴效應。若回波在振鈴效應消失前就抵達換能器，將造成回波訊號無法辨識，導致無法進行距離量測。因此需使用高阻尼材料(背膠層)貼附於 PZT 背側以縮短衰減(Ring-Down)時間[3]。

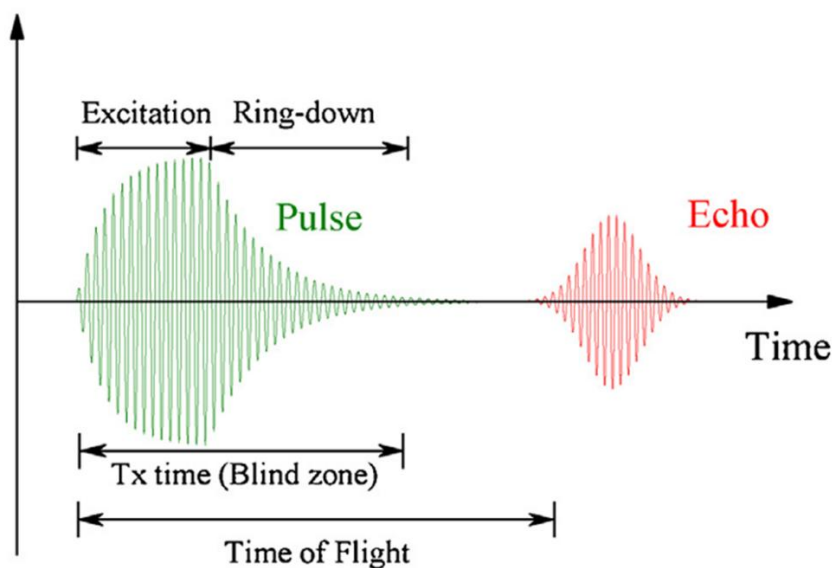


圖 2-5 振鈴效應示意圖

不同材料皆有不同聲阻抗(Acoustic Impedance)，其用於描述不同介質阻礙聲波傳遞能力的物理量，其計算方式為介質聲速與介質密度之積(式 2- 12)，單位 Rayl，其定義為 $kg/(m^2 \cdot s)$ 。各符號定義如表 2- 3。

$$Z = \rho \times c \quad (\text{式 2- 12})$$

表 2- 3 聲阻抗公式符號

符號	物理意義
Z	介質聲阻抗
ρ	介質密度
c	介質聲速



空氣耦合超音波換能器的最大挑戰為 PZT 與空氣聲阻抗不匹配，此現象造成 PZT 發射之超音波能量嚴重反射，無法透射至空氣介質中，(圖 2- 6)為 PZT 與空氣介質示意圖，其中 Z_p 為 PZT 聲阻抗， Z_a 為空氣聲阻抗。

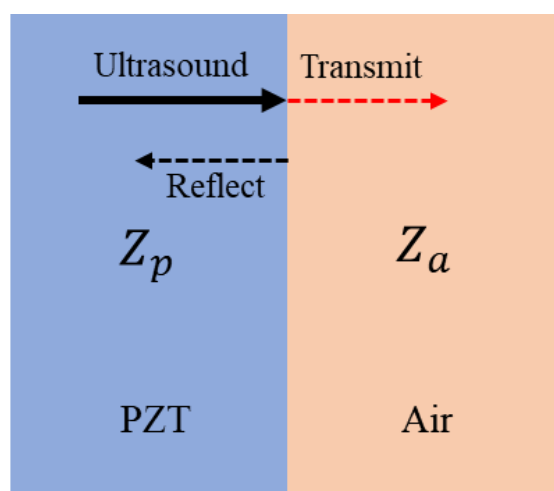


圖 2- 6 PZT 與空氣介質示意圖

反射強度係數與透射強度係數用於描述聲波在物質介面反射與透射比例，其可由聲阻抗求得(式 2- 13)、(式 2- 14)，各符號定義如表 2- 4。

$$(R_p)_I = \left(\frac{Z_a - Z_p}{Z_a + Z_p} \right)^2 \quad (\text{式 2- 13})$$

$$(T_p)_I = \frac{4Z_a Z_p}{(Z_a + Z_p)^2} \quad (\text{式 2- 14})$$

表 2- 4 反射係數與透射係數符號說明

符號	物理意義
$(R_p)_I$	反射強度係數
$(T_p)_I$	透射強度係數
Z_a	空氣聲阻抗
Z_p	PZT 聲阻抗

Z_p 約為 30MRayl， Z_a 約為 413Rayl。將數值代入(式 2- 13)可得 $(R_p)_I$ 為 0.99994，代表當聲波從 PZT 傳播至空氣時，高達 99.994%的聲波能量被直接反射回 PZT 內部只有約 0.006% 的能量能夠成功穿透到空氣中。因此 PUT 需利用聲阻抗介於 PZT 與空氣之間的材料作為匹配層，以改善其傳輸效率。綜上所述，背膠層與匹配層

分別透過降低振鈴效應與增加聲波透射比例，輔助 PUT 在訊號發射與接收有更好的效能。

PUT 中最重要的構造為振動核心 PZT 圓片，其透過逆壓電效應發射超音波。由於 PUT 中的 PZT 為圓片狀，其發射之超音波聲場可使用活塞振動理論(Piston Vibration Theory)進行描述。活塞振動理論假設一圓片狀聲源進行厚度模態振動，圓片狀聲源可理解為其由無數個微小的點聲源所組成，且都在發射微小球面波，因此其聲場會因干涉現象產生指向性(Directivity)，如(圖 2-7)所示。圖 2-7

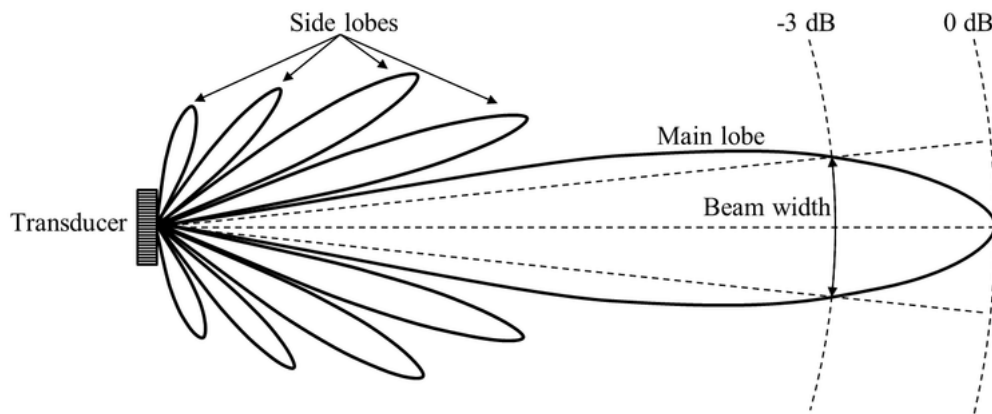


圖 2-7 波束指向性

由於波束指向性呈現類似花瓣構造，因此其主軸方向超音波能量最大最集中的部份被稱作主瓣(Main Lobe)，其餘離軸方向能量較小處則稱作旁瓣(Side Lobes)。其波束寬(Beam Width)定義為主瓣能量減少 3dB 時的角度的。

波束指向性可利用活塞理論公式[4]求得，將活塞圓片置於卡氏座標原點(0,0,0)如(圖 2-8)所示，符號定義如表 2-5。

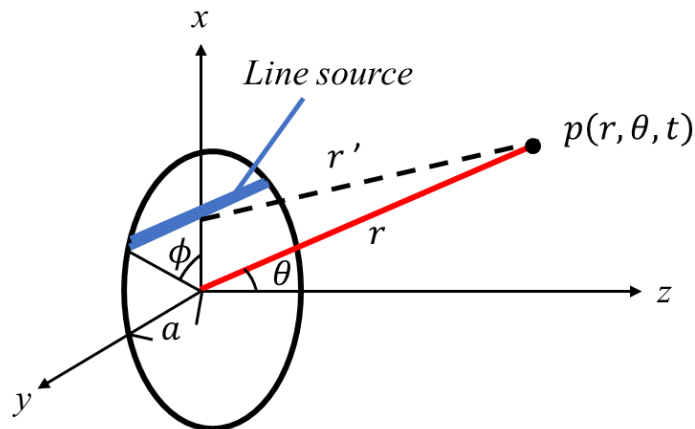


圖 2-8 活塞理論推導

表 2-5 活塞理論符號表

符號	定義
p	參考點聲壓
a	活塞圓片半徑
ϕ	xy 平面旋轉角
θ	xz 平面旋轉角
r	圓心至參考點距離
r'	線聲源至參考點距離

此推導方法是在活塞圓片內部切割出長度 $2a\sin\phi$ ，寬度 dx 之線聲源元素(Line Source element)，並將此線元素對觀測點 p 由圓片下界($x=-a$)積分至上界($x=a$)計算 p 點的聲壓貢獻，線聲源元素對點 p 的聲壓貢獻 dp 可表示為(式 2-15)。

$$dp = j\rho_0 c \frac{U_0}{\pi r'} ka \sin \phi e^{j(\omega t - kr')} dx \quad (\text{式 2-15})$$

其中 U_0 為圓片的法向振動速度振幅， ρ_0 與 c 分別為空氣的密度與聲速。 k 為波數(Wavenumber)，定義為每單位長度距離內波的相位變化(式 2-16)， ω 與 λ 分別代表角頻率以及波長。

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{式 2-16})$$

在(式 2-15)中，由於遠聲場 $r \gg a$ ， r' 可由(式 2-17)表示。

$$r' = r - a \sin \theta \cos \phi \quad (\text{式 2-17})$$

且(式 2-15)中分母項次的 r' 可直接近似於 r ，原因如(式 2-18)所示。

$$\because r \gg a, \therefore \frac{a}{r} \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r - a \sin \theta \cos \phi} = \frac{1}{r} \times \frac{1}{1 - (a/r) \sin \theta \cos \phi} \approx \frac{1}{r} \quad (\text{式 2-18})$$

經由上述步驟後將 dp 對 x 作積分，可得觀測點聲壓 p 。(式 2-19)

$$p(r, \theta, t) = j\rho_0 c \frac{U_0}{\pi r} ka e^{j(\omega t - kr)} \int_{-a}^a e^{jka \sin \theta \cos \phi} \sin \phi dx \quad (\text{式 2-19})$$

利用 $x = a \cos \phi$ ，可將(式 2-19)進一步改寫為對 ϕ 積分的形式如(式 2-20)，將其積分項定義為 I (式 2-21)，由於虛部積分項在 $[0, \pi]$ 具反對稱性因此積分值為零，如此一來積分項中只剩下實部，並可將其以 Bessel 函數進一步表示(式 2-22)，最終得活塞理論之聲場分布如(式 2-23)，其中指向性因子(Direction Factor)， $H(\theta)$ 定義如(式 2-24)，至此活塞理論方程式推導完成。

$$p(r, \theta, t) = j\rho_0 c \frac{U_0}{\pi r} k a e^{j(\omega t - kr)} \int_0^\pi e^{jka \sin \theta \cos \phi} \sin^2 \phi d\phi \quad (\text{式 2-20})$$

$$I = \int_0^\pi e^{jka \sin \theta \cos \phi} \sin^2 \phi d\phi \quad (\text{式 2-21})$$

$$I = \int_0^\pi \cos(ka \sin \theta \cos \phi) \sin^2 \phi d\phi = \frac{\pi J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \quad (\text{式 2-22})$$

$$p(r, \theta, t) = \frac{j}{2} \rho_0 c U_0 \frac{a}{r} k a \left[\frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right] e^{j(\omega t - kr)} \quad (\text{式 2-23})$$

$$H(\theta) = \left[\frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right] \quad (\text{式 2-24})$$

綜上所述，PUT 中最重要的構造為振動核心 PZT 圓片，本節針對其聲場輻射與指向性理論進行詳細的探討，此外本研究亦針對 PZT 進行阻抗頻譜、振動模態、與軸向聲壓衰減特性進行研究，模擬與實驗結果將於後續章節進行說明。



2.2.2 撓曲式超音波換能器 (FUT)

FUT (Flexural Ultrasonic Transducer)主要應用於倒車雷達與機器人防撞感測器，因其波束指向性較低，利於進行大面積障礙物的掃描偵測。其構造由導線、背膠層、鋁金屬外殼與 PZT 所組成(圖 2- 9)。

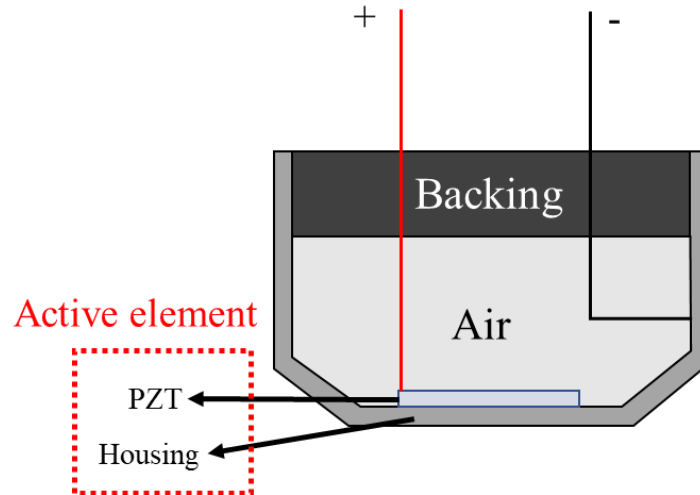


圖 2- 9 FUT 內部構造與核心振動元件

FUT 之核心振動元件為 PZT 與外殼(Housing)，其振動原理為利用小尺寸(<10mm)，薄厚度(<0.5mm) PZT 之徑向共振帶動鋁金屬外殼薄板進行撓曲振動(Bending Vibration)，因此其模態與振動頻率主要由外殼薄板所主導[5]。由於 FUT 的振動模態為撓曲模態 (bending mode)，這與 2.2.1 節所探討的活塞振動模態有本質差異，因此無法適用活塞理論。其振動行為，必須改採薄板振動理論(Thin Plate Vibration Theory)方能進行精確描述[6]。

根據薄板振動理論，一個邊界被固定且無阻尼效應之理想薄板，其面外撓曲(Out-of-Plane Displacement)行為可由四階偏微分方程式描述，如(式 2- 25)。

$$D\nabla^4 w(r, \theta, t) + \rho_A \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{式 2- 25})$$

D 為撓曲剛度(Flexural Rigidity)，可由柏松比、楊氏模數與薄板厚度進行表示(式 2- 26)。 ρ_A 為單位面積質量， $w(r, \theta, t)$ 則為薄板在位置 (r, θ) ，時間 t 時的撓曲位移。

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (\text{式 2- 26})$$

(式 2- 25)與(式 2- 26)之符號說明如表 2- 6 所示。

表 2-6 薄板理論方程式與撓曲剛度符號表

符號	定義
D	撓曲剛度
w	薄板撓曲位移
ρ_A	單位面積質量
E	楊氏模數
h	薄板厚度
ν	柏松比

FUT 之外殼薄板可近似為圓形薄板的幾何結構，(式 2- 25)可透過分離變數法在極座標系統 (r, θ) 求解，用於描述在特定共振頻率下薄板的模態形狀(Mode-Shape)。其通解可表示為 Bessel 函數之線性組合，即為模態函數，如(式 2- 27)。其中 $W_{m,n}$ 為 (m, n) 模態形狀下的位移； m 代表節線圓 (Nodal Circles)， n 代表節線直徑(Nodal- Diameters)，他們又稱作模態指數(Mode Indices)，用於表示不同模態形狀的類別； A_n 、 B_n 為常數，由邊界條件所決定； I_n 、 J_n 分別為第一類修正 Bessel 函數與第一類 Bessel 函數； $\lambda_{m,n}$ 為薄板在 (m, n) 振動模態下對應的特徵值(Eigen Value)； a 為圓形薄板半徑； r 為徑向距離。(式 2- 27)之符號說明如表 2- 7。

$$W_{m,n}(r, \theta) = \left[A_n I_n\left(\frac{\lambda_{m,n}}{a} r\right) + B_n J_n\left(\frac{\lambda_{m,n}}{a} r\right) \right] \cos(n\theta) \quad (\text{式 2- 27})$$

表 2- 7 模態方程式符號表

符號	定義
$W_{m,n}$	(m, n) 模態形狀下的位移
m 、 n	模態指數
A_n 、 B_n	由邊界條件決定的常數
I_n 、 J_n	第一類的貝索與修正貝索函數
$\lambda_{m,n}$	(m, n) 振動模態下對應的特徵值
a	圓形薄板半徑
r	r 為徑向距離(範圍由 0 到 a)

(式 2-27)對應之模態頻率 $f_{m,n}$ 可由(式 2-28)計算。

$$f_{m,n} = \frac{\lambda_{m,n}^2}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)\rho_A}} \quad (\text{式 2-28})$$

綜上所述，薄板振動理論可用於分析 FUT 的振動行為，本研究後續章節將建立之 FUT 有限元素模型，並利用此理論驗證模型準確性。

2.3 超音波衰減理論

超音波在空氣中的衰減劇烈，因而成為設計空氣耦合超音波換能器時必須考量的因素，而空氣中的衰減主要分為幾何擴散與空氣吸收兩個因子。其中，幾何擴散衰減由聲強度(Acoustic Intensity)進行分析。以球面波而言， $I(r)$ 為距離聲源 r 處的聲強度； $P_{acoustic}$ 為聲源總功率[7]，由(式 2-29)可知聲強度 I 與 r^2 呈反比，又因聲強度與方均根聲壓 P_{rms} 呈平方正比(式 2-30)，因此可知 P_{rms} 與 r 呈反比關係。其中 ρ 與 c 為介質密度與聲速。

$$I(r) = \frac{P_{acoustic}}{4\pi r^2} \quad (\text{式 2-29})$$

$$I = \frac{P_{rms}^2}{\rho c} \quad (\text{式 2-30})$$

空氣吸收係數 α 用於描述超音波在空氣分子間傳播時的損耗，此衰減係數為指數衰減(Exponential Decay)，由 ISO 9613-1 聲波衰減標準[8]定義 α 值。整合聲波幾何擴散($1/r$)與空氣吸收係數(α)所造成的衰減因素，超音波於空氣傳播時，可由指數衰減模型描述。其中 P_{rms} 為方均根聲壓， A 為聲源強度係數(式 2-31)。

$$P_{rms} = \frac{A}{r} e^{-\alpha r} \quad (\text{式 2-31})$$

綜上所述，超音波於空氣傳播時的衰減行為遵循幾何擴散與指數衰減。本節所述之理論衰減方程式，將作為後續章節中驗證有限元素模型與實驗量測值的擬合函數。

Chapter 3 研究方法與架構



3.1 研究流程

本研究旨在透過有限元素模型、實驗與理論方程式，建立一套用於超音波換能器開發過程中，系統化的分析與驗證流程。研究核心分別聚焦於 PUT 所使用的厚度模態 PZT 圓片，以及 FUT 的撓曲模態外殼薄板。本章將詳細介紹本論文模擬規劃、實驗架構與量測方法，整體研究流程如(圖 3- 1)。

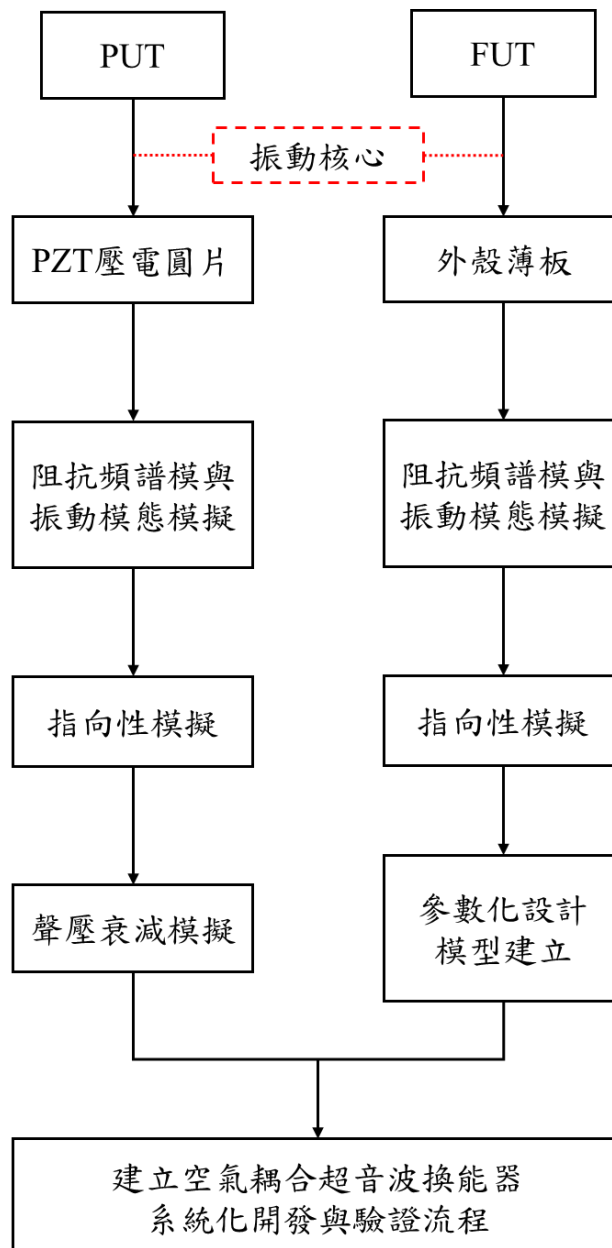


圖 3- 1 研究流程說明



3.1.1 PUT 研究流程

如(圖 3- 1)所示，本研究針對 PUT 內部之 PZT 進行系統性的物理特性分析。首先建立阻抗頻譜模型並以阻抗分析儀量測值驗證，確認其第一共振頻率值做為工作頻率；接著以此頻率為基礎建立聲場指向性模型，並以活塞振動理論與其進行比較；最後以聲場指向性模型為基礎，建立 PZT 軸向聲壓隨距離衰減模型，並分別透過實驗量測與衰減理論方程式進行驗證及擬合。

3.1.2 FUT 研究流程

如(圖 3- 1)所示，本研究首先針對 FUT 之阻抗頻譜與振動模態進行分析，並透過文獻資料進行驗證；接著以此模型為基礎建立聲場指向性模型；最後建立變動尺寸參數的共振頻率模型，並以薄板理論進行驗證。

3.2 有限元素模型建構

本論文使用 COMSOL Multiphysics[®]軟體進行模型建構。本節將分別介紹 PZT 與 FUT 有限元素模型建構流程，包含網格尺寸、邊界條件與相關參數設定。

3.2.1 PZT 元件模型設定

本研究選用直徑 38mm，厚度 4mm 之 PZT 圓片進行實驗量測，因此阻抗模擬中的 PZT 亦採用此尺寸進行建模，由於三維建模會耗費龐大計算資源，因此本論文採用 2D 矩形軸旋繞建模方式以減少網格數量。由於 PZT 於軸旋繞模型中，幾何形狀為對稱規則的矩形，因此網格設定可採用四邊形網格，不僅可良好對齊幾何形狀邊緣，也可提升計算效率(圖 3- 2)。

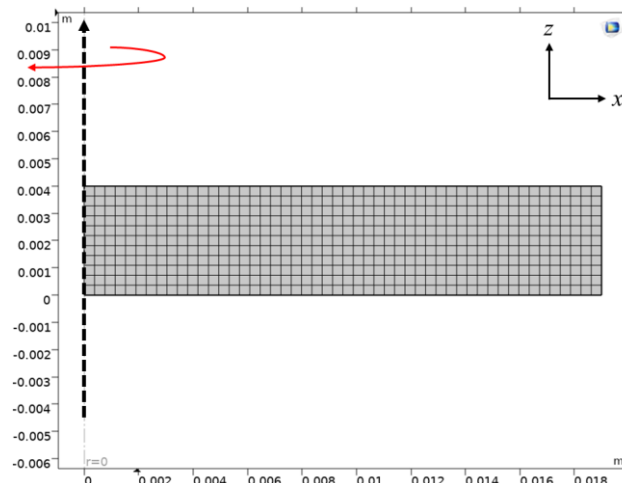


圖 3- 2 PZT 建模與網格設定示意圖

完成網格設定後，進入力學邊界條件設定。由於 PZT 的阻抗頻譜量測為施加交流電壓使其自由振動，因此將 PZT 外邊界設定為自由力學邊界。接著，進入電壓驅動條件設定。本研究於 PZT 的上下電極表面設定端電極(Terminal)，並設定 10V 端電壓以對應後續實驗條件。最後採用頻域分析(Frequency Domain-Study)，在設定的頻率範圍內對模型進行掃頻。模型將依據壓電方程式在各頻率點(詳見本論文第二章(式 2- 7)與(式 2- 8)進行矩陣運算，從而獲得結構位移分佈以及總電流。其中，共振頻率的位移解即其對應的振動模態，阻抗頻譜則由(式 2- 10)計算。為建立後續聲場模型，本研究選定 PZT 元件的第一階共振頻率作為工作頻率。此共振頻率經由阻抗頻譜分析確認為 50kHz，詳細的模擬與實驗結果將 4.1 節中呈現。

接著以 50kHz 為基礎建立聲場模型，並用於分析指向性與軸向聲壓隨距離的衰減。將模型中的 PZT 置於座標原點並在其上方建立半徑為 1.5m 之半球體空氣域，同樣使用軸旋繞進行建模如(圖 3- 3)。為確保聲場計算準確，空氣域網格尺寸應小於 PZT 工作波長的五分之一，以精確解析聲波傳遞行為。邊界條件方面，扇形空氣域之圓弧邊界設定為聲輻射邊界(Sound Radiation Boundary)，模擬超音波由 PZT 發射進入自由聲場(Free Field)，避免聲波反射回計算區域造成干擾。此外，為排除邊緣繞射與背向輻射等複雜效應的干擾，本研究採用無限障板(Infinite Baffle)假設，將座標 $z=0$ 設為聲場硬邊界 (Sound Hard Boundary)，假設 PZT 被安裝於無限長障板上，並可與 2.2.1 章節中的活塞振動理論進行系統性比較。

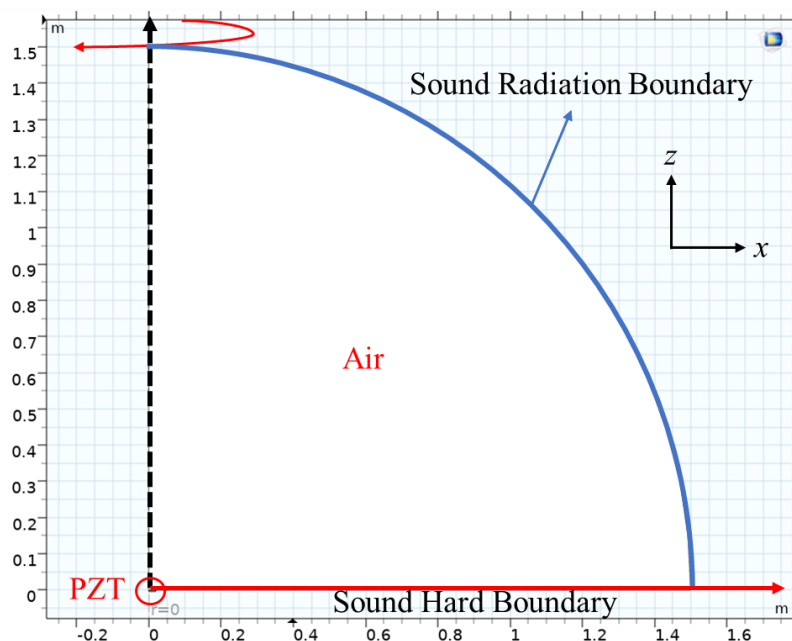


圖 3- 3 PZT 聲場模型建模流程示意圖

3.2.2 FUT 參考模型設定

本研究參考 Lei Kang et.al [9] 之 FUT 尺寸參數與材料，在 COMSOL 中進行 1:1 建模，並透過阻抗頻譜與振動模態模型與文獻[9]之數據驗證，以確認本研究建立之模型準確性。文獻[9]之 FUT 尺寸參數如(圖 3- 4)，本研究之 1:1 建模如(圖 3- 5)。

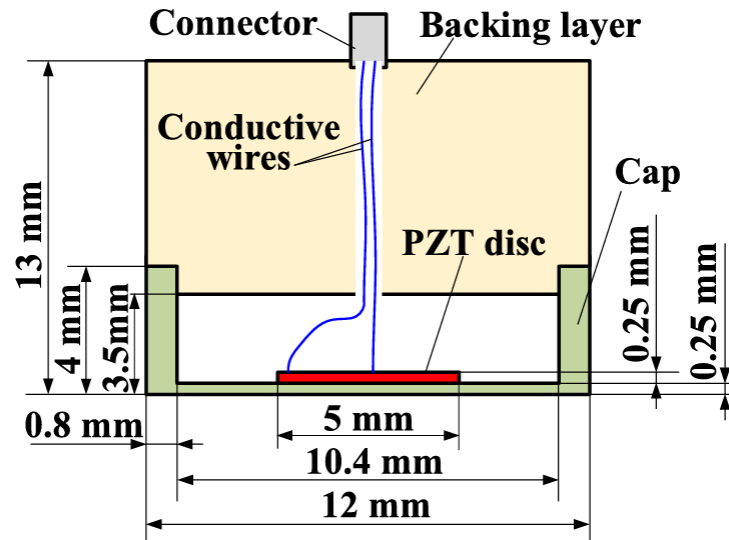


圖 3- 4 FUT 尺寸參數[9]

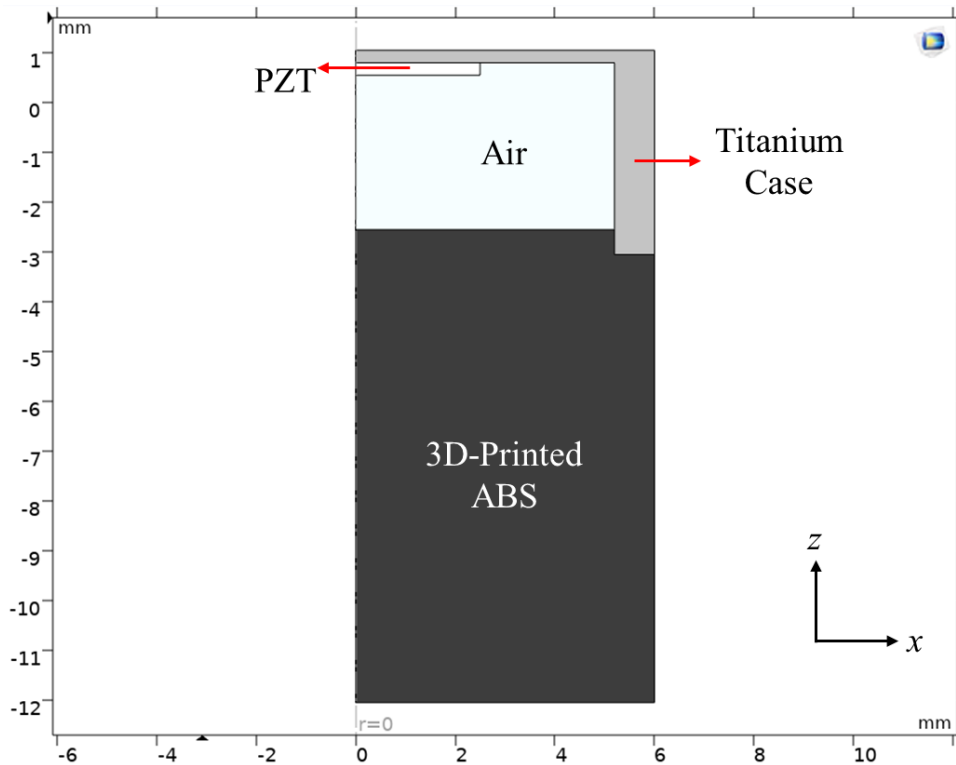


圖 3- 5 本研究參考[9]建立 1:1 之 FUT 參考模型

FUT 模型由鈦金屬外殼、PZT 以及 3D 列印之 ABS 背膠層三種材料所組成，且構型較為複雜，因此改以三角形網格進行區域劃分，其幾何適應性較高，能有效填充不規則區域。此外，PZT 壓電片與鈦金屬外殼之接觸面，將採用連續邊界條件 (Continuity Boundary)，以確保兩構件在界面上的位移與應力連續，用以模擬兩者為理想的接合狀態。

完成網格與邊界條件設定後，即可進行阻抗頻譜與振動模態模擬，步驟及原理皆與上一節(3.2.1)相同。透過阻抗頻譜與振動模態模型所確定之共振頻率值，並與文獻[9]中的結果進行驗證。在確定本研究所建立模型具準確性之前提下，上述模型將被用於下一階段的聲場模型分析(圖 3- 6)，其建模流程與上節相同。

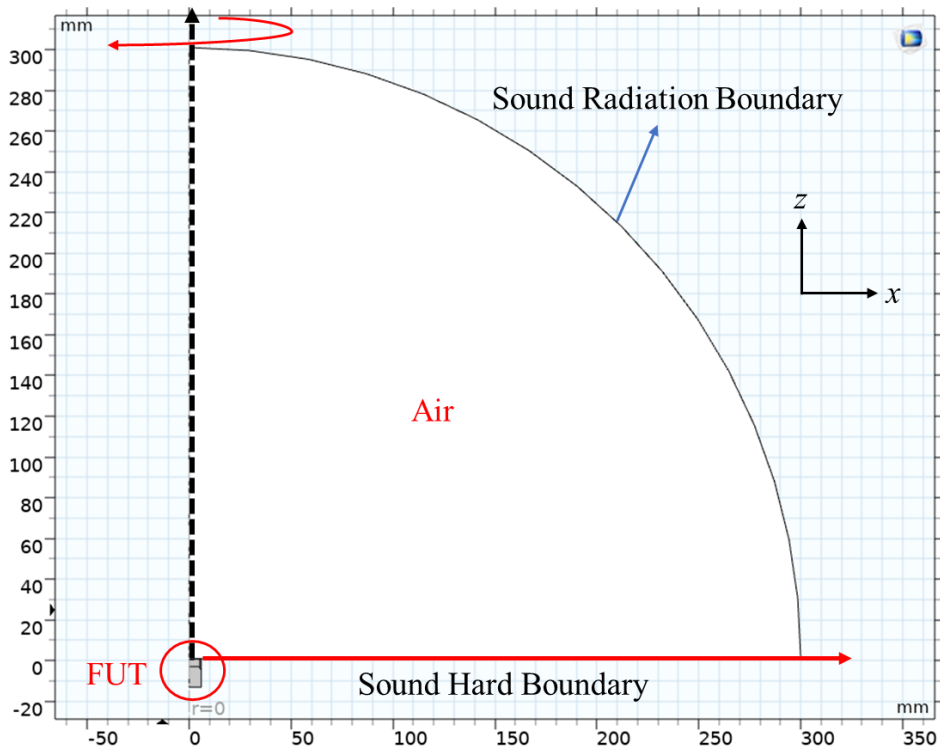


圖 3- 6 FUT 聲場模型建模流程示意圖

3.2.3 FUT 尺寸參數變化模型

完成文獻[9]相同之 FUT 模型並經驗證後，本研究將以此模型為基礎，拓展 FUT 尺寸參數變化之模型。由於 FUT 之共振頻率主要由外殼薄板主導[5]，因此建立如(圖 3- 7)之蓋狀結構作為 FUT 外殼初始尺寸，在 COMSOL 中同樣以 2D 軸旋轉方式進行建模，初始尺寸參數如(圖 3- 8)。

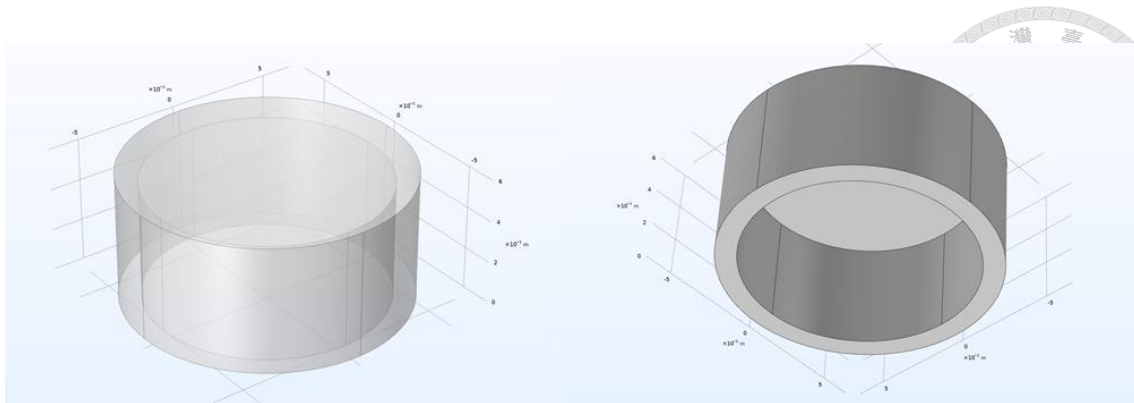


圖 3-7 FUT 初始外殼結構示意圖

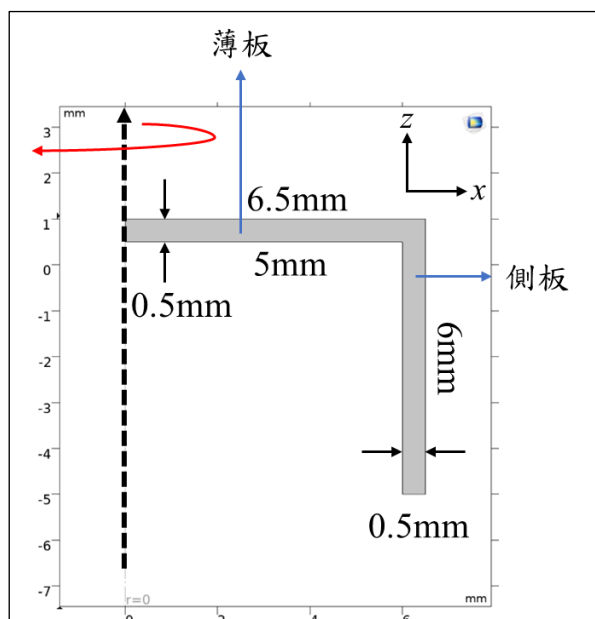


圖 3-8 FUT 初始外殼模型與構造示意圖

FUT 之工作頻率一般選用第一模態(0,0)模態，此模態為整個外殼薄板進行同向振動，此狀態之 FUT 之效能最佳(圖 3-9)。因此本研究以上述初始尺寸為起始點，進行共振模態模擬並關注其第一共振頻率值 F_1 。

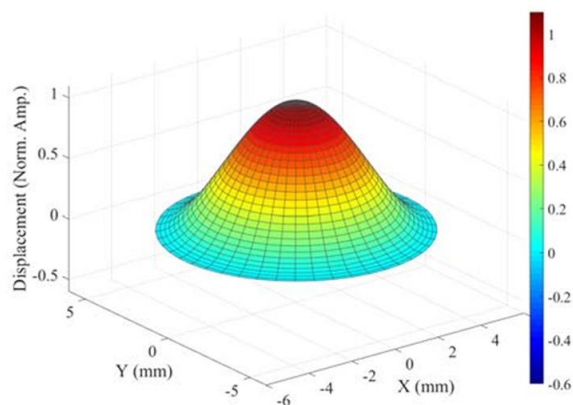
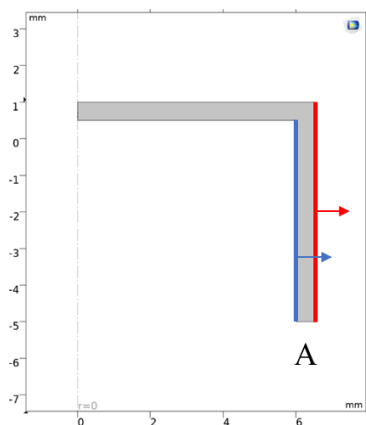


圖 3-9 FUT 薄板(0,0)模態(第一模態)示意圖

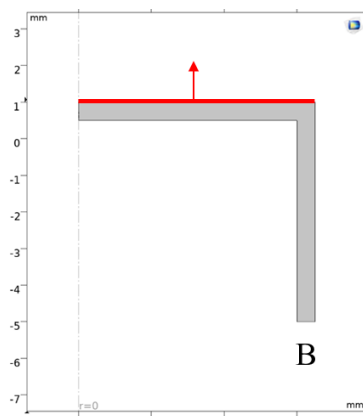
承上所述，紀錄初始尺寸之 F_1 後，開始系統性地變化外殼尺寸並記錄 F_1 之相應變化。FUT 外殼尺寸可透過薄板與側板的接觸面積、側板長度、側板厚度、薄板長度以及薄板厚度等四個尺寸參數進行調整。因此，本研究設計四個尺寸變化方式控制 FUT 外殼尺寸，並記錄其第一模態頻率隨尺寸變化之關係。變化方式詳列於表 3-1 與(圖 3-10)。

表 3-1 FUT 外殼尺寸變化的四種方法

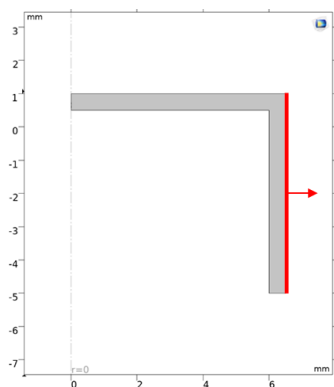
尺寸變化方式	外殼改變之尺寸部分
方法 A	側板內壁、外壁同時向外平移，壁厚不變
方法 B	薄板外壁向上變厚，內壁位置固定
方法 C	側板外壁向外變厚，內壁位置固定
方法 D	薄板內壁向下變厚，外壁位置固定



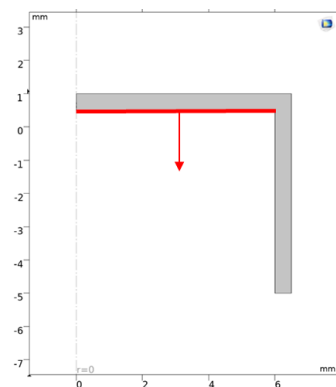
(a)方法 A



(b)方法 B



(c)方法 C



(d)方法 D

圖 3-10 FUT 外殼尺寸變化的四種方法示意圖

本研究將四種變化方式進行逐項模擬，並分別記錄第一共振頻率之相應變化且繪製成圖表，最終以薄板振動理論的角度進行分析與驗證。



3.3 PZT 實驗量測架構與儀器

本研究選用直徑 38mm，厚度 4mm 之 PZT-5H 壓電圓片進行實驗(圖 3- 11)，包含阻抗頻譜與軸向聲壓衰減的量測。本章節將針對量測時所使用之實驗儀器與實驗架構之設計進行詳細說明。



圖 3- 11 本研究選用之 PZT 壓電圓片

3.3.1 阻抗頻譜

本研究使用 ZX80A 阻抗分析儀進行 PZT 之阻抗頻譜量測(圖 3- 12)，此儀器主要用於鐵電晶體、壓電陶瓷與超音波換能器的阻抗分析，且頻率量測範圍支援 20Hz 至 5MHz，測量速度為每秒 100 個數據點。將 PZT 兩極導線與 ZX80A 連接，即可進行阻抗量測。本實驗將掃描頻率範圍設定為 10kHz 至 800kHz。



圖 3- 12 ZX80A 阻抗分析儀

3.3.2 軸向聲壓衰減

本實驗的量測分為訊號產生、聲波發射與聲壓接收三部分，整體實驗架構如(圖 3- 13)，PZT 與麥克風由支架固定。首先以函數產生器激發 PZT 發射超音波，接收端以麥克風距離 30cm, 60cm, 90cm, 120cm, 150cm 依次進行訊號接收，並配置訊號調節器放大訊號。本章節將針對實驗架構中所使用的訊號產生器、麥克風、感測器訊號調節器以及示波器依序進行介紹。

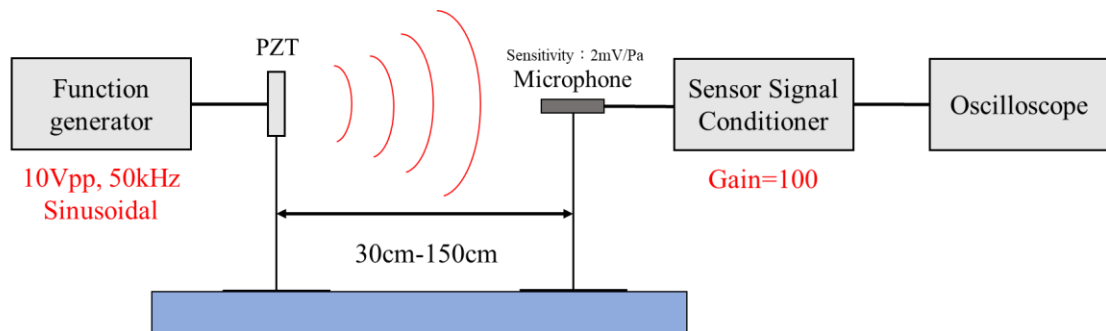


圖 3- 13 PZT 軸向聲壓量測實驗架構

1. 函數產生器

本實驗使用 Tektronix AFG 2021 函數產生器(圖 3- 14)提供訊號，可支援頻率範圍從 1 μ Hz 至 20MHz 之正弦波；振幅範圍則支援 10mVpp 至 10Vpp。本研究使用 50kHz，10Vpp 之正弦波訊號激發 PZT 振動，發射超音波至空氣中。

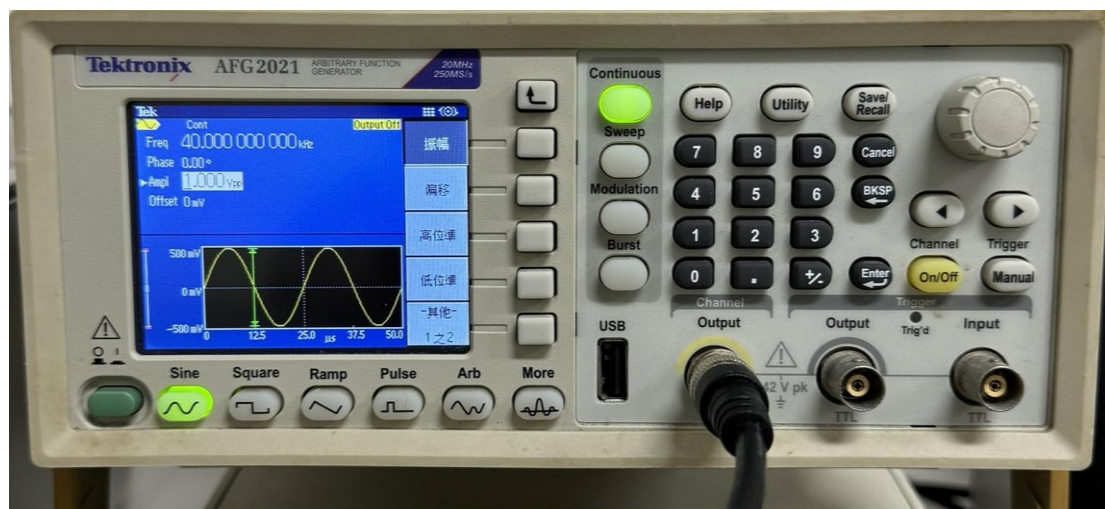


圖 3- 14 Tektronix AFG 2021 函數產生器

2. 麥克風

本實驗使用 PCB 378C01 麥克風與前置放大器整合系統(圖 3- 15)進行超音波訊號接收，頻率響應為 4Hz 至 100kHz ($\pm 3\text{dB}$) 其響應曲線以 251.2Hz 為 0dB 參考基準(圖 3- 16)，靈敏度為 2mV/Pa。



圖 3- 15 PCB 378C01 麥克風

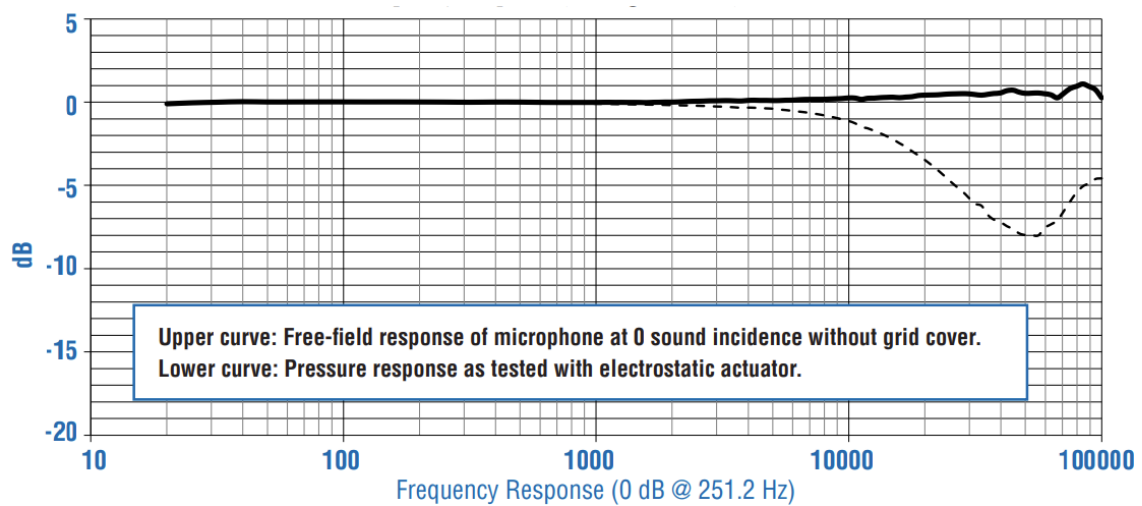


圖 3- 16 PCB 378C01 之頻率響應曲線

3. 感測器訊號調節器

本實驗使用 PCB 48211 感測器訊號調節器(圖 3- 17)作為 PCB 378C01 麥克風之電源供應與後級放大器，其具備 1, 10, 100 倍之三段放大倍率可供選擇且支援 BNC 輸入與輸出。在本研究使用 100 倍放大，以觀察空氣中微弱的超音波訊號。



圖 3- 17 PCB 48211 感測器訊號調節

4. 示波器

本研究使用 Keysight DSOX3034A 示波器(圖 3- 18)，其具備四個 BNC 通道，頻寬為 350MHz。在本實驗中，使用其內建 Trigger 以及 Average 功能進行超音波訊號觀測，將波形以 jpg 及 csv 檔案儲存，並使用 Excel 進行資料處理與圖表繪製。

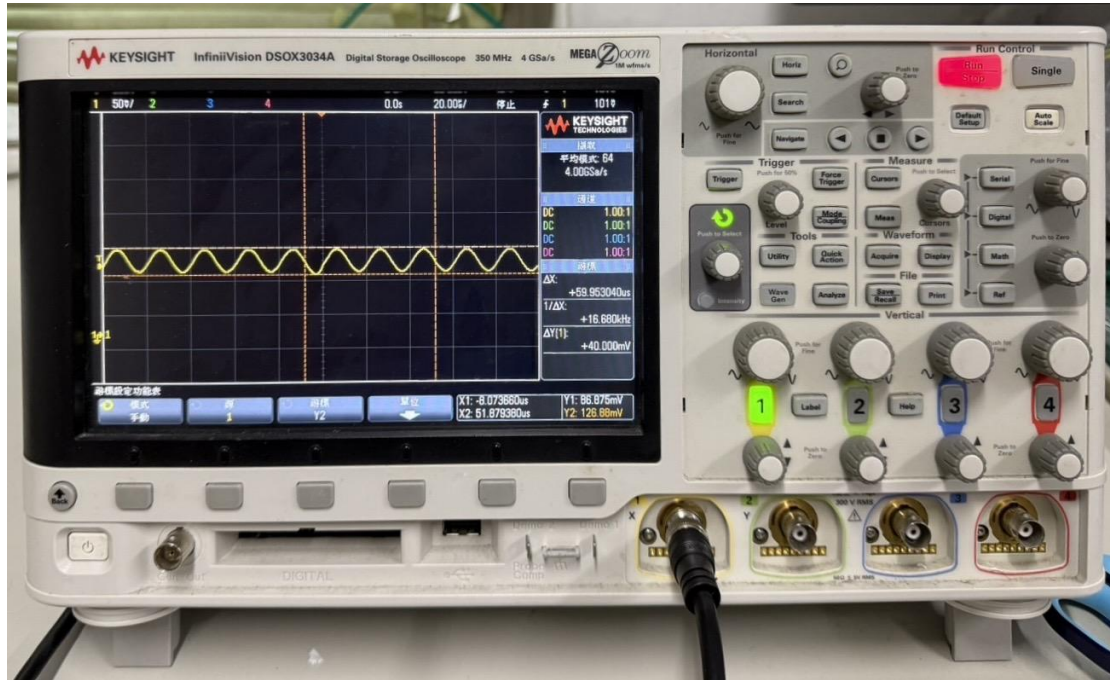


圖 3- 18 Keysight DSOX3034A 示波器

3.4 理論模型應用方法

除了有限元素模擬與實驗量測，本研究亦採用理論模型進行驗證與分析。本節將分別說明活塞振動理論、聲波衰減理論及薄板振動理論的具體應用方法。

3.4.1 活塞振動理論

活塞振動理論用於驗證 PZT 聲場有限元素模型中的指向性圖形，將活塞理論公式以 Python 進行計算，PZT 與模擬中設定相同的半徑 19mm、工作頻率 50kHz(詳見 4.1 節)與空氣聲速 340m/s，即可繪製波束指向性圖形(式 2- 24)，並將活塞理論與有限元素模擬所繪製的指向性圖形進行疊圖分析。

3.4.2 聲波衰減理論

聲波衰減理論曲線(式 2- 31)用於擬合實驗與模擬曲線，並從中提取振源強度係數 A 與空氣吸收係數 α 。本研究利用 Python 之 SciPy 函式庫中的 curve_fit 函數，對後續第四章呈現之模擬與實驗數據點，進行非線性最小平方擬合。

3.4.3 薄板振動理論

薄板振動理論(式 2- 25)用於驗證本研究建立之 FUT 尺寸參數變化模型的趨勢，根據薄板振動理論所推導的頻率關係(式 2- 28)，FUT 外殼薄板之第一階共振頻率與其半徑成平方反比，與其厚度成正比。本研究將在第五章中將尺寸參數變化模型與上述理論預測結果進行比較，以驗證模擬結果的正確性。

Chapter 4 PZT 特性分析與模型驗證

依據第三章建立之有限元素模型與實驗量測架構，本章旨在呈現 PZT 之特性分析與模型驗證結果，以證明本研究之分析方法具有高度可靠性。本章將依序探討三個核心主題：首先，4.1 節將比對阻抗頻譜的模擬與實驗數據，並分析其振動模態；4.2 節將聲束指向性模型與活塞理論進行比較；4.3 節將深入分析軸向聲壓衰減，並整合模擬、實驗與理論衰減曲線進行擬合與討論。

4.1 阻抗頻譜與振動模態

本研究所建立之阻抗頻譜模型與實驗量測值比較如(圖 4- 1)。並取前六共振點(Fr1~Fr6)與厚度共振點(Ft)進行模擬值與實驗量測值比較如表 4- 1。

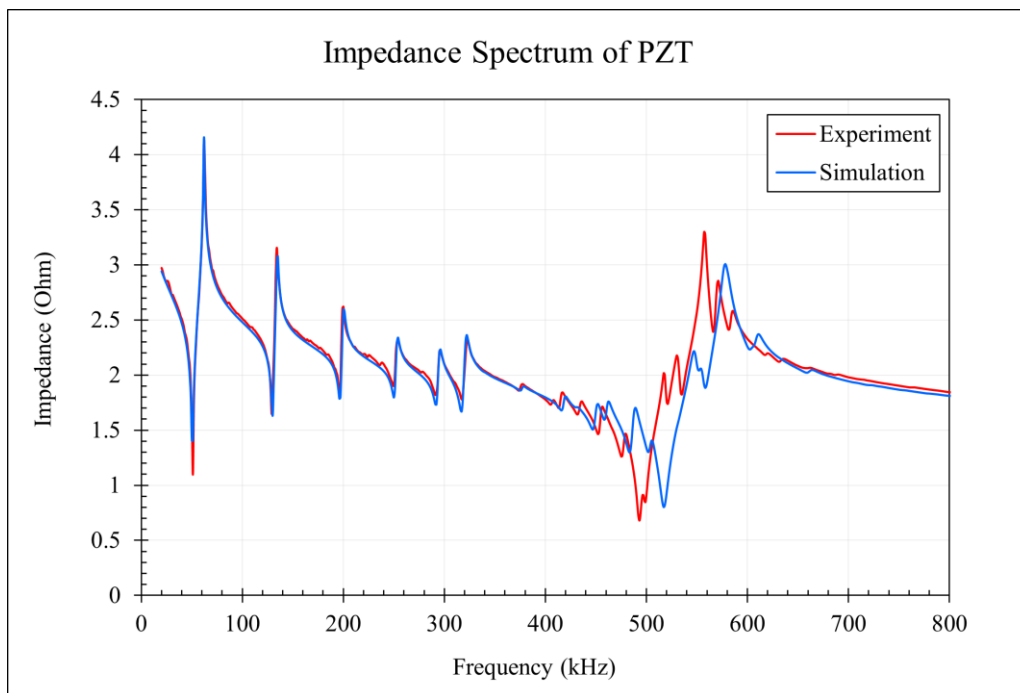


圖 4- 1 PZT 阻抗頻譜模型

表 4- 1 PZT 各共振點頻率值

共振頻率	模擬值(kHz)	實際量測值(kHz)	誤差(%)
Fr1	50	51	1.96
Fr2	130	129	0.78
Fr3	197	196	0.00
Fr4	250	251	0.40
Fr5	292	291	0.34
Fr6	317	317	0.00
Ft	517	493	4.87

由上表可得各共振點之平均百分比誤差為 1.19%，可知模擬與實驗量測結果吻合度極高。從表中可看出模擬值與實驗值在前六個振動模態皆高度吻合，惟厚度模態誤差較大(4.87%)，此現象是由高頻下的模態耦合效應(Mode Coupling Effect)所導致。如文獻[2]所指出，對於直徑厚度比小於 20 之壓電圓片，高階徑向模態(Fr2~Fr6)會與厚度模態(Ft)發生強烈的耦合作用，導致實際的厚度共振頻率產生偏移。本研究 PZT 圓片之直徑厚度比僅為 9.5，因此耦合效應將更為強烈，模擬所得之理想厚度共振頻率，與實驗量測值(受耦合效應影響)間存在差異符合物理現象，並非模型設定誤差。

本研究選用第一共振頻率 50kHz 作為工作頻率(詳見 2.1.2)進行振動模態分析，其振動模態為徑向與厚度方向之耦合(圖 4- 2) 下章節將以此頻率與振動特性為基礎，進一步分析聲場分布。

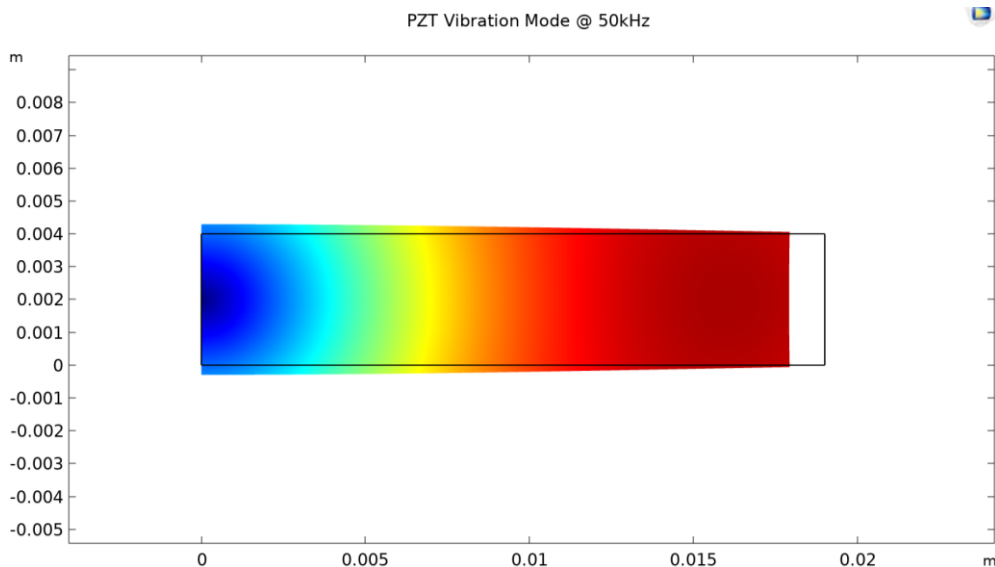


圖 4- 2 PZT 在 50kHz 時的振動模態

4.2 聲束指向性

基於阻抗頻譜模型結果良好的前提下，建立 PZT 在 50kHz 時的聲場輻射模型如(圖 4-3)，將此聲場模型以極座標方式呈現，可得聲束指向性模型。本研究將模擬結果與第二章所述之活塞振動理論(式 2- 24)進行疊圖比較(圖 4- 4)。

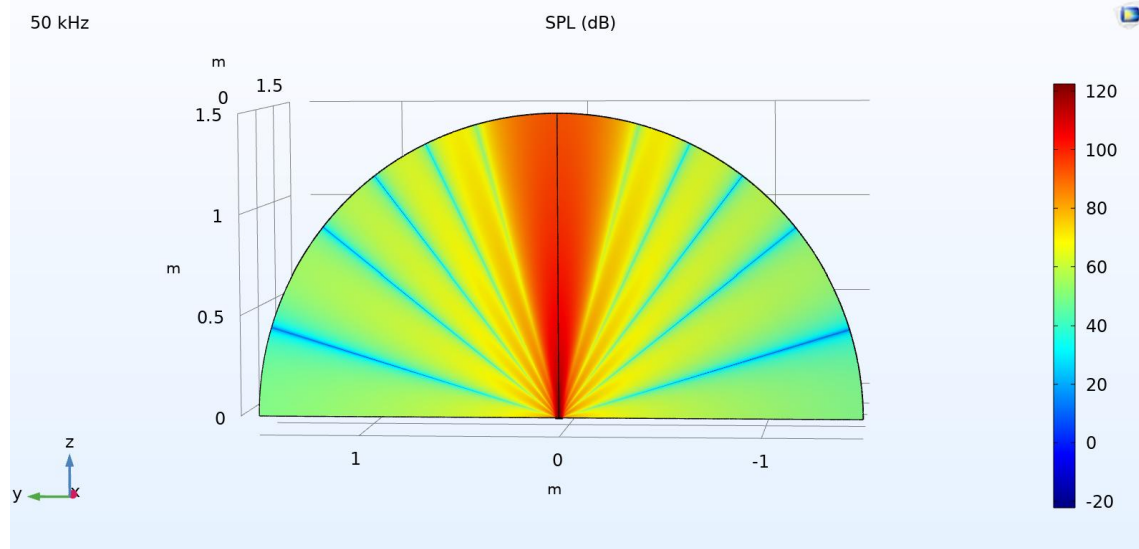


圖 4- 3 PZT 在 50kHz 時的聲場輻射模型

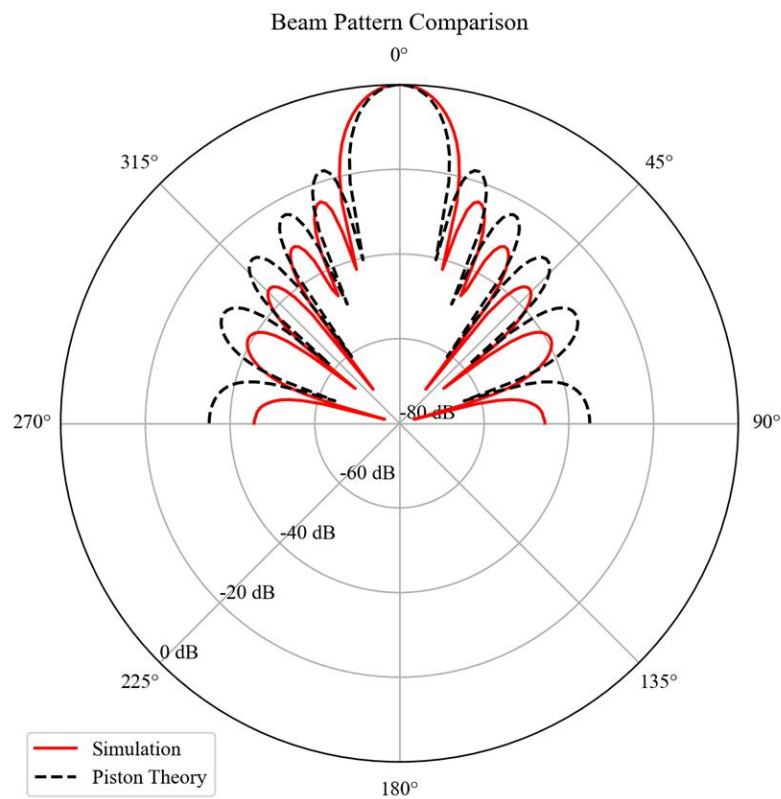


圖 4- 4 波束指向性與活塞理論指向性模型比較

(圖 4-4)可看出兩者整體波束形狀相似且數量相同，均呈現一個指向正前方之狹窄主瓣(Main Lobe)以及十個旁瓣(Side Lobes)。顯示本研究的 PZT 模型具有類似活塞的聲場輻射特性。然而，相較於活塞理論模型，指向性模擬之波束寬較寬但旁瓣抑制效果較佳。其主要聲束特性差異如(表 4-2)。其中，旁瓣準位(Side Lobe Level, SLL)用於描述最大旁瓣與主瓣之 dB 值差(式 4-1)，數字越小代表旁瓣抑制越佳。

$$SLL(dB) = (\text{最強旁瓣 dB 值}) - (\text{主瓣 dB 值}) \quad (\text{式 4-1})$$

表 4-2 指向性模型與活塞理論指向性差異

指向性	活塞理論	模擬結果
主瓣-3dB 波束寬	10.85°	12.71°
旁瓣準位(SLL)	-17.6 dB	-24.68 dB

兩者差異源於理想活塞振動理論與真實 PZT 振動模態不同。活塞理論假設整個振動面進行均勻振幅之振動，因此其邊緣會產生較強的繞射效應造成較大的旁瓣。然而，如 4.1 節的模態(圖 4-2)所示，PZT 在 50 kHz 下的實際振動為徑向與厚度耦合的模態，其表面速度分佈並不均勻，這種中心振幅較強、向邊緣逐漸減弱的非均勻分佈，在聲學中被稱為切趾效應(Apodization Effect)[10,11]，會導致主瓣能量分散而變寬，同時有效抑制旁瓣的能量。

此結果證明本研究建立之有限元素模型可用於描述非均勻振動聲源之指向性，相較於活塞振動理論更能真實呈現 PZT 的聲場輻射特性。因此，本模型可作為更具泛用性的分析工具，為空氣耦合超音波換能器開發提供可靠的理論依據。

4.3 軸向聲壓衰減

本章將以上一章節所建立之聲場模型建立中心觀測軸，計算該軸向聲壓隨距離的變化，建立 PZT 以 50kHz 發射時之軸向聲壓衰減模型(圖 4- 5)。模型參數設定與後續實驗相同的環境條件(氣溫 24℃，濕度 65%)。

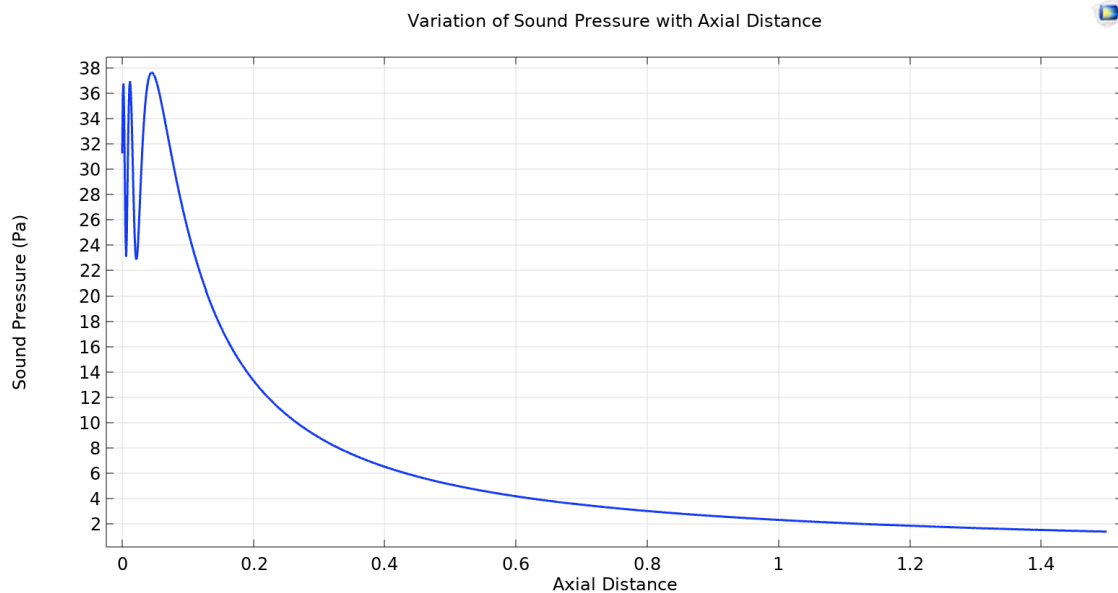


圖 4- 5 PZT 軸向聲壓衰減模型

提取軸向聲壓衰減模型中，與實驗量測時相同軸向距離之數據點(實驗架構如 3.3.2 所述)，並進行疊圖比較(圖 4- 6)。各點聲壓值之比較如表 4- 3 所示。

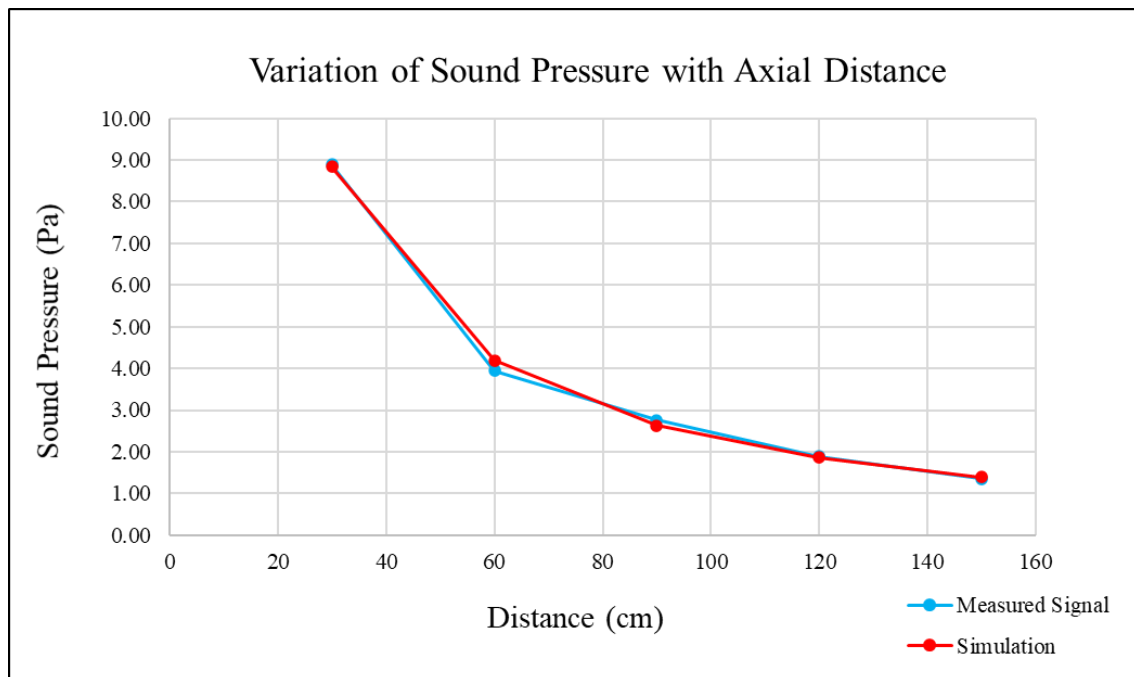


圖 4- 6 軸向聲壓衰減模型與實驗量測值比較

表 4-3 模擬聲壓值與實驗量測值比較

PZT 軸向距離	30cm	60cm	90cm	120cm	150cm
量測聲壓(Pa)	8.90	3.95	2.77	1.89	1.36
模擬聲壓(Pa)	8.84	4.19	2.63	1.86	1.40
誤差百分比(%)	0.59	5.72	5.22	1.62	2.96

由上表可知模擬值與實驗量測值在各距離點之聲壓值誤差皆<6%，其平均百分比誤差僅為 3.22%，可證明本研究建立的聲壓衰減模型與實驗量測結果高度吻合。

本研究進一步以聲壓衰減理論分析實驗與模擬數據的衰減趨勢，採用 3.4.2 節所述之方法，將實驗與模擬數據分別與聲壓衰減理論公式(式 2- 31)進行擬合，其結果如(圖 4- 7)，擬合參數包含振源強度係數 A 與空氣吸收係數 α ，如表 4- 4。

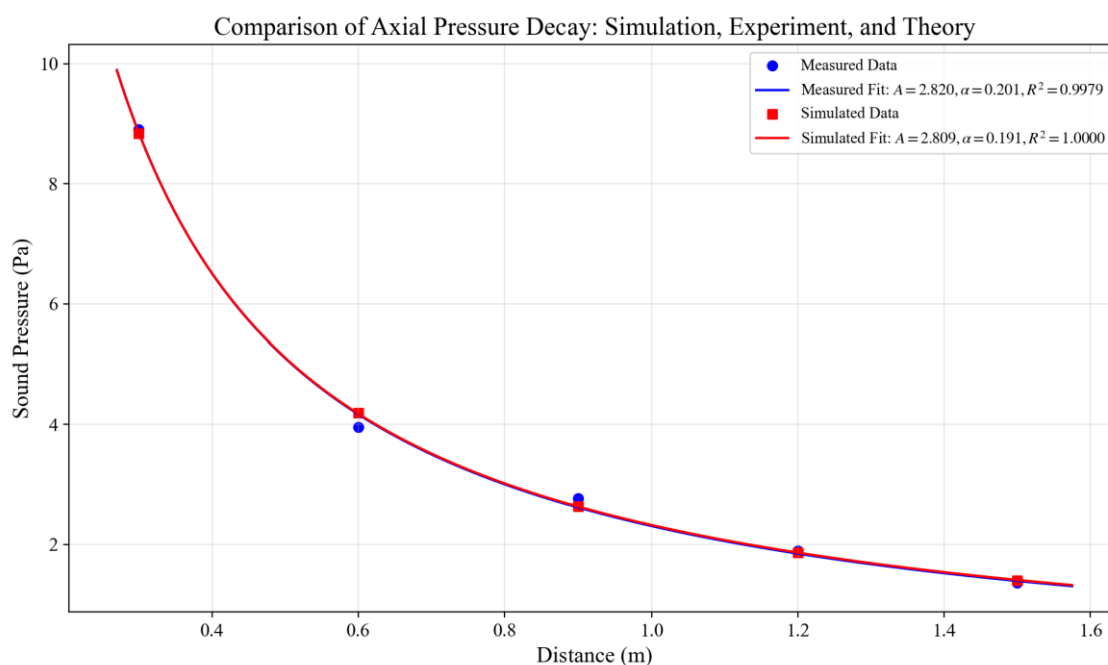


圖 4-7 衰減理論公式擬合模擬與實驗結果

表 4-4 擬合參數比較

	實驗值	模擬值	誤差(%)
A (Pa · m)	2.820	2.809	0.39
α (Np · m ⁻¹)	0.201	0.191	4.98
R^2	1.000	0.998	

上述結果顯示，模擬與實驗數據皆與衰減理論曲線有極佳的擬合度（ $R^2 > 0.99$ ），且兩者所得之物理參數（ A 與 α ）誤差皆小於 5%。擬合趨勢與物理參數皆具備高度的一致性，充分驗證本研究所建立之聲壓衰減模型的精確性。

最後，本實驗另以 ISO 9613-1 標準計算本實驗環境下（氣溫 24°C，濕度 65%）之理論 $\alpha_{24^\circ\text{C}}$ ，並與實驗擬合及聲壓衰減模型之 α 進行統一比較如表 4-5。

表 4-5 空氣吸收係數 α 比較

	實驗擬合值	模擬擬合值
α ($\text{Np} \cdot \text{m}^{-1}$)	0.201	0.191
$\alpha_{24^\circ\text{C}}$ ($\text{Np} \cdot \text{m}^{-1}$)	0.206	
與 $\alpha_{24^\circ\text{C}}$ 之誤差(%)	2.43	7.28

由上表可知實驗數據 α 值與 $\alpha_{24^\circ\text{C}}$ 誤差僅為 2.4%，此結果證明實驗環境控制良好，並無遭受外部干擾因素；模擬數據 α 值與 $\alpha_{24^\circ\text{C}}$ 誤差為 7.3%，考量模擬 α 值為理想之空氣吸收模型，無法全面考慮實驗環境的微小干擾因素，因此 α 值略小於實驗與理論值為合理之現象。

綜上所述，本實驗透過模擬、實驗以及理論三個面向互相驗證，且彼此間具高度一致性，為本研究所建立之聲壓衰減模型的準確度提供強而有力的證據，並證明該模型除了可有效預測實驗結果，亦能精確描述超音波在空氣中的衰減行為，為超音波換能器之開發提供準確且有效的分析工具。

Chapter 5 FUT 模型與參數分析



在上一章中，本研究已成功透過實驗與理論驗證，完整建立 PZT 壓電圓片之有限元素分析方法。本章將以此為基礎，進一步應用於 FUT 之分析與設計。

本章主要分為兩階段。首先，參考現有文獻[9]建立 FUT 參考模型，並與文獻數據進行阻抗頻譜與振動模態比對，驗證 FUT 參考模型的準確性；接著以此模型為基礎，進一步設計 FUT 尺寸參數變化模型，探討其外殼尺寸對共振頻率的影響，並與薄板理論進行比對。

5.1 FUT 參考模型驗證與探討

5.1.1 阻抗頻譜模型驗證

本研究針對[9]之 FUT 構造進行 1:1 建模，(詳見圖 3- 5)其阻抗頻譜模擬與文獻數據如(圖 5- 1)，各共振點頻率模擬值與文獻數據比較如表 5- 1。

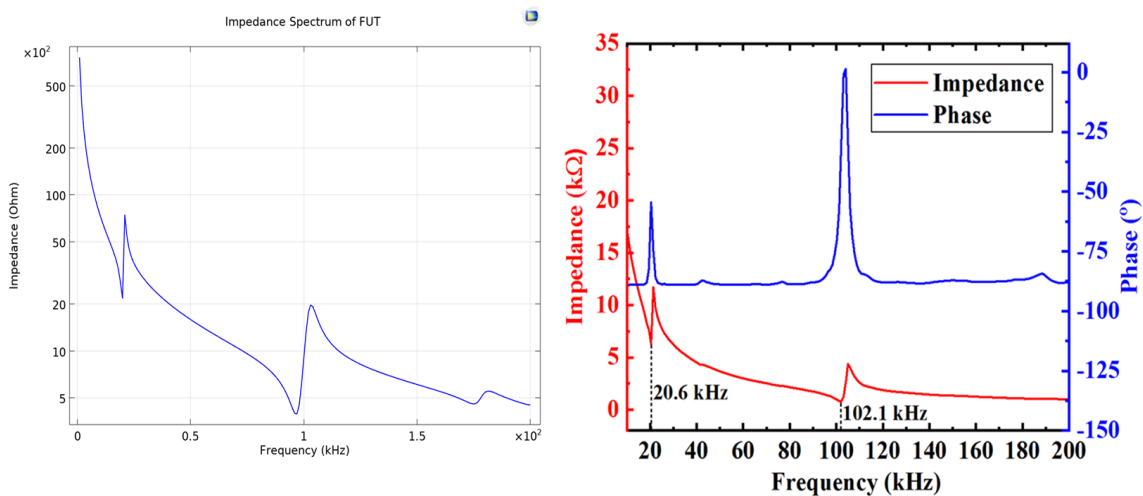


圖 5- 1 (左)阻抗頻譜模擬與(右)文獻[9]數據對照圖

表 5- 1 振點頻率模擬值與文獻數據比較

共振頻率	模擬值(kHz)	文獻數據(kHz)	誤差(%)
Fr1	20	20.6	2.91
Fr2	97	102.1	5

由上表可看出，阻抗頻譜模擬與文獻結果在各共振點之誤差皆小於 5%，顯示模型可準確找出 FUT 之共振點，推測其微小誤差來源為 COMSOL 內建之材料特性與文獻中所使用之材料(如鈦金屬外殼與 ABS 背膠層)無法完全相同；且本模型並無考慮 PZT 與 FUT 外殼間的接著劑，簡化為連續邊界條件。此外，雖模型中已設置材料阻尼損耗，但無法得知文獻 FUT 之真實材料阻尼參數，推測其為造成模擬與文獻中阻抗值差異之主因。

綜上所述，儘管模型在阻抗值上存在誤差，但其對共振頻率有良好的準確性。因此，本模型足以作為可靠的基礎，用於進行後續的振動模態與聲場特性分析。

5.1.2 振動模態模型驗證

承上節建立之阻抗頻譜模型，進行振動模態之模擬分析並與文獻結果進行模態形狀(Mode Shape)比較，如(圖 5- 2)。可看出模擬與文獻結果之模態形狀相同。

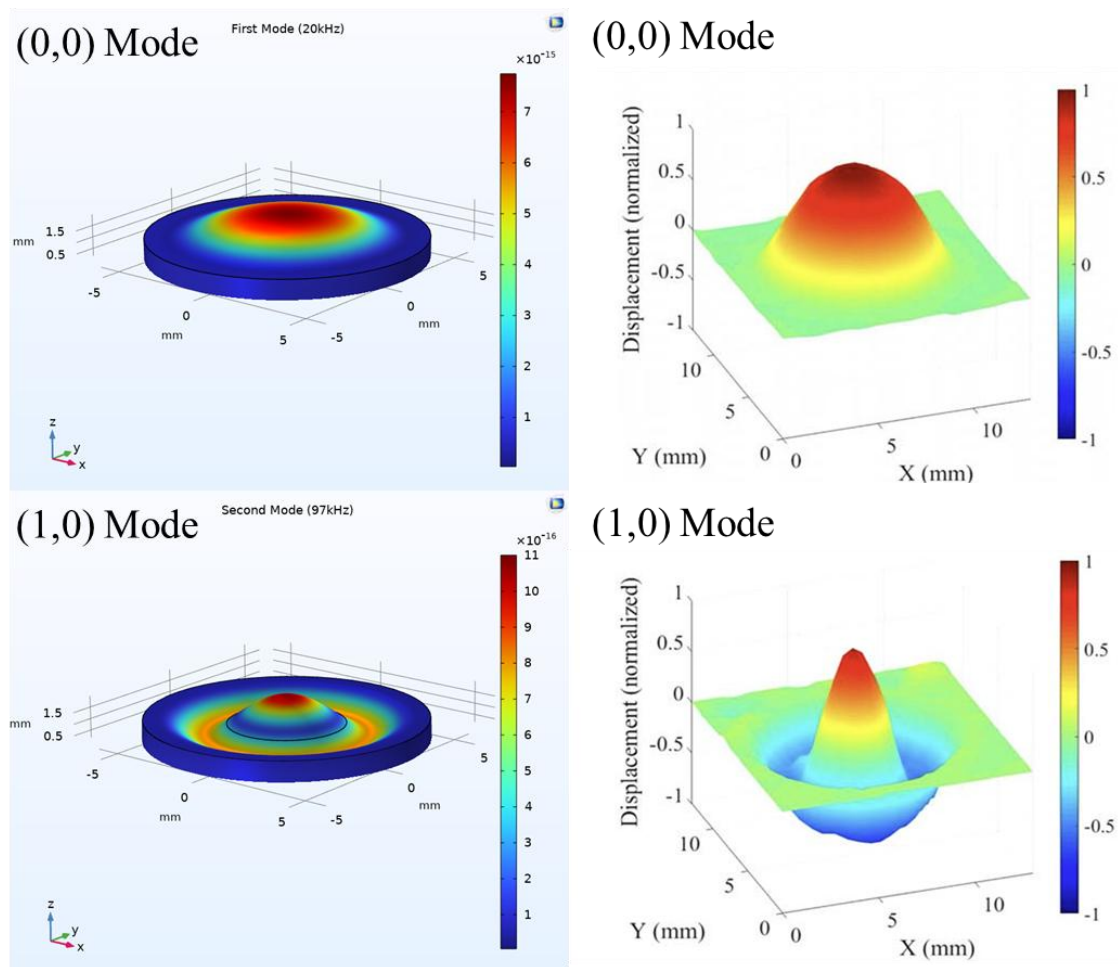


圖 5- 2 (左)振動模態模擬與(右)文獻[9]模態比較



5.1.3 聲場模型探討與驗證

上述 FUT 參考模型之阻抗頻譜與振動模態皆與文獻結果符合，因此本研究在此基礎下，在 20kHz 與 97kHz 兩共振頻率下進一步建立聲場模型與指向性模型進行探討(圖 5- 3)(圖 5- 4)。

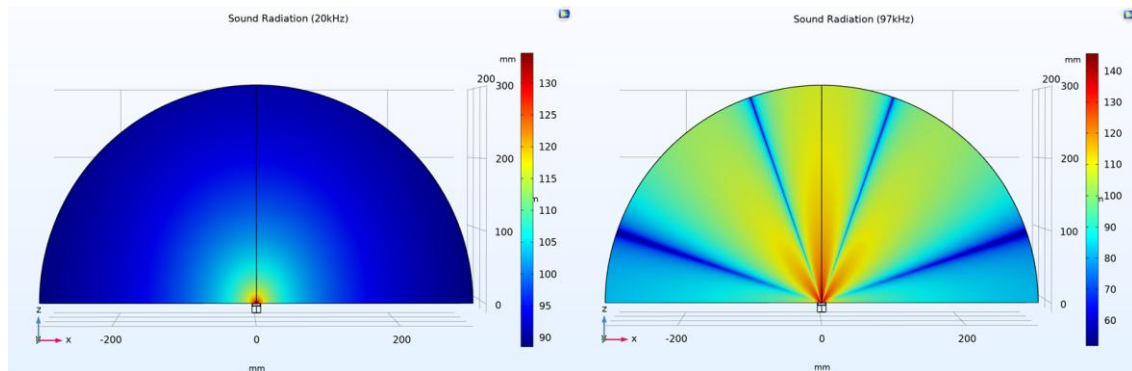


圖 5- 3 FUT 在 20kHz 與 97kHz 時的聲場模型

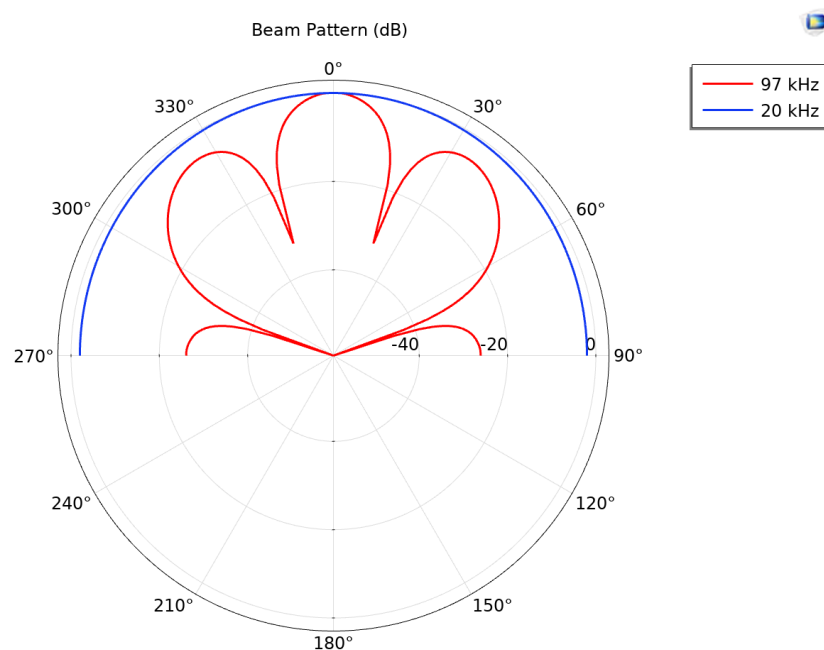


圖 5- 4 FUT 在 20kHz 與 97kHz 時的指向性模型

從上圖可看出 20kHz 時幾乎為全指向性，此時 FUT 為(0,0)模態且能量較大；97kHz 時呈現明顯的指向性分布，此時FUT 為(1,0)模態且能量較小。因此 FUT 之 (0,0)模態較常被選用為工作頻率，並用於大範圍偵測之應用，如倒車雷達或機器人防撞等領域。

為驗證指向性模型準確性，本研究利用文獻[9]中，(1,0)模態之指向性數據(圖 5-5)驗證(圖 5-4)中模擬之(1,0)模態指向性模型，各項參數如表 5-2。

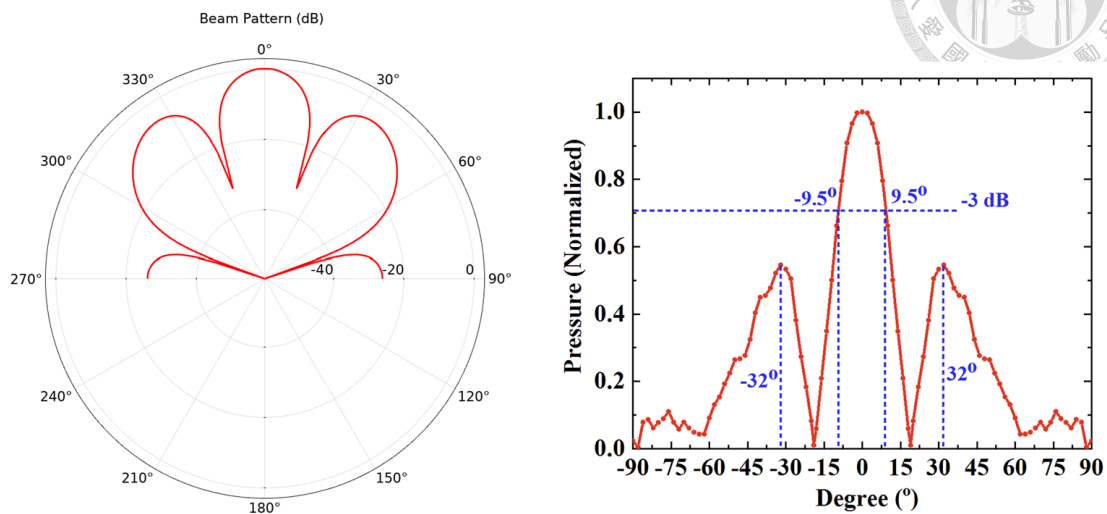


圖 5-5 第二模態指向性模型與文獻[9]

表 5-2 指向性參數比較

	模擬數據	文獻[9]數據	誤差(%)
-3dB 波束寬(deg)	18.09°	19°	4.79%
最大旁瓣角度(deg)	34.7°	32°	8.44%
繪圖取點數	360 點	90 點	

如表 5-2 所示，-3 dB 波束寬與最大旁瓣角之模擬值與文獻值誤差分別為 4.8 % 與 8.4 %，兩者皆小於 10 %，顯示本研究所建立之指向性模型具良好準確性。其中，旁瓣角度誤差較高，推測原因為複雜的干涉現象對真實振動模態與幾何邊界極為敏感，且旁瓣角度誤差來源推測為[9]中取樣點數較少(僅 90 點)所造成，因此屬於合理誤差。



5.2 尺寸變化參數模型

透過前述阻抗頻譜、振動模態以及聲場模型三項物理特性與文獻詳細比對，證明本研究所建立之 FUT 模型具備良好的準確性，本章節將以此模型為基礎，進行 FUT 尺寸變化之模擬。

5.2.1 尺寸參數變動設計

本節旨在詳細說明 FUT 外殼尺寸參數變化的模型設計。研究以簡化的蓋狀結構作為 FUT 外殼的初始模型，其詳細構造與尺寸已標示於前文(圖 3- 7)與(圖 3- 8)。FUT 的工作頻率多選用其第一共振模態，即(0,0)模態。在此模態下，整個外殼薄板進行同向的撓曲振動(圖 3- 9)，有利於聲波輻射。因此，本研究將聚焦於觀察各尺寸變化對第一共振頻率之影響。

本研究設計四種不同的尺寸參數變化方式，其具體改變之尺寸部分已詳列於表 3- 1，並於(圖 3- 10)中呈現，FUT 各部件名稱如(圖 5- 6)所示。

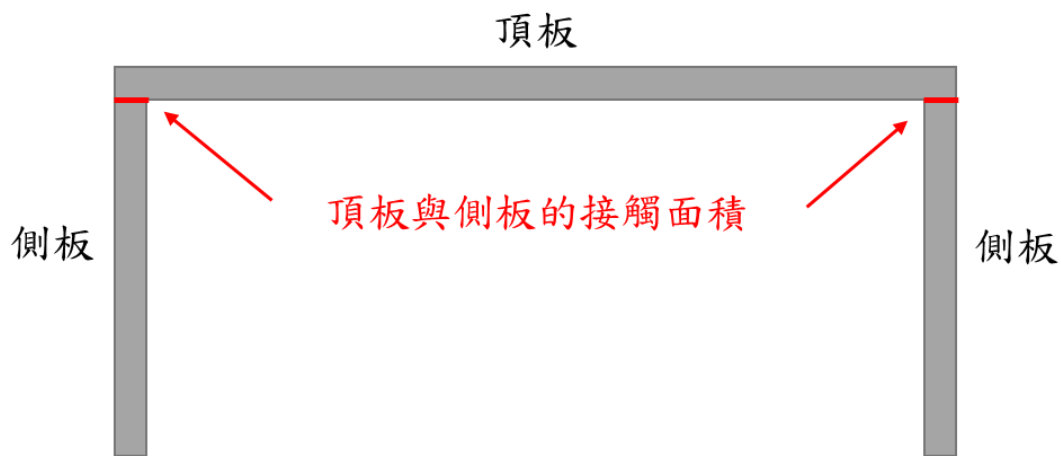


圖 5- 6 FUT 構造說明(側視圖)

各尺寸變化方法簡述如下：

1. 方法 A：將側板內外壁同時向外平移，壁厚不變。用以探討頂板半徑影響。
2. 方法 B：固定頂板內壁，將外壁向上增厚。此方法用以探討頂板厚度影響。
3. 方法 C：固定側板內壁，將外壁向外增厚。此方法用以探討側板厚度影響。
4. 方法 D：固定頂板外壁，將其內壁向下增厚。此方法將同時改變頂板厚度與和側板的接觸面積。



5.2.2 第一共振頻率與尺寸變化關係

本節旨在呈現 5.2.1 節中設計的四種尺寸變化方式，並研究對 FUT 外殼第一共振頻率之影響。各項參數變動所對應的模擬結果將依序繪製成圖，並描述其變化趨勢。

1. 方法 A：

對方法 A 進行模擬，其共振頻率隨半徑變化的關係如(圖 5- 7)所示。從圖中可觀察到，當頂板半徑增加時，其第一共振頻率呈現顯著的非線性下降趨勢。在本次模擬的參數範圍內，頻率變化量可達 17.3 kHz 。

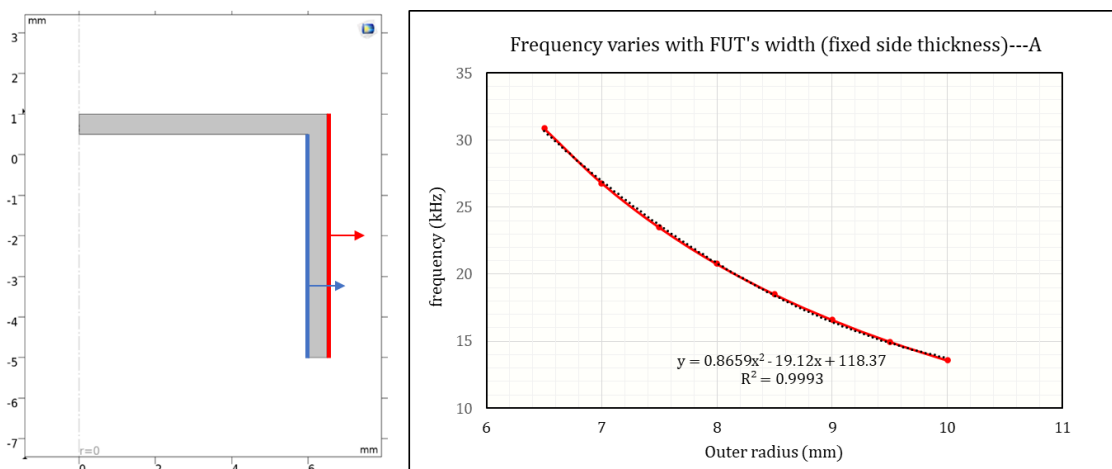


圖 5- 7 方法 A 之頻率變化趨勢

2. 方法 B：

對方法 B 進行模擬，其變化趨勢如(圖 5- 8)，與方法 A 相反，共振頻率隨著頂板厚度的增加，呈現近乎線性的強勁上升關係。此參數對頻率的影響非常顯著，變化範圍高達 34.1kHz 。

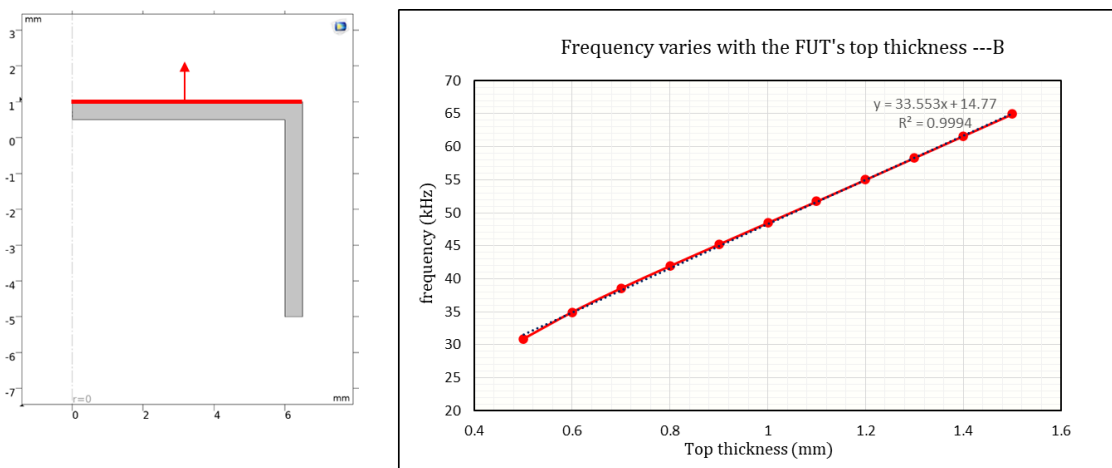


圖 5- 8 方法 B 之頻率變化趨勢

3. 方法 C：

對方法 C 進行模擬，其變化趨勢如(圖 5-9)。模擬結果顯示側板厚度對第一共振頻率影響較小，總變化量僅為 1.4kHz。

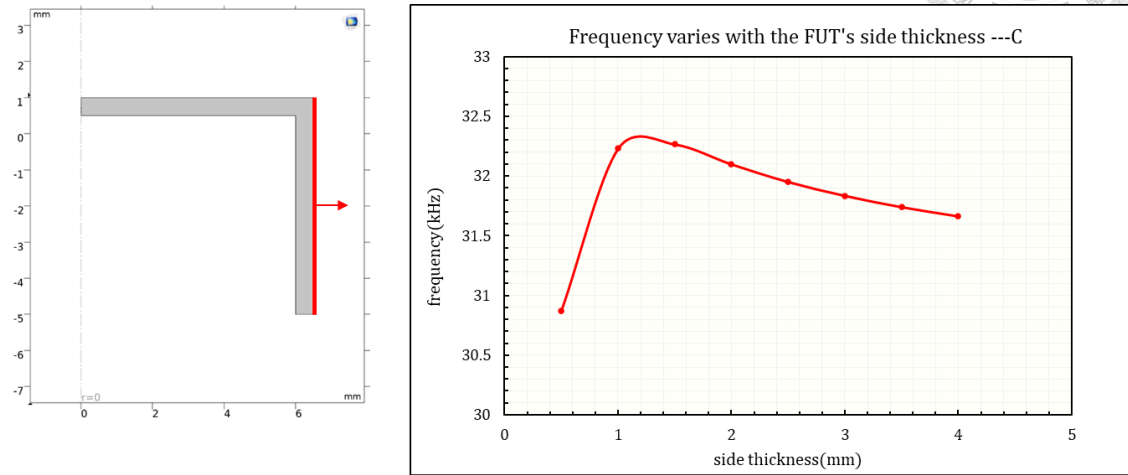


圖 5-9 方法 C 之頻率變化趨勢

4. 方法 D：

對方法 D 進行模擬，其變化趨勢如(圖 5-10)。此方法的影響最為劇烈，共振頻率隨頂板內壁的增厚而急劇上升，總頻率變化範圍高達 41.9 kHz，顯示此處的結構剛性變化對共振頻率有著主導性的影響。

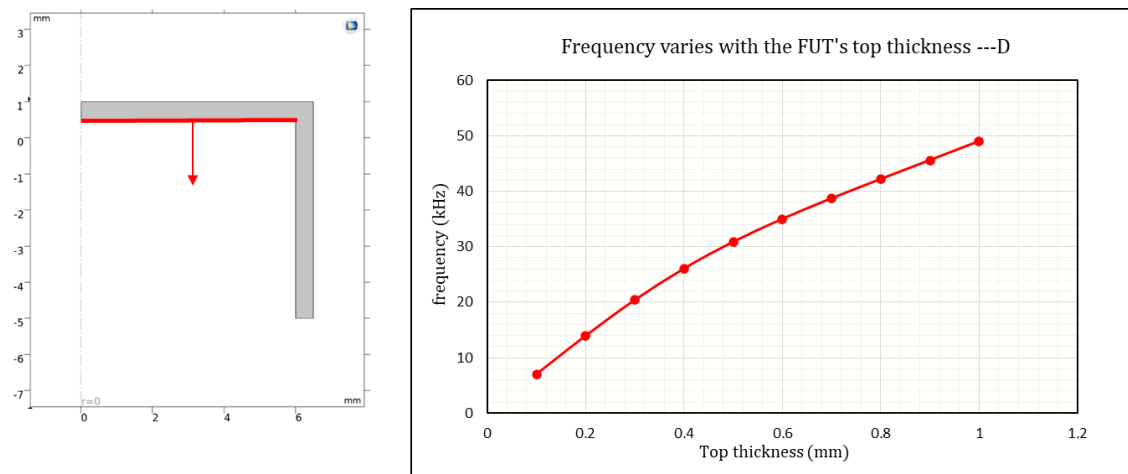


圖 5-10 方法 D 之頻率變化趨勢

從上述結果可知側板厚度對共振頻率影響最小，且第一共振頻率主要由頂板決定。當頂板半徑增大時，第一共振頻率會降低；而頂板增厚時第一共振頻率則會升高。下一章節將以薄板振動理論對這些變化趨勢進行探討，以證明本模擬結果正確。



5.2.3 參數模型與薄板理論

根據第二章所述之薄板振動理論(式 2- 28)，在薄板固定之邊界條件下，圓形薄板之第一共振頻率與其半徑 a 的平方成反比，並與厚度 h 成正比。首先，方法 A 探討頂板半徑的影響，將其模擬結果(圖 5- 7)進行趨勢線擬合與理論預測的平方反比關係高度吻合；方法 B 探討頂板厚度的影響，將其模擬結果(圖 5- 8) 進行趨勢線擬合亦與理論預測之線性上升趨勢一致，證明本模型之可靠性及準確性。

然而，方法 C 與方法 D 分別改變側板厚度與頂板之邊界條件。這些變化已超出薄板理論適用範疇，故其頻率變化趨勢無法利用理論公式直接描述。然而，有限元素分析的優勢在於可精確預測這些複雜結構變化所帶來的影響，為實際設計提供更全面的參考。

綜上所述，本研究之尺寸參數模擬確定 FUT 之第一共振頻率主要由其頂板半徑與厚度主導。此發現為未來進行空氣耦合超音波換能器頻率設計時，提供一個快速且準確的預測工具。

Chapter 6 結論與未來展望



6.1 結論

本研究以有限元素模擬、實驗量測以及理論方程式的相互驗證，系統性分析 PUT 與 FUT 兩種不同換能器之核心構造，分別總結上述兩部分之研究成果。

PUT：針對內部之核心振動元件 PZT 進行深入分析，研究成果如下

1. 建立高精度阻抗頻譜模型，與實驗量測各共振頻率平均誤差僅為 1.19%。
2. 建立耦合模態指向性模型，相較活塞理論更能真實反映振動速度不均勻之聲源表面。
3. 建立高精度聲壓衰減模型，並透過實驗與理論方程式進行交叉驗證。其中，模擬值與量測值在各距離點之平均誤差僅 3.22%。此外，模擬與實驗數據皆與理論衰減曲線達 $R^2 > 0.99$ ，且擬合參數(A, α)誤差皆小於 5%。

FUT：針對參考文獻 FUT 設計進行 1:1 建模，並後續拓展為 FUT 外殼結構之尺寸參數變化模型，研究成果如下

1. 以文獻[9]為基礎建立 FUT 參考模型，其第一與第二階共振頻率與文獻誤差皆小於 5%，且模態形狀吻合。且指向性參數誤差皆小於 10%，證明本模型具有良好的精確性。
2. 建立 FUT 尺寸變化參數模型，設計四種變化尺寸觀察第一共振頻率 Fr1 之變化。最終，研究確定 FUT 之 Fr1 主要由頂板半徑與厚度主導，且模擬結果顯示 Fr1 與頂板半徑平方成反比，與厚度成正比。此結果與薄板振動理論相符，為模型提供可靠的物理依據。

本論文整合有限元素模擬、實驗量測及理論分析，建立一套具系統性且準確的分析方法，為空氣耦合超音波換能器提供物理特性預測的開發工具，期能有效降低研發週期與實驗成本。



6.2 未來展望

本論文已成功為 PUT 與 FUT 兩種空氣耦合換能器建立一套具系統性且準確的分析方法。基於本研究的成果，PUT 與 FUT 之未來研究可朝以下幾個方向進行嘗試與深入探討。

PUT 未來展望：

1. 建立 PZT 陣列模型：本研究目前已建立單一 PZT 元件之聲場模型，未來可將此模型拓展為多個 PZT 元件，並將相鄰元件以不同相位差之訊號激發[4]，進行波束成型(Beam Forming)的模擬研究。
2. 建立 PZT 暫態模型：目前本研究所建立之模型包含阻抗頻譜與振動模態模擬、指向性模擬與聲壓衰減模擬等，皆為頻域分析。意即本研究集中於穩態模擬(Steady-State Simulation)。期望未來可設計暫態模擬，例如進行脈衝回波(Pulse-echo)模擬或調變訊號激發 PZT 等研究，對訊號處理領域進行深入探討。
3. 梯度聲阻抗匹配層設計：本研究指出 PZT 與空氣間高達 99.994% 能量反射的嚴重聲阻抗失配問題。傳統的 1/4 波長匹配層設計可能效果有限。因此可嘗試 3D 列印技術製作聲阻抗隨厚度漸變之梯度聲阻抗匹配層(Gradient Matching Layer)，透過控制材料內部為結構或孔隙，期能克服 PZT 與空氣間巨大的聲阻抗差異。

FUT 未來展望：

1. FUT 外殼結構最佳化：本研究已透過四種尺寸變化參數，初步探討 FUT 外殼尺寸與頻率的關係。為探索更複雜的結構，未來可設計更多的尺寸變化參數，並利用 COMSOL 與機器學習的輔助使用[12]，尋找出最佳外殼的幾何構型。
2. 將 FUT 模擬應用於 MEMS 超音波換能器：FUT 通常為 mm 至 cm 量級的元件，由金屬外殼與 PZT 薄片組成，PMUT(Piezoelectric Micromachined Ultrasonic Transducers)為 μm 量級之 MEMS 換能器且振動機制與 FUT 相似。因此未來可嘗試將本研究所製作之 FUT 尺寸變化參數模型應用至 PMUT 外殼之封裝設計。

參考文獻



[1] Shirane, G., Sawaguchi, E., & Takagi, Y. (1951). Dielectric properties of lead zirconate. *Physical Review*, 84(3), 476.

[2] Rupitsch, S. J. (2019). *Piezoelectric sensors and actuators: Fundamentals and applications*.

[3] Liu, X., Chen, X., Le, X., Wang, Y., Wu, C., & Xie, J. (2018). Reducing ring-down time of pMUTs with phase shift of driving waveform. *Sensors and Actuators A: Physical*, 281, 100-107.

[4] Kinsler, L. E., Frey, A. R., Coppers, A. B., & Sanders, J. V. (2000). *Fundamentals of acoustics*. John Wiley & sons.

[5] Feeney, A., Kang, L., Rowlands, G., Zhou, L., & Dixon, S. (2019). Dynamic nonlinearity in piezoelectric flexural ultrasonic transducers. *IEEE Sensors Journal*, 19(15), 6056-6066.

[6] Leissa, A. W. (1969). *Vibration of plates* (Vol. 160). Scientific and Technical Information Division, National Aeronautics and Space Administration.

[7] Vorländer, M. (2008). *Auralization: fundamentals of acoustics, modelling, simulation, algorithms and acoustic virtual reality*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

[8] International Organization for Standardization. (1993). *Acoustics – Attenuation of sound during propagation outdoors – Part 1: Calculation of the absorption of sound by the atmosphere* (ISO Standard No. 9613-1:1993). Geneva, Switzerland: ISO.

[9] Kang, L., Feeney, A., & Dixon, S. (2020). The high frequency flexural ultrasonic transducer for transmitting and receiving ultrasound in air. *IEEE Sensors Journal*, 20(14), 7653-7660.

[10] Cobbold, R. S. (2006). *Foundations of biomedical ultrasound*. Oxford university press.

[11] Szabo, T. L. (2013). *Diagnostic ultrasound imaging: inside out*. Academic press.

[12] Teng, M., Yue, W., Peng, Y., Tsao, P. C., Deng, H., Xia, F., & Lin, L. (2024, January). PMUT Package Design Optimization via Machine Learning. In *2024 IEEE 37th International Conference on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS)* (pp. 971-974). IEEE.

