



國立臺灣大學工學院應用力學研究所

碩士論文

Institute of Applied Mechanics

College of Engineering

National Taiwan University

Master's Thesis

倒車入庫之最優路徑規劃及控制演算法

Optimal Path Planning and Control Algorithm for  
Reverse Parking

黃力法

Li-Fa Huang

指導教授：王立昇 博士

Advisor: Li-Sheng Wang, Ph.D.

中華民國 113 年 7 月

July, 2024

# 國立臺灣大學碩士學位論文

## 口試委員會審定書

MASTER'S THESIS ACCEPTANCE CERTIFICATE  
NATIONAL TAIWAN UNIVERSITY

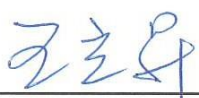
倒車入庫之最優路徑規劃與控制演算法

### Optimal Path Planning and Control Algorithm for Reverse Parking

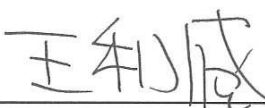
本論文係黃力法（R11543074）在國立臺灣大學應用力學研究所完成之碩士學位論文，於民國 113 年 07 月 29 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明。

The undersigned, appointed by the Institute of Applied Mechanics on 29th July 2024 have examined a Master's Thesis entitled above presented by HUANG, LI-FA (student ID: R11543074) candidate and hereby certify that it is worthy of acceptance.

口試委員 Oral examination committee:

王立昇  (指導教授 Advisor)

張帆人 

王和盛 

所長 Director: 陳國慶 

## 致謝

謝謝王立昇教授悉心指導，從課堂上到論文，讓我了解以嚴謹的態度做研究，從生活的經驗中去發現問題，以數學的角度去解決問題。也從老師的談吐中發現，生活中的小細節，其實都蘊藏著物理的原理，使我了解細心觀察、保持好奇能夠讓人不斷學習。

謝謝口試委員：張帆人教授、王和盛教授提供我許多論文上的修改建議，讓這本論文能夠更加精闢完整。

另外，謝謝王威棣及 Jeff 學長提供研究與職涯上的建議，推薦好吃的拉麵與飲料；感謝實驗室夥伴乃綸、承霖、秉諭、祐誠，能夠和你們一起修課、互相討論、聊天、打球、吃飯，讓我的碩士生活更加色彩。也謝謝乃綸，一路以來一起互相勉勵，挑戰極限，讓我的研究更加順遂。謝謝高中、國中、大學的好朋友們一路陪伴，也特別感謝信廷提供車子讓我研究自動停車技術。

感謝我的女朋友及家人們無條件的支持，讓我無後顧之憂地完成課業，在這茫茫的大海中不斷探索，謝謝你們讓我疲憊時總能滿血回歸，肚子餓時總能有碗熱湯。你們是我生命中的太陽，讓我始終能夠面向著陽光，背離陰影。這份感恩的心，讓我對未來充滿願景，並以此努力。

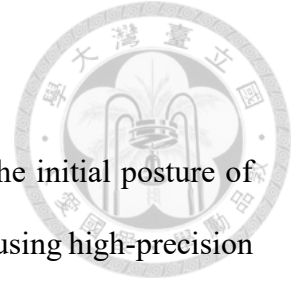
最後，期許這兩年的養分，使我更加茁壯，成為更好的人，在未來的道路上，我會懷抱著感恩的心在職場上繼續努力，回饋給我的家人及女朋友，還有支持過我的人。這本論文站在前人的肩膀上完成新的發想，也希望未來這本論文能夠成為其他人的墊腳石。

## 摘要

目前自動停車結果的好壞，仰賴載具起始姿態與複雜的即時路徑規劃，並結合高精度感測器進行碰撞檢測。本研究以微分平坦理論進行基於阿克曼轉向機構之倒車入庫最優路徑規劃及控制。微分平坦算法具有低運算複雜度，可以進行即時路徑規劃同時設計出系統之控制。路徑規劃中，根據當前姿態決定姿態調整策略及專家停車策略，使得汽車可以根據起始姿態與車格之位置決定合適的停車策略。另外，停車前，採用路徑預規劃進行碰撞檢測，使得倒車入庫更加安全可靠。本研究以阿克曼轉向理論為基礎，設計出符合阿克曼轉向約束條件之四輪載具控制策略，並透過不斷迭代求解全局最優之控制策略。

**關鍵字：** 停車策略、路徑規劃、微分平坦理論、阿克曼轉向機構、四輪載具

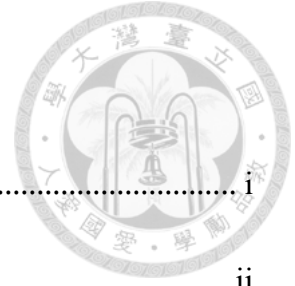
## ABSTRACT



Currently, the effectiveness of automatic parking depends on the initial posture of the vehicle, complex real-time path planning, and collision detection using high-precision sensors. This research employs differential flatness theory for optimal path planning and control of reverse parking based on the Ackermann steering mechanism. The differential flatness algorithm has low computational complexity, allowing for real-time path planning and simultaneous control system design. During path planning, the posture adjustment strategy and expert parking strategy are determined based on the current posture, enabling the car to decide the appropriate parking strategy based on the initial posture and the position of the parking space. Additionally, before parking, path pre-planning is used for collision detection, making reverse parking safer and more reliable. This study is based on Ackermann steering theory, designing a four-wheel vehicle control strategy that meets the Ackermann steering constraints, and iteratively solving for the globally optimal control strategy.

**Keywords:** Parking strategy, Path planning, Differential flatness theory, Ackermann steering mechanism, Four-wheel vehicle.

# 目次



|                                  |          |
|----------------------------------|----------|
| 口試委員會審定書 .....                   | i        |
| 致謝 .....                         | ii       |
| 摘要 .....                         | iii      |
| Abstract .....                   | iv       |
| 目次 .....                         | v        |
| 圖次 .....                         | viii     |
| 表次 .....                         | x        |
| <b>第一章 緒論 .....</b>              | <b>1</b> |
| 1.1 前言與研究動機 .....                | 1        |
| 1.2 文獻回顧 .....                   | 2        |
| 1.2.1 路徑規劃 .....                 | 2        |
| 1.2.2 滿足非完整約束之路徑軌跡生成 .....       | 2        |
| 1.3 研究內容與成果 .....                | 3        |
| 1.4 論文架構 .....                   | 4        |
| <b>第二章 杜賓車模型載具之最佳路徑規劃法 .....</b> | <b>5</b> |
| 2.1 杜賓汽車 .....                   | 5        |
| 2.2 杜賓控制切換點推導 .....              | 6        |
| 2.3 最佳控制原理 .....                 | 10       |
| 2.3.1 最短時間最佳化控制理論 .....          | 12       |
| 2.4 Reed Shepp Curve .....       | 14       |
| 2.5 最小能量最佳化控制理論 .....            | 15       |



|                                 |                           |           |
|---------------------------------|---------------------------|-----------|
| 2.6                             | 數值方法 .....                | 17        |
| 2.7                             | 結果比較 .....                | 18        |
| <b>第三章 微分平坦架構 .....</b>         |                           | <b>20</b> |
| 3.1                             | 微分平坦 .....                | 20        |
| 3.2                             | 平面剛體 .....                | 21        |
| 3.2.1                           | 阿克曼汽車微分平坦存在性證明 .....      | 22        |
| 3.3                             | 微分平坦輸出求解 .....            | 25        |
| 3.3.1                           | 最佳化軌跡及控制 .....            | 28        |
| <b>第四章 自動停車系統最優路徑規劃算法 .....</b> |                           | <b>31</b> |
| 4.1                             | 最佳化路徑時間 .....             | 31        |
| 4.2                             | 碰撞檢測 .....                | 34        |
| 4.3                             | 專家停車策略 .....              | 35        |
| 4.4                             | 基於微分平坦之停車路徑規劃演算法流程圖 ..... | 37        |
| <b>第五章 實驗設備及模擬與實驗結果 .....</b>   |                           | <b>38</b> |
| 5.1                             | 硬體設備 .....                | 38        |
| 5.1.1                           | 無人載具 .....                | 38        |
| 5.1.2                           | 網路攝影機 .....               | 40        |
| 5.1.3                           | 工作站設備 .....               | 41        |
| 5.2                             | 實驗軟體 .....                | 42        |
| 5.3                             | 系統整合 .....                | 42        |
| 5.4                             | 控制系統 .....                | 43        |
| 5.4.1                           | 模糊控制 .....                | 43        |
| 5.4.2                           | 規則庫設計 .....               | 44        |
| 5.5                             | 模擬結果 .....                | 45        |

|             |                             |           |
|-------------|-----------------------------|-----------|
| 5.5.1       | 一次到位停車策略-與車位距離適當 .....      | 45        |
| 5.5.2       | 一次到位停車策略-與車位橫向距離過近 .....    | 47        |
| 5.5.3       | 多段式姿態調整停車策略-載具過大 .....      | 48        |
| 5.5.4       | 多段式姿態調整停車策略-與車位縱向距離過近 ..... | 49        |
| 5.5.5       | 直直停入 .....                  | 50        |
| 5.5.6       | 直直停入-縱向距離過近 .....           | 51        |
| 5.5.7       | 模擬結果與討論 .....               | 52        |
| 5.6         | 實驗結果 .....                  | 52        |
| 5.6.1       | 一次到位停車策略-與車位距離適當 .....      | 52        |
| 5.6.2       | 一次到位停車策略-與車位橫向距離過近 .....    | 54        |
| 5.6.3       | 多段式姿態調整停車策略-與車位縱向距離過近 ..... | 55        |
| 5.6.4       | 自選車位多段式姿態調整停車策略 .....       | 56        |
| <b>第六章</b>  | <b>結論與未來展望 .....</b>        | <b>57</b> |
| <b>參考文獻</b> | <b>.....</b>                | <b>58</b> |

## 圖次

|                                          |    |
|------------------------------------------|----|
| 圖 2-1 理想化簡單汽車模型示意圖 .....                 | 5  |
| 圖 2-2 杜賓 CSC 類型示意圖 .....                 | 6  |
| 圖 2-3 杜賓 CCC 類型示意圖 .....                 | 6  |
| 圖 2-4 杜賓控制切換點示意圖 .....                   | 7  |
| 圖 2-5 杜賓 CSC 類型起點與終點示意圖 .....            | 7  |
| 圖 2-6 杜賓 CSC 類型進算切換點知法向量示意圖 .....        | 8  |
| 圖 2-7 杜賓 CCC 類型起點與終點示意圖 .....            | 9  |
| 圖 2-8 杜賓 CCC 類型控制切換點示意圖 .....            | 10 |
| 圖 2-9 遍歷所有杜賓曲線示意圖 .....                  | 13 |
| 圖 2-10 Reed Shepp Curve 與杜賓曲線比較示意圖 ..... | 14 |
| 圖 2-11 Reed Shepp Curve 與杜賓曲線比較示意圖 ..... | 14 |
| 圖 2-12 簡單船模型示意圖 .....                    | 15 |
| 圖 2-13 最小能量與最小時間控制比較圖 .....              | 18 |
| 圖 2-14 最小能量與最小時間控制比較圖 .....              | 18 |
| 圖 2-15 最小能量與最小時間控制比較圖 .....              | 19 |
| 圖 2-16 最小能量與最小時間控制比較圖 .....              | 19 |
| 圖 3-1 微分平坦概念示意圖 .....                    | 20 |
| 圖 3-2 平面剛體示意圖 .....                      | 21 |
| 圖 3-3 阿克曼汽車模型示意圖 .....                   | 23 |
| 圖 4-1 不同路徑時間之路徑軌跡示意圖 .....               | 31 |
| 圖 4-2 不同路徑時間之路徑軌跡示意圖 .....               | 32 |
| 圖 4-3 兩離散路徑點之位置姿態示意圖 .....               | 32 |
| 圖 4-4 軌跡生成範圍示意圖 .....                    | 33 |
| 圖 4-5 載具四點碰撞檢測示意圖 .....                  | 34 |
| 圖 4-6 載具四點預路徑規劃軌跡示意圖 .....               | 35 |
| 圖 4-7 專家停車策略示意圖 .....                    | 35 |
| 圖 4-8 專家停車策略示意圖 .....                    | 36 |
| 圖 4-9 演算法流程圖 .....                       | 37 |
| 圖 5-1 無人載具示意圖 .....                      | 38 |
| 圖 5-2 標定版示意圖 .....                       | 38 |
| 圖 5-3 無人載具左轉回歸曲線 .....                   | 39 |

|                                                       |    |
|-------------------------------------------------------|----|
| 圖 5-4 無人載具右轉回歸曲線.....                                 | 39 |
| 圖 5-5 AXIS M3006V 網路攝影機 .....                         | 40 |
| 圖 5-6 ASUS ExpertBook B1500CBA_B1508CBA_T 筆記型電腦 ..... | 41 |
| 圖 5-7 系統整合流程圖 .....                                   | 42 |
| 圖 5-8 模糊控制器架構圖 .....                                  | 43 |
| 圖 5-9 距離誤差函數.....                                     | 44 |
| 圖 5-10 角度誤差函數.....                                    | 44 |
| 圖 5-11 隸屬函數輸出 .....                                   | 44 |
| 圖 5-12 一次到位停車策略-與車位距離適當模擬.....                        | 46 |
| 圖 5-13 狀態及控制輸出圖 .....                                 | 46 |
| 圖 5-14 一次到位停車策略-與車位橫向距離過近模擬.....                      | 47 |
| 圖 5-15 狀態及控制輸出圖 .....                                 | 47 |
| 圖 5-16 多段式姿態調整停車策略-載具過大模擬.....                        | 48 |
| 圖 5-17 狀態及控制輸出圖 .....                                 | 48 |
| 圖 5-18 多段式姿態調整停車策略-與車位橫向距離過近模擬.....                   | 49 |
| 圖 5-19 狀態及控制輸出圖 .....                                 | 49 |
| 圖 5-20 直直停入模擬.....                                    | 50 |
| 圖 5-21 狀態及控制輸出圖 .....                                 | 50 |
| 圖 5-22 直直停入-縱向距離過近模擬 .....                            | 51 |
| 圖 5-23 狀態及控制輸出圖 .....                                 | 51 |
| 圖 5-24 一次到位停車策略實驗.....                                | 53 |
| 圖 5-25 一次到位停車策略實驗.....                                | 54 |
| 圖 5-26 多段式停車策略實驗.....                                 | 55 |
| 圖 5-27 自選車位多段式停車策略實驗.....                             | 56 |

## 表次

|                                                    |    |
|----------------------------------------------------|----|
| 表 3-1 各種平面剛體之微分平坦存在性 .....                         | 24 |
| 表 5-1 AXIS M3006V 網路攝影機規格 .....                    | 40 |
| 表 5-2 ASUS ExpertBook B1500CBA_B1508CBA_T 規格 ..... | 41 |
| 表 5-3 實驗軟體 .....                                   | 42 |
| 表 5-4 模糊控制器規則庫 .....                               | 45 |



# 第一章 緒論

## 1.1 前言與研究動機

自汽車於民間普及以後，停車問題一直是新手駕駛所需面臨的問題，甚至是開了許久的駕駛，也無法保證能一次停好。事實上，早在 20 世紀中，人們就開始思考如何讓停車變的簡單。2003 年的“TOYOTA Prius”為第一個導入半自動停車技術的量產車輛，當選定車格後，系統利用電動輔助轉向系統(Electric Power Steering)進行轉向，而駕駛負責操控油門。然而當時雷達技術並不精準，且僅提供轉向輔助，因此整體實用性並不高。

中華民國經濟部所屬之非營利研究機構車輛中心(ARTC)在 2010 年開始發展全自動停車，隨著科技發展，至今已有不少高階車款具有全自動停車功能。然而，現今自動停車技術面臨兩個重要研究問題。首先，根據特斯拉(Tesla)及賓士(Mercedes Benz)的自動停車技術說明，其自動停車功能性能好壞取決於汽車當下與車格的位置，且感測器的誤差會影響停車的穩定，因此研究一個靈活且安全的路徑規劃系統是一個重要的課題。其次，當前具有自動停車功能之汽車價格昂貴，仰賴於高性能的運算設備及感測控制器，因此提出一個低運算複雜度的演算法有助於普及大眾汽車。

本論文旨在探討自動停車的路徑規劃與控制方法，利用微分平坦 (Differential Flatness) 理論進行路徑規劃及控制設計，使車輛能在更靈活的初始狀態下順利停車位。通過預先路徑規劃，調整車輛姿態，在軌跡生成後利用軌跡追蹤控制系統完成停車任務。



## 1.2 文獻回顧

### 1.2.1 路徑規劃

在自動停車導航問題中，第一步是進行載具路徑規劃，生成一條從起點至終點之無碰撞路徑。常見之路徑演算法大致分兩種，第一種為地圖搜索最短路徑演算法，包括 Dijkstra Algorithm[1]、A\*[2]、D\*[3]演算法等。將地圖網格化後，搜索最短路徑演算法利用深度優先、廣度優先或啟發式搜索策略在網格間尋找最短路徑。第二種為基於隨機採樣的路徑規劃演算法，包括 RRT(Rapid Random Tree)[4]和 PRM(Probabilistic Roadmap Method)[5]等。RRT 演算法通過隨機採樣和增量構建樹結構來探索可行路徑，保證局部最優性。PRM 演算法則通過隨機採樣點並連接形成圖結構，以尋找可行路徑。

### 1.2.2 滿足非完整約束之路徑軌跡生成

本論文中採用的無人載具為阿克曼轉向模型(Ackerman Steering Model)[6]，該模型限制載具轉向幾何，使前輪內外轉向輪在轉彎時能夠指向同一個旋轉中心。由於阿克曼無人載具之輪子滾動而不打滑且不能任意轉動，故載具系統受有非完整約束(Nonholonomic constraint)之限制，但前述之路徑規劃法若未考慮載具性能，則設計出的軌跡不滿足非完整約束而無法實現，因此本研究採用了多種軌跡生成方法使其符合非完整約束。Lester Dubins 於 1957 年提出 Dubins car 模型[7][8]，這種方法假設車輛受限於最小迴轉半徑限制，在最小迴轉半徑下可生成最短的前行無倒車路徑。James A. Reeds 和 Lawrence A. Shepp 於 1990 年提出 Reeds-Shepp Curve [9]，該方法建立在 Dubins car 模型的基礎上，允許車輛在前進與倒退間轉換，比 Dubins car 模型更加靈活，但可能需要更多的耗能。射擊法 (Shooting Method) [10] 是另一種生成軌跡的方法，這個方法利用最小能量控制理論，將軌跡生成問題轉化為邊界值問題進行求解，但對於複雜的阿克曼系統卻有時找不到解。Michel Fliess 和 Pierre Rouchon 等人於 1992 年提出微分平坦 (Differential Flatness) 方法[11]

[12][13]，該方法利用系統的平坦輸出，將非線性系統的最佳化問題轉化為簡單的矩陣問題進行處理。Richard M. Murray [14]等人證明了阿克曼轉向模型系統具備微分平坦輸出的特性，故本研究採用微分平系統之理論進行路徑規劃與控制，完成自動倒車系統之設計。

### 1.3 研究內容與成果

本研究以平面剛體之微分平坦輸出理論與阿克曼轉向機構為基礎，發展一套能根據當前載具姿態與車格之相對位置進而調整停車模式的演算法。此外，傳統的碰撞檢測將長形載具包於一圓形區域中，喪失了長形載具在幾何上的彈性，本論文所設計之演算法則透過規劃長形載具四角之路徑藉以判斷行進中是否發生碰撞，擴大了路徑選擇的範圍，讓四輪長形載具能夠停入狹長空間內。

本研究在實驗場域中利用天花板上之魚眼鏡頭進行載具及障礙物標定，透過坎尼邊緣檢測(Canny Edge Detection)及霍夫轉換(Hough Transform)之影像處理理論取得載具、障礙物、起點、終點的空間資訊，將本論文發展之演算法與實驗室載具硬體控制設備結合，完成停車之任務。

本研究主要貢獻如下：

1. 透過離散路徑點之幾何特性找出最佳路徑耗時，避免使用複雜的數值方法。
2. 在路徑規劃階段中引入專家之停車策略[15]。
3. 透過預規劃選擇一次或多次停入之停車策略，提升停車安全性。



## 1.4 論文架構

論文涵蓋六個章節，本章節為緒論，論文內容將以下列順序依序介紹。

第二章介紹 Dubins car、Reeds-Shepp curve 之理論及推導，及如何引入載具模型，透過旁特里亞金最小值原理(Pontryagin's minimum principle) [16]加上射擊法生成非完整約束之路徑軌跡。

第三章介紹微分平坦理論，包括證明阿克曼汽車模型之微分平坦的存在性，及解算微分平坦輸出，並引入最佳化控制生成非完整約束之路徑軌跡及控制參數。

第四章介紹最優路徑時長算法，介紹專家提供之停車策略，並說明路徑預規劃中之碰撞檢測策略，以及如何根據預規劃結果選擇適當的停車策略，最後介紹整體演算法流程圖。

第五章介紹實驗設備及其硬體設備規格及感測器原理，並說明整體實驗流程架構。最後，討論本研究所使用提出自動停車之路徑規劃與控制演算法模擬與實驗結果。

第六章為結論與未來展望。

## 第二章 杜賓車模型載具之最佳路徑規劃法

本章介紹杜賓汽車(Dubin Car)及 Reed Shepp Curve 基本原理，並透過旁特里亞金最小值原理(Pontryagin's minimum principle)證明杜賓曲線在固定最小轉彎半徑條件下具有最短路徑。最後，介紹射擊法(Shooting method)之原理與求解流程。

### 2.1 杜賓車模型(Dubin Car Model)

杜賓汽車為一理想化簡單汽車模型(圖 2-1):

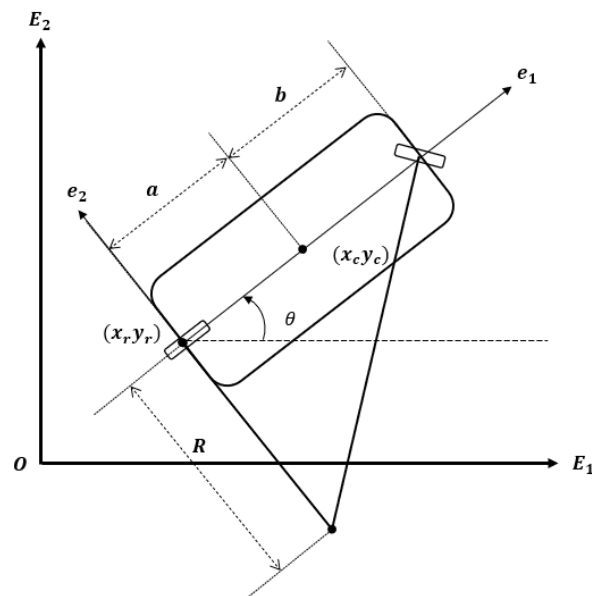


圖 2-1

a:後輪軸中心至質心距離

b:質心至前輪軸中心距離

R:最小轉彎半徑

$\theta$ :載具朝向角(Heading Angle)

$x_r$ 、 $y_r$ :後輪軸中心座標

$x_c$ 、 $y_c$ :質心座標

杜賓車模型廣泛應用在最短路徑規劃之系統中。該模型假設載具僅能以固定

速度 $u$ 向前移動，無倒車功能，並假設前輪轉向角 $\phi$ 固定或為 $0$ ，受到最小轉彎半徑的約束，因此，杜賓車必須以平滑的圓弧轉向。載具每一時刻姿態以 $(x, y, \theta)$ 描述，載具的控制由三種基本動作組成：直行(S)、左轉(L)和右轉(R)，後兩者皆以最小轉彎半徑的方式前進，而最優路徑由直線段和固定半徑的圓弧組成。最短路徑為六種類型中的其中一種(圖 2-2、圖 2-3)：LSL(Left-Straight-Left)、RSR(Right-Straight-Right)、RSL、LSR、RLR、LRL。

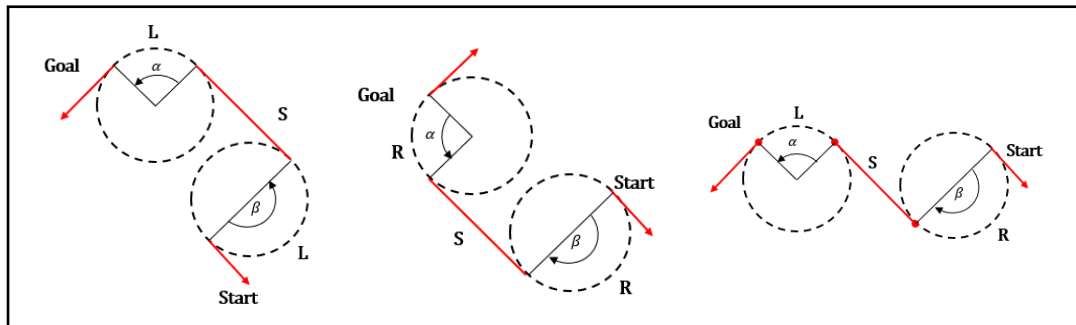


圖 2-2:左至右為 LSL、RSR、RSL

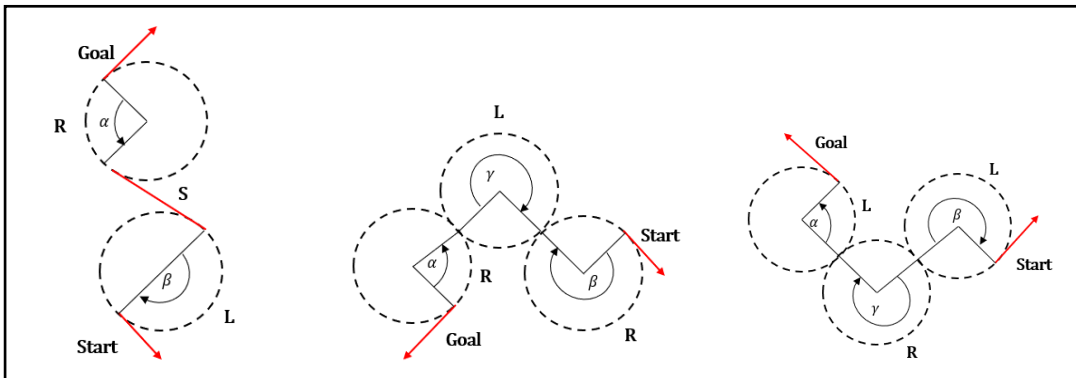


圖 2-3:左至右為 LSR、RLR、LRL

## 2.2 杜賓控制切換點推導

杜賓曲線組合中，可分成 CSC(Cross-Straight-Cross)類型與 CCC 類型，其中 CSC 類型包括: LSL、RSR、RSL、LSR，即由兩段圓弧與一段直線組成；CCC 類型包括 RLR、LRL，即路徑由三段圓弧組成。下列推導 CSC 類型與 CCC 類型控制切換點的位置，即圖 2-4 中紅點位置：

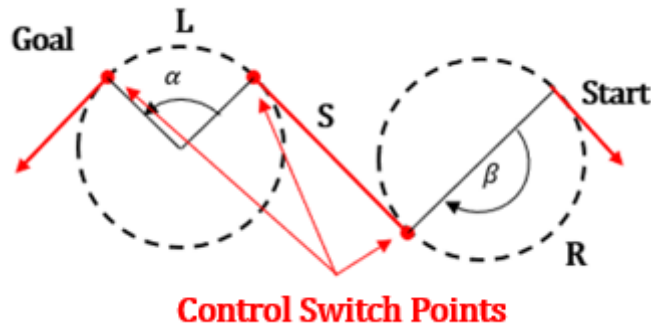


圖 2-4

## CSC 類型

給定起始狀態 $(x_i, y_i, \theta_i)$ 及終止狀態 $(x_g, y_g, \theta_g)$ 。令起點與終點之轉彎半徑為 $r_i, r_g$ (圖 2-5)，為了方便展現求解切換點的流程，這邊假設 $r_i \neq r_g$ 且大於等於最小轉彎半徑。其中 $\theta$ 圍繞 E2 軸順順時針旋轉。

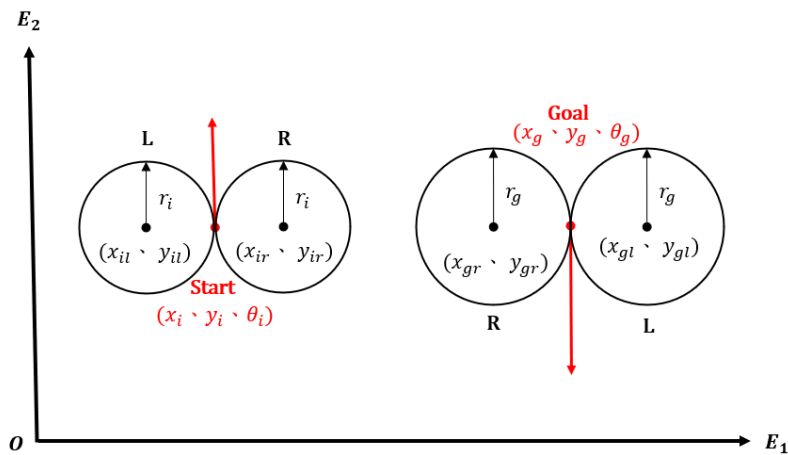
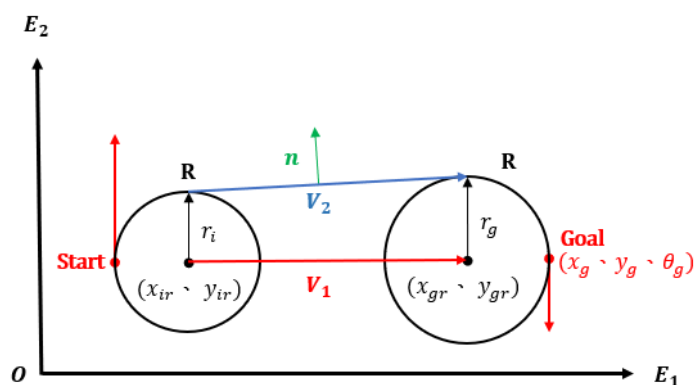


圖 2-5

計算始末兩點左右轉旋轉中心 $(x_{ir}, y_{ir}), (x_{gr}, y_{gr}), (x_{il}, y_{il}), (x_{gl}, y_{gl})$ :

$$\begin{aligned}
 x_{il} &= x_i + r_i \cdot \cos(\theta_i) & y_{il} &= y_i - r_i \cdot \sin(\theta_i) \\
 x_{ir} &= x_i - r_i \cdot \cos(\theta_i) & y_{ir} &= y_i + r_i \cdot \sin(\theta_i) \\
 x_{gl} &= x_g + r_g \cdot \cos(\theta_g) & y_{gl} &= y_g - r_g \cdot \sin(\theta_g) \\
 x_{gr} &= x_g - r_g \cdot \cos(\theta_g) & y_{gr} &= y_g + r_g \cdot \sin(\theta_g)
 \end{aligned} \tag{2-1}$$

令始末兩點轉向中心之連接向量 $\mathbf{V}_1 = (x_g - x_i, y_g - y_i)$ ，長度 $D = |\mathbf{V}_1|$ ，另外切線之切點向量為 $\mathbf{V}_2$ ，其法向量為 $\mathbf{n}$ (圖 2-6)。



調整 $V_1$ 使其與 $V_2$ 平行：

由  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_2 = 0$  得:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_1 = r_i - r_g$$

$$\frac{V_1}{D} \cdot \mathbf{n} = \frac{r_i - r_g}{D}$$
$$\frac{r_i - r_g}{D} = \cos(\theta)$$
$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -j \sin \theta \\ j \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1x} \\ V_{1y} \end{bmatrix}$$
$$x_{it} = x_{ir/l} + r_i \cdot j \cdot \mathbf{n}_x \quad , \quad y_{it} = y_{ir/l} + r_i \cdot j \cdot \mathbf{n}_y \quad (2-2)$$

其中，當始末轉向相同時  $j=1$ ，否則為  $-1$ 。



## CCC 類型

定義起始姿態為 $(x_i, y_i, \theta_i)$ 、結束姿態為 $(x_g, y_g, \theta_g)$ 。令起點、中間點、終點之轉彎半徑為 $r_i, r_g, r_{mid}$ 以方便證明(圖 2-7)。

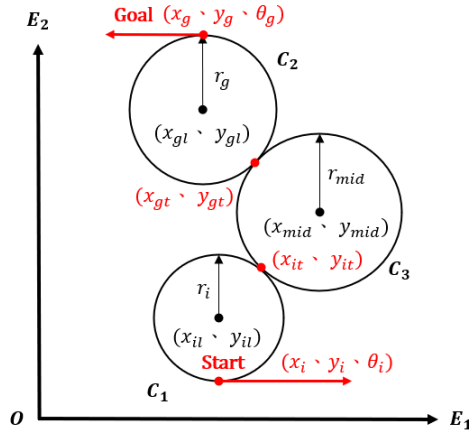


圖 2-7

計算始末兩點左轉旋轉中心 $(x_{il}, y_{il})$ 、 $(x_{gl}, y_{gl})$ :

$$\begin{aligned} x_{il} &= x_i + r_i \cdot \cos(\theta_i) & y_{il} &= y_i - r_i \cdot \sin(\theta_i) \\ x_{gl} &= x_g + r_g \cdot \cos(\theta_g) & y_{gl} &= y_g - r_g \cdot \sin(\theta_g) \end{aligned} \quad (2-3)$$

若為右轉旋轉中心:

$$\begin{aligned} x_{ir} &= x_i - r_i \cdot \cos(\theta_i) & y_{ir} &= y_i + r_i \cdot \sin(\theta_i) \\ x_{gr} &= x_g - r_g \cdot \cos(\theta_g) & y_{gr} &= y_g + r_g \cdot \sin(\theta_g) \end{aligned}$$

令始末兩點旋轉中心之連接向量 $\mathbf{V}_{12} = (x_g - x_i, y_g - y_i)$ ，長度 $D_{12} = |\mathbf{V}_{12}|$ ；  
 初始點與中間點旋轉中心之連接向量 $\mathbf{V}_{13} = (x_{mid} - x_i, y_{mid} - y_i)$ ，長度 $D_{13} = r_i + r_{mid}$ ；  
 終點與中間點旋轉中心之連接向量 $\mathbf{V}_{32} = (x_g - x_{mid}, y_g - y_{mid})$ ，長度 $D_{32} = r_g + r_{mid}$ (圖 2-8)。其中 $r_{mid}$ 需大於 $(D_{12} - r_g - r_i)/2$ 。

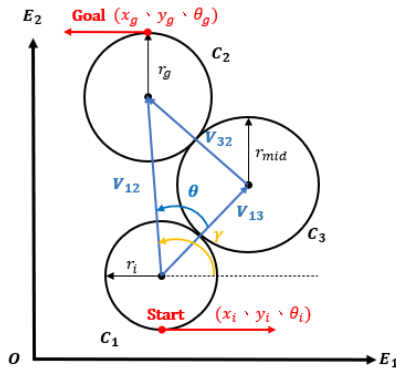


圖 2-8

根據餘弦定理計算 $V_{12}$ 與 $V_{13}$ 之夾角 $\theta$ :

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{D_{12}^2 + D_{13}^2 - D_{23}^2}{2 \times D_{12} \times D_{13}} \right)$$

計算中間點轉向中心( $x_{mid}$ 、 $y_{mid}$ ):

$$x_{mid} = x_i + D_{13} \cdot \cos(\gamma - \theta) \quad , \quad y_{mid} = y_i + D_{13} \cdot \sin(\gamma - \theta) \quad (2-4)$$

由中間點轉向中心推算出(圖 2-7)控制切換點座標( $x_{it}$ 、 $x_{it}$ )、( $x_{gt}$ 、 $x_{gt}$ ):

$$\begin{aligned} x_{it} &= x_{ir/l} + r_i \cdot V_{13E_1} \quad , \quad y_{it} = y_{ir/l} + r_i \cdot V_{13E_2} \\ x_{gt} &= x_{mid} + r_{mid} \cdot V_{23E_1} \quad , \quad y_{gt} = y_{mid} + r_{mid} \cdot V_{23E_2} \end{aligned} \quad (2-5)$$

## 2.3 最佳控制原理

最佳控制原理是一種數學方法，用於尋找動態系統在給定約束和目標下的最優控制策略。它通過最大化或最小化性能指標，確保系統在運行過程中達到最佳性能。令一系統之狀態方程式為：

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

最佳控制亦即最小或最大化某目標，令目標函數 $J$ 為：

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt$$

其中 $L(x, u, t)$ 為 Lagrange function。目標是尋找最佳控制 $u^*$ 使得 $J(u^*)$ 最小，且

滿足邊界條件 $x(t_0) = x_i$ 、 $x(t_f) = x_g$ 。最佳控制 $u^*$ 使得 $\frac{\delta J}{\delta t} = 0$ ，透過變分原理得：



$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left( \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial u} \delta u \right) dt = 0$$

其中  $\delta x$  滿足邊界條件：

$$\delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0$$

根據 Lagrange multiplier 原理， $\delta J$  改寫為：

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left( \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial u} \delta u \right) + \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial u} \delta u - \delta \dot{x} \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \right) \delta x + \left( \frac{\partial L}{\partial u} + \lambda \frac{\partial f}{\partial u} \right) \delta u - \lambda \delta \dot{x} \right] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \right) \delta x + \left( \frac{\partial L}{\partial u} + \lambda \frac{\partial f}{\partial u} \right) \delta u + \dot{\lambda} \delta x \right] dt + \lambda \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{\lambda} \right) \delta x + \left( \frac{\partial L}{\partial u} + \lambda \frac{\partial f}{\partial u} \right) \delta u \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (2-6)$$

其中  $\lambda$  為拉格朗日乘子 (Lagrange multiplier)，可以用來引入系統之非完整約

束。2-6 式對於任意的  $\delta x$ 、 $\delta u$  皆成立，因此：

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{\lambda} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial u} + \lambda \frac{\partial f}{\partial u} &= 0 \end{aligned} \quad (2-7)$$

系統之 Hamiltonian Function 定義為：

$$H(x, u, \lambda, t) = L(x, u, t) + \lambda(t)f(x, u, t)$$

旁特里亞金最小值原理 (Pontryagin's minimum principle) 即找出最優控制  $u^*$  即

最優乘子  $\lambda^*$  使得 Hamiltonian function 為最小：

$$H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \leq H(x(t), u(t), \lambda(t), t), \forall t$$

即  $\frac{\partial H}{\partial u^*} = 0$ ，因此可得最佳控制微分方程：

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} - \dot{x} &= 0 \end{aligned} \quad (2-8)$$

最後將其帶入邊界條件  $x(t_0) = x_i$ 、 $x(t_f) = x_g$ ，透過數值方法求解上式微分

方程即可得到  $u^*$ 、 $\lambda^*$ 。



### 2.3.1 最短時間之最佳化控制理論

本小節透過旁特里亞金最小值原理(Pontryagin's minimum principle)證明杜賓汽車在曲率限制下，最短路徑由左轉(L)、右轉(R)、直走(S)三種控制組合構成。

杜賓汽車以固定速度、角速度運動。令速度為 $u_1 = 1$ 、轉向角 $u_2 = 1$ (L)、 $u_2 = 0$ (S)、 $u_2 = -1$ (R)，根據圖 2-1，杜賓汽車運動學模型為：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u_1 \cos \theta \\ \dot{y} &= u_1 \sin \theta \\ \dot{\theta} &= u_2, |u_2| \leq 1\end{aligned}\tag{2-9}$$

在固定速度下，最短路徑問題等同於時間最佳化問題，令目標函數為：

$$T(u_2) = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt$$

目標是找出一個 $u^*$ 使得 $T(u_2^*) = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt = \min_{u_2 \in U} T(u_2)$ ， $u_2^*$ 為杜賓車之最佳控制，根據最佳控制原理，可得哈密頓函數(Hamiltonian Function)為：

$$H = \lambda_0 + \lambda_1 \cos \theta + \lambda_2 \sin \theta + \lambda_3 u_2$$

進一步透過旁特里亞金最小值原理可得：

$$\begin{aligned}u(t) &\in \arg \min_{v \in [-1,1]} [\lambda_3(t)v] \\ \dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \lambda_1 = c_1 \\ \dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \lambda_2 = c_2 \\ \dot{\lambda}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial u_2} = \lambda_1 \sin \theta - \lambda_2 \cos \theta\end{aligned}\tag{2-10}$$

令 $c_1 = \alpha \cos \beta$ ， $c_2 = \alpha \sin \beta$ ，其中速度一致，因此令 $\alpha = 1$ ， $\beta$ 為一個常數，而 $\lambda_3$ 與 $u_2$ 差一個負號，代入(2-10)得：

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \alpha \cos \beta \\ \lambda_2 &= \alpha \sin \beta \\ \dot{\lambda}_3 &= \alpha \sin (\theta - \beta)\end{aligned}$$

代入始末兩點邊界條件  $f(t_0) = (x_i, y_i, \theta_i)$ 、 $f(t_f) = (x_g, y_g, \theta_g)$  解出  $u^*$  及  $\lambda^*$  使其滿足:

$$H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \leq H(x(t), u(t), \lambda(t), t), \forall t \in [t_0, t_f], \forall u(t) \in U(t)$$

$$T(u_2^*) = \min_{u_2 \in U} T(u_2)$$

因此，以下圖(圖 2-9)為例:

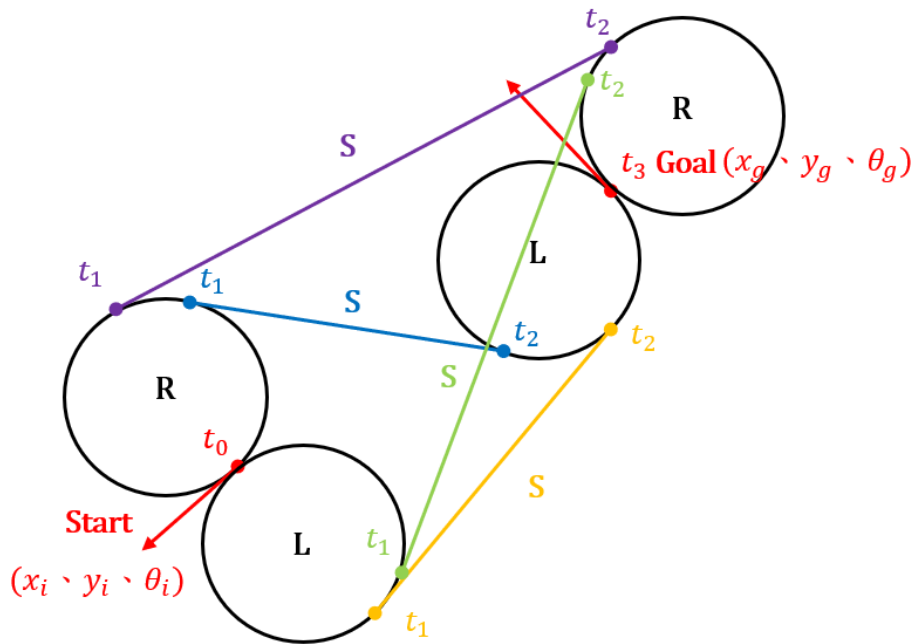


圖 2-9

透過 2-2 節算出控制切換點，將每一種可能之切換點邊界條件代入 2.3.2 時間最佳化控制理論，不同的邊界條件可以求出不同的  $\lambda_3$ ，當  $\lambda_3 < 0$ ， $u_2 = 1$ (Left)、 $\lambda_3 = 0$ ， $u_2 = 0$ (Straight)、 $\lambda_3 > 0$ ， $u_2 = -1$ (Right)，與此同時，也可以得到時間區間  $T = [t_0, t_f] = [t_0, t_1] + [t_1, t_2] + [t_2, t_3]$ 。

在圖 2-9 例子中，根據時間最佳化控制，遍歷每一種控制組合，可以得到當  $u^* = \text{LSL}$  時， $T(u_2^*) = \min_{u_2 \in U} T(u_2)$ ，該控制具有最短時間，亦為最短路徑。



## 2.4 Reed Shepp Curve

Reed Shepp curve 是基於 Dubin curve 的一種改良，Reed Shepp curve 亦用理想化簡單載具模型，運動學模型如下：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u_1 \cos \theta \\ \dot{y} &= u_1 \sin \theta \\ \dot{\theta} &= u_2, |u_2| \leq 1\end{aligned}\quad (2-11)$$

其中速度  $u_1 \in \{-1, 1\}$ 。Reed Shepp curve 比 Dubin car 多了倒車的控制項，在控制方面多了  $L^-$ 、 $S^-$ 、 $R^-$ ，負號表示倒車之左右轉與後退。因此 Reed Shepp curve 在操作上面更為靈活。

在同樣的邊界條件下，下圖例子可以清楚發現 Reed Shepp curve (圖 2-10)比 Dubin curve (圖 2-11)更為靈活。令起始狀態為  $(x_i, y_i, \theta_i) = (0, 0, \pi)$ 、結束狀態為  $(x_g, y_g, \theta_g) = (60, 30, \frac{5\pi}{4})$ 。

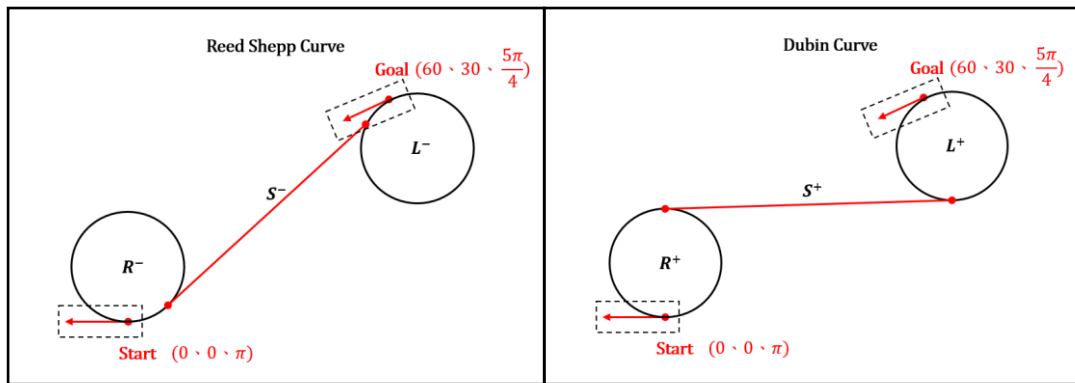


圖 2-10

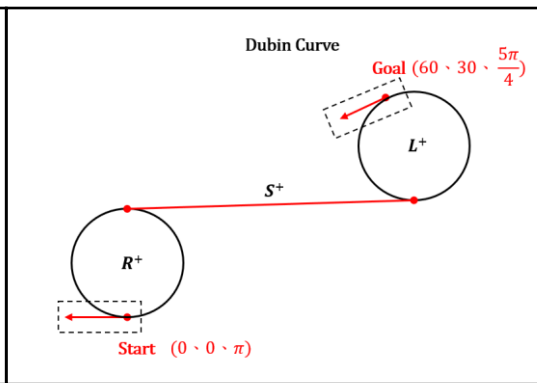


圖 2-11

Reed Shepp curve 之控制為  $R^-S^-L^-$ ，Dubin curve 為  $R^+S^+L^+$ 。可以清楚發現 Reed Shepp curve 可以透過倒車輕鬆抵達終點，而 Dubin curve 則需透過轉兩個大彎才能抵達終點。



## 2.5 最小能量最佳化控制理論

在 2.3.1 小節中，杜賓車在固定的速度下進行最短時間最佳化控制設計。本節考慮相同的單輪模型，但在速度與角速度並不固定情況下進行最小控制能量之最佳化設計。

考慮一系統模型(圖 2-12):

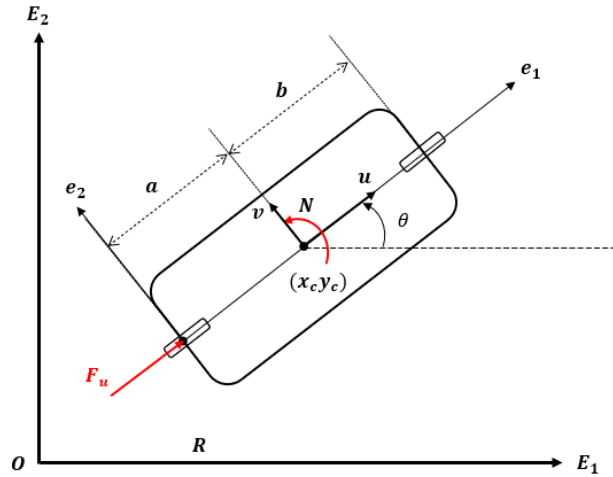


圖 2-12

$u$  為車體座標上質心軸向速度、 $v$  為車體座標上質心橫向速度、 $(x_c, y_c)$  為質心座標。

系統控制項表示為  $N, F_u$ ，其中  $N$  為扭矩， $F_u$  為軸向推進力。其狀態變數為  $x_c, y_c, \theta, u, v, \dot{\theta}$ ，假設該系統不發生側滑，因此  $v = 0$ ，為了方便接下來計算，我們令  $(x_c, y_c, \theta, u, v, \dot{\theta}) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ 。

系統運動學模型為：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_4 \cos x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \sin x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_6 \\ \dot{x}_4 &= x_5 x_6 + F_u/m + f_u/m \\ \dot{x}_5 &= -x_4 x_6 + f_v/m \\ \dot{x}_6 &= N/I_{E_3}\end{aligned}\tag{2-12}$$

其中  $I_{E_3}$  為質量慣性矩， $f_v$  為系統摩擦力提供之橫向受力， $f_v = m x_4 x_6$ 。系統之 Lagrange 表示為：



$$L = u^2 + v^2 + a^2 F_u^2 + c^2 N^2$$

其中  $u^2 + v^2$  為系統之動能， $a^2 F_u^2 + c^2 N^2$  為系統之控制能， $a$ 、 $c$  為權重係數。

構建 Hamilton 函數：

$$\begin{aligned} H &= L + \lambda^T f(x, y, \theta, u, v, \dot{\theta}) \\ &= x_4^2 + x_5^2 + a^2 F_u^2 + c^2 N^2 + \lambda_1(x_4 \cos x_3) + \lambda_2(x_4 \sin x_3) + \lambda_3 x_6 \\ &\quad + \lambda_4 \left( x_5 x_6 + \frac{F_u}{m} + \frac{f_u}{m} \right) + \lambda_5 \left( -x_4 x_6 + \frac{f_v}{m} \right) + \lambda_6 (N / I_{E_3}) \end{aligned} \quad (2-13)$$

由 Pontryagin's Minimum Principle 可知最佳控制方程發生在  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ ，得：

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial F_u} &= 0, F_u = -\frac{\lambda_4}{2a^2 m} \\ \frac{\partial H}{\partial N} &= 0, N = -\frac{\lambda_6}{2c^2 I_{E_3}} \end{aligned} \quad (2-14)$$

由  $\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{x}$  及 2-14 式得：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_4 \cos x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \sin x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_6 \\ \dot{x}_4 &= x_5 x_6 + \frac{\lambda_4}{2a^2 m^2} + \frac{f_u}{m} \\ \dot{x}_5 &= -x_4 x_6 + \frac{f_v}{m} = 0 \\ \dot{x}_6 &= -\frac{\lambda_6}{2c^2 I_{E_3}^2} \end{aligned} \quad (2-15)$$

由  $\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\lambda}$  得：

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= 0 \\ \dot{\lambda}_2 &= 0 \\ \dot{\lambda}_3 &= \lambda_1(x_4 \sin x_3) - \lambda_2(x_4 \cos x_3) \\ \dot{\lambda}_4 &= -2x_4 - \lambda_1 \cos x_3 - \lambda_2 \sin x_3 + \lambda_5 x_6 \\ \dot{\lambda}_5 &= -2x_5 + \lambda_1 \sin x_3 - \lambda_2 \cos x_3 - \lambda_4 x_6 \\ \dot{\lambda}_6 &= -\lambda_3 - \lambda_4 x_5 + \lambda_5 x_4 \end{aligned} \quad (2-16)$$

最終，我們得到 6 條狀態變數一階微分方程及 6 條 Lagrange multiplier 的一階微分方程式。將此 12 條一階微分方程組配合始末兩點之邊界條件，透過數值方法



即可求得最小能量最佳控制之路徑軌跡。

## 2.6 數值方法

在最佳控制原理中，最終可以得到一組非線性微分方程，論文採用射擊法 (Shooting Method) 解一系列非線性微分方程組。射擊法是解決邊界值問題 (BVP) 的一種數值方法，它通過將 BVP 轉化為一系列的初始值問題 (IVP) 求解。這個方法隨機猜測初始條件，並利用常微分方程的數值解法來計算解的軌跡，接著檢查這些解是否滿足給定的邊界條件，如果不滿足，則調整初始條件再重複過程，直至找到一組初始條件會使得解符合所有邊界條件。其步驟如下：

Step(1)：隨機猜測未知的初始 Lagrange multiplier  $\lambda(t_0)$ 。

Step(2)：將  $\lambda(t_0)$  帶入初始狀態條件  $x_i$ ，從時間  $t_0$  到  $t_f$  積分求得狀態軌跡  $\bar{x}_f$ 。

Step(3)：計算積分結果  $\bar{x}_f$  與邊界  $x_f$  的誤差  $h_0$ 。

Step(4)：從原先猜測的  $\lambda(t_0)$  增加一個微小增量再進行積分。

Step(5)：計算積分結果與邊界  $x_f$  的誤差，則可估算 Jacobian 矩陣  $\frac{\partial x_f}{\partial \lambda(t_0)}$  了解微分方程解對於初始條件的敏感度。

Step(6)：由  $\bar{x}_f$  與邊界  $x_f$  的誤差  $\delta x(t_f) = h_0 = \frac{\partial x(t_f)}{\partial \lambda(t_0)} \delta \lambda(t_0)$ ，可得  $\lambda(t_0)$  修正量為：

$$\delta \lambda(t_0) = \left( \frac{\partial x_f}{\partial \lambda_0} \right)^{-1} \cdot h_0。$$

Step(7)：更新下一次猜測值為  $\lambda(t_0)_{new} = \lambda(t_0)_{old} - \delta \lambda(t_0)$

重複 Step(2) 至 Step(7)，直到誤差  $h_0$  小於某閾值為止。



## 2.7 結果比較

本章節比較 Reed Shepp curve 之最短時間最佳化控制及最小能量之最佳化控制軌跡。模擬中假設轉彎半徑為 6，車長為 4.4，車寬為 1.8。

(圖 2-13)顯示從起點 $(10,10,0)$ 至終點 $(20,15,\frac{\pi}{4})$ 採用最小能量法與 Reed Shepp Curve 設計的軌跡結果，而(圖 2-14)則呈現從起點 $(10,10,0)$ 至終點 $(13,20,\frac{\pi}{4})$ 的結果。對於此模擬狀況而言，當始末兩點距離夠長，Reed Shepp curve 轉向較最小能量法的轉向急迫，而最小能量控制之轉向能量較少；而路徑方面則是 Reed Shepp curve 較短一些。

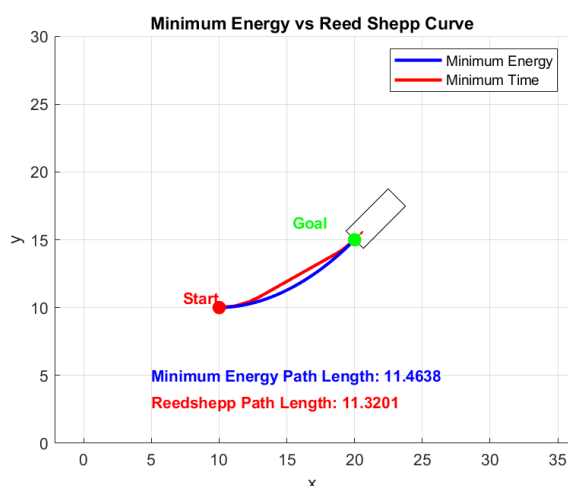


圖 2-13

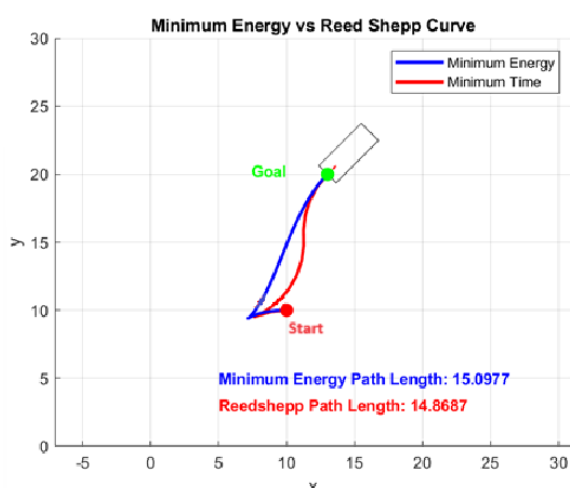


圖 2-14

(圖 2-15)呈現，從起點 $(15,15,\pi)$ 至終點 $(10,10,\frac{\pi}{2})$ ，而(圖 2-16)則呈現從起點 $(15,15,\frac{\pi}{3})$ 至終點 $(20,20,\pi)$ 。對於此模擬狀況而言，可以發現 Reed Shepp curve 很早開始轉向，但始末兩點距離過近，因此 Reed Shepp curve 礙於最小轉彎半徑限制，導致行走路徑較最小能量控制長。

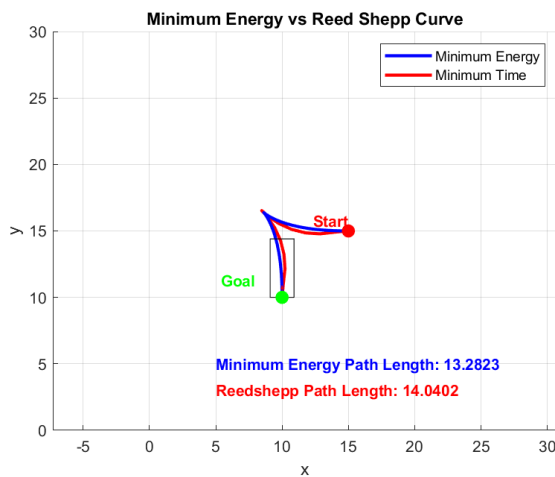


圖 2-15

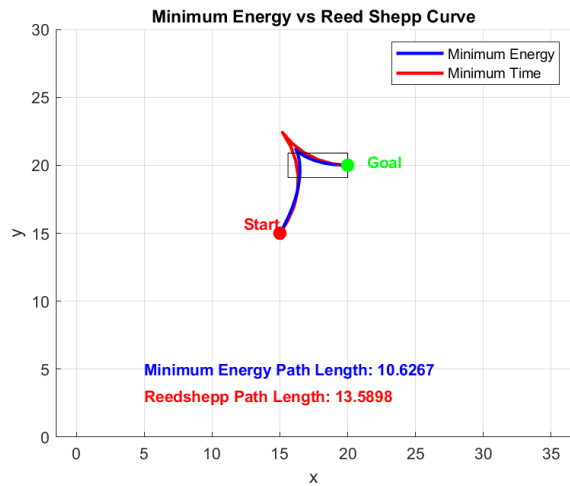


圖 2-16

經模擬發現，Reed Shepp curve 之最短時間最佳化控制建立在最小轉彎半徑限制下，當兩點距離夠遠，Reed Shepp curve 最短路徑特性會發揮出來。然而，當兩點距離過近，如在圖 2-15、圖 2-16 案例中，Reed Shepp curve 的軌跡長度會比最小能量控制軌跡還長，因為以最小轉彎半徑轉向，會造成多繞一點的情況，導致軌跡長度變長。



### 第三章 微分平坦架構

最小能量法所採用的數值方法雖能確保找到的解是全局最優，但不適當的  $\lambda(t_0)$  猜測會導致數值無法收斂而找不到解，且隨著系統非線性程度提高，運算複雜度會大幅提升。綜合考慮運算成本及運算的即時性，本研究採用微分平坦 (Differential Flatness) 理論，提供低運算成本且次優的即時路徑規劃算法。

本章介紹微分平坦系統特性，並透過微分平坦基本定義及 Pfaffian 系統等價於簡單系統 (Trivial system) 的方式證明阿克曼汽車模型及不同輸入的平面剛體存在平坦輸出。最後引入最佳化軌跡設計導出系統之平坦輸出。

#### 3.1 微分平坦 (Differential Flatness)

微分平坦是動力系統的一種性質，在控制理論和機器人等領域有廣泛的應用。其基本定義如下，如果我們找到一組平坦輸出，將原本高維非線性系統的所有狀態變數和控制輸入都以該平坦輸出及其導數表示，則該系統是平坦的 (圖 3-1)。這個性質對於系統的控制設計非常實用，我們可以透過導出平坦輸出來實現整個系統的控制。微分平坦性質提供了一種強力的方法來簡化和優化控制系統設計。

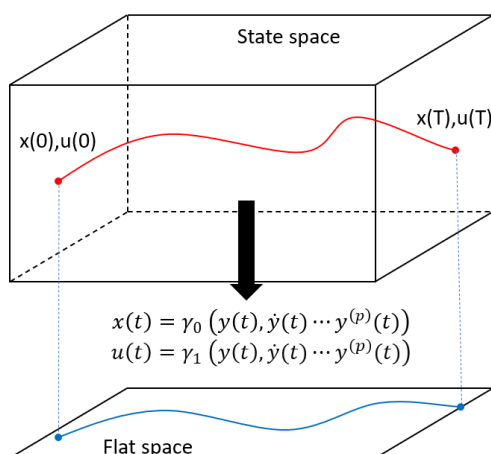


圖 3-1

圖 3-1 描述微分平坦將一個高維度的模型映射至一個平坦的空間中，以平坦



輸出來描述高維空間中的所有狀態。微分平坦系統具有以下優點:

1. 數值穩定性高
2. 計算成本低
3. 限制處理方便

### 3.2 平面剛體(Planar Rigid Body)

平面剛體指在一個二維平面上運動的剛體(圖 3-2),例如:阿克曼汽車(Ackerman car)、垂直起降機(PVTOL)等。阿克曼汽車的平面運動被限制在  $X$ 、 $Y$  平面上,而垂直起降機的起降運動被限制在  $X$ 、 $Z$  平面上。控制平面剛體主要包括影響其平移及旋轉運動。以論文中阿克曼汽車為例,我們透過控制油門來影響汽車的平移,透過控制方向盤來影響汽車的旋轉。

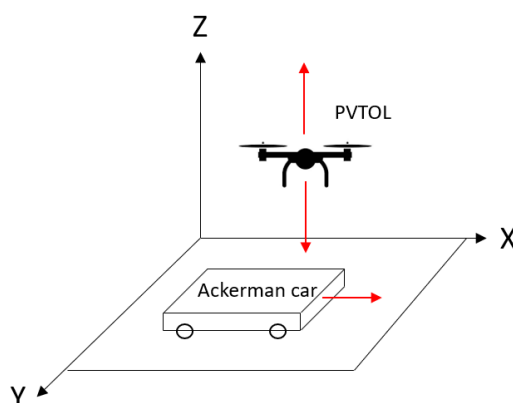


圖 3-2

當考慮剛體受到多個力和扭矩作用時,這些力和扭矩被認為可以在  $SE(2)$  空間中產生獨立的廣義力,所謂  $SE(2)$  稱為二維之特殊歐幾里得群,這個群包含了所有平面上的剛體運動。因此,微分平坦將具有高維狀態的平面剛體模型映射至一個二維平面上,利用平面上的平坦輸出反推回整個系統的完整狀態。平坦輸出的控制項必須能夠獨立控制平移或旋轉。



### 3.2.1 阿克曼汽車微分平坦存在性證明

微分平坦是動力系統的一種性質，將高維非線性系統映射至平坦空間中，利用平坦空間中之平坦輸出將非線性系統以線性的可控系統。其基本定義如下，如果我們找到一組平坦輸出，將原本高維非線性系統的所有狀態變數和控制輸入都以該平坦輸出及其導數表示，則該系統是平坦的。

本論文中所使用的阿克曼汽車模型屬於 one force、one torque 的平面鋼體，下面我們證明為何該模型具有平坦輸出。

考慮一個非線性系統如下：

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

系統狀態  $x(t) \in X \subseteq R^n$ ，控制  $u(t) \in U \subseteq R^m$ ， $n \geq m$ ， $f$  是一個平滑的向量場，而  $t \in R$  為時間，如果可以找出一組輸出  $y(t) \in R^m$ ：

$$y(t) = \hat{y}(x(t), u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(p)}(t)) \text{ , } p \in \mathbb{N}$$

使得：

$$\begin{aligned} x(t) &= \gamma_0(y(t), \dot{y}(t) \cdots y^{(q)}(t)) \text{ , } q \in \mathbb{N} \\ u(t) &= \gamma_1(y(t), \dot{y}(t) \cdots y^{(q)}(t)) \text{ , } q \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (3-1)$$

則該系統具有平坦輸出。

阿克曼單車模型如(圖 3-3)所示，其中  $u$  為車體座標上後輪軸中心軸向速度、 $v$  為車體座標上後輪軸中心橫向速度、 $(x_r, y_r)$  為後輪軸中心座標、 $\theta$  為朝向角、 $\phi$  為轉向角、 $E_1 E_2$  為慣性座標、 $e_1 e_2$  為車體座標，其慣性座標與車體座標之關係可表示為：

$$\begin{aligned} \dot{x}_r E_1 + \dot{y}_r E_2 &= u e_1 + v e_2 \\ \dot{x}_r &= u \cos \theta - v \sin \theta \\ \dot{y}_r &= u \sin \theta + v \cos \theta \end{aligned} \quad (3-2)$$

因無側滑發生，令  $v = 0$ 。選取  $(x_r, y_r, \theta, u, \phi)$  為狀態向量，令  $\mu_1$ 、 $\mu_2$  為控制  $u$  及  $\phi$  的輸入。

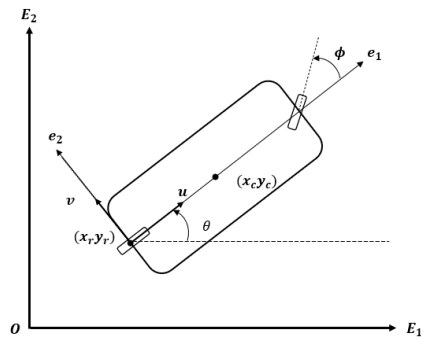


圖 3-3

阿克曼汽車運動模型可表示為：

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_r &= u \cos \theta \\
 \dot{y}_r &= u \sin \theta \\
 \dot{\theta} &= \frac{u}{l} \tan(\phi) \\
 \dot{u} &= \mu_1 (\text{控制項}) \\
 \dot{\phi} &= \mu_2 (\text{控制項})
 \end{aligned} \tag{3-3}$$

對此系統，當選定平坦輸出為：

$$y_1 = x_r, \quad y_2 = y_r$$

則：

$$\begin{aligned}
 x_r &= y_1 \\
 y_r &= y_2 \\
 \theta &= \text{atan}\left(\frac{\dot{y}_1}{\dot{y}_2}\right) \\
 u &= \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} \\
 \phi &= \text{atan}\left(\frac{\frac{\dot{y}_1 \ddot{y}_2 - \ddot{y}_1 \dot{y}_2}{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} \cdot l}{\sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}}\right) \\
 \mu_1 &= \frac{\dot{y}_1 \ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 \dot{y}_2}{u}
 \end{aligned} \tag{3-4}$$

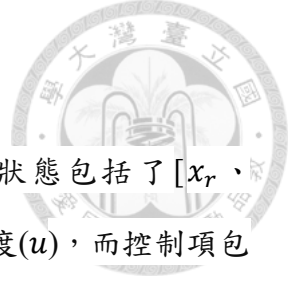
$$\mu_2 = \frac{lu^3(\ddot{y}_2\ddot{y}_1 - \ddot{y}_1\ddot{y}_2) - 3(\dot{y}_1\ddot{y}_1 + \dot{y}_2\ddot{y}_2)(\dot{y}_1\ddot{y}_2 - \dot{y}_2\ddot{y}_1)}{V^6 + l^2(\dot{y}_1\ddot{y}_2 - \dot{y}_2\ddot{y}_1)^2}$$

這些關係表明系統狀態變數  $(x_r, y_r, \theta, u, \phi)$  和控制輸入  $(\mu_1, \mu_2)$  皆可使用平坦輸出  $y_1, y_2$  及其導數表示，滿足式(3-1)。因此阿克曼單車系統具有微分平坦輸出。

表 3-1[14]整理了平面剛體在不同的輸入情況下，是否具有平坦輸出。

| 輸入            | 圖示                                                                                  | 是否可控? | 具有平坦輸出?               |
|---------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------|-----------------------|
| 單一扭矩          |    | no    | no                    |
| 質心上單一力        |    | no    | No                    |
| 偏心上單一力        |   | yes   | No                    |
| 質心上兩力         |  | no    | No                    |
| 偏心上兩共線力       |  | yes   | Center of mass        |
| 偏心上兩非共線力      |  | yes   | Center of oscillation |
| 一個力、一個扭矩      |  | yes   | Center of mass        |
| 偏心上兩非共線力、一個扭矩 |  | yes   | Center of mass        |

表 3-1



### 3.3 微分平坦輸出求解

上述中已證明了阿克曼單車模型，具有平坦輸出，其狀態包括了 $[x_r, y_r, \theta, \phi, u]$ ，分別是位置 $(x_r, y_r)$ 、朝向角度、轉向角度、速度 $(u)$ ，而控制項包括了 $\mu_1$ 及轉向角速度 $\dot{\phi} = \mu_2$ 。

當我們選定輸出為 $y(t) = [x_r(t) \ y_r(t)]$ ，該非線性平面剛體模型是微分平坦的。平坦輸出與狀態變數的關係可以表示為：

$$y_1(t) = x_r(t), \quad y_2(t) = y_r(t)$$

假設平坦輸出為一六次多項式的曲線，我們有：

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots c_6 t^6 \\ y_2(t) &= d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + \cdots d_6 t^6 \end{aligned} \quad (3-5)$$

其中 $t = t_0$ 為初始邊界條件的時間(設為 0)， $t = t_f$ 為終點邊界條件的時間。

令初始邊界條件為：

$$\begin{aligned} y_1(t_0) &= x_r(t_0), & \dot{y}_1(t_0) &= \dot{x}_r(t_0), & \ddot{y}_1(t_0) &= \ddot{x}_r(t_0), \\ y_2(t_0) &= y_r(t_0), & \dot{y}_2(t_0) &= \dot{y}_r(t_0), & \ddot{y}_2(t_0) &= \ddot{y}_r(t_0), \end{aligned}$$

終點邊界條件為：

$$\begin{aligned} y_1(t_f) &= x_r(t_f), & \dot{y}_1(t_f) &= \dot{x}_r(t_f), & \ddot{y}_1(t_f) &= \ddot{x}_r(t_f), \\ y_2(t_f) &= y_r(t_f), & \dot{y}_2(t_f) &= \dot{y}_r(t_f), & \ddot{y}_2(t_f) &= \ddot{y}_r(t_f), \end{aligned}$$

則邊界值與係數的關係可表示為矩陣形式 $A(t)C = b(t)$ ：



其中 $A$ 為 $(12 \times 14)$ 的矩陣:

$$\begin{bmatrix}
 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 & t_0^4 & t_0^5 & t_0^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 & t_0^4 & t_0^5 & t_0^6 \\
 0 & 1 & 2t_0 & 3t_0^2 & 4t_0^3 & 5t_0^4 & 6t_0^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2t_0 & 3t_0^2 & 4t_0^3 & 5t_0^4 & 6t_0^5 \\
 0 & 0 & 2 & 6t_0 & 12t_0^2 & 20t_0^3 & 30t_0^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6t_0 & 12t_0^2 & 20t_0^3 & 30t_0^4 \\
 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 & t_f^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 & t_f^6 \\
 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 & 6t_f^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 & 6t_f^5 \\
 0 & 0 & 2 & 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 & 30t_f^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 & 30t_f^4
 \end{bmatrix}$$

$C$  為係數矩陣:

$$\begin{bmatrix}
 c_0 \\
 c_1 \\
 c_2 \\
 c_3 \\
 c_4 \\
 c_5 \\
 c_6 \\
 d_0 \\
 d_1 \\
 d_2 \\
 d_3 \\
 d_4 \\
 d_5 \\
 d_6
 \end{bmatrix}$$



$b(t)$ 為邊界條件矩陣

$$\begin{bmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \\ \dot{y}_1(t_0) \\ \dot{y}_2(t_0) \\ \ddot{y}_1(t_0) \\ \ddot{y}_2(t_0) \\ y_1(t_f) \\ y_2(t_f) \\ \dot{y}_1(t_f) \\ \dot{y}_2(t_f) \\ \ddot{y}_1(t_f) \\ \ddot{y}_2(t_f) \end{bmatrix}$$

上式也可根據 $t_0$ 、 $t_f$ 拆解成：

$$\begin{cases} [\bar{A}(t_0)]_{6 \times 14} \times [C]_{14 \times 1} = [\bar{b}(t_0)]_{6 \times 1} \\ [\bar{A}(t_f)]_{6 \times 14} \times [C]_{14 \times 1} = [\bar{b}(t_f)]_{6 \times 1} \end{cases}$$

其中 $\bar{A}(t)$ 表示為：

$$\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 & t^4 & t^5 & t^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t & t^2 & t^3 & t^4 & t^5 & t^6 \\ 0 & 1 & 2t & 3t^2 & 4t^3 & 5t^4 & 6t^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2t & 3t^2 & 4t^3 & 5t^4 & 6t^5 \\ 0 & 0 & 2 & 6t & 12t^2 & 20t^3 & 30t^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6t & 12t^2 & 20t^3 & 30t^4 \end{bmatrix}$$

$\bar{b}(t)$ 表示為：

$$\begin{cases} y_1(t) = x_r(t) \\ y_2(t) = y_r(t) \\ \dot{y}_1(t) = \dot{x}_r(t) = u(t)\cos\theta(t) \\ \dot{y}_2(t) = \dot{y}_r(t) = u(t)\sin\theta(t) \\ \ddot{y}_1(t) = \ddot{x}_c(t) = \dot{u}(t)\cos\theta(t) - u(t)\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) \\ \ddot{y}_2(t) = \ddot{y}_c(t) = \dot{u}(t)\sin\theta(t) + u(t)\dot{\theta}(t)\cos\theta(t) \end{cases}$$

這是一組 12 條線性方程式對上 14 個未定係數，因此當 $t_f \neq 0$ 時，矩陣 $A$ 為滿秩。透過數值方法即可解出 12 個未定係數，剩餘兩個可以透過引入最佳化所提供的方程式來求解。



### 3.3.1 最佳化軌跡及控制

微分平坦系統同樣可以透過引入最佳化來達到軌跡與控制的優化目的，本論文採用最小化急動(jerk)作為最佳化目標，急動描述物體加速度變化的平滑程度。最小化急動使加速度變化平滑，進而使速度與位移的變化平滑。因此其目的旨在減低車輛方向角之角速度變化，相當於最小化方向盤轉動速率的變化，達到平滑的方向控制。

最小化急動之目標函數為：

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (\ddot{y}_1^2(t) + \ddot{y}_2^2(t)) dt \quad (3-6)$$

其中：

$$\ddot{y}_1(t) = 6c_3 + 24c_4t + 60c_5t^2 + 120c_6t^3$$

$$\ddot{y}_2(t) = 6d_3 + 24d_4t + 60d_5t^2 + 120d_6t^3$$

可將 $\ddot{y}_1(t)$ 、 $\ddot{y}_2(t)$ 表示成矩陣：

$$\ddot{y}_1(t) = \alpha(t)^T C, \ddot{y}_2(t) = \beta(t)^T C \quad (3-7)$$

其中

$$\alpha(t) = [0 \ 0 \ 0 \ 6 \ 24t \ 60t^2 \ 120t^3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$\beta(t) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 6 \ 24t \ 60t^2 \ 120t^3]^T$$

將(3-13)代入(3-12)，目標函數 $J$ 可改寫為封閉積分型式：

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (\ddot{y}_1^2(t) + \ddot{y}_2^2(t)) dt = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} ((\alpha(t)^T C)^2 + (\beta(t)^T C)^2) dt \\ &= \frac{1}{2} C^T \int_0^{t_f} (\alpha(t)\alpha(t)^T + \beta(t)\beta(t)^T) dt C \end{aligned} \quad (3-8)$$

令:

$$\int_0^{t_f} (\alpha(t)\alpha(t)^T) + (\beta(t)\beta(t)^T) dt = Q \quad (3-9)$$

其中 $Q$ 為 $(14 \times 14)$ 的矩陣，將(3-9)式積分可得 $Q_{ij}$ ， $i \in [1,14], j \in [1,14]$ :

$$\begin{aligned} Q_{44} &= Q_{1111} = 36t_f^4, Q_{45} = Q_{1112} = 72t_f^5, Q_{46} = Q_{1113} = 120t_f^6, Q_{47} = Q_{1114} = 180t_f^7 \\ Q_{54} &= Q_{1211} = 72t_f^5, Q_{55} = Q_{1212} = 192t_f^6, Q_{56} = Q_{1213} = 360t_f^7, Q_{57} = Q_{1214} = 720t_f^8 \\ Q_{64} &= Q_{1311} = 120t_f^6, Q_{65} = Q_{1312} = 360t_f^7, Q_{66} = Q_{1313} = 720t_f^8, Q_{67} = Q_{1314} = 1200t_f^9 \\ Q_{74} &= Q_{1411} = 180t_f^7, Q_{75} = Q_{1412} = 576t_f^8, Q_{76} = Q_{1413} = 1200t_f^9, Q_{77} = Q_{1414} = 2057.14t_f^{10} \end{aligned}$$

其餘元素皆為0。

因此目標函數 $J$ 改寫為:

$$J = \frac{1}{2} C^T Q C。$$

此時該問題變成二次規劃(Quadratic programming)之最佳化問題，這類最佳化問題表示為:

$$\begin{aligned} \text{minimize: } & \frac{1}{2} C^T Q C \\ \text{subject to: } & AC = b \end{aligned} \quad (3-10)$$

當多項式矩陣 $A$ 滿秩(full rank)，且 $Q$ 為正定(positive definite)，則存在唯一最優解，若 $Q$ 為半正定(semi-positive definite)，則解不一定唯一。

(3-10)式為一個具有等式約束(equality constraint)的最佳化問題，這些約束來自於邊界條件，透過拉格朗日乘數法(Lagrange multiplier method)來求解等式約束的最佳化問題。引入拉格朗日必要條件 Lagrange necessary condition:

$$\begin{aligned} QC + A^T \lambda &= 0 \\ AC - b &= 0 \end{aligned} \quad (3-11)$$

其中 $\lambda$ 為拉格朗日乘子向量，將(3-16)式改寫成矩陣可表示為:

$$\begin{bmatrix} [Q]_{14 \times 14} & [A^T]_{14 \times 12} \\ [A]_{12 \times 14} & [0]_{12 \times 12} \end{bmatrix}_{26 \times 26} \begin{bmatrix} [C]_{14 \times 1} \\ [\lambda]_{12 \times 1} \end{bmatrix}_{26 \times 1} = \begin{bmatrix} [0]_{14 \times 1} \\ [b]_{12 \times 1} \end{bmatrix}_{26 \times 1}$$

求出係數矩陣 C:

$$\begin{bmatrix} [C]_{14 \times 1} \\ [\lambda]_{16 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [Q]_{14 \times 14} & [A^T]_{14 \times 16} \\ [A]_{16 \times 14} & [0]_{16 \times 16} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} [0]_{14 \times 1} \\ [b]_{16 \times 1} \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

求解出  $\begin{bmatrix} [Q]_{14 \times 14} & [A^T]_{14 \times 16} \\ [A]_{16 \times 14} & [0]_{16 \times 16} \end{bmatrix}^{-1}$  後代入(3-17)式中，即可求出最小化急動之微分

平坦輸出的最優係數。

最後，將求解之最優係數代回(3-5)式： $y_1(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots c_6 t^6$ 、  
 $y_2(t) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + \dots d_6 t^6$ ，最後將其帶入式(3-4)，即可得到滿足阿克曼  
 汽車約束的路徑軌跡及其狀態。

## 第四章 自動停車系統最優路徑規劃算法

目前自動停車的好壞仰賴汽車起點位置，且停車過程採用即時碰撞檢測，根據碰撞檢測執行多段式停車。為了降低多段式停車之風險，本研究使用微分平坦理論做為路徑規劃工具，在路徑規劃中引入專家停車策略，並透過路徑預規劃選擇適當的姿態調整策略及停車策略。本章節介紹微分平坦理論最佳化路徑時距參數、路徑預規劃碰撞檢測及專家停車策略。

### 4.1 最佳化路徑時距

路徑時距( $t_f - t_0$ )為微分平坦重要參數，時間參數對於微分平坦生成路徑的好壞至關重要。時間過短導致加速度過快、轉向過激；而時間過長會導致軌跡曲折；選擇恰當的時長，使得路徑軌跡平滑，且轉向變化平穩。

下列模擬相同邊界條件下，不同的時距對於路徑平滑程度的影響。起點  $\text{Start}=[30 \ 30 \ 0]$  至終點  $\text{Goal}[80 \ 80 \ \frac{\pi}{2}]$ ，編號 1、2、3 之曲線分別表示最佳時距、過短時距及過長時距之路徑曲線。圖 4-1 表示最佳路徑時長所生成的路徑軌跡最為平滑，圖 4-2 表示最佳路徑時長下，加速度與轉向角變化最為平穩。

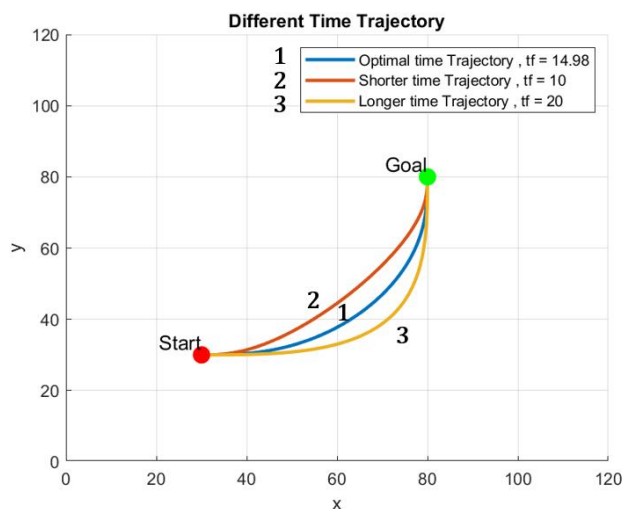


圖 4-1

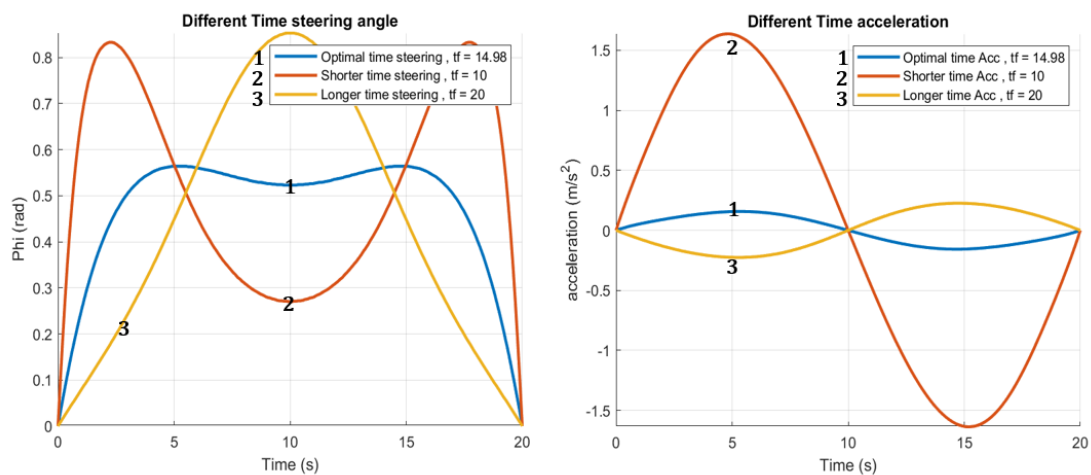


圖 4-2

傳統最佳路徑時距求解係透過複雜的數值優化技術，如梯度下降、SQP(Sequential Quadratic Programming)等來求解每段路徑之時間成本函數，本研究透過離散路徑點幾何特性進行最佳路徑時距求解，避免了複雜的數值方法。

參考兩路徑點的位置及姿態(圖 4-3):

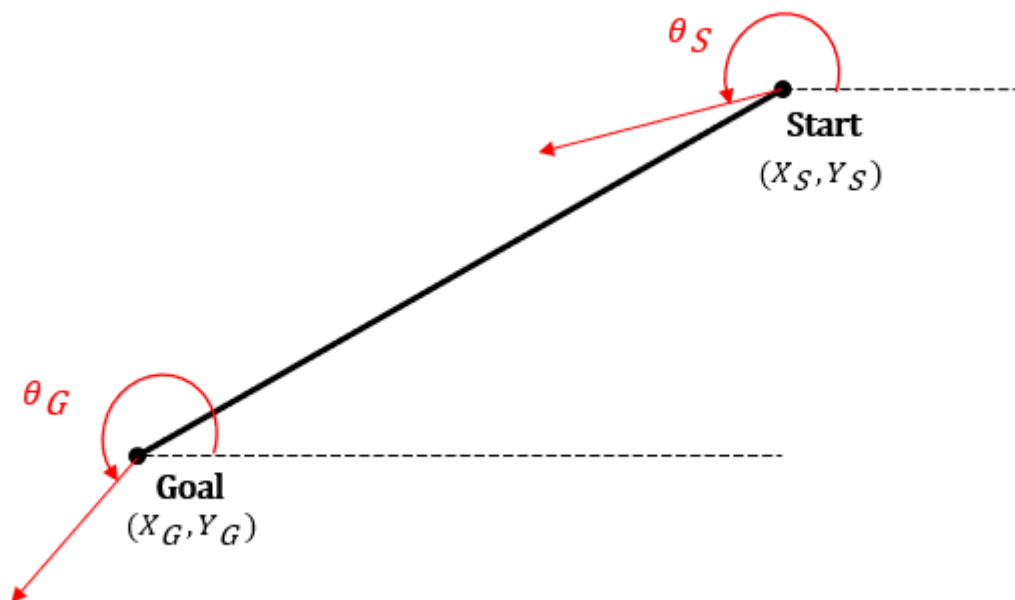


圖 4-3

此時載具兩端點指向角(Heading angle)  $\theta_S$ 、 $\theta_G$  朝向第三象限，因此規劃的路徑軌跡應會落在(圖 4-4)三角形範圍內，以避免較大的指向角變化。

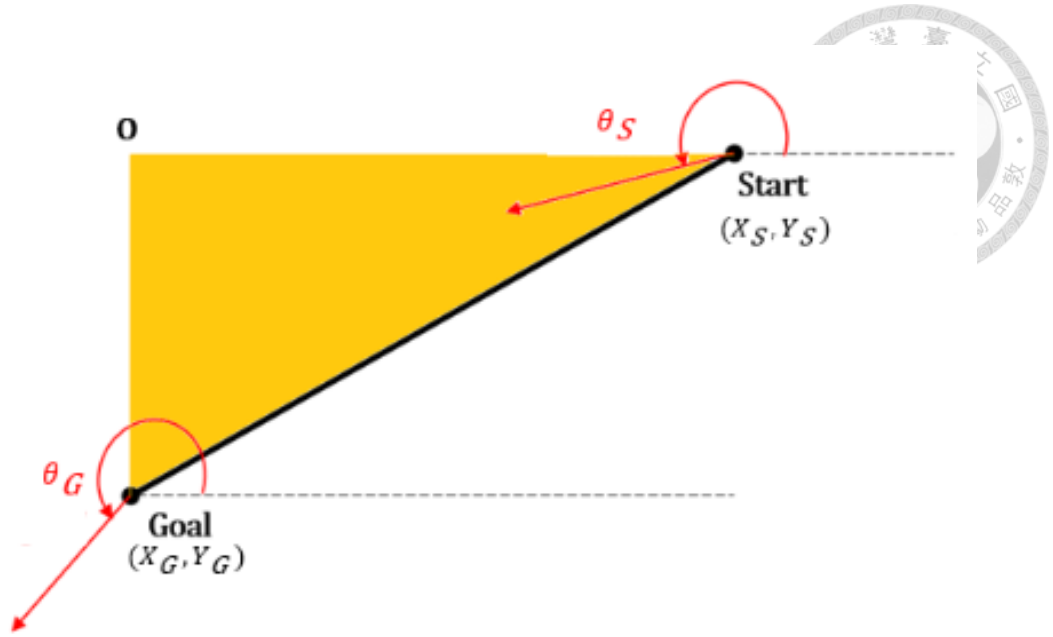


圖 4-4

在該三角形範圍內，可能路徑的最短距離 $d_s$ 為：

$$d_s = \sqrt{(X_S - X_G)^2 + (Y_S - Y_G)^2}$$

另取平滑路徑之距離上限 $d_l$ 為：

$$d_l = |(X_S - X_G)| + |(Y_S - Y_G)|$$

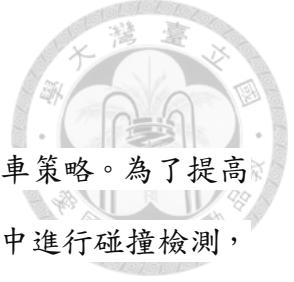
軌跡長度 $d \subseteq [d_l, d_s]$ 。另外，行走過程中要求兩端點加速度變化能較為平穩，

亦即速度變化愈線性愈好，因此可以定義路徑時距的下限與上限。

$$t_{f\_lower} = \frac{2 \times d_s}{(V_S + V_G)}$$

$$t_{f\_upper} = \frac{2 \times d_l}{(V_S + V_G)}$$

其中 $V_S$ 、 $V_G$ 為兩端點之速度。我們將 $t_{f\_upper}$ 及 $t_{f\_lower}$ 作為遍歷 $t_f$ 之上下限，透過不斷迭代並計算轉向角變化率(Steering angle changing rate)，我們選擇轉向角變化率最為平緩之路徑時長 $t_f$ 作為最佳路徑時距。



## 4.2 碰撞檢測

傳統倒車入庫仰賴感測器即時的碰撞檢測，再決定下一步停車策略。為了提高安全性，本研究在停車前先進行初步路徑預規劃，在預規劃過程中進行碰撞檢測，根據檢測結果決定合適的姿態調整及專家停車策略。

倒車屬於在狹縫中運動的問題，本研究考慮長形載具幾何特性，提升了可行路徑的靈活性。前述微分平坦輸出點為後輪軸中心，利用其位置求得載具四角之座標(圖 4-5)，當軌跡生成後，即可得出載具四點行進中軌跡，並進行碰撞檢測。

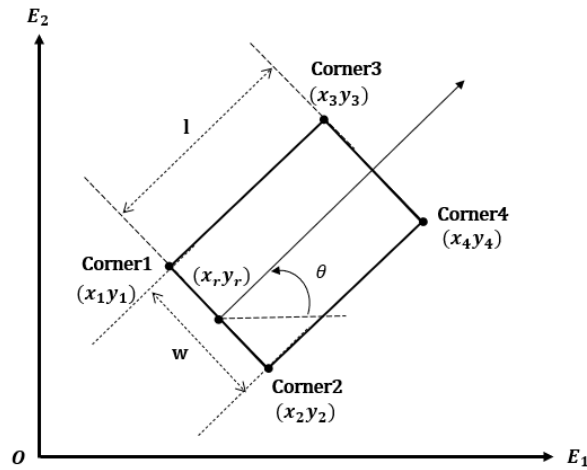


圖 4-5

其中 $w$ 為載具寬度、 $l$ 為載具長度。

四角座標為：

$$\begin{aligned} x_1 &= x_r - \frac{w}{2} \cos(\theta - 90^\circ) & y_1 &= y_r - \frac{w}{2} \sin(\theta - 90^\circ) \\ x_2 &= x_r + \frac{w}{2} \cos(\theta - 90^\circ) & y_2 &= y_r + \frac{w}{2} \sin(\theta - 90^\circ) \\ x_3 &= x_1 - l \sin(\theta - 90^\circ) & y_3 &= y_1 + l \cos(\theta - 90^\circ) \\ x_4 &= x_2 - l \sin(\theta - 90^\circ) & y_4 &= y_2 + l \cos(\theta - 90^\circ) \end{aligned}$$

求得載具四角之座標後即可得到載具運動時四角之軌跡，(圖 4-6)為載具四角行進過程中之軌跡，進行碰撞檢測後，判斷無落入障礙物車格內。其中藍線表示前方角之軌跡，綠線表示後方角之軌跡。

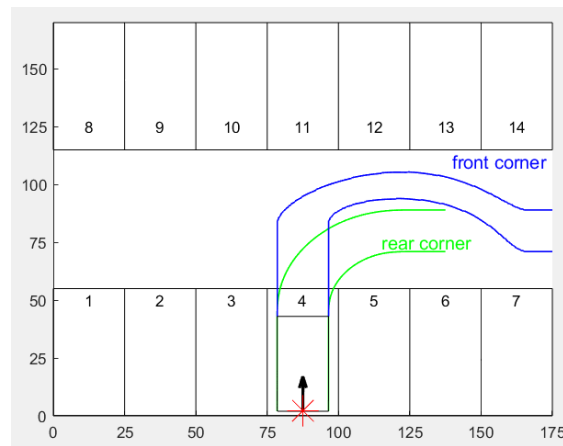


圖 4-6

### 4.3 專家停車策略

傳統自動停車仰賴當下汽車姿態與車格之相對位置，與車格距離過近會導致多段式停車。本研究在路徑規劃中採用了兩種停車策略，使汽車能夠透過調整姿態並使用合適的專家停車策略順利停進車格內，克服了汽車起始位置及姿態的限制。

本論文停車策略參考自昱全駕駛學院所提供之停車方法，透過當前載具與車格之距離，決定停車的方法。首先，採用一次到位停車策略進行停車，該策略為汽車與車格縱向 $D_y$ 及橫向 $D_x$ 具有足夠之距離時，當汽車後照鏡與四號車格中線對齊(即距離目標車格 P 一個半車格寬度的距離)開始轉向(圖 4-7)。而所需縱向 $D_y$ 及橫向 $D_x$ 距離根據每部車之大小及轉向限制而異。

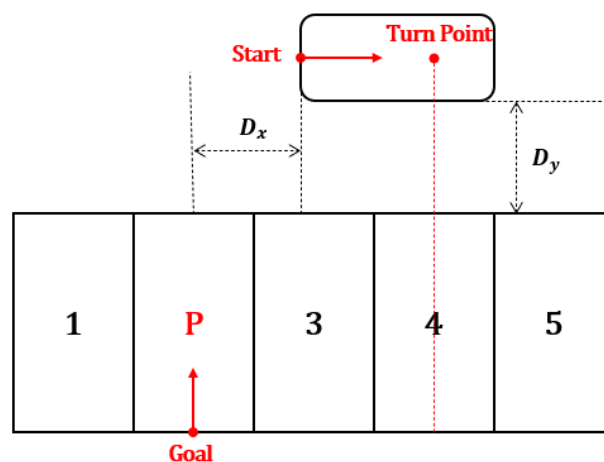


圖 4-7

給定載具起始姿態與最終停車姿態，由上述方式進行一次路徑預規劃及碰撞檢測，若發生碰撞則表示載具與車格橫、縱軸( $D_x$ 、 $D_y$ )距離並不恰當，需採用多段式姿態調整之停車策略。

多段式姿態調整之停車策略(圖 4-8)先將汽車開至車頭與目標車格 P 左側切齊處(Stage1)，接著往前開至後照鏡與四號車格左線切齊處(Stage2)，車頭指向角朝向  $45^\circ$ ，且另一側後照鏡看的到目標車格角落後開始倒車入庫。

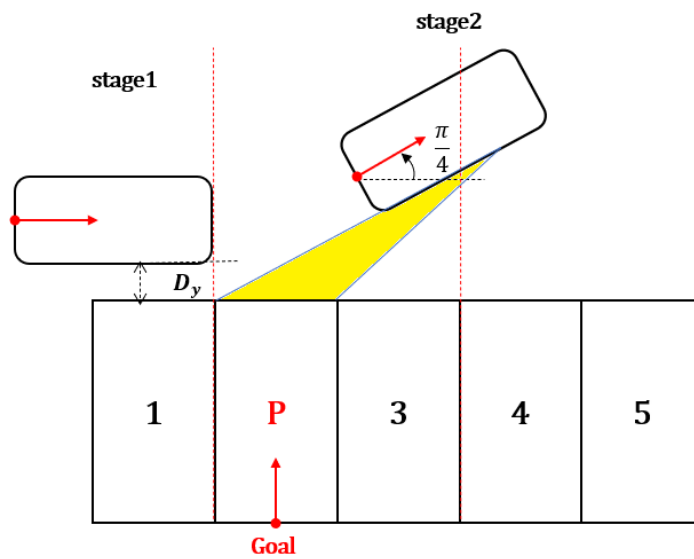


圖 4-8



#### 4.4 基於微分平坦之停車路徑規劃演算法流程圖

本研究以貪婪演算法(Greedy Algorithm)為基礎，透過不斷迭代得出全局最優解。首先透過 RRT\* 生成起點至終點無碰撞路徑，並選取適量離散路徑點作為微分平坦之路徑端點，提供端點訊息包括位置、朝向角、速度、加速度。接著，開始遍歷路徑時長  $t_f$  並計算該時長所生成路徑之轉向角變化率  $\dot{\phi}_{diff}$ ，當遍歷完後選擇轉向角變化率  $\dot{\phi}_{diff}$  最小所對應的時距作為該段路徑所需時間，接著生成下一段路徑。當所有路徑軌跡生成後，檢查載具四周是否會發生碰撞，若會發生碰撞，則採用多段式姿態調整之停車策略，並透過相同的步驟直到停入車格內。

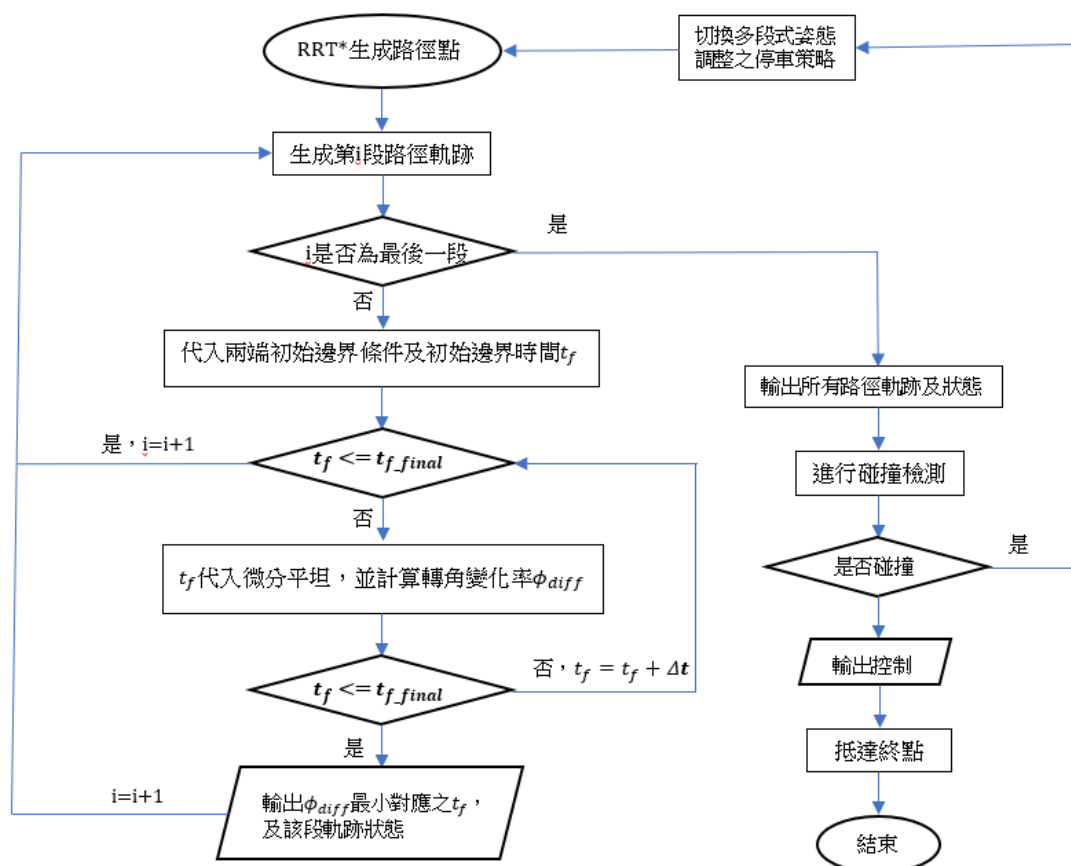


圖 4-9

## 第五章 實驗設備及模擬與實驗結果



### 5.1 硬體設備

#### 5.1.1 無人載具(Automated Guided Vehicle)

為了滿足論文中阿克曼轉向之非完整約束，過往實驗室所採用的兩輪差速無人載具設備並不適用，本實驗乃使用由利基科技公司所客製化的阿克曼轉向無人載具(圖 5-1)。載具為後輪傳動，以電控馬達控制後輪之轉速，前輪透過大扭力舵機連桿同步轉向機構進行轉向。此外，載具額外搭載 RespBerry PI 控制器、9 軸 MEMS 感測器、無線通訊模組等。本實驗在載具頂部放置標定板讓魚眼鏡頭進行定位。

標定板(圖 5-2)由同心圓及黑白條紋組成。其中，同心圓進行定位，條紋部份進行姿態判定。



圖 5-1



圖 5-2

阿克曼轉向無人載具控制輸入為後輪軸中心速度與轉向角，然而利基科技公司所提供之轉向角輸入為轉向馬達扭矩。因此，我們透過輸入不同的轉向數值計算該輸入下的轉彎半徑，利用阿克曼模型公式 $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{L}{R}\right)$ ，回推轉向角度 $\phi$ ，其中 $L$ 為軸長， $R$ 為轉彎半徑。最後構建轉向角度 $\phi$ 與無人載具輸入之關係式。我們設定無人載具左轉轉向角輸入為-10 至 60，右轉轉向角輸入為-10 至-70 記錄其轉彎半徑並回推轉向角度 $\phi$ ，其紀錄結果如圖 5-3、圖 5-4 所示，其中  $y$  為控制輸入、 $x$  為實際轉向角度。

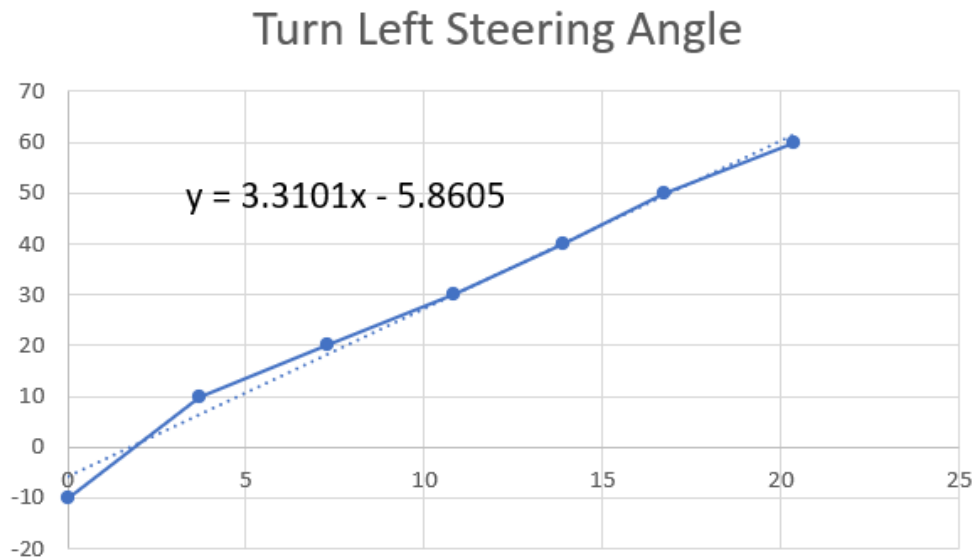


圖 5-3

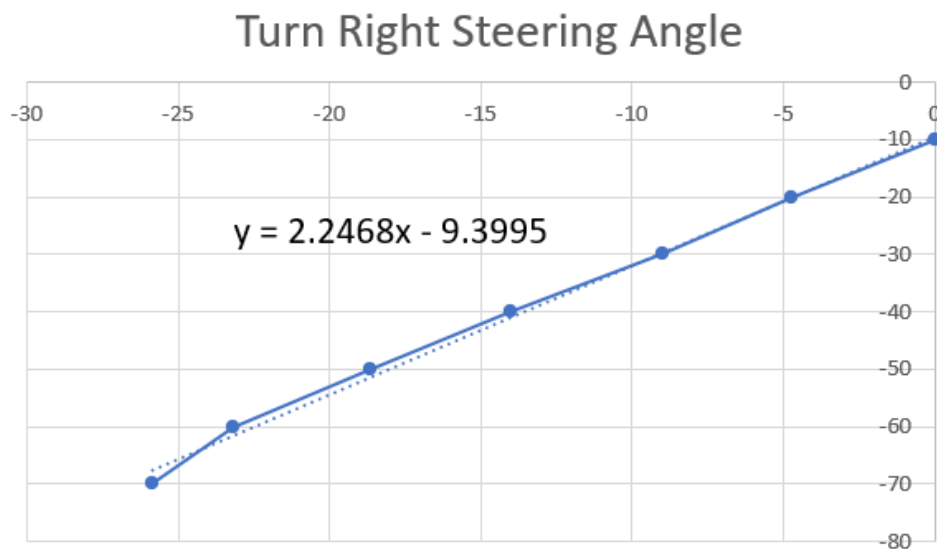


圖 5-4

### 5.1.2 網路攝影機

實驗中使用偉勝科技公司 AXIS M3006V 網路攝影機(圖 5-5)捕捉載具及障礙物的影像。AXIS M3006V 網路攝影機規格如表 5-1 所示。



圖 5-5

表 5-1: AXIS M3006V 網路攝影機規格

|                      |                                            |
|----------------------|--------------------------------------------|
| <b>Image sensor</b>  | 1/3.6"(effective)progressive scan RGB CMOS |
| <b>Lens</b>          | 1.6mm, M12 mount, F2.8, Fixed iris         |
| <b>Angle of view</b> | Horizontal: 135°、Vertical : 99°            |
| <b>Resolution</b>    | 2048 × 1536(3MP)                           |
| <b>FPS</b>           | 30                                         |



### 5.1.3 工作站設備

實驗中使用 ASUS ExpertBook B1500CBA\_B1508CBA\_T 筆記型電腦(圖 5-6)作為核心演算法之工作站。規格如表 5-2 所示。



圖 5-6

表 5-2:ASUS ExpertBook B1500CBA\_B1508CBA\_T 規格

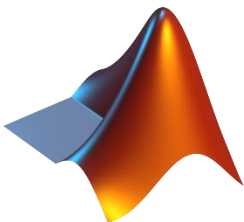
|     |                                                 |
|-----|-------------------------------------------------|
| OS  | 65Bits Windows 11 Pro                           |
| CPU | 12 <sup>th</sup> Gen Intel(R) Core(TM) i7-1255U |
| GPU | Intel(R) UHD Graphics                           |
| RAM | 8 GB DDR5 3200 MHz                              |
| 硬碟  | 512G M.2 NVMe PCIe® 3.0 SSD                     |



## 5.2 實驗軟體

本研究使用 MATLAB 進行模擬，進行演算法的驗證。實驗階段將 MATLAB 代碼轉以 C++ 編譯，選定 Visual Studio 2019 做為系統整合之開發環境，並應用 OpenCV 函式庫進行影像處理的工作。如表 5-3 所示：

表 5-3:實驗軟體

| MATLAB                                                                            | C++                                                                               | Visual Studio                                                                      | OpenCV                                                                              |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |  |

## 5.3 系統整合

整體實驗架構如(圖 5-7)所示，透過網路攝影機捕捉載具及障礙物之姿態與位置，影像資訊透過乙太網路傳入工作站中，透過演算法進行路徑規劃及控制設計，最後透過 Wi-Fi 將控制指令傳給無人載具進行移動。



圖 5-7



## 5.4 控制系統

控制系統目的在透過計算當下與較目標狀態的誤差，回授誤差並調整系統輸出控制，使系統能夠克服外在干擾，保持穩定，與理想軌跡更加貼合。本研究採用模糊控制理論進行實際應用。

### 5.4.1 模糊控制

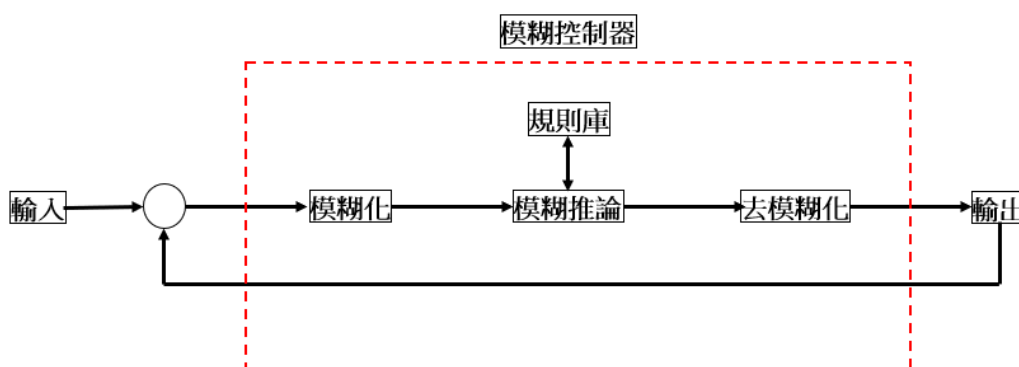


圖 5-8

模糊控制器是一種模糊邏輯的控制系統，主要處理帶有模糊性、不確定性的控制問題，適用於傳統數學模型難以建立的情況。其理論核心思想在於使用模糊集合來描述和處理輸入和輸出變量，這些集合允許對象以一定程度（介於 0 和 1 之間的數值）隸屬於某一類別，而非傳統的全屬於或全不屬於。

首先，建立一組模糊化的隸屬函數將輸入數值轉換成模糊集合，接著，透過建立好的模糊規則庫進行推論，最後，將規則庫推論的結果去模糊化得到最終控制輸出。

模糊控制的好處在於我們可以將專家的經驗，或是透過知識轉化成控制器的規則庫，從而實現有效的控制策略。



## 5.4.2 規則庫設計

本研究中使用的模糊控制器輸入為當前載具位置與目標追點位置距離誤差 $d_e$ 、及兩點方向角之差值 $\phi_e$ 。輸出為轉向角 $\theta$ 及固定後輪中心速度 $u$ 。其中速度輸出固定為 40，其隸屬函數如下：

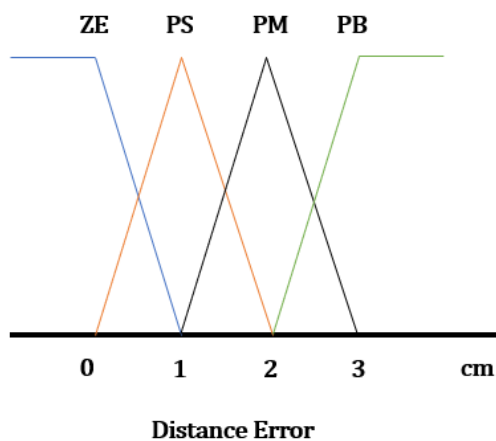


圖 5-9 距離誤差隸屬函數

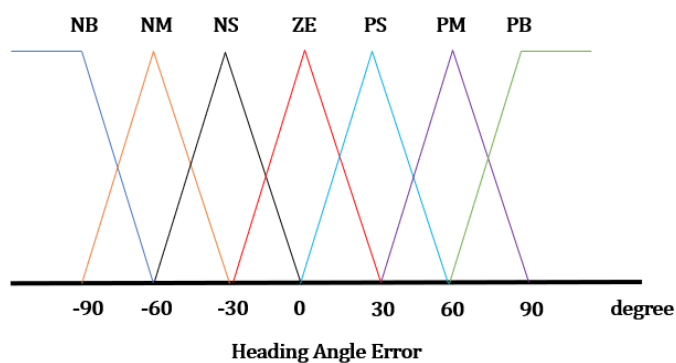


圖 5-10 角度誤差隸屬函數

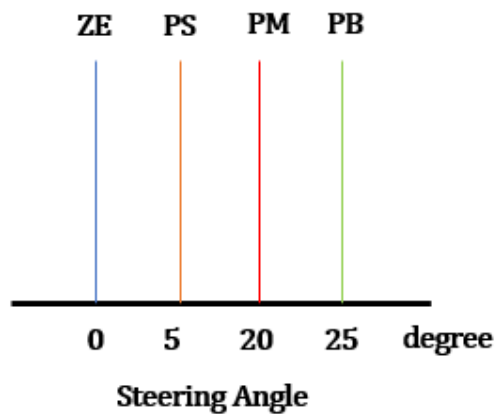


圖 5-11 隸屬函數輸出



定義完隸屬函數後，依據經驗建立模糊控制器規則庫，如表 5-4 所示。主要目的在於：當距離過遠、角度誤差過大，則提高轉向角度修正方向。

表 5-4:模糊控制器規則庫

| $\theta_e \backslash d_e$ | NB     | NM     | NS     | ZE     | PS     | PM     | PB     |
|---------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\phi$                    | $\phi$ | $\phi$ | $\phi$ | $\phi$ | $\phi$ | $\phi$ | $\phi$ |
| ZE                        | ZE     | ZE     | ZE     | ZE     | ZE     | ZE     | ZE     |
| PS                        | ZE     | ZE     | ZE     | PS     | PS     | PM     | ZE     |
| PM                        | ZE     | ZE     | ZE     | PM     | PS     | PM     | ZE     |
| PB                        | ZE     | ZE     | ZE     | PB     | PM     | PB     | ZE     |

## 5.5 模擬結果

本章節介紹由第三章算法及第四章策略之模擬結果，使用 Matlab 模擬阿克曼轉向載具的停車情況，根據不同的起始姿態停入車格。模擬中停車格長度為 5.5 公尺、寬 2.5 公尺，載具長度為 4.4 公尺、寬 1.8 公尺，轉向角限制為  $42^\circ$ 。

### 5.5.1: 一次到位停車策略-與車位距離適當

紅色米字號為停車終點，紅線為後輪軸中心軌跡，藍線為前輪軌跡，綠線為後輪軌跡。模擬中起點姿態為  $[x_s \ y_s \ \theta_s \ \phi_s \ u_s \ \mu_{s2}] = [137.5 \ 80 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ ，終點姿態為  $[x_G \ y_G \ \theta_G \ \phi_G \ u_G \ \mu_{G2}] = [87.5 \ 2 \ \frac{\pi}{2} \ 0 \ 0 \ 0]$ 。圖 5-6 為倒車軌跡與行走過程中之控制及姿態參數。

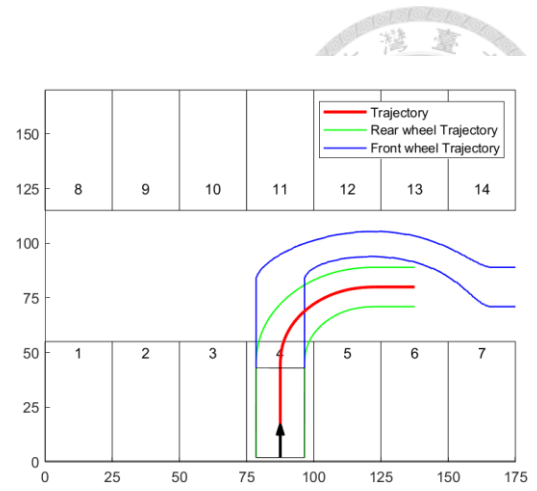
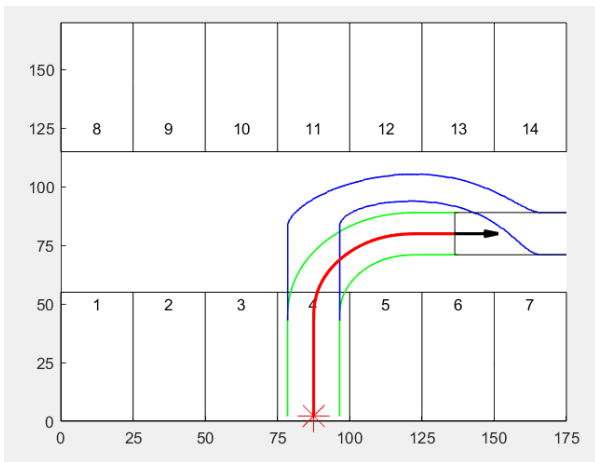


圖 5-12

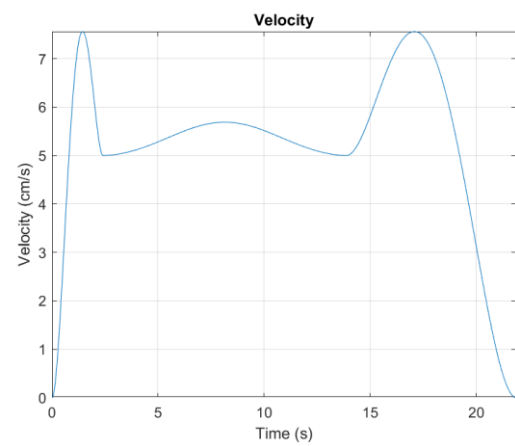
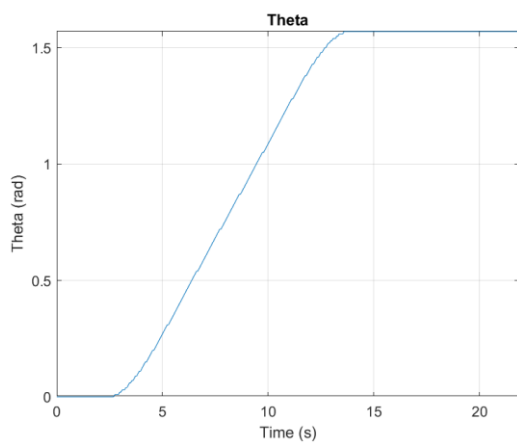
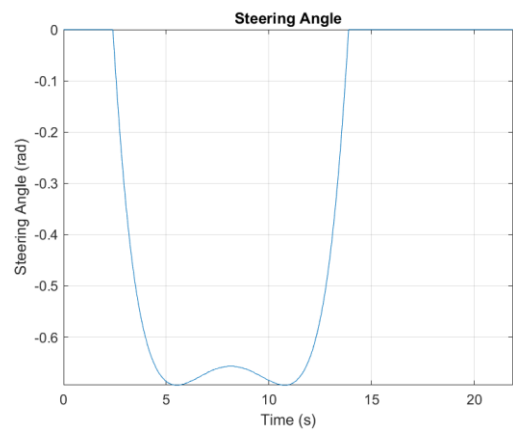
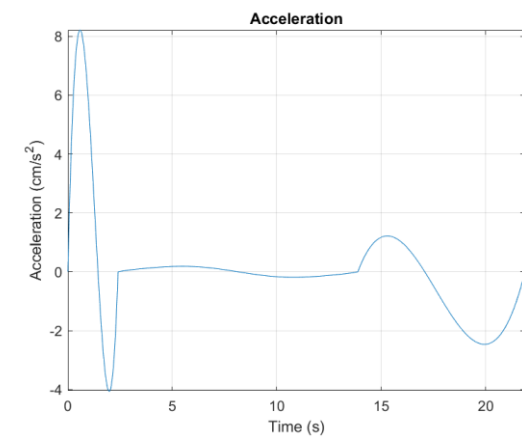


圖 5-13 加速度(左上)/轉向角(右上)/朝向角(左下)/速度(右下)



## 5.5.2: 一次到位停車策略-與車位橫向距離過近

當載具起始位置與車格之橫向距離過近，導致汽車無法一次停好，透過一次到位停車策略，載具會調整起始姿態位置，使其一次停入。模擬中起點姿態為

$[x_s \ y_s \ \theta_s \ \phi_s \ u_s \ \mu_{s2}] = [137.5 \ 80 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ ，終點姿態為 $[x_G \ y_G \ \theta_G \ \phi_G \ u_G \ \mu_{G2}] = [112.5 \ 2 \ \frac{\pi}{2} \ 0 \ 0 \ 0]$ 。

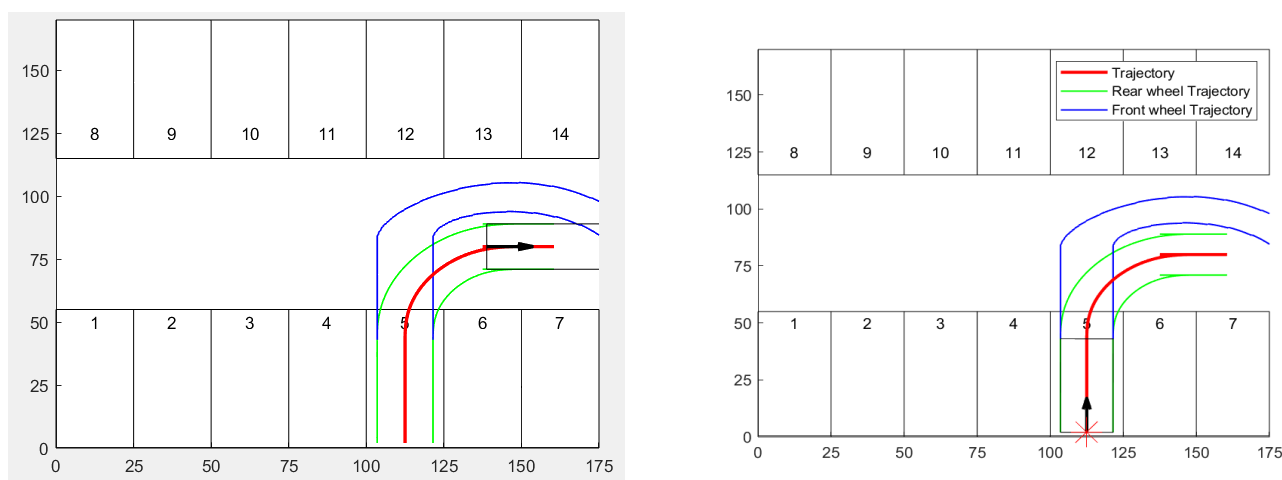


圖 5-14

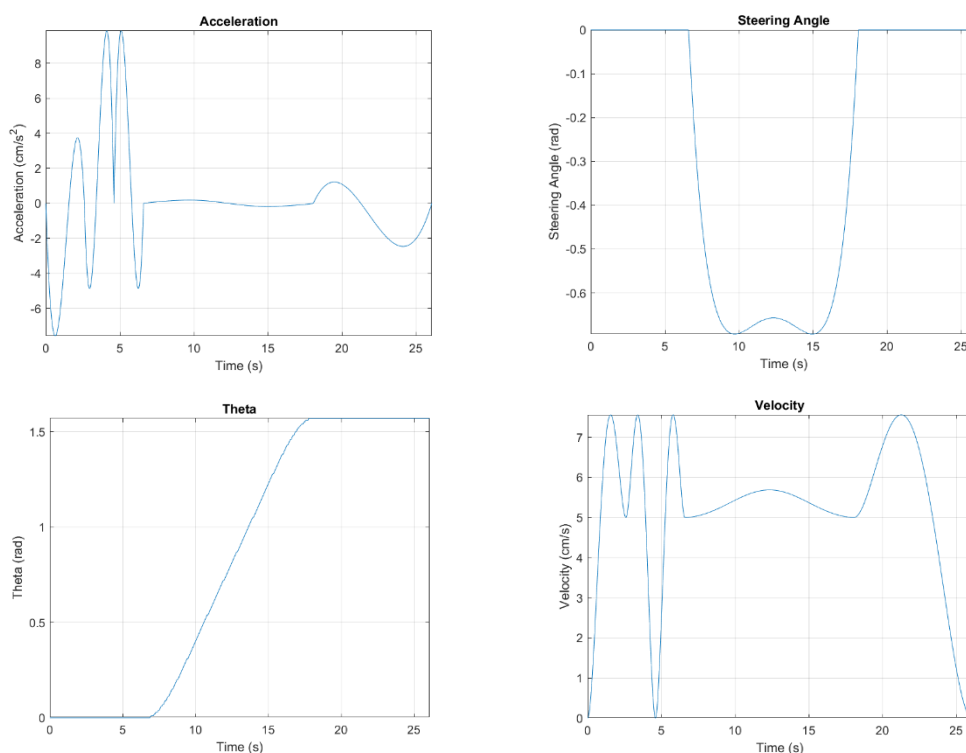


圖 5-15 加速度(左上)/轉向角(右上)/朝向角(左下)/速度(右下)



### 5.5.3: 多段式姿態調整停車策略-載具過大

當載具過大，即使使用一次到位停車策略導仍無法一次停好，則使用多段式姿態調整停車策略。模擬中，載具車寬改為 2.2 公尺，起點姿態為  $[x_s \ y_s \ \theta_s \ \phi_s \ u_s \ \mu_{s2}] = [137.5 \ 80 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ ，終點姿態為  $[x_G \ y_G \ \theta_G \ \phi_G \ u_G \ \mu_{G2}] = [112.5 \ 2 \ \frac{\pi}{2} \ 0 \ 0 \ 0]$ 。

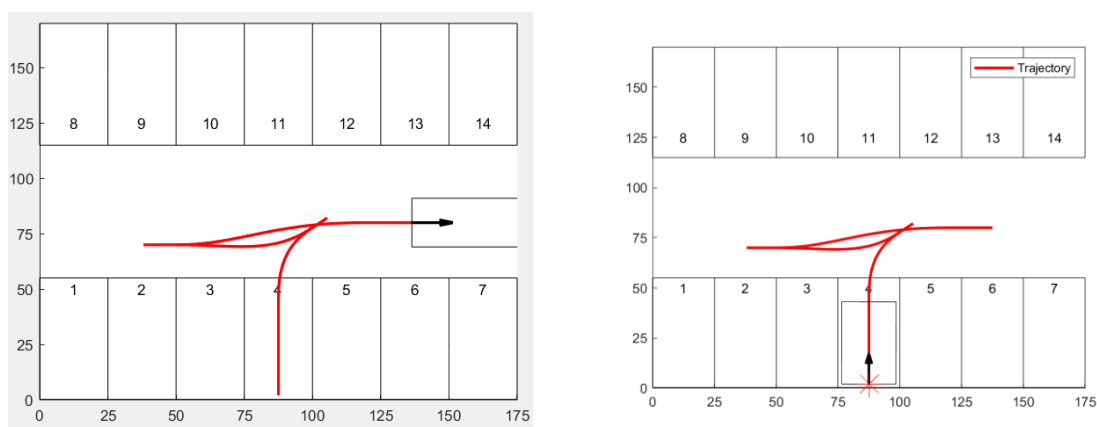


圖 5-16

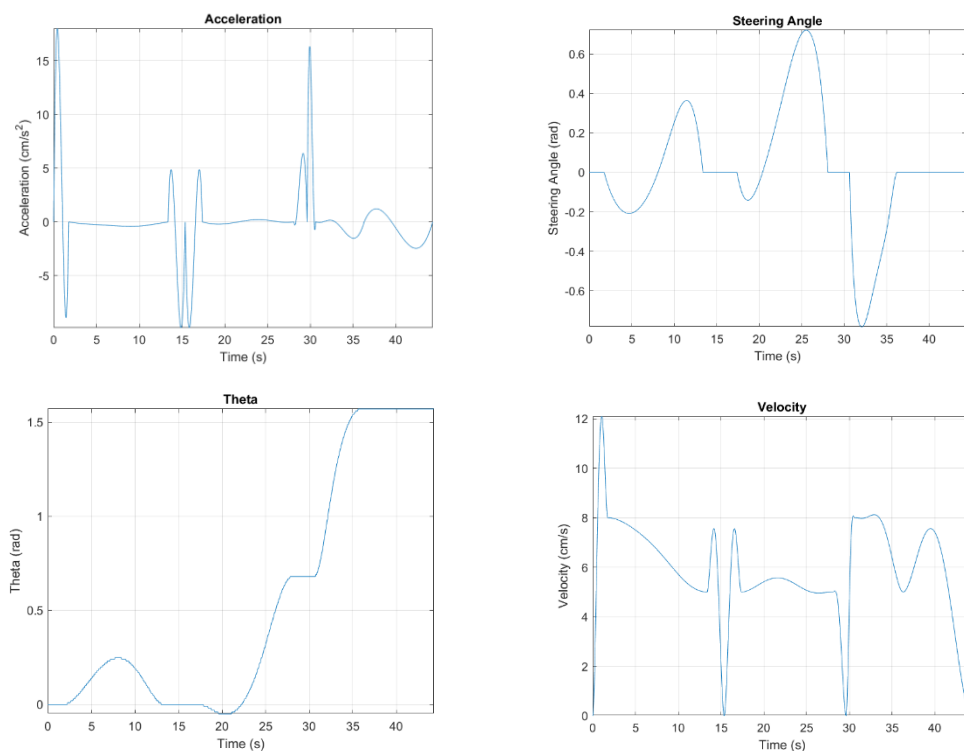


圖 5-17 加速度(左上)/轉向角(右上)/朝向角(左下)/速度(右下)



#### 5.5.4: 多段式姿態調整停車策略-與車位縱向距離過近

當載具起始位置與車格之橫向距離過近，即使使用一次到位停車策略導仍無法一次停好，則使用多段式姿態調整停車策略。模擬中，載具與車格距離約 40 公分，令起點姿態為  $[x_s \ y_s \ \theta_s \ \phi_s \ u_s \ \mu_{s2}] = [137.5 \ 70 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ ，終點姿態為  $[x_G \ y_G \ \theta_G \ \phi_G \ u_G \ \mu_{G2}] = [112.5 \ 2 \ \frac{\pi}{2} \ 0 \ 0 \ 0]$ 。

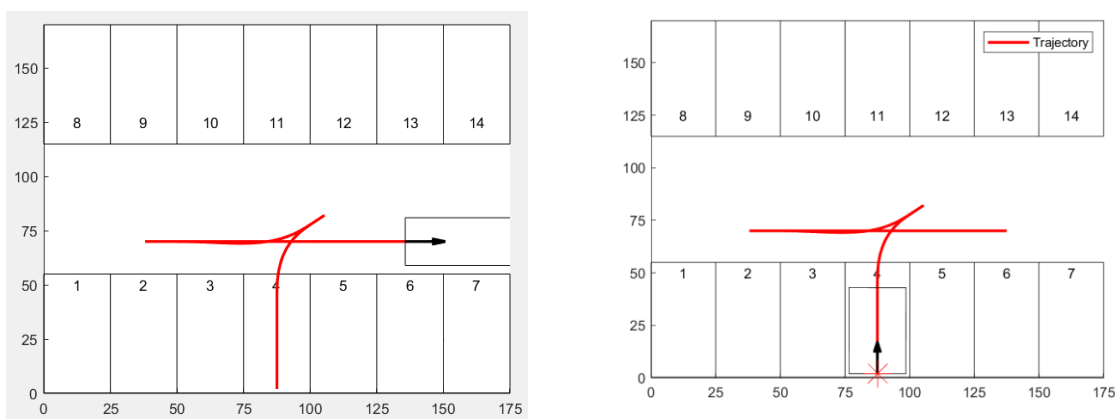


圖 5-18

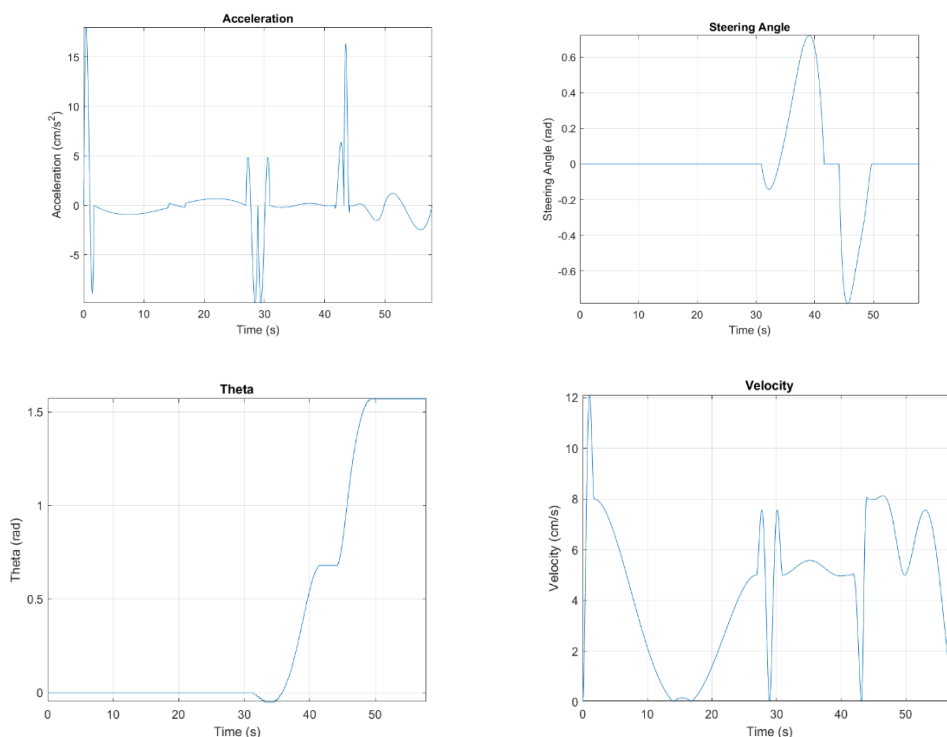


圖 5-19 加速度(左上)/轉向角(右上)/朝向角(左下)/速度(右下)



### 5.5.5: 直直停入

在 5.4.1 中可以觀察出前輪軌跡在轉向時，車頭會有較大之擺動，因此直直停入所需之橫、縱向距離較大，令起點姿態為 $[x_s \ y_s \ \theta_s \ \phi_s \ u_s \ \mu_{s2}] = [187.5 \ 125 \ \pi \ 0 \ 0 \ 0]$ ，終點姿態為 $[x_G \ y_G \ \theta_G \ \phi_G \ u_G \ \mu_{G2}] = [87.5 \ 2 \ \frac{3\pi}{2} \ 0 \ 0 \ 0]$ 。

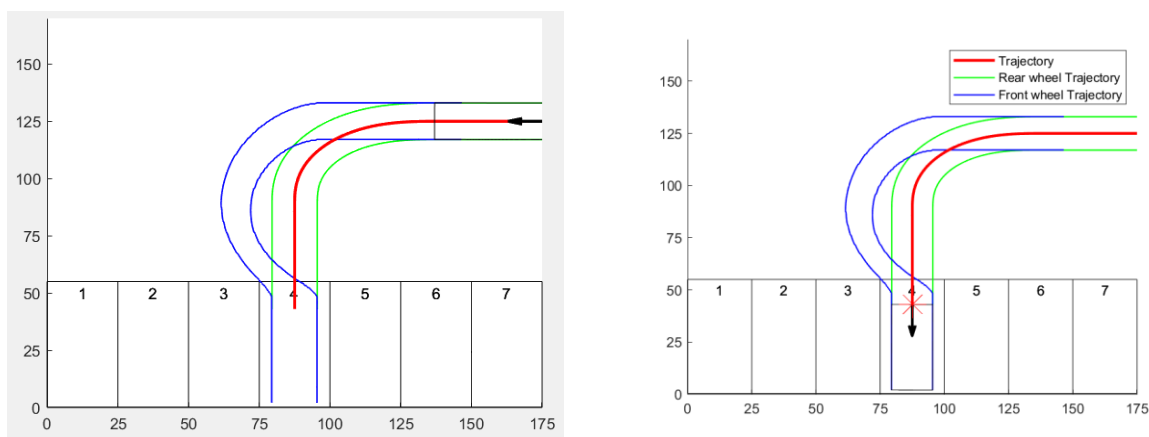


圖 5-20

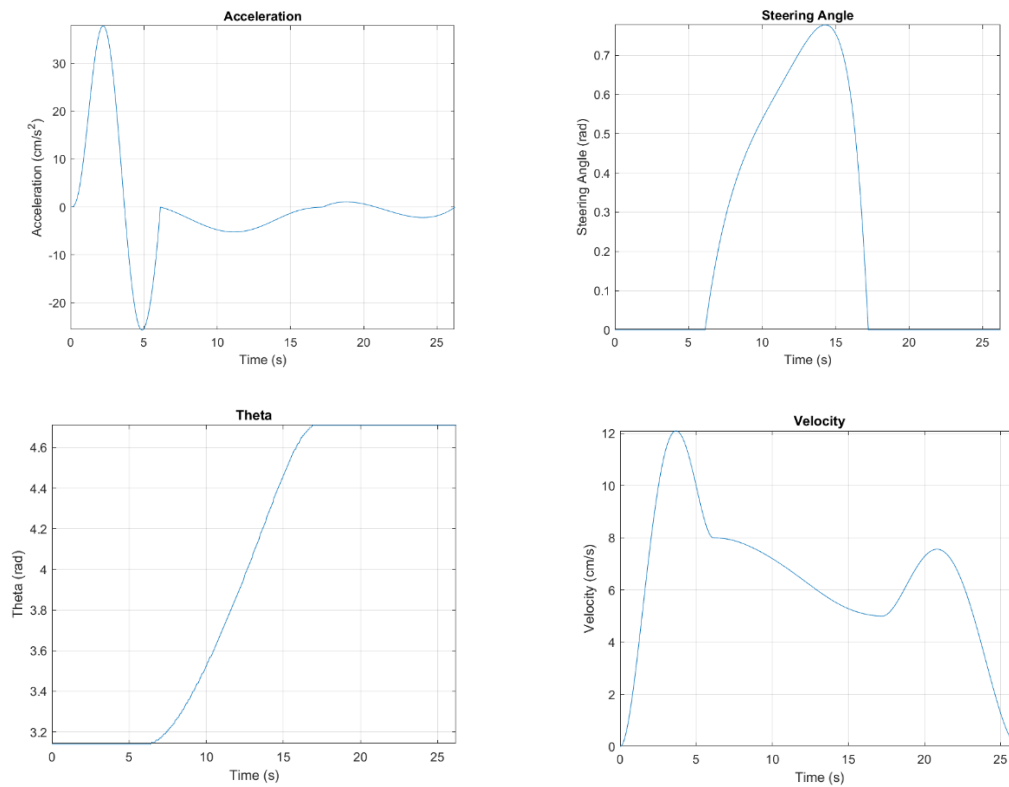


圖 5-21 加速度(左上)/轉向角(右上)/朝向角(左下)/速度(右下)



### 5.5.6: 直直停入-縱向距離過近

當載具與車格縱向距離過近，需往上繞行，使其具備足夠縱向距離能夠直直停入。令起點姿態為  $[x_s \ y_s \ \theta_s \ \phi_s \ u_s \ \mu_{s2}] = [187.5 \ 95 \ \pi \ 0 \ 0 \ 0]$ ，終點姿態為  $[x_G \ y_G \ \theta_G \ \phi_G \ u_G \ \mu_{G2}] = [87.5 \ 46 \ \frac{3\pi}{2} \ 0 \ 0 \ 0]$ 。

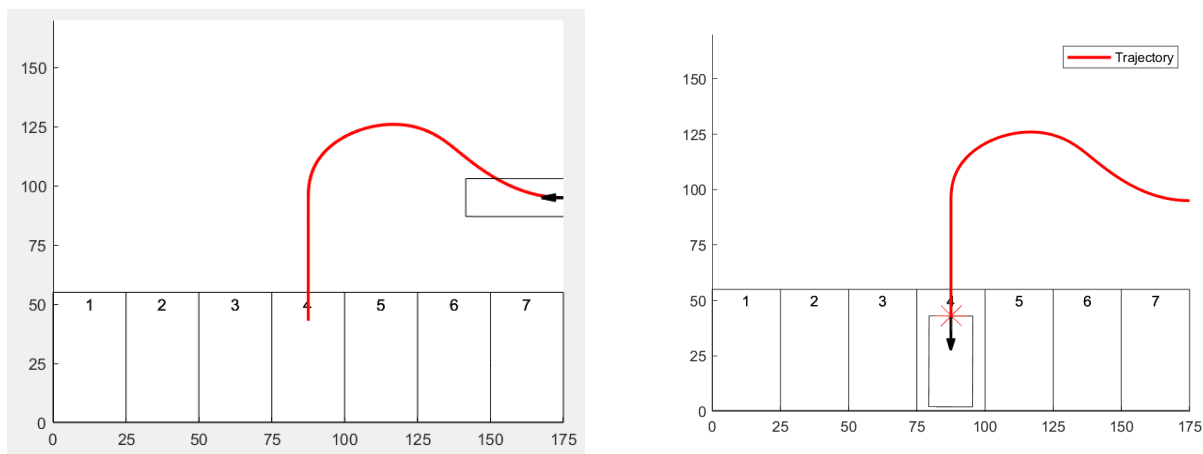


圖 5-22

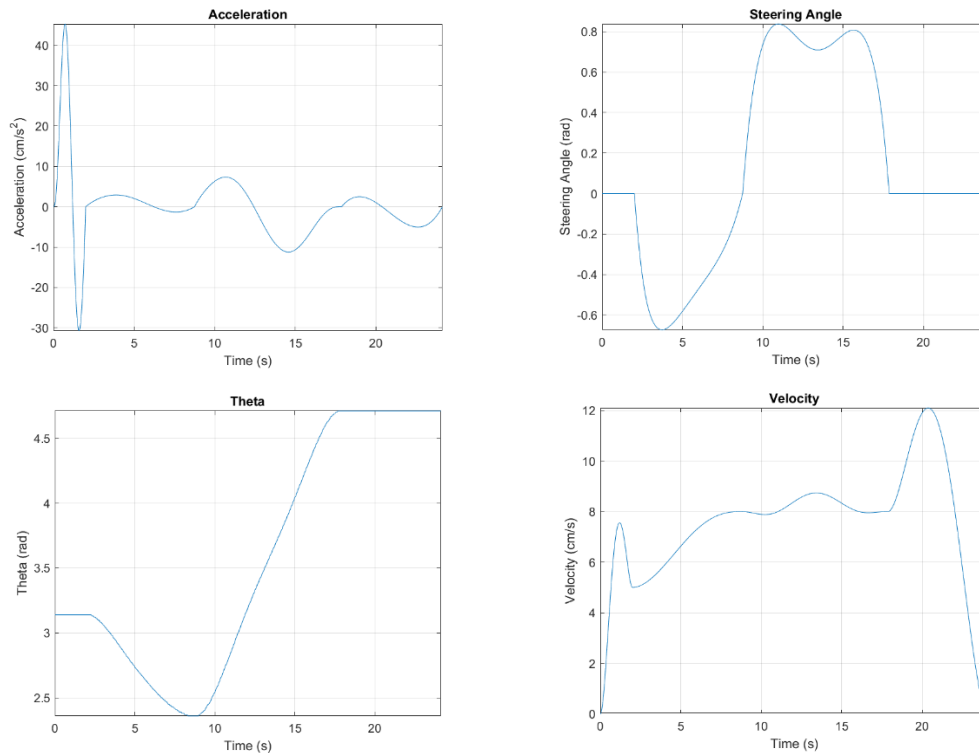


圖 5-23 加速度(左上)/轉向角(右上)/朝向角(左下)/速度(右下)



### 5.5.7 模擬結果討論

本程式實驗模擬中，縮放實際停車場與汽車之大小，並根據不同之停車格與載具起始位置，以及考慮載具幾何大小及轉向限制之因素，選擇合適之停車策略。

首先，5.5.1 至 5.5.6 模擬中在每一次停車執行前，會根據載具的幾何資訊與姿態進行一次碰撞檢測，這麼做是為了避免傳統的多段式停車，減少事故發生的機率，根據第一次的路徑預規劃與碰撞檢測來判斷是否需調整姿態已完成停車任務。

接著，模擬 5.5.1 與模擬 5.5.2 中，載具可根據車格的相對位置判定是否需要調整姿態避免多段式停車策略。模擬 5.5.3 與模擬 5.5.4 中顯示出當載具過大或是起始位置不佳，無法使用一次到位停車策略，則採用多段姿態調整之停車策略。模擬 5.5.5 與模擬 5.5.6 中顯示本演算法可以支持直直停入的停車情境。

## 5.6 實驗結果

本研究實驗採用 5.1 至 5.3 小節之軟硬體設備，及前面章節之演算法架構。配合控制系統與影像處理之理論進行實驗。實驗場地為 325 實驗室，室內實驗場域大小為  $3.45 \times 2.66(m^2)$ ，控制目標為影像中右下放置綠底紅線標定版之載具，目的地為影像中的車格。目標車格的選取利用實驗室天網路攝影機抓取車格影像，將影像中的 RGB 轉換為灰度值並計算其平均值，若車格內停有車子，則平均值會高於空閒車位，因此利用灰度平均值特徵來判斷空閒的車位編號。

### 5.6.1 一次到位停車策略-與車位距離適當

實驗中，輸入目標車格，載具會停入該車格內。在路徑圖中車格與車格編號由螢光綠線條表示，載具路徑由紅線表示。本次實驗目標車格編號為 4，載具起始狀態為  $[408 \ 194 \ 0]$ ，終點狀態為  $[227.5 \ 45 \ \frac{\pi}{2}]$ (圖 5-24)。影像中，目標車格以金色膠條表示，尺寸為寬 43cm、高 54cm。

為滿足實驗室阿克曼載具轉向角限制及專家停車策略，若要實現一次到位停車策略，載具起始位置與目標車格之水平相對位置  $X$ (圖 5-24e)需大於 110，而與車格頂部邊緣垂直距離  $y$  需大於 70。

實驗中載具起始位置如(圖 5-24a)圖所示，此時載具距離目標車格水平距離  $x$  為 180.5、與車格頂部邊緣垂直距離  $y$  為 75。接著載具會在專家停車策略中提及的轉彎點開始轉向(圖 5-24b)。進入車格後抵達回正點後回正轉向角並停入車格。



(a)起始位置



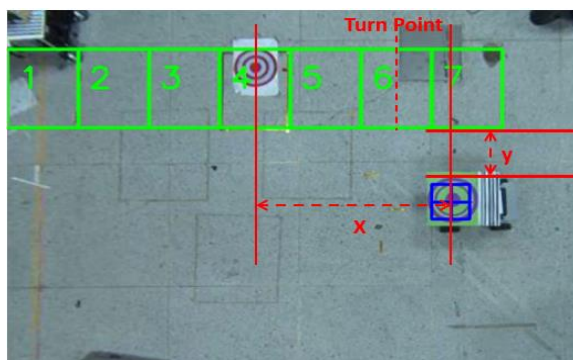
(b)起始轉向



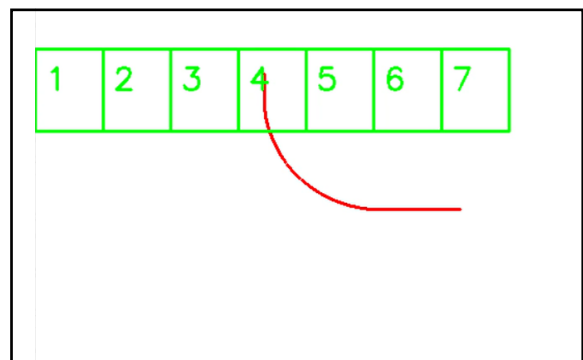
(c)進入車格



(d)回正停入車格



(e)載具與車格相對位置

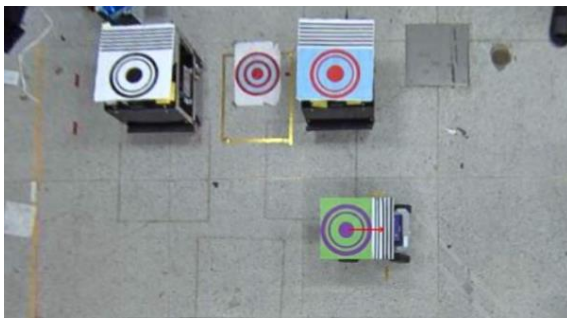


(f)停車路徑圖

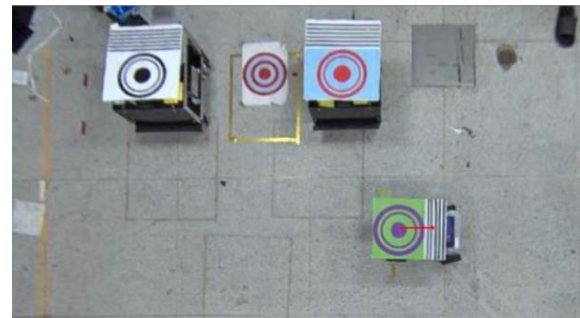
圖 5-24

### 5.6.2 一次到位停車策略-與車位橫向距離過近

實驗目標車格編號為 4，載具起始狀態為[294 200 0]，終點狀態為[227.5 45  $\frac{\pi}{2}$ ](圖 5-25)。本實驗中載具距離目標車格水平距離 X 為 66.5，與車格頂部邊緣垂直距離 y 為 81，起始位置小於理想的目標車格水平距離，因此載具需向前調整姿態後才能使用策略一將載具停入車格內。



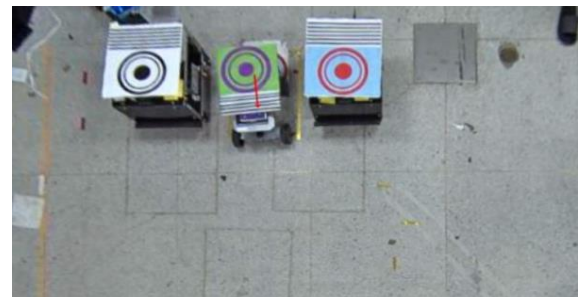
(a)起始位置



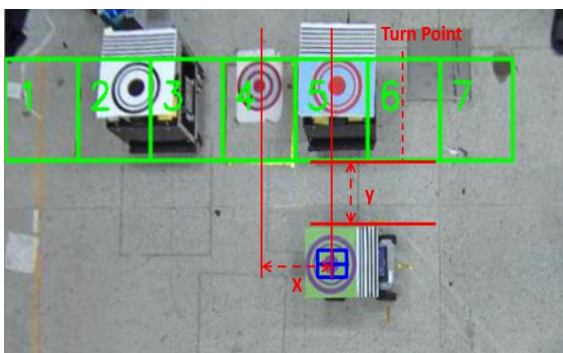
(b)往前調整姿態



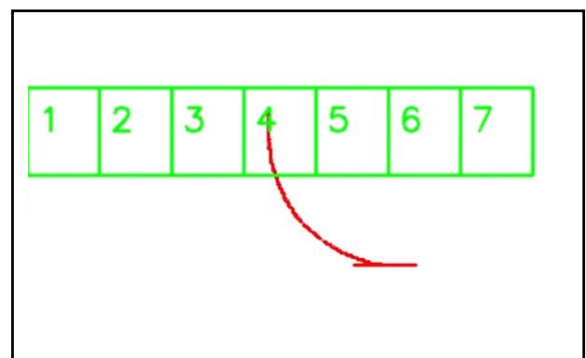
(c)起始轉向



(d)回正停入車格



(e)載具與車格相對位置



(f)停車路徑圖

圖 5-25

### 5.6.3 多段式姿態調整停車策略-與車位縱向距離過近

實驗目標車格編號為 4，載具起始狀態為 $[315 \ 173 \ 0]$ ，終點狀態為 $[227.5 \ 45 \frac{\pi}{2}]$ (圖 5-26)。本實驗中載具距離目標車格水平距離  $X$  為 87.5，與車格頂部邊緣垂直距離  $y$  為 54，起始位置與目標車格縱向距離過近，因此採用策略二支停車策略以完成停車任務。



(a)起始位置



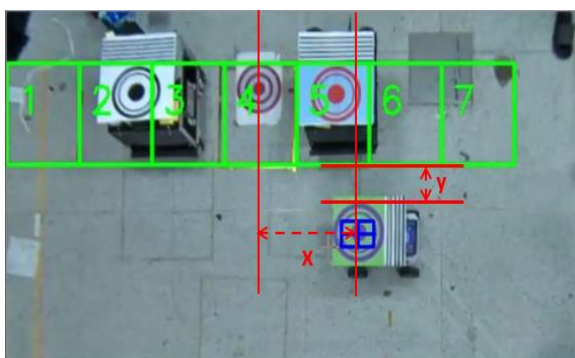
(b)抵達 Stage1



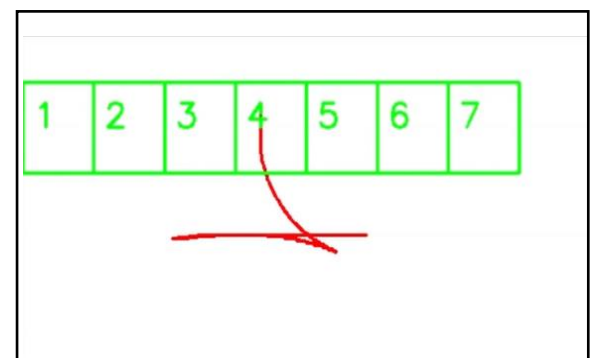
(c) 抵達 Stage2



(d)回正停入車格



(e)載具與車格相對位置

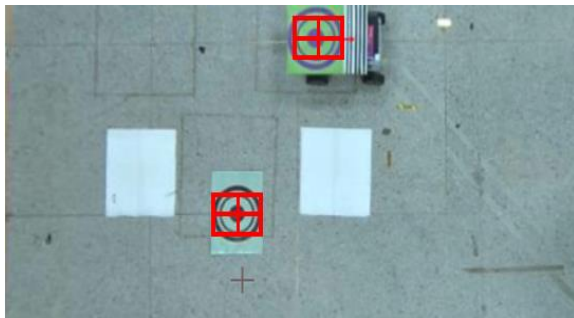


(f)停車路徑圖

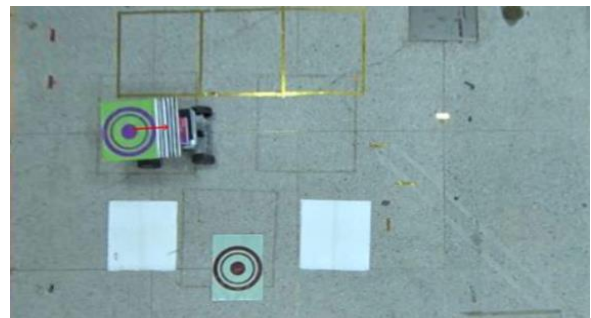
圖 5-26

#### 5.6.4 自選車位多段式姿態調整停車策略

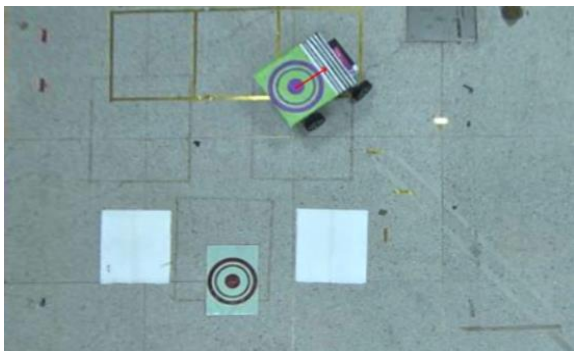
本實驗中，不指定特聽停車格，改為在場域中隨機擺放標定板做為停車終點(圖 5-27)，載具起始狀態為 $[287 \ 151 \ 0]$ ，終點狀態為 $[219 \ 278.5 \ \frac{\pi}{2}]$ ，其載具距離目標車格水平距離  $X$  為 68，與車格頂部邊緣垂直距離  $y$  為 48.5，因此採用策略二完成停車任務。



(a)起始位置



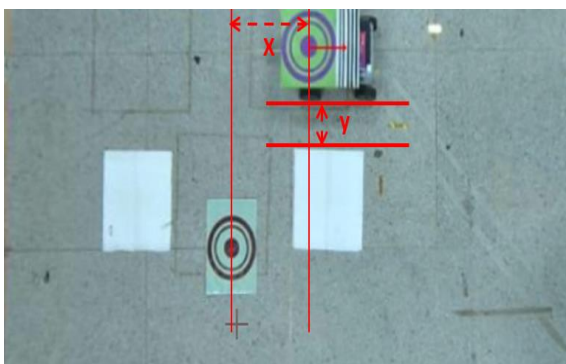
(b)抵達 Stage1



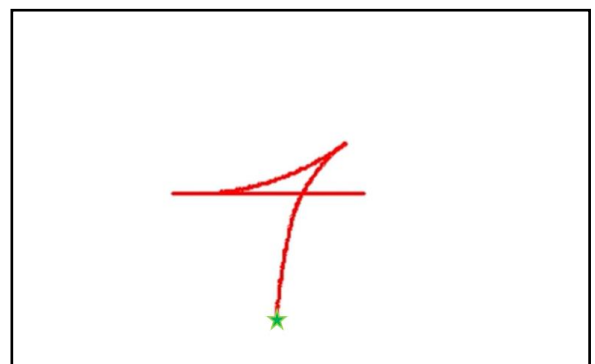
(c)抵達 Stage2



(d)回正停入車格



(e)載具與車格相對位置



(f)停車路徑圖

圖 5-27

## 第六章 結論與未來方向



本研究所提出之自動停車演算法結合動力學理論及微分平坦理論，參考載具之幾何與轉向限制，提出一個低運算複雜度及靈活之路徑生成算法，並引入姿態調整策略及專家停車策略，使其避免傳統自動停車會發生的車格內擦撞。此外，本演算法在開始停車前透過一次路徑預規劃及碰撞檢測來選擇合適的姿態調整策略與停車策略。經模擬證實，本研究可以適用於各式大小之家庭用車完成停車任務，根據起始狀態、幾何大小、轉向限制進行姿態調整，避免車格內多段式停車，可以大大降低汽車對感測器及起始狀態的依賴性，提升停車的安全性與乘客的信賴程度。實驗結果也顯示，本研究所設計之軌跡可順利完成自動停車的目標，且當無人載具起始位置相對車格位置不佳時，能夠透過調整姿態並使用適當之停車策略完成停車任務。

本研究基於阿克曼單車模型的微分平坦性，根據其非完整運動約束，利用微分平坦算法計算出符合約束之運動軌跡及控制輸出。為了實現低運算複雜度，算法中透過幾何方式迭代出最佳路徑耗時，避免傳統數值積分之方法。此外，本研究之概念亦可套用在任何具有微分平坦性的模型系統，如：無人機、機械手臂...等。對於具有微分平坦性的模型，可以根據其運動約束，透過微分平坦算法進行路徑規劃。

對於未來方向，本研究所設計之車格均為平面車位，市面上之自動停車也僅能在平面車位上使用，若能加入機械車位之倒車入庫演算法，將汽車開上機械車位斜坡上之影響納入路徑規劃之考慮，即可更加完善自動倒車的功能，且該功能更為大家所需。

## 參考文獻



- [1] Noto, Masato, and Hiroaki Sato. "A method for the shortest path search by extended Dijkstra algorithm." Smc 2000 conference proceedings. 2000 ieee international conference on systems, man and cybernetics.'cybernetics evolving to systems, humans, organizations, and their complex interactions'(cat. no. 0. Vol. 3. IEEE, 2000.
- [2] DUCHOŇ, František, et al. Path planning with modified a star algorithm for a mobile robot. Procedia engineering, 2014, 96: 59-69.
- [3] SUN, Xiaoxun; YEOH, William; KOENIG, Sven. Moving target D\* lite. In: Proceedings of the 9th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems: volume 1-Volume 1. 2010. p. 67-74.
- [4] ZHENG, Kaiyu; LIU, Shan. RRT based path planning for autonomous parking of vehicle. In: 2018 IEEE 7th Data Driven Control and Learning Systems Conference (DDCLS). IEEE, 2018. p. 627-632.
- [5] BOHLIN, Robert; KAVRAKI, Lydia E. Path planning using lazy PRM. In: Proceedings 2000 ICRA. Millennium conference. IEEE international conference on robotics and automation. Symposia proceedings (Cat. No. 00CH37065). IEEE, 2000. p. 521-528.
- [6] FU, Weiwei, et al. Research on automatic parking path optimization based on Ackerman model. Academic Journal of Computing & Information Science, 2022, 5.8: 50-57.
- [7] DUBINS, Lester E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents. American Journal of mathematics, 1957, 79.3: 497-516.
- [8] KIRK, Donald E. Optimal control theory: an introduction. Courier Corporation, 2004.
- [9] REEDS, James; SHEPP, Lawrence. Optimal paths for a car that goes both forwards

and backwards. Pacific journal of mathematics, 1990, 145.2: 367-393.

[10]連敏智，“船運動之最佳化設計”，台灣大學應用力學驗就所碩士論文，中華民國八十七年。

[11] FLIESS, Michel, et al. Sur lessystèmesnon linéaires différentiellement plats. CR Acad. Sci. Paris, 1992, 619.

[12] FRANCH, Jaume; RODRIGUEZ-FORTUN, José Manuel. Control and trajectory generation of an ackerman vehicle by dynamic linearization. In: 2009 European Control Conference (ECC). IEEE, 2009. p. 4937-4942.

[13] HAN, Zhichao, et al. Differential flatness-based trajectory planning for autonomous vehicles. arXiv preprint arXiv:2208.13160, 2022.

[14] MURRAY, Richard M.; RATHINAM, Muruhan; SLUIS, Willem. Differential flatness of mechanical control systems: A catalog of prototype systems. In: ASME international mechanical engineering congress and exposition. 1995. p. 349-357.

[15] 昱全道路駕駛 <https://www.drivinginstruct.com/parking/>

[16] ZARGARI, Noa; LEVRON, Yoash; BELIKOV, Juri. Optimal control of energy storage devices based on Pontryagin's minimum principle and the shortest path method. In: 2019 IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies Europe (ISGT-Europe). IEEE, 2019. p. 1-5.

