



國立臺灣大學工學院機械工程學研究所

碩士論文

Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master's Thesis

具幾何特性阻流體引致渦激振動之流固耦合力學研究

Study on Fluid-Structure Interaction Mechanics of Vortex-Induced
Vibrations Caused by Geometrically-Featured Obstacles

李庭屹

Ting-Yi Li

指導教授：王建凱 博士

Advisor : Chien-Kai Wang, Ph.D.

中華民國 113 年 7 月

July, 2024

誌謝



這篇論文得以順利完成，我要向在學習和研究過程中給予我無限支持與指導的老師們致以最誠摯的感謝。首先，我要感謝我的授課老師們在課堂上的精闢講解和耐心教導，使我打下了堅實的理論基礎，您們的專業知識和教學熱情不僅幫助我理解了複雜的概念，還讓我對科學研究充滿了熱情和敬意。

特別感謝我的指導教授王建凱教授，您在我的研究過程中提供了寶貴的指導和無私的支持。您的專業建議、細心指點和嚴謹態度，讓我在每一步驟中都受益匪淺。感謝您在我遇到困難時的鼓勵與指引，讓我能夠克服挑戰，順利完成論文。您的指導不僅僅局限於學術研究，更教會了我如何嚴謹治學和開闊視野。您的激勵與支持使我在學術道路上不斷前行，並對未來充滿信心。

最後，感謝所有曾經幫助過我、支持過我的老師和同學們，你們的幫助與鼓勵是我前進的動力。感謝你們每一位的付出與關懷，使我能夠在學術道路上堅持不懈，實現自我目標。

摘要



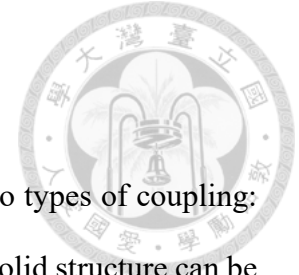
在流固耦合 (Fluid-structure interaction, 簡稱 FSI) 的問題中, 又可分為單向耦合 (One-way coupling) 與雙向耦合 (Two-way coupling) 兩種不同的耦合方式。在單向耦合中, 可將固體結構作為流體動力學模型的邊界條件進行求解, 無需考慮固體對流體的影響; 在雙向耦合中, 則需考慮固體對流體的影響, 因此需要將流體動力學和固體力學方程式組合起來進行求解。

本論文深入探討流體動力學之經典問題 - 卡門渦街 (Kármán vortex street), 即流體流至阻流體下游的兩側, 因邊界層分離而產生兩非對稱排列的漩渦, 其中一側的漩渦順時針轉動, 另一側漩渦反方向轉動。於論文前半段進行單向耦合模擬, 將阻流體設定為矩形剛體, 以有限差分法為基礎並使用 MATLAB 自行開發流體求解器程式, 藉由修改系統矩陣, 以在流場中構建相應阻流體的矩形剛體區域, 以符合特定流場邊界條件, 來觀察阻流體下游的渦街形成過程與變化情況; 於論文後半段使用商用工程軟體 Ansys 進行單向與雙向耦合模擬: 首先設定不同幾何形狀的阻流體, 包括正多邊形與勒洛多邊形, 在單向耦合模擬中觀察阻流體下游的渦街結構, 再於阻流體後方放置一個可變形的固體材料, 以雙向耦合模擬觀察渦街引致的固體振動情況, 以及流體受到固體變形影響的流場變化。

論文內容方面: 第一章首先回顧流固耦合與渦激振動的研究背景與相關歷程; 第二章介紹本論文使用的數值方法與模擬方法, 包括有限差分法、流體求解器、修改系統矩陣以及商用軟體的模組選用; 第三章驗證本論文使用流體求解器之準確性, 再以此流體求解器來計算模擬矩形剛體繞流問題; 第四章使用商用軟體模擬不同幾何形狀阻流體的繞流問題, 再使用其流固耦合模組來觀察阻流體下游產生的渦街對固體造成的共振現象; 第五章為本論文之結論與未來展望。

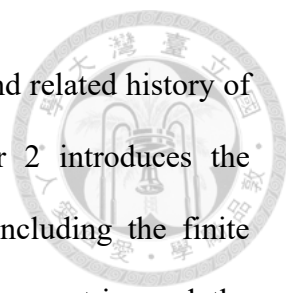
關鍵字: 流固耦合、卡門渦街、有限差分法、渦激振動、勒洛多邊形

Abstract



In the research field of fluid-structure interaction (FSI), there are two types of coupling: one-way coupling and two-way coupling. In one-way coupling, the solid structure can be treated as a boundary condition for the fluid dynamics model without considering the influence of the solid on the fluid. In two-way coupling, the influence of the solid on the fluid must be considered, requiring the combination of fluid dynamics and solid mechanics equations for the solution.

This thesis delves into the classic problem of fluid dynamics - the Kármán vortex street. This phenomenon occurs when fluid flows past an obstacle, creating a series of asymmetrically arranged vortices downstream, with one side rotating clockwise and the other side rotating counterclockwise. In the first half of the thesis, one-way coupling simulations are conducted, setting the obstacle as a rectangular rigid body. Based on the finite difference method and using a fluid solver program developed in MATLAB, the system matrix is modified to construct the rectangular rigid body region in the flow field, matching specific flow boundary conditions, to observe the formation and evolution of the vortex street downstream of the obstacle. In the second half of the thesis, commercial engineering software Ansys is used for both one-way and two-way coupling simulations. Different geometric shapes of obstacles, including regular polygons and Reuleaux polygons, are set to observe the vortex street structures downstream of the obstacles in one-way coupling simulations. Then, a deformable solid material is placed behind the obstacle, and two-way coupling simulations are conducted to observe the vibration of the solid induced by the vortex street and the flow field changes due to the deformation of the solid.



Content of the Thesis: Chapter 1 reviews the research background and related history of fluid-structure interaction and vortex-induced vibrations. Chapter 2 introduces the numerical methods and simulation methods used in this thesis, including the finite difference method, the fluid solver, the modification of the system matrix, and the selection of modules in commercial software. Chapter 3 verifies the accuracy of the fluid solver used in this thesis and uses this solver to simulate the flow around a rectangular rigid body. Chapter 4 uses commercial software to simulate the flow around obstacles of different geometric shapes and employs its fluid-structure interaction module to observe the resonance phenomena induced by the vortex street on the solid. Chapter 5 concludes the thesis and discusses future prospects.

Keywords: Fluid-structure interaction, Kármán vortex street, Finite difference method, Vortex-induced vibration, Reuleaux polygon

目次



誌謝.....	i
摘要.....	ii
Abstract	iii
目次.....	v
圖次.....	viii
表次.....	xiv
第一章 緒論.....	1
1.1 研究動機.....	1
1.2 研究背景.....	2
1.3 文獻回顧.....	3
1.3.1 矩形阻流體.....	3
1.3.2 三角形阻流體.....	4
1.3.3 正多邊形阻流體.....	4
1.4 研究內容.....	5
第二章 數值與模擬方法.....	7
2.1 有限差分法.....	7
2.1.1 一階導數.....	8
2.1.2 二階導數.....	9
2.2 流體求解器.....	9
2.3 修改系統矩陣.....	12
2.3.1 修改速度場系統矩陣.....	12
2.3.2 修改壓力場系統矩陣.....	19
2.4 商用軟體.....	23



第三章 矩形剛體繞流模擬	24
3.1 漩渦頻率與斯特勞哈爾數	24
3.2 流體求解器驗證	25
3.2.1 比對文獻結果	25
3.2.2 比對商用軟體結果	32
3.3 固定流速與流體性質	34
3.3.1 改變正方形邊長 0.8 m ~ 0.2 m	35
3.3.2 固定矩形寬度 0.8 m、改變矩形長度 0.8 m ~ 0.2 m	40
3.3.3 改變矩形寬度 0.2 m ~ 0.8 m、固定矩形長度 0.2 m	45
3.3.4 矩形大小選用	50
3.4 固定雷諾數與流體性質	51
3.4.1 改變正方形邊長 0.8 m ~ 0.2 m	52
3.4.2 固定矩形寬度 0.8 m、改變矩形長度 0.8 m ~ 0.2 m	57
3.4.3 改變矩形寬度 0.8 m ~ 0.2 m、固定矩形長度 0.8 m	62
3.4.4 固定矩形寬度 0.2 m、改變矩形長度 0.2 m ~ 0.8 m	67
3.4.5 改變矩形寬度 0.2 m ~ 0.8 m、固定矩形長度 0.2 m	72
3.4.6 矩形大小選用	77
3.5 無因次化分析	79
3.5.1 固定流速與流體性質	80
3.5.2 固定雷諾數與流體性質	81
第四章 具幾何特性阻流體於可撓固體共振	83
4.1 固定阻流體	91
4.1.1 正三邊形與勒洛三邊形	91
4.1.2 正五邊形與勒洛五邊形	92
4.1.3 正七邊形與勒洛七邊形	93
4.1.4 正九邊形與勒洛九邊形	94
4.1.5 模擬結果比較	95

4.2 阻流體繞其形心旋轉.....	97
4.2.1 正三邊形與勒洛三邊形.....	97
4.2.2 正五邊形與勒洛五邊形.....	101
4.2.3 正七邊形與勒洛七邊形.....	105
4.2.4 正九邊形與勒洛九邊形.....	109
4.2.5 模擬結果比較.....	113
4.3 等寬曲線阻流體.....	115
4.3.1 勒洛三邊形.....	115
4.3.2 勒洛五邊形.....	119
4.3.3 勒洛七邊形.....	123
4.3.4 勒洛九邊形.....	127
4.3.5 模擬結果比較.....	131
4.4 渦激振動於可撓固體.....	133
第五章 結論與未來展望.....	144
5.1 結論.....	144
5.2 未來展望.....	145
參考文獻.....	146

圖次



圖 2-1 交錯網格示意圖	8
圖 2-2 速度場邊界條件	12
圖 2-3 壓力場邊界條件	12
圖 2-4 速度場 U 格點示意圖	13
圖 2-5 速度場 U 的系統矩陣示意圖	18
圖 2-6 壓力場 P 格點示意圖	19
圖 2-7 壓力場 P 的系統矩陣示意圖	22
圖 2-8 Ansys Workbench 流固耦合模擬之求解器串接圖	23
圖 2-9 固體與流體求解器傳遞資訊示意圖	23
圖 3-1 漩渦於 t_1 時刻分離	25
圖 3-2 漩渦於 t_2 時刻分離	25
圖 3-3 文獻 1 之流場示意圖	26
圖 3-4 流體求解器於文獻 1 之模擬結果	26
圖 3-5 文獻 2 之流場示意圖	27
圖 3-6 流體求解器於文獻 2 之模擬結果	27
圖 3-7 文獻 3 之流場示意圖	28
圖 3-8 流體求解器於文獻 3 之模擬結果	28
圖 3-9 文獻 4 之流場示意圖	29
圖 3-10 流體求解器於文獻 4 之模擬結果 1	30
圖 3-11 流體求解器於文獻 4 之模擬結果 2	30
圖 3-12 文獻 5 之流場示意圖	31
圖 3-13 流體求解器於文獻 5 之模擬結果	31
圖 3-14 與 Ansys 比對之流場示意圖	33
圖 3-15 流體求解器之模擬結果	33
圖 3-16 Ansys 之模擬結果	33
圖 3-17 3.3 節剛體繞流模擬之流場示意圖	34
圖 3-18 矩形大小 $0.8\text{ m} * 0.8\text{ m}$ 之模擬結果	35
圖 3-19 矩形大小 $0.7\text{ m} * 0.7\text{ m}$ 之模擬結果	35
圖 3-20 矩形大小 $0.6\text{ m} * 0.6\text{ m}$ 之模擬結果	36
圖 3-21 矩形大小 $0.5\text{ m} * 0.5\text{ m}$ 之模擬結果	36
圖 3-22 矩形大小 $0.4\text{ m} * 0.4\text{ m}$ 之模擬結果	37
圖 3-23 矩形大小 $0.3\text{ m} * 0.3\text{ m}$ 之模擬結果	37
圖 3-24 矩形大小 $0.2\text{ m} * 0.2\text{ m}$ 之模擬結果	38
圖 3-25 3.3.1 節模擬結果之頻率與斯特勞哈爾數散佈圖	39
圖 3-26 矩形大小 $0.8\text{ m} * 0.8\text{ m}$ 之模擬結果	40

圖 3-27 矩形大小 0.8 m * 0.7 m 之模擬結果	40
圖 3-28 矩形大小 0.8 m * 0.6 m 之模擬結果	41
圖 3-29 矩形大小 0.8 m * 0.5 m 之模擬結果	41
圖 3-30 矩形大小 0.8 m * 0.4 m 之模擬結果	42
圖 3-31 矩形大小 0.8 m * 0.3 m 之模擬結果	42
圖 3-32 矩形大小 0.8 m * 0.2 m 之模擬結果	43
圖 3-33 3.3.2 節模擬結果之頻率與斯特勞哈爾數散佈圖	44
圖 3-34 矩形大小 0.2 m * 0.2 m 之模擬結果	45
圖 3-35 矩形大小 0.3 m * 0.2 m 之模擬結果	45
圖 3-36 矩形大小 0.4 m * 0.2 m 之模擬結果	46
圖 3-37 矩形大小 0.5 m * 0.2 m 之模擬結果	46
圖 3-38 矩形大小 0.6 m * 0.2 m 之模擬結果	47
圖 3-39 矩形大小 0.7 m * 0.2 m 之模擬結果	47
圖 3-40 矩形大小 0.8 m * 0.2 m 之模擬結果	48
圖 3-41 3.3.3 節模擬結果之頻率與斯特勞哈爾數散佈圖	49
圖 3-42 3.3 節各小節模擬之矩形大小示意圖	50
圖 3-43 3.4 節剛體繞流模擬之流場示意圖	51
圖 3-44 矩形大小 0.8 m * 0.8 m 之模擬結果	52
圖 3-45 矩形大小 0.7 m * 0.7 m 之模擬結果	52
圖 3-46 矩形大小 0.6 m * 0.6 m 之模擬結果	53
圖 3-47 矩形大小 0.5 m * 0.5 m 之模擬結果	53
圖 3-48 矩形大小 0.4 m * 0.4 m 之模擬結果	54
圖 3-49 矩形大小 0.3 m * 0.3 m 之模擬結果	54
圖 3-50 矩形大小 0.2 m * 0.2 m 之模擬結果	55
圖 3-51 3.4.1 節模擬結果之頻率與斯特勞哈爾數散佈圖	56
圖 3-52 矩形大小 0.8 m * 0.8 m 之模擬結果	57
圖 3-53 矩形大小 0.8 m * 0.7 m 之模擬結果	57
圖 3-54 矩形大小 0.8 m * 0.6 m 之模擬結果	58
圖 3-55 矩形大小 0.8 m * 0.5 m 之模擬結果	58
圖 3-56 矩形大小 0.8 m * 0.4 m 之模擬結果	59
圖 3-57 矩形大小 0.8 m * 0.3 m 之模擬結果	59
圖 3-58 矩形大小 0.8 m * 0.2 m 之模擬結果	60
圖 3-59 3.4.2 節模擬結果之頻率與斯特勞哈爾數散佈圖	61
圖 3-60 矩形大小 0.8 m * 0.8 m 之模擬結果	62
圖 3-61 矩形大小 0.7 m * 0.8 m 之模擬結果	62
圖 3-62 矩形大小 0.6 m * 0.8 m 之模擬結果	63
圖 3-63 矩形大小 0.5 m * 0.8 m 之模擬結果	63
圖 3-64 矩形大小 0.4 m * 0.8 m 之模擬結果	64

圖 3-65 矩形大小 0.3 m * 0.8 m 之模擬結果	64
圖 3-66 矩形大小 0.2 m * 0.8 m 之模擬結果	65
圖 3-67 3.4.3 節模擬結果之頻率與斯特勞哈爾數散佈圖	66
圖 3-68 矩形大小 0.2 m * 0.2 m 之模擬結果	67
圖 3-69 矩形大小 0.2 m * 0.3 m 之模擬結果	67
圖 3-70 矩形大小 0.2 m * 0.4 m 之模擬結果	68
圖 3-71 矩形大小 0.2 m * 0.5 m 之模擬結果	68
圖 3-72 矩形大小 0.2 m * 0.6 m 之模擬結果	69
圖 3-73 矩形大小 0.2 m * 0.7 m 之模擬結果	69
圖 3-74 矩形大小 0.2 m * 0.8 m 之模擬結果	70
圖 3-75 3.4.4 節模擬結果之頻率與斯特勞哈爾數散佈圖	71
圖 3-76 矩形大小 0.2 m * 0.2 m 之模擬結果	72
圖 3-77 矩形大小 0.3 m * 0.2 m 之模擬結果	72
圖 3-78 矩形大小 0.4 m * 0.2 m 之模擬結果	73
圖 3-79 矩形大小 0.5 m * 0.2 m 之模擬結果	73
圖 3-80 矩形大小 0.6 m * 0.2 m 之模擬結果	74
圖 3-81 矩形大小 0.7 m * 0.2 m 之模擬結果	74
圖 3-82 矩形大小 0.8 m * 0.2 m 之模擬結果	75
圖 3-83 3.4.5 節模擬結果之頻率與斯特勞哈爾數散佈圖	76
圖 3-84 3.4 節各小節模擬之矩形大小示意圖	77
圖 4-1 4.1 節、4.2 節與 4.3 節剛體繞流模擬之流場示意圖	83
圖 4-2 不同形狀之阻流體	84
圖 4-3 漩渦於 t_1 時刻之位置	86
圖 4-4 漩渦於 t_2 時刻之位置	86
圖 4-5 勒洛三邊形示意圖	87
圖 4-6 勒洛五邊形示意圖	88
圖 4-7 勒洛七邊形示意圖	89
圖 4-8 勒洛九邊形示意圖	90
圖 4-9 阻流體為正三邊形之模擬結果	91
圖 4-10 阻流體為勒洛三邊形之模擬結果	91
圖 4-11 阻流體為正五邊形之模擬結果	92
圖 4-12 阻流體為勒洛五邊形之模擬結果	92
圖 4-13 阻流體為正七邊形之模擬結果	93
圖 4-14 阻流體為勒洛七邊形之模擬結果	93
圖 4-15 阻流體為正九邊形之模擬結果	94
圖 4-16 阻流體為勒洛九邊形之模擬結果	94
圖 4-17 4.1 節模擬結果之頻率與斯特勞哈爾數散佈圖	95
圖 4-18 阻流體為正三邊形於 4.25 s 之模擬結果	97

圖 4-19 阻流體為正三邊形於 4.5 s 之模擬結果.....	97
圖 4-20 阻流體為正三邊形於 4.75 s 之模擬結果.....	98
圖 4-21 阻流體為正三邊形於 5 s 之模擬結果.....	98
圖 4-22 阻流體為勒洛三邊形於 4.25 s 之模擬結果.....	99
圖 4-23 阻流體為勒洛三邊形於 4.5 s 之模擬結果.....	99
圖 4-24 阻流體為勒洛三邊形於 4.75 s 之模擬結果.....	100
圖 4-25 阻流體為勒洛三邊形於 5 s 之模擬結果.....	100
圖 4-26 阻流體為正五邊形於 4.25 s 之模擬結果.....	101
圖 4-27 阻流體為正五邊形於 4.5 s 之模擬結果.....	101
圖 4-28 阻流體為正五邊形於 4.75 s 之模擬結果.....	102
圖 4-29 阻流體為正五邊形於 5 s 之模擬結果.....	102
圖 4-30 阻流體為勒洛五邊形於 4.25 s 之模擬結果.....	103
圖 4-31 阻流體為勒洛五邊形於 4.5 s 之模擬結果.....	103
圖 4-32 阻流體為勒洛五邊形於 4.75 s 之模擬結果.....	104
圖 4-33 阻流體為勒洛五邊形於 5 s 之模擬結果.....	104
圖 4-34 阻流體為正七邊形於 4.25 s 之模擬結果.....	105
圖 4-35 阻流體為正七邊形於 4.5 s 之模擬結果.....	105
圖 4-36 阻流體為正七邊形於 4.75 s 之模擬結果.....	106
圖 4-37 阻流體為正七邊形於 5 s 之模擬結果.....	106
圖 4-38 阻流體為勒洛七邊形於 4.25 s 之模擬結果.....	107
圖 4-39 阻流體為勒洛七邊形於 4.5 s 之模擬結果.....	107
圖 4-40 阻流體為勒洛七邊形於 4.75 s 之模擬結果.....	108
圖 4-41 阻流體為勒洛七邊形於 5 s 之模擬結果.....	108
圖 4-42 阻流體為正九邊形於 4.25 s 之模擬結果.....	109
圖 4-43 阻流體為正九邊形於 4.5 s 之模擬結果.....	109
圖 4-44 阻流體為正九邊形於 4.75 s 之模擬結果.....	110
圖 4-45 阻流體為正九邊形於 5 s 之模擬結果.....	110
圖 4-46 阻流體為勒洛九邊形於 4.25 s 之模擬結果.....	111
圖 4-47 阻流體為勒洛九邊形於 4.5 s 之模擬結果.....	111
圖 4-48 阻流體為勒洛九邊形於 4.75 s 之模擬結果.....	112
圖 4-49 阻流體為勒洛九邊形於 5 s 之模擬結果.....	112
圖 4-50 4.2 節模擬結果之頻率與斯特勞哈爾數散佈圖	113
圖 4-51 阻流體繞其形心旋轉於 4.25 s 之模擬結果.....	115
圖 4-52 阻流體繞其形心旋轉於 4.5 s 之模擬結果.....	115
圖 4-53 阻流體繞其形心旋轉於 4.75 s 之模擬結果.....	116
圖 4-54 阻流體繞其形心旋轉於 5 s 之模擬結果.....	116
圖 4-55 等寬曲線阻流體於 4.25 s 之模擬結果.....	117
圖 4-56 等寬曲線阻流體於 4.5 s 之模擬結果.....	117

圖 4-57 等寬曲線阻流體於 4.75 s 之模擬結果.....	118
圖 4-58 等寬曲線阻流體於 5 s 之模擬結果.....	118
圖 4-59 阻流體繞其形心旋轉於 4.25 s 之模擬結果.....	119
圖 4-60 阻流體繞其形心旋轉於 4.5 s 之模擬結果.....	119
圖 4-61 阻流體繞其形心旋轉於 4.75 s 之模擬結果.....	120
圖 4-62 阻流體繞其形心旋轉於 5 s 之模擬結果.....	120
圖 4-63 等寬曲線阻流體於 4.25 s 之模擬結果.....	121
圖 4-64 等寬曲線阻流體於 4.5 s 之模擬結果.....	121
圖 4-65 等寬曲線阻流體於 4.75 s 之模擬結果.....	122
圖 4-66 等寬曲線阻流體於 5 s 之模擬結果.....	122
圖 4-67 阻流體繞其形心旋轉於 4.25 s 之模擬結果.....	123
圖 4-68 阻流體繞其形心旋轉於 4.5 s 之模擬結果.....	123
圖 4-69 阻流體繞其形心旋轉於 4.75 s 之模擬結果.....	124
圖 4-70 阻流體繞其形心旋轉於 5 s 之模擬結果.....	124
圖 4-71 等寬曲線阻流體於 4.25 s 之模擬結果.....	125
圖 4-72 等寬曲線阻流體於 4.5 s 之模擬結果.....	125
圖 4-73 等寬曲線阻流體於 4.75 s 之模擬結果.....	126
圖 4-74 等寬曲線阻流體於 5 s 之模擬結果.....	126
圖 4-75 阻流體繞其形心旋轉於 4.25 s 之模擬結果.....	127
圖 4-76 阻流體繞其形心旋轉於 4.5 s 之模擬結果.....	127
圖 4-77 阻流體繞其形心旋轉於 4.75 s 之模擬結果.....	128
圖 4-78 阻流體繞其形心旋轉於 5 s 之模擬結果.....	128
圖 4-79 等寬曲線阻流體於 4.25 s 之模擬結果.....	129
圖 4-80 等寬曲線阻流體於 4.5 s 之模擬結果.....	129
圖 4-81 等寬曲線阻流體於 4.75 s 之模擬結果.....	130
圖 4-82 等寬曲線阻流體於 5 s 之模擬結果.....	130
圖 4-83 4.3 節模擬結果之頻率與斯特勞哈爾數散佈圖	131
圖 4-84 4.4 節渦激振動模擬之模型示意圖	133
圖 4-85 楊氏模數為 200 GPa 之第一模態振形.....	134
圖 4-86 楊氏模數為 20 GPa 之第一模態振形.....	135
圖 4-87 楊氏模數為 0.508 GPa 之第二模態振形.....	135
圖 4-88 楊氏模數為 0.065 GPa 之第三模態振形.....	135
圖 4-89 渦激振動模擬之流場結果	136
圖 4-90 渦激振動模擬之固體變形結果	137
圖 4-91 渦激振動模擬之固體應變結果	137
圖 4-92 渦激振動模擬之固體應力結果	137
圖 4-93 渦激振動模擬之流場結果	138
圖 4-94 渦激振動模擬之固體變形結果	139

圖 4-95 渦激振動模擬之固體應變結果	139
圖 4-96 渦激振動模擬之固體應力結果	139
圖 4-97 渦激振動模擬之流場結果	140
圖 4-98 渦激振動模擬之固體變形結果	141
圖 4-99 渦激振動模擬之固體應變結果	141
圖 4-100 渦激振動模擬之固體應力結果	141
圖 4-101 渦激振動模擬之流場結果	142
圖 4-102 渦激振動模擬之固體變形結果	143
圖 4-103 渦激振動模擬之固體應變結果	143
圖 4-104 渦激振動模擬之固體應力結果	143

表次



表 3-1	文獻與流體求解器之斯特勞哈爾數比較表	32
表 3-2	3.3.1 節模擬結果比較表	38
表 3-3	3.3.2 節模擬結果比較表	43
表 3-4	3.3.3 節模擬結果比較表	48
表 3-5	3.4.1 節模擬結果比較表	55
表 3-6	3.4.2 節模擬結果比較表	60
表 3-7	3.4.3 節模擬結果比較表	65
表 3-8	3.4.4 節模擬結果比較表	70
表 3-9	3.4.5 節模擬結果比較表	75
表 4-1	4.1 節模擬結果比較表	95
表 4-2	4.2 節模擬結果比較表	113
表 4-3	4.3 節模擬結果比較表	131
表 4-4	不同楊氏模數在不同模態下之自然頻率表	134



第一章 緒論

1.1 研究動機

隨著科技產業的蓬勃發展，電腦計算機的效能因為硬體技術的進步與軟體開發的革新，使其在數據處理和資料儲存的能力有了巨大的提升，也因此帶動整個社會朝向數位化發展，大大影響了各個領域，從科學研究、醫療、教育到商業應用，乃至個人生活的媒體娛樂都息息相關。

在科學研究和工程領域，電腦計算機提供了強大的計算能力和模擬工具，使得科學家和工程師能夠進行複雜的數值模擬、分析大量數據、設計新產品和解決現實中的問題。流固耦合（Fluid-structure interaction, 簡稱 FSI）是工業界最常被科學家與工程師探討與研究的問題之一，而流固耦合是指流體和固體材料之間機械力學相互作用的現象。在這種情況下，流體材料的運動會影響固體材料的運動，同時固體材料的運動與變形也會反過來影響流體的運動。這種相互作用的現象通常出現在許多自然和工程系統中，例如：水中的物體受到水流的影響與風力對建築物的作用等。在許多實際工程中，流體與固體的相互作用是不可避免的，例如：航太、汽車與海洋工程等領域，流固耦合的問題直接關係到結構的安全性、性能和耐久性。因此，流固耦合的研究除了有助於更好地理解這些系統的行為外，對於設計和解決實際工程問題具有重要意義。

綜上所述，流固耦合問題的研究十分迫切且重要。透過深入研究流固耦合問題，不但可以促進工程應用的發展、推動科學技術的進步，還可以更好地理解自然界中的各種現象。因此，本文將致力於探討流固耦合的問題，以期為相關領域的發展提供新的思路和方法。

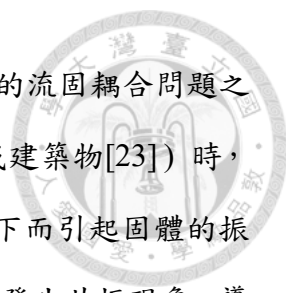


1.2 研究背景

流固耦合涉及多學科領域，除了在機械工程中，如：發動機設計[2]、軸承設計[6]等，在其他領域中也能看到其身影，如：土木工程中的橋樑[12]與高層建築[4]、航太工程中的機翼振動[1]與火箭結構[24]、生醫工程中的血管動力學[3]與人工心臟瓣膜[5]、海洋工程中的海上平台[18]與船舶設計[7]等。儘管這些研究屬於不同領域，在科學家與工程師們的實驗研究與電腦模擬的努力下，皆對流固耦合力學研究做出了重大貢獻。

在流固耦合力學研究的發展歷程中，通常會結合實驗研究與電腦模擬兩種方法。實驗研究方面，其優點除了可以直接觀察現象之外，還能提供真實的數據驗證理論和數值模型，而缺點則是設備要求高、花費時間長、難以控制實驗條件等；電腦模擬方面則相反，除了成本相對較低、花費時間短之外，更重要的是能夠在多種實驗條件下進行模擬，而缺點則是需要準確的數學模型與邊界條件，網格質量與計算精度也會影響模擬結果。透過實驗研究與電腦模擬兩者的結合，可以更全面、深入地理解和解決流固耦合問題。

綜上所述，在時間與成本的考量下，科學家與工程師們通常可選擇以電腦模擬的方式來研究流固耦合問題。近年來因電腦計算機的蓬勃發展，愈來愈多的流固耦合模擬方法也隨之出現，主要可以分成三類，分別為完全拉格朗日方法[17]、完全歐拉方法[10]以及拉格朗日歐拉方法[21]。在完全拉格朗日方法中，流體與固體皆使用拉格朗日網格，並在拉格朗日座標系上進行求解；完全歐拉方法則是流體與固體皆使用歐拉網格，並在歐拉座標系上進行求解；而拉格朗日歐拉方法結合了兩種座標系，流體使用歐拉網格，而固體使用拉格朗日網格，並在各自的座標系上進行求解，其優點為計算網格可以隨著材料點移動，也可以固定或是重新劃分，能避免網格變形導致的數值問題，又能保持對流體和固體的準確描述。在本論文中則是使用拉格朗日歐拉方法作為流固耦合的數值模擬方法。



渦激振動 (Vortex-Induced Vibration, 簡稱 VIV) 即為典型的流固耦合問題之一，當流體 (如水或空氣) 流過一個彈性固體結構 (如橋樑[22]或建築物[23]) 時，流體會在固體的周圍形成渦流，在流體與固體之間的相互作用下而引起固體的振動現象，特別是當振動頻率接近固體結構的自然頻率時，可能會發生共振現象，導致結構大幅度的振動，嚴重影響了結構的安全與性能。在本論文中研究之渦激振動會與前述稍有不同，通常渦激振動的固體指的是阻流體本身，但在本論文中會振動的的不是阻流體本身，而是放置於阻流體後方的固體。透過流體流至阻流體後方形成之卡門渦街 (Kármán vortex street)，去激發固體的振動現象，當渦街的頻率接近固體結構的自然頻率時，將發生共振現象，因此渦街的頻率就顯得至關重要。故本論文將深入探討不同幾何形狀的阻流體，對其渦街的形成與頻率的變化有何影響，期望此結論對於改進、解決或設計相關工程問題能有所幫助。

1.3 文獻回顧

對於流體流經阻流體之流動行為，已有許多人通過實驗、理論分析和數值模擬等多種方法深入探討了其流動特性、渦街形成機制以及阻力特性等方面的問題。以下將針對不同幾何形狀的阻流體進行文獻回顧，並分別說明其研究成果。

1.3.1 矩形阻流體

UI Islam 等人 [20] 運用不可壓縮晶格波茲曼法 (incompressible lattice Boltzmann method, 簡稱 ILBM) 進行數值模擬，研究在均勻流場中矩形阻流體不同長寬比對流場特性的影響，並與有限差分法和有限體積法的結果進行驗證。針對長寬比從 0.15 到 4，以及雷諾數 100、150、200 與 250 進行詳細研究，探討長寬比對升力係數、阻力係數與漩渦脫落頻率等影響。當長寬比在 0 到 2 的範圍內，對升力係數、阻力係數、斯特勞哈爾數 (Strouhal number, 簡稱 St) 與漩渦脫落機制有

非常明顯的影響。通常阻力係數隨長寬比增加而下降，在長寬比 0.15 到 2 的範圍內下降率更為明顯。在這四個雷諾數下，升力係數的均方根值在長寬比約 0.5 處達到最大值。不同的雷諾數下，斯特勞哈爾數隨長寬比的變化呈現不同特徵。特別是在雷諾數為 250 時，在長寬比約 1.45 附近出現不連續性，瞬時渦度場也呈現不規則的漩渦脫落行為，沒有固定的脫落頻率，而在雷諾數 100、150 與 200 時則未觀察到此種不連續性。

1.3.2 三角形阻流體

Manzoor 等人 [8] 使用單一鬆弛時間晶格波茲曼法 (single relaxation time lattice Boltzmann method, 簡稱 SRT-LBM) 進行數值模擬，研究雷諾數 80 到 200 的範圍內，三角形阻流體置於水平通道中左右兩種不同位置的流場特性，包括分析渦度圖、升力係數與阻力係數等。兩種情況下均觀察到規則的漩渦脫落現象，但三角形阻流體置於右側時，隨著雷諾數增大，漩渦脫落向上游方向偏移，這是由於壓力效應(推力效應)所致。三角形阻流體置於右側時，在雷諾數 80 到 150 的範圍內，阻力係數為定植，升力係數則為負值，而三角形阻流體置於左側時則未觀察到負值的平均阻力係數，這是由於推力效應減弱所致。文獻多集中在圓形和矩形阻流體，而三角形阻流體的研究較少，此文獻通過探討不同位置三角形阻流體的流場特性，為進一步優化設計提供有益參考。

1.3.3 正多邊形阻流體

Tian 與 Wu [19] 使用共形映射技術研究偶數邊正多邊形阻流體，在無黏性和低雷諾數黏性流下於阻流體周圍的二維流動行為，並將其與圓形阻流體周圍的流動進行比較。分析包括推導勢流的精確解、檢查渦對 (vortex pair) 行為和穩定性，以及估算臨界雷諾數和斯特勞哈爾數作為多邊形邊數的函數。在無黏性分析時，使



用 Schwarz – Christoffel 變換推導了正多邊形阻流體周圍勢流的精確解。研究強調了邊數 N 對流動特性的影響，隨著 N 增加，多邊形的行為趨近於圓柱，且發現了新的渦對靜止線，這些靜止線在圓柱情況下並不存在；在黏性流分析時，在映射(圓形)域中推導了流函數方程，從而獲得臨界雷諾數和斯特勞哈爾數的近似表達式。對於非穩態流動，漩渦脫落的臨界雷諾數和斯特勞哈爾數隨著 N 的增加而單調減少。總結其研究成果可以得知，正多邊形阻流體周圍的流動表現隨邊數變化而表現出顯著的複雜行為。對於無黏流，Schwarz – Christoffel 映射技術有效捕捉了多邊形幾何形狀對流動模式和漩渦穩定性的影響。在黏性流的情況下，增加邊數會降低穩態和非穩態流動的臨界雷諾數，隨著 N 增加，行為更接近圓形阻流體。這些發現提供了對非圓形幾何形狀周圍流體動力學的更深入理解，也為未來關於多邊形結構空氣動力學特性的研究提供參考。

1.4 研究內容

本論文深入探討流體動力學之經典問題 – 卡門渦街，即流體流至阻流體下游的兩側，因邊界層分離而產生兩非對稱排列的漩渦，其中一側的漩渦順時針轉動，另一側漩渦反方向轉動。在現實生活中，阻流體可用來代表：建築物、車輛、船隻、橋樑等。研究流體流經這些阻流體有助於了解在不同情況下流體產生的行為，例如：壓力場的分佈、速度場的變化、紊流的產生等。

在流固耦合的問題中，又可分為單向耦合 (One-way coupling) 與雙向耦合 (Two-way coupling) 兩種不同的耦合方式。在單向耦合中，流體流動形成的壓力對固體結構產生影響，但固體結構的運動對流體流動的影響可以忽略不計。這種情況下，可以將固體結構作為流體動力學模型中的邊界條件進行求解，而不需要考慮固體對流體的影響；在雙向耦合中，流體的流動會影響固體的運動，同時固體的運動也會影響流體的流動。這種情況下，必須同時考慮兩者對彼此的相互作用，因此需要將流體動力學和固體力學方程式組合起來進行求解。



綜上所述，單向耦合與雙向耦合兩種方式在流固耦合問題中具有不同的應用場景，根據具體情況，可以選擇適合的耦合方式來解決問題，此兩種耦合方式在本論文中皆會討論。在論文前半段會進行單向耦合模擬，將阻流體設定為矩形剛體，以有限差分法為基礎並使用 MATLAB 自行開發流體求解器程式，藉由修改系統矩陣，以在流場中構建相應阻流體的矩形剛體區域，以符合特定流場邊界條件，來觀察阻流體下游的渦街形成過程與變化情況；於論文後半段運用商用工程軟體 Ansys 進行單向與雙向耦合模擬：首先設定不同幾何形狀的阻流體，包括正多邊形與勒洛多邊形，在單向耦合模擬中觀察阻流體下游的渦街結構，再於阻流體後方放置一個可變形的固體材料，以雙向耦合模擬觀察渦街引致的固體振動情況，以及流體受到固體變形影響的流場變化。

論文內容方面：第一章首先回顧流固耦合與渦激振動的研究背景與相關歷程；第二章介紹本論文使用的數值方法與模擬方法，包括有限差分法、流體求解器、修改系統矩陣以及商用軟體的模組選用；第三章驗證本論文使用流體求解器之準確性，再以此流體求解器來計算模擬矩形剛體繞流問題；第四章使用商用軟體模擬不同幾何形狀阻流體的繞流問題，再使用其流固耦合模組來觀察阻流體下游產生的渦街對固體造成的共振現象；第五章為本論文之結論與未來展望。

第二章 數值與模擬方法



在本章中，會先於 2.1 節說明有限差分法的概念；接著在 2.2 節中將以有限差分法為基礎建立流體求解器，並推導其求解流程；在 2.3 節中會說明如何修改系統矩陣，以在流場內部建立矩形剛體區域；最後在 2.4 節會說明商用軟體的模組選用。

2.1 有限差分法

有限差分法（Finite difference method, 簡稱 FDM）是一種數值方法，用於求解偏微分方程式的數值近似解。該方法將連續的偏微分方程式轉換為差分形式，將時間和空間的連續域劃分為離散的格點，通常會劃分成均勻的格點，且根據問題的幾何形狀可以選擇適當的格點數。將原始的偏微分方程式在格點上進行離散化，並將導數用差分近似來表示，以建立系統矩陣。最後用數值方法就可以在這些格點上計算偏微分方程式的近似解。在本研究中，會用此方法計算流體域的速度場與壓力場，以下將說明在流體域的近似導數如何計算。

在流體區域的離散化是在交錯網格上進行的，如圖 2-1 所示。U 代表的是流體在 x 方向的速度，且 U 位於流體網格的垂直邊上；V 代表的是流體在 y 方向的速度，且 V 位於流體網格的水平邊上；而 P 代表的是流體的壓力，位於流體網格的中點上。 h_x 與 h_y 分別代表在 x 方向與 y 方向的網格大小。

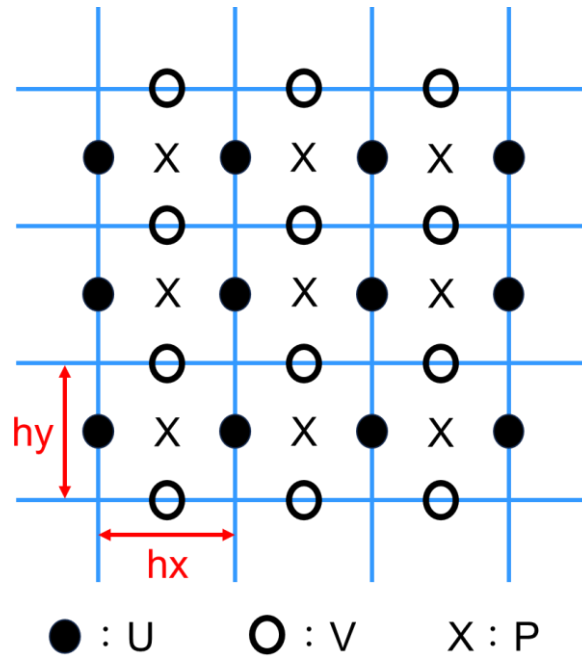


圖 2-1 交錯網格示意圖

2.1.1 一階導數

在流體格點上，以 U 為例，一階導數可以用中心差分的方法近似成：

$$(U_x)_{i,j} \approx \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h_x} \quad (2-1)$$

差分的位置位於 U 格點上，但這樣會導致在數值模擬時產生不穩定性，因此將差分的位置改在相鄰 U 格點的中間：

$$(U_x)_{i+\frac{1}{2},j} \approx \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h_x} \quad (2-2)$$

如此一來即可得到穩定的中心差分近似值，該位置同時也是 P 格點的位置。用同樣的方法也可以對 V 格點進行差分：

$$(V_y)_{i,j+\frac{1}{2}} \approx \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{h_y} \quad (2-3)$$



2.1.2 二階導數

一樣用中心差分的概念，可以近似 U 、 V 與 P 的拉普拉斯運算子：

$$\Delta U_{i,j} = (U_{xx})_{i,j} + (U_{yy})_{i,j} \approx \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{h_y^2} \quad (2-4)$$

$$\Delta V_{i,j} = (V_{xx})_{i,j} + (V_{yy})_{i,j} \approx \frac{V_{i-1,j} - 2V_{i,j} + V_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{V_{i,j-1} - 2V_{i,j} + V_{i,j+1}}{h_y^2} \quad (2-5)$$

$$\Delta P_{i,j} = (P_{xx})_{i,j} + (P_{yy})_{i,j} \approx \frac{P_{i-1,j} - 2P_{i,j} + P_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{P_{i,j-1} - 2P_{i,j} + P_{i,j+1}}{h_y^2} \quad (2-6)$$

2.2 流體求解器

在本研究中使用有限差分法來求解速度場與壓力場，以下將說明求解流程。

考慮不可壓縮的 Navier-Stokes 方程式，其流體控制方程式可以寫成式(2-7)、式(2-8)與式(2-9)。其中，式(2-7)與式(2-8)為流體在 x 方向與 y 方向的動量方程式，描述流體的運動行為；式(2-9)為連續方程式，描述了流體質量的守恆。

$$u_t + \frac{p_x}{\rho} = -(u^2)_x - (uv)_y + \frac{\mu}{\rho} (u_{xx} + u_{yy}) \quad (2-7)$$

$$v_t + \frac{p_y}{\rho} = -(uv)_x - (v^2)_y + \frac{\mu}{\rho} (v_{xx} + v_{yy}) \quad (2-8)$$

$$u_x + v_y = 0 \quad (2-9)$$

假設第 n 個時間步的 x 方向與 y 方向的速度場分別為 U^n 、 V^n ，且滿足式(2-9)。以下可以將求解第 $n+1$ 個時間步的速度場 U^{n+1} 、 V^{n+1} 的過程分成三個部分：



1. 非線性項

在處理非線性項的部分主要會用到 2.1.1 節中提到的一階導數來做計算，且會用顯式方法來求解，其方程式如式(2-10)與式(2-11)所示，其中 U^* 與 V^* 為中繼變數。值得注意的是，用顯式方法來求解須遵守 CFL 條件，其含義為：特徵速度乘以時間步長應小於或等於空間步長 ($\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$)，目的是為了防止流體在一個時間步長內，流超過一個網格的距離，以確保在求解偏微分方程時能夠產生穩定的解。

$$\frac{U^* - U^n}{\Delta t} = -((U^n)^2)_x - (U^n V^n)_y \quad (2-10)$$

$$\frac{V^* - V^n}{\Delta t} = -(U^n V^n)_x - ((V^n)^2)_y \quad (2-11)$$

2. 黏性項

在處理黏性項的部分主要會用到 2.1.2 節中提到的二階導數來做計算，若用顯式方法來計算，則須遵守更嚴格的 CFL 條件 ($\frac{c\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1$)，因此改用隱式方法來求解，就沒有 CFL 條件的限制，但須在每個時間步處理兩個線性系統，其方程式如式(2-12)與式(2-13)所示，其中 U^{**} 與 V^{**} 為中繼變數、 U^* 與 V^* 由(2-10)式與(2-11)式可得到。

$$\frac{U^{**} - U^*}{\Delta t} = \frac{\mu}{\rho} (U_{xx}^{**} + U_{yy}^{**}) \quad (2-12)$$

$$\frac{V^{**} - V^*}{\Delta t} = \frac{\mu}{\rho} (V_{xx}^{**} + V_{yy}^{**}) \quad (2-13)$$



3. 壓力項

最後處理壓力項的部分，利用第 $n+1$ 個時間步的壓力場 P^{n+1} 的梯度，來修正中繼速度場 U^{**} 、 V^{**} ，其方程式如式(2-14)與式(2-15)所示。

$$\frac{U^{n+1} - U^{**}}{\Delta t} = -(P^{n+1})_x \quad (2-14)$$

$$\frac{V^{n+1} - V^{**}}{\Delta t} = -(P^{n+1})_y \quad (2-15)$$

其中，壓力場 P^{n+1} 是由隱式方法求解而來，一樣可從線性系統計算得到，將修正方程式寫成向量形式：

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbf{U}^{n+1} - \frac{1}{\Delta t} \mathbf{U}^n = -\nabla P^{n+1} \quad (2-16)$$

將等式兩邊同時取散度：

$$-\frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{U}^n = -\Delta P^{n+1} \quad (2-17)$$

其中， $\nabla \cdot \mathbf{U}^n$ 為已知，因此求解上式的泊松方程式即可得 P^{n+1} ，接著計算 P^{n+1} 的梯度，最後將原本的速度場減去壓力場的梯度乘以時間步長後，即可得到更新後的速度場，如式(2-18)所示。

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n - \nabla P^{n+1} \cdot \Delta t \quad (2-18)$$



2.3 修改系統矩陣

以下將說明如何修改速度場與壓力場的系統矩陣，以在流場內部建立矩形剛體區域。首先說明流場的邊界條件，主要會用到兩個，一個是狄利克雷 (Dirichlet) 邊界條件，其邊界上的速度值已知；另一個是諾伊曼 (Neumann) 邊界條件，其邊界上的法向梯度為零。在速度場中，會將入口處、上邊界與下邊界的邊界條件設為狄利克雷邊界條件，而出口處會設為諾伊曼邊界條件，如圖 2-2 所示；在壓力場中，會將入口處、上邊界與下邊界的邊界條件設為諾伊曼邊界條件，而出口處會設為狄利克雷邊界條件，如圖 2-3 所示。

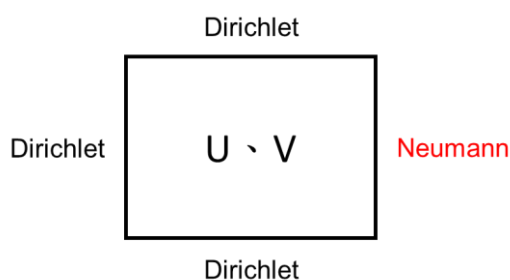


圖 2-2 速度場邊界條件

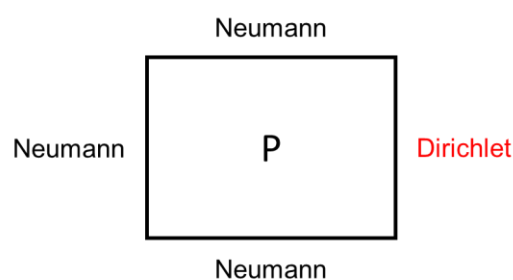


圖 2-3 壓力場邊界條件

2.3.1 修改速度場系統矩陣

如圖 2-4 所示，假設一個流場被劃分成 10×11 個網格，圓點代表 U 格點的位置，內部有一個 2×2 的矩形區域。在計算速度場 U 時只會計算流場內部的格點，即紅色圓點以及內部的黑色圓點，共 99 個圓點，而在計算二階導數時需要前後的格點，因此在流場內部邊上的格點外需要再一個格點，即最外圍的黑色圓點。

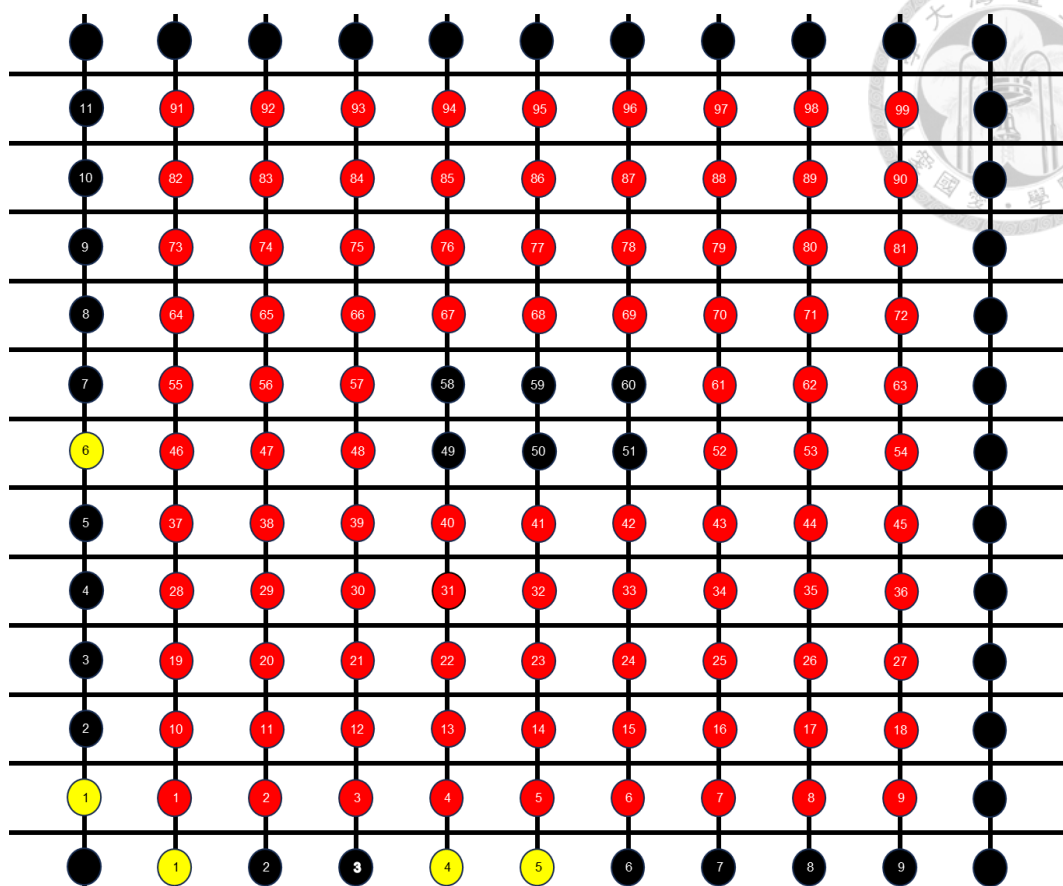


圖 2-4 速度場 U 格點示意圖

接著說明系統矩陣，以 U 為例，由式(2-12)移項後可得：

$$U^{**} = U^* + \frac{\mu \Delta t}{\rho} (U_{xx}^{**} + U_{yy}^{**}) = U^* + \frac{\mu \Delta t}{\rho} L U^{**} \quad (2-19)$$

其中，L 即為系統矩陣。再將右端項的 $L U^{**}$ 拆解成兩個部分：

$$U^{**} = U^* + \frac{\mu \Delta t}{\rho} (K U^{**} + Ubc) \quad (2-20)$$

其中，K 為不包含邊界條件的系統矩陣、Ubc 為只有邊界條件的矩陣，因此修改系統矩陣時會分成 K 與 Ubc 兩部分。再將上式移項後可得：

$$\left(I - \frac{\mu \Delta t}{\rho} K \right) U^{**} = U^* + \frac{\mu \Delta t}{\rho} Ubc = rhs \quad (2-21)$$

其中， I 為單位矩陣，並將 U^{**} 與右端項 rhs 從矩陣改成為一個行向量，排列方式會按照前面所述的編號來排列，共 99 個值；而 K 即為一個 99×99 的矩陣，其每一列代表的是每個格點在 x 方向與 y 方向進行中心差分的係數。以下將說明在遇到內部矩形格點時將如何修改系統矩陣，會分成列方向 (x 方向) 與行方向 (y 方向) 分別說明。

第 1 列：

在此列的系統矩陣可以寫成以下形式：

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{0,1} \\ U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{3,1} \\ U_{4,1} \\ U_{5,1} \\ U_{6,1} \\ U_{7,1} \\ U_{8,1} \\ U_{9,1} \\ U_{10,1} \end{bmatrix} = 0 \quad (2-22)$$

其中， $U_{0,1}$ 為流場的左邊界條件，而出口處是設為諾伊曼邊界條件，在邊界上的法向梯度為零，因此 $U_{10,1}$ 等於 $U_{9,1}$ ，如式(2-23)所示。

$$\frac{U_{10,1} - U_{9,1}}{h_x} = 0 \Rightarrow U_{10,1} = U_{9,1} \quad (2-23)$$

因此式(2-22)可改寫成：



$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{3,1} \\ U_{4,1} \\ U_{5,1} \\ U_{6,1} \\ U_{7,1} \\ U_{8,1} \\ U_{9,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{uW} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

其中， uW 為流場的左邊界條件。此列的系統矩陣與第 2、3、4、5、8、9、10 與 11 列的系統矩陣相同。

第 6 列：

在此列中因遇到內部矩形格點，因此與內部矩形格點有關的位置需要進行修改，類似式(2-24)中左邊界的修改方式，此列的系統矩陣可以寫成以下形式：

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & -1 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & -1 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & -1 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,6} \\ U_{2,6} \\ U_{3,6} \\ U_{4,6} \\ U_{5,6} \\ U_{6,6} \\ U_{7,6} \\ U_{8,6} \\ U_{9,6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{uW} \\ 0 \\ \mathbf{RuW} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{RuE} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-25)$$

其中， RuW 與 RuE 分別為內部矩形的左邊界條件及右邊界條件。在內部矩形格點的位置可為任意值，在此設為 -1，此列的系統矩陣與第 7 列的系統矩陣相同。



第 1 行：

在此行的系統矩陣可以寫成以下形式：

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,0} \\ U_{1,1} \\ U_{1,2} \\ U_{1,3} \\ U_{1,4} \\ U_{1,5} \\ U_{1,6} \\ U_{1,7} \\ U_{1,8} \\ U_{1,9} \\ U_{1,10} \\ U_{1,11} \\ U_{1,12} \end{bmatrix} = 0 \quad (2-26)$$

其中， $U_{1,0}$ 與 $U_{1,12}$ 為未知，但利用相鄰兩點求平均的方式即可得到，

如式(2-27)所示。

$$\frac{U_{1,0} + U_{1,1}}{2} = uS \Rightarrow U_{1,0} = 2uS - U_{1,1} \quad (2-27)$$

因此式(2-26)可改寫成：

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,1} \\ U_{1,2} \\ U_{1,3} \\ U_{1,4} \\ U_{1,5} \\ U_{1,6} \\ U_{1,7} \\ U_{1,8} \\ U_{1,9} \\ U_{1,10} \\ U_{1,11} \\ U_{1,12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2uS \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2uN \end{bmatrix} \quad (2-28)$$

其中， uS 與 uN 分別為流場的下邊界條件及上邊界條件，此行的系統矩陣與第

2、3、7、8 與 9 行的系統矩陣相同。



第 4 行：

在此行中因遇到內部矩形格點，因此與內部矩形格點有關的位置需要進行修改，且內部矩形的左邊界條件為已知，用類似式(2-25)的修改方式，此行的系統矩陣可以寫成以下形式：

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{4,1} \\ U_{4,2} \\ U_{4,3} \\ U_{4,4} \\ U_{4,5} \\ U_{4,6} \\ U_{4,7} \\ U_{4,8} \\ U_{4,9} \\ U_{4,10} \\ U_{4,11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2uS \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ RuW \\ 0 \\ 0 \\ RuW \\ 0 \\ 0 \\ 2uN \end{bmatrix} \quad (2-29)$$

此行的系統矩陣與第 6 行的系統矩陣相同。

第 5 行：

在此行中一樣遇到內部矩形格點，但與第 4 行的修改方式不同，因內部矩形的下方格點為未知，需用類似式(2-28)中邊界的修改方式，此行的系統矩陣可以寫成以下形式：

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{5,1} \\ U_{5,2} \\ U_{5,3} \\ U_{5,4} \\ U_{5,5} \\ U_{5,6} \\ U_{5,7} \\ U_{5,8} \\ U_{5,9} \\ U_{5,10} \\ U_{5,11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2uS \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2RuS \\ 0 \\ 0 \\ 2RuN \\ 0 \\ 0 \\ 2uN \end{bmatrix} \quad (2-30)$$

最後將流場內部的每個 U 格點在 x 方向與 y 方向的係數放入系統矩陣中對應的位置，即可得到系統矩陣 K ，如圖 2-5 所示；而邊界條件也放入行向量對應的位置，即可得到行向量 Ubc 。

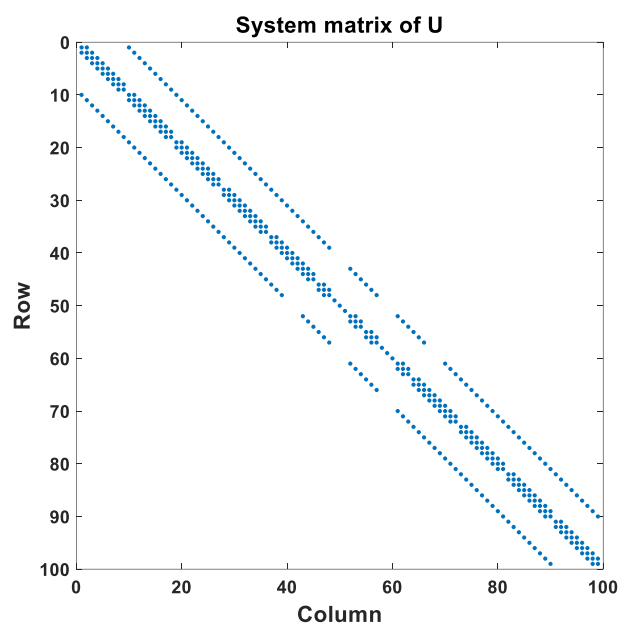


圖 2-5 速度場 U 的系統矩陣示意圖



2.3.2 修改壓力場系統矩陣

如圖 2-6 所示，一樣假設流場被劃分成 10×11 個網格，X 代表 P 格點的位置，內部有一個 2×2 的矩形區域。在計算壓力場 P 時只會計算流場內部的格點，即紅色 X 以及內部的黑色 X，而在計算二階導數時需要前後的格點，因此在流場內部邊上的格點外需要再一個格點，即最外圍的黑色 X。以下將說明在遇到內部矩形格點時將如何修改系統矩陣，會分成列方向 (x 方向) 與行方向 (y 方向) 分別說明。

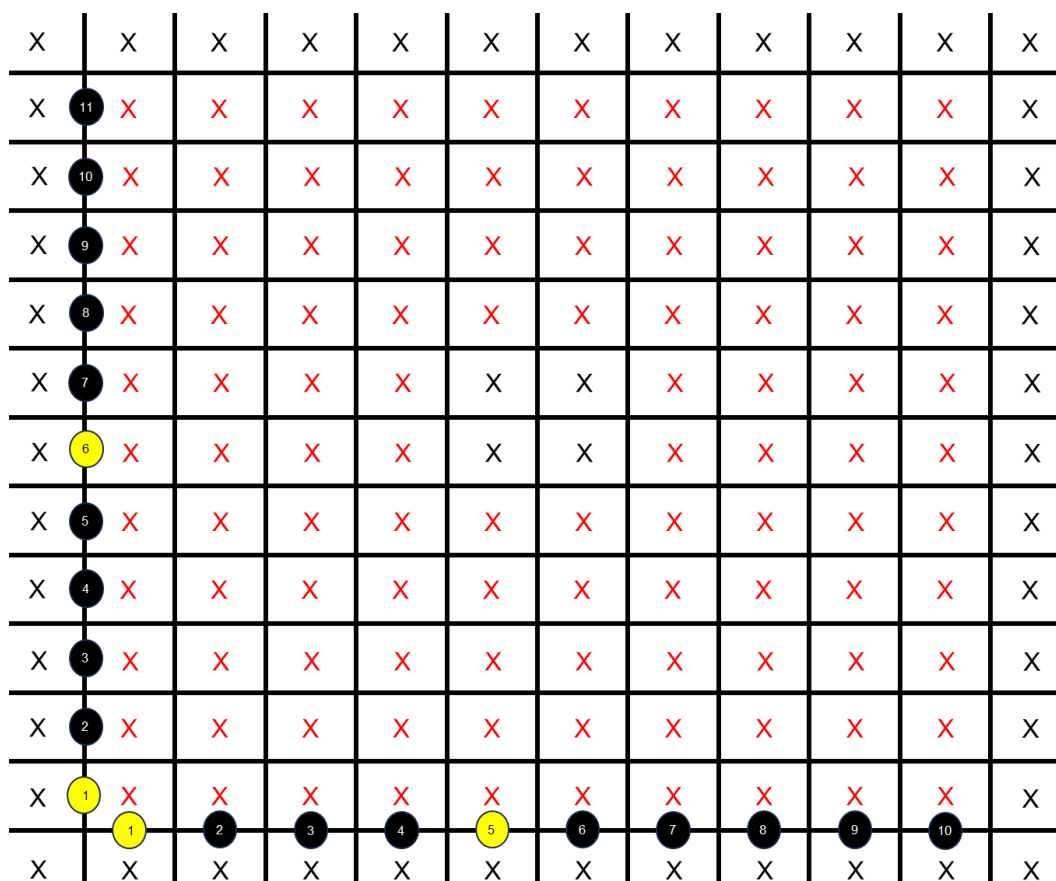


圖 2-6 壓力場 P 格點示意圖



第 1 列：

在此列的系統矩陣可以寫成以下形式：

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{0,1} \\ P_{1,1} \\ P_{2,1} \\ P_{3,1} \\ P_{4,1} \\ P_{5,1} \\ P_{6,1} \\ P_{7,1} \\ P_{8,1} \\ P_{9,1} \\ P_{10,1} \\ P_{11,1} \end{bmatrix} = 0 \quad (2-31)$$

其中， $P_{0,1}$ 為未知，但入口處是設為諾伊曼邊界條件，在邊界上的法向梯度為零，因此 $P_{0,1}$ 等於 $P_{1,1}$ ，如式(2-32)所示；而出口處是設為狄利克雷邊界條件，利用相鄰兩點求平均的方式即可得到 $P_{11,1}$ 等於 $-P_{10,1}$ ，如式(2-33)所示。

$$\frac{P_{1,1} - P_{0,1}}{h_x} = 0 \Rightarrow P_{0,1} = P_{1,1} \quad (2-32)$$

$$\frac{P_{10,1} + P_{11,1}}{2} = 0 \Rightarrow P_{11,1} = -P_{10,1} \quad (2-33)$$

因此式(2-31)可改寫成：

$$\begin{bmatrix} \color{red}{1} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \color{red}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1,1} \\ P_{2,1} \\ P_{3,1} \\ P_{4,1} \\ P_{5,1} \\ P_{6,1} \\ P_{7,1} \\ P_{8,1} \\ P_{9,1} \\ P_{10,1} \end{bmatrix} = 0 \quad (2-34)$$

此列的系統矩陣與第 2、3、4、5、8、9、10 與 11 列的系統矩陣相同。



第 6 列：

在此列中因遇到內部矩形格點，因此與內部矩形格點有關的位置需要進行修改，類似式(2-34)中左邊界的修改方式，此列的系統矩陣可以寫成以下形式：

$$\begin{bmatrix} \color{red}{1} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \color{red}{1} & \color{red}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{0} & \color{red}{1} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \color{red}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1,6} \\ P_{2,6} \\ P_{3,6} \\ P_{4,6} \\ P_{5,6} \\ P_{6,6} \\ P_{7,6} \\ P_{8,6} \\ P_{9,6} \\ P_{10,6} \end{bmatrix} = 0 \quad (2-35)$$

此列的系統矩陣與第 7 列的系統矩陣相同。

第 1 行：

與第 1 列的系統矩陣寫法相同，但上、下邊界都是諾伊曼邊界條件，因此最右下角的數字也要改成 1，此行的系統矩陣可以寫成以下形式：

$$\begin{bmatrix} \color{red}{1} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \color{red}{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1,1} \\ P_{1,2} \\ P_{1,3} \\ P_{1,4} \\ P_{1,5} \\ P_{1,6} \\ P_{1,7} \\ P_{1,8} \\ P_{1,9} \\ P_{1,10} \\ P_{1,11} \end{bmatrix} = 0 \quad (2-36)$$

此行的系統矩陣與第 2、3、4、7、8、9 與 10 行的系統矩陣相同。



第 5 行：

與第 6 列的系統矩陣寫法相同，但上、下邊界都是諾伊曼邊界條件，因此最右下角的數字也要改成 1，此行的系統矩陣可以寫成以下形式：

$$\begin{bmatrix}
 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{matrix}
 P_{5,1} \\
 P_{5,2} \\
 P_{5,3} \\
 P_{5,4} \\
 P_{5,5} \\
 P_{5,6} \\
 P_{5,7} \\
 P_{5,8} \\
 P_{5,9} \\
 P_{5,10} \\
 P_{5,11}
 \end{matrix}
 = 0 \quad (2-37)$$

此行的系統矩陣與第 6 行的系統矩陣相同。

最後將流場內部的每個 P 格點在 x 方向與 y 方向的係數放入系統矩陣中對應的位置，即可得到 P 的系統矩陣，如圖 2-7 所示。

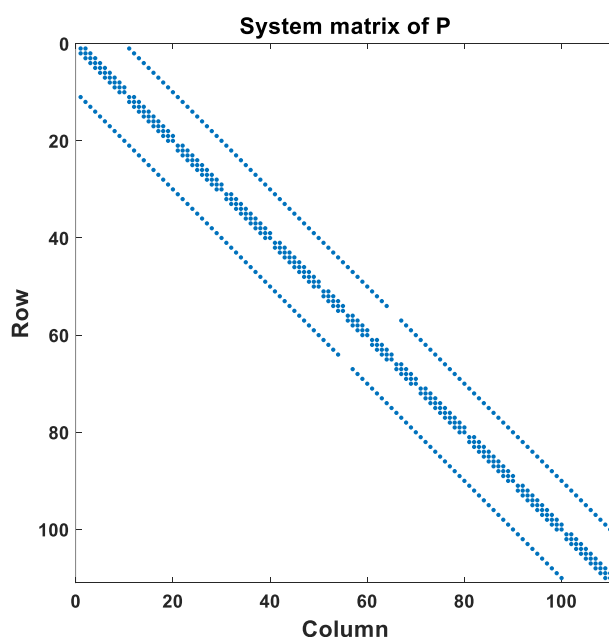


圖 2-7 壓力場 P 的系統矩陣示意圖



2.4 商用軟體

在本研究中會運用商用軟體 Ansys 來模擬剛體繞流問題與流固耦合問題。於剛體繞流問題中的流體求解器會使用 Ansys Fluent 來進行單向耦合模擬；流固耦合問題中的流體求解器一樣是使用 Ansys Fluent，而固體求解器則是使用 Ansys Mechanical，再透過 Ansys Workbench 當中的 System Coupling 連接這兩個求解器，讓流體與固體之間能夠傳遞彼此的資訊，以進行雙向耦合模擬，於 Ansys Workbench 當中求解器之間的串接方式如圖 2-8 所示。在雙向耦合中，固體求解器會傳遞位移資訊給流體求解器，而流體求解器則會傳遞力量資訊給固體求解器，其示意圖如圖 2-9 所示。

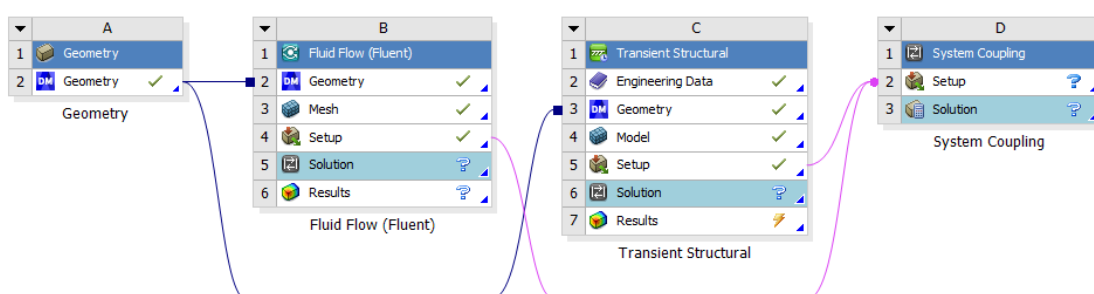


圖 2-8 Ansys Workbench 流固耦合模擬之求解器串接圖

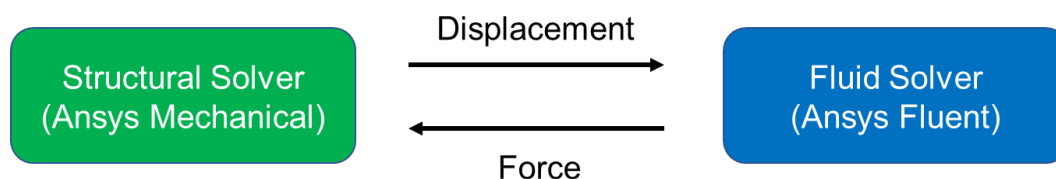


圖 2-9 固體與流體求解器傳遞資訊示意圖

第三章 矩形剛體繞流模擬



在本章中，會用第二章提及自行以 MATLAB 開發流體求解器，來模擬流體流經矩形剛體之問題，在 3.1 節會先說明如何計算漩渦的頻率與斯特勞哈爾數，接著在 3.2 節會驗證此流體求解器之準確性，並在 3.3 節與 3.4 節中，比較不同的流場設定與不同的矩形大小下，其產生漩渦的頻率以及斯特勞哈爾數的變化，最後在 3.5 節會進行無因次化分析，討論 3.3 節與 3.4 節中的模擬結果。

3.1 漩渦頻率與斯特勞哈爾數

當流體流經阻流體時，在特定條件下會出現不穩定的邊界層分離，於阻流體後方的兩側會產生兩道非對稱排列的漩渦，稱為卡門渦街。為了可以比較不同模擬之間產生的漩渦，會計算這些漩渦的頻率與斯特勞哈爾數。頻率是透過渦街其中一側的漩渦來計算的，先記錄連續兩個渦的時間差，再計算其倒數即可得到頻率，如式 (3-1) 所示。以下舉一個例子，如圖 3-1 所示，在某個漩渦分離時記錄第一個時間 $t_1 = 11.412 \text{ s}$ ，再由圖 3-2 可得到下一個漩渦分離的時間 $t_2 = 11.736 \text{ s}$ ，再代入 (3-1) 式後可計算出 $f = 3.0864 \text{ Hz}$ ；而斯特勞哈爾數的計算方式如式 (3-2) 所示，其中 f 為頻率、 D 為阻流體的寬度、 v 為流速。由於每個模擬計算例具有不同的 f 、 D 與 v ，因此計算出來的斯特勞哈爾數也會具有差異。

$$f = \frac{1}{t_2 - t_1} \quad (1/\text{s}) \quad (3-1)$$

$$St = \frac{fD}{v} \quad (3-2)$$

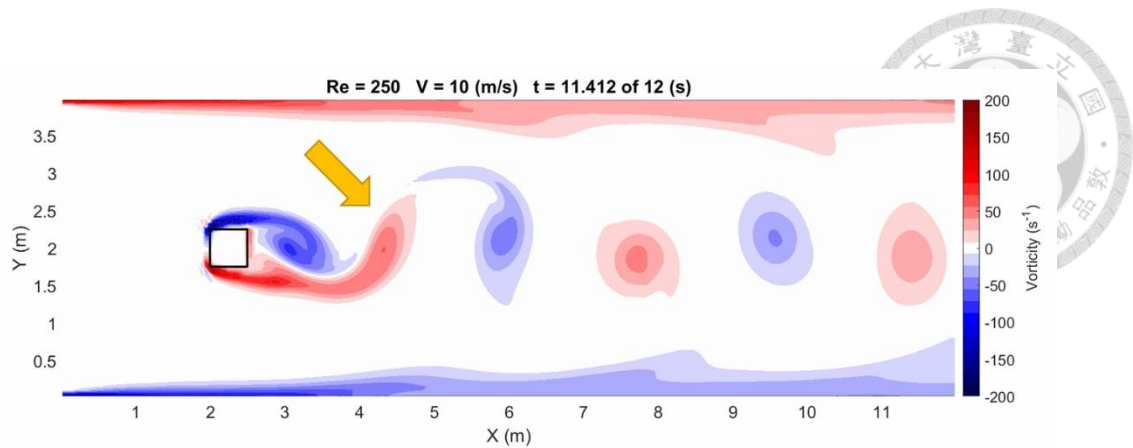


圖 3-1 漩渦於 t_1 時刻分離

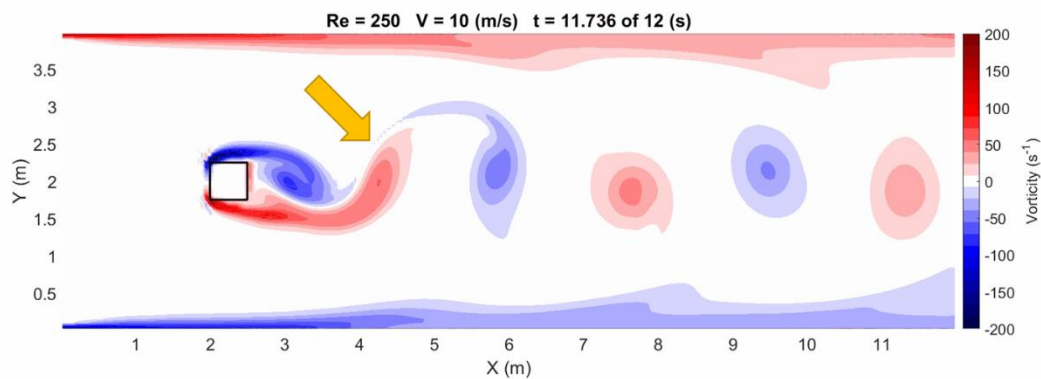


圖 3-2 漩渦於 t_2 時刻分離

3.2 流體求解器驗證

在本節中，會用兩種方法來驗證流體求解器之準確性。第一種是與文獻中曾經探討過的矩形剛體繞流模擬或是實驗結果去進行比對；第二種是用商用軟體 Ansys 的模擬結果來進行比對。

3.2.1 比對文獻結果

在本小節中，使用本論文研究自行開發的流體求解器進行矩形剛體繞流模擬，並將其模擬結果與文獻的模擬或實驗結果進行比對。模擬設定皆依文獻中的流場大小、雷諾數進行設定，並與文獻中的斯特勞哈爾數進行比較，以下將逐一說明。與文獻結果之比較整理成表 3-1。

1. Mukhopadhyay, Biswas and Sundararajan [9]

在此文獻中，流場大小比例如圖 3-3 所示，其中 Blockage 為矩形剛體寬度與流場寬度之比值，設為 0.125，雷諾數則為 100，而文獻中得到的斯特勞哈爾數為 0.1623；在模擬中，流場的長度與寬度分別設為 12.25 m 與 2 m，入口流速為 10 m/s，模擬時間為 10 s，其結果如圖 3-4 所示，而斯特勞哈爾數為 0.1667，與文獻的誤差為 2.69 %。

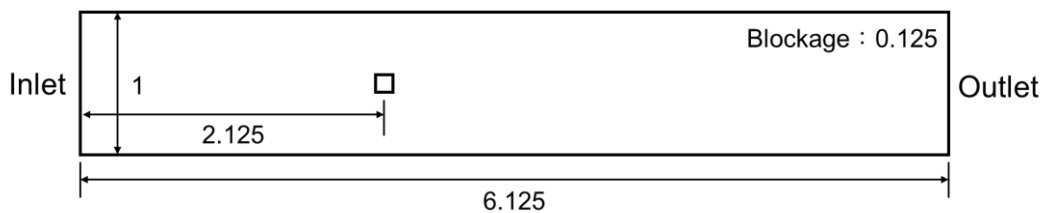


圖 3-3 文獻 1 之流場示意圖

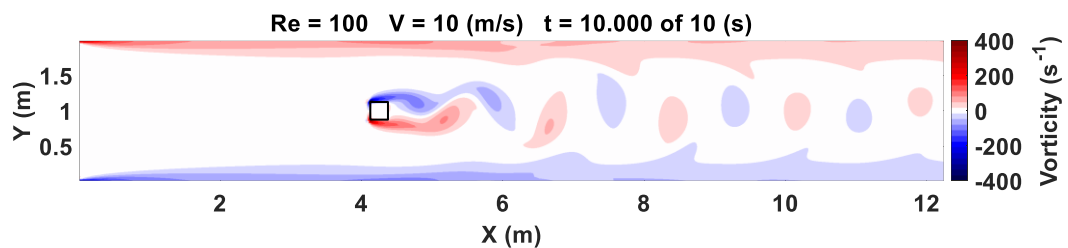


圖 3-4 流體求解器於文獻 1 之模擬結果

2. Sohankar, Norberg and Davidson [16]

在此文獻中，流場大小比例如圖 3-5 所示，其中 Blockage 設為 0.05，雷諾數設為 100，而文獻中得到的斯特勞哈爾數為 0.146；在模擬中，流場的長度與寬度分別設為 7.4 m 與 4 m，入口流速為 10 m/s，模擬時間為 10 s，其結果如圖 3-6 所示，而斯特勞哈爾數為 0.1439，與文獻的誤差為 -1.45 %。

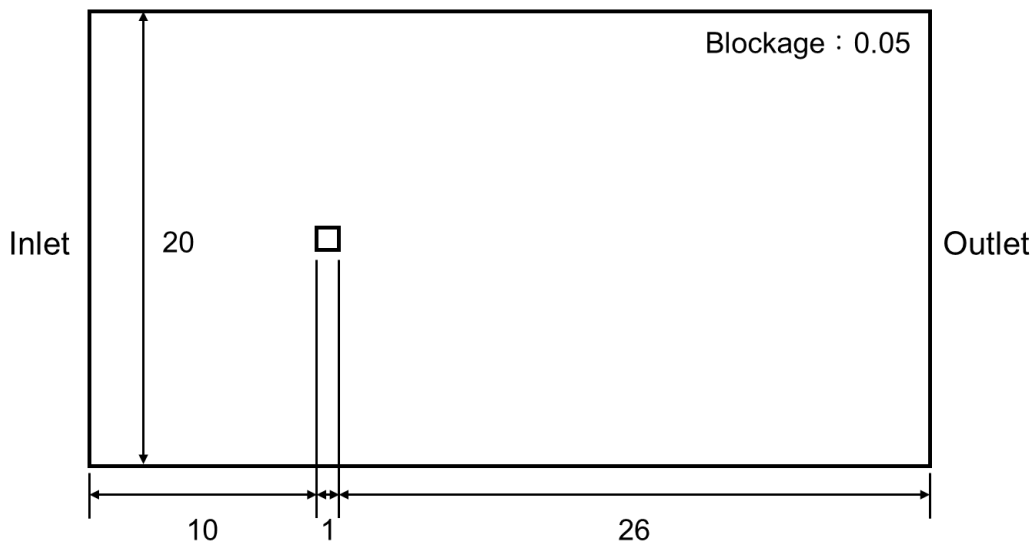


圖 3-5 文獻 2 之流場示意圖

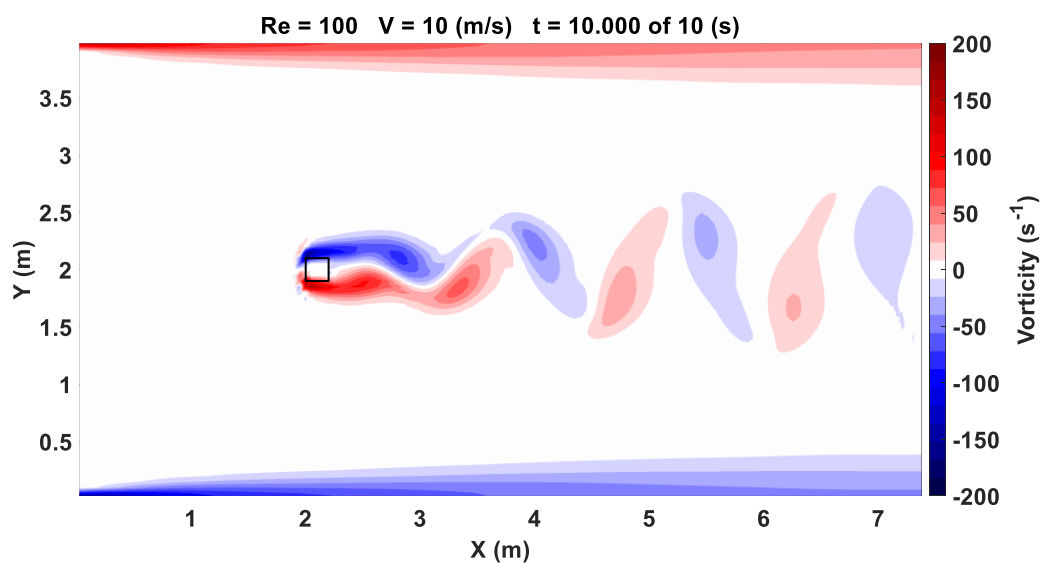


圖 3-6 流體求解器於文獻 2 之模擬結果

3. Saha, Biswas and Muralidhar [11]

在此文獻中，流場大小比例如圖 3-7 所示，其中 Blockage 設為 0.1，雷諾數設為 175，而文獻中得到的斯特勞哈爾數為 0.158；在模擬中，流場的長度與寬度分別設為 9.6 m 與 4 m，入口流速為 10 m/s，模擬時間為 10 s，其結果如圖 3-8 所示，而斯特勞哈爾數為 0.1626，與文獻的誤差為 2.91 %。



圖 3-7 文獻 3 之流場示意圖

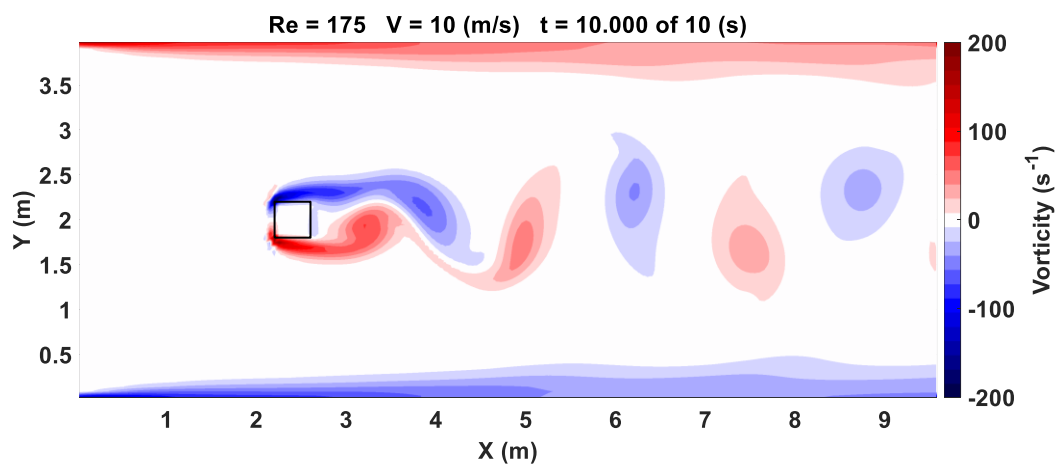


圖 3-8 流體求解器於文獻 3 之模擬結果

4. Singh, De, Carpenter, Eswaran and Muralidhar [15]

在此文獻中，流場大小比例如圖 3-9 所示，其中 Blockage 設為 0.056，雷諾數設為 100 與 150，文獻中得到的斯特勞哈爾數分別為 0.15 與 0.159。在模擬中，流場的長度與寬度分別設為 6.6 m 與 3.6 m，入口流速為 10 m/s，模擬時間為 10 s，其結果如圖 3-10 與圖 3-11 所示，而斯特勞哈爾數分別 0.1471 與為 0.1563，與文獻的誤差分別為 -1.96 % 與 -1.73 %。

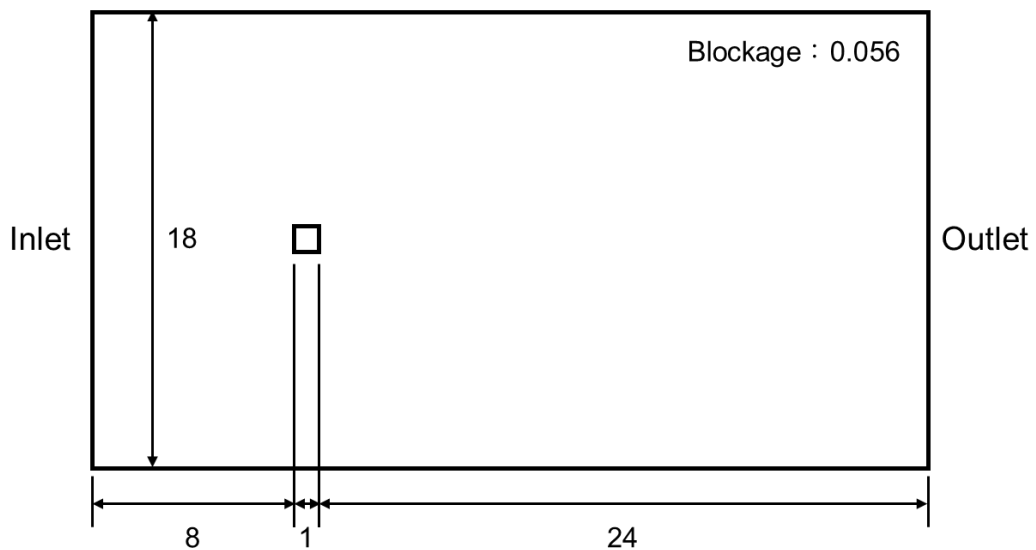


圖 3-9 文獻 4 之流場示意圖

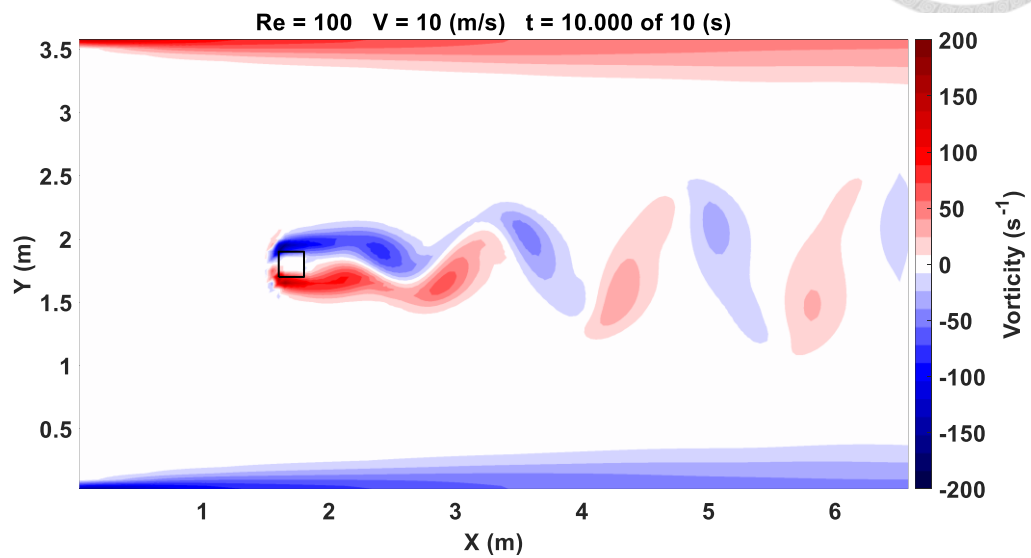


圖 3-10 流體求解器於文獻 4 之模擬結果 1

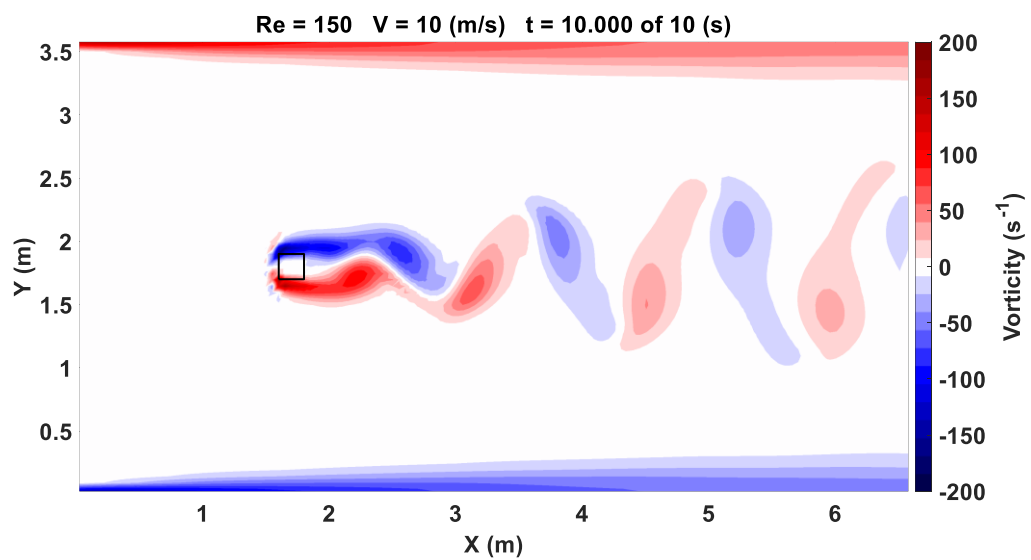


圖 3-11 流體求解器於文獻 4 之模擬結果 2

5. Sen and Mittal [14]

在此文獻中，流場大小比例如圖 3-12 所示，其中 Blockage 設為 0.05，雷諾數設為 100，文獻中得到的斯特勞哈爾數為 0.1452；在模擬中，流場的長度與寬度分別設為 10.8 m 與 4 m，入口流速為 10 m/s，模擬時間為 10 s，其結果如圖 3-12 所示，而斯特勞哈爾數為 0.1429，與文獻的誤差為 -1.61 %。

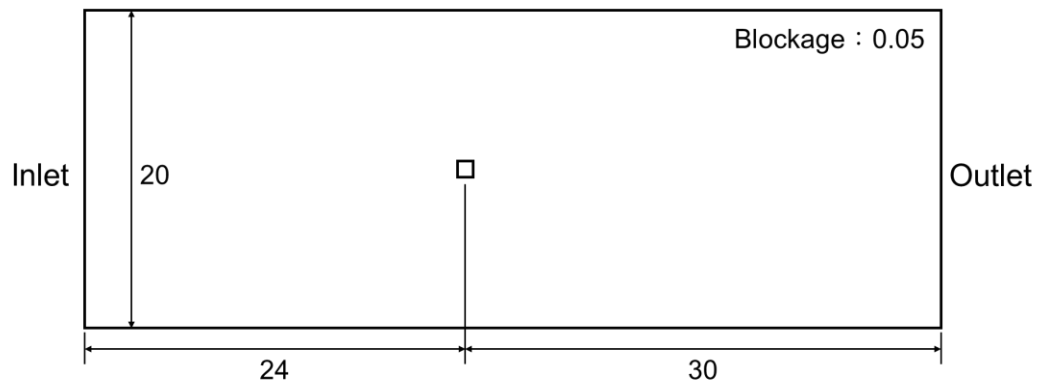


圖 3-12 文獻 5 之流場示意圖

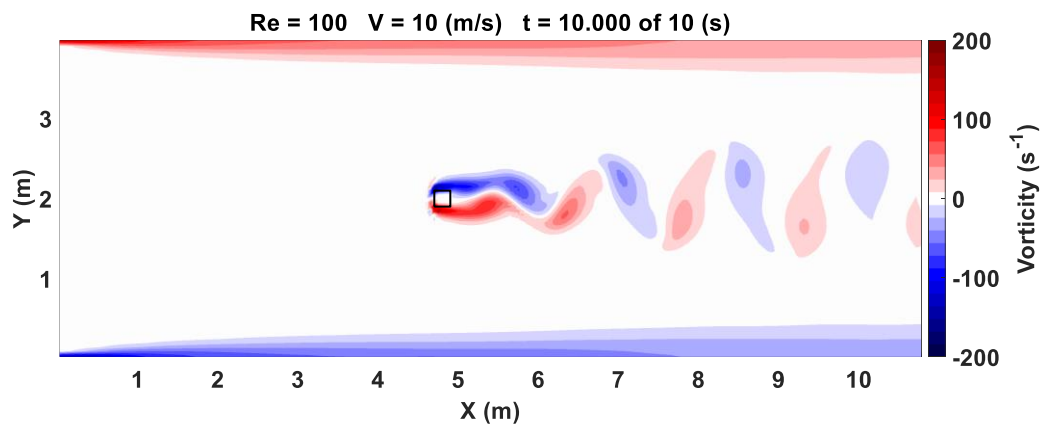


圖 3-13 流體求解器於文獻 5 之模擬結果



以上 6 個比對結果可整理如下表：

表 3-1 文獻與流體求解器之斯特勞哈爾數比較表

文獻	Re	Blockage	St	St (流體求解器)	誤差 (%)
Mukhopadhyay [9]	100	0.125	0.1623	0.1667	2.69
Sohankar [16]	100	0.05	0.1460	0.1439	-1.45
Saha [11]	175	0.1	0.1580	0.1626	2.91
Singh [15]	100	0.056	0.1500	0.1471	-1.96
Singh [15]	150	0.056	0.1590	0.1563	-1.73
Sen [14]	100	0.05	0.1452	0.1429	-1.61

從結果來看，由流體求解器得到的斯特勞哈爾數與文獻結果的誤差皆小於 3 %，因此本研究開發的流體求解器具有一定之準確性。

3.2.2 比對商用軟體結果

在本小節中，將上述矩形剛體繞流之模擬結果與商用軟體 Ansys 的模擬結果進行比對。模擬的流場大小如圖 3-14 所示，其中 Blockage 設為 0.125，雷諾數設為 250，入口流速為 10 m/s。在流體求解器的模擬中，模擬時間為 12 s，其結果如圖 3-15 所示，而斯特勞哈爾數為 0.1543；在 Ansys 的模擬中，模擬時間為 10 s，其結果如圖 3-16 所示，而斯特勞哈爾數為 0.1543，與流體求解器的模擬結果一致，再次驗證此流體求解器之準確性。

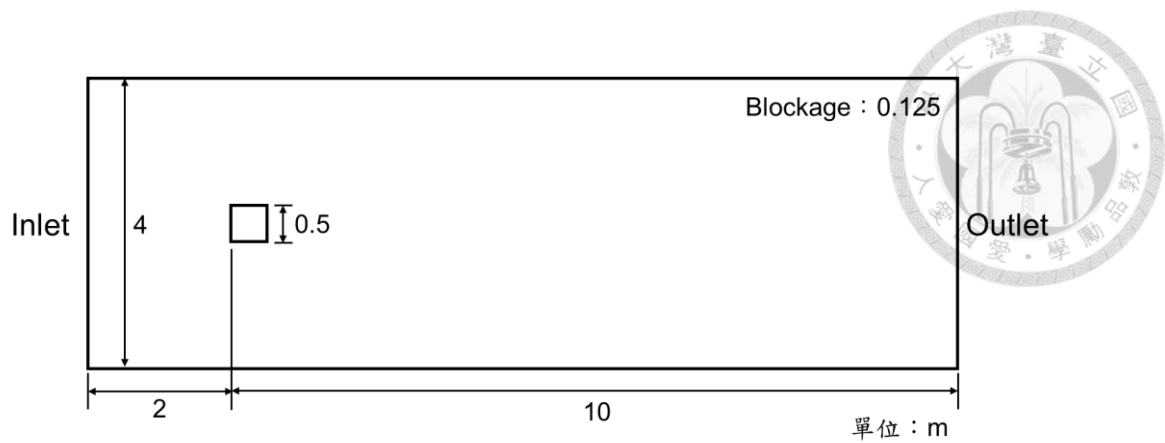


圖 3-14 與 Ansys 比對之流場示意圖

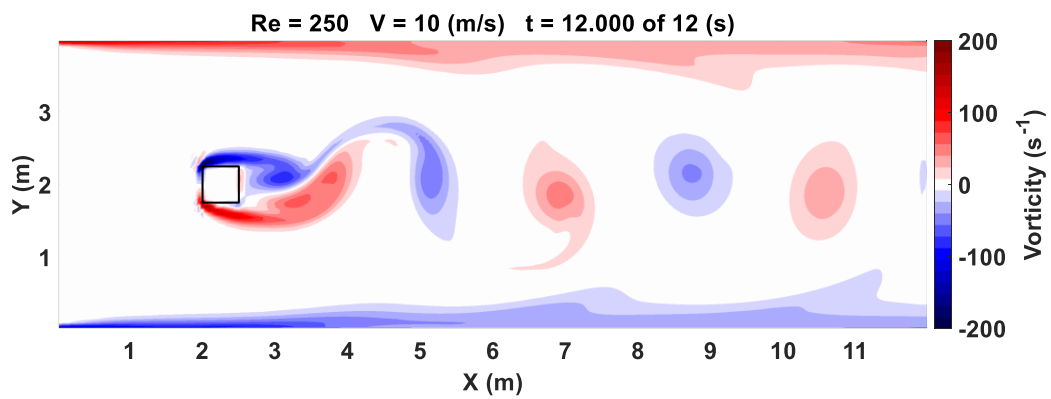


圖 3-15 流體求解器之模擬結果

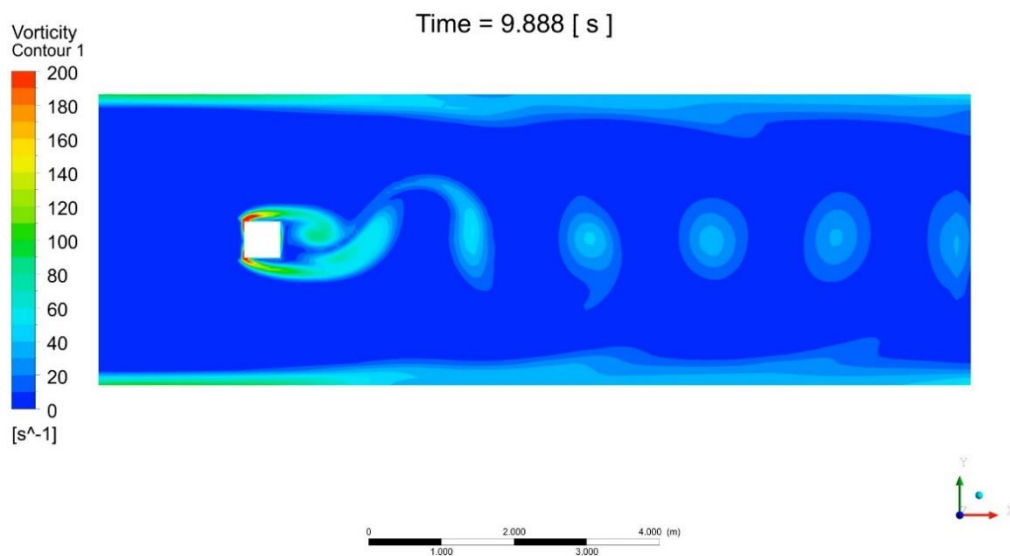


圖 3-16 Ansys 之模擬結果

3.3 固定流速與流體性質

在本節中，會用流體求解器進行不同大小的矩形剛體繞流模擬，流體的流速與流體性質皆會固定，分別為： $v = 10 \text{ (m/s)}$ 、 $\rho/\mu = 50 \text{ (s/m}^2\text{)}$ ，模擬的流場大小如圖 3-17 所示，矩形在不同的模擬例更換成不同的大小。以下做了三組比較，分別為：

1. 改變正方形邊長 0.8 m ~ 0.2 m
2. 固定矩形寬度 0.8 m、改變矩形長度 0.8 m ~ 0.2 m
3. 改變矩形寬度 0.2 m ~ 0.8 m、固定矩形長度 0.2 m

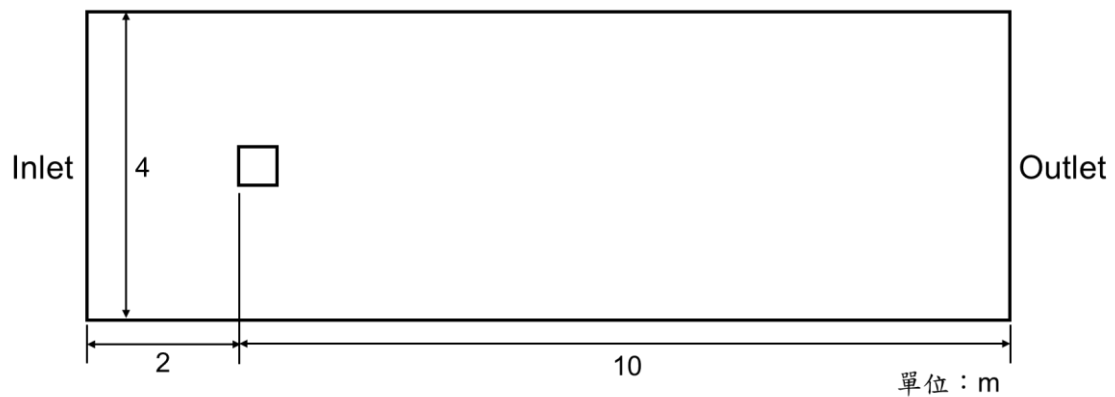


圖 3-17 3.3 節剛體繞流模擬之流場示意圖



3.3.1 改變正方形邊長 0.8 m ~ 0.2 m

1. 矩形大小為 0.8 m * 0.8 m

雷諾數為 400，模擬時間設為 16 s，其結果如圖 3-18 所示。

由結果可計算出頻率為 2.2321，而斯特勞哈爾數為 0.1786。

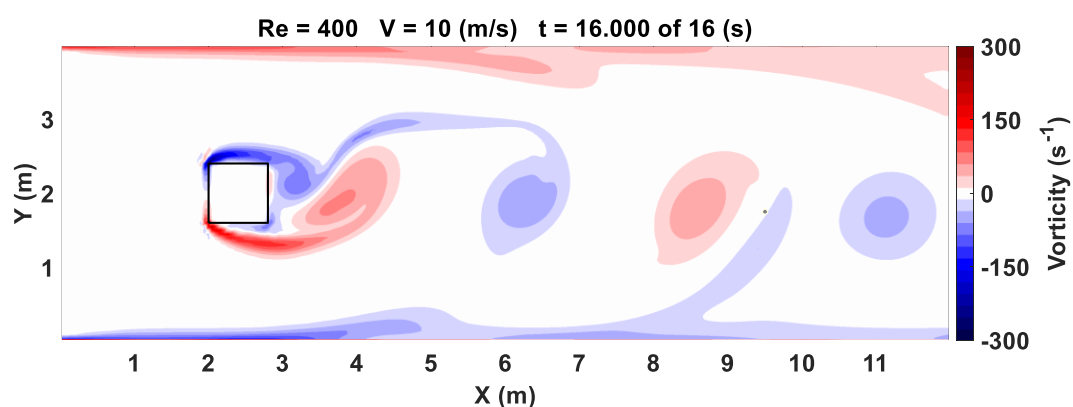


圖 3-18 矩形大小 0.8 m * 0.8 m 之模擬結果

2. 矩形大小為 0.7 m * 0.7 m

雷諾數為 350，模擬時間設為 16 s，其結果如圖 3-19 所示。

由結果可計算出頻率為 2.3585，而斯特勞哈爾數為 0.1804。

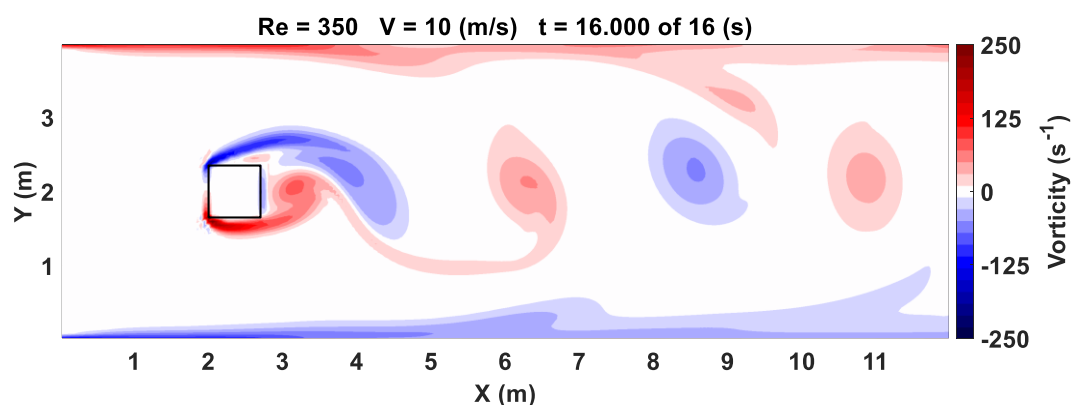


圖 3-19 矩形大小 0.7 m * 0.7 m 之模擬結果



3. 矩形大小為 $0.6\text{ m} * 0.6\text{ m}$

雷諾數為 300，模擬時間設為 12 s，其結果如圖 3-20 所示。

由結果可計算出頻率為 2.451，而斯特勞哈爾數為 0.1471。

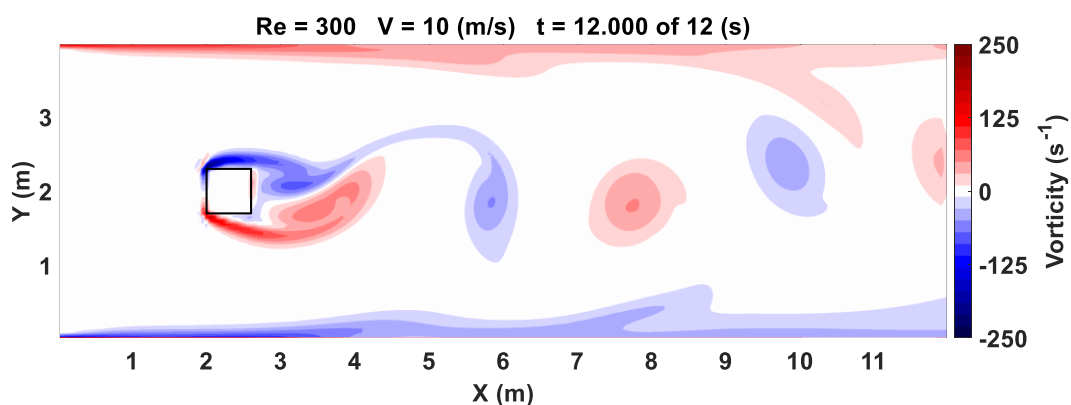


圖 3-20 矩形大小 $0.6\text{ m} * 0.6\text{ m}$ 之模擬結果

4. 矩形大小為 $0.5\text{ m} * 0.5\text{ m}$

雷諾數為 250，模擬時間設為 12 s，其結果如圖 3-21 所示。

由結果可計算出頻率為 3.0864，而斯特勞哈爾數為 0.1543。

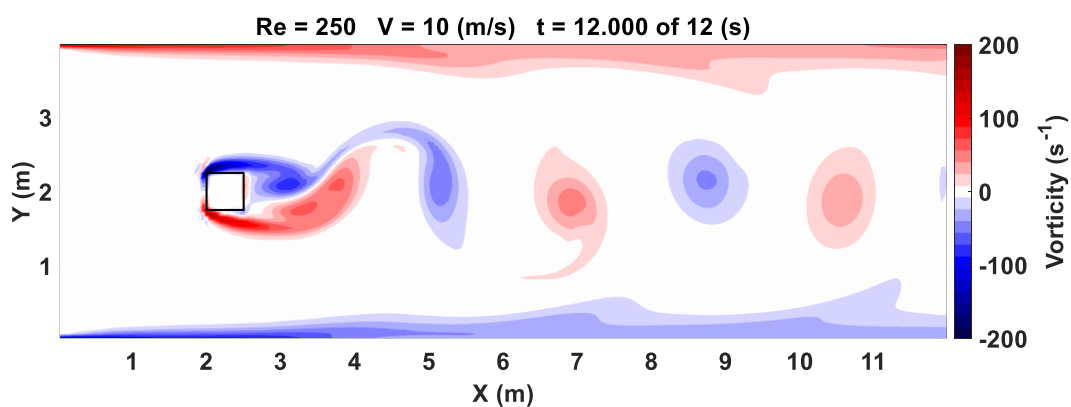


圖 3-21 矩形大小 $0.5\text{ m} * 0.5\text{ m}$ 之模擬結果



5. 矩形大小為 $0.4 \text{ m} * 0.4 \text{ m}$

雷諾數為 200，模擬時間設為 10 s，其結果如圖 3-22 所示。

由結果可計算出頻率為 4.0984，而斯特勞哈爾數為 0.1639。

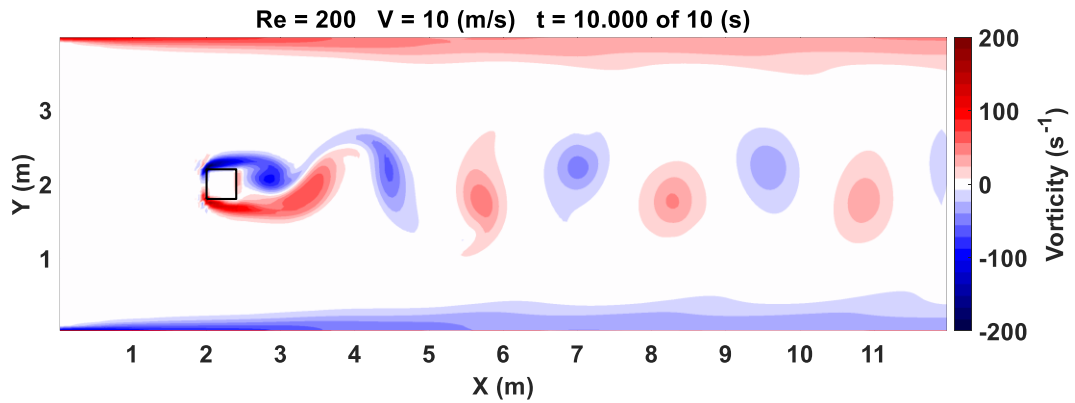


圖 3-22 矩形大小 $0.4 \text{ m} * 0.4 \text{ m}$ 之模擬結果

6. 矩形大小為 $0.3 \text{ m} * 0.3 \text{ m}$

雷諾數為 150，模擬時間設為 10 s，其結果如圖 3-23 所示。

由結果可計算出頻率為 5.3191，而斯特勞哈爾數為 0.1596。

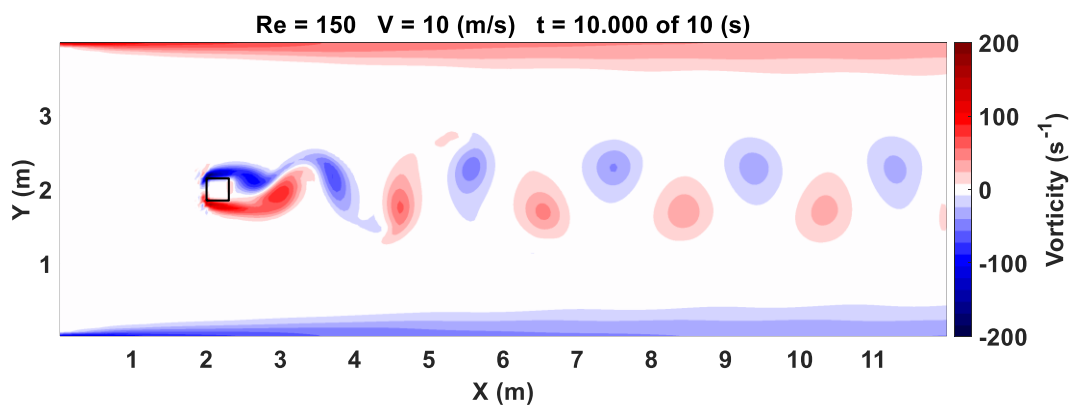


圖 3-23 矩形大小 $0.3 \text{ m} * 0.3 \text{ m}$ 之模擬結果



7. 矩形大小為 $0.2\text{ m} \times 0.2\text{ m}$

雷諾數為 100，模擬時間設為 8 s，其結果如圖 3-24 所示。

由結果可計算出頻率為 6.9444，而斯特勞哈爾數為 0.1389。

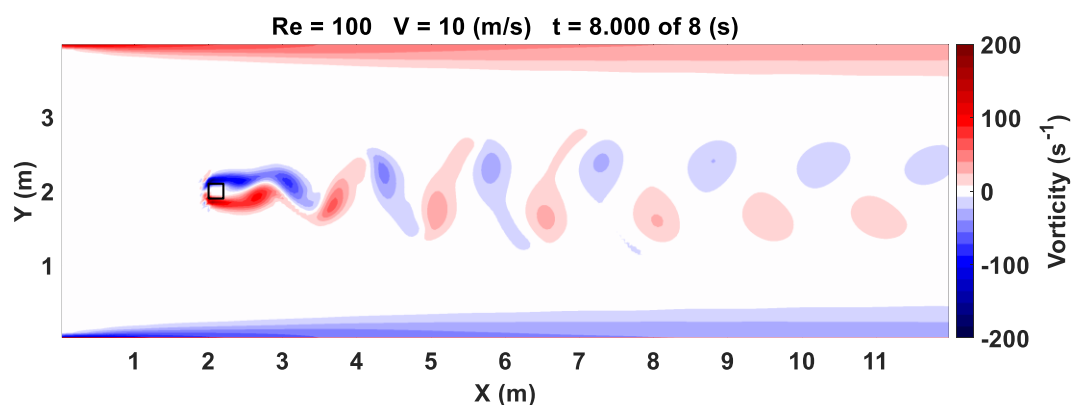


圖 3-24 矩形大小 $0.2\text{ m} \times 0.2\text{ m}$ 之模擬結果

以上 7 個模擬結果可整理成表 3-2 與圖 3-25。

表 3-2 3.3.1 節模擬結果比較表

矩形大小 (m^2)	Re	f (1/s)	St
0.8*0.8	400	2.2321	0.1786
0.7*0.7	350	2.3585	0.1804
0.6*0.6	300	2.4510	0.1471
0.5*0.5	250	3.0864	0.1543
0.4*0.4	200	4.0984	0.1639
0.3*0.3	150	5.3191	0.1596
0.2*0.2	100	6.9444	0.1389

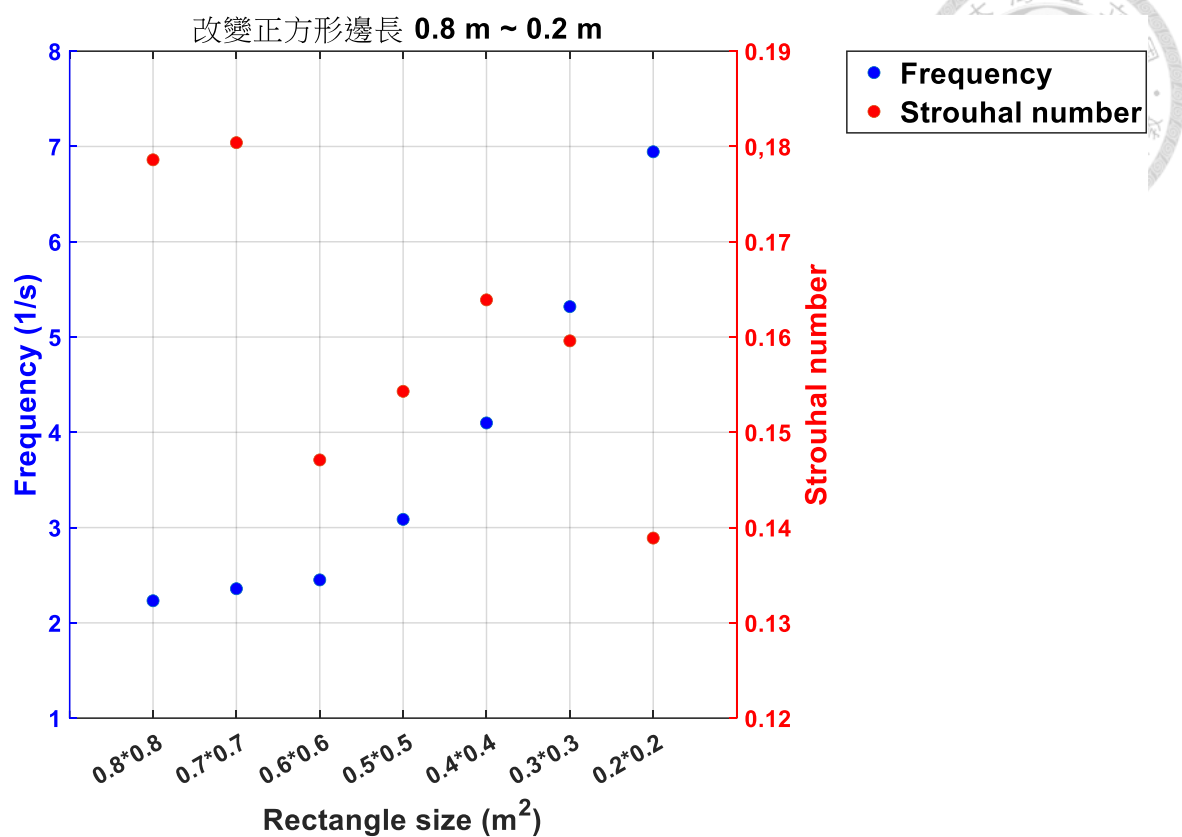


圖 3-25 3.3.1 節模擬結果之頻率與斯特勞哈爾數散佈圖

由模擬結果可以看出，在固定流速與流體性質的條件下，當正方形邊長變小時，產生漩渦的時間較短，而漩渦會比較小，頻率則會變大，且漩渦排列較為規則；反之，當正方形邊長變大時，產生漩渦的時間較長，而漩渦會比較大，頻率則會變小，且漩渦會比較容易受到兩側邊界的影響，排列較不規則。由圖 3-25 可以看出，頻率隨著正方形邊長呈現指數型分布，斯特勞哈爾數則沒有一定的趨勢。



3.3.2 固定矩形寬度 0.8 m、改變矩形長度 0.8 m ~ 0.2 m

1. 矩形大小為 0.8 m * 0.8 m

雷諾數為 400，模擬時間設為 16 s，其結果如圖 3-26 所示。

由結果可計算出頻率為 2.2321，而斯特勞哈爾數為 0.1786。

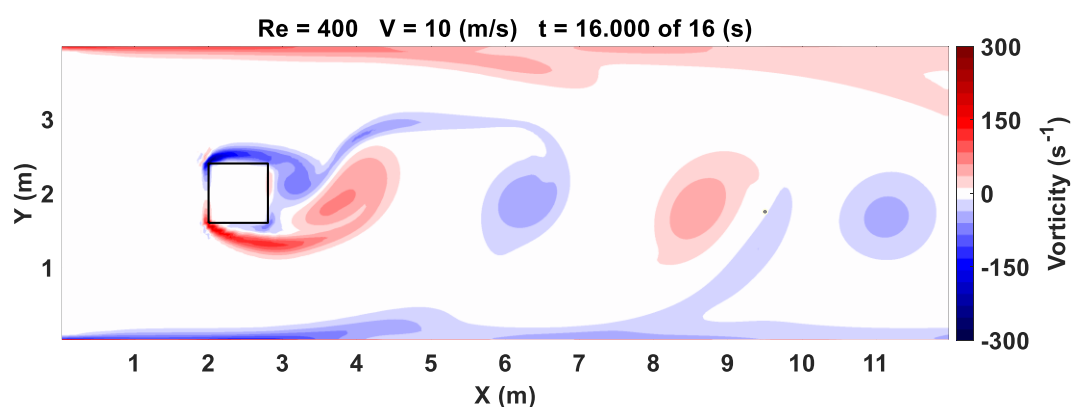


圖 3-26 矩形大小 0.8 m * 0.8 m 之模擬結果

2. 矩形大小為 0.8 m * 0.7 m

雷諾數為 400，模擬時間設為 16 s，其結果如圖 3-27 所示。

由結果可計算出頻率為 2.451，而斯特勞哈爾數為 0.1961。

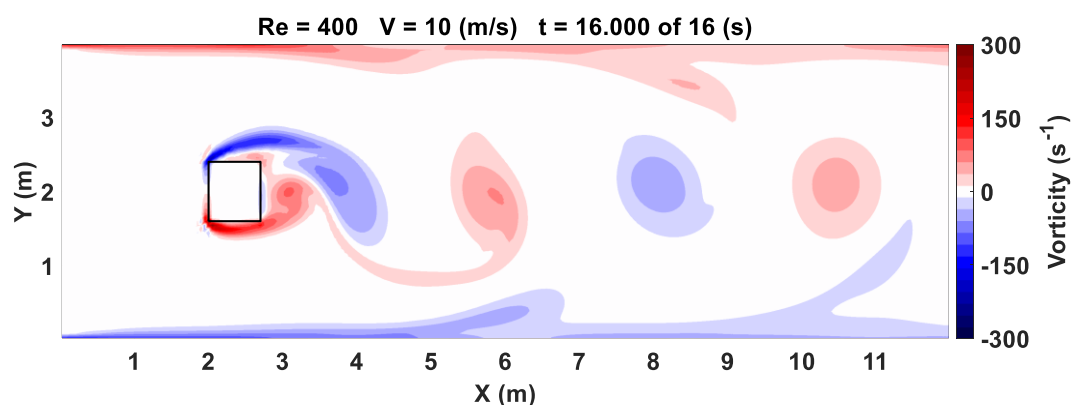


圖 3-27 矩形大小 0.8 m * 0.7 m 之模擬結果



3. 矩形大小為 $0.8 \text{ m} * 0.6 \text{ m}$

雷諾數為 400，模擬時間設為 16 s，其結果如圖 3-28 所示。

由結果可計算出頻率為 2.6316，而斯特勞哈爾數為 0.2105。

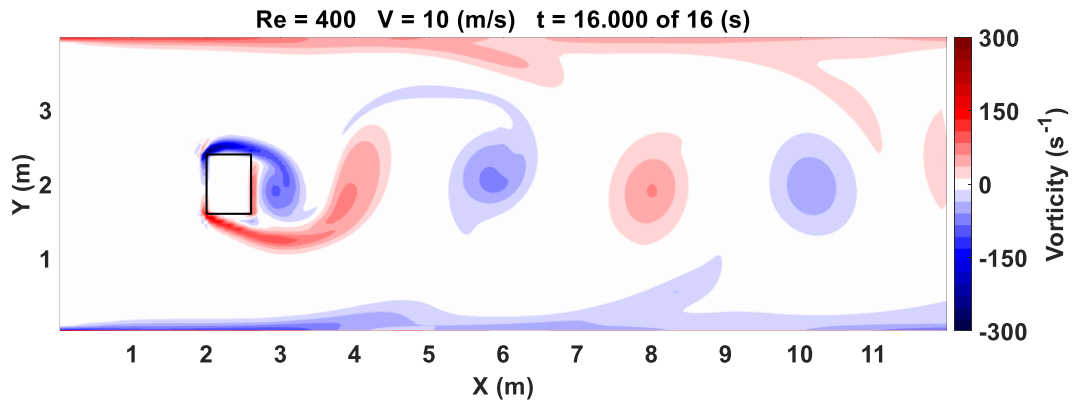


圖 3-28 矩形大小 $0.8 \text{ m} * 0.6 \text{ m}$ 之模擬結果

4. 矩形大小為 $0.8 \text{ m} * 0.5 \text{ m}$

雷諾數為 400，模擬時間設為 16 s，其結果如圖 3-29 所示。

由結果可計算出頻率為 3.012，而斯特勞哈爾數為 0.241。

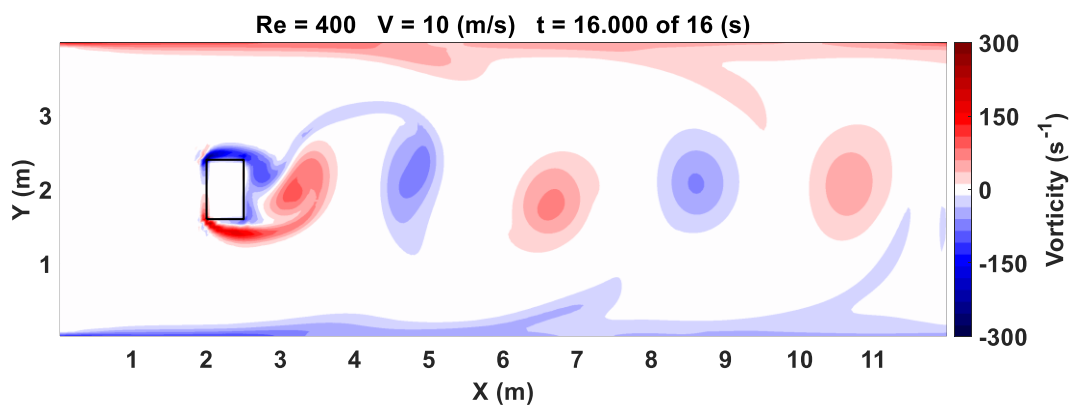


圖 3-29 矩形大小 $0.8 \text{ m} * 0.5 \text{ m}$ 之模擬結果



5. 矩形大小為 $0.8 \text{ m} * 0.4 \text{ m}$

雷諾數為 400，模擬時間設為 16 s，其結果如圖 3-30 所示。

由結果可計算出頻率為 3.0864，而斯特勞哈爾數為 0.2469。

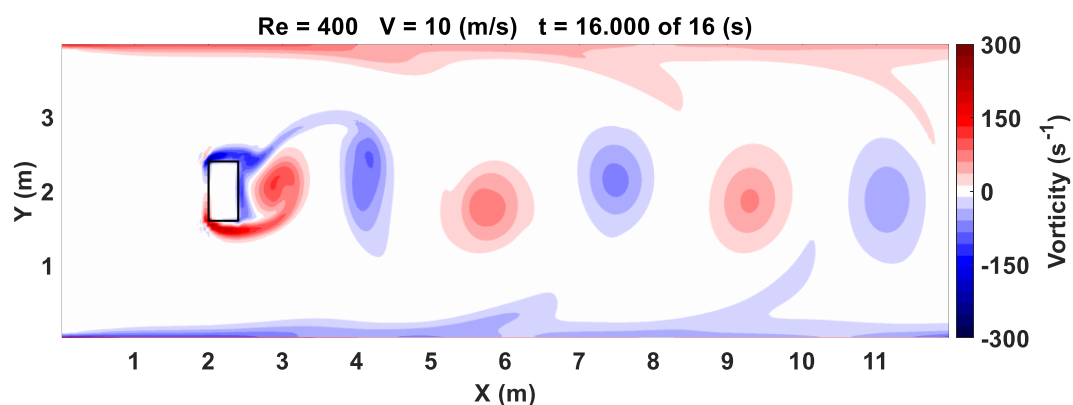


圖 3-30 矩形大小 $0.8 \text{ m} * 0.4 \text{ m}$ 之模擬結果

6. 矩形大小為 $0.8 \text{ m} * 0.3 \text{ m}$

雷諾數為 400，模擬時間設為 16 s，其結果如圖 3-31 所示。

由結果可計算出頻率為 3.2468，而斯特勞哈爾數為 0.2597。

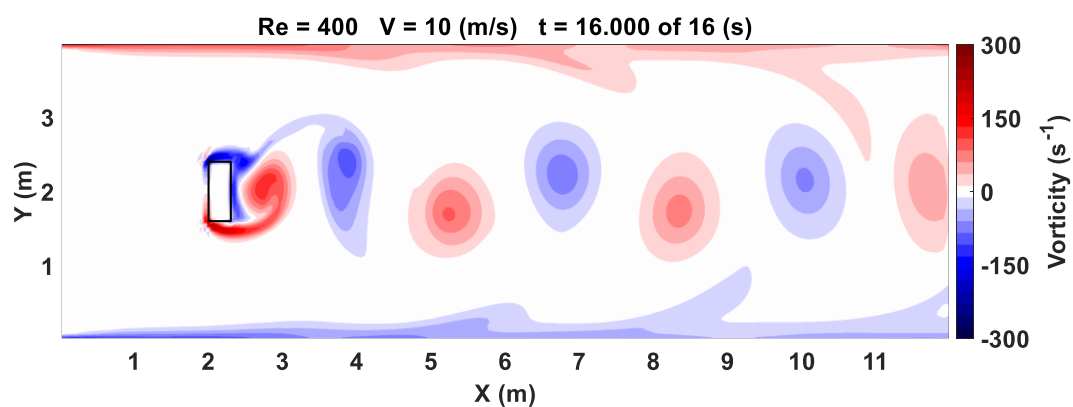


圖 3-31 矩形大小 $0.8 \text{ m} * 0.3 \text{ m}$ 之模擬結果



7. 矩形大小為 $0.8\text{ m} \times 0.2\text{ m}$

雷諾數為 400，模擬時間設為 16 s，其結果如圖 3-32 所示。

由結果可計算出頻率為 3.268，而斯特勞哈爾數為 0.2614。

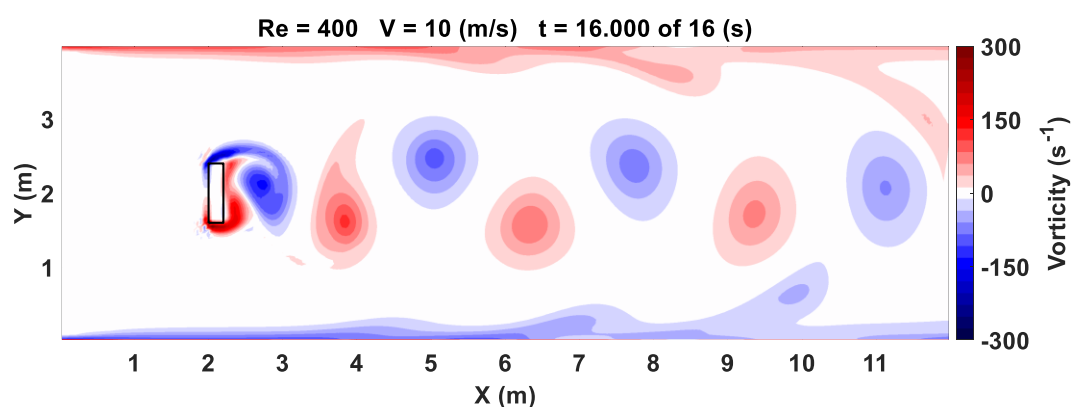


圖 3-32 矩形大小 $0.8\text{ m} \times 0.2\text{ m}$ 之模擬結果

以上 7 個模擬結果可整理成表 3-3 與圖 3-33。

表 3-3 3.3.2 節模擬結果比較表

矩形大小 (m^2)	Re	f (1/s)	St
0.8*0.8	400	2.2321	0.1786
0.8*0.7	400	2.4510	0.1961
0.8*0.6	400	2.6316	0.2105
0.8*0.5	400	3.0120	0.2410
0.8*0.4	400	3.0864	0.2469
0.8*0.3	400	3.2468	0.2597
0.8*0.2	400	3.2680	0.2614

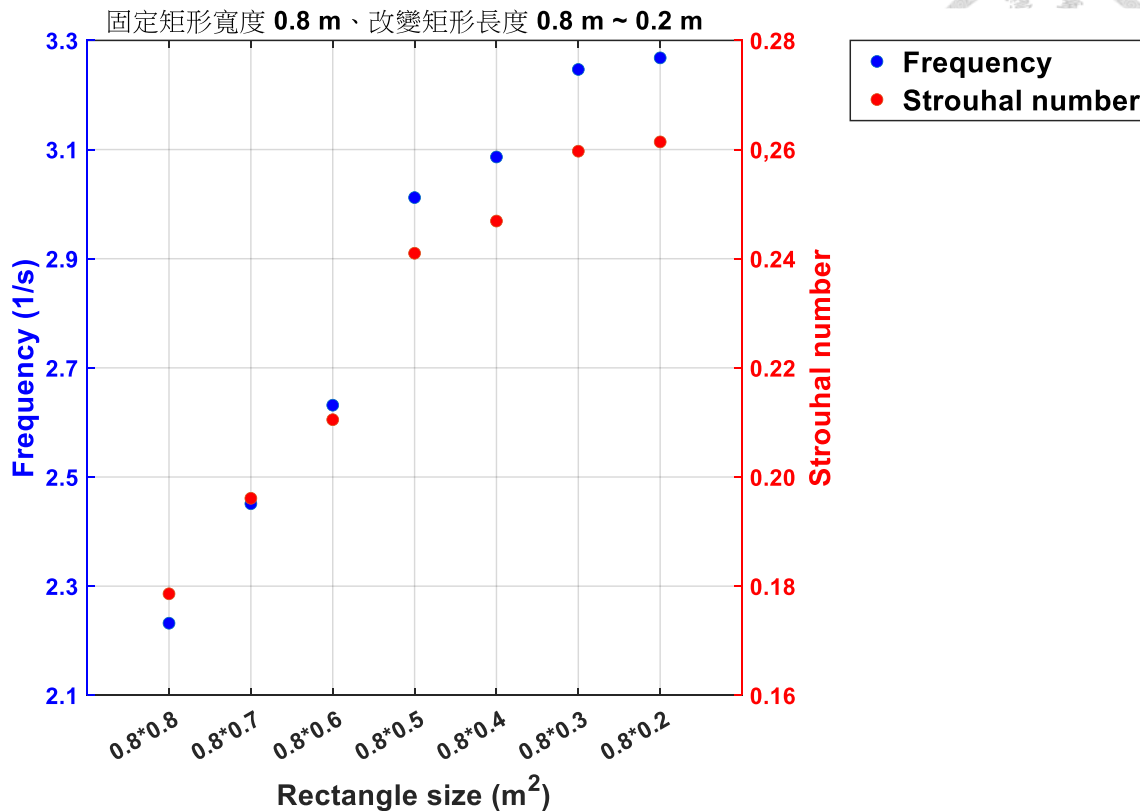


圖 3-33 3.3.2 節模擬結果之頻率與斯特勞哈爾數散佈圖

由模擬結果可以看出，在固定流速與流體性質的條件下，因為矩形寬度皆固定為 0.8 m，Blockage 為 0.2，所以在改變不同的矩形長度下漩渦皆會受到兩側邊界的影響。模擬時間皆相同代表漩渦產生的時間大致相同，且矩形後方產生的漩渦大小接近，由此兩者結果推測其影響因素為矩形的寬度。在矩形長度不大於矩形寬度的條件下，逐漸減少矩形長度可以看出，矩形後方產生漩渦的頻率會變大，且漩渦的排列較為規則，其渦度的數值也有明顯變大。由圖 3-33 可以看出，頻率隨著矩形長度呈現兩條線性分布，轉折點介於矩形長度 0.5 m 與 0.6 m 之間，而斯特勞哈爾數因為在固定流速與矩形寬度的條件下，因此其變化趨勢與頻率的變化趨勢一致。



3.3.3 改變矩形寬度 0.2 m ~ 0.8 m、固定矩形長度 0.2 m

1. 矩形大小為 0.2 m * 0.2 m

雷諾數為 100，模擬時間設為 8 s，其結果如圖 3-34 所示。

由結果可計算出頻率為 6.9444，而斯特勞哈爾數為 0.1389。

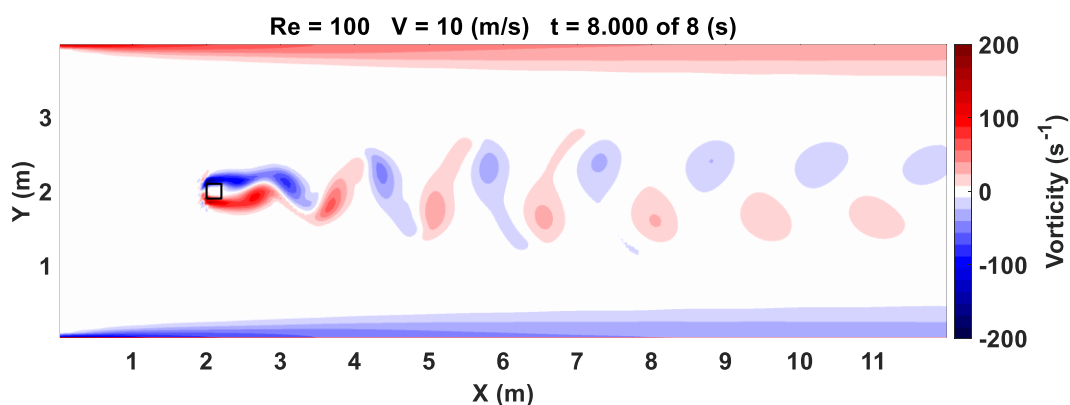


圖 3-34 矩形大小 0.2 m * 0.2 m 之模擬結果

2. 矩形大小為 0.3 m * 0.2 m

雷諾數為 150，模擬時間設為 10 s，其結果如圖 3-35 所示。

由結果可計算出頻率為 5.814，而斯特勞哈爾數為 0.1744。

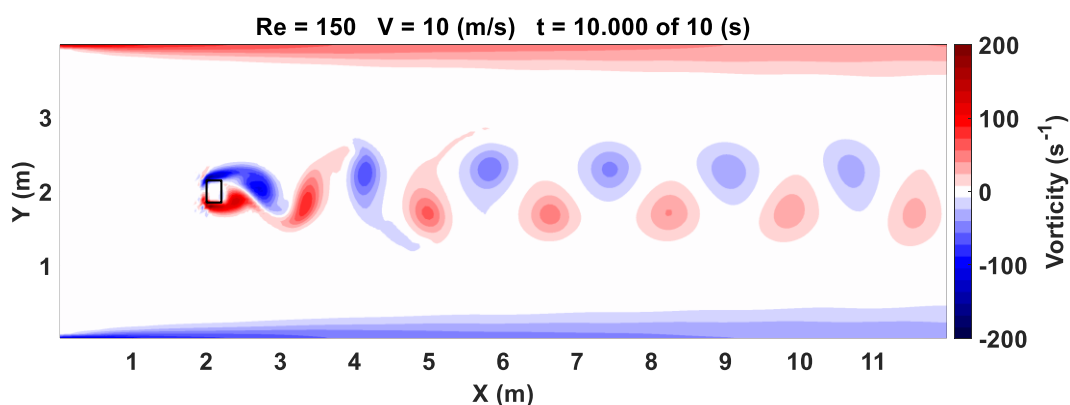


圖 3-35 矩形大小 0.3 m * 0.2 m 之模擬結果



3. 矩形大小為 $0.4 \text{ m} * 0.2 \text{ m}$

雷諾數為 200，模擬時間設為 10 s，其結果如圖 3-36 所示。

由結果可計算出頻率為 5.102，而斯特勞哈爾數為 0.2041。

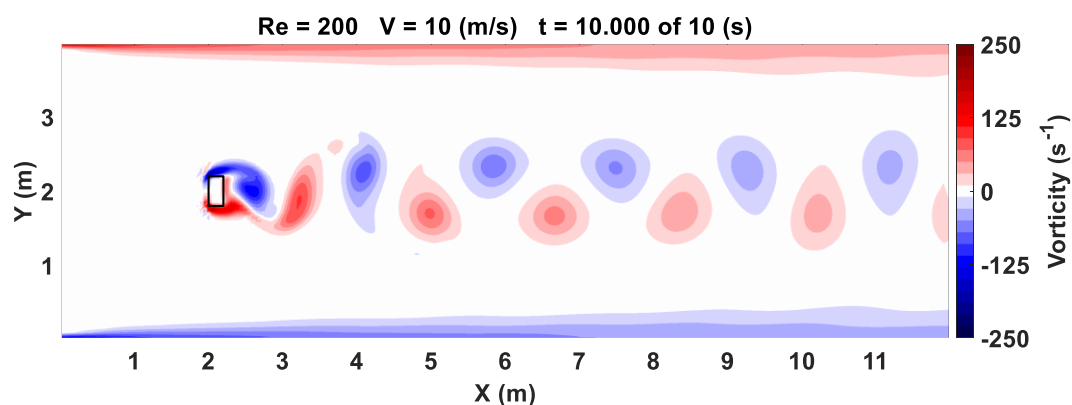


圖 3-36 矩形大小 $0.4 \text{ m} * 0.2 \text{ m}$ 之模擬結果

4. 矩形大小為 $0.5 \text{ m} * 0.2 \text{ m}$

雷諾數為 250，模擬時間設為 12 s，其結果如圖 3-37 所示。

由結果可計算出頻率為 4.4643，而斯特勞哈爾數為 0.2232。

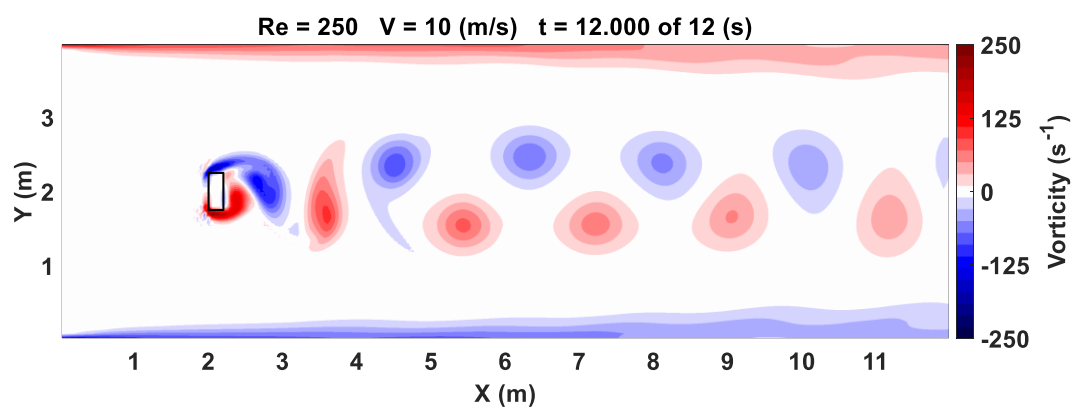


圖 3-37 矩形大小 $0.5 \text{ m} * 0.2 \text{ m}$ 之模擬結果



5. 矩形大小為 $0.6 \text{ m} * 0.2 \text{ m}$

雷諾數為 300，模擬時間設為 12 s，其結果如圖 3-38 所示。

由結果可計算出頻率為 3.9683，而斯特勞哈爾數為 0.2381。

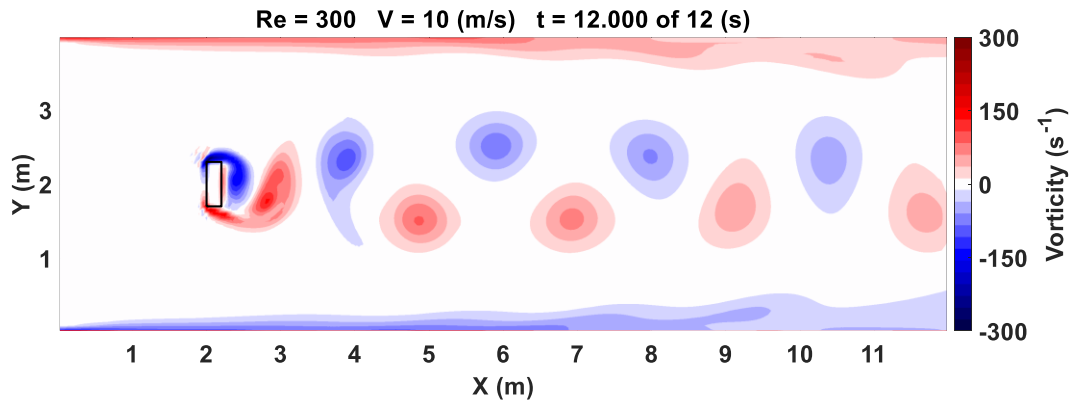


圖 3-38 矩形大小 $0.6 \text{ m} * 0.2 \text{ m}$ 之模擬結果

6. 矩形大小為 $0.7 \text{ m} * 0.2 \text{ m}$

雷諾數為 350，模擬時間設為 12 s，其結果如圖 3-39 所示。

由結果可計算出頻率為 3.5211，而斯特勞哈爾數為 0.2465。

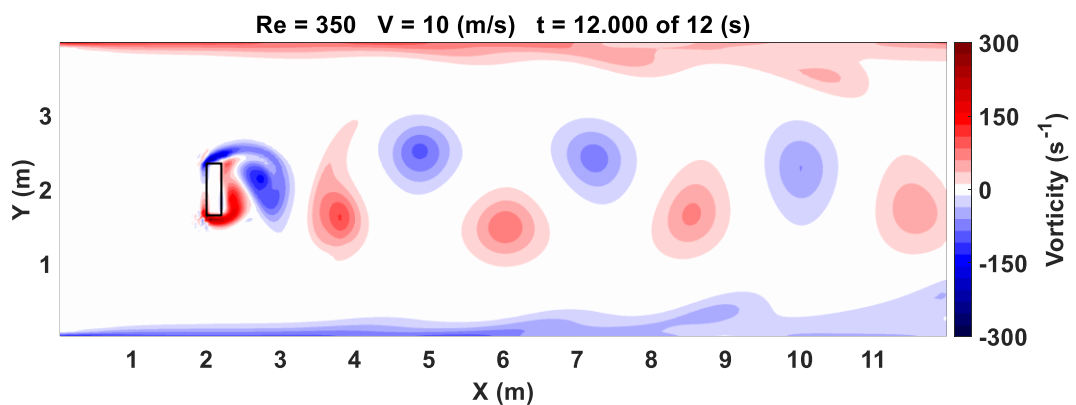


圖 3-39 矩形大小 $0.7 \text{ m} * 0.2 \text{ m}$ 之模擬結果



7. 矩形大小為 $0.8\text{ m} \times 0.2\text{ m}$

雷諾數為 400，模擬時間設為 16 s，其結果如圖 3-40 所示。

由結果可計算出頻率為 3.268，而斯特勞哈爾數為 0.2614。

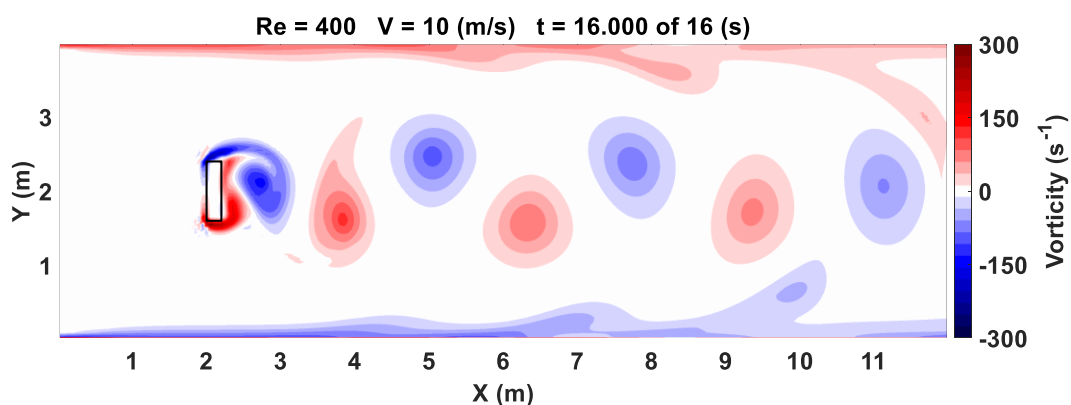


圖 3-40 矩形大小 $0.8\text{ m} \times 0.2\text{ m}$ 之模擬結果

以上 7 個模擬結果可整理成表 3-4 與圖 3-41。

表 3-4 3.3.3 節模擬結果比較表

矩形大小 (m^2)	Re	f (1/s)	St
0.2*0.2	100	6.9444	0.1389
0.3*0.2	150	5.8140	0.1744
0.4*0.2	200	5.1020	0.2041
0.5*0.2	250	4.4643	0.2232
0.6*0.2	300	3.9683	0.2381
0.7*0.2	350	3.5211	0.2465
0.8*0.2	400	3.2680	0.2614

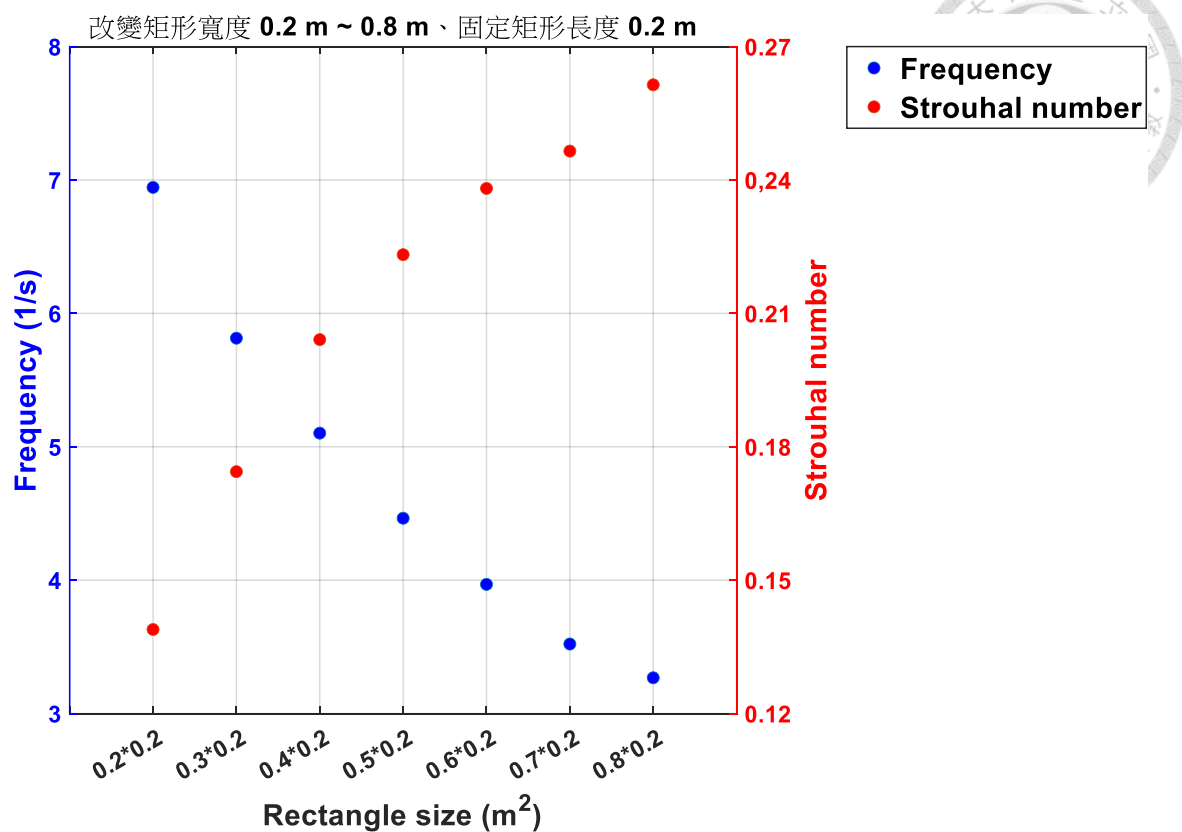


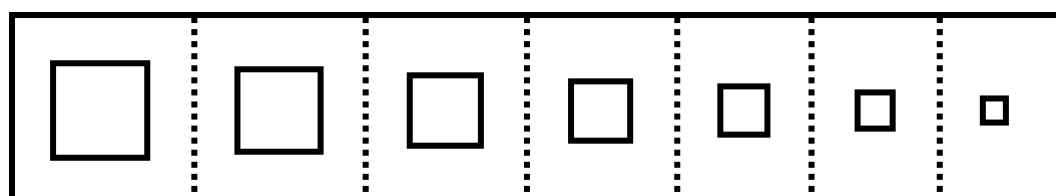
圖 3-41 3.3.3 節模擬結果之頻率與斯特勞哈爾數散佈圖

由模擬結果可以看出，在固定流速、流體性質與矩形長度的條件下，且矩形寬度不小於矩形長度，逐漸增加矩形寬度可以看出，矩形後方產生漩渦的頻率會變小，且產生漩渦的時間較長，而漩渦的大小與其渦度的數值則變大。由圖 3-41 可以看出，頻率隨著矩形寬度呈現兩條線性分布，轉折點約在矩形寬度 0.4 m 處，而斯特勞哈爾數因為只有流速固定，所以會影響其計算的除了頻率還有矩形寬度，由計算結果可看出其變化趨勢與頻率的變化趨勢相反。

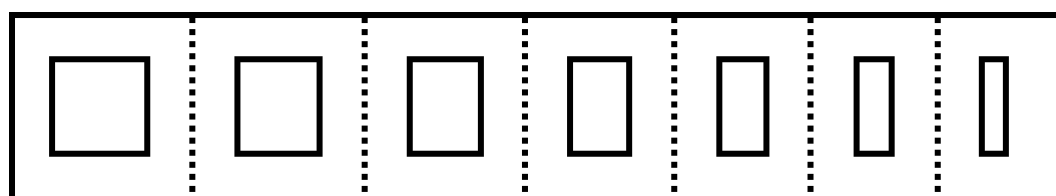


3.3.4 矩形大小選用

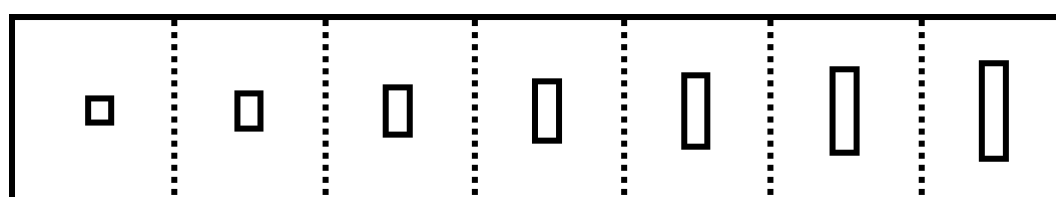
以下將針對 3.3.1 節至 3.3.3 節模擬之矩形大小，討論不同的模擬結果該選擇哪種矩形變化方式。



(a) 改變正方形邊長 0.8 m ~ 0.2 m (3.3.1 節)



(b) 固定矩形寬度 0.8 m、改變矩形長度 0.8 m ~ 0.2 m (3.3.2 節)



(c) 改變矩形寬度 0.2 m ~ 0.8 m、固定矩形長度 0.2 m (3.3.3 節)

圖 3-42 3.3 節各小節模擬之矩形大小示意圖

如圖 3-42 所示，在固定流速與流體性質的條件下，若想讓模擬結果的漩渦頻率大幅上升，且不考慮漩渦的大小，則可以選擇 3.3.1 節模擬的矩形變化方式(左到右)；若想讓模擬結果的漩渦頻率大幅下降，且不考慮漩渦的大小，則可以選擇 3.3.1 節模擬的矩形變化方式(右到左)，如果想達成一樣的效果又想減少矩形的面積，則可以選擇 3.3.3 節模擬的矩形變化方式(左到右)；若想讓模擬結果的漩渦頻率緩慢上升，且漩渦的大小變化不大，則可以選擇 3.3.2 節模擬的矩形變化方式(左到右)。



3.4 固定雷諾數與流體性質

在本節中，會用流體求解器進行不同大小的矩形剛體繞流模擬，流體的雷諾數與流體性質皆會固定，分別為： $Re = 150$ 、 $\rho/\mu = 30 \text{ (s/m}^2\text{)}$ 。模擬的流場大小如圖 3-43 所示，矩形會因不同的模擬更換成不同的大小。以下做了五組比較，分別為：

1. 改變正方形邊長 0.8 m ~ 0.2 m
2. 固定矩形寬度 0.8 m、改變矩形長度 0.8 m ~ 0.2 m
3. 改變矩形寬度 0.8 m ~ 0.2 m、固定矩形長度 0.8 m
4. 固定矩形寬度 0.2 m、改變矩形長度 0.2 m ~ 0.8 m
5. 改變矩形寬度 0.2 m ~ 0.8 m、固定矩形長度 0.2 m

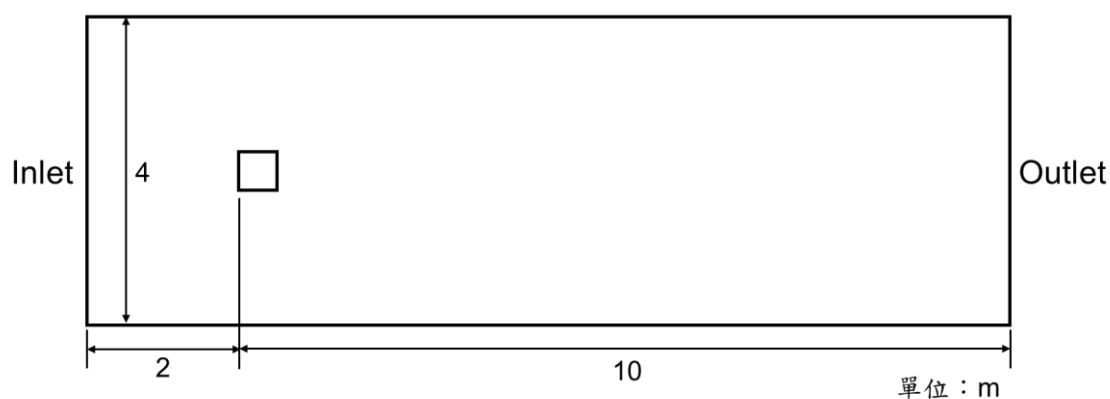


圖 3-43 3.4 節剛體繞流模擬之流場示意圖



3.4.1 改變正方形邊長 0.8 m ~ 0.2 m

1. 矩形大小為 0.8 m * 0.8 m

入口流速為 6.25 (m/s)，模擬時間設為 24 s，其結果如圖 3-44 所示。

由結果可計算出頻率為 1.7361，而斯特勞哈爾數為 0.2222。

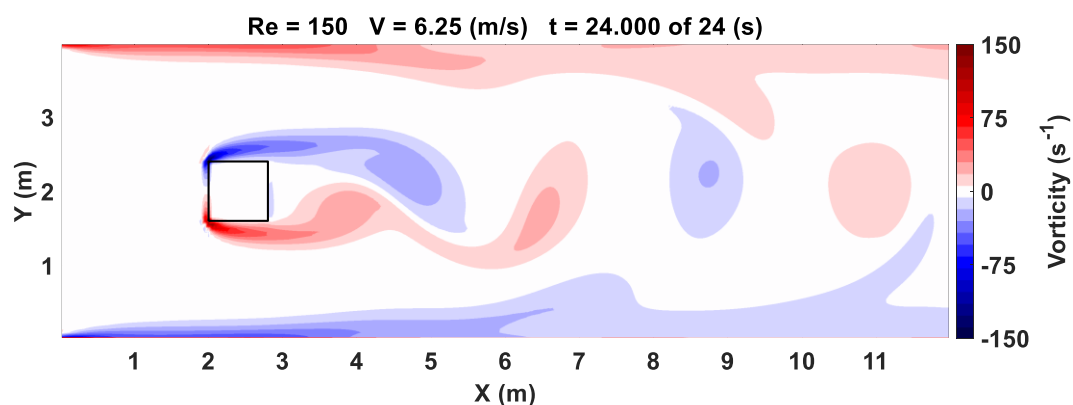


圖 3-44 矩形大小 0.8 m * 0.8 m 之模擬結果

2. 矩形大小為 0.7 m * 0.7 m

入口流速為 7.14 (m/s)，模擬時間設為 20 s，其結果如圖 3-45 所示。

由結果可計算出頻率為 2.1186，而斯特勞哈爾數為 0.2076。

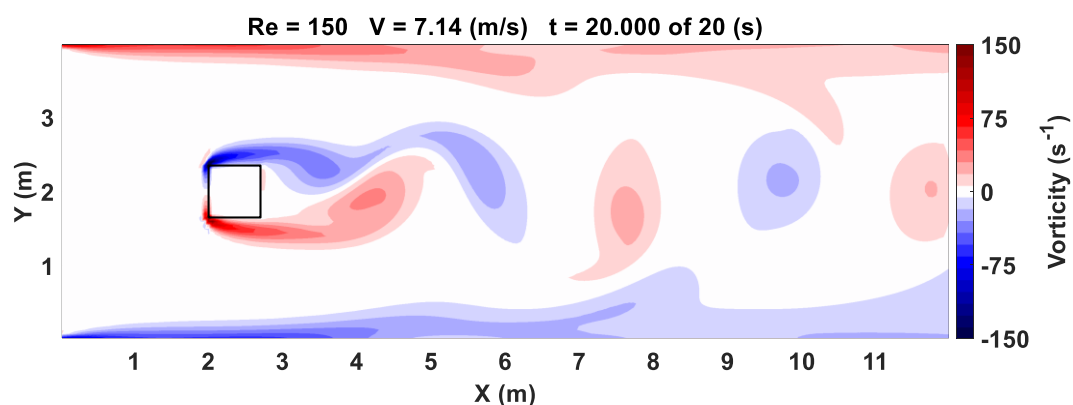


圖 3-45 矩形大小 0.7 m * 0.7 m 之模擬結果



3. 矩形大小為 $0.6\text{ m} * 0.6\text{ m}$

入口流速為 8.33 (m/s) ，模擬時間設為 16 s ，其結果如圖 3-46 所示。

由結果可計算出頻率為 2.6316 ，而斯特勞哈爾數為 0.1895 。

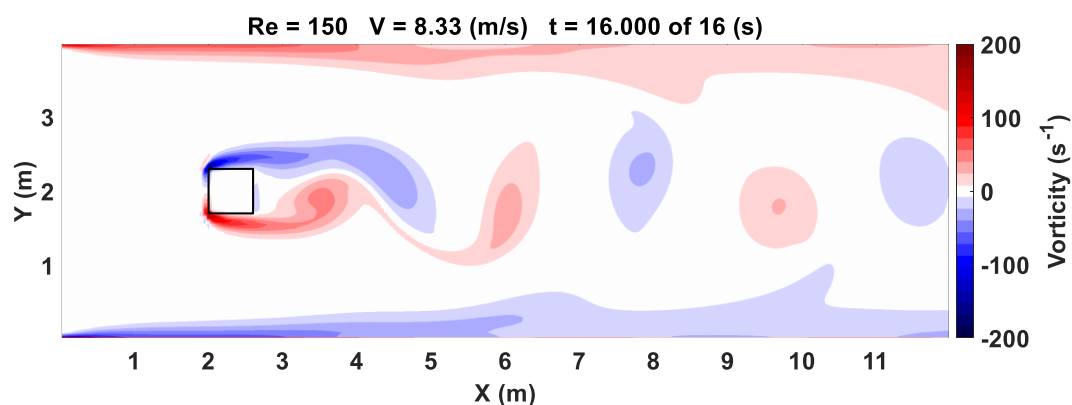


圖 3-46 矩形大小 $0.6\text{ m} * 0.6\text{ m}$ 之模擬結果

4. 矩形大小為 $0.5\text{ m} * 0.5\text{ m}$

入口流速為 10 (m/s) ，模擬時間設為 12 s ，其結果如圖 3-47 所示。

由結果可計算出頻率為 3.5714 ，而斯特勞哈爾數為 0.1786 。

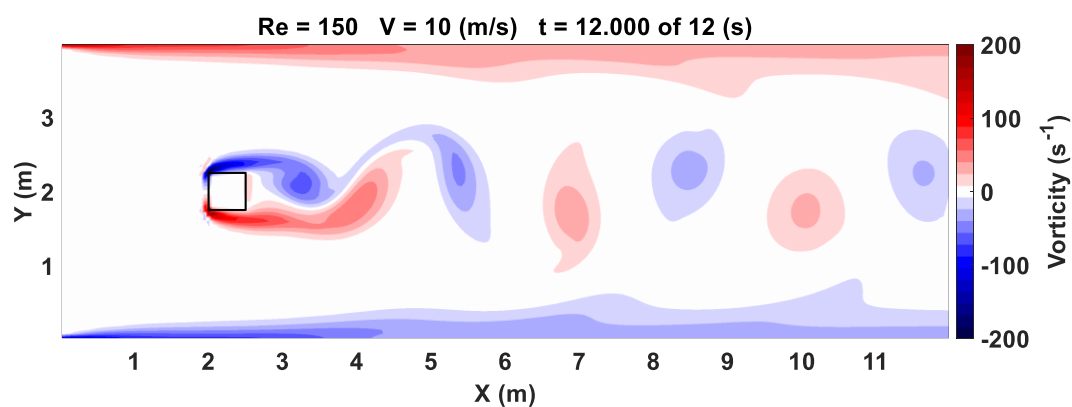


圖 3-47 矩形大小 $0.5\text{ m} * 0.5\text{ m}$ 之模擬結果



5. 矩形大小為 $0.4 \text{ m} * 0.4 \text{ m}$

入口流速為 12.5 (m/s) ，模擬時間設為 12 s ，其結果如圖 3-48 所示。

由結果可計算出頻率為 5.2083 ，而斯特勞哈爾數為 0.1667 。

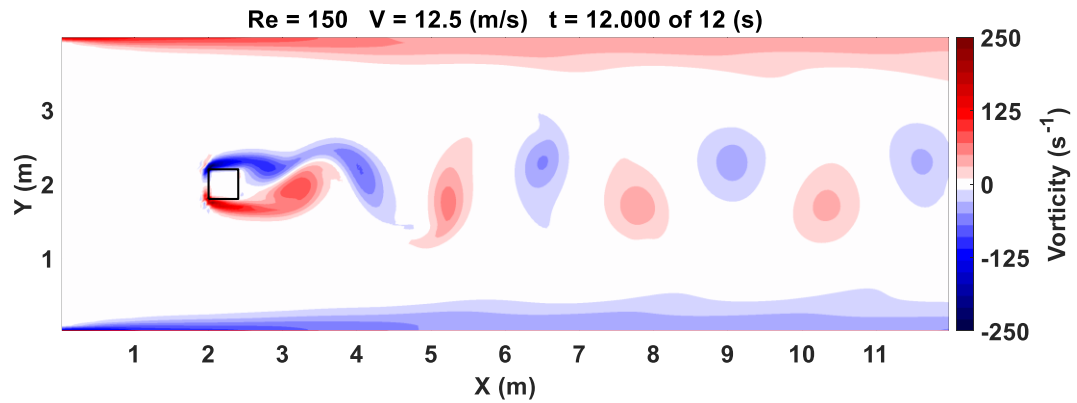


圖 3-48 矩形大小 $0.4 \text{ m} * 0.4 \text{ m}$ 之模擬結果

6. 矩形大小為 $0.3 \text{ m} * 0.3 \text{ m}$

入口流速為 16.67 (m/s) ，模擬時間設為 8 s ，其結果如圖 3-49 所示。

由結果可計算出頻率為 8.6207 ，而斯特勞哈爾數為 0.1552 。

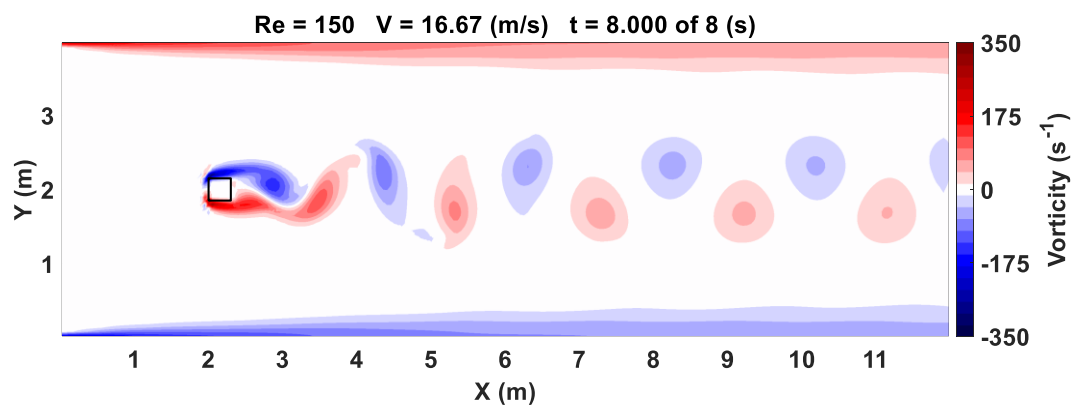


圖 3-49 矩形大小 $0.3 \text{ m} * 0.3 \text{ m}$ 之模擬結果



7. 矩形大小為 $0.2 \text{ m} * 0.2 \text{ m}$

入口流速為 25 (m/s) ，模擬時間設為 6 s ，其結果如圖 3-50 所示。

由結果可計算出頻率為 17.857 ，而斯特勞哈爾數為 0.1429 。

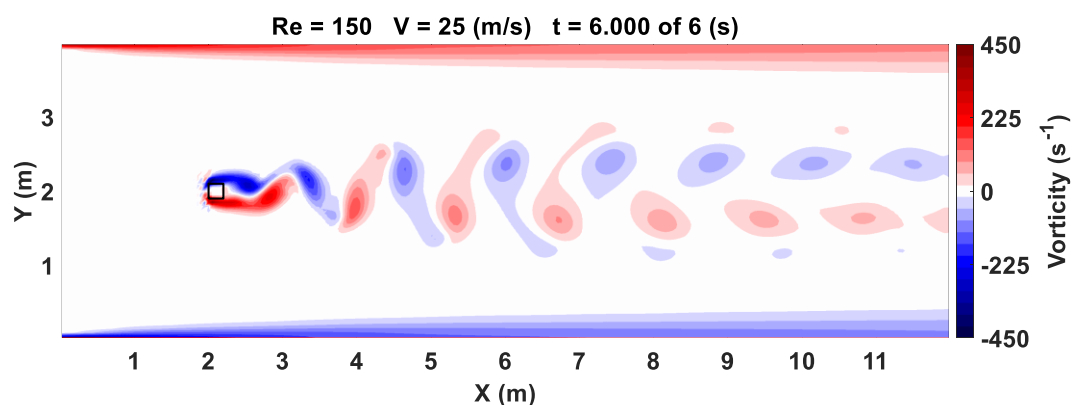


圖 3-50 矩形大小 $0.2 \text{ m} * 0.2 \text{ m}$ 之模擬結果

以上 7 個模擬結果可整理成表 3-5 與圖 3-51。

表 3-5 3.4.1 節模擬結果比較表

矩形大小 (m^2)	$v \text{ (m/s)}$	$f \text{ (1/s)}$	St
$0.8*0.8$	6.25	1.7361	0.2222
$0.7*0.7$	7.14	2.1186	0.2076
$0.6*0.6$	8.33	2.6316	0.1895
$0.5*0.5$	10.00	3.5714	0.1786
$0.4*0.4$	12.50	5.2083	0.1667
$0.3*0.3$	16.67	8.6207	0.1552
$0.2*0.2$	25.00	17.8570	0.1429

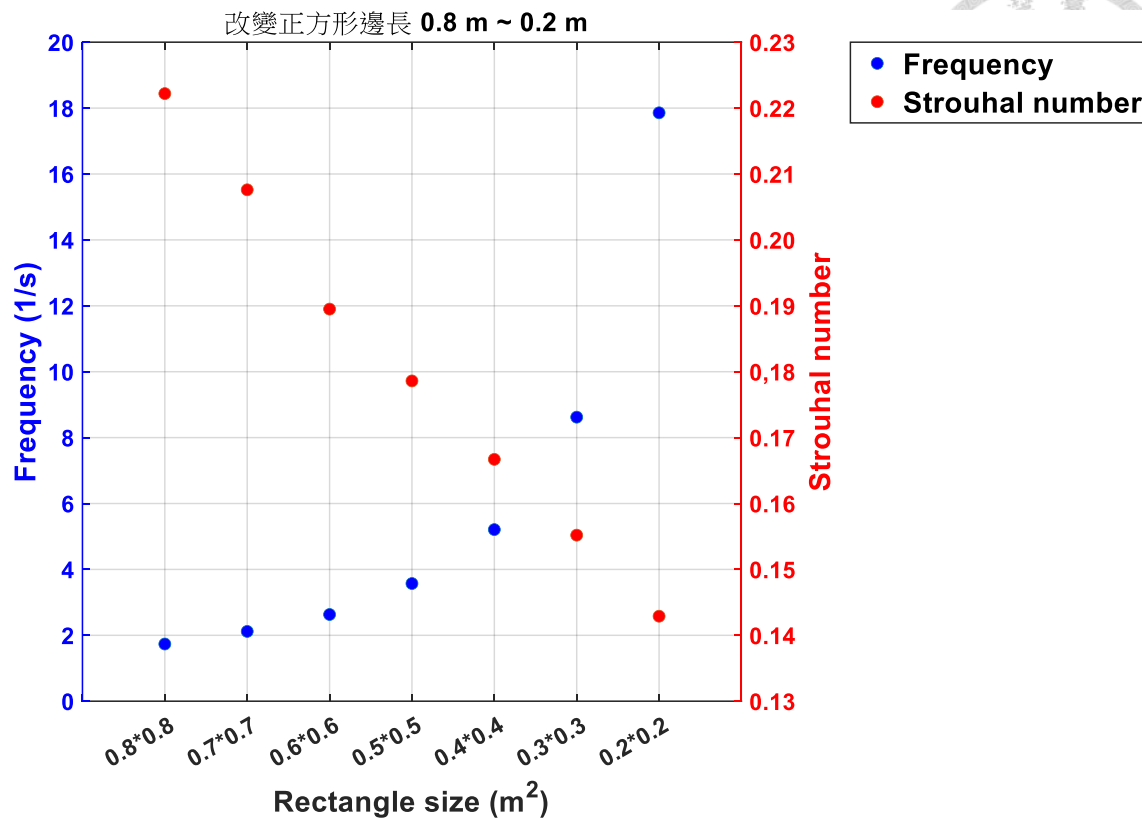


圖 3-51 3.4.1 節模擬結果之頻率與斯特勞哈爾數散佈圖

由模擬結果可以看出，在固定雷諾數與流體性質的條件下，當正方形邊長變小時，產生漩渦的時間較短，而漩渦會比較小，頻率則會變大，且漩渦排列較為規則；反之，當正方形邊長變大時，產生漩渦的時間較長，而漩渦會比較大，頻率則會變小，且漩渦會比較容易受到兩側邊界的影響，排列較不規則。由圖 3-51 可以看出，頻率隨著正方形邊長呈現指數型分布，而斯特勞哈爾數則幾乎呈現線性分布。



3.4.2 固定矩形寬度 0.8 m、改變矩形長度 0.8 m ~ 0.2 m

1. 矩形大小為 0.8 m * 0.8 m

入口流速為 6.25 (m/s)，模擬時間設為 24 s，其結果如圖 3-52 所示。

由結果可計算出頻率為 1.7361，而斯特勞哈爾數為 0.2222。

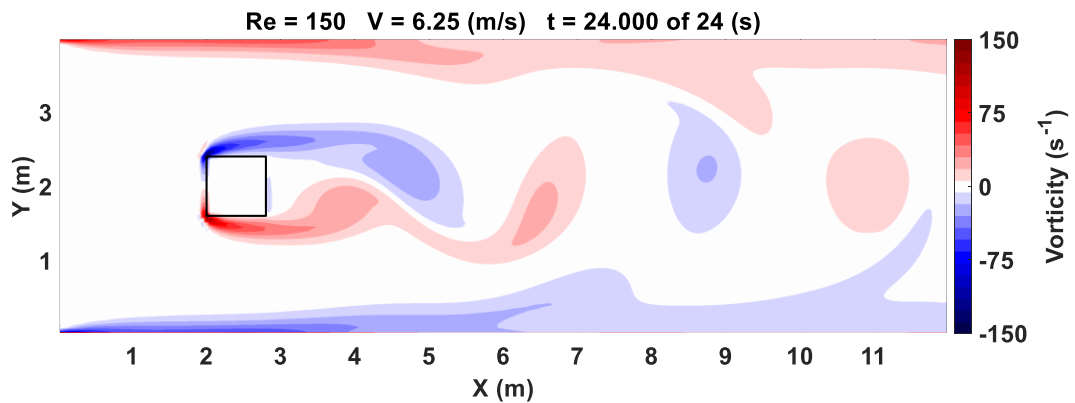


圖 3-52 矩形大小 0.8 m * 0.8 m 之模擬結果

2. 矩形大小為 0.8 m * 0.7 m

入口流速為 6.25 (m/s)，模擬時間設為 24 s，其結果如圖 3-53 所示。

由結果可計算出頻率為 1.7483，而斯特勞哈爾數為 0.2238。

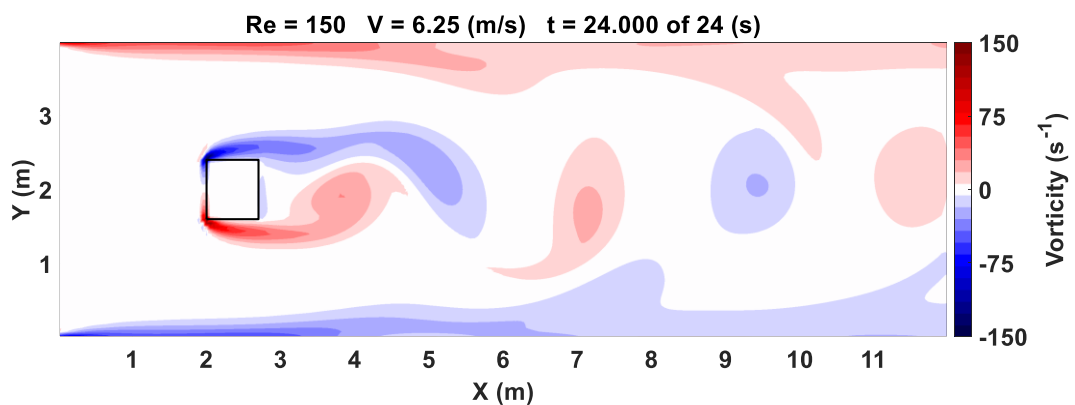


圖 3-53 矩形大小 0.8 m * 0.7 m 之模擬結果



3. 矩形大小為 $0.8 \text{ m} * 0.6 \text{ m}$

入口流速為 6.25 (m/s) ，模擬時間設為 24 s ，其結果如圖 3-54 所示。

由結果可計算出頻率為 1.7606 ，而斯特勞哈爾數為 0.2254 。

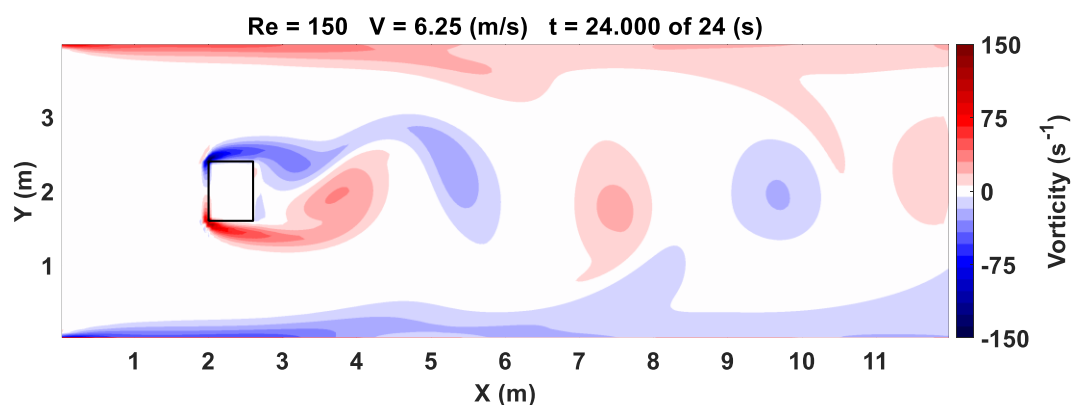


圖 3-54 矩形大小 $0.8 \text{ m} * 0.6 \text{ m}$ 之模擬結果

4. 矩形大小為 $0.8 \text{ m} * 0.5 \text{ m}$

入口流速為 6.25 (m/s) ，模擬時間設為 24 s ，其結果如圖 3-55 所示。

由結果可計算出頻率為 1.773 ，而斯特勞哈爾數為 0.227 。

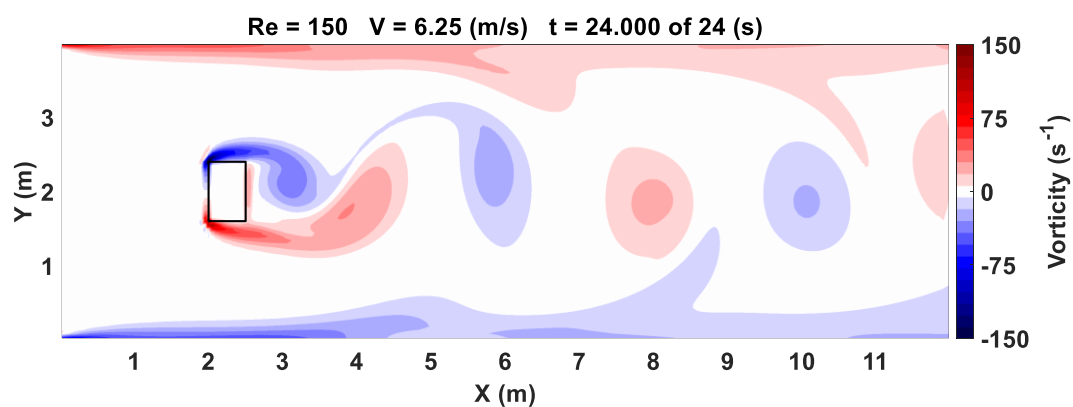


圖 3-55 矩形大小 $0.8 \text{ m} * 0.5 \text{ m}$ 之模擬結果



5. 矩形大小為 $0.8 \text{ m} * 0.4 \text{ m}$

入口流速為 6.25 (m/s) ，模擬時間設為 24 s ，其結果如圖 3-56 所示。

由結果可計算出頻率為 1.8382 ，而斯特勞哈爾數為 0.2353 。

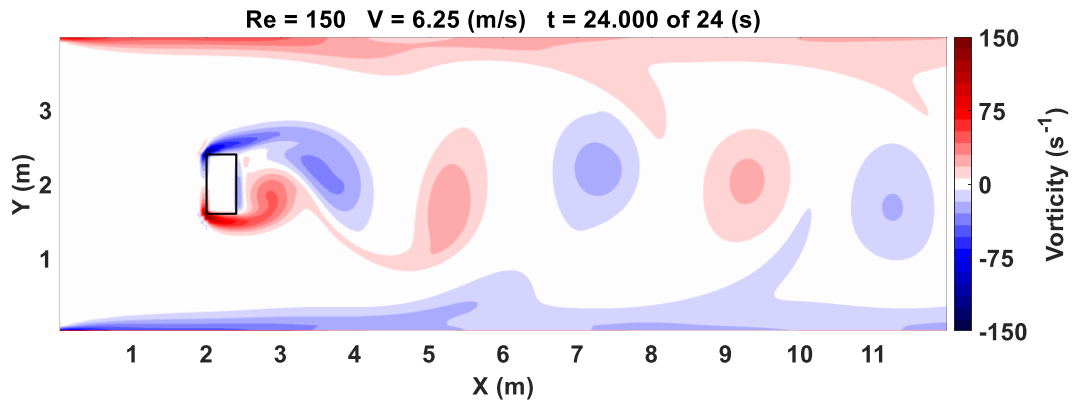


圖 3-56 矩形大小 $0.8 \text{ m} * 0.4 \text{ m}$ 之模擬結果

6. 矩形大小為 $0.8 \text{ m} * 0.3 \text{ m}$

入口流速為 6.25 (m/s) ，模擬時間設為 24 s ，其結果如圖 3-57 所示。

由結果可計算出頻率為 1.9084 ，而斯特勞哈爾數為 0.2443 。

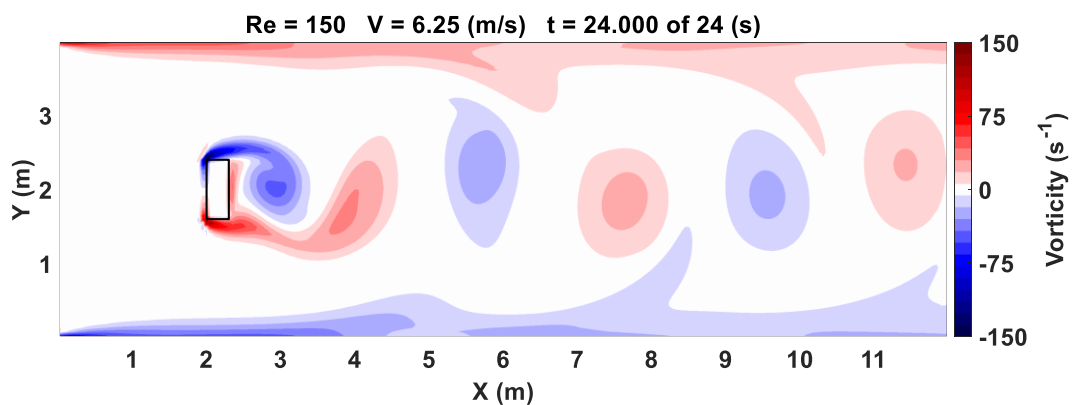


圖 3-57 矩形大小 $0.8 \text{ m} * 0.3 \text{ m}$ 之模擬結果



7. 矩形大小為 $0.8 \text{ m} * 0.2 \text{ m}$

入口流速為 6.25 (m/s) ，模擬時間設為 24 s ，其結果如圖 3-58 所示。

由結果可計算出頻率為 1.9685 ，而斯特勞哈爾數為 0.252 。

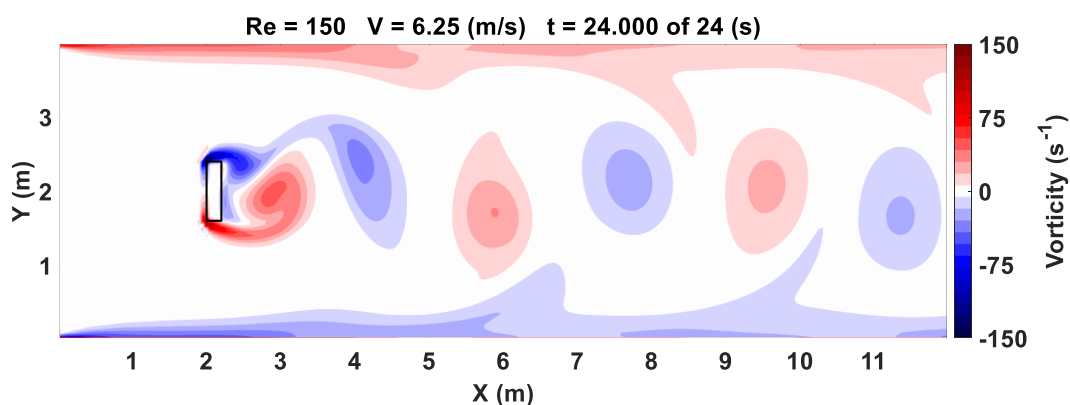


圖 3-58 矩形大小 $0.8 \text{ m} * 0.2 \text{ m}$ 之模擬結果

以上 7 個模擬結果可整理成表 3-6 與圖 3-59。

表 3-6 3.4.2 節模擬結果比較表

矩形大小 (m^2)	$v \text{ (m/s)}$	$f \text{ (1/s)}$	St
$0.8*0.8$	6.25	1.7361	0.2222
$0.8*0.7$	6.25	1.7483	0.2238
$0.8*0.6$	6.25	1.7606	0.2254
$0.8*0.5$	6.25	1.7730	0.2270
$0.8*0.4$	6.25	1.8382	0.2353
$0.8*0.3$	6.25	1.9084	0.2443
$0.8*0.2$	6.25	1.9685	0.2520

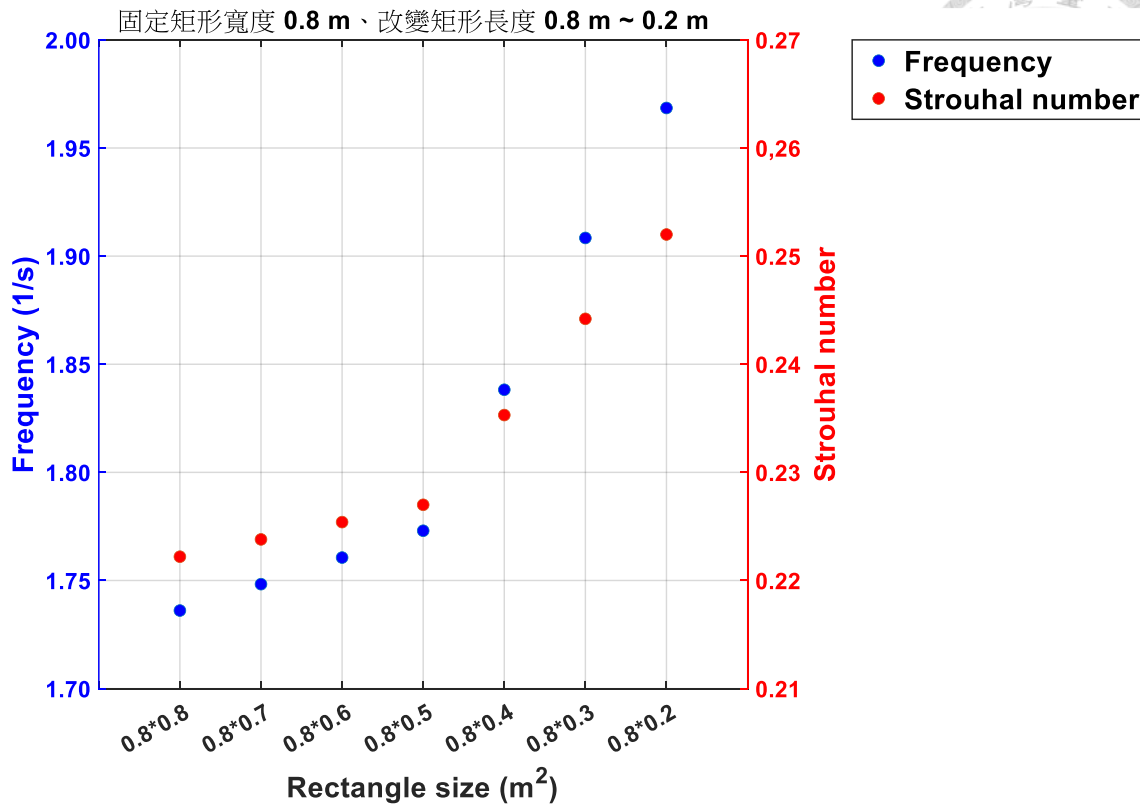


圖 3-59 3.4.2 節模擬結果之頻率與斯特勞哈爾數散佈圖

由模擬結果可以看出，在固定雷諾數與流體性質的條件下，因為矩形寬度皆固定為 0.8 m，Blockage 為 0.2，所以在改變不同的矩形長度下漩渦皆會受到兩側邊界的影響。模擬時間皆相同代表漩渦產生的時間大致相同，且矩形後方產生的漩渦大小接近，由此兩者結果推測其影響因素為矩形的寬度。在矩形長度不大於矩形寬度的條件下，逐漸減少矩形長度可以看出，矩形後方產生漩渦的頻率會變大，且漩渦的排列較為規則，其渦度的數值也有明顯變大。由圖 3-59 可以看出，頻率隨著矩形長度呈現兩條線性分布，轉折點約在矩形長度 0.5 m 處，而斯特勞哈爾數因為在固定流速與矩形寬度的條件下，因此其變化趨勢與頻率的變化趨勢一致。

3.4.3 改變矩形寬度 0.8 m ~ 0.2 m、固定矩形長度 0.8 m

1. 矩形大小為 0.8 m * 0.8 m

入口流速為 6.25 (m/s)，模擬時間設為 24 s，其結果如圖 3-60 所示。

由結果可計算出頻率為 1.7361，而斯特勞哈爾數為 0.2222。

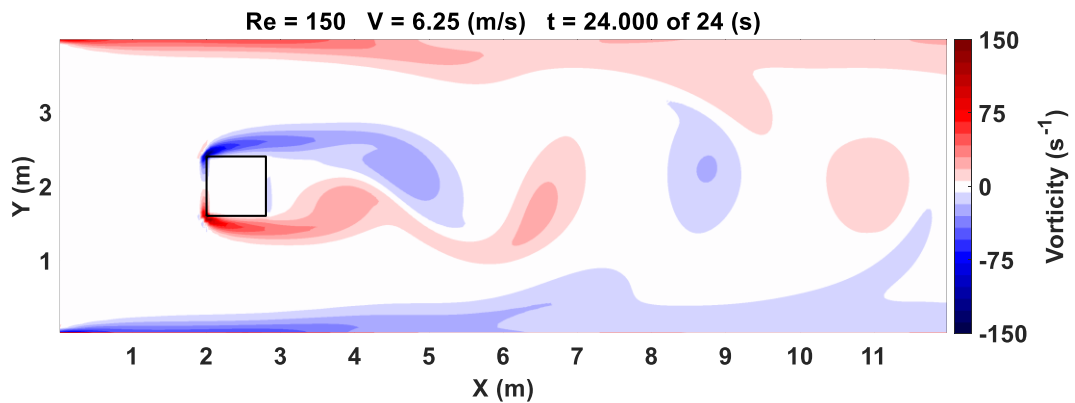


圖 3-60 矩形大小 0.8 m * 0.8 m 之模擬結果

2. 矩形大小為 0.7 m * 0.8 m

入口流速為 7.14 (m/s)，模擬時間設為 20 s，其結果如圖 3-61 所示。

由結果可計算出頻率為 2.1552，而斯特勞哈爾數為 0.2112。

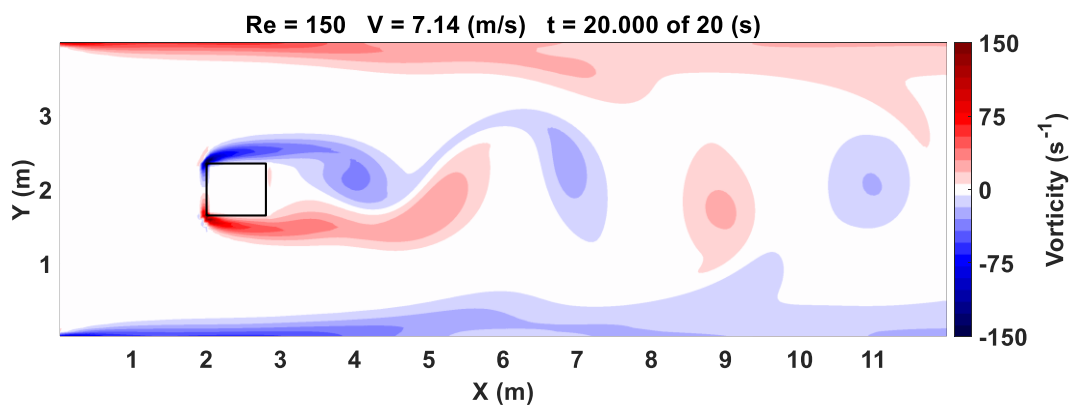


圖 3-61 矩形大小 0.7 m * 0.8 m 之模擬結果



3. 矩形大小為 $0.6\text{ m} * 0.8\text{ m}$

入口流速為 8.33 (m/s) ，模擬時間設為 16 s ，其結果如圖 3-62 所示。

由結果可計算出頻率為 2.7174 ，而斯特勞哈爾數為 0.1957 。

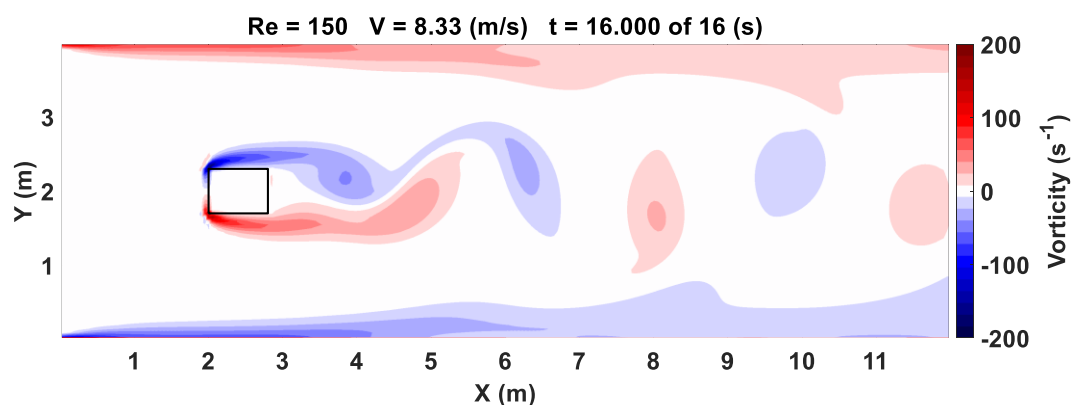


圖 3-62 矩形大小 $0.6\text{ m} * 0.8\text{ m}$ 之模擬結果

4. 矩形大小為 $0.5\text{ m} * 0.8\text{ m}$

入口流速為 10 (m/s) ，模擬時間設為 12 s ，其結果如圖 3-63 所示。

由結果可計算出頻率為 3.6765 ，而斯特勞哈爾數為 0.1838 。

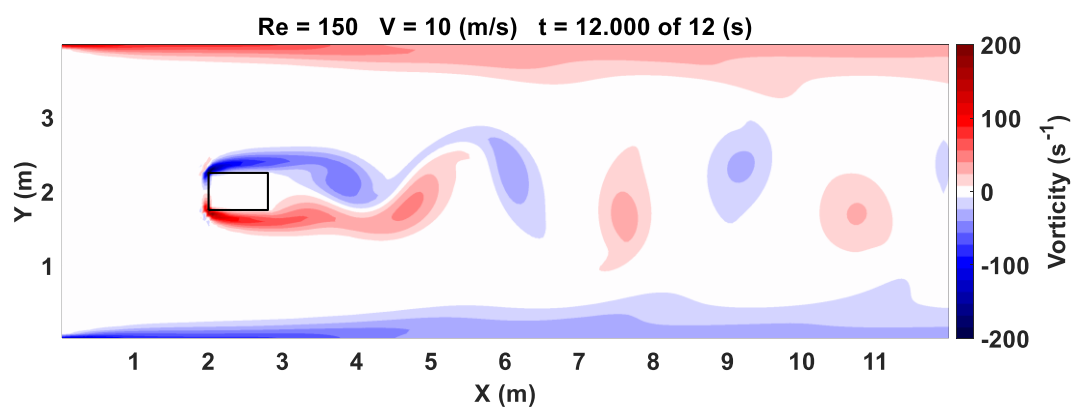


圖 3-63 矩形大小 $0.5\text{ m} * 0.8\text{ m}$ 之模擬結果



5. 矩形大小為 $0.4 \text{ m} * 0.8 \text{ m}$

入口流速為 12.5 (m/s) ，模擬時間設為 12 s ，其結果如圖 3-64 所示。

由結果可計算出頻率為 5.2083 ，而斯特勞哈爾數為 0.1667 。

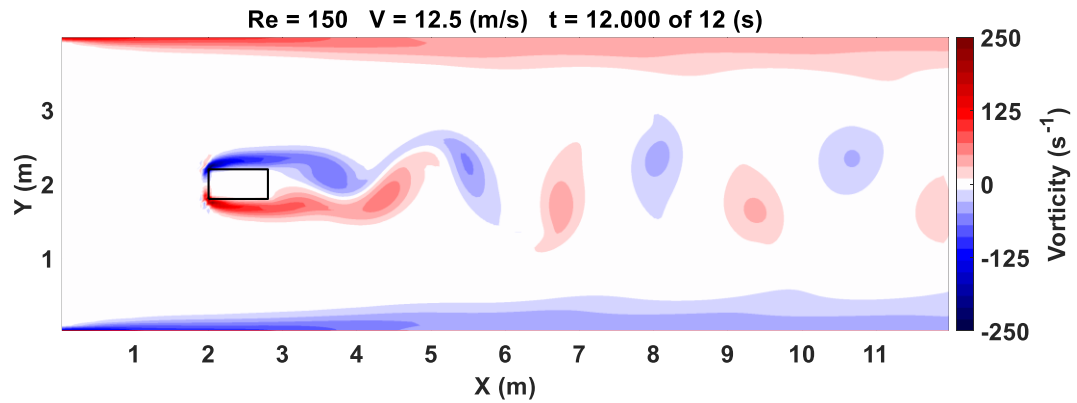


圖 3-64 矩形大小 $0.4 \text{ m} * 0.8 \text{ m}$ 之模擬結果

6. 矩形大小為 $0.3 \text{ m} * 0.8 \text{ m}$

入口流速為 16.67 (m/s) ，模擬時間設為 8 s ，其結果如圖 3-65 所示。

由結果可計算出頻率為 8.0645 ，而斯特勞哈爾數為 0.1452 。

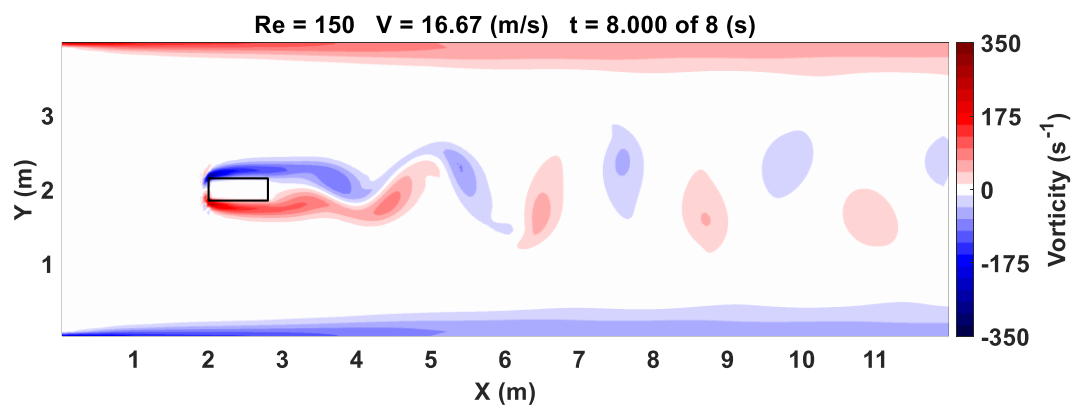


圖 3-65 矩形大小 $0.3 \text{ m} * 0.8 \text{ m}$ 之模擬結果



7. 矩形大小為 $0.2 \text{ m} * 0.8 \text{ m}$

入口流速為 25 (m/s) ，模擬時間設為 6 s ，其結果如圖 3-66 所示。

由結果可計算出頻率為 13.889 ，而斯特勞哈爾數為 0.1111 。

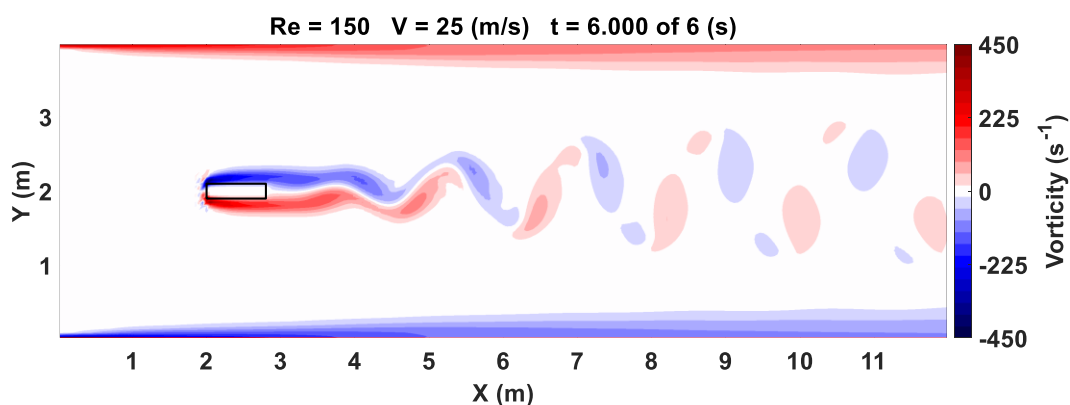


圖 3-66 矩形大小 $0.2 \text{ m} * 0.8 \text{ m}$ 之模擬結果

以上 7 個模擬結果可整理成表 3-7 與圖 3-67。

表 3-7 3.4.3 節模擬結果比較表

矩形大小 (m^2)	$v \text{ (m/s)}$	$f \text{ (1/s)}$	St
$0.8*0.8$	6.25	1.7361	0.2222
$0.7*0.8$	7.14	2.1552	0.2112
$0.6*0.8$	8.33	2.7174	0.1957
$0.5*0.8$	10.00	3.6765	0.1838
$0.4*0.8$	12.50	5.2083	0.1667
$0.3*0.8$	16.67	8.0645	0.1452
$0.2*0.8$	25.00	13.8890	0.1111

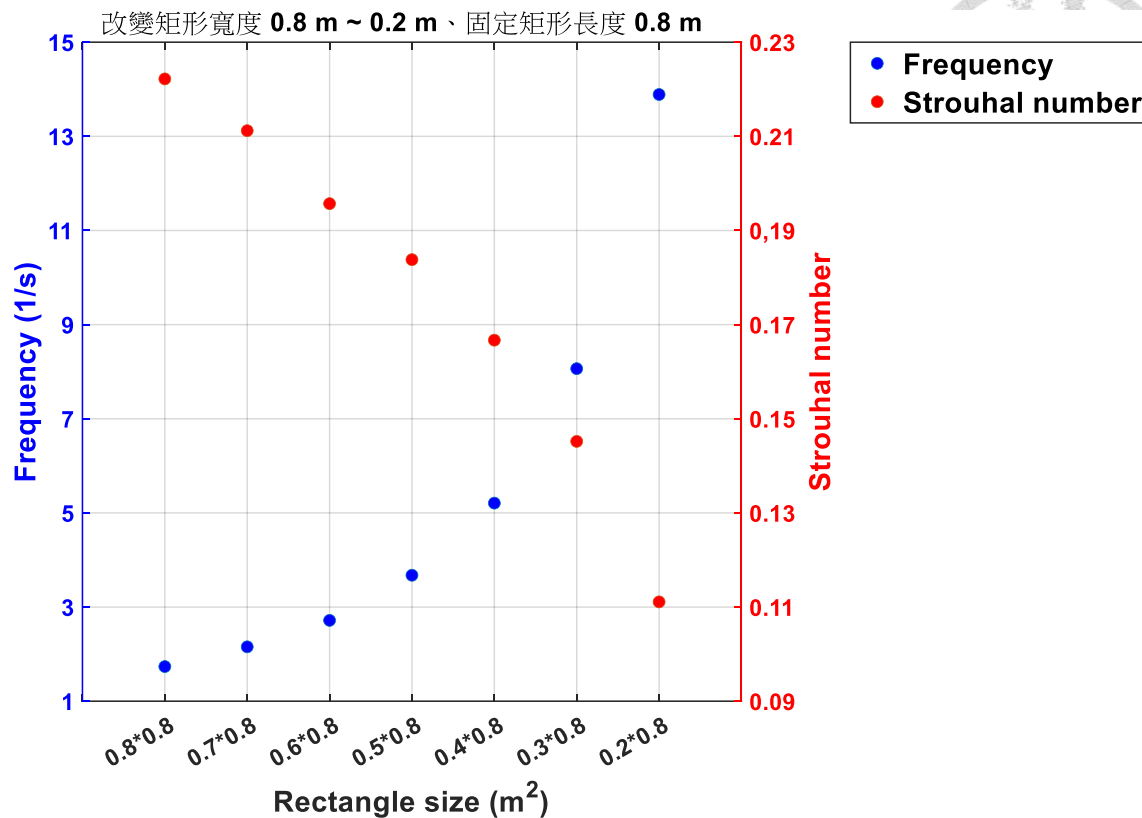


圖 3-67 3.4.3 節模擬結果之頻率與斯特勞哈爾數散佈圖

由模擬結果可以看出，在固定雷諾數、流體性質與矩形長度的條件下，且矩形寬度不大於矩形長度，逐漸減少矩形寬度可以看出，矩形後方產生的漩渦大小會變小，且產生漩渦的時間較短，而漩渦的頻率與其渦度的數值則變大。由圖 3-67 可以看出，頻率隨著矩形寬度呈現指數型分布，而斯特勞哈爾數因為流速、頻率與矩形寬度皆無固定，所以三者之間皆會影響其計算，由計算結果可看出其變化趨勢呈現兩條線性分布，轉折點約在矩形寬度 0.4 m 處。



3.4.4 固定矩形寬度 0.2 m、改變矩形長度 0.2 m ~ 0.8 m

1. 矩形大小為 0.2 m * 0.2 m

入口流速為 25 (m/s)，模擬時間設為 6 s，其結果如圖 3-68 所示。

由結果可計算出頻率為 17.857，而斯特勞哈爾數為 0.1429。

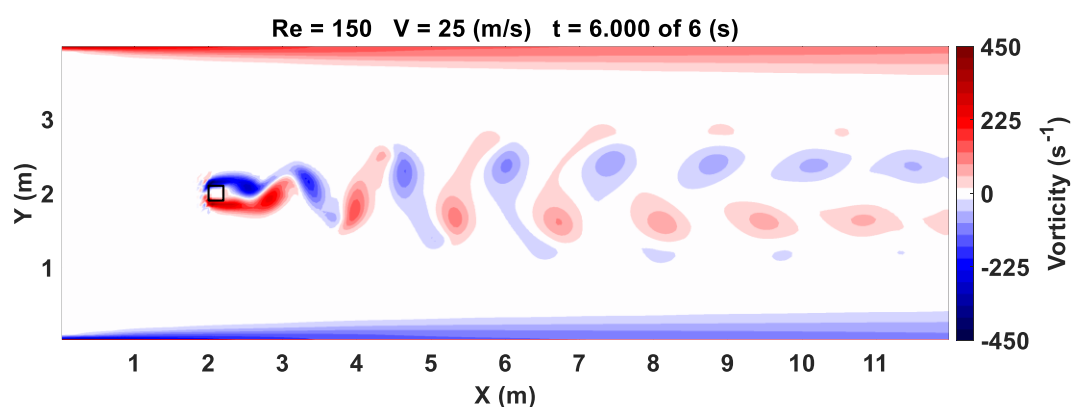


圖 3-68 矩形大小 0.2 m * 0.2 m 之模擬結果

2. 矩形大小為 0.2 m * 0.3 m

入口流速為 25 (m/s)，模擬時間設為 6 s，其結果如圖 3-69 所示。

由結果可計算出頻率為 16.667，而斯特勞哈爾數為 0.1333。

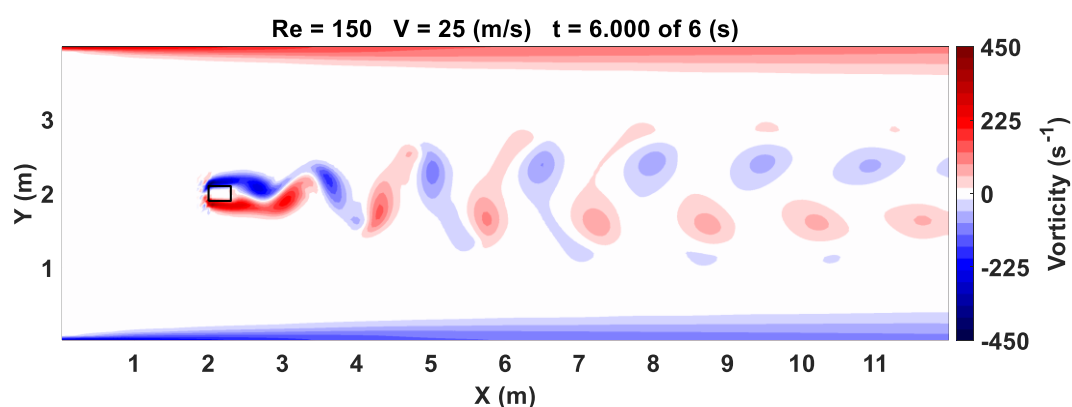


圖 3-69 矩形大小 0.2 m * 0.3 m 之模擬結果



3. 矩形大小為 $0.2 \text{ m} * 0.4 \text{ m}$

入口流速為 25 (m/s) ，模擬時間設為 6 s ，其結果如圖 3-70 所示。

由結果可計算出頻率為 16.129 ，而斯特勞哈爾數為 0.129 。

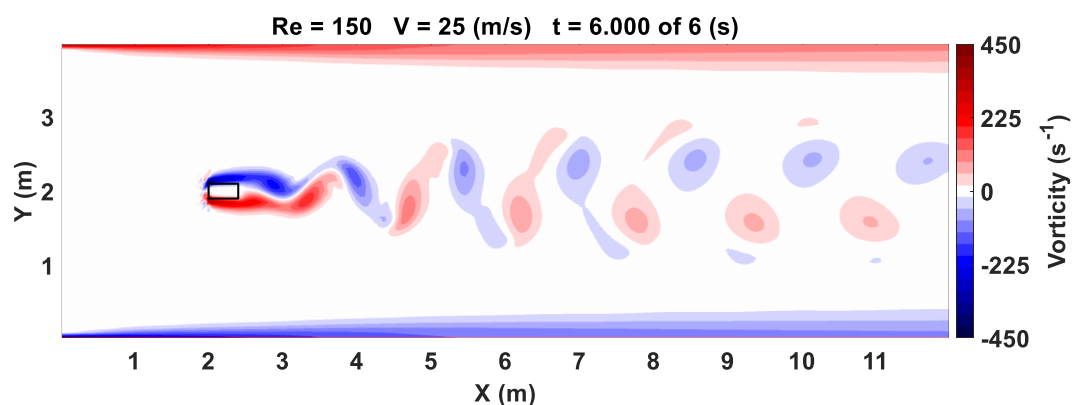


圖 3-70 矩形大小 $0.2 \text{ m} * 0.4 \text{ m}$ 之模擬結果

4. 矩形大小為 $0.2 \text{ m} * 0.5 \text{ m}$

入口流速為 25 (m/s) ，模擬時間設為 6 s ，其結果如圖 3-71 所示。

由結果可計算出頻率為 15.625 ，而斯特勞哈爾數為 0.125 。

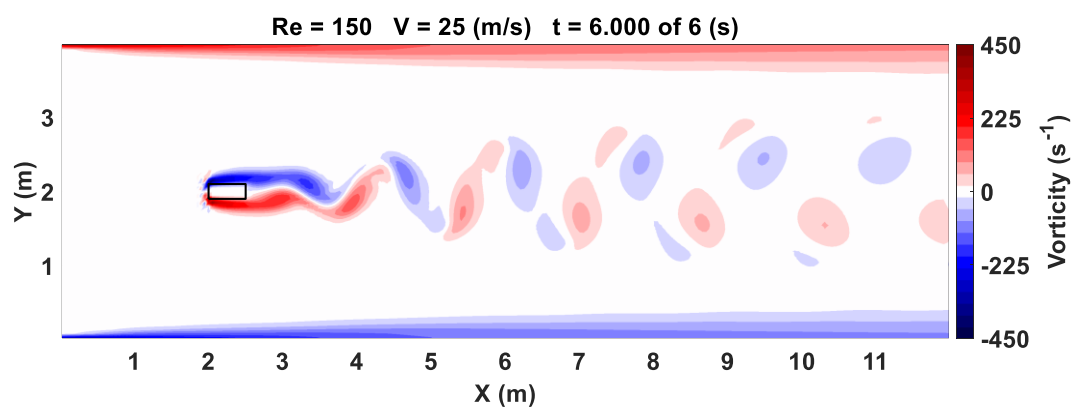


圖 3-71 矩形大小 $0.2 \text{ m} * 0.5 \text{ m}$ 之模擬結果



5. 矩形大小為 $0.2\text{ m} \times 0.6\text{ m}$

入口流速為 25 (m/s) ，模擬時間設為 6 s ，其結果如圖 3-72 所示。

由結果可計算出頻率為 14.706 ，而斯特勞哈爾數為 0.1176 。

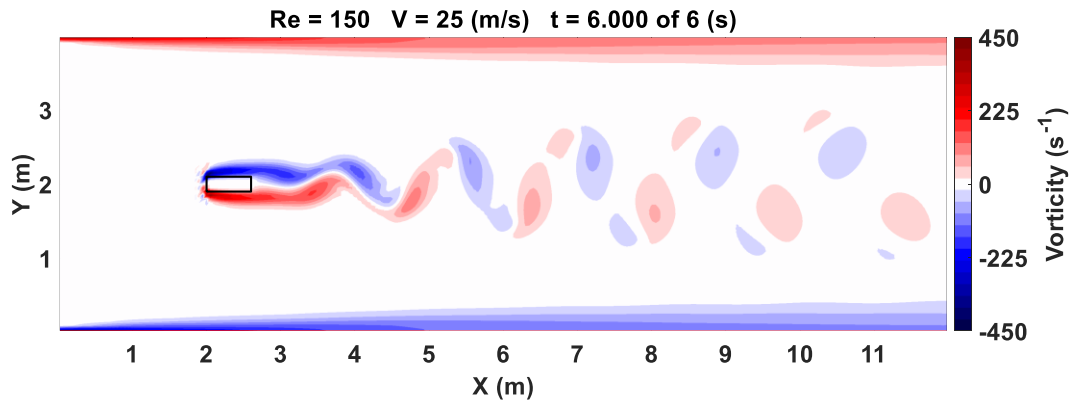


圖 3-72 矩形大小 $0.2\text{ m} \times 0.6\text{ m}$ 之模擬結果

6. 矩形大小為 $0.2\text{ m} \times 0.7\text{ m}$

入口流速為 25 (m/s) ，模擬時間設為 6 s ，其結果如圖 3-73 所示。

由結果可計算出頻率為 14.286 ，而斯特勞哈爾數為 0.1143 。

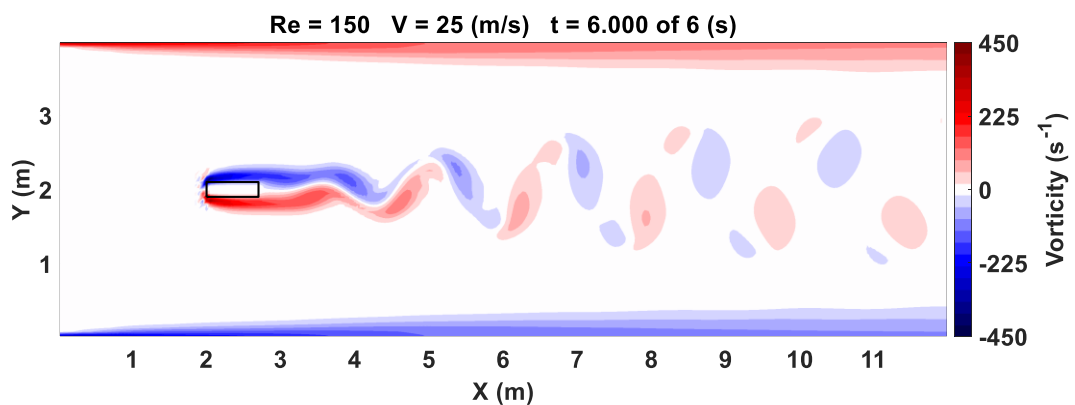


圖 3-73 矩形大小 $0.2\text{ m} \times 0.7\text{ m}$ 之模擬結果



7. 矩形大小為 $0.2 \text{ m} * 0.8 \text{ m}$

入口流速為 25 (m/s) ，模擬時間設為 6 s ，其結果如圖 3-74 所示。

由結果可計算出頻率為 13.889 ，而斯特勞哈爾數為 0.1111 。

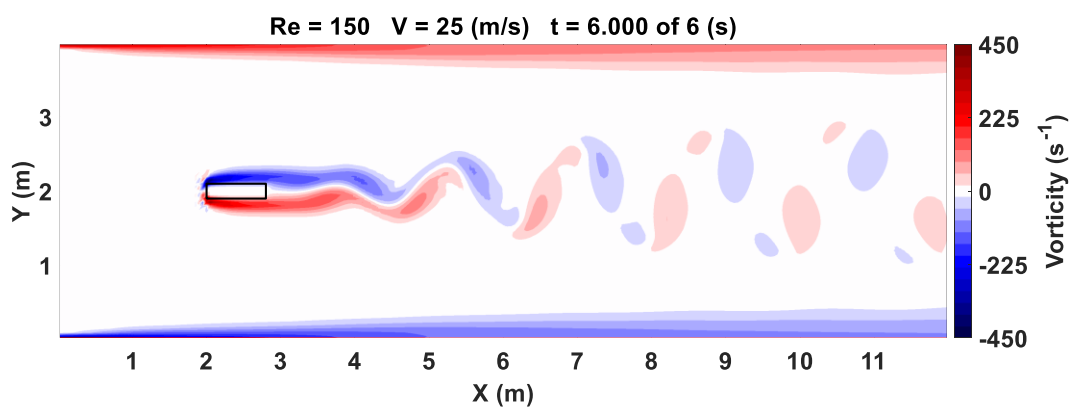


圖 3-74 矩形大小 $0.2 \text{ m} * 0.8 \text{ m}$ 之模擬結果

以上 7 個模擬結果可整理成表 3-8 與圖 3-75。

表 3-8 3.4.4 節模擬結果比較表

矩形大小 (m^2)	$v \text{ (m/s)}$	$f \text{ (1/s)}$	St
$0.2*0.2$	25	17.857	0.1429
$0.2*0.3$	25	16.667	0.1333
$0.2*0.4$	25	16.129	0.1290
$0.2*0.5$	25	15.625	0.1250
$0.2*0.6$	25	14.706	0.1176
$0.2*0.7$	25	14.286	0.1143
$0.2*0.8$	25	13.889	0.1111

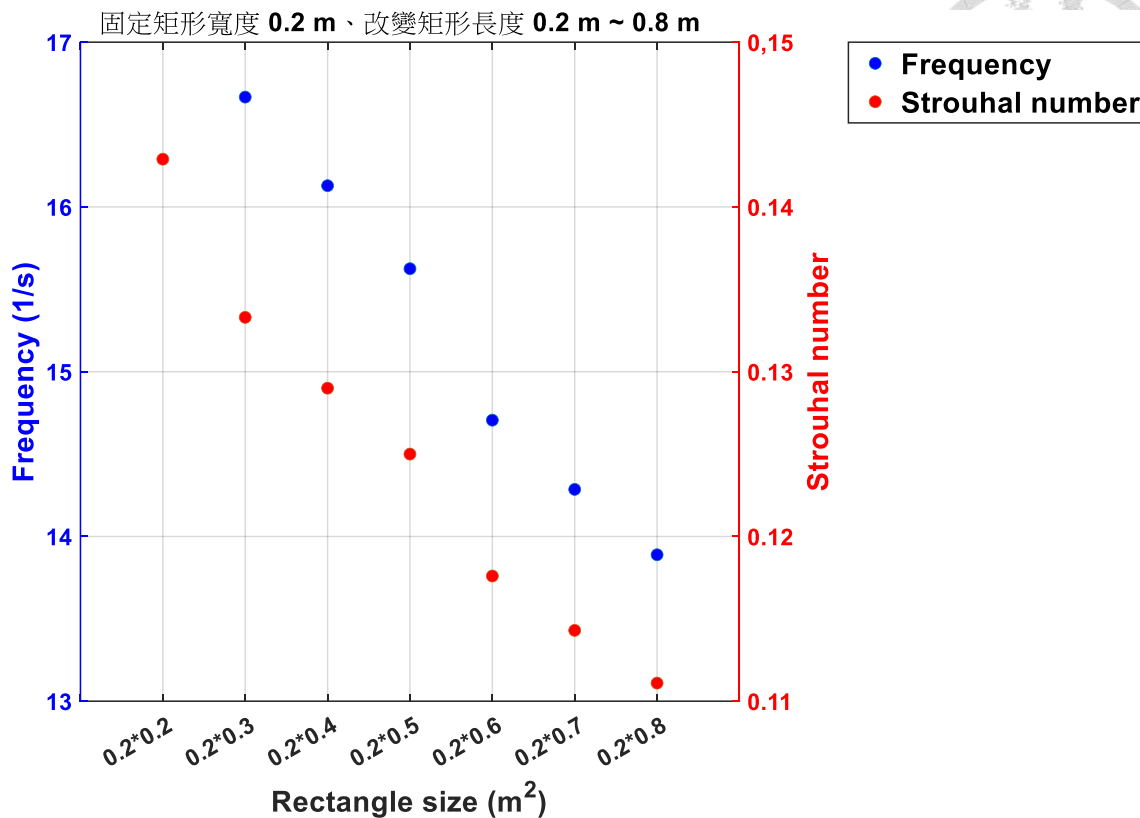


圖 3-75 3.4.4 節模擬結果之頻率與斯特勞哈爾數散佈圖

由模擬結果可以看出，在固定雷諾數與流體性質的條件下，因為矩形寬度皆固定為 0.2 m，Blockage 為 0.05，所以在改變不同的矩形長度下漩渦受到兩側邊界的影響較小，因此漩渦的排列較為規則。模擬時間皆相同代表漩渦產生的時間大致相同，且矩形後方產生的漩渦大小接近，由此兩者結果推測其影響因素為矩形的寬度。在矩形長度不小於矩形寬度的條件下，逐漸增加矩形長度可以看出，矩形後方產生漩渦的頻率會變小，其渦度的數值也有明顯變小。由圖 3-75 可以看出，頻率隨著矩形長度較為接近線性分布，而斯特勞哈爾數因為在固定流速與矩形寬度的條件下，因此其變化趨勢與頻率的變化趨勢一致。



3.4.5 改變矩形寬度 0.2 m ~ 0.8 m、固定矩形長度 0.2 m

1. 矩形大小為 0.2 m * 0.2 m

入口流速為 25 (m/s)，模擬時間設為 6 s，其結果如圖 3-76 所示。

由結果可計算出頻率為 17.857，而斯特勞哈爾數為 0.1429。

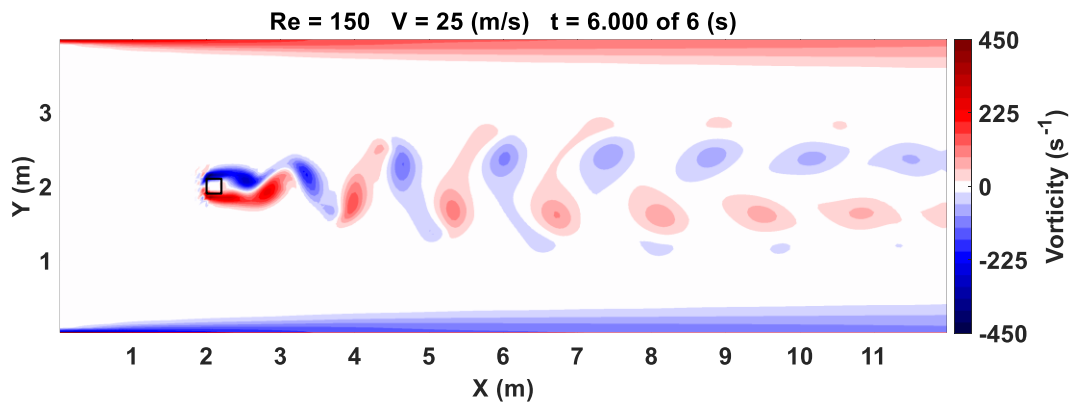


圖 3-76 矩形大小 0.2 m * 0.2 m 之模擬結果

2. 矩形大小為 0.3 m * 0.2 m

入口流速為 16.67 (m/s)，模擬時間設為 8 s，其結果如圖 3-77 所示。

由結果可計算出頻率為 9.2593，而斯特勞哈爾數為 0.1667。

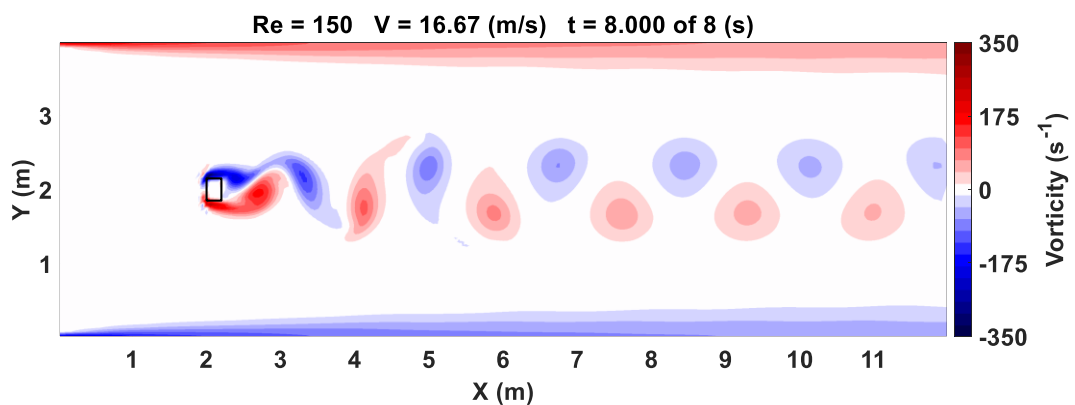


圖 3-77 矩形大小 0.3 m * 0.2 m 之模擬結果



3. 矩形大小為 $0.4 \text{ m} * 0.2 \text{ m}$

入口流速為 12.5 (m/s) ，模擬時間設為 12 s ，其結果如圖 3-78 所示。

由結果可計算出頻率為 6.0976 ，而斯特勞哈爾數為 0.1951 。

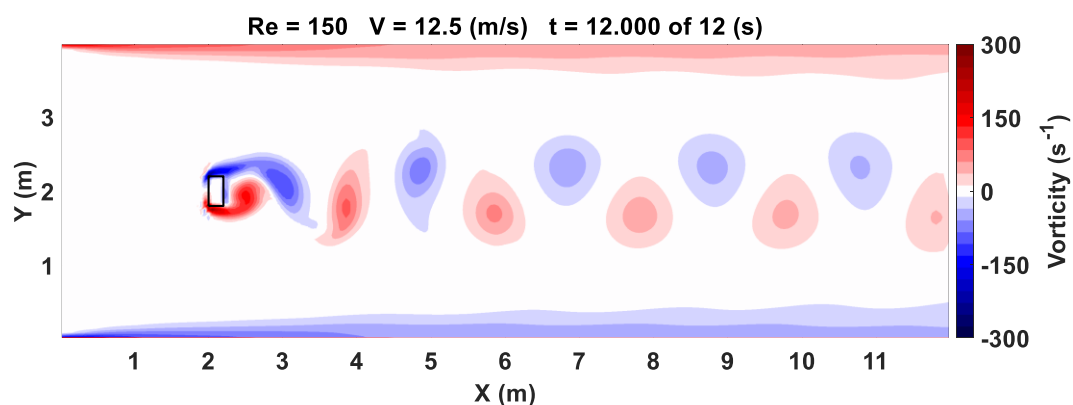


圖 3-78 矩形大小 $0.4 \text{ m} * 0.2 \text{ m}$ 之模擬結果

4. 矩形大小為 $0.5 \text{ m} * 0.2 \text{ m}$

入口流速為 10 (m/s) ，模擬時間設為 12 s ，其結果如圖 3-79 所示。

由結果可計算出頻率為 4.2017 ，而斯特勞哈爾數為 0.2101 。

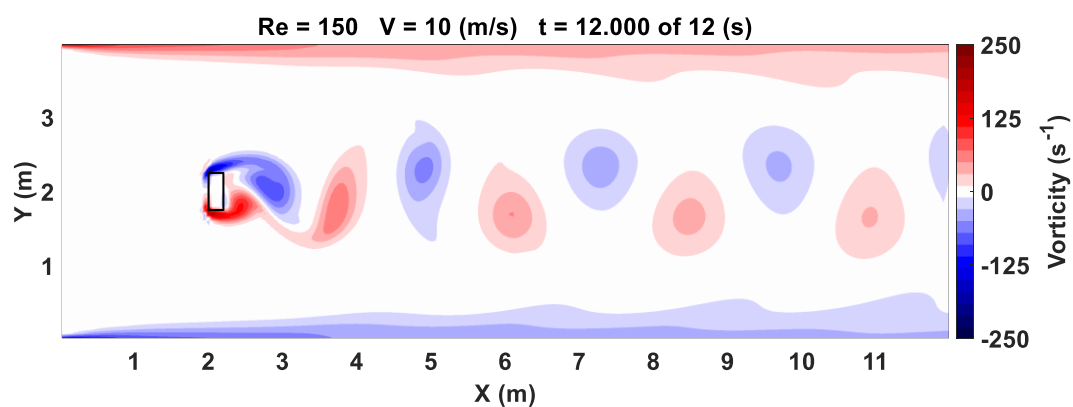


圖 3-79 矩形大小 $0.5 \text{ m} * 0.2 \text{ m}$ 之模擬結果



5. 矩形大小為 $0.6 \text{ m} * 0.2 \text{ m}$

入口流速為 8.33 (m/s) ，模擬時間設為 16 s ，其結果如圖 3-80 所示。

由結果可計算出頻率為 3.125 ，而斯特勞哈爾數為 0.225 。

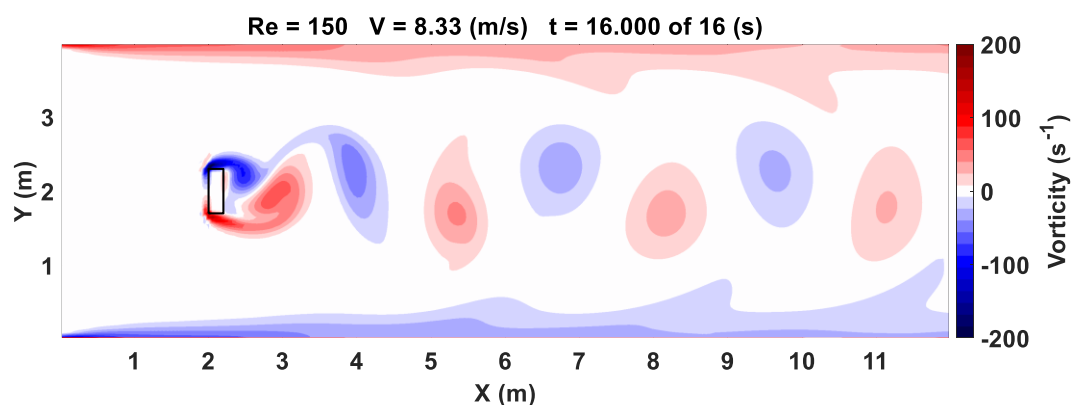


圖 3-80 矩形大小 $0.6 \text{ m} * 0.2 \text{ m}$ 之模擬結果

6. 矩形大小為 $0.7 \text{ m} * 0.2 \text{ m}$

入口流速為 7.14 (m/s) ，模擬時間設為 20 s ，其結果如圖 3-81 所示。

由結果可計算出頻率為 2.4272 ，而斯特勞哈爾數為 0.2379 。

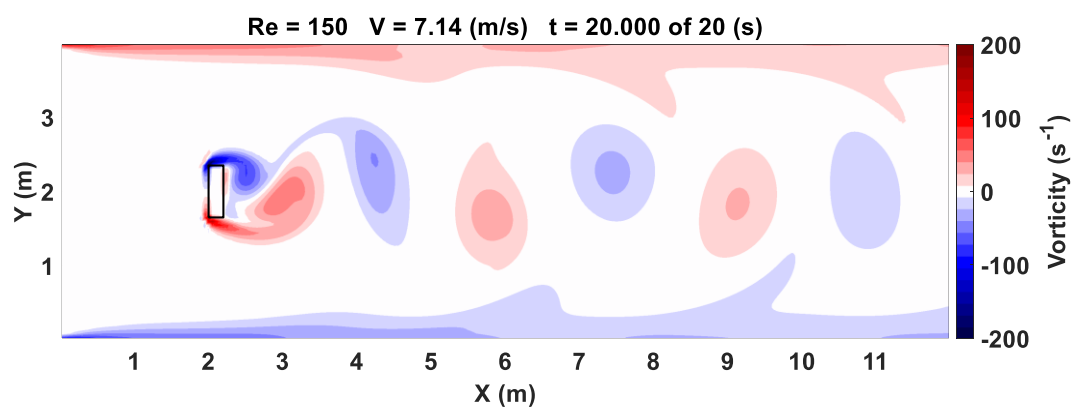


圖 3-81 矩形大小 $0.7 \text{ m} * 0.2 \text{ m}$ 之模擬結果



7. 矩形大小為 $0.8 \text{ m} * 0.2 \text{ m}$

入口流速為 6.25 (m/s) ，模擬時間設為 24 s ，其結果如圖 3-82 所示。

由結果可計算出頻率為 1.9685 ，而斯特勞哈爾數為 0.252 。

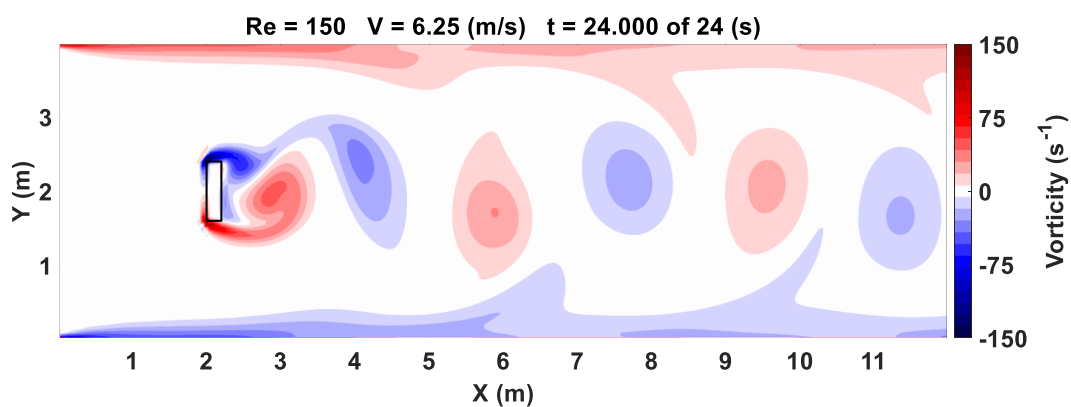


圖 3-82 矩形大小 $0.8 \text{ m} * 0.2 \text{ m}$ 之模擬結果

以上 7 個模擬結果可整理成表 3-9 與圖 3-83。

表 3-9 3.4.5 節模擬結果比較表

矩形大小 (m^2)	$v \text{ (m/s)}$	$f \text{ (1/s)}$	St
$0.2*0.2$	25.00	17.8570	0.1429
$0.3*0.2$	16.67	9.2593	0.1667
$0.4*0.2$	12.50	6.0976	0.1951
$0.5*0.2$	10.00	4.2017	0.2101
$0.6*0.2$	8.33	3.1250	0.2250
$0.7*0.2$	7.14	2.4272	0.2379
$0.8*0.2$	6.25	1.9685	0.2520

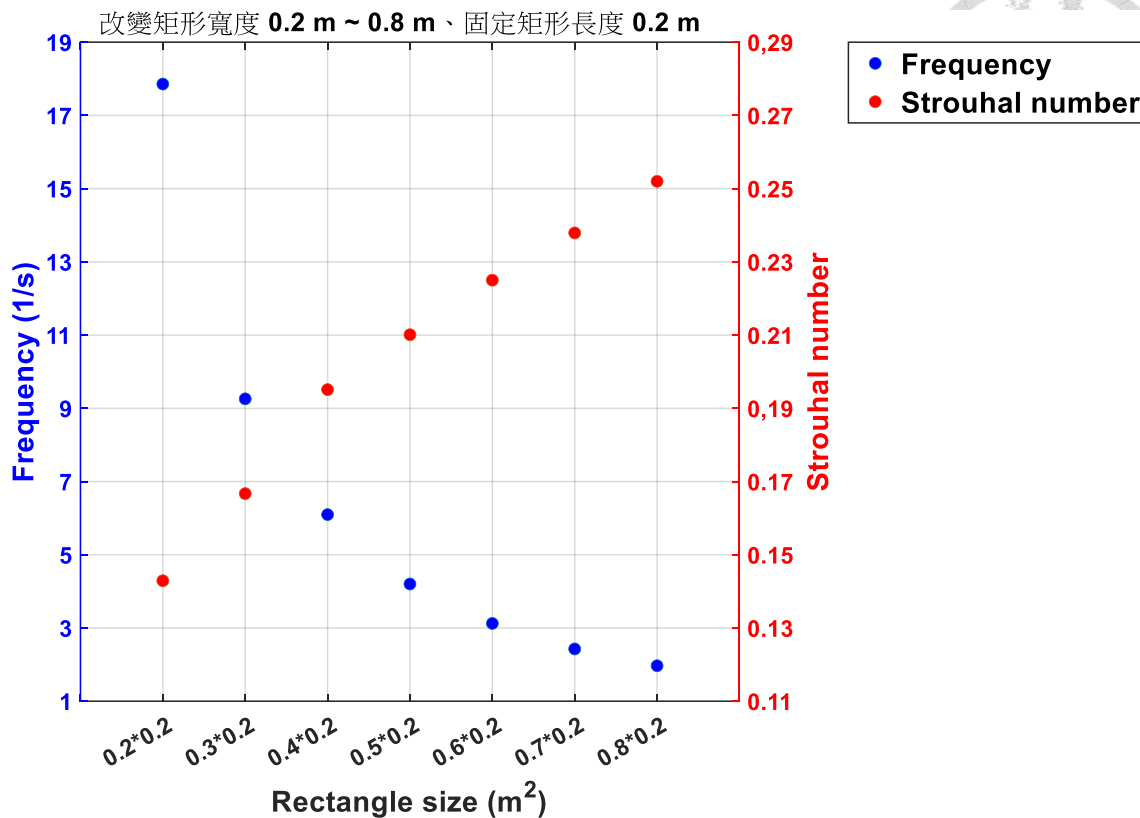


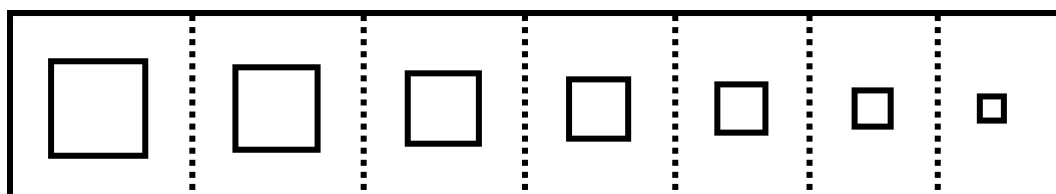
圖 3-83 3.4.5 節模擬結果之頻率與斯特勞哈爾數散佈圖

由模擬結果可以看出，在固定雷諾數、流體性質與矩形長度的條件下，且矩形寬度不小於矩形長度，逐漸增加矩形寬度可以看出，矩形後方產生的漩渦大小會變大，且產生漩渦的時間較長，而漩渦的頻率與其渦度的數值則變小。由圖 3-83 可以看出，頻率隨著矩形寬度呈現指數型分布，而斯特勞哈爾數因為流速、頻率與矩形寬度皆無固定，所以三者之間皆會影響其計算，由計算結果可看出其變化趨勢呈現兩條線性分布，轉折點約在矩形寬度 0.4 m 處。

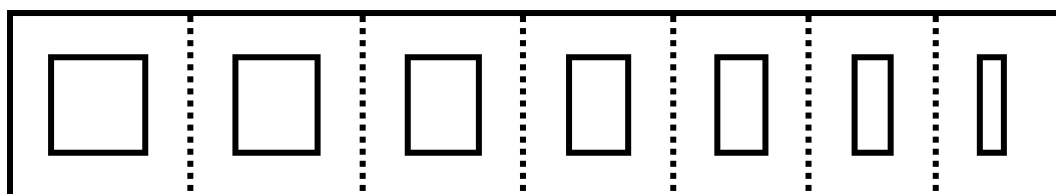


3.4.6 矩形大小選用

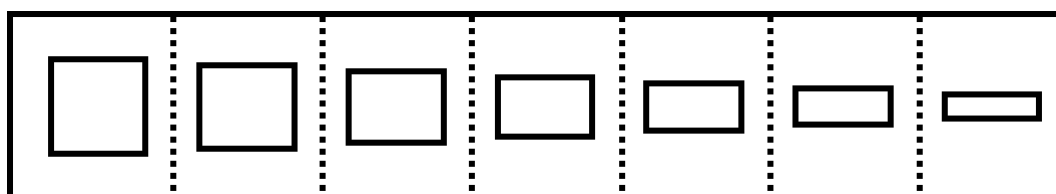
以下將針對 3.4.1 節至 3.4.5 節模擬之矩形大小，討論不同的模擬結果該選擇哪種矩形變化方式。



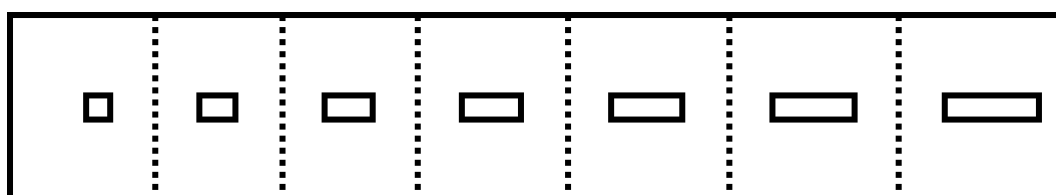
(a) 改變正方形邊長 0.8 m ~ 0.2 m (3.4.1 節)



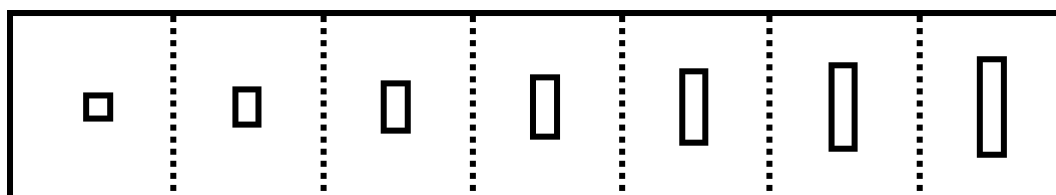
(b) 固定矩形寬度 0.8 m、改變矩形長度 0.8 m ~ 0.2 m (3.4.2 節)



(c) 改變矩形寬度 0.8 m ~ 0.2 m、固定矩形長度 0.8 m (3.4.3 節)

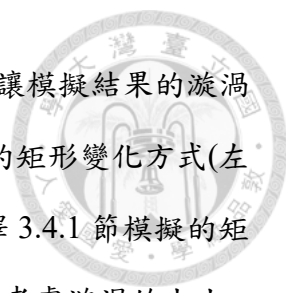


(d) 固定矩形寬度 0.2 m、改變矩形長度 0.2 m ~ 0.8 m (3.4.4 節)



(e) 改變矩形寬度 0.2 m ~ 0.8 m、固定矩形長度 0.2 m (3.4.5 節)

圖 3-84 3.4 節各小節模擬之矩形大小示意圖



如圖 3-84 所示，在固定雷諾數與流體性質的條件下，若想讓模擬結果的漩渦頻率大幅上升，且不考慮漩渦的大小，則可以選擇 3.4.3 節模擬的矩形變化方式(左到右)，如果想達成一樣的效果又想減少矩形的面積，則可以選擇 3.4.1 節模擬的矩形變化方式(左到右)；若想讓模擬結果的漩渦頻率大幅下降，且不考慮漩渦的大小，則可以選擇 3.4.1 節模擬的矩形變化方式(右到左)，如果想達成一樣的效果又想減少矩形的面積，則可以選擇 3.4.5 節模擬的矩形變化方式(左到右)；若想讓模擬結果的漩渦頻率緩慢上升，且漩渦的大小變化不大，則可以選擇 3.4.2 節模擬的矩形變化方式(左到右)；若想讓模擬結果的漩渦頻率緩慢下降，且漩渦的大小變化不大，則可以選擇 3.4.4 節模擬的矩形變化方式(左到右)。



3.5 無因次化分析

在本節中將針對 3.3 節與 3.4 節的模擬結果進行無因次化分析。對於矩形剛體繞流問題，主要會有四個無因次化參數，分別為：雷諾數 Re (Reynolds number)、斯特勞哈爾數 St (Strouhal number)、矩形長寬比 α (Aspect ratio) 以及矩形寬度與流場寬度比 β (Blockage)，如式(3-3)至式(3-6)所示。其中， ρ 為流體密度， v 為入口流速， a 為矩形寬度， μ 為流體黏滯係數， f 為漩渦頻率， b 為矩形長度， h 為流場寬度。

$$Re = \frac{\rho v a}{\mu} \quad (3-3)$$

$$St = \frac{f a}{v} \quad (3-4)$$

$$\alpha = \frac{b}{a} \quad (3-5)$$

$$\beta = \frac{a}{h} \quad (3-6)$$

後面將會分成兩個部分進行討論，第一部分是 3.3 節的固定流速與流體性質；第二部分則是 3.4 節的固定雷諾數與流體性質。



3.5.1 固定流速與流體性質

在本小節中將會針對 3.3 節中的三組模擬進行無因次化分析。

1. 改變正方形邊長 0.8 m ~ 0.2 m

在第一組的模擬中，由於阻流體皆為正方形，所以 α 固定，而改變正方形邊長即改變 a ，會同時影響 Re 、 St 與 β 這三個無因次化參數，因此變動的參數太多，所以在圖 3-25 中的斯特勞哈爾數才會亂跳，無法從中觀察到明顯的變化趨勢。若想探討改變正方形邊長對雷諾數與斯特勞哈爾數的關係，可以在改變正方形邊長的條件下，同時改變流場寬度 h ，這樣 β 也會固定，再將模擬結果得到的斯特勞哈爾數與雷諾數以及正方形邊長作圖，就能從圖中討論彼此之間的關係。

2. 固定矩形寬度 0.8 m、改變矩形長度 0.8 m ~ 0.2 m

在第二組的模擬中，由於矩形的寬度固定，所以 Re 與 β 會固定，而改變矩形長度即改變 b ，會同時影響 St 與 α 這兩個無因次化參數，而在圖 3-33 中可以觀察到斯特勞哈爾數的變化趨勢，在呈現結果上是沒有問題的。另外，由於矩形寬度皆固定為 0.8 m，漩渦受到邊界層的影響太大，因此，應該要加大流場寬度才能避免邊界層影響模擬結果。

3. 改變矩形寬度 0.2 m ~ 0.8 m、固定矩形長度 0.2 m

在第三組的模擬中，由於矩形的長度固定，而改變矩形寬度即改變 a ，會同時影響 Re 、 St 、 α 與 β 這四個無因次化參數，因此變動的參數太多，雖然可以從圖 3-41 觀察到斯特勞哈爾數的變化趨勢，但無法從圖中探討改變矩形寬度對雷諾數與斯特勞哈爾數的影響。因此，可以在改變矩形寬度的條件下，同時改變流場寬度 h ，這樣 β 也會固定，再將模擬結果得到的斯特勞哈爾數與雷諾數以及矩形寬度作圖，就能從圖中討論彼此之間的關係。



3.5.2 固定雷諾數與流體性質

在本小節中將會針對 3.4 節中的五組模擬進行無因次化分析。

1. 改變正方形邊長 0.8 m ~ 0.2 m

在第一組的模擬中，由於阻流體皆為正方形，所以 α 固定，而改變正方形邊長即改變 a ，會同時影響 St 與 β 這兩個無因次化參數，因此在圖 3-51 中的斯特勞哈爾數可以觀察到變化趨勢。若想探討改變正方形邊長對斯特勞哈爾數的關係，可以在改變正方形邊長的條件下，同時改變流場寬度 h ，這樣 β 也會固定，再將模擬結果得到的斯特勞哈爾數與正方形邊長作圖，就能從圖中討論在相同的雷諾數下兩者之間的關係。

2. 固定矩形寬度 0.8 m、改變矩形長度 0.8 m ~ 0.2 m

在第二組的模擬中，由於矩形的寬度固定，所以 β 固定，而改變矩形長度即改變 b ，會同時影響 St 與 α 這兩個無因次化參數，而在圖 3-59 中可以觀察到斯特勞哈爾數的變化趨勢，在呈現結果上是沒有問題的。另外，由於矩形寬度皆固定為 0.8 m，漩渦受到邊界層的影響太大，因此，應該要加大流場寬度才能避免邊界層影響模擬結果。

3. 改變矩形寬度 0.8 m ~ 0.2 m、固定矩形長度 0.8 m

在第三組的模擬中，由於矩形的長度固定，而改變矩形寬度即改變 a ，會同時影響 St 、 α 與 β 這三個無因次化參數，因此變動的參數太多，雖然可以從圖 3-67 觀察到斯特勞哈爾數的變化趨勢，但無法從圖中探討改變矩形寬度對斯特勞哈爾數的影響。因此，可以在改變矩形寬度的條件下，同時改變流場寬度 h ，這樣 β 也會固定，再將模擬結果得到的斯特勞哈爾數與矩形寬度作圖，就能從圖中討論彼此之間的關係。



4. 固定矩形寬度 0.2 m、改變矩形長度 0.2 m ~ 0.8 m

在第四組的模擬中，由於矩形的寬度固定，所以 β 固定，而改變矩形長度即改變 b ，會同時影響 St 與 α 這兩個無因次化參數，而在圖 3-75 中可以觀察到斯特勞哈爾數的變化趨勢，在呈現結果上是沒有問題的。

5. 改變矩形寬度 0.2 m ~ 0.8 m、固定矩形長度 0.2 m

在第五組的模擬中，由於矩形的長度固定，而改變矩形寬度即改變 a ，會同時影響 St 、 α 與 β 這三個無因次化參數，因此變動的參數太多，雖然可以從圖 3-83 觀察到斯特勞哈爾數的變化趨勢，但無法從圖中探討改變矩形寬度對斯特勞哈爾數的影響。因此，可以在改變矩形寬度的條件下，同時改變流場寬度 h ，這樣 β 也會固定，再將模擬結果得到的斯特勞哈爾數與矩形寬度作圖，就能從圖中討論彼此之間的關係。

第四章 具幾何特性阻流體於可撓固體共振

在本章中，會先比較阻流體在不同的形狀與不同的移動方式下，對其產生渦街的行為有何影響，最後會在阻流體後方放置一條金屬固體，藉由調整金屬材料的楊氏模數，讓其自然頻率接近渦街產生的頻率，達成共振現象。由於阻流體的形狀與第三章的矩形剛體相比較為複雜，且受到流體求解器是使用均勻網格的限制，因此在本章選擇使用商用軟體 Ansys 來進行研究模擬與計算。

在 4.1 節、4.2 節與 4.3 節中，模擬的流場大小如圖 4-1 所示，阻流體會因不同設計例更換成不同的形狀，如圖 4-2 所示，其中 Blockage 皆為 0.1，不同形狀的形心皆位於流場中同一位置，流體設為空氣，入口流速為 5 m/s，模擬時間皆為 5 s。

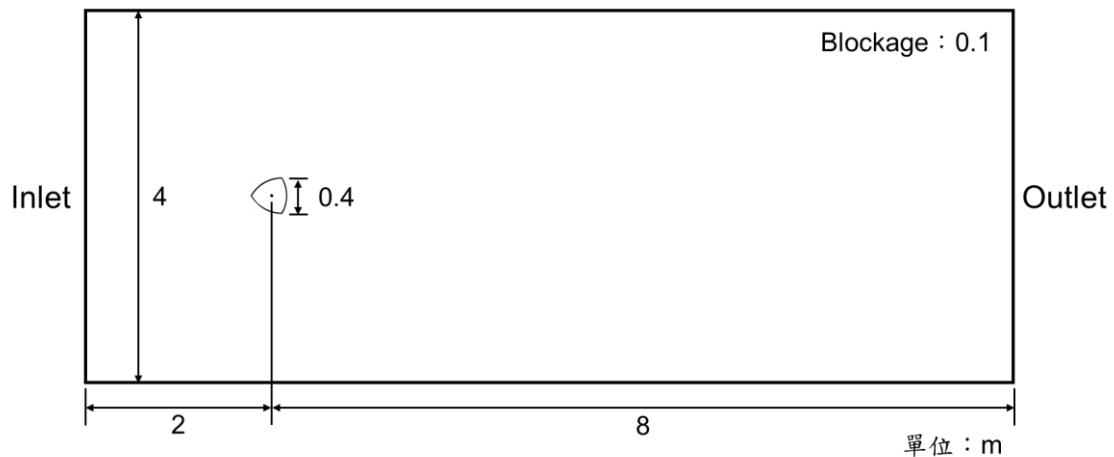
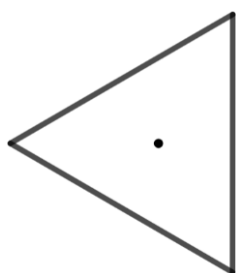
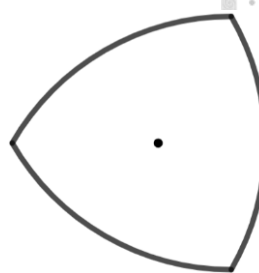


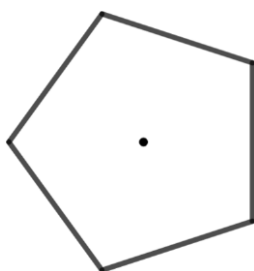
圖 4-1 4.1 節、4.2 節與 4.3 節剛體繞流模擬之流場示意圖



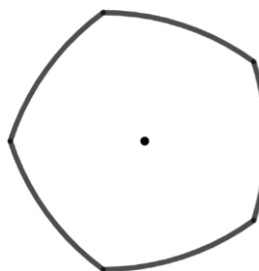
(a) 正三邊形



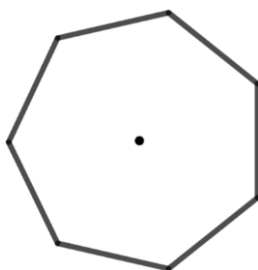
(b) 勒洛三邊形



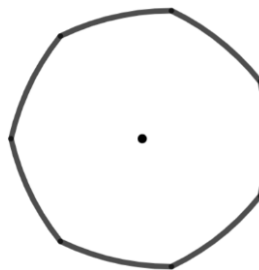
(c) 正五邊形



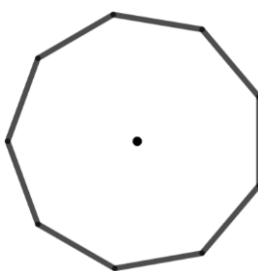
(d) 勒洛五邊形



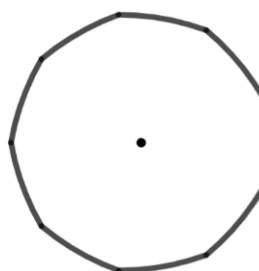
(e) 正七邊形



(f) 勒洛七邊形



(g) 正九邊形



(h) 勒洛九邊形

圖 4-2 不同形狀之阻流體

在 4.1 節中，阻流體會固定於流道中，並比較當阻流體為不同邊數的正多邊形與勒洛多邊形時，其渦街產生的結果為何。共做了四組比較，分別為：正三邊形與勒洛三邊形、正五邊形與勒洛五邊形、正七邊形與勒洛七邊形以及正九邊形與勒洛九邊形。

在 4.2 節中，阻流體會於流道中繞其形心旋轉，以 $\omega = 12 \text{ (rad/s)}$ 的旋轉速率做順時針等速旋轉運動，並比較當阻流體為不同邊數的正多邊形與勒洛多邊形時，其渦街產生的結果為何。共做了四組結果比較，分別為：正三邊形與勒洛三邊形、正五邊形與勒洛五邊形、正七邊形與勒洛七邊形以及正九邊形與勒洛九邊形。

由於阻流體在流道中會隨著時間旋轉，其漩渦分離的位置較不固定。如果用 3.1 節的方法會無法準確計算漩渦分離的時間，因此針對會旋轉的阻流體會用另一種方法來計算。頻率一樣是透過渦街其中一側的漩渦來計算的，先記錄某個漩渦的位置與時間 t_1 ，等下一個一樣的漩渦到同一個位置時記錄時間 t_2 ，並記錄這兩個漩渦之間經過的週期數 n ，再代入式(4-1)計算即可得到頻率。以下舉一個例子，如圖 4-3 所示，先記錄 1 號漩渦於此位置時的時間 $t_1 = 4.66 \text{ s}$ ，再由圖 4-4 可得到下一個一樣的漩渦(即 2 號漩渦)到同一位置時的時間 $t_2 = 5 \text{ s}$ 。兩個漩渦之間經過了一個週期，因此 n 為 1，代入(4-1)式後可計算出 $f = 2.9412 \text{ Hz}$ ；而斯特勞哈爾數的計算方式一樣如式(3-2)所示。

$$f = \frac{n}{t_2 - t_1} \quad (1/\text{s}) \quad (4-1)$$

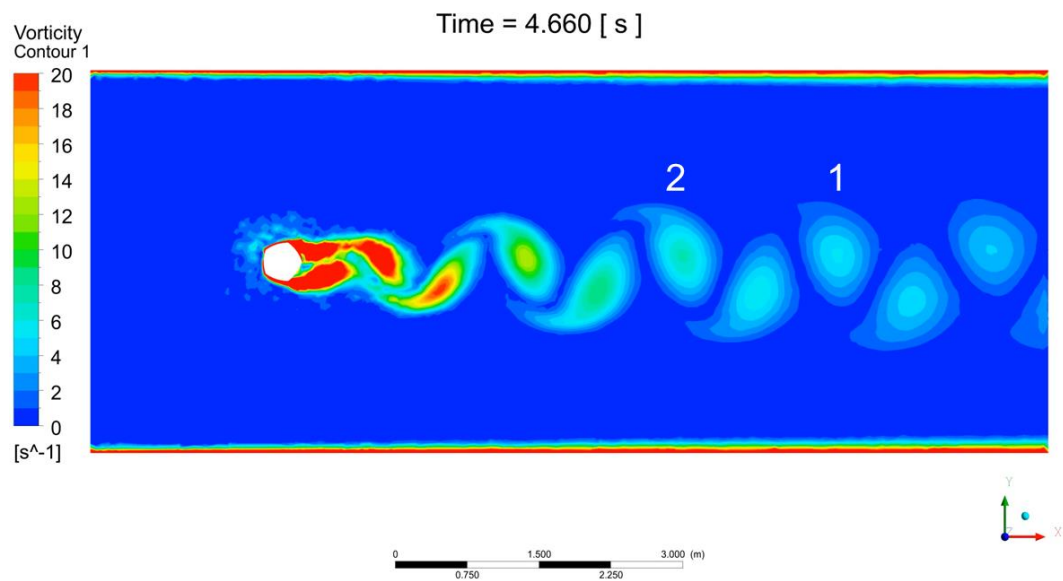


圖 4-3 漩渦於 t_1 時刻之位置

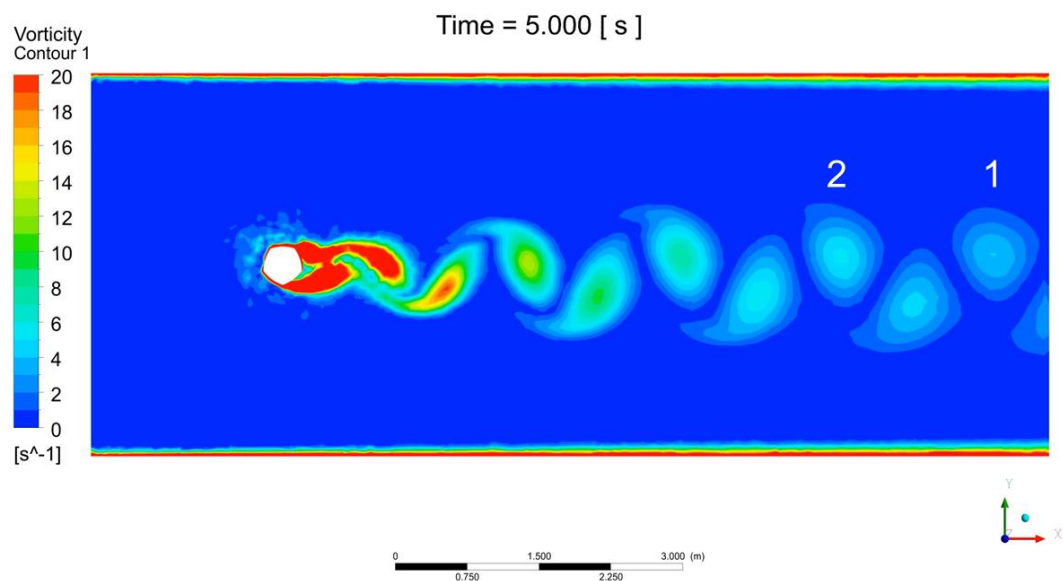


圖 4-4 漩渦於 t_2 時刻之位置

在 4.3 節中，阻流體於流道中除了會繞其形心做等速旋轉運動外，在旋轉的同時，其形心也會跟著做垂直平移運動，如此即可形成等寬曲線阻流體，並將其渦街產生的結果與 4.2 節中單純旋轉的勒洛多邊形做比較。共做了四組結果比較，分別為：勒洛三邊形、勒洛五邊形、勒洛七邊形以及勒洛九邊形。以下將說明等寬曲線阻流體形成之形心平移與旋轉必要條件關係。



1. 勒洛三邊形

如圖 4-5 所示，假設(a)為勒洛三邊形於流道中的初始位置，其寬度為 0.4 m，經過幾何計算可以得到 s 與 R 的關係如式(4-2)所示。

$$s = 0.4 = 2R\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad (4-2)$$

當其以 $\omega = 12$ (rad/s) 的旋轉速率做順時針等速旋轉運動至形心 O 為最高點時，如(b)所示，此時形心距離 x 軸的距離如式(4-3)所示。

$$d = \frac{0.2}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} - 0.2 \approx 0.0309 \text{ (m)} \quad (4-3)$$

當勒洛三邊形隨著時間旋轉時，其形心距離 x 軸的距離可表示成：

$$y = d\sin(3\omega t) \text{ (m)} \quad (4-4)$$

再將上式微分後可以得到形心隨著時間垂直移動的速度：

$$y' = 3\omega d\cos(3\omega t) \text{ (m/s)} \quad (4-5)$$

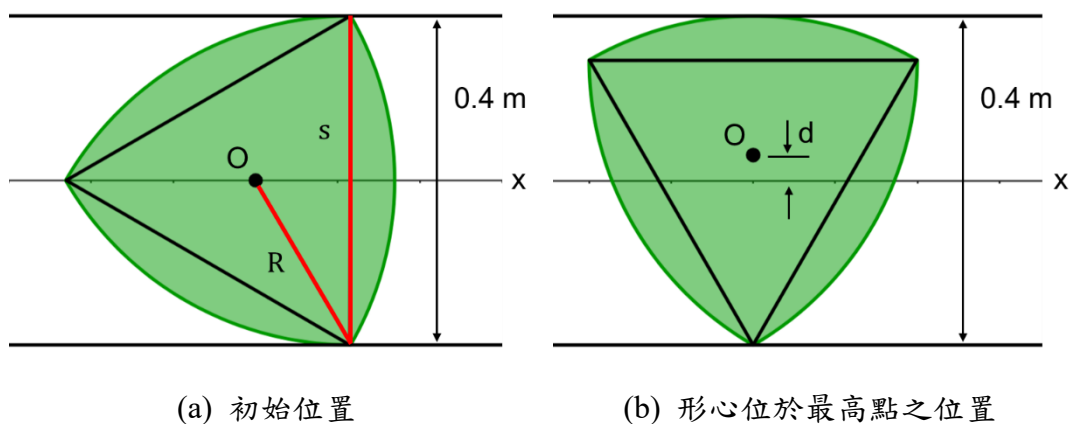


圖 4-5 勒洛三邊形示意圖



2. 勒洛五邊形

如圖 4-6 所示，假設(a)為勒洛五邊形於流道中的初始位置，其寬度為 0.4 m，經過幾何計算可以得到 s 與 R 的關係如式(4-6)所示。

$$s = 0.4 = 2R\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \quad (4-6)$$

當其以 $\omega = 12$ (rad/s) 的旋轉速率做順時針等速旋轉運動至形心 O 為最低點時，如(b)所示，此時形心距離 x 軸的距離如式(4-7)所示。

$$d = \frac{0.2}{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)} - 0.2 \approx 0.0103 \text{ (m)} \quad (4-7)$$

當勒洛五邊形隨著時間旋轉時，其形心距離 x 軸的距離可表示成：

$$y = -d\sin(5\omega t) \text{ (m)} \quad (4-8)$$

再將上式微分後可以得到形心隨著時間垂直移動的速度：

$$y' = -5\omega d\cos(5\omega t) \text{ (m/s)} \quad (4-9)$$

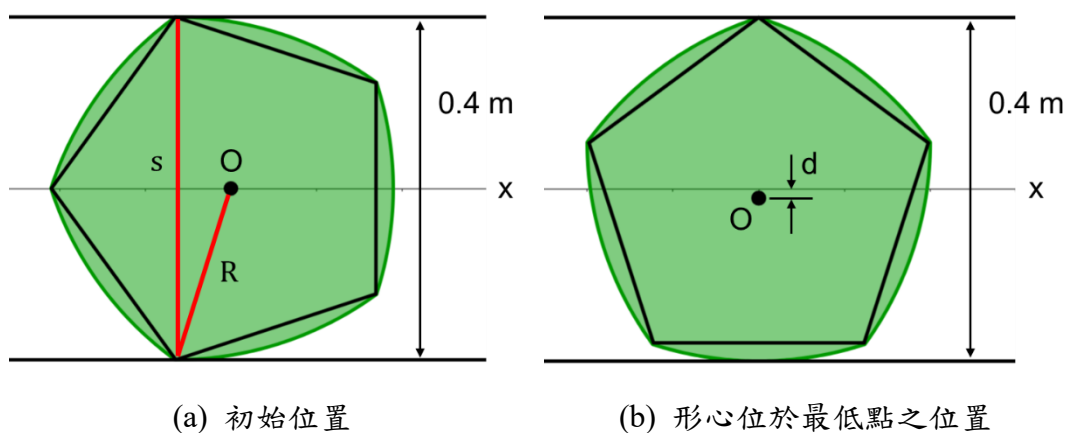


圖 4-6 勒洛五邊形示意圖



3. 勒洛七邊形

如圖 4-7 所示，假設(a)為勒洛七邊形於流道中的初始位置，其寬度為 0.4 m，經過幾何計算可以得到 s 與 R 的關係如式(4-10)所示。

$$s = 0.4 = 2R\cos\left(\frac{\pi}{14}\right) \quad (4-10)$$

當其以 $\omega = 12$ (rad/s) 的旋轉速率做順時針等速旋轉運動至形心 O 為最高點時，如(b)所示，此時形心距離 x 軸的距離如式(4-11)所示。

$$d = \frac{0.2}{\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} - 0.2 \approx 0.00514 \text{ (m)} \quad (4-11)$$

當勒洛七邊形隨著時間旋轉時，其形心距離 x 軸的距離可表示成：

$$y = d\sin(7\omega t) \text{ (m)} \quad (4-12)$$

再將上式微分後可以得到形心隨著時間垂直移動的速度：

$$y' = 7\omega d\cos(7\omega t) \text{ (m/s)} \quad (4-13)$$

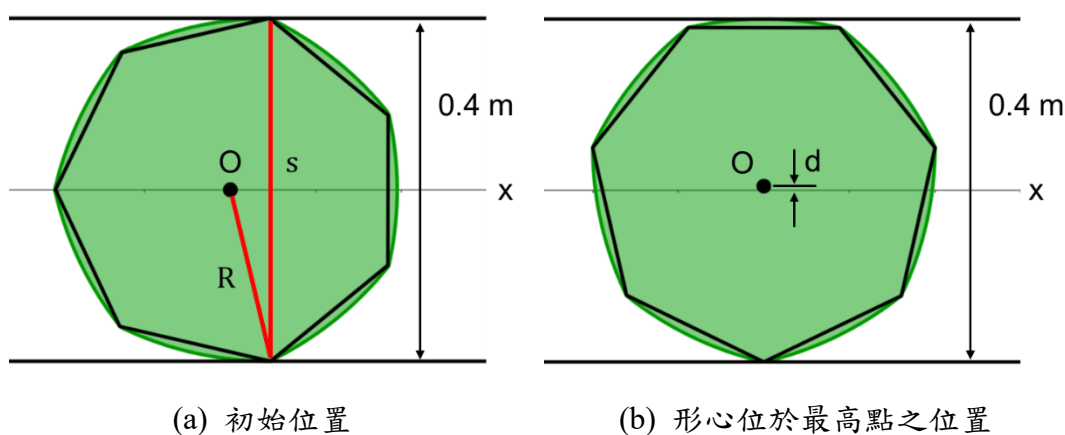


圖 4-7 勒洛七邊形示意圖



4. 勒洛九邊形

如圖 4-8 所示，假設(a)為勒洛九邊形於流道中的初始位置，其寬度為 0.4 m，經過幾何計算可以得到 s 與 R 的關係如式(4-14)所示。

$$s = 0.4 = 2R\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) \quad (4-14)$$

當其以 $\omega = 12$ (rad/s) 的旋轉速率做順時針等速旋轉運動至形心 O 為最低點時，如(b)所示，此時形心距離 x 軸的距離如式(4-15)所示。

$$d = \frac{0.2}{\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)} - 0.2 \approx 0.00309 \text{ (m)} \quad (4-15)$$

當勒洛九邊形隨著時間旋轉時，其形心距離 x 軸的距離可表示成：

$$y = -d\sin(9\omega t) \text{ (m)} \quad (4-16)$$

再將上式微分後可以得到形心隨著時間垂直移動的速度：

$$y' = -9\omega d\cos(9\omega t) \text{ (m/s)} \quad (4-17)$$

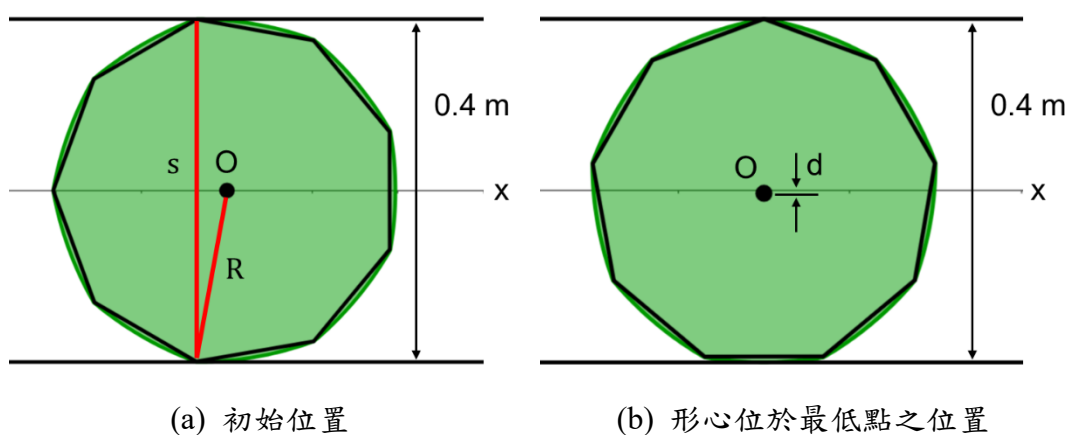


圖 4-8 勒洛九邊形示意圖



4.1 固定阻流體

4.1.1 正三邊形與勒洛三邊形

阻流體為正三邊形之模擬結果如圖 4-9 所示。由結果可計算出頻率為 2.7027，而斯特勞哈爾數為 0.2162。

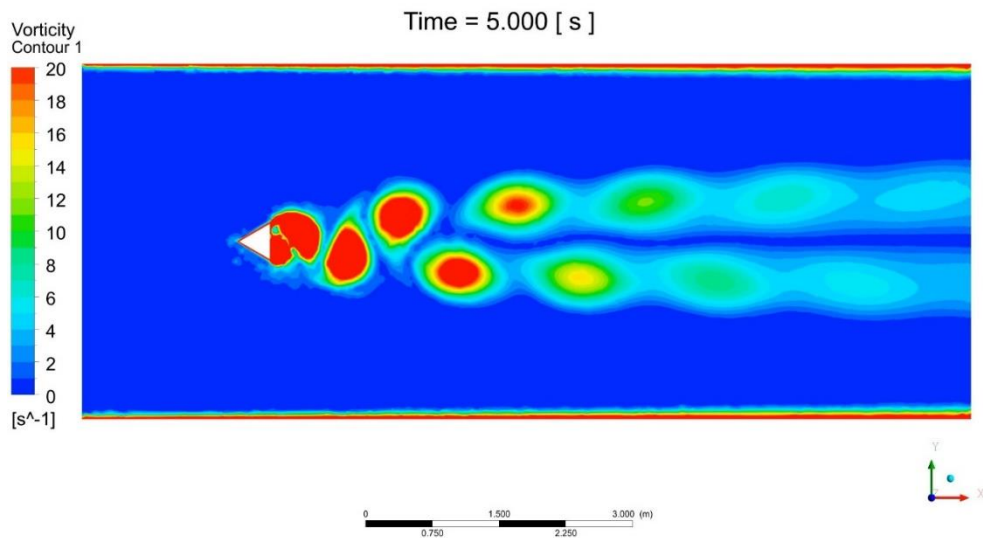


圖 4-9 阻流體為正三邊形之模擬結果

阻流體為勒洛三邊形之模擬結果如圖 4-10 所示。由結果可計算出頻率為 3.2258，而斯特勞哈爾數為 0.2581。

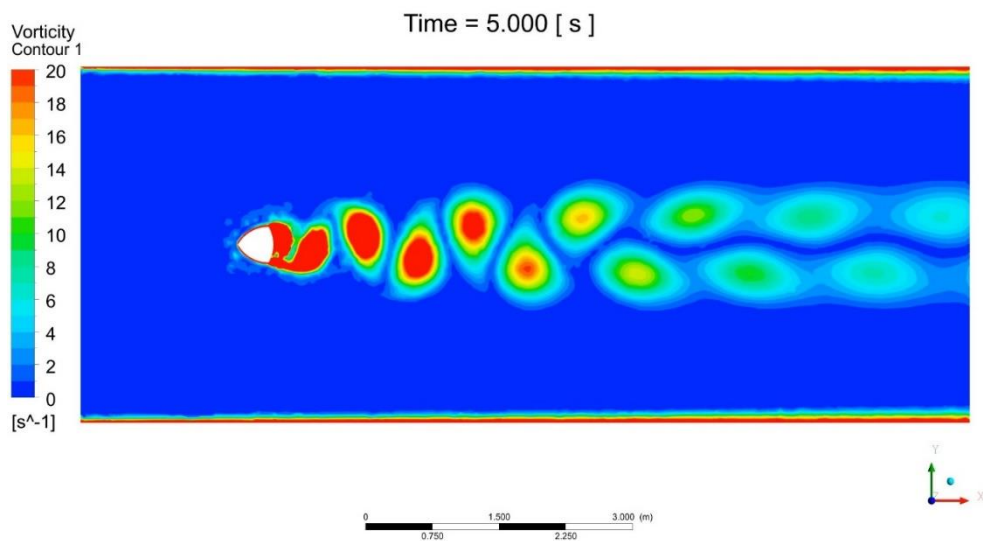


圖 4-10 阻流體為勒洛三邊形之模擬結果



4.1.2 正五邊形與勒洛五邊形

阻流體為正五邊形之模擬結果如圖 4-11 所示。由結果可計算出頻率為 2.4096，而斯特勞哈爾數為 0.1928。

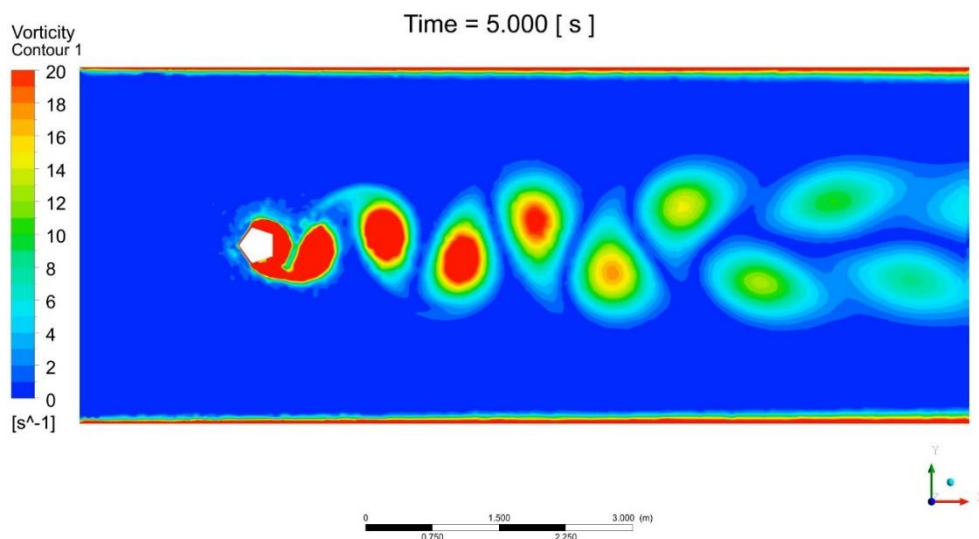


圖 4-11 阻流體為正五邊形之模擬結果

阻流體為勒洛五邊形之模擬結果如圖 4-12 所示。由結果可計算出頻率為 3.0303，而斯特勞哈爾數為 0.2424。

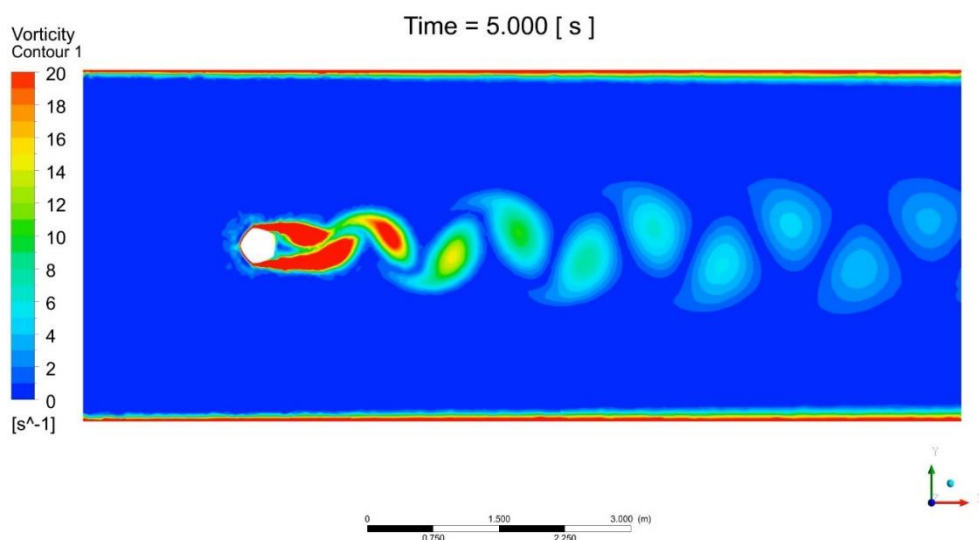


圖 4-12 阻流體為勒洛五邊形之模擬結果



4.1.3 正七邊形與勒洛七邊形

阻流體為正七邊形之模擬結果如圖 4-13 所示。由結果可計算出頻率為 3.0303，而斯特勞哈爾數為 0.2424。

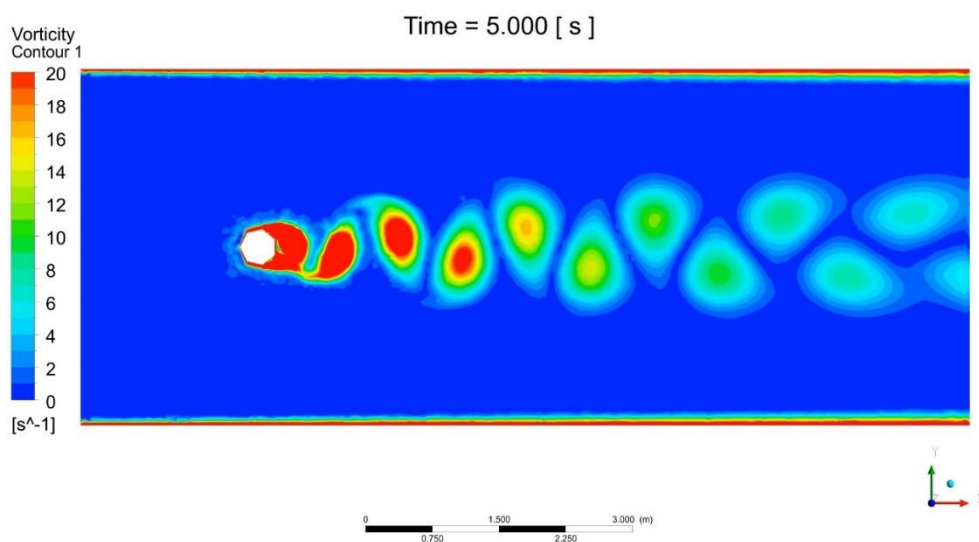


圖 4-13 阻流體為正七邊形之模擬結果

阻流體為勒洛七邊形之模擬結果如圖 4-14 所示。由結果可計算出頻率為 3.2787，而斯特勞哈爾數為 0.2623。

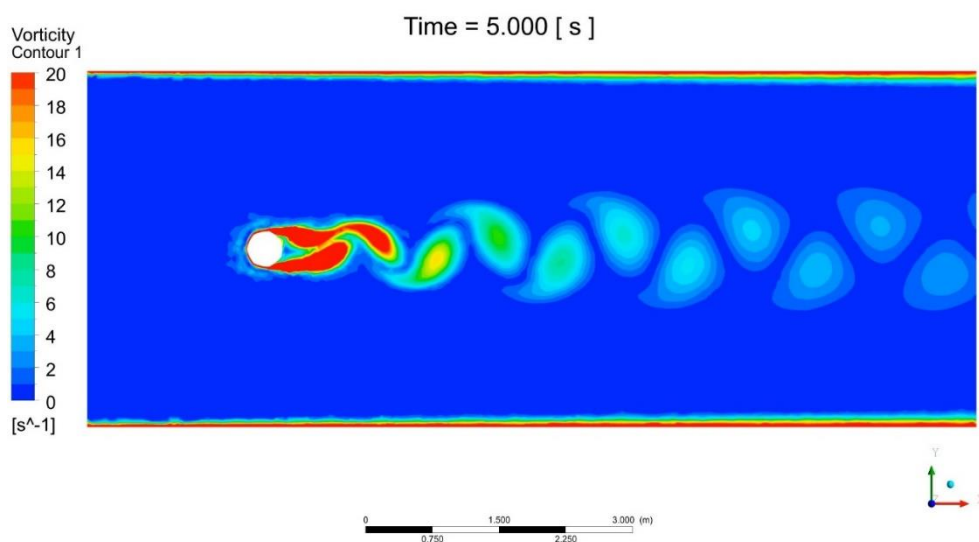


圖 4-14 阻流體為勒洛七邊形之模擬結果



4.1.4 正九邊形與勒洛九邊形

阻流體為正九邊形之模擬結果如圖 4-15 所示。由結果可計算出頻率為 3.0769，而斯特勞哈爾數為 0.2462。

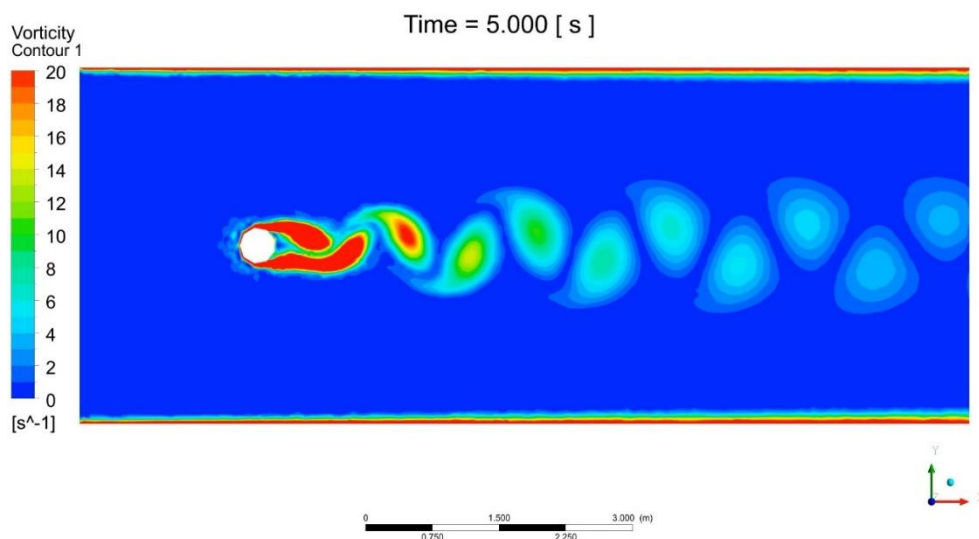


圖 4-15 阻流體為正九邊形之模擬結果

阻流體為勒洛九邊形之模擬結果如圖 4-16 所示。由結果可計算出頻率為 3.7736，而斯特勞哈爾數為 0.3019。

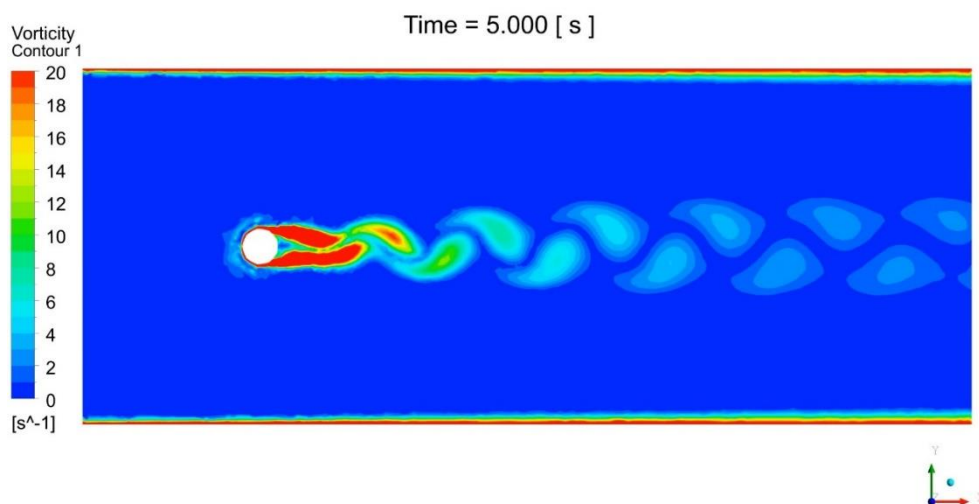


圖 4-16 阻流體為勒洛九邊形之模擬結果



4.1.5 模擬結果比較

將 4.1.1 節至 4.1.4 節之模擬結果整理成表 4-1 與圖 4-17。

表 4-1 4.1 節模擬結果比較表

邊數	正多邊形		勒洛多邊形	
	f (1/s)	St	f (1/s)	St
3	2.7027	0.2162	3.2258	0.2581
5	2.4096	0.1928	3.0303	0.2424
7	3.0303	0.2424	3.2787	0.2623
9	3.0769	0.2462	3.7736	0.3019

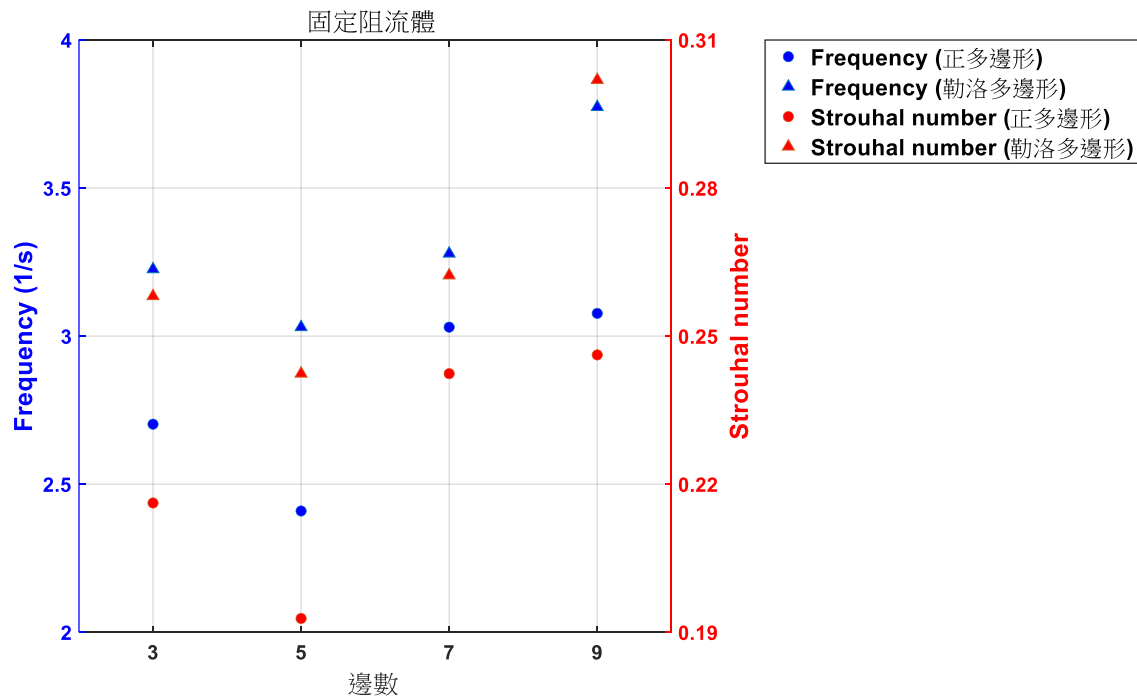


圖 4-17 4.1 節模擬結果之頻率與斯特勞哈爾數散佈圖



由模擬結果可以看出，當阻流體為正多邊形時，其後方產生的漩渦會比阻流體為勒洛多邊形時還要大，推測造成此結果的原因跟阻流體的輪廓有關。由於正多邊形是由多條直線連接而成，而勒洛多邊形是由多條圓弧連接而成，因此當流體流經勒洛多邊形時，其圓弧狀的輪廓讓流體能夠較為平順的流到後方，所以產生的漩渦才會比較小。由圖 4-17 可以看出，當阻流體為勒洛多邊形時，其後方產生的漩渦頻率與斯特勞哈爾數皆比阻流體為正多邊形時還要大；從圖中還能看出，不論是正多邊形或是勒洛多邊形，當邊數為 5 時，其後方產生的漩渦頻率與斯特勞哈爾數會最小，推測造成此結果的原因亦與阻流體的輪廓有關。



4.2 阻流體繞其形心旋轉

4.2.1 正三邊形與勒洛三邊形

阻流體為正三邊形之模擬結果以四張圖來呈現，分別為模擬時間 4.25 s、4.5 s、4.75 s 與 5 s，如圖 4-18 至圖 4-21 所示。由結果可計算出頻率為 2.2099，而斯特勞哈爾數為 0.1768。

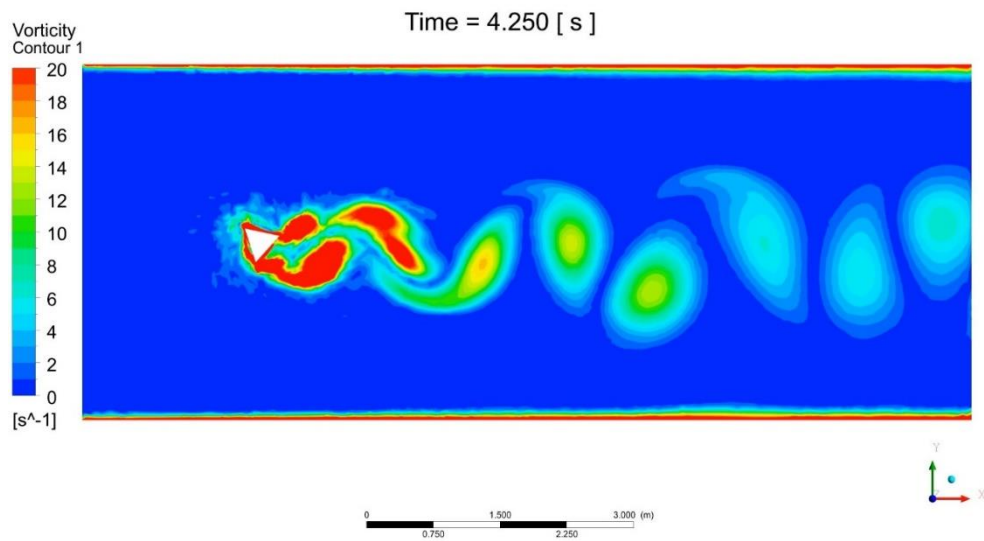


圖 4-18 阻流體為正三邊形於 4.25 s 之模擬結果

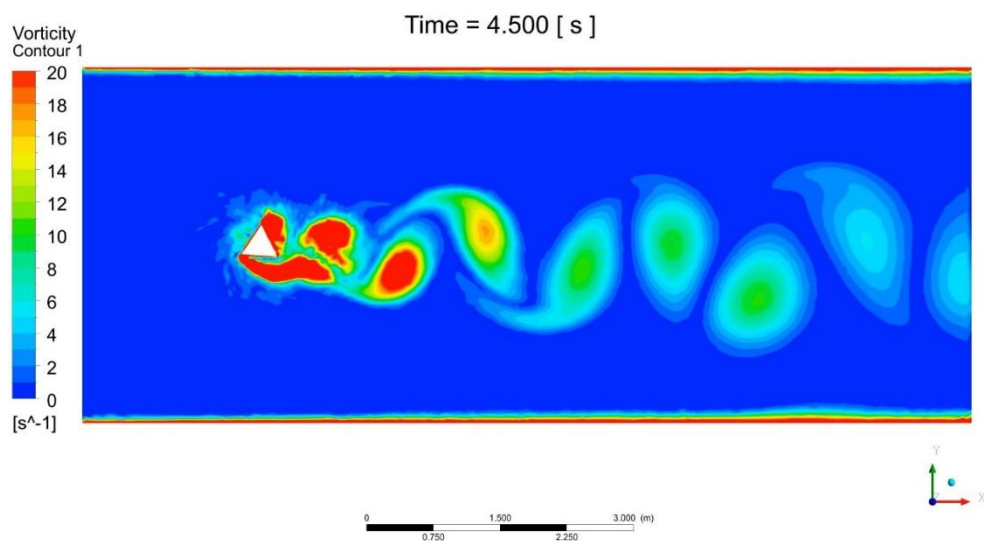


圖 4-19 阻流體為正三邊形於 4.5 s 之模擬結果

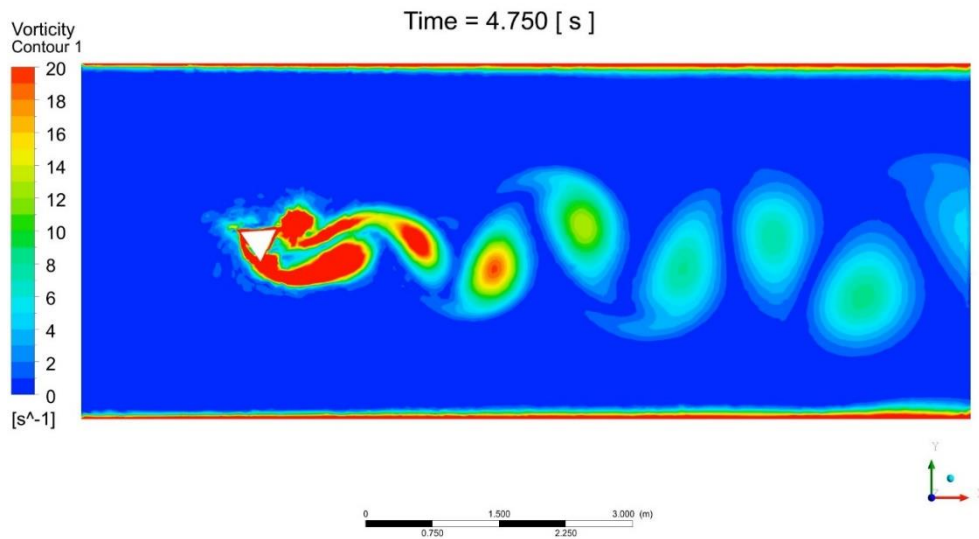


圖 4-20 阻流體為正三邊形於 4.75 s 之模擬結果

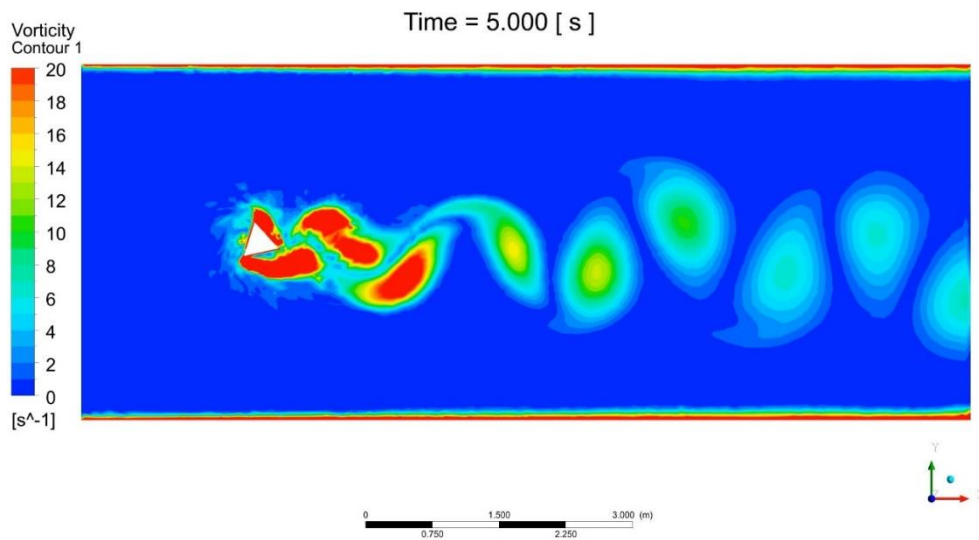


圖 4-21 阻流體為正三邊形於 5 s 之模擬結果

阻流體為勒洛三邊形之模擬結果以四張圖來呈現，分別為模擬時間 4.25 s、4.5 s、4.75 s 與 5 s，如圖 4-22 至圖 4-25 所示。由結果可計算出頻率為 2.7778，而斯特勞哈爾數為 0.2222。

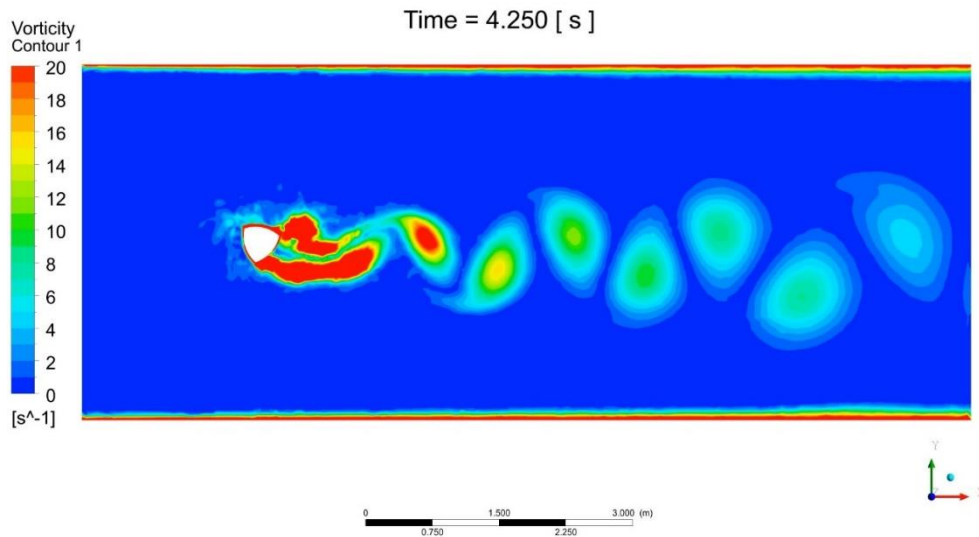


圖 4-22 阻流體為勒洛三邊形於 4.25 s 之模擬結果

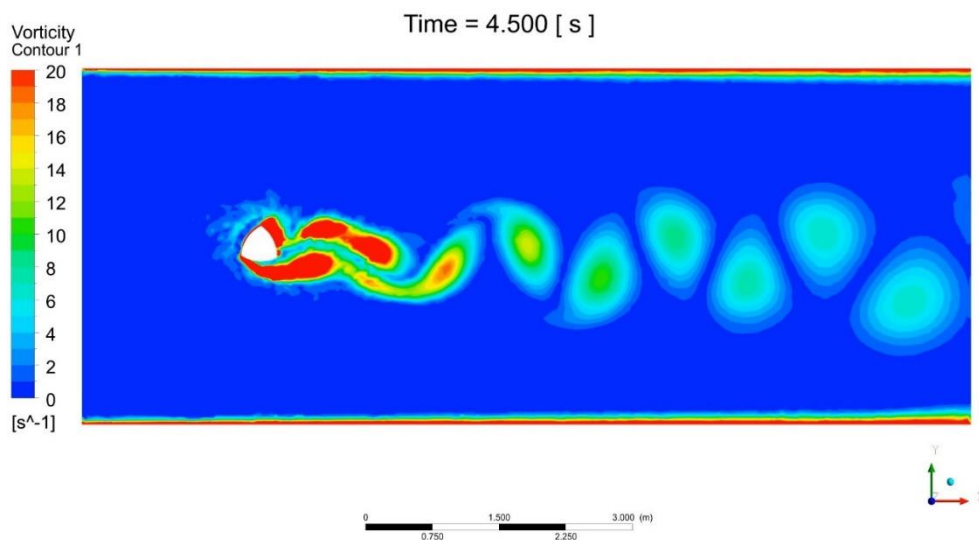


圖 4-23 阻流體為勒洛三邊形於 4.5 s 之模擬結果

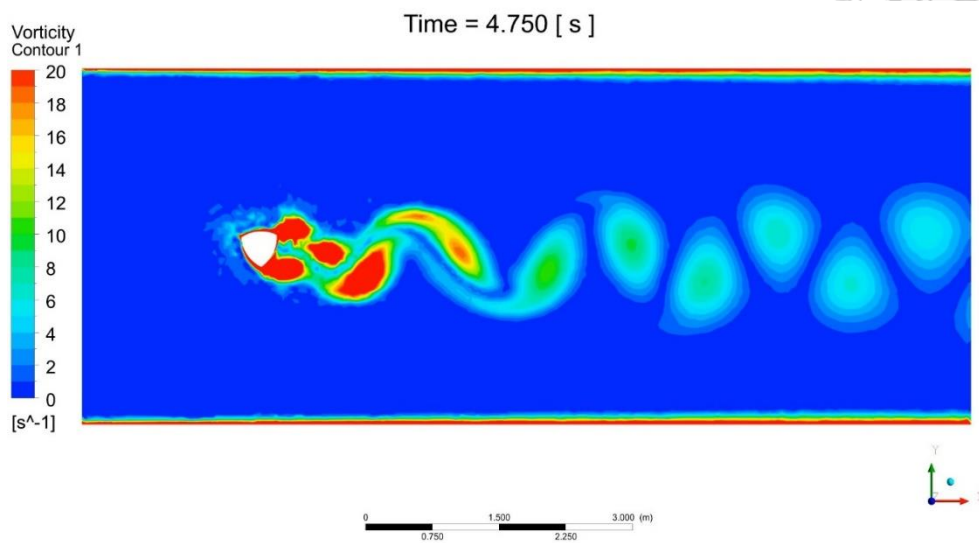


圖 4-24 阻流體為勒洛三邊形於 4.75 s 之模擬結果

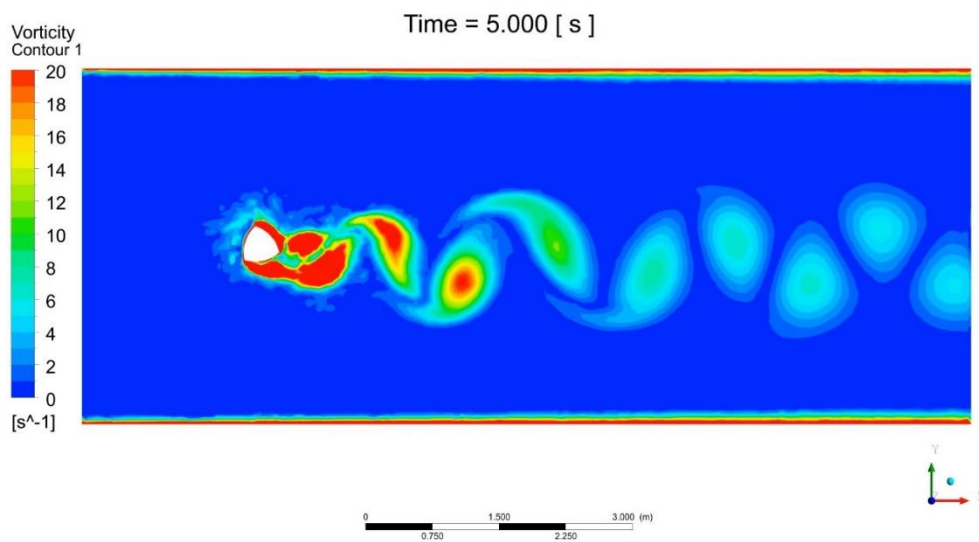


圖 4-25 阻流體為勒洛三邊形於 5 s 之模擬結果

4.2.2 正五邊形與勒洛五邊形

阻流體為正五邊形之模擬結果以四張圖來呈現，分別為模擬時間 4.25 s、4.5 s、4.75 s 與 5 s，如圖 4-26 至圖 4-29 所示。由結果可計算出頻率為 2.5641，而斯特勞哈爾數為 0.2051。

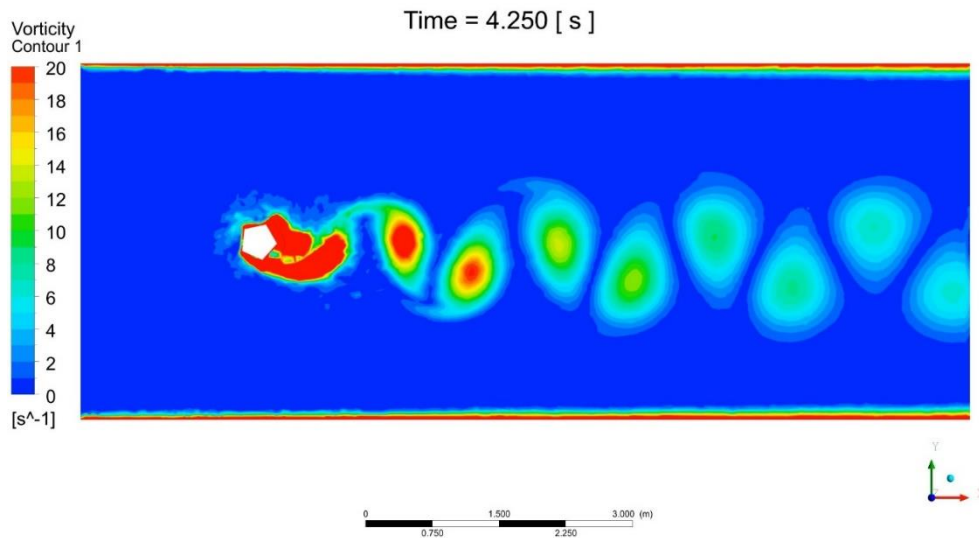


圖 4-26 阻流體為正五邊形於 4.25 s 之模擬結果

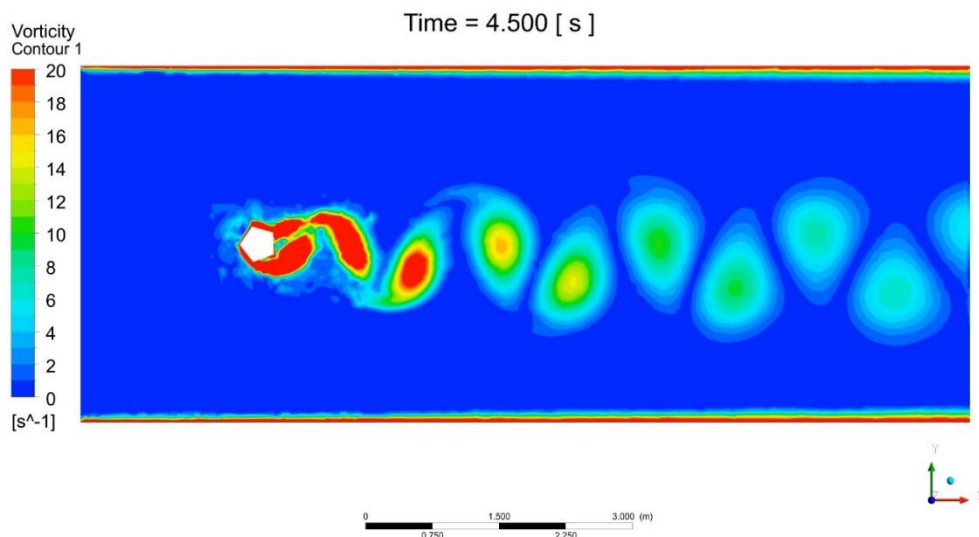


圖 4-27 阻流體為正五邊形於 4.5 s 之模擬結果

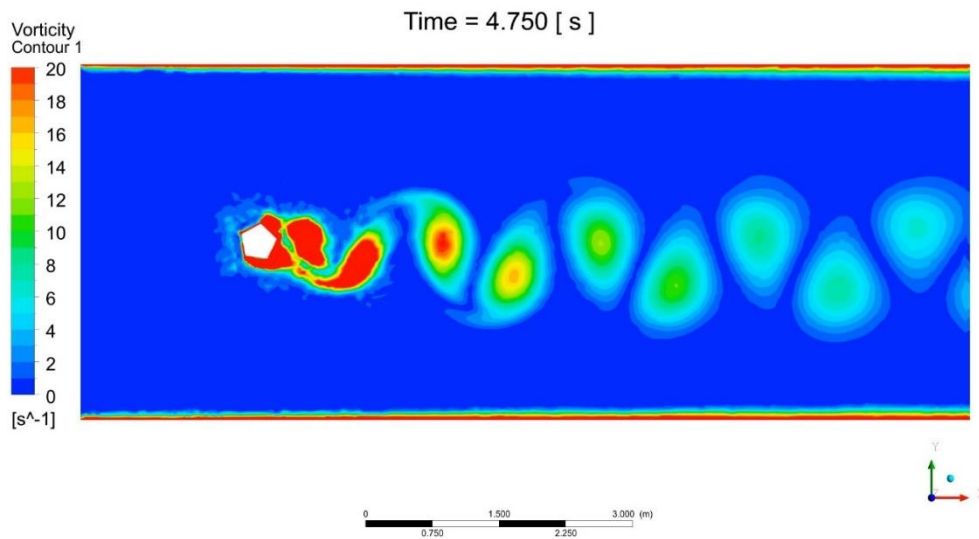


圖 4-28 阻流體為正五邊形於 4.75 s 之模擬結果

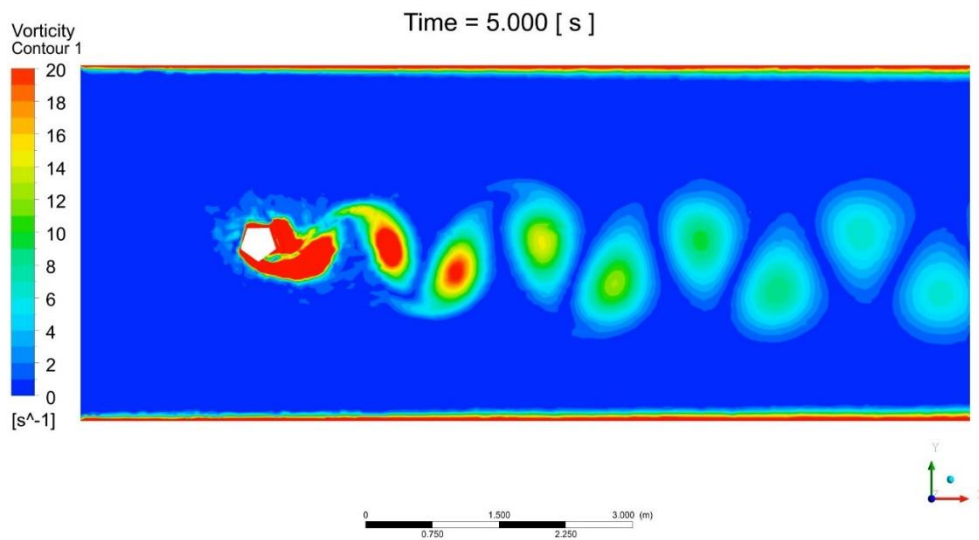


圖 4-29 阻流體為正五邊形於 5 s 之模擬結果

阻流體為勒洛五邊形之模擬結果以四張圖來呈現，分別為模擬時間 4.25 s、4.5 s、4.75 s 與 5 s，如圖 4-30 至圖 4-33 所示。由結果可計算出頻率為 2.9412，而斯特勞哈爾數為 0.2353。

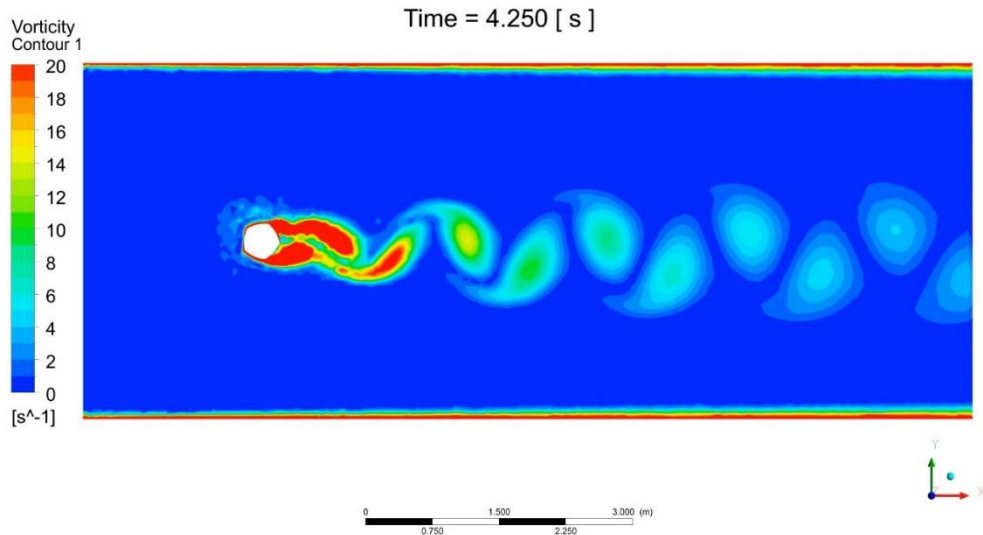


圖 4-30 阻流體為勒洛五邊形於 4.25 s 之模擬結果

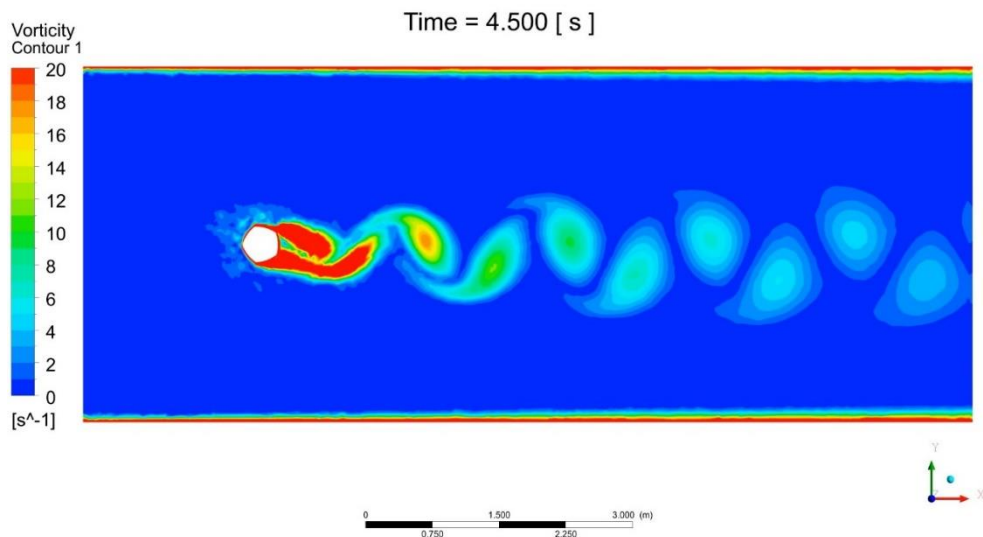


圖 4-31 阻流體為勒洛五邊形於 4.5 s 之模擬結果

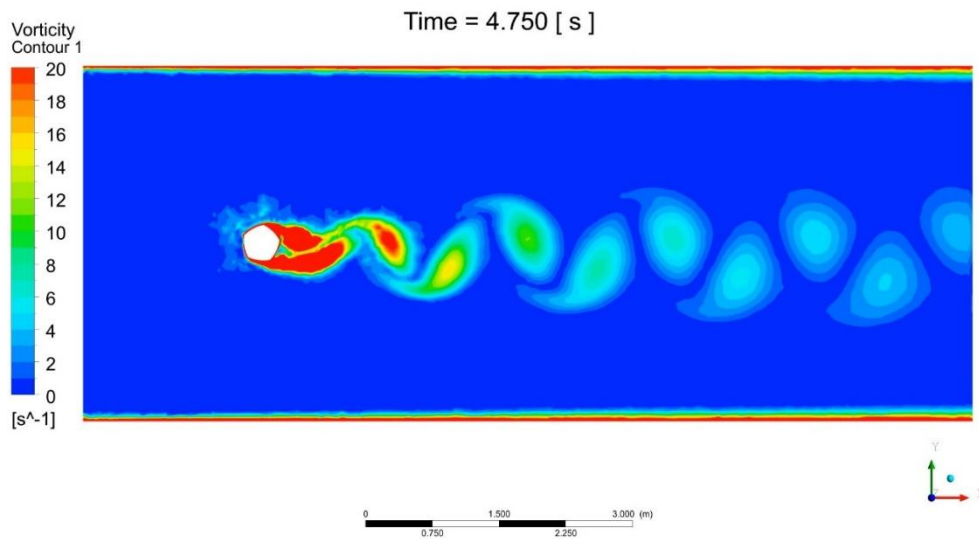


圖 4-32 阻流體為勒洛五邊形於 4.75 s 之模擬結果

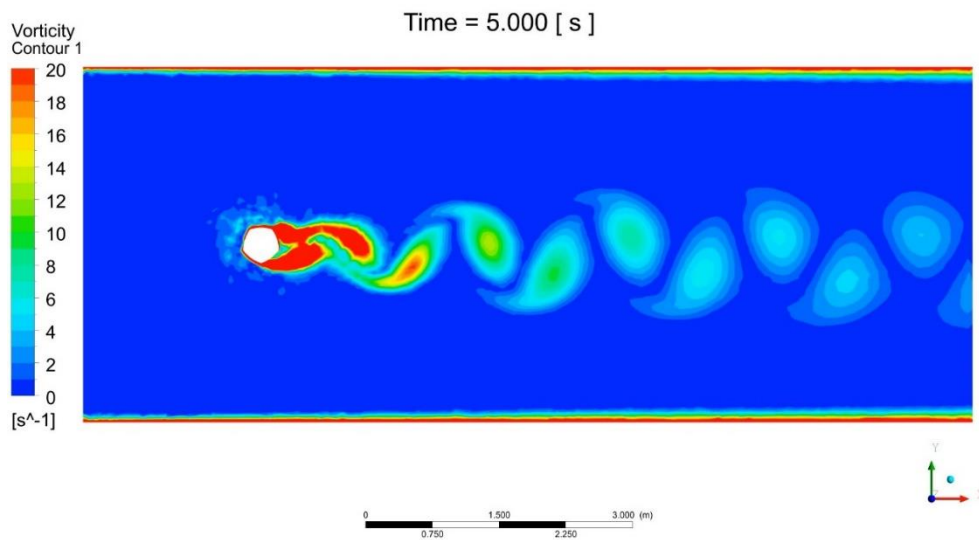


圖 4-33 阻流體為勒洛五邊形於 5 s 之模擬結果

4.2.3 正七邊形與勒洛七邊形

阻流體為正七邊形之模擬結果以四張圖來呈現，分別為模擬時間 4.25 s、4.5 s、4.75 s 與 5 s，如圖 4-34 至圖 4-37 所示。由結果可計算出頻率為 2.6667，而斯特勞哈爾數為 0.2133。

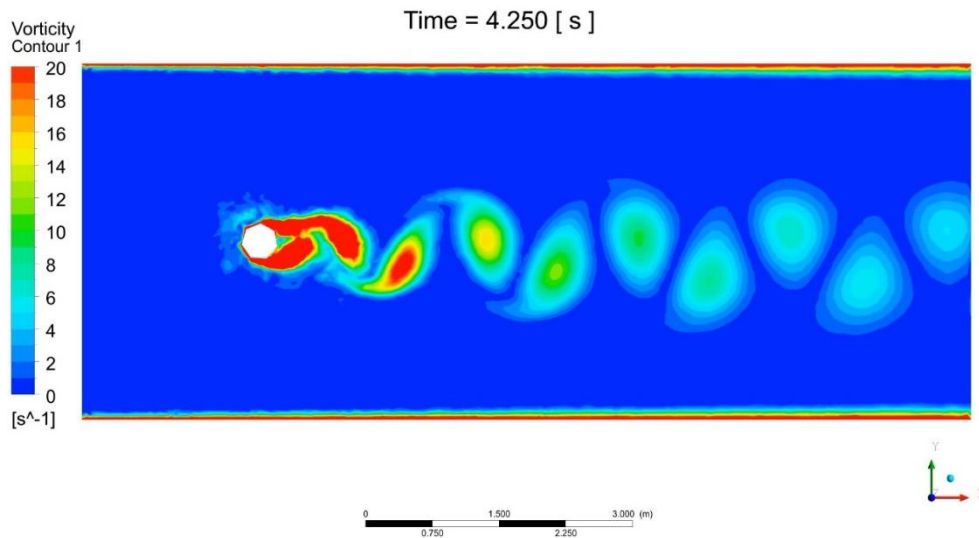


圖 4-34 阻流體為正七邊形於 4.25 s 之模擬結果

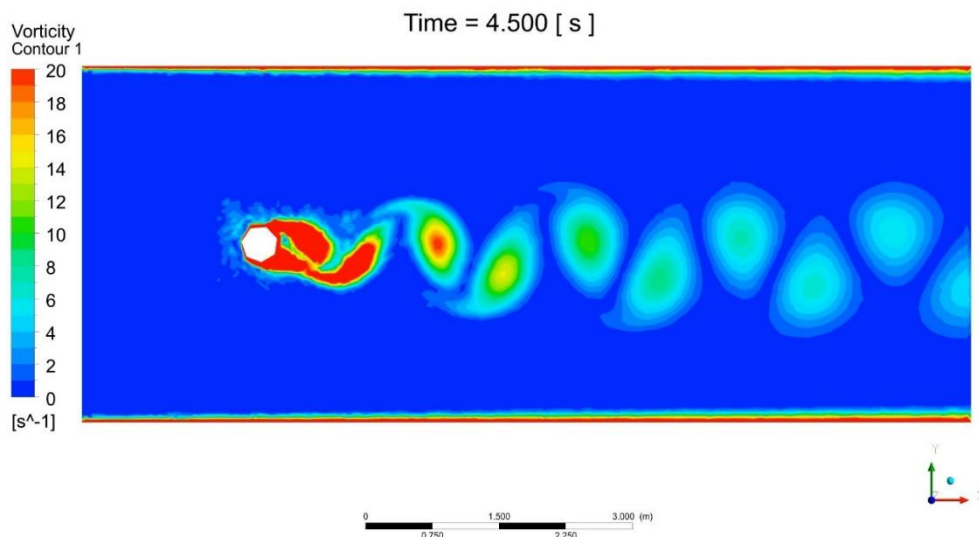


圖 4-35 阻流體為正七邊形於 4.5 s 之模擬結果

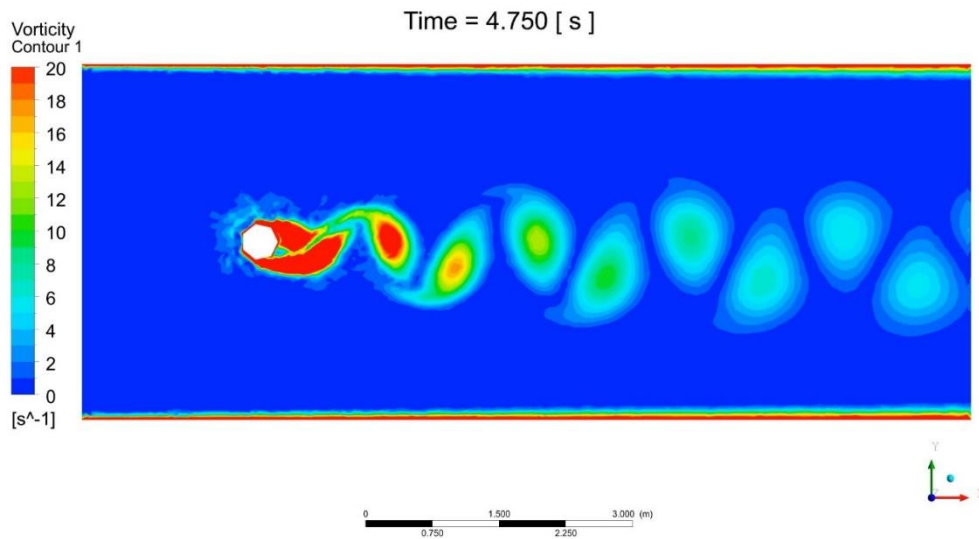


圖 4-36 阻流體為正七邊形於 4.75 s 之模擬結果

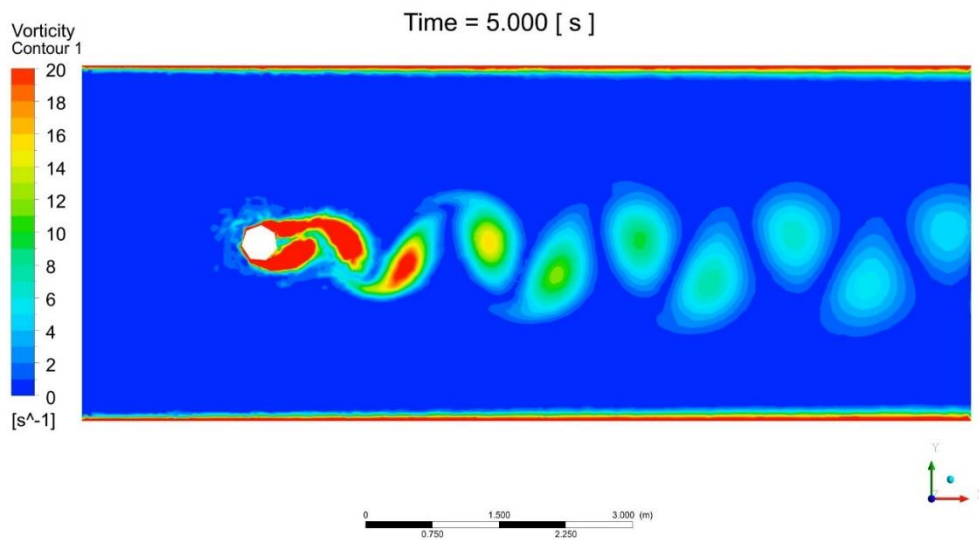


圖 4-37 阻流體為正七邊形於 5 s 之模擬結果

阻流體為勒洛七邊形之模擬結果以四張圖來呈現，分別為模擬時間 4.25 s、4.5 s、4.75 s 與 5 s，如圖 4-38 至圖 4-41 所示。由結果可計算出頻率為 3.0303，而斯特勞哈爾數為 0.2424。

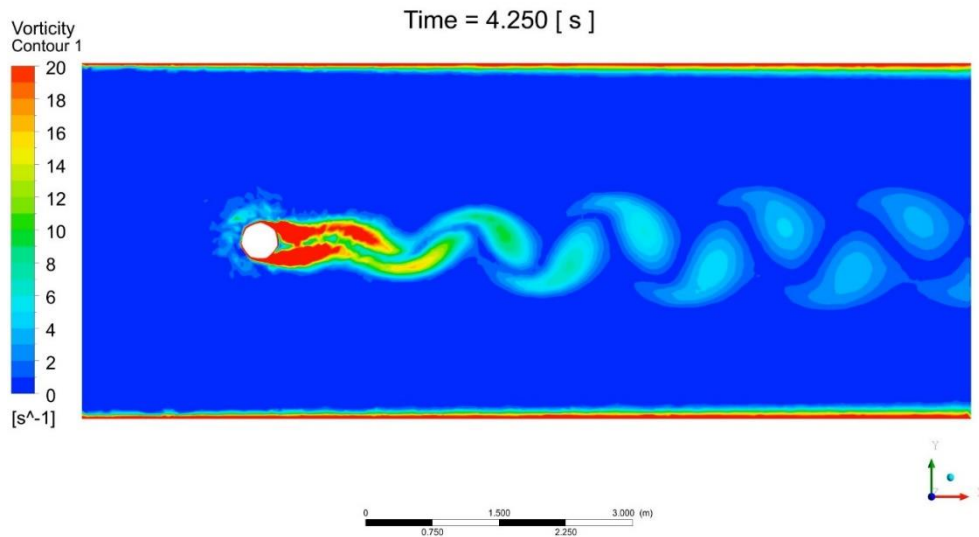


圖 4-38 阻流體為勒洛七邊形於 4.25 s 之模擬結果

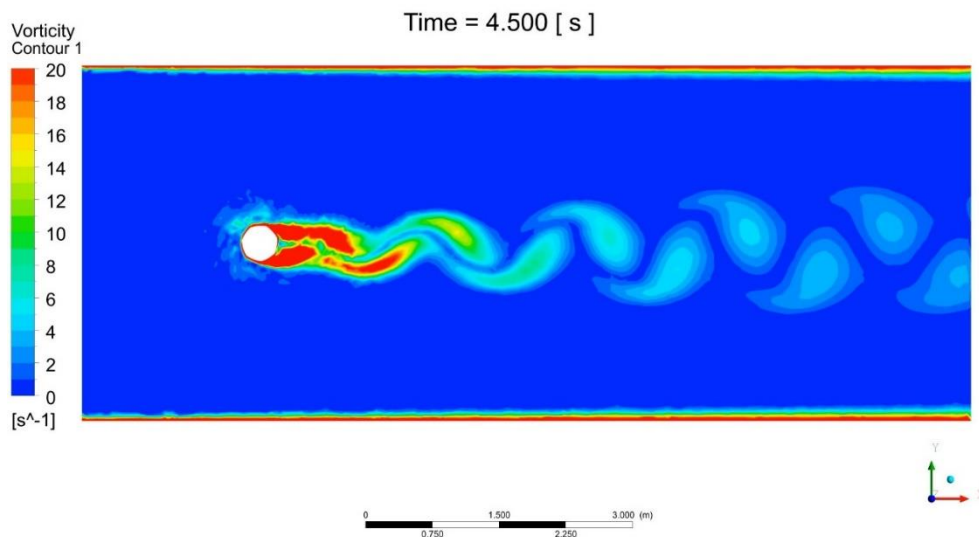


圖 4-39 阻流體為勒洛七邊形於 4.5 s 之模擬結果

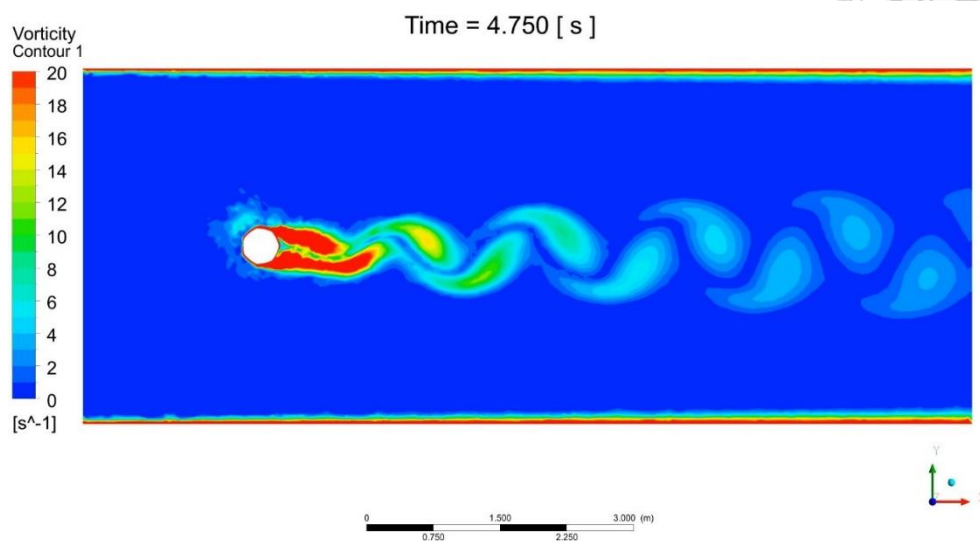


圖 4-40 阻流體為勒洛七邊形於 4.75 s 之模擬結果

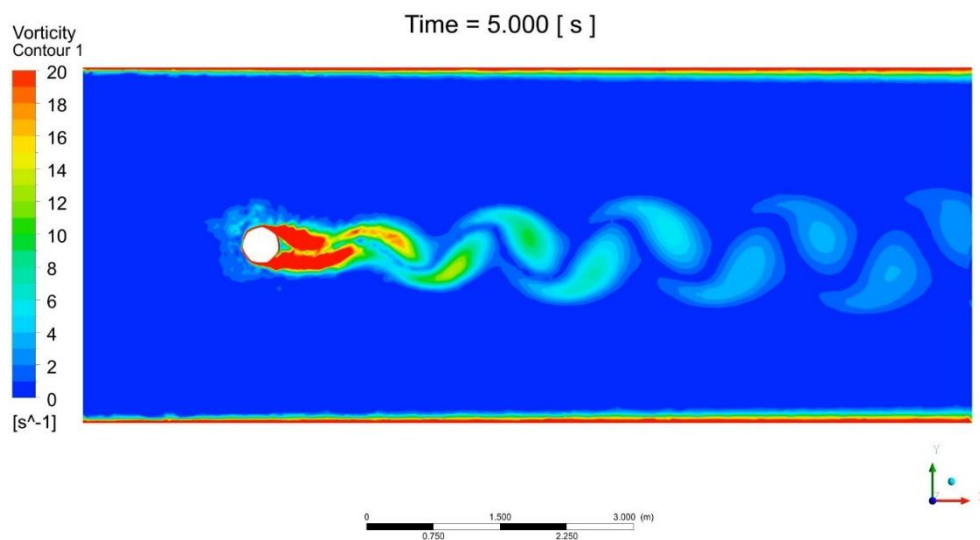


圖 4-41 阻流體為勒洛七邊形於 5 s 之模擬結果

4.2.4 正九邊形與勒洛九邊形

阻流體為正九邊形之模擬結果以四張圖來呈現，分別為模擬時間 4.25 s、4.5 s、4.75 s 與 5 s，如圖 4-42 至圖 4-45 所示。由結果可計算出頻率為 2.8169，而斯特勞哈爾數為 0.2253。

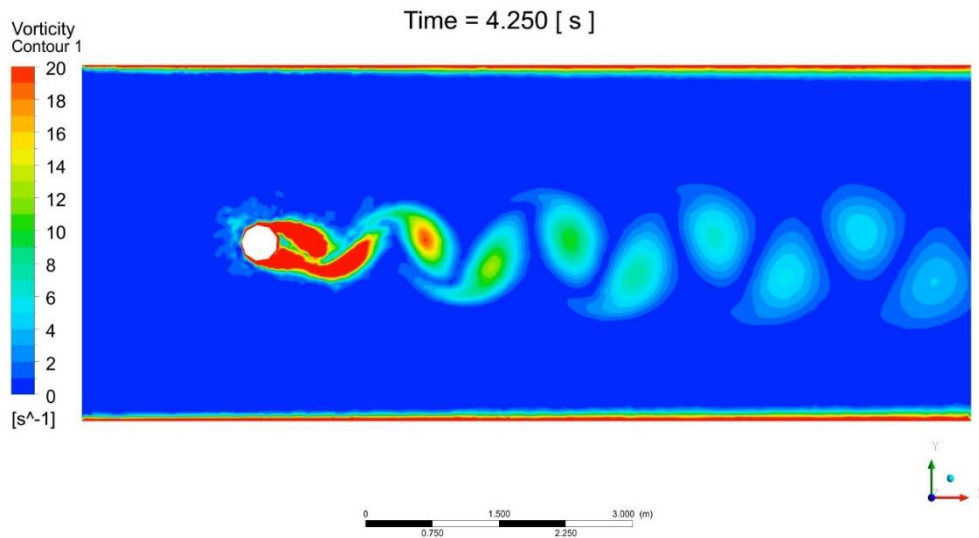


圖 4-42 阻流體為正九邊形於 4.25 s 之模擬結果

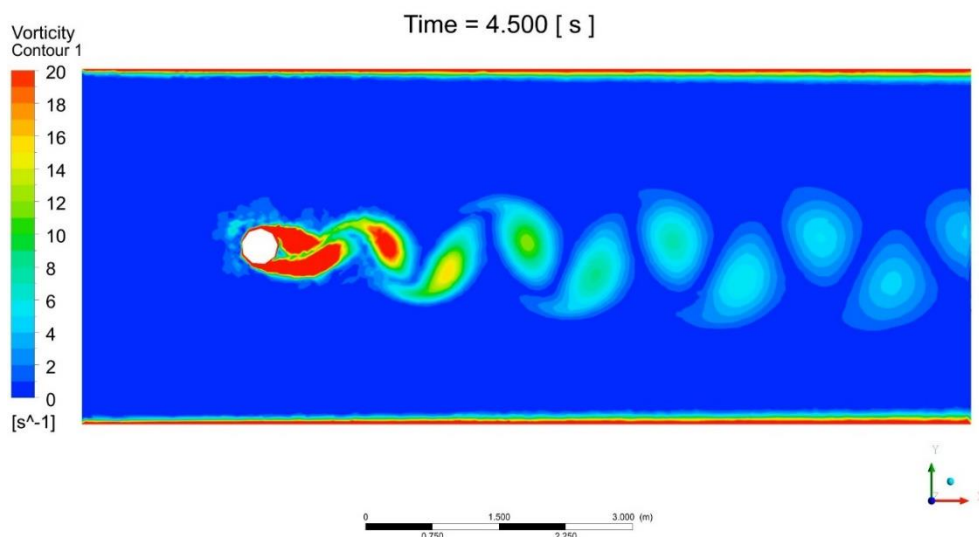


圖 4-43 阻流體為正九邊形於 4.5 s 之模擬結果

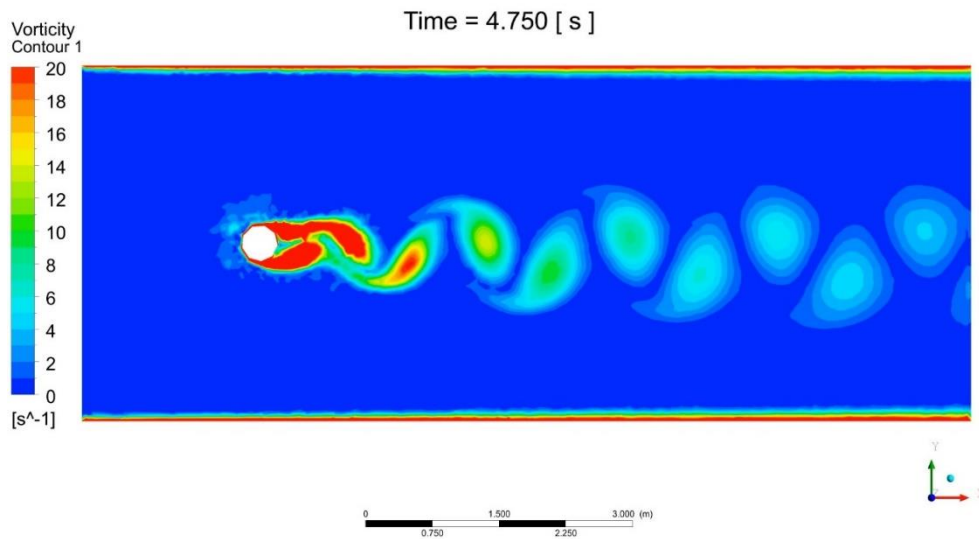


圖 4-44 阻流體為正九邊形於 4.75 s 之模擬結果

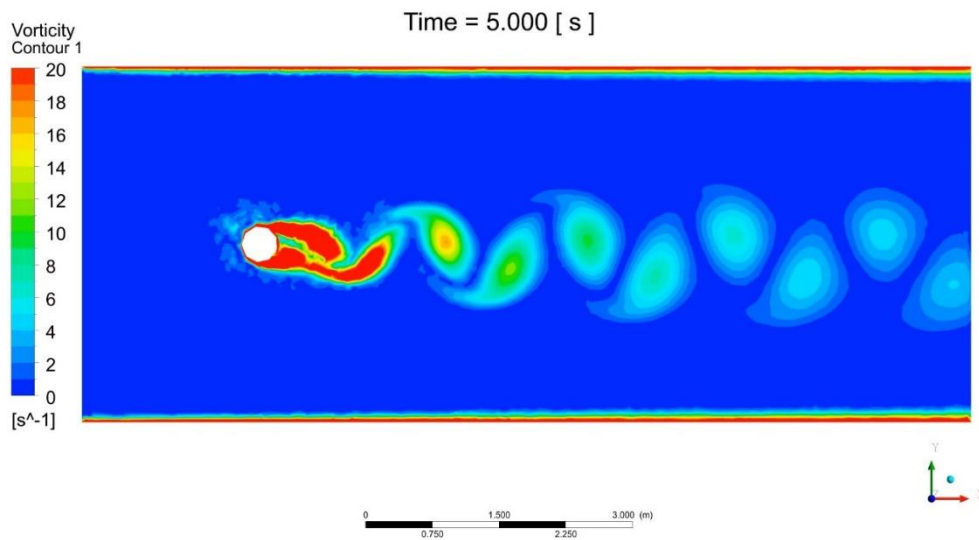


圖 4-45 阻流體為正九邊形於 5 s 之模擬結果

阻流體為勒洛九邊形之模擬結果以四張圖來呈現，分別為模擬時間 4.25 s、4.5 s、4.75 s 與 5 s，如圖 4-46 至圖 4-49 所示。由結果可計算出頻率為 3.125，而斯特勞哈爾數為 0.25。

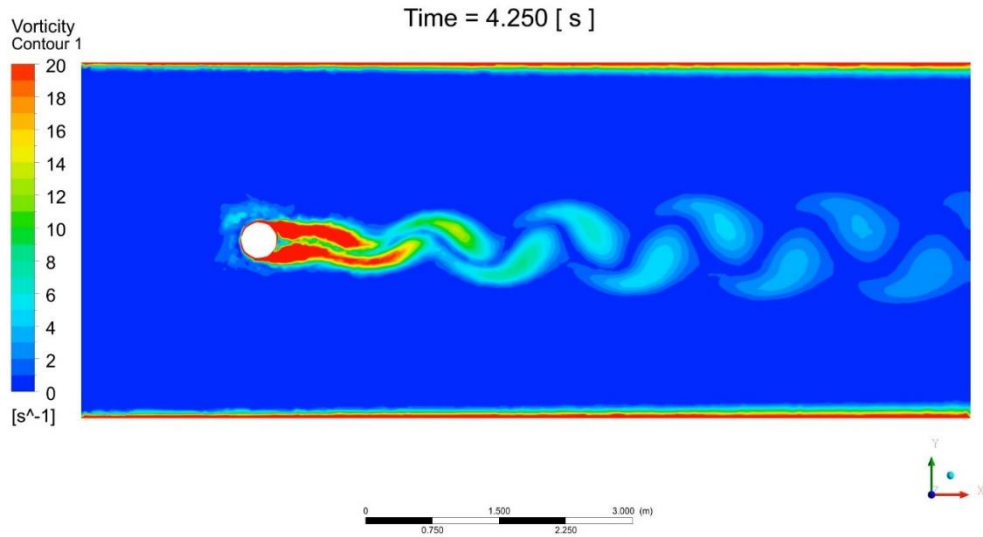


圖 4-46 阻流體為勒洛九邊形於 4.25 s 之模擬結果

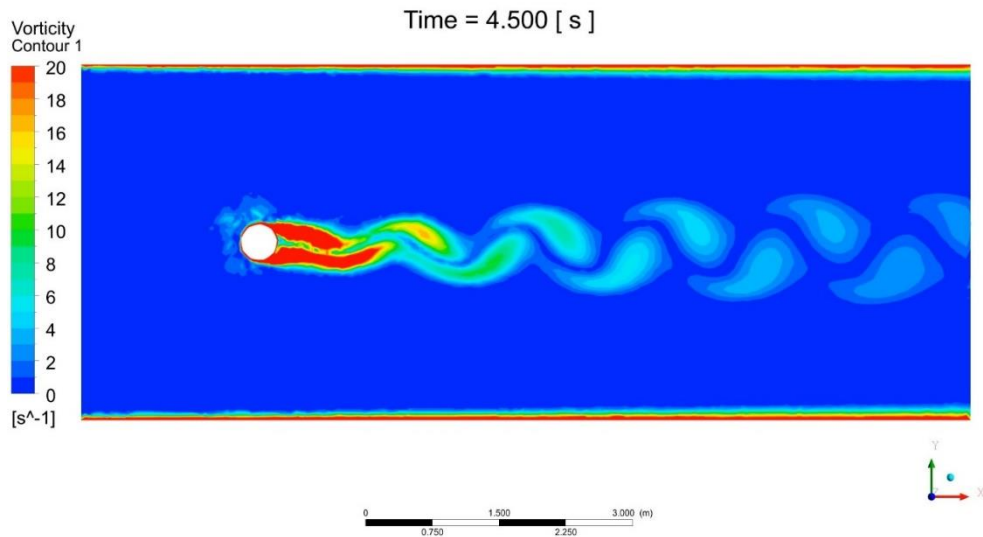


圖 4-47 阻流體為勒洛九邊形於 4.5 s 之模擬結果

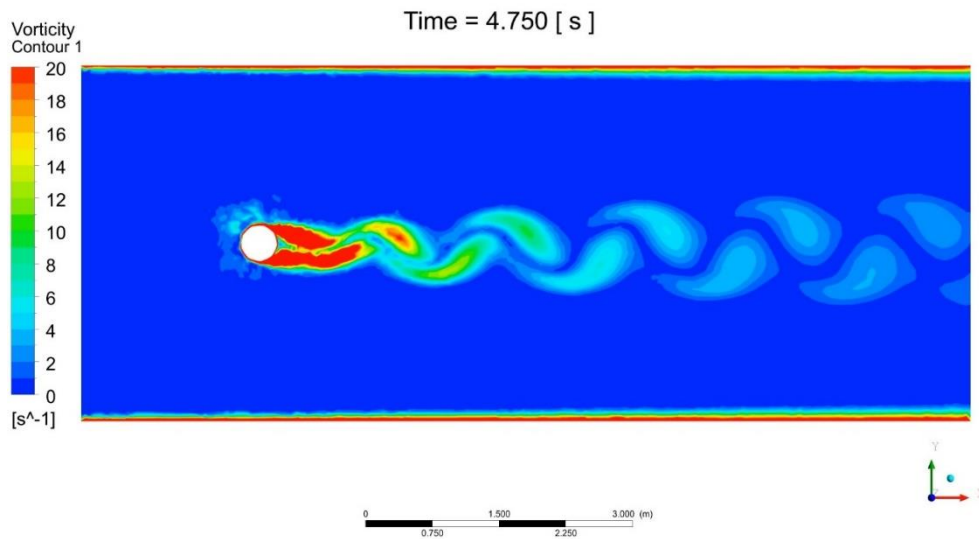


圖 4-48 阻流體為勒洛九邊形於 4.75 s 之模擬結果

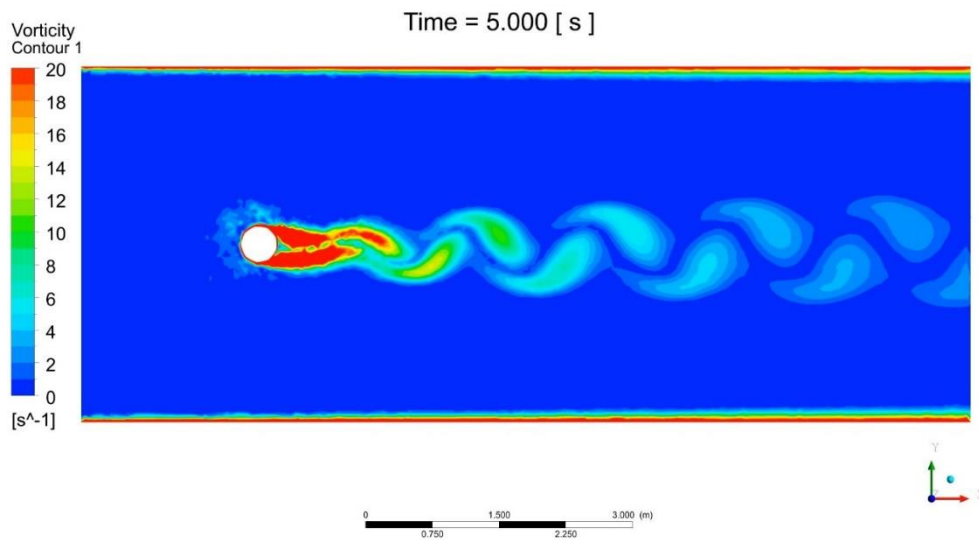


圖 4-49 阻流體為勒洛九邊形於 5 s 之模擬結果



4.2.5 模擬結果比較

將 4.2.1 節至 4.2.4 節之模擬結果整理成表 4-2 與圖 4-50。

表 4-2 4.2 節模擬結果比較表

邊數	正多邊形		勒洛多邊形	
	f (1/s)	St	f (1/s)	St
3	2.2099	0.1768	2.7778	0.2222
5	2.5641	0.2051	2.9412	0.2353
7	2.6667	0.2133	3.0303	0.2424
9	2.8169	0.2253	3.1250	0.2500

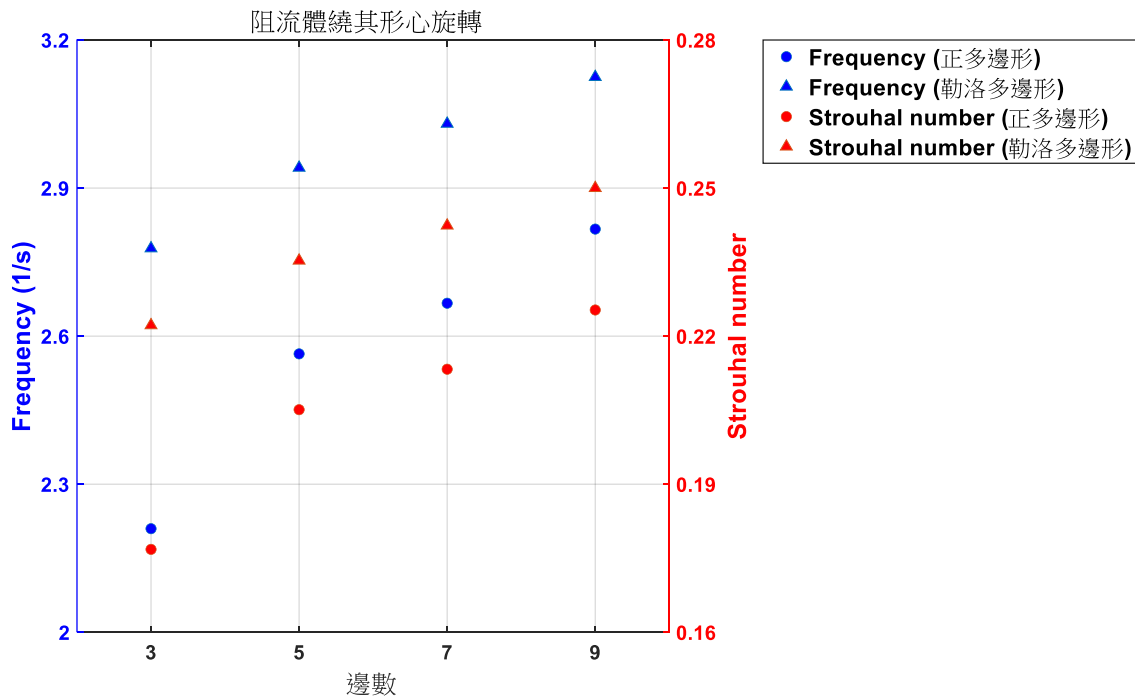


圖 4-50 4.2 節模擬結果之頻率與斯特勞哈爾數散佈圖



由模擬結果可以看出，當阻流體為正多邊形時，其後方產生的漩渦會比阻流體為勒洛多邊形時還要大，與 4.1 節的結論相同，造成此結果的原因跟阻流體的輪廓有關。勒洛多邊形的圓弧狀輪廓讓流體能夠較為平順的流到後方，所以產生的漩渦才會比較小。與 4.1 節之模擬結果比較，可以看出當阻流體繞其形心旋轉時，其後方產生的渦街會比固定阻流體時還要低，推測與阻流體的旋轉方向有關。由於阻流體是以順時針方向進行旋轉，因此當流體流經阻流體時，流體被阻流體往下壓，所以整個渦街才會比較低。由圖 4-50 可以看出，當阻流體為勒洛多邊形時，其後方產生的漩渦頻率與斯特勞哈爾數皆比阻流體為正多邊形時還要大；當阻流體為正多邊形時，頻率與斯特勞哈爾數隨著邊數呈現拋物線分布，而阻流體為勒洛多邊形時，頻率與斯特勞哈爾數則隨著邊數呈現線性分布。



4.3 等寬曲線阻流體

4.3.1 勒洛三邊形

阻流體繞其形心旋轉之模擬結果以四張圖來呈現，分別為模擬時間 4.25 s、4.5 s、4.75 s 與 5 s，如圖 4-51 至圖 4-54 所示。由結果可計算出頻率為 2.7778，而斯特勞哈爾數為 0.2222。

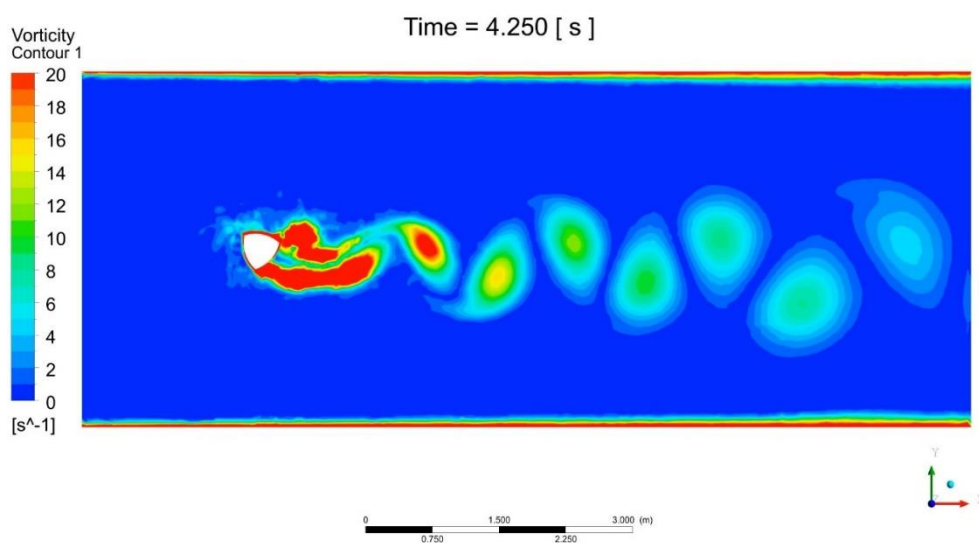


圖 4-51 阻流體繞其形心旋轉於 4.25 s 之模擬結果

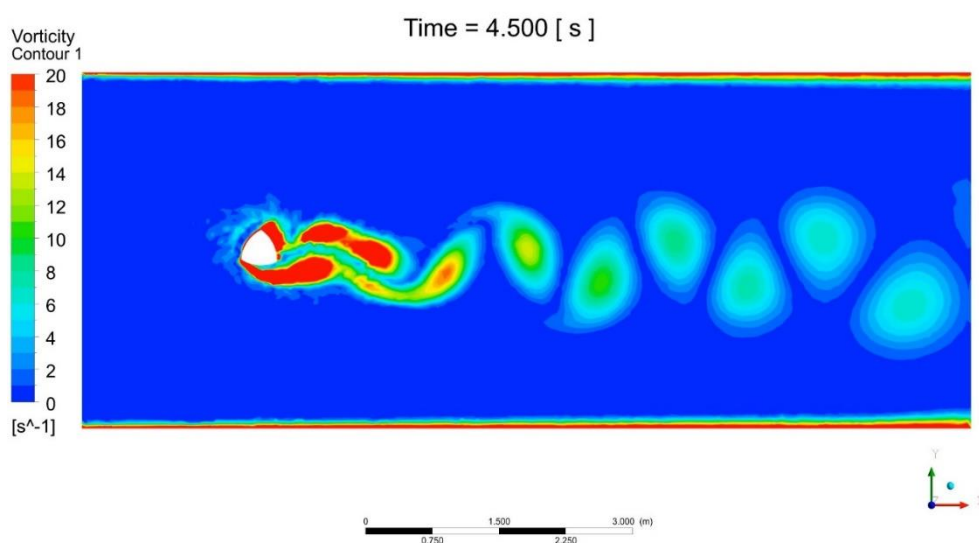


圖 4-52 阻流體繞其形心旋轉於 4.5 s 之模擬結果

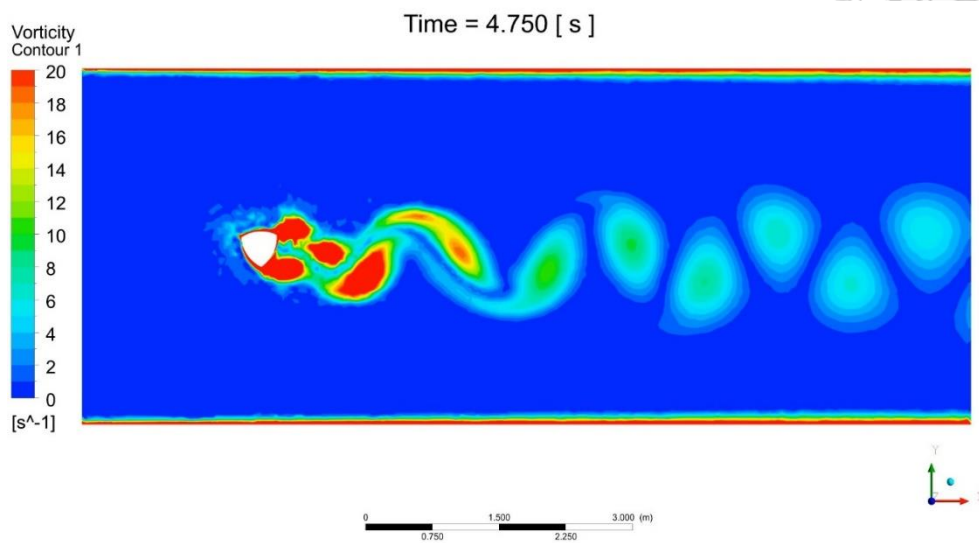


圖 4-53 阻流體繞其形心旋轉於 4.75 s 之模擬結果

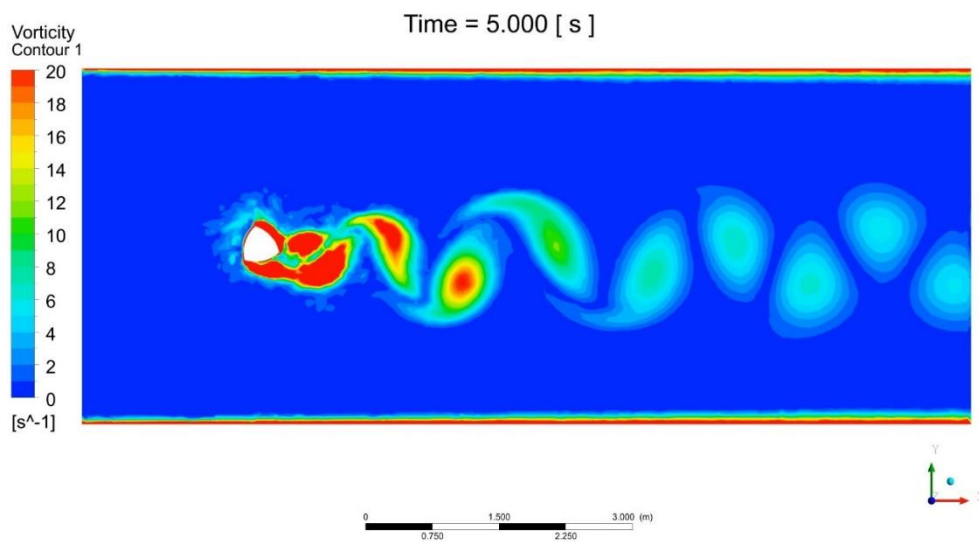


圖 4-54 阻流體繞其形心旋轉於 5 s 之模擬結果

等寬曲線阻流體之模擬結果以四張圖來呈現，分別為模擬時間 4.25 s、4.5 s、4.75 s 與 5 s，如圖 4-55 至圖 4-58 所示。由結果可計算出頻率為 2.8169，而斯特勞哈爾數為 0.2254。

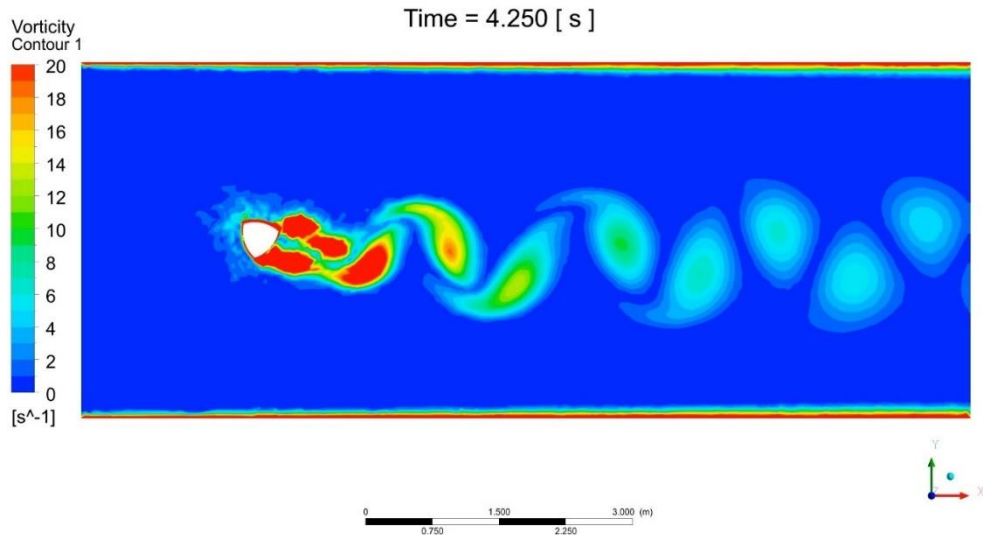


圖 4-55 等寬曲線阻流體於 4.25 s 之模擬結果

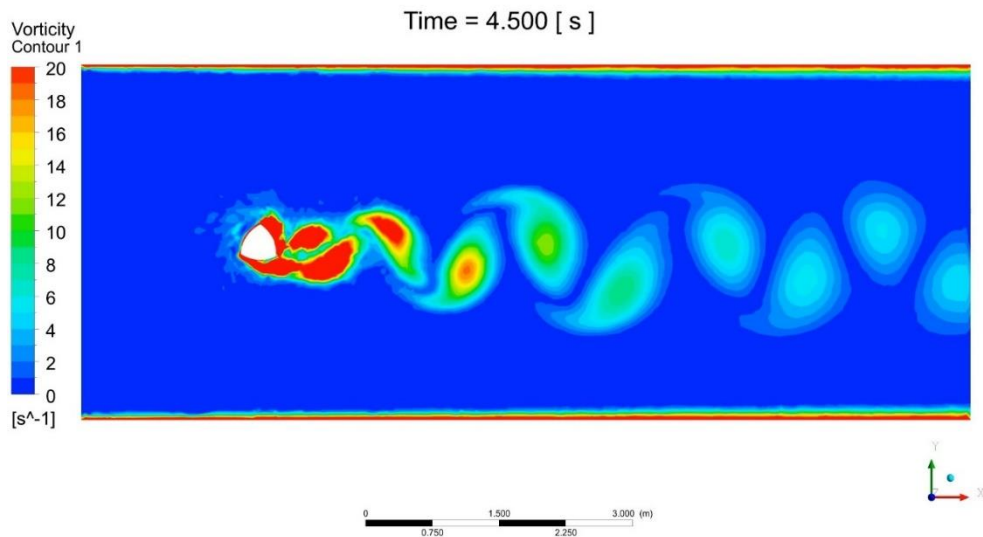


圖 4-56 等寬曲線阻流體於 4.5 s 之模擬結果

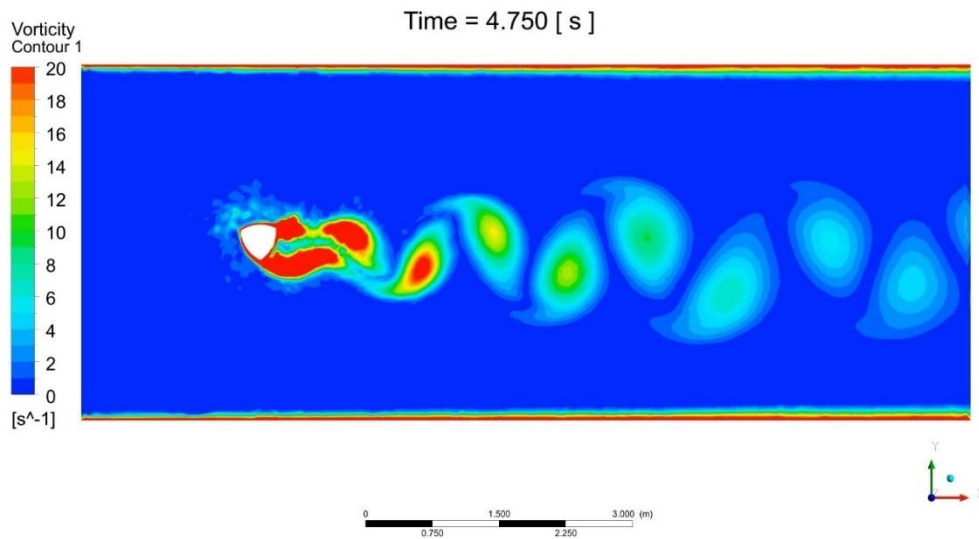


圖 4-57 等寬曲線阻流體於 4.75 s 之模擬結果

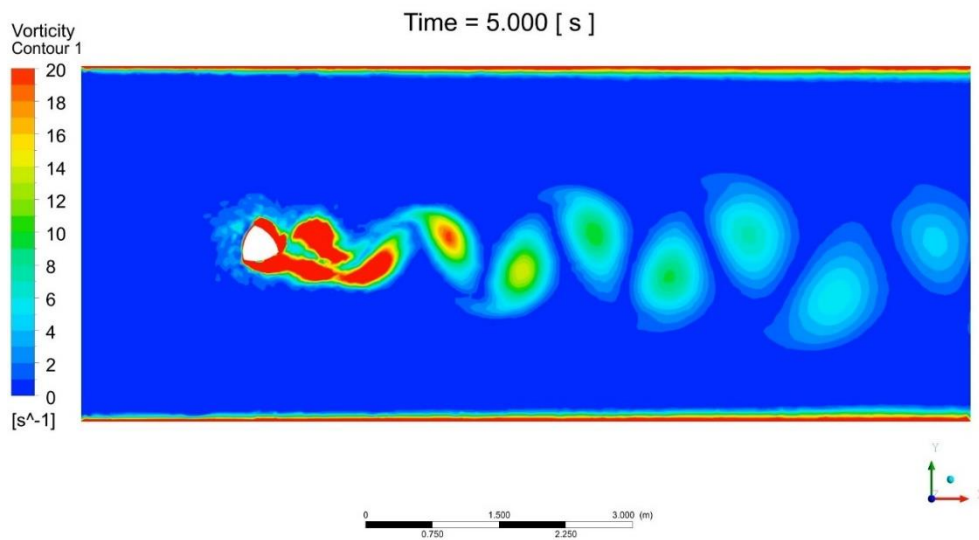


圖 4-58 等寬曲線阻流體於 5 s 之模擬結果

4.3.2 勒洛五邊形

阻流體繞其形心旋轉之模擬結果以四張圖來呈現，分別為模擬時間 4.25 s、4.5 s、4.75 s 與 5 s，如圖 4-59 至圖 4-62 所示。由結果可計算出頻率為 2.9412，而斯特勞哈爾數為 0.2353。

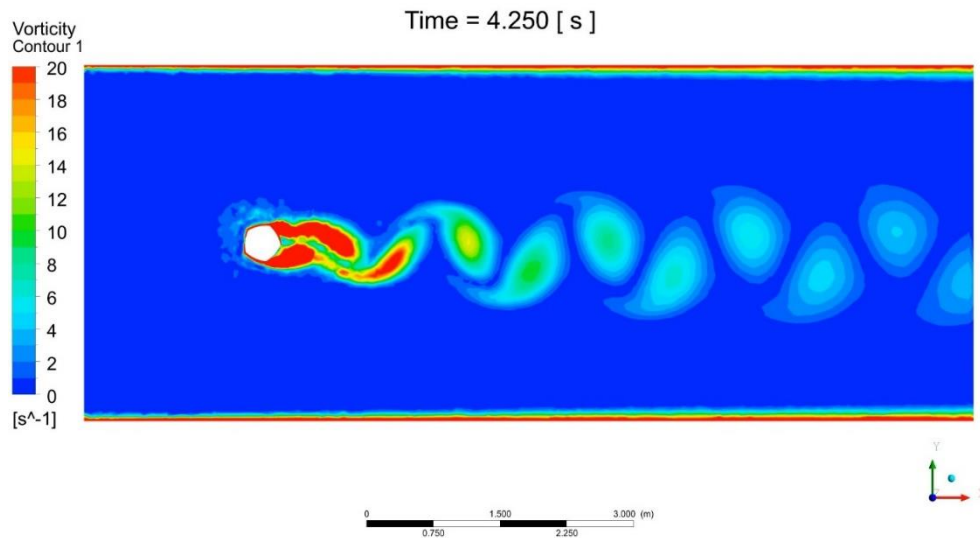


圖 4-59 阻流體繞其形心旋轉於 4.25 s 之模擬結果

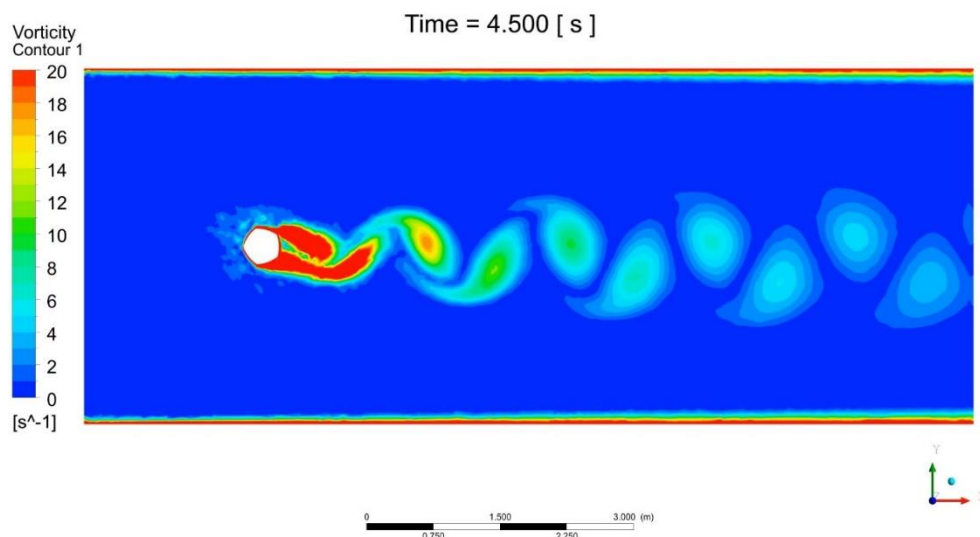


圖 4-60 阻流體繞其形心旋轉於 4.5 s 之模擬結果

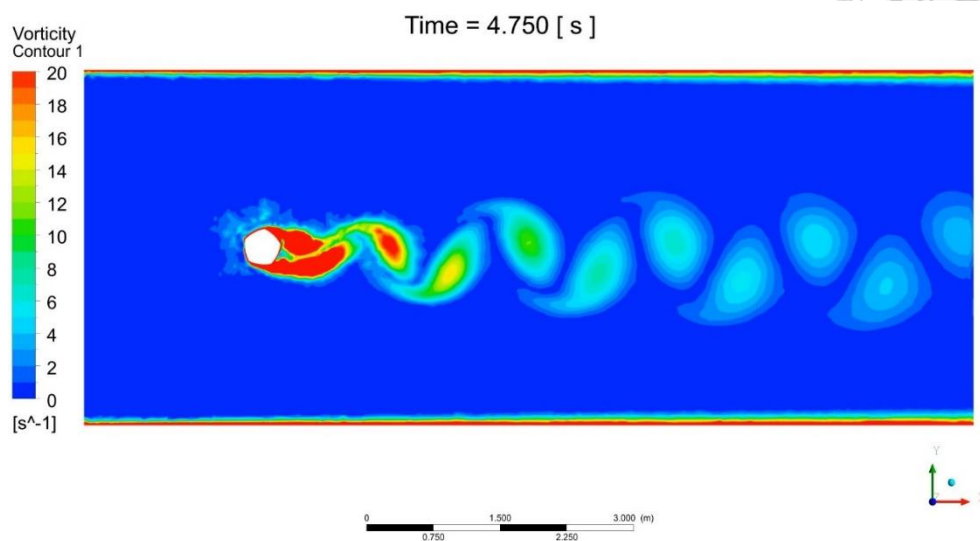


圖 4-61 阻流體繞其形心旋轉於 4.75 s 之模擬結果

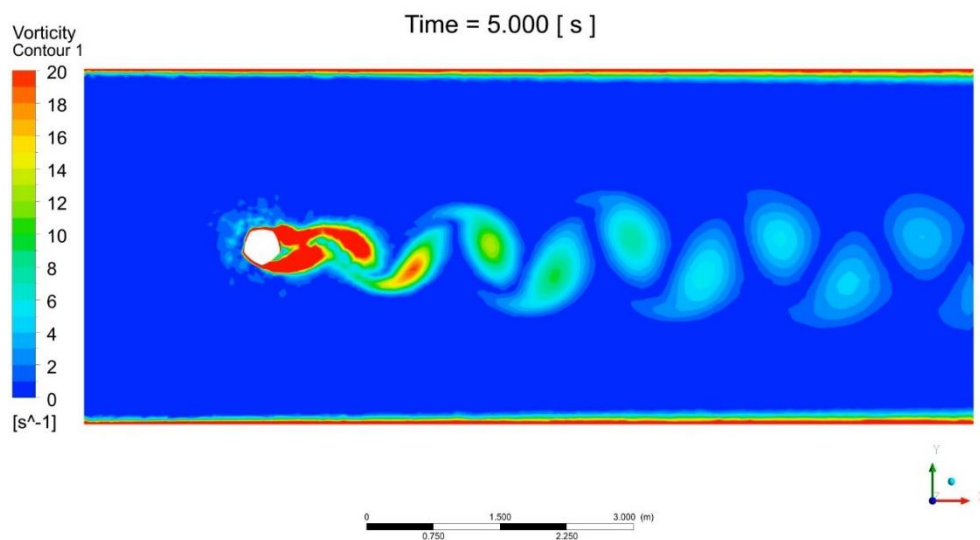


圖 4-62 阻流體繞其形心旋轉於 5 s 之模擬結果

等寬曲線阻流體之模擬結果以四張圖來呈現，分別為模擬時間 4.25 s、4.5 s、4.75 s 與 5 s，如圖 4-63 至圖 4-66 所示。由結果可計算出頻率為 2.9412，而斯特勞哈爾數為 0.2353。

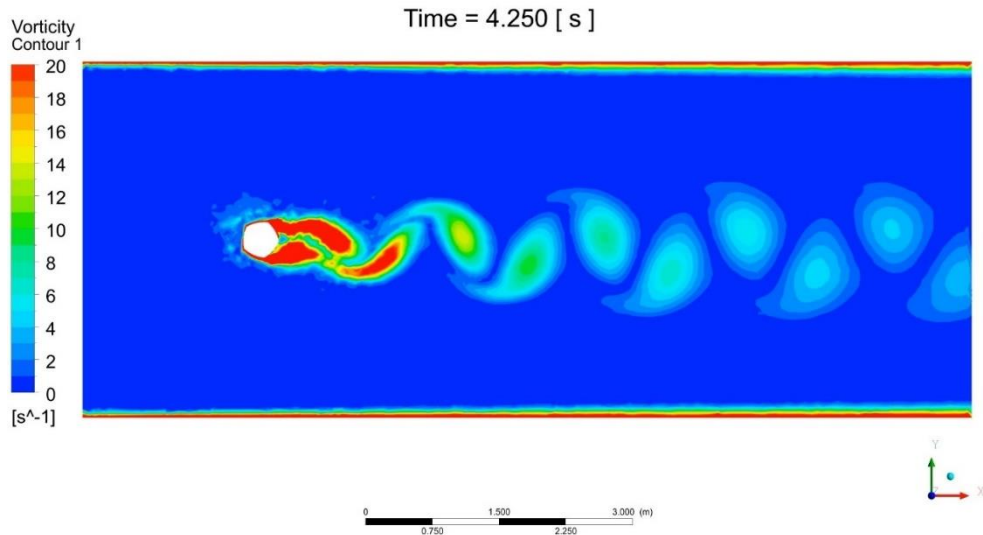


圖 4-63 等寬曲線阻流體於 4.25 s 之模擬結果

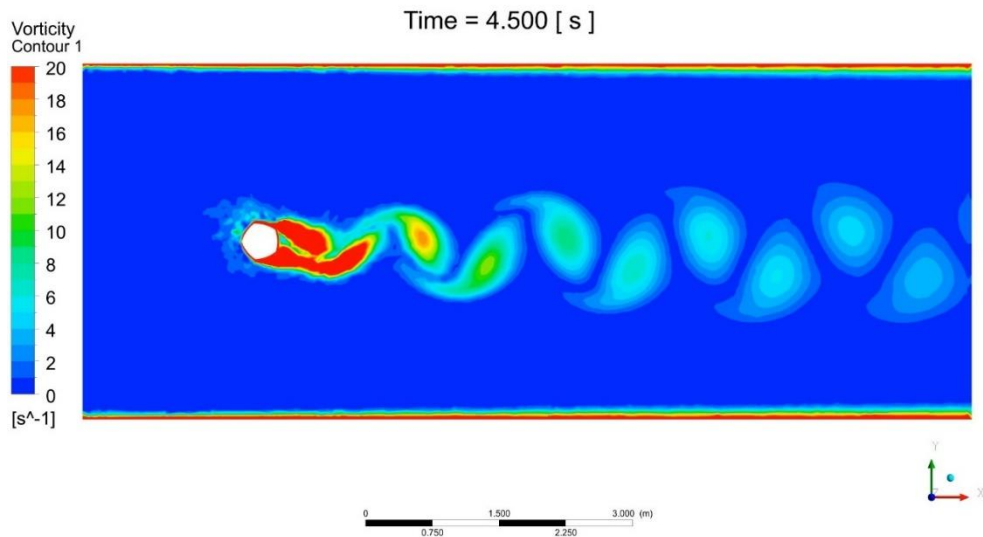


圖 4-64 等寬曲線阻流體於 4.5 s 之模擬結果

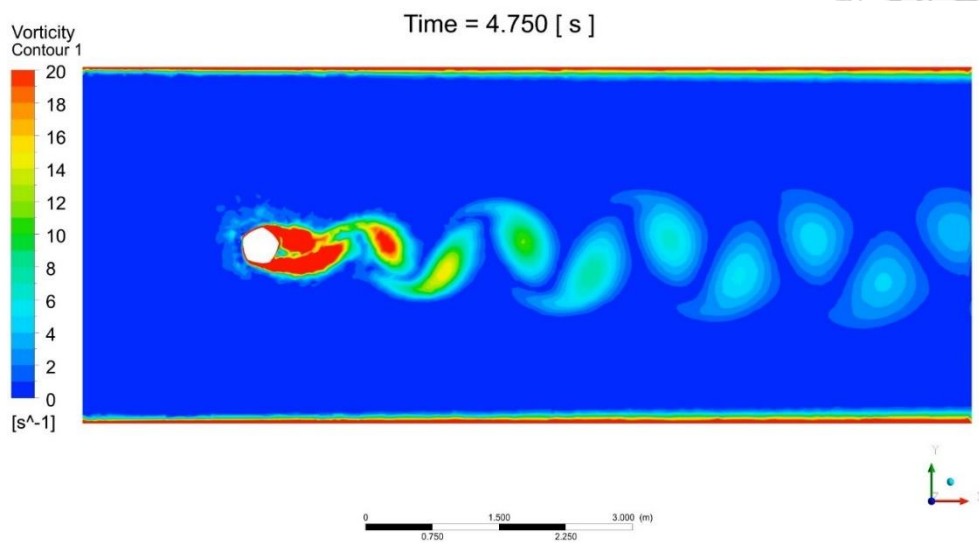


圖 4-65 等寬曲線阻流體於 4.75 s 之模擬結果

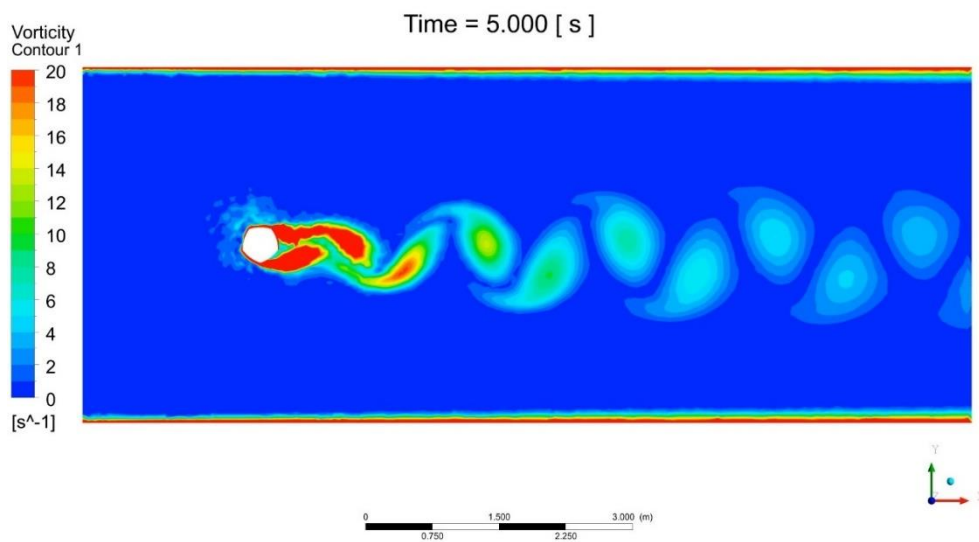


圖 4-66 等寬曲線阻流體於 5 s 之模擬結果



4.3.3 勒洛七邊形

阻流體繞其形心旋轉之模擬結果以四張圖來呈現，分別為模擬時間 4.25 s、4.5 s、4.75 s 與 5 s，如圖 4-67 至圖 4-70 所示。由結果可計算出頻率為 3.0303，而斯特勞哈爾數為 0.2424。

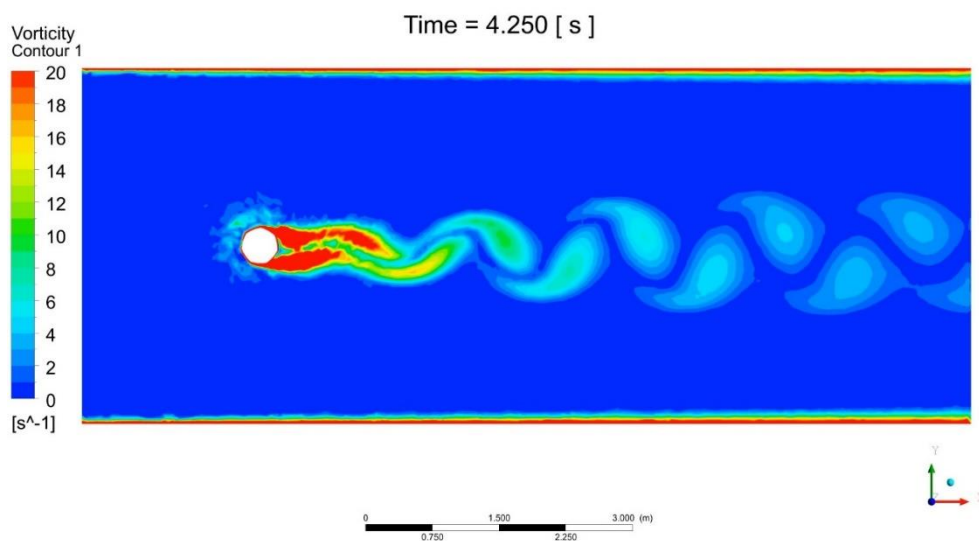


圖 4-67 阻流體繞其形心旋轉於 4.25 s 之模擬結果

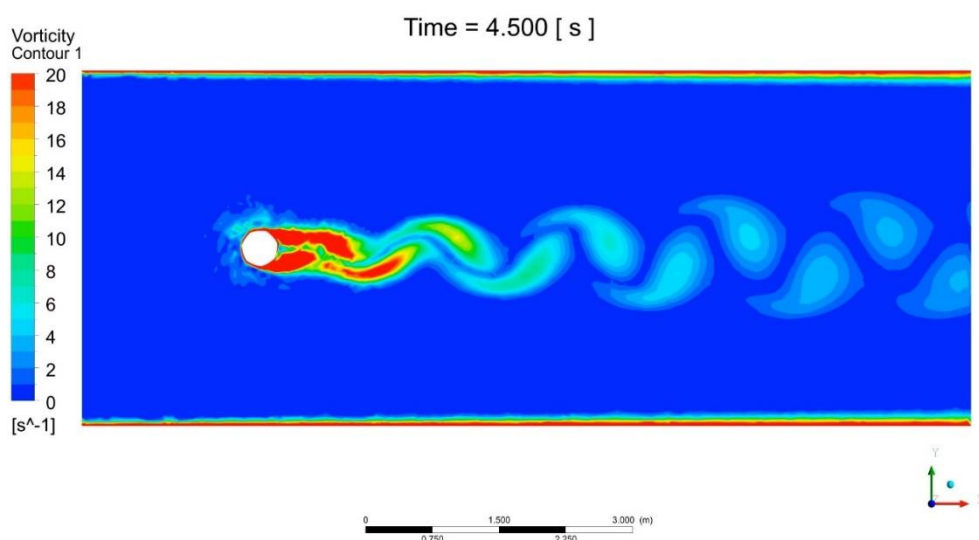


圖 4-68 阻流體繞其形心旋轉於 4.5 s 之模擬結果

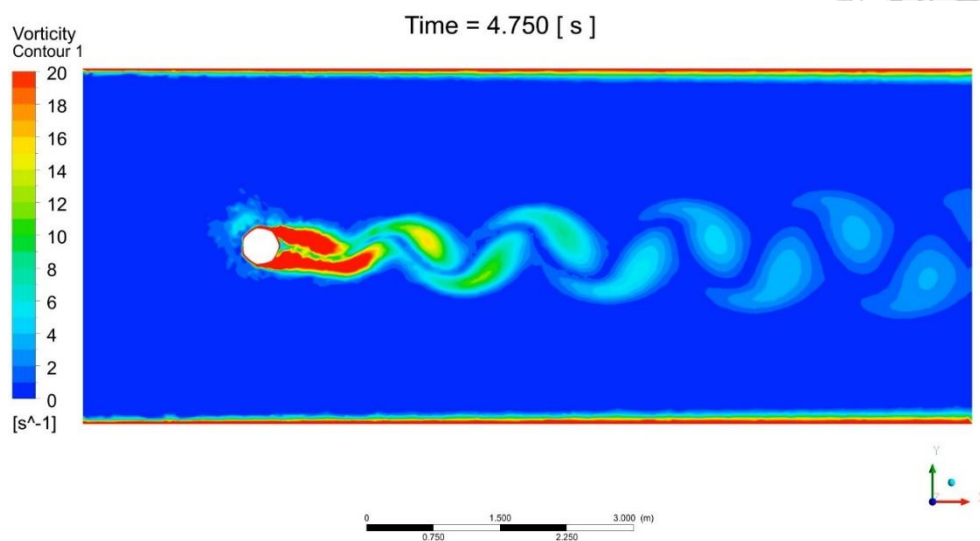


圖 4-69 阻流體繞其形心旋轉於 4.75 s 之模擬結果

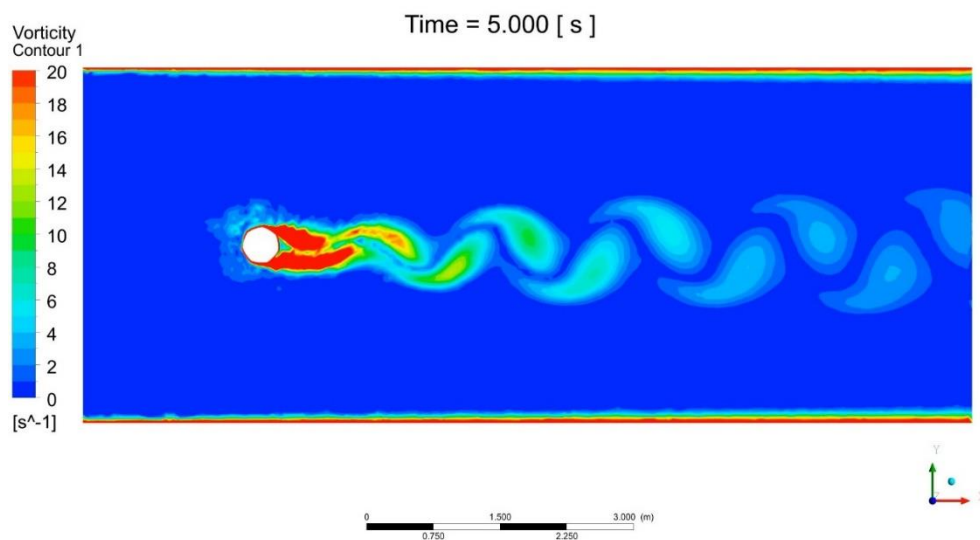


圖 4-70 阻流體繞其形心旋轉於 5 s 之模擬結果

等寬曲線阻流體之模擬結果以四張圖來呈現，分別為模擬時間 4.25 s、4.5 s、4.75 s 與 5 s，如圖 4-71 至圖 4-74 所示。由結果可計算出頻率為 3.0303，而斯特勞哈爾數為 0.2424。

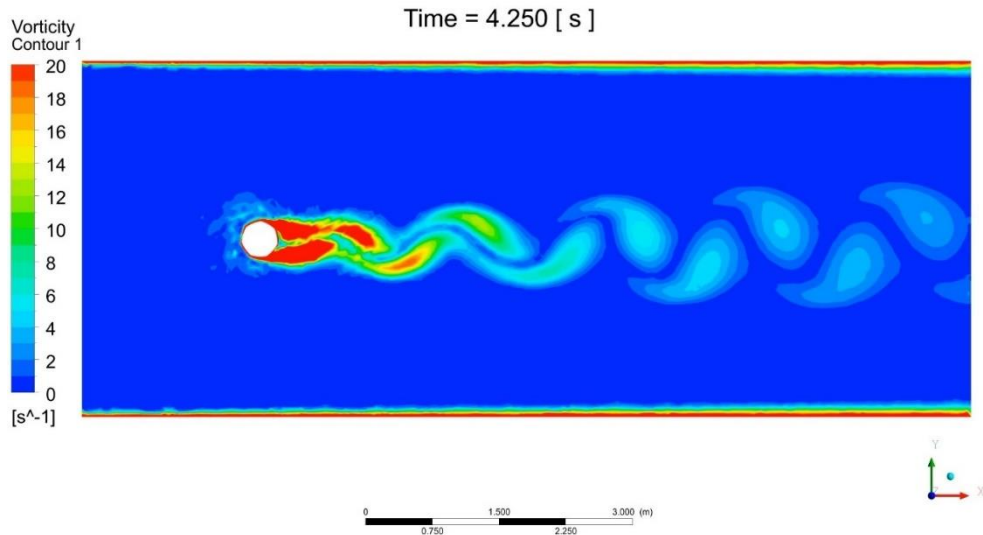


圖 4-71 等寬曲線阻流體於 4.25 s 之模擬結果

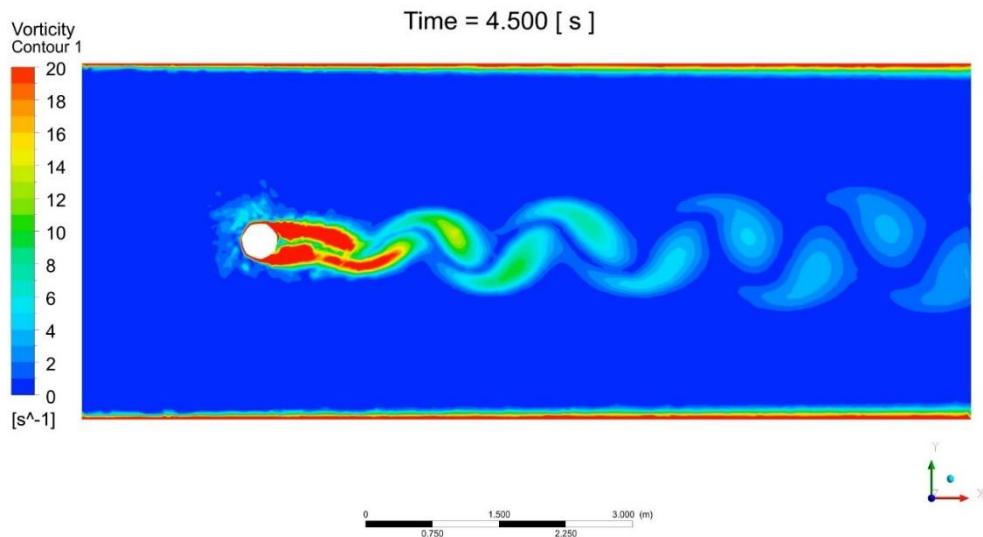


圖 4-72 等寬曲線阻流體於 4.5 s 之模擬結果

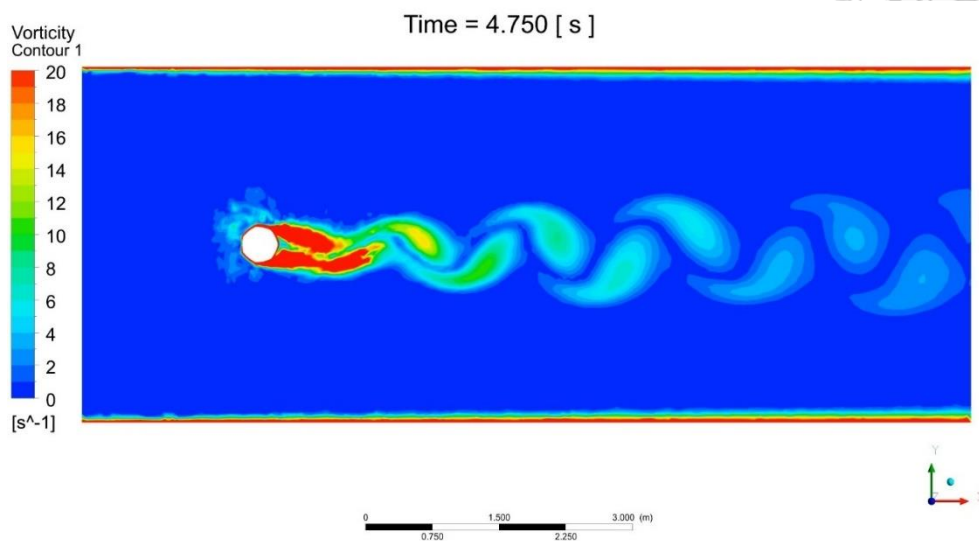


圖 4-73 等寬曲線阻流體於 4.75 s 之模擬結果

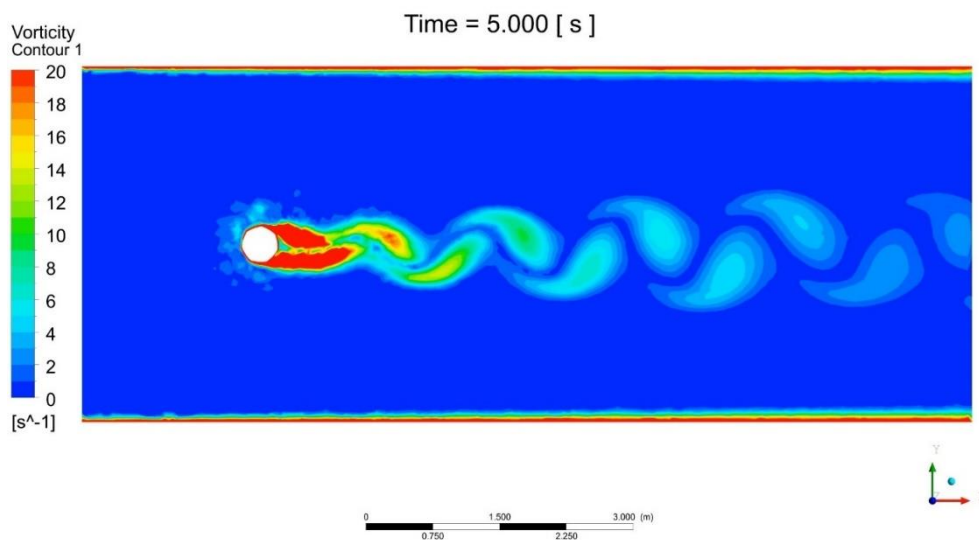


圖 4-74 等寬曲線阻流體於 5 s 之模擬結果



4.3.4 勒洛九邊形

阻流體繞其形心旋轉之模擬結果以四張圖來呈現，分別為模擬時間 4.25 s、4.5 s、4.75 s 與 5 s，如圖 4-75 至圖 4-78 所示。由結果可計算出頻率為 3.125，而斯特勞哈爾數為 0.25。

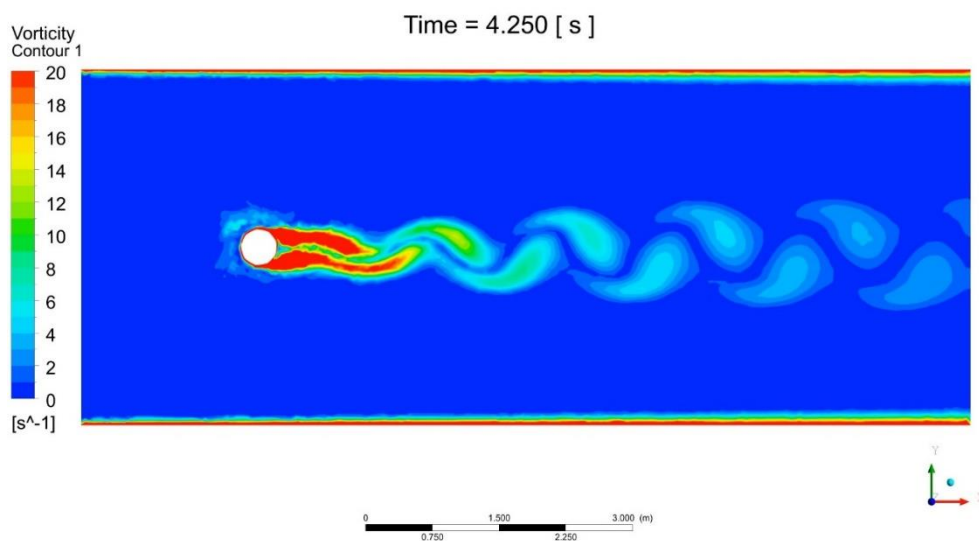


圖 4-75 阻流體繞其形心旋轉於 4.25 s 之模擬結果

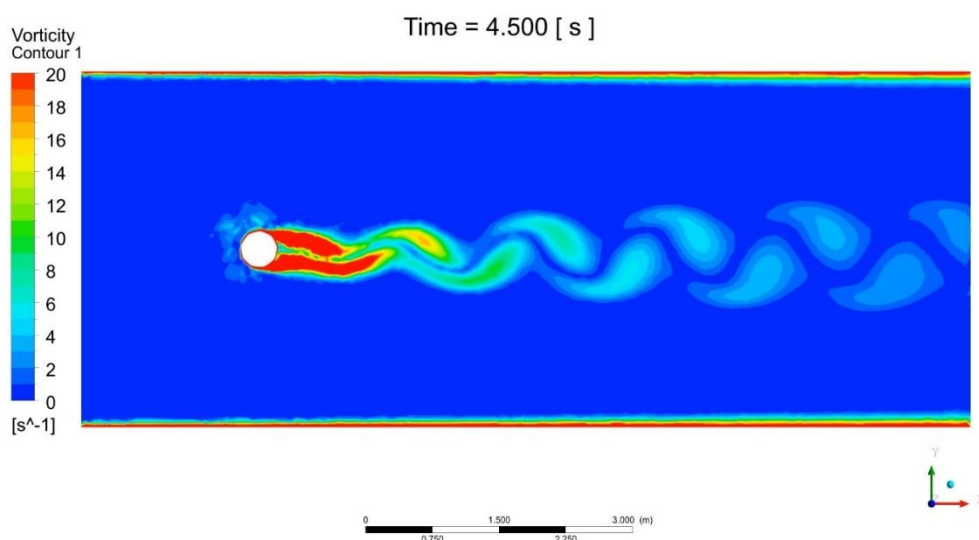


圖 4-76 阻流體繞其形心旋轉於 4.5 s 之模擬結果

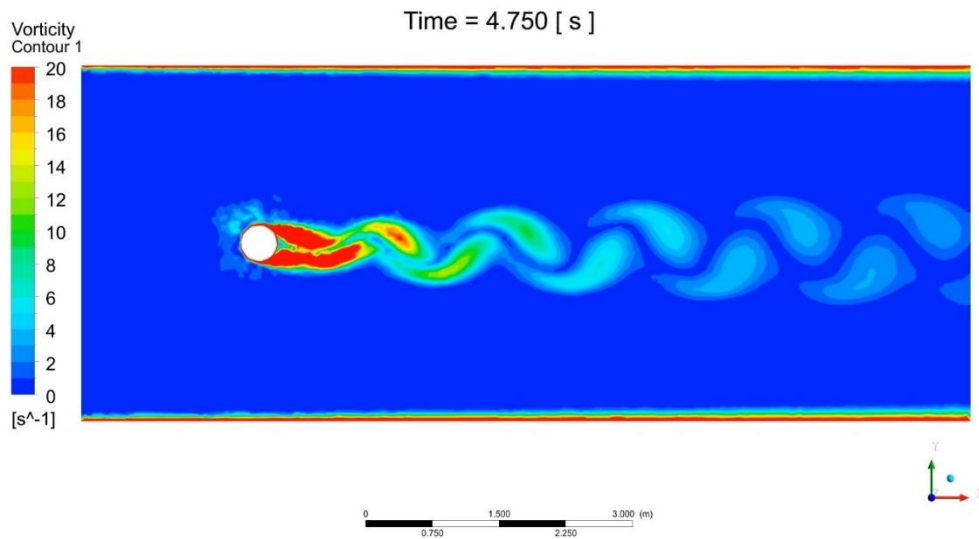


圖 4-77 阻流體繞其形心旋轉於 4.75 s 之模擬結果

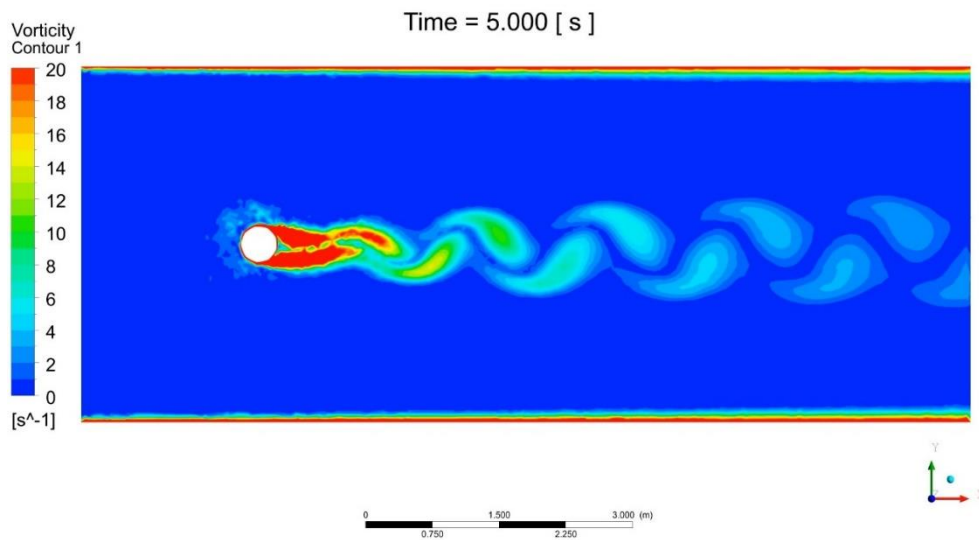


圖 4-78 阻流體繞其形心旋轉於 5 s 之模擬結果

等寬曲線阻流體之模擬結果以四張圖來呈現，分別為模擬時間 4.25 s、4.5 s、4.75 s 與 5 s，如圖 4-79 至圖 4-82 所示。由結果可計算出頻率為 3.125，而斯特勞哈爾數為 0.25。

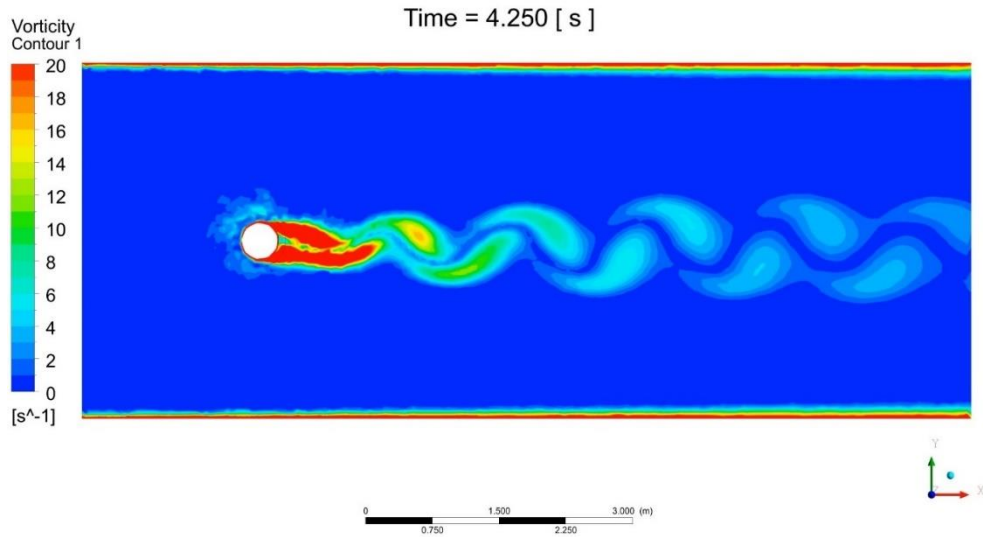


圖 4-79 等寬曲線阻流體於 4.25 s 之模擬結果

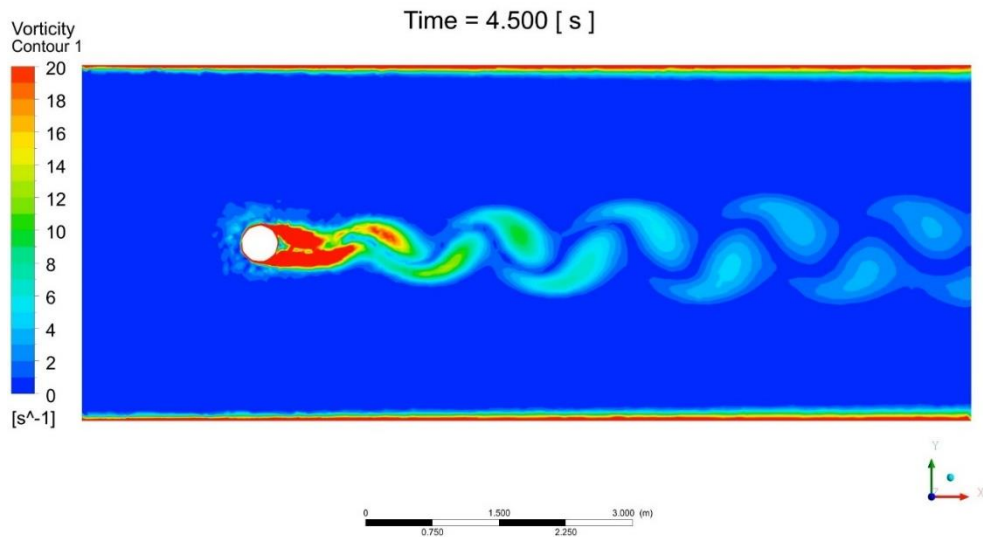


圖 4-80 等寬曲線阻流體於 4.5 s 之模擬結果

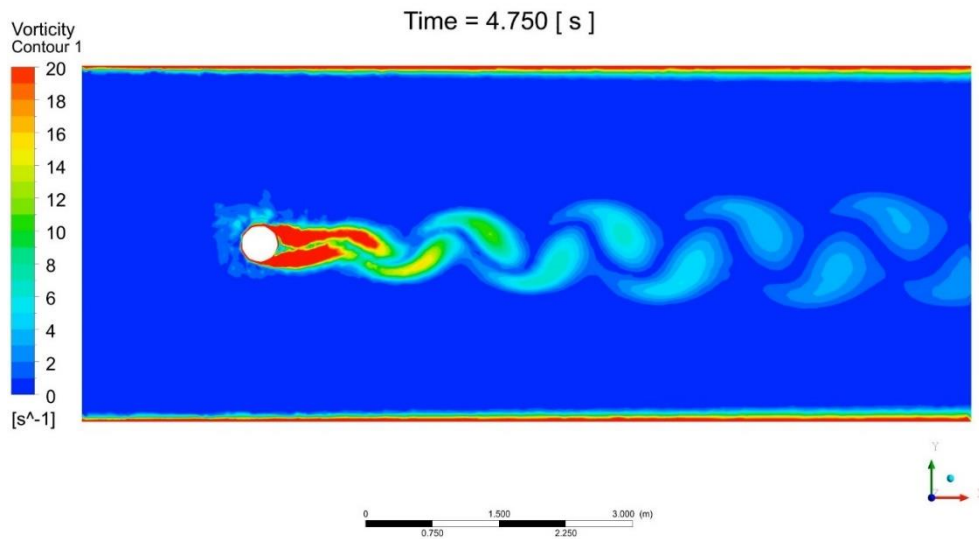


圖 4-81 等寬曲線阻流體於 4.75 s 之模擬結果

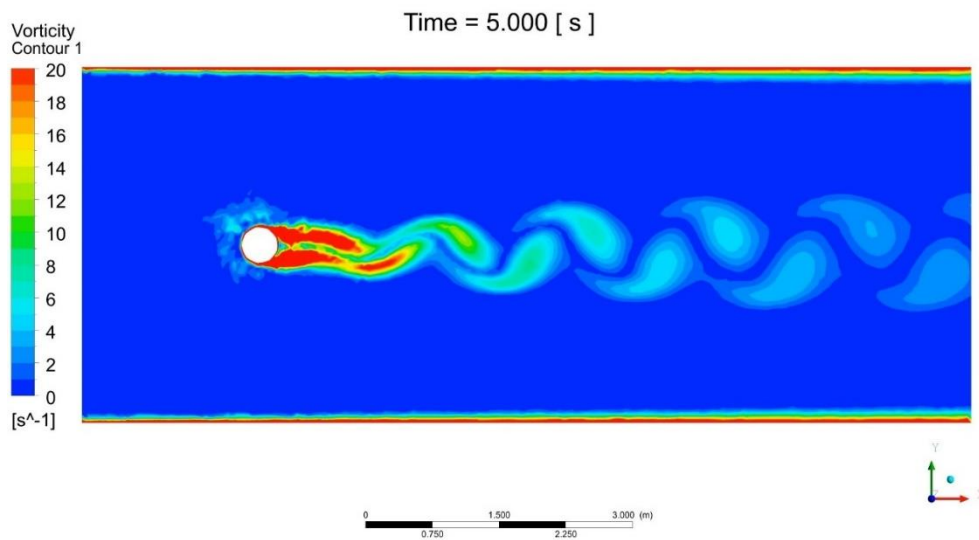


圖 4-82 等寬曲線阻流體於 5 s 之模擬結果



4.3.5 模擬結果比較

將 4.3.1 節至 4.3.4 節之模擬結果整理成表 4-3 與圖 4-83。

表 4-3 4.3 節模擬結果比較表

邊數	勒洛多邊形			
	純旋轉		平移且旋轉	
	f (1/s)	St	f (1/s)	St
3	2.7778	0.2222	2.8169	0.2254
5	2.9412	0.2353	2.9412	0.2353
7	3.0303	0.2424	3.0303	0.2424
9	3.1250	0.2500	3.1250	0.2500

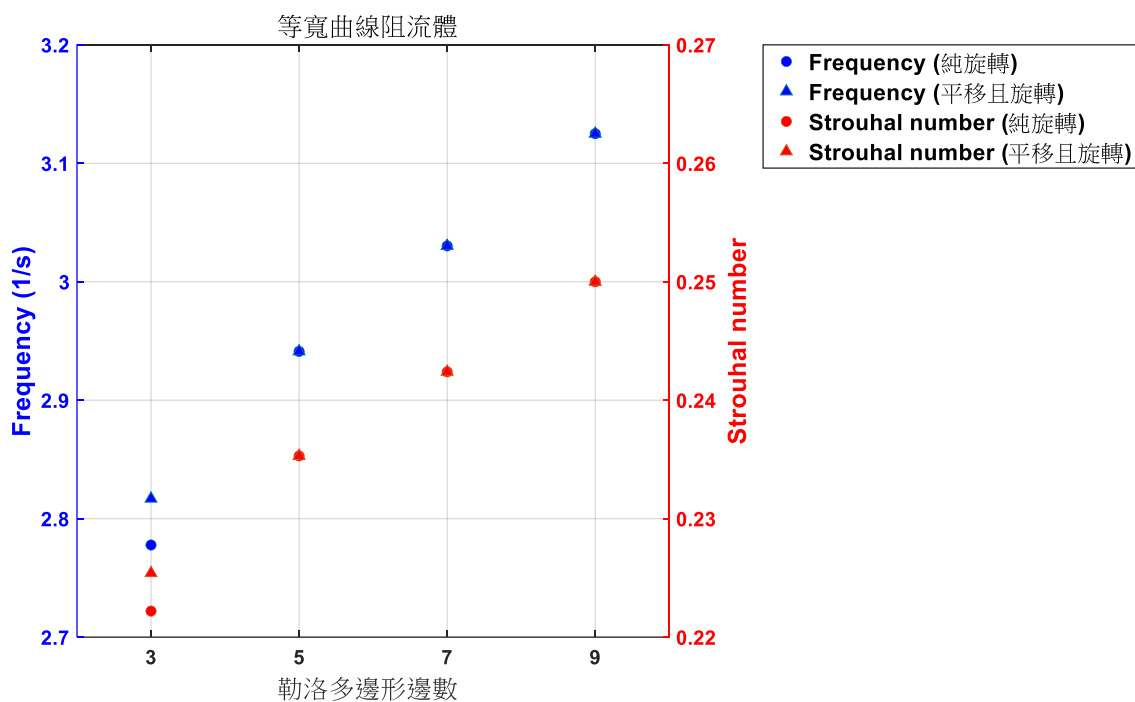


圖 4-83 4.3 節模擬結果之頻率與斯特勞哈爾數散佈圖



由模擬結果可以看出，當勒洛多邊形平移且旋轉時，與 4.2 節的結論相同，其後方產生的渦街會比較低，跟旋轉的方向有關。與 4.2 節之模擬結果比較，除了勒洛三邊形外，勒洛五邊形、勒洛七邊形與勒洛九邊形在純旋轉與平移且旋轉的條件下，其後方產生的漩渦頻率與斯勞哈爾數皆相同，推測造成此結果的原因與阻流體平移的距離有關。由式(4-3)、式(4-7)、式(4-11)與式(4-15)可知，各個勒洛多邊形平移的最大距離分別為 0.0309 m、0.0103 m、0.00514 m 與 0.00309 m，當勒洛多邊形的邊數愈多，其平移的最大距離愈短，且輪廓會愈接近圓形；而勒洛三邊形只由三個圓弧連接而成，相較於其他邊數的勒洛多邊形，其影響流體流動的能力較強，且平移的最大距離也較大，所以才造成其後方產生的漩渦頻率與斯勞哈爾數在純旋轉與平移且旋轉的條件下有不同的結果。若將流場寬度與阻流體的寬度放大，其平移的距離也會跟著變大，可能就可以從模擬結果觀察出較為明顯的變化。



4.4 渦激振動於可撓固體

在本章中，會在阻流體後方放置一條金屬固體，藉由調整金屬材料的楊氏模數，讓其自然頻率接近渦街產生的頻率，達成共振現象。模擬的流場大小與金屬固體的尺寸如圖 4-84 所示，其中阻流體為固定的勒洛三邊形，Blockage 為 0.1，流體設為空氣，入口流速為 5 m/s，金屬固體材料設為結構鋼，模擬時間為 5 s。

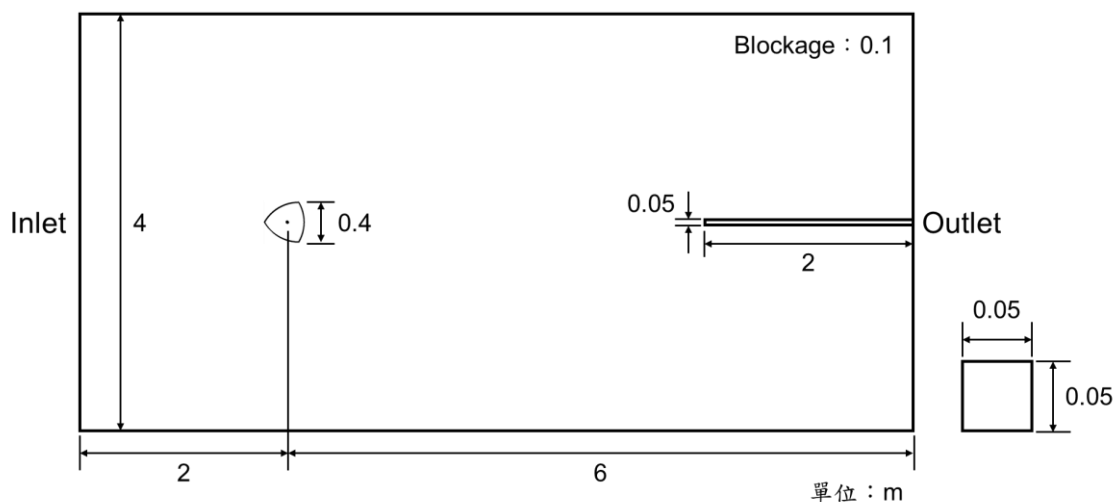


圖 4-84 4.4 節渦激振動模擬之模型示意圖

以下將會使用 Ansys 的流固耦合模組，讓阻流體後方產生的渦街去激發金屬固體的前三個模態。計算懸臂樑自然頻率的公式如式(4-18)所示，其中 $\beta_n l$ 在不同模態下會對應不同的值， l 為懸臂樑的長度， E 為懸臂樑的楊氏模數， I 為懸臂樑截面的面積慣性矩， ρ 為懸臂樑的密度， A 為懸臂樑的截面積。

$$f_n = \frac{(\beta_n l)^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (\text{Hz}) \quad (4-18)$$

由 4.1.1 節中勒洛三邊形的結果可計算出渦街的頻率為 3.2258 Hz，在不改變渦街頻率的條件下，透過設定適合的楊氏模數，讓前三個模態的自然頻率接近渦街的頻率，並加入未修改楊氏模數的第一模態與其比較。以下將計算自然頻率的參數整理於表 4-4，並用 Ansys 進行模態分析，其振形結果如圖 4-85 至圖 4-88 所示。

表 4-4 不同楊氏模數在不同模態下之自然頻率表

Modal	$\beta_n l$	E (GPa)	ρ (kg/m ³)	f (1/s)
1	1.875	200	7850	10.1911
1	1.875	20	7850	3.2227
2	4.694	0.508	7850	3.2190
3	7.855	0.065	7850	3.2244

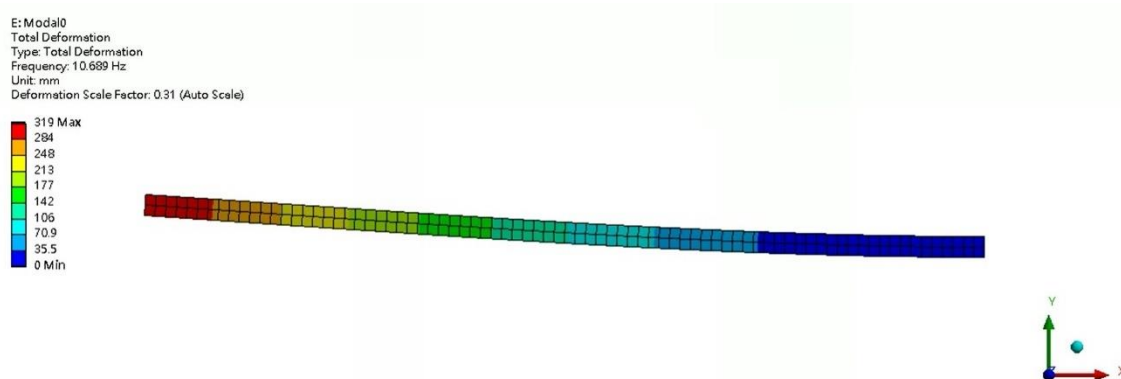


圖 4-85 楊氏模數為 200 GPa 之第一模態振形

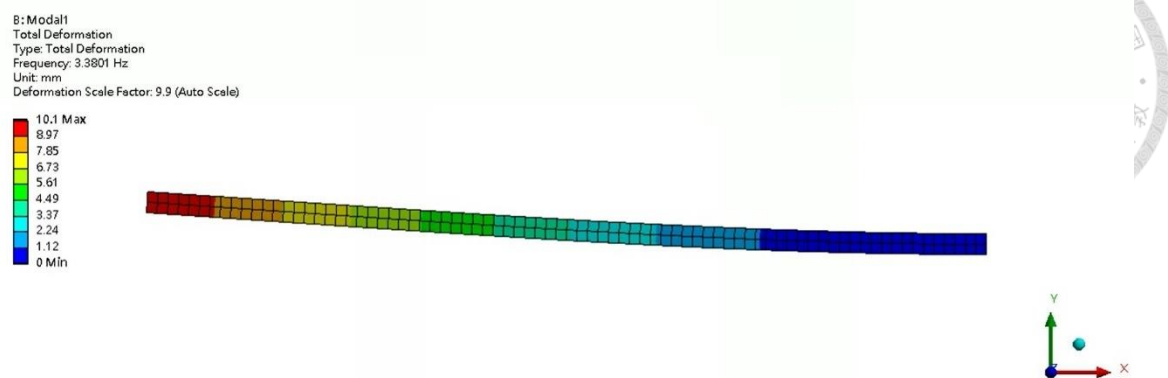


圖 4-86 楊氏模數為 20 GPa 之第一模態振形

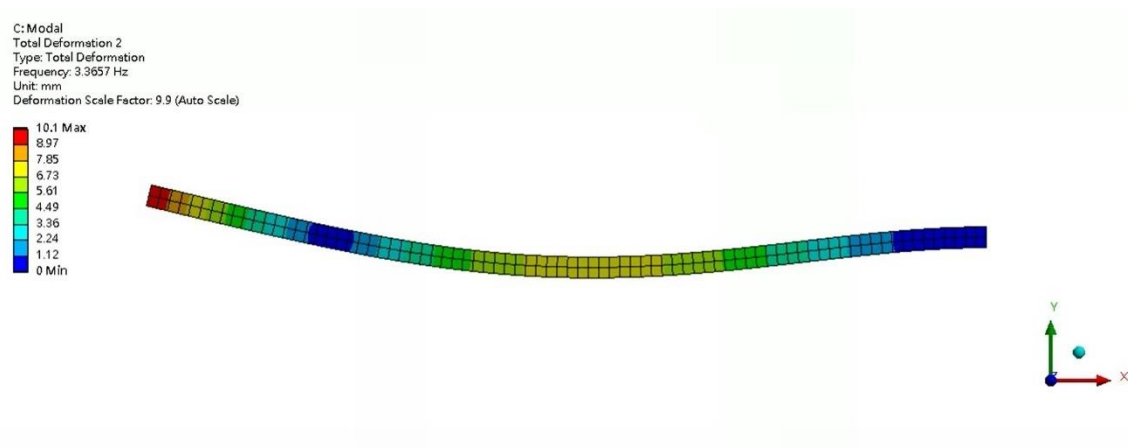


圖 4-87 楊氏模數為 0.508 GPa 之第二模態振形

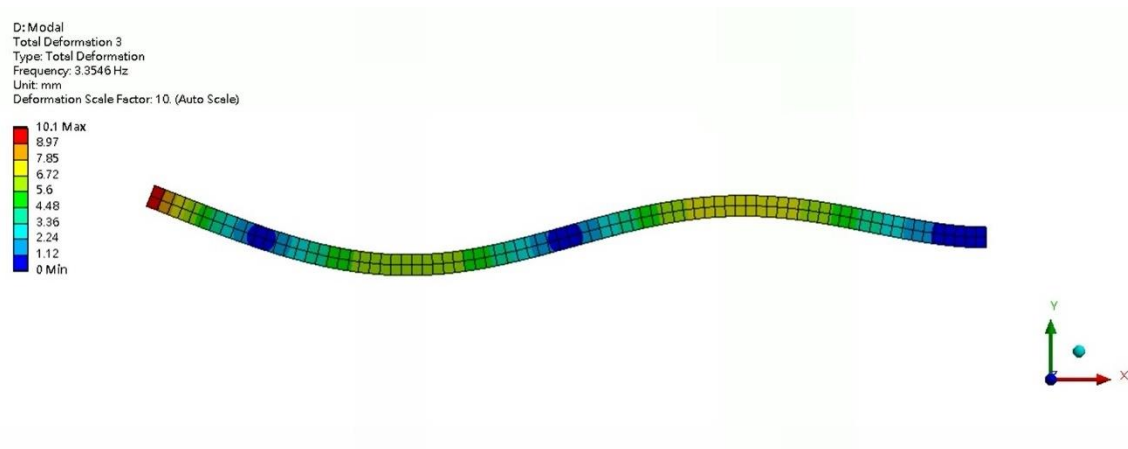


圖 4-88 楊氏模數為 0.065 GPa 之第三模態振形

1. 第一模態 (無共振)

將結構鋼的楊氏模數設為 200 GPa，其第一模態的自然頻率為 10.1911 Hz，與渦街的頻率差了 3 倍左右。流場的模擬結果如圖 4-89 所示，由結果計算渦街的頻率一樣為 3.2258 Hz；固體的變形結果如圖 4-90 所示，最大位移為 0.0086 mm，振形與圖 4-85 之模態分析結果一致；固體的應變結果如圖 4-91 所示，最大應變為 1.91×10^{-7} ；固體的應力結果如圖 4-92 所示，最大應力為 0.0381 MPa。從結果來看，由於渦街的頻率不夠接近固體的自然頻率，無法造成共振現象，因此固體的變形量非常小，需要將結果放大到 10000 倍才能看到固體有明顯的變形。

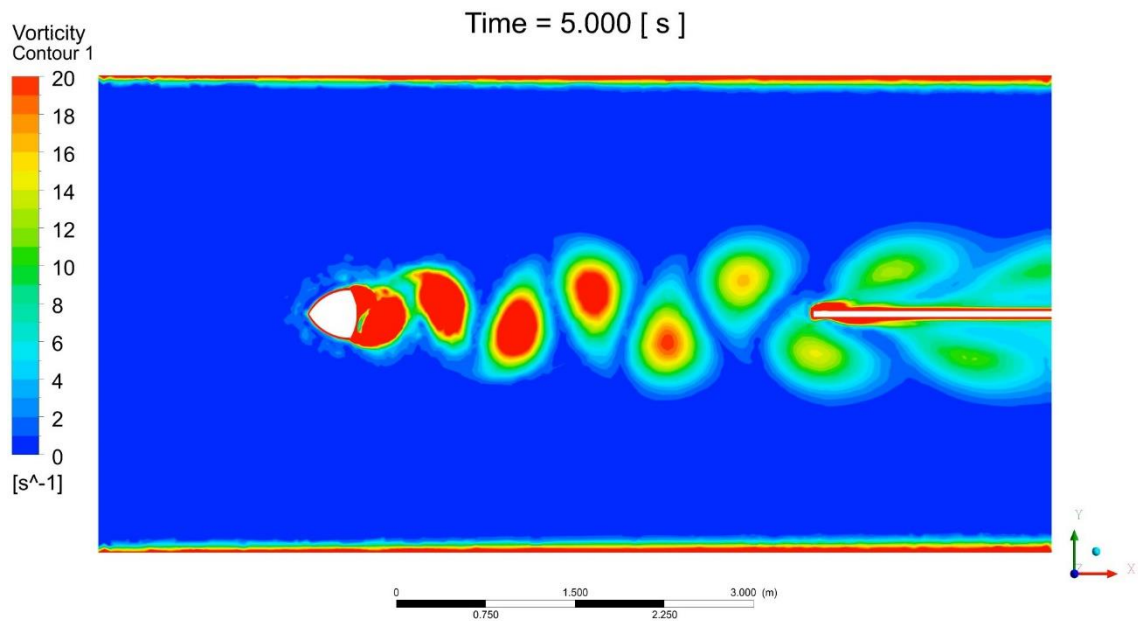


圖 4-89 渦激振動模擬之流場結果

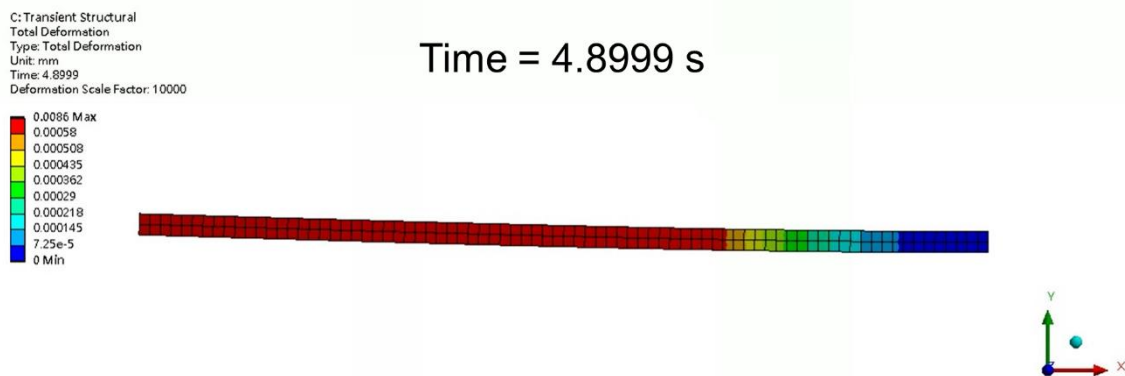


圖 4-90 渦激振動模擬之固體變形結果

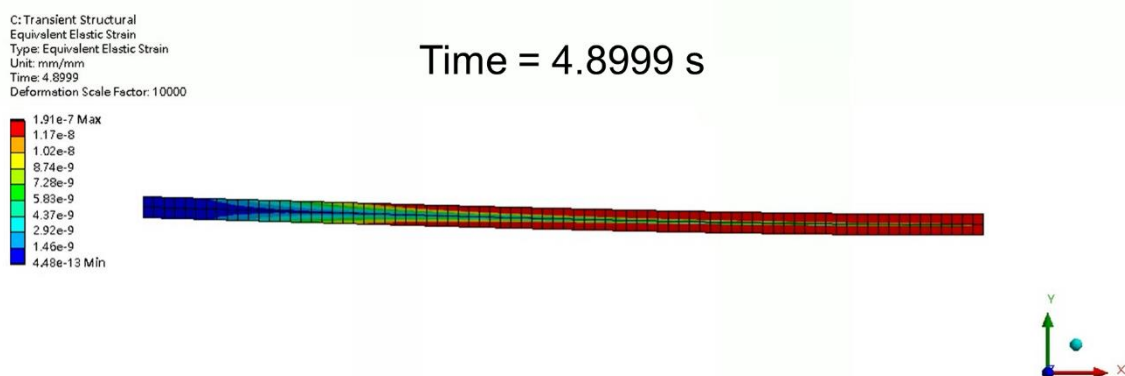


圖 4-91 渦激振動模擬之固體應變結果

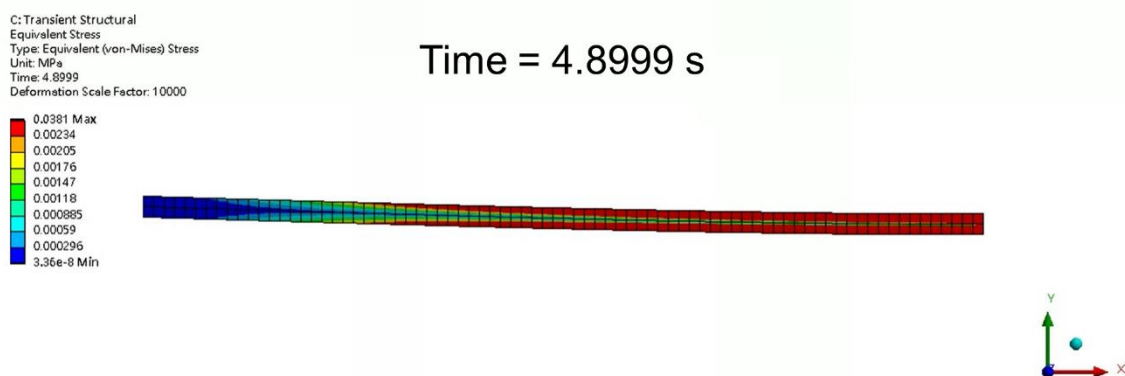


圖 4-92 渦激振動模擬之固體應力結果

2. 第一模態 (有共振)

將結構鋼的楊氏模數設為 20 GPa，其第一模態的自然頻率為 3.2227 Hz，非常接近渦街的頻率。流場的模擬結果如圖 4-93 所示，由結果計算渦街的頻率一樣為 3.2258 Hz；固體的變形結果如圖 4-94 所示，最大位移為 1.64 mm，振形與圖 4-86 之模態分析結果一致；固體的應變結果如圖 4-95 所示，最大應變為 3.8×10^{-5} ；固體的應力結果如圖 4-96 所示，最大應力為 0.758 MPa。從結果來看，由於渦街的頻率非常接近固體的自然頻率，造成了共振現象，因此固體的變形量與沒共振時相比大了 190 倍左右，只需將結果放大到 100 倍就能看到固體有明顯的變形。

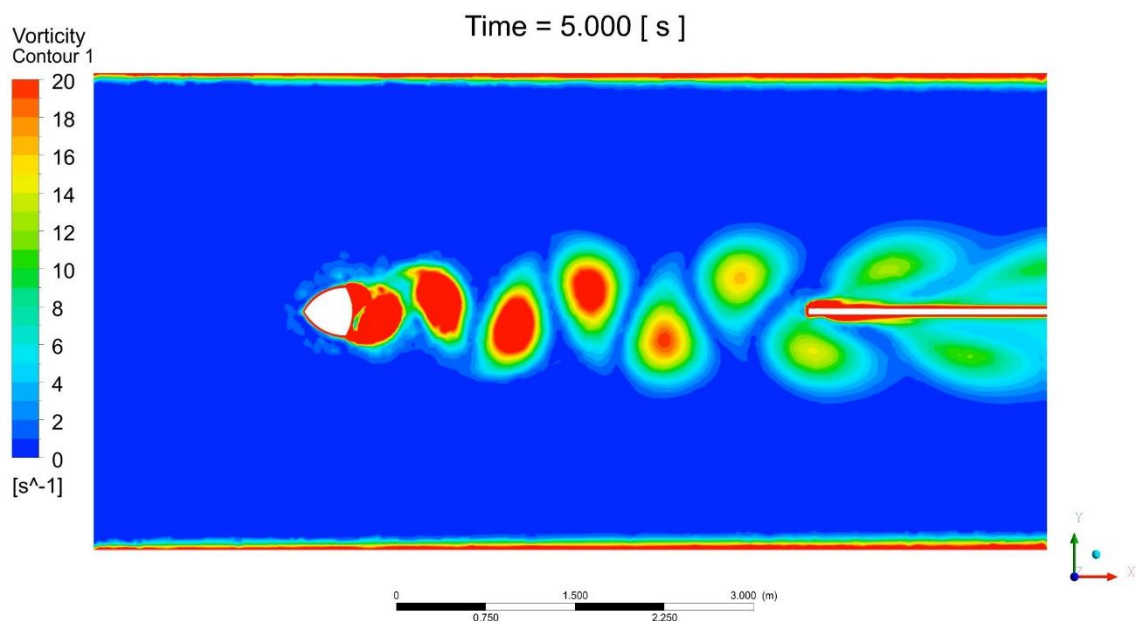


圖 4-93 渦激振動模擬之流場結果

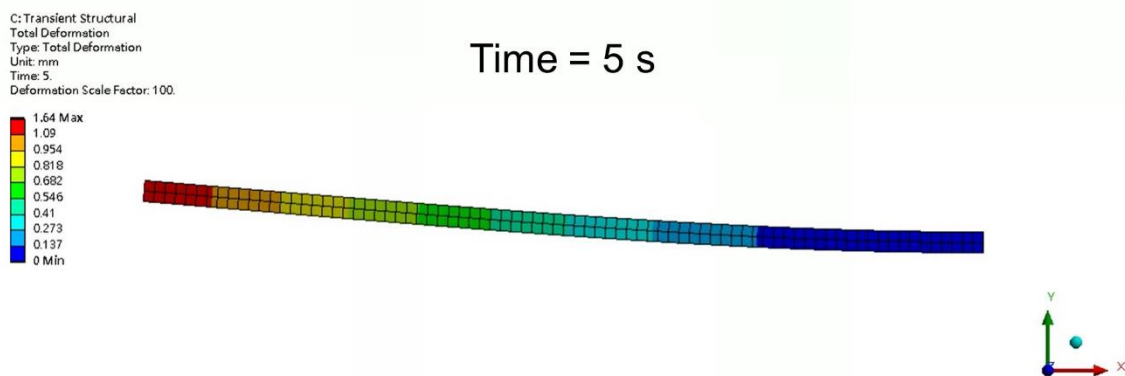


圖 4-94 渦激振動模擬之固體變形結果

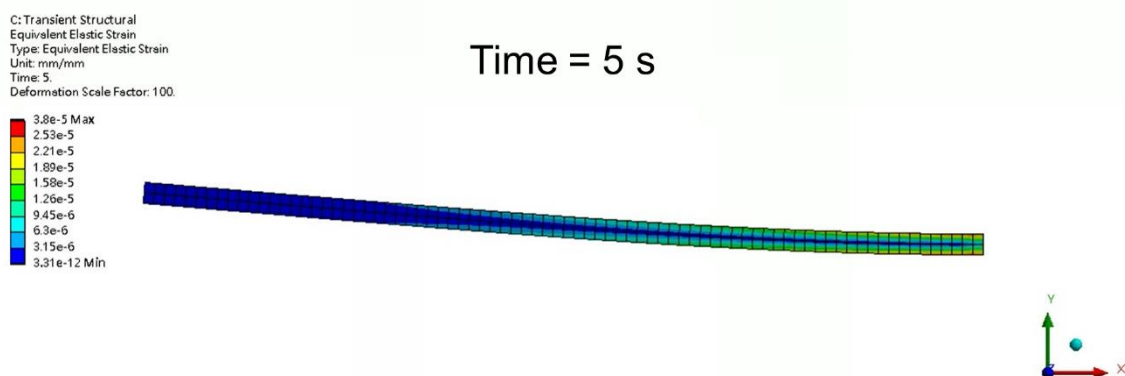


圖 4-95 渦激振動模擬之固體應變結果

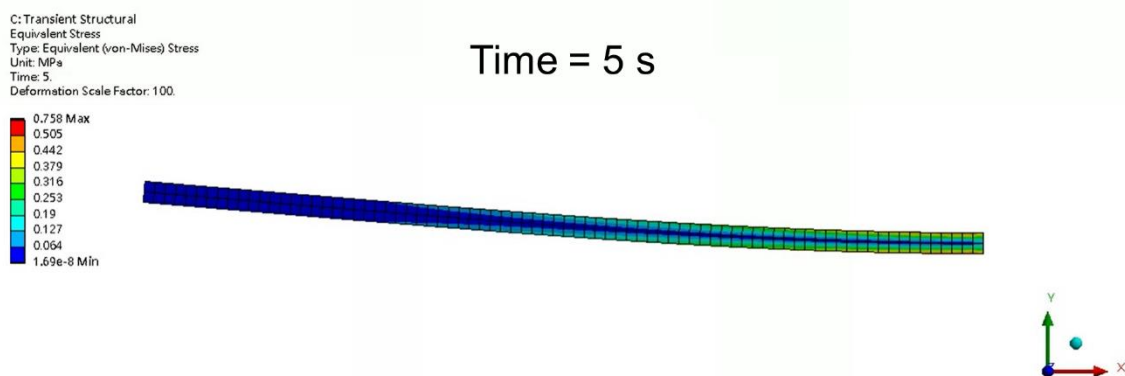


圖 4-96 渦激振動模擬之固體應力結果

3. 第二模態 (有共振)

將結構鋼的楊氏模數設為 0.508 GPa，其第二模態的自然頻率為 3.219 Hz，大致接近渦街的頻率。流場的模擬結果如圖 4-97 所示，由結果計算渦街的頻率一樣為 3.2258 Hz；固體的變形結果如圖 4-98 所示，最大位移為 0.665 mm，振形與圖 4-87 之模態分析結果一致；固體的應變結果如圖 4-99 所示，最大應變為 8.38×10^{-5} ；固體的應力結果如圖 4-100 所示，最大應力為 0.0425 MPa。從結果來看，由於渦街的頻率大致接近固體的自然頻率，造成了共振現象，因此固體的變形結果放大到 150 倍就能看到明顯的變形。

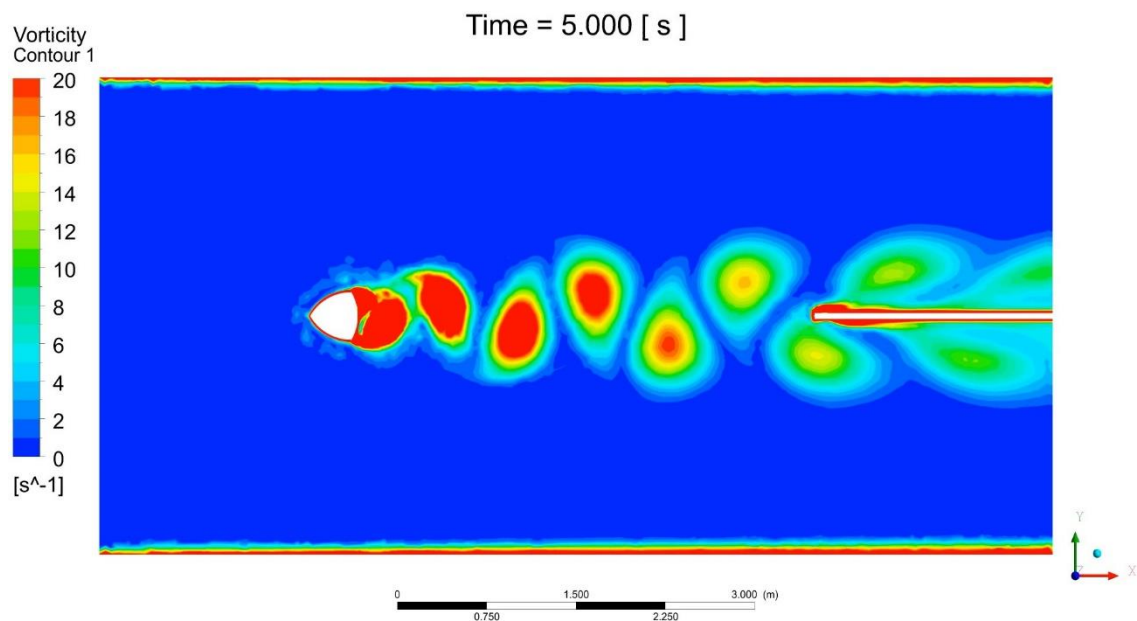


圖 4-97 渦激振動模擬之流場結果

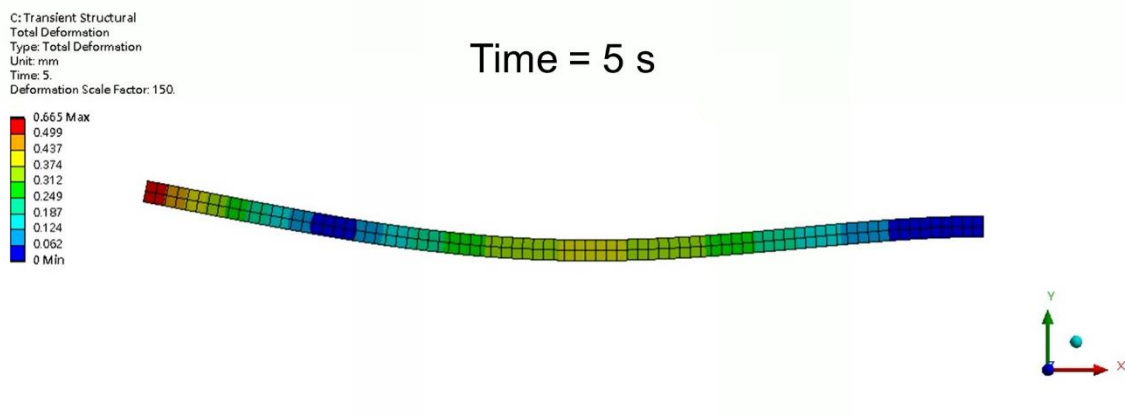


圖 4-98 渦激振動模擬之固體變形結果

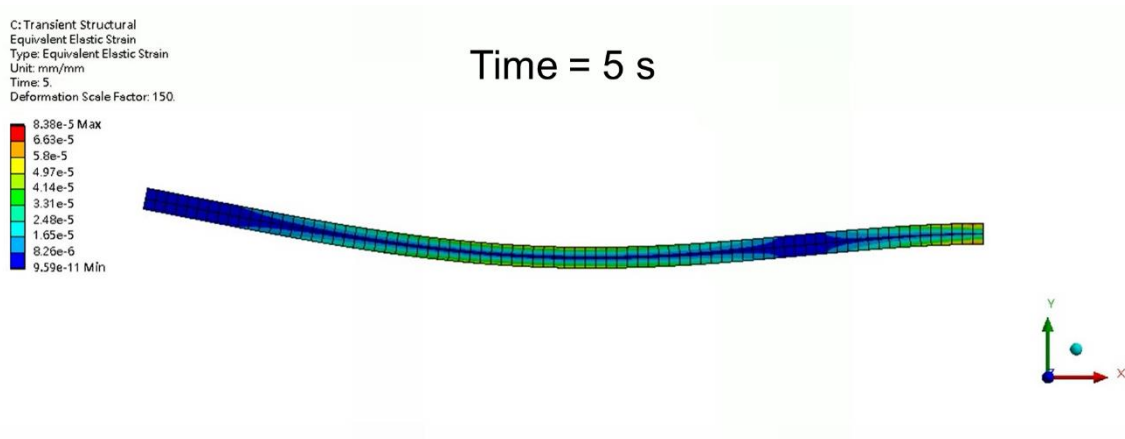


圖 4-99 渦激振動模擬之固體應變結果

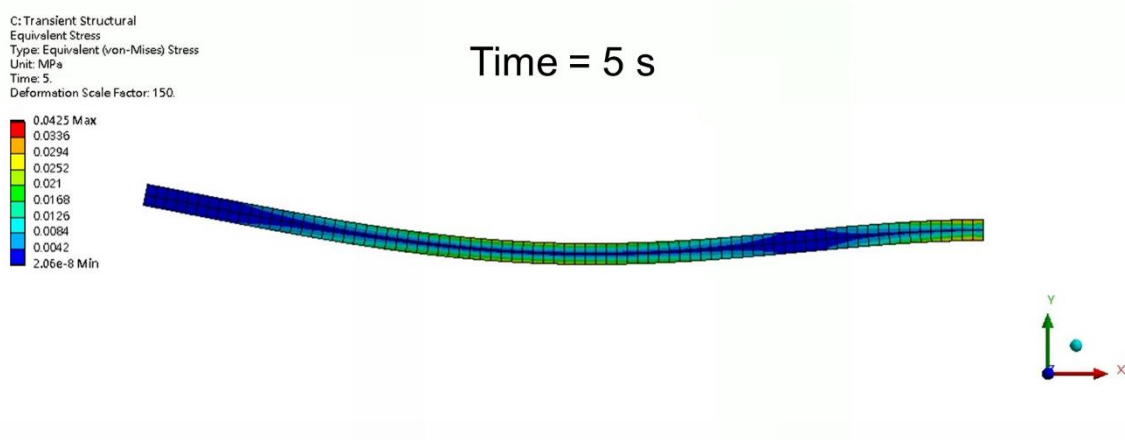


圖 4-100 渦激振動模擬之固體應力結果

4. 第三模態 (有共振)

將結構鋼的楊氏模數設為 0.065 GPa，其第三模態的自然頻率為 3.2244 Hz，非常接近渦街的頻率。流場的模擬結果如圖 4-101 所示，由結果計算渦街的頻率一樣為 3.2258 Hz；固體的變形結果如圖 4-102 所示，最大位移為 0.752 mm，振形與圖 4-88 之模態分析結果一致；固體的應變結果如圖 4-103 所示，最大應變為 1.67×10^{-4} ；固體的應力結果如圖 4-104 所示，最大應力為 0.0109 MPa。從結果來看，由於渦街的頻率非常接近固體的自然頻率，造成了共振現象，因此固體的變形結果放大到 150 倍就能看到明顯的變形。

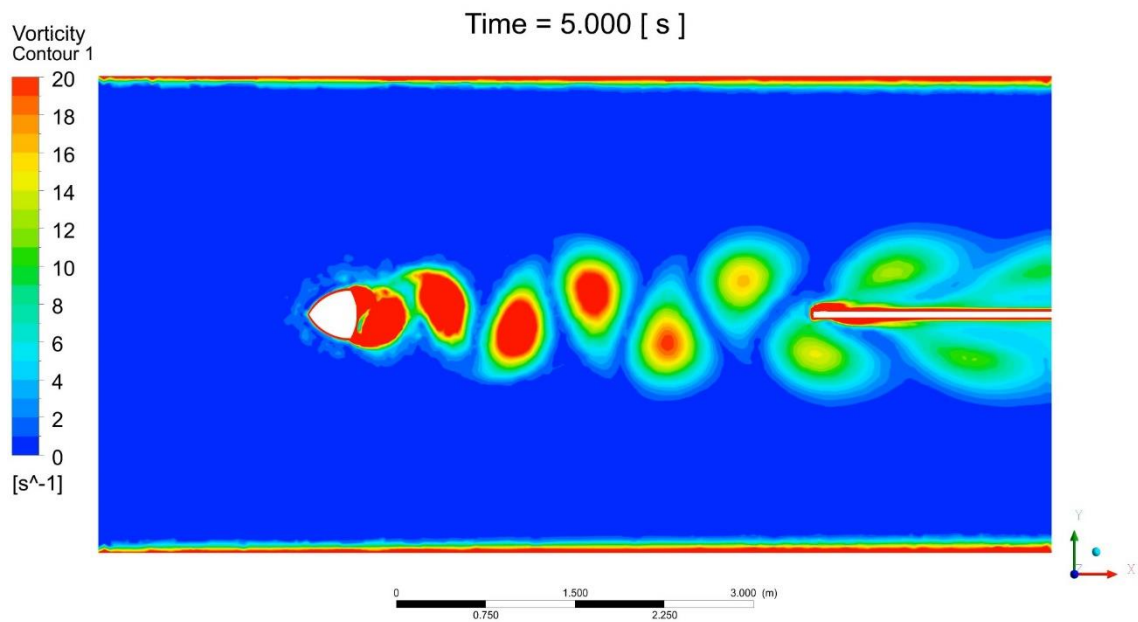


圖 4-101 渦激振動模擬之流場結果

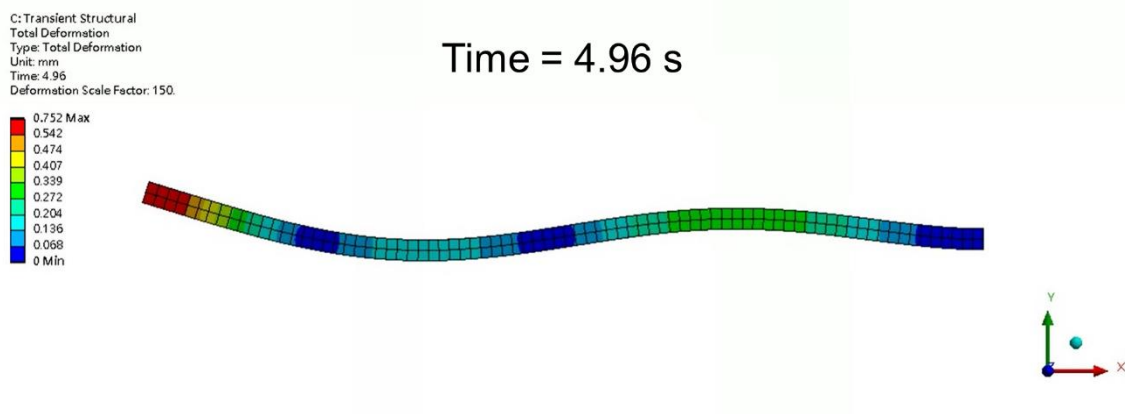


圖 4-102 渦激振動模擬之固體變形結果

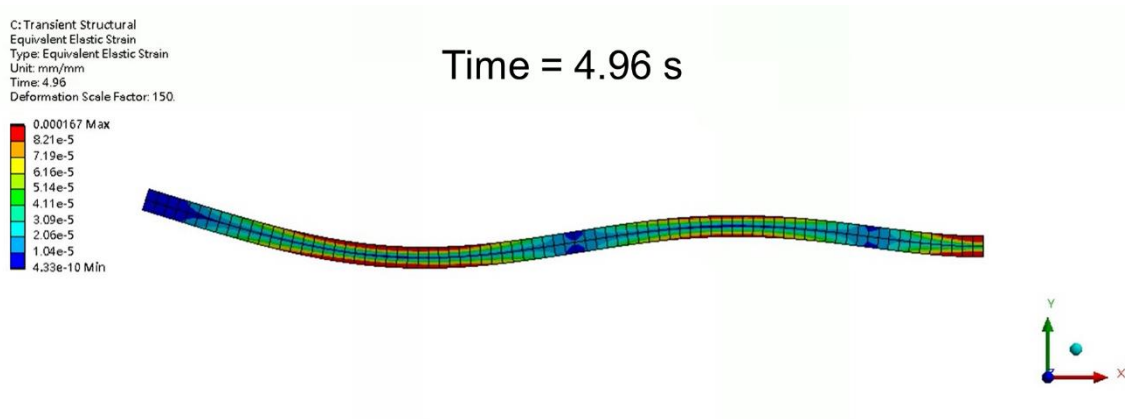


圖 4-103 渦激振動模擬之固體應變結果

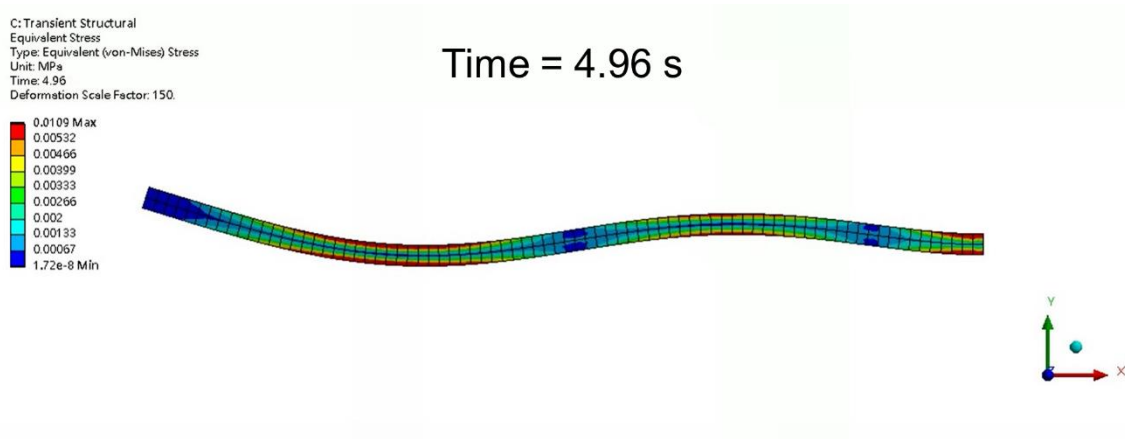


圖 4-104 渦激振動模擬之固體應力結果

第五章 結論與未來展望



5.1 結論

本研究之結論主要可以分成兩部分：在論文前半段，以有限差分法為基礎，成功自行開發出用於求解 Navier-Stokes 方程式的流體求解器，透過修改系統矩陣以建立矩形剛體區域，並進行不同矩形大小的繞流模擬。對於流場在不同的環境條件下，如：固定流速與流體性質、固定雷諾數與流體性質，藉由一系列的模擬，探討改變矩形的大小對其後方產生的漩渦頻率、斯特勞哈爾數、渦度以及漩渦大小有何影響，並得出漩渦頻率與矩形大小之間的關聯性，對於矩形剛體繞流模擬之矩形大小的選用提供了選擇方向；在論文後半段，改以商用軟體 Ansys 進行繞流模擬，阻流體選擇正多邊形與勒洛多邊形。藉由改變阻流體的移動方式，如：固定阻流體、阻流體繞其形心旋轉以及阻流體同時平移且旋轉，探討在這些情況下，對阻流體後方產生的漩渦有何影響。由模擬結果可知，當阻流體為勒洛多邊形時，其後方產生的漩渦會比阻流體為正多邊形時還要小，且阻流體進行旋轉運動時，其後方產生的渦街會有偏移的現象。最後則是用 Ansys 的流固耦合模組，將金屬固體放置於阻流體後方，藉由阻流體後方產生的漩渦來激發金屬固體的共振現象。由模擬結果可以看出，當漩渦頻率接近不同金屬固體在第一模態、第二模態與第三模態下的自然頻率時，皆能成功造成共振現象，且金屬固體的振形皆與模態分析的振形結果一致。

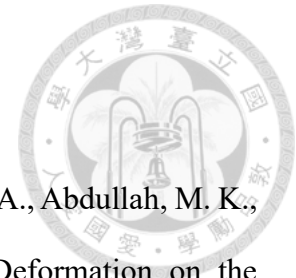


5.2 未來展望

本研究以有限差分法為基礎，建立出用於求解 Navier-Stokes 方程式的流體求解器，可透過修改系統矩陣以建立剛體區域。在本研究中只建立了矩形剛體區域，未來若想建立其他形狀的剛體區域，如：正多邊形、勒洛多邊形或是其他不規則形狀，都可以透過修改系統矩陣的方式來達成。

在使用商用軟體 Ansys 進行繞流模擬中，本研究只探討了在固定的入口流速與阻流體的轉速下，改變不同阻流體的形狀時，對其後方產生的漩渦有何影響。未來可以深入探討在固定同一種阻流體的條件下，透過調整不同的入口流速與阻流體的轉速，看是否可以找出此兩者與其後方產生的漩渦頻率之關聯性，並將此結果應用於渦激振動之阻流體上，即可在不改變阻流體的情況下，只需調整入口流速與阻流體的轉速，即能準確地達成控制漩渦頻率之目標值。

參考文獻

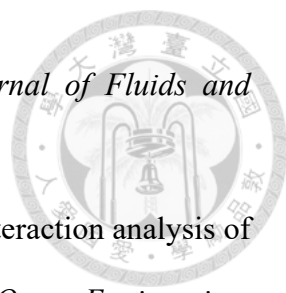


- [1] Fairuz, Z. M., Abdullah, M. Z., Zubair, M., Abdul Mujeebu, M. A., Abdullah, M. K., Yusoff, H. & Abdul Aziz, M. S. (2016). Effect of Wing Deformation on the Aerodynamic Performance of Flapping Wings: Fluid-Structure Interaction Approach. *Journal of Aerospace Engineering*, 29(4).
- [2] Garalli, L., Paz, R. R. & Storti, M. A. (2010). Fluid–structure interaction study of the start-up of a rocket engine nozzle. *Computers & Fluids*, 39(7), 1208-1218.
- [3] Hsu, M. C. & Bazilevs, Y. (2011). Blood vessel tissue prestress modeling for vascular fluid–structure interaction simulation. *Finite Elements in Analysis and Design*, 47(6), 593-599.
- [4] Huang, S., Li, R. & Li, Q. S. (2013). Numerical simulation on fluid-structure interaction of wind around super-tall building at high Reynolds number conditions. *Structural Engineering and Mechanics*, 46(2), 197-212.
- [5] Lee, J. H., Rygg, A. D., Kolahdouz, E. M., Rossi, S., Retta, S. M., Duraiswamy, N., Scotten, L. N., Craven, B. A. & Griffith, B. E. (2020). Fluid–Structure Interaction Models of Bioprosthetic Heart Valve Dynamics in an Experimental Pulse Duplicator. *Annals of Biomedical Engineering*, 48(5), 1475-1490.
- [6] Liu, H., Xu, H., Ellison, P. J. & Jin, Z. (2010). Application of Computational Fluid Dynamics and Fluid–Structure Interaction Method to the Lubrication Study of a Rotor–Bearing System. *Tribology Letters*, 38, 325-336.
- [7] Ma, S. & Mahfuz, H. (2012). Finite element simulation of composite ship structures with fluid structure interaction. *Ocean Engineering*, 52, 52-59.
- [8] Manzoor, R., Mushtaq, S., Nadeem, N., Perveen, S. Kalsoom, S., Naeem, A. & Akbar, R. (2023). Numerical investigation of flow past a triangular cylinder at



- various Reynolds numbers. *Physics of Fluids*, 35, 124101.
- [9] Mukhopadhyay, A., Biswas, G. & Sundararajan T. (1992). Numerical investigation of confined wakes behind a square cylinder in a channel. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 14(12), 1473-1484.
- [10] Richter, T. (2013). A Fully Eulerian formulation for fluid–structure-interaction problems. *Journal of Computational Physics*, 233, 227-240.
- [11] Saha, A. K., Biswas, G. & Muralidhar, K. (2003). Three-dimensional study of flow past a square cylinder at low Reynolds numbers. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 24(1), 54-66.
- [12] Sangalli, L. A. & Braun, A. L. (2020). A fluid-structure interaction model for numerical simulation of bridge flutter using sectional models with active control devices. Preliminary results. *Journal of Sound and Vibration*, 477, 115338.
- [13] Seibold, B. (2008). A compact and fast Matlab code solving the incompressible Navier-Stokes equations on rectangular domains mit18086_navierstokes.m. Massachusetts Institute of Technology.
- [14] Sen, S. & Mittal, S. (2011). Free vibration of a square cylinder at low Reynolds numbers. *Journal of Fluids and Structures*, 27(5-6), 875-884.
- [15] Singh, A. P., DE, A. K., Carpenter, V. K., Eswaran, V. & Muralidhar, K. (2009). Flow past a transversely oscillating square cylinder in free stream at low Reynolds numbers. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 61(6), 658-682.
- [16] Sohankar, A., Norberg, C. & Davidson, L. (1998). Low-Reynolds-number flow around a square cylinder at incidence : study of blockage, onset of vortex shedding and outlet boundary condition. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 26(1), 39-56.
- [17] Sun, Y., Xi, G. & Sun, Z. (2019). A fully Lagrangian method for fluid–structure

interaction problems with deformable floating structure. *Journal of Fluids and Structures*, 90, 379-395.

- 
- [18] Tian, Z., Liu, F., Zhou, L. & Yuan, C. (2020). Fluid-structure interaction analysis of offshore structures based on separation of transferred responses. *Ocean Engineering*, 195, 106598.
- [19] Tian, Z. W. & Wu, Z. N. (2009). A study of two-dimensional flow past regular polygons via conformal mapping. *Journal of Fluid Mechanics*, 628, 121-154.
- [20] UI Islam, S., Zhou, C. Y., Shah, A. & Xie, P. (2012). Numerical simulation of flow past rectangular cylinders with different aspect ratios using the incompressible lattice Boltzmann method. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 26, 1027-1041.
- [21] Wick, T. (2013). Coupling of fully Eulerian and arbitrary Lagrangian–Eulerian methods for fluid-structure interaction computations. *Computational Mechanics*, 52, 1113-1124.
- [22] Xu, K., Zhao, L. & Ge, Y. (2017). Reduced-order modeling and calculation of vortex-induced vibration for large-span bridges. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 167, 228-241.
- [23] Yan, B., Ren, H., Li, D., Yuan, Y., Li, K. & Yang, Q. (2022). Numerical Simulation for Vortex-Induced Vibration (VIV) of a High-Rise Building Based on Two-Way Coupled Fluid-Structure Interaction Method. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 22(3&4).
- [24] Yang, Z., Yang, C., Zhao, J. & Wu, Z. (2022). Fluid–Structure Interaction Dynamic Response of Rocket Fairing in Falling Phase. *Aerospace*, 9(12), 741.