

國立台灣大學工學院機械工程學系



博士論文

Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Doctoral Dissertation

基於橢圓傅立葉描述子之平面與球面四連桿機構運動

合成

Kinematic Synthesis of Planar and Spherical Four-Bar

Linkages Using Elliptical Fourier Descriptors

張元

Yuan Chang

指導教授：李志中 博士

Advisor: Jyh-Jone Lee, Ph.D.

中華民國 113 年 5 月

May, 2024

國立臺灣大學博士學位論文
口試委員會審定書
PHD DISSERTATION ACCEPTANCE CERTIFICATE
NATIONAL TAIWAN UNIVERSITY



(論文中文題目) (Chinese title of PhD dissertation)

基於橢圓傅立葉描述子之平面與球面四連桿機構運動合成

(論文英文題目) (English title of PhD dissertation)

Kinematic Synthesis of Planar and Spherical Four-Bar Linkages Using
Elliptical Fourier Descriptors

本論文係 張元 (姓名) D08522005 (學號) 在國立臺灣大學 機械工程學 (系/所/學位學程) 完成之博士學位論文，於民國 113 年 5 月 22 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明。

The undersigned, appointed by the Department / Institute of Mechanical Engineering on 22 (date) 5 (month) 2024 (year) have examined a PhD dissertation entitled above presented by Yuan Chang (name) D08522005 (student ID) candidate and hereby certify that it is worthy of acceptance.

口試委員 Oral examination committee:

李志中

(指導教授 Advisor)

徐冠倫

劉文賓

張秉純

蘇育偉

系主任/所長 Director:

誌謝



能夠完成這篇論文，要先感謝我的指導老師李志中教授。在做研究的時候，老師幫助我從不同的面向思考，檢視理論中的問題，找到更好的解決方法。另外，在編修投稿論文和畢業論文時，也逐漸培養我的研究表達能力，能把眾多的素材整合，使現在的研究呈現的更完善。另外，也很感謝老師安排參加比賽、會議論文和產學計畫活動，加強我們的實力。

也感謝口試委員詹魁元教授、蘇偉儒教授、徐冠倫教授、張秉純教授和謝文賓教授能參與我的學位考試，給予我指導、建議和反饋，協助我完成這一階段的學術旅程。並感謝詹魁元教授和蘇偉儒教授，在我修習最佳設計和機器動力學課程期間的基本理論指導。

在研究室的生活，首先感謝第一次遇到的成員：勉力、仁蔚、辰揚、仲暉、聖嘉、佳蓮、健倫，帶我認識學校和系所周邊的環境，讓我可以快速融入新的氛圍。還有頭兩屆遇到的好夥伴：Jordan、奕瑄、詠珈、倩如、俞程、旻致，雖然我和大家都是比較慢熟的人，但是最後可以一起參與爬山、郊遊、聚餐等許多課餘時間的活動，畢業後仍常常聚餐聯絡感情。第三屆的學弟妹：柔均、名字、柏翔、昱辰，平常都會陪我尋找學校周邊好吃的餐廳，畢業後也很支持我的學業。第四屆的學弟妹：嘉玲、季妍、易璇、奕安，在學期間分享了彼此求學和找工作的心得，尤其特別感謝嘉玲協助我的論文研究。第五屆的學弟妹：緯霖、祐聆、雨蓓，雖然相處的時間較短，但感謝大家在生活中有許多交集，讓最後一學期的壓力不會這麼大。另外，感謝在進行振鋒計畫的期間，大學長勉力與曾經合作過的學弟妹：倩如、旻致、柔均、名字、嘉玲與季妍的幫助，讓這系列計畫可以步步邁進。

最後，非常感謝家人和女朋友在求學階段的全力支持，讓我完成這篇論文。

基於橢圓傅立葉描述子之平面與球面四連桿機構運動

合成

研究生：張元

指導教授：李志中 博士

摘要

在機構設計領域，連桿機構的尺度合成對於精確控制機械運動至關重要。本研究將聚焦於平面與球面四連桿機構的尺度合成。傳統的傅立葉描述子 (Fourier Descriptors, FD) 的複數坐標在描述空間曲線時存在限制。因此，我們引入橢圓傅立葉描述子 (Elliptical Fourier Descriptors, EFD) 作為新的形狀表示法，以提高描述的準確性和通用性。EFD 通過本研究改良後的正規化係數取得幾何不變性，使用傅立葉功率分析自動選擇諧波數，並可擴展至空間曲線。本研究採用圖集與差分進化法進行數值最佳化，對機構尺度進行最佳化設計。通過各種耦桿曲線和合成條件的測試，我們實現了更精確的路徑生成與剛體導引。以平面與球面四連桿機構為例，多種案例分析表明，EFD 能有效解決開放曲線與空間曲線的描述問題，驗證了方法的有效性。研究創新點在於首次將 EFD 應用於機構合成領域，解決了 FD 在描述複雜曲線時的局限性。此外，本研究還提出了一種新的開放曲線描述方法，其精確性和效率相較於過往方法有顯著提升。

關鍵字：橢圓傅立葉描述子、傅立葉分析、四連桿機構、路徑生成、剛體導引



Kinematic Synthesis of Planar and Spherical Four-Bar Linkages Using Elliptical Fourier Descriptors



Student: Yuan Chang

Advisor: Jyh-Jone Lee. Ph.D.

Abstract

In mechanism design, dimensional synthesis of linkages is crucial for precisely controlling mechanical motion. This study focuses on the dimensional synthesis of planar and spherical four-bar linkages. The complex coordinates of conventional Fourier Descriptors (FD) have limitations in describing spatial curves. Therefore, we introduce Elliptical Fourier Descriptors (EFD) as a new shape representation to enhance accuracy and generality. EFD achieves geometric invariance through improved normalization coefficients in this study, automatically selects the number of harmonics using Fourier power analysis, and can be extended to spatial curves. Numerical optimization of linkage dimensions is conducted using atlas-based and differential evolution methods. Through tests on various coupler curves and synthesis conditions, we verified path generation and rigid body guidance can be achieved efficiently and precisely through EFD. Using planar and spherical four-bar linkages as examples, multiple case studies demonstrate that EFD effectively addresses the description issues of open and spatial curves, validating the method's effectiveness. The innovation of this research lies in the first application of EFD in the field of linkage synthesis, overcoming the limitations of FD in describing complex curves. Additionally, a new method for describing open curves is proposed in this study, which significantly improves accuracy and efficiency compared to previous methods.

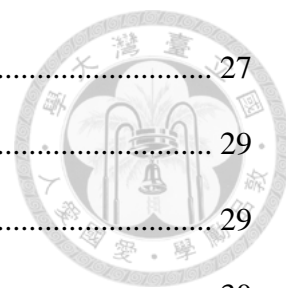
Keywords: Elliptical Fourier Descriptors, Fourier Analysis, Four-Bar Linkages, Path Generation, Rigid-Body Guidance

目次

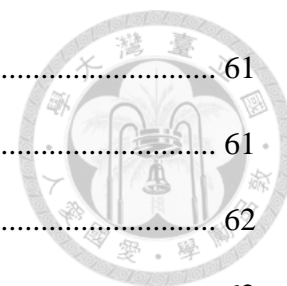


口試委員審定書	i
誌謝	ii
摘要	iii
Abstract.....	iv
圖次	viii
表次	xi
符號表	xiii
第 1 章 緒論	1
1.1 前言	1
1.2 文獻回顧	2
1.2.1 傅立葉分析方法	2
1.2.2 數值最佳化方法	5
1.3 研究動機與目的	6
1.4 論文架構	7
第 2 章 橢圓傅立葉描述子	8
2.1 封閉曲線描述	8
2.2 圖形正規化	11
2.3 空間描述與正規化	13
2.4 傅立葉功率分析	15
2.5 開放曲線描述	17
2.5.1 三角函數多項式曲線擬合法	18
2.5.2 往復描述法	22
2.6 係數比較	25

2.7	小結	27
第 3 章 平面與球面四連桿機構		29
3.1	平面四連桿機構	29
3.1.1	耦桿曲線計算	30
3.1.2	連桿分類	31
3.1.3	去正規化	32
3.1.4	剛體導引機構	33
3.2	球面四連桿機構	34
3.2.1	耦桿曲線計算	34
3.2.2	等效連桿分類	37
3.2.3	去正規化	39
3.3	小結	40
第 4 章 合成方法		41
4.1	圖集資料庫	41
4.2	數值最佳化	43
4.2.1	差分進化法	45
4.3	改良距離誤差法	48
4.3.1	正規化時間參數	48
4.3.2	目標函數設計	50
4.4	平面剛體導引	51
4.4.1	時間導引與運動標記	53
4.4.2	多目標最佳化	56
4.4.3	距離誤差法	59
4.5	小結	60



第 5 章 案例探討	61
5.1 實驗架構	61
5.2 封閉曲線路徑生成	62
5.2.1 範例 1-1	62
5.2.2 範例 1-2	64
5.2.3 範例 1-3	66
5.2.4 範例 1-4	68
5.2.5 範例 1-5	69
5.3 開放曲線路徑生成	71
5.3.1 範例 2-1	72
5.3.2 範例 2-2	73
5.4 封閉曲線片段路徑匹配	74
5.4.1 範例 3-1	74
5.4.2 範例 3-2	76
5.4.3 範例 3-3	77
5.5 改良距離誤差合成	78
5.6 平面四連桿剛體導引	80
5.6.1 改良距離誤差剛體導引	85
第 6 章 結論與未來展望	90
6.1 結論	90
6.2 未來展望	91
參考文獻	92
附錄 I 離散點坐標近似至 EFD 係數推導	98
附錄 II 往復開放曲線簡化 EFD 係數證明	100



圖次

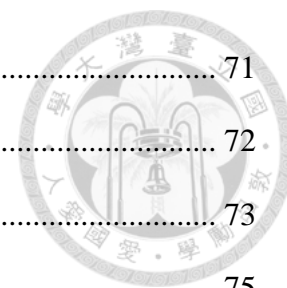


圖 1-1 通過 FFT 得到的 FD 係數分布示意圖(a)原始係數(b)填充後的係數.....	3
圖 1-2 以 FD 描述並重建出更多點的封閉圖形.....	3
圖 1-3 在路徑生成時套用形狀表示法的流程.....	6
圖 2-1 通過近似法得到的 EFD 係數分布示意圖.....	9
圖 2-2 使用(a) 1 個、(b) 2 個、(c) 3 個和(d) 4 個諧波係數重建出的圖形.....	10
圖 2-3 平面橢圓傅立葉分析的幾何意義.....	11
圖 2-4 奇偶項係數方向正規化示意圖.....	12
圖 2-5 空間橢圓傅立葉分析的幾何意義.....	14
圖 2-6 空間中橢圓平面的旋轉.....	15
圖 2-7 諧波數過多的傅立葉描述子重建之示意圖.....	16
圖 2-8 以(a) 7 諧波數(b) 9 諧波數進行 TPCF 的完整重建.....	20
圖 2-9 開放曲線使用(a) EFD 和(b) FD 方法擬合重建.....	22
圖 2-10 開放曲線的往復描述於(a)平面與(b)球面.....	23
圖 2-11 往復模型的橢圓向量於(a)平面與(b)空間.....	24
圖 2-12 往復描述法與擬合法 (a) EFD 與(b) FD 的重建比較.....	25
圖 2-13 平均距離誤差計算方式.....	27
圖 2-14 離散點轉為正規化係數之流程.....	28
圖 3-1 平面四連桿機構參數與兩種配置產生的耦桿曲線(a)迴路 I 和(b)迴路 II.....	29
圖 3-2 四連桿(a)兩種開放耦桿曲線以及(b)四種耦桿曲線.....	32
圖 3-3 平面四連桿剛體導引模型.....	33
圖 3-4 球面四連桿機構參數.....	34
圖 3-5 球心位於原點的球面四連桿機構.....	35
圖 3-6 球面四連桿機構兩種配置產生的曲線(a)迴路 I (b)迴路 II.....	36
圖 3-7 單自由度連桿機構的泛化合成能力.....	40

圖 4-1 建立圖集的流程.....	42
圖 4-2 使用圖集的流程.....	43
圖 4-3 目標函數流程圖.....	45
圖 4-4 差分進化法與目標函數流程圖.....	47
圖 4-5 透過正規化時間參數重建的點位置.....	49
圖 4-6 透過 EFD 改良距離誤差合成流程圖.....	50
圖 4-7 連續運動表示.....	51
圖 4-8 連續向量在 EFD 描述時蜷曲的示意圖.....	52
圖 4-9 運動標記.....	52
圖 4-10 時間導引的重建證明(a)對應位置重建(b)連續重建.....	54
圖 4-11 運動標記產生流程圖.....	55
圖 4-12 帕雷托前緣的更新方式.....	57
圖 4-13 三項適應值之帕雷托前緣.....	58
圖 4-14 帕雷托前緣集合在最佳化之狀態變化.....	58
圖 4-15 距離誤差剛體導引流程圖.....	59
圖 4-16 合成類型組合.....	60
圖 5-1 範例分類.....	61
圖 5-2 範例 1-1 的曲線比較.....	63
圖 5-3 範例 1-1 的合成機構簡圖.....	63
圖 5-4 範例 1-2 的曲線比較.....	65
圖 5-5 範例 1-2 的合成機構簡圖.....	66
圖 5-6 範例 1-3 的曲線比較.....	67
圖 5-7 範例 1-3 的合成機構簡圖.....	67
圖 5-8 範例 1-4 的合成機構簡圖.....	69
圖 5-9 範例 1-5 的曲線比較：(a) x - y 平面(b) x - z 平面(c)透視圖.....	71



圖 5-10 範例 1-5 的合成機構簡圖	71
圖 5-11 範例 2-1 的合成機構簡圖	72
圖 5-12 範例 2-2 的合成機構簡圖	73
圖 5-13 範例 3-1 的曲線比較	75
圖 5-14 範例 3-1 的合成機構簡圖	75
圖 5-15 範例 3-2 的合成機構簡圖	76
圖 5-16 範例 3-3 的合成機構簡圖	78
圖 5-17 範例 4-1 的合成機構簡圖	79
圖 5-18 範例 4-2 的合成機構簡圖	80
圖 5-19 範例 5-1 的目標運動標記與對應位置重建的圖形	81
圖 5-20 範例 5-2 的目標運動標記與對應位置重建的圖形	82
圖 5-21 範例 5-1 的曲線比較	83
圖 5-22 範例 5-1 的合成機構簡圖	83
圖 5-23 範例 5-2 的曲線比較	84
圖 5-24 範例 5-2 的合成機構簡圖	84
圖 5-25 範例 5-1 的目標曲線在合成後對應位置的重建	86
圖 5-26 範例 5-1 的距離誤差合成曲線比較	86
圖 5-27 範例 5-1 的距離誤差合成機構簡圖	87
圖 5-28 範例 5-2 的目標曲線在合成後對應位置的重建	88
圖 5-29 範例 5-2 的距離誤差合成曲線比較	88
圖 5-30 範例 5-2 的距離誤差合成機構簡圖	89

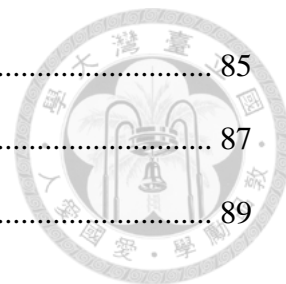


表次



表 3-1 平面四連桿機構的運動範圍	31
表 3-2 球面四連桿機構桿長化簡的測試數據[53]	38
表 4-1 四連桿設計變數的採樣範圍	41
表 4-2 四連桿合成時的設計變數	44
表 4-3 差分進化法與合成使用的參數	48
表 5-1 範例 1-1 的目標點	62
表 5-2 範例 1-1 的連桿參數	63
表 5-3 範例 1-1 的 EFD 係數數值	64
表 5-4 範例 1-2 的目標曲線[57]	65
表 5-5 範例 1-2 的連桿參數	66
表 5-6 範例 1-3 的連桿參數	67
表 5-7 範例 1-3 的 EFD 係數數值	68
表 5-8 範例 1-4 的連桿參數	69
表 5-9 範例 1-5 的連桿參數	71
表 5-10 範例 2-1 的連桿參數	72
表 5-11 範例 2-2 的連桿參數	74
表 5-12 範例 3-1 的連桿參數	75
表 5-13 範例 3-2 的連桿參數	76
表 5-14 範例 3-3 的目標點	77
表 5-15 範例 3-3 的連桿參數	78
表 5-16 範例 4-1 的連桿參數	79
表 5-17 範例 4-2 的連桿參數	80
表 5-18 範例 5-1 的目標運動[43]	81
表 5-19 範例 5-1 的連桿參數	83

表 5-20 範例 5-2 的連桿參數.....	85
表 5-21 範例 5-1 的距離誤差合成連桿參數.....	87
表 5-22 範例 5-2 的距離誤差合成連桿參數.....	89



符號表



本論文中的符號遵循以下規則：向量、坐標、複數坐標與其函數以粗體表示；變數、純量與函數以純文字表示；矩陣與轉置記號以大寫正體表示；下標中的文字記號以正體表示。僅在局部段落出現之符號，本表不會列出。

$a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n$	第 n 項諧波的係數
A_0, C_0, E_0	EFD 係數的常數項係數，作為形心坐標
A, B, X	線性方程的係數矩陣、常數矩陣，以及未知數矩陣
$E, E(X)$	EFD 誤差函數與誤差值，同最佳化的目標函數與適應值
E_{avg}	平均距離誤差
E_{atlas}	圖集法的誤差值
E_{dist}	改良距離誤差法的誤差函數與誤差值
E_{motion}	運動標記的誤差函數與誤差值
$E_{\text{motion,MOO}}$	使用多目標最佳化的運動標記目標函數，有 3 項適應值
$E_{\text{motion,dist}}$	運動標記搭配改良距離誤差法的誤差函數與誤差值
F	差分進化法 (DE) 的差分權重
$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$	朝向各全域坐標軸 x 、 y 和 z 的單位向量
j	複數的虛部單位 $\sqrt{-1}$
l_1, l_2, l_3, l_4, l_5	機構中桿件的長度或球面弧角（徑度）
$l_1^*, l_3^*, l_4^*, l_5^*$	正規化平面四連桿機構的桿件的長度
l_{\min}, l_{\max}	在最佳化中每一桿件的長度或球面弧角的範圍
$m, -m$	FD 總諧波數的一半，有正負向之分
M	FPA 簡化前 EFD 的初始諧波數
n, N	諧波數索引與總諧波數
O	坐標系原點
O_s	機構球心坐標



p, K	離散點索引與總點數
$P(t)$	任意曲線的函數，輸入時間參數後得到點坐標
p_1, p_2, p_3, p_4, p_5	機構中旋轉接頭的坐標， p_5 為耦桿點
P_1, P_2, P_3, P_4, P_5	球面四連桿機構每一接頭與耦桿點相對於球心的向量
$Q_p, Q(t)$	運動標記中曲線加上向量的延伸點，以及它的函數
r	機構球半徑
$R_{\phi e}$	軸角表示法的旋轉矩陣，為一純量轉角 ϕ 與單位向量 e 構成
${}^b R_a$	從 a 向量方向轉到 b 向量方向的旋轉矩陣
R_{coupler}	耦桿點軸向向量 P_5 在球面耦桿上的局部坐標系旋轉
R_{sphere}	從 z 軸旋轉至球面機構原點 P_1 的旋轉矩陣
s	縮放係數
S_n	第 n 項諧波的傅立葉頻譜
t	時間參數
t_p	第 p 點的時間參數
$t_{p,\text{norm}}$	第 p 點的正規化時間參數
$t_{p,\text{FD}}$	第 p 點的 FD 時間參數
$V_p, V(t)$	運動標記中的向量，以及它的函數
u_n, v_n	第 n 諧波係數所組成的餘弦項向量與正弦項向量
$u_{1,\text{norm}}, v_{1,\text{norm}}$	第一項諧波的正規化向量，分別為橢圓的半長軸與半短軸
$x(t), y(t), z(t)$	任意曲線在 x 、 y 、 z 分量上的函數
x_p, y_p, z_p	第 p 點的 x 、 y 、 z 坐標
X	最佳化中的設計變數集合
$X_{\text{best}}, X_{\text{current best}}$	最佳設計變數集合與當前最佳設計變數集合
$\ X\ _p$	高維向量的 L_p -範數
y	多目標最佳化的適應值向量

α_n	FD 的複數係數，包含 a_n 和 b_n 兩項係數
α	機構中地桿相對於水平的夾角
β	輸入角，機構中驅動桿相對於地桿的夾角
β_a, β_b	封閉曲線片段匹配中，兩個用來分割耦桿曲線的輸入角
δ	機構中從動桿相對於地桿的夾角
γ	機構中耦桿點與耦桿的夾角
$\Delta x_p, \Delta y_p, \Delta z_p, \Delta L_p$	第 p 和第 $p + 1$ 點沿著分/合量方向的距離
$\epsilon, \angle \epsilon$	剛體導引機構的耦桿向量，以及它在耦桿上的角度
ζ_n	正規化中奇偶項的校正係數
η, φ	球面機構原點 p_1 相對於球心的極角與方位角坐標
θ_1, θ_n	第一與第 n 項諧波的相位角
ψ, R_ψ	EFD 正規化時圖形的平面旋轉，以及其平面/空間旋轉矩陣



第1章 緒論



1.1 前言

連桿機構的尺度合成是一門涉及機械設計與製造的重要領域，其應用範疇涵蓋了各種系統的設計與優化。在現代工程中，連桿機構被廣泛應用於機器人[1]、醫療器械[2]、汽車工業[3]、航太技術以及其它許多領域。透過對連桿機構的運動分析，能夠設計出具有特定運動軌跡和性能的機械系統，從而實現各種功能需求。其中最具代表性的機構便是平面與球面四連桿機構，前者構成了單自由度多連桿機構裡最小的可運動構型；後者則是在單自由度球關節中扮演不可或缺的角色，影響了摺紙機構的理論發展。四連桿機構的尺度合成主要有三個目標，分別是函數生成 (Function Generation)、路徑生成 (Path Generation) 及剛體導引 (Rigid Body Guidance)，其中剛體導引又稱運動生成 (Motion Generation)。函數生成欲找到輸入桿 (Input Link) 與輸出桿 (Output Link) 特定擺動關係的桿件尺寸；路徑生成則是需要耦桿點 (Coupler Point) 通過指定路徑；剛體導引延伸了路徑生成的概念，必須使耦桿點上的一向量通過指定路徑與向量方向的要求。

過往研究在合成四連桿機構時，常常直接將終端輸出的數據與目標數據進行比較，例如將所有離散點坐標之間的距離誤差 (Distance Error) 加總，然後對誤差進行數值最佳化 (Numerical Optimization) 調整作為設計變數 (Design Variables) 的機構尺度，以獲得設計結果。然而，這種方式存在一些缺點，例如累積誤差、受幾何狀態的影響以及機構缺陷 (Defect) 等問題。因此，現今的尺度合成問題已轉為使用形狀表示法 (Shape Representation) 來描述曲線，也就是以連續函數的方式取代終端數據的直接比較。此技術原先常用於圖像辨識領域描述物件輪廓，具有去除雜訊、幾何正規化等功能，因此合成效果較原本基於距離誤差的方法更佳。本研究引入了一種形狀表示法，稱為橢圓傅立葉描述子 (Elliptical Fourier Descriptor, EFD)，並將其與過往研究常用的方法：傅立葉描述子 (Fourier Descriptor, FD) 進行比較。論文中將分析兩者的優劣，以及過去尺度合成時常遇到的問題，並提出應對方法。同時，本研究以平面與空間系統、路徑生成與剛體導引兩種合成任務來驗證利用 EFD 形狀表示法的可行性。



1.2 文獻回顧

四連桿機構能夠通過解析約束式達成精確點 (Precision Points) 合成，確保耦桿點必定通過目標精確點[4-9]。不過精確點合成的目標數量是有限的，方程式無法過度約束，故超過上限時就變成最小化機構與目標之間誤差的問題，稱為距離誤差法。除了傳統的精確點合成和距離誤差合成外，以形狀表示法 (Shape Representation) 描述曲線，有減少離散點曲線的數據量、去除雜訊、幾何正規化等功能。可能的方法有曲線函數擬合（例如高階貝茲曲線）、編入時間參數 (Time Parameter) 積分、極坐標表示或轉換至頻域等[10]。在過往的文獻中，以傅立葉分析 (Fourier Analysis) 得出的形狀表示法：傅立葉描述子 (FD) 被廣泛使用，可參考評論論文[10-12]。FD 在計算上較為快速，且僅有諧波數 (Harmonic Number) 一項可自動調整的參數，無須針對不同曲線指定參數，比其它轉換方法更有優勢。

1.2.1 傅立葉分析方法

FD 方法是以時域資訊的複數坐標描述曲線，並透過複數傅立葉轉換 (Complex Fourier Transform) 轉換為頻域的複數係數[13]。轉換方式主要使用離散傅立葉轉換 (Discrete Fourier Transform, DFT)，使用的演算法稱為快速傅立葉轉換 (Fast Fourier Transform, FFT)。FFT 在三個條件下進行操作：(a)最大諧波數等於點數且不可增加；(b)曲線必須具有週期性，即第一點的坐標需與最後一點相同；(c)索引與總點數的比值被視為時間參數。使用 FFT 的計算複雜度大幅降低，為 FD 方法的形狀表示法應用帶來極大的性能優勢。通常情況下，諧波數的限制並不會對應用產生影響，因為常常需要減少諧波數。然而，只能描述封閉曲線與限制時間參數則是需要克服的問題。

如圖 1-1(a)所示，使用 FFT 轉換後的係數中，為了方便操作諧波數，以連續傅立葉轉換 (Continuous Fourier Transform) 的概念分為正諧波項、零諧波項與負諧波項。以係數的絕對值來看，數值較小的係數分布在中央的諧波項，而數值較大的係數則分布在兩側。偶數諧波的情況下可以視為兩個第零項或沒有第零項。如圖 1-2 所示，我們可以用填充零的方式，對稱地增加第零項周圍的係數，變成類似圖 1-1(b)擴增後的樣子，再進行逆轉換變回複數坐標，就能夠以更多點數重

建相同的圖形，曲線也會變得更平滑。另外，對稱地將第零項周圍的係數設定成零會使圖形細節消失，這樣便能以較少的數據量保存形狀簡單的圖形。

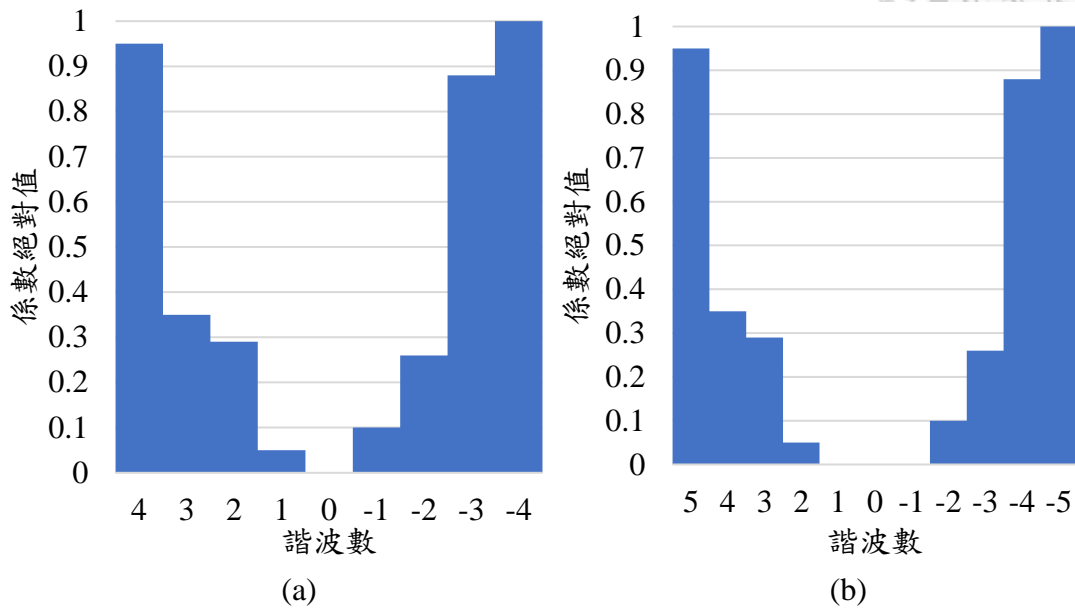


圖 1-1 通過 FFT 得到的 FD 係數分布示意圖(a)原始係數(b)填充後的係數

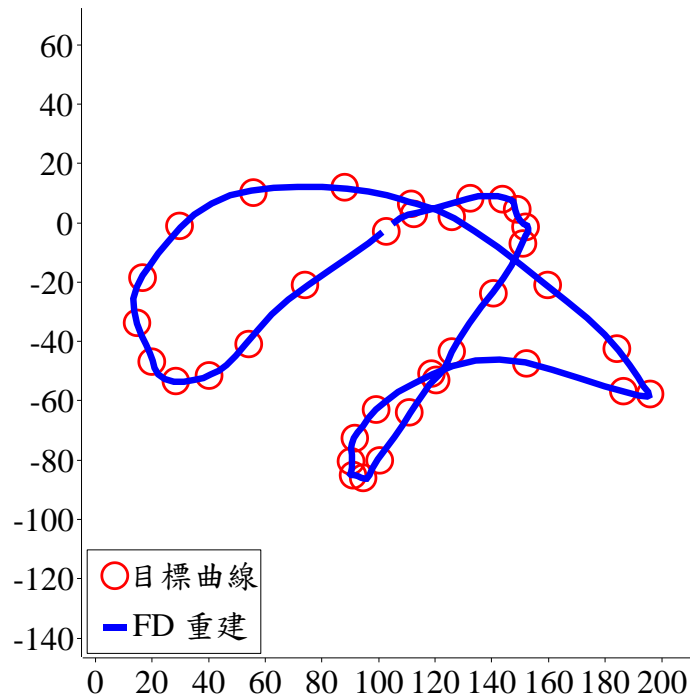


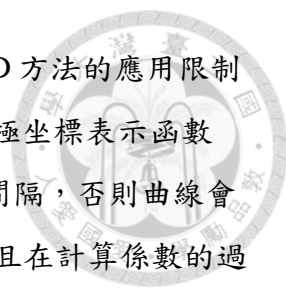
圖 1-2 以 FD 描述並重建出更多點的封閉圖形

在 1959 年，Freudenstein[14]首次使用諧波函數描述耦桿曲線，達成函數生成任務。後來 Farhang 和 Freudenstein 等人的團隊[15-17]利用同樣的方法合成了橢圓形狀的耦桿曲線，並需指定曲線上的時間參數。McGarva 與 Mullineux[18]則應用傅立葉分析將封閉曲線 (Closed Curves) 轉換成頻域係數，也就是 FD 來描述曲

線。該研究還提出了幾何正規化的方法，以移除相同形狀的幾何資訊並對齊曲線起始點，以便比較係數誤差。基於上述研究成果，McGarva[19]根據前人的構想建立了FD的圖集(Atlas)資料庫，儲存預先採樣的機構及其耦桿曲線，解決了當時最佳化演算法耗時較久、不易收斂的問題。Ullah和Kota[20]除了藉由FD描述與正規化曲線外，還合併了連桿的尺寸參數減少設計變數的數量，以實現以係數誤差合成四連桿的目標。Wu等人[21]也使用類似的方法合成機構，並進一步減少設計變數，使幾何資訊可以從設計變數計算出來。後來，Li和Wu等人[22]使用FD描述耦桿上一向量的角度，達成平面四連桿的剛體導引。

為解決FD無法描述開放曲線(Open Curves)的問題，Uesaka[23]改以極坐標曲率的方式轉換係數。Ding等人[24]則使用線性偏移(Linear Offset)加上反對稱延長(Anti-symmetric Extension)的方法描述開放曲線，但此方法僅適用於FD，對其它形狀表示法則會造成變形。Wu等人[25]根據Davis[26]書中的方法，將開放曲線視為封閉曲線的片段進行曲線擬合，利用DFT約束式進行線性求解，以得到封閉曲線的係數。此外，為解決FD的時間參數問題，Sharma等人[27]使用點坐標之間的距離計算傅立葉級數的時間參數，使其近似等距。在機器學習(Machine Learning)領域，FD也被用作形狀表示法的數據進行機構合成[28-30]。

在過去的研究中，FD方法通常僅限於平面坐標系的應用，若要將其應用於空間坐標系，則必須採取較為複雜的作法。例如，Sun與Chu[31, 32]使用了一維(實數)與二維(複數)轉換後的兩組傅立葉係數表示球面四連桿的耦桿曲線，但為此建立了複雜的判斷條件。另一方面，Mullineux[33]提出了使用投影方法，將球面耦桿曲線從形心轉動至北半球，並投射到水平面的平面圓上，以便使用FD描述；然而，投影存在變形問題，且無法處理過大的圖形，因為圖形會在邊界折疊而產生重疊。此外，Lestrel[34]對傅立葉分析在輪廓描述與辨識領域的文獻進行了統整，並提到了另一種形狀表示法，稱為橢圓傅立葉描述子(EFD)。該方法由Kuhl和Giardina於1982年提出[35]。EFD的各分量係數是互相獨立的，因此理論上可以用來描述空間曲線；而且其特性與FD類似：隨著諧波數增加，係數的數量也會增加，最終逐漸收斂至原始圖形。這種形狀表示法已廣泛應用於圖像識別(Pattern Recognition)[35-37]、生物學(Biology)[34, 38, 39]、考古學(Paleontology)[40]、牙醫學(Dentistry)[41]以及人類學(Anthropology)[42]等眾多領



域，但尚未在機構合成領域得到應用。根據 Lestrel[34]所述，FD 方法的應用限制包括：(a)函數為單值控制；以及(b)為了避免計算複雜性，當以極坐標表示函數時，需要確保向量間的角度相等，也就是說其時間參數必須等間隔，否則曲線會具有加速度資訊。對於 EFD 來說，係數是分開控制分量的，並且在計算係數的過程中，會以當前行程與總行程之比值計算時間參數，進而避免了假設時間參數等距的問題，保持曲線是等速的。EFD 的計算複雜度與 DFT 相同，在不使用 FFT 的情況下，兩者運算成本相當。

1.2.2 數值最佳化方法

數值最佳化所使用的方法是數值方法 (Numerical Method) 的一種。在選擇演算法方面，強調誤差計算的研究通常會採用直接搜尋法 (Direct Search Method)[21, 25, 27]，這種方法簡單地從初始可行解 (Feasible Solution) 開始，然後逐步移動到表現最好的解。然而，直接搜尋法的收斂速度較慢，無法有效地調整步長，且當設計變數增加時，收斂將更加困難。另一方面，梯度式最佳化 (Gradient-Based Optimization) 方法則考慮到誤差函數的一階或二階導數，以此來決定搜尋的移動方向。這類演算法計算成本較低，但需要計算出每個設計變數的梯度值或近似導數，例如基本的牛頓-拉夫森法 (Newton-Raphson Method)、順序二次規劃 (Sequential Quadratic Programming, SQP)[43]等。隨著電腦硬體性能的提升，如果誤差計算的成本不高，就可以使用啟發式演算法 (Metaheuristic Algorithm)。這類演算法不需要計算誤差函數的梯度和提供初始解，並且能夠一次計算多個解並應用隨機性來更快地找到更好的答案。啟發式演算法包括眾多變體和特化版本，通常從一個隨機初始解集合開始，然後以多方向收斂至整體的最佳解。常見的演算法如基因演算法 (Genetic Algorithm, GA)[44]、差分進化法 (Differential Evolution, DE)[45]、模擬退火 (Simulated Annealing)[20]等。在 Kang 等人的評論論文中，對這些方法進行了詳細的比較[46]。

根據以上文獻探討，我們可以歸納出一套泛化機構路徑生成的流程，如圖 1-3 所示。同時，由於機構的剛體導引任務也可以透過形狀表示法達成，因此相同的流程也適用於剛體導引任務。具體流程如下：

1. **指定目標曲線**：首先，確定需要設計的機構路徑或剛體導引曲線。

2. **轉換為形狀表示法**：將目標曲線轉換為適合的形狀表示法，例如使用 EFD 或其它形狀描述方法。
3. **形狀比較與最佳化**：利用形狀表示法的形狀比較方法，將目標曲線與機構生成的曲線進行比較。然後，使用數值最佳化方法，例如梯度式或啟發式演算法，找到最佳的设计變數。
4. **還原機構**：根據最佳化的设计變數，重新構造出能夠通過指定耦桿曲線的機構或剛體導引系統。

如果最佳化容易收斂在局部最佳解，或收斂時間過長，也可以考慮預先建立圖集[19, 32, 33]。圖集所找到的最佳解及周遭較佳解可以作為梯度式與啟發式演算法的初始猜值，從而縮短最佳化所需的迭代次數。此外，我們在先前的研究也發表了圖集配合最佳化方法的成果[47, 48]。根據這個流程，我們可以建立 EFD 方法的基本合成架構。

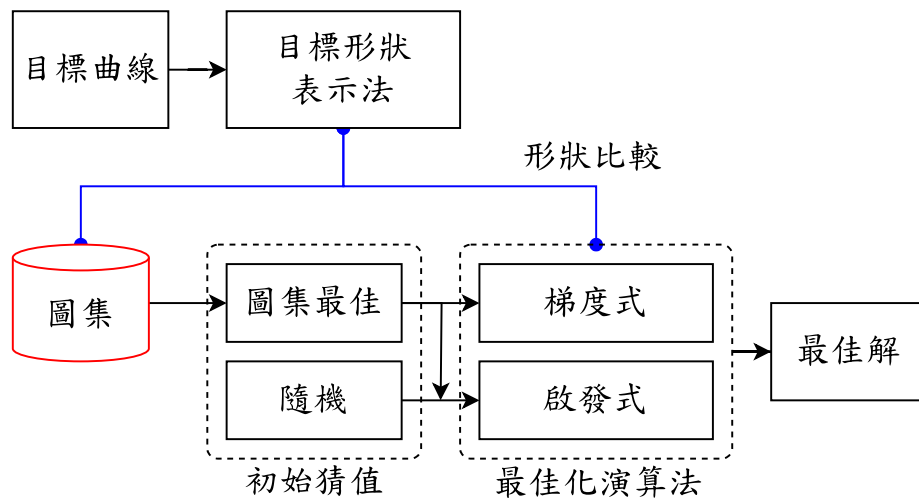



圖 1-3 在路徑生成時套用形狀表示法的流程

1.3 研究動機與目的

本研究的動機在於，現行常用的形狀表示法未能同時解決(a)幾何正規化、(b)等速時間參數、(c)開放曲線描述，以及(d)空間曲線描述問題。基於過去在平面機構路徑生成與剛體導引方面使用傅立葉描述子(FD)的案例，本研究首次引入了相似的橢圓傅立葉描述子(EFD)理論，旨在解決FD方法中的描述問題並擴展至空間機構的領域。原先FD在平面描述的限制便是時間參數的計算方式，文獻[27]的方法仍不容易處理開放曲線與幾何正規化的問題。而空間描述的實現方式有諸



多缺陷，例如文獻[31, 32]一維搭配二維的方式需要處理複雜的幾何正規化的問題；而文獻[33]投影的方式無法處理超過半球的球面曲線。另一方面，使用 EFD 作為形狀表示法，除了已經有幾何正規化方法與等速曲線描述，也需要解決開放曲線描述與空間描述的議題。首先，開放曲線描述將在本研究中進行探討與克服；而空間描述在過往文獻中應用稀少，僅文獻[39]中有應用到空間坐標系。不過，EFD 延伸至空間描述與平面幾乎一樣，只需定義旋轉正規化步驟。因此，本研究列出以下目標：

1. 將 EFD 應用於平面與空間坐標系，達成幾何正規化。
2. 尋找描述開放曲線的方法。
3. 將 EFD 應用於路徑生成與剛體導引問題的形狀表示法。
4. 以平面與球面四連桿機構為例進行合成。

這些目標將成為本研究的重點與探索方向。

1.4 論文架構

本論文在第 1 章講述了本研究的概要、過去的文獻與研究動機；第 2 章將開始描述橢圓傅立葉描述子的理論，從平面擴充至空間，並針對開放曲線設計全新的描述方法；第 3 章以平面與球面四連桿為例，包含設計變數、運動學分析與結合幾何轉換的去正規化方法；第 4 章講述合成方法的詳細架構，除了圖集與數值最佳化外，針對路徑生成與剛體導引任務改良，應對點數過少、不易收斂的方案；第 5 章將列舉眾多過去文獻的案例，以實際的合成問題來探討；最後第 6 章總結了本研究的重點貢獻，以及未來此領域可以繼續探討的方向。

第2章 橢圓傅立葉描述子



2.1 封閉曲線描述

封閉曲線是一種週期性訊號，其最後一點會回到第一點。因此我們可透過近似公式從封閉曲線的離散點求得橢圓傅立葉描述子 (EFD) 的係數[35]。封閉曲線被視為多邊形，各點之間以直線的方式連接。EFD 描述的方式為一質點在橢圓軌道上等速繞行，當疊加多個橢圓的中心在前一個繞行的質點上，且所有質點共用同一個時間參數時，就能夠描述更複雜的圖形。其數學式將曲線函數 $\mathbf{P}(t)$ 表示成

$$\mathbf{P}(t) = \begin{cases} x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos nt + b_n \sin nt \\ y(t) = C_0 + \sum_{n=1}^N c_n \cos nt + d_n \sin nt \end{cases} \quad (2-1)$$

其中 t 為時間參數，在 $0 \leq t \leq 2\pi$ 的範圍內； n 表示第 n 個諧波，而 N 為總諧波數，為疊加橢圓的數量。將上式改寫為矩陣形式可得

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 \\ C_0 \end{bmatrix} + \sum_{n=1}^N \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos nt \\ \sin nt \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

上式中四個係數 $\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$ 作為餘弦與正弦項係數，使得 $\mathbf{P}(t)$ 的軌跡構成了一個橢圓，其中包含了橢圓的長短軸、方向 (Orientation) 與起始點。此外兩個維度 x 和 y 各有一個常數項 A_0 和 C_0 ，定義上是第零項諧波 ($n = 0$) 的係數，由於其時間參數恆等於 0，因此正弦項係數 B_0 和 D_0 的值恆等於零。公式裡的常數項是經由曲線的離散點計算而得，故 $[A_0, C_0]^T$ 決定了圖形的形心。假設我們所描述的曲線離散點共 K 點，且第 K 點與第一點相同。曲線離散化後，點的編號 p 介於 1 到 K 的範圍內，透過時間參數表示成

$$\mathbf{P}(t_p) = \begin{bmatrix} x(t_p) \\ y(t_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

其中第 p 點的坐標值為 x_p 和 y_p ，而時間參數為 t_p 。從離散點坐標計算係數的詳細推導過程參見附錄 I，最後解出之近似公式為

$$a_n = \frac{1}{n^2\pi} \sum_{p=1}^{K-1} \frac{\Delta x_p}{\Delta L_p} (\cos nt_{p+1} - \cos nt_p) \quad (2-4)$$



$$b_n = \frac{1}{n^2\pi} \sum_{p=1}^{K-1} \frac{\Delta x_p}{\Delta L_p} (\sin nt_{p+1} - \sin nt_p) \quad (2-5)$$

$$c_n = \frac{1}{n^2\pi} \sum_{p=1}^{K-1} \frac{\Delta y_p}{\Delta L_p} (\cos nt_{p+1} - \cos nt_p) \quad (2-6)$$

$$d_n = \frac{1}{n^2\pi} \sum_{p=1}^{K-1} \frac{\Delta y_p}{\Delta L_p} (\sin nt_{p+1} - \sin nt_p) \quad (2-7)$$

其中 $\Delta x_p = (x_{p+1} - x_p)$ ， $\Delta y_p = (y_{p+1} - y_p)$ ， $\Delta L_p = \sqrt{\Delta x_p^2 + \Delta y_p^2}$ 為當前點與下一點的歐幾里得距離；而當前的時間參數 t_p 可由當前行程與總行程之比值得出

$$t_p = \frac{2\pi \sum_{i=1}^p \Delta L_i}{\sum_{p=1}^{K-1} \Delta L_p}, \text{ 故 } 0 \leq t_p \leq 2\pi。$$

上述的計算是對離散點坐標所形成之多邊形進行有限差分 (Finite Difference) 的運算，所得出之數列有 $K - 1$ 項。而常數項 A_0 和 C_0 的部分也可從傅立葉級數求得：

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^{K-1} \frac{\Delta x_p}{2\Delta L_p} (t_{p+1}^2 - t_p^2) + \left(\sum_{i=1}^p \Delta x_i - \frac{\Delta x_p}{\Delta L_p} \sum_{i=1}^p \Delta L_i \right) (t_{p+1} - t_p) \quad (2-8)$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^{K-1} \frac{\Delta y_p}{2\Delta L_p} (t_{p+1}^2 - t_p^2) + \left(\sum_{i=1}^p \Delta y_i - \frac{\Delta y_p}{\Delta L_p} \sum_{i=1}^p \Delta L_i \right) (t_{p+1} - t_p) \quad (2-9)$$

至此為止，只需要指定最大諧波數 N ，即可獲得 EFD 每項諧波的四個係數。計算後所得之橢圓會由大到小排列，最後 N 趨近於無限大時橢圓會接近無限小。要注意的是，近似法求得之係數重建後不保證會通過原先的離散點，而是根據諧波數近似至給定的坐標。與圖 1-1 相比，EFD 的係數分布如圖 2-1 所示，越高諧波項的橢圓長軸向量長度越小。

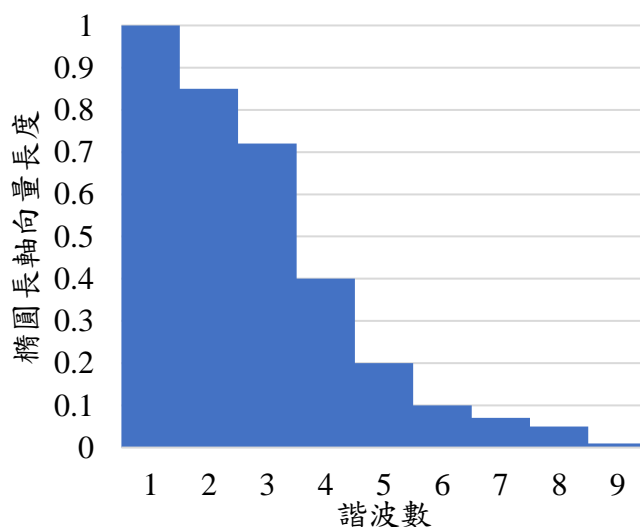


圖 2-1 通過近似法得到的 EFD 係數分布示意圖

圖 2-2(a)-(d)使用了 1 到 4 個諧波係數，重建了原始文獻[35]以鏈碼 (Chain Code) 表示的範例圖形，並且繪製出每一諧波係數所表示的橢圓。從圖中可以觀察到隨著諧波數的增加，重建之圖形就會越接近原本曲線的離散點坐標。鏈碼表示的圖形點數少且頂點較為尖銳，因此使用之諧波數少的時候重建誤差較大。但若是目標圖形的點數較多，形成了較平滑的曲線，重建近似圖形所需要的諧波數便會降低。

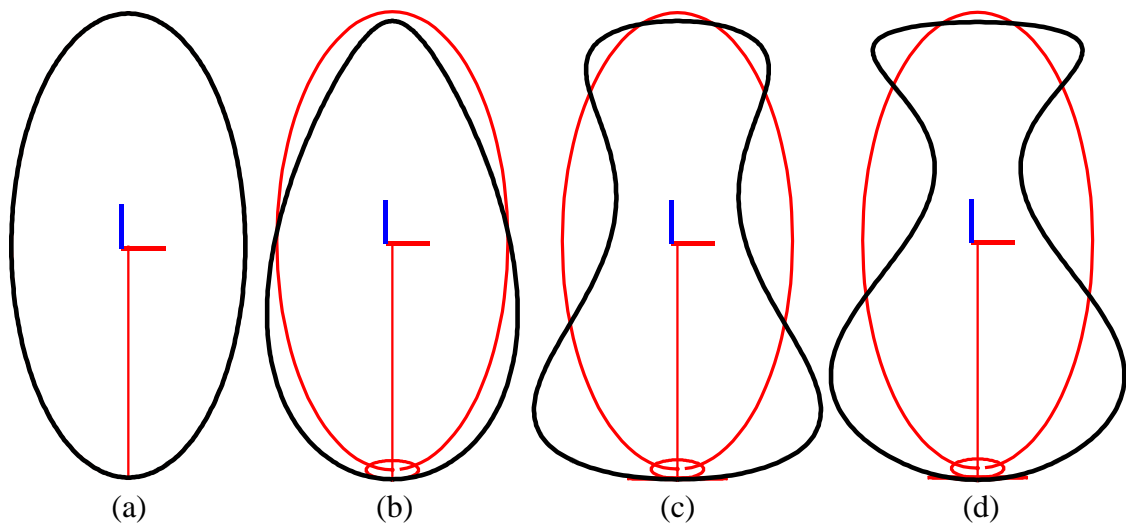


圖 2-2 使用(a) 1 個、(b) 2 個、(c) 3 個和(d) 4 個諧波係數重建出的圖形

如圖 2-3 所示，在幾何上 EFD 係數所形成的級數代表了橢圓的疊加。其中係數矩陣 $\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$ 包含了餘弦項向量 $\mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} a_n \\ c_n \end{bmatrix}$ 及正弦項向量 $\mathbf{v}_n = \begin{bmatrix} b_n \\ d_n \end{bmatrix}$ 。這兩個向量並非正交，僅為內接於橢圓的向量。橢圓起始點的位置在 \mathbf{u}_n 矢端，沿著相位角 (Phase Angle) $\theta_n = nt$ 描繪出相對應的橢圓，橢圓也會通過 \mathbf{v}_n 向量的矢端。本研究定義第一個橢圓的半長軸 (Semi-major Axis) 向量為 $\mathbf{u}_{1,\text{norm}}$ ，半短軸 (Semi-minor Axis) 向量為 $\mathbf{v}_{1,\text{norm}}$ 。第一項係數的餘弦項向量 \mathbf{u}_1 與 $\mathbf{u}_{1,\text{norm}}$ 相差了相位角 θ_1 。若改變第一項係數的相位角，其它項係數的相位角則是 $\theta_n = n\theta_1$ 。相位角 θ_n 與時間參數 t_p 同樣是指繞行橢圓時的角度，但是觀點不同：相位角指的是第 n 項諧波橢圓的角度，而時間參數指的是第 p 點於整體圖形上之相位角位置。另外，第一個橢圓的 $\mathbf{u}_{1,\text{norm}}$ 和 $\mathbf{v}_{1,\text{norm}}$ 向量作為圖形的基底，跟全域坐標軸 x - y 夾了一個旋轉角 ψ 。隨著離散點坐標值的改變，即便是形狀起始點的不同，計算出的係數也會不同。儘管如此，相似的形狀仍然有相似的橢圓大小，橢圓之間相對



的旋轉亦相似。因此，若要令其具有可互相比較的性質，應對整組係數做正規化 (Normalization)，變成相同的幾何狀態，使相似的形狀可以互相比較。

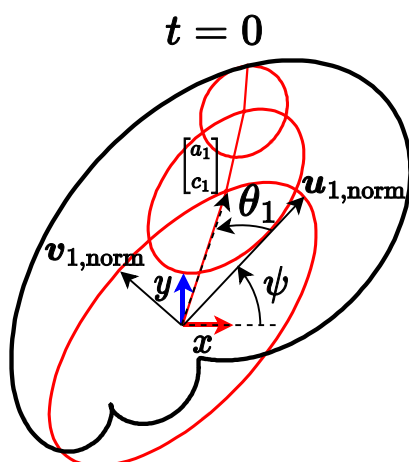


圖 2-3 平面橢圓傅立葉分析的幾何意義

2.2 圖形正規化

接下來將介紹圖形正規化的流程，流程中可從係數中提取出諸多幾何資訊，並正規化之，這些幾何資訊也將用於之後的去正規化 (Denormalization) 步驟。正規化流程依序為：平移 (Translation)、起始點 (Starting Point)、旋轉 (Rotation)，以及縮放 (Scale)。

1. **平移正規化**表示相同圖形在任意位置上，都不會影響形狀的判斷。因此我們將圖形的形心移動至坐標系原點，等同於移除式(2-2)的常數項 A_0 與 C_0 。由於常數項係數是第零項諧波，其它 $n \geq 1$ 的諧波項係數不需正規化。
2. **起始點正規化**表示相同圖形改變起始位置時，不會影響形狀的判斷。於是我們將第一個橢圓的起始點，根據相位角 θ_1 移動到它的半長軸矢端。由於所有的相位角皆依賴於同一個時間參數 t ，因此令第一項諧波的相位向量

(Phasor) $|E| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ 的導數為零，可得

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2(a_1 b_1 + c_1 d_1)}{a_1^2 + c_1^2 - b_1^2 - d_1^2} \quad (2-10)$$

每項諧波的係數必須因第一項諧波相位角的改變而改變其相位角 $\theta_n = n\theta_1$ 。

因此可以乘上一轉換矩陣得到正規化的係數如下

$$\begin{bmatrix} a_n^* & b_n^* \\ c_n^* & d_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos n\theta_1 & -\sin n\theta_1 \\ \sin n\theta_1 & \cos n\theta_1 \end{bmatrix} \quad (2-11)$$



上式中使用上標星號*表示的係數即為更新後的係數。

3. 此時，由於輸入曲線起始點或方向之差異，造成所得之負奇數項的向量組合 $(-1)^n \begin{bmatrix} a_n^* & b_n^* \\ c_n^* & d_n^* \end{bmatrix}$ 會產生一樣的圖形，但是係數值有正負差異。原始文獻中提到一個相似的概念稱為分類 (Classification)[35]：當圖形相差 π 的旋轉時，偶數項係數會相反變成 $(-1)^{n+1} \begin{bmatrix} a_n^* & b_n^* \\ c_n^* & d_n^* \end{bmatrix}$ 。而本研究則發現當圖形的形狀相同時，奇數項係數的正負不會影響圖形的形狀。故為避免因係數正負號之不同，誤判為不同的圖形，本研究調整此現象的校正係數為 ζ_n 。如圖 2-4 所示，檢查第一與第二諧波項的餘弦項向量與正弦項向量，使兩者距離和 $|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1| + |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|$ 保持在最小。若非最小距離的狀態，也就是反向的距離和 $|\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1| + |\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1|$ 才是最小值時，則反轉奇數項的向量。以正規化相位角後的係數向量 \mathbf{u}_n^* 、 \mathbf{v}_n^* 表示成

$$\zeta_n = \begin{cases} (-1)^n, & \text{if } (N > 1) \text{ and } (|\mathbf{u}_2^* - \mathbf{u}_1^*| + |\mathbf{v}_2^* - \mathbf{v}_1^*| > |\mathbf{u}_2^* + \mathbf{u}_1^*| + |\mathbf{v}_2^* + \mathbf{v}_1^*|) \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(2-12)

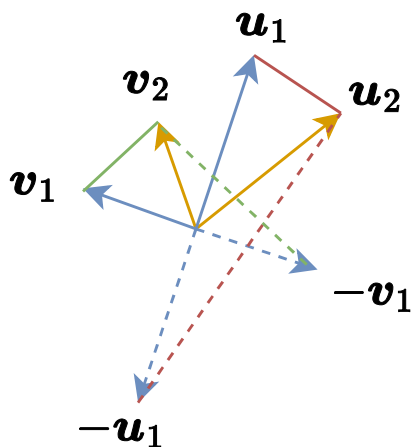


圖 2-4 奇偶項係數方向正規化示意圖

4. **旋轉正規化**表示相同圖形旋轉到任意方向時，不會影響形狀的判斷。此處我們將圖形旋轉到與坐標軸對齊的方向，可由已經正規化相位角的第一個餘弦項向量 $\mathbf{u}_1^* = \begin{bmatrix} a_1^* \\ c_1^* \end{bmatrix}$ 作為依據。此向量也就是第一個橢圓的半長軸向量 $\mathbf{u}_{1,norm}$ 。在平面中，以其與 x 軸間的夾角作為旋轉角 ψ ，可寫成

$$\psi = \tan^{-1} \frac{c_1^*}{a_1^*} \tag{2-13}$$

接下來所有係數前乘上一旋轉矩陣 (Rotation Matrix) R_ψ 的轉置：

$$\begin{bmatrix} a_n^{**} & b_n^{**} \\ c_n^{**} & d_n^{**} \end{bmatrix} = R_\psi^T \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

上式中 $R_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}$ ，為圖形的方向。上標雙星號**表示旋轉正規化後的係數。此亦表示將原本位於全域坐標系之坐標，轉換到以橢圓半長軸和半短軸構成的局部坐標系上。

5. **縮放正規化**表示相同圖形無論縮放至何種大小，都不會影響形狀的判斷。圖形的縮放可以由第一個橢圓半長軸 $\mathbf{u}_{1,\text{norm}}$ 向量的長度決定，將縮放係數 s 定義為

$$s = |\mathbf{u}_{1,\text{norm}}| = \sqrt{a_1^{*2} + c_1^{*2}} \quad (2-15)$$

若是連續套用正規化流程，縮放係數剛好會是正規化相位角、奇偶項校正、正規化旋轉後的 a_1 係數，且其值必為正。而最終正規化後的係數整體縮放至半長軸等於 1 的大小，更新後的係數以上標三星號***表示：

$$\begin{bmatrix} a_n^{***} & b_n^{***} \\ c_n^{***} & d_n^{***} \end{bmatrix} = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

整理上述的步驟 1 至 5，可得完整的正規化後之係數為

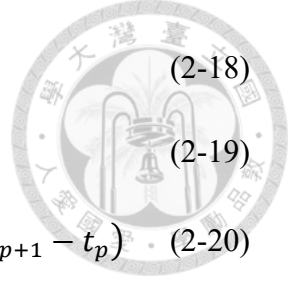
$$\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}_{\text{norm}} = \frac{1}{s} R_\psi^T \left(\zeta_n \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos n\theta_1 & -\sin n\theta_1 \\ \sin n\theta_1 & \cos n\theta_1 \end{bmatrix} \right) \quad (2-17)$$

正規化後的第一個諧波項，其係數變為 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_{1,\text{norm}} \end{bmatrix}$ ，且 $0 < d_{1,\text{norm}} < 1$ 。

此結果表示餘弦項向量與正弦項向量會分別對齊坐標系 x 與 y 軸的方向，且第一項餘弦項向量長度為 1，代表此圖形擁有幾何不變性 (Geometric Invariant)，也取得了圖形正規化之幾何參數 (Geometry Parameters)，即平移 $[A_0, C_0]^T$ 、旋轉角 ψ 與縮放 s ，這些數值可在第 3 章連桿機構的去正規化流程中用到。

2.3 空間描述與正規化

EFD 相較於 FD 的優點是，可以直接對維度作擴充，而非侷限於複數坐標，本節將介紹擴充後的 z 軸坐標該如何計算。首先，加入兩個係數 e 和 f 與常數項 E_0 ，定義皆與 x 軸和 y 軸相同：



$$e_n = \frac{1}{n^2\pi} \sum_{p=1}^{K-1} \frac{\Delta z_p}{\Delta L_p} (\cos nt_{p+1} - \cos nt_p) \quad (2-18)$$

$$f_n = \frac{1}{n^2\pi} \sum_{p=1}^{K-1} \frac{\Delta z_p}{\Delta L_p} (\sin nt_{p+1} - \sin nt_p) \quad (2-19)$$

$$E_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^{K-1} \frac{\Delta z_p}{2\Delta t_p} (t_{p+1}^2 - t_p^2) + \left(\sum_{i=1}^p \Delta z_i - \frac{\Delta z_p}{\Delta L_p} \sum_{i=1}^p \Delta L_i \right) (t_{p+1} - t_p) \quad (2-20)$$

在幾何上，曲線變成由空間中的多個平面橢圓來描述，如圖 2-5 所示。每個

橢圓的平面擁有各自的方向，此平面橢圓由兩向量 $\mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} a_n \\ c_n \\ e_n \end{bmatrix}$ 及 $\mathbf{v}_n = \begin{bmatrix} b_n \\ d_n \\ f_n \end{bmatrix}$ 構

成，每項諧波的係數矩陣變成 $\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \\ e_n & f_n \end{bmatrix}$ 。除此之外，其餘性質與平面 EFD 相

同，圖形的起始點亦位於 $t = 0$ 。

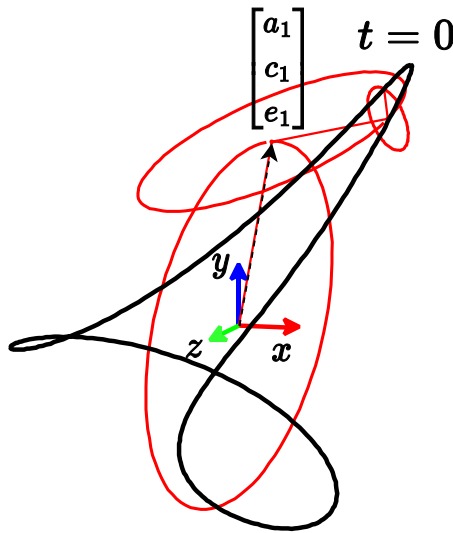


圖 2-5 空間橢圓傅立葉分析的幾何意義

在正規化的過程中，也加入 e 與 f 係數的部分。第一項係數的相位角變為

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2(a_1 b_1 + c_1 d_1 + e_1 f_1)}{a_1^2 + c_1^2 + e_1^2 - b_1^2 - d_1^2 - f_1^2} \quad (2-21)$$

並透過 $n\theta_1$ 的轉換矩陣調整個諧波項之係數：

$$\begin{bmatrix} a_n^* & b_n^* \\ c_n^* & d_n^* \\ e_n^* & f_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \\ e_n & f_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos n\theta_1 & -\sin n\theta_1 \\ \sin n\theta_1 & \cos n\theta_1 \end{bmatrix} \quad (2-22)$$

另一方面，空間中圖形的旋轉正規化是將第一個橢圓移至坐標系的原點後調整方向。此旋轉可使用橢圓上的局部坐標系相對全域坐標系的旋轉方式來對齊兩



者的坐標軸。其中半長軸 $\mathbf{u}_{1,\text{norm}}$ 對齊至 x 軸，半短軸 $\mathbf{v}_{1,\text{norm}}$ 對齊至 y 軸，兩者的外積向量 $\mathbf{u}_{1,\text{norm}} \times \mathbf{v}_{1,\text{norm}}$ 對齊至 z 軸，如圖 2-6 所示。

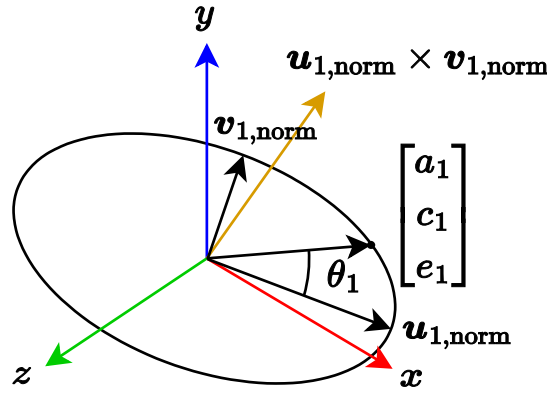


圖 2-6 空間中橢圓平面的旋轉

根據式(2-11)正規化相位角後的係數向量 $\mathbf{u}_1^* = \mathbf{u}_{1,\text{norm}}$ 、 $\mathbf{v}_1^* = \mathbf{v}_{1,\text{norm}}$ ，得到位於橢圓面上之局部坐標系的兩軸，利用單位列向量構成旋轉矩陣，定義為

$$\mathbf{R}_\psi = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{u}_1^*}{|\mathbf{u}_1^*|} & \frac{\mathbf{v}_1^*}{|\mathbf{v}_1^*|} & \frac{\mathbf{u}_1^* \times \mathbf{v}_1^*}{|\mathbf{u}_1^* \times \mathbf{v}_1^*|} \end{bmatrix} \quad (2-23)$$

在此方向的調整是由旋轉矩陣 \mathbf{R}_ψ 表示，除了矩陣的九個參數外，在當作幾何參數時，亦可轉換成較少數值儲存，例如三個參數的尤拉角 (Euler Angles)；或是單位四元數 (Unit Quaternion)，以四個參數表示唯一的旋轉。

最後，空間正規化流程中的其它性質與平面 EFD 相同。將空間 EFD 的正規化步驟統整後，可以列式成

$$\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \\ e_n & f_n \end{bmatrix}_{\text{norm}} = \frac{1}{s} \mathbf{R}_\psi^T \left(\zeta_n \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \\ e_n & f_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos n\theta_1 & -\sin n\theta_1 \\ \sin n\theta_1 & \cos n\theta_1 \end{bmatrix} \right) \quad (2-24)$$

正規化後的空間 EFD 係數，第一項諧波係數與平面正規化的結果一樣，會變成

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_{1,\text{norm}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 餘弦項向量與正弦項向量將分別對齊坐標系 } x \text{ 與 } y \text{ 軸的方向。}$$

2.4 傅立葉功率分析

面對任意數量的離散點曲線，可以通過傅立葉功率分析 (Fourier Power Analysis, FPA) 來求得所需的最小諧波數。根據圖 2-7 的示意圖所示，我們可以觀察到當諧波數過多時，FD 方法會在目標點之間產生過多的曲線波動。這些額外

的波動部分可能只是對曲線中微小變化或雜訊的響應，對於曲線整體形狀的描述並不必要。因此，對於形狀比較或分析來說，這種過多的高頻段係數會造成不必要的困擾。相比之下，圖 2-7 所示之 EFD 方法傾向於在重建曲線時更加平滑，通過逼近目標點並使用近似直線連接它們，最終呈現出多邊形的外觀。FD 與 EFD 的差異是由時間參數算法不同造成的，EFD 更能夠避免過度擬合並保持對曲線整體形狀的適當描述，同時減少對雜訊的敏感度。總之，這些觀察結果表明，在進行傅立葉分析時，我們應該謹慎選擇諧波數，以平衡對曲線特徵的捕捉與避免過度擬合之間的關係[34]。使用 FPA 方法適當選擇的諧波數可以確保得到更加準確和有意義的曲線比較結果。

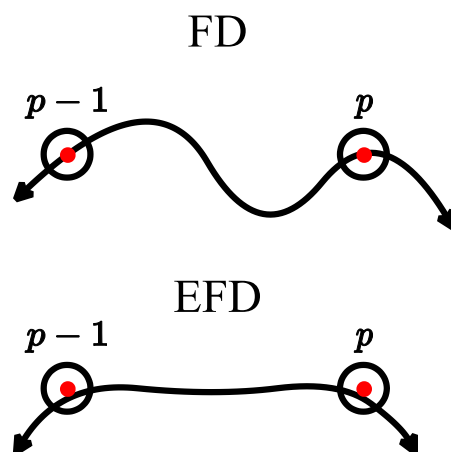


圖 2-7 諧波數過多的傅立葉描述子重建之示意圖

FPA 的頻譜 (Spectrum) 從第一項諧波數開始累積，直到累積頻譜與總頻譜的比值超過所設定之閾值，最終找到最小諧波數。頻譜的定義為

$$\operatorname{argmin}_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{S_n^2}{S_M^2} \geq \text{閾值} \quad (2-25)$$

其中

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2 + b_i^2 + \dots + f_i^2} \quad (2-26)$$

上式的 M 為初始總諧波數，而閾值必須小於總頻譜與當前累積頻譜的比值。參考過往的研究如文獻[38, 40]，本研究將閾值設定為 99.99%。實作上累積頻譜值是累積和 (Cumulative Sum) 的結果，可使用查找表 (Lookup Table, LUT) 建立，最後一項為總頻譜值。再來由於 LUT 中的數值會是有序排列的狀態，可使用二元搜尋

(Binary Search) 找到最接近的索引值，即諧波項。二元搜尋演算法在初始諧波數 M 設定較大時會比線性搜尋 (Linear Search) (遍歷法) 來得快。

不過，初始諧波數 M 的設定仍會影響 EFD 的計算性能，必須透過離散點與完整曲線的關係才不至於採樣過多或損失圖形特徵。這裡可將離散點視為一曲線函數上的採樣點，有兩種採樣情況：

1. 若為欠採樣 (Undersampled)，則 M 設定為採樣數 K 。
2. 若為過採樣 (Oversampled)，則從奈奎斯特-香農採樣定理 (Nyquist-Shannon Sampling Theorem) 可得知，此函數可使用最高頻率一半的採樣數——也就是奈奎斯特頻率 (Nyquist Frequency)——而不產生誤差，當最高採樣數等於或接近最高頻率時， M 便可設定成一半的採樣數 $K/2$ 以增快計算速度[34, 49]。

然而，在實際應用中，判斷任意數據是否存在過度採樣的方法相對複雜。FD 方法假設的等距採樣只需要利用 FFT 分析就可以實現，但是由於 EFD 方法假設的採樣間隔是不等長的，因此可行的實作方法可能需要使用非等距快速傅立葉轉換 (Nonequispaced Fast Fourier Transform, NFFT) 來找到最大頻率[50]，這會使得過採樣的判斷變得極為複雜。因此，在本研究中我們不探討非等距的問題，奈奎斯特頻率僅用於簡化已知機構的耦桿曲線，例如第 4.1 節提及的圖集資料庫方法以及第 4.3 節改良距離誤差法中僅計算機構耦桿曲線的情況。這是因為機構的耦桿曲線可以任意增加採樣數，當採樣數增加時，離散點之間的距離會縮小，可近似成等距採樣。本研究只需通過統一設定合成時耦桿曲線的採樣數，就能夠控制整體的計算時間。最後，任意離散坐標的輸入仍然被視為欠採樣的狀態，並且使用採樣數 K 作為諧波數。

2.5 開放曲線描述

由於傅立葉分析僅能描述週期性曲線，而開放曲線的終點沒有連接回起始點，且通常與起始點相距甚遠，即便使用直線連接起點和終點，也會與其它具有部分直線特徵的形狀混淆，因此不能直接使用封閉曲線的描述方法。通常取而代之的是形狀表示法的一種變形，例如修改曲線外觀，或是轉換成特殊的係數來比較。本研究通過實作來探討兩種可行的描述方法，並在下列小節中詳述它們的原理與利弊。



2.5.1 三角函數多項式曲線擬合法

透過列出離散點與係數之間的關係，可以讓一未知的係數組合在特定時間參數範圍中，剛好通過需描述的開放曲線，而其它部分則不予理會。此方法也是其中一種 FD 描述開放曲線的方法[25]，稱為三角函數多項式曲線擬合

(Trigonometric Polynomial Curve Fitting, TPCF)。根據文獻[26]，傳統傅立葉分析以複數坐標建立坐標與係數間的關係，也就是尤拉公式 (Euler's Formula)，以連續傅立葉轉換表示離散坐標和係數的約束式，其關係為：

$$P(t_p) \approx \sum_{n=-m}^m \alpha_n e^{jnt_p} \quad (2-27)$$

其中 $\alpha_n = a_n + b_n j$ 為 FD 每項諧波的複數係數， $j = \sqrt{-1}$ 。原本在描述封閉曲線時，可以直接使用快速傅立葉轉換演算法達成其近似公式獲得係數，但是在開放曲線得仰賴曲線擬合的步驟：係數疊加的結果需逼近複數坐標 $P(t_p)$ 。與 EFD 不同的是，FD 的諧波項 n 為 $-m \leq n \leq m$ ，諧波中間包含第零項，而總諧波數變成了 $N = 2m + 1$ ，為奇數。其中當前點為 $1 \leq p \leq K$ ，總點數為 K ；時間參數的值 t_p 在一個小於全週期 2π 的範圍內，實作上可限制在一半的週期 $0 \leq t_p \leq \pi$ 。這些參數中，諧波數 N 與對應角 t_p 的範圍需要人工指定。對比式(2-2)中 EFD 的矩陣形式，FD 也可以展開成

$$P(t_p) = \begin{bmatrix} x(t_p) \\ y(t_p) \end{bmatrix} = \sum_{n=-m}^m \begin{bmatrix} a_n & -b_n \\ b_n & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos nt_p \\ \sin nt_p \end{bmatrix} \quad (2-28)$$

而 x 與 y 函數會變成

$$x(t_p) = \sum_{n=-m}^m a_n \cos nt_p - b_n \sin nt_p \quad (2-29)$$

$$y(t_p) = \sum_{n=-m}^m a_n \sin nt_p + b_n \cos nt_p \quad (2-30)$$

接著將必要的方程式整理成一項 $AX = B$ 線性方程問題，未知數 X 為 FD 係數。對係數 a_n 與 b_n 所列之方程式約束如下，首先是最小化對象的誤差總和 Δ ，為全部點的誤差平方和：

$$\Delta = (x(t_1) - x_1)^2 + \dots + (x(t_K) - x_K)^2 + (y(t_1) - y_1)^2 + \dots + (y(t_K) - y_K)^2 \quad (2-31)$$

再來以誤差 Δ 對係數偏微分等於零列式，以 x 軸為例：

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_n} = 2(x(t_1) - x_1) \frac{\partial x(t_1)}{\partial a_n} + \dots + 2(x(t_K) - x_K) \frac{\partial x(t_K)}{\partial a_n} = 0 \quad (2-32)$$



整理後可得

$$x(t_1) \cos nt_1 + \cdots + x(t_K) \cos nt_K = x_1 \cos nt_1 + \cdots + x_K \cos nt_K \quad (2-33)$$

同理

$$\frac{\partial \Delta}{\partial b_n} = 2(x(t_1) - x_1) \frac{\partial x(t_1)}{\partial b_n} + \cdots + 2(x(t_K) - x_K) \frac{\partial x(t_K)}{\partial b_n} = 0 \quad (2-34)$$

整理後可得

$$x(t_1) \sin nt_1 + \cdots + x(t_K) \sin nt_K = x_1 \sin nt_1 + \cdots + x_K \sin nt_K \quad (2-35)$$

最後透過 $\frac{\partial \Delta}{\partial a_n} + \frac{\partial \Delta}{\partial b_n} j = 0$ 可得每點的坐標值為

$$a_{-m} \cos(-mt_p) - b_{-m} \sin(-mt_p) + \cdots + a_m \cos(mt_p) - b_m \sin(mt_p) = x_p \quad (2-36)$$

$$a_{-m} \sin(-mt_p) + b_{-m} \cos(-mt_p) + \cdots + a_m \sin(mt_p) + b_m \cos(mt_p) = y_p \quad (2-37)$$

加上 y 坐標後，便可從上式列出 $2K$ 條約束方程式，對應了 $2N$ 個未知數，成為線性方程中的 A 矩陣。由於內容較為龐大，以單獨的子矩陣 $[\omega]$ 表示為

$$[\omega] = \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \quad (2-38)$$

其中 ω 是子矩陣中的參數，用於 A 矩陣：

$$A_{2K \times 2N} =$$

$$\begin{bmatrix} [-mt_1] & \cdots & [-nt_1] & \cdots & [-t_1] & 1 & 0 & [t_1] & \cdots & [nt_1] & \cdots & [mt_1] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [-mt_p] & \cdots & [-nt_p] & \cdots & [-t_p] & 1 & 0 & [t_p] & \cdots & [nt_p] & \cdots & [mt_p] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [-mt_K] & \cdots & [-nt_K] & \cdots & [-t_K] & 1 & 0 & [t_K] & \cdots & [nt_K] & \cdots & [mt_K] \end{bmatrix} \quad (2-39)$$

而 X 為係數未知數， B 為離散點的點坐標，列式成

$$X_{2N \times 1} =$$

$$[a_{-m} \ b_{-m} \ \cdots \ a_{-n} \ b_{-n} \ \cdots \ a_{-1} \ b_{-1} \ a_0 \ b_0 \ a_1 \ b_1 \ \cdots \ a_n \ b_n \ \cdots \ a_m \ b_m]^T \quad (2-40)$$

$$B_{2K \times 1} = [x_1 \ y_1 \ \cdots \ x_p \ y_p \ \cdots \ x_K \ y_K]^T \quad (2-41)$$

再來，透過用線性最佳化方法解出係數。由於 A 為可逆矩陣，也就是非奇異矩陣 (Nonsingular Matrix)，可以使用 LU 分解 (Lower-Upper Decomposition) 來求值。根據矩陣形狀，線性方程式列為

$$A_{2K \times 2N} X_{2N \times 1} = B_{2K \times 1} \quad (2-42)$$



在原始文獻[25]中，上述的線性方程若使用式(2-27)搭配尤拉公式表達，可將矩陣元素合併實部及虛部寫作複數的形式，變成 $A_{K \times N} X_{N \times 1} = B_{K \times 1}$ 縮減矩陣大小，不過這兩種方式的計算量是一樣的。

如圖 2-8 所示，給定一開放曲線為目標，重建之圖形會在指定週期內通過目標點。其中圖 2-8(a) 諧波數設定成 $m = 3$ 和 $N = 7$ ，週期為 π 擬合曲線，能夠觀察到曲線的其他部分不受目標曲線的限制。在圖 2-8(b) 以 $m = 4$ 和 $N = 9$ ，其諧波數設定較大時，便會以更多的未知數作為 FD 係數，描述更複雜的圖形。但是曲線的其他部分也會與目標曲線的圖形不成比例，通常目標曲線會佔得很小。這是因為曲線其他部分的坐標值間距增加，使圖形整體變大很多。

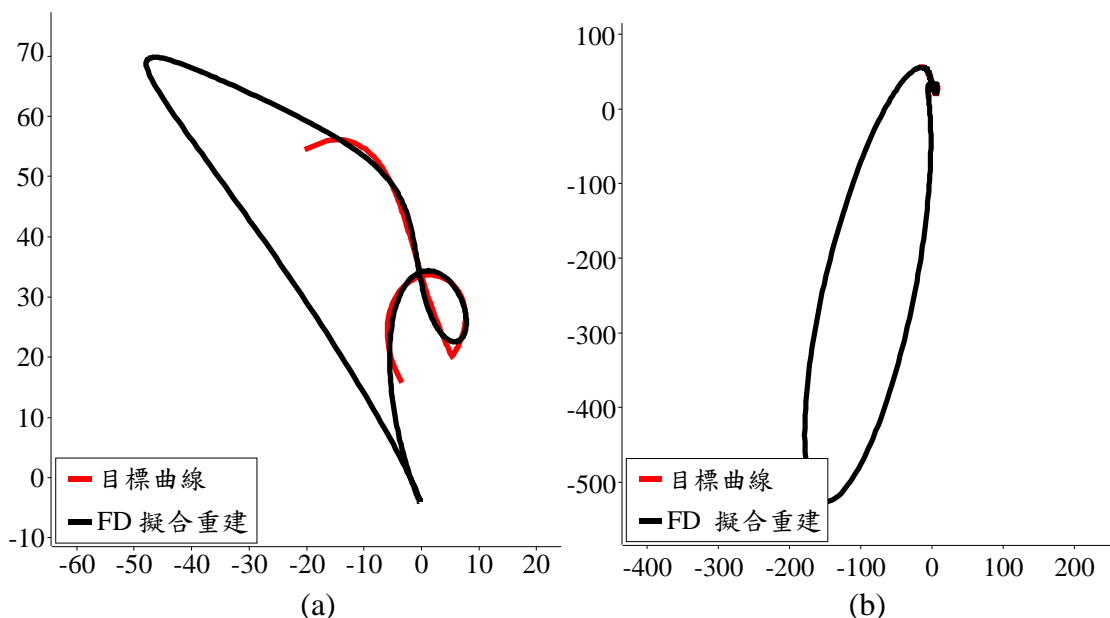


圖 2-8 以(a) 7 諧波數(b) 9 諧波數進行 TPCF 的完整重建

接著將 FD 的公式替換成相似的 EFD 方法，先排除常數項，列出以 x 軸為例的近似式：

$$x(t_p) \approx \sum_{n=1}^N a_n \cos nt_p + b_n \sin nt_p \quad (2-43)$$

其中 t_p 也一樣需要對應至 p 點，並且亦須指定時間參數的週期。從式(2-31) 誤差 Δ 開始推導，平面的偏微分方程為 $\frac{\partial \Delta}{\partial a_n} + \frac{\partial \Delta}{\partial b_n} + \frac{\partial \Delta}{\partial c_n} + \frac{\partial \Delta}{\partial d_n} = 0$ ，並且結果與式(2-33) 和式(2-35)類似，每點的坐標值為

$$a_1 \cos t_p + \dots + a_N \cos Nt_p + \dots + b_1 \sin t_p + \dots + b_N \sin nt_p = x_p \quad (2-44)$$

$$c_1 \cos t_p + \dots + c_N \cos Nt_p + \dots + d_1 \sin t_p + \dots + d_N \sin nt_p = y_p \quad (2-45)$$

由此可見，EFD 中 x 與 y 分量的係數互不相關。將各維度分開後，方程組可列為

$$A_{K \times 2N} X_{2N \times \text{dim}} = B_{K \times \text{dim}} \quad (2-46)$$

這裡 dim 是指坐標維度，平面和空間分別為 2 和 3。這邊以空間曲線為例，展示各矩陣元素的排列。A 矩陣是各諧波的餘弦與正弦項係數，對應到離散點坐標的約束式，代入後變成

$$A_{K \times 2N} = \begin{bmatrix} \cos t_1 & \cdots & \cos nt_1 & \cdots & \cos Nt_1 & \sin t_1 & \cdots & \sin nt_1 & \cdots & \sin Nt_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos t_p & \cdots & \cos nt_p & \cdots & \cos Nt_p & \sin t_p & \cdots & \sin nt_p & \cdots & \sin Nt_p \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos t_K & \cdots & \cos nt_K & \cdots & \cos Nt_K & \sin t_K & \cdots & \sin nt_K & \cdots & \sin Nt_K \end{bmatrix} \quad (2-47)$$

而未知數矩陣 X 與包含離散點坐標的矩陣 B 表示為

$$X_{2N \times \text{dim}} = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & e_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & c_n & e_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_N & c_N & e_N \\ b_1 & d_1 & f_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & d_n & f_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_N & d_N & f_N \end{bmatrix} \quad (2-48)$$

$$B_{K \times \text{dim}} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_p & y_p & z_p \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_K & y_K & z_K \end{bmatrix} \quad (2-49)$$

接下來本研究比較了使用 FD 與 EFD 表示法進行 TPCF 的效果與特性。如圖 2-9(a)所示，以一條 11 點的開放曲線測試 EFD 的擬合結果，係數所描繪的曲線在指定週期下可以通過所有的離散點。然而，整體的圖形卻無法非常平滑，非目標點的部分會產生較大的波動。另外如圖 2-9(b)所示，FD 在不同的諧波數會帶來不同的波動，改變諧波數僅能降低目標點的誤差，卻會增大非目標點區域的波動。而 EFD 也是相同的情形，雖然誤差更小，但是稍微改變坐標值就會造成係數劇烈變動。所以僅能透過人工調整，找到一較好的諧波數，才能夠得到較好的重建曲線。

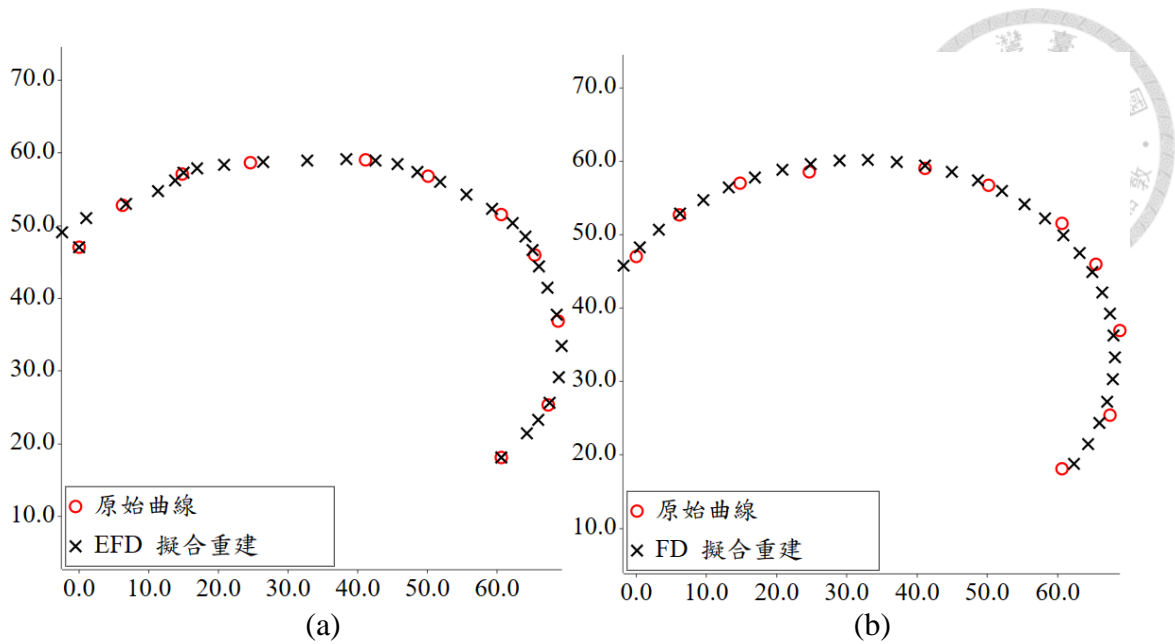


圖 2-9 開放曲線使用(a) EFD 和(b) FD 方法擬合重建

從式(2-27)和式(2-43)可以看出，FD 與 EFD 兩種描述方式做 TPCF 時，最大的不同在於，FD 的係數包含了 x 軸和 y 軸的坐標值，其中的實部與虛部也會互相影響計算；但是 EFD 的係數是完全獨立的，每個維度皆不會互相影響，故無法彼此約束。另外，由傅立葉轉換所得之 FD 係數，與近似公式所得之 EFD 係數，皆會依大小排列係數數值，但 TPCF 方法卻無此規律，故無法使用 FPA 自動求得最佳諧波數。最佳諧波數最終只能使用試誤法 (Trial and Error) 找到，且比較對象也必須設定成一樣的諧波數才能比較。

上述特性導致相似的圖形不會有類似的結果，由於係數可能有其它組解，稍微變動其中一個坐標的數值，擬合結果即會造成極大的差異。亦無法藉由正規化步驟變成唯一結果，取得其幾何參數。因此 TPCF 方法尚無法滿足本研究需要比較係數與轉換圖形的要求。

2.5.2 往復描述法

除了使用演算法尋找可行的係數解，本研究亦有嘗試其它方法在幾何上擴充開放曲線，將其轉變成封閉曲線，列舉如下：

1. 文獻[24]線性偏移和反對稱延長：先轉換成尖端在原點的水滴形曲線，再變成對稱象限上的八字形曲線，但是多數 C 型曲線特徵過於相似，EFD 誤差極小。線性偏移算是一種變形轉換。

2. 直接使用直線封閉：會讓凸多邊形的結果旋轉錯誤，因為頭尾銜接特徵跟其它中段部分沒有差別。
3. 使用對稱的另一部份（或旋轉 90 度）頭尾相接：除了一樣有直線封閉的問題外，還會有幾何鏡射錯誤的問題，得到的特徵是相反的。若是特別紀錄鏡射的方向，曲線多出的數據量也是兩倍。

在嘗試上述的方法後，本研究提出了一種不影響圖形外觀的方式，來將開放曲線轉為封閉曲線，稱為往復開放曲線 (Reciprocating Open Curve)。其模型如圖 2-10 所示，將開放曲線視為一個往復行程的封閉曲線，其中一端為起點，另一端為第 K 點，其返程再經過第 $K + 1$ 至第 $2K - 1$ 點（原本的起點）。此時最後一點與第一點相同，且轉換後的點數會始終為奇數。不過，這樣的圖形在兩個端點處具有尖點的特徵，當諧波數較少時會損失一些相似度，所以通常需要較多諧波數來描述。往復的曲線在 EFD 描述中會是一種特殊情況，故不需實際增加返程的離散點計算係數，不會增加數據量。以下將介紹往復曲線求取 EFD 係數的公式。

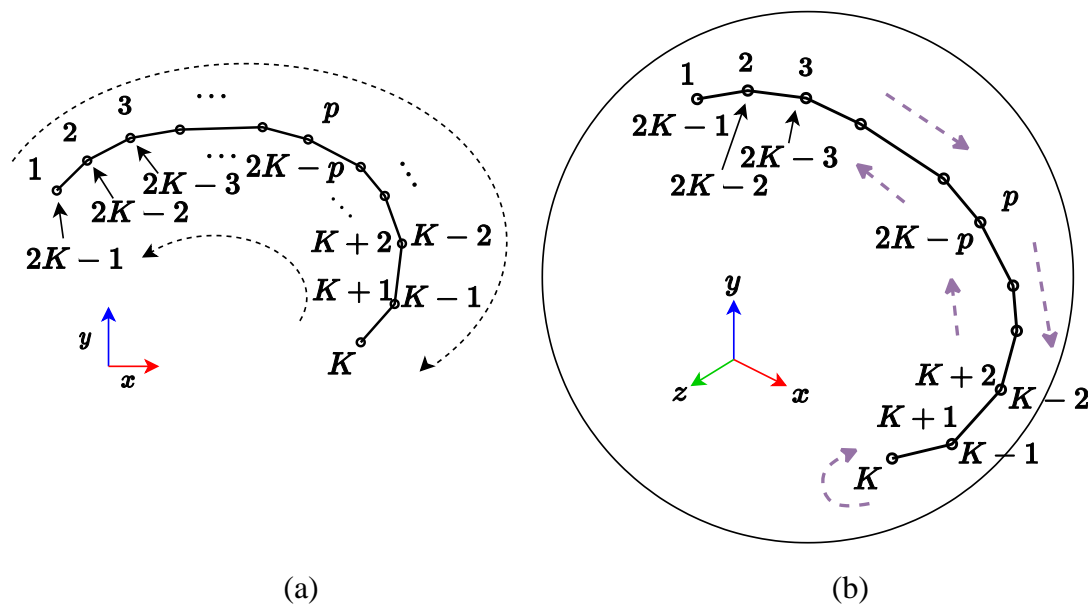
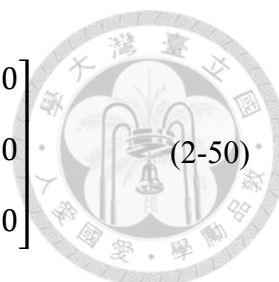


圖 2-10 開放曲線的往復描述於(a)平面與(b)球面

在兩個相同的圖形，唯行進方向相反時，兩圖形第 n 項諧波的正弦項向量 v_n 之正負號會相反變成 $-v_n$ 。所以當此反向形狀與正向形狀各佔一半週期後，正弦項係數會互相抵消變成 0。此化簡證明可以參見附錄 II。其係數的公式以空間 EFD 為例，會變成



$$\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \\ e_n & f_n \end{bmatrix}_{\text{open}} = \begin{bmatrix} \frac{4}{n^2\pi} \sum_{p=1}^{K-1} \frac{\Delta x_p}{\Delta L_p} \left(\cos \frac{nt_{p+1}}{2} - \cos \frac{nt_p}{2} \right) & 0 \\ \frac{4}{n^2\pi} \sum_{p=1}^{K-1} \frac{\Delta y_p}{\Delta L_p} \left(\cos \frac{nt_{p+1}}{2} - \cos \frac{nt_p}{2} \right) & 0 \\ \frac{4}{n^2\pi} \sum_{p=1}^{K-1} \frac{\Delta z_p}{\Delta L_p} \left(\cos \frac{nt_{p+1}}{2} - \cos \frac{nt_p}{2} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (2-50)$$

上述係數的公式，會發現每項諧波的橢圓向量只剩餘弦項向量，且根據式(2-10)可得知相位角 $\theta_1 = 0$ 。往復曲線成為多個直線簡諧運動疊加出的圖形，如圖 2-11 所示。由於往復描述模型是 EFD 的一種特殊解，正弦項向量 v_n 變成零向量，導致無法在空間 EFD 中計算式(2-23)定義的圖形旋轉。為了使開放曲線也有固定的旋轉不變性，本研究使用第一諧波的餘弦項向量 u_1 與第二諧波的餘弦項向量 u_2 當作平面的定位依據，取代原本 u_1 與 v_1 所建構的平面。空間開放曲線所使用的旋轉矩陣定義為

$$R_{\psi, \text{open}} = \begin{bmatrix} \frac{u_1^*}{|u_1^*|} & \frac{(u_1^* \times u_2^*) \times u_1^*}{|(u_1^* \times u_2^*) \times u_1^*|} & \frac{u_1^* \times u_2^*}{|u_1^* \times u_2^*|} \end{bmatrix} \quad (2-51)$$

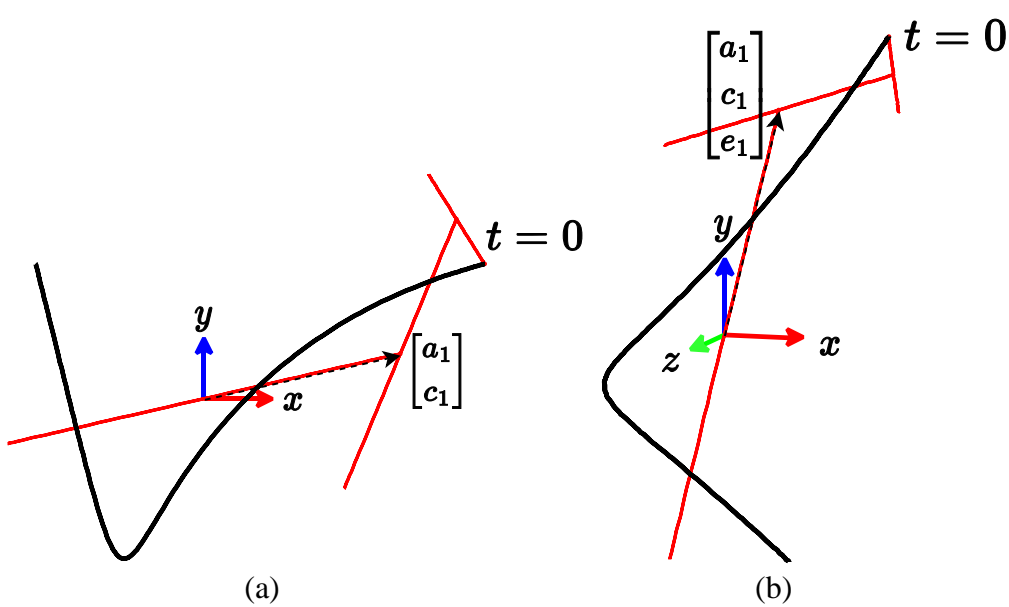


圖 2-11 往復模型的橢圓向量於(a)平面與(b)空間

若以重建效果而言，與擬合法相比，使用往復描述法可以適用 FPA 的諧波數簡化方法，因此能夠以量化的方式選擇適合的諧波數，而不須擔心調整諧波數造成曲線的抖動情況。在圖 2-12 中，與第 2.5.1 節擬合重建的結果對照比較。如圖 2-12(a)所示，EFD 往復重建使用了 10 諧波數，而 EFD 擬合重建使用了 7 諧波數。另外如圖 2-12(b)所示，FD 往復重建使用了 19 諧波數，而 FD 擬合重建使用了 3 諧波數。由於 FD 的係數數量只有 EFD 的一半，因此往復描述法使用的係數

數量相當；而擬合法必須針對個別圖形調整到較好的諧波數，且諧波數增加並不會更貼近目標曲線，所以無法使用此單一個案比較。另外，從圖 2-12(a)可觀察出往復描述重建之曲線在頭尾的貼合程度較差，這是因為剩下的距離被包含進了高諧波數中所導致的現象。以計算性能而言，TPCF 方法會隨著諧波數與輸入點數越多而計算越久，導致諧波數有其上限；使用往復描述方法的計算量甚至比近似公式更少，不過其採樣數變為 $2K - 1$ ，諧波數要求通常多於封閉曲線。

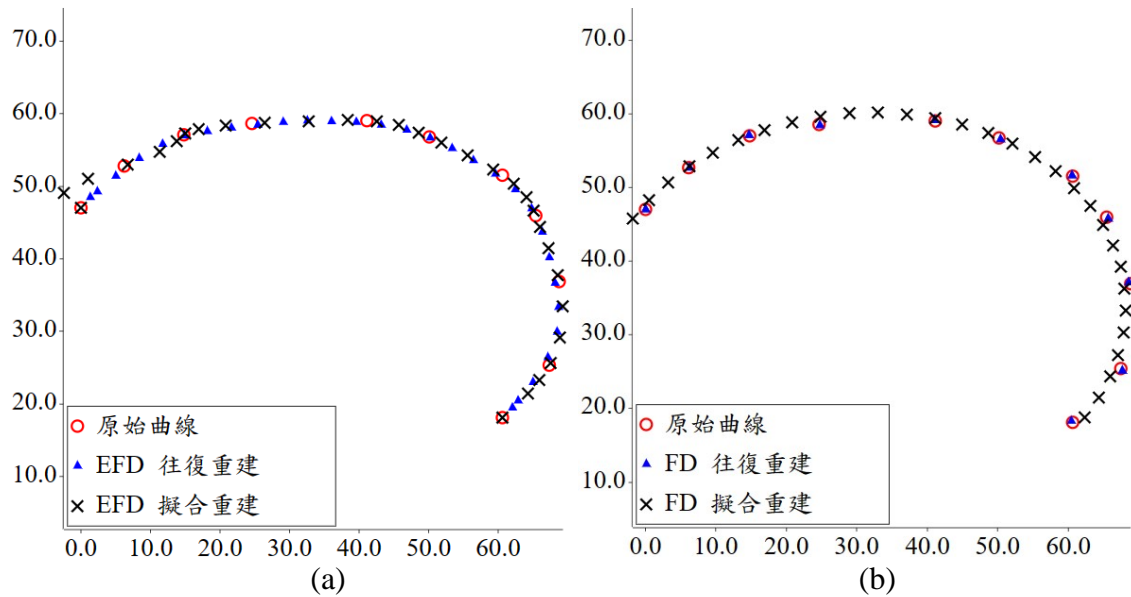


圖 2-12 往復描述法與擬合法 (a) EFD 與 (b) FD 的重建比較

2.6 係數比較

在文獻[35]中，EFD 是以平方誤差 (Square Error) 計算的。可列式成

$$E_{\text{square}} = \sum_{n=1}^N (\Delta a_n^2 + \Delta b_n^2 + \Delta c_n^2 + \Delta d_n^2 + \Delta e_n^2 + \Delta f_n^2) \quad (2-52)$$

其中前綴 Δa_n 表示兩個系數的差值 ($a_n - a'_n$)。

EFD 的係數可以視作圖形的特徵向量 (Feature Vector)，是一種高維度的向量數據，在機器學習 (Machine Learning) 領域中被視為一筆數據的特徵。本研究描述之圖形係數不會受其幾何狀態影響，且對該圖形而言是唯一的。高維度的向量在比較時，相似的圖形會獲得較接近的數值表現，可當作向量間的方向與長度差異。另外本研究皆使用 L_p -範數 (L_p -norm) 來計算誤差，以降低維數災難 (Curse of Dimensionality) 的影響。 L_p -範數的定義如下：

$$\|X\|_p = \sqrt[p]{\sum_i |X_i|^p} \quad (2-53)$$

其中 p 是階數， \mathbf{X} 是高維度向量的差值。本研究在機構合成使用的誤差形式有曼哈頓距離 (Manhattan Distance) ($p = 1$)、歐幾里得距離 (Euclidean Distance) ($p = 2$)，還有切比雪夫距離 (Chebyshev Distance) ($p = \infty$) 的概念，其簡化後的形式如下所列：

$$\|\mathbf{X}\|_1 = \sum_i |\mathbf{X}_i| \quad (2-54)$$

$$\|\mathbf{X}\|_2 = \sqrt{\sum_i \mathbf{X}_i^2} \quad (2-55)$$

$$\|\mathbf{X}\|_\infty = \max_i |\mathbf{X}_i| \quad (2-56)$$

其中 \mathbf{X} 會在計算目標與結果之間的相似度時，代入 EFD 係數的差值 \mathbf{X}_{EFD} ，或是以不同分量組合不同屬性之誤差，例如兩組係數誤差。

EFD 係數誤差的計算在本研究中採用曼哈頓距離，這有助於保持其強韌性 (Robustness)。曼哈頓距離的計算方式簡單直觀，並且對於異常值的影響較小，因此在計算 EFD 係數誤差時是一個合適的選擇。在幾何方面，傳統上則使用歐幾里得距離。歐幾里得距離能夠更好地反映出點之間的空間距離，適合用於描述幾何特徵之間的誤差。而組合不同屬性的誤差時，則通常使用切比雪夫距離。切比雪夫距離關注的是兩個向量中每個對應元素之間的最大差異，因此更關注極值的趨勢。這在組合多個屬性的誤差並增加權重以使其在相似尺度下進行比較時非常有用。總之，EFD 的係數誤差在合成方法中通常表示為以上提及的距離之一，並且根據需要選擇不同的距離計算方法以確保對係數誤差的合適度量。EFD 的係數誤差將在之後的合成方法中表示成：

$$E = \|\mathbf{X}_{\text{EFD}}\|_1 = \sum_{n=1}^N (|\Delta a_n| + |\Delta b_n| + |\Delta c_n| + |\Delta d_n| + |\Delta e_n| + |\Delta f_n|) \quad (2-57)$$

另外，除了 EFD 係數誤差以外，我們也另外使用傳統的平均距離誤差來評估本研究的合成結果，以及其它文獻的合成結果。此演算法如圖 2-13 所示，將目標點依序對應到耦桿曲線上最近的位置，是一種線性檢索。為了不受起始點影響，耦桿曲線以循環的方式，與下一點的誤差比較，尋找最小的距離誤差。由於此演算法僅用來分析合成結果，所以不考慮幾何正規化與收斂性問題。此誤差以數學式表示成：

$$E_{\text{avg}} = \frac{1}{K} \sum_{p=1}^K \sqrt{(x_p - x'_p)^2 + (y_p - y'_p)^2 + (z_p - z'_p)^2} \quad (2-58)$$

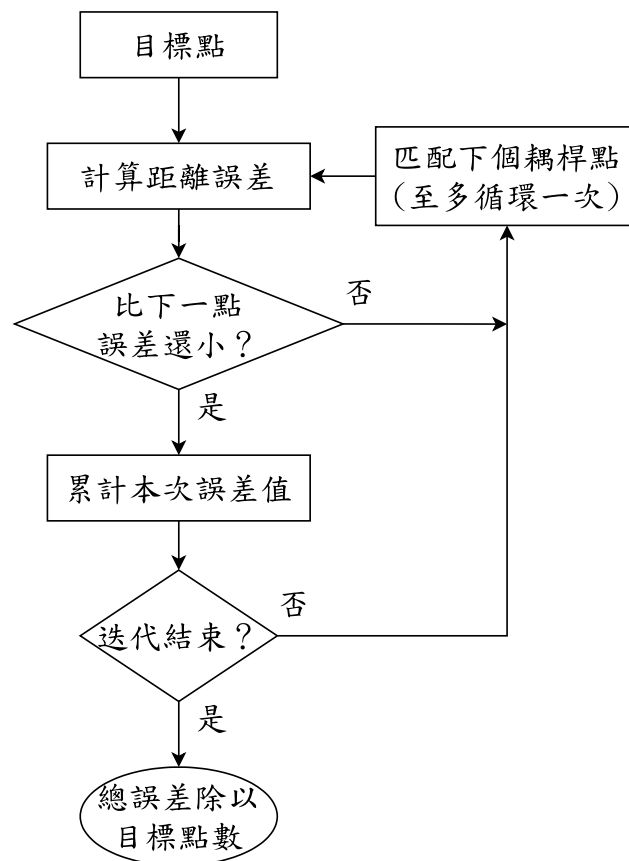


圖 2-13 平均距離誤差計算方式

2.7 小結

本章詳細介紹了如何使用近似公式計算離散點曲線的 EFD 係數，並透過正規化步驟提出幾何參數以供係數比較。接著透過 FPA 調整諧波數，可以有效降低係數的數量，從而提升係數比較的效率。此外，本研究分析了傳統 TPCF 的方法，並與本研究提出的往復曲線模型進行比較。完整的流程如圖 2-14 所示，首先將輸入的離散點曲線根據使用者的定義分為封閉或開放曲線，將開放曲線轉換為往復曲線模型。接著，將曲線進行近似以獲得相應的 EFD 係數表示該圖形，並根據需求利用 FPA 方法調整至最小的諧波數。最後，進行正規化係數以取得幾何參數。正規化 EFD 係數能夠在機構合成時透過相似度比較，即便該機構不一定能產生完全相同的曲線，仍能獲得一個接近形狀的耦桿點曲線。這個概念將在後續的第 4 章和第 5 章中進行應用。

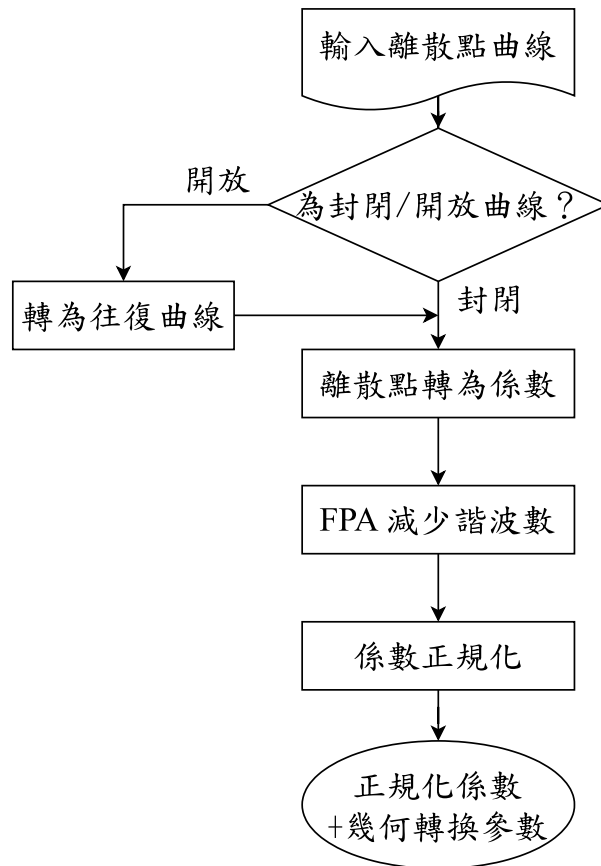


圖 2-14 離散點轉為正規化係數之流程

第3章 平面與球面四連桿機構



3.1 平面四連桿機構

如圖 3-1 所示，一單自由度的平面四連桿機構總共需要 10 個參數 $(p_1, \alpha, \beta, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, \gamma)$ 來定義其於平面中的確定運動位置。其中點 p_1 是機構原點，包含兩個坐標參數，機構原點位於驅動桿 (Driver) 與地桿 (Ground) 的接頭； α 是地桿與 x 軸的夾角； β 是輸入角，在該連桿的運動範圍輸入； l_1 是地桿長； l_2 是驅動桿長； l_3 是耦桿 (Coupler) 長； l_4 是從動桿 (Follower) 長； l_5 是耦桿點延伸的長度； γ 是耦桿點延伸的角度。幾何相關參數為 p_1 、 α 及縮放參數，本研究使用驅動桿長 l_2 作為縮放參數。當 l_2 縮放成 1 時，可得平面四連桿機構的 5 個設計變數 $(l_1^* = \frac{l_1}{l_2}, l_3^* = \frac{l_3}{l_2}, l_4^* = \frac{l_4}{l_2}, l_5^* = \frac{l_5}{l_2}, \gamma)$ 。幾何上平移受到機構原點 p_1 影響；旋轉受到地桿角度 α 影響；縮放則以驅動桿長 l_2 決定。由於上述三個參數不對耦桿曲線形狀造成影響，故產生曲線時可以將這些參數設定為 $(p_1^* = [0,0]^T, \alpha^* = 0, l_2^* = 1)$ ，以減少連桿機構的設計變數。上述簡化後的設計變數所組成之機構，稱為正規化連桿機構 (Normalized Linkage Mechanism)。連桿機構會產生不同的迴路 (Circuit) 和分支 (Branch)，即耦桿與從動桿的兩種配置 (Configurations)，會導致完全不同的耦桿曲線，故本研究在搜尋時也會一同考量兩種配置結果。

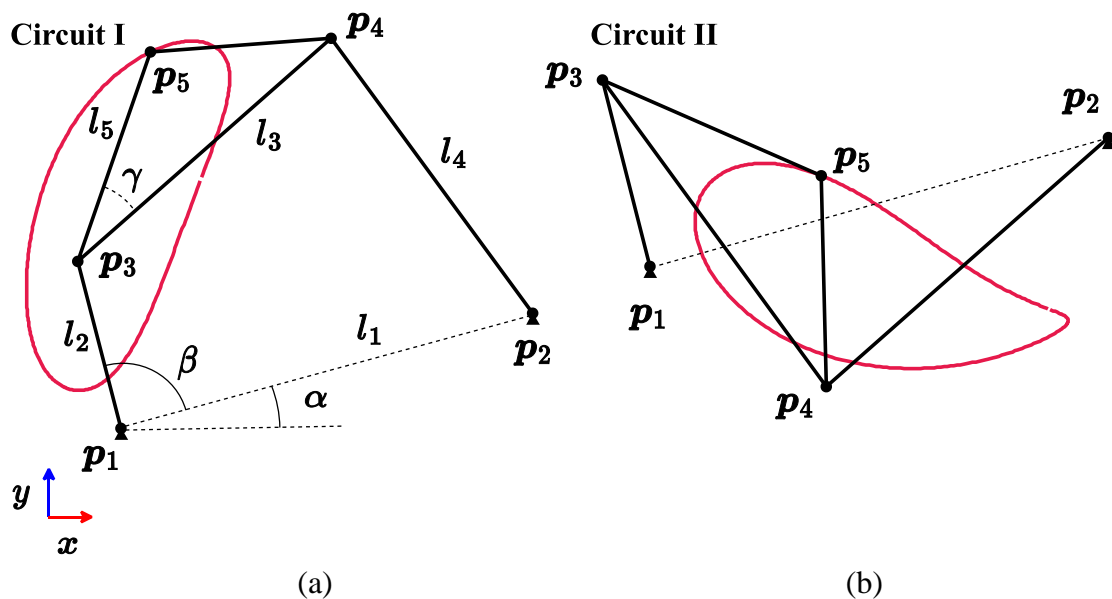


圖 3-1 平面四連桿機構參數與兩種配置產生的耦桿曲線(a)迴路 I 和(b)迴路 II



3.1.1 耦桿曲線計算

根據圖 3-1 的參數模型，可以透過幾何公式計算出每個接頭的點坐標。點 p_1 的坐標值從機構參數得到，而點 p_2 與點 p_3 基於其上，列為

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + l_1 \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

$$\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_1 + l_2 \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

至於點 p_4 需要計算耦桿與從動桿的連接處，可視為兩個圓的兩個交點：第一個圓的圓心在 p_3 ，半徑為 l_3 ；第二個圓的圓心在 p_2 ，半徑為 l_4 。這兩個交點的位置會從上下兩個三角形求出，以兩圓間向量 $\mathbf{p}_{32} = (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)$ 與半徑 $r = |\mathbf{p}_{32}| = \sqrt{\mathbf{p}_{32x}^2 + \mathbf{p}_{32y}^2}$ 來計算。若發生半徑為零、($r > l_3 + l_4$) 或是 ($r < |l_3 - l_4|$) 的情況，代表沒有交點，此處為桿件無法安裝之位置。接著計算出旋轉角 $\angle p_2 p_3 p_4$ 的餘弦與正弦值為

$$\cos \angle p_2 p_3 p_4 = \frac{l_3^2 - l_4^2 + r^2}{2r} \quad (3-3)$$

$$\sin \angle p_2 p_3 p_4 = \sqrt{l_3^2 - \cos^2 \angle p_2 p_3 p_4} \quad (3-4)$$

有了這兩個數值，可以建構平面旋轉矩陣 $R_{\angle p_2 p_3 p_4}$ 從向量 \mathbf{p}_{32} 轉到耦桿 $\overline{p_3 p_4}$ 的位置。另一個交點則是在共軛方向，使用轉置的矩陣 $R_{\angle p_2 p_3 p_4}^T$ 即可。接著從點 p_3 計算點 p_4 的坐標：

$$\mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_3 + R_{\angle p_2 p_3 p_4} \frac{1}{r} \mathbf{p}_{32} \quad (3-5)$$

除了一般的情況，平行連桿的情況算法亦不同，即 $l_1 = l_3$ 與 $l_2 = l_4$ 的狀況，此時點 p_4 直接定義成

$$\mathbf{p}_{4,parallel} = \mathbf{p}_2 + (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) \quad (3-6)$$

最後的耦桿點 p_5 可從點 p_3 計算出：

$$\mathbf{p}_5 = \mathbf{p}_3 + l_5 \begin{bmatrix} \cos \left(\gamma + \tan^{-1} \frac{\mathbf{p}_{34y}}{\mathbf{p}_{34x}} \right) \\ \sin \left(\gamma + \tan^{-1} \frac{\mathbf{p}_{34y}}{\mathbf{p}_{34x}} \right) \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

其中 $\mathbf{p}_{34} = (\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_3)$ 。



3.1.2 連桿分類

根據連桿機構的桿長，可以將連桿機構進行分類，以計算其運動範圍。首先，任一桿件能夠 360° 旋轉的連桿機構稱為 Grashof 類型，若只有驅動桿能完整旋轉的連桿，只有曲柄搖桿 (Crank-rocker) 與雙曲柄 (Double-crank) 機構。完整運動範圍的角度上下界即為 0 到 2π 。

驅動桿無法旋轉一周的機構類型會產生開放曲線，其運動範圍必須透過公式計算才能得知。若不提前計算運動範圍，直接計算 0 到 2π 的位置解，僅能得知是否為可行位置，且耦桿曲線亦會有解析度的問題。如表 3-1 所示，平面四連桿機構的運動範圍與其判斷條件列式其下，皆計算自四桿迴路 (l_1, l_2, l_3, l_4)。其中，根據輸入範圍與配置的不同，最少產生兩種曲線，最多產生四種曲線。耦桿曲線以迴路與分支編號方便列舉，如表中的備註所示。

表 3-1 平面四連桿機構的運動範圍

分類	條件	輸入範圍	備註
雙曲柄、曲柄搖桿	式(3-8)	$[0, 2\pi]$	Grashof, 2 迴路
雙搖桿 1	式(3-9)	式(3-12)	非 Grashof, 1 迴路各 2 分支
雙搖桿 2	式(3-10)	式(3-13)	非 Grashof, 1 迴路各 2 分支
雙搖桿 3、搖桿曲柄	式(3-11)	式(3-14)或 式(3-15)	Grashof, 1 或 2 迴路各 2 分支

$$(l_1 + l_2 \leq l_3 + l_4) \text{ and } (|l_1 - l_2| > |l_3 - l_4|) \quad (3-8)$$

$$(l_1 + l_2 > l_3 + l_4) \text{ and } (|l_1 - l_2| > |l_3 - l_4|) \quad (3-9)$$

$$(l_1 + l_2 < l_3 + l_4) \text{ and } (|l_1 - l_2| < |l_3 - l_4|) \quad (3-10)$$

$$(l_1 + l_2 > l_3 + l_4) \text{ and } (|l_1 - l_2| < |l_3 - l_4|) \quad (3-11)$$

$$\left[-\cos^{-1} \frac{l_1^2 + l_2^2 - (l_3 + l_4)^2}{2l_1 l_2}, \cos^{-1} \frac{l_1^2 + l_2^2 - (l_3 + l_4)^2}{2l_1 l_2} \right] \quad (3-12)$$

$$\left[\cos^{-1} \frac{l_1^2 + l_2^2 - (l_3 - l_4)^2}{2l_1 l_2}, 2\pi - \cos^{-1} \frac{l_1^2 + l_2^2 - (l_3 - l_4)^2}{2l_1 l_2} \right] \quad (3-13)$$

$$\left[\cos^{-1} \frac{l_1^2 + l_2^2 - (l_3 - l_4)^2}{2l_1 l_2}, \cos^{-1} \frac{l_1^2 + l_2^2 - (l_3 + l_4)^2}{2l_1 l_2} \right] \quad (3-14)$$

$$\left[2\pi - \cos^{-1} \frac{l_1^2 + l_2^2 - (l_3 - l_4)^2}{2l_1 l_2}, 2\pi - \cos^{-1} \frac{l_1^2 + l_2^2 - (l_3 + l_4)^2}{2l_1 l_2} \right] \quad (3-15)$$

除了圖 3-1 封閉曲線的兩種迴路曲線外，如圖 3-2 所示，開放曲線可以有類似於單一迴路上的分支構型。本研究將 1 迴路各 2 分支，共兩種曲線的構型編號成 I-I 與 I-II；而 2 迴路各 2 分支，共四種曲線的構型編號成 I-I、I-II、II-I 與 II-II。其中，圖 3-2(a) 是由切換配置在同一迴路形狀上產生了兩種曲線；而圖 3-2 (b) 則是有兩組輸入範圍，再加上切換配置產生了四種曲線。另外，除了表 3-1 所列，還有極端運動範圍的情況，例如只有單一位置可裝配的機構，由於數字的精度和曲線解析度問題，這些情況幾乎不會出現，因此未列出。

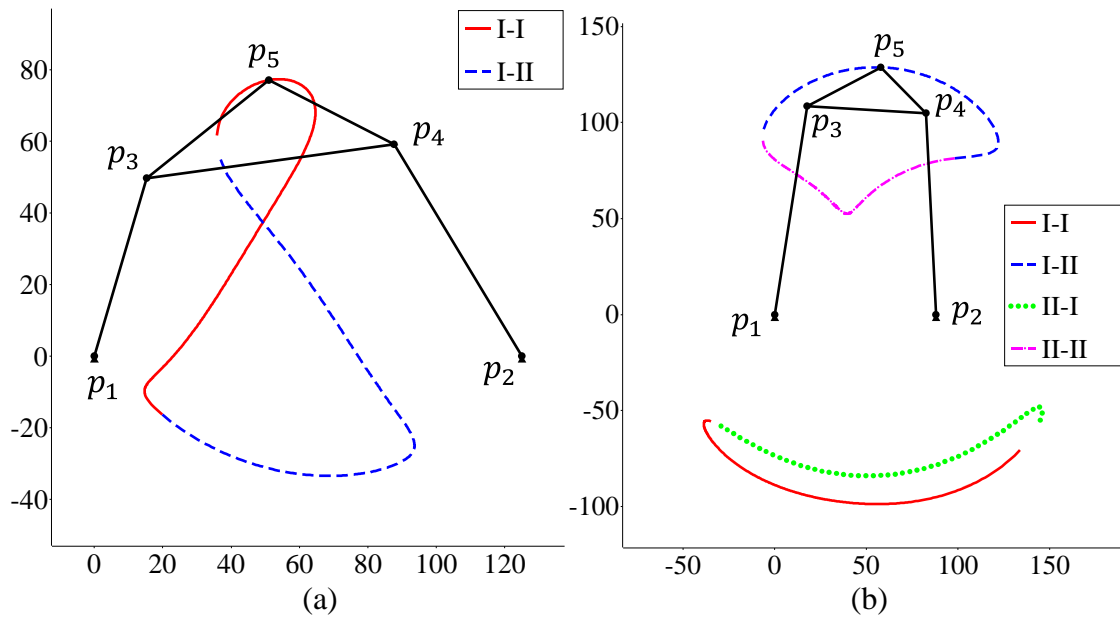


圖 3-2 四連桿(a)兩種開放耦桿曲線以及(b)四種耦桿曲線

3.1.3 去正規化

合成出設計變數後，正規化連桿機構並不包含幾何參數，也就是除設計變數之外的其它參數。因此需要進行去正規化步驟，由正規化耦桿曲線轉換到其正規化 EFD 空間，最終轉換到目標曲線的空間。平面四連桿機構的幾何參數為：(a) 平移對應到機構原點 p_1 ，(b) 旋轉對應到地桿角度 α ，(c) 縮放為驅動桿桿長 l_2 。這三項數值可由「正規化耦桿曲線」與「目標曲線」兩者圖形的幾何參數表示為

$$p_{1,denorm} = \begin{bmatrix} A_0 \\ C_0 \end{bmatrix}_{tar} - \begin{bmatrix} A_0 \\ C_0 \end{bmatrix}_{syn} \quad (3-16)$$

$$\alpha_{denorm} = \psi_{tar} - \psi_{syn} \quad (3-17)$$

$$l_{2,denorm} = \frac{s_{tar}}{s_{syn}} \quad (3-18)$$

其中下標 syn 表示從正規化耦桿曲線取得的幾何參數，tar 為目標曲線的幾何參數。而下標 denorm 表示去正規化連桿的幾何參數。最後，其它的正規化機構桿長 ($l_1^*, l_3^*, l_4^*, l_5^*$) 應一同乘上去正規化驅動桿的桿長 $l_{2,denorm}$ ，計算出還原後的桿長。

3.1.4 剛體導引機構

本研究另外針對平面剛體導引任務評估 EFD 方法的效益。如圖 3-3 所示之平面四連桿機構模型，由路徑生成所使用的模型延伸出一單位向量 ϵ ，表示耦桿上固定的任兩點 p_5 和 $(p_5 + \epsilon)$ 在耦桿運動時，所行經之路徑。在剛體導引中，這兩點必須通過給定多個線段的位置。其中向量 ϵ 表示了方向，雖然此向量的大小 $|\epsilon|$ 設定成任何長度應該都是相同的運動情形，但是長度過大或過小卻會影響誤差的計算，導致最佳化的收斂效果不同。因此向量 ϵ 的大小通常會指定成設計變數之一，或使用單位向量配合建立 p_5 和 $(p_5 + \epsilon)$ 的兩條路徑供誤差計算。由於前者指定長度是一種贅餘 (Redundant) 設計變數，故本研究採用後者單位向量的表示方法，建立剛體導引正規化機構的 6 個設計變數 ($l_1^*, l_3^*, l_4^*, l_5^*, \gamma, \angle\epsilon$)，其中最後一項參數 $\angle\epsilon$ 是耦桿上的向量 ϵ 和耦桿 $\overline{p_3p_4}$ 之間的夾角，可以在產生耦桿運動時計算出運動位置上的單位向量。

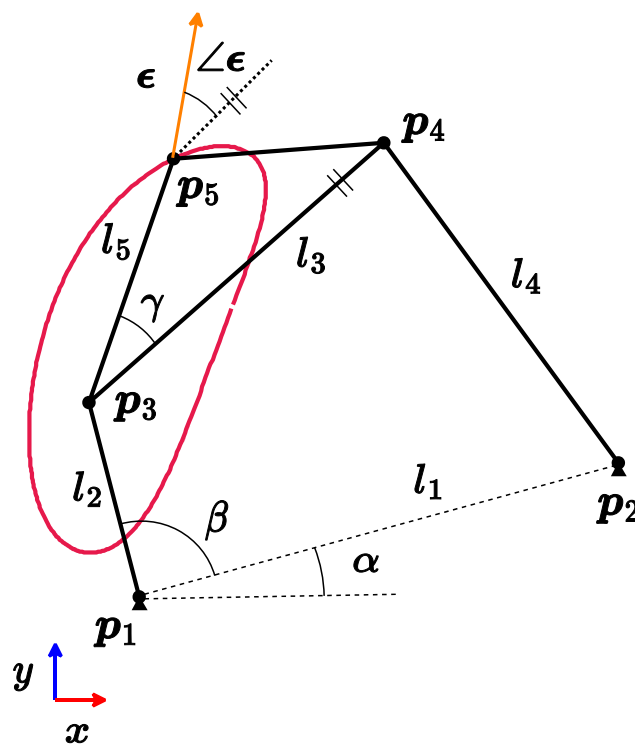
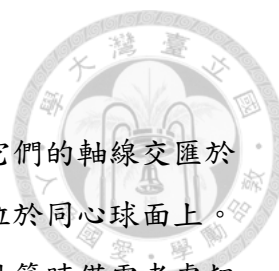


圖 3-3 平面四連桿剛體導引模型



3.2 球面四連桿機構

球面四連桿機構是指四個剛性桿件透過旋轉接頭相連，使它們的軸線交匯於空間中的一點。在這種機構中，各桿件上的運動點形成的軌跡位於同心球面上。為了避免干涉，實際上每個桿件所處的安裝半徑都不同，但在計算時僅需考慮耦桿點的半徑。如圖 3-4 所示為一球面四連桿機構， (p_1, p_2, p_3, p_4) 為接頭在球面上的點，點 p_5 為耦桿點，共 14 個參數 $(O_s, r, \eta, \varphi, \alpha, \beta, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, \gamma)$ 。其中 O_s 是球心，包含三個坐標參數； r 是球半徑； η 與 φ 是機構原點 p_1 的球坐標， η 稱為極角 (Polar Angle)， φ 稱為方位角 (Azimuthal Angle)； α 是地桿繞行 p_1 接頭軸向量的夾角； β 是輸入角，在該連桿的運動範圍輸入； l_1 是地桿弧度； l_2 是驅動桿弧度； l_3 是耦桿弧度； l_4 是從動桿弧度； l_5 是耦桿點延伸的弧度； γ 是耦桿點延伸的角度。幾何上平移受到球心坐標 O_s 影響；球面的旋轉受到三個角度 (η, φ, α) 影響；縮放受到球半徑 r 影響。因此，正規化球面四連桿機構的設計變數共 6 個 $(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, \gamma)$ ，代表此機構位於一單位球 (Unit Sphere) 上，而機構原點 p_1 在 z 軸上，地桿平行於 x - z 平面。球面連桿機構的桿長皆為弧度，是各旋轉接頭之軸向間的夾角。

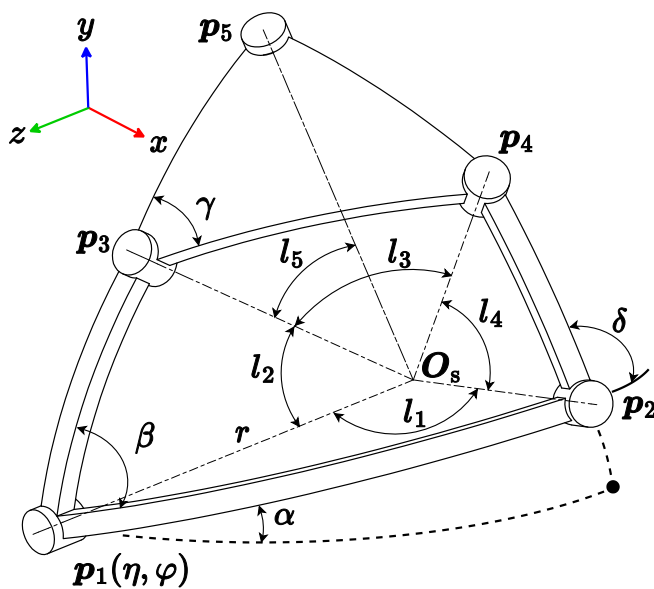


圖 3-4 球面四連桿機構參數

3.2.1 耦桿曲線計算

與平面四連桿不同，球面四連桿的耦桿點位置計算需要旋轉中心維持在坐標系原點。為方便計算，將直接計算各點與球心 O_s 的向量，定義每一接頭相對於



球心的軸向向量為 $P_i \equiv (\mathbf{p}_i - \mathbf{O}_s)$ ，其中 $i = 1, 2, \dots, 5$ 。這樣可將機構當成球心位於坐標系原點 O ，在半徑為 r 的球面上運動。如圖 3-5 所示，接著根據文獻[51]來計算耦桿點曲線的離散坐標。

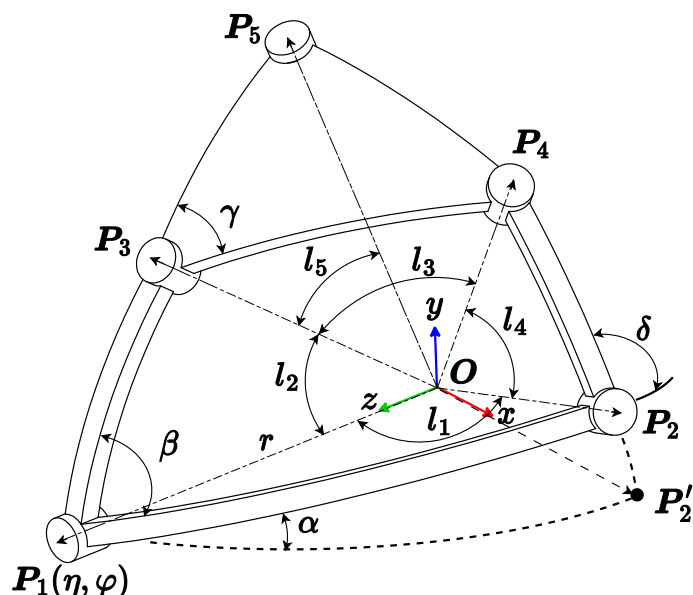


圖 3-5 球心位於原點的球面四連桿機構

根據迴路方程式可解出輸入角 β 與輸出角 δ 的關係為

$$\delta = 2 \tan^{-1} \frac{-h_3 \pm \sqrt{h_3^2 - h_1^2 + h_2^2}}{h_1 - h_2} \quad (3-19)$$

其中

$$h_1 = \cos l_2 \cos l_4 \cos l_1 - \cos l_3 + \sin l_2 \cos l_4 \sin l_1 \cos \beta \quad (3-20)$$

$$h_2 = -\cos l_2 \sin l_4 \sin l_1 + \sin l_2 \sin l_4 \cos l_1 \cos \beta \quad (3-21)$$

$$h_3 = \sin l_2 \sin l_4 \sin \beta \quad (3-22)$$

此關係式中包含兩個解，對應到耦桿與從動桿的兩種配置，切換這兩個解與切換運動範圍可以改變所選之迴路與分支，得到不同的耦桿曲線，如圖 3-6 所示。

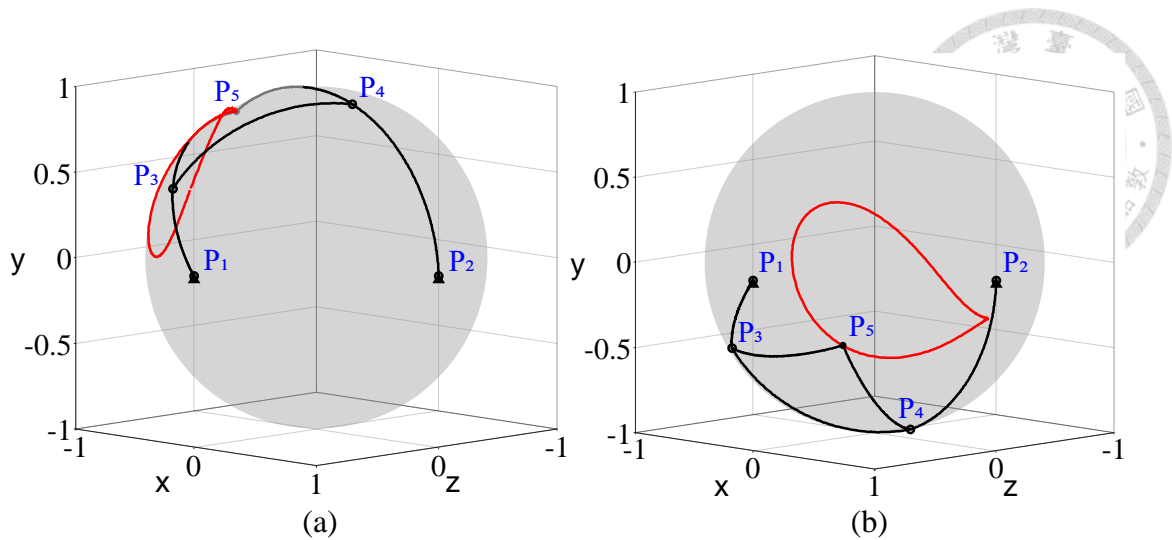


圖 3-6 球面四連桿機構兩種配置產生的曲線(a)迴路 I (b)迴路 II

接下來，為了在坐標系原點上進行向量之間的旋轉，本研究引入了螺旋軸 (Screw-axis) 表示法[52]，又稱軸角 (Axis-angle) 表示法，方便理解旋轉方式。此表示法以一空間單位向量 \mathbf{e} 作為旋轉軸，以右手定則旋轉一角度 ϕ 。其旋轉矩陣記作 $R_{\phi\mathbf{e}}$ ，下標為一非零向量，大小即為旋轉角度，根據羅德里格旋轉公式 (Rodrigues' Rotation Formula) 展開成

$$R_{\phi\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x^2\mu_\phi + \cos\phi & \mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mu_\phi - \mathbf{e}_z\sin\phi & \mathbf{e}_x\mathbf{e}_z\mu_\phi + \mathbf{e}_y\sin\phi \\ \mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mu_\phi + \mathbf{e}_z\sin\phi & \mathbf{e}_y^2\mu_\phi + \cos\phi & \mathbf{e}_y\mathbf{e}_z\mu_\phi - \mathbf{e}_x\sin\phi \\ \mathbf{e}_x\mathbf{e}_z\mu_\phi - \mathbf{e}_y\sin\phi & \mathbf{e}_y\mathbf{e}_z\mu_\phi + \mathbf{e}_x\sin\phi & \mathbf{e}_z^2\mu_\phi + \cos\phi \end{bmatrix} \quad (3-23)$$

其中代數 $\mu_\phi = (1 - \cos\phi)$ 。若旋轉的對象是一向量，從已知向量 \mathbf{a} 旋轉到已知向量 \mathbf{b} 的旋轉矩陣記為 ${}^bR_{\mathbf{a}}$ ，其旋轉軸向量 \mathbf{e} 為外積的單位向量 $\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}$ ，角度為 $\cos^{-1}\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}$ 。由於使用右手定則，這裡的角度與反餘弦函數的解相同，並不會有分歧結果。再來逐一計算各接頭的向量坐標，機構原點 p_1 使用球面坐標 (η, φ) 轉到直角坐標 (x, y, z) 表示，其公式為

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} r \sin\eta \cos\varphi \\ r \sin\eta \sin\varphi \\ r \cos\eta \end{bmatrix} \quad (3-24)$$

這裡定義機構在球面上的旋轉矩陣 R_{sphere} ，從全域坐標 z 軸轉至 \mathbf{P}_1 軸，並對 \mathbf{P}_1 軸旋轉一 α 角，可表示為

$$R_{\text{sphere}} = R_{\alpha_{\frac{\mathbf{P}_1}{|\mathbf{P}_1|}}} \mathbf{P}_1 R_{\hat{\mathbf{k}}} \quad (3-25)$$



接著先找到一個暫時的軸向向量 \mathbf{P}'_2 ，為乘上球面旋轉矩陣 R_{sphere} 之前，接頭 p_2 的位置，被用來當作計算向量 \mathbf{P}_4 的旋轉軸。所以我們假定機構原點還在 z 軸的方向上，列式成

$$\mathbf{P}'_2 = R_{l_{1j}} \cdot r\hat{\mathbf{k}} \quad (3-26)$$

而其餘接頭的軸向向量如下：

$$\mathbf{P}_2 = R_{\text{sphere}} \cdot \mathbf{P}'_2 \quad (3-27)$$

$$\mathbf{P}_3 = R_{\text{sphere}} R_{\beta\hat{\mathbf{k}}} R_{l_{2j}} \cdot r\hat{\mathbf{k}} \quad (3-28)$$

$$\mathbf{P}_4 = R_{\text{sphere}} R_{\delta \frac{\mathbf{P}'_2}{|\mathbf{P}'_2|}} R_{l_{4j}} \cdot \mathbf{P}'_2 \quad (3-29)$$

其中 \mathbf{P}_3 也跟 \mathbf{P}'_2 一樣，前乘上 R_{sphere} 之前都是從 z 軸的方向開始轉換。最後耦桿點 p_5 可先轉動到 l_5 和 γ 定義的位置，再以耦桿兩軸向向量 \mathbf{P}_3 和 \mathbf{P}_4 ，在球心位置 \mathbf{O} 構成之局域坐標系的旋轉矩陣 R_{coupler} 轉到最終位置，列式為

$$\mathbf{P}_5 = R_{\text{coupler}} R_{\gamma\hat{\mathbf{k}}} R_{l_{5j}} \cdot r\hat{\mathbf{k}} \quad (3-30)$$

而 R_{coupler} 是由三個正交的向量 \mathbf{P}_3 、 $(\mathbf{P}_3 \times \mathbf{P}_4) \times \mathbf{P}_3$ 和 $\mathbf{P}_3 \times \mathbf{P}_4$ 定義的局部坐標系旋轉矩陣：

$$R_{\text{coupler}} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{P}_3}{|\mathbf{P}_3|} & \frac{(\mathbf{P}_3 \times \mathbf{P}_4) \times \mathbf{P}_3}{|(\mathbf{P}_3 \times \mathbf{P}_4) \times \mathbf{P}_3|} & \frac{\mathbf{P}_3 \times \mathbf{P}_4}{|\mathbf{P}_3 \times \mathbf{P}_4|} \end{bmatrix} \quad (3-31)$$

最後，所有向量加上球心的坐標 $\mathbf{p}_i = (\mathbf{P}_i + \mathbf{O}_s)$ ，從向量變為點坐標，便得到所有接頭與耦桿點 p_5 的位置。

3.2.2 等效連桿分類

從文獻[53]得知，球面四連桿由於連桿在球面折繞的關係，接頭 \mathbf{p}_i 在通過球心的映射位置，也就是桿長變為 $(l_i + \pi)$ 時有一個可替代位置 \mathbf{p}'_i 。而四個接頭在替代位置的某些組合下，能夠產生一樣的運動模式。這有助於將球面四連桿的桿長縮短，只要整組機構桿長不超過一半的球面，此機構能視為平面四連桿在半球面上的投影，因此擁有相同的運動範圍。接下來套用桿長化簡步驟，即可得到一個不超過半球面的四桿迴路，將其套用第 3.1.2 節的連桿分類便能求得輸入角的運動範圍。桿長化簡步驟如下：

1. 初始桿長在 0 至 2π 的範圍中，第一步簡化要使桿長保持在 π 內。任意長度為 l 的桿長，若超過 π 則可以替換為其補角 $2\pi - l$ 。
2. 再來要縮短桿長變成在 $\pi/2$ 內，縮短方式為替換成 π 的補角 $\pi - l$ ，不過有先決條件。根據超過 $\pi/2$ 的連桿數量，針對奇數與偶數分類，可能為 (2, 4, 3) 個。偶數個 (2, 4) 可以將所有過長連桿縮短；而奇數個 (3) 必須保留一桿不縮短，即縮短較長兩桿。
3. 最後，四桿迴路的弧長皆在 $\pi/2$ 內，唯一桿可能在 π 內。此機構可視為平面四連桿分類，並可參照表 3-1 計算其運動範圍以及耦桿曲線種類。

另外文獻[53]表列了一系列測試數據，如表 3-2 所示，可以在重現此算法時驗證其有效性。

表 3-2 球面四連桿機構桿長化簡的測試數據[53]

No.	l_1	l_2	l_3	l_4
1	80°	20°	60°	75°
2	30°	60°	60°	75°
3	80°	75°	65°	70°
4	85°	75°	65°	70°
5	$100^\circ \rightarrow 80^\circ$	$160^\circ \rightarrow 20^\circ$	$120^\circ \rightarrow 60^\circ$	$105^\circ \rightarrow 75^\circ$
6	$120^\circ \rightarrow 60^\circ$	25°	$110^\circ \rightarrow 70^\circ$	100°
7	$155^\circ \rightarrow 25^\circ$	60°	70°	$80^\circ \rightarrow 100^\circ$
8	$155^\circ \rightarrow 25^\circ$	50°	65°	$80^\circ \rightarrow 100^\circ$
9	60°	$80^\circ \rightarrow 100^\circ$	25°	$100^\circ \rightarrow 70^\circ$
10	$100^\circ \rightarrow 80^\circ$	40°	90°	60°

對球面四連桿機構進行桿長化簡後，它只能代表該機構的運動方式和縮短桿長後的機構相同，但並不會保持簡化前的桿件配置相等，故耦桿曲線的形狀不一



定相等，可能變成其它迴路或分支的曲線。因此，原本的幾何相關參數，和縮短桿長後所產生之曲線種類不能直接代表原始機構的耦桿曲線。

3.2.3 去正規化

球面四連桿的去正規化流程類似平面四連桿，為正規化連桿參數加上平移、旋轉與縮放的幾何參數。球面四連桿的機構原點在球心；旋轉為機構在球面上對球心的旋轉；縮放相對於單位球，即為球的半徑。這些幾何參數從幾何不變性得出，如下所示：

$$\mathbf{O}_{s,denorm} = \begin{bmatrix} A_0 \\ C_0 \\ E_0 \end{bmatrix}_{tar} - \begin{bmatrix} A_0 \\ C_0 \\ E_0 \end{bmatrix}_{syn} \quad (3-32)$$

$$\mathbf{R}_{sphere,denorm} = \mathbf{R}_{\psi,syn} \mathbf{R}_{\psi,tar}^T \quad (3-33)$$

$$r_{denorm} = \frac{s_{tar}}{s_{syn}} \quad (3-34)$$

將 z 軸單位向量乘上縮放與旋轉後，可得機構原點的坐標 \mathbf{p}_1 ，以軸向向量表示成

$$\mathbf{P}_{1,denorm} = \mathbf{R}_{sphere,denorm} r_{denorm} \hat{\mathbf{k}} \quad (3-35)$$

而其它接頭和耦桿點的坐標，也可以透過將旋轉矩陣 $\mathbf{R}_{sphere,denorm}$ 取代式(3-26)-(3-30)中的旋轉矩陣 \mathbf{R}_{sphere} 求得。此時已可直接還原連桿機構的接頭坐標了。若欲得到在圖 3-4 中機構相對於全域坐標系的三個角度值 (φ, η, α) ，可先把已去正規化的機構原點向量 $\mathbf{P}_{1,denorm}$ 從直角坐標轉換至球坐標，得到兩角度值 (φ, η) ：

$$\varphi_{denorm} = \tan^{-1} \sqrt{\frac{P_{1x,denorm}^2 + P_{1y,denorm}^2}{P_{1z,denorm}}} \quad (3-36)$$

$$\eta_{denorm} = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (3-37)$$

接著透過一平行於 x 軸且不通過原點 \mathbf{O} 的任意長度直線，例如點 $[0,0,1]^T$ 和點 $[1,0,1]^T$ 組成的直線，前乘上兩個旋轉矩陣 $\hat{\mathbf{k}} \mathbf{R}_{\mathbf{P}_{1,denorm}} \mathbf{R}_{sphere,denorm}$ ，此直線會在平行於 x - y 平面的狀態，並對 x - z 平面夾 α 角。這個步驟等同於從去正規化的旋轉矩陣 $\mathbf{R}_{sphere,denorm}$ 中，將 $\mathbf{P}_{1,denorm}$ 球坐標的兩個角度 (φ, η) 消除，剩下 α 角度，便可由該直線兩點的坐標得到 α_{denorm} 。



3.3 小結

本研究以正規化連桿機構作為設計變數的基礎。接著，根據連桿的分類方法，進一步分析機構中的耦桿曲線類型是否為開放曲線。若為開放曲線，則可以計算其運動範圍。在進行正規化 EFD 係數的計算時，則是利用目標和合成結果的幾何參數進行。此外，雖然空間中的剛體導引可以實現，但由於球面四連桿機構的應用端大多是用耦桿點控制球接頭的旋轉，較複雜的球面剛體導引案例不太常見，故本研究未延伸實作。

在本章中，以平面四連桿機構和空間球面四連桿機構為例，提供了單自由度剛體連桿機構的一種泛化模式，如圖 3-7 所示。為了避免受到幾何影響，單自由度連桿機構需要實施正規化和去正規化的方法。而產生曲線的要求則是根據桿件的尺寸來判斷產生的是封閉還是開放曲線，開放曲線的輸入角範圍，以及能夠列舉所有運動範圍和桿件配置下的曲線種類。上述方法將用於第 4 章中實作不同維度（平面與空間）的合成任務。

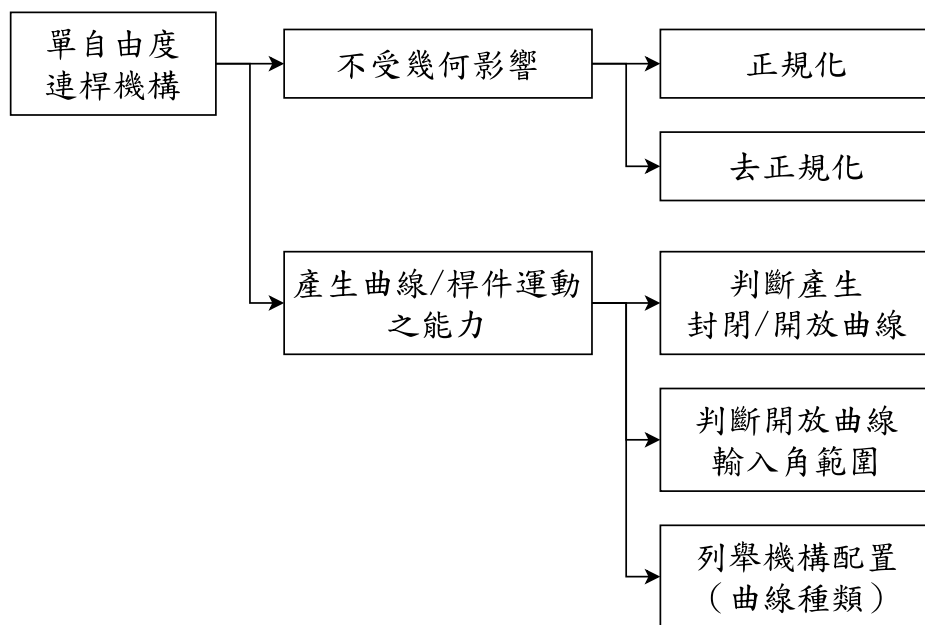


圖 3-7 單自由度連桿機構的泛化合成能力

第4章 合成方法



4.1 圖集資料庫

透過平均機率採樣眾多的可行解，將可行機構儲存成圖集資料庫以供檢索，能快速取得一個較好的設計變數。這個方法最早由 McGrava[19]在使用平面四連桿搭配 FD 形狀表示法時提出。預採樣的方式類似於蒙地卡羅法 (Monte Carlo Method)，算是一種最佳化方法。此方法會在可行解區域以平均機率採樣，當採樣數相對於可行解區域來說足夠多時，由採樣點得出的極值會接近最佳化方法所得出的極值。另外，圖集資料庫能夠重複使用在不同目標曲線的合成，不須迭代運算。這種方法具有線性搜尋時間，可以很快地獲得結果。

如表 4-1 所列，為平面與球面四連桿機構的設計變數的採樣範圍。平面四連桿機構以一個最大桿長倍數當作桿長的上限，本研究設定成輸入桿長的 6 倍，而桿長的下限則是使用最大桿長倍數的倒數，最短桿長會是輸入桿的 1/6 倍。另外，球面四連桿機構的桿件長度是弧長。為了桿件的實用性，根據球面四連桿的等效分類原則，我們將所有桿長控制在 π 弧度以內，而最短桿則是設定成一個非零的較小角度。

表 4-1 四連桿設計變數的採樣範圍

機構	類型	設計變數					
		l_1^*	l_3^*	l_4^*	l_5^*	γ	
平面四連桿	上限	6	6	6	6	2π	
	下限	1/6	1/6	1/6	1/6	0	
球面四連桿	上限	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	γ
	下限	π	π	π	π	π	2π
		10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	0

建立圖集的流程如圖 4-1 所示。首先，在設計變數的範圍內以平均機率生成正規化的機構參數，並評估該組參數組成之機構是否為對應的曲線類型，再透過列舉迴路與分支，將該機構所有種類的耦桿曲線都儲存到圖集中。接著，對生成的耦桿曲線轉換成正規化 EFD 係數與其幾轉換參數。由於每次產生的可行機構數



量是隨機的，所以若沒有指定隨機種子碼，生成圖集的時間不是固定的，需要持續執行直到滿足所需數量為止。

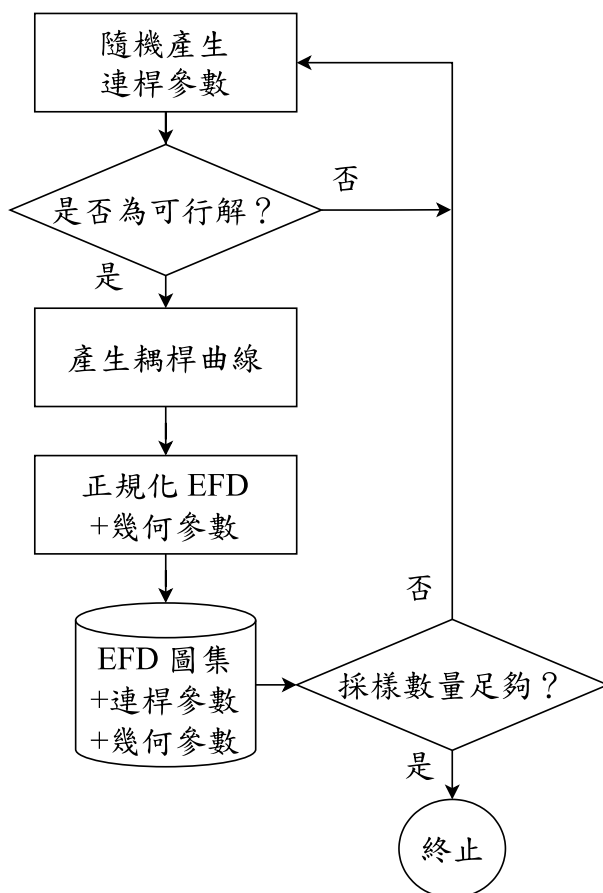


圖 4-1 建立圖集的流程

如圖 4-2 所示，使用圖集時，先載入資料庫數據。接著按照目標曲線的類型，將目標曲線轉換為正規化 EFD 係數與其幾何參數，再將目標係數與圖集中的係數比較，所得最小誤差之圖形即為最佳解。接著將其幾何參數與正規化機構參數取出，進行去正規化流程，轉換到目標曲線的尺度。其中，使用的係數誤差根據式(2-57)表示為

$$E_{\text{atlas}} = \sum_{n=1}^N (|\Delta a_n| + |\Delta b_n| + |\Delta c_n| + |\Delta d_n| + |\Delta e_n| + |\Delta f_n|) \quad (4-1)$$

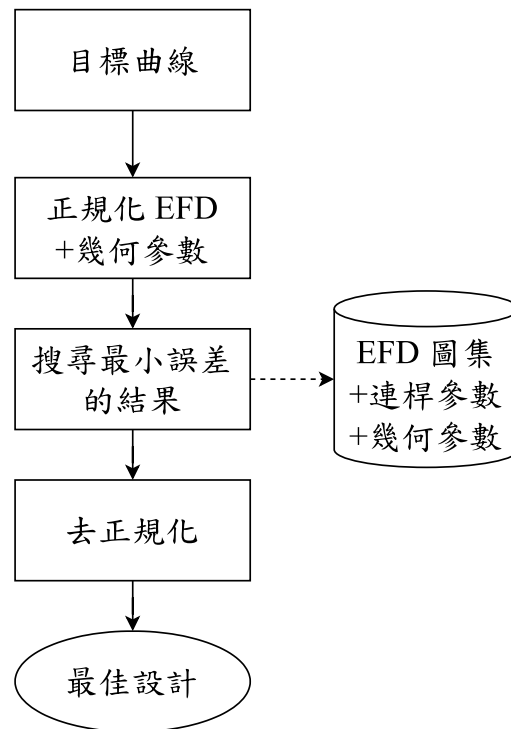


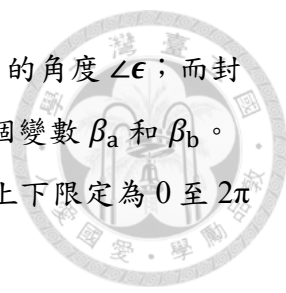
圖 4-2 使用圖集的流程

平面與球面四連桿由於參數數量與坐標不同，通常會分開儲存。不過特別的是，封閉曲線與開放曲線的圖集可以一同儲存，除了資料結構一樣外，因為本研究之開放曲線採用往復曲線模型，在形狀比較時與封閉曲線差異甚大，所以不會互相干擾。並且，由於建立圖集時的條件不同，封閉與開放曲線的圖集可以一起建立，只需要分別指定採樣的數量即可。

單純只使用圖集方法尋找機構，得出的曲線可能會不夠精準，因此後續還是會以數值最佳化方法迭代調整。先使用圖集方法的好處在於，最佳化所需的迭代次數可以減少，並且局部最佳解會是圖集決定的，不會因為隨機性而改變。

4.2 數值最佳化

數值最佳化方法可以解決數值最小化問題 $\min_X E(X)$ 。其原理是對設計變數集合 X 迭代調整，最終找到一組擁有最小誤差的設計結果，該結果稱為最佳設計 (Optimal Design)。其中函數 E 稱為目標函數 (Objective Function)，回傳值 $E(X)$ 稱為適應值 (Fitness)，根據目標函數的設計而定。這裡的 X 要代入的設計變數依照需要合成的機構而定，參照本章中連桿機構的設計變數列舉如表 4-2 所示，皆為正規化連桿機構所需之尺寸參數。而設計變數的產生範圍與圖集法的採樣範圍



相同，如表 4-1 所列。其中，剛體導引需要耦桿上的單位向量 ϵ 的角度 $\angle\epsilon$ ；而封閉曲線片段匹配任務需要兩處輸入角 β 來分割曲線，定義了兩個變數 β_a 和 β_b 。這三個額外的設計變數 ($\angle\epsilon, \beta_a, \beta_b$) 都是角度單位，因此它們的上下限定為 0 至 2π 之間。

表 4-2 四連桿合成時的設計變數

機構	任務類型	設計變數
平面四連桿	封閉/開放曲線生成	$X = (l_1^*, l_3^*, l_4^*, l_5^*, \gamma)$
	剛體導引	$X = (l_1^*, l_3^*, l_4^*, l_5^*, \gamma, \angle\epsilon)$
	封閉曲線片段匹配	$X = (l_1^*, l_3^*, l_4^*, l_5^*, \gamma, \beta_a, \beta_b)$
球面四連桿	封閉/開放曲線生成	$X = (l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, \gamma)$
	封閉曲線片段匹配	$X = (l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, \gamma, \beta_a, \beta_b)$

以上設計變數輸入到目標函數後，會建構對應的連桿機構產生出其耦桿曲線，將之轉換為正規化 EFD 係數後與目標曲線的 EFD 係數比較。本研究此處同樣也使用圖集的係數誤差（根據式(2-57)）作為適應值。代入後最小化的目標為

$$\min_X E: X \mapsto \sum_{n=1}^N (|\Delta a_n| + |\Delta b_n| + |\Delta c_n| + |\Delta d_n| + |\Delta e_n| + |\Delta f_n|) \quad (4-2)$$

上式之誤差函數 $E(X)$ 建立了設計變數 X 和 EFD 係數誤差之間的映射 (Map) 關係，最小化的對象是誤差函數得到之係數誤差，同時也會得到一組最佳解 ($X_{best}, E(X_{best})$)。如圖 4-3 所示，目標函數會將可行解機構的耦桿曲線透過近似法變成 EFD 係數，再經過正規化步驟得到正規化 EFD 係數與幾何參數。比較過程中，目標曲線與機構曲線之係數誤差當作適應值，迭代至最小值。迭代終止後，使用兩者的幾何參數進行去正規化步驟，獲得機構的尺寸參數，即最佳設計。

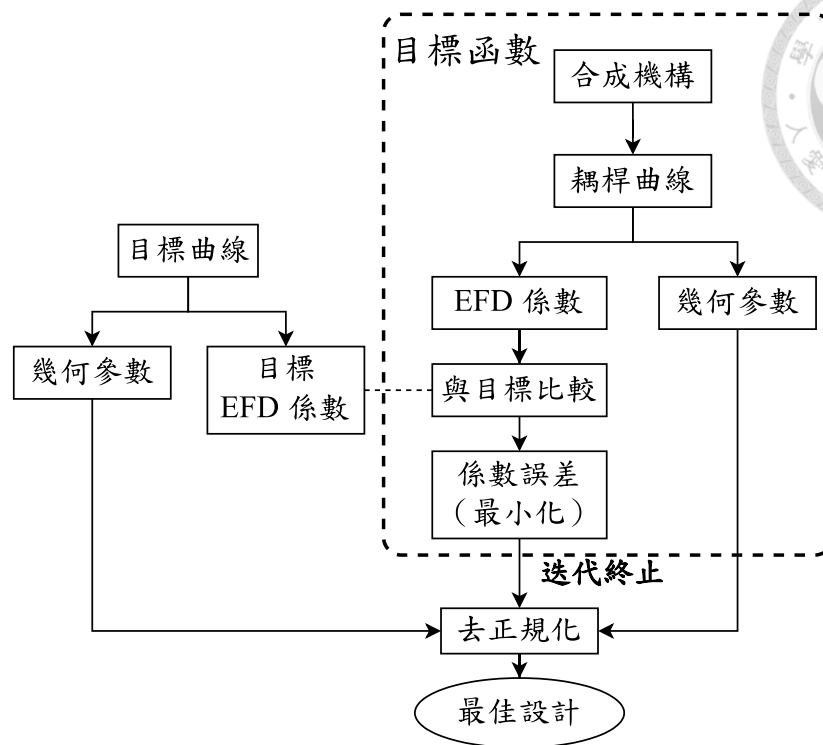


圖 4-3 目標函數流程圖

4.2.1 差分進化法

本研究使用差分進化法 (DE)[54]作為最佳化演算法來進行機構合成，此演算法為一種啟發式演算法。DE 的整體流程類似於簡化的實數編碼 (Real-Coded) 基因演算法 (GA)，其運算及空間成本都更低。此演算法的主要概念是從本次迭代產生新的試驗個體 (Trial Individual)，並評估新個體的優劣以取代直屬父代 (Parent) 變成子代 (Offspring)，而本次迭代結束時歷史最佳解將從取代後的試驗個體更新。試驗個體相對於父代的關係被視作高維度向量，DE 只專注於產生父代對於子代向量的策略。建立初始族群 (Initial Population) 後，便會在一次迭代中重複以下的步驟：

1. **交配 (Crossover)**：從每個上一代個體中，隨機挑選特定的變數作為可修改的對象。本研究使用連續選擇策略，即從任意變數開始選擇，經過至少兩個變數後隨機停下，所以變數的排列對選擇是有影響的。另外也有每個變數皆獨立機率的選擇策略。
2. **突變 (Mutation)**：接著，針對選擇好的設計變數，使用下列公式調整變數：

$$(X_{\text{trial}})_i = (X_{\text{current best}})_i + F[(X_{r1})_i - (X_{r2})_i] \quad (4-3)$$

其中針對其第 i 個設計變數，參考當前歷史最佳解 $X_{\text{current best}}$ 與另外兩個不重複隨機個體 X_{r1} 和 X_{r2} 的變數值，使用 DE 的差分權重 (Differential Weight) 運算得出此試驗子代 X_{trial} 的新變數。差分權重以 F 表示，是範圍在 0 到 2 之間的實數。若新數值超出變數的上界或下界，會設定成該邊界值。從上面的公式可以看出，試驗子代跟其直屬父代沒有直接的關聯性。除了此公式外，也有其它的突變公式可以使用，可參考文獻[55]。此步驟與 GA 相差最大的是，DE 的新變數是從其它個體計算得到的，不會使用隨機數來混合數值。

3. **評估 (Evaluate)**：調用目標函數 E ，計算適應值 $E(X)$ ，並確定試驗個體的這一組解為 $(X, E(X))$ 。若被判斷為不可行解，則會回傳一個較大的適應值，或是以正無限大當作適應值。
4. **選擇 (Select)**：確定好試驗個體後，選擇比父代個體更好的解取代之；若比歷史最佳解更好，則更新歷史最佳解。

統整上述的 1 到 4 步驟，DE 的整體流程如圖 4-4 所示。在目標函數中，會檢查設計變數 X 建構之連桿機構，計算機構的運動範圍，並判斷耦桿曲線的類型是否與欲合成的曲線類型相同。另外，目標曲線在運動範圍的角度是否超過 $\frac{\pi}{2}$ ，以確保不會產生無限大的機構。沒通過以上條件的解會被當成不可行解，讓下一次迭代改進其設計變數。接著根據桿件尺寸列舉連桿機構所有配置的耦桿曲線種類，分別將曲線轉為正規化 EFD 與幾何參數，與目標正規化係數比較，選擇誤差最小的配置當作其設計，回傳適應值。此外，歷史最佳解也會儲存去正規化後的機構參數和配置，作為迭代終止後的結果。

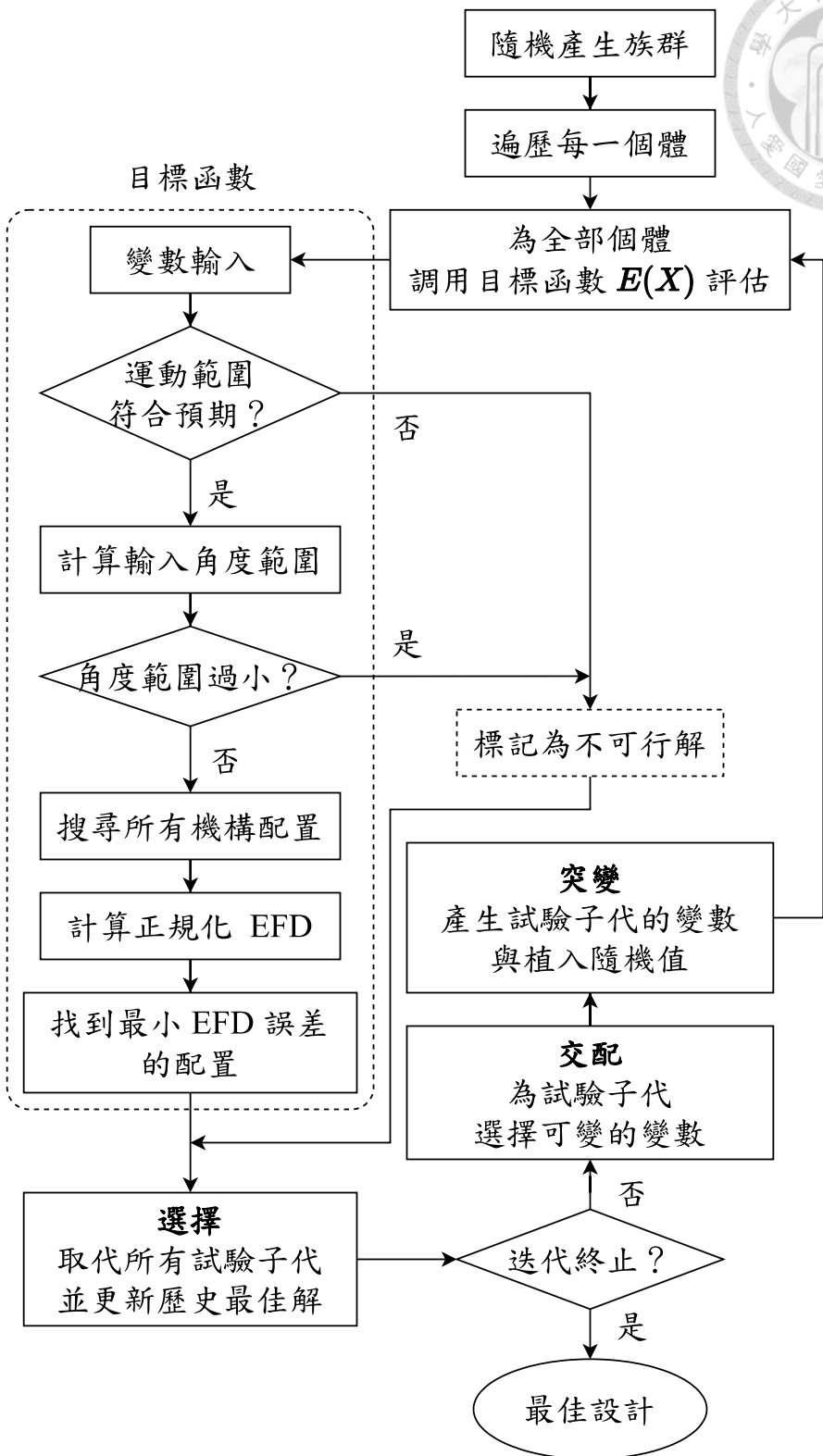


圖 4-4 差分進化法與目標函數流程圖



在案例探討中，本研究統一使用的參數如表 4-3 所示。其中為避免隨機性干擾，隨機種子統一設定成 0；而提高族群數雖然有助於搜尋，但是會增加每次迭代的成本，因此不做調整。少數案例因為收斂速度較慢，可能會延長迭代數。

表 4-3 差分進化法與合成使用的參數

迭代數	族群數	突變參數 F	交配機率	隨機種子	曲線精度
50	200	0.6	90%	0	180 點

4.3 改良距離誤差法

改良距離誤差法 (Improved Distance Discrepancy Method) 是本研究提出之改善 EFD 在點數過少時的解決方案。此方法延伸自傳統的距離誤差合成，不使用 EFD 係數比較圖形相似度，而是利用 EFD 係數描述耦桿曲線，讓目標點重建在耦桿曲線上，並比較點之間的距離誤差。這個方法的優點在於能夠利用 EFD 的正規化與去正規化功能，不需要額外使用設計變數來尋找圖形的幾何性質，以及目標點所在的機構輸入角位置。此外，EFD 不要求輸入點間必須等距採樣，這和 FD 方法不同，可以避免合成的機構需要匹配至目標曲線的運動速度。這個方法主要的優點在於當目標曲線的取樣數遠遠不足時，以 EFD 表示的目標曲線會大幅失真，但是機構耦桿曲線採樣充分，最佳化時反而會更接近失真的目標圖形，因此最終的結果往往誤差較大。而使用距離誤差合成由於離目標點越近越好，所以得到的結果會較使用 EFD 係數合成來得好。

4.3.1 正規化時間參數

根據式(2-2)從 EFD 重建曲線時，封閉曲線在範圍 0 到 2π 或開放曲線在範圍 0 到 π 輸入時間參數 t 可得到離散點坐標 $[x(t), y(t)]^T$ 。若想只重建出原始圖形的第 p 點坐標 $[x_p, y_p]^T$ ，根據 EFD 係數的近似公式，先求得該點對應到的時間參數 $t_p = \frac{2\pi \sum_{i=1}^p \Delta L_i}{\sum_{p=1}^{K-1} \Delta L_p}$ ，從當前行程與總行程之比值得出。再來由於 EFD 係數做了相位角和奇偶項正規化，為了能讓正規化係數能夠對應到之前的點坐標，時間參數 t_p 需要加上之前偏移的相位角 θ_1 。根據式(2-11)及式(2-12)，變成

$$t_{p,\text{norm}} = t_p - \theta_1 + \begin{cases} \pi, & \text{if } (\zeta_1 = -1) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4-4)$$

上面的條件中，僅在奇偶項係數有校正時，也就是諧波數大於 1 且 $\zeta_1 = -1$ 時，需要額外加上 π 的相位角偏移。此處 $t_{p,norm}$ 是原始圖形第 p 點的時間參數，稱為正規化時間參數 (Normalized Time Parameter)；而 θ_1 是第一項諧波的相位角，影響起始點的位置。當式(2-2)輸入正規化時間參數 $t_{p,norm}$ 後，即獲得正規化前第 p 點的坐標。另外，EFD 正規化的計算公式中，只需要第一項諧波的係數與常數項係數即可計算出正規化的幾何參數，而奇偶項校正係數 ζ_n 的正負性需要前兩項係數判斷。因此在不關心係數的狀況下，僅需利用兩項諧波的 EFD 係數來取得任意圖形的幾何參數，以供該圖形做幾何正規化的調整。

圖 4-5 展示了一個 4 點的目標曲線，以 4 諧波之正規化 EFD 描述的圖形 $P_{EFD}(t)$ ，並且使用幾何參數也將目標曲線轉換到正規化的尺度，標示為 $P_{tar}(t)$ 。圖中標示出正規化 EFD 係數重建的圖形起始點 $P_{EFD}(0)$ 是在圖 4-5 中間右側的位置 (\hat{i} 指向的位置)，明顯地與目標曲線的起始點 $P_{tar}(t_1 = 0)$ 不同。而將式(2-2)代入正規化時間參數 $t_{p,norm}$ 後得到的點位置標示為 $P_{EFD}(t_{p,norm})$ ，這些點非常接近原始圖形的位置 $P_{tar}(t_p)$ ，但是依然位於 EFD 重建的圖形 P_{EFD} 上。這兩組坐標間的誤差就是目標點數和諧波數太少時產生的近似誤差，故使用單純的 EFD 係數比較會嚴重損失兩圖形間的細節。由此可見，我們可以在機構合成時，利用最佳化方法讓此圖中的目標曲線 $P_{tar}(t_p)$ 和一個假設的機構曲線 $P'_{EFD}(t_{p,norm})$ 貼近，來得到一個必定會通過目標曲線的機構。

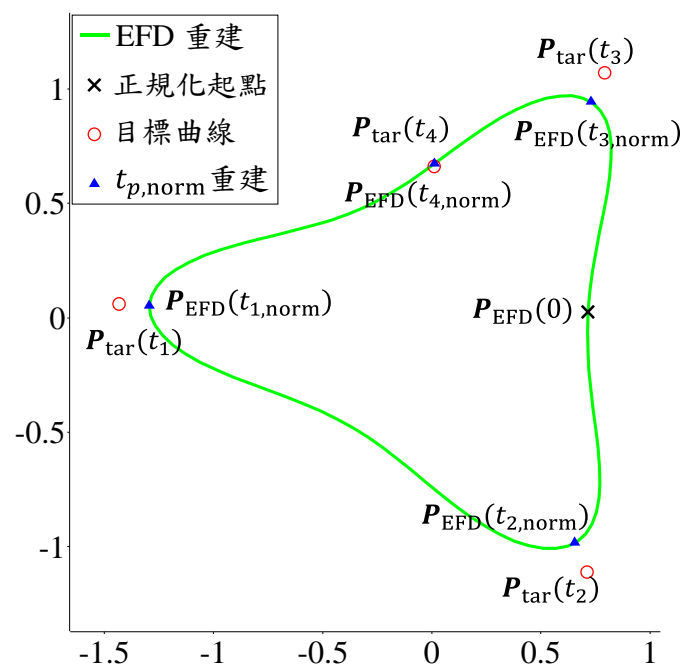


圖 4-5 透過正規化時間參數重建的點位置



4.3.2 目標函數設計

以距離誤差為目標函數的最佳化詳細流程如圖 4-6 所示，目標數據中不儲存 EFD 係數，取而代之的是正規化後的目標點 $\mathbf{P}_{\text{tar}}(t_p)$ 、正規化時間參數 $t_{p,\text{norm}}$ ，以及幾何參數。為取得這些資訊，求得僅 2 諧波的正規化係數，並將目標曲線使用反向的幾何參數 $(-[A_0, C_0]_{\text{tar}}^T, R_{\psi, \text{tar}}^T, \frac{1}{\text{star}})$ 正規化即可。接下來在最佳化演算法的目標函數中，用一般的近似法求得耦桿曲線的 EFD 係數和幾何參數。此時可將 EFD 係數作為等速耦桿曲線的函數 \mathbf{P}_{syn} ，替代此機構來解決曲線變速度或未知速度的問題，且此係數可利用 FPA 找到最佳諧波數。然後，使用此係數對目標點位置 $t_{p,\text{norm}}$ 重建出正規化的 K 個點位置，計算正規化目標點 $\mathbf{P}_{\text{tar}}(t_p)$ 和合成時重建的正規化耦桿點 $\mathbf{P}_{\text{syn}}(t_{p,\text{norm}})$ 的歐幾里得距離作為適應值 E_{dist} ，表示成

$$\min_X E_{\text{dist}}: X \mapsto \max_{1 \leq p \leq K} \|\mathbf{P}_{\text{tar}}(t_p) - \mathbf{P}_{\text{syn}}(t_{p,\text{norm}})\|_2 \quad (4-5)$$

上式中使用最大值函數借鑒自切比雪夫距離，只針對距離最大的第 p 點，比平均值更關注極值的影響。其它流程則與圖 4-4 使用的目標函數一致，此處亦使用 DE 演算法完成此最佳化任務。

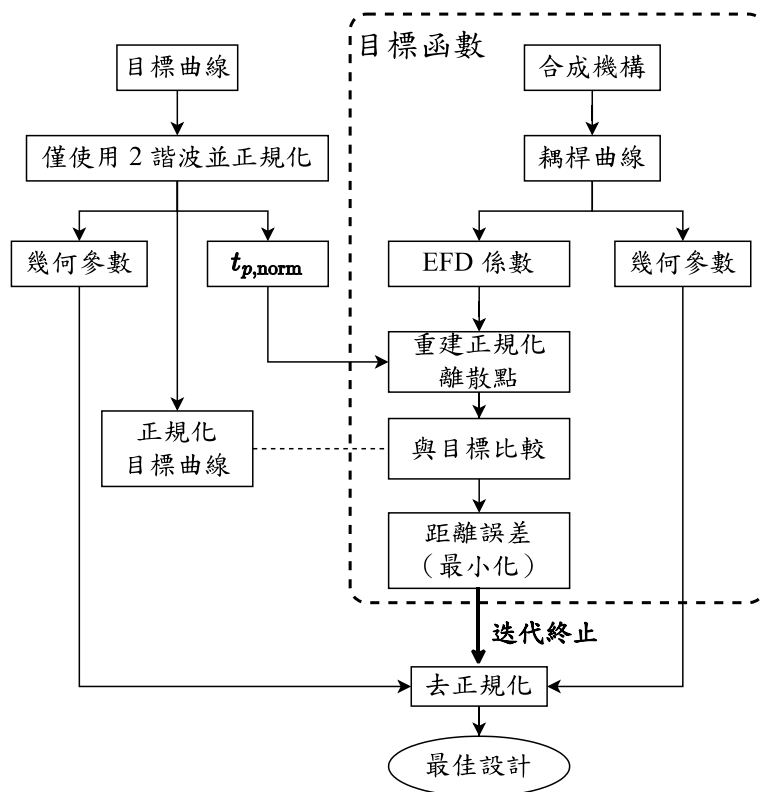


圖 4-6 透過 EFD 改良距離誤差合成流程圖

此演算法步驟較 EFD 係數誤差的合成方法較多步驟與數據，因此在計算上花費時間較長。另一方面，當目標曲線的離散點增加時，可能會有更多採樣雜訊，逐漸降低合成的精準度並增加數據量與運算量。因此若目標點採樣數較少，選擇距離誤差合成方法能獲得較佳結果；而採樣數充足時，則選擇 EFD 誤差合成方法能更高效地找到結果。

4.4 平面剛體導引

剛體導引又稱作運動生成，描述了機構中的一剛體桿件在運動時，其上一點及剛體的方向通過指定的路徑和方向。通常連續的運動過程僅需以開放曲線表示，每一時刻會有當下的位置及剛體的方向，如圖 4-7 所示。圖中以 $P(t_p)$ 表示第 p 個離散點，同一個時間參數下的方向由單位向量 V_p 表示。坐標 P 增加向量 V 後，可得一個延伸點 $Q_p = (P(t_p) + V_p)$ 。當時間參數增量時， Q_p 相對於 $P(t_p)$ 是非等速度運動。

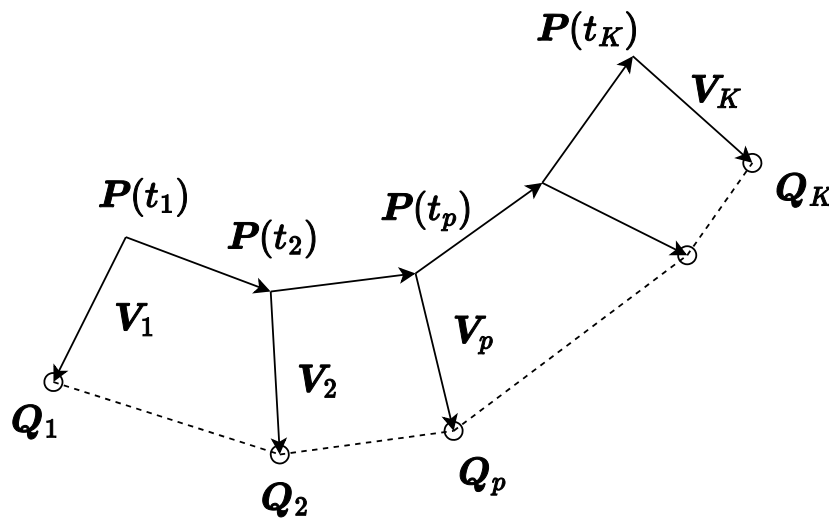


圖 4-7 連續運動表示

使用 EFD 最直觀的描述方法是分開描述點坐標 P 與單位向量 V ，這與傳統的 FD 方法相同。然而在本研究的實驗中，發現 EFD 不適合使用此方法。如圖 4-8 所示，當使用向量表示旋轉時，其圖形會呈現一個半徑為向量長度的圓形，而向量末端的點坐標會在圓上順時針或逆時針方向轉動著，會因為來回轉動造成圓上的折疊，EFD 的描述（圖中的連續曲線）會出現蜷曲情形。另外，由於所使用的諧波數不高，EFD 的重建曲線不會在圓上，其形心亦不在該圓的圓心上。

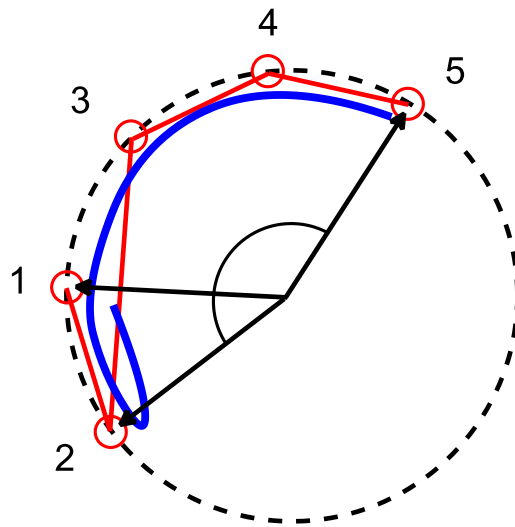


圖 4-8 連續向量在 EFD 描述時蜷曲的示意圖

故本研究採取使用延伸曲線 $Q(t_p)$ 的方式來描述剛體的旋轉運動，此曲線的坐標是由連續曲線 $P(t_p)$ 加上向量 V_p 得到，因此也會是連續曲線，適合 EFD 描述。如圖 4-9，本研究將這兩條曲線 $P(t)$ 與 $Q(t)$ 稱作運動標記 (Motion Signature)，利用 EFD 描述這兩條曲線作為剛體導引的特徵，並處理其圖形的正規化，可視作連續運動的一種形狀表示法。另外，由於 $Q(t)$ 的 EFD 係數不包含常數項，相對於 $P(t)$ 沒有平移的關係，因此運動標記也包含兩者的平移向量，如圖中兩個常數項坐標 $[A_0, C_0]_P^T$ 與 $[A_0, C_0]_Q^T$ 所構成的向量，是兩條曲線形心之間的位移量。

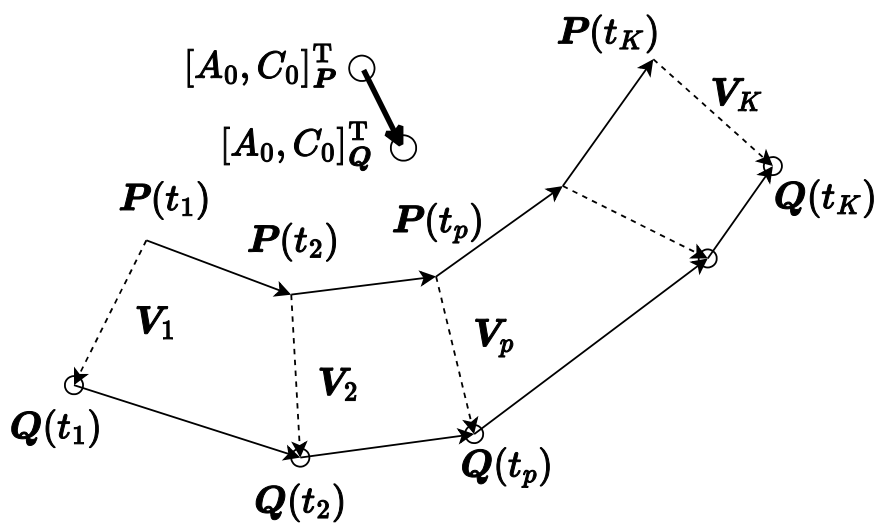


圖 4-9 運動標記



4.4.1 時間導引與運動標記

欲描述運動標記的兩條曲線，需要將兩者配對在一起，也就是在相同的 t_p 下產生對應的坐標 $P(t_p)$ 與 $Q(t_p)$ 。在 FD 的離散傅立葉描述中，已經假設了曲線離散點的索引就是輸入的時間參數，且總諧波數 N 就是總點數 K 。其近似公式也就是離散傅立葉轉換 (DFT)，可列式成

$$\alpha_n = \sum_{p=1}^K P(t_{p,FD}) e^{-jnt_{p,FD}} \quad (4-6)$$

矩陣形式為

$$\alpha_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{p=1}^K \begin{bmatrix} x_p & -y_p \\ y_p & x_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-nt_{p,FD}) \\ \sin(-nt_{p,FD}) \end{bmatrix} \quad (4-7)$$

其中時間參數的定義是

$$t_{p,FD} = \frac{2\pi(p-1)}{K-1} \quad (4-8)$$

上式中可發現，FD 的複數係數 α_n 計算時使用的時間參數 $t_{p,FD}$ 是當前索引與總點數之比值。因此任兩筆週期一樣的 FD 係數，在相同的時間參數下會有對應的數值。不過 EFD 近似係數中的時間參數被調整為等速，是用離散點之間的距離得出時間參數 $t_p = \frac{2\pi \sum_{i=1}^p \Delta L_i}{\sum_{p=1}^{K-1} \Delta L_p}$ 。為了在近似法中調整時間參數，本研究提出了時間導引 (Time Guidance) 概念。

時間導引是讓兩筆數據使用 EFD 描述時，擁有同步的時間參數，所使用的數據是各點的間距 ΔL_p ，是 $K-1$ 項的一維數據。我們需要在曲線 $Q(t)$ 的係數計算中使用曲線 $P(t)$ 的時間導引 $\Delta L_{p,P}$ ，而 $P(t)$ 仍維持一般曲線的近似求法。從式 (2-4) 推導延伸曲線 $Q(t)$ 的係數時代入 $\Delta L_{p,P}$ ，以第一個 EFD 係數 $a_{n,Q}$ 為例，會變成

$$a_{n,Q} = \frac{1}{2n^2\pi^2} \sum_{p=1}^{K-1} \frac{\Delta x_{p,Q}}{\Delta L_{p,P}} (\cos nt_{(p+1),P} - \cos nt_{p,P}) \quad (4-9)$$

其中 $\Delta x_{p,Q}$ 是曲線 $Q(t)$ 的 x 坐標差分， $\Delta L_{p,P}$ 是曲線 $P(t)$ 的時間導引，連同時間參數 $t_{p,P}$ 都是由時間導引 $\Delta L_{p,P}$ 求得。因此只有分量的部分是屬於曲線 $Q(t)$ ，其它部分都是從曲線 $P(t)$ 計算得出。此處 $P(t)$ 與 $Q(t)$ 的 EFD 係數所使用的諧波數理論上是可以不同的，不過由於 $Q(t)$ 的時間參數被修改過，所需之閾值可

能會變動，因此我們以曲線 $P(t)$ 和 $Q(t)$ 的係數分別做過 FPA 後的諧波數，取最大者當成運動標記所使用之諧波數。

透過第 4.3.1 節式(4-4)的正規化時間參數 $t_{p,norm}$ ，以曲線 $P(t)$ 與 $Q(t)$ 的 EFD 係數重建，來驗證在相同的時間參數下， $P(t_p)$ 與 $Q(t_p)$ 有對應關係。如圖 4-10 所示，以一 40 點的開放曲線為例， $P(t)$ 以連續線段表示，而 $Q(t)$ 以圓圈記號表示，兩者相同時間參數下的離散點之間以直線連接。此圖形的向量 V 的長度設定為縮放係數 s ，其在正規化狀態是單位向量。在圖 4-10(a)中可以看到， $Q(t_p)$ 在對應位置 $Q(t_{p,norm})$ 重建後與原始曲線相同，並沒有出現錯位或連接線角度錯誤的情形。不過由於圖形是以往復曲線描述開放的圖形，因此在頭尾的部分 $P(t_1)$ 、 $P(t_K)$ 、 $Q(t_1)$ 和 $Q(t_K)$ 會有些許誤差。另外，於圖 4-10(b)改以等時間參數重建出更多點坐標，以兩條曲線構成的外框表示，展示出 EFD 除了 $P(t)$ 以外，也能從目標曲線的 $Q(t)$ 得出連續平滑的運動。

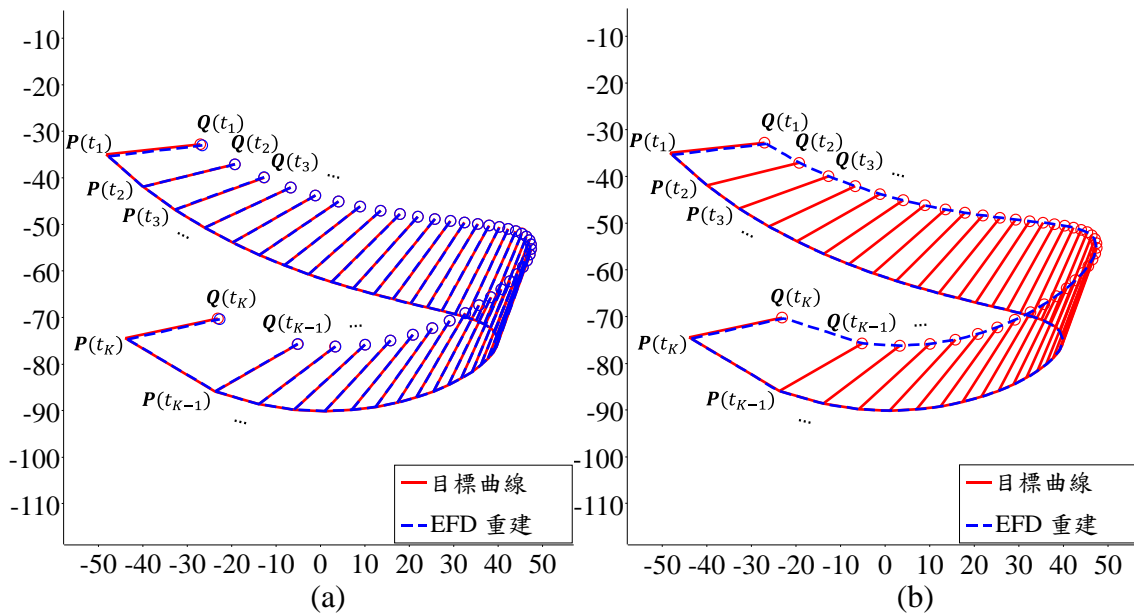


圖 4-10 時間導引的重建證明(a)對應位置重建(b)連續重建

接下來敘述運動標記的實作細節。如圖 4-11 所示，運動標記由曲線 $P(t_p)$ 與單位向量 V_p 組成，後者會轉換為正規化的延伸曲線 $Q_{norm}(t_p)$ ，需要先處理其幾何不變性。首先以曲線 $P(t)$ 為基準，求得其幾何參數，並以反向的幾何參數 $(-[A_0, C_0]^T, R_\psi^T, \frac{1}{s})$ 將曲線正規化成 P_{norm} ，並一同正規化向量 V_{norm} 。由於僅代表方向性，向量 V 僅需套用旋轉 R_ψ^T ，不用考慮縮放。接著把正規化曲線 P_{norm} 與正規化向量 V_{norm} 相加，可得到正規化後的延伸曲線 Q_{norm} 。再透過利用

P_{norm} 的時間導引 $\Delta L_{p,p}$ ，將延伸曲線 Q_{norm} 轉換為 EFD 係數。此時由於曲線 P_{norm} 與延伸曲線 Q_{norm} 都已經正規化，因此其 EFD 係數皆不須再作正規化步驟，只需對 Q_{norm} 的係數作奇偶項正規化。最後由於 Q_{norm} 的 EFD 係數不包含常數項的平移，只有形狀資訊，可能任意平移的延伸曲線 Q'_{norm} 也有機會產生一樣的運動標記，故必須求出延伸曲線的平移向量，由 Q_{norm} 的 EFD 常數項 $[A_0, C_0]_Q^T$ 組成。這是因為此時正規化曲線 P_{norm} 的形心 $[A_0, C_0]_P^T$ 已經位於坐標原點 O ，平移向量可以直接由 Q_{norm} 的形心坐標得到。在相同的運動情形下，此平移向量必須相同。

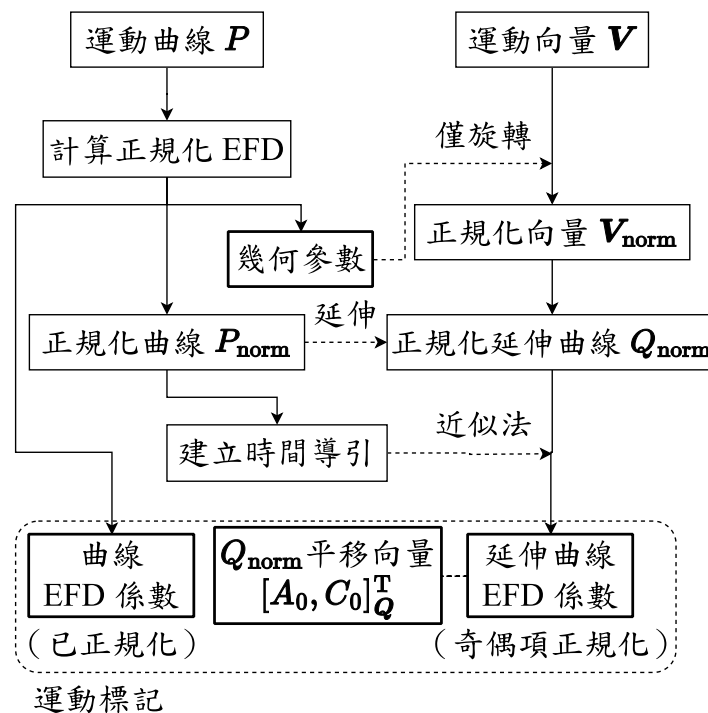


圖 4-11 運動標記產生流程圖

至此，曲線 P_{norm} 與延伸曲線 Q_{norm} 的係數，以及兩者的平移向量構成了運動標記。合成時必須比對兩組係數和平移向量的誤差，便可計算出「目標運動標記」與「當前運動標記」之間的相似度。接著透過最佳化方法迭代，將此誤差最小化，可列式成

$$\min_X E_{\text{motion}}: X \mapsto \max \left\{ E_P, E_Q, \left(\sqrt{\Delta A_0^2 + \Delta C_0^2} \right)_Q \right\} \quad (4-10)$$

其中誤差是由兩筆運動標記得出： E_P 與 E_Q 表示曲線 P_{norm} 與延伸曲線 Q_{norm} 係數的誤差，與式(2-57)相同；而 ΔA_0 和 ΔC_0 是兩方 Q_{norm} 平移向量的誤差，藉由



歐幾里德距離計算；最終誤差 E_{motion} 則是由三者的最大值得出。這邊使用第 3.1.4 節之平面剛體導引機構，設計變數如表 4-2 所列。演算法也是套用 DE 最佳化方法，而形狀表示法使用的是本節之運動標記。

4.4.2 多目標最佳化

在進行案例分析時，本研究發現誤差函數容易產生局部最佳解 (Local Optimal Solution)，無法繼續找到更優解，因此使用了多目標最佳化 (Multiple Objective Optimization, MOO) 策略。式(4-10)的單一目標是由三個目標組成的，因此可以作為三項適應值做 MOO，對三個方向更新，避免單一評估值陷入局部最佳解的情況。由於適應值是分開比較的，因此不需要權重來加總。目標函數表示成

$$\min_X E_{\text{motion,MOO}}: X \mapsto \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 & E_P \\ \mathbf{y}_2 & E_Q \\ \mathbf{y}_3 & \left(\sqrt{\Delta A_0^2 + \Delta C_0^2} \right)_Q \end{bmatrix} \quad (4-11)$$

上式中目標函數回傳了一個三維的適應值向量 \mathbf{y} ，每個分量皆是一個獨立的適應值。運動標記的三個部分會分別對應到 \mathbf{y}_1 、 \mathbf{y}_2 和 \mathbf{y}_3 。

理論上，任何啟發式演算法皆可改成 MOO 策略：將歷史最佳解改成歷史最佳解集合，此集合稱為帕雷托前緣 (Pareto Front)。本研究將第 4.2 節使用的差分進化法 (DE) 套用帕雷托前緣的策略，設計成多目標差分進化法 (Multiple Objective Differential Evolution, MODE)。在多目標最佳化中，目標函數回傳了多個適應值表現此解的好壞，而演算法則是透過此解是否支配 (Dominate) 另一個解來選擇更新方向。支配的定義為個體 a 所有適應值都比另一個個體 b 更好或相等，此條件表示為

$$\mathbf{y}_{a,1} \leq \mathbf{y}_{b,1} \text{ and } \mathbf{y}_{a,2} \leq \mathbf{y}_{b,2} \text{ and } \mathbf{y}_{a,3} \leq \mathbf{y}_{b,3} \quad (4-12)$$

通常情況下此條件還會避免兩者完全相等時，互相支配的結果。不過帕雷托前緣的更新策略中，會保留其中一邊的結果，所以不用再做相等性的檢查。另外，若個體 a 支配 b 與 b 支配 a 都不成立，則代表此個體相較於對方有其它長處，會被歷史最佳解集合保留。

本研究的歷史最佳更新策略如圖 4-12 所示。對於單一目標最佳化任務，僅需比較單一適應值的大小，以確定是否取代歷史最佳解。而帕雷托前緣在接收一個新

個體時，會進行支配檢查。如果新個體支配舊個體，則舊個體將被移除，並將當前個體標記為已加入集合，不再進行支配檢查。如果新個體通過測試，則將其加入歷史最佳解集合。在演算法中使用歷史最佳個體時，將從集合內隨機選擇個體。雖然針對多目標問題的演算法可能採用更積極的選擇方式，但在本研究中並未對此進行特別調整。

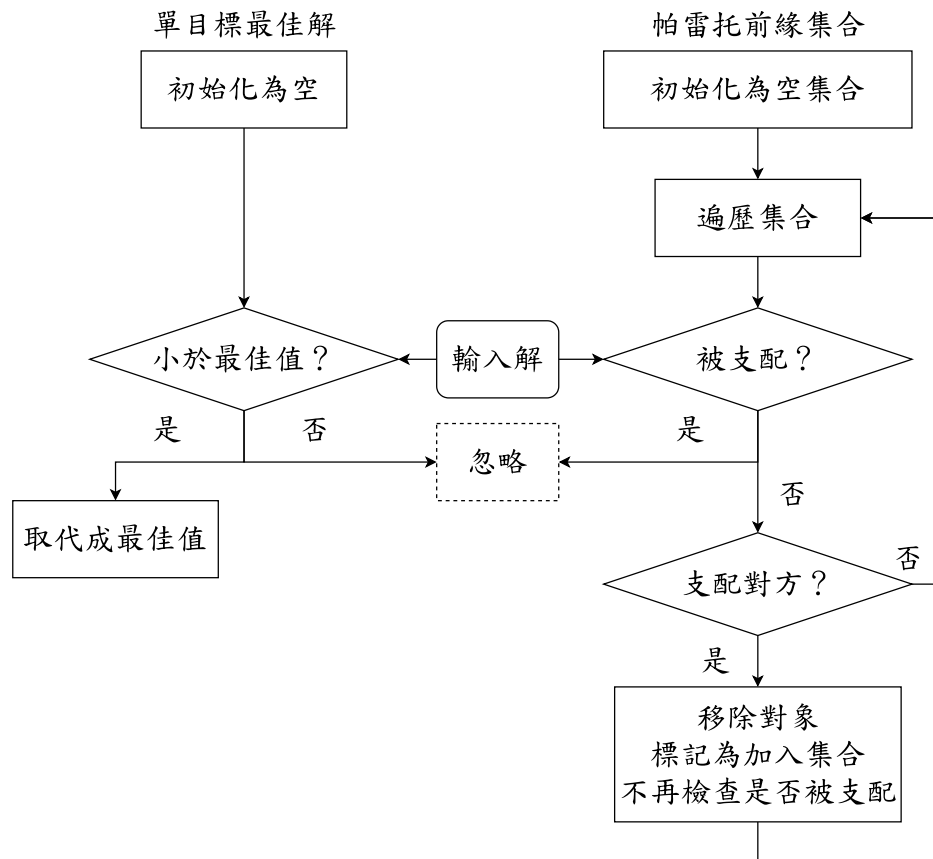


圖 4-12 帕雷托前緣的更新方式

隨著帕雷托前緣增長，演算法使用帕雷托前緣更新時的方向會變多，導致收斂趨於緩慢，意味著進入了一個局部最佳解。帕雷托前緣雖然無法保證最終為全域最佳解，但是由於歷史最佳集合的數量較多，相對於單一適應值更容易避開潛在的小型障礙。演算法迭代完成後，使用式(4-10)的誤差決定我們的最終解。遍歷歷史最佳集合，找到最小誤差的設計變數，可列式成

$$\min_X E_{\text{motion}}: X \mapsto \max\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\} \quad (4-13)$$

如圖 4-13 所示，這三項適應值以三維空間表示，構成一假想曲面，每個圓點為歷史最佳解的個體。若沒有個體數量上限，此假想曲面會收斂至趨近於完整。如圖 4-14 在最佳化的收斂圖中，帕雷托前緣集合數量會在迭代時有所變化。表現

上趨近收斂時的集合總數可能較多，不過數量的增減與當前最低評估值 E_{motion} 的下降沒有必然關聯。

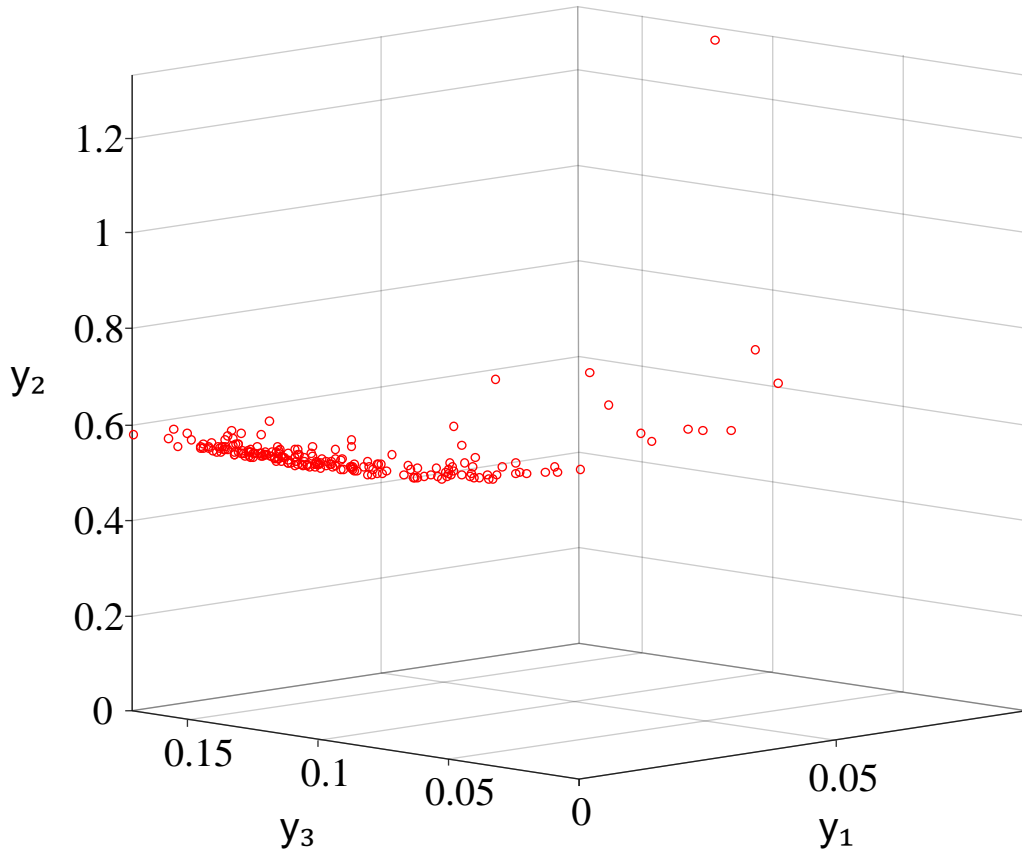


圖 4-13 三項適應值之帕雷托前緣

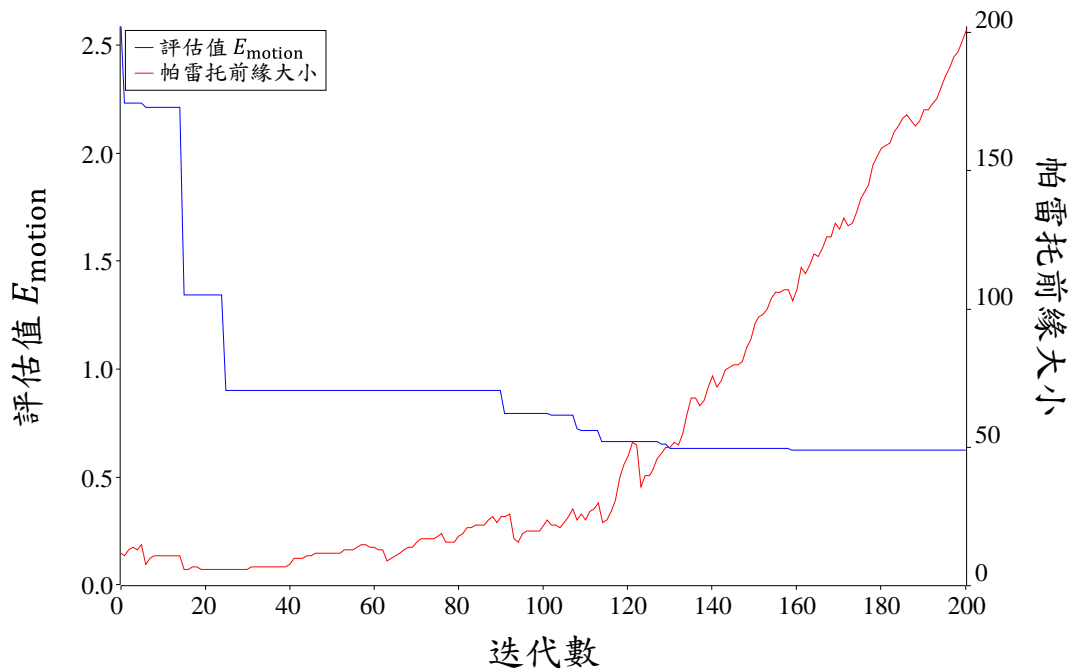


圖 4-14 帕雷托前緣集合在最佳化之狀態變化



4.4.3 距離誤差法

同樣地，剛體導引任務也可以使用第 4.3 節的改良距離誤差合成來補足目標運動採樣數過少的問題。我們參考自圖 4-6 的流程圖來設計，如圖 4-15 所示。其中原本的曲線離散點變成運動標記的離散坐標，並透過正規化時間參數 $t_{p,norm}$ 重建對應的坐標值，計算出適應值 $E_{motion,dist}$ ：

$$\min_X E_{motion,dist}: X \mapsto \max_{1 \leq p \leq k} \{2\Delta P_p, \Delta Q_p\} \quad (4-14)$$

其中

$$\Delta P_p = \|P_{tar}(t_p) - P_{syn}(t_{p,norm})\|_2 \quad (4-15)$$

$$\Delta Q_p = \|Q_{tar}(t_p) - Q_{syn}(t_{p,norm})\|_2 \quad (4-16)$$

上式中， P_{tar} 與 Q_{tar} 是目標運動標記的兩條曲線函數， P_{syn} 與 Q_{syn} 則是合成機構產生的曲線函數。運動標記的重建坐標誤差 ΔP_p 與 ΔQ_p 使用歐幾里得距離計算，並取最大值當作適應值。由於使用多目標最佳化的成本比較高，使用此改良距離誤差法時仍使用單目標的策略合成，故此處給予了 $P(t)$ 曲線兩倍權值幫助收斂。另外，延伸曲線 Q_{syn} 的重建包含平移參數，相當於已經包含了式(4-10)中誤差 E_{motion} 的平移向量。

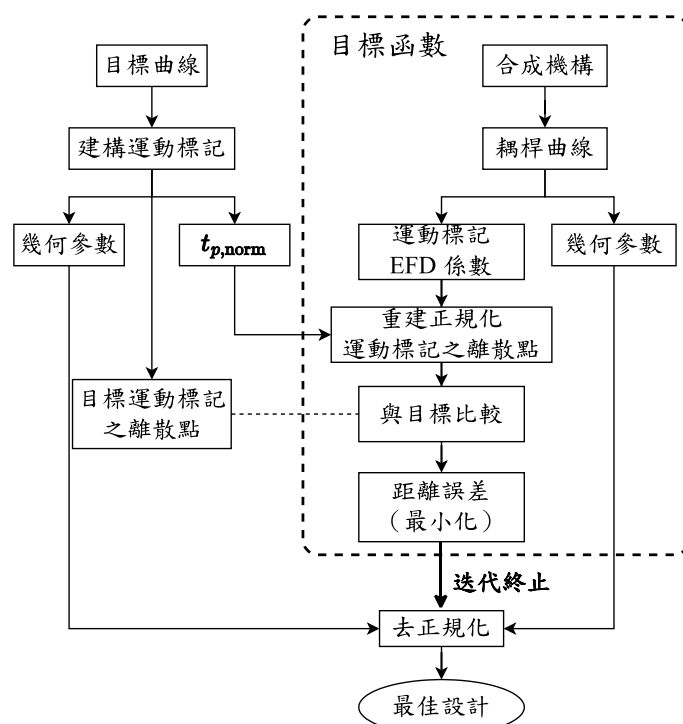


圖 4-15 距離誤差剛體導引流程圖



4.5 小結

在合成方法部分，圖集方法預先建立了一個隨機採樣的資料庫，匹配目標曲線在大數據採樣中最接近的解，再作為數值最佳化方法的初始猜值，提升演算法的搜尋效率。數值最佳化方法以差分進化法為例，用迭代求得較精準的設計變數，並且也是所有合成方法中運算速度最快的方案。

本研究另外補充了 EFD 方法在給定目標點數過少時的解決方案，稱為改良距離誤差法。該方案利用 EFD 的正規化方法和等速特性，將其當作耦桿曲線函數，以改善距離誤差的合成。此外，本研究還探討了使用近似法描述連續運動的可能性。該近似法可根據自定義的時間參數匹配兩條曲線（運動標記）的分量資訊，同時與距離誤差合成搭配使用。本研究實作的合成類型組合如圖 4-16 所示。在理論上，圖集方法可實現封閉和開放曲線機構，再接續最佳化的合成方法；而改良距離誤差合成則可實現所有目標的最佳化。然而，由於某些組合的應用比較少見，故本研究不會逐一展示所有合成類型的最佳化過程。接下來，將在第 5 章中選擇常見的組合，展示如何利用本章的圖集和最佳化架構解決合成問題。

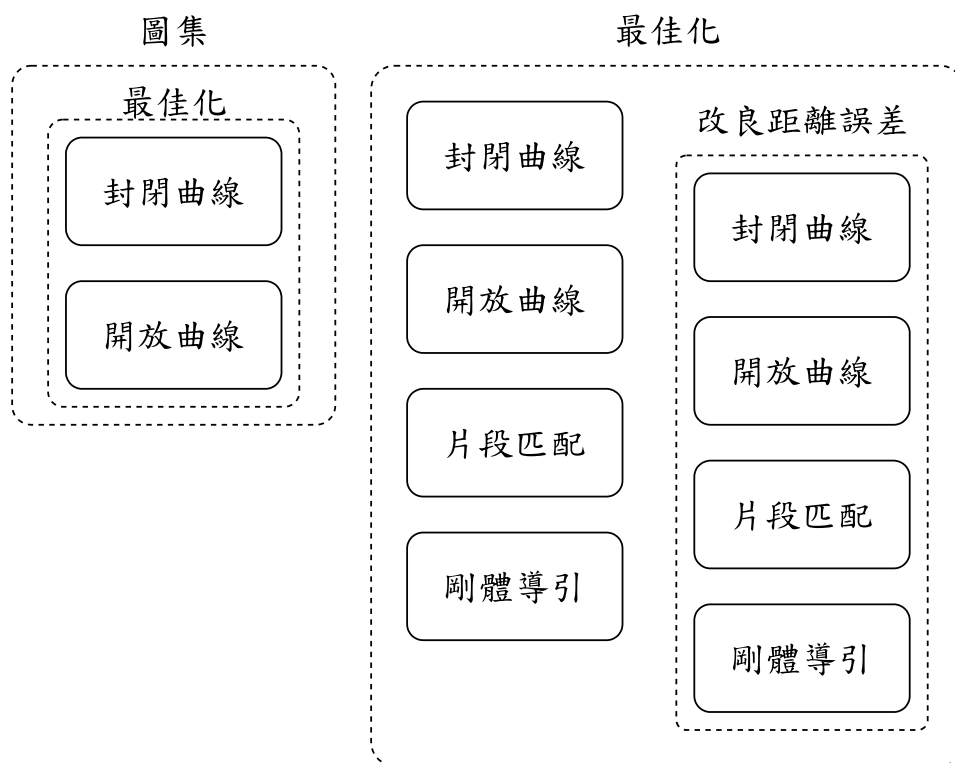


圖 4-16 合成類型組合

第5章 案例探討



5.1 實驗架構

本研究的程式以 Rust 語言開發，運行的硬體環境為搭載 Ubuntu 22.04 作業系統的個人電腦 Intel i5-9400F CPU@2.90GHz，RAM 為 16GB。程式在產生圖集的過程中，以及 DE 演算法在為所有個體產生試驗子代和調用目標函數時，都是分開處理的，因此可以使用平行處理技術加速運算。為了使程式裡的隨機性可重現，且能夠在平行處理環境中運作，本研究採用 ChaCha 8 輪隨機數生產器[56]作為程式中的實現，並可以確保平行處理時沒有資料競爭的問題。

本章展示之案例使用的是表 4-3 中 DE 演算法的參數，並使用第 2.6 節的平均距離誤差 E_{avg} 來對比其它文獻的結果。案例根據圖 4-16 分類，如圖 5-1 所示，圖集最佳化以封閉曲線為例，再分別展示封閉曲線、開放曲線、封閉曲線片段匹配和剛體導引的案例。最後，以封閉曲線與剛體導引的任務，展現改良距離誤差法的合成效果。

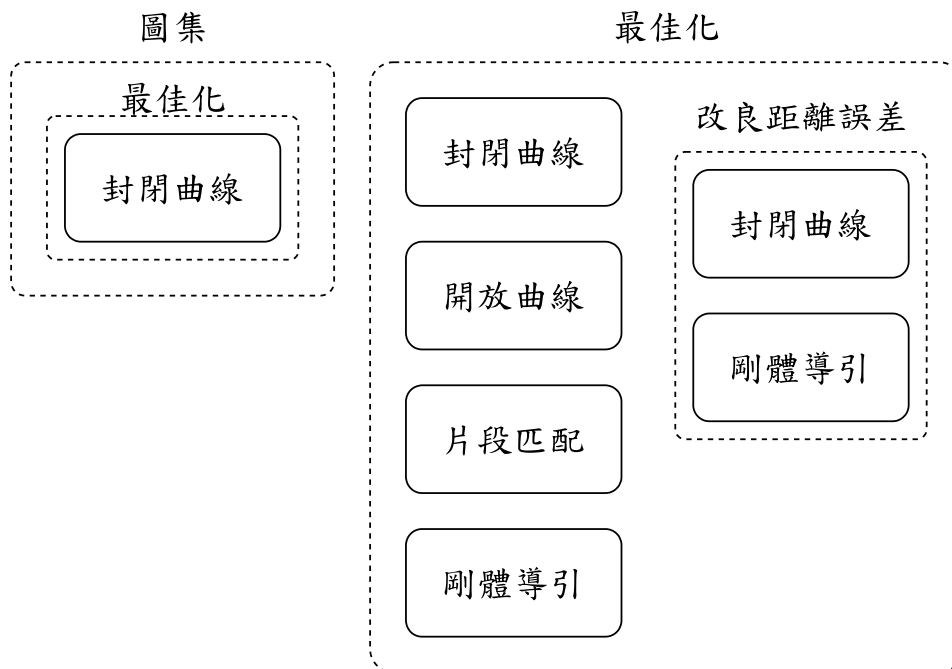
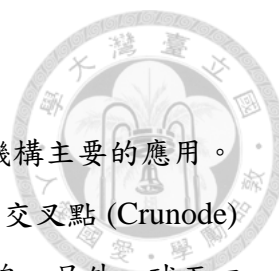


圖 5-1 範例分類



5.2 封閉曲線路徑生成

封閉曲線的路徑生成任務是最常見的目標，通常基於連桿機構主要的應用。除了無交疊平滑的簡單曲線 (Simple Curve) 外，本節將比較含有交叉點 (Crunode) 和尖點 (Cusp) 形狀特徵的曲線，以及由函數計算得出的平滑曲線。另外，球面四連桿部分將展示一些應用，例如模擬太陽相對地球繞行的軌跡，以及將多自由度撲翼裝置的運動以單自由度達成。

5.2.1 範例 1-1

範例 1-1 來自文獻[19]的使用者輸入之封閉路徑作為目標。本案例建立了一個 102,400 筆資料的圖集進行前置搜尋，使用了 15 諧波及 48.65 MB 的儲存空間，花費 10.64 秒建立。目標曲線從文獻[19]測繪得出，如表 5-1 所列，共計 35 點。圖集曲線、文獻[19]中的結果，以及透過最佳化微調後的曲線如圖 5-2 所示。機構如圖 5-5 所示，連桿參數列於表 5-2。此外，表 5-3 列出了目標曲線的正規化 EFD 係數，包含 10 個諧波和總共 40 個係數，花費 305.088 毫秒。

表 5-1 範例 1-1 的目標點

1	2	3	4	5
(53.12, 71.09)	(43.88, 71.12)	(34.78, 70.85)	(27.18, 69.57)	(21.94, 66.98)
6	7	8	9	10
(17.15, 63.54)	(14.41, 59.94)	(12.65, 54.50)	(11.78, 49.14)	(11.79, 44.38)
11	12	13	14	15
(11.57, 38.64)	(11.58, 33.66)	(11.57, 28.48)	(11.60, 24.32)	(11.57, 19.56)
16	17	18	19	20
(11.60, 15.96)	(11.60, 14.18)	(11.48, 12.95)	(11.52, 12.18)	(11.55, 11.36)
21	22	23	24	25
(11.65, 10.64)	(12.49, 11.92)	(13.13, 12.90)	(14.28, 15.31)	(15.83, 17.20)
26	27	28	29	30
(18.03, 20.18)	(22.74, 24.37)	(27.36, 28.76)	(32.08, 33.44)	(37.83, 39.14)
31	32	33	34	35
(43.91, 43.94)	(50.04, 48.98)	(56.08, 54.79)	(59.90, 61.70)	(59.20, 67.79)

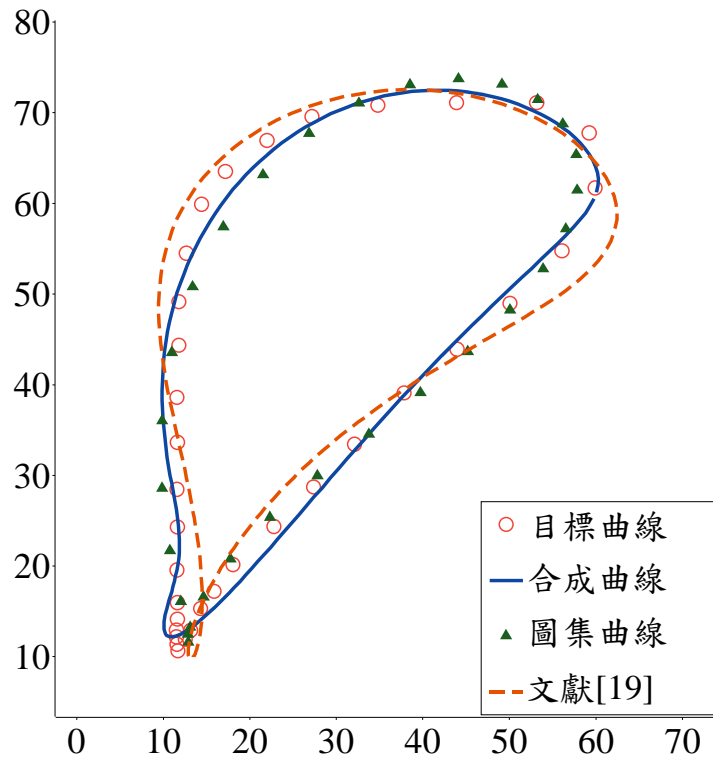


圖 5-2 範例 1-1 的曲線比較

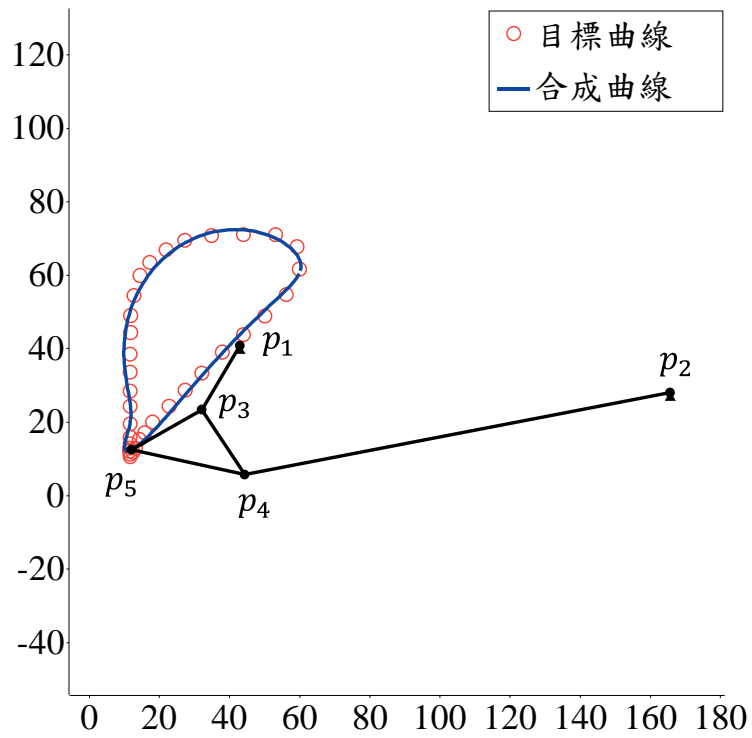


圖 5-3 範例 1-1 的合成機構簡圖

表 5-2 範例 1-1 的連接參數

	x_0	y_0	α	l_1	l_2	l_3
EFD 圖集	55.97	36.63	-2.79	89.81	18.72	21.59

合成結果	42.89	40.90	-0.10	123.34	20.56	21.62
文獻[19]	54.6	-35.5	1.95	47.5	24.3	48.1
	l_4	l_5	γ	迴路	誤差 E	誤差 E_{avg}
EFD 圖集	96.81	31.15	3.93	I	0.25	40.5021
合成結果	123.25	22.71	4.60	II	0.19	1.5745
文獻[19]	47.0	85.6	0.96	II	N/A	16.7670

表 5-3 範例 1-1 的 EFD 係數數值

諧波數	a	b	c	d
1	1	0	0	0.4960
2	-0.0145	-0.1363	-0.0515	0.0985
3	0.0755	0.0098	0.0056	0.0162
4	-0.016	0.0049	-0.0382	0.0041
5	0.0218	0.0176	-0.0014	0.0095
6	-0.0057	-0.0028	-0.018	-0.0016
7	0.0057	0.0071	0.0046	0.0038
8	-0.0034	0.0016	-0.0102	-0.0045
9	0.001	0.0024	0.0044	0.0032
10	-0.0014	0.0005	-0.0056	-0.0024

5.2.2 範例 1-2

範例 1-2 取材自文獻[57]使用者給定之含有交叉點的 20 點封閉曲線，如表 5-4 所列。由於目標曲線透過使用者輸入，數值變成了整數，因此離散點坐標也包含了較大的採樣雜訊，共使用 8 諧波。目標曲線、文獻[57]的結果，以及合成後的曲線如圖 5-4 所示，而機構如圖 5-5 所示。表 5-5 列出了文獻[57]的設計變數和本研究最佳化的結果，花費 325.989 毫秒。

表 5-4 範例 1-2 的目標曲線[57]

1	2	3	4	5	6	7
(-24, 40)	(-30, 41)	(-34, 40)	(-38, 36)	(-36, 30)	(-28, 29)	(-21, 31)
8	9	10	11	12	13	14
(-17, 32)	(-8, 34)	(3, 37)	(10, 41)	(17, 41)	(26, 39)	(28, 33)
15	16	17	18	19	20	
(29, 26)	(26, 23)	(17, 23)	(11, 24)	(6, 27)	(0, 31)	

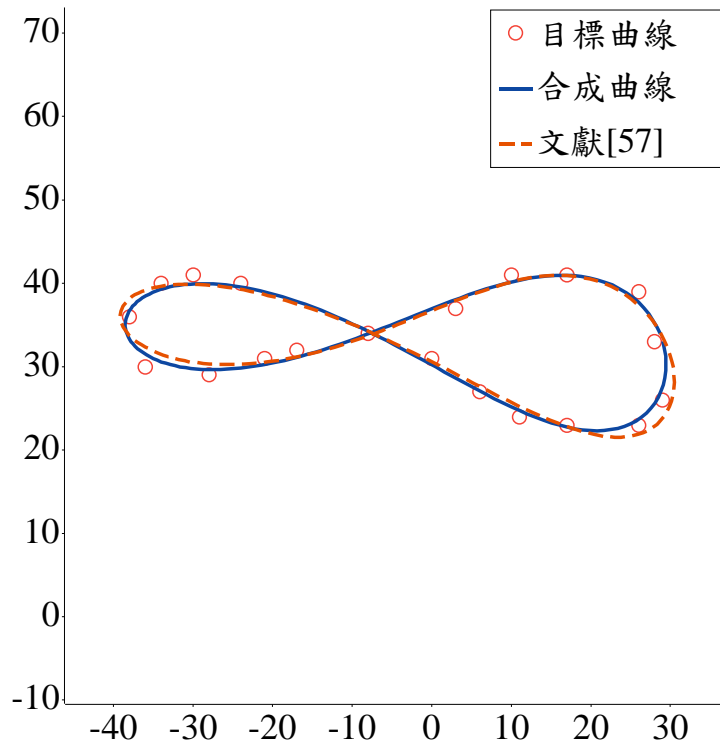


圖 5-4 範例 1-2 的曲線比較

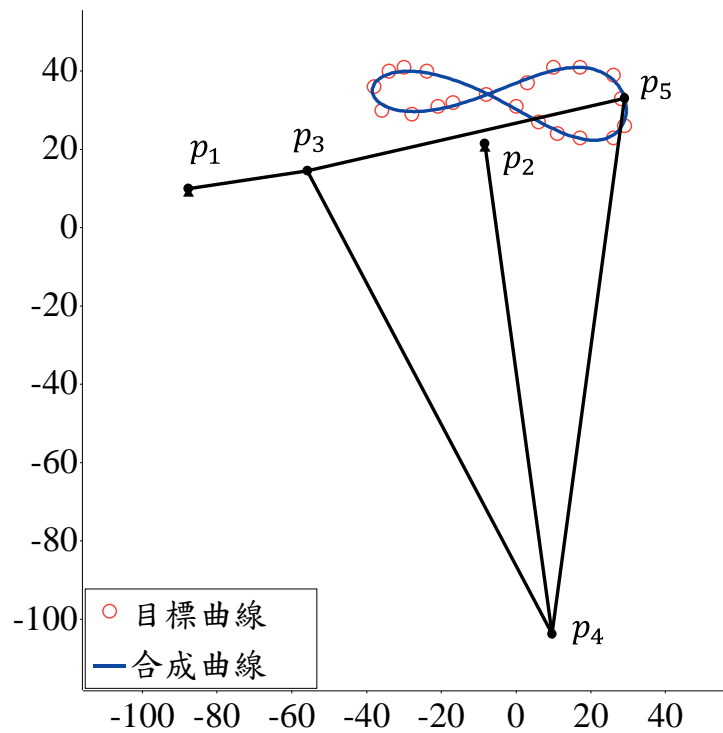


圖 5-5 範例 1-2 的合成機構簡圖

表 5-5 範例 1-2 的連桿參數

	x_0	y_0	α	l_1	l_2	l_3
合成結果	-87.65	10.01	0.14	80.01	32.08	135.23
文獻[57]	-44.87	71.09	5.1871	76.77	27.31	46.44
	l_4	l_5	γ	迴路	誤差 E	誤差 E_{avg}
合成結果	126.44	86.90	1.27	II	0.09	13.2937
文獻[57]	72.55	60.42	5.48	I	N/A	30.2124

5.2.3 範例 1-3

範例 1-3 是文獻[32]具有一組 64 個點的球面封閉曲線，位於單位球面上。本案例建立了一個 102,400 筆資料的圖集進行前置搜尋，使用了 15 諧波及 72.98 MB 的儲存空間，花費 14.99 秒建立。之後在最佳化的迭代中使用了 5 諧波。由於去正規化的轉換，機構位於的球面會與單位球面有些許的球心跟半徑誤差。從圖集獲得的結果與最佳化過程之間的比較如圖 5-6 所示，機構如圖 5-7 所示，連桿參數如表 5-6 所示，花費 292.446 毫秒。此外，表 5-7 列出了目標曲線的正規化係數，包含 5 個諧波和總共 30 個係數。

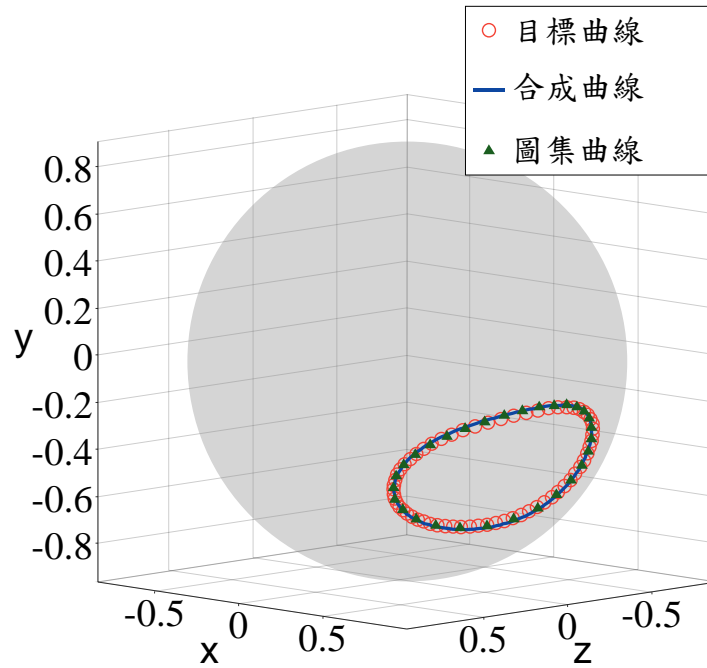


圖 5-6 範例 1-3 的曲線比較

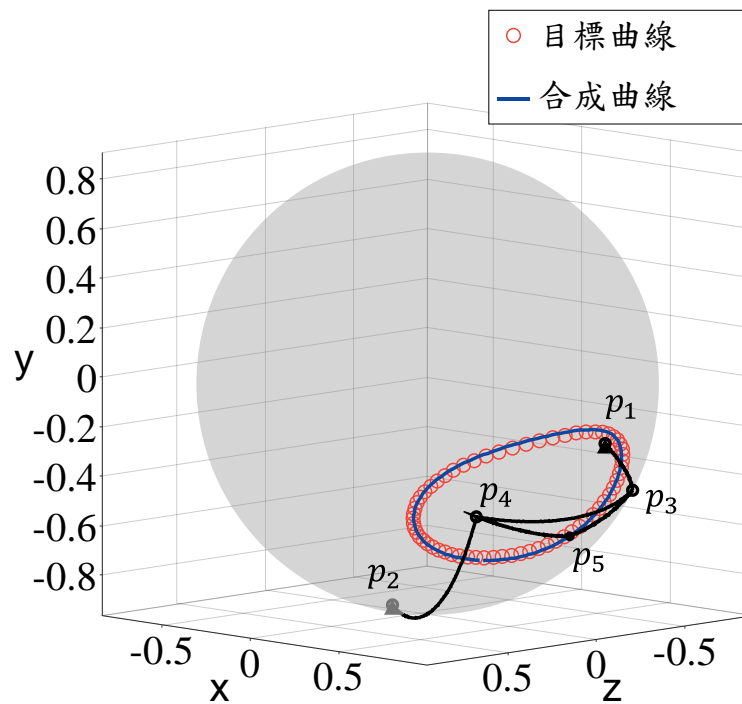


圖 5-7 範例 1-3 的合成機構簡圖

表 5-6 範例 1-3 的連桿參數

	θ_{sx}	θ_{sy}	θ_{sz}	r	η	φ	α	l_1
EFD 圖集	0.01	0.00	0.00	0.98	0.93	-0.99	-1.94	1.17
合成結果	0.06	-0.02	0.01	0.93	1.65	-0.16	-1.72	1.62
	l_2	l_3	l_4	l_5	γ	迴路	誤差 E	

EFD 圖集	2.69	2.02	1.23	1.97	2.61	II	0.0647
合成結果	0.49	0.96	1.30	1.46	0.43	II	0.0522

表 5-7 範例 1-3 的 EFD 係數數值

諧波數	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
1	1	0	0	0.6439	0	0
2	0.0001	-0.0007	-0.0020	-0.0001	-0.0901	0.0003
3	0.0558	0.0022	0.0062	0.0519	-0.0001	0.0006
4	-0.0002	-0.0004	0.0008	0.0008	-0.0099	-0.0022
5	0.0092	0.0023	-0.0010	0.0092	0.0002	-0.0000

5.2.4 範例 1-4

範例 1-4 描述了太陽在天空中相對於地球觀察者的路徑，稱為「日行跡 (Analemma)」，在文獻[58]中計算，可應用在設計一組太陽追蹤機構。其中球面為觀察者的穹頂，並非地球的表面。朝觀察者正上方 ($+\hat{k}$) 的半球是天頂，下方 ($-\hat{k}$) 則是地平線以下看不到的位置。利用文獻[58]中的式(6)-(8)，使用此文獻中給出的 sunpos 子程式直接算出太陽的軌跡：

$$P_T = \text{sunpos}(T_{\text{GMT}}, \text{經度}, \text{緯度}) \quad (5-1)$$

其中輸入變數 T_{GMT} 是時間，包括格林威治標準時間的年、月、日、小時和分鐘，並以連續浮點數表示。在本案例中，本研究從 2023 年 12 月 4 日上午 8 點到 2024 年 12 月 4 日上午 8 點採樣了 100 個點，觀察者的經度及緯度指定成 $(60.9605^\circ, 23.697^\circ)$ 。子程式中的所有其它常數保持一致。所得之曲線如圖 5-8 所示，使用 10 諧波，對應的合成連桿參數如表 5-8 所示，花費 362.805 毫秒。

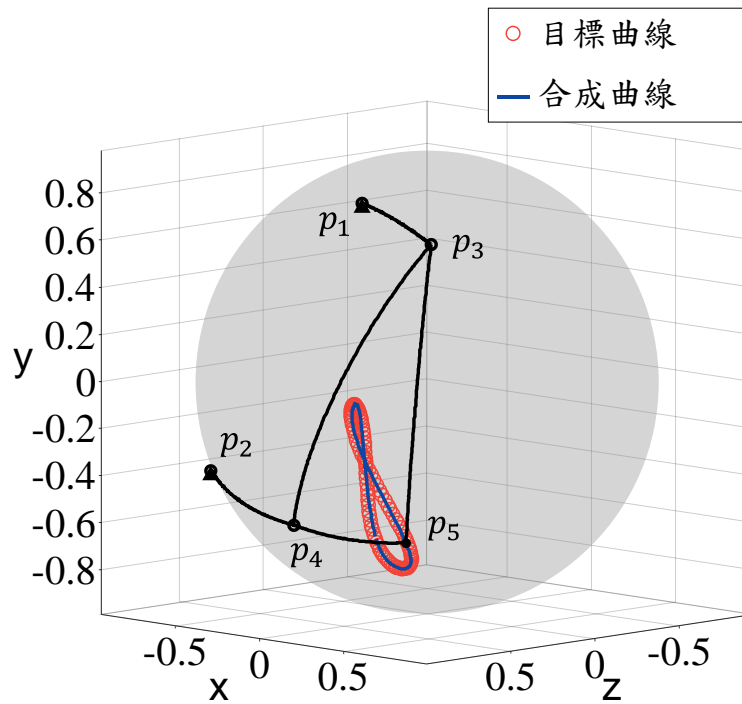


圖 5-8 範例 1-4 的合成機構簡圖

表 5-8 範例 1-4 的連桿參數

	O_{sx}	O_{sy}	O_{sz}	r	η	φ	α	l_1
合成結果	0.00	0.00	0.01	0.98	1.02	1.41	-2.21	1.53
	l_2	l_3	l_4	l_5	γ	迴路	誤差 E	
合成結果	0.41	1.48	0.62	1.06	1.36	I	0.0563	

5.2.5 範例 1-5

範例 1-5 的靈感來自於文獻[59]，該研究探討了使用球面四桿連桿作為撲翼裝置的應用。文獻最初提供了一個三自由度的串聯鏈作為撲翼機構，其角度參數為 ϕ 、 ψ 和 θ 。此外，還提供了 Denavit-Hartenberg 參數表來建立 D-H 轉換矩陣，從而可以確定端效器 (End Effector) 上的點位置。在本研究中，使用以下的角度參數來產生目標曲線：

$$\phi = 0.6 \sin(\omega t) + 0.5 \quad (5-2)$$

$$\psi = 0.8 \cos(\omega t) - 0.3 \quad (5-3)$$

$$\theta = 0.25 \cos(\omega t) + 0.25 \quad (5-4)$$



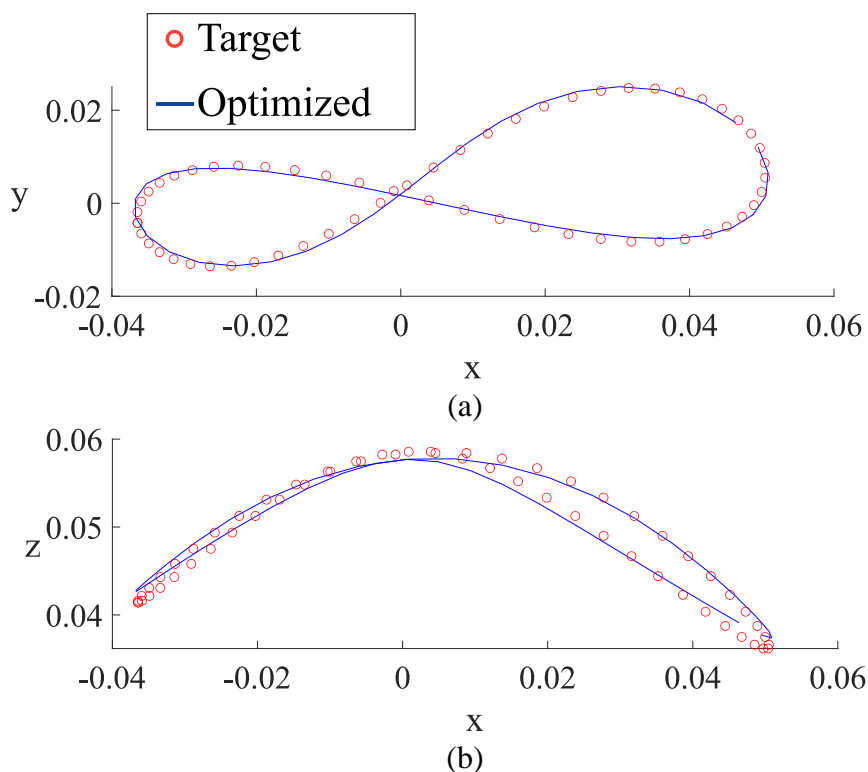
其中輸入角 ωt 的範圍為 0 至 2π 。目標曲線輸入的點為 $[-0.06, 0.01, 0, 1]^T$ ，故目標曲線相對於參考系坐標的位置可寫為

$$P(\omega t) = T_{DH} \begin{bmatrix} -0.06 \\ 0.01 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5-5)$$

而 D-H 轉換矩陣以 c 表示 \cos ， s 表示 \sin 函數，表示成

$$T_{DH} = \begin{bmatrix} s\phi s\theta + c\sigma c\phi c\theta & s\sigma c\phi & c\sigma c\phi s\theta - c\theta s\phi & 0.015s\phi \\ c\sigma c\theta s\phi - c\phi s\theta & s\sigma s\phi & c\phi c\theta + c\sigma s\phi s\theta & -0.015c\phi \\ s\sigma c\theta & -c\sigma & s\sigma s\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-6)$$

其中 $\sigma = \left(\psi - \frac{\pi}{2}\right)$ 。由於目標形狀不是球面曲線，因此合成後的曲線會是近似的曲線，此曲線使用了 6 諧波。圖 5-9 說明了目標曲線和合成曲線之間的比較。合成的連桿結果如圖 5-10 所示，連桿參數列於表 5-9，花費 421.487 毫秒。



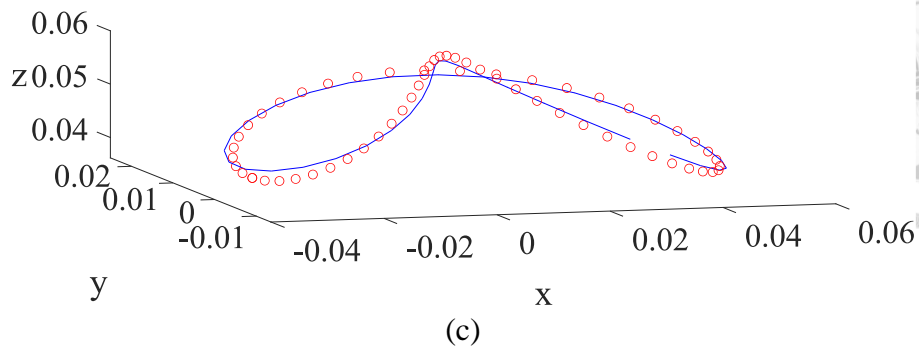


圖 5-9 範例 1-5 的曲線比較：(a) x - y 平面(b) x - z 平面(c)透視圖

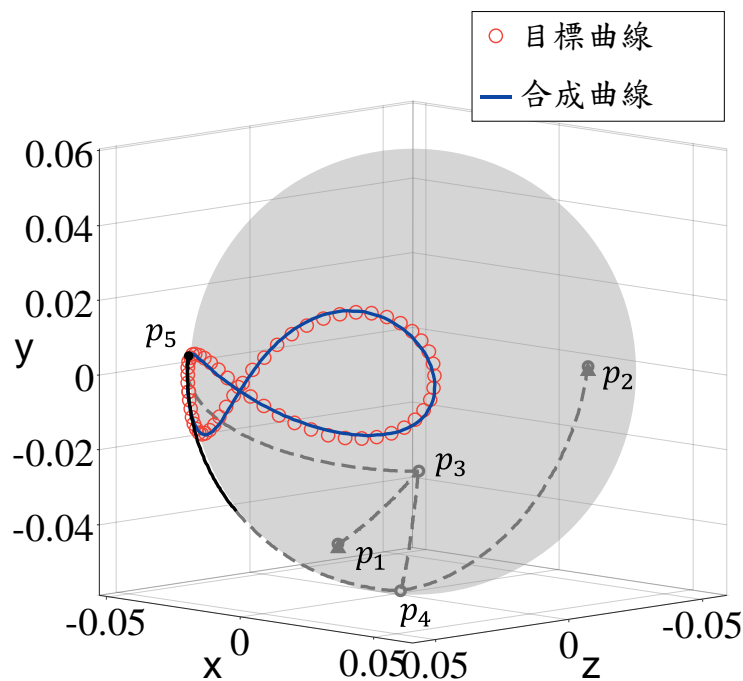


圖 5-10 範例 1-5 的合成機構簡圖

表 5-9 範例 1-5 的連桿參數

	θ_{sx}	θ_{sy}	θ_{sz}	r	η	φ	α	l_1
合成結果	0.00	0.00	0.00	0.05	1.64	-2.14	-2.02	1.49
	l_2	l_3	l_4	l_5	γ	迴路	誤差 E	
合成結果	0.59	0.86	1.48	0.16	2.68	I	0.0877	

5.3 開放曲線路徑生成

開放曲線的合成與封閉曲線的方法基本相同，但需額外考慮機構輸入角的範圍，以及列舉最多 4 種可能的耦桿曲線。在這種情況下，目標曲線的起點和終點

必須與機構的耦桿曲線相同，因此機構不一定能夠在整個行程內完全實現目標曲線的要求，所需之諧波數與迭代數也比較多。如果機構無法滿足總行程的要求，設計者可能需要調整目標曲線。此外，機構可能會在開放曲線的頭尾處產生死點 (Dead-point)，這是需要避免的情況。因此，若要實現目標曲線的軌跡，並避開上述的問題，也可以參考下一小節有關封閉曲線片段路徑匹配任務的方法。

5.3.1 範例 2-1

範例 2-1 從一已知機構得出，目的是測試是否能夠合成具有尖銳邊緣的開放曲線。此機構生成之曲線還包含了近似直線及變化曲率的弧形等特徵。此特殊曲線使用 22 諧波，而最終得到的結果與目標曲線的機構相近。合成結果如圖 5-11 所示，連桿參數如表 5-10 所示，迭代 180 次，花費 1.469 秒。

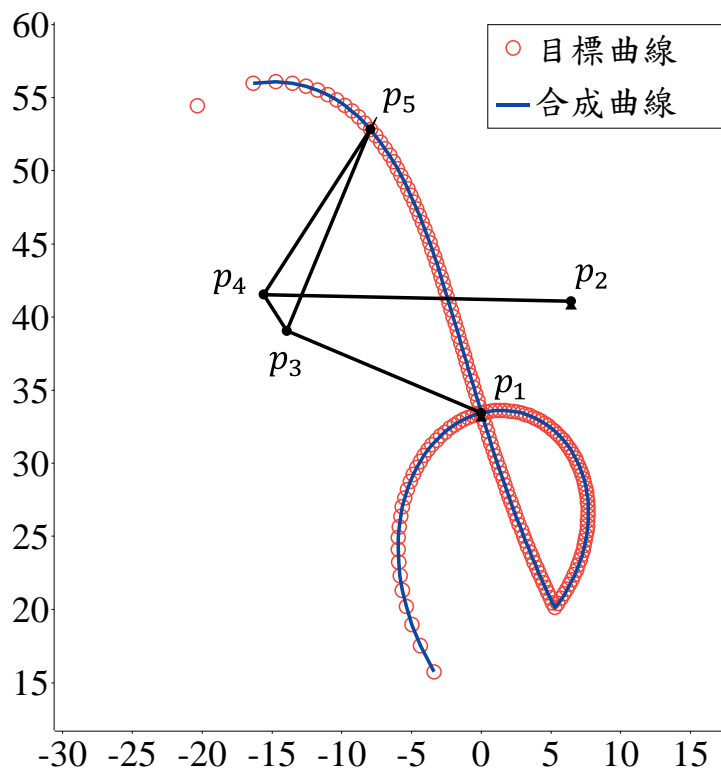


圖 5-11 範例 2-1 的合成機構簡圖

表 5-10 範例 2-1 的連桿參數

	x_0	y_0	α	l_1	l_2	l_3	l_4
目標機構	0	33.45	0.87	10	15	3	22
合成結果	-0.01	33.44	0.87	9.98	15.00	2.99	21.99

	l_5	γ	迴路-分支	誤差 E		
目標機構	15	5.28	I-I	N/A		
合成結果	15.01	5.28	I-II	0.0055		

5.3.2 範例 2-2

範例 2-2 使用下列參數公式產生類似文獻[60]中範例 2 的開放曲線，不過由於原始圖形相對於球面和機構大小都過於懸殊，因此本研究將此圖形的頭尾延伸。此放大後的目標曲線位於一單位球面上，其坐標參數式列成

$$\begin{cases} x(\theta) = \sin 65^\circ \sin(-0.4685\theta + 173.1994^\circ) \\ y(\theta) = -\cos \theta \cos(-0.4685\theta + 173.1994^\circ) + \cos 65^\circ \sin \theta \sin(-0.4685\theta + 173.1994^\circ) \\ z(\theta) = -\sin \theta \cos(-0.4685\theta + 173.1994^\circ) - \cos 65^\circ \cos \theta \sin(-0.4685\theta + 173.1994^\circ) \end{cases}$$

(5-7)

其中角度參數 θ 的範圍是從 40° 到 320° ，採樣了 40 個點作為輸入，共使用 19 諧波數。合成結果如圖 5-12 所示，連桿參數如表 5-11 所示，迭代 140 次，花費 1.458 秒。

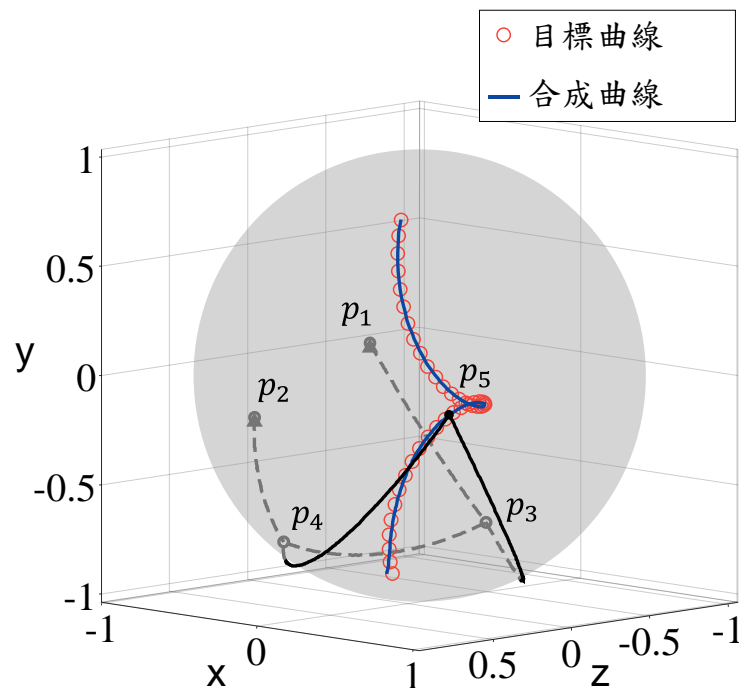


圖 5-12 範例 2-2 的合成機構簡圖

表 5-11 範例 2-2 的連桿參數

	O_{sx}	O_{sy}	O_{sz}	r	η	φ	α	l_1
合成結果	0.00	0.00	-0.06	1.03	2.13	-3.13	-0.44	0.68
	l_2	l_3	l_4	l_5	γ	迴路-分支	誤差 E	
合成結果	1.00	0.99	0.65	2.55	3.14	II-I	0.0633	

5.4 封閉曲線片段路徑匹配

封閉曲線的片段路徑匹配使用額外兩個設計變數 β_a 和 β_b 作為輸入角分割機構的耦桿曲線片段，然後以開放曲線的方式比對目標開放曲線與此片段之間的係數誤差。其餘步驟與封閉曲線路徑生成相同。這種方法能更好地避免開放曲線機構容易遇到死點的問題，同時更容易找到滿足完整目標路徑要求的解。

5.4.1 範例 3-1

範例 3-1 參考自文獻[25]，此開放曲線用作封閉曲線的片段匹配。該曲線是由一個近似橢圓諧波的參數式得出，列式成

$$T(\theta) = (100 + 20j) + (20 + 14j)e^{-j\theta} + (60 - 30j)e^{j\theta} + (2 + 4j)e^{-2j\theta} + (9 - 5j)e^{2j\theta} \quad (5-8)$$

其中 θ 的範圍在 $-\pi/2$ 至 $\pi/2$ 之間，計算出 60 點的複數坐標。此目標曲線的形狀與橢圓曲線的片段類似，使用 14 諧波，在頭尾和曲率較大的部分也能夠較好地貼合。由於此文獻未提供最佳機構之詳細尺度，因此我們僅能從圖中測繪出數值。目標曲線、文獻[25]的結果，以及合成後的曲線如圖 5-13 所示。合成結果如圖 5-14 所示，連桿參數如表 5-12 所示，花費 542.327 毫秒。

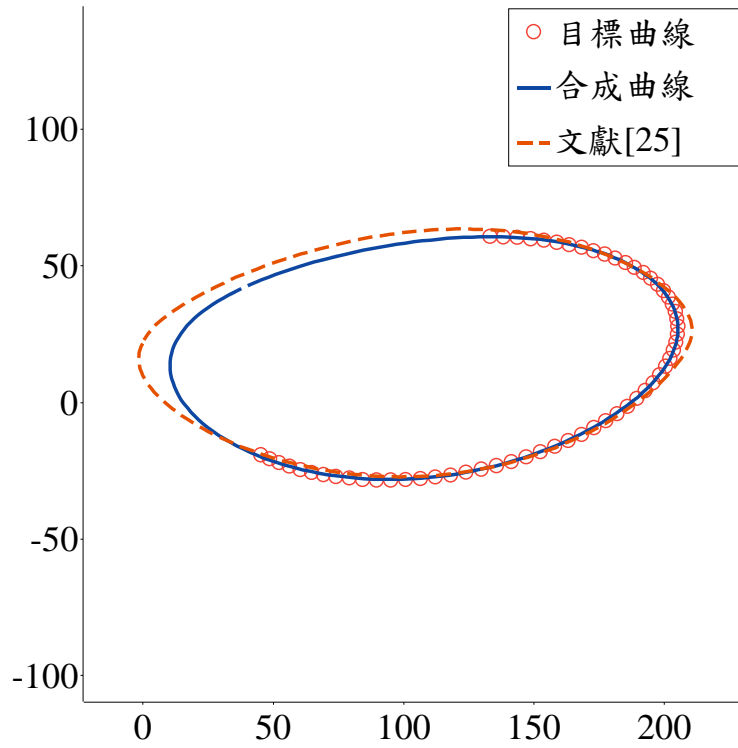


圖 5-13 範例 3-1 的曲線比較

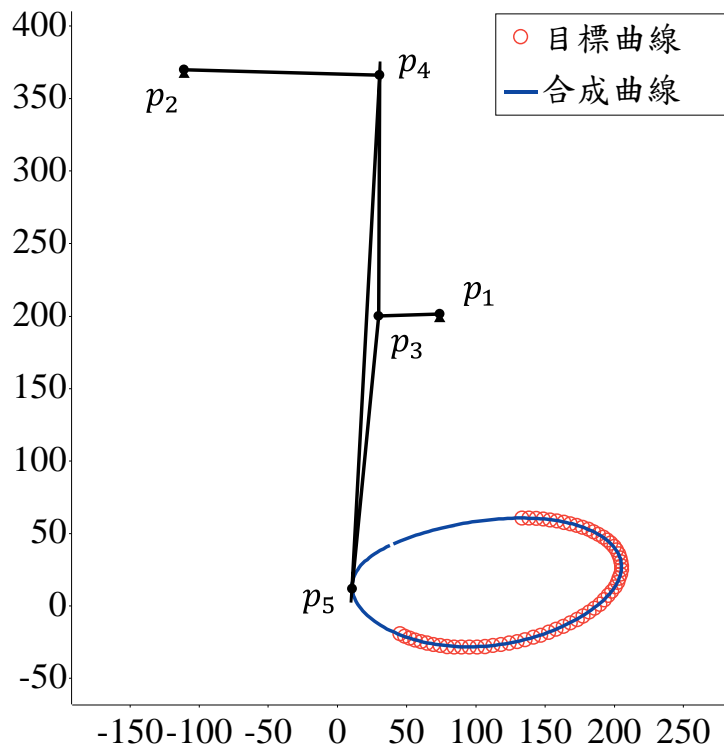


圖 5-14 範例 3-1 的合成機構簡圖

表 5-12 範例 3-1 的連桿參數

	x_0	y_0	α	l_1	l_2	l_3	l_4
合成結果	56.43	56.88	3.10	117.47	27.87	100.21	158.40

文獻[25]	198.6	-82.5	2.6704	368.5	74.0	230.8	213.6
	l_5	γ	迴路	誤差 E	誤差 E_{avg}		
合成結果	30.57	2.41	II	0.0350	2.6889		
文獻[25]	150.6	5.4629	I	N/A	3.6248		

5.4.2 範例 3-2

範例 3-2 是以一直線作為片段來進行封閉路徑的合成，從 (0,0) 至 (9,9) 共 10 個點位置，使用了 11 諧波。本研究有限制片段的占比必須超過 $\pi/2$ 以避免合成結果過大（縮放變數過大），因此可以預計連桿的結果有兩種：在直線上往復，以及以另一種形狀回到原點。由於在收斂的過程中合成出直線機構的可能性較小，故最終得到了後者的結果。若想另外合成出往復直線機構，選擇封閉曲線合成的模式即可。合成結果如圖 5-15 所示，連桿參數如表 5-13 所示，花費 575.032 毫秒。

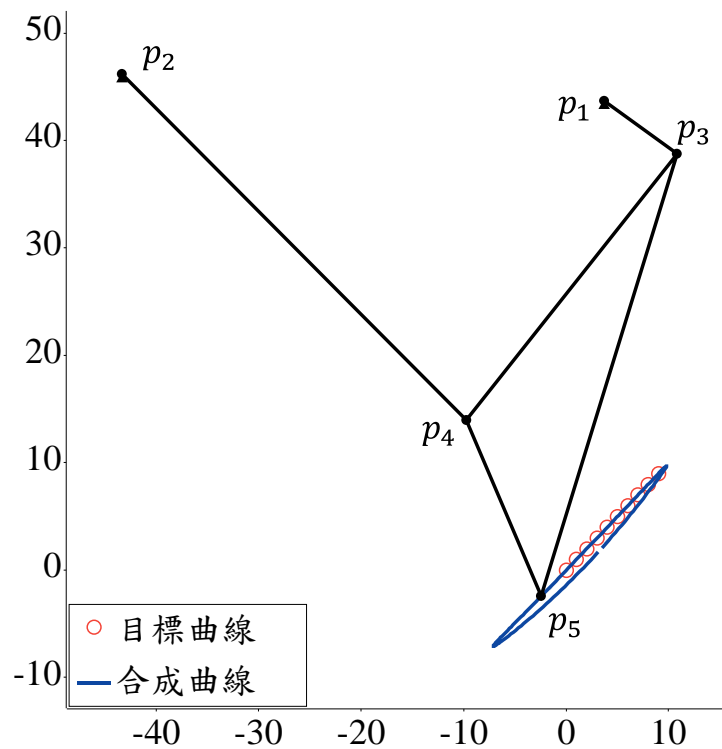


圖 5-15 範例 3-2 的合成機構簡圖

表 5-13 範例 3-2 的連桿參數

	x_0	y_0	α	l_1	l_2

合成結果	3.6725	43.7320	3.0893	47.0865	8.6737
	l_3	l_4	l_5	γ	迴路
合成結果	32.1923	46.5288	43.2471	0.3818	I
	誤差 E				
合成結果	0.0003				

5.4.3 範例 3-3

範例 3-3 以一平面與單位球的部分交線為目標曲線，為半圓弧。平面以方程式定義為 $x + y + z = 1.2$ ，得出交線的參數式為

$$C(t) = \begin{bmatrix} 0.4 - 0.51 \cos t + 0.29 \sin t \\ 0.4 + 0.51 \cos t + 0.29 \sin t \\ 0.4 - 0.59 \sin t \end{bmatrix} \quad (5-9)$$

交線為一平面圓形，代入 $0 \leq t \leq \pi$ 後便能得到半圓弧的目標曲線，透過公式定義，使用 14 諧波。此範例計算出 12 點進行合成，列於表 5-14。但是面臨了圓弧曲線在球面的退化 (Degeneration) 的問題：由於圓弧可在任意半徑的球面截面上產生，甚至是無限大的半徑（縮放變數過大）。故此範例的結果需定義在單位球上，在合成時加上球半徑與球心的約束，列為

$$E_{\text{unit}} = \max \left\{ E, |r_{\text{denorm}} - 1|, \sqrt{O_{\text{denorm},x}^2 + O_{\text{denorm},y}^2 + O_{\text{denorm},z}^2} \right\} \quad (5-10)$$

其中球面的幾何從去正規化步驟得到，並以最小化單位球誤差 E_{unit} 合成機構。合成結果如圖 5-16 所示，連桿參數如表 5-15 所示，花費 608.137 毫秒。

表 5-14 範例 3-3 的目標點

1	2	3	4
(-0.11, 0.91, 0.4)	(0.00, 0.97, 0.23)	(0.12, 0.98, 0.08)	(0.28, 0.95, -0.04)
5	6	7	8
(0.45, 0.87, -0.13)	(0.61, 0.75, -0.18)	(0.75, 0.61, -0.18)	(0.87, 0.45, -0.13)
9	10	11	12
(0.95, 0.28, -0.04)	(0.98, 0.12, 0.08)	(0.97, 0.00, 0.23)	(0.91, -0.11, 0.4)

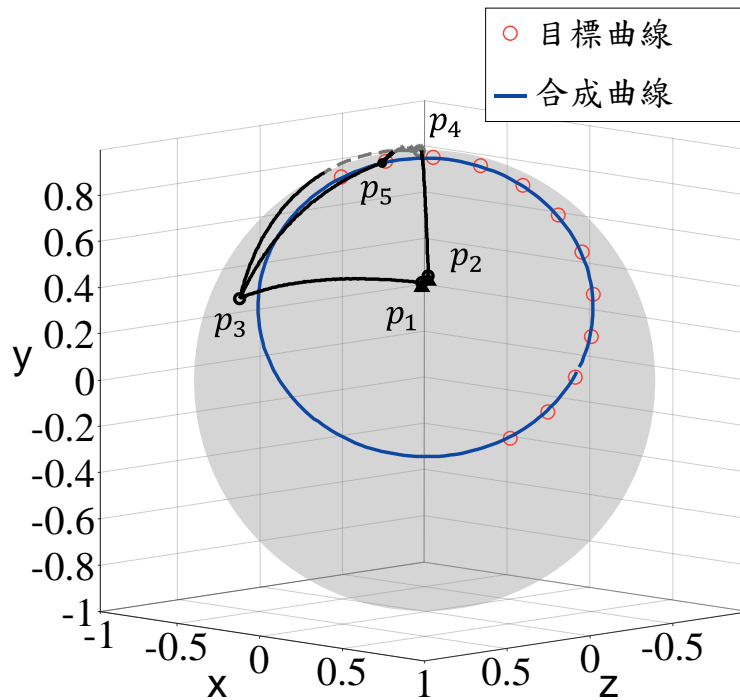


圖 5-16 範例 3-3 的合成機構簡圖

表 5-15 範例 3-3 的連桿參數

	O_{sx}	O_{sy}	O_{sz}	r	η	φ	α	l_1
合成結果	0.00	0.00	0.00	0.99	0.92	0.76	1.08	0.04
	l_2	l_3	l_4	l_5	γ	迴路	誤差 E_{unit}	
合成結果	0.91	1.29	1.28	1.86	0.85	I	0.0060	

5.5 改良距離誤差合成

本節將探討在第 4.3 節討論之改良距離誤差法的應用。此方法較著重於目標點數較少的情況，因此以兩個案例**範例 4-1**與**範例 4-2**進行誤差及視覺上的觀察和分析。**範例 4-1**是文獻[57]的 20 點使用者輸入之目標點，此目標曲線與前面小節的**範例 1-2**相同。而**範例 4-2**則是機構產生，點數為 180 點的耦桿曲線，有兩個交叉點，用來對照簡單曲線較不受點數多寡都容易合成的情況。

範例 4-1與**範例 4-2**分別的合成結果如圖 5-17、圖 5-18 所示，連桿參數如表 5-16、表 5-17 所示。在圖 5-17 中，我們觀察到使用改良距離誤差的結果會更加貼近特定的目標點，偏離平滑曲線的目標點可能會有較大的誤差。而 EFD 方法在目標點數較少時，則是平衡了整體誤差。如表 5-16 所示，兩種方法的誤差皆以距離

誤差呈現，改良距離誤差合成的耦桿曲線使用 EFD 描述後，誤差會較 EFD 係數合成的結果來得大，這可能是距離誤差「偏袒」某些目標點的表現。但若是目標曲線的某些點坐標雜訊較多，改良距離誤差方法也許能協助找到相對平滑的結果。在圖 5-18 中，當目標點數變多，目標曲線變得更平滑時，EFD 方法便能夠找到非常貼近的曲線。但是使用距離誤差卻無法顧及所有目標點的要求，甚至容易收斂到局部最佳解，例如圖中結果的交叉點數不同。

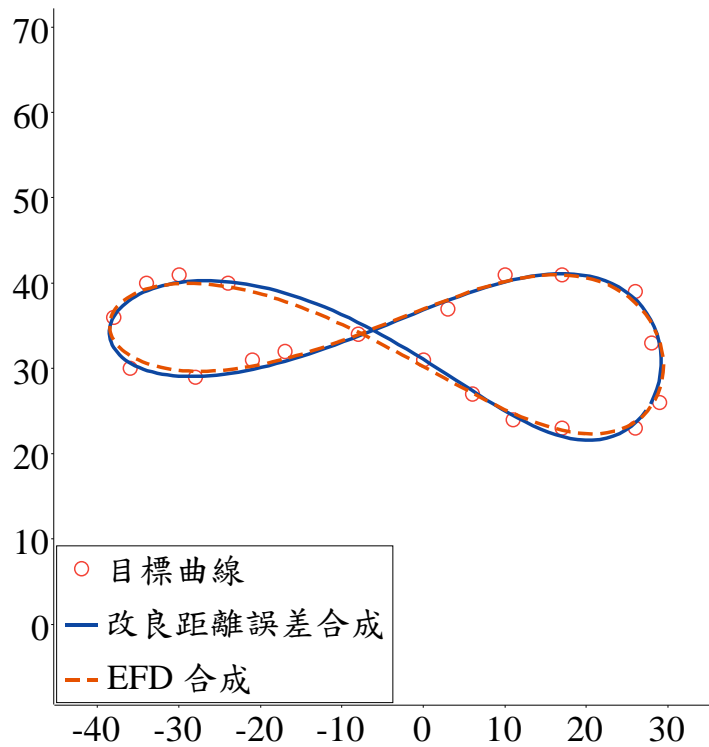


圖 5-17 範例 4-1 的合成機構簡圖

表 5-16 範例 4-1 的連桿參數

	x_0	y_0	α	l_1	l_2	l_3
改良距離誤差合成	-59.32	0.16	0.73	72.58	27.98	71.32
EFD 係數合成	-87.65	10.01	0.14	80.01	32.08	135.23
	l_4	l_5	γ	迴路	誤差 E_{dist}	時間
改良距離誤差合成	97.30	66.29	1.30	II	0.0341	5.283s
EFD 係數合成	126.44	86.90	1.27	II	0.0538	342.523ms

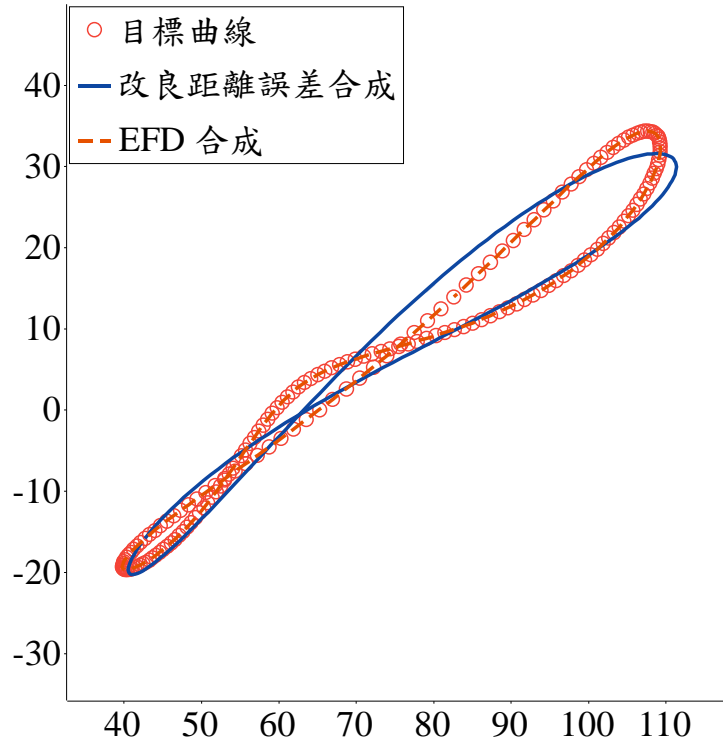


圖 5-18 範例 4-2 的合成機構簡圖

表 5-17 範例 4-2 的連桿參數

	x_0	y_0	α	l_1	l_2	l_3
目標機構	0	0	1.42	91.88	34.99	69.04
改良距離誤差合成	152.93	151.10	-1.70	233.02	38.85	158.20
EFD 係數合成	-0.17	0.02	1.42	92.00	34.99	69.16
	l_4	l_5	γ	迴路	誤差 E_{dist}	時間
目標機構	60.65	79.08	5.55	II	N/A	N/A
改良距離誤差合成	200.46	165.91	0.64	II	0.0897	5.471s
EFD 係數合成	60.64	79.25	5.55	II	0.0343	371.942ms

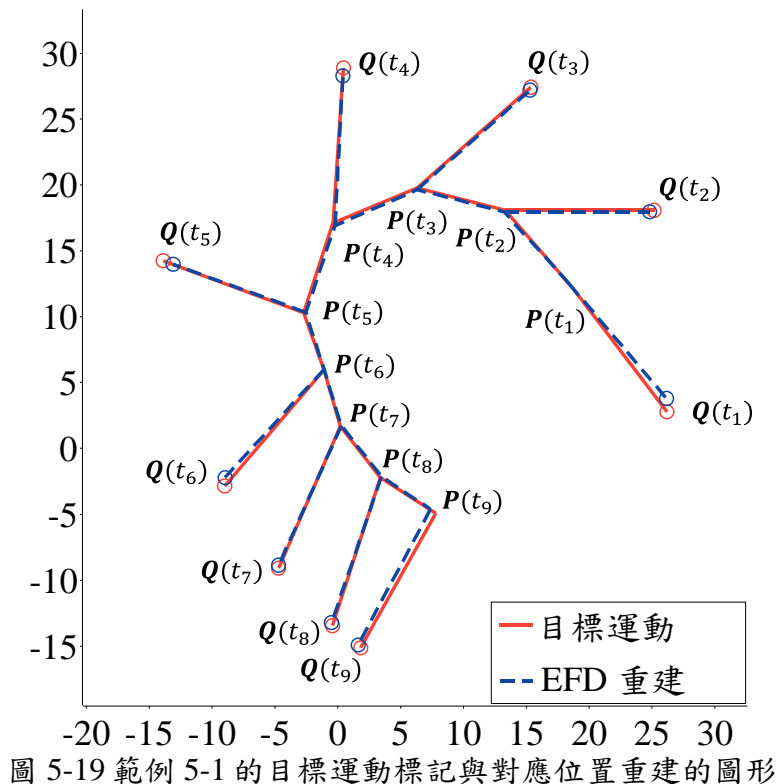
5.6 平面四連桿剛體導引

本節將探討在第 4.4 節討論之平面剛體導引的案例，以開放曲線為主。與前一小節的概念相同，從兩個來自文獻[43]的案例**範例 5-1**與**範例 5-2**進行觀察和分析，對比目標點數多寡帶來的影響。**範例 5-1**依序給定了 9 個運動位置，只有較少的採樣數，其坐標與 x 軸所夾之角度如表 5-18 所列。**範例 5-2**是一已知機構產生之耦桿運動，本研究採樣了 60 點。如圖 5-19 和圖 5-20 所示，**範例 5-1**與**範例**

5-2 的目標運動，與利用 EFD 係數和正規化時間參數 $t_{p, \text{norm}}$ 在對應位置重建的圖形比較。其中標示了耦桿曲線 $P(t_p)$ 與延伸曲線 $Q(t_p)$ 的點位置。與文獻[43]不同，本研究並沒有設定耦桿上的向量長度，而是以單位向量表示方向進行合成，呈現時使用縮放係數 s 放大正規化的圖形。因此，論文圖片內呈現耦桿曲線 $P(t)$ 和延伸曲線 $Q(t)$ 的比例，跟正規化時是相同的。另外，為了讓運動標記不要在圖片中互相覆蓋，只有目標運動和對應位置重建的結果會呈現所有連接的向量 V ，其它連續的運動結果則以 $P(t)$ 與 $Q(t)$ 的框線表示。

表 5-18 範例 5-1 的目標運動[43]

	1	2	3	4	5
x	18.8	13.3	6.3	-0.4	-2.7
y	12.1	18.1	19.8	17.1	10.3
角度	-0.9	0	0.7	1.5	2.8
	6	7	8	9	
x	-1.1	0.2	3.4	7.8	
y	6	1.7	-2.2	-4.9	
角度	-2.3	-2	-1.9	-2.1	



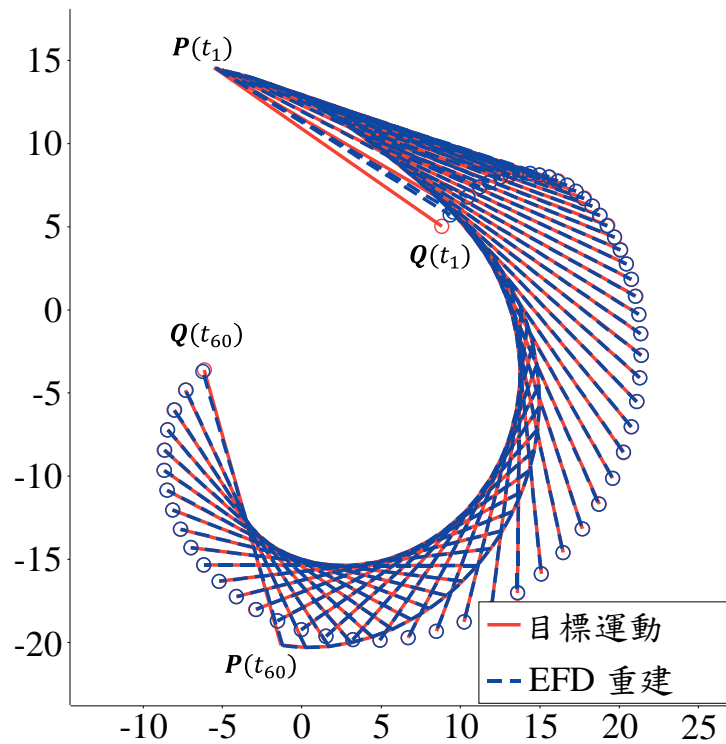


圖 5-20 範例 5-2 的目標運動標記與對應位置重建的圖形

範例 5-1 的曲線比較繪製於圖 5-21，機構繪製於圖 5-22，花費 22.563 秒，使用 2000 族群數。範例 5-2 的曲線比較繪製於圖 5-23，機構繪製於圖 5-24，花費 45.159 秒，使用 2600 族群數。兩個範例的連桿參數分別如表 5-19、表 5-20 所列。為避免陷入局部最佳解，剛體導引進行多目標最佳化 (MOO) 的時候，所使用的迭代數為 200。在圖 5-21 中，我們可以觀察到使用 EFD 係數合成目標點時，運動軌跡的細節在開放曲線的頭尾處會稍微損失，同時中間的目標點誤差也較多。然而，整體上來看，這種方法平衡了對目標形狀的需求。而在圖 5-23 中，使用較多目標點的運動軌跡生成了機構，其整體曲線和剛體向量的方向都得到了滿足。圖中也展示了目標點與機構點之間的間距不一致，這是因為 EFD 係數的結果只考慮形狀，因此即使兩個耦桿曲線形狀相同但運動速度不同的機構仍然可以滿足形狀的要求，與預期相符。

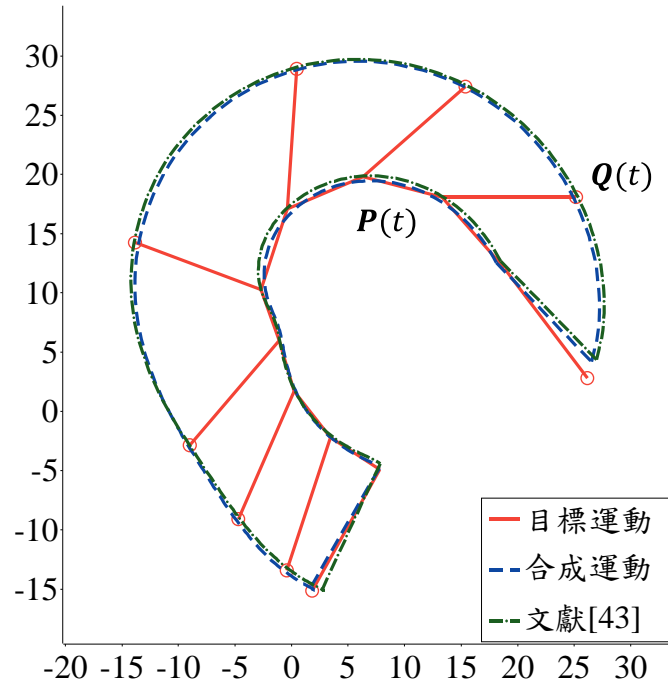


圖 5-21 範例 5-1 的曲線比較

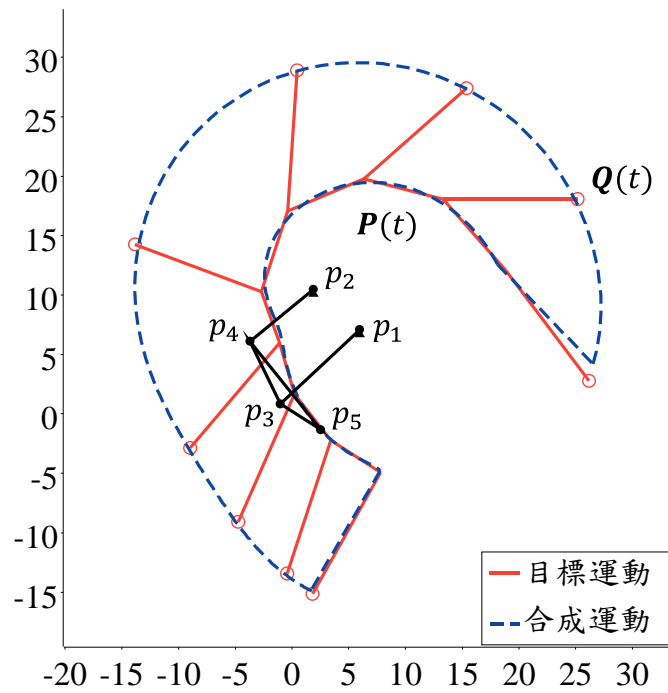


圖 5-22 範例 5-1 的合成機構簡圖

表 5-19 範例 5-1 的連桿參數

	x_0	y_0	α	l_1	l_2	l_3	l_4
合成結果	5.93	7.10	2.44	5.28	9.35	5.91	7.08
文獻[43]	6.40	7.25	2.44	6.63	9.83	7.53	6.97
	l_5	γ	$\angle \epsilon$	迴路-分支	誤差 E_{motion}	誤差 E_{avg}	

合成結果	4.12	3.69	2.26	I-II	0.6238	3.3882	
文獻[43]	3.54	-2.51	2.32	I-I	N/A	3.4203	

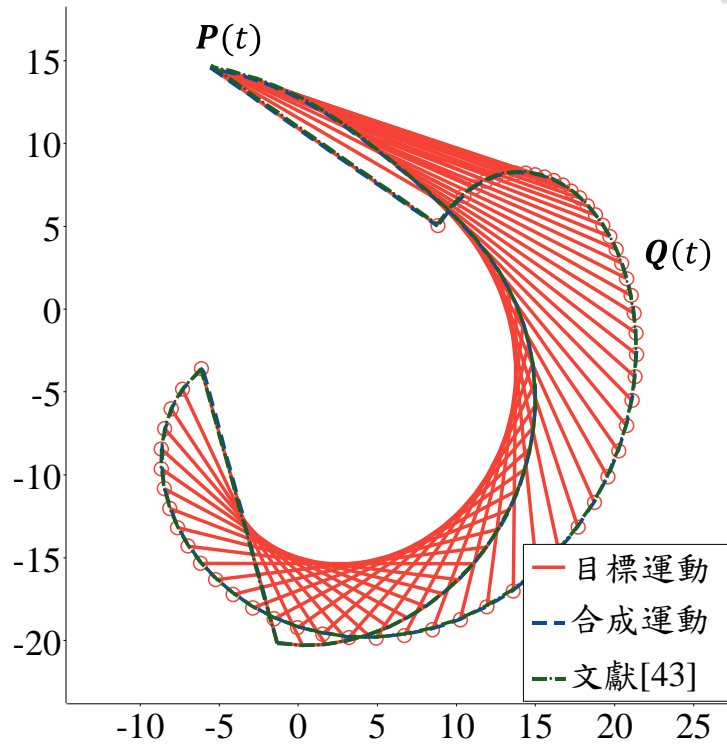
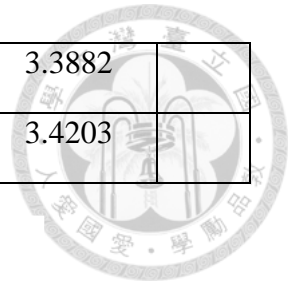


圖 5-23 範例 5-2 的曲線比較

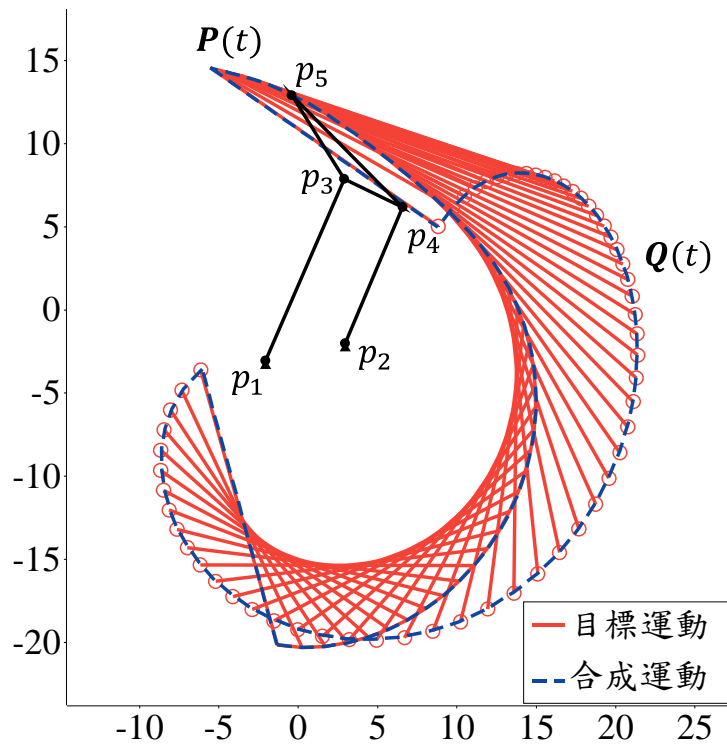


圖 5-24 範例 5-2 的合成機構簡圖

表 5-20 範例 5-2 的連桿參數

	x_0	y_0	α	l_1	l_2	l_3	l_4
目標機構	-2	-3	0.2	5	12	4	9
合成結果	-2.06	-3.03	0.20	5.11	12.00	4.05	8.96
文獻[43]	-2.08	-2.94	0.20	5.07	12.06	4.04	9.01
	l_5	γ	$\angle\epsilon$	迴路-分支	誤差 E_{motion}	誤差 E_{avg}	
目標機構	6	2.6	0.14	I-I	N/A	N/A	
合成結果	6.01	2.57	0.12	I-II	0.0226	12.3531	
文獻[43]	6.01	2.59	0.14	I-I	N/A	3.0156	

5.6.1 改良距離誤差剛體導引

接著，以相同的範例 5-1 與範例 5-2，進行剛體導引搭配距離誤差法的合成，觀察其與利用 EFD 運動標記所合成結果間之差異，迭代數也設定成 200。範例 5-1 的結果在對應的位置重建繪製於圖 5-25，曲線比較繪製於圖 5-26，機構繪製於圖 5-27。範例 5-2 的結果在對應的位置重建繪製於圖 5-28，曲線比較繪製於圖 5-29，機構繪製於圖 5-30。在圖 5-26 中，整體的圖形相較於圖 5-21 更貼近目標耦桿點與其延伸點，曲線頭尾的要求也有滿足。在圖 5-29 中，合成後的結果僅與圖 5-23 的外觀相似，誤差卻很大。本研究推測是使用距離誤差法在目標點數較多時，容易損失目標曲線的細節，雖然中段的曲線形狀和角度類似，但是在頭尾與中間的目標點沒有符合，最終無法找到更好的解。

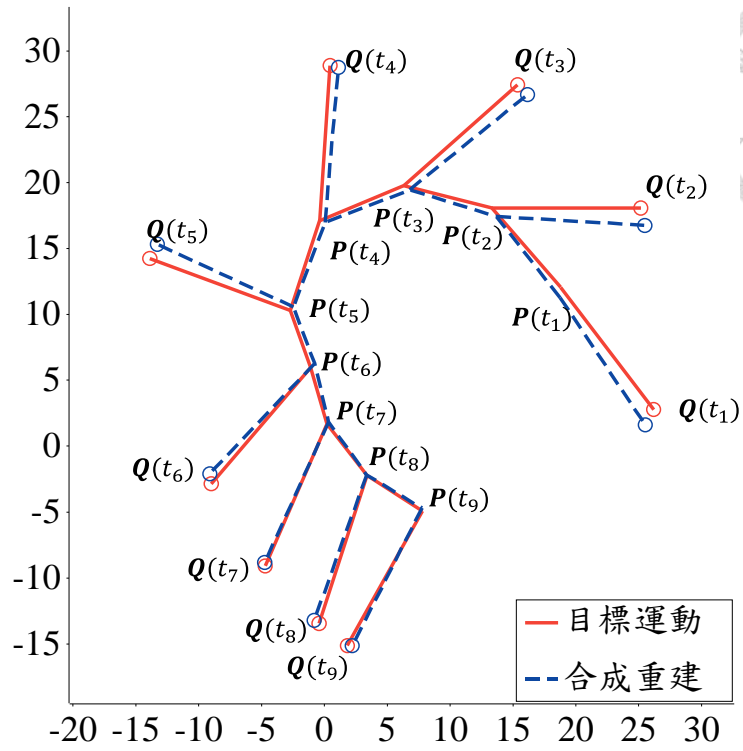


圖 5-25 範例 5-1 的目標曲線在合成後對應位置的重建

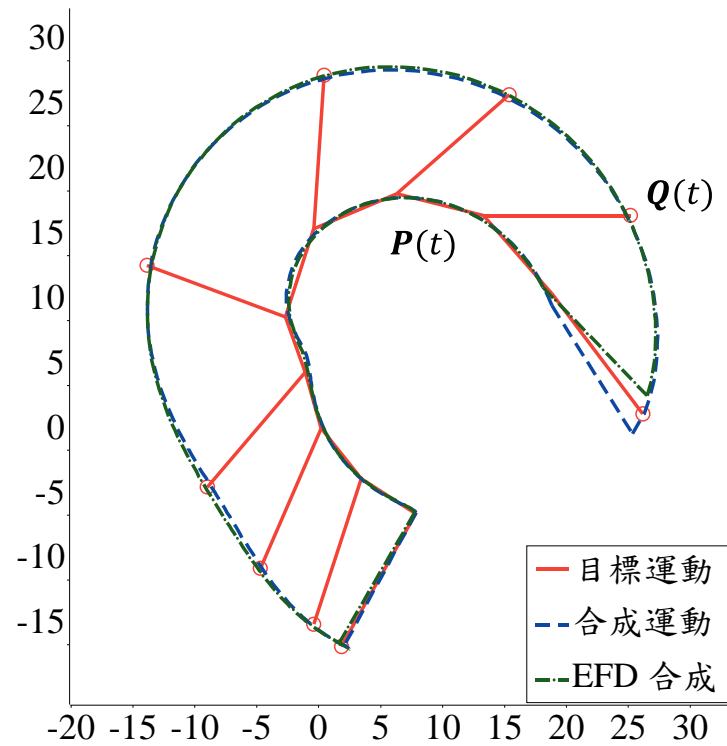


圖 5-26 範例 5-1 的距離誤差合成曲線比較

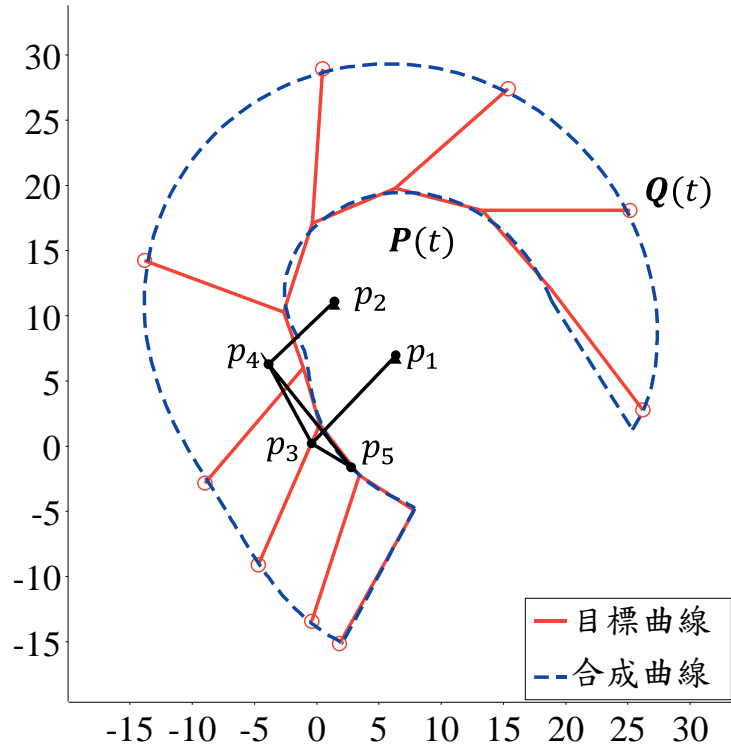


圖 5-27 範例 5-1 的距離誤差合成機構簡圖

表 5-21 範例 5-1 的距離誤差合成連桿參數

	x_0	y_0	α	l_1	l_2
改良距離誤差合成	6.32	6.96	2.44	6.43	9.52
EFD 係數合成	5.93	7.10	2.44	5.28	9.35
	l_3	l_4	l_5	γ	$\angle \epsilon$
改良距離誤差合成	6.96	7.16	3.67	3.66	2.25
EFD 係數合成	5.91	7.08	4.12	3.69	2.26
	迴路-分支	誤差 $E_{\text{motion,dist}}$	時間	族群數	
改良距離誤差合成	I-II	0.0311	107.385s	500	
EFD 係數合成	I-II	0.1166	22.563s	2000	

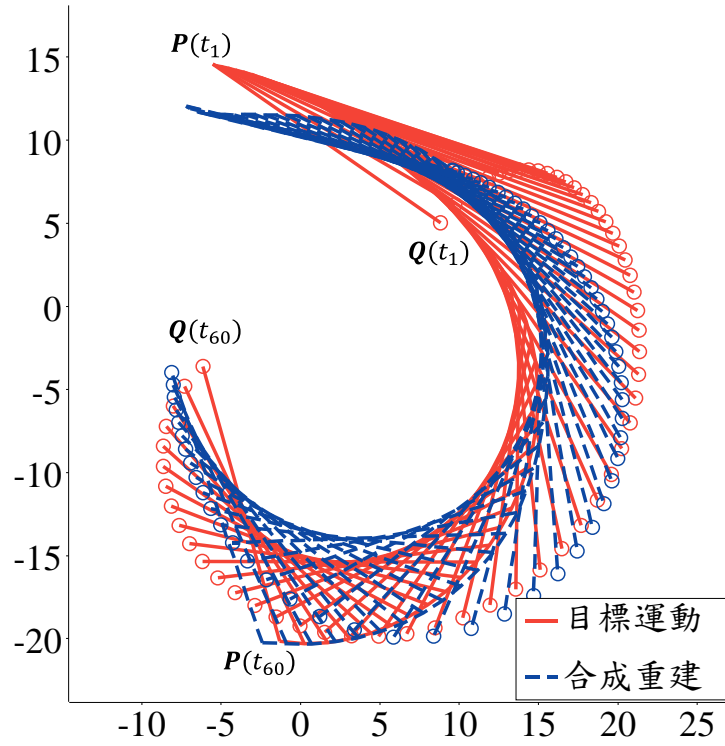


圖 5-28 範例 5-2 的目標曲線在合成後對應位置的重建

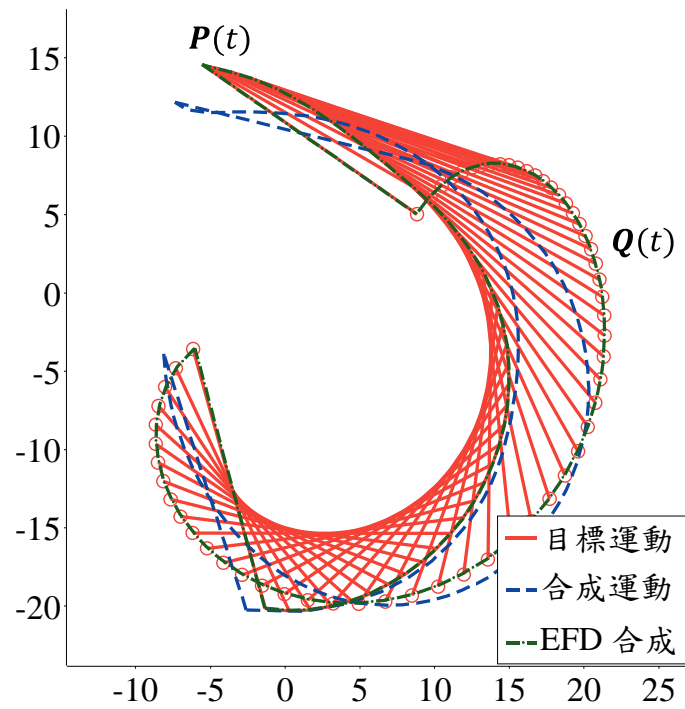


圖 5-29 範例 5-2 的距離誤差合成曲線比較

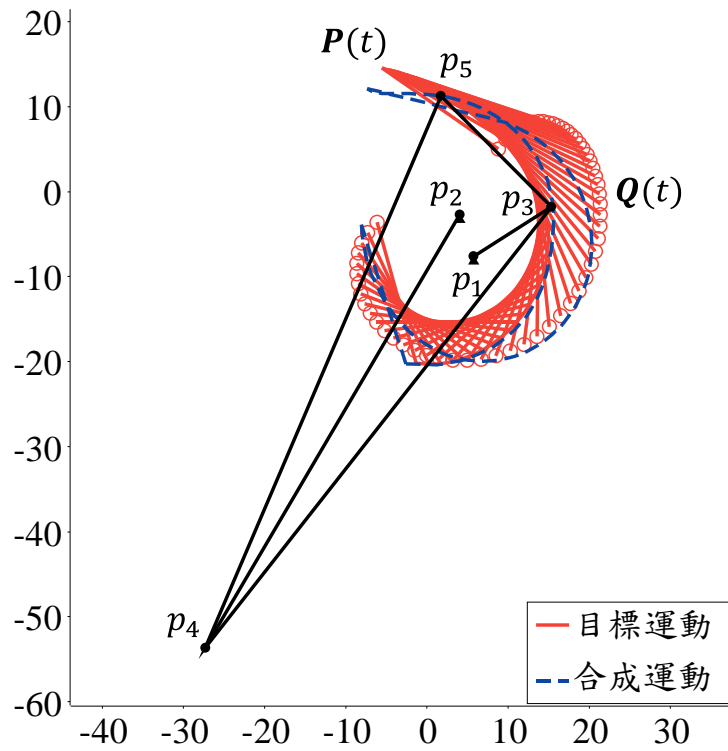


圖 5-30 範例 5-2 的距離誤差合成機構簡圖

表 5-22 範例 5-2 的距離誤差合成連桿參數

	x_0	y_0	α	l_1	l_2
目標機構	-2	-3	0.2	5	12
改良距離誤差合成	5.73	-7.59	1.91	5.19	11.19
EFD 係數合成	-2.06	-3.03	0.20	5.11	12.00
	l_3	l_4	l_5	γ	$\angle \epsilon$
目標機構	4	9	6	2.6	0.1411
改良距離誤差合成	67.17	59.83	18.84	4.63	1.76
EFD 係數合成	4.05	8.96	6.01	2.57	0.12
	迴路-分支	誤差 $E_{\text{motion,dist}}$	諧波數	時間	族群數
目標機構	I-I	N/A	N/A	N/A	N/A
改良距離誤差合成	I-II	0.1873	N/A	39.365s	1000
EFD 係數合成	I-II	0.0490	106	45.159s	2600

第6章 結論與未來展望



6.1 結論

本研究根據過往將傅立葉描述子 (FD) 應用於平面機構路徑生成與剛體導引的案例，首次引入了相似的橢圓傅立葉描述子 (EFD) 理論，旨在改善 FD 方法中的描述問題，並將相同公式擴展至空間機構的應用。

在平面曲線描述方面，FD 與 EFD 方法最初設計僅適用於封閉曲線，並且利用訊號處理的傅立葉功率分析 (FPA) 來自動調整適合的諧波數以提高描述的精確度。FD 方法直接將圖形轉換為係數，因此必須事先進行正規化，或在轉換過程中分析圖形的幾何不變性。而 EFD 方法則分別獲得了圖形的形心與形狀，並且將係數正規化，從獲得的係數中將平移、相位角、旋轉與縮放調整至統一的狀態，如此使相同形狀的圖形擁有相同的係數，不同的圖形也可基於相同的條件下，比較其之間的差異。在第 2.2 節的正規化過程中，本研究解決了由奇偶項係數引起的分類問題，而原始文獻[35]僅提出了分類概念，未提出如何使係數保持一致。除了正規化步驟外，FD 以點的索引對應時間參數，而 EFD 則是利用差分計算出相對於總行程的時間參數。這將導致不等距離的離散點曲線在 FD 中具有不等速的特性，而在 EFD 中則保持形狀等速度。在處理剛體導引問題時，利用時間參數的特性，本研究提出了時間導引的概念，以實現在相同時間參數下代表指定分量的連續描述。

在描述開放曲線方面，傳統 FD 使用曲線擬合方法，以約束一封閉曲線在指定時間參數下必須通過目標點。本研究進行了兩種描述方法的實作，發現曲線擬合方法在 EFD 方面缺乏完整約束，這是由於每個分量中的兩個係數與其它分量皆不相關，且此方法無法利用 FPA 找到最佳諧波數。作為替代，本研究提出了往復曲線模型來描述開放曲線。研究發現往復曲線是 EFD 的特殊解，只需使用餘弦項係數進行疊加簡諧運動即可生成曲線，且計算速度遠快於曲線擬合法，因此本研究選擇使用往復曲線模型來描述開放曲線。

擴展至空間曲線描述時，本研究在過往文獻中尚未找到一種較好的方法來定義圖形的旋轉。因此，我們利用幾何中第一項係數的兩個係數向量構成局部坐標系，作為一種方式來描述圖形的旋轉。而往復曲線模型則使用第一與第二項係數

的餘弦項向量構成。由於 EFD 僅針對分量定義係數，因此可以較方便地擴充至更高維度的分量，實現從離散採樣數據近似至係數，再由係數重建回連續數據。只是在正規化時必須定義旋轉，因此本研究僅能實作線性、平面與空間三個維度。

本研究設計了兩種比較圖形的方法：單純比較 EFD 係數，和使用近似係數替代曲線函數，以比較離散坐標間的距離誤差。此外，在處理剛體導引問題時，我們能夠描述連續運動，並進一步搭配不同的圖形比較方式呈現。最後，在論文中展示了機構合成的結果，以各種目標需求展示 EFD 形狀表示法在合成機構尺度時的性能。本研究的程式亦以部分功能的方式呈現在網頁[61]。

6.2 未來展望

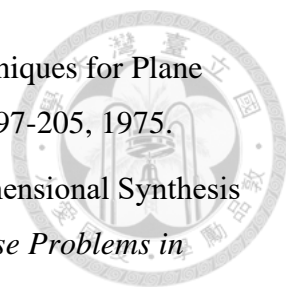
本論文提到了一些目前尚未解決或探討，但可以在未來研究補充的內容，列出如下：

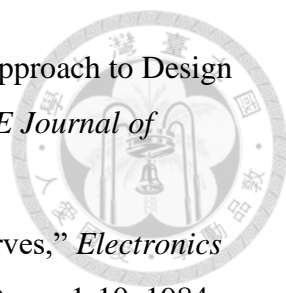
1. 將 EFD 應用在更多平面或空間機構的路徑生成問題，例如多連桿 (Multi-links) 機構或空間機構的剛體導引任務。在第 3.3 節的小結中提及，球面連桿機構大多的耦桿應用是空間中的旋轉，並不需要如平面四連桿機構兩耦桿點的角度要求，因此未在本研究中分析此種剛體導引的案例。
2. 本研究的第 2.4 節 FPA 流程中提及離散點曲線坐標是從函數中採樣的，應用奈奎斯特-香農採樣定理時，需要判斷採樣的數據是否為過採樣。另外，使用改良距離誤差法的時機也需要欠採樣的判斷。後續可以探討一曲線函數採樣後，如何判斷過採樣和欠採樣的方法。
3. 我們可以知道曲線對機構的解並不是唯一的，其中 Roberts-Chebyshev 理論提出了平面的同族機構 (Cognate Linkage) 會有相同的耦桿曲線；球面機構則在文獻[53]的等效運動可得知類似的效果。未來可以嘗試驗證兩機構為「近似」同族機構，或是在合成後列舉出它們，提供更多設計選項。
4. 以其它不同種最佳化方法測試 EFD 方法的目標函數，觀察比較不同演算法對 EFD 係數誤差的收斂性差異。
5. 本研究的第 2.7 節描述 EFD 形狀表示法在本研究中視為高維數據的比較。作為高維數據，未來可探討是否可用於機器學習的方面進行機構合成或是其它領域的應用（例如輪廓辨識），以便能夠加入更多約束資訊。

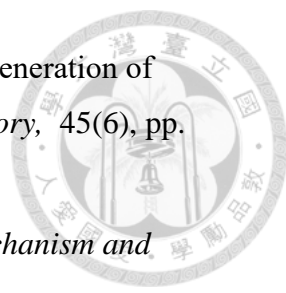
參考文獻

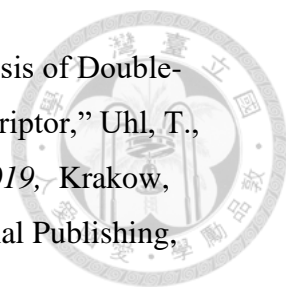



- [1] Chablat, D. and Angeles, J., “The Computation of All 4R Serial Spherical Wrists with an Isotropic Architecture,” *ASME Journal of Mechanical Design*, 125(2), pp. 275-280, 2003.
- [2] Lum, M. J. H., Rosen, J., Sinanan, M. N., and Hannaford, B., “Optimization of a Spherical Mechanism for a Minimally Invasive Surgical Robot: Theoretical and Experimental Approaches,” *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 53(7), pp. 1440-1445, 2006.
- [3] Dvali, R. R. and Aleksishvili, N. I., “Design for an Automobile Steering Gear as a Spherical Four-Bar Linkage,” *Journal of Mechanisms*, 6(2), pp. 167-175, 1971.
- [4] Chiang, C.-H., “Synthesis of Spherical Four-Bar Path Generators,” *Mechanism and Machine Theory*, 21(2), pp. 135-143, 1986.
- [5] Morgan, A. P. and Wampler, C. W., Jr., “Solving a Planar Four-Bar Design Problem Using Continuation,” *ASME Journal of Mechanical Design*, 112(4), pp. 544-550, 1990.
- [6] Wampler, C. W., Morgan, A. P., and Sommese, A. J., “Complete Solution of the Nine-Point Path Synthesis Problem for Four-Bar Linkages,” *ASME Journal of Mechanical Design*, 114(1), pp. 153-159, 1992.
- [7] Lin, C.-C., “Complete Solution of the Five-Position Synthesis for Spherical Four-Bar Mechanisms,” *Journal of marine science and Technology*, 6(1), pp. 3, 1998.
- [8] Suixian, Y., Hong, Y., and Tian, G. Y., “Optimal Selection of Precision Points for Function Synthesis of Spherical 4R Linkage,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 223(9), pp. 2183-2189, 2009.
- [9] Lee, W.-T., Russell, K., Shen, Q., and Sodhi, R. S., “On Adjustable Spherical Four-Bar Motion Generation for Expanded Prescribed Positions,” *Mechanism and Machine Theory*, 44(1), pp. 247-254, 2009.
- [10] Yang, M., Kpalma, K., and Ronsin, J., “A Survey of Shape Feature Extraction Techniques,” in *Pattern Recognition Techniques, Technology and Applications*, Yin, P.-Y. Ed., InTech. Rijeka, Croatia. Chapter 3, pp. 43-90, 2008.

- 
- [11] Thompson, B. S., “A Survey of Analytical Path-Synthesis Techniques for Plane Mechanisms,” *Mechanism and Machine Theory*, 10(2-3), pp. 197-205, 1975.
- [12] Lee, W.-T. and Russell, K., “Developments in Quantitative Dimensional Synthesis (1970-Present): Four-Bar Path and Function Generation,” *Inverse Problems in Science and Engineering*, 26(9), pp. 1280-1304, 2018.
- [13] Zahn, C. T. and Roskies, R. Z., “Fourier Descriptors for Plane Closed Curves,” *IEEE Transactions on Computers*, C-21(3), pp. 269-281, 1972.
- [14] Freudenstein, F., “Harmonic Analysis of Crank-and-Rocker Mechanisms with Application,” *ASME Journal of Applied Mechanics*, 26(4), pp. 673-675, 1959.
- [15] Funabashi, H. and Freudenstein, F., “Performance Criteria for High-Speed Crank-and-Rocker Linkages—Part I: Plane Crank-and-Rocker Linkages,” *ASME Journal of Mechanical Design*, 101(1), pp. 20-25, 1979.
- [16] Farhang, K., Midha, A., and Bajaj, A. K., “Synthesis of Harmonic Motion Generating Linkages—Part I: Function Generation,” *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 110(1), pp. 16-21, 1988.
- [17] Farhang, K., Midha, A., and Hall, A. S., Jr., “Synthesis of Harmonic Motion Generating Linkages—Part II: Path and Motion Generation,” *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 110(1), pp. 22-27, 1988.
- [18] McGarva, J. and Mullineux, G., “Harmonic Representation of Closed Curves,” *Applied Mathematical Modelling*, 17(4), pp. 213-218, 1993.
- [19] McGarva, J. R., “Rapid Search and Selection of Path Generating Mechanisms from a Library,” *Mechanism and Machine Theory*, 29(2), pp. 223-235, 1994.
- [20] Ullah, I. and Kota, S., “Optimal Synthesis of Mechanisms for Path Generation Using Fourier Descriptors and Global Search Methods,” *ASME Journal of Mechanical Design*, 119(4), pp. 504-510, 1997.
- [21] Wu, J., Ge, Q. J., and Gao, F., “An Efficient Method for Synthesizing Crank-Rocker Mechanisms for Generating Low Harmonic Curves,” *Volume 7: 33rd Mechanisms and Robotics Conference, Parts A and B. ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Aug 30-Sep 2, San Diego, California, USA. pp. 531-538, 2009.

- 
- [22] Li, X.-Y., Wu, J., and Ge, Q. J., “A Fourier Descriptor-Based Approach to Design Space Decomposition for Planar Motion Approximation,” *ASME Journal of Mechanisms and Robotics*, 8(6): 064501, 2016.
- [23] Uesaka, Y., “A New Fourier Descriptor Applicable to Open Curves,” *Electronics and Communications in Japan (Part I: Communications)*, 67(8), pp. 1-10, 1984.
- [24] Ding, J. J., Chao, W. L., Huang, J. D., and Kuo, C. J., “Asymmetric Fourier Descriptor of Non-Closed Segments,” *2010 IEEE International Conference on Image Processing*, Sep 26-29, Hong Kong. IEEE. pp. 1613-1616, 2010.
- [25] Wu, J., Ge, Q. J., Gao, F., and Guo, W. Z., “On the Extension of a Fourier Descriptor Based Method for Planar Four-Bar Linkage Synthesis for Generation of Open and Closed Paths,” *ASME Journal of Mechanisms and Robotics*, 3(3): 031002, 2011.
- [26] Davis, P. J., “Least Square Approximation,” in *Interpolation and Approximation*, 1 ed. Courier Corporation. New York. Chapter 8, pp. 158-200, 1975.
- [27] Sharma, S., Purwar, A., and Jeffrey Ge, Q., “An Optimal Parametrization Scheme for Path Generation Using Fourier Descriptors for Four-Bar Mechanism Synthesis,” *ASME Journal of Computing and Information Science in Engineering*, 19(1): 014501, 2019.
- [28] Khan, N., Ullah, I., and Al-Grafi, M., “Dimensional Synthesis of Mechanical Linkages Using Artificial Neural Networks and Fourier Descriptors,” *Mechanical Sciences*, 6(1), pp. 29-34, 2015.
- [29] Deshpande, S. and Purwar, A., “A Machine Learning Approach to Kinematic Synthesis of Defect-Free Planar Four-Bar Linkages,” *ASME Journal of Computing and Information Science in Engineering*, 19(2): 021004, 2019.
- [30] Yu, S.-C., Chang, Y., and Lee, J.-J., “A Generative Model for Path Synthesis of Four-Bar Linkages Via Uniform Sampling Dataset,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 237(4), pp. 811-829, 2023.
- [31] Sun, J.-W. and Chu, J.-K., “Fourier Series Representation of the Coupler Curves of Spatial Linkages,” *Applied Mathematical Modelling*, 34(5), pp. 1396-1403, 2010.

- 
- [32] Chu, J.-K. and Sun, J.-W., “Numerical Atlas Method for Path Generation of Spherical Four-Bar Mechanism,” *Mechanism and Machine Theory*, 45(6), pp. 867-879, 2010.
- [33] Mullineux, G., “Atlas of Spherical Four-Bar Mechanisms,” *Mechanism and Machine Theory*, 46(11), pp. 1811-1823, 2011.
- [34] Lestrel, P. E., *Fourier Descriptors and Their Applications in Biology*. Cambridge University Press, New York, pp. 466, 1997.
- [35] Kuhl, F. P. and Giardina, C. R., “Elliptic Fourier Features of a Closed Contour,” *Computer Graphics and Image Processing*, 18(3), pp. 236-258, 1982.
- [36] Lin, C.-S. and Hwang, C.-L., “New Forms of Shape Invariants from Elliptic Fourier Descriptors,” *Pattern Recognition*, 20(5), pp. 535-545, 1987.
- [37] Taxt, T. and Bjerde, K. W., “Classification of Handwritten Vector Symbols Using Elliptic Fourier Descriptors,” *Proceedings of the 12th IAPR International Conference on Pattern Recognition, Vol. 3 - Conference C: Signal Processing (Cat. No.94CH3440-5)*, Oct 9-13, Jerusalem, Israel. 2, pp. 123-128, 1994.
- [38] Costa, C. *et al.*, “Quantitative Evaluation of Tarocco Sweet Orange Fruit Shape Using Optoelectronic Elliptic Fourier Based Analysis,” *Postharvest Biology and Technology*, 54(1), pp. 38-47, 2009.
- [39] Godefroy, J. E., Bornert, F., Gros, C. I., and Constantinesco, A., “Elliptical Fourier Descriptors for Contours in Three Dimensions: A New Tool for Morphometrical Analysis in Biology,” *Comptes Rendus - Biologies*, 335(3), pp. 205-213, 2012.
- [40] Crampton, J. S., “Elliptic Fourier Shape-Analysis of Fossil Bivalves - Some Practical Considerations,” *Lethaia*, 28(2), pp. 179-186, 1995.
- [41] Niño-Sandoval, T. C., Morantes Ariza, C. F., Infante-Contreras, C., and Vasconcelos, B. C., “Evaluation of Natural Mandibular Shape Asymmetry: An Approach by Using Elliptical Fourier Analysis,” *Dentomaxillofacial Radiology*, 47(6): 20170345, 2018.
- [42] Caple, J., Byrd, J., and Stephan, C. N., “Elliptical Fourier Analysis: Fundamentals, Applications, and Value for Forensic Anthropology,” *International Journal of Legal Medicine*, 131(6), pp. 1675-1690, 2017.

- 
- [43] Hsieh, C.-Y., Shieh, W.-B., Chen, C.-K., and Lee, J.-J., “Synthesis of Double-Rocker Mechanisms for Motion Generation Using Fourier Descriptor,” Uhl, T., *Advances in Mechanism and Machine Science. IFToMM WC 2019*, Krakow, Poland. *Mechanisms and Machine Science*, Springer International Publishing, Cham. 73, pp. 1285-1294, 2019.
- [44] Starosta, R., “Application of Genetic Algorithm and Fourier Coefficients (Ga-Fc) in Mechanism Synthesis,” *Journal of theoretical and applied mechanics*, 46(2), pp. 395-411, 2008.
- [45] Shiakolas, P. S., Koladiya, D., and Kebrle, J., “On the Optimum Synthesis of Four-Bar Linkages Using Differential Evolution and the Geometric Centroid of Precision Positions,” *Inverse Problems in Engineering*, 10(6), pp. 485-502, 2002.
- [46] Kang, Y.-H., Lin, J.-W., and You, W.-C., “Comparative Study on the Synthesis of Path-Generating Four-Bar Linkages Using Metaheuristic Optimization Algorithms,” *Applied Sciences-Basel*, 12(15), pp. 7368, 2022.
- [47] Chang, Y., Chang, J.-L., and Lee, J.-J., “Atlas-Based Path Synthesis of Planar Four-Bar Linkages Using Elliptical Fourier Descriptors,” Okada, M., *Advances in Mechanism and Machine Science. IFToMM WC 2023*, Shinjuku, Tokyo, Japan. *Mechanisms and Machine Science*, Springer Nature Switzerland, Cham. 149, pp. 198-207, 2024.
- [48] Chang, Y., Chang, J.-L., and Lee, J.-J., “Path Synthesis of Planar Four-Bar Linkages for Closed and Open Curves Using Elliptical Fourier Descriptors,” *Journal of Mechanical Science and Technology*, 38(5), pp. 2579-2590, 2024.
- [49] Davis, J. C. and Sampson, R. J., *Statistics and Data Analysis in Geology*. John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [50] Dutt, A. and Rokhlin, V., “Fast Fourier Transforms for Nonequispaced Data,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, 14(6), pp. 1368-1393, 1993.
- [51] Chiang, C.-H., *Kinematics of Spherical Mechanism*. McGraw-Hill Int’l Enterprises Inc, Taiwan, 1986.
- [52] Tsai, L.-W., *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. John Wiley & Sons, New York, 1999.

- 
- [53] Chiang, C.-H., “On the Classification of Spherical Four-Bar Linkages,” *Mechanism and Machine Theory*, 19(3), pp. 283-287, 1984.
- [54] Storn, R. and Price, K., “Differential Evolution - a Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces,” *Journal of Global Optimization*, 11(4), pp. 341-359, 1997.
- [55] Vermetten, D., van Stein, B., Kononova, A. V., and Caraffini, F., “Analysis of Structural Bias in Differential Evolution Configurations,” in *Differential Evolution: From Theory to Practice*, Kumar, B. V., Oliva, D., and Suganthan, P. N. Eds., (Studies in Computational Intelligence, no. 1009) Springer Nature Singapore. Singapore. Chapter 1, pp. 1-22, 2022.
- [56] Bernstein, D. J., “Chacha, a Variant of Salsa20,” *Workshop Record of SASC*, Feb 13-14, Lausanne, Switzerland. Citeseer. 8(1), pp. 3-5, 2008.
- [57] Yu, H.-Y., Tang, D.-W., and Wang, Z.-X., “Study on a New Computer Path Synthesis Method of a Four-Bar Linkage,” *Mechanism and Machine Theory*, 42(4), pp. 383-392, 2007.
- [58] Zhang, T., Stackhouse, P. W., Macpherson, B., and Mikovitz, J. C., “A Solar Azimuth Formula That Renders Circumstantial Treatment Unnecessary without Compromising Mathematical Rigor: Mathematical Setup, Application and Extension of a Formula Based on the Subsolar Point and Atan2 Function,” *Renewable Energy*, 172, pp. 1333-1340, 2021.
- [59] McDonald, M. and Agrawal, S. K., “Design of a Bio-Inspired Spherical Four-Bar Mechanism for Flapping-Wing Micro Air-Vehicle Applications,” *ASME Journal of Mechanisms and Robotics*, 2(2): 021012, 2010.
- [60] Sun, J.-W., Liu, W.-R., and Chu, J.-K., “Synthesis of Spherical Four-Bar Linkage for Open Path Generation Using Wavelet Feature Parameters,” *Mechanism and Machine Theory*, 128, pp. 33-46, 2018.
- [61] Chang, Y. “Four-Bar.” <https://kmolyuan.github.io/four-bar-rs/> (Accessed: May 10, 2024), 2021.

附錄 I 離散點坐標近似至 EFD 係數推導

EFD 係數可以透過文獻[3535]的傅立葉級數推導得出，以 x 軸為例，表示為

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (\text{I-1})$$

其中常數項與兩個係數為

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) dt \quad (\text{I-2})$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos nt dt \quad (\text{I-3})$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin nt dt \quad (\text{I-4})$$

這裡的總週期設定為 1，常數項 A_0 視為 x 軸的平均值，即圖形的形心；另一個隱藏的常數項 B_0 則恆等於 0。而我們利用 $x(t)$ 函數的片段線性和連續性，可對時間參數 t 微分，並且結果也會是傅立葉級數，表示成

$$\dot{x}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt) \quad (\text{I-5})$$

其中兩個微分後的係數 α 和 β 為

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \dot{x}(t) \cos nt dt \quad (\text{I-6})$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \dot{x}(t) \sin nt dt \quad (\text{I-7})$$

接著，需將週期替換成離散點的點數 K ，且各點也需根據總行程計算出各自的時間參數。離散化後以第 $p+1$ 點和第 p 點的距離和時間參數表示。兩個微分後的係數會變成

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{K-1} \frac{\Delta x_p}{\Delta L_p} \int_{t_p}^{t_{p+1}} \cos nt dt \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{K-1} \frac{\Delta x_p}{\Delta L_p} (\sin nt_{p+1} - \sin nt_p) \end{aligned} \quad (\text{I-8})$$

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{K-1} \frac{\Delta x_p}{\Delta L_p} \int_{t_p}^{t_{p+1}} \sin nt dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{K-1} \frac{\Delta x_p}{\Delta L_p} (\cos nt_{p+1} - \cos nt_p) \end{aligned} \quad (\text{I-9})$$

並且，從微分的定義也可得到

$$\dot{x}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -na_n \sin nt + nb_n \cos nt \quad (\text{I-10})$$

接著可利用上面兩式交叉求解出離散點轉為係數的公式，也就是式(2-4)的係數近似公式：

$$a_n = \frac{1}{n^2\pi} \sum_{p=1}^{K-1} \frac{\Delta x_p}{\Delta L_p} (\cos nt_{p+1} - \cos nt_p) \quad (\text{I-11})$$

$$b_n = \frac{1}{n^2\pi} \sum_{p=1}^{K-1} \frac{\Delta x_p}{\Delta L_p} (\sin nt_{p+1} - \sin nt_p) \quad (\text{I-12})$$

最後常數項係數稱為傅立葉級數的直流分量 (DC Component)。使用 FD 方法時，常數項被定義成零，因此圖形的平移量直接包含在係數中。而 EFD 方法是從常數項的定義 $A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) dt$ 當成圖形的形心坐標值，離散化時使用類似黎曼和 (Riemann Sum) 的作法求取 $x(t)$ 函數的積分。因為 $x(t_p)$ 的每個線段長度不同，文獻[35]對每段長度為 ΔL_p 的線段加權，來求取最近似的連續函數平均值。這種計算方式比較複雜，但是會比單純計算平均坐標更準確。最後展開推導得出式 (2-8) 的結果：

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^{K-1} \frac{\Delta x_p}{2\Delta L_p} (t_{p+1}^2 - t_p^2) + \left(\sum_{i=1}^p \Delta x_i - \frac{\Delta x_p}{\Delta L_p} \sum_{i=1}^p \Delta L_i \right) (t_{p+1} - t_p) \quad (\text{I-13})$$

附錄 II 往復開放曲線簡化 EFD 係數證明

圖 2-10 顯示了在開放曲線上使用的往復延伸模型，將 K 點增加到 $2K - 1$ 點。求和循環也從 $K - 1$ 增加到 $2K - 2$ ，前面乘了兩倍週期。在圖形相同、順序相反時，正弦項係數 b 、 d 、 f 會變成負數 $-b$ 、 $-d$ 、 $-f$ ，這是所有橢圓局部坐標系一起逆轉的結果。下面列出往、復兩條曲線相接後的結果：餘弦項係數 (a_n 、 c_n 、 e_n) 和正弦項係數 (b_n 、 d_n 、 f_n) 之間的差異在於，餘弦部分在後半部變為反轉，但正弦部分則沒有。以 x 分量為例：

$$\begin{aligned}
 a_{n,\text{open}} &= \frac{2}{n^2\pi} \left(\sum_{p=1}^{K-1} \frac{\Delta x_p}{\Delta L_p} \left(\cos \frac{nt_{p+1}}{2} - \cos \frac{nt_p}{2} \right) + \sum_{p=K}^{2K-2} \frac{\Delta x_p}{\Delta L_p} \left(\cos \frac{nt_{p+1}}{2} - \cos \frac{nt_p}{2} \right) \right) \\
 &= \frac{2}{n^2\pi} \sum_{p=1}^{K-1} \left(\frac{\Delta x_p}{\Delta L_p} \left(\cos \frac{nt_{p+1}}{2} - \cos \frac{nt_p}{2} \right) - \frac{\Delta x_p}{\Delta L_p} \left(-\cos \frac{nt_{p+1}}{2} + \cos \frac{nt_p}{2} \right) \right) \\
 &= \frac{4}{n^2\pi} \sum_{p=1}^{K-1} \frac{\Delta x_p}{\Delta L_p} \left(\cos \frac{nt_{p+1}}{2} - \cos \frac{nt_p}{2} \right) \quad (\text{II-1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{n,\text{open}} &= \frac{2}{n^2\pi} \left(\sum_{p=1}^{K-1} \frac{\Delta x_p}{\Delta L_p} \left(\sin \frac{nt_{p+1}}{2} - \sin \frac{nt_p}{2} \right) + \sum_{p=K}^{2K-2} \frac{\Delta x_p}{\Delta L_p} \left(\sin \frac{nt_{p+1}}{2} - \sin \frac{nt_p}{2} \right) \right) \\
 &= \frac{2}{n^2\pi} \sum_{p=1}^{K-1} \left(\frac{\Delta x_p}{\Delta L_p} \left(\sin \frac{nt_{p+1}}{2} - \sin \frac{nt_p}{2} \right) - \frac{\Delta x_p}{\Delta L_p} \left(\sin \frac{nt_{p+1}}{2} - \sin \frac{nt_p}{2} \right) \right) \\
 &= 0 \quad (\text{II-2})
 \end{aligned}$$

其中 $a_{n,\text{open}}$ 和 $b_{n,\text{open}}$ 表示往復曲線模型中餘弦項和正弦項係數，正弦項之總和最後互相抵銷。最後可導出式(2-50)：

$$\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \\ e_n & f_n \end{bmatrix}_{\text{open}} = \begin{bmatrix} \frac{4}{n^2\pi} \sum_{p=1}^{K-1} \frac{\Delta x_p}{\Delta L_p} \left(\cos \frac{nt_{p+1}}{2} - \cos \frac{nt_p}{2} \right) & 0 \\ \frac{4}{n^2\pi} \sum_{p=1}^{K-1} \frac{\Delta y_p}{\Delta L_p} \left(\cos \frac{nt_{p+1}}{2} - \cos \frac{nt_p}{2} \right) & 0 \\ \frac{4}{n^2\pi} \sum_{p=1}^{K-1} \frac{\Delta z_p}{\Delta L_p} \left(\cos \frac{nt_{p+1}}{2} - \cos \frac{nt_p}{2} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-3})$$

其中正弦項係數等於 0，以及正弦項向量 \mathbf{v}_n 為零向量。另外，由於正弦項係數沒有正負號分別，因此往復曲線的反向形狀仍等於自身，可和上述順序相反的 EFD 特性得證。