

國立臺灣大學工學院機械工程學系



博士論文

Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Doctoral Dissertation

應用先進光學量測技術探討板結構及避震系統的即時動態實
驗結果和其工業應用

Application of advanced optical measurement technology for the
real-time dynamic experimental results of plate structure and
shock absorber system and its industrial application

何祥瑋

Hsiang-Wei Ho

指導教授：馬劍清 博士、覺文郁 博士

Advisor : Chien-Ching Ma, Ph.D. 、 Wen-Yuh Jywe, Ph.D.

中華民國 114 年 6 月

June , 2025

口試委員會審定書



國立臺灣大學博士學位論文 口試委員會審定書 應用先進光學量測技術探討板結構及避震系統的即時 動態實驗結果和其工業應用

Application of advanced optical measurement
technology for the real-time dynamic experimental
results of plate structure and shock absorber system and
its industrial application

本論文係何祥璋君 (D03522021) 在國立臺灣大學機械
工程學系完成之博士學位論文，於民國 110 年 7 月 28 日承
下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

馬劍清 (指導教授)

馬劍清

趙振綱

趙振綱

單秋成

單秋成

劉昭華

劉昭華

尹慶中

尹慶中

系主任 林沛群

林沛群

謝辭



本論文能夠順利完成，首先感謝馬劍清教授悉心指導，提供豐富的研究資源，馬老師全心投入研究精神、細膩謹慎崇高學術思維處事態度都是我們終身學習楷模，感謝覺文郁教授惠予學生在求學階段的教導與鼓勵。

感謝蒞臨指導論文的口試委員們，趙振綱教授、單秋成教授、劉昭華教授和尹慶中教授，特地撥冗與會並提供寶貴意見，讓本論文更加詳盡與完善，在此對所有師長們表達最誠摯的感謝與敬意。

感謝敬源教授、亦莊教授及展誼教授協助論文研究上的指導與討論，在此希望諸位教授在教職生涯發展順利，感謝破壞實驗室這個大家庭的所有成員及學弟妹。

最後我要感謝父母，感謝太太麗芳支持讓我無後顧之憂的完成學業。這份論文完成歸功於每一位關心我、幫助我的人，在此致上我内心最大感激，謝謝你們。

何祥瑋 謹致

2025年5月20日

摘要

本篇論文研究目的，主要應用實驗室所開發精密量測技術，包括電子斑點干涉數(ESPI)、光纖光柵感測器(FBG)以及數位影像相關法(DIC)，針對學術研究板結構系統的動態特性，與工業應用所研究懸吊系統避震器的動態特性及 Micro LED 瑕疵檢測進行深入研究探討，突顯本論文所應用量測技術與傳統量測方法，具有優異且精確的量測結果。

理論分析上，對於厚度呈現階梯變化之固定邊界圓板，運用模態展開法數學方式，將自由振動理論分析所得到的模態形狀，視為圓板暫態位移的基底函數，採用模態形狀正交特性，可分析圓板承載動態外力下所生成暫態的波傳行為。藉由全域光學系統電子斑點干涉術(AF-ESPI) 量測實驗方法，來量測圓板共振模態與頻率，並比較有限元素數值計算、實驗的量測與理論上解析等結果。另一實驗上，也利用壓電薄膜感測器 PVDF 來量測鋼珠落擊圓板的波源歷時，探討動態外負載與在不同觀察點位置，對於圓板暫態行為之影響，並將波源歷時代入理論的解析解和進行有限元素模擬，並比較實驗的量測結果。

在量測壓電方板實驗研究上，主要參照吳亦莊(107)博士論文依據 Mindlin 理論推導，應用於分析全自由邊界壓電長方板，分別在彎曲振動與伸展振動主導動態特性的共振頻率及模態分析結果，藉由全域光學系統電子斑點干涉術(AF-ESPI) 實驗來量測共振模態與頻率，並進行有限元素軟體分析壓電板振動時產生的位移場、應力場與電場等模擬結果，進一步探討彼此間關聯性，作為激振壓電板有效方法之參考依據，成功驗證理論分析與實際工程應用具有高度相關性。

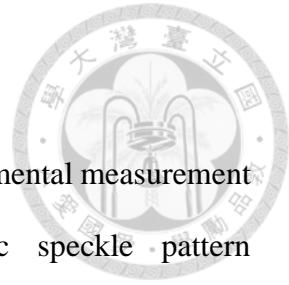
本文在實驗部分也著重應用於工業上相關問題的探討，將光纖光柵感測器黏貼於避震器表面進行多點量測，並利用 MATLAB 軟體所開發的即時訊號分析系統，透過分析計算即時將溫升與熱應變進行解耦合，直接獲得避震器試驗過程中溫升及熱變形歷程，同時與熱電偶與熱像儀進行比較，進而分析得到避震器表面材料的熱膨脹係數，藉由量測避震器各區段熱變形後，可得到避震器作動時整體伸長

量，並經由頻譜分析得到避震器作動頻率。本文也將光纖光柵感測器黏貼在彈簧表面量測壓縮彈簧變形量，也藉由 MATLAB 程式語言開發即時量測系統，針對彈簧系統在各種不同頻率作動下動態行為進行精密且多點變形量測，並以交互相關的方式解析彈簧壓縮過程產生交變應力訊號差異性，可預先診測彈簧系統是否達到損壞或疲勞情況。

本文應用精密量測方法係數位影像相關法(DIC)，應用於量測跨領域與跨尺度工程問題，藉由這個量測技術所量到的結果，與 MTS 萬能試驗機輸出負載及位移計算彈簧係數進行分析與驗證彈簧係數正確性。也利用數位影像相關法(DIC)進行 Micro LED 良品與瑕疵品影像辨視檢測與分類，驗證實驗中所開發量測系統可靠性與量測優勢。

關鍵字：

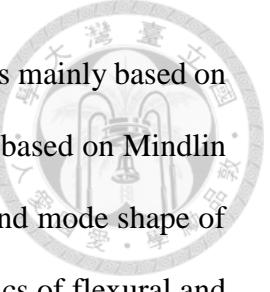
電子斑點干涉數、光纖光柵感測器、共振頻率、有限元素、模態展開法、數位影像相關法、振動、暫態、微發光二極體



Abstract

The research purpose of this thesis is mainly to apply the experimental measurement technology developed in the laboratory, including electronic speckle pattern interferometry (ESPI)、fiber grating sensor (FBG) and digital image correlation (DIC) for subjects investigated in this study. The dynamic characteristics of the plate system in academic research, the dynamic characteristics of the suspension system shock absorbers of the industrial application research and the defect detection in Micro LED will be analyzed and discussed. The experimental result measurement by the proposed technology is compared with the traditional method and excellent performance is shown in this thesis.

This theoretical analysis combined theoretical methods and experimental measurements to investigate the transient behavior of a fixed-boundary circular plate with varying thickness subjected to impact loading. The dynamic displacement, defined as a product of time and spatial functions (mode shapes), formed the basis of the theoretical derivation. The superposition method determined the mode shapes and resonant frequencies of free vibrations, while the orthogonality of the mode functions solved the time function. In the experimental phase, Amplitude-fluctuation electronic speckle pattern interferometry (AF-ESPI) measured resonant frequencies and precise mode shapes of the circular plate. Comparisons between the theoretical analysis, the finite element method, and experimental measurements validated the accuracy of the theoretical analysis. Experimental PVDF sensors recorded the time history of the external force, which was incorporated into the theoretical analysis to determine transient responses, including displacement and strain.



The experimental research of the piezoelectric plate in this thesis is mainly based on the theoretical derivation of Wu Yi-Chuang(107) doctoral dissertation based on Mindlin theory. This technique is applied to analyze the resonance frequency and mode shape of the full-free piezoelectric rectangular plate in the dynamic characteristics of flexural and extensional dominated vibration. Theoretical analysis results, the electronic speckle interferometry (AF-ESPI) experimental measurement of to measure the resonance frequency and modal shape, and the finite element software analysis were presented when the piezoelectric plate vibrates in resonance. To further explore the correlation between each other, as a reference basis for effective methods of exciting piezoelectric plates, this research verify that theoretical analysis is highly correlated with practical engineering applications.

This thesis also applies digital image correlation method to the precision measurement of multi-scale and multi-field engineering problems. The measurement results of the digital image correlation and the output load and displacement datas from MTS are used to calculate spring coefficient. According to the DIC measurement results, the correctness of the spring constant is verified. Digital image correlation (DIC) are also used to identify and classify the defect Micro LED.

Keywords :

AF-ESPI、Fiber Bragg Grating、resonant frequencies、finite element method、normal mode expansion、Digital Image Correlation、Vibration、transient、Micro LED

目次



口試委員會審定書	i
謝辭	ii
摘要	iii
Abstract	v
目次	vii
圖次	xii
表次	xxiv
第一章 緒論	1
1.1 研究動機與目的	1
1.2 文獻回顧	3
1.3 內容簡介	14
第二章 實驗設備與量測原理介紹	18
2.1 電子斑點干涉術	18
2.1.1 面外振動量測	19
2.1.2 面內振動量測	21
2.2 阻抗分析原理與儀器介紹	23
2.2.1 阻抗分析儀的基本原理	23
2.2.2 阻抗分析儀的實驗設備	24
2.3 壓電薄膜 PVDF 量測系統	24
2.4 光纖光柵基本理論與製作方法	27
2.4.1 光纖光學基本原理	27
2.4.2 光纖光柵基本原理	31
2.4.3 光彈效應與熱光效應	32
2.4.4 共振波長飄移理論	36
2.4.5 光纖光柵類型	41

2.4.6 光纖光柵的製作方法	43
2.5 光纖光柵量測技術與實驗設備	46
2.5.1 布拉格光纖光柵量測系統	46
2.5.2 光纖光柵量測系統所需之相關儀器	50
第三章 厚度階梯變化圓板承受動態負載理論分析與實驗量測	84
3.1 厚度階梯變化圓板受動態負載之動態分析	84
3.1.1 厚度階梯變化圓板自由振動分析	85
3.1.2 理論計算、實驗量測與有限元素法之比較	92
3.2 厚度階梯變化圓板暫態分析理論推導	95
3.2.1 圓板暫態分析理論推導	95
3.2.2 實驗架設說明	99
3.2.3 實驗結果(時間域比較)	101
第四章 應用 Mindlin 板理論於矩形壓電厚板振動分析與實驗量測	120
4.1 線性壓電理論與壓電矩形板彎曲、伸展振動方程式	120
4.2 實驗測量、數值計算及理論分析結果	130
4.2.1 壓電矩形板理論與模擬共振頻率之討論	131
4.2.2 壓電矩形板理論與有限元素分析位移總量場	131
4.2.3 壓電矩形板理論與有限元素分析應力場與電場	132
4.2.4 壓電矩形板實驗與理論分析共振模態	133
第五章 避震器系統之溫升、變形及振動量測	161
5.1 光纖光柵分析流程	161
5.1.1 共振波長飄移理論	162
5.1.2 光纖光柵感測器應用於應變量測	162
5.1.3 光纖光柵感測器應用於溫升量測	163
5.1.4 待測物溫升與熱應變解耦合	163
5.1.5 雙光纖法(裸光纖與套管光纖)	163

5.1.6 可利用光纖光柵進行量測問題	165
5.2 第一款避震器系統(活塞、彈簧)實驗架設說明	166
5.3 第一款避震器系統(活塞、彈簧) 以 3Hz 來回 25mm 作動量測分析(實驗一)	166
5.3.1 避震器活塞部分以 3Hz 作動下之溫升、熱應變與熱膨脹係數實驗結果	166
5.3.2 即時分析程式的畫面呈現	167
5.3.3 避震器系統(活塞、彈簧)3Hz 作動下量測結果	168
5.3.4 避震器活塞外桶熱像儀量測結果	168
5.4 第一款避震器系統(活塞、彈簧)以 5Hz 來回 25mm 作動量測說明(實驗二)	169
5.5 第一款避震器以 5Hz 來回 25mm 作動之實驗結果	169
5.5.1 活塞部分的溫升、熱應變與熱膨脹係數	169
5.5.2 夾具部分的溫升、熱應變與熱膨脹係數	170
5.5.3 即時分析程式的畫面呈現	170
5.5.4 避震器活塞、彈簧部分 5Hz 作動下的量測結果	170
5.5.5 热像儀量測結果	171
5.6 第一款避震器系統以 7Hz 來回 25mm 作動實驗量測結果(實驗三)	172
5.6.1 活塞部分的溫升、熱應變與熱膨脹係數	172
5.6.2 夾具部分的溫升、熱應變與熱膨脹係數	172
5.6.3 即時分析程式的畫面呈現	173
5.6.4 避震器活塞、彈簧部分 7Hz 作動下的量測結果	173
5.6.5 热像儀量測結果	174
5.6.6 第一款避震器系統實驗結論	174
5.7 第二款避震器系統(僅活塞部分)實驗架設說明	175
5.8 第二款避震器系統(僅活塞)以 3Hz 來回 25mm 作動之說明(實驗四)	175
5.8.1 即時分析程式的畫面呈現	176
5.8.2 热像儀量測結果	176

5.8.3 第二款避震器系統(僅活塞) 以 5Hz 來回 25mm 作動之說明(實驗五)	176
5.8.4 即時分析程式的畫面呈現	177
5.8.5 热像儀量測結果	177
5.8.6 第二款避震器系統的實驗結論	178
第六章 彈簧的動態量測與遠端監控系統	208
6.1 布拉格光纖光柵實驗的訊號解析流程	209
6.1.1 布拉格光纖光柵共振波長飄移理論	209
6.1.2 光纖光柵感測器於應變與變形量量測	210
6.2 數位影像相關法基本原理與實驗儀器介紹	210
6.2.1 數位影像相關法基本原理	210
6.2.2 數位影像相關法數據分析之重要參數	212
6.2.3 正規化交叉相關法	214
6.2.4 相關係數極值搜尋演算法	215
6.2.5 數位影像相關法實驗操作流程	217
6.2.6 實驗儀器介紹	218
6.3 實驗架設	219
6.4 光纖光柵與數位影像相關法實驗結果分析	220
6.4.1 試驗機設定 5Hz 往復壓縮彈簧	220
6.4.2 試驗機設定 3Hz 往復壓縮彈簧	222
6.4.3 試驗機設定 1Hz 往復壓縮彈簧	224
6.5 光纖光柵感測器與數位影像相關法量測彈簧變形實驗結論	227
6.5.1 光纖光柵感測器量測彈簧變形結論	227
6.5.2 數位影像相關法量測彈簧變形結論	228
6.6 即時量測系統與遠端警戒系統之串聯	228
6.6.1 遠端警戒系統	229
6.6.2 雲端監看系統 (Cloud Monitoring System , CMS)	230

6.6.3 光纖即時量測資料輸出系統	230
6.6.4 警戒簡訊發送/雲端畫面顯示	230
第七章 應用數位影像相關法 Micro LED 瑕疵檢測	270
7.1 數位影像相關法 Micro LED 瑕疵檢測	270
7.1.1 Micro LED 概述	270
7.1.2 數位影像相關法	271
7.1.3 Micro LED 良品與瑕疵品樣態	272
7.2 Micro LED 影像瑕疵檢測標準樣板特徵搜尋與檢測結果	273
7.2.1 Micro LED 影像瑕疵檢測標準樣板特徵搜尋	273
7.2.2 Micro LED 影像檢測結果	273
第八章 結論與未來展望	297
8.1 本文成果	297
8.2 未來展望	301
參考文獻	303

圖次

圖 2.1 AF-ESPI 面外量測系統之光路與系統架設圖	57
圖 2.2 AF-ESPI 面內量測系統之光路與系統架設圖	57
圖 2.3 對應光強度的零階 Bessel 函數量值大小與面外位移之關係.....	58
圖 2.4 壓電體在特定共振頻率範圍內的頻率阻抗曲線	58
圖 2.5 利用阻抗分析量測壓電材料共振頻率的實驗架構	59
圖 2.6 PVDF 薄膜感測器黏貼於待測物表面上.....	59
圖 2.7 PVDF 感測器連結電荷放大器之電路.....	60
圖 2.8 光纖構造示意圖	60
圖 2.9 司乃爾定律概念圖	61
圖 2.10 步階式折射率分佈光纖導光原理示意圖	61
圖 2.11 光柵原理示意圖	62
圖 2.12 光纖座標軸定義	62
圖 2.13 平面應力座標軸定義	63
圖 2.14 短週期光纖光柵原理示意圖	63
圖 2.15 短週期光纖光柵模態耦合示意圖	64
圖 2.16 長週期光纖光柵原理示意圖	64
圖 2.17 長週期光纖光柵模態耦合示意圖	65
圖 2.18 相位光罩法原理示意圖	65
圖 2.19 光電轉換架設(尚無暫態量測之能力)示意圖	66
圖 2.20 布拉格光纖光柵之穿透與反射光譜	66
圖 2.21 能量調變法之光纖光柵動態量測系統示意圖	67
圖 2.22 能量調變之光譜面積示意圖	67
圖 2.23 能量調變型之光電轉換架設(可量測暫態訊號)示意圖	68
圖 2.24 分波多工器搭配能量調變法實驗架設示意圖	68
圖 2.25 分波多工器之工作原理示意圖	69

圖 2.26 單光柵光纖配合波長解調器(I-MON)之架設圖	69
圖 2.27 分波多工器搭配 I-MON 256 USB 實驗架設示意圖	70
圖 2.28 多光柵光纖配合波長解調器(I-MON)之架設圖	70
圖 2.29 光耦合器搭配 I-MON 256 USB 實驗架設示意圖	71
圖 2.30 光耦合器之工作原理示意圖	71
圖 2.31 寬頻光源(適用於能量調變法量測系統)實體圖	72
圖 2.32 利用可調式位移平台所製作之濾波器實體圖	72
圖 2.33 光隔離器	73
圖 2.34 三埠口式光循環器實體圖	73
圖 2.35 分波多工器實體圖	74
圖 2.36 光耦合器實體圖(一分五)	74
圖 2.37 光電二極體實體圖	75
圖 2.38 可調式光源(適合搭配波長解調器 I-MON 使用)實體圖	75
圖 2.39 光譜分析儀實體圖	76
圖 2.40 波長解調器 I-MON 256 USB 實體圖	76
圖 2.41 I-MON 操作介面之參數設定面板	77
圖 2.42 扣除暗電流之 I-MON 光譜圖(雙段光柵)	77
圖 2.43 溫度擷取器	78
圖 2.44 熱電偶	78
圖 2.45 溫度控制器	79
圖 2.46 光纖位移計 MTI-2100 實體圖	79
圖 2.47 光纖探頭內部纖維分佈種類	80
圖 2.48 光纖位移計之探頭工作原理示意圖	80
圖 2.49 探針擷取強度與待測物距離關係(近)	81
圖 2.50 探針擷取強度與待測物距離關係(遠)	81
圖 2.51 光纖位移計之位移與電壓校正曲線	82

圖 2.52 TAS-200 系列紅外線熱像儀	82
圖 2.53 景興紅外線熱像分析系統介面	83
圖 3.1 階梯厚度圓板幾何示意圖	103
圖 3.2 壓電纖維黏貼於固定邊界圓板系統	104
圖 3.3 階梯厚度固定圓板有限元素(COMSOL)模擬示意圖	105
圖 3.4 黏貼 PVDF 薄膜感測器量測共振頻率實驗架設圖	105
圖 3.5 利用 PVDF 感測器擷取暫態訊號與頻域訊號	106
圖 3.6 壓電纖維複合材料 PFC 黏貼於固定邊界圓板之示意圖	107
圖 3.7 固定邊界圓板有限元素、理論分析與 ESPI 模態振形與共振頻率(第 1 至第 4 模態)	108
圖 3.8 固定邊界圓板有限元素、理論分析與 ESPI 模態振形與共振頻率(第 5 至第 8 模態)	109
圖 3.9 固定邊界圓板有限元素、理論分析與 ESPI 模態振形與共振頻率(第 9 至第 12 模態)	110
圖 3.10 圓板受動態外力作用示意圖	111
圖 3.11 鋼珠落擊上下表面黏貼 PVDF 圓板之實驗架設圖	111
圖 3.12 PVDF 黏貼於圓板上下表面位置圖	112
圖 3.13 黏貼於圓板上下表面 PVDF 輸出訊號示意圖	113
圖 3.14 第一組實驗圓板上 PVDF 薄膜與 FS 感測器位置	113
圖 3.15 第一組實驗鋼珠擊落 A 處截取之波源歷時訊號	114
圖 3.16 第一組實驗鋼珠擊落 A 處，B 處之理論、有限元素及實驗暫態位移比較(0~5ms)	115
圖 3.17 第一組實驗鋼珠擊落 A 處，B 處之理論、有限元素及實驗暫態位移比較(0~1ms)	116
圖 3.18 第二組實驗圓板上 PVDF 薄膜與 FS 感測器位置	117

圖 3.19 第二組實驗鋼珠擊落 A 處截取之波源歷時訊號	117
圖 3.20 第二組實驗鋼珠擊落 A 處，C 處之理論、有限元素及實驗暫態位移比較(0~5ms)	118
圖 3.21 第二組實驗鋼珠擊落 A 處，C 處之理論、有限元素及實驗暫態位移比較(0~1ms)	119
圖 4.2 60×30×6 mm 壓電平板前 10 個彎曲模態的理論與模擬結果比較(第 1 至第 5 模態)	139
圖 4.2 60×30×6 mm 壓電平板前 10 個彎曲模態的理論與模擬結果比較(第 6 至第 10 模態)	140
圖 4.3 60×30×6 mm 壓電平板前 10 個伸展模態的理論與模擬結果比較(第 1 至第 5 模態)	141
圖 4.3 60×30×6 mm 壓電平板前 10 個伸展模態的理論與模擬結果比較(第 6 至第 10 模態)	142
圖 4.4 60×30×6mm 壓電板前 10 個彎曲振動形式之彎曲與扭曲應力分析結果比較(第 1 至第 5 模態)	143
圖 4.4 60×30×6mm 壓電板前 10 個彎曲振動形式之彎曲與扭曲應力分析結果比較(第 6 至第 10 模態)	144
圖 4.5 60×30×6mm 壓電板前 10 個伸展振動形式之彎曲與扭曲應力分析結果比較(第 1 至第 5 模態)	145
圖 4.5 60×30×6mm 壓電板前 10 個伸展振動形式之彎曲與扭曲應力分析結果比較(第 6 至第 10 模態)	146
圖 4.6 60×30×6 壓電平板彎矩振動形式之位移、應力和與 FEM 電場分布比較	147
圖 4.7 60×30×6 壓電平板伸展振動形式之位移、應力和與 FEM 電通量分布比較	148
圖 4.8 NEC-55 壓電矩形板示意圖與切割電極設計方式	149
圖 4.9 利用阻抗分析量測壓電材料共振頻率的實驗架構	149

圖 4.10 60×30×1 壓電板(NCE55)在各種切割電極阻抗分析圖	150
圖 4.11 60×30×2.5 壓電板(NCE55)在各種切割電極阻抗分析圖	151
圖 4.12 60×30×1 自由邊界壓電矩形板彎曲振動理論與 ESPI 模態振形及共振頻率分析(第 1 至第 12 模態).....	152
圖 4.12 60×30×1 自由邊界壓電矩形板彎曲振動理論與 ESPI 模態振形及共振頻率分析(第 13 至第 18 模態).....	153
圖 4.13 60×30×1 壓電矩形板在不同電極伸展振動理論與 ESPI 模態振形及共振頻率分析(第 1 至第 5 模態).....	154
圖 4.13 60×30×1 壓電矩形板在不同電極伸展振動理論與 ESPI 模態振形及共振頻率分析(第 6 至第 10 模態).....	155
圖 4.13 60×30×1 壓電矩形板在不同電極伸展振動理論與 ESPI 模態振形及共振頻率分析(第 11 至第 15 模態).....	156
圖 4.14 60×30×2.5 自由邊界壓電矩形板彎曲振動理論與 ESPI 模態振形及共振頻率分析	157
圖 4.15 60×30×2.5 壓電矩形板在不同電極伸展振動理論與 ESPI 模態振形及共振頻率分析(第 1 至第 5 模態)	158
圖 4.15 60×30×2.5 壓電矩形板在不同電極伸展振動理論與 ESPI 模態振形及共振頻率分析(第 6 至第 10 模態)	159
圖 4.15 60×30×2.5 壓電矩形板在不同電極伸展振動理論與 ESPI 模態振形及共振頻率分析(第 11 至第 15 模態)	160
圖 5.1 避震器一外觀圖	179
圖 5.2 避震器二外觀圖	179
圖 5.3 光纖光柵感測器實體圖 (中心波長 1535(nm)).....	179
圖 5.4 光纖於準靜態與穩態問題的量測範圍示意圖	180
圖 5.5 避震器一整體圖	180
圖 5.6 避震器一(彈簧部分)	180

圖 5.7 避震器一(活塞部分)	180
圖 5.8 整體實驗架設圖	181
圖 5.9 活塞外壁裸光纖、套管光纖、熱電偶的原始訊號	181
圖 5.10 套管光纖與熱電偶的溫升擬合結果	182
圖 5.11 热應變值	182
圖 5.12 热膨脹係數擬合結果	182
圖 5.13 裸光纖溫升轉換係數	183
圖 5.14 裸光纖與熱電偶溫升擬合結果	183
圖 5.15 即時畫面呈現溫升相關資訊(實驗一)	183
圖 5.16 即時畫面呈現振動相關資訊(實驗一)	184
圖 5.17 四條光纖的原始訊號	184
圖 5.18 在 1 秒內的光纖訊號	184
圖 5.19 光纖訊號的 FFT 圖	185
圖 5.20 振動頻率搜尋結果	185
圖 5.21 热像儀於活塞外桶的初始與結束溫度結果(實驗一)	185
圖 5.22 活塞外桶隨時間的溫度變化圖(實驗一)	186
圖 5.23 整體實驗架構	186
圖 5.24 感測器黏貼位置	186
圖 5.25 夾具部分	186
圖 5.26 活塞外壁裸光纖、套管光纖、熱電偶的原始訊號	187
圖 5.27 套管光纖與熱電偶的溫升擬合結果	187
圖 5.28 热應變值	188
圖 5.29 热膨脹係數擬合結果	188
圖 5.30 裸光纖溫升轉換係數	188
圖 5.31 裸光纖與熱電偶溫升擬合結果	188
圖 5.32 夾具部分裸光纖、熱電偶的原始訊號與擬合結果	188

圖 5.33 夾具部分溫升擬合結果、熱應變值與熱膨脹係數.....	189
圖 5.34 即時畫面呈現溫升相關資訊(實驗二)	189
圖 5.35 即時畫面呈現振動相關資訊(實驗二)	190
圖 5.36 五條光纖的原始訊號	190
圖 5.37 在 1 秒內的光纖訊號	190
圖 5.38 光纖訊號的 FFT 圖	191
圖 5.39 振動頻率搜尋結果	191
圖 5.40 热像儀於活塞與夾具的初始與結束溫度結果(實驗二)	191
圖 5.41 活塞與夾具隨時間的溫度變化圖(實驗二)	192
圖 5.42 活塞外壁裸光纖、套管光纖、熱電偶的原始訊號.....	192
圖 5.43 套管光纖與熱電偶的溫升擬合結果	193
圖 5.44 热應變值	193
圖 5.45 热膨脹係數擬合結果	193
圖 5.46 裸光纖的溫升轉換係數	194
圖 5.47 裸光纖與熱電偶的溫升擬合結果	194
圖 5.48 夾具部分裸光纖、熱電偶的原始訊號與擬合結果	194
圖 5.49 夾具部分溫升擬合結果、熱應變值與熱膨脹係數.....	195
圖 5.50 即時畫面呈現溫升相關資訊(實驗三)	195
圖 5.51 即時畫面呈現振動相關資訊(實驗三)	196
圖 5.52 五條光纖的原始訊號	196
圖 5.53 在 1 秒內光纖訊號(第 300 秒)	196
圖 5.54 光纖訊號 FFT 圖(第 300 秒)	197
圖 5.55 振動頻率搜尋結果	197
圖 5.56 热像儀於活塞與夾具的初始與結束溫度結果(實驗三)	197
圖 5.57 活塞與夾具隨時間的溫度變化圖(實驗三)	198
圖 5.58 热像儀與熱電偶的溫升擬合結果(上排為活塞部分、下排為夾具部分)	198

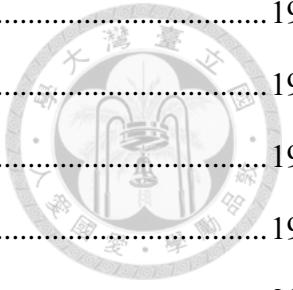


圖 5.59 整體實驗架構	199
圖 5.60 感測器黏貼位置	199
圖 5.61 熱電偶黏貼位置與相關長度	199
圖 5.62 活塞外壁裸光纖、熱電偶原始訊號與溫升轉換係數	199
圖 5.63 活塞外壁裸光纖、熱電偶原始訊號與溫升轉換係數	200
圖 5.64 光纖的波長飄移轉換至溫升後與熱電偶的擬合結果	200
圖 5.65 热應變值(FBG-01)	201
圖 5.66 热膨脹係數擬合結果	201
圖 5.67 热應變值(FBG-02)	201
圖 5.68 热膨脹係數擬合結果	201
圖 5.69 即時畫面呈現溫升相關資訊(實驗四)	202
圖 5.70 即時畫面呈現振動相關資訊(實驗四)	202
圖 5.71 热像儀於活塞外桶的初始與結束溫度結果(實驗四)	203
圖 5.72 活塞與夾具隨時間的溫度變化圖(實驗四)	203
圖 5.73 活塞外壁裸光纖、熱電偶原始訊號與溫升轉換係數	204
圖 5.74 裸光纖溫升擬合結果、热應變值與热膨脹係數擬合結果	204
圖 5.75 即時畫面呈現溫升相關資訊(實驗五)	205
圖 5.76 即時畫面呈現振動相關資訊(實驗五)	205
圖 5.77 热像儀於活塞外桶的初始與結束溫度結果(實驗五)	206
圖 5.78 活塞與夾具隨時間的溫度變化圖(實驗五)	206
圖 5.79 热像儀與热電偶溫升擬合(上排為裸光纖 FBG01、下排為裸光纖 FBG02)	207
圖 6.1 一維訊號相關法	232
圖 6.2 影像堆疊包含兩組空間軸以及一組時間軸	232
圖 6.3 樣板子集合與半窗格示意圖	233
圖 6.4 特徵圖形	233

圖 6.5 數位影像相關法之追蹤過程	234
圖 6.6 特徵值計算示意圖	234
圖 6.7 特徵值追蹤示意圖	234
圖 6.8 全場相關性運算示意圖	235
圖 6.9 相關係數極值搜尋法示意圖	235
圖 6.10 相關係數極值搜尋法過程	236
圖 6.11 數位影像相關法操作流程	236
圖 6.12 GS3-U3-23S6M-C 數位工業相機	237
圖 6.13 SONY DSC-RX100M5 數位相機	237
圖 6.14 光纖光柵與數位影像相關法整體實驗架設圖	238
圖 6.15 美國 MTS Bionix 系列液壓高頻疲勞動態軸向扭轉萬能材料試驗機	238
圖 6.16 MTS 軟體操作介面	239
圖 6.17 試驗用壓縮彈簧	239
圖 6.18 實驗架設圖	240
圖 6.19 彈簧固定於壓縮試驗機上實體圖	240
圖 6.20 實驗彈簧及 DIC 追蹤點	241
圖 6.21 彈簧出廠檢查表	241
圖 6.22 頻率 5Hz 作動下的光纖量測資訊	242
圖 6.23 頻率 5Hz 作動下 MTS 軸向位移資訊	243
圖 6.24 頻率 5Hz 作動下 MTS 軸向力量資訊	243
圖 6.25 頻率 5Hz 作動下的互相關係數 (0 ~ 600 秒)	244
圖 6.26 頻率 5Hz 作動下的互相關係數 (560 ~ 561 秒)	244
圖 6.27 頻率 5Hz 之量測結果	245
圖 6.28 放大圖 6.27 之部分訊號	245
圖 6.29 DIC 與 MTS 量測結果比較圖	246
圖 6.30 MTS 試驗機輸出位移圖	246

圖 6.31 放大圖 6.29 起始訊號 MTS 試驗機輸出位移圖	247
圖 6.32 頻率 3Hz 作動下的光纖量測資訊	248
圖 6.33 頻率 3Hz 作動下 MTS 軸向位移資訊	249
圖 6.34 頻率 3Hz 作動下 MTS 軸向力量資訊	249
圖 6.35 以 3Hz 作動下的互相關係數 (0 ~ 420 秒)	250
圖 6.36 頻率 3Hz 作動下的互相關係數 (200 ~ 201 秒)	250
圖 6.37 頻率 3Hz 之量測結果	251
圖 6.38 放大圖 6.37 之部分訊號	251
圖 6.39 放大圖 6.37 之末端訊號	252
圖 6.40 頻率 3Hz DIC 與 MTS 之末端訊號結果比較	252
圖 6.41 頻率 3Hz DIC 與 MTS 之最大位移結果比較	253
圖 6.42 頻率 3Hz DIC 與 MTS 之部分訊號結果比較	253
圖 6.43 頻率 3Hz DIC 與 MTS 之起始訊號結果比較	254
圖 6.44 頻率 3Hz 互相關之計算結果	254
圖 6.45 頻率 1Hz 作動下的光纖量測資訊	255
圖 6.46 頻率 1Hz 作動下 MTS 軸向位移資訊	256
圖 6.47 頻率 1Hz 作動下 MTS 軸向力量資訊	256
圖 6.48 頻率 1Hz 作動下的互相關係數 (0 ~ 420 秒)	257
圖 6.49 頻率 1Hz 作動下的互相關係數 (200 ~ 202 秒)	257
圖 6.50 以 3Hz 為特徵訊號與 1Hz 原始訊號的互相關係數 (0 ~ 420 秒)	258
圖 6.51 以 3Hz 為特徵訊號與 1Hz 原始訊號的互相關係數 (199.5 ~ 201.5 秒)	258
圖 6.52 頻率 1Hz 之量測結果	259
圖 6.53 放大圖 6.52 之部分訊號	259
圖 6.54 放大圖 6.52 之末端訊號	260
圖 6.55 頻率 1Hz DIC 與 MTS 之末端訊號結果比較	260
圖 6.56 頻率 1Hz DIC 與 MTS 之最大位移結果比較	261

圖 6.57 頻率 1Hz DIC 與 MTS 之部分訊號結果比較	261
圖 6.58 頻率 1Hz DIC 與 MTS 之起始訊號結果比較	262
圖 6.59 頻率 1Hz 互相關之計算結果	262
圖 6.60 試驗機頻率 5Hz 之力訊號	263
圖 6.61 試驗機頻率 3Hz 之力訊號	263
圖 6.62 試驗機頻率 1Hz 之力訊號	264
圖 6.63 頻率 5Hz 之不同螺距伸長量	264
圖 6.64 頻率 3Hz 之不同螺距伸長量	265
圖 6.65 頻率 1Hz 之不同螺距伸長量	265
圖 6.66 雲端監視系統主畫面	266
圖 6.67 彈簧系統即時量測畫面	267
圖 6.68 LTE 閘道器 On Cell G3150A-LTE	267
圖 6.69 警戒閥值設定	268
圖 6.70 發送警報簡訊 (超過閥值時)	268
圖 6.71 手機收到的警戒簡訊	268
圖 6.72 雲端網頁連線畫面	269
圖 7.1 發光二極體示意圖	276
圖 7.2 Micro LED 與 LED 晶粒尺寸示意圖	276
圖 7.3 檢測機台	277
圖 7.4 晶圓拍攝示意圖	277
圖 7.5 晶圓尺寸示意圖	277
圖 7.6 Micro LED 影像數據庫	278
圖 7.7 正常樣態 Micro LED 晶片	278
圖 7.8 異常樣態 Micro LED 晶片 (中央汙點)	279
圖 7.9 異常樣態 Micro LED 晶片 (晶片旋轉)	279

圖 7.10 異常樣態 Micro LED 晶片(晶片破裂).....	280
圖 7.11 標準影像與自身樣版配對結果，相關性係數為 0.999	281
圖 7.12 標準影像與 2.bmp 影像樣版配對結果，相關性係數為 0.951	282
圖 7.13 標準影像與 3.bmp 影像樣版配對結果，相關性係數為 0.968	283
圖 7.14 標準影像與 4.bmp 影像樣版配對結果，相關性係數為 0.972	284
圖 7.15 標準影像與 5.bmp 影像樣版配對結果，相關性係數為 0.831	285
圖 7.16 標準影像與 6.bmp 影像樣版配對結果，相關性係數為 0.954	286
圖 7.17 標準影像與 7.bmp 影像樣版配對結果，相關性係數為 0.978	287
圖 7.18 標準影像與 8.bmp 影像樣版配對結果，相關性係數為 0.971	288
圖 7.19 標準影像與 9.bmp 影像樣版配對結果，相關性係數為 0.847	289
圖 7.20 標準影像與 10.bmp 影像樣版配對結果，相關性係數為 0.978	290
圖 7.21 標準影像與 11.bmp 影像樣版配對結果，相關性係數為 0.859	291
圖 7.22 標準影像與 12.bmp 影像樣版配對結果，相關性係數為 0.954	292
圖 7.23 標準影像與 13.bmp 影像樣版配對結果，相關性係數為 0.962	293
圖 7.24 標準影像與 14.bmp 影像樣版配對結果，相關性係數為 0.968	294
圖 7.25 標準影像與 15.bmp 影像樣版配對結果，相關性係數為 0.967	295
圖 7.26 以 0.95 為閾值檢測結果圖	296
圖 7.27 自行開發相關係數之使用者操作界面	296

表次

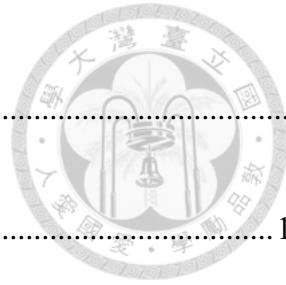


表 2.1 PVDF 薄膜材料常數	56
表 3.1 有限元素、理論、PVDF 與 ESPI 共振頻率及誤差比較表	103
表 4.1 NCE55 壓電陶瓷材料相關材料常數	136
表 4.2 不同厚度壓電材料彎曲振動形式前 10 個共振頻率之結果比較	137
表 4.3 不同厚度壓電材料伸展振動形式前 10 個共振頻率之結果比較	138
表 5.1 避震器一進行三次實驗量測結果	178
表 5.2 避震器二進行兩次實驗量測結果	178

第一章 緒論



1.1 研究動機與目的

板結構在日常應用非常廣泛，大從交通運輸(輪船鈑金件)、水庫工程(水閘門)及國防科技(飛彈彈殼)等板件結構，小從微機電製程應用在感測器細微結構，到奈米等級半導體製程電路設計微型板結構應用，普遍由各式幾何尺寸與板殼結構材料所構成。板件結構在應用上常承受外力撞擊或週期振動等動態負載，因此研究板件結構動態行為，從板件在自由振動的特性，或物體受外加負載而產生的暫態性波的傳動物理現象等研究議題，已成為學術研究或產業發展重要的探討方向。

對於厚度呈現階梯變化之固定邊界圓板，相較厚度保持定值圓薄板分析上更複雜，應用上也更具廣泛性，所以本論文針對厚度具階梯變化之圓板承載動態外力負載產生暫態波傳特性進行研究，包括理論上推導來求出面外位移解析解、利用全域式光學系統電子斑點干涉術(AF-ESPI)，來針對圓板受到激振時，來量測其共振模態形狀與頻率，輔以有限元素模擬軟體進行分析，探討理論、實驗量測與模擬深具研究價值的關聯性。

現今主要以薄板理論上來探討在工程應用或分析，根據 Kirchhoff-Love 提出平板位移假設的薄板理論基礎(又稱為古典板的理論 classical plate theory)推導得到，該假設考慮薄板是彈性、均質(homogeneous) 材料，假設薄板結構幾何形狀未受力最初狀態為平的，板厚度尺寸須遠小於板其他尺寸，其寬厚比值必須 $10:1$ 以上，同時忽略平行於薄板中性面之外力所產生剪應變遠小於彎曲應變等多項假設條件，基於以上假設條件，將物體由原本三維結構簡化為二維平面問題。因此，藉由薄板理論所解析的位移與應力解屬於較簡單的近似解。

因薄板理論假設條件理想化與厚度限制，在 1945 年與 1951 年分別由 Eric Reissner 和 Raymond Mindlin 分別針對較厚板結構提出理論模型與解析方式，由於



兩位學者假設方式非常相近，常通稱為 Mindlin – Reissner plate theory 或簡稱為 Mindlin 板理論(Mindlin plate theory)。基於以上說明，本文引用吳亦莊[1](107)博士論文依據 Mindlin 理論推導，應用於分析壓電長方板在全自由邊界條件，分別在彎曲振動與伸展振動主導動態特性，獲得共振頻率與模態理論結果，由全域光學系統電子斑點干涉術(AF-ESPI)實驗來針對共振模態與頻率進行量測，並採用有限元素軟體分析模擬壓電板在激振下產生的位移場、應力場及電場等結果，再探討二者之間的關聯性，作為用來激振壓電板最佳的有效方法，成功驗證理論可以應用於解決相關工程問題。

汽車內部懸吊系統是保持車體維持平穩，降低車身晃動最重要的零組件，懸吊裝置裡包括避震器、避震彈簧及控制臂。懸吊元件包括彈簧、橡皮襯套、緩衝橡皮、平衡桿件等，互相搭配不同元件材質與設計，將影響懸吊系統的安全性及乘客舒適性。本文利用布拉格光纖光柵具有量測優勢包括不受電磁波干擾、高靈敏度、徑細質輕及能多點量測等，在實驗中將光纖光柵感測器黏貼在避震器表面，來進行次微米的多點量測，利用本實驗室以 Matlab 軟體自行開發的即時訊號分析系統，透過分析計算將溫升及熱應變進行解耦合，來獲得避震器試驗過程中溫升及熱變形歷程，並對照熱電偶與熱像儀實驗結果，進而得到避震器表面材料熱膨脹係數，同時量測避震器各區段熱變形後，可得到避震器作動過程中整體伸長量。

數位影像相關法(Digital Image Correlation, DIC，以下簡稱數影法)為本文實驗量測方法，這種光學量測具有非接觸式、全域性與實驗架設簡單等特色，於可見光下就可以進行量測，亦可透過不同光學儀器(攝影機、工業相機等)輔助，達到跨尺度及更廣泛量測需求。本次研究使用數影法，分別對於車用彈簧疲勞試驗，避震器耐久試驗進行動態形變量測。數位影像量測相關法的結果可與光纖實驗數據、廠商所提供之實驗參數相互比較，來確定數影法之量測可靠度。

本篇論文的研究目的主要應用實驗室所開發完成的量測技術，包括電子斑點干涉數(ESPI)、光纖光柵感測器(FBG)以及數位影像相關法(DIC)，針對學術研究的板結構系統動態特性，以及工業應用研究懸吊系統避震器動態特性與 Micro LED 瑕疵檢測進行深入探討，並顯示本論文所應用的量測技術與傳統量測方法，具有優越且更精密的量測結果。

1.2 文獻回顧

有關等向性平板振動相關議題已具有百年以上研究歷史，從理論推導、數值計算與開發量測技術，已累積非常豐富研究結果，有關近年矩形板振動數值理論研究中，以 Ritz(1909) [2]採用最小的勢能原理，當成數值方法理論基礎(Rayleigh-Ritz method)，被廣泛應用在固體力學領域，可用來分析多維度的連續體系統(如圓板、矩形板)共振頻率，採用此方法先決條件必需先找出矩形板統御方程式和模態形狀函數，並配合邊界條件來進行理論推導。Young(1950) [3]、Warburton (1954) [4] 和 Leissa (1978) [5] 利用梁雙方向模態疊加函數當為數學函數基底，推導矩形薄板數學面外變形，推得共振模態與頻率近似解，其分析流程較為簡易與普遍化，因此都用此法來解決工程上問題，學術上針對流固耦合問題更藉由此方法來進行振動分析。Dickinson 和 Blasio(1986) [6] 考量平板變形無法用梁的模態形狀疊加，故針對矩形平板在自由邊界條件下存在誤差較大的情況提出利用 Rayleigh-Ritz method 來分析。Gorman (1976 [7] 、1978 [8] 、1999 [9]) 提出等效將矩形平板分成數個理論結構區塊的數學方式，再使用疊加方法來求得薄板統御方程式，此法與 Rayleigh-Ritz method 分析矩形平板在自由邊界的振動問題相比，具有可獲得更精確共振模態和頻率。

Forsyth 和 Warburton(1960) [10] 運用模態數學函數重疊法方式求解平板暫態的波傳問題，為解析懸臂板承受撞擊時暫態位移和應變，採以雙向梁模態形狀當作

基底函數，並以正弦(Sine)數學函數來趨近鋼珠撞擊薄板動態負載。

Craggs(1968)[11]以暫態矩陣法解析懸臂板在簡支與固定邊界下探討其暫態相關問題。Abbate(2007) [12]以模態數學展開法求解平板在全簡支邊界情況下，並受到三角波與方波等驅動作用下，針對所生成暫態位移響應物理量進行研析。Ilanko 和 Mochida(2010) [13] 針對薄板在全自由邊界存在初始變形情況下，將薄板釋放後所引起暫態的位移，相較 Gorman 與 Rayleigh-Ritz method 在暫態特性上運用疊加法的模態分析結果，從數學疊加法收斂速度與準確性都有較佳結果。

Won(2012) [14]運用 Timoshenko 發展懸臂梁理論，分析複合結構力學物理現象，Avramov 及 Mikhlin (2013)[15]運用非線性系統探討機械系統強迫共振運動 (nonlinear normal modes) 及模態反應。Sayyad 及 Ghugal(2015)[16]以單層板理論基礎延伸至多層板結構研究，探討板在自由邊界與固定邊界條件對振動頻率與振動模態交互關係與影響。Wang(2016)[17]等人運用傅立葉法(Fourier method)，預測在經典和非經典邊界條件下，疊層圓形複合材料面板和旋轉殼體自由振動，並探討圓板及殼結構振動特性與模態特性。Demir(2017)[18]等人運用一階剪切變形理論 (first-order shear deformation theory, FSDT)，獲得殼狀圓錐體運動方程式，並利用離散奇異卷積法(discrete singular convolution, DSC)和微分求積法(differential quadrature, DQ)求解偏微分方程式與驗證數值精度，再導入分析圓錐殼方程式分析環形扇形板自由振動。Duc(2017)[19]等人運用一階剪切變形理論，探討三層夾心蜂窩複合材料板蒲松氏比(Poisson's ratio)結構特性，此研究使用應力函數方法(Airy's stress function)，進行夾心膨脹複合圓柱板非線性動力響應與振動行為的探討。

Sayyad(2017)[20]等人綜合等效單層、分層等不同理論探討層狀複合材料和夾層樑在彎曲、屈曲和自由振動分析。Kumar(2018)[21]等人藉由雷(里)・李(茲)二氏法 (Rayleigh-Ritz method)求解結構件特徵值、共振頻率與模態，並使用自適應主動振動控制(adaptive active vibration control, AAVC)來控制結構件低頻振動。Pu(2019)[22]

等人運用濾波最小均方(filtered-X least mean square, FXLMS)，有效減輕結構件低頻振動。Huang(2020)[23]等人運用板理論結合壓電力學，探討有限可壓縮粘性流體耦合壓電板的振動特性，並採用壓電板控制方程式和疊加法分析壓電板的振動位移，利用聲波方程式推導流體方程，並使用有限元分析(finite element analysis, FEA)探究固液耦合系統振動特性。Liao 與 Ma(2020)[24]運用疊加法探討懸臂板在自由振動下模態和共振頻率，並討論懸臂板在動態衝擊作用下暫態響應行為，同時探討動態位移、應變、速度與加速度等物理量結果，並利用壓電薄膜感測器來進行撞擊負載的時間作用歷程量測，導入數值模型驗證懸臂板在不同衝擊負載下瞬間暫態響應影響行為。

本文用來製作壓電薄膜感測器的材質是聚偏二氟乙烯(polyvinylidene fluoride, PVDF)，可用來針對平板結構暫態的應變與共振時的頻率進行量測。另 Kawai(1969) [25]研究發現高分子聚合物 PVDF 在 $100^{\circ}\text{C} \sim 150^{\circ}\text{C}$ 溫度範圍進行拉伸實驗，將室溫溫度升高到 90°C 後，再慢慢冷卻，並保持在穩定的電場(約 300kV/cm)下，可提升壓電特性，並達成極化。Bacon(1982) [26]成功將壓電薄膜 PVDF 導入水聽器應用。Gaul 和 Hurlebaus(1999) [27]將壓電薄膜 PVDF 感測器黏貼於平板四個角，用來量測動態訊號，得到波源歷時與波源作用位置。Sirohi 和 Chopra(2000) [28]使用壓電薄膜 PVDF 與壓電陶瓷 PZT 來感測物體應變量，比較壓電傳感器與傳統電阻式應變規，具有極佳訊噪比與靈敏度。Fukada(2000) [29]進行壓電薄膜 PVDF 應用在量測物體應變研究與探討。Bauer(2000) [30]採用壓電薄膜 PVDF 感測器來量測當物體爆炸時的衝擊壓力，由數據結果壓電薄膜 PVDF 在 25GPa 壓力下仍具有良好量測性能。D'Acquisto 和 Montanini(2008) [31]探討壓電薄膜 PVDF、傳統加速規和力感測器等元件承受衝擊負載的動態物理特性，結果指出壓電薄膜 PVDF 具有價格低廉、動態特性良好、多道量測與質量較小等優勢。潘善盈(2009) [32]將壓電薄膜感測器 PVDF 貼附於揚聲器和懸臂梁結構進行振動訊號之回授控



制，實驗顯示 PVDF 具有良好動態訊號量測與抑振能力。張鈞凱(2011) [33] 將兩片薄膜感測器 PVDF 黏貼於懸臂梁上下表面，來量測懸臂梁承受撞擊時的波源歷時，並將其數值導入理論和有限元素軟體模擬，進一步獲得懸臂梁暫時狀態的波傳行為。劉泓嶽(2011) [34] 研究壓電薄膜 PVDF 感測器特性探討，並藉由壓電薄膜 PVDF 感測器量測懸臂板與梁等結構，在承受撞擊後的動態響應行為。

本實驗室開發的電子斑點干涉術(electronic speckle pattern interferometry, ESPI)是最優異及歷時最久的量測技術，此技術可量測震動固體結構共振頻率及模態全域性的動態物理量。Leendertz 和 Butters(1971) [35] 應用 ESPI 來量測圓板振動振形，成功獲得圓板清楚共振模態。Løkberg 和 Høgmoen(1977) [36] 使用相位調變控制技術(reference beam modulation) 搭配參考光，來提升電子斑點干涉術等量測能力，包括在影像解析度、相位量測和結構物微小振動幅度。Slettemoen(1980) [37] 由大孔徑電子斑點干涉術搭配單一斑點型式參考光，來減少量測時的影像干擾外界雜訊，提高模態清晰度。Kyounco(1980) [38] 使用調變控制技術並配合參考光的 ESPI 量測系統，進行 PZT-4 換能器在高頻激振下模態與共振頻率量測。Wykes(1982) [39] 運用 ESPI 量測技術來量測結構體表面上動靜態模態變形圖案。為探討鋁材方板結構的面外振動的物理特性，Nakadate(1986) [40] 採用斑點干涉相位偏移 (phase shifting) 進行實驗量測，並輔以影像電腦處理技術進行量測結果的處理。為瞭解震動中物體在液氣體相異介質中差異性，Oswin(1994) [41] 採用電子斑點干涉術量測系統量測在水中和空氣中相異介質換能器的振動模態，基於液氣體相異介質反射與干擾不均，造成水中振動模態影像干涉條紋比較不清晰，依據換能器實驗量測結果可知在空氣振動的特性優於水中。Wang(1996) [42] 推導出振幅變動電子斑點干涉術(amplitude-fluctuation ESPI, AF-ESPI) 數學基本原理與實驗架設，比較這三種運算處理量測方法影像訊號相減法(video-signal-subtraction)、影像訊號相加法(video-signal addition)與 AF-ESPI 的量測結果，可發現影像訊號相減法原理



與 AF-ESPI 相近，因在動態中截取參考影像，所以量測步驟可簡化，也大幅提升模態條紋解析度和清晰度。Huang 與 Ma ((2001)[43]、(2002)[44])使用 AF-ESPI 量測三維壓電體和壓電平板振動性質，輔以有限元素軟體分析及量測結果驗證。Lin 和 Ma(2006) [45]以 AF-ESPI 量測技術量測電極切割後壓電板，並探討切割後壓電板的面內振動模態特性，並以有限元素法和阻抗分析儀量測數據驗證模擬與實驗結果。另林育志(2003) [46]使用 AF-ESPI、阻抗分析儀與 LDV 探討壓電雙晶片與陶瓷複合層板的振動特性，又以電子斑點干涉術量測雙晶片垂直插入水中的模態振形。黃育熙(2003) [47]以 AF-ESPI 量測石英壓電材料在各種相異切面下之共振頻率和模態等震動結果。吳亦莊(2009) [48]等針對向性材料矩形板和壓電矩形板，以線性疊加法推導其理論分析，並將有限元素軟體模擬結果、實驗 AF-ESPI 量測與理論結果進行深入探討。黃育熙(2009) [49]利用精密的 AF-ESPI 量測方法，來量測激振狀態下三維壓電陶瓷元件的模態與頻率等動態特性。

光纖光柵感測器相關發展已逾三十餘年，Hill(1978) [50]等人發現含有銻(Ge)元素的光纖存在光感特性(photosensitivity)，並利用該特性開發將光柵寫入光纖內的方法，稱作內部寫入法(internal writing method)，但利用此方法製作光柵中心製程光路較複雜且波長固定，因限制多所以不易導入實際應用。Meltz(1989)[51] 利用兩道高同調性的紫外雷射光，由光纖外部產生干涉條紋導入光纖纖核形成光柵結構，即期所開發橫向全域法(transverse holographic method)，該光纖光柵具有良好特性與品質等多種應用優勢，所以學術界也快速投入相關研究與應用領域。Hill(1993)[52]以及 Anderson[53] 分別提出相位光罩法(phase mask method)，該方法具有相當完整理論推導與提供實驗數據佐證，成為光纖上製造週期性光柵結構最被廣泛使用的技術。1996 年 Bennion[54]針對光纖光柵由外部寫入之方式與相位光罩法相關特性進行深入研究探討。Hill 和 Meltz(1997) [55]所發表論文及 Kashyap(1999)[56]出版專書內容，詳細介紹光纖光柵相關理論、技術、應用與其研

究成果。Erdogan(1997)[57]引進電磁學中光波導耦合模態理論(coupled-mode theory)，藉各種傳播能量於模態間交換，來解釋光的能量傳遞受到光柵影響物理現象，並研究不同型式光纖光柵頻域特性，與受到環境物理量變化所影響定量分析。

Nye(1957)[58]透過數學張量系統描述結晶體特性，探討當受到外在因素加載晶體，其影響下所造成介電常數數學張量(dielectric tensor)變化，進而推導出在光學性質改變後應變場與電場的轉換關係式，分別稱為電光效應(electro-optic effect)與光彈效應(photo-elastic effect)。Berthold(1988) [59]等人實驗量測摻質(dopant)光纖之材料常數，包括蒲松比(Poisson's ratio)及光彈係數(photo-elastic coefficient)。Talahashi(1979) [60]等人研究熱光係數(thermo-optic coefficient)，該係數為溫度改變後對光纖的纖核折射率變化問題。Tao(2000) [61]藉由雙折射率變化理論，進行將非對稱橫向力施加在光纖光柵下，其與溫度影響關聯性探討，並用於量測複合材料內部的應變分佈。

基於張量系統研究，可建立光纖光柵頻譜特性與外在物理變因之關聯性，引發光纖光柵應用於量測各種物理量研究蓬勃發展。Kersey(1993) [62]等人整合布拉格光纖光柵與法布里-珀羅(Fabry-Perot)濾波器，開發可用於多點量測應變的系統。Sun(2008) [63]提出在同條光纖上寫入多段相異中心波長布拉格光纖光柵，可應用於監控多點量測各種物理量。Murukeshan(2000) [64]利用布拉格光纖光柵嵌入由複合材料所構成梁結構中來監測應變量。Zhao(2009) [65] 將布拉格光纖光柵整合在所開發微小彈簧結構並製成位移感測器。Biswas(2010) [66]應用拉格光纖光柵埋進混凝土結構中，用來量測混凝土內部應變量，並討論混凝土凝固過程所產生應力情形。

在共振波長的控制及應用，光纖光柵也成為非常熱門的研究議題，Ball(1992) [67]和 Morey(1994) [68]提出搭配步進馬達(stepper motor)結合短週期光纖光柵的積層的壓電致動器(multilayer piezoelectric actuator)，開發出可調控波長光纖雷射。



Kim(1998) [69]提出應用積層式壓電致動器系統，進行短週期光纖光柵共振中心波長調整，作為分波多工系統(wavelength division multiplexed system，WDM system)中的合分波多工器(add/drop multiplexers，ADMs)。Mavoori(1999)[70]結合不同熱膨脹係數材料及電磁鐵，利用調控溫度及磁力的方式，來控制光纖光柵共振波長。Inui(2001)[71]結合布拉格光纖光柵於積層式壓電制動器系統應用，開發出大波長、低電壓可調控式濾波器。

Yoffe(1995)[72]利用不同熱膨脹的係數鋁管和矽管異質材料，完成固定光纖光柵共振波長，藉由特殊封裝結構設計與使用不同熱膨脹係數的材料，透過整體熱膨脹效應所產生應變，來補償因溫度變化造成的波長飄移，可用來作為溫度補償(temperature compensation)。

應用光纖光柵技術進行動態量測，已成為國內外非常熱門的研究議題，Melle(1992)[73] 利用光耦合器將 FBG 感測器的反射中心波長一組訊號分為二，當第一組訊號先經過濾波器後，再轉換為電訊號，而另一組訊號直接轉換成電訊號，最後將前後兩訊號進行數學運算，可精準回推待測物應變量。Kersey(1993)[74] 搭配相位反饋系統設計不平衡馬赫-詹德干涉儀(unbalanced-interferometer wavelength discriminator)，其主要應用於高解析度動態應變量測。

蔣彥儒(2003)[75]透過一對波段相同布拉格光纖光柵，重疊其波段反射頻譜，藉由兩者反射頻譜間能量改變量，來回推量測物體的應變量，這個量測技術具有分波多工的能力與不受溫度影響的特點。江家慶(2003)[76]使用長週期光纖光柵來進行能量調變式感測器能量調整與開發，建立能量可調變光纖光柵系統。葉耀文(2004) [77]探討布拉格光纖光柵量測動態系統應變量的穩態訊號定性量測能量。許碩修(2005) [78] 搭配分波多工技術，透過改良型光纖光柵能量調變量測系統，進行多點同時量測待測物應變量，並建立應變定量感測量測模組。莊國志(2005)[79]針對暫態波傳訊號，以長週期解調型光纖光柵進行量測，並印證利用雷射都普勒量



測儀所量測面外單點式位移結果。林柏睿(2006)[80]分別探討使用布拉格光纖光柵與傾斜式光纖光柵，作為能量解調濾波器，由整體影響與量測結果進行研究。梁正言(2007)[81]探討布拉格光纖光柵對於高頻應變及面內位移量測能力，以面外位移量測系統為基礎，建構多點與多維度量測技術。汪政緯(2008)[82]藉由模態耦合理論，探討承受超高頻應變及非均勻應變的布拉格光纖光柵影響，並探討中心波長飄移峰值，及不同情形能量下調變法失真臨界條件。莊國志(2008)[83]開發光纖光柵能量調變型量測系統具有多維度與高解析，成功用來同時進行量測物體面內外位移的能量。王兆祥(2010)[84]利用模態耦合理論與高斯函數法進行光柵之反射與穿透光譜模擬分析，建構出布拉格光纖光柵的懸臂梁回授控制系統。王俊耀(2012)[85]利用布拉格光纖光柵開發三軸同時量測系統，主要量測結構物邊點及邊線暫態的波傳行為，並配合有限元素法來模擬及驗證可靠度。王華均(2013) [86] 藉由能量調變法系統來量測位移與應變，使用多條光纖光柵搭配分波多工器的量測系統，進行待測物多點暫態量測，比較有限元素法及驗證結果。林建鐘(2014)[87]使用光纖光柵感測器搭配波長解調器，針對物體移動中的質量進行動態行為進行量測，及探討梁結構頻率域影響因素。柯秉良(2015)[88] 利用傾斜式光纖光柵針對動態大振幅的應變做為能量可調控型濾波器量測，開發靈敏度極高的壓力感測器，實際應用於風切音、水下暫態波傳特性量測。黃康哲(2015)[89] 為探討光纖光柵感測器在電池模組嚴苛環境條件，使用聚偏二氟乙烯薄膜與布拉格光纖光柵感測器，進行電池充放電監測，建立動態量測技術的研發與應用。李冠德(2016)[90] 為瞭解固液耦合結構物的動態特性及探討暫態波傳問題研究，利用布拉格光纖光柵感測器進行探討與量測。許詠莊(2016)[91]應用布拉格光纖光柵感測器來量測超精密平面磨床及高速內藏式主軸進行變形、動態特性及溫升等量測。龔瑞清(2017)[92]開發具即時量測十段布拉格光纖光柵埋入工具機主軸內，監測其在空轉過程應變、溫升等物理特性，亦探討工具機在銑削工件過程中，共振波長改變頻域的顫振現象。Ko, Chuang

與 Ma (2018)[93] 利用耦合模式理論和傳遞矩陣公式提出光纖布拉格光柵(FBG)薄膜感測器，以高靈敏度執行水中動態壓力測量應用。Shang(2021)[94]等人運用光纖光柵感測器準確監視電機(EM)運行參數，包括溫度、扭矩、機械振動和轉速等參數。Mao(2021)[95]等人提出基於光纖布拉格光柵的非接觸式高溫位移感測系統，準確測量往復式壓縮機(RC)核心溫度，並根據 FBG 反射頻譜間歇相對運動，實現無線 FBG 信號的解調演算法。

比較傳統量測技術與光學量測系統，光學量測系統其具備高精度、高靈敏度、非接觸式等多項優點，已被產業界與非破壞檢測領域廣泛應用，M.M. Frocht 光彈法(Photoelasticity(1941) [96])、Durelli 莫爾法(Moiré(1970) [97])，(2005) [98])與 Sutton 等人數位影像相關法(Digital Image Correlation(2009) [99])等。K. M. Hung and C.C.Ma (2008)[100]基於某些透明材料(birefringent material)雙折射特性(birefringence)，材料光學特性因受力而發生改變，透過偏極光架設增加等傾角線(isoclinic line)與等色線(isochromatic line)對比度，觀察相對應之明暗條紋方向分析應力分布，經由光彈理論計算全域應力。1960 年莫爾法誕生，藉由表面貼附特定格線，施加負載後所發生干涉，可觀察到明暗相間震動條紋，可依條紋狀況來計算待測物所產生應變大小值。Butters(1971)[101]採用同時照射同調光於待測物與參考物表面電子斑點干涉術，藉由感光元件紀錄干涉條紋影像，計算待測物振動時全域位移量。Huang (2012) [102]電子斑點干涉術可進行非接觸式全域量測，同時獲得面內及面外形變，成功應用於壓電陶瓷平板與殼元件面內和面外耦合之振動量測。Chang(2012)[103]透過干涉條紋，並結合相位重建(phase reconstruction)，可計算待測物全場域形變量。採用電子斑點干涉術進行待測物量測時需隔絕環境中微小振動干擾，故需於光學桌進行實驗。相較而言，數影法對實驗環境要求相對較低，不受限於傳統量測技術所需鐳射光源，量測範圍及適用領域更為廣泛。

美國南卡羅萊納大學 Siebert (2010) [104] 領先投入研發數影法，藉由追蹤待測物表面特徵值來量測全場域位移。回顧數影法發展初期相關文獻，常以不同方式命名該項技術，如 Zhang(1999)[105] Digital Speckle Correlation Method(DSCM)、 Bay(1995)[106]Texture Correlation，Chen(1993) [107] 與 Gaudette(2001) [108] Computer-aided Speckle Interferometry(CASI)，Sjodahl(1993) [109]、(1997)[110]Electro nic Speckle Photography(ESP)等。經統計以 Digital Image Correlation (DIC)命名發表及引用頻率最高，也廣受學術界漸漸接受並統一以 Digital Image Correlation 作為命名。隨著世界上眾多學者投入數影法之開發及研究，其演算核心相較於發展初期已有顯著提升，並已成功應用於形變之高精度量測及分析。Adrian(2005)[11]提出另一項重要的量測方法為質點影像速度量測法 (Particle Image Velocity，PIV)，此為數影法量測技術重要分支。White (2003) [112] 藉由追蹤流體中質點運動軌跡，提出可以計算流體中全域流速場分布狀況的方法，該方法已廣泛使用於土壤力學與流體力學量測及分析。

Pan(2009)[113]提出數影法包括二維、三維表面變形及三維內部變形量測等三種量測方式，其中二維面內量測，可使用單一數位相機對待測物表面進行面內形變量測；Bay(1999)[114]對於三維面內量測，則需要使用至少兩組數位相機，結合雙目立體視覺演算法(Binocular stereovision)，獲得曲面待測物表面之面內與面外形變資訊，進而計算表面應變場；三維內部變形量測，需結合電腦斷層掃描(Computed Tomography，CT)，並將二者整合為數位體積相關法(Digital Volume Correlation，DVC)才可進行量測。對於固態物體內部之體積運動，可藉由追蹤其特徵值，分析待測物內部應力及形變分佈，該方法可用於臨床醫學研究如脊髓或牙髓受力後內部變形與應力量測。Sun(1997) [115]二維數影法可透過不同研究領域之光學影像設備，如光學顯微鏡(Optical microscopy)、Sutton(2007) [116]雷射掃描式共軛焦顯微鏡(Laser Scanning Confocal Microscope，LSCM)、Franck(2007)[117]掃描式電子顯微

鏡(Scanning Electron Microscopy, SEM)、Li(2006)[118]原子力顯微鏡(Atomic Force Microscopy, AFM)、穿透式電子顯微鏡(Transmission Electron Microscopy, TEM)等，即可大幅提升數影法量測之空間解析度，更為廣泛應用於跨領域或跨尺度之相關量測。

數影法之跨領域及跨尺度量測特性，如提升影像設備性能，及滿足藉由高性能電腦進行後續影像處理、運算及分析等需求，可大幅提升數影法高空間、高時間解析度。對於其核心技術而言，除提升相關硬體設備，亦可透過精進演算法來提高數影法量測精度。Bruck(1989)[119]以牛頓-拉弗森方法(Newton-Raphson method)作為核心演算法精進，透過線性求解可達到 0.1 pixel 的精度。Park(2003) [120]投入超解析度(super resolution)演算法研發，透過高階方程可提升至 0.05 pixel 解析精度，但因其需要運算硬體資源非常龐大，無法有效處理大量影像堆疊的量測問題。Bar-Kochba(2015)[121]等人提出一種快速迭代數位體積相關方法(fast iterative digital volume correlation, FIDVC)，應用數位體積相關性(DVC)量測技術分析大量電腦斷層影像切片，並針對高空間解析度非線性 3D 變形提供精確實驗結果。Grassi (2015)[122]等人運用有限元模型及 DIC 技術於骨骼力學，並從實驗測試中獲得相關應變數據及建構驗證數值模型，能有效預測骨骼力學行為，預先診斷骨質疏鬆症相關骨折。Palanca(2016)[123]等人導入數影法技術應用於生物力學位移測量和應變分析等探討，包括從微觀層面(組織層面)到宏觀層面(器官層面)不同尺度。Chang 與 Ma(2017)[124]針對數影法提出一套等價向量運算法，解決矩陣運算和循環迭代運算速度，在程序測試中預留廣用性和運算效率。本實驗室二維數影法解析度可提升至 0.01 pixel，以獲取良好影像品質，成功運用該技術進行微奈米精度等級變形精密量測，如張景瑛(2013)[125]布拉格光纖光柵拉伸研究、周宛萱(2014)[126]材料奈米壓痕形變量測。簡宸煜(2015)[127]工程材料之相關參數量測，包含記憶合金、碳纖維複合材料。本實驗室歷年應用數影法，投入在建築結構及機械系統動態特性

等領域研究，包括陳亮至(2016)[128]機械手臂運動軌跡量測與優化分析，彭柏勳(2016)[129]核能電廠管線系統耐震行為、圍阻體三維變形及裂縫成長監測懸臂梁動態特性等相關工程問題。黃右年(2018)[130]建立即時立體數影法用於量測三維工程的動態問題。毛英澤(2019)[131] 應用即時數影法系統即時監測高速主軸及車輛車流追跡跨領域量測。Pan(2018)[132]針對數影法提出新技術改進，在立體 DIC 系統中有突破性新發展。Ma (2020)[133]等人開發一種基於向量運算數影法系統，已用來測量懸臂梁在自由端受到集中負載變形與應變，此研究使用兩個實驗來觀察待測物件位移和應變，不但精確量測雙向位移值，更探討有關應變分佈全場域資訊。Chang (2020)[134]等人運用向量化的數影法，遠距量測鋼筋混凝土結構承受地震振動時層間漂移狀況，並分析樓層間所產生的平移和角度位移。此研究運用 DIC 系統，分析三層結構在地震波作用下的雙軸變形和層間漂移物理量，並依據實驗結果分析土木結構變形結構的機械性能。Yoon(2021)[135]等人運用數影法於骨科材料等相關領域，探討光固化樹脂複合材料、樹脂與牙齒界面及牙齒結構收縮行為及機械性能，也分析牙科材料裂紋擴展特性等研究。

1.3 內容簡介

本文內容針對金屬圓板與壓電方板動態行為，針對在有限元素模擬分析、實驗量測和理論解析等詳細探討，並利用光纖光柵感測器來針對避震器系統變形進行量測與討論，也進一步結合光纖光柵感測器與數影法針對壓縮彈簧變形進行探討，最後利用數影法針對 Micro LED 進行瑕疵檢測。本文各章研究內容，簡述如下：

第一章 緒論

詳述本文研究動機、背景、相關文獻回顧、介紹架構與各章節重點內容。



第二章 實驗設備與量測原理介紹

介紹本論文所使用的各種主要實驗量測技術之工作原理。首先介紹電子斑點干涉術(amplitude-fluctuation electronic speckle pattern interferometry, AF-ESPI)的基本系統與原理，可用來量測震動平板面內及面外全場域共振模態與頻率，並可記錄次微米振動位移的激振電壓。介紹黏貼在待測結構物表面壓電薄膜感測器PVDF(polyvinylidene fluoride)，可即時量測待測物結構的變形量，進一步搭配時域與頻域轉換公式，即可快速確認結構系統的共振頻率。接續說明基本的光學理論與光纖光柵理論，包含熱光效應、光彈效應，並推導出光纖光柵承受應變及溫度影響下共振波長飄移理論。最後，簡介光纖光柵的種類演進與製作方式改良過程。儀器方面則包含光纖光柵相關光學元件、光纖位移計以及波長解調系統 I-MON，並簡介實驗室自行開發的光纖光柵即時量測系統。

第三章 階梯變化圓板承受動態負載理論分析與實驗量測

首先針對厚度呈現階梯變化等向性材料所構成圓形平板，由薄板理論統御方程式並搭配模態展開法配合邊界與連續條件，獲得圓形平板暫態物理量之面外位移解析解與共振頻率。同時探討鋼珠落擊圓板時波源歷時與共振頻率，實驗中使用壓電薄膜感測器 PVDF 進行量測，最後整合數學理論解析、全域光學系統電子斑點干涉術(AF-ESPI)實驗量測和有限元素法軟體(COMSOL 軟體)等比較結果，分析結構體共振模態頻率與振形相關性。接著將所量測到波源歷時結果代入圓板暫態位移解得到理論解析，並與實驗量測結果、有限元素法軟體模擬等，上述三者間所得的結果進行時間域之各種物理量比較和關聯性深入探討。

第四章 應用 Mindlin 板理論於矩形壓電厚板振動分析與實驗量測

107 年吳亦莊博士論文利用 Mindlin 理論解析力電耦合的壓電材料系統，推導全自由邊界壓電矩形板之運動方程式與邊界條件，並將壓電板平面振動問題分類

為由彎曲振動(flexural vibration)與伸展振動(extensional vibration)主導下的動態問題。同時也利用 Gorman 疊加法(superposition method)求得壓電矩形板在全自由邊界下自由振動的共振頻率與振動模態理論。本章依據吳亦莊博士論文理論結果，來分析不同尺寸壓電板的振動問題，進行交叉比對包括理論解析、電子斑點干涉術(AF-ESPI) 對四種不同電極形式壓電方板進行激振實驗，並比對有限元素(FEM)的分析共振頻率與模態形狀等結果，來驗證 Mindlin 理論正確性。再由吳亦莊博士理論推導所得位移場的解析解，與物體振動產生的應力場與電場等理論結果，本章也進一步將理論結果與 FEM 數值模擬進行比較，可得知應力總和與電通量或電場的分布的關係，並藉此結果來設計激振電極以降低激振需要的能量。

第五章 避震器系統之溫升、變形及振動量測

布拉格光纖光柵具有高靈敏度、徑細質輕、多點量測能力以及不受電磁波干擾等優勢，本章實驗在避震器表面黏貼光纖光柵感測器進行次微米的多點量測，利用本實驗室以 Matlab 軟體自行開發的即時訊號分析系統，透過分析計算即時將熱及應變溫升快速解耦合，得到避震器試驗過程中的熱變形及溫升歷程，並與熱電偶與熱像儀做進行比較分析，進而得到避震器表面材料的熱膨脹係數，同時量測避震器各區段的熱變形後，可得到避震器作動時整體伸長量，經頻譜分析也可以得到避震器作動頻率。

第六章 彈簧的動態量測與遠端監控系統

本章應用光纖光柵感測器具有高解析度等多項量測優勢，將光纖光柵感測器黏貼於避震彈簧表面量測壓縮彈簧變形量，接著藉由 MATLAB 程式語言開發即時量測系統，可對彈簧系統在各種不同頻率作動下動態行為進行精密的多點變形量測；除此之外，彈簧經由長期往復壓縮過程中所造成交變應力作用，會因為達到疲勞強度而導致斷裂失效，為預防這種情形發生，本章採用交互相關的方式解析訊號

的相似程度，若是解析出的相關係數值出現劇烈的改變，即代表兩訊號有極大不同，此時即可預測彈簧系統可能已經面臨損壞情況。

同時介紹本章使用數位影像相關法(Digital Image Correlation, DIC)的基本原理與搜尋演算法，以及實驗操作流程與量測所需的儀器設備具體規格。再利用全域非接觸式光學量測數位影像相關法技術，來針對壓縮彈簧實驗進行量測。同時藉由 MATLAB 程式語言開發即時量測系統加值在數位影像相關法，利用 MTS 萬能試驗機對彈簧進行往復式壓縮運動，將 DIC 之量測結果與 MTS 之輸出進行分析，依照 DIC 量測結果來計算彈簧係數後，再與原廠量測結果進行比較。本章實驗結合遠端即時監控系統，可由遠端監控即時量測結果，當設備發出異常訊號時，監控系統會自動傳送簡訊至操作員的手機，操作員便可依據所接收的資訊，即時進行相關故障問題排除。

第七章 應用數位影像相關法 Micro LED 瑕疵檢測

本章引用前章應用數影法概念進行 Micro LED 良品與瑕疵品辨識，首先藉由光學自動檢測設備拍攝 Micro LED 晶粒影像建立影像資料庫，並選擇良品標準影像作為比對標準樣板，配合演算法進行 Micro LED 定位及判斷瑕疵態樣。再藉由開發軟體介面匯入 Micro LED 良品與瑕疵品影像資料庫，並由演算法逐一與良品標準影像進行影像比對與運算，每張影像比對後可得到歸一化交叉相關性係數，同時相關性係數將與設定閾值(設定值為 0.95)進行比對，當相關性係數低於設定閾值時即為判定不合格或瑕疵晶片，反之則為合格晶片。

第八章 結論與未來展望

針對本文的主要研究成果進行統整說明，將各章的理論、模擬與實驗結果互相比較，最後深入探討並建議未來可進一步發展之研究方向。

第二章 實驗設備與量測原理介紹

本章首先介紹具全域與非接觸的電子斑點干涉術光學量測技術，藉由這個技術可用來同時量測震動結構物體共振頻率與其所對應的模態。本文使用電子斑點干涉術面外架設的量測方式對圓板振動特性進行量測，及電子斑點干涉術面內與面外量測架設方式來進行壓電方板振動特性的量測，並結合阻抗分析儀量測壓電方板在四種切割電極下面內伸展振動共振頻率。對於壓電薄膜 PVDF 感測器系統，主要在待測物上貼附壓電薄膜 PVDF 感測器，可用來即時量測待測物面內應變，進一步應用時域轉換成頻域數學轉換關係，可快速得到結構系統達到共振時的頻率，比較壓電薄膜 PVDF 感測器與其他壓電材料，其具有可承載較大外力衝擊的產品優勢，因此也利用壓電薄膜 PVDF 感測器來量測鋼珠落擊物體實驗的波源歷時與進行暫態分析。

本章將也介紹基本的光纖光學與光纖光柵原理，同時說明熱光效應和光彈效應對光纖光柵傳播特性的影響，並且結合前述兩者效應，闡述共振波長的飄移理論、光纖光柵同時在溫度場和應力場作用下的進行解耦合實驗結果。最後針對光纖光柵的種類以及量測方法進行詳細的描述。

2.1 電子斑點干涉術

全域性量測的電子斑點干涉術(electronic speckle pattern interferometry, ESPI)，可用來即時量測待測試片表面的動態和靜態變形狀況，該技術最先由全相術(holography)演變，結合雷射干涉與電腦影像處理系統來記錄成像圖形，可即時對試片進行全場域量測。ESPI 量測原理是利用物體表面出現變形時，在物體觀測面上的質點產生位移變化，因位移的變化造成干涉光場中的光程相位出現差異，變化而形成明暗相間的干涉條紋，而條紋影像強度的變化以光波波長作為量測基準。電子斑點干涉術量測上精度可達到次微米的位移量測標準，因其多半使用同調性較



好的氦氖雷射。相較應變規、加速規等需經複雜校正的傳統量測技術，電子斑點干涉術具有非接觸、全場域等量測優點，可用來及時量測物體振動特性，更適合探討物體全場域變形情況。

本論文採用振幅變動法(Amplitude-fluctuation ESPI, AF-ESPI)將傳統 ESPI 參考靜止影像，改為振動狀態參考影像(Wang et al. 1996)，把前後兩張振幅存在適當變化的影像進行相減影像處理程序，獲得模態全場位移干涉條紋的形狀，該方式除可降低干擾影像雜訊，得到清晰的干涉條紋，並可讓物體振動時振幅為零節線的區域，使其達到最亮干涉條紋，可大幅提升其模態條紋清晰度。

2.1.1 面外振動量測

圖 2.1 為整體 AF-ESPI 面外量測的光學架設系統，圖中氦氖雷射光源(He-Ne laser)從雷射管射出後(氦氖雷射為 Melles Griot 公司製造，型號：25 LHP 928，波長 632.8 nm，輸出功率 35 MW)，依序經過空間濾波器(spatial filter)、可調式分光元件(beamsplitter)，將雷射光分成兩道擴散光束即物光與參考光，而物光將投射在待測物體表面上並反射進入 CCD 相機(CCD 相機是 AVT 公司生產，型號：Pike F-505B，解析度 2452×2054)；另參考光投射至參考平板(reference plate)，再經參考平板漫反射成一種光斑式的參考光(speckled reference beam)，可防止鏡面光產生光暈現象，參考光反射在和 CCD 相機同直線的分光元件(bean splitter)，接著物光與參考光同軸進入 CCD 相機聚感光平面上。藉由影像擷取卡將 CCD 的類比訊號，轉換為數位訊號後進入個人電腦，在個人電腦中透過數位影像處理技術即時進行影像相減，全場干涉條紋影像即可直接顯示於電腦螢幕上，提供實驗者觀察到即時性量測物體資訊。

AF-ESPI 系統量測待測物共振頻率與模態中，實驗過程利用函數產生器穩定輸出固定頻率正弦信號，並採用功率放大器將訊號放大激振待測物。當待測物不具



備致動功能或機電耦合效率較差，則可將激振訊號輸入振動器(shaker)，或是將激振訊號輸入貼附待測物的壓電元件來震動結構。當待測物為壓電材料試片，就可直接將激振訊號輸入壓電材料試片使其產生振動。當待測物受訊號激振後，連續擷取待測物振動影像資訊，並以訊號處理系統將影像資訊進行即時相減處理，同步將干涉條紋的影像呈現在螢幕上，此時螢幕上可看到以位移等高線形式呈現之干涉影像，由此可得待測物全場域振動振幅的分佈情形。利用物體在共振時會產生最大位移量的物理特性，由 AF-ESPI 量測系統可得到明暗相間的干涉條紋，當待測物的振動頻率接近共振頻率時，干涉線條就會變得更加密集清晰，再由利用函數產生器調整激振電壓，使待測物在特定頻率下達到最大振動位移，即可得到待測物於共振時所反應的共振模態影像物理特性。

接著探討 AF-ESPI 量測的基本推導理論(林憲陽，2002)，先存取待測物體振動時第一張影像作為參考，而該物體振動時振幅的影像光強度如下數學式：

$$I_1 = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \{ I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} \cos[\phi + \frac{2\pi}{\lambda} (1 + \cos \theta_0) A \cos \omega t] \} dt \quad (2.1)$$

其中 τ 為 CCD 取像時間， I_O 物光強度， I_R 參考光強度， ϕ 為參考光與物光的相位差， λ 為雷射光的光波波長。

當物體開始振動後，假設自物體上某一點散射的物光存在相位角差改變量 $\Delta\phi$ ，若物體達到共振時的振幅為 A ， θ_0 是觀測方向（垂直物體表面的方向）與物光間夾角，振動的角頻率為 ω ，則此相位差數學式可表示為：

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (1 + \cos \theta_0) A \cos \omega t = \Gamma A \cos \omega t \quad (2.2)$$

其中令 $\Gamma = 2\pi(1 + \cos \theta_0)/\lambda$ 為 AF-ESPI 面外量測靈敏度，其值與系統架設相關，即架設角度 θ_0 可控制在愈接近 0° 時，具有愈大靈敏度值。若 $\tau = (2k\pi)/\omega$ 或 $\tau \gg (2k\pi)/\omega$ 可將(2.1)進一步積分簡化為：

$$I_1 = I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R}(\cos \phi) J_0(\Gamma A) \quad (2.3)$$



接著在待測物體振動過程中存取第二張影像，比較前一張擷取的 I_1 影像，產生振幅 ΔA 之微小變化，表示第二張影像的光強度如下：

$$I_2 = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \{ I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} \cos[\phi + \Gamma(A + \Delta A) \cos \omega t] dt \} \quad (2.4)$$

接著進行(2.4)泰勒級數數學展開，並忽略高次項(黃吉宏，1998)，並將其代入式中進行積分，可得第二張影像光強度數學式表示如下：

$$I_2 = I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R}(\cos \phi)[1 - \frac{1}{4}\Gamma^2(\Delta A)^2]J_0(\Gamma A) \quad (2.5)$$

若將第二張影像強度(2.5)與第一張影像強度(2.3)進行運算相減後，並經整流過程後顯示在電腦上，其影像光強度可表示為：

$$I = |I_2 - I_1| = \frac{\sqrt{I_O I_R}}{2} \left| \Gamma^2(\Delta A)^2 J_0(\Gamma A) \cos \phi \right| \quad (2.6)$$

觀察(2.6)式可知，振動振幅為函數 $|J_0(\Gamma A)|$ 項所調控，由零階貝索數學函數特性可知，當振動振幅 $A = 0$ 時， $|J_0(\Gamma A)|$ 函數存在最大數值為 1。因此，恰好對應量測物體振動時，在振形節線區的影像亮度為最亮的實驗結果。

2.1.2 面內振動量測

圖2.2是 ESPI 面內振動量測的光學架設圖，雷射光束經分光元件(beamsplitter)分出兩道面內雷射光束，經由空間濾波器(spatial filter)將兩道雷射光均勻擴散投射在待測物體表面，使其與物體表面以近乎平行且相等角度的入射光束對稱投射於待測物觀測面上，與面外架設相同原理，CCD 攝影機置於物體的法線方向上並對焦於物體待測表面。兩道光由待測物表面反射進入 CCD，干涉條紋圖形由 CCD 擷取再經影像卡作影像的後續處理。



面內振動的理論與面外振動類似，先假設面內振動之振幅為 A' ，並假設面內振動時的相位變化為(Wykes, 1982)：

$$\Delta\varphi' = 2\pi(2A' \cos \omega t \sin \theta')/\lambda = \Gamma' A' \cos \omega t \quad (2.7)$$

其中 $\Gamma' = 2\pi(2 \sin \theta')/\lambda$ 為 ESPI 面內量測靈敏度參數， θ' 為兩道對稱雷射光束夾角之半，因此架設的角度愈趨近 90° 時，兩道對稱入射光束越接近 180° 夾角時，存在愈大的位移量測靈敏度。面內架設理論推導與面外架設的推導非常相似，第一張影像光強度數學式為：

$$I_1 = I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} J_0(\Gamma' A') \cos \phi \quad (2.8)$$

第二張影像擷取時振幅存在 $\Delta A'$ 之變化，因此光強度數學式為：

$$I_2 = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left\{ I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} \cos[\phi + \Gamma'(A' + \Delta A')] \cos \omega t \right\} dt \quad (2.9)$$

與面外振動理論推導相同，將兩張影像相減運算以消去直流項，可得整流後之干涉影像光強度數學式為：

$$I = |I_2 - I_1| = \frac{\sqrt{I_O I_R}}{2} |\Gamma'^2 (\Delta A')^2 J_0(\Gamma' A') \cos \phi| \quad (2.10)$$

由(2.10)可推論面內位移量測振動的模式中，由 $|J_0(\Gamma' A')|$ 項來調控影像暗、亮紋路。

綜合上述推導結果，可知面外與面內位移之影像亮、暗條紋的理想狀況皆由 $|J_0(\Gamma A)|$ 或 $|J_0(\Gamma' A')|$ 項所調控，而靈敏度參數分別如(2.6)式與(2.10)式，若取理想的面外 $\theta_0 = 0^\circ$ 與面內 $\theta' = 90^\circ$ ，與實驗架設約為面外 $\theta_0 = 17^\circ$ 與面內 $\theta' = 60^\circ$ ，其關聯性相互比較如圖2.3所示。



2.2 阻抗分析原理與儀器介紹

2.2.1 阻抗分析儀的基本原理

在本節中說明阻抗定義及阻抗隨頻率變化的情況，所謂阻抗 (impedance)就是待測元件(或具備電容、電感及電阻的電路)對週期性電流或交流性電流所產生之總抗力。以壓電元件而言，由於輸入電能會與輸出之機械運動相互耦合，因此在壓電材料的電性阻抗 (electrical impedance)特徵上會與其它非壓電性介電元件產生明顯的區別，通常對於具有簡單幾何形狀壓電元件，在特定諧振頻率附近的頻率阻抗圖往往會伴隨存在共振點及反共振點的特徵曲線。

當上下表面批覆電極的壓電平板，可視為自由諧振器 (resonator)，假設在無功率損失情形，其電阻抗可表成(2.11)式：

$$Z_e = \frac{1}{iC_0\omega} [1 - K^2 \frac{\tan(\omega d/2V_p)}{\omega d/2V_p}] \quad (2.11)$$

其中 K^2 為耦合係數 (coupling coefficient)、 C_0 代表靜態電容 (static capacitance)、 d 為平板厚度、 V_p 為壓電元件的波速、 $\omega = 2\pi f$ 、 f 為所量頻率值。

若以 $|Z_e|$ 為縱座標及頻率 f 為橫座標，考慮某一諧振頻率附近內依(2.11)式所繪出曲線圖如圖 2.4 所示；當阻抗值為最低時，由 $Z_e = \frac{U}{I}$ 可知，當固定電壓的掃頻訊號下，一些特定頻率流過電流最大，此時電極面衍生的表面電荷最多，若對應電磁學與力學物理量，電荷 q 與位移 u 相對應，電流 I 則與速度 v 相對應，因此若在壓電元件內流過電流最大所反應其機械位移上則可視為共振現象。因此在頻率阻抗圖中，當阻抗

值達到局部最低時，此時所對應之頻率為此壓電元件之共振頻率 $f_{resonance}$ ，相反的，對應局部最高阻抗值的頻率則稱為反共振頻率 $f_{anti-resonance}$ 。我們亦可由(2-12)式計算壓電材料之壓電偶合的程度。

$$K_d^2 = \frac{f_a^2 - f_r^2}{f_r^2} \quad (2.12)$$

2.2.2 阻抗分析儀的實驗設備

在圖 2.5 中就是利用 HP4194A 的阻抗分析儀量測壓電試片共振頻率的實驗架構，信號的輸入及輸出係由壓電材料的電極面利用兩條漆包線連接到 HP16047D 的固定夾具，在阻抗分析儀內則可設定 Impedance 模式及掃頻範圍。

2.3 壓電薄膜 PVDF 量測系統

考慮高分子聚合物聚偏二氟乙烯(polyvinylidene fluoride, PVDF)，在恆溫的電場環境下，對壓電薄膜 PVDF 進行拉伸，會產生極化現象，具有誘生良好壓電特性。因此，壓電薄膜 PVDF 被廣泛應用在傳感器或感測器，主要其受到外加負載而產生變形，會有電荷產生在上下電極特性，可用來針對待測物進行非破壞性檢測。壓電薄膜 PVDF 具有質量密度低與材質柔韌特性，在高頻率下具有良好的機電效應，與其他壓電材料相比，壓電薄膜 PVDF 可承受較大衝擊力與極佳動態特性，可用來量測暫態面內應變。

文中使用 Measurement Specialties 公司所生產壓電薄膜 PVDF 感測器(Part number: 1-1004346-0)，材料參數如表 2.1。首先由原廠 PVDF 薄膜依實驗需求剪裁出適當尺寸，利用銀膠黏貼漆包線在 PVDF 薄膜上下兩電極面，再將薄膜感測器 PVDF 成品用應變膠貼附在待測物表面上，如圖 2.6。PVDF 壓電薄膜感測器進



行實驗量測時，需搭配電荷放大器將薄膜輸出的電荷轉換為電壓。本文選用瑞士 KISTLER 公司所生產 5064B11 電荷放大器，搭配 2852A11 調控平台，輸入 100(pC)~100,000(pC) 電荷範圍，量測頻率範圍 0(Hz)~200(Hz)，最大輸出電流與電壓為 2(mA) 及 10 (V)。

圖 2.7 為壓電薄膜 PVDF 感測器連接電荷放大器的電路模型，其中 C_0 是電容、 V_S 是 F 輸出電壓、 C_C 是電纜電容、 R_a 是的輸出阻抗、 A 是放大器增益、 V_i 是輸入電荷放大器之電壓， R_f 是電荷放大器阻抗、 C_f 是電荷放大器的回授電容、 V_o 是電荷放大器輸出電壓。電荷放大器中電流 i 可表示為

$$i = (V_i - V_o) \left(\frac{1}{R_f} + j\omega C_f \right) \quad (2.13)$$

由 $V_o = -AV_i$ ，所以改寫式(2.13)為

$$i = V_i \left[j\omega(A+1)C_f + (A+1) \frac{1}{R_f} \right] \quad (2.14)$$

依據克希荷夫電流定律(Kirchhoff's current law)，流進與流出節點(Node)的總電流一致性，所以對 V_i 節點而言：

$$(V_S - V_i) j\omega C_o = V_i \left[j\omega(A+1)C_f + \frac{(A+1)}{R_f} \right] + j\omega V_i C_C + \frac{V_i}{R_a} \quad (2.15)$$

整理(2.15)後可以求出輸出電壓 V_o 為：

$$V_o = \frac{-j\omega A V_S C_o}{j\omega [(A+1)C_f + C_o + C_C] + \frac{1}{R_a} + \frac{(A+1)}{R_f}} \quad (2.16)$$



當電荷放大器的增益非常大 $A \gg 1$ ，將式(2.16)可進一步簡化如下

$$V_0 = \frac{-j\omega V_S C_o}{j\omega C_f + \frac{1}{R_f}} \quad (2.17)$$

當處理高頻訊號時($\omega \gg 1$)，則可將 $1/R_f$ 忽略，並且令 $V_S C_a = Q$ ，所以式(2.17)可改為如下式

$$V_0 = \frac{-V_S C_o}{C_f} = \frac{-Q}{C_f} \quad (2.18)$$

其中 $Q = V_S C_o$ 代表壓電薄膜 PVDF 上累積的電荷。考慮式(2.18)中，假若電荷放大增益值非常大時，增益值與高頻電壓輸出訊號無關聯性，僅和放大器回授電容 C_f 與電荷量 Q 具有相關。考慮結構變形時，結構物上的壓電薄膜 PVDF，受到負載產生變形而誘生電荷即正壓電效應，電荷 Q 與應變關係如下

$$Q = \int_{A_p} (d_{31} E_P \varepsilon) dA_p \quad (2.19)$$

其中 E_P 是壓電薄膜 PVDF 楊氏係數、 d_{31} 是 Piezo strain constant、 A_p 是壓電薄膜 PVDF 感測器面積、 ε 代表面內應變。壓電薄膜 PVDF 輸出電壓與應變關係將式由(2.18)、(2.19) 合併可得

$$V_0 = \frac{-\int_{A_p} (d_{31} E_P \varepsilon) dA_p}{C_f} \quad (2.20)$$

當壓電薄膜 PVDF 輸出的不是高頻訊號時，不可忽略式(2.17)中電荷放大器阻抗 R_f ，因此，電荷放大器的輸出電壓之振幅 $|V_0|$ 可表示如下

$$|V_0| = \frac{\omega Q}{\sqrt{\omega^2 C_f^2 + \frac{1}{R_f^2}}} \quad (2.21)$$



若 $\omega C_f = 1 / R_f$ ，此時 ω 稱為截止頻率，其數學式為

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi C_f R_f} \quad (2.22)$$

得相位差數學式為

$$\phi = 180^\circ + \tan^{-1} \left(\frac{1}{\omega C_f R_f} \right) \quad (2.23)$$

則式(2.21)可進一步改寫為

$$|V_0| = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{Q}{C_f} \quad (2.24)$$

由式(2.22)和(2.23)兩式可知，可因應量測訊號的工作頻率範圍需求，來調整電荷放大器之設定值，其原因是壓電薄膜 PVDF 感測器經由電荷放大器後，低頻訊號的截止頻率和相位差，只和電荷放大器回路內的電路參數有關。

2.4 光纖光柵基本理論與製作方法

2.4.1 光纖光學基本原理

光纖構造組成屬於細長圓柱管的軸對稱結構，主要由具不同折射率三層材料所組成如圖 2.8。依照折射率的不同，由最外至最內層可分成塗佈層(coating)、纖殼(cladding)及纖核(core)等，其相對直徑大小分別約為 $245(\mu m)$ 、 $125(\mu m)$ 及 $9(\mu m)$ 。

光纖屬於光波導(optical waveguide)的應用範圍，可用司乃爾定律(Snell's Law)公式來表示光的傳播如圖 2.9，公式如下：

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (2.25)$$

其中 n_1 、 n_2 分別代表為入射光介質與折射光介質的折射率。 θ_1 、 θ_2 分別為光之入射角與反射角，考慮光從高折射率的介質進入到低折射率的介質($n_1 > n_2$)，由式(2.25)



可知，入射角會小於折射角($\theta_1 < \theta_2$)，如圖 2.9 中的第一道光源(S_1)入射介質後，一部分光會以 θ_2 折射(S_3)，剩下的部分則會以 θ_1 反射(S_2)。而隨著入射角逐漸變大，折射角也隨之變大，當折射角恰好等於 90° 時，如圖 2.9，第二道光源折射光會沿著平行界面的方向傳播，稱此時入射角為臨界角(critical angle θ_c)，根據式(2.25)，臨界角 θ_c 可表示為：

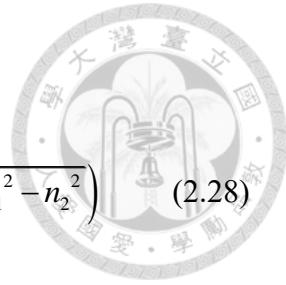
$$\theta_c = \sin^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \quad (2.26)$$

當入射角超過臨界角時，則不會形成折射光，此時折射光沿著軸向傳遞的界面波，所有的入射光能量完全反射回原介質，如圖 2.9 第三道光源稱此為全反射(total reflection)現象。

光纖是利用全反射現象進行傳播，在光纖中纖殼和纖核折射率的不同，纖殼的折射率較纖核小，當入射光以特定角度 ϕ 進入光纖核後，在纖殼和纖核交界面會不斷的進行全反射傳導，使光沿光纖軸向往前傳輸。由前文推導結果，光在光纖中入射角 θ 大於臨界角 θ_c 時就是發生全反射傳導的必要條件，使得光在纖核內產生全反射機會增加，有關步階式折射率分佈光纖導光原理如圖 2.10。

考慮纖核折射率為 n_1 ，而纖殼折射率為 n_2 ，由式(2.26)可知纖核入射纖殼的角度 θ 必須大於 θ_c ，也就是說光由一介質進入光纖的纖核後，折射角度 ψ 要小於 $90^\circ - \theta_c$ ，若此介質為空氣(折射率近似為 1)，當 $\psi = 90^\circ - \theta_c$ 時，定義此時光由空氣進入纖核入射角度為 ϕ_a ，根據司乃爾定律：

$$1 \times \sin \phi_a = n_1 \times \sin \psi = n_1 \times \sin (90^\circ - \theta_c) = n_1 \times \cos \theta_c \quad (2.27)$$



因此

$$\phi_a = \sin^{-1} (n_1 \times \cos \theta_c) = \sin^{-1} \left(n_1 \times \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_1} \right) = \sin^{-1} \left(\sqrt{n_1^2 - n_2^2} \right) \quad (2.28)$$

所以，當光在纖核中進行全反射條件就是光由空氣進入纖核的入射角度 ϕ 必須小於 ϕ_a ，此時稱 ϕ_a 為二分之一接受角(half acceptance angle)，而由 ϕ_a 所旋轉得到幾何曲面稱為接受圓錐面(acceptance cone)，錐面所展開的角度稱為接受角(half acceptance angle， $2\phi_a$)，因此光由空氣進入纖核的入射角度必須在接受錐面內，使得光以全反射的方式在纖核中進行傳導，可以減少光傳遞上能量的損耗。

一般使用上用數值孔徑(numerical aperture，NA)來評估光纖接受角的大小，其數學式如下所示：

$$NA = \sin \phi_a = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (2.29)$$

除入射角度必須滿足小於二分之一接受角條件外，光波的能量也必須能夠穩定儲存在於纖核中，其主要條件在於光波傳導是否能採駐波的方式進行，若光從上邊界開始全反射到下邊界全反射後，再回到上邊界，稱光程為一個週期，隨著光重覆反射傳導時，會產生橫向相位的變化。根據電磁波理論可知，當此相位變化量為 2π 整數倍時，光才會以駐波的形式將能量封閉在纖核中傳導。因此不僅入射角度要小於二分之一接受角，光纖也不容許光以任何傳播角的方式行進在光纖中。當入射光(彼此間不連續)得以滿足這些傳播條件並在光纖中傳導時，光傳播模態(propagation mode)觀念知徑向電場分佈在任何軸向位置上都相同。

由正規化頻率(normalized frequency，V)可決定光在光纖內傳播的模態數量，當正規化的頻率越高，表示在光纖內的光傳播模態越多，而以電磁波理論來推導正規化頻率數學表示方法如下：



$$V = \frac{2\pi a}{\lambda_0} NA = \frac{2\pi a}{\lambda_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (2.30)$$

其中 a 為纖核半徑， λ_0 為傳播的光波長。式(2.30)中得知纖核半徑和正規化頻率與數值孔徑成正比，而反比於傳播光波長。當正規化的頻率越高，光在光纖內的傳播模態數將越多，當符合 $V < 2.4048$ 的條件時，光將採取單一模態的方式在光纖中傳播，稱此類光纖為單模態光纖，其中零階貝色函數(Bessel function of zero order, J_0)第一個根數值為 2.4048。

依照以上討論，纖核直徑以及數值孔徑的選擇上必須夠小，也就是纖殼和纖核間折射率要非常接近。一般光纖製作後，其纖核直徑、纖殼以及纖核的折射率(即數值孔徑)已確定，因此也已決定光單模態方式傳播時的最小波長，稱此最小波長為截止波長(cut-off wavelength)。反之，比截止波長光低的光則會以多模態的方式進行傳播。

從相異模態的光在光纖中傳導時會產生不同的傳導速度的電磁波理論，模態傳播常數定義如下：

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} n_{eff} \quad (2.31)$$

其中 n_{eff} 為光纖等效折射率， λ 為光的波長。利用電磁波理論可以得到光纖等效折射率，而不同的傳播模態會對應到不同等效折射率，因此模態傳播常數也會有所不同。再從光纖的基本幾何形狀(如圖 2.10)可求得單模態步階式的折射率分佈光纖等效折射率，因此由式(2.31)可得單模態的傳播常數為

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} n_{eff} = \frac{2\pi}{\lambda} n_1 \sin \theta \quad (2.32)$$

其中 θ 為光傳播的反射角， n_1 是纖核的折射率。



2.4.2 光纖光柵基本原理

依據線性幾何上光學的繞射原理(diffraction)，當光射入單一狹縫的圓孔時，會產生一階貝色函數(first order of Bessel function， J_1)繞射暗亮相間條紋。以單狹縫的原理基礎，可以推廣到週期性的狹縫結構，如圖 2.11。此種週期性狹縫結構稱為光柵結構(grating)，當光通過光柵時所產生繞射波彼此會互相疊加，根據線性幾何光學原理，可得到光通過光柵的繞射數學結果如下：

$$n \sin \theta_2 = n \sin \theta_1 + m \frac{\lambda}{\Lambda} \quad (2.33)$$

其中 θ_1 與 θ_2 分別代表為光入射角與繞射角、 n 為介質折射率、 Λ 為光柵週期長度、 λ 為光波長、 m 為繞射階數。當 $m=0$ 時表示為第零階繞射光，且具有最強光能量，直進光可以直接穿過光柵，當 $m=-1$ 時為第 -1 階次強能量繞射光，此繞射光的重要性及相關的應用將在後面進一步詳細說明。

光纖光柵是把光柵的結構製作於光纖中，光在光纖中的傳播時，當光通過光柵時會有繞射的物理現象，因此模態會受到外在環境影響，而產生出其他相異的傳播模態，由式(2.32)及式(2.33)整理可推得：

$$\beta_D = \beta_I + m \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (2.34)$$

其中 β_D 為受光柵擾動產生的繞射光模態傳播常數、 β_I 為入射光模態傳播常數。當繞射階數 $m=-1$ 時，由式(2.34)可推得：

$$\beta_D = \beta_I - \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (2.35)$$

光傳播當光柵段受到擾動時，會造成原來的傳播模態有部分能量轉移到某些誘生出來的傳播模態上，極為模態耦合(coupling)現象。



2.4.3 光彈效應與熱光效應

當光在光纖光柵中傳播時，光纖光柵因環境中外力負載或溫度影響時，會影響光傳播的物理特性，其中與外力應變具關聯性的部分稱為光彈效應(photo-elastic effect)，熱光效應(thermo-optic effect)為與溫度場相關，利用以上兩種效應的光纖光柵，就是應用於溫升及應變來進行物體定量上的量測。

A 光彈效應

彈性介質的應變場與非導磁性的相對介電張量(relative dielectric impermeability tensor)相對間的變化關係稱為光彈效應，若以光纖光柵範疇來看，即為折射率與應力場的交互關係。

光傳輸在真空介質中的傳播速率為 c ，可將光速利用真空裝態下介電係數(permittivity, ϵ_0)與導磁係數(permeability, μ_0)表示為：

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (2.36)$$

若光在某介質下傳播，可用該介質導磁係數 μ 與介電係數 ϵ 表示傳播速率為：

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad (2.37)$$

一般介質的物理折射率定義為真空中與介質中兩者的光速比值，除了鐵磁性(ferro-magnetic)材料以外介質，其介質中的導磁係數與真空中兩者的值相同(即 $\mu = \mu_0$)，因此介質的折射率 n 可表示為：

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{\mu_0 \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \sqrt{\epsilon_r} \quad (2.38)$$

其中 ϵ_r 為相對介電係數(relative permittivity)。

非等向性(anisotropic)材料介電係數以二階張量表示，因此折射率也同樣以二階張量來表示：



$$n_{ij} = \sqrt{\frac{\epsilon_{ij}}{\epsilon_0}} \quad (2.39)$$

對於此非等向性材料而言，以三個主軸方向 (x_1, x_2, x_3) 當成折射率基本座標，

可根據軸上的折射率函數值描繪出橢圓球。若光從任意方向進入或穿透介質時，可將折射率可以看成為通過原點，且以垂直方向進入其平面，並與橢圓球相交及形成橢圓的長短軸大小值。另外定義非導磁性相對介電張量(relative dielectric impermeability tensor, B_{ij})如下式：

$$B_{ij} = \frac{1}{n_{ij}^2} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{ij}} \quad (2.40)$$

由 B_{ij} 可以導出橢圓球體數學方程式為：

$$B_{11}x_1^2 + B_{22}x_2^2 + B_{33}x_3^2 = 1 \quad (2.41)$$

介電係數會因為介質受到應變場 ϵ_{kl} 作用時產生改變。考慮應變量很小情況，兩者間數學關係式簡化如下：

$$\Delta B_{ij} = p_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (2.42)$$

而式(2.42)為光彈效應表示式，其中光彈係數 p_{ijkl} (photo-elastic coefficient)為四階數學張量，對於不同材料其光彈的係數對應不同張量值。

由能量守恆推得非導磁相對介電張量是一個對稱張量(symmetric tensor)，表示為：

$$B_{ij} = B_{ji} \quad (2.43)$$

式(2.43)表示在 B_{ij} 張量中，基於對稱性，所以九個變量中只有六個屬於互相獨立變量，可以將二階張量進行數學簡化為一維矩陣相等式 $B_k (k = 1 \sim 6)$ ，表示如下：



$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & B_6 & B_5 \\ B_6 & B_2 & B_4 \\ B_5 & B_4 & B_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

對於線性彈性力學(linear elasticity)數學推導過程中，應變也是二階對稱的張量
數學式：

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (2.45)$$

所以，同樣可以將二階應變張量化簡為一維矩陣相等式 $\varepsilon_k (k=1 \sim 6)$ 表示如下：

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_6 & \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 & \varepsilon_2 & \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 & \varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

四階張量光彈係數可由式(2.44)和式(2.46)降階簡化為二階數學張量 p_{kl}
($k, l=1 \sim 6$)，所以 (2.42)式光彈效應表示式簡化為：

$$\Delta B_k = p_{kl} \varepsilon_l \quad (2.47)$$

考慮等向性(isotropic)的材料，在式(2.47)光彈係數張量 p_{kl} 中存在兩個獨立數學變
量，因此 p_{kl} 可簡化為：

$$p_{kl} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{12} & p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{66} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$



其中 p_{11} 、 p_{12} 和 p_{66} 間具相依性，數學表示為 $p_{66} = \frac{p_{11} - p_{12}}{2}$ 。

將 (2.40)式帶入(2.47)式，得到應變與折射率變化之間數學關係式，若以一維矩陣形式來表示折射率，則向量 $n_k (k=1 \sim 6)$ 可以表示為：

$$\Delta n_k = -\frac{1}{2} n^3 \Delta B_k = -\frac{1}{2} n^3 p_{kl} \epsilon_l \quad (2.49)$$

本文使用石英系玻璃光纖光柵，因為光纖內部纖核材料屬於等向性(isotropic)，因此在光彈係數張量中只存在 p_{11} 與 p_{12} ，數值如下：

$$\begin{cases} p_{11} = 0.113 \\ p_{12} = 0.252 \end{cases} \quad (2.50)$$

B 热光效應

溫度場與介質折射率變化量之間關係式稱熱光效應(thermo-optic effect)，其關係式如下：

$$\Delta n_i = \frac{\partial n_i}{\partial T} \Delta T = \xi_i \Delta T \quad (2.51)$$

其中 Δn_i 代表折射率變化量、 ξ_i 為熱光係數(thermo-optic coefficient)、 ΔT 為溫度變化量。在式(2.51)中用 ξ_i 符號來表示等向性材料中，折射率和溫度變化量兩者間的線性比例常數。當溫度小於 200°C 時，熱光係數才會落在線性段，當超過 200°C ，光熱係數將不再是常數值，而是表現出與溫度相關函數的非線性關係。

本文中所使用光纖光柵中纖核材質屬於含鋯等向性石英系玻璃材料，實驗溫度範圍也在 $200(^{\circ}\text{C})$ 內，因此熱光係數可視為定值 $\xi \approx 8.3 \times 10^{-6} (1/\text{K})$ 。



2.4.4 共振波長飄移理論

本節導入光纖光柵的基本理論，結合上述熱光效應與光彈效應，推導出光纖光柵之共振波長的飄移量，可用來描述同時加載應變場與溫度場在光纖光柵下，兩者之相互影響定量關係。

A 共振波長飄移原理

短週期的光纖光柵共振波長可以表示為：

$$\lambda = (n_{eff,I} + n_{eff,D})\Lambda \quad (2.52)$$

其中 $n_{eff,I}$ 、 $n_{eff,D}$ 分別代表入射與反射傳播模態等效折射率， Λ 為光柵週期長度。考慮基本模態情況的單模態傳播光纖，其入射和反射傳播模態等效折射率在入射與反射均相同，表示如下：

$$n_{eff,I} = n_{eff,D} = n_{eff} \quad (2.53)$$

若將(2.53)代入(2.52)短週期光纖光柵之共振波長，定義此單模態傳播光纖之共振波長稱之為布拉格波長 λ_B (Bragg wavelength)，可以表示為：

$$\lambda_B = 2n_{eff}\Lambda \quad (2.54)$$

因此，只要環境存在應變場或者是溫度場之任何擾動，使得光纖光柵之等效折射率 n_{eff} 或是光柵週期 Λ 產生變化，會造成產生左右飄移布拉格共振波長 λ_B 物理現象，就是共振波長飄移理論的基礎。

依照圖 2.12 所示，我們定義光纖軸向為 x_1 ， x_2 和 x_3 方向分別為光纖之徑向，用以探討共振波長飄移量和應力與溫度的關係。當光纖光柵在受應力與溫度影響皆會產生應變，因此分別定義出 ε_j 為僅承受應力時所產生應變量，而 ε_j^* 為溫度和



應力同時作用下，所造成的總應變量， ε_j 和 ε_j^* 兩者間關係式可表示如下：

$$\varepsilon_j^* = \varepsilon_j + \alpha \Delta T \quad (2.55)$$

其中 α 為光纖熱膨脹係數 (thermal expansion coefficient)，一般數值約 $\alpha \approx 5.5 \times 10^{-7} (1/K)$ 。

假設環境僅存在應變場與溫度場擾動，可將式(2.54)進行微分運算改寫為：

$$\frac{\Delta \lambda_B}{\lambda_B} = \frac{\Delta \Lambda}{\Lambda} + \frac{\Delta n_{eff}}{n_{eff}} = \varepsilon_1^* + \frac{\Delta n_{eff}}{n_{eff}} \quad (2.56)$$

式(2.56)中 ε_1^* 代表受到溫度與外力影響時，光纖軸向所承受的溫度場與外力場應變量總和。

依電磁波理論，光波屬於橫波，所以只有當橫向(x_2, x_3 方向)折射率有變化時，才會產生波長飄移。而相異方向的擾動，折射率會產生不同的變化量，因此式(2.56)可簡化為表示式：

$$\frac{\Delta \lambda_{B,i}}{\lambda_B} = \varepsilon_1^* + \frac{\Delta n_{eff,i}}{n_{eff}} \quad ; \quad i = 2, 3 \quad (2.57)$$

而應變和折射率變化量與溫度變化的關係，可結合光彈效應方程式(2.49)與熱光效應方程式(2.51)得到的關係式，可表示如下：

$$\frac{\Delta n_{eff,i}}{n_{eff}} = -\frac{n_{eff}^2}{2} \sum_{j=1}^6 p_{ij} \varepsilon_j^* + \frac{\xi}{n_{eff}} \Delta T \quad ; \quad i = 2, 3 \quad (2.58)$$

再將等向性材料光彈係數張量 p_{ij} 式(2.48)導入式(2.58)整理，並將整理後結果合併再代入式(2.57)，再以式(2.55)將結果數學展開，就可以推導出布拉格波長飄移量與應變場溫度場之相對應關係：



$$\frac{\Delta\lambda_B}{\lambda_B} = \varepsilon_1 - \frac{n_{eff}^2}{2} \sum_{j=1}^6 p_{ij} \varepsilon_j - \frac{n_{eff}^2}{2} \sum_{j=1}^6 p_{ij} \alpha \Delta T + \frac{\xi}{n_{eff}} \Delta T + \alpha \Delta T \quad i = 2, 3 \quad (2.59)$$

接著分別將 $i = 2, 3$ 代入(2.59)展開後，即可表示出兩個橫向布拉格波長對於應變與溫度變化之間的關係，可以表示為：

將 $i = 2$ 代入式(2.59)時：

$$\frac{\Delta\lambda_{B,2}}{\lambda_B} = \varepsilon_1 - \frac{n_{eff}^2}{2} (p_{11}\varepsilon_2 + p_{12}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)) + \alpha \left(\frac{\xi}{n_{eff}} - \frac{n_{eff}^2}{2} (p_{11} + 2p_{12}) + 1 \right) \Delta T \quad (2.60)$$

將 $i = 3$ 代入式(2.59)時：

$$\frac{\Delta\lambda_{B,3}}{\lambda_B} = \varepsilon_1 - \frac{n_{eff}^2}{2} (p_{11}\varepsilon_3 + p_{12}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)) + \alpha \left(\frac{\xi}{n_{eff}} - \frac{n_{eff}^2}{2} (p_{11} + 2p_{12}) + 1 \right) \Delta T \quad (2.61)$$

因此，當光纖受到環境的應變場或溫度場擾動時，即可透過式(2.60)及式(2.61)算出布拉格波長的飄移量。反之，若已知變量為布拉格共振波長飄移量，卻無法反推求得各自應變場與溫度場變化來算出應變或溫升，主要是因為等式中存在四個未知數包含 x_1 、 x_2 、 x_3 三個方向應變量與溫度變化 ΔT ，只有(2.60)與(2.61)兩個方程式，實際上少了兩個條件，造成無法將應變與溫升進行解耦合情況。

考慮單軸向應力、平面應力，或只有溫度影響特定情況，即可將式(2.60)以及(2.61)進行簡化，由布拉格波長飄移量進行數學反推得到應變量或溫度變化量，透過這些特性，可利用光纖光柵感測器進行量測。

B 承受平面應力

首先定義薄板結構座標軸如圖 2.13，考慮薄板結構只受到平面應力(即 $\sigma_3 = 0$)，根據虎克定律(Hooke's law)，薄板結構可以推導出三個主軸方向應力與應變的關係，表示式如下：

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) \\ \varepsilon_3 &= \frac{-\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2)\end{aligned}$$



(2.62)

其中 E 為光纖的楊氏係數(Young's modulus)，數值約為 $70(Gpa)$ ， ν 為光纖浦松比(Poisson's ratio)，數值約 0.17 。

由式(2.62)皆可由兩個主應力值 σ_1 、 σ_2 導出主應變量 ε_1 、 ε_2 、 ε_3 。若將式(2.62)代回式(2.60)及式(2.61)，以下為兩橫向布拉格波長飄移量與平面上應力及溫升之間的關係式，以矩陣方式表示為：

$$\frac{1}{\lambda_B} \begin{bmatrix} \Delta\lambda_{B,1} \\ \Delta\lambda_{B,2} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} + K_T \Delta T \quad (2.63)$$

其中 K_1 、 K_2 、 K_3 、 K_4 、 K_T 分別表示如下：

$$\begin{aligned}K_1 = K_3 &= 1 + \frac{n_{eff}^2}{2} (\nu(p_{11} + p_{12}) - p_{12}) \\ K_2 &= -\nu + \frac{n_{eff}^2}{2} (2\nu p_{12} - p_{11}) \\ K_4 &= -\nu + \frac{n_{eff}^2}{2} (\nu(p_{11} + p_{12}) - p_{12}) \\ K_T &= \frac{\xi}{n_{eff}} - \frac{n_{eff}^2}{2} \alpha(p_{11} + 2p_{12}) + \alpha\end{aligned} \quad (2.64)$$

針對不同的問題進行簡化解析，以下對平面應力、單軸向應力及只受到溫度變化等情況來探討，藉由光纖量測之布拉格共振波長值變化量，來反推在不同應用條件下應變量或溫度量值。



C 承受單軸向應力

若光纖只受到 x_1 方向軸向應力如圖 2.12，可將式(2.62)平面應力之應變與應力間關係再進一步化簡為：

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} \sigma_1 \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E} \sigma_1 = -\nu \varepsilon_1\end{aligned}\quad (2.65)$$

由式(2.65) x_2 、 x_3 方向有相同的應變量， ε_2 及 ε_3 應變量可以用 x_1 方向來表示。若將式(2.65)代入式(2.60)和式(2.61)，可以得知布拉格共振波長飄移量，和軸向應變與溫度變化之間的關係表示為：

$$\frac{\Delta\lambda_B}{\lambda_B} = K_\varepsilon \varepsilon_1 + K_T \Delta T \quad (2.66)$$

其中 K_ε 和 K_T 分別為波長飄移量對於應變和溫度的靈敏度(sensitivity)，其關係式表示為：

$$\begin{aligned}K_\varepsilon &= 1 + \frac{n_{eff}^2}{2} (\nu (p_{11} + p_{12}) - p_{12}) \\ K_T &= \frac{\xi}{n_{eff}} - \frac{n_{eff}^2}{2} \alpha (p_{11} + 2p_{12}) + \alpha\end{aligned}\quad (2.67)$$

根據光纖材料的光彈係數，選取光纖等效折射率 $n_{eff} = 1.45$ 代入式(2.67)，可算出 K_ε 與 K_T 理論值約為：

$$\begin{aligned}K_\varepsilon &\approx 0.8 \\ K_T &\approx 5.92 \times 10^{-6} (1/K)\end{aligned}\quad (2.68)$$

在實際量測軸向應力時，只要量測物體布拉格共振波長值與其變化量，並且考慮是否需要補償溫度變化，再將量測結果代入式(2.66)中即可算出該軸向應變量，並經由式(2.65)計算獲得軸向應力。



D 承受溫度影響

光纖只受到溫度影響的情況較為單純，所以假設應變量 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ ，則式(2.66)可再進一步化簡為波長飄移量與溫度變化量之關係：

$$\frac{\Delta\lambda_B}{\lambda_B} = K_T \Delta T \quad (2.69)$$

在實際當作感測器量測時，光纖需要貼附在待測物表面，本文採用應變膠貼附在光柵兩端，但膠體之熱膨脹也會影響到光纖光柵的波長飄移，而後直接代入理論值 $K_T \approx 5.92 \times 10^{-6} (1/K)$ 計算，或預先利用熱電偶搭配光纖校正 K_T ，對膠體造成之影響進行補償，再以校正 K_T 與波長飄移代入式(2.69)中，藉由回推方式求出待測物溫度變化量。

2.4.5 光纖光柵類型

由於光波傳導特性與週期長短具有很大關聯性，光纖光柵根據長短週期類型，可以分為長週期光纖光柵(long period fiber grating)與短週期光纖光柵(short period fiber grating)，以下將介紹長週期與短週期光纖光柵的差異性。

A 短週期光纖光柵(Short Period Fiber Grating)

短週期光纖光柵的光柵週期數量級和光波長相同，約為 $1(\mu m)$ ，稱為布拉格光纖光柵(fiber bragg grating, FBG)，也稱為反射式光纖光柵(reflection fiber grating)。

根據光纖光柵基礎理論式(2.35)，可知光纖光柵的週期越短，模態傳播常數的偏移量 $\frac{2\pi}{\Lambda}$ 也會越大，當偏移量的值 $\frac{2\pi}{\Lambda}$ 大於入射光的模態傳播常數 β_l 時，繞射光的模態傳播常數 β_D 數會變成負值，進一步說明是繞射光的行進方向與入射光相反，也就是說入射光通過短週期光纖光柵後會有反射的物理現象，如圖 2.14 所示。

圖 2.15 說明短週期光纖光柵模態耦合示意圖分別為四種不同週期，由上而下



分別表示長到短週期四種情況。主要以光纖以纖核模態(core mode)，來進行能量傳播，而所謂單模態或多模態光纖就是纖核模態，其主要是能量不會消散到纖核之外物理特性，而是集中於纖核中。纖殼模態(cladding mode)就是光的傳播會發生於纖殼中，因光傳播在纖殼的過程中，能量耗損大幅提升，光傳播效果相較纖核差，因此，光在纖殼模態下無法達到長距離傳輸。另外放射模態(radiation mode)就是光無法在纖殼或纖核內傳播，而是能量會在纖殼外大量耗損，如圖 2.15 舉例四種的情況，清楚看出入射光經耦合後到同一反向行進的光，光柵的週期不同，導致不同的繞射模態。

在 $\beta_D > 0$ 的情況下，由式(2.31)與式(2.35)的關係式可知，短週期光纖光柵的共振波長(resonant frequency)可表示為：

$$\lambda = (n_{eff,I} + n_{eff,D})\Lambda \quad (2.70)$$

由(2.70)式可知，當改變光纖光柵週期長度，反射光的共振波長和模態耦合也會隨之變化。一般量測與通訊層面應用上，取光纖光柵 $\Lambda \approx 0.5(\mu m)$ 且共振波長約 $1550(nm)$ ，因這個波長的光在光纖中的色散能量損失最小，而且入射光能量會耦合到反向但相同的模態，如圖 2.14 的穿透光和反射光的示意圖。

B 長週期光纖光柵(Long Period Fiber Grating)

長週期光纖光柵亦可稱為穿透式光纖光柵(transmission fiber grating)，光柵週期範圍在 $100 \sim 1000(\mu m)$ 之中，長週期光纖光柵原理如圖 2.16，因光纖週期相對較長，模態傳播常數的偏移量 $\frac{2\pi}{\Lambda}$ 較小，當繞射光的模態傳播常數 β_D 為正值。當入射光全部耦合到同方向行進之模態上，不會產生像短週期光纖光柵之反向的反射模態，因此當光入射長週期光纖光柵，會造成入射光會全部穿透光纖光柵。

圖 2.17 為長週期光纖光柵的模態耦合情況，觀念與短週期光纖光柵相似，一

樣分別為四種不同週期，從上至下分別表示週期從長到短之四種情況。以越上面的週期越長來做探討，當改變光纖光柵的週期，能夠調控耦合到同方向行進的各種模態入射光能量。由式(2.31)與式(2.35)關係式可知，長週期光纖光柵在 $\beta_D < 0$ 情況下，其共振波長可表示為：

$$\lambda = (n_{eff,I} - n_{eff,D})\Lambda \quad (2.71)$$

根據應用上的需求，會控制長週期光纖光柵的共振波長在特定範圍內，讓入射光能量耦合進入纖殼模態而全部消失，避免產生反射光。

C 本文所使用的光纖光柵

本文採用由 Fibercore Limited 所提供短週期式的光纖光柵，其光纖共振波長範圍在 1530(nm) 與 1550(nm) 間，我們使用多功分波器來分開擷取 1530(nm) 與 1550(nm) 區域波段的能量進行量測。

2.4.6 光纖光柵的製作方法

自從 1978 年發現含鋯光纖具有吸收短波能量的光感性(photosensitivity)特性，其可以改變纖核內折射率。光纖光柵在纖核中具有週期性的光柵結構，可讓光柵結構在纖核軸向上產生週期性分佈的折射率。本小節將說明光纖的光感性，再介紹內部寫入法、外部寫入法以及相位光罩法等製作方法。

A 光纖光感性

Hill 於 1978 年所領導的團隊發現石英系玻璃光纖(silica fiber)中若含有鋯(Ge)時會產生缺陷(GeO defect)，從鋯的四面體移除氧原子鍵結後，鋯多餘的懸浮鍵(dangling bond) 容易和鍵結的鋯和矽產生相依性，此鍵結具有光感特性，並且容易吸收在 240(nm) 波長左右的紫外光，而破壞本身鍵結，其中內部缺陷分子的濃度不



同，使光纖內的分子結構在照射紫外光後，製作具週期性折射率分佈光柵。

B 內部寫入法

Hill 發表內部寫入法(internal writing method)來製作光纖光柵，其原理為利用氬離子藍光雷射(argon ion laser)，其波長為 $488(nm)$ ，並搭配單模光纖，使得入射光與反射光在纖核中產生週期性干涉條紋，進而破壞光纖內部的結構，亦可稱為希爾光柵(Hill grating)。

內部寫入法的硬體設備與光路架設較為簡單，實際應用上存在許多限制，例如光柵共振波長則必須與雷射光的波長相同，無法設計到應用層面較廣且能量耗損最小之 $1550(nm)$ 附近。

C 橫向全像法

Meltz 於 1989 年研究團隊提出橫向全像法(transverse holographic method)，可從外在寫入的方式來製作光柵，利用兩道波長為 $244(nm)$ 的紫外光產生干涉條紋的方法，將光纖暴露於條紋下在纖核上形成光柵，因此只要調整雷射光的入射角度即可調整寫入的光柵週期，大幅增加共振波長的範圍，改善內部寫入法許多缺點。

D 相位光罩法

Hill 與 Anderson 於 1993 年提出相位光罩法(phase mask method)，目前大多應用此方法來製作光纖光柵，除要求雷射光的光路架設容易、較低同調性，經過光罩曝光後的光纖光柵穩定性高、品質佳，使得容易大量製作生產，也因此提升光纖光柵的品質。

圖 2.18 是相位光罩法原理示意，圖中的紫外光垂直穿過凹凸結構的相位光罩而有繞射的現象，若選擇適當蝕刻深度的相位光罩，讓直接通過光柵的第零階能量，能控制在入射光能量的 5% 範圍內，此時入射光能量大部分存於 +1 階和 -1 階繞射



光之能量，約分別佔入射光能量的 40%。也就是說，大部分入射光能量包含在±1 階之繞射光。由以下公式可求得最小的相位光罩蝕刻深度：

$$d = \frac{\lambda_{UV}}{2(n_{UV} - 1)} \quad (2.72)$$

其中 λ_{UV} 為雷射光之波長、 n_{UV} 為紫外光在矽板下之折射率、 d 為光罩蝕刻深度。

雷射光通過相位光罩後會產生繞射條紋，其中±1 階的光能量會互相干涉，並在光纖內纖核上產生光柵，由繞射原理可知，可用光罩週期 Λ_{UV} 與紫外光波長 λ_{UV} 來決定±1 階的繞射角 θ ，其數學式為：

$$\sin \theta = \frac{\lambda_{UV}}{\Lambda_{UV}} \quad (2.73)$$

由圖 2.18 可知，光纖的入射角就是相位光罩的繞射角，由干涉理論可知入射光波長 λ_{UV} 與入射角 θ 共同決定干涉條紋的週期 Λ 關係式是：

$$\Lambda = \frac{\lambda_{UV}}{2 \sin \theta} \quad (2.74)$$

將式(2.73)和式(2.74) 合併整理可得：

$$\Lambda = \frac{\Lambda_{UV}}{2} \quad (2.75)$$

為製做出符合量測所需的光柵週期，可以參考(2.75)式，可自由選擇適當的相位光罩週期，進而控制光纖光柵的波長特性，若以共振波長 1550nm 的光纖等效折射率為 1.46，若以波長為 248(nm) 的氯原子 (Kr^+) 準分子雷射 (excimer laser) 做為光源，則可以得到光柵週期約為 0.53(μm)，再利用式(2.72)與式(2.75)可計算出需要的相位光罩週期大約是 1.06(μm)，蝕刻深度在 270(nm) 左右。

E 製作方法特點比較

相位光罩法製造成本較高，對於尺寸精度上的要求也較高，也需要設計不同週期的相位光罩，才能針對不同週期之光柵進行製作。比較相位光罩法與橫向全像法後，可以總結出相位光罩法有以下特點：



1. 相位光罩是非常精密且微小的結構，製作成本較高，對於尺寸的精度要求嚴謹，但其高穩定度可以生產大量品質高的光纖光柵。
2. 相位光罩法與橫向全像法相比，其光路架設則較為簡單，光源在時間及空間上的同調性較沒有嚴格的限制。而橫向全像法的光路為兩道紫外雷射光產生干涉，實驗架設上也較困難，對於雷射光之同調性要求較高。
3. 相位光罩法所製成之光柵週期為光罩週期的一半，光路架設較為容易，不過一旦確定相位光罩週期，光柵週期也就被決定，無法針對不同的需求而進行任意改變，因此光柵週期的可調性很低。另橫向全像法則是利用光的干涉原理來製作光纖，可藉由調整入射光波長以及入射光角度製成所需的光柵週期。

2.5 光纖光柵量測技術與實驗設備

介紹針對動態或靜態等問題進行量測的多種光纖光柵量測系統，接著分別介紹進行光纖光柵量測系統所需儀器設備，最後則簡單說明本論文實驗中所使用的其它儀器。

2.5.1 布拉格光纖光柵量測系統

本小節將介紹使用光譜分析儀檢測光纖光柵使用前的共振波長，進而說明架設光纖光柵量測系統。若將光纖光柵感測器黏貼於待測物表面上，再利用本實驗室自行開發的能量調變型光纖光柵量測系統(FBG sensing demodulation techniques)進行暫態量測，或者配合波長解調器進行量測多點的溫升、應變、位移、伸長量等。

A 光纖光柵感測器量測前的準備工作

使用光纖光柵感測器主要是黏在待測物的表面上進行量測，若只是單純以膠黏貼光纖光柵，當待測物受壓應力時，則光纖可能發生挫曲(buckle)的現象，所以在黏貼光纖時會先做預拉的動作，使光柵的中心波長有1(nm)的飄移量，給光柵一



個預先的拉應變(pre-strain)。

一般使用光譜分析儀作為波長解調器的使用，可解調波長範圍在 $1400(nm) \sim 1700(nm)$ 間，可以得知光柵的光譜全貌詳細特性，例如：反射回來的光波的能量大小、中心波長量值以及受環境干擾下的波長飄移量，再利用光彈效應與熱光效應所推得的共振波長飄移理論來對應變及溫升進行定量的量測。但是光譜分析儀的主要缺點在於取樣頻率很低(只有 $2Hz$)，對於動態問題(如振動)則無法進行量測，更不用說是對於量測暫態波傳問題，而只能量測靜態問題(如溫升以及溫升所造成的熱應變)。接著將介紹本實驗室自行開發的能量可調變型光纖光柵量測系統，由於取樣頻率取決於示波器，因此可大幅提升取樣頻率。

B 能量調變型光纖光柵動態量測系統

現今的感測器主要是以電訊號做傳輸，量測到的電壓值經過轉換後即可得到相對應的物理量，而光電轉換器(photo diode)即是將光訊號轉為電訊號，如圖 2.19 所示，光纖光柵搭配光電轉換器的架設示意圖，輸出的寬頻光源經過光隔離器，並從光循環器的一號埠口進入後，並從二號埠口輸出，輸出的光經由光纖光柵的繞射作用後會產生與原本前進方向相反的反射光譜，如圖 2.20 為寬頻光源經過光纖光柵的穿透與反射光譜，透射光一部分波長的能量會被濾掉，因此光纖光柵可以做為濾波器，不過本文主要利用的是繞射後的反射光譜，藉由反射光的共振波長飄移量來量測應變及溫升等相關物理量，因此反射光會由光循環器的二號埠口進入後，並從三號埠口輸出，最後經由光電轉換器轉為電訊號後由示波器進行擷取，光電轉換器是將輸入的光強度轉為相對應大小的電訊號，雖然光柵所反射回來的波長產生飄移，但是光譜的面積大小變化量相當微小，因此光電轉換後的電壓值幾乎是一個定值，無法從電壓值得到波長飄移量，因此無法只利用光電轉換器進行量測。

接下來介紹本實驗室自行開發的能量可調變型光纖光柵的量測系統，和前段只利用光電轉換器不同的地方在於光隔離器與光循環器的中間多放了一個光柵做為濾波器，如圖 2.21 中的 FBG filter，在使用上可將其黏貼於可調式位移平台，改變平台的間距即可將光柵濾波器的共振波長調整到需要的範圍，而經過濾波後的光譜如圖 2.20 的透射光譜，我們利用光能量有變化的左右兩個線性區段，選擇與濾波器中心波長相近的光柵做為感測器，調整濾波器使得感測器的中心波長落於光源的斜直線性範圍中，當感測器的中心波長產生飄移時，反射光的能量光譜面積會有線性變化，如圖 2.22 為能量調變法的透射反射光譜示意圖，而實驗室使用的示波器的擷取速率最高可達 5GS/s，頻寬為 400MHz，所以低頻到高頻的光訊號轉換後皆可完整地被擷取，也可獲得高解析度的動態訊號，整體能量可調變型光纖光柵量測系統架設如圖 2.23。

C 單光柵光纖多點量測系統

本小節將介紹單光柵光纖多點量測系統，和前段不同的地方在於光源經過濾波器前先利用多工分波器(Coarse Wavelength Division Multiplexing, CWDM)將光源分成數個區段後，再分別由數個感測器進行量測，整體系統架設如圖 2.24。

多工分波器在整體量測系統中，主要功能為利用解多工器(demultiplexer)將寬頻光源配合各個光柵的中心波長分割成數個區段後，個別傳送到光纖光柵感測器，此時光纖是接收端 R(receiver)，而各個光柵反射回來的中心波長對多工分波器來說是發送端 T(transmitter)，再經由多工器(multiplexer)耦合成一個光訊號，因此只需要一條光纖做傳輸，再回傳至二號埠光循環器，由波長解調器來進行擷取與分析，分波多工器之工作原理如圖 2.25。

本論文後續所使用分波多工器多以 CWDM (Coarse Wavelength Division Multiplexing)為主。



D 波長解調器(I-MON)量測系統

本節將介紹波長解調器 I-MON 256 USB，可以量測到真實中心波長值，量測範圍在 $1525(nm) \sim 1570(nm)$ 間，解析度為 $0.5(pm)$ ，最多同時可以追蹤 37 個中心波長，而且取樣頻率可以達到 $6000(Hz)$ ，適用量測一般動態問題。

單光柵光纖搭配 I-MON 波長解調器系統架設如圖 2.26，在光源的部分是配合 I-MON 用的可調式寬頻光源，再將圖 2.19 後端的光電轉換器以及示波器改成為 I-MON 進行波長解調，再經由 USB 連接埠傳送至電腦中記錄其共振波長的飄移，其餘儀器如光循環器、光隔離器、光柵感測器的連接方式都相同，架設比能量調變型較為簡單，本論文所做的實驗也都以此做為波長解調器進行量測。

此外，如果要進行多點量測時，也可利用多工分波器將光源分成數個區段後送至光柵感測器，實驗架設如圖 2.27，相較上述的單光柵量測僅需多串接一個 CWDM，比起需要數組的濾波器、光環形器、感測器以及光電轉換器的能量調變型系統可謂簡單方便許多。因應量測需求，不需要串接 CWDM，直接採用多光柵段的光纖進行多點量測，實驗架設圖 2.28 所示。

因為能量調變法的光能量面積變化相當微小，需要有較高的光能量才能精準的量測，因此必須使用 CWDM 分光才不會減損能量，但若使用 I-MON 解調系統，光能量的要求較低，僅需真實紀錄波長飄移量，所以可以使用光耦合器來取代多工分波器，實驗架設如圖 2.29，將光源的光能量分成數份就是光耦合器的原理，如圖 2.30 為將光源一分為三的光耦合器示意圖，平均有 33%的光能量各別傳送到光纖光柵感測器後，再將反射的中心波長耦合在一起後，回傳至光循環器的二號埠口後，再由三號埠口連接 I-MON 與電腦進行資料的擷取，即可透過共振波長飄移理論對共振波長值及飄移量進行分析，而得到真實物理量之變化值。



2.5.2 光纖光柵量測系統所需之相關儀器

A 寬頻光源(適用於能量調變法)

能量可調變型量測系統需要有較高的光能量，因此實驗時會使用高功率寬頻光源(HY-ASE-C-G-13-BN-FC/AC，HOYATEK)如圖 2.31，輸出的光能量具有很高的穩定性，而輸出光源的波長範圍介於 $1525(nm) \sim 1565(nm)$ 間，總輸出功率在 $15(dBm) \sim 20(dBm)$ 範圍內，缺點是光的輸出功率大小已經固定，無法針對實驗上需求調整，而且波長解調器 I-MON 的輸入功率有其上限，無法搭配使用。

B 濾波器

能量調變型量測系統的核心即是光柵濾波器，但是濾除的半高寬相當小，使得左右兩個可使用線性段範圍很小，導致光柵感測器在量測暫態訊號時的波長飄移量不可太大；此外，還需要根據個別光柵感測器來選擇相近中心波長的光柵來當濾波器，而調整濾波器的方法則是將光柵兩端以膠黏貼在可調式位移平台上，如圖 2.32 所示，由螺旋測微器來進行光柵拉伸，進而濾除波長區段來配合感測器。

C 光隔離器與光循環器

為了避免光源的光被光柵濾波器的反射光譜，或經過光循環器後從一號埠口反射回來對光源進行干擾，影響量測結果，所以先連接一個光隔離器(Isolator)阻擋反射光，再接上光循環器，如圖 2.33 為光隔離器的實體圖。本文使用由卓越光纖公司所製三埠口(port)光循環器(Optical Circulator)，如圖 2.34，而光循環器由接口的數量可分為三接口或四接口，功能在於可將光傳輸至不同的埠口。

D 低密度分波多工器(CWMD)

圖 2.35 所示為實驗室使用的光柵波段的低密度分波多工器(CWDM)，通道規格為一分四，光源接入 COM 接頭，再由解多工器將光源分為四個不同波段

(1511(nm)、1531(nm)、1551(nm)、1571(nm))，再分別送至四個光纖光柵，光源的部分則使用高功率寬頻光源(1525(nm)~1565(nm))以及中心波長為1530(nm)、1550(nm)光纖光柵感測器配合能量調變法，同時量測兩點的暫態訊號，因此若使用此CWMD，能使用的光柵選擇將會很少，較無法達成更多點量測的需求。

E 光耦合器

光耦合器(Coupler)可依照實驗需求選用一分三和一分五兩種，也就是可同時使用三條光纖或五條光纖進行量測，如圖 2.36 所示為一分五之光耦合器，主要原理是將寬頻光源的能量等分成五等份後，傳送給五條光纖，當然可選用單條多光柵的光纖進行量測，即可實現更多點的量測。

F 光電二極體(光電轉換器)

光電二極體(PDA10CS, Thorlabs Inc.)如圖 2.37，其光的波長範圍在 700(nm)~1800(nm)之內都可以偵測的到，而且具有放大訊號的功能，以及具有砷化銦鎵(Indium Gallium Arsenide, InGaAs)的光偵測器可調整增益倍數。

G ASE 可調式光源(配合 I-MON 專用)

ASE 光源為放大自發性輻射(Amplified Spontaneous Emission Fiber Source)，輸出光可以分類為 L band(1560(nm)~1610(nm))與 C band(1525(nm)~1560(nm))，單模光纖波長大約在1550(nm)附近，而 I-MON 解析的範圍為1525(nm)~1570(nm)，因此主要使用 C band 光進行實驗，圖 2.38 為 ASE 可調式光源(ASE-200CL-15, Alnair Labs)實體圖，優勢在於可調整輸出光之能量以配合 I-MON 波長解調器。

H 光譜分析儀

本文中使用由安藤電器(Ando Electric)所生產光譜分析儀(型號為 AQ6631)，如圖 2.39 所示。因為光纖光柵感測器的中心波長需要位在濾波器的線性段中心，所以實驗前需要先利用光譜分析儀得到感測器的光譜形狀，再透過螺旋測微器調整



濾波器的共振波長至適當位置即可開始實驗，而光譜分析儀具有高靈敏性、高動態範圍、內建高速列印和高波長準確率等多項優點。

I 波長解調器(I-MON)

本文在實驗中主要使用波長解調器(I-MON 256 USB, Ibsen photonics)如圖 2.40 所示，用來擷取光纖光柵感測器中心波長飄移隨時間的變化，量測範圍在 $1525(nm) \sim 1570(nm)$ 之間，解析度為 0.5pm，最多可以同時追蹤 37 個中心波長的變化，而且取樣頻率可以達到 6000Hz，在一般振動等動態問題上也相當足夠，也可將取樣頻率設定低，進行量測靜態、長時間等問題。因此 I-MON 系統可同時量測多段光柵、架設簡單以及 FFT 即時顯示等功能為其主要的優勢。

I-MON 與光譜分析儀不同的地方在於，I-MON 只會擷取中心波長的量值，無法記錄整體光譜形狀隨著時間變化的關係。而如圖 2.41 儀器的操作介面有中心波長圖(wavelength graph)、光譜圖(spectrum graph)、參數設定面板(configuration)以及快速傅立葉轉換頻率域圖(FFT graph)，可根據實驗需要設定擷取頻率(Max scan rate)、訊號長度(circular sample buffer length)以及光柵感測器的數量(Max number of FBG's)，其中訊號長度除以擷取頻率即是量測時間。

在量測開始前，必須根據光譜圖(spectrum graph)面板中的反射頻譜能量值選取適當的閾值，使軟體正確計算中心波長的量值，但反射頻譜能量會隨著當下實驗環境以及輸入的光強度不同而不同，因此在實驗前需要不斷的嘗試，才能設定適合的閾值，如果光源輸入光柵前為一個平坦的光譜，閾值的設定將會很簡單。而此軟體提供一個暗電流扣除(dark subtraction)的功能，其原理為扣除初始的光譜能量，根據能量的變化量來進行中心波長的擬合，因此當訊號產生變化時，只會在訊號有變化的波長處有值，而其它處為零。雙段光柵光譜扣除暗電流後輸入光源的光譜圖如圖 2.42，因此閾值只要設定為 10% 即可進行量測。

I-MON 擷取光柵的光譜圖有 256 個點平均分佈在 $1525(nm) \sim 1570(nm)$ 範圍內，

平均用 5 個點來描述光柵的反射波長，得到每個擷取時間點下的光譜圖後，軟體便會根據我們設定的擬合參數算出光譜的擬合曲線後，將最大值求出後即為中心波長值，因此就可以得到隨著時間變化的中心波長值，藉由共振波長飄移理論即可算出應變、溫升等。在頻域方面，可以勾選設定介面中快速傅立葉轉換(FFT calculation)的選項，即可在量測過程中即時觀看光柵黏貼於待測物的振動狀況。

若設定擬合點數越大時，越容易出現漏點(data loss)的狀況，例如設定擬合點數為 15 時，取樣頻率設定到最高到 6000Hz 時，量測超過 10 秒時，電腦會開始出現資料缺漏的狀況，因此量測時擬合點數設定為 5 點時即相當穩定(預設為 3 點)。由上述可知，I-MON 的擬合參數設定不同即可能會有不同的結果，因此必須根據實驗之特性選擇適合的擬合參數。

設定面板中還可將光譜圖的原始數據(raw data collection)儲存在特定路徑，因此本實驗室利用 Matlab 軟體自行設計程式進行更進一步地分析，因為是自行開發，具有彈性空間較大，所以量測系統可以同時顯示溫度以及振動相關問題，不再只是 I-MON 中心波長隨時間的變化而已。

J 溫度擷取器與熱電偶

實驗室所使用的溫度擷取器為 Yokogawa 公司生產，產品型號為 MV100，如圖 2.43，最多可以連接 4 條熱電偶進行量測，取樣頻率最高可設定 2Hz，解析度為 0.1($^{\circ}\text{C}$)，並搭配 T 型熱電偶(型號為 Bead Probe TPT-01-40G)來進行長時間單點式量測溫度，如圖 2.44 為實驗室所使用的熱電偶。

K 溫度控制器

本文所使用的溫度控制器由 YOTEC 所生產，型號為 GX-36，如圖 2.45 所示，具有簡易 PID 控制器長時間維持在所設定的溫度，因此溫度控制上相當準確，可設定的溫度在 0($^{\circ}\text{C}$)~400($^{\circ}\text{C}$) 範圍間，與解析度為 0.1($^{\circ}\text{C}$)。



L 光纖位移計

本論文使用由 MTI Instruments Inc. 所生產光纖位移計(Fotonic Sensor, FS)，型號為 MTI-2100，如圖 2.46，探頭型號為 MTI-2047R，其頻率響應高達 100Hz ，解析度可達 $0.01\mu\text{m}$ ，可量測各種表面性質的待測物(如陶瓷、金屬、玻璃等)。光纖位移計具有高頻率響應、高解析度、易於架設與校正、屬於非接觸式、不受電磁波干擾量測等優勢，可以針對單點位移進行定量的動態量測。

光纖位移計探頭內有兩種不同功能光纖纖維，分別為傳送光纖(transmitting fiber)與接收光纖(receiving fiber)，根據其纖維的分佈主要可分為三種類型(不規則、半圓形、同心圓)，如圖 2.47 所示。而量測原理是由 MTI-2100 內部鹵素鎢燈將光源輸入至傳送光纖，接著將光打在待測物體表面上，其反射光再由接收光纖導回 MTI-2100 內部的光電感測器，其探頭內部工作原理如圖 2.48，之後將光訊號轉換成電訊號，透過校正曲線即可計算出待測物表面的位移量。

量測探針的頂端到待測物表面的距離，與接收光纖接收到的反射光能量有關，當探頭相當接近待測物表面，則接收光纖所接收到的光能量成與距離正比，如圖 2.49(近)，而隨著探頭與表面距離漸漸增加，接收光纖所接收的反射光能量會達到一個峰值，此線性區段即稱為第一輸出響應曲線(Range 1)；超過峰值後，接收反射光的能量與隨著探針與待測物表面距離的增加呈下降趨勢，如圖 2.50(遠)，此時可得到另一個線性區段，稱為第二輸出響應曲線(Range 2)。

圖 2.51 為光纖位移計輸出電壓與距離的關係圖，量測範圍分別為斜率較大之第一線性段只能量測較小的位移，範圍約在 $0.05(\text{mm}) \sim 0.15(\text{mm})$ 之間，與電壓之間的轉換係數為 $0.01754(\mu\text{m}/\text{mv})$ ；斜率較小之第二線性段可以量測較大的位移，範圍約在 $0.55(\text{mm}) \sim 1.65(\text{mm})$ 之間，與電壓之間的轉換係數為 $0.21533(\mu\text{m}/\text{mv})$ ，本論文中大多使用第二線性段範圍進行實驗量測。



M 热像儀

溫度主要由傳導、對流與輻射進行熱傳導，紅外線熱像儀(Thermal imaging infrared cameras)廣泛用來量測待測物表面熱輻射的量值，屬於全場與非接觸式量測的溫度量測儀器。本實驗使用日本公司(NIPPON AVIONICS CO., LTD)所生產熱像儀產品(TVS-200 系列)，來進行實驗上溫度的量測，圖 2.52 為熱像儀實體圖。

在參數設定面板中可以設定顯示的最低與最高溫度，使其顏色的分布較為清楚，偏向藍色則表示量測物體溫度越低溫，偏向紅色則表示越高溫。此外，量測前必須設定待測物放射率值，黑體放射率值為 1.0、纖維橡膠放射率值約為 0.95，而各種拋光的金屬的透射率值則相當低，約在 0~0.1 之間，實務上進行金屬表面量測時會噴上專門的黑體輻射噴漆，或者貼上顏色較深的薄膠帶進行量測。本論文在利用熱像儀量測金屬表面的溫度時會貼上顏色較深的貼紙或者膠帶，放射率設定上與熱電偶校正過後大約為 0.94。且熱像儀的取樣頻率最快為 10 秒擷取一個訊號，解析度約為 $0.1(^{\circ}\text{C})$ 左右，應用熱像儀進行長時間且高溫升的溫度量測，確實是一個相當方便的量測儀器。

量測的資料存在記憶卡中，量測後可利用軟體進行數據分析，而軟體是景興科技的 TAS 紅外線熱影像分析系統，分析畫面如圖 2.53 所示。本論文主要利用多點的溫度分析功能，最多可針對 50 個點進行量測，系統中亦建置其它分析功能，如 3D 立體顯示、等溫線顯示、定點熱阻分析、剖面分析等功能，分析結果還可輸出為動畫顯示或儲存為 excel 檔，方便在量測後對於相關量測資料進行整理與判讀。

表 2.1 PVDF 薄膜材料常數



Parameter	Quantity
Thickness t	$28\mu\text{m}$
Piezo strain constant d_{31}	$23 \times 10^{-12} \text{ C/N}$
Piezo strain constant d_{33}	$-33 \times 10^{-12} \text{ C/N}$
Piezo stress constant g_{31}	$216 \times 10^{-3} \text{ mV/N}$
Piezo stress constant g_{33}	$-330 \times 10^{-3} \text{ mV/N}$
Electromechanical coupling factor k_{31}	12%
Electromechanical coupling factor k_t	14%
Capacitance C	380 pF/cm^2
Young's modulus Y	$2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
Pyroelectric coefficient p	$30 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2\text{K}$
Permittivity ϵ	$107 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
Mass density ρ_m	$1.78 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

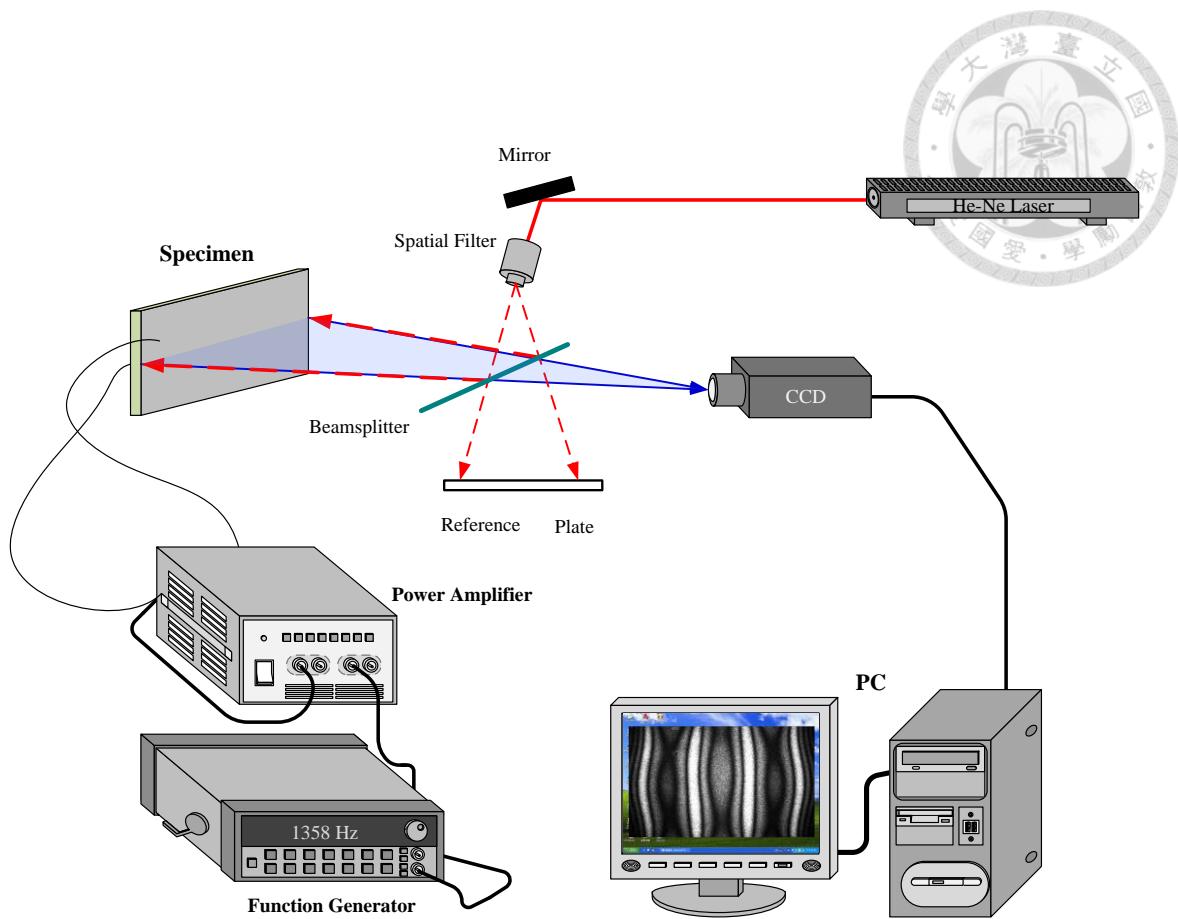


圖 2.1 AF-ESPI 面外量測系統之光路與系統架設圖

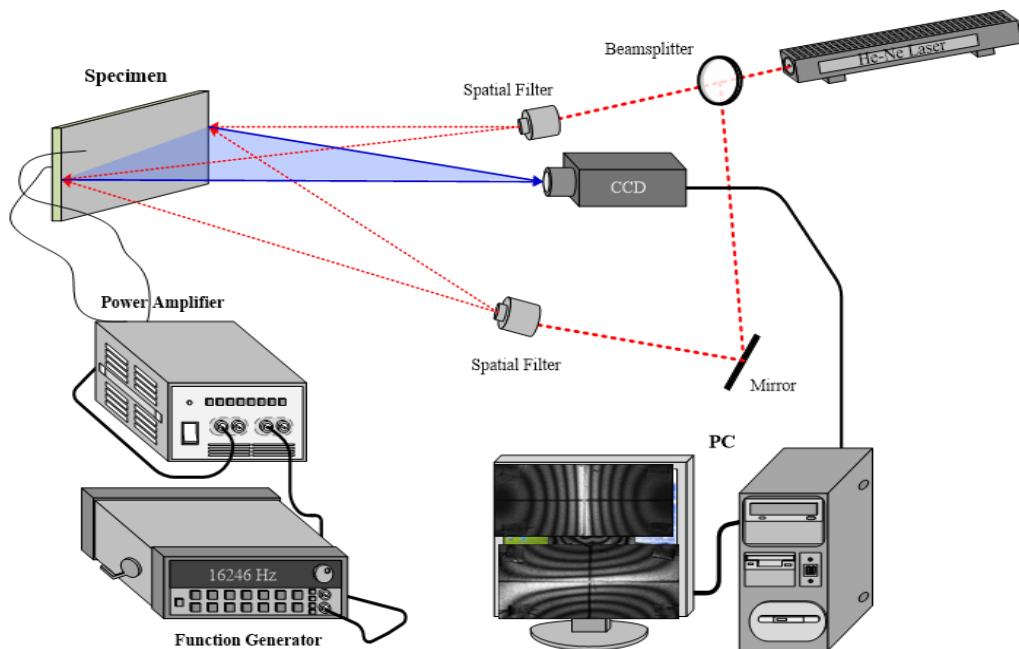


圖 2.2 AF-ESPI 面內量測系統之光路與系統架設圖

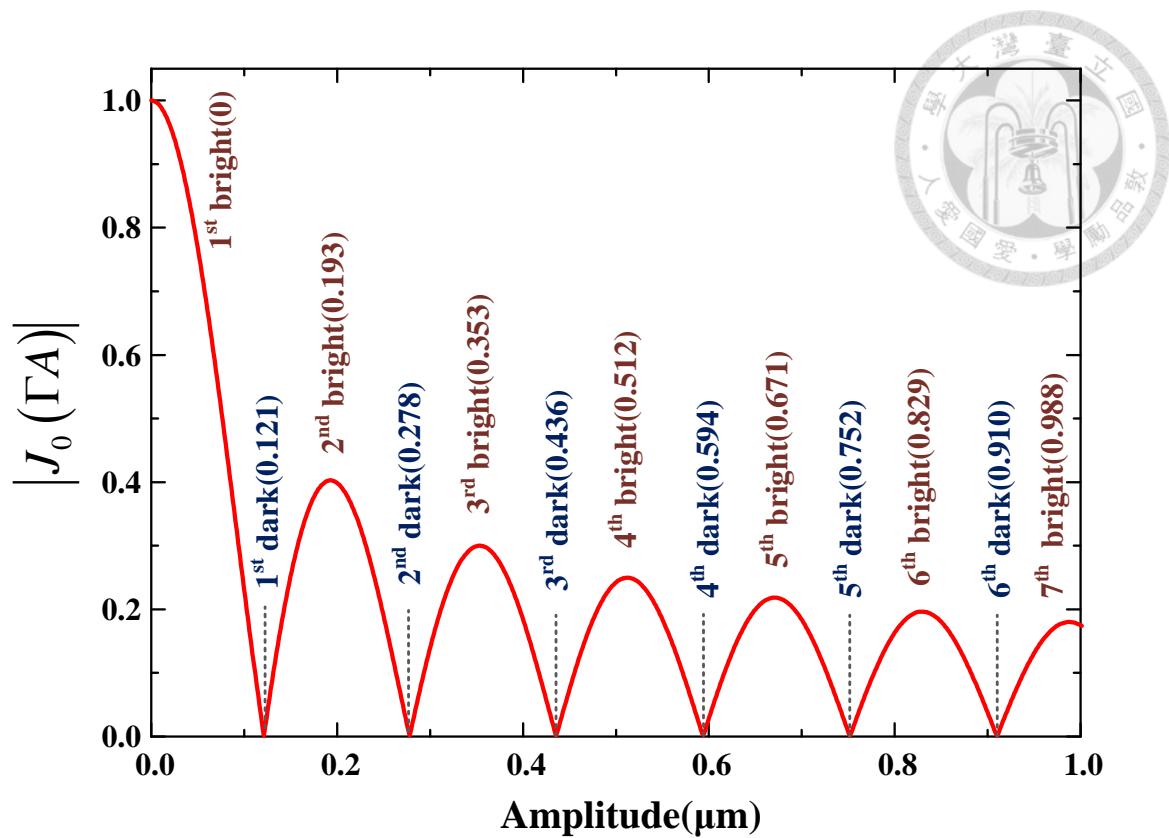


圖 2.3 對應光強度的零階 Bessel 函數量值大小與面外位移之關係

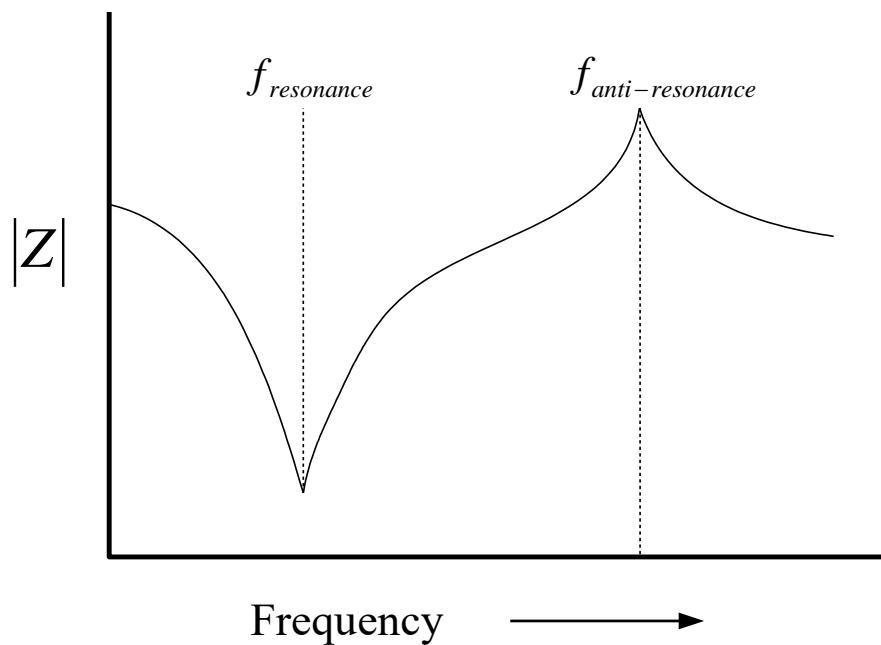


圖 2.4 壓電體在特定共振頻率範圍內的頻率阻抗曲線

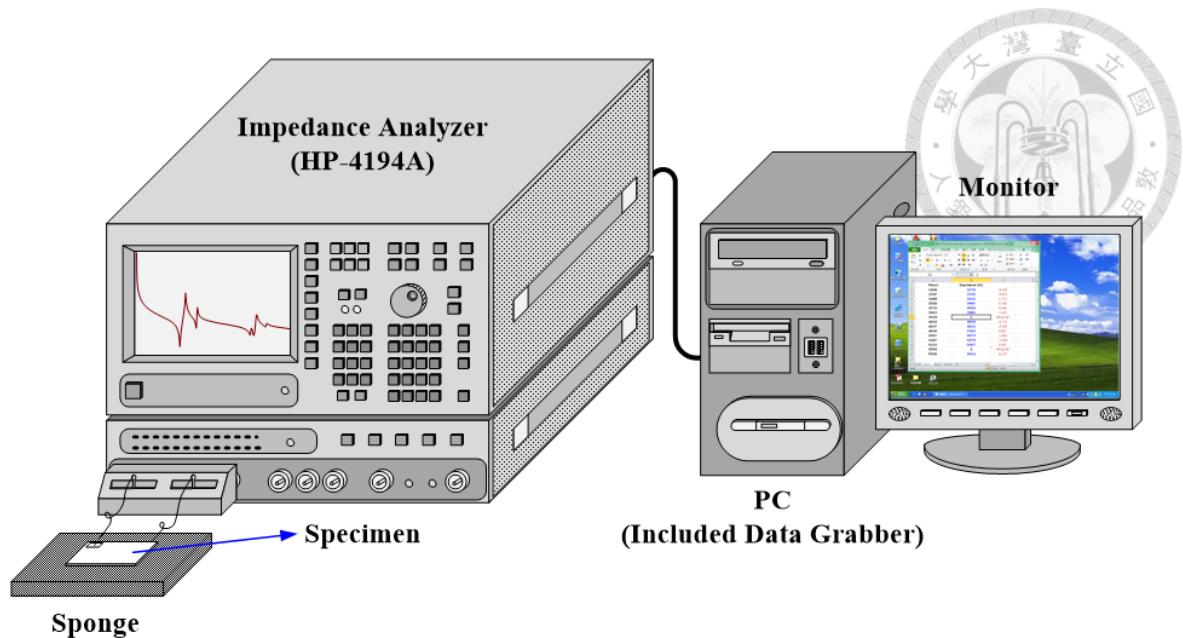


圖 2.5 利用阻抗分析量測壓電材料共振頻率的實驗架構

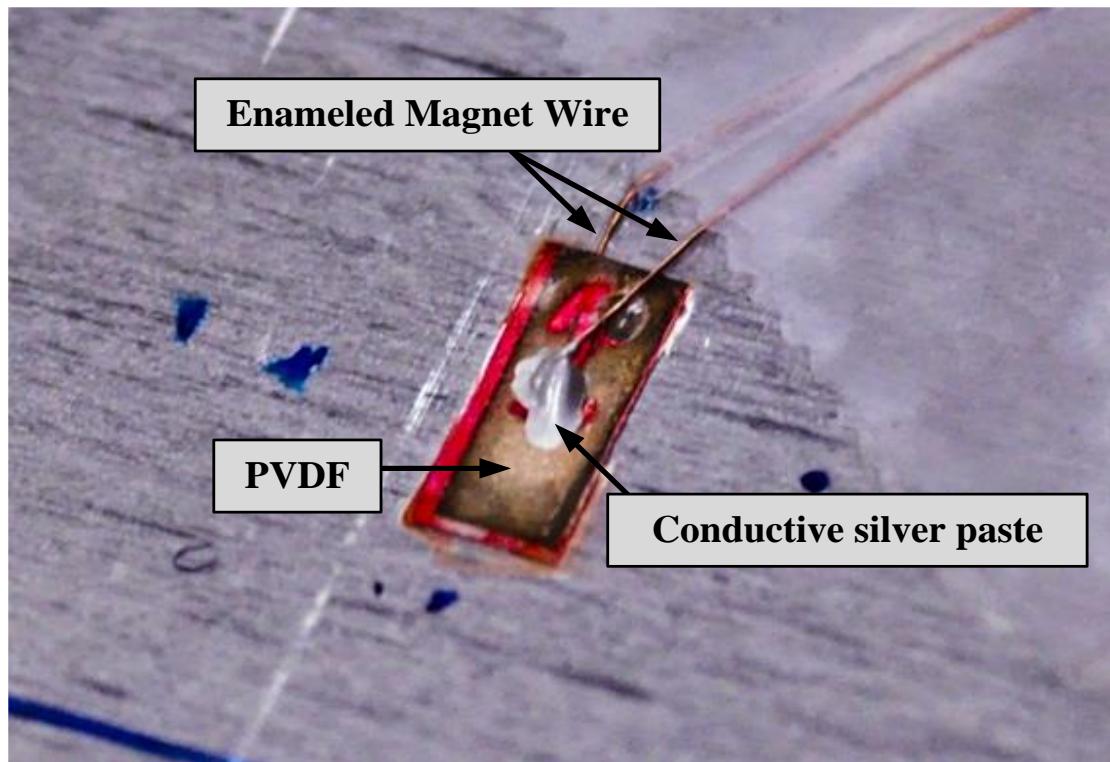


圖 2.6 PVDF 薄膜感測器黏貼於待測物表面上

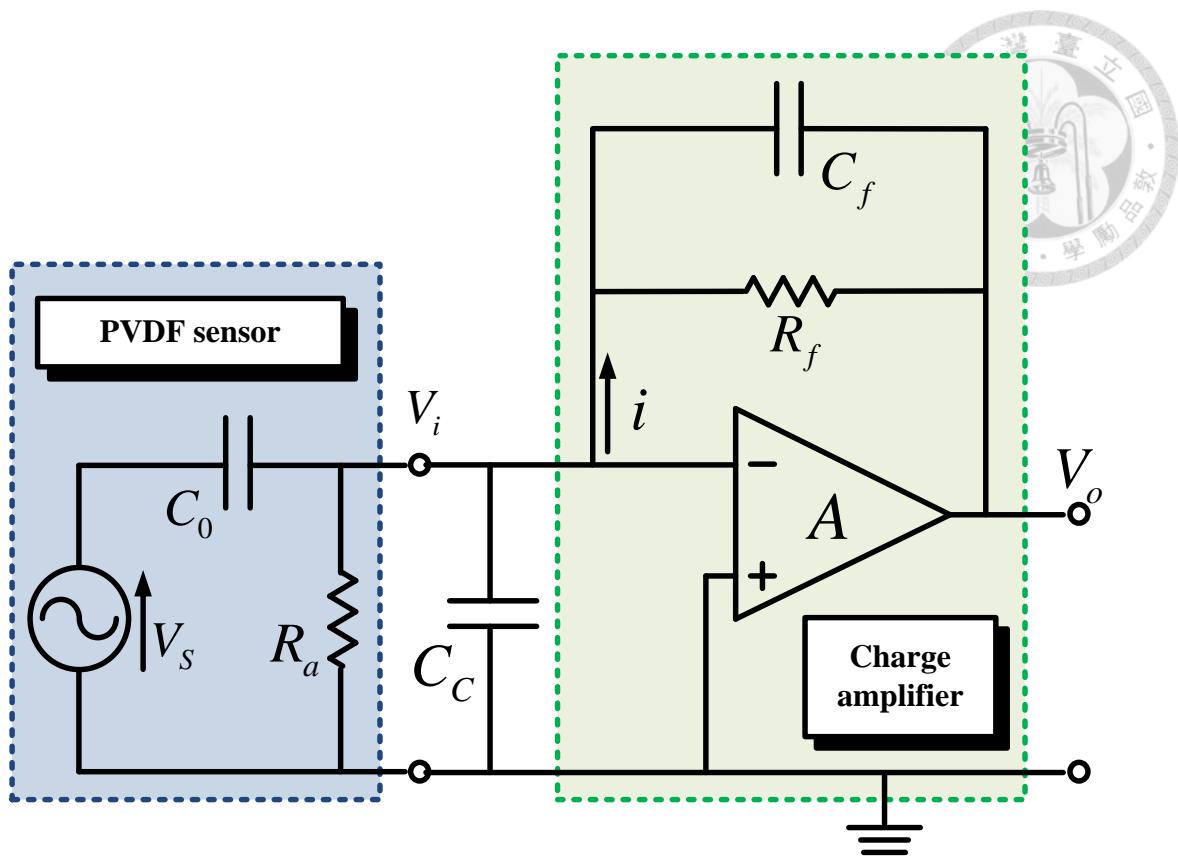


圖 2.7 PVDF 感測器連結電荷放大器之電路

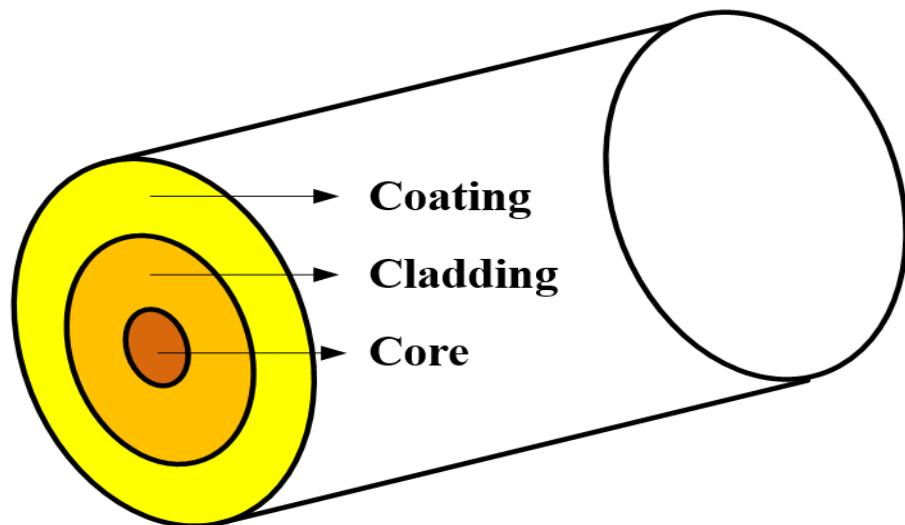


圖 2.8 光纖構造示意圖

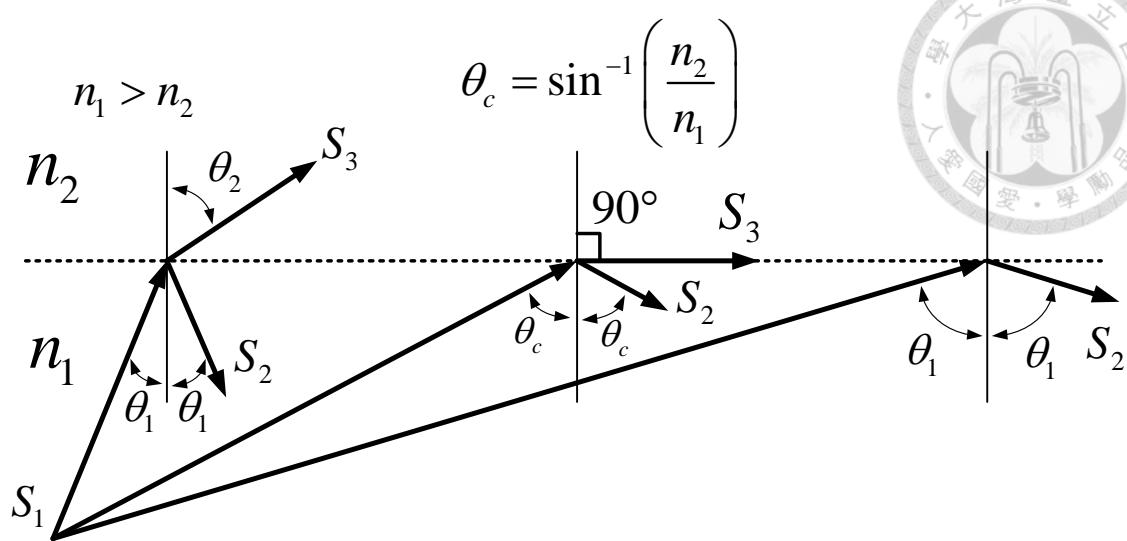


圖 2.9 司乃爾定律概念圖

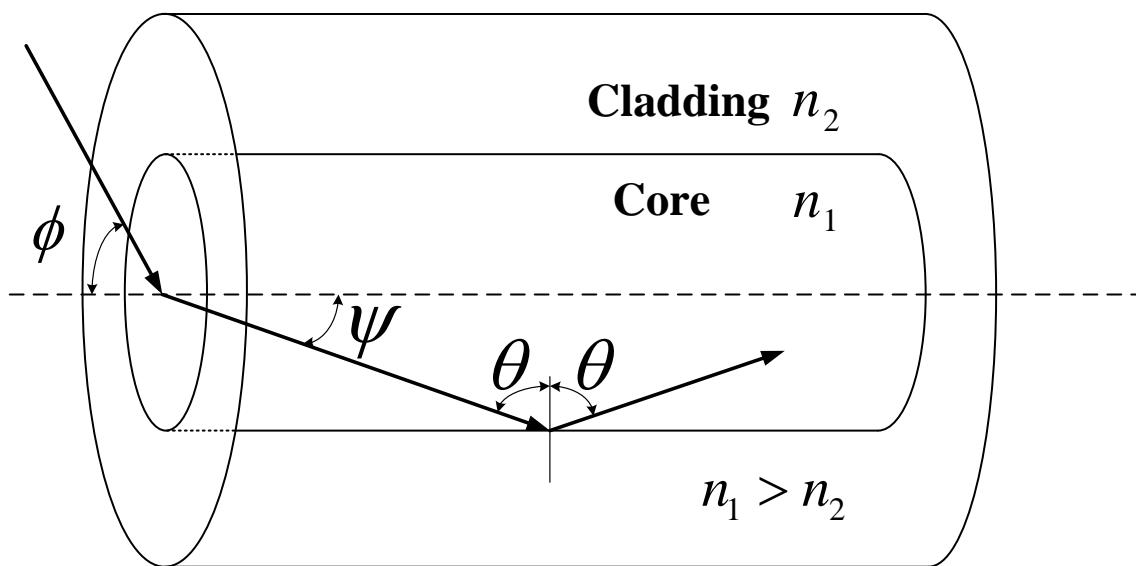


圖 2.10 步階式折射率分佈光纖導光原理示意圖

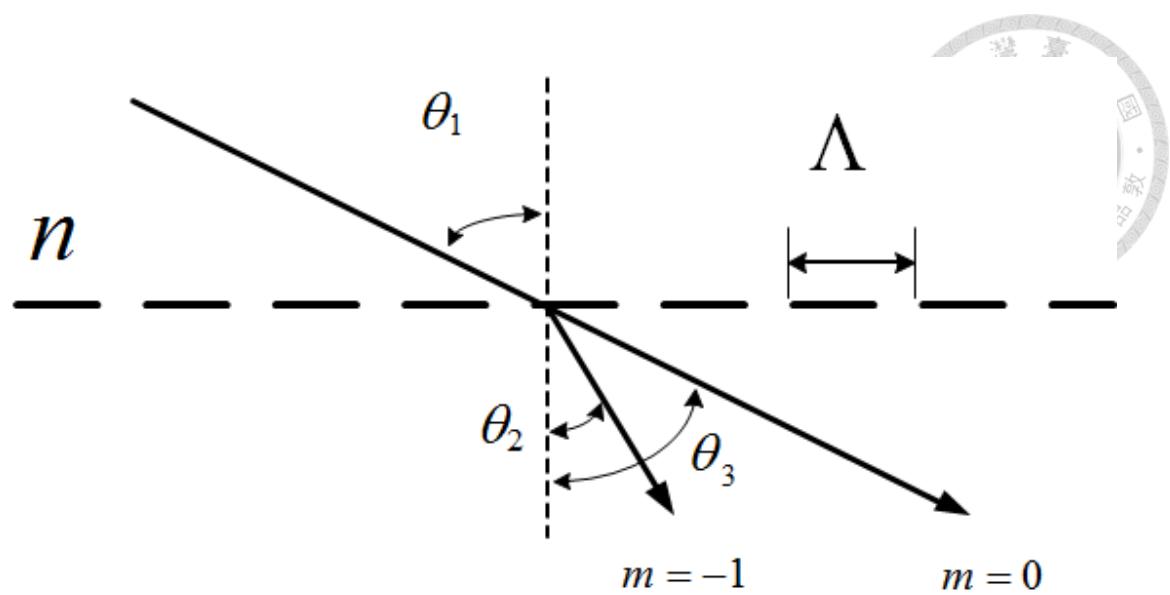


圖 2.11 光柵原理示意圖

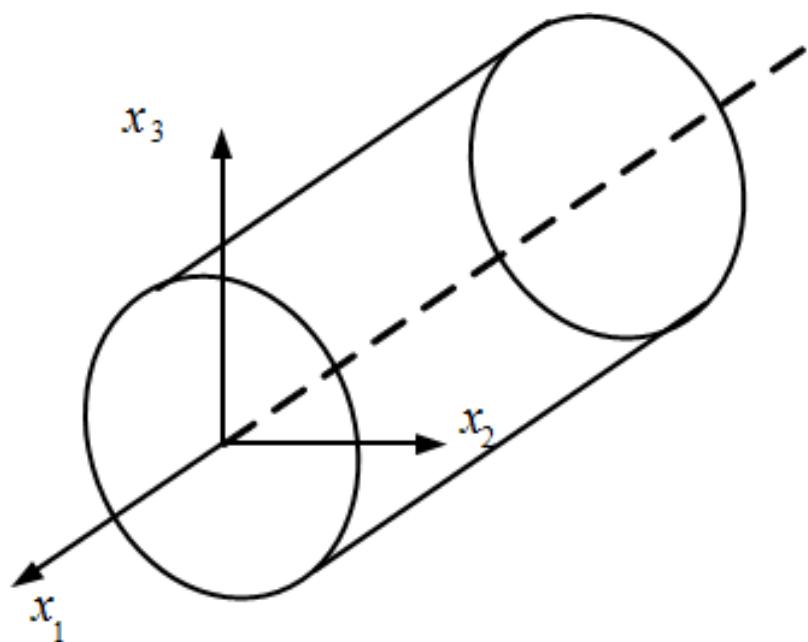


圖 2.12 光纖座標軸定義

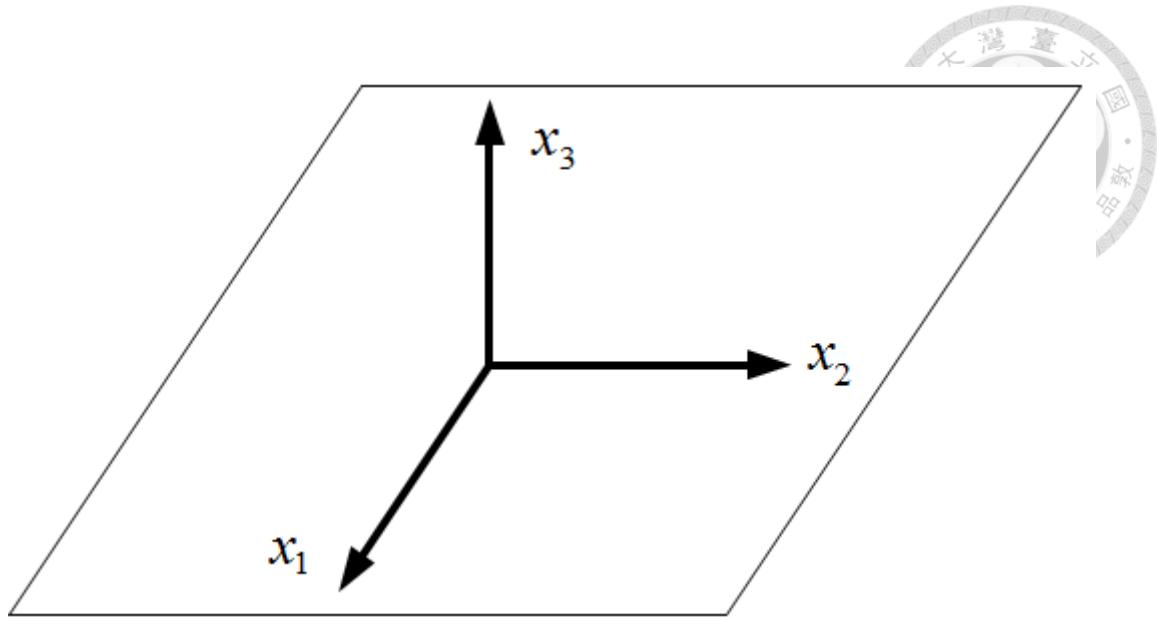


圖 2.13 平面應力座標軸定義

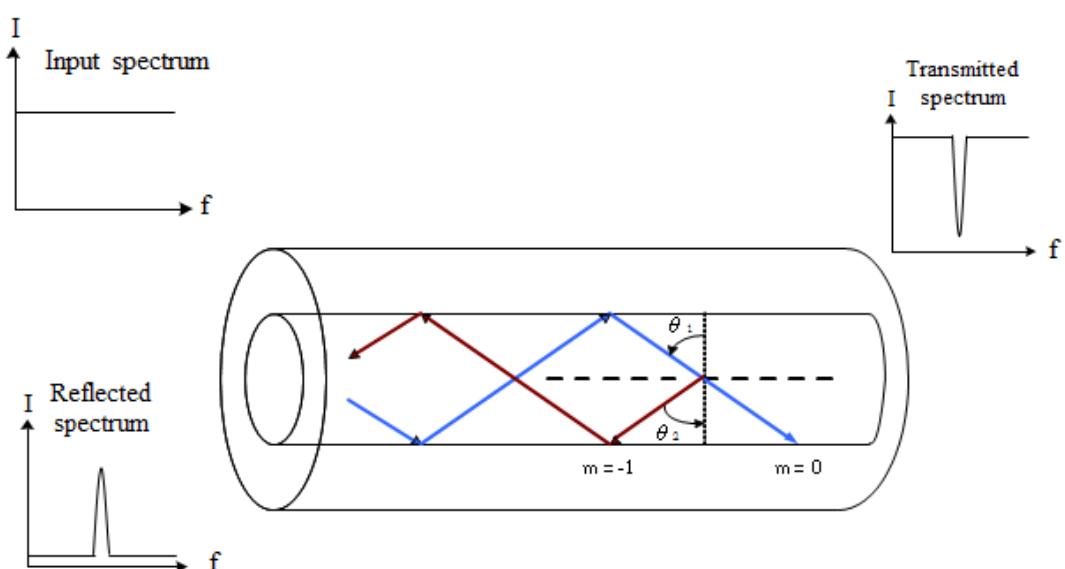


圖 2.14 短週期光纖光柵原理示意圖

- Core mode
- Cladding mode
- ✓ Radiation mode

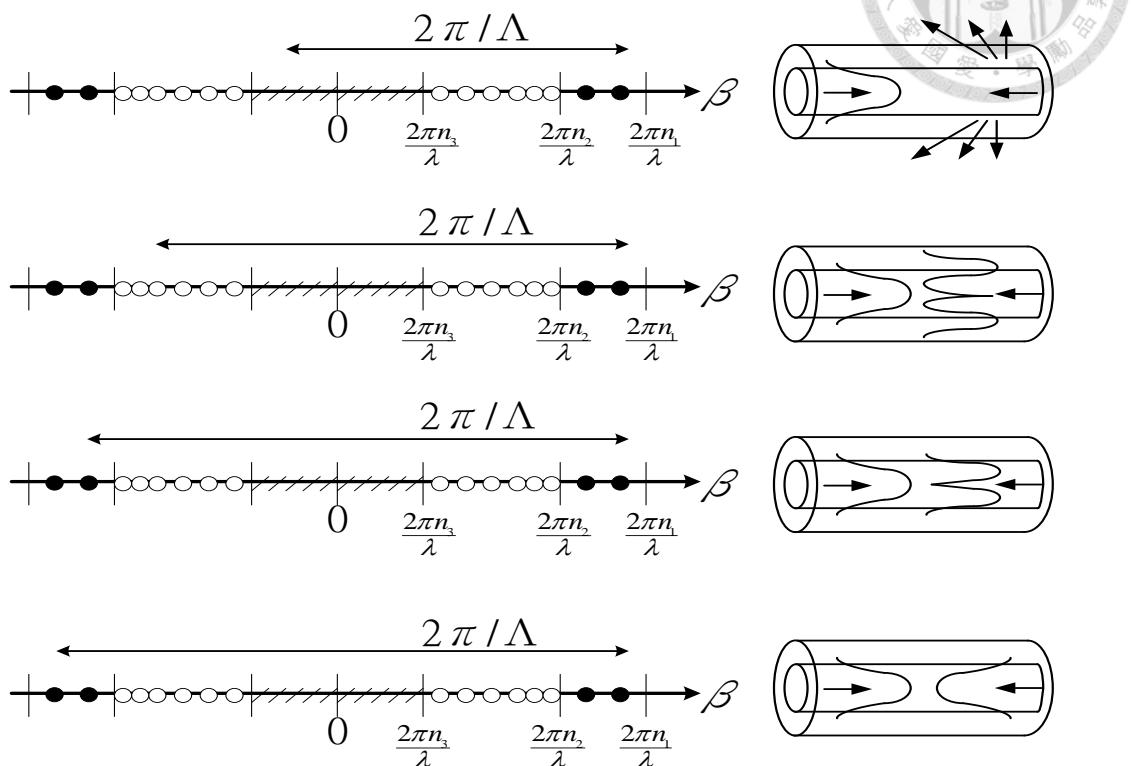


圖 2.15 短週期光纖光柵模態耦合示意圖

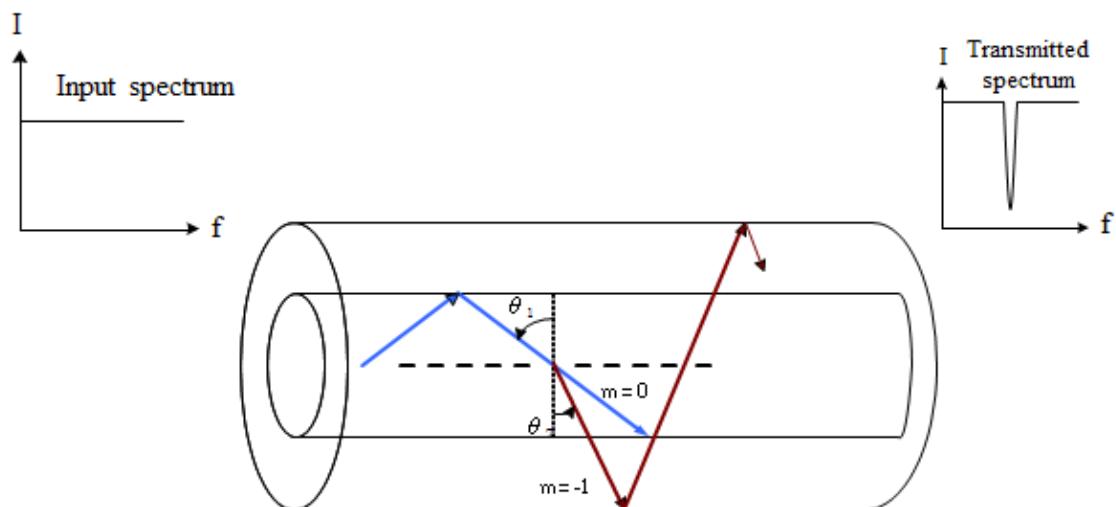


圖 2.16 長週期光纖光柵原理示意圖

- Core mode
- Cladding mode
- ✓ Radiation mode

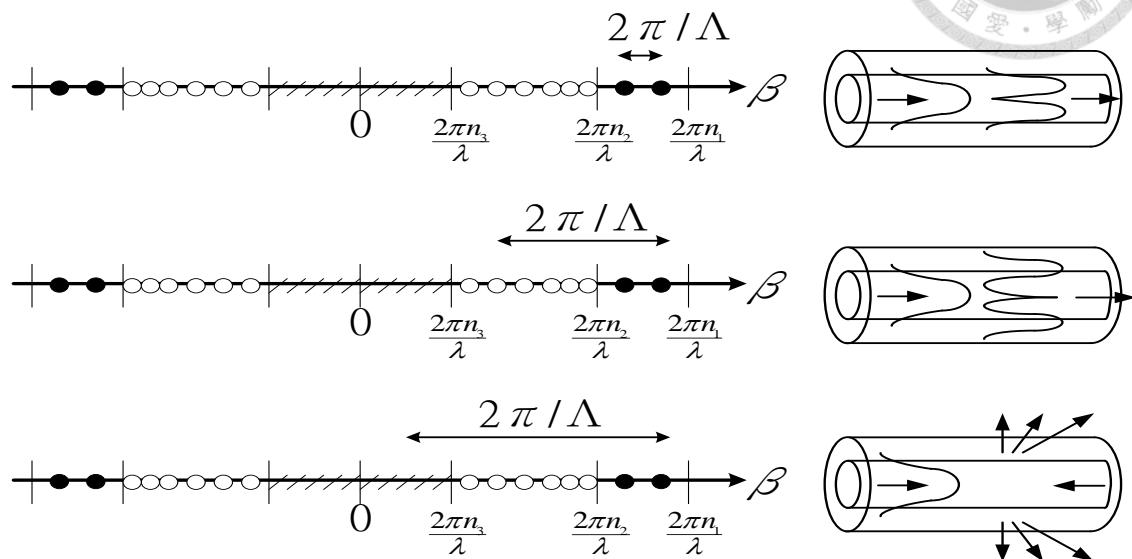


圖 2.17 長週期光纖光柵模態耦合示意圖

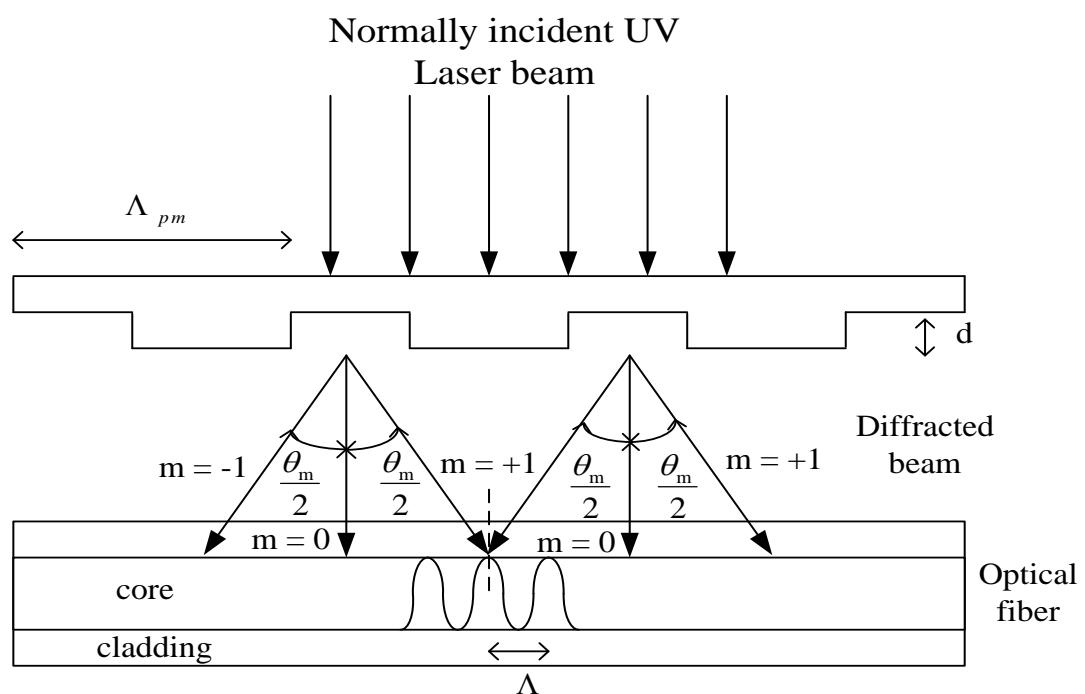


圖 2.18 相位光罩法原理示意圖

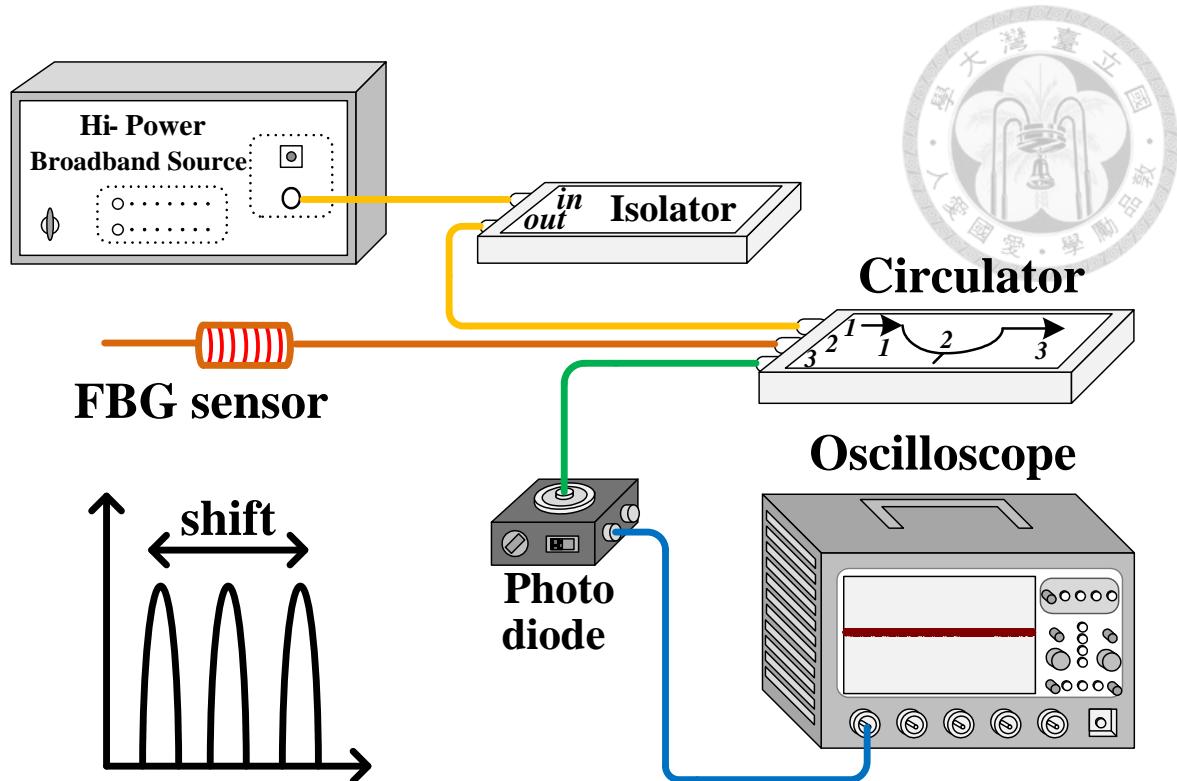


圖 2.19 光電轉換架設(尚無暫態量測之能力)示意圖

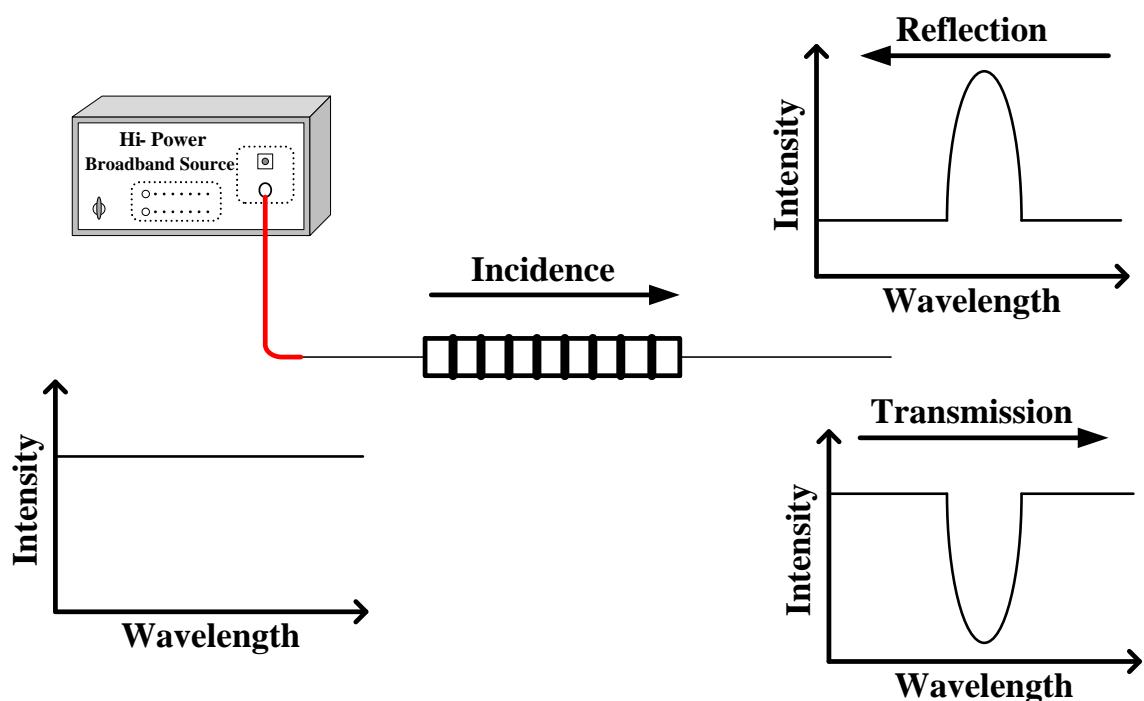


圖 2.20 布拉格光纖光柵之穿透與反射光譜

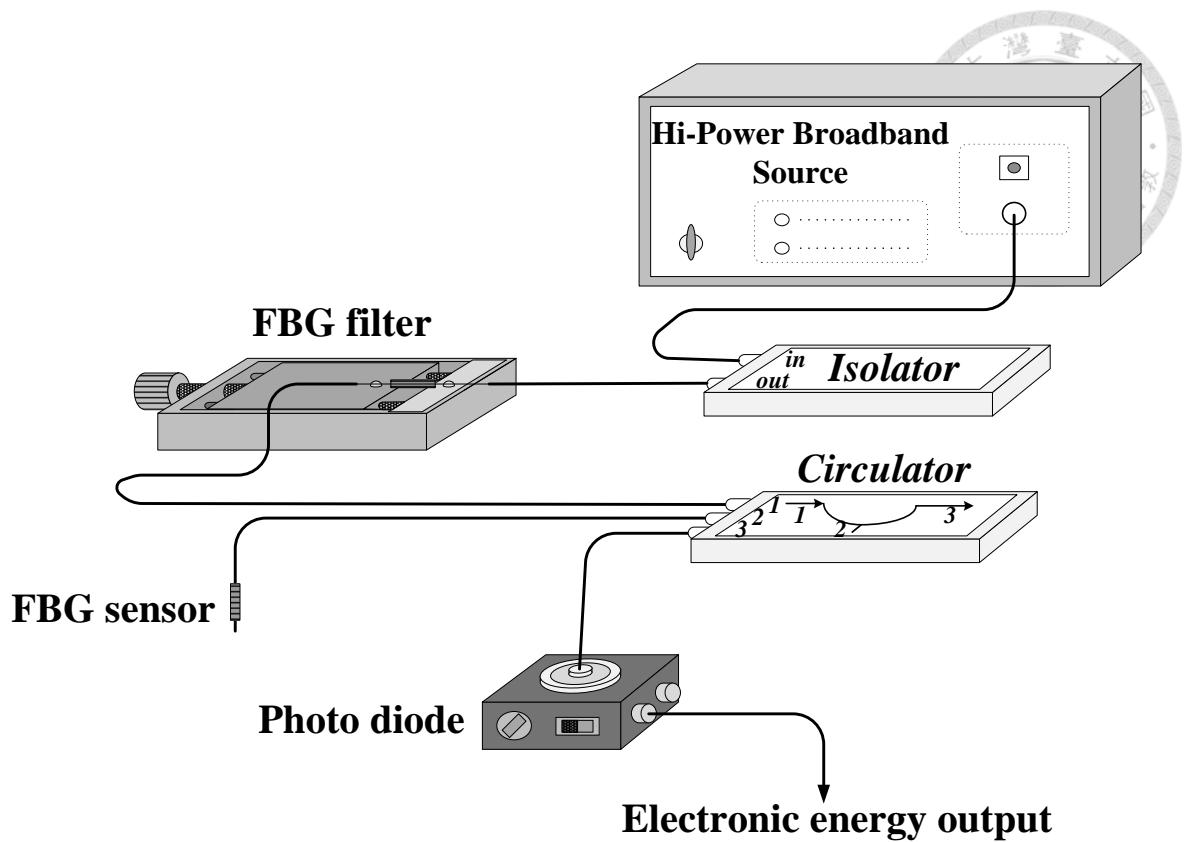


圖 2.21 能量調變法之光纖光柵動態量測系統示意圖

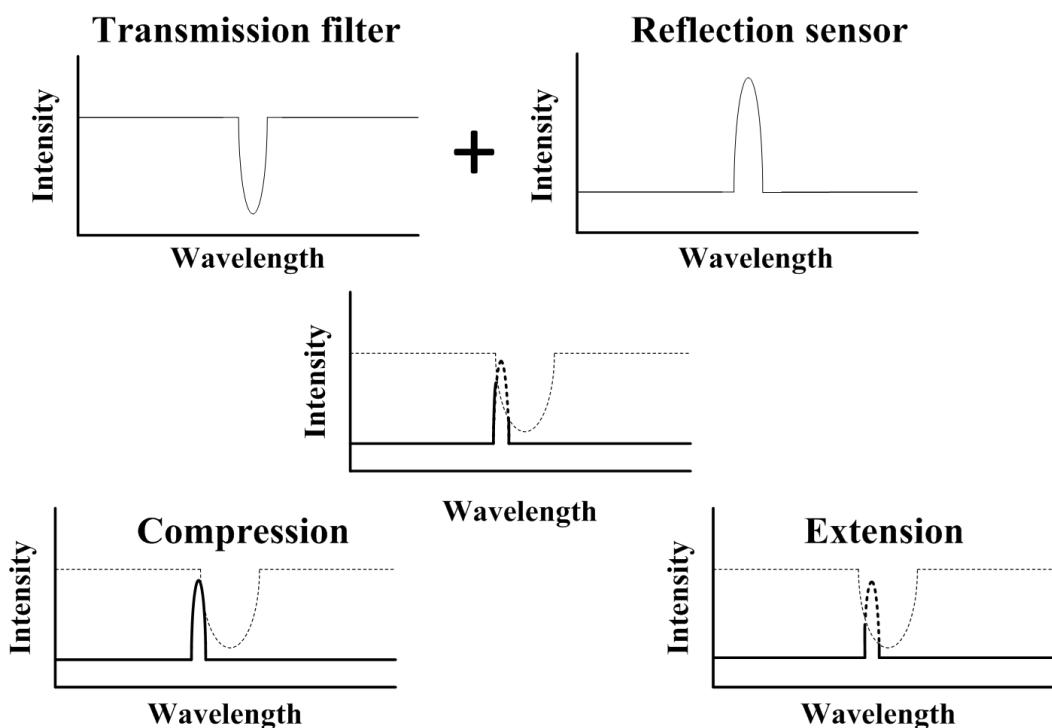


圖 2.22 能量調變之光譜面積示意圖

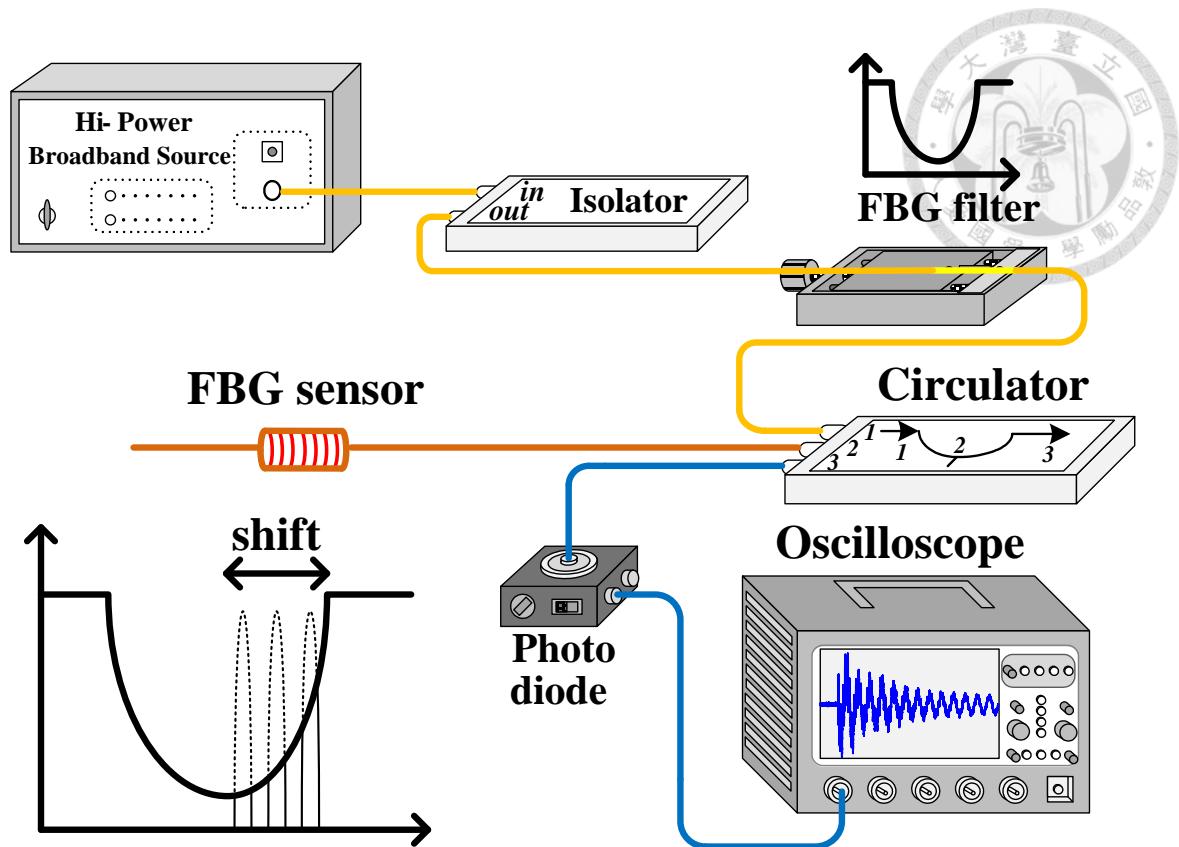


圖 2.23 能量調變型之光電轉換架設(可量測暫態訊號)示意圖

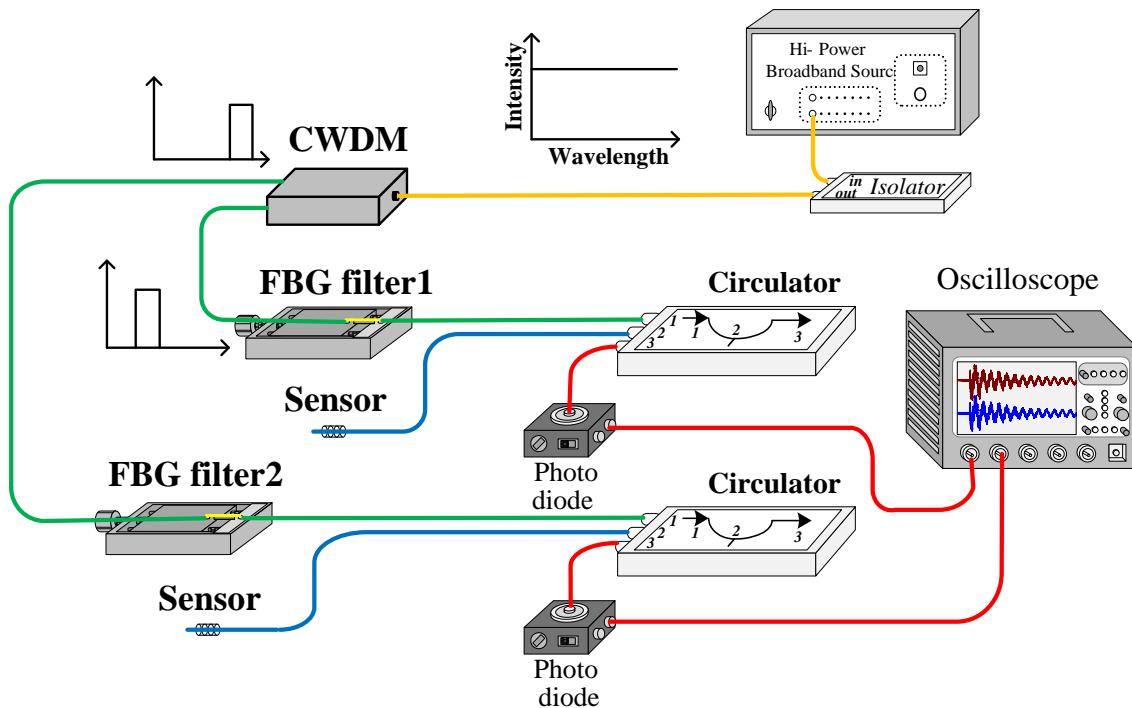


圖 2.24 分波多工器搭配能量調變法實驗架設示意圖

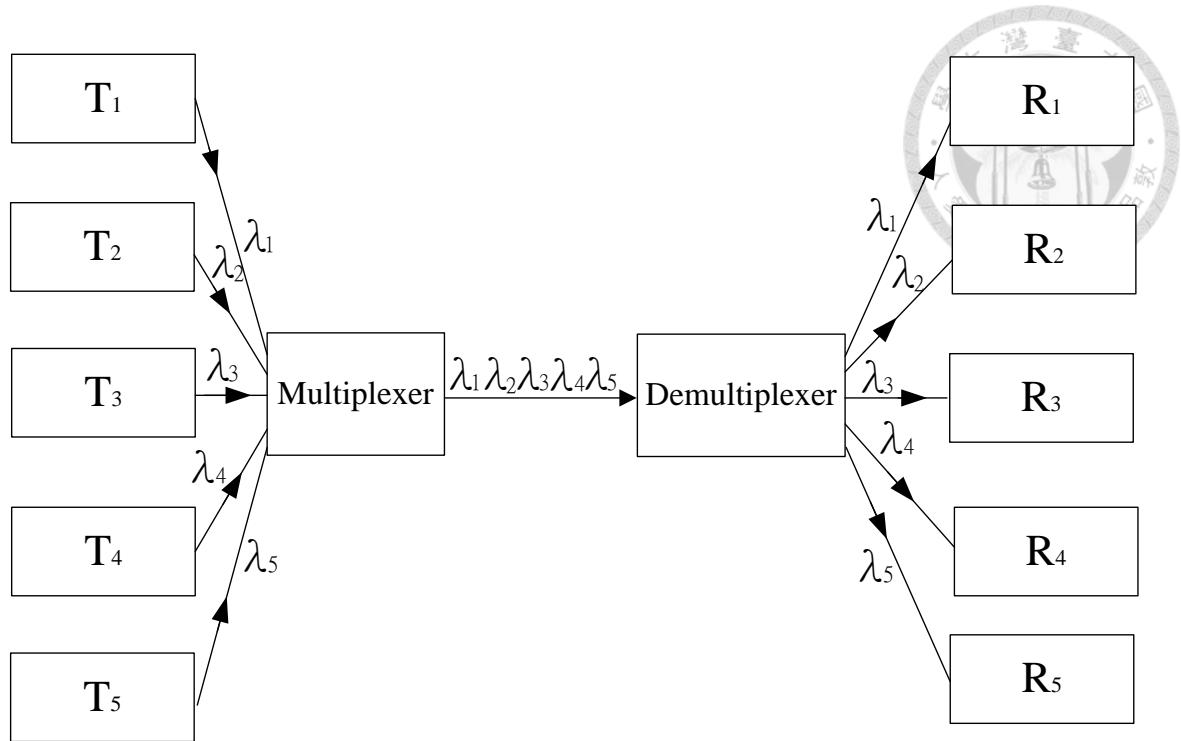


圖 2.25 分波多工器之工作原理示意圖

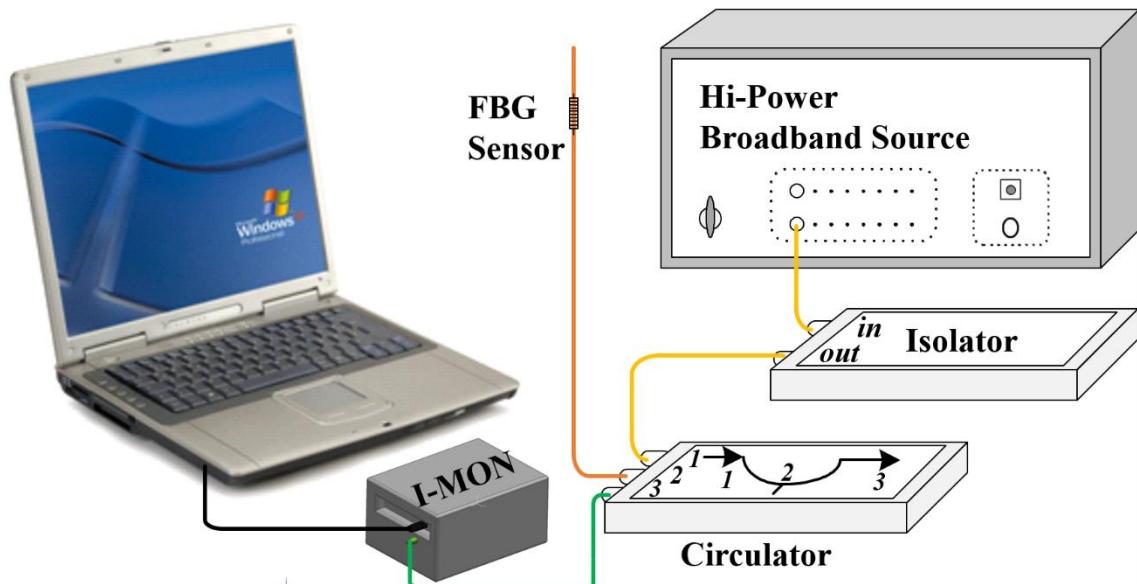


圖 2.26 單光柵光纖配合波長解調器(I-MON)之架設圖

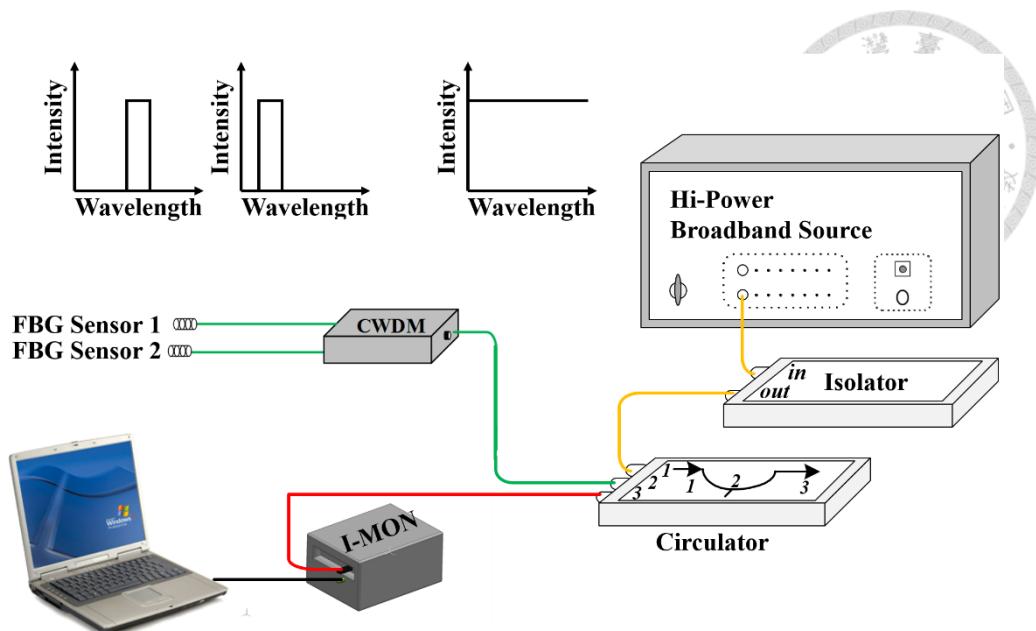


圖 2.27 分波多工器搭配 I-MON 256 USB 實驗架設示意圖

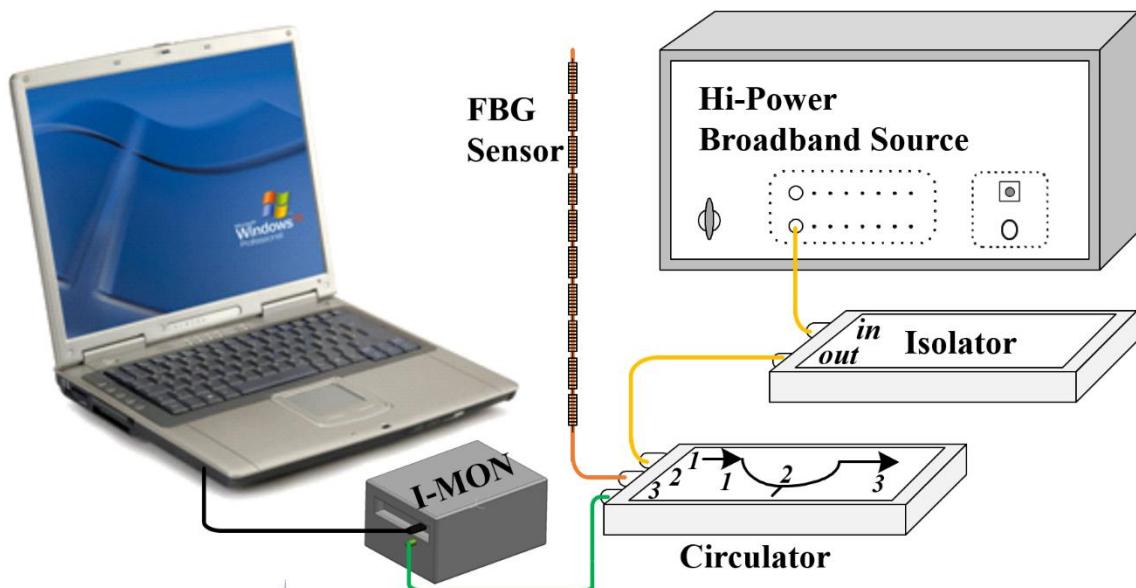


圖 2.28 多光柵光纖配合波長解調器(I-MON)之架設圖

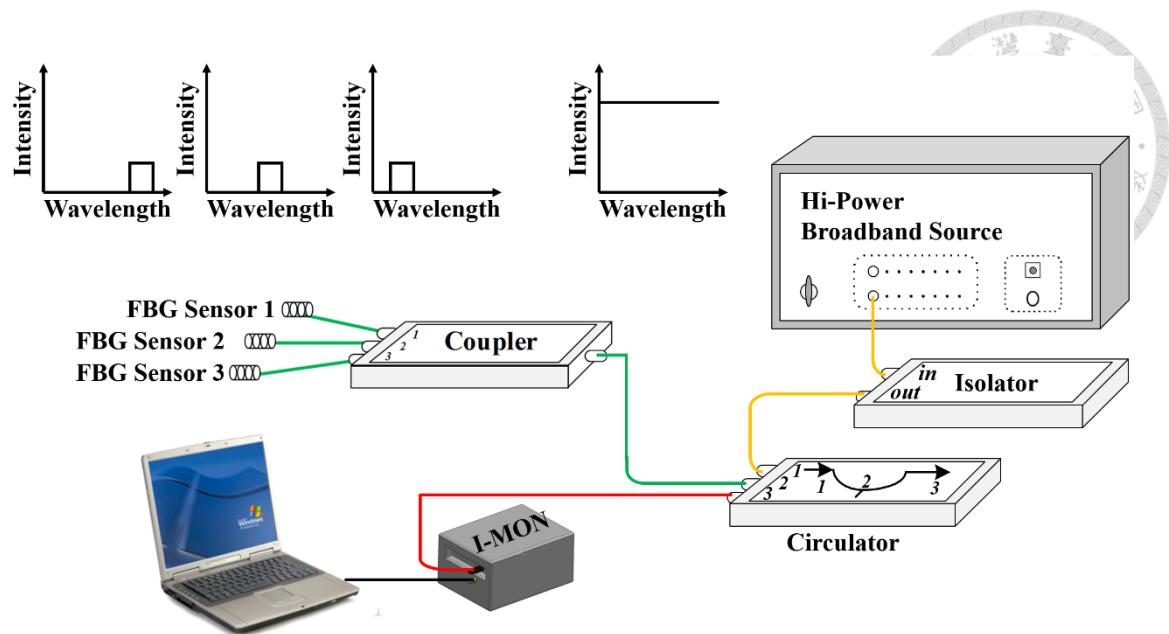


圖 2.29 光耦合器搭配 I-MON 256 USB 實驗架設示意圖

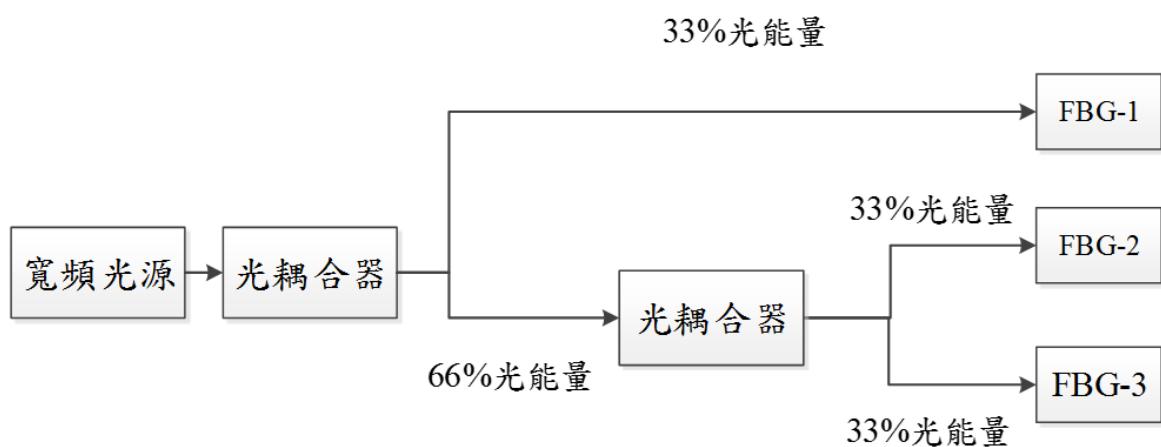


圖 2.30 光耦合器之工作原理示意圖



圖 2.31 寬頻光源(適用於能量調變法量測系統)實體圖

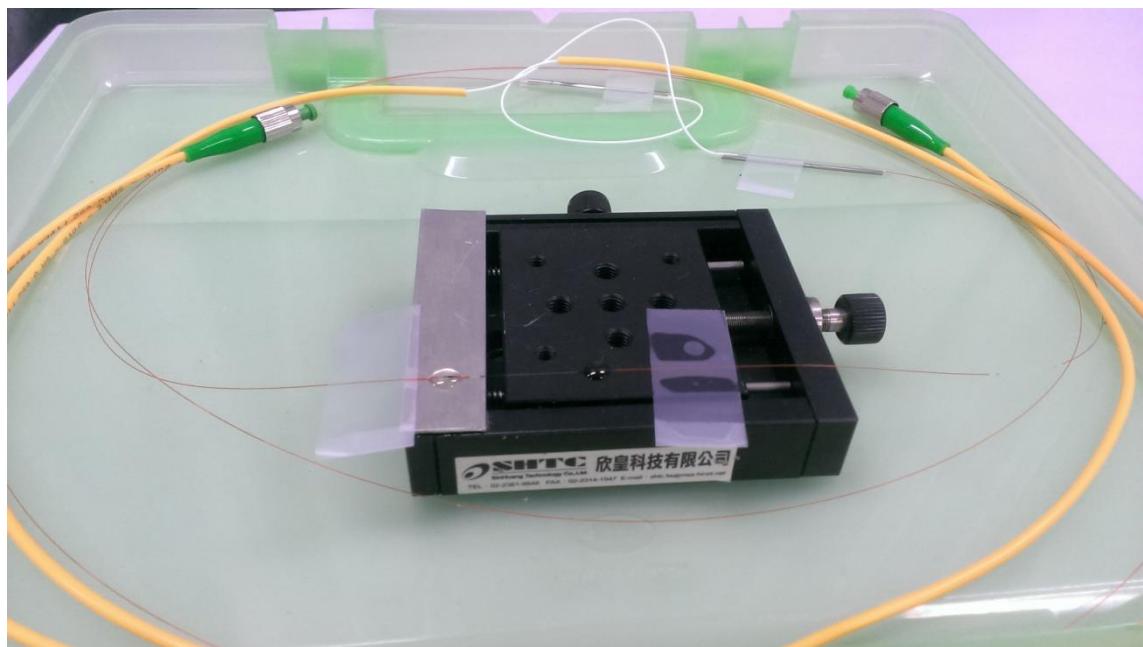


圖 2.32 利用可調式位移平台所製作之濾波器實體圖



圖 2.33 光隔離器

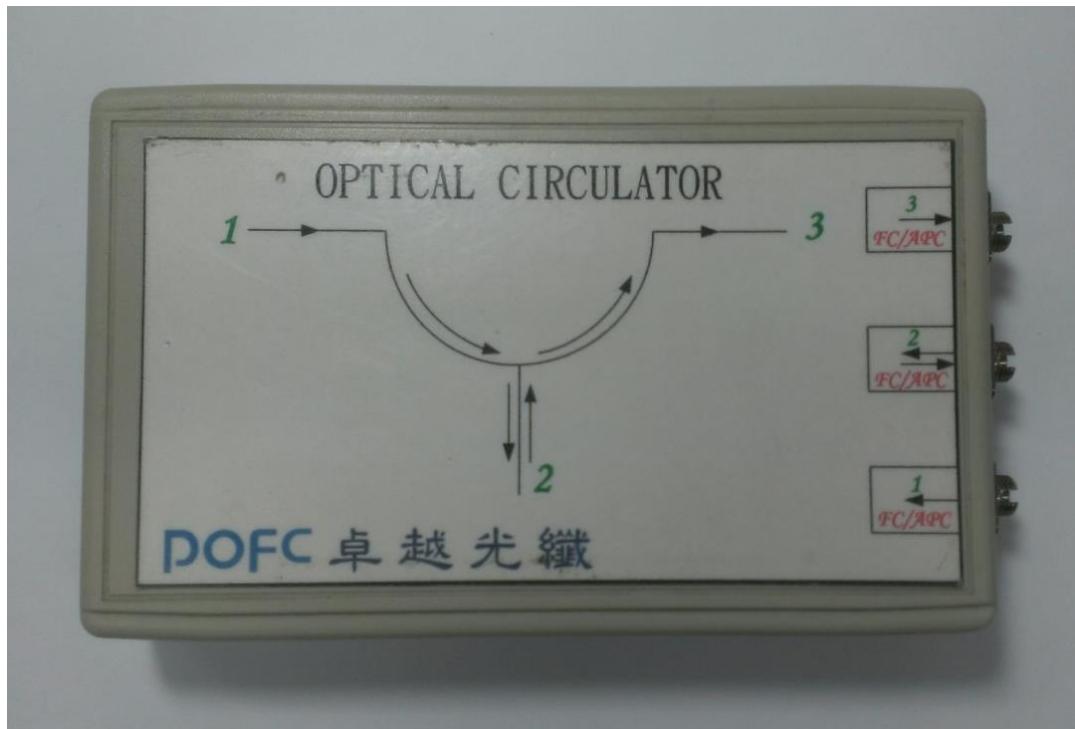


圖 2.34 三埠口式光循環器實體圖



圖 2.35 分波多工器實體圖

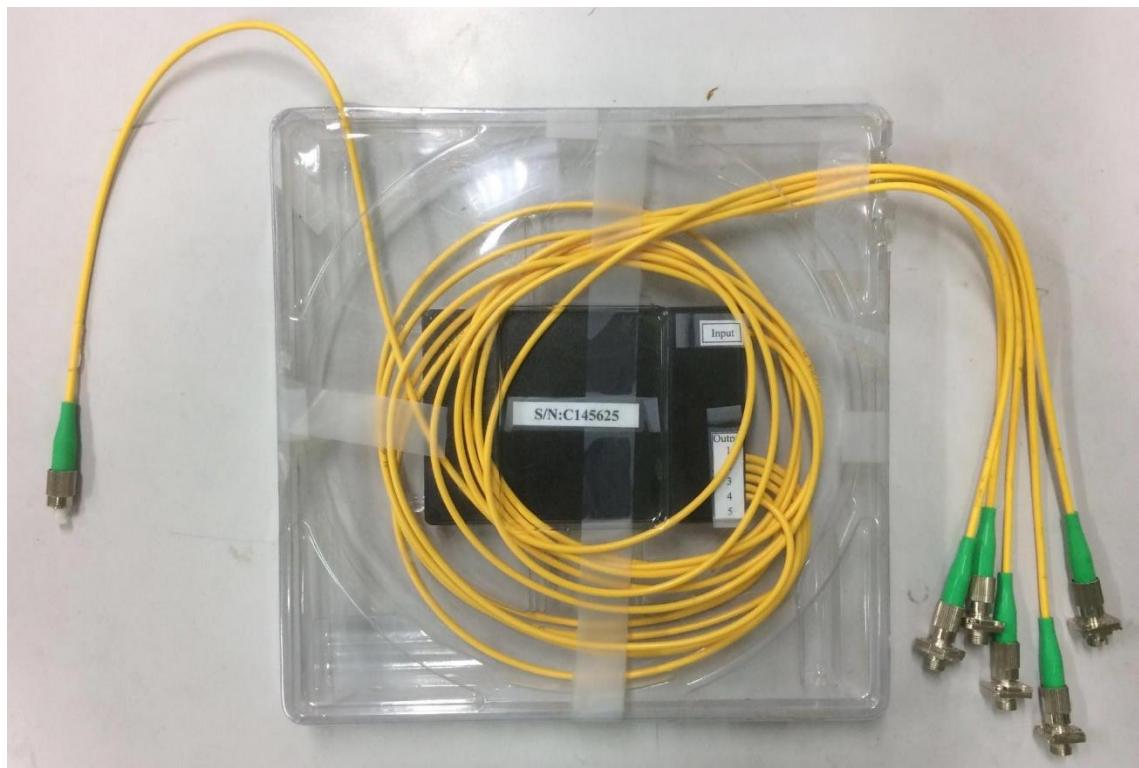


圖 2.36 光耦合器實體圖(一分五)



圖 2.37 光電二極體實體圖

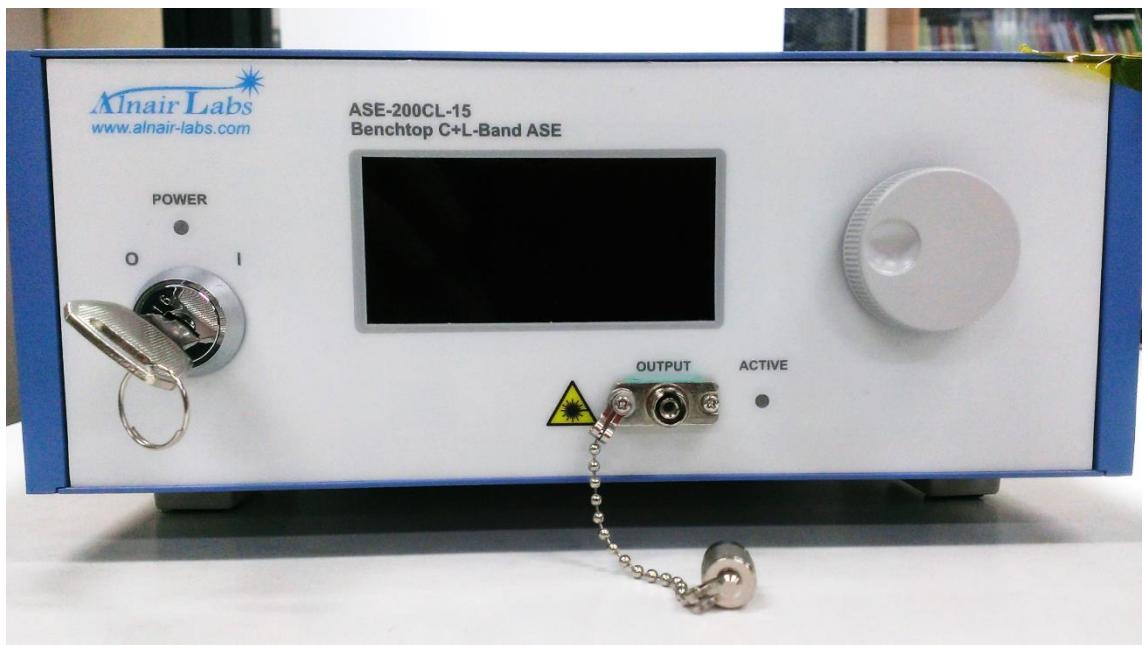


圖 2.38 可調式光源(適合搭配波長解調器 I-MON 使用)實體圖



圖 2.39 光譜分析儀實體圖



圖 2.40 波長解調器 I-MON 256 USB 實體圖

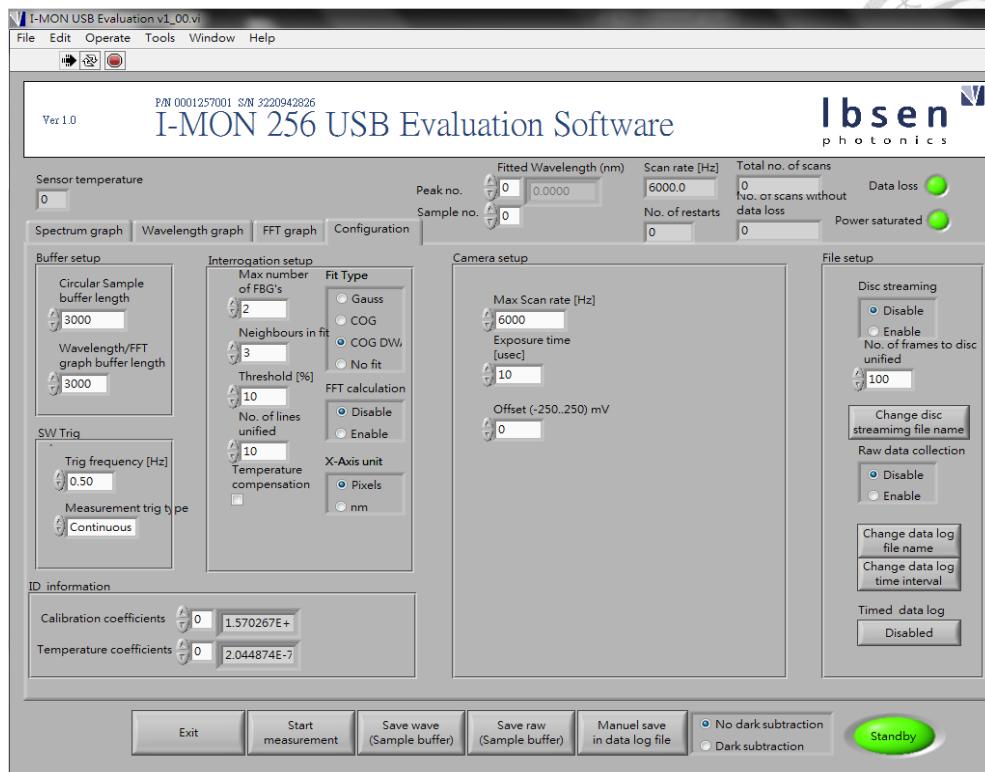


圖 2.41 I-MON 操作介面之參數設定面板

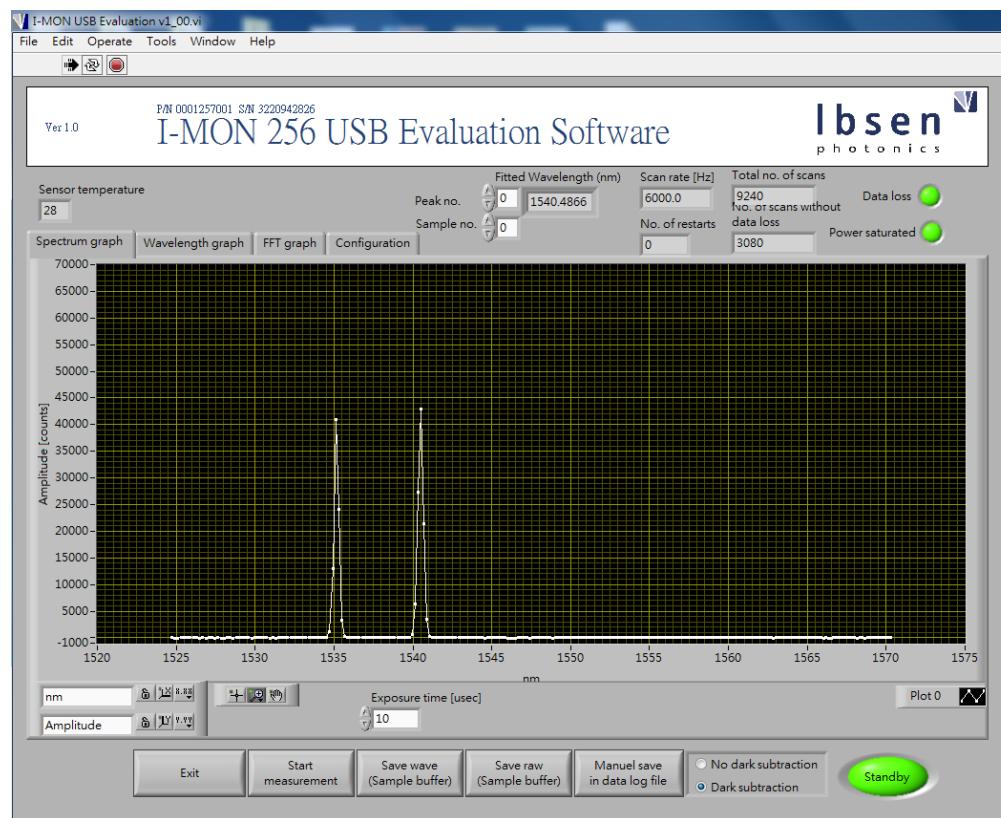


圖 2.42 扣除暗電流之 I-MON 光譜圖(雙段光柵)



圖 2.43 溫度擷取器



圖 2.44 热電偶



圖 2.45 溫度控制器



圖 2.46 光纖位移計 MTI-2100 實體圖

Fiber Distribution

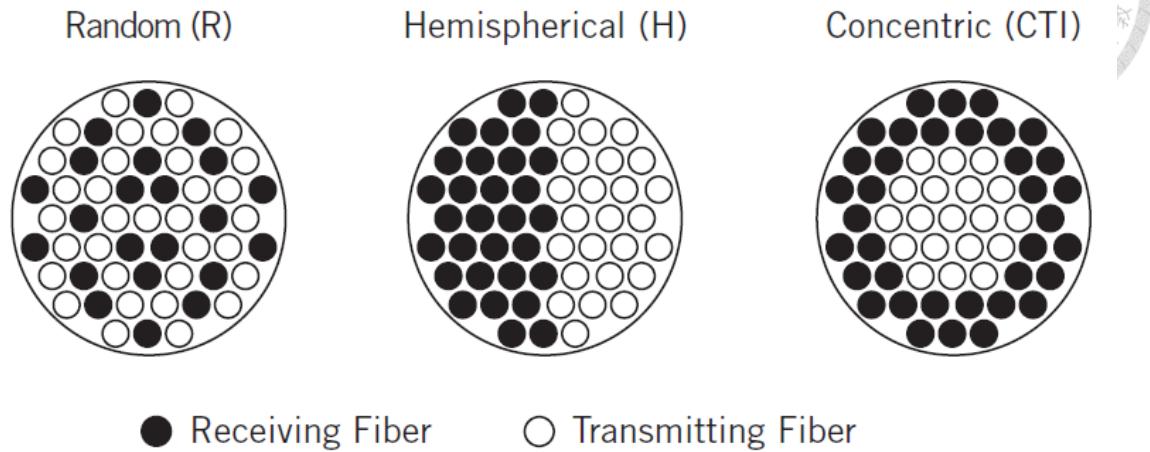


圖 2.47 光纖探頭內部纖維分佈種類

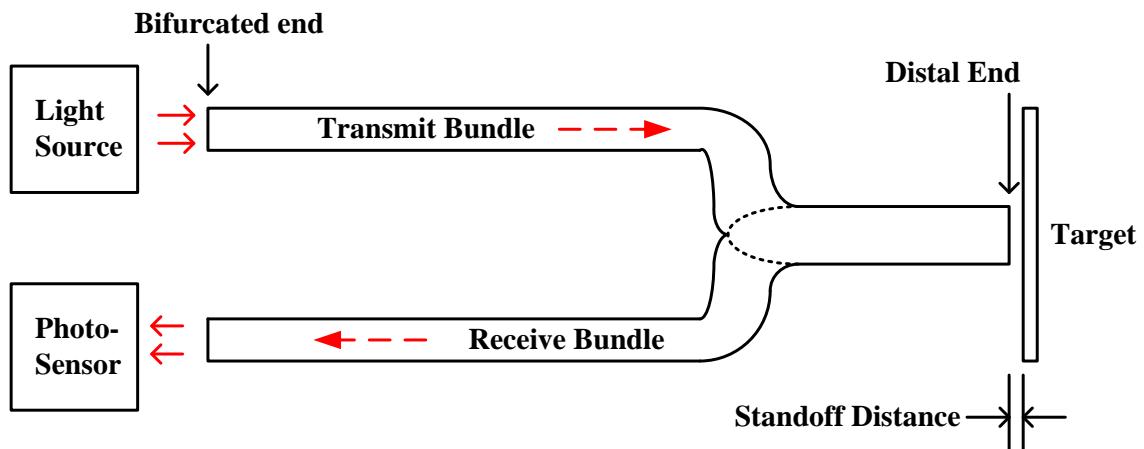


圖 2.48 光纖位移計之探頭工作原理示意圖

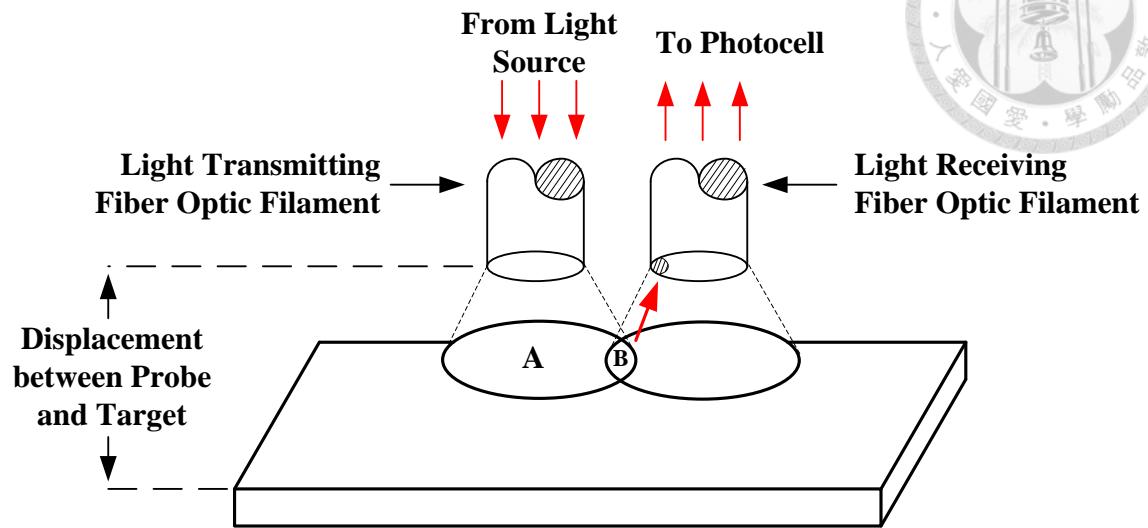


圖 2.49 探針擷取強度與待測物距離關係(近)

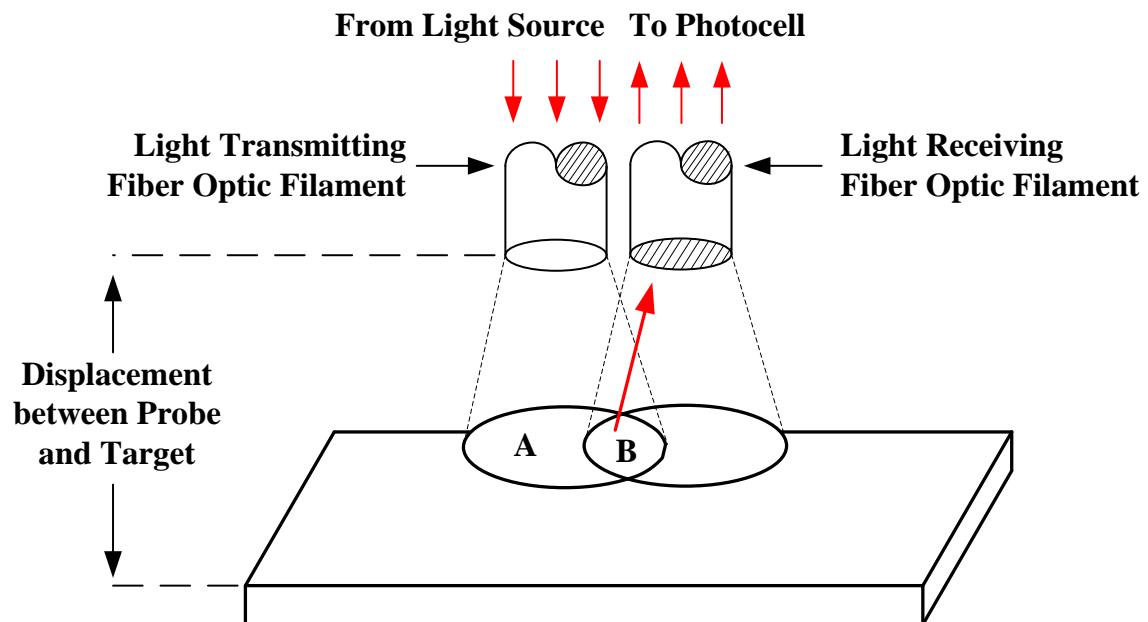


圖 2.50 探針擷取強度與待測物距離關係(遠)

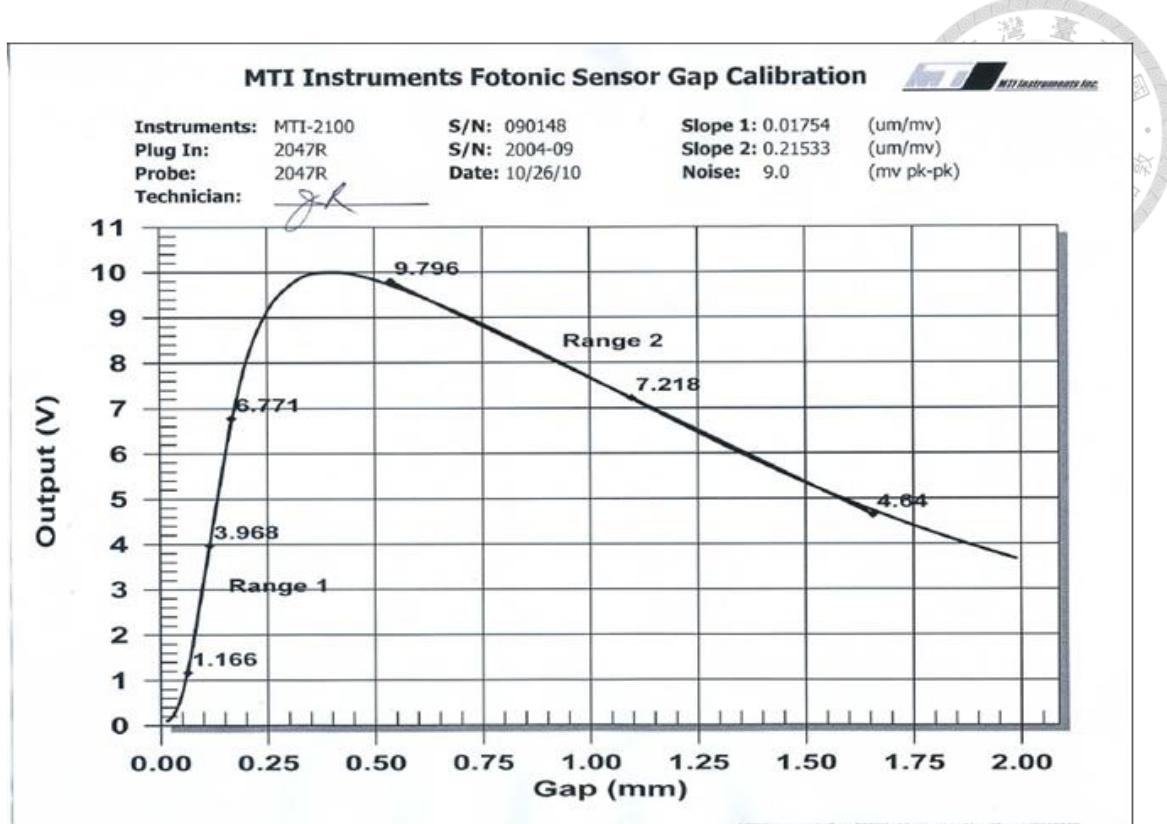


圖 2.51 光纖位移計之位移與電壓校正曲線



圖 2.52 TAS-200 系列紅外線熱像儀

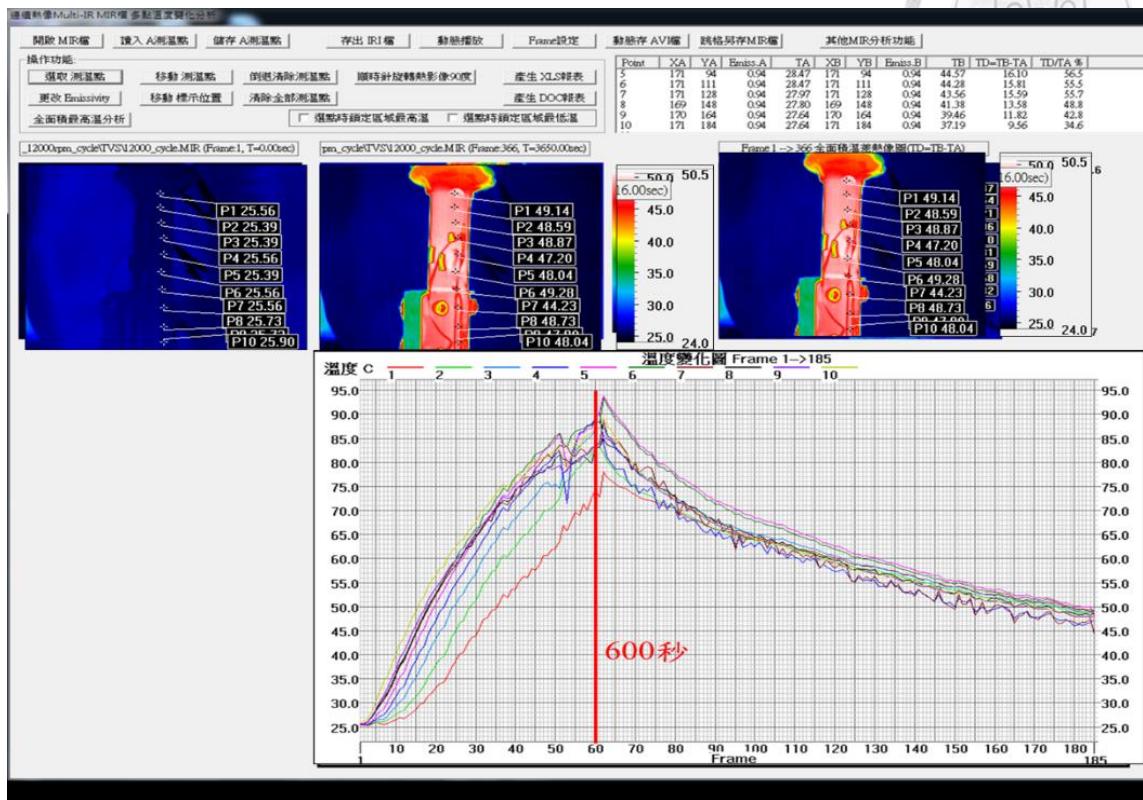


圖 2.53 景興紅外線熱像分析系統介面

第三章 厚度階梯變化圓板承受動態負載理論分析與實

驗量測



本章主要探討厚度呈現階梯變化圓板在固定邊界下，在動態外力負載下所產生表面暫態波傳議題，內文有實驗量測、理論分析推導與有限元素軟體模擬分析等內容討論。其中理論推導運用模態展開數學方法，求出共振頻率與模態解析解，以時間模態和函數函數來建構暫態位移通解，推導出圓板暫態物理量之面外位移解析解。實驗採用鋼珠自由落體掉落擊中固定邊界圓板上，使圓板產生短暫態變形，進一步使用壓電薄膜 PVDF 感測器量測鋼珠從高處落擊圓板時波源歷時，將實驗量測結果、有限元素模擬和理論解析等結果，再藉由全域光學系統電子斑點干涉術(AF-ESPI)量測圓板共振頻率與模態，進一步比較將理論計算與實驗量測結果，針對前三者所得結果深入探討時域及頻域各種物理量之關聯性。

3.1 厚度階梯變化圓板受動態負載之動態分析

考慮圓形平板由等向性材料所構成，圓板厚度呈現階梯變化，在 $0 < r < R_1$ 內厚度為 H_1 ，而 $R_1 < r < R_2$ 範圍厚度為 H_2 ，如圖 3.1。當圓板上施加動態外力 P ，圓板產生面外變形需要滿足薄板理論，採極座標表示其統御方程式如(3.1)：

$$D\nabla^2\nabla^2u_3 + \rho_s h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = p \quad (3.1)$$

其中

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \quad (3.2)$$

在式(3.1)中相關符號表示包括彎曲剛性 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ 、 E 楊氏模數、 h 板厚度、 ρ_s 密度、 ν 浦松比、 u_3 為面外位移。考慮動態外力 P 可隨時間、施力位置、作用範圍等因素變化，因此動態外力 P 為時間與空間相依之函數。



考慮圓板在外力作用前保持靜止狀態，因此當時間 $t=0$ 初始條件為零時，面外位移量 u_3 與速度 $\partial u_3 / \partial t$ 都等於零，初始條件可表示如(3.3)式：

$$u_3|_{t=0} = \frac{\partial u_3}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad (3.3)$$

模態展開數學法為學術界解析結構振動問題常用的數學方法，可用於分析線性結構動態問題，將結構振動特徵模態以線性疊加法來建構結構之暫態行為，以下將依循模態展開法推導概念，首先透過振動分析求得圓形平板的共振頻率和模態，再進一步使用模態形狀求解時間函數，最後推導出圓板的暫態位移解。

3.1.1 厚度階梯變化圓板自由振動分析

分析圓板自由振動特性時，可將面外位移 u_3 假設為(3.4)式簡諧振動形式

$$u_3(r, \theta, t) = W(r, \theta) e^{i\omega t} \quad (3.4)$$

其中 $j = \sqrt{-1}$ 、 W 代表模態形狀、 ω 是角頻率(rad/s)。將式(3.4)代入(3.1)中，並考慮自由振動情況下外力 P 視為零，整理可得自由振動統御方程式(3.5)：

$$\nabla^2 \nabla^2 W - \lambda^4 W = 0 \quad (3.5)$$

其中

$$\lambda^4 = \omega^2 \frac{\rho_s h}{D} \quad (3.6)$$

式(3.5)可改寫如下形式

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \pm \lambda^2 W = 0 \quad (3.7)$$

接著採用變數分離法，將模態形狀假設為式(3.8)：

$$W(r, \theta) = R(r)\Phi(\theta) \quad (3.8)$$



將式(3.8)代入(3.7)可得(3.9)：

$$\left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right) \Phi + \frac{1}{r^2} R \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \pm \lambda^2 R \Phi = 0 \quad (3.9)$$

式(3.9)可移項整理為

$$\frac{\left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \pm \lambda^2 R \right)}{\left(-\frac{R}{r^2} \right)} = \frac{\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right)}{\Phi} = -m^2 \quad (3.10)$$

再進一步將式(3.10)分離式(3.11)及(3.12)為單一變數常微分方程式

$$\frac{d^2 \Phi}{d\theta^2} + m^2 \Phi = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left(\pm \lambda^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (3.12)$$

求解式(3.11)中二階常微分方程可得解如式(3.13)：

$$\Phi(\theta) = E_m \sin(m\theta) + F_m \cos(m\theta) \quad (3.13)$$

其中 E_m 和 F_m 是未知係數。又式(3.12)為 Bessel 方程式，其解為式(3.14)：

$$R(r) = A_m J_m(\lambda r) + B_m I_m(\lambda r) + C_m Y_m(\lambda r) + D_m K_m(\lambda r) \quad (3.14)$$

其中 J_m 、 Y_m 、 I_m 和 K_m 分別是 m 階第一類、第二類和修正型第一類、修正型第二類

Bessel 函數。將(3.13)和(3.14)代回(3.8)式整理後，可得模態形狀通解如下：

$$W(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[A'_m J_m(\lambda r) + B'_m I_m(\lambda r) + C'_m Y_m(\lambda r) + D'_m K_m(\lambda r) \right] \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} \left[A''_m J_m(\lambda r) + B''_m I_m(\lambda r) + C''_m Y_m(\lambda r) + D''_m K_m(\lambda r) \right] \sin m\theta \quad (3.15)$$

其中 A'_m 、 B'_m 、 C'_m 、 D'_m 、 A''_m 、 B''_m 、 C''_m 和 D''_m 等係數皆尚未決定，需要透過數學物理特性及邊界條件來進一步決定這些係數。

考慮圓板最外圍為固定邊界，在此邊界上($r = R_2$)圓板位移和撓角值皆為零，因此邊界條件可以表示為



$$W|_{r=R_2} = 0 \quad (3.16)$$

$$\left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=R_2} = 0 \quad (3.17)$$

依據圖 3.1 圓板厚度呈現階梯式變化，可將圓板劃分為兩個區域，將其位移分別定義為內層位移 W^{inner} 和外層位移 W^{outer} ，因此圓板面外位移可假設為

$$W = \begin{cases} W^{inner}, & 0 < r < R_1 \\ W^{outer}, & R_1 < r < R_2 \end{cases} \quad (3.18)$$

在圓板範圍內，無論是內層位移 W^{inner} 或外層位移 W^{outer} 通解都可用式(3.18)來描述，在圓心 $r = 0$ 處，因第二類 Bessel 函數 Y_m 和修正型第二類 Bessel 函數 K_m 會趨近無窮大，所以 W^{inner} 中待定係數項 $C'_m = D'_m = C''_m = D''_m = 0$ 。

考慮依某特定軸圓板模態形狀具對稱性，而將該軸放在極座標 $\theta = 0$ 方向上會呈現對稱模態形狀，此時 $\sin(m\theta)_{\theta=0} = 0$ ，所以利用邊界條件來決定(3.15)通解中 A'_m 和 B'_m 兩組待定係數，可將內層位移 W^{inner} 簡化如(3.19)式。接者，針對外層位移進行討論，依前述某特定軸具對稱性，將該軸置於極座標 $\theta = 0$ 方向上，會呈現對稱模態形狀，造成 $\sin(m\theta)_{\theta=0} = 0$ ，所以在(3.15)通解中與 $\sin(m\theta)$ 相關項均不存在，利用邊界條件來決定僅剩下與 $\cos(m\theta)$ 項相關四組待定係數，外層位移 W^{outer} 簡化如(3.20)式。

$$W^{inner}(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} [A'_m J_m(\lambda_1 r) + B'_m I_m(\lambda_1 r)] \cos m\theta \quad (3.19)$$

$$W^{outer}(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} [A''_m J_m(\lambda_2 r) + B''_m I_m(\lambda_2 r) + C''_m Y_m(\lambda_2 r) + D''_m K_m(\lambda_2 r)] \cos m\theta \quad (3.20)$$

其中 A'_m 、 B'_m 、 A''_m 、 B''_m 、 C''_m 和 D''_m 皆為待定係數，其他變數定義如(3.21)、(3.22)：

$$D_1 = \frac{EH_1^3}{12(1-\nu^2)} \quad D_2 = \frac{EH_2^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.21)$$



$$\lambda_1^4 = \omega^2 \frac{\rho_s H_1}{D_1} \quad \lambda_2^4 = \omega^2 \frac{\rho_s H_2}{D_2}$$

(3.22)

依據式(3.18)關係，圓板邊界條件(3.16)和(3.17)可以改寫為：

$$W^{outer} \Big|_{r=R_2} = 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial W^{outer}}{\partial r} \Big|_{r=R_2} = 0 \quad (3.24)$$

本理論推導將厚度階梯變化圓板劃分為內層與外層，因為圓板為連續體，所以圓板內外層介面間位移、撓角、彎矩和剪力等物理量必需保持連續性，因此可藉由內外層位移 W^{inner} 和 W^{outer} 來描述連續條件，如(3.25)至(3.28)式：

(1) 位移連續

$$W^{inner} \Big|_{r=R_1} = W^{outer} \Big|_{r=R_1} \quad (3.25)$$

(2) 撓角連續

$$\frac{\partial W^{inner}}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = \frac{\partial W^{outer}}{\partial r} \Big|_{r=R_1} \quad (3.26)$$

(3) 彎矩連續

$$\begin{aligned} & D_1 \left(\frac{\partial^2 W^{inner}}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial W^{inner}}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 W^{inner}}{\partial \theta^2} \right) \Big|_{r=R_1} \\ &= D_2 \left(\frac{\partial^2 W^{outer}}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial W^{outer}}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 W^{outer}}{\partial \theta^2} \right) \Big|_{r=R_1} \end{aligned} \quad (3.27)$$

(4) 剪力連續

$$\begin{aligned} & D_1 \left[\frac{\partial^3 W^{inner}}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W^{inner}}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial W^{inner}}{\partial r} + \frac{(2-\nu)}{r^2} \frac{\partial^3 W^{inner}}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{(3-\nu)}{r^3} \frac{\partial^2 W^{inner}}{\partial \theta^2} \right] \Big|_{r=R_1} \\ &= D_2 \left[\frac{\partial^3 W^{outer}}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W^{outer}}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial W^{outer}}{\partial r} + \frac{(2-\nu)}{r^2} \frac{\partial^3 W^{outer}}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{(3-\nu)}{r^3} \frac{\partial^2 W^{outer}}{\partial \theta^2} \right] \Big|_{r=R_1} \end{aligned} \quad (3.28)$$

將式(3.19)和(3.20)分別代入邊界條件(3.23)、(3.24)和連續條件(3.25)至(3.28)式中，整理後以式(3.29)矩陣形式表示。

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1m} \\ X_{2m} \\ X_{3m} \\ X_{4m} \\ X_{5m} \\ X_{6m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



(3.29)

其中

$$A_{11} = J_m(\lambda_1 R_1) \quad (3.30)$$

$$A_{12} = I_m(\lambda_1 R_1) \quad (3.31)$$

$$A_{13} = -J_m(\lambda_2 R_1) \quad (3.32)$$

$$A_{14} = -I_m(\lambda_2 R_1) \quad (3.33)$$

$$A_{15} = -Y_m(\lambda_2 R_1) \quad (3.34)$$

$$A_{16} = -K_m(\lambda_2 R_1) \quad (3.35)$$

$$A_{21} = \frac{\partial J_m(\lambda_1 R_1)}{\partial r} \quad (3.36)$$

$$A_{22} = \frac{\partial I_m(\lambda_1 R_1)}{\partial r} \quad (3.37)$$

$$A_{23} = -\frac{\partial J_m(\lambda_2 R_1)}{\partial r} \quad (3.38)$$

$$A_{24} = -\frac{\partial I_m(\lambda_2 R_1)}{\partial r} \quad (3.39)$$

$$A_{25} = -\frac{\partial Y_m(\lambda_2 R_1)}{\partial r} \quad (3.40)$$

$$A_{26} = -\frac{\partial K_m(\lambda_2 R_1)}{\partial r} \quad (3.41)$$

$$A_{31} = D_1 \left[\frac{\partial^2 J_m(\lambda_1 R_1)}{\partial r^2} + \frac{\nu}{R_1} \frac{\partial J_m(\lambda_1 R_1)}{\partial r} - \frac{m^2 \nu J_m(\lambda_1 R_1)}{R_1^2} \right] \quad (3.42)$$

$$A_{32} = D_1 \left[\frac{\partial^2 I_m(\lambda_1 R_1)}{\partial r^2} + \frac{\nu}{R_1} \frac{\partial I_m(\lambda_1 R_1)}{\partial r} - \frac{m^2 \nu I_m(\lambda_1 R_1)}{R_1^2} \right] \quad (3.43)$$

$$A_{33} = -D_2 \left[\frac{\partial^2 J_m(\lambda_2 R_1)}{\partial r^2} + \frac{\nu}{R_1} \frac{\partial J_m(\lambda_2 R_1)}{\partial r} - \frac{m^2 \nu J_m(\lambda_2 R_1)}{R_1^2} \right] \quad (3.44)$$

$$A_{34} = -D_2 \left[\frac{\partial^2 I_m(\lambda_2 R_1)}{\partial r^2} + \frac{\nu}{R_1} \frac{\partial I_m(\lambda_2 R_1)}{\partial r} - \frac{m^2 \nu I_m(\lambda_2 R_1)}{R_1^2} \right] \quad (3.45)$$

$$A_{35} = -D_2 \left[\frac{\partial^2 Y_m(\lambda_2 R_1)}{\partial r^2} + \frac{\nu}{R_1} \frac{\partial Y_m(\lambda_2 R_1)}{\partial r} - \frac{m^2 \nu Y_m(\lambda_2 R_1)}{R_1^2} \right] \quad (3.46)$$

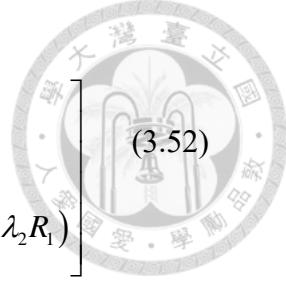
$$A_{36} = -D_2 \left[\frac{\partial^2 K_m(\lambda_2 R_1)}{\partial r^2} + \frac{\nu}{R_1} \frac{\partial K_m(\lambda_2 R_1)}{\partial r} - \frac{m^2 \nu K_m(\lambda_2 R_1)}{R_1^2} \right] \quad (3.47)$$

$$A_{41} = D_1 \left[\begin{array}{l} \frac{\partial^3 J_m(\lambda_1 R_1)}{\partial r^3} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 J_m(\lambda_1 R_1)}{\partial r^2} \\ - \left(\frac{1+(2-\nu)m^2}{R_1^2} \right) \frac{\partial J_m(\lambda_1 R_1)}{\partial r} + \frac{(3-\nu)m^2}{R_1^3} J_m(\lambda_1 R_1) \end{array} \right] \quad (3.48)$$

$$A_{42} = D_1 \left[\begin{array}{l} \frac{\partial^3 I_m(\lambda_1 R_1)}{\partial r^3} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 I_m(\lambda_1 R_1)}{\partial r^2} \\ - \left(\frac{1+(2-\nu)m^2}{R_1^2} \right) \frac{\partial I_m(\lambda_1 R_1)}{\partial r} + \frac{(3-\nu)m^2}{R_1^3} I_m(\lambda_1 R_1) \end{array} \right] \quad (3.49)$$

$$A_{43} = -D_2 \left[\begin{array}{l} \frac{\partial^3 J_m(\lambda_2 R_1)}{\partial r^3} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 J_m(\lambda_2 R_1)}{\partial r^2} \\ - \left(\frac{1+(2-\nu)m^2}{R_1^2} \right) \frac{\partial J_m(\lambda_2 R_1)}{\partial r} + \frac{(3-\nu)m^2}{R_1^3} J_m(\lambda_2 R_1) \end{array} \right] \quad (3.50)$$

$$A_{44} = -D_2 \left[\begin{array}{l} \frac{\partial^3 I_m(\lambda_2 R_1)}{\partial r^3} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 I_m(\lambda_2 R_1)}{\partial r^2} \\ - \left(\frac{1+(2-\nu)m^2}{R_1^2} \right) \frac{\partial I_m(\lambda_2 R_1)}{\partial r} + \frac{(3-\nu)m^2}{R_1^3} I_m(\lambda_2 R_1) \end{array} \right] \quad (3.51)$$



$$A_{45} = -D_2 \left[\begin{aligned} & \frac{\partial^3 Y_m(\lambda_2 R_1)}{\partial r^3} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 Y_m(\lambda_2 R_1)}{\partial r^2} \\ & - \left(\frac{1+(2-\nu)m^2}{R_1^2} \right) \frac{\partial Y_m(\lambda_2 R_1)}{\partial r} + \frac{(3-\nu)m^2}{R_1^3} Y_m(\lambda_2 R_1) \end{aligned} \right] \quad (3.52)$$

$$A_{46} = -D_2 \left[\begin{aligned} & \frac{\partial^3 K_m(\lambda_2 R_1)}{\partial r^3} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 K_m(\lambda_2 R_1)}{\partial r^2} \\ & - \left(\frac{1+(2-\nu)m^2}{R_1^2} \right) \frac{\partial K_m(\lambda_2 R_1)}{\partial r} + \frac{(3-\nu)m^2}{R_1^3} K_m(\lambda_2 R_1) \end{aligned} \right] \quad (3.53)$$

$$A_{51} = 0 \quad (3.54)$$

$$A_{52} = 0 \quad (3.55)$$

$$A_{53} = J_m(\lambda_2 R_2) \quad (3.56)$$

$$A_{54} = I_m(\lambda_2 R_2) \quad (3.57)$$

$$A_{55} = Y_m(\lambda_2 R_2) \quad (3.58)$$

$$A_{56} = K_m(\lambda_2 R_2) \quad (3.59)$$

$$A_{61} = 0 \quad (3.60)$$

$$A_{62} = 0 \quad (3.61)$$

$$A_{63} = \frac{\partial J_m(\lambda_2 R_2)}{\partial r} \quad (3.62)$$

$$A_{64} = \frac{\partial I_m(\lambda_2 R_2)}{\partial r} \quad (3.63)$$

$$A_{65} = \frac{\partial Y_m(\lambda_2 R_2)}{\partial r} \quad (3.64)$$

$$A_{66} = \frac{\partial K_m(\lambda_2 R_2)}{\partial r} \quad (3.65)$$

式(3.29)為特徵值問題，透過掃頻機制尋找式(3.29)行列式接近零之頻率即可獲得圓板共振頻率，此時將對應的特徵向量 $[X_{1m} \quad X_{2m} \quad X_{3m} \quad X_{4m} \quad X_{5m} \quad X_{6m}]^T$ 代回式(3.19)和(3.20)中，可得到在該共振頻率下所對應的模態形狀。後續為清楚敘述，將圓板的第 i 個模態形狀依據式(3.19)和(3.20)定義為(3.66)：

$$W_i(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{cases} [A'_m J_m(\lambda_1 r) + B'_m I_m(\lambda_1 r)] \cos m\theta & r < R_1 \\ [A''_m J_m(\lambda_2 r) + B''_m I_m(\lambda_2 r) + C''_m Y_m(\lambda_2 r) + D''_m K_m(\lambda_2 r)] \cos m\theta & r > R_1 \end{cases} \quad (3.66)$$

然而對於以上討論所得結果都是以 $\theta = 0$ 軸對稱的模態形狀，若考慮 $m \neq 0$ 時，對於 $\theta = \frac{\pi}{2m}$ 亦具有軸對稱的情況，因此依照相同分析概念，可得到另外一組在第 i 個共振頻率下所對應模態形狀，如(3.67)式：

$$\bar{W}_i(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{cases} [A'_m J_m(\lambda_1 r) + B'_m I_m(\lambda_1 r)] \sin m\theta & r < R_1 \\ [A''_m J_m(\lambda_2 r) + B''_m I_m(\lambda_2 r) + C''_m Y_m(\lambda_2 r) + D''_m K_m(\lambda_2 r)] \sin m\theta & r > R_1 \end{cases} \quad (3.67)$$

3.1.2 理論計算、實驗量測與有限元素法之比較

本研究以實驗量測和輔以有限元素模擬來交叉驗證理論方法之準確性。首先，使用 CNC 將鋁合金 1050 塊材加工製成固定邊界且厚度呈階梯分布圓形板，圓板系統如圖 3.1 所示，其中圓板材料楊氏係數 $E = 69(GPa)$ 、浦松比 $\nu = 0.3$ 、密度 $\rho_s = 2705(kg/m^3)$ 、內徑 $R_1 = 29(mm)$ 、內圈厚度 $H_1 = 1(mm)$ 、外徑為 $R_2 = 35(mm)$ 、外圈厚度 $H_2 = 0.84(mm)$ ，實際實驗系統如圖 3.2 所示。

本文使用有限元素分析商用軟體 COMSOL 進行模擬，首先依上述實驗尺寸建立三維模型，將該模型置入 COMSOL 軟體，並選用 Solid Mechanics 模組進行 Eigenfrequency 分析，將分析模型劃分為 178,961 個網格元素，總共 821,148 個自由度，如圖 3.3 所示，可以確保有限元素分析獲得穩定收斂之共振頻率與模態形狀



結果。

本文採用兩種實驗量測方式對於圓板共振頻率進行量測，首先是使用具單點量測的壓電薄膜 PVDF 量測系統共振頻率；另一是可用來量測物體全域式 AF-ESPI 光學干涉技術量得共振頻率與模態。

圖 3.4 實驗架設就是藉由壓電薄膜 PVDF 感測器來量測圓板系統共振頻率，將鋼珠採自由落體方式撞擊圓板產生暫態應力波傳行為，此時黏貼在圓板上下表面的壓電薄膜 PVDF 感測器量測到圓板變形之暫態訊號，藉由電荷放大器將此訊號波形狀況於示波器中顯示出來，如圖 3.5(a)。再進一步藉由快速傅立葉轉換(fast Fourier transform FFT)將時域暫態訊號轉換至頻率域後得到頻譜圖，在圖內所呈現各個尖端峰值所對應頻率就是共振頻率圖，如圖 3.5(b)。

透過壓電薄膜 PVDF 感測器所量測共振頻率，及利用有限元素軟體、疊加法理論值等共振頻率彙整如表 3.1，觀察表 3.1 中結果顯示，PVDF 所量測的共振頻率都非常接近 FEM 模擬結果，所有數值資料都在 1% 以內誤差，其中 PVDF 第四模態存在最大誤差-0.506%。理論計算共振頻率在第一模態至第七模態誤差均小於 1%，在第八模態至第十二模態誤差值都在 2% 以內，而第十一模態存在比較大誤差值為 1.526%。藉由壓電薄膜 PVDF 感測器，僅需要使用鋼珠撞擊圓板，即可截取到圓板所有共振頻率，在實驗量測上操作相當便利且迅速。

完成利用 PVDF 量測圓板共振頻率量測，本文也使用 AF-ESPI 點子斑點干涉術來量測邊界固定時全域圓板振動模態，如圖 2.1。應用 AF-ESPI 量測時需藉激振源持續激振圓板來產生振動，因此選用具可撓性及高壓電性壓電纖維複材(piezoelectric fiber composites, PFC)做為激振器黏貼於圓板上，改變 FPC 正負極線路接法，讓壓電纖維複材產生全電極(Full-Electroid)、左右電極(RL-Electroid)型式，如圖 3.6(a)及(b)。使用 PFC 激振圓板可避免因激振點過於接近模態形狀節線，而導致無法激振出特定模態之情況。藉由函數產生器輸出正弦訊號，經功率放大器將



放大訊號後輸入壓電纖維複材使其產生變形，來推動圓板產生振動，當輸入的頻率非常接近圓板共振頻率時，圓板將產生共振與激振模態形狀。

AF-ESPI 量測圓板共振頻率整理於表 3.1，採用全電極(Full-Electroid)、左右電極(RL-Electroid) 壓電纖維複材所激振共振頻率分別相較於有限元素分析共振頻率最大誤差均發生在第一模態，其對應誤差值分別為-4.762%及-4.494%，顯示對於所量測共振頻率具有相當良好的對應性。表 3.1 中採用左右電極(RL-Electroid) 壓電纖維複材 AF-ESPI 無法量測到第十模態，主要是 AF-ESPI 需要在出現最明顯干涉條紋模態時，來記錄當時的共振頻率，當無法激振出特定模態時，則無法獲得對應該模態共振頻率。

圖 3.7 列出壓電纖維複材採用全電極(Full-Electroid)、左右電極(RL-Electroid)貼附方式來激振圓板，進行 AF-ESPI 實驗所拍攝前十二個共振模態與頻率，在 AF-ESPI 共振頻率旁，亦標註激發該模態振形所輸入激振電壓，實驗結果搭配 FEM 模擬、理論解析計算所得模態形狀來進行比較。在圖 3.7 中 AF-ESPI 量測干涉圖形中最亮的白色區域為振幅為零之節線區域，其餘干涉線條所對應的面外位移量可由節線區域往外計數，為逐漸增加的振動位移量，所以 AF-ESPI 可清楚拍攝出圓板共振時的全場定量位移場。比較理論計算、FEM 模擬和 AF-ESPI 量測到的結果，相對應模態節線區域，與等位移線分佈都具有很高對應性。

使用 AF-ESPI 進行模態形狀拍攝時，用來激振每個模態所需的電壓皆有所差異，可觀察到在第一模態中採用全電極(Full-Electroid)激振方式時，因同向電極激振電壓使圓板產生同向振動位移方向，所以僅需設定 1 伏特電壓驅動，即可激振出清楚振形，而相較左右電極(RL-Electroid)需要 4 伏特電壓才可激振出第一模態振形；第二模態採用左右電極(RL-Electroid)激振方式，因異向電極激振電壓使圓板產生反向振動位移，僅在 1 伏特驅動下就可激振出第二模態清楚振形，若以全電極(Full-Electroid)激振方式，需高達 20 伏電壓才可激振出第二模態振形。比較由



COMSOL 有限元素及理論計算，所得到第九與第十模態共振頻率大小值非常接近，所以藉由掃頻方式得知第九和第十模態間頻寬非常靠近，因此採用 AF-ESPI 量測這第九與第十模態振形中心處均存在同心圓位移之模態耦合現象，且採用左右電極(RL-Electroid)激振方式並提高激振電壓，尚無法激振出第十模態振形。採用左右電極(RL-Electroid) 僅需 4 伏電壓即可激振出第四模態振形，若以全電極(Full-Electroid)激振方式需要高達 30 伏電壓才可激振出第四模態振形。最後，可以觀察出藉由 AF-ESPI 拍攝方式均可量出第一、二、三、五、六、七、八、十一、十二模態等清晰模態條紋。

3.2 厚度階梯變化圓板暫態分析理論推導

3.2.1 圓板暫態分析理論推導

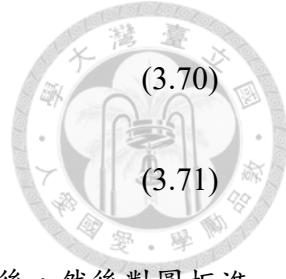
考慮將時間函數和模態形狀進行線性疊加得到圓板暫態位移，因為圓板在各模態下，具有兩種模態形狀 W_i 和 \bar{W}_i 如(3.66)和(3.67)，因此圓板暫態位移解假設為(3.68)式

$$u_3(r, \theta, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) W_i(r, \theta) + \bar{q}_i(t) \bar{W}_i(r, \theta) \quad (3.68)$$

將式(3.68)代入統御方程式(3.1)中，整理可得

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\rho_s h \omega_i^2 (W_i q_i + \bar{W}_i \bar{q}_i) + \rho_s h \left(W_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial t^2} + \bar{W}_i \frac{\partial^2 \bar{q}_i}{\partial t^2} \right) \right] = p \quad (3.69)$$

因為式(3.69)中的模態形狀 W_i 和 \bar{W}_i 已經由前節振動分析獲得，如(3.66)與(3.67)，因此各模態所對應的時間函數 q_i 和 \bar{q}_i 即為暫態分析主要的目標解。考慮圓板模態形狀存在正交特性如下：



$$\int_0^{2\pi} \int_0^a (W_i \cdot W_j) r dr d\theta = 0 \quad \text{if } i \neq j \quad (3.70)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a (\bar{W}_i \cdot \bar{W}_j) r dr d\theta = 0 \quad \text{if } i \neq j \quad (3.71)$$

(3.70)、(3.71)式代表若選取不同模態($i \neq j$)的模態形狀相乘後，然後對圓板進行面積分運算，則積分結果為零。若 W_j 和 \bar{W}_j 兩者相乘對圓形板進行面積分，不論模態是否相同，積分運算結果也都為零，如(3.72)式：

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a (W_i \cdot \bar{W}_j) r dr d\theta = 0 \quad (3.72)$$

將式(3.69)分別同乘 W_j 和 \bar{W}_j ，然後對圓板進行面積分，依據式(3.70)、(3.71)與(3.72)的正交特性，可分別獲得解耦二階常微分方程式(3.73)、(3.74)。

$$\frac{\partial^2 q_i}{\partial t^2} + \omega_i^2 q_i = \frac{Q_i}{\rho_s h} \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{q}_i}{\partial t^2} + \omega_i^2 \bar{q}_i = \frac{\bar{Q}_i}{\rho_s h} \quad (3.74)$$

其中

$$Q_i(r, \theta, t) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^a p \cdot W_i r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^a W_i^2 r dr d\theta} \quad (3.75)$$

$$\bar{Q}_i(r, \theta, t) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^a p \cdot \bar{W}_i r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^a \bar{W}_i^2 r dr d\theta} \quad (3.76)$$

考慮式(3.73)和(3.74)配合初始條件(3.3)式，可以獲得時間函數為

$$q_i(t) = \frac{\int_0^t Q_i(\tau) \sin \omega_i(t-\tau) d\tau}{\rho_s h \omega_i} \quad (3.77)$$

$$\bar{q}_i(t) = \frac{\int_0^t \bar{Q}_i(\tau) \sin \omega_i(t-\tau) d\tau}{\rho_s h \omega_i} \quad (3.78)$$



將式(3.77)和(3.78)代回式(3.68)中，得到圓板暫態位移解如(3.79)式：

$$u_3(r, \theta, t) = \frac{1}{\rho_s h} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{W_i(r, \theta)}{\omega_i} \left[\frac{\int_0^t \left(\int_0^{2\pi} \int_0^a p(r, \theta, \tau) W_i r dr d\theta \right) \sin \omega_i(t-\tau) d\tau}{\int_0^{2\pi} \int_0^a W_i^2 r dr d\theta} \right] \\ + \frac{1}{\rho_s h} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{W}_i(r, \theta)}{\omega_i} \left[\frac{\int_0^t \left(\int_0^{2\pi} \int_0^a p(r, \theta, \tau) \bar{W}_i r dr d\theta \right) \sin \omega_i(t-\tau) d\tau}{\int_0^{2\pi} \int_0^a \bar{W}_i^2 r dr d\theta} \right] \quad (3.79)$$

在(3.79)式暫態解中外力負載 P 是空間與時間的函數，假若為單點集中力施加在圓板上 (r_p, θ_p) 位置，如圖 3.10 所示，此外力 P 可以表示為(3.80)式

$$p(r, \theta, t) = F(t) \delta(r - r_p) \delta(\theta - \theta_p) \quad (3.80)$$

其中 $F(t)$ 表示為波源歷時/loading history)，物理涵義為動態外力隨時間之力量大小變化。 δ 是 Kronecker delta function，其定義為 $\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \neq 0 \\ 1, & \text{if } x = 0 \end{cases}$ 。將式(3.80)代入式(3.79)中整理，可得暫態位移解(3.81)式如下：

$$u_3(r, \theta, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{W_i(r, \theta) W_i(r_p, \theta_p)}{\rho_s h \omega_i} \left[\frac{\int_0^t F(\tau) \sin \omega_i(t-\tau) d\tau}{\int_0^{2\pi} \int_0^a W_i^2 r dr d\theta} \right] \\ + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{W}_i(r, \theta) \bar{W}_i(r_p, \theta_p)}{\rho_s h \omega_i} \left[\frac{\int_0^t F(\tau) \sin \omega_i(t-\tau) d\tau}{\int_0^{2\pi} \int_0^a \bar{W}_i^2 r dr d\theta} \right] \quad (3.81)$$

在(3.81)式中 $W_i(r, \theta)$ 和 $W_i(r_p, \theta_p)$ 項，分別代表暫態位移量測位置 (r, θ) 和外力作用位置 (r_p, θ_p) ，當外力作用或量測位置其中一項通過第 i 模態形狀的節線區域，第 i 模態對於位移量會趨近於零。其原因主要是因為共振頻率 ω_i 在分母項，越高頻模態對暫態位移影響及貢獻越小，造成共振頻率越高則振幅越小。每個模態對於位移的貢獻量並非固定，而是會隨時間而變化，此部分由積分正弦函數 $\sin \omega_i(t-\tau)$ 與波源歷時 $F(\tau)$ 來決定。



考慮暫態解(3.63)式模態形狀積分項，當計算暫態位移時需先將振動分析所得模態形狀進行平方積分推導，所得積分式關係如(3.82)、(3.83)：

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a W_i^2 r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2(m\pi\theta) d\theta \left\{ \int_0^{R_1} [A_m J_m(\lambda_1 r) + B_m I_m(\lambda_1 r)]^2 r dr + \int_{R_1}^{R_2} [C_m J_m(\lambda_2 r) + D_m I_m(\lambda_2 r) + E_m Y_m(\lambda_2 r) + F_m K_m(\lambda_2 r)]^2 r dr \right\} \quad (3.82)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \bar{W}_i^2 r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2(m\pi\theta) d\theta \left\{ \int_0^{R_1} [A_m J_m(\lambda_1 r) + B_m I_m(\lambda_1 r)]^2 r dr + \int_{R_1}^{R_2} [C_m J_m(\lambda_2 r) + D_m I_m(\lambda_2 r) + E_m Y_m(\lambda_2 r) + F_m K_m(\lambda_2 r)]^2 r dr \right\} \quad (3.83)$$

觀察以上兩種模態形狀 W_j 和 \bar{W}_j 積分項中，僅存在對角度積分部分具差異性，

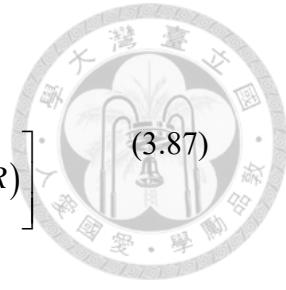
結果如(3.84)、(3.85)式：

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(m\pi\theta) d\theta = \begin{cases} 2\pi & , \text{if } m = 0 \\ \pi & , \text{if } m \neq 0 \end{cases} \quad (3.84)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(m\pi\theta) d\theta = \pi \quad (3.85)$$

由式(3.82)和(3.83)中徑向積分完全相同，將第一類 Bessel 函數 J_n 和第一類修正型 Bessel 函數 Y_n 定義為 B_n ，而第二類 Bessel 函數 I_n 和第一類修正型 Bessel 函數 K_n 定義為 \bar{B}_n 。因此，式(3.82)和(3.83)中徑向 Bessel 函數積分可分別為 (3.86)、(3.87)與(3.88)三式積分結果：

$$\begin{aligned} & \int_0^R B_{1n}(\lambda R) B_{2n}(\lambda R) r dr \\ &= \frac{R^2}{2} \left[B'_{1n}(\lambda R) B'_{2n}(\lambda R) + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda^2 R^2} \right) B_{1n}(\lambda R) B_{2n}(\lambda R) \right] \end{aligned} \quad (3.86)$$



$$\int_0^R \bar{B}_{1n}(\lambda R) \bar{B}_{2n}(\lambda R) r dr = \frac{-R^2}{2} \left[\bar{B}'_{1n}(\lambda R) \bar{B}'_{2n}(\lambda R) - \left(1 + \frac{n^2}{\lambda^2 R^2} \right) \bar{B}_{1n}(\lambda R) \bar{B}_{2n}(\lambda R) \right] \quad (3.87)$$

$$\int_0^R B_{1n}(\lambda R) \bar{B}_{2n}(\lambda R) r dr = \frac{-R^2}{2} \left[B'_{1n}(\lambda R) \bar{B}'_{2n}(\lambda R) - \left(1 + \frac{n^2}{\lambda^2 R^2} \right) B_{1n}(\lambda R) \bar{B}_{2n}(\lambda R) \right] \quad (3.88)$$

將式(3.84)至(3.88)的結果代入式(3.82)和(3.83)中即可獲得暫態解(3.81)中的模態形狀積分結果，即可進行暫態位移的計算。

3.2.2 實驗架設說明

如果將圖 3.4 利用壓電薄膜 PVDF 感測器量測系統共振頻率的實驗架設再串接光纖位移計(Fotonic sensor, FS) 如圖 3.11，就可以用來進行暫態波傳實驗量測，也可用來量測位移、位置與振動等物理量。為探討鋼珠自由掉落撞擊圓板所激發的暫態波傳行為，本文利用光纖位移計 FS 與 PVDF 等傳感器擷取圓板上任意觀測位置之暫態訊號。

為探討理論計算以及有限元素模擬結果對應實驗量測結果關聯性，因此實驗操作過程除了擷取觀測點暫態訊號外，也需要同時量測鋼珠撞擊圓板時力量變化之波源歷時(impact history)之時域波形。將壓電薄膜 PVDF 感測器黏貼於圓板上下表面相同位置處，來擷取鋼珠撞擊圓板後波源歷時，圓板上下表面所貼附 PVDF 前視圖如 3.12(a)，而上視圖與下視圖分別為圖 3.12(b)與(c)，可清楚看出 PVDF 尺寸皆為 $5\text{ mm} \times 2.5\text{ mm}$ 黏貼於鋼珠撞擊點圓板 A 處，而壓電薄膜 PVDF 所量測到訊號會輸出至電荷放大器，再顯示於示波器上。實驗操作上使用 0.44 g 鋼珠靜止釋放自由落擊圓板上撞擊點時，因為上表面 PVDF 量測到鋼珠撞擊與圓板暫態變形而輸出訊號，而貼附在圓板下表面 PVDF 只有量測到圓板暫態變形訊號，因此貼附於圓板上下表面 PVDF 兩者輸出的訊號如圖 3.13 所示。在鋼珠撞擊過程呈現不同的

訊號波形，當鋼珠完成撞擊後，A 處上下表面 PVDF 同樣量測到圓板暫態變形的行為，因此兩者訊號相當一致。藉由此特性，可將黏貼在圓板 A 處上下表面 PVDF 兩訊號相減後，可解耦去除暫態變形訊號，進而擷取出波源歷時之時域波形，如圖 3.15(或圖 3.19)所示。而當鋼珠撞擊 A 處位置後，此時可利用光纖位移計 FS 量測出圓板在 B 與 C 處之單點位置暫態面外位移訊號。

考量電壓是壓電薄膜 PVDF 感測單位，所以將圓板上表面 PVDF 訊號減去下表面 PVDF 訊號所得波源歷時單位同為電壓單位，考慮電壓訊號 V 與鋼珠撞擊力量大小 F 轉換關係式如(3.89)式，其中常數 C 為力量和電壓間之轉換係數。

$$F = C \cdot V \quad (3.89)$$

實驗中選用鋼珠重量 0.44 公克以自由落體方式在固定高度撞擊圓板，再透過功能原理，得知鋼珠落擊圓板前的速度為 $\sqrt{2gH}$ ，其中重力加速度 $g = 9.8(m/s^2)$ ，鋼珠撞擊圓板後的反彈速度不計，藉由鋼珠撞擊前後的動量差異，可以求出撞擊衝量 I 為(3.90)式

$$I = \int F dt = m \sqrt{2gH} \quad (3.90)$$

而藉由式 (3.89)也可將衝量表示為

$$I = \int F dt = C \int V dt \quad (3.91)$$

結合式(3.90)和(3.91)可獲得力量與電壓轉換係數 C ，可表示如(3.92)式：

$$C = \frac{m \sqrt{2gH}}{\int V dt} \quad (3.92)$$

在(3.92)式中 $\int V dt$ 代表如圖 3.15(或圖 3.19)中電壓訊號曲線下方面積。由 PVDF 截取的電壓訊號藉由轉換係數式(3.89)轉換為力量單位，如同圖 3.15 中左側 y 軸為電壓單位伏特(V)，透過式(3.92)係數轉換為圖 3.15 右側 y 軸的力量單位



牛頓(N)，此波源歷時可輸入至理論結果與有限元軟體模擬中，來計算圓板的暫態反應，再將實驗量測結果進行分析探討。

3.2.3 實驗結果(時間域比較)

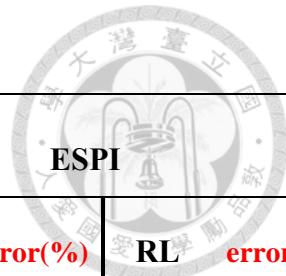
為驗證理論正確性，本節將比較以理論計算(暫態位移解 3.81 式)、實驗量測及有限元素法模擬所得的結果。其中使用商用有限元素軟體 COMSOL，設定使用 Solid Mechanics 模組內 Time Dependent 模式進行有限元素法模擬暫態分析，將實驗量測所得波源歷時輸入 COMSOL 中為自訂函數，以便設定為 point force，其餘有限元素相關分析參數皆與前文所說明有限元素法振動分析相同。

本文分成兩組實驗進行結果討論，第一組實驗將鋼珠(質量 $m=0.44g$)落擊圓板上位置 A(-7.5mm、-10mm)處，如圖 3.14。圖 3.15 為鋼珠撞擊位置 A(-7.5mm、-10mm)處，透過黏貼在 A 處上下表面壓電薄膜 PVDF 感測器訊號所截取到波源歷時，其中撞擊接觸時間約為 $80(\mu s)$ ，當撞擊時間 $32(\mu s)$ 時出現最大撞擊力量為 $18.11(N)$ 。

接著進一步分析第一組實驗觀察點 B(22mm、5mm)位置上的暫態位移，觀察圖 3.16 在時間 $5ms$ 內之理論計算、FEM 和光纖位移計 FS 三者結果無論在波形或量值具有良好一致性。如果把圖 3.16 觀察時間再細分為時間 $1ms$ 內，由圖 3.17 理論計算也和有限元模擬與實驗量測的結果相當一致。

第二組實驗將鋼珠自由落體撞擊圓板 A(-7.5mm、-10mm)處，而實驗觀察點 C(15mm、1mm)位置，如圖 3.18 所示。透過黏貼在 A 處上下表面 PVDF 感測器訊號所截取波源歷時，撞擊時間約為 $39(\mu s)$ ，當撞擊時間為 $14(\mu s)$ 時出現最大撞擊力量 $21.16(N)$ ，如圖 3.19 所示。

在第二組實驗觀察點 C(15mm、1mm)位置，由圖 3.20 中可觀察在時間 5ms 內之理論計算、光纖位移計 FS 和有限元素分析三者結果具有完整一致性。再將圖 3.20 中觀察時間細分為 1ms 內，觀察圖 3.21 中理論計算結果依然和有限元素與 FS 實驗量測結果相當吻合。在第一組和第二組實驗中鋼珠撞擊相同點 A，因為觀察點 B 和 C 不同，所以暫態位移呈現出完全不同的暫態位移波形。最後比較圖 3.16、圖 3.17、圖 3.20 和圖 3.21，可驗證本章所推導的理論數學式，可計算出符合實驗量測的暫態結果。



MODE	FEM (COMSOL)	Theory		Exp. PVDF	ESPI		RL	error(%)
		error(%)	error(%)		Full	error(%)		
1	1869	1868	-0.053	1870	0.053	1780	-4.762	1785 -4.494
2	4023	4028	0.124	4018	-0.124	3848	-3.350	3858 -4.101
3	6711	6719	0.358	6680	-0.224	6630	-0.971	6625 -1.046
4	7713	7745	0.415	7674	-0.506	7724	0.143	7435 -3.604
5	9843	9905	0.630	9836	-0.071	9815	-0.284	9552 -2.956
6	11889	11978	0.649	-		11583	-2.574	11446 -3.726
7	13435	13558	0.916	13440	0.037	13438	0.022	13202 -1.734
8	16531	16717	1.125			16146	-2.239	15702 -0.515
9	17448	17660	1.215		-	17290	-0.906	17280 -0.963
10	17457	17662	1.174		-	17362	-0.544	-
11	21622	21952	1.526			20796	-3.820	20832 -3.654
12	21866	22199	1.523			21921	0.251	21950 0.384

表 3.1 有限元素、理論、PVDF 與 ESPI 共振頻率及誤差比較表

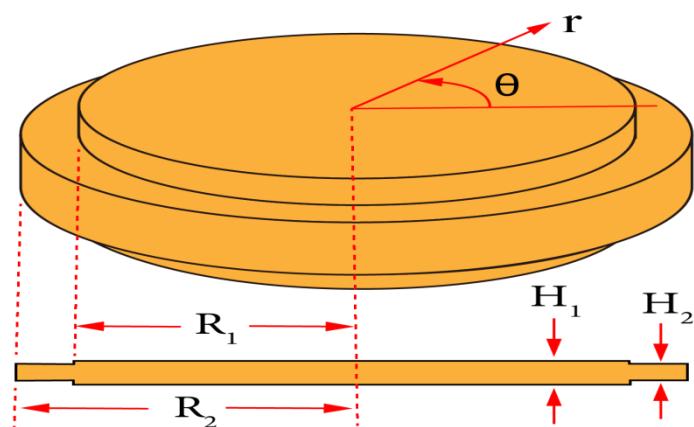


圖 3.1 階梯厚度圓板幾何示意圖

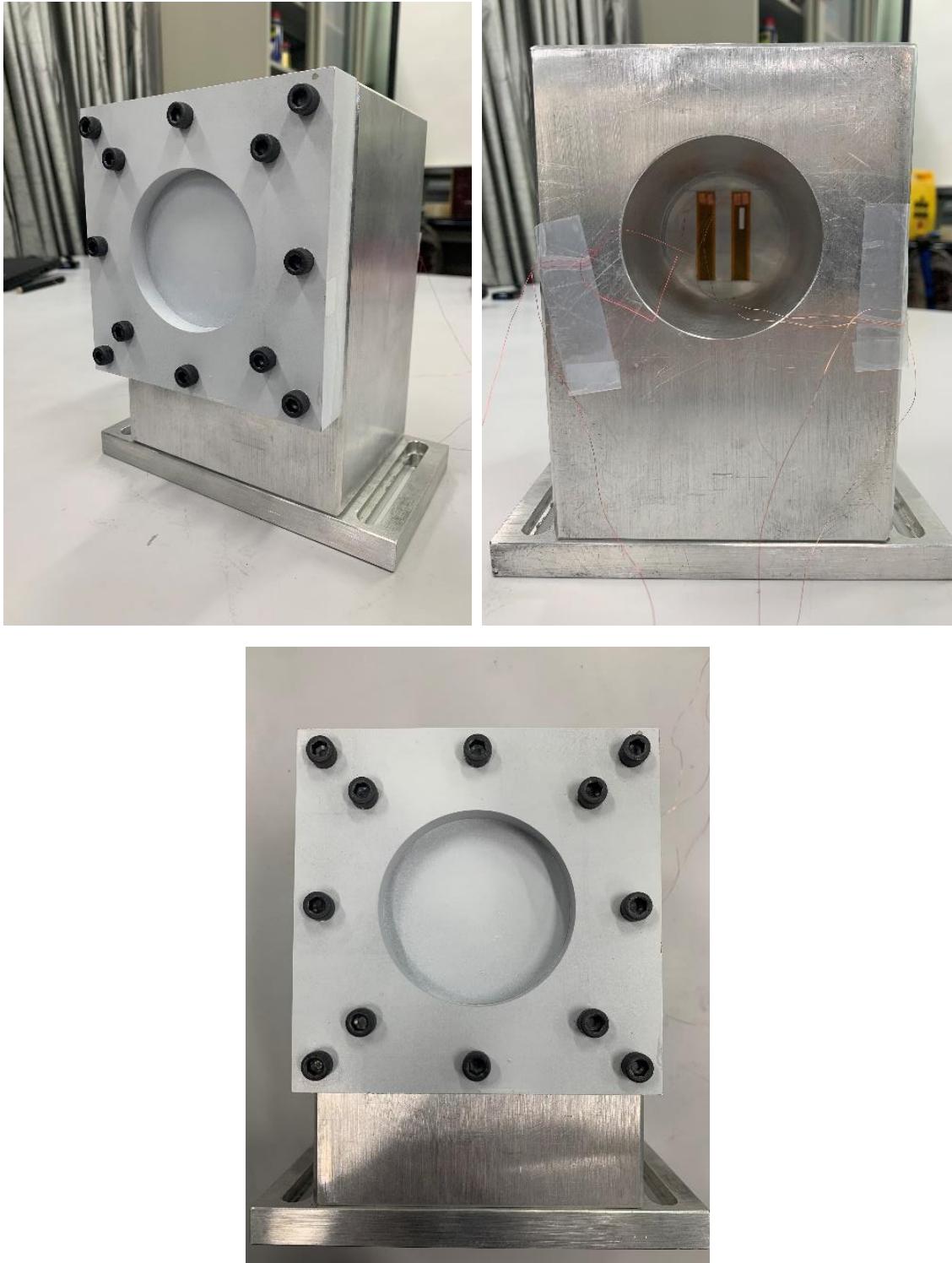


圖 3.2 壓電纖維黏貼於固定邊界圓板系統

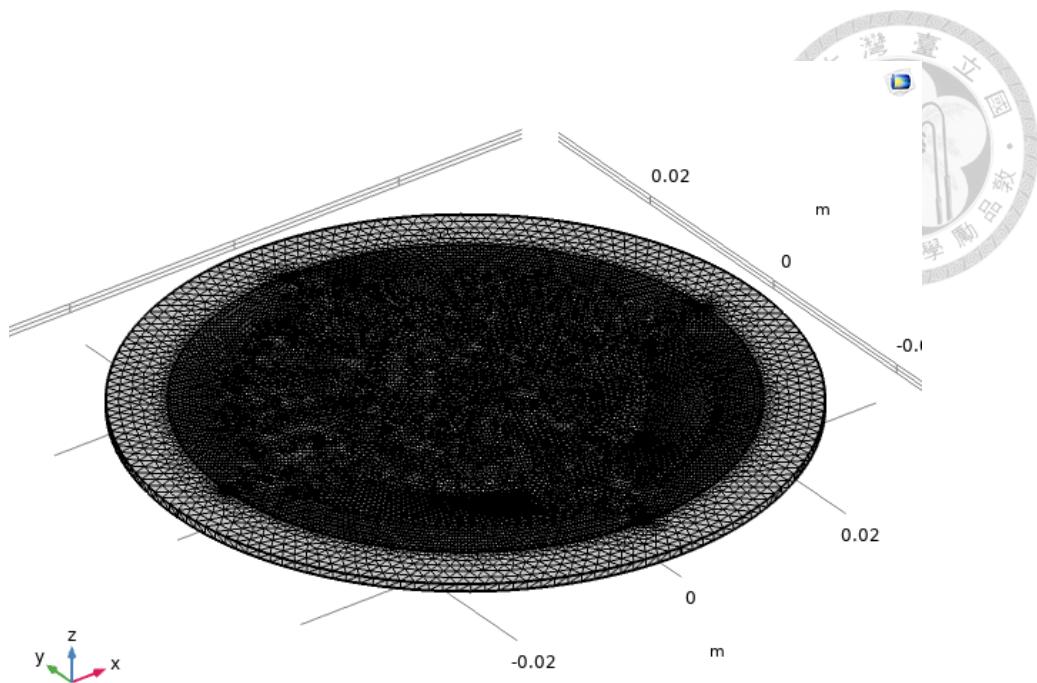


圖 3.3 階梯厚度固定圓板有限元素(COMSOL)模擬示意圖

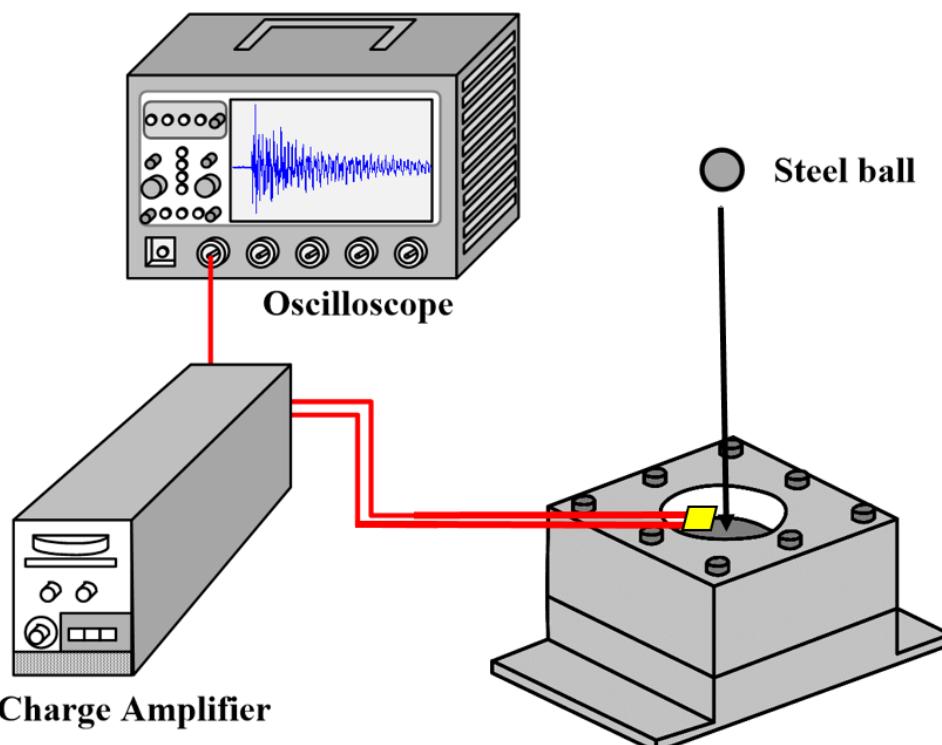
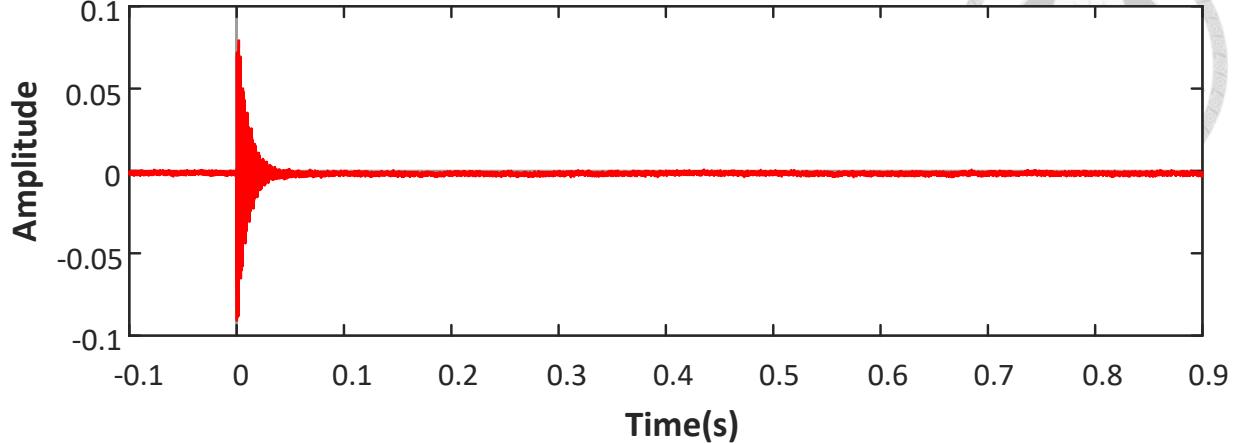
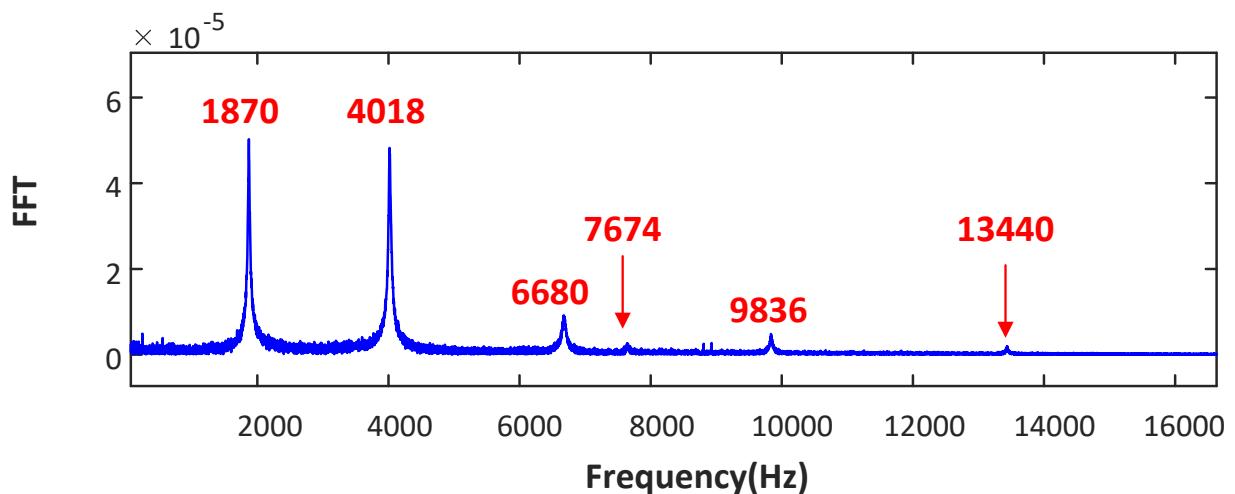


圖 3.4 黏貼 PVDF 薄膜感測器量測共振頻率實驗架設圖

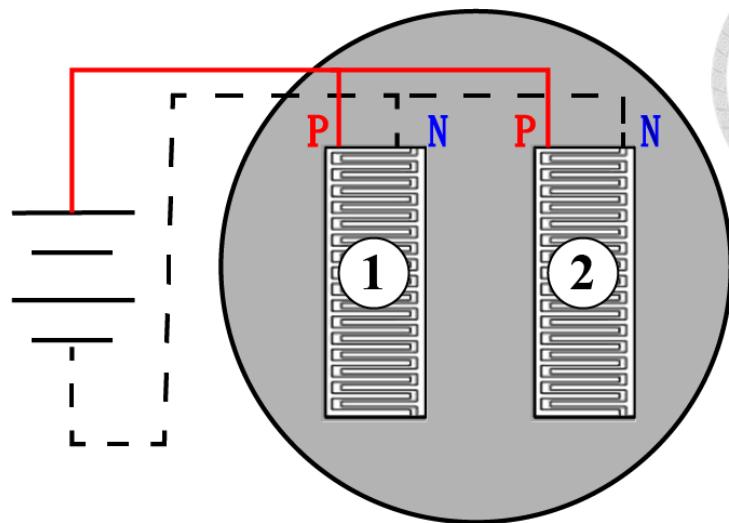


(a)暫態訊號

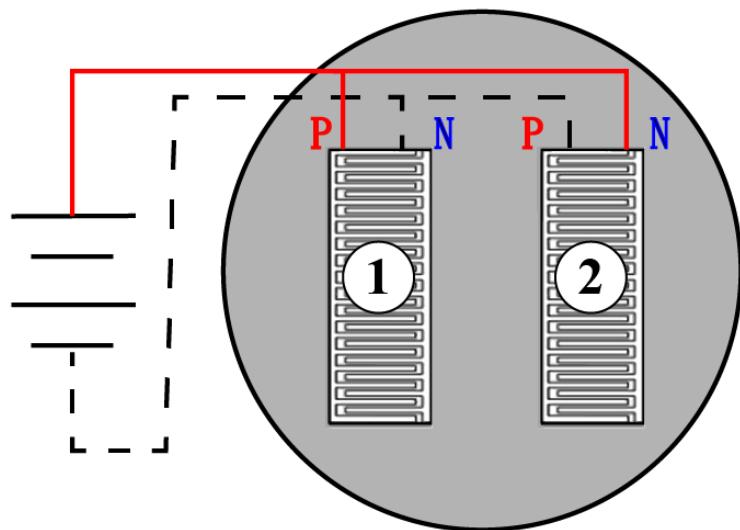


(b)頻域訊號

圖 3.5 利用 PVDF 感測器擷取暫態訊號與頻域訊號



(a) 壓電纖維複合材料同向電極



(b) 壓電纖維複合材料反向電極

	同向		反向	
	+	-	+	-
壓電纖維 1	P	N	P	N
壓電纖維 2	P	N	N	P

圖 3.6 壓電纖維複合材料 PFC 黏貼於固定邊界圓板之示意圖

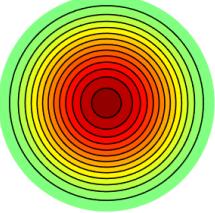
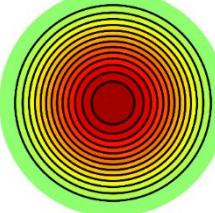
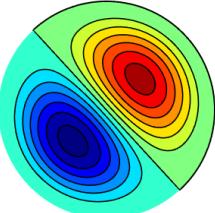
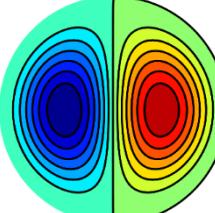
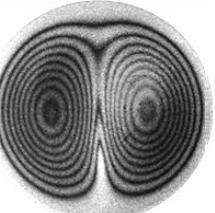
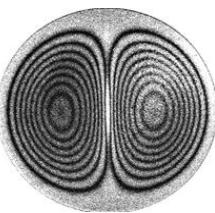
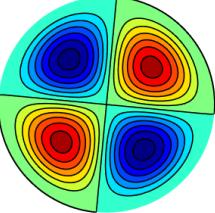
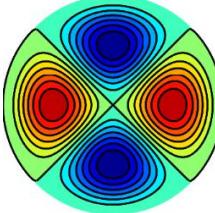
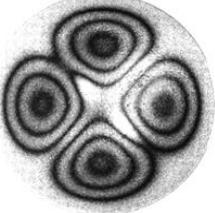
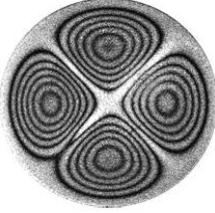
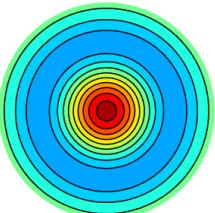
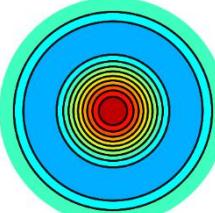
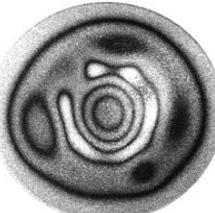
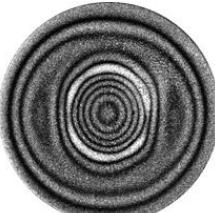
Mode		COMSOL	Theory	Full-Electrode	RL-Electrode
1	Mode Shape				
	Frequency (Hz)	1869	1868	1780(1V)	1785(4V)
	Error (%)		-0.053	-4.761	-4.494
2	Mode Shape				
	Frequency (Hz)	4023	4028	3848(20V)	3858(1V)
	Error (%)		0.124	-3.350	-4.101
3	Mode Shape				
	Frequency (Hz)	6695	6719	6630(11V)	6625(20V)
	Error (%)		0.358	-0.971	-1.046
4	Mode Shape				
	Frequency (Hz)	7713	7745	7724(30V)	7435(4V)
	Error (%)		0.415	0.143	-3.604

圖 3.7 固定邊界圓板有限元素、理論分析與 ESPI 模態

振形與共振頻率(第 1 至第 4 模態)

Mode		COMSOL	Theory	Full-Electrode	RL-Electrode
5	Mode Shape				
	Frequency (Hz)	9843	9905	9815(10V)	9552(5V)
	Error (%)		0.630	-0.284	-2.956
6	Mode Shape				
	Frequency (Hz)	11889	11978	11583(6.5V)	11446(4V)
	Error (%)		0.649	-2.574	-3.726
7	Mode Shape				
	Frequency (Hz)	13435	13558	13438(4V)	13202(6V)
	Error (%)		0.916	0.022	-1.734
8	Mode Shape				
	Frequency (Hz)	16531	16717	16146(7V)	15702(7V)
	Error (%)		1.125	-2.239	-0.515

圖 3.8 固定邊界圓板有限元素、理論分析與 ESPI 模態

振形與共振頻率(第 5 至第 8 模態)

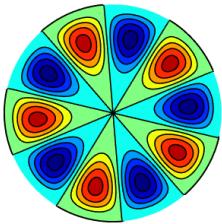
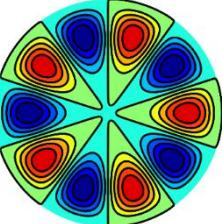
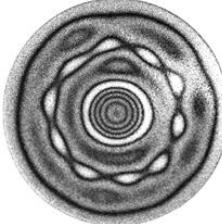
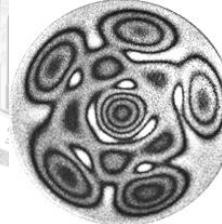
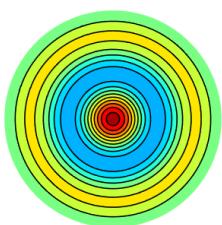
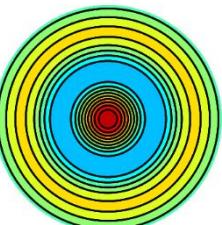
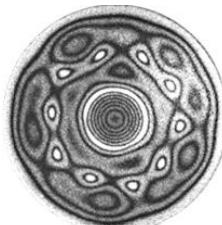
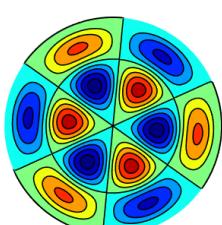
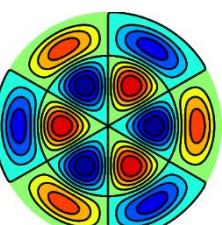
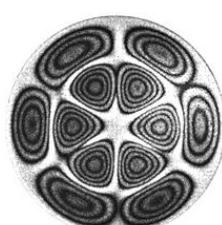
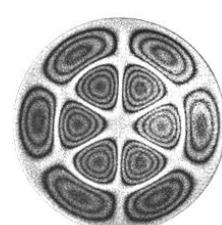
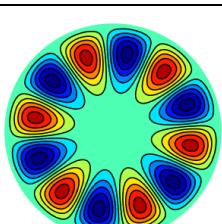
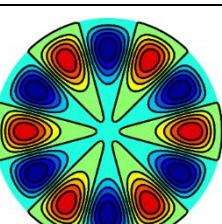
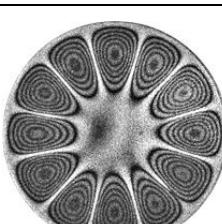
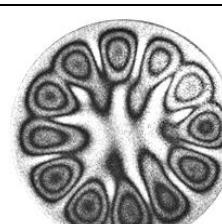
Mode		COMSOL	Theory	Full-Electrode	RL-Electrode
9	Mode Shape				
	Frequency (Hz)	17448	17660	17290(5V)	17280(25V)
	Error (%)		1.215	-0.906	-0.936
10	Mode Shape				
	Frequency (Hz)	17457	17662	17362(8.5V)	
	Error (%)		1.174	-0.544	
11	Mode Shape				
	Frequency (Hz)	21622	21952	20796(10V)	20832(7V)
	Error (%)		1.525	-3.820	-3.654
12	Mode Shape				
	Frequency (Hz)	21866	22199	21921(8V)	21950(15V)
	Error (%)		1.523	0.251	0.384

圖 3.9 固定邊界圓板有限元素、理論分析與 ESPI 模態

振形與共振頻率(第 9 至第 12 模態)

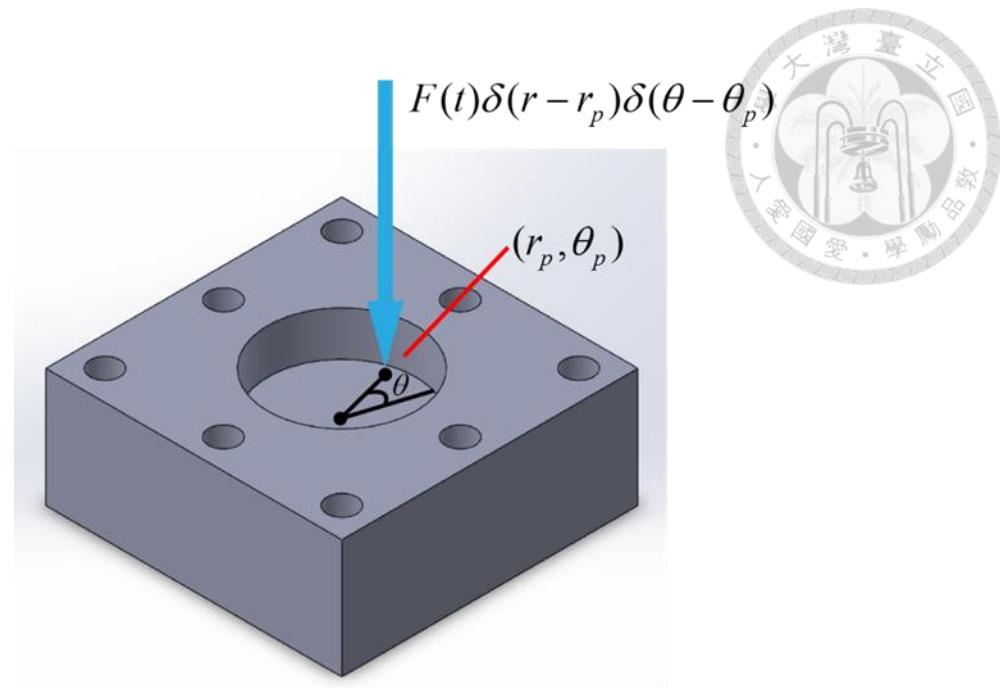


圖 3.10 圓板受動態外力作用示意圖

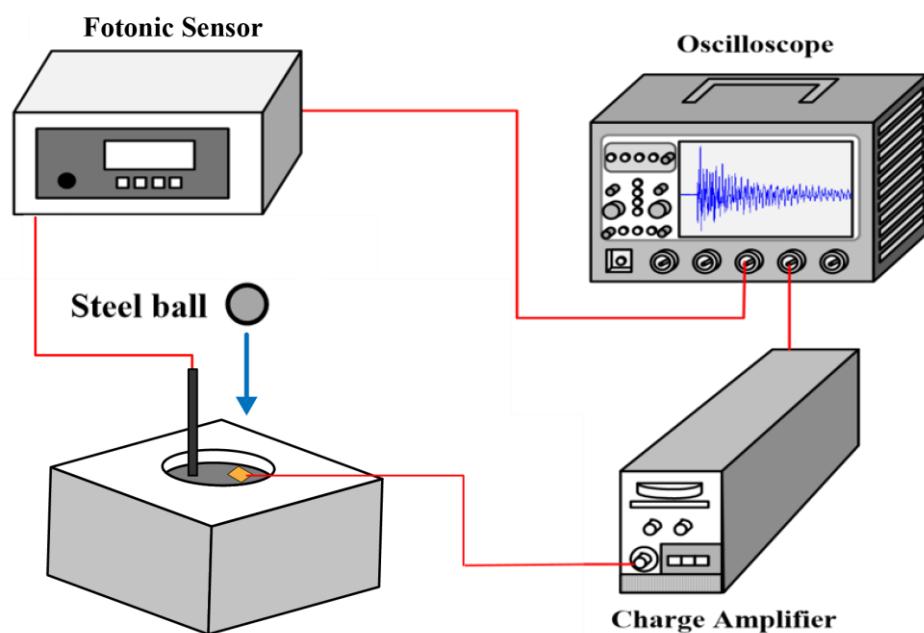
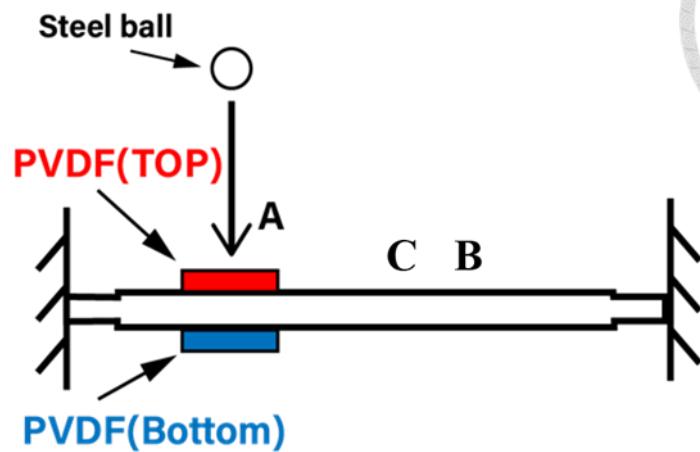
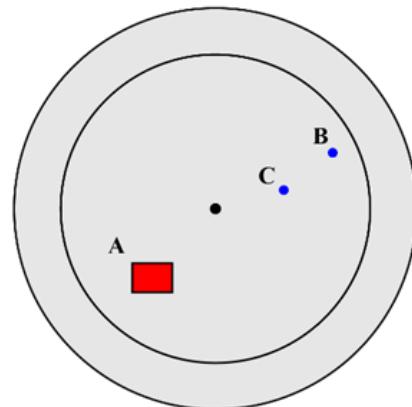


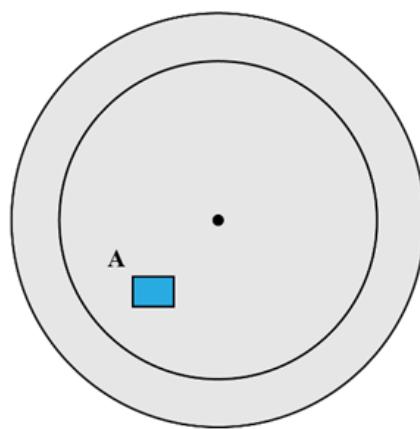
圖 3.11 鋼珠落擊上下表面黏貼 PVDF 圓板之實驗架設圖



(a) PVDF 黏貼於圓板上下表面前視圖



(b) PVDF 黏貼於圓板表面上視圖(A 為撞擊點且 B 與 C 為量測點)



(c) PVDF 黏貼於圓板表面下視圖

圖 3.12 PVDF 黏貼於圓板上下表面位置圖

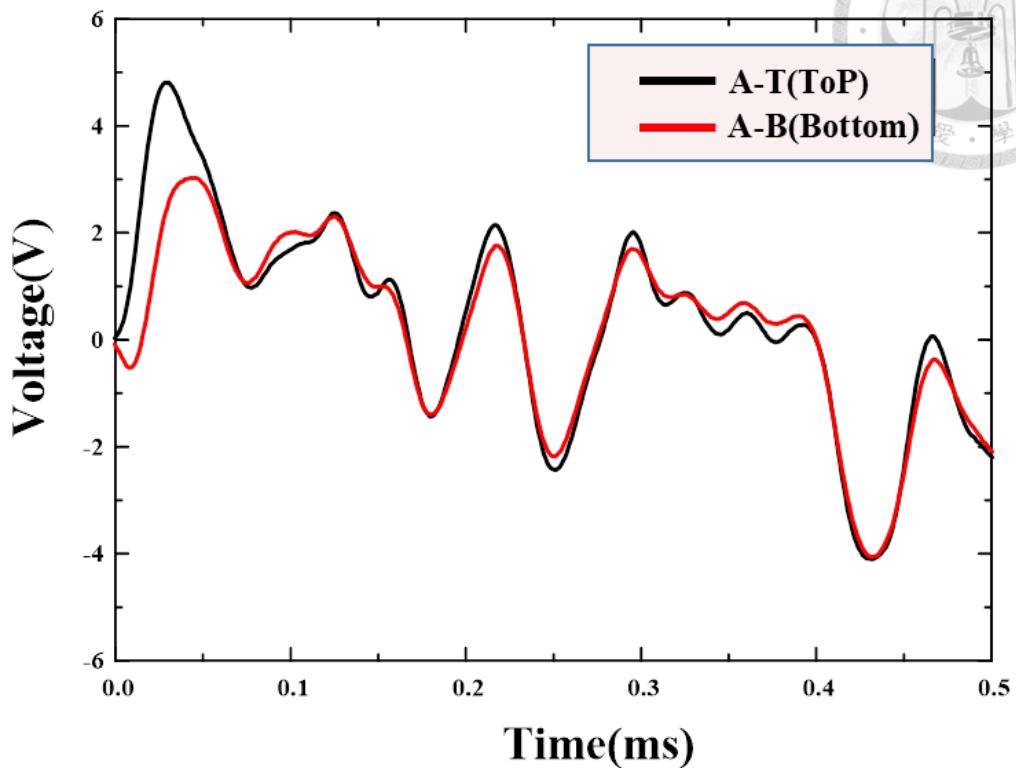


圖 3.13 黏貼於圓板上下表面 PVDF 輸出訊號示意圖

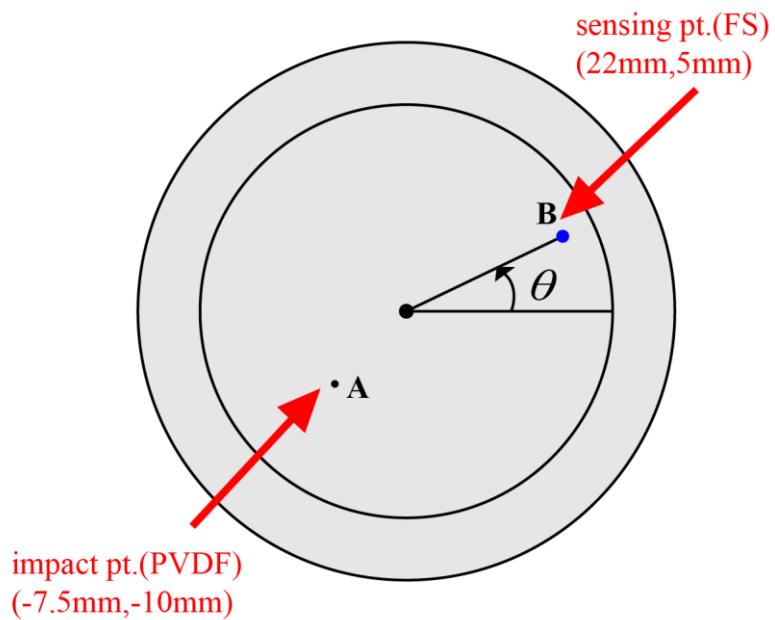


圖 3.14 第一組實驗圓板上 PVDF 薄膜與 FS 感測器位置

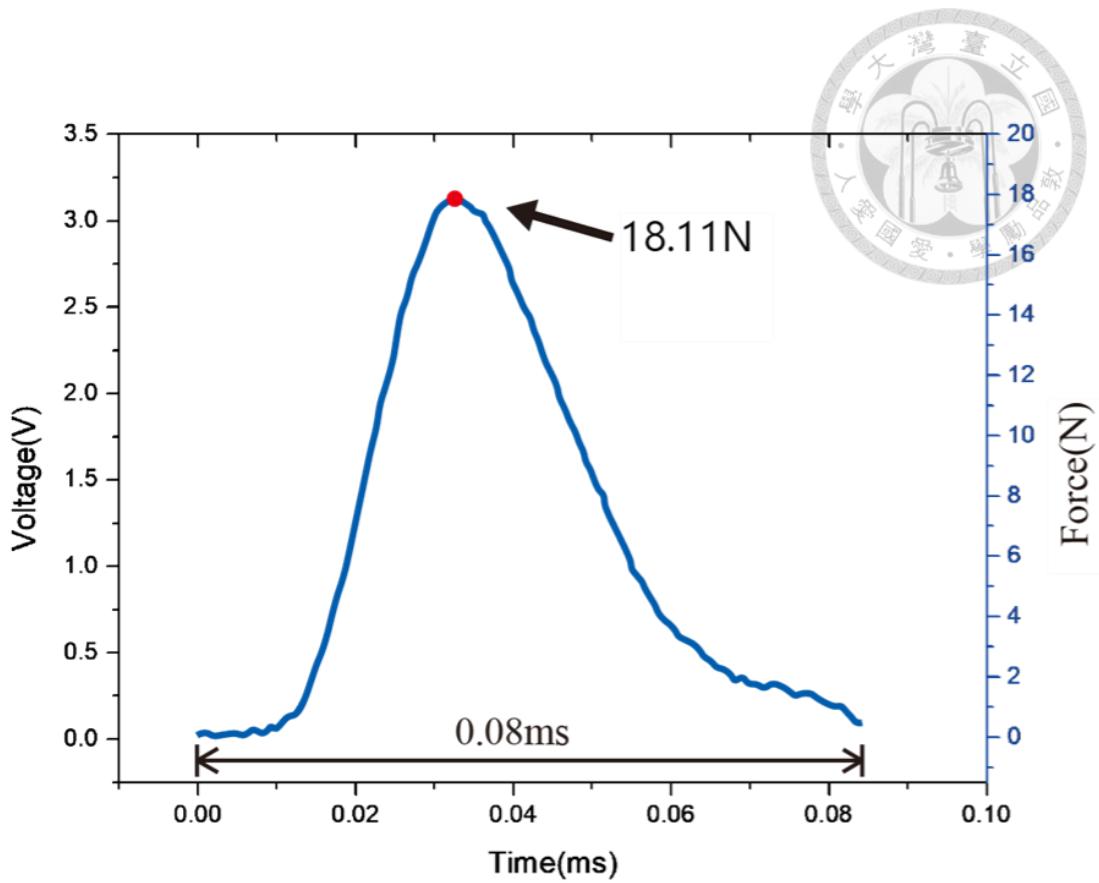


圖 3.15 第一組實驗鋼珠擊落 A 處截取之波源歷時訊號

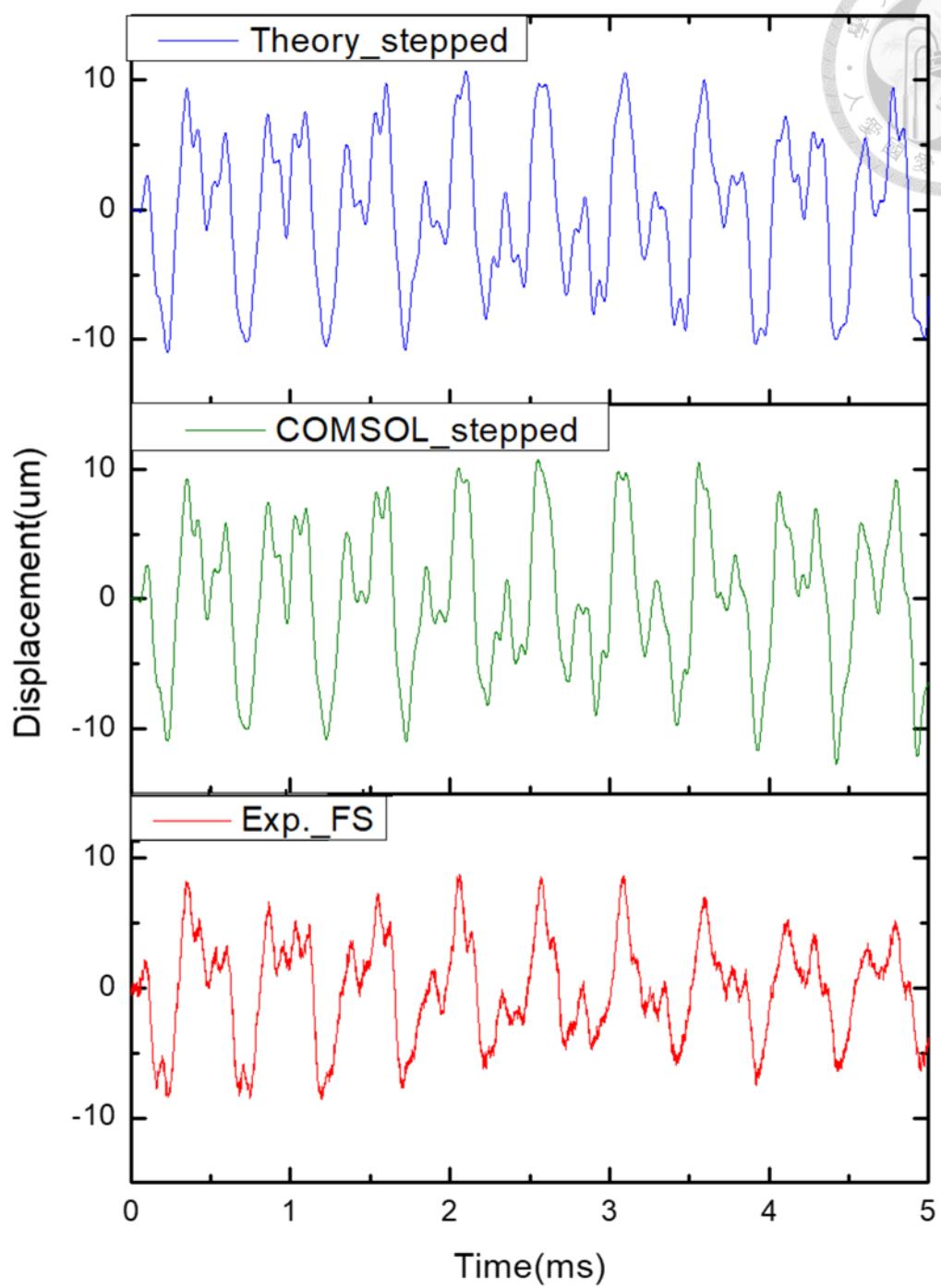


圖 3.16 第一組實驗鋼珠擊落 A 處，B 處之理論、有限元素及
實驗暫態位移比較(0~5ms)

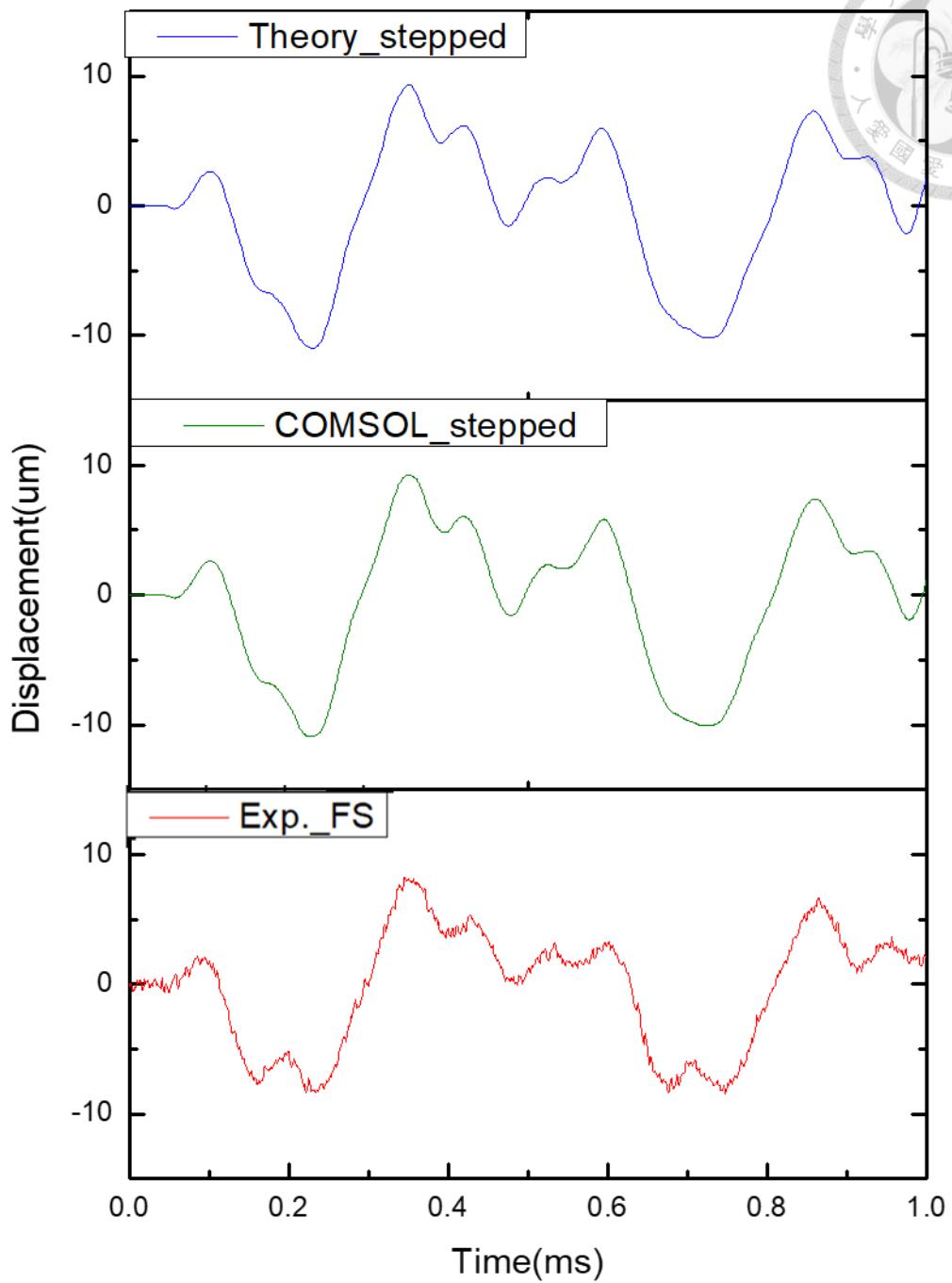


圖 3.17 第一組實驗鋼珠擊落 A 處，B 處之理論、有限元素及
實驗暫態位移比較(0~1ms)

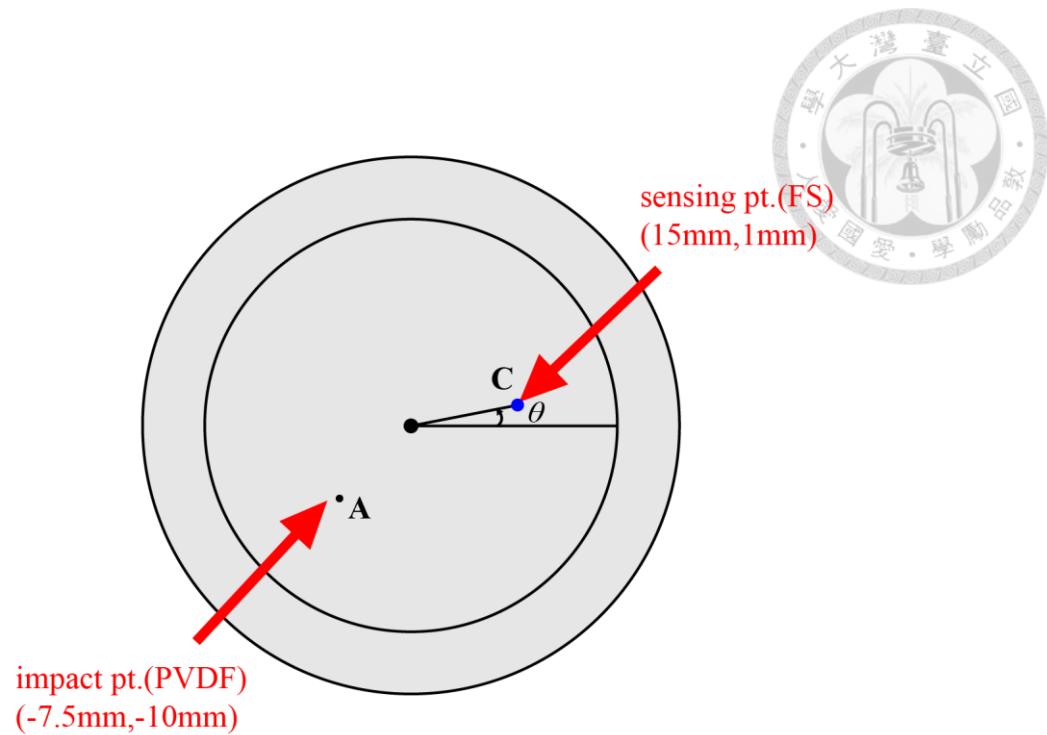


圖 3.18 第二組實驗圓板上 PVDF 薄膜與 FS 感測器位置

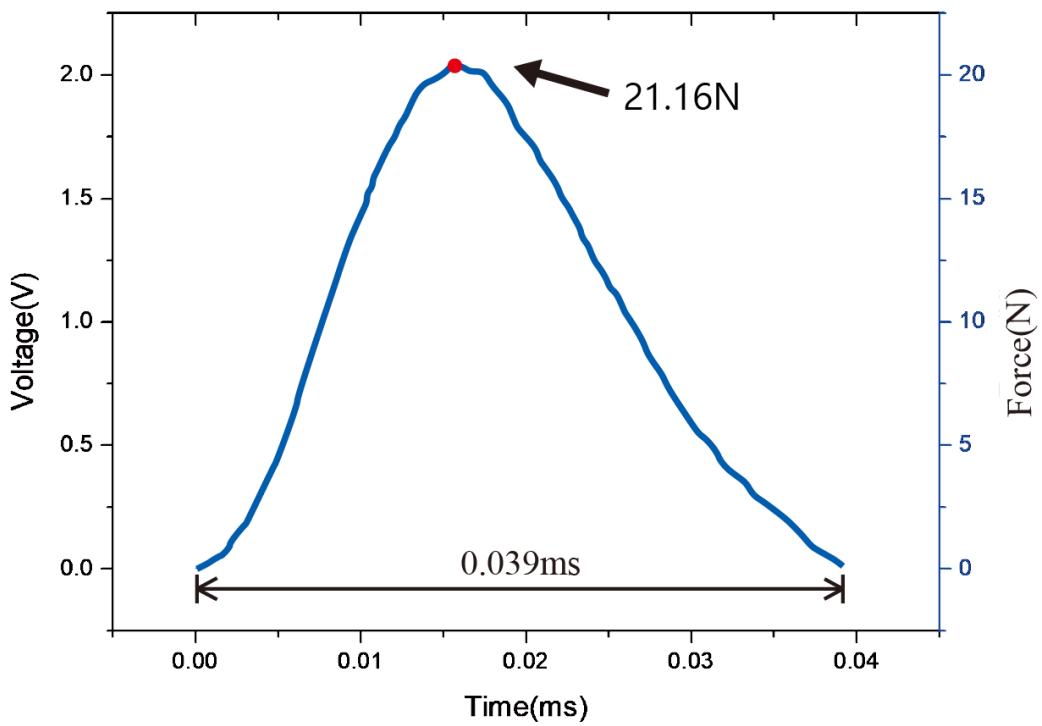


圖 3.19 第二組實驗鋼珠擊落 A 處截取之波源歷時訊號

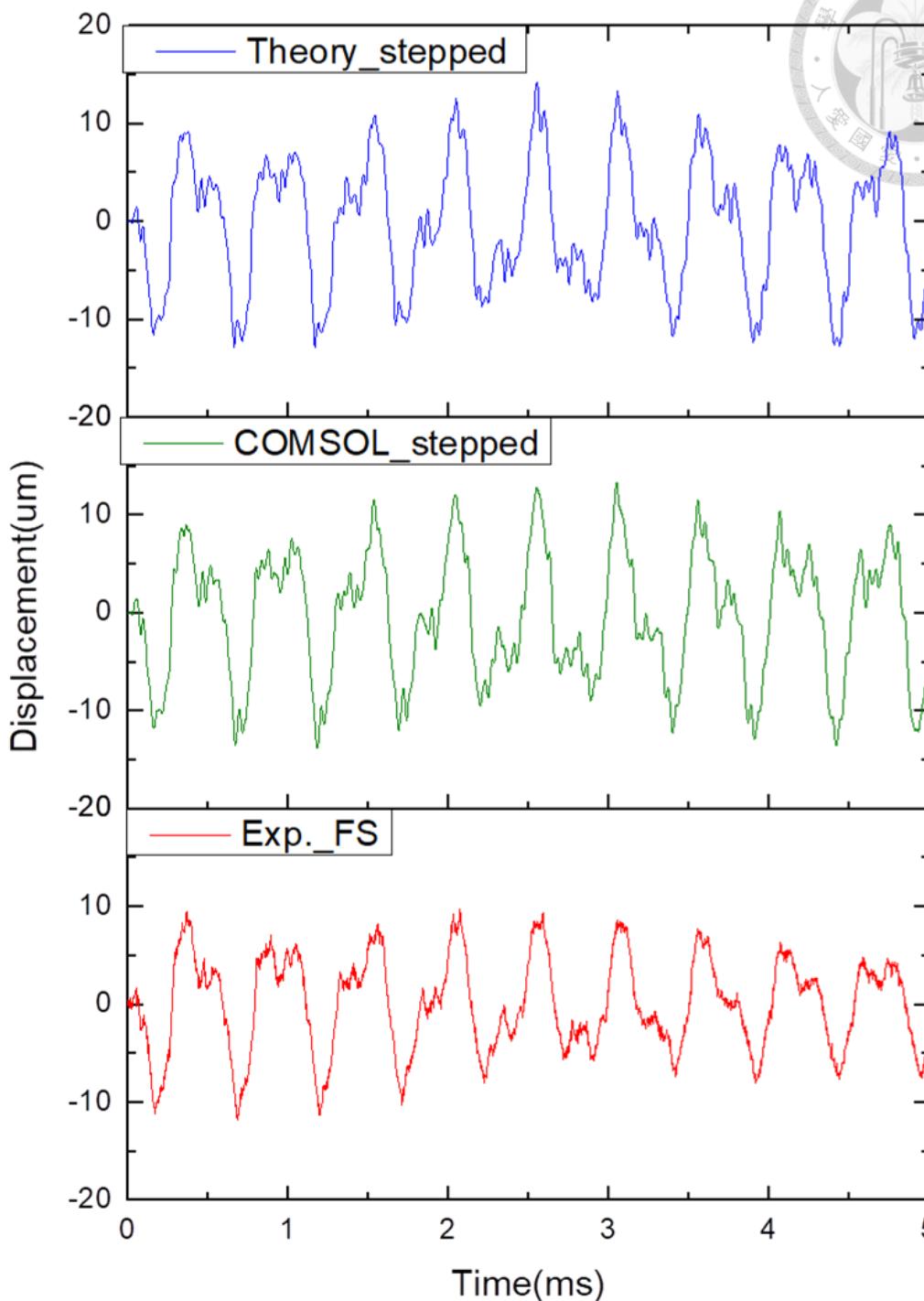


圖 3.20 第二組實驗鋼珠擊落 A 處，C 處之理論、有限元素及實驗
暫態位移比較(0~5ms)

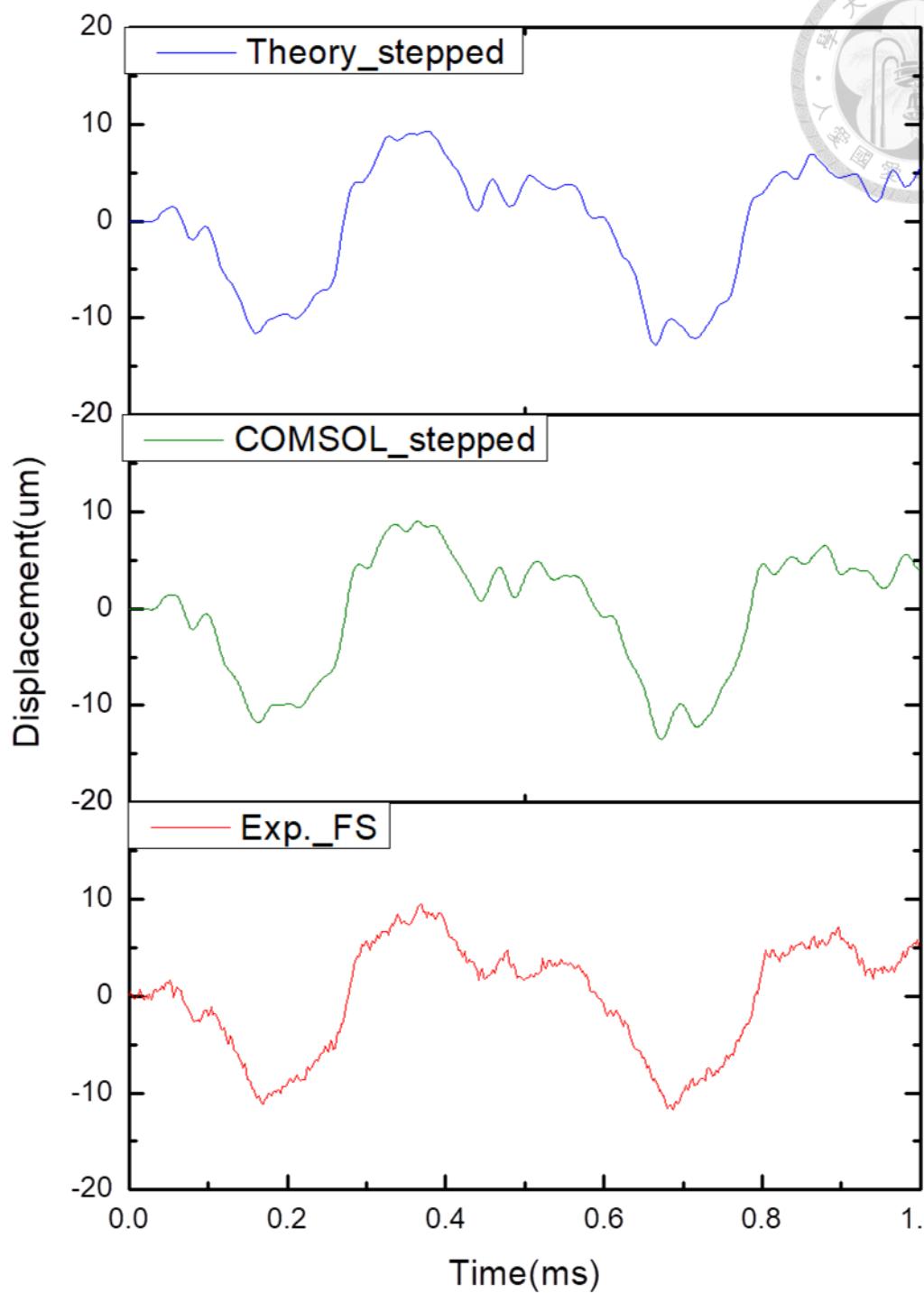


圖 3.21 第二組實驗鋼珠擊落 A 處，C 處之理論、有限元素及實驗
暫態位移比較(0~1ms)

第四章 應用 Mindlin 板理論於矩形壓電厚板振動分析

與實驗量測



4.1 線性壓電理論與壓電矩形板彎曲、伸展振動方程式

壓電材料主要具有力學場與電學場相互耦合的物理特性，進而產生機電轉換的現象，常應用於各式感測器或致動器等。壓電效應主要分為由拉、壓應力作用於壓電材料而生成表面電荷，即機械能轉換成電能的現象，稱為正壓電效應 (direct piezoelectric effect)，或是施加電壓使其產生形變的逆壓電效應 (converse piezoelectric effect)；利用壓電材料的正壓電效應特性可將其應用於感測元件的製作上，由材料形變產生的電荷作為感測結構變形的方式；而利用逆壓電效應特性則可以將壓電材料作為致動器，由輸入的電壓可精密調整壓電試片的變形與運動位移。圖 4.1 為本文所使用壓電材料示意圖：

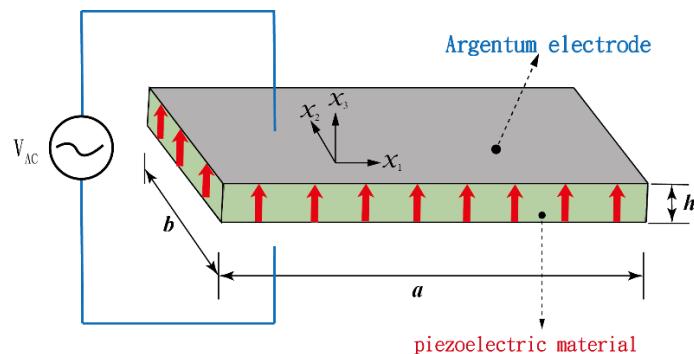


圖 4.1 壓電材料示意圖

壓電陶瓷製造生產過程，會使其接觸到高溫與高電壓來產生壓電特性，稱之為極化現象。進一步來說，就是壓電材料在極化過程中，在外加電場影響下會改變電偶極矩的排列方向，使原本呈隨機方向排列的電偶極矩在極化過程被重新排列，而且電偶極矩極化後排列方向具有一致性。在圖 4.1 中的 a 、 b 、 h 分別為壓電矩形板

的長、寬、厚尺度，在厚度方向(沿著 x_3 軸方向)紅色箭頭為壓電材料極化方向，壓電材料的上下表面鍍上電極，藉由黏貼漆包線來輸入電壓激振壓電材料。

利用熱力學第一定律與能量守恆，壓電材料本構方程式表示如下：

$$\begin{aligned} T_{ij} &= c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} \tilde{E}_k \\ \tilde{D}_i &= e_{ikl} S_{kl} + \varepsilon_{ik}^S \tilde{E}_k \end{aligned} \quad (4.1)$$

應變與位移、電場與電位可以表示如下：

$$\begin{cases} S_{kl} = (U_{k,l} + U_{l,k})/2 & kl = 11, 22, 33, 12 \\ S_{kl} = \kappa^2 (U_{k,l} + U_{l,k})/2 & kl = 13, 23 \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\tilde{E}_k = -\phi_{v,k}$$

在(4.1)與(4.2)式中的符號表示， T_{ij} 、 S_{kl} 分別代表為應力、應變， \tilde{E}_k 為電場、 \tilde{D}_i 為電位移、 U_i 為位移、 ϕ_v 為電位、 c_{ijkl}^E 代表為電場固定下的勁度係數， ε_{ik}^S 為應變固定下介電常數、 e_{kij} 為壓電應力常數。因為壓電材料屬於 C_{6mm} 晶格結構，所以 c_{ijkl}^E 、 e_{kij} 與 ε_{ik}^S 等材料常數具有對稱性，可將壓電材料本構方程式矩陣形式(4.1)簡化表示為(4.3)式：

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{13} \\ T_{12} \\ \tilde{D}_1 \\ \tilde{D}_2 \\ \tilde{D}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ 2S_{23} \\ 2S_{13} \\ 2S_{12} \\ \tilde{E}_1 \\ \tilde{E}_2 \\ \tilde{E}_3 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

其中式(4.3)中 $c_{66}^E = (c_{11}^E - c_{12}^E)/2$ ，接著依據 Mindlin 板為基礎的振動理論，來分析



壓電材料的基本動態特性。由 Mindlin 平板理論，位移場可以表示如(4.4)式。

$$\begin{cases} U_1(x_1, x_2, x_3) = u_1^{(0)}(x_1, x_2) + x_3 u_1^{(1)}(x_1, x_2) \\ U_2(x_1, x_2, x_3) = u_2^{(0)}(x_1, x_2) + x_3 u_2^{(1)}(x_1, x_2) \\ U_3(x_1, x_2, x_3) = u_3^{(0)}(x_1, x_2) + x_3 u_3^{(1)}(x_1, x_2) \end{cases} \quad (4.4)$$

在(4.4)中 U_1 、 U_2 和 U_3 分別代表在 x_1 、 x_2 和 x_3 方向上之位移場， $u_1^{(0)}$ 、 $u_2^{(0)}$ 、

$u_3^{(0)}$ 與 $u_1^{(1)}$ 、 $u_2^{(1)}$ 、 $u_3^{(1)}$ 分別為 U_1 、 U_2 和 U_3 所對應零階與一階位移函數，線性應變

位移關係式、及電場與電位關係式可以表示如下(4.5)：

$$S_{kl} = (U_{k,l} + U_{l,k})/2 = S_{kl}^{(0)} + x_3 S_{kl}^{(1)} \quad \text{及} \quad \tilde{E}_k = -\phi_{v,k} \quad (4.5)$$

在 (4.5) 中 $S_{kl}^{(0)}$ 與 $S_{kl}^{(1)}$ 分別代表零階和一階應變分量、 ϕ_v 為電位，將(4.4)代入(4.5)得

到應變位移如(4.6)、(4.7)關係式：

$$\begin{bmatrix} S_{11}^{(0)} \\ S_{22}^{(0)} \\ S_{33}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,1}^{(0)} \\ u_{2,2}^{(0)} \\ u_3^{(0)} \end{bmatrix} \quad \text{及} \quad \begin{bmatrix} S_{12}^{(0)} \\ S_{13}^{(0)} \\ S_{23}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_{1,2}^{(0)} + u_{2,1}^{(0)})/2 \\ (u_1^{(1)} + u_{3,1}^{(0)})/2 \\ (u_2^{(1)} + u_{3,2}^{(0)})/2 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} \\ S_{22}^{(1)} \\ S_{33}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,1}^{(1)} \\ u_{2,2}^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{及} \quad \begin{bmatrix} S_{12}^{(1)} \\ S_{13}^{(1)} \\ S_{23}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_{1,2}^{(1)} + u_{2,1}^{(1)})/2 \\ u_{3,1}^{(1)}/2 \\ u_{3,2}^{(1)}/2 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

基於線性壓電理論，整個系統的焓密度函數(electric enthalpy function)可以二次式方程式表示如(4.8)：

$$H(S_{ij}, \tilde{E}_j) = \frac{1}{2} c_{ijkl}^E S_{ij} S_{kl} - e_{kij} S_{ij} \tilde{E}_k - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^S \tilde{E}_i \tilde{E}_j \quad (4.8)$$



由(4.8)式與哈密頓原理與數學變分法，可將壓電系統總能的變分數學式表示為

(4.9) :

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \int_V (K - H) dV dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega_i} \left[t_j^{(\Omega_i)} \delta U_j - \tilde{Q}_i \delta \phi_v \right] d\Omega_i dt = 0 \quad (4.9)$$

上式(4.9)中 ρ 為質量密度、 \tilde{Q}_i 是 i 方向表面的電荷密度、 $t_j^{(\Omega_i)}$ 為表面牽引力、 K 是系統內部的動能密度、 t_0 與 t_1 為起始時間和截止時間、 V 為壓電材料之體積、 Ω_i 為 x_i 方向上表面之體積。為推導出運動方程式，針對(4.9)式分別將壓電板動能變分及焓密度函數變化推導表示為(4.10)、(4.11)：

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_1} \int_V K dV dt &\Rightarrow \delta \int_{t_0}^{t_1} \int_V \frac{1}{2} \rho \dot{U}_j \dot{U}_j dV dt \\ &\Rightarrow - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega_3} \rho h \left(\ddot{u}_1^{(0)} \delta u_1^{(0)} + \ddot{u}_2^{(0)} \delta u_2^{(0)} + \ddot{u}_3^{(0)} \delta u_3^{(0)} \right) d\Omega_3 dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega_3} \frac{\rho h^3}{12} \left(\ddot{u}_1^{(1)} \delta u_1^{(1)} + \ddot{u}_2^{(1)} \delta u_2^{(1)} + \ddot{u}_3^{(1)} \delta u_3^{(1)} \right) d\Omega_3 dt \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_1} \int_V H \left(S_{ij}, \tilde{E}_j \right) dV dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_V \left(\frac{\partial H}{\partial S_{ij}} \delta S_{ij} + \frac{\partial H}{\partial \tilde{E}_j} \delta \tilde{E}_j \right) dV dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_V \left(T_{ij} \delta S_{ij} - \tilde{D}_j \delta \tilde{E}_j \right) dV dt \end{aligned} \quad (4.11)$$

為簡化系統推導過程，應變能密度的表示式，可以將零次與一次應力對厚度的積分以(4.12)式的符號表示：

$$\begin{cases} \left(T_{ij}^{(0)}, T_{ij}^{(1)} \right) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, x_3) T_{ij} dx_3 & \text{as } ij = 11, 22, 33, 12 \\ \left(T_{ij}^{(0)}, T_{ij}^{(1)} \right) = \kappa^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, x_3) T_{ij} dx_3 & \text{as } ij = 13, 23 \end{cases} \quad (4.12)$$



其中 h 為板厚度、 k^2 為 Mindlin 剪切校正因子(依 Gorman 理論 $k^2=0.8601$)，將式(4.5)與(4.12)帶入(4.11)，沿厚度方向積分，將壓電板焓函數變分展開得(4.13)式：

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^{t_1} \int_V \delta H(S_{ij}, \tilde{E}_j) dV dt \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega_3} \left(T_{11}^{(0)} \delta S_{11}^{(0)} + T_{22}^{(0)} \delta S_{22}^{(0)} + T_{33}^{(0)} \delta S_{33}^{(0)} + T_{11}^{(1)} \delta S_{11}^{(1)} + T_{22}^{(1)} \delta S_{22}^{(1)} + T_{33}^{(1)} \delta S_{33}^{(1)} \right) d\Omega_3 dt \\
 &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega_3} 2 \left(T_{12}^{(0)} \delta S_{12}^{(0)} + T_{13}^{(0)} \delta S_{13}^{(0)} + T_{23}^{(0)} \delta S_{23}^{(0)} + T_{12}^{(1)} \delta S_{12}^{(1)} + T_{13}^{(1)} \delta S_{13}^{(1)} + T_{23}^{(1)} \delta S_{23}^{(1)} \right) d\Omega_3 dt \\
 &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_V (\tilde{D}_1 \delta \phi_{v,1} + \tilde{D}_2 \delta \phi_{v,2} + \tilde{D}_3 \delta \phi_{v,3}) dV dt
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

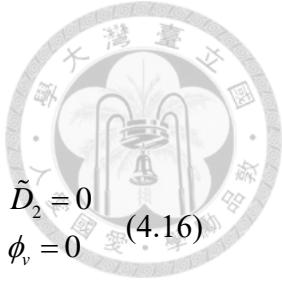
將(4.6)、(4.7)、(4.10)和(4.13)式帶入(4.9)式，則應力運動方程式與高斯定律和相關邊界條件可以 $T_{ij}^{(0)}$ 、 $T_{ij}^{(1)}$ 和 \tilde{D}_i 表示。進一步將應力運動方程式和靜電的電荷方程式展開如(4.14)：

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega_3} \left[\left(T_{11,1}^{(0)} + T_{12,2}^{(0)} - \rho h \ddot{u}_1^{(0)} \right) \delta u_1^{(0)} + \left(T_{11,1}^{(1)} + T_{12,2}^{(1)} - T_{13}^{(0)} - \frac{\rho h^3}{12} \ddot{u}_1^{(1)} \right) \delta u_1^{(1)} \right] d\Omega_3 dt \\
 &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega_3} \left[\left(T_{22,2}^{(0)} + T_{12,1}^{(0)} - \rho h \ddot{u}_2^{(0)} \right) \delta u_2^{(0)} + \left(T_{22,2}^{(1)} + T_{12,1}^{(1)} - T_{23}^{(0)} - \frac{\rho h^3}{12} \ddot{u}_2^{(1)} \right) \delta u_2^{(1)} \right] d\Omega_3 dt \\
 &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega_3} \left[\left(T_{13,1}^{(0)} + T_{23,2}^{(0)} - \rho h \ddot{u}_3^{(0)} \right) \delta u_3^{(0)} + \left(T_{13,1}^{(1)} + T_{23,2}^{(1)} - T_{33}^{(0)} - \frac{\rho h^3}{12} \ddot{u}_3^{(1)} \right) \delta u_3^{(1)} \right] d\Omega_3 dt \\
 &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_V (\tilde{D}_1 + \tilde{D}_2 + \tilde{D}_3) \delta \phi_v dV dt = 0
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

上述壓電矩形板為自由邊界，其尺度長度為 a 、寬度為 b ，在 $x_1=0$ 、 a 和 $x_2=0$ 、 b 應力及電位邊界條件表示如(4.15)、(4.16)式：

當 $x_1=0$ 與 $x_1=a$ 需滿足邊界條件：

$$\begin{cases} T_{11}^{(0)} = 0 & u_1^{(0)} = 0 \\ T_{11}^{(1)} = 0 & u_1^{(1)} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} T_{12}^{(0)} = 0 & u_2^{(0)} = 0 \\ T_{12}^{(1)} = 0 & u_2^{(1)} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} T_{13}^{(0)} = 0 & u_3^{(0)} = 0 \\ T_{13}^{(1)} = 0 & u_3^{(1)} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{D}_1 = 0 \\ \phi_v = 0 \end{cases} \tag{4.15}$$



當 $x_2 = 0$ 與 $x_2 = b$ 需滿足邊界條件：

$$\begin{cases} T_{22}^{(0)} = 0 & u_2^{(0)} = 0 \\ T_{22}^{(1)} = 0 & u_2^{(1)} = 0 \end{cases}, \begin{cases} T_{12}^{(0)} = 0 & u_1^{(0)} = 0 \\ T_{12}^{(1)} = 0 & u_1^{(1)} = 0 \end{cases}, \begin{cases} T_{23}^{(0)} = 0 & u_3^{(0)} = 0 \\ T_{23}^{(1)} = 0 & u_3^{(1)} = 0 \end{cases}, \begin{cases} \tilde{D}_2 = 0 \\ \phi_v = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

將電位方程式以級數型式表示如(4.17)式，其中 $\phi_v^{(0)}$ 、 $\phi_v^{(1)}$ 及 $\phi_v^{(2)}$ 為未知參數：

$$\phi_v = \phi_v^{(0)} + x_3 \phi_v^{(1)} + x_3^2 \phi_v^{(2)} \quad (4.17)$$

$$\phi_v \Big|_{x_3=\pm\frac{h}{2}} = \pm V_o \quad (4.18)$$

將(4.18)式代入(4.17)式簡化後可得：

$$\phi_v = \phi_v^{(2)} \left(x_3^2 - \frac{h^2}{4} \right) + \frac{2V_o}{h} x_3 \quad (4.19)$$

假設壓電材料極化方向之面外電位移相較於電極沿著面內方向之電位移非常大，故可將面內電位移視為趨近於零，因此可以假設 $\tilde{D}_1 \equiv \tilde{D}_2 \equiv 0$ 。所以將(4.3)式面內電場 \tilde{E}_1 與 \tilde{E}_2 改寫為(4.20)式：

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1 &= -2e_{15} \left(S_{13}^{(0)} + x_3 S_{13}^{(1)} \right) / \varepsilon_{11}^s \\ \tilde{E}_2 &= -2e_{15} \left(S_{23}^{(0)} + x_3 S_{23}^{(1)} \right) / \varepsilon_{11}^s \end{aligned} \quad (4.20)$$

再依據上述面內電位移趨近於零 $\tilde{D}_1 \equiv \tilde{D}_2 \equiv 0$ 假設，可將靜電方程式簡化成(4.21)：

$$\tilde{D}_{1,1} + \tilde{D}_{2,2} + \tilde{D}_{3,3} = 0 \Rightarrow \tilde{D}_{3,3} = 0 \quad (4.21)$$



利用電位與電場的關係式配合 (4.19)及(4.5) , 可將 \tilde{E}_3 表示為(4.22)：

$$\tilde{E}_3 = -2\phi_v^{(2)}x_3 - 2V_0/h = x_3\tilde{E}_3^{(1)} + \tilde{E}_3^{(0)} \quad (4.22)$$

考慮沿厚度方向應力 T_{33} , 將 (4.22)及(4.5)代入(4.3)得到(4.23)：

$$T_{33} = c_{13}S_{11}^{(0)} + c_{13}S_{22}^{(0)} + c_{33}S_{33}^{(0)} - e_{33}\tilde{E}_3^{(0)} + x_3\left(c_{13}S_{11}^{(1)} + c_{13}S_{22}^{(1)} + c_{33}S_{33}^{(1)} - e_{33}\tilde{E}_3^{(1)}\right) \quad (4.23)$$

因為必須考慮應變 $S_{33}^{(1)}$ 的效應而不可忽略，而且 T_{33} 相對於其他應力較小，故可

得到 $S_{33}^{(1)}$ 的關係式如(4.24)所示：

$$S_{33}^{(1)} = -\frac{c_{13}^E}{c_{33}^E}\left(S_{11}^{(1)} + S_{22}^{(1)}\right) + \frac{e_{33}}{c_{33}^E}\tilde{E}_3^{(1)} \quad (4.24)$$

將(4.24)、(4.5)代入(4.3)整理，可將應力、電位移用應變及電場關係結果整理成

(4.25)：

$$\begin{aligned} T_{11} &= c_{11}^E S_{11}^{(0)} + c_{12}^E S_{22}^{(0)} + c_{13}^E S_{33}^{(0)} - e_{31}\tilde{E}_3^{(0)} \\ &+ x_3 \left\{ \left[c_{11}^E - (c_{13}^E)^2 / c_{33}^E \right] S_{11}^{(1)} + \left[c_{12}^E - (c_{13}^E)^2 / c_{33}^E \right] S_{22}^{(1)} - (e_{31} - e_{33}c_{13}^E / c_{33}^E)\tilde{E}_3^{(1)} \right\} \\ T_{22} &= c_{12}^E S_{11}^{(0)} + c_{11}^E S_{22}^{(0)} + c_{13}^E S_{33}^{(0)} - e_{31}\tilde{E}_3^{(0)} \\ &+ x_3 \left\{ \left[c_{12}^E - (c_{13}^E)^2 / c_{33}^E \right] S_{11}^{(1)} + \left[c_{11}^E - (c_{13}^E)^2 / c_{33}^E \right] S_{22}^{(1)} - (e_{31} - e_{33}c_{13}^E / c_{33}^E)\tilde{E}_3^{(1)} \right\} \\ T_{33} &= c_{13}^E S_{11}^{(0)} + c_{13}^E S_{22}^{(0)} + c_{33}^E S_{33}^{(0)} - e_{33}\tilde{E}_3^{(0)} \\ T_{12} &= 2c_{66}^E S_{12}^{(0)} + 2x_3 c_{66}^E S_{12}^{(1)} \\ T_{13} &= 2\left(c_{44}^E + e_{15}^2 / \varepsilon_{11}\right) S_{13}^{(0)} + 2x_3 \left(c_{44}^E + e_{15}^2 / \varepsilon_{11}\right) S_{13}^{(1)} \\ T_{23} &= 2\left(c_{44}^E + e_{15}^2 / \varepsilon_{11}\right) S_{23}^{(0)} + 2x_3 \left(c_{44}^E + e_{15}^2 / \varepsilon_{11}\right) S_{23}^{(1)} \\ \tilde{D}_3 &= e_{31}S_{11}^{(0)} + e_{31}S_{22}^{(0)} + e_{33}S_{33}^{(0)} + \varepsilon_{33}^S \tilde{E}_3^{(0)} \\ &+ x_3 \left[\left(e_{31} - e_{33}c_{13}^E / c_{33}^E \right) \left(S_{11}^{(1)} + S_{22}^{(1)} \right) + \left(\varepsilon_{33}^S + e_{33}^2 / c_{33}^E \right) \tilde{E}_3^{(1)} \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$



由(4.21)與(4.25)式可以將電場 \tilde{E}_3 與應變的關係式表示為(4.26)式：

$$\tilde{E}_3^{(1)} = -\frac{\left[e_{31} - (c_{13}^E/c_{33}^E)e_{33}\right]}{\left(\epsilon_{33}^S + e_{33}^2/c_{33}^E\right)} \left(S_{11}^{(1)} + S_{22}^{(1)}\right) \quad (4.26)$$

將(4.26)及(4.7)代入(4.19)式，可將電位函數表示如(4.27)式：

$$\phi_v = \frac{\left(e_{31} - e_{33}c_{13}^E/c_{33}^E\right)}{2\left(e_{33}^2/c_{33}^E + \epsilon_{33}^S\right)} \left(u_{1,1}^{(1)} + u_{2,2}^{(1)}\right) \left(x_3^2 - \frac{h^2}{4}\right) + \frac{2V_o}{h} x_3 \quad (4.27)$$

將(4.27)代入(4.25)式後將應變以位移函數方式來表示，再把應力場重新整理為零階與一階形式如(4.28)、(4.29)式：

應力零次項 (Zero Order Term)：

$$\begin{aligned} T_{11}^{(0)} &= h \left(c_{11}^E u_{1,1}^{(0)} + c_{12}^E u_{2,2}^{(0)} + c_{13}^E u_3^{(1)} \right) + 2e_{31}V_0 \\ T_{22}^{(0)} &= h \left(c_{12}^E u_{1,1}^{(0)} + c_{11}^E u_{2,2}^{(0)} + c_{13}^E u_3^{(1)} \right) + 2e_{31}V_0 \\ T_{33}^{(0)} &= h \left(c_{13}^E u_{1,1}^{(0)} + c_{13}^E u_{2,2}^{(0)} + c_{33}^E u_3^{(1)} \right) + 2e_{33}V_0 \\ T_{12}^{(0)} &= hc_{66}^E \left(u_{1,2}^{(0)} + u_{2,1}^{(0)} \right) \\ T_{13}^{(0)} &= h\kappa^2 \left(c_{44}^E + e_{15}^2/\epsilon_{11}^S \right) \left(u_{3,1}^{(0)} + u_1^{(1)} \right) \\ T_{23}^{(0)} &= h\kappa^2 \left(c_{44}^E + e_{15}^2/\epsilon_{11}^S \right) \left(u_{3,2}^{(0)} + u_2^{(1)} \right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

應力一次項 (First Order Term)：

$$\begin{aligned} T_{11}^{(1)} &= \frac{h^3}{12} \left\{ \left[c_{11}^E - (c_{13}^E)^2/c_{33}^E + k_e \right] u_{1,1}^{(1)} + \left[c_{12}^E - (c_{13}^E)^2/c_{33}^E + k_e \right] u_{2,2}^{(1)} \right\} \\ T_{22}^{(1)} &= \frac{h^3}{12} \left\{ \left[c_{12}^E - (c_{13}^E)^2/c_{33}^E + k_e \right] u_{1,1}^{(1)} + \left[c_{11}^E - (c_{13}^E)^2/c_{33}^E + k_e \right] u_{2,2}^{(1)} \right\} \\ T_{33}^{(1)} &= 0 \\ T_{12}^{(1)} &= \frac{h^3}{12} c_{66}^E \left(u_{1,2}^{(1)} + u_{2,1}^{(1)} \right) \\ T_{13}^{(1)} &= \frac{h^3}{12} \kappa^2 \left(c_{44}^E + e_{15}^2/\epsilon_{11}^S \right) u_{3,1}^{(1)} \\ T_{23}^{(1)} &= \frac{h^3}{12} \kappa^2 \left(c_{44}^E + e_{15}^2/\epsilon_{11}^S \right) u_{3,2}^{(1)} \end{aligned} \quad (4.29)$$



在(4.29)式中係數 k_e 之形式如(4.30)式：

$$k_e = \frac{\left[e_{31} - \left(c_{13}^E / c_{33}^E \right) e_{33} \right]^2}{\left(\varepsilon_{33}^S + e_{33}^2 / c_{33}^E \right)} \quad (4.30)$$

由以上推導結果將(4.28)、(4.29)式代入(4.14)式後，可整理出無因次彎曲與伸展型式平衡方程式如(4.31)~(4.36)式【詳細推導請見(107)吳亦莊博士論文】：

無因次彎曲形式的平衡方程式：

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\phi_h^2}{12} \bar{r}_{11}^E \frac{\partial^2 \psi_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\phi_h^2}{12\phi^2} r_{66}^E \frac{\partial^2 \psi_\xi}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\phi_h^2 \lambda^4}{12} - \kappa^2 \bar{r}_{44}^E \right) \psi_\xi \right] \\ & + \frac{\phi_h^2}{12\phi} \left(\bar{r}_{12}^E + r_{66}^E \right) \frac{\partial^2 \psi_\eta}{\partial \xi \partial \eta} - \kappa^2 \bar{r}_{44}^E \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\phi_h^2}{12\phi^2} \bar{r}_{11}^E \frac{\partial^2 \psi_\eta}{\partial \eta^2} + \frac{\phi_h^2}{12} r_{66}^E \frac{\partial^2 \psi_\eta}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\phi_h^2 \lambda^4}{12} - \kappa^2 \bar{r}_{44}^E \right) \psi_\eta \right] \\ & + \frac{\phi_h^2}{12\phi} \left(\bar{r}_{12}^E + r_{66}^E \right) \frac{\partial^2 \psi_\xi}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\kappa^2 \bar{r}_{44}^E}{\phi} \frac{\partial W}{\partial \eta} = 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\kappa^2 \bar{r}_{44}^E \frac{\partial \psi_\xi}{\partial \xi} + \frac{\kappa^2 \bar{r}_{44}^E}{\phi} \frac{\partial \psi_\eta}{\partial \eta} + \left(\kappa^2 \bar{r}_{44}^E \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\kappa^2 \bar{r}_{44}^E}{\phi^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \lambda^4 W \right) = 0 \quad (4.33)$$

無因次伸展形式的平衡方程式：

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{r_{66}^E}{\phi^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \lambda^4 U \right) + \frac{\left(r_{12}^E + r_{66}^E \right)}{\phi} \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} + r_{13}^E \frac{\partial \psi_\xi}{\partial \xi} = 0 \quad (4.34)$$

$$\frac{\left(r_{12}^E + r_{66}^E \right)}{\phi} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{1}{\phi^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + r_{66}^E \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \lambda^4 V \right) + \frac{r_{13}^E}{\phi} \frac{\partial \psi_\xi}{\partial \eta} = 0 \quad (4.35)$$

$$-r_{13}^E \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{r_{13}^E}{\phi} \frac{\partial V}{\partial \eta} + \left[\frac{\phi_h^2 \kappa^2 \bar{r}_{44}^E}{12} \left(\frac{\partial^2 \psi_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial^2 \psi_\xi}{\partial \eta^2} \right) + \left(\frac{\phi_h^2 \lambda^4}{12} - r_{13}^E \right) \psi_\xi \right] = 0 \quad (4.36)$$



同樣的無因次零階和一階應力場亦可分別由(4.25)改寫如(4.45)、(4.46)式所示：

無因次零階應力場：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{T_{11}^{(0)}}{hc_{11}^E} = \bar{T}_{11}^{(0)} = \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{r_{12}^E}{\phi} \frac{\partial V}{\partial \eta} + r_{13}^E \psi_\zeta \\ \frac{T_{22}^{(0)}}{hc_{11}^E} = \bar{T}_{22}^{(0)} = r_{12}^E \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial V}{\partial \eta} + r_{13}^E \psi_\zeta \\ \frac{T_{33}^{(0)}}{hc_{11}^E} = \bar{T}_{33}^{(0)} = r_{13}^E \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{r_{13}^E}{\phi} \frac{\partial V}{\partial \eta} + r_{33}^E \psi_\zeta \end{array} \right. \quad (4.37)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{T_{12}^{(0)}}{hc_{66}^E} = \bar{T}_{12}^{(0)} = \frac{1}{\phi} \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial \xi} \\ \frac{T_{13}^{(0)}}{h\kappa^2 \bar{c}_{44}^E} = \bar{T}_{13}^{(0)} = \psi_\zeta + \frac{\partial W}{\partial \xi} \\ \frac{T_{23}^{(0)}}{h\kappa^2 \bar{c}_{44}^E} = \bar{T}_{23}^{(0)} = \psi_\eta + \frac{1}{\phi} \frac{\partial W}{\partial \eta} \end{array} \right.$$

無因次一階應力場：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{12aT_{11}^{(1)}}{h^3 c_{11}^E} = \bar{T}_{11}^{(1)} = \bar{r}_{11}^E \frac{\partial \psi_\xi}{\partial \xi} + \frac{\bar{r}_{12}^E}{\phi} \frac{\partial \psi_\eta}{\partial \eta} \\ \frac{12aT_{22}^{(1)}}{h^3 c_{11}^E} = \bar{T}_{22}^{(1)} = \bar{r}_{12}^E \frac{\partial \psi_\xi}{\partial \xi} + \frac{\bar{r}_{11}^E}{\phi} \frac{\partial \psi_\eta}{\partial \eta} \\ \bar{T}_{33}^{(1)} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{12aT_{12}^{(1)}}{h^3 c_{66}^E} = \bar{T}_{12}^{(1)} = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \psi_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi_\eta}{\partial \xi} \\ \frac{12aT_{13}^{(1)}}{h^3 \bar{c}_{44}^E \kappa^2} = \bar{T}_{13}^{(1)} = \frac{\partial \psi_\zeta}{\partial \xi} \\ \frac{12\phi a T_{23}^{(1)}}{h^3 \bar{c}_{44}^E \kappa^2} = \bar{T}_{23}^{(1)} = \frac{\partial \psi_\zeta}{\partial \eta} \end{array} \right. \quad (4.38)$$



考慮壓電矩形板平面內電位移場等於零，因此可以將彎曲模態(flexural type)及伸展模態(extensional type)的邊界條件分別簡化如下：

$$\begin{cases} \bar{T}_{11}^{(0)} = \bar{T}_{12}^{(0)} = \bar{T}_{13}^{(0)} = 0 \\ \bar{T}_{11}^{(1)} = \bar{T}_{12}^{(1)} = \bar{T}_{13}^{(1)} = 0 \end{cases} \quad \text{當 } \xi = 0 \text{ 及 } \xi = 1 \quad (4.39)$$

$$\begin{cases} \bar{T}_{22}^{(0)} = \bar{T}_{12}^{(0)} = \bar{T}_{23}^{(0)} = 0 \\ \bar{T}_{22}^{(1)} = \bar{T}_{12}^{(1)} = \bar{T}_{23}^{(1)} = 0 \end{cases} \quad \text{當 } \eta = 0 \text{ 及 } \eta = 1 \quad (4.40)$$

4.2 實驗測量、數值計算及理論分析結果

在理論分析(應用吳亦莊博士論文理論結果)和數值計算比較中，本文使用三種長寬尺寸相同，但厚度不同壓電矩形板來進行實驗量測，針對三種壓電矩形板尺寸分別為 $60 \times 30 \times 1 \text{ mm}$ (1 號壓電板)、 $60 \times 30 \times 2.5 \text{ mm}$ (2 號壓電板)和 $60 \times 30 \times 6 \text{ mm}$ (3 號壓電板)。壓電矩形板主要為丹麥 Kvistgaard Noliac 公司所生產型號 NCE55 壓電陶瓷材料(材料常數詳見表 4.1)，其極化方向為沿著壓電陶瓷板厚度方向。藉由 AF-ESPI、阻抗分析儀和理論解析，可得壓電矩形板共振頻率和其相對應模態結果，可應用於驗證 Mindlin 板理論在實際壓電板動態特性的準確性。

利用第二章所介紹 AF-ESPI 量測技術來獲得壓電板三個獨立振動位移分量，包括沿 x_3 軸向(U3)面外彎曲振動及沿 x_1 軸(U1)和 x_2 軸(U2)面內伸展振動如圖 4.1 所示。為達到壓電矩形板完全自由邊界條件，採用剪裁細的雙面膠將壓電矩形板黏貼在柔軟的海綿表面上，用來模擬壓電矩形板自由邊界情況。

本文所使用有限元素軟體為美國 Hibbitt, Karlsson & Sorensen(HKS)公司所發展的商用有限元素分析軟體 ABAQUS 6.13 版，在設定步驟上 Step 選擇 Frequency 模組來進行特徵頻率計算，分析元素則是選用六面體形狀、20 個節點的高階方形固體三維元素(C3D20R)，建構出壓電矩形板網格來進行模擬分析，以呈現正確的

共振頻率與振動模態。



4.2.1 壓電矩形板理論與模擬共振頻率之討論

比較表 4.2 與表 4.3 分別列出壓電矩形板自由邊界下彎曲及伸展振動形式 Mindlin 板理論分析與有限元素軟體模擬數值計算前十個振動模式結果。首先由表 4.2 顯示 1 號壓電板彎曲共振頻率與有限元計算結果之間的差異小於 0.583%。若由表 4.3 比較伸展振動結果，差異在 0.022% 以內。隨著壓電矩形板厚度增加，FEM 和 Mindlin 板理論之間誤差值也隨著厚度增加具有明顯成長趨勢。考慮 2 號壓電板結果，彎曲振動和伸展振動的最大誤差分別為第九模態 0.964% 和第八模態 0.097%。在 3 號壓電板厚度與寬度之比值達到 0.2 時，觀察彎曲和伸展振動的數值分析結果之誤差值明顯提升，分別相對應為彎曲振動第十個模態 1.659% 和伸展振動第八個模態 0.476%。整體而言，壓電矩形板伸展振動形式的 Mindlin 板理論分析與有限元素數值計算誤差值相較彎曲振動小。而且彎曲及伸展振動形式數值計算和理論分析間共振頻率的預測具有良好一致性。

4.2.2 壓電矩形板理論與有限元素分析位移總量場

接著將三方向位移場解(詳吳亦莊博士論文位移場理論結果)代入(4.41)可繪出位移總量場(Magnitude)。根據位移總量圖，可看出三個方向位移場之比例大小，彎曲振動以 U_3 為主要振動方向，而伸展振動則是由 U_1 和 U_2 方向位移場主導。

$$\text{Magnitude} = \sqrt{U_1(\xi, \eta)^2 + U_2(\xi, \eta)^2 + U_3(\xi, \eta)^2} \quad (4.41)$$

將各位移場理論解代入(4.41)繪出 3 號壓電板彎曲及伸展振動形式的總量場如圖 4.2 與圖 4.3 所示，可發現無論是彎曲或是伸展振動形式的各個位移場圖形，理論與數值分析的位移全場分布結果皆十分一致，藉此確定 Mindlin 理論可有效應用於分析壓電厚板之頻率與模態預測，理論誤差亦在可接受範圍的情況。



4.2.3 壓電矩形板理論與有限元素分析應力場與電場

由前述共振頻率與位移場的討論，接著同前小節引用吳亦莊博士論文三方向位移場理論結果代入(4.28)與(4.29)式，將壓電矩形板振動時所產生的應力場，藉由位移場表示出來。接著分析 3 號壓電矩形板兩個正向力 T_{11} 、 T_{22} 與一個剪應力 T_{12} 的三個應力場，將彎曲及伸展振動結果表示於圖 4.4 與圖 4.5，由圖 4.4 可觀察出彎曲振動模態中，在第六模態 T_{11} 與第八模態 T_{22} 理論與數值具有差異。再觀察圖 4.5 可看出伸展振動中，第二模態在 T_{22} 與第七模態在 T_{12} 分布上差異性比較大，且第三與第四模態在 T_{12} 理論與數值稍微差異。依整體結果而言，彎曲及伸展振動結果理論與數值分析應力場分布結果十分相同，細看各模態節線對應性良好，所以理論與數值仍保持相當高的準確性。

壓電矩形板材質為壓電材料屬於力電耦合系統，需藉由固定輸出電壓來激振壓電矩形板所產生位移場會同時生成應力場與電場，所以探討壓電矩形板機械運動特性與內部電性關係，可作為壓電矩形激振方式的參考依據，考慮(4.25)主應力場與(4.26)電場表示式：

$$T_{11} + T_{22} = \left(c_{11}^E + c_{12}^E \right) \left(S_{11}^{(0)} + S_{22}^{(0)} \right) + 2c_{13}^E S_{33}^{(0)} - 2e_{31} \tilde{E}_3^{(0)} + x_3 \left\{ \left[c_{11}^E + c_{12}^E - 2 \left(c_{13}^E \right)^2 / c_{33}^E \right] \left(S_{11}^{(1)} + S_{22}^{(1)} \right) - 2 \left(e_{31} - e_{33} c_{13}^E / c_{33}^E \right) \tilde{E}_3^{(1)} \right\} \quad (4.42)$$

將(4.42)式與電場相互比對可發現彎曲振動的電場 $\tilde{E}_3^{(1)}$ 與應力和 $(T_{11} + T_{22})$ 的形式完全相同，因此將 3 號壓電矩形板彎曲振動下理論所得到的位移場、應力和 $(T_{11} + T_{22})$ 與利用有限元素計算電場等結果列於圖 4.6，觀察這三者間分布趨勢除了第一模態電場等高線分布與對應位移場稍微不同，其餘這三者間分布結果皆有良好的對應性，且電場等高線分布的位置亦可對應位移場分布的趨勢，所以藉由此特性，只要依據電場分布進行電極的設計，便可激發出所對應的彎曲模態。

將 3 號壓電矩形板伸展振動之理論計算位移、應力和($T_{11}+T_{22}$)與有限元素計算的電通量(Electric Flux)進行比對如圖 4.7，在第六模態電通量等高線分布與對應位移場及應力和稍微不同，可看出三者間分布趨勢對應性相當吻合，依此結果來激振以伸展振動為主的相關模態，僅需將壓電矩形板之電極依照對應的面外位移場加以設計，便可激振出所對應伸展模態。最後，觀察分佈圖的趨勢和對稱特性在彎曲和伸展振動的機械場和電場之間都相當吻合。

4.2.4 壓電矩形板實驗與理論分析共振模態

將 1 和 2 號壓電矩形板利用刀具將壓電矩形板上下表面電極切割成相互間不導通、形狀大小相等四小塊電極，並利用漆包線分別貼附於各個電極區塊，再輸入不同正負電壓於壓電矩形板四小塊電極，獲得四種不同電極設計，電極類型包括全電極(Full)、左右電極(Right-Left)、上下電極(Up-Down)、交叉電極(Cross)等如圖 4.8 所示。接著將切割後 1 和 2 號壓電矩形板個別放置於海綿上模擬自由邊界，將漆包線黏貼於壓電矩形板上，漆包線另一端連接在阻抗分析儀插槽如圖 4.9，量測出在四種不同電極設計下伸展振動的共振頻率，可以發現這兩塊壓電方板在全電極有較多頻率峰值，所以採用全電極激振方式可以激振出較多模態形狀，而左右電極阻抗分析圖峰值少，相對激振出模態形狀也比較少，如圖 4.10 與圖 4.11。

接著採用 AF-ESPI 技術來量測 1 號和 2 號壓電矩形板，在彎曲振動和伸展振動之共振頻率和振動模態。首先比對理論與實驗模態形狀，顯示兩者面外模態振形相當一致，如圖 4.12 及圖 4.13。由圖 4.12 可知，1 號壓電板前十八個壓電矩形板面外彎曲振動模態，容易被全電極激振為第一、五、八、九、十五、十八模態，交叉電極激振的為第二、六、十三、十六模態，上下電極激振的是第三、十、十四、十七模態，左右電極激振出第四、七、十一、十二模態。AF-ESPI 實驗和理論值間之彎曲振動在第三模態具有最大誤差為 3.833%，而在其他振動模態下，誤差均在



1~2% 以內。由圖 4.13，可知 1 號壓電板前十五個壓電矩形板面內伸展振動模態，容易被全電極激振為第二、六、九、十一模態，交叉電極激振為第三、四、十三、十五模態，上下電極激振為第一、五、十模態，左右電極激振為第八、十二模態。再比較圖 4.13 透過 AF-ESPI 和阻抗分析(IA)實驗測得的結果，對於伸展型振動在第十二模態 AF-ESPI 和理論有比較大誤差為 5.632%，而阻抗分析(IA)和理論的誤差值也相對較大為 2.859%。由於第七和第十四伸展模態屬於純面內振動模式，因此只能透過理論計算獲得，也就是說，無法利用 AF-ESPI 和阻抗分析儀量測出配合四種不同類型電極設計改變來量測伸展振動模態。

隨著壓電矩形板厚度增加，壓電矩形板共振頻率和剛度特性在彎曲運動下與板厚度具有高度相關，更不易激振出面外振動模態振形，所以藉由 AF-ESPI 方法只能量測到 2 號壓電板前八個彎曲模態模式。由圖 4.14 可知，前八個壓電矩形板面外振動模態，容易被全電極激振為第一、八模態，交叉電極激振為第二、六模態，上下電極激振為第三模態，左右電極激振為第四、五、七模態。AF-ESPI 實驗和理論值間之彎曲振動在第三模態存在最大誤差為 5.691%。

由圖 4.15 可知，2 號壓電板前十五個壓電矩形板面內振動模態，容易被全電極激振有第二、六、九、十一模態，交叉電極激振為第三、四、十三、十五模態，上下電極激振為第一、五、十模態，左右電極激振為第八、十二模態。再比較透過 AF-ESPI 和阻抗分析(IA)實驗測得結果如圖 4.15，對於伸展型振動在第十二模態 AF-ESPI 和理論有比較大誤差 4.672%，而在第三模態阻抗分析(IA)和理論的誤差值也相對較大為 1.421%。同樣的，第七和第十四伸展模態屬於純面內振動模式，因此只能透過理論計算獲得，無法由實驗量測到模態。

比較圖 4.14 中 1 號壓電板及圖 4.15 中 2 號壓電板，前十五個壓電矩形板面內伸展振動模態，在 1 號壓電板無法利用實驗量測出 U3 方向運動振動模態，但 2 號壓電板在面內振動下可量測到第一、二、三和六模態在伸展運動所誘生 U3 方向運

動的模態。藉由本文量測模態形狀實驗結果，可驗證隨著壓電矩形板的厚度增加，三維振動的耦合效果也隨著增加。



表 4.1 NCE55 壓電陶瓷材料相關材料常數

材料常數	數值	
密度 (kg/m ³)	7927	
彈性係數 (N/m ²)	c_{11}^E c_{12}^E c_{13}^E c_{33}^E c_{44}^E	12.276×10^{10} 7.9×10^{10} 8.078×10^{10} 11.176×10^{10} 2.119×10^{10}
相對介電常數	$\varepsilon_{11}^S/\varepsilon_0$ $\varepsilon_{33}^S/\varepsilon_0$	2519.2 2408
Vacuum permittivity (F/m)	ε_0	8.854×10^{-12}
壓電應變常數 (N/Vm)	e_{31} e_{33} e_{15}	-10.67 16.9 12.11

表 4.2 不同厚度壓電材料彎曲振動形式前 10 個共振頻率之結果比較

Piezoelectric Material (NCE55) Flexural Type Resonant Frequencies(Hz)						
Scale	60 × 30 × 1 mm		60 × 30 × 2.5 mm		60 × 30 × 6 mm	
Mode	FEM	Mindlin (Diff. %)	FEM	Mindlin (Diff. %)	FEM	Mindlin (Diff. %)
1	829.9	832.5 (0.313)	2061.1	2069.0 (0.383)	4795	4817 (0.459)
2	948.1	949.0 (0.095)	2314	2324.5 (0.454)	5178.9	5239.5 (1.170)
3	2122.7	2126.5 (0.179)	5140.6	5172.5 (0.621)	11169	11331 (1.450)
4	2316.7	2325.5 (0.380)	5680.8	5709.0 (0.496)	12538	12631.5 (0.746)
5	3544.2	3564.5 (0.573)	8648	8704.5 (0.653)	18634	18777 (0.767)
6	3761.2	3771.5 (0.274)	9020.2	9088.0 (0.752)	18843	19144.5 (1.600)
7	4118.4	4142.0 (0.573)	9958.8	10039.5 (0.810)	21020	21258.5 (1.135)
8	4735.2	4762.0 (0.566)	11416	11507.5 (0.802)	23748	24020 (1.145)
9	5629.7	5662.5 (0.583)	13427	13556.5 (0.964)	27277	27659.5 (1.402)
10	6029.9	6049.5 (0.325)	14278	14398.5 (0.844)	28451	28923 (1.659)

表 4.3 不同厚度壓電材料伸展振動形式前 10 個共振頻率之結果比較

Piezoelectric Material (NCE55) Extensional Type Resonant Frequencies(Hz)						
Scale	60 × 30 × 1 mm		60 × 30 × 2.5 mm		60 × 30 × 6 mm	
Mode	FEM	Mindlin (Diff. %)	FEM	Mindlin (Diff. %)	FEM	Mindlin (Diff. %)
1	14644	14646 (0.014)	14643	14650 (0.048)	14639	14670 (0.212)
2	22186	22187 (0.005)	22184	22185 (0.005)	22170	22176 (0.027)
3	24398	24400 (0.008)	24397	24404 (0.029)	24389	24421 (0.131)
4	35281	35283 (0.006)	35278	35288 (0.028)	35258	35313 (0.156)
5	35721	35723 (0.006)	35717	35726 (0.025)	35695	35738 (0.120)
6	39016	39023 (0.018)	39001	39031 (0.077)	38917	39065 (0.380)
7	39159	39159 (0.000)	39159	39159 (0.000)	39159	39159 (0.000)
8	40206	40215 (0.022)	40191	40230 (0.097)	40104	40295 (0.476)
9	46134	46137 (0.007)	46106	46118 (0.026)	45940	45997 (0.124)
10	48142	48149 (0.015)	48132	48163 (0.064)	48077	48226 (0.310)

Flexural Type Resonant Frequencies And Mode Shapes (Scale 60×30×6 mm)				
Mode	U_1	U_2	U_3	Magnitude
1 4795 <i>FEM</i>				
2 5178.9 <i>FEM</i>				
3 11169 <i>FEM</i>				
4 12538 <i>FEM</i>				
5 18634 <i>FEM</i>				

圖 4.2 60×30×6 mm 壓電平板前 10 個彎曲模態的理論
與模擬結果比較(第 1 至第 5 模態)

Flexural Type Resonant Frequencies And Mode Shapes (Scale 60×30×6 mm)				
Mode	U_1	U_2	U_3	Magnitude
6	<i>FEM</i> 18843			
	<i>Mindlin</i> 19144.5			
7	<i>FEM</i> 21020			
	<i>Mindlin</i> 21258.5			
8	<i>FEM</i> 23748			
	<i>Mindlin</i> 24020			
9	<i>FEM</i> 27277			
	<i>Mindlin</i> 27659.5			
10	<i>FEM</i> 28451			
	<i>Mindlin</i> 28923			

圖 4.2 60×30×6 mm 壓電平板前 10 個彎曲模態的理論與模擬
結果比較(第 6 至第 10 模態)

Extensional Type Resonant Frequency And Mode Shape (Scale 60×30×6 mm)				
Mode	U_1	U_2	U_3	Magnitude
1 14639 <i>FEM</i>				
2 22170 <i>FEM</i>				
3 24389 <i>FEM</i>				
4 35258 <i>FEM</i>				
5 35695 <i>FEM</i>				

圖 4.3 60×30×6 mm 壓電平板前 10 個伸展模態的理論與模擬
結果比較(第 1 至第 5 模態)

Extensional Type Resonant Frequency And Mode Shape (Scale 60×30×6 mm)					
Mode	U_1	U_2	U_3	Magnitude	
6	<i>FEM</i> 38917				
	<i>Mindlin</i> 39065				
7	<i>FEM</i> 39159				
	<i>Mindlin</i> 39159				
8	<i>FEM</i> 40104				
	<i>Mindlin</i> 40295				
9	<i>FEM</i> 45940				
	<i>Mindlin</i> 45997				
10	<i>FEM</i> 48077				
	<i>Mindlin</i> 48226				

圖 4.3 60×30×6 mm 壓電平板前 10 個伸展模態的理論與模擬
結果比較(第 6 至第 10 模態)

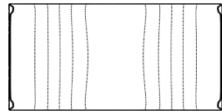
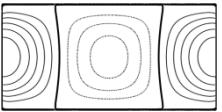
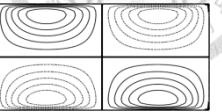
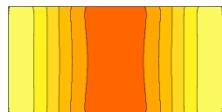
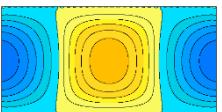
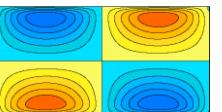
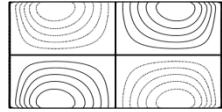
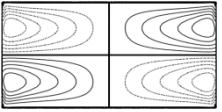
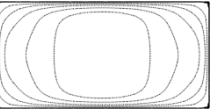
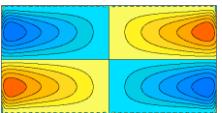
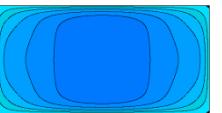
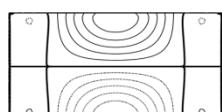
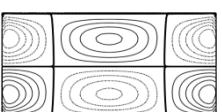
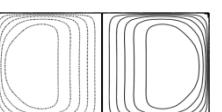
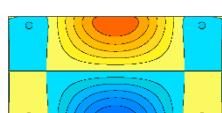
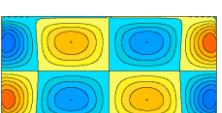
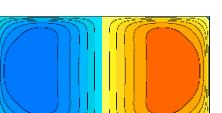
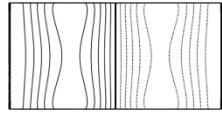
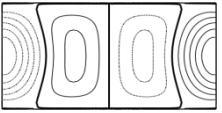
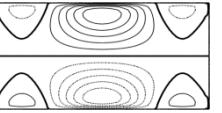
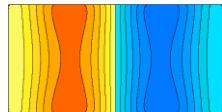
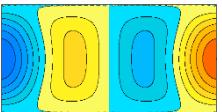
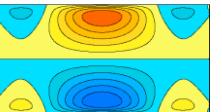
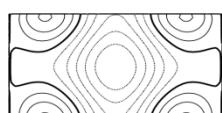
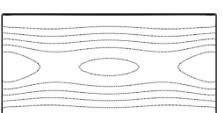
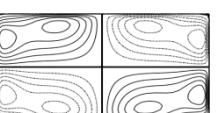
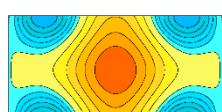
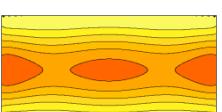
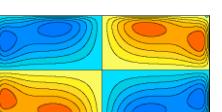
Stress Fields of Flexural Type Vibration (60×30×6 mm)						
	Mode	Frequency	T ₁₁	T ₂₂	T ₁₂	
1	FEM	4795				
	Mindlin	4817				
2	FEM	5178.9				
	Mindlin	5239.5				
3	FEM	11169				
	Mindlin	11331				
4	FEM	12538				
	Mindlin	12631.5				
5	FEM	18634				
	Mindlin	18777				

圖 4.4 60×30×6mm 壓電板前 10 個彎曲振動形式之彎曲與扭曲應力分析結果比較(第 1 至第 5 模態)

Stress Fields of Flexural Type Vibration (60×30×6 mm)						
	Mode	Frequency	T ₁₁		T ₂₂	
			T ₁₁	T ₂₂	T ₁₂	T ₂₁
6	FEM	18843				
	Mindlin	19144.5				
7	FEM	21020				
	Mindlin	21258.5				
8	FEM	23748				
	Mindlin	24020				
9	FEM	27277				
	Mindlin	27659.5				
10	FEM	28451				
	Mindlin	28923				

圖 4.4 60×30×6mm 壓電板前 10 個彎曲振動形式之彎曲與扭曲應力分析結果比較(第 6 至第 10 模態)

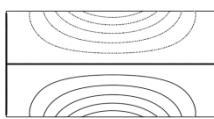
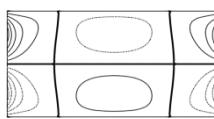
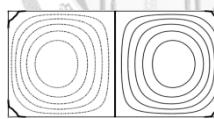
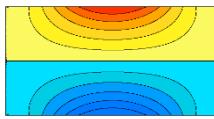
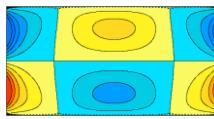
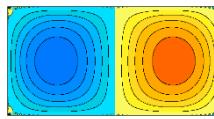
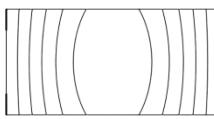
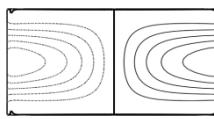
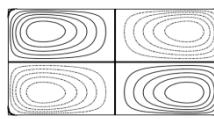
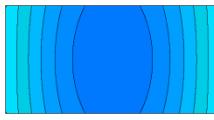
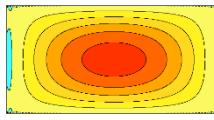
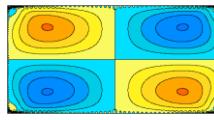
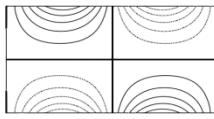
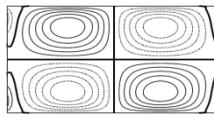
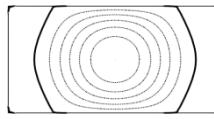
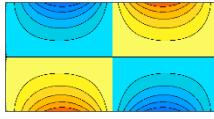
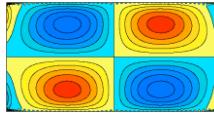
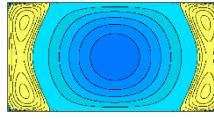
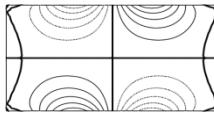
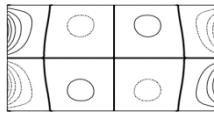
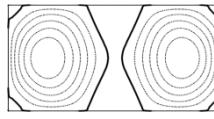
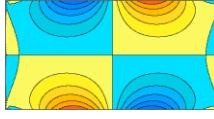
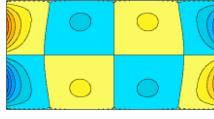
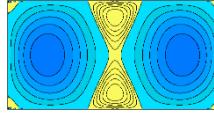
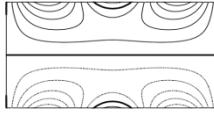
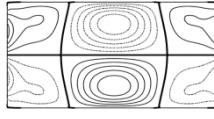
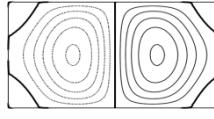
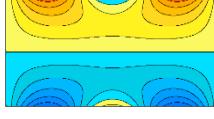
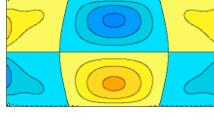
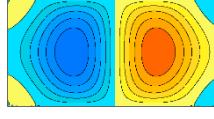
Stress Fields of Extensional Type Vibration (60×30×6 mm)						
	Mode	Frequency	T ₁₁	T ₂₂	T ₁₂	
1	FEM	14639				
	Mindlin	14670				
2	FEM	22170				
	Mindlin	22176				
3	FEM	24389				
	Mindlin	24421				
4	FEM	35258				
	Mindlin	35313				
5	FEM	35695				
	Mindlin	35738				

圖 4.5 60×30×6mm 壓電板前 10 個伸展振動形式之彎曲與
扭曲應力分析結果比較(第 1 至第 5 模態)

Stress Fields of Extensional Type Vibration (60×30×6 mm)						
	Mode	Frequency	T ₁₁	T ₂₂	T ₁₂	
6	FEM	38917				
	Mindlin	39065				
7	FEM	39159				
	Mindlin	39159				
8	FEM	40104				
	Mindlin	40295				
9	FEM	45940				
	Mindlin	45997				
10	FEM	48077				
	Mindlin	48226				

圖 4.5 60×30×6mm 壓電板前 10 個伸展振動形式之彎曲與
扭曲應力分析結果比較(第 6 至第 10 模態)

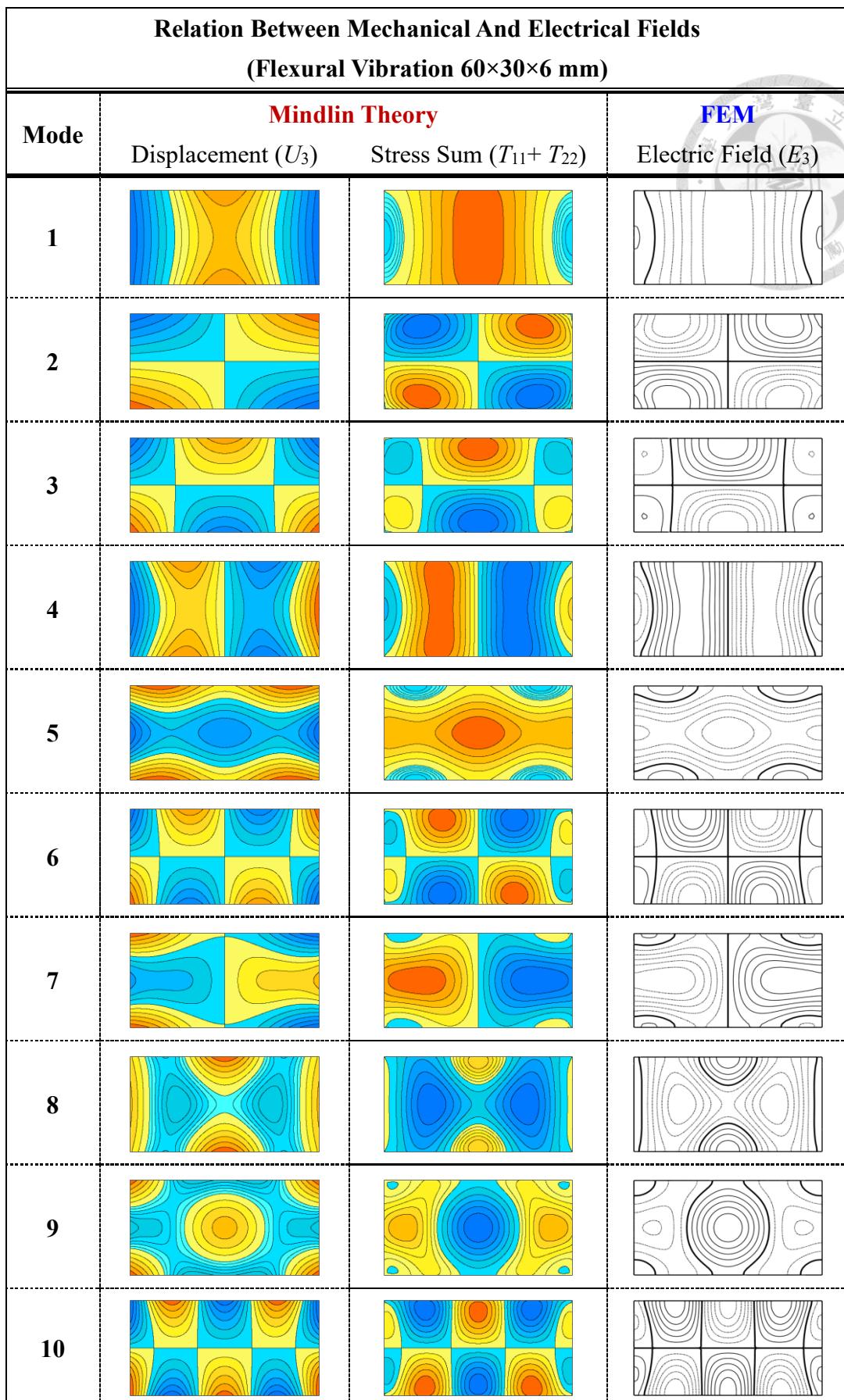


圖 4.6 60×30×6 壓電平板彎矩振動形式之位移、應力

和與 FEM 電場分布比較

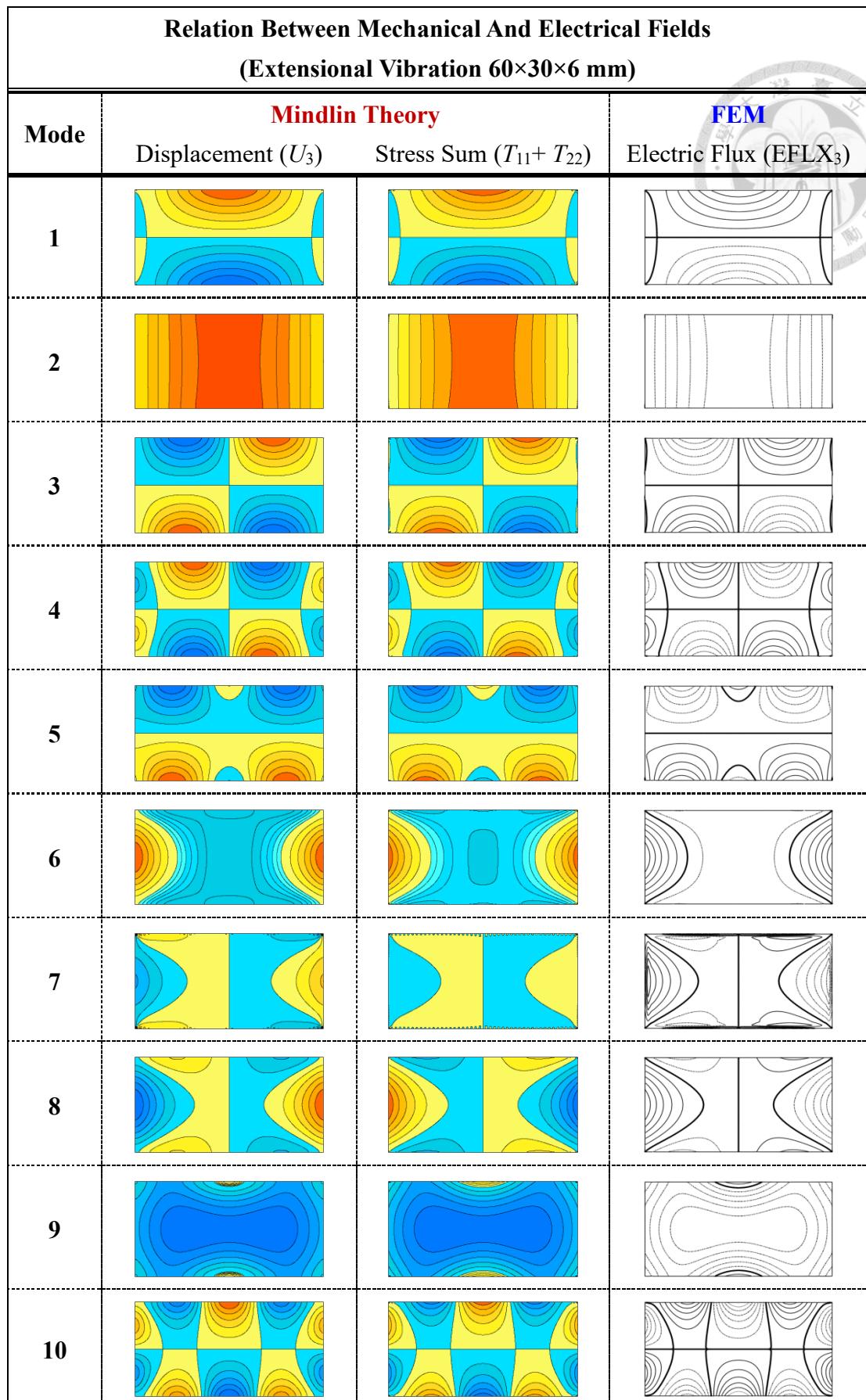


圖 4.7 60×30×6 壓電平板伸展振動形式之位移、應力和與 FEM 電通量分布比較

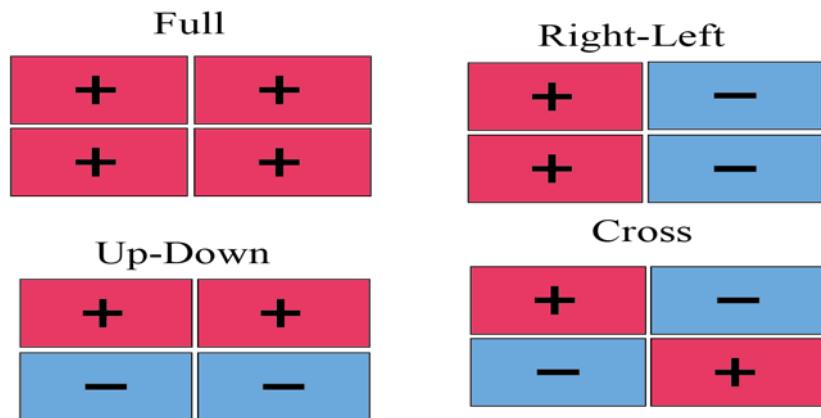
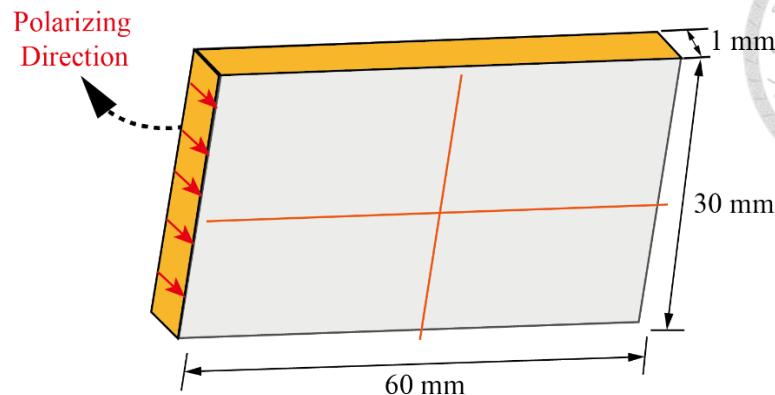


圖 4.8 NEC-55 壓電矩形板示意圖與切割電極設計方式

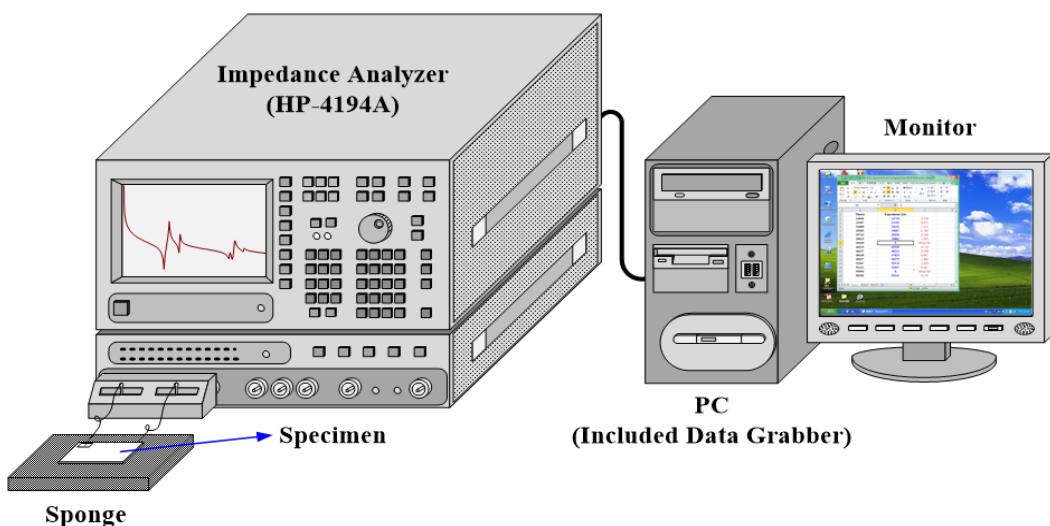
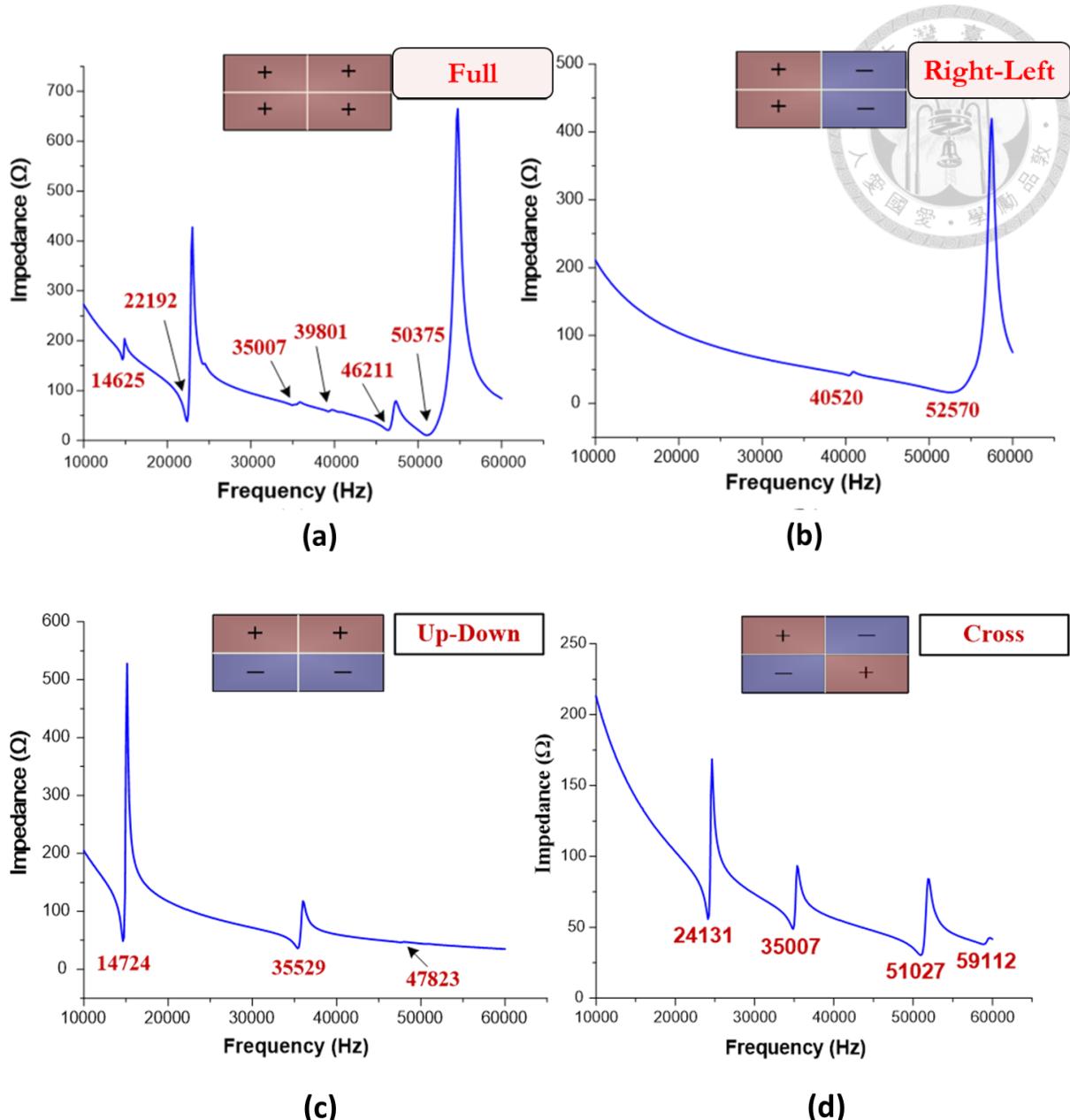


圖 4.9 利用阻抗分析量測壓電材料共振頻率的實驗架構



- (a) 全電極形式(full electrode type)
- (b) 左右電極形式(right-left electrode type)
- (c) 上下電極形式(up-down electrode type)
- (d) 交叉電極形式(cross electrode type)

圖 4.10 60×30×1 壓電板(NCE55)在各種切割電極阻抗分析圖

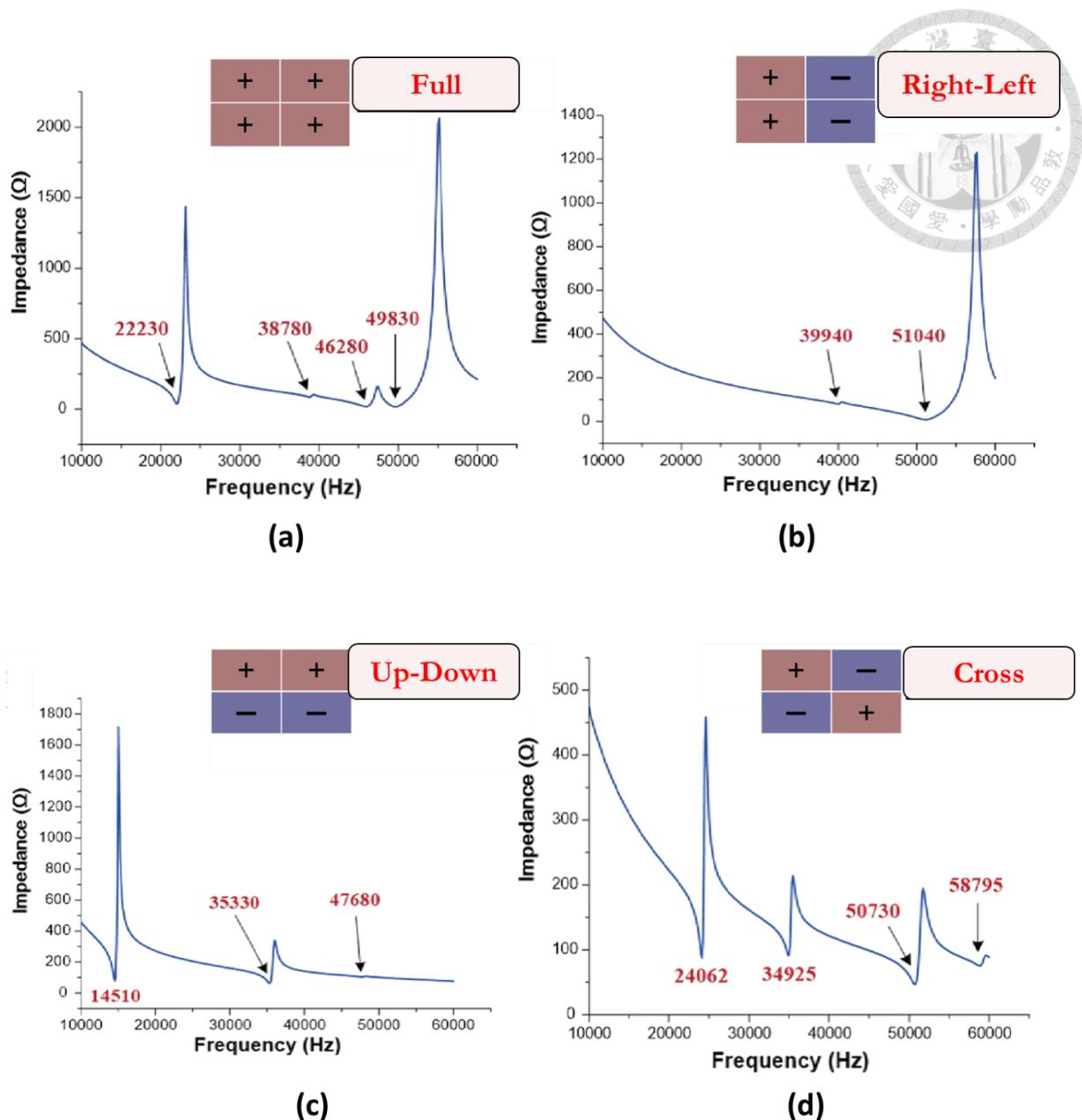


圖 4.11 60×30×2.5 壓電板(NCE55)在各種切割電極阻抗分析圖

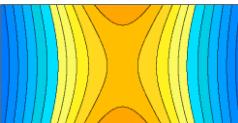
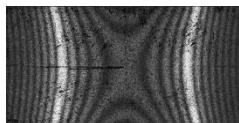
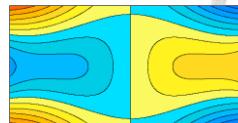
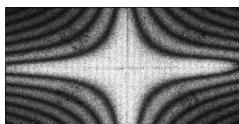
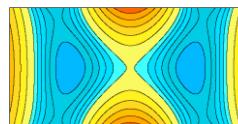
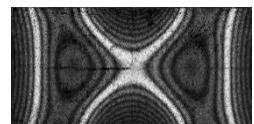
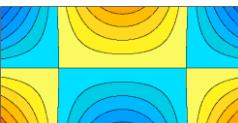
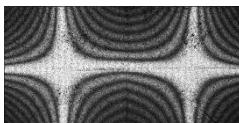
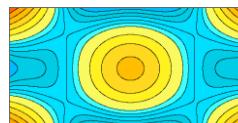
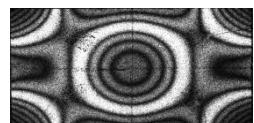
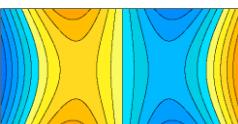
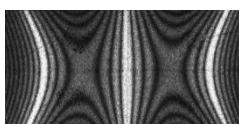
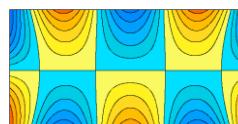
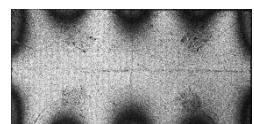
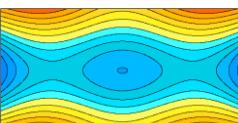
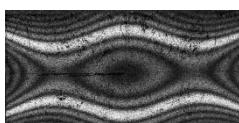
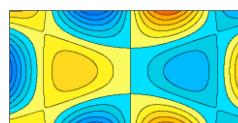
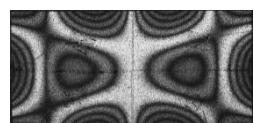
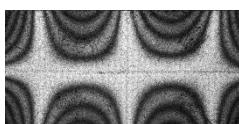
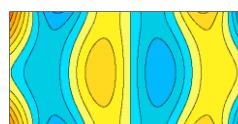
NCE55 Flexural Type Mode Shape (Scale 60×30×1mm)					
Mode	Mindlin	AF-ESPI	Mode	Mindlin	AF-ESPI
1			7		
	832.5 (0.301%)	830 Full		4142 (-1.027%)	4185 Right-Left
2			8		
	949.0 (1.173%)	938 Cross		4762.0 (-0.998%)	4810 Full
3			9		
	2126.5 (3.833%)	2048 Up-Down		5662.5 (-0.971%)	5718 Full
4			10		
	2325.5 (-0.958%)	2348 Right-Left		6049.5 (0.490%)	6020 Up-Down
5			11		
	3564.5 (-0.461%)	3581 Full		7405.5 (-0.397%)	7435 Right-Left
6			12		
	3771.5 (2.126%)	3693 Cross		8193.0 (-0.859%)	8264 Right-Left

圖 4.12 60×30×1 自由邊界壓電矩形板彎曲振動理論與 ESPI

模態振形及共振頻率分析(第 1 至第 12 模態)

NCE55 Flexural Type Mode Shape (Scale 60×30×1mm)					
Mode	Mindlin	AF-ESPI	Mode	Mindlin	AF-ESPI
13			16		
	8888.5 (0.220%)	8869 Cross		10629.5 (-1.213%)	10760 Cross
14			17		
	10024.5 (1.043%)	9921 Up-Down		11641.0 (-0.674%)	11720 Up-Down
15			18		
	10177.0 (0.444%)	10132 Full		11982.0 (-0.778%)	12076 Full

圖 4.12 60×30×1 自由邊界壓電矩形板彎曲振動理論與 ESPI 模態
振形及共振頻率分析(第 13 至第 18 模態)

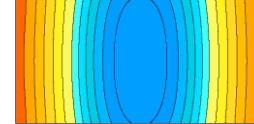
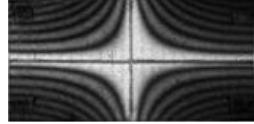
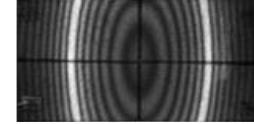
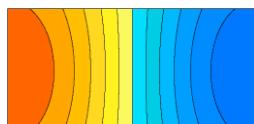
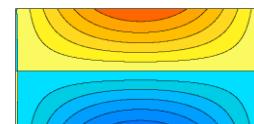
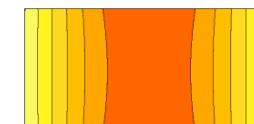
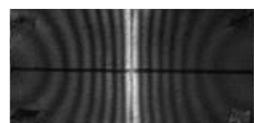
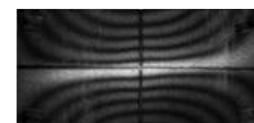
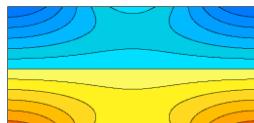
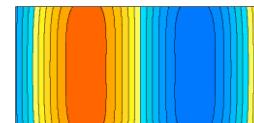
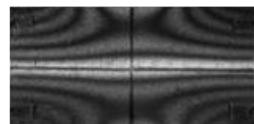
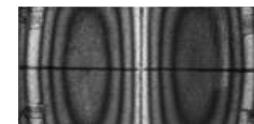
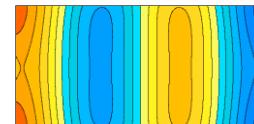
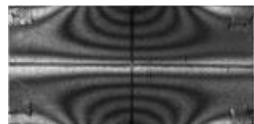
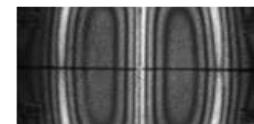
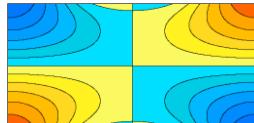
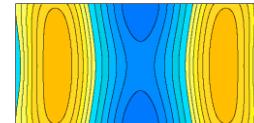
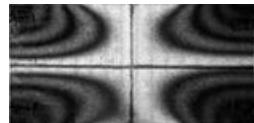
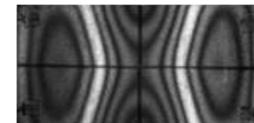
NCE55 Extensional Type Mode Shape (Scale 60×30×1mm)						
Mode		Frequency	U_1	U_2	U_3	
1	Mindlin	14646 (-0.509%) (-0.530%)				
	AS-ESPI (IA)	14725 (14724) Up-Down			--	
2	Mindlin	22187 (-0.364%) (-0.023%)				
	AS-ESPI (IA)	22201 (22192) Full			--	
3	Mindlin	24400 (1.493%) (1.115%)				
	AS-ESPI (IA)	24128 (24131) Cross			--	
4	Mindlin	35283 (-0.161%) (0.788%)				
	AS-ESPI (IA)	35453 (35007) Cross			--	
5	Mindlin	35723 (0.594%) (0.546%)				
	AS-ESPI (IA)	35500 (35529) Up-Down			--	

圖 4.13 60×30×1 壓電矩形板在不同電極伸展振動理論與 ESPI 模態振形及共振頻率分析(第 1 至第 5 模態)

NCE55 Extensional Type Mode Shape (Scale 60×30×1mm)						
Mode		Frequency	U_1	U_2	U_3	
6	Mindlin	39023 (-0.419%) (-1.955%)				
	AS-ESPI (IA)	39213 (39801) Full				--
7	Mindlin	39159				
	AS-ESPI (IA)	--	--	--	--	--
8	Mindlin	40215 (-0.084%) (-0.753%)				
	AS-ESPI (IA)	40190 (40520) Right-Left				--
9	Mindlin	46137 (-0.481%) (-0.160%)				
	AS-ESPI (IA)	46398 (46211) Full				--
10	Mindlin	48149 (1.872%) (0.682%)				
	AS-ESPI (IA)	47266 (47823) Up-Down				--

圖 4.13 60×30×1 壓電矩形板在不同電極伸展振動理論與 ESPI 模態振形及共振頻率分析(第 6 至第 10 模態)

NCE55 Extensional Type Mode Shape (Scale 60×30×1mm)						
Mode		Frequency	U_1	U_2	U_3	
11	Mindlin	49537 (0.336%) (-1.664%)				
	AS-ESPI (IA)	49371 (50375) Full			--	
12	Mindlin	51067 (-5.632%) (-2.859%)				
	AS-ESPI (IA)	54115 (52570) Right-Left			--	
13	Mindlin	51211 (0.129%) (0.361%)				
	AS-ESPI (IA)	51145 (51027) Cross			--	
14	Mindlin	55593				
	AS-ESPI (IA)	--	--	--	--	
15	Mindlin	59336 (0.997%) (0.379%)				
	AS-ESPI (IA)	58750 (59112) Cross			--	

圖 4.13 60×30×1 壓電矩形板在不同電極伸展振動理論與 ESPI 模態振形及共振頻率分析(第 11 至第 15 模態)

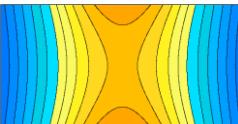
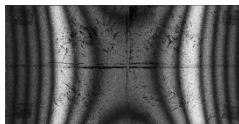
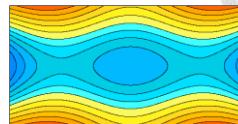
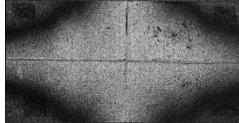
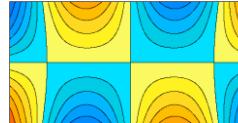
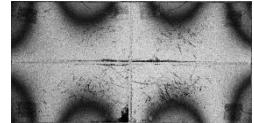
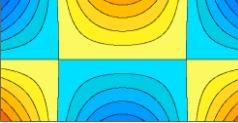
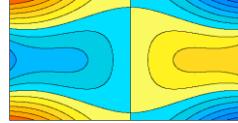
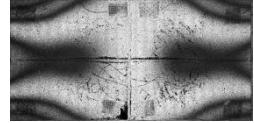
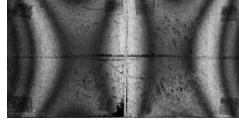
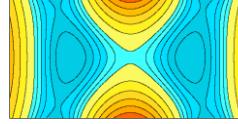
NCE55 Flexural Type Mode Shape (Scale 60×30×2.5 mm)					
Mode	Mindlin	AF-ESPI	Mode	Mindlin	AF-ESPI
1			5		
	2069.0 (5.400%)	1963 Full		8704.5 (4.987%)	8291 Right-Left
2			6		
	2324.5 (5.229%)	2209 Cross		9088.0 (5.674%)	8600 Cross
3			7		
	5172.5 (5.691%)	4894 Up-Down		10039.5 (4.895%)	9571 Right-Left
4			8		
	5709.0 (5.061%)	5434 Right-Left		11507.5 (5.235%)	10935 Full

圖 4.14 60×30×2.5 自由邊界壓電矩形板彎曲振動理論與 ESPI 模態
振形及共振頻率分析

NCE55 Extensional Type Mode Shape (Scale 60×30×2.5 mm)						
Mode		Frequency	U_1	U_2	U_3	
1	Mindlin	14650 (3.111%) (0.965%)				
	AS- ESPI (IA)	14208 (14510) Up-Down				
2	Mindlin	22185 (-1.409%) (-0.202%)				
	AS- ESPI (IA)	22502 (22230) Full				
3	Mindlin	24404 (3.798%) (1.421%)				
	AS- ESPI (IA)	23511 (24062) Cross				
4	Mindlin	35288 (2.444%) (1.039%)				
	AS- ESPI (IA)	34446 (34925) Cross				--
5	Mindlin	35726 (2.214%) (0.552%)				
	AS- ESPI (IA)	34952 (35530) Up-Down				--

圖 4.15 60×30×2.5 壓電矩形板在不同電極伸展振動理論與 ESPI
模態振形及共振頻率分析(第 1 至第 5 模態)

NCE55 Extensional Type Mode Shape (Scale 60×30×2.5 mm)						
Mode		Frequency	U_1	U_2	U_3	
6	Mindlin	39031 (1.258%) (0.647%)				
	AS-ESPI (IA)	38546 (38780) Full				
7	Mindlin	39159				
	AS-ESPI (IA)	--	--	--	--	--
8	Mindlin	40230 (1.688%) (0.726%)				
	AS-ESPI (IA)	39562 (39940) Right-Left				--
9	Mindlin	46137 (1.187%) (-0.350%)				
	AS-ESPI (IA)	45577 (46280) Full				--
10	Mindlin	48163 (3.075%) (1.013%)				
	AS-ESPI (IA)	46726 (47680) Up-Down				--

圖 4.15 60×30×2.5 壓電矩形板在不同電極伸展振動理論與 ESPI
模態振形及共振頻率分析(第 6 至第 10 模態)

NCE55 Extensional Type Mode Shape (Scale 60×30×2.5 mm)						
	Mode	Frequency	U_1	U_2	U_3	
11	Mindlin	49523 (0.158%) (-0.616%)				
	AS-ESPI (IA)	49445 (49830) Full			--	
12	Mindlin	51010 (-4.672%) (-0.059%)				
	AS-ESPI (IA)	53510 (51040) Right-Left			--	
13	Mindlin	51210 (2.937%) (0.946%)				
	AS-ESPI (IA)	49749 (50730) Cross			--	
14	Mindlin	55597				
	AS-ESPI (IA)	--	--	--	--	
15	Mindlin	59367 (2.431%) (0.973%)				
	AS-ESPI (IA)	57958 (58795) Cross			--	

圖 4.15 60×30×2.5 壓電矩形板在不同電極伸展振動理論與 ESPI 模態振形及共振頻率分析(第 11 至第 15 模態)

第五章 避震器系統之溫升、變形及振動量測

布拉格光纖光柵具有不受電磁波干擾、可多點量測、徑細質輕，以及高靈敏度等多項優勢，本章的實驗將光纖光柵感測器黏貼於避震器表面進行次微米的多點量測，利用本實驗室以 MATLAB 軟體自行開發的即時訊號分析系統，透過分析計算即時將溫升及熱應變解耦合，直接獲得避震器試驗過程中溫升及熱變形歷程，並比較與分析熱電偶及熱像儀量測結果，進而得到避震器表面材料的熱膨脹係數，同時量測避震器各區段的熱變形後，可得到避震器作動時整體伸長量，透過頻譜分析後也可以得到避震器作動時頻率數值。

本章研究採用開發工業有限公司所製造兩款避震器來進行量測(如圖 5.1 與圖 5.2)，避震器運作時活塞內部溫度容易快速升高造成熱變形，而現今市售感測器不易同時獲得溫度與振動等相關量測資訊，主要以熱電偶來進行實驗量測，並依照相關理論或模擬間接得到熱變形的資訊，再進行實驗、理論與模擬等資料進行比較與分析。一般在量測物體應變，大多選擇應變規為感測器，而應變規也需接收電訊號，易受環境雜訊干擾。因此，採用光纖光柵感測器具有不受電磁波干擾之光學檢測優勢，且可同時量測到應變與溫升的訊號，應用光纖光柵感測器體積小等多項優點特性對避震器進行量測，具有量測優勢與便利性。

5.1 光纖光柵分析流程

本文實驗主要利用光纖光柵之共振波長飄移理論，透過反射回來的中心波長飄移量值對應變與溫升間的關係來進行避震器量測，以量測獲得所需相關的物理量。而由於在共振波長飄移理論中，應變與溫升存在耦合關係，因此本實驗室開發可以將應變與溫升解耦合的方法，以下針對這個方法進行說明。



5.1.1 共振波長飄移理論

在光纖光柵感測器單模光纖內的光柵反射中心具有特殊的波長，其中因為波長解調器的範圍限制，本文主要使用光波長 C-band 範圍光纖光柵作為感測器，光纖光柵感測器實體圖中透明中心軸段為光柵段，如圖 5.3。

當光纖感測器黏貼在待測物(如避震器) 軸向位置時，將待測物視為等向性材料，當待測物出現溫升或應變等變化，此時光纖光柵受到可以同時量測溫度場與應變場的影響而產生波長飄移，因此可視為適用於單軸向之共振波長飄移理論的問題，波長飄移量、光柵應變和溫升間之關係式如(5.1)式：

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = K_\varepsilon \varepsilon + K_T \Delta T \quad (5.1)$$

其中 $\Delta\lambda$ 為波長飄移量、 λ_0 為初始中心波長範圍約為 1530 (nm) 至 1560 (nm) 間、 K_ε 為光纖對應變之靈敏度大小值 $K_\varepsilon \approx 0.8$ 、 K_T 為光纖對溫升之靈敏度 $K_T \approx 5.92 \times 10^{-6} (1/K)$ ，而 ε 與 ΔT 分別表示為待測物之應變與溫升。

當光纖只承受作用力而產生應變時，由波長飄移量即可獲得應變的資訊，此與一般常用應變規具有相同的功能。當光纖只受溫升影響時，可利用熱電偶或熱像儀校正光纖溫升係數 K_T 值，即可透過光纖的飄移量得到溫升資訊。而一般面對同時會伴隨溫升與應變的問題，只要將溫升所造成的飄移量扣除後，可得到應變量值。

5.1.2 光纖光柵感測器應用於應變量測

當光纖單純受到拉伸而產生應變時，假設過程中溫度保持固定常數，沒有溫差改變即 $\Delta T = 0$ ，則透過共振波長飄移理論可以得到拉伸過程中應變值，關係式如下：

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = K_\varepsilon \varepsilon + \cancel{K_T \Delta T} \rightarrow \varepsilon = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \times \frac{1}{K_\varepsilon} \quad (5.2)$$

對應本文實驗避震器一，黏貼於避震器一彈簧上的光纖在作動過程中不會有溫升影響，因此彈簧上的應變量將可採用(5.2)式進行計算。



5.1.3 光纖光柵感測器應用於溫升量測

若光纖單純受到溫升變化(如套管光纖)，光纖本身會產生熱膨脹而產生應變，可藉由共振波長飄移理論關係式如(5.3)式，獲得升降溫過程中溫度改變的結果。

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = K_\varepsilon \varepsilon + K_T \Delta T \rightarrow \Delta T = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \times \frac{1}{K_T} \quad (5.3)$$

5.1.4 待測物溫升與熱應變解耦合

當待測物只受溫度影響時，其溫升與相對應之熱應變量是相依的，溫升和熱應變間之關係即為熱膨脹係數，所以僅須採用單一條光纖即可進行量測。因此，若待測物同時存在溫升與熱變形的問題則需要進行解耦合。所以本文實驗中首先以熱電偶對光纖進行校正，以最小平方法擬合求得波長飄移量與溫升之間的溫升轉換係數 C 。因此，後續可由波長飄移量直接求得溫升，關係式如(5.4)式：

$$\Delta T = \Delta\lambda \times C \quad \text{且} \quad \frac{\Delta T}{\Delta\lambda} = C \quad (5.4)$$

再透過共振波長飄移理論(5.1)式將應變值解耦合，推導過程如(5.5)式：

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = K_\varepsilon \varepsilon + K_T \Delta T \rightarrow \varepsilon = \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} - K_T \Delta T \right) \times \frac{1}{K_\varepsilon} \quad (5.5)$$

將應變與溫升量值相除後，即可得到待測物熱膨脹係數(LTE)。

5.1.5 雙光纖法(裸光纖與套管光纖)

實驗過程中同時將套管光纖與裸光纖黏貼在待測物表面，套管光纖單純量測溫升資訊，而裸光纖可同時量測到溫升與應變，將兩者光纖所量到物理量相減後，此時進而將溫升及熱應變解耦合的方法，稱為雙光纖法。若將套管光纖的波長飄移



訊號與熱電偶的溫升訊號藉由最小平方差進行擬合後，即可得出共振波長飄移理論中，光纖對應溫升的 K_T 係數，後續可利用此係數直接將套管光纖的波長飄移量轉換為溫升訊號，其它光纖若以套管光纖為溫升基準進行校正，以後僅需利用一條光纖即可量測溫升及應變，這種方法稱為單光纖法。

前述的單光纖法解析應變方式，由於 $K_T \approx 5.92 \times 10^{-6} (1/K)$ 與 $K_\varepsilon \approx 0.8$ 分別代入為理論值，而 K_ε 已經由文獻資料證實為此值。對於 K_T 可藉由雙光纖法進行校正，校正的方式是利用兩條光纖，其中一條為裸光纖，將光柵段使用應變膠採兩點式黏貼在待測物表面後，另一條以套管包覆住光柵的光纖黏貼在旁邊，此光纖稱之為套管光纖，利用套管來隔絕待測物表面的變形對光柵的影響，使光柵的波長飄移完全與溫升相關，而沒有熱應變效應影響光柵。另一種方式是以裸光纖貼附在待測物表面上，用隔熱膠帶固定一邊，另一邊呈現自由狀態在待測物表面上，此種形式稱為自由光纖，同樣也可以隔絕待測物表面造成的變形。由於光柵段沒有套管的包覆，而且光纖光柵感測器相當靈敏，因此空氣的擾動也會顯現在波長飄移的訊號中，造成訊號的干擾程度會比起套管光纖來得大。

在進行雙光纖法的解析應變中，將裸光纖的資訊與套管光纖資訊進行相減，而解析出應變量值，分析方式如(5.6)式：

$$\Delta\lambda_{total} - \Delta\lambda_{tube} = \Delta\lambda_{strain} \quad (5.6)$$

(5.6)式中 $\Delta\lambda_{total}$ 為裸光纖所量到波長飄移資訊、 $\Delta\lambda_{tube}$ 為套管光纖波長飄移資訊， $\Delta\lambda_{strain}$ 為將前述兩者應變相減後應變所造成波長飄移。

再由共振波長飄移理論，可解析並獲得待測物表面的應變值如(5.7)式：

$$\varepsilon = \frac{\Delta\lambda_{strain}}{\lambda_{origin} \times K_\varepsilon} = \frac{\Delta\lambda_{total} - \Delta\lambda_{tube}}{\lambda_{origin} \times K_\varepsilon} \quad (5.7)$$

藉由雙光纖法的方法，我們就必須利用兩條光纖(裸光纖與套管光纖)來對待測物進行量測，便可以透過所得到物理量來進行相減後解析出應變量值，若採用一條



光纖(裸光纖)來進行應變與溫升的量測，常數 K_T 會因為環境溫度與光纖品質的關係影響其係數值，因此為提升準確性，會先以套管光纖來進行 K_T 校正。其分析過程說明如下：

$$\begin{aligned}\Delta\lambda_{tube} \times C &= \Delta T \\ C &= \frac{\Delta T}{\Delta\lambda_{tube}}\end{aligned}\quad (5.8)$$

透過最小平方法進行擬合，來得到套管光纖的溫升轉換係數 C ，根據(5.3)套管光纖的共振波長飄移理論，其中將應變項視為零後如(5.9)式：

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_o} = K_T \Delta T \quad (5.9)$$

將(5.9)移項整理後如(5.10)式：

$$K_T = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_o \Delta T} \quad (5.10)$$

將式(5.8)經由校正後得到套管光纖溫升轉換係數 C ，再代入式(5.10)中，可得校正溫升後的 K_T ，如(5.11)式所示：

$$K_T = \frac{1}{C\lambda_{tube}} \quad (5.11)$$

依照以上說明，我們就能運用一條光纖，搭配校正過後的 K_T 係數來進行應變的量測，校正流程是先以雙光纖法搭配熱電偶校正出 K_T 與 C 來進行應變的計算。依據後續實驗資料顯示，經過雙光纖法校正後的 K_T 相當接近理論值，因此，若是需對待測物進行初步探討情況下，可採用單光纖法的理論係數值代入，來對待測物溫升應變進行解析。

5.1.6 可利用光纖光柵進行量測問題

光纖能夠對於準靜態問題(如溫度與熱應變)進行量測，若搭配多光柵光纖還可進行熱伸長的位移量測，取代應變規、熱電偶、熱像儀與雷射位移計等。此外，光纖對於穩態問題(如振動量、轉速頻率、振動頻率等)也具有相當良好量測能力，可



用來取代加速規或是動力計等量測儀器。最後，由於光纖相當靈敏，能夠精準記錄待測物微小波長變化，圖 5.4 為光纖於準靜態與穩態問題量測範圍示意圖。

5.2 第一款避震器系統(活塞、彈簧)實驗架設說明

本章實驗中針對兩款避震器進行量測，第一款避震器系統包括活塞本體與彈簧如圖 5.5，我們將兩條裸光纖(FBG01 與 FBG02)黏貼在彈簧上，如圖 5.6。在活塞外桶黏貼裸光纖(FBG03)及套管光纖(tube-FBG)進行溫升與熱變形的解耦合，並在套管光纖兩端黏貼熱電偶(couple)來同時進行量測，如圖 5.7。整體實驗架設如圖 5.8 所示，接著利用油壓試驗機分別依照 3Hz、5Hz、7Hz 三種作動頻率對避震器進行往復行程 25mm 位移測試。

5.3 第一款避震器系統(活塞、彈簧)以 3Hz 來回 25mm 作動量測分析(實驗一)

5.3.1 避震器活塞部分以 3Hz 作動下之溫升、熱應變與熱膨脹係數實驗結果

首先設定油壓試驗機以 3Hz 來回 25mm 行程對避震器活塞進行 600 秒運轉測試，活塞外壁裸光纖(FBG03)、套管光纖(tube-FBG)、熱電偶(couple)原始訊號分別如圖 5.9(A)、(B)、(C)所示，熱電偶訊號為兩熱電偶的平均，裸光纖(FBG03)波長飄移量約為 0.41 (nm)，套管光纖(tube-FBG)波長飄移量約為 0.15 (nm)，因為活塞外壁的溫升和熱變形皆會對裸光纖(FBG03)造成波長飄移，由於套管光纖的套管會隔絕待測物變形，所以待測物變形不會被套管光纖量測出，套管光纖只會量測到活塞外壁因溫升影響的應變，因此裸光纖的波長飄移量會比套管光纖的波長飄移量高。

將圖 5.9 中(B)和(C)套管光纖與熱電偶資料，利用最小平方法來進行溫升轉換

係數擬合，計算得溫升間轉換係數 C 為 $114.12(^{\circ}\text{C}/\text{nm})$ 。根據共振波長飄移理論，可以得到光纖溫升係數 $K_T \approx 5.71 \times 10^{-6} (1/K)$ ，比較理論值 $K_T \approx 5.92 \times 10^{-6} (1/K)$ 相當接近，而套管光纖與熱電偶的溫升擬合結果如圖 5.10 所示，圖 5.9(C) 热電偶初始溫度為 $28.1(^{\circ}\text{C})$ ，末溫為 $44.5(^{\circ}\text{C})$ ，所以整體運轉測試實驗溫度升高約 $16.4(^{\circ}\text{C})$ 。接著利用雙光纖法的概念將裸光纖(FBG03)波長飄移量減去套管光纖(tube-FBG)波長飄移量，得到熱應變對光纖的波長飄移，透過共振波長飄移理論可以得到熱應變值如圖 5.11，最後的熱應變值約為 $211.23(\mu\epsilon)$ ，將熱應變除以溫升並以最小平方法進行擬合，熱應變與溫升之間轉換係數就是待測物(活塞)的熱膨脹係數值 $LTE = 13.46(\mu\epsilon/{}^{\circ}\text{C})$ ，如圖 5.12 所示。

再將裸光纖(FBG03)與熱電偶(couple)的資料進行最小平方法擬合後，可以得到裸光纖(FBG03)的波長飄移量與溫升間的轉換係數 C 值為 $39.15(^{\circ}\text{C}/\text{nm})$ ，如圖 5.13。而裸光纖(FBG03)與熱電偶(couple)的溫升擬合結果如圖 5.14 所示，後續可藉由裸光纖(FBG03)的溫升轉換係數，利用單一條光纖同時量測到溫升與熱應變，熱應變乘以光纖黏貼長度後(光纖黏貼長度為 3 公分)，即得到黏貼範圍的熱變形。

接下來以即時訊號分析系統來計算即時將熱應變及溫升進行解耦合，直接獲得避震器試驗過程中的熱變形及溫升歷程。

5.3.2 即時分析程式的畫面呈現

利用校正過的 K_T 值以及裸光纖的溫升轉換係數 C ，可藉由一條光纖同時對溫升及熱應變做量測，並即時顯示量測結果。如圖 5.15 為呈現溫升相關資訊的即時畫面，包含溫度、溫升、熱應變、熱膨脹係數與熱伸長量，圖 5.16 為呈現振動相關資訊的即時畫面，包含短時間波形、FFT 圖、振動頻率與訊號平均振幅。



5.3.3 避震器系統(活塞、彈簧)3Hz 作動下量測結果

進一步探討貼附在避震器活塞及彈簧上四條光纖的原始訊號如圖 5.17，紅色訊號為活塞上裸光纖 (FBG03)，黑色訊號為活塞上套管光纖(tube-FBG)，而藍色訊號為彈簧上較靠近上方固定端裸光纖 (FBG01)，綠色訊號為彈簧上較遠離上方固定端裸光纖(FBG02)，從結果可知較靠近固定端的裸光纖 (FBG01)波長飄移振幅(約為 $0.314(nm)$)約為遠離固定端的裸光纖(FBG02)(約 $0.152(nm)$)的兩倍，而試驗過程中彈簧存在被拉伸(波長飄移量為正值)及壓縮(波長飄移量為負值)的變形情況，但較為傾向被拉伸的狀態(波長飄移的平均為正值)。圖 5.18 為 1 秒內所量測到光纖波形訊號，可看出黏貼於彈簧上光纖(FBG01 與 FBG02)相較於活塞上光纖(FBG03 與 tube-FBG)在 3Hz 作動下，存在 3 個明顯且完整的振動波形。

將光纖訊號進一步進行頻譜分析可以得到如圖 5.19 的 FFT 圖，圖中主要峰值所對應的頻率即為避震器所承受油壓系統作動時之頻率，整個實驗過程在振動頻率的搜尋上也相當一致如圖 5.20。

5.3.4 避震器活塞外桶熱像儀量測結果

利用熱像儀進行活塞外桶初始溫度量測與實驗結束後溫度如圖 5.21 所示，因活塞中液體被壓縮後，液體在內管是由下往上向外管流動，所以溫度越靠近活塞下段溫度越高，因此相較熱像儀所量測的結果具有一致性。而相對於熱電偶所量測位置與裸光纖(FBG03)量測位置相同，如圖 5.21 中 P4 位置，初始溫度為 $28.13(^{\circ}C)$ ，實驗結束溫度 $44.13(^{\circ}C)$ ，溫升約為 $16(^{\circ}C)$ ，與圖 5.9(C)中熱電偶量測結果相當一致。圖 5.22 為活塞外桶 7 個位置點隨時間的溫度變化圖，熱像儀每 10 秒取像一次，從圖 5.22 可以觀察出活塞外桶在油壓試驗機作動狀態下，溫度改變具有明顯線性上升趨勢，當實驗在第 600 秒停止後，溫度具有下降趨勢。



5.4 第一款避震器系統(活塞、彈簧)以 5Hz 來回 25mm 作動量測說明(實驗二)

如圖 5.23 實驗二整體實驗架構與實驗一大致上相同，只是在活塞下方夾具的部分再多黏貼一個裸光纖(FBG04)感測器如圖 5.24，並將熱電偶黏貼位置移動至圖 5.24 紅點處，同時用來量測活塞與夾具的溫度（夾具長度為 8 公分），而光纖的黏貼長度一樣為 3 公分如圖 5.25，油壓試驗機輸入 5Hz 作動頻率來回 25mm 作動距離對避震器進行位移測試。

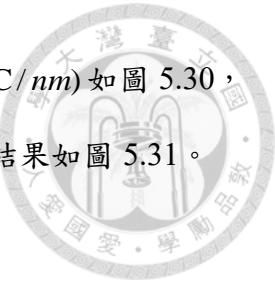
5.5 第一款避震器以 5Hz 來回 25mm 作動之實驗結果

5.5.1 活塞部分的溫升、熱應變與熱膨脹係數

油壓試驗機設定 5Hz 來回行程 25mm 對避震器進行 600 秒測試，活塞外壁的裸光纖、套管光纖、熱電偶的原始訊號如圖 5.26 所示，裸光纖的波長飄移量約為 1.18 (nm) ，套管光纖的波長飄移量約為 0.51 (nm) ，本次相較前次實驗作動頻率較高，使得溫升提高而波長飄移量也隨之增加，本次實驗溫升值約為 $50(^{\circ}\text{C})$ 。

藉由最小平方法將熱電偶與套管光纖的資料進行擬合後，可以得到套管光纖的溫升與波長飄移量間轉換係數 C 為 $95.36(^{\circ}\text{C}/\text{nm})$ 。根據共振波長飄移理論，可以得到光纖溫升係數 $K_T \approx 6.83 \times 10^{-6}(1/K)$ ，圖 5.27 為套管光纖與熱電偶的溫升擬合結果，光纖量測結果依然與熱電偶量測資料相當一致。

接著將裸光纖(FBG03)波長飄移量減去套管光纖(tube-FBG)波長飄移量，得到熱應變對光纖的波長飄移，再以最小平方法擬合可以得到熱應變值如圖 5.28。最後的熱應變值約為 $550.38(\mu\epsilon)$ ，將熱應變除以溫升後並以最小平方法進行擬合，熱應變與溫升間轉換係數就是待測物(活塞)熱膨脹係數值 $LTE = 12.3(\mu\epsilon/{}^{\circ}\text{C})$ ，如圖



5.29。裸光纖(FBG03)波長飄移量轉換至溫升的係數 C 為 $38.76(^{\circ}\text{C}/\text{nm})$ 如圖 5.30，與實驗一的結果相當一致，裸光纖(FBG03)與熱電偶的溫升擬合結果如圖 5.31。

5.5.2 夾具部分的溫升、熱應變與熱膨脹係數

在 5Hz 往復 25mm 行程對避震器進行 600 秒測試下，所量測到黏貼於夾具部分的裸光纖(FBG04)、熱電偶的原始訊號如圖 5.32 所示，裸光纖(FBG04)波長飄移量約為 $1.04(\text{nm})$ ，溫升約為 $50(^{\circ}\text{C})$ ，而裸光纖的波長飄移量轉換至溫升係數為 $46(^{\circ}\text{C}/\text{nm})$ ，相較活塞部分略有不同，主要原因是活塞與夾具所採用的材質不同，分析結果相當合理。

藉由最小平方法將裸光纖(FBG04)與熱電偶溫升資料進行擬合，其擬合結果、熱應變值以及熱膨脹係數如圖 5.33 所示。觀察裸光纖(FBG04)與熱電偶溫升擬合結果相當一致，而夾具的熱應變約為 $460.3(\mu\epsilon)$ ，將熱應變除以溫升後，得到具有線性關係的夾具熱膨脹係數值為 $LTE = 9.55(\mu\epsilon/^{\circ}\text{C})$ 。

5.5.3 即時分析程式的畫面呈現

如圖 5.34 為呈現溫升相關資訊的即時畫面，包含溫度、溫升、熱應變、熱膨脹係數與熱伸長量，相較實驗一多了黏貼於夾具部分裸光纖(FBG04)黃色訊號資訊，如圖 5.35 為呈現振動相關資訊的即時畫面，包含短時間波形、FFT 圖、振動頻率與訊號平均振幅。

5.5.4 避震器活塞、彈簧部分 5Hz 作動下的量測結果

圖 5.36 表示五條光纖的原始訊號，黃色訊號為夾具上裸光纖(FBG04)，紅色訊號為活塞上裸光纖(FBG03)，黑色訊號為活塞上套管光纖(tube-FBG)，藍色訊號為彈簧上較靠近上方固定端裸光纖 (FBG01)，綠色訊號為彈簧上較遠離上方固定端裸光纖(FBG02)。從結果可知，較靠近固定端光纖波長飄移振幅為 $0.541(\text{nm})$ ，而



遠離固定端光纖波長飄移約為 0.417 (nm) ，明顯原因是因為振動頻率調高使得彈簧的飄移量較大，而試驗過程中彈簧具有被拉伸及壓縮的變形行為，與前次實驗一相同，彈簧也是傾向被拉伸的狀態，如圖 5.37 為 1 秒內的波形訊號，黏貼於彈簧的光纖(FBG01 與 FBG02)相較於活塞上光纖(FBG03 與 tube-FBG)與夾具部分裸光纖(FBG04)，在 5Hz 作動頻率下存在 5 個明顯且完整的振動波形。將光纖訊號藉由頻譜分析可以得到 FFT(如圖 5.38)，主要峰值所對應的頻率即為避震器所受油壓系統作動頻率，整個實驗過程在振動頻率的搜尋上也相當一致如圖 5.39。

5.5.5 热像儀量測結果

熱像儀所量測活塞外桶與夾具部分之初始溫度與實驗結束後溫度如圖 5.40 所示，溫度越靠近活塞下段溫度越高，與前面實驗一的結果具有良好一致性，而相對於熱電偶所量測位置，活塞部分如圖 5.41 中 P4 的位置，相當於裸光纖(FBG03)與套管光纖(tube-FBG)位置，初始溫度值為 $27.6\text{ (}^{\circ}\text{C)}$ ，實驗結束後溫度值 $78.6\text{ (}^{\circ}\text{C)}$ ，兩者溫升約為 $51\text{ (}^{\circ}\text{C)}$ 。夾具部分如圖 5.40 中 P9 位置相當於裸光纖(FBG04)位置，初始溫度為 $27.9\text{ (}^{\circ}\text{C)}$ ，實驗結束溫度 $79.4\text{ (}^{\circ}\text{C)}$ ，溫升約為 $51.5\text{ (}^{\circ}\text{C)}$ 。圖 5.41 為活塞外桶與夾具部分隨時間的溫度變化圖，熱像儀每 10 秒取像一次，圖 5.41 可以發現活塞外桶在作動狀態下，溫度變化也存在線性上升的趨勢。



5.6 第一款避震器系統以 7Hz 來回 25mm 作動實驗量測結果 (實驗三)

5.6.1 活塞部分的溫升、熱應變與熱膨脹係數

油壓試驗機以頻率 7Hz 來回 25mm 行程對避震器作動，並進行 1800 秒測試，在第 600 秒後停止作動，活塞外壁的裸光纖(FBG03)、套管光纖(tube-FBG)、熱電偶(couple)的原始訊號如圖 5.42 所示，裸光纖(FBG03)波長飄移量約 1.61 (nm)，套管光纖的波長飄移量約為 0.65 (nm)。

套管光纖(tube-FBG)波長飄移量轉換至溫升係數 C 為 $110.76 (^{\circ}\text{C}/\text{nm})$ ，根據共振波長飄移理論，可以得到光纖溫升係數 $K_T \approx 6.46 \times 10^{-6} (1/K)$ ，而套管光纖與熱電偶的溫升擬合結果如圖 5.43 所示，光纖量測結果與熱電偶資料相當符合，而且本次實驗活塞溫升約為 $65.3 (^{\circ}\text{C})$ ，當活塞於第 600 秒停止作動後，溫度具有明顯開始下降趨勢。透過共振波長飄移理論可以得到熱應變值，如圖 5.44。最後的熱應變值約為 $780.37 (\mu\epsilon)$ ，將熱應變除以溫升後，並輔以最小平方法進行擬合，熱應變與溫升間轉換係數就是活塞熱膨脹係數值為 $LTE = 11.9 (\mu\epsilon/^{\circ}\text{C})$ ，如圖 5.45，與先前實驗結果相當一致。

裸光纖(FBG03)的溫升與波長飄移量間的轉換係數 C 為 $40.54 (^{\circ}\text{C}/\text{nm})$ ，如圖 5.46，與前面兩次實驗的結果具有一致性，裸光纖(FBG03)與熱電偶(couple)的溫升擬合結果如圖 5.47 具有良好吻合性。

5.6.2 夾具部分的溫升、熱應變與熱膨脹係數

油壓試驗機以 7Hz 頻率來回 25mm 行程對避震器進行 1800 秒測試，量測出在夾具部分的裸光纖(FBG04)、熱電偶的原始訊號如圖 5.48(A)、(B)所示。裸光纖(FBG04)的波長飄移量約為 1.53 (nm)，夾具溫升約為 $63.8 (^{\circ}\text{C})$ (與活塞部分溫升

65.3($^{\circ}\text{C}$)相近)，而裸光纖(FBG04)溫升與波長飄移量間轉換係數 C 為 43.07 ($^{\circ}\text{C}/\text{nm}$)，如圖 5.48(C)所示，與實驗二結果非常相近。

裸光纖(FBG04)與熱電偶的溫升擬合結果如圖 5.49(A)所示，溫升結果光纖與熱電偶相當一致，而第 600 秒夾具的熱應變約為 $710.59(\mu\epsilon)$ ，如圖 5.49(B)所示，將熱應變除以溫升後並以最小平方法進行擬合得到線性係數，即為夾具的熱膨脹係數約為 $LTE = 10.76(\mu\epsilon/^{\circ}\text{C})$ ，如圖 5.49(C)，也與實驗二結果非常接近。

5.6.3 即時分析程式的畫面呈現

如圖 5.50 為呈現溫升相關資訊的即時畫面，包含溫度、溫升、熱應變、熱膨脹係數與熱伸長量，比實驗一多夾具部分裸光纖(FBG04)黃色訊號資訊，所呈現的資訊內容與實驗二相同，如圖 5.51 為呈現振動相關資訊的即時畫面，包含短時間波形、FFT 圖、振動頻率與訊號平均振幅。

5.6.4 避震器活塞、彈簧部分 7Hz 作動下的量測結果

圖 5.52 中為五條光纖的原始訊號，黃色訊號為夾具上裸光纖(FBG04)，紅色訊號為活塞上裸光纖(FBG03)，黑色訊號為活塞上套管光纖(tube-FBG)，藍色訊號為彈簧上較靠近上方固定端裸光纖 (FBG01)，綠色訊號為彈簧上較遠離上方固定端裸光纖(FBG02)，而較靠近固定端的光纖的波長飄移振幅為 $0.257(\text{nm})$ ，而遠離固定端的光纖約為 $0.238(\text{nm})$ ，兩者相當接近，與前兩次實驗的結果較不相同，沒有因為振動頻率調高使得彈簧的飄移量較大。此外，觀察圖 5.53 在 1 秒內波形訊號試驗過程，彈簧具有被拉伸及壓縮的變形情況，與前兩次不同，圖中可觀察出彈簧明顯傾向被壓縮的狀態。由圖 5.53 也可看出彈簧上的光纖(FBG01 與 FBG02) 相較於活塞上光纖(FBG03 與 tube-FBG)與夾具部分裸光纖(FBG04)，存在 7 個完整的振動波形，但是所呈現波形較不平滑。

將光纖訊號做頻譜分析可以得到 FFT 如圖 5.54，主要峰值所對應的頻率即為避震器所受油壓系統作動頻率，整個實驗過程在振動頻率的搜尋上也相當一致，如圖 5.55 所示。



5.6.5 热像儀量測結果

熱像儀所量測活塞外桶的初始溫度與實驗結束溫度如圖 5.56 所示，降溫至實驗結束後，整根活塞的溫度呈現均溫現象，而相對於熱電偶所量測位置，活塞部分如圖 5.56 中 P4 的位置，相當於裸光纖(FBG03)與套管光纖(tube-FBG)的位置，初始溫度為 $25.6(^{\circ}\text{C})$ ，實驗結束溫度為 $47.2(^{\circ}\text{C})$ ，溫升約為 $21.6(^{\circ}\text{C})$ 。夾具部分如圖 5.56 中 P9 的位置，相當於裸光纖(FBG04)的位置，初始溫度為 $25.7(^{\circ}\text{C})$ ，實驗結束溫度約為 $47(^{\circ}\text{C})$ ，溫升約為 $21.3(^{\circ}\text{C})$ 。圖 5.57 為活塞外桶與夾具隨時間溫度變化圖，設定熱像儀每 10 秒取像一次，從圖 5.57 可以發現活塞外桶在作動狀態下，溫度變化有線性上升的趨勢，而活塞外桶停止作動後，溫度變化也有線性下降的趨勢。將熱像儀量測結果與熱電偶互相擬合，則在活塞部分的熱像儀乘以 1.086 會最接近熱電偶的量測結果；而在夾具部分的熱像儀乘以 1.045 會最接近熱電偶的量測結果圖 5.58，由此結論可知熱像儀量測結果具有相當可信度。

5.6.6 第一款避震器系統實驗結論

由三次實驗結果可知，在振動的量測結果也與系統設定相當一致，熱電偶與光纖光柵的量測結果均相當吻合（如表 5.1），三次實驗所得到的熱膨脹係數也相當接近，光纖光柵的溫升轉換係數也相當穩定，根據共振波長飄移理論所得的熱應變值也相當可信。因此，將光纖光柵應用於避震器作動量測具有相當的量測優勢。



5.7 第二款避震器系統(僅活塞部分)實驗架設說明

避震器二整體外觀如圖 5.2，而整體量測實驗架設如圖 5.59。避震器二沒有彈簧部分，結構較為簡單，因此將兩組裸光纖(FBG01 與 FBG02)黏貼於活塞外桶表面，如圖 5.60。同時將熱電偶(couple)黏貼於如圖 5.61 光柵的中心紅點位置，活塞外桶長度為 34 公分，將上下兩段裸光纖採用兩點式黏貼法將光纖固定於活塞外桶，且上膠處兩端點間距離皆為 17 公分(如圖 5.61)，接著將油壓試驗機分別設定 3Hz、5Hz 作動頻率對避震器進行來回 25mm 位移測試。

5.8 第二款避震器系統(僅活塞)以 3Hz 來回 25mm 作動之說明 (實驗四)

設定油壓試驗機操作以 3Hz 作動頻率及來回 25mm 行程對避震器進行 600 秒測試。實驗過程中，因下方裸光纖(FBG02)在實驗後期發生失效的現象，因此裸光纖(FBG02)只量測前 400 秒實驗數據，而上方裸光纖(FBG01)完成 600 秒實驗量測。活塞外壁面上方裸光纖(FBG01)、熱電偶(couple)的原始訊號如圖 5.62(A)、(B)所示，分別可得到裸光纖(FBG01)波長飄移量約為 1.28 (nm) ，及熱電偶量測到溫升約為 $54.8({}^{\circ}\text{C})$ ，在圖 5.62(C)中光纖轉換至溫升係數 C 約為 $43.61({}^{\circ}\text{C}/\text{nm})$ 。活塞外壁面下方裸光纖(FBG02)、熱電偶前 400 秒的原始訊號如圖 5.63(A)、(B)所示，裸光纖(FBG02)波長飄移量約為 0.66 (nm) ，溫升約為 $30.5({}^{\circ}\text{C})$ ，而光纖轉換至溫升的係數 C 為 $42.17({}^{\circ}\text{C}/\text{nm})$ 如圖 5.63(C)。兩裸光纖(FBG01、FBG02)波長飄移轉換至溫升後與熱電偶的擬合結果如圖 5.64 所示，由結果可知光纖量測結果與熱電偶相當符合。整體來說，兩裸光纖(FBG01、FBG02)量測結果相當一致。

透過共振波長飄移理論可以得到熱應變值，最後活塞外壁上方裸光纖(FBG01)熱應變值約為 $589.81(\mu\epsilon)$ (如圖 5.65)，將熱應變除以溫升後，即可得到待測物的熱膨



脹係數約為 $10.58(\mu\epsilon/^\circ C)$ (如圖 5.66)；活塞外壁下方裸光纖(FBG02)前 400 秒的熱應變值約為 $315.78(\mu\epsilon)$ (如圖 5.67)，將熱應變除以溫升後，亦可得到待測物的熱膨脹係數約為 $11.28(\mu\epsilon/^\circ C)$ (如圖 5.68)。

5.8.1 即時分析程式的畫面呈現

如圖 5.69 為呈現溫升相關資訊的即時畫面，包含溫度、溫升、熱應變、熱膨脹係數與熱伸長量，由圖中可以發現下方裸光纖(FBG02)在實驗後半段失效的因素，因此裸光纖(FBG02)只分析至實驗進行過程前 400 秒，如圖 5.70 為呈現振動相關資訊的即時畫面，包含短時間波形、FFT 圖、振動頻率與訊號平均振幅，因避震器二缺少彈簧元件，所以在振動訊號量測上較不明顯。

5.8.2 热像儀量測結果

由熱像儀所量測到活塞外桶的初始溫度與實驗結束溫度如圖 5.71 所示，溫度在越靠近活塞兩端溫度越高，而相對於熱電偶所量測位置，上方裸光纖(FBG01)量測位置如圖 5.71 中 P4 的位置，初始溫度為 $25.6(^{\circ}C)$ ，實驗結束溫度 $78.2(^{\circ}C)$ ，溫升約為 $52.6(^{\circ}C)$ 。下方裸光纖(FBG-02)量測位置如圖 5.72 中 P9 的位置，初始溫度為 $28.2(^{\circ}C)$ ，實驗結束溫度 $77.1(^{\circ}C)$ ，溫升約為 $49^{\circ}C$ 。圖 5.72 為活塞外桶隨時間的溫度變化圖，利用熱像儀設定每 10 秒取像一次，從圖 5.72 可以發現油壓試驗機驅動活塞作動下外桶溫度變化，具有明顯線性上升的趨勢。

5.8.3 第二款避震器系統(僅活塞)以 5Hz 來回 25mm 作動之說明(實驗五)

最後實驗五同樣設定油壓試驗機 5Hz 頻率來回 25mm 行程對避震器二進行 1800 秒測試，在第 300 秒後停止作動，活塞外壁面上方裸光纖(FBG01)、熱電偶的

原始訊號如圖 5.73(A)、(B)所示，裸光纖(FBG01)的波長飄移量最高約為 $1.78(nm)$ ，溫升約為 $72.5(^{\circ}C)$ ，光纖轉換至溫升的係數 C 約為 $41.76(^{\circ}C/nm)$ 如圖 5.73(C)，與前一次實驗的結果相近。由於活塞外壁面下方裸光纖(FBG02)失效因素，因此不進行討論。

活塞外壁面上方裸光纖(FBG01)波長飄移轉換至溫升後與熱電偶的擬合結果如圖 5.74(A)圖所示，由結果可知光纖的量測結果與熱電偶相當一致，再透過共振波長飄移理論可以得到熱應變值，最後活塞外壁上方光纖(FBG01)的熱應變值最高約為 $849.36(\mu\varepsilon)$ ，如圖 5.74(B)。接著將熱應變除以溫升後，即可得到待測物的熱膨脹係數約為 $LTE = 11.41(\mu\varepsilon/^{\circ}C)$ ，如圖 5.74(C)。

5.8.4 即時分析程式的畫面呈現

觀察即時分析程式的畫面，在圖 5.75 為呈現溫升相關資訊的即時畫面，包含溫度、溫升、熱應變、熱膨脹係數與熱伸長量，圖 5.76 為呈現振動相關資訊的即時畫面，包含短時間波形、FFT 圖、振動頻率與訊號平均振幅，同樣的因避震器二沒有彈簧元件，所以量測到的振動訊號比較不明顯，與前一次實驗的結果相近。

5.8.5 热像儀量測結果

利用熱像儀所量測活塞外桶初始溫度與實驗結束溫度如圖 5.77 所示。活塞降溫過程中，溫度在越靠近活塞上方溫度越高，相對於熱電偶所量測位置，上方裸光纖(FBG01)量測位置如圖 5.77 中 P4 的位置，初始溫度為 $33.7(^{\circ}C)$ ，實驗結束溫度 $48.5(^{\circ}C)$ ，溫升約為 $14.8(^{\circ}C)$ 。下方裸光纖(FBG02)量測位置如圖 5.77 中 P9 的位置，初始溫度為 $32.5(^{\circ}C)$ ，實驗結束溫度 $42.7(^{\circ}C)$ ，溫升約為 $10.2(^{\circ}C)$ 。圖 5.78 為活塞外桶隨時間的溫度變化圖，從圖 5.78 可以發現活塞外桶在作動狀態下具有線性上升趨勢。進一步將的熱電偶量測結果與熱像儀互相擬合，則在上方裸光纖(FBG01)熱像儀乘以 0.996 會最接近熱電偶的量測結果，而下方光纖裸光纖(FBG02)

熱像儀乘以 0.988 會最接近熱電偶的量測結果如圖 5.79。由以上結果可知，熱像儀所量測溫度依然具有相當可信度。



5.8.6 第二款避震器系統的實驗結論

由兩次實驗結果可知，光纖光柵與熱電偶的量測結果均相當一致，在振動的量測結果也與系統設定相當一致，如表 5.2 所示。其中下方裸光纖(FBG02)所得數值為失效前較為線性區段的分析結果，而且兩次實驗所得到的熱膨脹係數也相當一致，光纖光柵的溫升轉換係數也相當穩定，因此根據共振波長飄移理論所得的熱應變值也具有相當可信度。

實驗編號	實驗時間	振動頻率	溫升(度)	校正Kt值($\times 10^{-6}$)	材料熱膨脹係數 前為活塞/後為夾具	光纖溫升轉換係數 前為FBG-03/後為FBG-04
實驗一	600sec	3Hz	16.4	5.708	13.46(活塞)	39.15(FBG-03)
實驗二	600sec	5Hz	49.6	6.831	12.3(活塞)/9.55(夾具)	38.76 / 46(FBG-04)
實驗三	1800sec	7Hz	65.3	6.465	11.87(活塞)/10.76(夾具)	40.54 / 43.07(FBG-04)

表 5.1 避震器一進行三次實驗量測結果

實驗編號	實驗時間	振動頻率	溫升(度)	材料熱膨脹係數	光纖溫升轉換係數 前為FBG-01/後為FBG-02
實驗四	600sec	3Hz	54.8	10.58 / 11.28	43.61 / 42.17
實驗五	1800sec	5Hz	72.5	11.41	41.76

表 5.2 避震器二進行兩次實驗量測結果



圖 5.1 避震器一外觀圖



圖 5.2 避震器二外觀圖

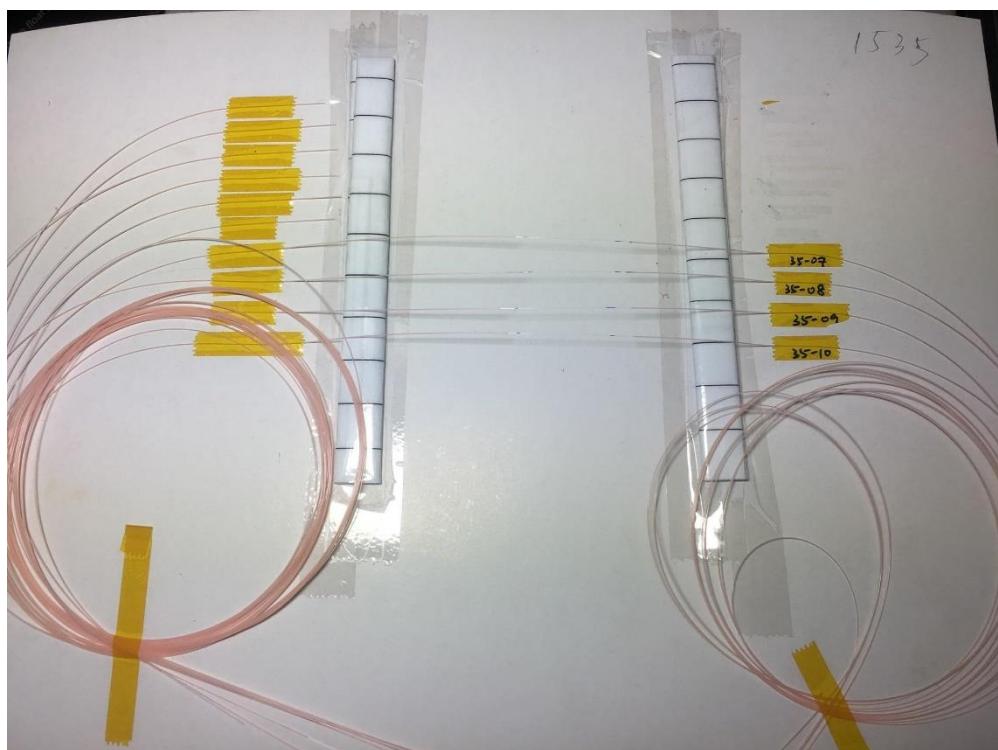


圖 5.3 光纖光柵感測器實體圖 (中心波長 1535 (nm))



圖 5.4 光纖於準靜態與穩態問題的量測範圍示意圖



圖 5.5 避震器一整體圖



圖 5.6 避震器一
(彈簧部分)



圖 5.7 避震器一
(活塞部分)



圖 5.8 整體實驗架設圖

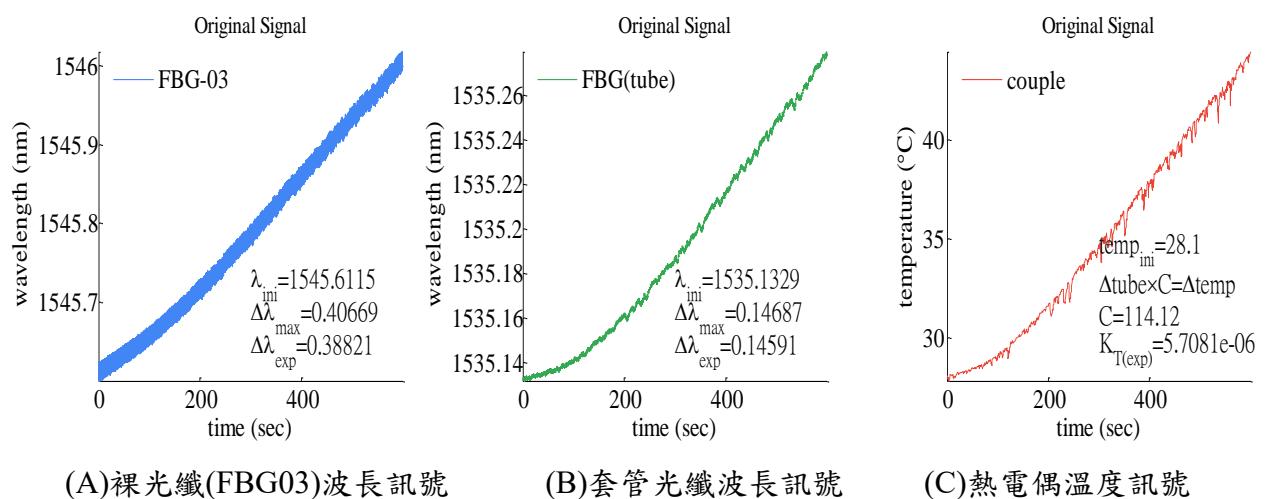


圖 5.9 活塞外壁裸光纖、套管光纖、熱電偶的原始訊號

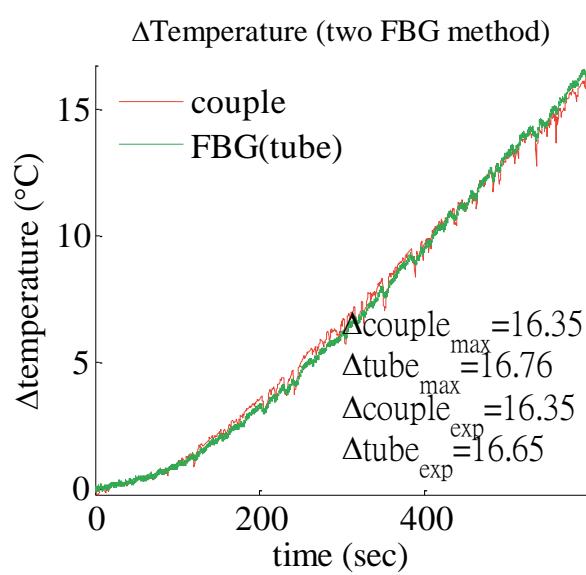


圖 5.10 套管光纖與熱電偶的溫升擬合結果

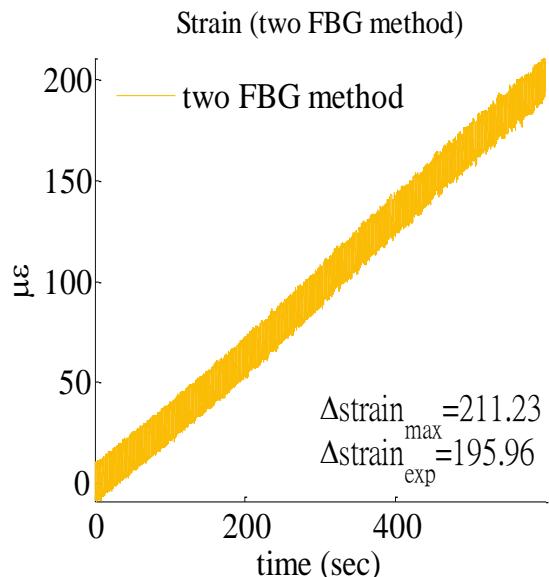


圖 5.11 热應變值

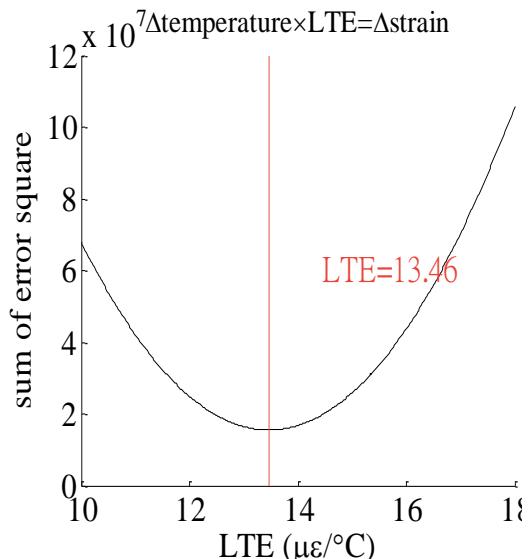


圖 5.12 热膨胀係數擬合結果

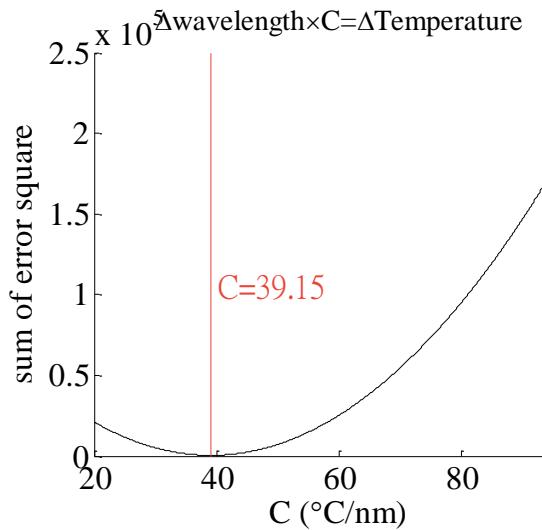


圖 5.13 裸光纖溫升轉換係數

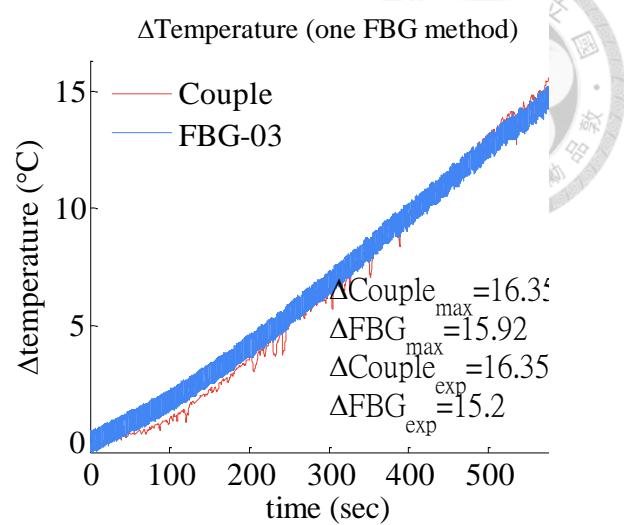


圖 5.14 裸光纖與熱電偶溫升擬合結果

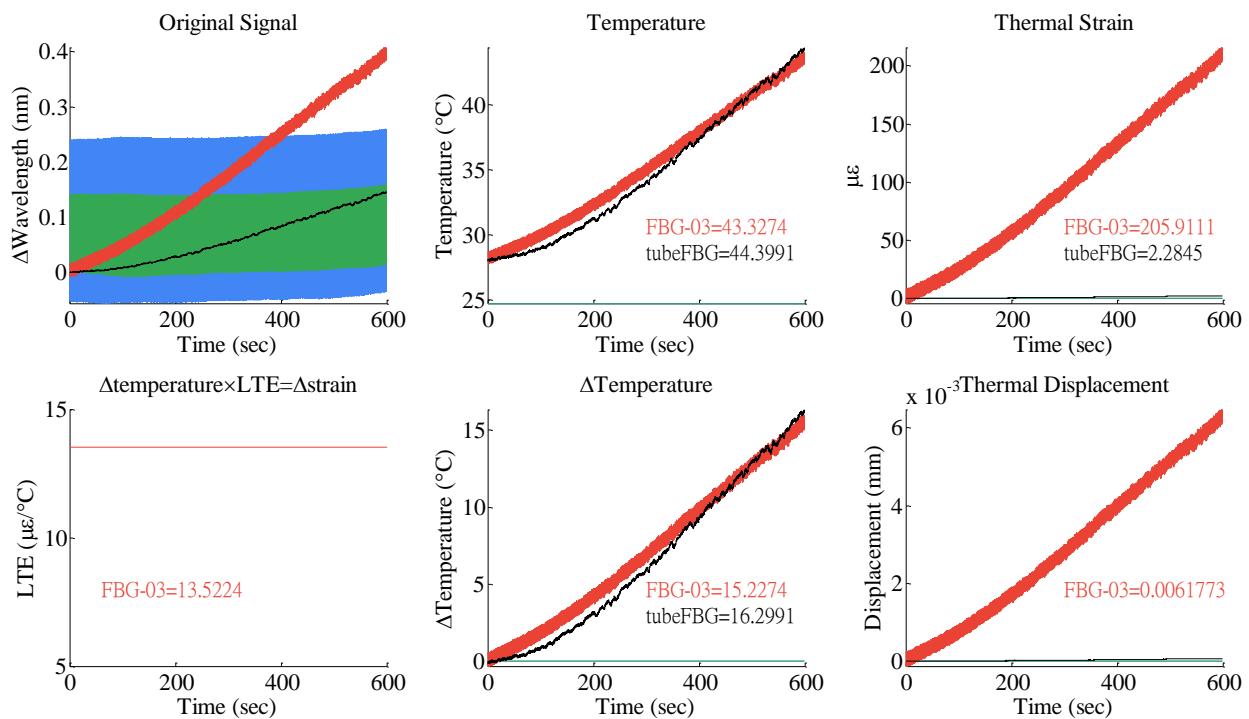


圖 5.15 即時畫面呈現溫升相關資訊(實驗一)

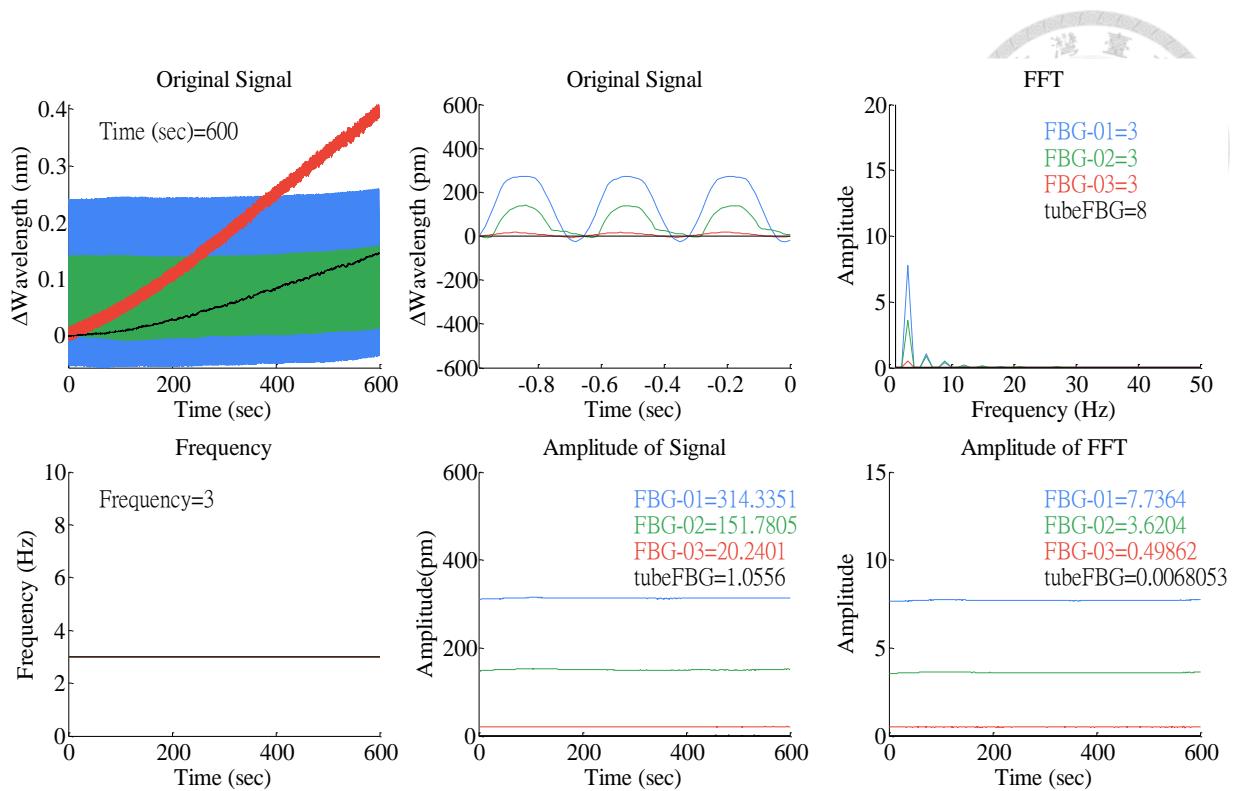


圖 5.16 即時畫面呈現振動相關資訊(實驗一)

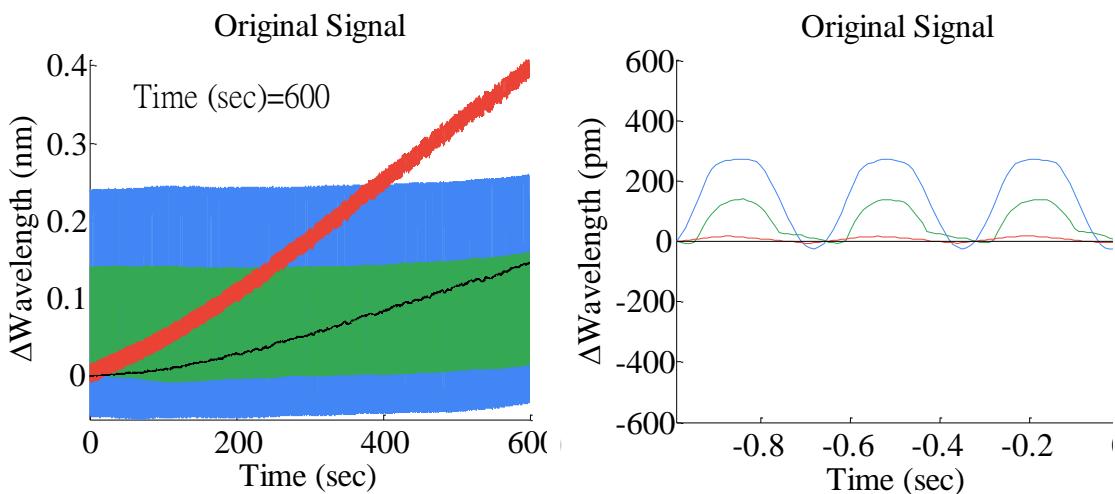


圖 5.17 四條光纖的原始訊號

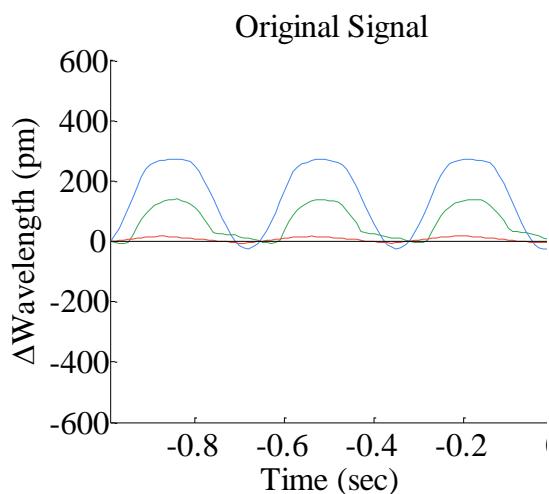


圖 5.18 在 1 秒內的光纖訊號

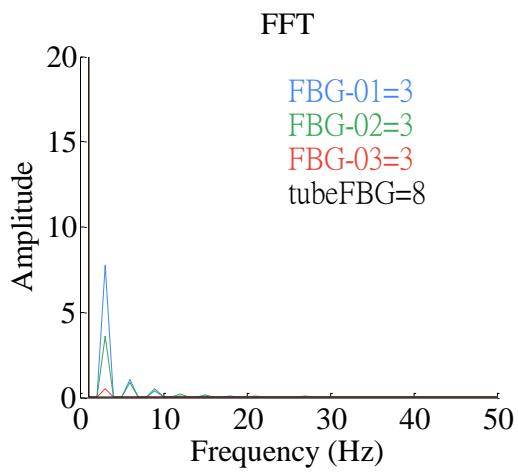


圖 5.19 光纖訊號的 FFT 圖

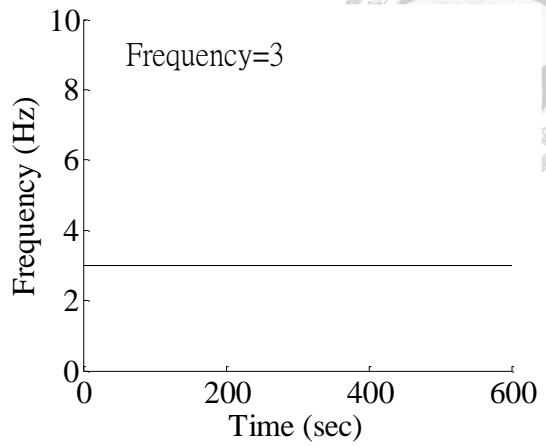


圖 5.20 振動頻率搜尋結果

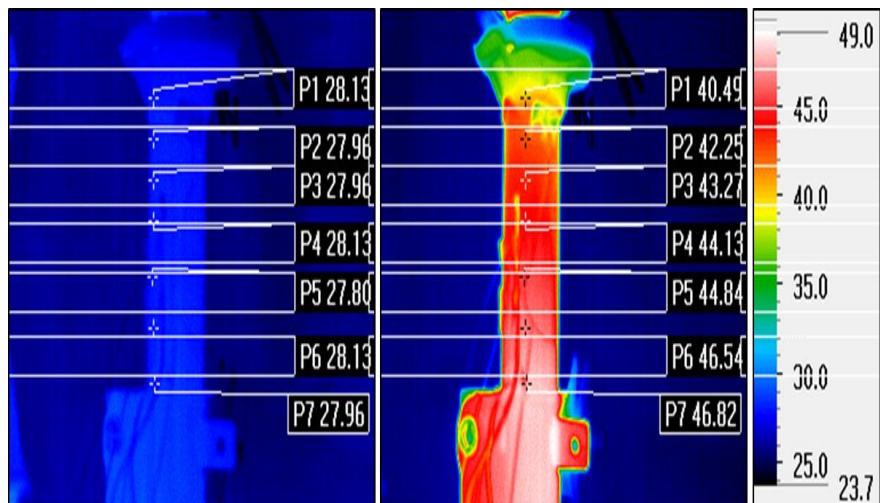


圖 5.21 热像儀於活塞外桶的初始與結束溫度結果(實驗一)

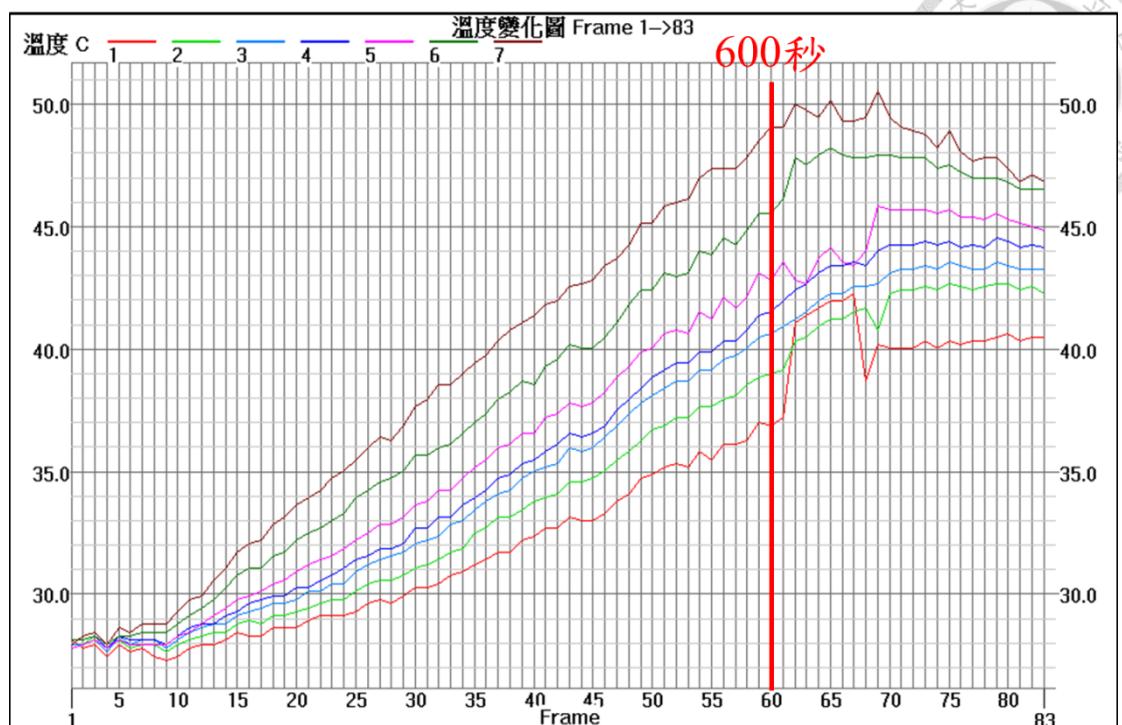


圖 5.22 活塞外桶隨時間的溫度變化圖(實驗一)

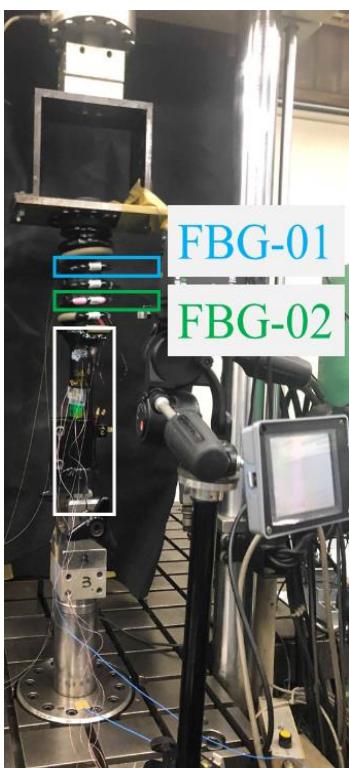


圖 5.23 整體實驗架構

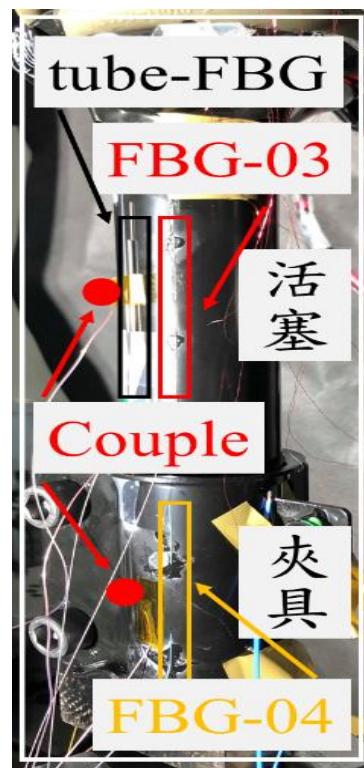


圖 5.24 感測器黏貼位置

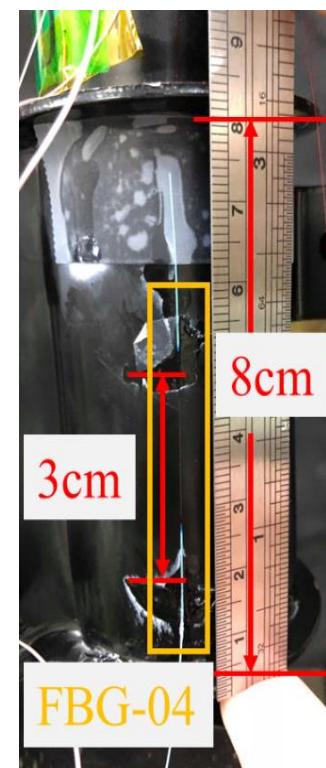


圖 5.25 夾具部分

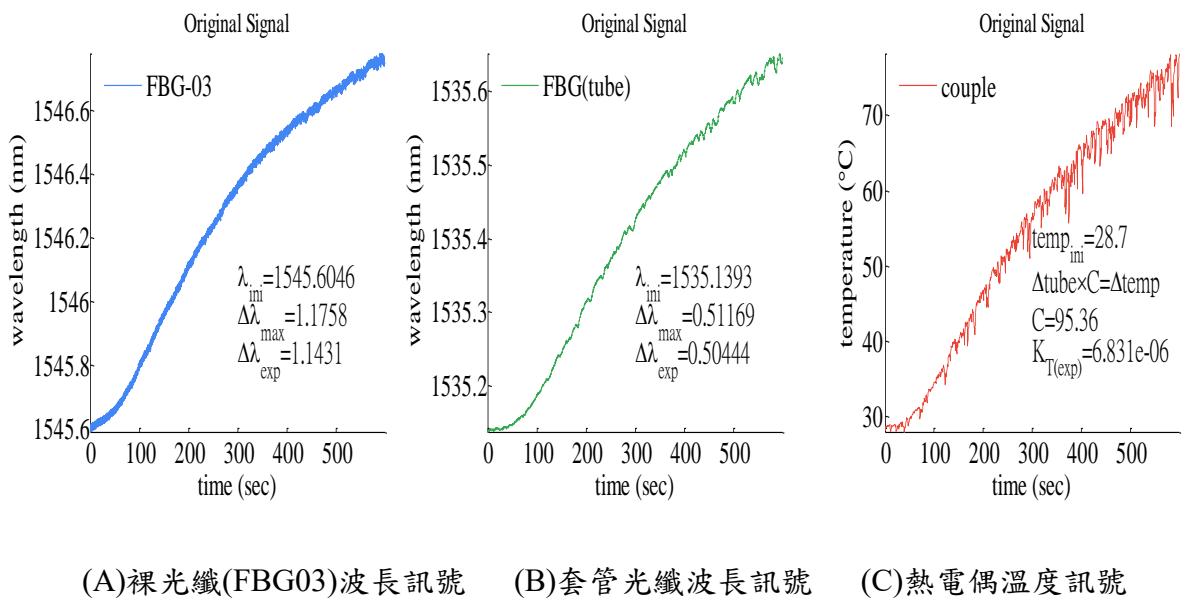


圖 5.26 活塞外壁裸光纖、套管光纖、熱電偶的原始訊號

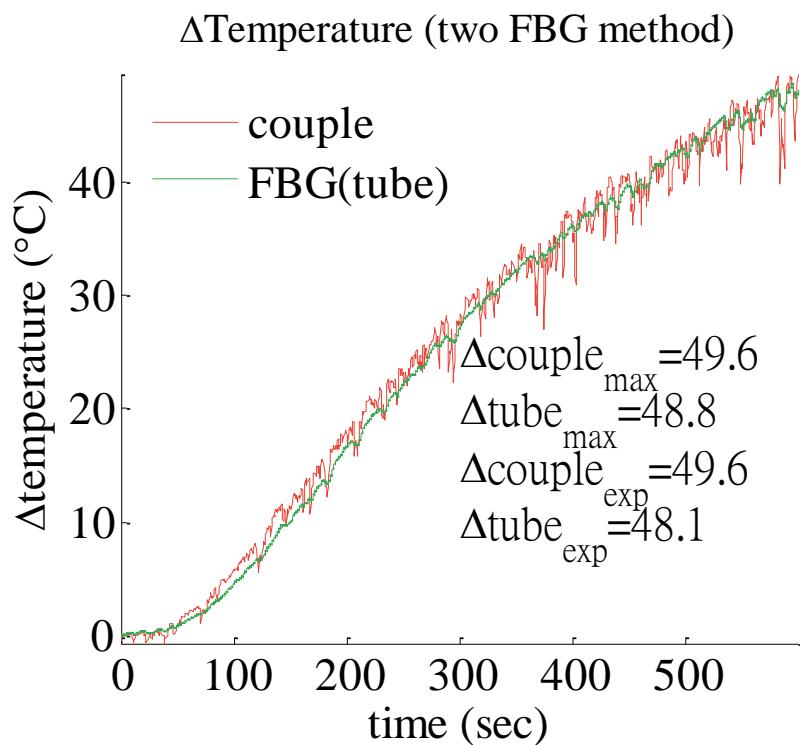


圖 5.27 套管光纖與熱電偶的溫升擬合結果

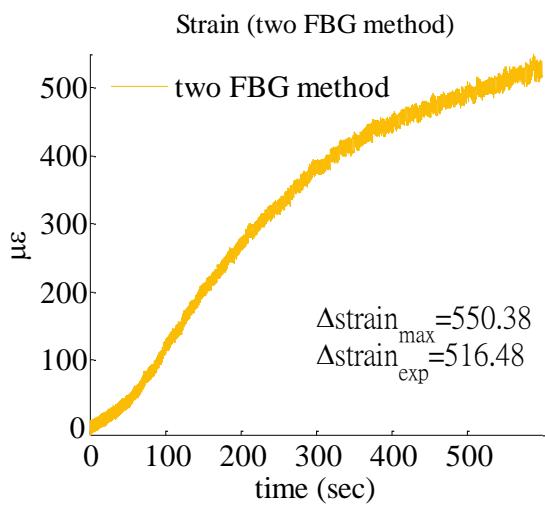


圖 5.28 热應變值

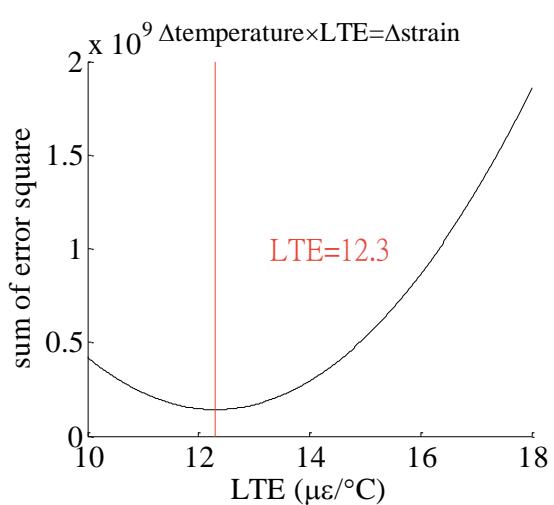


圖 5.29 热膨胀係數擬合結果

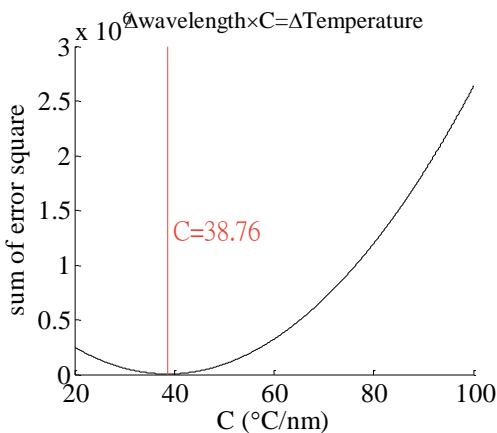


圖 5.30 裸光纖溫升轉換係數

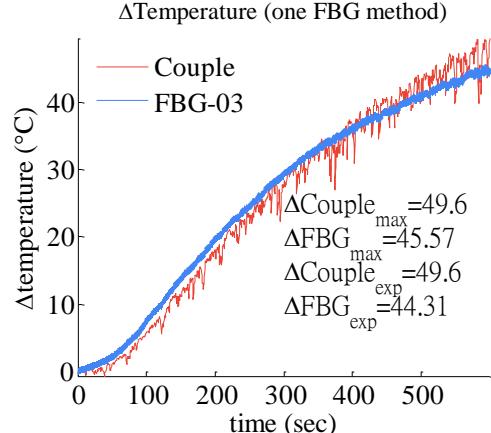
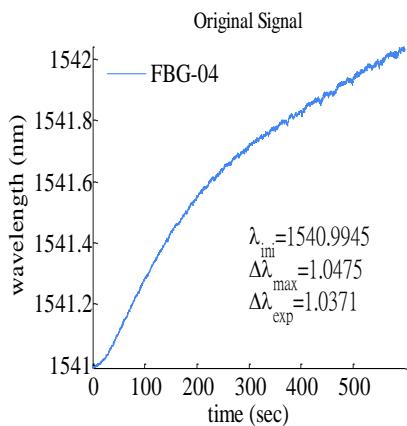
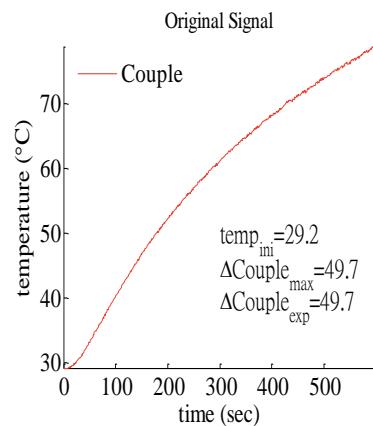


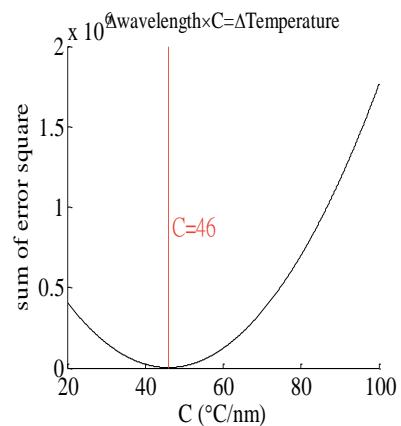
圖 5.31 裸光纖與熱電偶溫升擬合結果



(A)裸光纖(FBG04)波長訊號



(B)熱電偶溫度訊號



(C)擬合結果

圖 5.32 夾具部分裸光纖、熱電偶的原始訊號與擬合結果

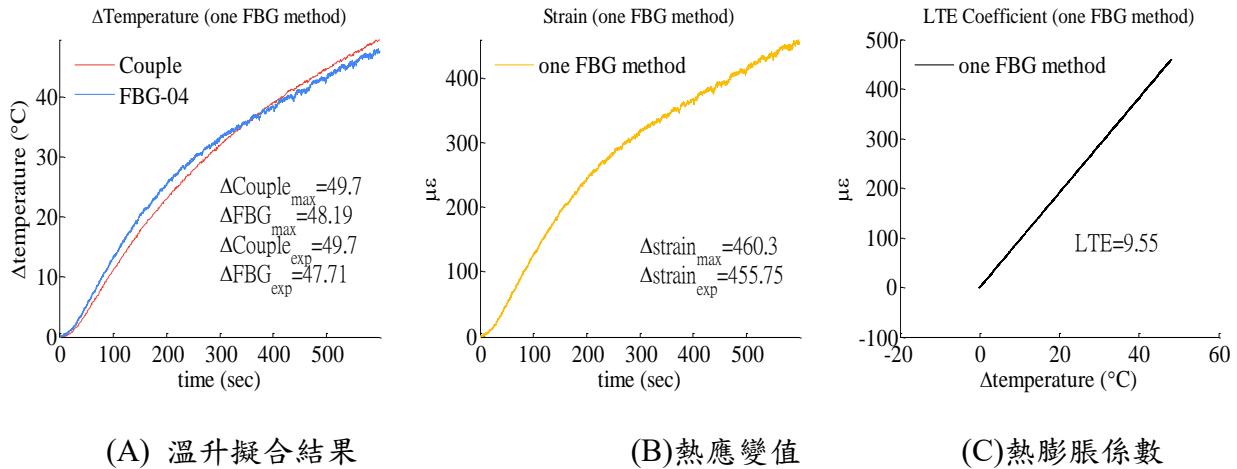


圖 5.33 夾具部分溫升擬合結果、熱應變值與熱膨脹係數

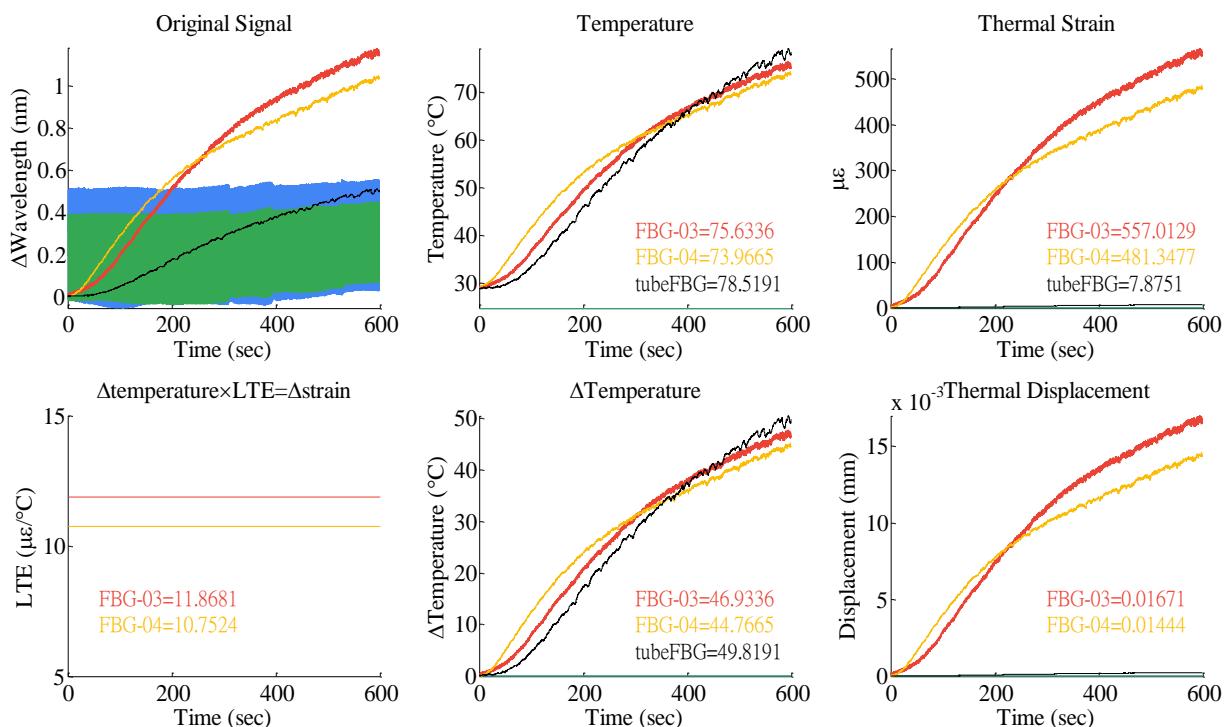


圖 5.34 即時畫面呈現溫升相關資訊(實驗二)

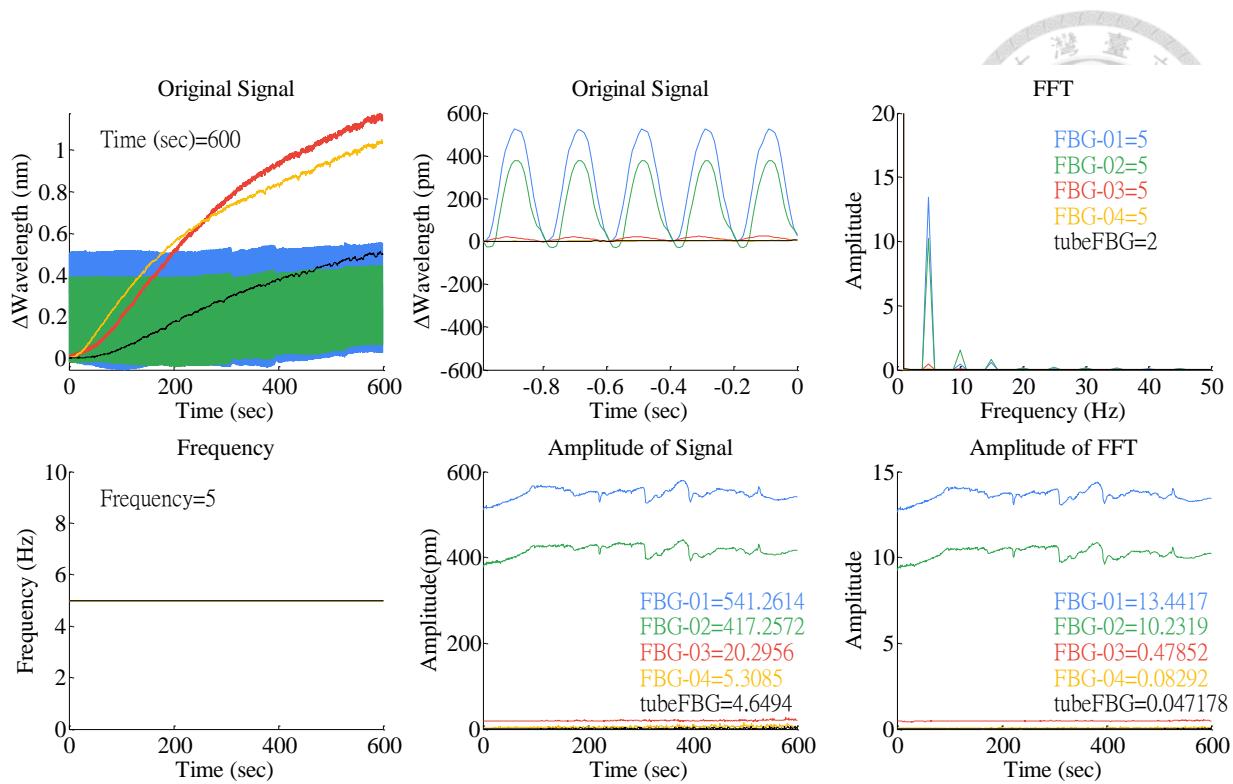


圖 5.35 即時畫面呈現振動相關資訊(實驗二)

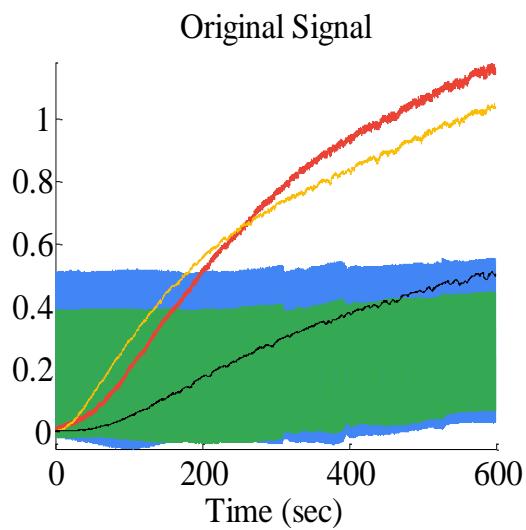


圖 5.36 五條光纖的原始訊號

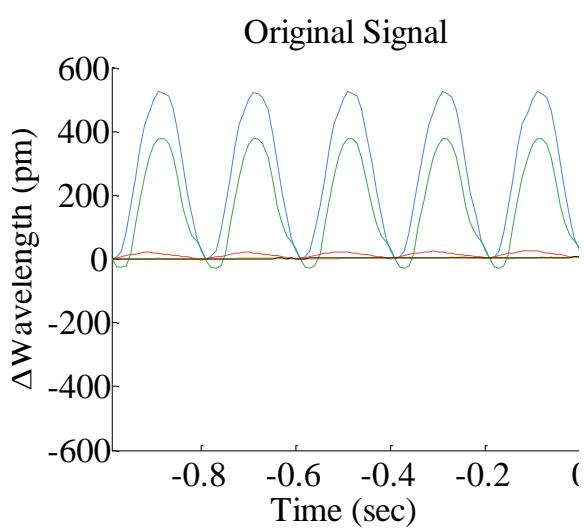


圖 5.37 在 1 秒內的光纖訊號

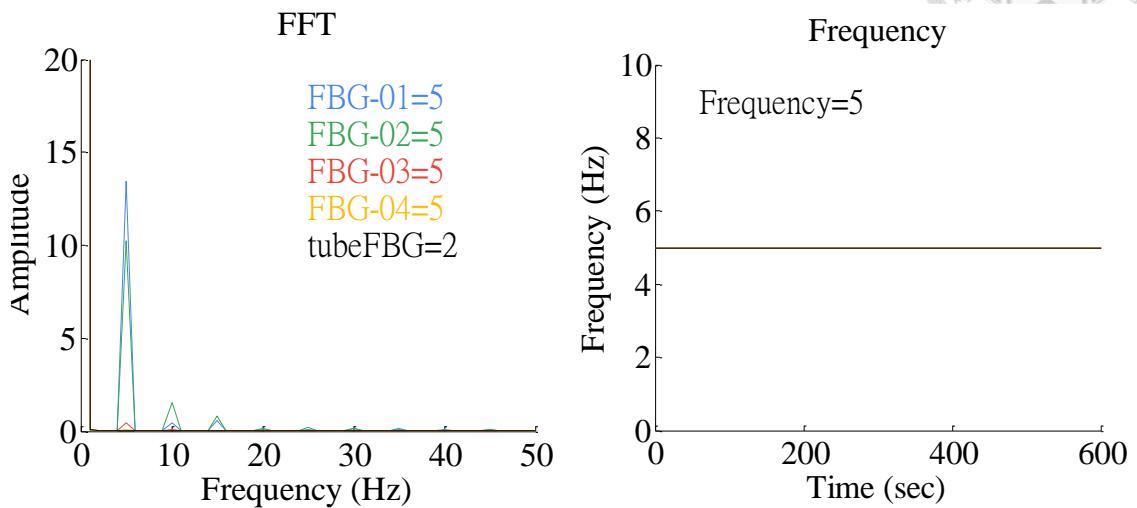


圖 5.38 光纖訊號的 FFT 圖

圖 5.39 振動頻率搜尋結果

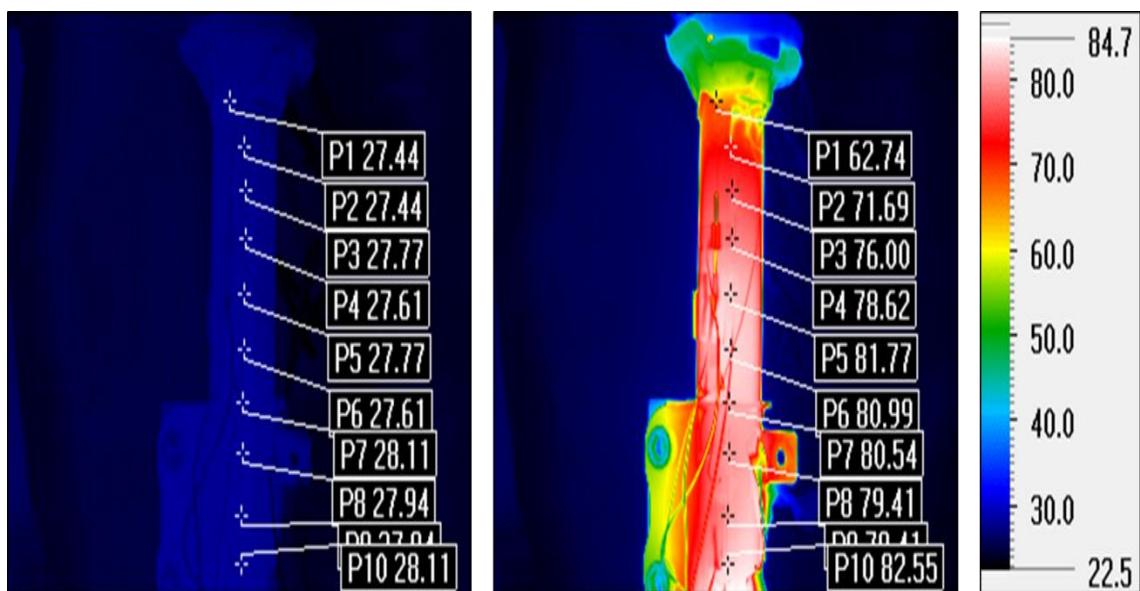


圖 5.40 热像儀於活塞與夾具的初始與結束溫度結果(實驗二)

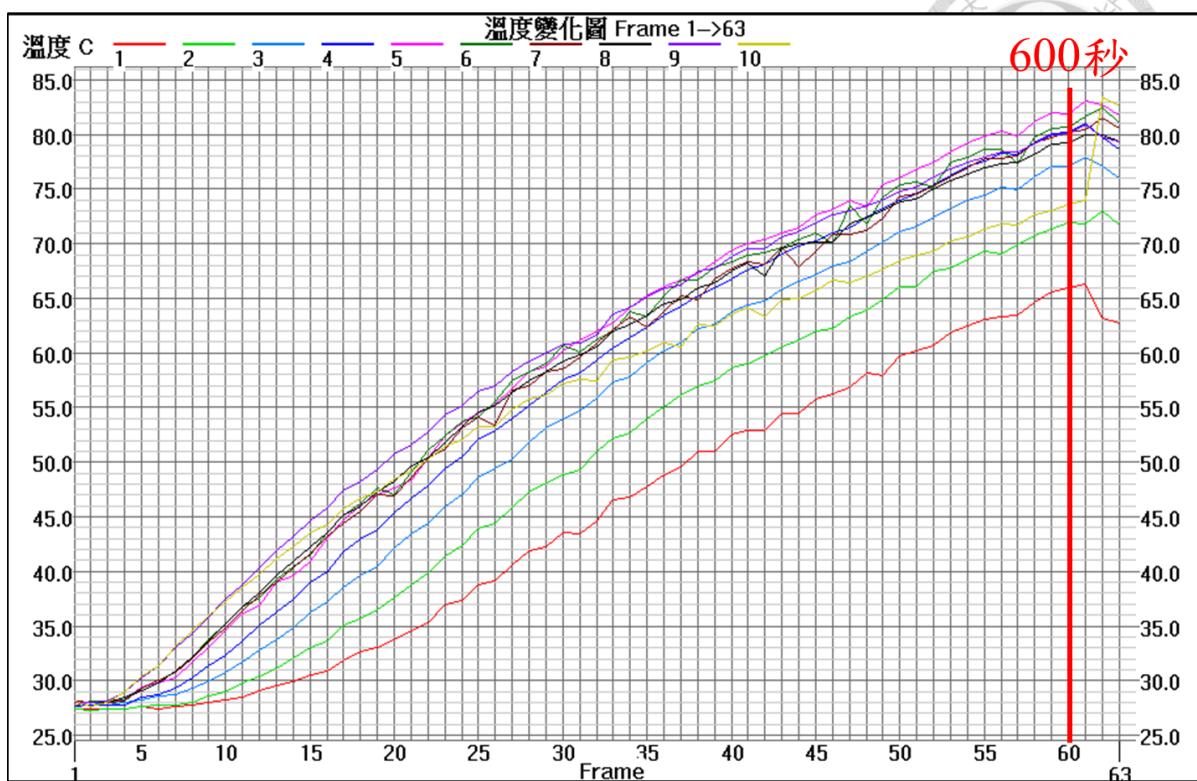


圖 5.41 活塞與夾具隨時間的溫度變化圖(實驗二)

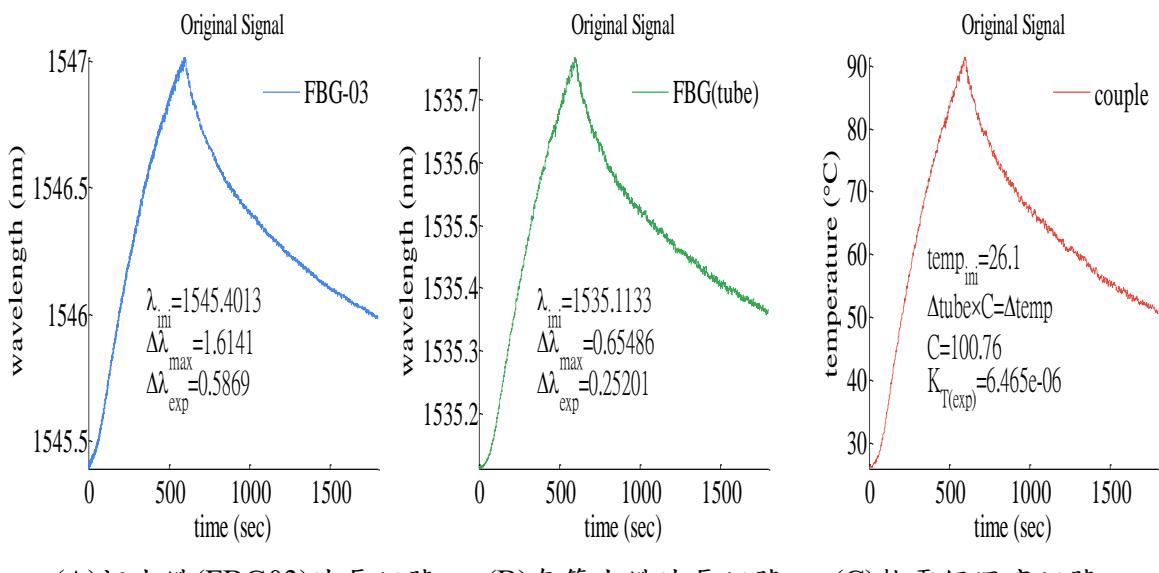


圖 5.42 活塞外壁裸光纖、套管光纖、熱電偶的原始訊號

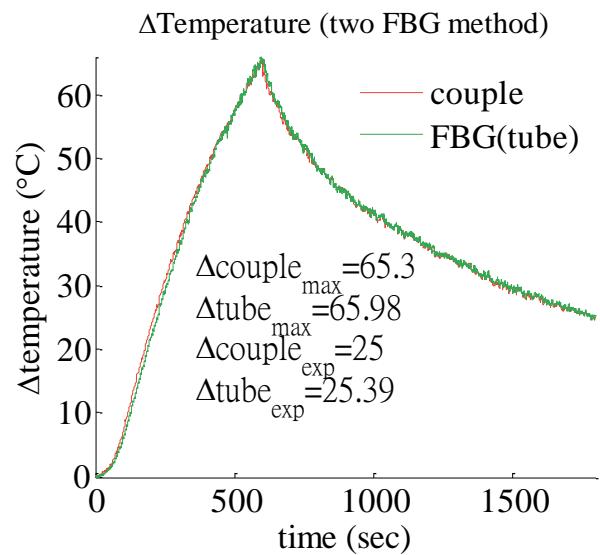


圖 5.43 套管光纖與熱電偶的溫升擬合結果

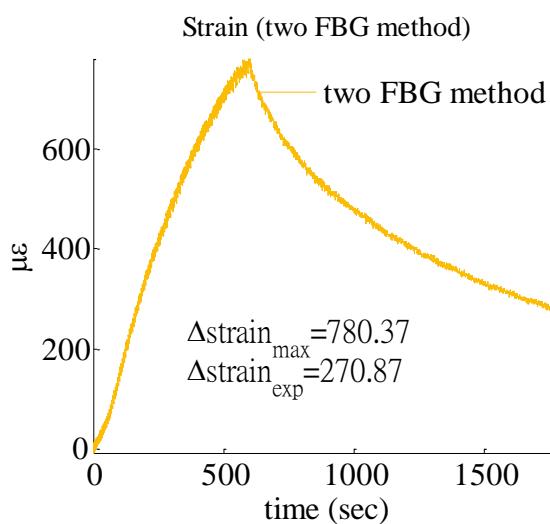


圖 5.44 热應變值

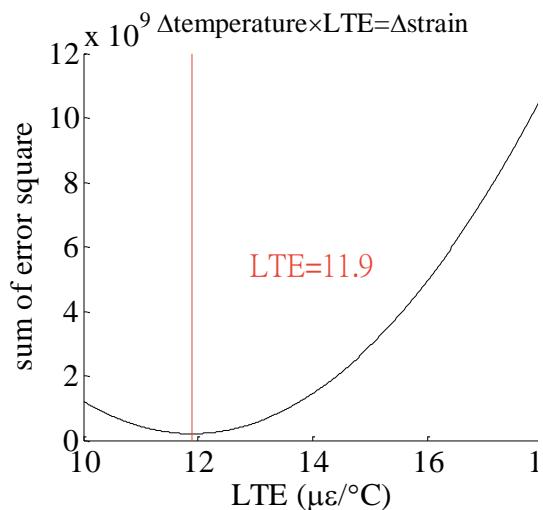


圖 5.45 热膨胀係數擬合結果

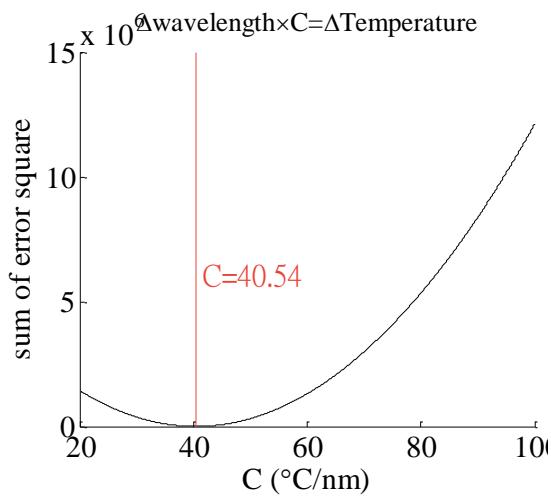


圖 5.46 裸光纖的溫升轉換係數

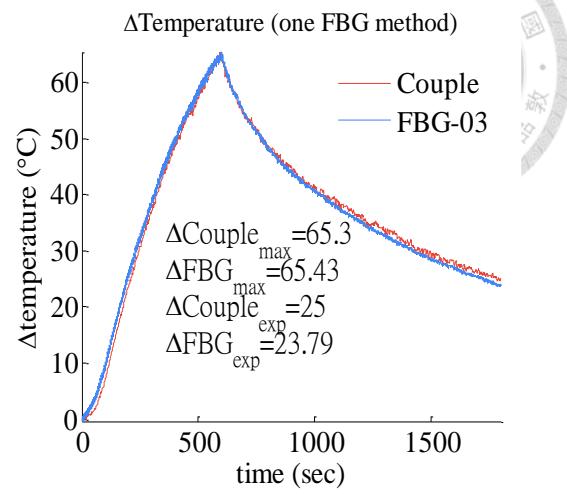


圖 5.47 裸光纖與熱電偶的溫合結果

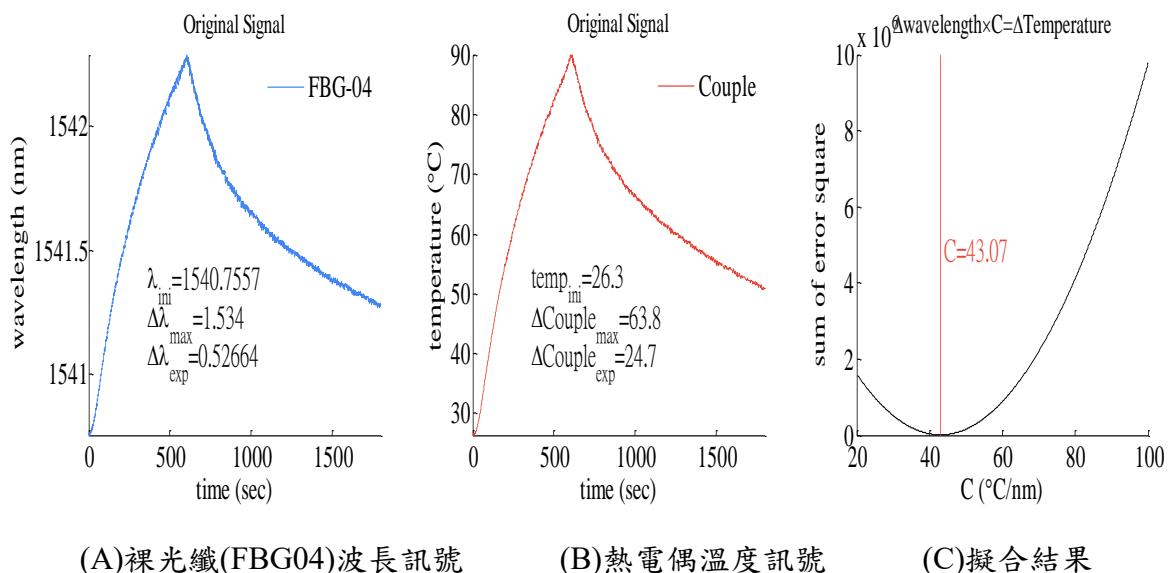


圖 5.48 夾具部分裸光纖、熱電偶的原始訊號與擬合結果

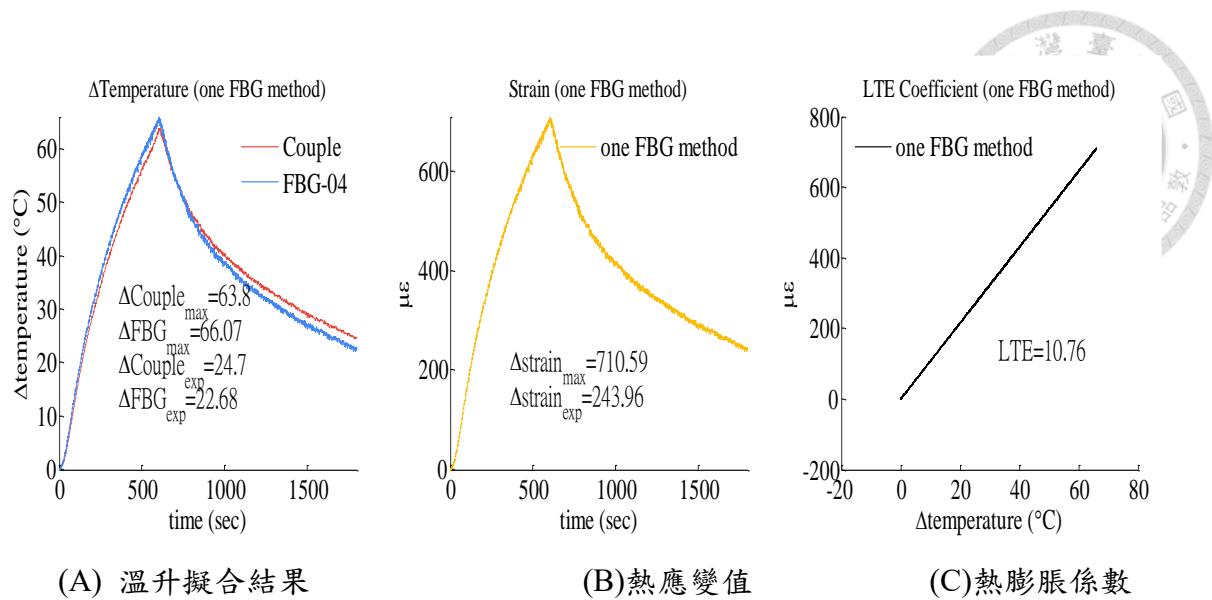


圖 5.49 夾具部分溫升擬合結果、熱應變值與熱膨脹係數

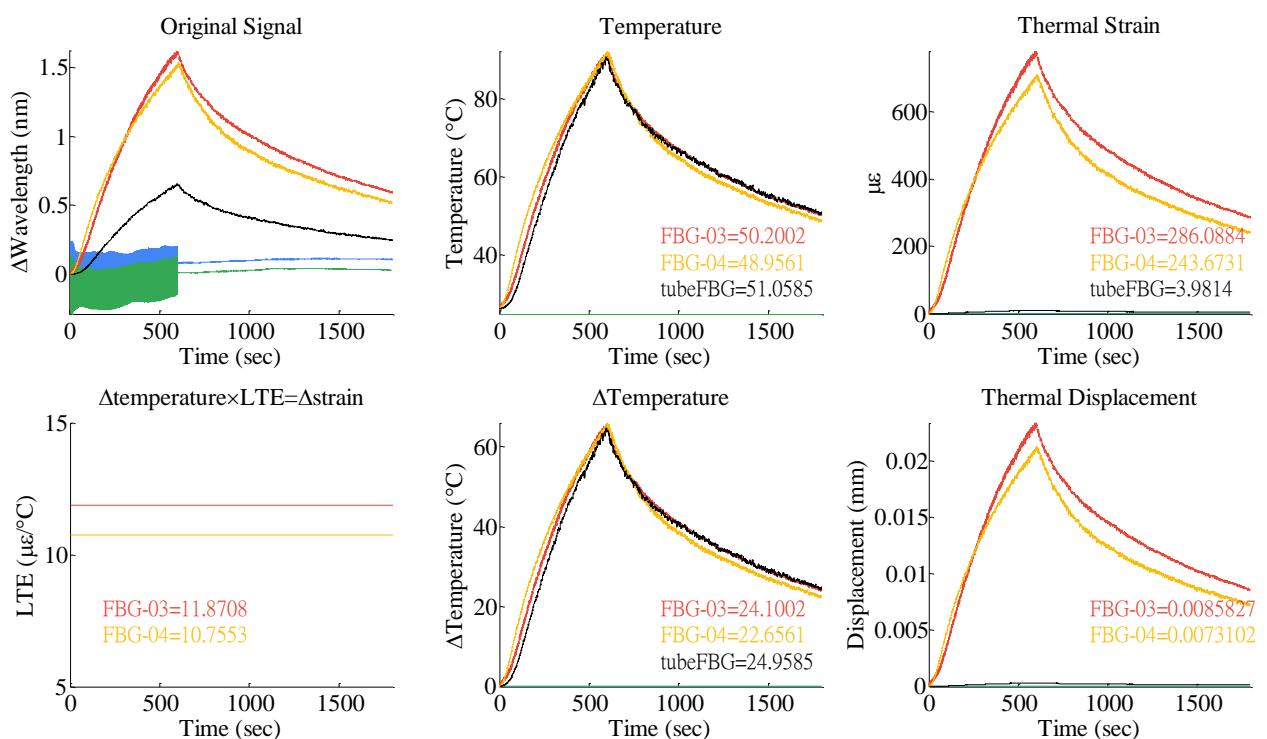


圖 5.50 即時畫面呈現溫升相關資訊(實驗三)

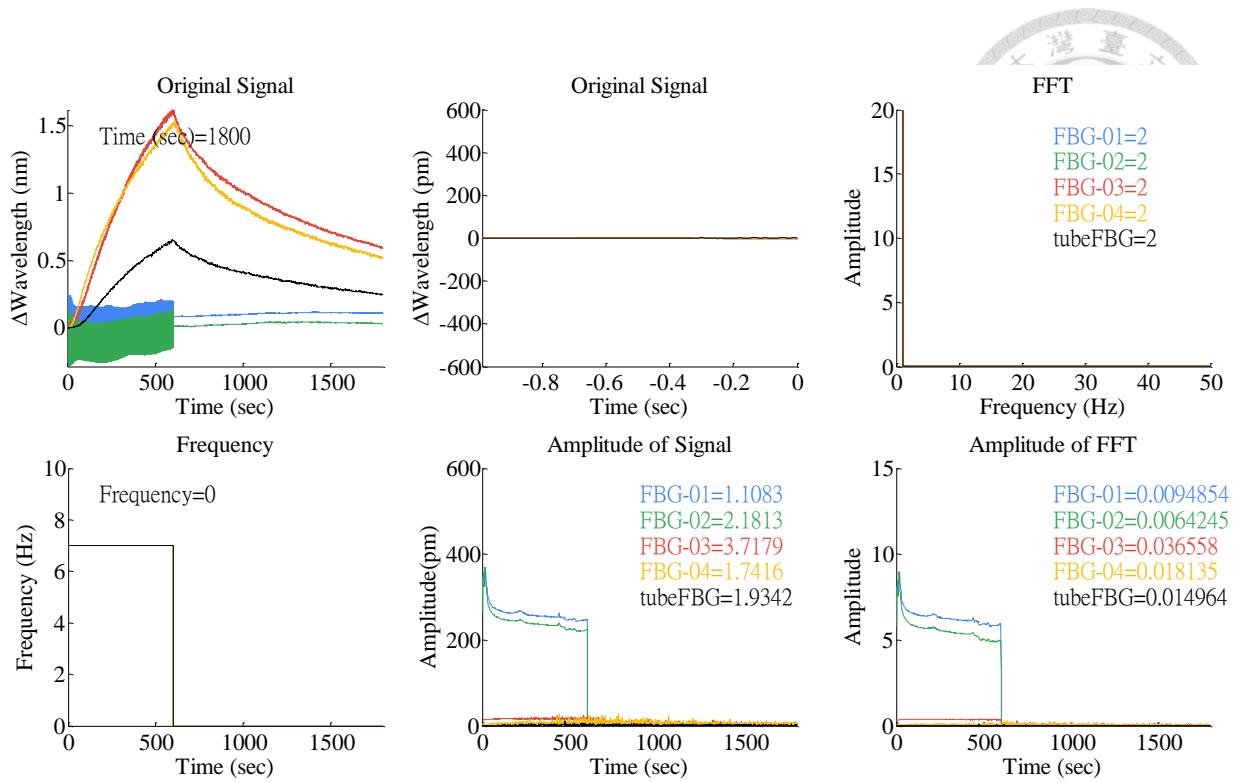


圖 5.51 即時畫面呈現振動相關資訊(實驗三)

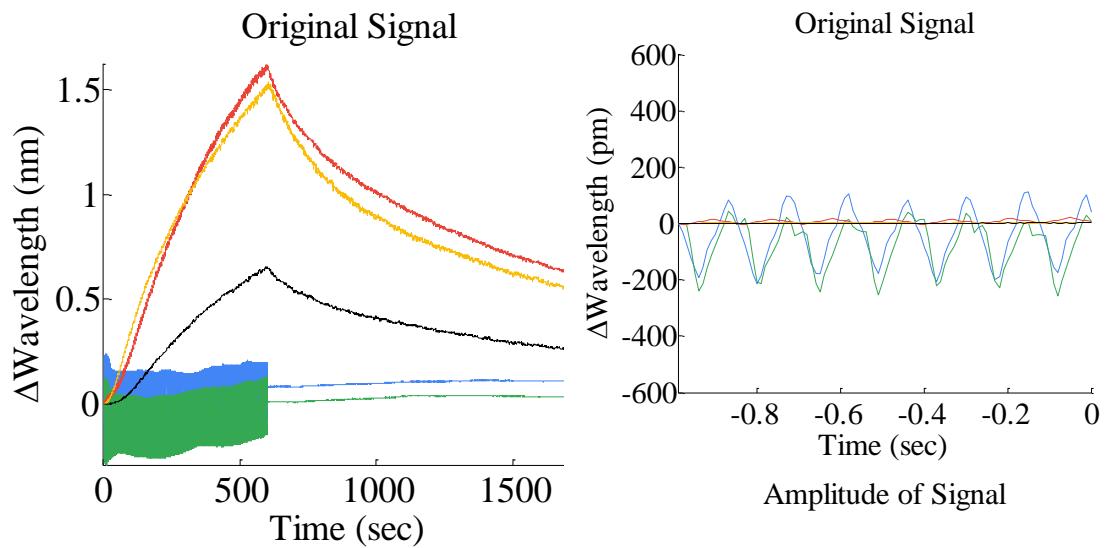


圖 5.52 五條光纖的原始訊號

圖 5.53 在 1 秒內光纖訊號
(第 300 秒)

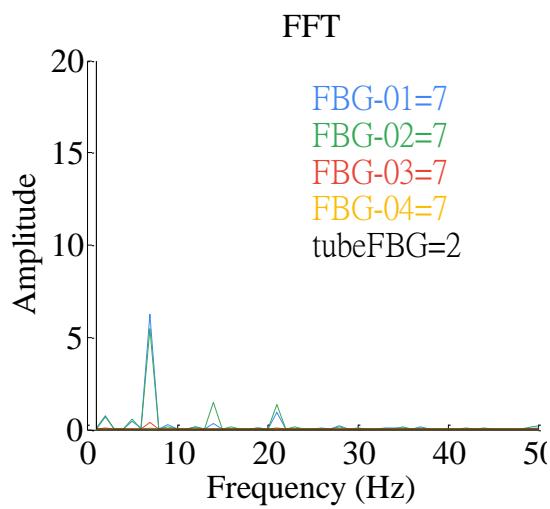


圖 5.54 光纖訊號 FFT 圖
(第 300 秒)

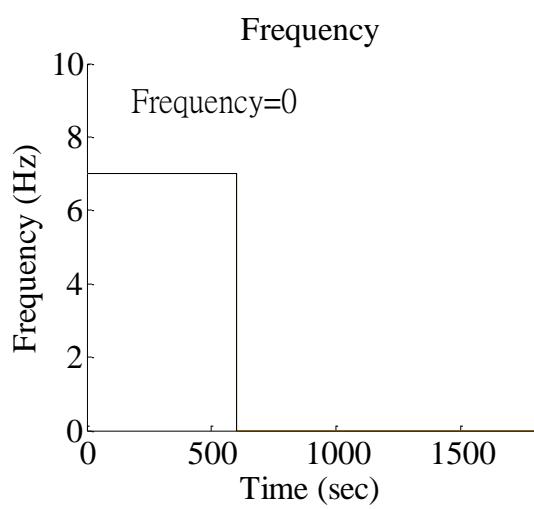


圖 5.55 振動頻率搜尋結果

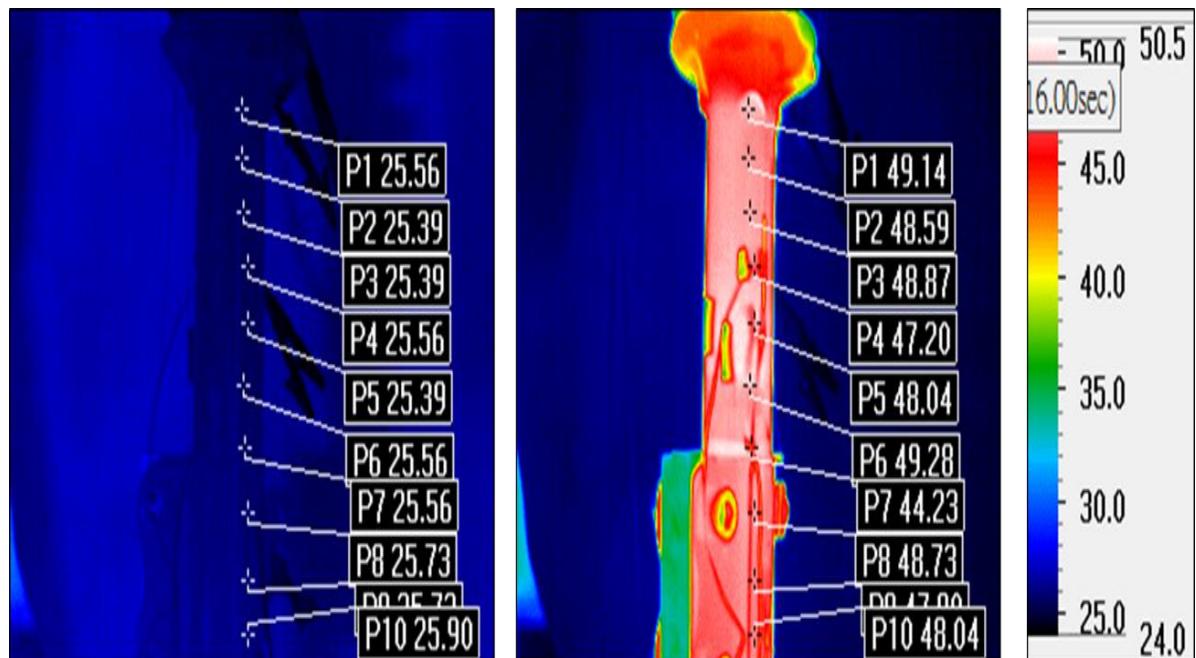


圖 5.56 热像儀於活塞與夾具的初始與結束溫度結果(實驗三)

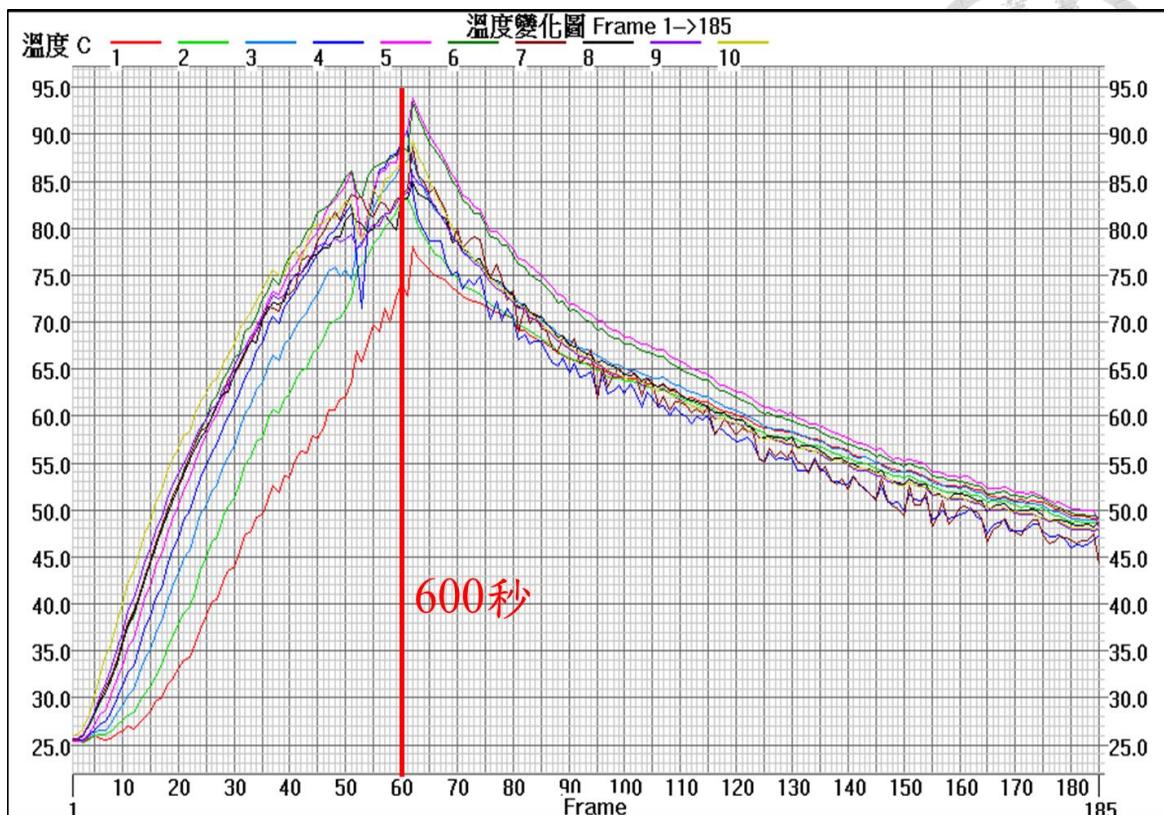


圖 5.57 活塞與夾具隨時間的溫度變化圖(實驗三)

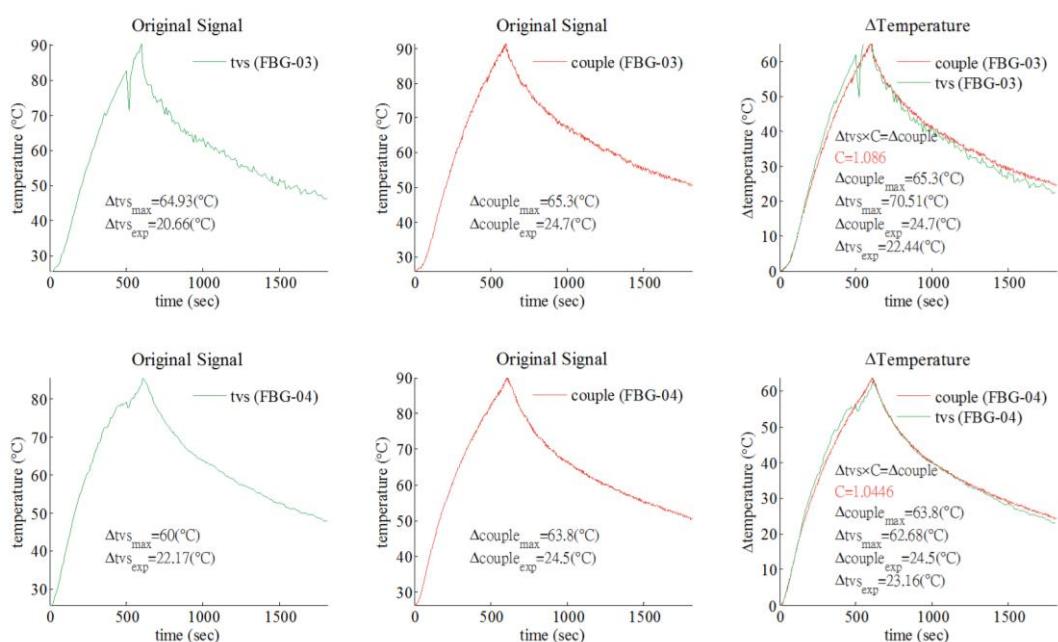


圖 5.58 热像儀與熱電偶的溫升擬合結果(上排為活塞部分、下排為夾具部分)



圖 5.59 整體實驗架構



圖 5.60 感測器黏
貼位置

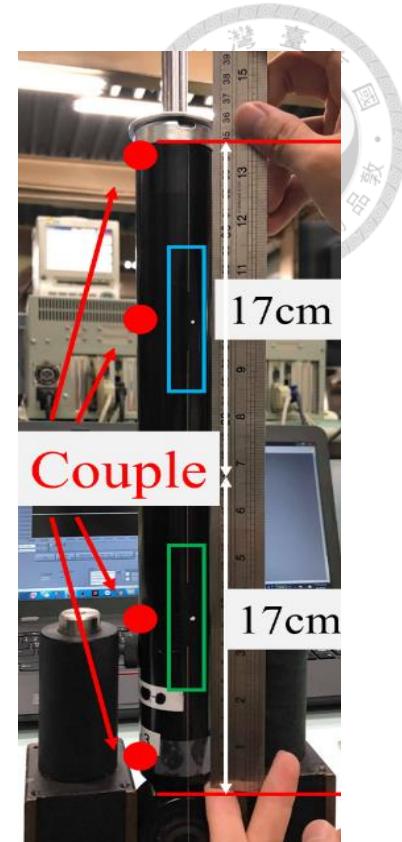
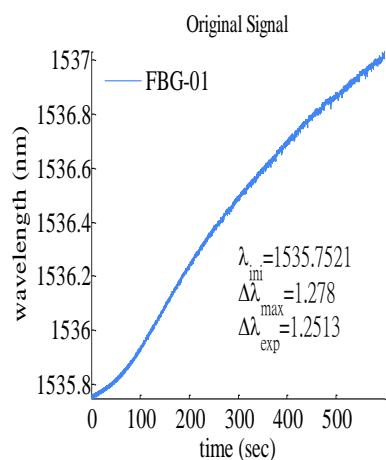
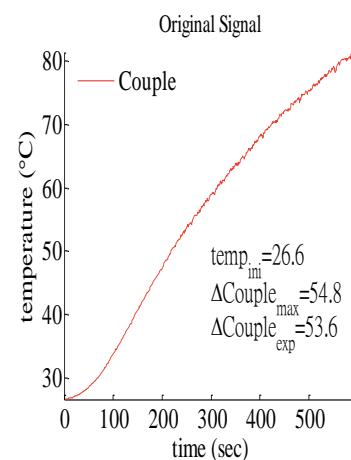


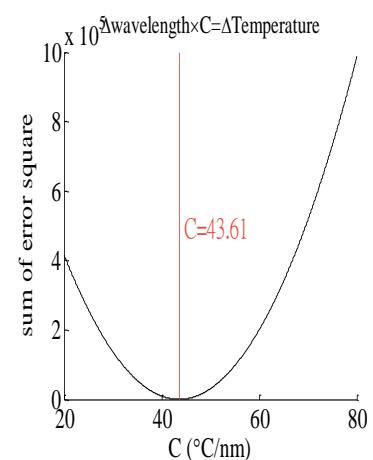
圖 5.61 热電偶黏
貼位置與相關長度



(A)裸光纖(FBG01)波長訊號

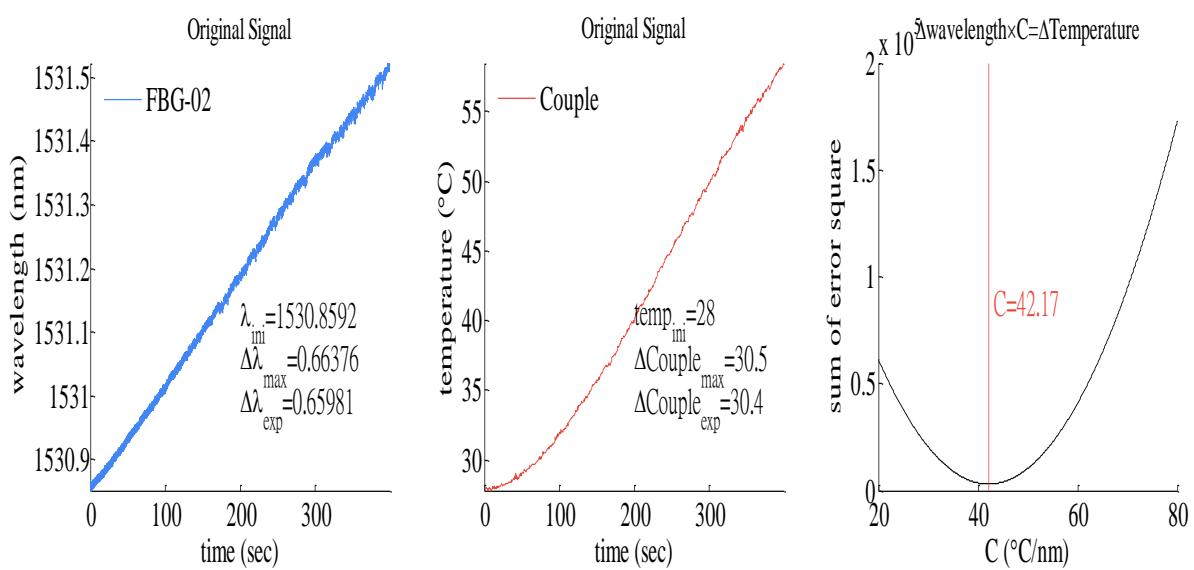


(B)熱電偶溫度訊號



(C) 溫升轉換係數

圖 5.62 活塞外壁裸光纖、熱電偶原始訊號與溫升轉換係數



(A)裸光纖(FBG02)波長訊號 (B)熱電偶溫度訊號 (C) 溫升轉換係數
圖 5.63 活塞外壁裸光纖、熱電偶原始訊號與溫升轉換係數

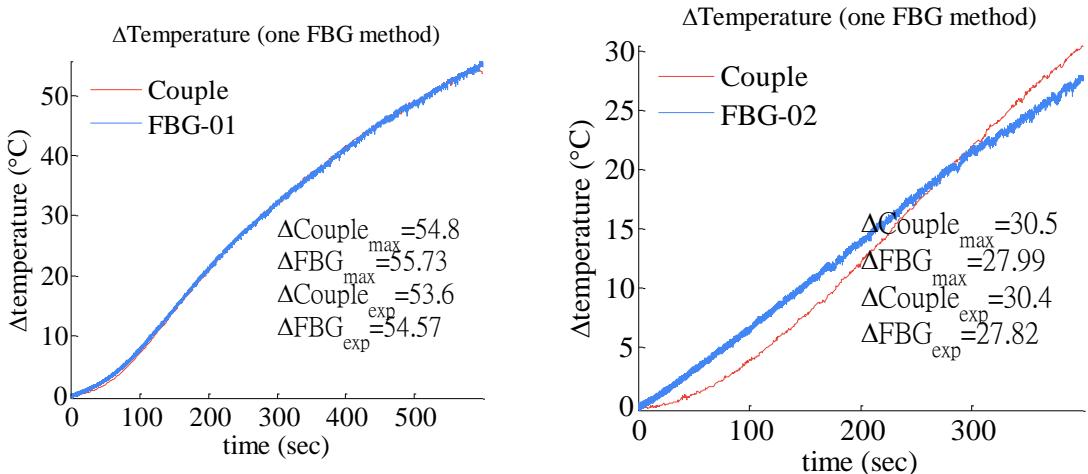


圖 5.64 光纖的波長飄移轉換至溫升後與熱電偶的擬合結果

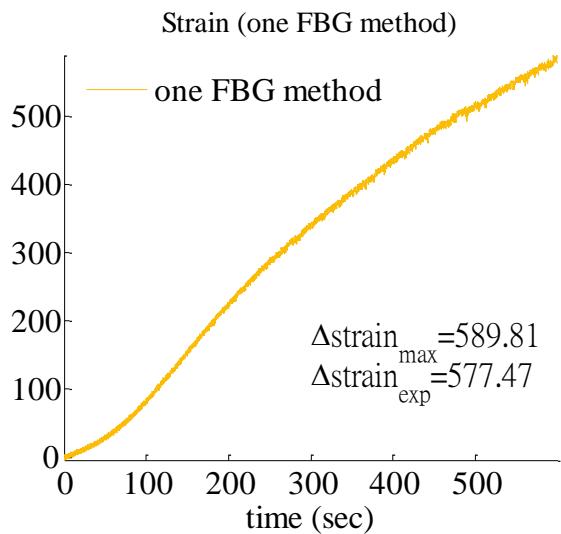


圖 5.65 热應變值(FBG-01)

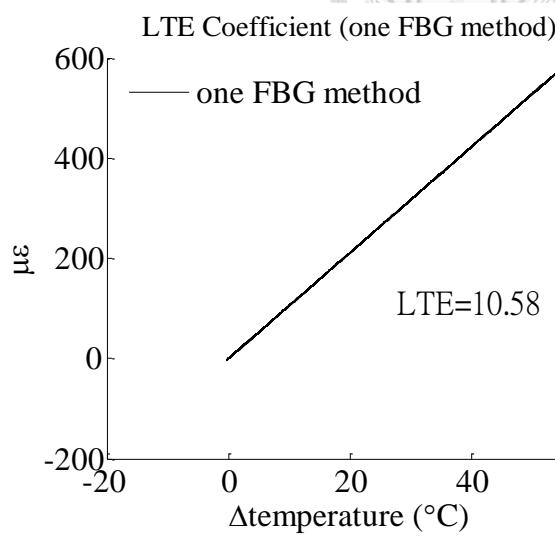


圖 5.66 热膨脹係數擬合結果

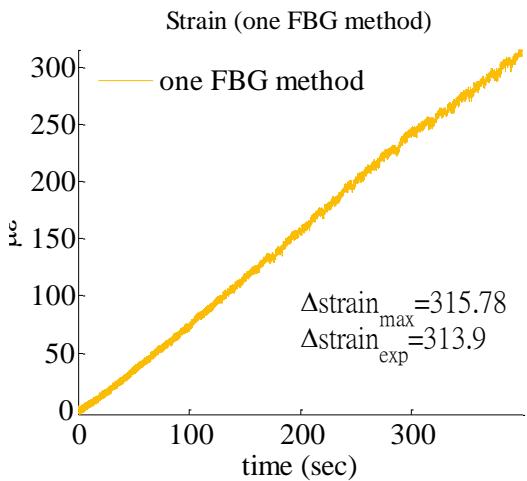


圖 5.67 热應變值(FBG-02)

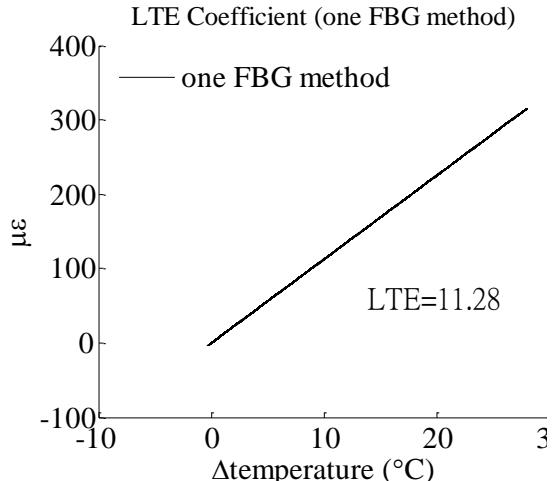


圖 5.68 热膨脹係數擬合結果

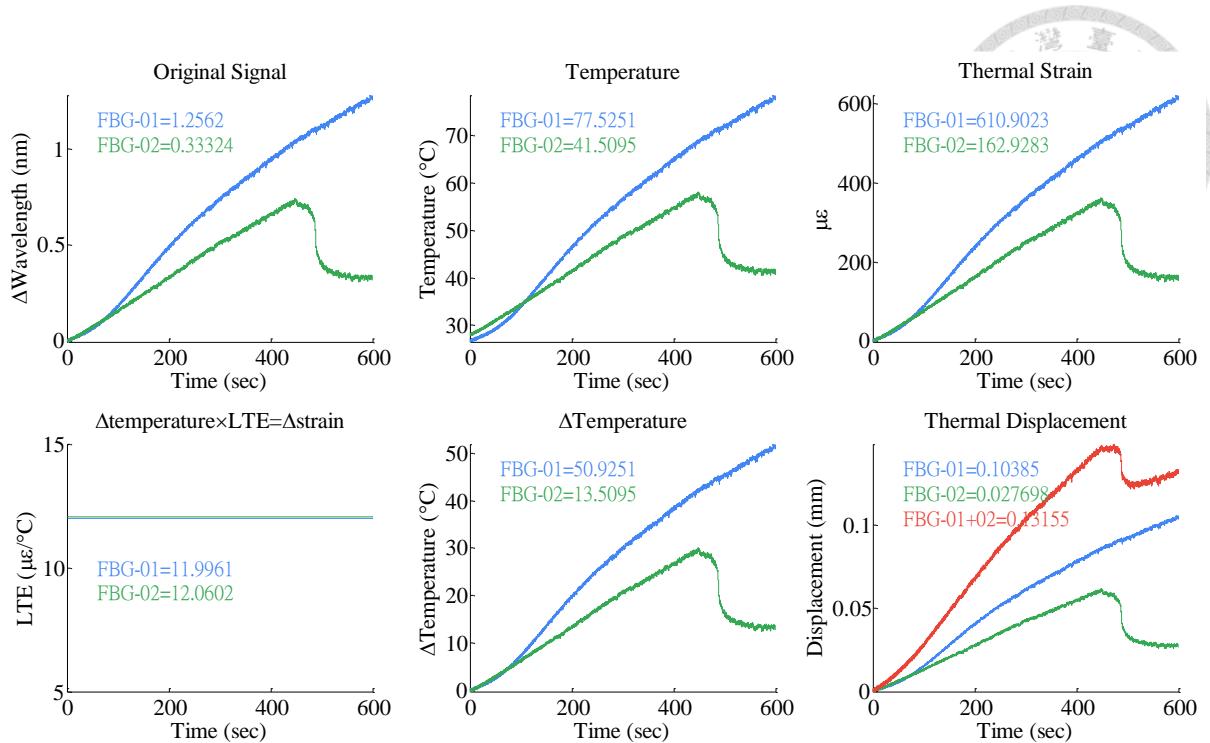


圖 5.69 即時畫面呈現溫升相關資訊(實驗四)

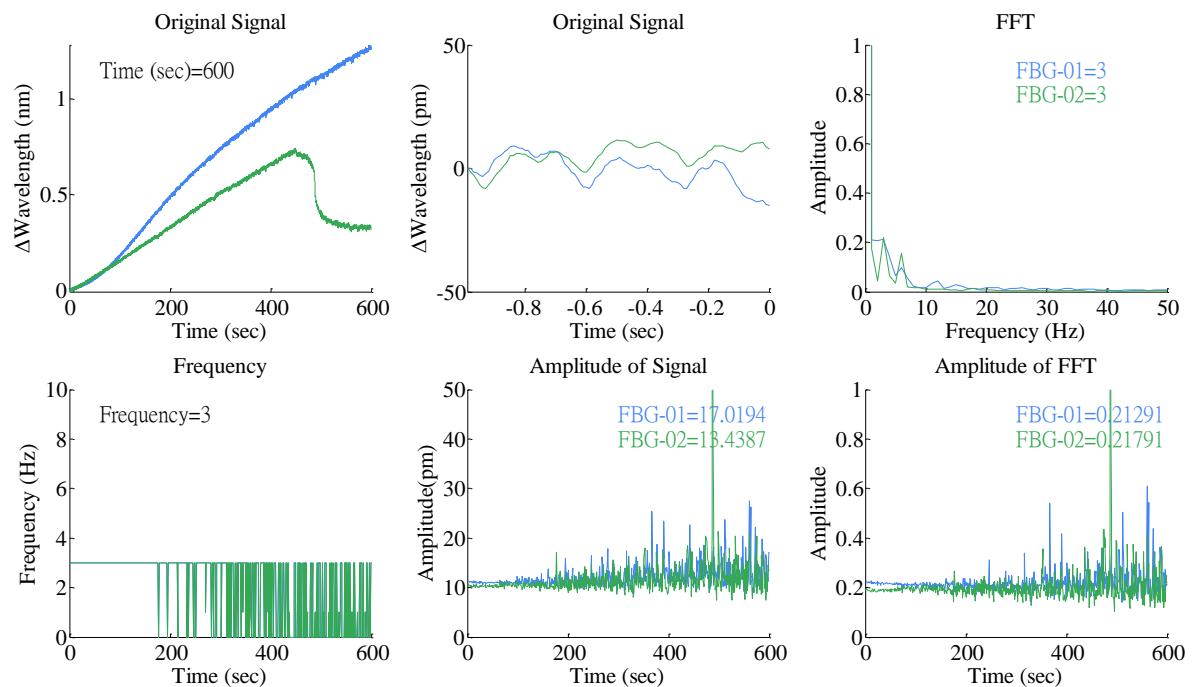


圖 5.70 即時畫面呈現振動相關資訊(實驗四)

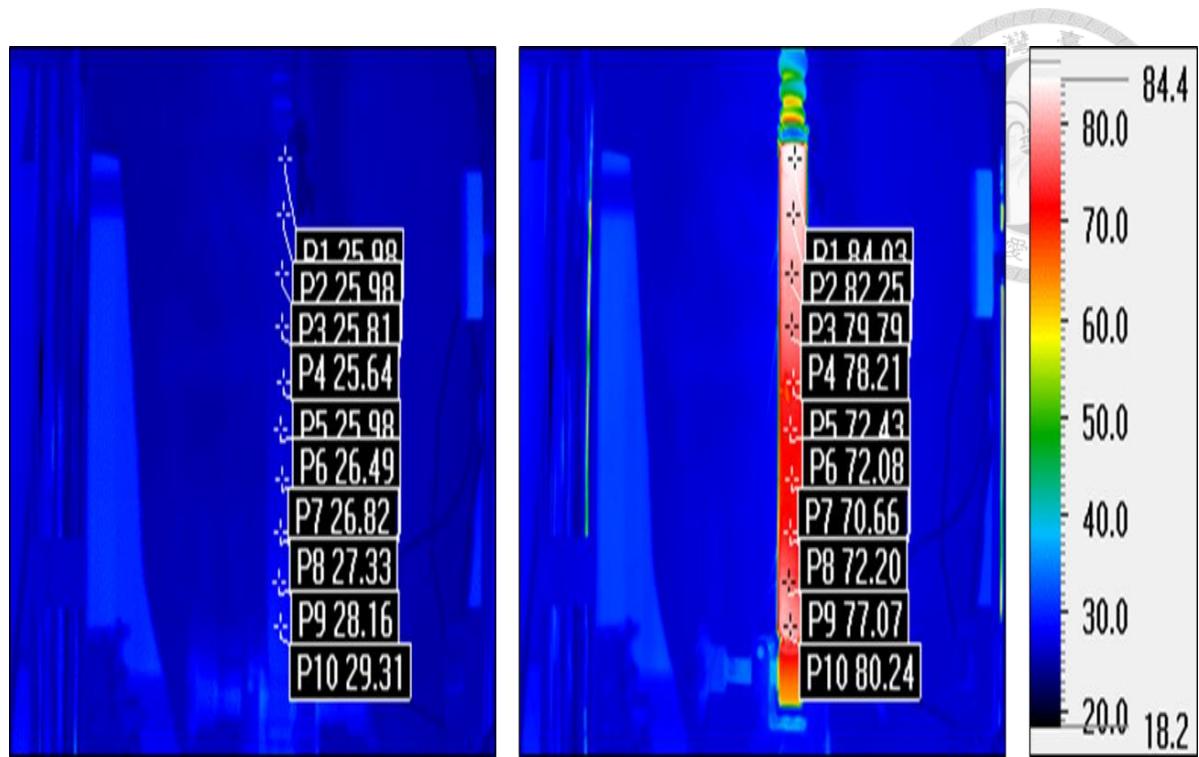


圖 5.71 热像儀於活塞外桶的初始與結束溫度結果(實驗四)

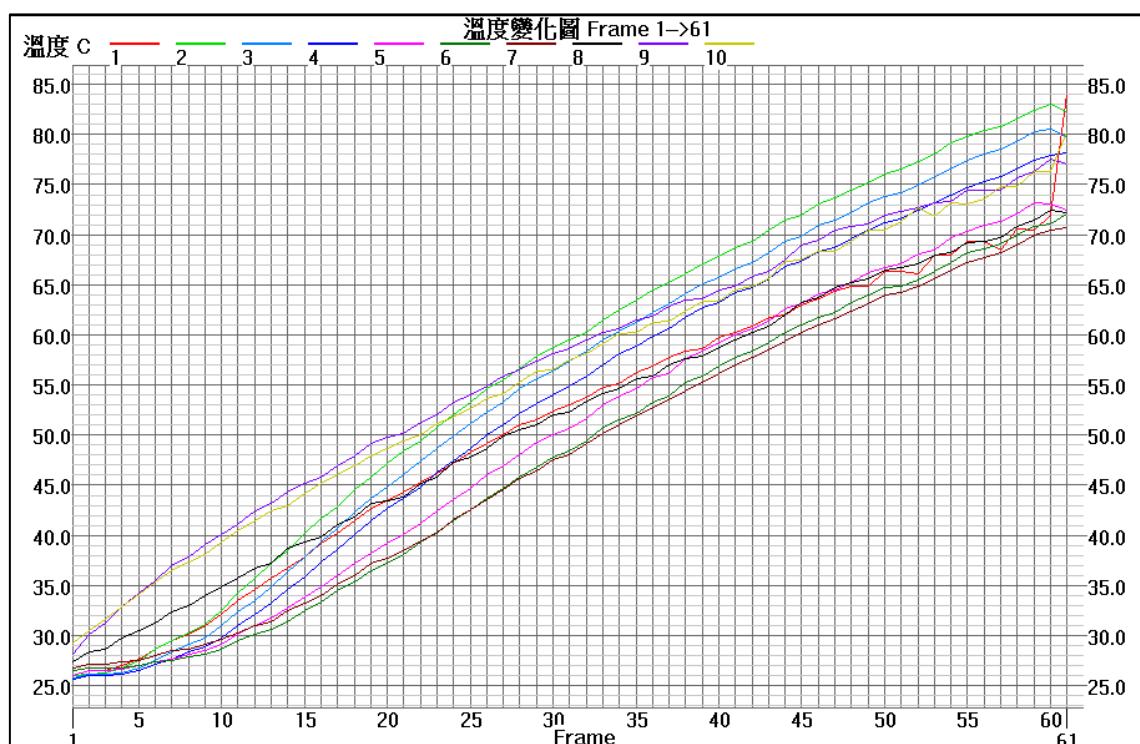


圖 5.72 活塞與夾具隨時間的溫度變化圖(實驗四)

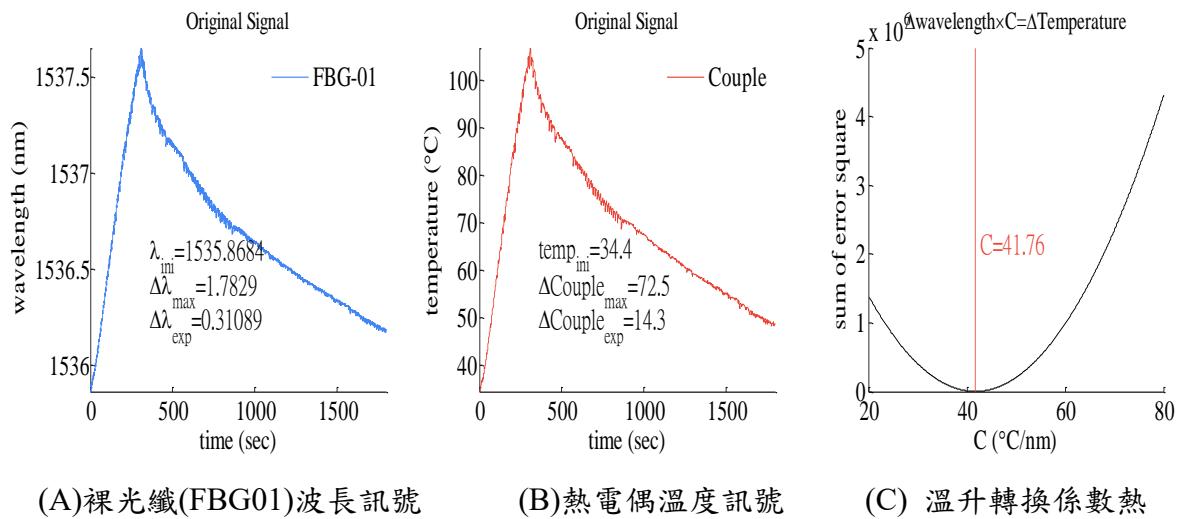


圖 5.73 活塞外壁裸光纖、熱電偶原始訊號與溫升轉換係數

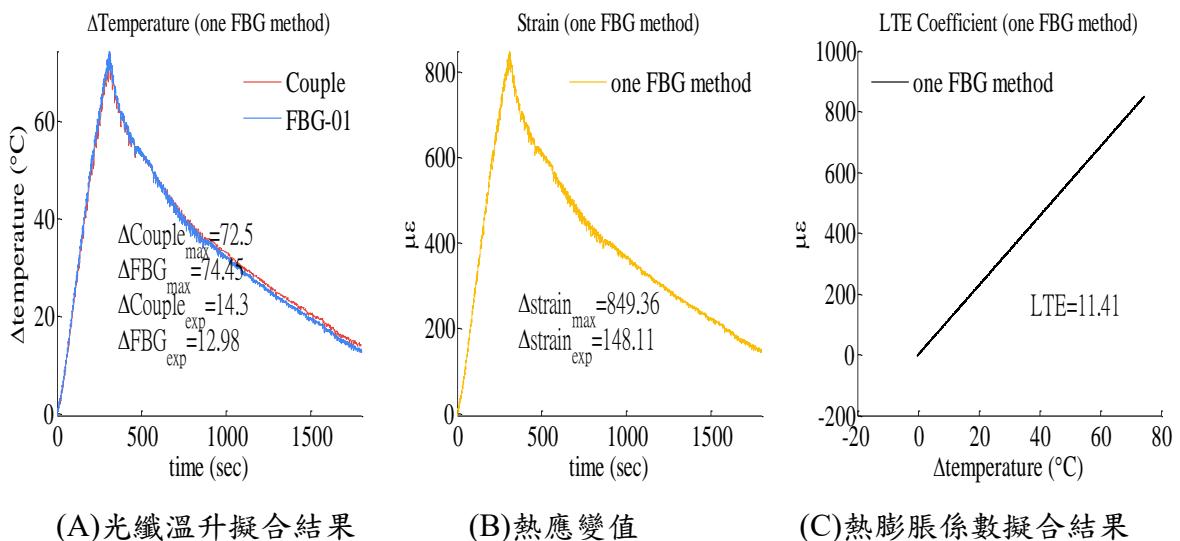


圖 5.74 裸光纖溫升擬合結果、熱應變值與熱膨脹係數擬合結果

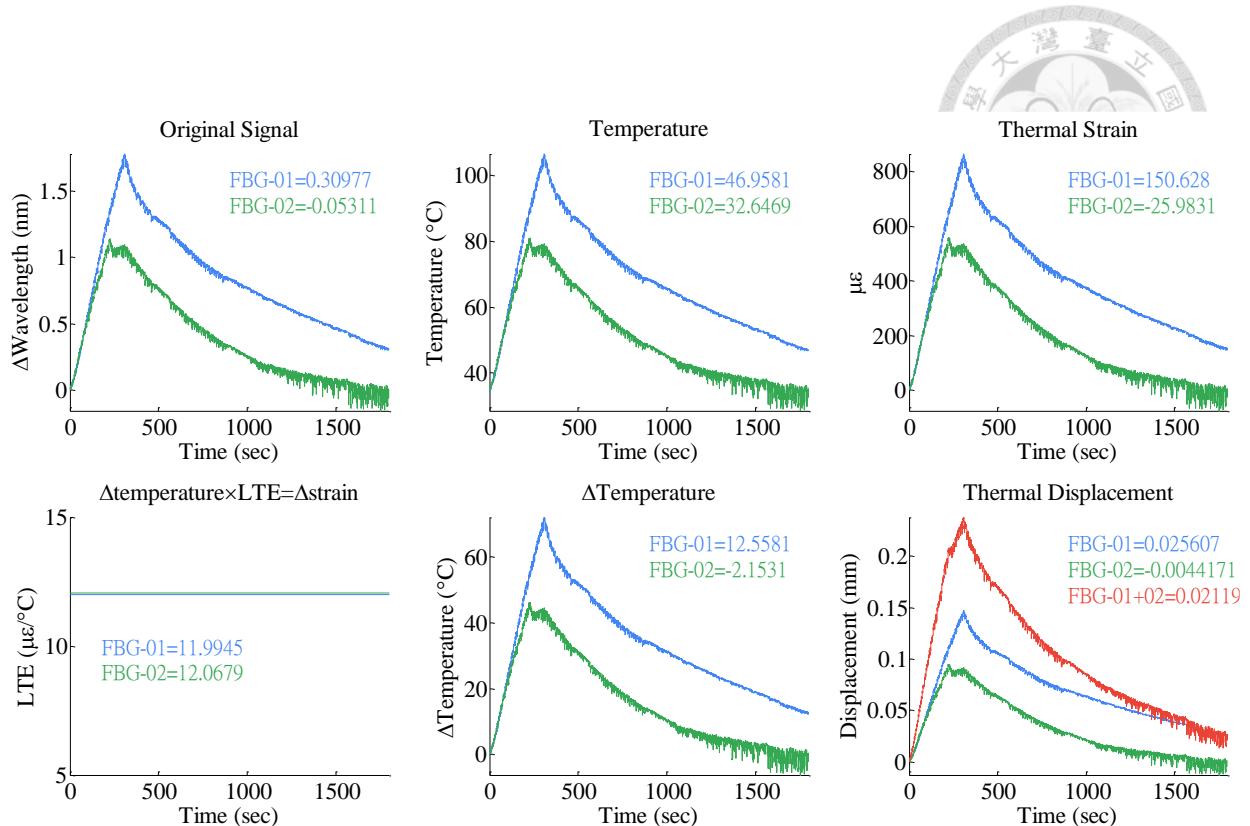


圖 5.75 即時畫面呈現溫升相關資訊(實驗五)

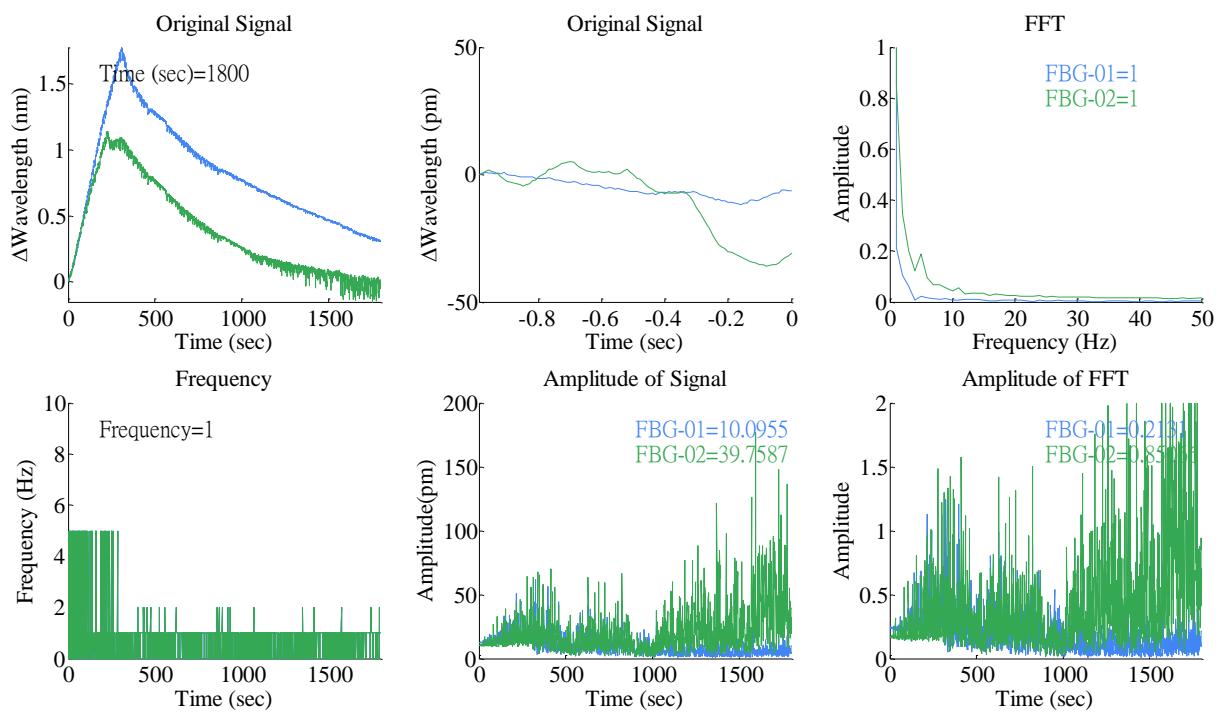


圖 5.76 即時畫面呈現振動相關資訊(實驗五)

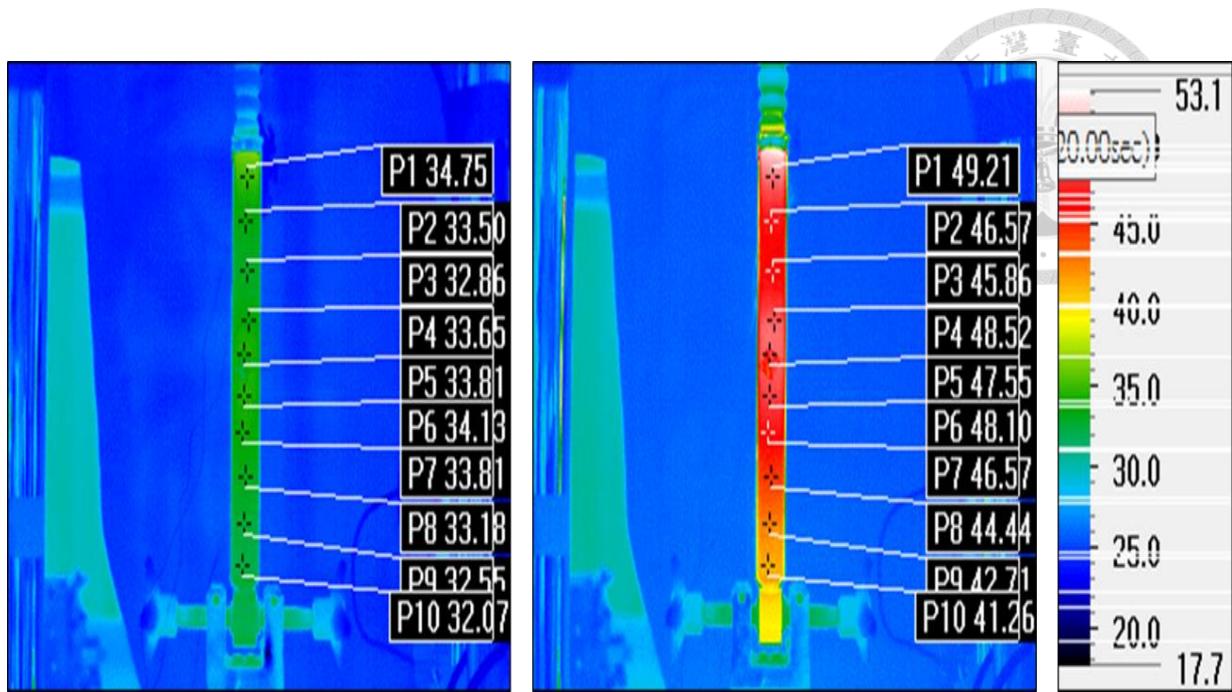


圖 5.77 热像儀於活塞外桶的初始與結束溫度結果(實驗五)

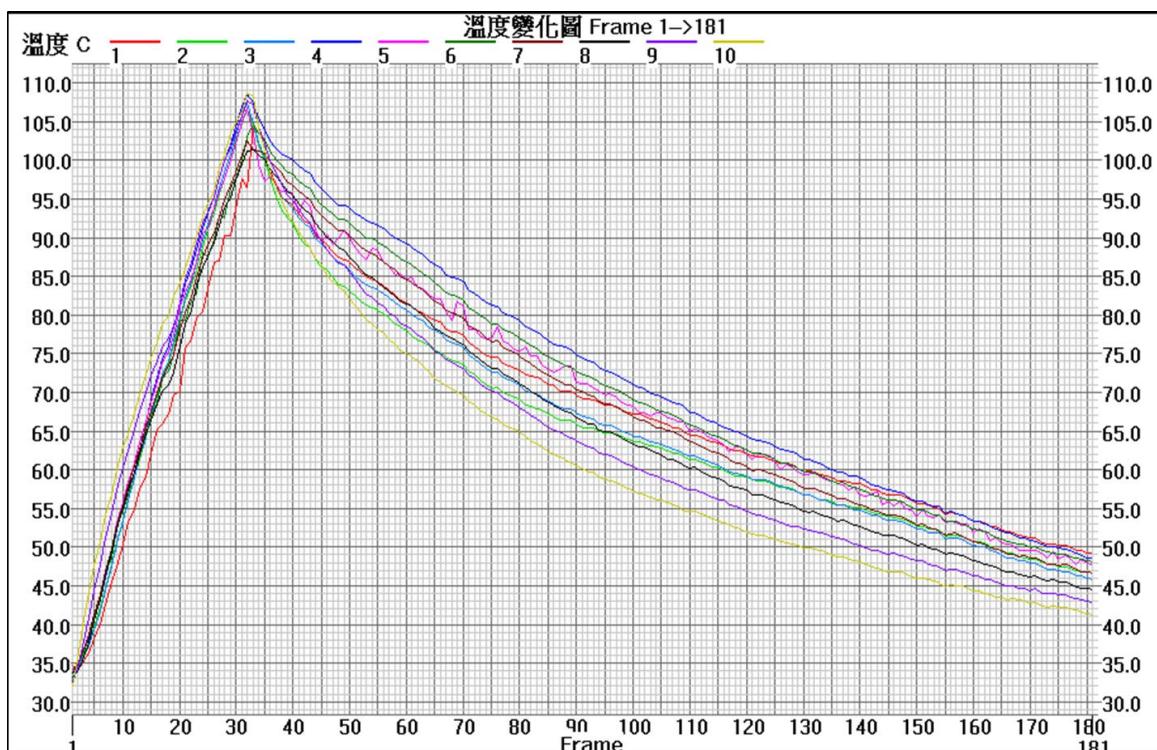


圖 5.78 活塞與夾具隨時間的溫度變化圖(實驗五)

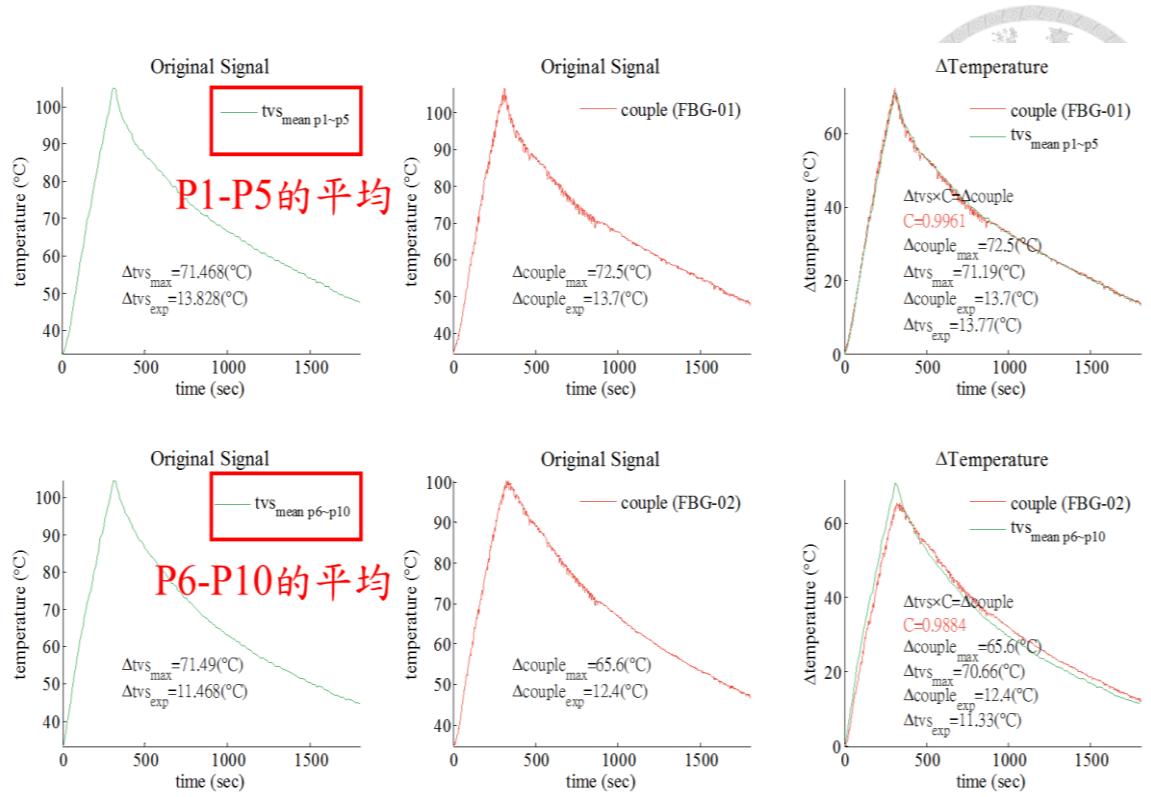


圖 5.79 热像儀與热電偶溫升擬合(上排為裸光纖 FBG01、下排為裸光纖 FBG02)

第六章 彈簧的動態量測與遠端監控系統

布拉格光纖光柵具有質輕徑細、多點量測、不受電磁波干擾與極高解析度等多項優點，本文將光纖光柵感測器黏貼在彈簧表面，來量測壓縮彈簧變形量，接著藉由 MATLAB 程式語言開發即時量測系統，可對彈簧系統在各種不同頻率作動之動態行為進行精密的多點變形量測。除此之外，彈簧經由長期往復壓縮過程中所造成交變應力作用，會因為達到疲勞強度而導致斷裂失效，為了預防這種安全問題發生，本實驗另以交互相關的方式解析訊號的相似程度，若是解析出的相關係數值出現劇烈下降的改變，即代表兩訊號具有極大不同，此時可用來預測彈簧系統可能已經存在損壞或疲勞情況。

由於彈簧避震器運作時會因為試驗機設定的施力與頻率，而造成彈簧內各部位有不同的變形，而一般進行應變量測時，大多選擇應變規作為感測器，但由於應變規是以電阻訊號變化來解析應變資訊，因此易受環境電磁訊號干擾，而應變規黏貼需較大面積，若應用在線直徑較小的彈簧時，需根據尺寸購置不同形式應變規，造成成本支出極高，因此利用光纖光訊號優勢作為量測彈簧方法，透過光纖量測應變的資訊，可解析感測段變形量，同時兼顧量測高精密度與降低干擾。

數位影像相關法(Digital Image Correlation, DIC) 整體實驗架設非常簡單，屬於全域非接觸式光學量測技術，其用在可見光環境及進行多點量測多項優勢，所以可作為量測壓縮彈簧在複雜實驗環境使用下最佳的量測方法。彈簧是工業界廣泛使用的一種彈性元件，透過壓縮時彈簧會儲存機械能之特性，彈簧經常扮演機件在運動、緩衝、儲能等功能最重要的角色。彈簧製造完成時有許多性質需要檢驗，其中主要以彈簧係數 K 值最為重要。常見的彈簧檢驗方式是使用 MTS 萬能試驗機，將彈簧放置於試驗機上做來回往復運動，同時藉由 MATLAB 程式語言所開發數影法即時量測系統，利用 MTS 萬能試驗機對彈簧進行往復式壓縮運動，將由數影法所量測結果與 MTS 輸出負載及位移，來計算彈簧係數並與原廠量測結果進行比較。



與探討。本文中以數影法作為彈簧係數之量測工具，除了開發有別於試驗機的精密量測方式，也能夠驗證實驗中所開發的量測系統可靠性。利用數影法具有同時多點量測之優勢，可量測彈簧在不同螺距變化下之重複性，這也是數影法相較試驗機之量測優勢。

此外，本實驗亦結合遠端即時監控系統，除了可以遠端監控即時量測結果，當設備出現異常訊號時，監控系統會自動傳送簡訊至相關操作員的手機，操作員便可依據所接收的資訊，即時進行相關故障排除。

6.1 布拉格光纖光柵實驗的訊號解析流程

本節將基於光纖張量系統並利用熱光效應與光彈效應，推導出單軸向共振波長飄移理論進行解析，並簡述解析應變與伸長量之流程。

6.1.1 布拉格光纖光柵共振波長飄移理論

當應力場以及溫度場同時加載在光纖光柵後，使光纖光柵產生波長飄移，當其承受單軸向應力時，可以將光柵波長飄移量與應變和溫升之間的關係可表示成(6.1)式，其中 λ_0 為光纖初始中心波長值約為1530(nm)~1560(nm)間、光纖應變係數 $K_\varepsilon \approx 0.8$ 與光纖溫升係數 $K_T \approx 5.92 \times 10^{-6}(1/K)$ 。

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = K_\varepsilon \varepsilon + K_T \Delta T \quad (6.1)$$

當光纖受到作用力負載而產生應變時，由波長飄移量即可獲得應變的資訊，此與一般常用應變規具有相同的功能。當光纖只承受溫升影響時，可利用熱電偶或熱像儀校正光纖溫升係數 K_T 值，即可透過光纖的飄移量得到溫升資訊。而一般同時會伴隨溫升與應變的問題，只要將溫升所造成的飄移量扣除後，即可得到應變量值。本實驗因為將光纖貼附在彈簧表面，因此共振中心波長資訊並不受溫升項影響，完全由應變造成整體光纖共振中心波長的飄移。



6.1.2 光纖光柵感測器於應變與變形量量測

當光纖單純受到拉伸而產生應變時，過程中溫度並沒有改變，則由共振波長飄移理論可以得到拉伸過程中的應變歷程，關係式如下：

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = K_\varepsilon \varepsilon + \cancel{K_T \Delta T} \rightarrow \varepsilon = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \times \frac{1}{K_\varepsilon} \quad (6.2)$$

$$\delta = \varepsilon \times \Delta L \quad (6.3)$$

實驗中將光纖黏貼於彈簧上，彈簧安裝在 MTS 萬能試驗機，因作動過程中彈簧不會有溫升的影響，因此彈簧上的應變量可藉由式(6.2)來進行計算。當進行伸長量計算時，由式(6.3)只要將應變乘彈簧兩端點之距離來解析變形量，考量彈簧表面接近弧形，因此黏貼的端點距離可取光柵長度 $\Delta L = 20(mm)$ 來進行伸長或壓縮量的解析。

6.2 數位影像相關法基本原理與實驗儀器介紹

本文數位影像相關法(Digital Image Correlation, DIC)是使用高解析度的數位相機對待測物進行拍攝，並採用實驗室自行開發演算法來追蹤在待測物表面特徵點，分析量測點隨時間的位移與變形，數影法屬於非接觸式、全場的光學量測方法。

本節將詳細說明數位影像相關法(Digital image correlation, DIC)技術原理，介紹次像素(0.01pixel)等級搜尋演算法，可以應用在避震器系統之壓縮彈簧精密量測。同時定義數影法量測之重要參數。對於研究中不同之量測精度要求，選擇合適的量測儀器，並詳細說明實驗操作流程及相關注意事項。

6.2.1 數位影像相關法基本原理

數位訊號資料結構通常為一維數據(如音波或電波訊號等)。相關法(cross correlation)是常用來追蹤特定訊號 $g(l)$ 與進行演算的一種方法，可以針對原始訊號 $f^{(\gamma)}(i)$ 進行逐步搜尋，同步確定追蹤目標訊號位置，其表示如(6.4)式：

$$C_{CC}^{(\gamma)} = \sum_{l=-L}^L [f^{(\gamma)}(i+l) \times g(l)] \quad (6.4)$$

在關係式(6.4)中 L 為特徵訊號長度，上標 γ 表示在不同時間下所記錄訊號，而 $C_{CC}^{(\gamma)}$ 是經過運算處理後的一維訊號。使用相關法對一維訊號進行處理的主要流程及結果，如圖 6.1 所示。在圖 6.1 (a)分別為五個不同時間下記錄原始訊號，其中藍色虛線方框標記的部分為欲追蹤之特徵訊號，其它部分訊號屬於干擾雜訊，可以觀察到原始訊號訊噪比(signal-to-noise ratio)過低，由圖 6.1 (a)無法確定特徵訊號所在位置。藉由上述相關法公式(6.4)式，對原始訊號 $f(i)$ 進行運算，搜尋特徵訊號 $g(l)$ ，運算結果如圖 6.1 (b)，縱軸表示相關性 $C_{CC}^{(\gamma)}$ 的值，對比圖 6.1 (a)可觀察出相關法可顯著提升訊號之訊噪比，特徵訊號 $g(l)$ 所在位置出現最大峰值，由此即可明顯確認特徵訊號的實際位置。

藉由上述相同方式，可將一維相關法運算方式進一步提升至三維影像處理。影像堆疊(image stack)的概念就是在不同時間或加載條件，來記錄所得數位影像建構的三維離散資料，一組堆疊影像 $f^{(\gamma)}(i, j)$ 由多張連續影像組成，包含兩個空間軸及一個時間軸，如圖 6.2 所示。

數影法概念與一維演算法運算大致相同，其關係式可表示為：

$$C_{CC}^{(\gamma)} = \sum_{l=-L}^L \sum_{m=-M}^M [f^{(\gamma)}(i+l, j+m) \times g(l, m)] \quad (6.5)$$

在(6.5)式符號 $g(l, m)$ 為欲追蹤的特徵影像， L 與 M 為特徵影像之大小， $C_{CC}^{(\gamma)}$ 為經過運算後的二維訊號相關係數。在(6.5)式是由四維矩陣乘上二維矩陣，可透過程式語言(C++)進行單執行序及 4 個迴圈來完成運算。經過技巧性轉換可將其轉化為二維矩陣與一維矩陣相乘，結合 CPU 與 GPU 平行運算可提升實際運算效能，應用於兼具高效率與高空間解析度之數影法技術。

數位影像相關法(Digital image correlation, DIC)屬於全場非接觸式光學量測技術，藉由數位相機記錄待測物位移、受力形變等物理量之連續影像，透過電腦讀取

影像之灰階值資訊，進而使用搜尋演算法計算待測物之位移及形變資訊，本研究著重探討二維平面之量測問題。因為數影法無法對影像上單一像素進行搜尋，故於實際實驗量測時，需以搜尋像素點為中心(x, y)建立子集合(Subset)作為影像搜尋模板，稱為樣板子集合(Template subset)，其需求數量可由公式 $(2M+1) \times (2M+1)$ 計算出，其中 M 稱為半窗格(Half-window)，可依實際量測條件需求，來選擇對應半窗格大小，如圖 6.3 所示。

對於某些待測物表面不存在天然紋路，或缺少可用於追蹤的特徵點，所以進行實驗量測前，需採用人工方式來增加特徵點，以便於實驗影像搜尋。製作特徵點有噴漆、網版印刷與手寫等三種常見方式，如圖 6.4 所示。噴漆可用於小型尺寸的試片，網版印刷則適用於中型尺寸試片，使用書寫方式範圍最為廣泛，可依實際量測需求選擇相對應之手寫特徵大小，所以可依照實驗實際需求，選擇合適量測方法。數影法之影像追蹤過程如圖 6.5 所示，該實驗透過記錄待測物受力變形之連續影像，時間序列由左到右，圖中紅色框選部分即為樣板子集合。可由數影法確定樣板子集合於不同時間之座標位置，得到樣板子集合之位移，再將位移透過數值微分，進一步計算出全場應變值。

6.2.2 數位影像相關法數據分析之重要參數

數影法應用於實際量測時，需依據實驗條件設定相關參數，以求得品質優良的量測結果，方便後續進行數據分析。數影法參數選擇具有較高的靈活性，亦會影響數影法量測結果及實際運算時間。數影法在實際應用上，實驗數據皆以像素(pixels)來表示，只有定性上量測結果，不過可以透過定義幾個參數，將量測的結果以定量的方式呈現，以下介紹三個 DIC 重要參數。



A 時間參數

時間參數(Time Factor)為數影法之影像取樣頻率，實驗量測時可依據實際需求選擇相應之影像記錄儀器設備。使用光學設備拍攝影像時，不同的照相機都有各自不同的時間參數(time factor)，也就是時間的解析度，即為兩張影像之間相隔的時間差，數值越小表示時間解析度越高。一般市售數位相機，取樣頻率可設定每秒 60、120、240 張影像，其時間參數分別為 60fps、120fps、240fps，適用於準靜態或緩慢移動、形變之量測問題。

實驗可以根據準靜態或動態問題選用適合時間參數的拍攝設備，若需要量測動態問題如結構振動、撞擊測試，則需要特殊規格的高速攝影機，但由於快門時間縮短，導致影像亮度大幅降低，因此在實驗時需搭配其他光源來補強光線，以獲得較佳的影像品質。至於準靜態的問題，可使用取樣頻率較低，但畫質較高的設備，來提高其空間解析度。

B 空間參數

數影法是以基本單位像素(Pixel)進行影像堆疊運算處理，如需計算定量實際位移與形變之量測結果，還需要空間參數(gauge factor)來轉換單位像素所代表的實際長度，其關係式如(6.6)式：

$$\text{Gauge Factor} = \text{size of ruler (object) /pixels} \quad (6.6)$$

實驗量測需配合具體條件，針對待測物實際尺寸及量測精度要求，需選擇適合空間參數(Gauge Factor)。空間參數越小，數位影像中單位像素對應之實際長度越小，表示量測空間解析度越高；空間參數越大，單位像素對應之實際長度越大，相反的空間解析度越低。空間參數不僅受到光學設備之放大倍率影響，亦與光學元件的解析度直接相關，通常藉由更換不同的相機鏡頭來對物體進行量測，以提升影像之空間解析度。本實驗室所開發數影法演算核心精度可達 0.1(pixel) 與 0.01(pixel) 范圍間，主要根據拍攝的影像品質來決定。



C 半窗格

數影法進行影像搜尋主要透過追蹤待測物特徵點方式，其特徵值運算原理，如圖 6.6 所示。右圖為一個普通黑白影像，由電腦讀取該影像後轉成一個數值矩陣來表示，其中矩陣中各元素的數字代表畫素的灰階值，白色灰階值為 100、黑色灰階值為 0，當只對單個白色或黑色畫素進行特徵點追蹤，會造成同樣數值的重複性會過高，電腦無法透過單一像素點之灰階值進行影像追蹤，容易造成數值計算錯誤。因此，實際運算時並非指定單一像素點，而是必須選取一特定像素範圍作為特徵值進行搜尋。

數影法透過半窗格(Half window)定義欲選取特定範圍，其追蹤示意圖如圖 6.7，在圖 6.7 中心點就是要分析的特徵點，也就是要追蹤的量測點，此範圍是以特徵點為中心向四周等距離拓展。以設定半窗格大小為 $M = 2$ 為例，也就是於中心點上下左右各選取 2 個像素，故搜尋時選取區域範圍為 $(2 \times 2 + 1) \times (2 \times 2 + 1) = 25$ 個像素，該區域稱為樣板子集合(Template subset)。

半窗格(Half window)大小可依實際量測狀況進行調整，如待測物表面特徵斑點幾何形狀、待測物位移值與變形程度等因素。當待測物位移或形變量越大，則需增加半窗格大小。一般而言，半窗格越大，搜尋所需之運算時間越長；半窗格較小，其運算所需時間也愈少，不過要進行大位移或大變形的實驗時，則須要增加半窗格的大小，因此也會造成電腦運算時間增加。半窗格將決定建立之樣板子集合包含的特徵值，直接影響數影法的運算時間及準確性。

6.2.3 正規化交叉相關法

數位影像是由許多像素(Pixel)所組成，而每一個像素所使用的位元(Bit)數則稱為影像深度，可以代表該像素可呈現的顏色數量。以本系統所使用的灰階影像為例，灰階影像深度為 8 位元，因此影像中的每一個像素皆具有由黑到白共 256 種灰階



的可能性。

在訊號處理領域中，交叉相關(Cross-correlation)是用來描述兩個訊號間相似性，而這樣特性便是數影法核心概念，其正規化(Normalization)數學關係式如(6.7)所示：

$$C_{NCC} = \sum_{l=-L}^L \sum_{m=-M}^M \left[\frac{f(i+l, j+m)g(l, m)}{\bar{f} \times \bar{g}} \right] \quad (6.7)$$

關係式中 L 與 M 分別為二維訊號的行與列大小，而 f 與 g 則分別為原始訊號與欲追蹤的特徵影像(目標訊號)， C_{NCC} 則是兩個訊號的相關係數，當相關係數越大，表示兩個訊號相似度越高，反之。但實際計算，還會加上如式(6.7)正規化(Normalization)計算程序，使得計算相關係數會在 ± 1 範圍間。當相關係數等於 1 時，則代表兩個訊號完全相同，使我們能夠快速判定兩個訊號的相似度程度。

依據上述概念，若訊號 f 與 g 分別代表原始影像與目標影像，原始影像在數影法中可以為原始完整影像或是範圍較小的搜尋子集合，而目標影像則可以稱為樣板子集合，如圖 6.3 所示。針對每一個像素進行公式(6.7)計算，便可以得到全場相關係數，再尋找此相關係數場的最大值，便是目標影像在原始影像上最可能的整數像素位置如圖 6.8(a)和(b)所示，完成正規化交叉相關法運算。

6.2.4 相關係數極值搜尋演算法

數影法之基本原理，以及數據分析所需重要參數已於前文詳細說明。然而，藉由相關係數進行影像搜尋，其量測精度將僅限於整數像素(Integer pixel)等級，並不具備精密量測之能力。對於量測精度要求更高的工程問題，數位影像搜尋演算法精度需提升至次像素等級(Sub-pixel)。

本實驗室使用相關係數極值搜尋法(Correlation coefficient peak-finding algorithm, CCPF)先透過搜尋相關係數極大值之像素座標，求得整數像素解(Integer pixel solution)，再以相關係數極大值所在位置為中心，選取大小為 3×3 的相關係數次矩陣(Correlation coefficient sub-matrix)。藉由二元二次多項式擬合取出之次相關



係數矩陣，對擬合曲面進行空間微分，當微分值為零，即為擬合曲面極大值頂點位置，由此求得次像素解(Sub-pixel solution)。最後，整合像素整數解及次像素解，即可求得總解(Total solution)。在圖 6.9 中 f 為受力形變前之參考影像， g 為待測物受力後形變影像。演算法於參考影像中選取 P 中心點 (x_0, y_0) 建立樣板子集合 (Template subset) \mathbf{T} ，假設受力作用後，中心點移動至 $P^*(x^*, y^*)$ ，變形影像中隨機搜尋目標子集合 (Target subset) \mathbf{S} ， \mathbf{T} 與 \mathbf{S} 的集合數量各為 N ，使用(6.7)正規化交叉相關法(NCC)公式來計算相關係數。因此透過樣板子集合 \mathbf{T} 對形變影像進行全場相關係數運算，可得相關係數場如圖 6.10 所示。首先，解出相關係數場極大值，該點所在位置即為整數末位置像素解 (x_i, y_i) 。然後，選取以極大值位置為中心之 3×3 的相關係數次矩陣，透過區域座標藉由二元二次方程式擬合次相關係數矩陣

$$C_{NCC}(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 \quad (6.8)$$

計算可得係數 a_0 、 a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 與 a_5 ，將(6.8)式取空間導數並令其等於零。

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{NCC}}{\partial x} &= a_1 + 2a_3x + a_4y = 0 \\ \frac{\partial C_{NCC}}{\partial y} &= a_2 + 2a_5y + a_4x = 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

解得次像素位移如下

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{2a_1a_5 - a_2a_4}{a_4^2 - 4a_3a_5} \\ y_s &= \frac{2a_2a_3 - a_1a_4}{a_4^2 - 4a_3a_5} \end{aligned} \quad (6.10)$$

形變影像之樣板子集合 \mathbf{T} 末位置

$$\begin{aligned} x^* &= x_i + x_s \\ y^* &= y_i + y_s \end{aligned} \quad (6.11)$$



樣板子集合 \mathbf{T} 位移即可表示為

$$u = x^* + x_0$$
$$v = y^* + y_0$$

相較於藉由相關係數進行影像搜尋，相關係數極值搜尋法 (Correlation coefficient peak-finding algorithm, CCPF) 可以快速解出次像素位移，而本實驗自行開發之數影法系統已經可以做到精度 0.02 像素，可將其應用於許多工業界需精密量測需求之問題上。

6.2.5 數位影像相關法實驗操作流程

數影法為非接觸全域式光學量測技術，可直接在可見光環境下進行量測，且實驗架設相對簡單，使用數位相機記錄待測物影像，並且計算位移、速度、加速度、應變等資訊。數影法於實際量測中，主要可以分為實驗架設及數據分析兩大步驟，其操作流程如下所示：

1. 製作待測物表面特徵值：當待測物表面相對光滑，或沒有明顯灰階值差異，則需藉由人工書寫或噴漆的方式增加表面特徵值。當待測物表面存在天然紋理或明顯特徵，此步驟可以直接省略。
2. 架設攝影設備：當進行量測時，可依據待測物實際大小及量測條件選擇適合之影像設備，例如量測懸臂梁動態特性，可使用具備高頻率影像記錄能力的高速相機；對於微奈米等級之材料奈米壓痕試驗，則需透過高放大倍率之電子顯微鏡進行量測。選擇適當的攝影設備可大幅提升量測空間解析度、時間解析度，達到最佳量測效果。
3. 攝影設備校正：建立正確的影像座標系統，校正相機與待測物表面，確定兩者互相保持平行，以及各量測儀器之同時觸發設定。

4. 實驗量測及數據存取：實驗量測中需注意相機對焦與調整光源，以獲得清晰之實驗影像，並選擇充足儲存空間。同時，記錄實驗量測之空間解析度(Gauge factor)及時間解析度(Time factor)，以利用於後續數據分析。

進行數據分析前，需提前確認影像品質良好，再於演算法中輸入實驗之時間參數及空間參數，透過堆疊影像計算待測物之全場位移及應變資訊。影像分析為數影法關鍵手法，包含大量數值分析及核心演算法。數影法操作流程如圖 6.11 所示。

數影法之商用套裝軟體，不僅價格昂貴，且無法在核心演算法上進行調整，實際使用中往往受限於固定取像頻率及技術限制，而無法應用於其他相關領域。本實驗室自行開發之數影法，可使用現有設備搭配合適的光學鏡頭，獲得高品質的清晰實驗影像。實驗量測結果可與市售其他感測器相互對照以確認其準確性。此外，亦可結合平行運算技術來提升運算速度。

6.2.6 實驗儀器介紹

本文主要應用數影法針對跨領域、跨尺度之工程問題進行量測，本文亦於實驗量測中使用其他感測器以驗證其準確性。各章節使用之量測儀器設備，具體規格及操作說明如下：

A. 數位工業相機

本文使用加拿大 Point Grey Research Inc. 生產的即時數影法系統產品。在圖 6.12 數位工業相機型號 GS3-U3-23S6M-C，適用於低頻率物體動態量測。相機相關規格包括全幅影像寬高比為 8 比 5，感光原件(CMOS sensor)解析度 1920×1200 pixels，在最大解析度下最高幀率可達 162 FPS，CMOS sensor 實際尺寸為 1 吋，圖像深度 12-bit，搭配 USB 3.0 傳輸介面，在全解析度 1920×1200 pixels 條件下，取樣頻率最高可達每秒 163 張影像。



B. SONY DSC-RX100M5 數位相機

本文使用日本 SONY 公司所生產數位相機(型號：DSC-RX100M5)，如圖 6.13 所示。相機系統規格包括內置 1.0 吋 Exmor RS CMOS 感光元件，長寬比為 3 比 2，有效像素約 2010 萬。感光度介於 ISO 125 至 ISO 12800。對於動態問題，可使用高幅率(High Frame Rate)錄影模式，可自行選擇對應之拍攝幀率。使用相機需注意地 方是會以比拍攝幀率更快的快門速度拍攝。例如，若設定 960 fps，每幀實際快門速度會比約 0.001 秒更快，以達到每秒拍攝 960 幀，為保持此快門速度情況，可採用人工光源確保影像品質。

6.3 實驗架設

本研究於國立台北科技大學拉伸實驗室進行彈簧量測試驗，圖 6.14 中顯示本次實驗架設整體示意圖，包括 MTS 材料萬能試驗機、光纖光柵量測、數影法量測與及時遠端監控等系統。本實驗使用美國 MTS Bionix 系列液壓高頻疲勞動態軸向扭轉萬能材料試驗機，此萬能材料試驗機提供機械、生醫等領域測試所需的動態和靜態測試，試驗機如圖 6.15 所示。圖 6.16 為 MTS 系統之操作介面，MTS 系統以 PIDF 參數控制試驗機之力大小進而控制試驗機之運動。在光纖光柵量測試驗中，將三段光纖光柵感測器黏貼於彈簧上，實體圖如圖 6.17，光纖感測器 FBG01、FBG02、FBG03 分別依序黏貼於彈簧本體的上中下區域位置，可用來解析在彈簧上各個位置應變及變形資訊。本實驗中利用 MTS 液壓壓力試驗機進行設定後來壓縮彈簧，整體實際系統架設如圖 6.18 所示，而將彈簧置放於試驗機時會給予一預壓作用力，使彈簧的初始狀態為固定於試驗機上，基於光纖感測器本身為線狀感測器的優勢，可從彈簧旁邊微小的空間連接至量測系統，如圖 6.19。

圖 6.20 為本次實驗彈簧外觀與進行 DIC 實驗所標示追蹤點位。由於彈簧下方為固定點，因此彈簧壓縮過程中位移由大到小可分別對應追蹤點為 P1 至 P5 位置。

圖 6.21 為彈簧出廠時的檢查結果，也是作為本次實驗彈簧係數比較參考表。

進行 DIC 量測所使用的相機有兩種，第一種為 GS3-U3-23S6M-C 數位工業相機，如圖 6.12 所示，使用於頻率 3Hz 及 1Hz 的量測實驗中，在較慢的壓縮頻率下進行即時數影法之量測。而第二種相機為 SONY DSC-RX100M5 數位相機，如圖 6.13 所示，使用於 5Hz 的量測實驗中，因 5Hz 為較快之壓縮頻率，為避免即時數影法無法全程順利追蹤，因此採用數位相機錄影的方式來進行非即時數影法。

6.4 光纖光柵與數位影像相關法實驗結果分析

本節將針對本次實驗的幾組實驗結果進行詳細探討，主要以光纖光柵量測彈簧在 5Hz、3Hz 及 1Hz 等不同壓縮頻率下，來討彈簧的應變、變形量與交換相關的係數變化，也將探討彈簧的位移及彈簧係數，並將 DIC 量測結果與 MTS 試驗機所輸出之結果進行比較。

6.4.1 試驗機設定 5Hz 往復壓縮彈簧

A.1 光纖光柵量測彈簧變形實驗結果分析

本小節將光纖光柵感測器以 1000Hz 取樣率，針對彈簧在壓力試驗機設定 5Hz 的情形下進行量測，實驗時間為 600 秒。但由於萬能試驗機須由手動方式來調整機器真實頻率至理想頻率，因此調整後設備須經過一段時間才會趨於穩定作動情況，而實驗整體實驗架設如圖 6.18。彈簧固定於壓縮試驗機，並由上至下分別標以桃紅色(FBG01)、綠色(FBG02)與藍色(FBG03)三個量測點如圖 6.19。由圖 6.22(A)所示，可以看到前十分鐘實驗量測過程，由於三號位置藍色量測點光纖(FBG03)所受應變較大，因此覆蓋一號位置桃紅色量測點光纖(FBG01)及二號位置綠色量測點光纖(FBG02)的訊號，訊號在約 200 秒後趨於穩定，其中最底部三號位置藍色量測點光纖(FBG03)具有較大應變值，其波長飄移量約在 $-0.17(nm) \sim 0.15(nm)$ 間飄移，



由圖中的波長飄移結果顯示，中後半段訊號相較前段訊號穩定，但整體輸出訊號仍有略為低頻震盪的現象。圖 6.22(B)為穩定後在時間 560 ~ 561 秒之波長飄移細部圖，明顯看出圖中資訊為所設定 5Hz 頻率，而放大細部圖後，可以發現一號位置桃紅色量測點光纖(FBG01)約介於 $-0.05(nm) \sim 0.05(nm)$ 間飄移，而二號位置綠色量測點光纖(FBG02)應變相較一號位置所量測到為大，波長飄移約在 $-0.08(nm) \sim 0.08(nm)$ 間飄移。圖 6.22(C)為前 600 秒應變資訊，根據前述之解析流程將波長飄移輸出成應變資訊，由於在一、二號位置的訊號被三號位置所覆蓋，將 560 ~ 561 秒時間範圍內之細部應變資訊於圖 6.22(D)呈現，一號位置桃紅色量測點的應變範圍約介於 $-48(\mu\varepsilon) \sim 46(\mu\varepsilon)$ 變化、二號位置綠色量測點約介於 $-69(\mu\varepsilon) \sim 67(\mu\varepsilon)$ 範圍間，最底部的三號位置藍色量測點約為 $-146(\mu\varepsilon) \sim 121(\mu\varepsilon)$ 間變化。圖 6.22(E)為解析整體實驗過程由應變所得到的伸長變形量，觀察圖 6.22(F)變形量細部圖可以發現變形最大的三號位置藍色量測點變形量約在 $-2.8(\mu m) \sim 2.4(\mu m)$ 間變化，二號位置綠色量測點變形量約在 $-1.4(\mu m) \sim 1.3(\mu m)$ 間變化，一號桃紅色量測點變形量約介於 $-0.9(\mu m) \sim 0.9(\mu m)$ 間變化。

MTS 萬能試驗機所施加軸向位移與軸向作用力分別如圖 6.23 與圖 6.24 所示，位移在試驗機上約在 300 秒後呈現較穩定狀態，約介於 $-15(mm) \sim 15(mm)$ 範圍變化，一開始實驗預壓作用力為 1500N，至實驗時間約 300 秒後呈現約 $-500(N) \sim 500(N)$ 範圍變化，整體趨勢變化相較光纖所量測到波長飄移大致相符。

A.2 光纖光柵量測彈簧互相關結果分析

接著在整體訊號中取出一個週期的穩定訊號作為前述的特徵訊號，對整體訊號進行互相關的分析，此分析特徵訊號以三號位置藍色量測點光纖(FBG03)資訊進行解析，解析後如圖 6.25 所示，由於特徵訊號是擷取穩定訊號中的一段訊號，因此解析後的相關係數將隨著系統逐漸穩定而趨近於 1。若針對 560 ~ 561 秒時間範圍內進行解析，如圖 6.26 所示，當訊號在接近穩定後，相關係數將隨著彈簧系統變



形在 ± 1 間變化。

B. 數位影像相關法實驗結果分析

本次實驗使用 SONY DSC-RX100 M5 數位相機進行影片錄影，取像速率為每秒 120 張影像，Gauge Factor 為 $0.2596 (mm/pixel)$ 。實驗結果如圖 6.27 所示，圖中位移由大至小分別對應至圖 6.20 中彈簧由上到下 P1 至 P5 追蹤點，而最大位移為圖 6.20 中 P1 追蹤點，即為圖 6.27 中藍色訊號部分；圖 6.20 中 P5 追蹤點恰為彈簧安裝於設備固定端，對應圖 6.27 中黑色訊號位移為零。可以觀察到圖 6.27 中位移訊號由小逐漸變大，原因是試驗機是控制力的大小進而影響彈簧的位移，但頻率設定則是固定在 5Hz 不會改變。而圖 6.27 虛線部分表示兩段空白的訊號，第一段空白訊號造成的原因為數位相機儲存時間限制所導致的錄影中斷，而第二段空白訊號則是因數位相機過熱自動關機而導致的錄影中斷。圖 6.28 是將圖 6.27 中截取一段訊號並放大檢視，可以觀察到訊號在峰值部分有明顯被切平並扭曲現象，推測原因是相機的取像速率不足所導致。圖 6.29 是將 DIC 在圖 6.20 中 P1 追蹤點所量測藍色訊號最大位移與 MTS 試驗機之輸出位移進行比較。圖 6.29 中可以看出兩者並不是很吻合。除了上述提到的相機問題外，也可以從圖 6.30 與圖 6.31 中發現本實驗 MTS 試驗機訊號並沒有很穩定，但兩者所量測到的最大位移皆為 15.4 (mm) 。觀察圖 6.31 為放大圖 6.29 起始量測訊號，發現 DIC 一開始並沒有量測訊號，主要原因是相機延遲開始錄影所導致。

6.4.2 試驗機設定 3Hz 往復壓縮彈簧

A.1 光纖光柵量測彈簧變形實驗結果分析

本次實驗 MTS 萬能試驗機設定 3Hz 對彈簧進行作動，並設定在約 340 秒時停止系統運動，而光纖感測器之取樣頻率同樣為 1000Hz ，實驗時間為 420 秒。由圖 6.32(A)所示，本次實驗在前 100 秒時系統逐漸上升至穩定壓縮負載，且在 100 秒



後系統呈現穩定狀態，至約 340 秒後系統停止作動，彈簧恢復原始狀態，光纖量測到應變值為零，因此波長飄移歸回到零值。圖 6.32(B)圖為時間在 200 ~ 201 秒範圍間波長飄移變化，波型顯示為系統所設定 3Hz，而本次實驗中二號位置綠色量測點所量到的波長飄移量值幾乎等於三號位置藍色量測點，與前面的實驗結果有很大差異，推測主要原因可能是實驗前二號位置綠色量測點光纖因脫落，在重新上膠黏貼後，因為只經過約一小時凝固時間，膠體尚未完全凝固，因此綠色量測點光纖並未完全固定於彈簧表面，而造成此誤差。圖 6.32(C)、(D)、(E)與(F)為應變與變形量資訊，由於 MTS 參數與前面實驗一致，因此量測出的應變在三號位置約為 $-145(\mu\epsilon) \sim 131(\mu\epsilon)$ 、在一號位置約為 $-43(\mu\epsilon) \sim 43(\mu\epsilon)$ ，變形量的部分在三號位置為 $-2.6(\mu m) \sim 2.9(\mu m)$ 、一號位置為 $-0.8(\mu m) \sim 0.8(\mu m)$ 。

MTS 萬能試驗機輸出的軸向位移與軸向力資訊如圖 6.33 與圖 6.34，設定預壓負載約為 1400N，接著軸向位移也是設定約在 $\pm 15(mm)$ 間變動。顯示雖然 MTS 設定參數皆為一致(軸向作用力、軸向位移與頻率)，但由於機台內部控制因素，無法使每次實驗的控制變因相同，因此各位置的光纖量測出的變形資訊也略有不同，但整體趨勢變化相差不大。

A.2 光纖光柵量測彈簧互相關結果分析

同樣以穩定後的三號位置藍色量測點的光纖訊號取出一特徵訊號進行互相關分析，本次實驗中在接近 340 秒時，彈簧系統逐漸停止作動，因此在圖 6.35 中顯示其相關係數逐漸降低至 0 值，此時彈簧系統為靜止狀態。而在圖 6.36 為彈簧系統在 200~201 秒時間範圍內處於穩定時的相關係數，因此時為穩定狀態，所以相關係數接近 ± 1 。



B. 數位影像相關法實驗結果分析

本次實驗使用數位工業相機 GS3-U3-23S6M-C 進行即時數影法之量測，相機本身的取像速率為每秒 161 張影像，加上 DIC 系統的運算時間後為每秒 30 張影像，Gauge Factor 則為 0.3276 ($mm/pixel$)。由圖 6.37 觀察到此次實驗一開始在 100 秒前位移有逐漸變大的趨勢，結束時位移逐漸減少的趨勢。圖 6.38 為放大圖 6.37 之部分訊號，同樣存在訊號峰值尖端處被切平之現象。圖 6.39 為放大圖 6.37 之末端訊號，可看出實驗結束時位移沒有歸零，造成原因同樣是預壓力改變的關係，而最大偏移量為 0.1699 (mm)，最小偏移量為 0.0092 (mm)。而比較圖 6.40 中 DIC 與 MTS 試驗機兩者末端輸出訊號，MTS 試驗機仍在較早時間便停止記錄，但兩者有記錄段之數據皆十分吻合。而將 DIC 最大位移與 MTS 試驗機之輸出相比，如圖 6.41 所示，並將部分訊號放大檢視，如圖 6.42 所示，皆顯示兩者量測結果均十分一致。而圖 6.43 為比較 DIC 起始訊號與 MTS 試驗機之輸出相比，顯示 DIC 於時間約 $t = 0.5$ 秒才開始量測。最後，選取最大位移中的一個週期作為目標訊號，並對整段訊號進行互相關之計算，結果如圖 6.44 所示，仍在 ± 1 菲圍間跳動，也可以看出圖形具有前段遞增後段遞減的現象，驗證出數影法量測性能十分穩定。

6.4.3 試驗機設定 1Hz 往復壓縮彈簧

A.1 光纖光柵量測彈簧變形實驗結果分析

本次實驗 MTS 試驗機之頻率設定為 1Hz 進行來實驗，光纖於同樣位置以取樣頻率 1000Hz 進行彈簧量測，而二號位置因為應變膠尚未凝固，造成其訊號有誤差，因此本小節主要針對一號與三號位置的光纖結果進行討論。圖 6.45 為 1Hz 下的量測結果，整體時間內的波長飄移如圖 6.45(A)所示，由於與前次實驗頻率為 3Hz 相差三倍，因此波型也有所不同，所以大約接近 100 秒後系統呈現穩定週期性變形。圖 6.45(B)為 200~202 秒時間範圍細部訊號圖，圖中波型顯示為所設定 1Hz。圖

6.45(C)與(D)為整體實驗與細部擷取之應變資訊，穩定後三號位置藍色量測點應變約為 $-145(\mu\epsilon) \sim 134(\mu\epsilon)$ ，一號位置綠色量測點約為 $-39(\mu\epsilon) \sim 43(\mu\epsilon)$ 。圖 6.45(E)與(F)為變形量資訊，同樣三號位置藍色量測點有最大變形量約為 $-2.7(\mu m) \sim 2.9(\mu m)$ 。

本次設定的 MTS 試驗機參數如圖 6.46 與圖 6.47 所示，圖中分別顯示軸向位移與軸向作用力設定皆與前次相同，而且因頻率降低因素，讓系統能在較快時間內達到穩定狀態，在達到穩定後仍可能因不確定的控制因素導致震盪現象，如圖中軸向位移會有些微飄移，大約有 1(mm)的誤差，可能是系統本身所造成。但其整體趨勢皆與光纖量測而得的應變相同。

A.2 光纖光柵量測彈簧互相關結果分析

本次實驗同樣針對穩定後一個週期訊號為特徵訊號進行互相關，其整體相關係數與細部圖分別如圖 6.48 與圖 6.49 所示，由於是自相關分析，因此相關係數隨著系統穩定後呈現在 ± 1 範圍內進行變動。

由於前述的互相關皆以原始訊號中的穩定週期訊號作為特徵訊號，因此屬於自相關，而若是以前述實驗 3Hz 的穩定週期訊號(如圖 6.32 (B)藍色線段)作為特徵訊號與此 1Hz 的原始訊號進行交互相關，再經由正規化後明顯看出其整段訊號的相關係數降至約 0.27，如圖 6.50 所示，圖 6.51 為 199.5~201.5 秒時間範圍內詳細結果，可看到兩不同動態頻率下的交互相關係數約在 ± 0.27 間飄移。

B.1 數位影像相關法實驗結果分析

本次實驗使用數位工業相機 GS3-U3-23S6M-C 進行即時數影法實驗量測，相機本身的取樣速率為每秒 161 張影像，而加上 DIC 系統的運算時間後為每秒 30 張影像，Gauge Factor 則為 0.3276 mm/pixel。圖 6.52 為 DIC 五個追蹤點之量測結果，同樣可以觀察到前段遞增後段遞減之現象。圖 6.53 為放大圖 6.52 之部分訊號，有



別於先前 5Hz 及 3Hz 實驗中圖 6.28 與圖 6.38 的放大訊號圖，可以明顯看到圖 6.53 訊號波形十分圓滑，不再有尖端處被切平之現象，代表在此頻率的運動下 DIC 取樣速率是足夠的。圖 6.54 則是放大圖 6.52 之末端訊號，同樣可以看到預壓力不同所導致位移沒有歸零，在圖 6.54 中可看出最大偏移量值為-0.8478 (mm)，而最小偏移量值為-0.0062 (mm)。在圖 6.55 則比較 DIC 與試驗機之末端訊號結果，MTS 試驗機記錄時間仍稍短，但兩者結果仍十分吻合。圖 6.56 比較 DIC 與 MTS 試驗機之訊號，並在圖 6.57 中顯示部分放大訊號，兩者量測結果十分吻合。根據圖 6.58 初始訊號可看出在此實驗中，DIC 沒有延遲開始之現象。最後，選取最大位移訊號之中的一個週期作為目標訊號，並對整段訊號進行互相關運算，計算結果同樣在 ± 1 範圍間跳動，如圖 6.59 所示。

B.2 數位影像相關法量測彈簧係數

應用數影法來量測彈簧，不但可以驗證數影法量測能力，也能夠透過數影法量測位移，再根據虎克定律計算出彈簧係數，並與彈簧出廠時彈簧常數數據進行比較。透過 MTS 試驗機所輸出力資訊(如圖 6.60、圖 6.61 及圖 6.62)結合 DIC 所量測位移來計算彈簧係數，依序計算在 5Hz、3Hz 及 1Hz 實驗下彈簧係數結果。5Hz 實驗之力變化為 492.05(N)，最大位移為 15.4478(mm)，得到彈簧係數為 3.25(kgf/mm)；3Hz 實驗之力變化為 497.23(N)，最大位移為 16.3793(mm)，得到彈簧係數為 3.10(kgf/mm)；1Hz 實驗之力變化為 497.03(N)，最大位移為 16.1060(mm)，得到彈簧係數為 3.15(kgf/mm)。根據圖 6.18 顯示出廠時彈簧係數量測結果為 3.12(kgf/mm)，相互比較之下，僅 5Hz 實驗造成實驗誤差較大，其餘 3Hz、1Hz 實驗結果皆與出廠所量測彈簧常數結果相近，也驗證可以依據數影法之位移量測結果來計算彈簧係數。



B.3 數位影像相關法量測不同螺距之伸長量結果

彈簧係數是彈簧最重要的性質，而可以量測彈簧係數的方式也有許多種。然而，不同螺距伸長量也可作為評估彈簧品質之參考項目之一，但能夠量測此物理量的方法卻不多，而數影法正好具備此一優勢，因此本小節將探討本次實驗不同螺距之伸長量量測。圖 6.63、圖 6.64 及圖 6.65 分別為 5Hz、3Hz 及 1Hz 實驗，皆用來量測圖 6.17 中 P2 與 P3 間伸長量及 P3 及 P4 間伸長量，而結果顯示 P2-P3 伸長量雖略大一些，相較大於 P3-P4 之伸長量約 0.08mm，因此可判定此彈簧製造品質尚可，也驗證數影法的量測優勢。

6.5 光纖光柵感測器與數位影像相關法量測彈簧變形實驗結論

6.5.1 光纖光柵感測器量測彈簧變形結論

本次實驗以光纖光柵感測器來對於彈簧之應變變形進行量測，透過 MTS 萬能試驗機來使彈簧產生動態變形，而光纖光柵感測器黏貼在彈簧上、中、下之位置。本次 MTS 萬能試驗機之彈簧實驗在軸向位移與軸向作用力不變，探討彈簧在壓縮頻率為 5Hz、3Hz、1Hz 三種情況下所產生的變形物理量。

在三個頻率下的量測結果中，三號位置藍色量測點(接近固定端)中的光纖量測到最大的變形量，約有 $-2.5(\mu m) \sim 2.9(\mu m)$ 的變形，越接近施加作用力的上端其變形量越小，如一號位置桃紅色量測點約有 $-1(\mu m) \sim 1(\mu m)$ 範圍變形量，而在 5Hz、3Hz、1Hz 三個頻率作動下的彈簧變形量相差不大。從光纖波長飄移的波型上顯示，當 MTS 輸出至穩定系統頻率需要一段時間，當設定頻率越小時，整個試驗機系統可以較快達到穩定狀態。

在互相關解析中，針對各個頻率的波形取出一穩定的特徵訊號進行解析，其自相關的相關係數隨著系統逐漸趨於穩定後，其相關係數在正規化後越來越接近 ± 1 ，

若是以兩不同動態頻率的訊號進行交互相關則其係數值降低。因此，在監測彈簧長時間的疲勞測試實驗中，即可透過相關係數值的減少，來推測此彈簧系統可能產生變異或損壞。



6.5.2 數位影像相關法量測彈簧變形結論

本次實驗使用數影法進行彈簧變形量測，並透過 MTS 萬能試驗機來使彈簧產生動態變形。而實驗中 MTS 設定變因是基於軸向位移及軸向作用力不變之條件下，主要改變壓縮頻率來探討彈簧之變形。

主要進行彈簧在三種頻率 5Hz、3Hz 及 1Hz 下實驗量測，而其中 5Hz 是利用數位相機先行錄影再進行後處理分析，而另外直接使用即時數影法進行 3Hz、1Hz 量測。由三次實驗結果資料顯示，最大位移分別為 15.4478 (mm)、16.3793 (mm) 及 16.1060 (mm)，而所受最大作用力分別為 492.05 N、497.23 N 及 497.03N，因此可以計算出三次實驗之彈簧係數。經由本次實驗結果，數影法能夠精準量測出彈簧之變形位移，並搭配 MTS 萬能試驗機輸出軸向力，可以計算出彈簧係數。此外，數影法也能夠量測出不同螺距間伸長量是否一致，證明本實驗自行開發數影法具有量測上的獨特性。

6.6 即時量測系統與遠端警戒系統之串聯

本章藉由 MATLAB 來開發即時光纖光柵量測，與數影法量測系統，並串聯巨克富科技開發之遠端警戒系統，達成即時量測彈簧系統之變形，可同時進行互相關運算，再將其變形量與相關係數值輸出至遠端警戒系統，在整合遠端警戒系統之各項功能達成聯網監測數據、警戒閥值設定與觸發警報之簡訊發送，符合工業 4.0 與物聯網產業應用之主要目標。



6.6.1 遠端警戒系統

近年來由於工業 4.0，物聯網(Internet of Things, IoT)等科技發展下，使得生產逐漸走向了無人化、智慧化，操作員不再需要時時刻刻待在機台旁；這不僅耗時，更是耗費人力成本的一項工作，因此若能將大量感測器量測的資料，即時上傳至雲端，操作員只需在某一總控制台監看整個廠區每個機器上之即時資料，並搭配即時警戒系統，就能達到物聯網中一個極大的優勢，使用效率最佳化的成果，物聯網將營運和製造流程自動化並利用遠端監控方式，不僅減少勞動生產力與深化使用者體驗。透過物聯網特性，使得整體工廠之生產或是量測資料在雲端網路上完整呈現。

本實驗透過 MATLAB 程式語言開發出光纖光柵即時量測系統與即時數影法量測系統，同時結合巨克富科技公司以 Labview 開發之雲端監看系統進行通訊整合，可以將數影法與光纖光柵實際量測相關資料，即時送上雲端，使用者只需在當地建立網際網路協定位址 (Internet Protocol Address, IP Address)，透過在地端，也就是實際正在量測機台處，其他人透過區域網路 (Local Area Network, LAN)，亦或是廣域網路(Wide Area Network, WAN)方式，即可以連線至正在以光纖量測系統與數影法即時監看機台設備上，即時查看溫升、熱變形、振動與轉速等相關機台工作資訊與情況。

最後，為達到預警目標，透過乙太網路至行動通訊 LTE 閘道器硬體，與光纖量測系統、數影法量測系統整合於雲端監看系統，使用者可至機台端設定警戒值，達成將警戒資料以手機簡訊方式，當發生超過特定值警告事件的情況下，立即傳送至使用者的手機，並記錄下警告資訊內容並存入機台端資料庫。相關人員或機台操作員可即時透過整套系統得知機台設備即時資訊，立即進行後續處理或是即時故障排除，提升機台使用效率，實踐智慧機械之核心理念。

6.6.2 雲端監看系統 (Cloud Monitoring System, CMS)

巨克富科技利用 Labview 建置遠端監看軟體系統，安裝至電腦後畫面所顯示使用者介面操作如圖 6.66，此系統主要是將資料在使用者電腦端、雲端網頁進行顯示，搭配自行開發即時系統與之整合，將光纖量測到的資料即時送上雲端顯示，而使用者在任何網路的環境下，皆可即時監看機台之狀況(尚未搭載警戒系統)。6.66 圖上 RUN 為開始執行軟體按鈕，A 為警告資料表單與即時資料之切換按鈕、B 是依據系統 F 部分設定閾值，當量測到相關物理量超過閾值時，系統會記錄警報次數，C 為整體啟動監控時間。D 設定為內嵌控制馬達，E 設定傳送簡訊，F 設定部分閾值，G 是設定資料訊號輸出顏色、取樣率與資料橫、縱軸之單位及文字描述，最後 H 為讀取光纖量測輸出資料之路徑。

6.6.3 光纖即時量測資料輸出系統

此即時量測資料輸出系統是以 MATLAB 程式語言來撰寫，實際顯示之量測畫面如圖 6.67 所示，由上至下、由左至右分別為光纖感測器原始共振波長飄移資訊、解析後待測物應變資訊、變形量資訊、即時互相關的相關係數結果與將互相關係數的正峰值取出，顯示其分布狀態。最後再設定需要輸出的資料至遠端連網系統，進而在雲端網頁上監測實驗。

6.6.4 警戒簡訊發送/雲端畫面顯示

簡訊警戒系統為搭配四零四科技 (Moxa Technologies) 開發生產之乙太網路至行動通訊 LTE 閘道器，型號 OnCell G3150A-LTE 系列，如圖 6.68，透過此硬體之 LTE 行動通訊閘道將串列連線與乙太網路在行動通訊間連接應用。需將主發送源之 SIM 卡插入閘道器。MOXA 系統在設定完畢後以 USB 方式與電腦進行連接。接著至軟體端設定發送警戒的閾值，如本實驗中設定為位移大於 16 毫米時會產生警戒簡訊，設定畫面如圖 6.69 所示，而在實驗中彈簧位移超過 16 毫米時，系統隨



即會顯示如圖 6.70 的開始發送警報資訊；經過幾秒後設定之手機會收到如圖 6.71 的警戒簡訊，圖中表示設定閥值為 16 毫米，而當時以 3Hz 頻率進行壓縮彈簧實驗量測時，最大位移量超過閥值為 16.38 毫米，就即時將當下的機台狀況回報給使用者。除此之外，透過前述之光纖即時量測系統，配合即時將資料輸出雲端網頁顯示，實際量測彈簧系統時如圖 6.72 所示，左側紅色方框為機台實驗端之畫面，包括光纖光柵與數影法即時量測彈簧物理量，內部之綠色方框為設定輸出之量測到的彈簧變形量。接著透過設定的網址，即可從右邊之紅色框觀察到另一台電腦透過網路連接觀看到此機台的實驗情形。所以藉由這個物聯網軟體架構，配合光纖的即時量測系統，提供相關操作人員掌握最即時的實驗資訊。

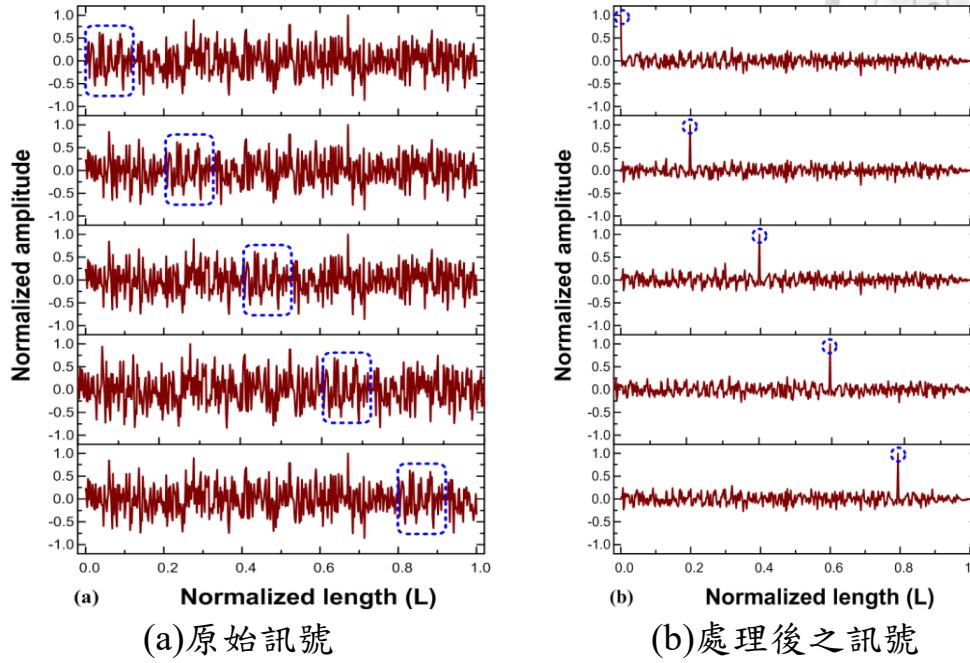


圖 6.1 一維訊號相關法

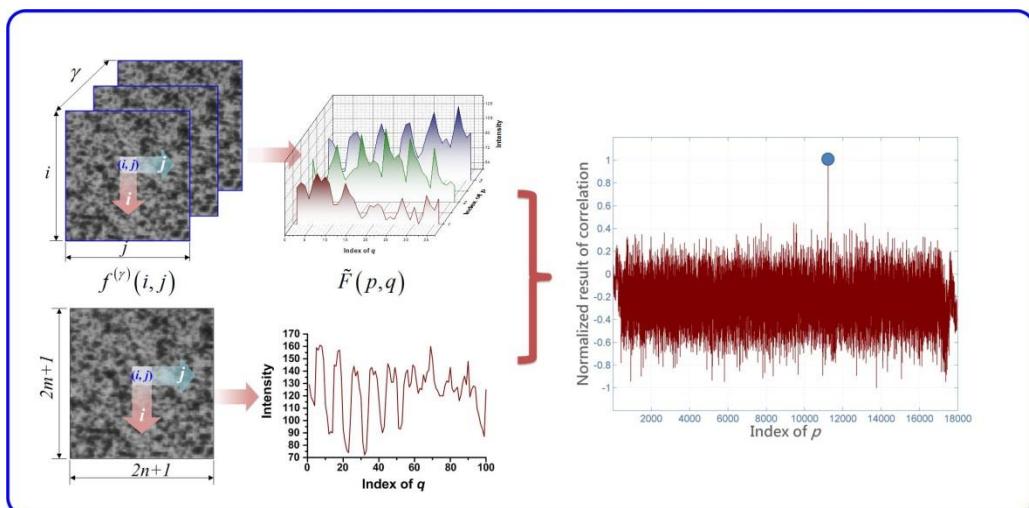


圖 6.2 影像堆疊包含兩組空間軸以及一組時間軸

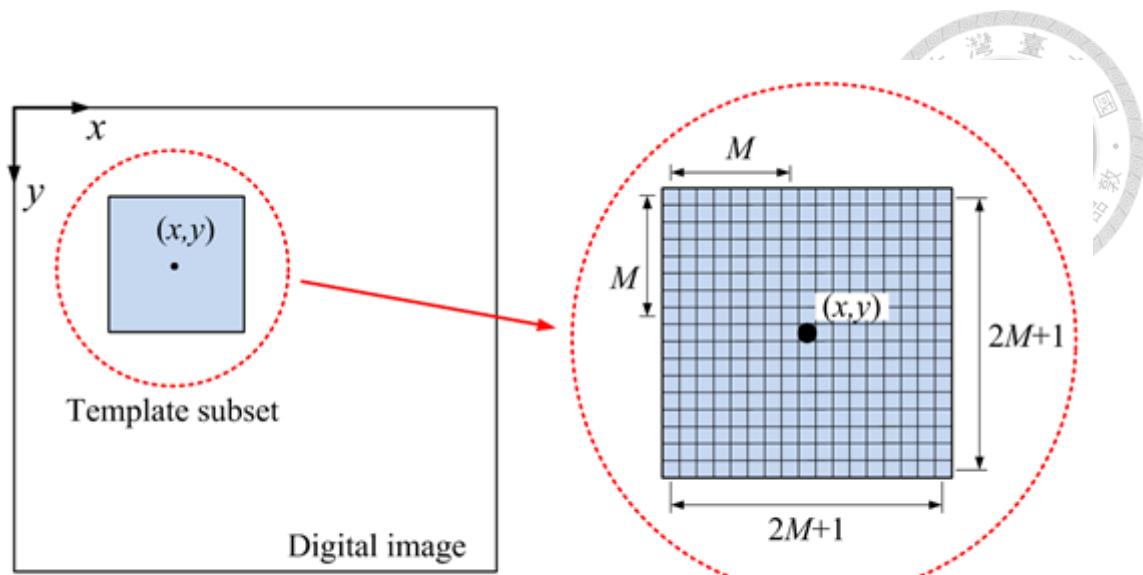
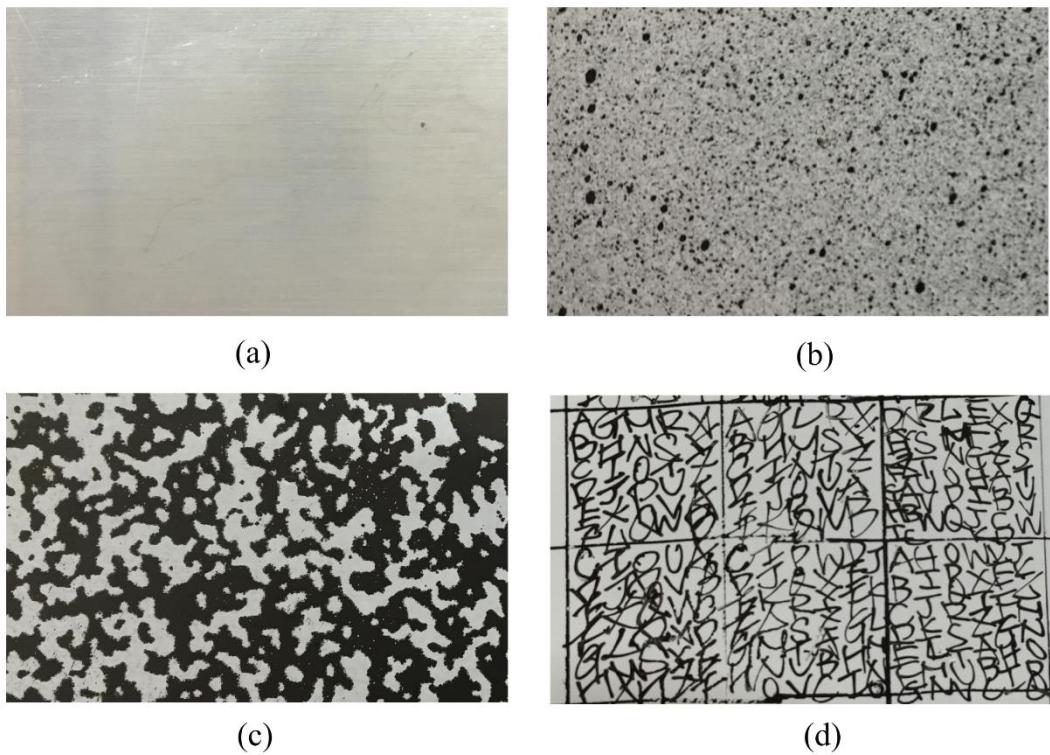


圖 6.3 樣板子集合與半窗格示意圖



(a) 無特徵 (b) 噴漆特徵 (c) 網板印刷特徵 (d) 手寫特徵

圖 6.4 特徵圖形

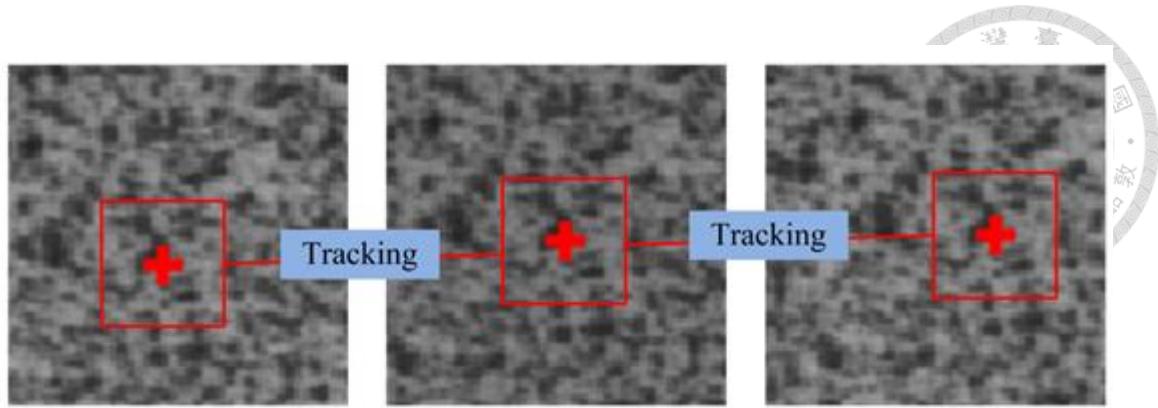
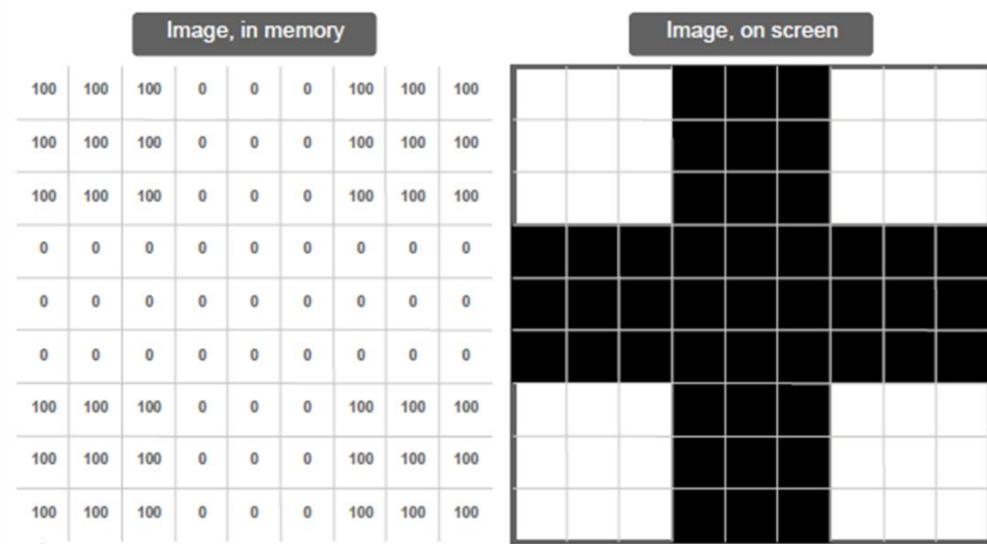
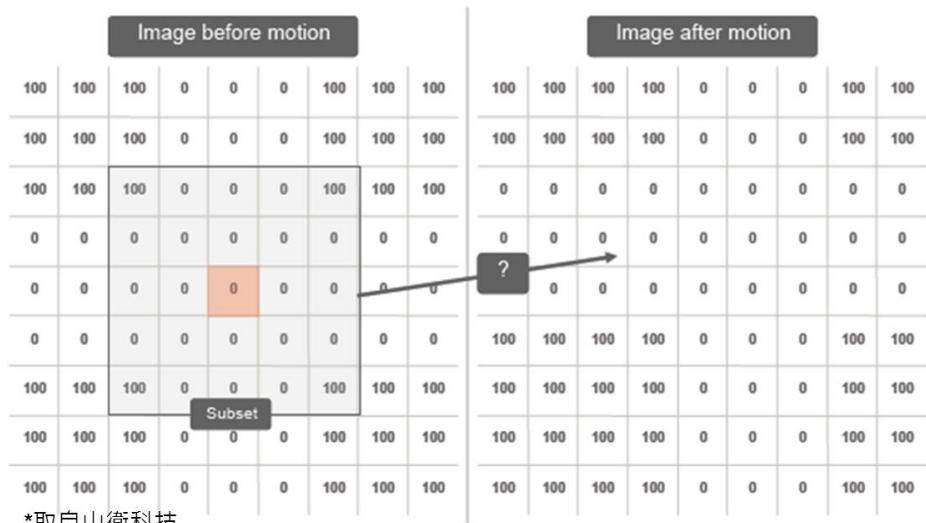


圖 6.5 數位影像相關法之追跡過程



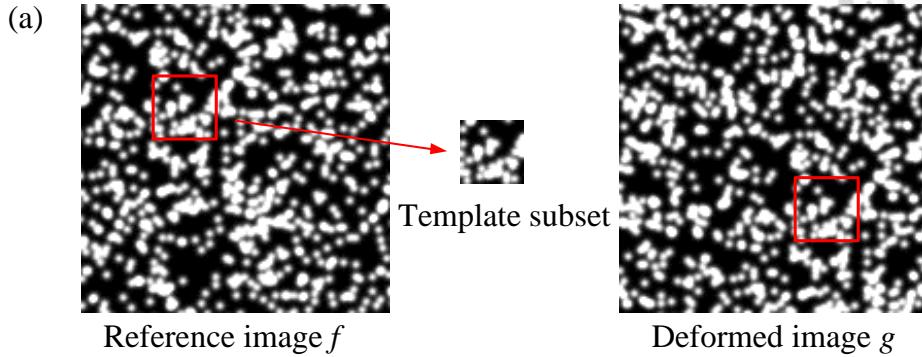
*取自山衛科技

圖 6.6 特徵值計算示意圖

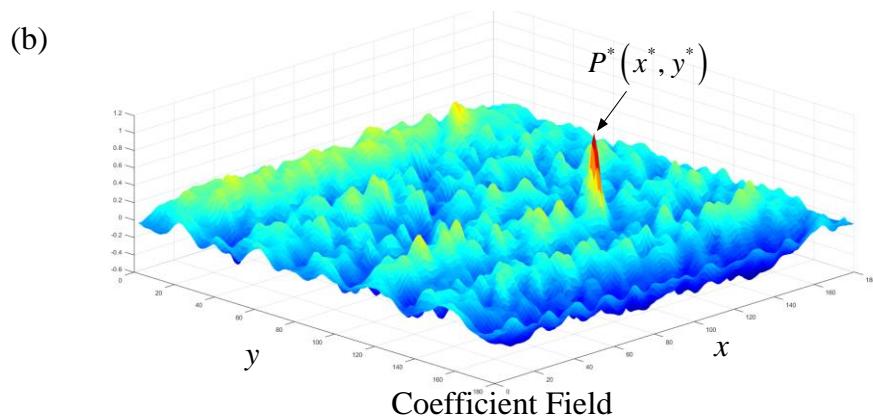


*取自山衛科技

圖 6.7 特徵值追蹤示意圖



(a)建立樣板子影像對形變影像進行全場相關係數運算



(b)相關係數場與相關係數極值坐標位置

圖 6.8 全場相關性運算示意圖

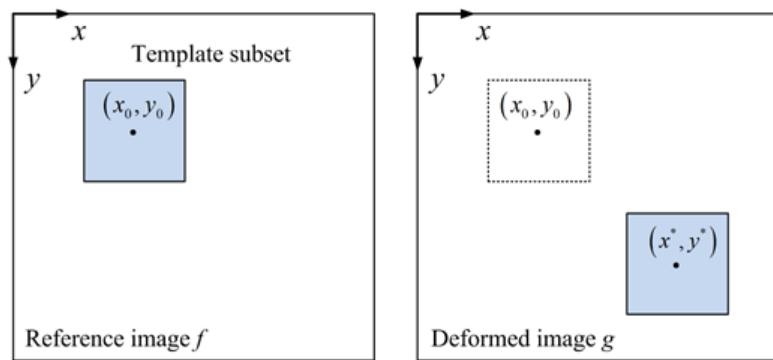
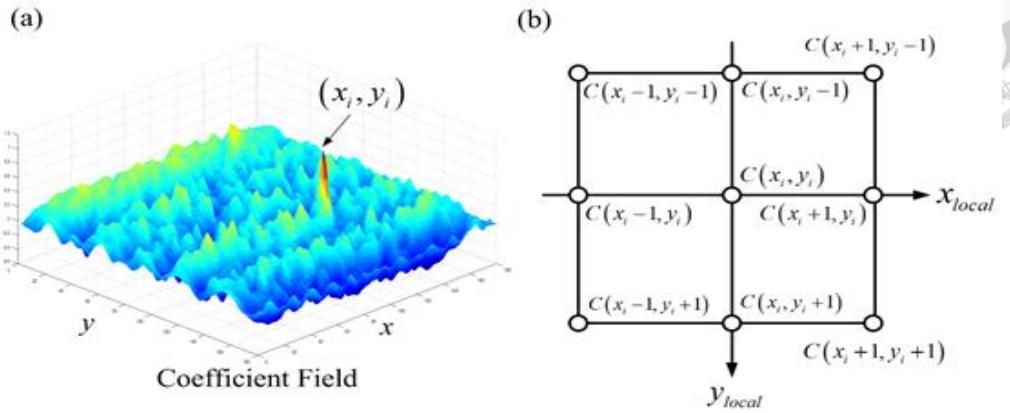
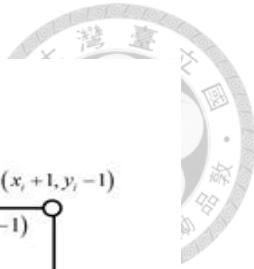


圖 6.9 相關係數極值搜尋法示意圖



(a)先計算整數末位置像素解 (b)再得到小數點末位置像素解

圖 6.10 相關係數極值搜尋法過程



圖 6.11 數位影像相關法操作流程



圖 6.12 GS3-U3-23S6M-C 數位工業相機



圖 6.13 SONY DSC-RX100M5 數位相機

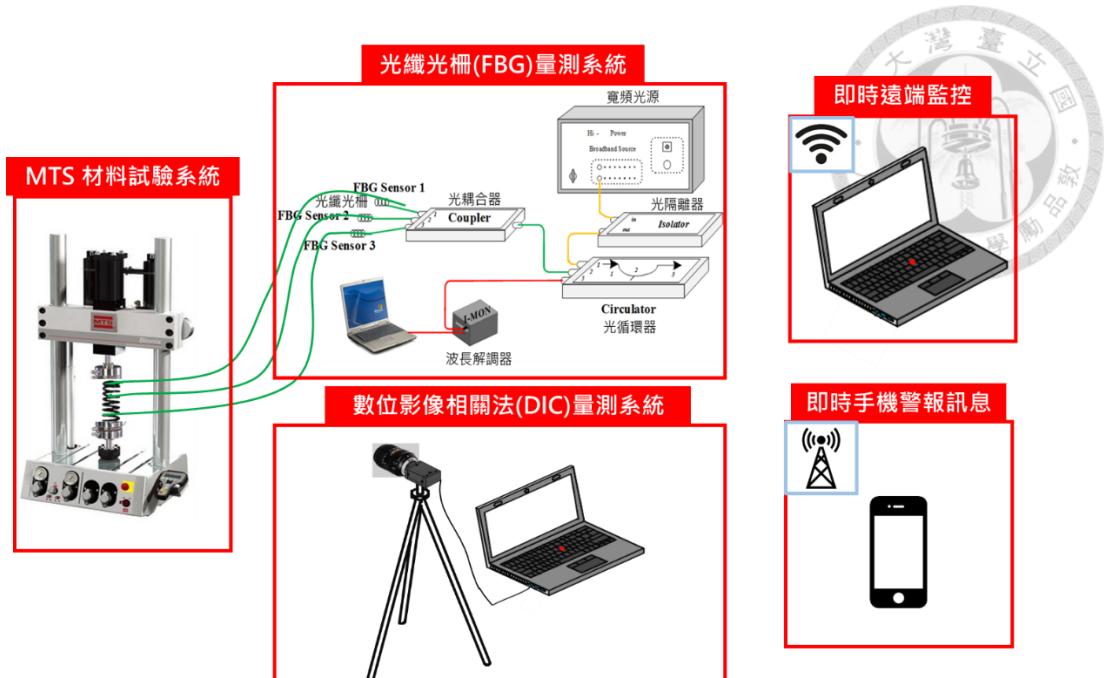


圖 6.14 光纖光柵與數位影像相關法整體實驗架設圖



圖 6.15 美國 MTS Bionix 系列液壓高頻疲勞動態軸向扭轉萬能材料試驗機

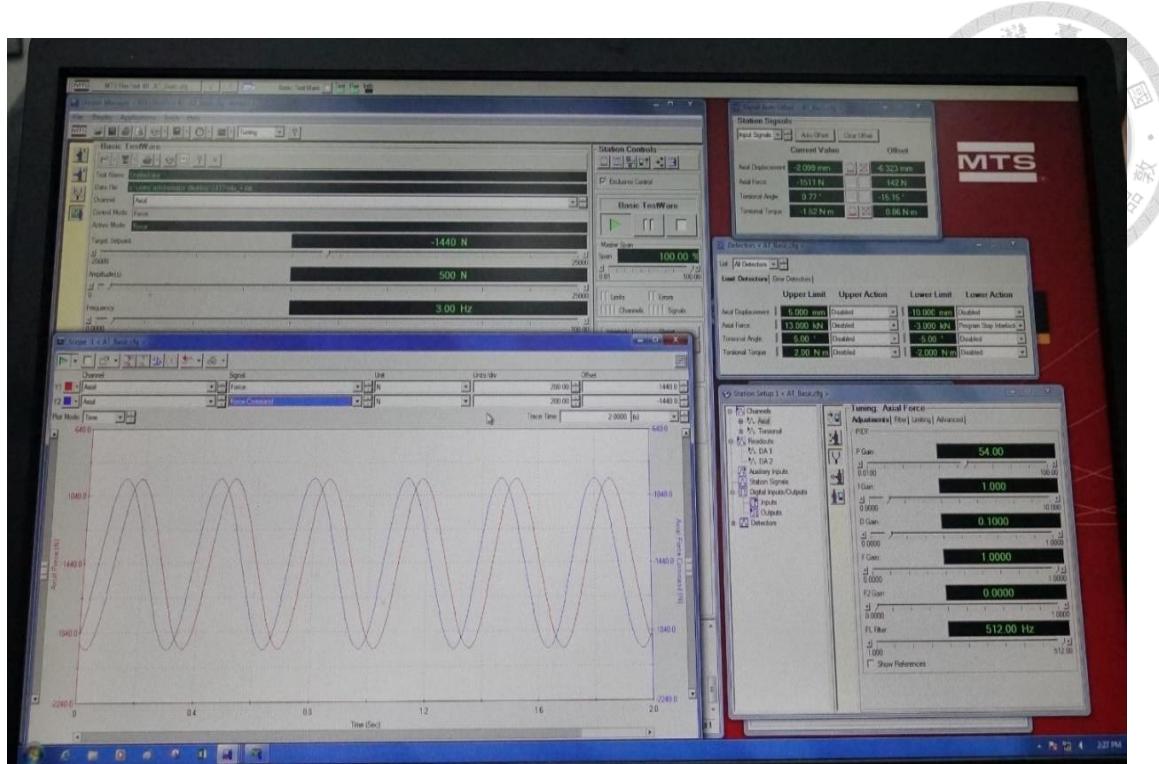


圖 6.16 MTS 軟體操作界面

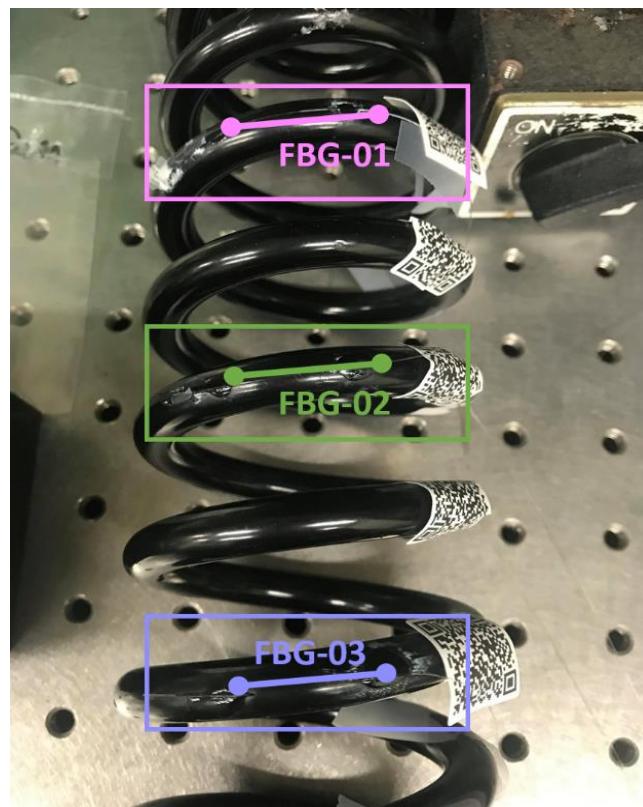


圖 6.17 試驗用壓縮彈簧

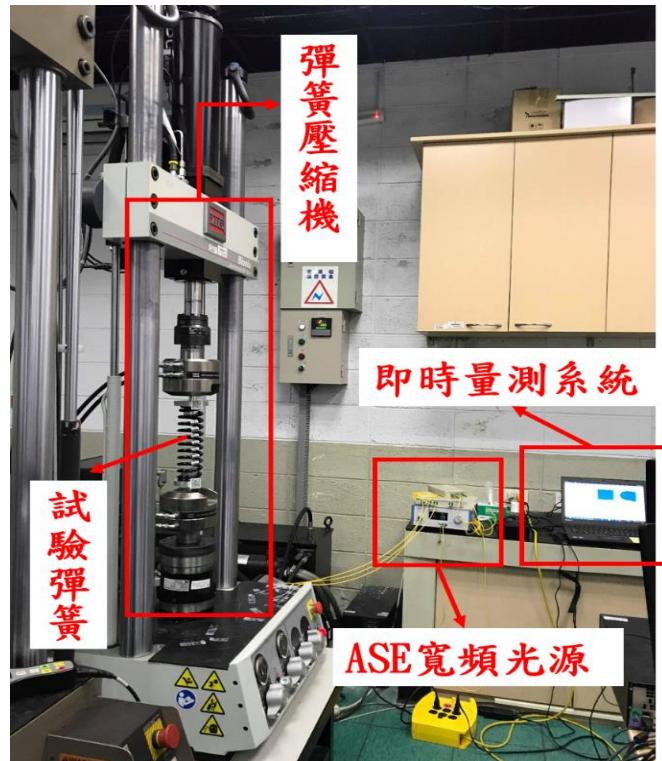


圖 6.18 實驗架設圖

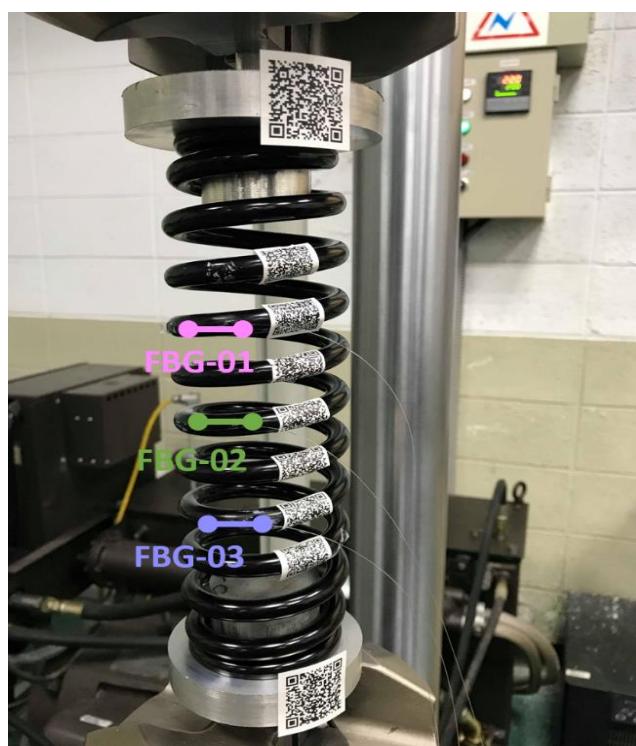


圖 6.19 彈簧固定於壓縮試驗機上實體圖

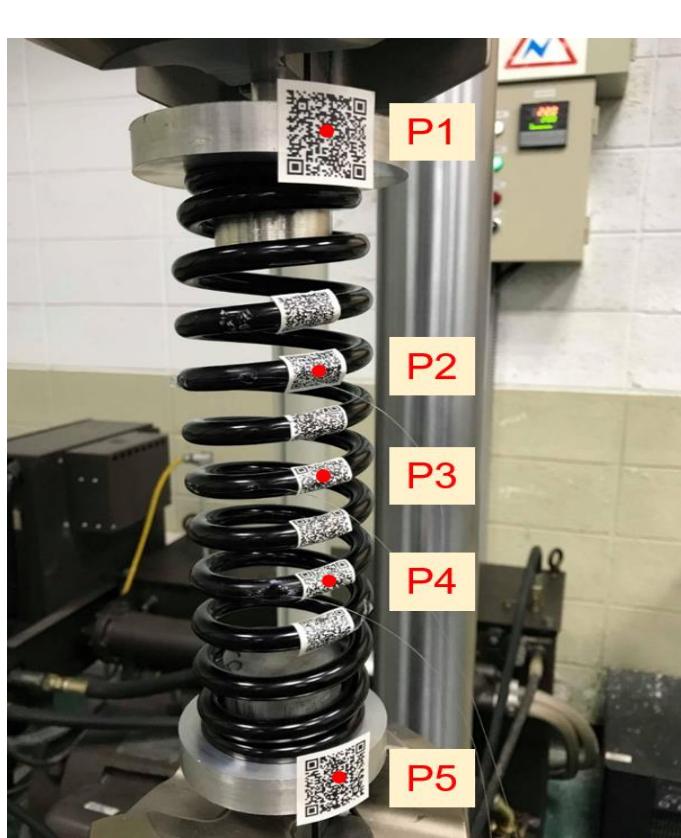


圖 6.20 實驗彈簧及 DIC 追蹤點

檢查成績表		108年5月22日		承認	備註	測量者
零件號碼	FF512-380-02	零件名稱	SPRING			張家麟
納入日期	2023/05/22	批量	2 PCS	廠商	(加工單位)	
檢驗目的	如物-次件	檢驗數	2 PCS			
記號	檢查項目	規格	1	2	3	判定
1	自由長 (mm)	272.3	274.17	274.17		OK
2	線徑 (mm)	φ 9.0	φ 9	φ 9		OK
3	K值 (kgf/mm)	3.24 ± 0.22 kgf/mm	3.12	3.13		OK
5	荷重試驗 (kgf/mm)	196.4 ± 196.8				OK
8	承重試驗 (kgf/mm)	391.3 ± 391.7				OK
9	以下空白					
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
檢	合	格	○	備註		
不	合	格				

圖 6.21 彈簧出廠檢查表

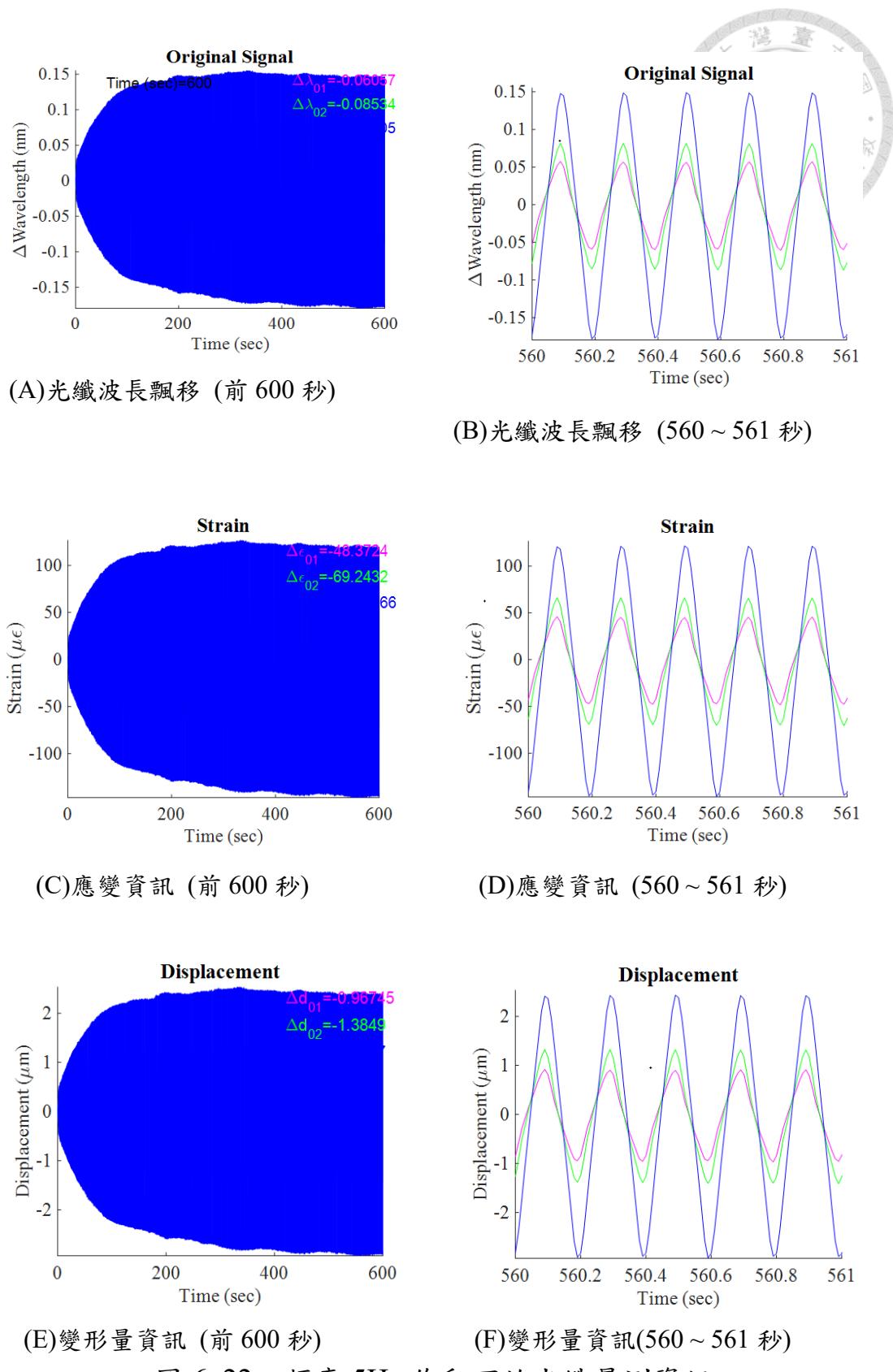


圖 6.22 頻率 5Hz 作動下的光纖量測資訊

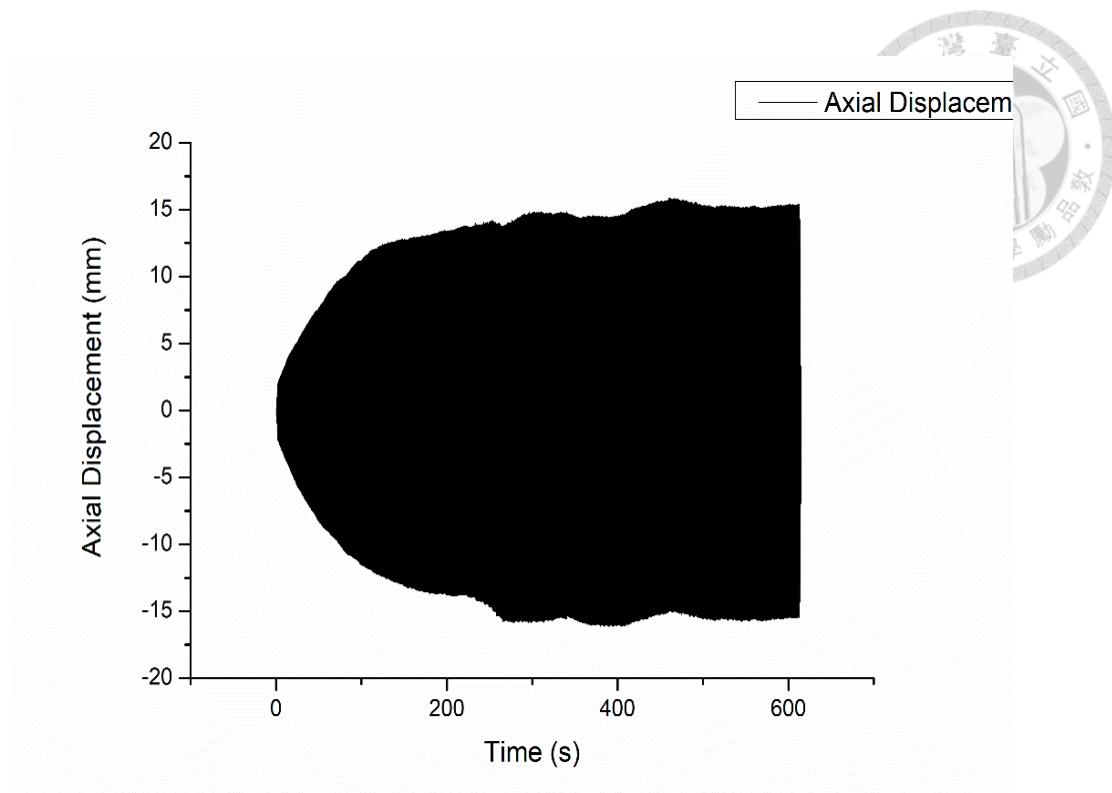


圖 6.23 頻率 5Hz 作動下 MTS 軸向位移資訊

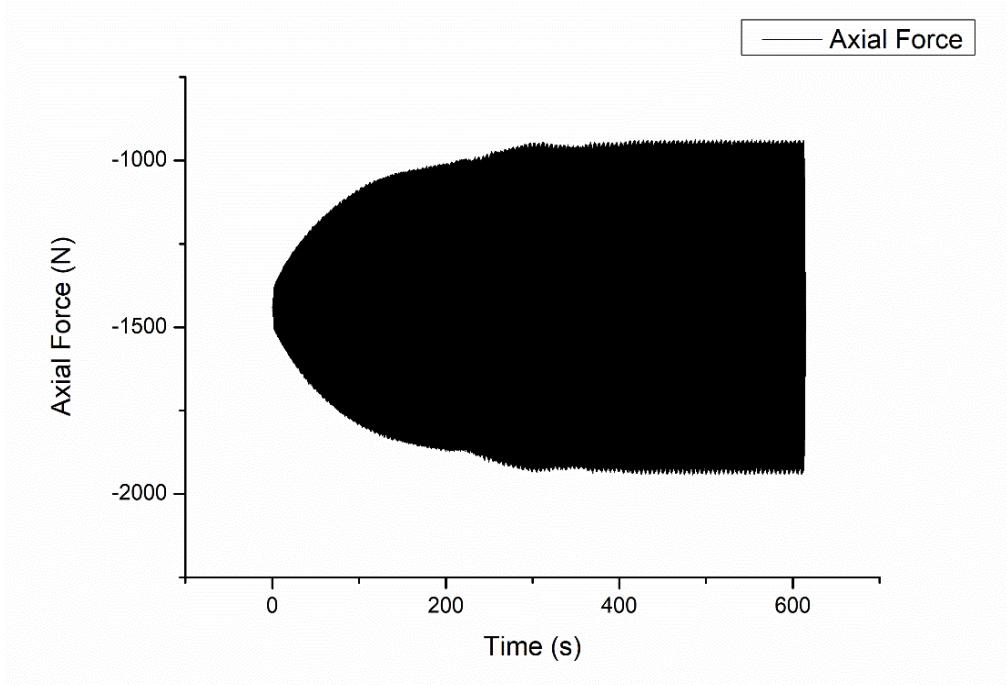


圖 6.24 頻率 5Hz 作動下 MTS 軸向力量資訊

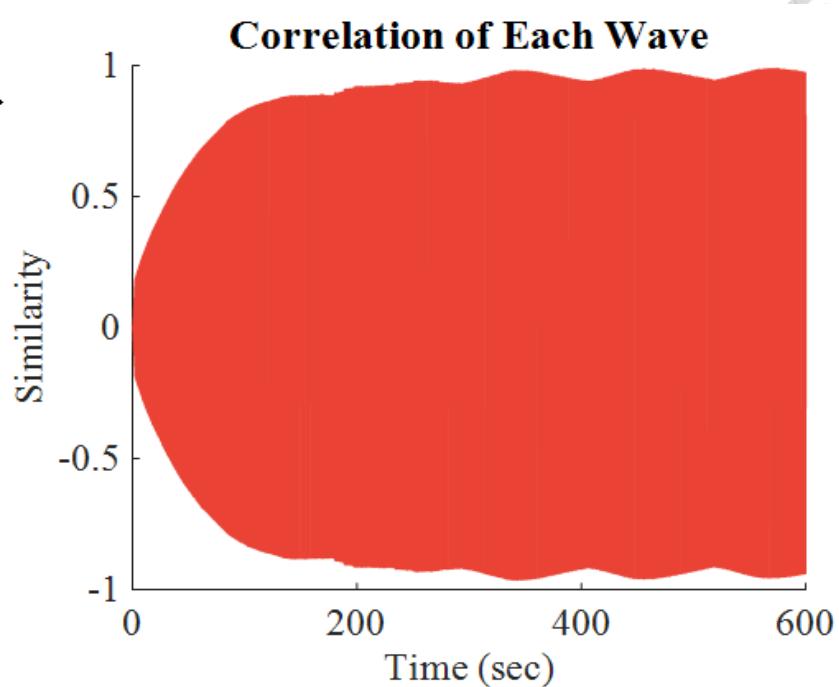


圖 6.25 頻率 5Hz 作動下的互相關係數 (0 ~ 600 秒)

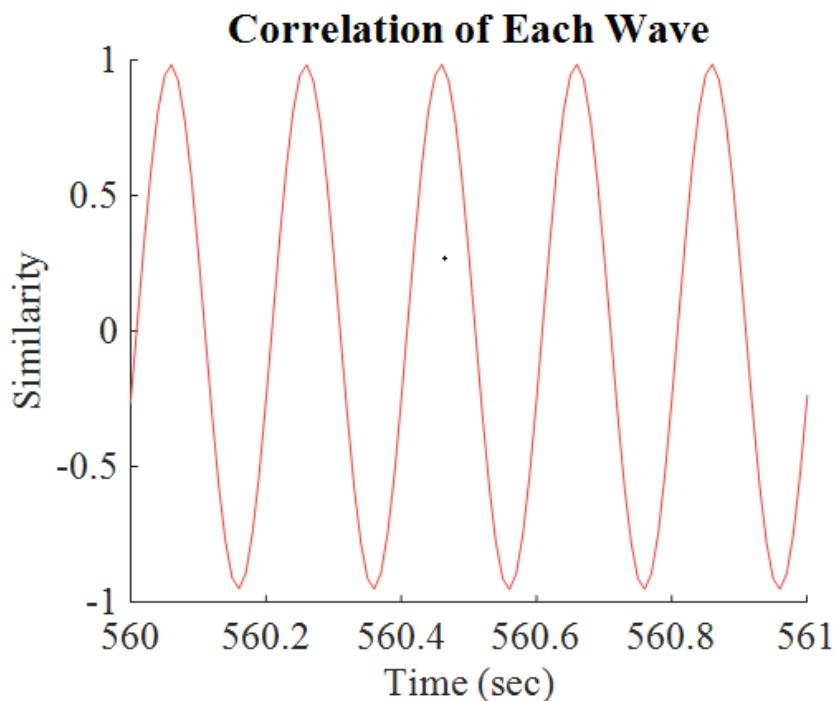


圖 6.26 頻率 5Hz 作動下的互相關係數 (560 ~ 561 秒)

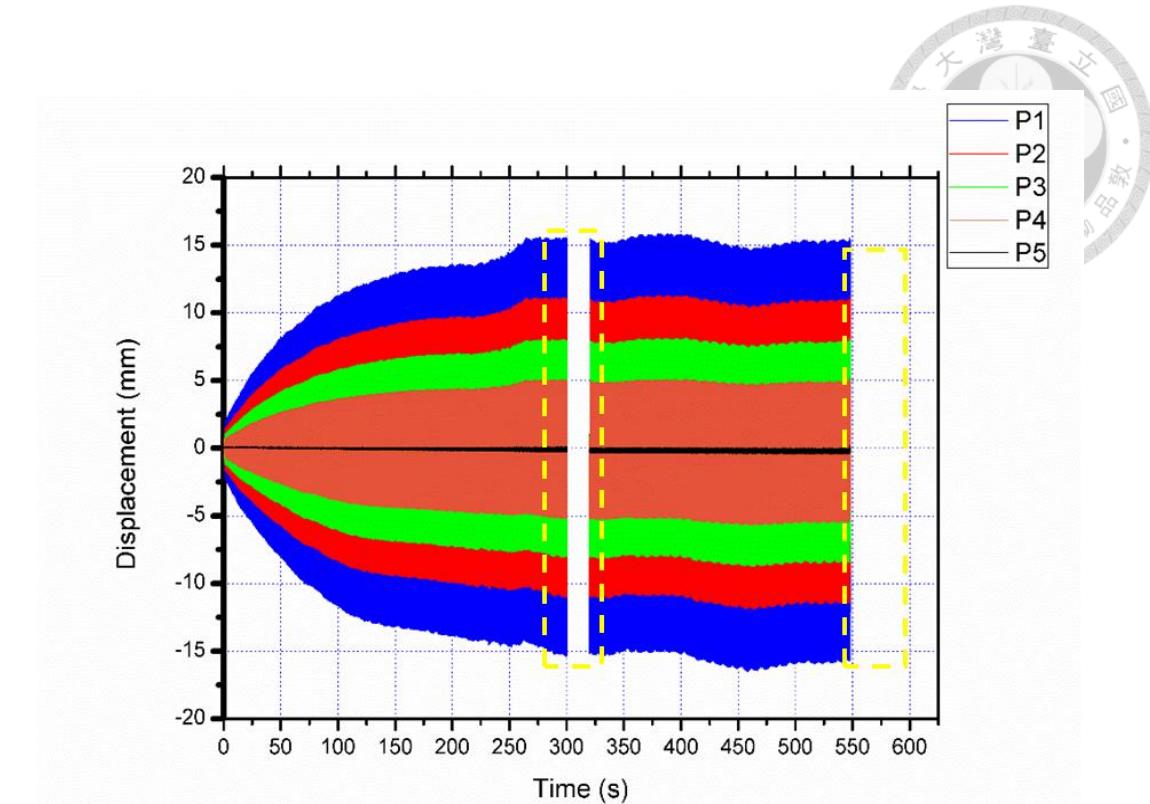


圖 6.27 頻率 5Hz 之量測結果

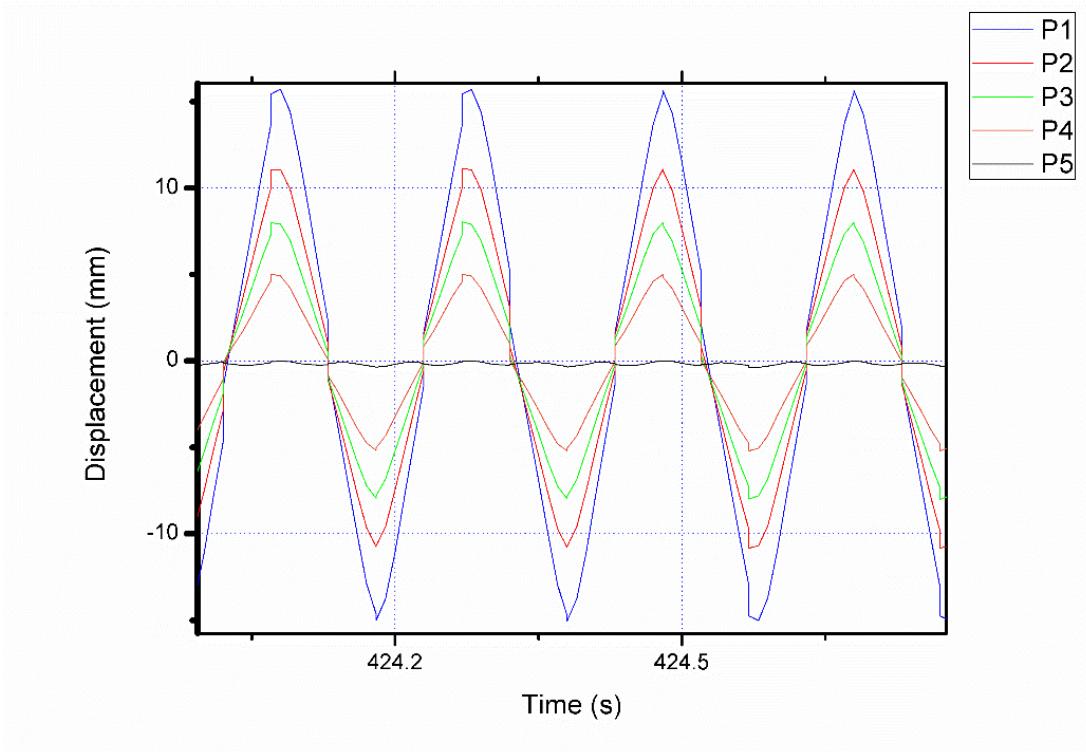


圖 6.28 放大圖 6.27 之部分訊號

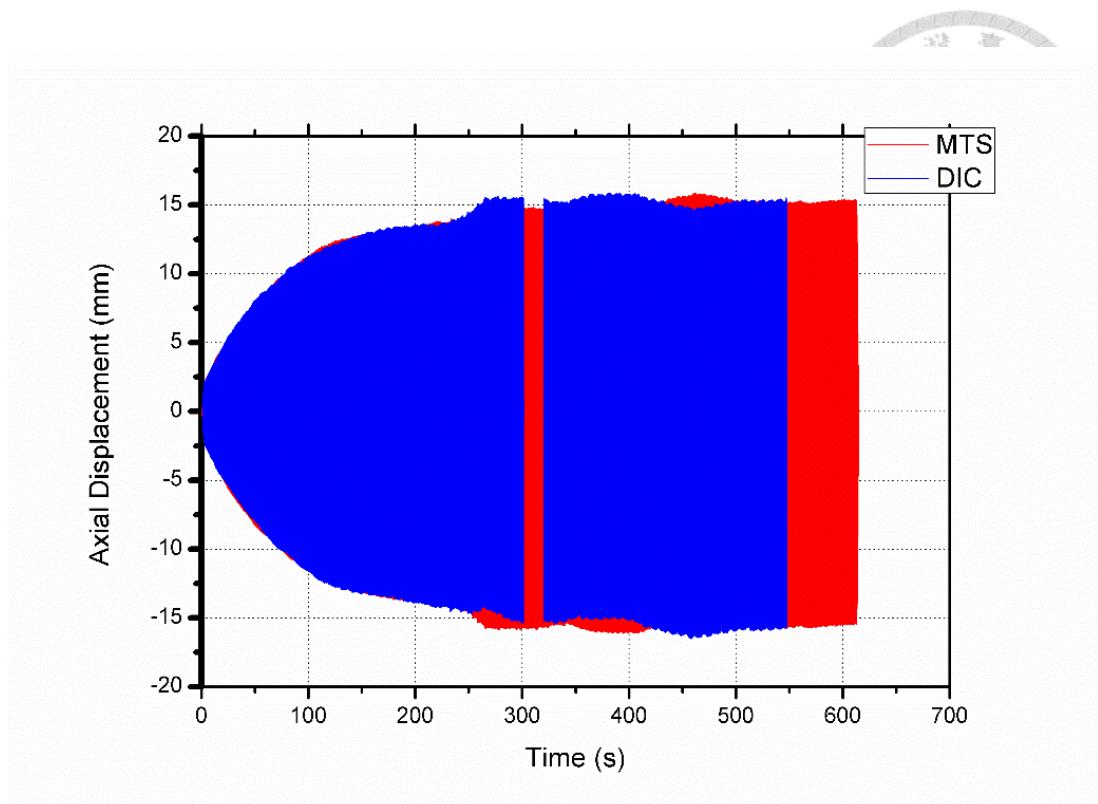


圖 6.29 DIC 與 MTS 量測結果比較圖

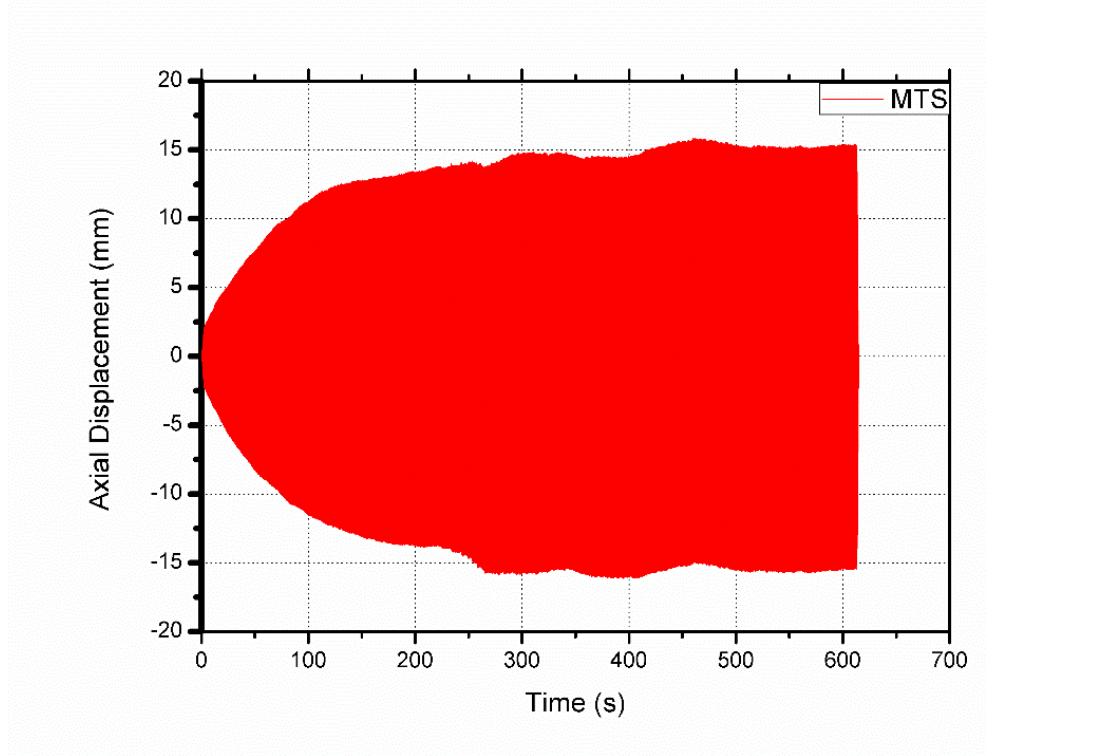


圖 6.30 MTS 試驗機輸出位移圖

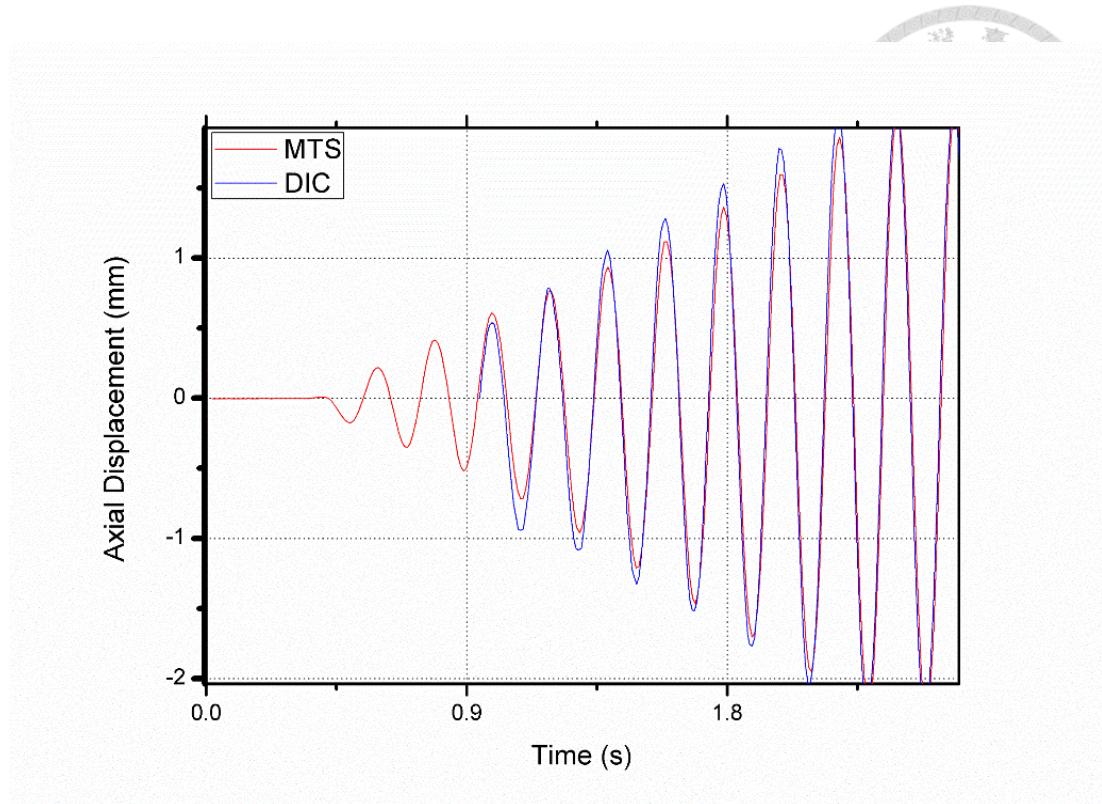


圖 6.31 放大圖 6.29 起始訊號 MTS 試驗機輸出位移圖

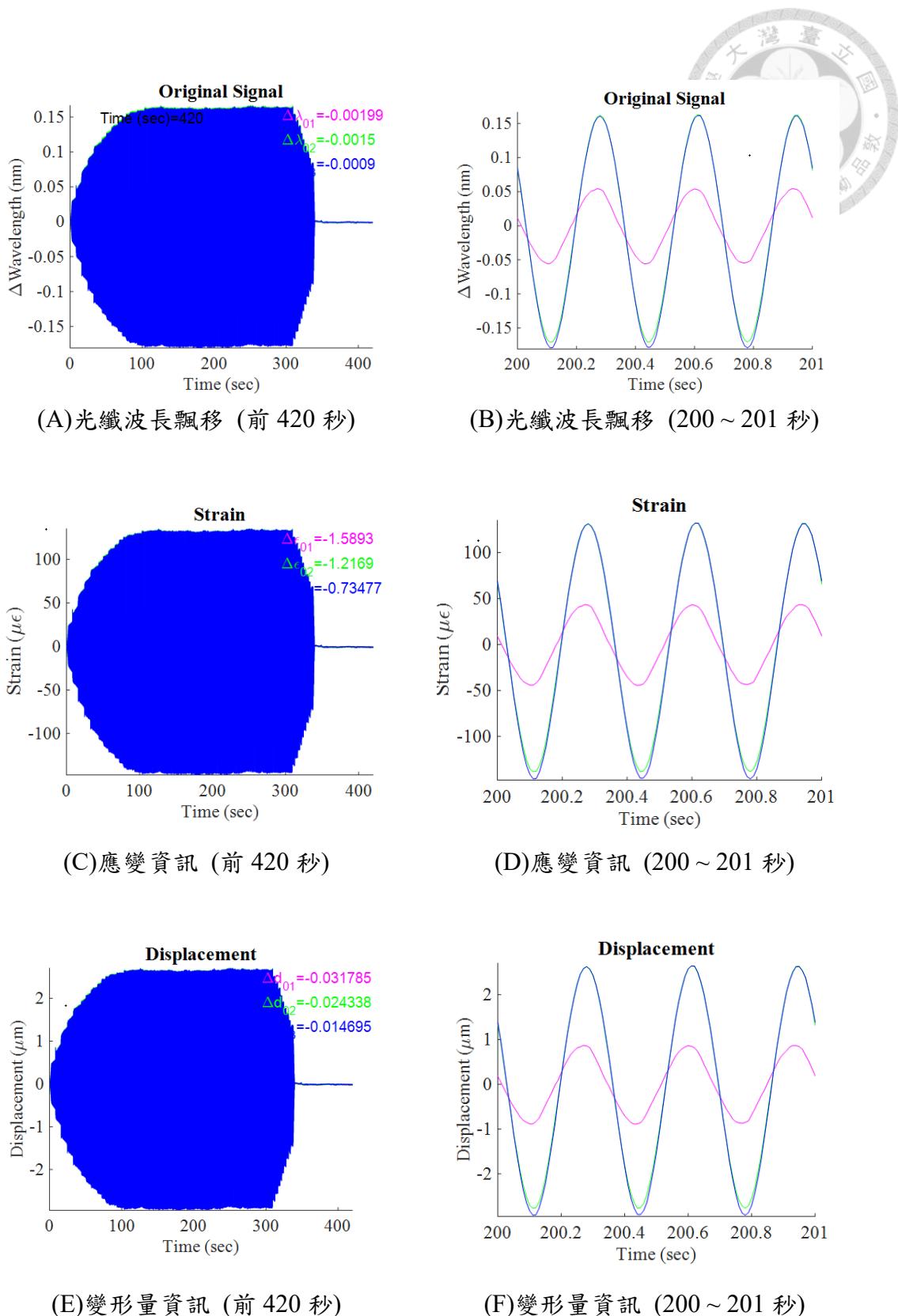


圖 6.32 頻率 3Hz 作動下的光纖量測資訊

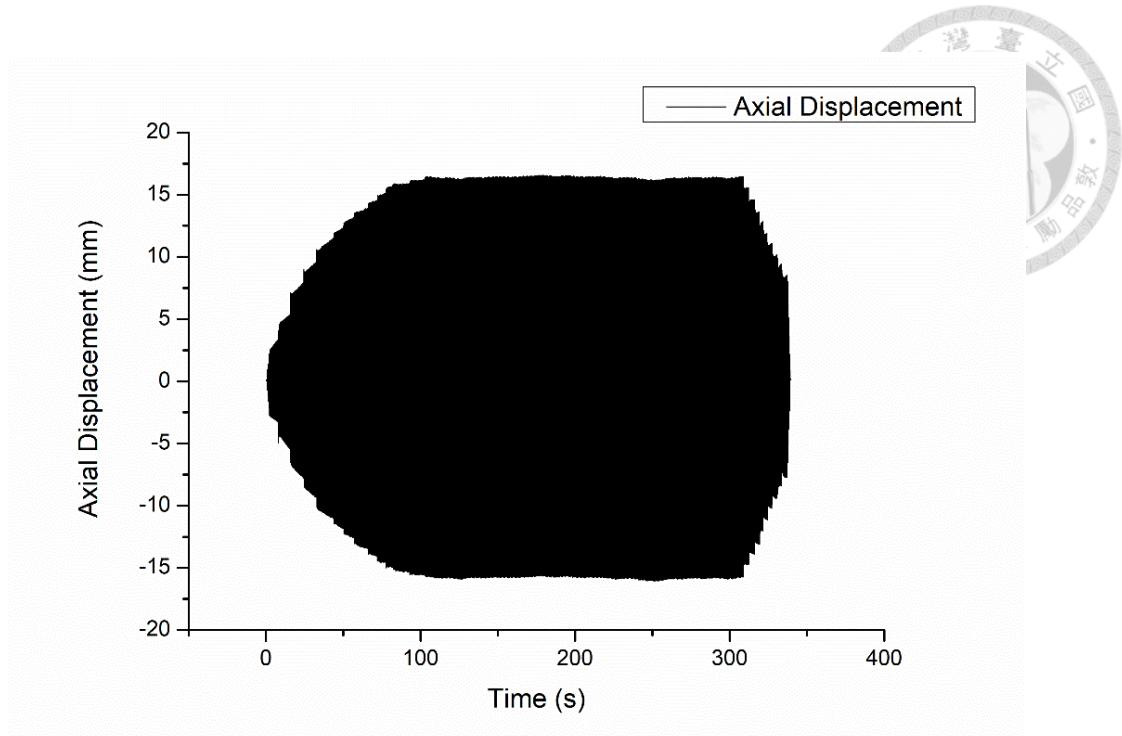


圖 6.33 頻率 3Hz 作動下 MTS 軸向位移資訊

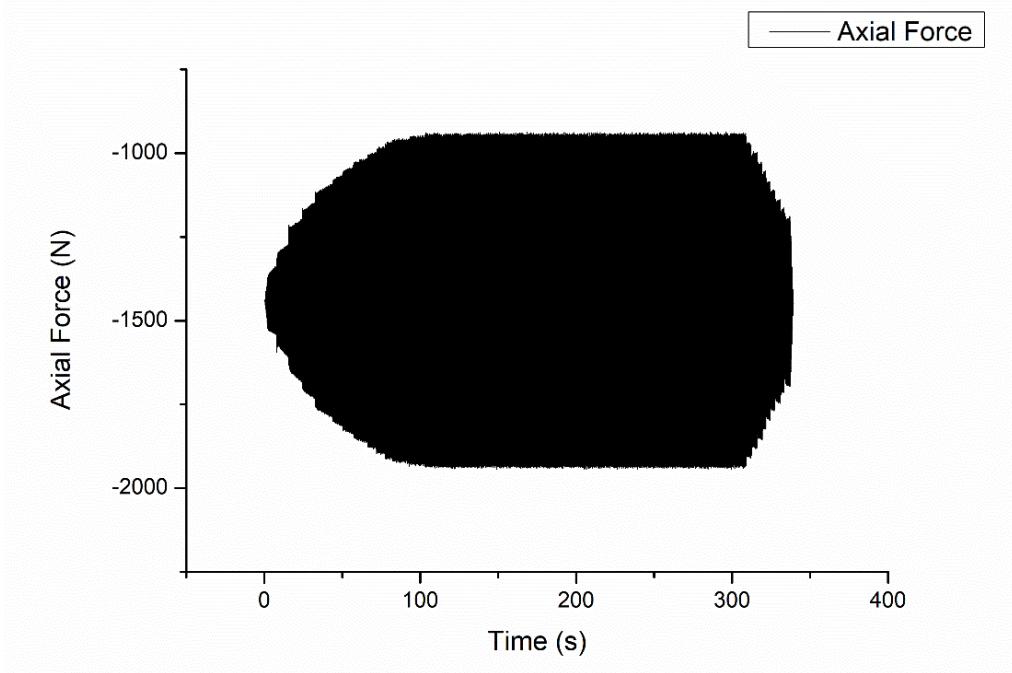


圖 6.34 頻率 3Hz 作動下 MTS 軸向力量資訊

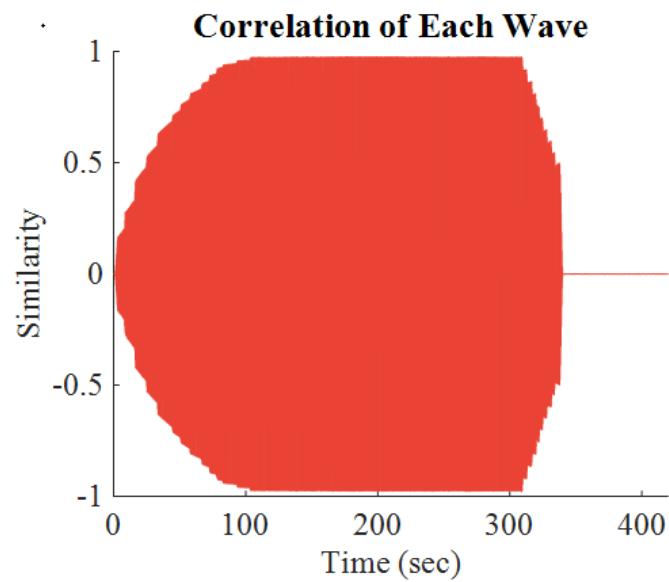


圖 6.35 以 3Hz 作動下的互相關係數 (0 ~ 420 秒)

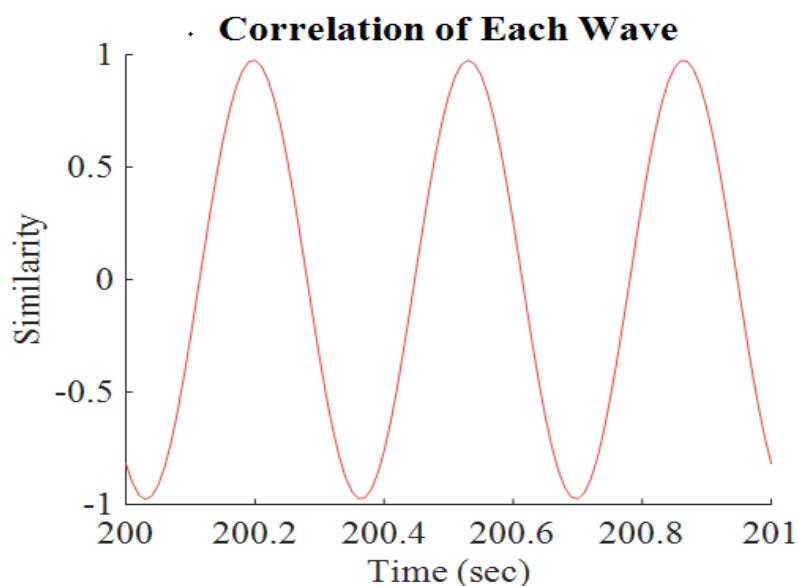


圖 6.36 頻率 3Hz 作動下的互相關係數 (200 ~ 201 秒)

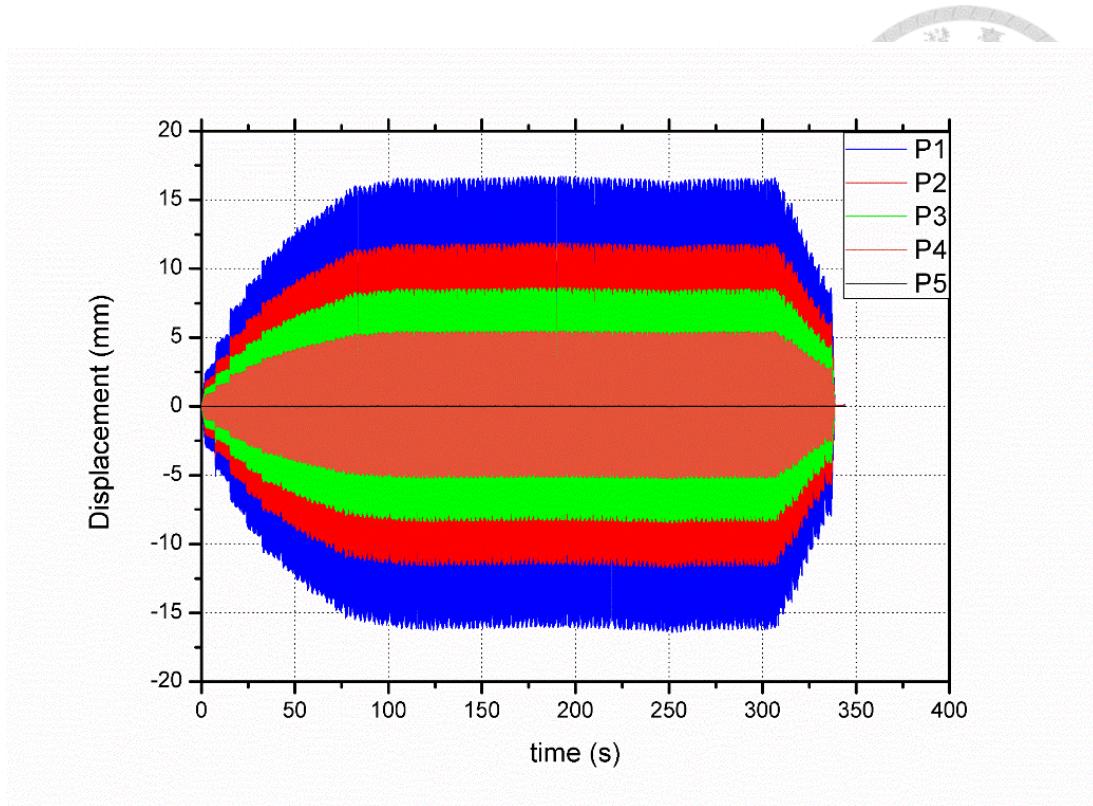


圖 6.37 頻率 3Hz 之量測結果

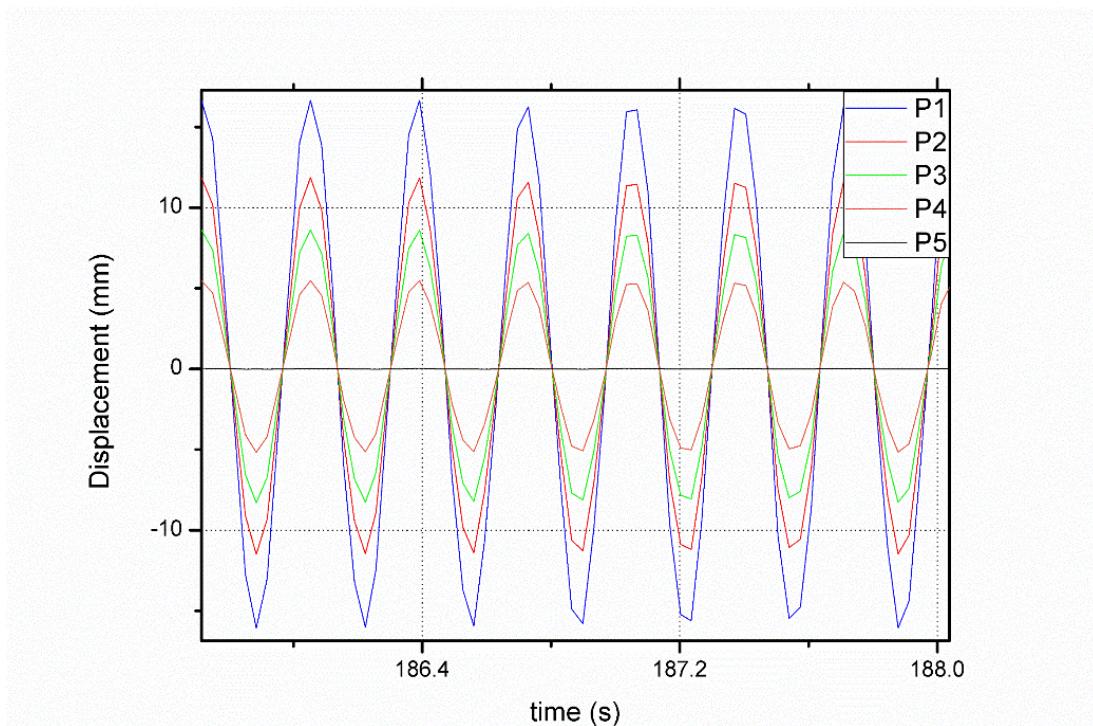


圖 6.38 放大圖 6.37 之部分訊號

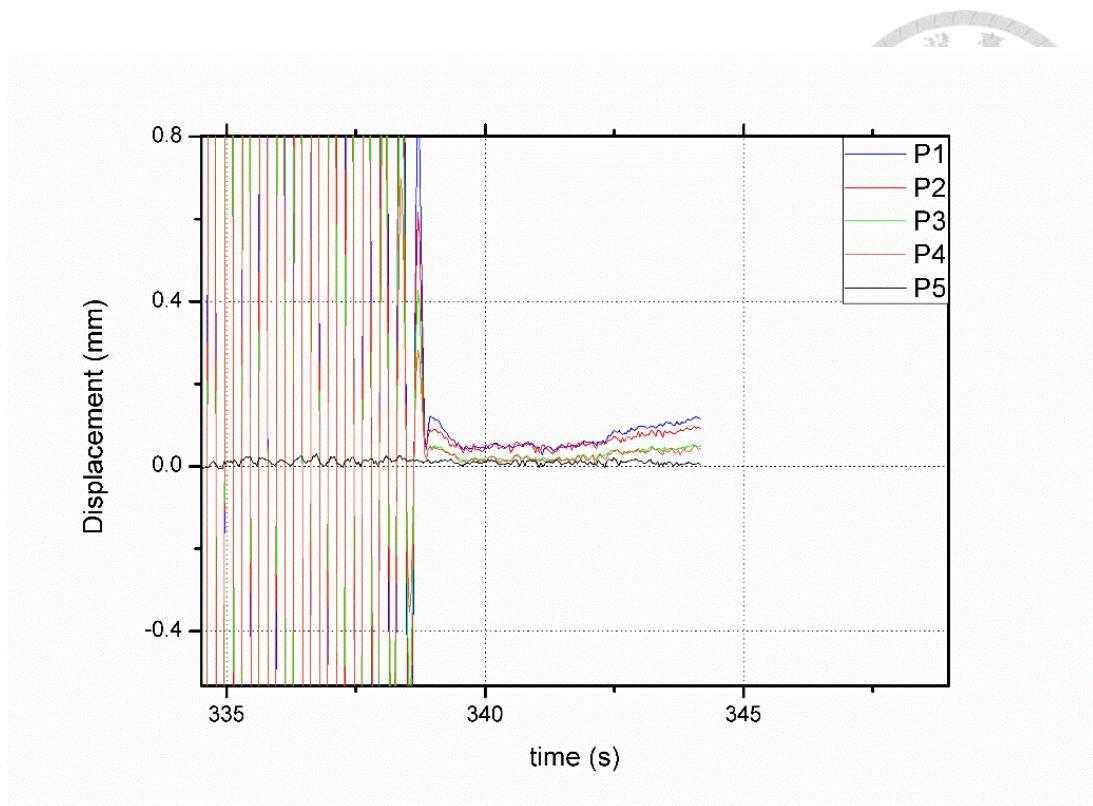


圖 6.39 放大圖 6.37 之末端訊號

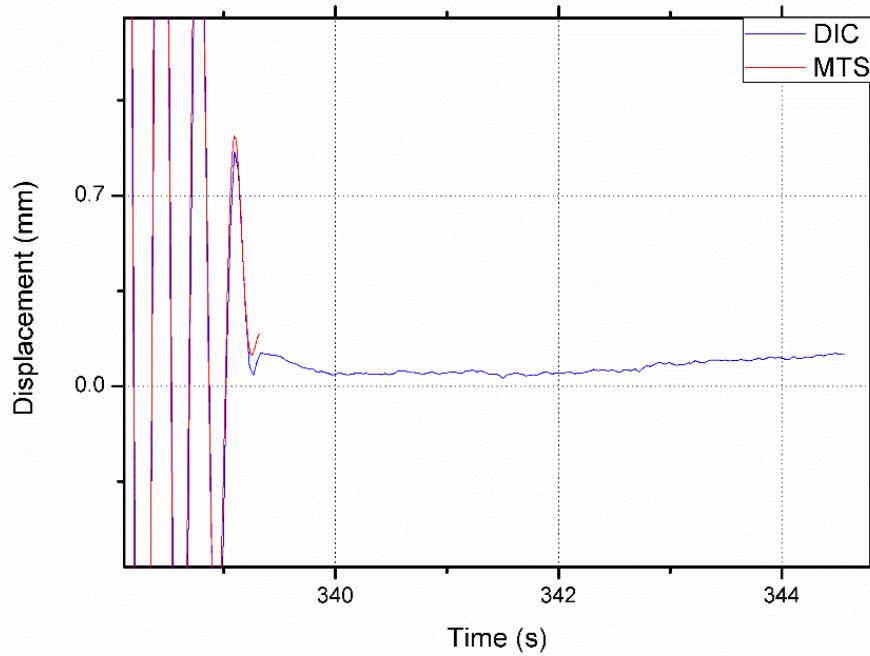


圖 6.40 頻率 3Hz DIC 與 MTS 之末端訊號結果比較

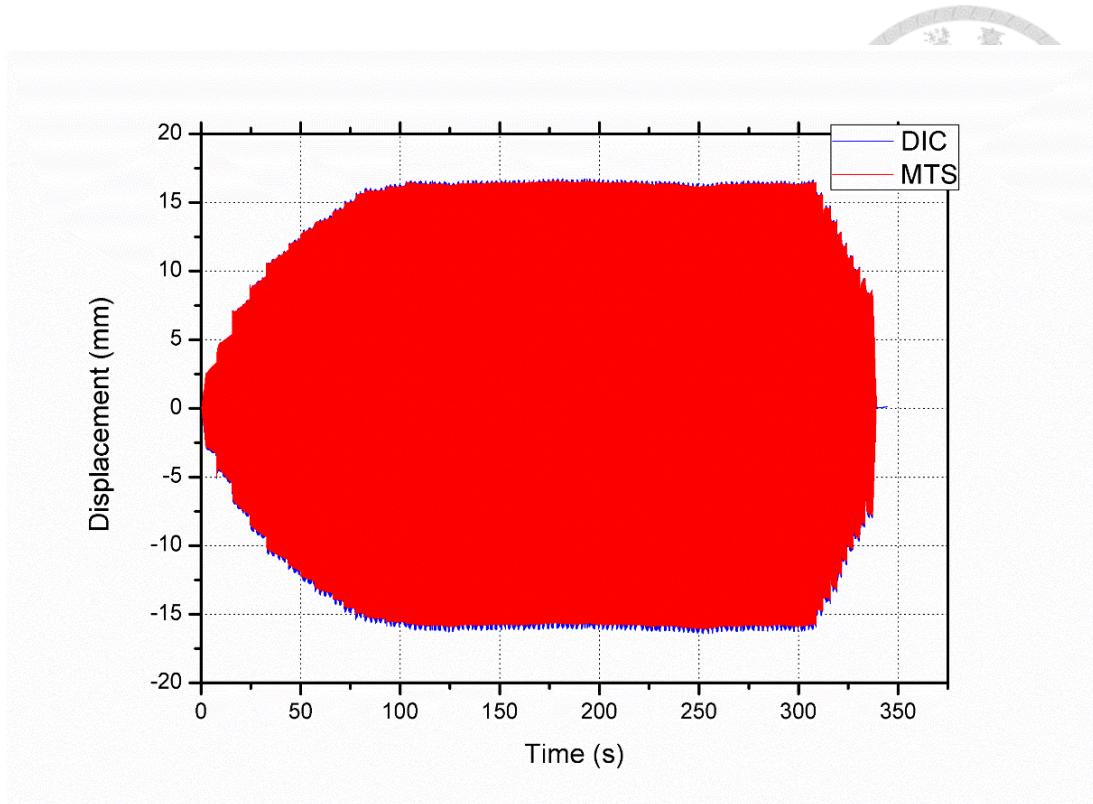


圖 6.41 頻率 3Hz DIC 與 MTS 之最大位移結果比較

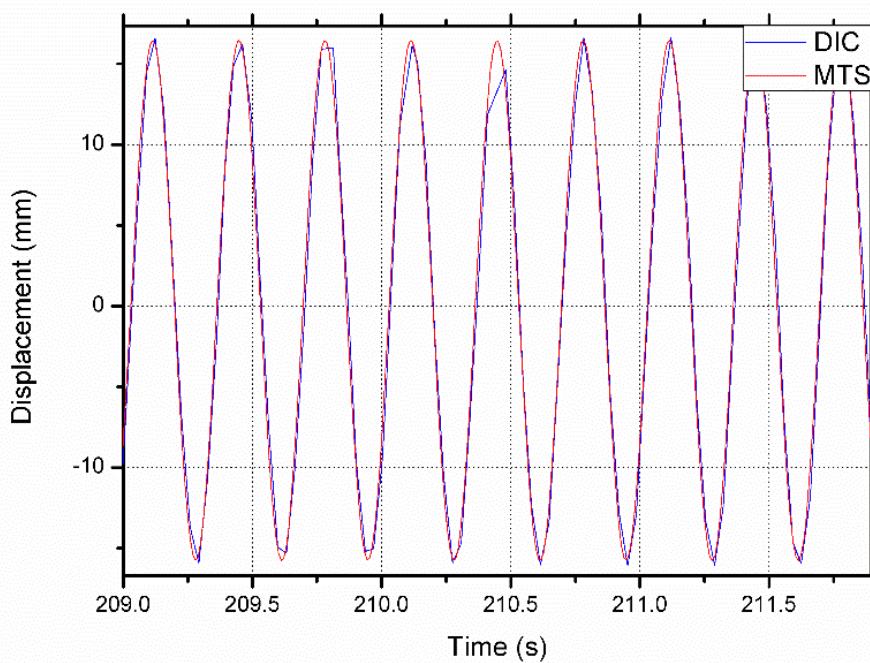


圖 6.42 頻率 3Hz DIC 與 MTS 之部分訊號結果比較

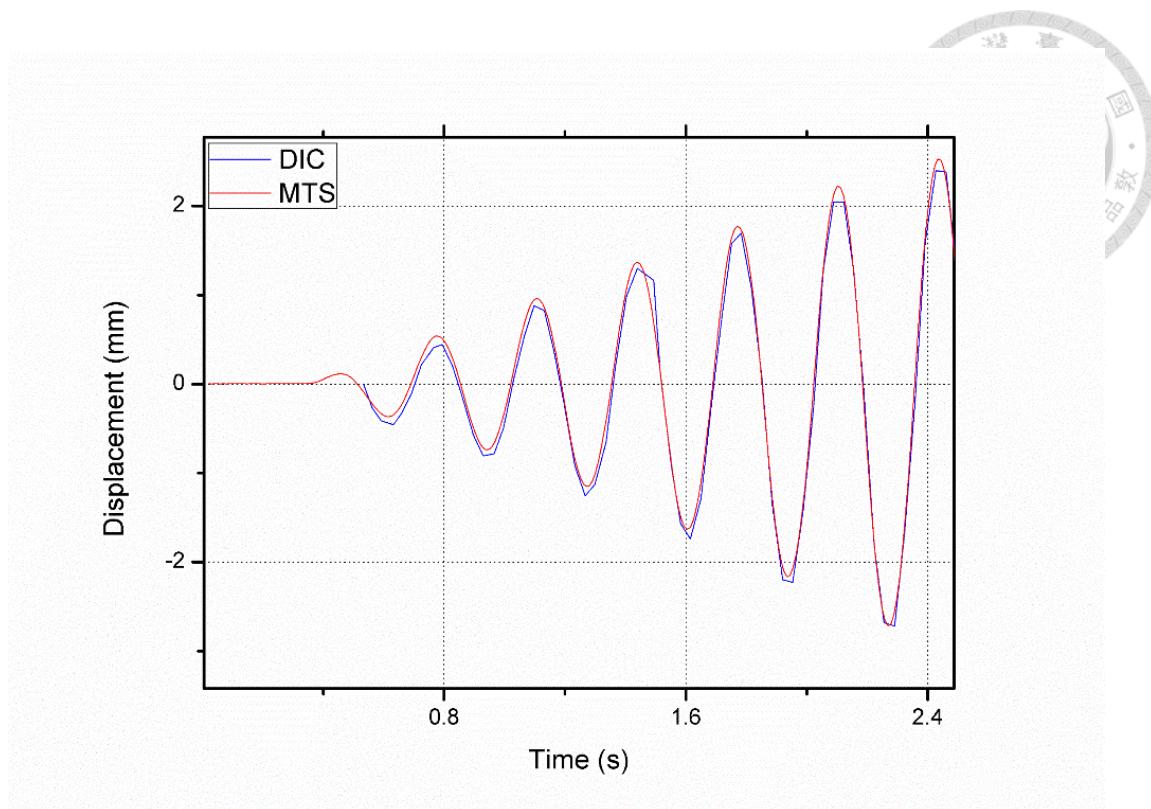


圖 6.43 頻率 3Hz DIC 與 MTS 之起始訊號結果比較

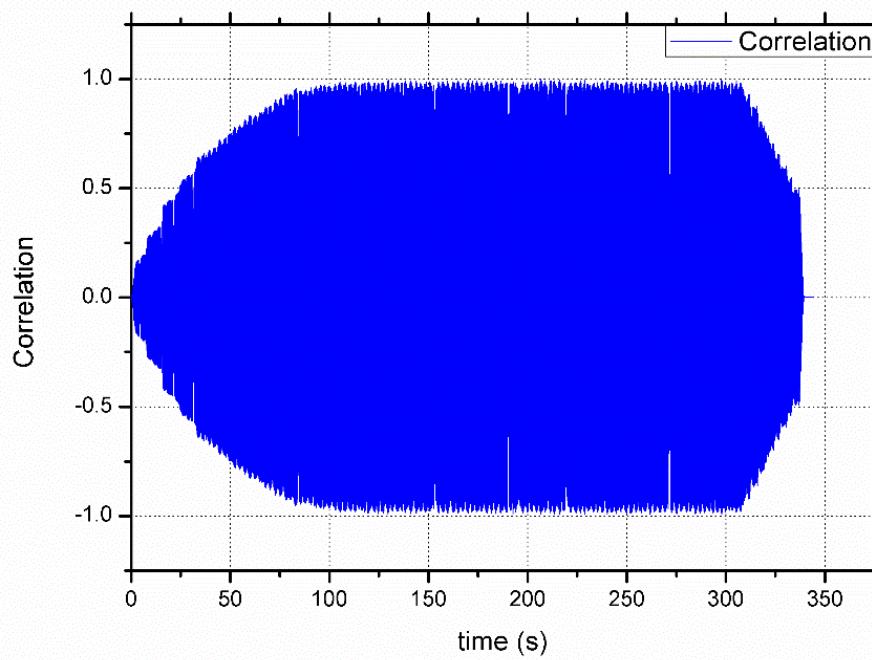
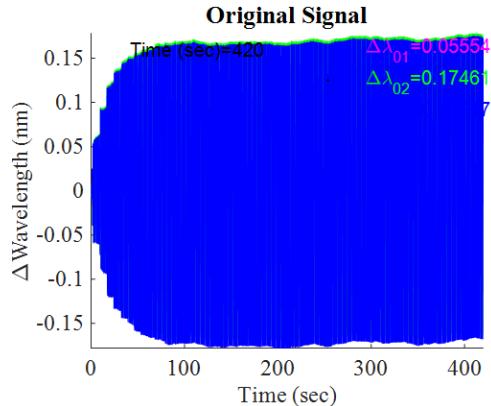
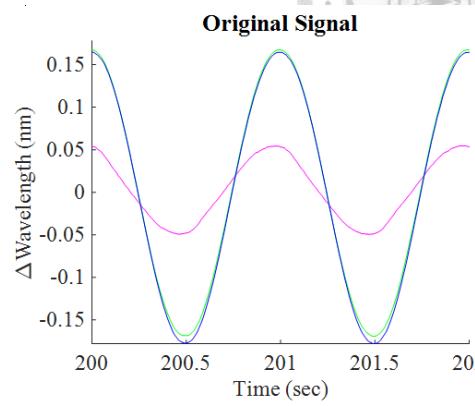


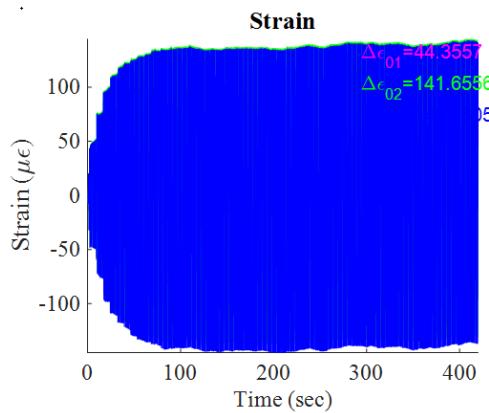
圖 6.44 頻率 3Hz 互相關之計算結果



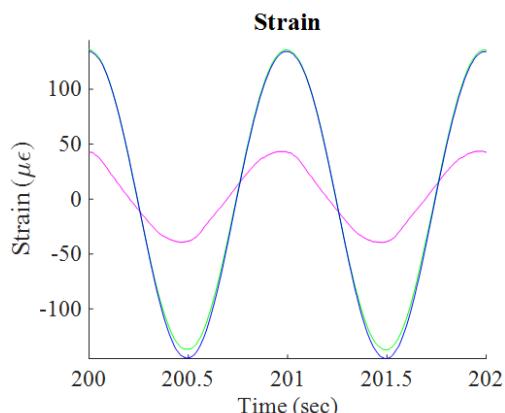
(A)光纖波長飄移 (前 420 秒)



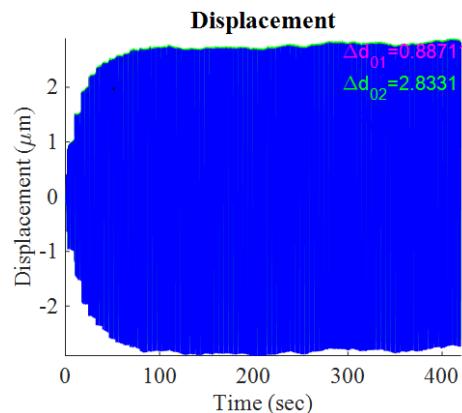
(B)光纖波長飄移 (200 ~ 202 秒)



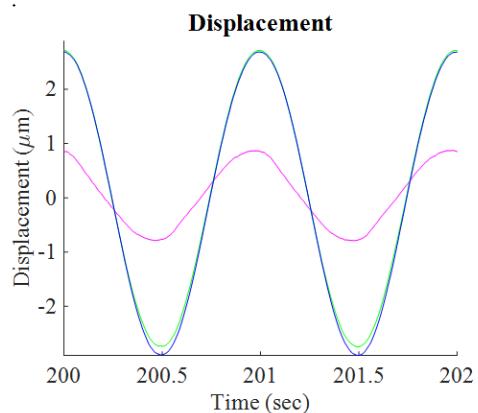
(C)應變資訊 (前 420 秒)



(D)應變資訊 (200 ~ 202 秒)



(E)變形量資訊 (前 420 秒)



(F)變形量資訊 (200 ~ 202 秒)

圖 6.45 頻率 1Hz 作動下的光纖量測資訊

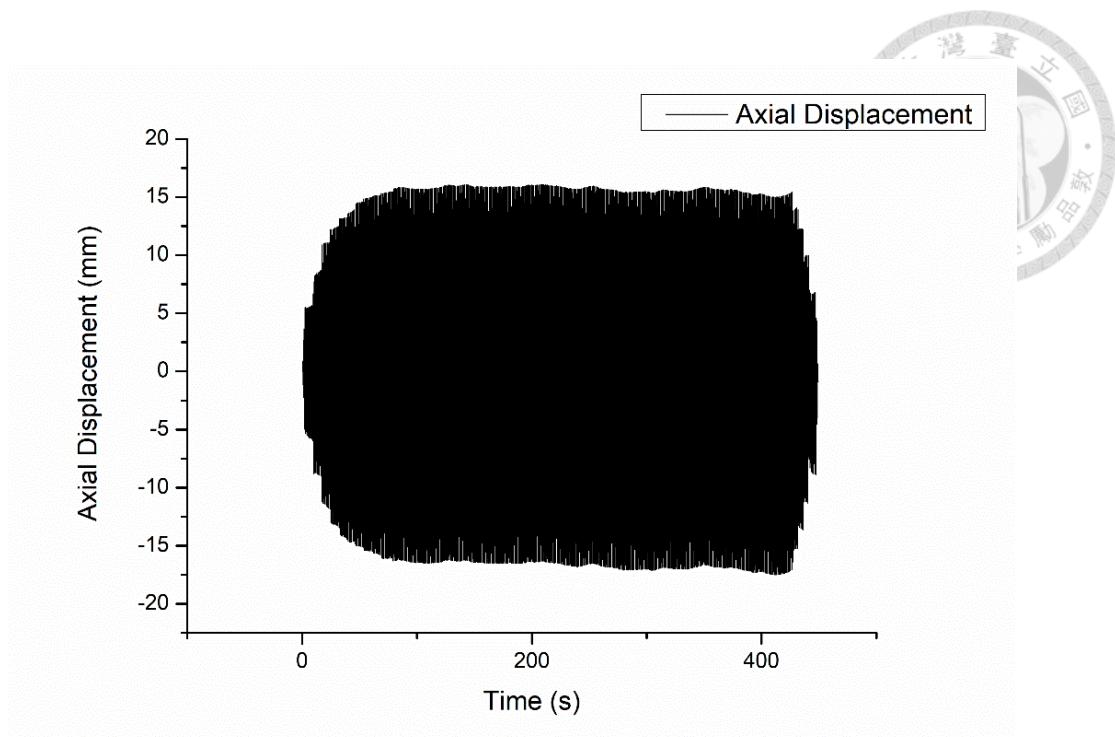


圖 6.46 頻率 1Hz 作動下 MTS 軸向位移資訊

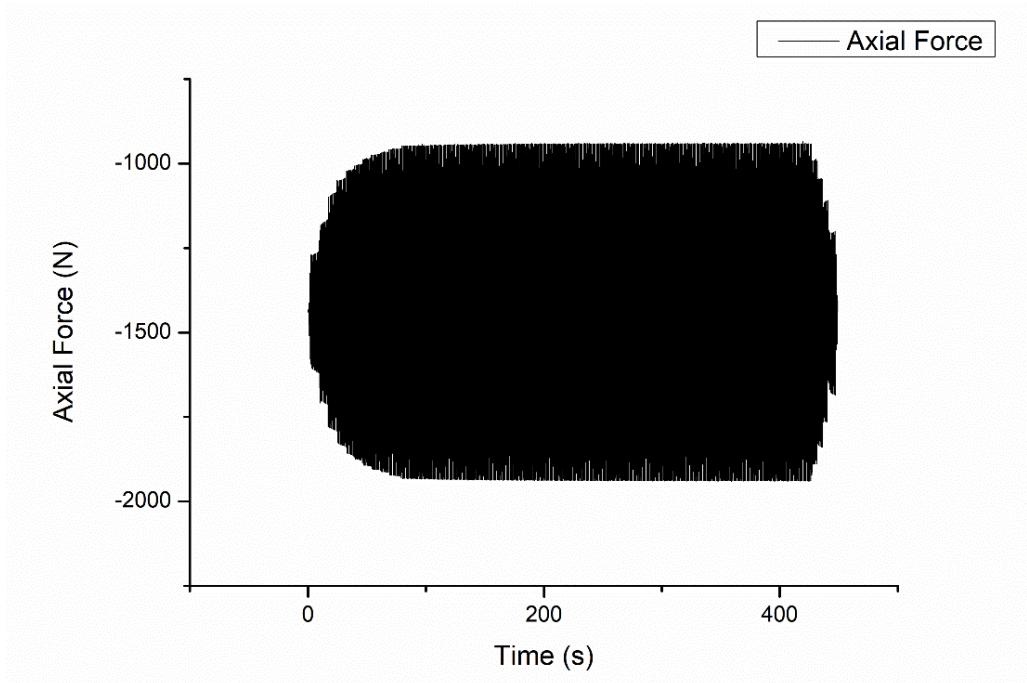


圖 6.47 頻率 1Hz 作動下 MTS 軸向力量資訊

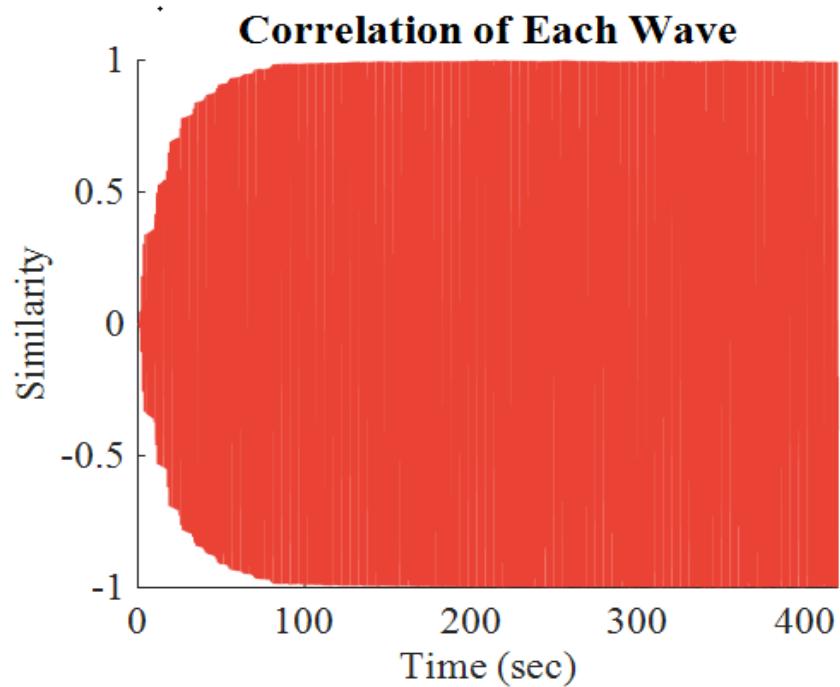


圖 6.48 頻率 1Hz 作動下的互相關係數(0 ~ 420 秒)

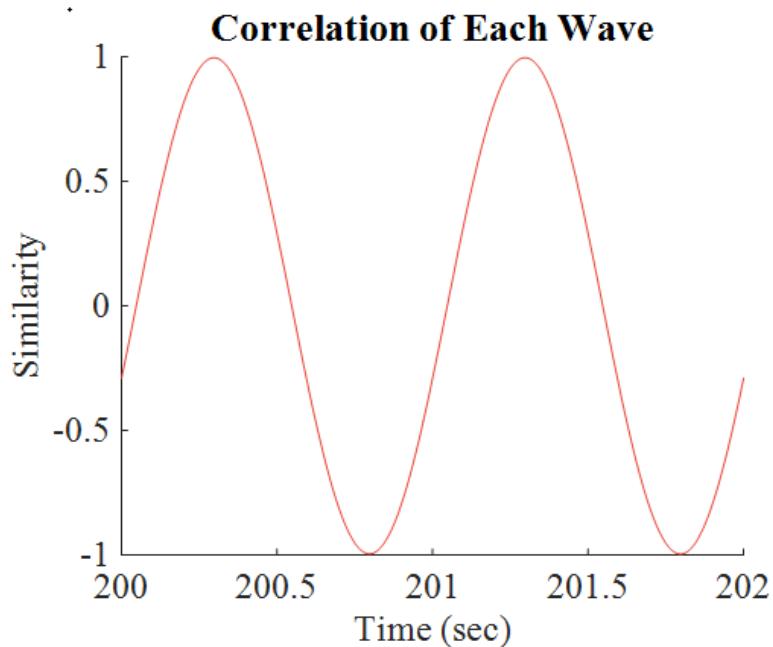


圖 6.49 頻率 1Hz 作動下的互相關係數(200 ~ 202 秒)

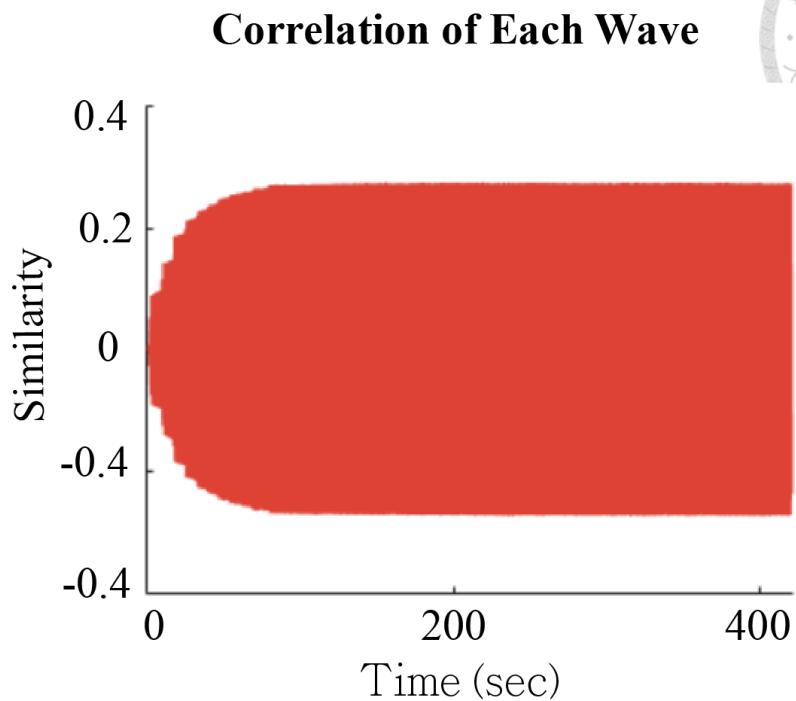


圖 6.50 以 3Hz 為特徵訊號與 1Hz 原始訊號的互相關係數(0 ~ 420 秒)

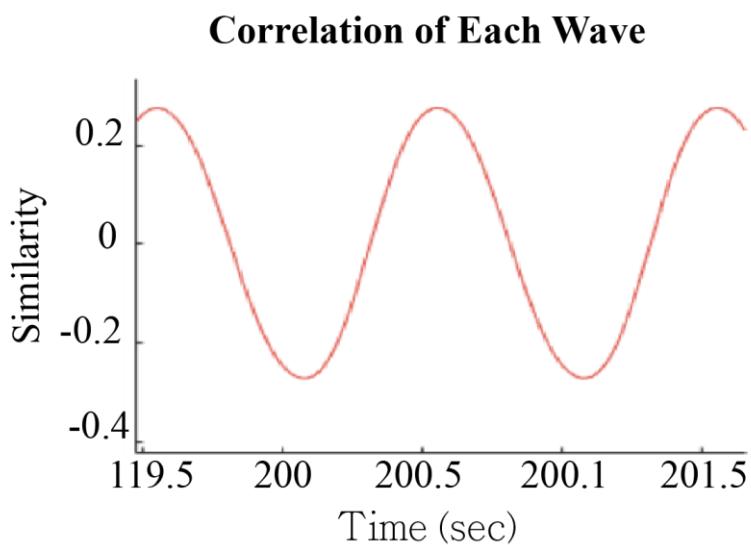


圖 6.51 以 3Hz 為特徵訊號與 1Hz 原始訊號的互相關係數(199.5 ~ 201.5 秒)

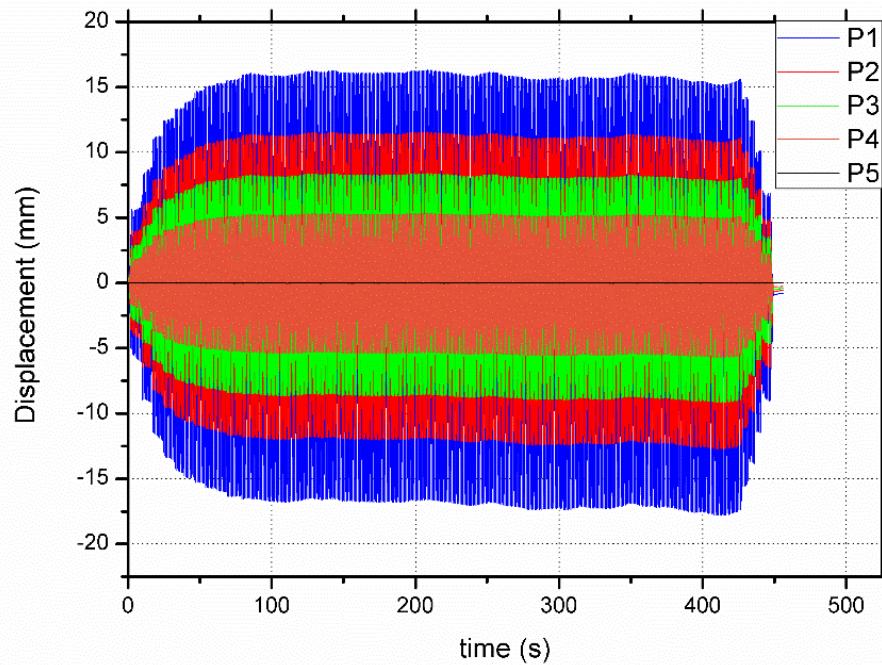


圖 6.52 頻率 1Hz 之量測結果

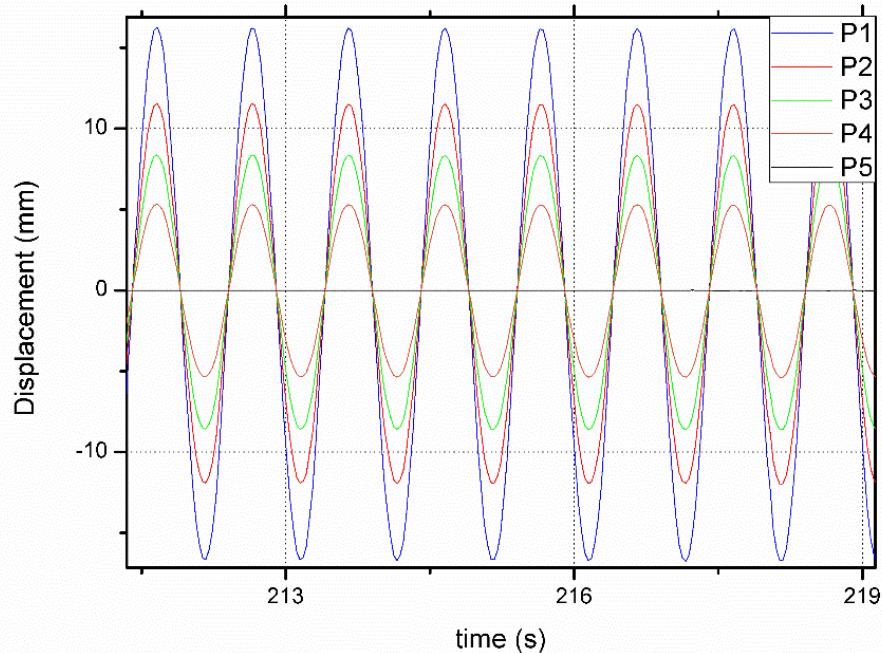


圖 6.53 放大圖 6.52 之部分訊號

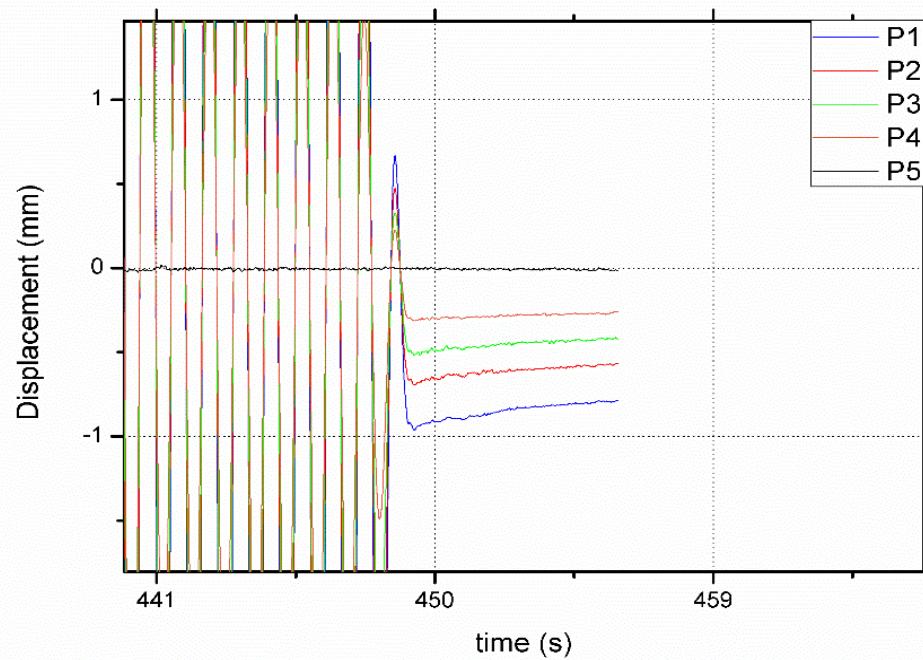


圖 6.54 放大圖 6.52 之末端訊號

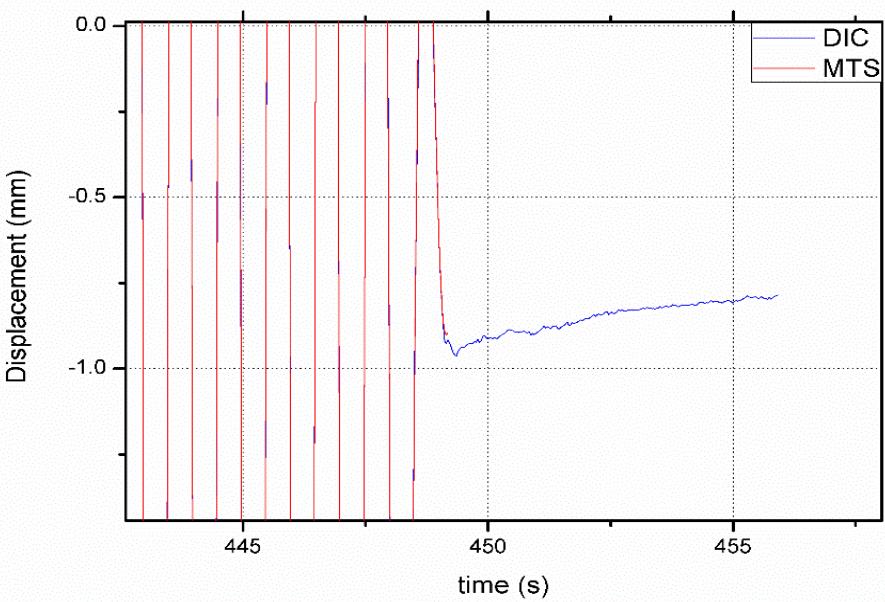


圖 6.55 頻率 1Hz DIC 與 MTS 之末端訊號結果比較

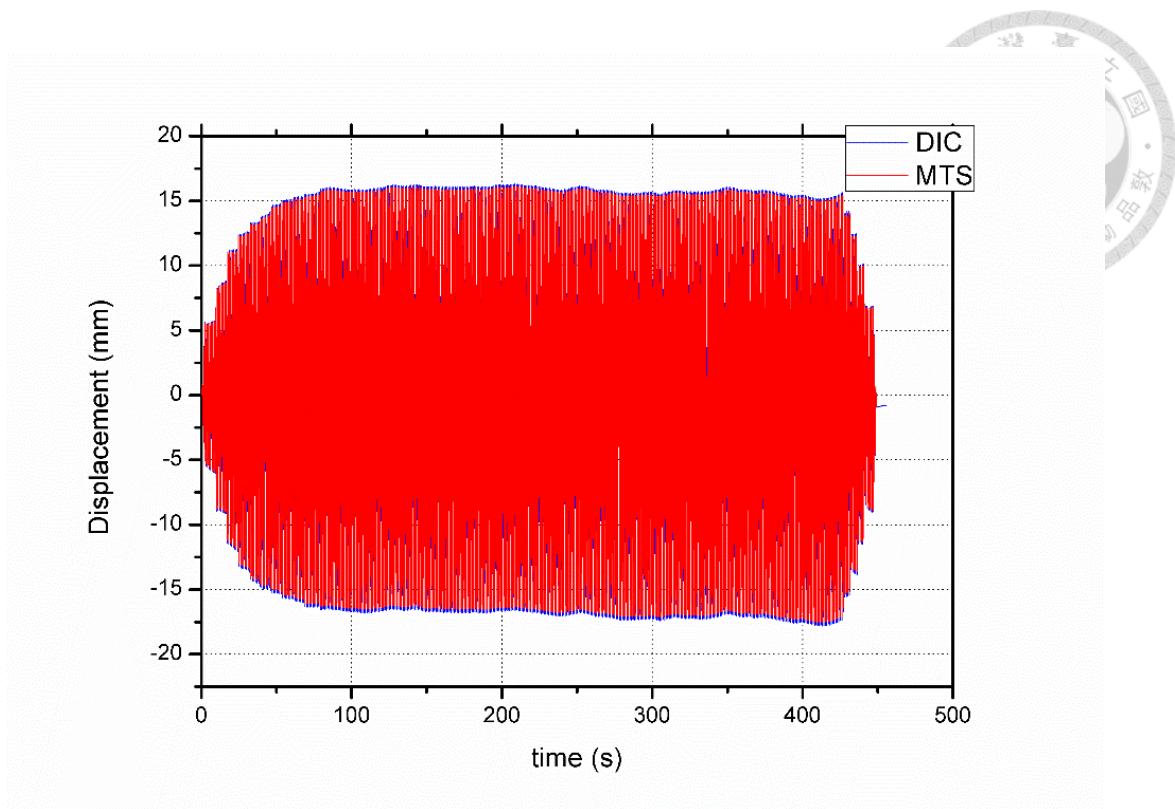


圖 6.56 頻率 1Hz DIC 與 MTS 之最大位移結果比較

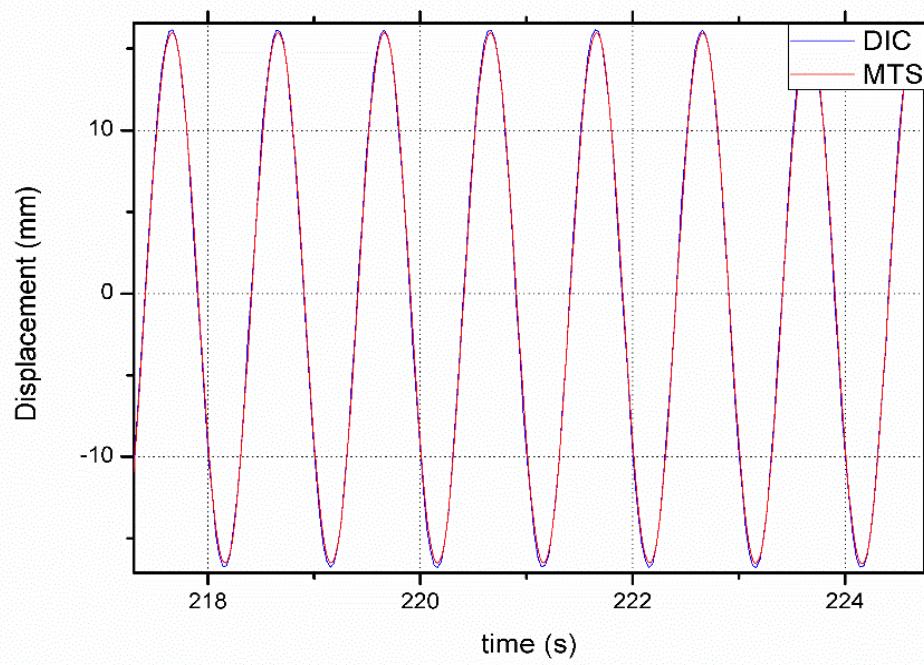


圖 6.57 頻率 1Hz DIC 與 MTS 之部分訊號結果比較

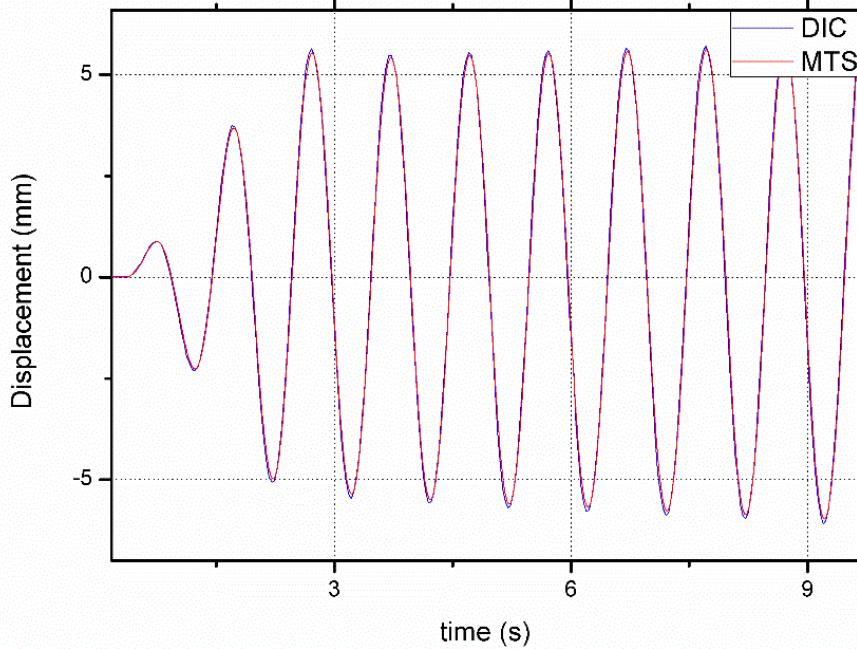


圖 6.58 頻率 1Hz DIC 與 MTS 之起始訊號結果比較

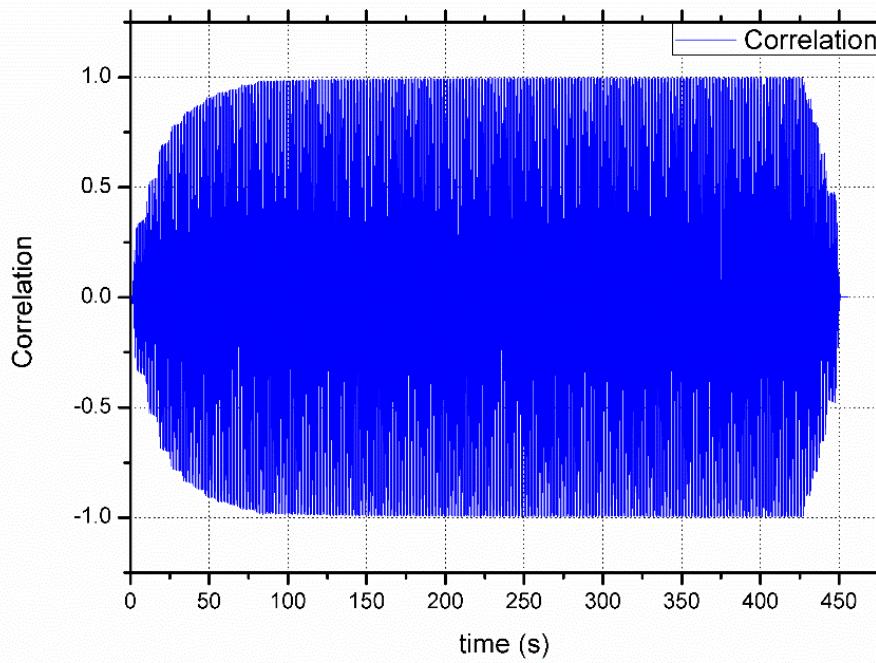


圖 6.59 頻率 1Hz 互相關之計算結果

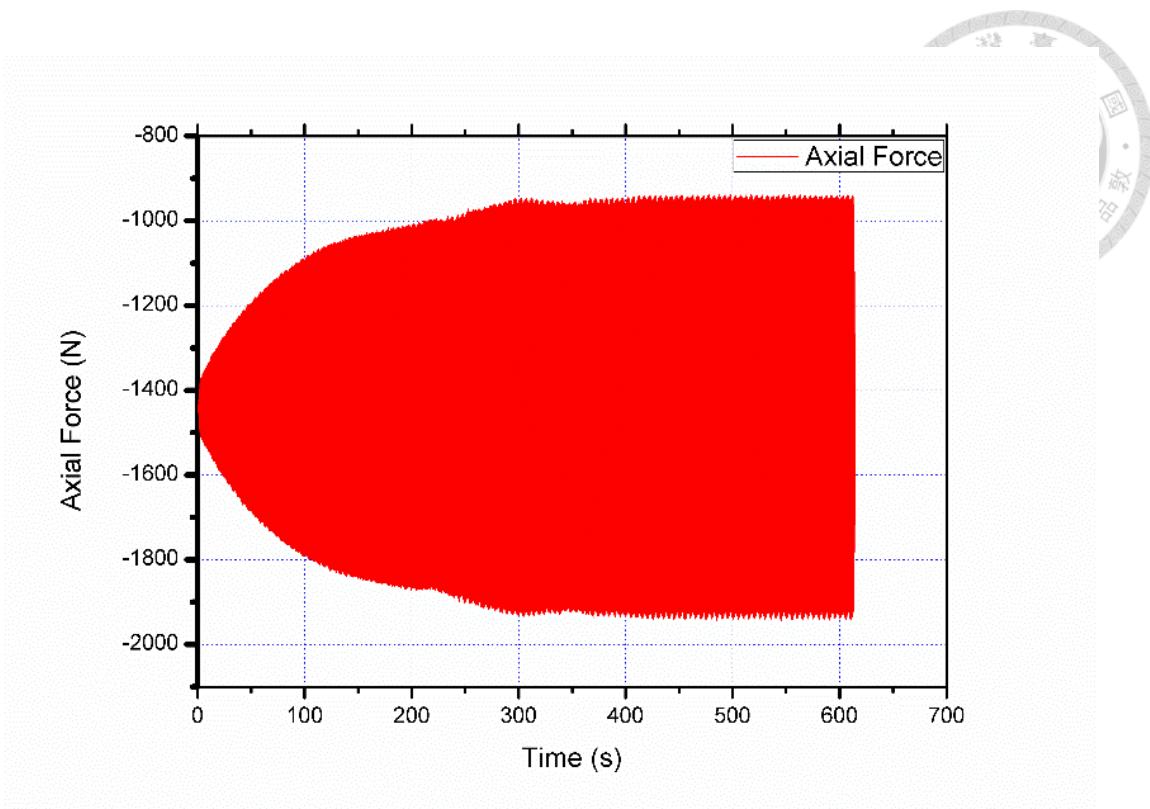


圖 6.60 試驗機頻率 5Hz 之力訊號

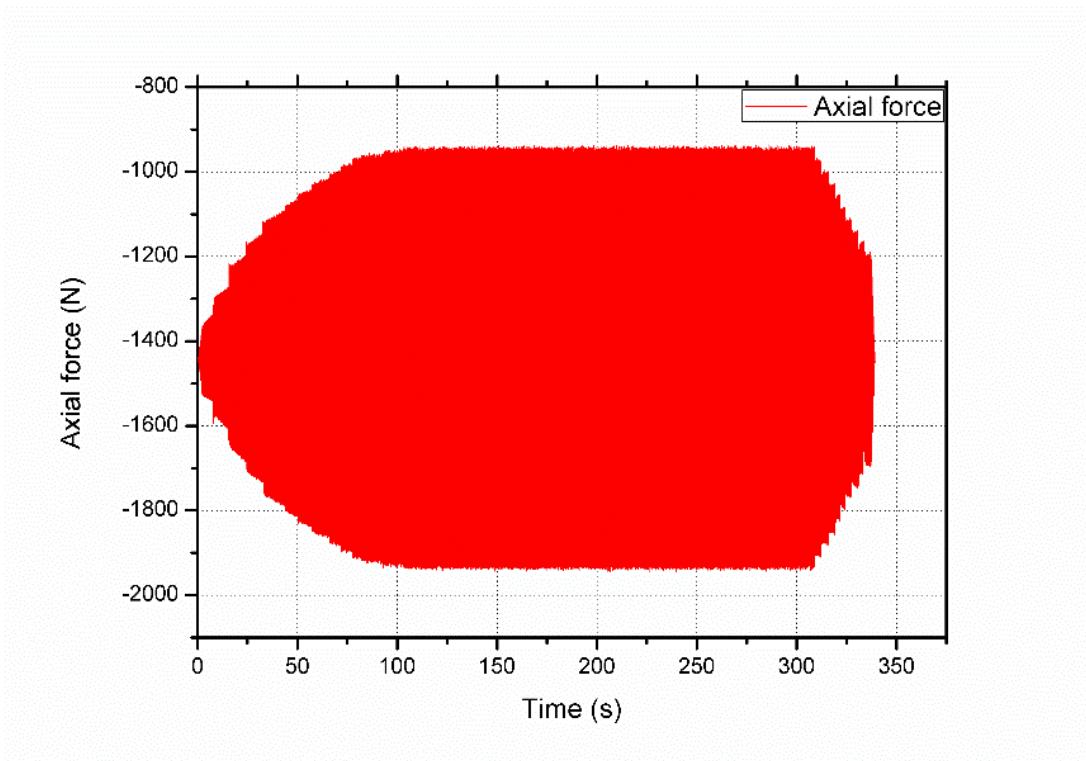


圖 6.61 試驗機頻率 3Hz 之力訊號

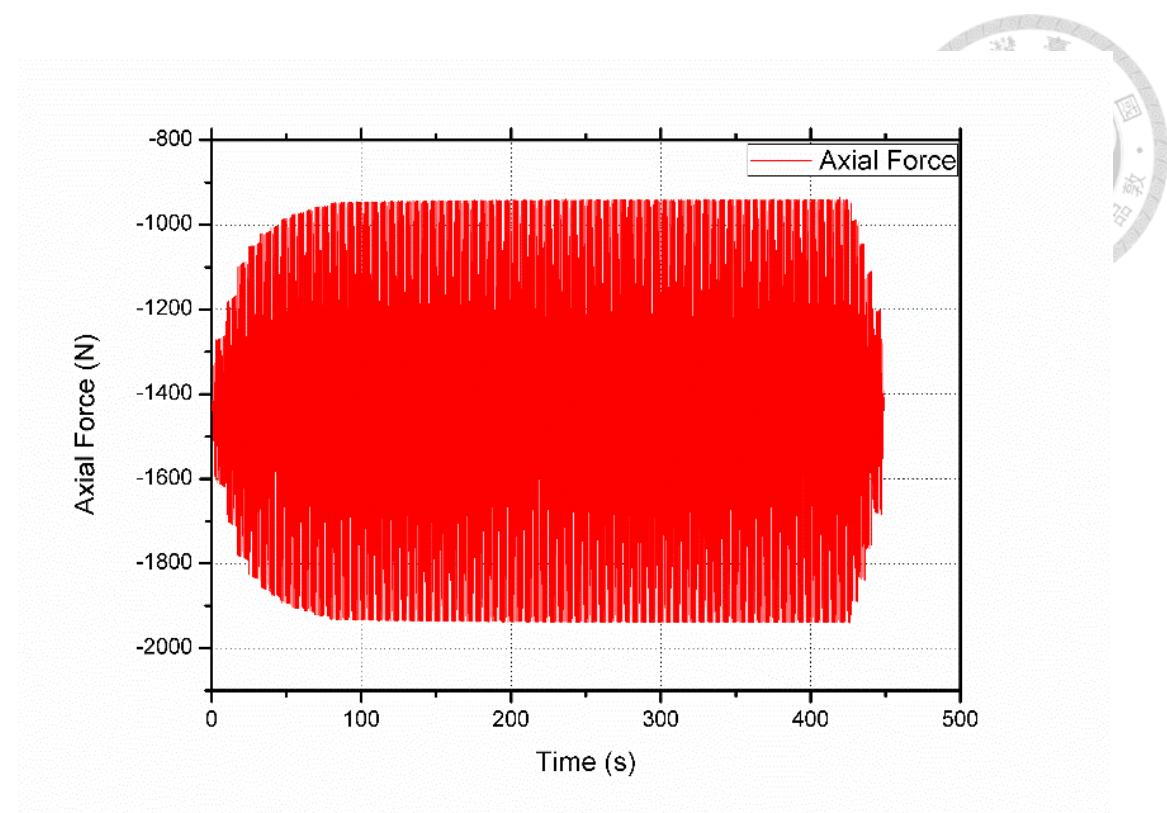


圖 6.62 試驗機頻率 1Hz 之力訊號

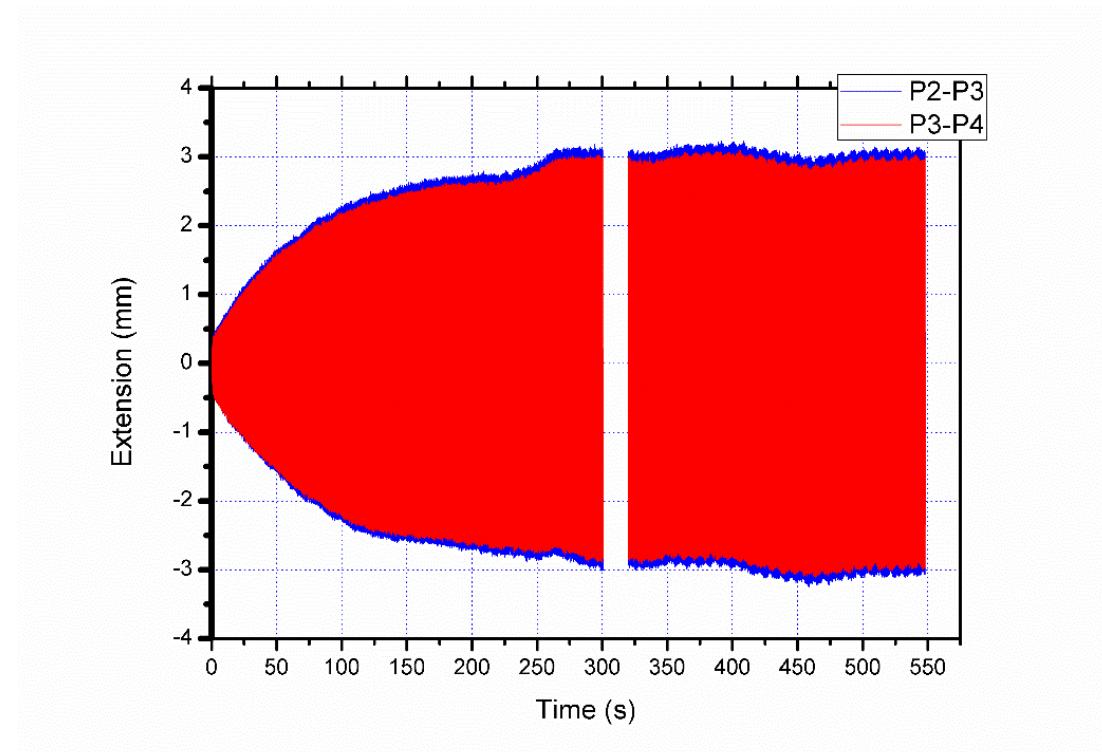


圖 6.63 頻率 5Hz 之不同螺距伸長量

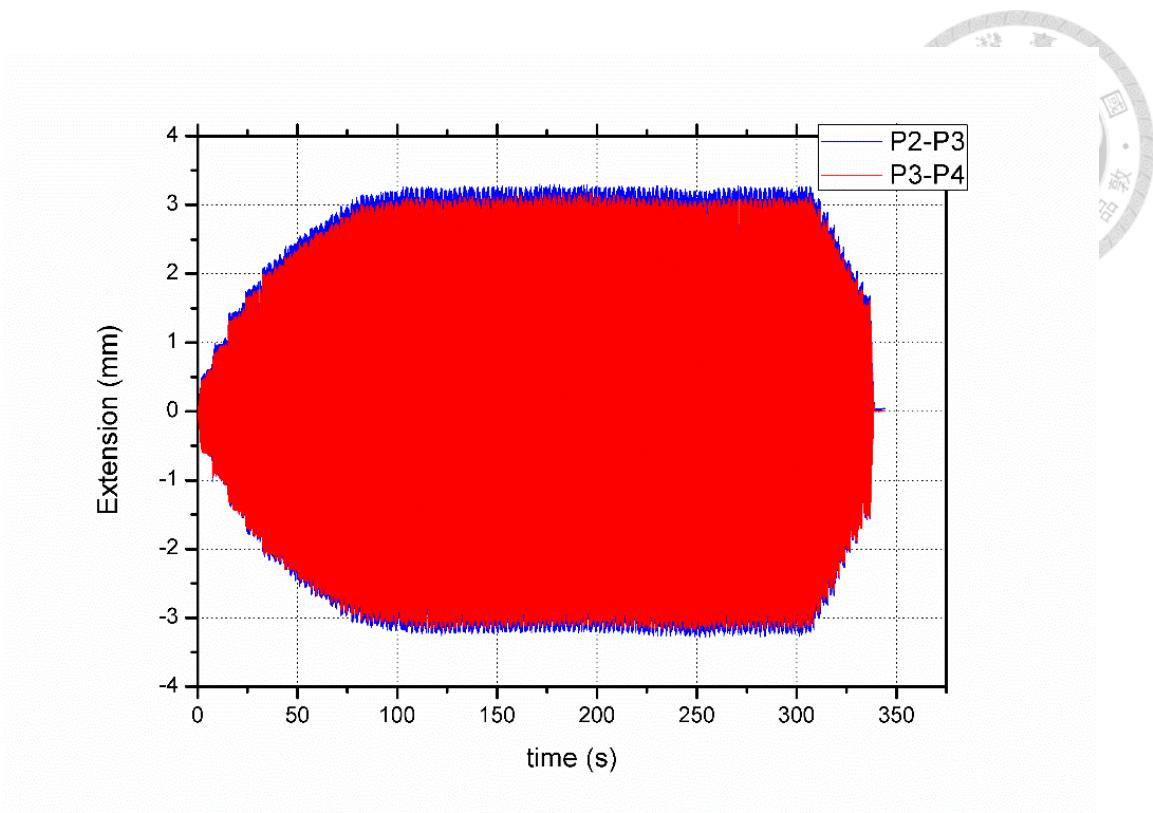


圖 6.64 頻率 3Hz 之不同螺距伸長量

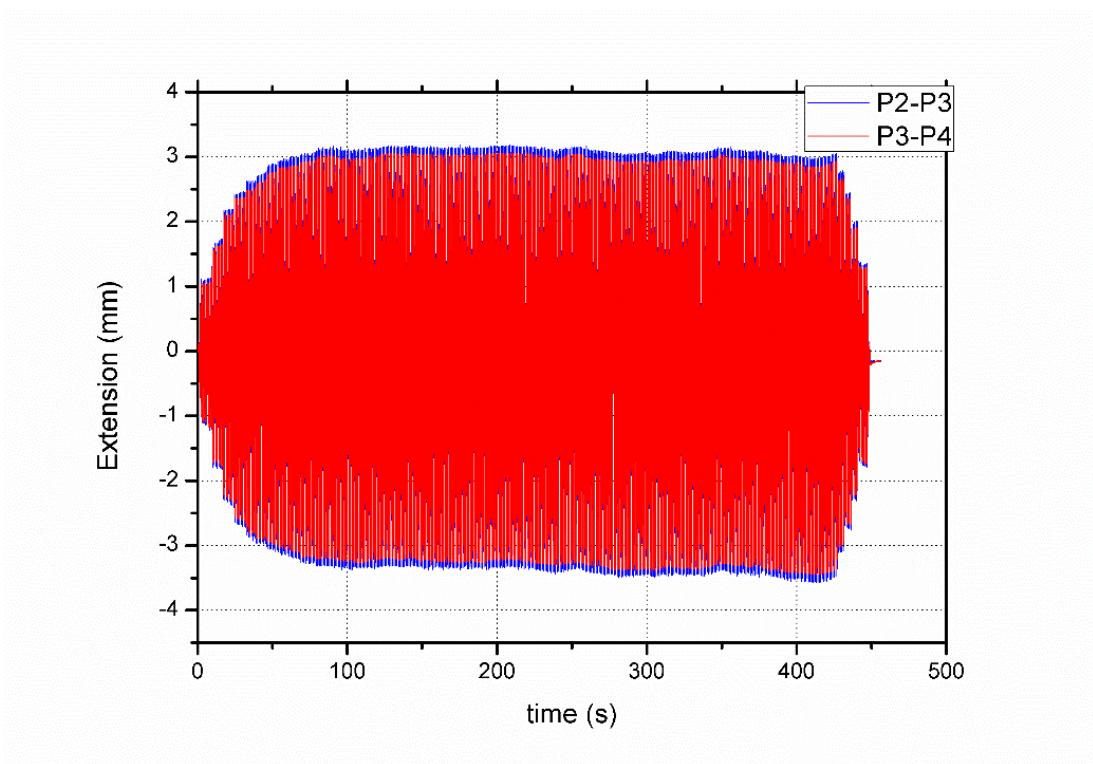


圖 6.65 頻率 1Hz 之不同螺距伸長量

Read data (Ver.2.0)

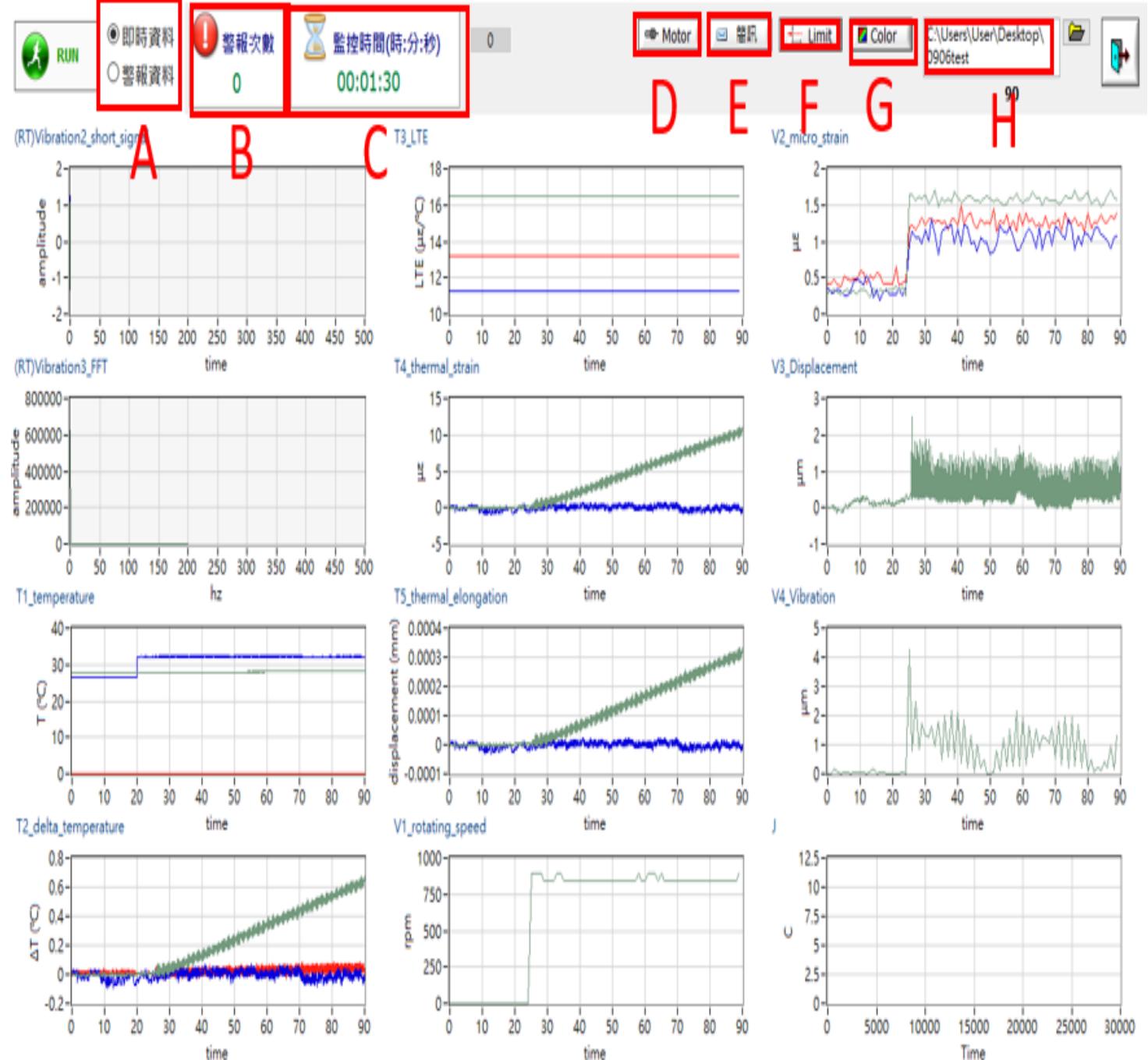


圖 6.66 雲端監視系統主畫面

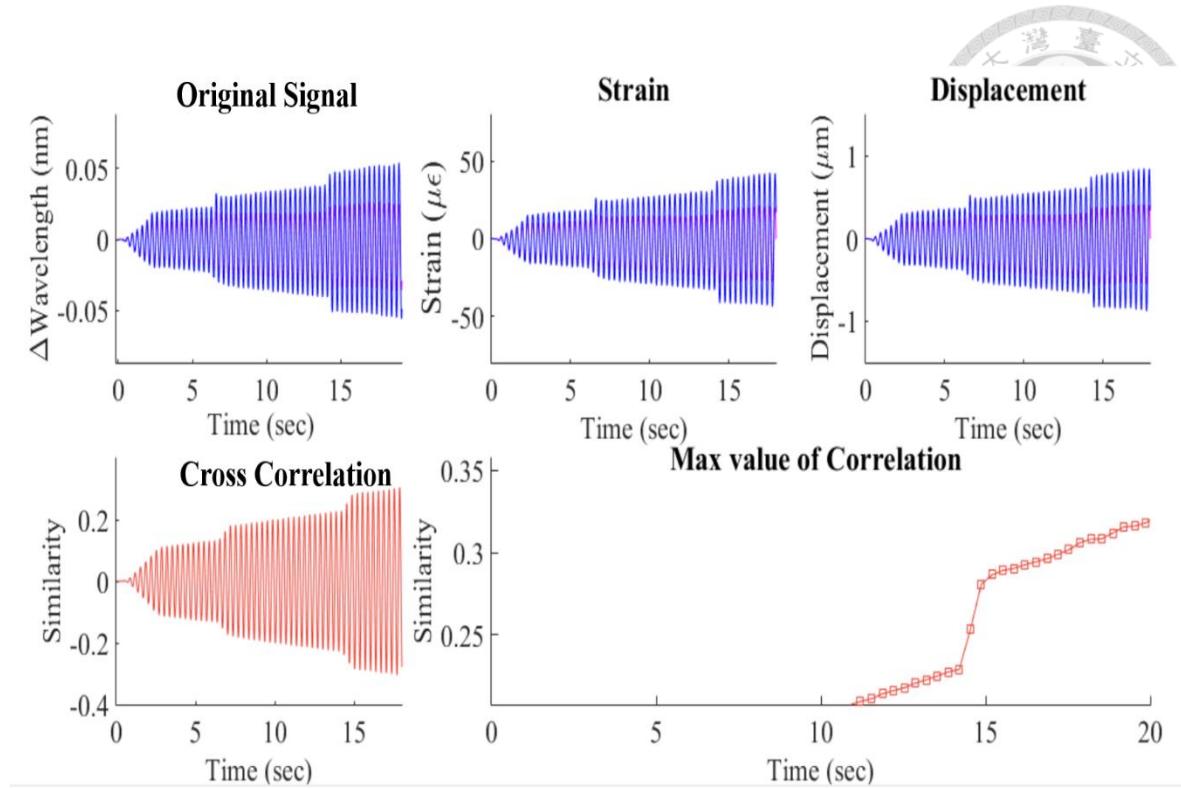


圖 6.67 彈簧系統即時量測畫面



圖 6.68 LTE 閘道器 OnCell G3150A-LTE

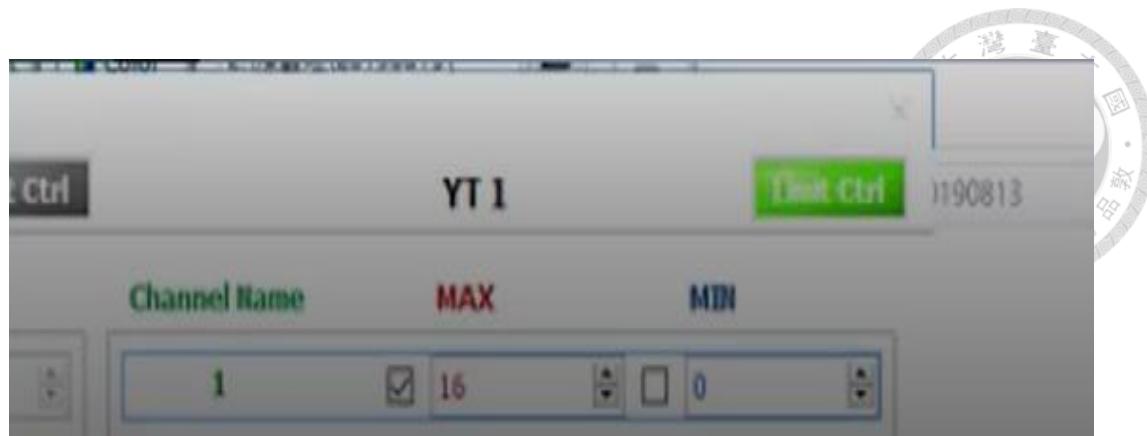


圖 6.69 警戒閥值設定



圖 6.70 發送警報簡訊 (超過閥值時)

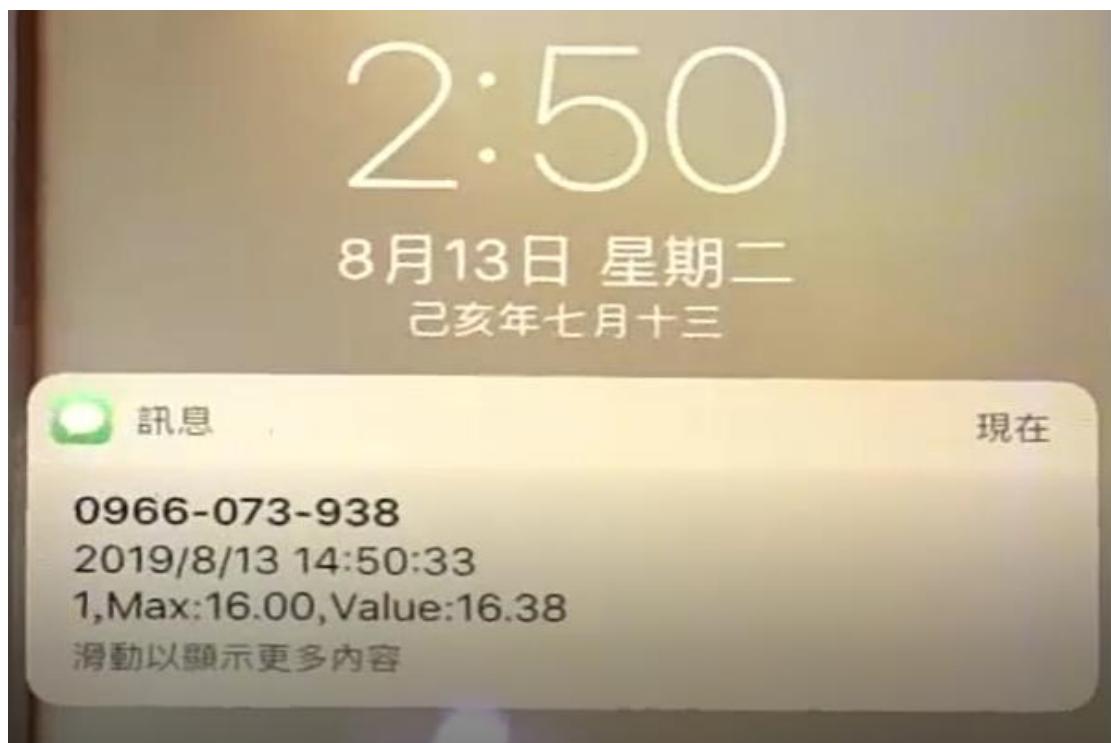


圖 6.71 手機收到的警戒簡訊

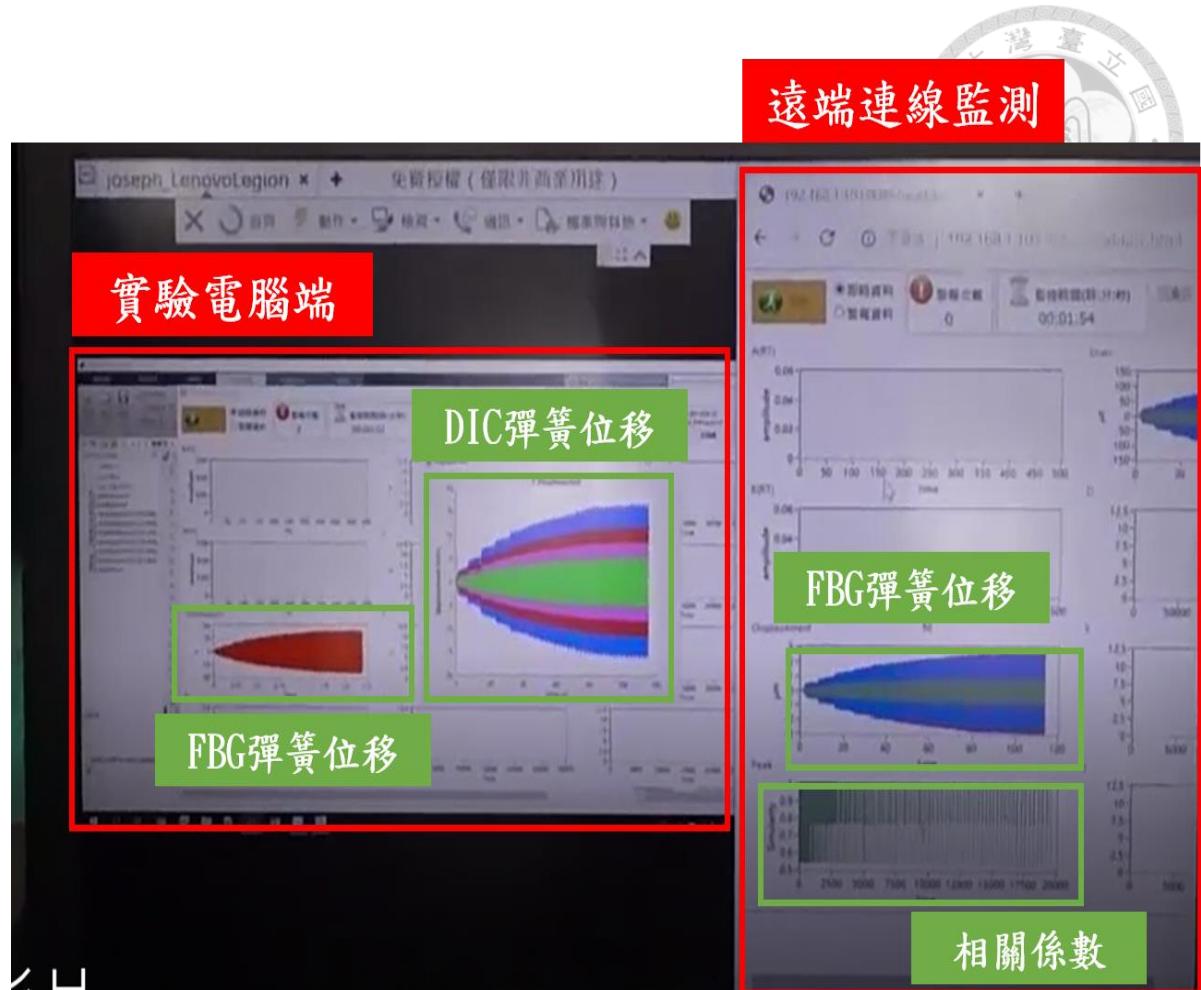


圖 6.72 雲端網頁連線畫面

第七章 應用數位影像相關法 Micro LED 瑕疵檢測



隨著智慧型手機、主動式發光顯示器、微投影顯示器市場需求增加，微發光二極體(Micro LED)亦成為我國電子產業重要的元件技術。其工作原理主要是將 LED 結構設計進行薄膜化、微小化及陣列化，達到 50 微米以下尺寸，再透過巨量轉移技術將微米等級的紅、藍、綠三色 Micro LED，移轉至不透明、軟性透明或硬性的電路基板上，利用物理沈積製程方式完成保護層與上電極，與基板封裝，完成結構簡單及多樣尺寸的 Micro LED 顯示單元。Micro LED 具有節能、機構簡易、薄型體積小、高效率、高可靠度、高亮度及自發光無需背光源的特性等優勢。Micro LED 至今仍存在製造成本較高與巨量轉移(Mass Transfer)、接合(Bonding)、修補(Repair)、驅動 IC 設計與製程等技術需克服。Micro LED 主要由磊晶矽晶圓片 (Epitaxial Wafer) 製程生產，因晶片尺寸常常小於 50 微米以下，所以它的電極尺寸大小約略為十微米，導致 Micro LED 無法在晶片製程後進行測試，加上製程參數將會影響良率，對於大量的影像檢測需要耗費運算效能，針對良率提升，或是提出快速且準確瑕疵檢測成為工業最重視的議題。

7.1 數位影像相關法 Micro LED 瑕疵檢測

7.1.1 Micro LED 概述

傳統發光二極體(LED)構造如圖 7.1 所示，圖中晶粒(Die)為發光部分，邊長尺寸大約 1 毫米 (mm)，將晶圓切割後再進行打線(Bonding)封裝，外部再利用塑膠外殼進行封裝，即可成為一顆可以發出強光的發光二極體，因傳統發光二極體色素單純，只能用來製作單色發光二極體如招牌等應用。隨著技術進步，也發展出晶粒邊長小於 1 毫米 (mm) 之毫發光二極體(Mini LED)，甚至開發出晶粒邊長尺寸小於

發光二極體十分之一邊長尺寸 100 微米 (μm) 內微發光二極體(Micro LED)，如圖 7.2。相較人類頭髮直徑大約 100 微米 (μm)，Micro LED 具有導電性高、耗電量低、發光效率佳、色彩飽和度高等優點，其比人類的頭髮直徑還小，可以應用在智慧眼鏡或中小尺寸顯示面板上。

Micro LED 製程與良率品質緊緊相扣，製程上在藍寶石基板長出單一色系(如紅、藍、綠)LED 薄膜，再藉由半導體微影製程技術在薄膜上進行光罩圖案曝光，定義出 LED 晶粒圖案化，再將數百萬顆的 LED 晶粒，應用巨量轉移技術精準的轉移到顯示器基板上指定位置，再進行檢測、瑕疵修補或拼接等。在上述製造過程檢測 Micro LED 晶片功能是否正常，以確保晶片效率並提高整體良率，也是製程中的重要步驟。若檢測到晶片瑕疵，則必須採用對應修補技術進行晶片修補。

7.1.2 數位影像相關法

數影法之理論請參見第六章，此方法不受雷射或特殊光源限制，屬於全域式、非接觸之量測技術，適用於全場性跨尺度微奈米材料或大型結構件的位移及變形場的量測，也可做小面積小位移或大面積大位移的動靜態、穩態量測。數影法技術是利用高解析度、高速度數位攝影機，藉由拍攝數十張(準靜態問題)或數萬張(動態及暫態問題)影像，將待測物體上質點移動或變形的過程精準記錄下來，再使用核心影像處理技術來進行影像堆疊分析，追蹤待測物表面特徵質(或灰階特徵)，以拍攝出在負載或時間變化下全場位變形移相關資訊。亦可根據量測距離遠近及量測範圍大小，選用不同的光學鏡頭，進行多元化及便利性的量測，如選用顯微鏡可做毫微米精度量測，採用望遠鏡頭則可作大面積範圍大位移量測。其基本原理及實驗設備相當簡單，但須投入演算快速的影像辨識及追蹤技術，影像辨識及追蹤技術需能開發有效分離主訊號及雜訊，且能快速搜尋主訊號的邏輯及理論基礎，不但能進行單點的量測，更可同時分析可多達千點甚至萬點位移資訊，進而可獲得結構體應

變的全場量測，數影法應用層面廣泛，已大量應用於機械、材料與結構領域的量測。

眾所周知，有關隨時間劇烈變化動態量測、微奈米級精密量測與跨尺度量測等議題，這三種問題是實驗力學中不容易精確量測到的，也是國內外學者提出各種實驗方法欲突破的方向，當能採用同一種實驗方法的架構，能針對上述不同的問題特性皆能作準確而精密的量測，是更具有前瞻及競爭性的實驗技術，數影法可涵蓋以下三個主題(1)高解析度的動態問題全域及暫態量測；(2)微米尺度的結構及材料在次微米精度的定量全域量測；(3)大尺度結構及微奈米尺度材料的全域量測並發展影像相關法三維量測技術等。

7.1.3 Micro LED 良品與瑕疵品樣態

工業上藉由巨量轉移技術將多顆 Micro LED 晶粒移轉到基板上，但移轉過程易造成 Micro LED 晶粒損壞，因此必須進行 Micro LED 晶粒修補，來提升 Micro LED 轉移後良率，達到商用產品應用需求，因為 Micro LED 晶粒為微米等級，很難直接用眼睛辨識，必須以影像方式檢測，所以本文應用數影法來進行 Micro LED 良品與瑕疵品辨識。

為取得 Micro LED 晶粒影像，我們將 Micro LED 晶圓放置於光學自動檢測設備平台上，來進行 Micro LED 晶粒影像拍攝，檢測機台與拍攝示意圖分別如圖 7.3 與 7.4 所示，以圖 7.5 中晶圓大小拍攝獲得 Micro LED 影像總數為 15360 張檢測影像，如圖 7.6 所示。一般檢測機台判定 Micro LED 正常標準影像如圖 7.7，由圖中紅色虛線方框中可觀察到正常晶片亮度為均勻分布狀態，且紅色虛線框中左下角清楚可觀察到方框及框內圓點影像。圖 7.8 與圖 7.9 屬於檢測設備判定瑕疵影像，其瑕疵樣態為晶片中出現汙損情況，或是晶片在進行巨量轉移時出現放置位置不良，導致晶片為過度旋轉樣態。甚至晶片在巨量轉移過程中，由於外部因素影響，造成晶片放置時產生破裂現象，如圖 7.10。



7.2 Micro LED 影像瑕疵檢測標準樣板特徵搜尋與檢測結果

7.2.1 Micro LED 影像瑕疵檢測標準樣板特徵搜尋

經由前文檢測設備所拍得 15360 個 Micro LED 晶粒圖像，可依序將待測 Micro LED 晶粒記錄成為序列影像，將含有良品與瑕疵品 Micro LED 序列影像輸出成影片檔至演算法中進行 Micro LED 檢測。

本文以良品標準影像當作比對標準樣板，配合演算法進行 Micro LED 定位及判斷瑕疵情況。以單張影像為例，首先指定欲計算之區域作為樣板，例如指定 Micro LED 中央僅含晶片處為樣板，並設定為後續影像中欲搜尋目標，在指定完搜尋樣板後，藉由演算法讀取影片中第一張影像，並計算歸一正化交叉相關係數矩陣(Normalized cross-correlation matrix)，獲得相關性係數矩陣後，尋找在該矩陣中與匹配樣板交叉相關性最高位置即為在該影像 Micro LED 晶片位置，此步驟為單一張影像之樣板配對流程，重複執行影片中每張序列影像樣板匹配，可得到每張影像中最高交叉相關性係數，完成後可得到序列影像對最高交叉相關性係數圖，同時可將相關性係數與設定閾值(本文設定值為 0.95)進行比對，當相關性係數低於設定閾值時即為判定不合格或瑕疵晶片，反之則為合格晶片。

7.2.2 Micro LED 影像檢測結果

本文利用數影法樣板輪廓比對圖像來進行 Micro LED 瑕疵檢測，先選取 Micro LED 良品標準影像當作欲計算區域為比對標準樣板，再依數影法程式來自動比對所輸入 Micro LED 影像，檢測出來的結果會自動將 Micro LED 影像分類出良品與瑕疵品。所以由前文檢測設備所拍得 15360 個 Micro LED 晶粒圖像中隨機取出 15 張影像，其中包括良品與瑕疵品 Micro LED 晶粒圖像，先由 15 張中選取 1 張 Micro LED 晶粒良品為標準影像(1.bmp)如圖 7.11(A)，接著將 15 張



Micro LED 良品與瑕疵品影像檔輸出至演算法中，藉由數影法進行影像比對，在圖 7.11(A)中設定綠框區域為後續影像中欲搜尋範圍，紅框為 Micro LED 標準影像。又圖 7.11(A)良品標準樣版中，綠色框區域外屬於背景區域，背景區域占極大部分範圍，若對背景區域進行運算，將增加演算法計算時間，所以標示綠框處為搜尋範圍，來縮小搜尋範圍，當相關性係數演算法自動比對所選取標準樣板綠框範圍，因為比對面積不包括背景區域，不但可以減少相關性係數比對的運算量，同時也可比對正常樣板與待測樣板 Micro LED 晶片差異性，即為利用演算法進行檢測核心概念。

前文定義出標準影像後，若選取標準影像與本身進行演算法運算比對，如圖 7.11(B)為待測影像(1.bmp)，其中綠框標示區域為搜尋區，紅框為搜尋後之最高相關係數之匹配影像，影像輸入進行演算法會自動搜尋圖 7.11(B)待試影像綠框範圍，並與圖 7.11(A)紅框 Micro LED 標準影像進行比對，最後計算出在綠框搜尋範圍內全場歸一化交叉相關性係數，圖 7.11(C)為進行數位影像相關匹配之全場結果，圖 7.11(D)為所相對應的相關係數等高線圖，進行數位影像相關匹配之全場結果因為將標準影像圖 7.11(A)與本身圖 7.11(B)進行影像比對，所以全場相關性係數最高值為 0.999，也大於所設定閾值 0.950。圖 7.11(E)與(F)分別為圖 7.11(A)與(B)剪裁紅框範圍後示意圖。

接著同樣以圖 7.12(A)左圖為良品標準影像(1.bmp)，其中綠框區域設定為後續欲搜尋影像範圍，紅框為 Micro LED 標準影像，藉由演算法與標準影像進行序號第二至第十五待測影像運算逐一比對，如圖 7.12 至圖 7.25 中(A)與(B)圖所示，所得到序號第二至第十五數位影像相關匹配之全場結果與相關係數等高線圖分別如圖 7.12 至圖 7.25 中(C)與(D)圖所示，圖 7.12 至圖 7.25 中(E)與(F)分別代表序號第二至第十五自動裁切紅框範圍 Micro LED 之標準影像與測試影像圖。當利用數影法對於輸入影像序號第一至第十五 Micro LED 進行演算法演算，可即時產出 15 筆

歸一化交叉相關性係數，並同步以紅色圓點符號記錄於圖 7.26 中，在圖 7.26 中所設定閾值如藍色線為 0.950，高於閾值 0.950 紅色圓點代表 Micro LED 屬於良品，而低於閾值 0.950 紅色圓點代表 Micro LED 屬於瑕疵品。觀察圖 7.26 可知第五、九、十一序號測試影像交叉相關性係數分別為 0.831、0.847、0.859，小於設定閾值 (0.950)，所以 Micro LED 屬於瑕疵品，其餘 Micro LED 皆為良品。仔細分別觀察這些 Micro LED 瑕疵品，在序號第五相較於裁切後良品標準影像圖 7.15(E)，可觀察到在圖 7.15(F)上半部具有明顯破裂痕跡，且右邊緣區域存在缺料現象。比對第九序號標準影像圖 7.19(E)與測試影像圖 7.19(F)，看出圖 7.19(F)下半部具有明顯破裂痕跡，而序號第十一圖測試影像 7.21(F)相較標準影像圖 7.21(E)也具有明顯差異處，證實本文演算法可運用於微小瑕疵檢測。本文所開發程式也可以提供定量的分析結果，並於影像比對演算結束後可自動將相關性係數儲存為文字格式與 Excel 格式，可作為後續判定 Micro LED 為良品或瑕疵品之分析使用。

本文著重於機械視覺核心演算法軟體開發，更以混合語言方式，建構完整的操作者指令輸入使用界面，如圖 7.27 所示，可根據實際檢測現況，自行調整細部參數。所以對於前述良品標準影像選取綠框搜尋區域，與標準影像涉及操作人員判斷，本程式亦同時提供指令輸入，可在每次使用者運算後自動生成巨集指令碼，可供後續人員重複同樣參數，避免人員操作偏誤，由於程式碼係使用混合語言與物件導向式架構開發，具有高度可擴充性，並可因時制宜根據不同需求增加模組。

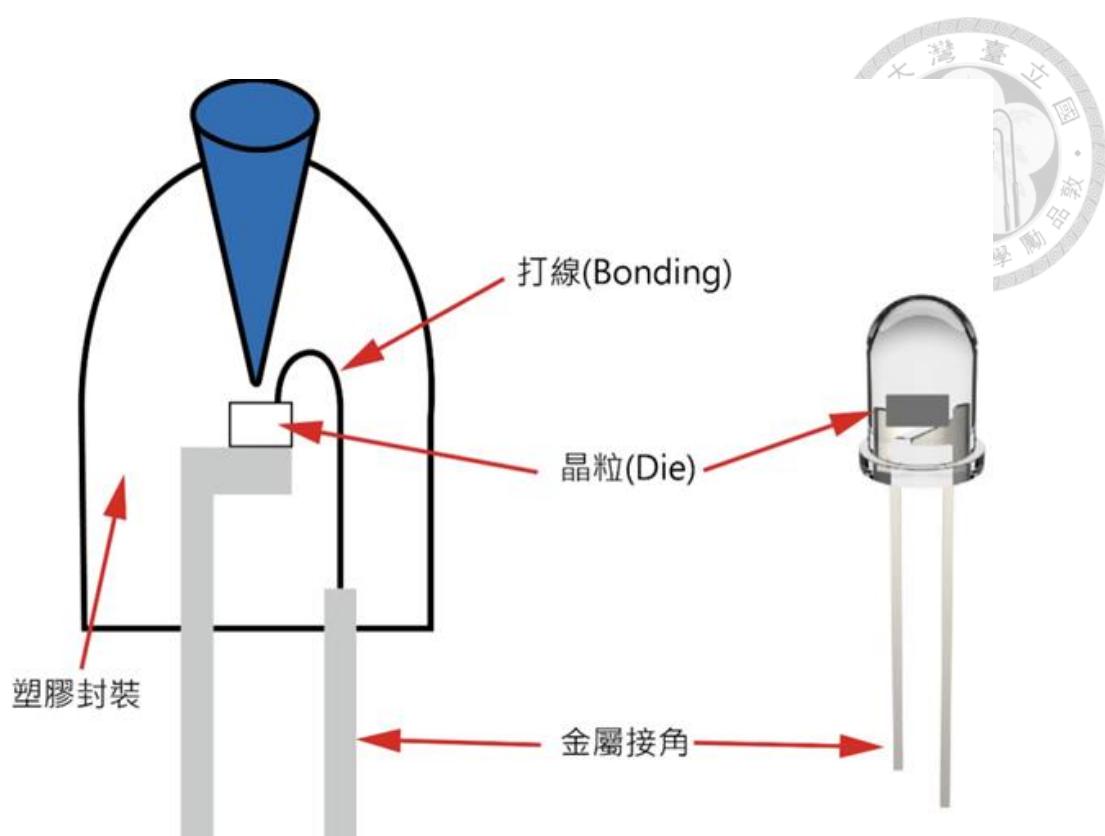


圖 7.1 發光二極體示意圖

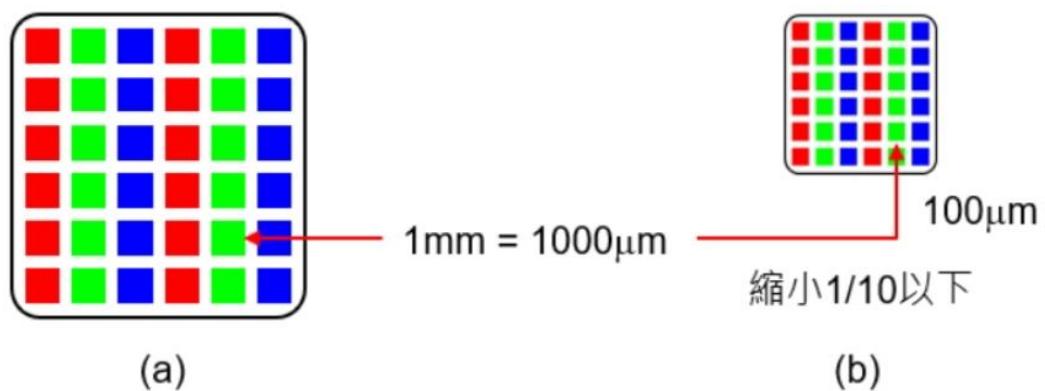


圖 7.2 Micro LED 與 LED 晶粒尺寸示意圖



圖 7.3 檢測機台



圖 7.4 晶圓拍攝示意圖

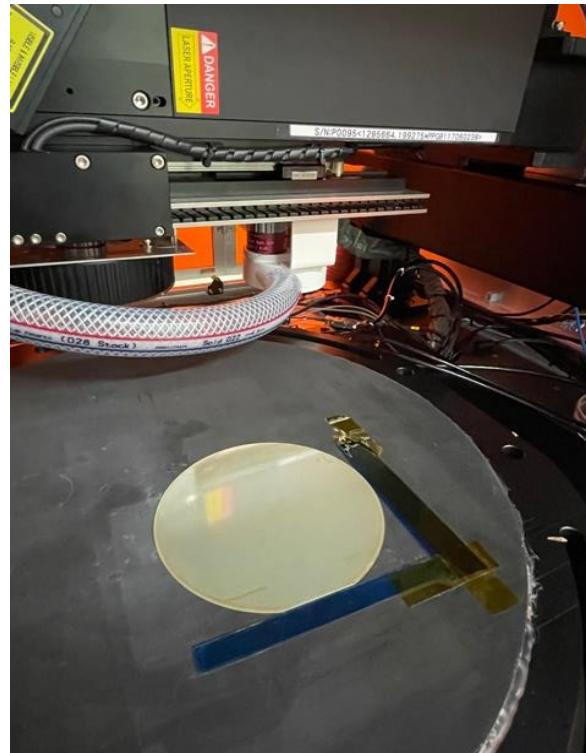


圖 7.5 晶圓尺寸示意圖

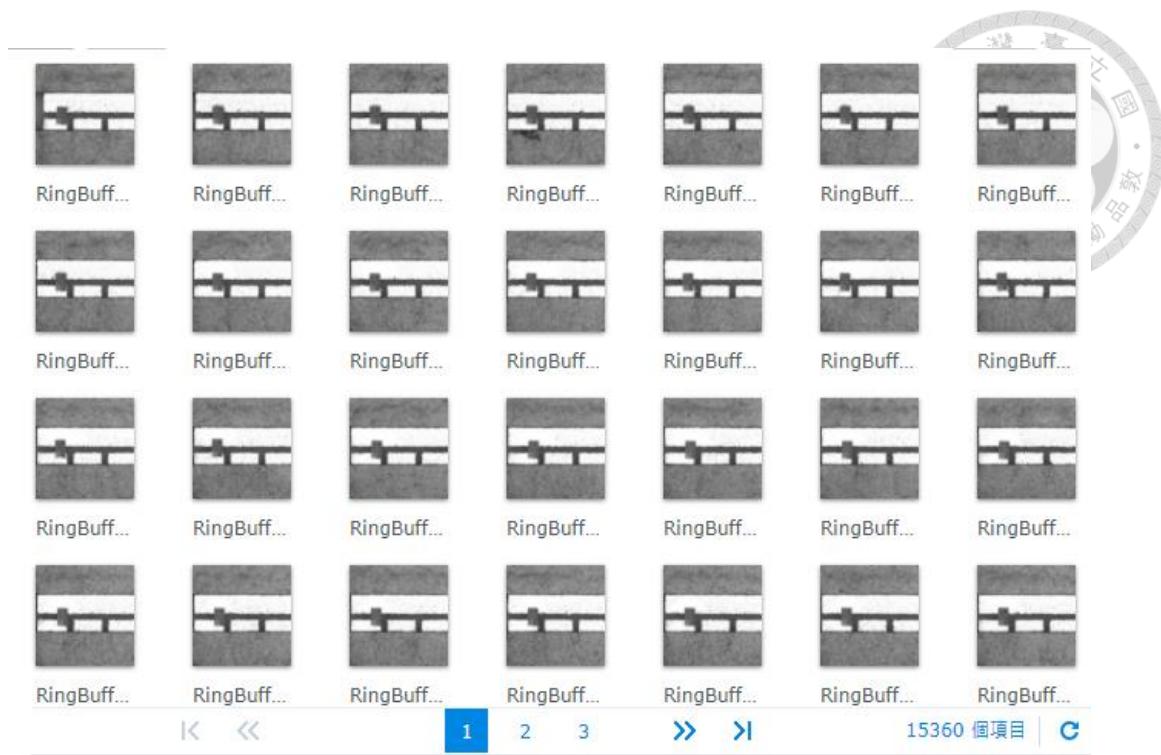


圖 7.6 Micro LED 影像數據庫

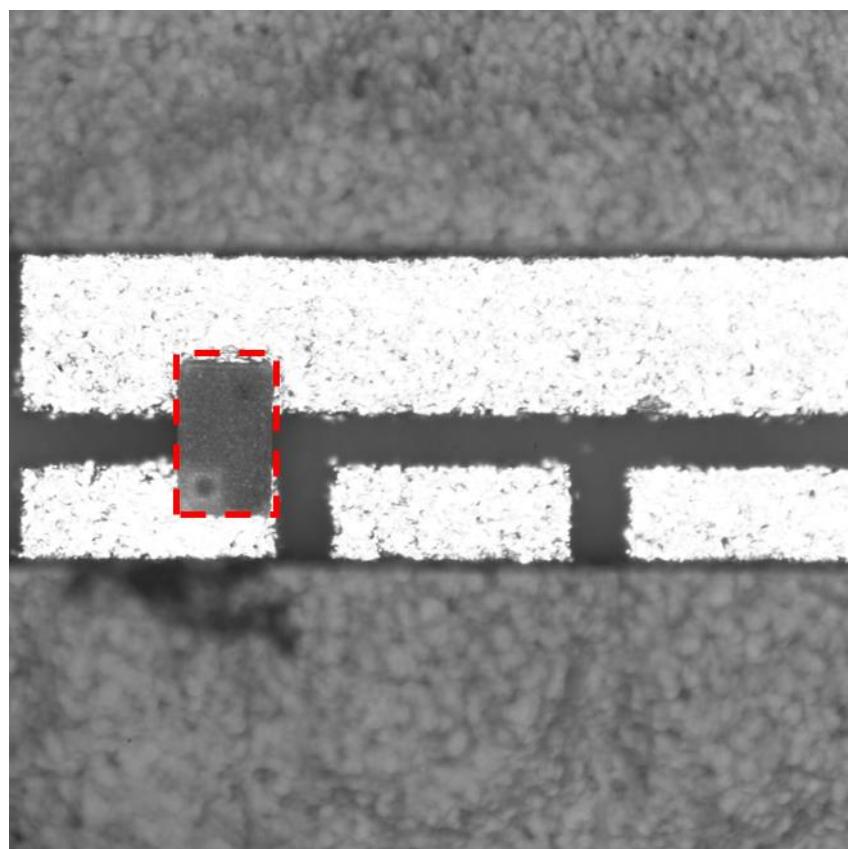


圖 7.7 正常樣態 Micro LED 晶片

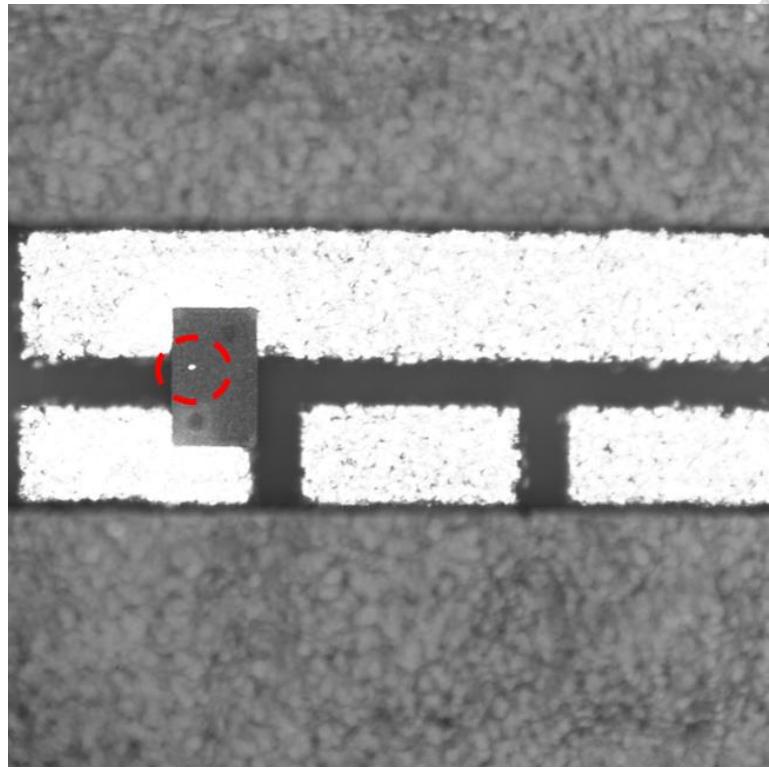


圖 7.8 異常樣態 Micro LED 晶片(中央汙點)

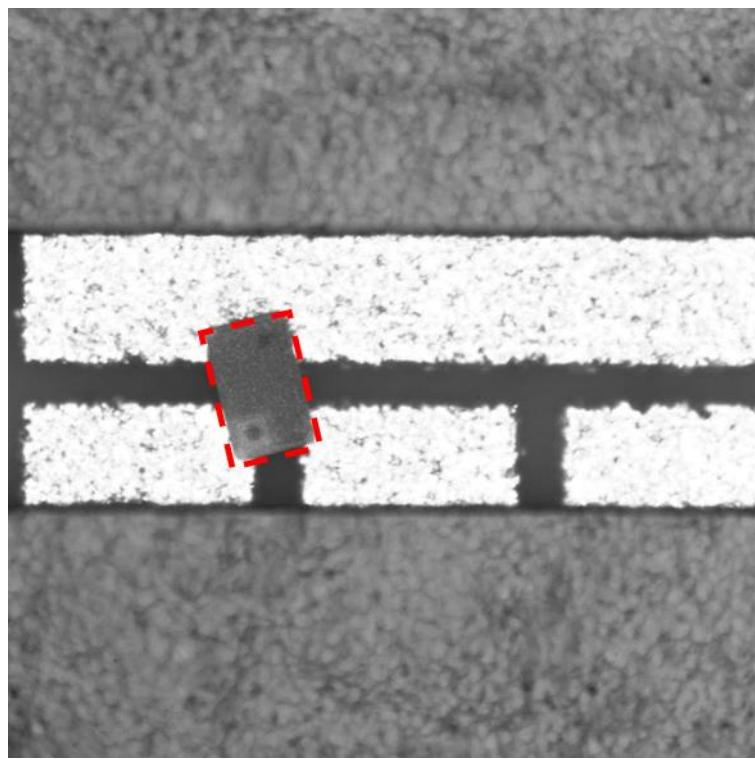


圖 7.9 異常樣態 Micro LED 晶片(晶片旋轉)

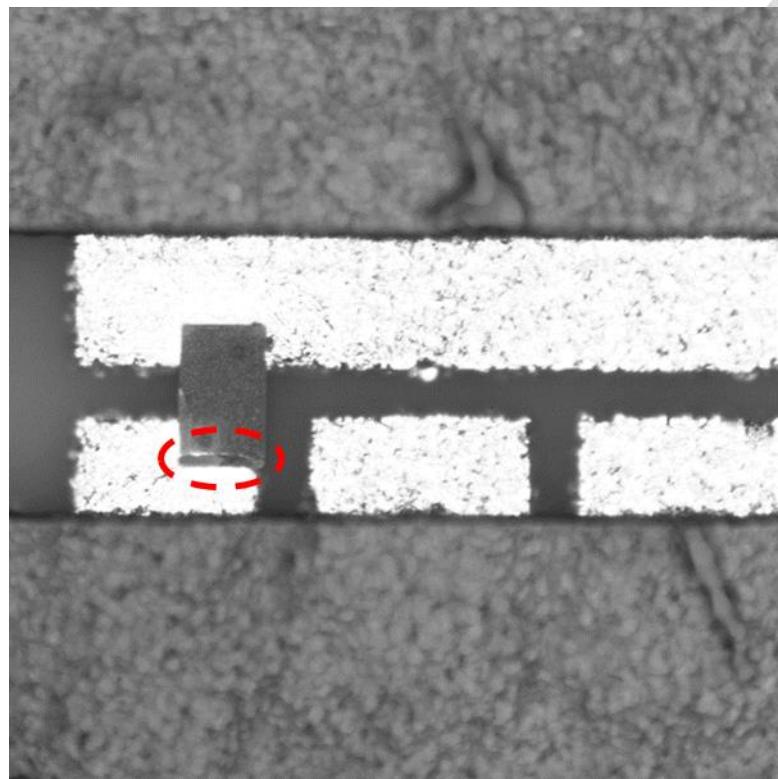


圖 7.10 異常樣態 Micro LED 晶片(晶片破裂)

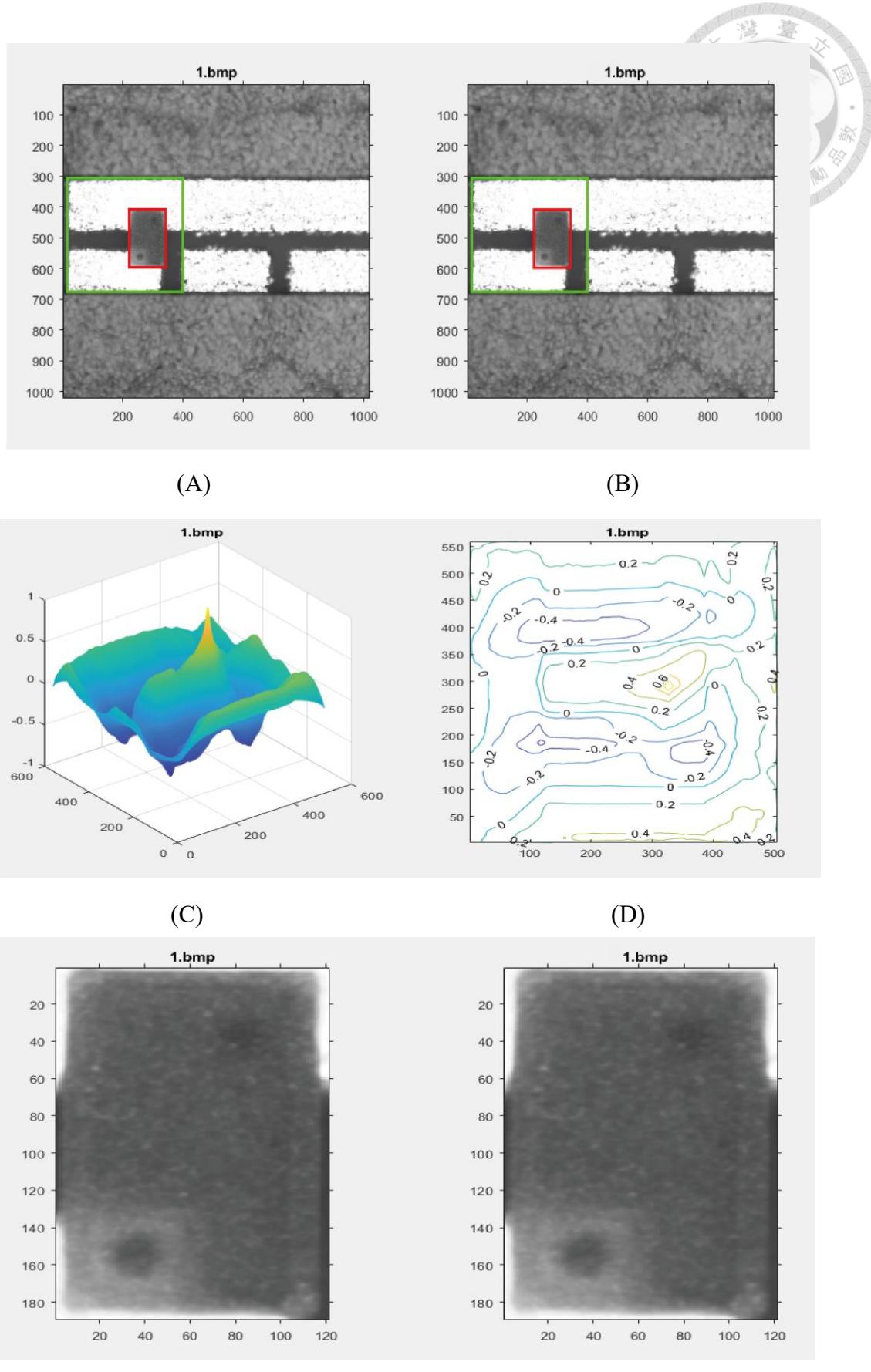


圖 7.11 標準影像與自身樣版配對結果，相關性係數為 0.999

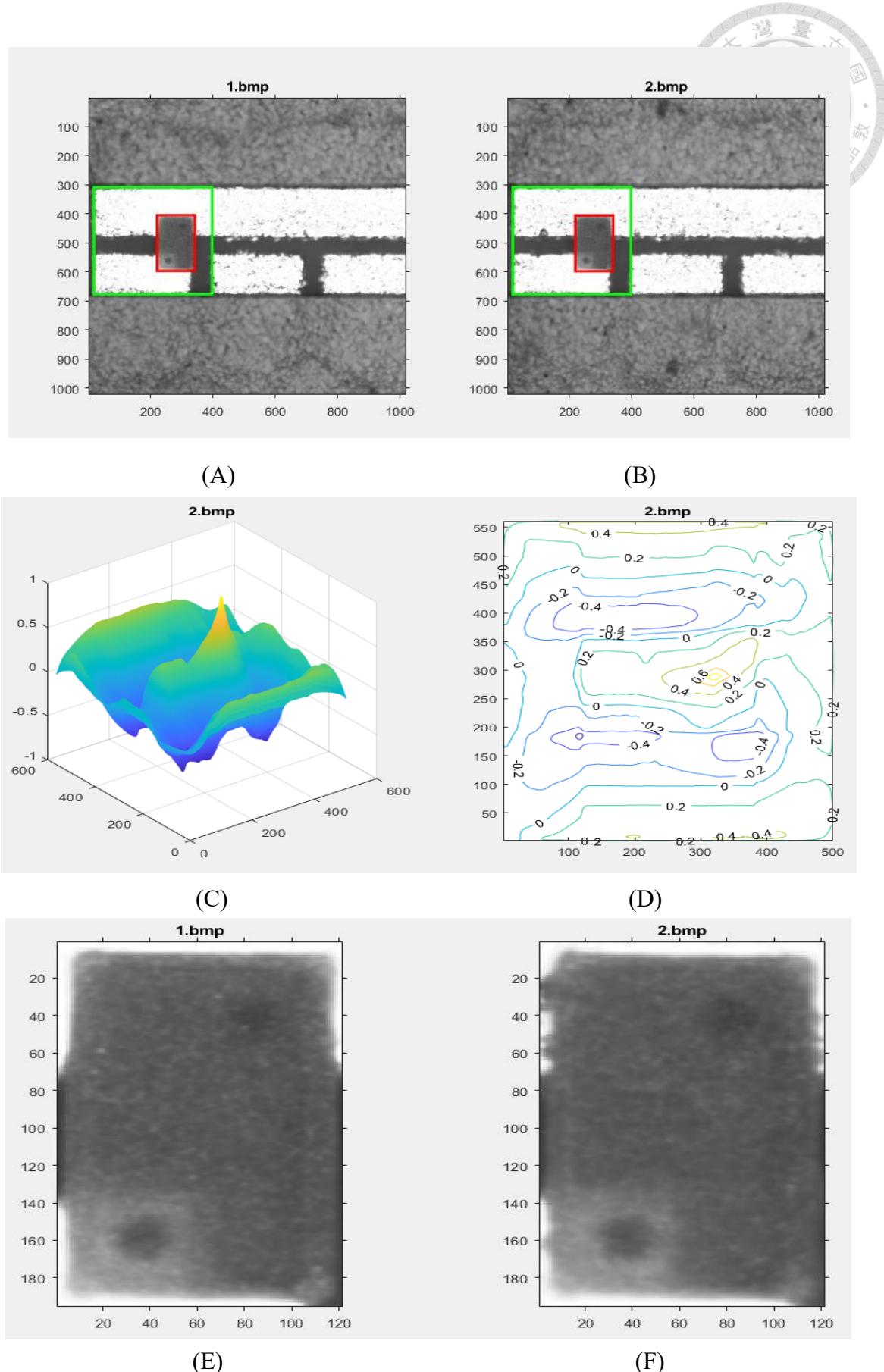


圖 7.12 標準影像與 2.bmp 影像樣版配對結果，相關性係數為 0.951

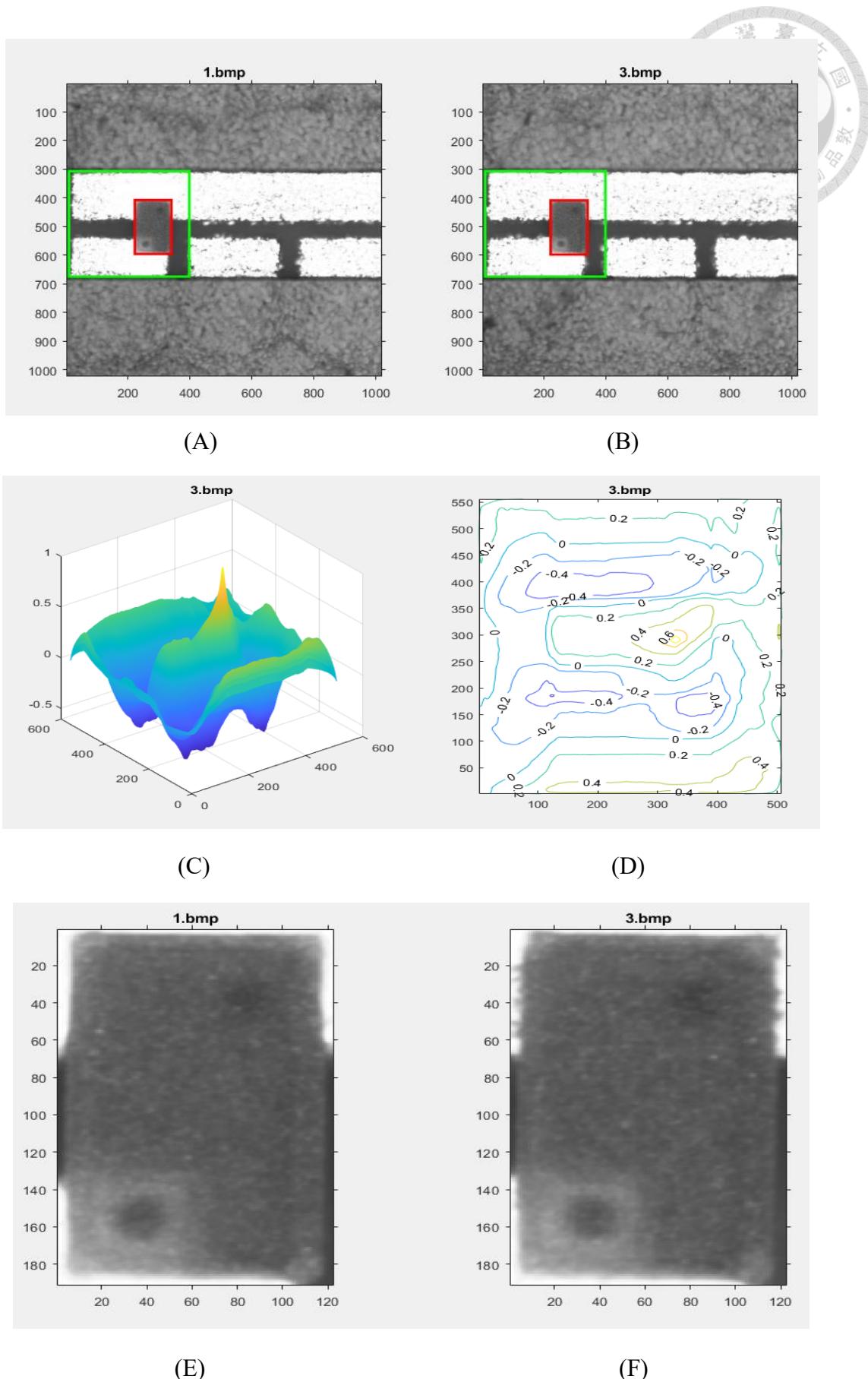


圖 7.13 標準影像與 3.bmp 影像樣版配對結果，相關性係數為 0.968

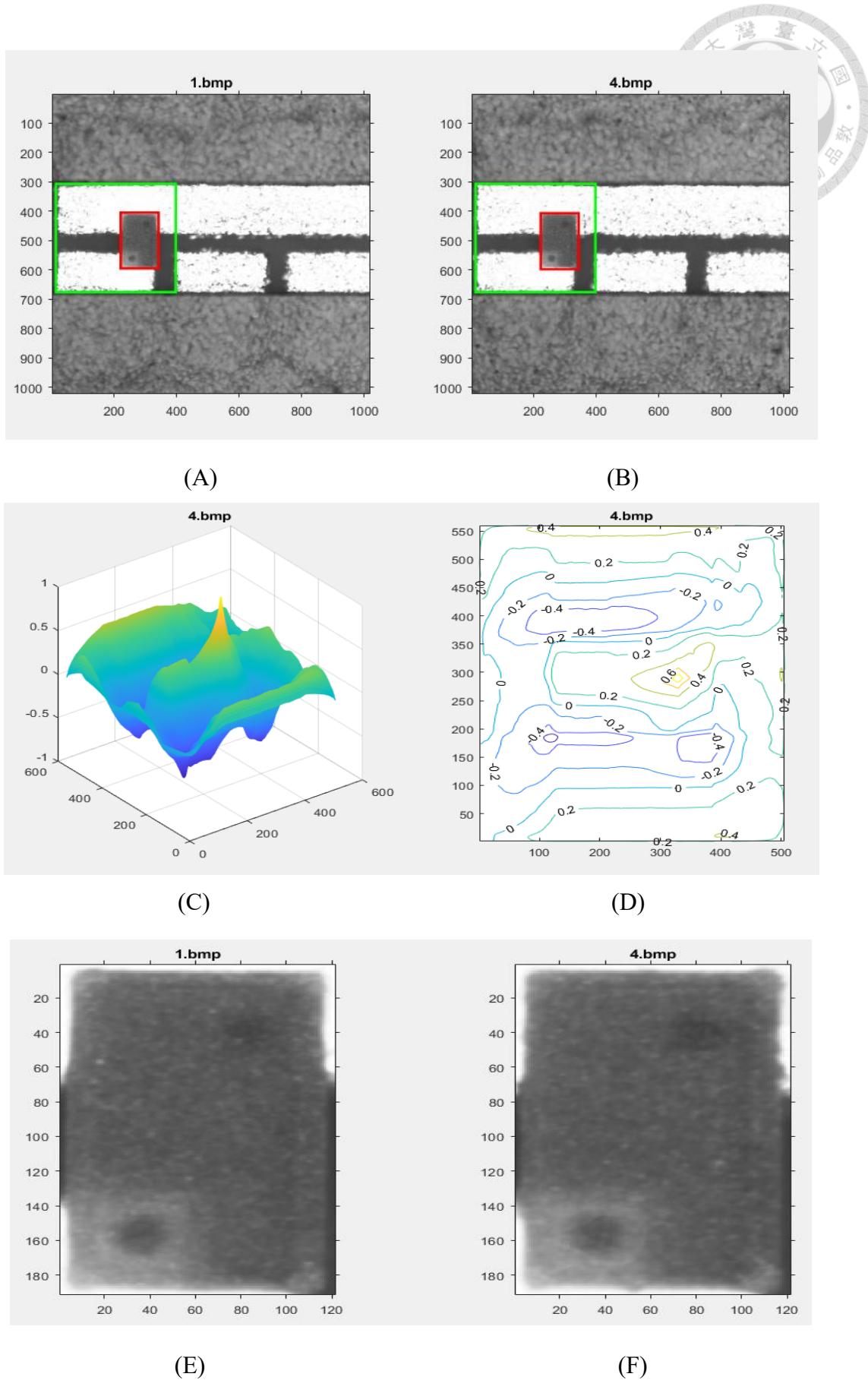


圖 7.14 標準影像與 4.bmp 影像樣版配對結果，相關性係數為 0.972

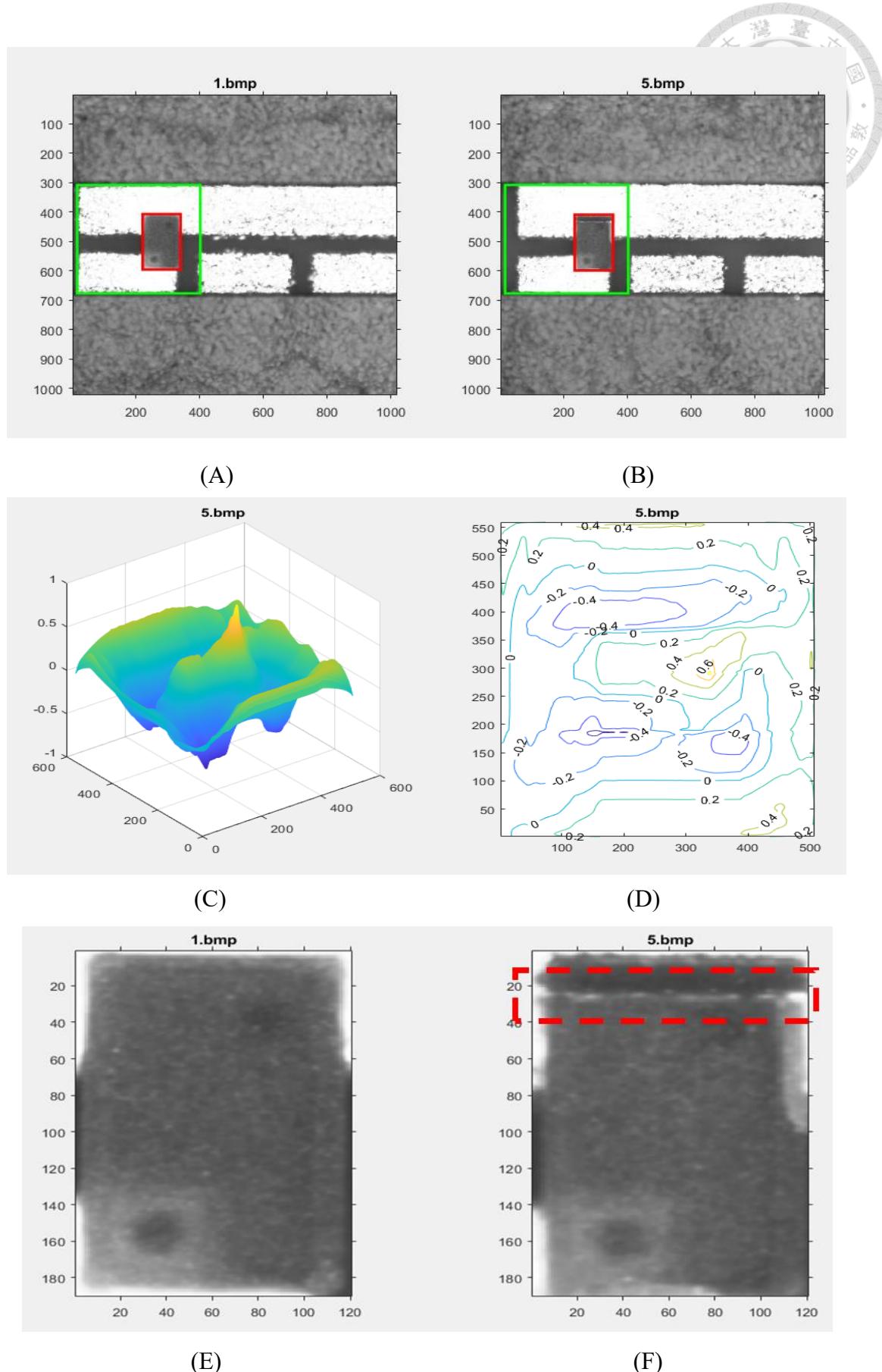


圖 7.15 標準影像與 5.bmp 影像樣版配對結果，相關性係數為 0.831

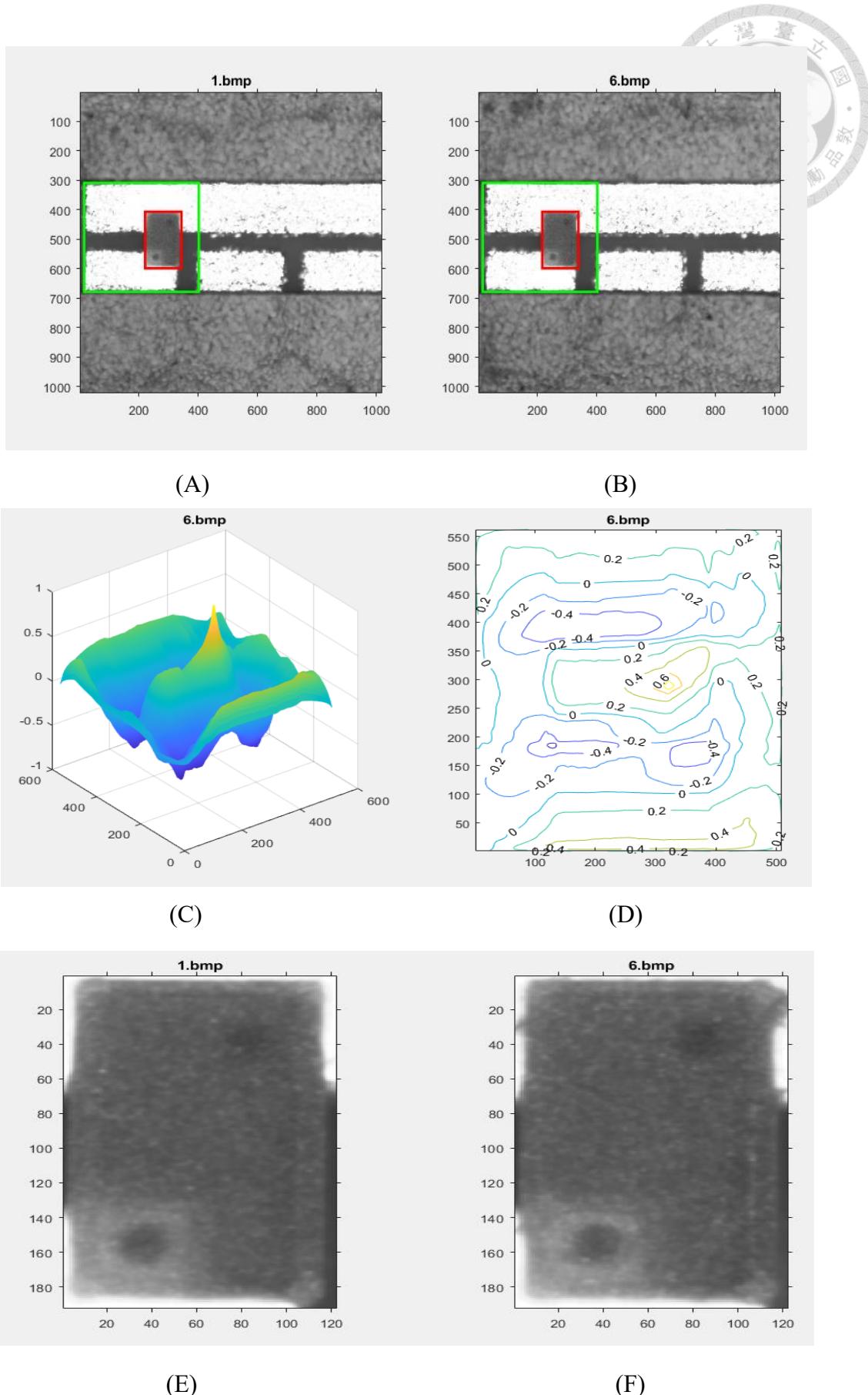


圖 7.16 標準影像與 6.bmp 影像樣版配對結果，相關性係數為 0.954

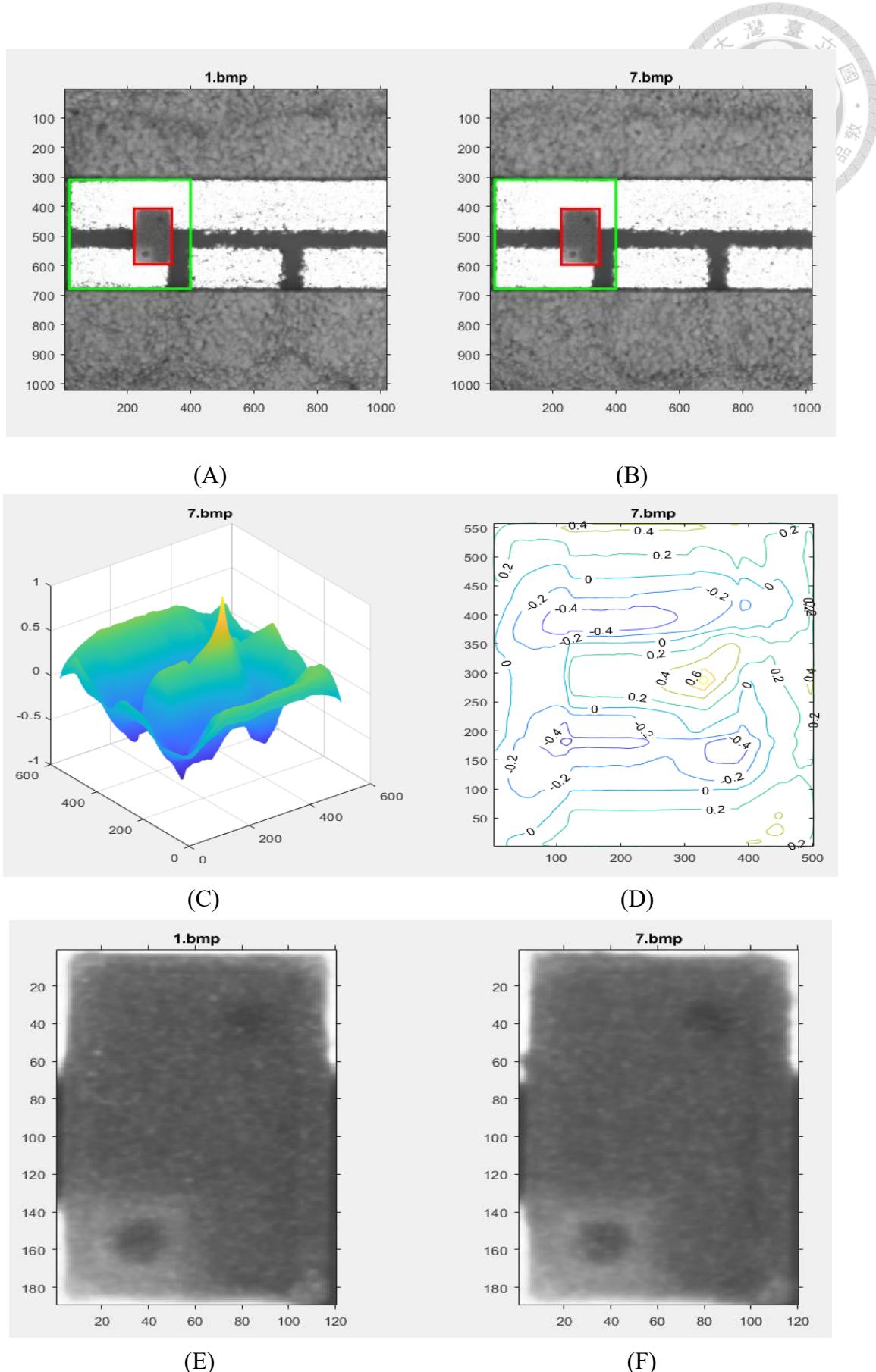


圖 7.17 標準影像與 7.bmp 影像樣版配對結果，相關性係數為 0.978

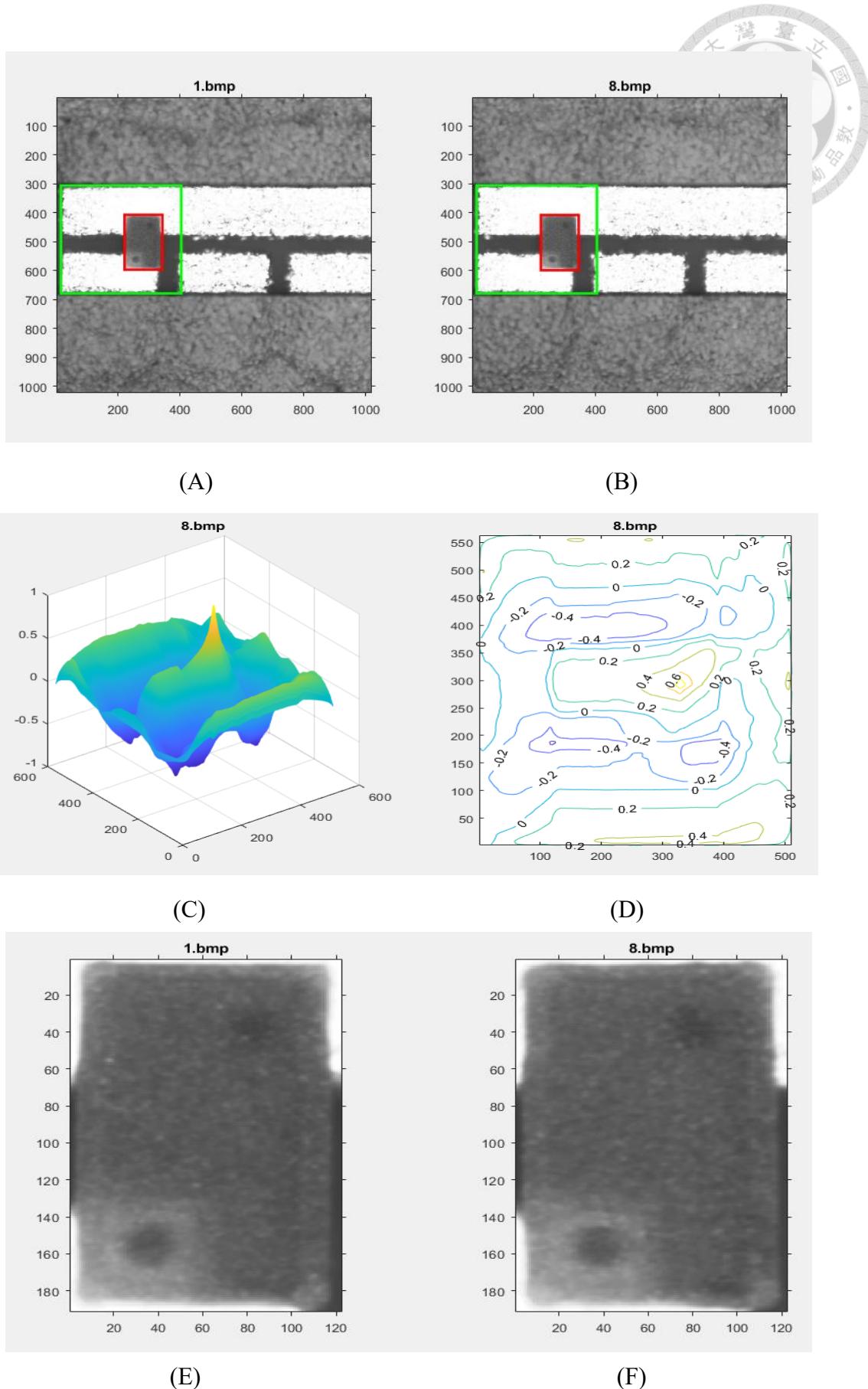


圖 7.18 標準影像與 8.bmp 影像樣版配對結果，相關性係數為 0.971

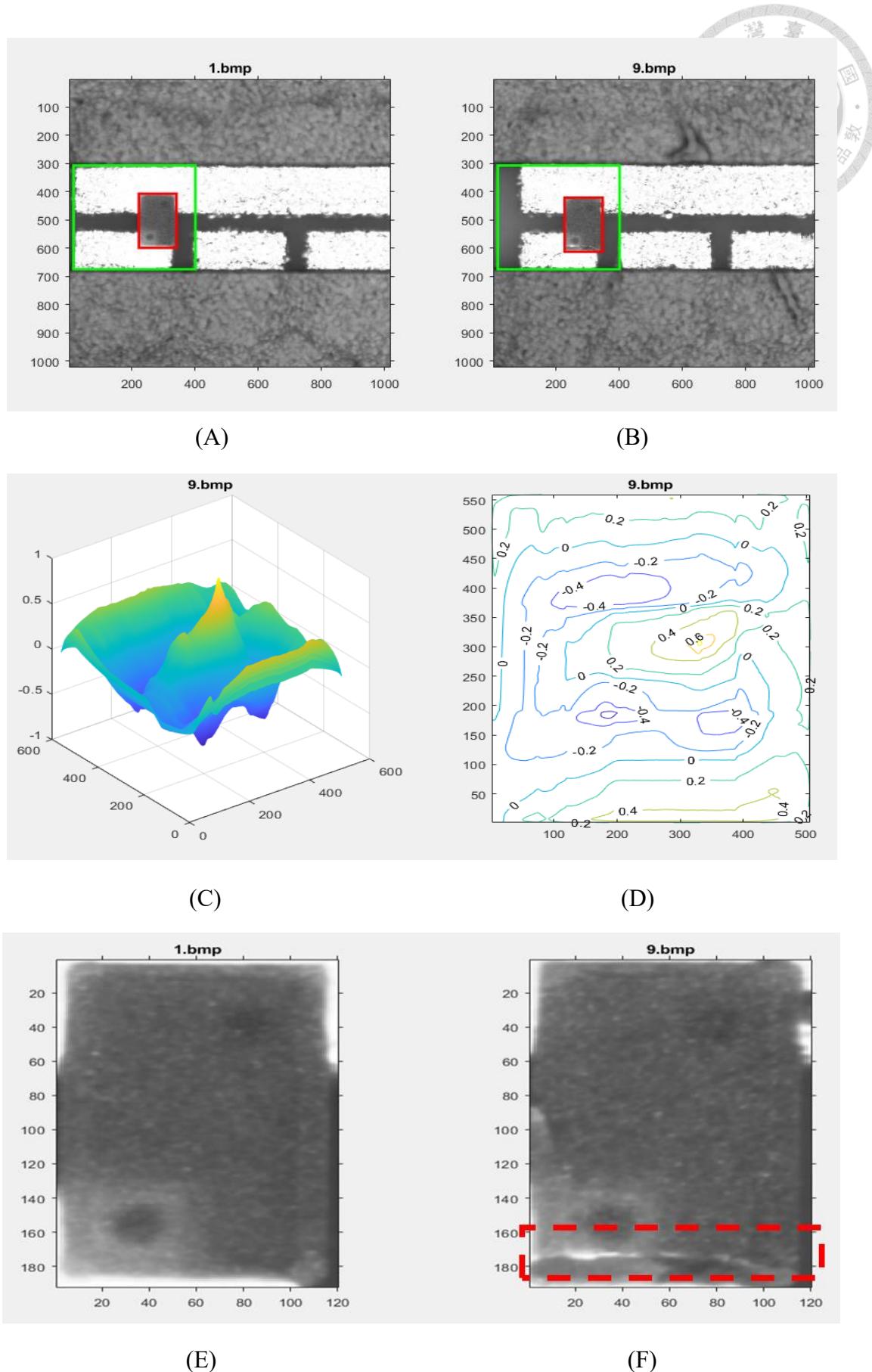


圖 7.19 標準影像與 9.bmp 影像樣版配對結果，相關性係數為 0.847

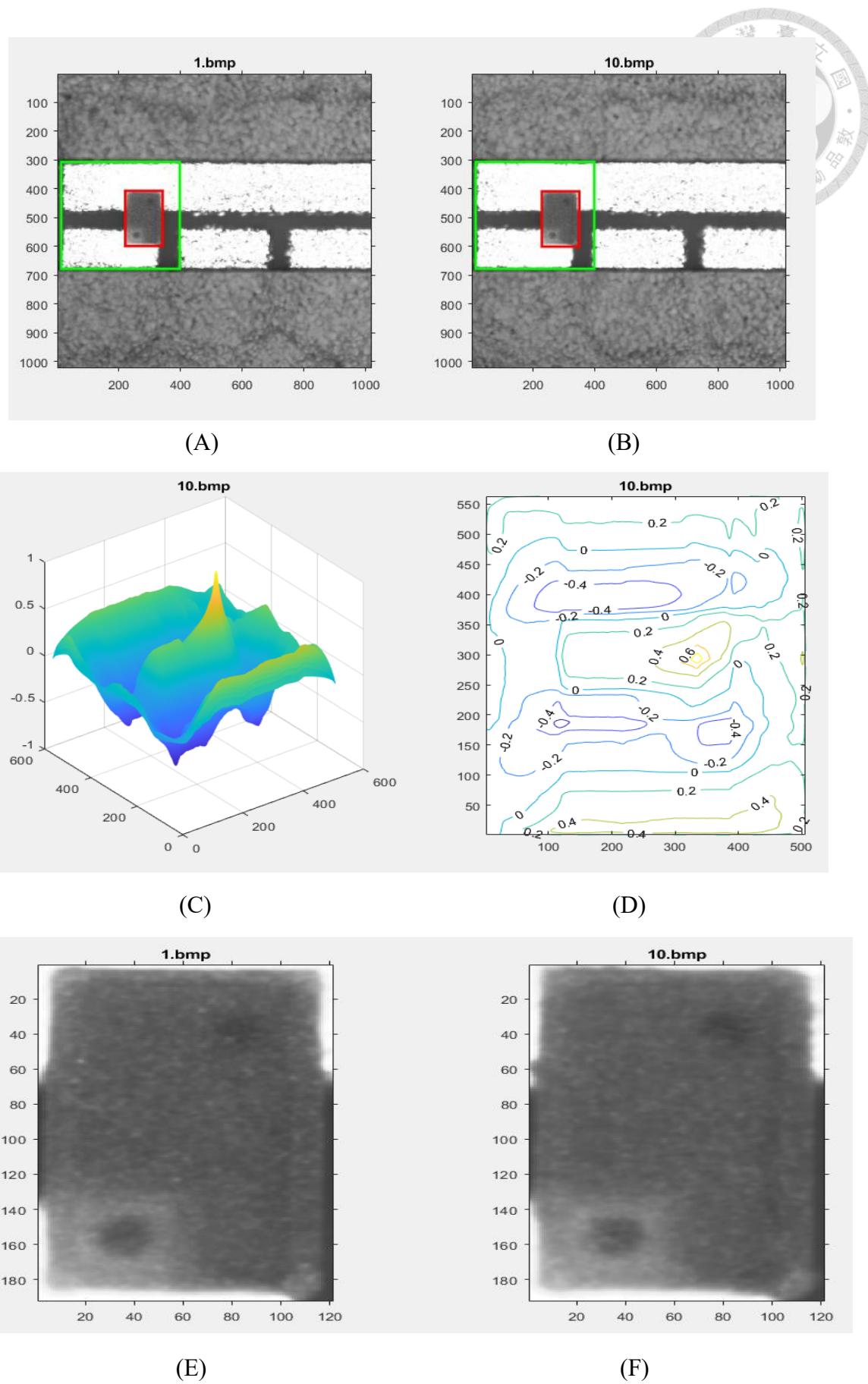


圖 7.20 標準影像與 10.bmp 影像樣版配對結果，相關性係數為 0.978

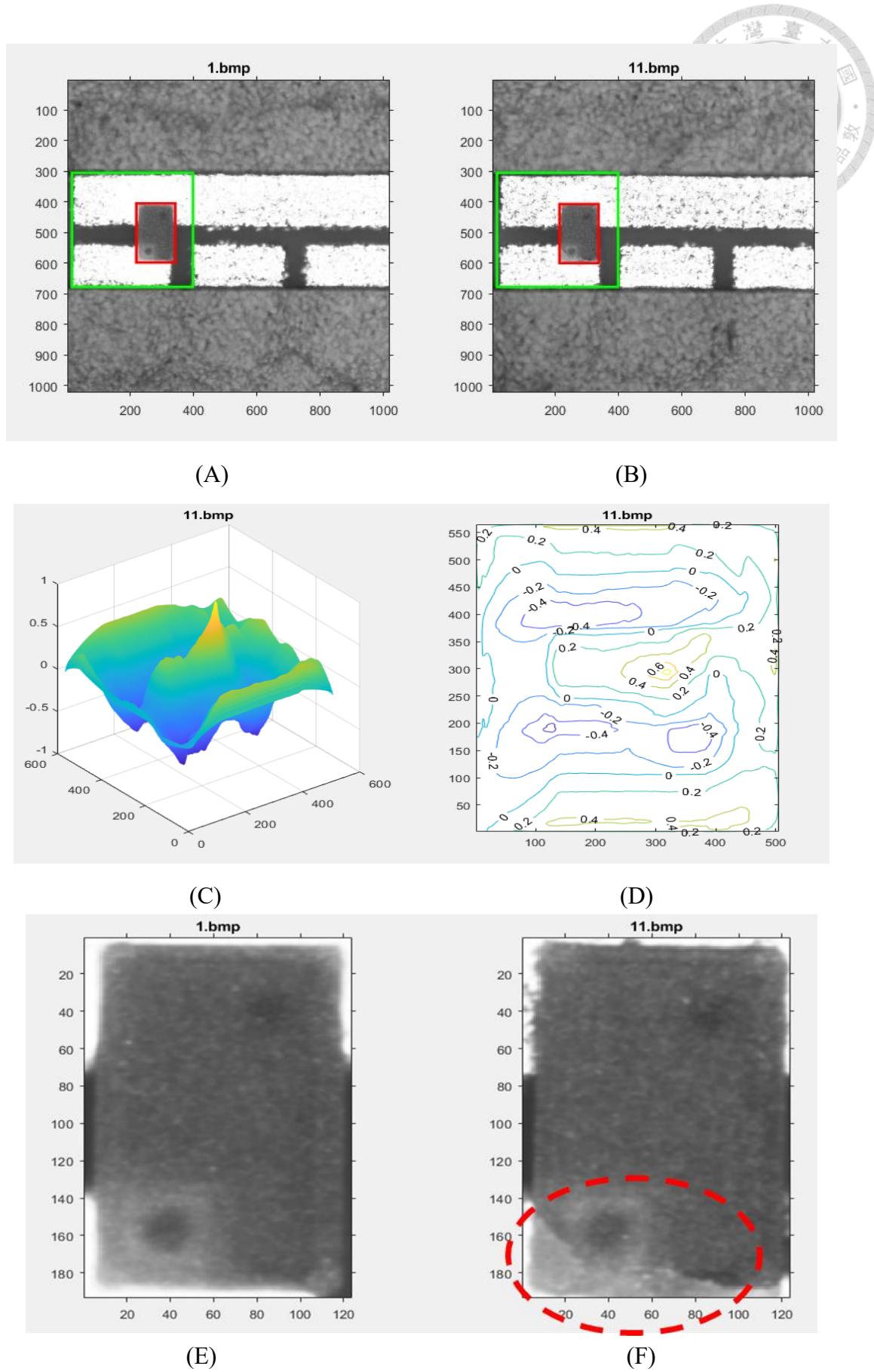


圖 7.21 標準影像與 11.bmp 影像樣版配對結果，相關性係數為 0.859

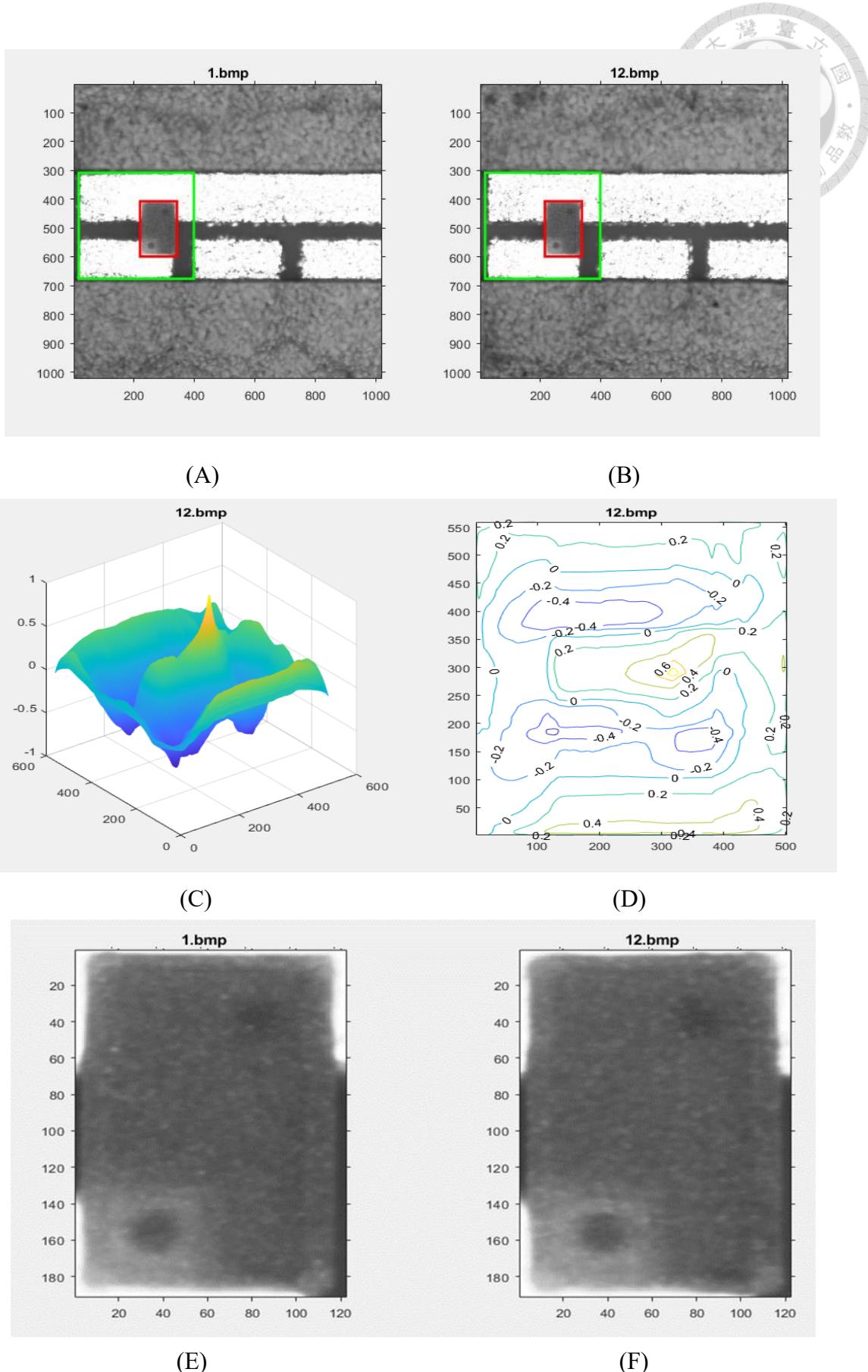


圖 7.22 標準影像與 12.bmp 影像樣版配對結果，相關性係數為 0.954

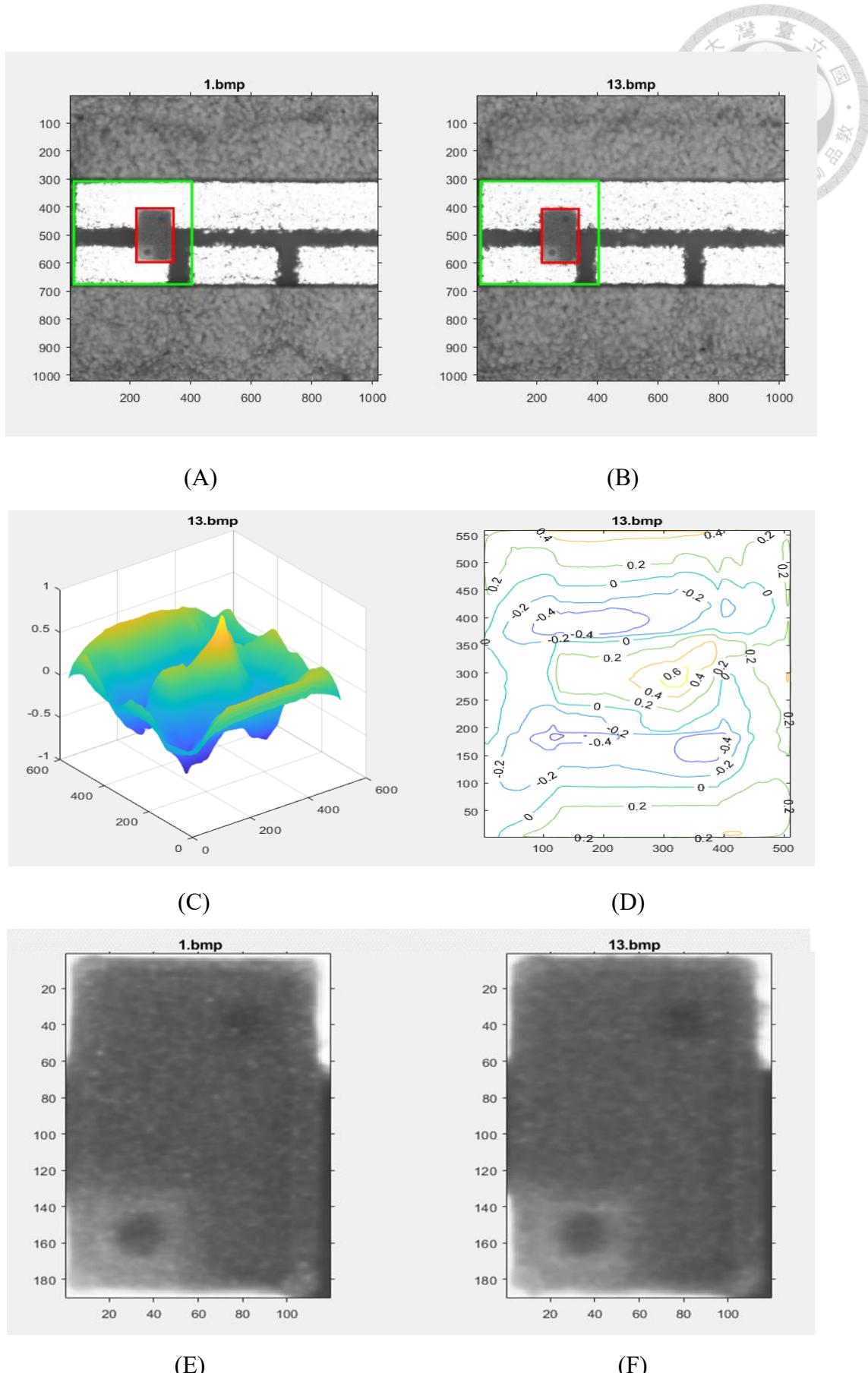


圖 7.23 標準影像與 13.bmp 影像樣版配對結果，相關性係數為 0.962

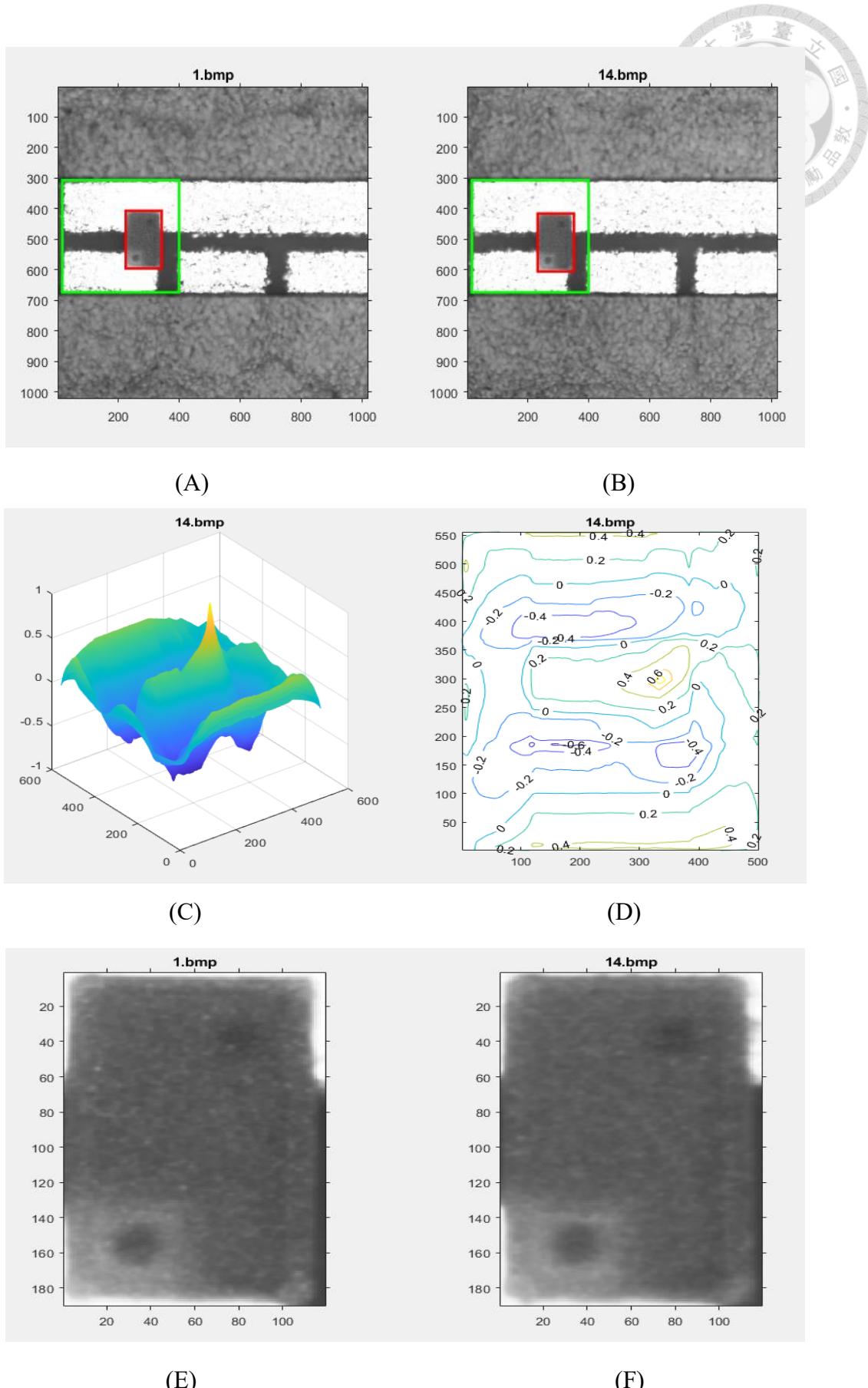
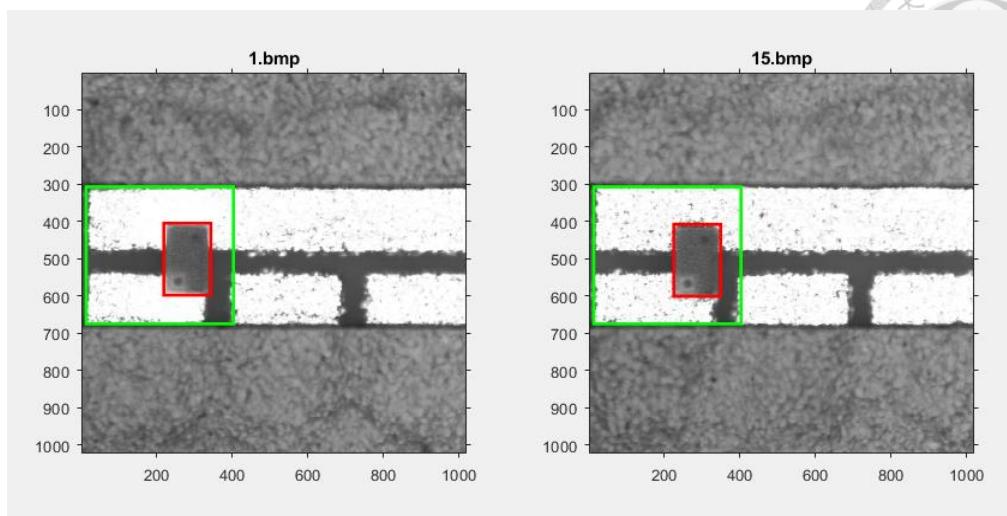
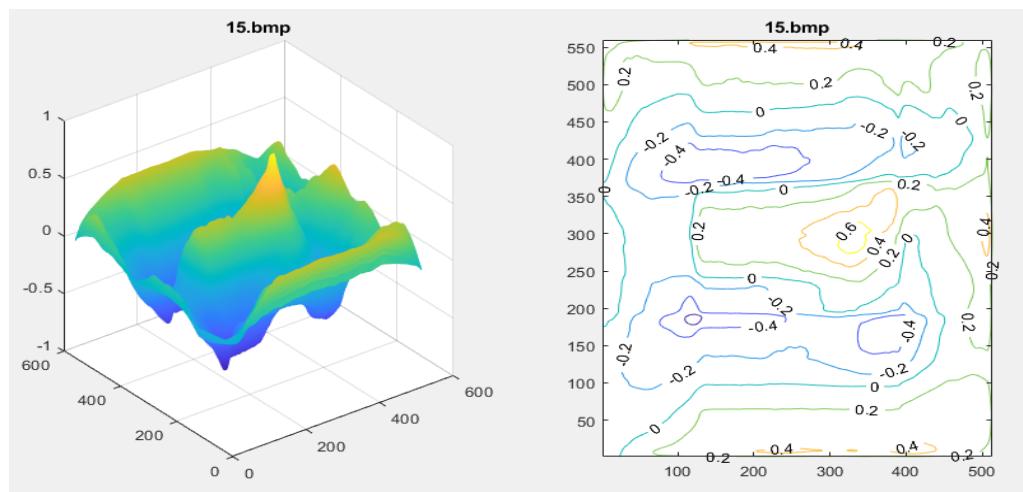


圖 7.24 標準影像與 14.bmp 影像樣版配對結果，相關性係數為 0.968



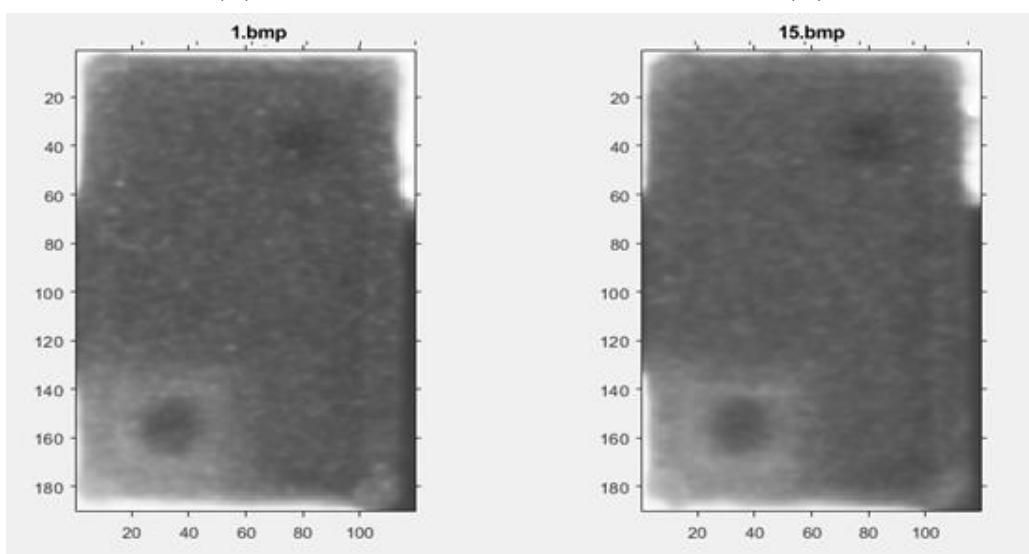
(A)

(B)



(C)

(D)



(E)

(F)

圖 7.25 標準影像與 15.bmp 影像樣版配對結果，相關性係數為 0.967

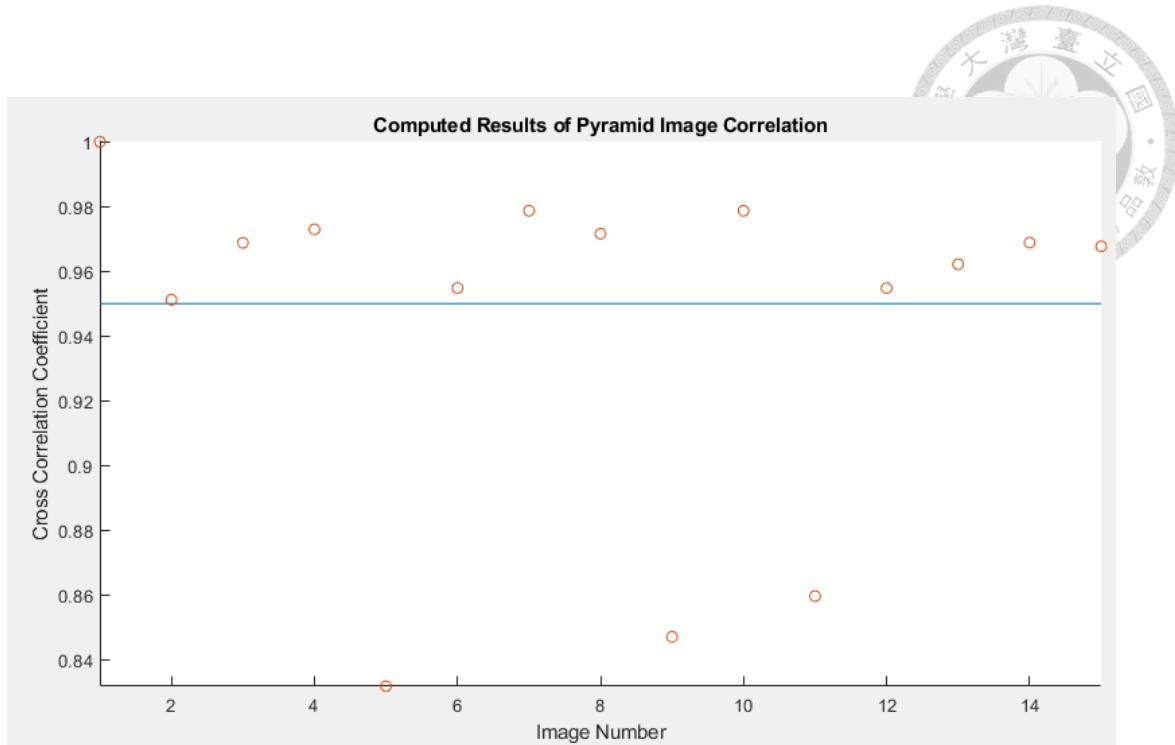


圖 7.26 以 0.95 為閥值檢測結果圖

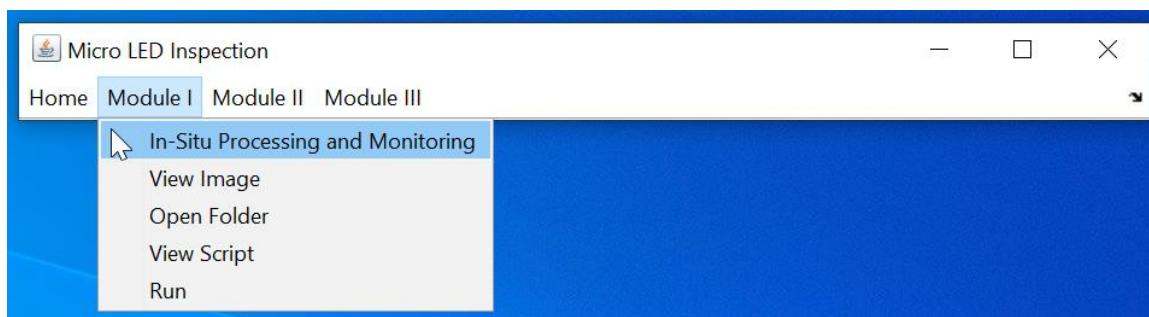


圖 7.27 自行開發相關係數之使用者操作界面

第八章 結論與未來展望



8.1 本文成果

本論文的研究目的主要應用實驗室所開發完成精密量測技術，包括電子斑點干涉數(ESPI)，光纖光柵感測器(FBG)以及數位影像相關法(DIC)，針對學術研究板結構系統的動態特性，以及工業應用研究的懸吊系統避震器的動態特性和 Micro LED 瑕疵檢測進行深入的探討，突顯本論文所應用的量測技術與傳統的量測方法比較下，具有優異且精密的量測結果，本文各章的成果與結論敘述如下：

第三章首先針對等向性材料所構成厚度呈現階梯變化的圓形平板，由薄板理論統御方程式並採用模態展開法配合邊界與連續條件，以獲得圓形平板暫態物理量之面外位移解析解與共振頻率，也使用壓電薄膜感測器 PVDF 量測鋼珠落擊圓板時波源歷時與共振頻率，整合理論解析、全域光學系統電子斑點干涉術(AF-ESPI)實驗量測和有限元素模擬 (COMSOL 軟體)等結論，分析共振模態振形與共振頻率相關性。在圓板前十二個模態共振頻率分析中，比較 PVDF 量測、理論計算與 AF-ESPI 等量測結果分別與有限元素分析下，PVDF 所量測共振頻率都非常接近 FEM 預測結果，誤差都小於 1%。藉由 AF-ESPI 分別量測全電極(Full-Electroid)、左右電極(RL-Electroid) 壓電纖維複材激振圓板所得共振頻率，相較於有限元素共振頻率最大誤差均為第一模態，分別為-4.762%及-4.494%，由這兩種實驗方法量測得到共振頻率都有相當一致的對應性。在共振模態方面，壓電纖維複材採用全電極(Full-Electroid)、左右電極(RL-Electroid) 貼附方式來激振圓板，由 AF-ESPI 實驗所拍攝前十二個模態，比對實驗結果搭配 FEM 模擬、理論解析計算所得模態形狀來進行比較。得到有限元素模擬、理論計算和 AF-ESPI 量測結果，相對應模態的節線區域與等位移線分佈圖對應性都非常良好。

藉由模態疊加法概念，以圓板模態形狀當成暫態分析基底的數學函數進行線



性疊加，進行圓板承受外力撞擊後之暫態波傳行為研究，首先將時間函數和模態形狀相乘型式來當成圓板暫態面外位移解，並代入圓板震動變形的統御方程式，再藉由共振模態具有正交特性求出時間數學函數，外力作用形式和時間函數具有關聯性，本文推導主要探討單點集中力加載在圓板情況，最後整合時間函數與模態形狀來建立圓板理論暫態位移的解析解。將鋼珠單點落擊圓板進行實驗，來激振出圓板暫態的物理反應，應用光纖位移計 FS 進行圓板單點暫態位移量測，並利用一雙壓電薄膜 PVDF 感測器來量取鋼珠撞擊圓板波源歷時的電訊號，利用動衡量原理將波源歷時產生電訊號轉換為力的物理量，並導入理論計算和 FEM 模擬中進行數值分析，結果顯示理論和 FEM 計算觀察點上之暫態位移，也均符合 PVDF 所量測到的暫態應變波形訊號與量值。

第四章主要依據 107 年吳亦莊博士論文推導自由邊界壓電矩形板在自由振動下共振頻率和模態位移場的解析解，與壓電板振動產生的應力場與電場等理論結果，來探討 $60 \times 30 \times 1\text{mm}$ (1 號壓電板)、 $60 \times 30 \times 2.5\text{mm}$ (2 號壓電板)、 $60 \times 30 \times 6\text{mm}$ (3 號壓電板)三種不同尺寸壓電板的振動問題，進行交叉比對包括理論解析與電子斑點干涉術(AF-ESPI) 對四種不同電極形式壓電板進行實驗量測，及有限元素(FEM)分析等共振頻率與模態形狀之結果。觀察自由邊界壓電矩形板彎曲及伸展振動形式的 Mindlin 板理論分析與有限元素軟體模擬數值計算前十個振動模態結果，三塊壓電板隨後度增加，對於彎曲振動下之有限元素和理論之共振頻率，在不同厚度壓電板同一模態下具有倍數成長現象，而在前述相同情況下伸展振動共振頻率僅些微成長。整體而言，彎曲及伸展振動共振頻率相較有限元計算結果均存在相當低之誤差百分比，而 3 號壓電板厚度與寬度比值達到 0.2 時，在彎曲和伸展振動的數值分析結果之誤差值雖明顯提升，但誤差值不大，對於數值計算和理論分析共振頻率的預測具有良好一致性。



在 $60 \times 30 \times 6\text{mm}$ (3 號壓電板) 彎矩及伸展振動形式的位移總量場(Magnitude)總量場，無論是彎曲或是伸展振動形式各個位移場圖形，理論與數值分析的位移全場分布結果相當一致。整體而言，彎曲及伸展振動結果理論與數值分析應力場分布結果皆相同，模態節線對應性良好，所以理論與數值仍具有相當高準確性。 $60 \times 30 \times 6\text{mm}$ (壓電板 3)伸展振動之理論計算位移、應力和 與 FEM 計算的電通量(Electric Flux)三者間分布趨勢對應性相當吻合，依此結果來激振以伸展振動為主的相關模態，僅需將壓電矩形板之電極依照對應的面外位移場加以設計，便可激振出所對應伸展模態。整體分析結果在分佈圖趨勢和對稱特性在彎曲和伸展振動的機械場和電場之間都相當吻合。

最後藉由 AF-ESPI 技術來量測前述 1 號和 2 號壓電矩形板在全電極(Full)、左右電極(Right-Left)、上下電極(Up-Down)、交叉電極(Cross)四種切割電極下，彎曲振動和伸展振動之共振頻率及相對的振動模態，在理論與實驗模態形狀顯示出面外模態振形相當一致，對於四種切割電極下所激振相對應的模態也很好結果，更藉由 ESPI 實驗量測結果來完備理論推導完整性。

第五章利用布拉格光纖光柵具有高靈敏度、徑細質輕及多點的量測能力，和不會受電磁波干擾等優勢，將光纖光柵感測器黏貼在兩款避震器表面進行多點量測，同時也透過即時訊號分析系統，經由分析計算，即時將溫升與熱應變進行解耦合，可獲得避震器試驗過程中溫升及熱變形歷程，並與熱電偶與熱像儀進行比較分析，進而得到避震器表面材料的熱膨脹係數，同時量測避震器各區段的熱變形後，可得到避震器作動時整體伸長量，經頻譜分析也可以得到避震器作動頻率。

由第一款避震器系統實驗結果可知，光纖光柵與熱電偶的量測結果均相當符合，在振動的量測結果也與系統設定相當一致，實驗所得到活塞熱膨脹係數結果良好。3 號裸光纖與熱電偶資料進行最小平方法擬合溫升轉換係數 C 也相當穩定。在第二款避震器系統(僅活塞)進行兩次實驗結果可知，光纖光柵與熱電偶的量測結果



均相當一致，由光纖光柵與熱電偶資料進行最小平方法可擬合而得溫升轉換係數 C 值，在振動的量測結果也與系統設定相當一致，兩次實驗所得到的熱膨脹係數也相符合，光纖光柵的溫升轉換係數亦相當穩定，根據共振波長飄移理論所得的熱應變值具有可信度，因此應用光纖光柵來進行避震器相關量測具有一定的優勢。對於熱像儀所量測第一款和第二款避震器於活塞外統與夾具初始溫度與實驗結束後溫度，相較熱電偶量測的結果具有非常好的一致性與優勢。

第六章應用光纖光柵感測器存在高解析度等多項優勢，將光纖光柵感測器黏貼於避震器彈簧表面進行壓縮彈簧變形量量測，接著藉由 MATLAB 程式語言開發即時量測系統，可對彈簧系統在各種不同頻率作動下動態行為進行精密的多點變形量測，壓縮彈簧在 5Hz、3Hz、1Hz 等頻率作動下，所量測出波長飄移、應變資訊在光纖與變形量等資訊，均顯示出完整且良好資料結果。為預防彈簧經由長期往復壓縮過程中所造成交變應力作用，彈簧達到疲勞強度而導致斷裂失效發生，本文採用交互相關的方式來定量解析所量訊號與正常訊號相似程度，可預測彈簧系統是否將達到疲勞損壞之情況。

同時本章也使用具有非接觸式及全域光學數影法量測技術，來針對壓縮彈簧實驗量測位移變形。由數影法進行壓縮彈簧在 5Hz、3Hz 與 1Hz 三種頻率作動下實驗量測，能夠精準量測出彈簧之變形位移，並搭配 MTS 萬能試驗機輸出負載，可以計算出彈簧係數，除 5Hz 實驗誤差較大，其餘 3Hz、1Hz 實驗皆與出廠量測結果非常相近，所以可利用 DIC 位移量測結果來計算彈簧係數。此外，數影法也能夠量測壓縮彈簧在不同螺距間伸長量具有一致性，用來判定彈簧製造品質，驗證 DIC 具有其他量測儀器無法量測到物理量的獨特性。本章實驗亦結合遠端即時監控系統，可由遠端監控即時量測結果，當設備出現異常訊號時，監控系統會自動傳送簡訊至相關操作員的手機，操作員便可依據所接收的資訊，即時進行故障排除，確實達到工業應用上的需求。

第七章將數影法進一步應用於尺度更小的 Micro LED 瑕疵檢測，藉由數影法樣板輪廓比對圖像來進行 Micro LED 瑕疵檢測，先選取 Micro LED 良品標準影像當作欲計算區域為比對標準樣板，再依數影法程式來自動比對所輸入 Micro LED 影像，在演算法進行良品與瑕疵品 Micro LED 晶粒圖像比對過程中，先選取良品標準影像與測試影像逐一進行演算法運算比對，當比對運算後即產生歸一化交叉相關性係數，並與設定閾值(0.950)進行比較，及時產出可清楚辨識良品與瑕疵品圖表，由圖表可以清楚看出 Micro LED 檢測良品或瑕疵品分類，檢測出來的結果會自動將 Micro LED 影像分類出良品與瑕疵品資料檔，且辨識率高達 99.9%，證明數影法可運用於微米等級瑕疵檢測，可以協助產業精準辨識 Micro LED 良品與瑕疵品，作為提升產品良率參考依據。

8.2 未來展望

- (1) 本文已對於固定邊界且厚度呈現階梯變化之圓板受到動態外部負載所產生暫態波傳進行理論解析、實驗量測與有限元素模擬，均具有良好結果。未來可進一步探討自由邊界且厚度呈現階梯變化之圓板理論推導及相關實驗量測，以完備厚度階梯變化圓板整體研究。
- (2) AF-ESPI 量測技術具有即時、全場域、非接觸等多項量測技術上優點，更可以達到次微米等級量測精度，未來可朝向將 AF-ESPI 量測技術整合為可攜式量測模組設備，方便於工業各式場域需求進行非破壞光學量測。
- (3) 本文光纖光柵感測器量測技術及數影法，具備高精度量測技術等多項優點，已成功應用於各式工業量測(如工具機主軸、馬達、結構物及避震器彈簧等)，未來可以整合即時遠端監控系統，並精進演算法高效率計算能力，搭配智慧眼鏡載具應用，落實於智慧工廠場域，例如將工件在工具機內加工過程相關物理量即時進行量測。或應用光纖量測無人機旋翼在高速轉動下馬達形變與溫升情

況，避免過熱以即時掌握飛行安全。

(4) 針對數影法具非接觸、非破壞的量測特色，而且具有高精度演算辨識能力，可以結合人工智慧(AI)學習法，並搭配機械手臂來進行工業上例如螺絲或物件之良品與瑕疵品辨識及分類，確實達成自動光學檢測設備(AOI)相關應用。



參考文獻



[1] 吳亦莊, 馬劍清, “應用 Mindlin 板理論與高階剪切形變理論解析固體耦合的振動特性”, 國立台灣大學機械工程研究所博士論文, 2018.

[2] Ritz, W. (1909). “Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern.” *Annalen der Physik* 333(4) : 737-786.

[3] Young, D. (1950). “Vibration of rectangular plates by the Ritz method.” *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME* 17(4) : 448-453.

[4] Warburton, G. (1954). “The vibration of rectangular plates.” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 168(1) : 371-384.

[5] Leissa, A. (1978). “Vibration of plates, NASA SP-160,(1969).” US Washington. W. Leissa. *J. Sound and Vibration* 56 : 313.

[6] Dickinson, S. and A. Di Blasio(1986). “On the use of orthogonal polynomials in the Rayleigh-Ritz method for the study of the flexural vibration and buckling of isotropic and orthotropic rectangular plates.” *Journal of Sound and Vibration* 108(1) : 51-62.

[7] Gorman, D. (1976). “Free vibration analysis of cantilever plates by the method of superposition.” *Journal of Sound and Vibration* 49(4) : 453-467.

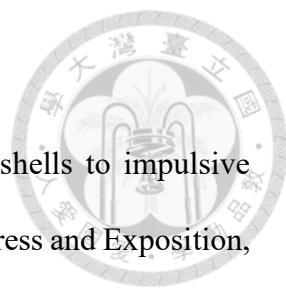
[8] Gorman, D. (1978). “Free vibration analysis of the completely free rectangular plate by the method of superposition.” *Journal of Sound and Vibration* 57(3) : 437-447.

[9] Gorman, D. J. (1999). “Vibration analysis of plates by the superposition method”, World Scientific.

[10] Forsyth, E. and G. Warburton (1960). “Transient vibration of rectangular plates.” *Journal of Mechanical Engineering Science* 2(4) : 325-330.

[11] Craggs, A. (1968). “Transient vibration analysis of linear systems using transition

matrices.”, National Aeronautics and Space Administration.



[12] Abrate, S. (2007). “Transient response of beams, plates, and shells to impulsive loads.” ASME 2007 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, American Society of Mechanical Engineers.

[13] Mochida, Y. (2010). “Free vibration analysis of plates and shells by using the Superposition Method.”, University of Waikato.

[14] Won, S. G., Bae, S. H., Jeong, W. B., Cho, J. R., and Bae, S. R. (2012). “Forced vibration analysis of damped beam structures with composite cross-section using Timoshenko beam element.” Structural Engineering and Mechanics, 43(1), 15-30. <https://doi.org/10.12989/sem.2012.43.1.015>

[15] Avramov, K. V., and Mikhlin, Y. V. (2013). “Review of applications of Nonlinear Normal Modes for Vibrating Mechanical Systems.” Applied Mechanics Reviews, 65(2), Article 020801.

[16] Sayyad, A. S., and Ghugal, Y. M. (2015). “On the free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates : A review of recent literature with some numerical results.” Composite Structures

[17] Wang, Q., Shi, D., Pang, F., & Liang, Q. (2016). “Vibrations of composite laminated circular panels and shells of revolution with general elastic boundary conditions via Fourier-Ritz method.” Curved and Layered Structures, 3(1) 105-136.

[18] Demir, C., Ersoy, H., Mercan, K., and Civalek, Ö. (2017). “Free vibration analysis of annular sector plates via conical shell equations.” Curved and Layered Structures, 4(1), 146-157.

[19] Duc, N. D., Seung-Eock, K., Tuan, N. D., Tran, P., and Khoa, N. D. (2017). “New approach to study nonlinear dynamic response and vibration of sandwich composite

cylindrical panels with auxetic honeycomb core layer.” Aerospace Science and Technology, 70, 396-404.

[20] Sayyad, A. S., & Ghugal, Y. M. (2017). “Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams : A critical review of literature .” Composite Structures,171,486-504.

[21] Kumar, Y. (2018). “The Rayleigh–Ritz method for linear dynamic, static and buckling behavior of beams, shells and plates : A literature review.” JVC/Journal of Vibration and Control,24(7),1205-1227.

[22] Pu, Y., Zhou, H., and Meng, Z. (2019). “Multi-channel adaptive active vibration control of piezoelectric smart plate with online secondary path modelling using PZT patches.” Mechanical Systems and Signal Processing, 120, 166-179.

[23] Chang, C. Y., and Huang, C. W. (2020). “Non-contact measurement of inter-story drift in three-layer RC structure under seismic vibration using digital image correlation.” Mechanical Systems and Signal Processing, 136, Article 106500.

[24] Liao, C. Y., and Ma, C. C. (2020). “Transient behavior of a cantilever plate subjected to impact loading : Theoretical analysis and experimental measurement”. International Journal of Mechanical Sciences, 166, Article 105217.

[25] Kawai, H. (1969). “The piezoelectricity of poly (vinylidene fluoride) ”. Japanese Journal of Applied Physics 8(7) : 975.

[26] Bacon, D. R. (1982). “Characteristics of a PVDF membrane hydrophone for use in the range 1-100 MHz”. IEEE transactions on sonics and ultrasonics 29(1) : 18-25.

[27] Gaul, L. and S. Hurlebaus (1999). “Determination of the impact force on a plate by piezoelectric film sensors.” Archive of Applied Mechanics 69(9-10) : 691-701.

[28] Sirohi, J. and I. Chopra (2000). “Fundamental understanding of piezoelectric strain

sensors.” Journal of Intelligent Material Systems and Structures 11(4) : 246-257.

[29] Fukada, E. (2000). “History and recent progress in piezoelectric polymers.” IEEE Transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control 47(6) : 1277-1290.

[30] Bauer, F. (2000). “PVDF shock sensors : applications to polar materials and high explosives.” IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control 47(6) : 1448-1454.

[31] D'Acquisto, L. and R. Montanini (2008). “A Study on the Measurement Instrumentation for a Custom-Made Bipendulum Impact Testing Machine.” IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement 57(11) : 2487-2494.

[32] 潘善盈, 馬劍清, “應用 PVDF 感測器於懸臂樑之主動抑振與揚聲器音壓之控制”, 國立台灣大學機械工程研究所碩士論文, 2009.

[33] 張鈞凱, 馬劍清, “位移與應變暫態波傳之實驗量測、理論分析以及數值計算”, 國立台灣大學機械工程研究所碩士論文, 2011.

[34] 劉泓嶽, 馬劍清, “PVDF 感測器應用於結構系統之動態量測能力探討”, 國立台灣大學機械工程研究所碩士論文, 2011.

[35] Butters, J. and J. Leendertz (1971). “Speckle pattern and holographic techniques in engineering metrology.” Optics & laser technology 3(1) : 26-30.

[36] Høgmoen, K. and O. J. Løkberg (1977). “Detection and measurement of small vibrations using electronic speckle pattern interferometry.” Applied Optics 16(7) : 1869-1875.

[37] Slettemoen, G. A. (1980). “Electronic speckle pattern interferometric system based on a speckle reference beam.” Applied Optics 19(4) : 616-623.

[38] Koyuncu, B. (1980). “The investigation of high frequency vibration modes of PZT-4 transducers using ESPI techniques with reference beam modulation.” Optics and

Lasers in Engineering 1(1) : 37-49.

[39] Wykes, C. (1982). "Use of electronic speckle pattern interferometry (ESPI) in the measurement of static and dynamic surface displacements." Optical Engineering 21(3) : 213400-213400-.

[40] Nakadate, S., H. Saito and T. Nakajima (1986). "Vibration measurement using phase-shifting stroboscopic holographic interferometry." Journal of Modern Optics 33(10) : 1295-1309.

[41] Oswin, J., P. Salter, F. M. Santoyo and J. Tyrer (1994). "Electronic speckle pattern interferometric measurement of flexensional transducer vibration patterns : in air and water." Journal of sound and vibration 172(4) : 433-448.

[42] Wang, W.-C., C.-H. Hwang and S.-Y. Lin (1996). "Vibration measurement by the time-averaged electronic speckle pattern interferometry methods." Applied optics 35(22) : 4502-4509.

[43] Ma, C.-C. and C.-H. Huang (2001). "Experimental and numerical analysis of vibrating cracked plates at resonant frequencies." Experimental Mechanics 41(1) : 8-18.

[44] Ma, C.-C. and C.-H. Huang (2002). "Experimental full field investigations of resonant vibrations for piezoceramic plates by an optical interferometry method." Experimental mechanics 42(2) : 140-146.

[45] Lin, H.-Y. and C.-C. Ma (2006). "The influence of electrode designs on the resonant vibrations for square piezoceramic plates." IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control 53(5) : 825-837.

[46] 林育志, 馬劍清, "壓電元件於不同介質中的動態特性研究與實驗量測", 國立台灣大學機械工程研究所博士論文, 2003.

[47] 黃育熙, 馬劍清, “壓電石英晶體之平板結構的動態特性研究”, 國立台灣大學機械工程研究所碩士論文, 2003.

[48] 吳亦莊, 馬劍清, “理論解析與實驗量測壓電平板的面外振動及特性探討”, 國立台灣大學機械工程研究所碩士論文, 2009.

[49] 黃育熙, 馬劍清, “壓電陶瓷平板、薄殼、與雙晶片三維耦合動態特性之實驗量測、數值計算、與理論解析”, 國立台灣大學機械工程研究所博士論文, 2009.

[50] Hill, K. O., Fujii, Y., Johnson, D. C., and Kawasaki, B. S. (1978). “Photosensitivity in optical fiber waveguides : Application to reflection filter fabrication”. *Applied Physics Letters*, 647-649.

[51] Meltz, G., Morey, W., and Glenn, W. H. (1989). “Formation of Bragg gratings in optical fibers by a transverse holographic method”. *Optics Letters*, 823-825.

[52] Hill, K. O., Malo, B., Bilodeau, F., Johnson, D. C., and Albert, J. (1993). “Bragg gratings fabricated in monomode photosensitive optical fiber by UV exposure through a phase mask”. *Applied Physics Letters*, 1035-1037.

[53] Anderson, D. Z., Mizrahi, V., Erdogan, T., and White, A. E. (1993). “Production of in-fiber gratings using a diffractive optical element”. *Electronics Letters*, 566-568.

[54] Bennion, I., Williams, J. A. R., Zhang L., Doran, S. K., & Doran, N. J. (1996). “UV-written in-fiber Bragg gratings”. *Optics Quantum Electronics*, 93-135.

[55] Hill, K. O., and Meltz, G. (1997). “Fiber Bragg grating technology fundamentals and overview. Journal of Light wave Technology”, 1263-1276.

[56] Kashyap, R. (1999). “*Fiber Bragg Gratings*”. Academic press.

[57] Erdogan, T. (1997). “Fiber grating spectra. *Journal of Lightwave Technology*”, 1277-1294.

[58] Nye, J. F. (1957). “Physical Properties of Crystals : Their Representation by Tensors



and Matrices.”,Oxford university press.



[59] Bertholds, A., and Dandliker, R. (1988). “Determination of the individual strain-optic coefficients in single-mode optical fibres.”, *Journal of Lightwave Technology*, vol. 6, 17-20.

[60] Takahashi, S., and Shibata, S. (1979). “Thermal variation of attenuation for optical fibers.” *Journal of Non-Crystalline Solids*, vol. 30, 359-370.

[61] Tao, X., Tang, L., Du, W. C., and Choy, C. L. (2000). “Internal strain measurement by fiber Bragg grating sensors in textile composites.” *Composites Science and Technology*, vol. 60, 657-669.

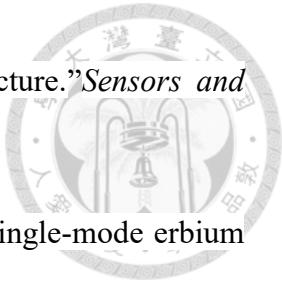
[62] Kersey, A. D., Berkoff, T. A. and Morey, W. W. (1993). “Multiplexed fiber Bragg grating strain-sensor system with a fiber Fabry–Perot wavelength filter.” *Optics Letters*, 1370-1372.

[63] Sun, Q., Liu, D., Xia, L., Wang, J., Liu, H., & Shum, P. (2008). “Experimental demonstration of multipoint temperature warning sensor using a multichannel matched fiber Bragg grating.” *Photonics Technology Letters, IEEE*, 933-935.

[64] Murukeshan, V. M., Chan, P. Y., Ong, L. S. and Seah, L. K. (2000). “Cure monitoring of smart composites using fiber Bragg grating based embedded sensors.” *Sensors and Actuators A : Physical*, 153-161.

[65] Zhao, X., Song, G., Fernandez, M.,and Ou, J. (2009). “One kind of fiber Bragg grating displacement sensor using micro-elastic spring.” Second International Conference on Smart Materials and Nanotechnology in Engineering, 74932X-74932X-6.

[66] Biswas, P., Bandyopadhyay, S., Kesavan, K., Parivallal, S., Sundaram, B. A., Ravisankar, K., and asgupta, K. (2010). “Investigation on packages of fiber Bragg



grating for use as embeddable strain sensor in concrete structure." *Sensors and Actuators A : Physical*, vol. 157, 77-83.

[67] Ball, G. A., and Morey, W. W. (1992). "Continuously tunable single-mode erbium fiber laser." *Optics Letters*, vol. 17, 420-422.

[68] Ball, G., and Morey, W. W. (1994). "Compression-tuned single-frequency Bragg grating fiber laser." *Optics Letters*, vol. 19, 1979-1981.

[69] Yoon Kim, S., BaeLee, S., WonKwon, S., and SamChoi, S. (1998). "Channel-switching active add/drop multiplexer with tunable gratings." *Electronics Letters*, vol. 34, 104-105.

[70] Mavoori, H., Jin, S., Espindola, R. P., and Strasser, T. A. (1999). "Enhanced thermal and magnetic actuators for broad-range tuning of fiber Bragg grating based reconfigurable add drop devices." *Optics Letters*, vol. 24, 714-716.

[71] Inui, T., Komukai, T., and Nakazawa, M. (2001). "Highly efficient tunable fiber Bragg grating filters using multilayer piezoelectric transducers." *Optics Communications*, vol. 190, 1-4.

[72] Yoffe, G. W., Krug, P. A., Ouellette, F., and Thorncraft, D. A. (1995). "Passive temperature-compensation package for optical fiber gratings." *Applied Optics*, vol. 34, 6859-6861.

[73] Melle, S. M., and Liu, K. (1992). "A passive wavelength demodulation system for guided-wave Bragg grating sensors." *IEEE Photonics Technology Letters*, 516-518.

[74] Kersey, A. D., Berkoff, T. A., and Morey, W. W. (1993). "Two-channel fiber Bragg-grating strain sensor with high-resolution interferometric wavelength-shift detection." *Fibers'*, 48-55.

[75] 蔣彥儒，王立康，“溫度無感之布拉格式光纖光柵應變感測系統之研究，”博士論文，電機工程學系，國立清華大學，2003.



[76] 江家慶，單秋成，“能量調變型光纖光柵感測器，”第二十屆機械工程研討會，2003.

[77] 葉耀文，馬劍清，“短週期光纖光柵在動態系統的量測與應用，”碩士論文，機械工程研究所，台灣大學，2004

[78] 許碩修，馬劍清，“能量調變型光纖光柵感測器在動態系統的量測與應用，”碩士論文，機械工程學研究所，臺灣大學，2005.

[79] 莊國志，馬劍清，“以長週期光纖光柵作為能量調變之光纖光柵感測系統動態實驗，”中華民國力學學會第二十九屆全國力學會議，2005.

[80] 林伯睿，馬劍清，“高靈敏度光纖濾波器與高感度光纖光柵之開發及應用於量測穩態和暫態波傳研究，”碩士論文，機械工程學研究所，臺灣大學，2006.

[81] 梁正言，馬劍清，“高頻面內光纖光柵感測器及其動態量測系統之開發與研究，”碩士論文，機械工程學研究所，臺灣大學，2007.

[82] 汪政緯，馬劍清，“應用布拉格光纖光柵感測器於結構件承受撞擊之暫態應變量測，”碩士論文，機械工程學研究所，臺灣大學，2008.

[83] 莊國志，馬劍清，“多維高解析度布拉格光纖光柵動態位移及應變量測系統之研發並應用於暫態波傳之量測，”博士論文，機械工程學研究所，臺灣大學，2008.

[84] 王兆祥，馬劍清，“布拉格光纖光柵感測器之理論分析以及應用動態量測與監測之探討，”碩士論文，機械工程學研究所，臺灣大學，2010.

[85] 王俊耀，馬劍清，“布拉格光纖光柵感測器應用於三維結構物邊點之暫態應變量測，”碩士論文，機械工程學研究所，臺灣大學，2012.

[86] 王華均，馬劍清，“智慧懸臂樑結構的主動抑振研究以及布拉格光纖光柵多點量測的技術開發，”碩士論文，機械工程學研究所，臺灣大學，2013.

[87] 林建鐘，馬劍清，“探討質量效應對於樑結構頻率域之影響以及移動質量的動

態特性分析,” 碩士論文, 機械工程學研究所, 臺灣大學, 2014.

[88] 柯秉良, 馬劍清, “布拉格光纖光柵應用於壓力感測器設計與製作以及動態應變量測,” 碩士論文, 機械工程學研究所, 臺灣大學, 2015.

[89] 黃康哲, 馬劍清, “聚偏二氟乙烯薄膜與布拉格光纖光柵感測器之動態量測技術研發與應用,” 博士論文, 機械工程學研究所, 臺灣大學, 2015.

[90] 李冠德, 馬劍清, “以布拉格光纖光柵器量測與分析固液耦合結構物的動態特性及暫態波傳問題,” 碩士論文, 機械工程學研究所, 臺灣大學, 2016.

[91] 許詠莊, 馬劍清, “布拉格光纖光柵感測器於高速內藏式主軸及超精密平面磨床動態特性、溫升及變形之精密量測,” 碩士論文, 機械工程學研究所, 臺灣大學, 2016.

[92] 龔瑞清, 馬劍清, “開發布拉格光纖光柵感測器於多點與即時量測系統並應用在高速內藏式主軸與銑削工件之溫升、變形及轉速之精密量測,” 碩士論文, 機械工程學研究所, 臺灣大學, 2017.

[93] Ko, P. L., Chuang, K. C., and Ma, C. C. (2018). “A fiber bragg grating-based thin-film sensor for measuring dynamic water pressure.” IEEE Sensors Journal, 18(18), 7383-7391, Article 8413096.

[94] Shang, K., Zhang, Y., Galea, M., Brusic, V., & Korposh, S. (2021). “Fibre optic sensors for the monitoring of rotating electric machines : a review.” Optical and Quantum Electronics, 53(2), Article 75.

[95] Mao, Y., Tong, X., Zhang, C., & Wei, J. (2021). “High temperature in-situ sensing system based on fiber Bragg grating for reciprocating compressor.” Optical Fiber Technology, 64, Article 102545.

[96] M. M. Frocht, “Photoelasticity,” J. Wiley, 1941.

[97] A. J. Durelli and V. J. Parks, “Moiré Analysis of Strain.” Prentice-Hall Englewood

Cliffs, New Jersey, 1970.

[98] T. Kreis, “Handbook of Holographic Interferometry: Optical and Digital Methods.” Wiley-VCH, 2005.

[99] M. A. Sutton, J. J. Orteu, and H. W. Schreier, “Image Correlation for Shape, Motion and Deformation Measurements : Basic Concepts, Theory and Applications.” Springer Verlag, 2009.

[100] C. C. Ma and K. M. Hung, “Exact Full-Field Analysis of Strain and Displacement for Circular Disks Subjected to Partially Distributed Compressions,” International Journal of Mechanical Sciences, pp. 275–292, 2008.

[101] J. N. Butters and J. A. Leendertz, “Speckle Pattern and Holographic Techniques in Engineering Metrology,” Optics and Laser Technology, pp. 26–30, 1971.

[102] Y. H. Huang and C. C. Ma, “Experimental Measurements and Finite Element Analysis of the Coupled Vibrational Characteristics of Piezoelectric Shells,” IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, pp. 785–798, 2012.

[103] C. Y. Chang, S. H. Lin, and C. C. Ma, “High-Resolution Electronic Interferometry for the Measurement of In-Plane Vibration,” Applied Optics, pp. 5773–5779, 2012.

[104] T. Siebert, H. R. Schubach, and K. Splitthof, “Recent Developments and Applications for Optical Full Field Strain Measurement Using ESPI and DIC,” Proceedings of SPIE, 79972B, 2010.

[105] D. Zhang, X. Zhang, and G. Cheng, “Compression Strain Measurement by Digital Speckle Correction,” Experimental Mechanics, pp. 62–65, 1999.

[106] B. K. Bay, “Texture Correlation : a Method for the Measurement of Detailed Strain Distributions within Trabecular Bone,” Journal of Orthopaedic Research, pp. 258–



267, 1995.

[107] D.J. Chen, F. P. Chiang, Y. S. Tan, and H. S. Don, “Digital Speckle-Displacement Measurement Using a Complex Spectrum Method,” *Applied Optics*, pp. 1839–1849, 1993.

[108] G. R. Gaudette, J. Todaro, I. B. Krukenkamp, and F. P. Chiang, “Computer Aided Speckle Interferometry : a Technique for Measuring Deformation of the Surface of the Heart,” *Annals of Biomedical Engineering*, pp. 775–780, 2001.

[109] M. Sjodahl, and L. R. Benckert, “Electronic Speckle Photography : Analysis of an Algorithm Giving the Displacement with Subpixel Accuracy,” *Applied Optics*, pp. 2278–2284, 1993.

[110] M. Sjodahl, “Accuracy in Electronic Speckle Photography,” *Applied Optics*, pp. 2875–2885, 1997.

[111] R. J. Adrian, “Twenty Years of Particle Image Velocimetry,” *Experiments in Fluids*, 159–169, 2005.

[112] D. J. White, W. A. Take, and M. D. Bolton “Soil Deformation Measurement Using Particle Image Velocimetry (PIV) and Photogrammetry,” *Geotechnique*, 619–631, 2003.

[113] B. Pan, H. M. Xie, L. H. Yang, and Z. Y. Wang, “Accurate Measurement of Satellite Antenna Surface Using Three-Dimensional Digital Image Correlation Technique,” *Strain*, 194–200, 2009.

[114] B. K. Bay, T. S. Smith, D. P. Fyhrie, and M. Saad, “Digital Volume Correlation : Three-Dimensional Strain Mapping Using X-ray Tomography,” *Experimental Mechanics*, pp. 217–226, 1999.

[115] Z. Sun, J. S. Lyons, and S. R. McNeill, “Measuring Microscopic Deformations with

Digital Image Correlation,” Optics And Lasers in Engineering, pp. 409–428, 1997.

[116] M. A. Sutton, N. Li, D. Garcia, N. Cornille, J. J. Orteu, S. R. McNeill, H. W. Schreier, X. Li, and A. P. Reynolds, “Scanning Electron Microscopy for Quantitative Small and Large Deformation Measurements Part II : Experimental Validation for Magnifications from 200 to 10,000,” Experimental Mechanics, pp. 789–804, 2007.

[117] C. Franck, S. Hong, S. A. Maskarinec, D. A. Tirrell, and G. Ravichandran, “Three-Dimensional Full-Field Measurements of Large Deformations in Soft Materials Using Confocal Microscopy and Digital Volume Correlation,” Experimental Mechanics, pp. 427–438, 2007.

[118] X. Li, W. Xu, M. A. Sutton, and M. Mello, “Nanoscale Deformation and Cracking Studies of Advanced Metal Evaporated Magnetic Tapes Using Atomic Force Microscopy and Digital Image Correlation Techniques,” Materials Science and Technology, pp. 835–844, 2006.

[119] H. A. Bruck, S. R. McNeill, M. A. Sutton, and W. H. Peters, “Digital Image Correlation Using Newton-Raphson Method of Partial Differential Correction,” Experimental Mechanics, pp. 261–267, 1989.

[120] S. C. Park, M. K. Park, and M. G. Kang, “Super-resolution image reconstruction : a technical overview,” IEEE Signal Processing Magazine, pp. 21–36, 2003..

[121] Bar-Kochba, E., Toyanova, J., Andrews, E., Kim, K. S., & Franck, C. (2015). “A Fast Iterative Digital Volume Correlation Algorithm for Large Deformation”Experimental Mechanics, 55(1), 261-274.
<https://doi.org/10.1007/s11340-014-9874-2>

[122] Grassi, L., & Isaksson, H. (2015). “Extracting accurate strain measurements in bone mechanics : A critical review of current methods.” Journal of the Mechanical

Behavior of Biomedical Materials, 50, 43-54.

<https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2015.06.006>



[123] Palanca, M., Tozzi, G., & Cristofolini, L. (2016). "The use of digital image correlation in the biomechanical area: A review." *International Biomechanics*, 3(1), 1-21. <https://doi.org/10.1080/23335432.2015.1117395>

[124] Chang, C. Y., & Ma, C. C. (2017). "Increasing the computational efficient of digital cross correlation by a vectorization method." *Mechanical Systems and Signal Processing*, 92, 293-314.

[125] 張景媖, 馬劍清, “數位影像相關法應用於跨尺度跨領域靜態及動態全域位移與應變精密量測,” 碩士論文, 機械工程學研究所, 臺灣大學, 2013

[126] 周宛萱, 馬劍清, “建構高精度數位影像相關法並應用於土木結構動態系統及奈米材料微系統的變形量測,” 碩士論文, 機械工程學研究所, 臺灣大學, 2014。

[127] 簡宸煜, 馬劍清, “應用數位影像相關法於土木結構及碳纖維性質與電池表面變化之量測,” 碩士論文, 機械工程學研究所, 臺灣大學, 2015。

[128] 陳亮至, 馬劍清, “建構立體數位影像相關法之基礎理論並應用於結構靜態與動態三維變形精密量測,” 碩士論文, 機械工程學研究所, 臺灣大學, 2016。

[129] 彭柏勳, 馬劍清, “應用數位影像相關法於機械系統與土木結構之變形及動態特性量測,” 碩士論文, 機械工程學研究所, 臺灣大學, 2016。

[130] 黃右年, 馬劍清, “建立即時立體數位影像相關法於三維工程問題的動態量測,” 碩士論文, 機械工程學研究所, 臺灣大學, 2018。

[131] 毛英澤, 馬劍清, “即時數位影像相關法系統於高速主軸即時監測及車輛追跡跨領域量測,” 碩士論文, 機械工程學研究所, 臺灣大學, 2019。

[132] Pan, B. (2018). "Digital image correlation for surface deformation measurement: Historical developments, recent advances and future goals." *Measurement*



[133] Ma, C. C., Ho, H. W., Chou, W. H., Chen, D. R., and Chang, C. Y. (2020). "In-situ measurements of strain distribution by coupling digital image correlation and an optical microscope." *Microsystem Technologies*.

[134] Chang, C. Y., & Huang, C. W. (2020). "Non-contact measurement of inter-story drift in three-layer RC structure under seismic vibration using digital image correlation." *Mechanical Systems and Signal Processing*, 136, Article 106500.

[135] Yoon, S., Jung, H. J., Knowles, J. C., & Lee, H. H. (2021). "Digital image correlation in dental materials and related research : A review." *Dental Materials*, 37(5), 758-771.