

國立臺灣大學工學院機械工程學研究所



碩士論文

Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master's Thesis

結合沉浸式邊界法與晶格波茲曼法

進行雙向流固耦合分析於壓電能量擷取系統

Combining the immersed boundary method and the
lattice Boltzmann method with wind tunnel experiments
to analyze the piezoelectric energy harvesting system

陳柏宇

Bo-Yu Chen

指導教授：黃育熙 博士

Advisor: Yu-Hsi Huang, Ph.D.

中華民國 113 年 7 月

July, 2024



國立臺灣大學碩士學位論文
口試委員會審定書

MASTER'S THESIS ACCEPTANCE CERTIFICATE
NATIONAL TAIWAN UNIVERSITY

結合沉浸式邊界法與晶格波茲曼法
進行雙向流固耦合分析於壓電能量擷取系統

Combining the immersed boundary method and the lattice Boltzmann method with wind tunnel experiments to analyze the piezoelectric energy harvesting system

本論文係陳柏宇 (R11522504) 在國立臺灣大學機械工程學系完成之
碩士學位論文，於民國 113 年 7 月 5 日承下列考試委員審查通過及口
試及格，特此證明。

The undersigned, appointed by the Department of Mechanical Engineering on 5th, July, 2024 have examined a Master's thesis entitled above presented by Bo-Yu Chen (R11522504) candidate and hereby certify that it is worthy of acceptance.

口試委員 Oral examination committee:

黃育熙

(指導教授 Advisor)

廖辰謙

廖川修

系主任/所長 Director:

林孝仰

致謝



謝謝黃育熙老師在我碩士階段兩年來的指導，一路上從討論研究方向到後續研究階段持續的溝通與鼓勵，並點出研究過程中可以修改精進的點，讓我在研究的路上順利很多，不論是剛入學時面對的研討會報告以及後續的學期報告，都在我報告完後進行補充或提醒要注意的問題，讓我能有信心地完成碩士研究並論文口試，很謝謝老師的幫忙

感謝口試委員們：廖川傑教授與廖展誼教授提供專業的意見，讓本論文能更加完整。感謝廖川傑老師給予很多流力模型分析及論文查找上給予很多建議，也提醒該注意的地方；感謝廖展誼老師在程式計算評估及流固耦合分析上給予建議，使後續研究進行更順利。

謝謝實驗室的夥伴們，一路上的幫忙，首先是建佑學長，從進實驗室後不論是實驗室的安排、實驗架設、帶高中生的專題、以及採購發票之類的雜事都幫上非常多的忙，也常常聽學長分享很多有趣的事情，祝福學長畢業後都很順利。感謝國勛學長在畢業後願意回覆我對於研究上的疑問，也幫忙聯絡先前儀器的廠商，讓我在承接研究的過程上快速許多。感謝上一屆的學長揚開、明杰、振原、家雋、奕安，在我剛來實驗室的第一年給予很多建議，不論是研究上、休閒上都是，也在遇到事情擔心的時候給很多想法並叫我們不用想太多，有你們的幫助讓我在研究上壓力小很多。謝謝同屆的景順、淳期、紜廷、正諺，每次讀書做研究很累時，轉身總是有人可以聊天打嘴砲，即使帶著耳機打程式也可以聽到你們在聊五花八門的內容，真的很有趣。謝謝學弟妹育廷、德原、嘉恩、以信、哲廷，整天看你們在打打鬧鬧，吃飯時也有很多話題可以聊，該做事時也很認真，祝你們接下來的研究及生活都順利。也謝謝 Mandy 經常跟我們聊天，分享很多故事及生活經驗。

最後感謝家人及女友給我的陪伴與支持，關心我的生活並在假日拉我出去走走放鬆，讓我能順利的完成碩士學業。



中文摘要

本論文利用晶格波茲曼法結合沉浸式邊界法以及平板疊加法，應用於壓電能量擷取系統單邊固定壓電陶瓷雙晶片之數值分析，分析由金屬圓柱於風洞中產生之卡門渦街激振壓電陶瓷雙晶片之振動特性，並以實驗量測進行驗證。

平板疊加法計算先以平板理論將壓電陶瓷雙晶片的三層結構等效成單層平板，再利用疊加法將單邊固定的矩形平板拆成四個結構進行疊加，其特性可滿足其中四個邊界條件，剩下的四個邊界條件透過正交函數展開得到壓電平板在單邊固定邊界下之共振頻率與模態振形，並將結果與實驗及有限元素法模擬結果進行驗證。

以晶格波茲曼法結合沉浸式邊界法建立單向流固耦合之二維圓柱繞流數值分析模型，針對圓柱所受之阻力、升力、卡門渦街之頻率進行模型之收斂性分析，並與文獻、商用模擬軟體之收斂後的模型進行驗證，並分析不同流速下的結果，以三維圓柱繞流數值模型進行收斂性分析，找出足夠準確且計算時間合理的模型設定，分析不同流速下的結果並與文獻做比較，在模型中加入壓電平板的幾何邊界，並加以平板疊加法之動態響應分析，建構雙向流固耦合模型以計算可變形壓電平板在流場中與流場的交互作用，求解壓電能量擷取系統之位移與輸出電壓，並從結果可看出當流場中的卡門渦街頻率接近壓電平板之第一振動模態頻率時，壓電能量擷取系統有最大的變形與最高的輸出電壓。

使用晶格波茲曼法進行數值計算透過搭配圖形處理器，相比使用中央處理器進行多核心運算，計算速度提高 14 倍，考慮到使用晶格波茲曼法結合沉浸式邊界法在高網格數模型會有計算速度大幅下降的現象，提出映射層演算法演算法並加入後，在二維高網格數模型中速度提升為原先 6 倍以上，且計算時間不受固體邊界增加而大幅降低，使模型更適用於複雜幾何結構之流固耦合分析。在雙向流固耦合模型中透過修正固體位移計算之更新週期，在不影響結果的精



度下將速度提升為原先 2.5 倍，並搭配平板受力簡化模型進一步提高單邊固定壓電平板之第一振動模態響應計算速度。

實驗部分先以雷射都卜勒振動儀量測壓電平板第一振動模態，其頻率與疊加法理論、有限元素法模擬等結果均相符。壓電能量擷取系統之風洞實驗，先以皮托管校正熱線測速儀後，在無障礙物之風洞進行之均勻度及紊流強度量測，在確保風洞流場品質下加入障礙物金屬圓柱及壓電片，建構完整的壓電能量擷取系統，並分別以雷射都卜勒振動儀及示波器，量測在不同流速下壓電平板之位移與電壓，並與雙向流固耦合數值方法結果做比較，兩者有高度的對應性。

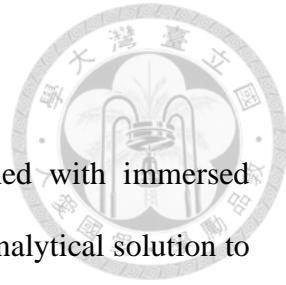
關鍵字：晶格波茲曼法、沉浸式邊界法、單向流固耦合、雙向流固耦合、壓電平板、能量擷取系統、渦流致振、疊加法、映射層演算法、受力簡化模型、風洞量測

abstract

This research uses lattice Boltzmann method(LBM) combined with immersed boundary method(IBM) and the superposition method to apply the analytical solution to the energy harvesting system with piezoelectric ceramic bimorphs in the cantilevered boundary condition. Analyze the Karman vortex produced by the metal circular cylinder vibrating piezoelectric ceramic bimorphs, and verified it by experimental measurements.

In the calculation of the superposition method, the three-layer structure of the piezoelectric ceramic bimorph is equivalent to a single-layer plate based on the plate theory, and the superposition method is used to split the rectangular plate into four structures to satisfy the plate's boundary conditions. The resonant frequency and mode shape of the piezoelectric plate with one side fixed are obtained by theoretical analysis and verified with the finite element method (FEM) results.

The lattice Boltzmann method combined with the immersed boundary method was used to establish a numerical analysis model of one-way fluid-structure interaction simulation for flow pass a cylinder in two and three dimension. The convergence analysis of the model was performed on the drag force, lift force, and the frequency of the Karman vortex, and verify the results with literature and commercial simulation software, and analyze the results under different flow rates. A two-way fluid-structure interaction simulation model is constructed by adding the boundary of the piezoelectric plate and the dynamic response of the superposition method to calculate the interaction between the deformable piezoelectric plate and the flow field, and solve the displacement and voltage of the piezoelectric energy harvester system. From the results, it can be seen that the piezoelectric energy harvester system has the largest deformation and the highest voltage when the Karman vortex frequency is close to the first vibration mode frequency of the piezoelectric plate.



Using a graphics processor unit to perform LBM analysis, the calculation speed can be up to 14 times that of multi-core computing using a central processor. Since the calculation speed of using IB-LBM model will decrease significantly in high grid number models, the Flash Translation Layer(FTL) algorithm was proposed and added, and the speed was increased to the original more than 6 times, and the calculation time is not highly affected by solid boundary, making the model more suitable for fluid-structure interaction simulation with complex geometric structures. By correcting the update cycle of the solid displacement calculation in the two-way fluid-structure interaction simulation, the speed is increased to 2.5 times, and the accuracy of the results is not affected. The model is combined with a simplified forced plate model to further improve the calculation speed.

In the experiment part, the Laser Doppel Vibrometer(LDV) was used to measure the first vibration mode of the piezoelectric plate, and the result was consistent with the results of superposition method and finite element method simulation. For the wind tunnel experiment of the piezoelectric energy harvesting system, a hot-wire anemometer was calibrated by pitot turb, and used to measure the uniformity and turbulence intensity in the wind tunnel without obstacle to ensure the quality of the flow field in the wind tunnel.

A complete piezoelectric energy harvest system was constructed by adding onstacle and piezoelectric in the wind tunnel. An oscilloscope and LDV were used to measure the displacement and voltage of the piezoelectric plate at different flow rates. There is a high degree of correspondence between the results of experiments and the two-way fluid-structure interaction simulation model.

Keywords : lattice Boltzmann method, immersed boundary method, one-way fluid-structure interaction, two-way fluid-structure interaction, piezoelectric plate, energy

harvest system, vortex-induced vibration, superposition, Flash Translation Layer algorithm, simplified forced plate model, wind tunnel measurement



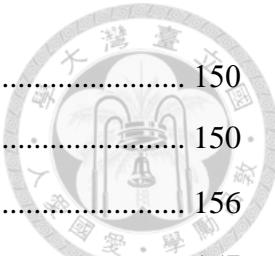


目次

致謝	I
中文摘要	II
abstract.....	IV
符號表	XXI
第一章 緒論	1
1.1 研究動機	1
1.2 文獻回顧	2
1.3 內容簡介	6
第二章 單向流固耦合數值方法	8
2.1 晶格波茲曼法	8
2.1.1 波茲曼方程式.....	8
2.1.2 離散的波茲曼方程式與模型.....	10
2.1.3 紊流模型-大渦流模擬(Large Eddy Simulation, LES)	13
2.2 沉浸式邊界法	14
2.2.1 波茲曼方程式力量項.....	14
2.2.2 狄拉克函數與固體格點計算.....	15
2.3 數值模型設定	16
2.3.1 模擬步驟.....	16
2.3.2 邊界條件設定.....	18
2.3.3 作用力計算.....	21
2.4 二維模擬分析與結果	23
2.4.1 圓柱繞流模型設定.....	23
2.4.2 物理量的無因次化與分析方法.....	24
2.4.3 時間步長收斂性分析.....	30
2.4.4 網格收斂性分析並與文獻比較.....	36
2.4.5 不同流速下的結果.....	41



2.4.6 Ansys Fluent 模型設置與收斂性分析	50
2.4.7 Ansys Fluent 模型不同流速下的結果並與 IB-LBM 模型比較	65
2.5 三維模擬分析與結果	75
2.5.1 圓柱繞流模型設定	75
2.5.2 物理量的無因次化與分析方法	76
2.5.3 收斂性分析	78
2.5.4 不同流速下的結果	85
第三章 雙向流固耦合數值方法	94
3.1 壓電薄板疊加法與機電耦合轉換效應	94
3.2 IB-LBM 數值計算結合薄板理論解析	96
3.2.1 沉浸式邊界計算修正	96
3.2.2 更新週期之影響與選擇	96
3.2.3 簡化平板模型	109
3.3 壓電能量擷取系統之模擬結果	112
3.3.1 不同流速下之模擬結果	112
3.3.2 雙向流固耦合與單向流固耦合結果比較	129
第四章 平行運算與程式優化	135
4.1 CUDA 平行運算	136
4.1.1 GPU 計算優勢	136
4.1.2 流固耦合模型計算流程	136
4.1.3 衡量計算速度與 CUDA 加速成效	138
4.2 程式加速之效果與影響	140
4.2.1 以 FTL 演算法進行程式優化	140
第五章 雙向流固耦合之壓電能量擷取系統實驗	146
5.1 實驗儀器原理與架設	146
5.1.1 皮托管	146
5.1.2 熱線測速儀	147



5.2 風洞量測與熱線測速儀校正	150
5.2.1 風洞設計與風機規格	150
5.2.2 熱線測速儀校正	156
5.2.3 風洞之流場均勻度與紊流強度量測	157
5.3 能量擷取系統量測	164
5.3.1 雷射都卜勒測振儀	164
5.3.2 治具設計與量測實驗設置	166
5.3.3 實驗量測結果與討論	168
第六章 結論與未來展望	197
6.1 結論	197
6.2 未來展望	199
參考文獻	200
附錄-壓電薄板理論與機電耦合效應	205
A. 壓電陶瓷雙晶片	205
A.1 本構方程式	205
A.2 薄板力學假設	212
A.3 壓電材料之電學假設	214
A.4 統御方程式	217
B. 矩形懸臂版之疊加法與實驗量測	221
B.1 懸臂版(CFFF)之疊加法理論推導	223
C. 平板振動量測	232
C.1 量測結果及結果比較	232
D. 壓電平板之機電耦合效應	233
D.1 壓電平板受力下位移的暫態響應	233
D.2 壓電平板開路下的暫態電壓響應	234

圖次

圖 2-1 D2Q9 模型	12
圖 2-2 D3Q19 模型	12
圖 2-3 二維圓柱繞流模型	17
圖 2-4 三維圓柱繞流模型	17
圖 2-5 LBM 架構下之流動步驟	18
圖 2-6 IB-LBM 單向流固耦合模擬之流程圖	18
圖 2-7 入口處邊界流場晶格之分布函數 f 狀態	21
圖 2-8 IB-LBM 二維圓柱模型 $Re=3900$ ， $t = 2\mu s$ 時的流場速度模擬(單位:m/s)....	27
圖 2-9 IB-LBM 二維圓柱模型 $Re=3900$ ， $t = 5T = 130ms$ 時的流場速度模擬(單位:m/s)	
.....	27
圖 2-10 IB-LBM 二維圓柱模型 $Re=3900$ ， $t = 10T = 260ms$ 時的流場速度模擬(單位:m/s).....	27
圖 2-11 IB-LBM 二維圓柱模型 $Re=3900$ ， $t = 25T = 650ms$ 時的流場速度模擬(單位:m/s).....	28
圖 2-12 IB-LBM 二維圓柱模型 $Re=3900$ 下圓柱之阻力係數	28
圖 2-13 IB-LBM 二維圓柱模型 $Re=3900$ 下圓柱之升力係數	29
圖 2-14 IB-LBM 二維圓柱模型 $Re=3900$ 下圓柱之升力係數經 FFT 後的結果	29
圖 2-15 不同網格大小與時間步長下的阻力係數以及與文獻比較	35
圖 2-16 不同網格大小與時間步長下的升力係數以及與文獻比較	35
圖 2-17 不同網格大小與時間步長下的 Strouhal number 以及與文獻比較	36
圖 2-18 阻力係數隨網格大小改變及文獻結果	40
圖 2-19 升力係數隨網格大小改變及文獻結果	40
圖 2-20 Strouhal number 隨網格大小改變及文獻結果	41
圖 2-21 入口處流速 2 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果	43



圖 2-22 入口處流速 4 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果	44
圖 2-23 入口處流速 6 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果	45
圖 2-24 入口處流速 8 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果	46
圖 2-25 入口處流速 10 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果	47
圖 2-26 阻力係數隨流速變化	48
圖 2-27 阻力係數隨雷諾數 Re 變化[42]	48
圖 2-28 升力係數隨流速變化	49
圖 2-29 Strouhal number 隨流速變化	49
圖 2-30 Strouhal number 隨流速變化[42]	50
圖 2-31 Ansys Fluent 二維圓柱模型網格分布	58
圖 2-32 Ansys Fluent 二維圓柱模型圓柱周邊網格放大圖	58
圖 2-33 不同時間步長下的阻力係數以及與文獻比較	59
圖 2-34 不同時間步長下的升力係數以及與文獻比較	59
圖 2-35 不同時間步長下的 Strouhal number 以及與文獻比較	60
圖 2-36 不同邊界加密層數下的阻力係數以及與文獻比較	60
圖 2-37 不同邊界加密層數下的升力係數以及與文獻比較	61
圖 2-38 不同邊界加密層數下的 Strouhal number 以及與文獻比較	61
圖 2-39 不同網格大小下的阻力係數以及與文獻比較	62
圖 2-40 不同網格大小下的升力係數以及與文獻比較	62
圖 2-41 不同網格大小下的 Strouhal number 以及與文獻比較	63
圖 2-42 不同網格膨脹率下的阻力係數以及與文獻比較	63
圖 2-43 不同網格膨脹率下的升力係數以及與文獻比較	64
圖 2-44 不同網格膨脹率下的 Strouhal number 以及與文獻比較	64
圖 2-45 入口處流速 2 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果	68
圖 2-46 入口處流速 4 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果	69



圖 2-47 入口處流速 6 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果	70
圖 2-48 入口處流速 8 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果	71
圖 2-49 入口處流速 10 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果	72
圖 2-50 不同流速下，Ansys Fluent 與 IB-LBM 阻力係數的結果.....	73
圖 2-51 不同流速下，Ansys Fluent 與 IB-LBM 升力係數的結果.....	73
圖 2-52 不同流速下，Ansys Fluent 與 IB-LBM Strouhal number 的結果.....	74
圖 2-53 IB-LBM 三維圓柱模型 $Re=3900$ 下圓柱之阻力係數	77
圖 2-54 IB-LBM 三維圓柱模型 $Re=3900$ 下圓柱之升力係數	77
圖 2-55 IB-LBM 三維圓柱模型 $Re=3900$ 下圓柱之升力係數經 FFT 後的結果	78
圖 2-56 不同網格大小與時間步長下的阻力係數以及與文獻比較	83
圖 2-57 不同網格大小與時間步長下的升力係數以及與文獻比較	83
圖 2-58 網格大小為 2.5 mm，時間步長 $16\mu s$ 的升力係數	84
圖 2-59 不同網格大小與時間步長下的 Strouhal number 以及與文獻比較	84
圖 2-60 入口處流速 2 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果	87
圖 2-61 入口處流速 4 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果	88
圖 2-62 入口處流速 6 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果	89
圖 2-63 入口處流速 8 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果	90
圖 2-64 入口處流速 10 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果	91
圖 2-65 阻力係數隨流速變化	92
圖 2-66 升力係數隨流速變化	92
圖 2-67 Strouhal number 隨流速變化	93
圖 3-1 三維壓電能量擷取系統架構示意圖	99
圖 3-2 壓電平板位移取值位置示意圖	99
圖 3-3 入口流速 2 m/s 下，壓電平板每輪更新一次的位移與電壓	100
圖 3-4 入口流速 2 m/s 下，壓電平板每 10 輪更新一次的位移與電壓	101



圖 3-5 入口流速 2 m/s 下，壓電平板每 30 輪更新一次的位移與電壓	102
圖 3-6 入口流速 2 m/s 下，壓電平板每 100 輪更新一次的位移與電壓	103
圖 3-7 入口流速 2 m/s 下，壓電平板每 1000 輪更新一次的位移與電壓	104
圖 3-8 入口流速 10 m/s 下，壓電平板每輪更新一次的位移與電壓	105
圖 3-9 入口流速 10 m/s 下，壓電平板每 10 輪更新一次的位移與電壓	106
圖 3-10 入口流速 10 m/s 下，壓電平板每 100 輪更新一次的位移與電壓	107
圖 3-11 入口流速 10 m/s 下，壓電平板每 1000 輪更新一次的位移與電壓	108
圖 3-12 壓電平板量測位置示意圖	110
圖 3-13 入口處流速 4 m/s 下，壓電平板位移量測與其經 FFT 後的結果	111
圖 3-14 壓電平板升力隨流速變化	113
圖 3-15 壓電平板位移隨流速變化	114
圖 3-16 壓電平板電壓隨流速變化	114
圖 3-17 入口處流速 2 m/s 下，壓電平板位移量測與其經 FFT 後的結果	115
圖 3-18 入口處流速 4 m/s 下，壓電平板位移量測與其經 FFT 後的結果	116
圖 3-19 入口處流速 6 m/s 下，壓電平板位移量測與其經 FFT 後的結果	117
圖 3-20 入口處流速 8 m/s 下，壓電平板位移量測與其經 FFT 後的結果	118
圖 3-21 入口處流速 9 m/s 下，壓電平板位移量測與其經 FFT 後的結果	119
圖 3-22 入口處流速 10 m/s 下，壓電平板位移量測與其經 FFT 後的結果	120
圖 3-23 入口處流速 12 m/s 下，壓電平板位移量測與其經 FFT 後的結果	121
圖 3-24 入口處流速 2 m/s 下，壓電平板電壓量測與其經 FFT 後的結果	122
圖 3-25 入口處流速 4 m/s 下，壓電平板電壓量測與其經 FFT 後的結果	123
圖 3-26 入口處流速 6 m/s 下，壓電平板電壓量測與其經 FFT 後的結果	124
圖 3-27 入口處流速 8 m/s 下，壓電平板電壓量測與其經 FFT 後的結果	125
圖 3-28 入口處流速 9 m/s 下，壓電平板電壓量測與其經 FFT 後的結果	126
圖 3-29 入口處流速 10 m/s 下，壓電平板電壓量測與其經 FFT 後的結果	127



圖 3-30 入口處流速 12 m/s 下，壓電平板電壓量測與其經 FFT 後的結果	128
圖 3-31 入口處流速 2 m/s 下，壓電平板位移量測與其經 FFT 後的結果[43]	130
圖 3-32 入口處流速 4 m/s 下，壓電平板位移量測與其經 FFT 後的結果[43]	131
圖 3-33 入口處流速 6 m/s 下，壓電平板位移量測與其經 FFT 後的結果[43]	132
圖 3-34 入口處流速 8 m/s 下，壓電平板位移量測與其經 FFT 後的結果[43]	133
圖 3-35 入口處流速 10 m/s 下，壓電平板位移量測與其經 FFT 後的結果[43]	134
圖 4-1 IB-LBM 模型運算流程圖	137
圖 4-2 模型運算速度 MLUPS 隨硬體與程式在不同網格數下的差別	139
圖 4-3 LBM 模型與 IB-LBM 模型在不同網格數下的運算速度比較	144
圖 4-4 優化後的 IB-LBM 模型在不同網格數下的運算速度並與其他模型比較 ..	145
圖 5-1 使用的皮托管	146
圖 5-2 與皮托管相連接的壓差計	147
圖 5-3 熱線測速儀之探針尺寸示意圖	148
圖 5-4 熱線測速儀之探針	148
圖 5-5 熱線測速儀之熱線放大圖	148
圖 5-6 熱線風速計 HW-101	149
圖 5-7 示波器	149
圖 5-8 風機尺寸示意圖(單位：mm)	151
圖 5-9 風機實體圖	152
圖 5-10 鋁製蜂巢板	152
圖 5-11 網目	153
圖 5-12 風洞測試段頂部開洞位置	153
圖 5-13 風洞測試段側邊位置標註	154
圖 5-14 風機	154
圖 5-15 變頻器	155

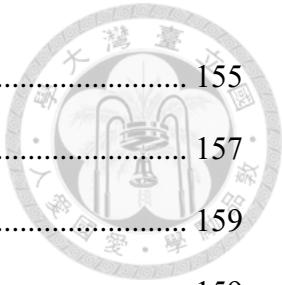


圖 5-16 變頻器頻率與流速關係圖	155
圖 5-17 熱線測速儀電壓與流速關係圖	157
圖 5-18 風洞均勻度量測位置	159
圖 5-19 風機變頻器頻率 20Hz 下流場流速量測	159
圖 5-20 風機變頻器頻率 30Hz 下流場流速量測	160
圖 5-21 風機變頻器頻率 40Hz 下流場流速量測	160
圖 5-22 風機變頻器頻率 50Hz 下流場流速量測	161
圖 5-23 風機變頻器頻率 20Hz 下流場紊流強度量測	161
圖 5-24 風機變頻器頻率 30Hz 下流場紊流強度量測	162
圖 5-25 風機變頻器頻率 40Hz 下流場紊流強度量測	162
圖 5-26 風機變頻器頻率 50Hz 下流場紊流強度量測	163
圖 5-27 雷射振測儀 LDV-OFV505	165
圖 5-28 聲光調製器構造示意圖	165
圖 5-29 雷射都卜勒光學量測系統	166
圖 5-30 壓電陶瓷雙晶片固定於鋁製圓柱	167
圖 5-31 鋁製圓柱結合壓電片拆解圖	167
圖 5-32 壓電能量擷取系統實驗量測設置	168
圖 5-33 位移量測位置示意圖	168
圖 5-34 入口處流速 1m/s 下，實驗量測平板位移與經 FFT 後的結果	172
圖 5-35 入口處流速 2m/s 下，實驗量測平板位移與經 FFT 後的結果	173
圖 5-36 入口處流速 3m/s 下，實驗量測平板位移與經 FFT 後的結果	174
圖 5-37 入口處流速 4m/s 下，實驗量測平板位移與經 FFT 後的結果	175
圖 5-38 入口處流速 5m/s 下，實驗量測平板位移與經 FFT 後的結果	176
圖 5-39 入口處流速 6m/s 下，實驗量測平板位移與經 FFT 後的結果	177
圖 5-40 入口處流速 7m/s 下，實驗量測平板位移與經 FFT 後的結果	178



圖 5-41 入口處流速 8m/s 下，實驗量測平板位移與經 FFT 後的結果	179
圖 5-42 入口處流速 9m/s 下，實驗量測平板位移與經 FFT 後的結果	180
圖 5-43 入口處流速 10m/s 下，實驗量測平板位移與經 FFT 後的結果	181
圖 5-44 入口處流速 11m/s 下，實驗量測平板位移與經 FFT 後的結果	182
圖 5-45 入口處流速 12m/s 下，實驗量測平板位移與經 FFT 後的結果	183
圖 5-46 入口處流速 1m/s 下，實驗量測平板電壓與經 FFT 後的結果	184
圖 5-47 入口處流速 2m/s 下，實驗量測平板電壓與經 FFT 後的結果	185
圖 5-48 入口處流速 3m/s 下，實驗量測平板電壓與經 FFT 後的結果	186
圖 5-49 入口處流速 4m/s 下，實驗量測平板電壓與經 FFT 後的結果	187
圖 5-50 入口處流速 5m/s 下，實驗量測平板電壓與經 FFT 後的結果	188
圖 5-51 入口處流速 6m/s 下，實驗量測平板電壓與經 FFT 後的結果	189
圖 5-52 入口處流速 7m/s 下，實驗量測平板電壓與經 FFT 後的結果	190
圖 5-53 入口處流速 8m/s 下，實驗量測平板電壓與經 FFT 後的結果	191
圖 5-54 入口處流速 9m/s 下，實驗量測平板電壓與經 FFT 後的結果	192
圖 5-55 入口處流速 10m/s 下，實驗量測平板電壓與經 FFT 後的結果	193
圖 5-56 入口處流速 11m/s 下，實驗量測平板電壓與經 FFT 後的結果	194
圖 5-57 入口處流速 12m/s 下，實驗量測平板電壓與經 FFT 後的結果	195
圖 5-58 不同入口處流速下，實驗結果與 IB-LBM 模擬之位移結果比較	196
圖 5-59 不同入口處流速下，實驗結果與 IB-LBM 模擬之電壓結果比較	196
圖 7-1 串聯型雙晶片以串聯電極連接(SBS)	211
圖 7-2 串聯型雙晶片以並聯電極連結(SBP)	211
圖 7-3 並聯型雙晶片以串聯電極連接(PBS)	211
圖 7-4 並聯型雙晶片以並聯電極連接(PBP)	211
圖 7-5 壓電陶瓷雙晶片中面示意圖	214
圖 7-6 壓電陶瓷雙晶片電位差示意圖	217



圖 7-7 平板側向剪力等效圖	223
圖 7-8 懸臂板示意圖	230
圖 7-9 懸臂板與四個結構區塊疊加示意圖	230
圖 7-10 懸臂板之特徵矩陣	231
圖 7-11 特徵矩陣示意圖	231
圖 7-12 壓電平板之等效電路圖	236



表次

表 2-1 網格大小對應格點數量	31
表 2-2 二維無紊流圓柱繞流模型文獻結果	31
表 2-3 不同網格大小與時間步長下的阻力係數	32
表 2-4 不同網格大小與時間步長下的升力係數	33
表 2-5 不同網格大小與時間步長下的渦街頻率與 Strouhal number	34
表 2-6 不同網格大小對應收斂後的時間步長	38
表 2-7 阻力係數隨網格大小改變及與文獻比對	38
表 2-8 升力係數隨網格大小改變及與文獻比對	39
表 2-9 Strouhal number 隨網格大小改變及與文獻比對	39
表 2-10 不同流速下阻力係數、升力係數、Strouhal number 的結果	42
表 2-11 不同時間步長下的阻力係數	53
表 2-12 不同時間步長下的升力係數	53
表 2-13 不同時間步長下的 Strouhal number	54
表 2-14 不同邊界加密層數下的阻力係數	54
表 2-15 不同邊界加密層數下的升力係數	54
表 2-16 不同邊界加密層數下的 Strouhal number	55
表 2-17 不同網格大小對應網格數與格點數	55
表 2-18 不同網格大小下的阻力係數	55
表 2-19 不同網格大小下的升力係數	56
表 2-20 不同網格大小下的 Strouhal number	56
表 2-21 不同網格大小對應網格數與格點數	56
表 2-22 不同網格膨脹率下的阻力係數	57
表 2-23 不同網格膨脹率下的升力係數	57
表 2-24 不同網格膨脹率下的 Strouhal number	57

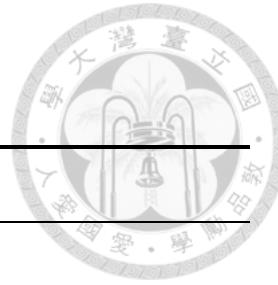


表 2-25 不同流速下阻力係數的結果以及與 IB-LBM 模型的結果比較	66
表 2-26 不同流速下升力係數的結果以及與 IB-LBM 模型的結果比較	66
表 2-27 不同流速下 Strouhal number 的結果以及與 IB-LBM 模型的結果比較	67
表 2-28 網格大小對應格點數量	79
表 2-29 三維圓柱繞流模型文獻結果	80
表 2-30 不同網格大小與時間步長下的阻力係數	80
表 2-31 不同網格大小與時間步長下的升力係數	81
表 2-32 不同網格大小與時間步長下的 Strouhal number	82
表 2-33 不同流速下阻力係數、升力係數、Strouhal number 的結果	86
表 3-1 入口處流速 2 m/s，不同回傳週期下，壓電平板位移、電壓及模擬時間的比較	98
表 3-2 入口處流速 10 m/s，不同回傳週期下，壓電平板位移、電壓的比較	98
表 3-3 不同流速下壓電平板之位移、電壓的結果	113
表 4-1 使用的 CPU 及 GPU 規格	136
表 4-2 網格數 960,000，迭代 200,000 次下的運算時間與運算速度	138
表 4-3 模型運算速度隨硬體與程式在不同網格數下的差別	139
表 4-4 LBM 模型與 IB-LBM 模型在不同網格數下的速度比較	142
表 4-5 IB-LBM 模型在不同網格數下個步驟花費時間與比較	142
表 4-6 優化後的 IB-LBM 模型在不同網格數下個步驟花費時間與比較	143
表 4-7 優化後的 IB-LBM 模型在不同網格數下的速度並與其他模型比較	144
表 5-1 在不同變頻器頻率下的流場流速	151
表 5-2 在不同變頻器頻率下的流場流速與熱線測速儀電壓	156
表 5-3 在不同變頻器頻率下的流場均勻度量測結果	158
表 5-4 在不同變頻器頻率下的流場紊流強度量測結果	158
表 5-5 風機變頻器對應入口處流速	170



表 5-6 不同入口處流速下，實驗結果與 IB-LBM 模擬之位移與電壓結果比較..	171
表 7-1 壓電陶瓷材料常數	209
表 7-2 壓電陶瓷雙晶片中間層銅金屬材料常數	210
表 7-3 懸臂板位移模態之理論與 FEM、LDV 比較	232

符號表

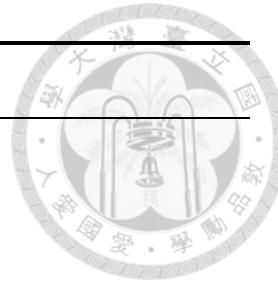


符號	定義
I_o	物體光之光強度
I_R	參考光之光強度
ϕ	振動時的相位角
c_{pq}^E	固定電場下壓電應力常數
s_{pq}^E	固定電場下壓電柔性常數
c_{pq}^D	固定電位移下壓電應力常數
s_{pq}^D	固定電位移下壓電柔性常數
d_{ip}	壓電應變常數
e_{iq}	壓電應力常數
ε_{ik}^T	固定應力下介電系數
ε_{ik}^S	固定應變下介電系數
T	應力場
E	電場
S	應變場
D	電位移場
u	中面位移場
U	位移場
h_c	黃銅層厚度
h_p	壓電陶瓷層厚度



符號	定義
$D^{(u)}$	上層壓電陶瓷電位移
$D^{(l)}$	下層壓電陶瓷電位移
$\phi^{(u)}$	上層壓電陶瓷電位
$\phi^{(l)}$	下層壓電陶瓷電位
M	彎矩場
$V_p^{(u)}$	上層壓電陶瓷電位差
$V_p^{(l)}$	下層壓電陶瓷電位差
ρ^{eq}	壓電陶瓷雙晶片等效密度
ρ_c	黃銅層密度
ρ_p	壓電陶瓷層密度
D_{ij}	等效剛性
ν	等效普松比
W	中面面外位移場
h	壓電陶瓷雙晶片總厚度
V_{ij}	等效剪力（張量表示）
Q_{ij}	側向剪力（張量表示）
ϕ	長寬比
a	平板長度
b	平板寬度
A	特徵矩陣
E	特徵向量

符號	定義
q_i	各個模態的時間函數
p	施予平板之動態外力
ω_{in}	週期性外力頻率
ω_i	自然頻率
C_p	壓電陶瓷內部寄生電容
I_p	試片受外力所產生的電流
I_{out}	流入負載之電流
$Q^{(u)} , Q^{(l)}$	上層、下層壓電陶瓷總電荷
f	粒子分佈函數
t	時間
\vec{x}	空間向量
\vec{e}	速度向量
Ω	碰撞運算子
λ	鬆弛時間
τ	鬆弛時間(無因次化)
$f^{(eq)}$	平衡分佈函數
ρ	流體密度
R	理想氣體常數
Ma	馬赫數
C_s	聲速
w_i	權重係數



符號	定義
c	單位晶格速度
Δx	晶格長度
Δt	時間步長
ν	動黏度
ν_t	紊流動黏度
τ_t	無因次紊流鬆弛時間
S_{ij}	應變率張量
C	Smagorinsky Constant
Δ	過濾尺寸
\bar{F}	流固邊界作用力
C_D	阻力係數
C_L	升力係數
d	圓柱直徑
St	Strouhal Number
Re	雷諾數
k	紊流能
σ_u	流場均勻度
δ_h	狄拉克函數
\overline{X}	固體格點之空間向量





第一章 緒論

1.1 研究動機

隨著現代科技發展，人類生活周遭充斥著各式各樣的電子產品，如手機、藍芽耳機、除濕機、電動機車等等，電子產品皆脫離不了電能的需求，然而近年來日益升高的能源需求，也使得早已緊繃且爭吵不停的能源發電日益加重，包含近年來因核能導致的核災、火力發電造成的空氣汙染、離岸風機建構與海洋生物爭地的疑慮等等，都顯示了資源不足的事實。為解決上述總總問題，各國政府將能源政策議題上聚焦在發展再生能源，如太陽能、水力發電等等，然而依然有設備建造與維護不易、成本過高、居民及組織抗議等等難題尚待解決。

本研究所使用的壓電能量擷取技術(Energy Harvesting Technologies)透過壓電材料之機電轉換特性，能將機械能轉換成電能並供給電子產品使用，或是通電後做到振動或發出聲音的效果，因此廣泛應用在業界及生活周遭，如聲學元件、穿戴式電子設備、能量擷取器等等。壓電能量擷取系統透過與環境搭配，可達到自備供電並維持電子元件運作的效果，如日本的五色櫻橋透過汽車經過的振動以點亮路燈等等。壓電材料包含單晶類(如石英)、陶瓷類(如鋯鈦酸鉛)及聚合物類和薄膜類等，其中陶瓷類聚要耐高溫、耐加工、材料穩定性高、機電耦合係數高、成本低等優點，因此被廣泛應用，故本研究選擇壓電陶瓷做為壓電能量擷取系統中壓電平板之材料。

本研究以晶格波茲曼法(Lattice Boltzmann Method, LBM)結合沉浸式邊界法(Immersed Boundary Method, IBM)建構出單向流固耦合模擬模型(One-Way Fluid-Structure Interaction Simulation)，分析在一圓柱障礙物放置於空氣中產生之渦街現象，進行收斂性分析以確立適合的模型參數，並與文獻和商用有限元素模擬軟體比較後，結合平板疊加法(Superposition method)，建構出雙向流固耦合模擬模型(Two-Way Fluid-Structure Interaction Simulation)，利用映射層演算法(Flash Translation



Layer, FTL)及簡化模型，在有限的時間內完成空氣中障礙物產生之渦街激振壓電平板的分析過程，並與經過儀器及風洞測試之壓電能量擷取實驗量測結果做比較。

1.2 文獻回顧

壓電材料其相關理論與應用發展已久，因其優秀的機電轉換及受環境影響較小的特性，而廣泛被應用於檢測儀器與發電裝置上。壓電能量擷取技術透過其正壓電效應，當壓電材料產生變形時會產生電位差，若產生連續變形則可產生週期性之電壓輸出，搭配如整流電路等等其他電路元件設計，則可提供足夠的電能給感測器等元件做使用。

流固耦合分析應用在許多工程領域，如風力發電、電子散熱、船舶工程等領域，透過流固耦合分析可使設計之結構更穩固、高性能，並加速設計流程等等，為近年來受關注之領域。1990 年 Donea、Giuliani、Halleux[1]在有限元素法模擬中，利用拉格朗日網格與尤拉網格分別代表固體與流體，分析在動態負載下之非線性響應。同年 Kwak 與 Kim[2]研究軸對稱原板浸泡於流場中的振動，並以能量的角度提出無因次化外加虛質量增加係數(Non-Dimensionalized Added Virtual Mass Incremental Factor, NAVMI Factor)，透過固體與流體之動能觀察流體對圓板共振頻率的影響。1995 年 Amabili 與 Dalpiaz 與 Dalpiza[3]，研究蒲松比對自由邊界條件之圓板振動的影響，並討論圓板在真空中和圓板與液體接觸的結果。1996 年 Kwak 和 Amabili[4]使用無因次化外加虛質量增加(NAVMI)係數觀察流體與固體的動能變化，並以此係數計算在圓板單面與無限大流體耦合的共振頻率，探討圓板在全自由、簡單支撐與全固定與液體接觸之結果，最後比較 NAVMI 係數計算之結果與 Rayleigh-Ritz Method 結果。1997 年，Kwak[5]使用 NAVMI 係數並結合傅利葉-貝索級數(Fourier-Bessel Series)積分轉換方式，研究液體的存在對流-固耦合問題中的圓板振動之共振頻率的影響。1999 年 Souli、Ouahsin、Lewin[6]以任意拉格朗日歐拉(Arbitrary Lagrangian Eulerian, ALE)有限元素法進行流固耦合分析，研究平板在水中受到衝擊的變形。2000 年 Lu 和 He[7]以邊界元素法及有限元素法進行流固耦合分析，分



析一 V 型結構進入水中其固體中間點之變形結果。2010 年廖川傑[8]使用沉浸式邊界法 (Immersed-boundary Method) 研究二維與三維不可壓縮之黏性流中移動的固體邊界問題，並以方形流場中振盪的圓柱模型進行理論的驗證，獲得良好的阻力係數與升力係數結果。2018 年廖展誼[9]運用樑函數法、疊加法探討矩形平板耦合流體的動態行為，運用近似波傳推導矩形板於各邊界下的動態分析。此近似解因分析流程較為簡易且具有普遍性，對於一般情況都能獲得相近的矩形板共振頻率。

晶格波茲曼法以規則分布的晶格代表流場中的流體，利用碰撞模型計算晶格上粒子的分布函數(Distribution Function)，來模擬流體的流動，並換算成巨觀的物理量，如密度、速度等等，晶格波茲曼法近年來被廣泛應用於不同流體問題，包含紊流(Turbulence)、多成分流(Multicomponent)、多相流(Multiphase)以及多孔介質流(Porous Media Flows)流經過複雜幾何形狀[10]。

由於晶格波茲曼法其晶格間位置等距且不可移動的特性，LBM 模型中固體障礙物若以部分晶格代表固體進行數值計算，則侷限性較大，林昆豪[11]以晶格波茲曼法結合沉浸式邊界法，利用 delta 函數建立固體格點與流場晶格之力量關係式，分析複雜三維之幾何流場，其中包含層流之圓柱繞流模型分析，流場雷諾數為 20 及 100。

關於平板的力學研究，理論分析有樑函數法(Beam Method)、疊加法(Superposition Method)、Mindlin 平板理論等等，然而疊加法求解不同邊界條件下的平板需劃分為四塊平板並分別進行各邊界計算，相較之下樑函數只需選取兩組適當的樑邊界即可組合多種不同平板邊界之振動行為，比疊加法更為容易，考量到樑函數法對於長寬比差距較大的模型會產生極大的誤差，故本研究利用疊加法計算壓電平板之振動模態及頻率。1950 年 Young[12]、1954 年 Warburton[13]等人運用雙向的樑模態形狀函數組合為基底函數，建構矩形薄板的面外變形並獲得近似的共振頻率與模態形狀。1973 年 Leissa[14]利用特徵方程式(Characteristic Equations)針對平板常見的邊界條件(全固定、全自由、簡支承)以及不同尺寸之平板做探討。



1976 年 Gorman[15]利用疊加法(Superposition Method)分析單邊固定之懸臂方板模態振動。1984 年 Warburton 和 Edney[16]推導邊界具有彈性約束的板振動。1990 年 Kim、Young 和 Dickinson[17]三人探討矩形板受到平面內力、集中質量、點和線彈簧支承對於板彎曲振動的影響。2009 年 Zhang 和 Li[18]對矩形板振動於邊界具有不同剛性且任意分布的彈性邊緣約束進行理論解析。

壓電材料理論和應用發展從居禮(Curie)兄弟至今已有百年歷史，因壓電材料的高機電轉換效率，使其廣泛應用於精密工業或檢測儀器中，如光學掃描器、以及超音波檢測探頭等。關於壓電諧振特性之文獻整理如下。1946 年 Cady[19]發表有關壓電諧振器之書籍，為壓電晶體應用於振盪器的先驅之一。1969 年 Tiersten[20]提出完整的線性壓電理論，並且編寫成書，其中以電彈方程式及變分法推導壓電平板振動特性的本構方程式。1987 年 IEEE Standard[21]規範壓電材料以共振法量測材料常數的方法，利用共振法量測五種不同特性幾何形狀、尺寸比與特定極化方向搭配電極面分佈的壓電試片，利用其共振頻率(Resonant Frequency)與反共振頻率(Anti-Resonant Frequency)，進而透過反算求得壓電材料的相關材料常數。2009 年吳亦莊[22]將壓電陶瓷平板代入等向性平板計算，求得壓電平板於面外位移之級數解，並以數值分析驗證其理論計算的準確性。2012 年林蕙君[23]以串聯陣列式壓電架構頻率響應之關係。曾國舜[24]與周宛婷[25] 比較不同連接電極方式以及不同極化方向之壓電陶瓷雙晶片，研究顯示並聯型並聯電極以及串聯型串聯電極在面外變形上有較高的電壓貢獻。

壓電陶瓷雙晶片(Piezoelectric Bimorph)是將金屬或複合材料之上下面各貼一層壓電材料，三層的壓電陶瓷雙晶片除了透過中間的結構層增加元件強度，亦可透過改變電極與極化方向，進而改變電場產生相較於單層壓電陶瓷平板更大的變形。2004 年 Wang[26]提出以有限元素法建立並聯型壓電雙晶片在簡支邊界下的靜態與動態模型，並且分別計算與 PZT 兩種壓電材料在前四個及前六個模態的共振模態與頻率。2007 年 Ma 等人[27]以全域式電子斑點干涉術(Electronic Speckle Pattern

Interferometry, ESPI)、雷射都卜勒振動儀(Laser Doppler Vibrometer, LDV)與阻抗分析法配合有限元素法(Finite Element Method, FEM)，比較並聯型壓電雙晶片在不同電極連接方式下的振動特性，分析其振動模態與頻率，並使用 LDV 多點量測振動位移以驗證 AF-ESPI 干涉條紋的準確性。2009 年黃育熙[28]以 ESPI、LDV 與阻抗分析法配合 FEM，量測串聯型、並聯型壓電陶瓷雙晶片在不同電極連接方式下的三維振動特性，並將結果與理論 FEM 結果比較，驗證實驗量測結果的準確性。2016 年鄭雅倫[29]以正逆壓電效應評估陶瓷雙晶片以電極切割設計方式的最佳形式，研究指出利用電極切割可提升扭轉模態的機電耦合效率。

雖然研究流體流經不同幾何形狀的障礙物之相關題目已有許多實驗及數值計算之研究文獻，但近幾年依然有許多學者以不同的方法或應用方向持續進行研究。本研究探討流體與固體之間的交互作用關係，可簡稱為「流固耦合」，在數值方法上由於程式計算的門檻及時間不同，若將原本有變形之固體定義為剛體，只考慮流體的移動及流體與固體間的交互作用力，此即為單向流固耦合(One-Way Fluid-Structure Interaction Simulation)，若將固體的位移或變形也考慮進去，則為雙向流固耦合(Two-Way Fluid-Structure Interaction Simulation)，不論是傳統以 Navier-Stokes Equation(NSE)的計算流體力學模型，或是 LBM 模型，流體在不同雷諾數下流經圓柱體之流場變化，此即圓柱繞流的問題依舊受到許多人的關注，Moin[30]利用有限差分法(Finite Difference Method, FDM)分別搭配大渦流模擬(Large Eddy Simulation, LES)模型中的動態模型(dynamic model)、固定係數模型(fixed-coefficient Smagorinsky)，又稱靜態模型(static model)，和無紊流模型的結果做比較，分析在雷諾數 3900 下圓柱繞流的結果。因此本研究以沉浸式邊界法結合晶格波茲曼法(IBM-LBM)模型分析流體流經圓柱障礙物其受力狀態，並使用 LES 中的靜態模型及圖形處理器(Graphics Processing Unit, GPU)運算，參考文獻進行模型比對及驗證，並結合壓電平板其疊加法之動態響應分析，探討其在不同流速下壓電平板的位移與電壓響應，並與實驗比對。



1.3 內容簡介

本論文主旨是透過晶格波茲曼法結合沉浸式邊界法，搭配疊加法研究以單邊固定之壓電陶瓷雙晶片受流體渦街致振之面外動態響應，並與實驗做比對。首先建構結合晶格波茲曼法與沉浸式邊界法之單向耦合數值模型，模擬二維下圓柱繞流之流場變化及圓柱受力狀況，透過收斂性分析找出合適之模型參數，以收斂後的模型分析不同流速下的結果，並與文獻及同樣經過收斂性分析之有限元素軟體的單向耦合模擬結果做比對，在確定模型之準確性後建構出三維模型並進行收斂性分析和不同流速下的分析。接著以薄板理論計算壓電陶瓷雙晶片之等效參數，並以疊加法計算單邊固定下壓電平板之振動頻率及模態，將結果與實驗及商用有限元素軟體做對照。將三維之單向耦合數值模型結合平板疊加法之動態響應分析，建構雙向耦合數值模型，分析可變形之壓電平板至於流場中，受圓柱障礙物產生之渦街的動態響應，包含位移與輸出電壓。模型計算效率部分提出 FTL 演算法、修正固體位移計算之更新週期、平板受力簡化模型等方式，加速流固耦合數值模型之計算速度。最後在校正儀器與風洞後將壓電平板結合鋁製圓柱放置於風洞內進行壓電能量擷取系統量測。以下本論文各章節之主要研究內容。

第一章敘述研究動機與文獻回顧，並簡略敘述本論文各章節之內容。

第二章介紹晶格波茲曼法(LBM)之計算架構，推導波茲曼方程式，並進一步求得空間與時間離散化後的分布函數表示式，以及用於分析紊流的 LES 靜態模型(static model)，邊界條件包含 Zou-He 邊界計算之入口處邊界、出口處邊界、外圍固定邊界，以及以沉浸式邊界法(IBM)計算之曲面障礙物固體邊界等四個邊界。建構出結合晶格波茲曼法與沉浸式邊界法(IB-LBM)之單向流固耦合數值模型，分析二維下圓柱繞流模型中之阻力係數、升力係數、Strouhal number 等三個參數在模型穩定後之結果，利用收斂性分析找出合適之網格大小及時間步長，並以收斂後的模型分析不同流速下的結果，同樣以商用模擬軟體 Ansys Fluent 以有限體積法建構之圓柱繞流模型，針對最密網格大小、網格膨脹率、

邊界加密層數、時間步長等四個模型參數進行收斂性分析及不同流速下分析，並與二維 IB-LBM 模型的結果進行比對與驗證。將驗證過的 IB-LBM 模型修改成三維圓柱繞流模型並進行收斂性分析及不同流速下分析，將結果與文獻結果進行比較。

第三章介紹利用薄板理論及線性壓電理論將三層結構之壓電陶瓷雙晶片等效成單層矩形平板，並透過平板疊加法分析單邊固定之壓電平板之振動模態和頻率，並將結果與雷射都卜勒振動儀及有限元素模擬結果進行比對及驗證。

第四章以建構雙向流固耦合數值模型為目的，先進行壓電平板之動態響應分析，包含平板受力下之位移與電壓計算，並針對雙向流固耦合下固體格點可移動之特性，對原先的沉浸式邊界計算做修正，考量到雙向流固耦合模型計算時間太長，進行固體格點位移計算更新週期之修正，以及參考實驗結果提出之平板受力簡化模型，以加速數值模擬模型之計算，並以修正後的雙向流固耦合模型分析壓電能量擷取系統於不同流速下之位移與電壓輸出結果。

第五章介紹使用 LBM 模型以圖形處理器計算之優勢，及程式之計算和回傳流程，並加入 LBM 模型常用之模型運算速度標準，方便評估不同模型參數下之計算速度。針對加入沉浸式邊界法之 IB-LBM 模型在高網格數下計算速度大幅下降之問題進行分析，並提出 FTL 演算法改善並加速模型計算速度。

第六章介紹進行風洞實驗之實驗儀器，包含皮托管、熱線測速儀、風機、風機變頻器，以皮托管校正熱線測速儀後進行風洞之均勻度與紊流強度量測，確保風洞內流場品質後將鋁製圓柱結合壓電平板置於風洞內，建構出完整的壓電能量擷取系統，以雷射都卜勒測振儀及示波器量測壓電平板之變形及能量擷取效果，並與雙向流固耦合數值模型的結果做比對。

第七章敘述本研究之研究成果，並提供未來可研究及改進之方向。

第二章 單向流固耦合數值方法



隨著電腦發展與圖形處理器性能的突飛猛進，平行化程度高的晶格波茲曼法 (Lattice Boltzmann method, LBM) 也越來越受到矚目。以規則分布的晶格代表流場中的流體，利用碰撞模型計算晶格上粒子的分布函數 (Distribution Function)，來模擬牛頓流體的流動，並進一步求得巨觀的物理量，如密度 ρ_l 和速度 v_l 等等，相較於傳統計算流體力學模型 (Computational Fluid Dynamics, CFD) 需求解非線性的 Navier-Stokes Equation，晶格波茲曼法只需計算分布函數的運動方程式，搭配圖形處理器 (Graphics Processing Unit, GPU) 進行平行運算。由於晶格為規則分布，晶格波茲曼法對固體邊界的定義較為侷限，無法模擬平滑曲面邊界計算，在此引路沉浸式邊界法 (Immersed-Boundary method, IBM)，透過定義固體格點的位置，以及固體格點與晶格格點的交互關係，考慮流固耦合效應 (Fluid-Structure Interaction, FSI)，即可在流場中定義出曲面邊界，在固體格點不可移動下，建構單向流固耦合模型 (One-Way Fluid-Structure Interaction Simulation)。

本研究以沉浸式邊界法定義圓柱曲面邊界，再以晶格波茲曼法定義空氣，模擬空氣中的圓柱繞流現象 (Flow Past A Cylinder)，以驗證 IB-LBM 模型的準確性。根據圓柱障礙物的直徑與入口處風速，流場的雷諾數約在 2700 至 13700 之間，其中針對雷諾數 3900 做網格大小及時間步長的收斂性分析，主要為了將結果與相關的文獻 [30] 比對。雷諾數在此區間的圓柱外流場會有紊流的現象，本研究加入紊流模型，採用大渦流模擬 (Large Eddy Simulation, LES) 使模擬結果更貼近實際狀況，並與商用 CFD 軟體 Ansys Fluent 比較結果。

2.1 晶格波茲曼法

2.1.1 波茲曼方程式

原本的波茲曼方程式 [11] (Boltzmann Equation) 為



$$\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{e} \cdot \nabla f + \bar{a} \frac{\partial f}{\partial \bar{e}} = \Omega \quad (2-1)$$

其中 f 為粒子分布， \bar{x} 為空間向量， \bar{e} 為速度向量， t 為時間， \bar{a} 為外力， Ω 為碰撞運算子(collision operator)，其描述粒子間的碰撞行為，其中

$$f = f(\bar{x}, \bar{e}, t) \quad (2-2)$$

$$\Omega = \Omega(f) \quad (2-3)$$

若粒子間沒有受到外力，則外力項 \bar{a} 可忽略，波茲曼方程式可改寫如下

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{e} \cdot \nabla f = \Omega \quad (2-4)$$

而碰撞運算子 Ω 的部分，以單一鬆弛時間近似的 Bhatnagar-Gross-Krook(BGK) 模型[31]計算，(2-4)可改寫為

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{e} \cdot \nabla f = -\frac{1}{\lambda} (f - f^{(eq)}) \quad (2-5)$$

其中 λ 為鬆弛時間 (Relaxation Time)， $f^{(eq)}$ 為平衡分佈函數 (Equilibrium Distribution Function)，其定義為

$$f^{(eq)} \equiv \frac{\rho}{(2\pi RT)^{D/2}} \exp\left[-\frac{(\bar{e} - \bar{u})^2}{2RT}\right] \quad (2-6)$$

(2-6)式中 ρ 為密度， \bar{u} 為流速， T 為溫度， D 為空間維度， R 為理想氣體常數。在(2-5)式中的 BGK 模型代表流場中的晶格粒子，會以鬆弛時間 λ 趨近平衡分布狀態，可透過分布函數 f 計算流場中流體其巨觀的物理量，

$$\rho = \int f d\bar{e} \quad (2-7)$$

$$\rho \bar{u} = \int f \bar{e} d\bar{e} \quad (2-8)$$

在 BGK 模型中需注意馬赫數 Ma 需小於 0.15，其定義為

$$Ma \equiv \frac{|\bar{U}_c|}{C_s} \quad (2-9)$$



其中 \bar{U}_c 為特徵速度， C_s 為聲速。在低馬赫數的條件下，可將平衡分布透過泰勒級數展開一步簡化，並忽略高次項可得

$$\begin{aligned} f^{(eq)} &\equiv \frac{\rho}{(2\pi RT)^{D/2}} \exp\left[-\frac{(\bar{e} - \bar{u})^2}{2RT}\right] \\ &\approx \frac{\rho}{(2\pi RT)^{D/2}} \exp\left[-\frac{(\bar{e} \cdot \bar{e})}{2RT}\right] \left[1 + \frac{(\bar{e} \cdot \bar{u})}{RT} - \frac{(\bar{u} \cdot \bar{u})}{2RT} + \frac{(\bar{e} \cdot \bar{u})^2}{2(RT)^2}\right] \end{aligned} \quad (2-10)$$

2.1.2 離散的波茲曼方程式與模型

考慮時間的離散性，以 BGK 模型近似後的(2-5)式可寫成

$$\frac{df}{dt} + \frac{1}{\lambda} f = \frac{1}{\lambda} f^{(eq)} \quad (2-11)$$

其中

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\bar{e} \cdot \nabla) \quad (2-12)$$

將(2-11)式對一個時間步長 Δt 積分，可得

$$f(\bar{x} + \bar{e}\Delta t, \bar{e}, t + \Delta t) = \frac{1}{\lambda} \exp\left[-\frac{\Delta t}{\lambda}\right] \int_0^{\Delta t} \exp\left[-\frac{t'}{\lambda}\right] f^{(eq)}(\bar{x} + \bar{e}t', \bar{e}, t + t') dt' + \exp\left[\frac{\Delta t}{\lambda}\right] f(\bar{x}, \bar{e}, t) \quad (2-13)$$

考慮平衡分布函數 $f^{(eq)}$ 在 t 至 $t + \Delta t$ 範圍內變化平滑，且 Δt 足夠小時，並同樣利用泰勒級數展開並忽略高次項，分布函數 f 可近似為

$$f(\bar{x} + \bar{e}\Delta t, \bar{e}, t + \Delta t) = f(\bar{x}, \bar{e}, t) - \frac{1}{\tau} [f(\bar{x}, \bar{e}, t) - f^{(eq)}(\bar{x}, \bar{e}, t)] \quad (2-14)$$

其中 $\tau = \frac{\lambda}{\Delta t}$ ，為無因次鬆弛時間，從(2-14)式可看出，在 BGK 模型及近似下，每刻

分布函數 f 的計算可透過上一個時間步長的分布函數 f 及平衡分布函數 $f^{(eq)}$ 求得。

考慮在數值計算中，平衡分布函數 $f^{(eq)}$ 與密度 ρ 及速度 \bar{u} 有關，而分布函數 f 、平衡分布函數 $f^{(eq)}$ 及速度 \bar{u} 都在空間以離散的方向分布，故將(2-16)式進行空間的離散化

$$f_i(\bar{x} + \bar{e}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\bar{x}, t) = -\frac{1}{\tau} [f_i(\bar{x}, t) - f_i^{(eq)}(\bar{x}, t)] \quad (2-15)$$



，同樣考慮空間的離散化，可改寫密度 ρ 與速度 \bar{u} 的表示方式，在晶格波茲曼法中，速度 \bar{u} 以動量 $\rho\bar{u}$ 推算之，因此(2-7)式及(2-8)式可改寫成

$$\rho = \sum_{i=0}^n f_i \quad (2-16)$$

$$\rho\bar{u} = \sum_{i=0}^n f_i \bar{e}_i \quad (2-17)$$

，其中 i 代表方向， n 代表該模型中晶格的方向數量，亦與空間維度有關， f_i 代表 i 方向上的分布函數， \bar{e}_i 代表 i 方向上的速度向量。常見的模型根據二維與三維，包含 D2Q9 模型與 D3Q19 模型等等，如圖 2-1 D2Q9 模型圖 2-1 及圖 2-2 所示，其中 D2 代表二維空間，Q9 代表晶格上有九個方向，因此在 D2Q9 模型中 $n=9$ ，D3Q19 及其他模型以此類推。平衡分布函數 $f^{(eq)}$ 離散後的形式可表示為

$$f_i^{(eq)} = \rho w_i [1 + \frac{3}{c^2} (\bar{e}_i \cdot \bar{u}) + \frac{9}{2c^4} (\bar{e}_i \cdot \bar{u})^2 - \frac{3}{2c^2} (\bar{u} \cdot \bar{u})] \quad (2-18)$$

其中 w_i 是權重係數， $c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ 是單位晶格速度， Δx 與 Δt 分別代表一晶格長度(Lattice)與時間步長(Time Step)。對於一數值模型，晶格長度與時間步長的大小會影響結果的準確度及計算時間，後續會做收斂性分析，分析這兩個參數對圓柱繞流模型的影響。根據所選用的模型不同，對應的權重係數 w_i 與晶格速度向量 \bar{e}_i 如下

D2Q9 模型

$$w_i = \begin{cases} \frac{4}{9}, & i = 0 \\ \frac{1}{9}, & i = 1 \sim 4 \\ \frac{1}{36}, & i = 5 \sim 8 \end{cases} \quad (2-19)$$

$$\bar{e}_i = \begin{cases} (0,0), & i = 0 \\ c(\pm 1, 0), (0, \pm 1), & i = 1 \sim 4 \\ c(\pm 1, \pm 1), & i = 5 \sim 8 \end{cases} \quad (2-20)$$



D3Q19 模型

$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{3}, & i = 0 \\ \frac{1}{18}, & i = 1 \sim 6 \\ \frac{1}{36}, & i = 7 \sim 18 \end{cases} \quad (2-21)$$

$$\vec{e}_i = \begin{cases} (0, 0, 0), & i = 0 \\ c(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1), & i = 1 \sim 6 \\ c(\pm 1, \pm 1, 0), (\pm 1, 0, \pm 1), (0, \pm 1, \pm 1), & i = 7 \sim 18 \end{cases} \quad (2-22)$$

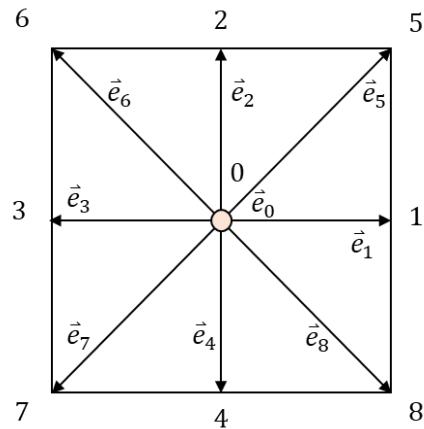


圖 2-1 D2Q9 模型

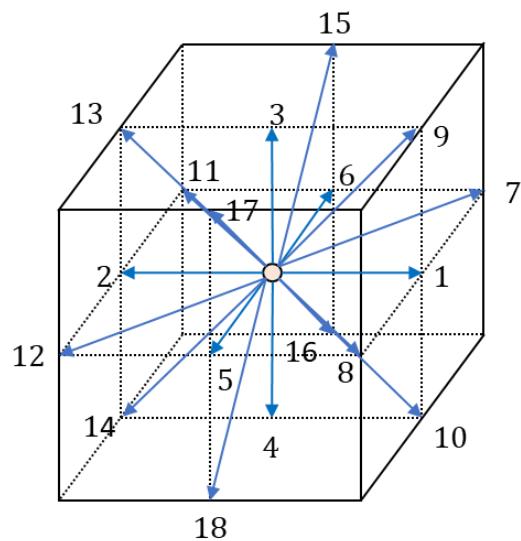


圖 2-2 D3Q19 模型

2.1.3 紊流模型-大渦流模擬(Large Eddy Simulation, LES)

流場的雷諾數對流場扮演至關重要的角色，相較於低雷諾數流場的層流，高雷諾數流場的紊流中，會有大小不同的漩渦，雷諾數越高流場中可發展到越小的漩渦，然而小漩渦會使能量消散，對流場影響很大，卻因尺寸小而難以模擬。在計算流體力學模擬中常用的紊流模型分成三種，直接模擬(Direct Numerical Simulation, DNS)、大渦流模擬(Large Eddy Simulation, LES)及雷諾平均法(Reynolds Averaged Navier-Stokes Equation, RANS)，其中 DNS 模型利用足夠細的網格計算流場及其中的小漩渦，然而對電腦硬體門檻非常高。LES 模型則將流場中高頻的小漩渦過濾掉，較大的漩渦直接計算，小於過濾尺寸的漩渦則以紊流模型近似，進而在較低的硬體門檻下，同時考慮大小不同的漩渦對流場的影響。RANS 模型則是以時間對 Navier-Stokes 方程式取平均，使計算模型接近穩態模型，好處是電腦硬體門檻比 LES 模型及 DNS 模型低很多，也因此被廣泛利用，然而準確性不如 LES 模型及 DNS 模型。考慮晶格波茲曼法結合 GPU 有較強的運算性能，在本研究中使用 LES 模型中的 fixed-coefficient Smagorinsky model[30]，又稱 static model，對於流場中被過濾掉的小漩渦，僅考慮其能量耗散率造成的影響。在 LBM 架構下，可調整流場中不同位置的無因次鬆弛時間，假設如下式[32]

$$\tau^* = \tau + \tau_t = 3v^* + \frac{1}{2} \quad (2-23)$$

其中 v^* 是總動黏度， $v^* = (v + v_t)$ ， v 為流體動黏度， v_t 為紊流動黏度； τ 為對應黏度的無因次鬆弛時間， τ^* 為考慮紊流模型後的無因次總鬆弛時間，其中(2-23)式中的無因次紊流鬆弛時間 τ_t ，可寫成

$$\tau_{ij}^t - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk}^t = -2v_t S_{ij} \quad (2-24)$$

其中 S_{ij} 為應變率張量(Strain-Rate Tensor)，可表示為

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} u_\beta + \frac{\partial}{\partial x_\beta} u_\alpha \right) \quad (2-25)$$



而紊流動黏度 ν_t 與應變率關係為

$$\nu_t = (C\Delta)^2 |S| \quad (2-26)$$

其中 C 為 Smagorinsky Constant，在 static model 中為定值，參考圓柱繞流文獻中 dynamic model[30]提到在圓柱尾流附近約為 0.13~0.2，以及商用軟體 LS-DYNA 中 LES 模型[33]的數據，後續都以 $C = 0.18$ 進行計算， Δ 為過濾尺寸(Filter Size)，在本研究中和網格尺寸 Δx 長度相同， $|S|$ 為應變率大小，可表示成

$$|S| = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \quad (2-27)$$

在 LBM 模型中， S_{ij} 可利用分布函數 f 計算

$$S_{ij} = \frac{1}{2\rho c_s^2 \tau^*} \Pi_{ij} \quad (2-28)$$

$$\Pi_{ij} = \sum_{\alpha} e_{\alpha i} e_{\alpha j} (f_{\alpha} - f_{\alpha}^{(eq)}) \quad (2-29)$$

將(2-27)式、(2-28)式及(2-29)式代入(2-24)式，可求得無因次紊流鬆弛時間 τ_t

$$\tau_t = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\tau^2 + \frac{18(C\Delta)^2 |\Pi|}{\rho}} - \tau \right) \quad (2-30)$$

其中 $|\Pi| = \sqrt{2\Pi_{ij}\Pi_{ij}}$ 。

2.2 沉浸式邊界法

2.2.1 波茲曼方程式力量項

為了計算流體固體耦合產生的力量項，透過在 BGK 模型近似的(2-14)式添加力量項 $\bar{F} = (F_x, F_y, F_z)$ [11]，可表示成

$$\begin{aligned} f(\bar{x} + \bar{e}\Delta t, \bar{e}, t + \Delta t) &= f(\bar{x}, \bar{e}, t) - \frac{1}{\tau} [f(\bar{x}, \bar{e}, t) - f^{(eq)}(\bar{x}, \bar{e}, t)] \\ &+ \frac{w_i}{c_s^2} [\bar{e}_i \cdot \bar{F}(\bar{x}, t)] \Delta t \end{aligned} \quad (2-31)$$



2.2.2 狄拉克函數與固體格點計算

在沉浸式邊界法中，透過在流場中加入固體格點，定義其位置 $\vec{X}_k = (X_k, Y_k, Z_k)$ 及力量 $\vec{F}_k = (F_{x,k}, F_{y,k}, F_{z,k})$ ，並利用狄拉克函數(Dirac delta function) δ_h [34]，建立周圍流場晶格的動量 $\vec{\rho u}$ 和力量 \vec{F} 與固體格點的動量 $(\vec{\rho u})_k$ 和力量 \vec{F}_k 的交互關係，進而求解上述未知數，三維下狄拉克函數 δ_h 可表示為

$$\delta_h(\vec{x} - \vec{X}_k) = d_h(x - X_k) \cdot d_h(y - Y_k) \cdot d_h(z - Z_k) \quad (2-32)$$

二維下狄拉克函數 δ_h 可表示為

$$\delta_h(\vec{x} - \vec{X}_k) = d_h(x - X_k) \cdot d_h(y - Y_k) \quad (2-33)$$

其中

$$d_h(r) = \begin{cases} 1 - \frac{|r|}{h}, & \text{for } |r| < h \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2-34)$$

其中 h 為晶格大小 Δx ，以一固體格點或流場晶格為中心，狄拉克函數 δ_h 有效範圍在各方向上的 $2\Delta x$ 長度範圍內。固體格點的力量 \vec{F}_k 與動量 $(\vec{\rho u})_k$ 分別以狄拉克函數 δ_h 計算，可得

$$\vec{F}(\vec{x}) = \sum_k \vec{F}_k \cdot \delta_h(\vec{x} - \vec{X}_k) \quad (2-35)$$

$$(\vec{\rho u})_k = \sum_x [\vec{\rho}(\vec{x}) \cdot \vec{u}(\vec{x})] \cdot \delta_h(\vec{x} - \vec{X}_k) \quad (2-36)$$

\sum_k 指以流場晶格為中心有效範圍內的固體網格， \sum_x 指以固體格點為中心有效範圍內的流場晶格。



2.3 數值模型設定

2.3.1 模擬步驟

依據模型的空間維度分別使用 D2Q9 模型與 D3Q19 模型，並且加入 LES 中的 static model，建構 IB-LBM 流固耦合模型，計算雷諾數在 2700 至 13700 之間的圓柱繞流模型，分析卡門渦街(Kármán Vortex Street)現象，示意圖如圖 2-3 及圖 2-4。IB-LBM 模型模擬步驟主要分成四個部分，依序是 LBM 架構下的碰撞、流動及邊界條件，最後是 IBM 架構下的作用力計算。

考慮數值模型中分布函數 f 計算的順序及紊流模型中對無因次鬆弛時間的修正，並且先不考慮沉浸式邊界法的力量項，透過改寫(2-15)式，在 LBM 架構下的碰撞步驟，可表示成

$$f_i^*(\bar{x}, t) = f_i(\bar{x}, t) - \frac{1}{\tau^*} [f_i(\bar{x}, t) - f_i^{(eq)}(\bar{x}, t)] \quad (2-37)$$

其中 $f_i^*(\bar{x}, t)$ 為碰撞過後的分布函數。流動步驟為

$$f_i(\bar{x} + \bar{e}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i^*(\bar{x}, t) \quad (2-38)$$

代表碰撞過後的分布函數，在下一時刻會沿著對應的方向流入鄰近且對應的晶格，變成該晶格在 i 方向上的分布函數，如圖 2-5 所示。在進行流動步驟時，若晶格位在流場邊界上，勢必會有特定方向的分布函數 f 遇到流出流場範圍的狀況，此狀況根據入口、出口及外圍固體邊界的部分不同，須利用 Zou 與 He[35]提出的非平衡項(bounceback of the non-equilibrium distribution)計算，此部分會在 2.3.2 節做介紹。

在模擬開始時，會根據選定的入口處流速對全域流場的速度做初始化，選定的流體為空氣，之後進入模擬的迴圈中，會先在 LBM 架構下，進行碰撞與流動兩步驟，碰撞中的平衡分布函數 $f_i^{(eq)}(\bar{x}, t)$ 由巨觀物理量 $\rho(\bar{x}, t)$ 及 $\bar{u}(\bar{x}, t)$ 進行計算，如(2-18)式所示，接著計算邊界條件，包含入口、出口及外圍固體邊界的計算，最後是 IBM 架構下的作用力計算，由流場晶格的動量 $\rho\bar{u}$ 和力量 \bar{F} 與固體格點的動量

$(\rho\vec{u})_k$ 和力量 \vec{F}_k 的交互關係求解未知數，計算完畢會確認數值模擬的迭代次數是否達標，如未達標則繼續從碰撞步驟繼續計算，如達標則停止運算，綜合上述的模擬步驟，IB-LBM 單向流固耦合模擬的流程圖如圖 2-6 所示，若是後續考慮固體格點可移動，亦及包含可變形固體之雙向流固耦合模擬後續會在第三章 做說明。

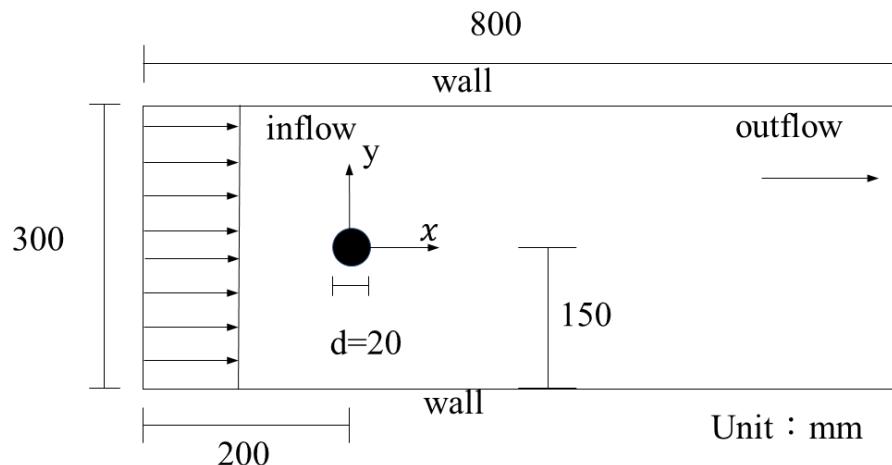


圖 2-3 二維圓柱繞流模型

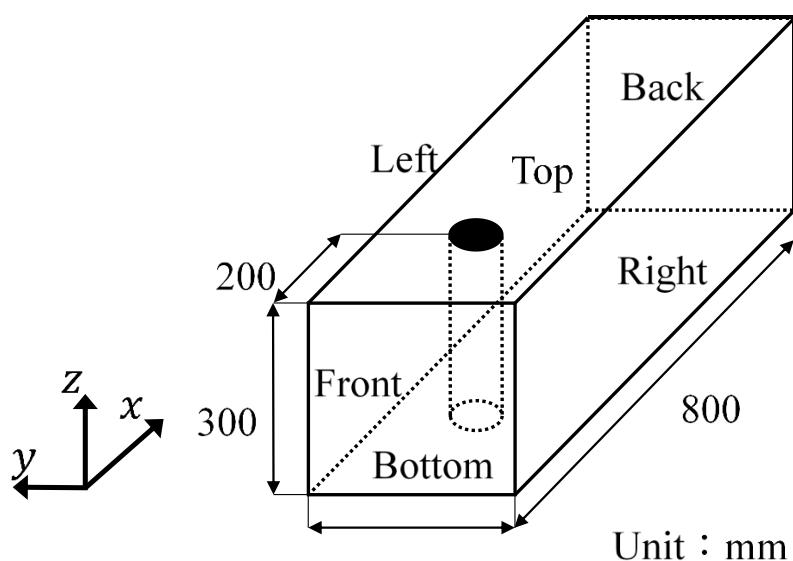


圖 2-4 三維圓柱繞流模型

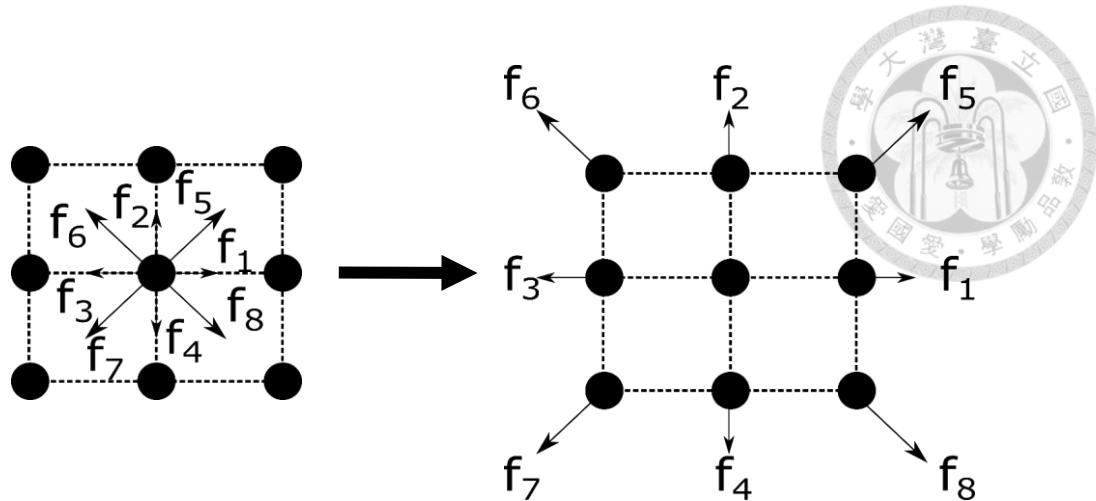


圖 2-5 LBM 架構下之流動步驟

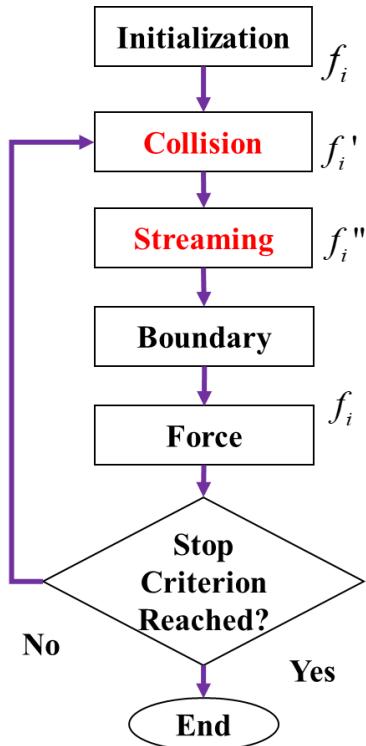


圖 2-6 IB-LBM 單向流固耦合模擬之流程圖

2.3.2 邊界條件設定

模型中邊界條件分成兩個部分，入出口邊界及外圍的固體邊界，中間的障礙物固體由於涉及曲面邊界計算，在雙向流固耦合模擬中考慮格點隨時間移動的影響，需要加入沉浸式邊界法計算，與外圍的固體邊界不同，計算流程會在 2.3.3 節做說明。邊界條件是在巨觀下對流場邊界的描述，在 LBM 架構下考慮的是粒子分布函



數 f ，因此需要將巨觀狀態下的描述轉換成可以套用到流場晶格的分布函數 f 及密度 ρ 可套用的形式，這部分以二維的 D2Q9 模型為主，進行說明。

先從入口處邊界開始，固定為均勻流速，入口處流場流速為固定值 $u_x = U_\infty = \text{const.}$ ，在經歷過碰撞及流動兩個步驟後，最左側垂直排列的流場晶格，其九個分布函數 f 中，左側及中間的六個分布函數 f 有值，為已知，然而右側三個分布函數 f 在流動步驟沒有左側流場晶格流入的分布函數 f ，此時數值未知，如圖 2-7 所示，整理(2-16)式及(2-17)式中未知分布函數 f 及其他變數，可得

$$f_1 + f_5 + f_8 = \rho - (f_0 + f_2 + f_3 + f_4 + f_6 + f_7) \quad (2-39)$$

$$f_1 + f_5 + f_8 = \rho u_x + f_3 + f_6 + f_7 \quad (2-40)$$

$$f_5 - f_8 = \rho u_y - f_2 + f_4 - f_6 + f_7 \quad (2-41)$$

其中，等號左邊為未知分布函數 f ，雖然在入口處邊界上 $u_x = U_\infty$ ，且 $u_y = 0$ ，然而密度 ρ 亦為未知變數，無法以三條方程式解四個變數，在此引入 Zou 與 He[35]提出的非平衡項(bounceback of the non-equilibrium distribution)，亦即在邊界的垂直方向上，滿足分布函數的非平衡項($f - f^{(eq)}$)相同，在入口處邊界為

$$f_1 - f_1^{(eq)} = f_3 - f_3^{(eq)} \quad (2-42)$$

考慮(2-39)式至(2-42)式，共四個方程式解四個未知數，在此情況下即可進行求解，其結果為

$$\rho = \frac{f_0 + f_2 + f_4 + 2(f_3 + f_6 + f_7)}{1 - u_x} \quad (2-43)$$

$$f_1 = f_3 + \frac{2}{3} \rho u_x \quad (2-44)$$

$$f_5 = f_7 - \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{6} \rho u_x \quad (2-45)$$

$$f_8 = f_6 + \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{6} \rho u_x \quad (2-46)$$



出口處邊界計算流程與入口處邊界相同，出口處邊界為固定壓力 $P = P_0$ ，在 LBM 架構下 $P = c_s^2 \rho$ ，其中 c_s 為聲速， $c_s^2 = \frac{1}{3}$ ，因此在出口處邊界上 $\rho = \rho_0$ ，整理(2-18)式及(2-19)式並加入非平衡項，可得

$$f_3 + f_6 + f_7 = \rho - (f_0 + f_1 + f_2 + f_4 + f_5 + f_8) \quad (2-47)$$

$$f_3 + f_6 + f_7 = -\rho u_x + f_1 + f_5 + f_8 \quad (2-48)$$

$$f_6 - f_7 = \rho u_y - f_2 + f_4 - f_5 + f_8 \quad (2-49)$$

$$f_3 - f_3^{(eq)} = f_1 - f_1^{(eq)} \quad (2-50)$$

求解可得

$$u_x = -1 + \frac{f_0 + f_2 + f_4 + 2(f_1 + f_5 + f_8)}{\rho_o} \quad (2-51)$$

$$f_3 = f_1 - \frac{2}{3} \rho u_x \quad (2-52)$$

$$f_6 = f_8 - \frac{1}{2} (f_2 - f_4) - \frac{1}{6} \rho_o u_x \quad (2-53)$$

$$f_7 = f_5 + \frac{1}{2} (f_2 - f_4) - \frac{1}{6} \rho_o u_x \quad (2-54)$$

外圍固體邊界上的計算流程也相同，邊界上假設為無滑移(no slip)及無穿越(no penetration)，代表在邊界上流體晶格的速度 $\vec{u} = \vec{0}$ ，亦即 $u_x = u_y = 0$ ，以圖 2-3 下方壁面的流場晶格為例，整理(2-17)式並加入垂直方向的非平衡項，可得

$$f_5 - f_6 = \rho u_x - f_1 + f_3 + f_7 - f_8 \quad (2-55)$$

$$f_2 + f_5 + f_6 = \rho u_y + f_4 + f_7 + f_8 \quad (2-56)$$

$$f_2 - f_2^{(eq)} = f_4 - f_4^{(eq)} \quad (2-57)$$

求解可得

$$f_2 = f_4 \quad (2-58)$$

$$f_5 = f_7 \quad (2-59)$$

$$f_6 = f_8 \quad (2-60)$$



觀察(2-60)式至(2-62)式可發現，對於垂直或水平的外圍固體邊界，待求的分布函數 f_i 及為反方向分布函數 $f_{opp(i)}$ 的值，亦即滿足

$$f_i = f_{opp(i)} \quad (2-61)$$

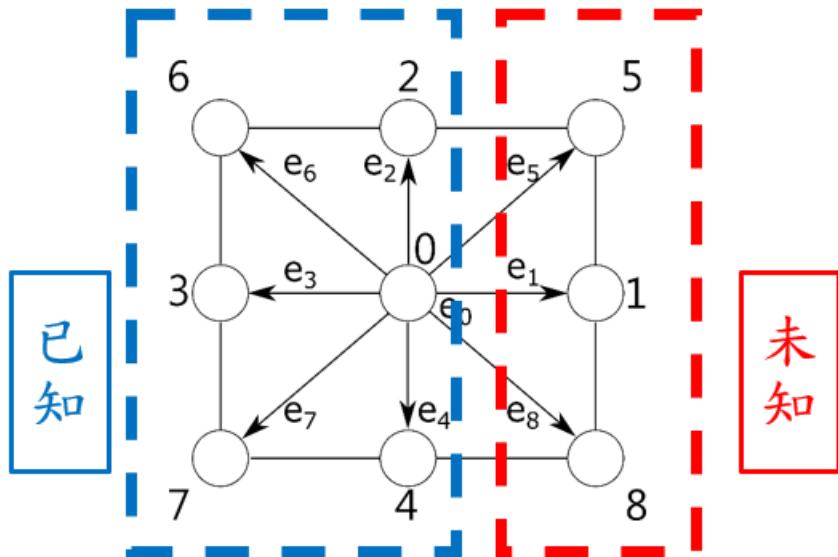


圖 2-7 入口處邊界流場晶格之分布函數 f 狀態

2.3.3 作用力計算

在 2.2.2 節中提到在 IBM 架構下，固體格點的密度和動量與周圍流場的關係式，接著討論對於流場加入 LBM 架構，在 IB-LBM 架構下固體格點與流場晶格的計算，並求解流場中障礙物的力量計算，將此步驟稱為力量步驟。

為了區別，流場晶格的物理量在經歷力量步驟前會以雙引號標示。流場晶格的密度 ρ 與動量 $\rho\bar{u}$ 在經過力量步驟後，方程式如下

$$\rho(\bar{x}) = \rho''(\bar{x}) \quad (2-62)$$

$$\rho(\bar{x}) \cdot \bar{u}(\bar{x}) = \rho''(\bar{x}) \cdot \bar{u}''(\bar{x}) + \Delta t \left(\sum_k \bar{F}_k \cdot \delta(\bar{x} - \bar{X}_k) \right) \quad (2-63)$$

其中 ρ'' 為經過力量步驟前的晶格密度， \bar{u}'' 為經過力量步驟前的晶格速度，其中

$$\rho''(\bar{x}) = \sum_i f_i''(\bar{x}) \quad (2-64)$$



$$\rho''(\vec{x}) \cdot \vec{u}''(\vec{x}) = \sum_i f_i''(\vec{x}) \vec{e}_i \quad (2-65)$$

其中 f_i'' 為經過力量步驟前的分布函數。將(2-63)式代入(2-36)式，可得

$$(\rho u)_K = \sum_{\vec{x}} \left[\left[\rho''(\vec{x}) \cdot \vec{u}''(\vec{x}) + \Delta t \left(\sum_k \overline{F}_k \cdot \delta(\vec{x} - \overline{X}_k) \right) \right] \cdot \delta(\vec{x} - \overline{X}_K) \right] \quad (2-66)$$

由於為單向流固耦合模型，代表障礙物的固體格點固定不動且無變形，(2-66)式中等號左邊 $(\rho u)_K = 0$ ，考慮二維的 D2Q9 模型中共有 K 個固體格點，共有 $2K$ 個方程式求取 $2K$ 個力量變數，可求解模型中每個固體格點的力量 \overline{F}_k ，整理(2-66)式可求得沿 x 軸方向上滿足

$$\begin{bmatrix} A_{11,x} & A_{12,x} & A_{13,x} & \cdots & A_{1K,x} \\ A_{21,x} & A_{22,x} & A_{23,x} & \cdots & A_{2K,x} \\ A_{31,x} & A_{32,x} & A_{33,x} & \cdots & A_{3K,x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{K1,x} & A_{K2,x} & A_{K3,x} & \cdots & A_{KK,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{1,x} \\ F_{2,x} \\ F_{3,x} \\ \vdots \\ F_{K,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{1,x} \\ B_{2,x} \\ B_{3,x} \\ \vdots \\ B_{K,x} \end{bmatrix} \quad (2-67)$$

其中

$$A_{ij,x} = \Delta t \cdot \sum_{L=1}^{Ln} [\delta(\overline{x}_L - \overline{X}_{Ki}) \cdot \delta(\overline{x}_L - \overline{X}_{Kj})] \quad (2-68)$$

$$B_{i,x} = (\rho u_x)_K - \sum_{L=1}^{Ln} [\rho''(\overline{x}_L) \cdot u_x''(\overline{x}_L) \cdot \delta(\overline{x}_L - \overline{X}_{ki})] \quad (2-69)$$

y 方向做法相同，且從(2-68)式中可發現， $A_{ij,x} = A_{ij,y}$ ，亦即(2-67)式中的 A 矩陣不受方向影響，甚至因為僅與流場晶格與固體格點的位置，以及時間間隔的大小，所以在進行模擬時，僅需計算一次 A 矩陣，後續只要更新模型變化對 B 矩陣的影響就好。



2.4 二維模擬分析與結果

為了驗證此 IB-LBM 模型的準確性，本研究先在流場雷諾數 $Re=3900$ 下分析時間步長及網格大小的影響，並找出收斂下對應的模型參數，網格大小與時間步長，並以此參數設定分析入口流速在 2 m/s ~ 10 m/s 下，雷諾數 Re 在 $2700\sim13700$ 之間的模擬結果，並與文獻和商用軟體 Ansys Fluent 的結果做比較。

2.4.1 圓柱繞流模型設定

本研究使用以 BGK 模型近似的 D2Q9 模型，搭配 LES-static model 分析，流場尺寸為 $300\text{mm}\times800\text{mm}$ 的長方形，障礙物圓柱直徑 20mm ，圓柱中心與固體邊界距離 150mm ，在兩面固體邊界的中間位置，與入口邊界距離 200mm ，與出口邊界距離 600mm ，如圖 2-3 所示，圓柱擺放位置參考相關的研究[36]。入口邊界為均勻流速，出口邊界為固定壓力，兩面固體邊界皆為無滑移無穿越的固定邊界，上述三個邊界皆為 Zou-He 邊界，計算方式如 2.3.2 節所示，障礙物圓柱以 IBM 計算固體格點上的力量，如 2.3.3 節所示，再將利用算出的力量項回推其周圍的流場晶格。障礙物圓柱的直徑設定與壓電能量擷取系統的設計有關，參考文獻數據[37]，在三維流場中，雷諾數 Re 介於 1000 至 20000 時，渦街頻率之無因次化參數 Strouhal number 約為 0.2 ，可視為渦街現象生成之參數條件，其中 Strouhal number 為

$$St = \frac{fd}{U_\infty} \quad (2-70)$$

其中 f 為流場中卡門渦街的渦街頻率， d 為圓柱直徑， U_∞ 為流場入口處流速，考慮到壓電平板的第一振動頻率為 86.12Hz ，流場入口處流速不超過 10m/s ，當圓柱直徑為 20 mm 時，即可使渦街頻率達到壓電片的第一振動頻率。模型中流體為空氣，密度為 1.225 kg/m^3 ，黏滯係數 $\mu=1.7894\cdot10^{-5}\text{ Pa}\cdot\text{s}$ ，入口處邊界設定為均勻流速，流速為 2.85 m/s ，雷諾數 Re 為 3900 ，方便直接跟文獻做定量上的比對。

在圓柱繞流的 D2Q9 模型中，模擬總時長為 2 s ，分析的網格大小範圍為 0.5 mm 、 0.4 mm 、 0.3 mm 、 0.25 mm 、 0.2 mm ，時間步長範圍為 $16\text{ }\mu\text{s}$ 、 $8\text{ }\mu\text{s}$ 、 $4\text{ }\mu\text{s}$ 、 $2\text{ }\mu\text{s}$ 。



μs 、 $1 \mu s$ 、 $0.5 \mu s$ 、 $0.25 \mu s$ ，不同的網格大小會有其對應的時間步長範圍，找出每個網格個別對時間步長收斂後的結果，再比較不同網格之間的結果，找出最合適的網格大小及其對應的時間步長。

2.4.2 物理量的無因次化與分析方法

模型分析中主要的物理量包含雷諾數(Reynolds number, Re)、圓柱受到的阻力係數(drag coefficient, C_D)、升力係數(lift coefficient, C_L)、Strouhal number St ，其公式如下

$$Re = \frac{\rho U_\infty d}{\mu} \quad (2-71)$$

$$C_D = \frac{2F_x}{\rho U_\infty^2 d} \quad (2-72)$$

$$C_L = \frac{2F_y}{\rho U_\infty^2 d} \quad (2-73)$$

$$St = \frac{fd}{U_\infty} \quad (2-74)$$

其中 F_x 為阻力(drag force)，代表圓柱所受到沿著 x 方向的受力， F_y 為升力(lift force)，代表圓柱所受到沿著 y 方向的受力， f 為透過對升力 F_y 進行快速傅立葉轉換(Fast Fourier Transform, FFT)得到的頻率，亦代表卡門渦街的渦街頻率。由於本研究欲探討流體作用在壓電平板上的作用力，而該作用力為 y 方向，所以在圓柱繞流模型中主要探討升力係數，後續雙向流固耦合模型中，加入壓電平板後會以施加在壓電平板上的升力、壓電平板變形及壓電平板輸出電壓為主。

在 IB-LBM 二維圓柱模型中，設定入口流速為 2.85 m/s ，雷諾數 $Re=3900$ ，網格大小為 0.5mm ，網格數為 $960,000$ 格，時間步長 $\Delta t = 2\mu s$ ，此時根據模擬結果，卡門渦街的渦街頻率為 38.53 Hz ，可得一個渦街產生的週期 $T = 26ms$ ，流場一開始會先初始化，除了圓柱範圍內及外圍固體邊界速度為 0 ，其他流場晶格流速約為入口處流速 $u_x = U_\infty = 2.85 \text{ m/s}$ ， $u_y = 0$ ，如圖 2-8 所示，在模型模擬初期，經過五個



渦街的週期後，流場沒有明顯穩定的渦街，且流場分布較為混亂，如圖 2-9 所示，在模型開始經過十個渦街的週期後，流場中圓柱後方開始出現穩定的渦街，此現象原因為流體繞過圓柱後，發生邊界層分離，當雷諾數超過臨界值[38]，流體經過圓柱會在其下游產生非對稱排列的漩渦，兩側分別沿著順時針及逆時針方向轉動，此現象稱為「卡門渦街」，如圖 2-10 所示，在模型開始經過二十五個渦街的週期後，流場中渦街已穩定，直到模擬結束為止皆呈現相近的結果，如圖 2-11 所示。

由於模擬在一開始初始化後，整個流場的流體晶格流速都是設定的入口流速 $u_x = U_\infty$ ，隨著選定的流場雷諾數、網格大小及時間步長不同，在二維模型下需要經過約 $0.4 \sim 0.6s$ 才會產生穩定的卡門渦街，並且確保數據穩定，需要持續保持穩定的卡門渦街一段時間，因此在二維模型下設定總模擬時長為 2 秒，並且只會利用第一秒至第二秒，時長一秒的數據做紀錄與處理，阻力係數取平均值，如圖 2-12 所示，升力係數取方均根值，如圖 2-13，並進行 FFT 後取其主導的頻率值計算 Strouhal number，如圖 2-14 所示，上述圖示為網格大小 0.4 mm ，時間步長 $2 \mu\text{sec}$ 下的結果，對升力係數進行 FFT 的部分，考慮到頻率精度，在此引入 FFT 分辨率 ΔR_{fft} ，其定義為

$$\Delta R_{fft} = \frac{F_s}{N_{fft}} \quad (2-75)$$

其中 F_s 為採樣頻率， N_{fft} 為分析數據的點數，如果直接將數據進行 FFT 計算，則 FFT 分辨率 ΔR_{fft} 為分析時長 T 的倒數，即

$$\Delta R_{fft} = \frac{F_s}{N_{fft}} = \frac{1}{T} \quad (2-76)$$

在二維模型中分析時長 $T = 1s$ ，則 $\Delta R_{fft} = 1\text{Hz}$ ，然而模型隨網格大小及時間步長的影響，渦街頻率的變化往往在 1Hz 以內，FFT 分辨率 ΔR_{fft} 明顯不足，增加模型模擬時長可以有效得到更好的 FFT 分辨率 ΔR_{fft} ，卻大幅增加計算時間及減緩研究進度進行，因此採取折衷方案，使用零填充(zero padding)的方法，即為在要進行 FFT

的數據末尾補零，從(2-75)式可看出，在數據末尾補零後採樣頻率 F_s 不變，但數據的點數 N_{fft} 增加，進而得到更好的 FFT 分辨率 ΔR_{fft} 。本研究利用零填充的方式將升力係數的結果，從時長 1 秒補零到 100 秒再進行 FFT，使經度提高到 0.01Hz。



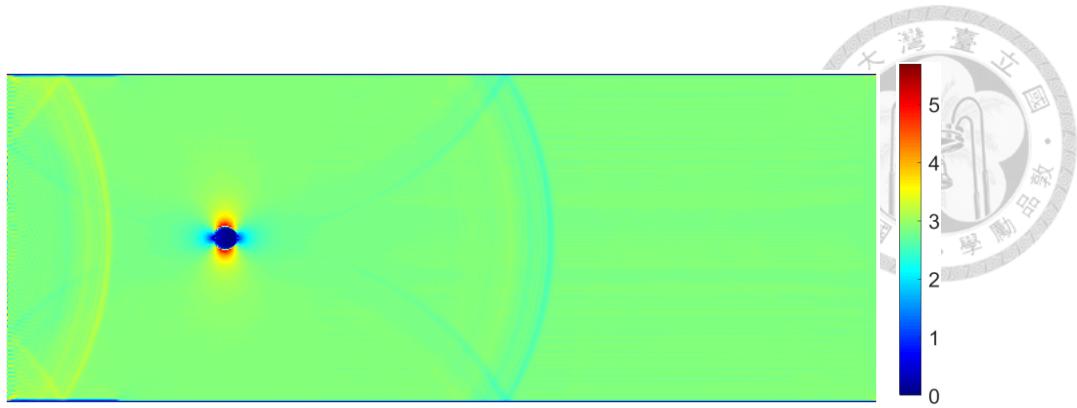


圖 2-8 IB-LBM 二維圓柱模型 $Re=3900$ ， $t = 2\mu s$ 時的流場速度模擬(單位:m/s)

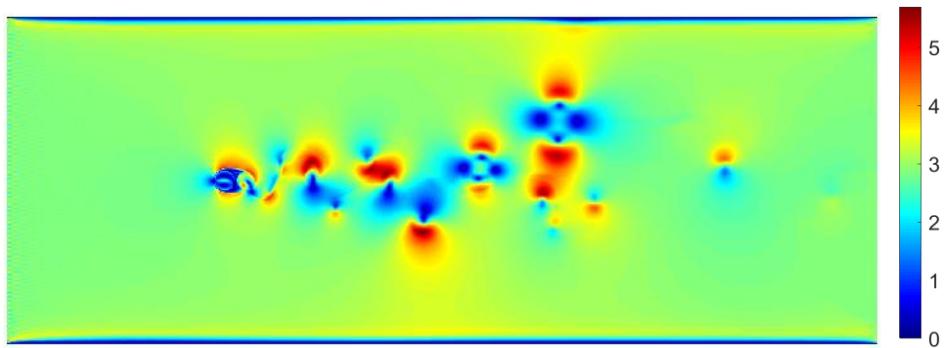


圖 2-9 IB-LBM 二維圓柱模型 $Re=3900$ ， $t = 5T = 130ms$ 時的流場速度模擬(單位:m/s)

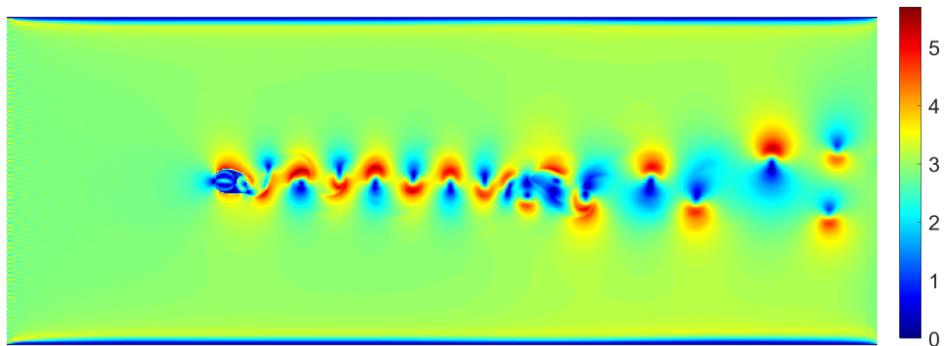


圖 2-10 IB-LBM 二維圓柱模型 $Re=3900$ ， $t = 10T = 260ms$ 時的流場速度模擬(單位:m/s)

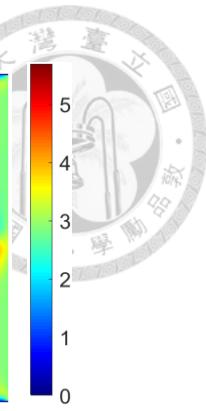
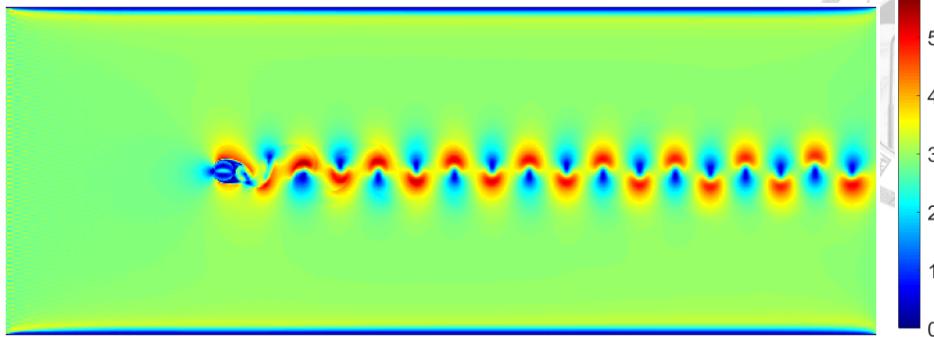


圖 2-11 IB-LBM 二維圓柱模型 $Re=3900$ ， $t = 25T = 650ms$ 時的流場速度模擬(單位:m/s)

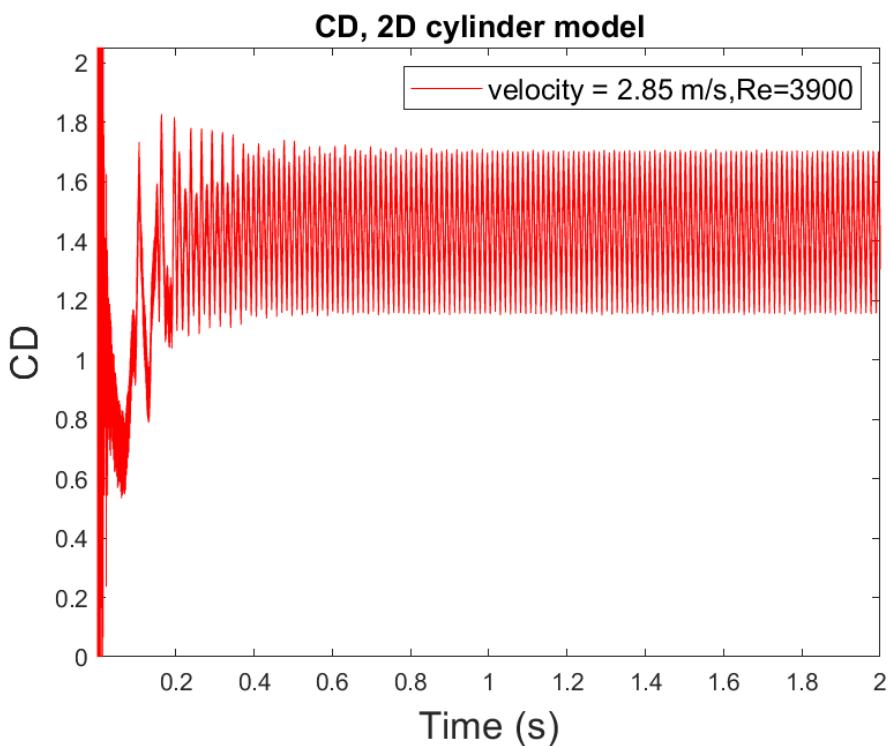


圖 2-12 IB-LBM 二維圓柱模型 $Re=3900$ 下圓柱之阻力係數

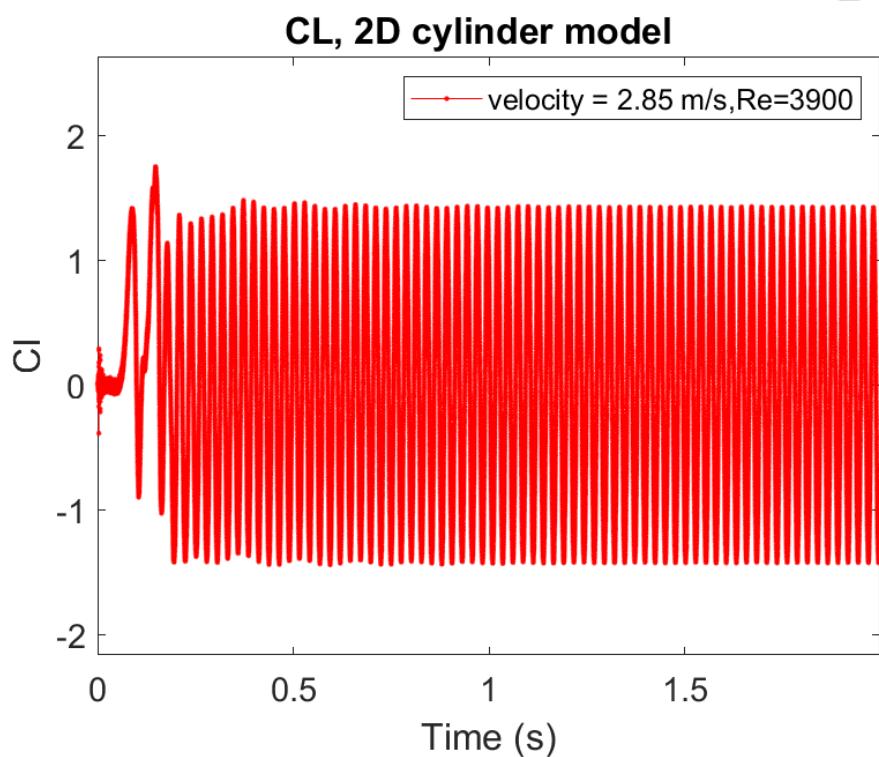


圖 2-13 IB-LBM 二維圓柱模型 $Re=3900$ 下圓柱之升力係數

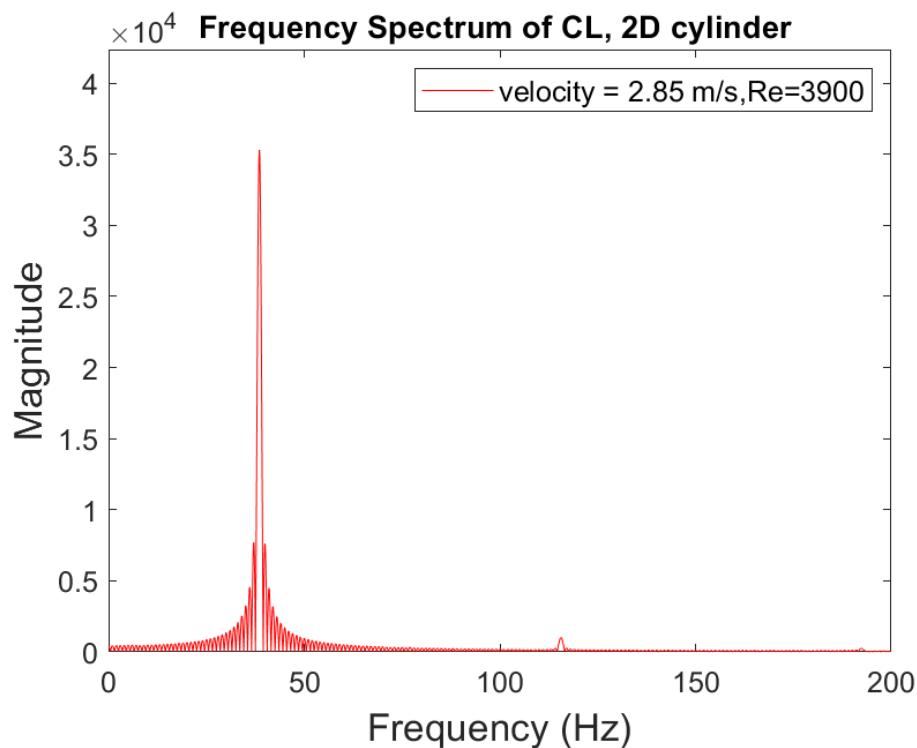


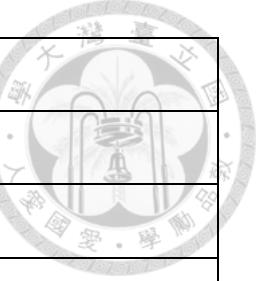
圖 2-14 IB-LBM 二維圓柱模型 $Re=3900$ 下圓柱之升力係數經 FFT 後的結果



2.4.3 時間步長收斂性分析

為了確認時間步長對二維圓柱模型模擬結果的影響，分別在網格大小為 0.5 mm、0.4 mm、0.3 mm、0.25 mm、0.2 mm 下分析，對應的網格數量如表 2-1 所示，每個網格大小下挑選合適的 4 個時間步長分析，包含 $16\ \mu\text{s}$ 、 $8\ \mu\text{s}$ 、 $4\ \mu\text{s}$ 、 $2\ \mu\text{s}$ 、 $1\ \mu\text{s}$ 、 $0.5\ \mu\text{s}$ 、 $0.25\ \mu\text{s}$ ，並將結果與文獻做比對，Moin[30]、Rajani[39]與 Breuer[40]的二維無紊流圓柱繞流模型，其結果整理如表 2-2，阻力係數的結果如表 2-3 與圖 2-15 所示，從結果可看出在同一網格大小下，阻力係數受時間步長的影響不大，與前一筆兩倍時間步長 $2\Delta t$ 的數據比較，大部分落差在 1% 左右，數值很穩定，主要受網格大小的影響；升力係數的結果如表 2-4 與圖 2-16 所示，從結果可看出相較於阻力係數，升力係數在相同網格大小下，受到時間步長的影響較大，且隨著時間步長的縮小，模擬中迭代次數的增加，升力係數會逐漸升高並收斂，與前一筆兩倍時間步長 $2\Delta t$ 的數據比較，落差也隨著時間步長的縮小而降低，在網格大小為 0.5 mm、0.4 mm、0.3 mm、0.25 mm、0.2 mm 下，收斂後的時間步長分別縮小到 $2\ \mu\text{s}$ 、 $2\ \mu\text{s}$ 、 $2\ \mu\text{s}$ 、 $0.5\ \mu\text{s}$ 、 $0.5\ \mu\text{s}$ 時，與前一筆兩倍時間步長 $2\Delta t$ 的數據相比，落差都在 1% 內；Strouhal number 的結果如表 2-5 及圖 2-17 所示，其趨勢與阻力係數相似，在相同網格大小下，受到時間步長的影響較小，與前一筆兩倍時間步長 $2\Delta t$ 的數據比較，大部分落差在 1% 左右，數值穩定，且受網格大小的影響也不大。

從上述數據分析可看出，阻力係數與 Strouhal number 受時間步長的影響較小，前者主要受網格大小的影響，後者只要受網格大小及時間步長的影響都不大，而本研究圓柱繞流模型中，主要探討的圓柱繞流模型同時受到網格大小及時間步長的影響，從表 2-4 及圖 2-16 可看出在現階段取的各個網格大小下，所選用的時間步長已經達到良好的收斂效果，考慮到使用更密的網格大小及時間步長進行模擬，會大幅增加計算時間，且現階段的模擬結果已表現出良好的收斂性，因此不需要再進行更緻密的網格進行數值分析。



網格大小 (mm)	格點數量
0.5	960,000
0.4	1,500,000
0.3	2,667,000
0.25	3,840,000
0.2	6,000,000

表 2-1 網格大小對應格點數量

文獻	阻力係數	升力係數	Strouhal number
Moin	1.74	1.42	0.263
Rajani	1.66		0.274
Breuer	1.625		

表 2-2 二維無紊流圓柱繞流模型文獻結果

網格大小(mm)	時間步長 (μs)	阻力係數	差距
0.5	16	1.4462	
0.5	8	1.4477	0.10%
0.5	4	1.4512	0.24%
0.5	2	1.4380	-0.92%
0.5	1	1.4285	-0.67%
0.4	8	1.5447	
0.4	4	1.5258	-1.24%
0.4	2	1.5037	-1.47%
0.4	1	1.4846	-1.29%
0.3	8	1.6552	
0.3	4	1.6252	-1.85%
0.3	2	1.6043	-1.30%
0.3	1	1.5526	-3.33%
0.3	0.5	1.5539	0.08%
0.25	4	1.7081	
0.25	2	1.6801	-1.67%
0.25	1	1.6901	0.59%
0.25	0.5	1.6873	-0.17%
0.2	4	1.7650	
0.2	2	1.7456	-1.11%
0.2	1	1.7569	0.64%
0.2	0.5	1.7750	1.02%
0.2	0.25	1.7435	-1.81%

表 2-3 不同網格大小與時間步長下的阻力係數

網格大小(mm)	時間步長 (μs)	升力係數	差距
0.5	16	0.8552	
0.5	8	0.9441	9.42%
0.5	4	0.9890	4.54%
0.5	2	0.9995	1.05%
0.5	1	1.0080	0.84%
0.4	8	1.0106	
0.4	4	1.0496	3.72%
0.4	2	1.0656	1.50%
0.4	1	1.0691	0.33%
0.3	8	0.9979	
0.3	4	1.1279	11.53%
0.3	2	1.1704	3.63%
0.3	1	1.1789	0.72%
0.3	0.5	1.1850	0.51%
0.25	4	1.1585	
0.25	2	1.2130	4.49%
0.25	1	1.2229	0.81%
0.25	0.5	1.2321	0.75%
0.2	4	1.1693	
0.2	2	1.2419	5.85%
0.2	1	1.2653	1.85%
0.2	0.5	1.2878	1.75%
0.2	0.25	1.2945	0.52%

表 2-4 不同網格大小與時間步長下的升力係數

網格大小(mm)	時間步長 (μ s)	渦街頻率(Hz)	Strouhal number	差距
0.5	16	37.80	0.2654	
0.5	8	37.93	0.2663	0.34%
0.5	4	38.60	0.2710	1.73%
0.5	2	38.53	0.2705	-0.16%
0.5	1	38.48	0.2702	-0.13%
0.4	8	37.27	0.2616	
0.4	4	36.96	0.2595	-0.83%
0.4	2	36.74	0.2579	-0.60%
0.4	1	36.21	0.2542	-1.47%
0.3	8	38.20	0.2682	
0.3	4	35.94	0.2523	-6.30%
0.3	2	35.59	0.2499	-0.97%
0.3	1	33.81	0.2374	-5.25%
0.3	0.5	34.33	0.2410	1.50%
0.25	4	35.71	0.2507	
0.25	2	35.73	0.2508	0.07%
0.25	1	35.89	0.2520	0.44%
0.25	0.5	36.18	0.2540	0.80%
0.2	4	37.97	0.2665	
0.2	2	35.69	0.2506	-6.36%
0.2	1	37.23	0.2614	4.12%
0.2	0.5	37.21	0.2612	-0.05%
0.2	0.25	36.81	0.2584	-1.09%

表 2-5 不同網格大小與時間步長下的渦街頻率與 Strouhal number

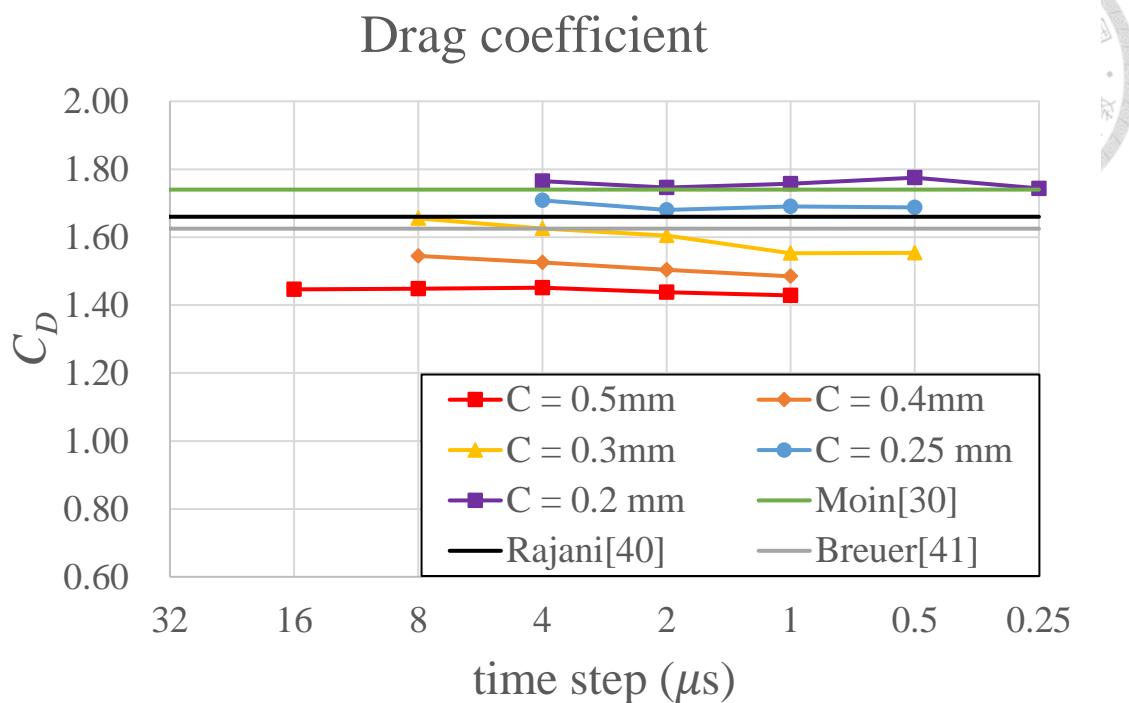


圖 2-15 不同網格大小與時間步長下的阻力係數以及與文獻比較

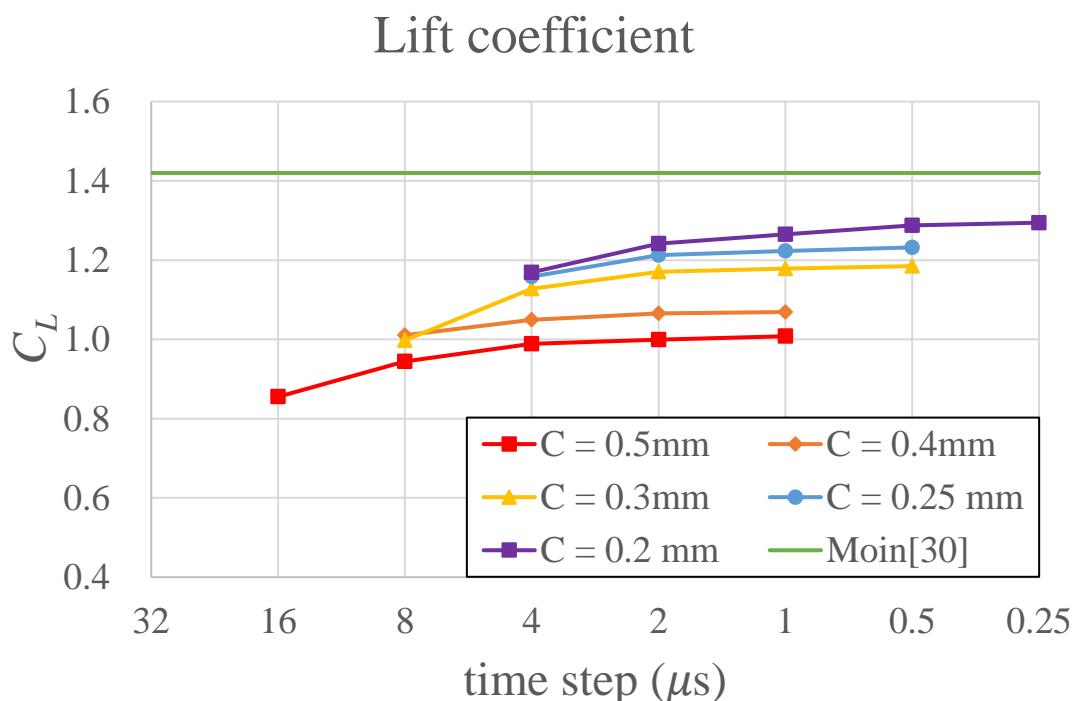


圖 2-16 不同網格大小與時間步長下的升力係數以及與文獻比較

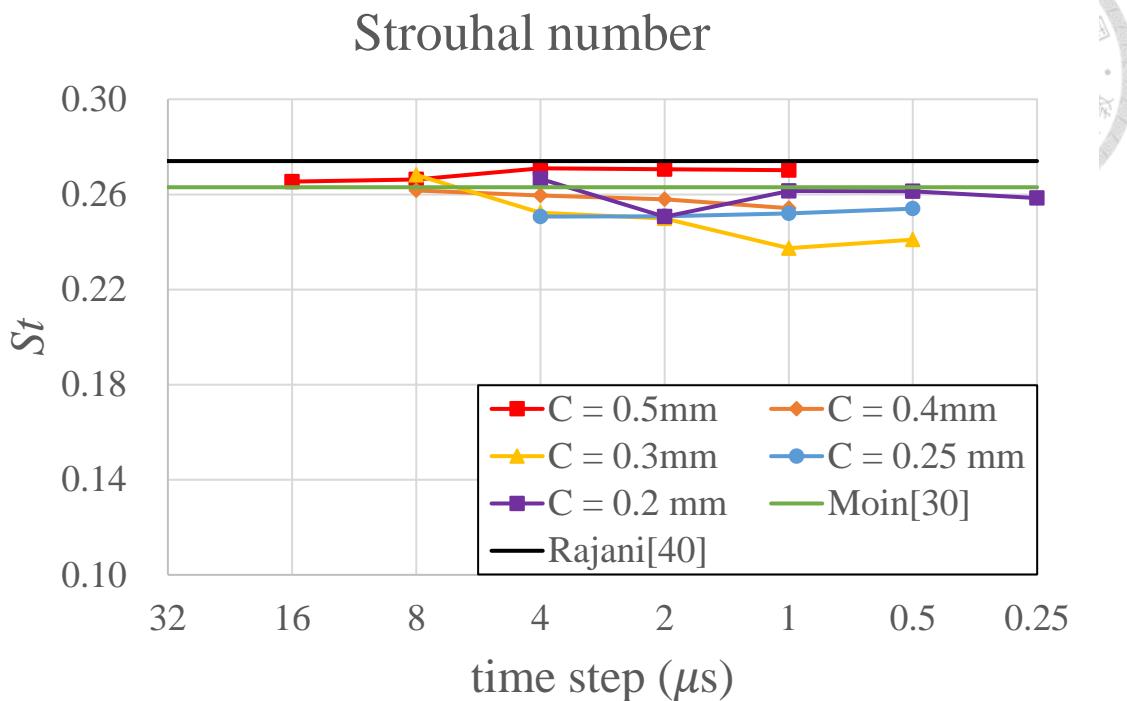


圖 2-17 不同網格大小與時間步長下的 Strouhal number 以及與文獻比較

2.4.4 網格收斂性分析並與文獻比較

在 2.4.3 節討論過各個網格大小下，時間步長的收斂效果，在此取各個網格大小下，時間步長收斂後的結果進行比對，評估網格大小對模型造成的影响，以選出合適的模型進行後續不同流速下的模擬分析。不同網格大小對應的時間步長如表 2-6 所示，阻力係數隨網格大小改變以及與文獻比較的結果如表 2-7 及圖 2-18 所示，從結果可看出隨著網格逐步加密，阻力係數會持續上升，且隨著網格數提高 50%，阻力係數數值大約增加 5%，在網格大小為 0.2 mm 時，得到的阻力係數為 1.775，與 Moin[30]的結果 1.74 相差約 2%，再逐步加密網格可能會得到不同的結果，然而再加密網格會大幅增加計算成本，且阻力係數非本研究的重點，確認其數值與文獻結果接近，即可證實模型之合理性；升力係數隨網格大小改變以及與文獻比較的結果，如表 2-8 及圖 2-19 所示，從結果可看出當網格大小逐步加密至 0.2 mm 時，與前一筆數據的差異逐步降低到 4.33%，代表模型有出現收斂的情況，考量到計算網格大小為 0.2 mm，時間步長 0.5 μ s，以 GPU RTX4080 計算需要 33 小

時，後續還有不同流速分析，以及三維圓柱繞流模型、三維雙向流固耦合模型之計算，難以再嘗試更密的網格大小下的結果，當網格大小為 0.2 mm 時，升力係數為 1.2878，與 Moin[30]的結果 1.42 相比相差約 9.3%，雖然落差仍將近 10%，然而若要求更低的誤差，需要更密的網格及時間步長，考慮到二維圓柱模型目的是驗證 IB-LBM 單向流固耦合模型，在有限的運算資源下得到與文獻接近的結果及合理的誤差，而升力係數隨著網格變密，也有顯著的收斂現象出現，因此評估網格大小 0.2 mm 為較適合進行升力係數分析之網格大小；Strouhal number 隨網格大小改變以及與文獻比較的結果，如表 2-9 及圖 2-20 所示，從結果可看出雖然 Strouhal number 隨著網格大小而有所變動，但數值穩定並與 Moin[30]的結果相近，在網格大小為 0.2 mm 下，Strouhal number 結果為 0.2612，與 Moin[30]的結果 0.263 相差 0.68%，與 Rajani[39]的結果 0.274 相差 4.67%。

由上述討論可看出，在網格大小 0.2 mm，時間步長 $0.5 \mu\text{s}$ 時，模型已達到可接受的收斂性，後續會固定網格大小及時間步長，分析在不同入口流速下的結果。

網格大小(mm)	網格數 (百萬)	收斂後的時間步長 (μs)
0.5	0.96	2
0.4	1.50	2
0.3	2.67	2
0.25	3.84	0.5
0.2	6.00	0.5

表 2-6 不同網格大小對應收斂後的時間步長

IB-LBM 模型	網格大小 (mm)	網格數 (百萬)	阻力係數	差距
	0.5	0.96	1.4380	
	0.4	1.50	1.5037	4.37%
	0.3	2.67	1.6043	6.27%
	0.25	3.84	1.6873	4.92%
	0.2	6.00	1.775	4.94%
	Moin		1.74	
文獻比較	Rajani		1.66	
	Breuer		1.625	

表 2-7 阻力係數隨網格大小改變及與文獻比對

IB-LBM 模型	網格大小 (mm)	網格數 (百萬)	升力係數	差距
	0.5	0.96	0.9995	
	0.4	1.50	1.0656	6.20%
	0.3	2.67	1.1704	8.95%
	0.25	3.84	1.2321	5.01%
	0.2	6.00	1.2878	4.33%
文獻 比較	Moin		1.42	

表 2-8 升力係數隨網格大小改變及與文獻比對

IB-LBM 模型	網格大小 (mm)	網格數 (百萬)	Strouhal number	差距
	0.5	0.96	0.2705	
	0.4	1.50	0.2579	-4.89%
	0.3	2.67	0.2499	-3.23%
	0.25	3.84	0.2540	1.63%
	0.2	6.00	0.2612	2.77%
文獻 比較	Moin		0.263	
	Rajani		0.274	

表 2-9 Strouhal number 隨網格大小改變及與文獻比對

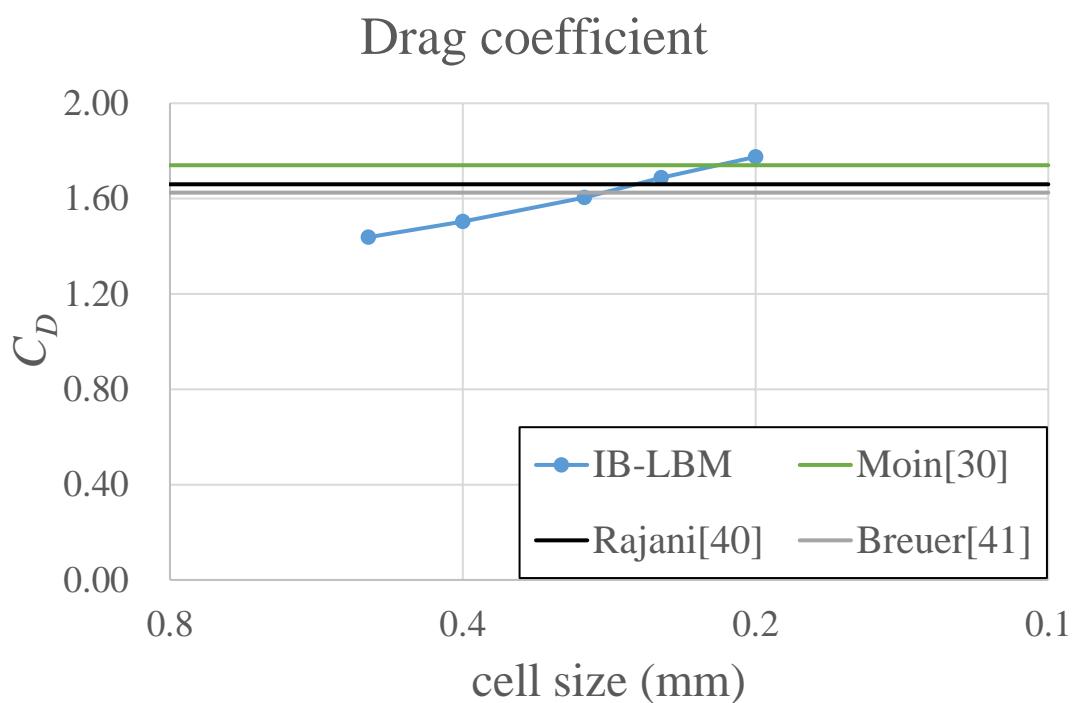


圖 2-18 阻力係數隨網格大小改變及文獻結果

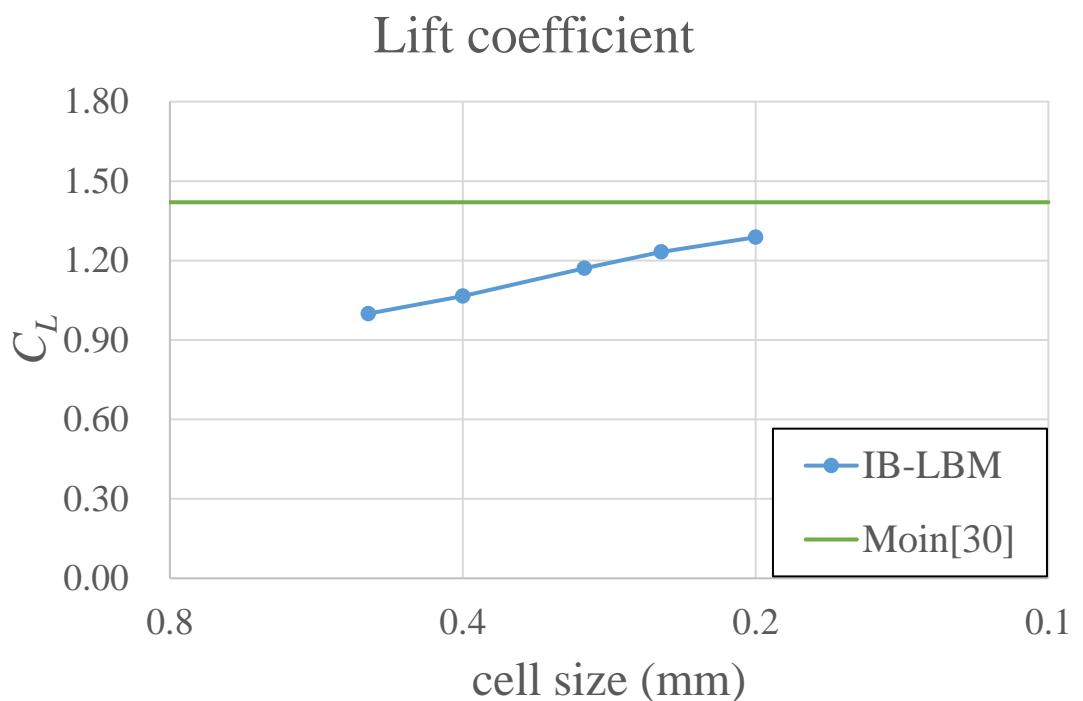


圖 2-19 升力係數隨網格大小改變及文獻結果

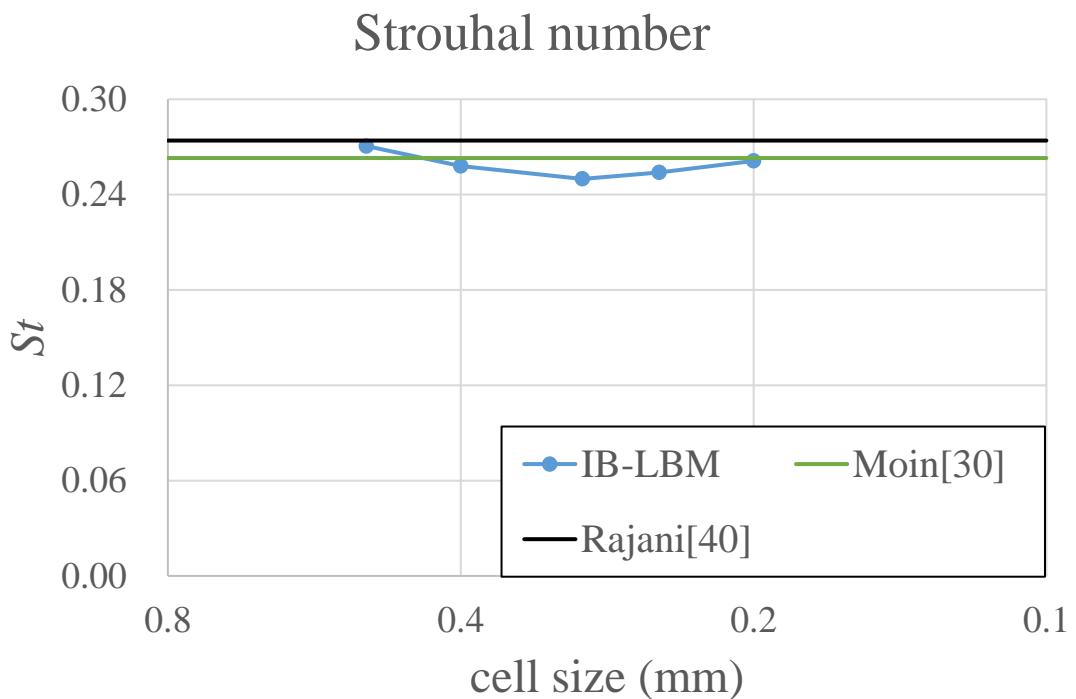


圖 2-20 Strouhal number 隨網格大小改變及文獻結果

2.4.5 不同流速下的結果

使用 IB-LBM 二維圓柱模型，設定網格大小為 0.2 mm，時間步長為 $0.5 \mu\text{s}$ ，入口處流速為 2 m/s 至 10 m/s，分別對應流場雷諾數 Re 為 2700 至 13700，分析阻力係數、升力係數、Strouhal number 隨流速的變化，並與文獻做比較，其中升力係數及其經過 FFT 後的結果，如圖 2-21 至圖 2-25 所示，從結果可看出在低雷諾數下，入口處流速 2 m/s 及 4 m/s 時，得到的升力係數數值較穩定，經 FFT 轉換後的結果，也有很明顯的渦街頻率訊號，且雜訊較少，在高雷諾數下，入口處流速 6 m/s 至 10 m/s 時，得到的升力係數數值較不穩定，且經過 FFT 轉換後有較大的雜訊，尤其是入口處流速 8 m/s 及 10 m/s，可能的原因為先前的收斂性分析是針對雷諾數 3900 下得到的結果，當雷諾數為 3900 時有著可接受的誤差，然而當雷諾數提高到超過 8000 時，可達收斂的網格門檻更高，因此使用相同的模型參數進行高雷諾數流場分析，導致模型的穩定性更差，以及雜訊增加，考量到二維模型主要目的是驗證 IB-LBM 模型之趨勢的合理性，較準確的數值比較則待三維模型的分析結果。阻

力係數隨流速變化的結果如表 2-10 及圖 2-26 所示，可以看到雖然數值雖然會隨入口處流速變化，但大致約為 1.7，整體趨勢相當穩定，與文獻[41]比對，雖然文獻中描述的是三維下圓柱繞流模型之阻力係數，如圖 2-27 所示，但觀察雷諾數範圍在 2700 至 14000 的區間，數值約在 0.9 至 1.3 之間，整體趨勢相對穩定，此特點與本研究在二維圓柱繞流模型的結果相同；升力係數隨流速變化的結果，如表 2-10 及圖 2-28 所示，從結果可看出數值相當穩定，數值約在 1.2 至 1.3 之間。Strouhal number 隨流速變化的結果如表 2-10 及圖 2-29 所示，其數值會隨著入口處流速變化而有改變，在入口處流速為 2 m/s 及 10 m/s 時偏低，與文獻[41]比對，文獻中描述三維下圓柱繞流模型的 Strouhal number，如圖 2-30 所示，文獻中在低雷諾數下也有 Strouhal number 偏低的現象，並在雷諾數提高後進入一穩定的數值，此部分與二維 IB-LBM 模型的結果有相同的趨勢，文獻中在高雷諾數時 Strouhal number 通常會偏高，而二維 IB-LBM 模型的結果在入口處流速高達 10 m/s 時則偏低，除了二維模型與三維模型的差異，可能原因還有模型網格不夠細，而此問題在高雷諾數流場中變得更嚴重，導致結果有較大的誤差，從圖 2-25 可知，但整體結果仍跟文獻相近。

入口流速 (m/s)	雷諾數	阻力係數	升力係數	頻率(Hz)	Strouhal number
2	2738	1.7313	1.2636	25.67	0.2567
4	5477	1.8094	1.3093	58.71	0.2935
6	8215	1.7310	1.3112	87.03	0.2901
8	10953	1.5108	1.2328	110.5	0.2763
10	13692	1.6508	1.2276	119.0	0.2379

表 2-10 不同流速下阻力係數、升力係數、Strouhal number 的結果

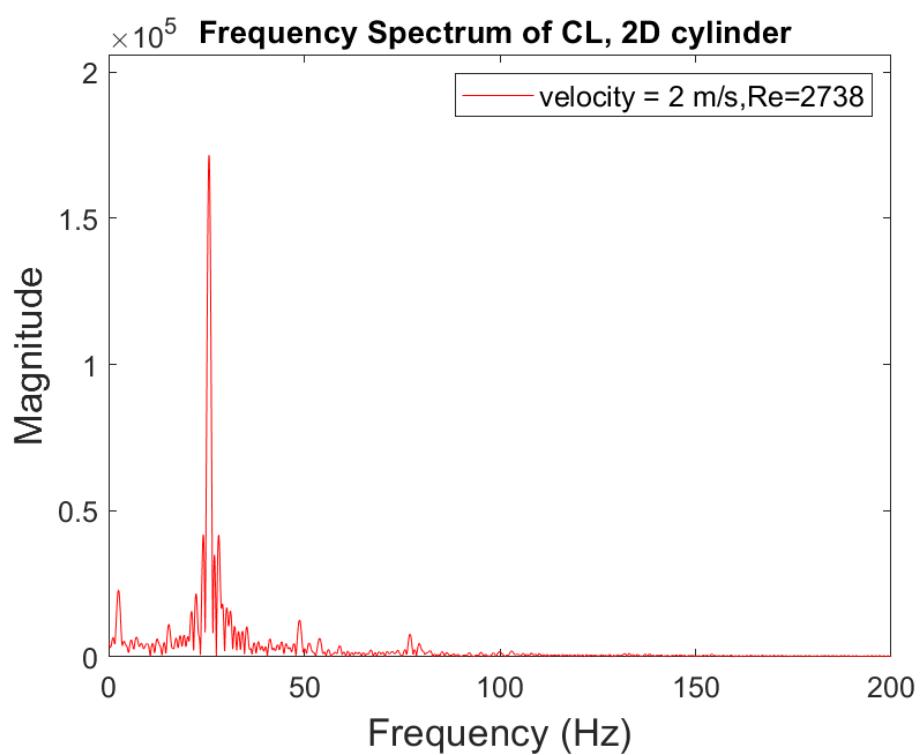
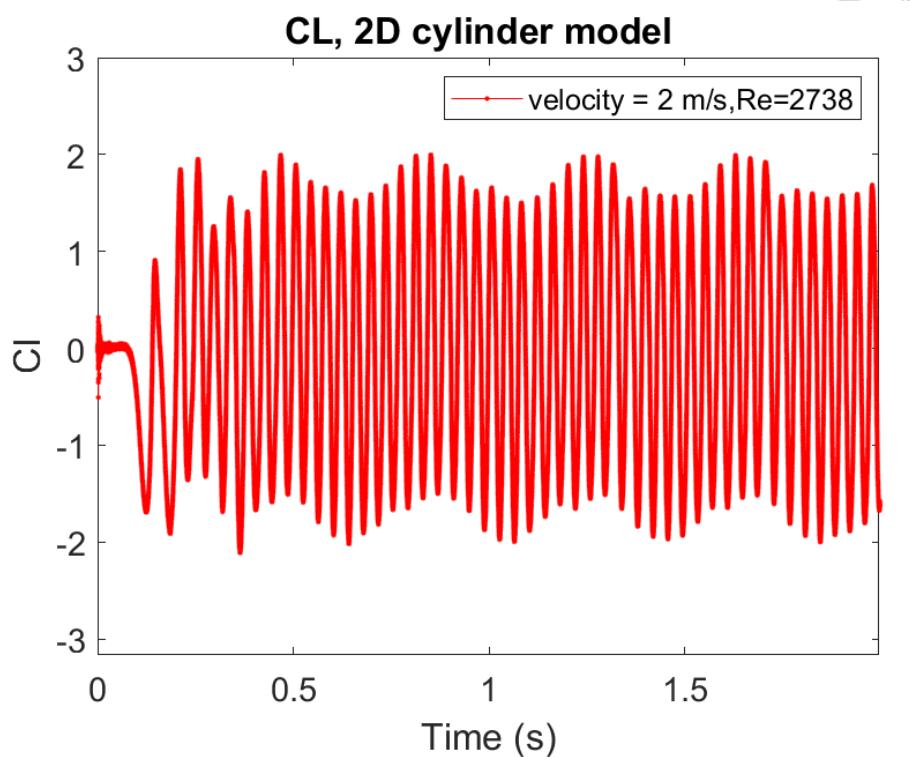


圖 2-21 入口處流速 2 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果

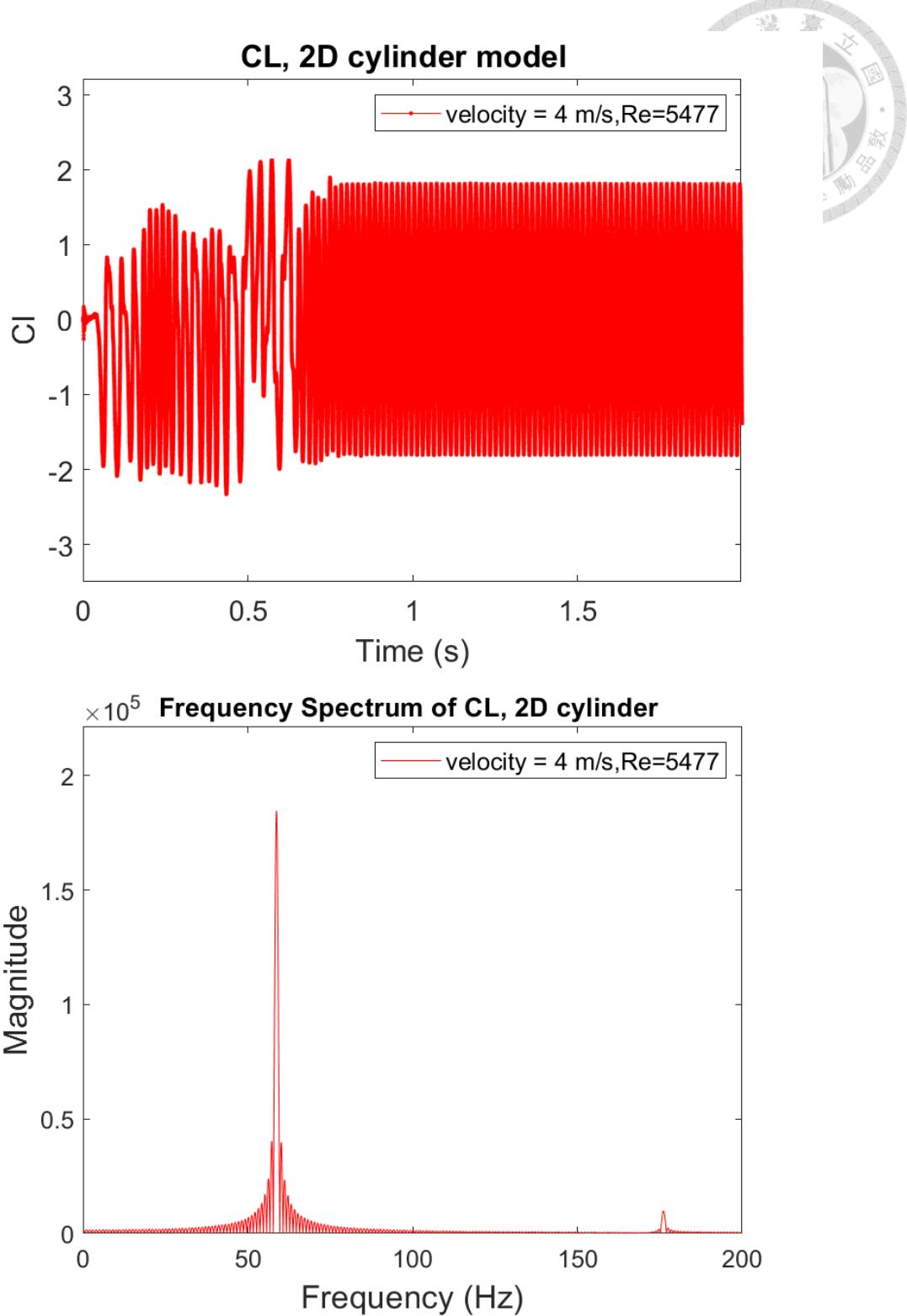


圖 2-22 入口處流速 4 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果

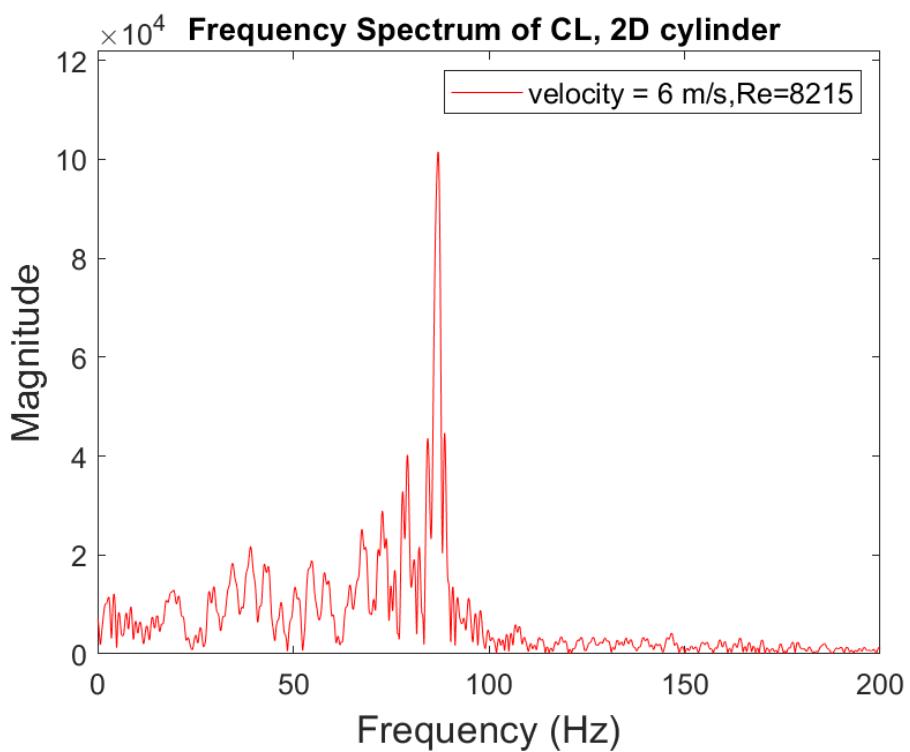
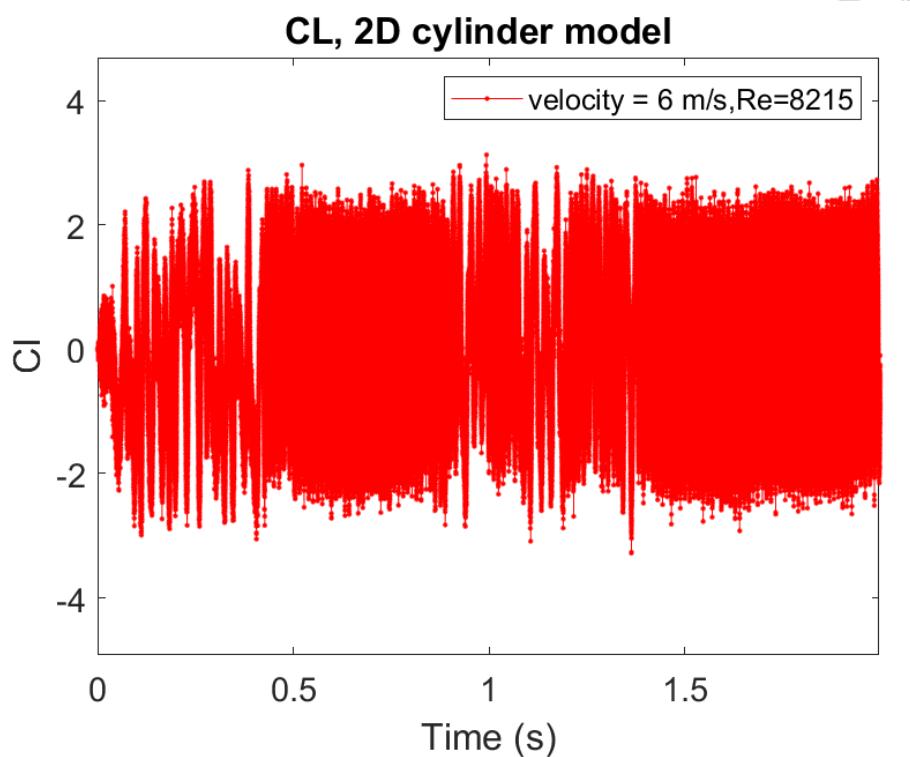


圖 2-23 入口處流速 6 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果

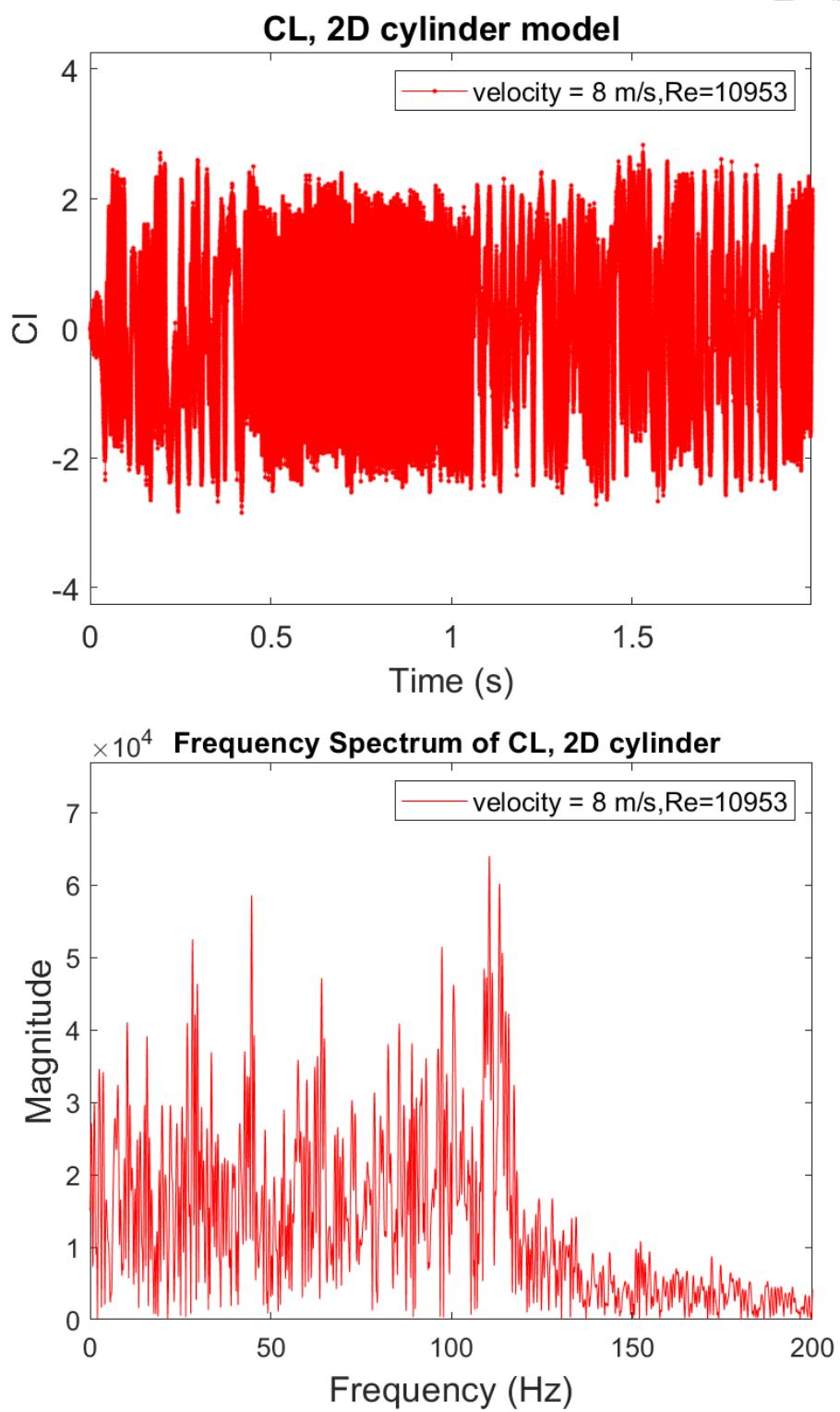


圖 2-24 入口處流速 8 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果

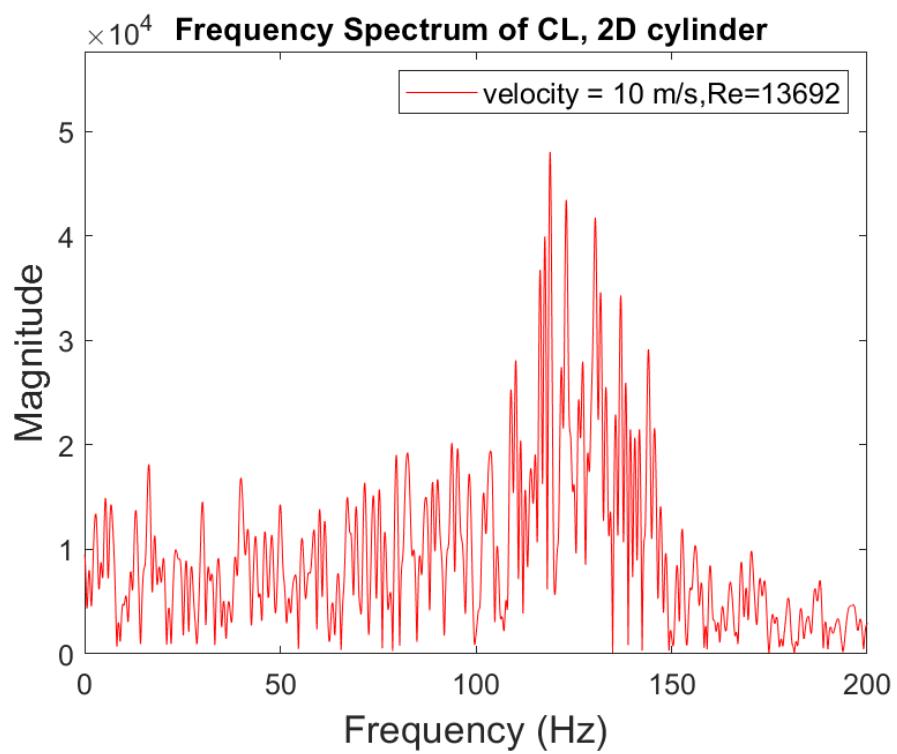
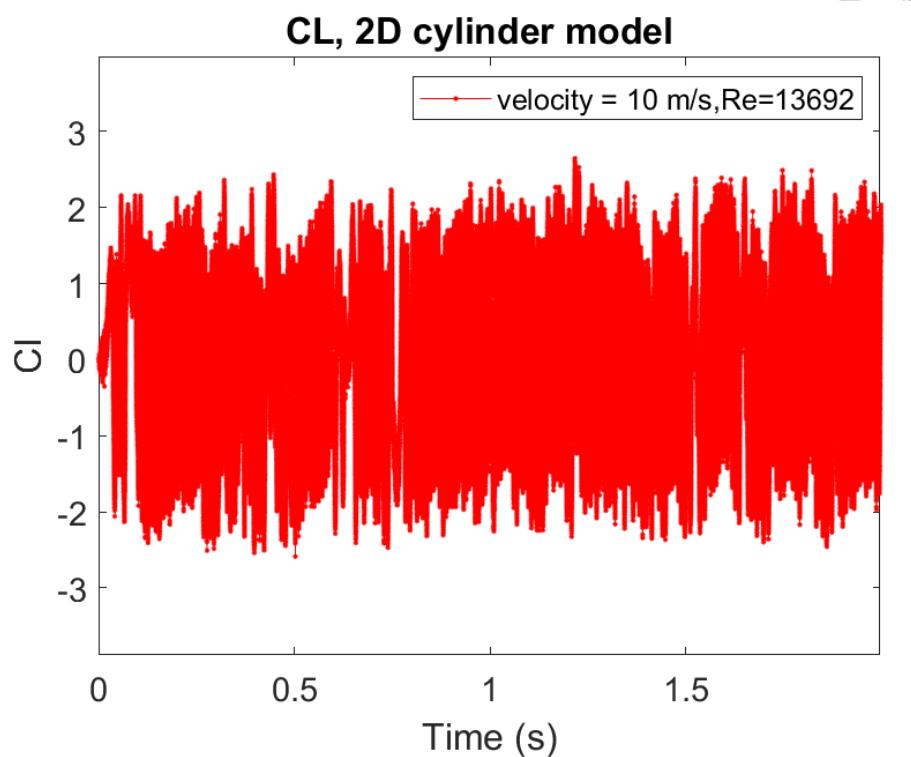


圖 2-25 入口處流速 10 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果



Drag coefficient

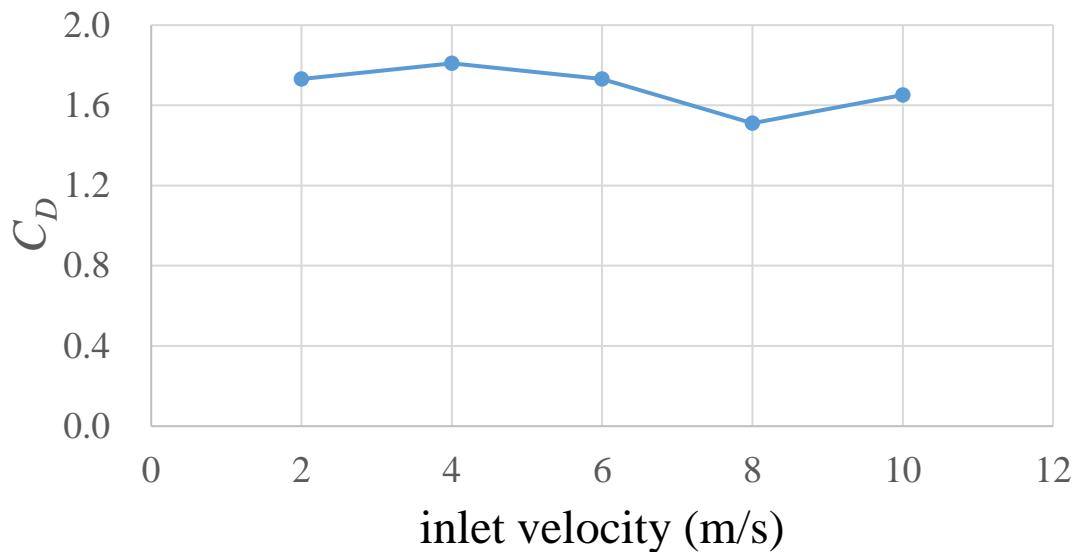


圖 2-26 阻力係數隨流速變化

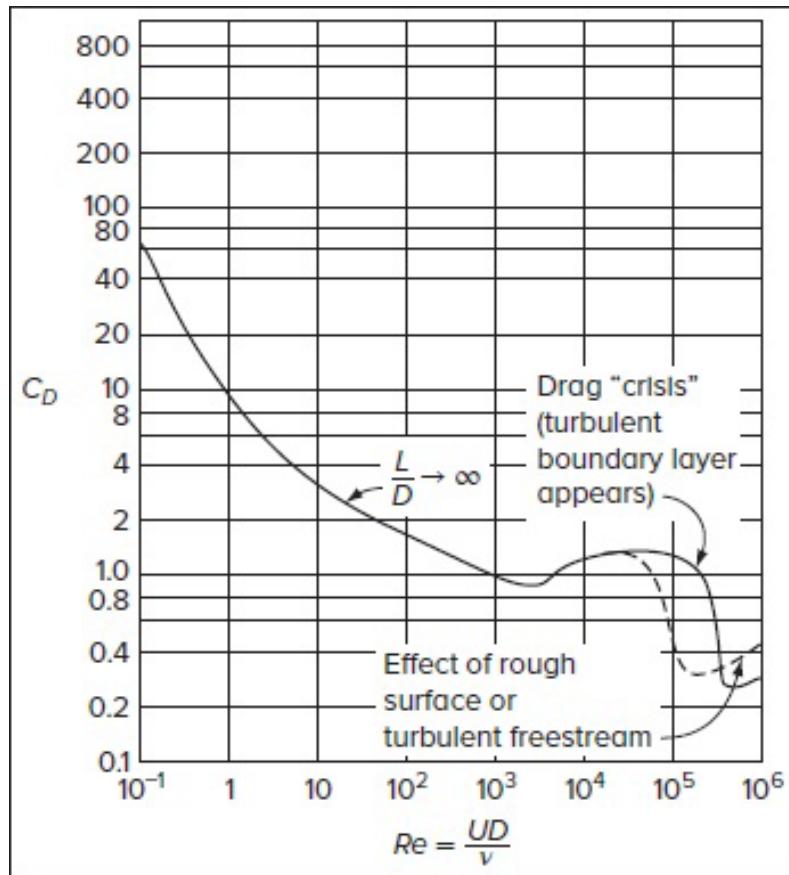


圖 2-27 阻力係數隨雷諾數 Re 變化[41]

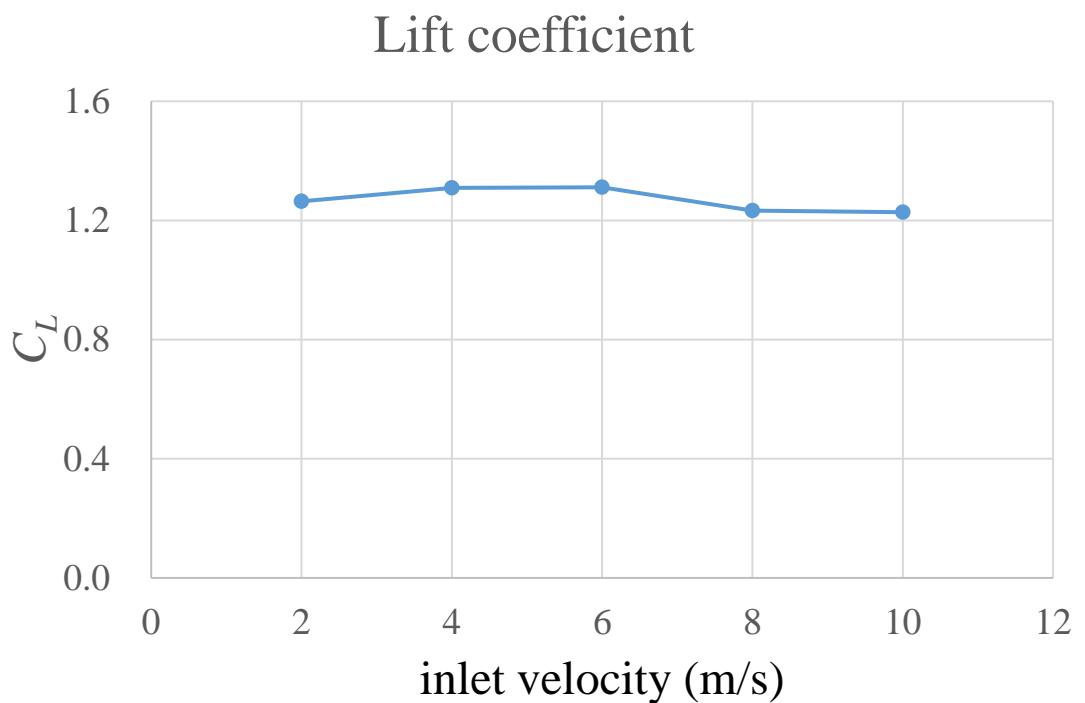


圖 2-28 升力係數隨流速變化

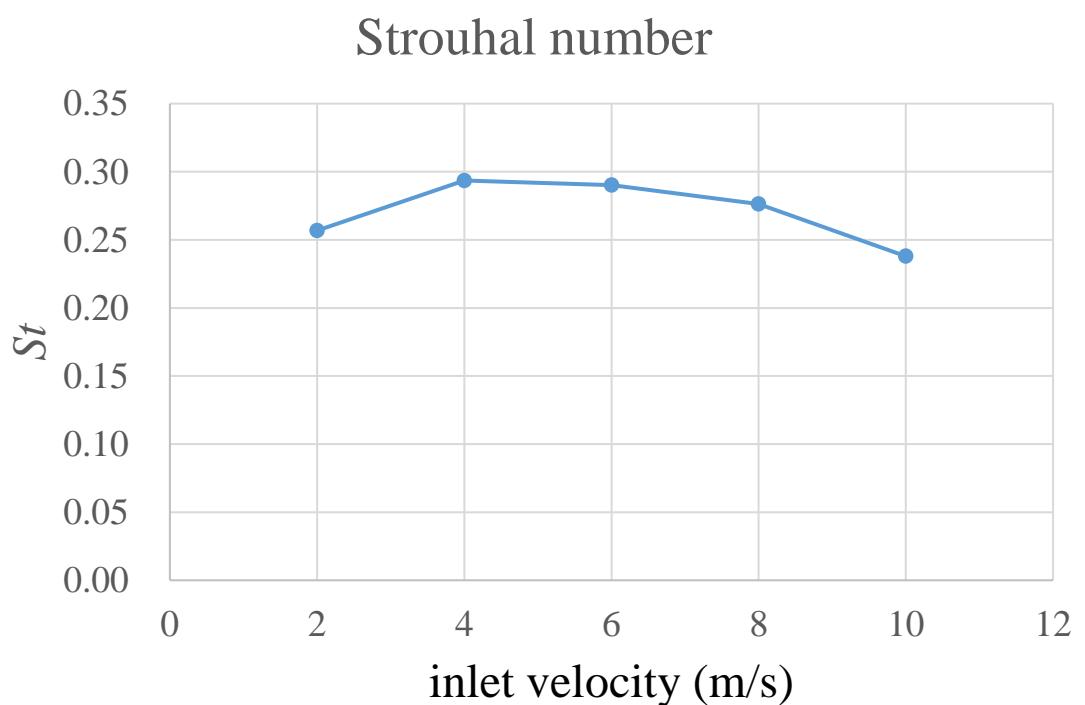


圖 2-29 Strouhal number 隨流速變化

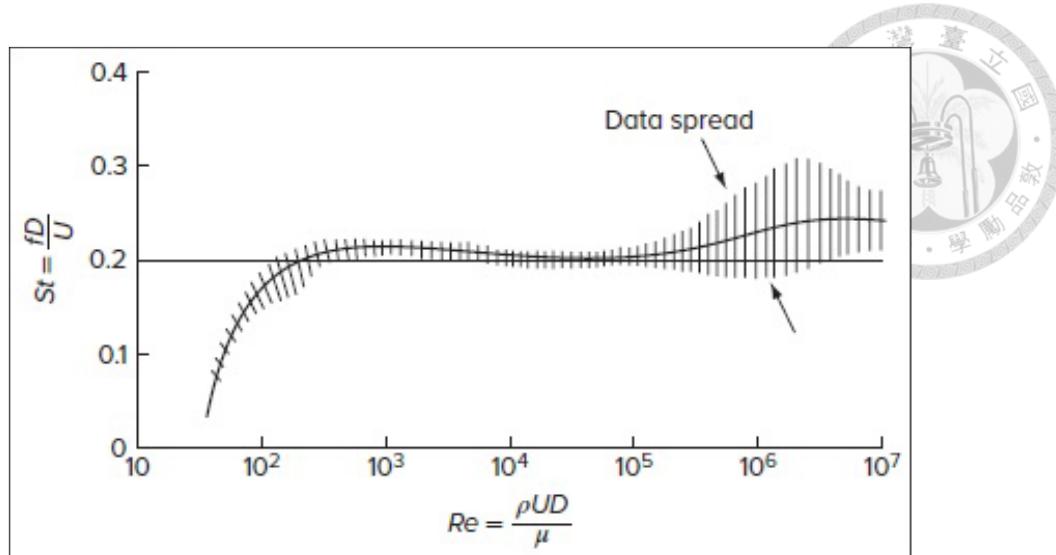


圖 2-30 Strouhal number 隨流速變化[41]

2.4.6 Ansys Fluent 模型設置與收斂性分析

為驗證 IB-LBM 二維圓柱繞流模型其結果的正確性及合理性，本研究同時以商用套裝軟體 Ansys Fluent，進行圓柱繞流模型的流場模擬。流場的幾何尺寸與 IB-LBM 模型中相同，為確保利用 Ansys Fluent 得到的可靠的結果，一樣要進行收斂性分析，相較於 IB-LBM 模型中網格其大小相同且均勻分布的特性，所以只要進行網格大小及時間步長收斂性分析即可，在 Ansys Fluent 中因為使用有限體積法(Finite Volume Method, FVM)進行計算，網格大小非均勻分布，且常透過邊界層加密，在結果準確性及計算時間上取得平衡，因此需要進行收斂性分析的參數有時間步長、邊界加密層數、網格大小、網格膨脹率等四個參數並依序分析。初始待測試的模型設定為時間步長 $100 \mu\text{s}$ ，邊界加密層數 40，圓柱上最密網格大小 0.2 mm ，網格膨脹率 1.02，此時共有 49,604 個網格，149482 個格點，網格採用二階(Quadratic)四邊形(Quadrilateral)網格，網格分布如圖 2-31 所示，模型中圓柱邊上為最細的網格，往外呈現層狀擴散，如圖 2-32，網格大小隨層數增長速度固定與網格膨脹率相同，此區為邊界加密層，網格在超出邊界加密層後會逐漸變大直到外圍邊界，增加幅度為網格膨脹率。邊界條件的部分與 IB-LBM 模型一樣，圓柱及外圍牆壁皆設置為無穿透且無滑移，入口處為均勻流速，出口處為定壓。紊流模型的部分考慮到 Ansys Fluent 的 FVM 是利用中央處理器(Central Processing Unit,CPU)計算，效能上

不如 IB-LBM 模型使用的 GPU，因此這裡分別以門檻較低的 RANS 模型及 LES 模型分析，並比較兩者的收斂性及不同流速下的結果。

採用的 RANS 模型為 Shear Stress Transport(SST) $k-\omega$ 模型，其結合常見的 $k-\varepsilon$ 模型及 $k-\omega$ ，其中 $k-\varepsilon$ 模型在求解複雜幾何外部流場時效果很好，且對電腦門檻要求較其他 RANS 模型低等優點， $k-\omega$ 模型則有更高的非線性，在求解分離流與剝離劉等等流場表現較好，然而若沒有良好的初始猜測值， $k-\omega$ 模型會有難以收斂的問題，因此 SST $k-\omega$ 模型結合自由流中的 $k-\varepsilon$ 模型及近壁面的 $k-\omega$ 模型，使兩個模型應用於其擅長的流場類型，在確保良好的收斂性時得到較為精確的結果。

由於 RANS 模型收斂狀況較好，收斂性分析會針對各參數獨立做收斂性分析，以加快分析速度。時間步長收斂性分析中取 $800\mu\text{s}$ 、 $400\mu\text{s}$ 、 $200\mu\text{s}$ 、 $100\mu\text{s}$ 、 $50\mu\text{s}$ 等五個參數做分析，阻力係數的結果，如表 2-11 及圖 2-33 所示，從結果可看出隨時間步長縮小，阻力係數有良好且穩定的收斂性，當時間步長收斂至 $100\mu\text{s}$ 時，其數值僅與 $50\mu\text{s}$ 的結果相差僅 0.6% ；升力係數的結果，如表 2-12 及圖 2-34 所示，從結果可看出隨時間步長縮小，升力係數收斂性相當好，當時間步長收斂至 $100\mu\text{s}$ 時，其數值僅與 $50\mu\text{s}$ 的結果相差僅 0.59% ；Strouhal number 的結果，如表 2-13 及圖 2-35 所示，從結果可看出隨時間步長縮小，Strouhal number 會出現明顯的收斂性，當時間步長收斂至 $100\mu\text{s}$ 時，其數值僅與 $50\mu\text{s}$ 的結果相差 1.36% ，略高於阻力係數與升力係數的結果。從上述結果可看出，當時間步長收斂至 $100\mu\text{s}$ ，此時阻力係數與升力係數已收斂，Strouhal number 也已有相當程度的收斂效果，後續以時間步長 $100\mu\text{s}$ 進行分析。

在邊界加密層數收斂性分析中，會分別以 1 層、10 層、20 層、40 層、60 層進行分析，並比較對網格數及結果的影響，阻力係數、升力係數、Strouhal number 的結果，如表 2-14 至表 2-16 及圖 2-36 至圖 2-38 所示，從結果可看出邊界加密層數對結果的影響較時間步長小很多，對三個分析的參數影響皆不超過 1% ，可能原因

是初始設定的網格大小及網格膨脹率足夠低，即便在邊界加密層外的網格排列依舊較為整齊，因此影響較小，考量到僅邊界加密層數 20 層與 40 層做比較時，三個分析的參數皆有超過 0.5% 的差異，且邊界加密層數對網格數影響很小，後續邊界加密層以 40 層進行後續分析。

在網格大小收斂性分析中，此指圓柱邊上的網格大小，抑是模型中最密的網格，選用的網格大小包含 0.4 mm、0.2 mm、0.1 mm、0.05 mm 等四種進行分析，對應的網格數與格點數如表 2-17 所示，阻力係數的結果如表 2-18 及圖 2-39 所示，由結果可知當網格大小從 0.4 mm 加密至 0.2 mm 時，阻力係數變化高達 25%，當持續加密網格大小時變化則降低到 5% 以下，雖然數值持續有超過 1% 的變化，但網格數大幅增加也會使計算時間增加；升力係數的結果如表 2-19 及圖 2-40 所示，其趨勢與阻力係數類似，相較於從網格大小 0.4 mm 加密到 0.2 mm 相差高達 32%，持續加密後差異則低於 2%；Strouhal number 的結果如表 2-20 及圖 2-41 所示，由結果可知 Strouhal number 受網格大小影響很小，差異皆在 0.3% 以下。綜合上述討論，雖然以小於 0.2 mm 的網格大小持續加密，阻力係數與升力係數依然有所差異，但考慮到本研究最主要的升力係數相差不超過 2%，且加密後網格數為原先 1.68 倍，大幅增加計算時間，故後續會以網格大小 0.2 mm 進行分析。

在網格膨脹率收斂性分析中，選用的膨脹率包含 1.01、1.02、1.05、1.08，共四種，膨脹率指網格從最密網格到最稀疏網格間，網格變大的幅度，數字越小則成長幅度最慢，模型中的網格越多，網格膨脹率對應的網格數及格點數如表 2-21 所示，隨網格膨脹率越接近 1，模型中網格數越多且增加幅度越大，阻力係數的結果，如表 2-22 及圖 2-42 所示，從結果可看出僅膨脹率在 1.05 及 1.08 間差距 0.58%，其餘差距皆不超過 0.5%，可看出膨脹率對阻力係數影響不大；升力係數的結果，如表 2-23 及圖 2-43 所示，從結果可看出膨脹率在 1.05 及 1.08 間差距最大，達 0.83%，其餘差距皆在 0.5% 以內；Strouhal number 的結果，如表 2-24 及圖 2-44 所示，從結果可看出僅網格膨脹率在 1.02 及 1.05 間差距達 0.68%，其餘皆在 0.5% 以

下。綜合上述討論，升力係數網格膨脹率在 1.05 及 1.08 間差距達 0.83%，此時網格數差距 21%，則網格膨脹率 1.05 會是較為合適的選擇，若再加密到 1.02 網格數差距達 123%，但三個參數的結果差距皆不到 1%，故後續以網格膨脹率 1.05 做分析。

時間步長(μs)	阻力係數	相差
800	1.4111	
400	1.5809	10.74%
200	1.6707	5.37%
100	1.7030	1.90%
50	1.7133	0.60%

表 2-11 不同時間步長下的阻力係數

時間步長(μs)	升力係數	相差
800	0.8497	
400	1.0390	18.22%
200	1.1254	7.68%
100	1.1501	2.15%
50	1.1569	0.59%

表 2-12 不同時間步長下的升力係數

時間步長(μ s)	渦街頻率(Hz)	Strouhal number	相差
800	29.33	0.2059	
400	31.46	0.2208	6.77%
200	33.14	0.2326	5.07%
100	34.13	0.2396	2.90%
50	34.60	0.2429	1.36%

表 2-13 不同時間步長下的 Strouhal number

邊界加密層數	網格數	阻力係數	相差
1	50,994	1.7176	
10	50,521	1.7177	0.01%
20	49,962	1.7154	-0.13%
40	49,604	1.7030	-0.73%
60	49,304	1.7025	-0.03%

表 2-14 不同邊界加密層數下的阻力係數

邊界加密層數	網格數	升力係數	相差
1	50,994	1.1596	
10	50,521	1.1604	0.07%
20	49,962	1.1566	-0.33%
40	49,604	1.1501	-0.57%
60	49,304	1.1475	-0.23%

表 2-15 不同邊界加密層數下的升力係數

邊界加密層數	網格數	渦街頻率(Hz)	Strouhal number	相差
1	50,994	34.13	0.2396	
10	50,521	34.24	0.2403	0.32%
20	49,962	34.34	0.2410	0.29%
40	49,604	34.13	0.2396	-0.62%
60	49,304	34.16	0.2398	0.09%

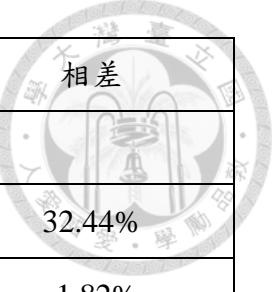
表 2-16 不同邊界加密層數下的 Strouhal number

網格大小 (mm)	網格數	格點數
0.4	26,518	80068
0.2	49,604	149482
0.1	83,598	251776
0.05	139,591	420343

表 2-17 不同網格大小對應網格數與格點數

網格大小 (mm)	網格數	阻力係數	相差
0.4	26,518	1.2697	
0.2	49,604	1.7030	25.44%
0.1	83,598	1.6273	-4.65%
0.05	139,591	1.5913	-2.26%

表 2-18 不同網格大小下的阻力係數



網格大小 (mm)	網格數	升力係數	相差
0.4	26,518	0.7770	
0.2	49,604	1.1501	32.44%
0.1	83,598	1.1295	-1.82%
0.05	139,591	1.1099	-1.77%

表 2-19 不同網格大小下的升力係數

網格大小 (mm)	網格數	渦街頻率(Hz)	Strouhal number	相差
0.4	26,518	34.16	0.2398	
0.2	49,604	34.13	0.2396	-0.09%
0.1	83,598	34.21	0.2401	0.23%
0.05	139,591	34.12	0.2395	-0.26%

表 2-20 不同網格大小下的 Strouhal number

網格膨脹率	網格數	格點數
1.01	120,104	361,286
1.02	49,604	149,482
1.05	22,262	67,304
1.08	18,357	55,583

表 2-21 不同網格大小對應網格數與格點數

網格膨脹率	網格數	阻力係數	相差
1.01	120,104	1.7066	
1.02	49,604	1.7030	-0.21%
1.05	22,262	1.7009	-0.12%
1.08	18,357	1.7109	0.58%

表 2-22 不同網格膨脹率下的阻力係數

網格膨脹率	網格數	升力係數	相差
1.01	120,104	1.1520	
1.02	49,604	1.1501	-0.17%
1.05	22,262	1.1527	0.23%
1.08	18,357	1.1623	0.83%

表 2-23 不同網格膨脹率下的升力係數

網格膨脹率	網格數	渦街頻率(Hz)	Strouhal number	相差
1.01	120,104	34.26	0.2405	
1.02	49,604	34.13	0.2396	-0.38%
1.05	22,262	33.90	0.2380	-0.68%
1.08	18,357	33.80	0.2373	-0.30%

表 2-24 不同網格膨脹率下的 Strouhal number

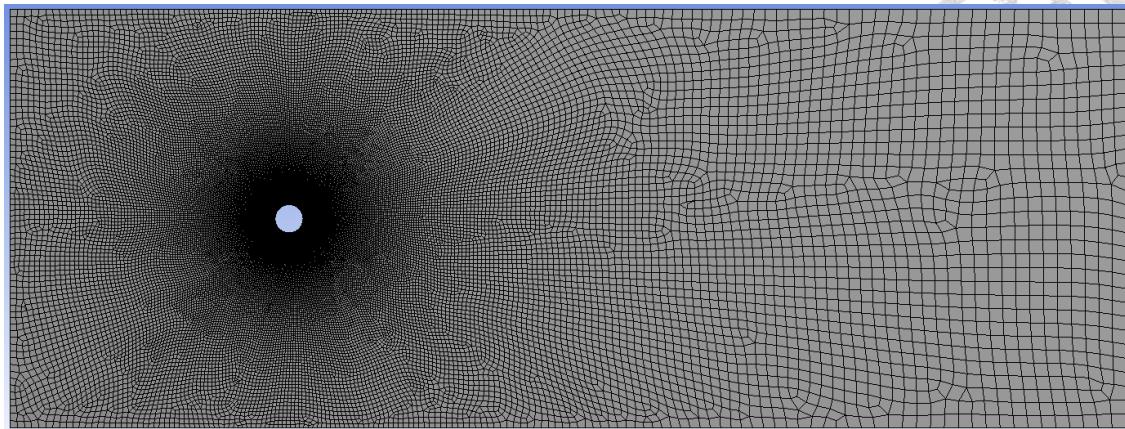


圖 2-31 Ansys Fluent 二維圓柱模型網格分布

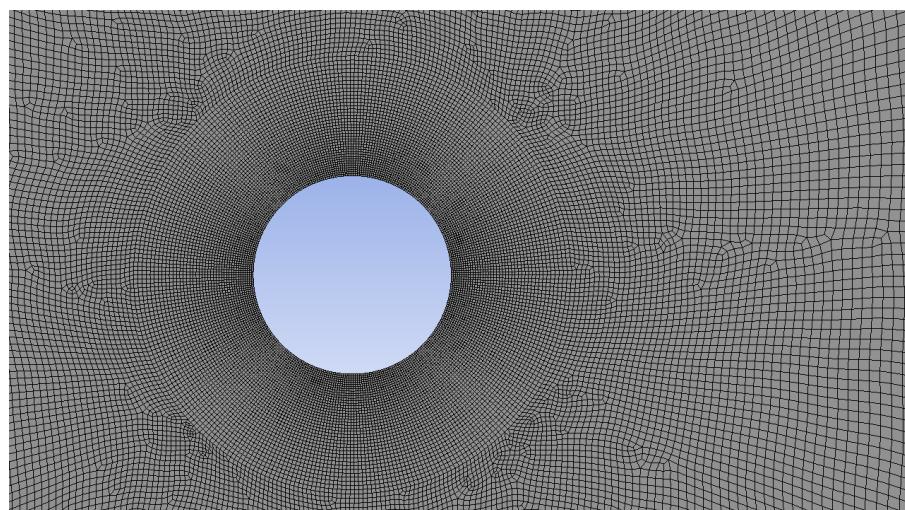


圖 2-32 Ansys Fluent 二維圓柱模型圓柱周邊網格放大圖

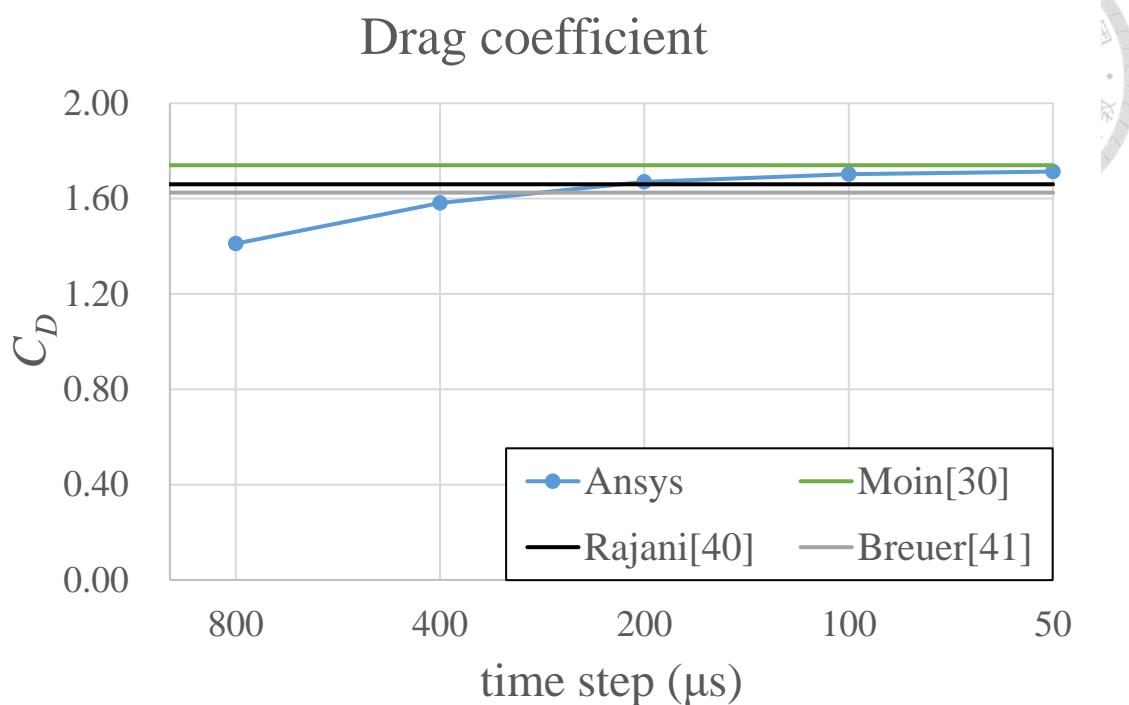


圖 2-33 不同時間步長下的阻力係數以及與文獻比較

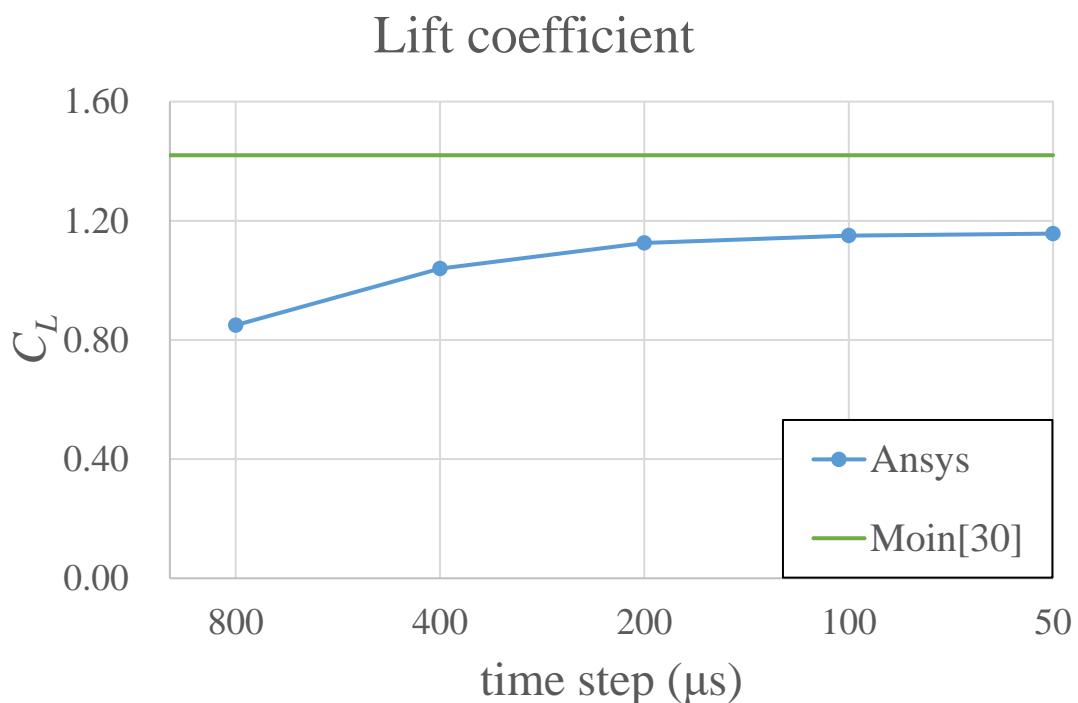


圖 2-34 不同時間步長下的升力係數以及與文獻比較

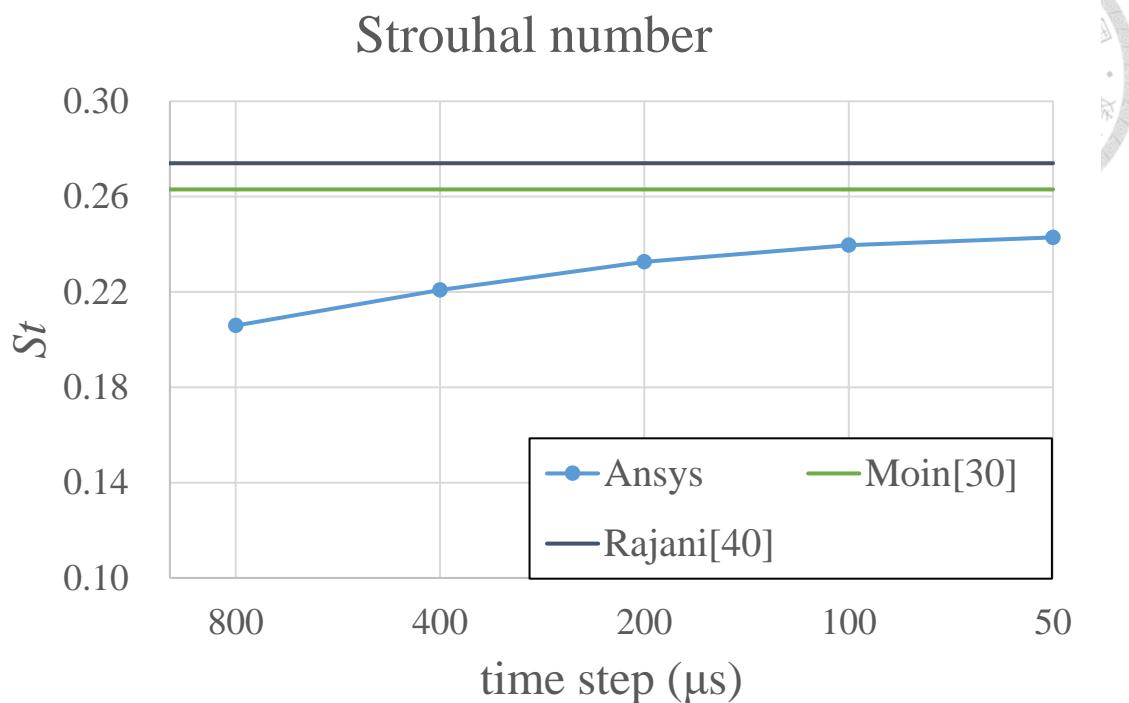


圖 2-35 不同時間步長下的 Strouhal number 以及與文獻比較

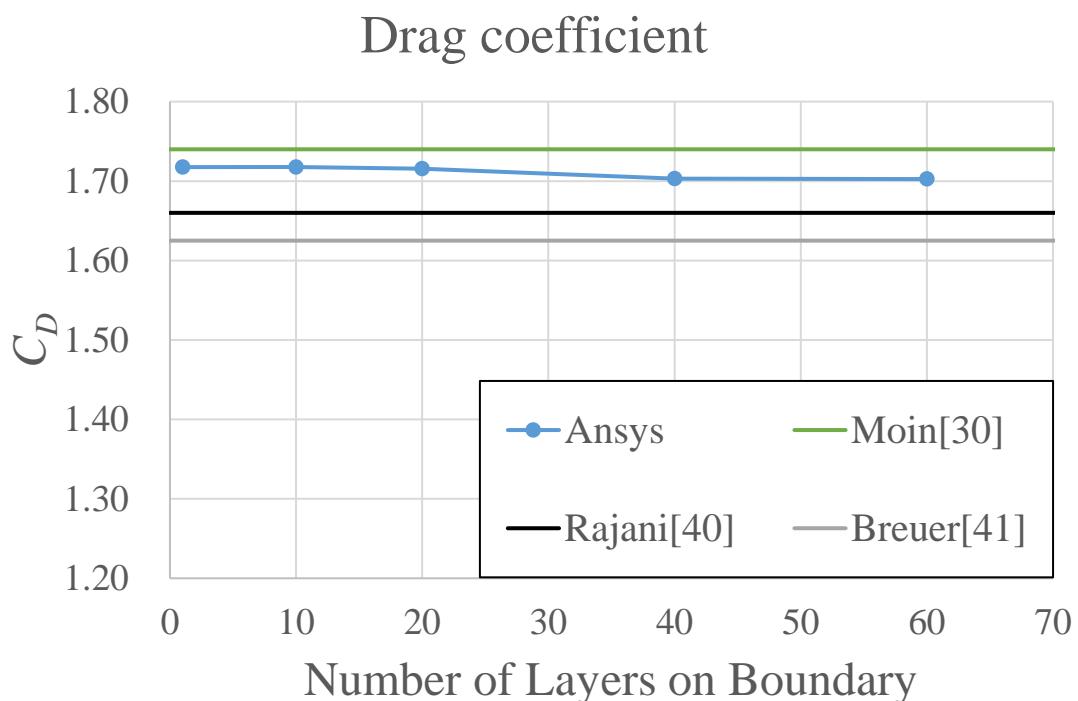


圖 2-36 不同邊界加密層數下的阻力係數以及與文獻比較

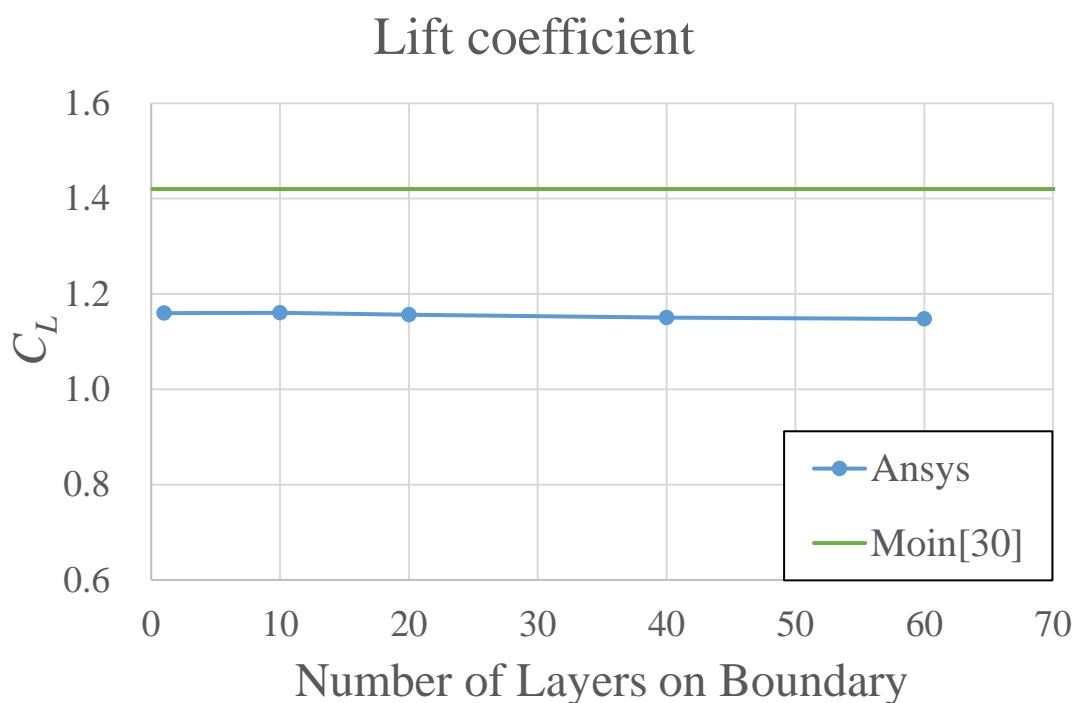


圖 2-37 不同邊界加密層數下的升力係數以及與文獻比較

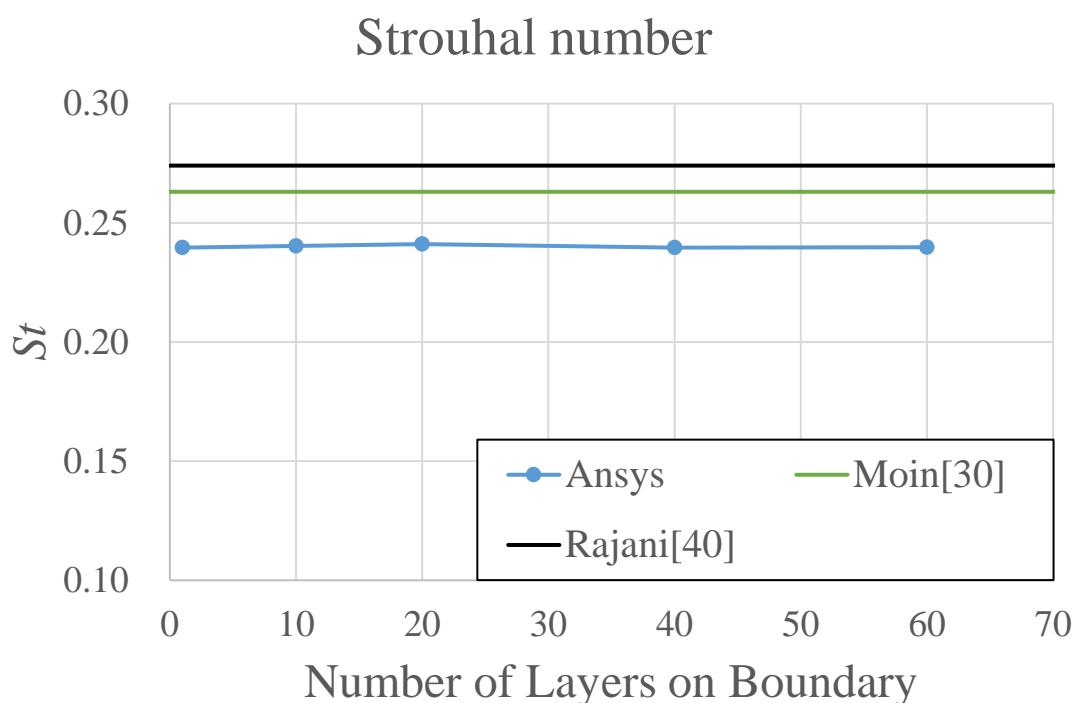


圖 2-38 不同邊界加密層數下的 Strouhal number 以及與文獻比較

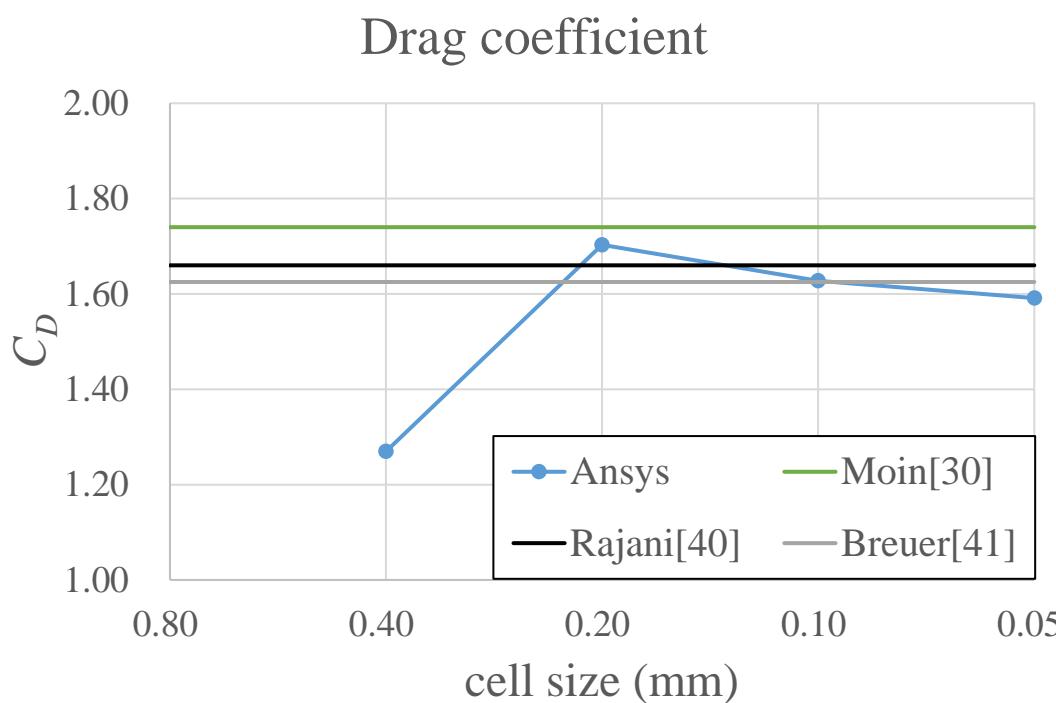


圖 2-39 不同網格大小下的阻力係數以及與文獻比較

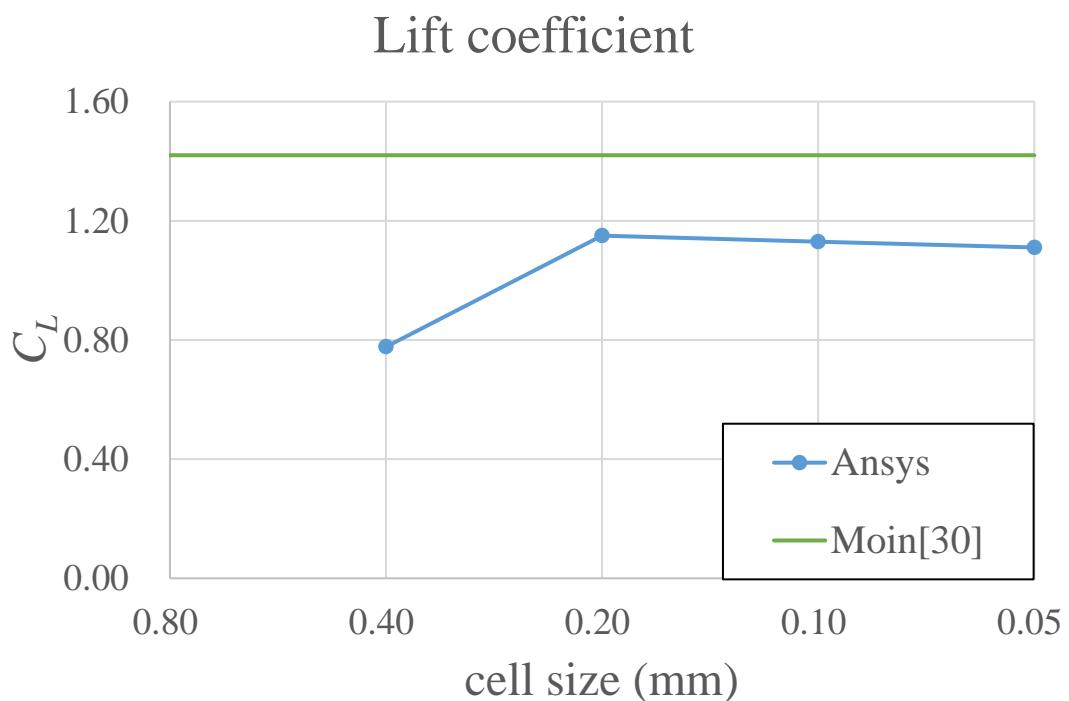


圖 2-40 不同網格大小下的升力係數以及與文獻比較

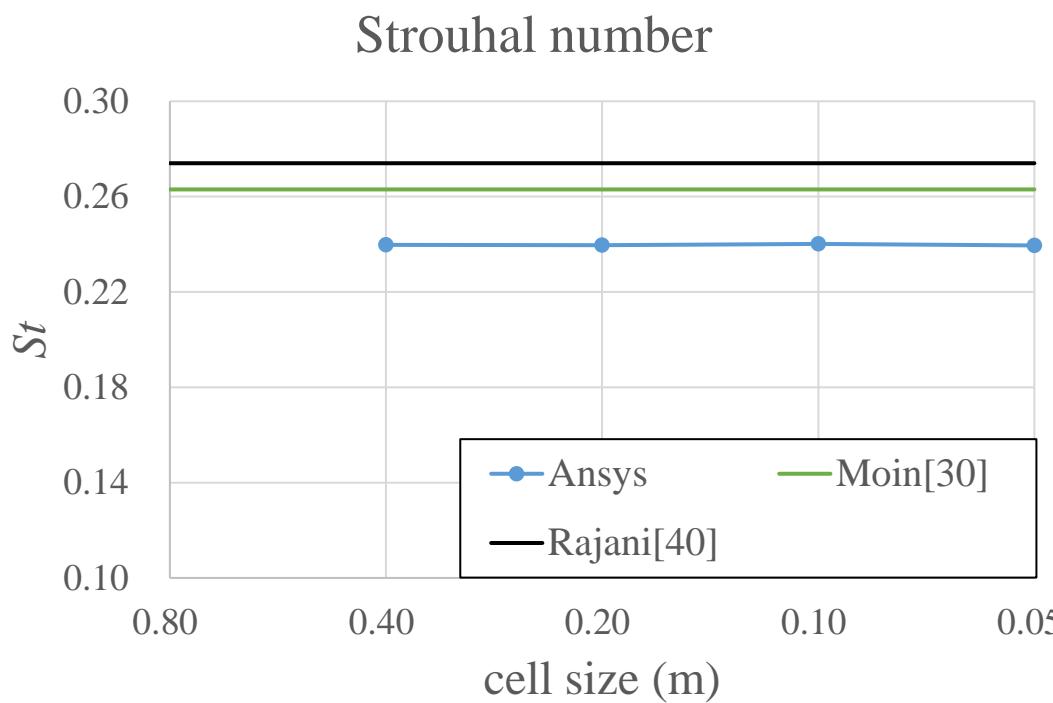


圖 2-41 不同網格大小下的 Strouhal number 以及與文獻比較

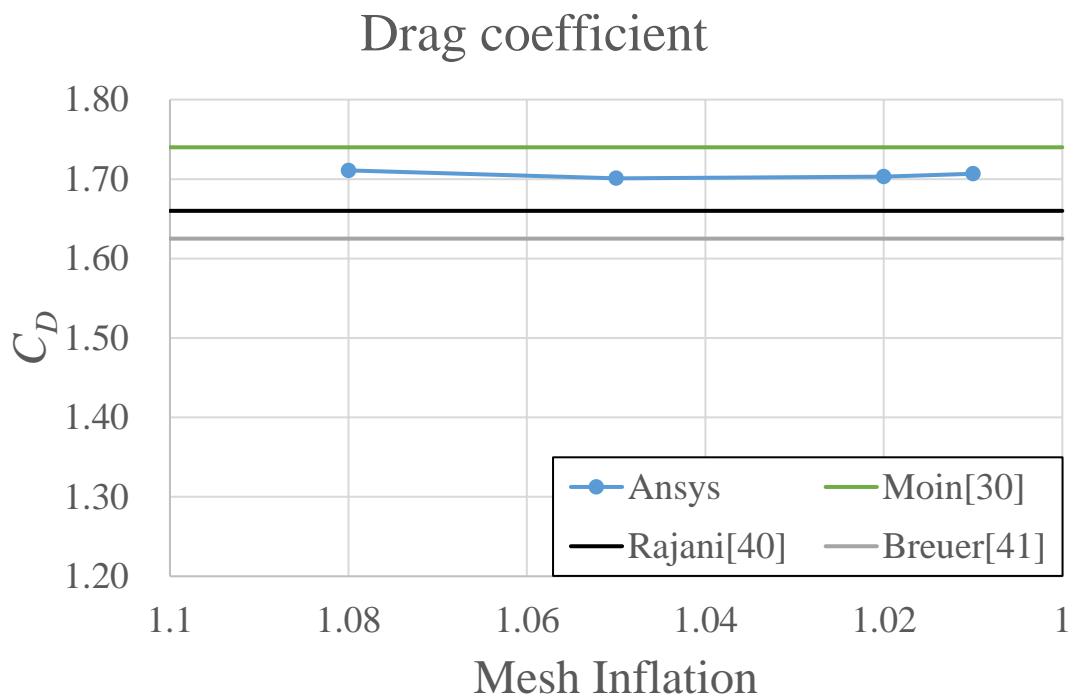


圖 2-42 不同網格膨脹率下的阻力係數以及與文獻比較

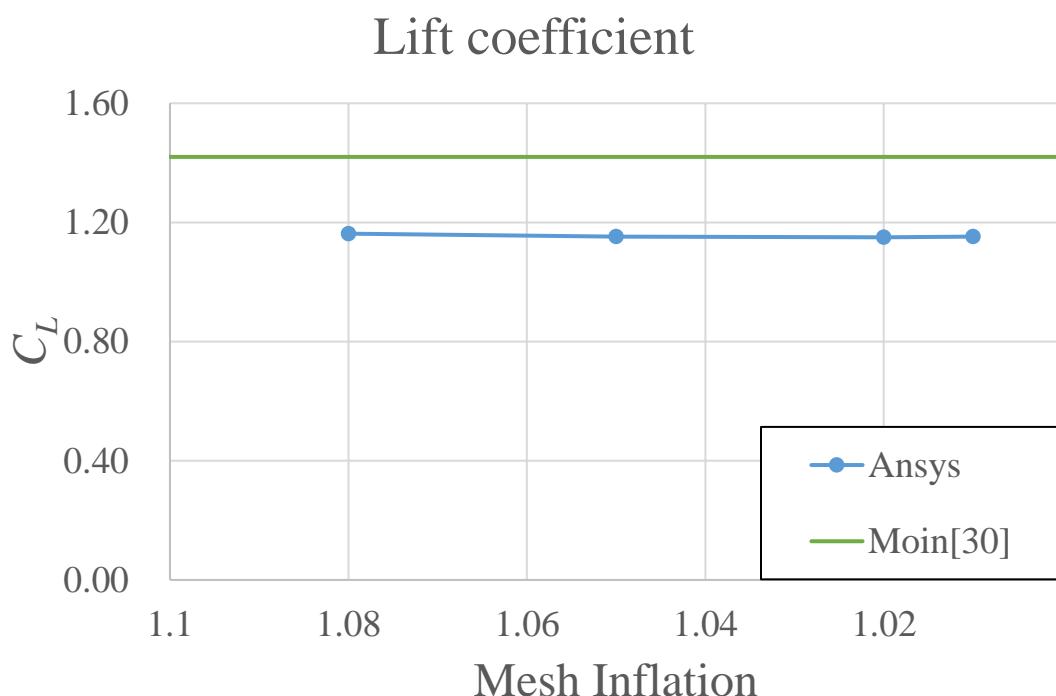


圖 2-43 不同網格膨脹率下的升力係數以及與文獻比較

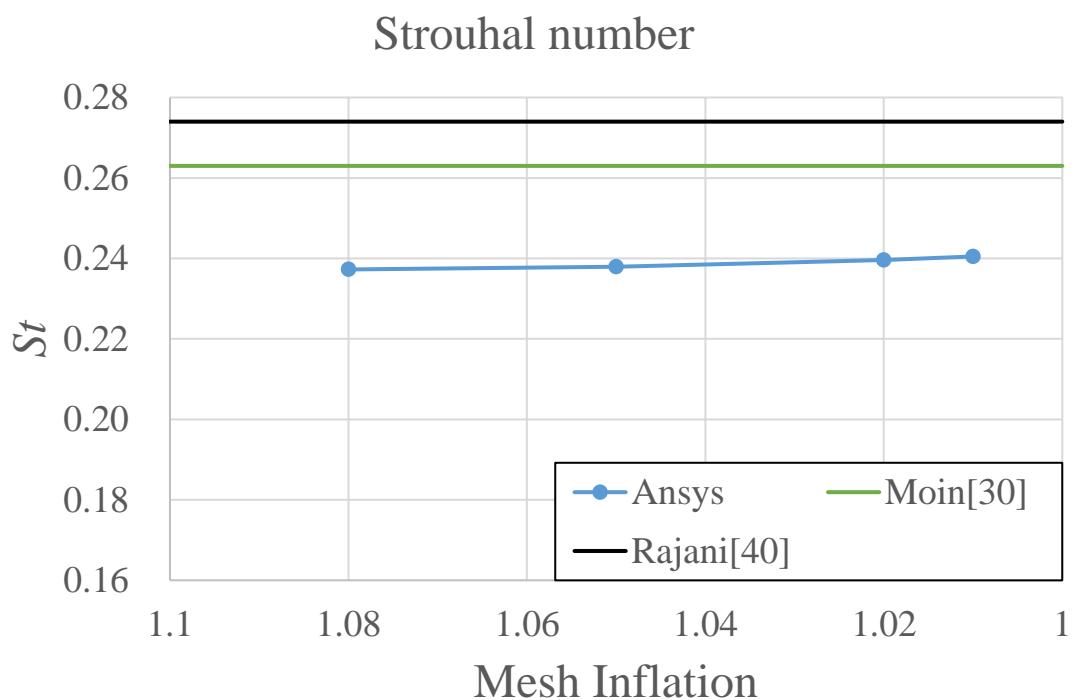


圖 2-44 不同網格膨脹率下的 Strouhal number 以及與文獻比較

2.4.7 Ansys Fluent 模型不同流速下的結果並與 IB-LBM 模型比較

在 Ansys Fluent 中使用 FVM 搭配紊流模型 SST $k-\omega$ 模型進行計算模擬，模型參數為網格大小 0.2 mm，網格膨脹率 1.05，邊界加密層數 40 層，時間步長 $100\mu\text{s}$ ，分析入口處流速 2 m/s 至 10 m/s，共五個流速，分別對應流場雷諾數為 2700 至 13700，分析阻力係數、升力係數、Strouhal number 隨流速的變化，並與 IB-LBM 模型的結果及文獻做比較，其中升力係數及其經過 FFT 後的結果，如圖 2-45 至圖 2-49 所示，與圖 2-21 至圖 2-25 做比較，可看出使用 LES 模型分析的 IB-LBM 模型，在入口處流速較高時因存在高頻漩渦，以及收斂門檻較高的特性，得到的升力係數存在較多高頻訊號，而使用 RANS 模型分析的 FVM 模型，不論入口處流速高低，皆為單一頻率主導的結果，經過 FFT 後也沒有明顯且大量頻率高於主導頻率的訊號。阻力係數隨流速變化的結果，如表 2-25 及圖 2-50 所示，從結果可看出在低入口流速時，兩個模型的到的阻力係數幾乎相同，到了高流速時 Ansys Fluent 的結果會有下降的現象，而 IB-LBM 模型則維持相同；升力係數隨流速變化的結果，如表 2-26 及圖 2-51 所示，從結果可看出兩個模型的趨勢類似，在入口處流速為 2 m/s 下，兩者相差 6.76%，當入口處流速提高至 4 m/s 及 6 m/s，兩者相差超過 10%，差異可能來自於 IB-LBM 模型使用之 LES 模型，當入口處流速持續提高到 8 m/s 以上，則兩者相差降低至 10% 以下，主要原因是使用 LES 模型的 IB-LBM 模型因網格大小導致高雷諾數下之收斂性不足而使差異降低；Strouhal number 隨流速變化的結果，如表 2-27 及圖 2-52 所示，從結果可看出雖然趨勢有些不同，相對於 IB-LBM 的結果變化稍大，Ansys Fluent 的結果隨入口處流速皆近一條直線。

考慮到計算時間，同樣以收斂後的模型做比較，Ansys Fluent 模型計算花費約 20 小時，而 IB-LBM 模型計算花費約 33 小時，雖然 Ansys Fluent 模型花費時間較少，但考慮到 IB-LBM 模型使用 LES 模型，其網格數 6,000,000、迭代次數 4,000,000 次，相比之下 Ansys Fluent 使用 RANS 模型，其網格數 49,604、迭代次數 20,000 次，花費時間相差 65%，除了 IB-LBM 模型中使用簡化過的 BGK 模型計算，也多



虧計算能力強大的 GPU，使其在模型的規模相差甚大的情況下，可在花費時間相差不大的條件下，完成更複雜的 LES 模型計算。

入口流速 (m/s)	雷諾數	阻力係數		
		Ansys Fluent	IB-LBM	相差
2	2738	1.7399	1.7313	-0.50%
4	5477	1.6794	1.8094	7.18%
6	8215	1.5932	1.7310	7.96%
8	10953	1.5041	1.5108	0.44%
10	13692	1.4352	1.6508	12.81%

表 2-25 不同流速下阻力係數的結果以及與 IB-LBM 模型的結果比較

入口流速 (m/s)	雷諾數	升力係數		
		Ansys Fluent	IB-LBM	相差
2	2738	1.1782	1.2636	6.76%
4	5477	1.1571	1.3093	11.62%
6	8215	1.1448	1.3112	12.69%
8	10953	1.1197	1.2328	9.17%
10	13692	1.1091	1.2276	9.72%

表 2-26 不同流速下升力係數的結果以及與 IB-LBM 模型的結果比較

入口流速 (m/s)	雷諾數	Ansys Fluent 渦街頻率(Hz)	Strouhal number		
			Ansys Fluent	IB-LBM	相差
2	2738	25.01	0.2501	0.2567	2.58%
4	5477	49.97	0.2498	0.2935	14.89%
6	8215	76.08	0.2536	0.2901	12.59%
8	10953	103.1	0.2578	0.2763	6.70%
10	13692	130.2	0.2605	0.2379	-9.47%

表 2-27 不同流速下 Strouhal number 的結果以及與 IB-LBM 模型的結果比較

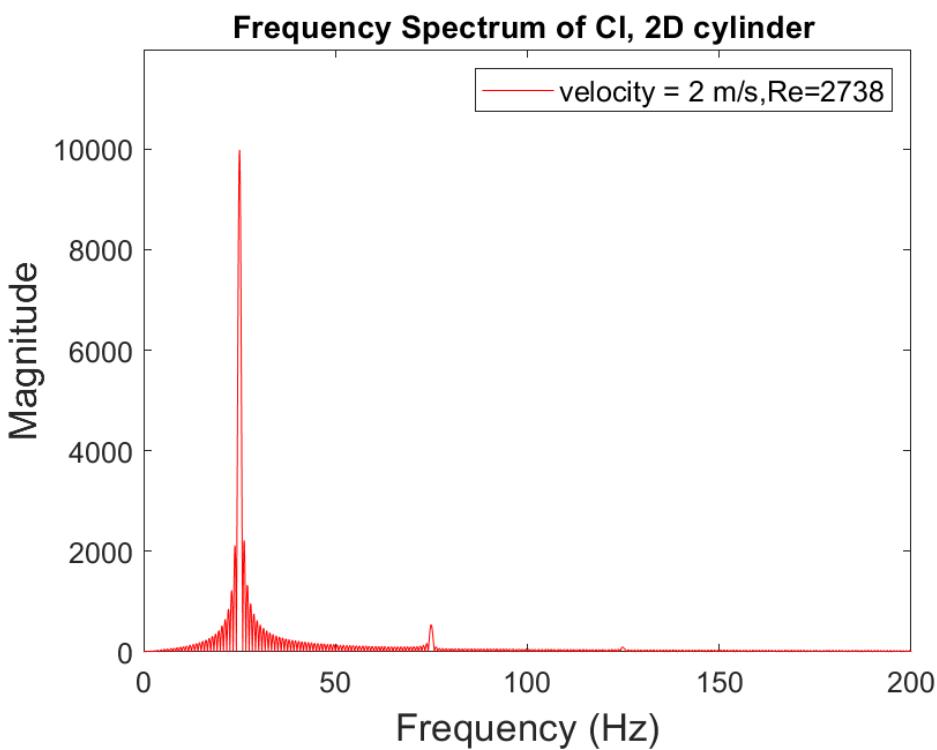
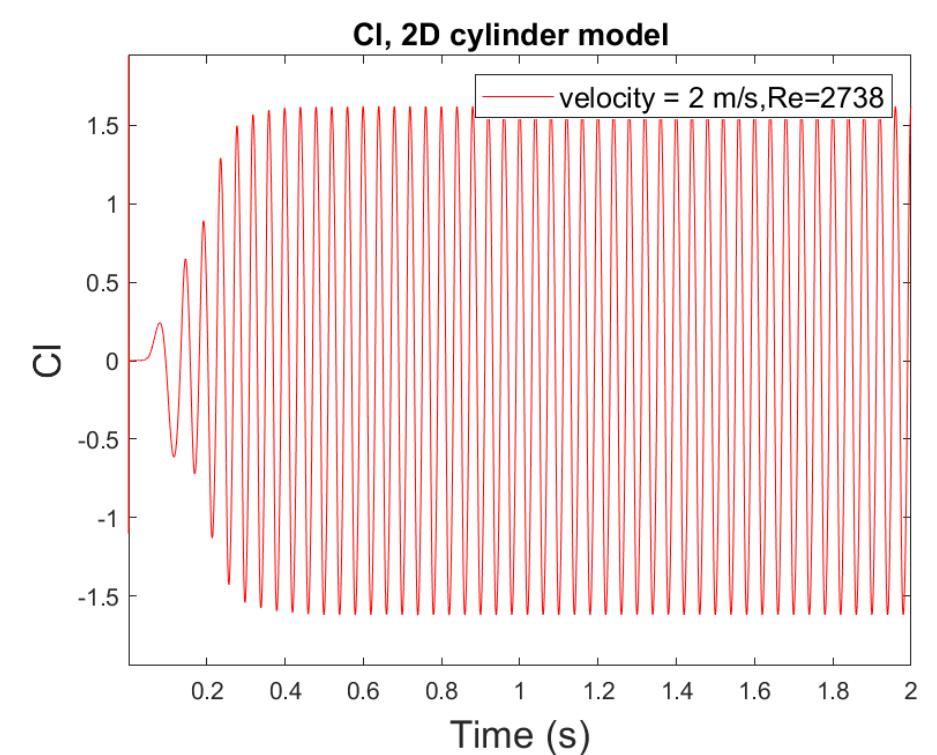


圖 2-45 入口處流速 2 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果

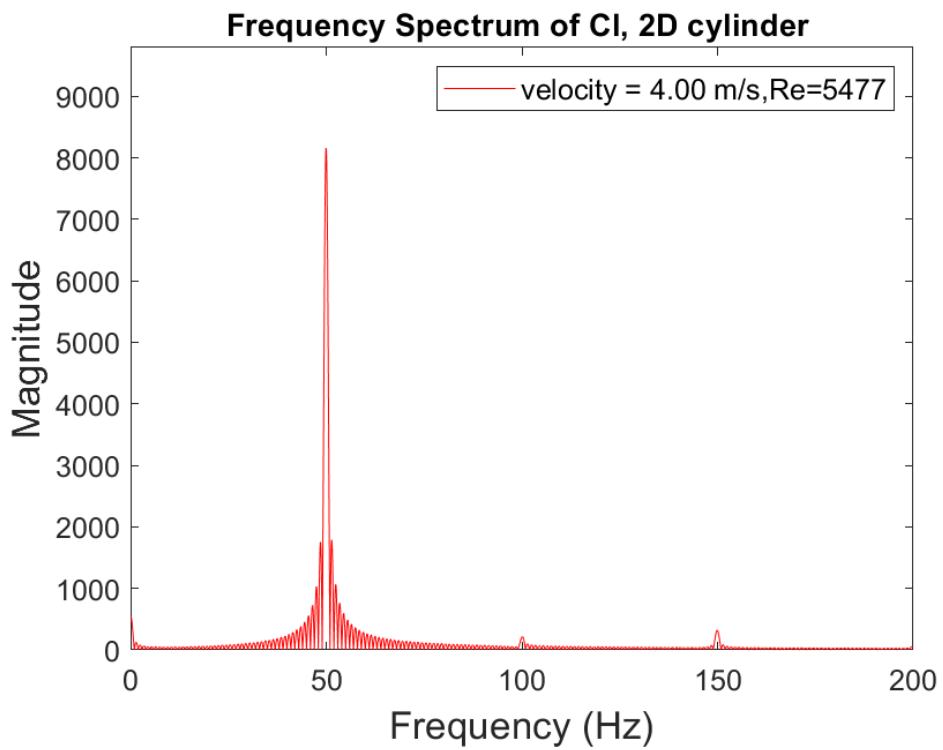
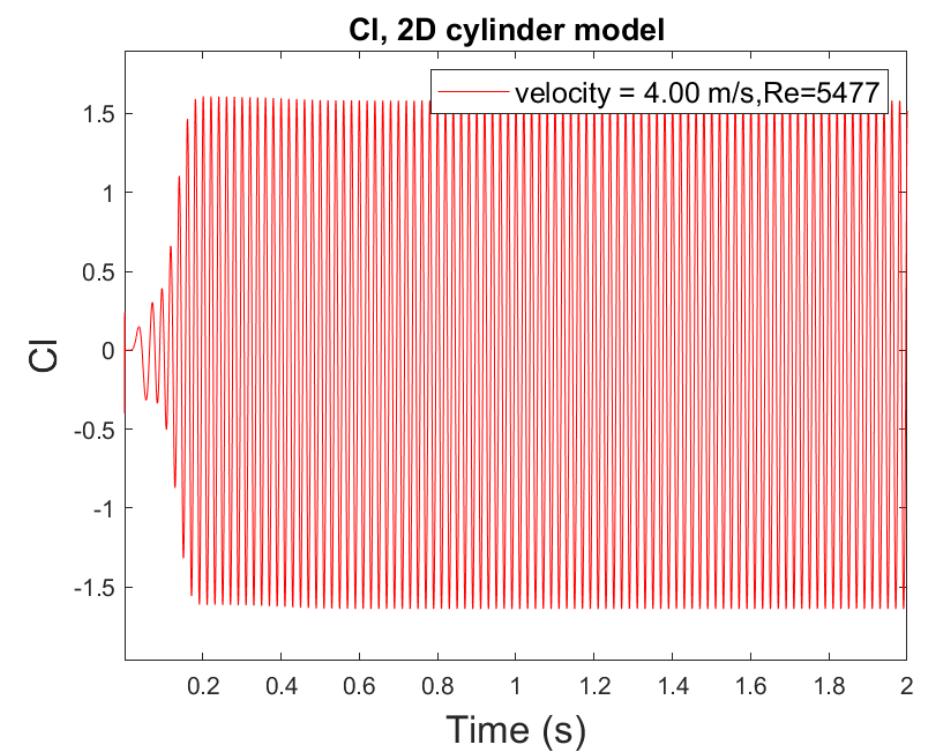


圖 2-46 入口處流速 4 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果

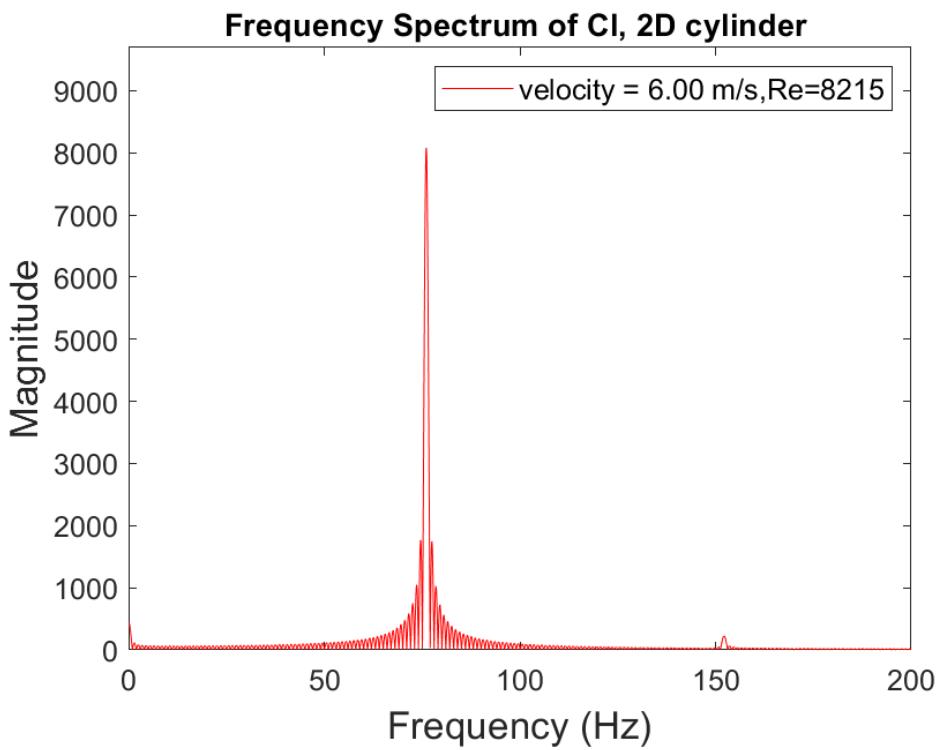
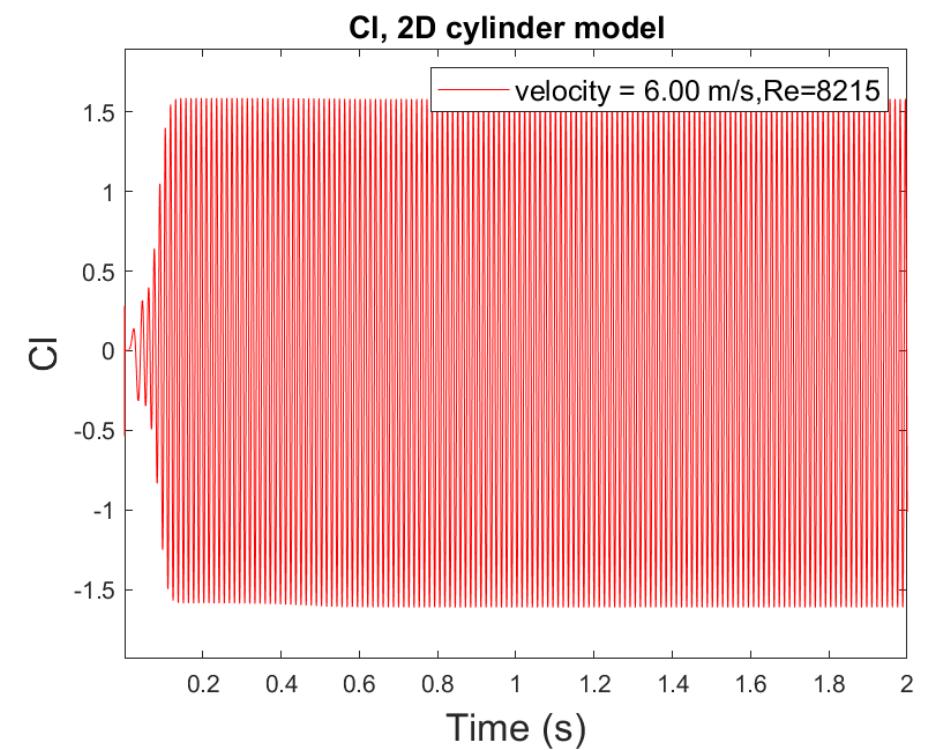


圖 2-47 入口處流速 6 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果

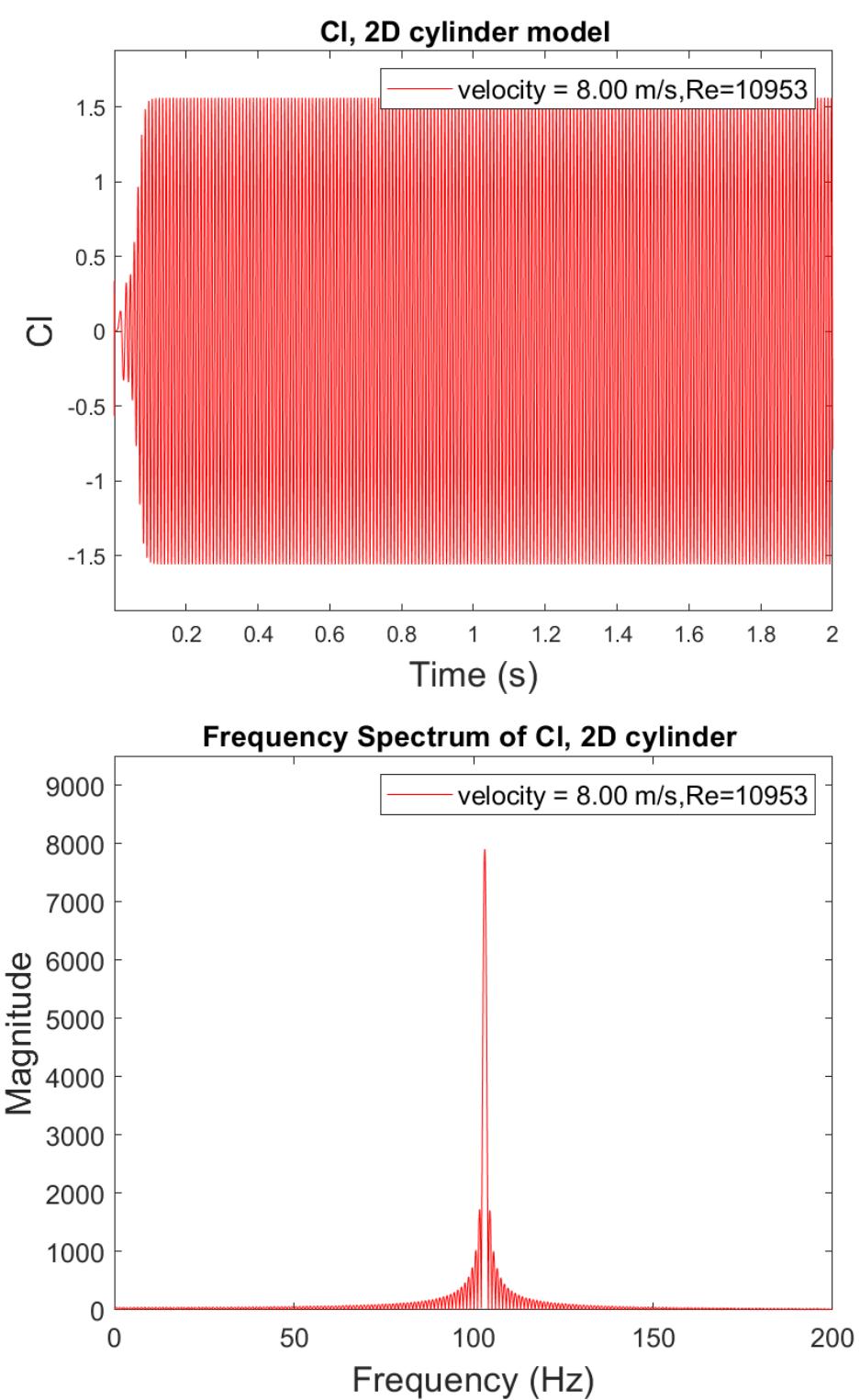


圖 2-48 入口處流速 8 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果

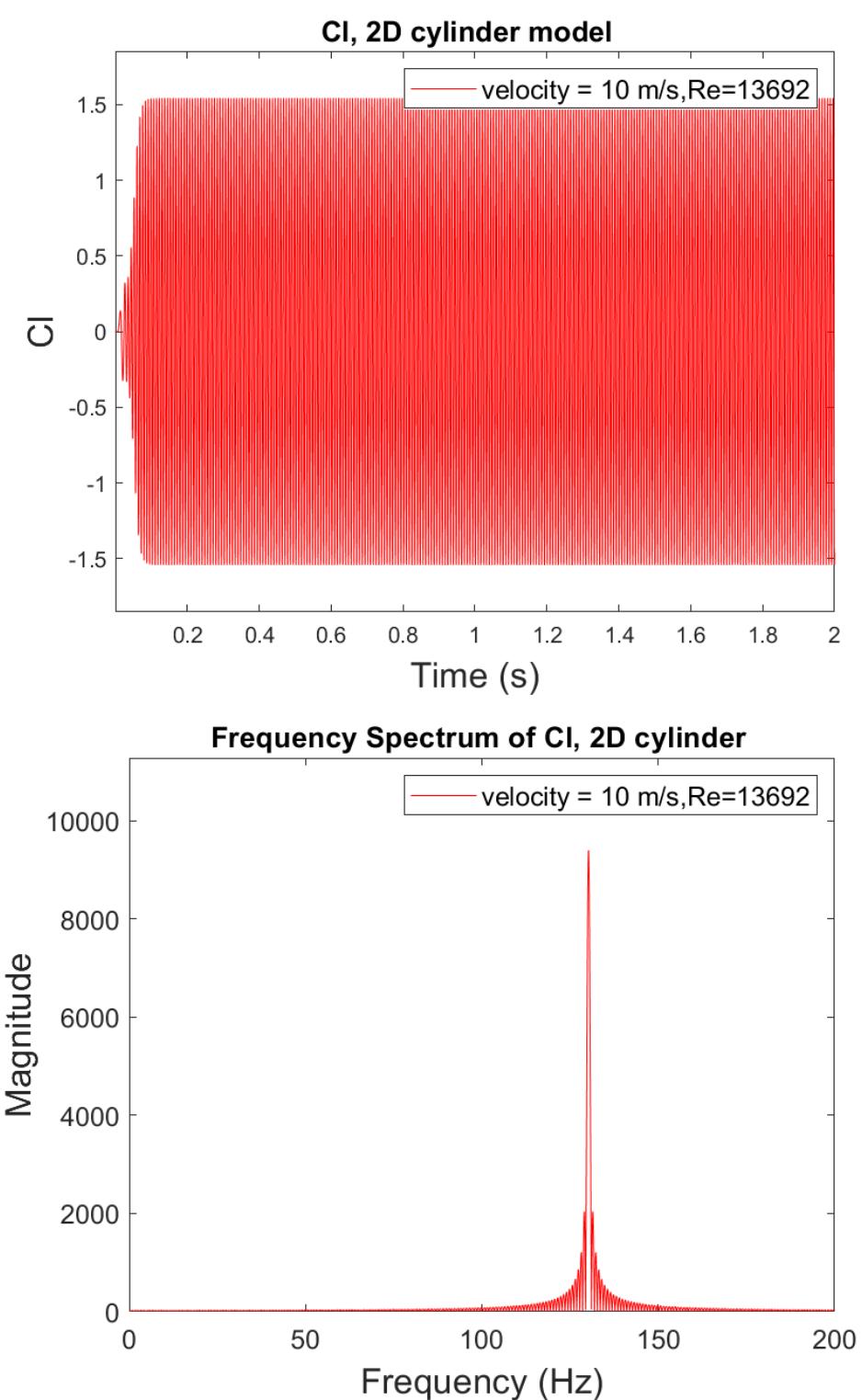


圖 2-49 入口處流速 10 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果

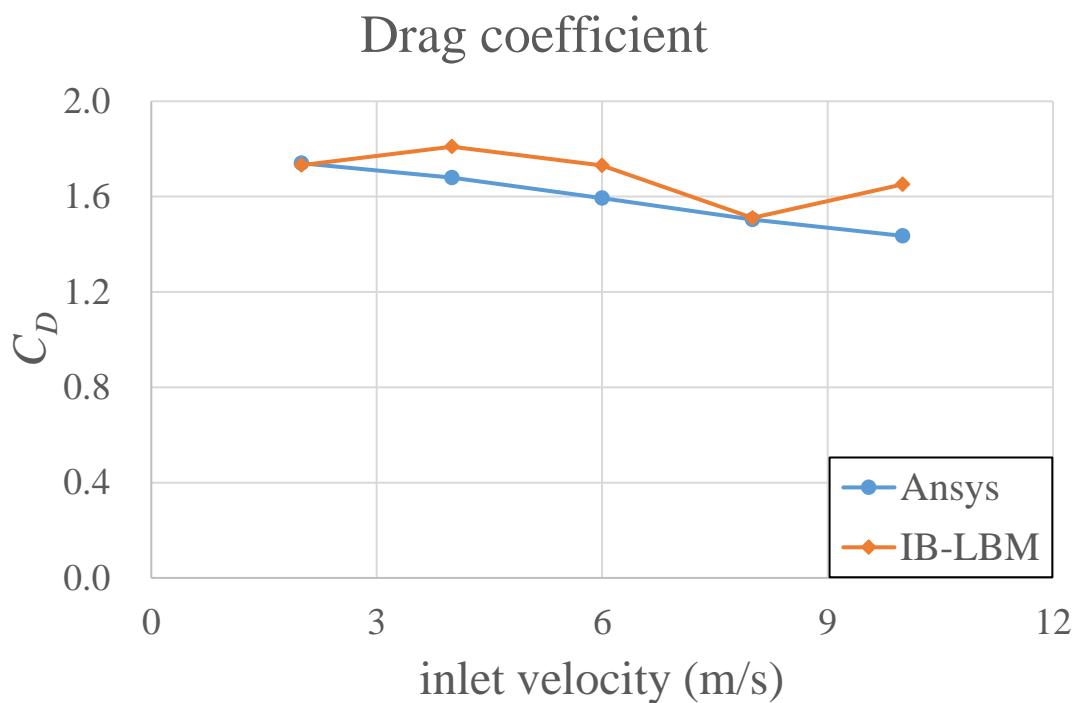


圖 2-50 不同流速下，Ansys Fluent 與 IB-LBM 阻力係數的結果

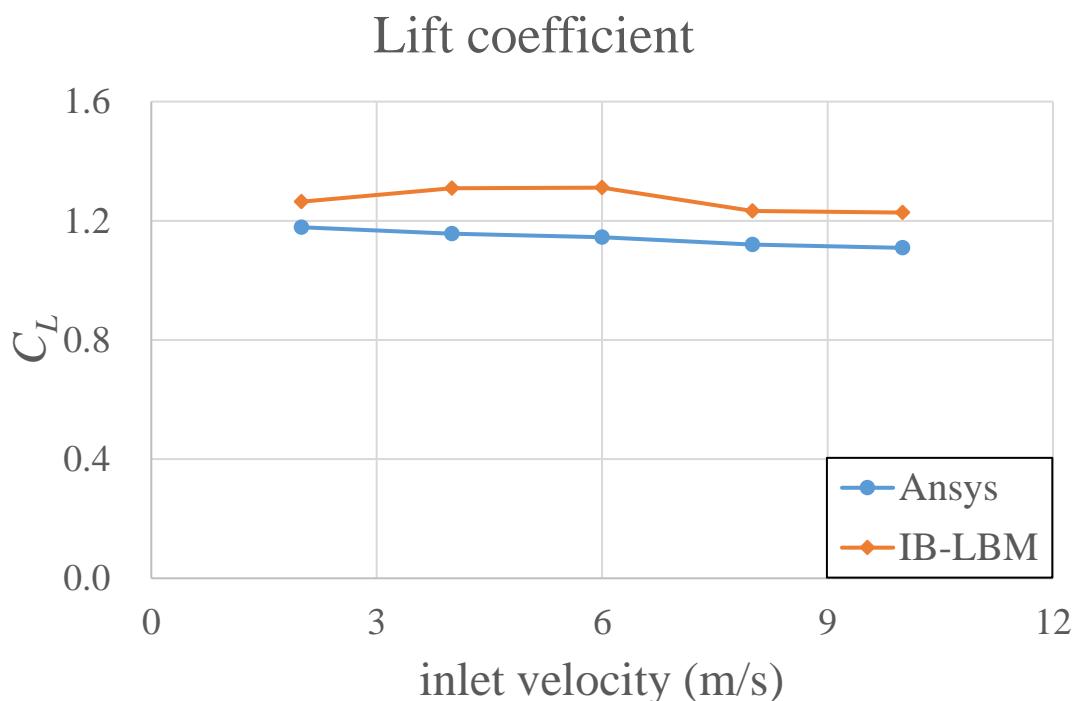


圖 2-51 不同流速下，Ansys Fluent 與 IB-LBM 升力係數的結果

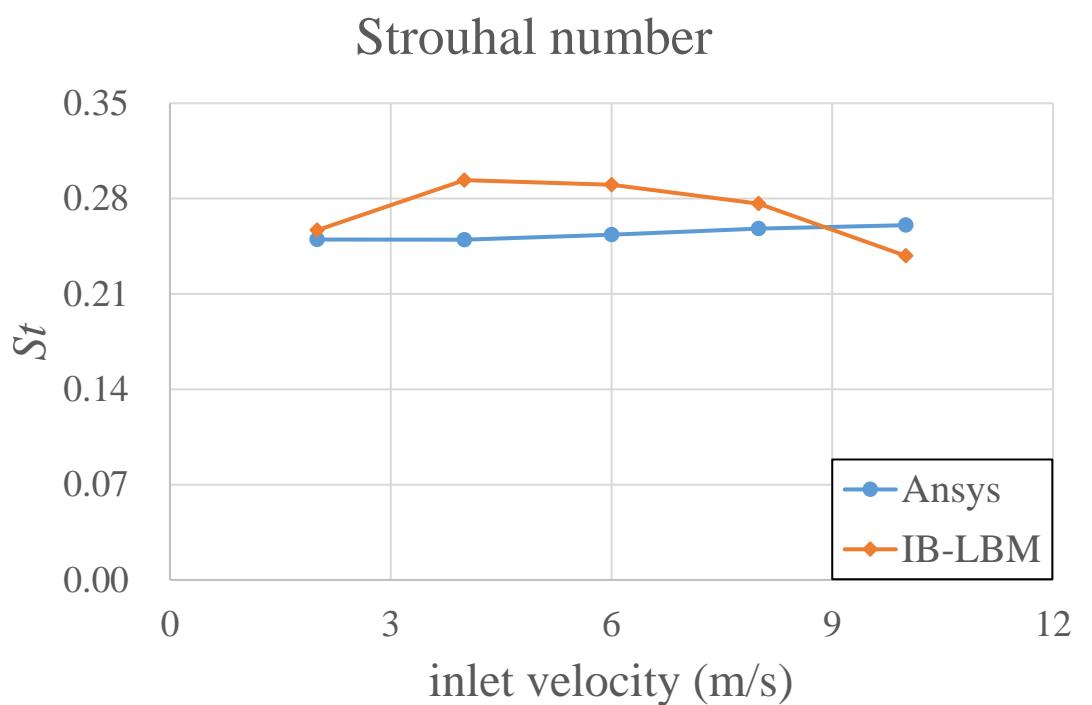


圖 2-52 不同流速下，Ansys Fluent 與 IB-LBM Strouhal number 的結果



2.5 三維模擬分析與結果

在 2.4 節中利用二維 IB-LBM 模型進行分析，並與文獻和商用軟體 Ansys Fluent 做比較，確保模型的準確性，因為在同樣網格大小下，二維模型所需網格量遠低於三維模型，因此可利用較小的網格進行分析，提供更準確的數據做比較，然而因維度不同，二維模型雖然在模型驗證有優勢，然而若與實際的實驗相比，在數值上依然有較大的落差，因此在本節中延續先前的模型，建立三維 IB-LBM 模型，進行收斂性以及不同流速下的分析，並與文獻比較。研究方法與先前相同，在流場雷諾數為 3900 下針對模型的網格大小與時間步長進行收斂性分析，並以此參數設定分析入口流速在 2 m/s 至 10 m/s 下，雷諾數在 2700 至 13700 之間的結果，並與文獻比較。

2.5.1 圓柱繞流模型設定

本研究使用以 BGK 模型近似的 D3Q19 模型，搭配 LES-static model 分析，流場尺寸為 300mm×300mm×800mm 的長方體，障礙物圓柱直徑 20mm，圓柱中心與固體邊界距離 150mm，在兩面固體邊界的中間位置，與入口邊界距離 200mm，與出口邊界距離 600mm，如圖 2-4 所示，模型幾何設置與二維 IB-LBM 模型相似，只是多了 z 方向的維度。入口邊界為均勻流速，出口邊界為固定壓力，四面固體邊界皆為無滑移無穿越的固定邊界，模型中流體為空氣，其密度為 1.225 kg/m^3 ，黏滯係數 $\mu = 1.7894 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ，入口處邊界為均勻流速，流速為 2.85 m/s，雷諾數 Re 為 3900，方便直接跟文獻做定量上的比對。

在圓柱繞流的 D3Q19 模型中，模擬總時長為 5 s，分析的網格大小範圍為 2.5 mm、2mm，時間步長範圍為 $16 \mu\text{s}$ 、 $8 \mu\text{s}$ 、 $4 \mu\text{s}$ 、 $2 \mu\text{s}$ 、 $1 \mu\text{s}$ 、 $0.5 \mu\text{s}$ ，不同的網格大小會有其對應的時間步長範圍，找出每個網格個別對時間步長收斂後的結果，再比較不同網格之間的結果，找出最合適的網格大小及其對應的時間步長。



2.5.2 物理量的無因次化與分析方法

模型分析中主要的物理量與二維 IB-LBM 模型相同，包含雷諾數 Re 、圓柱受到的阻力係數、升力係數、Strouhal number，其中雷諾數與 Strouhal number St 的公式不變，如(2-71)式與(2-75)式所示，力量係數則因三維下圓柱有沿著 z 方向延伸，考慮到圓柱兩端會受到外圍固體邊界的影響，只取圓柱長度中間的三分之二，

$L_z' = \frac{2}{3}L_z$ ，進行分析，而三維下阻力係數 $C_{D,3D}$ 與升力係數 $C_{L,3D}$ 公式如下

$$C_{D,3D} = \frac{2F_{x,mid}}{\rho U^2 d(L_z')} \quad (2-77)$$

$$C_{L,3D} = \frac{2F_{y,mid}}{\rho U^2 d(L_z')} \quad (2-78)$$

其中 $F_{x,mid}$ 為圓柱中間段沿 x 方向的受力， $F_{y,mid}$ 為圓柱中間段沿 y 方向的受力。

由於在三維模型中，模型經歷初始化後需要約 2~3s 才會產生較為穩定的卡門渦街，且產生的渦街隨時間有穩定的變化，因此在三維模型下設定總模擬時長為 5 秒，並且利用第四至第五秒，時長一秒的數據做紀錄與處理，阻力係數取平均值，如圖 2-53 所示，升力係數取方均根值，如圖 2-54 所示，並進行 FFT 後取其主導的頻率值計算 Strouhal number，如圖 2-55 所示，後續三維 IB-LBM 圓柱模型會以升力係數為主。

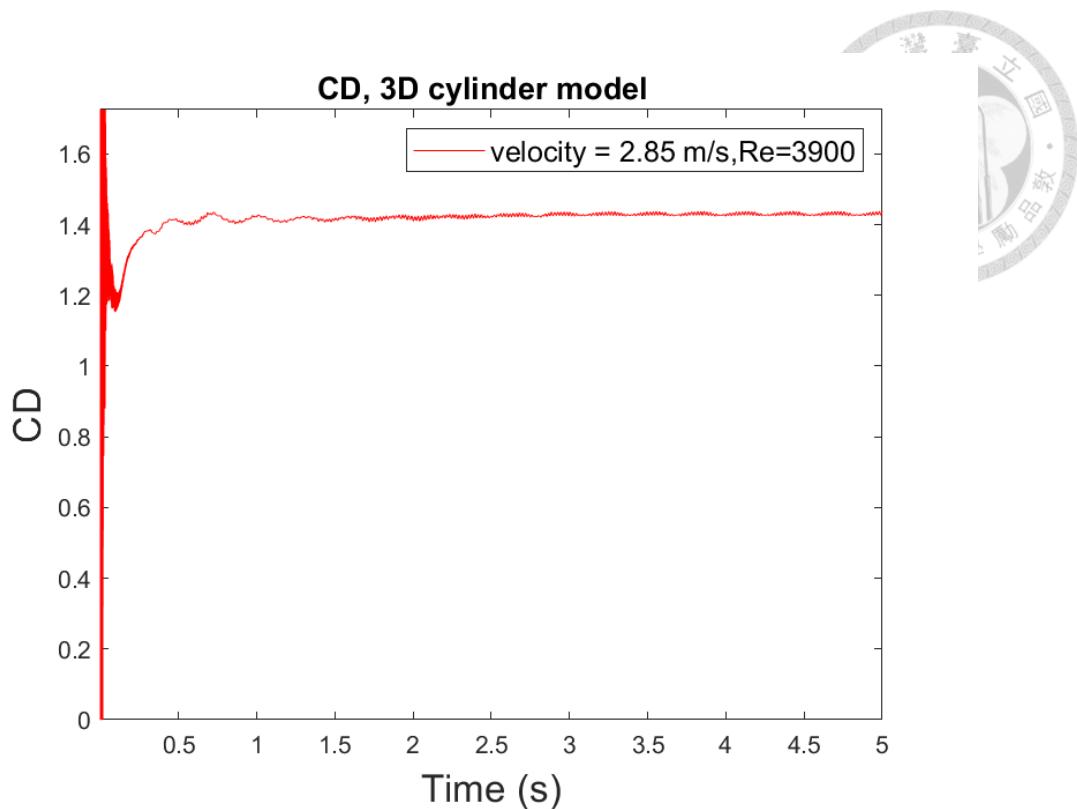


圖 2-53 IB-LBM 三維圓柱模型 $Re=3900$ 下圓柱之阻力係數

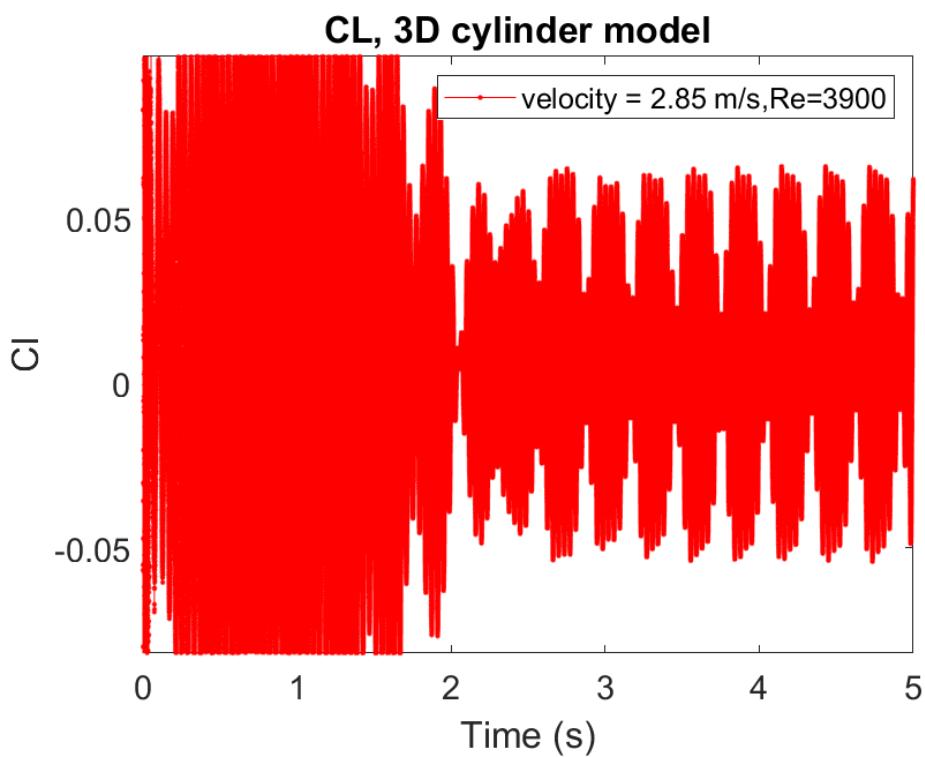


圖 2-54 IB-LBM 三維圓柱模型 $Re=3900$ 下圓柱之升力係數

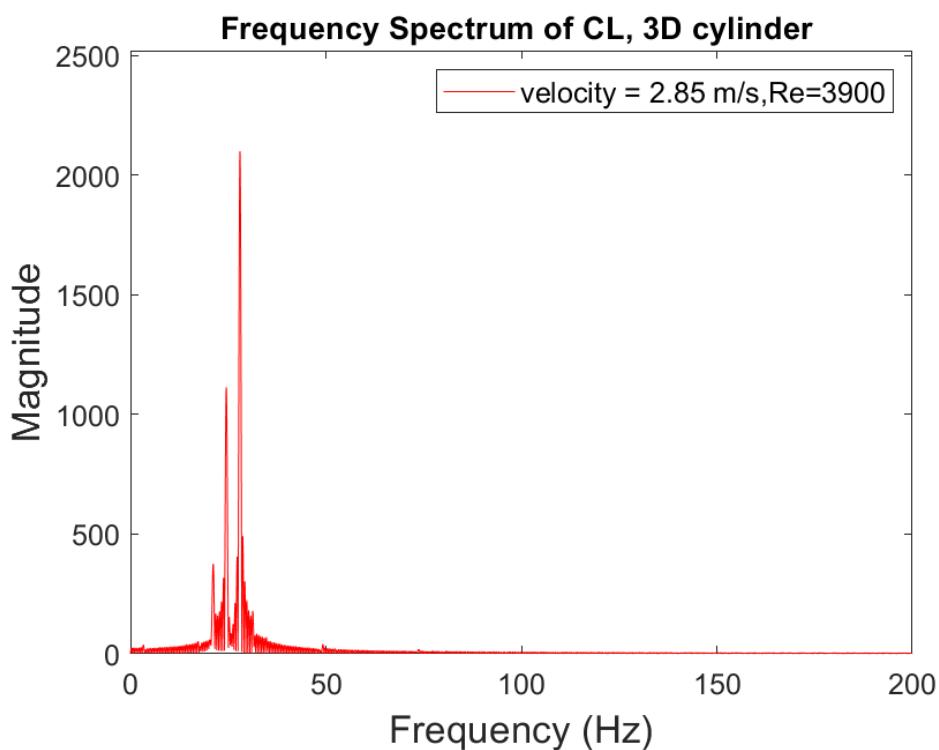
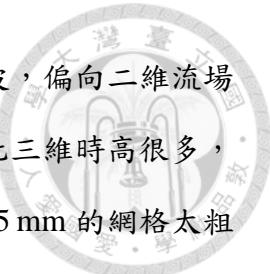


圖 2-55 IB-LBM 三維圓柱模型 $Re=3900$ 下圓柱之升力係數經 FFT 後的結果

2.5.3 收斂性分析

為了確認網格大小與時間步長對三維圓柱模型模擬結果的影響，分別在網格大小為 2.5 mm、2 mm 下分析，對應的網格數量如表 2-28 所示，挑選的時間步長包含 $16\ \mu s$ 、 $8\ \mu s$ 、 $4\ \mu s$ 、 $2\ \mu s$ 、 $1\ \mu s$ 、 $0.5\ \mu s$ ，並將結果與文獻做比對，Moin[30]的三維無紊流圓柱繞流模型、Rajani[39]的三維 LES-static model 圓柱繞流模型、Norberg[36]由實驗結果整理出的經驗法則，其結果整理如表 2-29 所示，阻力係數的結果，如表 2-30 與圖 2-56 所示，從結果可看出在相同大小的網格下，阻力係數受時間步長的影響很小，與前一筆兩倍時間步長 $2\Delta t$ 的數據相比，大部分落差都在 1% 內，主要受網格大小的影響，這部分特性與二維圓柱模型相同；升力係數的結果，如表 2-31 及圖 2-57 所示，當網格大小為 2.5 mm 時，升力係數隨著時間步長加密而降低，可能的原因是當網格大小或時間步長太粗時，會使三維模型的結果接近二維模型，比較時間步長為 $4\ \mu s$ 與 $16\ \mu s$ 時升力係數的結果，如圖 2-54 與圖 2-58，可看出當時間步長較密且流場達穩定時，升力係數會呈現拍頻(beat signal)的現象，然而當



時間步長變粗達到 $16\mu\text{s}$ 時，升力係數的結果類似一單一頻率的波，偏向二維流場的結果，類似圖 2-13 的結果，考慮到升力係數在二維時的數值比三維時高很多，故升力係數會隨著時間步長加密反而下降，而此現象也是因為 2.5 mm 的網格太粗而產生，當網格加密到 2 mm ，時間步長在 $16\mu\text{s}$ 至 $0.5\mu\text{s}$ 間時，得到的結果隨著時間步長加密有收斂的趨勢，並且接有拍頻的現象，雖然與前一筆兩倍時間步長 $2\Delta t$ 的數據相比，收斂後落差依然超過 5%，並且時間步長為 $0.5\mu\text{s}$ 反而下降，然而考慮到此現象，在計算方均根值時會因取值範圍而影響到結果，因此認為在時間步長 $1\mu\text{s}$ 下對時間步長達到收斂；Strouhal number 的結果如表 2-32 與圖 2-59 所示，從結果可知，除了在網格大小 2.5 mm ，時間步長 $8\mu\text{s}$ 以上時 Strouhal number 偏低，除此之外結果皆相近，誤差皆在 1% 以下，數值很穩定。

從上述分析可看出，阻力係數只受網格大小影響，Strouhal number 只要網格或時間步長不要太粗則數值相當穩定，並且與數值與文獻相近，然而升力係數同時受到網格大小及時間步長影響，網格大小至少要在 2 mm 或更密，網格大小 2 mm 收斂時的時間步長為 $1\mu\text{s}$ ，雖然升力係數的數值與文獻有一定的落差，與 Moin[30] 的結果相比相差 25.6%，然而以 GPU RTX 4080 計算需要約 118 小時，考量到加密網格且時間步長收斂會大幅增加計算時間，後續以網格大小 2 mm ，時間步長 $1\mu\text{s}$ 進行不同流速下的分析。

網格大小 (mm)	格點數量
2.5	4,608000
2	9,000,000

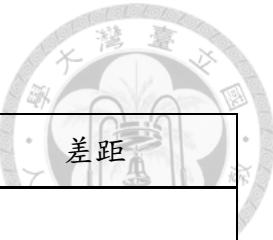
表 2-28 網格大小對應格點數量

文獻	阻力係數	升力係數	Strouhal number
Moin	0.96	0.07	0.217
Rajani	1.1		0.2
Norberg		0.083	0.209

表 2-29 三維圓柱繞流模型文獻結果

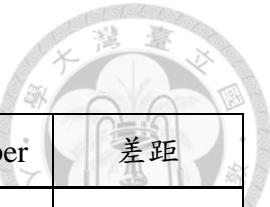
網格大小(mm)	時間步長 (μs)	阻力係數	差距
2.5	16	1.4558	
2.5	8	1.4448	-0.76%
2.5	4	1.4361	-0.61%
2.5	2	1.4300	-0.43%
2.5	1	1.4316	0.11%
2	16	1.3209	
2	8	1.3054	-1.19%
2	4	1.3030	-0.18%
2	2	1.3053	0.18%
2	1	1.3199	1.11%
2	0.5	1.3182	-0.13%

表 2-30 不同網格大小與時間步長下的阻力係數



網格大小(mm)	時間步長 (μ s)	升力係數	差距
2.5	16	0.1319	
2.5	8	0.0628	-110.03%
2.5	4	0.0422	-48.82%
2.5	2	0.0342	-23.39%
2.5	1	0.0224	-52.68%
2	16	0.0469	
2	8	0.0427	-9.84%
2	4	0.0381	-12.07%
2	2	0.0475	19.79%
2	1	0.0521	8.83%
2	0.5	0.0480	-8.54%

表 2-31 不同網格大小與時間步長下的升力係數



網格大小(mm)	時間步長(μs)	渦街頻率(Hz)	Strouhal number	差距
2.5	16	24.08	0.1691	
2.5	8	24.27	0.1704	0.78%
2.5	4	27.76	0.1949	12.58%
2.5	2	28.01	0.1966	0.88%
2.5	1	28.24	0.1983	0.84%
2	16	28.84	0.2024	
2	8	29.10	0.2043	0.91%
2	4	29.04	0.2039	-0.19%
2	2	28.93	0.2031	-0.40%
2	1	29.01	0.2036	0.27%
2	0.5	29.05	0.2040	0.15%

表 2-32 不同網格大小與時間步長下的 Strouhal number

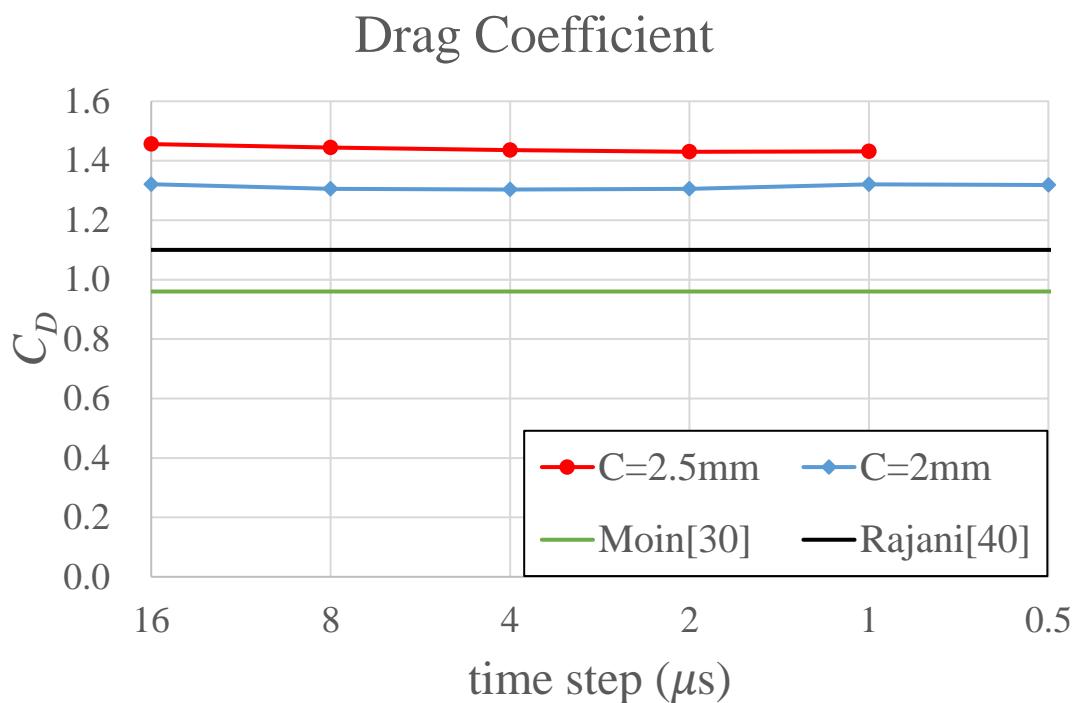


圖 2-56 不同網格大小與時間步長下的阻力係數以及與文獻比較

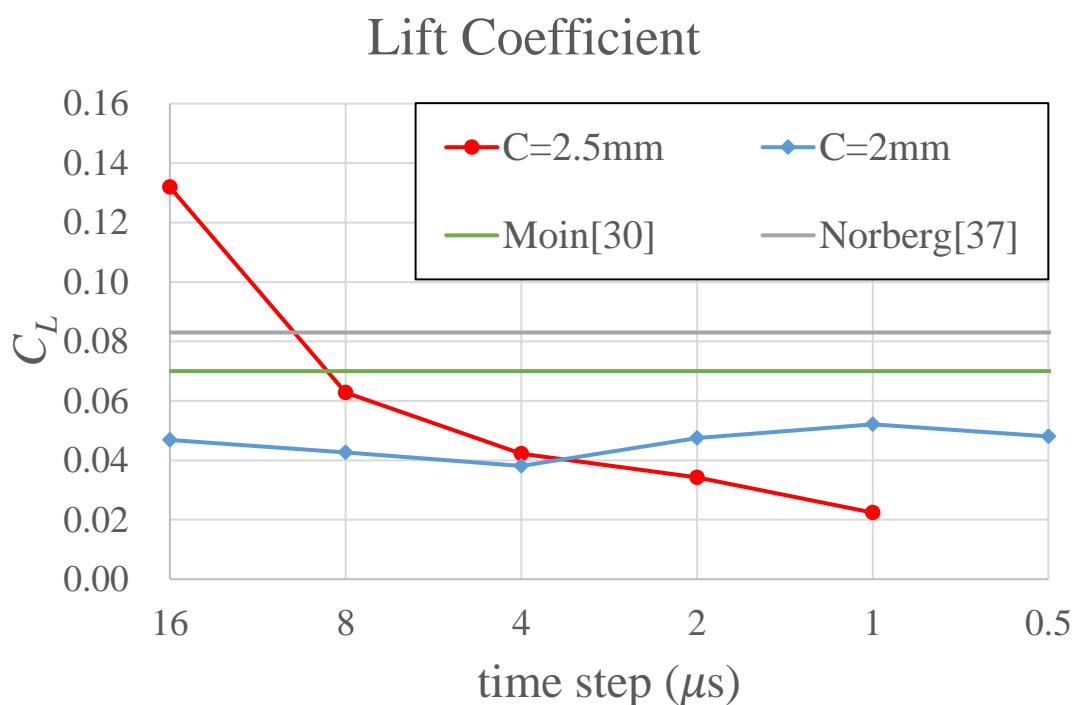


圖 2-57 不同網格大小與時間步長下的升力係數以及與文獻比較

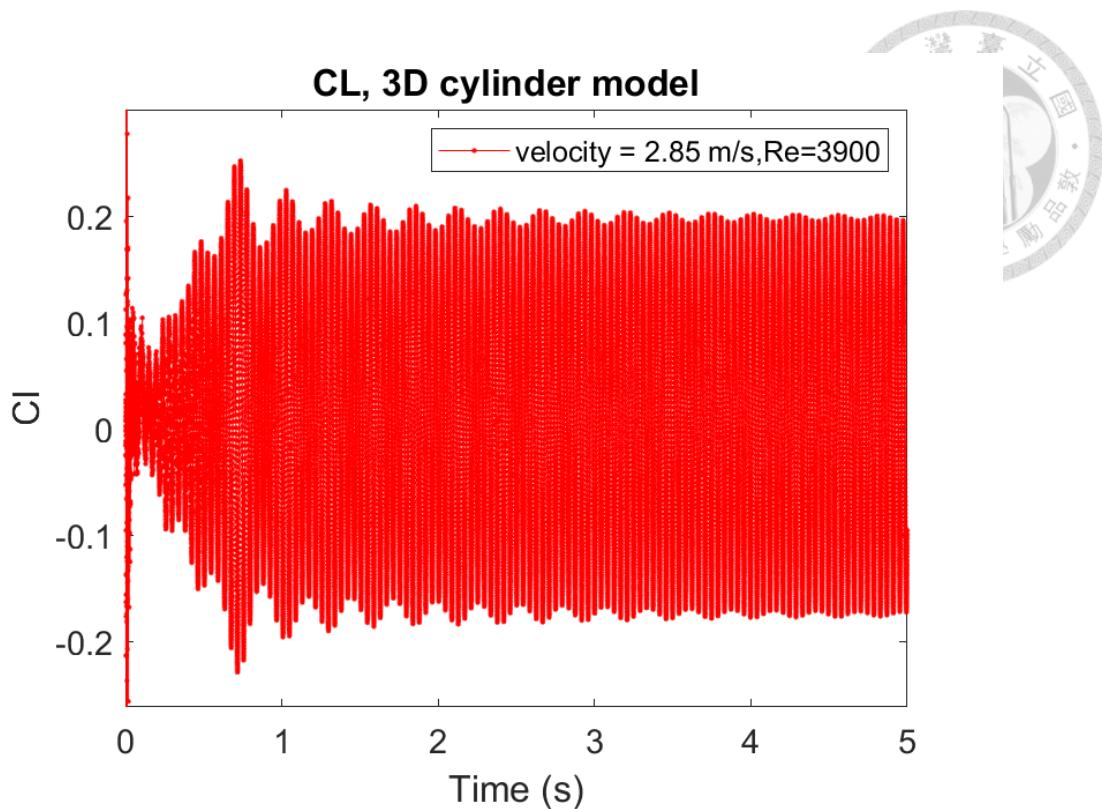


圖 2-58 網格大小為 2.5 mm，時間步長 $16\mu\text{s}$ 的升力係數

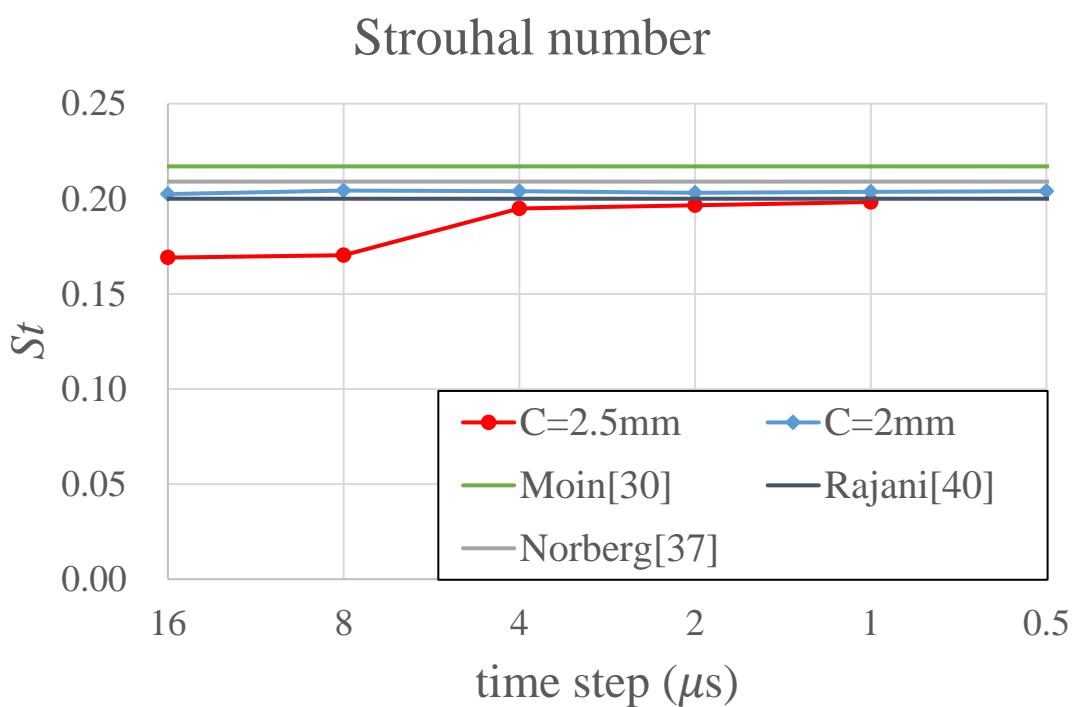


圖 2-59 不同網格大小與時間步長下的 Strouhal number 以及與文獻比較



2.5.4 不同流速下的結果

使用 IB-LBM 三維圓柱模型，設定網格大小 2 mm，時間步長 $1\mu\text{s}$ ，計算花費時間約為 120 小時，入口處流速為 2 m/s 至 10 m/s，分別對應流場雷諾數為 2700 至 13700，分析阻力係數、升力係數、Strouhal number 隨流速的變化，並與文獻做比較，其中升力係數及其經過 FFT 後的結果，如圖 2-60 至圖 2-64 所示。阻力係數隨流速變化的結果，如表 2-33 及圖 2-65 所示，從結果可看出數值隨入口處流速的變化相當小，數值約在 1.3 左右，與文獻[41]相比，如圖 2-27 所示，雖然變化沒有那麼明顯，但文獻裡雷諾數在 2700 至 14000 的區間中，阻力係數約在 0.9 至 1.3 之間，數值上與本研究大致相同，且從網格收斂性分析可得知，在網格大小過大時會使預測的阻力係數偏高，因此此結果相當合理；升力係數的結果，如表 2-33 及圖 2-66 所示，從結果可看出在入口處流速為 6 m/s 時升力係數特別低，從圖 2-62 可看出此流速下升力係數的趨勢與其他流速相差較大，這部分有重複模擬數次，並調整流速為 5.9 m/s 與 6.1 m/s 進行分析，結果皆相似，其餘四個流速下得到的升力係數相差不大；Strouhal number 隨流速變化的結果，如表 2-33 及圖 2-67 所示，從結果可看出 Strouhal number 隨入口處流速的變化很小，數值約為 0.205，且相差不超過 3%，與文獻[41]比對，如圖 2-30 所示，在雷諾數介於 2700 至 14000 的區間中，數值約在 0.21 至 0.2 之間，此結果與本研究結果相符。從上述結果可以看出，在有限的網格大小對時間步長收斂後的 IB-LBM 三維圓柱模型，在不同流速下得到的阻力係數及 Strouhal number 相當穩定且與文獻結果相符，升力係數雖然在入口流速為 6 m/s 時特徵不同，其他流速下有相同的趨勢與相近的結果。

入口流速 (m/s)	雷諾數	阻力係數	升力係數	頻率(Hz)	Strouhal number
2	2738	1.3240	0.0540	20.32	0.2032
4	5477	1.3055	0.0455	40.88	0.2044
6	8215	1.3147	0.0320	62.22	0.2074
8	10953	1.2977	0.0459	82.28	0.2057
10	13692	1.3055	0.0485	102.80	0.2056

表 2-33 不同流速下阻力係數、升力係數、Strouhal number 的結果

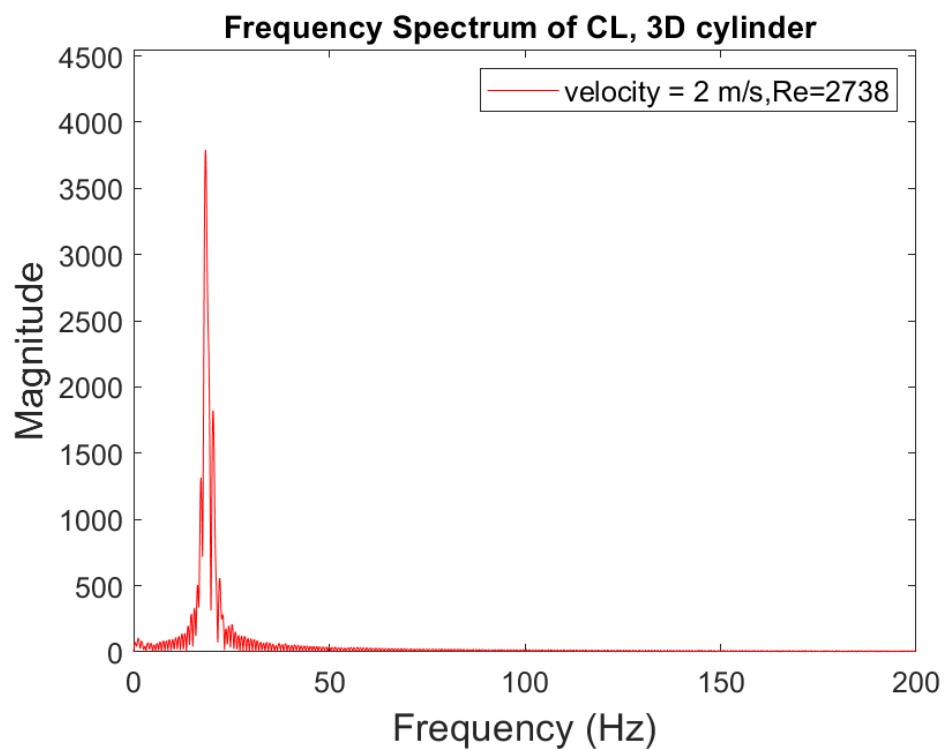
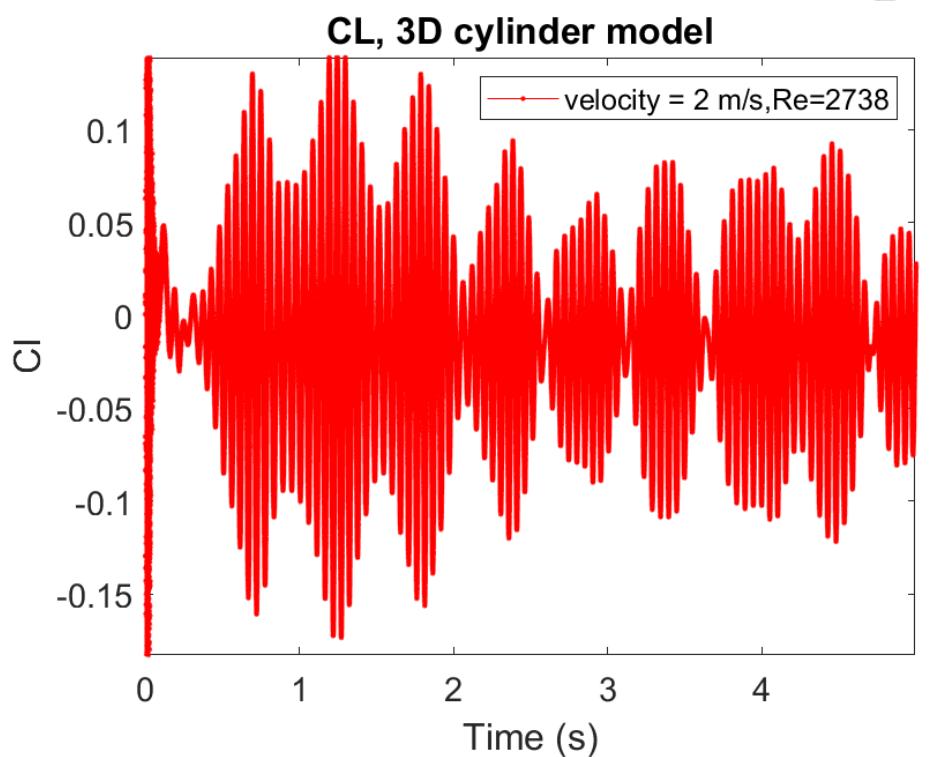


圖 2-60 入口處流速 2 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果

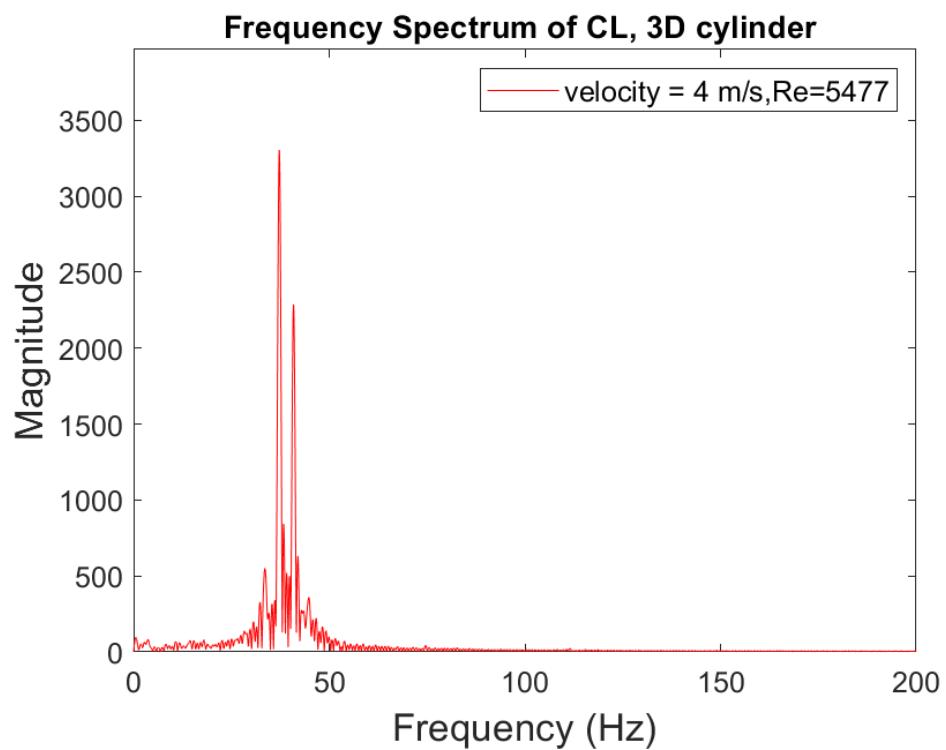
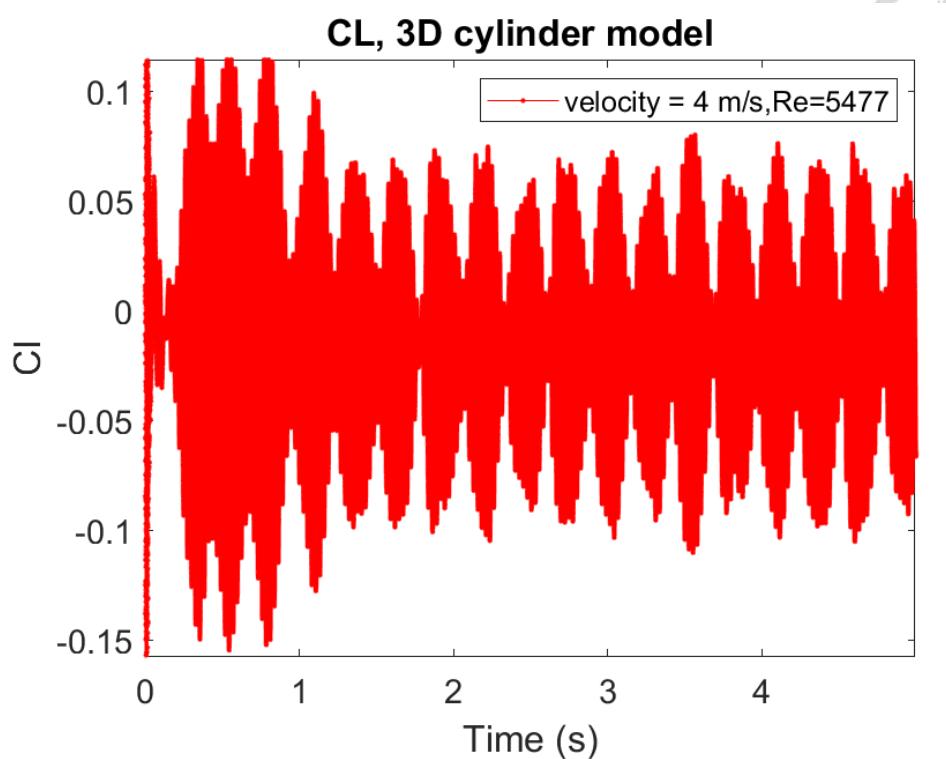


圖 2-61 入口處流速 4 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果

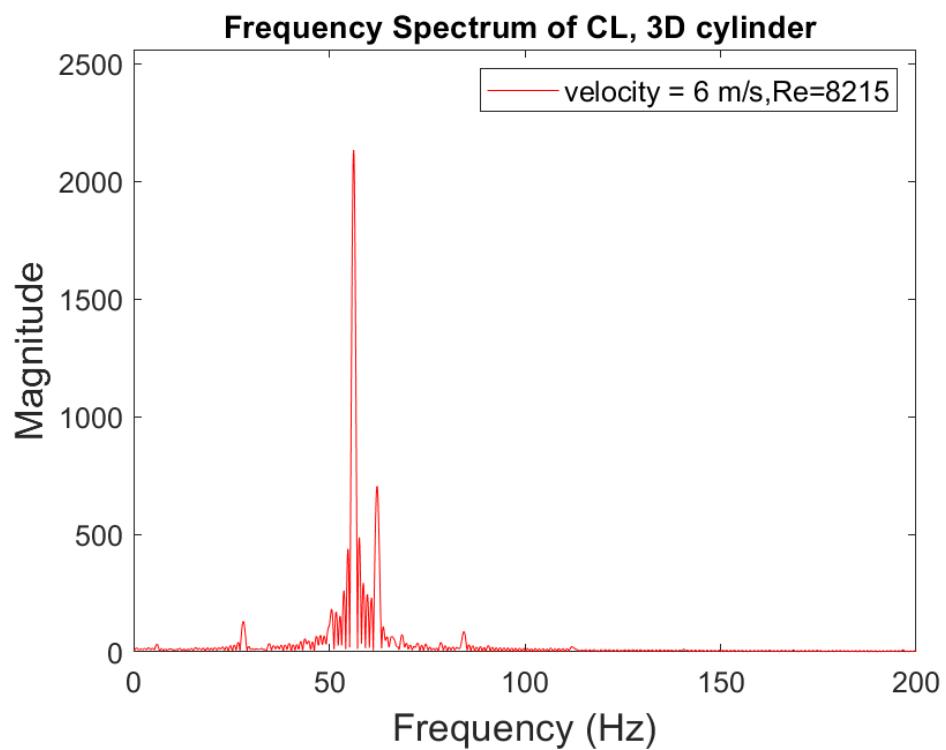
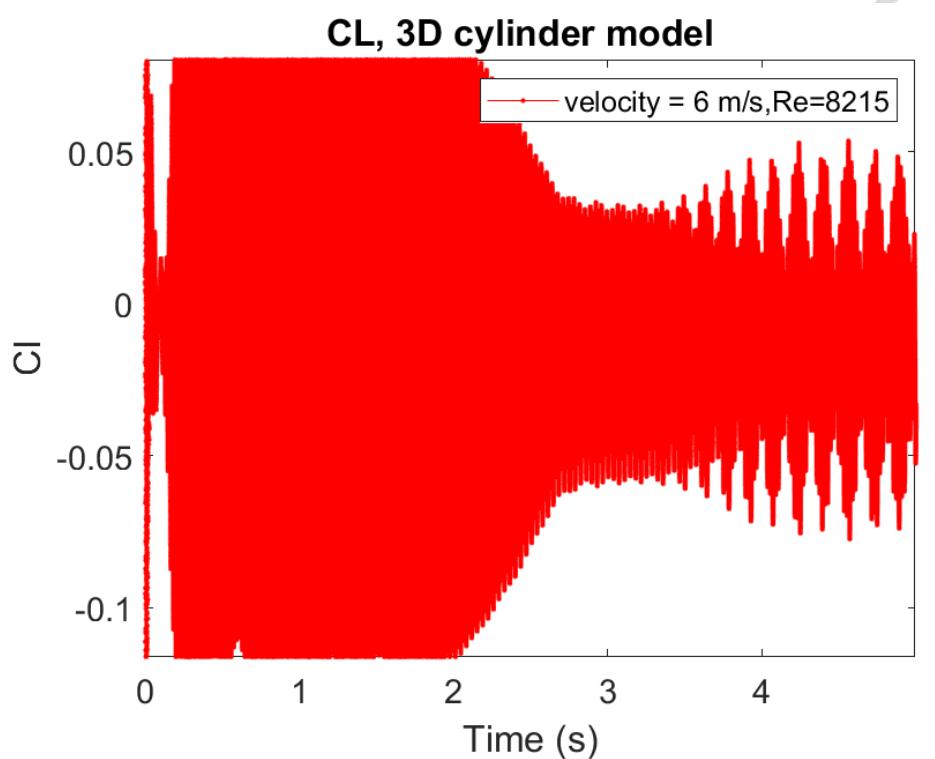


圖 2-62 入口處流速 6 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果

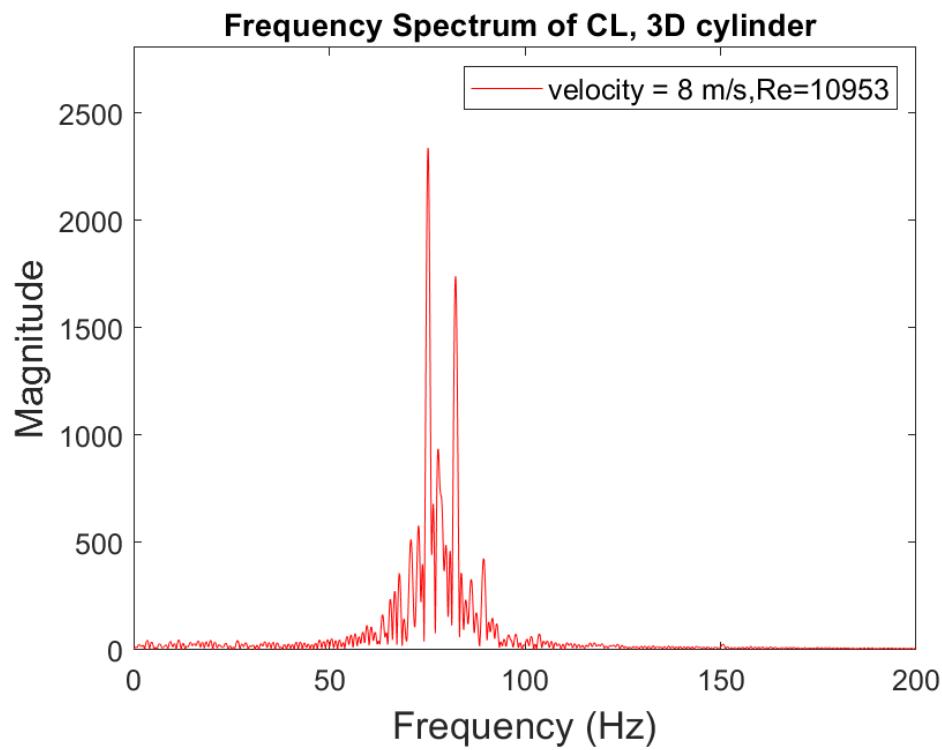
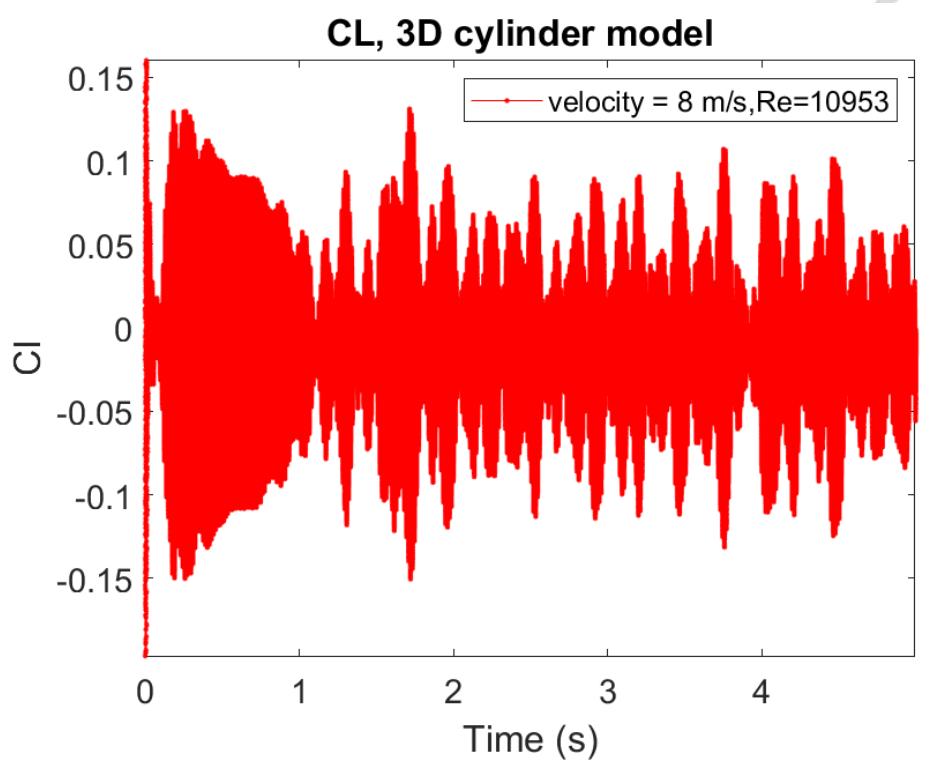


圖 2-63 入口處流速 8 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果

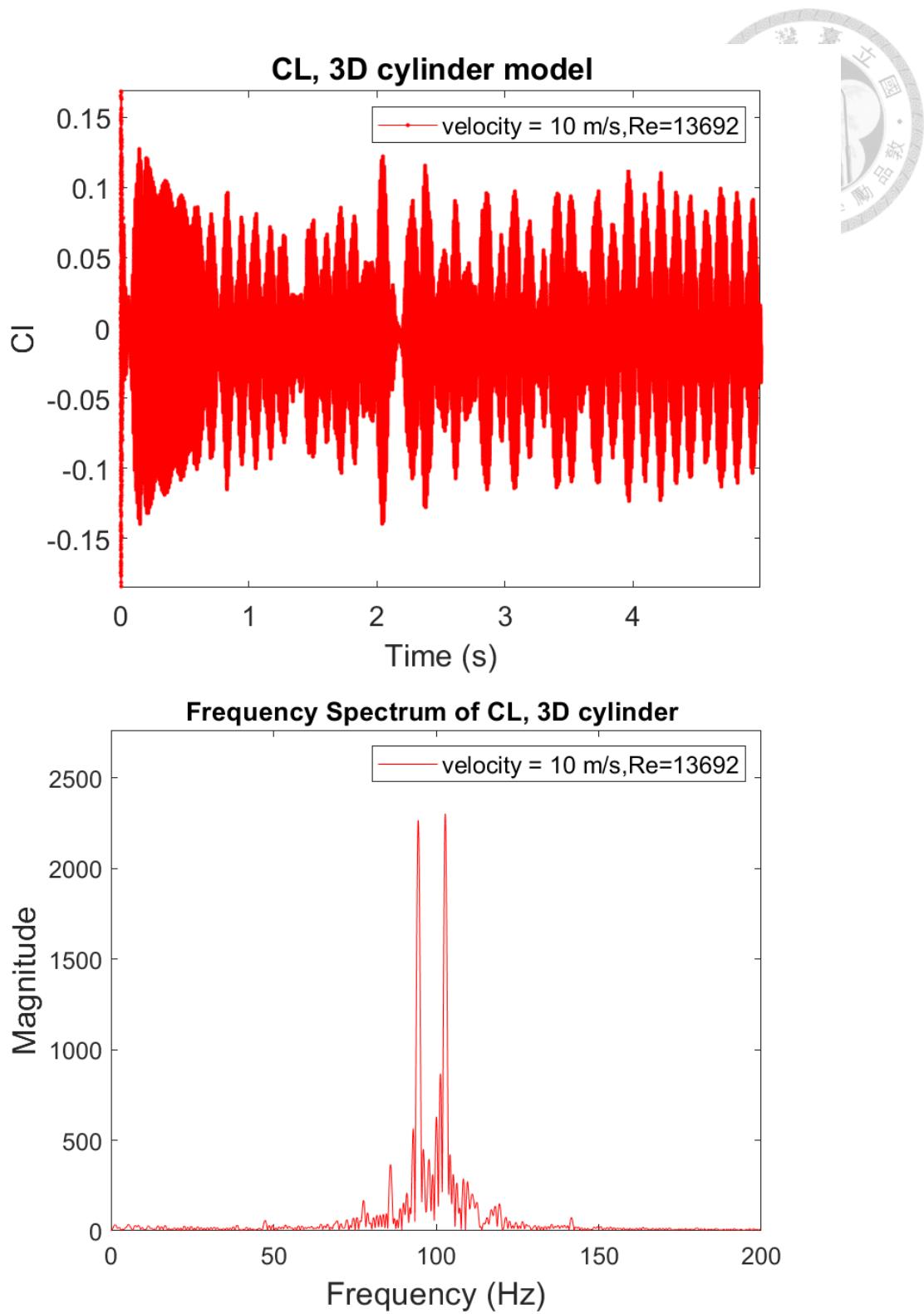


圖 2-64 入口處流速 10 m/s 下，升力係數及其經 FFT 後的結果

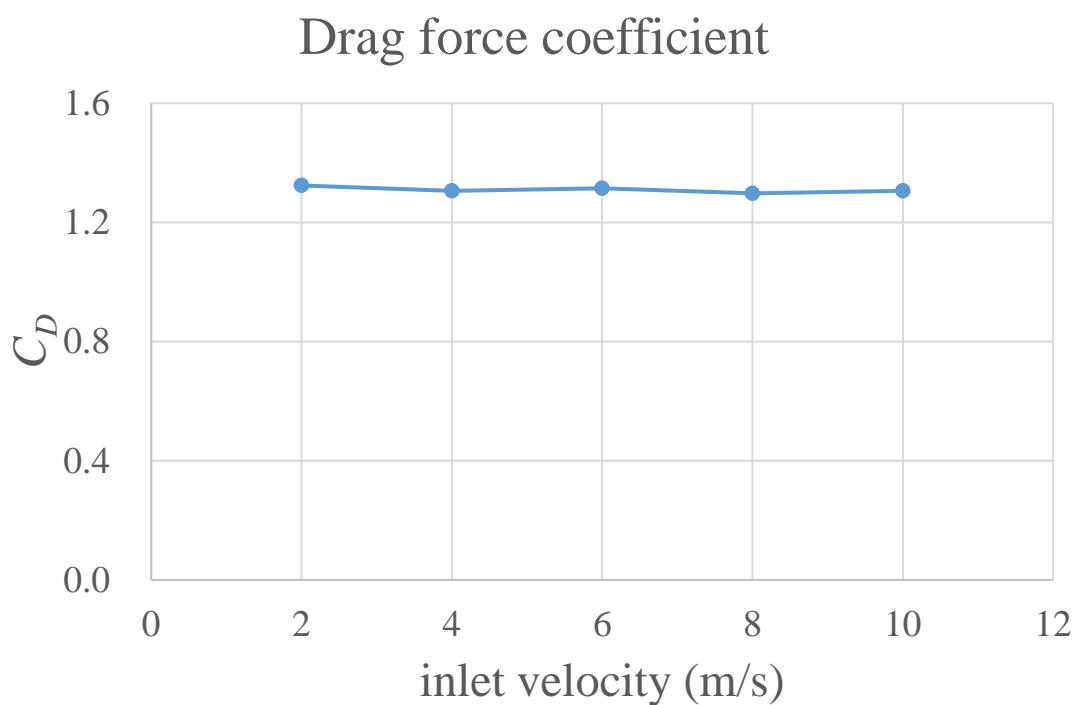


圖 2-65 阻力係數隨流速變化

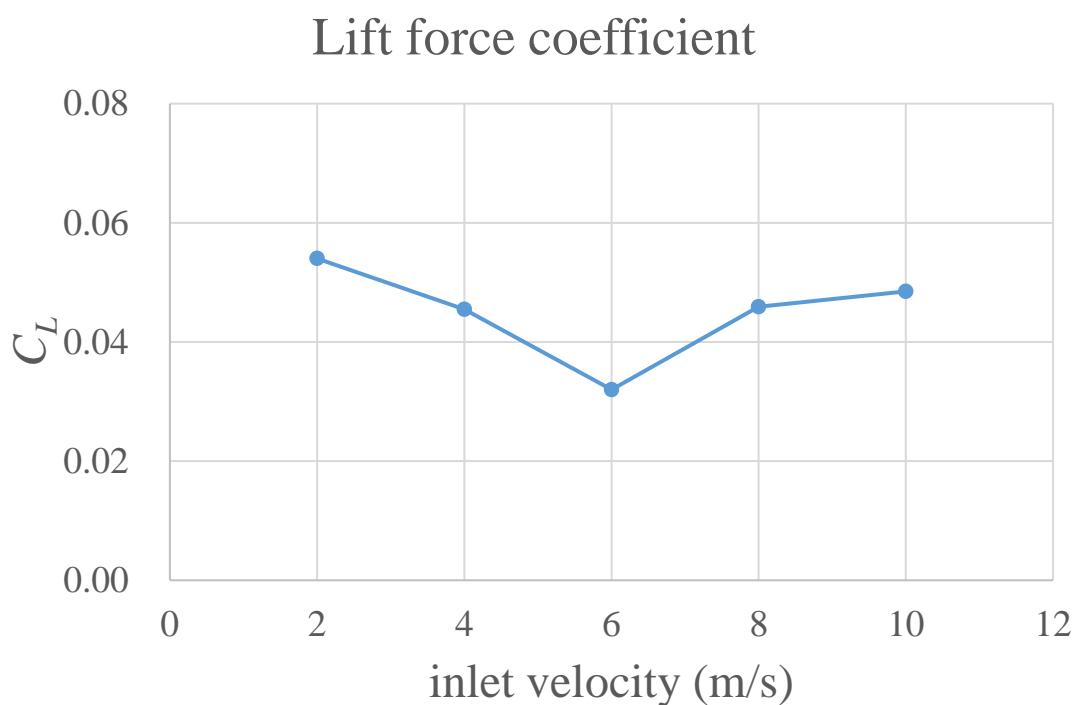


圖 2-66 升力係數隨流速變化

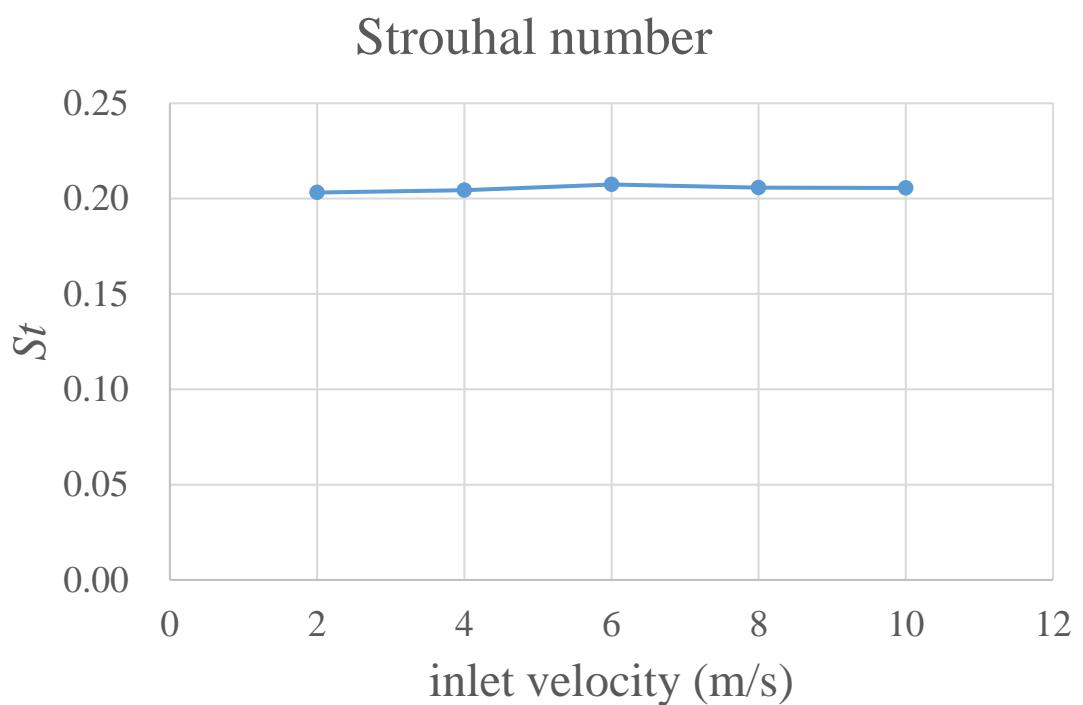


圖 2-67 Strouhal number 隨流速變化

第三章 雙向流固耦合數值方法



本章將先前提到的 IB-LBM 模型與壓電平板疊加法[42]做結合，壓電平板疊加法及其動態響請見附錄，分析將壓電平板放置風洞中，入口處流速分別在 2 m/s 至 12 m/s 下，雷諾數位於 2700 至 16500 間，隨著圓柱產生的卡門渦街對壓電平板造成的影响，包含壓電平板之位移與產生之電壓大小，也同時考慮壓電平板變形對流場造成的影响，實現 IB-LBM 流場模擬結合壓電平板疊加法之雙向流固耦合分析。

計算速度方面提出兩種模型的簡化方法，包含延長壓電平板計算週期與平板受力簡化，分別透過減少壓電平板位移的計算次數，以及簡化受力的計算次數，在可接受的誤差下，大幅降低所需的計算時間。

3.1 壓電薄板疊加法與機電耦合轉換效應

本研究使用的壓電平板其幾何尺寸為長度 51.8 mm，寬度 31.8 mm，厚度 0.51 mm，為串聯型壓電雙晶片以串聯電極連接(SBS)，其材料參數與壓電薄板理論計算請見附錄，利用壓電薄板薄板理論，將原先三層結構的壓電陶瓷雙晶片簡化成一矩形薄板，再利用疊加法求解其振動模態及其對應頻率。

利用變數分離法並考慮集中力對平板造成的暫態位移，進而求解 IB-LBM 之雙向流固耦合模型中，流場晶格與代表壓電平板之固體格點間的作用力造成的平板位移，如(7-119)式所示，在附錄中以 x_1 方向及 x_2 方向代表平板的面內方向，以 x_3 方向代表平板的面外方向，然而在 IB-LBM 模型的討論中，為了方便二維模型與三維模型的比較， x 方向、 y 方向、 z 方向比照圖 2-4 所示，則平板之面內方向變為 x 方向與 z 方向，面外方向變為 y 方向，(7-119)式可改寫為

$$u_y(x, z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \frac{W_i(x, z) W_i(x_p, z_q)}{\rho^{eq} h \omega_i} \left[\frac{\int_0^t F(x_p, z_q, \tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau}{\int_0^a \int_0^b W_i^2 dz dx} \right] \quad (3-1)$$



其中 W_i 為第 i 個模態下的振動位移模態， ω_i 為第 i 個模態下的振動頻率， ρ^{eq} 為壓電陶瓷雙晶片之等效密度， $F(x_p, z_q, \tau)$ 為一代表平板之固體格點在不同時間下受到的力；開路假設下的電壓響應可寫為

$$V_{open}^{(serial)} = \frac{2\bar{e}_{31}^{(u)}}{C_p} (h_c + h_p) \int_0^a \int_0^b (u_{y,xx} + u_{y,zz}) dz dx \quad (3-2)$$

其中 $V_{open}^{(serial)}$ 為開路假設下之電壓響應， $\bar{e}_{31}^{(u)}$ 為壓電陶瓷雙晶片中上層陶瓷層之壓電應力常數(Piezoelectric Stress Coefficient)， C_p 代表壓電陶瓷雙晶片中陶瓷層之寄生電容。



3.2 IB-LBM 數值計算結合薄板理論解析

3.2.1 沉浸式邊界計算修正

第 2.3.3 節中討論過，在 IBM 中固體格點其受力以及與周圍流場晶格的交互關係，可透過求解(2-69)式中的力量 F ，再代入周圍流場晶格的動量與分布函數計算即可，求解方法為對原先(2-69)式 $[A] \times [F] = [B]$ 中的矩陣 A 求取反矩陣，再將反矩陣與矩陣 B 相乘，以求得力量 F ，亦即

$$[F] = [A]^{-1} \times [B] \quad (3-3)$$

本章所討論的雙向耦合數值方法計算流程與單向耦合大致相同，主要有兩點不同

1. 需更新固體格點位置的矩陣 A ：

在單向耦合中假設固體均為剛體，代表剛體的固體格點不會有移動，故其座標固定，而(3-3)式中的反矩陣 $[A]^{-1}$ 僅與固體格點和流場晶格的座標有關，所以在單向耦合中反矩陣 $[A]^{-1}$ 僅在初始化時計算一次，後續則維持不變；在雙向耦合數值方法中，因固體為可變形之彈性體或剛體位移，代表固體的固體格點為時間的函數，所以需不斷更新與固體格點座標有關的矩陣 A ，如(2-70)式所示，再求其反矩陣 $[A]^{-1}$ ，因計算反矩陣需耗費大量時間，更新矩陣的週期於後續 3.2.2 節做討論。

2. 需修正矩陣 B 之計算式：

在單向耦合數值方法中，因固體格點不會移動，故計算(3-3)式中的矩陣 B 不需考慮其速度，如(2-71)式所示；在雙向耦合數值方法中，則需將固體格點的速度代入做計算。

3.2.2 更新週期之影響與選擇

上一節提到在雙向耦合數值方法中，需對(2-69)式中的矩陣 A 進行反矩陣計算，更新固體格點的座標，考量到此動作需耗費大量時間，若延長更新座標的週期，如



經過 10 個時間間隔再更新一次座標下，對壓電平板位移及電壓的影響不大，則可以加速數值計算速度，但有可能付出累積誤差的代價。

分析 IB-LBM 雙向流固耦合模型，示意圖如圖 3-1 所示，網格大小為 2 mm，總網格數為 9,000,000，時間步長為 $4\mu\text{s}$ ，總模擬時長 5 sec，分析的位移位置如圖 3-2 所示，取圖中紅色、藍色、綠色三點的位置，以 GPU RTX 4080 分析並評估計算時間，比較更新週期在每 1 輪更新一次至每 1000 輪更新一次下的結果誤差及計算所需時間。每輪更新的位移與電壓結果如圖 3-3 所示，在入口處流速為 2 m/s 時，雷諾數為 2738，平板位移的振幅會隨時間來回變化，類似拍頻的現象，電壓響應也有相似的趨勢，比較經過 10 輪、30 輪、100 輪、1000 輪回傳一次的結果，如圖 3-4 至圖 3-7 所示，可看出不僅趨勢相同，且不同圖之間幾乎看不出差別，從數值上比較位移、電壓、計算時間，結果如表 3-1 所示，其中位移取平板尾端的中間處，如圖 3-2 的藍點位置，從結果可看出，隨著更新週期增加，計算反矩陣的次數降低，位移的誤差也逐漸增加，但即便是計算 1000 輪更新一次，位移的誤差亦不超過 1%，電壓的誤差亦不超過 1%，若更新週期在 100 輪以下，則位移誤差低於 0.2%，電壓誤差低於 0.4%，計算時間的部分，若每輪計算均計算反矩陣並更新固體格點的座標，則共耗時 161.6 小時，當修改成每計算 10 輪再更新一次，則計算時間減少至 63.9 小時，相差 60.5%，將更新週期延長至 30 輪或以上再更新一次，則模擬時間會在 55 小時以下。

除了入口處 2 m/s，雷諾數為 2738 的流場外，也針對高流速流場，入口處流速 10 m/s，雷諾數 13692 的流場進行更新週期的分析，頻估在更新週期每 1 輪至 1000 輪更新一次下的位移與電壓，位移及電壓結果如圖 3-8 至圖 3-11，從圖可看出隨著更新週期的改變，不同圖之間趨勢相同且幾乎看不出差別，數值上的結果，如表 3-2 所示，因為相同模型下只改變入口處流速，不會影響計算時間，因此模擬時間參考表 3-1 即可，從結果可看出，相較於每輪更新，即使將更新週期拉長到 1000 輪更

新一次，位移與電壓的誤差依舊在 0.2% 以下，不會因為雷諾數的提高而對於平板更新週期要較大的要求。

從上述結果可看出，透過延長更新位置矩陣 A 的週期，減少計算反矩陣的頻率，可以大幅加快數值分析的計算速度，並且在入口處流速 2 m/s 與 10 m/s，雷諾數 2738 與 13692 的流場中，誤差均相當低。考慮到更新週期為 10 輪時已有很明顯的加速效果以及結果準確度，並考量難以保證在其他流速下搭配較大的更新週期不會有更大的誤差，後續的更新週期選擇較保守的每 10 輪更新一次。

在更新週期的預測中，理想上希望能找出影響更新週期的主因，以此進行更新週期之預測及經驗公式的提出，如流場雷諾數、幾何尺寸與比例、間隔時間、結構波速等等，供其他模型參考，增加更新週期評估之泛用性，然而考慮現有的分析結果，在數據上誤差皆小於 1%，難以找出更新週期之判斷標準。

更新週期	位移(μm)	相差	電壓(V)	相差	模擬時間(h)	相差
1	0.3650		0.0252		161.6	
10	0.3654	0.11%	0.0252	0	63.9	60.5%
30	0.3652	0.05%	0.0252	0	54.7	66.2%
100	0.3645	0.14%	0.0251	0.40%	52.9	67.2%
1000	0.3629	0.58%	0.0250	0.79%	53.0	67.2%

表 3-1 入口處流速 2 m/s，不同回傳週期下，壓電平板位移、電壓及模擬時間的比較

更新週期	位移(μm)	相差	電壓(V)	相差
1	105.84		7.2421	
10	105.83	0.01%	7.2382	0.05%
100	105.69	0.14%	7.2285	0.19%
1000	106.04	0.19%	7.2558	0.19%

表 3-2 入口處流速 10 m/s，不同回傳週期下，壓電平板位移、電壓的比較

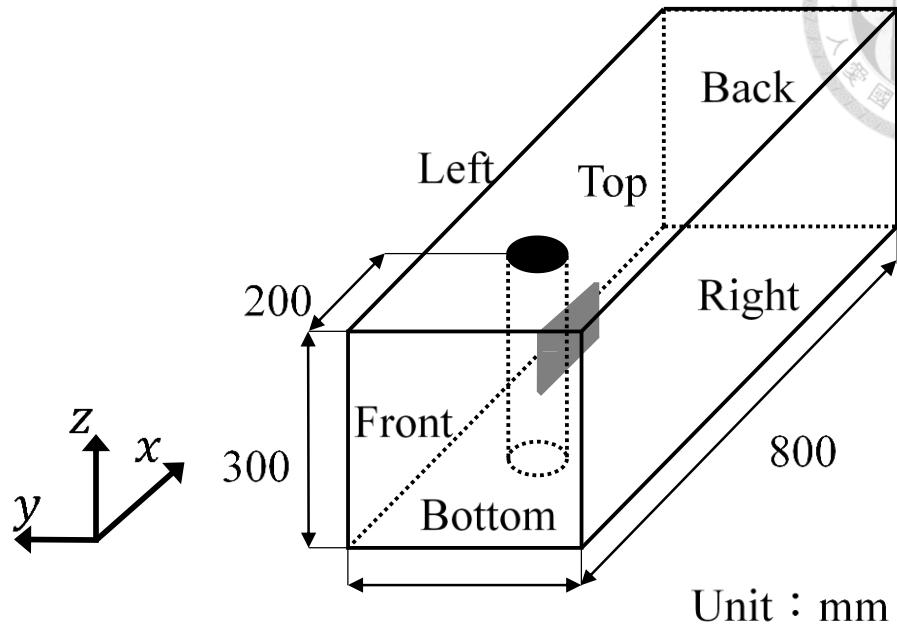


圖 3-1 三維壓電能量擷取系統架構示意圖

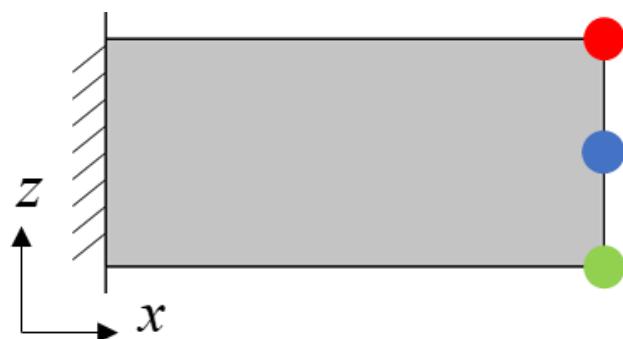


圖 3-2 壓電平板位移取值位置示意圖

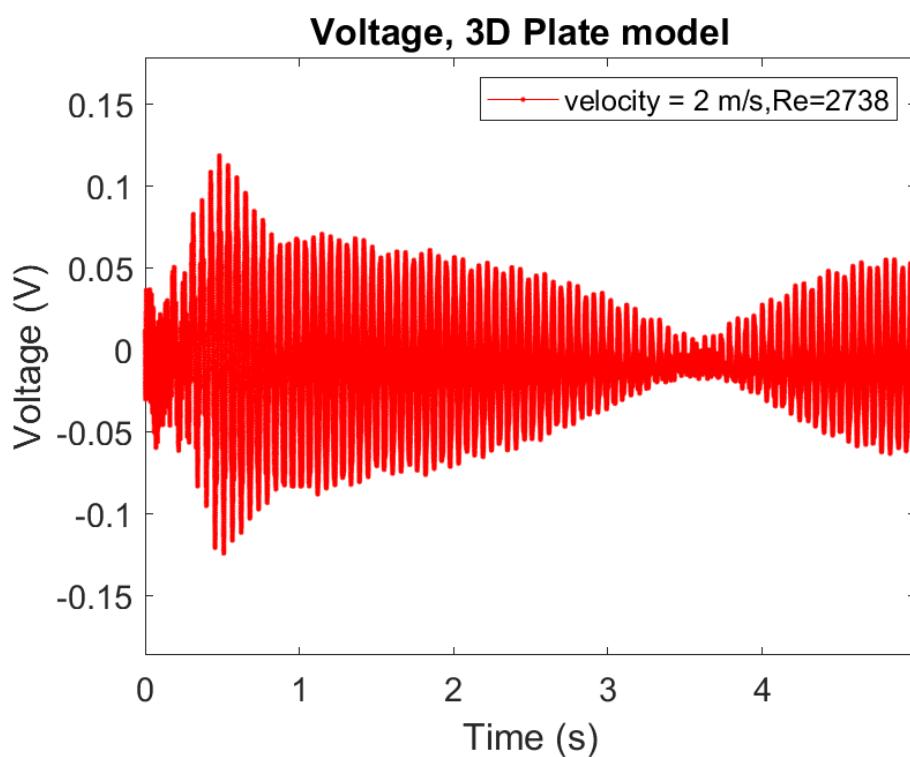
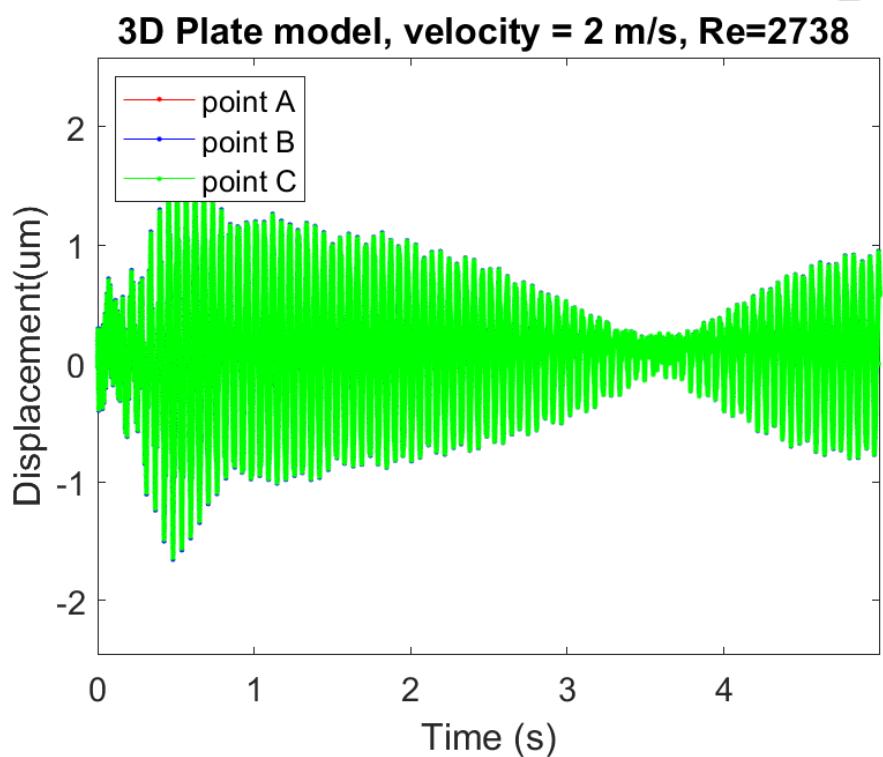


圖 3-3 入口流速 2 m/s 下，壓電平板每輪更新一次的位移與電壓

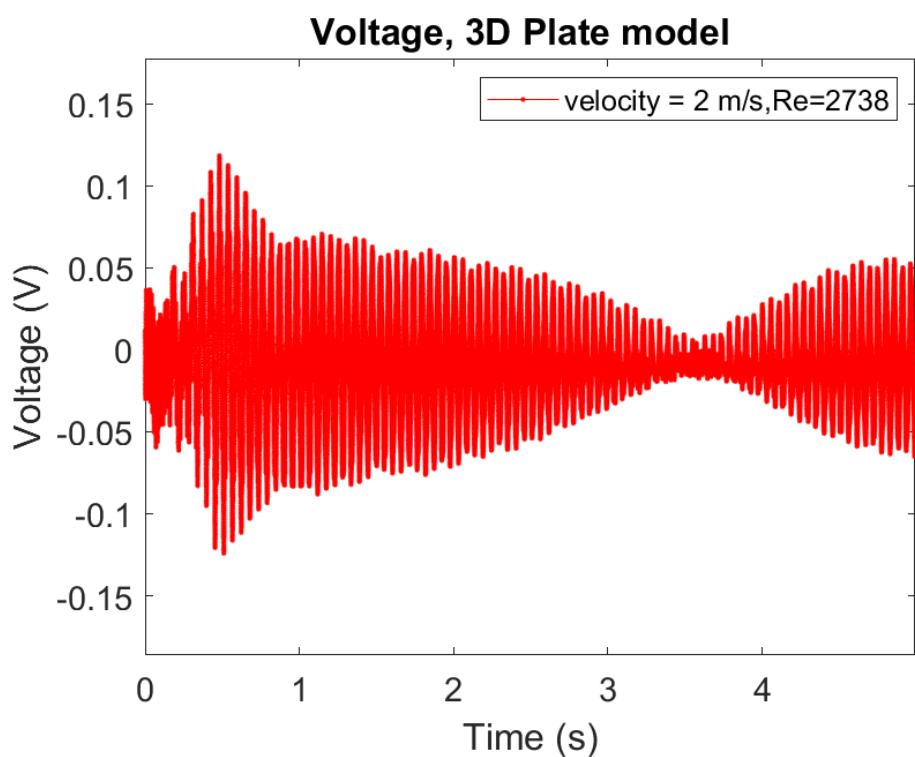
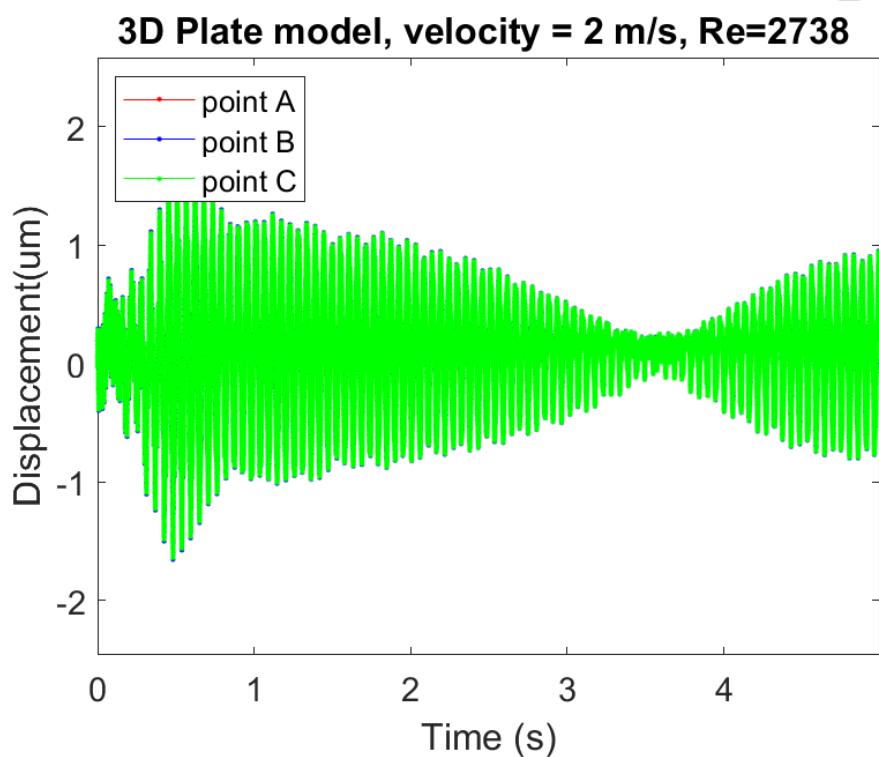


圖 3-4 入口流速 2 m/s 下，壓電平板每 10 輪更新一次的位移與電壓

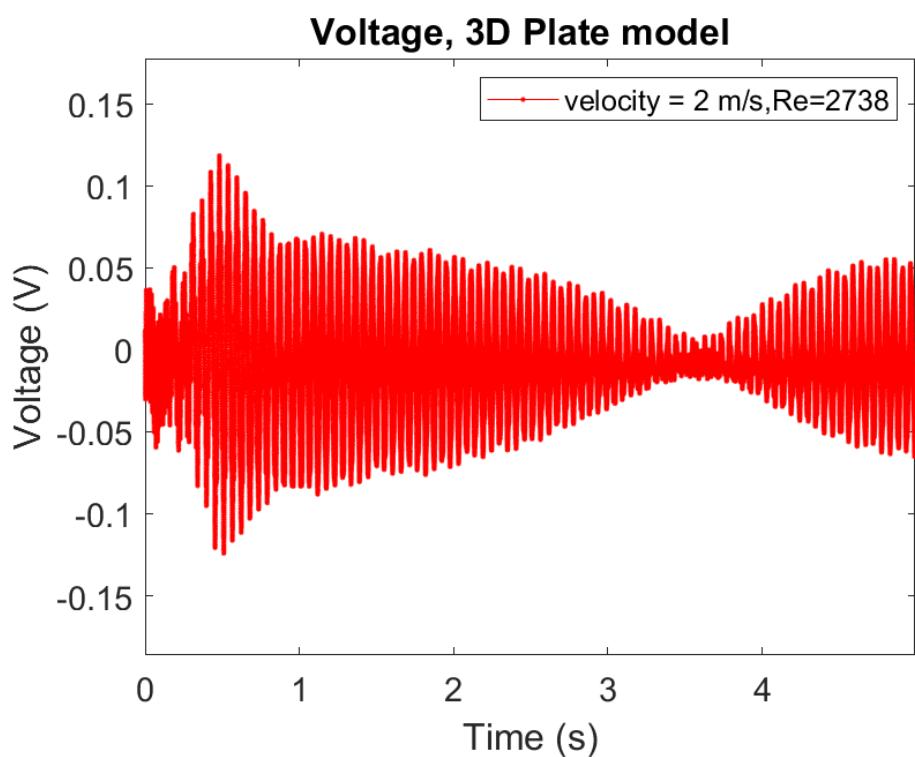
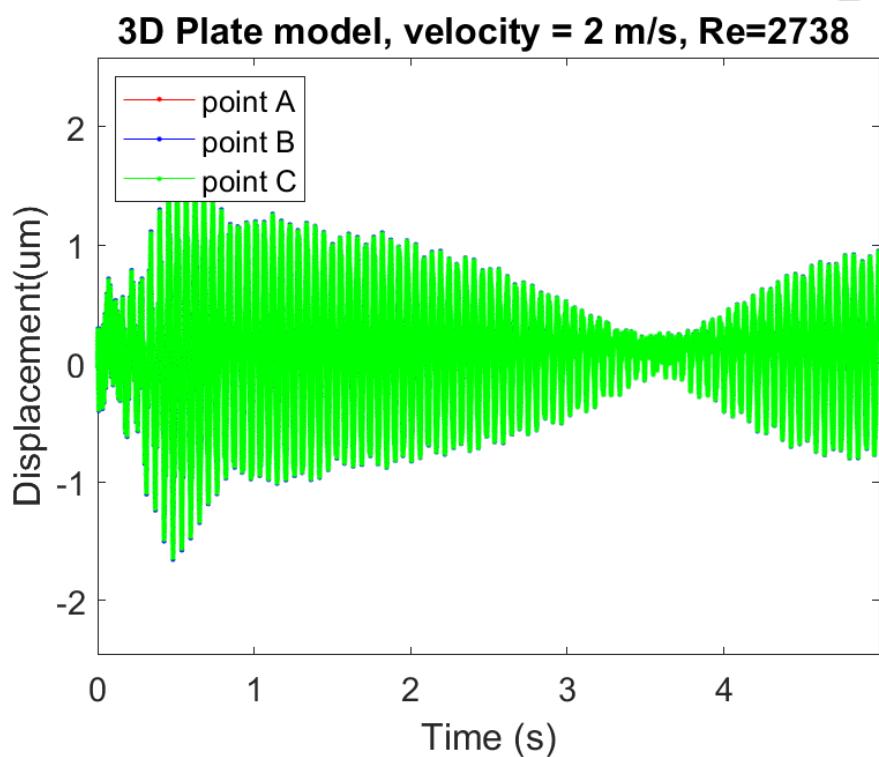


圖 3-5 入口流速 2 m/s 下，壓電平板每 30 輪更新一次的位移與電壓

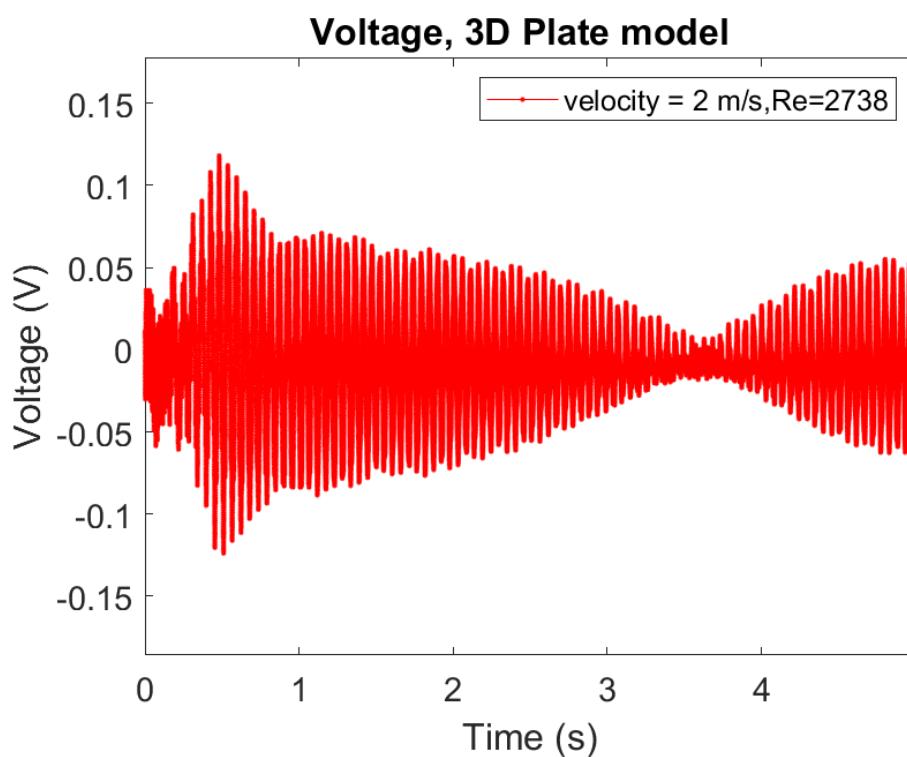
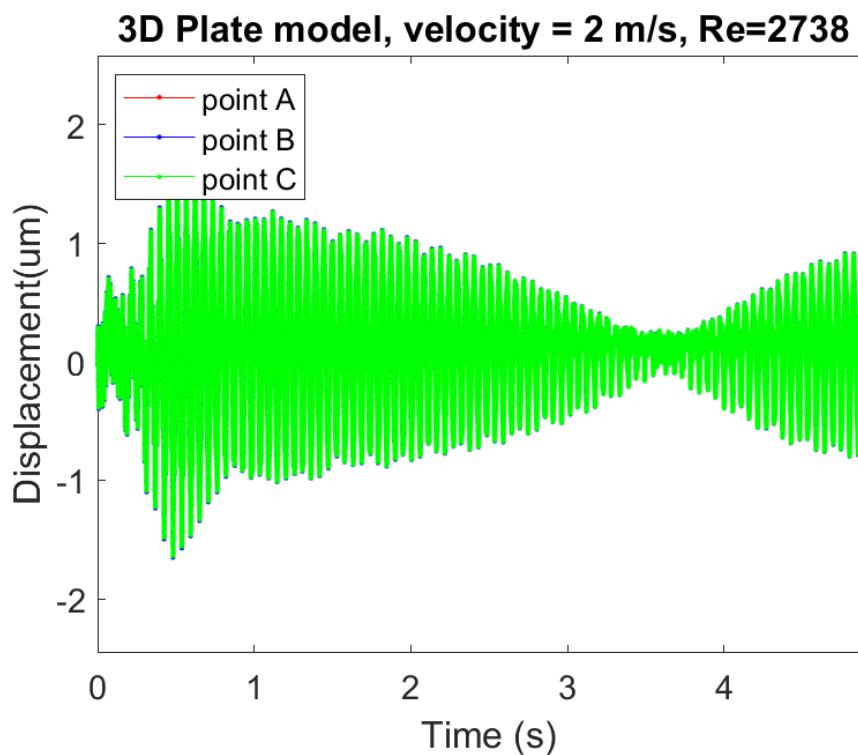


圖 3-6 入口流速 2 m/s 下，壓電平板每 100 輪更新一次的位移與電壓

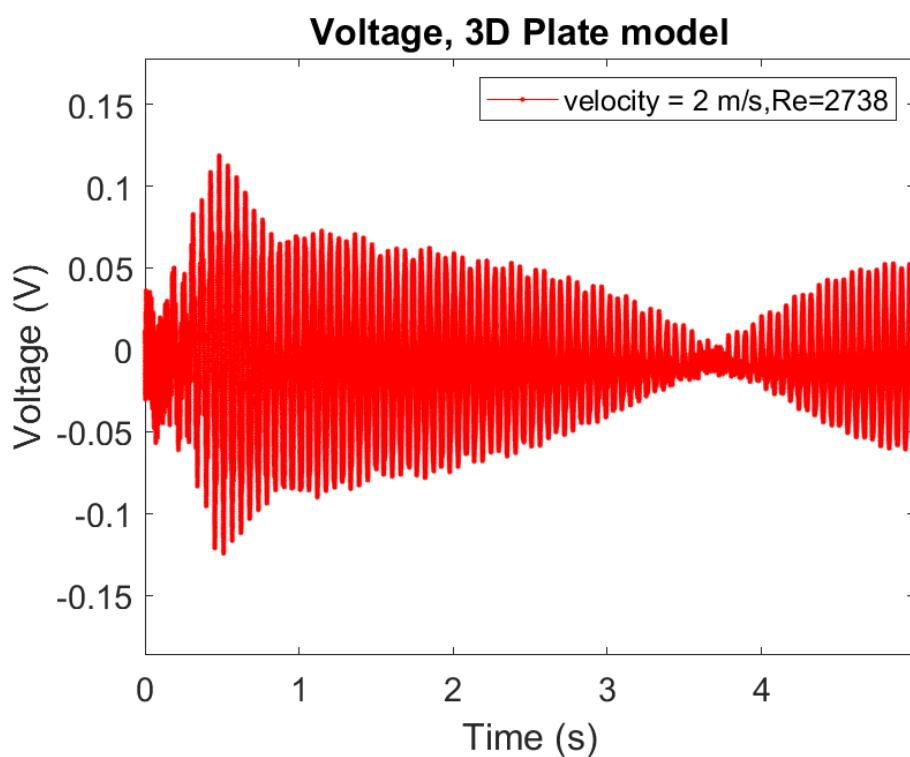
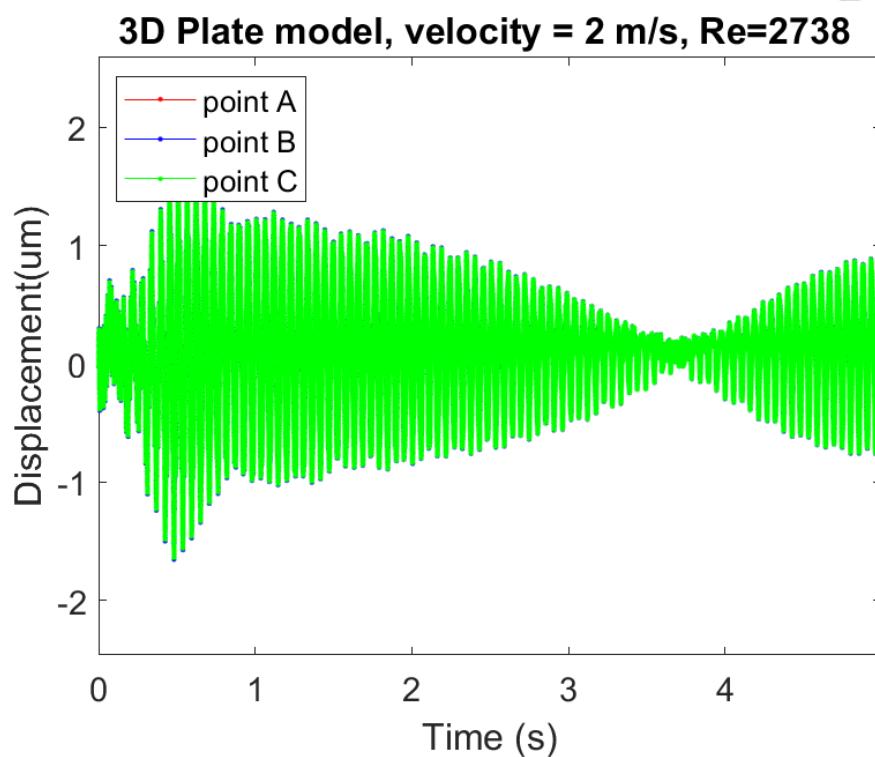


圖 3-7 入口流速 2 m/s 下，壓電平板每 1000 輪更新一次的位移與電壓

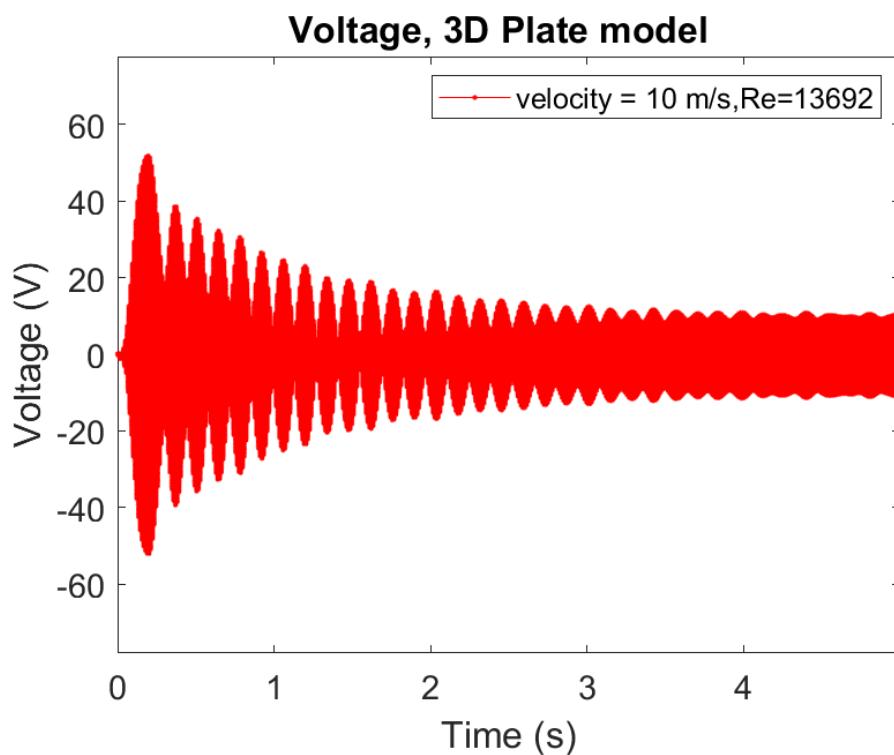
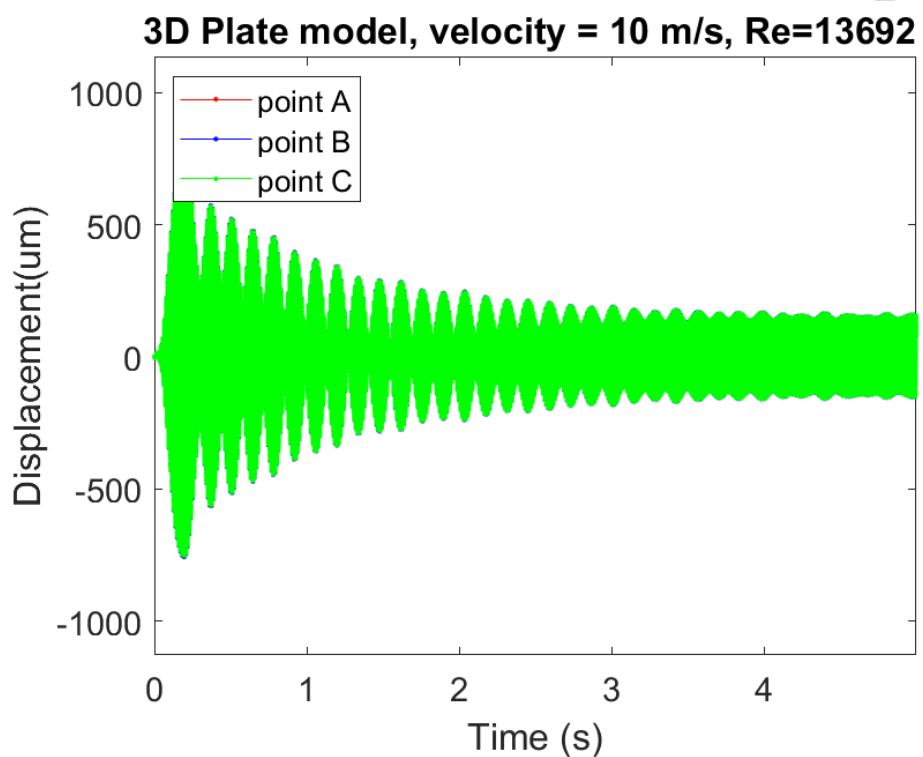


圖 3-8 入口流速 10 m/s 下，壓電平板每輪更新一次的位移與電壓

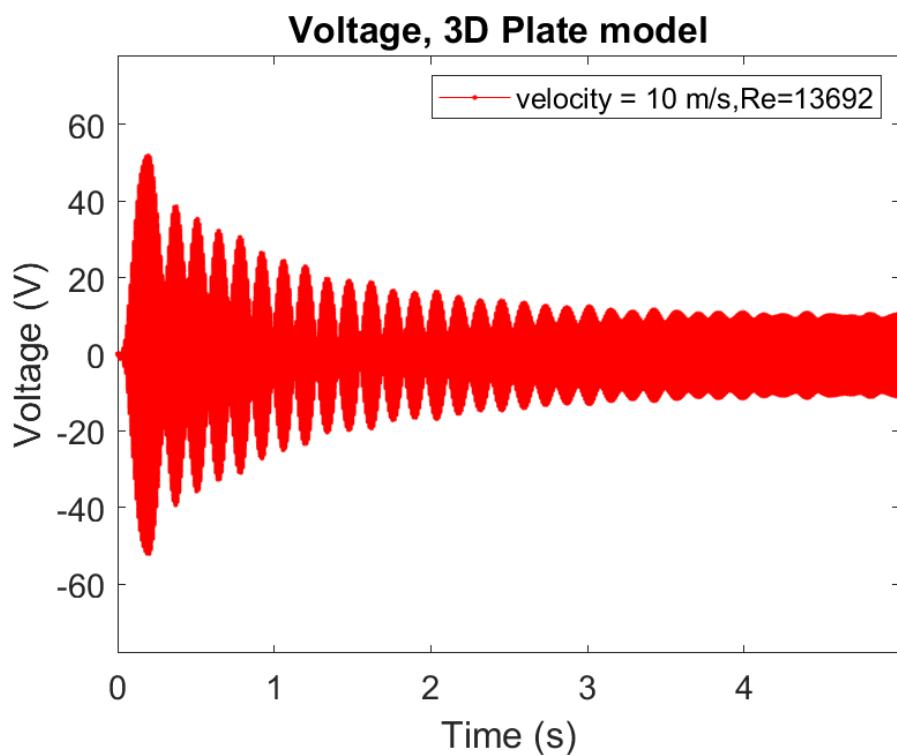
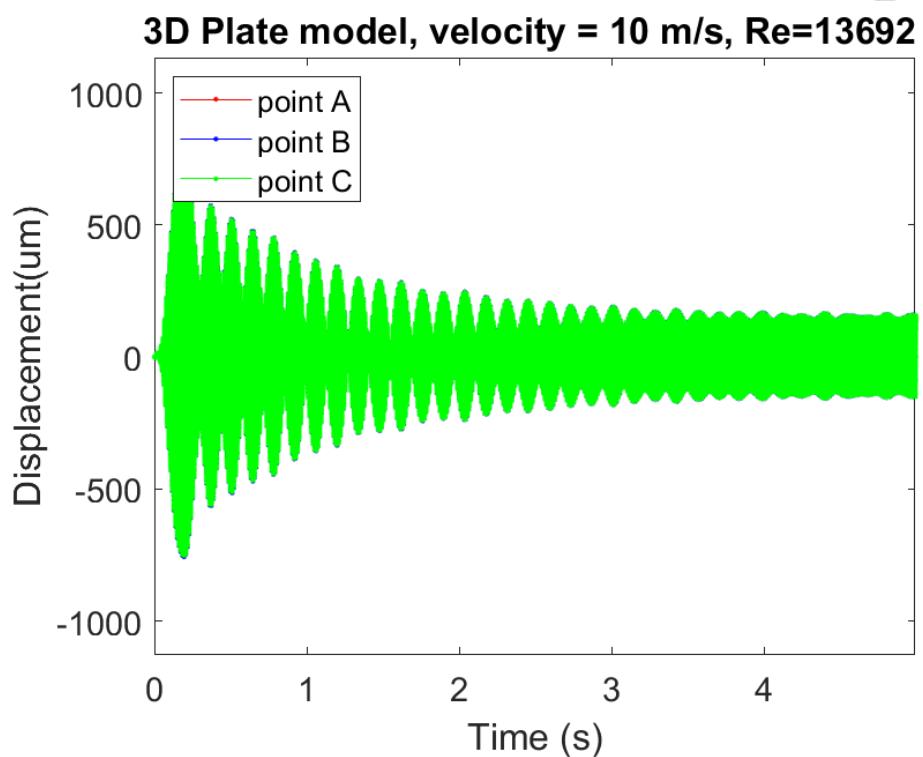


圖 3-9 入口流速 10 m/s 下，壓電平板每 10 輪更新一次的位移與電壓

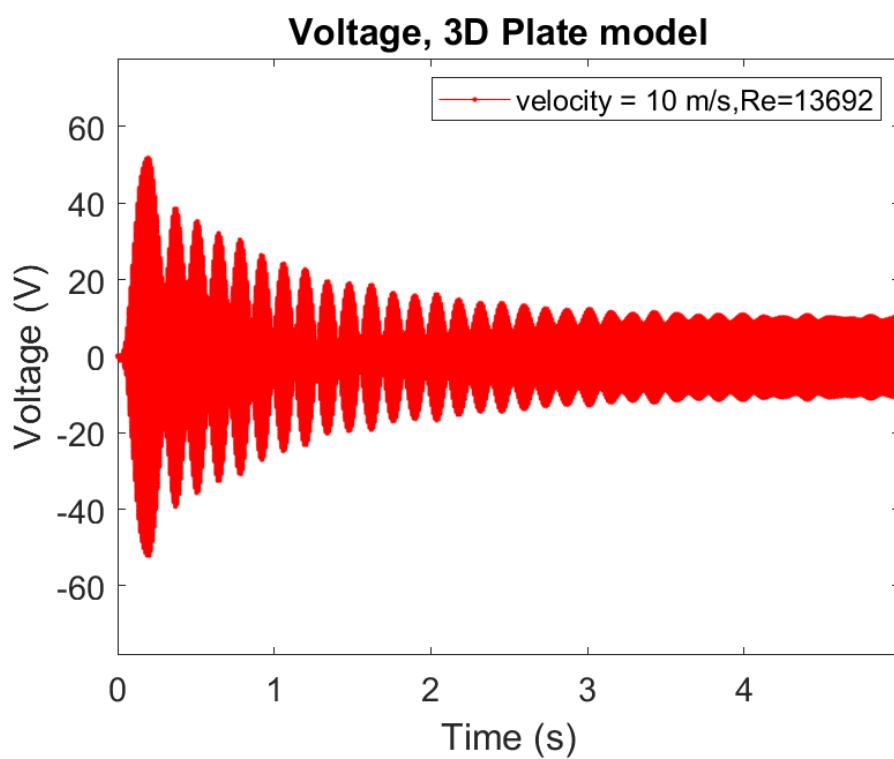
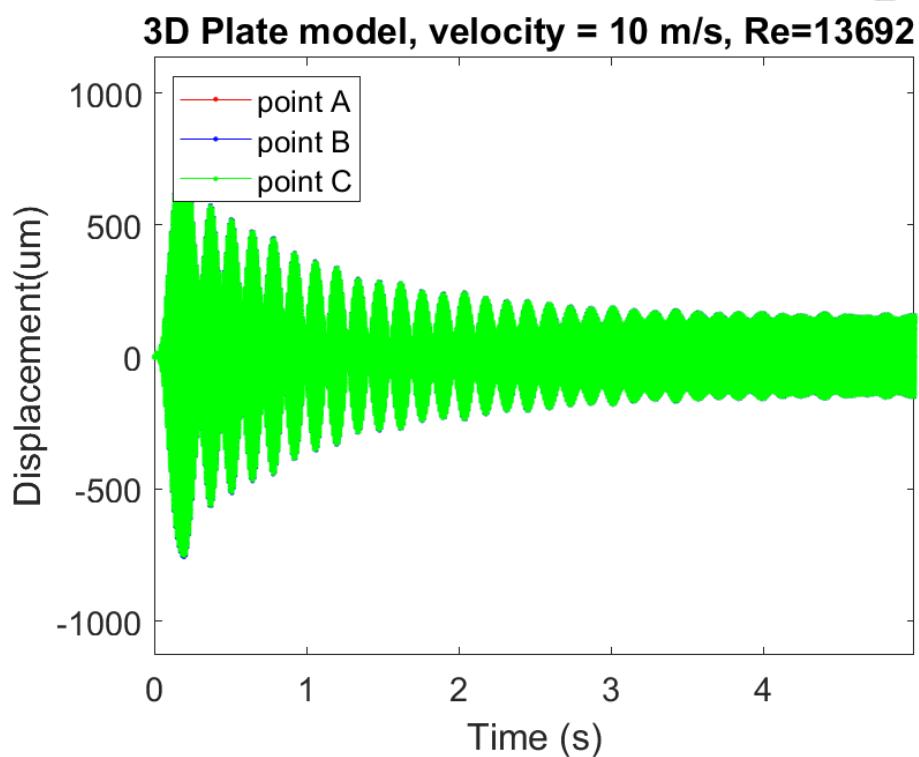


圖 3-10 入口流速 10 m/s 下，壓電平板每 100 輪更新一次的位移與電壓

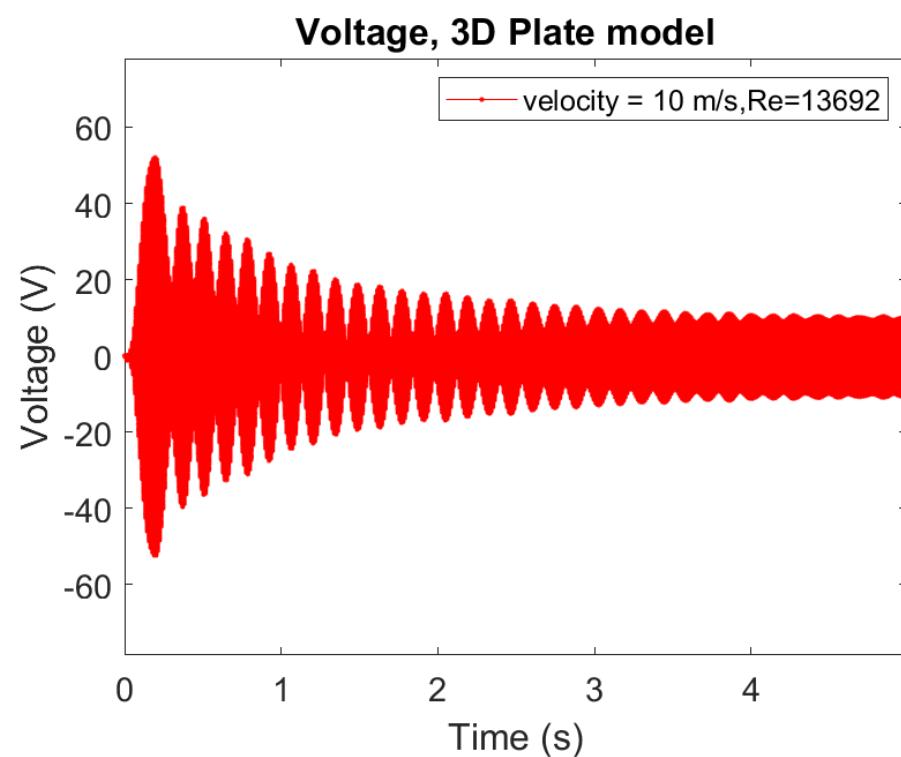
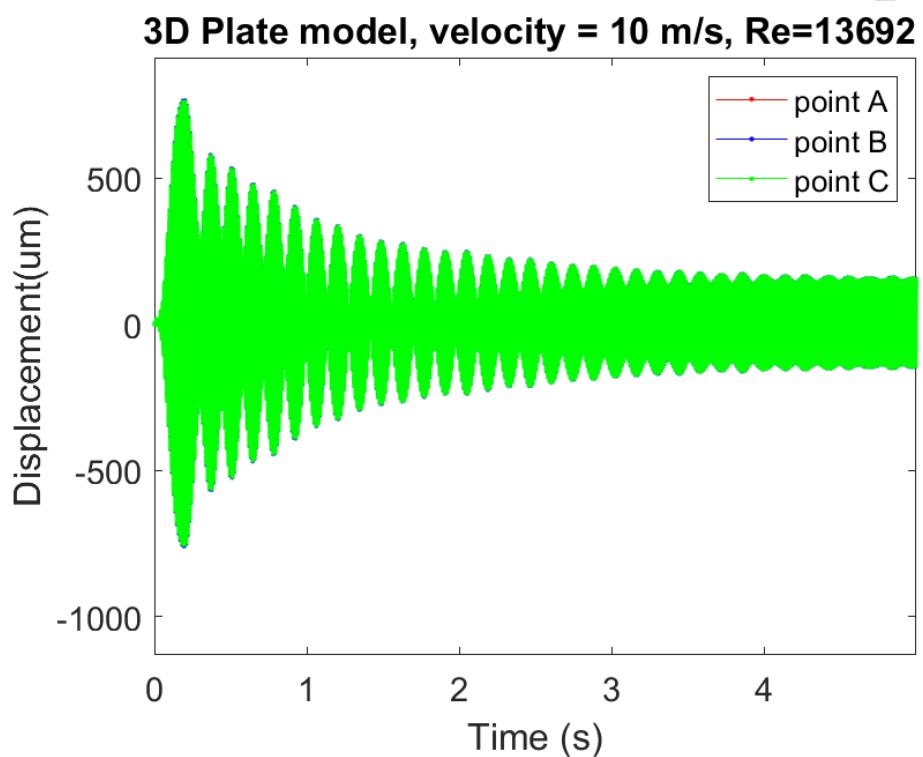


圖 3-11 入口流速 10 m/s 下，壓電平板每 1000 輪更新一次的位移與電壓



3.2.3 簡化平板模型

在 IB-LBM 雙向流固耦合數值方法中平板受力後的暫態響應可表示成(3-1)式，其中積分項 $\int_0^t F(x_p, z_q, \tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau$ 代表考慮過往每個時間間隔下，所有的力量造成的影響，例如在網格大小為 2 mm 下，壓電平板尺寸為長度 51.8 mm，寬度 31.8 mm，厚度 0.51 mm，平板共有 $27 \times 16 \times 2 = 864$ 個固體格點，時間步長為 $4 \mu\text{s}$ ，總計算時長 5 sec 下，總迭代次數 1,250,000 次，在此模型設定下，最後一次迭代時，積分項 $\int_0^t F(x_p, z_q, \tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau$ 考慮過往每個時間間隔下，每個固體格點的受力，共需進行 $27 \times 16 \times 2 \times 1,250,000 = 1,080,000,000$ 次計算，考慮佔據顯示記憶體空間，每個力量以 double 格式做儲存，需要 $1,080,000,000 \times 4 \text{Bytes} = 4,320,000,000 \text{B} \approx 4.023 \text{GB}$ ，為了降低所需要的計算時間及顯示記憶體空間，需在模型計算的部分進行化簡。

簡化平板模型是透過將平板沿著 z 方向的受力作加總，減少需要計算的力量數量，然而此動作會使的沿著 z 方向對稱的模態被忽略，為了確保該模態對壓電能量擷取系統的影響很小，在此就壓電平板振動模態與實驗結果做討論。

參考壓電平板的振動模態及風洞實驗結果，其中表 7-3 顯示第一個振動模態，同時也是本研究中壓電能項擷取系統最主要的模態，在沿著壓電平板的 z 方向幾乎沒有變化，座標參考圖 3-1。與實驗結果做比較，將壓電平板放置風洞中圓柱後方，架構圖如圖 3-1 所示，控制馬達變頻器轉速為 22.43Hz，搭配蜂巢板，使入口處風速達到均勻的 4 m/s，詳細的實驗量測流程與風洞校正會在第五章 做介紹，實驗結果如圖 3-13 所示，將位移經過 FFT 後，可看出在圓柱產生的卡門渦街以及壓電平板第一振動模態的頻率，而壓電平板第二振動模態對位移的貢獻假設在此討論中可以忽略，由此可知本研究中的壓電能量擷取系統，其暫態響應主要以第一振動模態為主，表現為扭轉運動的第二模態對機電轉換系統的效率影響很小。



因此在後續計算出固體格點的受力後，會將 z 方向上的受力與模態函數加總並平均，可得

$$\begin{cases} F_{z_ave}(x_p, \tau) = \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N F(x_p, z_q, \tau) \\ W_{i,z_ave}(x_p) = \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N W_i(x_p, z_q) \end{cases} \quad (3-4)$$

，其中 F_{z_ave} 與 W_{i,z_ave} 為受力與模態函數沿著 z 方向平均的結果，(3-1)式可改寫成

$$u_3(x, z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \frac{W_i(x, z) W_{i,z_ave}(x_p)}{\rho^{eq} h \omega_i} \left[\frac{\int_0^t F_{z_ave}(x_p, \tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau}{\int_0^a \int_0^b W_i^2 dz dx} \right] \quad (3-5)$$

與原計算方式比較，在省略寬度受力變形影響下的(3-5)式共需進行 $27 \times 2 \times 1,250,000 = 67,500,000$ 次計算，僅為原先 $1,080,000,000$ 次的 6.25%，在記憶體的部分，需要 $67,500,000 \times 4 \text{Bytes} = 270,000,000 \text{B} \approx 0.251 \text{GB}$ 的顯示記憶體空間，亦為原先 4.023GB 的 6.25%，不論是計算時間還是顯示記憶體空間都大幅降低。

需要強調的是，透過簡化模型進行數值運算，雖然透過加總 x_3 方向上的力量數值，使扭轉模態無法被激發出，但計算中 $W_i(x_1, x_2)$ 沒有被簡化，如(3-5)式所示，所以其他如第一振動模態，沿著 z 方向上的變化也會呈現在壓電平板的暫態響應中。

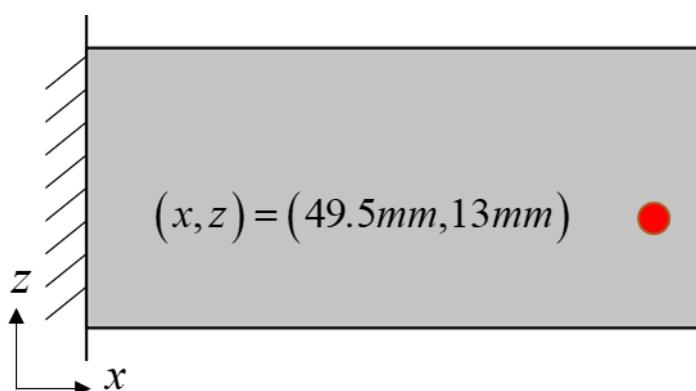


圖 3-12 壓電平板量測位置示意圖

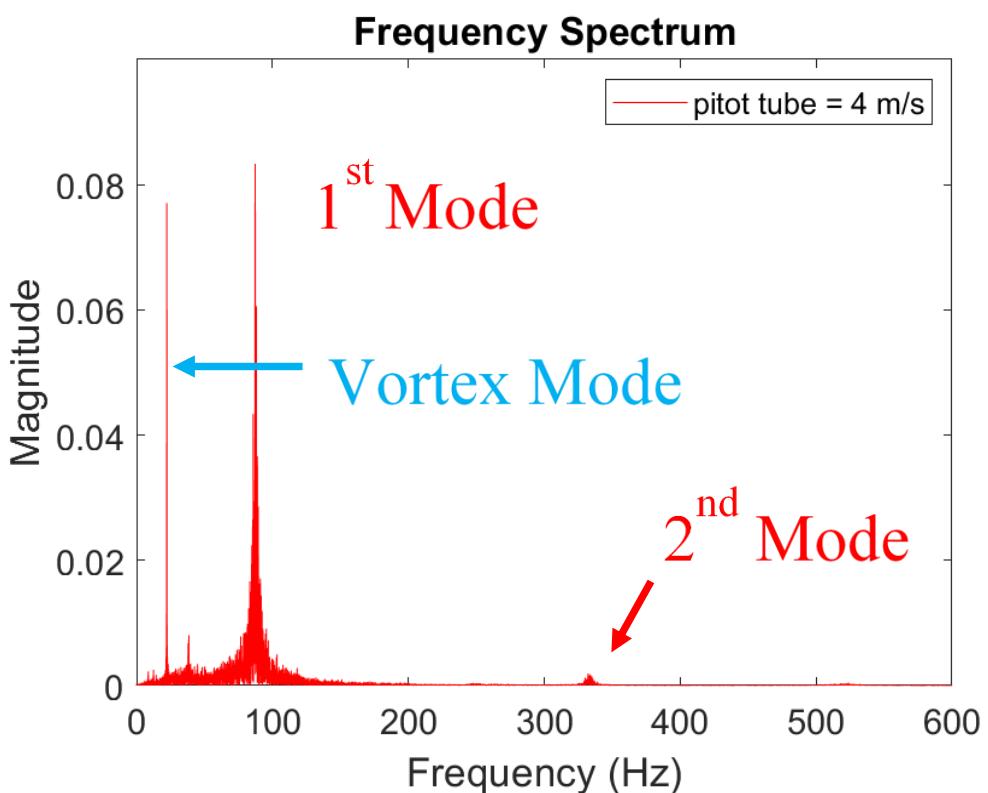
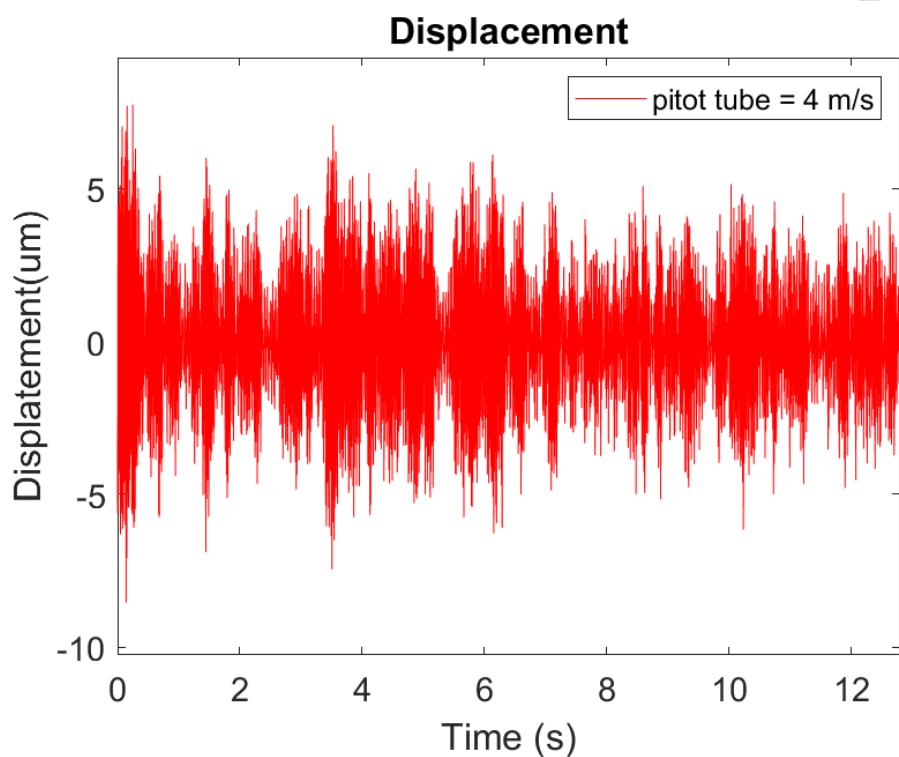


圖 3-13 入口處流速 4 m/s 下，壓電平板位移量測與其經 FFT 後的結果



3.3 壓電能量擷取系統之模擬結果

3.3.1 不同流速下之模擬結果

使用 IB-LBM 模型結合壓電平板疊加法，並利用在 3.2.2 節與 3.2.3 節提到的簡化模型，進行雙向流固耦合數值分析，模型參數如下，網格大小為 2 mm，網格數為 9,000,000，時間步長為 $4 \mu\text{s}$ ，總模擬時長 5 sec，回傳週期皆為每 10 輪回傳一次，入口處流速分別為 2 m/s、4 m/s、6 m/s、8 m/s、9 m/s、10 m/s、12 m/s，分別對應雷諾數為 2738、5477、8215、10953、12323、13692、16430，分析壓電平板受到的升力、渦街頻率、位移、電壓，其中位移以壓電平板尾端中間處的結果為主，包含不同流速下的位移量值比較，位置如圖 3-2 中藍點所示。結果如表 3-3、圖 3-14 至圖 3-16 所示，從結果可看出在入口處流速 9 m/s 下渦街頻率為 86.29Hz，與壓電平板第一振動頻率 86.12Hz 非常接近，因此有最大的位移與電壓，並且由渦街頻率靠近壓電平板第一振動模態頻率的入口流速 9 m/s 激發下，由圖 3-21 與圖 3-28 可看出其位移與電壓的時域變化出現拍頻現象，尤其在模型剛開始計算的三秒內特別明顯。當入口處流速分別提高到 10 m/s 與 12 m/s，雖然平板受到的升力增加，但因為渦街頻率與壓電平板第一振動頻率相差較大，因此位移與電壓反而下降。壓電平板位移隨時間變化，以及經 FFT 後的結果，如圖 3-17 至圖 3-23 所示，從結果可看出在模型計算剛開始時壓電平板的暫態響應較大，且此時為壓電平板的振動模態主導，隨著模擬時間增加，壓電平板振動模態的位移會逐漸變小，且由渦街頻率主導，此現象在入口處流速為 10 m/s 與 12 m/s 時最為明顯；壓電平板電壓隨時間變化，以及經 FFT 後的結果，如圖 3-24 至圖 3-30 所示，電壓的結果趨勢與位移幾乎相同，隨著模擬時間拉長而逐漸下降，並且頻率由壓電平板振動模態主導，逐漸變成渦街頻率主導。

流速(m/s)	平板升力(mN)	渦街頻率(Hz)	位移(μm)	電壓(V)
2	0.319	18.50	0.47	0.032
4	2.558	38.17	3.53	0.243
6	5.722	57.46	10.98	0.757
8	10.27	76.71	45.15	3.102
9	13.79	86.29	268.98	18.423
10	15.50	95.94	104.87	7.178
12	22.97	115.1	37.77	2.577

表 3-3 不同流速下壓電平板之位移、電壓的結果

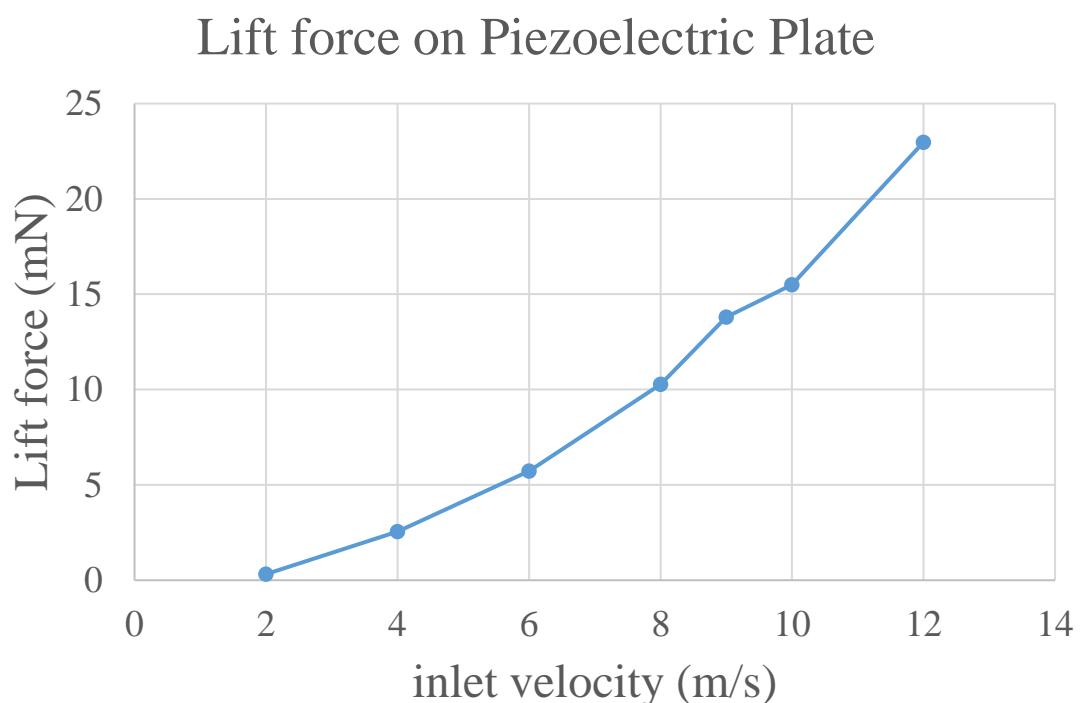


圖 3-14 壓電平板升力隨流速變化



Displacement of Piezoelectric Plate

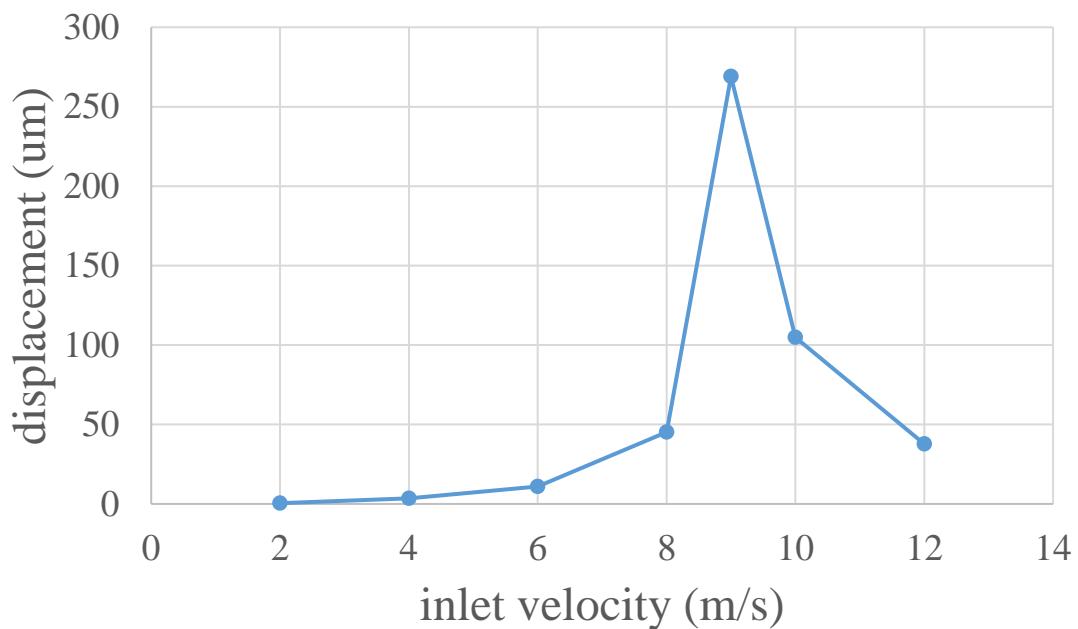


圖 3-15 壓電平板位移隨流速變化

Voltage of Piezoelectric Plate

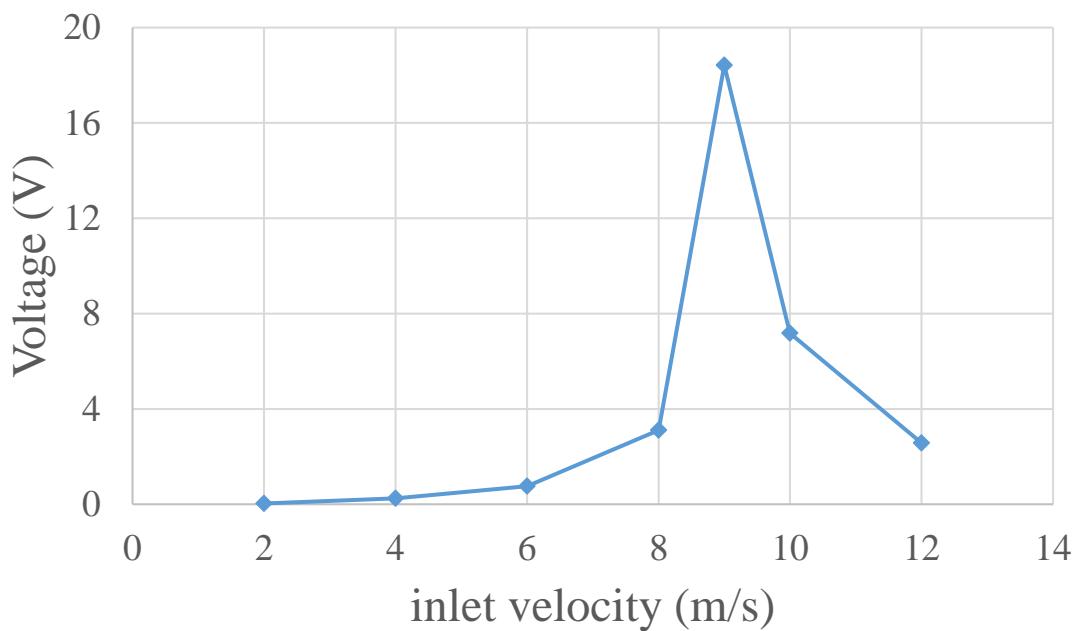


圖 3-16 壓電平板電壓隨流速變化

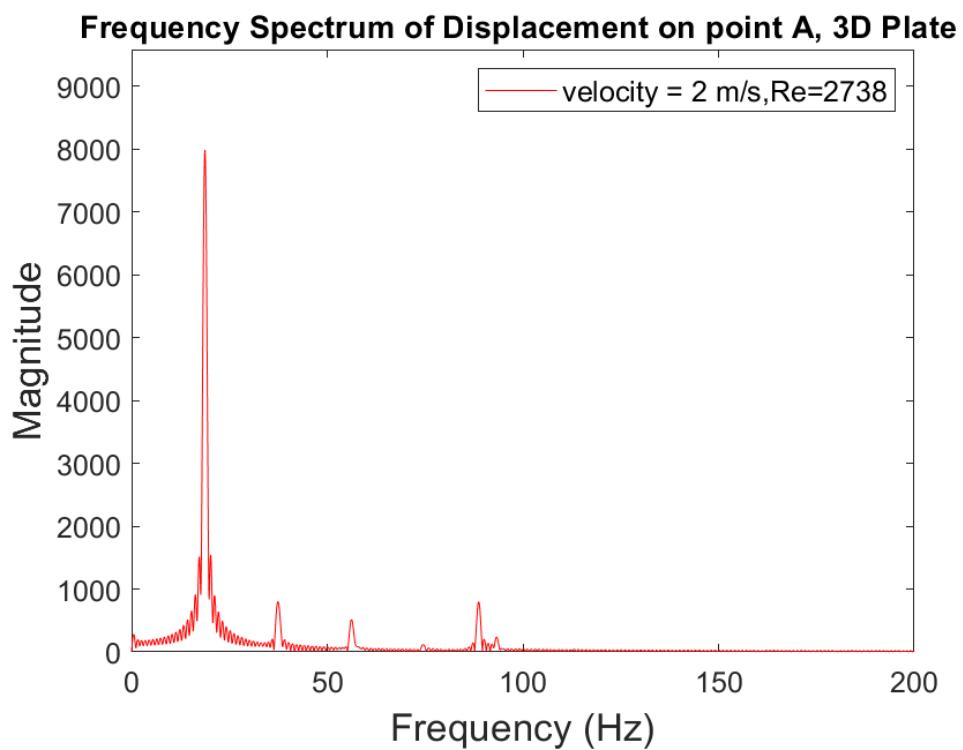
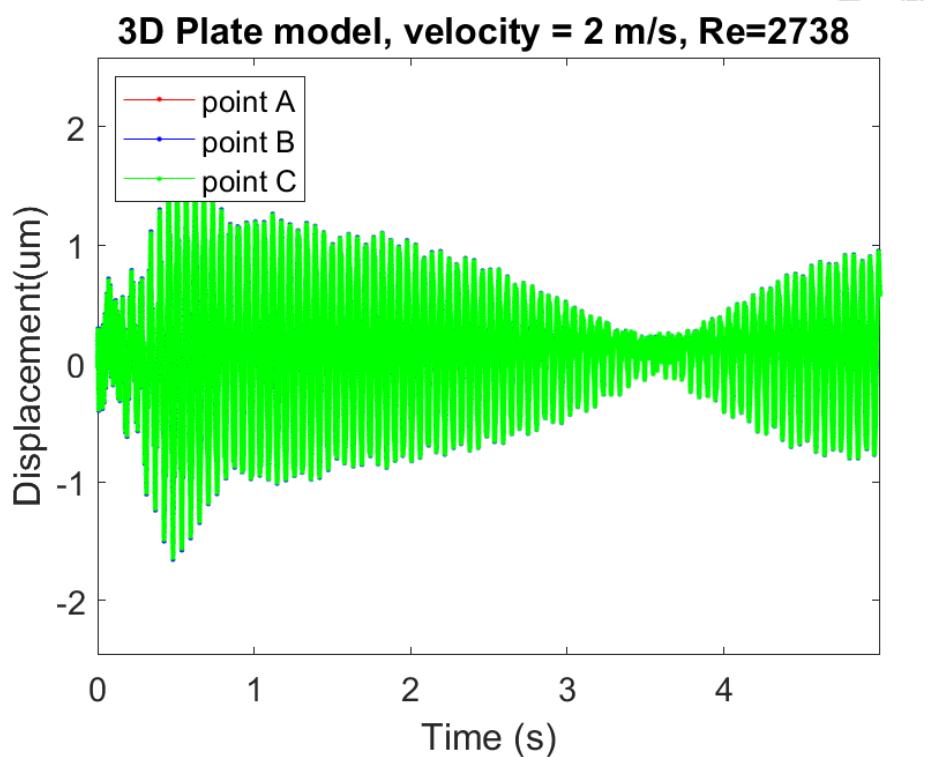
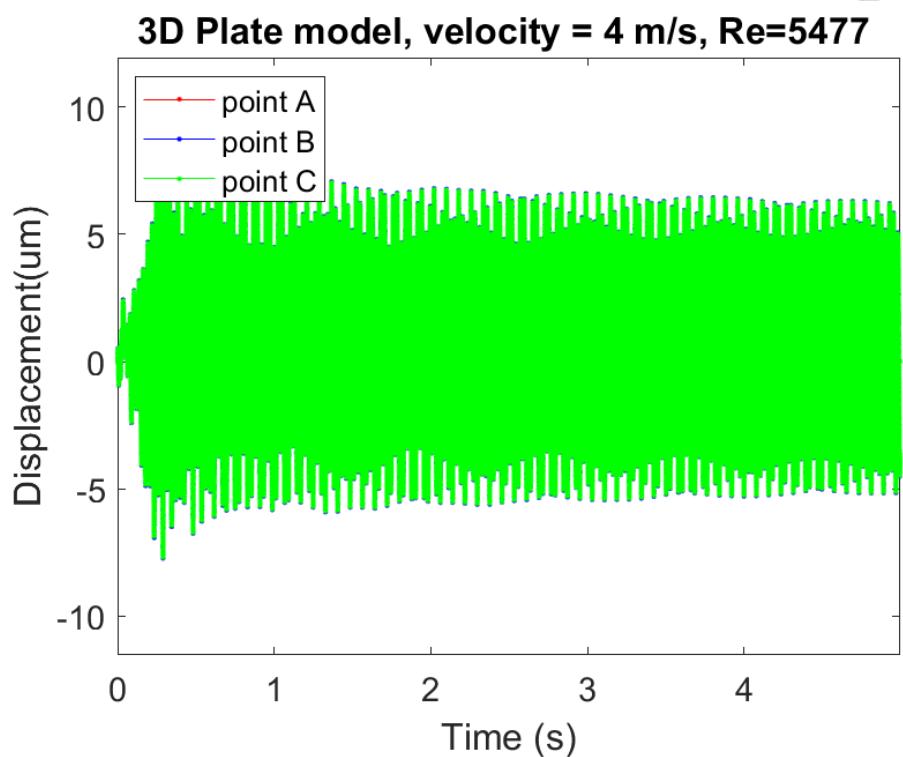


圖 3-17 入口處流速 2 m/s 下，壓電平板位移量測與其經 FFT 後的結果



Frequency Spectrum of Displacement on point A, 3D Plate

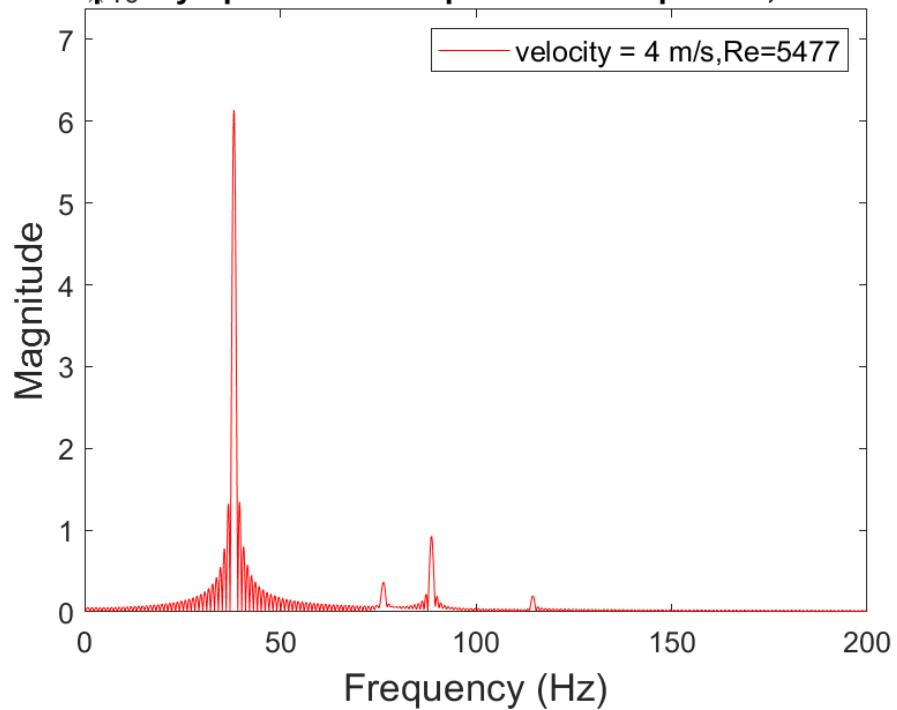


圖 3-18 入口處流速 4 m/s 下，壓電平板位移量測與其經 FFT 後的結果

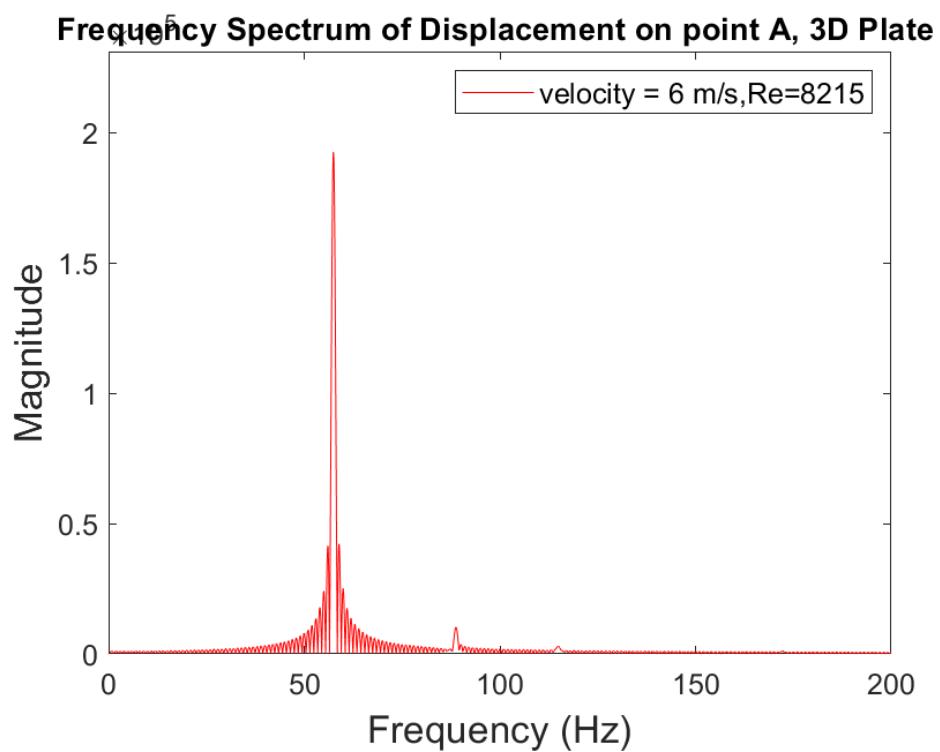
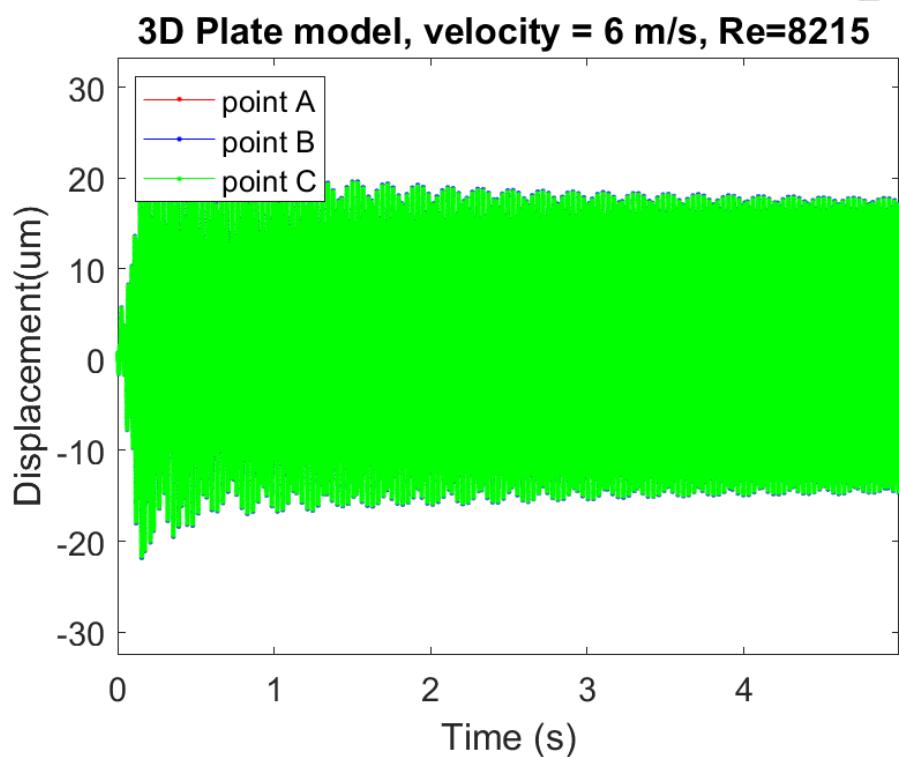


圖 3-19 入口處流速 6 m/s 下，壓電平板位移量測與其經 FFT 後的結果

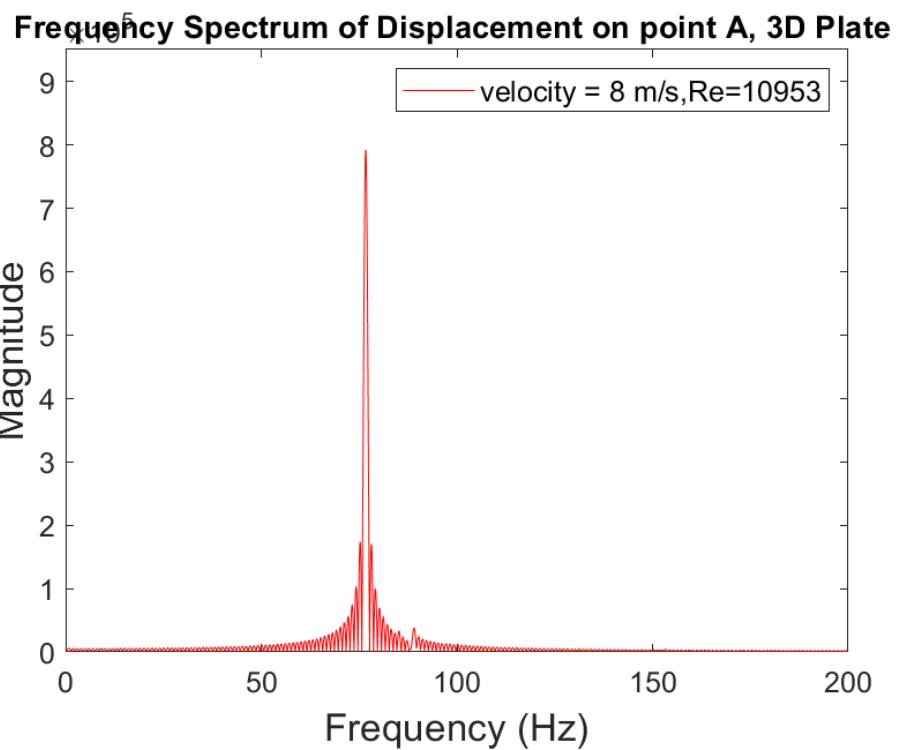
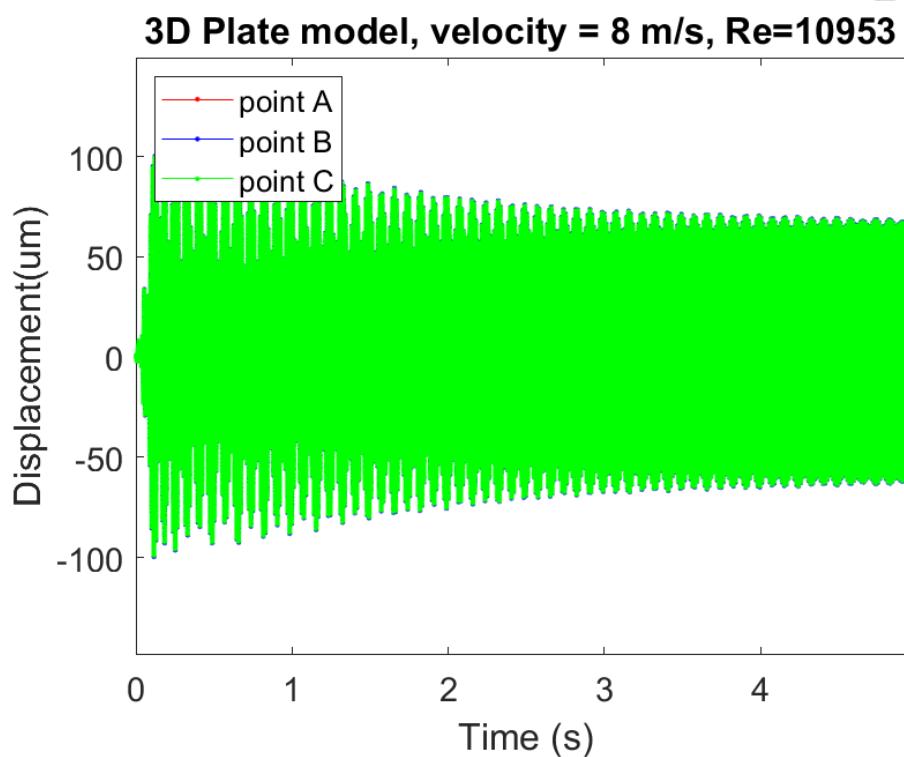


圖 3-20 入口處流速 8 m/s 下，壓電平板位移量測與其經 FFT 後的結果

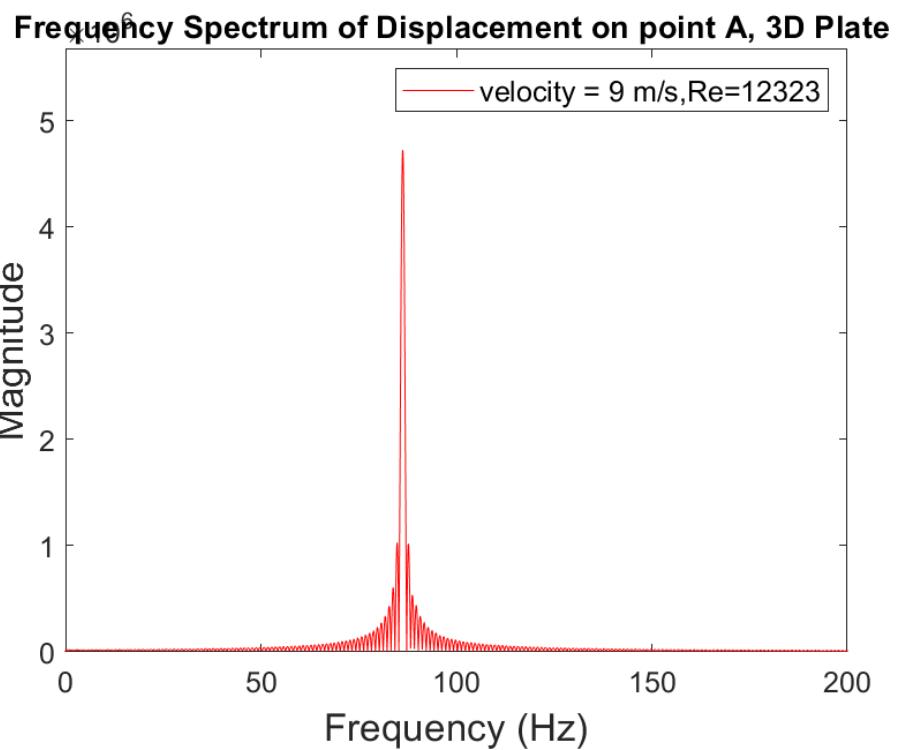
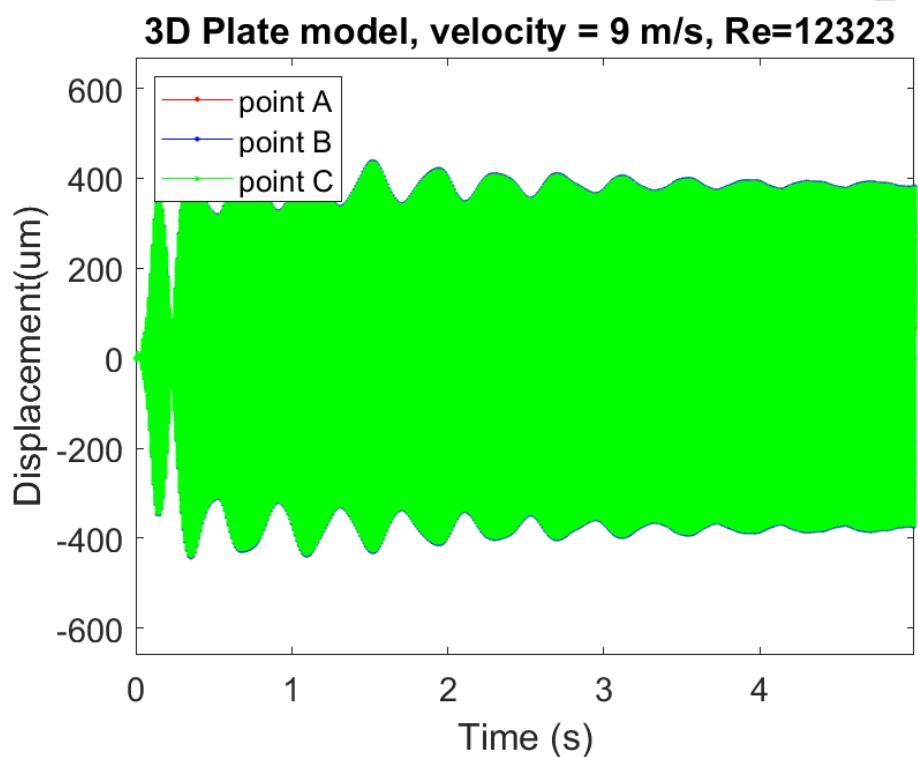
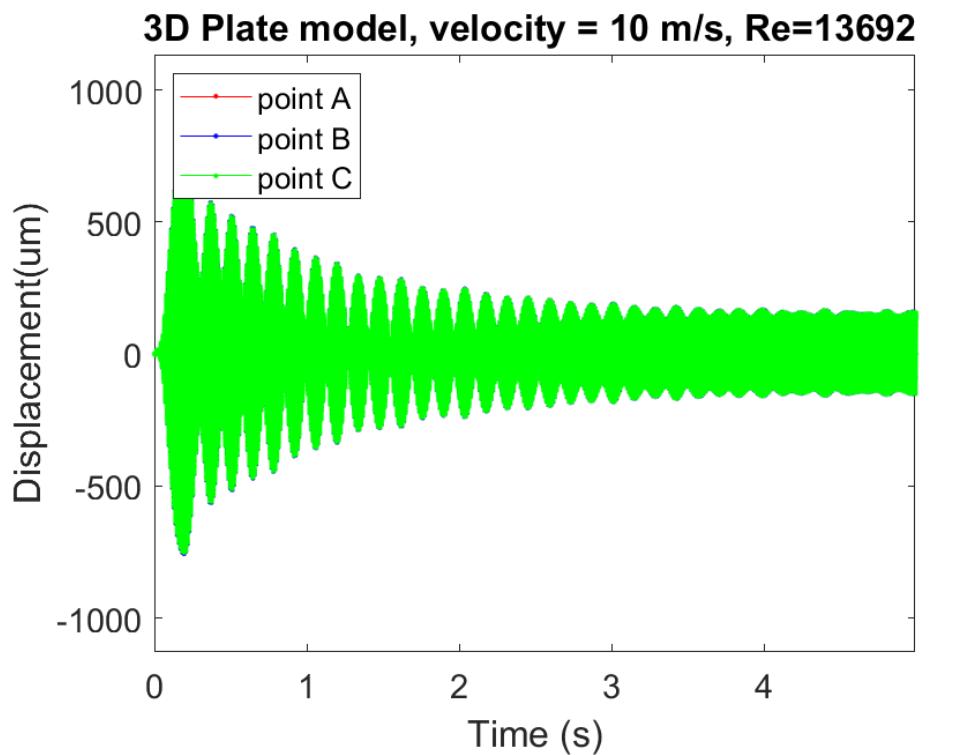


圖 3-21 入口處流速 9 m/s 下，壓電平板位移量測與其經 FFT 後的結果



Frequency Spectrum of Displacement on point A, 3D Plate

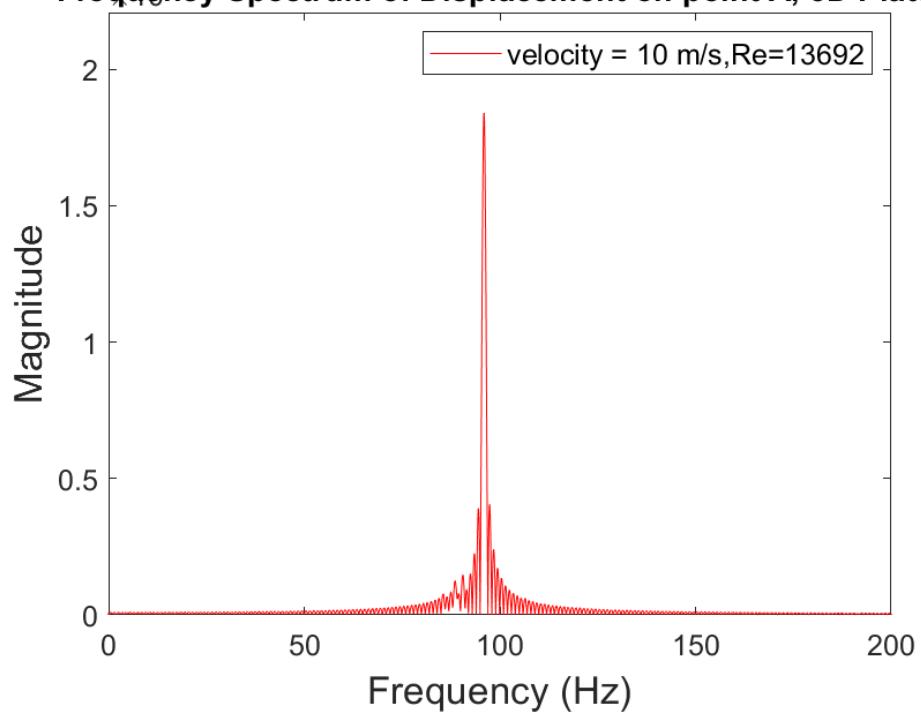


圖 3-22 入口處流速 10 m/s 下，壓電平板位移量測與其經 FFT 後的結果

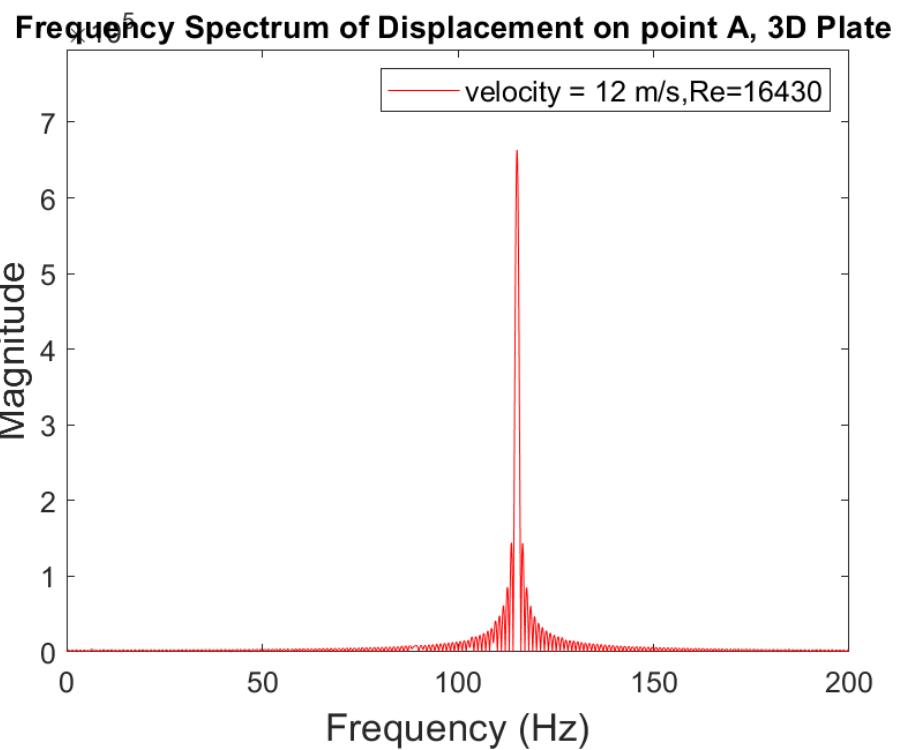
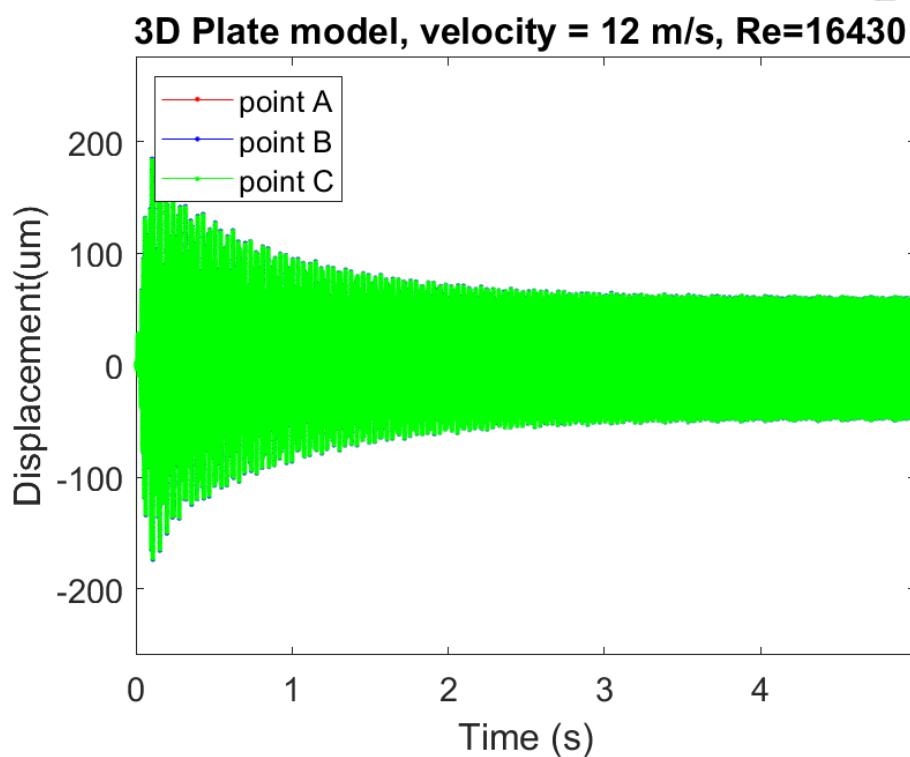


圖 3-23 入口處流速 12 m/s 下，壓電平板位移量測與其經 FFT 後的結果

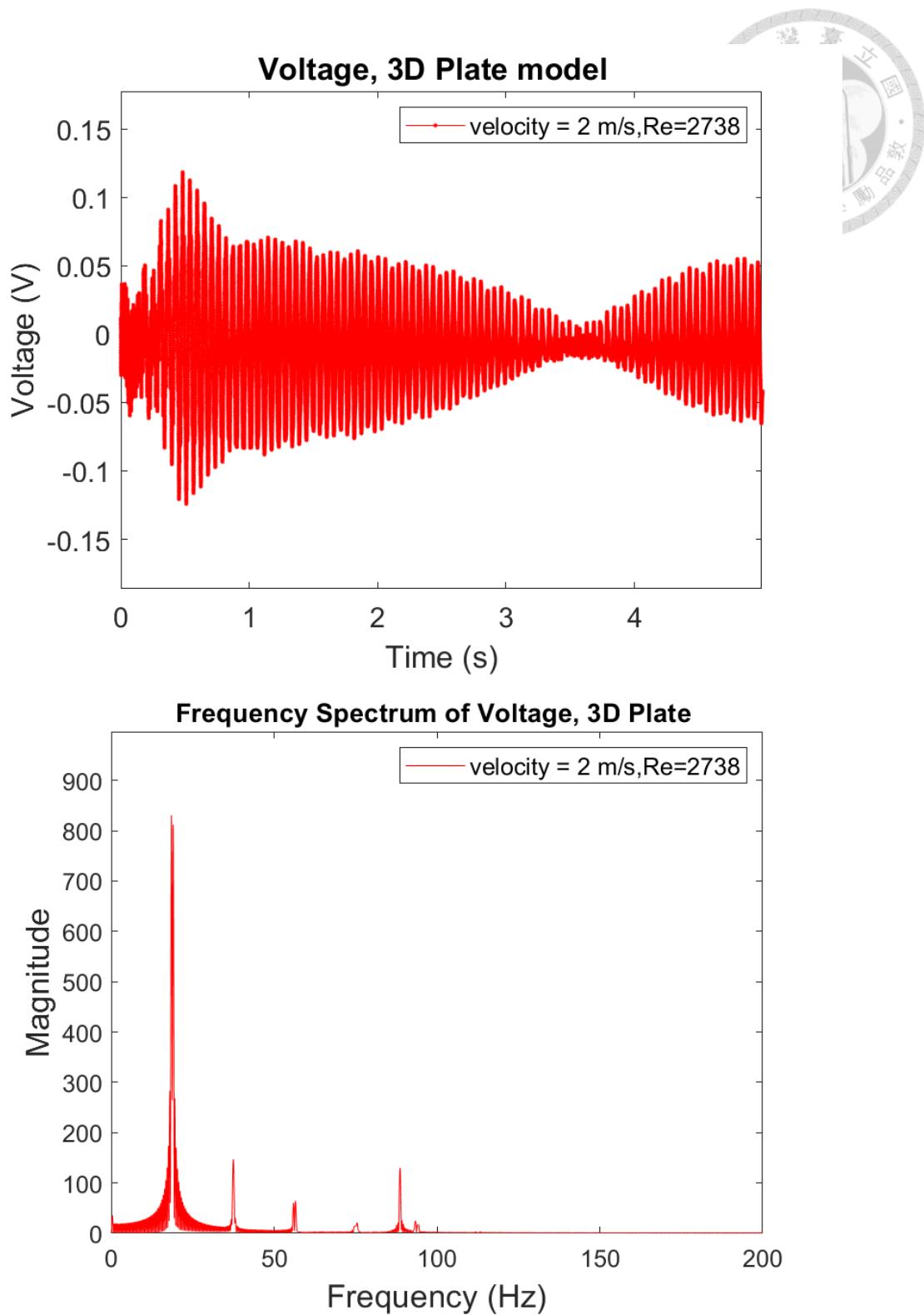


圖 3-24 入口處流速 2 m/s 下，壓電平板電壓量測與其經 FFT 後的結果

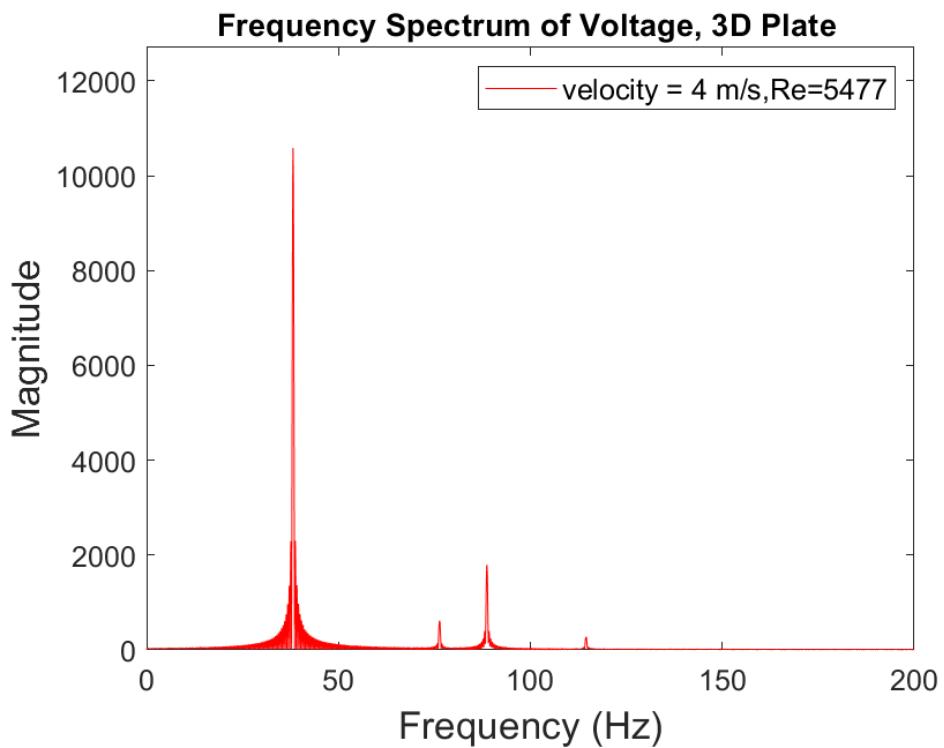
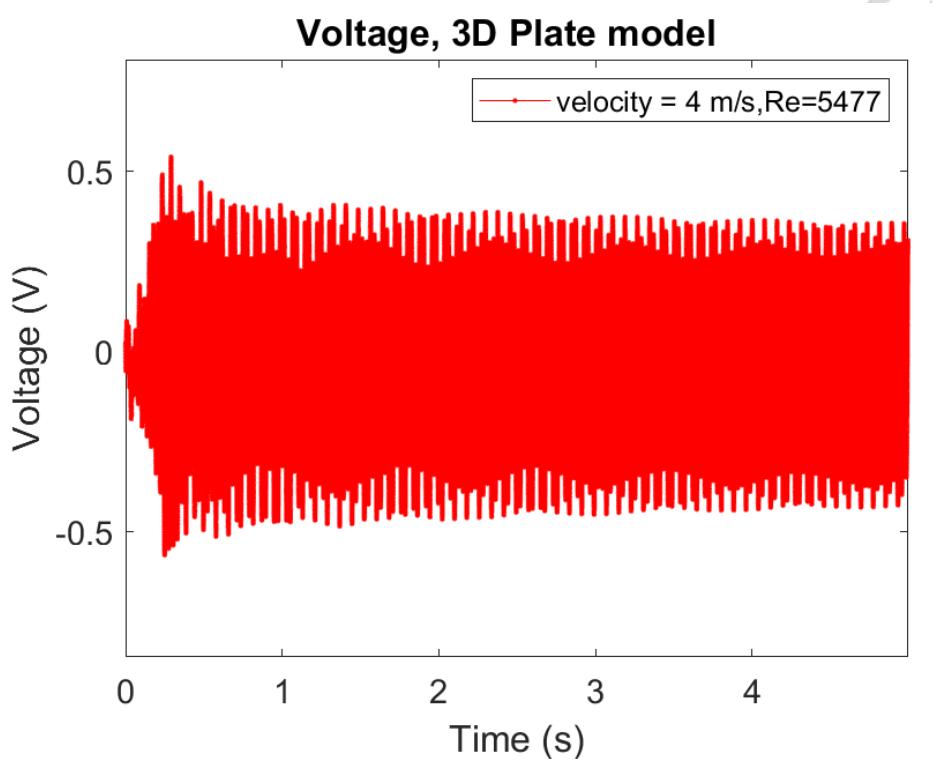


圖 3-25 入口處流速 4 m/s 下，壓電平板電壓量測與其經 FFT 後的結果

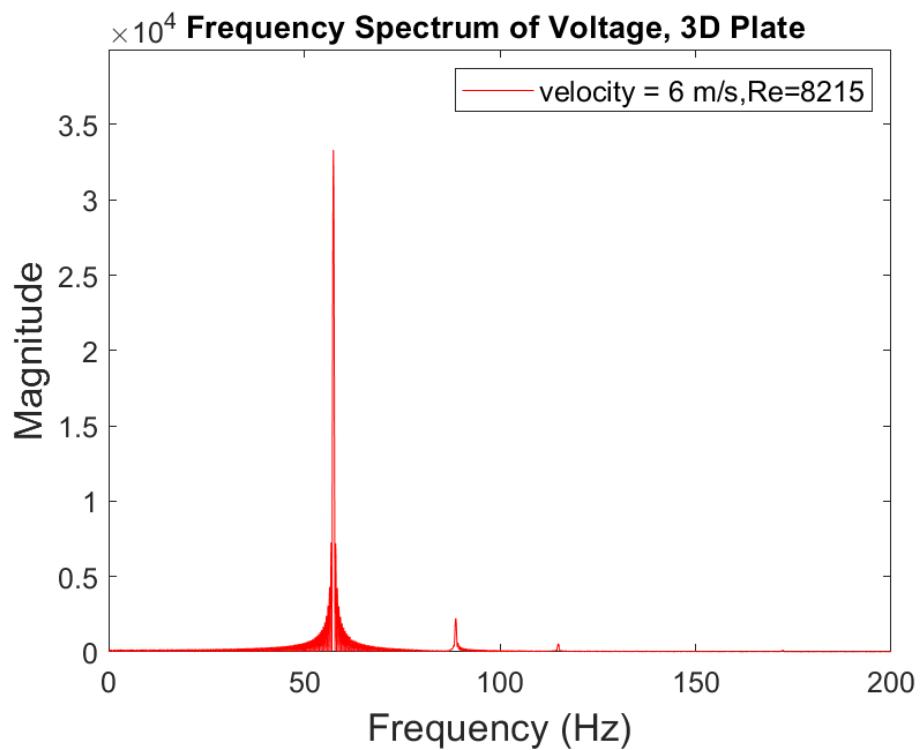
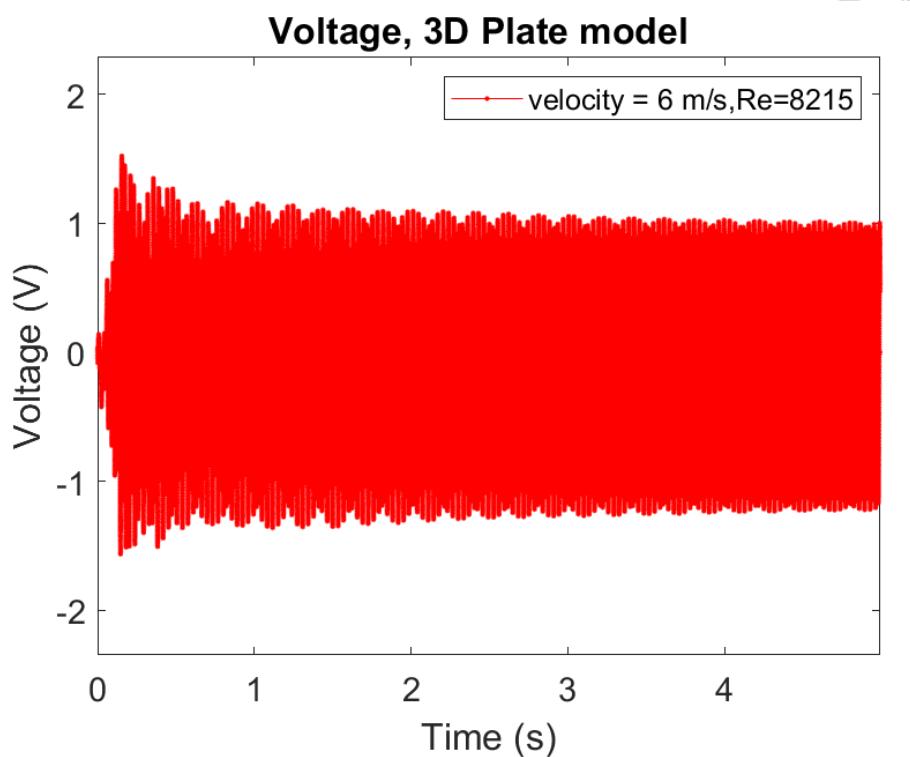


圖 3-26 入口處流速 6 m/s 下，壓電平板電壓量測與其經 FFT 後的結果

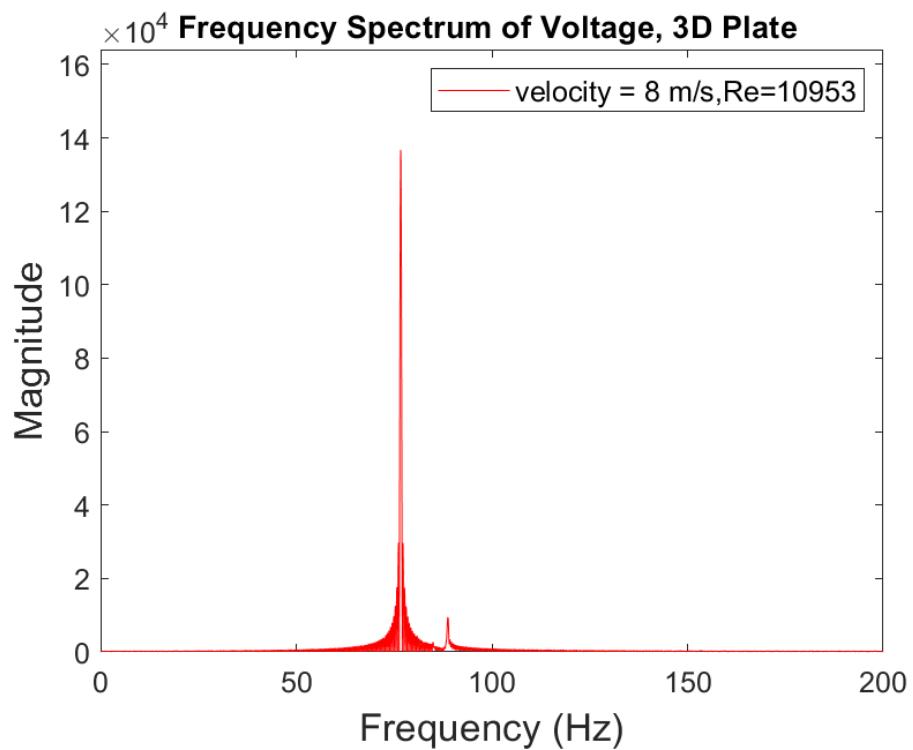
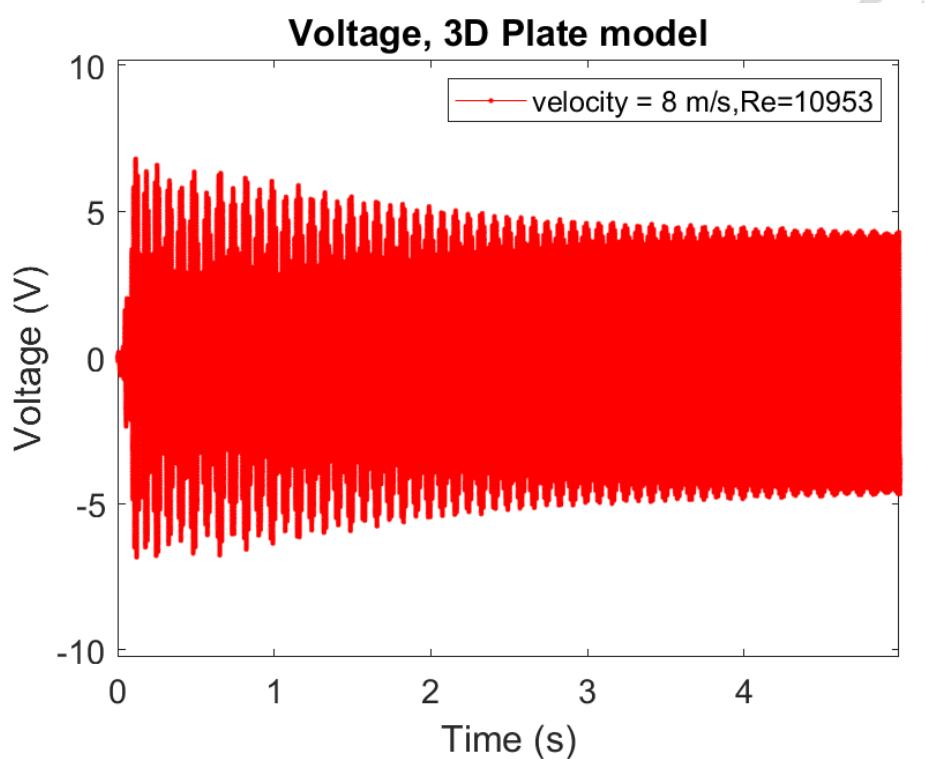


圖 3-27 入口處流速 8 m/s 下，壓電平板電壓量測與其經 FFT 後的結果

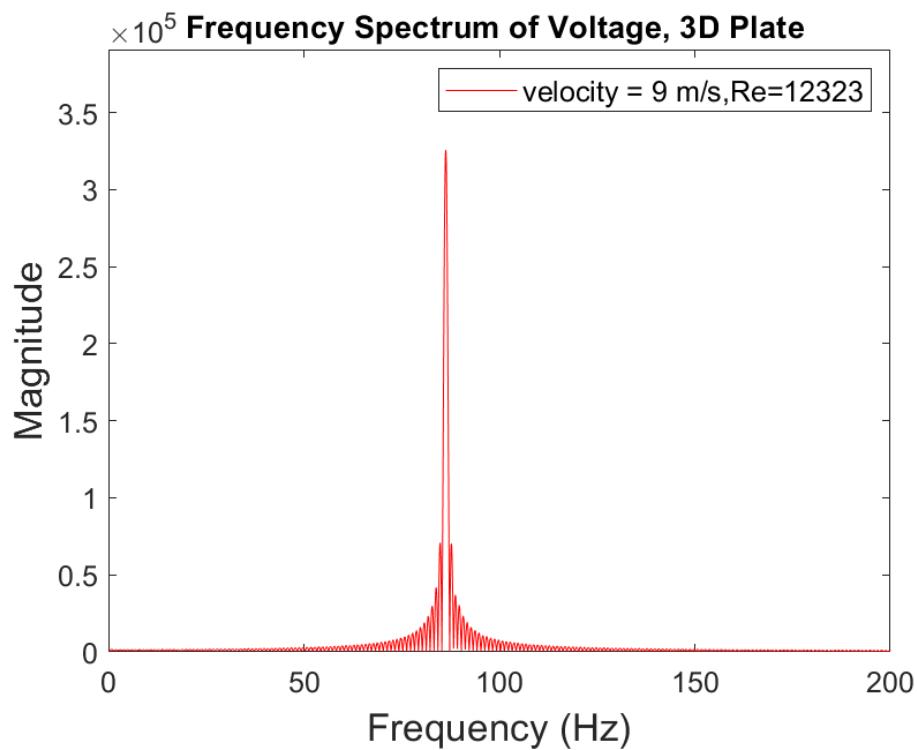
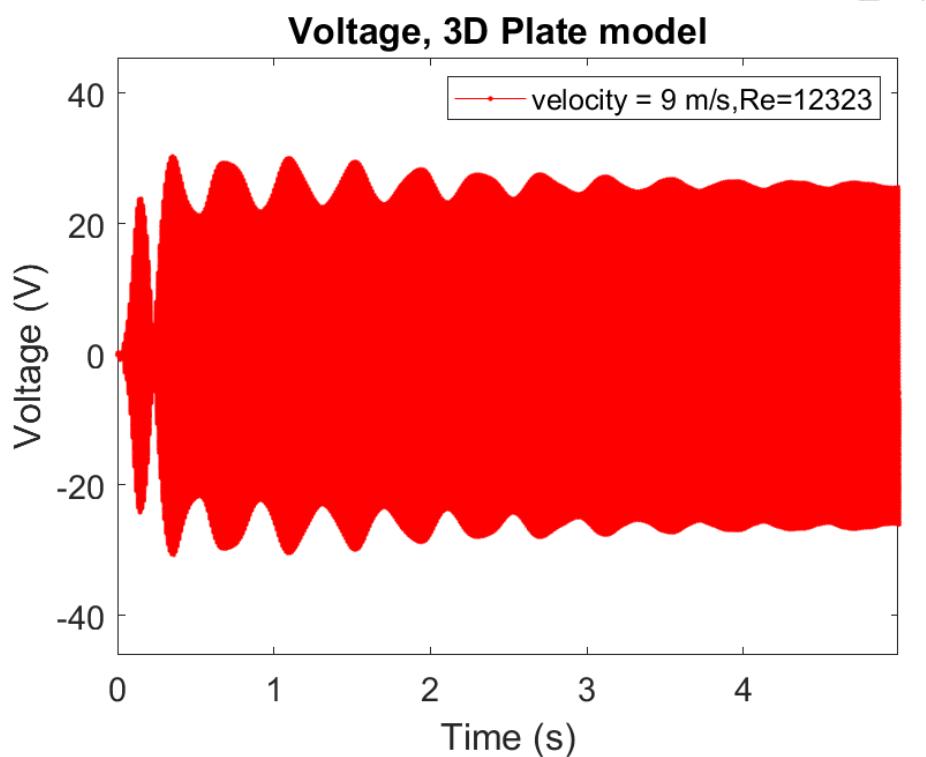


圖 3-28 入口處流速 9 m/s 下，壓電平板電壓量測與其經 FFT 後的結果

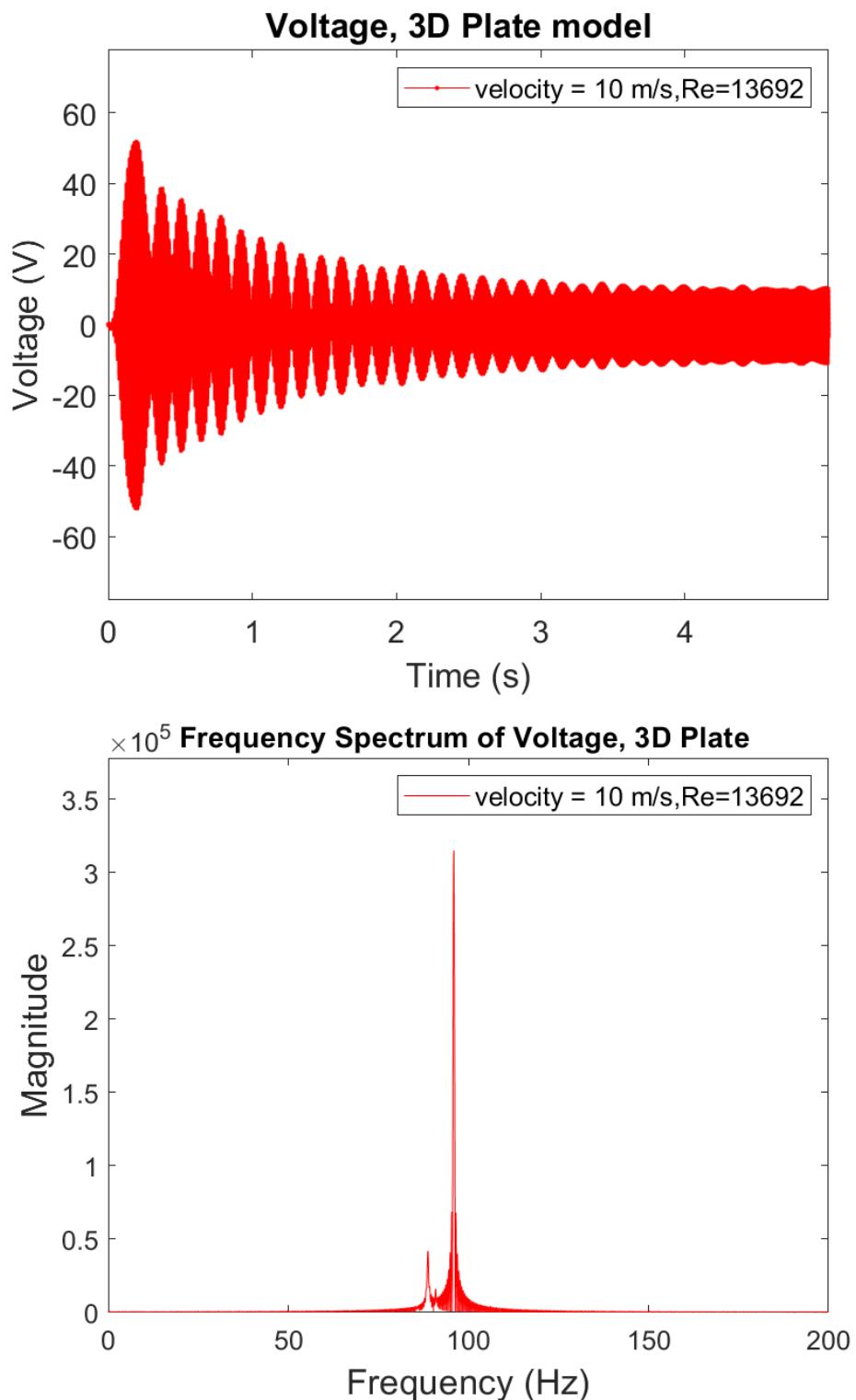


圖 3-29 入口處流速 10 m/s 下，壓電平板電壓量測與其經 FFT 後的結果

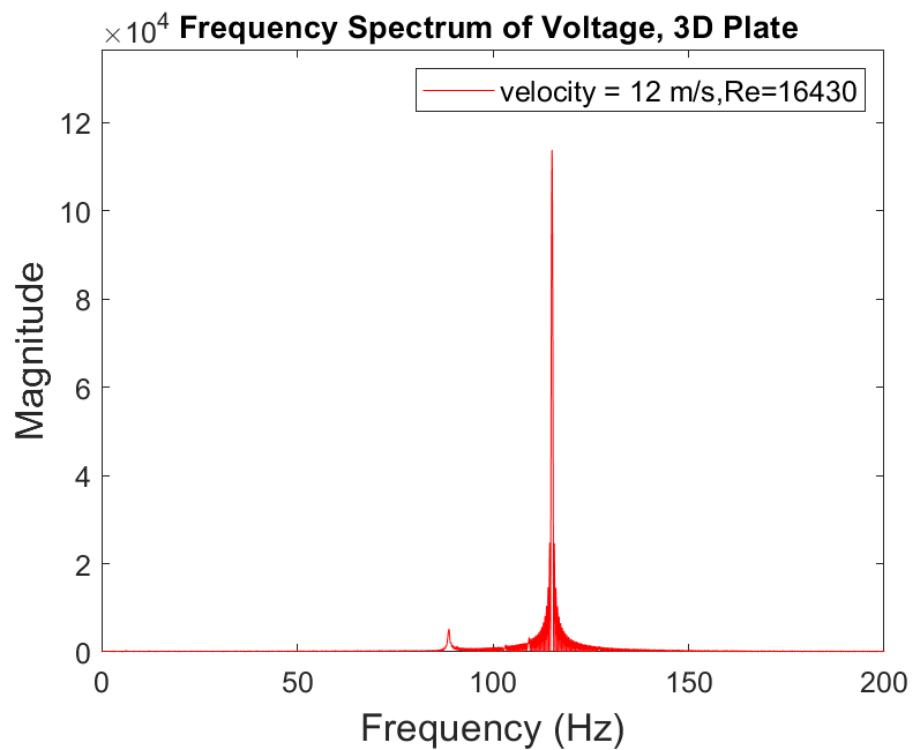
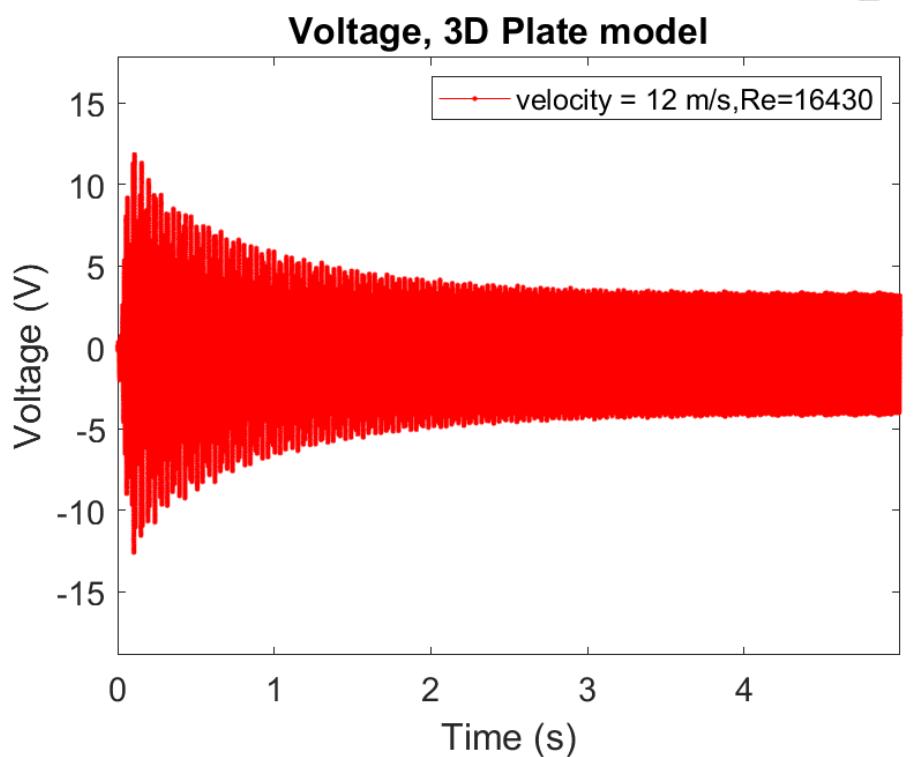


圖 3-30 入口處流速 12 m/s 下，壓電平板電壓量測與其經 FFT 後的結果



3.3.2 雙向流固耦合與單向流固耦合結果比較

為了比較壓電能量擷取系統在單向流固耦合及雙向流固耦合數值方法下的差別，這裡以洪國勛[42]利用 LBM 模型分析結合圓柱及壓電平板之壓電能量擷取系統的結果作比較，其網格大小為 2 mm，時間步長為 100 μ sec，模擬時長為 2 秒，模型中的圓柱大小、壓電平板尺寸及材料性質與本研究之模型相同，由於除了圓柱障礙物及壓電平板之邊界與流場之交互計算方式不同，模擬時長與時間步長也有很大的差別，因此這裡僅就單向流固耦合與雙向流固耦合的趨勢差別做討論。

其壓電能量擷取系統在不同流速下的平板位移結果如圖 3-31 至圖 3-35 所示，文獻[42]中先假設壓電平板為固體邊界，再將平板受到的力量記錄下，待 LBM 模型計算完畢後再以後處理的形式計算平板的變形與電壓。由於在單向耦合數值模型中，固體皆為不可變形之剛體，因此相較於可變形之雙向流固耦合模型，單向流固耦合模型中計算出的平板變形會較雙向流固耦合模型的結果大，就訊號來源做討論，比較其變形經 FFT 後的結果可發現，在不同流速下壓電平板第一振動模態的訊號皆較渦街頻率的訊號大，此現象與本研究中雙向流固耦合模型的結果相反。

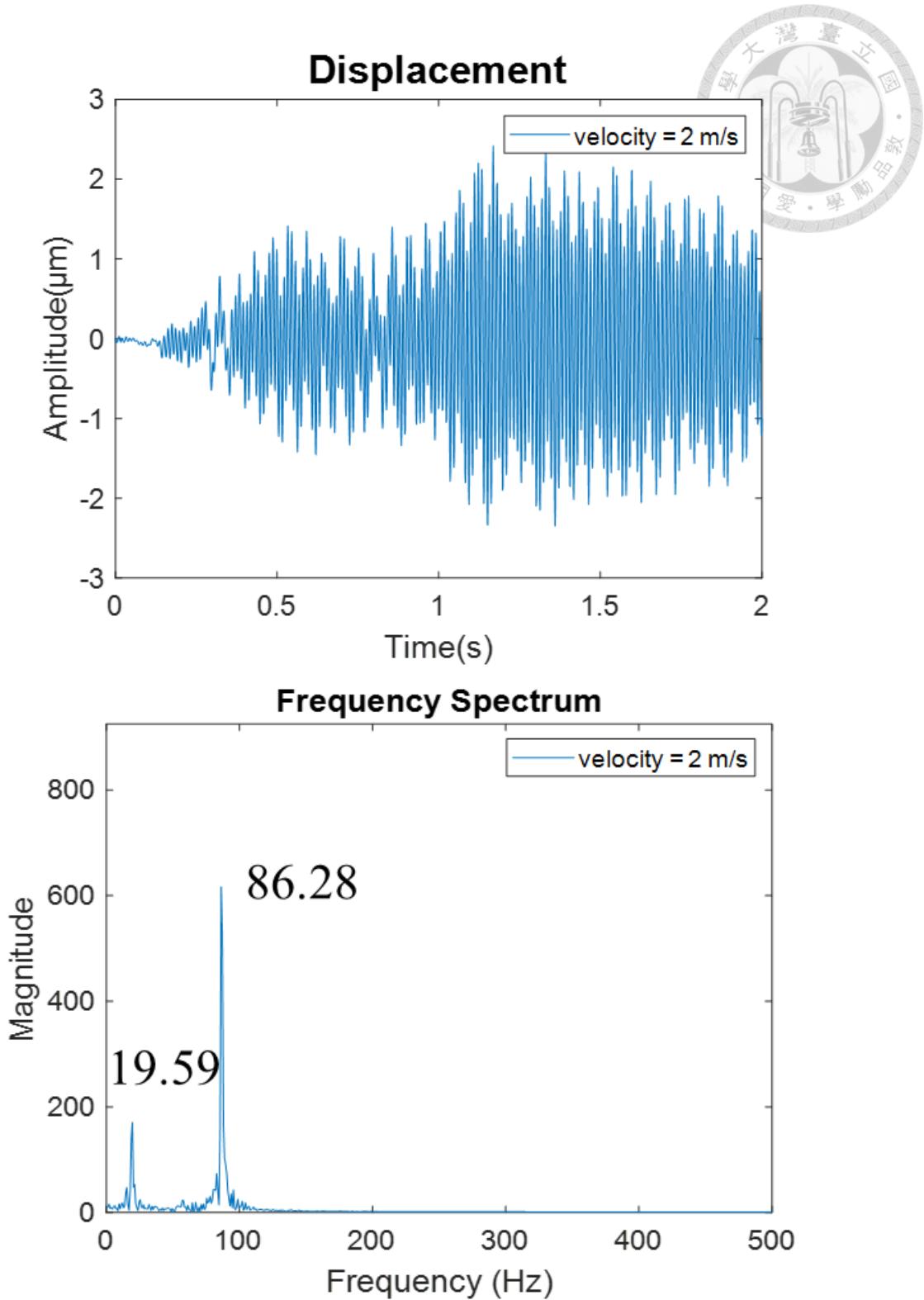


圖 3-31 入口處流速 2 m/s 下，壓電平板位移量測與其經 FFT 後的結果[42]

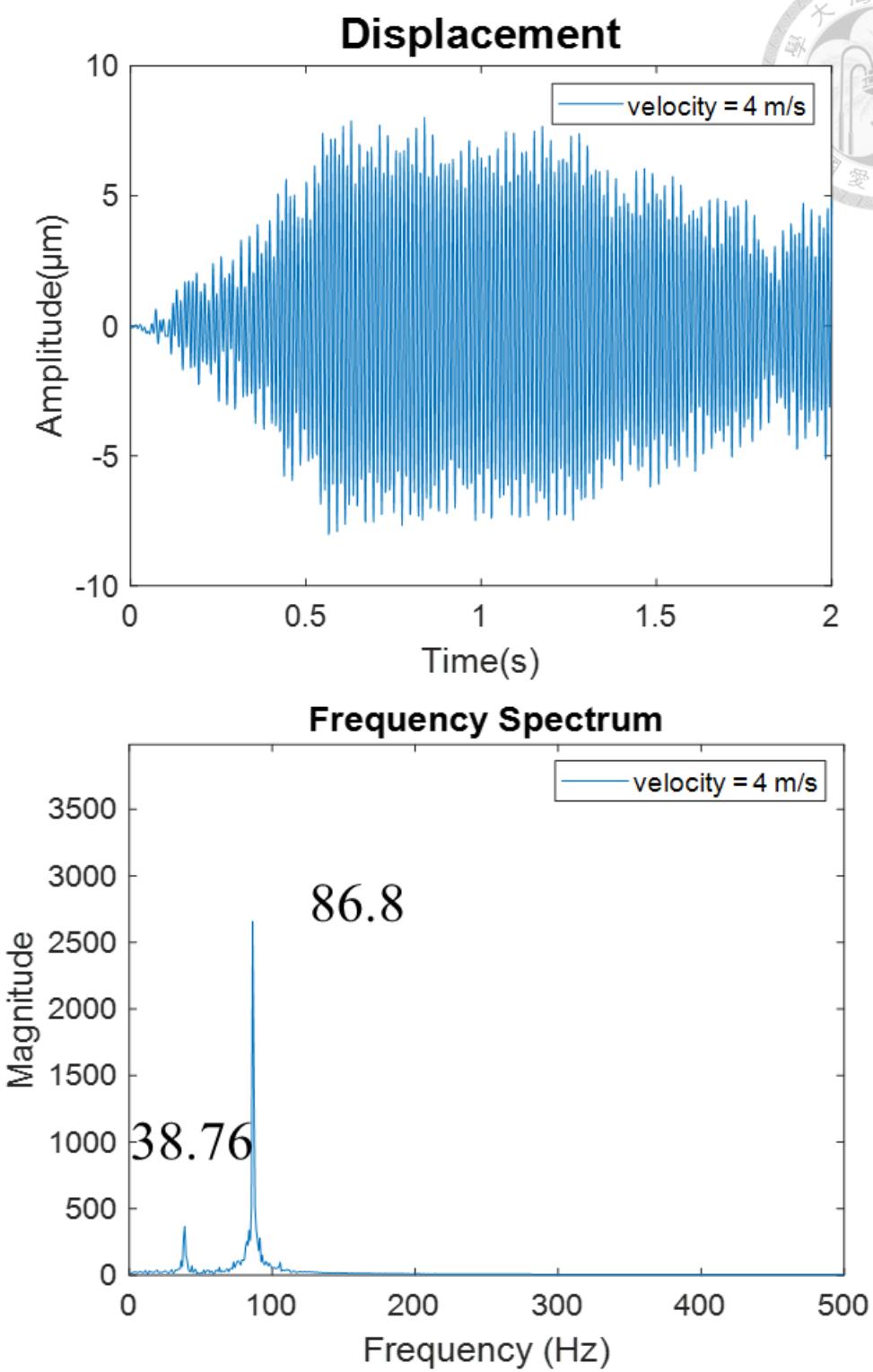


圖 3-32 入口處流速 4 m/s 下，壓電平板位移量測與其經 FFT 後的結果[42]

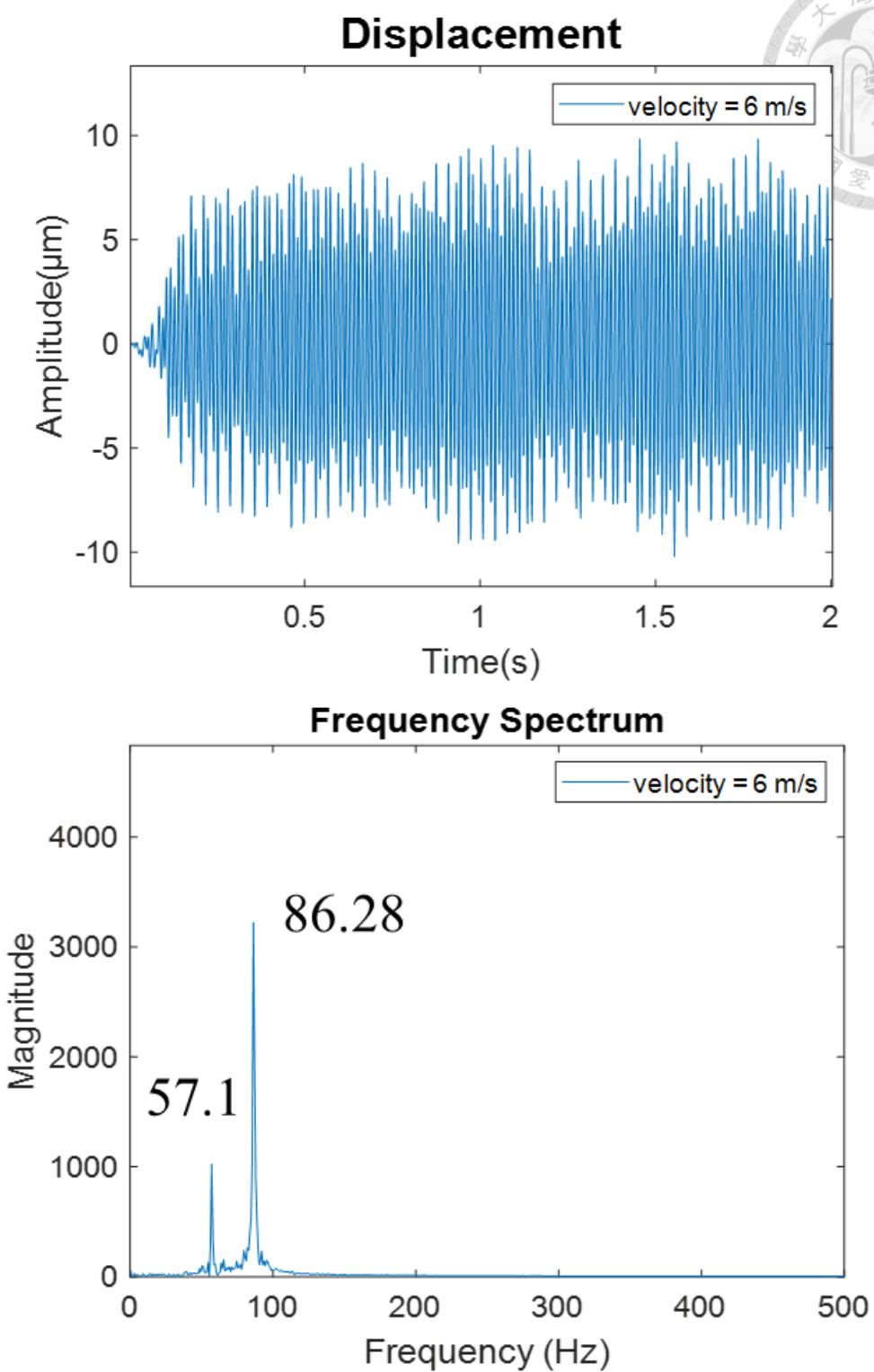


圖 3-33 入口處流速 6 m/s 下，壓電平板位移量測與其經 FFT 後的結果[42]

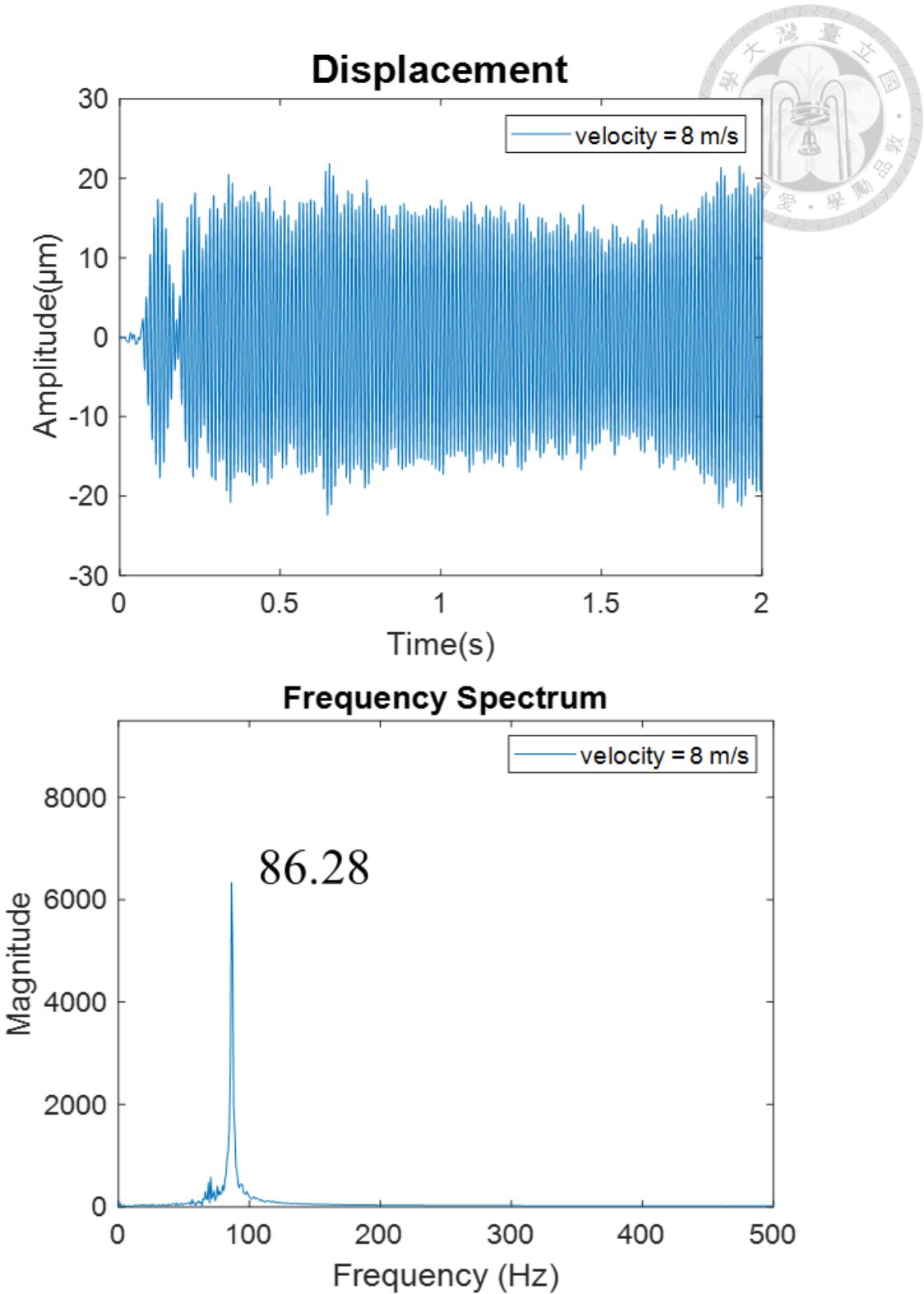


圖 3-34 入口處流速 8 m/s 下，壓電平板位移量測與其經 FFT 後的結果[42]

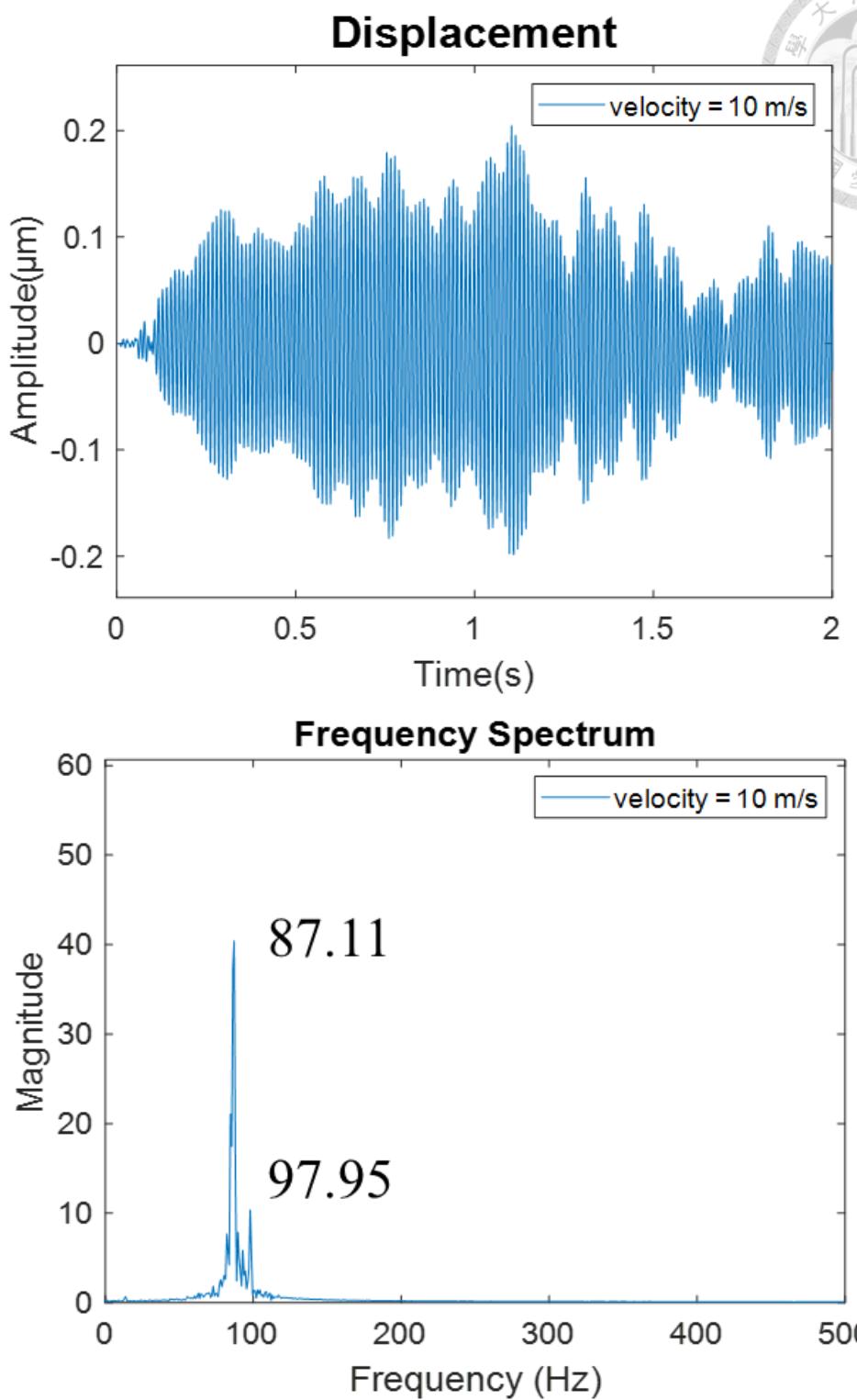


圖 3-35 入口處流速 10 m/s 下，壓電平板位移量測與其經 FFT 後的結果[42]

第四章 平行運算與程式優化



中央處理器(Central Processing Unit,CPU)過去作為進行有限元素法(Finite Element Method, FEM)、計算流體力學模型(Computational Fluid Dynamics, CFD)等數值分析的主要工具，不僅適合各種不同類型的工作、核心間延遲低，而且程式撰寫難度低，因此不論是商用軟體或自行進行撰寫程式進行數值分析，皆以 CPU 較為常見；圖形處理器(Graphics Processing Unit, GPU)因其利用大量核心進行平行運算，計算效能比 CPU 高很多，但因對程式架構的平行程度要求高，且程式撰寫難度也較 CPU 高很多，因此過往以繪圖與遊戲等 3D 渲染工作為主，然而近年來已演變成更為通用且可參與通用計算任務的圖形處理單元(General-purpose computing on Graphics Processing Units, GPGPU)，在機器學習、數值分析等領域被大量應用，包含以 GPU 協助 CPU 計算，以及完全以 GPU 進行完整的運算等方式。

本研究使用 GPU 進行 IB-LBM 模型的計算，其中使用 NVIDIA 公司提出的統一計算架構(Compute Unified Device Architecture, CUDA)在程式語言 C++ 中進行程式撰寫，搭配 NVIDIA 的 GPU 進行運算，在流場晶格數高的模型中利用強大的運算能力大幅縮短運算時間，後續會以程式的角度介紹電腦計算的流程，並比較使用 CPU 與 GPU 進行 LBM 模型的計算，其運算速度的差異，也會比較同樣使用 CPU，在程式語言 C++ 中以單核心、多核心運算及在程式語言 Matlab 中，計算 LBM 模型的速度差異。

相較於單獨使用 LBM 模型做計算，在加入 IBM 變成 IB-LBM 模型後，遇到隨著模型變複雜而運算速度顯著降低的問題，在此提出映射層(Flash Translation Layer, FTL)演算法，又稱 FTL 演算法，以優化 IB-LBM 的計算速度，也避免模型在增加固體格點的數量後，會有運算速度下降的現象，並與原先的 LBM 模型做比較。



4.1 CUDA 平行運算

4.1.1 GPU 計算優勢

本研究使用的 CPU 為 AMD 推出的 Ryzen 9 7900x，GPU 為 NVIDIA 推出的 RTX 4080，兩者的規格如表 4-1 所示，兩者都是在 2022 年第四季上市的高階型號，從表中可看出，相較於 CPU 的 12 個核心，使用的 GPU 有 9728 個核心，效能高達 26 倍。

過往因為能夠讓 GPU 運行的平行程式較難設計，因此普及率較低，主要用於 3D 渲染為主，本研究利用 NVIDIA 發明的 CUDA 進行平行程式設計，其提供 C++ 的介面，在撰寫程式時只需數行即可調動所有 GPU 內的核心，除了向量內元素各別的四則運算，本研究使用 CUDA 中的 cuBLAS(Basic Linear Algebra Subroutines) 函式庫進行程式設計，其可有效的計算向量及矩陣運算，包含矩陣與向量相乘，以及反矩陣的求取，(2-69)式與(4-22)式即透過 cuBLAS 進行計算，且在程式中僅需約十幾行程式碼即可完成。CUDA 的出現與 cuBLAS、cuSOLVER 等等函式庫，使 GPGPU 的可行性大幅增加。

處理器	CPU	GPU
型號	AMD R9-7900X	NVIDIA RTX4080
核心數	12	9728
單精度浮點效能 FP32 (TFLOPS)	1.84	48.74

表 4-1 使用的 CPU 及 GPU 規格

4.1.2 流固耦合模型計算流程

流程圖如圖 4-1 所示，程式從做為主機端(Host)的 CPU 開始，先分配記憶體，包含每個流場晶格及固體格點的物理量等等，再由作為裝置端(Device)的 GPU，進

行記憶體分配及變數的初始化，舉例像是給每個流場晶格的初始速度、密度、各個方向上分布函數一個初始值，壓電平板疊加法的計算也會在初始化階段完成，接下來進入流場計算的迴圈中，迴圈的迭代次數取決於模型的時間間隔與總模擬時長，如 3.3.1 節中提到的三維雙向流固耦合模型，時間步長 $4\mu\text{s}$ ，總模擬時長 5 sec，則迭代次數為 1,250,000，當迭代次數達標後會釋放 Host 與 Device 的記憶體並結束，若迭代次數未達標則會重複迴圈內的任務，進入迴圈後會進行流場計算，包含 LBM 架構下的碰撞、流動、邊界條件的步驟、IBM 架構下的作用力計算、雙向流固耦合中壓電平板的位移與電壓響應計算等等，完成計算後會將計算出的數個參數回傳到 Host 並儲存於硬碟中，並在每完成總迭代次數的二十分之一時回傳整個流場的速度分布，此動作有兩個重點，一是檢查計算出的整個流場的狀況，確認是否有因數值計算流程有誤產生的非物理現象(unphysical phenomena)，在模型的程式撰寫及試錯階段特別重要，二是控制整個流場的回傳次數，考慮到將大量資料從 Device 傳送到 Host 再寫入硬碟的過程，會耗費大量時間，若頻繁回傳大量資料會造成模型計算時間大幅增加。

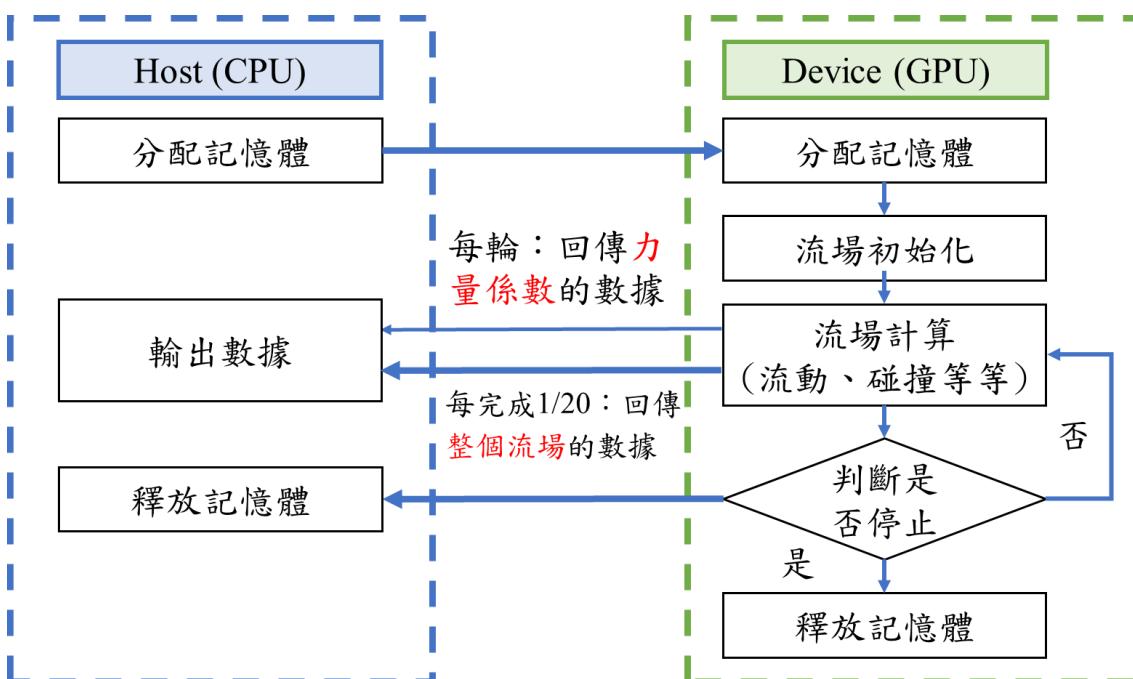


圖 4-1 IB-LBM 模型運算流程圖



4.1.3 衡量計算速度與 CUDA 加速成效

為了評估使用 CUDA 撰寫的平行程式中，搭配 GPU 計算 LBM 模型的速度，並與單純使用 CPU 計算的差別，通常會用每秒能處理的百萬晶格數(Million Lattice Updates Per Second, MLUPS)作為 LBM 模型運算速度的標準，其定義為

$$MLUPS = \frac{Number\ of\ nodes \cdot Number\ of\ iteration}{Simulation\ Time} \cdot 10^{-6} \quad (3-6)$$

後續模型的運算速度評估會以 MLUPS 的結果為主。

使用 LBM 二維圓柱模型進行分析，因還沒加入 IBM，障礙物圓柱也設定成無滑移無穿越之固定邊界，以方便評估 LBM 模型的速度，先以一模型設定舉例，網格大小 0.5 mm，網格數 960,000，時間步長 $10\ \mu\text{s}$ ，總模擬時長 2 sec，總迭代次數 200,000，計算時間與 MLUPS 如表 4-2 所示，使用 GPU 計算僅需 0.139 小時，相當於 8.3 分鐘，同樣使用 C++，使用 CPU 進行多核心的平行運算需要約 2 小時，是使用 GPU 運算的 15 倍，若以單核心運算需要約 24 小時，以 Matlab 同樣進行單核心運算則要約 57 小時，由此可看出 LBM 模型在使用 CUDA 撰寫的平行程式，搭配 GPU 可達到非常高的計算速度。上述為單一網格數下的結果，完整的運算速度結果，如表 4-3 及圖 4-2 所示，從結果可看出，使用以 CUDA 撰寫的平行程式搭配 GPU 的計算速度在不同網格數下，皆有非常高的運算速度，在網格數為 6,000,000 時，其 MLUPS 高達 447.5，為使用 CPU 多核心運算的 19.7 倍，為單核心運算的 181 倍，為使用 Matlab 搭配單核心運算的 542 倍，速度提升的效果非常明顯。

計算硬體	GPU(CUDA)	CPU(多核心)	CPU(單核心)	CPU(單核心)
程式	C++	C++	C++	Matlab
計算時間(小時)	0.139	2.082	24.10	56.84
MLUPS	384.8	25.61	2.213	0.938

表 4-2 網格數 960,000，迭代 200,000 次下的運算時間與運算速度

計算硬體	GPU(CUDA)	CPU(多核心)	CPU(單核心)	CPU(單核心)
程式	C++	C++	C++	Matlab
網格數	MLUPS			
240,000	324.3	22.68	2.480	0.674
960,000	384.8	25.61	2.213	0.938
1,500,000	413.9	25.12	2.285	0.930
3,840,000	436.4	23.65	2.481	0.854
6,000,000	447.5	22.66	2.471	0.825
24,000,000	465.5	22.68	2.446	0.792

表 4-3 模型運算速度隨硬體與程式在不同網格數下的差別

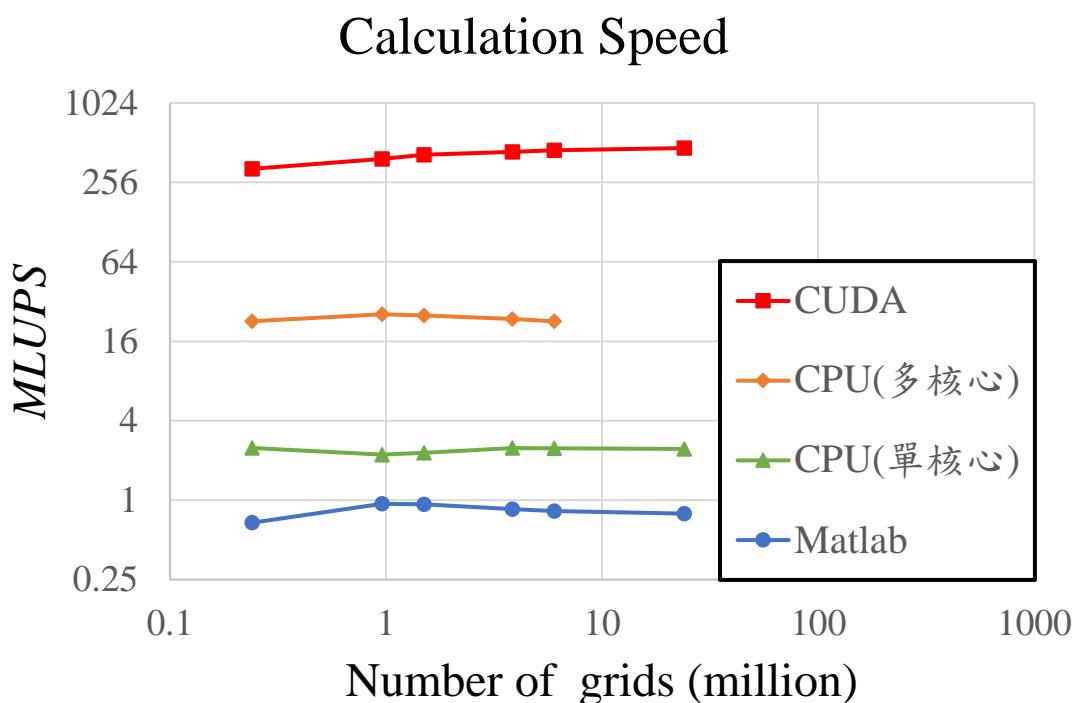


圖 4-2 模型運算速度 MLUPS 隨硬體與程式在不同網格數下的差別



4.2 程式加速之效果與影響

4.2.1 以 FTL 演算法進行程式優化

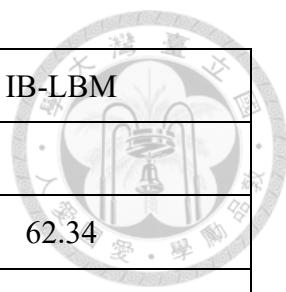
在 4.1 節中提到使用 CUDA 撰寫的平行程式，搭配 GPU 計算 LBM 模型的效果，然而在加入 IBM 後，比較 LBM 模型與 IB-LBM 模型的運算速度差異，如表 4-4 與圖 4-3 所示，可看出在加入 IBM 後運算速度大幅下降，且有別於 LBM 模型會隨著網格數增加，運算速度會緩慢提高並收斂，IB-LBM 模型速度會不斷下降，若分別比較在網格大小為 0.2 mm 及 0.1 mm，網格數為 6,000,000 及 24,000,000 下，各步驟的運算時間，如表 4-5 所示，考慮到在二維模型中，網格大小縮小成一半，代表網格數變成四倍，在表中前三個 LBM 架構下的步驟，網格加密後花費時間大約提高為四倍，符合原先預期，然而在 IBM 架構下的力量計算，花費時間提高到接近八倍，代表在網格數增加下，力量計算的步驟花費時間會增加的幅度比其他步驟更大，大幅提高模型的計算時間。

關於上述提到使 IB-LBM 模型速度變慢的問題，可能原因為在 IBM 中須計算固體格點周圍流場晶格的動量，並將速度依比例內差成固體格點的動量，再進一步計算固體格點受到的力，如(2-67)式至(2-69)式所示，在單向流固耦合模型中(2-68)式中計算固體格點與流場晶格位置的 A 矩陣僅需在初始化階段計算一次即可，然而(2-69)式中代表流場晶格動量的 B 矩陣需每輪計算，且每次計算時每一個流場晶格均需要重新計算其與每個固體格點的位置，此過程不僅耗時，而且考慮到當網格大小減半時，固體格點的數量亦會翻倍，造成此計算過程花費時間變成原先的八倍，與表 4-5 的結果符合。

為了解決此問題，本研究中提出映射層演算法，想法來自於市售的 NVMe(Non-Volatile Memory express) SSD(Solid-State Disk)，全名為非揮發性記憶體主機控制器介面規範固態硬碟，其運作時將資料保存在快閃記憶體中的電晶體，由於現今的 NVMe SSD 中包含非常大量的電晶體，當資料從外界寫入電晶體時，主控晶片會記錄資料儲存的位置，並保存成邏輯位置到物理位置的映射表(Flash Translation

Layer, FTL)，又稱 FTL 表，等到未來要讀取資料時，只需讀取 FTL 表的資訊，即可得知資料儲存的電晶體位置，並直接進行讀取，不用再檢查每個電晶體。

參考 FTL 表的運作原理，IB-LBM 中的固體格點就如同 NVMe SSD 中的電晶體，所以解決方式是為每個流場晶格建立一 FTL 表，依序紀錄其一個網格大小內的固體格點數量，以及其編號，若一流場晶格其附近有編號 1 號及 17 號的固體格點，則其 FTL 表則為(2,1,17)，程式在計算時需在初始化時確認一次流場晶格與固體格點的位置，並建立 FTL 表，後續運算時僅需讀取 FTL 表，當 FTL 表第一項不為零，代表流場晶格附近有固體格點後，直接抓取 FTL 表紀錄的編號計算即可，故將此算法命名為 FTL 演算法。經過 FTL 演算法優化後的結果，如表 4-6 所示，從結果可看出，在前三個 LBM 架構下的步驟花費時間幾乎相同，然而 IBM 架構下的力量計算花費時間大幅降低，表中的力量計算步驟 Force Calculation 是(2-67)式中計算 A 矩陣之反矩陣的部分，花費的時間分別從 43.9 秒與 334 秒，降低到 2.18 秒與 2.99 秒，表中力量影響流場晶格步驟 Force on lattice 是計算力量對流體晶格的分布函數的影響，(2-31)式中計算 $\frac{W_i}{c_s^2} [\vec{e}_i \cdot \vec{F}(\vec{x}, t)] \Delta t$ 的部分，花費時間從 44.1 秒與 341 秒降低到 2.67 秒與 10.87 秒，隨著網格加密花費時間變為 4.07 倍，與流場晶格數的比例相同，IB-LBM 模型經 FTL 演算法優化後的完整結果，如表 4-7 及圖 4-4 所示，從結果可看出，在分析的網格範圍內，經過 FTL 演算法優化後的速度，均較優化前效率提高很多，在網格大小 0.1 mm，網格數 24,000,000 的模型中速度為優化前的 6.64 倍，並且隨著網格數的增加，模型運算速度也會增加並收斂，趨勢與 LBM 模型相同，雖然速度仍不及 LBM 模型，但考量到 IB-LBM 模型計算過程更多，且涉及矩陣計算，這結果是合理且有效的大幅提升運算速度。



模型	LBM	IB-LBM
網格數	MLUPS	
240,000	324.3	62.34
960,000	384.8	80.47
1,500,000	413.9	76.61
3,840,000	436.4	61.85
6,000,000	447.5	52.93
24,000,000	465.5	30.88

表 4-4 LBM 模型與 IB-LBM 模型在不同網格數下的速度比較

	計算花費時間 (ms)		差距(倍)	取 \log_2
	0.2mm	0.1mm		
Collision	14.4	67.2	4.66	2.22
Stream	4.85	18.6	3.83	1.94
Boundary	4.51	18.4	4.08	2.03
Force Calculation	43.9	334	7.61	2.93
Force on lattice	44.1	341	7.72	2.95
Total time cost	112	779	6.95	2.80

表 4-5 IB-LBM 模型在不同網格數下個步驟花費時間與比較

	0.2mm		0.1mm	
	優化前	優化後	優化前	優化後
Collision	14.4	14.35	67.2	67.08
Stream	4.85	4.68	18.6	18.54
Boundary	4.51	4.4	18.4	18.27
Force Calculation	43.9	2.18	334	2.99
Force on lattice	44.1	2.67	341	10.87
Total time cost	112	28.5	779	118

表 4-6 優化後的 IB-LBM 模型在不同網格數下個步驟花費時間與比較

模型	LBM	IB-LBM(FTL 優化)	IB-LBM
網格數	MLUPS		
240,000	324.3	93.02	62.34
960,000	384.8	158.4	80.47
1,500,000	413.9	170.1	76.61
3,840,000	436.4	198.0	61.85
6,000,000	447.5	199.9	52.93
24,000,000	465.5	205.2	30.88

表 4-7 優化後的 IB-LBM 模型在不同網格數下的速度並與其他模型比較

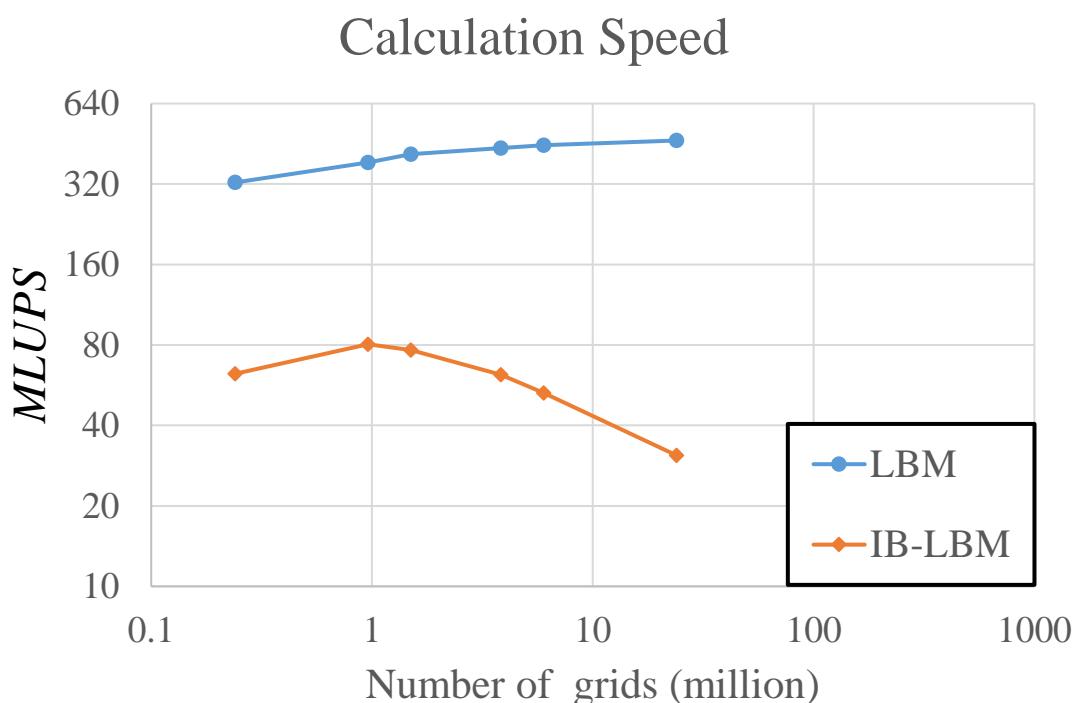


圖 4-3 LBM 模型與 IB-LBM 模型在不同網格數下的運算速度比較



Calculation Speed

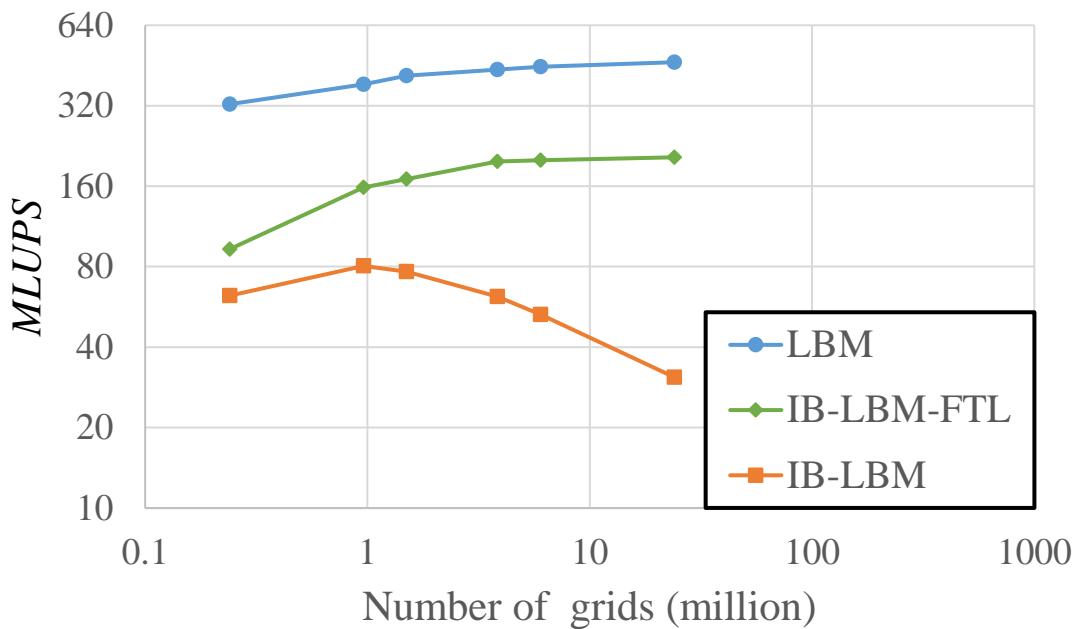


圖 4-4 優化後的 IB-LBM 模型在不同網格數下的運算速度並與其他模型比較

第五章 雙向流固耦合之壓電能量擷取系統實驗



5.1 實驗儀器原理與架設

5.1.1 皮托管

皮托管透過量測流場中流體的全壓與靜壓，兩者的差值稱為壓差，進而推估此處的流體流速，公式為

$$p_t = p_s + \left(\frac{\rho V^2}{2} \right) \quad (5-1)$$

其中 p_t 為全壓， p_s 為靜壓， V 為流速，透過(5-1)式可得量測點的流體流速為

$$V = \sqrt{\frac{2(p_t - p_s)}{\rho}} \quad (5-2)$$

皮托管的優點是其構造簡單且不含可動件及電子元件，穩定性很好，且因為量測到的壓差與風速的平均成正比，在高風速下量測結果較為準確，缺點是在低風速下壓差對風速的變化不敏感，容易有精確度不夠的問題。

本研究使用的皮托管為 DWYER 公司生產的 Dwy-160，如圖 5-1 所示，搭配壓差計型號為 DWY-MS-121-LCD，如圖 5-2 所示，可量測最大壓力差達 100Pa，準確度在 0.1%。



圖 5-1 使用的皮托管



圖 5-2 與皮托管相連接的壓差計

5.1.2 热線測速儀

熱線測速儀又稱熱線風速計，原理為將一根金屬絲放置於流場中，通電以加熱金屬絲(即熱線)，由於流體流經熱線會將金屬絲的熱量帶走，當流體流速較高時，為了維持金屬絲的高溫，熱線測速儀會通更大的電壓，因此透過量測電壓可得知熱線測速儀的量測的流場流速。其優點包含精度高、反應速度快、從低風速到高風速皆可量測，但由於以熱傳導進行量測，對瞬間的氣溫變化及空氣中的雜質如粉塵等較為敏感，並且因熱線是非常細的金屬絲，操作上需小心使用。

熱線測速儀量測風速時是將得到的電壓做換算，需要以其他的風速計(如皮托管等等)進行校正，方可使用，本研究中在沒有障礙物中的風洞進行校正，將熱線測速儀放置在皮托管附近，熱線測速儀輸出電壓時即可跟皮托管量測到的速度對應。在溫度不變下使用熱平衡方程式 King's Law[43]：

$$e^2 = a + bv^n \quad (5-3)$$

其中 e 為輸出電壓， a 為零點輸出， b 為傳感器的靈敏度， v 為量測位置之流體速度， n 為常數，由於流速在 50 m/s 下通常取 0.5，因此可得到電壓與量測流速的四次方程式，並進行熱線測速儀的校正。

本研究使用的熱線測速儀其探針為 TSI 公司製造之 MODEL1201 系列，尺寸示意圖如圖 5-3 所示，實際照片如圖 5-4 及圖 5-5 所示，使用時連接安都企業所製造之熱線儀(型號 HW-101)，如圖 5-6 所示，透過熱線儀加熱探針的熱線，並接收輸出之電壓訊號，連接至示波器，如圖 5-7 所示，即可即時觀察量測狀況並儲存資料。

Model 1210 General Purpose Probe

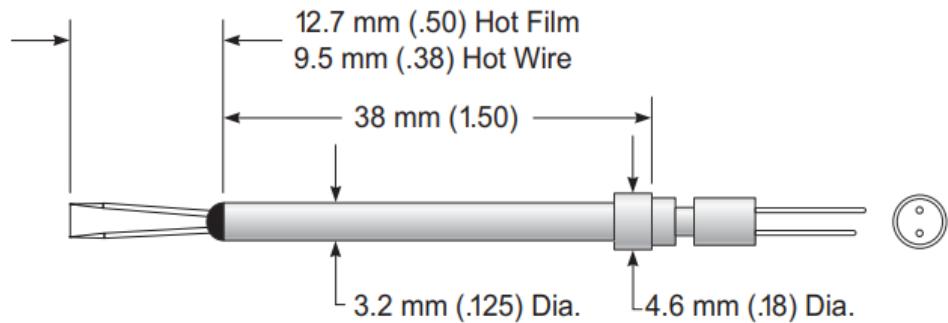


圖 5-3 热線測速儀之探針尺寸示意圖

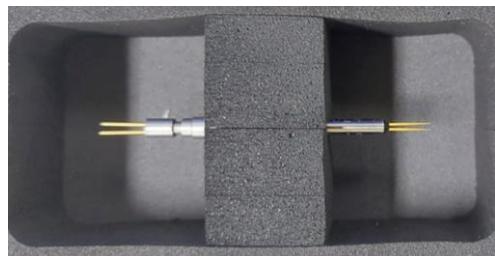


圖 5-4 热線測速儀之探針

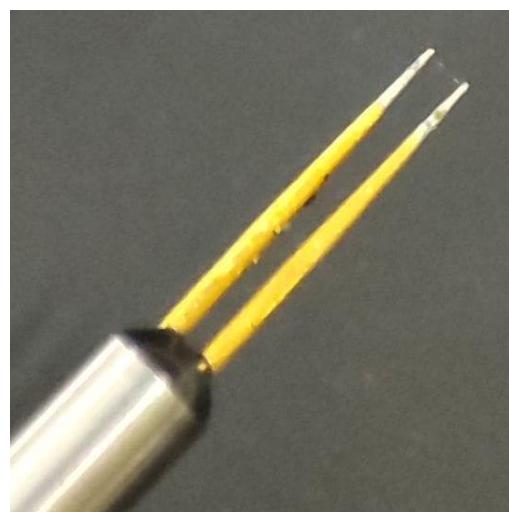


圖 5-5 热線測速儀之热線放大圖



圖 5-6 热線風速計 HW-101



圖 5-7 示波器



5.2 風洞量測與熱線測速儀校正

本研究使用風洞進行壓電能量擷取系統的實驗，為了確保流場品質與實驗準確性，需先進行風洞的流場均勻度(Flow Uniformity)、紊流強度(Turbulence Intensity)量測，以及熱線測速儀校正。

5.2.1 風洞設計與風機規格

本研究使用之風洞其截面為長度 300 mm 之正方形，總長度為 1850 mm，測試段長度為 1000 mm，此長度滿足數值計算中的流場長度 800 mm，四周壁面的材料為 15 mm 厚的壓克力，風洞結構組成由最前面的整流段、中間的測試段、尾端的沉澱段所組成，並於尾端連接離心風扇進行抽風，尺寸示意圖如圖 5-8 所示，實體圖如圖 5-9 所示。

最前方的整流段由一面蜂巢板及三面孔隙大小不同的網目組成，以確保在進行風洞實驗時，進入測試段的風足夠均勻並消除漩渦，鋁製蜂巢板固定在風洞入口，孔徑為 5 mm，厚度為 4 mm，如圖 5-10 所示，網目是由細密的不鏽鋼細絲編織而成，規格為 120 目、200 目、300 目，如圖 5-11 所示，三層網目從風洞入口開始排列方式為由疏至密，透過此排列方式可使漩渦大小逐步降低，至測試段時保持均勻且穩定的風流，以進行實驗。

測試段在頂部有做開孔，如圖 5-12 所示，可放入熱線測速儀量測風洞中不同位置的流速，測試段側邊兩邊也有做高度標示，如圖 5-13 所示，透過量測時對準兩邊的高度標示，方便後續做風洞的均勻度及紊流強度量測時，可以較直覺準確的確定熱線測速儀的位置與高度。而沉澱段目的是防止在風機附近的不穩定氣流影響測試段內的實驗。

使用的風機是質昌風機公司生產的 NA-300L 直結式傳動風機，如圖 5-14 所示，相連接的變頻器(Variable-Frequency Drive, VFD)為 YASKAWA V1000 系列，如圖 5-15 所示，變頻器操作時調整其頻率，解析度為 0.01Hz，頻率越高則風機轉速越快，將風洞測試段中的障礙物移出，並以皮托管量測不同風機頻率下的流速，

結果如表 5-1 與圖 5-16 所示，從結果可看出當變頻器頻率達 10Hz 以上，對應的流速在 1.37 m/s 以上時，變頻器頻率與流速呈現線性關係。

風機變頻器頻率	皮托管量測流速(m/s)
0	0
5	0.49
10	1.27
15	2.37
20	3.58
25	4.8
30	6.09
35	7.38
40	8.67
45	9.94

表 5-1 在不同變頻器頻率下的流場流速

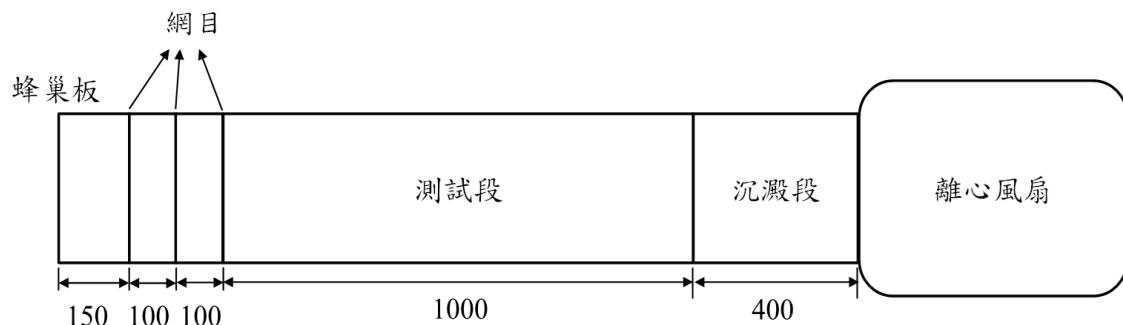


圖 5-8 風機尺寸示意圖(單位：mm)



圖 5-9 風機實體圖

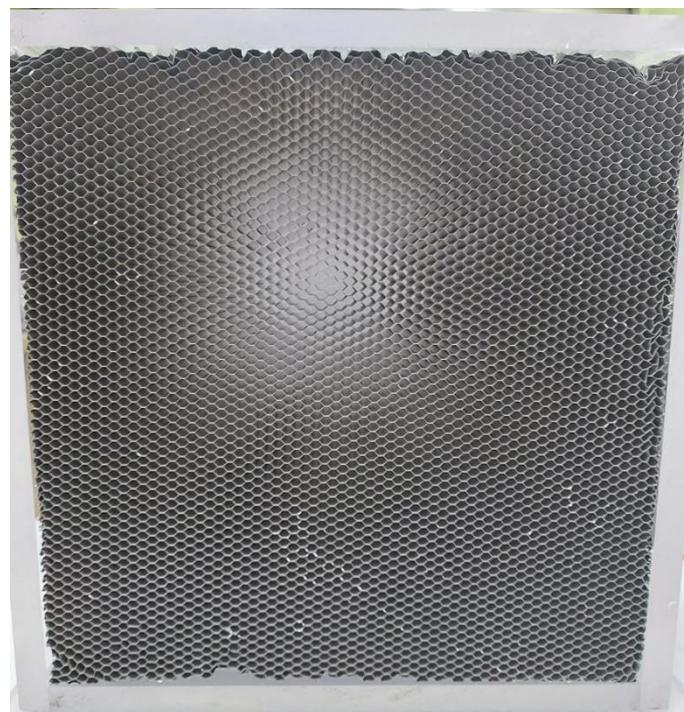


圖 5-10 鋁製蜂巢板



圖 5-11 網目

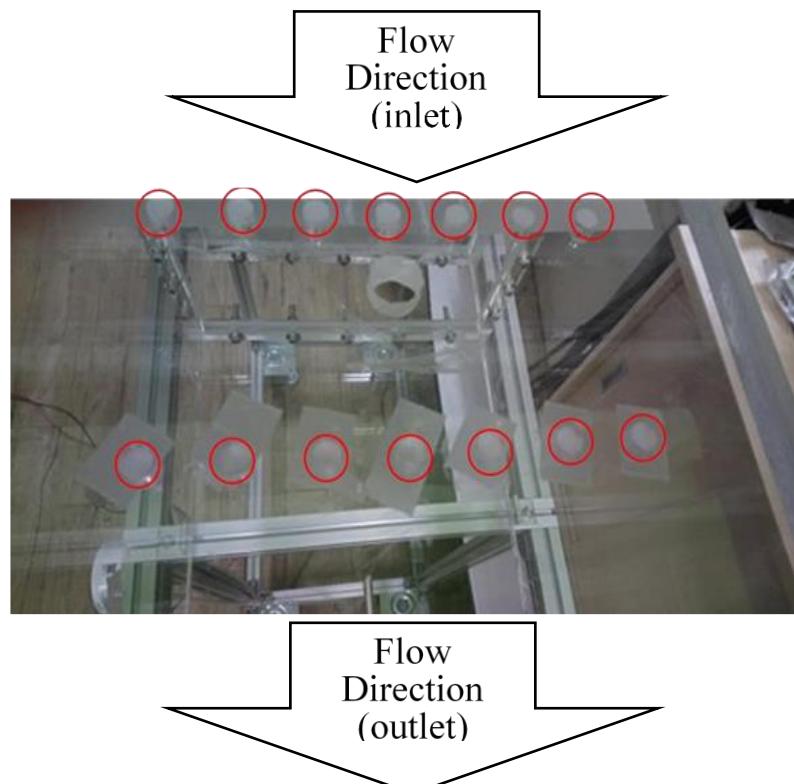


圖 5-12 風洞測試段頂部開洞位置



圖 5-13 風洞測試段側邊位置標註



圖 5-14 風機



圖 5-15 變頻器

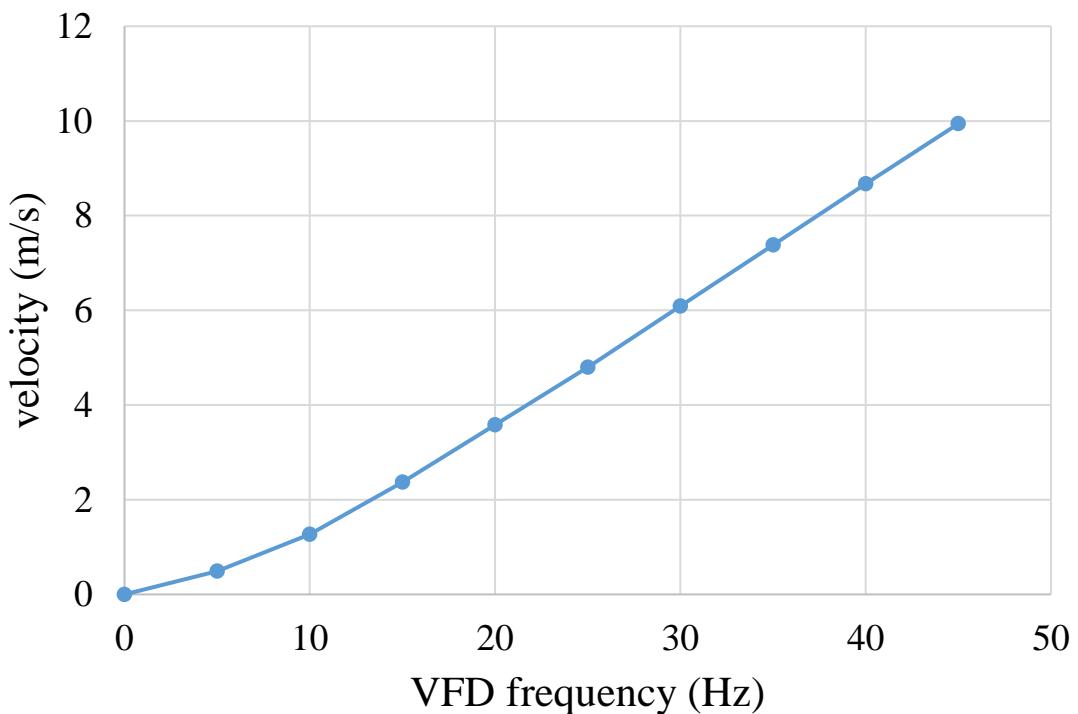


圖 5-16 變頻器頻率與流速關係圖



5.2.2 热線測速儀校正

將熱線測速儀放置於與皮托管同高度，水平距離 50mm 處量測，紀錄在不同馬達變頻器的頻率下由皮托管得到的流速及熱線測速儀得到的電壓值，如表 5-2 與圖 5-17 所示，考慮到量測流速均在 2 m/s 以上，取流速在 2 m/s 以上的數據並根據 King's law(6-3)式，可得熱線測速儀電壓與流速的四次關係曲線：

$$v = -0.0431e^4 + 0.7053e^3 - 3.5647e^2 + 9.1776e - 7.7063 \quad (5-4)$$

其中 e 為熱線測速儀輸出電壓， v 為以皮托管量測到的流速，考慮到使用風機變頻器、皮托管、熱線測速儀量測時，彼此間的關係會隨每次量測時的環境而有所變化，因此(6-4)式只適用於本次實驗，後續壓電能量擷取系統的量測實驗之校正數據皆會依據當下實驗進行確認。

風機變頻器頻率	皮托管量測流速(m/s)	熱線測速儀電壓(V)
0	0	0
5	0.49	0.893
10	1.27	1.963
15	2.37	2.543
20	3.58	3.121
25	4.8	3.601
30	6.09	4.006
35	7.38	4.347
40	8.67	4.652
45	9.94	4.928

表 5-2 在不同變頻器頻率下的流場流速與熱線測速儀電壓

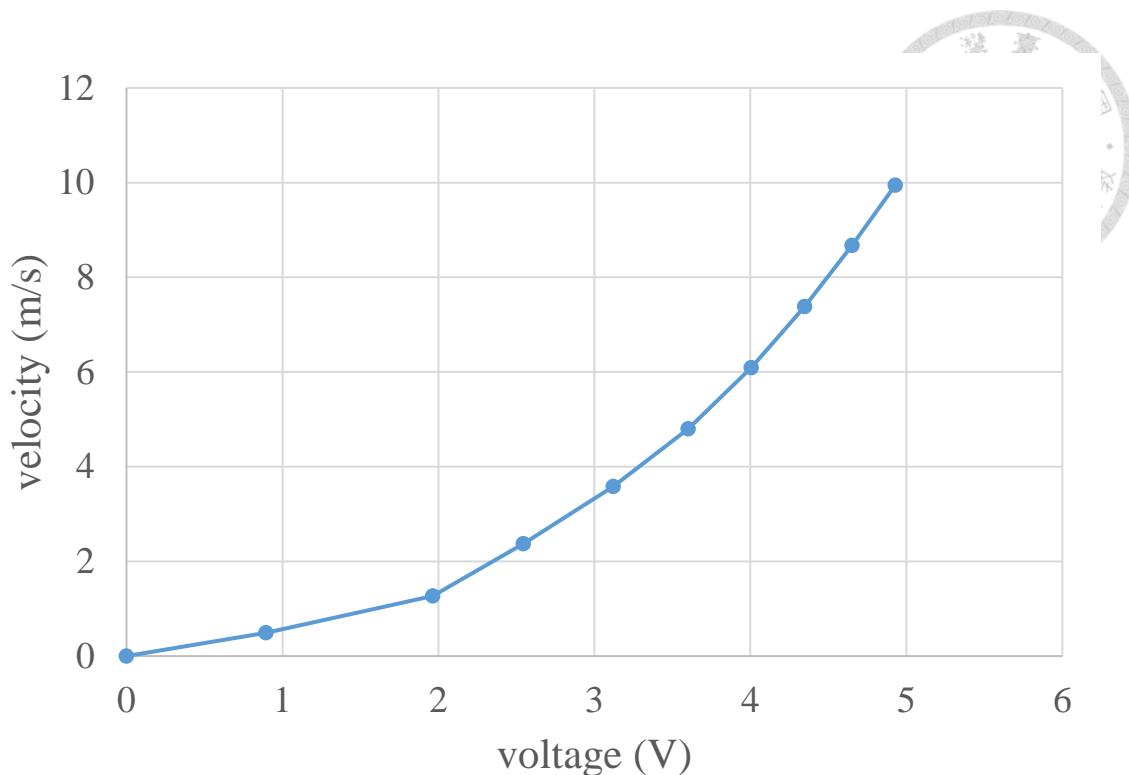


圖 5-17 热線測速儀電壓與流速關係圖

5.2.3 風洞之流場均勻度與紊流強度量測

流場均勻度量測的位置為測試段內，距離整流段 250 mm 處，量測在風機變頻器頻率為 20Hz、30Hz、40Hz、50Hz 下，該處截面上共 49 個位置的流速與紊流強度，如圖 5-18 所示，量測點之間間隔 3 cm，與最外圍間隔 6 cm，每個位置以熱線測速儀量測五秒並記錄，結果如表 5-3 及圖 5-19 至圖 5-22 所示，其中均勻度公式為

$$\gamma = 1 - \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\bar{u}_w - u_i)^2}}{\frac{N-1}{\bar{u}_w}} \quad (5-5)$$

其中 \bar{u}_w 為該截面的平均流速， u_i 為單點五秒內的平均流速， N 為量測點數量，在本研究中為 49，從結果可看出在變頻器頻率介於 20 Hz 至 50 Hz 間，流場的均勻度相當高，皆有 96% 以上，且量測結果除了角落四個位置速度稍大，其他 45 個位置的速度非常均勻。將上述數據進行紊流強度分析，公式為

$$I = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{u} - u_i)^2}{N}}$$



(5-6)

其中 \bar{u} 為該位置五秒內的平均流速， u_i 為該位置隨時間變化的流速， N 為 5 秒內的取樣數，結果如表 5-4 與圖 5-23 至圖 5-26 所示，從結果可看出在風機變頻器介於 20 Hz 至 50 Hz 間，流場的紊流強度相當低，平均紊流強度不超過 0.6%，且分析其標準差均低於 0.04%，紊流強度均勻度皆在 92% 以上。

綜合上述流場均勻度與紊流強度量測，可看出透過蜂巢板以及三層網目，流場的速度分布相當均勻，紊流強度相當低且均勻，過濾漩渦的效果非常好。

變頻器頻率	20Hz	30Hz	40Hz	50Hz
平均流速(m/s)	3.22	5.49	7.97	10.07
流速標準差(m/s)	0.12	0.14	0.24	0.31
均勻度	96.22%	97.37%	96.75%	96.81%

表 5-3 在不同變頻器頻率下的流場均勻度量測結果

變頻器頻率	20Hz	30Hz	40Hz	50Hz
平均紊流強度	0.418%	0.411%	0.473%	0.506%
紊流強度標準差	0.024%	0.024%	0.038%	0.039%
紊流強度均勻度	94.07%	94.01%	92.01%	92.35%

表 5-4 在不同變頻器頻率下的流場紊流強度量測結果

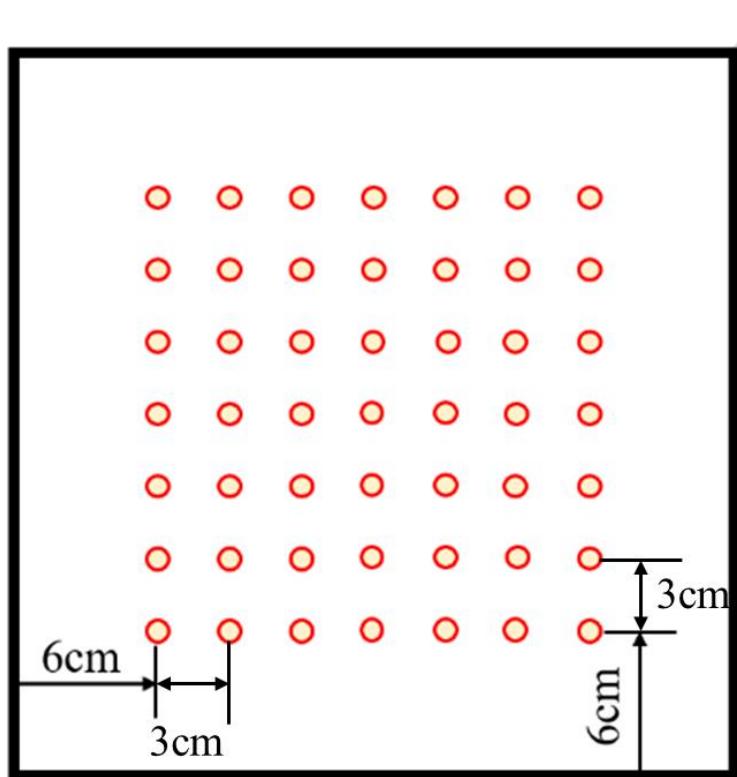


圖 5-18 風洞均勻度量測位置

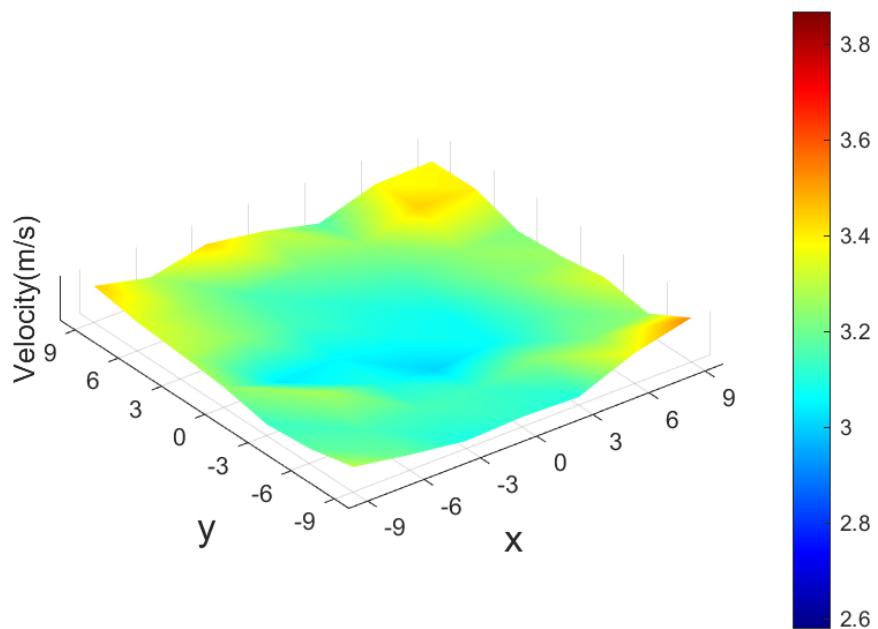


圖 5-19 風機變頻器頻率 20Hz 下流場流速量測

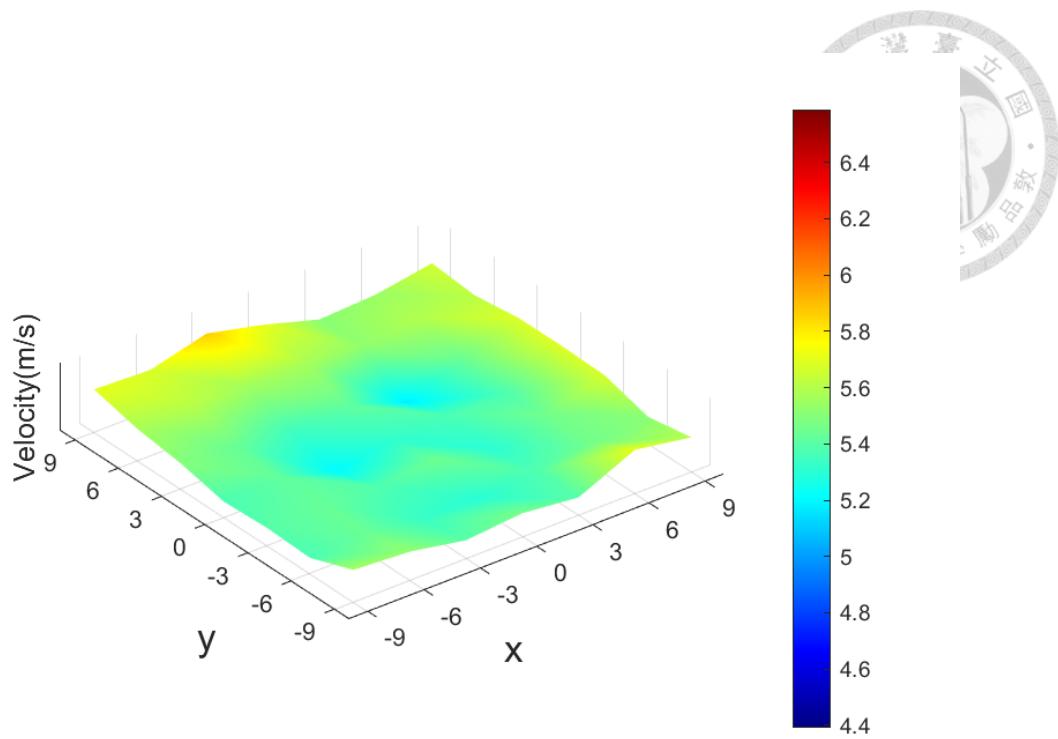


圖 5-20 風機變頻器頻率 30Hz 下流場流速量測

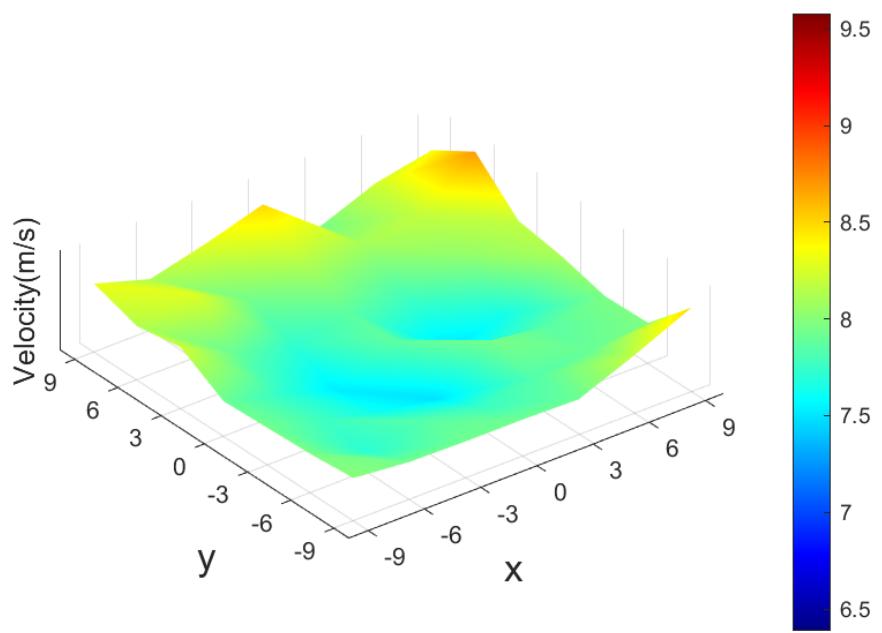


圖 5-21 風機變頻器頻率 40Hz 下流場流速量測

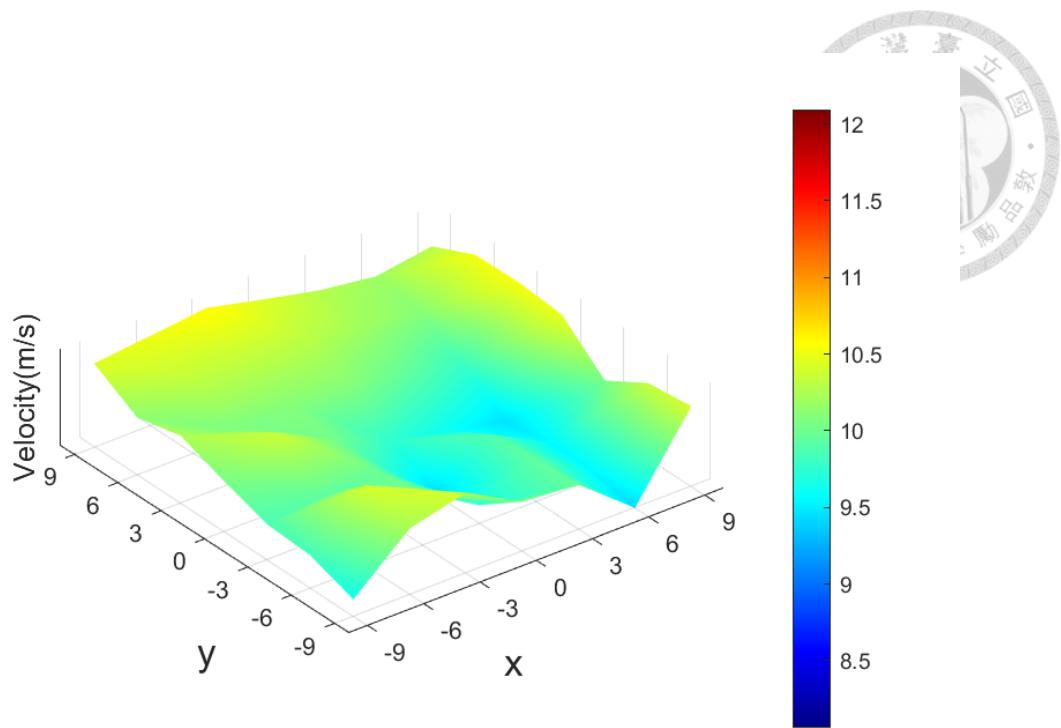


圖 5-22 風機變頻器頻率 50Hz 下流場流速量測

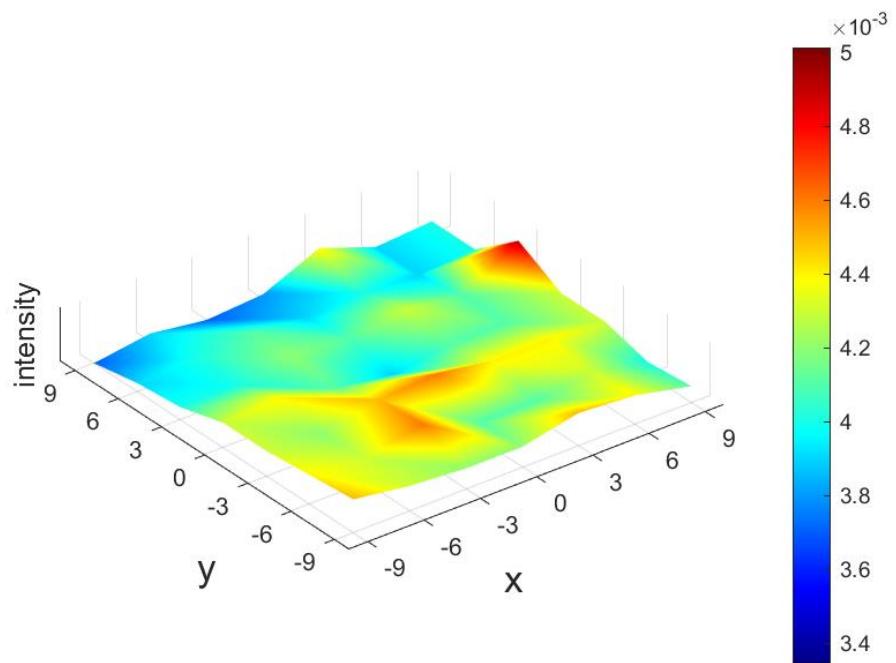


圖 5-23 風機變頻器頻率 20Hz 下流場紊流強度量測

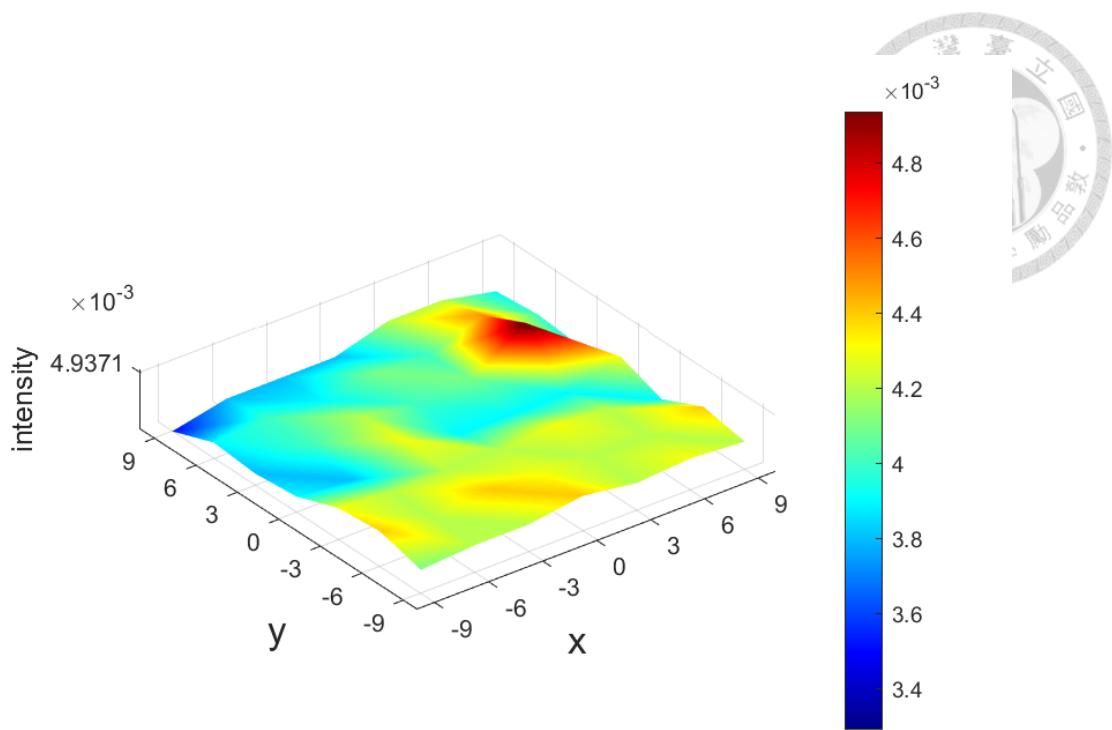


圖 5-24 風機變頻器頻率 30Hz 下流場紊流強度量測

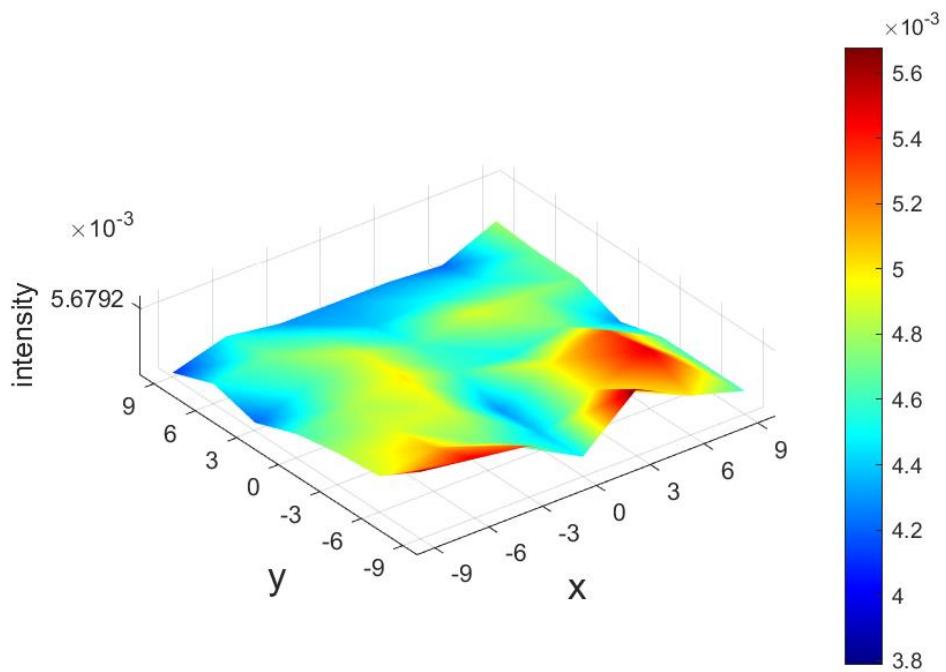


圖 5-25 風機變頻器頻率 40Hz 下流場紊流強度量測

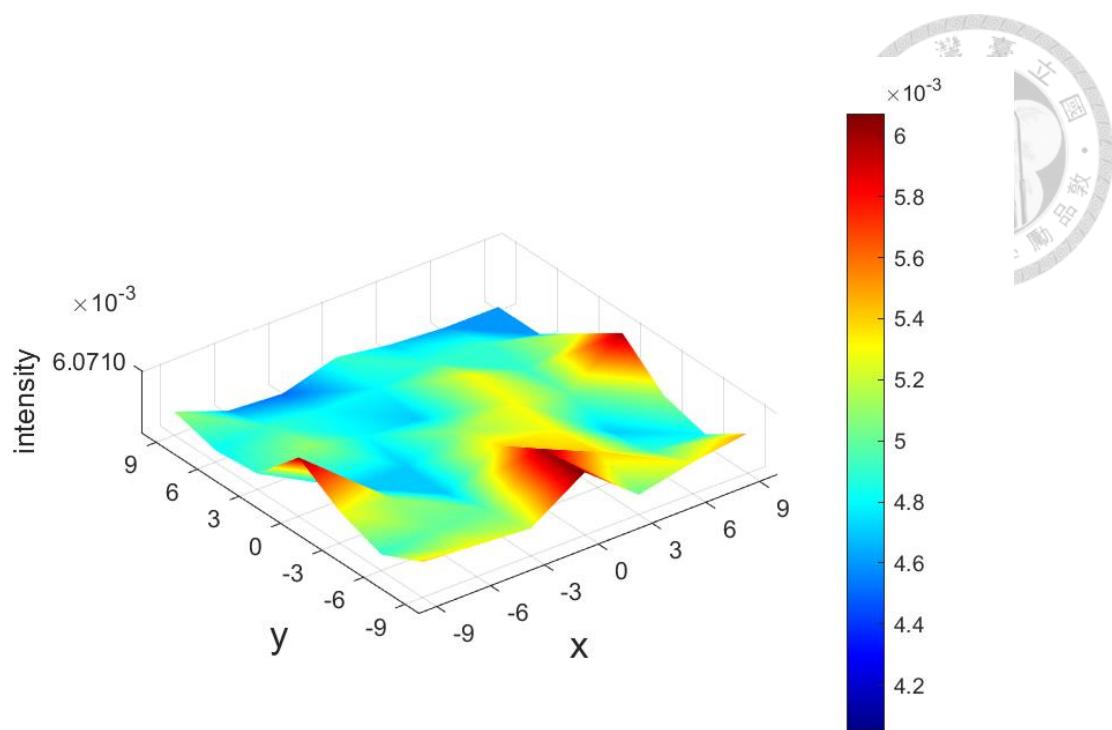


圖 5-26 風機變頻器頻率 50Hz 下流場紊流強度量測



5.3 能量擷取系統量測

本研究以實驗量測的壓電能量截取系統是以壓電陶瓷雙晶片(SBS)結合金屬圓管障礙物組成，並放置於風洞中，透過流體經過金屬圓柱障礙物後產生的卡門渦街激振壓電陶瓷雙晶片，並以雷射都卜勒測振儀(LDV)量測位移，以示波器量測輸出電壓，探討在入口處流速介於 2 m/s 至 12 m/s，流場雷諾數介於 2700 至 16500 間，量測到的壓電片位移與輸出電壓，並與 3.3 節中 IB-LBM 雙向流固耦合模型的結果做比對。

5.3.1 雷射都卜勒測振儀

雷射都卜勒測振儀(Laser Doppler Vibrometer,LDV)應用都卜勒效應(Doppler Effect)，以非接觸方式量測物體之速度，進而推算位移及加速度，量測原理為利用雷射照射在移動中的物體，其入射波與反射波的頻率差正比於物體之運動速度。

本研究使用之 LDV 為 Polytec 公司生產，其型號為 OFV-505，如圖 5-27 所示，主要使用聲光調製器系統進行量測，原理為聲波在晶體材料中傳遞時會影響晶體材料之折射率，進而影響到光，稱為聲光效應，如圖 5-28 所示，聲光調製器內會由轉換器產生聲波，通過晶體材料後傳遞至減振器並吸收，透過調整聲波頻率進而改變光波的繞射角度，可調製的聲波頻寬達數兆赫茲。

假設轉換器產生的聲波，其頻率為 f_a ，聲波的傳遞速率為 V_a ，則晶體材料的折射率改變週期為：

$$T = \frac{V_a}{f_a} \quad (5-7)$$

假設入射光波長為 λ_0 ，晶體材料的折射率為 n ，則入射光經過晶體材料時的波長為：

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad (5-8)$$

考慮到繞射角度很小， $\sin \theta_B \approx \theta_B$ ，使用 Bragg 繞射公式可求得繞射角為：

$$\theta_B = \frac{\lambda}{2T} = \lambda \frac{f_a}{2V_a} \quad (5-9)$$

如圖 5-29 所示，雷射先經由分光鏡分成兩道光，一道傳至待測片，當物體振動時會影響反射光，並透過分光鏡傳導至檢測器(Detector)，另一道則經由 Bragg Cell 調整至適當頻率後傳導至檢測器，最後透過兩道光的頻率差異，即可得知物體運動速度。



圖 5-27 雷射振測儀 LDV-OFV505

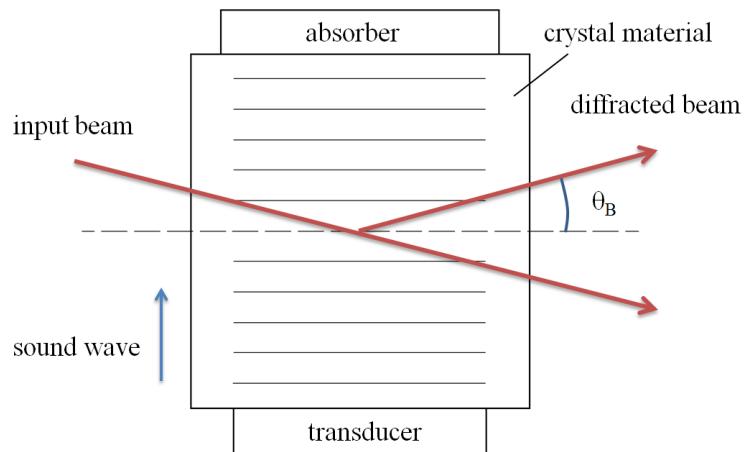


圖 5-28 聲光調製器構造示意圖

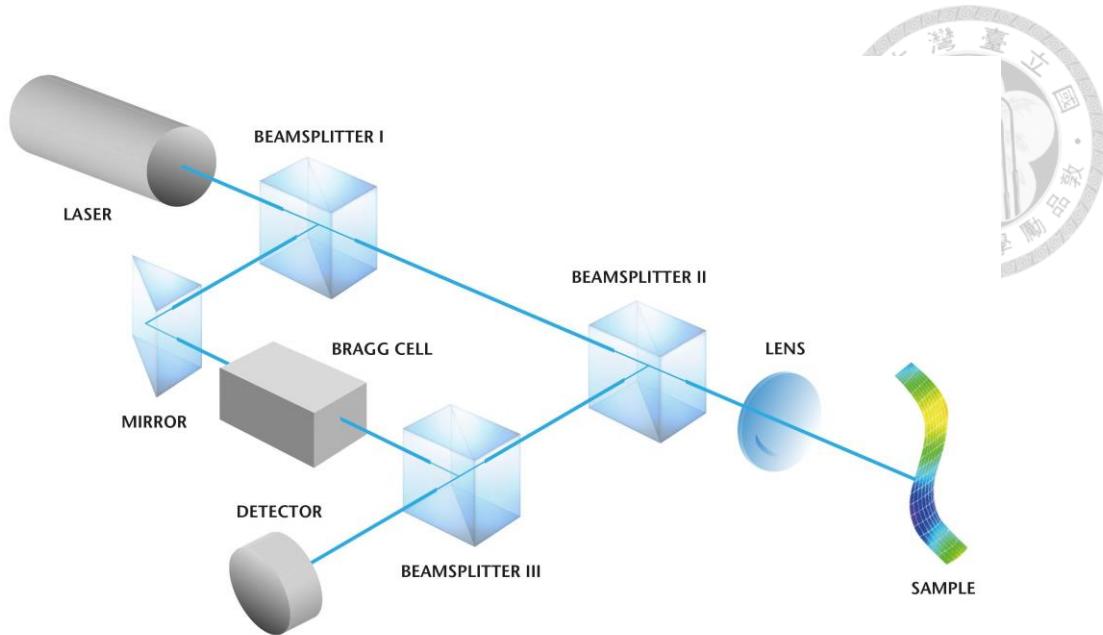


圖 5-29 雷射都卜勒光學量測系統

5.3.2 治具設計與量測實驗設置

製作一鋁製圓柱，中間留有方形凹槽，壓電片一端以黏膠將其與壓克力密合後固定於圓柱凹槽內，並以螺絲鎖緊，如圖 5-30 所示，考慮到螺絲孔可能影響流場結果，以膠帶將其覆蓋，圓柱一端流洞給銅線穿出，拆解圖如圖 5-31 所示。進行實驗量測時將鋁製圓柱結合壓電片固定於風洞中，並以黏土由風洞外側固定圓柱，同時以 LDV 量測平板位移與使用示波器量測壓電陶瓷雙晶片的輸出電壓，位移量測 12.8 秒，電壓量測 10 秒，考慮到壓電陶瓷雙晶片的表面在光反射的表現不夠好，直接以 LDV 量測會不准，因此在其量測位置貼上反光膠帶，量測實驗設置如圖 5-32 所示，平板量測位置如圖 5-33 所示。



圖 5-30 壓電陶瓷雙晶片固定於鋁製圓柱



圖 5-31 鋁製圓柱結合壓電片拆解圖



圖 5-32 壓電能量擷取系統實驗量測設置

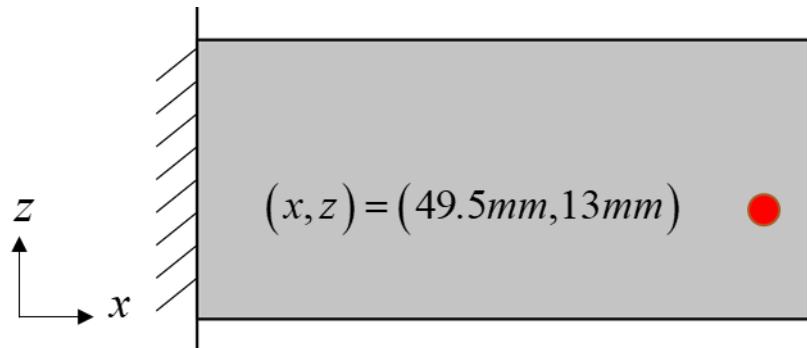


圖 5-33 位移量測位置示意圖

5.3.3 實驗量測結果與討論

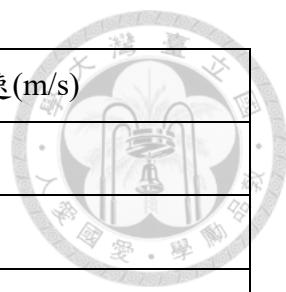
設置風機變頻器頻率為 7.43 Hz 至 56.42 Hz，對應的入口處流速為 1 m/s 至 12 m/s，如表 5-5 所示，量測在不同流速下的位移與電壓，如圖 5-34 至圖 5-45 所示，及圖 5-46 至圖 5-57 所示，數據如表 5-6、圖 5-58、圖 5-59 所示，從結果可看出，實驗中在不同流速下，壓電平板第一振動頻率的變形與電壓皆很明顯，且

在入口處流速為 10 m/s 時，壓電平板有最大的位移與輸出電壓，分別為 $105.8\mu\text{m}$

與 $4.104V$ ；與 IB-LBM 的結果做比較，如圖 3-17 至

圖 3-30 所示，可看出在入口處流速 2 m/s 與 4 m/s 下有出現壓電平板第一振動模態的振動，但在 6 m/s 以上時第一振動模態的振動則以剛初始化時為主，待模型計算 3 秒以後幾乎只有出現渦街頻率下的振動，等到入口處流速提高到 9 m/s 才因為渦街頻率與壓電平板第一振動模態的頻率吻合而有高位移與電壓。

由上述討論可知，在實驗中有量測到明顯的壓電平板第一振動頻率的訊號，以及渦街頻率的訊號，並在入口處流速 10 m/s 兩個訊號頻率重和下，有最大的壓電平板位移與電壓；在 IB-LBM 雙向流固耦合模型的結果中，壓電平板第一振動模態的訊號則小很多，以卡門渦街的渦街頻率為主，在入口處流速 9 m/s 有非常大的位移與電壓，可能原因是因電腦硬體限制，只能使用較粗的網格，考慮到網格大小為 2 mm ，而壓電平板的厚度僅 0.51 mm ，約為網格大小的四分之一，而 IBM 又是將代表壓電平板的固體格點以內差或外差的方式將格點速度位置以流場晶格進行表達，因此在網格大小比壓電平板厚度大很多的狀況下，不僅壓電平板的特性難以準確的表達出來，模型中壓電平板附近的流場及漩渦也難以精確描述，可能的解決辦法包含使用更進階的流場模型，如 LES 模型中的 dynamic model[30]等等，或是以更高性能的硬體設備，進行更細密的網格劃分與運算，來解決上述問題。



風機變頻器頻率(Hz)	入口處流速(m/s)
7.43	1
13.21	2
17.98	3
22.43	4
26.77	5
31.01	6
35.04	7
39.21	8
43.43	9
47.67	10
52.13	11
56.42	12

表 5-5 風機變頻器對應入口處流速

入口處流速 (m/s)	位移 (μm)		電壓 (V)	
	實驗	IB-LBM	實驗	IB-LBM
1	0.1297		0.003	
2	0.3164	0.47	0.011	0.032
3	0.9485		0.028	
4	2.037	3.53	0.057	0.243
5	3.626		0.100	
6	4.405	10.98	0.164	0.757
7	8.332		0.219	
8	11.88	45.15	0.374	3.102
9	28.60	268.98	0.932	18.423
10	57.69	104.87	1.647	7.178
11	42.68		1.453	
12	42.72	37.77	1.416	2.577

表 5-6 不同入口處流速下，實驗結果與 IB-LBM 模擬之位移與電壓結果比較

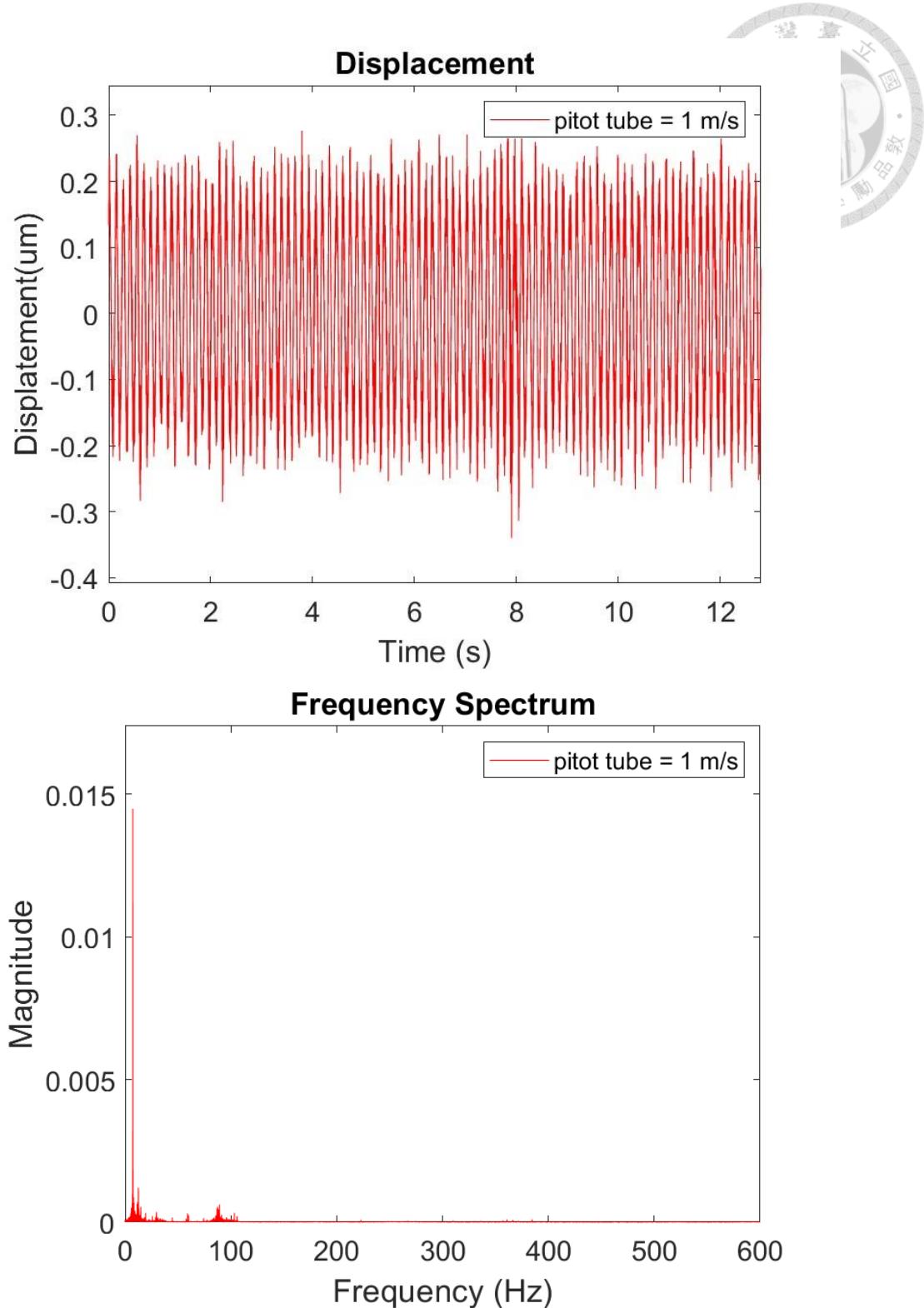


圖 5-34 入口處流速 1m/s 下，實驗量測平板位移與經 FFT 後的結果

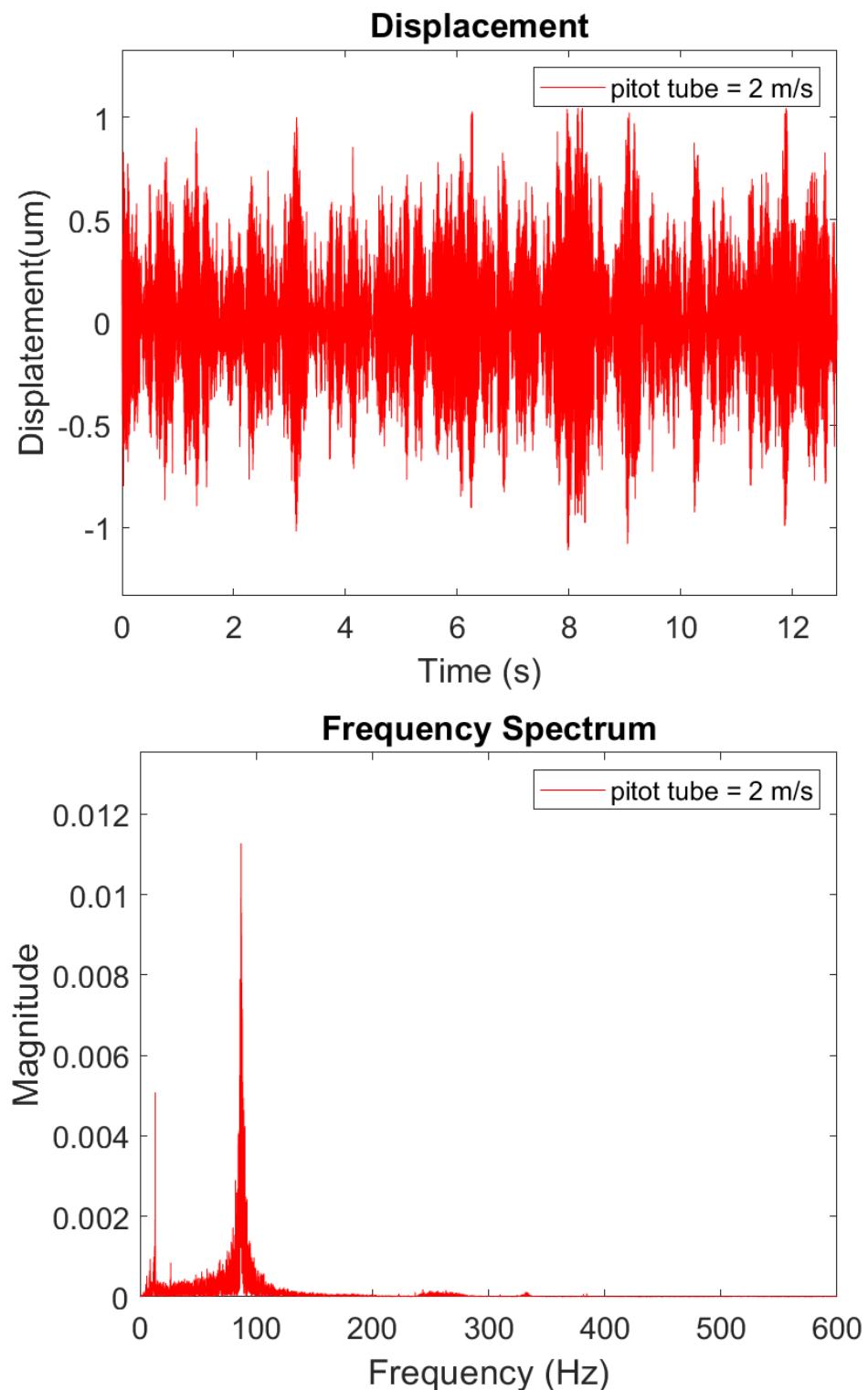
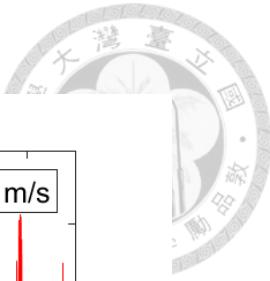


圖 5-35 入口處流速 2m/s 下，實驗量測平板位移與經 FFT 後的結果

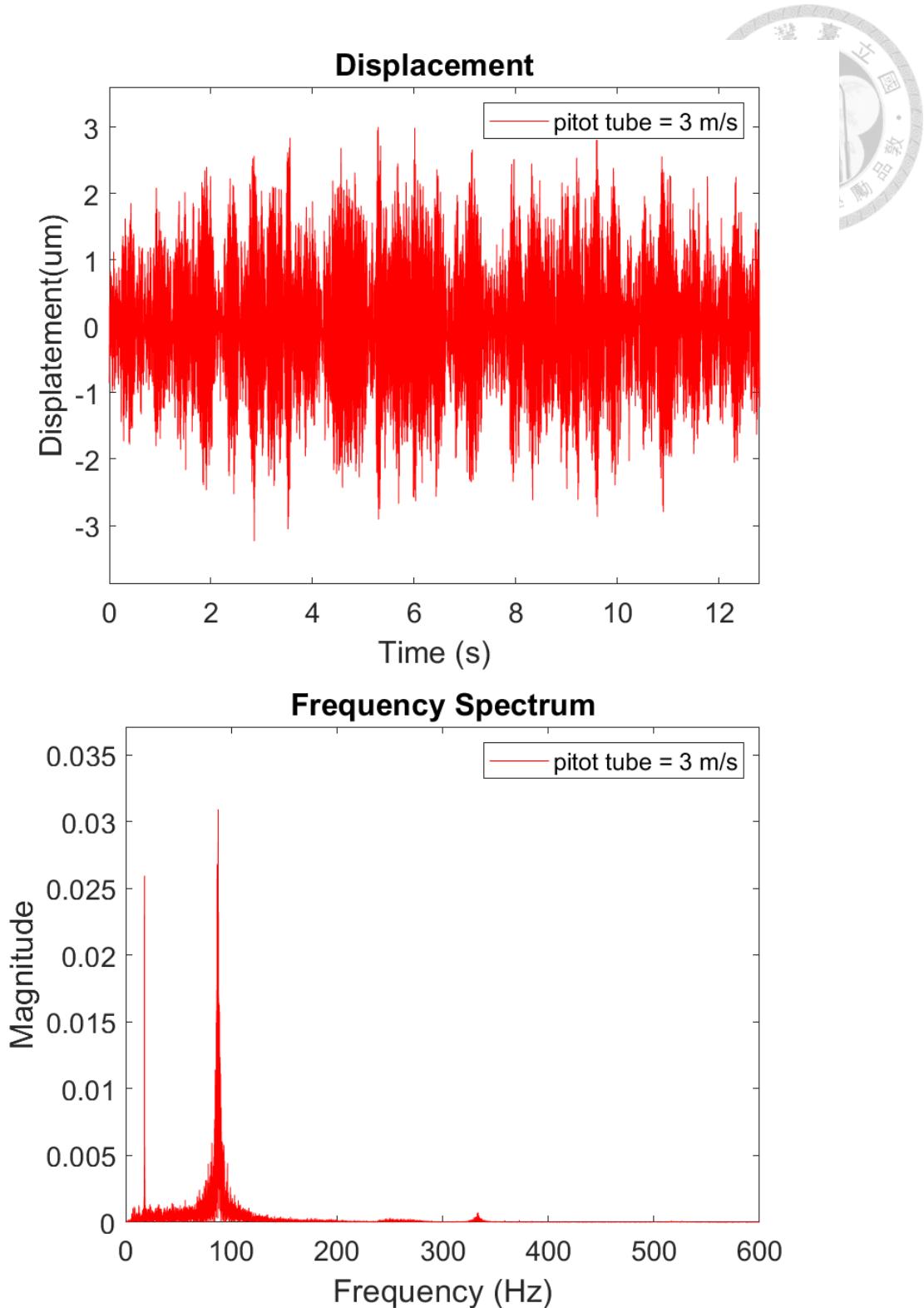


圖 5-36 入口處流速 3m/s 下，實驗量測平板位移與經 FFT 後的結果

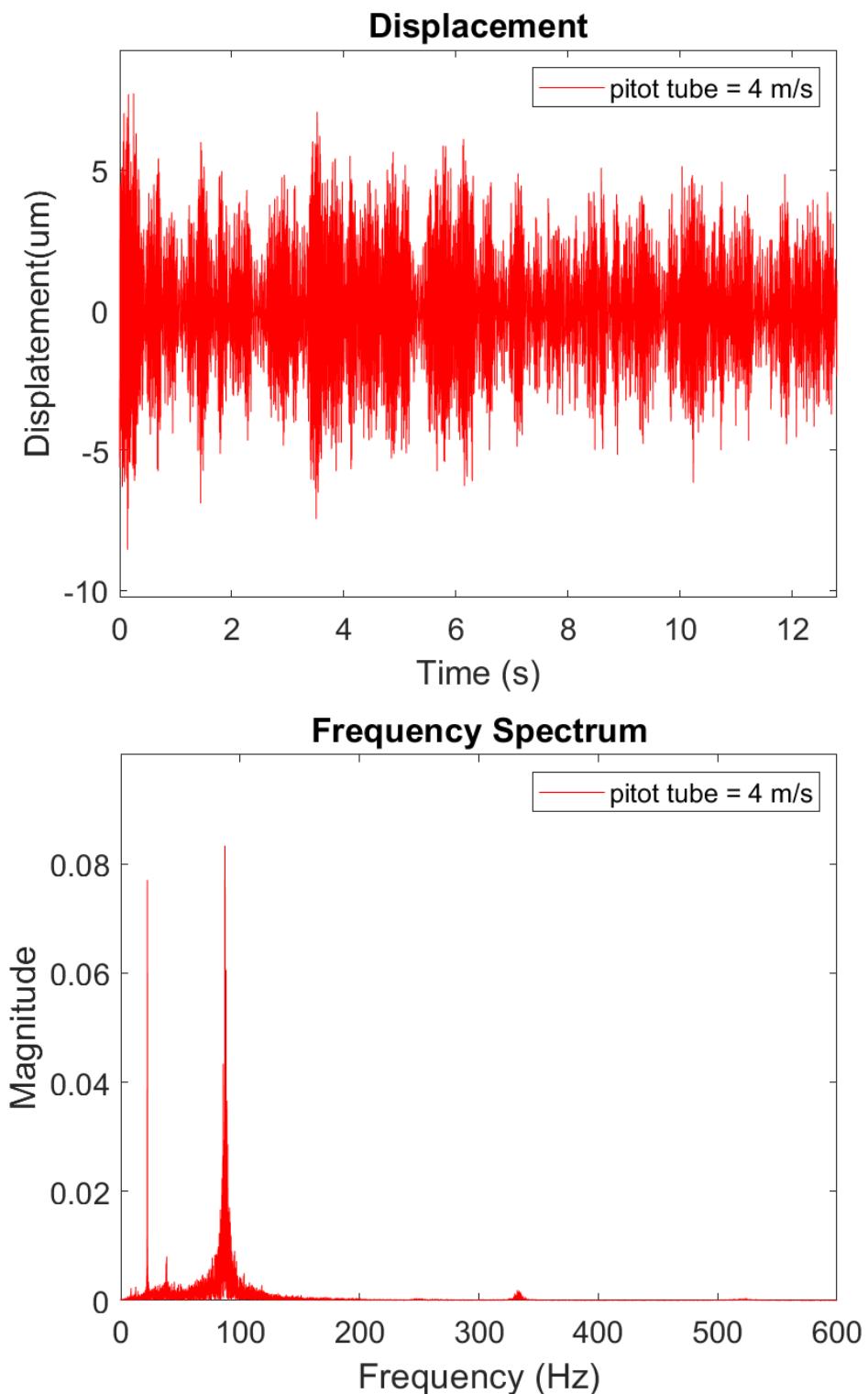


圖 5-37 入口處流速 4m/s 下，實驗量測平板位移與經 FFT 後的結果

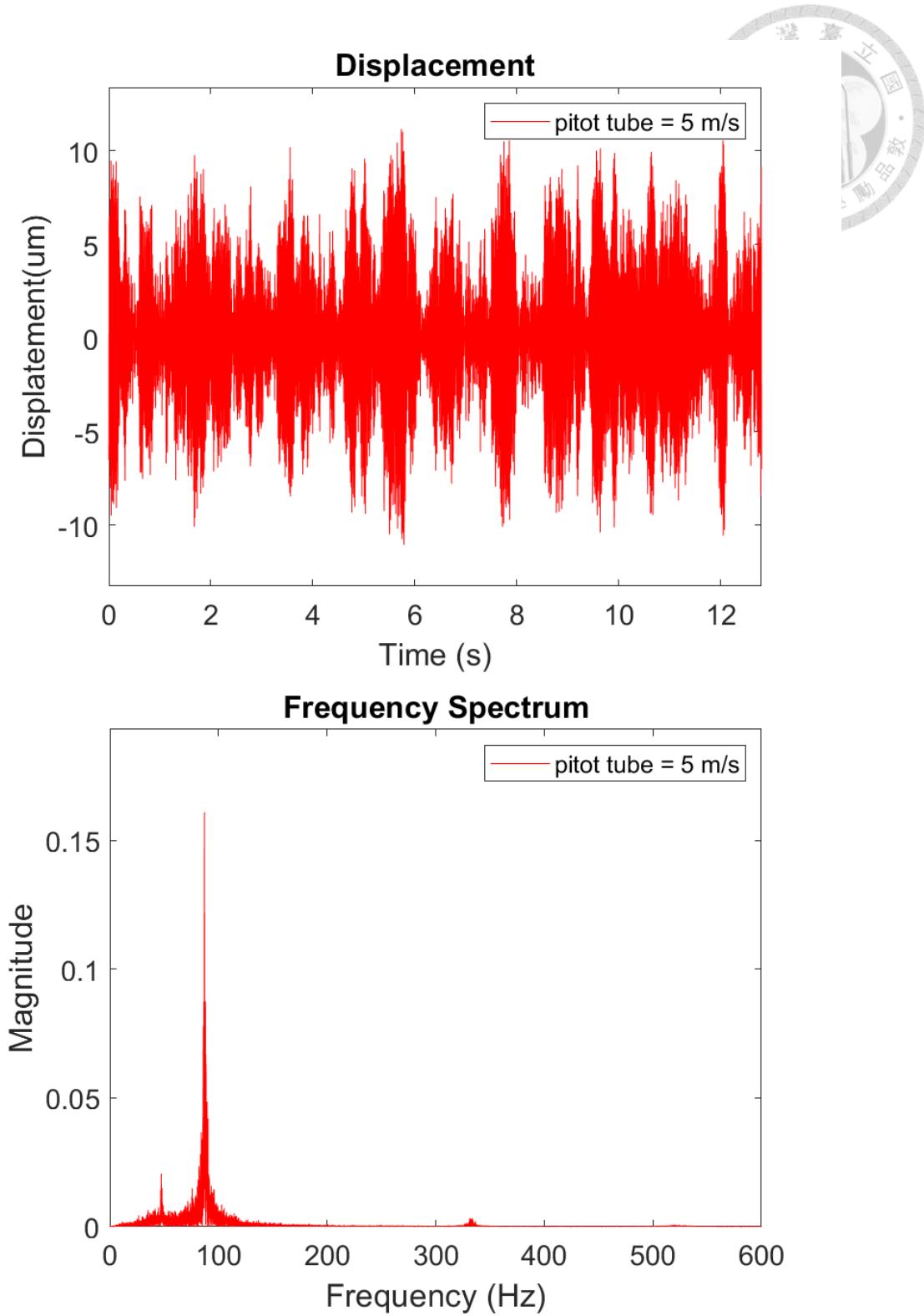


圖 5-38 入口處流速 5m/s 下，實驗量測平板位移與經 FFT 後的結果

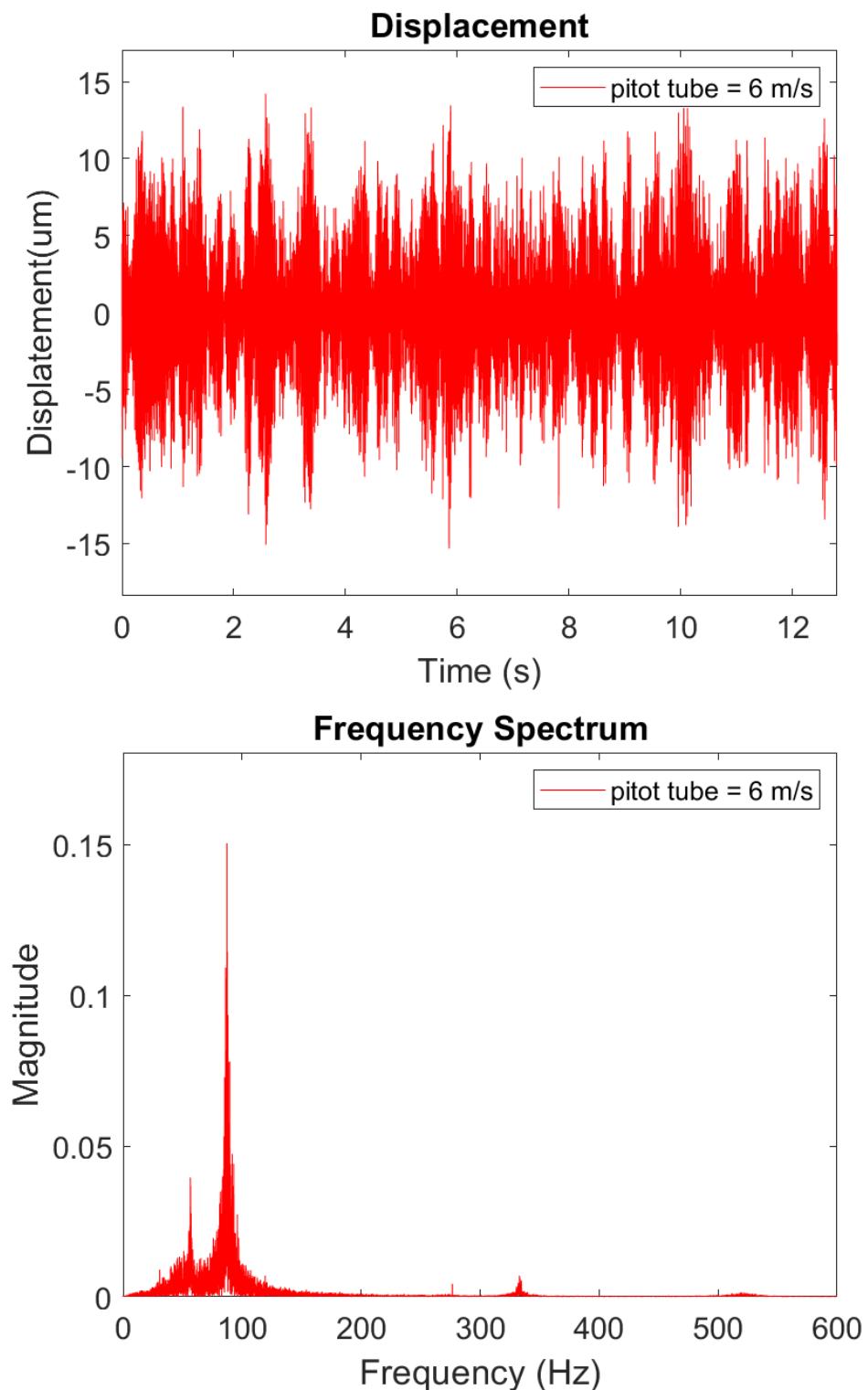
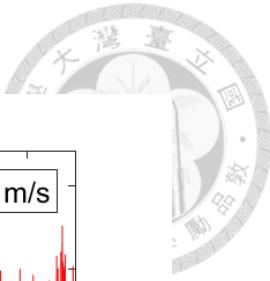


圖 5-39 入口處流速 6m/s 下，實驗量測平板位移與經 FFT 後的結果

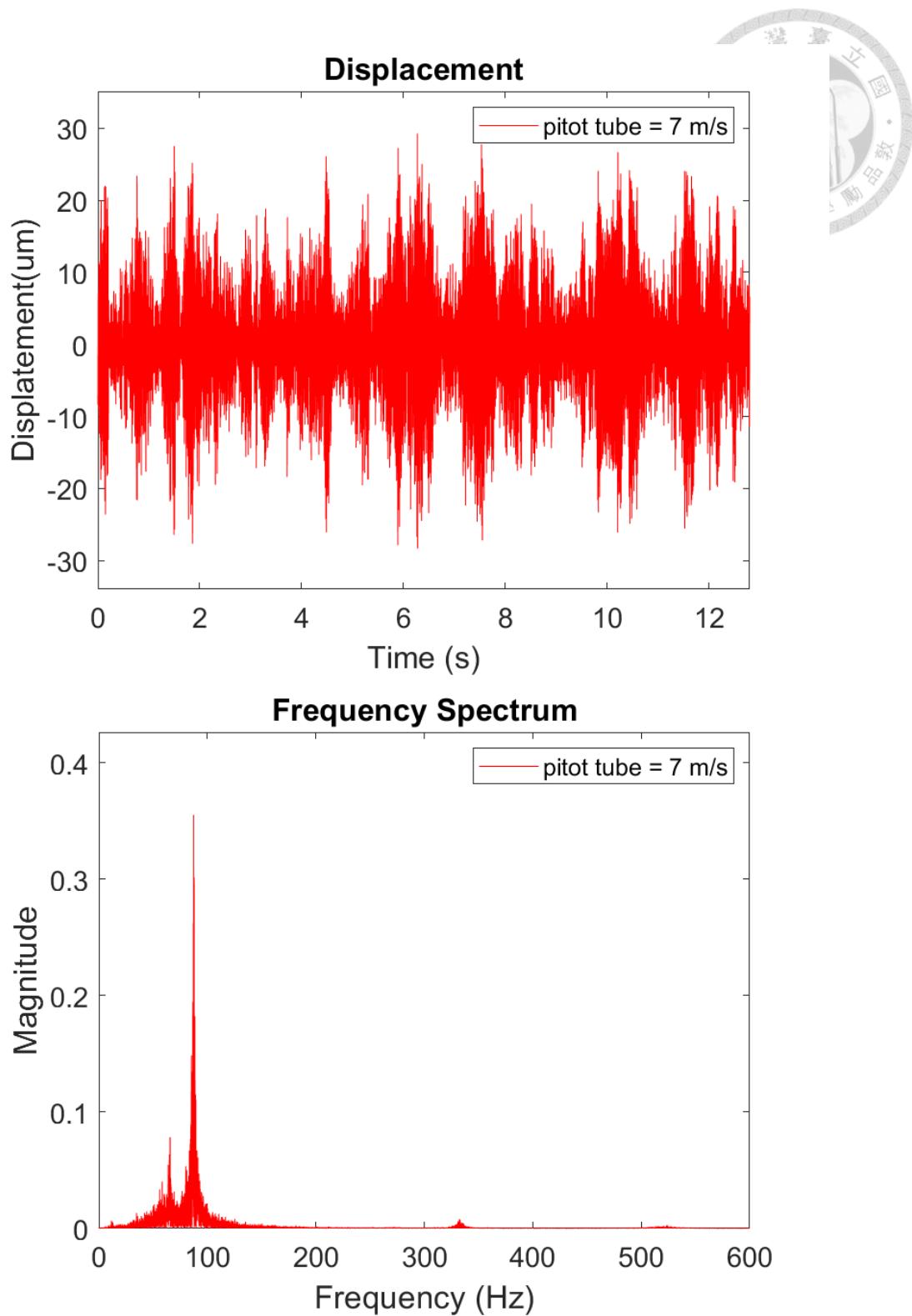


圖 5-40 入口處流速 7m/s 下，實驗量測平板位移與經 FFT 後的結果

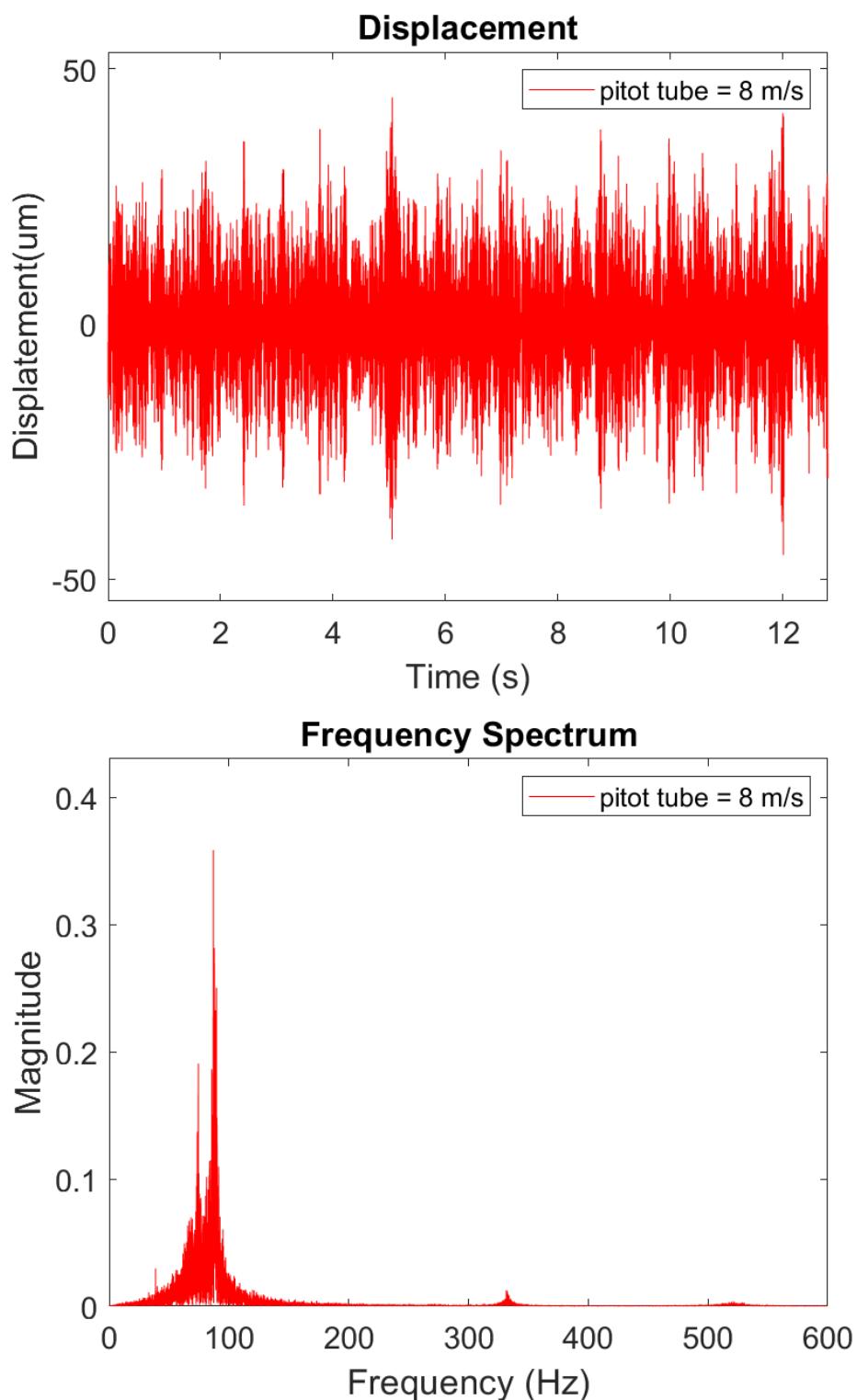
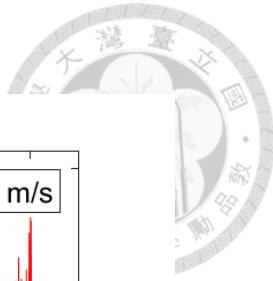


圖 5-41 入口處流速 8m/s 下，實驗量測平板位移與經 FFT 後的結果

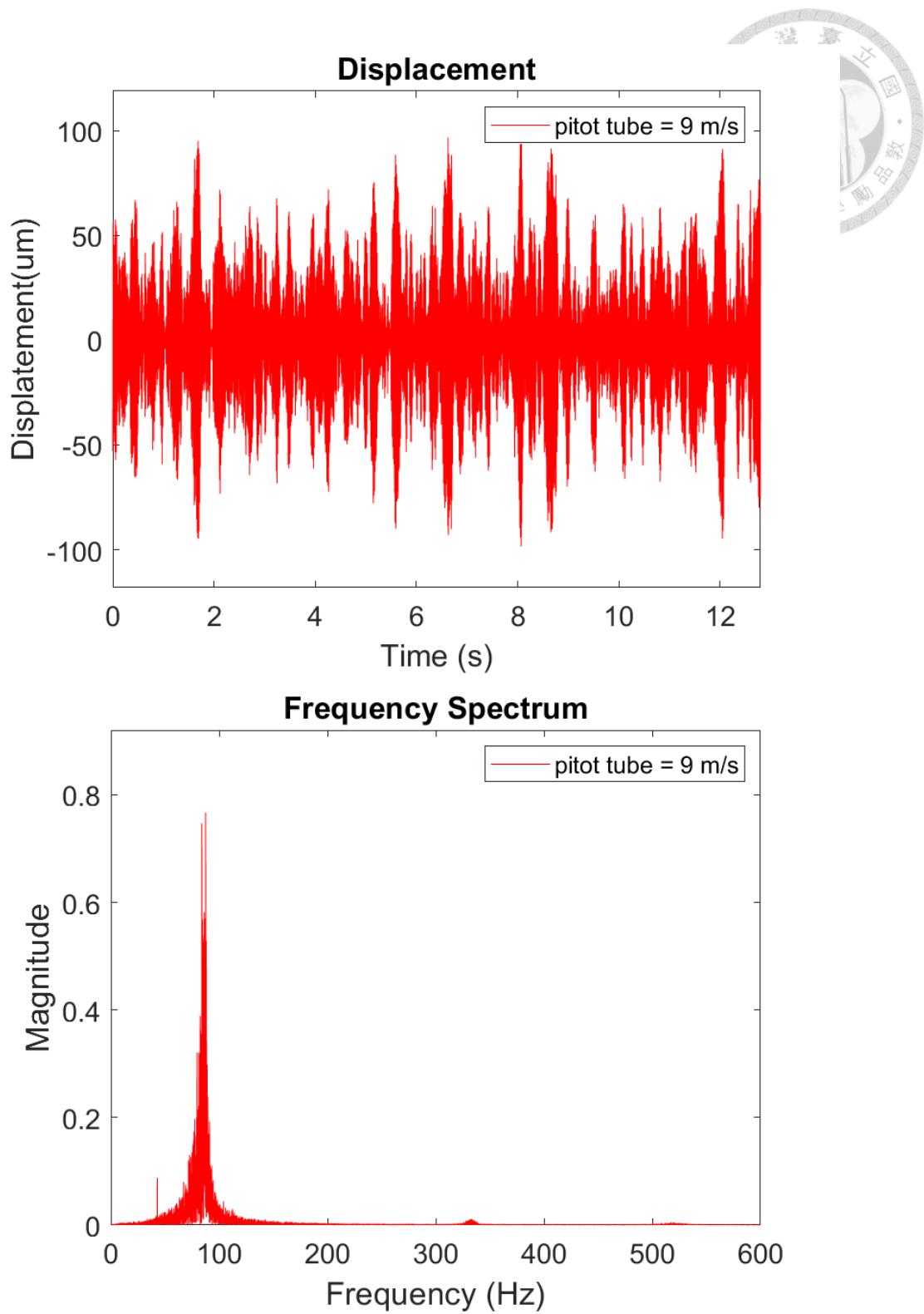


圖 5-42 入口處流速 9m/s 下，實驗量測平板位移與經 FFT 後的結果

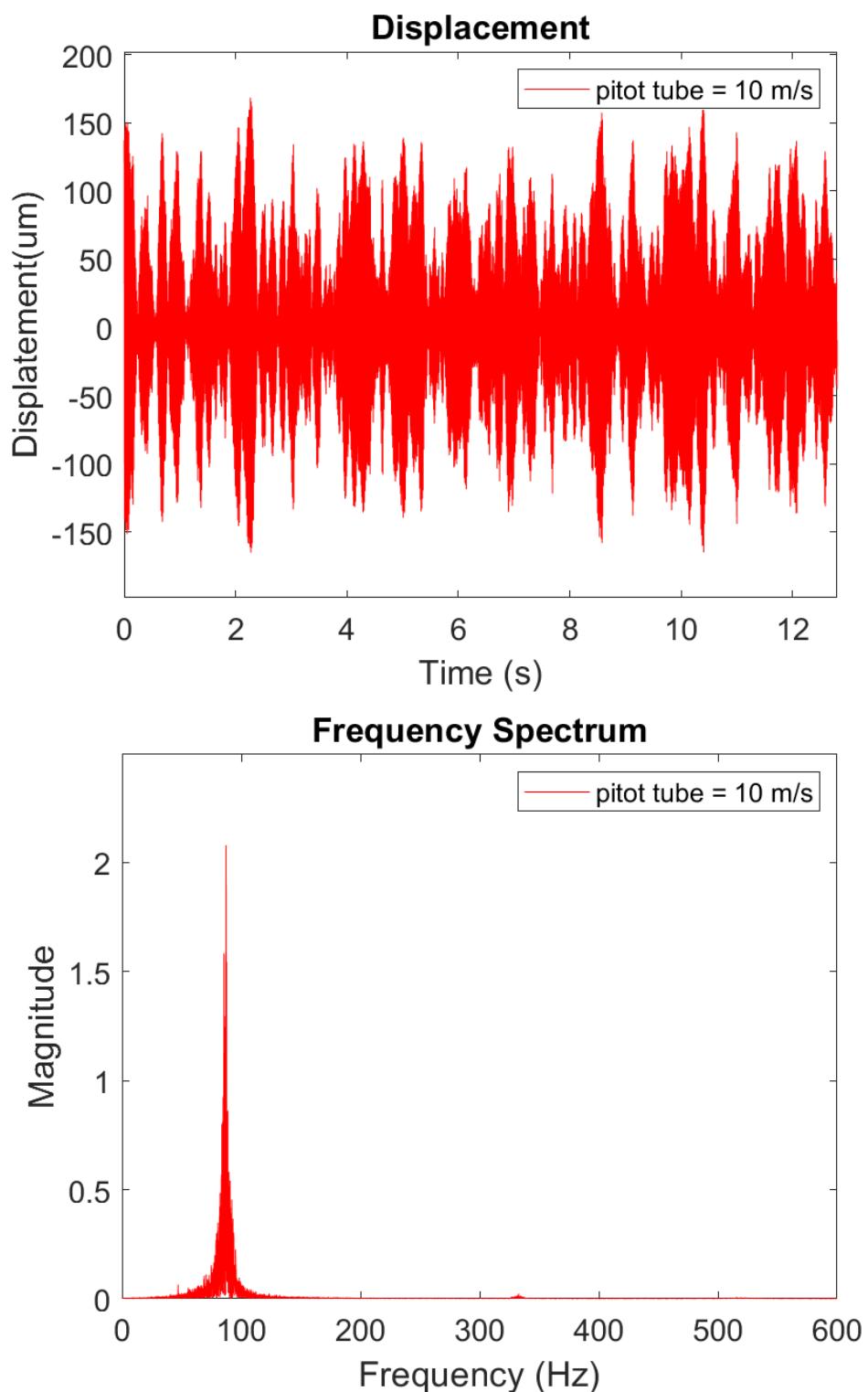


圖 5-43 入口處流速 10m/s 下，實驗量測平板位移與經 FFT 後的結果

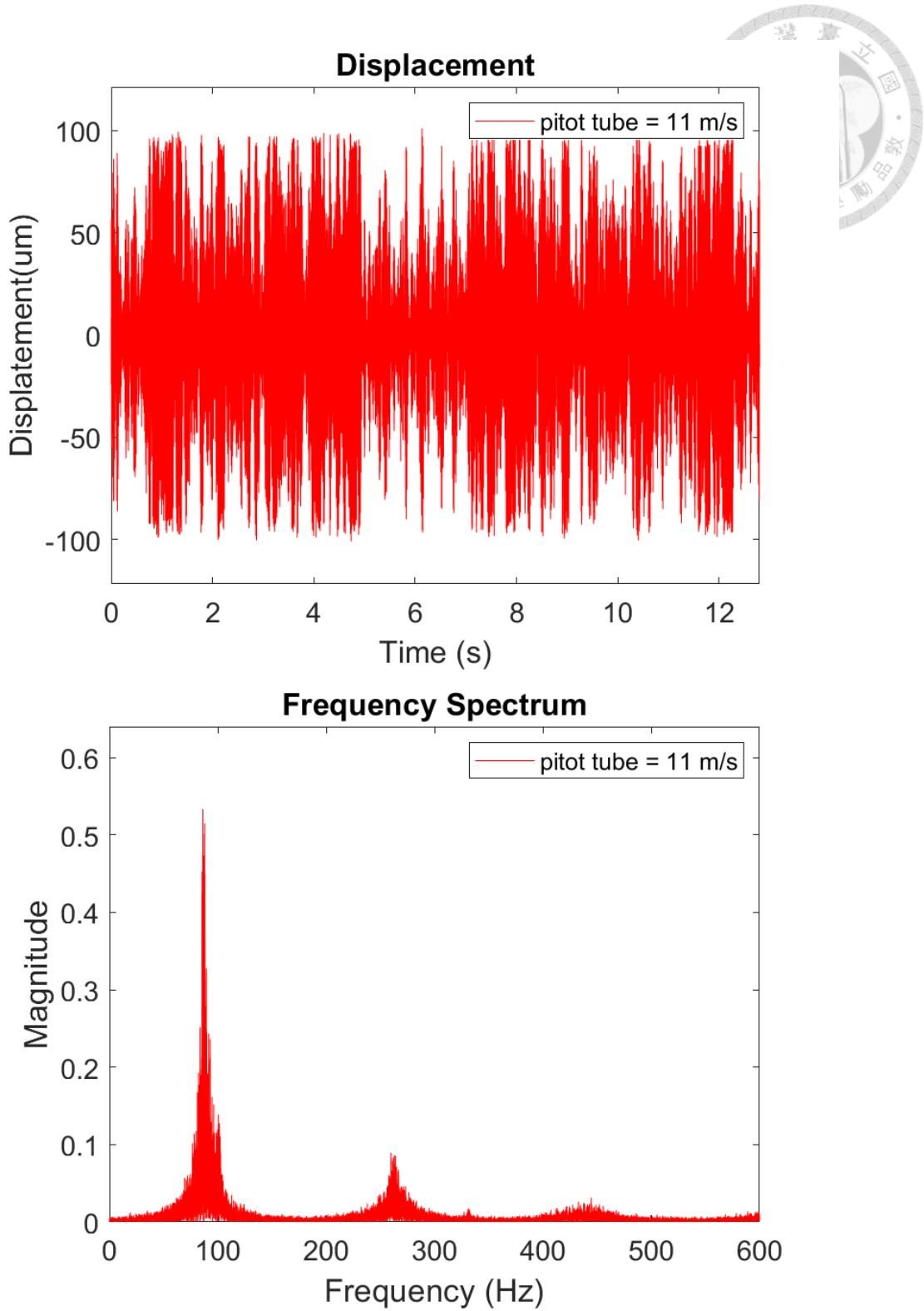


圖 5-44 入口處流速 11m/s 下，實驗量測平板位移與經 FFT 後的結果

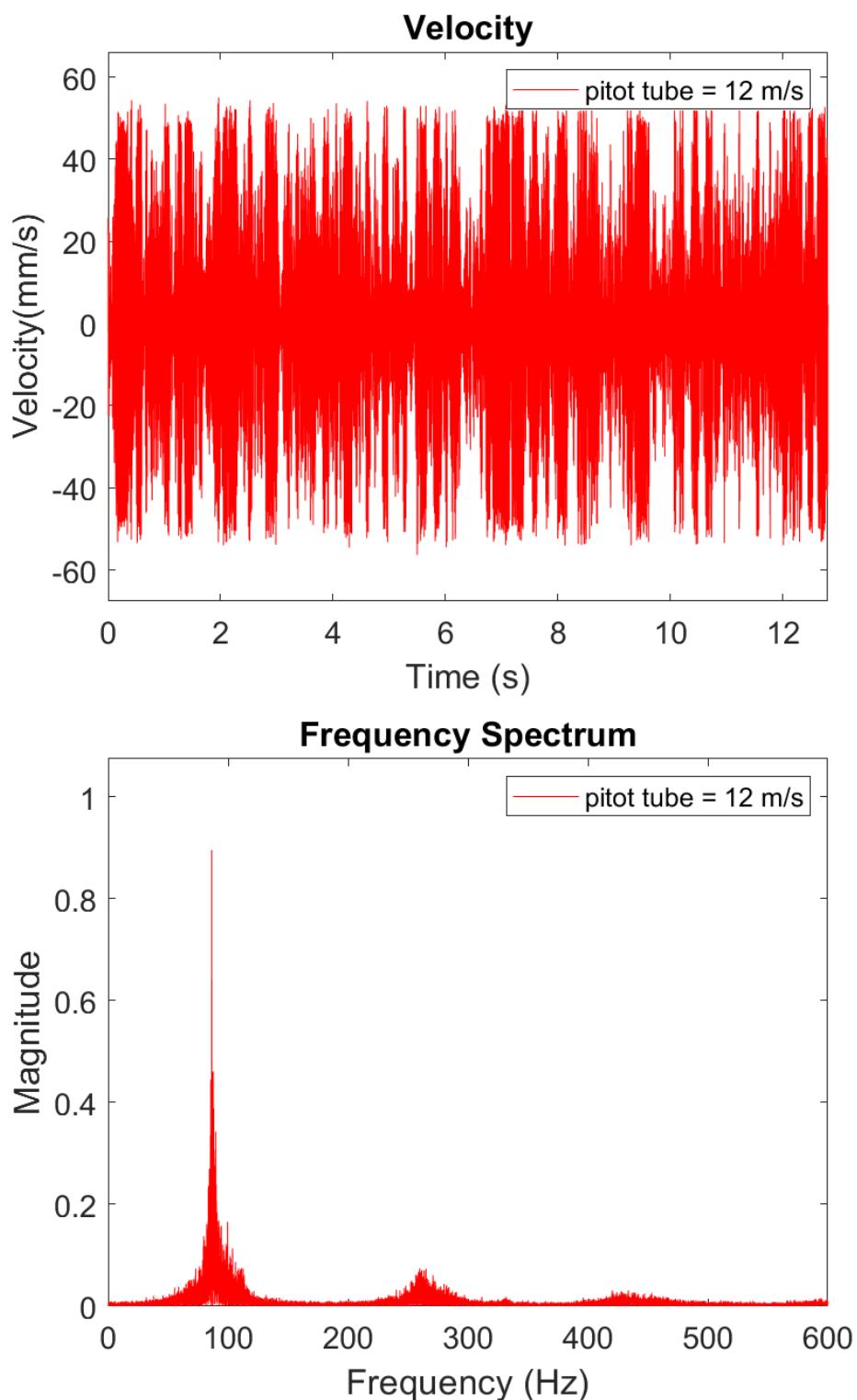
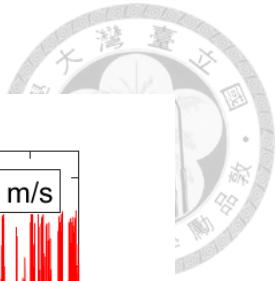


圖 5-45 入口處流速 12m/s 下，實驗量測平板位移與經 FFT 後的結果

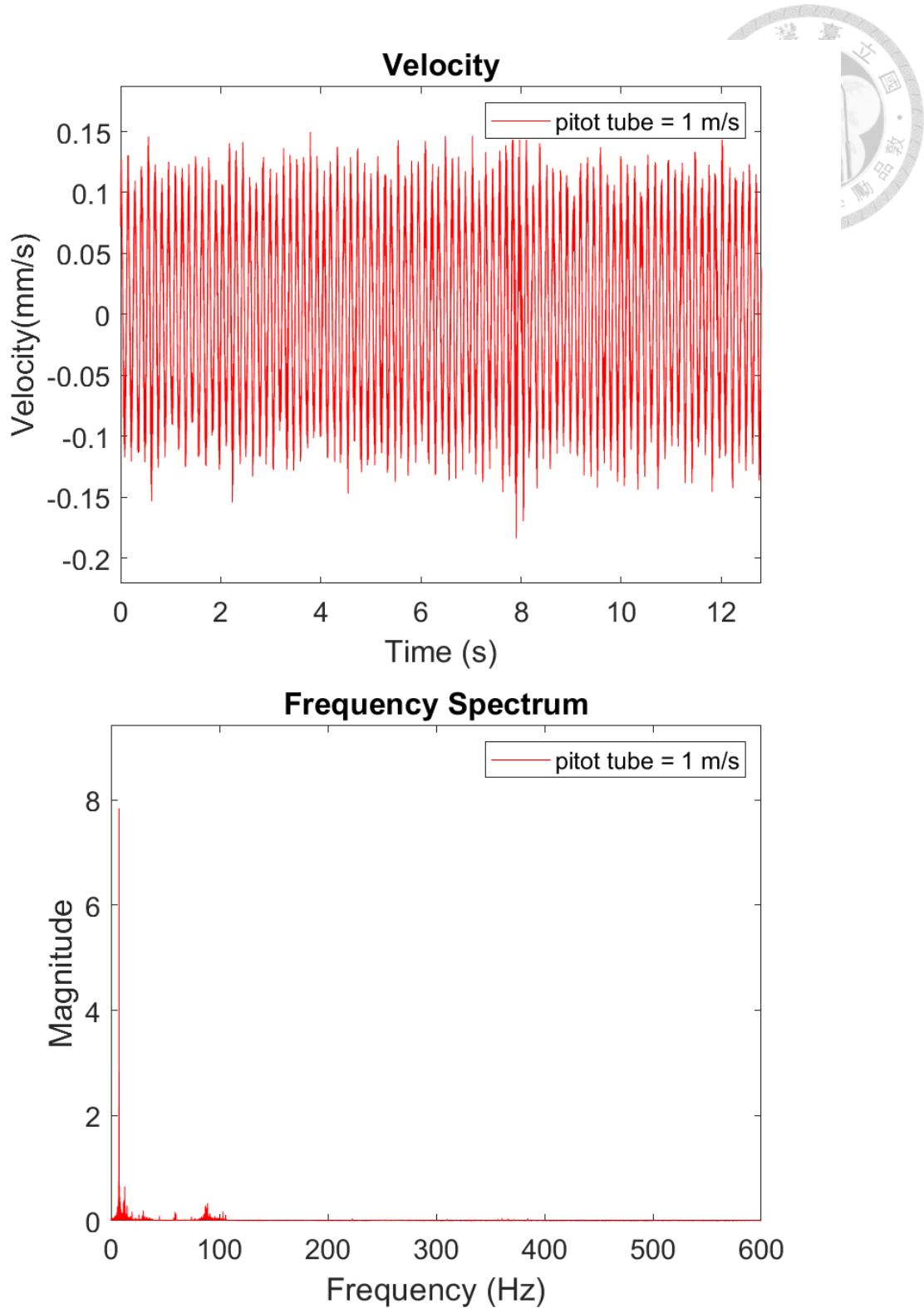


圖 5-46 入口處流速 1m/s 下，實驗量測平板電壓與經 FFT 後的結果

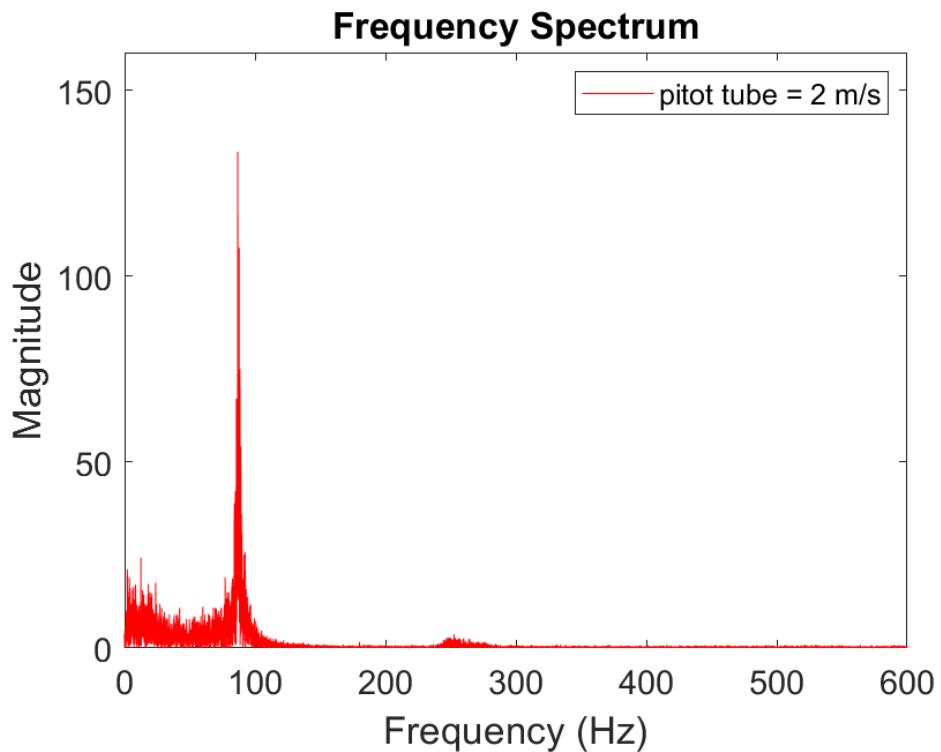
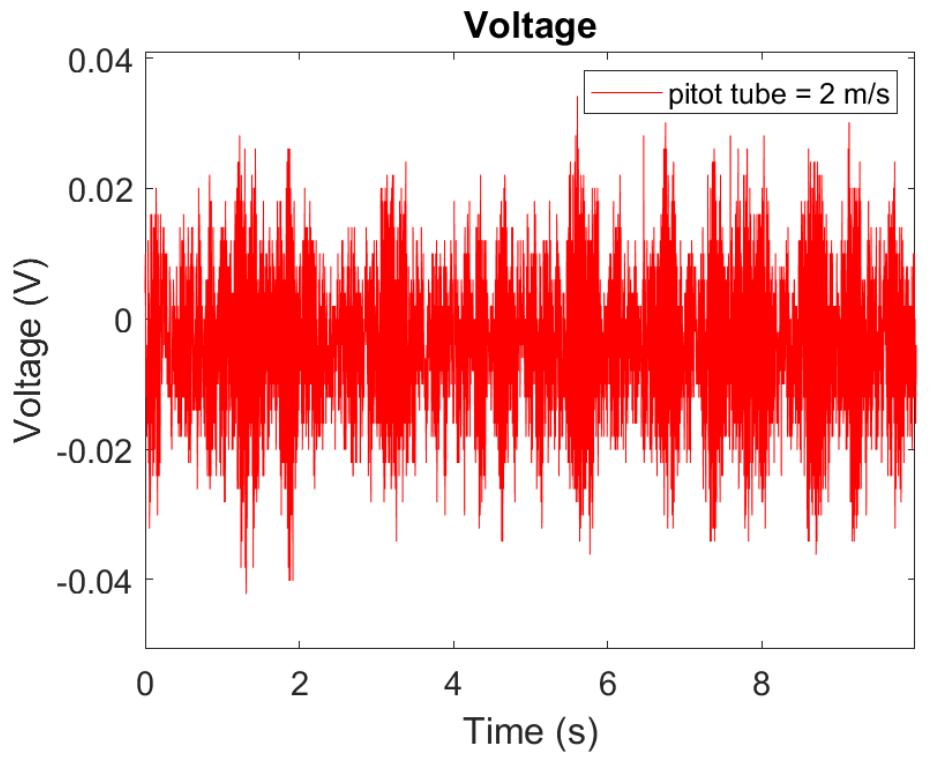


圖 5-47 入口處流速 2m/s 下，實驗量測平板電壓與經 FFT 後的結果

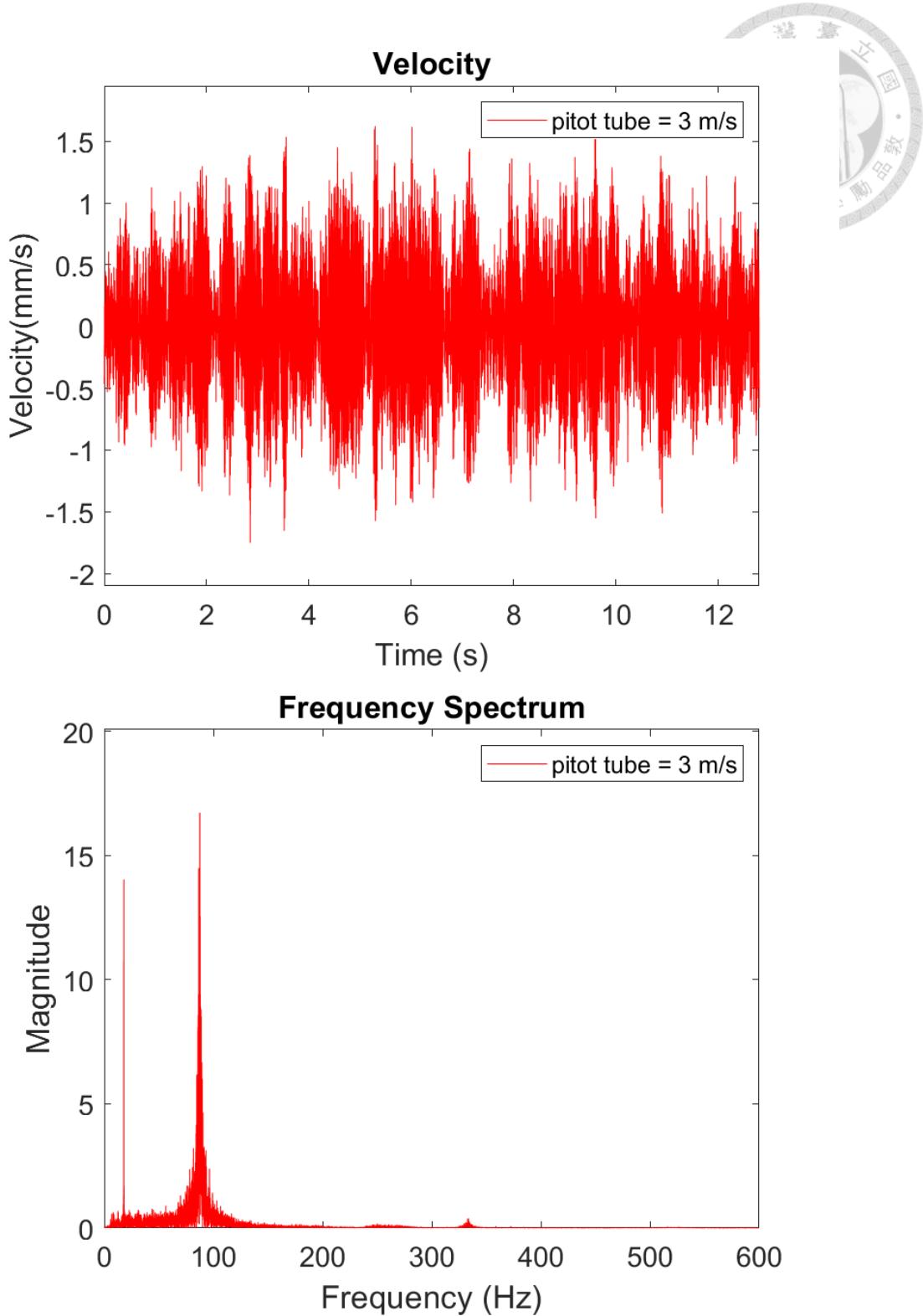


圖 5-48 入口處流速 3m/s 下，實驗量測平板電壓與經 FFT 後的結果

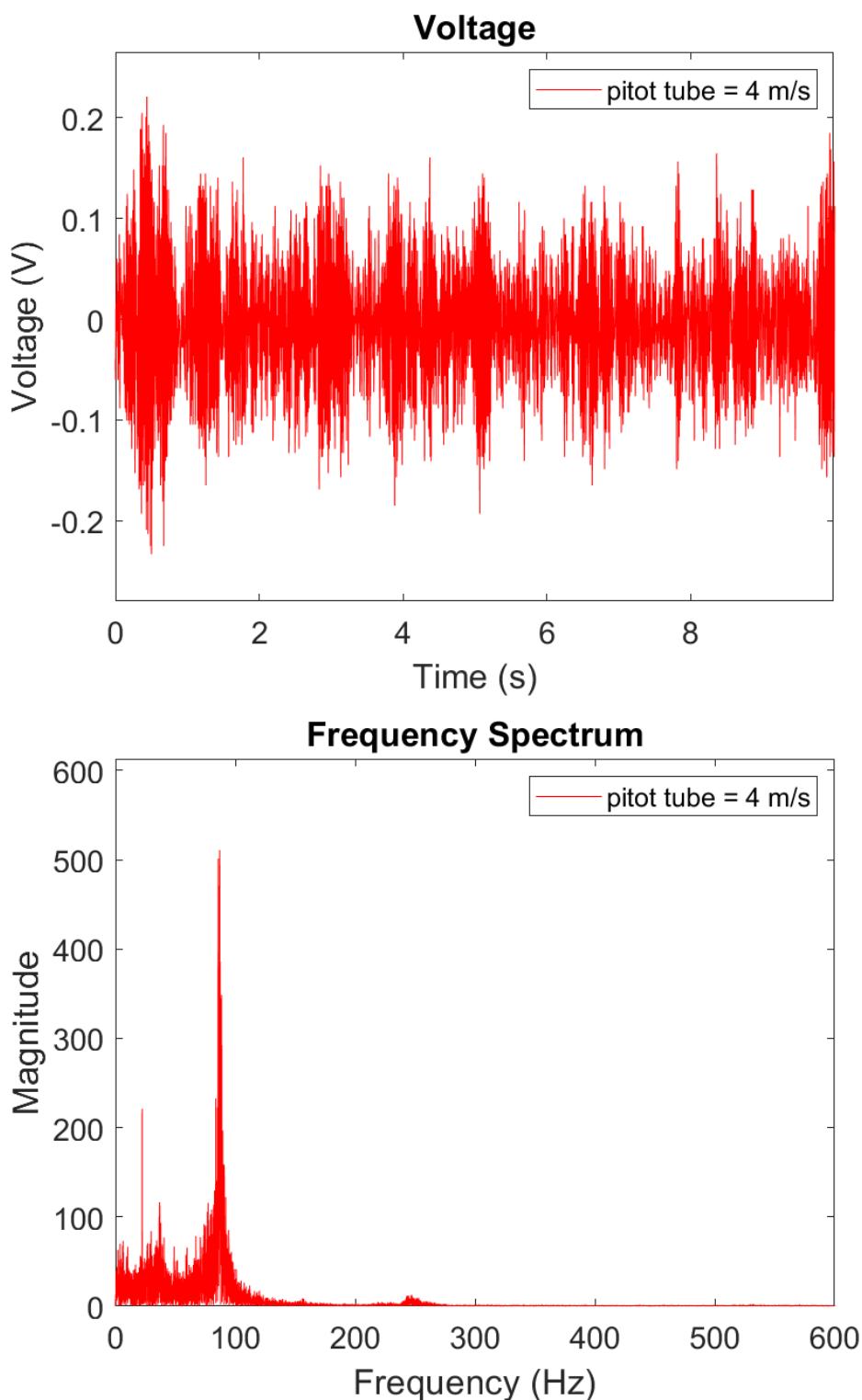
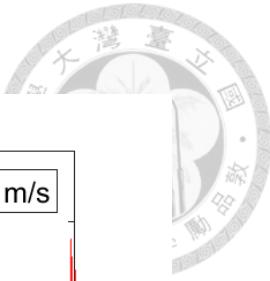


圖 5-49 入口處流速 4m/s 下，實驗量測平板電壓與經 FFT 後的結果

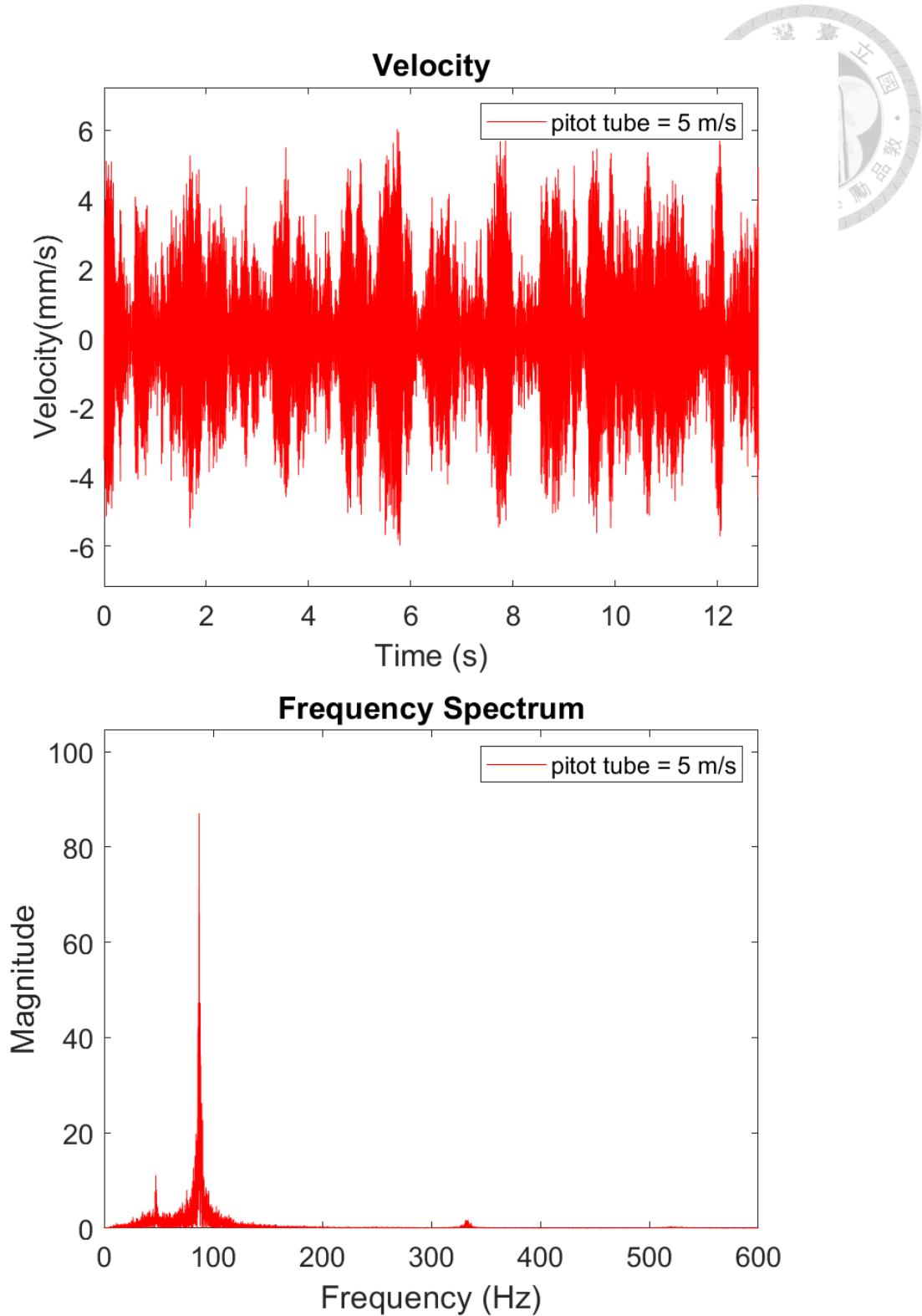


圖 5-50 入口處流速 5m/s 下，實驗量測平板電壓與經 FFT 後的結果

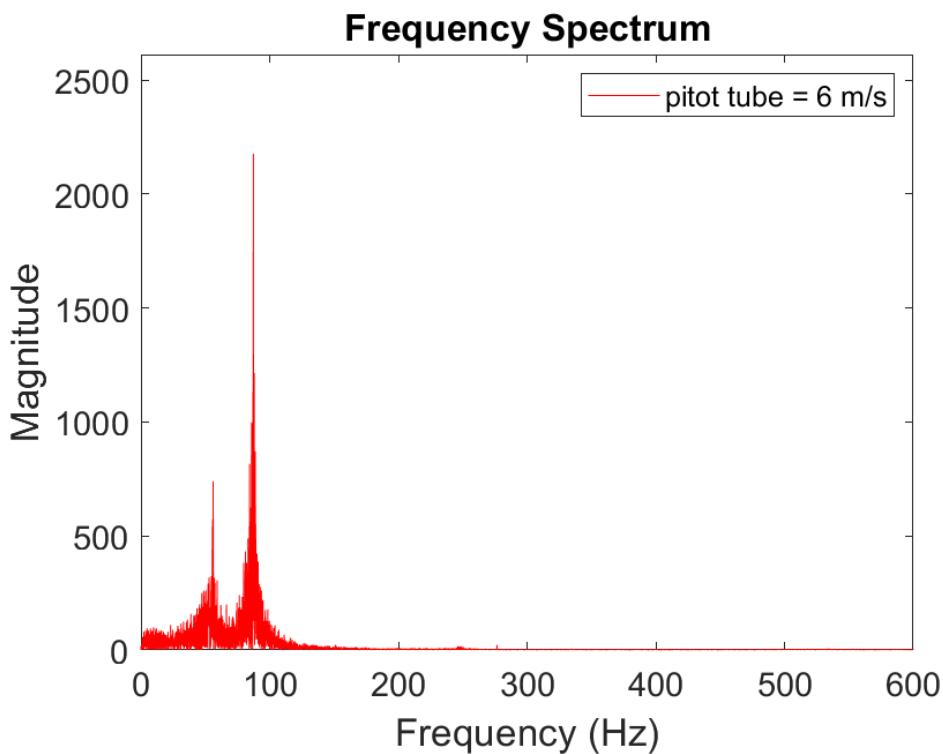
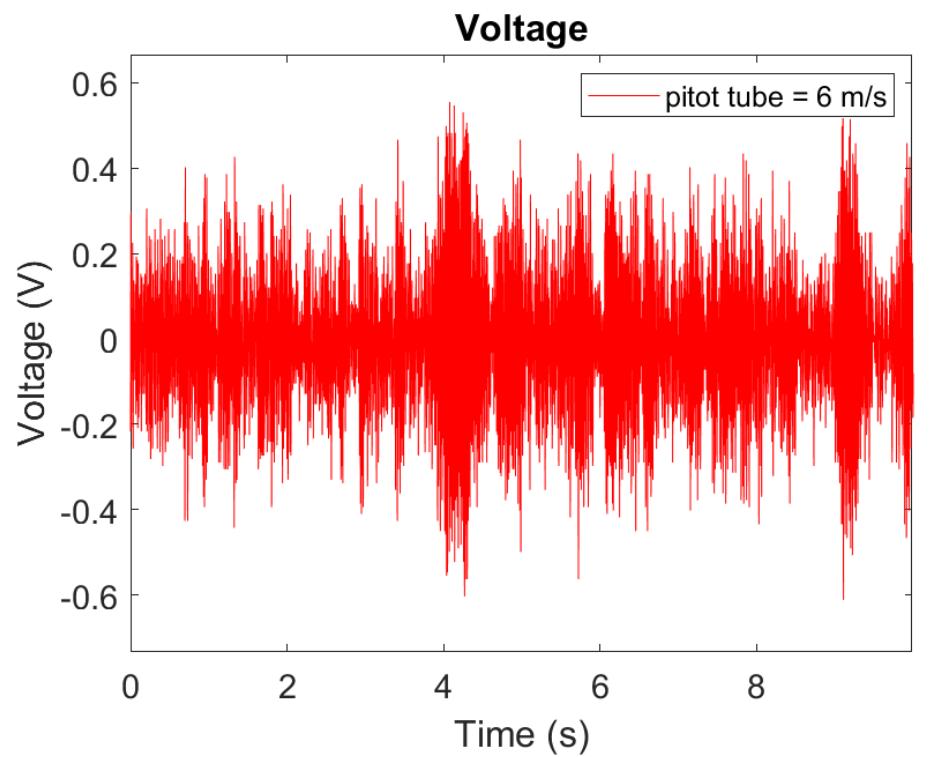


圖 5-51 入口處流速 6m/s 下，實驗量測平板電壓與經 FFT 後的結果

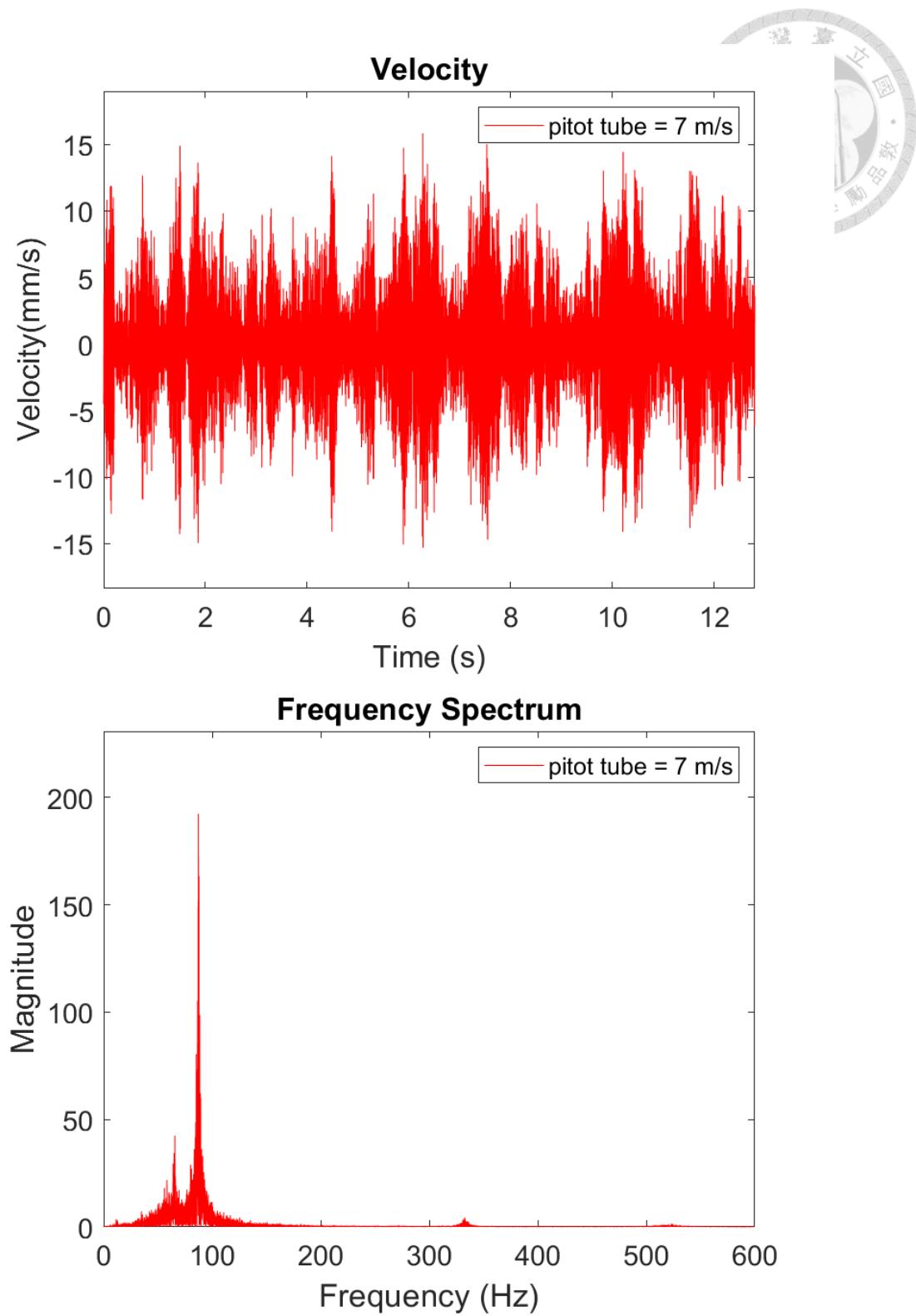


圖 5-52 入口處流速 7m/s 下，實驗量測平板電壓與經 FFT 後的結果

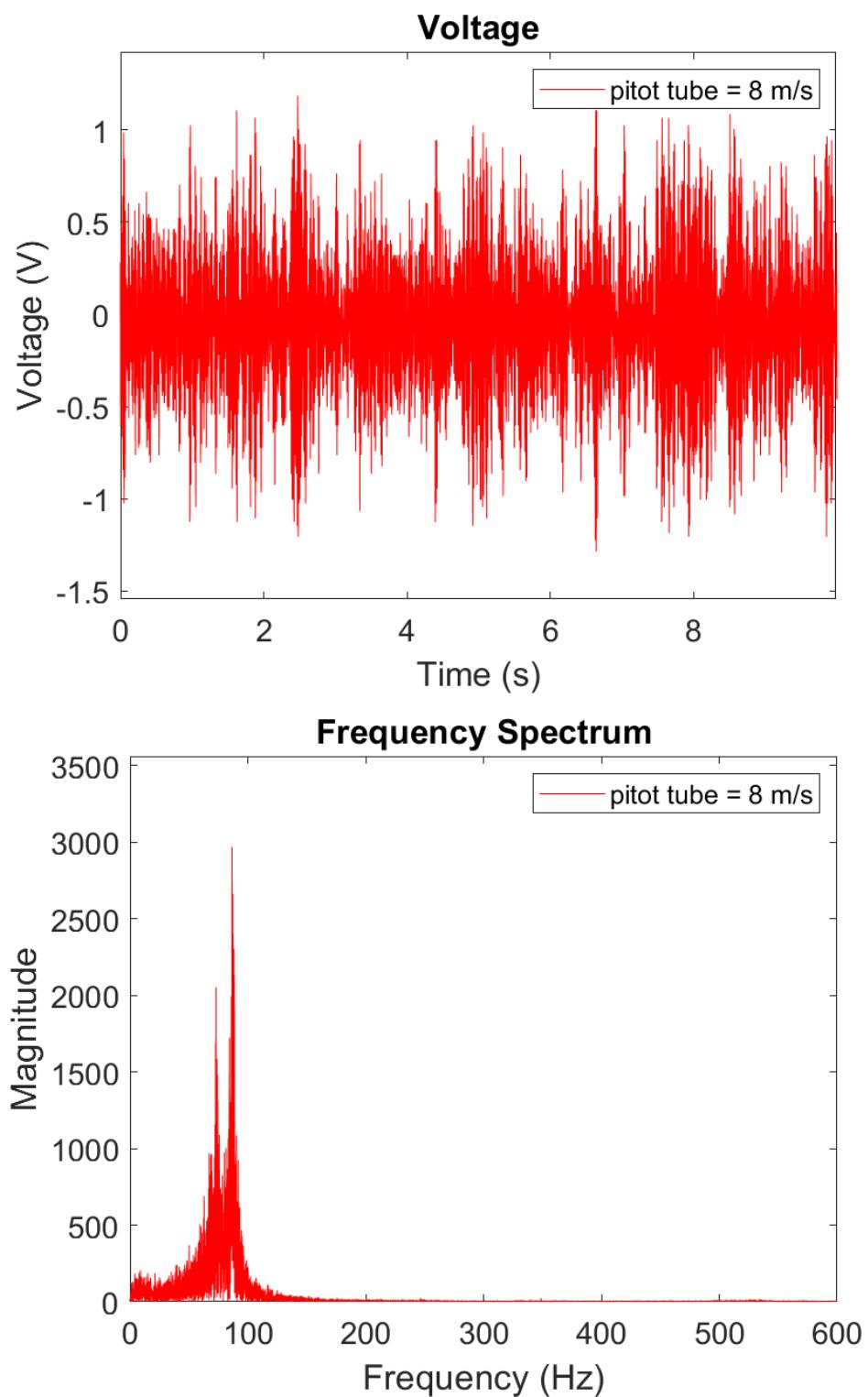
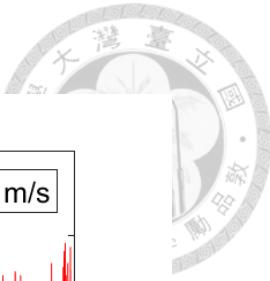


圖 5-53 入口處流速 8m/s 下，實驗量測平板電壓與經 FFT 後的結果

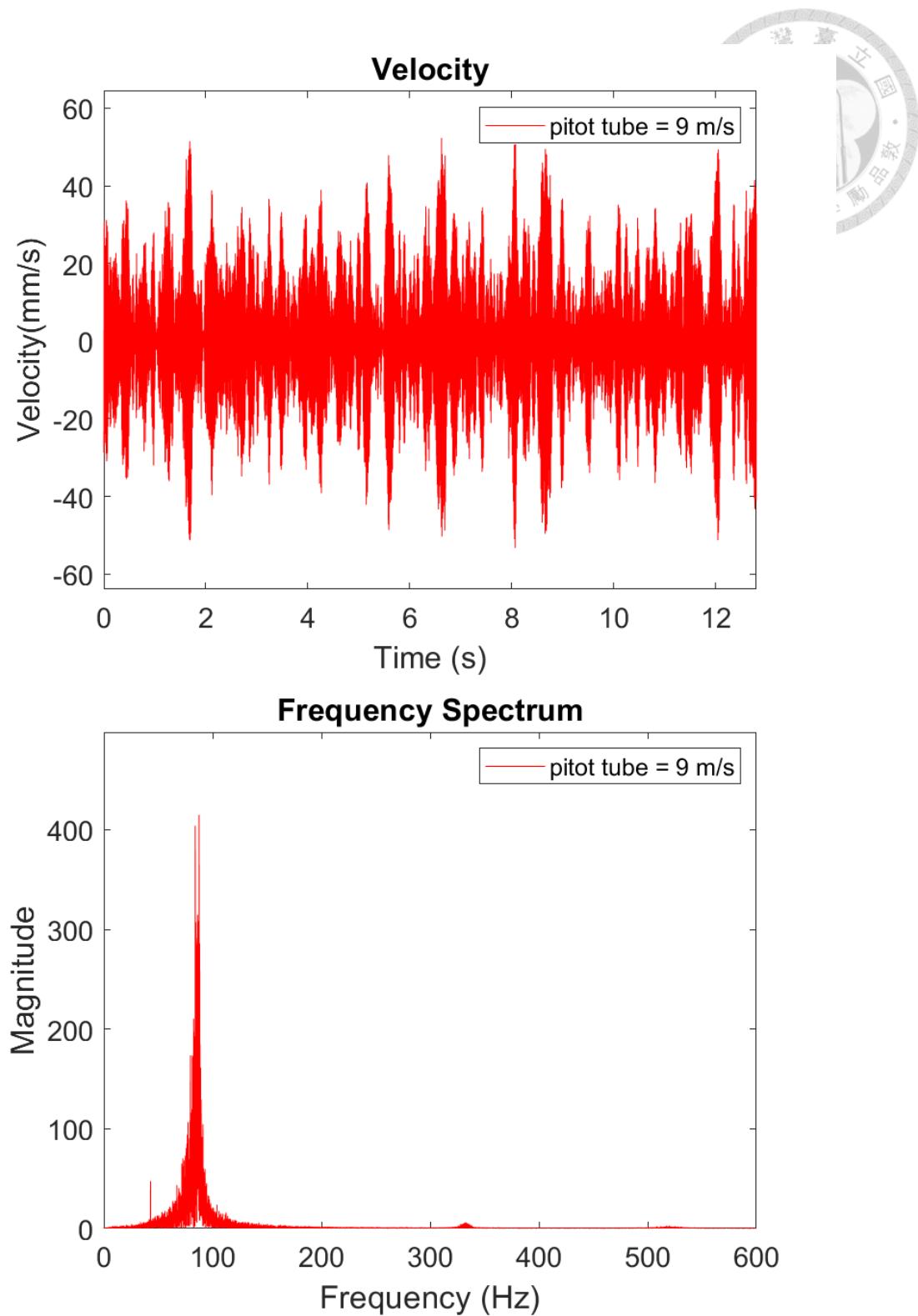


圖 5-54 入口處流速 9m/s 下，實驗量測平板電壓與經 FFT 後的結果

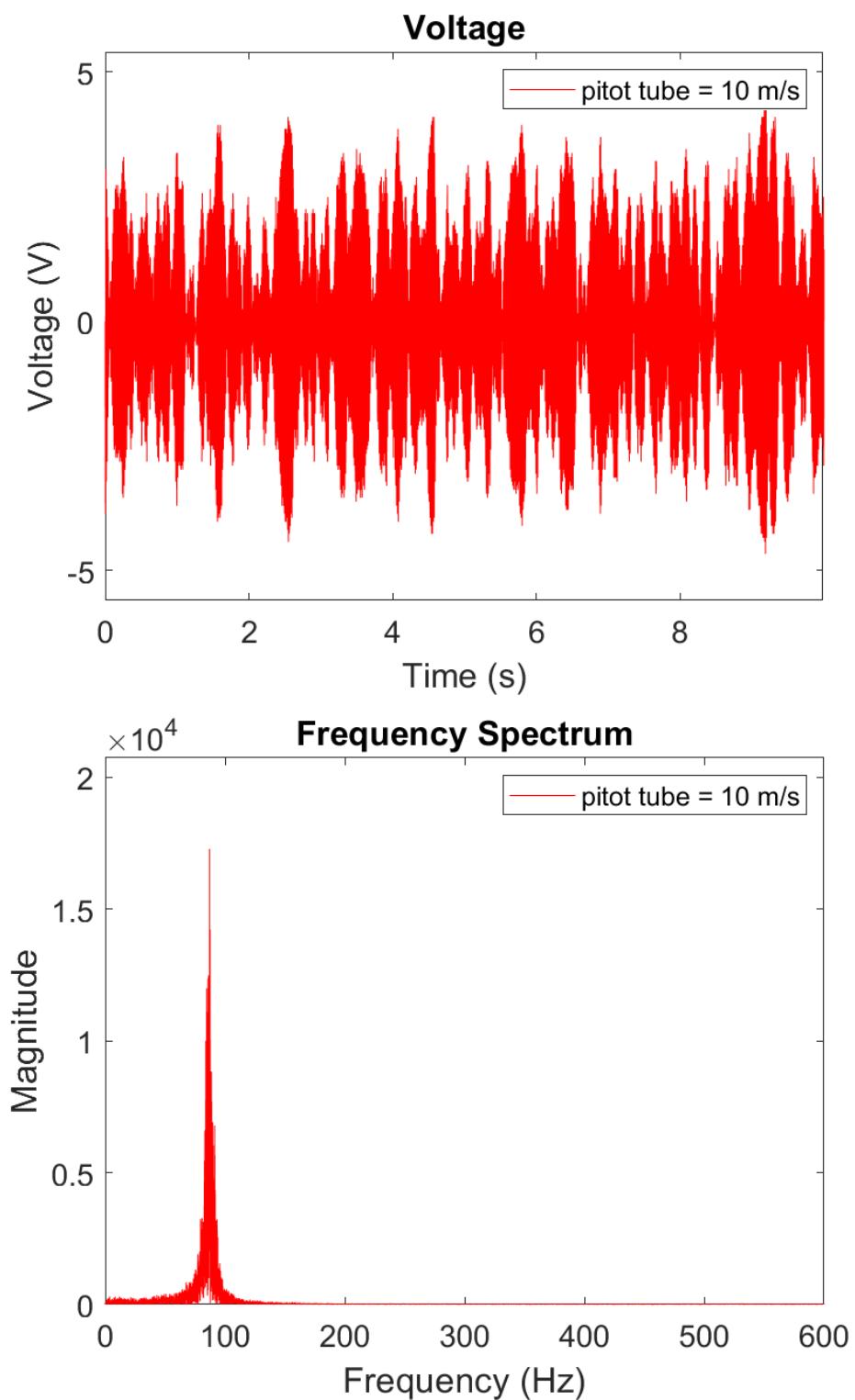
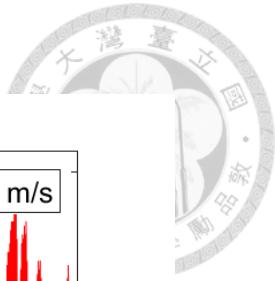


圖 5-55 入口處流速 10m/s 下，實驗量測平板電壓與經 FFT 後的結果

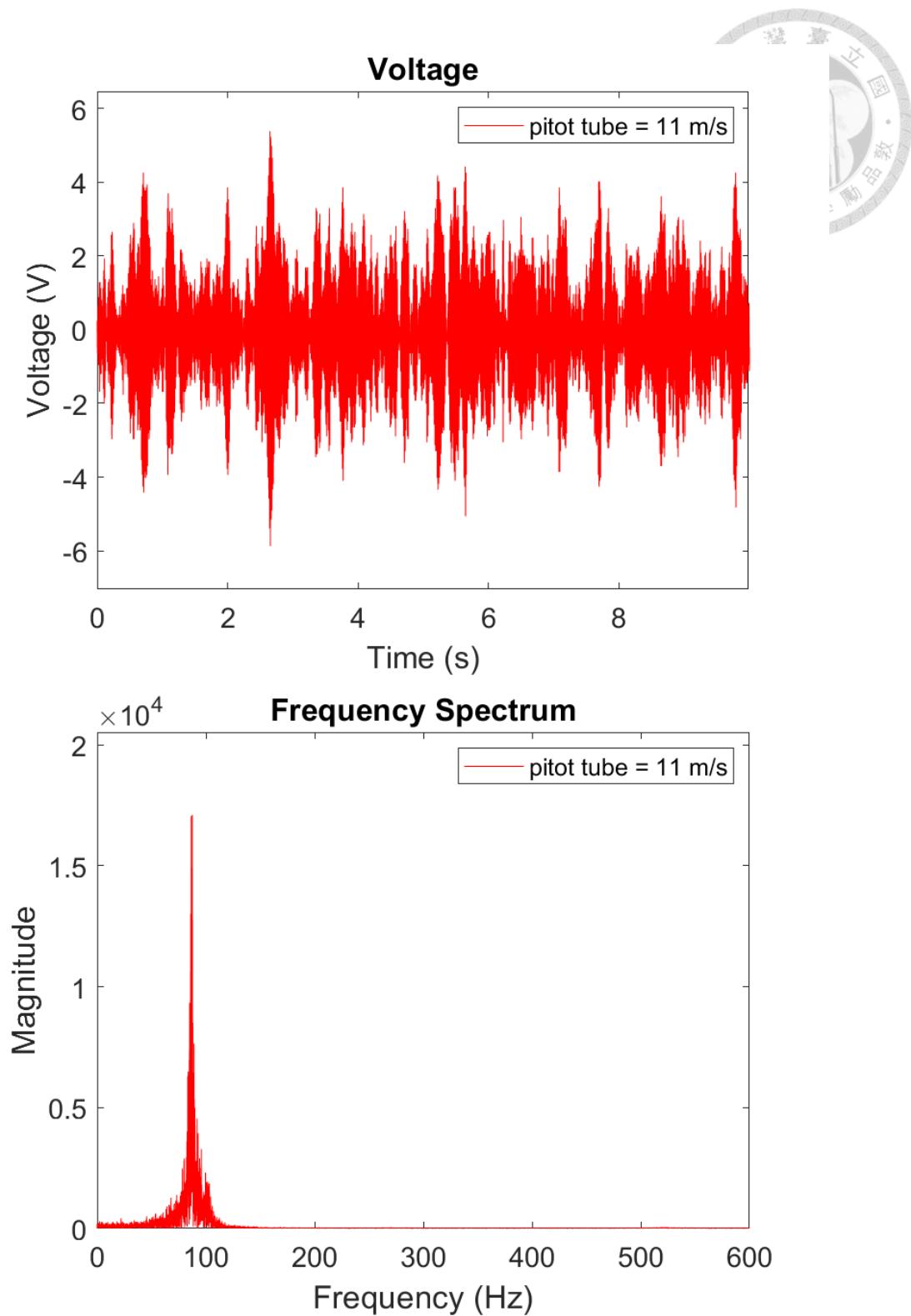


圖 5-56 入口處流速 11m/s 下，實驗量測平板電壓與經 FFT 後的結果

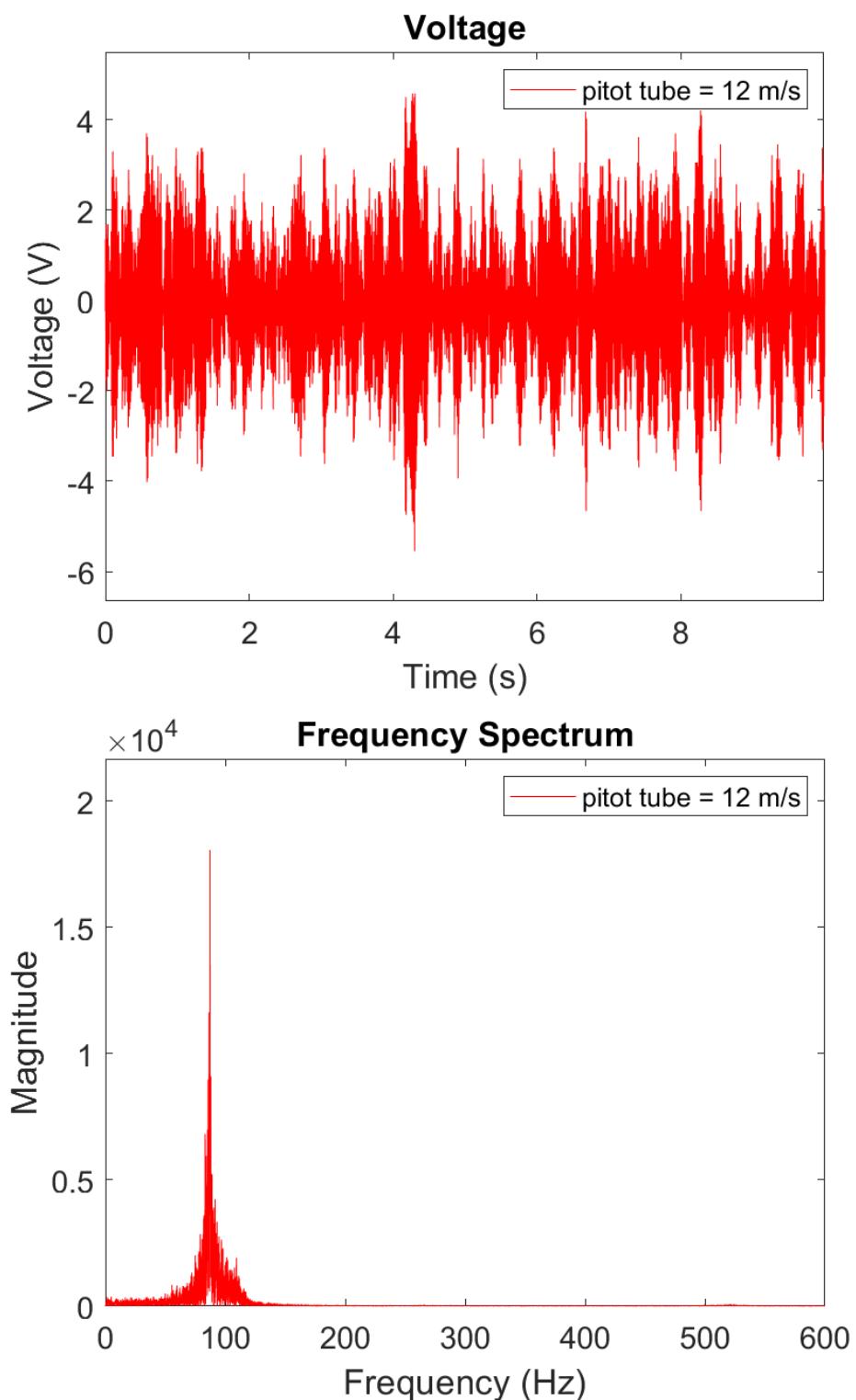
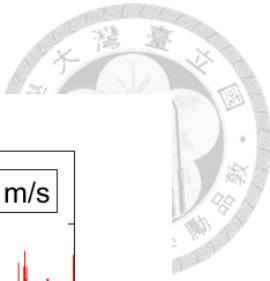


圖 5-57 入口處流速 12m/s 下，實驗量測平板電壓與經 FFT 後的結果



Displacement of Piezoelectric Plate

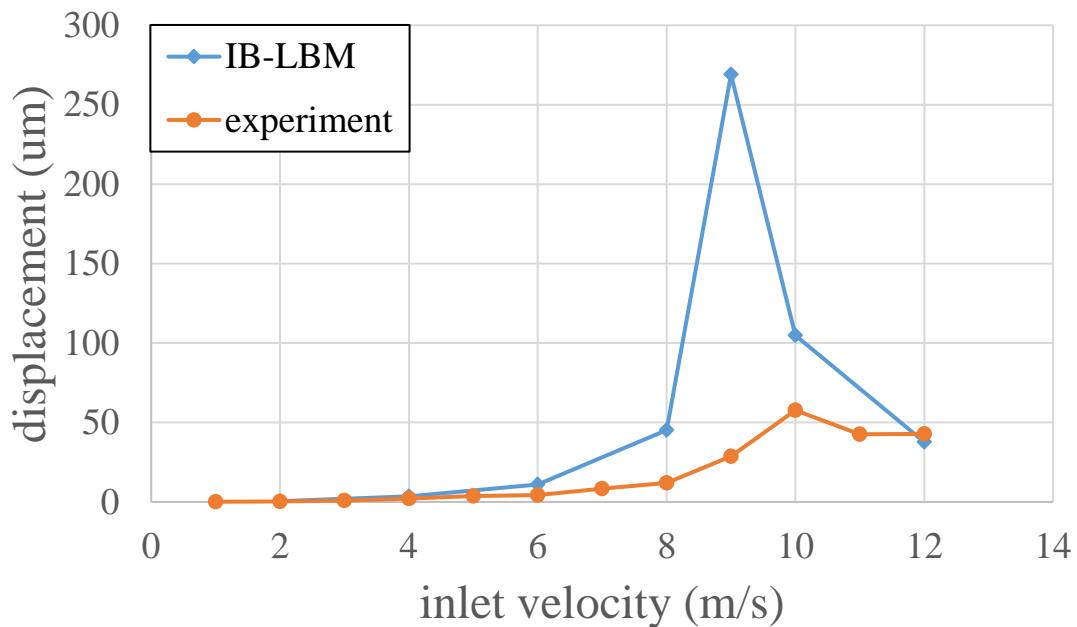


圖 5-58 不同入口處流速下，實驗結果與 IB-LBM 模擬之位移結果比較

Voltage of Piezoelectric Plate

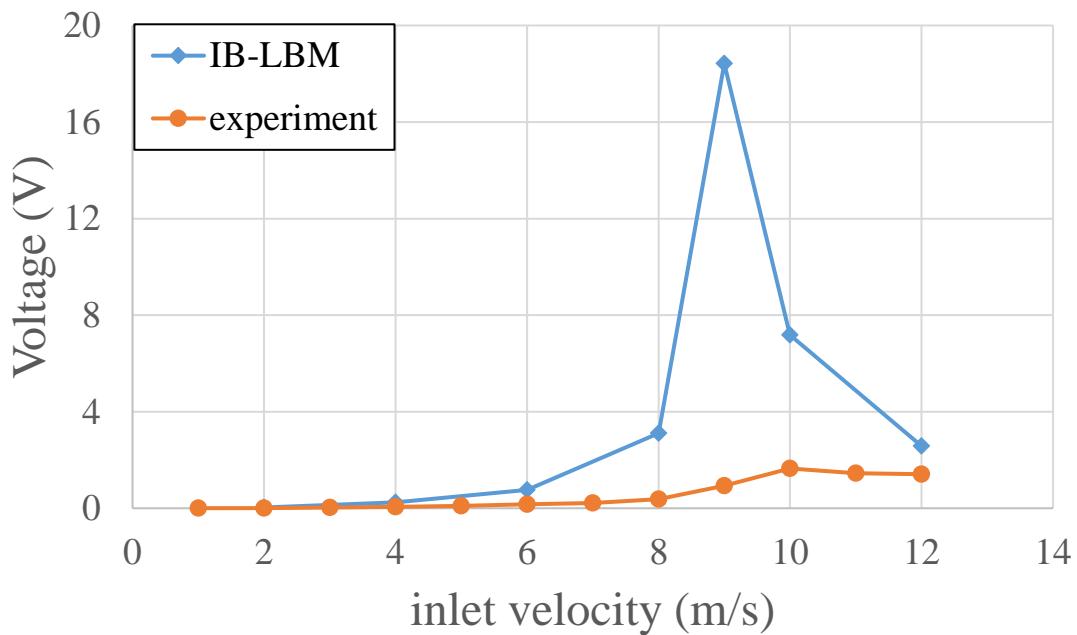


圖 5-59 不同入口處流速下，實驗結果與 IB-LBM 模擬之電壓結果比較

第六章 結論與未來展望



6.1 結論

本研究以數值分析結合理論比較實驗量測，研究以圓柱做為障礙物，在風洞中產生的卡門渦街激振單邊固定的壓電陶瓷雙晶片其流固耦合結果。數值分析以晶格波茲曼法結合沉浸式邊界法(IB-LBM)模型，在二維空間中針對網格大小與時間步長，進行圓柱繞流模型的收斂性分析，確保得到的升力係數、阻力係數及以渦街頻率換算的 Strouhal number 與文獻結果相符，並以收斂後的模型進行不同流速下的分析，再以商用軟體 Ansys-Fluent 進行有限體積法模擬，同樣在二維下針對最小網格大小、網格膨脹率、邊界加密層數、時間步長等四個模型參數進行收斂性分析，並將結果與 IB-LBM 模型、文獻結果做比對，確保 IB-LBM 模型的準確性。將驗證過的二維 IB-LBM 模型擴增成三維模型後同樣進行收斂性分析及不同流速下的分析，並加入以疊加法分析壓電陶瓷雙晶片的結果，形成完整的 IB-LBM 雙向流固耦合模型以分析不同流速下壓電能量擷取系統的結果。考慮到模型計算成本，分別提出針對 IB-LBM 模型的映射層演算法(Flash Translation Layer, FTL)、針對雙向流固耦合數值方法的更新週期簡化、針對第一振動模態為主的平板受力簡化模型，在不影響結果準確度下加快模型計算速度，進一步提高 IB-LBM 雙向流固耦合數值方法的可行性。最後再以經過均勻度與紊流強度量測，確保流場品質的風洞中進行壓電能量擷取系統實驗，量測不同流速下的位移與電壓，並與 IB-LBM 模型比較，兩者有相當高的對應性，以及合理的差異性。

以下將本論文的研究結果進行總結及討論：

1. 在二維 IB-LBM 模型中，使用 D2Q9 模型計算，阻力係數、升力係數、Strouhal number 隨網格及時間步長加密有收斂，且數值與文獻結果相近。
2. 在三維 IB-LBM 模型中，使用 D3Q19 模型計算，阻力係數、升力係數、Strouhal number 隨時間步長加密有收斂，且趨勢與文獻相近。



3. 在三維 IB-LBM 模型結合壓電平板疊加法，分析不同流速下壓電平板的結果，可觀察到在入口處流速 9 m/s 下出現平板共振之最佳機電轉換現象，且此時渦街頻率與疊加法模型得出的第一振動模態頻率相互對應。
4. 在 LBM 模型中利用 CUDA 平行運算，原先速度為單純用 CPU 進行多核心運算的 15 倍，單核心運算的 174 倍，Matlab 運算的 410 倍。
5. 在 IB-LBM 模型中加入 FTL 演算法，在網格數為兩千四百萬的二維模型中，速度為原先 IB-LBM 模型的 6.6 倍，且運算時間較不受固體邊界的影響，更適用於複雜幾何結構的流固耦合分析中。
6. 在三維 IB-LBM 以 FTL 演算法結合疊加法之數值模型，考慮可變形固體之座標矩陣更新週期，在不影響結果準確度下速度提升為原先 2.5 倍，搭配平板受力簡化模型提高數值模型計算速度。
7. 進行風機的均勻度量測，在入口處流速約 3 m/s 至約 10 m/s 之間，流場均勻度皆在 96% 以上，紊流強度約為 0.5%，確保後續實驗準確度。
8. 進行壓電能量擷取系統實驗量測，在入口處流速 10 m/s 下出現最大位移與電壓，與 IB-LBM 結果有高度的對應性。



6.2 未來展望

1. 固定 Courant number 下分析模型在更密網格下，模型是否有更好的收斂性。
2. 將沉浸式邊界法以 direct forcing 計算，比較模型達收斂後的計算門檻與結果的差異。
3. 以更進階的紊流模型分析，如 LES 之動態模型、梯度模型等等，或是加入 LBM 之局部加密網格等方法，以求得更準確的結果。
4. 優化反矩陣計算，以縮短在雙向流固耦合數值分析之計算時間，並降低剛體位移或彈性體在數值方法中之計算成本。
5. 以多個 GPU 進行平行運算，增加可計算網格的數量及速度，並更精確的計算流場中流體的流動及固體變形。
6. 考慮壓電平板尾端加上外力如磁力等，或質量塊的狀況，並以雙向流固耦合數值方法分析，觀察結果與實驗是否吻合。
7. 在 IB-LBM 中改變障礙物形狀，與原先的圓形障礙物比對能量擷取效果及壓電平板之變形狀況。
8. 在實驗中加入不同形狀的障礙物，與數值分析比較結果。
9. 改良放置圓管與壓電平板之機構，置入風洞內避免與風洞壁面接觸，更減少風機振動傳遞至壓電平板上，影響到量測之電壓與位移。
10. 改變壓電平板之邊界條件，以製作不同激振特性之流體致振的壓電能量擷取系統。
11. 以商用模擬軟體，如 Ansys-Fluent 進行三維之圓柱模型模擬及加入壓電平板之雙向流固耦合模擬。

參考文獻



- [1] DONEA, Jean; GIULIANI, S.; HALLEUX, Jean-Pierre. An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1982, 33.1-3: 689-723.
- [2] KWAK, M. K.; KIM, K. C. Axisymmetric vibration of circular plates in contact with fluid. Journal of Sound and Vibration, 1991, 146.3: 381-389.
- [3] AMABILI, M.; PASQUALINI, A.; DALPIAZ, Giorgio. Natural frequencies and modes of free-edge circular plates vibrating in vacuum or in contact with liquid. Journal of sound and vibration, 1995, 188.5: 685-699.
- [4] AMABILI, M.; KWAK, M. K. Free vibrations of circular plates coupled with liquids: revising the Lamb problem. Journal of fluids and structures, 1996, 10.7: 743-761.
- [5] KWAK, M. K. Hydroelastic vibration of circular plates. Journal of Sound and Vibration, 1997, 201.3: 293-303.
- [6] SOULI, Mohamed; OUAHSINE, A.; LEWIN, L. ALE formulation for fluid-structure interaction problems. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2000, 190.5-7: 659-675.
- [7] LU, C. H.; HE, Y. S.; WU, G. X. Coupled analysis of nonlinear interaction between fluid and structure during impact. Journal of fluids and structures, 2000, 14.1: 127-146.
- [8] LIAO, Chuan-Chieh, et al. Simulating flows with moving rigid boundary using immersed-boundary method. Computers & Fluids, 2010, 39.1: 152-167.
- [9] 廖展誼, 馬劍清, 「矩形平板於流固耦合問題的振動特性與暫態波傳之理論分析、數值計算與實驗量測」, 國立台灣大學機械工程研究所博士論文, 2018。

- [10] CHEN, Shiyi; DOOLEN, Gary D. Lattice Boltzmann method for fluid flows. Annual review of fluid mechanics, 1998, 30.1: 329-364.
- [11] 林昆豪，林昭安，「晶格波茲曼法結合沉浸邊界法以模擬三維複雜流場」，國立清華大學動力機械工程研究所碩士論文，2005.
- [12] YOUNG, Dana. Vibration of rectangular plates by the Ritz method. 1950.
- [13] WARBURTON, G. B. The vibration of rectangular plates. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1954, 168.1: 371-384.
- [14] A. W. Leissa, "Vibration of plates, NASA SP-160." US Washington. W. Leissa. J, Sound and Vibration, 1978, vol. 56, pp. 313.
- [15] GORMAN, D. J. Free vibration analysis of cantilever plates by the method of superposition. Journal of Sound and Vibration, 1976, 49.4: 453-467.
- [16] WARBURTON, G. B.; EDNEY, S. L. Vibrations of rectangular plates with elastically restrained edges. Journal of Sound and Vibration, 1984, 95.4: 537-552.
- [17] KIM, C. S.; YOUNG, P. G.; DICKINSON, S. M. On the flexural vibration of rectangular plates approached by using simple polynomials in the Rayleigh-Ritz method. Journal of Sound and Vibration, 1990, 143.3: 379-394.
- [18] ZHANG, Xuefeng; LI, Wen L. Vibrations of rectangular plates with arbitrary non-uniform elastic edge restraints. Journal of Sound and Vibration, 2009, 326.1-2: 221-234.
- [19] Cady, W. G. Piezoelectricity : an introduction to the theory and applications of electromechanical phenomena in crystals (1st ed.). McGraw-Hill Book Company, 1946
- [20] Tiersten, H. F. Linear Piezoelectric Plate Vibrations. New York: Plenum, 1969.
- [21] IEEE standard on piezoelectricity. IEEE Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control Society, ANSI/IEEE Std 176, 1987.



[22] 吳亦莊，馬劍清，「理論解析與實驗量測壓電平板的面外振動及特性探討」，
國立台灣大學機械工程研究所碩士論文，2009。

[23] 林蕙君，舒貽忠，「串聯陣列式壓電振動子能量擷取系統之分析研究」，國立
台灣大學應用力學研究所碩士論文，2012。

[24] 曾國舜，馬劍清，「壓電纖維複材與壓電陶瓷雙晶片的動態特性及應用於能量
擷取系統之探討」，國立台灣大學工學院機械工程學系碩士論文，2012。

[25] 周宛婷，黃育熙，「電極設計方法應用於壓電陶瓷平板與雙晶片提升振動能量
擷取系統效能研究」，國立台灣科技大學機械工程學系碩士論文，2013。

[26] WANG, S. Y. A finite element model for the static and dynamic analysis of a
piezoelectric bimorph. International Journal of Solids and Structures, 2004, 41.15:
4075-4096.

[27] MA, Chien-Ching, et al. Experimental measurement and numerical analysis on
resonant characteristics of cantilever plates for piezoceramic bimorphs. ieee
transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control, 2007, 54.2: 227-
239.

[28] 黃育熙，馬劍清，「壓電陶瓷平板、薄殼、與雙晶片三維耦合動態特性之實驗
量測、數值計算、與理論解析」，國立台灣大學機械工程研究所博士論文，
2009。

[29] 鄭雅倫，趙振綱，黃育熙，「串聯型三層壓電雙晶片於電極設計搭配模態振形
之能量截取效率提升」，國立台灣科技大學機械工程學系碩士論文，2016。

[30] BEAUDAN, Patrick Bruno. Numerical experiments on the flow past a circular
cylinder at sub-critical Reynolds number. Stanford University, 1995.

[31] BHATNAGAR, Prabhu Lal; GROSS, Eugene P.; KROOK, Max. A model for
collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral
one-component systems. Physical review, 1954, 94.3: 511.



- [32] KANG, Shin K.; HASSAN, Yassin A. The effect of lattice models within the lattice Boltzmann method in the simulation of wall-bounded turbulent flows. *Journal of Computational Physics*, 2013, 232.1: 100-117.
- [33] https://ftp.lstc.com/anonymous/outgoing/jday/manuals/LS-DYNA_manual_Vol_III_R7.0.pdf.
- [34] PESKIN, Charles S. The immersed boundary method. *Acta numerica*, 2002, 11: 479-517.
- [35] ZOU, Qisu; HE, Xiaoyi. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model. *Physics of fluids*, 1997, 9.6: 1591-1598.
- [36] NORBERG, Christoffer. Fluctuating lift on a circular cylinder: review and new measurements. *Journal of Fluids and Structures*, 2003, 17.1: 57-96.
- [37] MENDEZ, M.; NARDO, M.; BENOCCI, C. Running FineOpen43 Simulations at VKI: A tutorial and a collection of scripts. 2017.
- [38] LIENHARD, John H., et al. Synopsis of lift, drag, and vortex frequency data for rigid circular cylinders. Pullman, WA: Technical Extension Service, Washington State University, 1966.
- [39] RAJANI, B. N.; KANDASAMY, A.; MAJUMDAR, Sekhar. LES of flow past circular cylinder at $Re= 3900$. *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 2016, 9.3: 1421-1435.
- [40] BREUER, Michael. Large eddy simulation of the subcritical flow past a circular cylinder: numerical and modeling aspects. *International journal for numerical methods in fluids*, 1998, 28.9: 1281-1302.
- [41] WHITE, Frank M.; MAJDALANI, Joseph. *Viscous fluid flow*. New York: McGraw-Hill, 2006.



- [42]洪國勛，黃育熙，「流體致振壓電能量擷取系統之數值開發與風洞實驗」，國立台灣大學機械工程研究所碩士論文，2022。
- [43]JENSEN, Kim D. Flow measurements. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2004, 26: 400-419.
- [44]SHIMPI, R. P.; PATEL, H. G. A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43.22-23: 6783-6799.

附錄-壓電薄板理論與機電耦合效應



A 壓電陶瓷雙晶片

壓電陶瓷雙晶片(Piezoelectric Ceramic Bimorph)由三層結構組成，包含上下層的壓電陶瓷層，以及中間的黃銅層，壓電陶瓷表面均塗上電極讓電荷得以導通，黃銅層可增強元件的結構強度，並降低壓電陶瓷的易碎性。壓電陶瓷依據上下層的極化方向可分成：極化方向相反的串聯型(Series-type)及極化方向相同的並聯型(Parallel-type)；依據電極連接方式不同，可分為串聯(Series Connection)電極連接及並聯(Parallel Connection)電極連接，同使考慮極化方向與電極連接方式，可分成下列四種：並聯型壓電雙晶片以並聯電極連接(PBP)、並聯型壓電雙晶片以串聯電極連接(PBS)、串聯型壓電雙晶片以並聯電極連接(SBP)、串聯型壓電雙晶片以串聯電極連接(SBS)，上述簡稱為 PBP、PBS、SBP、SBS 等四種壓電陶瓷雙晶片，示意圖如圖 7-1 至圖 7-4 所示。

本研究使用的壓電陶瓷雙晶片為美國 Piezo System Inc.公司出產，其型號為 PSI-5A4E 的鈦鋯酸鉛(PZT)壓電陶瓷，其材料常數如表 7-1 所示，由於廠商並無提供中間黃銅層之材料參數，故本研究參考[26]中型號為 C86100 的銅材料參數進行後續分析，其材料參數如表 7-2 所示。在壓電陶瓷雙晶片各層尺寸上，壓電陶瓷層與黃銅層僅厚度不同，尺寸如圖 7-1 所示。

A.1 本構方程式

基於線性壓電理論引入壓電陶瓷知本構方程式(E-Form)，應力與電位移之方程式可寫成

$$\begin{cases} T_{ij} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k \\ D_i = e_{ikl} S_{kl} + \varepsilon_{ij}^S E_j \end{cases} \quad (7-1)$$



其中 T 為應力、 S 為應變、 E 為電場、 D 為電位移、 c_{ijkl}^E 為固定電場下之彈性常數(Elastic Coefficient)、 ε_{ij}^S 為固定應變下的介電常數(Electric Coefficient)、 e_{kij} 為壓電應力常數(Piezoelectric Stress Coefficient)。將(3-1)式改為矩陣表示法

$$T_{ij} = T_p, \quad c_{ijkl}^E = c_{pq}^E, \quad e_{kij} = e_{iq} \quad (7-2)$$

其中下標 p, q 為 1~6，依序對應 ij, kl 為 11、22、33、23、13、12，本研究使用的壓電材料為橫向等向性材料(Transversely Isotropic)，極化方向在 3 方向，考慮此材料特性後，可將(3-1)式以矩陣法表示為：

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ \dots \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ \dots \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (7-3)$$

其中

$$c_{66}^E = \frac{c_{11}^E - c_{12}^E}{2} \quad (7-4)$$

由於廠商提供的材料參數無法直接帶入本構方程式(3-1)式，需先轉換求(3-1)式中的 c_{ijkl}^E 、 ε_{ij}^S 、 e_{kij}

$$\begin{cases} c_{pq}^E s_{pq}^E = 1 \\ c_{pq}^D s_{pq}^D = 1 \\ s_{pq}^D = s_{pq}^E - d_{ip} g_{pk} \\ d_{ip} = e_{iq} s_{qp}^E \\ \varepsilon_{ik}^S = \varepsilon_{ik}^T - d_{ip} e_{pk} \end{cases} \quad (7-5)$$

固定電場下之楊氏模數搭配普松比可轉換為柔性的常數，表示為



$$\left\{ \begin{array}{l} s_{11}^E = \frac{1}{Y_{11}^E} \\ s_{33}^E = \frac{1}{Y_{33}^E} \\ s_{12}^E = -\nu s_{11}^E \\ s_{66}^E = 2(s_{11}^E - s_{12}^E) \end{array} \right. \quad (7-6)$$

固定電場與固定電位移下，柔性長度關係

$$s_{13}^E = s_{13}^D (1 - k_{31}^2) + k_{31} k_{33} \sqrt{s_{11}^E s_{33}^E} \quad (7-7)$$

壓電材料常數與機電耦合係數的關係式

$$d_{ij}^2 = k_{ij}^2 \varepsilon_{ii}^T s_{jj}^E \quad (7-8)$$

固定電場與固定電位移下，柔性常數關係

$$s_{13}^E = s_{13}^D (1 - k_{31}^2) + k_{31} k_{33} \sqrt{s_{11}^E s_{33}^E} \quad (7-9)$$

透過以上轉換，可得到本構方程式中所需之 10 個壓電材料常數。

下列方程式分別代表壓電陶瓷雙晶片之上層與下層之陶瓷層的本構方程式，上標為 (u) 的為上層壓電陶瓷層，上標為 (l) 的為下層壓電陶瓷層。

$$\begin{cases} T_{ij}^{(u)} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij}^{(u)} E_k^{(u)} \\ D_i^{(u)} = e_{ikl}^{(u)} S_{kl} + \varepsilon_{ij}^S E_j^{(u)} \end{cases} \quad (7-10)$$

$$\begin{cases} T_{ij}^{(l)} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij}^{(l)} E_k^{(l)} \\ D_i^{(l)} = e_{ikl}^{(l)} S_{kl} + \varepsilon_{ij}^S E_j^{(l)} \end{cases} \quad (7-11)$$

以全域坐標系表示，若上下層壓電陶瓷層極化方向相反，則機電耦合係數 (e) 必須加上負號，因此若考慮壓電陶瓷層的極化方向及電極連接方式，當輸入電壓時，SBS 壓電陶瓷雙晶片的上下層壓電陶瓷受相同的電壓，但因為上層壓電陶瓷層與下層壓電陶瓷層的極化方向相反，面內方向一伸一縮的變形使面外方向產生很大的彎曲變形；PBP 壓電陶瓷雙晶片的變形狀況與 SBS 類似，雖然上層壓電陶瓷層與下層壓電陶瓷層極化方向相同，但因兩層的電場相反，其面內與面外方向變形與



SBS 相同；PBS 及 SBP 壓電陶瓷雙晶片則因上下兩層壓電陶瓷之面內變形方向相同，因此在面外方向的變形較 PBP 與 SBS 小很多。

黃銅層的本構方程式為

$$T_{ij}^{(c)} = c_{ijkl}^{(c)} S_{kl} \quad (7-12)$$

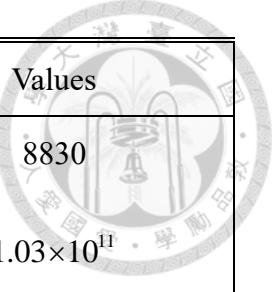
其中上標(c)代表黃銅層，因為黃銅是等向性材料(Isotropic)，(3-12)式以矩陣法表示為

$$\begin{bmatrix} T_1^{(c)} \\ T_2^{(c)} \\ T_3^{(c)} \\ T_4^{(c)} \\ T_5^{(c)} \\ T_6^{(c)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^{(c)} & c_{12}^{(c)} & c_{12}^{(c)} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^{(c)} & c_{11}^{(c)} & c_{12}^{(c)} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^{(c)} & c_{12}^{(c)} & c_{11}^{(c)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{66}^{(c)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^{(c)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^{(c)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} \quad (7-13)$$

其中 $c_{66}^{(c)} = \frac{c_{11}^{(c)} - c_{12}^{(c)}}{2}$

Patch Model (PSI-5A4E)	Symbol	Values
Mechanical		
Density (kg/m^3)	ρ_p	7800
Elastic Modulus (N/m^2)	s_{11}^E	1.515×10^{-11}
	s_{33}^E	1.923×10^{-11}
Poisson's Ratio	ν_p	0.31
Dielectric		
Relative Dielectric Constants (@ 1kHz)	$\varepsilon_{33}^T / \varepsilon_0$	1800
	$\varepsilon_{33}^T / \varepsilon_0$	1800
Dielectric Constant in Vacuum (F/m)	ε_0	8.854×10^{-12}
Piezoelectric		
Piezoelectric Strain Coefficients ($m/Volt$)	d_{31}	-1.9×10^{-10}
	d_{33}	3.9×10^{-10}
	d_{15}	$\approx 5.5 \times 10^{-10}$
Coupling Coefficients	k_{31}	0.32
	k_{33}	0.72
	k_{15}	≈ 0.55

表 7-1 壓電陶瓷材料常數



Brass (Bronze C86100)	Symbol	Values
Density (kg/m^3)	ρ_c	8830
Young's Modulus (N/m^2)	E	1.03×10^{11}
Poisson's Ratio	ν_c	0.34

表 7-2 壓電陶瓷雙晶片中間層銅金屬材料常數

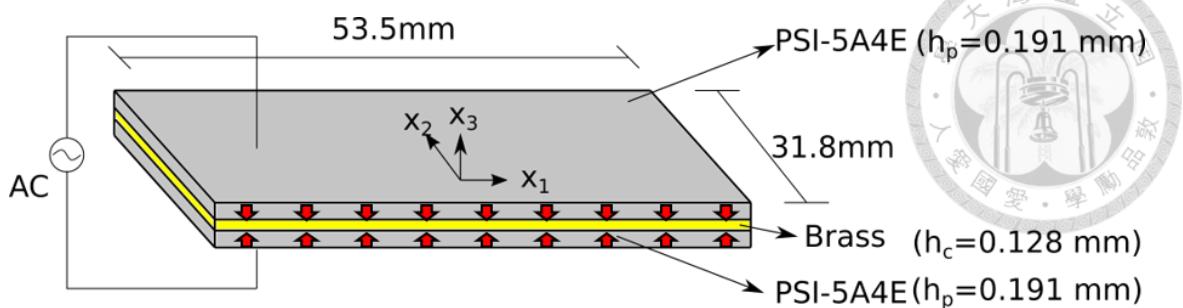


圖 7-1 串聯型雙晶片以串聯電極連接(SBS)

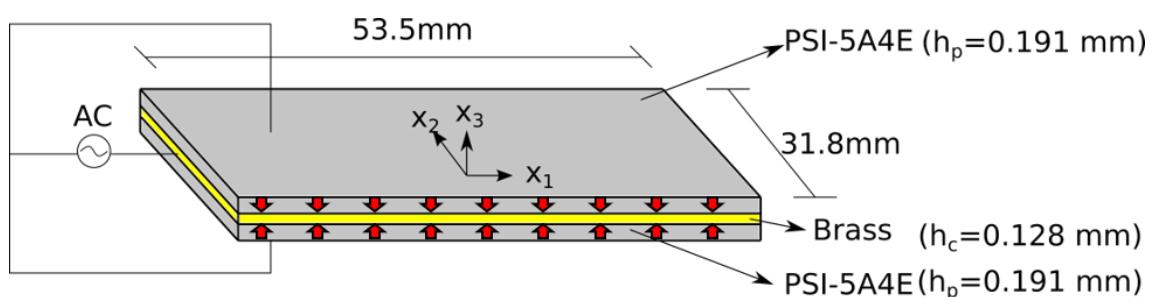


圖 7-2 串聯型雙晶片以並聯電極連結(SBP)

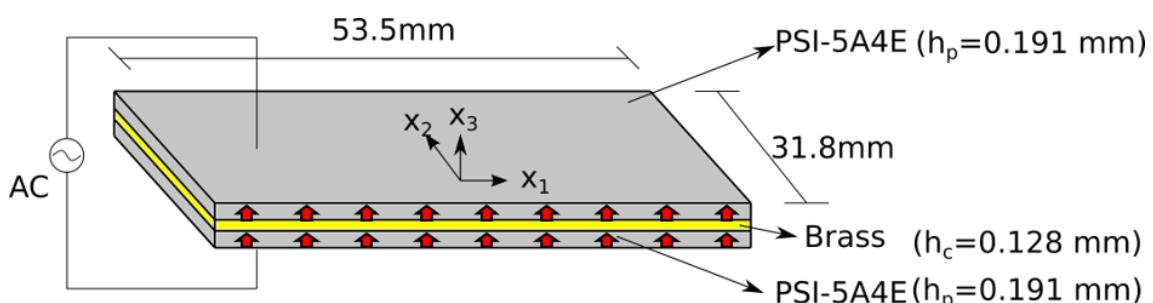


圖 7-3 並聯型雙晶片以串聯電極連接(PBS)

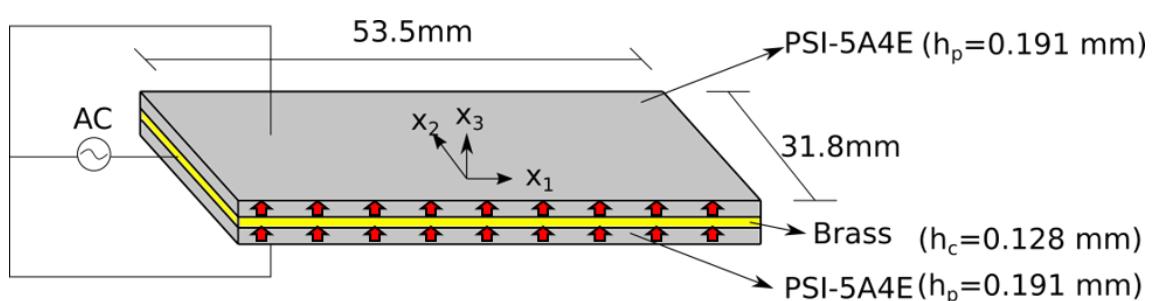


圖 7-4 並聯型雙晶片以並聯電極連接(PBP)



A.2 薄板力學假設

本研究使用的壓電陶瓷雙晶片由於總厚度 $2h_p + h_c$ 遠小於長度 a 與寬度 b ，故可視為薄板，帶入 Kirchhoff 薄板理論假設，將三維問題簡化為二維中面與厚度方向問題，可參考圖 7-5，假設如下：

1. 垂直於平板中面的直線在變形後仍為直線，並與中面保持垂直，不考慮厚度方向的剪應變，亦即

$$S_4 = S_5 = 0 \quad (7-14)$$

2. 面外方向的正向應力遠小於面內方向的剪應力

$$T_3 = 0 \quad (7-15)$$

3. 薄板面外變形時，中面不受拉伸，亦即沒有面內方向的變形
4. 忽略轉動慣性力矩

根據上述假設，可將三維位移場 $U(x_1, x_2, x_3)$ 以二維中面位移場 $u(x_1, x_2)$ 簡化為

$$\begin{aligned} U_1(x_1, x_2, x_3) &= u_1(x_1, x_2) - x_3 u_{3,1}(x_1, x_2) \\ U_2(x_1, x_2, x_3) &= u_2(x_1, x_2) - x_3 u_{3,2}(x_1, x_2) \\ U_3(x_1, x_2, x_3) &= u_3(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (7-16)$$

應變與位移的關係式為

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}) \quad (7-17)$$

將(3-16)式帶入(3-17)式，可得應變，以中面位移場表示為

$$\begin{aligned} S_1 &= S_{11} = u_{1,1} - x_3 u_{3,11} \\ S_2 &= S_{22} = u_{2,2} - x_3 u_{3,22} \\ S_3 &= S_{33} = u_{3,3} \\ S_6 &= 2S_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} - 2x_3 u_{3,12} \end{aligned} \quad (7-18)$$

由(3-16)式可知 u_3 並非厚度方向的函數， $u_{3,3} = 0$ ，然而考慮到 S_3 的影響不可忽略，因此將薄板假設條件式(3-15)式帶入本構方程式(3-3)式，透過面外方向應力趨近於 0， $T_3 = 0$ ，可得



$$S_3 = -\frac{c_{13}^E}{c_{33}^E} (S_1 + S_2) + \frac{e_{33}}{c_{33}^E} E_3^{(u)}$$

(7-19)

並將(3-19)式帶回壓電陶瓷層的本構方程式(3-10)式，整理後以矩陣法表示為

$$\left[\begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccccc|ccc} \bar{c}_{11}^E & \bar{c}_{12}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{e}_{31} \\ \bar{c}_{12}^E & \bar{c}_{11}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ \bar{e}_{31} & \bar{e}_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\varepsilon}_{33}^S \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \right] \quad (7-20)$$

其中等效壓電材料參數

$$\bar{c}_{11}^E = c_{11}^E - \frac{(c_{13}^E)^2}{c_{33}^E}, \quad \bar{c}_{12}^E = c_{12}^E - \frac{(c_{13}^E)^2}{c_{33}^E}, \quad \bar{e}_{31} = e_{31} - e_{33} \frac{c_{13}^E}{c_{33}^E}, \quad \bar{\varepsilon}_{33}^S = \varepsilon_{33}^S + \frac{(e_{33})^2}{c_{33}^E} \quad (7-21)$$

將(3-20)式展開後可得

上層壓電陶瓷層：

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1^{(u)} = \bar{c}_{11}^E (u_{1,1} - x_3 u_{3,11}) + \bar{c}_{12}^E (u_{2,2} - x_3 u_{3,22}) - \bar{e}_{31}^{(u)} E_3^{(u)} \\ T_2^{(u)} = \bar{c}_{12}^E (u_{1,1} - x_3 u_{3,11}) + \bar{c}_{11}^E (u_{2,2} - x_3 u_{3,22}) - \bar{e}_{31}^{(u)} E_3^{(u)} \\ T_4^{(u)} = e_{15}^{(u)} \tilde{E}_1^{(u)} \\ T_5^{(u)} = e_{15}^{(u)} \tilde{E}_2^{(u)} \\ T_6^{(u)} = c_{66}^E (u_{1,2} - u_{2,1} - 2x_3 u_{3,12}) \\ D_1^{(u)} = \varepsilon_{11}^S \tilde{E}_1^{(u)} \\ D_2^{(u)} = \varepsilon_{11}^S \tilde{E}_2^{(u)} \\ D_3^{(u)} = \bar{e}_{31}^{(u)} (u_{1,1} - x_3 u_{3,11}) + \bar{e}_{31}^{(u)} (u_{2,2} - x_3 u_{3,22}) + \varepsilon_{33}^S E_3^{(u)} \end{array} \right. \quad (7-22)$$

下層壓電陶瓷層：



$$\begin{cases} T_1^{(l)} = \bar{c}_{11}^E (u_{1,1} - x_3 u_{3,11}) + \bar{c}_{12}^E (u_{2,2} - x_3 u_{3,22}) - \bar{e}_{31}^{(l)} E_3^{(l)} \\ T_2^{(l)} = \bar{c}_{12}^E (u_{1,1} - x_3 u_{3,11}) + \bar{c}_{11}^E (u_{2,2} - x_3 u_{3,22}) - \bar{e}_{31}^{(l)} E_3^{(l)} \\ T_4^{(l)} = e_{15}^{(l)} \tilde{E}_1^{(l)} \\ T_5^{(l)} = e_{15}^{(l)} \tilde{E}_2^{(l)} \\ T_6^{(l)} = c_{66}^E (u_{1,2} - u_{2,1} - 2x_3 u_{3,12}) \\ D_1^{(l)} = \varepsilon_{11}^S \tilde{E}_1^{(l)} \\ D_2^{(l)} = \varepsilon_{11}^S \tilde{E}_2^{(l)} \\ D_3^{(l)} = \bar{e}_{31}^{(l)} (u_{1,1} - x_3 u_{3,11}) + \bar{e}_{31}^{(l)} (u_{2,2} - x_3 u_{3,22}) + \varepsilon_{33}^S E_3^{(l)} \end{cases} \quad (7-23)$$

在黃銅層中，同樣考慮薄板假設條件式(3-15)式，可得在黃銅層中

$$S_3 = -\frac{c_{13}^{(c)}}{c_{33}^{(c)}} (S_1 + S_2) \quad (7-24)$$

帶入黃銅層的本構方程式，並展開後可得在黃銅層中，應力以中面位移場表示式

$$\begin{cases} T_1^{(c)} = \bar{c}_{11}^{(c)} (u_{1,1} - x_3 u_{3,11}) + \bar{c}_{12}^{(c)} (u_{2,2} - x_3 u_{3,22}) \\ T_2^{(c)} = \bar{c}_{12}^{(c)} (u_{1,1} - x_3 u_{3,11}) + \bar{c}_{11}^{(c)} (u_{2,2} - x_3 u_{3,22}) \\ T_6^{(c)} = c_{66}^{(c)} (u_{1,2} + u_{2,1} - 2x_3 u_{3,12}) \end{cases} \quad (7-25)$$

其中

$$\bar{c}_{11}^{(c)} = c_{11}^{(c)} - \frac{(c_{12}^{(c)})^2}{c_{11}^{(c)}}, \quad \bar{c}_{12}^{(c)} = c_{12}^{(c)} - \frac{(c_{12}^{(c)})^2}{c_{11}^{(c)}} \quad (7-26)$$

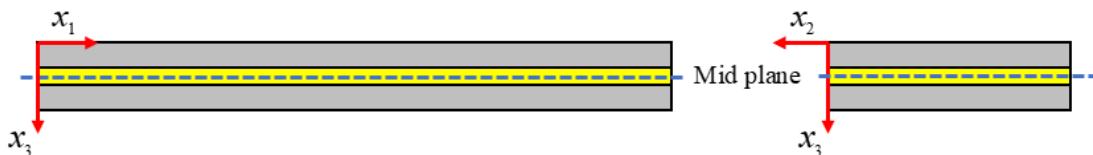


圖 7-5 壓電陶瓷雙晶片中面示意圖

A.3 壓電材料之電學假設

將上述薄板理論假設下的壓電材料，帶入以下電學假設：

- 由於壓電材料為介電材料，假設壓電材料內部沒有自由電荷，套用高斯定律

可得：

$$D_{i,i}^{(u)} = D_{i,i}^{(l)} = 0 \quad (7-27)$$



2. 由於總厚度 $h_c + 2h_p$ 遠小於長度 a 與寬度 b，且主要極化方向為 x_3 方向，

$$\tilde{E}_1^{(u)} = \tilde{E}_1^{(l)} = \tilde{E}_2^{(u)} = \tilde{E}_2^{(l)} = 0 \quad (7-28)$$

3. 假設上層與下層電位函數在厚度方向呈現二次曲線變化

$$\begin{cases} \phi^{(u)} = [\phi_0^{(u)} + x_3 \phi_1^{(u)} + x_3^2 \phi_2^{(u)}], \quad \left(\frac{h_c}{2}\right) < x_3 < \left(\frac{h_c}{2} + h_p\right) \\ \phi^{(l)} = [\phi_0^{(l)} + x_3 \phi_1^{(l)} + x_3^2 \phi_2^{(l)}], \quad \left(-\frac{h_c}{2}\right) > x_3 > \left(-\frac{h_c}{2} - h_p\right) \end{cases} \quad (7-29)$$

考慮電場與電位關係式：

$$\tilde{E}_i^{(u)} = -\phi_{,i}^{(u)}, \quad \tilde{E}_i^{(l)} = -\phi_{,i}^{(l)} \quad (7-30)$$

將(3-29)式帶入(3-21)式與(3-22)式，可得：

$$D_1^{(u)} = D_1^{(l)} = D_2^{(u)} = D_2^{(l)} = 0 \quad (7-31)$$

將(3-30)式帶入(3-26)式，可得：

$$\frac{\partial D_3^{(u)}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial D_3^{(l)}}{\partial x_3} = 0 \quad (7-32)$$

由(3-32)式可知 $D_3^{(u)}$ 、 $D_3^{(l)}$ 並非厚度方向的函數，將(3-22)式與(3-23)式對厚度方向

積分，並假設上下層電位差為 $V_p^{(u)}$ 、 $V_p^{(l)}$ ，如圖 7-6 所示，可得

$$D_3^{(u)} = \bar{e}_{31}^{(u)} (u_{1,1} + u_{2,2}) - \frac{1}{2} \bar{e}_{31}^{(u)} (h_p + h_c) (u_{3,11} + u_{3,22}) - \frac{\bar{\epsilon}_{33}^S}{h_p} V_p^{(u)} \quad (7-33)$$

$$D_3^{(l)} = \bar{e}_{31}^{(l)} (u_{1,1} + u_{2,2}) + \frac{1}{2} \bar{e}_{31}^{(l)} (h_p + h_c) (u_{3,11} + u_{3,22}) - \frac{\bar{\epsilon}_{33}^S}{h_p} V_p^{(l)} \quad (7-34)$$

將(3-33)式與壓電層本構方程式(3-22)式比對，以及(3-34)式與(3-23)式比對，可得電場與位移場及電位差關係式：

$$E_3^{(u)} = \frac{\bar{e}_{31}^{(u)}}{\bar{\epsilon}_{33}^S} (u_{3,11} + u_{3,22}) x_3 - \frac{1}{2} \frac{\bar{e}_{31}^{(u)}}{\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_c + h_p) (u_{3,11} + u_{3,22}) - \frac{1}{h_p} V_p^{(u)} \quad (7-35)$$



$$E_3^{(l)} = \frac{\bar{e}_{31}^{(l)}}{\bar{\epsilon}_{33}^S} (u_{3,11} + u_{3,22}) x_3 + \frac{1}{2} \frac{\bar{e}_{31}^{(l)}}{\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_c + h_p) (u_{3,11} + u_{3,22}) - \frac{1}{h_p} V_p^{(l)} \quad (7-36)$$

將(3-35)式與(3-36)式帶回壓電層本構方程式(3-22)式及(3-23)式，可得套用薄板理論後，壓電陶瓷中應力場與位移場及電位差的關係式：

上層壓電層：

$$T_1^{(u)} = \bar{c}_{11}^E u_{1,1} + \bar{c}_{12}^E u_{2,2} + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{2\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_c + h_p) (u_{3,11} + u_{3,22}) + \frac{\bar{e}_{31}^{(u)}}{h_p} V_p^{(u)} - x_3 \left[\left(\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,11} + \left(\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,22} \right] \quad (7-37)$$

$$T_2^{(u)} = \bar{c}_{12}^E u_{1,1} + \bar{c}_{11}^E u_{2,2} + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{2\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_c + h_p) (u_{3,11} + u_{3,22}) + \frac{\bar{e}_{31}^{(u)}}{h_p} V_p^{(u)} - x_3 \left[\left(\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,11} + \left(\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,22} \right] \quad (7-38)$$

$$T_6^{(u)} = c_{66} (u_{1,2} + u_{2,1} - 2x_3 u_{3,12}) \quad (7-39)$$

下層壓電層：

$$T_1^{(l)} = \bar{c}_{11}^E u_{1,1} + \bar{c}_{12}^E u_{2,2} + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{2\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_c + h_p) (u_{3,11} + u_{3,22}) - \frac{\bar{e}_{31}^{(l)}}{h_p} V_p^{(l)} - x_3 \left[\left(\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,11} + \left(\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,22} \right] \quad (7-40)$$

$$T_2^{(l)} = \bar{c}_{12}^E u_{1,1} + \bar{c}_{11}^E u_{2,2} + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{2\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_c + h_p) (u_{3,11} + u_{3,22}) - \frac{\bar{e}_{31}^{(l)}}{h_p} V_p^{(l)} - x_3 \left[\left(\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,11} + \left(\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,22} \right] \quad (7-41)$$

$$T_6^{(l)} = c_{66} (u_{1,2} + u_{2,1} - 2x_3 u_{3,12}) \quad (7-42)$$

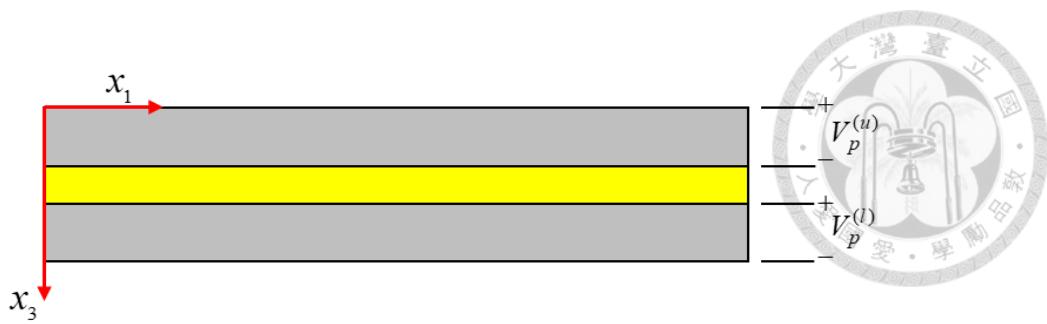


圖 7-6 壓電陶瓷雙晶片電位差示意圖

A.4 統御方程式

考慮上層壓電陶瓷層，將(3-37)式~(3-39)式對厚度積分，把彎矩以位移場及電位差表示：

$$M_{11}^{(u)} = \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}+h_p} T_1^{(u)} x_3 dx_3 = \frac{1}{2} (h_c h_p + h_p^2) \left[\bar{c}_{11}^E u_{1,1} + \bar{c}_{12}^E u_{2,2} + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{2 \bar{\epsilon}_{33}^S} (h_c + h_p) (u_{3,11} + u_{3,22}) + \frac{\bar{e}_{31}^{(u)}}{h_p} V_p^{(u)} \right] - \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{h_c}{2} + h_p \right)^3 - \left(\frac{h_c}{2} \right)^3 \right\} \left[\left(\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,11} + \left(\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,22} \right] \quad (7-43)$$

$$M_{22}^{(u)} = \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}+h_p} T_2^{(u)} x_3 dx_3 = \frac{1}{2} (h_c h_p + h_p^2) \left[\bar{c}_{12}^E u_{1,1} + \bar{c}_{11}^E u_{2,2} + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{2 \bar{\epsilon}_{33}^S} (h_c + h_p) (u_{3,11} + u_{3,22}) + \frac{\bar{e}_{31}^{(u)}}{h_p} V_p^{(u)} \right] - \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{h_c}{2} + h_p \right)^3 - \left(\frac{h_c}{2} \right)^3 \right\} \left[\left(\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,11} + \left(\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,22} \right] \quad (7-44)$$

$$M_{12}^{(u)} = \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}+h_p} T_6^{(u)} x_3 dx_3 = \frac{1}{2} c_{66} (h_c h_p + h_p^2) (u_{1,2} + u_{2,1}) - \frac{2}{3} c_{66} \left[\left(\frac{h_c}{2} + h_p \right)^3 - \left(\frac{h_c}{2} \right)^3 \right] u_{3,12} \quad (7-45)$$

下層壓電陶瓷層與黃銅層，同樣將(3-40)式~(3-42)式及(3-25)式對厚度積分，並將彎矩加總可得到薄板的等效總彎矩：

$$M_{11}^{(eq)} = \frac{1}{2} (h_c h_p + h_p^2) \left[\frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_c + h_p)(u_{3,11} + u_{3,22}) + \frac{\bar{e}_{31}^{(u)} V_p^{(u)} - \bar{e}_{31}^{(l)} V_p^{(l)}}{h_p} \right] - \frac{2}{3} \left[\left(\frac{h_c}{2} + h_p \right)^3 - \left(\frac{h_c}{2} \right)^3 \right] \left\{ \left[\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,11} + \left[\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,22} \right\} \quad (7-46)$$

$$- \frac{2}{3} \left(\frac{h_c}{2} \right)^3 (\bar{c}_{11}^{(c)} u_{3,11} + \bar{c}_{12}^{(c)} u_{3,22})$$

$$M_{22}^{(eq)} = \frac{1}{2} (h_c h_p + h_p^2) \left[\frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_c + h_p)(u_{3,11} + u_{3,22}) + \frac{\bar{e}_{31}^{(u)} V_p^{(u)} - \bar{e}_{31}^{(l)} V_p^{(l)}}{h_p} \right] - \frac{2}{3} \left[\left(\frac{h_c}{2} + h_p \right)^3 - \left(\frac{h_c}{2} \right)^3 \right] \left\{ \left[\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,11} + \left[\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,22} \right\} \quad (7-47)$$

$$- \frac{2}{3} \left(\frac{h_c}{2} \right)^3 (\bar{c}_{12}^{(c)} u_{3,11} + \bar{c}_{11}^{(c)} u_{3,22})$$

$$M_{12}^{(eq)} = -\frac{4}{3} c_{66}^E \left[\left(\frac{h_c}{2} + h_p \right)^3 - \left(\frac{h_c}{2} \right)^3 \right] u_{3,12} - \frac{4}{3} \left(\frac{h_c}{2} \right)^3 c_{66}^{(c)} u_{3,12} \quad (7-48)$$

(3-53)式(3-54)式中的 $\bar{e}_{31}^{(u)} V_p^{(u)} - \bar{e}_{31}^{(l)} V_p^{(l)}$ 代表壓電材料與電壓耦合的關係，考慮上層壓電陶瓷層與下層壓電陶瓷層的極化關係與電極連接方式，可知若為SBP或PBS形式，則 $\bar{e}_{31}^{(u)} V_p^{(u)} - \bar{e}_{31}^{(l)} V_p^{(l)} = 0$ ，上下層壓電的效應互相抵銷，若為PBP或SBS形式，則效應會互相疊加。

在本研究中假設壓電陶瓷雙晶片為開路連接，其流入負載的電流為零，在初始條件電荷為零的狀態下，假設壓電陶瓷表面沒有鋪上電極時每個點的電荷均為零，故可令 $D_3^{(u)}$ 、 $D_3^{(l)}$ 為零，假設面外變形時中面不變形，帶入(3-33)式及(3-34)式可得：

$$V_p^{(u)} = -\frac{\bar{e}_{31}^{(u)}}{2\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p h_c + h_p^2) (u_{3,11} + u_{3,22}) \quad (7-49)$$



$$V_p^{(l)} = -\frac{\bar{e}_{31}^{(l)}}{2\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p h_c + h_p^2) (u_{3,11} + u_{3,22}) \quad (7-50)$$

以 SBS 為例，此時上下層壓電應力常數滿足 $\bar{e}_{31}^{(u)} = -\bar{e}_{31}^{(l)}$ 將(3-49)式及(3-50)式帶入

(3-46)式及(3-47)式，可得

$$M_{11(open)}^{(eq)} = -\frac{2}{3} \left[\left(\frac{h_c}{2} + h_p \right)^3 - \left(\frac{h_c}{2} \right)^3 \right] \left\{ \left[\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,11} + \left[\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,22} \right\} \quad (7-51)$$

$$-\frac{2}{3} \left(\frac{h_c}{2} \right)^3 (\bar{c}_{11}^{(c)} u_{3,11} + \bar{c}_{12}^{(c)} u_{3,22})$$

$$M_{22(open)}^{(eq)} = -\frac{2}{3} \left[\left(\frac{h_c}{2} + h_p \right)^3 - \left(\frac{h_c}{2} \right)^3 \right] \left\{ \left[\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,11} + \left[\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,22} \right\} \quad (7-52)$$

$$-\frac{2}{3} \left(\frac{h_c}{2} \right)^3 (\bar{c}_{12}^{(c)} u_{3,11} + \bar{c}_{11}^{(c)} u_{3,22})$$

根據薄板的基本假設，側向剪應力 T_{13} 、 T_{23} 遠小於其他分量，故引起的變形可忽略不計，然而仍需維持平衡，在此忽略轉動慣量，利用力與力矩的平衡條件式，並忽略外力項，可得到等向性薄板在動態條件下的統馭方程式

$$\frac{\partial^2 M_{11}^{(eq)}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}^{(eq)}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_{22}^{(eq)}}{\partial x_2^2} - \rho^{eq} h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = 0 \quad (7-53)$$

其中 ρ^{eq} 為壓電陶瓷雙晶片，考慮壓電陶瓷層與黃銅層的等效密度

$$\rho^{eq} = \frac{h_c \rho_c + 2h_p \rho_p}{h_c + 2h_p} \quad (7-54)$$

其中 ρ_c 、 ρ_p 分別表示黃銅層與壓電陶瓷層的密度。

在文獻[44]中提到彎矩與位移，以及扭矩與位移的關係式為

$$M_{11} = - \left[D_{11} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \right] \quad (7-55)$$

$$M_{22} = - \left[D_{22} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + D_{12} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right] \quad (7-56)$$



$$M_{12} = -2 \left[D_{66} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \quad (7-57)$$

將(3-61)式、(3-62)式、(3-63)式代入(3-59)式，可得以位移表示之薄板統御方程式

$$D_{11} \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^4} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_2^4} + \rho^{eq} h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = 0 \quad (7-58)$$

其中 D_{11} 、 D_{12} 分別為等效彎矩剛性及等效扭矩剛性。

$$D_{66} = \frac{2}{3} \left[\left(\frac{h_c}{2} + h_p \right)^3 - \left(\frac{h_c}{2} \right)^3 \right] c_{66}^E + \frac{2}{3} \left(\frac{h_c}{2} \right)^3 c_{66}^{(c)} \quad (7-59)$$

開路等效剛性：

$$D_{11}^{(open)} = D_{22}^{(open)} = \frac{2}{3} \left[\left(\frac{h_c}{2} + h_p \right)^3 - \left(\frac{h_c}{2} \right)^3 \right] \left(\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31})^2}{\bar{\varepsilon}_{33}^S} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{h_c}{2} \right)^3 \bar{c}_{11}^{(c)} \quad (7-60)$$

$$D_{12}^{(open)} = \frac{2}{3} \left[\left(\frac{h_c}{2} + h_p \right)^3 - \left(\frac{h_c}{2} \right)^3 \right] \left(\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31})^2}{\bar{\varepsilon}_{33}^S} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{h_c}{2} \right)^3 \bar{c}_{12}^{(c)} \quad (7-61)$$

$$D_{11}^{(open)} = D_{12}^{(open)} + D_{66} \quad (7-62)$$

開路等效普松比(Poisson's Ratio)

$$\nu^{(open)} = \frac{D_{12}^{(open)}}{D_{11}^{(open)}} \quad (7-63)$$



B. 矩形懸臂版之疊加法與實驗量測

根據 Gorman[15]以及吳亦莊[22]和廖展誼及吳亦莊[9]推導的平板振動理論，從板理論出發，考慮到位移解須滿足薄板統御方程式(3-66)式與邊界條件，可將平板面外自由振動的位移解 u_3 視為簡諧運動

$$u_3(x_1, x_2, t) = W(x_1, x_2) e^{j\omega t} \quad (7-64)$$

其中 $j = \sqrt{-1}$ ， ω 為角頻率(rad/s)。將(3-72)式代入(3-66)式，可得

$$W_{,1111} + 2W_{,1122} + W_{,2222} - \frac{\rho^{(eq)} h \omega^2}{D_{11}} W = 0 \quad (7-65)$$

平板滿足的邊界條件有以下三種

(1) 固定邊界(Clamped)

平板在固定邊界上滿足面外位移與斜率為零，可將邊界條件表示如下

x_1 方向：

$$W = 0, \frac{\partial W}{\partial x_1} = 0 \quad (7-66)$$

x_2 方向：

$$W = 0, \frac{\partial W}{\partial x_2} = 0 \quad (7-67)$$

(2) 簡支邊界(Simply Supported)

簡支又稱為鉸接支承，平板在簡支邊界上滿足面外位移與彎矩為零，可將邊界條件表示如下

x_1 方向：

$$W = 0, M_{11} = 0 \quad (7-68)$$

x_2 方向：

$$W = 0, M_{22} = 0 \quad (7-69)$$

(3) 自由邊界(Free)

自由邊界表示平板在該邊界上滿足彎矩、扭矩、簡切力皆為零。



考慮到統御方程式是四階偏微分方程式，最多滿足八個邊界條件，然而四個邊界條件只能分別滿足兩個邊界條件，無法達到自由邊界的三個邊界條件，因此引入 Kelvin-Kirchhoff 之等效合力邊界以描述自由邊界，平板的扭矩分布如圖 7-7，由於扭矩是由剪力與力臂相乘求得，因此可將扭矩等效為側向剪切力，考慮兩個自由體間存在剪切力差， $\frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} dx_2$ 或 $\frac{\partial M_{21}}{\partial x_1} dx_1$ ，且剪切力差均勻分布在邊界面上，故可將等效剪力 V 以剪力差及側向剪力 Q 表示

$$V_1 = Q_1 + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} dx_2 \quad (7-70)$$

$$V_2 = Q_2 + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1} dx_1 \quad (7-71)$$

透過上述等效方式，可將自由邊界上的三個邊界條件簡化為兩個，自由邊界條件表示如下

x_1 方向：

$$M_{11} = 0, V_1 = \left(Q_1 + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} \right) = 0 \quad (7-72)$$

x_2 方向：

$$M_{22} = 0, V_2 = \left(Q_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (7-73)$$

為求方便後續在程式上運算，將薄板統御方程式(3-71)式與物理量，如彎矩 M_{11}

和 M_{12} 、剪力 V_1 、 V_2 等，其中 $\xi = \frac{x_1}{a}$ 、 $\eta = \frac{x_2}{b}$ 、 $\lambda^4 = \frac{\rho^{(eq)} ha^4 \omega}{D_{11}}$ 、 $\nu_1^* = 2 - \nu_1$ 、 $\phi_a = \frac{b}{a}$ ，

可改寫為：

$$\left[\frac{\partial^4 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\phi_a^2 \partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 W(\xi, \eta)}{\phi_a^4 \partial \eta^4} \right] - \lambda^4 W(\xi, \eta) = 0 \quad (7-74)$$

$$\frac{M_{11}a}{D_{11}} = - \left[\frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\nu_1}{\phi_a^2} \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right] \quad (7-75)$$



$$\frac{M_{22}b^2}{aD_{11}} = - \left[\frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + \nu_1 \phi_a^2 \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \right] \quad (7-76)$$

$$\frac{V_{11}a^2}{D_{11}} = - \left[\frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^3} + \frac{\nu_1^*}{\phi_a^2} \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta^2} \right] \quad (7-77)$$

$$\frac{V_{22}b^3}{D_{11}a} = - \left[\frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^3} + \nu_1^* \phi_a^2 \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right] \quad (7-78)$$

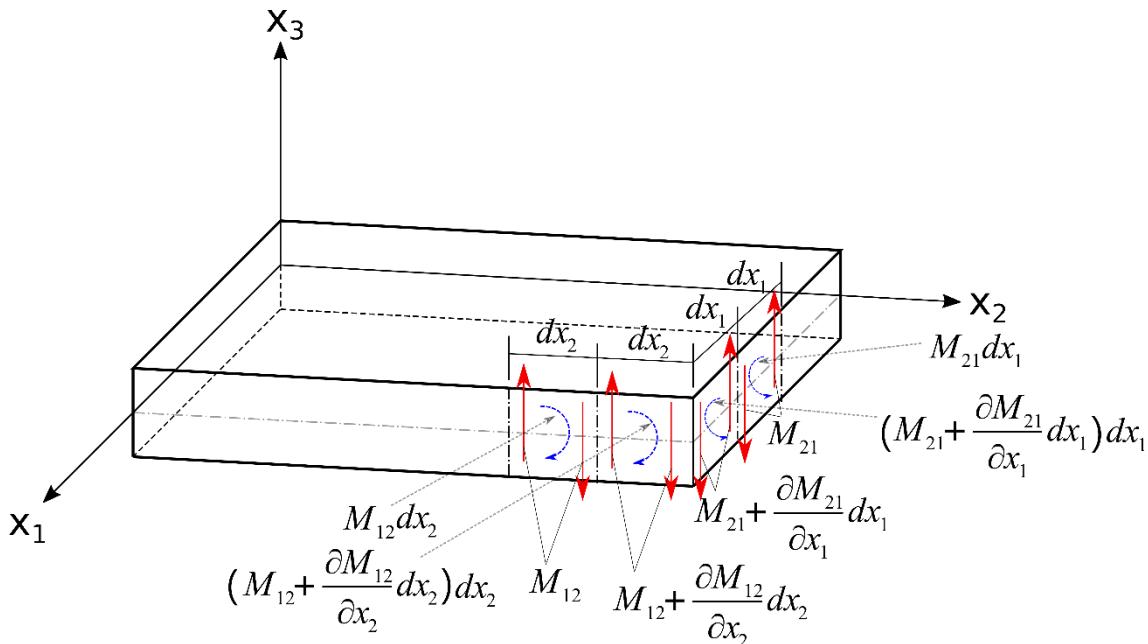
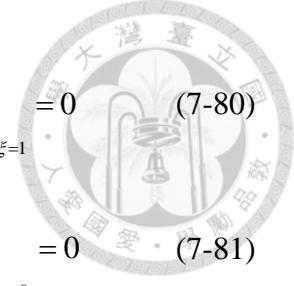


圖 7-7 平板側向剪力等效圖

B.1 懸臂版(CFFF)之疊加法理論推導

疊加法透過將原先的一個矩形板視為四個結構區域疊加，各個結構區塊其邊界條件會合原始邊界略有不同，但好處是較容易得到解析解，最終將結果合併疊加，且合併的解可滿足原始邊界，即可得到矩形板之共振頻率及模態形狀。如圖 7-8 所示，懸臂板需滿足在固定端之面外位移、斜率皆為零，自由端之彎矩、等效剪力為零，

$$W|_{\xi=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial W}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0 \quad (7-79)$$



$$-\left[\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{v_1}{\phi_a^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right]_{\xi=1} = 0, \quad -\left[\frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + \frac{v_1^*}{\phi_a^2} \frac{\partial^3 W}{\partial \xi \partial \eta^2} \right]_{\xi=1} = 0 \quad (7-80)$$

$$-\left[\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + v_1 \phi_a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right]_{\eta=0} = 0, \quad -\left[\frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} + v_1^* \phi_a^2 \frac{\partial^3 W}{\partial \eta \partial \xi^2} \right]_{\eta=0} = 0 \quad (7-81)$$

$$-\left[\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + v_1 \phi_a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right]_{\eta=1} = 0, \quad -\left[\frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} + v_1^* \phi_a^2 \frac{\partial^3 W}{\partial \eta \partial \xi^2} \right]_{\eta=1} = 0 \quad (7-82)$$

將一塊懸臂板 W 拆成四個結構區塊 W_1 、 W_2 、 W_3 、 W_4 並進行疊加，如圖 7-9 所示，從圖中可發現固定邊界在 $\xi=0$ ，四個結構區塊的邊界條件均與懸臂板不同，圖 7-9 中藍色粗線代表簡支邊界；扭轉符號代表扭矩邊界；圓圈符號代表剪動邊界 (Slip-Shear)，亦即面外位移之斜率與側向剪切力為零，以下說明邊界條件及求解過程

(1) 第一結構區塊 W_1 ：

在 $\eta=1$ 施加一假想的外力扭矩，固定端為簡支邊界，其餘為剪動邊界，

$$W_1 \Big|_{\xi=0} = 0, \quad -\left[\frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2} + \frac{v_1}{\phi_a^2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \eta^2} \right]_{\xi=0} = 0 \quad (7-83)$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = 0, \quad -\left[\frac{\partial^3 W_1}{\partial \xi^3} + \frac{v_1^*}{\phi_a^2} \frac{\partial^3 W_1}{\partial \xi \partial \eta^2} \right]_{\xi=1} = 0 \quad (7-84)$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0, \quad -\left[\frac{\partial^3 W_1}{\partial \eta^3} + v_1^* \phi_a^2 \frac{\partial^3 W_1}{\partial \eta \partial \xi^2} \right]_{\eta=0} = 0 \quad (7-85)$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \sin\left(\frac{2m-1}{2}\right) \pi \xi, \quad -\left[\frac{\partial^3 W_1}{\partial \eta^3} + v_1^* \phi_a^2 \frac{\partial^3 W_1}{\partial \eta \partial \xi^2} \right]_{\eta=1} = 0 \quad (7-86)$$

考慮(3-89)式與(3-90)式，利用 Levy 提出的級數函數，可將 W_1 假設為三角函數的形式

$$W_1(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(\eta) \sin\left(\frac{2m-1}{2}\right) \pi \xi \quad (7-87)$$



為了確保每個結構區塊得到的位移解皆滿足薄板統御方程式，將假設之 W_1 帶回(3-80)式，可得

$$\frac{\partial^4 Y_m(\eta)}{\partial \eta^4} - 2\phi_a^2 \left(\frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \frac{\partial^2 Y_m(\eta)}{\partial \eta^2} + \phi_a^2 \left\{ \left(\frac{2m-1}{2} \pi \right)^4 - \lambda^4 \right\} Y_m(\eta) = 0 \quad (7-88)$$

此為四階微分方程式，可知 $Y_m(\eta)$ 的解由四個待定係數與三角函數組成，計算

時根據 λ 與 $\left(\frac{2m-1}{2} \pi \right)$ 量值不同，解的形式會有所差異

$$\text{Case 1 : } \lambda > \frac{2m-1}{2} \pi$$

$$Y_m(\eta) = A_m \cosh(\beta_m \eta) + B_m \sinh(\beta_m \eta) + C_m \cos(\gamma_m \eta) + D_m \sin(\gamma_m \eta) \quad (7-89)$$

$$\text{其中 } \beta_m = \phi_a \left[\lambda^2 + \left(\frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \gamma_m = \phi_a \left[\lambda^2 - \left(\frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Case 2 : } \lambda < \frac{2m-1}{2} \pi$$

$$Y_m(\eta) = A_m \cosh(\beta_m \eta) + B_m \sinh(\beta_m \eta) + C_m \cosh(\gamma_m \eta) + D_m \sinh(\gamma_m \eta) \quad (7-90)$$

$$\text{其中 } \beta_m = \phi_a \left[\lambda^2 + \left(\frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \gamma_m = \phi_a \left[\left(\frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 - \lambda^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

將(3-95)式與(3-96)式代入(3-91)式與(3-92)式，可知其中有兩個代定係數為零，整理後可求解另外兩個代定係數的值

$$\text{Case 1 : } \lambda > \frac{2m-1}{2} \pi$$

$$Y_m(\eta) = E_m (\theta_{11m} \cosh \beta_m \eta + \theta_{13m} \cos \gamma_m \eta) \quad (7-91)$$

$$\text{其中 } \beta_m = \phi_a \left[\lambda^2 + \left(\frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \gamma_m = \phi_a \left[\lambda^2 - \left(\frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta_{11m} = \frac{1}{(\beta_m + \mathbb{Z}_m \gamma_m) \sinh \beta_m}, \theta_{13m} = \frac{-\mathbb{Z}_m}{(\beta_m + \mathbb{Z}_m \gamma_m) \sin \gamma_m}, \mathbb{Z}_m = \frac{\beta_m \left[\beta_m^2 - v_1^* \phi_a^2 \left(\frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \right]}{\gamma_m \left[\gamma_m^2 + v_1^* \phi_a^2 \left(\frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \right]}$$



$$\text{Case 2: } \lambda < \frac{2m-1}{2}\pi$$

$$Y_m(\eta) = E_m(\theta_{22} \cosh \beta_m \eta + \theta_{23} \cosh \gamma_m \eta) \quad (7-92)$$

$$\text{其中 } \beta_m = \phi_a \left[\lambda^2 + \left(\frac{2m-1}{2}\pi \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \gamma_m = \phi_a \left[\left(\frac{2m-1}{2}\pi \right)^2 - \lambda^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta_{22m} = \frac{1}{(\beta_m - \mathbb{Z}_m \gamma_m) \sinh \beta_m}, \theta_{23m} = \frac{-\mathbb{Z}_m}{(\beta_m - \mathbb{Z}_m \gamma_m) \sinh \gamma_m}, \mathbb{Z}_m = \frac{\beta_m \left[\beta_m^2 - v_1^* \phi_a^2 \left(\frac{2m-1}{2}\pi \right)^2 \right]}{\gamma_m \left[\gamma_m^2 - v_1^* \phi_a^2 \left(\frac{2m-1}{2}\pi \right)^2 \right]}$$

將上述 $Y_m(\eta)$ 的表示式代回(3-92)式，可得

$$\begin{aligned} W_1(\xi, \eta) &= \sum_{m=1,2,\dots}^M E_m (\theta_{11m} \cosh \beta_m \eta + \theta_{13m} \cos \gamma_m \eta) \sin \frac{2m-1}{2}\pi \xi \\ &+ \sum_{m=M+1,\dots}^{\infty} E_m (\theta_{22m} \cosh \beta_m \eta + \theta_{23m} \cosh \gamma_m \eta) \sin \frac{2m-1}{2}\pi \xi \end{aligned} \quad (7-93)$$

(2) 第二結構區塊 W_2 :

第二結構區塊之邊界條件如下，

$$\left. \frac{\partial W_2}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad - \left[\frac{\partial^3 W_2}{\partial \eta^3} + v_1^* \phi_a^2 \frac{\partial^3 W_2}{\partial \eta \partial \xi^2} \right]_{\eta=0} = 0 \quad (7-94)$$

$$\left. \frac{\partial W_2}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = 0, \quad - \left[\frac{\partial^3 W_2}{\partial \eta^3} + v_1^* \phi_a^2 \frac{\partial^3 W_2}{\partial \eta \partial \xi^2} \right]_{\eta=1} = 0 \quad (7-95)$$

$$W_2 \Big|_{\xi=0} = 0, \quad - \left[\frac{\partial^2 W_2}{\partial \xi^2} + \frac{v_1^*}{\phi_a^2} \frac{\partial^2 W_2}{\partial \eta^2} \right]_{\xi=0} = 0 \quad (7-96)$$

$$\left. \frac{\partial W_2}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = \sum_{n=0,1,2,\dots}^{\infty} E_n \cos n\pi \eta, \quad - \left[\frac{\partial^3 W_2}{\partial \xi^3} + \frac{v_1^*}{\phi_a^2} \frac{\partial^3 W_2}{\partial \xi \partial \eta^2} \right]_{\xi=1} = 0 \quad (7-97)$$

計算流程與第一結構區塊相同，只是級數函數是假設在 $\xi=1$ 上

根據邊界條件(3-100)式與(3-101)式，可將位移解 W_2 假設為

$$W_2(\xi, \eta) = \sum_{n=0,1,\dots}^{\infty} Y_n(\xi) \cos n\pi \eta \quad (7-98)$$



代入薄板統御方程式(3-80)式與邊界條件(3-102)式及(3-103)式，可得

Case 1 : $\lambda\phi_a > n\pi$

$$Y_n(\xi) = E_n \left(\theta_{11n}^+ \sinh \beta_n^+ \xi + \theta_{13n}^+ \sin \gamma_n^+ \xi \right) \quad (7-99)$$

其中 $\beta_n^+ = \frac{1}{\phi_a} \left[\lambda^2 \phi_a^2 + (n\pi)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$, $\gamma_n^+ = \frac{1}{\phi_a} \left[\lambda^2 \phi_a^2 - (n\pi)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$

$$\theta_{11n}^+ = \frac{1}{(\beta_n^+ + \mathbb{Z}_n^+ \gamma_n^+) \cosh \beta_n^+}, \theta_{13n}^+ = \frac{\mathbb{Z}_n^+}{(\beta_n^+ + \mathbb{Z}_n^+ \gamma_n^+) \cos \gamma_n^+}, \mathbb{Z}_n^+ = \frac{\beta_n^+ \left[\beta_n^{+2} - v_1^* (n\pi / \phi_a)^2 \right]}{\gamma_n^+ \left[\gamma_n^{+2} + v_1^* (n\pi / \phi_a)^2 \right]}$$

Case 2 : $\lambda\phi_a < n\pi$

$$Y_n(\xi) = E_n \left(\theta_{22}^+ \sinh \beta_n^+ \xi + \theta_{23}^+ \sinh \gamma_n^+ \xi \right) \quad (7-100)$$

其中 $\beta_n^+ = \frac{1}{\phi_a} \left[\lambda^2 \phi_a^2 + (n\pi)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$, $\gamma_n^+ = \frac{1}{\phi_a} \left[(n\pi)^2 - \lambda^2 \phi_a^2 \right]^{\frac{1}{2}}$

$$\theta_{22n}^+ = \frac{1}{(\beta_n^+ - \mathbb{Z}_n^+ \gamma_n^+) \cosh \beta_n^+}, \theta_{23n}^+ = \frac{-\mathbb{Z}_n^+}{(\beta_n^+ - \mathbb{Z}_n^+ \gamma_n^+) \cosh \gamma_n^+}, \mathbb{Z}_n^+ = \frac{\beta_n^+ \left[\beta_n^{+2} - v_1^* (n\pi / \phi_a)^2 \right]}{\gamma_n^+ \left[\gamma_n^{+2} - v_1^* (n\pi / \phi_a)^2 \right]}$$

將(3-105)式與(3-106)式代回(3-106)式，可得

$$W_2(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^N E_n \left(\theta_{11n}^+ \sinh \beta_n^+ \xi + \theta_{13n}^+ \sin \gamma_n^+ \xi \right) \cos n\pi \eta + \sum_{n=N+1}^{\infty} E_n \left(\theta_{22n}^+ \sinh \beta_n^+ \xi + \theta_{23n}^+ \sinh \gamma_n^+ \xi \right) \cos n\pi \eta \quad (7-101)$$

第三結構區塊與第四結構區塊之邊界條件分別和第一結構區塊與第二結構區塊類似，且位移假設相同，僅為了區別將假設之變數 m、n 替換為 p、q，最後將四個結構區塊的位移函數全部加總可得到完整的懸臂板位移函數



$$\begin{aligned}
W(\xi, \eta) = & \sum_{m=1,2,\dots}^M E_m (\theta_{11m} \cosh \beta_m \eta + \theta_{13m} \cos \gamma_m \eta) \sin \frac{2m-1}{2} \pi \xi \\
& + \sum_{m=M+1,\dots}^{\infty} E_m (\theta_{22m} \cosh \beta_m \eta + \theta_{23m} \cosh \gamma_m \eta) \sin \frac{2m-1}{2} \pi \xi \\
& + \sum_{n=1,2,\dots}^N E_n (\theta_{11n} \sinh \beta_n \xi + \theta_{13n} \sin \gamma_n \xi) \cos n \pi \eta \\
& + \sum_{n=N+1,\dots}^{\infty} E_n (\theta_{22n} \sinh \beta_n \xi + \theta_{23n} \sinh \gamma_n \xi) \cos n \pi \eta \\
& + \sum_{p=1,2,\dots}^P F_p [\psi_{11p} \cosh \beta_p (1-\eta) + \psi_{13p} \cos \gamma_p (1-\eta)] \sin \frac{2p-1}{2} \pi \xi \\
& + \sum_{p=P+1,\dots}^{\infty} F_p [\psi_{22p} \cosh \beta_p (1-\eta) + \psi_{23p} \cosh \gamma_p (1-\eta)] \sin \frac{2p-1}{2} \pi \xi \\
& + \sum_{q=1,2,\dots}^Q F_q [\psi_{11q} \cosh \beta_q (1-\xi) + \psi_{13q} \cos \gamma_q (1-\xi)] \cos q \pi \eta \quad (7-102) \\
& + \sum_{q=Q+1,\dots}^{\infty} F_q [\psi_{22q} \cosh \beta_q (1-\xi) + \psi_{23q} \cosh \gamma_q (1-\xi)] \cos q \pi \eta
\end{aligned}$$

$$\text{其中 } \beta_p = \phi_a \left[\lambda^2 + \left(\frac{2p-1}{2} \pi \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \gamma_p = \phi_a \left[\left(\frac{2p-1}{2} \pi \right)^2 - \lambda^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\psi_{22p} = \frac{-1}{(\beta_p - \mathbb{Z}_p \gamma_p) \sinh \beta_p}, \psi_{23p} = \frac{\mathbb{Z}_p}{(\beta_p - \mathbb{Z}_p \gamma_p) \sinh \gamma_p}, \mathbb{Z}_p = \frac{\beta_p \left[\beta_p^2 - v_1^* \phi_a^2 \left(\frac{2p-1}{2} \pi \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\gamma_p \left[\gamma_p^2 - v_1^* \phi_a^2 \left(\frac{2p-1}{2} \pi \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\beta_q = \frac{1}{\phi_a} \left[\lambda^2 \phi_a^2 + (q \pi)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \gamma_q = \frac{1}{\phi_a} \left[(q \pi)^2 - \lambda^2 \phi_a^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\psi_{22q} = \frac{-1}{\beta_q \sinh \beta_q - \gamma_q \tanh \gamma_q \cosh \beta_q}, \psi_{23q} = \frac{\cosh \beta_q}{\cosh \gamma_q (\beta_q \sinh \beta_q - \gamma_q \tanh \gamma_q \cosh \beta_q)}$$

最後將四個結構區塊的位移函數全部加總可得到完整的懸臂板位移函數。

考慮懸臂板上四個邊界，總共有八個邊界條件，其中四個邊界條件在經過四塊結構區塊疊加後會自動滿足，剩下的四個邊界條件如下

$$-\left[\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + v_1 \phi_a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right]_{\eta=1} = 0 \quad (7-103)$$



$$-\left[\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{v_1}{\phi_a^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right]_{\xi=1} = 0 \quad (7-104)$$

$$-\left[\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + v_1 \phi_a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right]_{\eta=0} = 0 \quad (7-105)$$

$$-\left. \frac{\partial W}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0 \quad (7-106)$$

把(3-108)式代入到四個邊界，(3-109)式至(3-112)式，代入的邊在 $\xi=0,1$ 則乘上 $\cos n\pi\eta$ 並積分；代入的邊在 $\eta=0,1$ 則乘上 $\sin \frac{2m-1}{2}\pi\xi$ 並積分；利用正交函數的特性，將公式整理成特徵矩陣的形式，並取 $K=3$ 為例，如圖 7-10 所示，在特徵矩陣中，每列代表邊界條件代入時的值，每欄代表結構塊之位移代入後的結果，如圖 7-11 所示，其中 $A(1,1)$ 、 $A(1,2)$ 、 $A(1,3)$ 、 $A(1,4)$ 分別式四個結構區塊位移代入邊界條件(3-109)式中，接著代入結果對 $\sin \left(\frac{2m-1}{2}\pi\xi \right)$ 函數進行級數展開，取前 K 項即可擴展為 $K \times K$ 的矩陣元素；同理 $A(2,1)$ 、 $A(2,2)$ 、 $A(2,3)$ 、 $A(2,4)$ 是代入邊界條件(3-110)式，並對 $\cos n\pi\eta$ 函數進行級數展開，利用同樣的方法代入邊界條件(3-113)式與(3-114)式，即可得到 $A(3,1)$ 至 $A(3,4)$ 與 $A(4,1)$ 至 $A(4,4)$ ，由於第三與第四結構區塊的級數數量，和第一與第二結構區塊相對應，因此可將第三結構區塊的級數 P 及第四結構區塊的級數 Q 替換成第一結構區塊的 M 與第二結構區塊的 N ，最後整理完可得

$$[A][E] = 0 \quad (7-107)$$

其中 $[A]$ 為特徵矩陣， $[E]$ 為位移函數中的代定係數。

理論求解的方式藉由計算特徵值，找出相對應 $\det(A) = 0$ 時的特徵值 λ ，此即為懸臂板之共振頻率，先假設有一組其元素趨近於零的向量，則可利用反矩陣求出

特徵向量 $[E]$ ，再代入公式可求解各結構區塊對懸臂板模態振形的貢獻，進而得到懸臂板在不同模態下的全場位移分布。

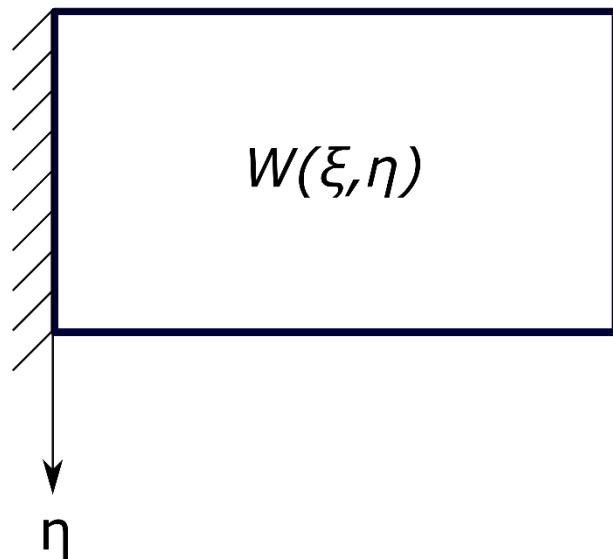


圖 7-8 懸臂板示意圖

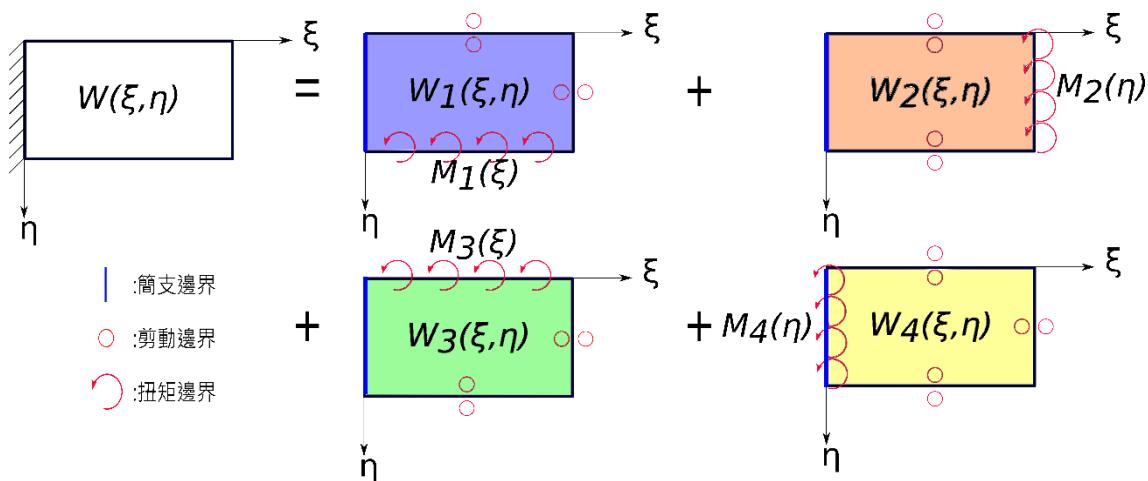


圖 7-9 懸臂板與四個結構區塊疊加示意圖

E_m	$E'n$	Fp	$F'q$
- 0 0	- - -	- 0 0	- - -
0 - 0	- - -	0 - 0	- - -
0 0 -	- - -	0 0 -	- - -
-----	-----	-----	-----
-----	- 0 0	- - -	- 0 0
-----	0 - 0	- - -	0 - 0
-----	0 0 -	- - -	0 0 -
-----	-----	-----	-----
E_m	$E'n$	Fp	$F'q$
- 0 0	- - -	- 0 0	- - -
0 - 0	- - -	0 - 0	- - -
0 0 -	- - -	0 0 -	- - -
-----	-----	-----	-----
-----	- 0 0	- - -	- 0 0
-----	0 - 0	- - -	0 - 0
-----	0 0 -	- - -	0 0 -

圖 7-10 懸臂板之特徵矩陣

$A(1,1)$	$A(1,2)$	$A(1,3)$	$A(1,4)$
$A(2,1)$	$A(2,2)$	$A(2,3)$	$A(2,4)$
$A(3,1)$	$A(3,2)$	$A(3,3)$	$A(3,4)$
$A(4,1)$	$A(4,2)$	$A(4,3)$	$A(4,4)$

圖 7-11 特徵矩陣示意圖



C. 平板振動量測

為驗證疊加法理論結果的準確性，本研究利用實驗量測壓電平板雙晶片的結果，並與疊加法及商用有限元素軟體的結果進行比較。

C.1 量測結果及結果比較

為驗證疊加法結果的準確性，本研究將結果與商用有限元素軟體 Ansys 以及 LDV 量測結果進行比較，結果如表 7-3 所示，從結果可看出對於第一振動模態相當準確，而這個模態也是後續做壓電能量擷取系統最主要的模態，第二與第三模態在理論與有限元素模擬的結果相當接近，實驗的誤差最高約為 6%，驗證平板疊加法理論算相當準確。

mode		Theory	Ansys	LDV
1	位移			
	頻率 (Hz)	86.12	86.94	87.1
	相差		0.95%	1.13%
2	位移			
	頻率 (Hz)	315.61	314.83	334.4
	相差		0.25%	5.95%
3	位移			
	頻率 (Hz)	535.1	539.42	534.6
	相差		0.81%	0.1%

表 7-3 懸臂板位移模態之理論與 FEM、LDV 比較



D. 壓電平板之機電耦合效應

D.1 壓電平板受力下位移的暫態響應

依據廖展誼[9]提到平板受力的暫態響應，在考慮壓電陶瓷的橫向等向性，以及黃銅層的等向性，可寫成

$$D_{11} \left(\frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_2^4} \right) + \rho^{eq} h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = p(x_1, x_2, t) \quad (7-108)$$

其中 D_{11} 為壓電平板之等效彎矩剛性， p 為平板在面外方向的受力，假設壓電平板在一開始為靜止狀態，亦即

$$u_3|_{t=0} = 0 \quad (7-109)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad (7-110)$$

使用模態展開法將平板的動態響應，假設為平板模態的線性疊加，因此可將壓電平板的面外位移進行變數分離

$$u_3(x_1, x_2, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) W_i(x_1, x_2) \quad (7-111)$$

其中 $W_i(x_1, x_2)$ 為第 i 個壓電懸臂板的模態， $q_i(t)$ 為第 i 個模態對應的時間函數，待入(4-1)式並利用模態間的正交性，可得

$$\frac{\partial^2 q_i}{\partial t^2} + \omega_i^2 q_i = \frac{Q_i}{\rho^{eq} h} \quad (7-112)$$

其中 $Q_i(t)$ 為

$$Q_i(t) = \frac{\int_0^a \int_0^b p(x_1, x_2, t) W_i dx_2 dx_1}{\int_0^a \int_0^b W_i^2 dx_2 dx_1} \quad (7-113)$$

在(4-6)式分子的積分項中， $p(x_1, x_2, t)$ 是連續空間下的外力，然而在 IB-LBM 中固體格點是以離散的形式存在，參考廖展誼[9]使用模態展開法分析集中力對平板造

成的暫態位移，可將外力 $p(x_1, x_2, t)$ 表示成



$$p(x_1, x_2, t) = \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N F(x_{1p}, x_{2q}, t) \delta(x_1 - x_{1p}) \delta(x_2 - x_{2q}) \quad (7-114)$$

其中 $F(x_{1p}, x_{2q}, t)$ 是一代表平板的固體格點在不同時間受到的外力， $\delta(x)$ 是 Kronecker Delta Function，其定義為

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \neq 0 \\ 1, & \text{if } x = 0 \end{cases} \quad (7-115)$$

將(4-5)式代入初始條件，(4-2)式與(4-3)式，並待入(4-7)式整理後可得

$$u_3(x_1, x_2, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \frac{W_i(x_1, x_2) W_i(x_{1p}, x_{2q})}{\rho^{eq} h \omega_i} \left[\frac{\int_0^t F(x_{1p}, x_{2q}, \tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau}{\int_0^a \int_0^b W_i^2 dx_2 dx_1} \right] \quad (7-116)$$

D.2 壓電平板開路下的暫態電壓響應

假設壓電平板其面內位移為零，可得 $u_{1,1} = u_{2,2} = 0$ ，代入(3-34)式與(3-35)式可得

$$D_3^{(u)} = -\frac{1}{2} \bar{e}_{31}^{(u)} (h_p + h_c) (u_{3,11} + u_{3,22}) - \frac{\bar{\epsilon}_{33}^S}{h_p} V_p^{(u)} \quad (7-117)$$

$$D_3^{(l)} = \frac{1}{2} \bar{e}_{31}^{(l)} (h_p + h_c) (u_{3,11} + u_{3,22}) - \frac{\bar{\epsilon}_{33}^S}{h_p} V_p^{(l)} \quad (7-118)$$

將電位移面積分可得單層壓電陶瓷的電荷，對時間微分可得電流

$$I^{(u)} = -\frac{\bar{e}_{31}^{(u)}}{2} (h_c + h_p) \frac{\partial}{\partial t} \iint_0^a \iint_0^b (u_{3,11} + u_{3,22}) dx_2 dx_1 - \frac{ab \bar{\epsilon}_{33}^S}{h_p} \frac{\partial V_{avg}^{(u)}}{\partial t} \quad (7-119)$$

$$I^{(l)} = \frac{\bar{e}_{31}^{(l)}}{2} (h_c + h_p) \frac{\partial}{\partial t} \iint_0^a \iint_0^b (u_{3,11} + u_{3,22}) dx_2 dx_1 - \frac{ab \bar{\epsilon}_{33}^S}{h_p} \frac{\partial V_{avg}^{(l)}}{\partial t} \quad (7-120)$$

其中 $V_{avg}^{(u)}$ 與 $V_{avg}^{(l)}$ 分別為上層壓電陶瓷與下層壓電陶瓷的等效電壓

$$V_{avg}^{(u)} = \frac{1}{ab} \iint_0^a \iint_0^b V_p^{(u)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (7-121)$$



(7-122)

$$V_{avg}^{(l)} = \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b V_p^{(l)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

先以上層壓電陶瓷做舉例，(4-12)式可簡化為

$$\frac{V}{R} = I_{load} = I_p^{(u)} - C_p \frac{\partial V^{(u)}}{\partial t} \quad (7-123)$$

其中

$$C_p = \frac{ab\bar{\epsilon}_{33}^s}{h_p} \quad (7-124)$$

代表壓電陶瓷層的寄生電容

$$I_p^{(u)}(t) = -\frac{\bar{e}_{31}^{(u)}}{2} (h_c + h_p) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^a \int_0^b (u_{3,11} + u_{3,22}) dx_2 dx_1 \quad (7-125)$$

代表壓電陶瓷層因振動而產生的電容， I_{load} 代表流過負載的電流， V 則為負載的電

壓， R 為負載的電阻，等效電路圖如圖 7-12 所示，(4-18)式中 $\int_0^a \int_0^b (u_{3,11} + u_{3,22}) dx_2 dx_1$

可透過整理(4-19)式後求得

$$\int_0^a \int_0^b (u_{3,11} + u_{3,22}) dx_2 dx_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \left\{ \frac{\int_0^a \int_0^b [(W_{i,11} + W_{i,22}) dx_2 dx_1] W_i(x_{1p}, x_{2q})}{\rho^{eq} h \omega_i} \right. \\ \left. \times \left[\frac{\int_0^t F(x_{1p}, x_{2q}, \tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau}{\int_0^a \int_0^b W_i^2 dx_2 dx_1} \right] \right\} \quad (7-126)$$

本研究使用的壓電陶瓷雙晶片為以串聯電極連接之串聯型壓電雙晶片 SBS，考慮

到其上下層極化方向相反，且負載連接上下層的壓電陶瓷，故 $\bar{e}_{31}^{(u)} = -\bar{e}_{31}^{(l)}$ ，

$V^{(serial)} = V_p^{(u)} + V_p^{(l)}$ ，代入(4-12)式、(4-13)式、(4-16)式可得

$$I_{load}^{(serial)} = \frac{I^{(u)} + I^{(l)}}{2} = I_p - \frac{C_p}{2} \frac{\partial V^{(serial)}}{\partial t} \quad (7-127)$$



$$\text{其中 } I_p(t) = -\frac{\bar{e}_{31}^{(u)}}{2} (h_c + h_p) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^a \int_0^b (u_{3,11} + u_{3,22}) dx_2 dx_1$$

由於在開路假設下，流入負載的電流為零，亦即(4-20)等號右邊為零，可求得開路下之電壓響應為

$$V_{open}^{(serial)} = \frac{2\bar{e}_{31}^{(u)}}{C_p} (h_c + h_p) \int_0^a \int_0^b (u_{3,11} + u_{3,22}) dx_2 dx_1 \quad (7-128)$$

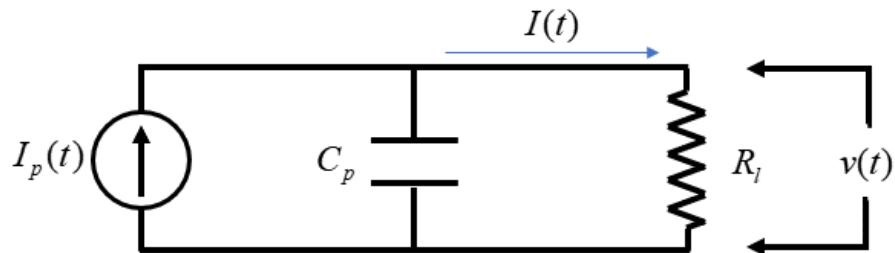


圖 7-12 壓電平板之等效電路圖