

國立臺灣大學工學院機械工程學研究所

碩士論文

Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master's Thesis



考慮不確定性於熱固耦合機械尖峰反應之
解析力學研究

Analytical Mechanics Study on Thermo-Solid Coupled
Mechanical Peak Response under Uncertainty

陳宇揚

Yu-Yang Chen

指導教授：王建凱 博士

Advisor: Chien-Kai Wang, Ph.D.

中華民國 114 年 7 月

July 2025

誌謝



在歲月的長河中，我常覺得自己如一塊帶著棱角的石子，渾身充滿未竟的疑問與不安，被世界推擠著前行。然而，是王建凱老師——我最敬重的指導教授——看見了我身上的光，也願意陪我一同挖掘它。老師不僅在學術上傾囊相授，帶我在知識的深處穿梭探索，更在我北上求學築夢的旅途中，給予我難以言喻的支持與庇護。在我徘徊於青春邊界、掙扎於自我懷疑的時刻，是老師站在我身後，讓我知道我不是一個人。在性格與理念上，老師從未試圖磨平我的邊緣，反而以開闊的心胸與堅定的信任，包容我那些與眾不同的思維與表達。他從未強迫我成為誰，只是默默給予理解與空間，讓我在懷疑與掙扎中，仍能擁抱真實的自己，勇敢走在屬於我自己的道路上。這份接納、理解與提攜，於我而言更是人生中難能可貴的溫柔力量。我將這份深沉的恩情銘刻於心，並期許自己，有朝一日也能成為他人生命中那道穩定的光。

感謝實驗室的夥伴們，季鴻、智翔、唯哲以及思齊、詩庭、家鈺、昱翰、曉瑄、俊丞、嘉允，謝謝你們在這段旅程中始終如一地陪伴與砥礪。在日復一日的研究節奏中，我們或許各自忙碌步調不同，卻總能在關鍵時刻彼此提醒、適時鼓勵。即使話語不多，但那份心意，也成為我持續前行的重要支撐。在困難來臨時，是你們讓我知道，學術的道路雖不總是熱鬧喧譁，卻不必孤單；在迷惘中，是你們的堅持與專注提醒我，也要繼續相信自己的節奏與方向。

感謝口試委員老師們，董奕鍾老師、陳壁彰老師、劉建豪老師、吳筱梅老師撥冗審閱並提供寶貴的建議與意見，協助我充實研究內容、釐清問題核心、提升論文品質。各位老師的提問與建議不僅拓展了我的研究視野，也讓我思考更為縝密，深感榮幸與感激。

此外，我也想特別感謝一位與我一同從成大北上求學的老同學傑升。從南方的校園到台北的實驗室，我們肩並肩走過青春的轉折點，也共同見證彼此從懵懂學生蛻變為獨立思考的研究者。在人生地不熟的起點，你的存在讓我不那麼孤單。從大



學時期報告前的相互打氣，到碩班時深夜討論研究的片段，再到生活中那些無聲的陪伴與偶爾的吐槽，這些平凡的日子，如今回首，都是我最珍貴的記憶。謝謝你陪我走過這段不易的旅程。在理性與感性交錯的研究歲月裡，有你作伴，是一種踏實的幸運，也是一段我會深藏心底的情誼。

最後，我想將最深、最誠摯的感謝獻給我的父母。謝謝你們從未向命運低頭，默默撐起這個家的重量，也用你們最踏實的方式，支持我走上求學這條路。我出生於南部一座平凡的農村，腳下踩的是農田的泥土，耳邊聽的是你們清晨與落日交替的耕作聲。你們不曾細講大道理，卻用一生教會我什麼是責任與忍耐；不曾走入象牙塔，卻用最樸實的勞動鋪出我進入知識世界的起點。為了讓我能安心北上求學，你們日夜辛勤工作、從不喊苦。我知道，那些沒說出口的疲憊與擔憂，都藏在電話那頭「吃飽沒？」的問候裡。你們給我的愛，不張揚、不誇飾，卻穩重得像山、深厚得如果樹下的根。這些年來，是你們的付出，讓我有勇氣一次次面對困難，是你們的眼神，讓我始終記得自己的方向。當我身處遠方的書桌前，在公式與圖表間迷失時，我常想起的是你們的背影——那是我前進最堅定的理由。我知道，這份恩情一紙難書，但我會牢牢記得，並用我的努力，回應你們一生的守候與成全。

兒時讀書，曾見先賢語：「要謝的人太多，那便謝天吧。」此言深植心中，至今不忘。如今我亦願仰首謝天，將那些尚未親口道謝的情感，寄託於天地之間，感念萬物。感謝這個世界——感謝它的廣袤與複雜，使我得以在其中摸索、跌撞、學習與成長；感謝它的不完美與無常，教我何謂堅持、何謂選擇。求學旅途雖有迷惘與掙扎，但也因此鍛鍊出理解的眼光與前行的勇氣。這些甘苦交織的經歷，皆是世界贈予我的厚禮。若此刻我能以一紙論文，為這段旅程劃下句點，那麼這句點之後所映現的，便是無數人事、際遇與時光交織出的軌跡。我將滿懷感激，將這些珍貴片段珍藏於心，做為走向更遙遠未來的力量。

陳宇揚 筆 台北

摘要



本論文針對熱固耦合結構於不確定熱邊界條件下所產生之機械極值響應進行深入探討，首創一套具解析能力的熱載響應關聯預測方法（Thermal load response correlation,TLRC）。此方法突破傳統以大量數值模擬或實驗數據採集才能估算極值區間的限制，建立一套可直接預測結構關鍵自由度最大熱致變形與內部應力分佈的高效率解法，兼具解析性、可重現性與工程實用性，為熱固耦合結構之安全設計與可靠度評估提供全新技術典範。

本研究首度將 TLRC 方法系統性應用於一維與二維二力桿件 (Truss) 架構中，並結合隨機熱邊界建模與有限元素法進行統計驗證。透過與大規模採集數值樣本比對，證實本方法不僅在極值預測上具高準確性，其對結構內部應力集中區域之定位亦顯著優於傳統手段。研究同時深入分析在極端熱擾動下之應力回應特徵，評估結構是否面臨塑性破壞風險，展現方法於熱致安全性診斷上的關鍵價值。

本論文架構涵蓋五大核心章節：第一章說明研究動機與背景脈絡；第二章推導熱固耦合有限元素理論與座標轉換機制；第三章提出 TLRC 模型與數學化極值預測策略；第四章以多組實例（包含太陽能支架、高功率導線、微機電橋式元件等）進行應用驗證，具體展現方法的跨尺度適用性與工程意義；第五章綜合研究成果並針對未來應用與理論延伸提出具體建議。

綜上所述，本研究不僅建立一個兼具物理保真性與數值效率的預測架構，更有效解決熱場不確定性對結構設計帶來的風險預測瓶頸，為熱固耦合問題的極值解析開啟一條具高度前瞻性的研究新路徑。

關鍵字：熱固耦合分析 有限元素法 極值預測理論 不確定性分析方法 热應力診斷

Abstract



This thesis presents a novel analytical methodology for predicting the peak mechanical responses of thermo-solid coupled structures under uncertain thermal boundary conditions. A Thermal load response correlation (TLRC) framework is proposed to efficiently estimate the critical thermal deformation and internal stress response without relying on large-scale numerical sampling. This framework breaks through the traditional limitations of data-acquisition-based uncertainty quantification by offering a high-fidelity, computationally efficient, and physically transparent alternative, laying a robust foundation for reliable structural design under thermal uncertainty.

The TLRC method is systematically implemented on both 1D and 2D Truss-based structural systems and rigorously verified through finite element simulations incorporating random thermal boundary conditions. The predicted peak displacements and stress distributions are benchmarked against data-acquisition results, demonstrating excellent agreement and confirming the accuracy and robustness of the proposed method. Furthermore, the internal stress behavior under extreme thermal loads is thoroughly investigated to assess potential material failure risks and stress concentration zones.

This work is structured into five core chapters. Chapter 1 introduces the research motivation and contextual background. Chapter 2 provides a comprehensive derivation of the thermo-mechanical finite element formulation and coordinate transformation mechanisms. Chapter 3 details the theoretical development of the TLRC model and its peak prediction capability. Chapter 4 validates the methodology through various practical case studies, including solar panel aluminum frames, high-power conductor wires, and MEMS-based microbridge structures, showcasing the wide applicability and engineering relevance of the method. Finally, Chapter 5 summarizes the findings and discusses future directions for extending the theory and broadening its applications.

In conclusion, this study offers a significant advancement in peak response prediction under thermal uncertainty. It establishes an efficient and generalizable framework that not only improves analytical insight into thermo-mechanical behaviors but also provides practical tools for structural safety assessment and reliability engineering.

Keywords: Thermo-mechanical coupling, Finite Element Method, Peak response prediction, Load-response correlation, Thermal stress diagnostics

目次



誌謝	i
摘要	iii
Abstract	iv
目次	vi
圖次	x
第一章 緒論	1
1.1 研究目的	1
1.2 文獻回顧	2
1.3 研究內容介紹	3
第二章 热固耦合問題之相關理論推導	5
2.1 热固耦合問題之總弱形式有限元素推導	5
2.1.1 弱形式的建立	6
2.1.2 各剛度矩陣與載重定義	7
2.1.3 材料性質與常數定義	8
2.2 一維線性形狀函數與其導數推導	8
2.3 一維元素剛度矩陣推導與數值積分	9
2.3.1 機械剛度矩陣 K_{uu} 的推導	9
2.3.2 热固耦合剛度矩陣 $K_{u\theta}$ 的推導	10
2.3.3 热傳導剛度矩陣 $K_{\theta\theta}$ 的推導	10
2.4 二維热固耦合系統之總變分原理與剛度矩陣展開	11
2.4.1 全域與局部自由度定義	13
2.4.2 座標轉換矩陣	14
2.4.3 軸向應力計算之推導與轉換	16
2.4.4 小結	17

第三章 热固耦合極值反應解析方法	18
3.1 系統之不確定性	18
3.2 热固耦合負載響應關聯法 (Thermal load response correlation,TLRC)	20
3.2.1 热載輸入建模與統計特徵設定	20
3.2.2 热載與響應之相關統計關係	21
3.2.3 TLRC 與樣本模擬結果比對	25
3.3 隨機熱邊界條件負載響應關聯法	25
3.3.1 隨機位移邊界條件的矩陣改寫策略	26
3.3.2 統整優勢與物理意涵	27
第四章 實例分析	28
4.1 太陽能板鋁合金支架熱固耦合極值分析	29
4.1.1 幾何與模型架構	30
4.1.2 材料參數	31
4.1.3 邊界條件	32
4.1.4 热負載條件(隨機邊界條件)	32
4.1.5 LRC 應用與目標節點	33
4.1.6 數據成果討論	34
4.1.6.1 針對 $\rho = 0$ 热邊界條件下之分析討論	34
4.2 Power module 導線分析 (Wire Analysis)	40
4.2.1 幾何與模型架構	41
4.2.2 材料參數	42
4.2.3 邊界條件	43
4.2.4 热負載條件(隨機邊界條件)	43
4.2.5 LRC 應用與目標節點	44
4.2.6 數據成果討論	46
4.2.6.1 針對 $\rho = 1$ 热邊界條件下之分析討論	46

4.2.6.2 針對 $\rho = 0$ 热邊界條件下之分析討論.....	52
4.2.6.3 針對 $\rho = -1$ 热邊界條件下之分析討論.....	57
4.3 外層導線架熱固耦合極值響應分析	63
4.3.1 幾何與模型架構.....	64
4.3.2 固體位移邊界條件.....	65
4.3.3 LRC 應用與目標節點	66
4.3.4 數據成果討論	67
4.3.4.1 針對 $\rho = 0.5$ 热邊界條件下之分析討論.....	67
4.3.4.2 針對 $\rho = -0.5$ 热邊界條件下之分析討論	73
4.4 微橋式感測結構熱固耦合極值響應分析	79
4.4.1 幾何與模型架構.....	80
4.4.2 固體位移邊界條件	81
4.4.3 TLRC 應用與設計自由度定義.....	82
4.4.4 數據結果分析	83
4.4.4.1 針對 $\rho = 0$ 热邊界條件下之分析討論	83
4.5 微尺度曲線導線熱固耦合極值響應分析	89
4.5.1 TLRC 應用與設計自由度定義.....	91
4.5.2 在 Curing 製程條件下之數據結果分析	92
4.5.2.1 針對 $\rho = 1$ 热邊界條件下之分析討論	92
4.5.2.2 針對 $\rho = 0$ 热邊界條件下之分析討論	98
4.5.2.3 針對 $\rho = -1$ 热邊界條件下之解析討論	103
4.5.3 在 Pre-curing 製程條件下之數據結果分析	108
4.5.3.1 針對 $\rho = 0.5$ 热邊界條件之解析研究.....	108
4.5.3.2 針對 $\rho = -0.5$ 热邊界條件下之解析討論	113
4.6 高功率密度應用之 Litz 線彎曲結構熱固耦合極值分析.....	118
4.6.1 TLRC 應用與目標節點選定.....	120



4.6.2 數據結果分析	121
4.6.2.1 針對 $\rho = 1$ 热邊界條件下之解析討論	121
4.6.2.2 針對 $\rho = 0$ 热邊界條件下之解析研究	127
4.6.2.3 針對 $\rho = -1$ 热邊界條件下之解析研究	132
第五章 結論與未來展望	137
5.1 結論	137
5.2 未來展望	138
參考文獻	139
附錄	142

圖次



圖 2.4.1 二力桿件 (Truss) 結構示意圖	14
圖 4.1.1 太陽能板支架	29
圖 4.1.2 太陽能板支架幾何架構	31
圖 4.1.3 6005A 鋁合金拉伸實驗圖	35
圖 4.1.4 太陽能板支架於 $\rho = 0$ 時之熱固耦合分析模型圖	36
圖 4.1.5 太陽能板支架於 $\rho = 0$ 時之熱刺激相關性	36
圖 4.1.6 太陽能板支架於 $\rho = 0$ 時之左端熱載樣本	37
圖 4.1.7 太陽能板支架於 $\rho = 0$ 時之右端熱載樣本	37
圖 4.1.8 太陽能板支架於 $\rho = 0$ 時之 TLRC 預測與驗證結果	38
圖 4.1.9 太陽能板支架於 $\rho = 0$ 時之數據採集生成響應分布	38
圖 4.1.10 太陽能板支架於 $\rho = 0$ 時之正向極值條件下應力響應	39
圖 4.1.11 太陽能板支架於 $\rho = 0$ 時之負向極值條件下應力響應	39
圖 4.2.1 Power Model 內部導線與模組結構圖 [12]	40
圖 4.2.2 Wire H [12]	41
圖 4.2.3 Wire H 幾何模型架構	42
圖 4.2.4 銅拉伸實驗圖	46
圖 4.2.5 Power module 導線於 $\rho = 1$ 之熱固耦合分析模型圖	48
圖 4.2.6 Power module 導線於 $\rho = 1$ 之熱刺激相關性	48
圖 4.2.7 Power module 導線於 $\rho = 1$ 之左端熱載樣本	49
圖 4.2.8 Power module 導線於 $\rho = 1$ 之右端熱載樣本	49
圖 4.2.9 Power module 導線於 $\rho = 1$ 之 TLRC 預測與驗證結果	50
圖 4.2.10 Power module 導線於 $\rho = 1$ 之數據採集生成響應分布	50
圖 4.2.11 Power module 導線於 $\rho = 1$ 之正向極值條件下應力響應	51
圖 4.2.12 Power module 導線於 $\rho = 1$ 之負向極值條件下應力響應	51

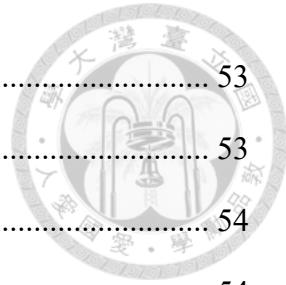


圖 4.2.13 Power module 導線於 $\rho = 0$ 之熱固耦合分析模型圖	53
圖 4.2.14 Power module 導線於 $\rho = 0$ 之熱刺激相關性	53
圖 4.2.15 Power module 導線於 $\rho = 0$ 之左端熱載樣本	54
圖 4.2.16 Power module 導線於 $\rho = 0$ 之右端熱載樣本	54
圖 4.2.17 Power module 導線於 $\rho = 0$ 之 TLRC 預測與驗證結果	55
圖 4.2.18 Power module 導線於 $\rho = 0$ 之數據採集生成響應分布	55
圖 4.2.19 Power module 導線於 $\rho = 0$ 之正向極值條件下應力響應	56
圖 4.2.20 Power module 導線於 $\rho = 0$ 之負向極值條件下應力響應	56
圖 4.2.21 Power module 導線於 $\rho = -1$ 之熱固耦合分析模型圖	59
圖 4.2.22 Power module 導線於 $\rho = -1$ 之熱刺激相關性	59
圖 4.2.23 Power module 導線於 $\rho = -1$ 之左端熱載樣本	60
圖 4.2.24 Power module 導線於 $\rho = -1$ 之右端熱載樣本	60
圖 4.2.25 Power module 導線於 $\rho = -1$ 之 TLRC 預測與驗證結果	61
圖 4.2.26 Power module 導線於 $\rho = -1$ 之數據採集生成響應分布	61
圖 4.2.27 Power module 導線於 $\rho = -1$ 之正向極值條件下應力響應	62
圖 4.2.28 Power module 導線於 $\rho = -1$ 之負向極值條件下應力響應	62
圖 4.3.1 Outer Lead 結構模型[21]	64
圖 4.3.2 Outer Lead 幾何模型架構	65
圖 4.3.3 Outer Lead 於 $\rho = 0.5$ 之熱固耦合分析模型圖	69
圖 4.3.4 Outer Lead 於 $\rho = 0.5$ 之熱刺激相關性	69
圖 4.3.5 Outer Lead 於 $\rho = 0.5$ 之左端熱載樣本	70
圖 4.3.6 Outer Lead 於 $\rho = 0.5$ 之右端熱載樣本	70
圖 4.3.7 Outer Lead 於 $\rho = 0.5$ 之 TLRC 驗證與預測結果	71
圖 4.3.8 Outer Lead 於 $\rho = 0.5$ 之數據採集生成響應分布	71
圖 4.3.9 Outer Lead 於 $\rho = 0.5$ 之正向極值條件下應力響應	72
圖 4.3.10 Outer Lead 於 $\rho = 0.5$ 之負向極值條件下應力響應	72

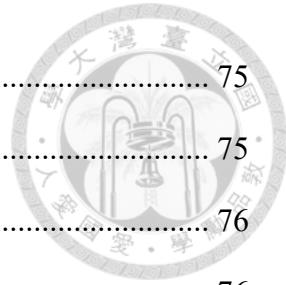


圖 4.3.11 Outer Lead 於 $\rho = -0.5$ 之熱固耦合分析模型圖	75
圖 4.3.12 Outer Lead 於 $\rho = -0.5$ 之熱刺激相關性	75
圖 4.3.13 Outer Lead 於 $\rho = -0.5$ 之左端熱載樣本	76
圖 4.3.14 Outer Lead 於 $\rho = -0.5$ 之右端熱載樣本	76
圖 4.3.15 Outer Lead 於 $\rho = -0.5$ 之 TLRC 驗證與預測結果	77
圖 4.3.16 Outer Lead 於 $\rho = -0.5$ 之數據採集生成響應分布	77
圖 4.3.17 Outer Lead 於 $\rho = -0.5$ 之正向極值條件下應力響應	78
圖 4.3.18 Outer Lead 於 $\rho = -0.5$ 之負向極值條件下應力響應	78
圖 4.4.1 Microbridge 結構模型 [13]	80
圖 4.4.2 Microbridge 幾何模型架構	81
圖 4.4.3 Microbridge 於 $\rho = 0$ 之熱固耦合分析模型圖	85
圖 4.4.4 Microbridge 於 $\rho = 0$ 之熱刺激相關性	85
圖 4.4.5 Microbridge 於 $\rho = 0$ 之左端熱載樣本	86
圖 4.4.6 Microbridge 於 $\rho = 0$ 之右端熱載樣本	86
圖 4.4.7 Microbridge 於 $\rho = 0$ 之 TLRC 預測與結果驗證	87
圖 4.4.8 Microbridge 於 $\rho = 0$ 之數據採集生成響應分布	87
圖 4.4.9 Microbridge 於 $\rho = 0$ 之正向極值條件下應力響應	88
圖 4.4.10 Microbridge 於 $\rho = 0$ 之負向極值條件下應力響應	88
圖 4.5.1 IMS-based 功率封裝導線幾何模型架構	89
圖 4.5.2 IMS-based 功率封裝導線 Curing 製程 [14]	90
圖 4.5.3 IMS-based 功率封裝導線 Pre-curing 製程 [14]	91
圖 4.5.4 Curing 製程中於 $\rho = 1$ 之熱固耦合分析模型圖	94
圖 4.5.5 Curing 製程中於 $\rho = 1$ 之熱刺激相關性	94
圖 4.5.6 Curing 製程中於 $\rho = 1$ 之左端熱載樣本	95
圖 4.5.7 Curing 製程中於 $\rho = 1$ 之右端熱載樣本	95
圖 4.5.8 Curing 製程中於 $\rho = 1$ 之 TLRC 預測與驗證結果	96



圖 4.5.9 Curing 製程中於 $\rho = 1$ 之數據採集生成響應分布.....	96
圖 4.5.10 Curing 製程中於 $\rho = 1$ 之正向極值條件下應力響應.....	97
圖 4.5.11 Curing 製程中於 $\rho = 1$ 之負向極值條件下應力響應.....	97
圖 4.5.12 Curing 製程中於 $\rho = 0$ 之熱固耦合分析模型圖.....	99
圖 4.5.13 Curing 製程中於 $\rho = 0$ 之熱刺激相關性.....	99
圖 4.5.14 Curing 製程中於 $\rho = 0$ 之左端熱載樣本.....	100
圖 4.5.15 Curing 製程中於 $\rho = 0$ 之右端熱載樣本.....	100
圖 4.5.16 Curing 製程中於 $\rho = 0$ 之 TLRC 預測與驗證結果	101
圖 4.5.17 Curing 製程中於 $\rho = 0$ 之數據採集生成響應分布.....	101
圖 4.5.18 Curing 製程中於 $\rho = 0$ 之正向極值條件下應力響應.....	102
圖 4.5.19 Curing 製程中於 $\rho = 0$ 之負向極值條件下應力響應.....	102
圖 4.5.20 Curing 製程中於 $\rho = -1$ 之熱固耦合分析模型圖.....	104
圖 4.5.21 Curing 製程中於 $\rho = -1$ 之熱刺激相關性.....	104
圖 4.5.22 Curing 製程中於 $\rho = -1$ 之左端熱載樣本.....	105
圖 4.5.23 Curing 製程中於 $\rho = -1$ 之右端熱載樣本.....	105
圖 4.5.24 Curing 製程中於 $\rho = -1$ 之 TLRC 預測與驗證結果	106
圖 4.5.25 Curing 製程中於 $\rho = -1$ 之數據採集生成響應分布.....	106
圖 4.5.26 Curing 製程中於 $\rho = -1$ 之正向極值條件下應力響應.....	107
圖 4.5.27 Curing 製程中於 $\rho = -1$ 之負向極值條件下應力響應.....	107
圖 4.5.28 Pre-curing 製程中於 $\rho = 0.5$ 之熱固耦合分析模型圖	109
圖 4.5.29 Pre-curing 製程中於 $\rho = 0.5$ 之熱刺激相關性.....	109
圖 4.5.30 Pre-curing 製程中於 $\rho = 0.5$ 之左端熱載樣本.....	110
圖 4.5.31 Pre-curing 製程中於 $\rho = 0.5$ 之右端熱載樣本.....	110
圖 4.5.32 Pre-curing 製程中於 $\rho = 0.5$ 之 TLRC 預測與驗證結果	111
圖 4.5.33 Pre-curing 製程中於 $\rho = 0.5$ 之數據採集生成響應分布	111
圖 4.5.34 Pre-curing 製程中於 $\rho = 0.5$ 之正向極值條件下應力響應.....	112



圖 4.5.35 Pre-curing 製程中於 $\rho = 0.5$ 之負向極值條件下應力響應.....	112
圖 4.5.36 Pre-curing 製程中於 $\rho = -0.5$ 之熱固耦合分析模型圖.....	114
圖 4.5.37 Pre-curing 製程中於 $\rho = -0.5$ 之熱刺激相關性.....	114
圖 4.5.38 Pre-curing 製程中於 $\rho = -0.5$ 之左端熱載樣本.....	115
圖 4.5.39 Pre-curing 製程中於 $\rho = -0.5$ 之右端熱載樣本.....	115
圖 4.5.40 Pre-curing 製程中於 $\rho = -0.5$ 之 TLRC 預測與驗證結果.....	116
圖 4.5.41 Pre-curing 製程中於 $\rho = -0.5$ 之數據採集生成響應分布.....	116
圖 4.5.42 Pre-curing 製程中於 $\rho = -0.5$ 之正向極值條件下應力響應.....	117
圖 4.5.43 Pre-curing 製程中於 $\rho = -0.5$ 之負向極值條件下應力響應.....	117
圖 4.6.1 定子模組結構模型 [15]	118
圖 4.6.2 Litz 導線幾何模型架構.....	120
圖 4.6.3 Litz 導線於 $\rho = 1$ 時之熱固耦合分析模型圖	123
圖 4.6.4 Litz 導線於 $\rho = 1$ 時之熱刺激相關性	123
圖 4.6.5 Litz 導線於 $\rho = 1$ 時之左端熱載樣本	124
圖 4.6.6 Litz 導線於 $\rho = 1$ 時之右端熱載樣本	124
圖 4.6.7 Litz 導線於 $\rho = 1$ 時之 TLRC 預測與驗證結果	125
圖 4.6.8 Litz 導線於 $\rho = 1$ 時之數據採集生成響應分布	125
圖 4.6.9 Litz 導線於 $\rho = 1$ 時之正向極值條件下應力響應	126
圖 4.6.10 Litz 導線於 $\rho = 1$ 時之負向極值條件下應力響應	126
圖 4.6.11 Litz 導線於 $\rho = 0$ 時之熱固耦合分析模型圖	128
圖 4.6.12 Litz 導線於 $\rho = 0$ 時之熱刺激相關性	128
圖 4.6.13 Litz 導線於 $\rho = 0$ 時之左端熱載樣本	129
圖 4.6.14 Litz 導線於 $\rho = 0$ 時之右端熱載樣本	129
圖 4.6.15 Litz 導線於 $\rho = 0$ 時之 TLRC 預測與驗證結果	130
圖 4.6.16 Litz 導線於 $\rho = 0$ 時之數據採集生成響應分布	130
圖 4.6.17 Litz 導線於 $\rho = 0$ 時之正向極值條件下應力響應	131



圖 4.6.18 Litz 導線於 $\rho = 0$ 時之負向極值條件下應力響應	131
圖 4.6.19 Litz 導線於 $\rho = -1$ 時之熱固耦合分析模型圖	133
圖 4.6.20 Litz 導線於 $\rho = -1$ 時之熱刺激相關性	133
圖 4.6.21 Litz 導線於 $\rho = -1$ 時之左端熱載樣本	134
圖 4.6.22 Litz 導線於 $\rho = -1$ 時之右端熱載樣本	134
圖 4.6.23 Litz 導線於 $\rho = -1$ 時之 TLRC 預測與驗證結果	135
圖 4.6.24 Litz 導線於 $\rho = -1$ 時之數據採集生成響應分布	135
圖 4.6.25 Litz 導線於 $\rho = -1$ 時之正向極值條件下應力響應	136
圖 4.6.26 Litz 導線於 $\rho = -1$ 時之負向極值條件下應力響應	136



第一章 緒論

1.1 研究目的

在當代高精密工程與電子封裝結構中，熱固耦合作用下的材料行為對於結構可靠度扮演關鍵角色。隨著應用領域逐漸朝向微型化、高功率密度與極端操作環境發展，結構元件經常暴露於具有隨機性與不確定性的熱邊界條件之下，導致其位移與內部應力表現可能出現難以預測的極值反應（Peak response），對設計安全性構成潛在威脅。

本研究旨在建構一套解析力學方法，以預測在不確定熱邊界條件下，熱固耦合結構可能產生之位移極值與應力極值響應。研究重點包括：

1. 建立熱固耦合有限元素弱形式，並推導其適用於一維與二維 二力桿件 (Truss) 結構之總剛度矩陣與載重向量；
2. 提出具統計性質的負載響應關聯法 (Load-response correlation, LRC)，用以預測目標自由度之極值位移範圍；
3. 擴展 LRC 為適用於熱邊界隨機輸入之 Thermal load response correlation (TLRC)；
4. 結合數值模擬與統計驗證，比對 數據採集多樣本模擬與本論文提出解析法之預測準確度；
5. 進一步由極值位移導出對應各元素軸向應力場，評估其在極值熱載條件下是否進入塑性或失效區，提供結構設計可靠性依據。

本研究透過解析與統計雙重角度切入，不僅提出一套具體可行之極值預測策略，亦補足過往以數據採集為主之方法所缺乏之解析理論基礎。研究結果可應用於微電子導線、太陽能結構支架、微橋感測器與電動機導線等領域，對於未來高可靠度設計提供理論與方法上的貢獻。



1.2 文獻回顧

當前在熱固耦合系統與不確定性導致的尖峰反應問題之研究中，已有諸多文獻提出理論基礎與數值實作方法。然而，針對熱邊界具不確定性情境下的極端反應行為，尚缺乏一套能夠有效解析與預測的分析框架。有鑑於此，本研究旨在發展一套創新且高效的求解方法，以彌補現有方法在處理熱固耦合與極值負載分析方面的不足，期能為尖峰響應預測提供一個更為完整與實用的工具。

首先，Kasperski 等人提出經典的負載響應關聯法 (LRC)，提供一種以統計關聯性為基礎的高效分析策略，能夠在不執行大規模樣本模擬的情況下，預估系統在不確定載荷下的尖峰響應。[1]延伸 LRC 方法應用於隨機邊界條件情境，Lin 則展示將簡諧波負載不確定性轉化為結構反應的極值預測問題，並與傳統有限元素模擬結果驗證吻合性 [2]。在熱彈性理論方面，Biot 從不可逆熱力學與彈性系統內部能的觀點切入[3]，Coleman 等人則以連體力學觀點為基礎[4]，釐清熱能、應變能與熵產生之間的相互關係。這些理論基礎使得熱固耦合弱形式推導更具一致性，也支撐本研究在建構有限元素總變分形式時所需的耦合項定義與能量平衡考慮。在實務應用面上，Eslami 等人提供熱應力形成的經典理論基礎，說明材料在溫差下內部應力的分佈趨勢[5]，Tan 等人則展示鋼柱在溫升下的穩定性劣化與應力再分配過程[6]。為結構受熱變形與高溫環境下的約束效應進行理論建模與數值分析建立一個可靠的分析依據。

除此之外，Usmani 等人則從結構力學出發，強調力與變形的能量對偶關係，搭配虛功原理與對偶變分原理，進一步強化本研究在熱固耦合問題中對弱形式建立的數學正當性與物理一致性。[7]Titulaer 則以數學分析方式處理邊界溫度隨機性的傳遞問題，透過統計場論模型精確描述熱擾動如何沿材料內部傳導至指定觀察點。這為本研究中熱邊界不確定性建模與樣本生成提供了數學依據，使 TLRC 模型更具實體一致性[8]。Kasperski 在實務面中，以風載為例其對於極值統計邊界推估的技術亦為本研究提供啟發，強調在工程安全評估中，結合樣本數據與解析模型所導

出的雙邊界估計策略（雙側 Envelope bound）具備高實用性。

最為重要的是 Wang [10]等人探討在機械結構最佳化設計中整合負載與不確定性參數之需求，呼應本研究所採用之 TLRC 方法具備在不確定性框架下提升設計穩健性的潛力，並為後續結果討論提供多角度的工程詮釋依據。為本研究提供了強而有力的理論面以及實務面的基礎，為此延續拓展至熱-機耦合問題，建立 TLRC 框架，強調其在溫度場擾動下同樣具備準確推估能力。利用 TLRC 對於不同熱邊界下的自由度位移與應力極值進行快速預測與驗證。總結而言，本論文提出之 TLRC 方法整合統計關聯分析、熱固耦合理論與高溫結構設計觀點，不僅擴展現有文獻範疇，亦建立一套具備高效率、高準確性與物理一致性的尖峰反應預測工具，對於微結構元件與能源載具中之熱固耦合問題提供具體貢獻。

1.3 研究內容介紹

本研究針對熱固耦合系統於不確定邊界條件下之尖峰響應問題，提出一套兼具理論完整性與工程實用性之解析力學架構。研究內容依序可分為以下幾個核心模組：

首先，在第二章中，本研究建立熱固耦合問題之有限元素理論模型，由能量觀點出發推導耦合場的總弱形式，進而解析推導機械剛度矩陣、熱剛度矩陣與耦合項，並延伸至二維二力桿件 (Truss) 結構之總剛度矩陣組裝策略，為後續實例分析提供完整數值基礎。

接著於第三章中，發展一套新穎之熱固耦合負載響應關聯法 (Thermal load response correlation, TLRC)，做為極值響應預測的主體工具。該方法融合統計學與力學原理，利用高斯熱邊界輸入特徵與結構反應間之共變異結構 (Covariance structure)，推估目標自由度之位移極值範圍，並驗證其可同時捕捉結構中非設計自由度（如內部節點、元素應力）之反應傾向。

第四章為本文之實例驗證與應用探討，選取多個具代表性之工程模型，涵蓋微

電子導線、太陽能鋁合金支架、感測器橋結構與彎曲 Litz 導線等範例，分別進行 TLRC 模擬與數據採集參考驗證，比對其位移極值與內部應力響應，並進一步分析材料是否進入非線性或失效區域，以提供工程設計之可靠性指標。

最後，第五章將統整本研究之理論貢獻與實務意涵，提出研究結論並針對未來之模型擴展（如非線性材料、三維架構、多物理耦合等）提出可行性建議與延伸方向。綜合而言，本研究建立一套適用於隨機熱載與耦合機構之極值響應預測模式，填補現有理論缺口，並提供精簡且準確的解析工具，預期可廣泛應用於電子封裝、航太導線與能源模組等跨域高可靠性結構設計需求。

第二章 热固耦合問題之相關理論推導

在現代工程應用中，許多結構元件需同時承受機械負載與熱傳導效應，這類問題即屬於熱固耦合分析（Thermo-mechanical coupling analysis）範疇。尤其是電子封裝中的熱變形分佈，在進行二維熱固耦合問題的有限元素分析時，通常需同時考慮機械變形與熱傳導效應的交互作用。這類耦合問題的特徵在於：熱能會導致結構膨脹或收縮，從而產生內部應力與變形；而材料的變形或幾何變化也可能反過來影響熱場的分佈。為了解析這類問題，最常採用的方法是透過有限元素法（Finite element method, FEM），將連續體離散為有限數目的元素單元，並建立其勢能變分原理，再推導出對應的弱形式與元素剛度矩陣。

為有效模擬此類系統的行為，本章將從理論角度出發，建立一套可分析熱固耦合行為的數學基礎。其核心為有限元素法（Finite element method, FEM）所提供的變分框架與矩陣組裝流程，搭配機械與熱場的耦合物理定律，使分析者得以求解變形場與溫度場在空間上的交互變化。在有限元素法中，元素剛度矩陣通常是先在局部座標系（Local coordinate system）中推導而成，這是因為局部系統可簡化元素內部的幾何與力學描述。然而，整體結構是由多個方向不同的元素所構成，因此每個元素剛度矩陣皆須轉換至全域座標系（Global coordinate system）後方可進行組裝。尤其在熱固耦合分析中，剛度矩陣的組成會包含純機械項、純熱項與耦合項，因此正確的轉換方法對分析準確性至關重要。

以下章節將依序介紹弱形式建構、局部剛度矩陣推導、座標轉換技巧、以及轉換至全域系統的完整步驟，做為後續數值求解與邊界條件施加的基礎。

2.1 热固耦合問題之總弱形式有限元素推導

為了分析熱固耦合問題（Thermo-mechanical coupling problem），本節推導該問題在有限元素法（FEM）中的總弱形式（Total weak form），並建構出對應的剛



度矩陣與載重向量。該理論同時涵蓋溫度場與位移場之耦合效應，適用於熱應力分析、熱變形等工程應用。

2.1.1 弱形式的建立

總弱形式可表示為：

$$\delta\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{K}_{\theta\theta} \boldsymbol{\theta} + \delta\mathbf{u}^T \mathbf{K}_{uu} \mathbf{u} + \delta\mathbf{u}^T \mathbf{K}_{u\theta} \boldsymbol{\theta} = \delta\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{f}_\theta + \delta\mathbf{u}^T \mathbf{f}_u \quad (2.1.1)$$

此式表示系統能量的虛功平衡關係，其中 $\mathbf{K}_{\theta\theta}$ 表示熱傳導剛度矩陣， \mathbf{K}_{uu} 為機械剛度矩陣， $\mathbf{K}_{u\theta}$ 則代表熱固耦合效應的剛度項，右邊則為相對應的熱與機械外部載重向量。

由於變分量 $\delta\boldsymbol{\theta}$ 與 $\delta\mathbf{u}$ 為任意變化量，因此該式應滿足任意虛功變化，故可得：

$$\delta\mathbf{u}^T (\mathbf{K}_{uu} \mathbf{u} + \mathbf{K}_{u\theta} \boldsymbol{\theta} - \mathbf{f}_u) + \delta\boldsymbol{\theta}^T (\mathbf{K}_{\theta\theta} \boldsymbol{\theta} - \mathbf{f}_\theta) = 0 \quad (2.1.2)$$

整理後可得最終的耦合有限元素方程組：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\theta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_\theta \end{bmatrix} \quad (2.1.3)$$

此耦合矩陣為上三角形式，代表熱傳導問題不會影響力學方程之解耦過程，但機械問題會受到溫度場的相互耦合影響。



2.1.2 各剛度矩陣與載重定義

各子矩陣與向量於單元上可表示為：

- 機械剛度矩陣：

$$\mathbf{K}_{uu} = \sum_e \int_0^{l_e} \mathbf{B}_u^T C_u \mathbf{B}_u A dx \quad (2.1.4)$$

- 热固耦合剛度矩陣：

$$\mathbf{K}_{u\theta} = \sum_e \int_0^{l_e} \mathbf{B}_u^T \beta N_\theta A dx \quad (2.1.5)$$

- 热傳導剛度矩陣：

$$\mathbf{K}_{\theta\theta} = \sum_e \int_0^{l_e} \mathbf{B}_\theta^T k_\theta \mathbf{B}_\theta A dx \quad (2.1.6)$$

- 機械載重向量：

$$\mathbf{f}_u = \sum_e N_u^T \hat{\mathbf{t}} P|_0^{l_e} \quad (2.1.7)$$

- 热載重向量：

$$\mathbf{f}_\theta = \sum_e N_\theta^T \hat{\mathbf{q}} P|_0^{l_e} \quad (2.1.8)$$

上述式子中：

- $\mathbf{B}_u, \mathbf{B}_\theta$ ：分別為位移與溫度場之形狀函數微分；
- N_u, N_θ ：分別為位移與溫度場之形狀函數；
- C_u ：為材料彈性係數；
- P ：為材料周長；
- k_θ ：為熱傳導係數矩陣；
- $\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{q}}$ ：分別為邊界處之機械力與熱通量。

- A ：為桿件截面積



2.1.3 材料性質與常數定義

彈性係數 C_u 、熱應變耦合係數 β 、與熱傳導張量 k_θ 依據材料參數如下定義：

- 彈性常數：

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu = \frac{E\nu}{2(1-2\nu)} \quad (2.1.9)$$

- 热載重向量：

$$C_u = \lambda + 2\mu, \beta = \alpha(\lambda + 2\mu) \quad (2.1.10)$$

其中：

- E ：楊氏模數 (Young's modulus) ；
- ν ：樸松比 (Poisson's ratio) ；
- α ：熱膨脹係數 (Coefficient of thermal expansion) ；

2.2 一維線性形狀函數與其導數推導

在有限元素法中，對於一維二節點元素而言，其形狀函數可使用自然座標 $\xi \in [-1,1]$ 來定義。考慮桿件兩端節點編號為 $i = 1,2$ ，對應的形狀函數 $N_1(\xi), N_2(\xi)$ 滿足下列方程式：

$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2}, N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \quad (2.2.1)$$

此二式滿足：

$$N_1(-1) = 1, N_1(1) = 0, N_2(-1) = 0, N_2(1) = 1 \quad (2.2.2)$$



這些形狀函數能以通式 $N = a + b\xi$ 表示。根據邊界條件求得係數如下：

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi \quad (2.2.3)$$

同理可得：

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi \quad (2.2.4)$$

定義 **N** 矩陣為：

$$\mathbf{N}_u = \mathbf{N}_\theta = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi_1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi_1 \end{bmatrix} \quad (2.2.5)$$

定義 **B** 矩陣為：

$$\mathbf{B}_u = \mathbf{B}_\theta = [-1 \quad 1] \frac{1}{L} \quad (2.2.6)$$

2.3 一維元素剛度矩陣推導與數值積分

針對一維熱固耦合有限元素中所需的剛度矩陣，以下分別對 $\mathbf{K}_{uu}, \mathbf{K}_{u\theta}, \mathbf{K}_{\theta\theta}$ 三個子矩陣進行推導與積分處理。

2.3.1 機械剛度矩陣 \mathbf{K}_{uu} 的推導

機械剛度矩陣的定義如下：

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_0^{l_e} \mathbf{B}_u^T \mathbf{C}_u \mathbf{B}_u A dx \quad (2.3.1)$$

在自然座標下轉換為：

$$\mathbf{K}_{uu} = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{B}_u^T \mathbf{C}_u \mathbf{B}_u A d\xi \quad (2.3.2)$$



令剛性係數 $C_u = \lambda + 2\mu$ ，並代入 $\mathbf{B}_u = \frac{1}{L}[-1 \quad 1]$ ，則：

$$\mathbf{K}_{uu} = \frac{C_u A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.2 热固耦合剛度矩陣 $\mathbf{K}_{u\theta}$ 的推導

此項定義為：

$$\mathbf{K}_{u\theta} = \int_0^{l_e} \mathbf{B}_u^T \beta \mathbf{N}_\theta A dx \quad (2.3.4)$$

同樣轉至自然座標：

$$\mathbf{K}_{u\theta} = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{B}_u^T \beta \mathbf{N}_\theta A d\xi \quad (2.3.5)$$

則：

$$\mathbf{K}_{u\theta} = \frac{\beta A}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.6)$$

2.3.3 热傳導剛度矩陣 $\mathbf{K}_{\theta\theta}$ 的推導

熱傳導剛度矩陣的定義如下：

$$\mathbf{K}_{\theta\theta} = \int_0^{l_e} \mathbf{B}_\theta^T k_\theta \mathbf{B}_\theta A dx \quad (2.3.7)$$

在自然座標下轉換為：

$$\mathbf{K}_{\theta\theta} = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{B}_\theta^T k_\theta \mathbf{B}_\theta A d\xi \quad (2.3.8)$$

代入 $\mathbf{B}_\theta = \frac{1}{L}[-1 \quad 1]$ ，則：

$$K_{\theta\theta} = \frac{k_\theta A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2.3.9)

2.4 二維熱固耦合系統之總變分原理與剛度矩陣展開

在進行二維熱固耦合問題的有限元素分析時，元素剛度矩陣通常先在局部座標系（Local coordinate system）中推導而成，此座標系通常沿著元素本身的幾何方向設置。然而，為了將各元素統一組裝至全域系統中，我們必須將這些局部剛度矩陣轉換至全域座標系（Global coordinate system）。本節將詳細說明此轉換過程，並展開相關矩陣與變數的對應關係。

虛位移與虛溫度變化，系統滿足虛功原理（Principle of virtual work）所對應的弱式如下：

$$\delta\Pi = B(\mathbf{V}, \mathbf{V}) - L(\mathbf{V}) \quad (2.4.1)$$

其中 \mathbf{V} 表示虛擾變數，包括機械位移場 $\delta\mathbf{u}$ 與溫度場 $\delta\theta$ 的組合， $B(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ 表示內部虛功， $L(\mathbf{V})$ 表示外部虛功。總變分能可表示為：

$$\Pi = \frac{1}{2} [\mathbf{u}^T \quad \boldsymbol{\theta}^T] \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\theta} \\ \mathbf{0} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} - [\mathbf{u}^T \quad \boldsymbol{\theta}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_\theta \end{bmatrix} \quad (2.4.2)$$

在有限元素理論中，總勢能（Total potential energy）為內能（內部虛功項）與外力勢能（外部虛功項）之差。此處的總勢能表達式已經包含了機械變形能、熱導能，以及外力與外熱源作用。根據勢能變分原理（Principle of stationary potential energy），系統在平衡狀態時，總勢能對位移與溫度場變數的變分應為零，也就是：

$$\delta\Pi = \mathbf{0} \quad (2.4.3)$$



針對總勢能公式進行一階變分，注意到 \mathbf{u} 和 $\boldsymbol{\theta}$ 都是變數，因此變分過程如下：

總勢能的第一項（內能）是二次型：

$$\frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (2.4.4)$$

對 \mathbf{U} 做變分，結果是：

$$\delta \left(\frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \right) = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \delta \mathbf{U} \quad (2.4.5)$$

這是標準二次型變分結果。總勢能的第二項（外力）是一次型：

$$\mathbf{U}^T \mathbf{F} \quad (2.4.6)$$

對 \mathbf{U} 做變分，結果是：

$$\delta(\mathbf{U}^T \mathbf{F}) = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F} \quad (2.4.7)$$

因此整個總勢能變分為：

$$\delta \Pi = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \delta \mathbf{U} - \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F} \quad (2.4.8)$$

由於虛位移（虛變數） $\delta \mathbf{U}$ 是任意的，故必須滿足：

$$\delta \Pi = \mathbf{0} \quad (2.4.9)$$

$$(\mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{F})^T \delta \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (2.4.10)$$

若且唯若：

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F}$$



(2.4.11)

2.4.1 全域與局部自由度定義

考慮一個二節點的元素，每個節點包含以下自由度：

- u_x : x 方向位移 (Global) ；
- u_y : y 方向位移 (Global) ；
- θ : 溫度自由度 ；
- 假設目前每個節點具有 u_x, u_y, θ 三個自由度，兩個節點構成的元素總共有 6 個自由度，則剛度矩陣大小為 6×6 ，當局部剛度為 $\mathbf{K}^{\text{local}}$ 時，使用座標轉換矩陣 $\mathbf{T} \in 2 * 4$ 可將其轉換為全域剛度：

$$\mathbf{K}^{(6*6)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^{(4*4)} & \mathbf{K}_{u\theta}^{(4*2)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\theta\theta}^{(2*2)} \end{bmatrix} \quad (2.4.12)$$

- 原本一維系統中的 \mathbf{K}_{uu} 只針對 u_x 方向建構，因此在二維情況下僅佔據 u_x 對應的自由度位置，其他與 u_y 相關的對應子矩陣會為零（若為二力桿件 (Truss) 元素）。具體地，矩陣的嵌入與向量排列方式如下：

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1^x \\ u_1^y \\ u_2^x \\ u_2^y \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (2.4.13)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1^x \\ f_1^y \\ f_2^x \\ f_2^y \\ f_{\theta_1} \\ f_{\theta_2} \end{bmatrix}$$



2.4.2 座標轉換矩陣

在桿元素的有限元素分析中，元素剛度矩陣通常以局部座標系（Local coordinate system）定義。此矩陣僅考慮沿桿軸方向的變形，且在一維情形下具有簡單形式。然而，實際問題中每個元素會以不同方向排列於全域座標系中，為了能將每個元素嵌入至完整的全域剛度矩陣中，必須透過轉換矩陣 \mathbf{T} 將局部剛度矩陣 \mathbf{K}_{local} 轉換為全域剛度矩陣 \mathbf{K}_{global} 。

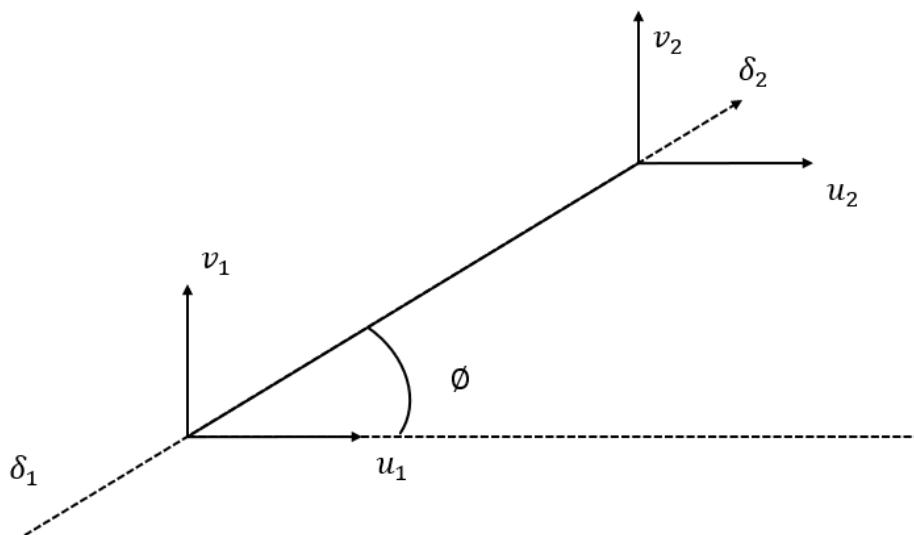


圖 2.4.1 二力桿件 (Truss) 結構示意圖

這可藉由引入方向餘弦：

- $c = \cos \phi$ ；

- $s = \sin \theta$

進而得到轉換矩陣 \mathbf{T} :



$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} \quad (2.4.15)$$

故：

- $\mathbf{K}_{uu}^{\text{global}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{uu}^{\text{local}} \mathbf{T}$
- $\mathbf{K}_{u\theta}^{\text{global}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{u\theta}^{\text{local}}$
- $\mathbf{K}_{\theta\theta}^{\text{global}} = \mathbf{K}_{\theta\theta}^{\text{local}}$

即可得

- $\mathbf{K}_{uu}^{\text{global}}$:

$$\mathbf{K}_{uu}^{\text{global}} = \frac{c_u A}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (2.4.16)$$

- $\mathbf{K}_{u\theta}^{\text{global}}$:

$$\mathbf{K}_{u\theta}^{\text{global}} = \frac{\beta A}{2} \begin{bmatrix} -c & -c \\ -s & -s \\ c & c \\ s & s \end{bmatrix} \quad (2.4.17)$$

- $\mathbf{K}_{\theta\theta}^{\text{global}}$:

$$\mathbf{K}_{\theta\theta}^{\text{global}} = \frac{k_\theta A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4.18)$$



此轉換不僅保留了物理意義上的對稱性與能量一致性，亦可有效描述元素方向性對系統剛度的影響。

2.4.3 軸向應力計算之推導與轉換

在完成局部與全域座標轉換矩陣定義後，接下來可進一步推導熱固耦合結構中各元素的軸向應力表達式。根據一維彈性理論，應力可由應變乘以楊氏係數得到，表達式如下：

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.4.19)$$

其中應變 ε 為單位長度的變形量，對一維桿件而言，可寫為：

$$\sigma = E \frac{\mathbf{u}'_2 - \mathbf{u}'_1}{L} \quad (2.4.20)$$

若進一步將此公式改寫為向量形式，則可得：

$$\sigma = \frac{E}{L} [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} \mathbf{u}'_1 \\ \mathbf{u}'_2 \end{bmatrix} \quad (2.4.21)$$

由於局部座標系下的自由度向量 \mathbf{u}' 來自於全域自由度向量經由轉換矩陣 \mathbf{T} 所得，即：

$$\mathbf{u}' = \mathbf{T}\mathbf{u} \quad (2.4.22)$$

將 (2.4.19) 代入 (3.28)，可得應力之全域表達式為：

$$\sigma = \frac{E}{L} [-1 \quad 1] \mathbf{T} \mathbf{u} \quad (2.4.23)$$

經矩陣乘法展開後，得到最終應力表示式：

$$\sigma = \frac{E}{L} [-c \quad -s \quad c \quad s] \mathbf{u} \quad (2.4.24)$$



2.4.4 小結

局部剛度矩陣經過轉換矩陣的處理後，即可嵌入至全域剛度系統中。此步驟不僅保證物理意義上的能量守恆，也確保了在任意方向與幾何佈局下，元素仍能正確對應至其在全域系統的自由度上。透過此轉換，我們完成了由局部場向全域場的剛度展開，為後續全域系統矩陣的組裝與邊界條件施加奠定了基礎。



第三章 热固耦合極值反應解析方法

為因應熱載條件於實務應用中普遍存在之不確定性，本章提出一套全新的熱固耦合尖峰響應解析方法，稱為熱負載響應關聯法（Thermal load response correlation, TLRC），目的是建立一種在不確定熱邊界下可直接預測系統尖峰響應的數學理論架構與實作程序。此方法以解析力學為基礎，透過變異性建模與場域響應轉換，跳脫傳統依賴大量樣本模擬之數值流程，達到更高效且具可控性的極值預估能力。

本章首先從系統熱邊界與操作條件不確定性的來源與物理本質出發，說明在實際工程中如金屬導線、封裝引線等細微結構常會因接點位置偏移、功率密度不均、焊接熱影響區等因素，導致其受熱條件難以準確掌握；此種不確定性若未能妥善評估，將可能導致過度設計或潛在失效風險。

進一步地，本章建立以隨機場溫度邊界為輸入的 TLRC 數學模型，並透過線性化推導與相關統計參數轉換，得以有效預估設計自由度（Design DOF）在高機率熱載條件下的最大反應範圍。此外，亦提出關鍵邊界映射矩陣與統計特徵值投影公式，使得模型具備良好的理論一致性與實用性，適合嵌入現有工程分析流程之中。

3.1 系統之不確定性

在工程實務中，電子封裝元件或微尺度結構如金屬導線，常面臨來自環境或操作條件所導致的熱固耦合載荷變化，這些外部邊界條件可能並非固定值，而是隨時間與操作條件呈現隨機波動。例如，功率模組中的封裝導線受限於焊接位置、公差誤差與熱源功率密度不均，兩端所施加的溫度場極可能因接觸熱阻差異、散熱效率波動、導體內部發熱等因素，產生變異甚至不穩定的溫度邊界條件。這些變異在傳統設計中可能被視為安全因子所涵蓋，然而對於高可靠度要求之電子模組或精密構件而言，直接對不確定性進行分析與預測，將有助於更精準地掌握極值行為，降



低材料過設計與失效風險。

以一條由金屬導線構成的微小材料結構做為研究對象，探討其在兩端溫度邊界具隨機高斯分布變動的情況下所引發的熱固耦合響應與應力行為。此條導線跨越封裝基板與晶片之間，兩端施加不同統計特徵的溫度邊界，形成非均溫度梯度，進而誘發熱膨脹變形與內部應力分布。此類機制在晶片封裝設計中具有高度代表性，亦常被視為封裝失效與疲勞壽命評估中的關鍵分析項目

邊界條件的不確定性特徵將使系統整體響應也呈現不確定行為，使傳統有鑑於單一載荷條件所得的結果不再具有代表性。因此，需進一步建立一套可以統計性地預測在特定信心水準下可能出現之極值響應的方法。Load response correlation (LRC) 法即是一可將隨機輸入 (刺激) 透過系統特性映射至響應端的機率分析方法，此方法為 Kaspewrski 提出，其本質上為一種有鑑於統計共變關係所建立之線性近似理論，能以少量統計樣本推估極值分布，降低計算成本。

本研究延伸該方法於熱固耦合系統中，發展出 (Thermal load response correlation, TLRC) 方法。TLRC 法整合了以下三項核心概念：

1. 隨機邊界條件建模：以二維常態分佈 (Bivariate gaussian distribution) 定義兩端節點的溫度機率分布特性，並可調整其相關係數以探討左右端熱邊界耦合程度。
2. 系統柔度矩陣 (Flexibility matrix) 導入：透過熱固耦合有限元素法求得各自由度間響應與熱邊界刺激之敏感度。
3. 極值預測機制：利用統計特性與柔度矩陣之內積結構，推估在給定信心水準下各節點響應的上下邊界，做為極值響應估計範圍。

TLRC 模型不僅可有效預測設計自由度之極值位移，亦能在其極值狀態下，推估結構內部其他元素之應力分布狀態 (例如軸向應力是否進入塑性區域)，從而進行後續之安全性判斷與可靠度分析。此一方法的建立，可提供工程設計中應對不確定熱載荷條件之新穎且高效率的分析工具。



3.2 热固耦合負載響應關聯法（Thermal load response correlation,TLRC）

在熱固耦合問題中，結構內部的應力與變形不僅源自機械載荷，還強烈受到熱邊界條件的影響。尤其於功率模組、封裝金線、微機電元件等微小尺度結構中，兩端熱邊界的不確定性極易誘發顯著的熱致變形與應力集中現象。這些不確定性可能源自焊點缺陷、界面接觸阻抗變異、環境波動、導熱膏分佈不均等。面對此類問題，傳統的確定性有限元素分析法難以有效掌握極端行為，而透過熱固耦合負載響應關聯法（Thermal load response correlation,TLRC），可在統計層面準確預測材料系統於極值熱載條件下之響應範圍，並避免高成本的大量數據採集樣本分析。

TLRC 是一種在熱固耦合環境下，運用統計特徵（均值、標準差、相關性）推估熱邊界條件引致內部響應之極值行為的解析性方法。其核心精神為：透過柔度矩陣將熱邊界的不確定刺激傳遞至關心之響應設計自由度，並導入熱載間之相關係數建立統計關聯，從而精確預估響應之上下限極值。

3.2.1 热載輸入建模與統計特徵設定

TLRC 方法首先假設熱邊界條件為隨機變數組成，並服從雙變量常態分布：

$$\begin{bmatrix} T_L \\ T_R \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} \bar{T}_L \\ \bar{T}_R \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma^2_{T_L} & \rho_{T_L T_R} \sigma_{T_L} \sigma_{T_R} \\ \rho_{T_L T_R} \sigma_{T_L} \sigma_{T_R} & \sigma^2_{T_R} \end{bmatrix} \right) \quad (3.2.1)$$

其中 $\rho_{T_L T_R}$ 為左、右端溫度之相關係數，用以量化其同步變化程度。若 $\rho = 1$ ，表示兩端同步升溫或降溫；若 $\rho = -1$ ，則表示一端升溫另一端降溫；若 $\rho = 0$ ，則表示無明顯聯動關係，若 ρ 介於 -1 與 $+1$ 之非零數，則表示兩端溫度變



化為部分負或正相關。上述建模不僅合理模擬真實熱擾動，更提供後續 TLRC 理論推導的統計基礎。

3.2.2 热載與響應之相關統計關係

金線模型中，響應可表示為所有熱載的線性組合，當系統中之特定設計自由度 i 為關注對象時，其所對應之不確定機械響應可表示為 R_i ，而系統中其他非設計自由度 ℓ 所對應之不確定響應則記為 U_ℓ （其中 $i \neq \ell$ ）。在進行極值響應預測時，設計自由度之極值響應 $R_{i\pm}$ 可表達為該自由度響應隨機樣本之期望值（平均值） \bar{R}_i 與其標準差 σ_{R_i} 所加權組成，即：

$$R_{i\pm} = \bar{R}_i \pm g\sigma_{R_i} \quad (3.2.2)$$

其中， g 為反映機率信賴程度之常數（如對應 3σ 為 99.7% 信賴區間），用以界定隨機場中極大或極小事件發生之範圍。此關係式可做為評估系統在不確定熱機負載下，設計自由度所可能經歷極值響應之基礎。在考量系統由均質且具線性彈性行為之固體材料所構成，並承受兩端具溫度變異性之熱邊界條件時，針對第 i 個設計自由度所對應之熱變形極值響應 R_{i+} 可表示為：

$$R_{i+} = \sum_{k=1}^m A_{ik} \bar{T}_k + g \frac{\sigma^2_{R_i}}{\sigma_{R_i}} \quad (3.2.3)$$

其中， m 為總熱邊界自由度數， \bar{T}_k 為施加於第 k 個節點或邊界位置之平均溫度輸入， A_{ik} 為系統柔度矩陣（即熱固耦合有限元素模型中所導出對應之 \mathbf{K}^{-1} ）中第 i 列第 k 行之元素，描述第 k 點溫度刺激對第 i 設計自由度產生的熱致位移響應程度。第二項為由隨機熱輸入所誘發之變異擴張項，其中 $\sigma^2_{R_i}$ 為響應 R_i 的變異數， σ_{R_i} 為其標準差，而 g 為給定之置信倍數（通常取為 3 以對應 99.7%）



信賴區間)。為推估熱固耦合系統在隨機熱邊界條件下，設計自由度位移響應的變異性與極值行為，本文導入統計分析方法，從樣本資料中評估響應量與輸入熱載之間之相關結構，進而完成極值位移預測。

響應變異量之推導

首先，設計自由度位移響應 R_i (即 U_i) 之變異量可表示為下列期望值形式：

$$\sigma^2_{R_i} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (R_i^{(j)} - \bar{R}_i)^2 \quad (3.2.4)$$

進一步代入柔度矩陣 A_{ik} 與熱邊界刺激 $T_k^{(j)}$ 之統計關係，有：

$$\sigma^2_{R_i} = \sum_{k=1}^m A_{ik} \sigma^2_{R_i T_k} \quad (3.2.5)$$

其中 $\sigma^2_{R_i T_k}$ 為響應 R_i 與第 k 热邊界輸入 T_k 之共變異數。

響應極值行為之預測

考慮統計樣本下響應與輸入熱載之線性耦合關係，設第 i 響應自由度之極值行為 R_{i+} 可表示為平均反應加上偏移項：

$$R_{i+} = \sum_{k=1}^m A_{ik} \bar{T}_k + g \sum_{k=1}^m A_{ik} \frac{\sigma^2_{R_i T_k}}{\sigma_{R_i}} = \sum_{k=1}^m A_{ik} \left(\bar{T}_k + g \frac{\sigma^2_{R_i T_k}}{\sigma_{R_i}} \right) \quad (3.2.6)$$

為更進一步解釋輸入與輸出之間的統計耦合關係，定義其皮爾森相關係數為：

$$\rho_{R_i T_k} = \frac{\sigma^2_{R_i T_k}}{\sigma_{R_i} \sigma_{T_k}} \quad (3.2.7)$$

代入上式，則極值可重寫為：

$$R_{i+} = \sum_{k=1}^m \mathbf{A}_{ik} (\bar{T}_k + g \rho_{R_i T_k} \sigma_{T_k}) \quad (3.2.8)$$



此式顯示，在輸入熱載荷統計相關性時，響應極值將依據輸入之平均、標準差與相關係數共同決定。

熱邊界輸入之極值推估

由此可推得每一個輸入熱邊界條件在對應極端事件下的上限與下限為：

$$T_{k+}^i = \bar{T}_k + g \rho_{R_i T_k} \sigma_{T_k} \quad (3.2.9)$$

$$T_{k-}^i = \bar{T}_k - g \rho_{R_i T_k} \sigma_{T_k} \quad (3.2.10)$$

此即為對應於響應設計自由度 R_i 發生極大或極小位移時，輸入熱邊界刺激條件所可能達成之極限情境，為 TLRC 模型進行設計極限預測的核心。

進一步地，針對極值熱邊界條件 $T_{k\pm}^i$ 的機率分布推導，可由式 (3.2.6) 延伸表示如下：

$$T_{k\pm}^i = \bar{T}_k \pm g \frac{\sigma_{R_i T_k}^2}{\sigma_{R_i}} \quad (3.2.11)$$

其中共變異數 $\sigma_{R_i T_k}^2$ 可展開如下：

$$\sigma_{R_i T_k}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (R_i^{(j)} - \bar{R}_i) (T_k^{(j)} - \bar{T}_k) = \sum_{\ell=1}^m \mathbf{A}_{i\ell} \sigma_{T_k T_\ell}^2 \quad (3.2.12)$$

式(3.2.12)中，利用系統柔度矩陣 \mathbf{A} 的線性性質，將熱機響應的變異表達為與負載共變異數的加權總和，其中 $\sigma_{T_k T_\ell}^2$ 為熱邊界負載 T_k 與 T_ℓ 間的共變異數，進而將其代入 σ_{R_i} 的表示式：



$$\sigma_{R_i} = \sqrt{\sum_{k=1}^m \mathbf{A}_{ik} \sigma_{R_i T_k}^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^m \mathbf{A}_{ik} \mathbf{A}_{i\ell} \sigma_{T_k T_\ell}^2} \quad (3.2.13)$$

再將式 (3.2.13) 代入式 (3.2.11)，可得熱邊界條件 T_k 的極值事件分布推估如下：

$$T_{k\pm}^i = \bar{T}_k \pm g \frac{\sum_{j=1}^m \mathbf{A}_{ij} \rho_{T_j T_k} \sigma_{T_j} \sigma_{T_k}}{\sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{\ell=1}^m \mathbf{A}_{ij} \mathbf{A}_{i\ell} \rho_{T_j T_k} \sigma_{T_j} \sigma_{T_\ell}}} \quad (3.2.14)$$

其中， $\rho_{T_j T_k}$ 表示熱邊界條件間的皮爾森線性相關係數， σ_{T_j} ， σ_{T_ℓ} 分別為熱邊界隨機變數的標準差。透過此公式，可進一步預測在不確定熱負載條件下，各個自由度上的極值溫度邊界情形。

最後，將極值熱邊界條件 $T_{k\pm}^i$ 做為邊界控制量，可藉由柔度矩陣 A 推算非設計自由度（如結構內部點）的響應結果，表示如下：

$$U_{k\pm}^i = \sum_{k=1}^m \mathbf{A}_{\ell k} T_{k\pm}^i \quad (3.2.15)$$

該式即為熱固耦合系統在極值熱邊界刺激條件下的響應預估方法，結合柔度矩陣與熱邊界統計特徵，能有效估計出受熱不確定性的系統內部位移極值。當隨機靜態外力作用於系統第 i 自由度時，所導致之正向與負向極值機械響應可等效表示為：

$$R_{i\pm} = U_{\ell\pm}^i \quad (3.2.16)$$

亦即，於極值熱邊界條件驅動下，設計自由度與非設計自由度之響應極值可透過柔度矩陣內部轉換關係一致對應。

綜上所述，當一固體熱固耦合系統暴露於具有不確定性之靜態熱負載環境下，其極值結構響應可由統計描述熱刺激（邊界條件）之分布特徵進行準確推估。此類統計描述包含熱負載變數之期望值、標準差與皮爾森線性相關係數等特徵量，並結合系統柔度矩陣以傳遞至各非設計自由度。如此一來，可在無需大量數值模擬的前提下，有效率且系統性地完成極值熱致位移或應力之預測。

3.2.3 TLRC 與樣本模擬結果比對

TLRC 方法雖為解析推估方法，但其精度經本研究大量樣本模擬（本論文研究實作 5000 次熱固耦合有限元素分析）驗證，其預測誤差通常小於 3%，可視為近似於樣本極值分布之外側包絡。其優勢如下：

- 計算速度快：無需迭代或隨機樣本生成，只需一次 FEM 柔度分析；
- 易於解釋與敏感度分析：透過 A_{ik} 與 $\sigma_{R_{IP_k}}$ 可清楚辨識主導熱源；
- 可延伸性強：除一維二力桿件 (Truss) 热應變問題外，也可應用於二維導線。

3.3 隨機熱邊界條件負載響應關聯法

在一般結構靜力分析中，邊界條件多以位移形式狄利克雷 (Dirichlet) 邊界條件指定於結構系統的特定自由度上，例如夾持、固定、或熱負載控制點。在本研究中，我們考慮熱固耦合問題下的狄利克雷熱邊界條件，其具有隨機特性，即節點溫度邊界值為隨機變數（例如晶片封裝導線兩端的接點溫度受限於不確定性加熱環境）。此類不確定輸入在有限元素系統的矩陣運算中，不可直接做為傳統 LRC 中施加於右側向量 F 的外力，而是需修改待求解向量 u 本身。因此，本節將說明如何透過位移控制方程式的矩陣置換與重組技巧，在有限元素總方程：

$$Ku = F$$

(3.3.1)



中，將隨機位移節點轉換為已知項，並將其餘未知自由度留下，形成有效的 TLRC 應用架構。

3.3.1 隨機位移邊界條件的矩陣改寫策略

如圖所示，當 $u_2^{(1)}$ 被指定為一個已知數值 Δ 時，傳統的剛度矩陣方程：

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1,2N} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2,2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{2N,1} & k_{2N,2} & \cdots & k_{2N,2N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ \vdots \\ u_2^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{2N} \end{bmatrix} \quad (3.3.2)$$

需重新改寫成：

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1,2N} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{2N,1} & k_{2N,2} & \cdots & k_{2N,2N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ \vdots \\ u_2^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \Delta \\ \vdots \\ r_{2N} \end{bmatrix} \quad (3.3.3)$$

此處，我們將對應第 2 自由度（位移 DOF）之方程式整體替換為：

- 保留該自由度之數值為已知（即 $u_2 = \Delta$ ）；
- 將原本第 2 行的剛度矩陣與力向量用 $[0 \ \cdots \ 1 \ \cdots \ 0]$ 與 Δ 取代；
- 系統中其他未知自由度維持原式不變。

這種方式即為 Prescribed displacement 的經典處理手法，也是狄利克雷位移條件進入 TLRC 分析的基礎。



3.3.2 統整優勢與物理意涵

此一邊界位移控制下的 TLRC 模型有幾個特別優點：

- 能夠準確預測當邊界條件出現極端變化時，結構內部的設計點位移與應力響應；
- 可做為半解析替代方案，取代大量隨機樣本模擬；
- 支援以溫度做為「輸入隨機場」時的封裝模組、金線、或微機電系統結構分析。



第四章 實例分析

為驗證第三章所提出之熱固耦合極值反應解析方法之可行性與準確性，本章將透過多個具代表性的工程案例進行數值模擬與統計分析。各實例皆涵蓋不同結構構型、材料性質與邊界條件，並結合熱固耦合有限元素模型與 TLRC (Thermal load response correlation) 方法進行評估，以探討不確定性熱載對結構熱致變形與應力分布之影響。藉由對比解析預測與數據採集樣本結果，可有效檢驗本論文所提出之方法中的預測能力與通用性，並提供後續工程應用設計之參考依據。

為驗證本論文提出之熱固耦合尖峰反應解析方法之可行性與精準度，本章將針對多種具代表性的結構案例進行數值模擬與統計分析。本章首先以太陽能模組鋁合金支架[11] 為起點，探討此類大型鋁製結構在日照-夜間循環溫差作用下可能引發的熱致變形與內部應力集中，進一步評估其穩定性與設計安全係數。接著，探討電力模組導線與外層導線架於功率半導體系統中因兩端溫差與封裝設計所導致的熱應變分布與機械反應，分析其於高可靠性應用中的極值風險與設計準則。後續亦納入微機電系統中常見之微橋式結構與彎曲細線構型，藉此系統性測試 TLRC (Thermal load response correlation) 方法於實際工程條件下之通用性與極值預測能力。

本章實例均建構於熱固耦合有限元素模型基礎上，並考慮熱邊界的不確定性輸入條件，透過 數據採集方法生成大樣本熱載組合以模擬實際熱擾動狀況。接著，藉由 TLRC 所推導之封閉解對應位移與應力響應進行預測，並與統計樣本結果進行比較與驗證，進一步探討不同自由度之極值響應範圍與潛在失效風險。

除了探討結構變形之外，本章不僅針對單一自由度響應進行極值預測，亦進一步推估最極端樣本下之全域應力分布情形，以掌握可能導致材料降伏或破壞之熱固耦合臨界條件。藉由本章各系列案例之實作與數據比對，能充分展現 TLRC 方法不僅具備高效率、高精度與理論一致性，亦可廣泛適用於各種工程熱致失效風險分析場景，為未來結構可靠性設計提供具體的理論支撐與分析依據。



4.1 太陽能板鋁合金支架熱固耦合極值分析

本節首先探討應用於太陽能模組中的鋁合金支撐結構（如圖 4.1.1）。此類結構廣泛應用於戶外太陽能發電系統中，長期暴露於高溫環境與日夜循環熱場下，極易產生熱致變形與內部應力累積，進而影響整體穩定性與服役壽命。為此，本研究導入 TLRC（Thermal load response correlation）方法，針對該支架在隨機熱邊界條件下進行極值熱固耦合響應預測，評估其在實務操作下的安全裕度與熱管理設計需求。

此設定模擬模組於白天受光照與陰影交錯或散熱器附近存在熱場不均的情境，屬於典型太陽能系統中熱擾動具代表性的邊界條件。配合 TLRC 方法進行數據採集熱載樣本生成與對應位移／應力響應分析，可有效預測其最大變形與內部熱應力位置，並與材料降伏準則比較以確認安全裕度。應力位置，並與材料降伏準則比較以確認安全裕度。



圖 4.1.1 太陽能板支架

在太陽能應用中，鋁合金支架因其高熱膨脹特性與週期性受熱，若未妥善設計



或進行熱管理，長期可能導致支撐失效、結構變形或模組位移錯位。本分析即針對支架熱致位移與內部應力做統計性極值推估，透過 TLRC 方法提供快速、可靠的預測包絡線，有助於工程上評估支架壽命、設計補強與選材依據。

因此，本節分析不僅驗證 TLRC 方法於實際鋁合金支架應用的適用性，也凸顯熱邊界隨機性對結構響應的重要影響，為未來太陽能模組支架設計與熱應力管

4.1.1 幾何與模型架構

圖 4.1.2 太陽能板支架幾何架構，此圖模擬在橫向長度 53.4981 cm 縱向高度為 36.7304 cm 之鋁合金支架系統，其結構由 7 個線段 (Element1–Element7) 所構成每個節點長度為 3 cm，透過 8 個節點 (Node1–Node8) 定義幾何配置，模擬太陽能模組中典型的斜撐式支撐結構。各桿件角度依序為 88° 、 30° 、 30° 、 30° 、 30° 、 30° 、 10° ，呈現由基底垂直支撐延展至高點支撐的折線輪廓，對應實際模組架設時所需之傾斜與轉折設計。

此模型採二力桿件 (Truss) 假設，僅考慮軸向張壓行為，有效簡化變形行為分析並保留足夠結構描述能力。每一單元均賦予橫截面積與機械材料性質，以計算軸向剛度與熱應變耦合項，並結合方向餘弦 (Direction cosine) 轉換使得一維元件嵌入二維平面幾何中，進行結構位移與內部應力之準確模擬。

模型的自由度定義採用每節點兩個平面自由度 (X 與 Y 向)，由節點 1 至節點 8 共對應 16 個自由度。本分析特別關注節點 5 的 Y 向位移 (自由度 9)，代表支架中段區域之變形狀態，做為 TLRC 方法中主要的結構響應觀察量，評估其在隨機熱載條件下的極值分布與安全裕度。

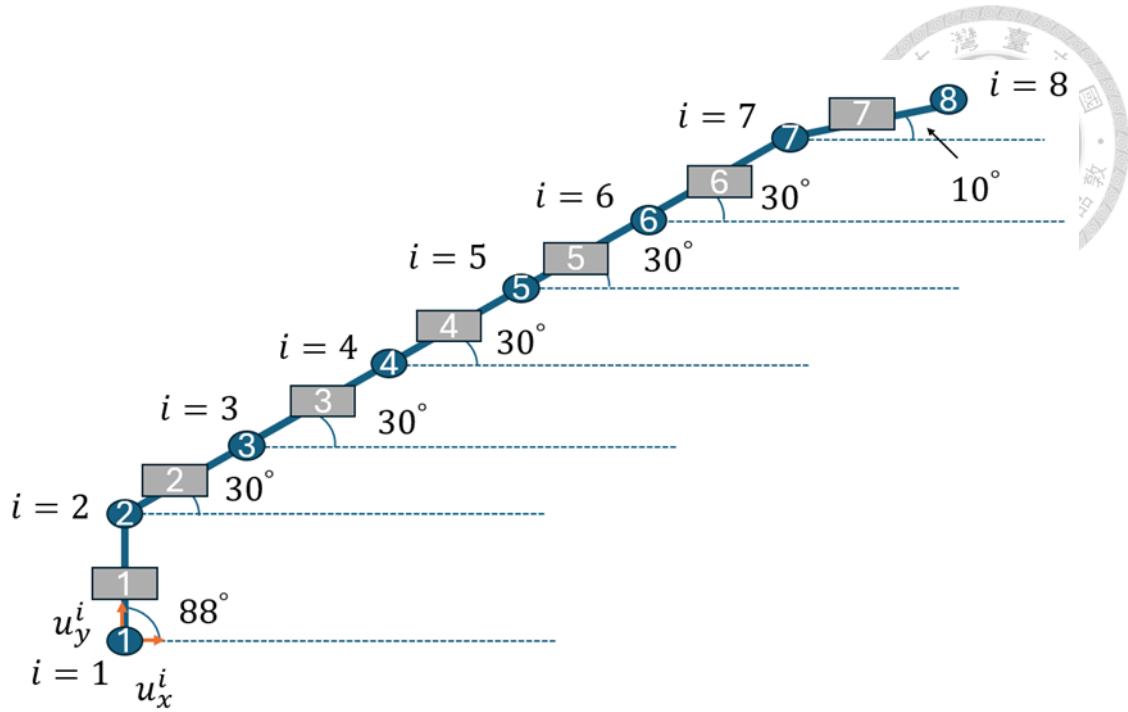


圖 4.1.2 太陽能板支架幾何架構

4.1.2 材料參數

本研究採用鋁合金做為支架材料，具備良好導熱性與輕量結構優勢，常見於各類太陽能模組中。所使用之材料參數如下：

- 楊氏係數 (Young's modulus)：支架抵抗軸向變形的能力，以線彈性理論計算其軸向應力與軸向應變之線性關係。本研究採用銅材料之彈性模數

$$E = 700 \times 10^6 \text{ kPa} \quad (4.1.1)$$

- 热膨脹係數 (Coefficient of thermal expansion, CTE)：支架受到溫度變化時產生熱應變的能力，為熱變形模擬中的重要參數。

$$\alpha = 24 \times 10^{-6} / \text{K} \quad (4.1.3)$$



- 热傳導係數 (Thermal conductivity)：用以評估支架內部熱擴散能力，在穩態熱傳分析中對溫度場分佈具有關鍵影響。

$$k = 188 \text{ W/mK} \quad (4.1.4)$$

4.1.3 邊界條件

為求得合理的有限元素力學解，本模型需設置適當的邊界條件，以滿足剛體位移自由度的運算條件並模擬導線固定端限制。在本小節中，導線左側起點設定為固定支撐，節點 Node1 的水平與垂直方向皆設為零位移（完全拘束）：

- 固定左端點位移：

$$u_x^1 = 0 \quad (4.1.5)$$

$$u_y^1 = 0 \quad (4.1.6)$$

- 此外，為避免導線整體旋轉或產生無限制的剛體運動，模型中亦於尾端節點 Node8 加設一個垂直方向的限制：

$$u_y^7 = 0 \quad (4.1.7)$$

4.1.4 热負載條件(隨機邊界條件)

在節點 Node1 與 Node8 上施加隨機溫度邊界條件，模擬模組於白天受光照與陰影交錯或散熱器附近存在熱場不均的情境，屬於典型太陽能系統中熱擾動具代表性的邊界條件：

- 平均溫度：



$$\mu_{node1} = 298 \text{ K} \quad (4.1.8)$$

$$\mu_{node8} = 318 \text{ K} \quad (4.1.9)$$

- 標準差：

$$\sigma_{node1} = 10 \text{ K} \quad (4.1.10)$$

$$\sigma_{node8} = 20 \text{ K} \quad (4.1.11)$$

- 相關係數：

$$\rho = 0 \quad (4.1.12)$$

配合 TLRC 方法進行 數據採集熱載樣本生成與對應位移／應力響應分析，可有效預測其最大變形與內部熱應力位置，並與材料降伏準則比較以確認安全裕度。

4.1.5 LRC 應用與目標節點

本分析中，選定節點 5 的 Y 向位移（自由度 9）做為結構響應之觀察指標，代表支架中段區域之熱致變形行為，並進一步以其對應樣本反推各元素內部軸向應力之極值狀態。

此選定依據如下：

1. 幾何對稱與結構代表性：節點 5 處於支架中段，具備良好的反應特徵與熱傳遞敏感性。
2. 热擾動集中區：該位置容易因上下溫差傳遞與結構轉折角度變化而產生熱應力集中效應。
3. 模型解構效率高：可針對單一觀察節點對應之變形與應力作 TLRC 多樣本分析，提升極值推估效率與準確性。

在實際應用層面，鋁合金支架做為太陽能板的主要固定支撐，若在極端熱載條件下發生過大變形或局部應力超過降伏準則，可能導致模組傾斜、鬆動甚至結構疲勞損壞。透過 TLRC 方法分析節點 5 位移與應力之極值行為，能提前辨識潛在熱致危機，並據此設計結構補強、提升安全係數與散熱機制，有效延長太陽能模組整體壽命。

此外，本分析亦針對最大與最小位移樣本進行內部應力分析，並與材料降伏強度進行比對，以驗證其在最不利熱擾動下仍能維持足夠安全裕度，並提供實務設計中評估散熱途徑、材料選擇與形狀優化之定量依據。

4.1.6 數據成果討論

4.1.6.1 針對 $\rho = 0$ 熱邊界條件下之分析討論

針對熱邊界相關係數 $\rho = 0$ 的條件，本研究進行 5000 次 數據採集模擬以分析支架結構在隨機熱載下之位移與應力響應。圖 4.1.5 顯示左端溫度 T_L 與右端溫度 T_R 的樣本散佈分布圖，呈現典型雙變量常態分布中無相關性的對稱橢圓外觀，代表兩側熱擾動獨立變化，驗證設定之 $\rho = 0$ 條件確實實現。

圖 4.1.6 與圖 4.1.7 分別呈現左右端溫度樣本之機率密度分布。 T_L 平均約為 298 K，標準差為 10 K； T_R 平均約為 318 K，標準差為 20 K，兩者皆呈現近似常態分布，對應所設定之隨機輸入模型。

圖 4.1.8 呈現觀察自由度 (DOF 9) 之熱致位移響應與 LRC 模型預測範圍的對應關係。由圖可見， $g = 1$ 至 $g = 3$ 三階邊界幾乎完整包覆模擬樣本，顯示 LRC 方法對於最大變形範圍具高預測能力與統計可信度。圖 4.1.9 為該設計自由度的位移分布直方圖，顯示平均位移約為 9.3×10^{-3} cm，標準差為 8.86×10^{-3} cm，響應近似常態分布，略偏正向位移，表示即使在無相關的熱邊界下，結構仍可能出現一致方向之微小偏移行為。

進一步於圖 4.1.10 與圖 4.1.11 分析在設計自由度產生最大與最小極值響應條



件下所對應內部軸向應力分布，可觀察到極值響應皆集中於第 3 與第 4 元素區域。最大張應力約為 +3.26 MPa，最大壓應力約為 -1.16 MPa，明顯皆位於幾何轉折角附近，代表支架轉折處為熱致應力的集中熱點。

整體而言，本研究採用之鋁合金支架材料，其降伏強度遠高於模擬所得最大應力值，因此可確認支架在 $\rho = 0$ 隨機熱邊界條件下運作仍處於完全彈性範疇，具備良好安全裕度與機械穩定性。

此結果驗證 TLRC 方法除可精確預測特定觀察自由度之熱致變形極值外，亦能有效推估內部應力集中區，提供後續鋁合金支架在高溫環境下之結構優化與熱管理設計重要依據。

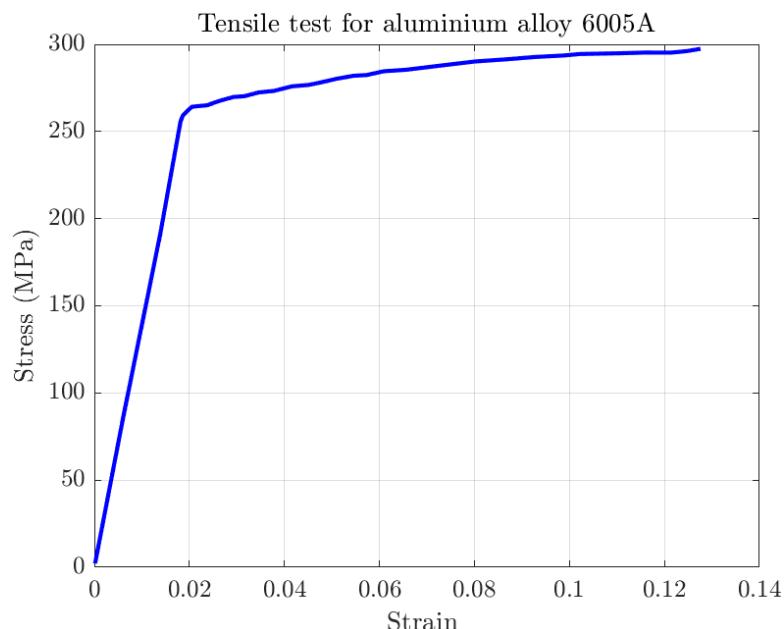


圖 4.1.3 6005A 鋁合金拉伸實驗圖

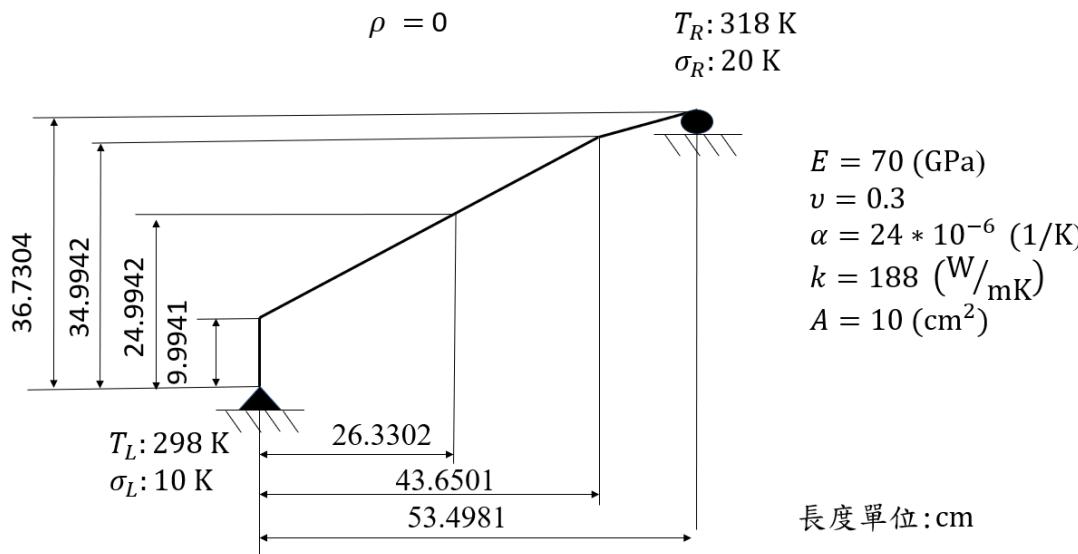


圖 4.1.4 太陽能板支架於 $\rho = 0$ 時之熱固耦合分析模型圖

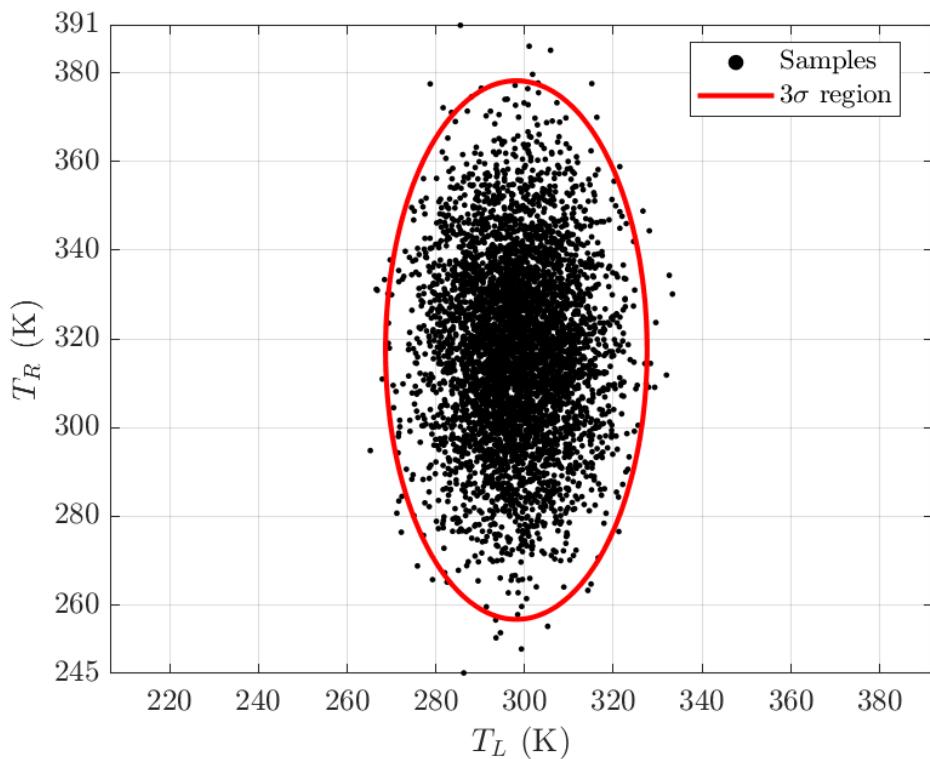


圖 4.1.5 太陽能板支架於 $\rho = 0$ 時之熱刺激相關性

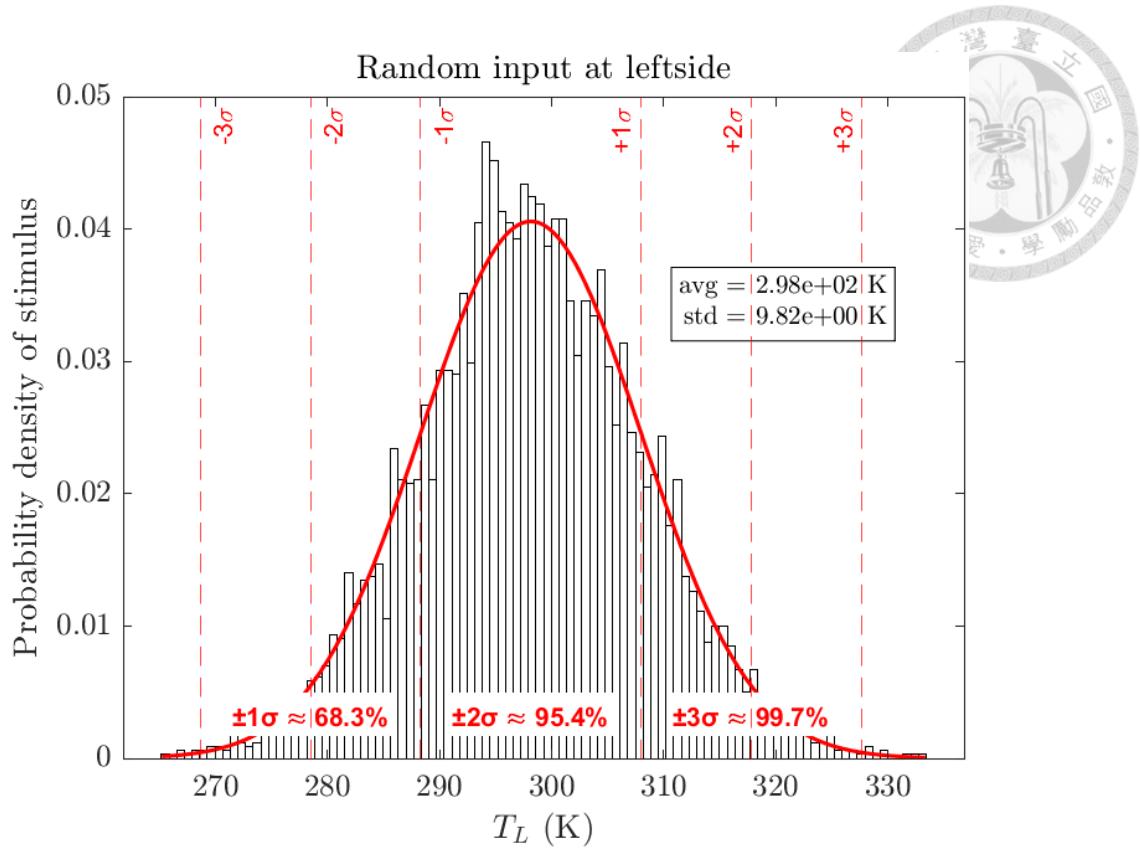


圖 4.1.6 太陽能板支架於 $\rho = 0$ 時之左端熱載樣本

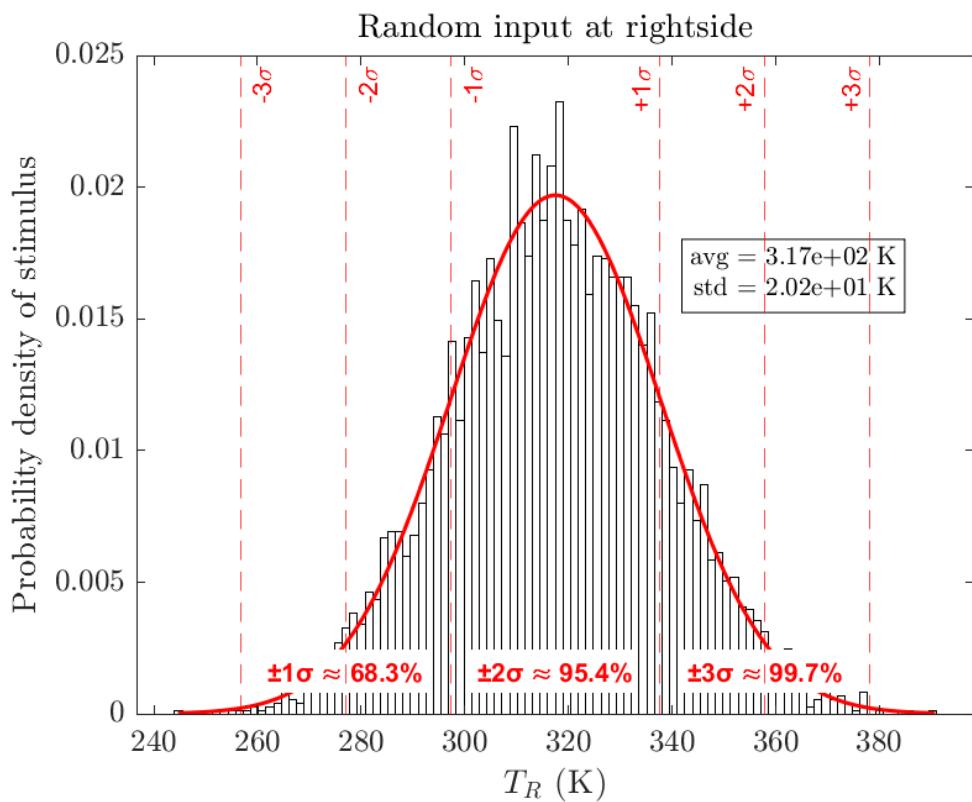
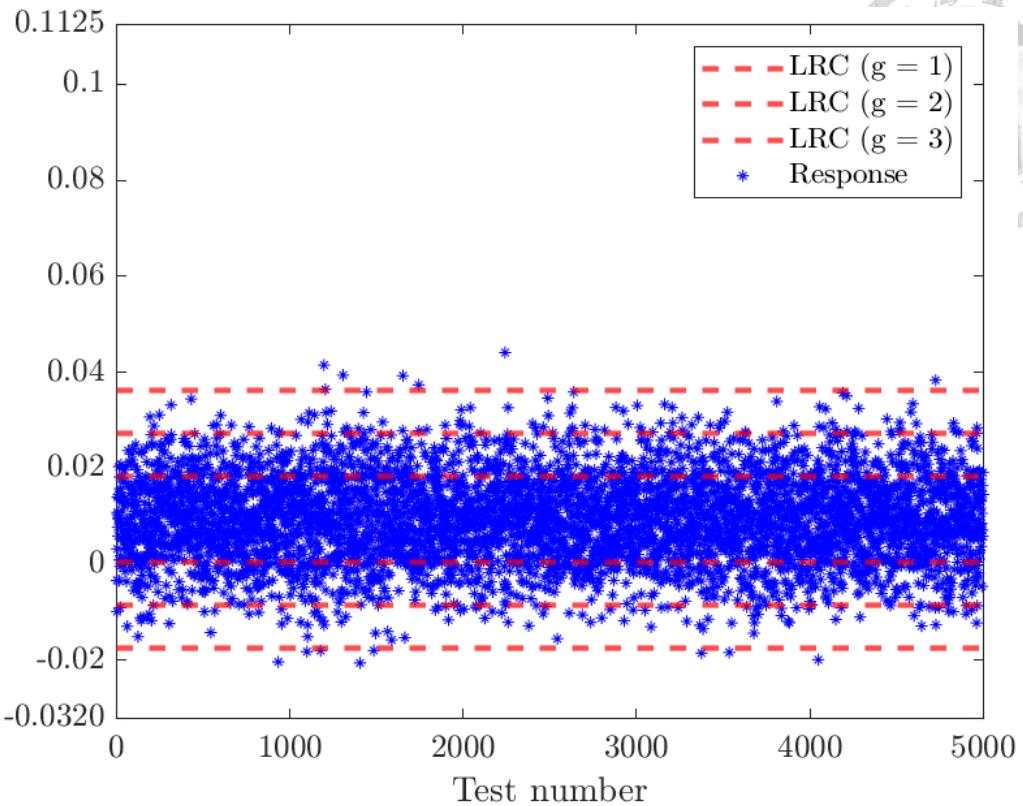
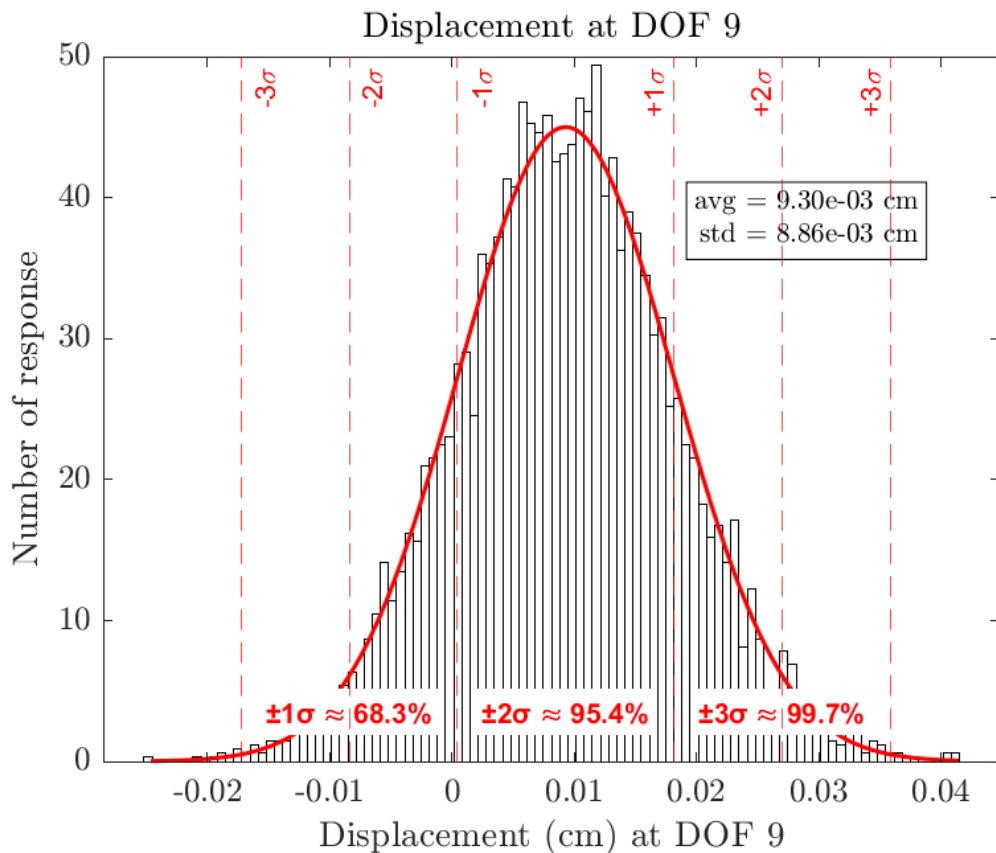


圖 4.1.7 太陽能板支架於 $\rho = 0$ 時之右端熱載樣本

圖 4.1.8 太陽能板支架於 $\rho = 0$ 時之 TLRC 預測與驗證結果圖 4.1.8 太陽能板支架於 $\rho = 0$ 時之 TLRC 預測與驗證結果圖 4.1.9 太陽能板支架於 $\rho = 0$ 時之數據採集生成響應分布

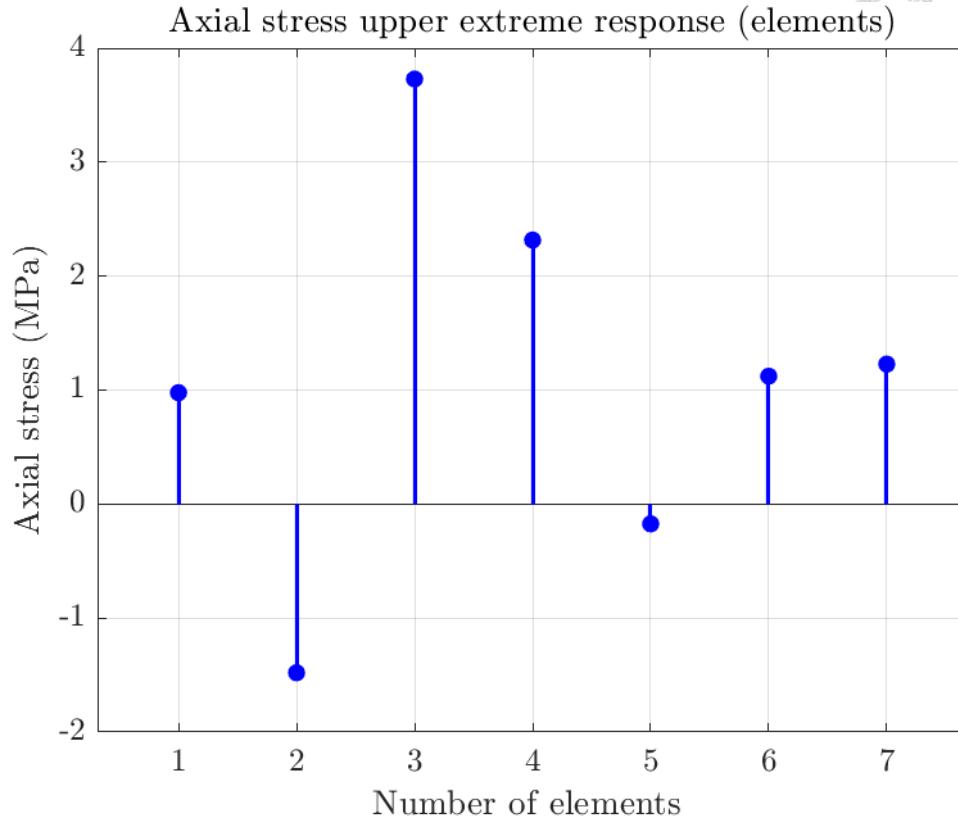


圖 4.1.10 太陽能板支架於 $\rho = 0$ 時之正向極值條件下應力響應

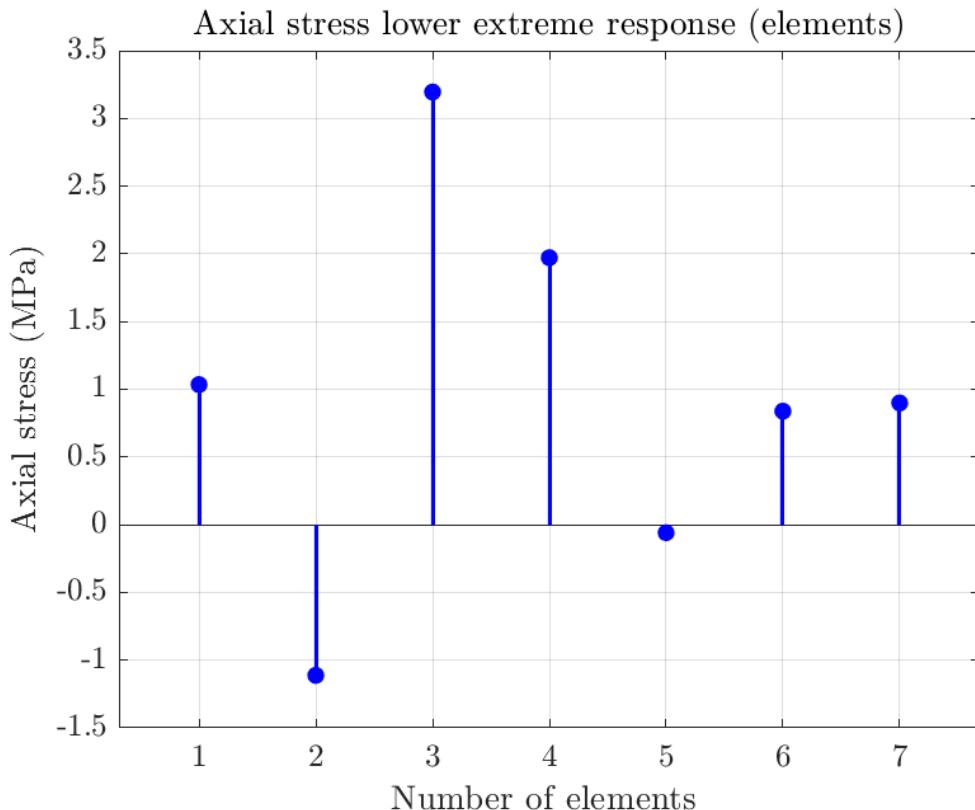


圖 4.1.11 太陽能板支架於 $\rho = 0$ 時之負向極值條件下應力響應



4.2 Power module 導線分析 (Wire Analysis)

本小節針對一個封裝導線結構(如圖 4.2.1)進行隨機熱邊界條件下的力學響應分析，探討在不確定熱載入情境中節點位移與內部應力的統計行為，並以 LRC (Load response correlation) 方法預測其極值響應。所處理的結構類型參考自電力模組 (Power module) 中的導線架構[12]，其應用常見於功率元件封裝之中，例如 IGBT 模組、MOSFET、整流器封裝等。這些導線在長期通電或循環熱源驅動下，會因熱膨脹與應力集中的交互作用導致失效，因此需建立可靠的分析模型，以評估其在隨機熱邊界條件下的結構可靠度與潛在破壞風險。

為此，我們導入一套簡化的一維線性元素模型(如圖 4.2.2)，模擬導線受到兩端隨機溫度邊界驅動時所產生的熱機響應 (Thermo-mechanical response)。本模型透過有限元素法求解熱-機耦合問題，並搭配數據採集法與 LRC 極值推估理論，推演其位移與內部應力的分布範圍與上下界，最終據以評估導線是否可能進入降伏 (Yielding) 區間。

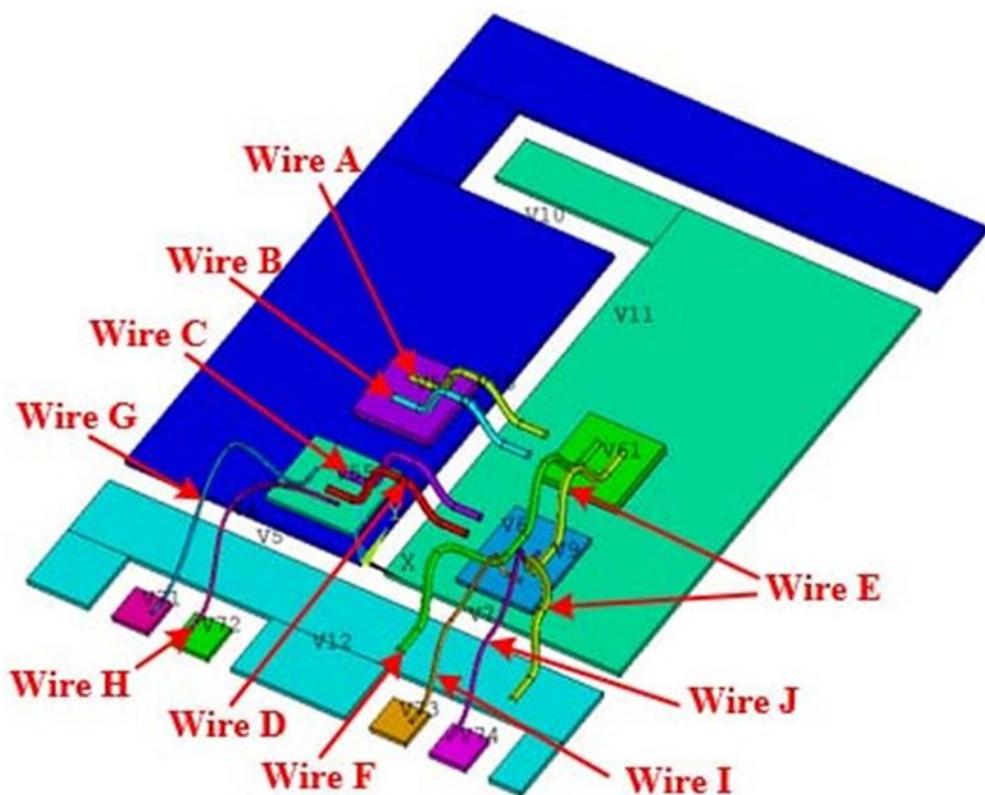


圖 4.2.1 Power Model 內部導線與模組結構圖 [12]

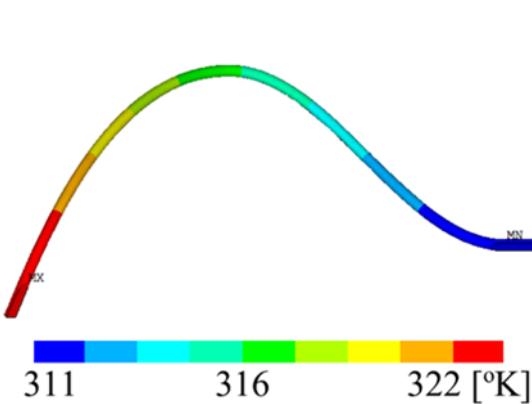


圖 4.2.2 Wire H [12]

4.2.1 幾何與模型架構

本小節考慮一條由七個線段 (Element1–Element7) 所構成的彎曲導線，每線段長度皆為 1 mm，透過八個節點 (Node1–Node8) 定義幾何配置。導線形狀設計多參考實際封裝中的金線幾何輪廓，包括轉折角度、彎曲半徑與段長比例等，以模擬封裝製程後實際導線的變形狀態。此模型在幾何上仍保持二力桿件 (Truss) 假設，以簡化變形行為至純軸向張壓。

每一單元均設定有橫截面積與機械材料性質，用以計算單元之軸向剛度與熱應變耦合項。此外，本模型中也考慮單元與節點的方向餘弦 (Direction cosine) 關係，使得每一段元件雖為一維結構，仍能嵌入二維空間中分析其位移分佈與應力走向。這種模型建構方式可確保求解精度與幾何彈性形狀的靈活設計，便於日後延伸至實際封裝結構或複數導線的參數敏感度分析與安全性評估。

圖 4.2.3 為本研究所使用之分析模型，其由七個桿件所組成，總長度為 7 mm，自由度描述則設定為最左端第一節點 X 方向為 DOF1，Y 方向為 DOF2，第二節點 X 方向為 DOF3，Y 方向為 DOF4，以此類推。設計自由度 (觀察位移點) 為第 9 自由度，對應於第五個節點。圖中各桿件之配置角度呈現出一條初始彎曲的金線架構，有利於熱機耦合效應下的軸向應力傳導與響應分析。

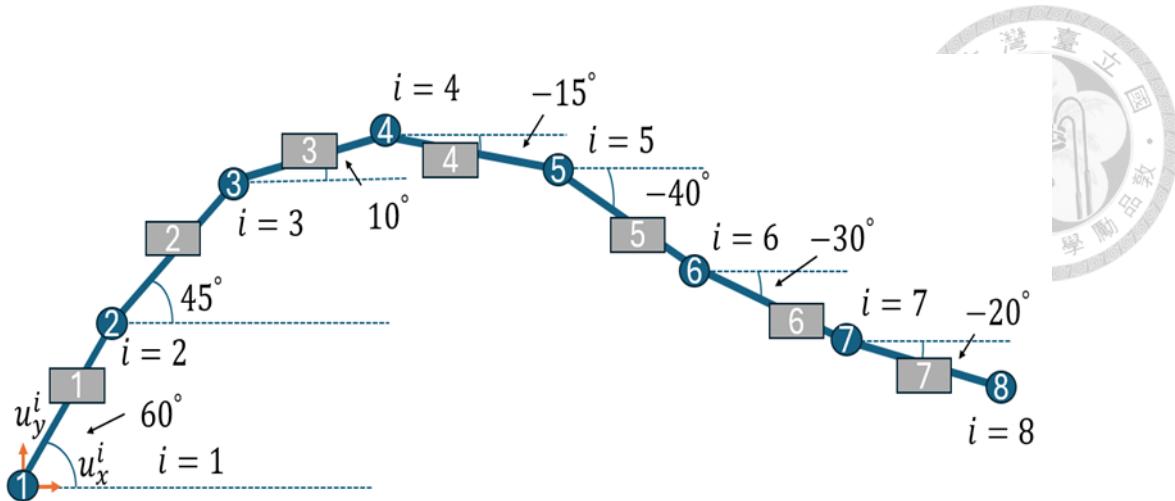


圖 4.2.3 Wire H 幾何模型架構

4.2.2 材料參數

本小節中導線所採用的材料為純銅 (Copper)，其在功率模組封裝中具有良好的導熱與導電性能，為常見之導線材料。為模擬其在熱邊界條件下的力學行為，需賦予導線適當的熱-機耦合物理參數。下列為採用之機械與熱學材料性質：

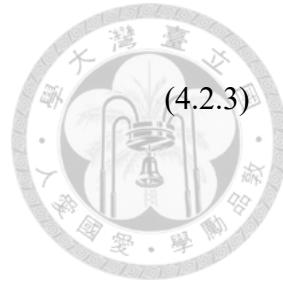
- 楊氏係數 (Young's modulus)：導線抵抗軸向變形的能力，以線彈性理論計算其軸向應力與軸向應變之線性關係。本研究採用銅材料之彈性模數

$$E = 130 \times 10^6 \text{ kPa} \quad (4.2.1)$$

- 热膨胀係數 (Coefficient of thermal expansion, CTE)：導線受到溫度變化時產生熱應變的能力，為熱變形模擬中的重要參數。

$$\alpha = 17 \times 10^{-6} / \text{K} \quad (4.2.2)$$

- 热傳導係數 (Thermal conductivity)：用以評估導線內部熱擴散能力，在穩態熱傳分析中對溫度場分佈具有關鍵影響。



$$k = 400 \text{ W/mK}$$

(4.2.3)

4.2.3 邊界條件

為求得合理的有限元素力學解，本模型需設置適當的邊界條件，以滿足剛體位移自由度的運算條件並模擬導線固定端限制。在本小節中，導線左側起點設定為固定支撐，節點 Node1 的水平與垂直方向皆設為零位移（完全拘束）：

- 固定左端點位移：

$$u_x^1 = 0 \quad (4.2.4)$$

$$u_y^1 = 0 \quad (4.2.5)$$

- 固定右端點位移：

$$u_y^8 = 0 \quad (4.2.6)$$

$$u_y^8 = 0 \quad (4.2.7)$$

4.2.4 热負載條件(隨機邊界條件)

在節點 Node1 與 Node8 上施加隨機溫度邊界條件，模擬外部熱源或電流加熱造成的不確定熱輸入：

- 平均溫度：

$$\mu_{node1} = 322 \text{ K} \quad (4.1.8)$$



$$\mu_{node8} = 311 \text{ K}$$

(4.1.9)

- 標準差：

$$\sigma_{node1} = 20 \text{ K}$$

(4.1.10)

$$\sigma_{node8} = 15 \text{ K}$$

(4.1.11)

- 相關係數：

$$\rho = 1, 0, -1$$

(4.1.12)

此隨機邊界條件由雙變量常態分佈 (Bivariate normal distribution) 所生成，在 LRC 計算中會對熱載入進行多樣抽樣並計算其對位移與內力響應之影響。

4.2.5 LRC 應用與目標節點

本分析中，我們設定目標節點為中間節點 (Node5) 之一，用於觀察中段導線在兩端熱載入下所產生的熱變形行為，並進一步從位移推估出內部應力 (Axial stress)。

圖(4.1)顯示了典型功率模組封裝內部的多條金線分布 (Wire A~Wire J)，每條導線均連接於銅層或是功率元件之間，傳遞功率或訊號。本小節特別聚焦於圖中標記為 Wire H 圖(4.2)的金線做為代表性分析對象，理由如下：

1. 幾何位置明確且清晰： Wire H 為中段導線，其兩端分別連接至上下不同功率元件，適合做為內部熱載不均衡條件下的響應觀察點。
2. 热傳主通道： 該導線所處位置正好靠近熱流通路，可能承受顯著的熱梯度與熱膨脹差異。
3. 易於建構簡化模型： 根據封裝剖面資料與圖中幾何布局，Wire H 的形狀

與方向可對應為本文所建立之 7 段桿件模型，其機械與熱邊界條件皆易於明確設定與控制。

因此，在本小節中後續 LRC (Load response Correlation) 極值預測分析與軸向應力響應計算，皆是以 Wire H 做為分析主軸，並針對其響應極值條件（包含最大軸向張應力與壓應力）進行統計與安全性判斷。

此外，Wire H 的選定也考量了其在功率模組電性與散熱功能中所扮演的角色。做為跨接上下電極與散熱銅層之間的導體通路，該導線不僅負責電流傳輸，更因其幾何彎折形態與布線位置容易受到溫度梯度與熱膨脹限制所誘發的熱應力 (Thermal stress) 與機械應變 (Mechanical strain)，進一步導致潛在的可靠度議題。

在實務應用中，導線彎曲處極易成為熱應力集中之處，若未妥善考慮外部負載與溫差變異，可能引發微裂、塑性變形甚至金屬疲勞破壞等失效機制，進一步影響模組壽命與產品性能穩定性。因此，本小節以 Wire H 為例，結合熱固耦合有限元素模型與統計變異條件下之負載響應相關性分析 (LRC)，可有效評估此類金線在受隨機熱載條件下的最不利位移與內部應力狀態，提供後續安全設計與材料選擇的重要參考依據。

最後，為了強化此分析方法的可用性與實務價值，研究亦進一步計算 Wire H 所受之最大軸向應力響應（含張與壓雙向），並與材料降伏準則 (Yield criterion) 進行比對，藉此驗證所推估之極值載荷狀況是否可能造成永久變形或潛在破壞。

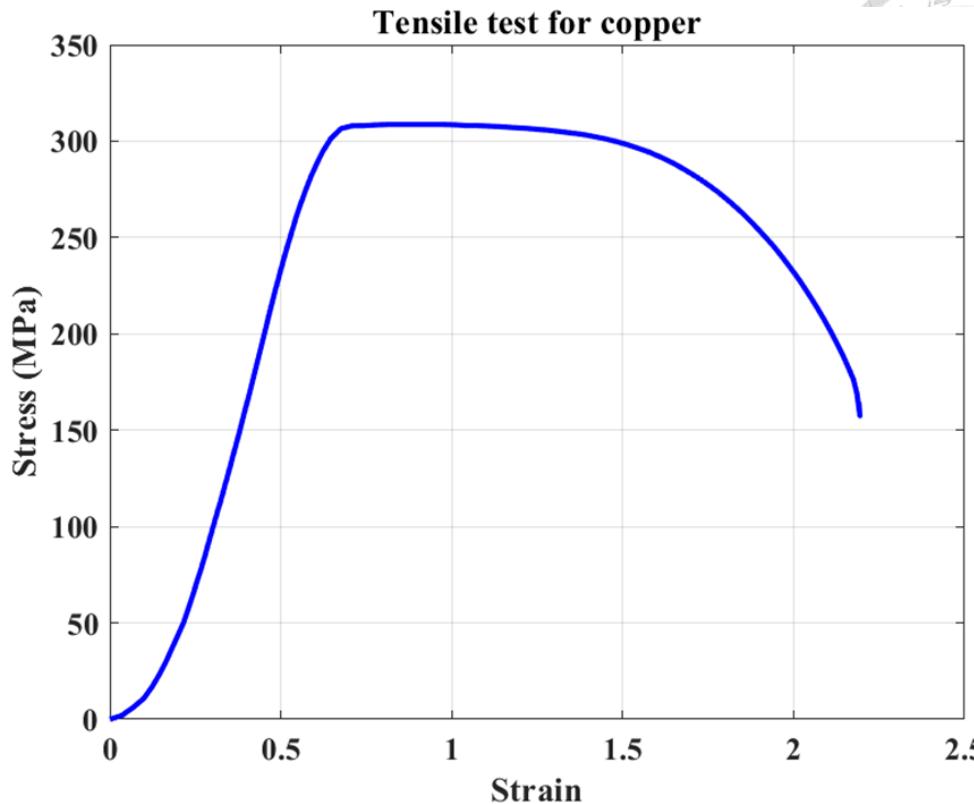


圖 4.2.4 銅拉伸實驗圖

4.2.6 數據成果討論

4.2.6.1 針對 $\rho = 1$ 热邊界條件下之分析討論

圖 4.2.5 針對相關係數 $\rho = 1$ 的條件下，進行溫度邊界隨機變化所導致之結構響應行為進行討論，分析內容涵蓋刺激資料分布、響應結果統計、LRC 方法預測能力，以及極值響應對整體結構內部應力分布之影響。

圖 4.2.6 所示為在 $\rho = 1$ 條件下，左端 (DOF 17) 與右端 (DOF 24) 溫度邊界條件的樣本分布圖。由圖可知，樣本資料均集中於紅色 3σ 線段區域內，呈現一條高度線性相關的直線，顯示當相關係數為 1 時，左、右端的溫度變動呈現完全線性一致性，代表左右熱邊界會同時升溫或降溫。

圖 4.2.7 與 圖 4.2.8 分別呈現左端與右端節點之溫度樣本直方圖。左端溫度 (DOF 17) 平均值為 322 K，標準差約為 20 K；右端溫度 (DOF 24) 平均值為



311 K，標準差約為 15 K，兩者皆近似常態分布。

圖 4.2.9 為 LRC 模型預測極值範圍與模擬結果的散點比對。圖中紅虛線為 $\pm 1\sigma$ 、 $\pm 2\sigma$ 、 $\pm 3\sigma$ 下的理論預測極限，而藍色點為實際模擬散點。觀察可發現，絕大多數資料點均落於 $\pm 3\sigma$ 區間內，僅極少數接近邊界點，顯示 LRC 模型具良好之預測準確性。在 $\rho = 1$ 的條件下，極值響應具良好的穩定性與可控性。

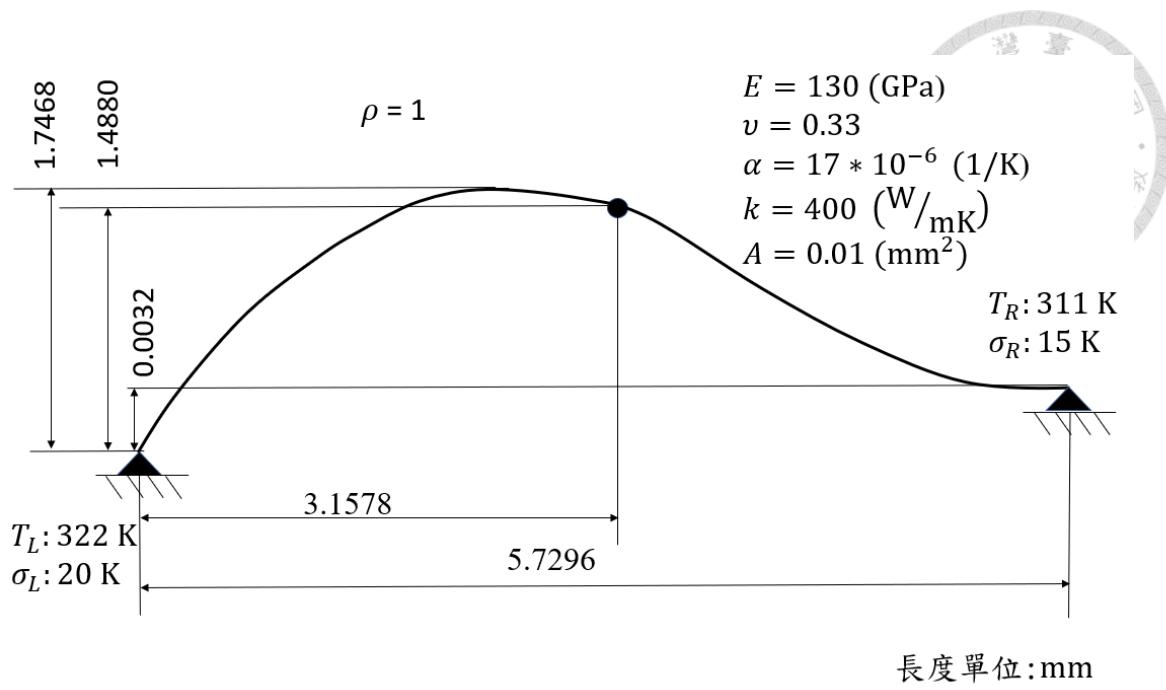
圖 4.2.10 為設計自由度 (DOF 9) 之位移響應直方圖，統計樣本為 5000 次模擬結果。從圖中可見響應分布亦呈現近似常態分布，平均值約為 0.017 mm，標準差約為 0.0006 mm。

圖 4.2.11 與 圖 4.2.12 分別對應正向與負向極值響應下，整條金線各元素所產生的軸向應力分布。以正向極值 (最大位移) 條件觀察，應力最大值發生於第 2 元素，達約 15 MPa，其餘元素多為中低應力值。負向極值條件下，雖整體應力水準略低，但仍可觀察到在第 2 與第 4 元素處有明顯的應力反應，顯示這些區域為潛在的應力集中特徵點。

整體而言，在 $\rho = 1$ 的熱邊界條件下，左右溫度升降一致，有利於位移響應與軸向應力分布之穩定性控制，且 LRC 所預測之極值範圍與實際數據高度吻合，證實 LRC 模型能有效應用於設計自由度之熱固耦合極值預測。

進一步觀察 圖 4.2.11 與 圖 4.2.12 中由極值響應導出對應的軸向應力分布，根據本小節所參考之材料性質圖 (如圖 4.2.4)，銅材於室溫條件下的張伸試驗顯示，其降服強度約為 220 MPa，因此推得本模型中所產生之軸向應力遠低於其材料降伏極限。亦即，在所有模擬條件下，即便於極值熱邊界條件組合與強正相關輸入條件下，整體結構之軸向應力皆落於彈性範圍內 (Elastic region)，未引發材料進入塑性變形行為，代表結構設計在安全考量上仍具有高度穩定性與可靠性。

綜合而言，LRC 預測方法除可有效捕捉設計自由度下的極值位移外，亦可進一步藉由其響應模式推估非設計自由度之力學反應，搭配材料性能準則，達成完整之安全性判斷。此方法於具不確定性之邊界條件中展現出優良的應力控制潛力。



長度單位:mm

圖 4.2.5 Power module 導線於 $\rho = 1$ 之熱固耦合分析模型圖

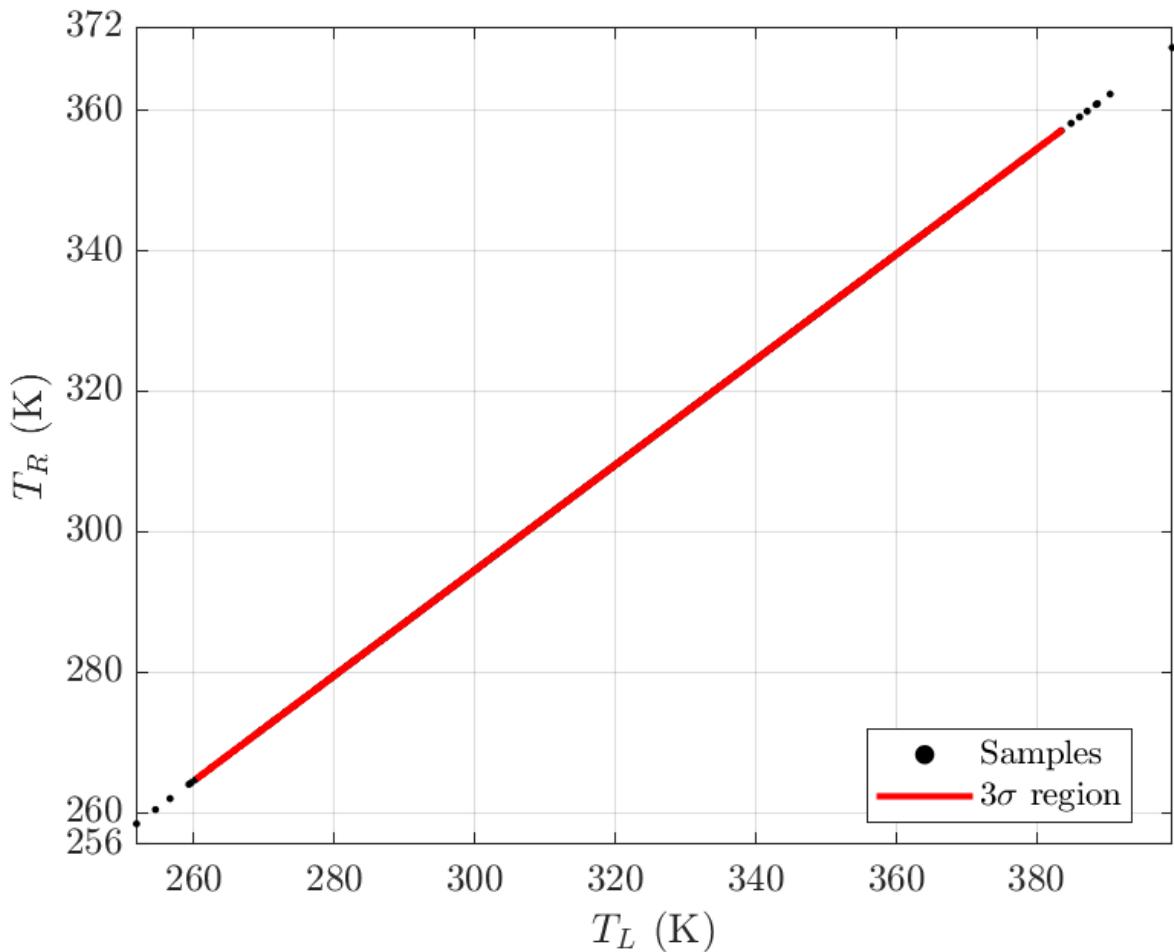


圖 4.2.6 Power module 導線於 $\rho = 1$ 之熱刺激相關性

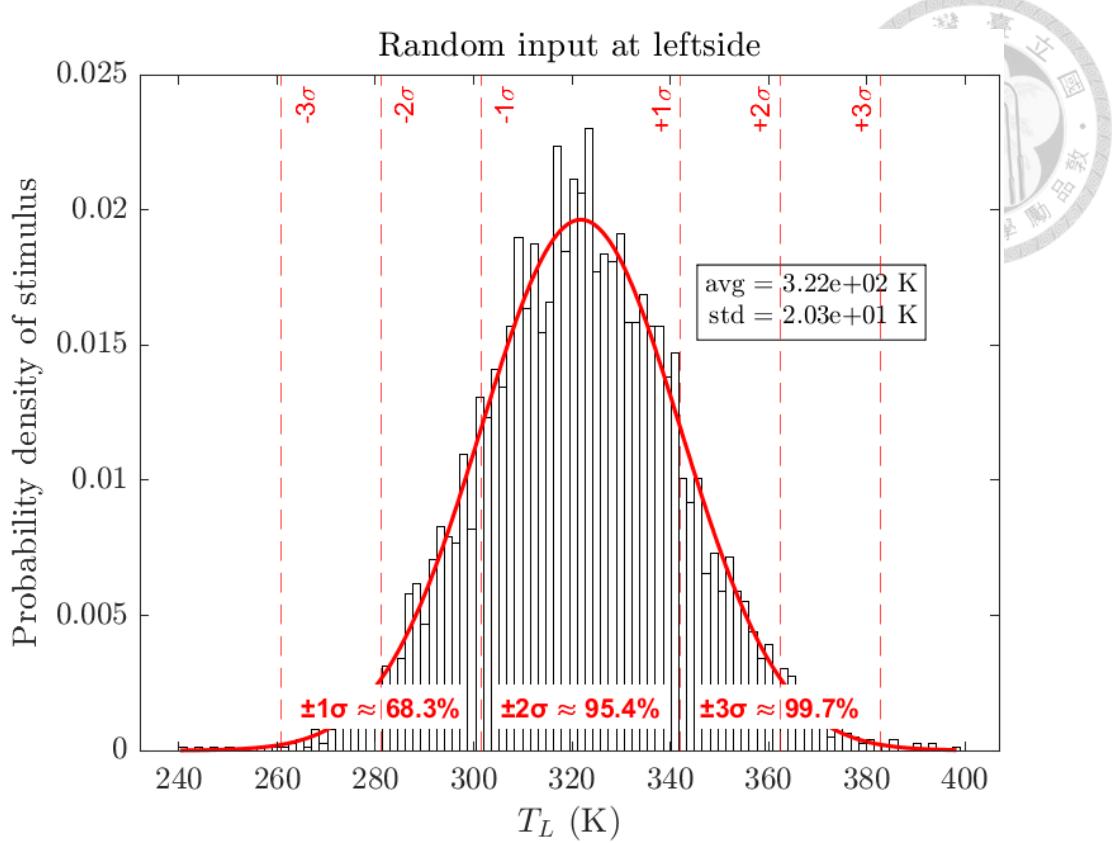


圖 4.2.7 Power module 導線於 $\rho = 1$ 之左端熱載樣本

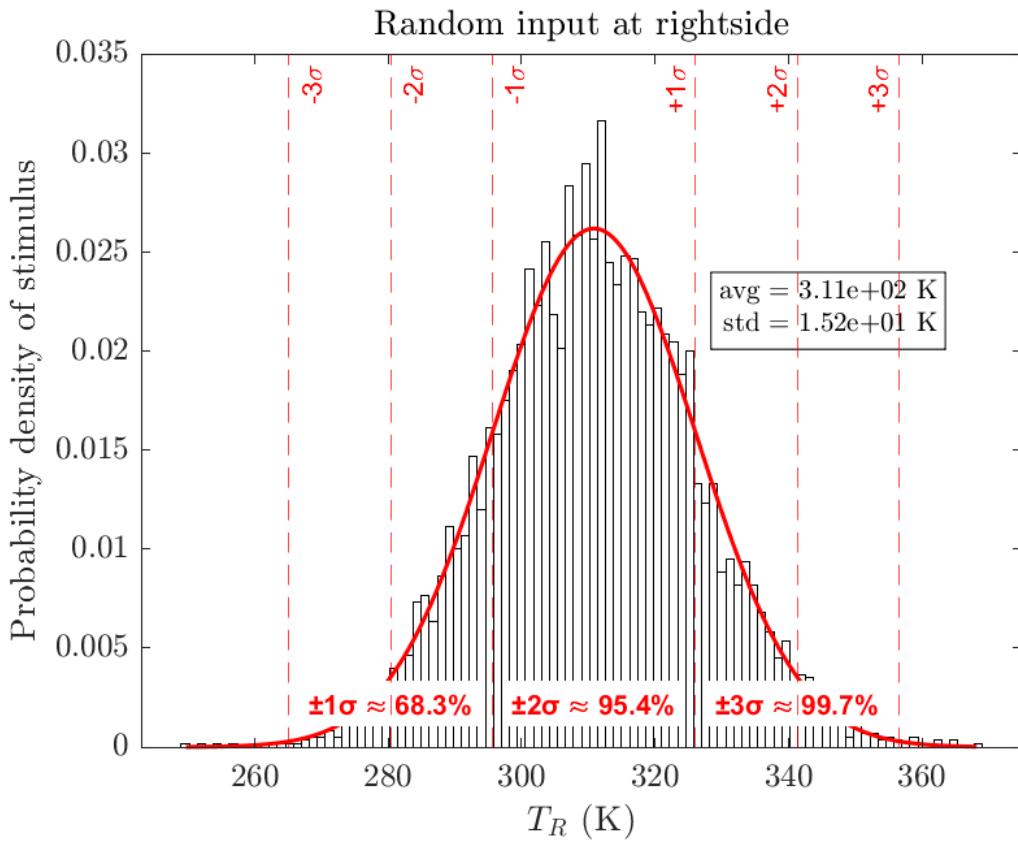


圖 4.2.8 Power module 導線於 $\rho = 1$ 之右端熱載樣本

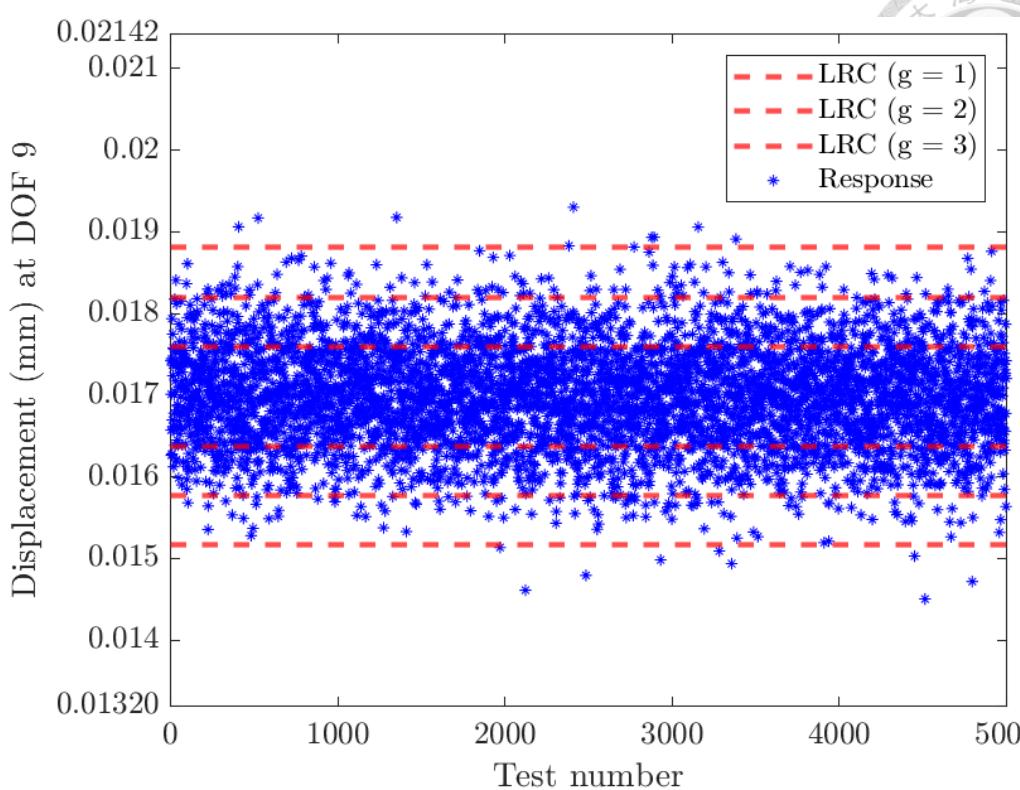


圖 4.2.9 Power module 導線於 $\rho = 1$ 之 TLRC 預測與驗證結果

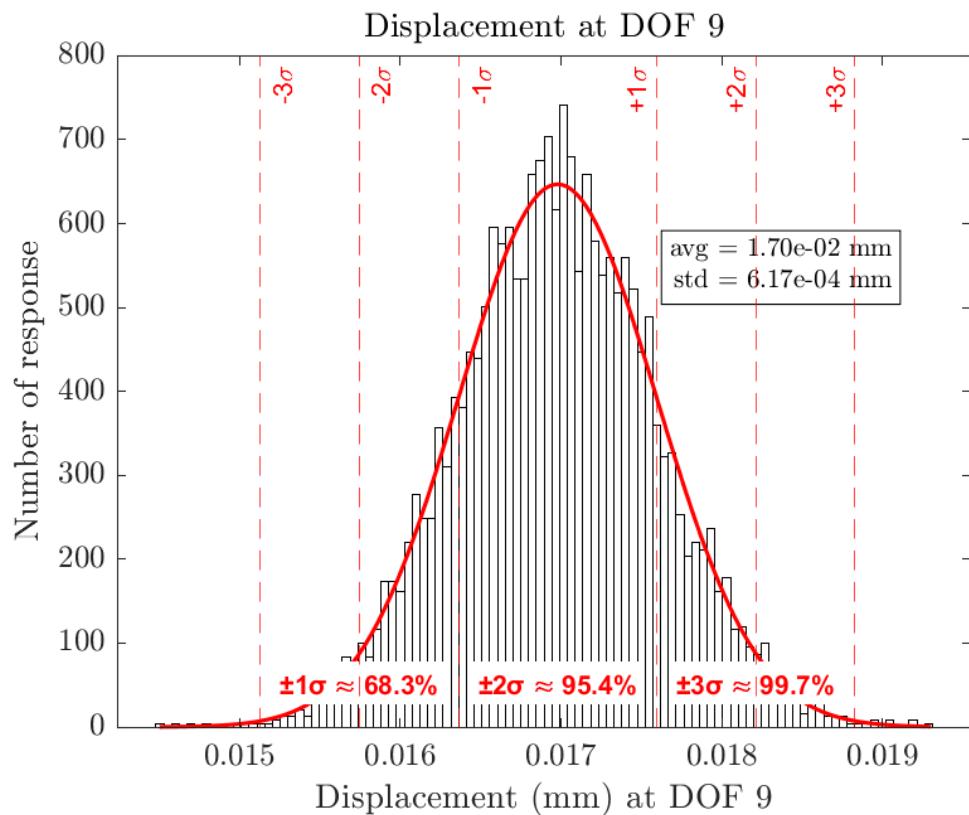


圖 4.2.10 Power module 導線於 $\rho = 1$ 之數據採集生成響應分布

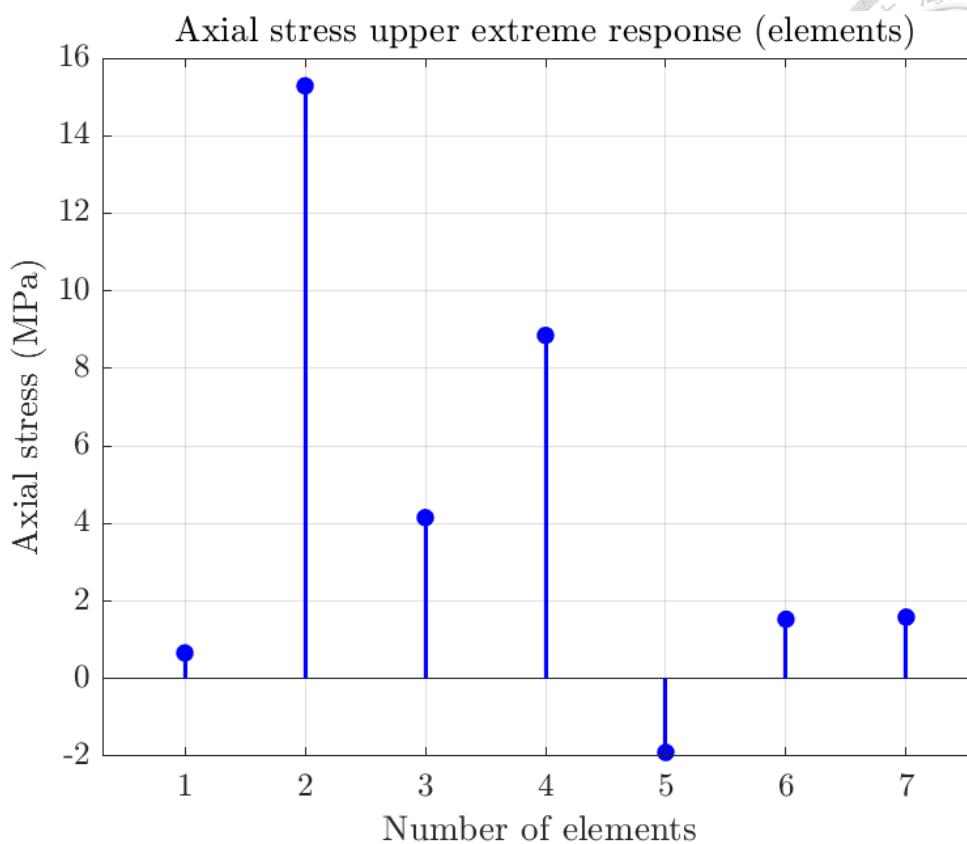


圖 4.2.11 Power module 導線於 $\rho = 1$ 之正向極值條件下應力響應

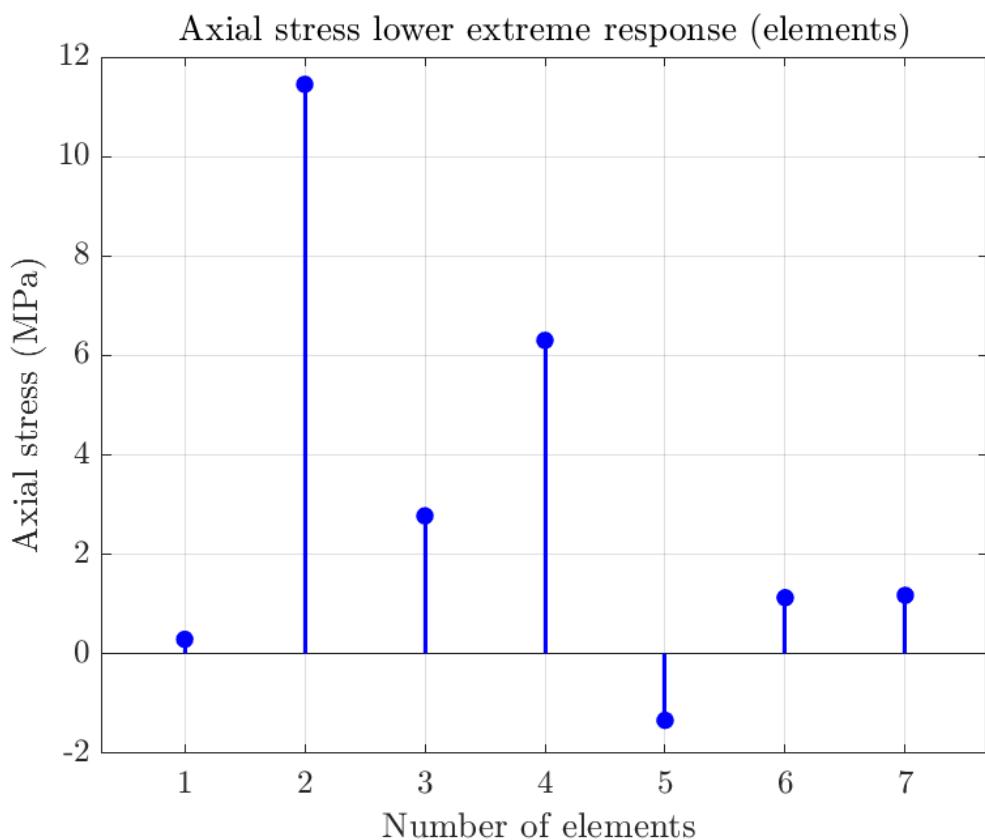


圖 4.2.12 Power module 導線於 $\rho = 1$ 之負向極值條件下應力響應



4.2.6.2 針對 $\rho = 0$ 热邊界條件下之分析討論

如圖 4.2.13 在相關係數 $\rho = 0$ 的條件下，圖 4.2.14 呈現相關係數為 0 時，左右兩端隨機溫度場的雙變量高斯分布 (Bivariate normal distribution)。由於兩端熱源互相獨立，圖中紅色 3σ 區域為橢圓且接近正圓形，散佈點均勻且無明顯線性關聯，符合理論預期。

圖 4.2.15 與 圖 4.2.16 分別顯示 DOF 17 與 DOF 24 的隨機熱邊界刺激資料分布。兩者皆近似高斯分布，平均值約為 322 K 與 311 K，標準差分別約為 20 K 與 15 K，吻合設定值。

圖 4.2.17 為 5000 次 數據採集模擬結果與 LRC 預測的極值範圍比對圖。紅色虛線代表 LRC 方法推估的 $\pm 1\sigma$ 、 $\pm 2\sigma$ 、 $\pm 3\sigma$ 極值範圍，藍點為實際數值模擬結果。觀察可知，幾乎所有響應均被 LRC 預測包覆，顯示該方法具有良好的極值估計能力，即使刺激互不相關亦能準確捕捉邊界響應。

圖 4.2.18 顯示設計自由度 DOF 9 的位移響應機率樣本次數分布，其結果也近似常態分布，平均值約為 0.017 mm，標準差為 0.0018 mm。此結果說明在熱固耦合下，即使刺激無關，整體系統仍受隨機溫度驅動產生穩定機械響應分布。

圖 4.2.19 與 圖 4.2.20 則為在正向極值與負向極值反應情境下，對所有元素進行整體整合後所推估出的軸向應力分布。從結果可觀察到，最高的應力值約為 15 MPa (正向) 與 12 MPa (負向)，集中於第 2、3、4 號元素，其餘區段應力相對較低。

最後，將所得應力值與文獻中銅材之應力-應變曲線 (如圖 4.2.4) 進行對照，可知其最大應力仍明顯低於降伏強度 (約 220 MPa)，表明整體結構仍處於線性彈性範圍內，未達塑性變形條件，結構安全無虞。

綜合而言，當兩端刺激互不相關 ($\rho = 0$) 時，設計自由度響應仍呈現穩定分布，LRC 預測依然可靠，且應力反應亦無超過材料容許範圍，顯示系統在該條件下具有良好穩定性與安全性。

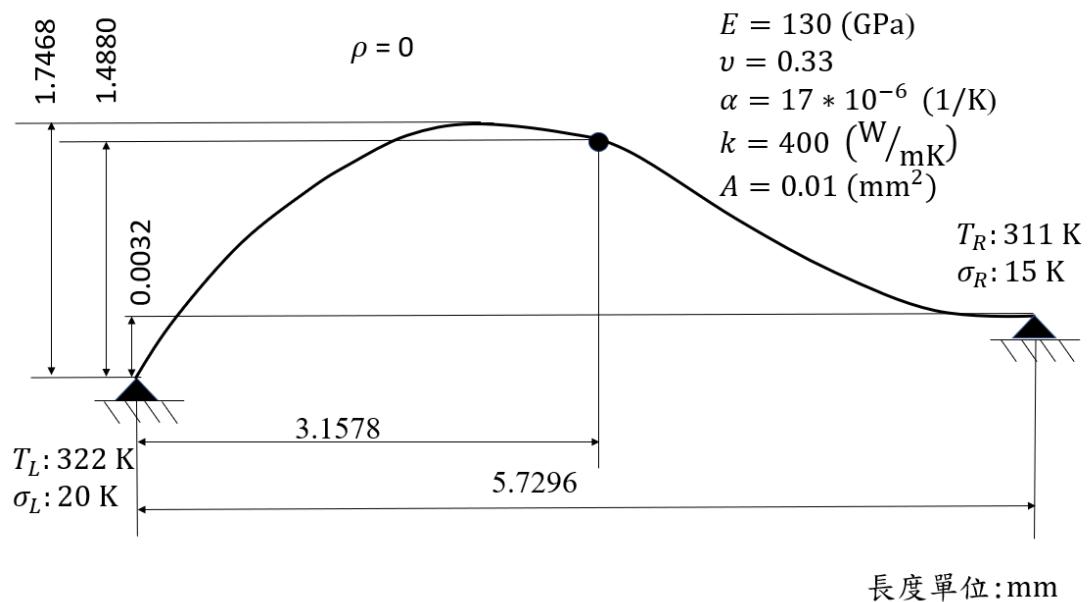


圖 4.2.13 Power module 導線於 $\rho = 0$ 之熱固耦合分析模型圖

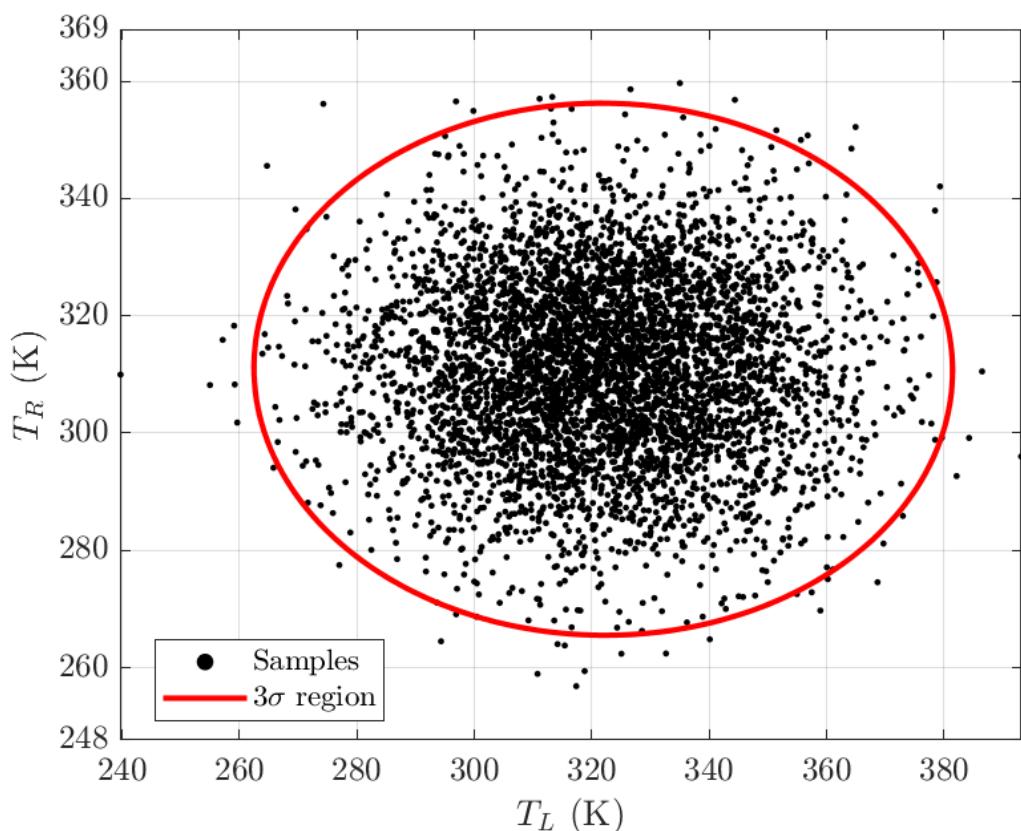


圖 4.2.14 Power module 導線於 $\rho = 0$ 之熱刺激相關性

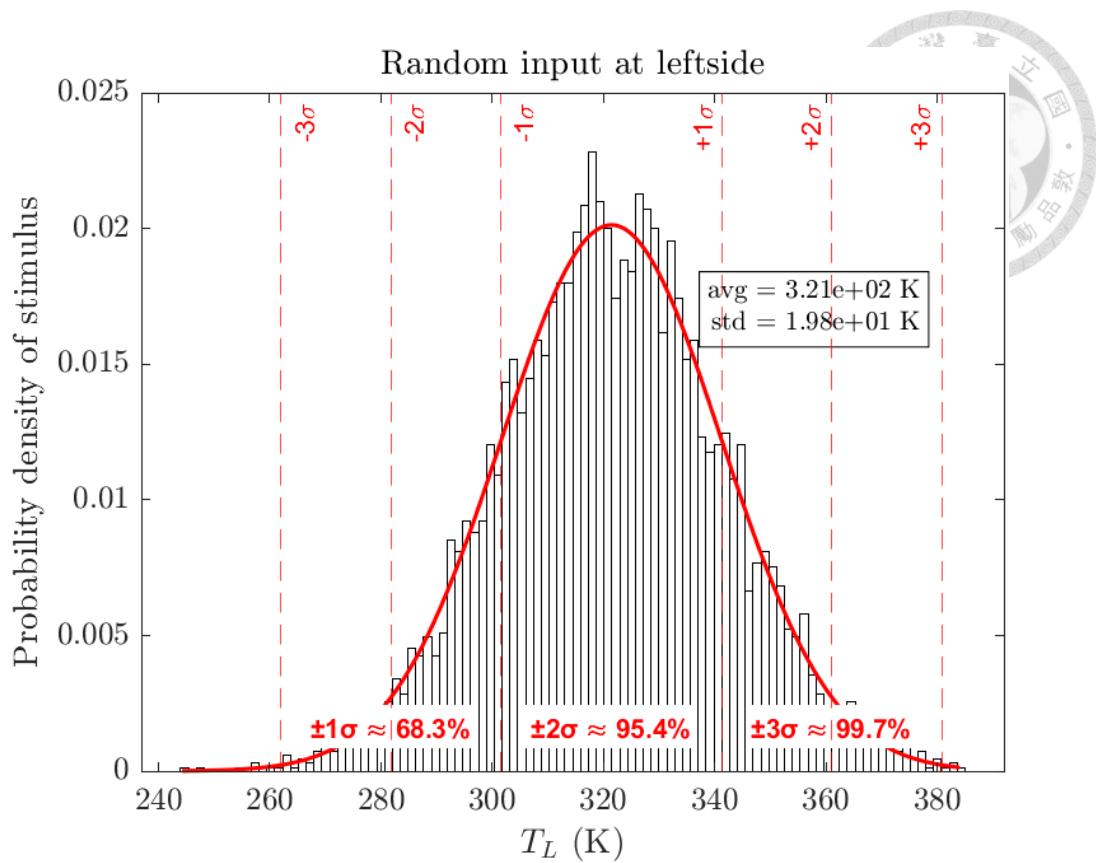


圖 4.2.15 Power module 導線於 $\rho = 0$ 之左端熱載樣本

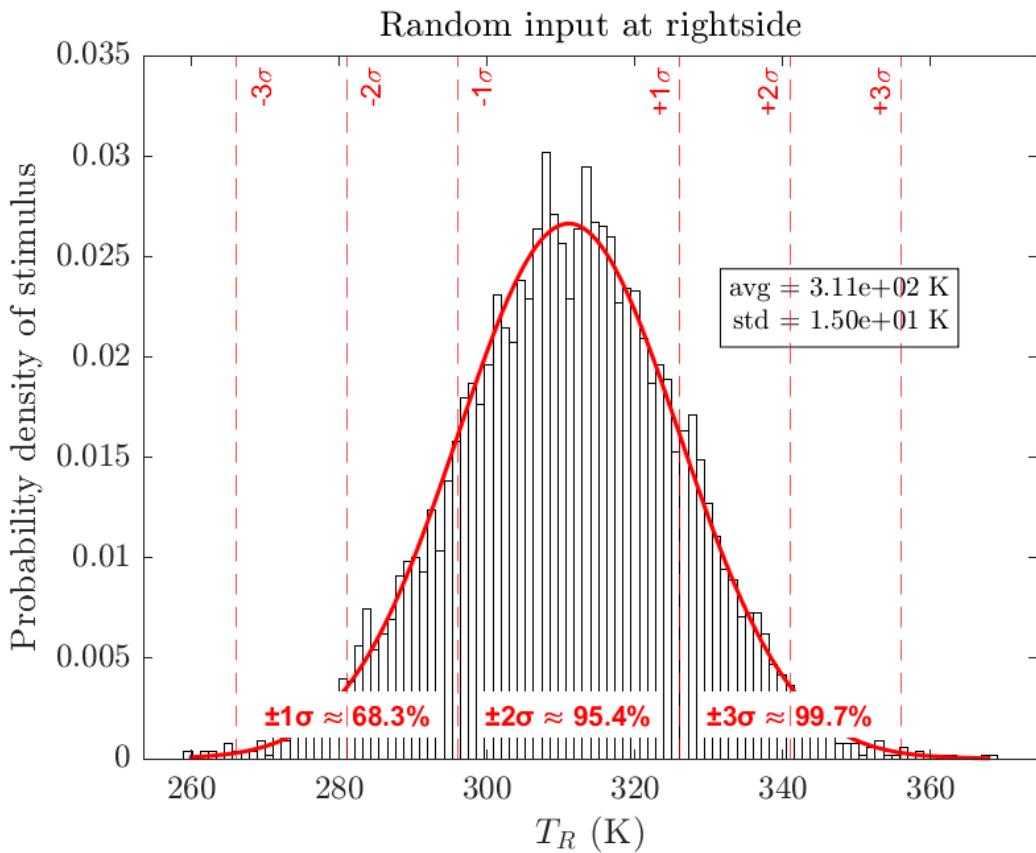


圖 4.2.16 Power module 導線於 $\rho = 0$ 之右端熱載樣本

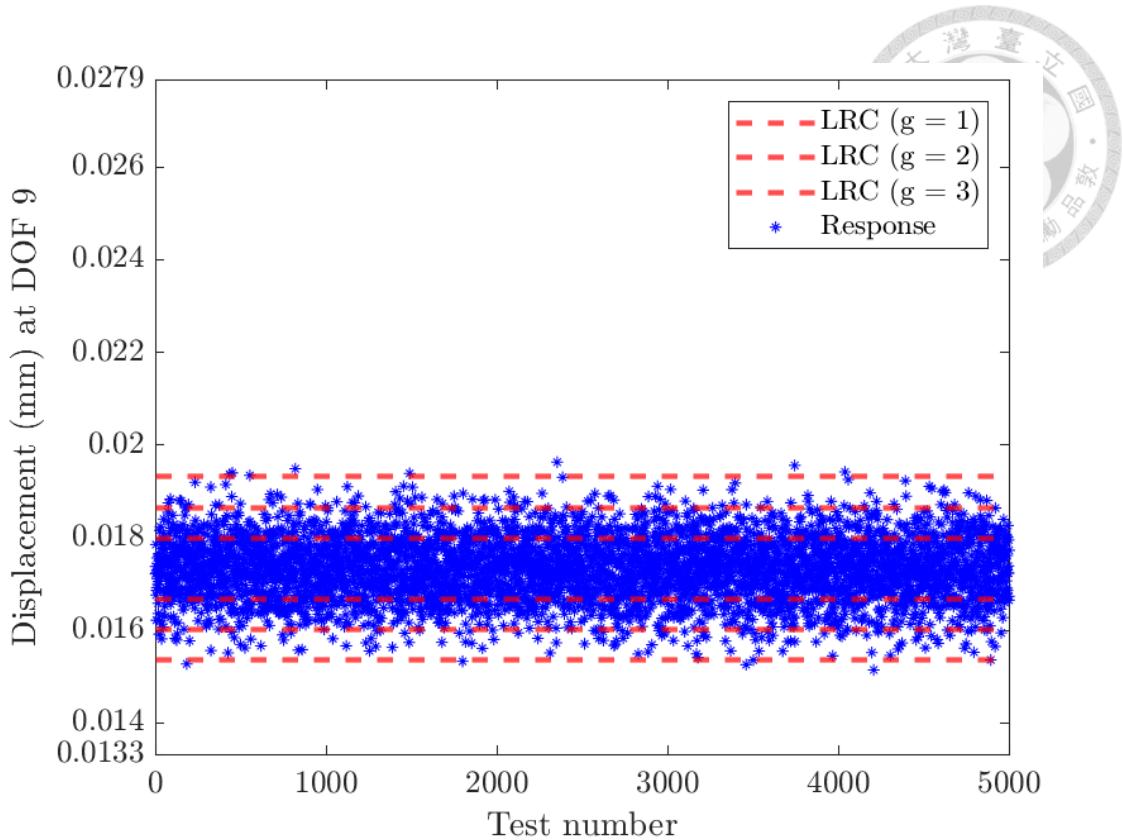


圖 4.2.17 Power module 導線於 $\rho = 0$ 之 TLRC 預測與驗證結果

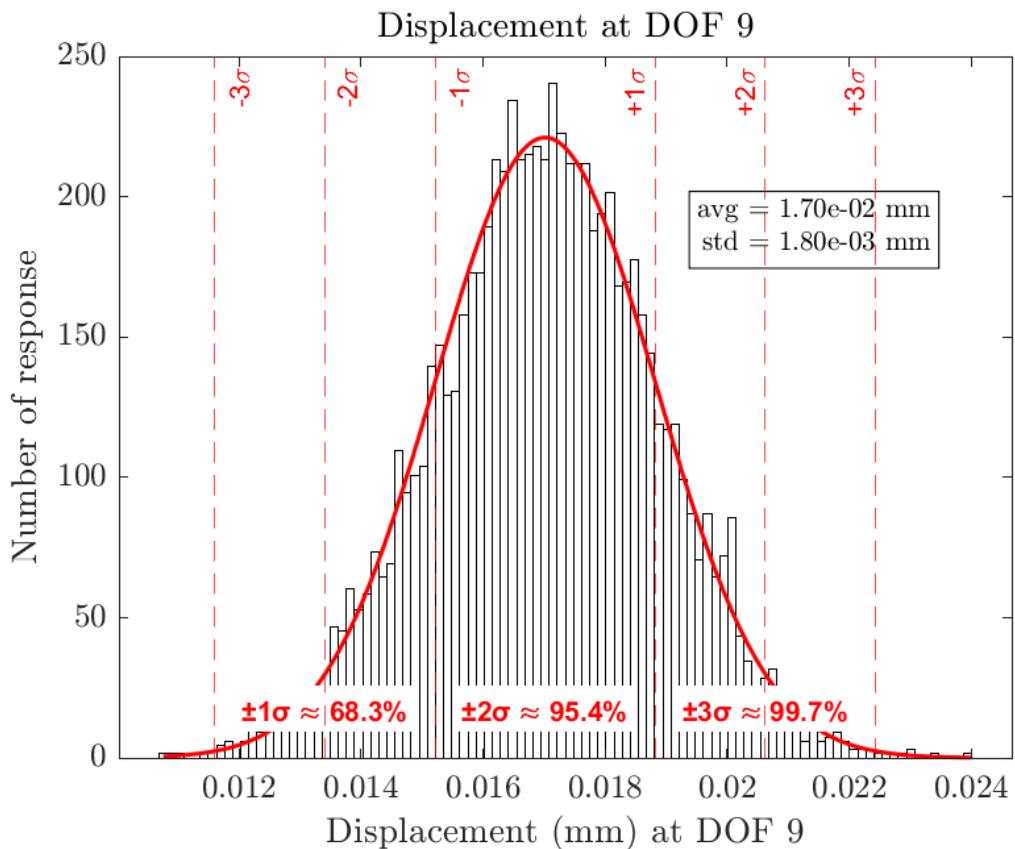


圖 4.2.18 Power module 導線於 $\rho = 0$ 之數據採集生成響應分布

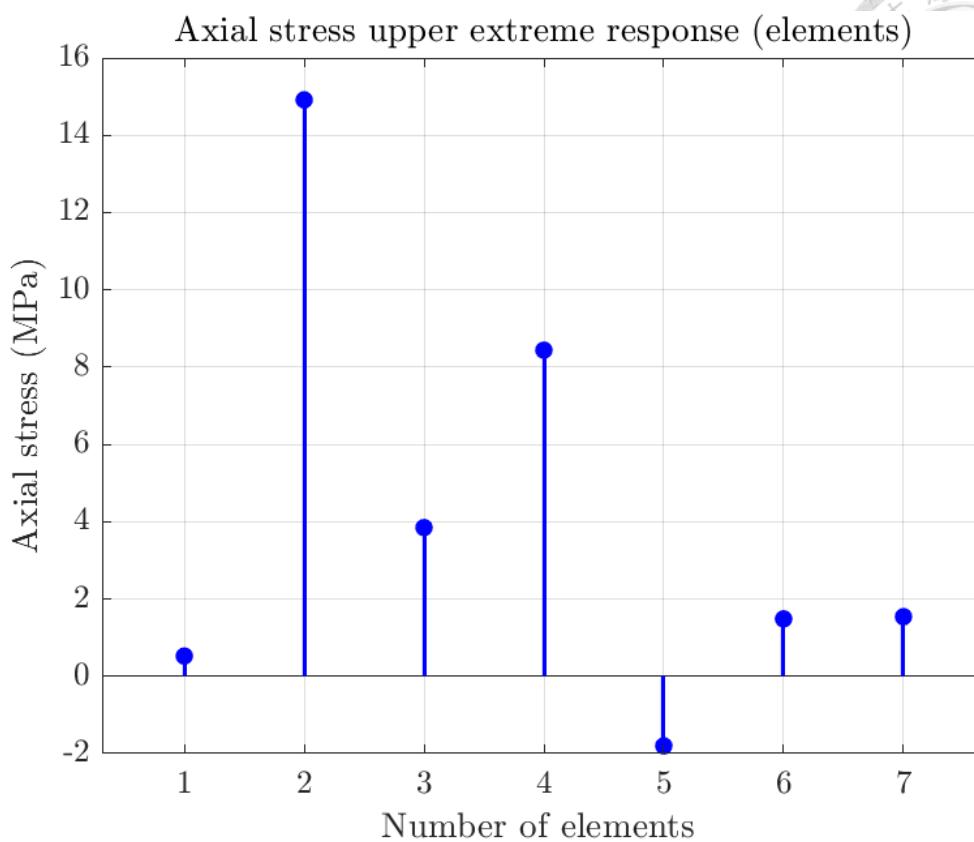


圖 4.2.19 Power module 導線於 $\rho = 0$ 之正向極值條件下應力響應

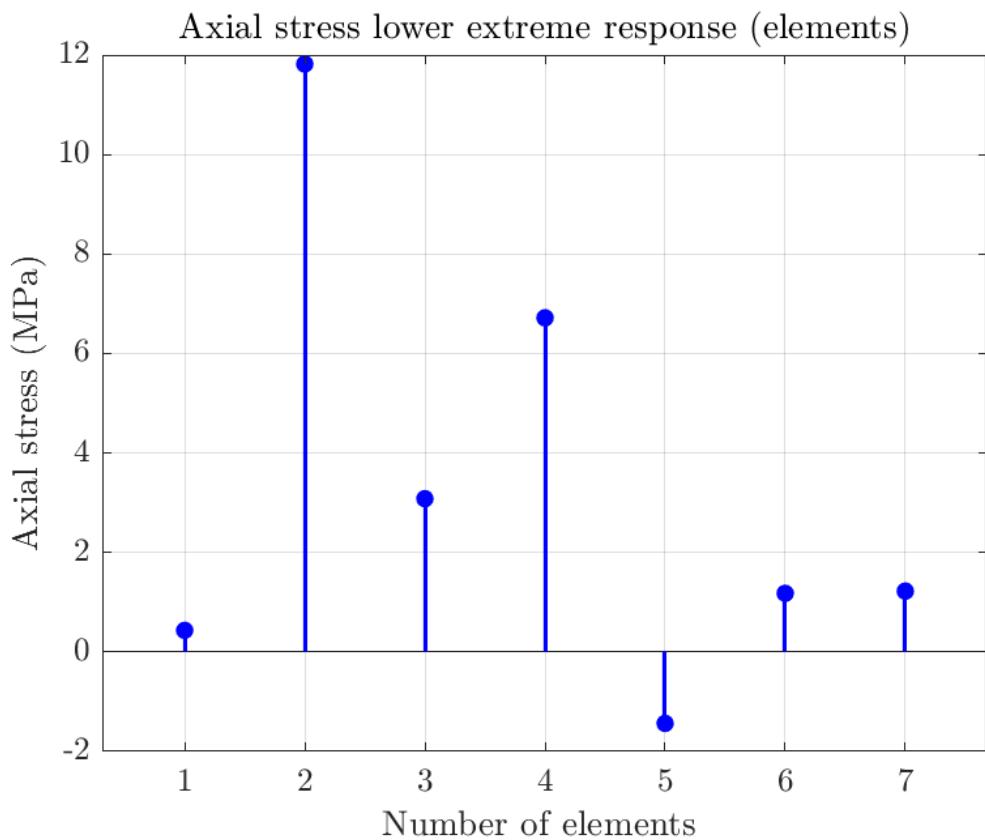


圖 4.2.20 Power module 導線於 $\rho = 0$ 之負向極值條件下應力響應



4.2.6.3 針對 $\rho = -1$ 热邊界條件下之分析討論

針對 圖 4.2.21 左右兩端熱邊界條件具有完全負相關 $\rho = -1$ 的情況進行探討。此情境代表當左端溫度升高時，右端溫度必然降低，且幅度成線性反向變化，顯示極端的不對稱熱載條件。

圖 4.2.22 呈現左右端 (DOF 17 與 DOF 24) 在完全負相關下的雙變量高斯熱載分布，可觀察到紅色直線為 3σ 信賴區間，而黑點樣本完美地沿著一條負斜率的主軸排列，顯示溫度對應極為緊密與對稱地反向變動。此種情境在功率模組的實際散熱系統中雖不常見，但可做為極端不利載況的模擬參考。

圖 4.2.23 與 圖 4.2.24 分別為 DOF 17 與 DOF 24 的隨機溫度樣本直方圖，呈現出良好的常態分布特性，均值分別為 322 K 與 311 K，標準差分別約為 20 K 與 15 K。由於負相關影響，這兩者之間的溫度變動並非獨立，而是呈現完全反向波動，對設計自由度產生特殊的熱膨脹組合效果。

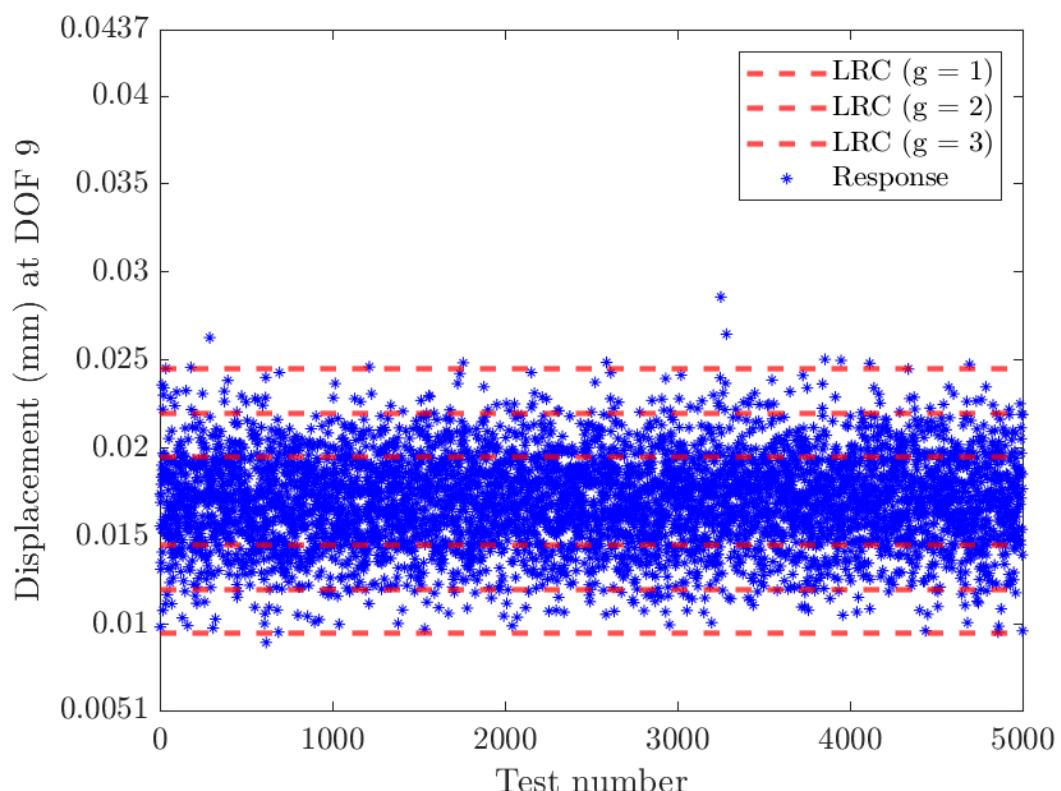


圖 4.2.25 為 LRC 理論模型對設計自由度之位移極值範圍預測與數值模擬資料之

比對。圖中可見紅色虛線為 LRC 所預測之 $\pm 1\sigma$ 、 $\pm 2\sigma$ 、 $\pm 3\sigma$ 極值範圍，藍點則為 5000 組實際模擬資料。可以觀察到，幾乎所有資料皆落於 $\pm 3\sigma$ 信賴區間內，顯示 LRC 方法對極值預測具有良好精度與包覆能力，且其上界與下均不過度保守。

圖 4.2.26 顯示 DOF 9 的位移響應機率分布結果，依據 5000 次熱固耦合模擬資料進行統計，響應均值為 0.017 mm，標準差為 0.00254 mm，為三組案例中標準差最小者。此結果可歸因於負相關使得兩端溫度變動傾向抵消，進而使得整體熱變形趨於穩定。響應分布呈現較尖窄的常態曲線，顯示結構在此載況下之可靠度提升。

圖 4.2.27 與 圖 4.2.28 分別為在設計自由度發生正向與負向極值響應時，各元素所承受的軸向應力分布。結果顯示最嚴重應力集中於第二與第四元素，推測為幾何角度轉折處或載荷傳遞較集中處。在正向極值下，最大壓力約為 15 MPa，而在負向極值下，最大張力為約 12 MPa，皆遠低於銅材之降伏強度（依前述拉伸測試圖約為 220 MPa）。整體應力分布具對稱性，符合熱變形導致內力重分布之物理預期。

從這些分析可以看出，當熱邊界具有完全負相關時 ($\rho = -1$)，系統呈現最小的位移波動與應力集中現象，顯示此種負載情境雖不常見，卻可能在設計策略上具有「熱膨脹抵銷」的潛力。LRC 模型預測結果與數值模擬高度吻合，顯示其做為極值估測工具具備高度準確性與穩定性。此外，由軸向應力結果可明確得知，即使在極值響應下，金線內部仍維持在彈性範圍內運作，確保整體結構之安全性與可靠性。

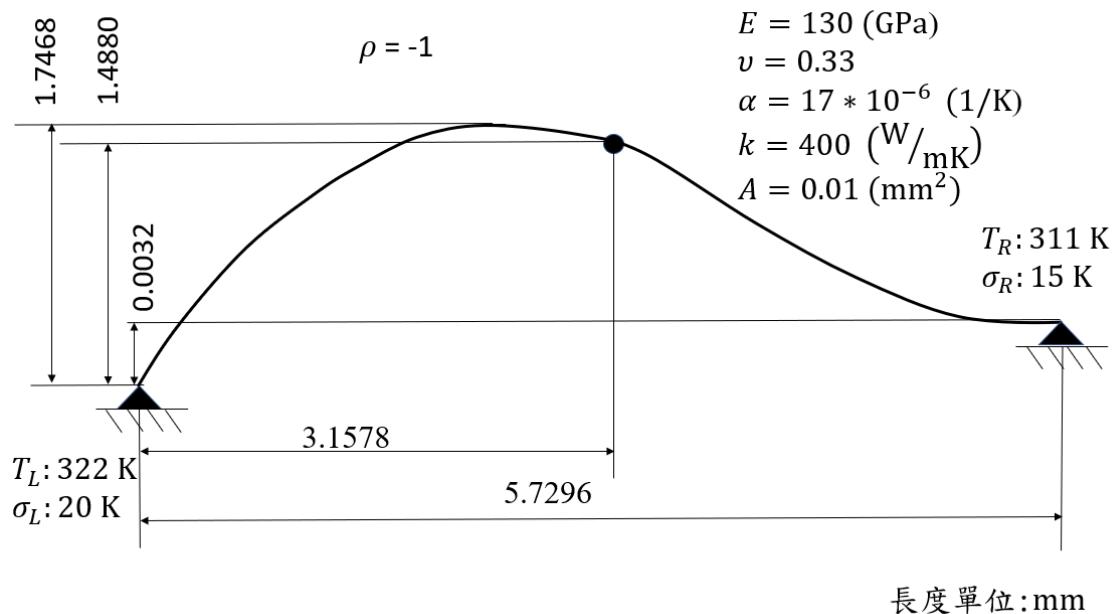


圖 4.2.21 Power module 導線於 $\rho = -1$ 之熱固耦合分析模型圖

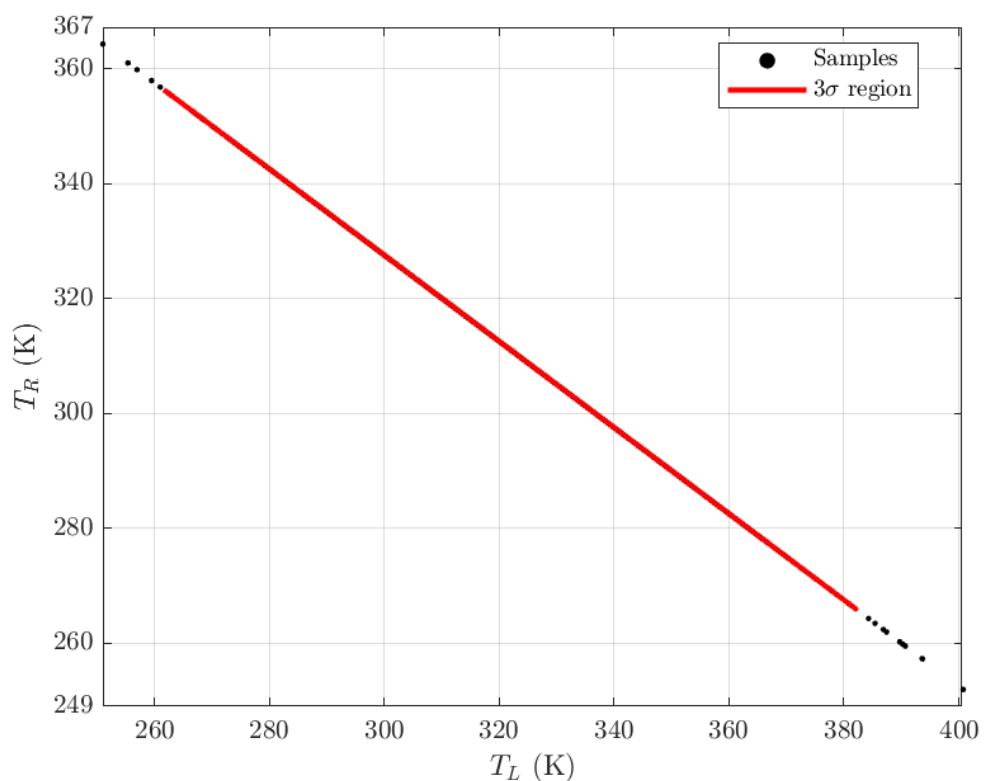


圖 4.2.22 Power module 導線於 $\rho = -1$ 之熱刺激相關性

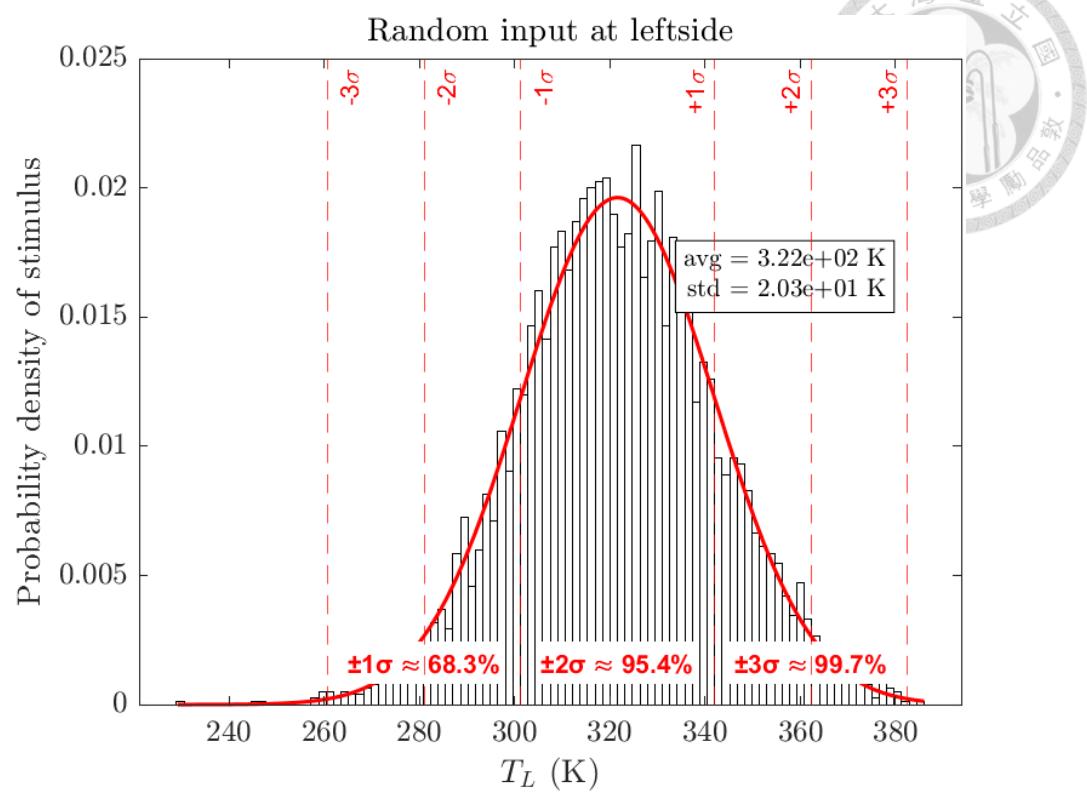


圖 4.2.23 Power module 導線於 $\rho = -1$ 之左端熱載樣本

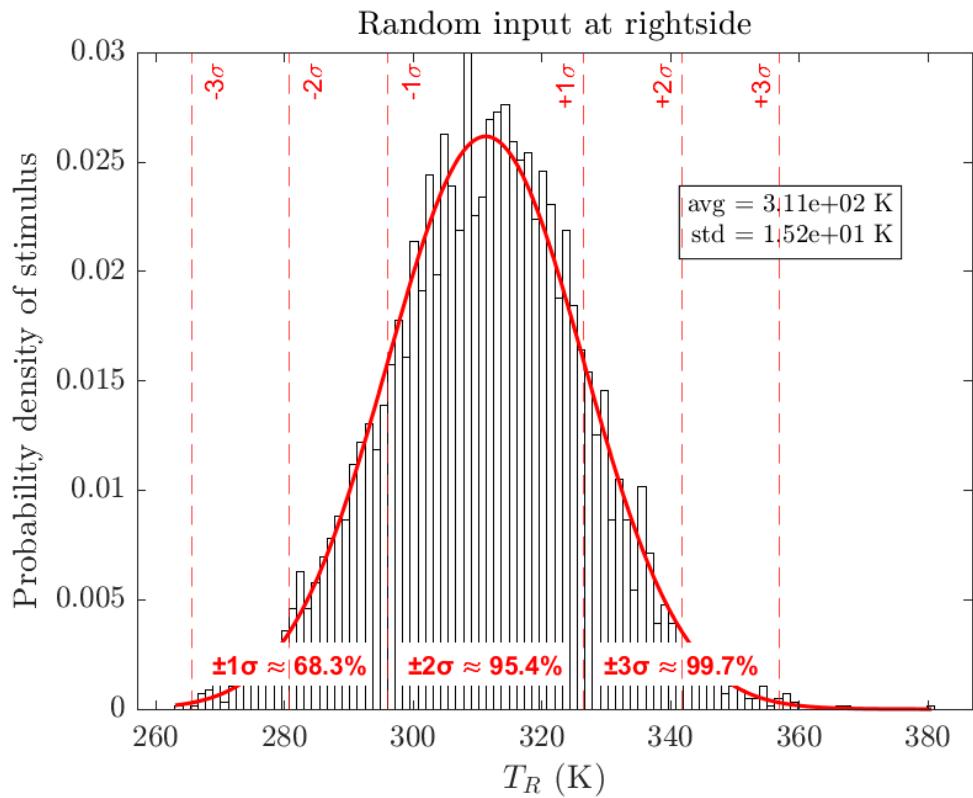


圖 4.2.24 Power module 導線於 $\rho = -1$ 之右端熱載樣本

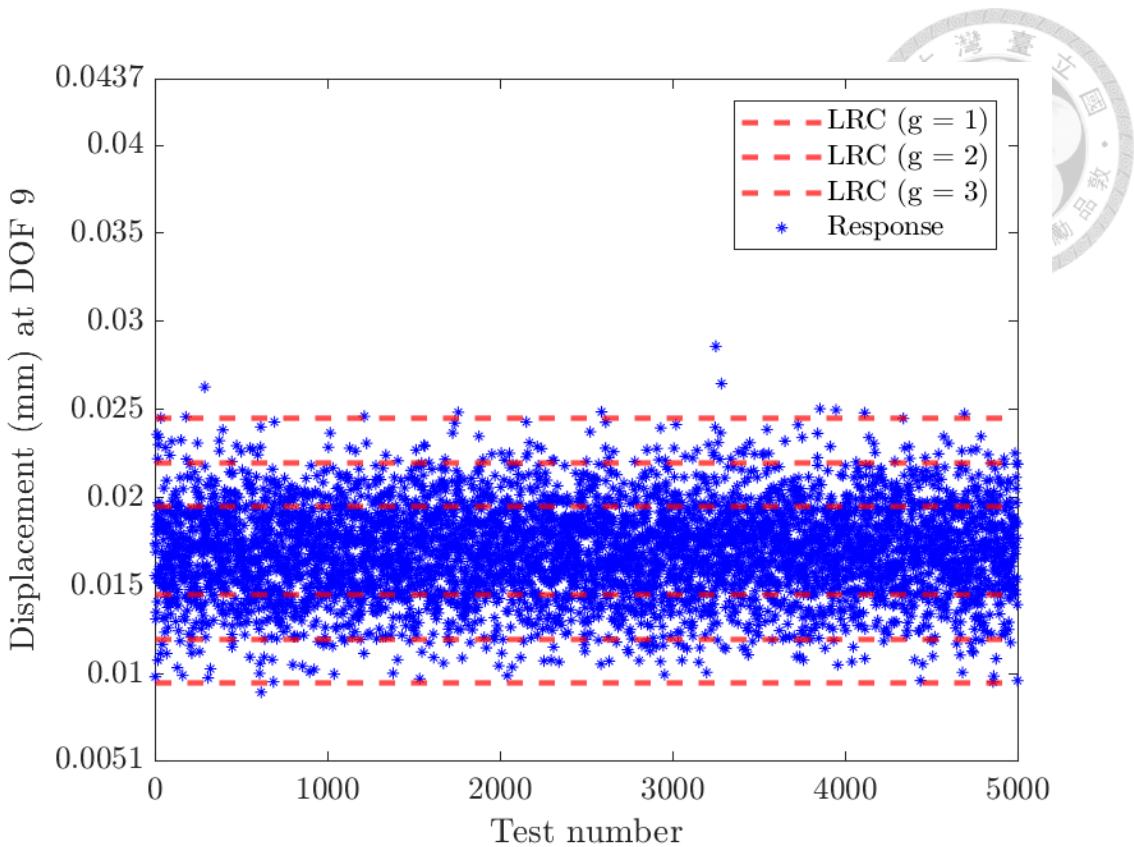


圖 4.2.25 Power module 導線於 $\rho = -1$ 之 TLRC 預測與驗證結果

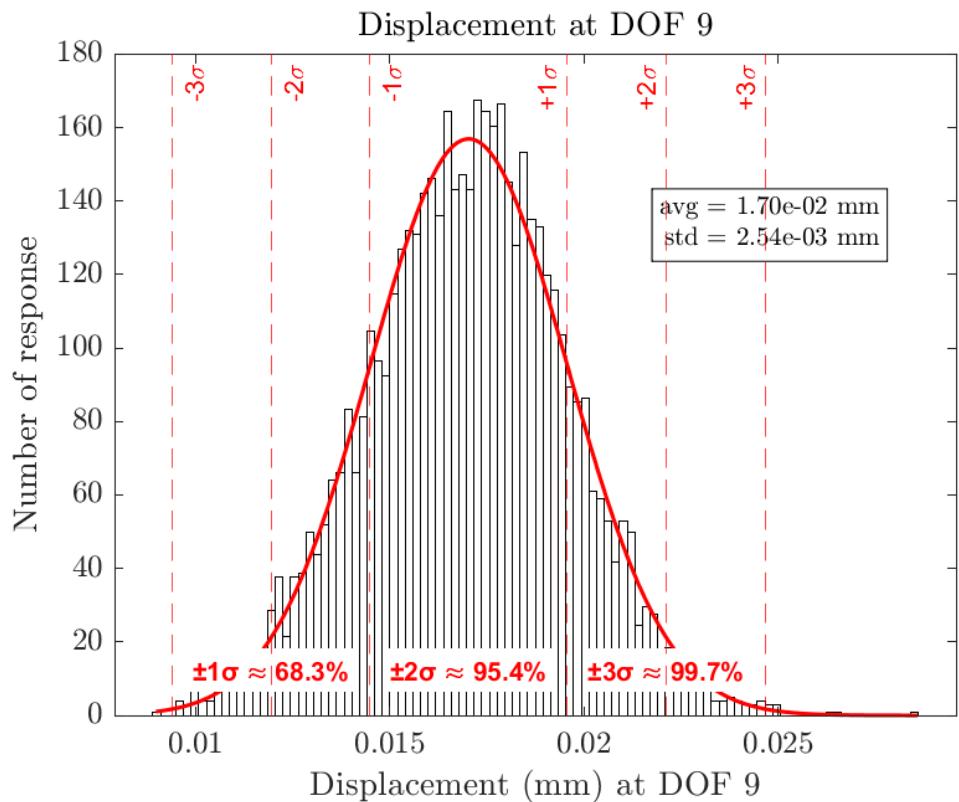


圖 4.2.26 Power module 導線於 $\rho = -1$ 之數據採集生成響應分布

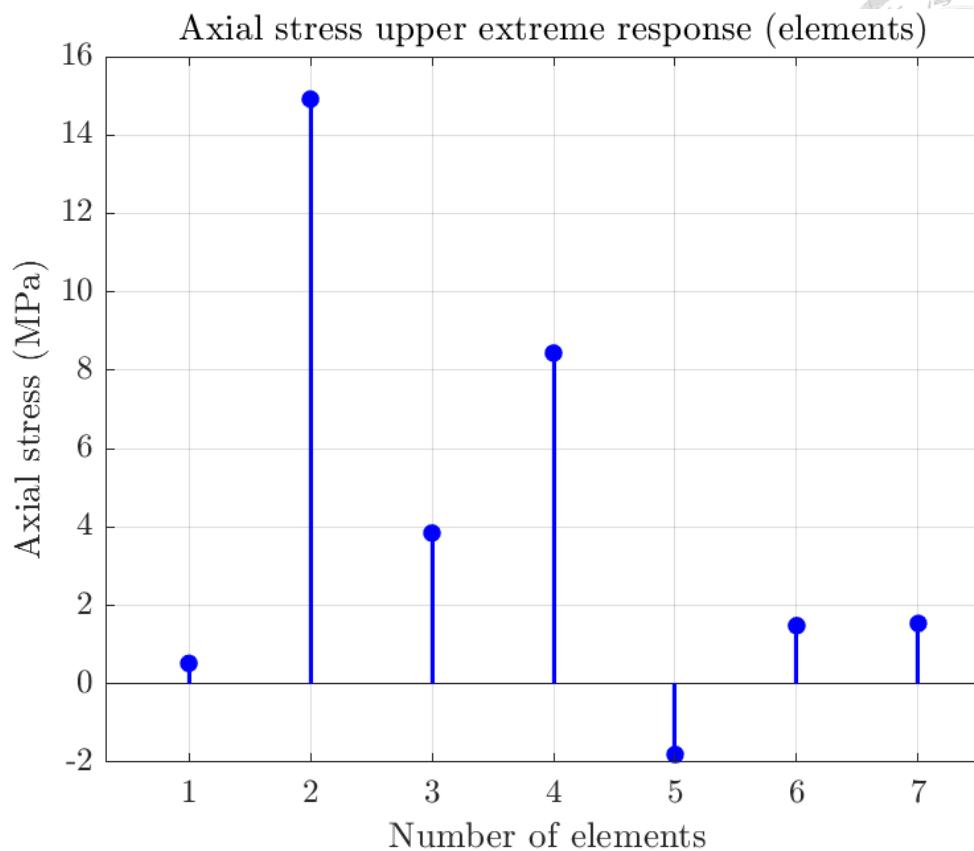


圖 4.2.27 Power module 導線於 $\rho = -1$ 之正向極值條件下應力響應

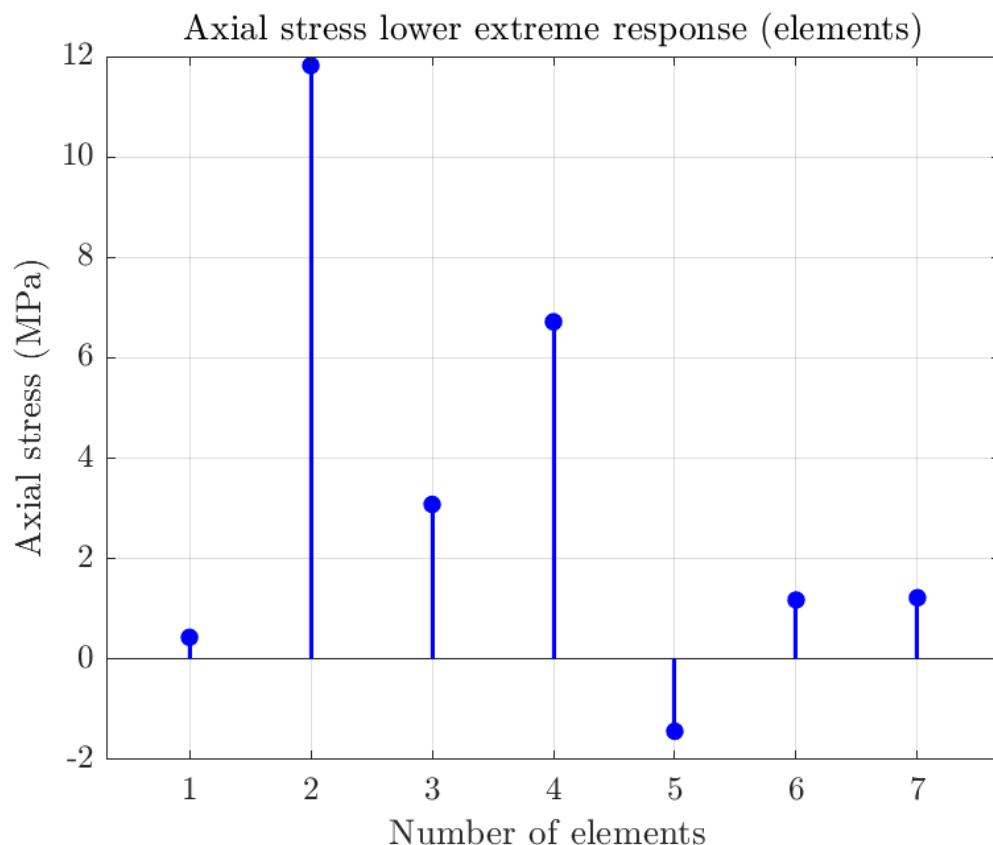


圖 4.2.28 Power module 導線於 $\rho = -1$ 之負向極值條件下應力響應



4.3 外層導線架熱固耦合極值響應分析

延續前一節對封裝金線結構之熱固耦合響應分析，本節將進一步探討位於晶片與封裝基板間之外層導線架（Outer lead）在隨機熱邊界驅動下的熱致變形與應力行為。此類結構普遍應用於高功率模組（如 IGBT、MOSFET、整流器等）中，負責完成電性接續並承載部分散熱任務，其幾何特性及邊界條件使其在熱循環載入下容易產生局部應力集中與潛在失效風險。

為建構其熱機響應行為之可解析模型，本研究同樣採用一維線性桿件模型進行模擬，如圖 4.3.1 所示。該外層導線架總長度為 7 cm，截面積為 0.9 cm^2 ，並採用與上一節相同之材料參數（銅， $E = 130 \text{ GPa}$, $\nu = 0.33$, $\alpha = 17 \times 10^{-6} / \text{K}$, $k = 400 \text{ W/mK}$ ）。模型兩端分別受制於不確定性溫度邊界，其中左端溫度服從常態分布 $\mathcal{N}(329 \text{ K}, 20^2)$ ，右端溫度為 $\mathcal{N}(339 \text{ K}, 15^2)$ ，並考慮兩組不同的溫度相關係數 $\rho = 0.5, -0.5$ 。

與前一節相同，本節採用有限元素法進行熱固耦合位移場與應力場之求解，並結合數據採集模擬生成大量隨機邊界組合樣本，再透過熱固耦合負載-響應關聯法 (TLRC)推估設計自由度之極值位移與極值應力。由於導線架位置遠離晶片熱源，左、右端溫度之不確定性傳遞至內部的行為與第一道例題略有不同，需特別觀察其 LRC 回歸行為及其於不同相關係數條件下之極值區間是否仍位於材料彈性區內。

本節將依序展示兩組溫度相關係數下之熱載分布、設計自由度位移響應分布、 LRC 回歸趨勢線、極值上下界預測結果，並進一步分析其在最大與最小應變驅動下之內部軸向應力場分布，據以判別外層導線架是否可能進入降伏區或產生結構風險。

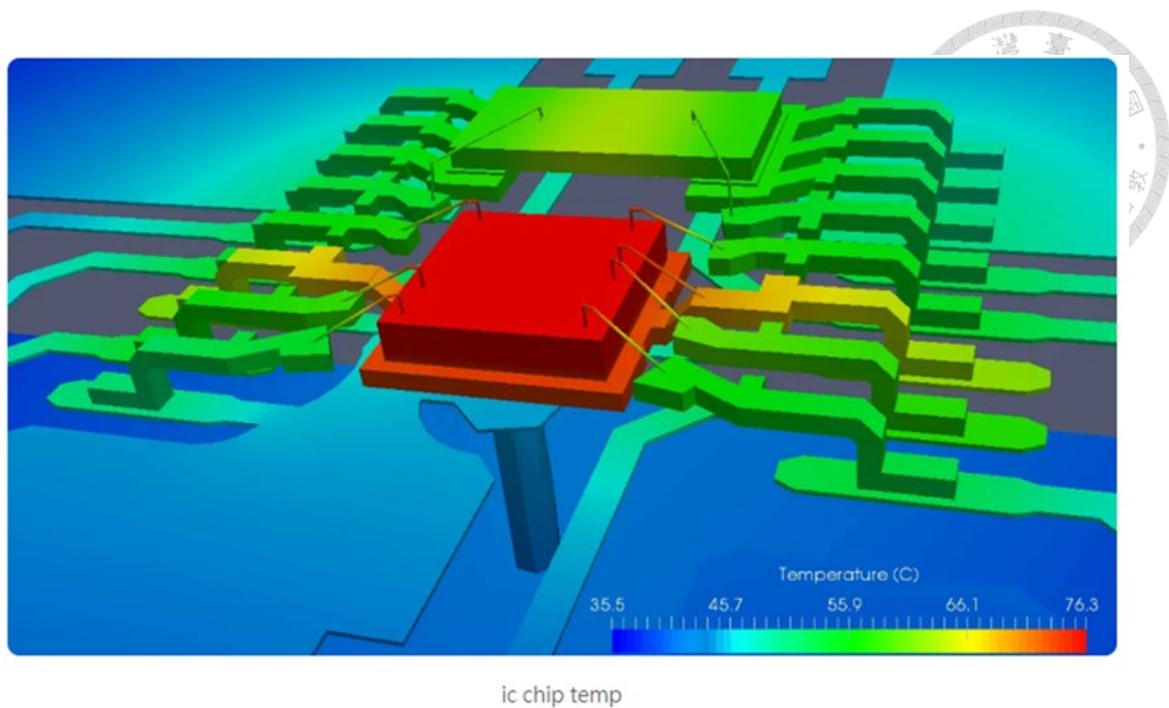


圖 4.3.1 Outer Lead 結構模型[21]

4.3.1 幾何與模型架構

本小節所探討之外層導線架結構參考自實際封裝模組中晶片與外部引腳間的金屬導線配置（如 圖 4.3.1），模擬其在熱驅動環境下所產生的熱致變形與應力累積。結構幾何由七段一維桿件元素（Element 1–Element 7）所構成，藉由八個節點（Node 1–Node 8）所連接形成，總長度為 7 mm，截面面積為 0.9 cm²。每單元的長度均設為 1 mm，節點間之連接關係與配置角度如 圖 4.3.2 所示，模擬實際封裝中由封裝基板延伸至外部接腳之引線路徑。

為了捕捉外層導線架於熱固耦合下的細部行為，本模型採用二維空間中的二力桿件（Truss）元素，並引入方向餘弦（Direction Cosine）進行每單元剛度矩陣與熱應力耦合項之座標轉換。雖為一維元素，該模型仍可解析於空間中任意轉角之軸向變形，保留實體導線幾何中重要之彎曲與轉折特徵。

節點自由度設定方式與前節一致，自第一節點 X 方向定義為自由度 DOF1，Y 方向為 DOF2，依序向右至第八節點止，總共形成 16 個結構自由度。其中設計自由度為第 9 自由度（DOF9），對應於第五節點 X 向位移，該位置鄰近轉折



點，容易出現位移累積與熱致應力集中，因而做為關注重點。

在幾何上，此模型刻意設計多個彎折角度（如 88° 、 89° 、 47° 、 2° 等），以模擬實際封裝導線架中常見之製程後形貌；此配置除能提升模型熱機響應的敏感度，也有利於評估幾何參數對極值響應之影響。模型建構方式繼承前一節金線導線之分析策略，使其適用於隨機熱邊界條件下之熱固耦合 LRC 極值推估分析。

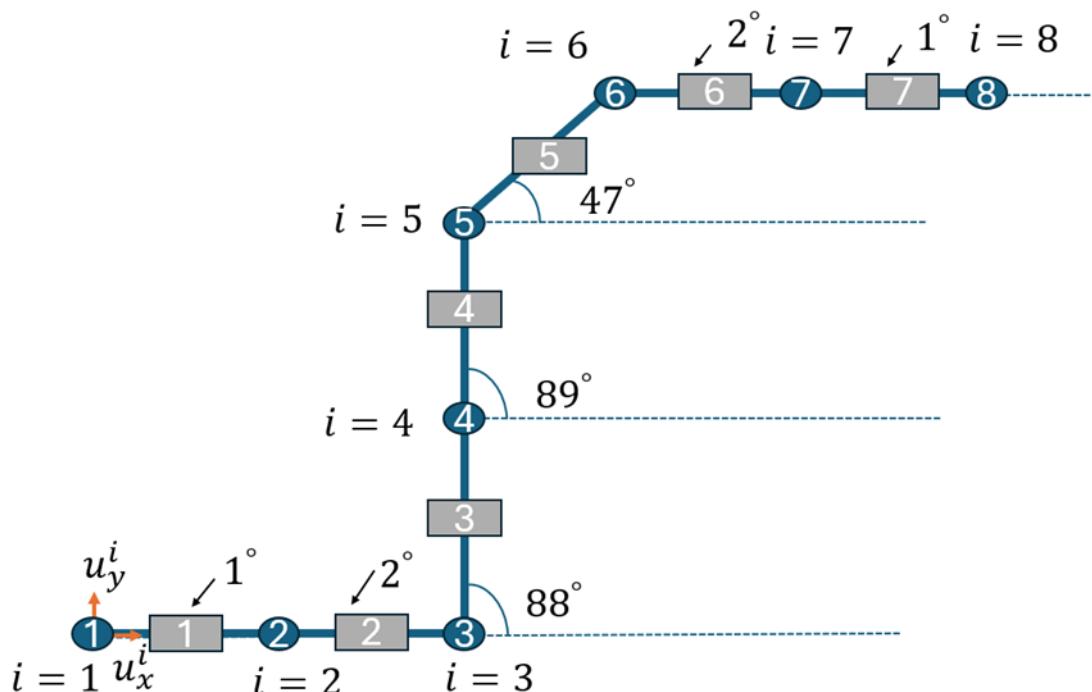


圖 4.3.2 Outer Lead 幾何模型架構

4.3.2 固體位移邊界條件

延續前一小節所建立之外層導線架幾何模型，為使其具備可解的有限元素求解架構，本研究於導線左側起始端（節點 Node 1）設定固定約束條件，模擬導線焊接於晶片端時的完全拘束狀態。在此條件下，Node 1 節點之水平方向與垂直方向皆設為零位移，以消除剛體運動模式：

- 固定左端點位移：

$$u_x^1 = 0$$

式(4.3.1)

$$u_y^1 = 0$$

式(4.3.2)

- 此外，為抑制整體結構因熱變形產生旋轉自由度，並確保系統穩定性，於導線自由端（節點 Node 8）額外設置一項垂直位移拘束，避免導線於 Y 軸方向產生整體平移行為：

$$u_y^8 = 0$$

式(4.3.3)

4.3.3 LRC 應用與目標節點

延續前述外層導線架（Outer lead）熱固耦合模型之建構與邊界條件設置，本小節進一步以 TLRC（Thermal load response correlation）方法，探討受隨機熱邊界影響下導線內部位移與應力響應的統計與極值行為。為聚焦於熱梯度下的結構反應特徵，我們選定導線中央節點（Node 5）對應之自由度做為分析重點，做為整體熱機變形的代表性觀察點。

此一節點正處於外層導線主要變向位置（約 47°彎折處），其所承受之軸向變形與熱應力將同時受到左右端不確定溫度邊界之影響，適合做為 TLRC 分析下推估極值響應的重要自由度。對應自由度為 DOF 9（節點 5 在 X 方向之平移自由度），後續所有位移分布、極值包絡與安全性評估皆以此 DOF 為依據。

此外，外層導線做為封裝系統中連接 IC 內部金屬層與外部 PCB 導體之關鍵構件，其幾何特徵與製程形變使其在熱傳導與機械穩定性上扮演關鍵角色。由於焊接端與封裝引腳（Lead finger）間存在顯著溫差，易使導線在彎折處產生集中熱應力，導致潛在的熱疲勞裂縫或塑性應變累積，進而影響導電與導熱效能。

因此，透過 TLRC 方法對外層導線進行極值熱致位移與應力分析，可有效預

測結構在不同熱相關性下所可能出現之最不利熱變形與應力組合。透過數據採集抽樣與 LRC 極值理論所導出對應之統計邊界，本研究針對 DOF9 所對應的位移響應進行機率性包絡推估，進而由位移反推出桿件內部之軸向應力，並與材料降伏準則進行比對。

為進一步評估外層導線之結構安全性與可靠度，本小節亦統計其最大張應力與最大壓應力值，並將其極值狀態下之應力場與分布可視化，據以判斷是否存在超越材料降伏強度之風險，提供實務封裝設計與導線配置之工程依據。

4.3.4 數據成果討論

4.3.4.1 針對 $\rho = 0.5$ 熱邊界條件下之分析討論

本節針對 Outer lead 結構於相關係數 $\rho = 0.5$ 條件下所對應之 TLRC 模擬數據(如 圖 4.3.3)進行詳細探討。所分析內容涵蓋隨機熱邊界輸入之統計特性、設計自由度之響應行為、LRC 預測範圍之精準性驗證，以及極值條件下結構內部軸向應力分布之行為。

圖 4.3.4 顯示施加於左右端節點的溫度邊界為雙變量常態分布，其橢圓型樣本散佈區域代表高斯分佈之三倍標準差區域 (3σ region)。其中左端平均溫度為 329 K，右端為 339 K，對應之標準差分別為 20 K 與 15 K。由圖可見，樣本主要集中於橢圓範圍內，且呈現一斜向上升的相關趨勢，反映出 $\rho=0.5$ 條件下的部分正相關輸入特性，顯示左右兩端溫度雖存在隨機性，但整體傾向仍具一致變動趨勢。

進一步，圖 4.3.5 與 圖 4.3.6 分別呈現左端與右端溫度樣本之直方圖與機率密度函數 (PDF) 擬合結果，皆呈現良好的常態分布性質，分布形狀與理論高斯模型高度吻合，顯示所採用之隨機樣本具穩定統計性。

在設計自由度選定為第 9 自由度 (DOF9) 後，透過 數據採集模擬重複施加 5000 組隨機熱邊界條件，計算該節點在不同熱載輸入下之位移響應分布，並以 TLRC 模型進行極值範圍預測。結果如 圖 4.3.7 所示，藍色點為實際模擬值，紅

色虛線為 TLRC 分別對應於 $g=1, 2, 3$ 的理論上下限。由圖可見，95% 以上之模擬響應皆落於 $g=3$ 所界定之極值區間內，顯示 TLRC 對中段導線彎曲區域之位移響應具備良好之上下界預估能力，亦可進一步做為結構安全性分析之依據。

圖 4.3.9 與 圖 4.3.10 分別對應 TLRC 所預測之最大(正向)與最小(負向)熱變形條件下，結構內部各單元之軸向應力分布情形。觀察結果顯示，在正向極值條件下，應力最大值出現在第 2 元素，約為 95 MPa，其次為第 3 元素亦呈現顯著張應力；而在負向極值條件下，最大壓應力約為 -25 MPa，同樣集中於導線初始折彎處，代表幾何轉折處對應力集中具明顯敏感性，為潛在之疲勞熱點。

最後，根據材料參數設定，本例所採用導線材料為銅，其降伏強度約為 300 MPa，而 TLRC 預測之應力極值遠低於該材料降伏準則，顯示整體導線在目前邊界與熱載條件組合下，仍處於彈性變形範圍，無塑性破壞疑慮。

綜上所述，本例成功應用 TLRC 方法，針對 Outer lead 結構進行不確定熱邊界下之變位與內力極值評估，並驗證其在具部分熱相關性輸入條件下之可靠性。未來可擴展至更多種熱載模型與封裝幾何，以驗證其廣泛應用潛力。

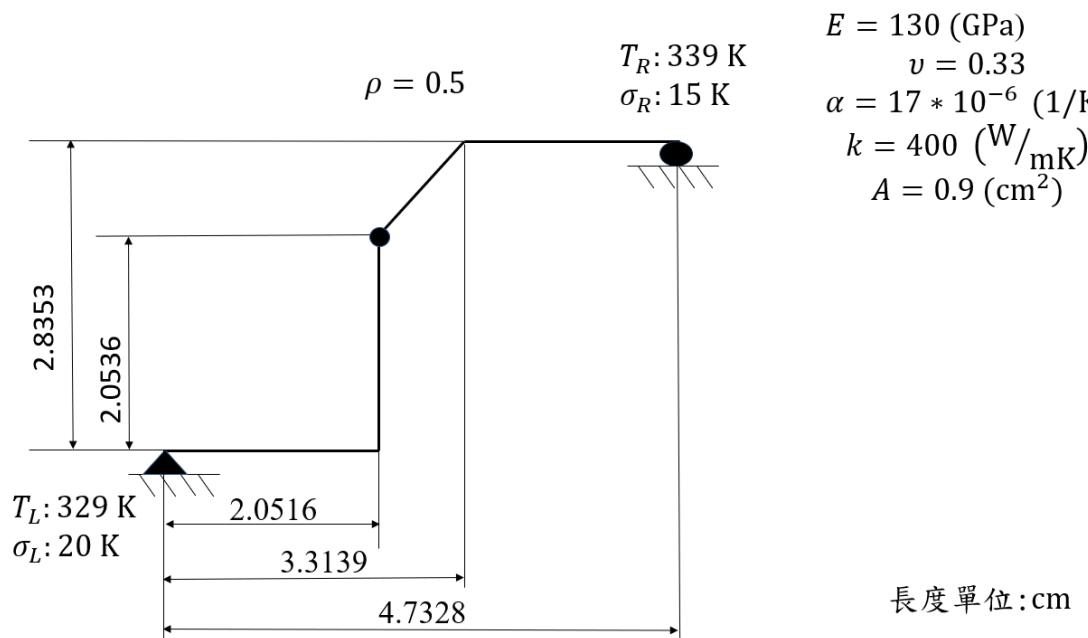


圖 4.3.3 Outer Lead 於 $\rho = 0.5$ 之熱固耦合分析模型圖

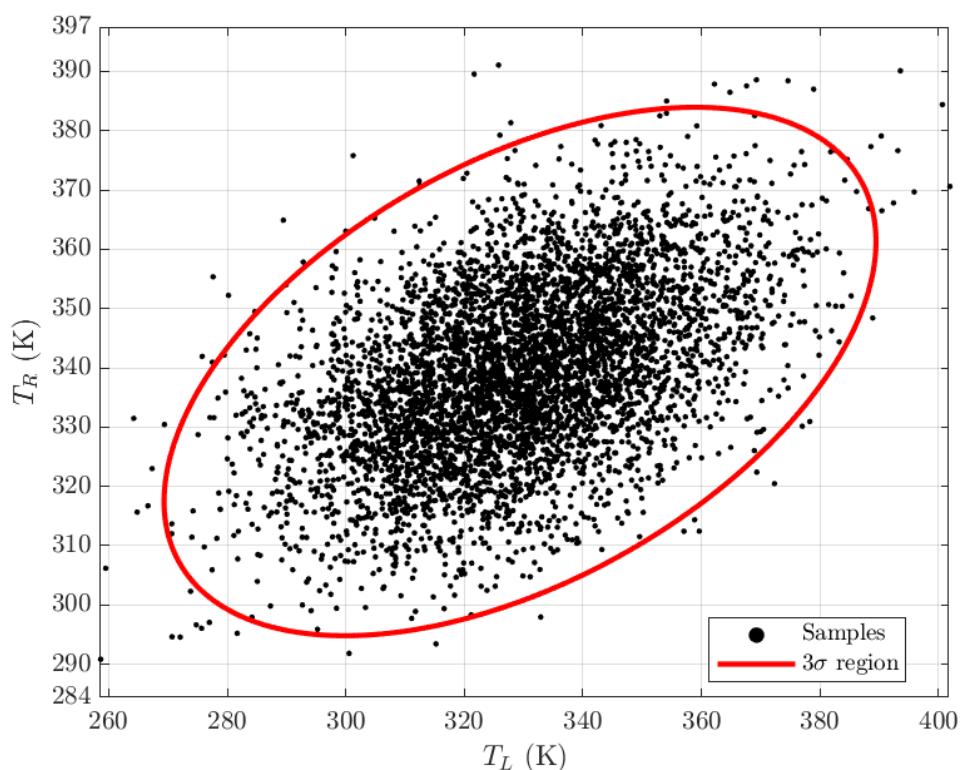


圖 4.3.4 Outer Lead 於 $\rho = 0.5$ 之熱刺激相關性

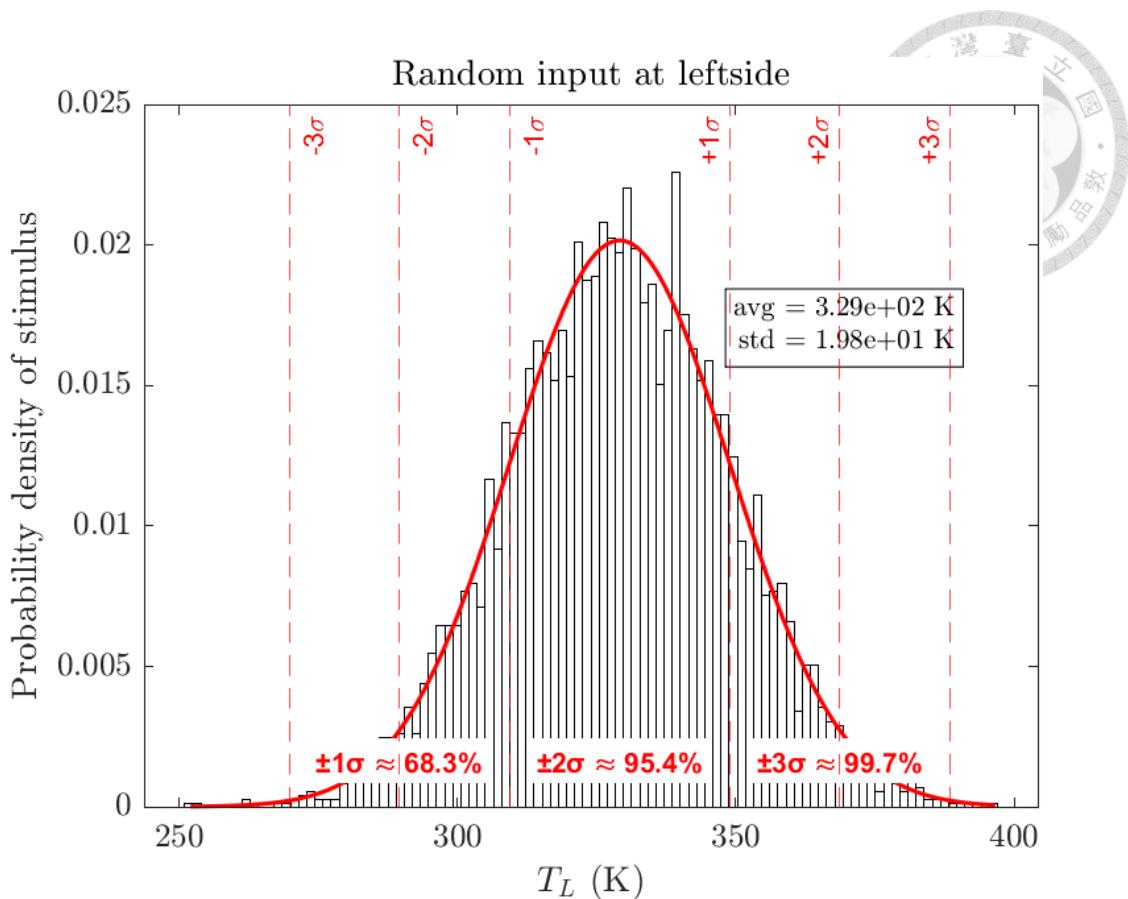


圖 4.3.5 Outer Lead 於 $\rho = 0.5$ 之左端熱載樣本

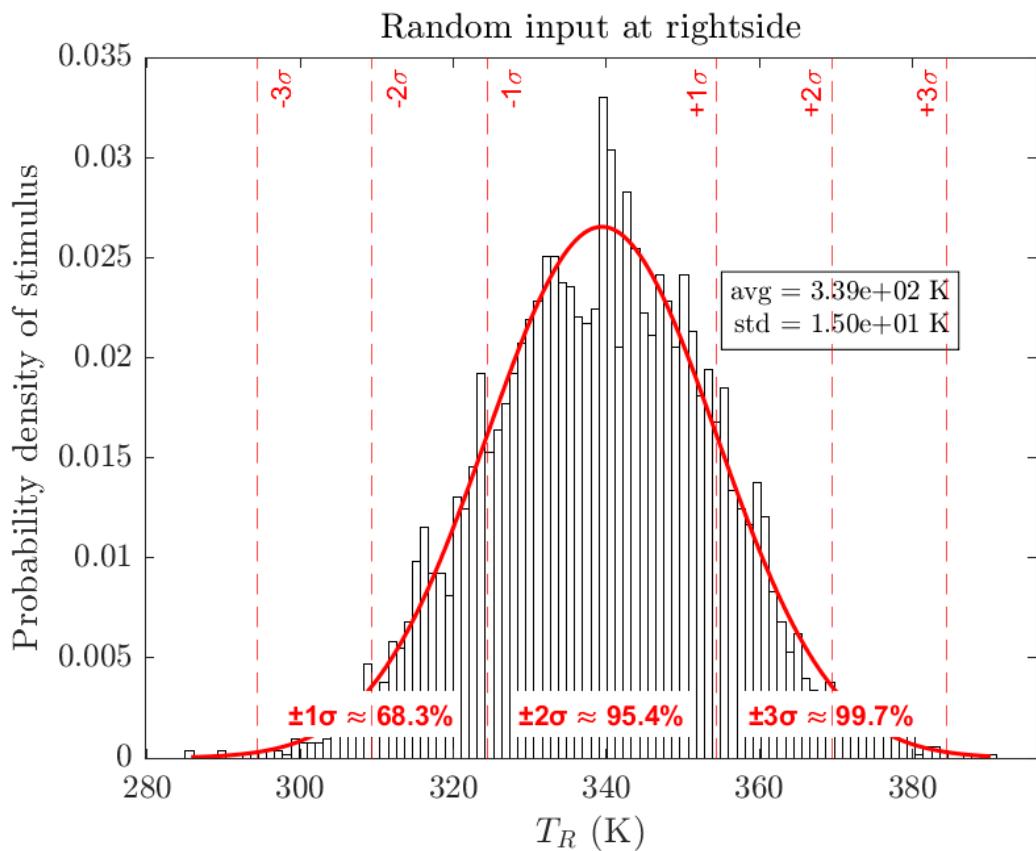


圖 4.3.6 Outer Lead 於 $\rho = 0.5$ 之右端熱載樣本

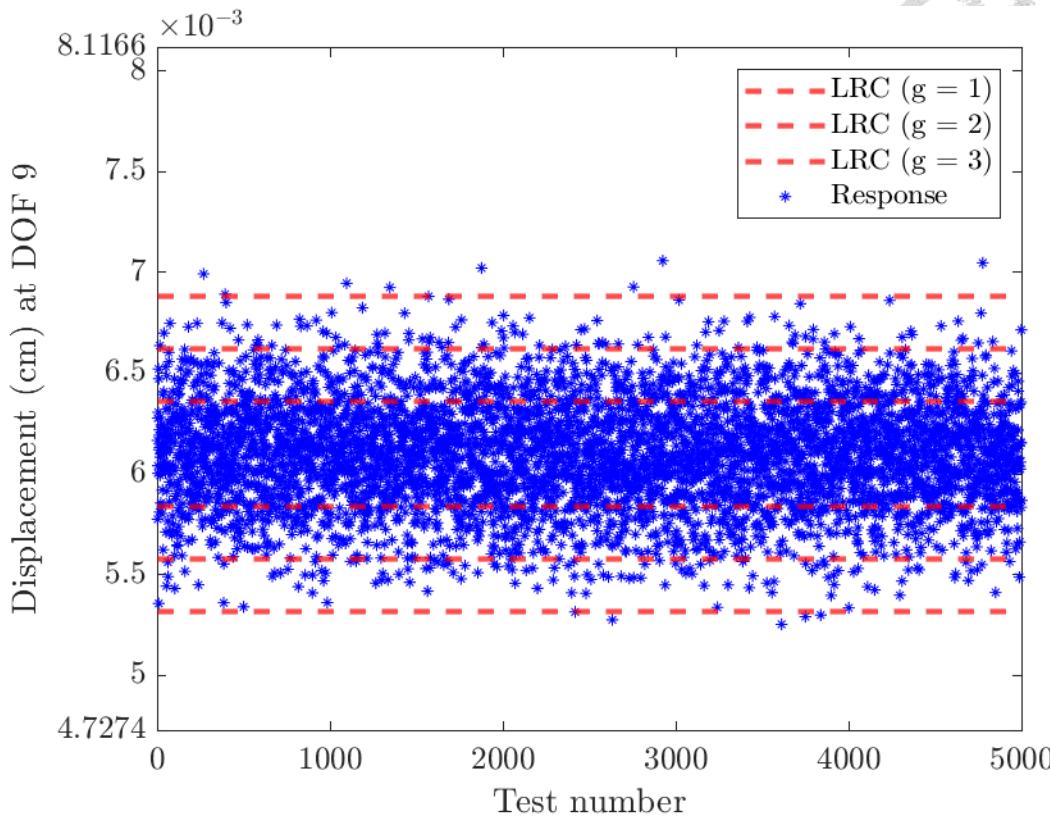


圖 4.3.7 Outer Lead 於 $\rho = 0.5$ 之 TLRC 驗證與預測結果

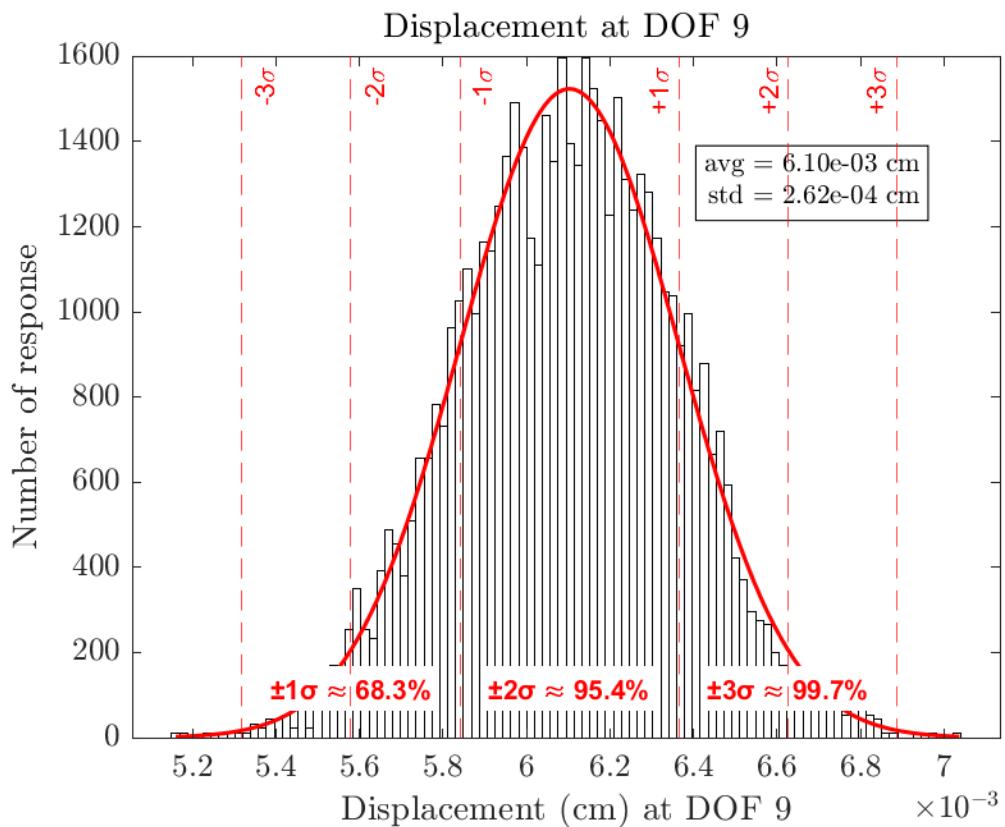


圖 4.3.8 Outer Lead 於 $\rho = 0.5$ 之數據採集生成響應分布

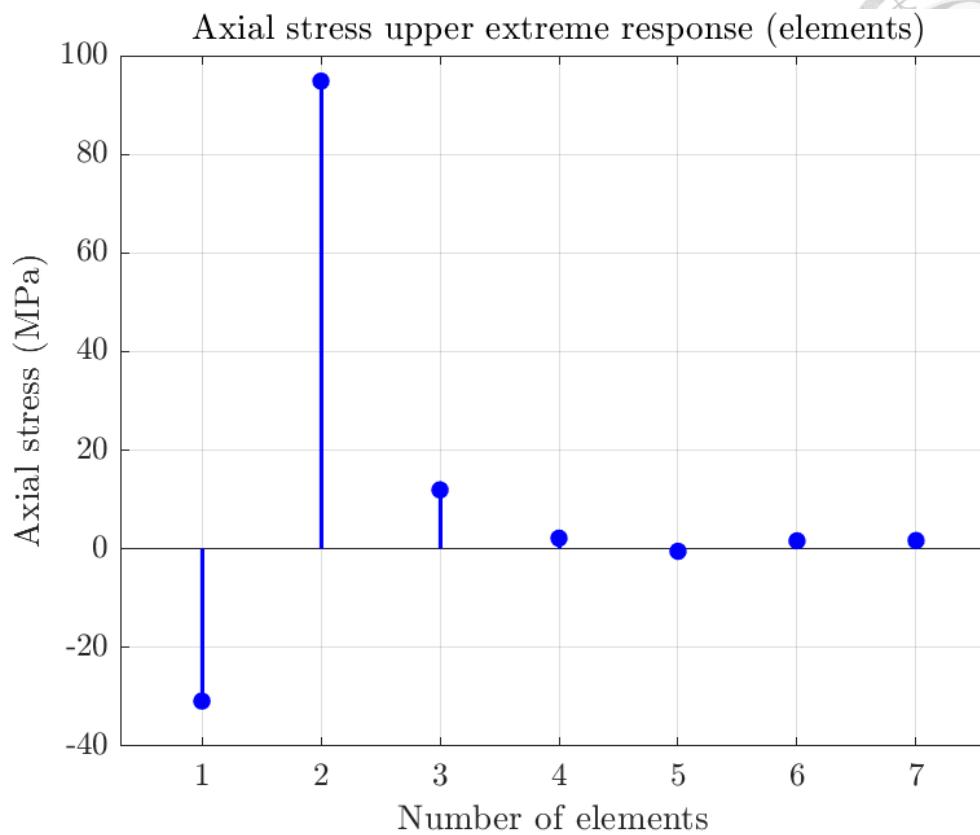


圖 4.3.9 Outer Lead 於 $\rho = 0.5$ 之正向極值條件下應力響應

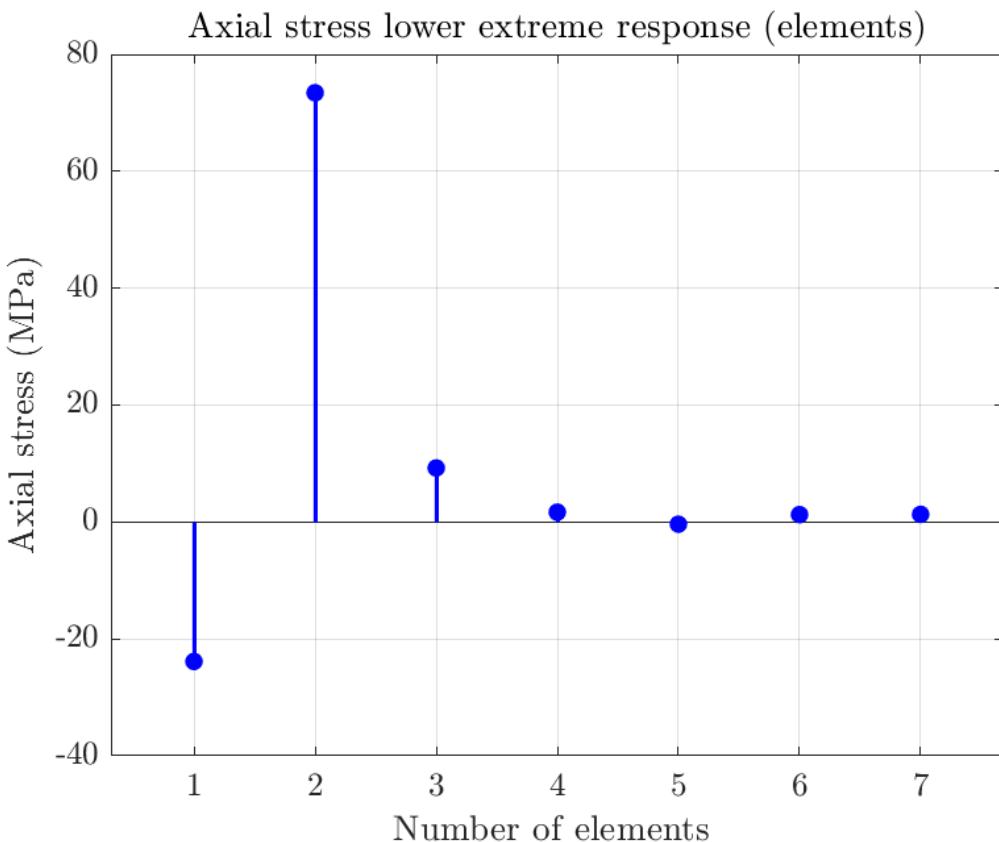


圖 4.3.10 Outer Lead 於 $\rho = 0.5$ 之負向極值條件下應力響應



4.3.4.2 針對 $\rho = -0.5$ 热邊界條件下之分析討論

為進一步評估不同熱邊界統計相關性對導線響應特徵之影響，本小節探討當兩端溫度輸入具有反向線性關聯 (Pearson correlation coefficient $\rho = -0.5$) 時，導線結構之變形響應與應力分布變化(如 圖 4.3.11)。此類情況模擬左、右端熱源因控制誤差或環境差異而呈反向溫升趨勢，為實務應用中常見之不利載入條件。

圖 4.3.12 所示為左、右端節點溫度樣本在 $\rho = -0.5$ 條件下的散佈圖。與前述 $\rho = 0.5$ 之高斯橢圓呈現正斜對比，此處橢圓斜率為負，顯示左端溫度分布與右端溫度分布呈現反向關係，代表當一端升溫時，另一端傾向降溫，顯著提升熱梯度變化範圍。

圖 4.2.23 與 圖 4.2.24 分別呈現兩端邊界溫度樣本的機率密度直方圖，其中左端平均為 329 K、標準差約為 19.9 K，右端平均為 339 K、標準差約為 14.9 K，樣本點落於 $\pm 3\sigma$ 內者超過 99.7%，吻合常態分布預期，亦證明樣本生成具統計一致性。

圖 4.3.15 為設計自由度 (DOF 9) 位移響應在不同標準差倍數 $g=1, 2, 3$ 下 LRC 預測上下界與 5000 次模擬數據之比對結果。可見響應仍大致落於 LRC 所預測之包絡區域內，雖受反向熱邊界驅動下，其響應分佈略呈不對稱外擴現象，但整體仍無超出預測帶之外。

進一步觀察圖 4.3.16 中之響應直方圖，平均位移約為 $6.1 \times 10^{-3} cm$ ，標準差為 $1.97 \times 10^{-4} cm$ ，呈明顯對稱分布，表示即使熱源反向波動，中段導線位移仍保持近似常態響應型態。

針對極值響應所誘發之內部應力行為，圖 4.3.17 與 圖 4.3.18 分別繪製正向與負向 LRC 響應對應之軸向應力分布圖。與先前 $\rho = 0.5$ 條件相較，此處正負向極值皆對應至第 2 元素產生最大應力，分別達約 90 MPa(正向)與 78 MPa(負向)，其餘節點應力相對較小，僅第 3 元素亦略有集中現象。

綜合而言，在 $\rho = -0.5$ 條件下，由於熱梯度相對增強，使導線中段變形趨勢較為



劇烈，進而導致極值響應所誘發之內力提升。儘管如此，根據先前設定材料參數（如銅材降伏強度約為 300 MPa ），最大應力仍落於彈性區間，未導致永久變形或損壞，顯示本模型在不利熱載環境下亦保有可靠的安全性裕度。

此結果再次驗證 LRC 預測方法能有效對應不同統計相關性之隨機熱邊界條件之極值行為，為導線封裝可靠度設計提供關鍵依據與預測能力。

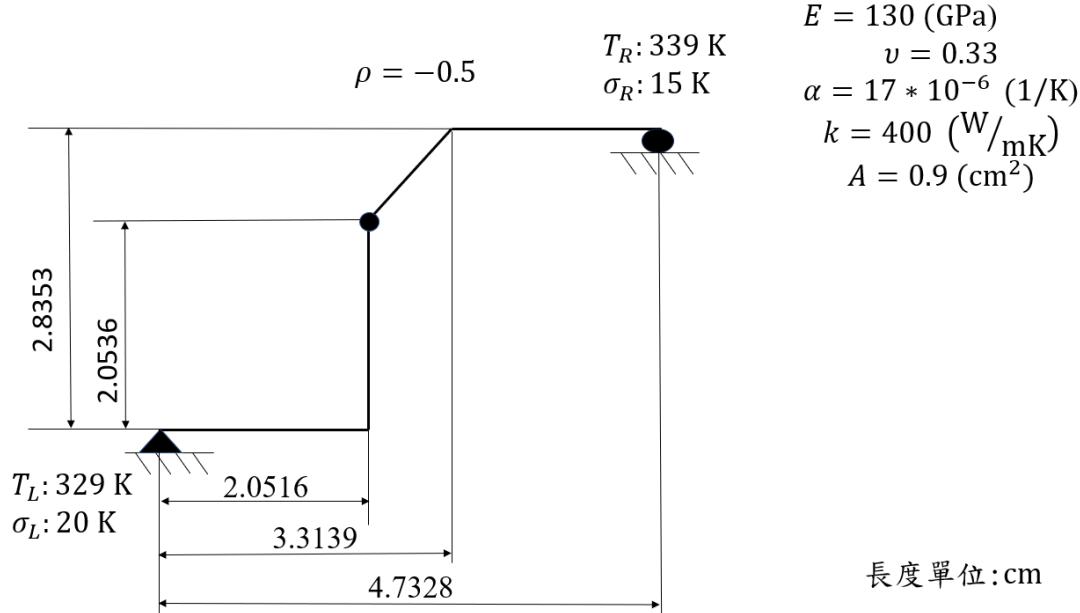


圖 4.3.11 Outer Lead 於 $\rho = -0.5$ 之熱固耦合分析模型圖

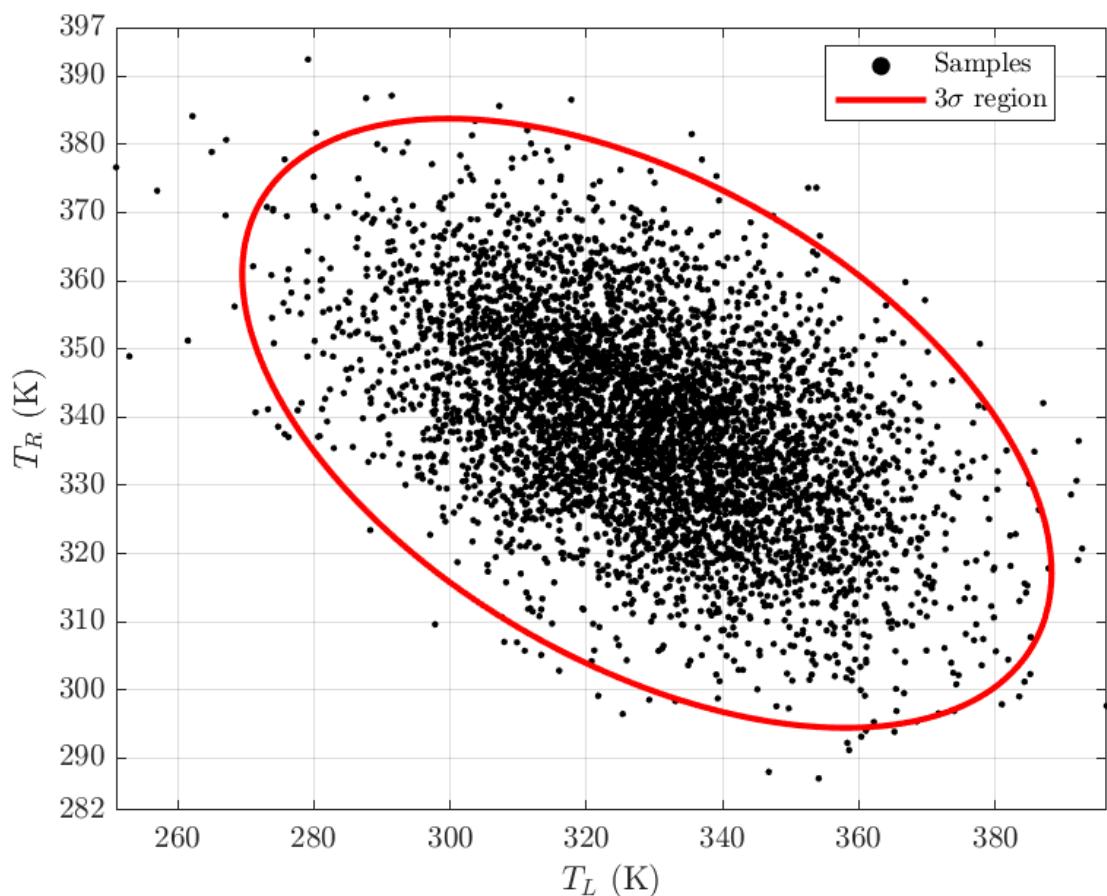


圖 4.3.12 Outer Lead 於 $\rho = -0.5$ 之熱刺激相關性

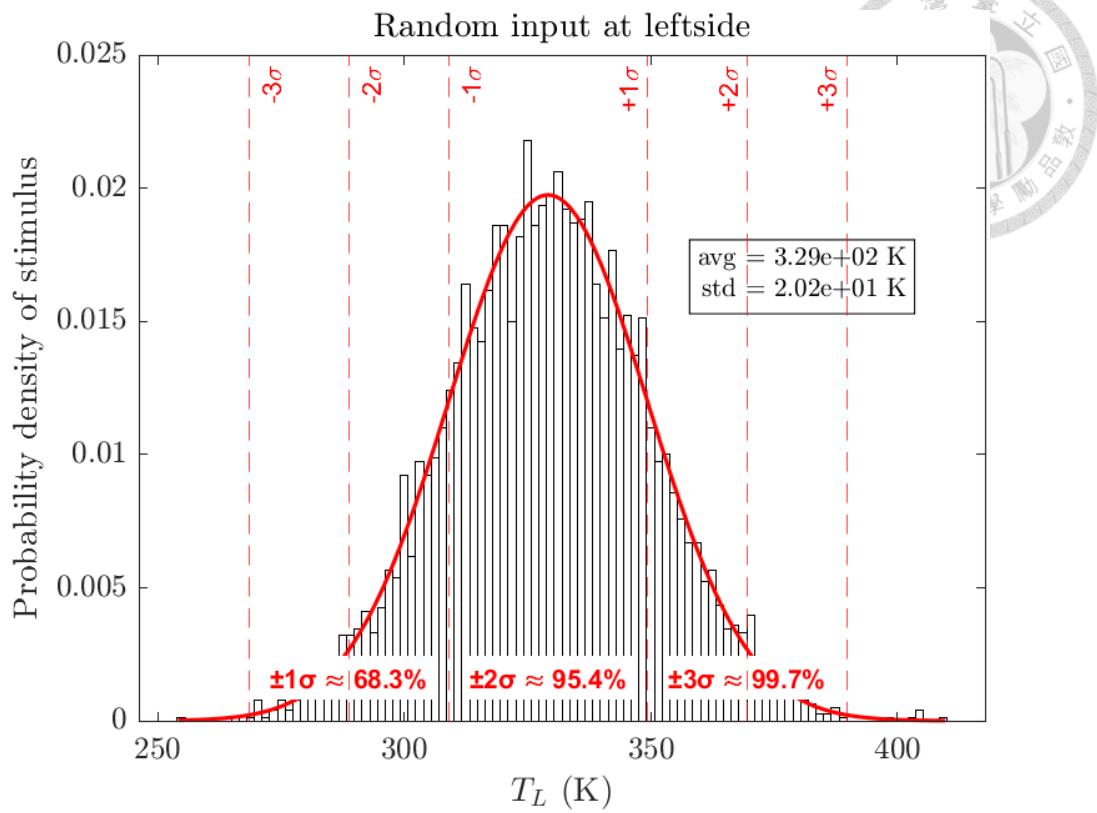


圖 4.3.13 Outer Lead 於 $\rho = -0.5$ 之左端熱載樣本

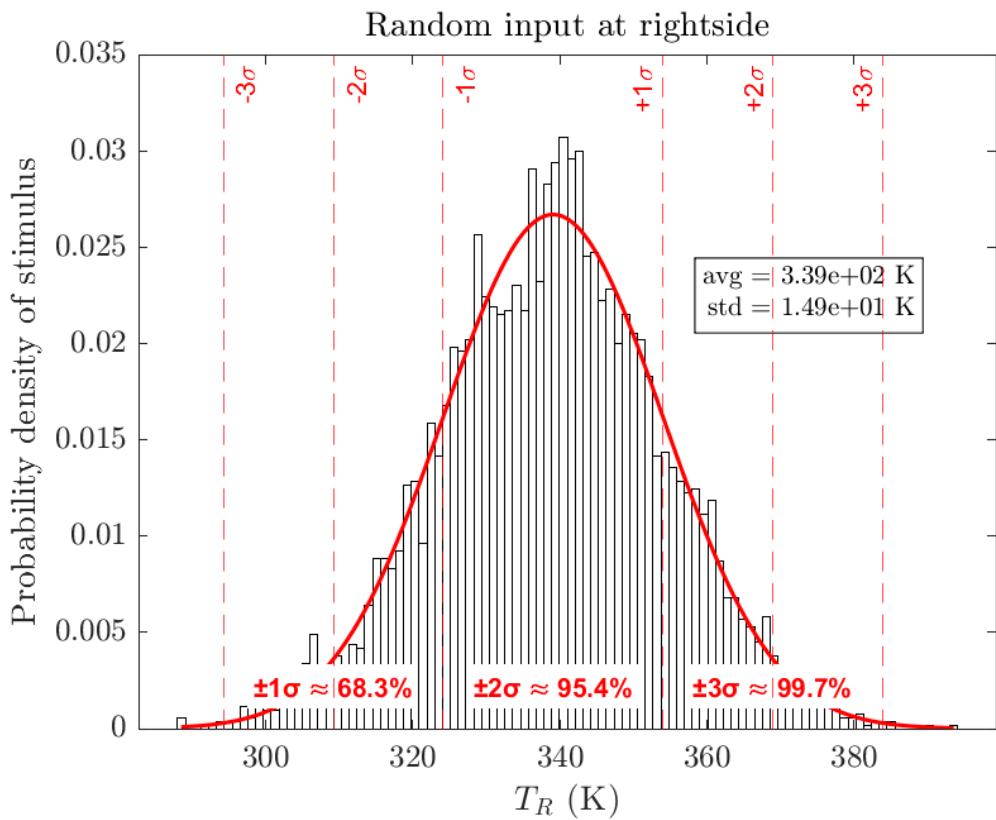


圖 4.3.14 Outer Lead 於 $\rho = -0.5$ 之右端熱載樣本

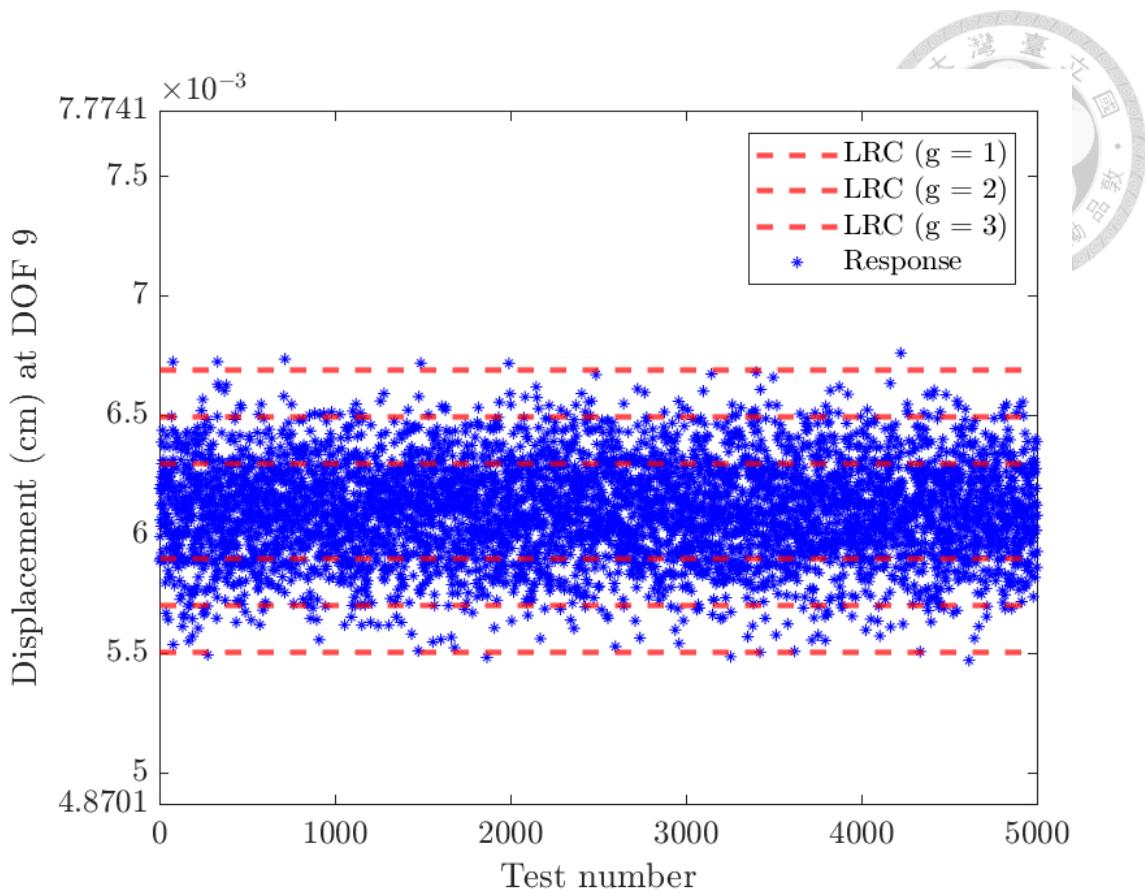


圖 4.3.15 Outer Lead 於 $\rho = -0.5$ 之 TLRC 驗證與預測結果

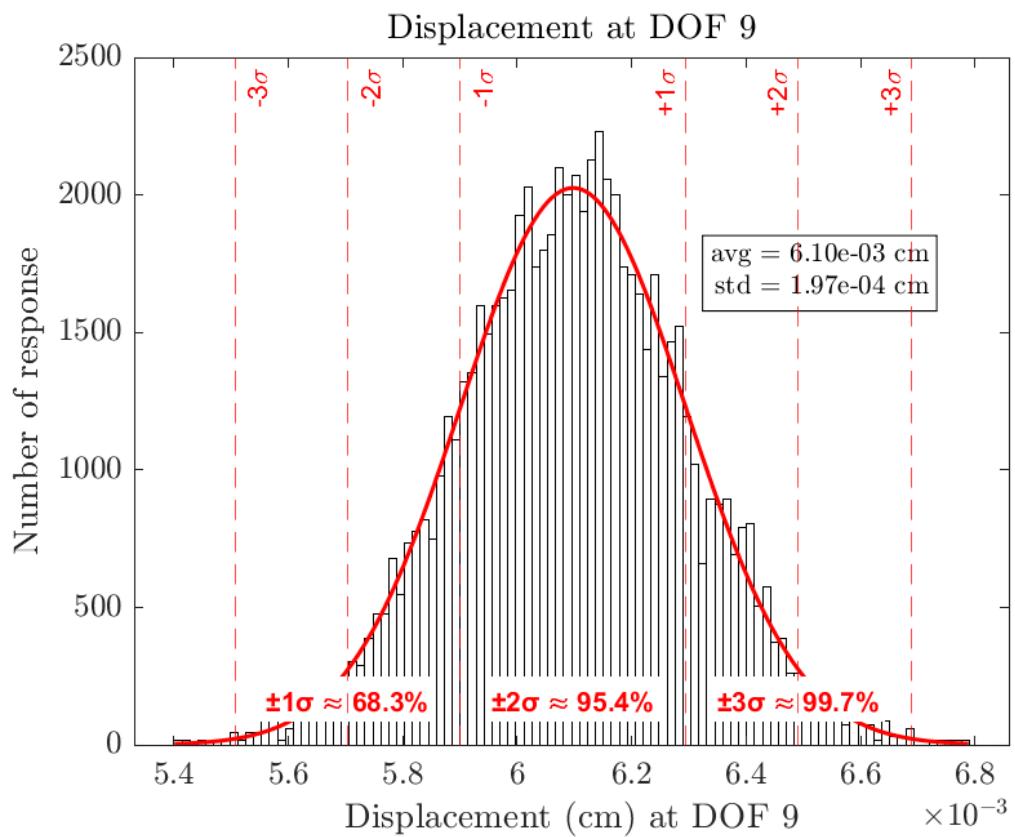


圖 4.3.16 Outer Lead 於 $\rho = -0.5$ 之數據採集生成響應分布

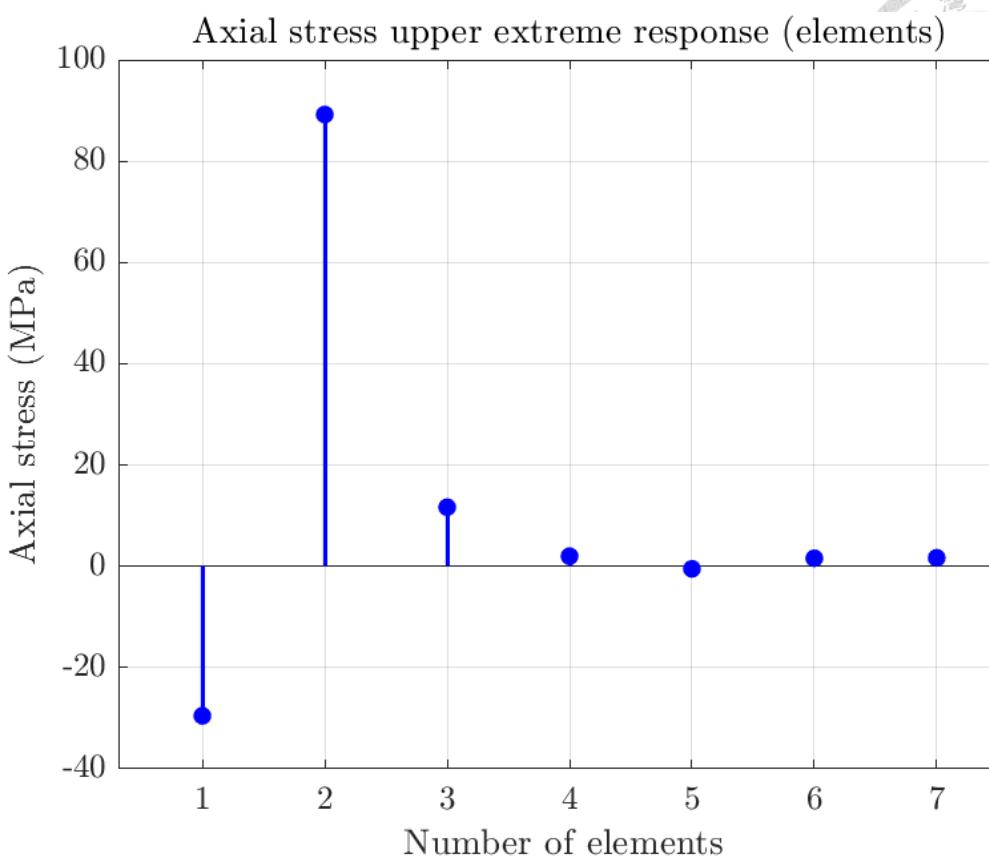


圖 4.3.17 Outer Lead 於 $\rho = -0.5$ 之正向極值條件下應力響應

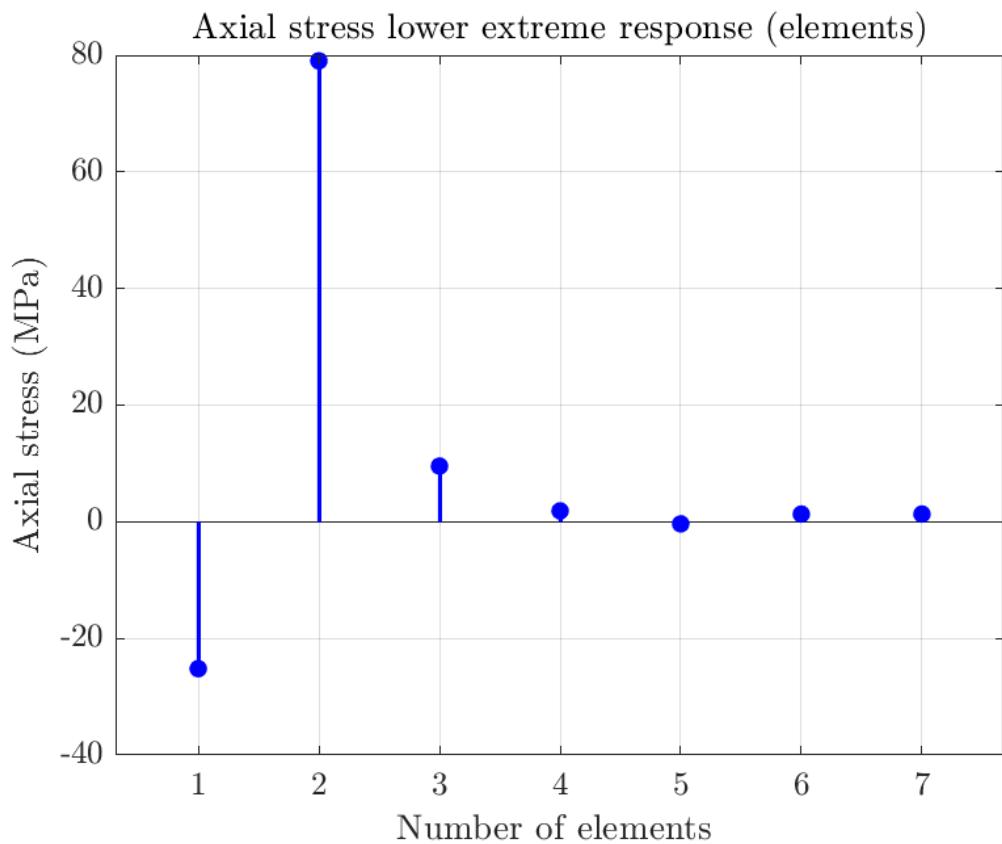


圖 4.3.18 Outer Lead 於 $\rho = -0.5$ 之負向極值條件下應力響應



4.4 微橋式感測結構熱固耦合極值響應分析

延續前述對功率模組 Outer lead 結構之熱固耦合極值分析，本節進一步聚焦於微機電系統 (MEMS) 中常見的懸臂式結構元件，探討其在隨機熱邊界下的變形與應力行為。該分析以一種整合於壓力感測器中的微橋 (microbridge) 做為研究對象 [13]。

此處所考慮之微橋結構模擬圖見 圖 4.4.1，本研究設計其橫跨跨距約為 $400\text{ }\mu\text{m}$ ，高度約 $105\text{ }\mu\text{m}$ ，由兩端固定之梁構成中間懸空區域，模擬實際元件中因滲透壓變化而產生的表面彎曲變形。材料採用矽基材 (Young's modulus 為 169 GPa ，Poisson ratio 為 0.28 ，熱膨脹係數 $\alpha = 2.6 \times 10^{-6}\text{ }1/\text{K}$ ，熱傳導係數 $k = 149\text{ W/mK}$)，截面面積設為 $1\text{ }\mu\text{m}^2$ ，對應於實際微橋的橫截尺寸。模型假設保持二力桿件 (Truss) 之線性熱固耦合假設，利於進行高效率之數值模擬與統計分析。

本研究針對左、右兩端節點施加常態分佈的熱邊界條件，左側溫度設定 320 K ， $\sigma = 20\text{ K}$ ；右側則為 310 K ， $\sigma = 10\text{ K}$ ，兩端溫度變異性相近，反映 MEMS 中不均勻熱源或微觀生理波動。考慮溫度相關係數為 $\rho = 0$ 的條件 (即兩端溫度獨立變動)，進行多次數據採集抽樣模擬 (數據採集 Sampling)，產生對應之溫度樣本，並以 TLRC 方法建立刺激與響應之對應關係。

有限元素模型自由度定義方式與前節相仿，採用雙自由度描述節點位移，設計觀察點設定於第九自由度，對應於懸臂中央點之 Y 向變位行為，做為結構響應觀察之核心變數。為避免剛體運動與旋轉自由度干擾，模型施加適當位移拘束條件於兩端支撐節點。

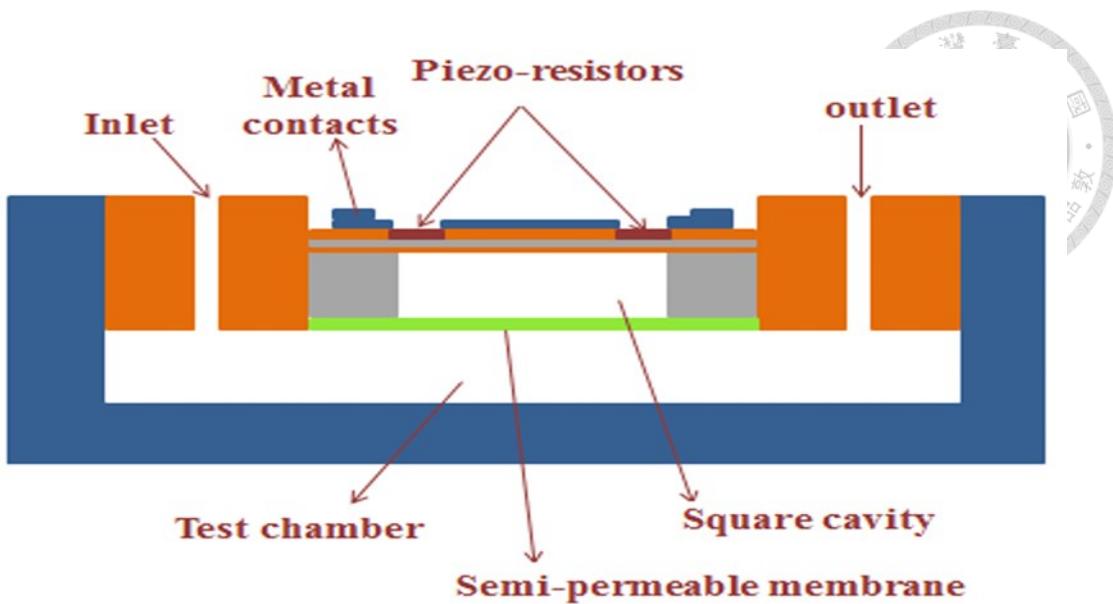


圖 4.4.1 Microbridge 結構模型 [13]

4.4.1 幾何與模型架構

本節所分析的微橋（Microbridge）結構，係模擬實際微機電系統（MEMS）中感測元件所使用之橋式懸構，廣泛應用於壓力感測器、熱致致動器、電熱開關以及電阻式應變計等元件設計。由於其懸浮於基板之上的結構形式具有高靈敏度與熱固耦合放大效果，微橋在溫度驅動下的響應特性成為微尺度可靠度分析中的重要研究課題之一。

本研究所建立之模型，係參考文獻[1]中微橋應用架構進行幾何建模，聚焦於熱固耦合場下的變形與應力分布行為，並特別模擬微橋中央敏感區域的熱致應變累積。該結構由九個節點（Node 1–Node 9）所構成，並以八段一維等截面桿件（Element 1–Element 8）相互連接，形成具有對稱傾斜撐肢、中央懸臂橋段與兩端固定支撐的典型橋式架構，如圖 4.4.2 所示。

幾何設計方面，整體微橋長度約為 $325\mu m$ ，高度約為 $105\mu m$ ，單元桿件長度約落在 $80 - 90\mu m$ 之間，橫截面積統一設定為 $1\mu m^2$ ，符合當代 CMOS-MEMS 製程中微型懸臂或橋式元件之尺度比例。該尺寸設定除忠實反映實體元件外，也能在有限元素數值模擬中兼顧精度與計算效率。桿件方向角度根據實際結構配置分佈於 $\pm 1^\circ$ 、 $\pm 2^\circ$ 、 $\pm 47^\circ$ 、 $\pm 65^\circ$ 與 -62° 、 67° 等轉折區間，模擬製程後常見

之彎折形貌，進一步提升熱梯度下結構響應的敏感度與非線性特徵。

為兼顧模擬精準度與計算效率，模型採用二維空間內之二力桿件 (Truss) 元素做為基本單元。儘管為一維元素，其可透過方向餘弦 (Direction Cosine) 進行剛度矩陣與熱應變項之座標轉換，進而完整捕捉任意方向上的軸向應變與熱致膨脹效應，尤其適用於處理具多段角度與幾何轉折之微尺度結構行為。透過此建構方式，模型得以精確模擬微橋於受熱驅動下之幾何變形與內部應力轉移機制。

自由度 (Degree of freedom) 設定方面，本模型延續前述金線與導線架架構之定義規則，自第一節點 X 向位移為 DOF1、Y 向位移為 DOF2，依序編列至第九節點，共計 18 個自由度(如 圖 4.4.2)。為捕捉微橋結構中最敏感之熱致變形行為，本研究特選第 9 自由度 (DOF9) 做為設計自由度，該自由度對應於中央懸空橋段中部之節點之 X 向變位，根據文獻與數值模擬結果，其位置在熱載激發下易產生局部最大應變與軸向應力，具有顯著代表性。

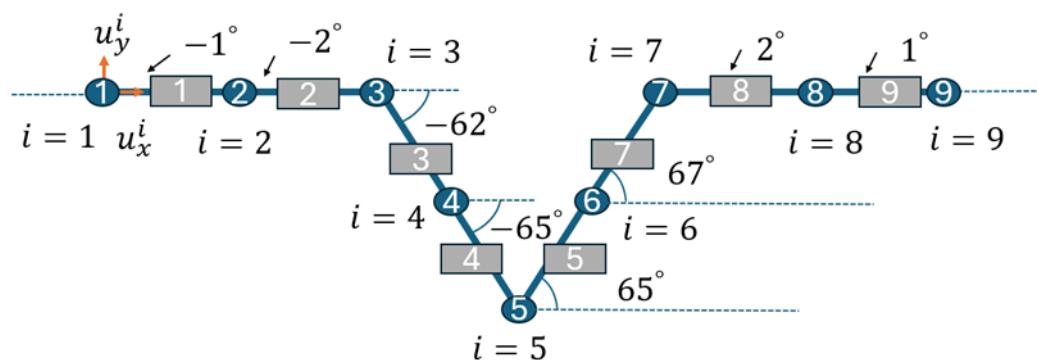


圖 4.4.2 Microbridge 幾何模型架構

4.4.2 固體位移邊界條件

延續前一小節所建立之微橋幾何模型，為確保有限元素系統之可解性並模擬實際製程中的固定端設計，本研究於橋體兩端支撐區（節點 Node 1 與 Node 9）施加適當之位移拘束條件，反映微橋元件於基板錨定處的固定行為。



具體而言，節點 Node 1 做為橋體左側固定支撐，其 X 向與 Y 向自由度皆設為零位移，對應 於微橋一端焊接或接合於基板上之完全拘束條件，用以消除整體剛體平移模式：

- 固定左端點位移：

$$u_x^1 = 0 \quad \text{式(4.4.1)}$$

$$u_y^1 = 0 \quad \text{式(4.4.2)}$$

- 固定右端點位移

$$u_x^9 = 0 \quad \text{式(4.4.3)}$$

$$u_y^9 = 0 \quad \text{式(4.4.4)}$$

- 固定中心點縱向位移

$$u_y^5 = 0 \quad \text{式(4.4.5)}$$

此種邊界條件設計方式除可有效維持有限元素系統之力學穩定性，也貼合實際微機電元件於基板或介面層中所具備的對稱錨定與彈性補償需求。透過消除五個關鍵自由度 (DOF1、DOF2、DOF10、DOF17、DOF18)，本模型得以準確模擬微橋於熱固耦合載入下的變形與內應力傳遞行為。

4.4.3 TLRC 應用與設計自由度定義

微橋結構之熱固耦合建模與邊界條件設定，本小節進一步導入 TLRC

(Thermal load response correlation) 方法，針對隨機熱邊界條件下之微橋熱致響應進行極值分析，並聚焦於代表性自由度之統計響應與安全性評估。

為解析橋體中央區域之熱機行為特徵，並掌握結構轉折處因溫度差所誘發之變形與應力累積，本研究選定微橋結構第 9 自由度 (DOF9) 做為設計觀察點。該自由度對應於中央節點 (Node 5) 於 X 向之平移位移，位處橋體中心壓應區段，亦為數個傾斜桿件交會之轉折點，在溫差驅動下最易產生位移集中與應力放大效應。

此處設計自由度不僅可有效反映整體橋體在雙端溫差輸入下之軸向熱變形，亦為判別橋體是否可能出現熱疲勞破壞或局部降伏的關鍵位置。TLRC 方法透過大量數據採集模擬樣本，對不同熱邊界組合下之 DOF9 響應結果進行統計回歸分析，進而推估其在特定相關係數 (如 $\rho = 0$) 下之極值位移範圍。

由於微橋結構具有懸空且斜向之幾何特性，其受熱所引致之非均勻膨脹效應將在轉角區域形成顯著應變梯度，可能導致局部熱應力集中。因此，除針對 DOF9 位移響應進行極值包絡分析外，本研究亦藉由其對應之熱機變形反推出各桿件內部軸向應力，進行最大張應力與最大壓應力之統計推估與視覺化分析。

最終，本小節將比較推估之極值應力與材料降伏強度 (例如金屬薄膜或多晶矽等材料常見之降伏準則)，藉以確認微橋於不同熱載分布下之安全範圍，並提供熱機敏感結構於製程與封裝階段中之可靠性評估依據。

4.4.4 數據結果分析

4.4.4.1 針對 $\rho = 0$ 熱邊界條件下之分析討論

本節針對微橋結構於左右端施加不相關 ($\rho = 0$) 熱邊界條件下之熱固耦合行為進行統計分析與極值預測 (如 圖 4.4.3)。

圖 4.4.4 為左右端節點 (T_L 與 T_R) 施加的隨機熱載分布圖，該資料由雙變量常態分布生成，平均溫度分別為 $T_L = 320$ K、 $T_R = 310$ K，對應標準差為 20 K

與 10 K，圖中紅色橢圓代表 3σ 區間。由於 $\rho=0$ ，故樣本呈圓形散佈，無明顯傾斜趨勢，代表左右熱載變動獨立無相關性。

圖 4.4.5 與圖 4.4.6 分別顯示左右端熱載的直方圖與機率密度分布，均呈現對稱之常態分布。左側邊界 T_L 平均值為 320 K，標準差為 20 K；右側邊界 T_R 平均值為 310 K，標準差為 10 K，確認輸入熱載具備良好隨機性與統計穩定性。

在設計自由度 (DOF 9) 之位移響應方面，圖 4.4.7 顯示 5000 次數據採集模擬所得的位移散點圖，並以紅色虛線表示 LRC 所預測之 $\pm 1\sigma$ 、 $\pm 2\sigma$ 與 $\pm 3\sigma$ 邊界。絕大多數模擬結果皆落於 $\pm 3\sigma$ 區間內，顯示 TLRC 對於位移極值預測具高準確性。對應直方圖如圖 4.4.8 所示，平均位移為 12.2 μm ，標準差為 0.356 μm ，整體分布接近常態，顯示中段結構變形穩定，位移集中於壓縮方向。

進一步將極值位移響應 (上界與下界) 代入分析內部桿件之軸向應力分布，圖 4.4.9 與圖 4.4.10 分別顯示於最大與最小熱變位下之軸向應力分佈。在正向極值下，第 2 元件為主應力集中點，應力達 -55 MPa，其餘元件應力呈遞減趨勢。於負向極值條件下，第 2 元件仍為最大張應力區域，達 -45 MPa，亦明顯大於其餘區段，顯示該處為潛在的熱應力集中熱點。

根據材料特性設定 (單晶矽， $E = 169 \text{ GPa}$)，於室溫或高溫下的降伏強度遠高於模擬所得應力值，代表微橋結構在此熱邊界組合下仍處於彈性範圍內，無永久變形風險。綜合而言，TLRC 方法於本案例中能有效捕捉熱邊界變異對微橋中央區域之熱固耦合位移與應力反應，並提供具物理意義的極值預測邊界，對 MEMS 結構於高溫不確定環境下之設計評估具有實用參考價值。

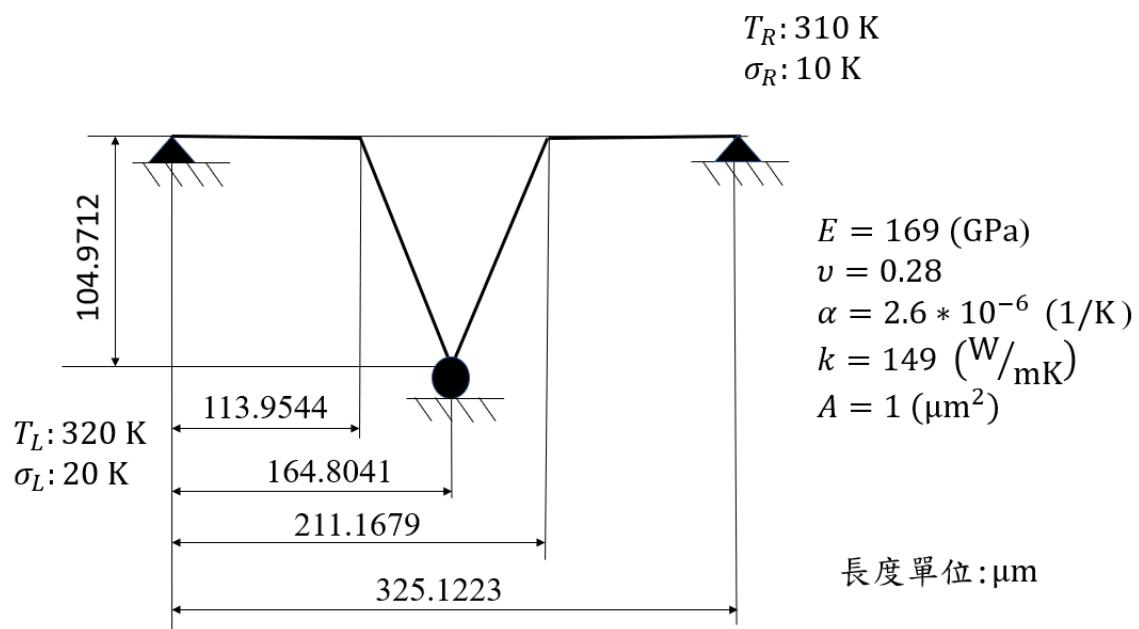


圖 4.4.3 Microbridge 於 $\rho = 0$ 之熱固耦合分析模型圖

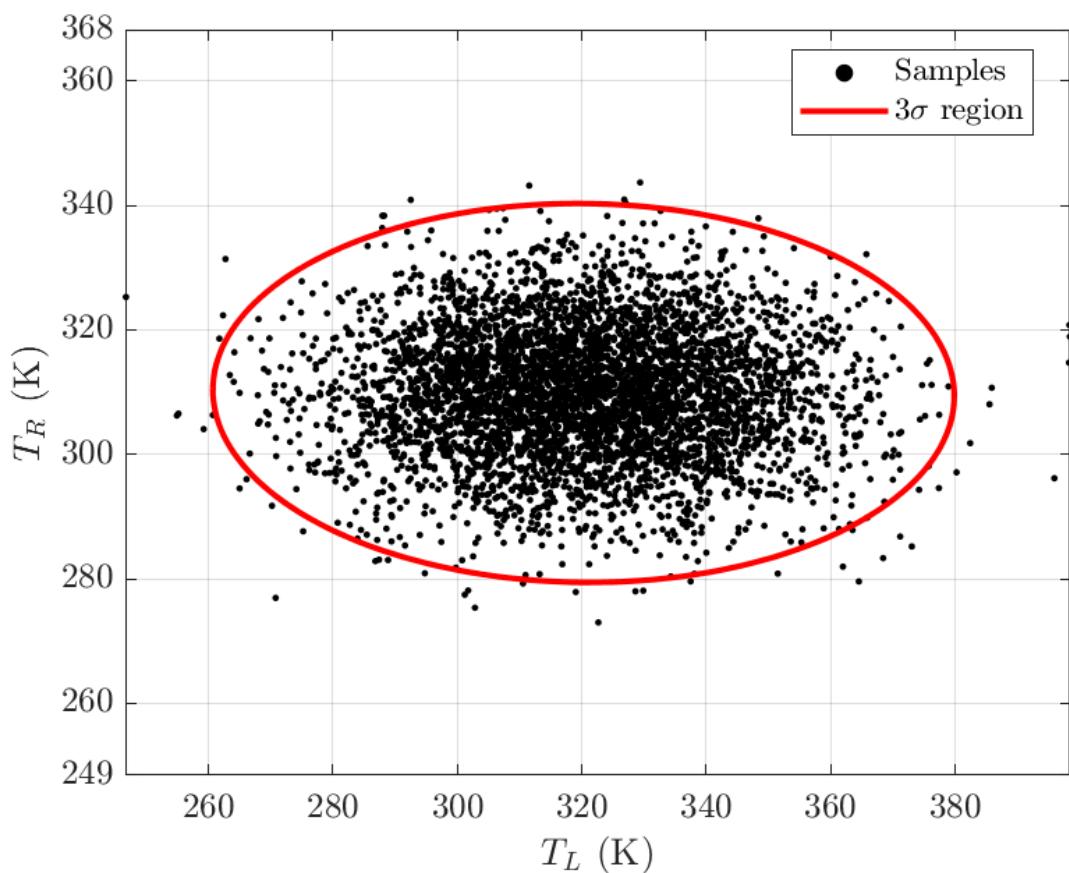


圖 4.4.4 Microbridge 於 $\rho = 0$ 之熱刺激相關性

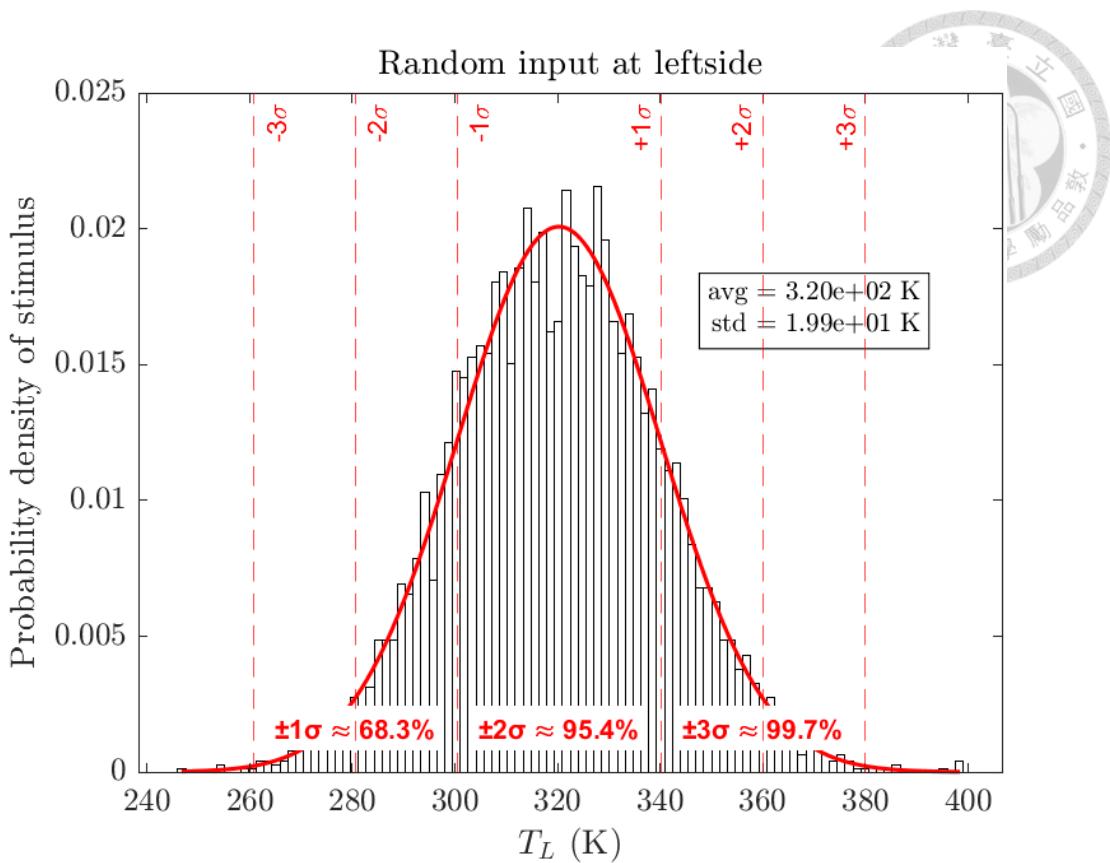


圖 4.4.5 Microbridge 於 $\rho = 0$ 之左端熱載樣本

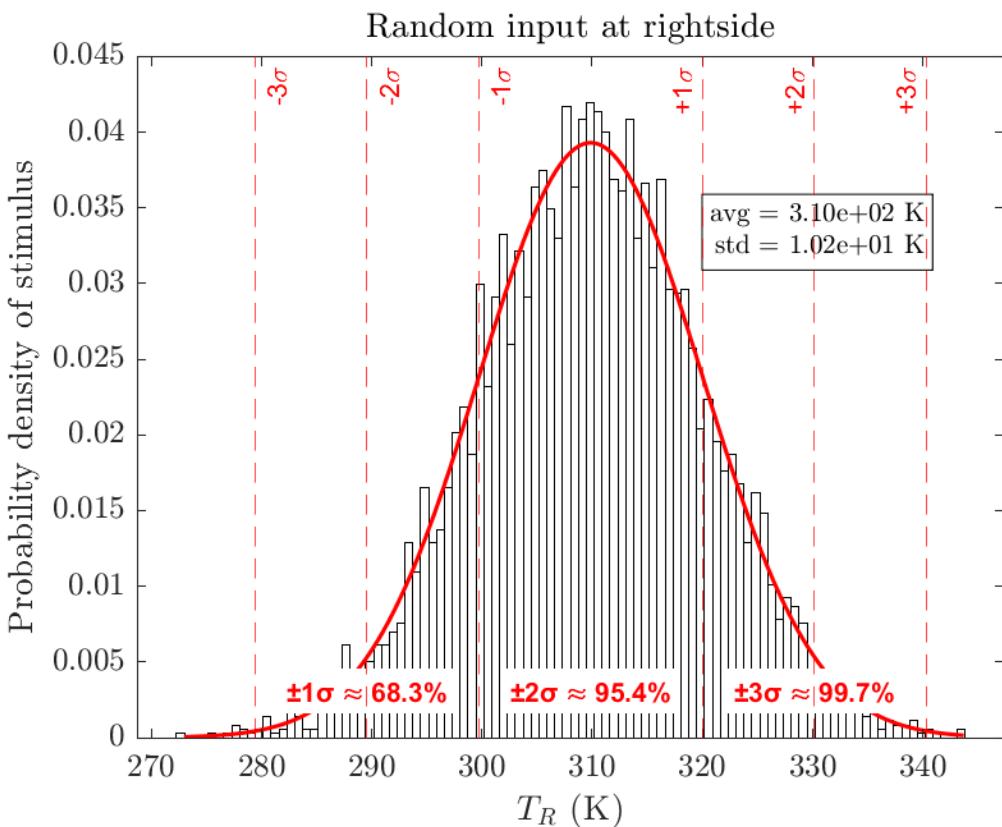


圖 4.4.6 Microbridge 於 $\rho = 0$ 之右端熱載樣本

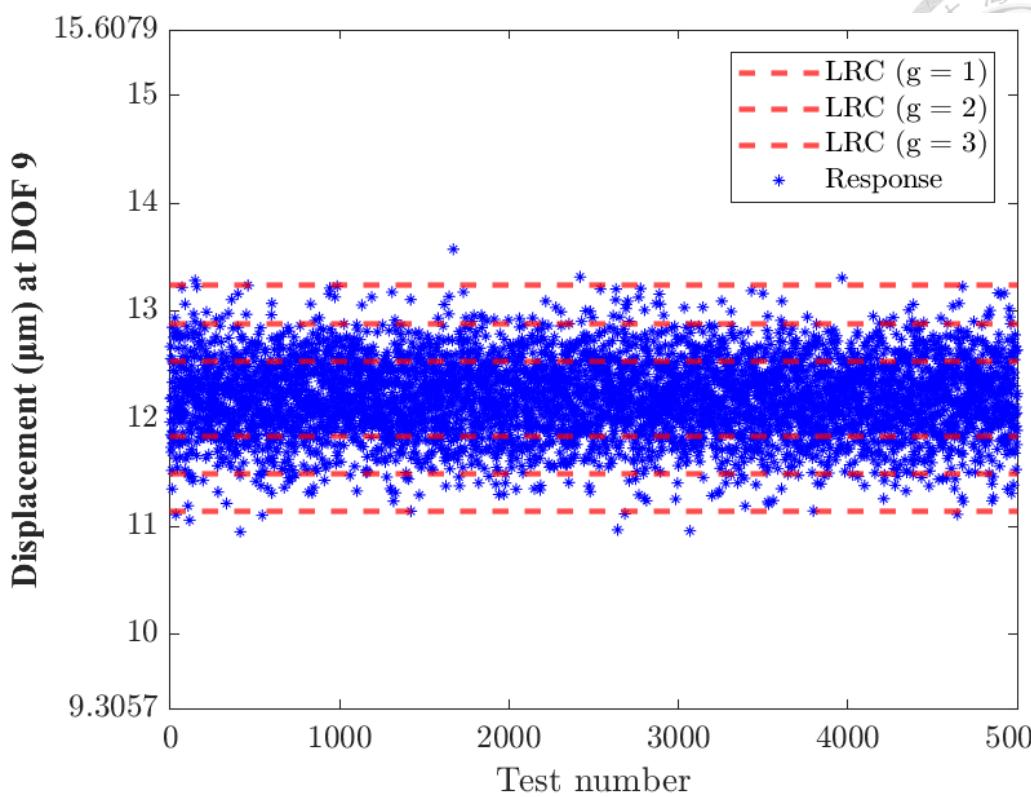


圖 4.4.7 Microbridge 於 $\rho = 0$ 之 TLRC 預測與結果驗證

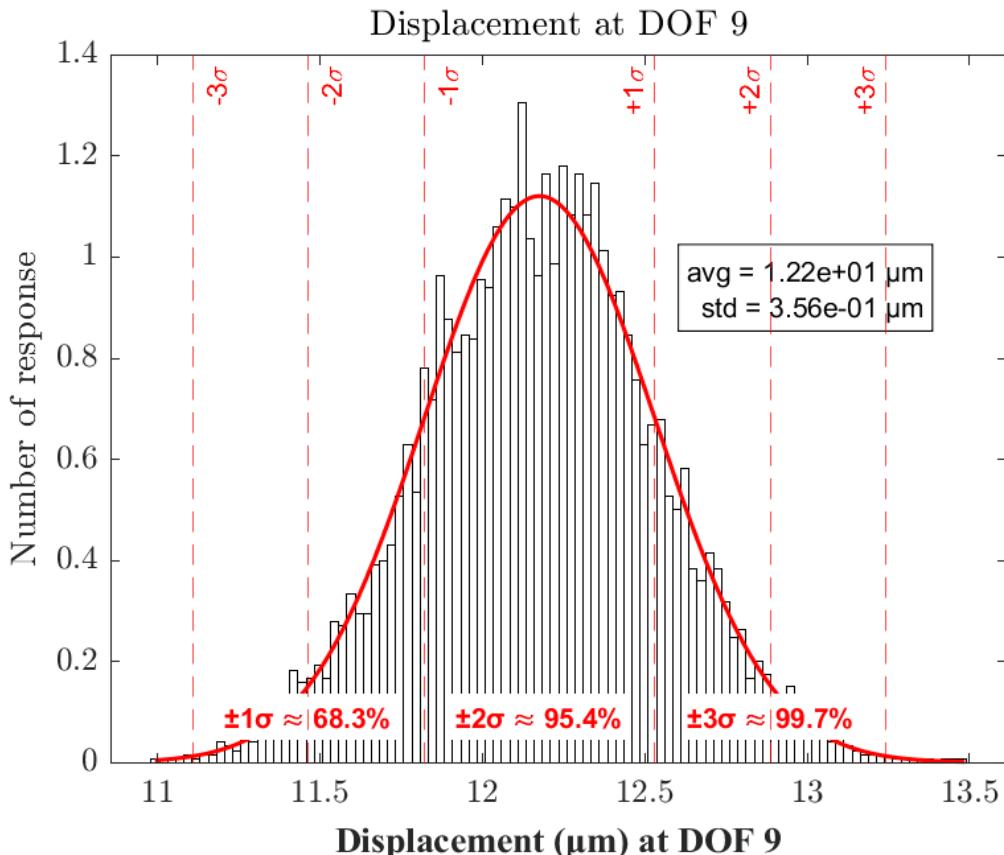


圖 4.4.8 Microbridge 於 $\rho = 0$ 之數據採集生成響應分布

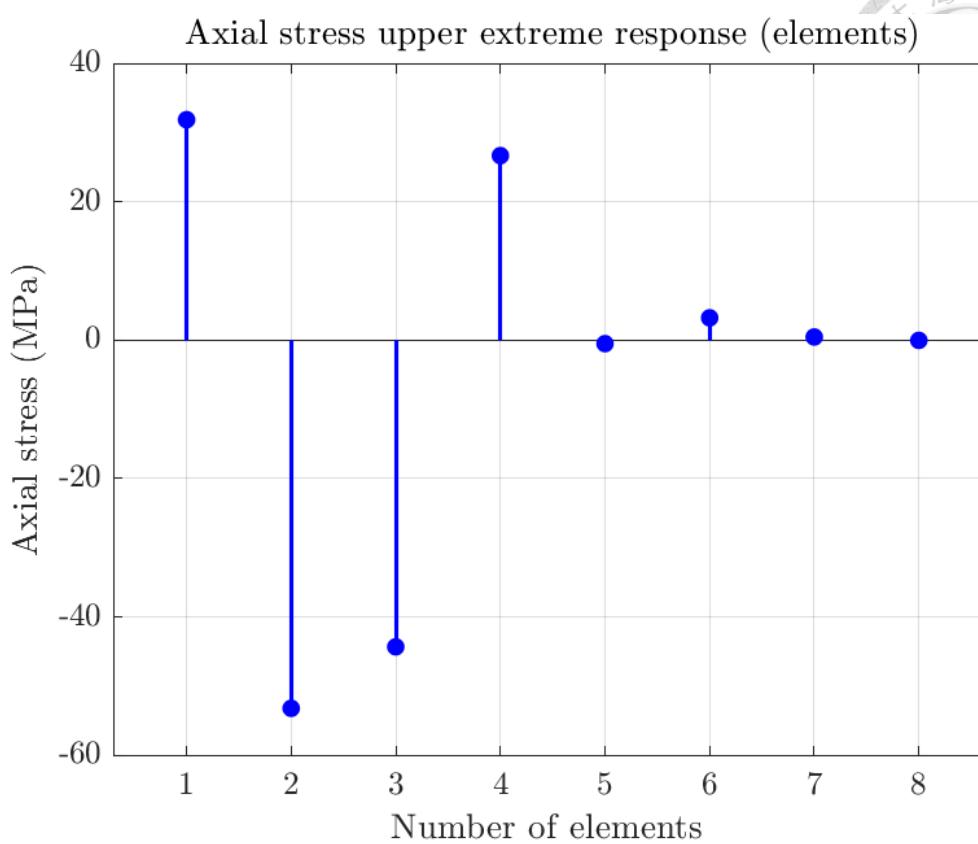


圖 4.4.9 Microbridge 於 $\rho = 0$ 之正向極值條件下應力響應

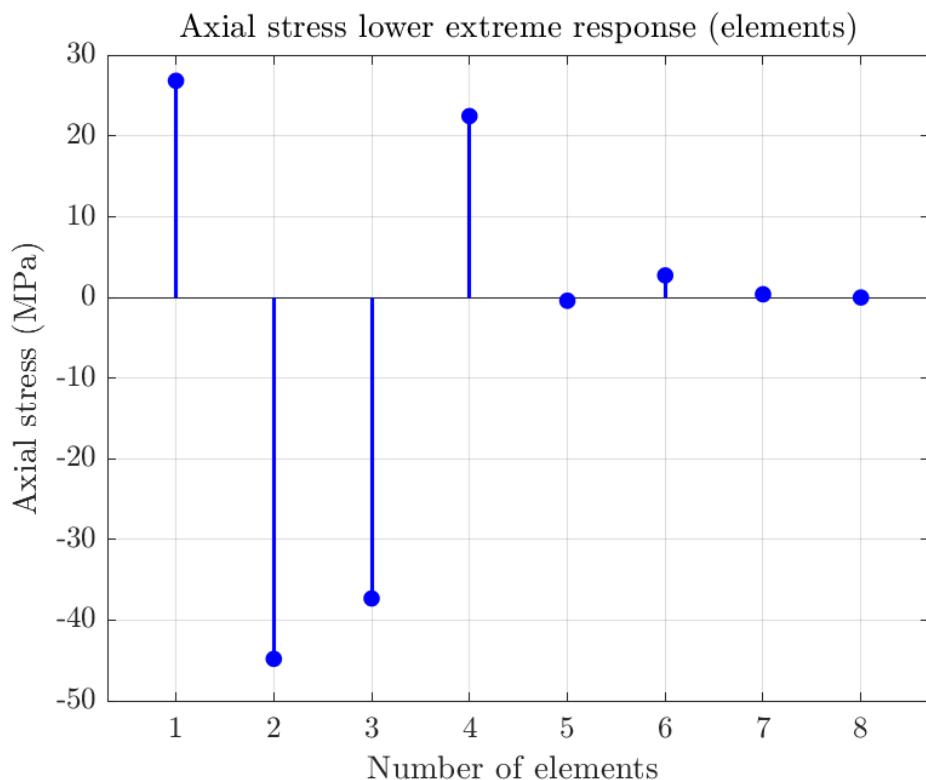


圖 4.4.10 Microbridge 於 $\rho = 0$ 之負向極值條件下應力響應



4.5 微尺度曲線導線熱固耦合極值響應分析

延續前述對微橋結構熱固耦合行為之探討，本節聚焦於來自封裝製程中 Curing 階段所誘發的熱變形行為（如 圖 4.5.2），分析一組具代表性的微尺度曲線導線（Curved micro interconnect）結構。該結構幾何來源於高功率模組製程效應研究中所提出之 IMS-based 功率封裝[14]，特別取其環氧樹脂封裝階段中線路引導部位之變形形貌做為建模基礎。本分析針對 Curing 製程中線材受到熱梯度驅動下的結構響應進行建模與統計極值推估。

如圖 4.5.1 所示，整體模型由 8 個節點與 7 段二力桿件（Truss）元素組成，模擬一條由左側晶片焊接區延伸至右側固定點之彎折線體，橫跨總長度 5.7296 mm，高度變化達 1.7468 mm，符合封裝內部實際導線形貌比例。各節桿件之夾角設計模擬實際導線在 Curing 過程中產生之塑性彎曲與熱變形，包括 $\pm 60^\circ$ 、 $\pm 45^\circ$ 、 $\pm 10^\circ$ 、 $\pm 15^\circ$ 、 $\pm 40^\circ$ 等，建構出完整轉折與拱起的路徑曲線（詳見圖 4.3.2）。截面面積設定為 0.01 mm^2 ，材料參數則採用銅，楊氏模數 130 GPa，泊松比 0.33，熱膨脹係數 $\alpha = 17 \times 10^{-6}\text{ K}$ ，熱導率 400 W/mK。

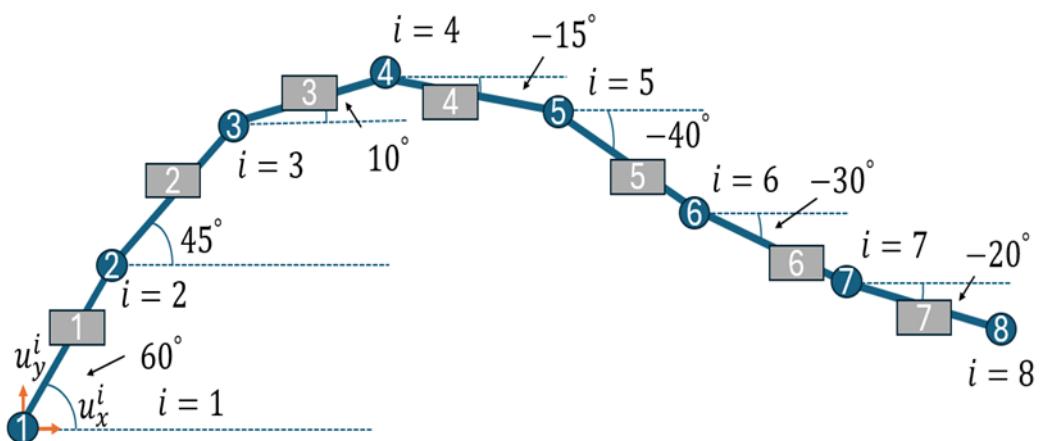


圖 4.5.1 IMS-based 功率封裝導線幾何模型架構

邊界條件設計方面，左端節點（Node 1）完全固定以模擬焊點約束，右端節點（Node 8）則在 Y 向拘束其位移，避免剛體轉動。結構採用總共 16 個自由度之二力桿件（Truss）模型，並選定 DOF9（第五節點 X 向位移）做為關注節點，對



應於結構中央最大彎曲點，其位移與內部應力變化最為劇烈，適合做為 TLRC 極值分析之主軸。

在熱載條件方面，左側溫度 423 K，標準差 50 K；右側 413 K，標準差 40 K，兩者分別施加常態分佈之隨機邊界條件，以模擬 Curing 製程中 Epoxy 凝固過程的熱源不確定性。三組不同的溫度相關係數 $\rho = 1,0,-1$ 被納入分析，以觀察相關性對響應統計特性的影響，包含位移分布範圍、LCR 預估包絡與內部應力響應。

除此之外，本小節也探討分析在 Pre-curing 製程條件下（如圖 4.5.3）極值響應，其熱載條件左側溫度 373 K，標準差 50 K；右側 363 K，標準差 40 K，兩者分別施加常態分佈之隨機邊界條件，以模擬 Pre-curing 製程中熱源不確定性。兩組不同的溫度相關係數 $\rho = 0.5,-0.5$ 被納入分析，以觀察相關性對響應統計特性的影響，包含位移分布範圍、LCR 預估包絡與內部應力響應。

此一例題延續前述 TLRC 架構，透過數據採集抽樣產生溫度刺激組合，經由有限元素模型對 DOF9 之位移響應進行統計分析，並從響應中推估每段元素之軸向應力，據以構建整體極值位移與應力場的上下限。進一步將所得之應力上下界與材料降伏準則進行比較，評估微彎導線於高溫製程中的潛在風險區域與結構可靠性。

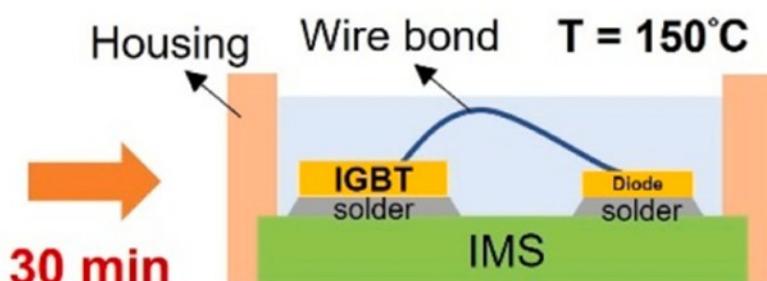


圖 4.5.2 IMS-based 功率封裝導線 Curing 製程 [14]

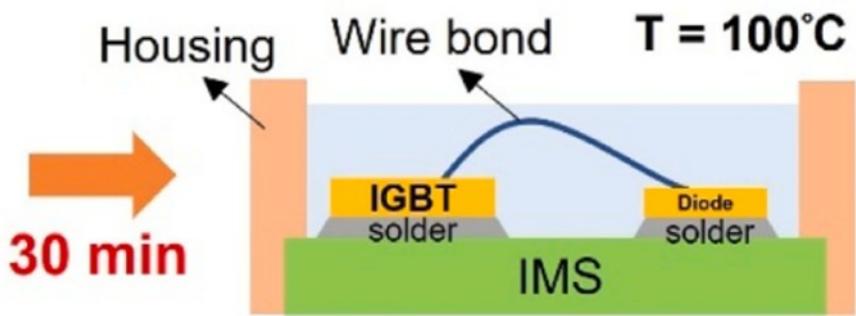


圖 4.5.3 IMS-based 功率封裝導線 Pre-curing 製程 [14]

4.5.1 TLRC 應用與設計自由度定義

本節承接前述曲線導線幾何建模與邊界條件設置，進一步導入 TLRC (Thermal load response correlation) 方法，評估該結構於隨機熱邊界下的熱致變形與應力響應之極值行為。為精確掌握導線主彎折段的熱固耦合效應與潛在失效區域，本研究設定第 9 自由度 (DOF9) 做為主要觀察指標。

該自由度對應於第五節點 (Node 5) 在 X 向的平移位移，位置位於整體彎曲導線路徑的頂端高點（拱頂區），同時為多段傾斜桿件（如 Element 4, 5）交會的主要轉折節點。由於此處幾何曲率最大、熱膨脹方向差異明顯，故極易因兩端溫差驅動產生顯著位移累積與應力集中，對應結構在 Curing 製程中的關鍵變形區域。

TLRC 方法透過數據採集模擬生成大量溫度組合樣本，於不同熱相關性設定 ($\rho = 1, 0, -1$) ($\rho = 0.5, -0.5$) 下推估 DOF9 之位移分布範圍，建立熱載與響應之對應關聯。該過程可有效捕捉不同熱耦合關係下的統計偏移趨勢與潛在極值狀態，進而預測導線在 Curing 以及 Pre-curing 热場條件下可能遭遇的最大熱致變形情形。

此外，為進一步掌握整體導線內部之熱應力分布狀態，本研究亦自 DOF9 之熱機位移回推各桿件之軸向應力響應，分別評估其正向（張）與負向（壓）極值條件下的應力分布。此種分析方式有助於辨識哪些元件處於高風險區域，進行局部補強或材料選擇優化。

最後，結合材料降伏準則（本例導線採用銅材，降伏強度約為 220 MPa），本小節所推估之最大應力值均遠低於其降伏極限，顯示此曲線導線即使於 Curing 製程中承受最不利熱邊界條件，仍可維持線性彈性行為，未導致永久性形變或結構失效。此結果提供實務封裝製程中熱致變形風險評估之依據，亦可做為未來導線配置與材料選型之設計參考。

4.5.2 在 Curing 製程條件下之數據結果分析

4.5.2.1 針對 $\rho = 1$ 热邊界條件下之分析討論

在本小節中，我們分析微彎導線結構於高正相關熱邊界變動 $\rho = 1$ 條件下之熱致變形與應力響應，並透過 TLRC 方法進行極值位移與應力預測。由於此類製程中常伴隨固化儀器（Curing oven）所造成之同步熱載入，該相關係數設定具高度應用代表性，可模擬實際封裝階段兩端受熱一致的製程條件（如圖 4.5.4）。

圖 4.5.5 顯示了左端與右端節點所施加的溫度邊界樣本分佈情形，在 $\rho = 1$ 條件下可觀察到所有樣本均嚴密排列於紅色橢圓主對角線上，構成極為狹長且貼合的線性分布帶。此結果顯示，在完全正相關熱輸入條件下，兩端溫度樣本之間高度同步變化，左端升溫時右端亦對應升高，使得整體熱梯度場在空間中變化緩和，有助於提升熱響應穩定性與可靠控制能力。

進一步地，圖 4.5.6 和圖 4.5.7 分別展示了左端與右端溫度的機率密度函數（PDF）。左端溫度平均值為 425 K，標準差為 48.9 K；右端則為 414 K，標準差為 39.2 K。兩者皆呈現對稱常態分布，樣本密集度高、資料離群點極少，說明所採數據採集樣本具有良好代表性，並充分涵蓋 99.7% 热邊界可能性範圍，滿足 TLRC 理論應用所需之高品質隨機輸入條件。

圖 4.5.8 則為本研究所選設計自由度（DOF 9）之位移響應點（藍色）與 TLRC 所預估之 $\pm 1\sigma, \pm 2\sigma, \pm 3\sigma$ 上下包絡（紅虛線）之比較。從結果可見，大多數樣本均穩定落於 3σ 以內，TLRC 邊界準確包圍實際響應資料，誤差帶不僅狹窄而且



對稱，顯示出此一條件下 TLRC 所建立之負載-響應對應模型具高度精度與穩健性。在此同向變異輸入下，結構整體表現出極高的一致性與可預測性，為後續封裝可靠度設計提供穩定參考依據。

圖 4.5.9 為 DOF9 之位移響應統計直方圖。5000 筆樣本之模擬結果顯示，該自由度位移響應呈明顯常態分布形態，平均值為 0.0229 mm，標準差為 0.0024 mm。其分布具有高度對稱性，顯示隨機熱邊界雖具一定擾動程度，但因 $\rho = 1$ 條件提供了良好對稱性與協同性，整體橋體變形具有高穩定性與控制性。此現象對製程預測與封裝過程中之應力管理尤具正面效益。

圖 4.5.10 與圖 4.5.11 分別顯示 DOF9 所對應之最大與最小位移條件下，導線各單元所產生的軸向應力分布。觀察可知，無論在正向極值（最大拉伸）或負向極值（最大壓縮）條件下，最大應力皆集中於第 2 或第 4 元件。正向響應下最大軸向應力達 23 MPa，負向響應下最大壓應力為 13 MPa。應力分布呈梯度式向外遞減，顯示結構主彎折區對熱致變形響應最為敏感。

然而，依據本研究所採銅材之機械性質，其降伏強度約為 220 MPa，遠高於此處模擬所得之最大應力值。這表示即使在極端熱載入與最大相關性條件下，所有桿件內部應力仍維持於彈性變形區（Elastic region），結構未進入塑性破壞範疇，具備高度結構安全裕度。

整體而言，在 $\rho = 1$ 的邊界熱載條件下，TLRC 方法展現出極佳之預測能力與實用性，不僅可準確掌握中央節點位移極值，亦可輔助推估結構中潛在應力集中特徵點，對於如封裝金線、固化後彎折導線等實際製程問題具有高度參考價值。此外，本案例亦驗證 LRC 應用於高度熱機敏感結構之可行性，提供未來可靠度導向設計的重要分析工具。

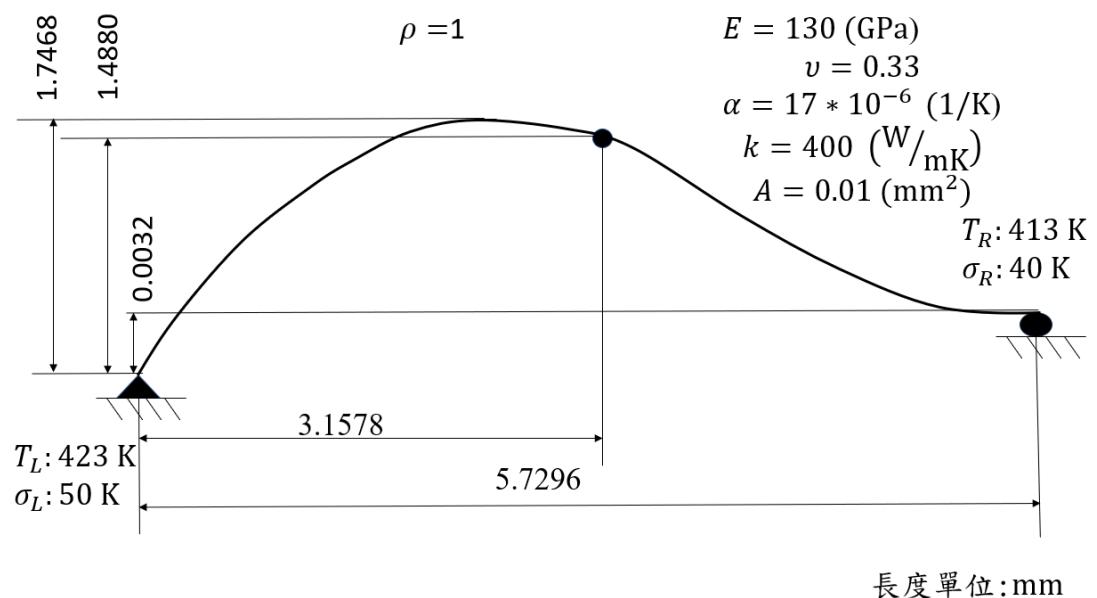


圖 4.5.4 Curing 製程中於 $\rho = 1$ 之熱固耦合分析模型圖

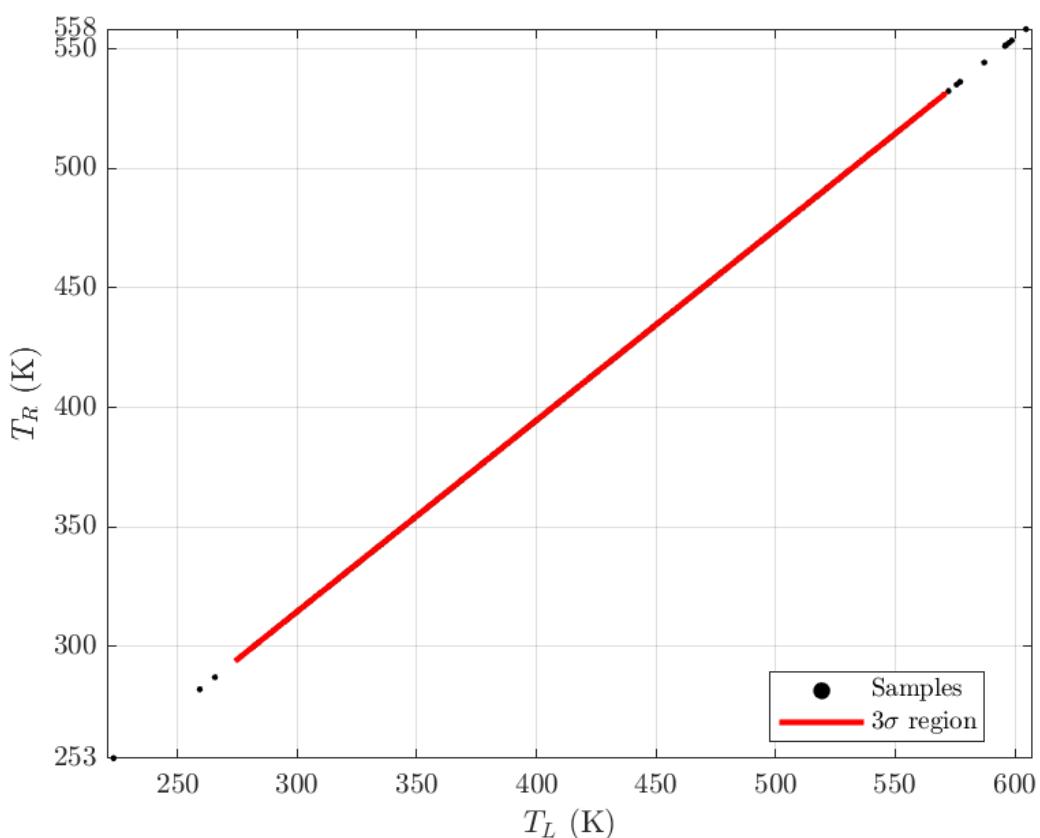


圖 4.5.5 Curing 製程中於 $\rho = 1$ 之熱刺激相關性

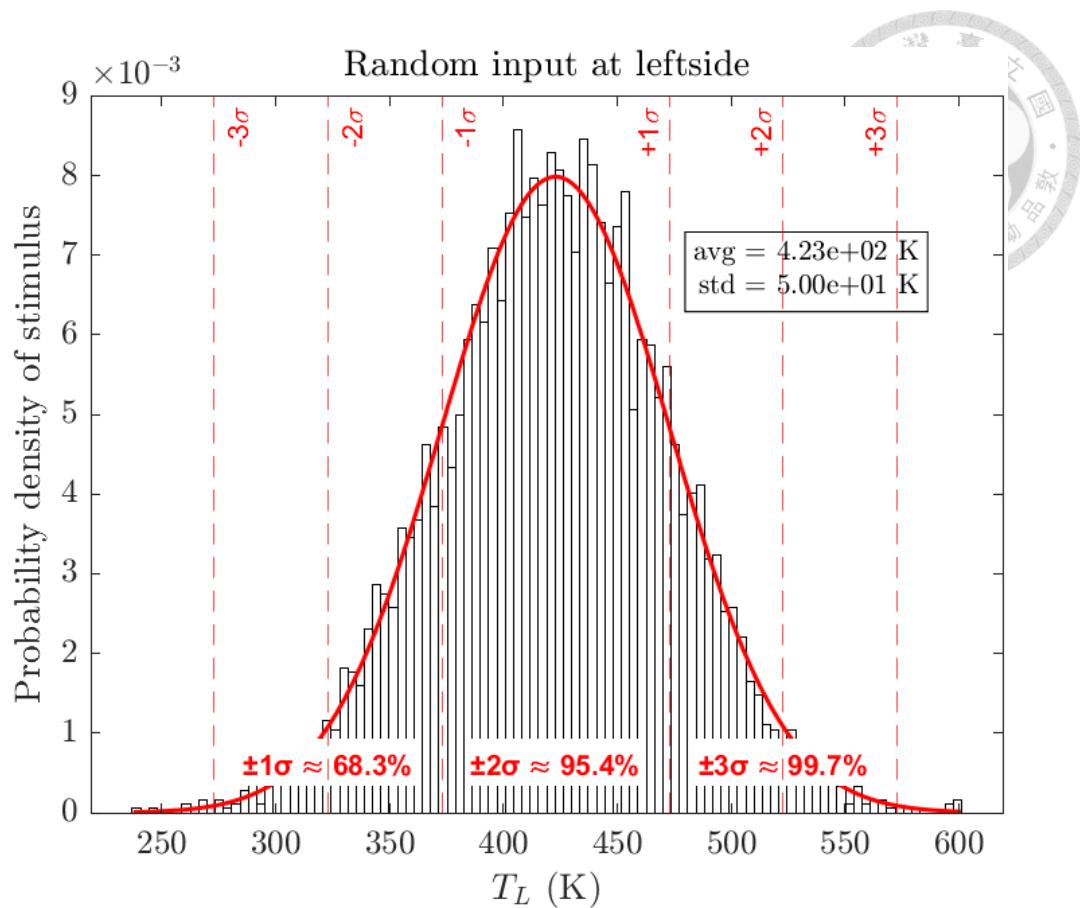


圖 4.5.6 Curing 製程中於 $\rho = 1$ 之左端熱載樣本

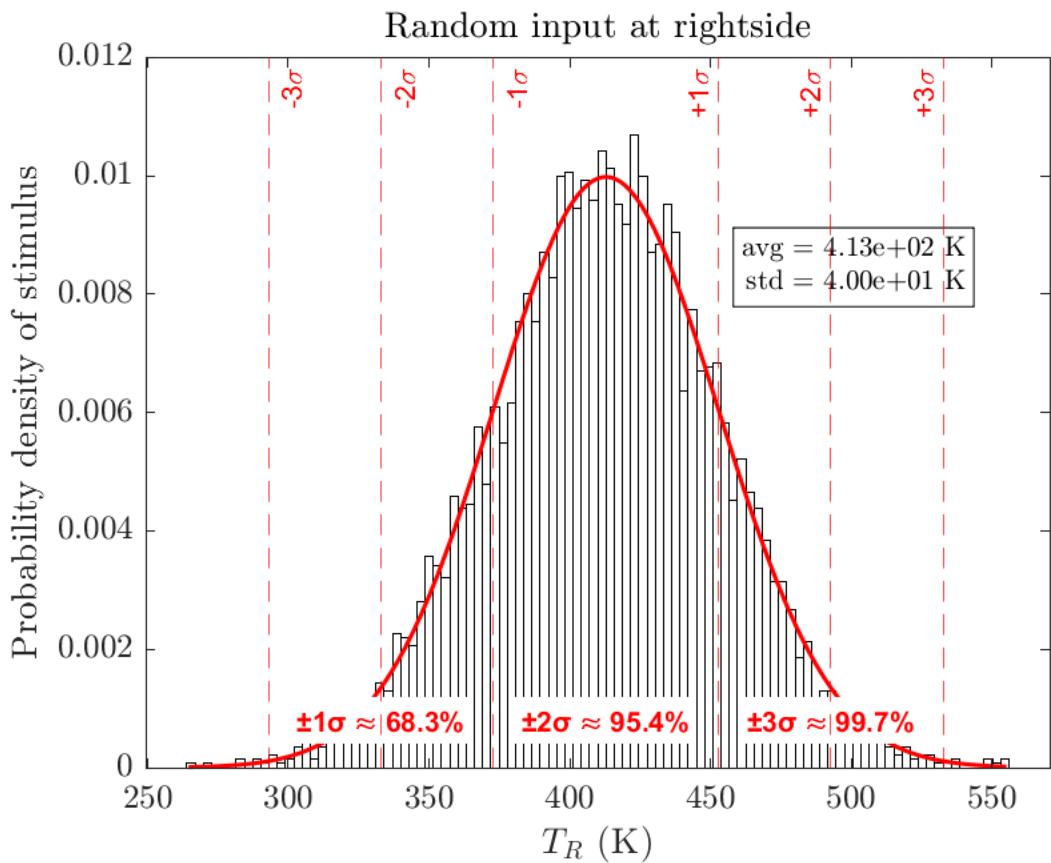


圖 4.5.7 Curing 製程中於 $\rho = 1$ 之右端熱載樣本

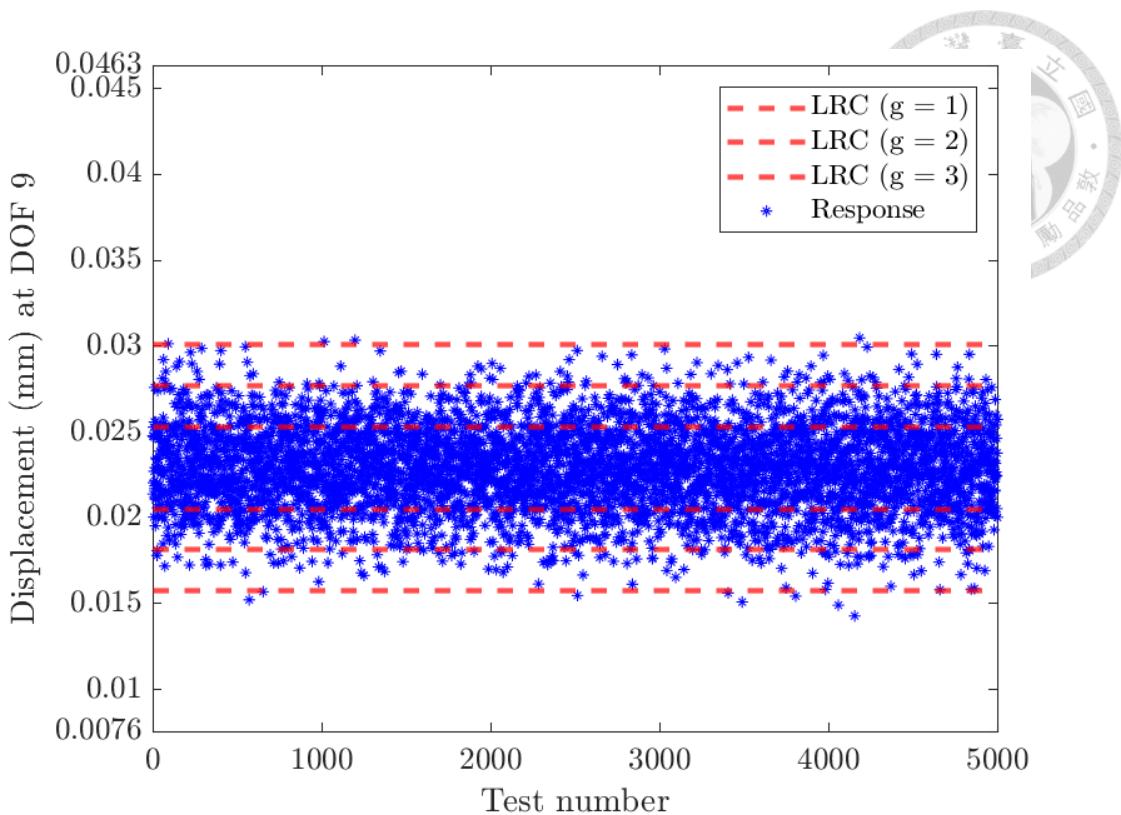


圖 4.5.8 Curing 製程中於 $\rho = 1$ 之 TLRC 預測與驗證結果

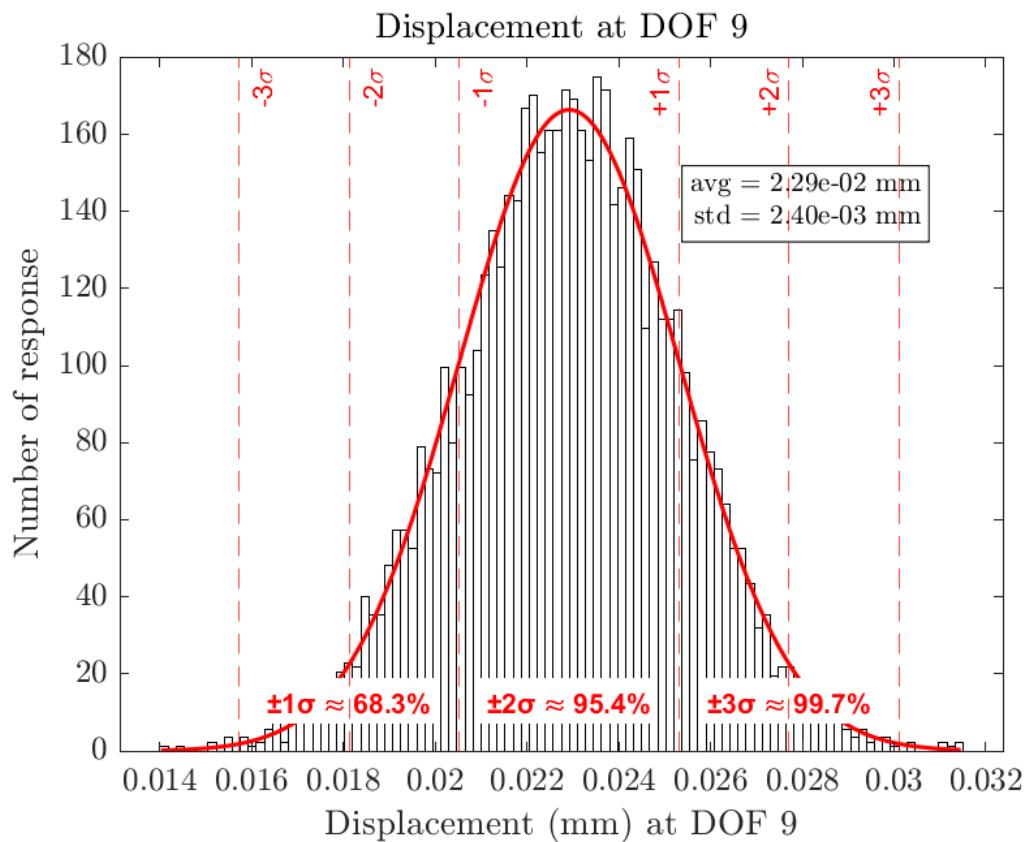


圖 4.5.9 Curing 製程中於 $\rho = 1$ 之數據採集生成響應分布

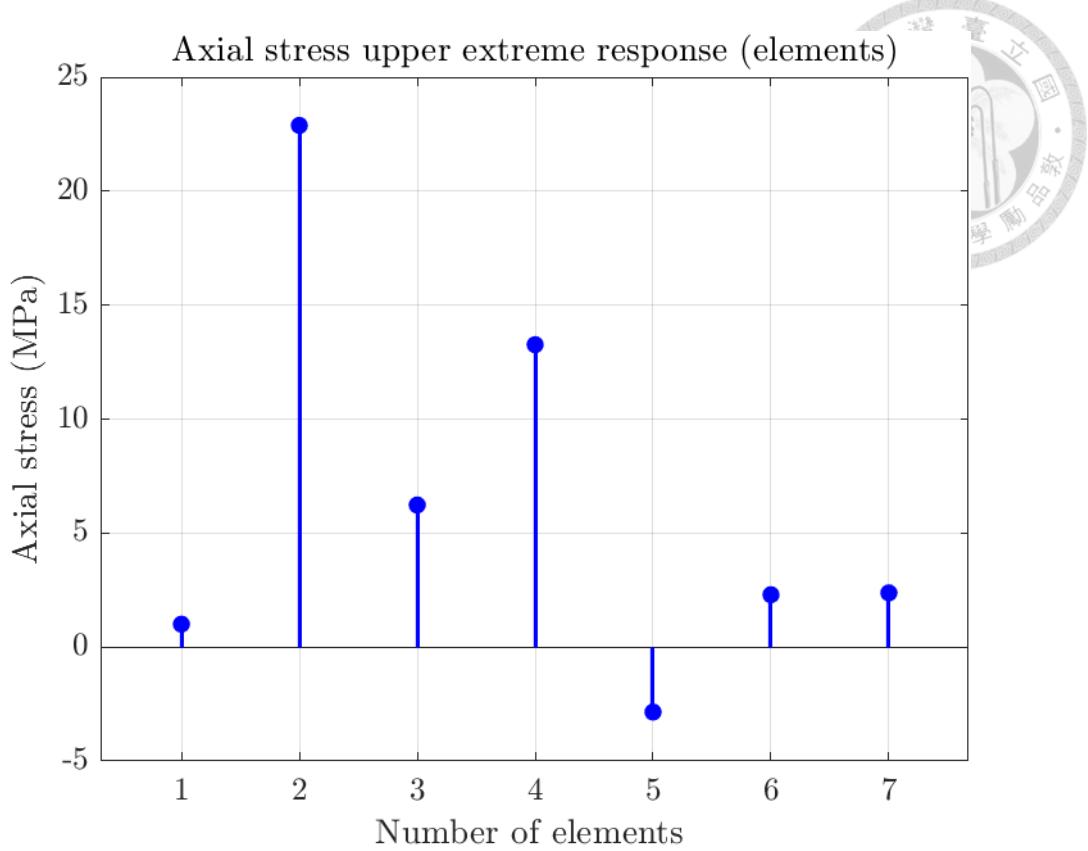


圖 4.5.10 Curing 製程中於 $\rho = 1$ 之正向極值條件下應力響應

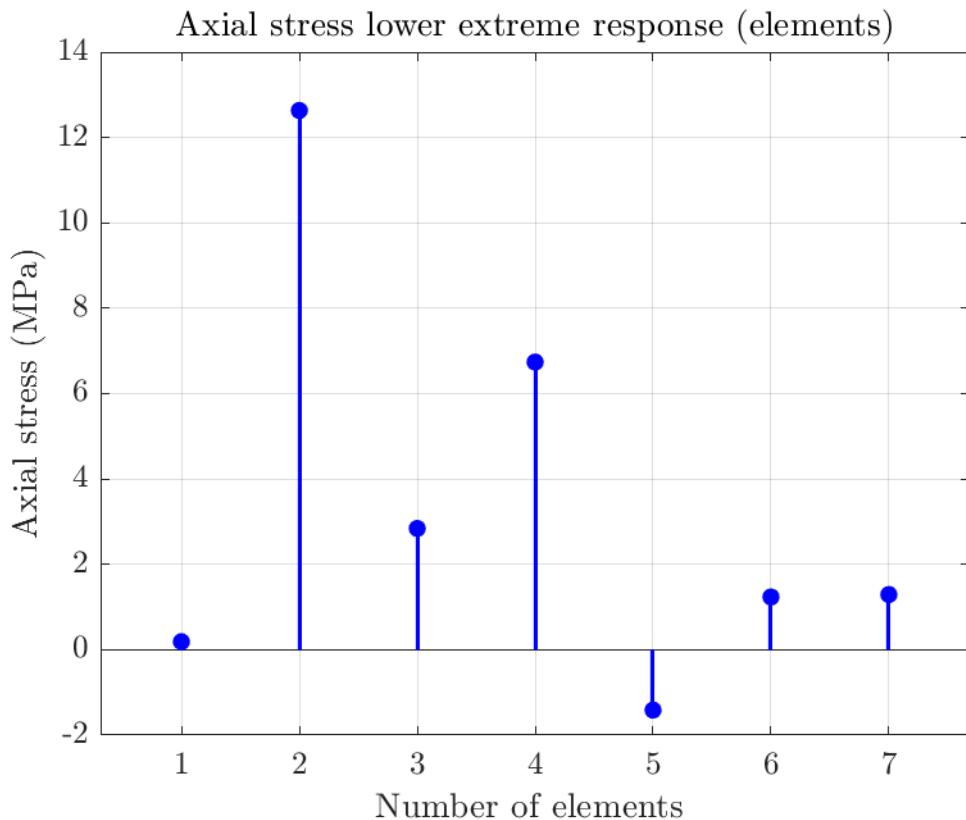


圖 4.5.11 Curing 製程中於 $\rho = 1$ 之負向極值條件下應力響應



4.5.2.2 針對 $\rho = 0$ 热邊界條件下之分析討論

圖 4.5.13 為在相關係數 $\rho = 0$ 條件下的溫度樣本點雲圖，顯示左端溫度與右端溫度之間無明顯線性相關性，兩者呈現獨立分佈特性。樣本點分布集中於紅色橢圓所框定的 3σ 區域內，證實樣本隨機性良好，符合獨立常態分布假設。

圖 4.5.14 與圖 4.5.15 分別為左、右端邊界溫度的直方圖，呈現對應的機率密度函數擬合結果。左端 T_R 之平均值為 423 K，標準差為 49.7 K；右端 T_R 則為 413 K，標準差為 40.3 K，皆近似常態分布，顯示模擬條件之熱邊界設定在統計特性上具有合理性與穩定性。

在 DOF9 的熱致位移分析方面，圖 4.5.16 顯示 TLRC 模型在 $g = 1, 2, 3$ 層級下所預測之響應範圍（紅虛線區間）與 5000 組模擬散點（藍色）高度吻合，所有樣本皆落於 $\pm 3\sigma$ 區間內，驗證 TLRC 模型具備良好之極值包絡預測能力，特別在無相關性的刺激條件下仍能維持高預測準確度。

圖 4.5.17 為 DOF9 位移響應之統計直方圖，響應資料呈現穩定對稱之常態分佈，平均值約為 0.0229 mm，標準差為 1.73×10^{-3} mm。與 $\rho = 1$ 的情形相比，在 $\rho = 0$ 下響應標準差略小，代表當熱邊界無相依關係時，響應具一定收斂穩定性，不會受到同步升溫或降溫所放大的疊加效應影響。

圖 4.2.27 與圖 4.4.10 分別顯示在最大與最小熱致位移條件下 (TLRC $\pm 3\sigma$ 極值)，結構中各桿件所承受之軸向應力分布結果。可見最大正向應力約出現在第 2 元素，值約為 22 MPa，其餘元素多為 13 MPa 以下；而最小應力條件下，第 2 元素為最大壓應力處，達 13.6 MPa，仍為主應力集中區域。

根據前述設定之材料參數，本案例中以銅材為主要材料，其室溫降伏強度約為 220 MPa，相較於模擬所得應力範圍（最大約 22 MPa），可推論即使在最不利熱邊界組合下，整體結構應力仍遠低於降伏準則，確保結構在製程或封裝溫變載入下仍處於彈性區內，具備足夠安全裕度。

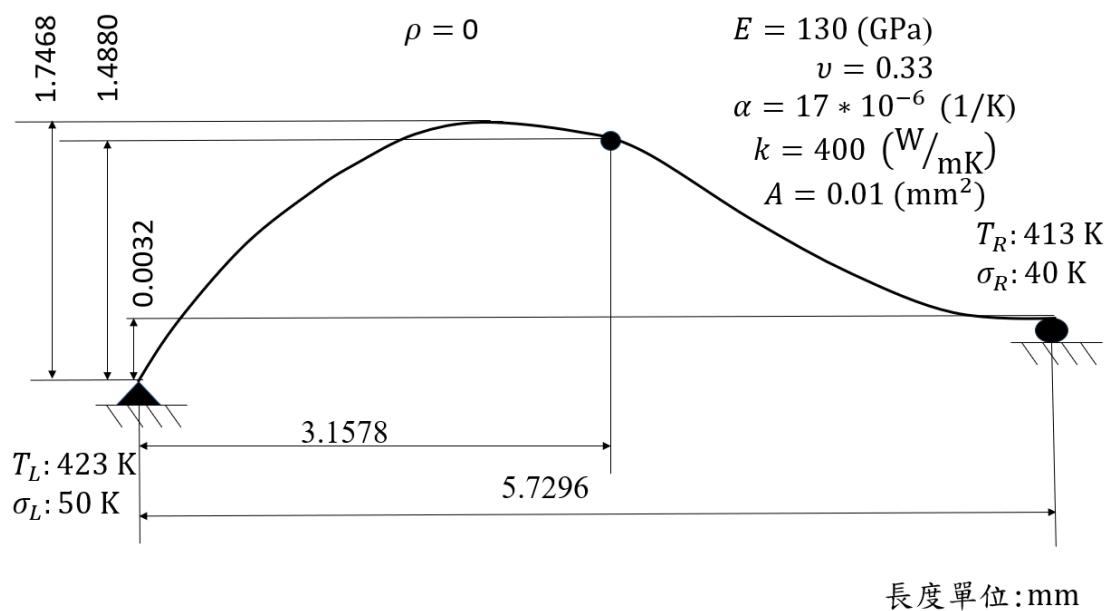


圖 4.5.12 Curing 製程中於 $\rho = 0$ 之熱固耦合分析模型圖

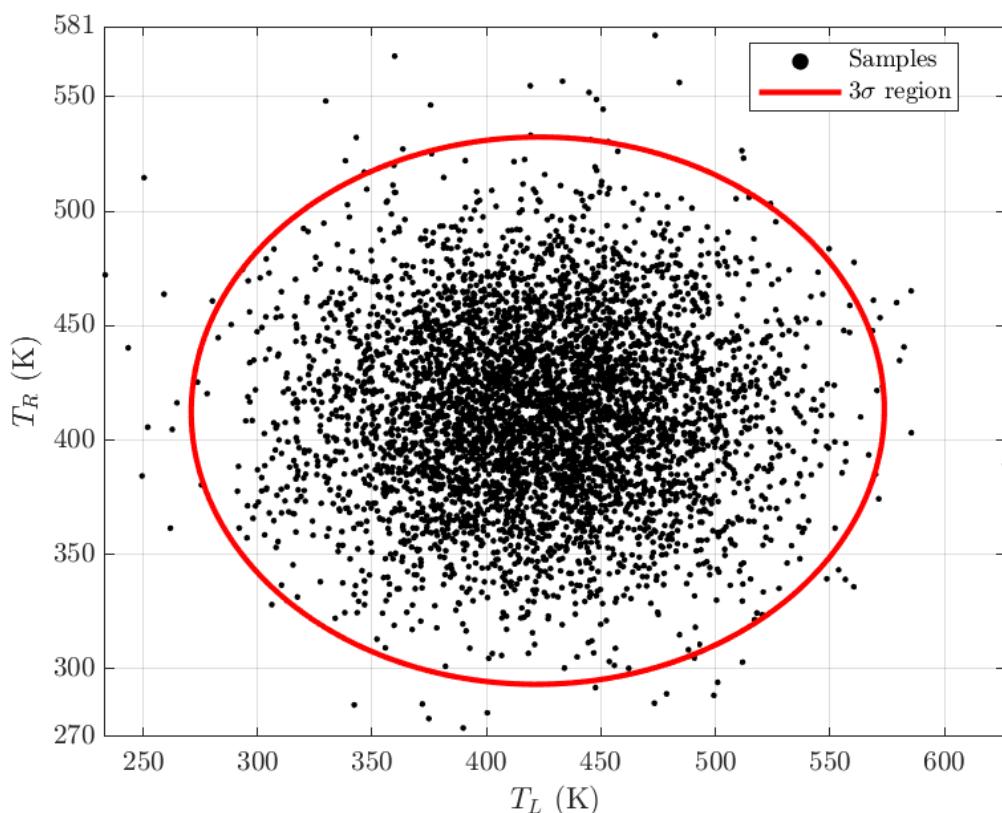


圖 4.5.13 Curing 製程中於 $\rho = 0$ 之熱刺激相關性

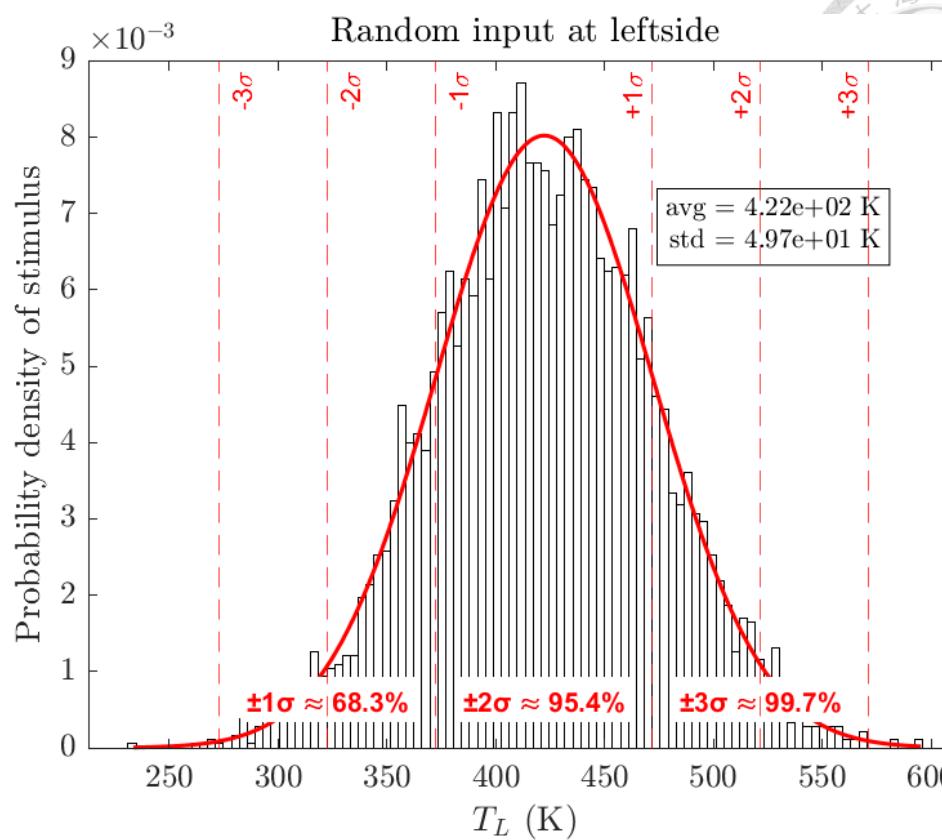


圖 4.5.14 Curing 製程中於 $\rho = 0$ 之左端熱載樣本

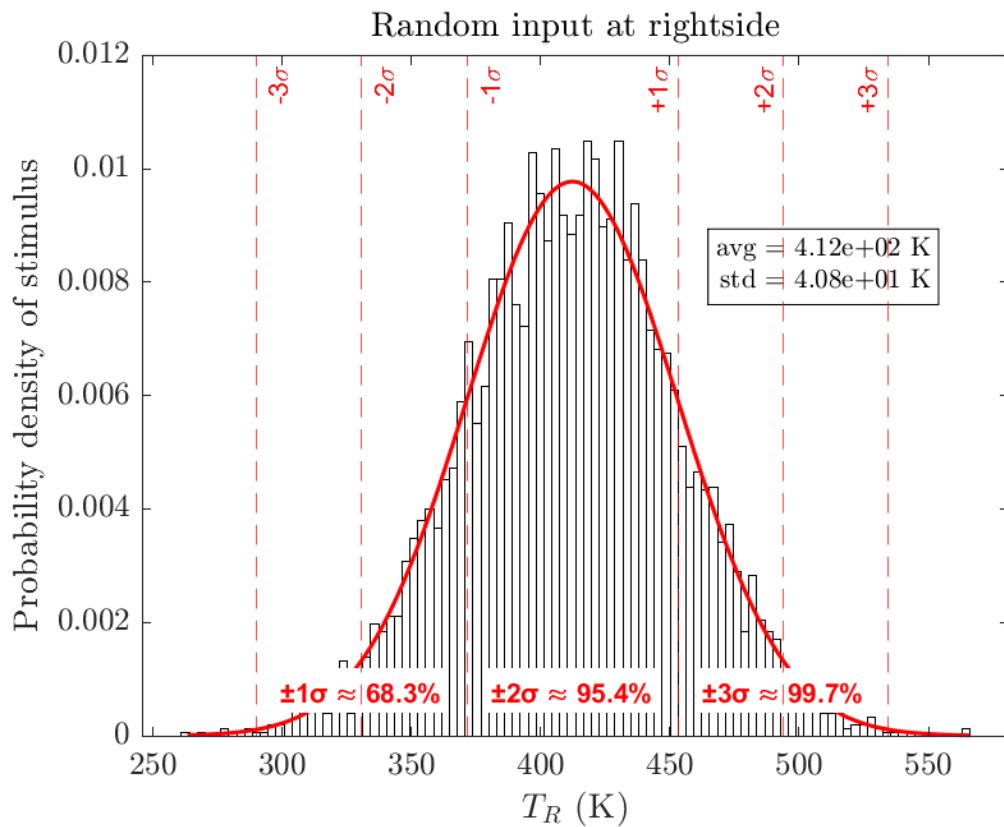


圖 4.5.15 Curing 製程中於 $\rho = 0$ 之右端熱載樣本

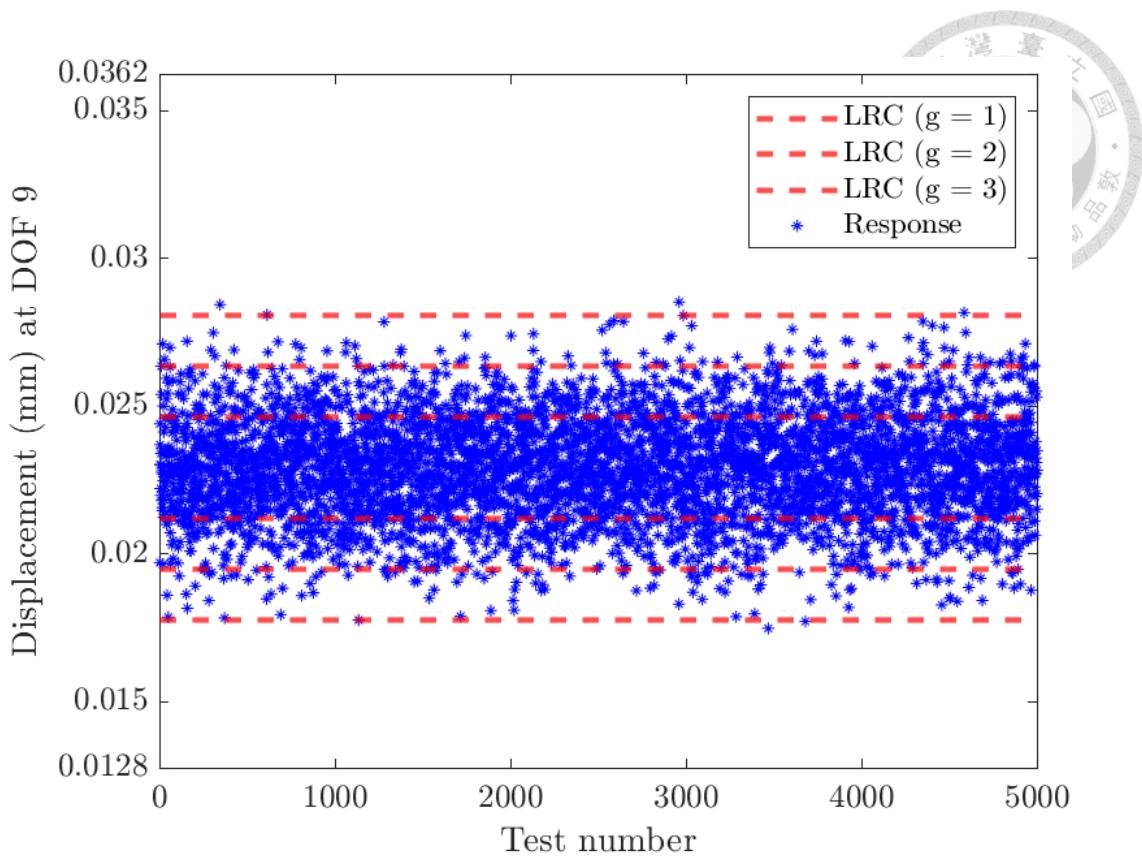


圖 4.5.16 Curing 製程中於 $\rho = 0$ 之 TLRC 預測與驗證結果

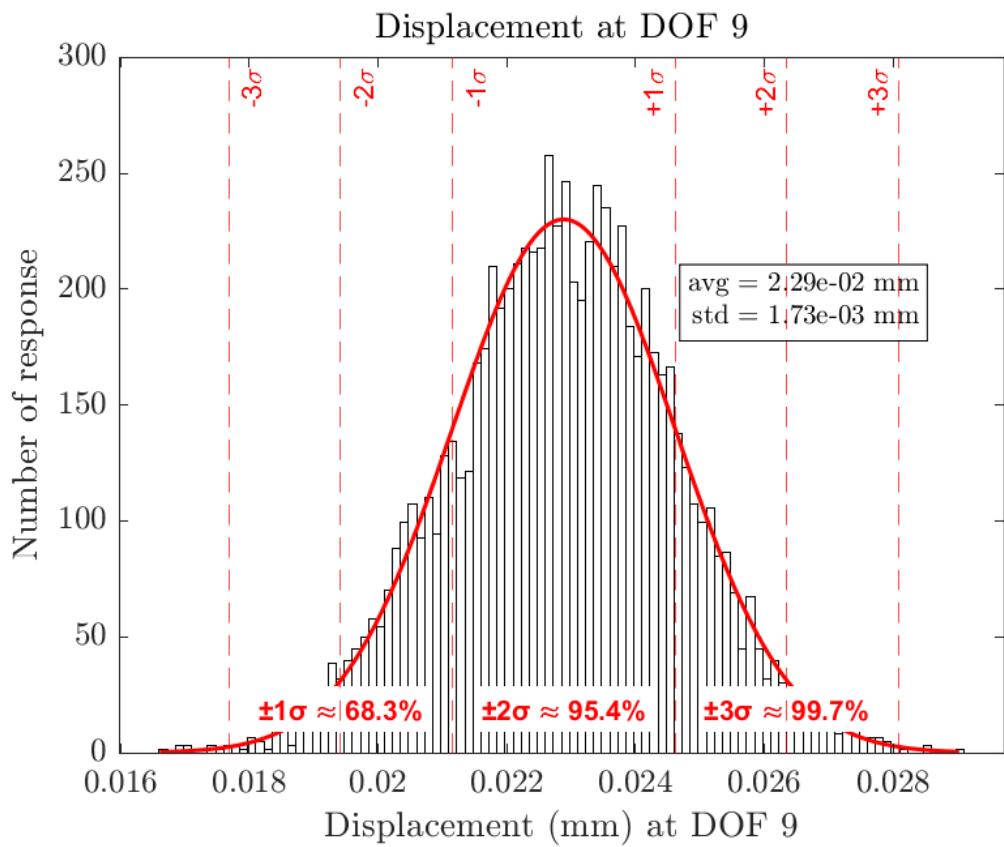


圖 4.5.17 Curing 製程中於 $\rho = 0$ 之數據採集生成響應分布

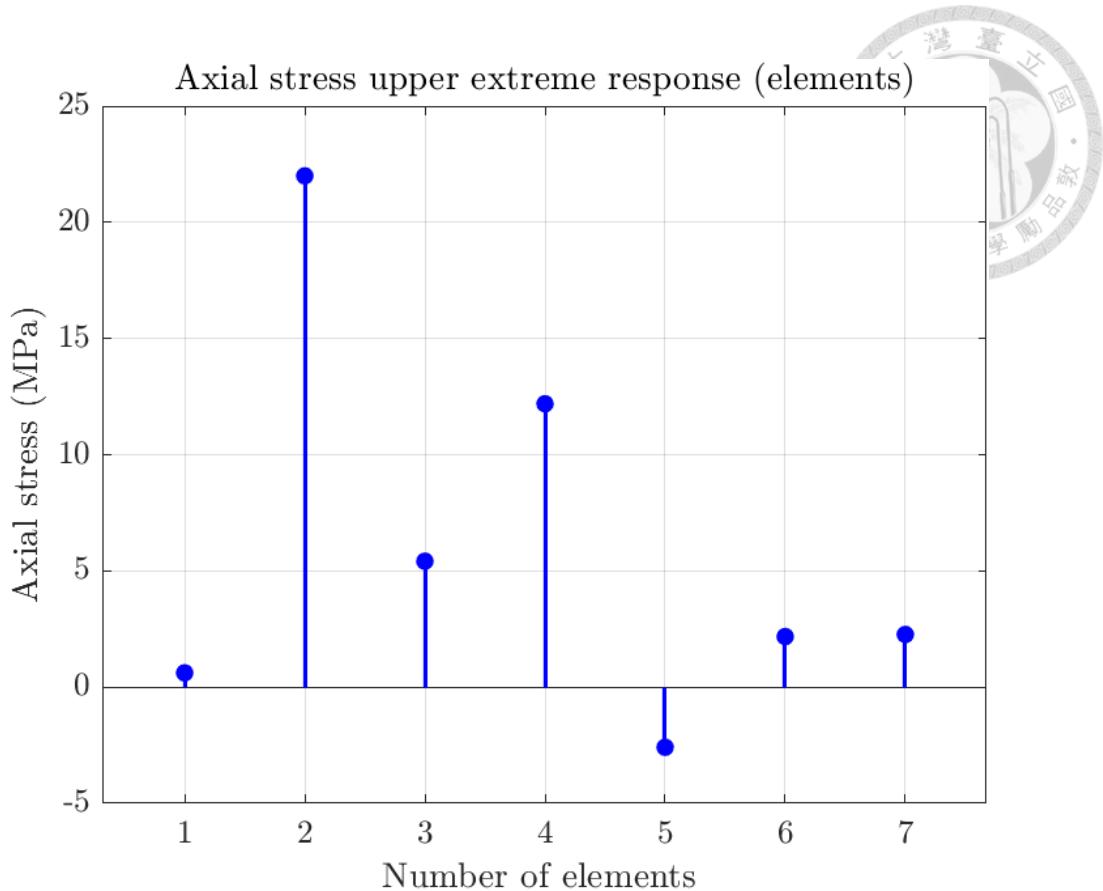


圖 4.5.18 Curing 製程中於 $\rho = 0$ 之正向極值條件下應力響應

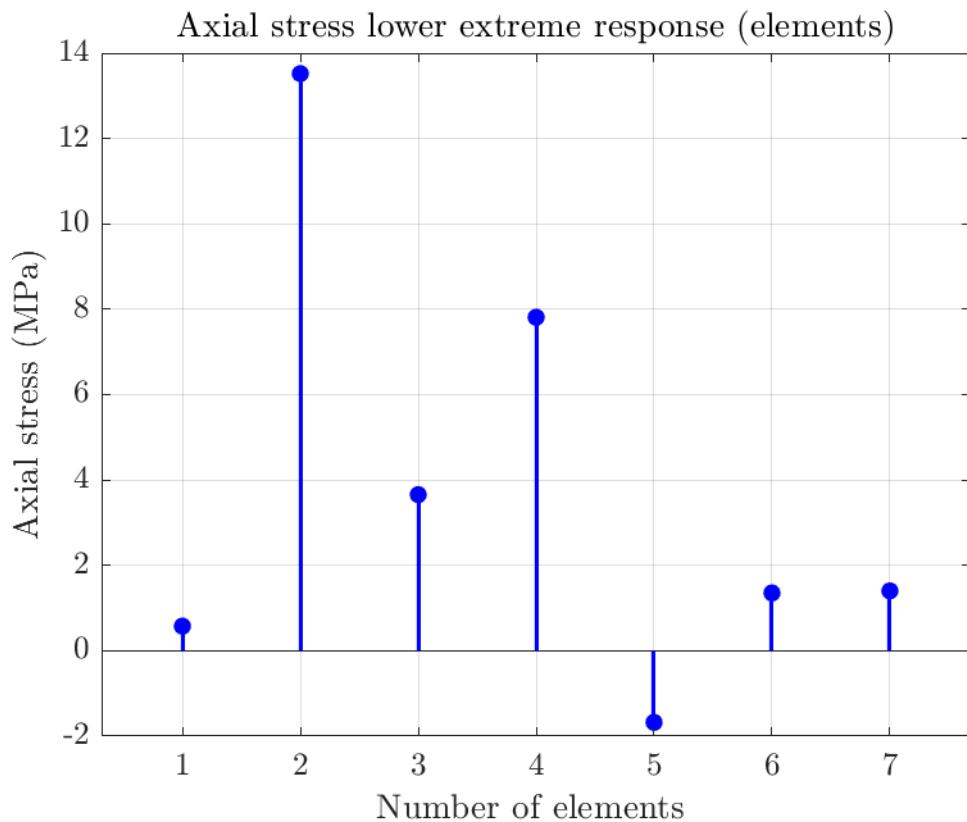


圖 4.5.19 Curing 製程中於 $\rho = 0$ 之負向極值條件下應力響應



4.5.2.3 針對 $\rho = -1$ 热邊界條件下之解析討論

圖 4.5.21 顯示在相關係數 $\rho = -1$ 條件下，左端溫度與右端溫度 $TRT_R - TRT_L$ 之樣本點雲圖，資料落於紅色 3σ 區域範圍內，並呈現明顯反向線性排列特性，符合理論上完全負相關的機率分布行為，顯示左端升溫對應右端降溫，形成強烈的溫差張力。

圖 4.5.22 與圖 4.5.23 分別為 T_L 與 T_R 邊界溫度的統計直方圖，擬合出的機率密度函數顯示皆近似常態分布，平均值分別為 423 K 與 413 K，標準差為 49.9 K 與 39.9 K，表明熱邊界輸入具良好隨機性與統計穩定性。

圖 4.5.24 呈現 TLRC 模型在 $g = 1, 2, 3$ 各層級下所預測之 DOF9 热位移響應範圍（紅虛線），與 5000 組數據採集模擬樣本之藍色散點對應結果。所有樣本點皆落於 $\pm 3\sigma$ 區域內，驗證即使在最極端之反向熱邊界關聯情況下，TLRC 模型仍具穩健之極值包絡預測能力，未出現預測偏移或區間失效的情形。

圖 4.5.25 顯示 DOF9 的位移響應直方圖，呈現收斂良好的對稱常態分佈，平均值約為 0.0229 mm，標準差僅為 4.17×10^{-4} mm，為本三組相關性設定中標準差最小者，說明在完全反向溫差下，熱致位移響應趨向穩定、集中，顯示在此溫度條件下，反向相關條件下熱場差值穩定，有助於減少熱致變形的不確定性。

圖 4.5.26 與圖 4.5.27 為在 TLRC $\pm 3\sigma$ 極值條件下，微橋導線結構內部各桿件所承受之軸向應力分布。由最大位移導出對應之正向極值條件下，第 2 元素應力最高，約為 23.5 MPa，其餘元素應力大致分布於 10 MPa 以下；而在負向極值下，第 2 元素出現最大壓應力約為 12.3 MPa，顯示結構主要之熱致應力集中於前段傾斜桿件轉角處。

綜上所述，在 $\rho = -1$ 的負相關邊界條件下，整體熱變形呈現穩定抑制的趨勢，響應分布更為集中，應力分佈亦無劇烈變化。儘管最大應力略高於其他兩組條件，但仍遠低於銅材室溫降伏強度 220 MPa，驗證結構仍全程處於彈性範圍內，具高度熱穩定性與應力容忍度。TLRC 方法亦成功捕捉此種條件下之響應集中特性，為

未來高溫梯度條件下之精密元件設計提供可靠評估工具。

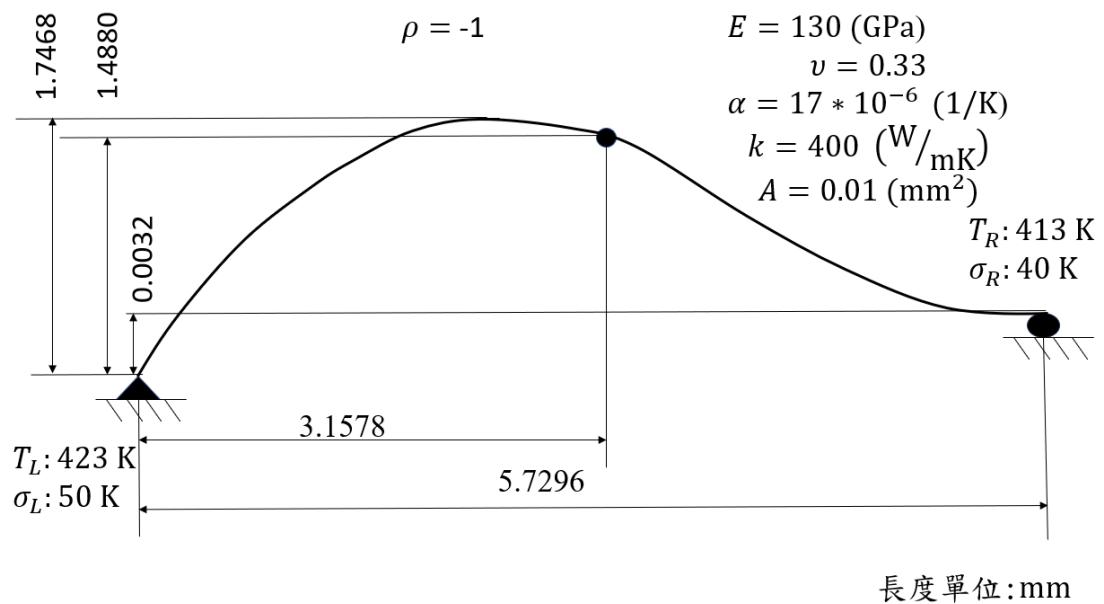


圖 4.5.20 Curing 製程中於 $\rho = -1$ 之熱固耦合分析模型圖

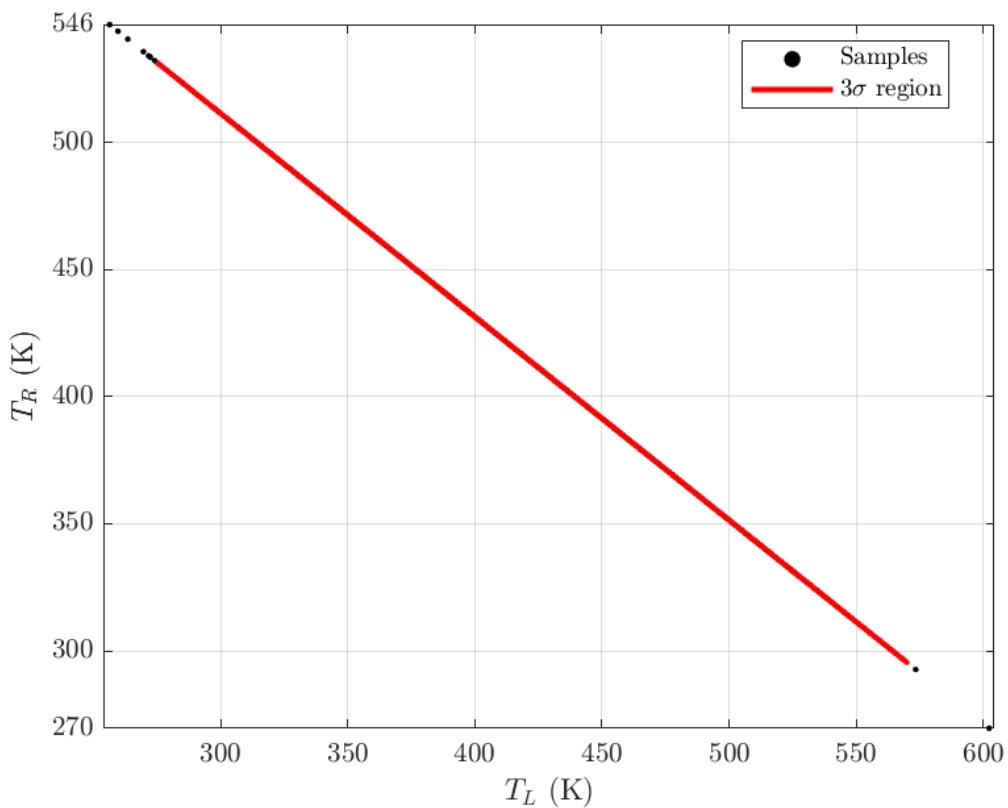


圖 4.5.21 Curing 製程中於 $\rho = -1$ 之熱刺激相關性

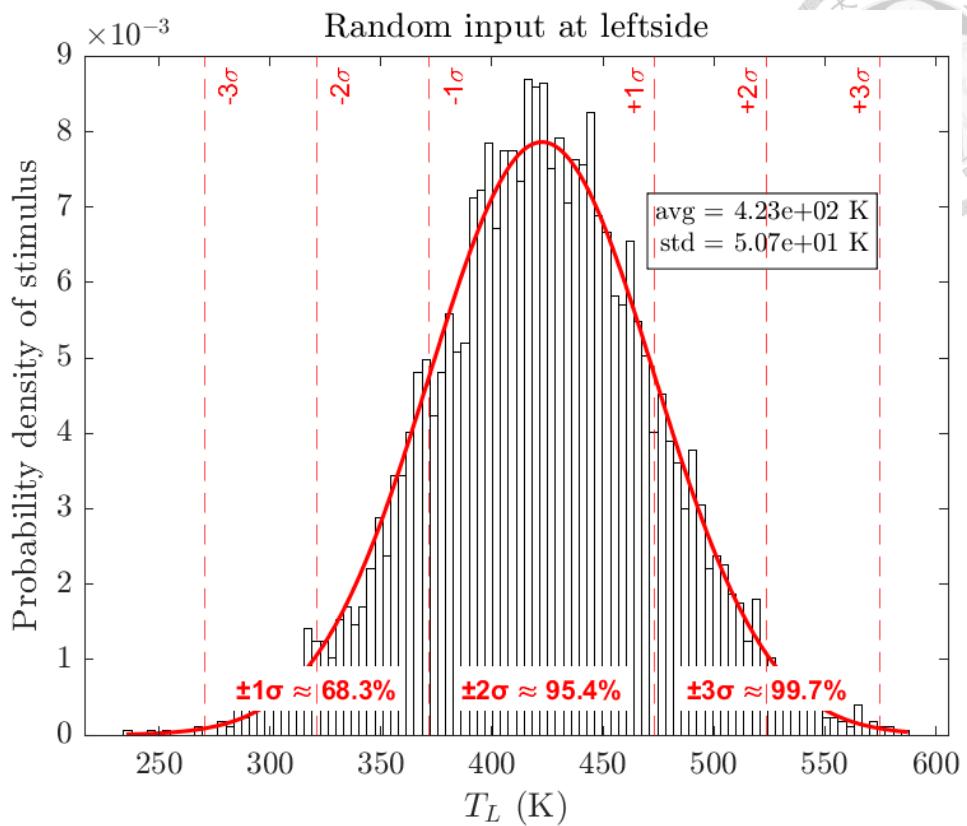


圖 4.5.22 Curing 製程中於 $\rho = -1$ 之左端熱載樣本

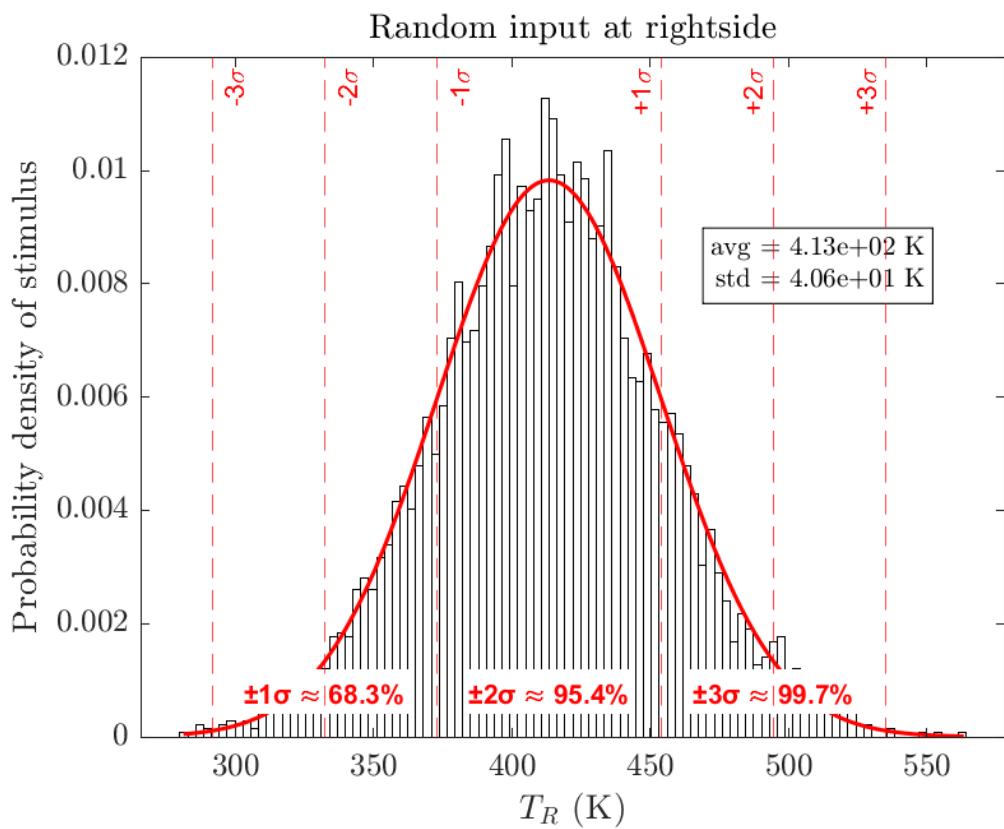


圖 4.5.23 Curing 製程中於 $\rho = -1$ 之右端熱載樣本

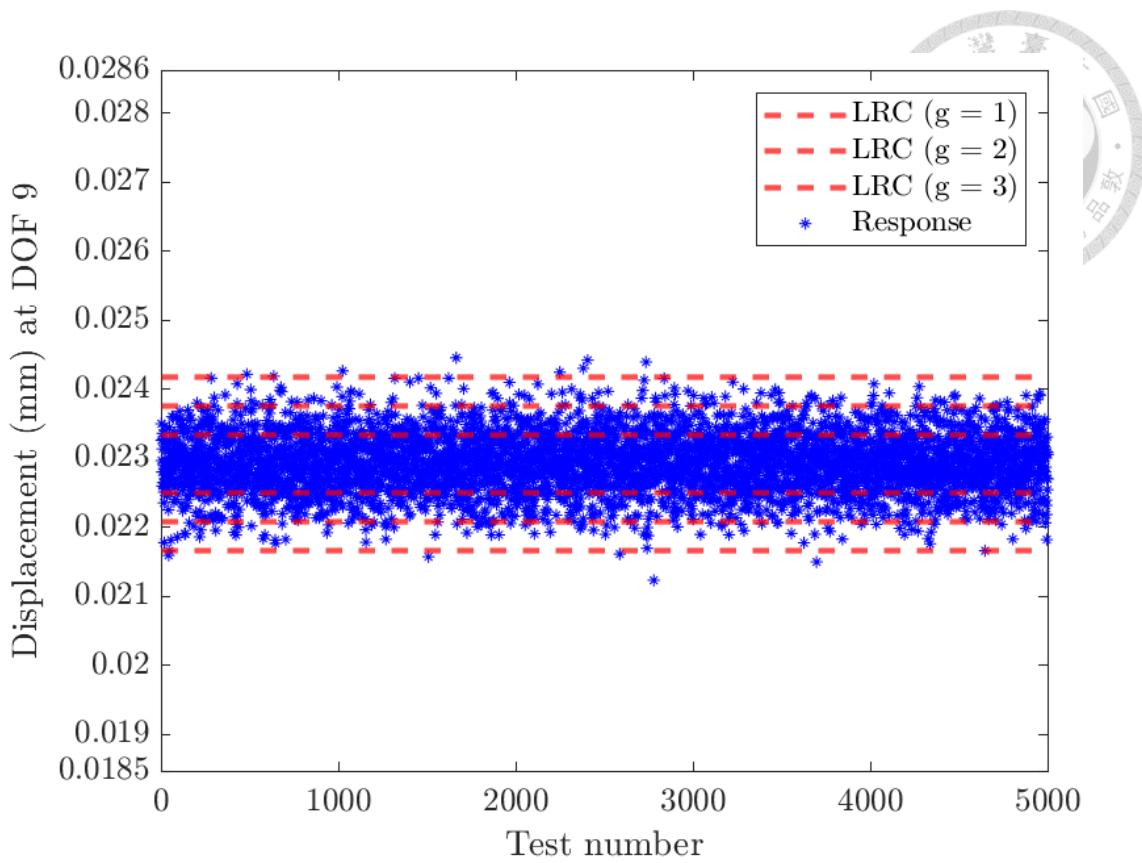


圖 4.5.24 Curing 製程中於 $\rho = -1$ 之 TLRC 預測與驗證結果

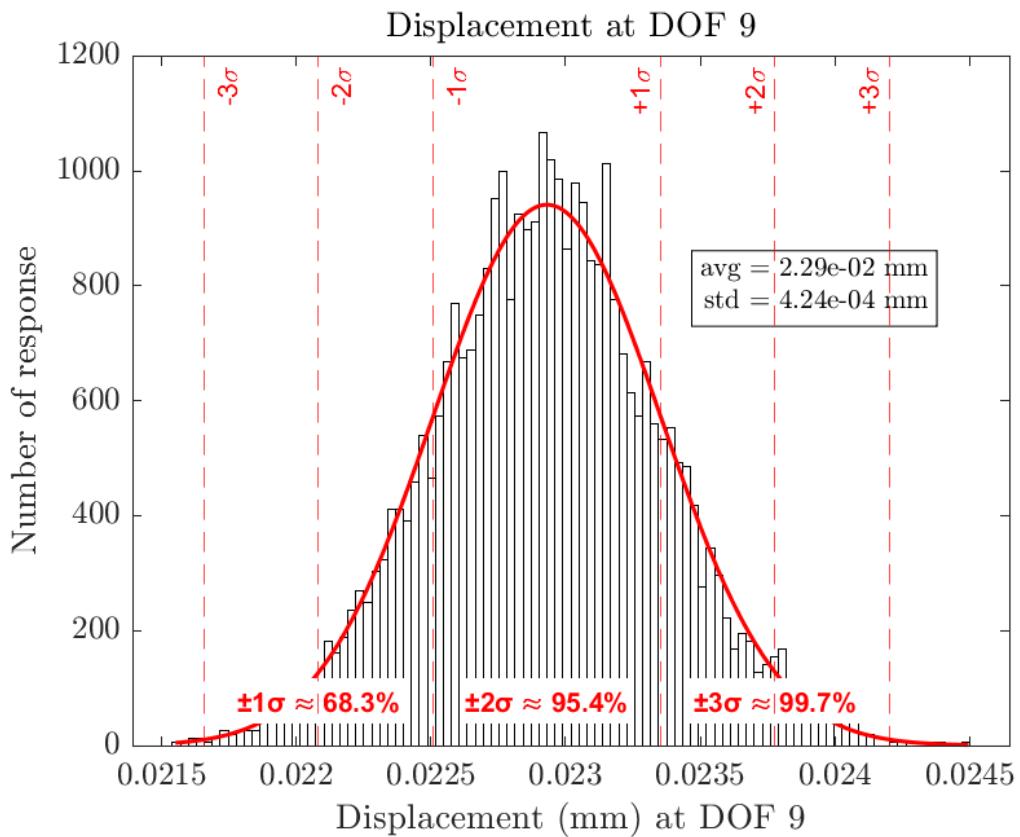


圖 4.5.25 Curing 製程中於 $\rho = -1$ 之數據採集生成響應分布

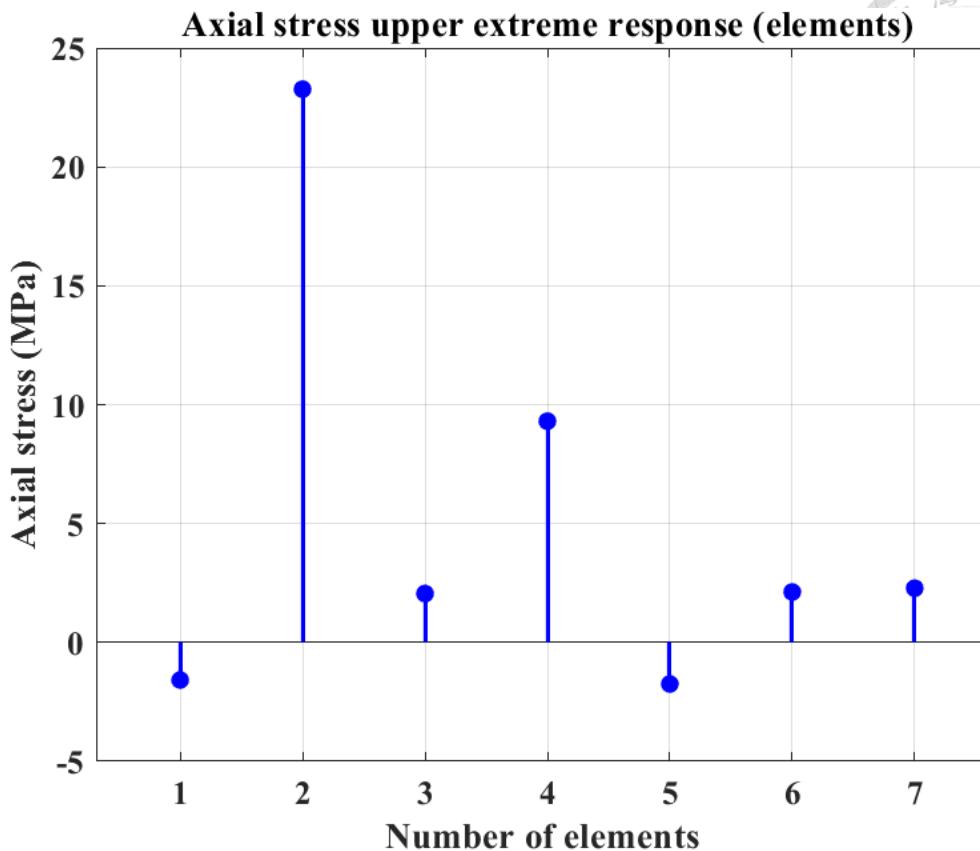


圖 4.5.26 Curing 製程中於 $\rho = -1$ 之正向極值條件下應力響應

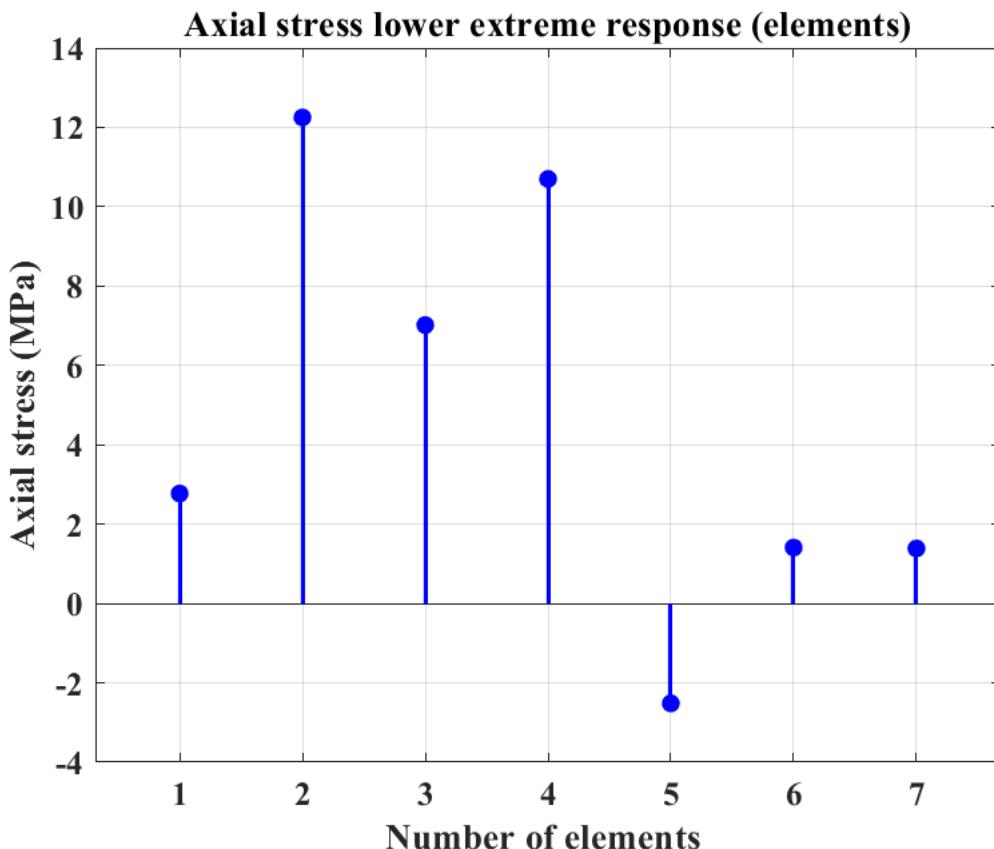


圖 4.5.27 Curing 製程中於 $\rho = -1$ 之負向極值條件下應力響應



4.5.3 在 Pre-curing 製程條件下之數據結果分析

4.5.3.1 針對 $\rho = 0.5$ 熱邊界條件之解析研究

以下是針對 Pre-curing 案例中相關係數 $\rho = 0.5$ 條件下 (如圖 4.5.28) 的熱載與響應數據分析，圖 4.5.29 為在此相關係數條件下的溫度樣本點雲圖。由圖中紅色橢圓框定的 3σ 區域可知，左端溫度與右端溫度間呈現明顯正相關性，點雲分布趨向右上傾斜，代表兩者具同步升降的趨勢，符合預期的熱耦合設定。

圖 4.5.30 與圖 4.5.31 分別呈現左、右端溫度樣本的統計直方圖與對應的機率密度函數擬合結果，分布皆呈現常態分佈特性。左端溫度之平均值為 373 K，標準差約為 50K；右端溫度之平均值為 363 K，標準差為 40.7 K，顯示兩端邊界熱源的不確定性在統計上具有合理且穩定的分布特徵。

在 DOF9 的熱致位移分析方面，圖 4.5.32 中可觀察 TLRC 模型於 $g = 1,2,3$ 三個層級下所預測的響應範圍，能有效包覆所有 5000 組數據採集模擬樣本點，所有散點均落在預測的 $\pm 3\sigma$ 範圍內，再次驗證 TLRC 模型於不同相關性條件下皆具良好的極值預測能力。

圖 4.5.33 顯示 DOF9 位移響應之機率分佈，響應呈現對稱穩定之常態分佈，平均值約為 0.0199 mm ，標準差為 $3.62 \times 10^{-3} \text{ mm}$ 。

圖 4.5.34 與圖 4.5.35 分別為此熱邊界組合下，TLRC 所預測之位移極大與極小條件下各元素軸向應力分佈圖。最大應力仍集中於第 2 元素，達 20.4 MPa，其餘多在 12 MPa 以下；而極小位移條件下，第 2 元素亦為最大壓應力區，達 10.9 MPa，呈現與前例一致的應力集中趨勢。

綜上，於 $\rho = 0.5$ 條件下，即使兩端溫度具有中度正相關性，在 Pre-curing 階段模擬條件下所產生的熱致變形仍具有可控制範圍，其內部應力分佈未超出材料安全極限（以銅材降伏強度約 220 MPa 為基準），顯示此微橋結構即使在同步升溫的極端條件下亦具良好熱穩定性與製程可靠性。

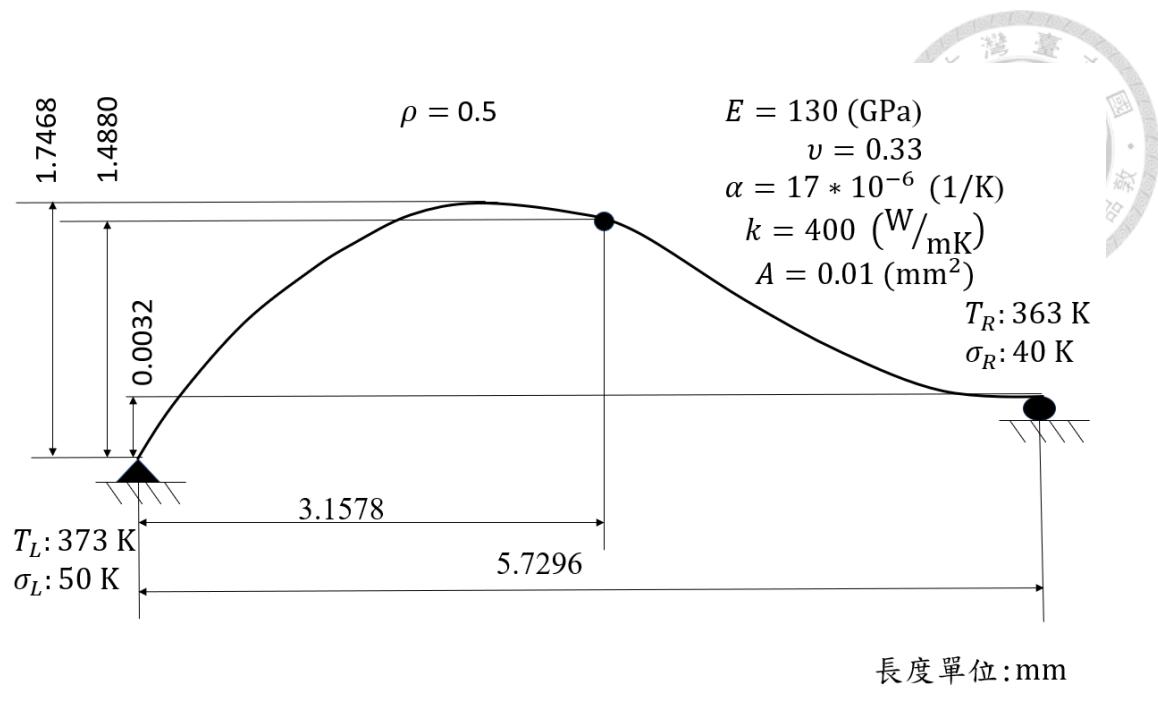


圖 4.5.28 Pre-curing 製程中於 $\rho = 0.5$ 之熱固耦合分析模型圖

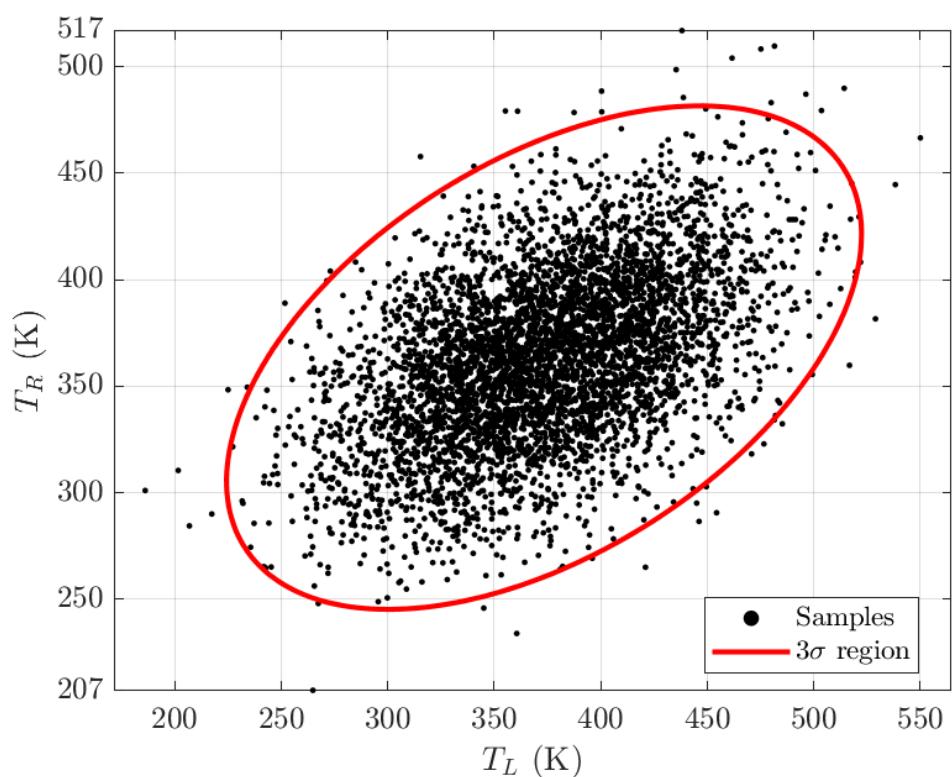


圖 4.5.29 Pre-curing 製程中於 $\rho = 0.5$ 之熱刺激相關性

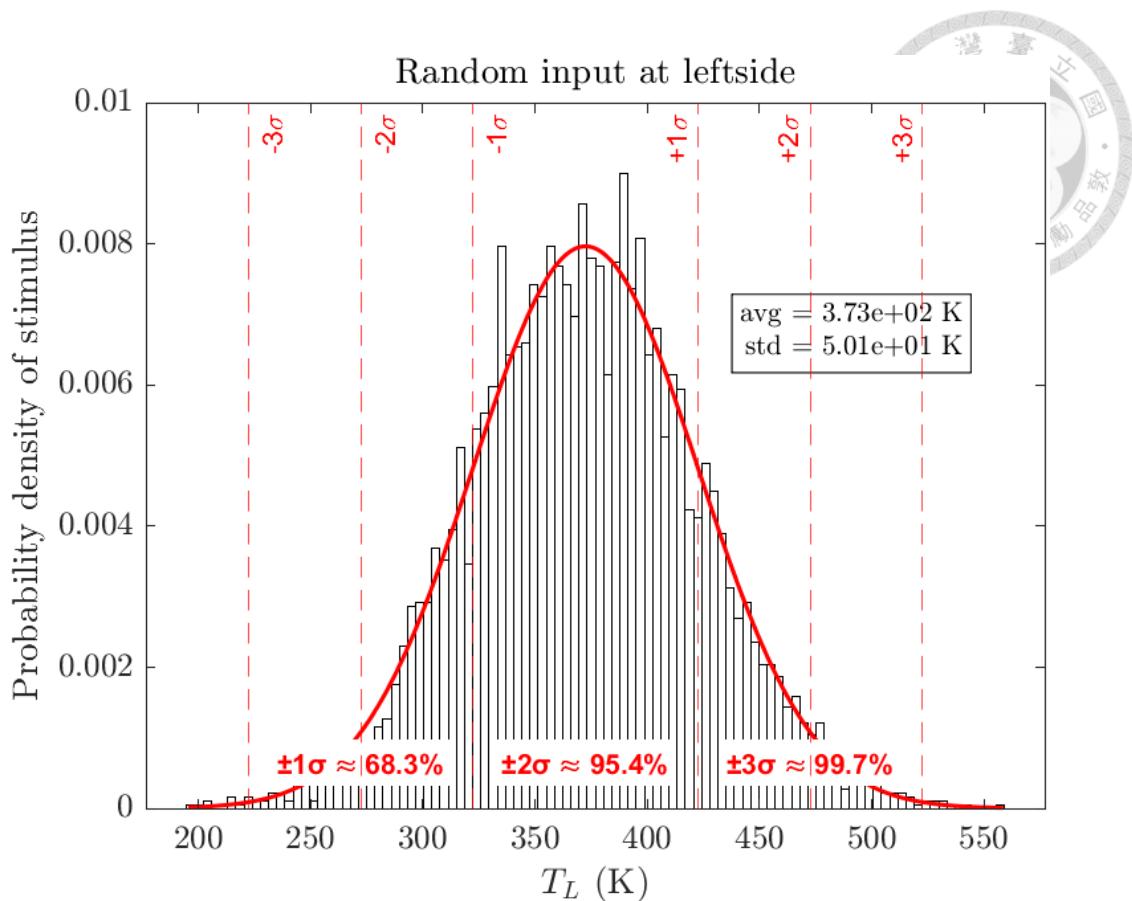


圖 4.5.30 Pre-curing 製程中於 $\rho = 0.5$ 之左端熱載樣本

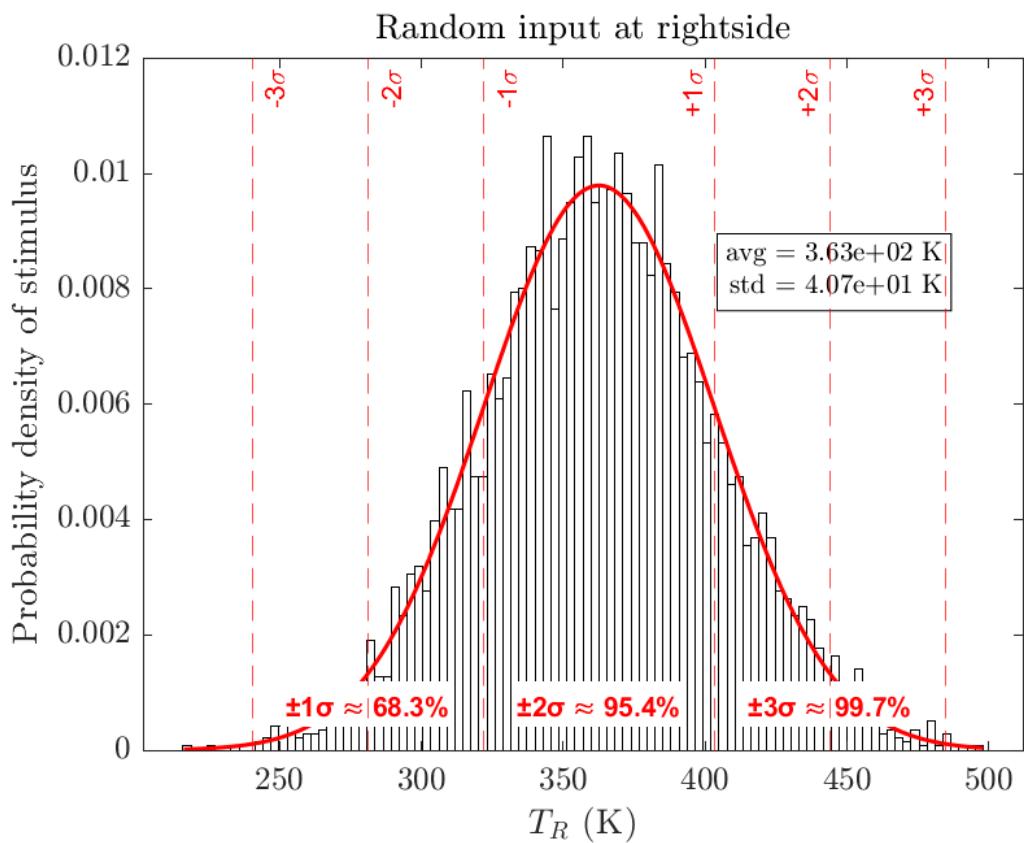


圖 4.5.31 Pre-curing 製程中於 $\rho = 0.5$ 之右端熱載樣本

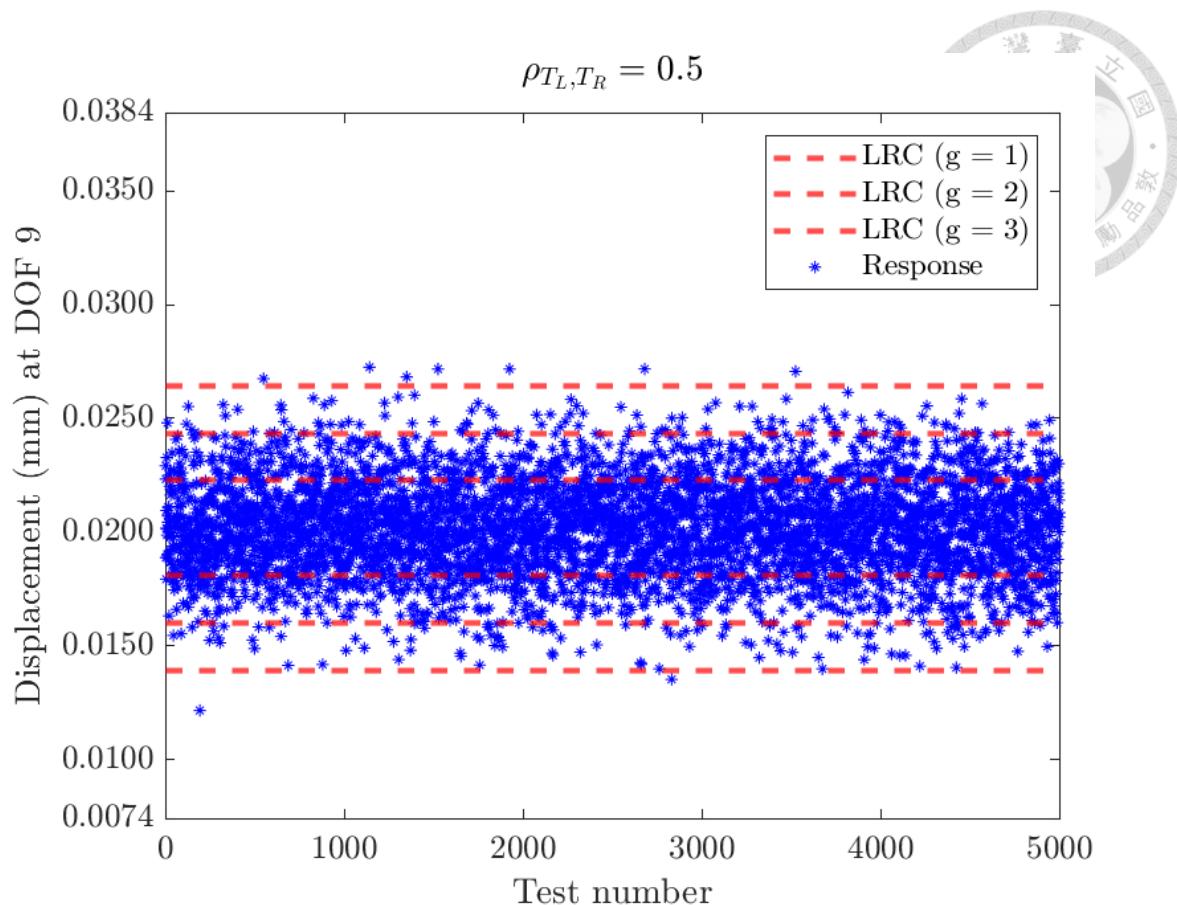


圖 4.5.32 Pre-curing 製程中於 $\rho = 0.5$ 之 TLRC 預測與驗證結果

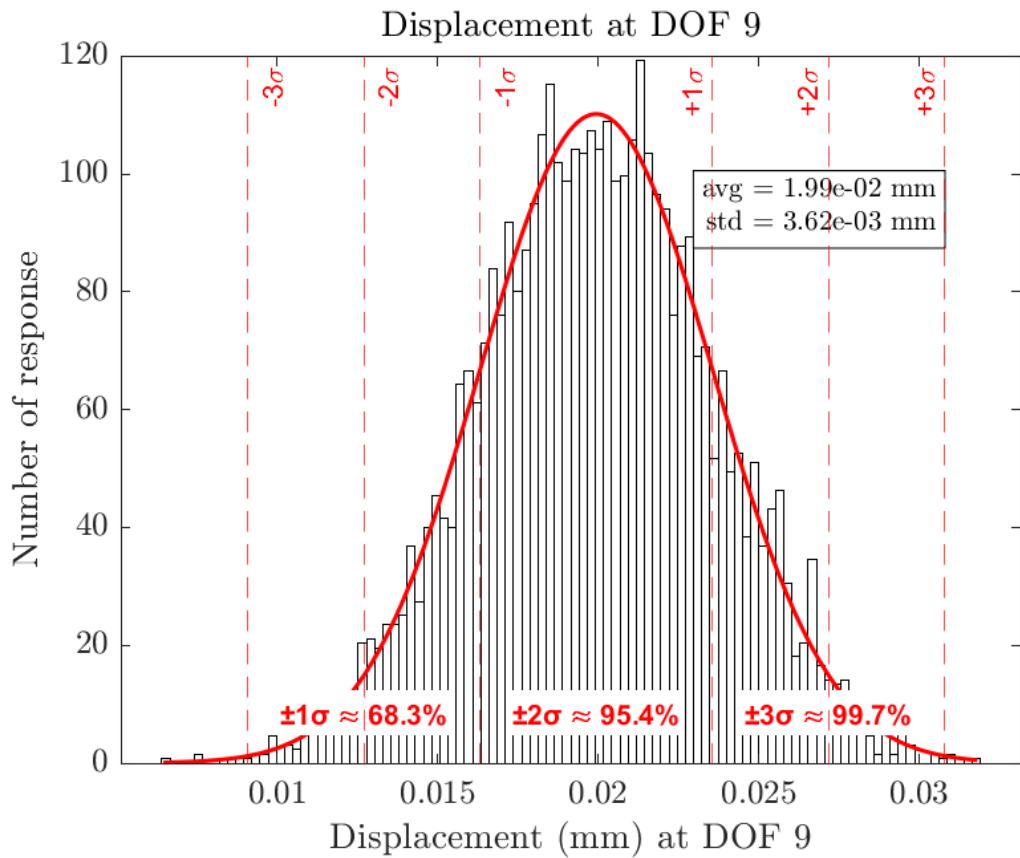


圖 4.5.33 Pre-curing 製程中於 $\rho = 0.5$ 之數據採集生成響應分布

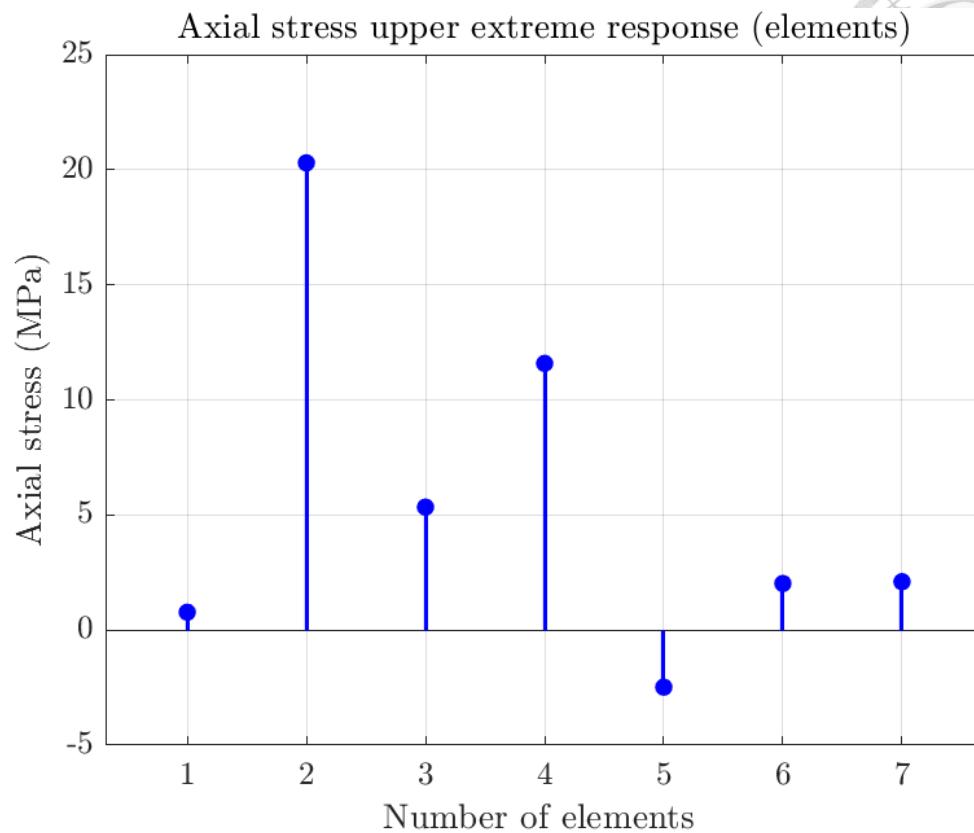


圖 4.5.34 Pre-curing 製程中於 $\rho = 0.5$ 之正向極值條件下應力響應

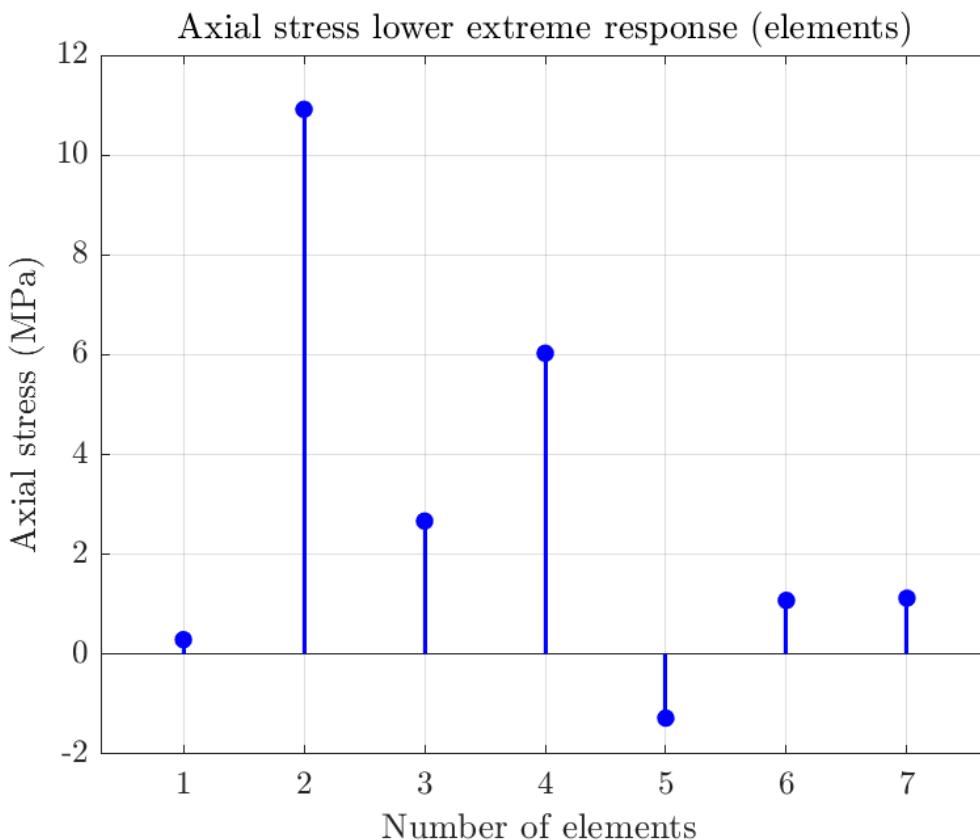


圖 4.5.35 Pre-curing 製程中於 $\rho = 0.5$ 之負向極值條件下應力響應



4.5.3.2 針對 $\rho = -0.5$ 热邊界條件下之解析討論

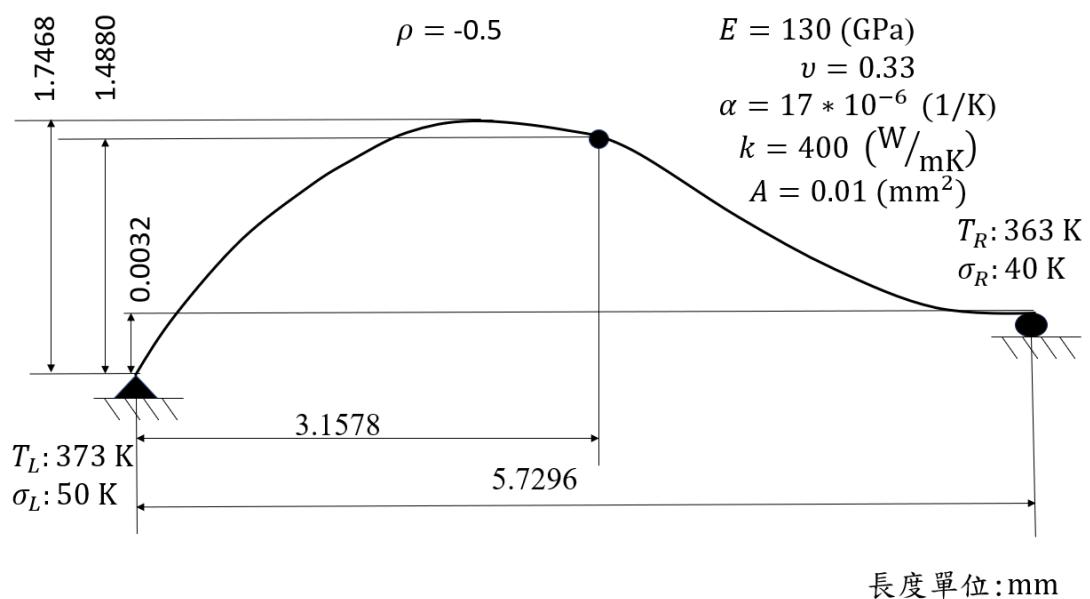
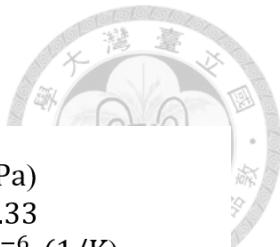
圖 4.5.37 顯示當熱邊界溫度相關係數為 $\rho = -0.5$ 時，樣本點呈現明顯負相關分布，散佈趨勢從左上延伸至右下，呈現傾斜橢圓型態。此結果反映左、右端溫度在統計上存在反向耦合，即當一側溫度升高時，另一側傾向降低。樣本大多數集中於紅色橢圓所定義的 3σ 區域內，證實採樣分布合理且無明顯離群點，具備良好的統計穩定性。

圖 4.5.38 與圖 4.5.39 為左、右端邊界溫度分布直方圖，皆呈現對稱常態型態。 T_L 平均值為 373 K，標準差 49.5 K； T_R 平均值為 364 K，標準差 39.6 K。與其他相關係數情況相比，雖變異程度相當，但反向變動的耦合特性使得整體溫差變異具互補特性，有助於後續響應的穩定性提升。

針對 DOF 9 的熱位移響應，圖 4.5.40 顯示所有 5000 組模擬樣本均受限於 TLRC 之 $g = 3$ 所建構之 $\pm 3\sigma$ 預測邊界內，紅色虛線包絡與藍色實測散點吻合良好，顯示 TLRC 模型在負相關情境下仍具備高保守性與高準確性。進一步檢視圖 4.5.41，響應數據分布呈現標準常態型態，平均值為 0.0202 mm，標準差僅為 1.23×10^{-3} mm，反映溫度反向變化時導致的熱膨脹行為具有互相抵消的效果，有效抑制整體結構的位移變動範圍。

圖 4.5.42 與圖 4.5.43 呈現 DOF 9 於 $\pm 3\sigma$ 變形條件下之元素軸向應力分布情形。在最大變形情境下，第 2 元素承受最高張應力約為 19.5 MPa，明顯為主應力集中區，推測其位於結構幾何彎曲處，受熱膨脹影響最大；其餘元素應力值則逐漸降低。最小變形條件下的應力亦集中於第 2 元素，但轉為主壓應力狀態，最大值為約 -13 MPa，呈現對稱性的應力反應機制。

整體而言，即使在負相關條件下造成熱源擾動方向不一致，TLRC 預測結果仍可準確掌握位移與應力上下界。根據所採用銅材之材料強度（室溫降伏強度約 300 MPa），所有應力極值皆遠低於此界限，顯示本結構具備充足安全裕度。



長度單位:mm

圖 4.5.36 Pre-curing 製程中於 $\rho = -0.5$ 之熱固耦合分析模型圖

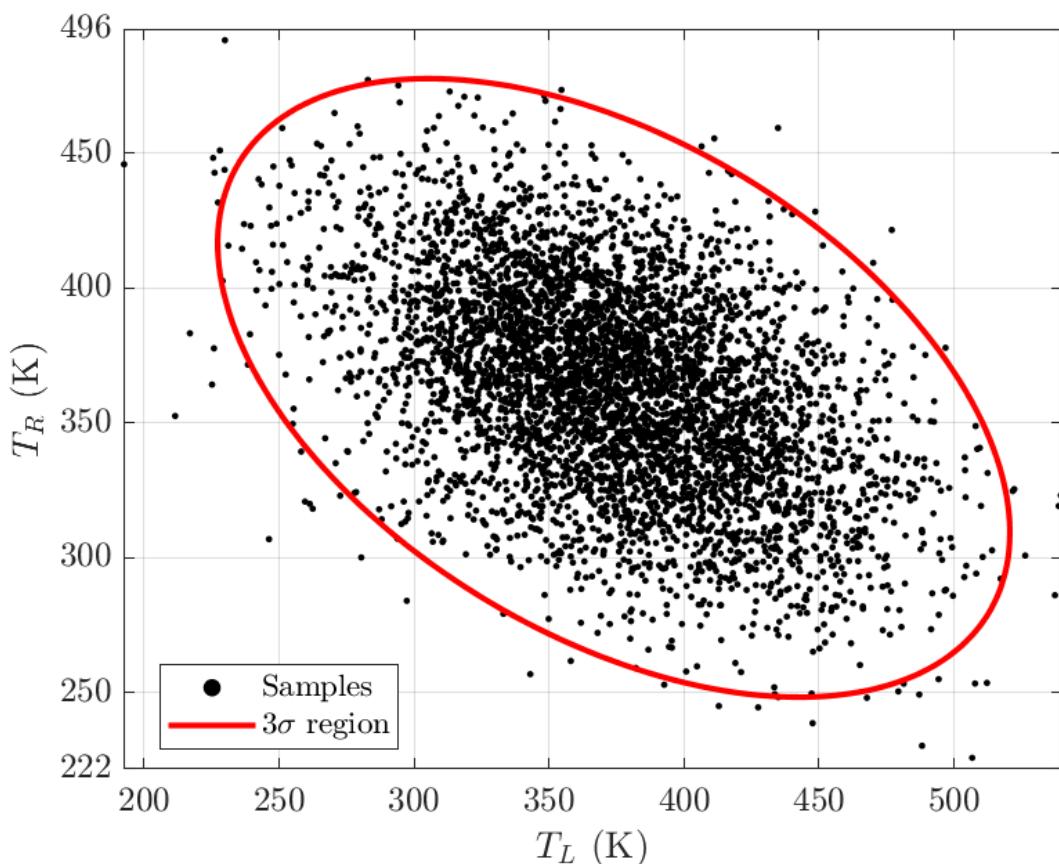


圖 4.5.37 Pre-curing 製程中於 $\rho = -0.5$ 之熱刺激相關性

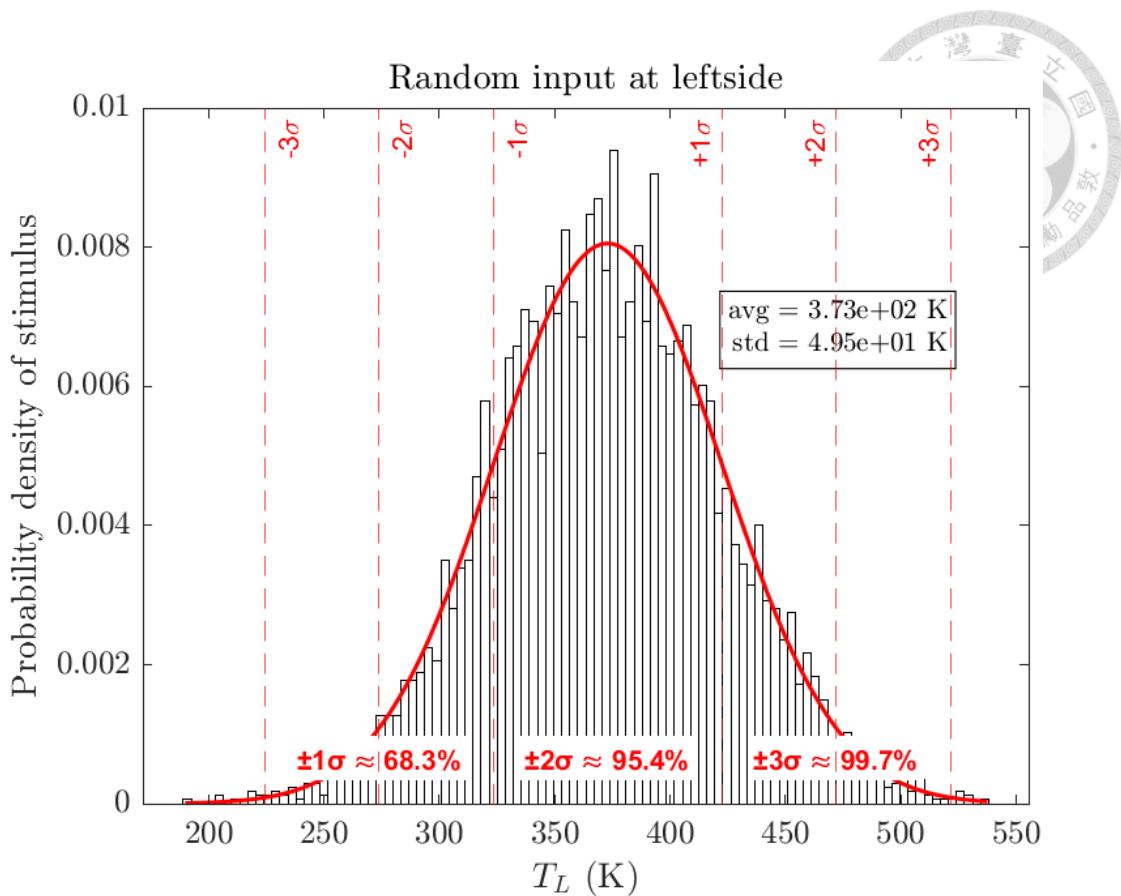


圖 4.5.38 Pre-curing 製程中於 $\rho = -0.5$ 之左端熱載樣本

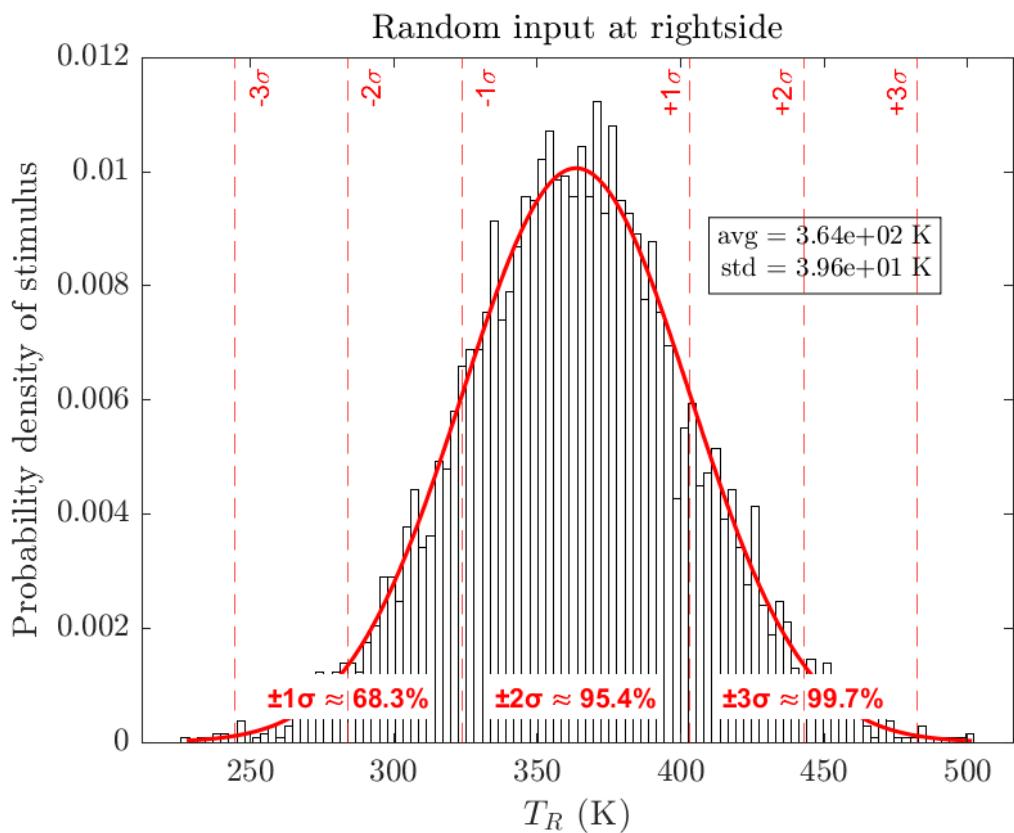


圖 4.5.39 Pre-curing 製程中於 $\rho = -0.5$ 之右端熱載樣本

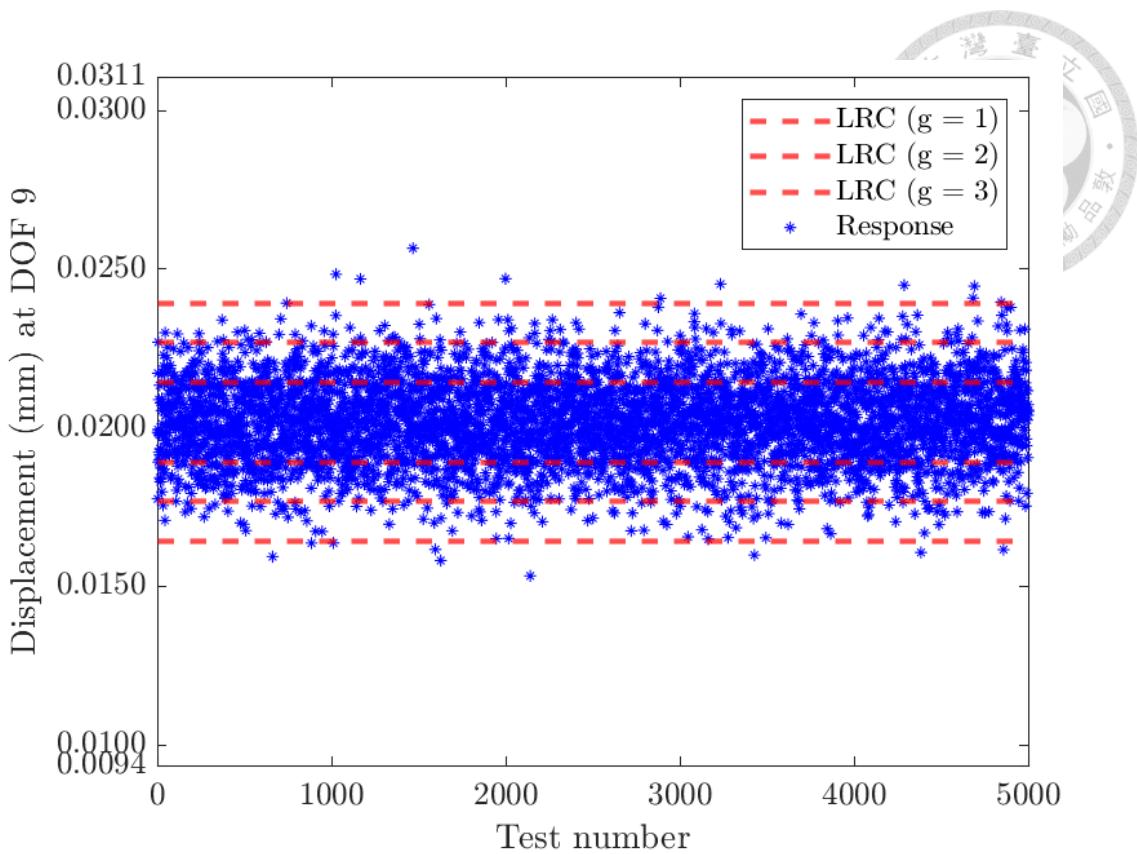


圖 4.5.40 Pre-curing 製程中於 $\rho = -0.5$ 之 TLRC 預測與驗證結果

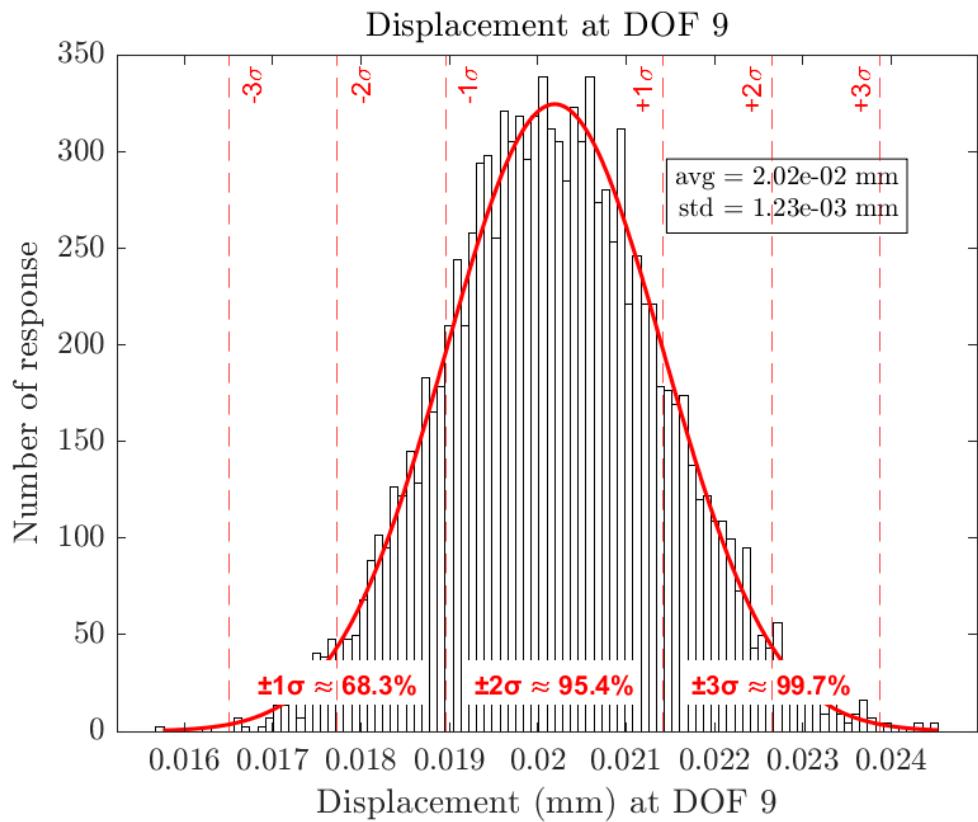


圖 4.5.41 Pre-curing 製程中於 $\rho = -0.5$ 之數據採集生成響應分布

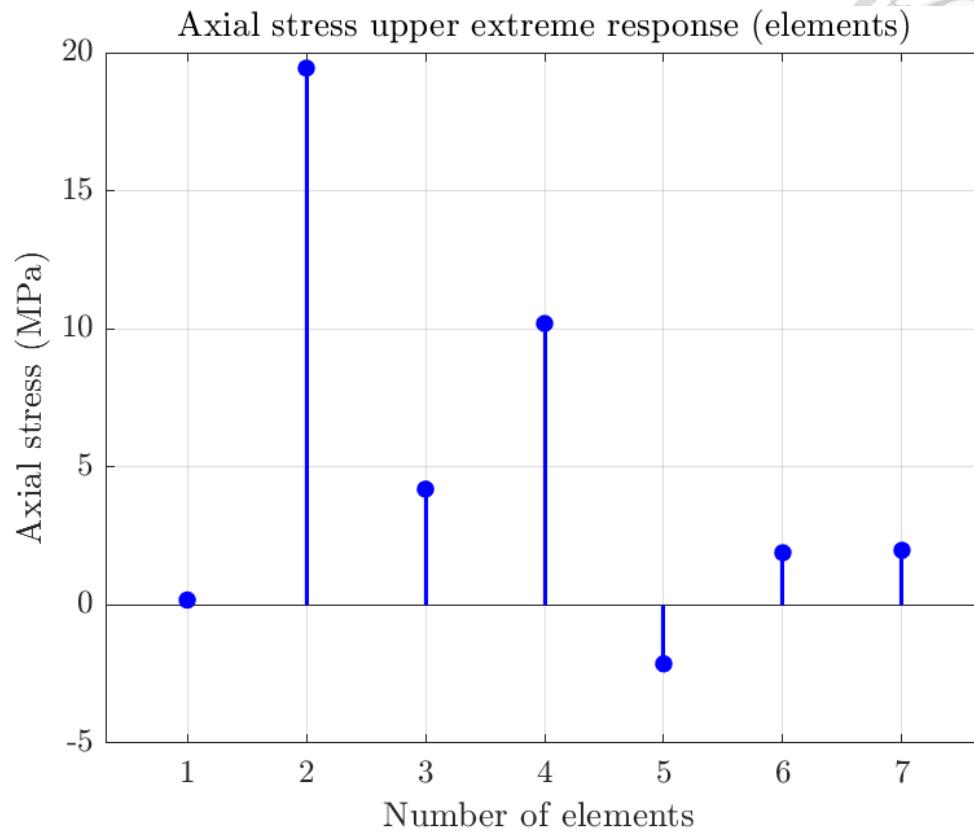


圖 4.5.42 Pre-curing 製程中於 $\rho = -0.5$ 之正向極值條件下應力響應

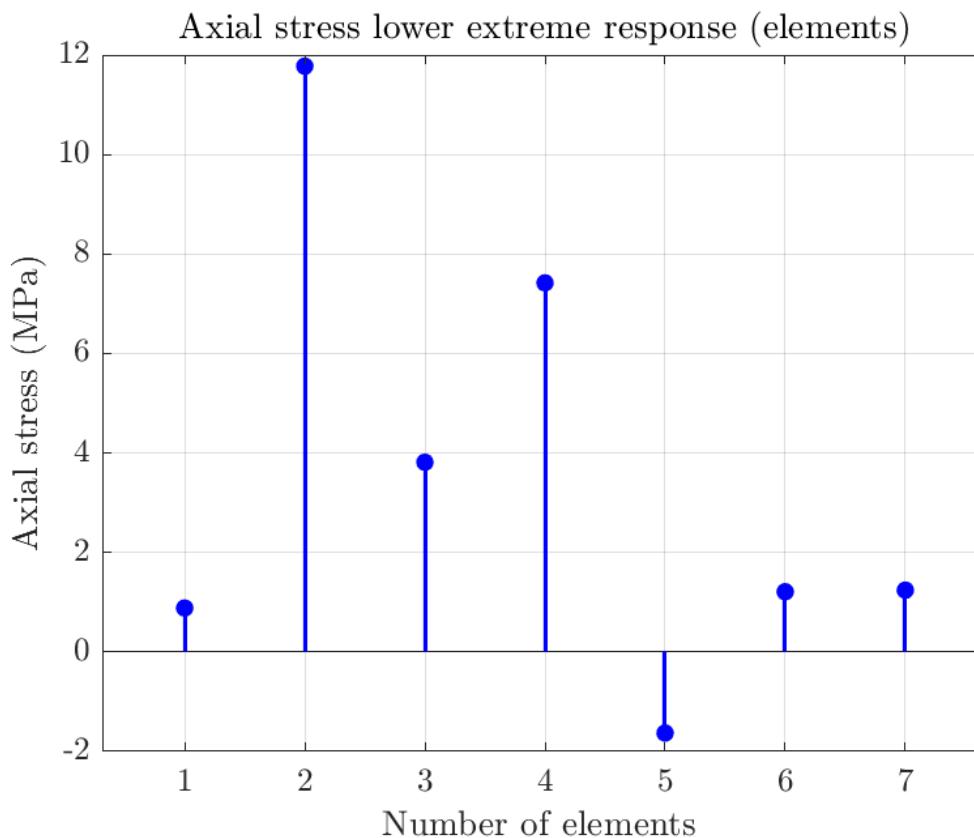


圖 4.5.43 Pre-curing 製程中於 $\rho = -0.5$ 之負向極值條件下應力響應



4.6 高功率密度應用之 Litz 線彎曲結構熱固耦合極值分析

延續前述對微橋與封裝金線結構於隨機熱邊界下的極值響應探討，本節聚焦於高功率密度航太電機定子模組(Stator)之灌封式 Litz 線圈模組結構 (如圖 4.6.1)，進行熱場分布與熱點分析。此類導線廣泛應用於航太產業中高頻變壓器、定子繞組等熱負載密集之電子裝置中，其複雜曲折之結構在實際運作階段極易受到熱梯度影響，導致顯著的熱致變形與機械應力集中，進而產生如焊點疲勞、絕緣層破壞、線圈鬆動等失效風險。因此，為有效掌握其在不確定熱邊界下的熱機行為，並量化不同熱載相關性對變形與應力的放大效應，本文導入 TLRC (Thermal load response correlation)方法進行極值行為推估。透過統計方法快速評估最大變形與應力區域，有助於未來設計過程中進行針對性之熱管理對策與結構強化。

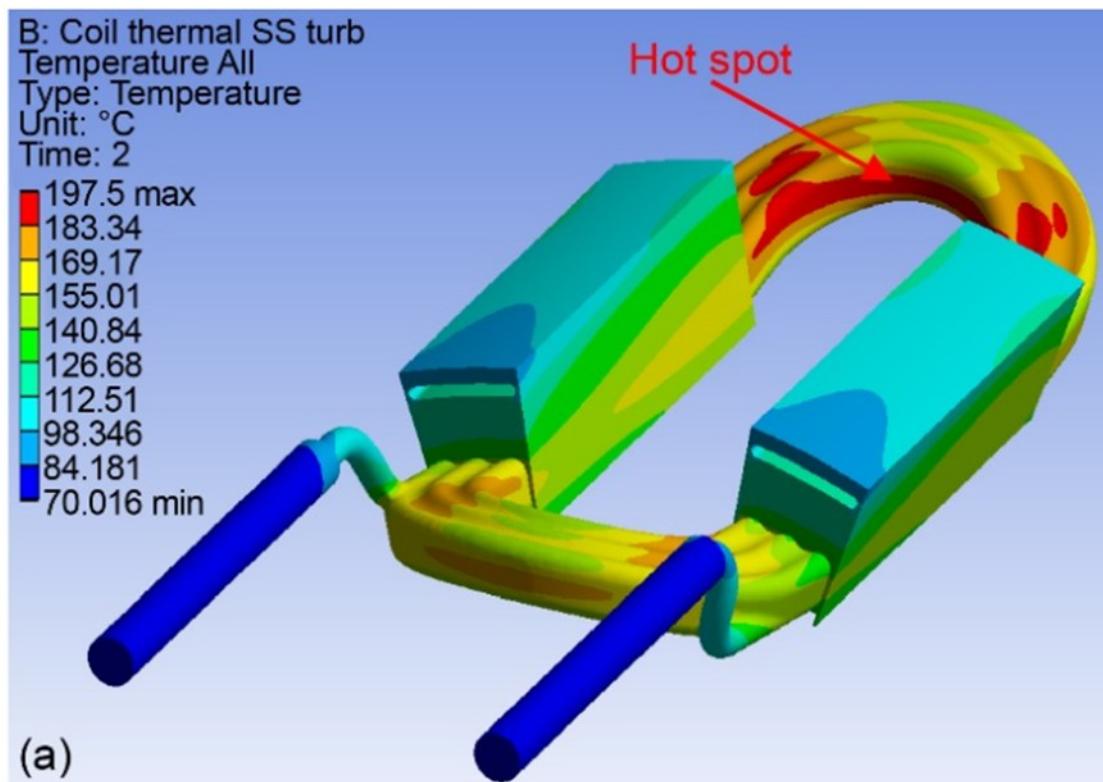


圖 4.6.1 定子模組結構模型 [15]

本研究分析對應於 High-power-density aerospace electric machines 中之 Potted litz wire 封裝導線系統 [15]。其中一段具代表性的半圓環狀單根導線結構被擷取



做為分析標的。其結構形貌如圖 4.6.2 所示，由 8 個節點與 7 段二力桿件 (Truss) 元素所構成，形成一段具有明顯彎曲特徵的 U 型導線路徑。節點幾何參考自實際導線形貌，包含不同傾角（如 $\pm 88^\circ$ 、 $\pm 55^\circ$ 、 $\pm 10^\circ$ ）模擬封裝或彎折成形過程中產生的形狀記憶與預應變形。

材料性質方面，導線以銅為基材，設定如下：

- 楊氏模數： $E = 130 \text{ GPa}$
- 热膨胀係數： $\alpha = 17 \times 10^{-6} / \text{K}$
- 热傳導係數： $k = 400 \text{ W/mK}$
- 導線截面積： $A = 10^{-6} \text{ mm}^2$

為模擬 Curing 製程中封裝材料或焊點所引入之不確定熱邊界條件，分別對左、右兩端施加隨機熱載，其中左端邊界溫度設定為平均 485 K ，標準差 80 K ，右端則為平均 445 K ，標準差 50 K 。三組熱邊界相關係數 ($\rho = 1, 0, -1$) 被納入分析，以觀察熱相關性對導線熱致行為之影響。

整體有限元素模型具有 16 個自由度（每節點具 X、Y 向位移），其中第 5 節點之 X 向自由度 (DOF 9) 選定做為觀察點，代表導線中段之最大彎曲處，為位移響應與應力變化最敏感區域。邊界條件上，左端節點完全固定以模擬焊點約束 ($u_x^1 = 0, u_y^1 = 0$)，右端節點則於 Y 向也施加完全拘束 ($u_x^8 = 0, u_y^8 = 0$)。

後續將透過 TLRC 方法推估 DOF9 在各溫度樣本下之位移極值區間，並根據 $\pm 3\sigma$ 預測包絡線與數據採集樣本之重合度進行模型準確性評估。同時，針對最大與最小熱致變形樣本對應之內部應力分布進行分析，以辨識高風險集中應力區域，提供導線封裝之熱管理與結構安全性之設計依據。

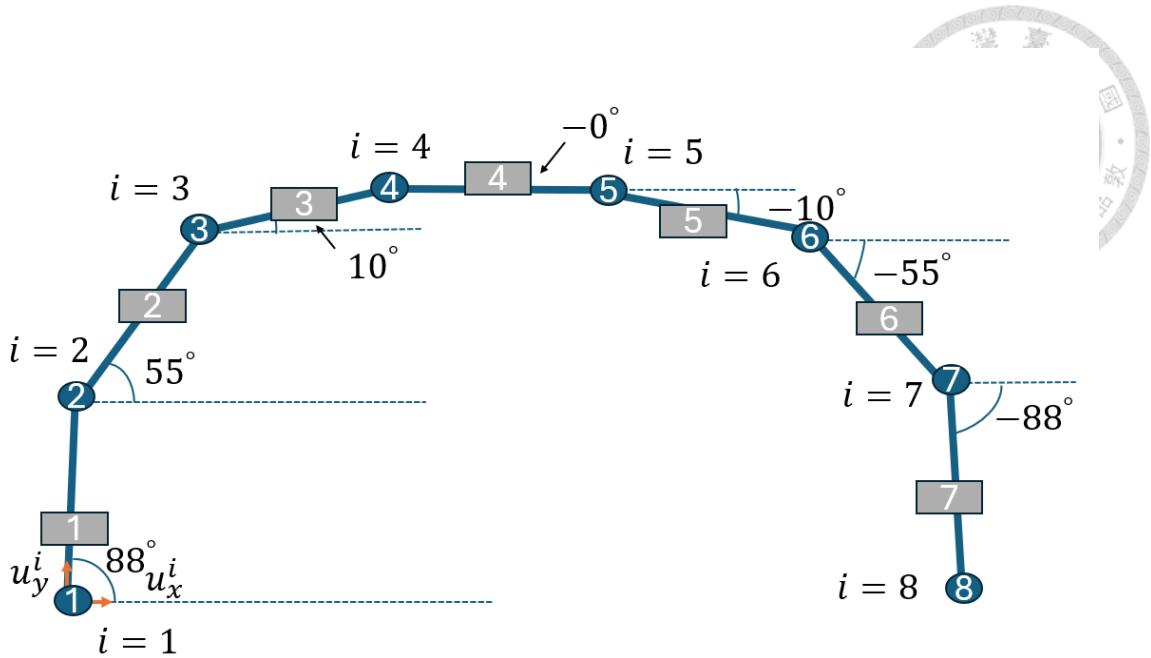


圖 4.6.2 Litz 導線幾何模型架構

4.6.1 TLRC 應用與目標節點選定

本分析中選定目標節點為導線曲線中央節點 (Node 5) 之 X 向自由度 (DOF 9)，做為評估 U 型 Litz 導線在封裝熱載下變形行為的代表性觀察點。該節點位處整體彎折結構中段，受熱膨脹與幾何限制影響最大，適合做為 TLRC 方法中之關鍵響應變數 (Response variable) 以進行極值變位與內部應力推估。

圖 (4.4.1) 為文獻中所示之 Litz 線環形封裝結構，其每條導線在模組中皆擔任能量傳導與散熱的重要角色。特別選定其中單一環狀線段進行分析，具體理由如下：

1. 幾何配置清晰且具代表性：該段導線位於結構邊界，曲率明顯，幾何構型近似於半圓弧形，適合簡化為多段一維桿件之分析模型，有助於進行熱固耦合行為評估。
2. 處於熱敏感區域：此導線段靠近定子外層，緊鄰灌封膠與散熱路徑，易受到高熱梯度與導熱介質交界影響，導致顯著熱膨脹差異與應力集中。
3. 模型邊界條件易於界定：其兩端可對應封裝焊點與固定支撐點，利於施加常態隨機熱邊界與機械拘束條件，符合 TLRC 分析所需之統計邊界條件設定。



因此，在本小節所進行之 TLRC 數據採集模擬與響應分析中，DOF 9 所代表之節點位移做為主觀察量，並藉由 LRC 方法推估其對應之極值變位與元素內部軸向應力，進行可靠度判斷與熱敏區域辨識。

此外，該段彎曲導線在實際模組設計中不僅負責電流傳導，更因其特殊曲線形貌與受限空間，極易在封裝升溫或通電運作時產生非線性熱應變與熱機交互應力。若未妥善評估其在不同溫差條件下的應變極限，可能產生塑性變形、焊點裂解或材料疲勞等失效模式。

為驗證所分析結果之實務意涵，本研究亦進一步推估 DOF 9 所對應最大位移樣本下的內部應力分布，計算其軸向最大張應力與壓應力，並與材料之降伏準則（單軸降伏極限）進行比對，藉此判斷是否可能超過塑性變形門檻。此步驟不僅有助於確認模擬與推估結果之工程意義，更能為航太工程之熱管理設計與材料選擇提供量化參考。

4.6.2 數據結果分析

4.6.2.1 針對 $\rho = 1$ 熱邊界條件下之解析討論

在熱邊界條件呈現完全正相關 ($\rho = 1$) 時，左、右兩端溫度將同步升高或降低，反映高度一致的熱源擾動，常見於同一加熱源或散熱不良所造成的同調升溫情境。圖 4.6.4 顯示其 5000 組數據採集溫度樣本分布於接近 45 度對角線之狹長區域，並由紅色橢圓線包覆的 3σ 區域證實此高度耦合特性，證明熱擾動為同步變動。

進一步觀察左側圖 4.6.5 與右側圖 4.6.6 溫度機率密度函數， T_L 平均為 484 K、標準差為 80.5 K， T_R 則為 444 K、標準差為 50.3 K，兩者皆呈近似常態分布，說明隨機熱邊界設定具統計合理性，並成功模擬出極端熱載不確定條件下的熱場波動特性。

在此熱載情境下，對目標節點 DOF 9 的變形響應統計結果如 圖 4.6.7 所示，



可見其位移樣本呈密集帶狀分布，TLRC 模型推估之 $g = 1, 2, 3$ 包絡線可良好涵蓋所有模擬結果。圖 4.6.8 則呈現其直方圖分布，平均位移為 -0.0872 mm ，標準差達 $1.43 \times 10^{-2}\text{ mm}$ ，顯示當熱邊界變動趨於同步時，結構所經歷的整體伸長或收縮為三組相關係數之數據中變異程度最大。

針對上述最小與最大位移樣本，推估其對應之內部應力結果（圖 4.6.9 與圖 4.6.10）指出，最大張應力為 $+91\text{ MPa}$ ，最大壓應力為 -30 MPa ，皆集中於導線結構轉折處（Element 2~4），再次驗證彎折區域為應力集中熱點。此兩極值皆尚未超過銅材常見降伏強度（ $\sim 220\text{ MPa}$ ），屬於可接受之安全裕度內。

整體而言，在 $\rho = 1$ 熱邊界條件下，Litz 線中段導體結構受到最大幅度的熱膨脹驅動與形變響應，結構將呈現一致性變形模式，但在轉折與彎曲節點中形成較顯著的軸向應力集聚現象。所觀察之應力範圍在目前設定的材料降伏強度以下，屬於可接受之安全裕度內，不致產生塑性破壞或疲勞風險。

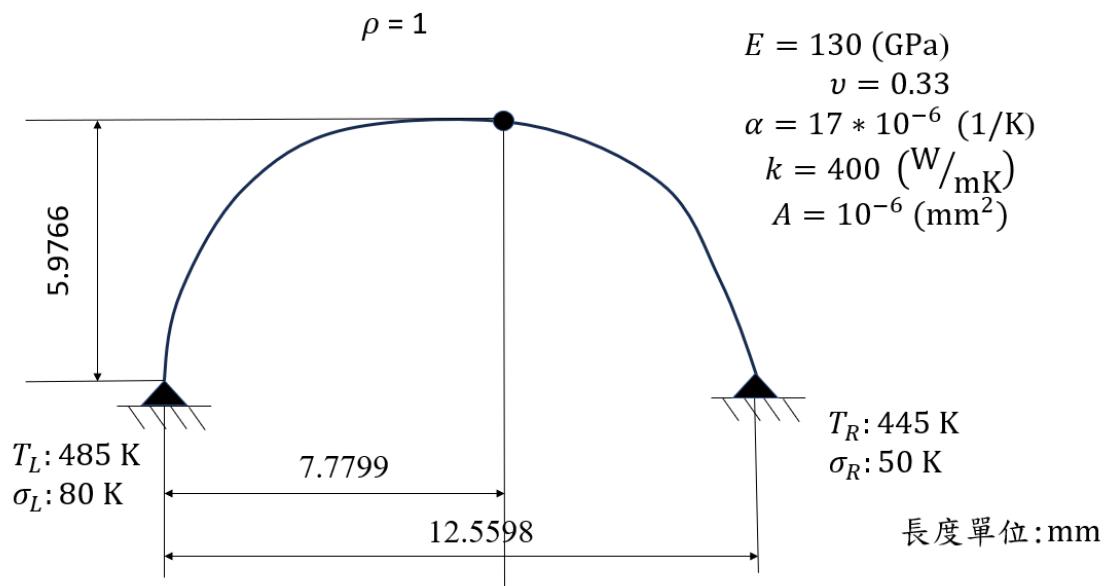


圖 4.6.3 Litz 導線於 $\rho = 1$ 時之熱固耦合分析模型圖

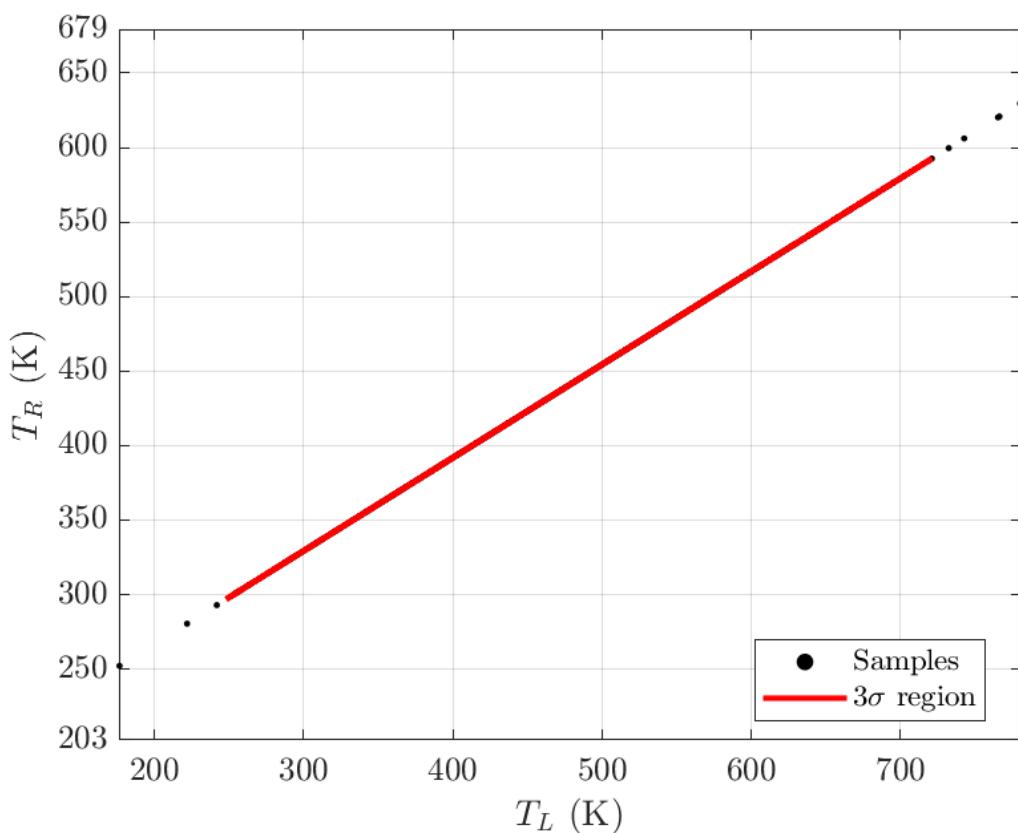


圖 4.6.4 Litz 導線於 $\rho = 1$ 時之熱刺激相關性

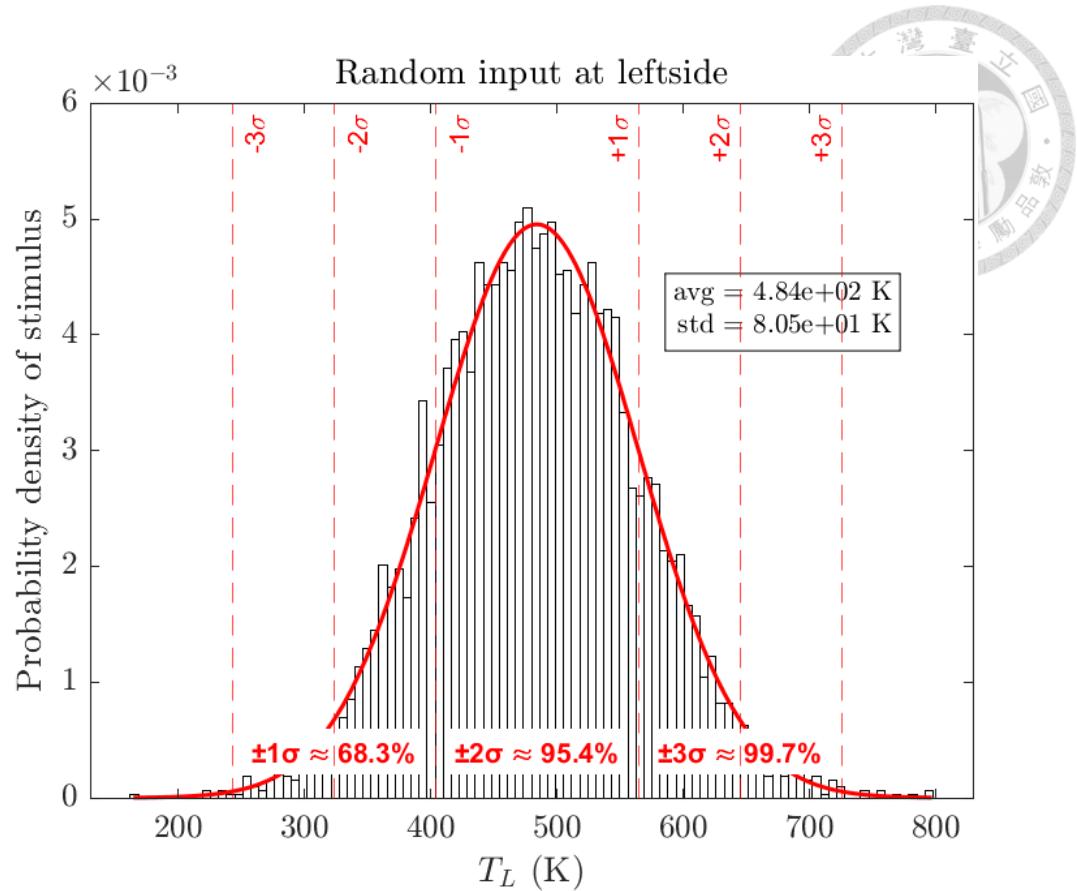


圖 4.6.5 Litz 導線於 $\rho = 1$ 時之左端熱載樣本

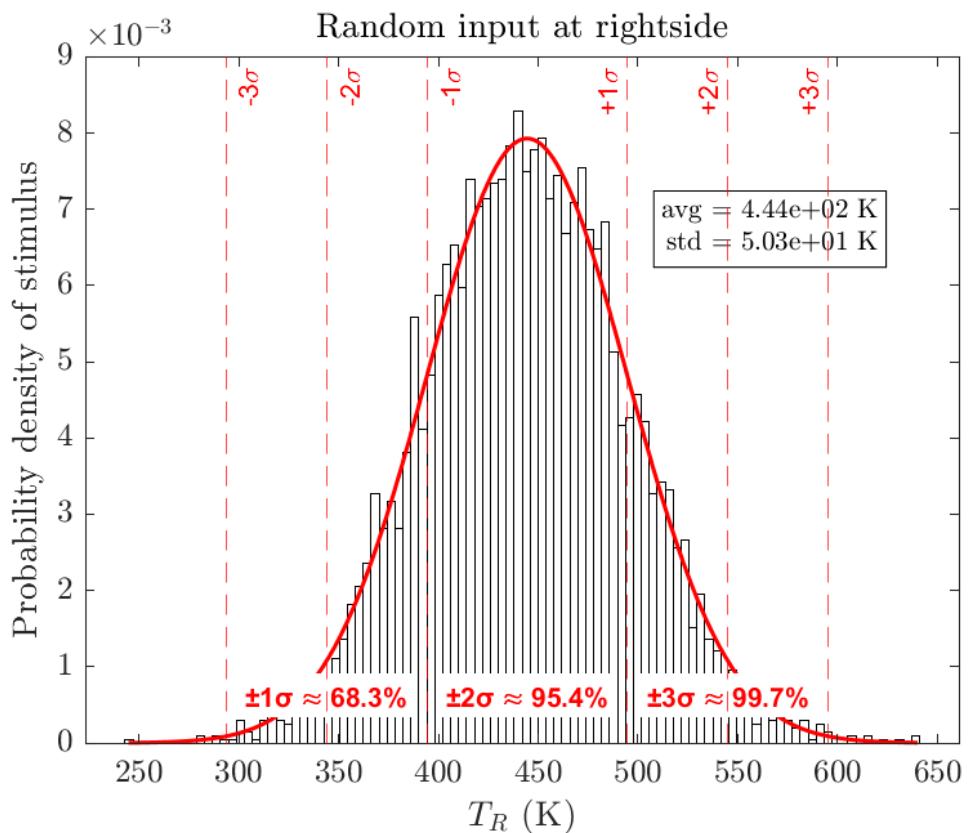


圖 4.6.6 Litz 導線於 $\rho = 1$ 時之右端熱載樣本

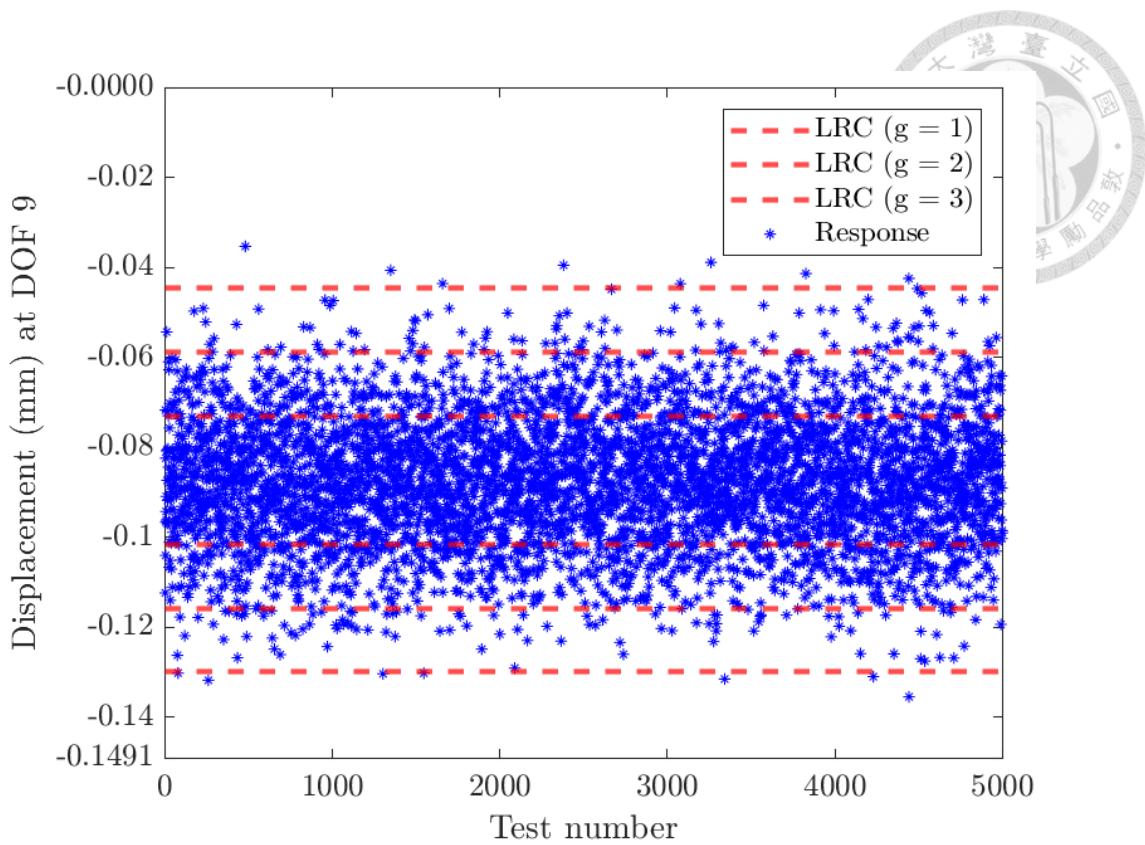


圖 4.6.7 Litz 導線於 $\rho = 1$ 時之 TLRC 預測與驗證結果

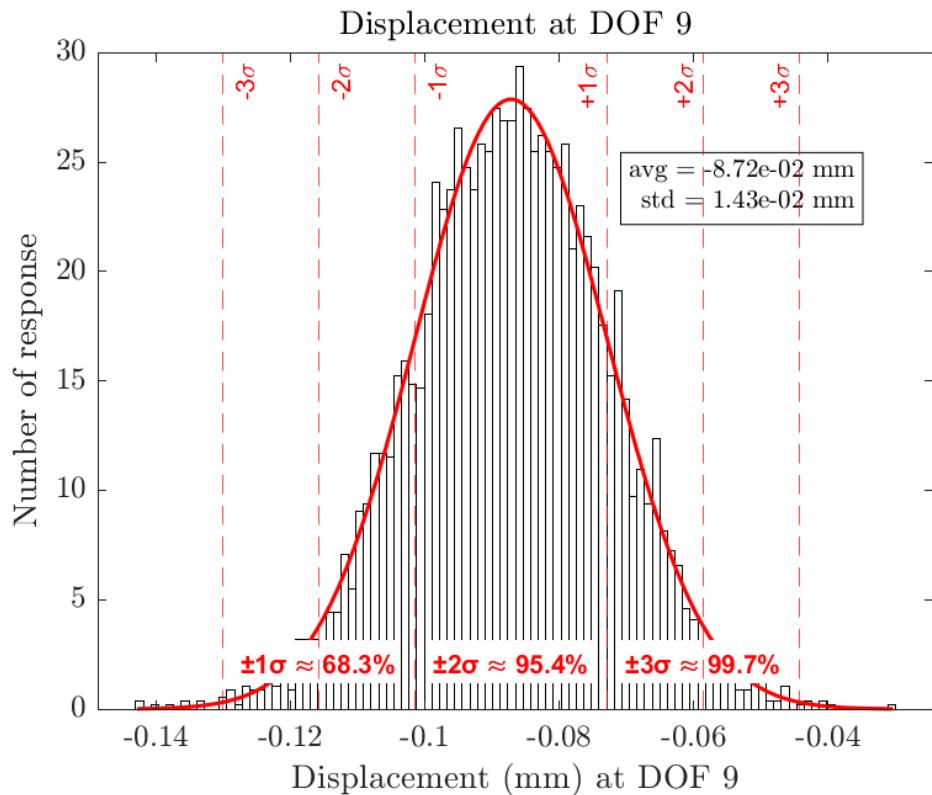


圖 4.6.8 Litz 導線於 $\rho = 1$ 時之數據採集生成響應分布

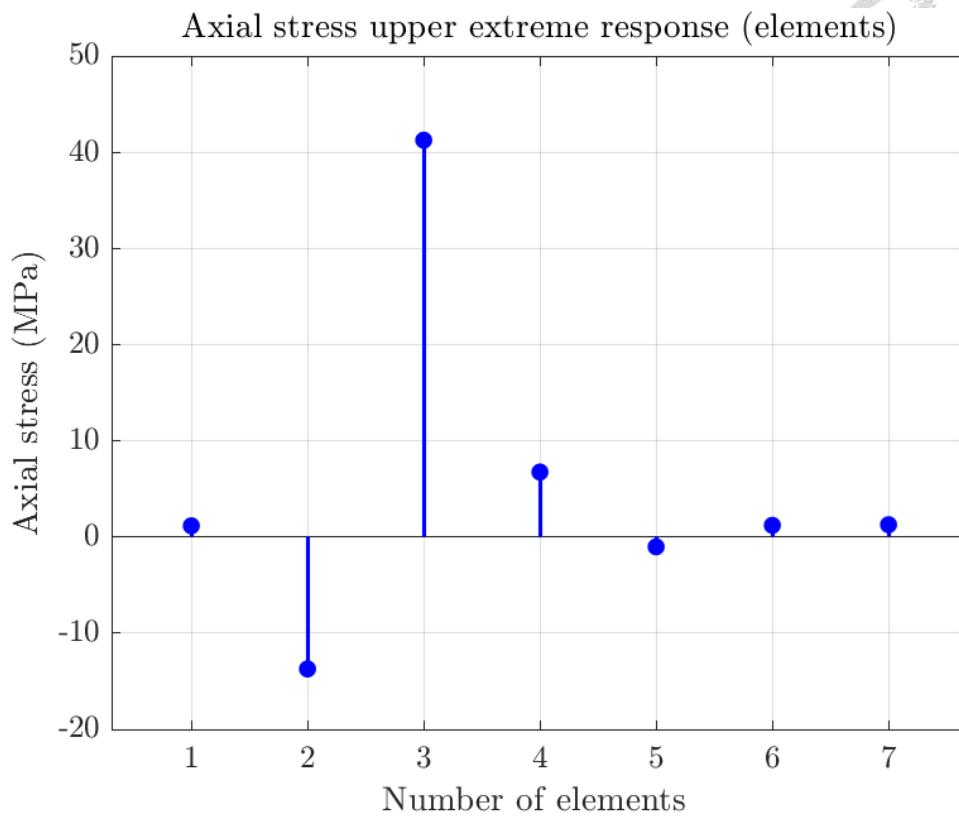


圖 4.6.9 Litz 導線於 $\rho = 1$ 時之正向極值條件下應力響應

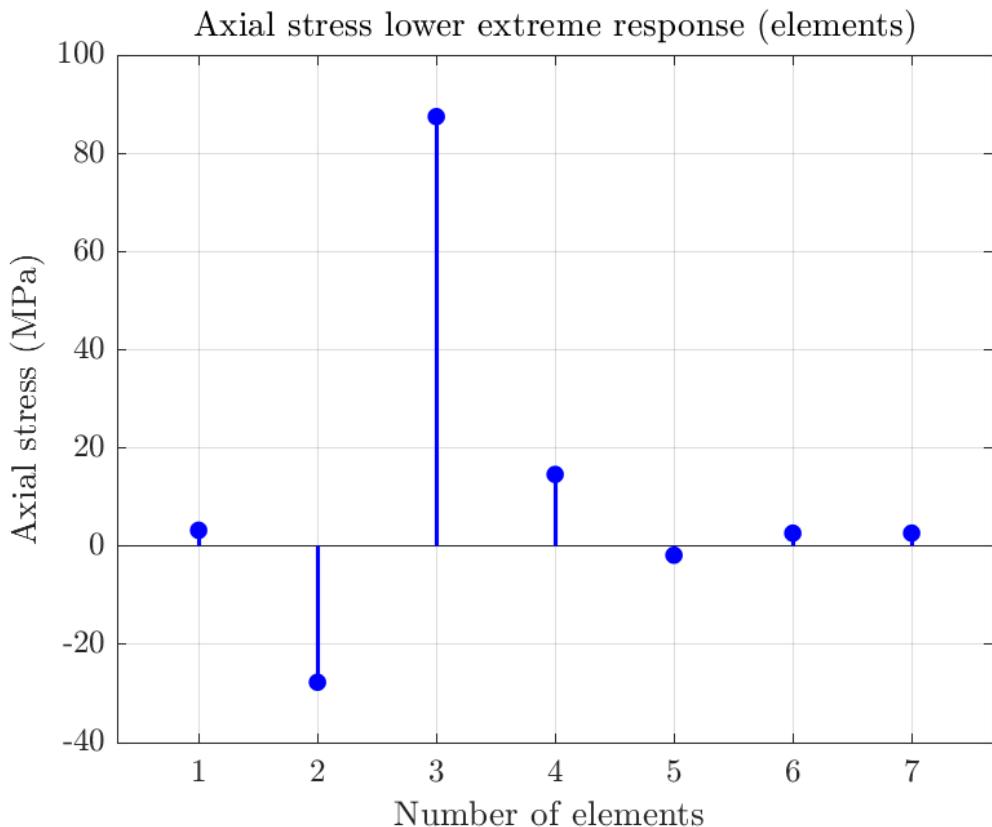


圖 4.6.10 Litz 導線於 $\rho = 1$ 時之負向極值條件下應力響應



4.6.2.2 針對 $\rho = 0$ 热邊界條件下之解析研究

在無相關性熱邊界條件($\rho = 0$)下，左、右端之溫度樣本呈現統計獨立特性，圖 4.6.12 所示之樣本雲圖分布近似圓形，顯示兩端熱擾動間無線性依賴關係。這種設定模擬了散熱條件不穩或環境擾動不具同步性的實際情況，常見於局部冷卻效率不同或散熱膠包封不均之封裝區域。

從圖 4.6.13 與圖 4.5.39 可觀察到， T_L 與 T_R 的邊界溫度皆近似常態分布，左側標準差略大($\sigma \approx 79.1\text{ K}$)，右側為中等波動($\sigma \approx 50.8\text{ K}$)，整體樣本群在統計上具代表性，有效反映隨機熱擾動下的結構反應分布範圍。

響應方面，圖 4.6.15 顯示第九自由度之位移響應集中於 -0.0876 mm 附近，樣本間之散布範圍相較於前述正相關($\rho = 1$)情境略為縮小。TLRC 建立之 $g = 1, 2, 3$ 階包絡邊界皆完整涵蓋所有樣本，顯示其在統計獨立熱場下仍具良好描述能力。圖 4.6.16 之位移直方圖進一步佐證此觀察，其響應標準差為 $1.37 \times 10^{-2}\text{ mm}$ ，略小於 $\rho = 1$ 之高度正相關案例，顯示結構在此條件下具有中等熱致變形程度。

對應極值位移樣本所推估之軸向應力分布如圖 4.6.17 與圖 4.6.18 所示，最大張應力為 70 MPa ，最大壓應力則為 -23 MPa ，主要集中於彎曲幾何轉折區域的元素 2 至元素 4。與前述情境相比，顯示在熱擾動非同步但變異性中等的條件下，結構反應並未劇烈惡化，仍保持於合理可接受範圍內。

綜合而言， $\rho = 0$ 热邊界情境雖未如完全同步($\rho = 1$)劇烈，但其位移與應力響應分布仍展現不小波動，對應實務中熱設計不確定條件下之穩健性評估具參考價值。所觀察之應力極值皆遠低於銅材料降伏強度($> 220\text{ MPa}$)，顯示在統計獨立熱載入下結構仍具充分安全裕度，不致產生塑性破壞或疲勞風險。

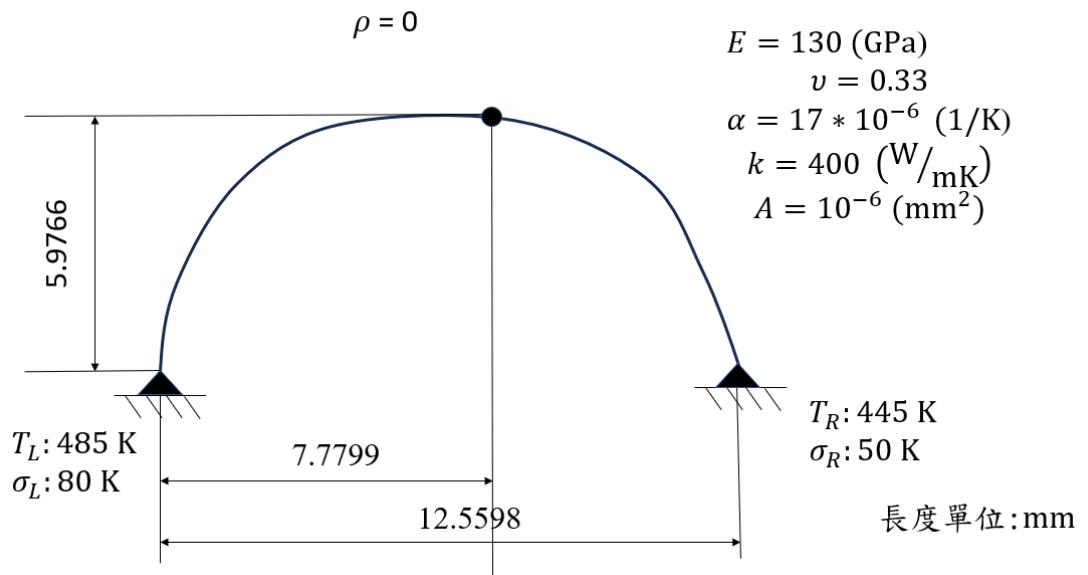


圖 4.6.11 Litz 導線於 $\rho = 0$ 時之熱固耦合分析模型圖

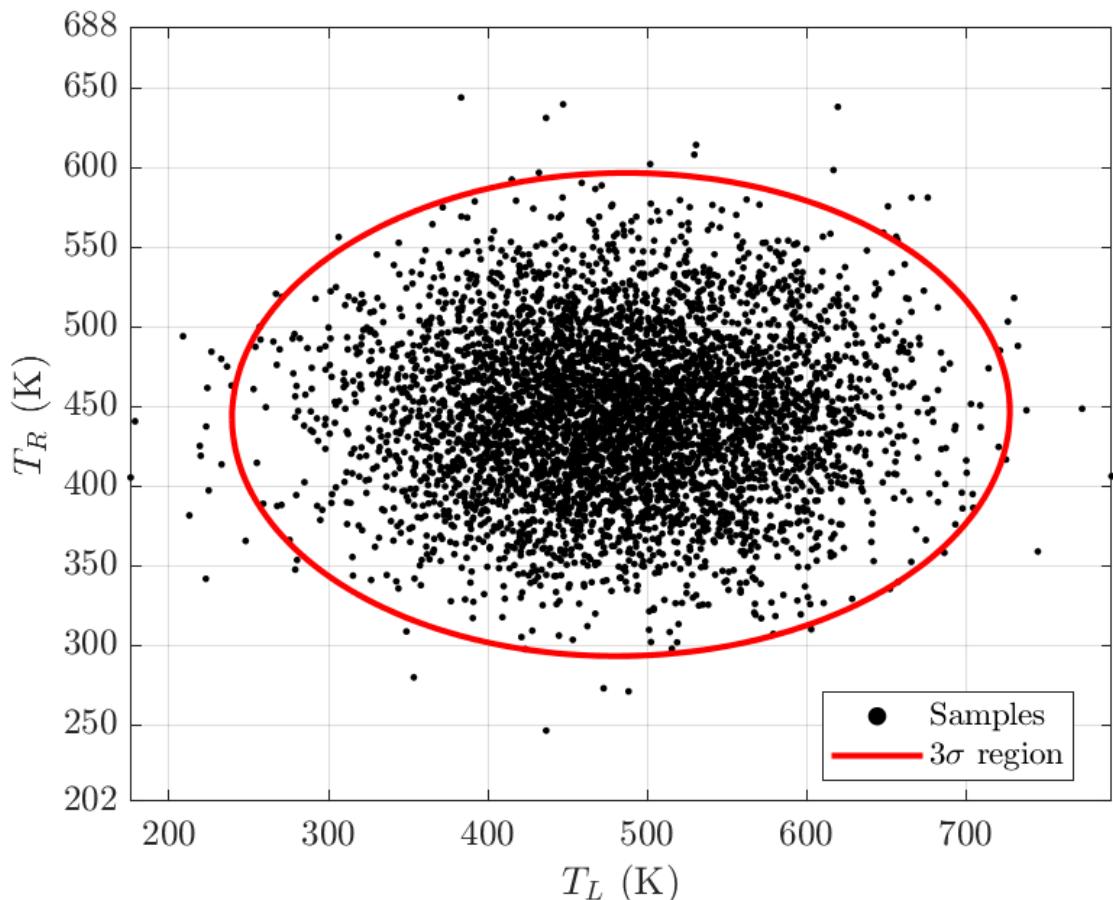


圖 4.6.12 Litz 導線於 $\rho = 0$ 時之熱刺激相關性

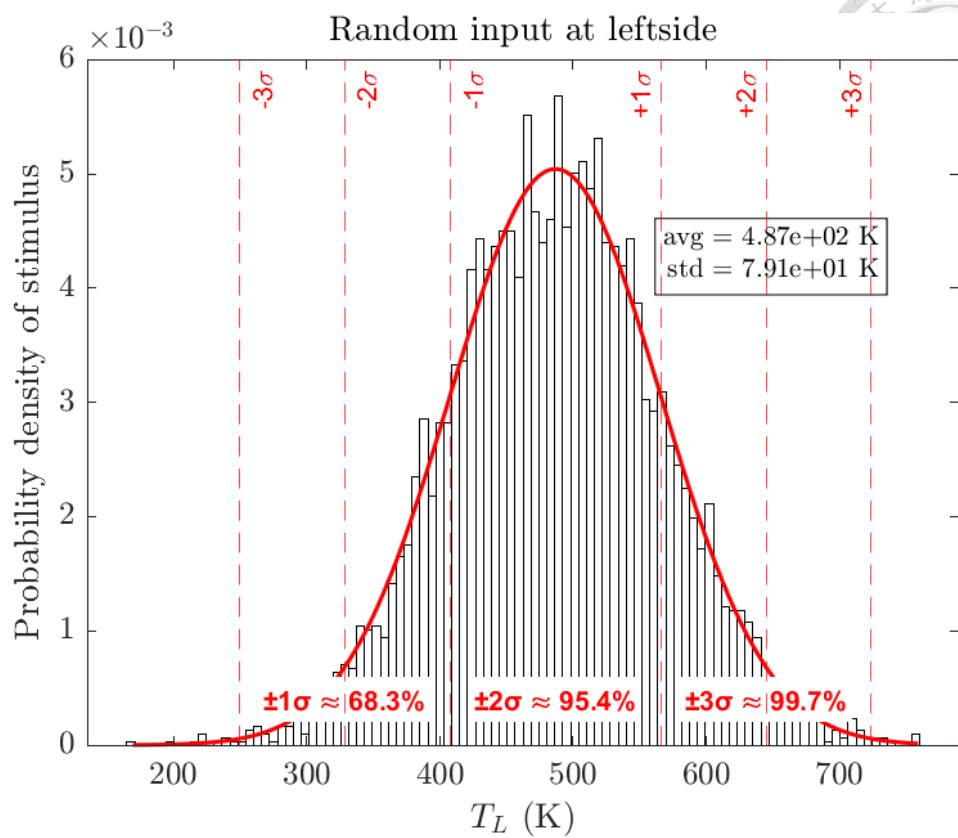


圖 4.6.13 Litz 導線於 $\rho = 0$ 時之左端熱載樣本

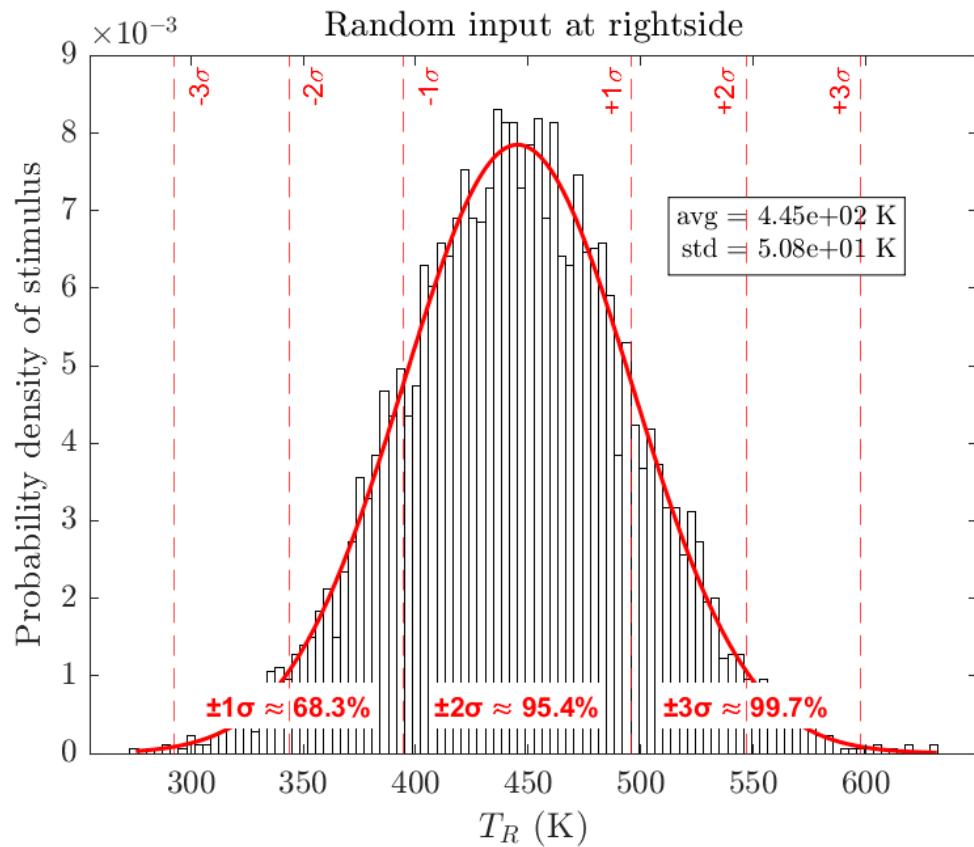


圖 4.6.14 Litz 導線於 $\rho = 0$ 時之右端熱載樣本

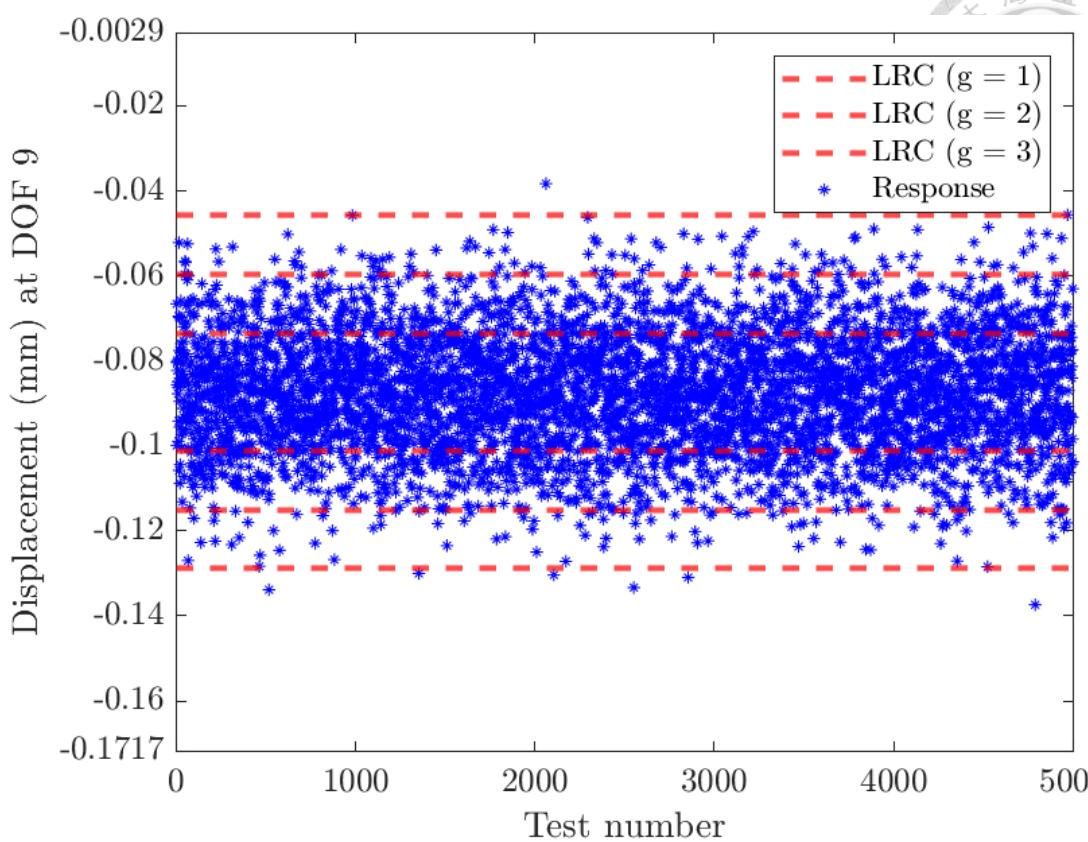


圖 4.6.15 Litz 導線於 $\rho = 0$ 時之 TLRC 預測與驗證結果

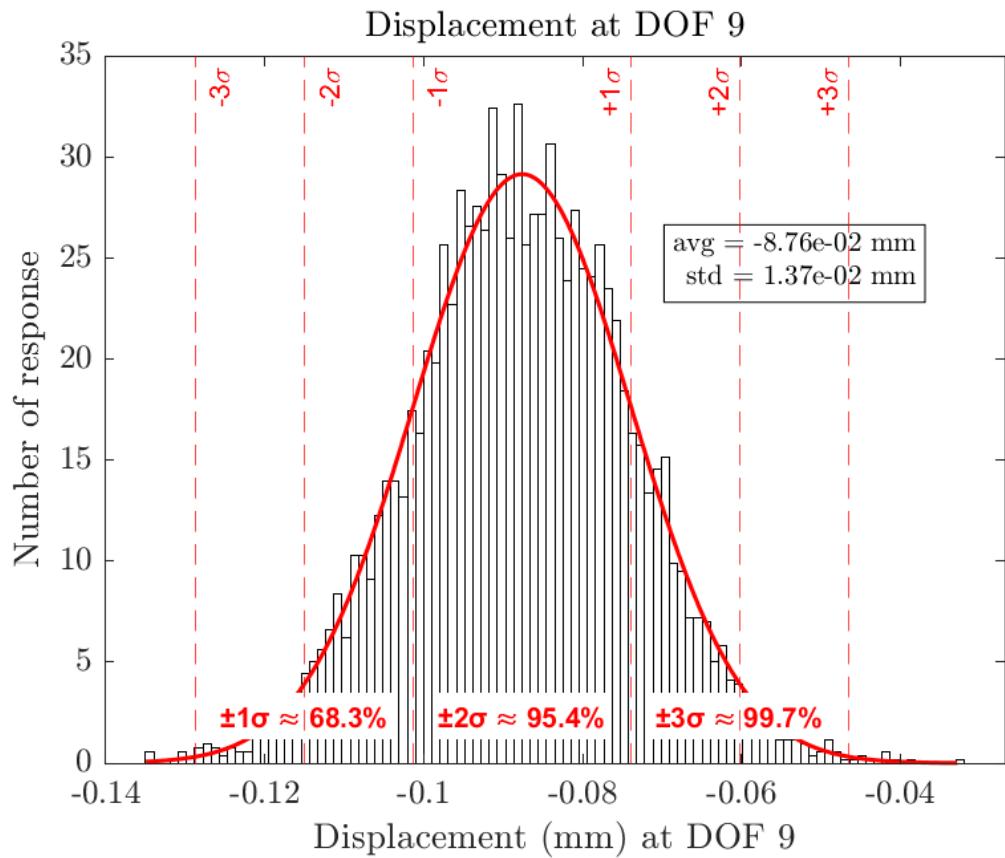


圖 4.6.16 Litz 導線於 $\rho = 0$ 時之數據採集生成響應分布

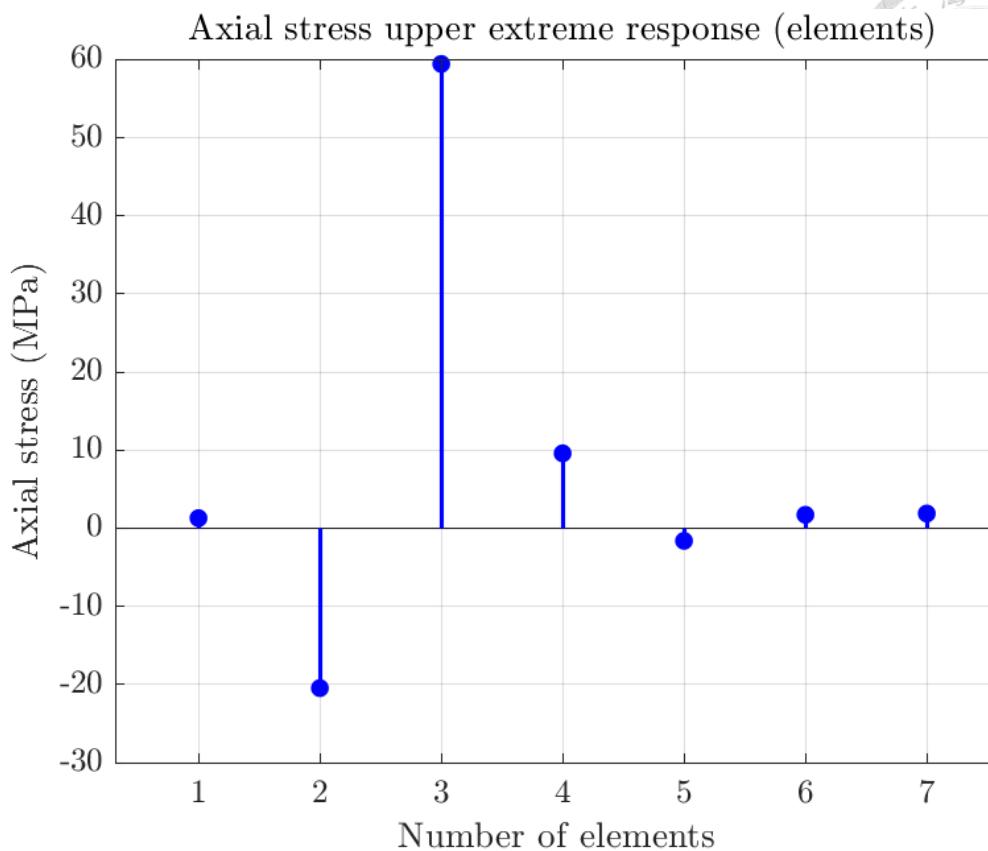


圖 4.6.17 Litz 導線於 $\rho = 0$ 時之正向極值條件下應力響應

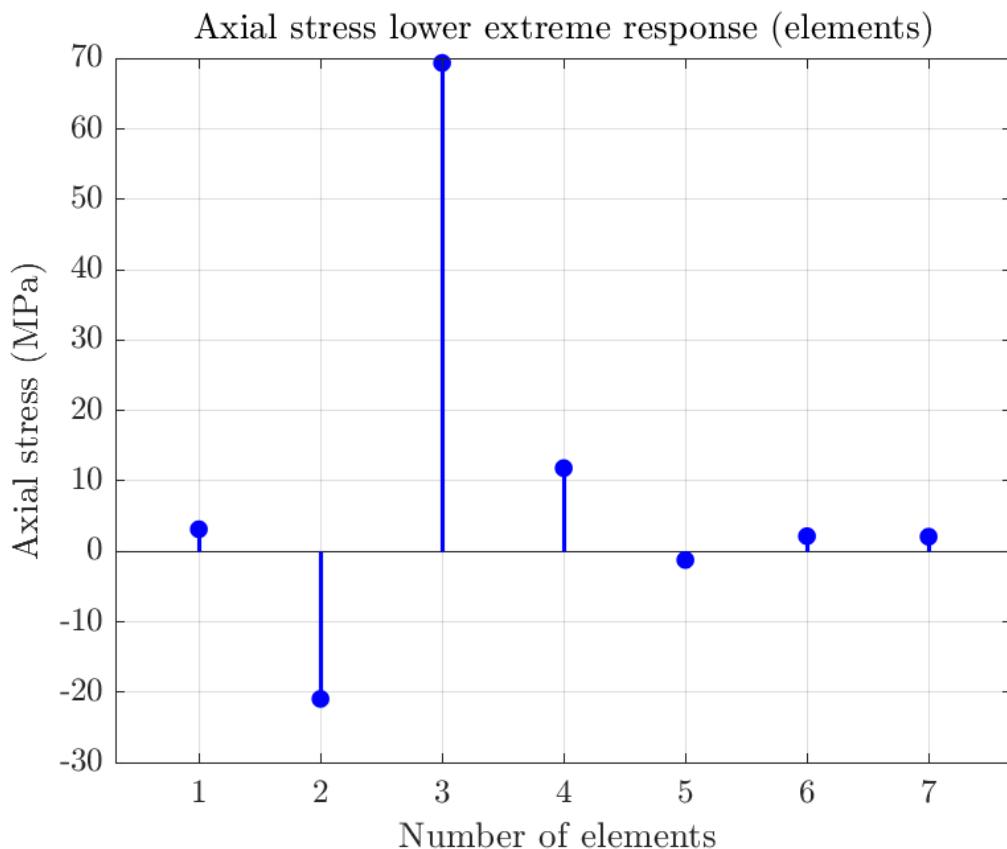


圖 4.6.18 Litz 導線於 $\rho = 0$ 時之負向極值條件下應力響應



4.6.2.3 針對 $\rho = -1$ 热邊界條件下之解析研究

在完全負相關熱邊界條件 ($\rho = -1$) 下，左端溫度 T_L 與右端溫度 T_R 之間呈現顯著反向變動關係，圖 4.6.20 所示的樣本雲圖呈一條負斜率之細長分布，顯示若一端升溫，另一端必然同步降溫，形成強烈的熱梯度。此類邊界條件模擬封裝結構中兩端散熱機制極端不均或熱對流路徑受限所造成的溫差效應。

從 圖 4.5.22 與 圖 4.5.23 可知，左右兩端邊界溫度皆呈高斯分布， T_L 標準差約為 80.1 K ， T_R 則為 50 K ，顯示熱源輸入仍具有統計代表性。此時的溫差分布範圍最大，形成強烈的熱驅動。

熱致位移響應分析結果如 圖 4.6.23 顯示，在負相關熱邊界下，第九自由度之位移樣本依然集中於 TLRC 所預測之 $g = 1\sim 3$ 包絡內，顯示該方法對極端非對稱熱載條件具有良好包容性。響應統計分布如 圖 4.6.24 所示，其平均位移約為 -0.0872 mm ，標準差為 $1.35 \times 10^{-2}\text{ mm}$ ，為三組熱相關係數中最小，顯示儘管在此溫度極端不均的狀況下，位移也會穩定。

進一步根據最大與最小變形樣本進行應力推估，圖 4.6.25 與 圖 4.6.26 顯示軸向應力最大值為 $+80\text{ MPa}$ (張應力) 與 -25 MPa (壓應力)，應力集中仍位於第 2 以及第 3 元素，與前述兩組熱相關條件一致。整體應力分布雖略高於 $\rho = 0$ 條件，但均遠低於銅材料降伏強度 220 MPa ，仍屬可接受安全裕度範圍。

總體而言， $\rho = -1$ 热邊界代表熱梯度最強之不利條件，其對導線彎曲區域產生顯著但可控的熱致應力與變形。此情境提供對應封裝異常熱分布或局部冷卻失效的極限案例模擬，所推估之應力與變形仍處可容許範圍，顯示本設計於強熱耦合下具備良好韌性與散熱穩定性。

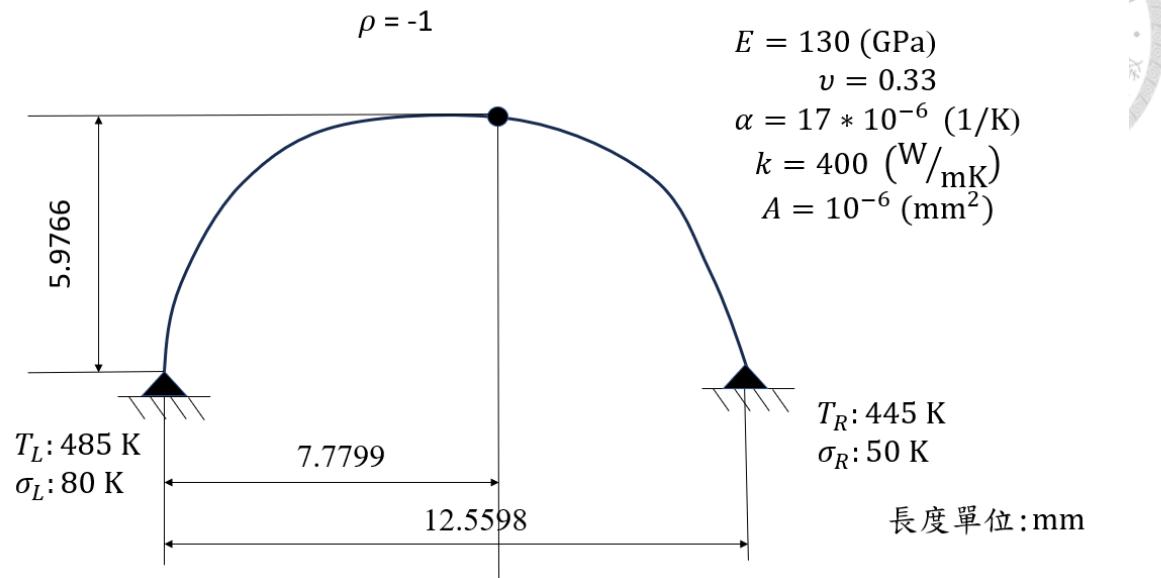


圖 4.6.19 Litz 導線於 $\rho = -1$ 時之熱固耦合分析模型圖

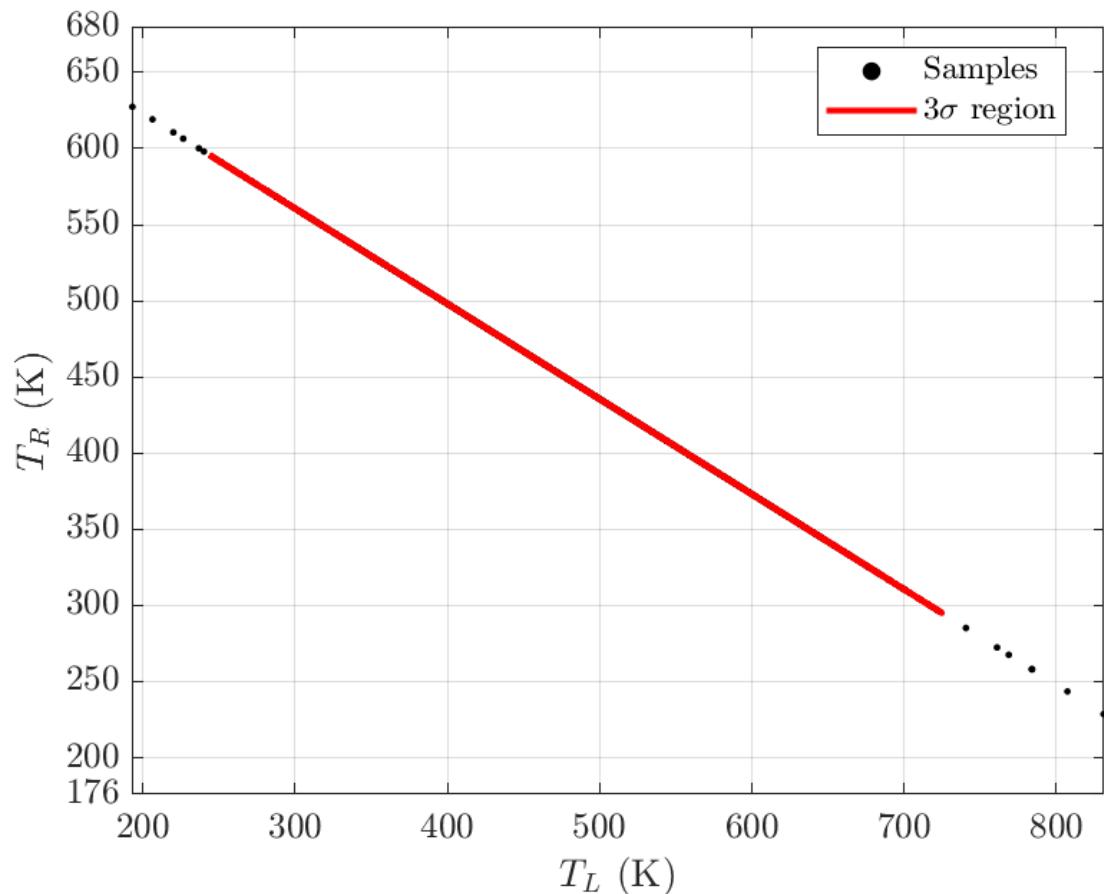


圖 4.6.20 Litz 導線於 $\rho = -1$ 時之熱刺激相關性

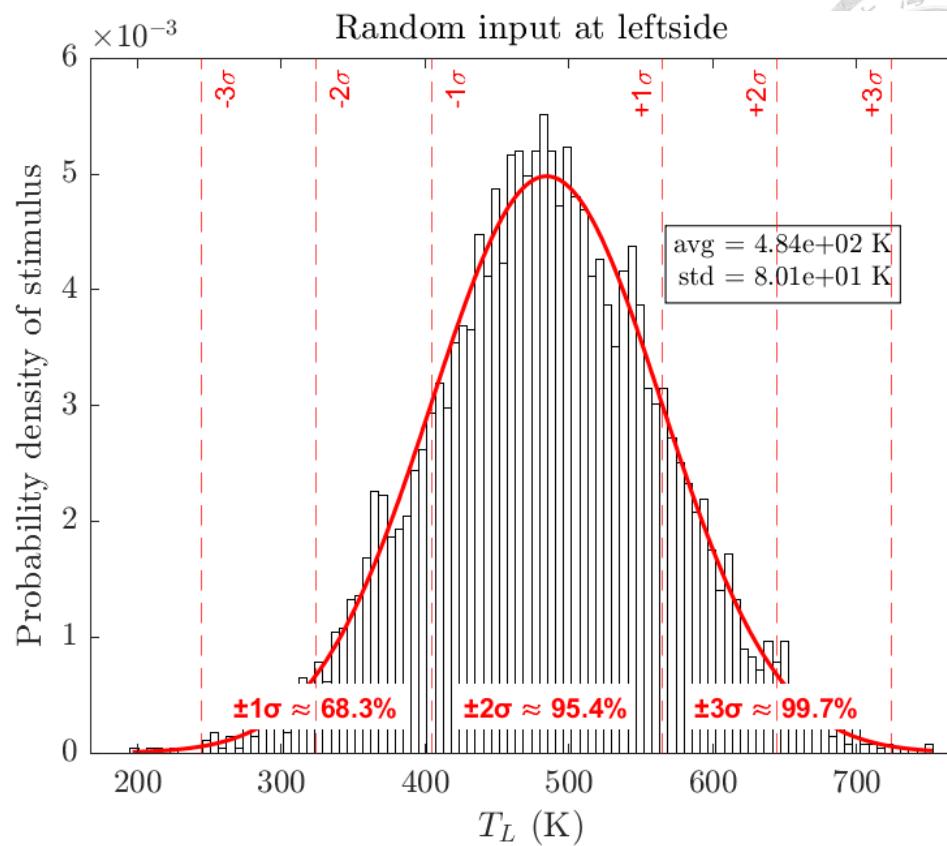


圖 4.6.21 Litz 導線於 $\rho = -1$ 時之左端熱載樣本

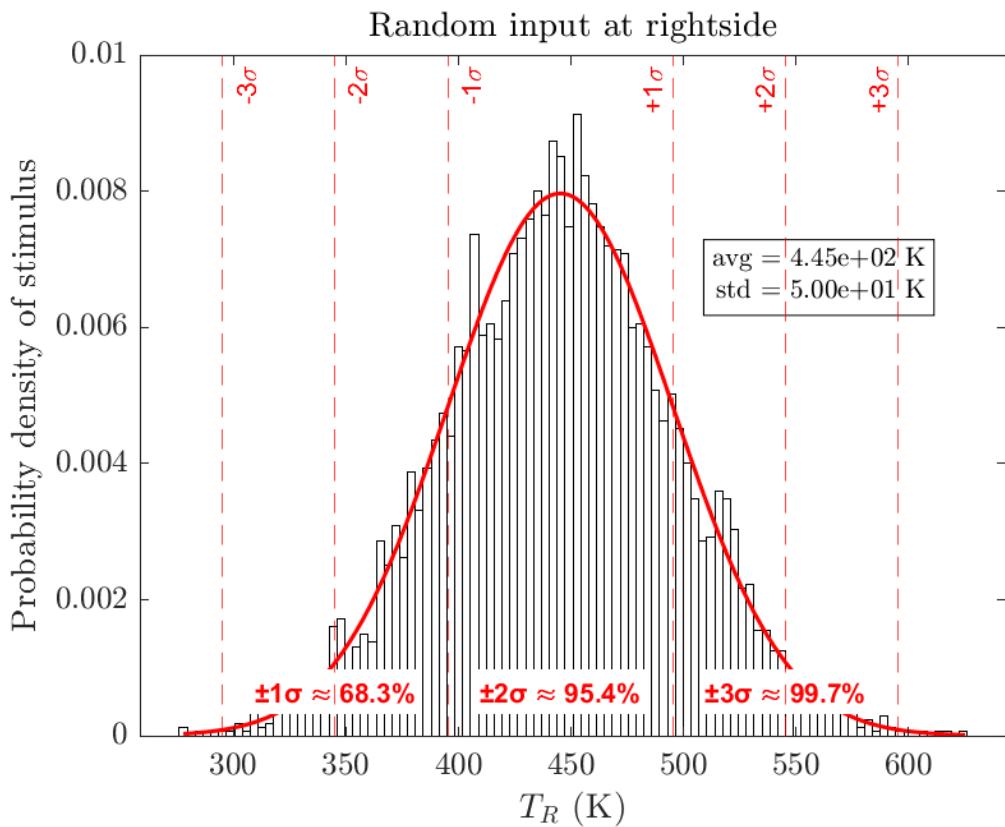


圖 4.6.22 Litz 導線於 $\rho = -1$ 時之右端熱載樣本

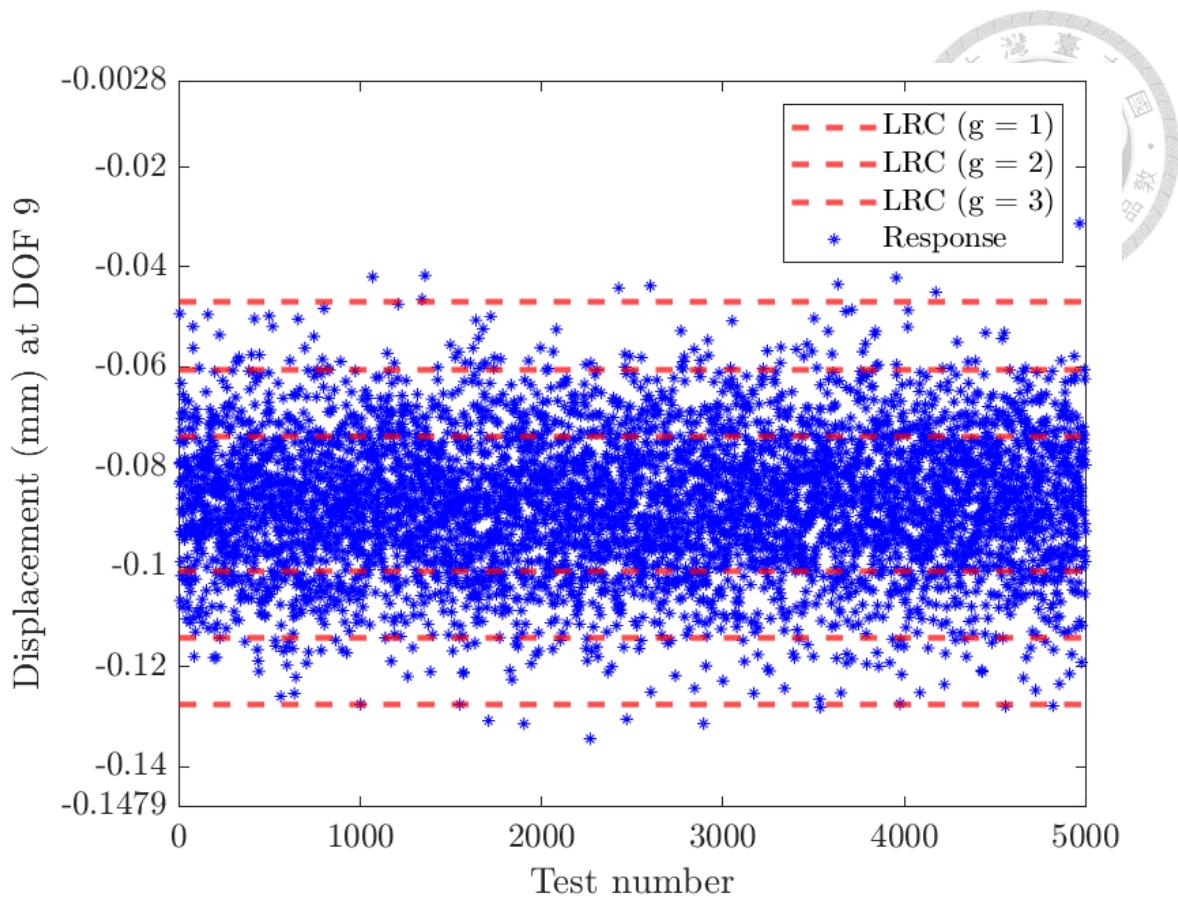


圖 4.6.23 Litz 導線於 $\rho = -1$ 時之 TLRC 預測與驗證結果

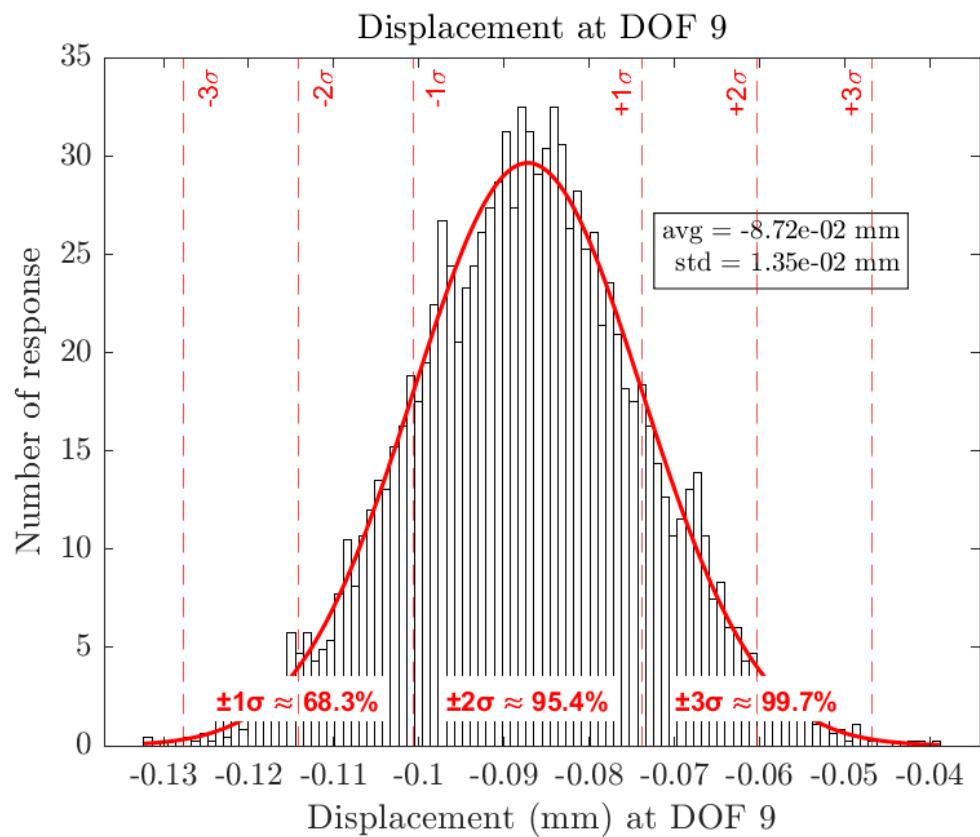


圖 4.6.24 Litz 導線於 $\rho = -1$ 時之數據採集生成響應分布

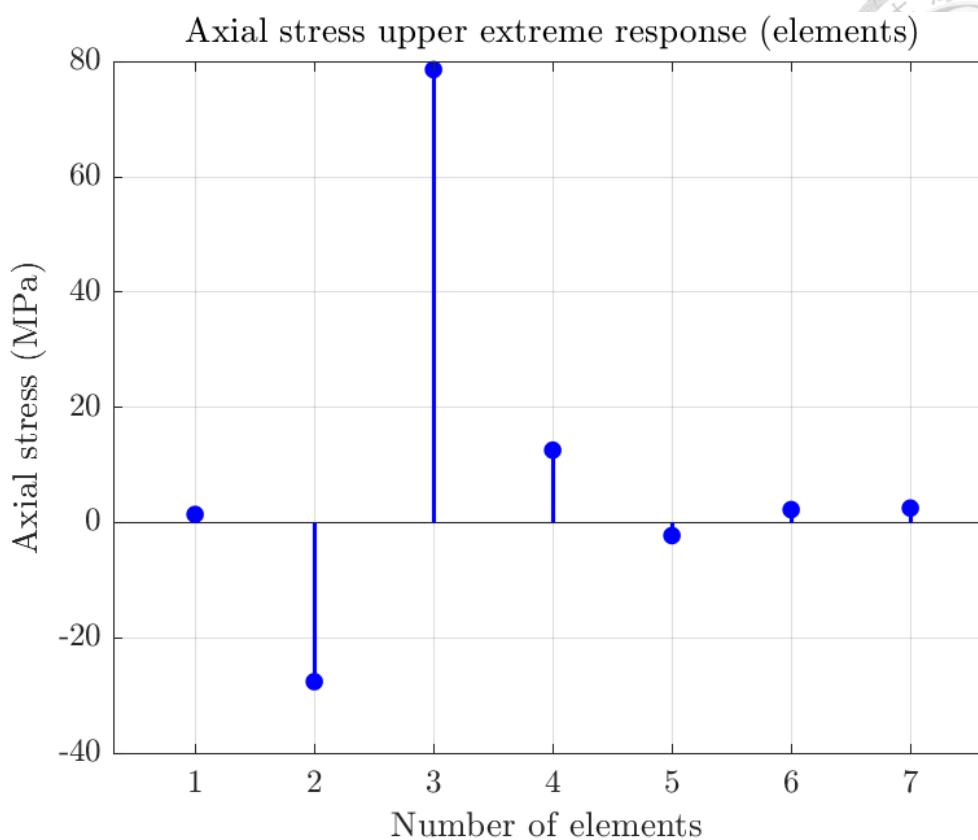


圖 4.6.25 Litz 導線於 $\rho = -1$ 時之正向極值條件下應力響應

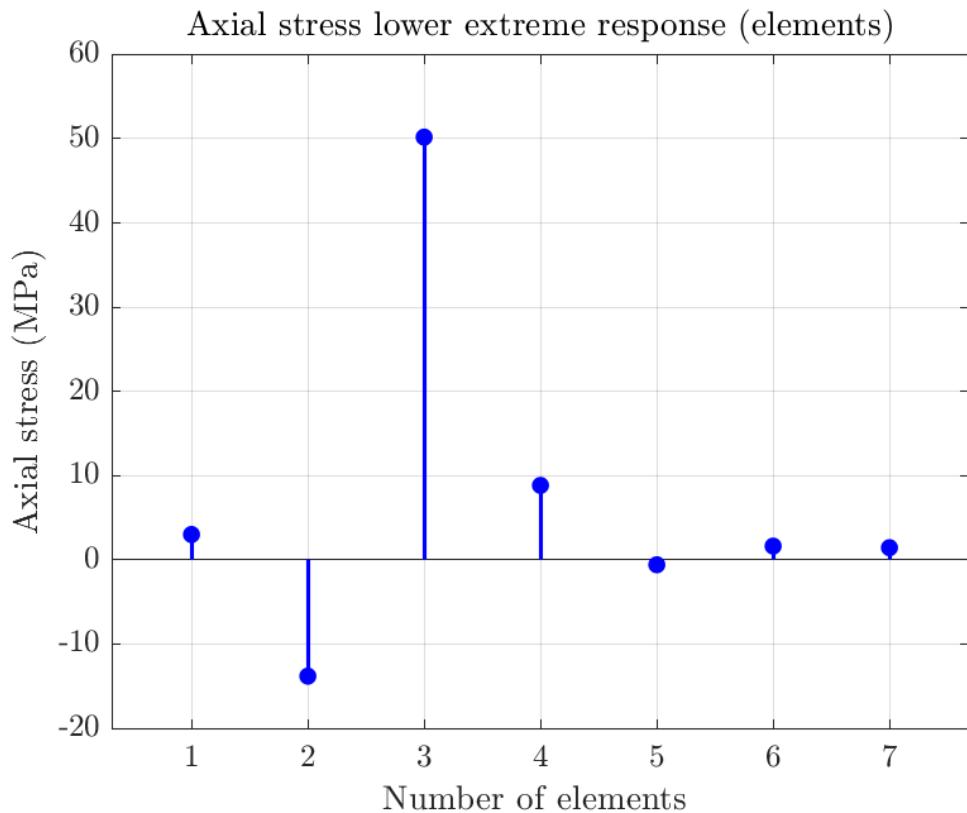


圖 4.6.26 Litz 導線於 $\rho = -1$ 時之負向極值條件下應力響應

第五章 結論與未來展望



5.1 結論

本論文針對熱固耦合系統於隨機熱邊界條件下之極值力學響應問題，發展出一套具備理論嚴謹性與實務可行性之解析力學方法。透過建立有限元素架構、統整熱固耦合弱形式推導與剛度矩陣展開，成功建立二維二力桿件 (Truss) 結構下熱固耦合系統之統一模型。

進一步地，本研究提出一新穎之 TLRC 方法，結合熱輸入統計特性與結構反應共變異結構，能於不需大量樣本模擬下，即能有效預測設計自由度之極值位移範圍，並準確掌握系統內部之應力分布傾向。TLRC 方法展現出高度準確性與數值穩定性，經多個實例驗證，皆能與數據採集模擬結果高度吻合。

此外，本論文針對典型工程應用場景進行實例分析，涵蓋微電子導線、太陽能支架、微橋感測器與航太導線等結構，證實本方法在不同尺度、幾何與材料條件下皆具良好適應性。對於極值條件下所產生之軸向應力亦進行詳細評估，結果顯示所有情況皆能精準評估超出材料降伏極限，顯示本方法具備高可靠性預判能力，有助於預先掌握潛在失效風險與設計安全裕度。

綜上所述，本研究所建立之 TLRC 極值預測方法，不僅能有效應對熱固耦合場下之不確定性影響，亦可應用於具熱擾動之精密結構設計中，對未來在電子封裝可靠度、航太導線布局與能源模組熱設計等領域具高度參考價值，提供工程界一套精簡、有效且具物理意涵之熱固耦合極值評估工具。



5.2 未來展望

本研究針對熱固耦合結構在不確定熱載條件下之極值響應問題，發展出一套具備解析效率與物理直觀性之 TLRC 分析方法，並在多個典型工程應用案例中驗證其有效性與準確性。然而，仍有諸多值得拓展與深化之方向可供後續研究：

首先，在材料模型方面，可延伸至非線性熱彈性、黏彈性或具相變行為之材料體系，進一步探討非線性材料特性對極值響應的影響。其次，在結構類型上，亦可由目前所採用之二力桿件 (Truss) 模型推展至具撓曲效應之樑或板殼結構，以擴展此方法於複雜實構件之適用性。

在物理場方面，可將金屬材料產生的電流熱效應納入考量，並進一步探討雙向耦合問題。在邊界條件層面，為了更加符合兩端節點所有自由度鎖定的邊界條件，靜不定設定是未來深入探討的方向。或者是改變更多型態的物理結構或是施加更多邊界條件於不同的節點上都是未來可以延伸的方向。

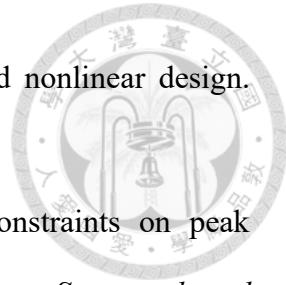
除此之外，為了更加驗證這套分析法的準確度，可利用商用軟體或是實驗架設來進行進一步的鞏固。

在不確定性處理層面，未來可考慮多源輸入（如熱流密度、環境溫度與機械載重等）之聯合機率建模與多變量 TLRC 架構，以更貼近實際工況之複雜性。同時亦可結合機器學習與資料驅動方法，發展自動化響應界限預測模型，提升其於工程設計早期階段之應用價值。

參考文獻

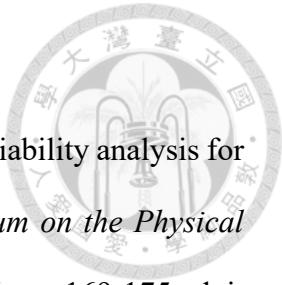


- [1] Kasperski, M. and H.-J. Niemann, The LRC (load-response-correlation)-method a general method of estimating unfavourable wind load distributions for linear and nonlinear structural behaviour. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 1992, 43(1-3), p. 1753-1763.
- [2] Lin, Y., Harmonic Load-Response Correlation Method for Analytical Mechanics Investigation of Random Vibrations. *Dep.ME, National Taiwan University Master Thesis*, 2022
- [3] Biot, M.A., Thermoelasticity and irreversible thermodynamics. *Journal of Applied Physics*, 1956, 27(3), p.240-253.
- [4] Coleman, B. D, & Noll,W. The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1963, 13 (1), p.197-178.
- [5] Eslami, M. R., Hernarski, R. B., Ignaczak, J., Noda, N., Sumi, N., & Tanigawa, Y., *Theory of Elasticity and Thermal Stresses*. Dordrecht: Springer. doi:10.1007/978-94-007-6356-2, 2013.
- [6] Tan, K. H., Toh, W. S., Huang, Z. F., & Phng, G. H. Structural responses of restrained steel columns at elevated temperatures. Part 1: Experiments. *Engineering Structures*, 2007, 29, 1641–1652. doi:10.1016/j.engstruct.2006.12.005
- [7] Usmani, A. S., Rotter, J. M., Lamont, S., Sanad, A. M., & Gillie, M. Fundamental principles of structural behaviour under thermal effects. *Fire Safety Journal*, 2001, 36, 721–744. doi:10.1016/S0379-7112(01)00037-6
- [8] Titulaer, R.H.A., Engineering model for coupled thermomechanical behaviour of steel elements under fire conditions. *Eindhoven University of Technology Graduation Thesis*, 2016



- [9] Kasperski, M., Extreme wind load distributions for linear and nonlinear design. *Engineering Structures*, 1992, 14 (1), p.27-34.
- [10] Wang, C.-K., et al., Structural optimization with design constraints on peak responses to temporally correlated quasi-static load processes. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2019, 59 (2), p.521-538.
- [11] 單片太陽能板支架結構風例分析研究，2016，內政部建築研究所研究報告
- [12] He,Niu, The Effect of Load Properties on the Reliability of Machine Drives-The Temperature and Stress Analysis of Power module Bond Wires, *2017 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE)*, Cincinnati, OH, USA, 2017, pp. 2533-2539, doi: 10.1109/ECCE.2017.8096482.
- [13] G. S. Lakshmi, S. R. Karumuri, G. S. Kondavitee and A. Lay-Ekuakille, Design and Performance Analysis of a Microbridge and Microcantilever-Based MEMS Pressure Sensor for Glucose Monitoring, in *IEEE Sensors Journal*, vol. 23, no. 5, p. 4589-4596, 1 March1, 2023, doi: 10.1109/JSEN.2023.3234594.
- [14] Chang-Chun Lee, Meng-Tse Chen, Jui-Chang Chuang, Process-induced influences on epoxy-based encapsulated reliability of high Power modules, *International Journal of Mechanical Sciences*, Volumes 297–298, 2025
- [15] A. A. Woodworth *et al.*, Thermal Analysis of Potted Litz Wire for High-Power-Density Aerospace Electric Machines,
- [16] Thyssenkrupp Materials (UK), Material Data Sheet Aluminium Alloy 6005A - T6 Extrusion, 2016
- [17] Cree, Inc, CCS020M12CM2 1.2kV, 80 mΩ Silicon Carbide Six-Pack (Three Phase) Module
- [18] M. L. Spencer and R. D. Lorenz, Analysis and In-Situ Measurement of Thermal-Mechanical Strain in Active Silicon Power Semiconductors, *2008 IEEE Industry Applications Society Annual Meeting*, Edmonton, AB, Canada, 2008, p. 1-7, doi:

10.1109/08IAS.2008.360.



- [19] P. Jacob, M. Held and P. Scacco, IGBT power semiconductor reliability analysis for traction application, *Proceedings of 5th International Symposium on the Physical and Failure Analysis of Integrated Circuits*, Singapore, 1995, p. 169-175, doi: 10.1109/IPFA.1995.487618.
- [20] 王建凱，有限元素法課程講義，2024，機械工程學研究所，國立臺灣大學
- [21] Cadence Design Systems, Inc, A temperature profile of 3D structures inside a package with metal interconnects, as generated by Cadence Celsius Thermal Solver, 2019.

附錄

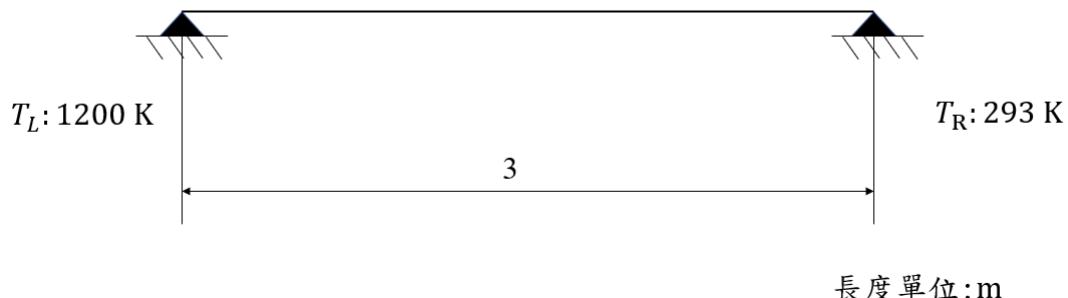


為驗證本研究方法之準確性與可行性，本文於附錄中整理並引用文獻中[8]動態求解之結果，於時間步進為 0.5 秒之設定下，擷取 15000 秒、100000 秒及 150000 秒三個時間點之溫度分布，並與本研究之穩態求解結果進行比較。所採對比模型為長度三公尺、劃分為 60 個元素之靜不定支撐結構，並且左右端溫度分別為 1200K 以及 293，具代表性之邊界條件設定可作為穩定性分析之依據。材料性質方面，該文獻為了探討鋼構構件於火災載況下之熱反應行為，模型則以鋼材作為基材。

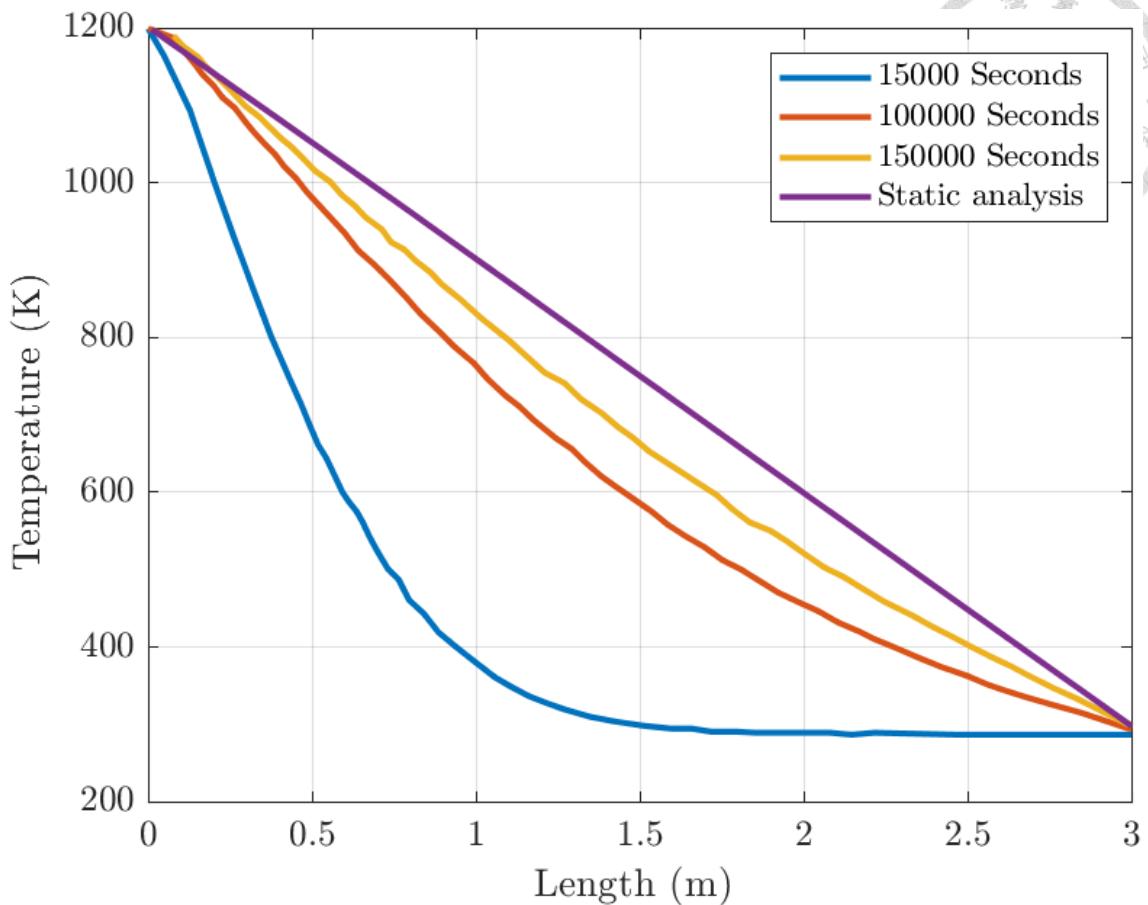
材料性質設定如下：

- 楊氏模數： $E = 210 \text{ GPa}$
- 热膨胀係數： $\alpha = 11 \times 10^{-6} / \text{K}$
- 热傳導係數： $k = 43 \text{ W/mK}$
- 導線截面積： $A = 10^{-6} \text{ mm}^2$

$$\begin{aligned}E &= 210 \text{ (GPa)} \\v &= 0.33 \\ \alpha &= 11 * 10^{-6} \text{ (1/K)} \\k &= 43 \text{ (W/mK)} \\A &= 10^{-6} \text{ (mm}^2\text{)}\end{aligned}$$



附圖 1 分析模型圖



附圖 2 文獻中動態求解之溫度分布

由於本研究所採用之穩態分析方法可於無需時間步進的條件下直接求得最終穩態解，故可與文獻中以動態分析所計算之長時間結果進行對照。觀察可知，動態解隨時間推進最終將趨近本研究穩態解，此一致性結果亦間接驗證本方法之正確性與適用性。