國立臺灣大學工學院土木工程學系

碩士論文

Department of Civil Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master’s Thesis

黏彈性海床上波與結構物問題分析

Analysis on wave-structure interaction above a viscoelastic seabed

林業凱

Yeh-Kai Lin

指導教授：詹益齊教授

Advisor: I-Chi Chan

中華民國 114 年 2 月

February, 2025

doi:10.6342/NTU202500715

摘要

浮式防波堤的應用領域十分廣泛，浮式防波堤能保護港口、風力發電機組、養殖區等，域創造平靜的水域，保護其免受強烈海浪和風暴的損害。對於浮式平台的解析研究，大多將平台下方簡化為一固定底床，或一簡單黏性牛頓流體。本文將以解析解的方式，考慮水波通過一具有黏彈性底泥的水面障礙物。

本文假設黏彈性底泥屬邊界層厚度等級，將黏彈性底床帶入動量方程式，得出底泥與水域交界面的關係並作為水域的下邊界條件。再以特徵函數展開之方式，求解水域的勢能函數，解決週期波通過一具黏彈性底床之水面障礙物時，水波、底泥及水面障礙物三者的相互關係。

在邊界層厚度等級的黏彈性底泥下，隨底泥的增厚，可以觀察到透射係數隨之增加，反射係數減少。但不論影響為何，在邊界層厚度等級底泥的前提下，影響都不大。而彈性對水波的影響，當底泥的彈性越高，底泥對水波的衰弱效果越弱。但上述影響力大都僅侷限在水波為淺水波時有較明顯的影響，當水波為深水波時底泥的影響大幅下降。

關鍵字：解析解、週期波、特徵函數展開、水面結構物、黏彈性底泥

doi:10.6342/NTU202500715

Abstract

The applications for floating breakwaters are very extensive. Floating breakwaters can function as protection of ports, wind turbine installations, aquaculture areas, and other domains by creating an area with calm waters and protecting them from strong waves or storms. In the analytical study of floating platforms, the area beneath the platform is often simplified down to a fixed seabed or modeled as a simple viscous Newtonian fluid. This paper will provide an analytical solution considering the water waves passing through a surface obstacle with a viscoelastic seabed.

In this study, it is assumed that the magnitude of the viscoelastic seabed's depth is within the realm of its boundary layer thickness. The viscoelastic seabed is incorporated into the momentum equation to derive the relationship between the seabed and the water area above it, which is used as the lower boundary condition for the upper water region. Then, using the eigenfunction expansion method, the potential function of the water region is solved, thus we'll be able to address the three way interaction between water waves, seabed, and the surface obstacle when periodic waves pass through a water surface obstacle with a viscoelastic seabed beneath.

With a viscoelastic seabed of boundary layer thickness, as the thickness of the seabed increases, the transmission coefficient increases, and the reflection coefficient decreases. However, regardless of the thickness, under the assumption of a boundary layer thickness viscoelastic seabed, the effects are not significant. The effects of elasticity on water waves shows that the higher the elasticity of the seabed, the weaker the attenuation effect on the water waves. However, most of these effects are only noticeable when the passing water waves are shallow water waves, and when the passing water waves are deep water waves, the influence of the seabed significantly diminishes.

doi:10.6342/NTU202500715

Keywords: analytic solution, periodic wave, eigenfunction expansion, surface structure, viscoelastic seabed

doi:10.6342/NTU202500715

目次

doi:10.6342/NTU202500715

doi:10.6342/NTU202500715

doi:10.6342/NTU202500715

圖次

doi:10.6342/NTU202500715

doi:10.6342/NTU202500715

表次

doi:10.6342/NTU202500715

符號表

A	係數矩陣
$A^{(i)}$	I 區勢能函數係數
a_c	波高
$B^{(i)}$	I 區勢能函數係數
B	常數矩陣
C	I 區、III 區勢能函數係數
$D^{(r)}$	II 區勢能函數係數
d	底泥厚度
$E^{(r)}$	II 區勢能函數係數
$F^{(r)}$	III 區勢能函數係數
$f^{(i)}$	代表 I 區、III 區之特徵函數
G_m	底泥之彈性模數
$G^{(i)}$	III 區勢能函數係數
g	重力加速度
H	水域深
h	II 區水深
i	單位虛數
k_c	波數

doi:10.6342/NTU202500715

$k^{(i)}$	I 區、III 區特徵函數特徵值
$k_1^{(i)}$	數值解 I 區、III 區特徵函數特徵值之初始猜值
L	障礙物一半長
P_w	水域壓力
$p^{(r)}$	代表 II 區之特徵函數
$\lvert R \rvert$	反射係數
s	障礙物吃水深
$\lvert T \rvert$	透射係數
t	時間
u_m	底泥水平速度
u_w	水域水平速度
w_w	水域垂直速度
w_m	底泥垂直速度
x_0	觀測入射波的位置
δ	底泥邊界層厚度
ϵ	波浪尖銳度
η_w	水域自由液面波高
$\lambda^{(r)}$	II 區特徵函數特徵值
$\hat{\lambda}^{(r)}$	數值解 II 區特徵函數特徵值之初始猜值

doi:10.6342/NTU202500715

μ_m	底泥動力黏度
μ_w	水域動力黏度
Π	底泥與水密度相關函數
ρ_m	底泥的密度
ρ_w	水的密度
σ	分離變數後的常數
τ_m	底泥剪力
τ_w	水域剪力
υ_{me}	底泥的黏彈性項
υ_m	底泥運動黏度
υ_w	水域運動黏度
Φ_w	水域勢能函數
$\Phi_w^{(I)}$	I 區水域勢能函數
$\Phi_w^{(II)}$	II 區水域勢能函數
$\Phi_w^{(III)}$	III 區水域勢能函數
$\phi_w^{(I)}$	I 區水域勢能函數通解
$\phi_w^{(II)}$	II 區水域勢能函數通解
$\phi_w^{(III)}$	III 區水域勢能函數通解

doi:10.6342/NTU202500715

ω	角頻率

doi:10.6342/NTU202500715

第一章 緒論

1.1 研究背景

浮式防波堤最早由 Joly (1905) 年提出，但一開始這項研究並未受到重視。直到第二次世界大戰時，盟軍為解決諾曼第大登陸時所需之平穩的海域，開著手設計第一種以浮式防波堤組成之臨時人工港，供補給船艦的停靠與登陸。1944 年 6 月，數百艘拖船拖著總計數百萬噸的混凝土浮箱從英國出發，於法國諾曼第外海一英里處搭建 Mulberry A 及 Mulberry B 人工港 (圖 1-1)。自此浮式防波堤受到了軍方的關注，開始了世人對浮式防波堤的相關研究，隨著遊艇、漁業、能源產業等的發展，浮式防波堤也開始被民間產業使用。

隨著海洋工程技術的進步，浮式防波堤的設計從簡單的浮體結構進化到各種不同形狀的浮體，新的設計不僅更加注重對環境的影響，也關注浮式防波堤的能源利用功能，結合海上風電、海洋清潔等綠色技術，實現多功能化的發展。

浮式防波堤的應用領域十分廣泛，浮式防波堤能保護港口和航道，減少波浪對船舶和碼頭的影響。在海上風電場中，浮式防波堤對海上基礎設施提供保護，減少海浪對風力發電機組的影響，提高其穩定性。漁業或養殖業中，浮式防波堤被用來為養殖區域創造平靜的水域，保護其免受強烈海浪和風暴的損害。浮式防波堤也被用於海灘度假村、休閒設施等場地，提供穩定的水面條件，供遊客安全使用水上活動設施。而在某些地區，浮式防波堤也可作為災後緊急防護措施，快速安裝以應對突發的海嘯或暴風雨。

在力學方面，許多對浮式防波堤的研究大多假設結構物下方為固定底床，具無滑移邊界條件，未考慮流質底泥。本文以黏彈性底泥作為水域的下邊界，同時考慮並比較浮式防波堤本身的大小以及底泥的黏性及彈性，探討底泥對水波通過浮式結構物後的影響。

doi:10.6342/NTU202500715

圖 1-1 Mulberry B 港空照圖，於法國諾曼第阿羅芒什萊班，Mulberry 人工港為二戰時盟軍為登陸諾曼第登陸所搭建的臨時人工港，可看到港口內相對平靜的水面。Royal Air Force official photographer (October 27, 1944)

doi:10.6342/NTU202500715

1.2 文獻回顧

1.2.1 浮式防波堤

浮式防波堤相對於其他防波堤，消波成效較不受水深及水底地形及地質條件所限制，且較不受潮汐變化及海平面上升之影響，更適合用於大型港口或是水深較深的水域。其他如重力式防波堤或潛堤，因為其形狀，使得波浪通過後，會對防波堤後方海底環境造成破壞、汙染或是泥沙的淤積。浮式防波堤也能在需要的時候相對輕鬆地移動或移除以應付不同的需求。

浮式防波堤可追朔至 1811 年，英國普利茅斯的一個港口在設計防波堤時，考慮使用 117 個以木頭製成長 12 公尺、寬 9 公尺、深 9 公尺的木筏作為浮式防波堤，雖此方案最終未被採用但開始了對浮式防波堤的初步構想。Jian (2018)整理了近年來關於浮式防波堤的種種研究，並將現代常見的浮式防波堤分成大致歸類為 Box type、Pontoon type、Frame type、Mat type、Tethered float type、Horizontal plate type 等不同類型。

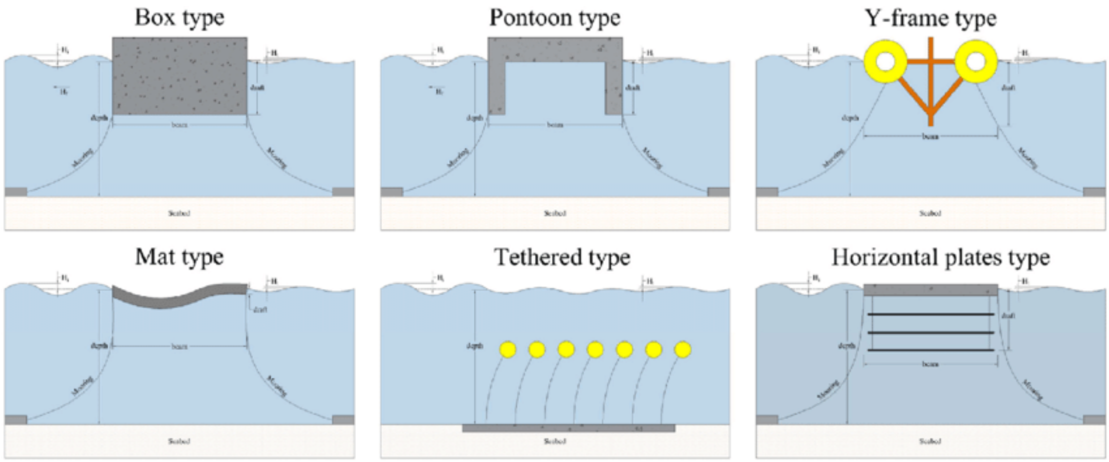


圖 1-2 Jian (2018) 所彙整之六種常見浮式防波堤示意圖

（圖片來源：A.J. Cebada-Relea (2022)）

Box type 是結構上最為單純之浮式防波堤，以纜線錨碇於海床上，藉由反射大

doi:10.6342/NTU202500715

部分的水波以達到消波的效果。因其結構及形狀簡單，故有許多解析及數值解的相關研究，其中 Macagno (1953) 假設線性水波、固定水深、結構物靜止不動的條件下推導出透射係數。Diamantoulaki and Angelides (2010) 則以數值方式模擬排列更複雜的浮式防波堤陣列並分析其消波效果。因 Box type 浮式防波堤的構造單純，故本文以 Box type 浮式防波堤作為欲求解之水面障礙物，以方便將水域依 Box type 浮式防波堤的界線分為障礙物前、障礙物下及障礙物後方三區域。

Pontoon type 浮式防波堤利用浮箱的方式，通常在兩組浮箱間架設一平台在中間相連接，與 Box-type 浮式防波堤同樣藉由反射大部分的入射波來達成消波的效果，而且 Pontoon type 浮式防波堤還能夠利用兩浮箱之間的空間提供波能的消散。相對於 Box-type 浮式防波堤，Pontoon type 浮式防波堤的結構能以更少的材料提高浮式防波堤的慣量，使之更便宜且穩定。Williams and Abul-Azm (1997) 以解析解及數值解比對分析了 Pontoon type 浮式防波堤的消波效率主要取決於防波堤的寬、兩浮箱的間距以及錨定纜線的強度。

Frame type 浮式防波堤由兩組浮條或浮箱以桁架連結組成，藉由浮箱反射水波以及由桁架產生的干涉進行消波。早期的設計因成本及資源取得容易，故使用浮木構成，現代設計考慮到強度及耐久度多以混凝土及鋼筋組成。

Mat type 浮式防波堤，相較於以浮箱組合的防波堤主要仰賴波的反射來達成消波的效果，Mat type 浮式防波堤以水波與防波堤內部表面的磨擦來達成水波的消散，此種方式能大幅減輕錨定纜線的負擔。Stitt and Noble (1963) 提出了以卡車車輪組成的浮式防波堤，Kamel and Davidson (1968) 及 Noble (1976, 1969) 針對這個設計做出分析並發現堤的寬度需要至少大於半個波長、高度大於 1.2m 才能有良好的消波效果。

Tethered float type 浮式防波堤屬於較為特別的一種浮式防波堤。Tethered float type 浮式防波堤由數個小型浮球以繫繩將其固定於水面下方漂浮於水中，相較於

doi:10.6342/NTU202500715

其他浮式防波主要仰賴反射作為主要的消波方法，Tethered float type 浮式防波堤利用浮球於水中產生的摩擦來達成其消波的效果。

Horizontal plate type 浮式防波堤由一個或數個堆疊的薄平板以數根細小的柱子固定於水中。Horizontal plate type 浮式防波堤的優勢在於其能在不需要受到水面兇猛的水面波沖刷就能達到消波效果。

1.2.2 波浪通過結構物

波浪通過障礙物的研究可藉由觀察並分析波浪與結構物接觸後產生之反射、繞射等行為，分析透射係數及反射係數。波浪在經年累月的沖刷下會對沿岸的土地造成位移或損失，亦會破壞沿岸設施，故藉由這些研究可以讓我們設計出更能有效衰弱波浪的結構物。

波浪通過水中結構物已有許多成功的解析解，但這些研究都有其各自使用上的限制，舉例來說：Dean (1945) 及 Ursell (1947) 假設水深為無限深、Dean & Ursell (1959) 設定水中障礙物為一半潛式圓柱、Newman (1965) 令水波通過一階梯式結構物等等限制。

Mei & Black (1969) 則提出不需有水深無限深或障礙物無限長等等的限制，假設水波為線性波，並通過一個矩形水面或水底障礙物，圖 1-3 為 Mei & Black (1969) 所使用之模型。Mei & Black (1969) 假設水為無黏性、無旋性並滿足拉普拉絲方程式，水底及障礙物邊界皆為不透水邊界條件，即水與邊界接觸面法線方向速度為零，而自由液面則滿足動力方程式與運動方程式。Mei & Black (1969) 成功計算出水波遇到障礙物後形成的反射波之反射係數，部分能量通過結構物上方或下方的透射波，計算出透射係數以及相位差，與實驗數據的資料比對後得到良好的結果。

doi:10.6342/NTU202500715

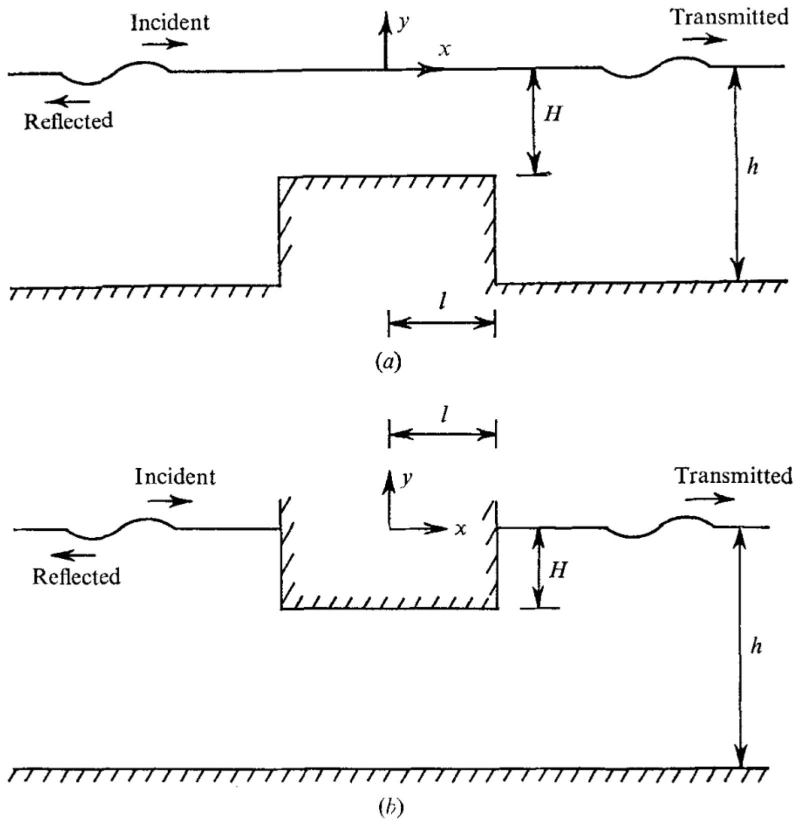


圖 1-3 Mei & Black (1969) 模型示意圖

1.2.3 波浪通過泥質底床

不管是海床亦或是河流底部皆會有沉積物的堆積，形成具有黏性的底泥，而水波於表面傳遞時會與水下之黏性泥質底床產生交互作用，造成泥沙流動，與此同時表面波也會出現衰減的情形。

以解析解分析問題能夠提供最為精確的解答，但解析解往往因數學計算上的限制使得所能處理的問題有限，且時常伴隨著特定的前提條件。在解析解的部分，Gade (1958) 在淺水波的假設下提出了上層為水域為理想流體，下層為黏性底泥的模型，通過水波為線性波，將解析結果與水槽之實驗結果進行比較驗證，發現波高會受泥床黏滯力的影響而隨傳遞距離衰減，而 Gade (1958) 的初步理論成為之後眾

doi:10.6342/NTU202500715

多學者對水域與底泥交互作用的研究基礎。Dalrymple and Liu (1978) 則基於 Gade (1958) 提出的 2-layer system 進行延伸，假設通過水波為線性波，並考慮水與底泥的黏滯性，提出了可適用任何深度的上層水域且適用厚底泥及薄底泥的 Complete Model。Dalrymple and Liu (1978) 將薄底泥模型與 Gade (1958) 驗證得出一致的結果，而在厚底泥模型中發現，當底泥厚度介於邊界層厚度的 1.1~1.5 倍時會出現最大的波浪衰減情形。Ng (2000) 假設為水面之進行波微小振幅波且底泥厚度約等同其 Stokes's boundary layer，如圖 1-4，以微擾法的方式，將各物理量以級數表示並升冪排列。在微擾法的分析下推導出流體在一階的流速、消散率及二階的底泥與水的質量傳輸速度。Ng (2000)發現在底泥厚度約為 1.5 倍底泥邊界層厚度時，黏性底泥能產生最大的波浪衰減效果，Ng (2000)認為更厚的底泥會不利於底泥的質量傳輸進而減少消波的效果。

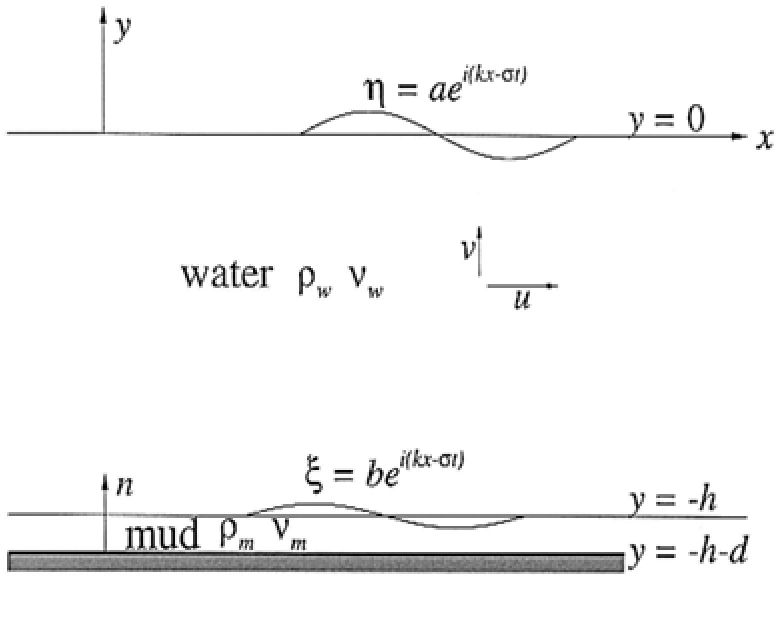


圖 1-4 Ng (2000) 波浪通過底泥示意圖

相對於解析解，實驗能夠應用的問題相對廣泛許多，只要能夠製造出符合目的之模型便能進行實驗。在實驗方面，Sakakiyama and Bijker (1989) 以黏彈性體做為底泥，研究水與底泥之交互作用，透過實驗與理論對比並以染色劑測量出質量傳輸

doi:10.6342/NTU202500715

速度，得出非線性項對波浪衰減的影響。Hsu et al.(2013) 以高領石材料混和做為底泥進行實驗，觀察其假塑性流體和賓漢流體的特性。Soltanpour et al.(2018) 則透過實驗研究當水域有水流存在時，觀察水流速度、底泥質量傳輸及波浪的衰減情形，發現當水波與水流的方向相向時，波的衰減會增加，同向時則減少。

相對以實驗分析，尤其是研究波浪等大尺度問題，數值解能夠以更便宜的方式或是解決實驗無法進行的大尺度問題，利用電腦建立數值模型進行模擬。在數值方面，Zhang and Ng (2006) 以數值方式分析上下層皆為黏性流體，探討前進波於上層水域前進時與底層流體振盪對波的造成之影響。Niu and Yu (2011) 以有限差分法製作數值模型，以黏彈性底流體做為底泥，搭配流體體積法將空氣與自由液面同步計算，並與實驗數據相比得到了良好的一致性。Hejazi et al.(2013) 以 Navier-Stokes 作為控制方程式，結合完整的動力邊界條件及運動邊界條件，得出一非線性模型，模擬出水與底泥之運動行為。發現波浪衰減會隨入射波波高的提高而降低，而越低的底泥密度會有更好的波浪衰減，並隨底泥越薄，水面行進波的波數也會降低。

doi:10.6342/NTU202500715

SH Shamsnia (2019) 將前人對水與底泥交互的研究做出了詳細的整理，並將過去各種解析、數值及實驗結果進行比較整理成表格。如下：

Model	Reference	Assumptions	Governing Equations	Dispersion Relation	Water Boundary Layer	Improvements
CM	Dalrymple and Liu [3]	Thick lower layer	Full range linearized momentum equations	implicit	Considered	Two-layer solution of Navier-Stokes equations as a first time
TL	Dalrymple and Liu [3]	Thin lower layer	Full range linearized momentum equations	implicit	Considered	Considering the thin lower layer assumptions
MP	Macpherson [4]	Thin/thick lower layer	Full range linearized momentum equations	explicit	Not Considered	Straightforward dispersion relation
Ng	Ng [5]	Thin lower layer	Boundary layer equations	explicit	Considered	Second-order solution of two-layer boundary layer equations
BL	Dalrymple and Liu [3]	Thick lower layer	Boundary layer equations/potential flows	explicit	Considered	Potential flow solutions for a thick layer of mud

表 1-1 SH Shamsnia (2019) 底泥模式比較表格

SH Shamsnia (2019) 指出 Ng (2000) 在波浪波高、速度的衰減率、速度時間序列上都得出了相比於其他模型更接近實驗的結果，但在底泥厚度增大而漸漸失準。

MacPherson (1980) 考慮當無黏性水層於黏彈性泥底之上，假設底泥為不可壓縮之黏彈性體，並使用 Voigt 模型來描述底泥的流變性質。該研究僅考慮週期波，其數學式與 Navier–Stokes 方程式相同，但將黏度項被替換為一複數參數的形式，其中實部為黏性項，虛部為彈性項。在忽略水層的黏性後，MacPherson (1980) 推導出了分散關係式和波的衰減率。他主要探討當底泥為無窮深時，若

doi:10.6342/NTU202500715

彈性為一定值，波浪衰減率會出現一個局部峰值，隨著黏度的增加，波浪的衰減率會先增大再減小。黏彈性底泥則會隨著彈性的提高，逐漸降低波浪的衰減率。

Hsiao and Shemdin (1980) 以與 MacPherson (1980) 類似的方式提出了水波與泥床交互作用的模型，同樣假設無黏性水層覆蓋於黏彈性底泥之上。水與底泥之間的動力邊界條件為總應力連續，即壓力、黏性及彈性正向應力連續。

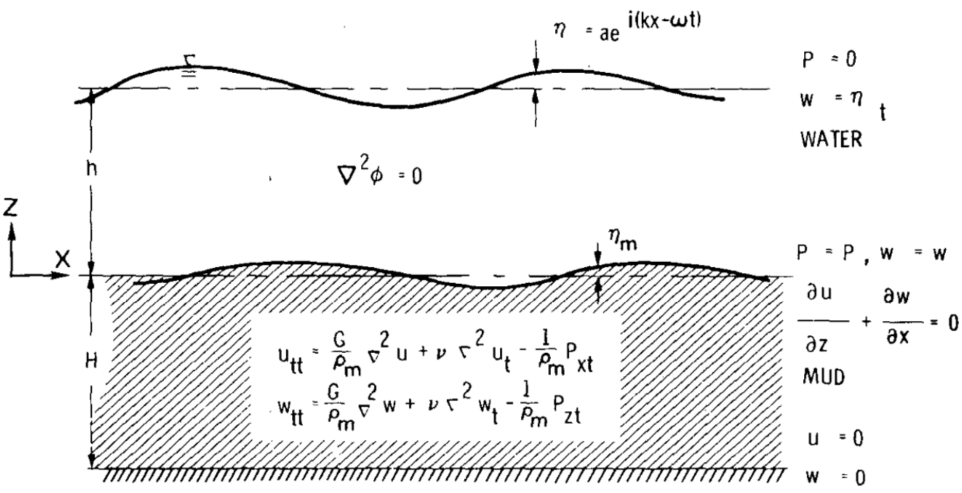


圖 1-5 Hsiao and Shemdin (1980) 模型示意圖

張(2021)將 Mei & Black (1969)中所使用之水波流經水面障礙物的問題及 Ng (2000)所使用的 2-layer system，以解析解的方式將兩者結合。假設水為無黏流，底泥為一具黏性的牛頓流體。利用邊界層厚度簡化動量方程式得到泥床上的邊界速度，並以泥床的上邊界做為水域下邊界條件，透過特徵函數展開法解決散射問題得到完整的水域勢能函數。張(2021)發現隨薄底泥的厚度增加，透射係數會提高而反射係數會降低。

doi:10.6342/NTU202500715

1.3 研究目的與方式

1.3.1 研究目的

水波傳遞的過程中會受到底泥黏滯性的影響，使其波高產生衰減。當水波通過一結構物時則會產生散射，生成出反射波與透射波。大多研究將底泥視為理想牛頓流體，本研究嘗試將底泥彈性的性質也考慮進去。海事工程大多為大尺度的工程，故本研究將欲探討的模型簡化為二維流場問題，藉此省去大量的計算資源，方便後續研究的進行。

本文從 Jian (2018)所彙整之浮式防波堤中選擇了適合本文研究的防波堤種類。Mei & Black (1969)提出了分析水波通過水面障礙物的解析解，Ng (2000)則提出了分析水波通過邊界層厚度級牛頓流體底泥的解析方式，而張(2021)則提出了將 Mei & Black (1969)與 Ng (2000)兩者著作結合的推導流程。本文希望能在此之上結合 MacPherson (1980)文中所使用的複數型黏彈性項帶入底泥的動量方程式中並提出新的見解，以解析解的方式，推導出底泥、水波及水面結構物三者交互作用下的勢能函數。

1.3.2 研究方式

現實中浮式防波堤的大小能達到數十甚至數百公尺長，相對於它的繫纜繩或錨鍊而言巨大的多，加上錨鍊多固定於底床上，故本文假設其對水流的影響可以忽略不計。

本文將參考張(2021)所使用的求解流程，並結合 MacPherson (1980)所使用的包含了黏性及彈性項的複數形式的運動黏滯係數，求解出水波通過具有黏彈性底泥的水面障礙物的勢能函數。本文將現實按理簡化為二維模型，並假設障礙物本身不會位移也不會轉動。我們令水域為一無黏性流體，且無旋並存在勢能函數。底泥厚

doi:10.6342/NTU202500715

為邊界層等級厚的不可壓縮黏彈性流體。本文模型所考慮的邊界條件包括，水域上邊界條件為自由液面運動邊界條件及動力邊界條件，配合微小震幅波原理線性化分析並簡化成頻散方程式。水域與底泥交界處物理量連續，即沿水域與底泥交界面上縱向速度、壓力、剪力連續，作為水域的下邊界及底泥的上邊界條件。而底泥的下邊界設為無滑移邊界條件，其水平速度及縱向速度皆為零。

1.4 章節架構

本文分為四大部分，第一章為介紹研究的背景、動機與目的，第二章將說明欲求解的問題及詳細的推導過程，第三章則將藉由改變底泥、水波與結構物的物理量並相互比較，藉此了解三者的交互作用關係，最後第四章將會統整出結論並提出未來可沿伸的研究方向與建議。

第一章　緒論

介紹研究的背景、動機與目的，並舉出相關的文獻回顧。

第二章　理論模式建立及解析

介紹並說明問題與欲求解的理論模型，並透過底泥與水域的各種關係條件與事先設定的假設，推導出特徵函數，再用特徵函數展開求解其中的未知係數，最後得出完整的水域勢能函數。

第三章　結果分析

藉由改變結構物的深度、底泥的厚度、底泥的彈性模數等物理量並相互比較改變前後的差別，藉此了解底泥、水波與結構物三者彼此的交互作用關係。

第四章　結論與未來展望

整理本文所得出的研究結果並提出未來可發展的方向。

doi:10.6342/NTU202500715

第二章 理論模型的建立與解析

2.1 問題描述

本文探討水波通過黏彈性底泥上方水面結構物的問題，其中水面結構物為不透水材質且水波無法從結構物上方通過。在二維週期波的前提下，解析無黏流水域與黏彈性底泥的運動情形。

本文使用二維卡氏座標 (x, z)，並參考張(2021)提出的將 Mei & Black (1969)與 Ng (2000)合併的模型，模型示意圖如圖 2-1，其中 x 軸為水平座標，波的行徑方向為正，z 軸為縱向座標，向上為正。原點 O 為障礙物水面上的中心，水波由左向右傳遞通過障礙物下方。水域為一無黏性且不可壓縮之理想流體，底泥為約為其邊界層厚度厚之不可壓縮黏彈性底泥，而水面障礙物與水域之交界具不透水層邊界條件，且我們假設水無法從障礙物上方通過。H為水深，s 為障礙物吃水深，h 為障礙物下方的水深，d 為底泥厚度，水面結構物長為 $2L$。η 為水面自由液面，ξ 為底泥液面，a_0 為入射波波高，k 為波數，ω 為角頻率。

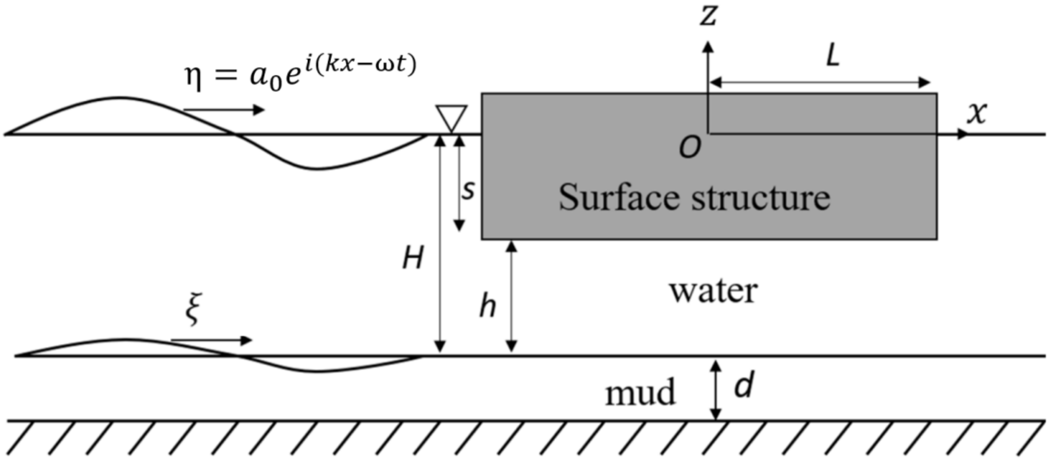


圖 2-1 本文模型示意圖

doi:10.6342/NTU202500715

2.2 控制方程式

2.2.1 水域之控制方程式

令水域為一無旋、無黏滯性且不可壓縮的二維流體，則存在一速度勢能函數 Φ_w。我們令勢能函數為

$$\Phi_w = X(x)Z(z)T(t) \tag{2.2.1}$$

其中$X(x)$為 x 方向之函數，$Z(z)$為 z 方向之函數，$T(t)$為時間函數。而勢能函數與速度的關係為

$$\nabla\Phi_w = \frac{\partial\Phi_w}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\Phi_w}{\partial z}\hat{k} = u_w\hat{\imath} + w_w\hat{k} \tag{2.2.2}$$

其中 u_w 為水域的水平速度，w_w 為水域的垂直速度。因水域為不可壓縮流體，故滿足質量守恆方程式

$$\frac{\partial u_w}{\partial x} + \frac{\partial w_w}{\partial z} = 0 \tag{2.2.3}$$

及拉普拉斯方程式

$$\nabla^2\Phi_w = \frac{\partial^2\Phi_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_w}{\partial z^2} = 0 \tag{2.2.4}$$

且水域的運動滿足伯努利方程式

$$\frac{\partial\Phi_w}{\partial t} + \frac{P_w}{\rho_w} + gz = 0 \tag{2.2.5}$$

，ρ_w 為水的密度，P_w 為水的壓力，g 為重力加速度。

doi:10.6342/NTU202500715

2.2.2 底泥之控制方程式

假設泥床為一不可壓縮之黏彈性流體，其質量守恆方程式為

$$\frac{\partial u_m}{\partial x}+\frac{\partial w_m}{\partial z}=0 \tag{2.2.6}$$

且泥床的厚度 d 為邊界層厚度 $d \cong \delta$

$$\delta=\sqrt{\frac{2\upsilon_{me}}{\omega}} \tag{2.2.7}$$

$$\upsilon_{me}=\upsilon_m+i\frac{G_m}{\rho_m\omega} \tag{2.2.8}$$

其中 υ_{me} 為代表底泥黏彈性的複數形式黏彈性項，υ_m 為泥床之運動黏滯係數，ρ_m 為底泥之密度，G_m 為底泥的彈性模數，ω 為角頻率。我們假設底泥邊界層厚度 δ 與水波之波高 a_c 為同量級。依 Ng (2000)在線性波理論下，我們令 ϵ 為波之尖銳度，與波數 k_c 關係為，$\epsilon=k_c a_c \sim k_c\delta \sim k_c d \ll 1$。則底泥之動量方程式可表示為 Ng (2000)

$$\frac{\partial u_m}{\partial t}+\epsilon u_m\frac{\partial u_m}{\partial x}+\epsilon w_m\frac{\partial u_m}{\partial z}=\frac{-1}{\rho_m}\frac{\partial P_m}{\partial x}+\upsilon_{me}\frac{\partial^2 u_m}{\partial z^2}+O(\epsilon^2) \tag{2.2.9}$$

$$0=\frac{-1}{\rho_m}\frac{\partial P_m}{\partial z}+O(\epsilon^2) \tag{2.2.10}$$

省略非線性項之後，邊界層動量方程式可表示為

$$\frac{\partial u_m}{\partial t}=\frac{-1}{\rho_m}\frac{\partial P_m}{\partial x}+\upsilon_{me}\frac{\partial^2 u_m}{\partial z^2} \tag{2.2.11}$$

$$0=\frac{-1}{\rho_m}\frac{\partial P_m}{\partial z} \tag{2.2.12}$$

其中 u_m 為底泥之水平速度，w_m 為底泥之垂直速度，P_m 為底泥的壓力。

doi:10.6342/NTU202500715

2.3 邊界條件

2.3.1 水域邊界條件

上層水域之上表面邊界條件為自由液面邊界條件

$$\frac{\partial \Phi_w}{\partial z} = \frac{\partial \eta_w}{\partial t}, \qquad z = 0, \qquad |x| > L \tag{2.3.1}$$

及動力邊界條件

$$\frac{\partial \Phi_w}{\partial t} + g\eta_w = 0, \qquad z = 0, \qquad |x| > L \tag{2.3.2}$$

將 (2.3.1)、(2.3.2) 合併得

$$\frac{\partial \Phi_w}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial t^2} = 0, \qquad z = 0, \qquad |x| > L \tag{2.3.3}$$

其中 η_w 為自由液面之波高。

我們令表面結構物為一不透水結構，結構物與水域之交界的邊界條件為

$$-\frac{\partial \Phi_w}{\partial z} = 0, \qquad -L \le x \le L, \qquad z = -s, \tag{2.3.4}$$

$$-\frac{\partial \Phi_w}{\partial x} = 0, \qquad x = -L, \qquad -s < z < 0, \tag{2.3.5}$$

$$\frac{\partial \Phi_w}{\partial x} = 0, \qquad x = L, \qquad -s < z < 0. \tag{2.3.6}$$

水域與底泥交界之邊界條件應滿足垂直速度連續

$$\frac{\partial \Phi_w}{\partial z} = w_w = w_m = \frac{\partial \eta_m}{\partial t}, \qquad z = -H, \tag{2.3.7}$$

壓力連續

$$P_w = P_m, \qquad z = -H, \tag{2.3.8}$$

doi:10.6342/NTU202500715

及剪力連續

$$\tau_w = \mu_w \frac{\partial u_w}{\partial z} = \mu_m \frac{\partial u_m}{\partial z} = \tau_m, \qquad z = -H \tag{2.3.9}$$

其中 τ_w ,τ_m 分別為水與底泥的剪力,μ_w ,μ_m 分別為水與底泥的動力黏滯係數。因為我們假設水為一無黏性流體($\mu_w = 0$),故剪力連續的條件可簡化為

$$\frac{\partial u_m}{\partial z} = 0, \qquad z = -H \tag{2.3.10}$$

2.3.2 底泥之邊界條件

泥床底部為無滑移邊界條件

$$u_m = 0, \qquad z = -H - d \tag{2.3.11}$$

$$w_m = 0, \qquad z = -H - d \tag{2.3.12}$$

底泥與上層水域交界之水平動量方程式為

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{-1}{\rho_m}\frac{\partial P_m}{\partial x} + \upsilon_{me}\frac{\partial^2 u_m}{\partial z^2}, \qquad z = -H \tag{2.3.13}$$

因水域運動滿足歐拉方程式

$$\frac{\partial u_w}{\partial t} = \frac{-1}{\rho_w}\frac{\partial P_w}{\partial x} \tag{2.3.14}$$

因入射水波為週期固定的線性波,水域勢能函數 (2.2.1) 中的時間函數可以表示為 $T(t) = e^{-i\omega t}$,利用 (2.2.2) 可將 (2.3.14) 中的壓力梯度項可改寫如下

$$\frac{\partial P_w}{\partial x} = \rho_w i\omega \frac{\partial \Phi_w}{\partial x} \tag{2.3.15}$$

將底泥與上層水域交界處上壓力連續條件 (2.3.8) 及改寫後的水域壓力梯度項 (2.3.15) 帶入底泥邊界層動量方程式 (2.2.10) 後可改寫為

doi:10.6342/NTU202500715

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{-1}{\rho_m}(\rho_w i\omega u_w) + \upsilon_{me}\frac{\partial^2 u_m}{\partial z^2}, \qquad z = -H \tag{2.3.16}$$

因底泥厚度為邊界層厚度級，所以壓力不隨深度變化，故前述之底泥邊界層動量方程式 (2.3.16) 可用於整個底泥的範圍。底泥動量方程式 (2.3.16) 可簡化得

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial z^2} + \alpha^2 u_m - \frac{\rho_w}{\rho_m}\alpha^2 u_w = 0, \qquad \alpha^2 = \frac{i\omega}{\upsilon_{me}} \tag{2.3.17}$$

再將剪力連續 (2.3.10) 及無滑移邊界條件 (2.3.11)、(2.3.12) 帶入即可求解 u_m 為

$$u_m = \frac{-\rho_w}{\rho_m}u_w[\cos\alpha(z+H+d) + \tan(\alpha d)\sin\alpha(z+H+d) - 1]$$

$$\alpha = (1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\upsilon_{me}}} \tag{2.3.18}$$

將上式 (2.3.18) 帶入質量守恆 (2.2.3) 及底部無滑移邊界條件 (2.3.11)、(2.3.12)，可得底泥之垂直速度為

$$\begin{aligned} w_m(z) &= \int_{-H-d}^{z} -\frac{\partial u_m}{\partial x}dz \\ &= \frac{\rho_w}{\rho_m}\frac{\partial u_w}{\partial x}\left\{\frac{\sin\alpha(z+H+d)}{\alpha} - \frac{\tan(\alpha d)[\cos\ \alpha(z+H+d) - 1]}{\alpha} \right. \\ &\quad \left. - (z+H+d)\right\} \end{aligned} \tag{2.3.19}$$

再將 (2.3.19) 帶入交界面垂直速度連續 (2.3.7) 得水域下邊界條件為

$$\frac{\partial \Phi_w}{\partial z} = w_m = \frac{\rho_w}{\rho_m}\left[\frac{\tan(\alpha d)}{\alpha} - d\right]\frac{\partial u_w}{\partial x} = \Pi\frac{\partial u_w}{\partial x}, \qquad z = -H \tag{2.3.20}$$

其中

$$\Pi = \frac{\rho_w}{\rho_m}\left[\frac{\tan(\alpha d)}{\alpha} - d\right] \tag{2.3.21}$$

doi:10.6342/NTU202500715

2.4 各水域連接之邊界條件

我們將水域分成三區，I 區、II 區及 III 區。I 區為障礙物前方的流域 $(-\infty \geq x \geq -L)$，II 區為障礙物下方的流域 $(-L \leq x \leq L)$，III 區為障礙物後方的流域 $(L \leq x \leq \infty)$。

I 區水域之上邊界為自由液面之邊界條件

$$\frac{\partial \Phi_w^{(I)}}{\partial z} = \frac{-1}{g}\frac{\partial^2 \Phi_w^{(I)}}{\partial t^2}, \qquad z = 0 \tag{2.4.1}$$

I 區水域之下邊界條件為速度連續

$$\frac{\partial \Phi_w^{(I)}}{\partial z} = w_m, \qquad z = -H \tag{2.4.2}$$

II 區水域之上邊界條件為與不透水結構物之交界

$$\frac{\partial \Phi_w^{(II)}}{\partial z} = 0, \qquad z = -s \tag{2.4.3}$$

下邊界條件為速度連續

$$\frac{\partial \Phi_w^{(II)}}{\partial z} = w_m, \qquad z = -H \tag{2.4.4}$$

III 區上邊界同 I 區為自由液面之邊界條件

$$\frac{\partial \Phi_w^{(III)}}{\partial z} = \frac{-1}{g}\frac{\partial^2 \Phi_w^{(III)}}{\partial t^2}, \qquad z = 0 \tag{2.4.5}$$

下邊界為速度連續

$$\frac{\partial \Phi_w^{(III)}}{\partial z} = w_m, \qquad z = -H \tag{2.4.6}$$

而各水域分割處交界上，其速度與壓力必將連續，故我們可得

I 區與 II 區交界 $(x = -L)$

doi:10.6342/NTU202500715

速度連續

$$\frac{\partial \Phi_w^{(I)}}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_w^{(II)}}{\partial x} = 0, \qquad -s \le z \le 0 \tag{2.4.7}$$

$$\frac{\partial \Phi_w^{(I)}}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_w^{(II)}}{\partial x}, \qquad -H \le z \le -s \tag{2.4.8}$$

壓力連續

$$\Phi_w^{(I)} = \Phi_w^{(II)}, \qquad -H \le z \le -s \tag{2.4.9}$$

II 區與 III 區交界 $(x = L)$

速度連續

$$\frac{\partial \Phi_w^{(II)}}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_w^{(III)}}{\partial x} = 0, \qquad -s \le z \le 0 \tag{2.4.10}$$

$$\frac{\partial \Phi_w^{(II)}}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_w^{(III)}}{\partial x}, \qquad -H \le z \le -s \tag{2.4.11}$$

壓力連續

$$\Phi_w^{(II)} = \Phi_w^{(III)}, \qquad -H \le z \le -s \tag{2.4.12}$$

2.5 水域之通解

線性波之波浪周期固定，我們能將勢能函數 (2.2.1) 的時間項可改寫為 $T(t) = e^{-i\omega t}$，則速度勢可表示為

$$\Phi_w = \phi(x,z)e^{-i\omega t} \tag{2.5.1}$$

而速度勢能滿足拉普拉斯方程式

$$\nabla^2 \Phi_w = e^{-i\omega t}\nabla^2 \phi = 0 \tag{2.5.2}$$

doi:10.6342/NTU202500715

移項整理得

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Z''}{Z} = \sigma \tag{2.5.3}$$

我們將 σ 的值分別討論，因 I 區及 III 區之水深及邊界條件都相同，故我們假設 I 區及 III 區會得到相同的 σ 及 Z，所以我們令 I 區及 III 區之 $\sigma = -k^2$ 一併討論，帶回到拉普拉斯方程式 (2.5.3) 。依張(2021)所推導之結果為

$$X^{(I)} = Ae^{ik(x+L)} + Be^{-ik(x+L)} \tag{2.5.4}$$

$$X^{(III)} = Fe^{ik(x-L)} + Ge^{-ik(x-L)} \tag{2.5.5}$$

$$Z^{(I)} = Z^{(III)} = \cosh[k(z+H)] + C\sinh[k(z+H)] \tag{2.5.6}$$

而 II 區之 σ 則為 $\sigma = 0$ 與 $\sigma = \lambda^2$，帶入到拉普拉斯方程式得

當 $\sigma = 0$

$$X = D_0 + E_0\frac{x}{L} \tag{2.5.7}$$

$$Z = 1 \tag{2.5.8}$$

當 $\sigma = \lambda^2$

$$X = D\frac{\cosh\lambda x}{\cosh\lambda L} + E\frac{\sinh\lambda x}{\sinh\lambda L} \tag{2.5.9}$$

$$Z = \cos\lambda(z+s) \tag{2.5.10}$$

其中 A、B、C、D、D_0、E、E_0、F、G 為未知係數，k、λ 為特徵值。帶回到勢能函數則可得三區的水域勢能函數通解為

$$\phi_w^{(I)} = \left(Ae^{ik(x+L)} + Be^{-ik(x+L)}\right)\left(\cosh[k(z+H)] + C\sinh[k(z+H)]\right) \tag{2.5.11}$$

$$\phi_w^{(II)} = \left(D_0 + E_0\frac{x}{L}\right) + \left(D\frac{\cosh\lambda x}{\cosh\lambda L} + E\frac{\sinh\lambda x}{\sinh\lambda L}\right)\cos\lambda(z+s) \tag{2.5.12}$$

doi:10.6342/NTU202500715

$$\phi_w^{(III)} = \left(Fe^{ik(x-L)} + Ge^{-ik(x-L)}\right)\{\cosh[k(z+H)] + C\sinh[k(z+H)]\} \quad (2.5.13)$$

2.6 特徵值方程式

2.6.1 I 區和 III 區 k 特徵值方程式

由 I 區及 III 區之上邊界條件 (2.4.1)、(2.4.5) 及週期性條件 (2.5.1) 可得上邊界條件

$$\frac{\omega^2}{g} = \frac{\phi_z}{\phi}, \qquad z = 0 \quad (2.6.1)$$

由水域下邊界 (2.3.20) 帶入勢能函數 (2.2.1)、(2.5.3) 整理可得下邊界條件

$$\Phi_z = XZ_zT = \Pi\Phi_{xx} = \Pi X''ZT = \Pi\sigma XZT, \qquad z = -H \quad (2.6.2)$$

移項整理得

$$\Pi = \frac{Z_z}{\sigma Z} = -\frac{Z_z}{k^2 Z}, \qquad z = -H \quad (2.6.3)$$

將 (2.5.6) 帶入上面推得之水域上邊界條件 (2.6.1) 並整理可得

$$\frac{\omega^2}{g} = \frac{Z_z}{Z} = k\frac{\tanh(kH) + C}{1 + C\tanh(kH)}, \qquad z = 0 \quad (2.6.4)$$

將 (2.5.6) 帶入 (2.6.3) 得

$$\frac{\rho_w}{\rho_m}\left[\frac{\tan(\alpha d)}{\alpha} - d\right] = \Pi = -\frac{Z_z}{k^2 Z} = -\frac{C}{k}, \qquad z = -H \quad (2.6.5)$$

則可將 (2.6.5) 帶回到 (2.6.4) 中，則方程式裡的 C 可被替換並表示為

$$\frac{\omega^2}{gk} = \frac{\tanh(kH) - k\frac{\rho_w}{\rho_m}\left[\frac{\tan(\alpha d)}{\alpha} - d\right]}{1 - k\frac{\rho_w}{\rho_m}\left[\frac{\tan(\alpha d)}{\alpha} - d\right]\tanh(kH)} \quad (2.6.6)$$

doi:10.6342/NTU202500715

或

$$\frac{\omega^2}{gk} = \frac{\tanh(kH) - k\Pi}{1 - k\Pi\tanh(kH)} \tag{2.6.7}$$

接著再透過數值方法求解特徵值 k。

2.6.2 II 區 λ 特徵值方程式

將 (2.5.10) 帶入下邊界條件 (2.6.3) 可得特徵值方程式

$$\Pi = \frac{Z_z}{\sigma Z} = \frac{-\lambda\sin[\lambda(z+s)]}{\lambda^2\cos\lambda(z+s)} = \frac{\tan\lambda h}{\lambda}, \qquad z = -H \tag{2.6.8}$$

再利用數值方法求解特徵值 λ。

2.7 特徵值方程式求解

2.7.1 I 區特徵值方程式求解

I 區特徵值方程式 (2.6.7) 交叉相乘並移項後可改寫為

$$\omega^2 + gk^2\Pi = (gk + k\Pi\omega^2)\tanh(kH) \tag{2.7.1}$$

在求解特徵值時，我們利用微擾法將物理量以級數型式表示，而級數中的每一項皆有數量及上的差距，並由大到小排列。首先以微擾法得出一近似解，再以此近似解作為數值解特徵值的初始猜值，以數值方式計算出更加精確的特徵值。數值解的程式列於附錄 A。

我們令 $M = kH$ 且 M 的級數型式為

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n + \cdots = k_1H + k_2H + \cdots + k_nH + \cdots, \qquad n = 1,2,\ldots \tag{2.7.2}$$

doi:10.6342/NTU202500715

其中 $O(M_n)=O\left(\epsilon^{(n-1)}M\right)$，$\epsilon$ 為波浪之尖銳度。

將級數型式的 (2.7.2) 帶入 k 特徵值方程式 (2.6.7) 並移項後

$$\left(1+\frac{\omega^2\Pi}{g}\right)(M_1+M_2+\cdots)\tanh(M_1+M_2+\cdots)-\frac{\Pi}{H}(M_1+M_2+\cdots)^2=\frac{\omega^2H}{g} \tag{2.7.3}$$

當我們對 Π 做級量分析

$$O\left(\frac{M_1\Pi}{H}\right)=O(k_1\Pi)=O(k_1d)=O(\epsilon) \tag{2.7.4}$$

，將 (2.7.4) 帶入 (2.7.3) 並省略一階以上的項，我們可以得出微擾法的零階 $O(M_1)$ 之近似解

$$\tanh M_1=\frac{\omega^2H}{gM_1} \tag{2.7.5}$$

零階近似解 (2.7.5) 為無底泥特徵值方程式，式中的 M_1 是由無數個 $M_1^{(i)},\ i=1,2,\ldots$ 所組成，其中 $M_1^{(i=1)}$ 為頻散方程式的純實數解，而 $M_1^{(i\neq1)}$ 為無數個純虛數解。將 M 還原為 k 後可得

$$k_1^{(i)}\tanh\left(k_1^{(i)}H\right)-\frac{\omega^2}{g}=0 \tag{2.7.6}$$

其中 $k_1^{(i=1)}$ 為頻散方程式的純實數解，而 $k_1^{(i\neq1)}$ 為無數個純虛數解。針對虛數解的求解方式，首先我們令 $k_1^{(i\neq1)}=i\Upsilon^{(i\neq1)}$，則零階近似的頻散方程式可改寫為

$$\Upsilon^{(i\neq1)}\tan\left(\Upsilon^{(i\neq1)}H\right)+\frac{\omega^2}{g}=0 \tag{2.7.7}$$

並以此近似解得出之 $k_1^{(i)}$ 做為初始猜值，再以數值方法得出更精確的特徵值。

doi:10.6342/NTU202500715

2.7.2 I 區數值方法求解

以 I 區為例，將特徵值方程式之解 $k^{(i)}$及$-k^{(i)}$ 帶入 I 區之勢能函數 (2.5.4)、(2.5.6)，並將(2.6.5) 帶入取代 (2.5.6) 中的 C 可得

$$X^{(I)} = A_n e^{ik^{(i)}(x+L)} + B_n e^{-ik^{(i)}(x+L)} \tag{2.7.8}$$

$$Z^{(I)} = \cosh\left[k^{(i)}(z+H)\right] - \Pi k^{(i)} \sinh\left[k^{(i)}(z+H)\right] \tag{2.7.9}$$

及

$$X^{(I)} = A_n e^{i\left(-k^{(i)}\right)(x+L)} + B_n e^{-i\left(-k^{(i)}\right)(x+L)} \tag{2.7.10}$$

$$Z^{(I)} = \cosh\left[-k^{(i)}(z+H)\right] - \Pi\left(-k^{(i)}\right) \sinh\left[-k^{(i)}(z+H)\right] \tag{2.7.11}$$

可見特徵值 $k^{(i)}$及 $-k^{(i)}$為線性相依具偶函數性質，故我們將僅求解實部為正之特徵值 $k^{(i)}$。求解時，以近似解的 $k_1^{(i)}$作為初始猜值並以數值方式求解目標函數

$$error\ of\ k^{(i)} = \left|\Pi k^{(i)} - \Pi \frac{\omega^2}{g} \tanh k^{(i)} H - \tanh k^{(i)} H + \frac{\omega^2}{g k^{(i)}}\right| = 0 \tag{2.7.12}$$

最小值所對應之特徵值 $k^{(i)}$。

2.7.3 II 區特徵值方法求解

將 II 區特徵值方程式 (2.6.8) 改寫為

$$\Pi\lambda - \tan\lambda h = 0 \tag{2.7.13}$$

比照 I 區及 III 區的求解過程，利用微擾法的方式，將特徵值 λ 以級數形式表示

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2, \qquad O(\lambda_2) = O(\epsilon\lambda_1) \tag{2.7.14}$$

將 (2.7.14) 帶入改寫的特徵值方程式 (2.7.13) 並省略高階項後，可得

doi:10.6342/NTU202500715

$$\Pi\lambda_1+\Pi\lambda_2-\frac{\tan\lambda_1 h+\tan\lambda_2 h}{1-\tan\lambda_1 h\tan\lambda_2 h}=0 \tag{2.7.15}$$

移項並展開後可得

$$\Pi\lambda_1-\Pi\lambda_1\tan\lambda_1 h\tan\lambda_2 h+\Pi\lambda_2-\Pi\lambda_2\tan\lambda_1 h\tan\lambda_2 h=\tan\lambda_1 h+\tan\lambda_2 h \tag{2.7.16}$$

由 Π 的級量分析 (2.7.4) 可近似出 $O(\lambda_1)$ 及 $O(\lambda_2)$ 的近似等式

$$0=\tan\lambda_1 h \tag{2.7.17}$$

$$\Pi\lambda_1=\tan\lambda_2 h \tag{2.7.18}$$

求解 (2.7.17) 及 (2.7.18) 後可得 II 區的特徵值之近似解為

$$\hat{\lambda}^{(r)}=\frac{r\pi}{h}+\frac{1}{h}\tan^{-1}\left(\Pi\frac{r\pi}{h}\right),\qquad r=1,2,\dots,R \tag{2.7.19}$$

若我們令 $\lambda R^{(r)}$ 為 $\lambda_2^{(r)}$ 之實部，$\lambda i^{(r)}$ 為 $\lambda_2^{(r)}$ 之虛部。透過偶函數分析可知 $\hat{\lambda}^{(r)}$ 為解則 $-\hat{\lambda}^{(r)}$ 亦為解，故求解時只求解實部為正之 $\hat{\lambda}^{(r)}$。使用數值方式求解時，以初始 $\hat{\lambda}^{(r)}$ 做為起始猜值並尋找目標函數

$$error\ of\ \lambda^{(r)}=\left|\lambda^{(r)}\Pi-\tan\lambda^{(r)}h\right| \tag{2.7.20}$$

最小值所對應之 $\lambda^{(r)}$。

2.8 求解帶定係數

2.8.1 勢能函數之待定係數

利用數值方法求得式 (2.6.7) 之特徵值 k 及式 (2.6.8) 之特徵值 λ 後，帶回原本的勢能函數通解 (2.5.11)、(2.5.12)、(2.5.13) 可得

doi:10.6342/NTU202500715

$$\phi_w^{(I)} = \sum_{i=1}^{N} A^{(i)} e^{ik^{(i)}(x+L)} \left\{\cosh k^{(i)}(z+H) - k^{(i)}\Pi \sinh k^{(i)}(z+H)\right\}$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} B^{(i)} e^{-ik^{(i)}(x+L)} \left\{\cosh k^{(i)}(z+H) - k^{(i)}\Pi \sinh k^{(i)}(z+H)\right\}$$

(2.8.1)

$$\phi_w^{(II)} = \left(D_0 + E_0 \frac{x}{L}\right) + \sum_{r=1}^{R} \left[D^{(r)} \frac{\cosh \lambda^{(r)} x}{\cosh \lambda^{(r)} L} + E^{(r)} \frac{\sinh \lambda^{(r)} x}{\sinh \lambda^{(r)} L}\right] \cos \lambda^{(r)}(z+s)$$

(2.8.2)

$$\phi_w^{(III)} = \sum_{i=1}^{N} F^{(i)} e^{ik^{(i)}(x-L)} \left\{\cosh k^{(i)}(z+H) - k^{(i)}\Pi \sinh k^{(i)}(z+H)\right\}$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} G^{(i)} e^{-ik^{(i)}(x-L)} \left\{\cosh k^{(i)}(z+H) - k^{(i)}\Pi \sinh k^{(i)}(z+H)\right\}$$

(2.8.3)

因特徵值為使用微擾法所展開之無數個特徵值 $k^{(i)}$及 $\lambda^{(r)}$所組成，故帶入原本的勢能函數通解(2.5.11)、(2.5.12)、(2.5.13)時，各自的特徵值皆有其對應的係數，新的勢能函數通解應改以級數的形式表示。經由數值方法得出的特徵值中的 $k^{(i)}$，可分為一個實部遠大於虛部的 $k^{(1)}$及無數個虛部遠大於實部的 $k^{(i\neq 1)}$。$k^{(1)}$ 對應的是傳遞能力強且不易衰減的波，由正負可判斷為由左向右前進之入射波，而 $G^{(1)}$ 不對應任何波。 $k^{(i\neq 1)}$ 可由 $e^{ik^{(i)}(x+L)}$ 看出會隨著與障礙物的遠離迅速衰減，故我們將 $\phi_w^{(I)}$及 $\phi_w^{(III)}$中的 $A^{(i\neq 1)}$與 $G^{(i\neq 1)}$令為零。勢能函數可改寫成

doi:10.6342/NTU202500715

$$\phi_w^{(I)} = A^{(1)} e^{ik^{(1)}(x+L)} \left[\cosh k^{(1)}(z+H) - k^{(1)} \Pi \sinh k^{(1)}(z+H)\right]$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} B^{(i)} e^{-ik^{(i)}(x+L)} \left[\cosh k^{(i)}(z+H) - k^{(i)} \Pi \sinh k^{(i)}(z+H)\right]$$

(2.8.4)

$$\phi_w^{(II)} = \left(D_0 + E_0 \frac{x}{L}\right) + \sum_{r=1}^{R} \left[D^{(r)} \frac{\cosh \lambda^{(r)} x}{\cosh \lambda^{(r)} L} + E^{(r)} \frac{\sinh \lambda^{(r)} x}{\sinh \lambda^{(r)} L}\right] \cos \lambda^{(r)}(z+s)$$

(2.8.5)

$$\phi_w^{(III)} = \sum_{i=1}^{N} F^{(i)} e^{ik^{(i)}(x-L)} \left[\cosh k^{(i)}(z+H) - k^{(i)} \Pi \sinh k^{(i)}(z+H)\right] \quad (2.8.6)$$

上式裡 $A^{(1)}$、$B^{(i)}$、$D^{(r)}$、$E^{(r)}$、$F^{(i)}$為待定之係數，其中 $A^{(1)}$為入射波係數。

因我們令入射波為從無窮遠處傳遞而來的微小震幅波，其自由液面η 為

$$\eta(x,t) = a_0 e^{ik(x-x_0)} e^{-i\omega t} \quad (2.8.7)$$

其中 a_0 為入射波於 $x = x_0$ 時之波高，ω 為角頻率，k 為入射波參數，(2.8.4)中只有 A_1 項符合由左向右的特性，故 (2.8.7) 中的 $k = k^{(1)}$，再結合線性化動力方程式 (2.3.2) 整理得

$$i\omega A^{(1)} e^{ik^{(1)}(x+L)} \left[\cosh\left(k^{(1)} H\right) - k^{(1)} \Pi \sinh\left(k^{(1)} H\right)\right] e^{-i\omega t} = g a_0 e^{ik^{(1)}(x-x_0)} e^{-i\omega t}$$

(2.8.8)

移項後可得未知數 $A^{(1)}$為

$$A^{(1)} = \frac{a_0 g}{i\omega[\cosh(k^{(1)} H) - k^{(1)} \Pi \sinh(k^{(1)} H)]} e^{-ik^{(1)}(x_0+L)} \quad (2.8.9)$$

doi:10.6342/NTU202500715

2.8.2 連續積分等式

將新的勢能函數 (2.8.4)、(2.8.5)、(2.8.6) 帶入各區水域交界處之壓力連續條件 (2.4.9) 及 (2.4.12) 後可簡化為

$$x=-L,\qquad A^{(1)}f^{(1)}+\sum_{i=1}^{N}B^{(i)}f^{(i)}=\sum_{r=0}^{R}\left(D^{(r)}-E^{(r)}\right)p^{(r)} \tag{2.8.10}$$

$$x=L,\qquad \sum_{i=1}^{N}F^{(i)}f^{(i)}=\sum_{r=0}^{R}\left(D^{(r)}+E^{(r)}\right)p^{(r)} \tag{2.8.11}$$

其中

$$p^{(0)}=1 \tag{2.8.12}$$

$$p^{(r\neq 0)}=\cos\lambda^{(r)}(z+s) \tag{2.8.13}$$

$$f^{(i)}=\cosh k^{(i)}(z+H)-k^{(i)}\Pi\sinh k^{(i)}(z+H) \tag{2.8.14}$$

將新的勢能函數 (2.8.4)、(2.8.5)、(2.8.6) 帶入各區水域交界之速度連續 (2.4.8)、(2.4.11) 帶入可得

$$x=-L,\qquad ik^{(1)}A^{(1)}f^{(1)}-\sum_{i=1}^{N}ik^{(i)}B^{(i)}f^{(i)}=\sum_{r=0}^{R}\left(-D^{(r)}V^{(r)}+E^{(r)}W^{(r)}\right)p^{(r)} \tag{2.8.15}$$

$$x=L,\qquad \sum_{i=1}^{N}ik^{(i)}F^{(i)}f^{(i)}=\sum_{r=0}^{R}\left(D^{(r)}V^{(r)}+E^{(r)}W^{(r)}\right)p^{(r)} \tag{2.8.16}$$

其中

$$V^{(0)}=0,\qquad V^{(r\neq 0)}=\lambda^{(r)}\tanh\lambda^{(r)}L \tag{2.8.17}$$

doi:10.6342/NTU202500715

$$W^{(0)} = \frac{1}{L}, \qquad W^{(r\neq 0)} = \lambda^{(r)} \coth \lambda^{(r)} L \tag{2.8.18}$$

以上我們能得出四個等式 (2.8.10)、(2.8.11)、(2.8.15)、(2.8.16)，但還是遠不足以求解目前 $2N + 2(R+1)$ 個未知數 $\left(B^{(1\sim N)}, F^{(1\sim N)}, D^{(0\sim R)}, E^{(0\sim R)}\right)$。若要以聯立等式求解，需要增加等式。為此，我們可以對特徵函數沿深度方向積分，產生足夠的等式後，聯立求解剩餘的未知數，最後獲得完整的水域勢能通解。

對區域與區域交界面上壓力連續的關係式做 z 方向的積分

$$x = -L, \qquad \int_{-H}^{-s} \left\{\phi_w^{(I)} p^{(r)}\right\} dz = \int_{-H}^{-s} \left\{\phi_w^{(II)} p^{(r)}\right\} dz, \qquad r = 0,1,\dots,R \tag{2.8.19}$$

$$x = L, \qquad \int_{-H}^{-s} \left\{\phi_w^{(II)} p^{(r)}\right\} dz = \int_{-H}^{-s} \left\{\phi_w^{(III)} p^{(r)}\right\} dz, \qquad r = 0,1,\dots,R \tag{2.8.20}$$

對交界上速度連續的關係式做 z 方向的積分

$$x = -L, \qquad \int_{-H}^{0} \left\{\frac{\partial \phi_w^{(I)}}{\partial x} f^{(i)}\right\} dz = \int_{-H}^{-s} \left\{\frac{\partial \phi_w^{(II)}}{\partial x} f^{(i)}\right\} dz, \qquad i = 1,2,\dots,N \tag{2.8.21}$$

$$x = L, \qquad \int_{-H}^{-s} \left\{\frac{\partial \phi_w^{(II)}}{\partial x} f^{(i)}\right\} dz = \int_{-H}^{0} \left\{\frac{\partial \phi_w^{(III)}}{\partial x} f^{(i)}\right\} dz, \qquad i = 1,2,\dots,N \tag{2.8.22}$$

將勢能函數 (2.8.4)、(2.8.5)、(2.8.6) 帶入 (2.8.19)、(2.8.20)、(2.8.21)、(2.8.22)可得

$$\begin{aligned} x = -L, \qquad & \sum_{i=1}^{N} B^{(i)} \int_{-H}^{-s} f^{(i)} p^{(r')}\, dz - \sum_{r=0}^{R} \left(D^{(r)} - E^{(r)}\right) \int_{-H}^{-s} p^{(r)} p^{(r')}\, dz \\ & = -A^{(1)} \int_{-H}^{-s} f^{(1)} p^{(r')}\, dz \end{aligned} \tag{2.8.23}$$

doi:10.6342/NTU202500715

$$x = L, \qquad \sum_{i=1}^{N} F^{(i)} \int_{-H}^{-s} f^{(i)} p^{(r')}\, dz - \sum_{r=0}^{R} \left(D^{(r)} + E^{(r)}\right) \int_{-H}^{-s} p^{(r)} p^{(r')}\, dz = 0$$

(2.8.24)

$$x = -L, \qquad \sum_{i=1}^{N} ik^{(i)} B^{(i)} \int_{-H}^{0} f^{(i)} f^{(i')}\, dz - \sum_{r=0}^{R} \left(D^{(r)} V^{(r)} - E^{(r)} W^{(r)}\right) \int_{-H}^{-s} p^{(r)} f^{(i')}\, dz$$
$$= ik^{(1)} A^{(1)} \int_{-H}^{0} f^{(1)} f^{(i')}\, dz$$

(2.8.25)

$$x = L, \qquad \sum_{i=1}^{N} ik^{(i)} F^{(i)} \int_{-H}^{0} f^{(i)} f^{(i')}\, dz - \sum_{r=0}^{R} \left(D^{(r)} V^{(r)} + E^{(r)} W^{(r)}\right) \int_{-H}^{-s} p^{(r)} f^{(i')}\, dz$$
$$= 0$$

(2.8.26)

其中，I 區和 II 區以及 III 區和 II 區特徵函數相互積分

$$\int_{-H}^{-s} f^{(i)} p^{(r)}\, dz$$
$$= \begin{cases} r = 0, & \dfrac{\sinh k^{(i)} h}{k^{(i)}} + \Pi\left(1 - \cosh k^{(i)} h\right) \\ r \neq 0, & \dfrac{k^{(i)} \sinh k^{(i)} h + \lambda^{(r)} \sin \lambda^{(r)} h - \Pi {k^{(i)}}^2 \left(\cosh k^{(i)} h - \cos \lambda^{(r)} h\right)}{{k^{(i)}}^2 + {\lambda^{(r)}}^2} \end{cases}$$

(2.8.27)

II 區特徵函數相互積分

doi:10.6342/NTU202500715

$$\int_{-H}^{-s} p^{(r)} p^{(r')}\, dz$$

$$= \begin{cases} r = 0, r' = 0, & h \\ r \neq 0, r' = 0, & \dfrac{\sin \lambda^{(r)} h}{\lambda^{(r)}} \\ r = 0, r' \neq 0, & \dfrac{\sin \lambda^{(r')} h}{\lambda^{(r')}} \\ r \neq 0, r' \neq 0, & \begin{cases} r = r', & \dfrac{h}{2} + \dfrac{\sin 2\lambda^{(r)} h}{4\lambda^{(r)}} \\ r \neq r', & \dfrac{\lambda^{(r)} \sin \lambda^{(r)} h \cos \lambda^{(r')} h - \lambda^{(r')} \cos \lambda^{(r)} h \sin \lambda^{(r')} h}{{\lambda^{(r)}}^2 - {\lambda^{(r')}}^2} \end{cases} \end{cases}$$

(2.8.28)

I 區、III 區特徵函數相互積分

$$\int_{-H}^{0} f^{(i)} f^{(i\prime)}\, dz$$

$$= \begin{cases} i = i', & \dfrac{\left(k^{(i)}\Pi\right)^2 + 1}{4k^{(i)}} \sinh 2k^{(i)} H + \dfrac{\Pi}{2}\left(1 - \cosh 2k^{(i)} H\right) + \dfrac{H}{2}\left(1 - \left(k^{(i)}\Pi\right)^2\right) \\ i \neq i', & \Pi\left[1 - \cosh k^{(i)} H \cosh k^{(i')} H\right] + \dfrac{1 + k^{(i)} k^{(i')} \Pi^2}{2\left(k^{(i)} + k^{(i')}\right)} \sinh\left(k^{(i)} + k^{(i')}\right) H \\ & + \dfrac{1 - k^{(i)} k^{(i')} \Pi^2}{2\left(k^{(i)} - k^{(i')}\right)} \sinh\left(k^{(i)} - k^{(i')}\right) H \end{cases}$$

(2.8.29)

(2.8.27)、(2.8.28)、(2.8.29)之推導過程紀錄於附錄 B。

2.8.3 矩陣求解待定係數

將特徵值方程式相互積分後可得 $2N + 2(R + 1)$ 個聯立方程式，即可求得 $2N + 2(R + 1)$ 個未知數 $\left(B^{(1\sim N)}, F^{(1\sim N)}, D^{(0\sim R)}, E^{(0\sim R)}\right)$。我們令矩陣式

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{B} \tag{2.8.30}$$

doi:10.6342/NTU202500715

，其中矩陣 $\boldsymbol{A}$ 為積分式 (2.8.27)、(2.8.28)、(2.8.29)

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\Lambda_1 & 0 & -\Lambda_2 & \Lambda_2\\ 0 & \Lambda_1 & -\Lambda_2 & -\Lambda_2\\ \Lambda_3 & 0 & \Lambda_4 & \Lambda_5\\ 0 & \Lambda_3 & \Lambda_4 & -\Lambda_5\end{bmatrix}_{2N+2(R+1)\times 2N+2(R+1)} \tag{2.8.31}$$

$$\Lambda_1(i,j)=\left[\int_{-H}^{-s} f^{(j)}p^{(i-1)}\,dz\right]=\begin{bmatrix}\int_{-H}^{-s} f^{(1)}p^{(0)}\,dz & \cdots & \int_{-H}^{-s} f^{(N)}p^{(0)}\,dz\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \int_{-H}^{-s} f^{(1)}p^{(R)}\,dz & \cdots & \int_{-H}^{-s} f^{(N)}p^{(R)}\,dz\end{bmatrix}_{(R+1)\times N} \tag{2.8.32}$$

$$\Lambda_2(i,j)=\left[\int_{-H}^{-s} p^{(i-1)}p^{(j-1)}\,dz\right]=\begin{bmatrix}\int_{-H}^{-s} p^{(0)}p^{(0)}\,dz & \cdots & \int_{-H}^{-s} p^{(0)}p^{(R)}\,dz\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \int_{-H}^{-s} p^{(R)}p^{(0)}\,dz & \cdots & \int_{-H}^{-s} p^{(R)}p^{(R)}\,dz\end{bmatrix}_{(R+1)\times (R+1)}$$

(2.8.33)

$$\Lambda_3(i,j)=\left[ik^{(j)}\int_{-H}^{0} f^{(i)}f^{(j)}\,dz\right]$$
$$=\begin{bmatrix}ik^{(1)}\int_{-H}^{0} f^{(1)}f^{(1)}\,dz & \cdots & ik^{(N)}\int_{-H}^{0} f^{(1)}f^{(N)}\,dz\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ ik^{(1)}\int_{-H}^{0} f^{(N)}f^{(1)}\,dz & \cdots & ik^{(N)}\int_{-H}^{0} f^{(N)}f^{(N)}\,dz\end{bmatrix}_{N\times N}$$

(2.8.34)

$$\Lambda_4(i,j)=\left[-V^{(j-1)}\int_{-H}^{-s} f^{(i)}p^{(j-1)}\,dz\right]$$
$$=\begin{bmatrix}-V^{(0)}\int_{-H}^{-s} f^{(1)}p^{(0)}\,dz & \cdots & -V^{(R)}\int_{-H}^{-s} f^{(1)}p^{(R)}\,dz\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ -V^{(0)}\int_{-H}^{-s} f^{(N)}p^{(0)}\,dz & \cdots & -V^{(R)}\int_{-H}^{-s} f^{(N)}p^{(R)}\,dz\end{bmatrix}_{N\times (R+1)}$$

(2.8.35)

doi:10.6342/NTU202500715

$$
\Lambda_5(i,j) = \left[W^{(j-1)} \int_{-H}^{-s} f^{(i)} p^{(j-1)}\, dz \right]
$$

$$
= \begin{bmatrix} W^{(0)} \int_{-H}^{-s} f^{(1)} p^{(0)}\, dz & \cdots & W^{(R)} \int_{-H}^{-s} f^{(1)} p^{(R)}\, dz \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W^{(0)} \int_{-H}^{-s} f^{(N)} p^{(0)}\, dz & \cdots & W^{(R)} \int_{-H}^{-s} f^{(N)} p^{(R)}\, dz \end{bmatrix}_{N\times(R+1)}
$$

(2.8.36)

$\boldsymbol{x}$ 為未知係數

$$
\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} B^{(1)} \\ \vdots \\ B^{(N)} \\ F^{(1)} \\ \vdots \\ F^{(N)} \\ D^{(0)} \\ \vdots \\ D^{(R)} \\ E^{(0)} \\ \vdots \\ E^{(R)} \end{bmatrix}_{2N+2(R+1)\times 1} \tag{2.8.37}
$$

$\boldsymbol{B}$ 為係數

$$
\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -A^{(1)} \int_{-H}^{-s} f^{(1)} p^{(0)}\, dz \\ \vdots \\ -A^{(1)} \int_{-H}^{-s} f^{(1)} p^{(R)}\, dz \end{bmatrix}_{(R+1)\times 1} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(R+1)\times 1} \\ \begin{bmatrix} ik^{(1)} A^{(1)} \int_{-H}^{0} f^{(1)} f^{(1)}\, dz \\ \vdots \\ ik^{(1)} A^{(1)} \int_{-H}^{0} f^{(1)} f^{(N)}\, dz \end{bmatrix}_{N\times 1} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{N\times 1} \end{bmatrix}_{2N+2(R+1)\times 1} \tag{2.8.38}
$$

doi:10.6342/NTU202500715

最後利用數值方式(本文使用 MATLAB)求解出矩陣 $\boldsymbol{x}$，勢能函數之待定係數，便能得出完整的勢能函數。

2.9 結果分析

由數值方法求得之勢能函數 Φ_w 後，我們可將其推導出速度場，並比較不同底泥厚度、底泥密度、角頻率、黏滯係數之間對此解析解模型之影響。

速度場

將勢能函數 (2.8.4)、(2.8.5)、(2.8.6) 帶入 (2.2.2)

$$\frac{\partial \Phi_w}{\partial x} = u_w \tag{2.9.1}$$

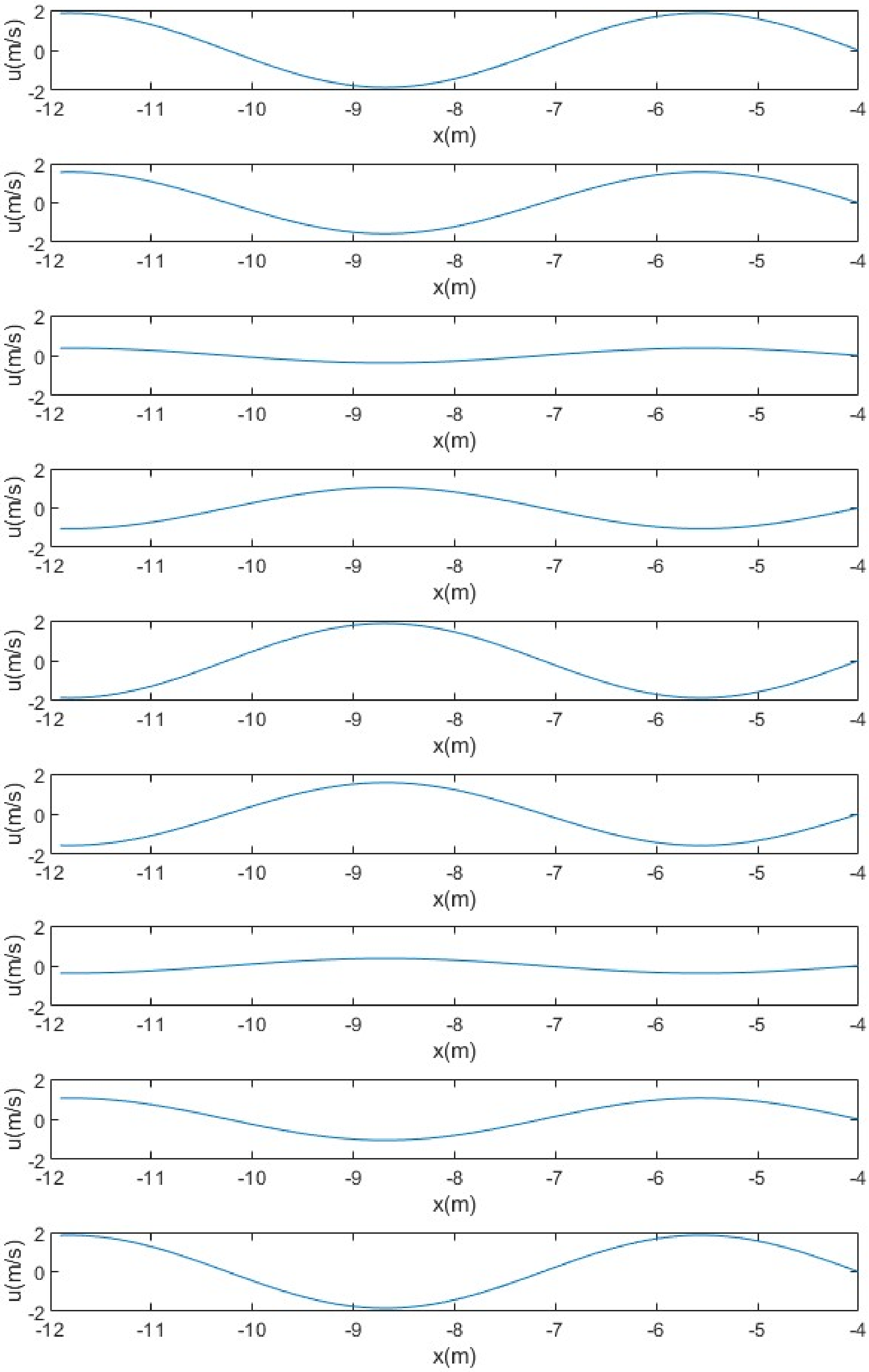
可得各區的水平速度 u_w 為

$$u_w^{(I)} = \left\{ ik^{(1)} A^{(1)} e^{ik^{(1)}(x+L)} \left[\cosh k^{(1)}(z+H) - k^{(1)} \Pi \sinh k^{(1)}(z+H)\right] - \sum_{i=1}^{N} ik^{(i)} B^{(i)} e^{-ik^{(i)}(x+L)} \left[\cosh k^{(i)}(z+H) - k^{(i)} \Pi \sinh k^{(i)}(z+H)\right] \right\} e^{-i\omega t} \tag{2.9.2}$$

$$u_w^{(II)} = \left\{ \frac{E_0}{L} + \sum_{r=1}^{R} \lambda^{(r)} \left[D^{(r)} \frac{\sinh \lambda^{(r)} x}{\cosh \lambda^{(r)} L} + E^{(r)} \frac{\cosh \lambda^{(r)} x}{\sinh \lambda^{(r)} L} \right] \cos \lambda^{(r)}(z+s) \right\} e^{-i\omega t} \tag{2.9.3}$$

doi:10.6342/NTU202500715

$$u_w^{(III)} = \left\{\sum_{i=1}^{N} ik^{(i)}F^{(i)}e^{ik^{(i)}(x-L)}\left[\cosh k^{(i)}(z+H) - k^{(i)}\Pi \sinh k^{(i)}(z+H)\right]\right\}e^{-i\omega t} \tag{2.9.4}$$



doi:10.6342/NTU202500715

圖 2-2 I 區於 $z=0$ 處，時間 t 從上到下分別為 0、0.25、0.5、0.75、1、1.25、1.5、1.75、2 時之水平速度分量

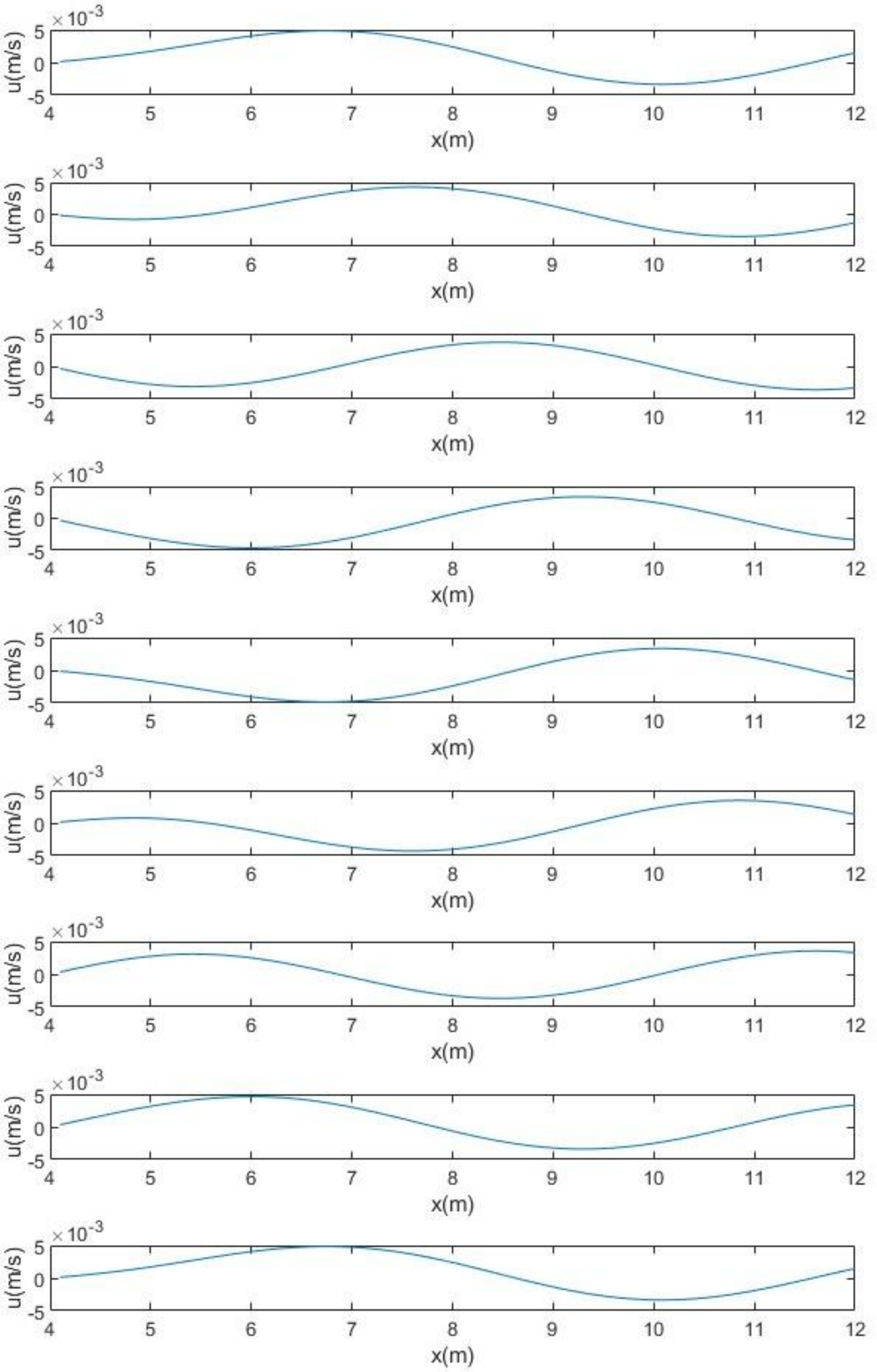


圖 2-3 III 區於 $z=0$ 處，時間 t 從上到下分別為 0、0.25、0.5、0.75、1、1.25、1.5、1.75、2 時之水平速度分量

doi:10.6342/NTU202500715

第三章 成果分析

3.1 模型參數

若無特別說明則，本文模型使用參數如下

物理量名稱	符號	物理量值	物理量名稱	符號	物理量值
最大項數	N	50 項	結構物下水深	h	2m
最大項數	R	50 項	水密度	ρ_w	$1000\,kg/m^3$
入射波波高	a_0	0.3m	底泥密度	ρ_m	$1200\,kg/m^3$
水深	H	4m	底泥運動黏度	υ_m	$0.003\,m^2/s$
結構物吃水深	s	2m			

表 3-1 參數設定

3.2 反射、透射系數分析

為分析底泥厚度、障礙物深、障礙物厚度、底泥彈性、對不同水波流經一邊界層厚度級黏彈性底泥所產生的影響，本節藉由比較各種頻率的水波通過具邊界層厚度底泥障礙物時產生之反射及透射係數，分析其誤差值並比較各物理量產生的變化。

由前述所推導之控制方程式我們利用 Mei & Black (1969)所使用之無因次反射係數 $|R|$ 及透射係數參數 $|T|$，我們令

反射係數$|R|$為反射波係數 B_1除以入射波係數 A_1

$$|R| = \left|\frac{Re(B_1)}{Re(A_1)}\right| \tag{3.2.1}$$

透射係數$|T|$為透射波係數 F_1除以入射波係數 A_1

doi:10.6342/NTU202500715

$$|T| = \left|\frac{Re(F_1)}{Re(A_1)}\right| \tag{3.2.2}$$

再來為方便比較各參數對水波通過障礙物產生之反透射係數的影響，我們定義

反射係數差值 $\Delta|R|$為

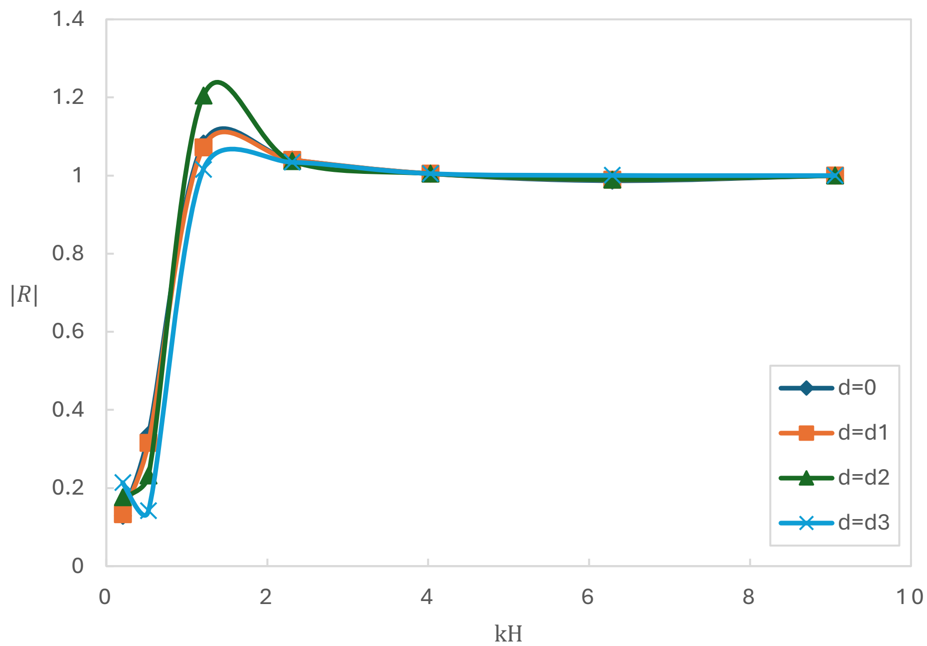
$$\Delta|R| = \frac{|R|' - |R|}{|R|} \tag{3.2.3}$$

，其中$|R|'$為改變某一參數(如底泥厚度、障礙物深度、障礙物厚度、底泥彈性等）後欲比較的反射係數。

透射係數差值 $\Delta|T|$為

$$\Delta|T| = \frac{|T|' - |T|}{|T|} \tag{3.2.4}$$

，其中$|T|'$為改變某一參數(如底泥厚度、障礙物深度、障礙物厚度、底泥彈性等）後欲比較的透射係數。



doi:10.6342/NTU202500715

圖 3-1 為在彈性為 0 時，不同頻率之水波分別通過無底泥、1 倍邊界層厚度、2 倍邊界層厚度及 3 倍邊界層厚度黏性底泥產生之反射係數。

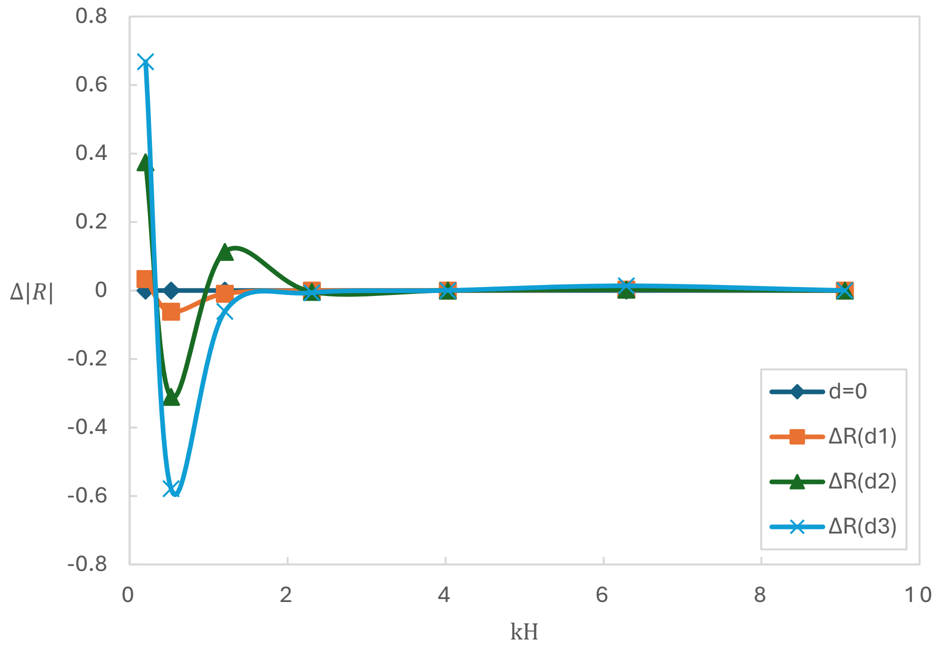


圖 3-2 為在彈性為 0 時，不同頻率之水波分別通過 1 倍邊界層厚度、2 倍邊界層厚度及 3 倍邊界層厚度黏性底泥之反射係數與水波通過無黏性底泥之反射係數間的差值。

doi:10.6342/NTU202500715

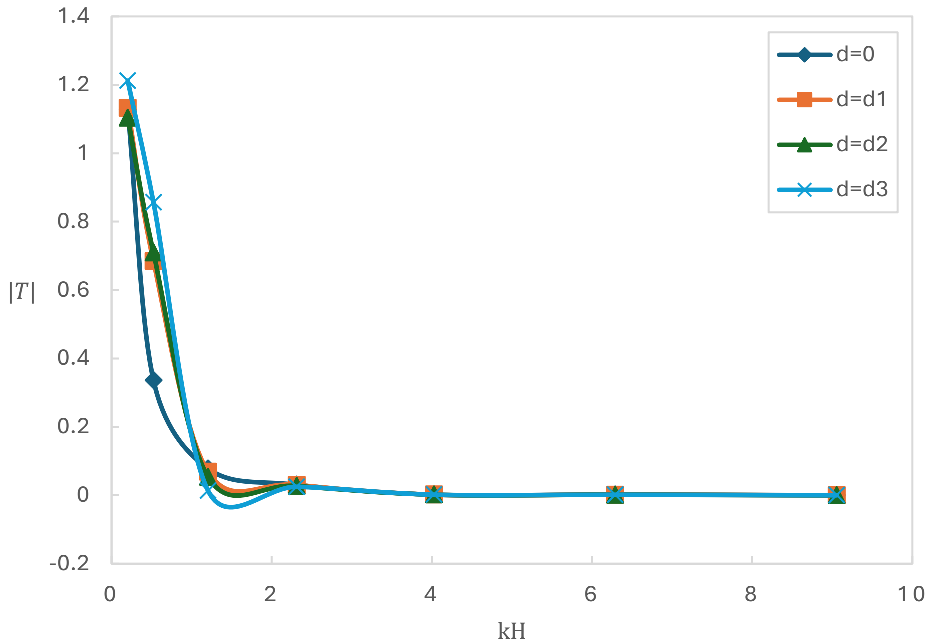
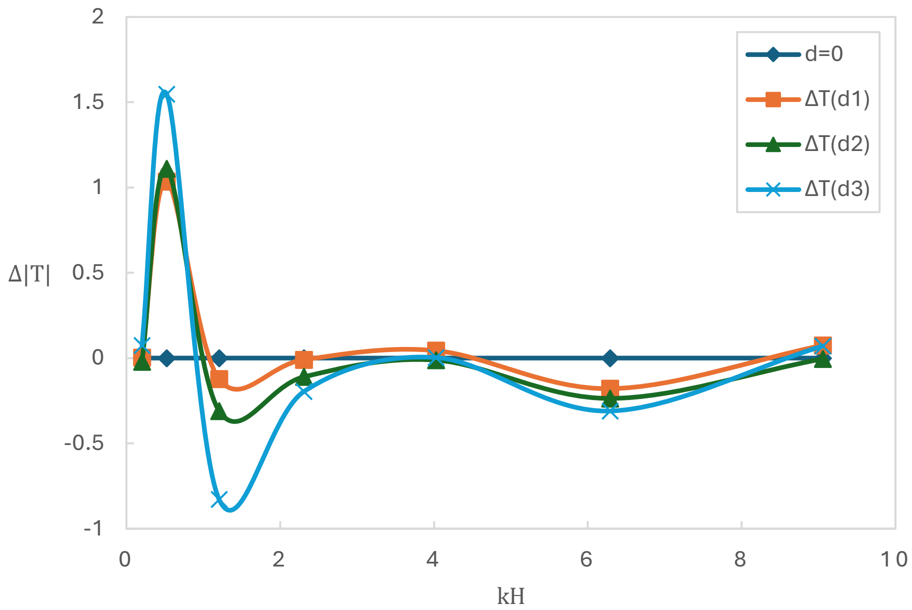


圖 3-3 為在彈性為 0 時，不同頻率之水波分別通過無底泥、1 倍邊界層厚度、2 倍邊界層厚度及 3 倍邊界層厚度黏性底泥之透射係數。



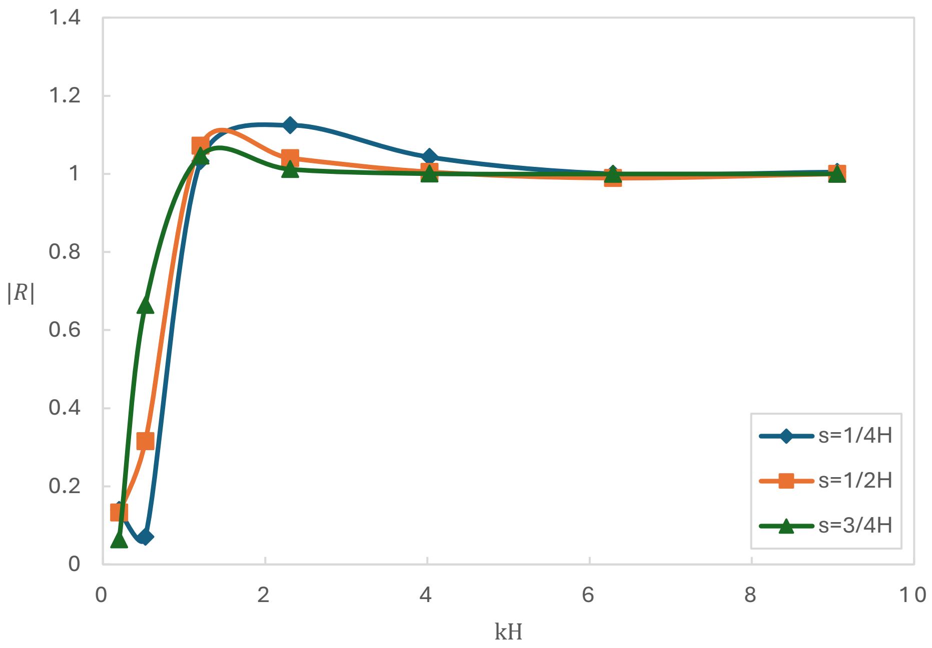
doi:10.6342/NTU202500715

圖 3-4 為在彈性為 0 時，不同頻率之水波分別通過 1 倍邊界層厚度、2 倍邊界層厚度及 3 倍邊界層厚度黏性底泥之透射係數與水波通過無黏性底泥之透射係數間的差值。

首先比較不同黏性底泥厚度對水波通過障礙物時產生之反射係數的影響。藉觀察反射係數可發現底泥厚度對淺水波 ($kH < \pi / 10$) 具較大的影響，隨厚度加深對反射係數造成較大的影響。當水波為深水波 ($kH > \pi$) 時，邊界層厚度級的黏性底泥厚度對反射係數幾乎不再造成影響。

接著比較不同黏性底泥厚度對水波通過障礙物時產生之透射係數的影響。藉觀察可發現底泥厚度對淺水波造成之透射係數具較大影響，而對深水波則幾乎沒有影響。

透過上述可發現邊界層厚度級的前提下，底泥厚度對淺水波具較大的影響，隨水波逐漸成為深水波時影響逐漸消失；但不論深水波亦或淺水波，底泥厚度所造成的影響都不大。



doi:10.6342/NTU202500715

圖 3-5 為在 1 倍邊界層厚度無彈性之黏性底泥下不同頻率水波分別通過障礙物深為 1/4 水深、1/2 水深及 3/4 水深時產生之反射係數。

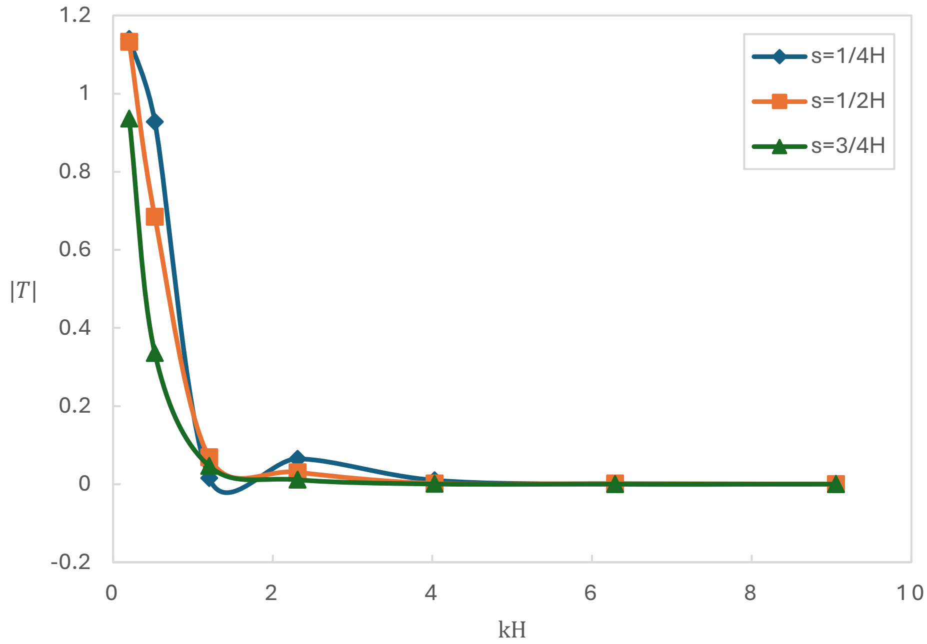


圖 3-6 為在 1 倍邊界層厚度無彈性之黏性底泥下不同頻率水波分別通過障礙物深為 1/4 水深、1/2 水深及 3/4 水深時產生之透射射係數。

比較障礙物深度對不同頻率水波流經一邊界層厚度之無彈性黏性底泥對反射及透射係數所造成的影響。藉觀察障礙物深度對反射係數可知障礙物深度對淺水波的反射有較明顯的影響，越深的障礙物能產生更大的反射係數；但障礙物深度的變化則對深水波造成的影響較小，且形成之反射係數隨深水波的頻率提高，不同深度的障礙物所造成之反射係數會逐漸趨近一定值。

藉觀察透射係數可發現障礙物深度只對淺水波形成的透射係數有較大的影響，越淺的障礙物有著越高的透射係數。而不同深度的障礙物對深水波產生的透射係數則幾乎不再有影響，且隨頻率提高逐漸趨於定值。

doi:10.6342/NTU202500715

由上述觀察可得知障礙物深度的差別只在通過水波為淺水波時才有明顯的差異，對於深水波的影響不大。由反射係數隨深水波頻率提高逐漸趨於 1，透射係數趨於 0 可知，即使是較淺的障礙物也能有效地阻擋深水波的前進。

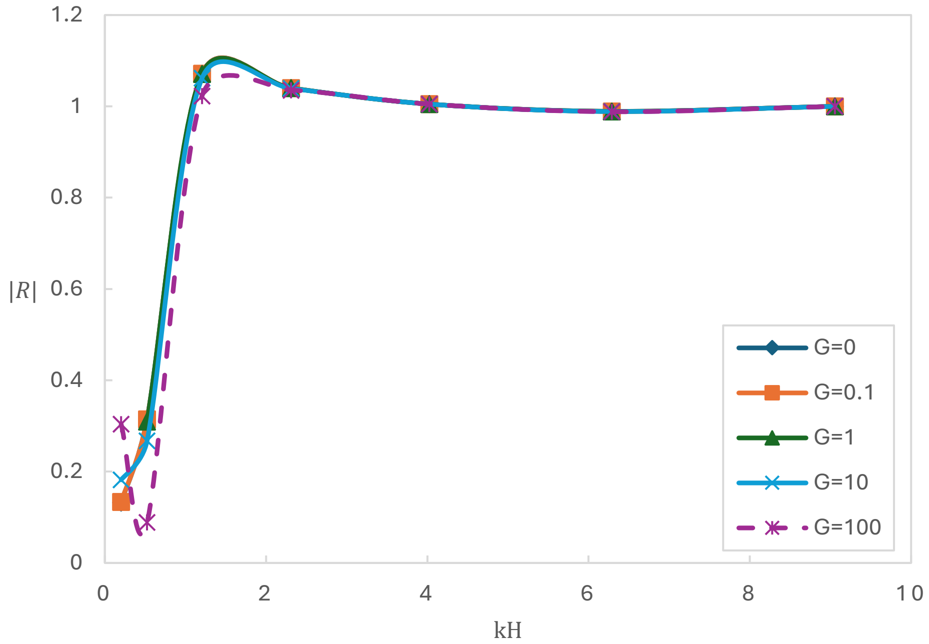
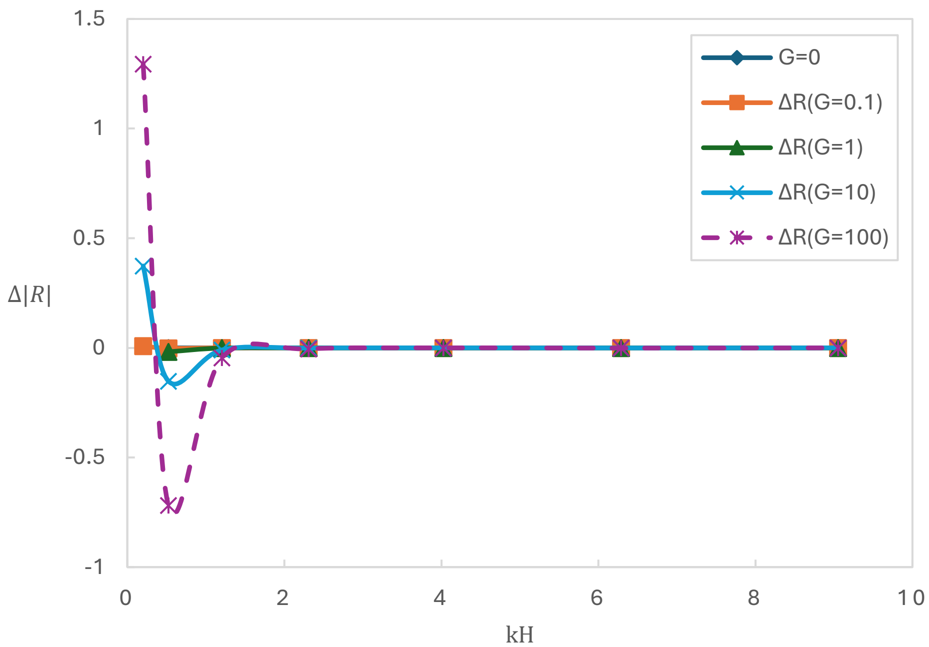


圖 3-7 為水波流經 1 倍邊界層厚之具不同彈性的黏彈性底泥時產生的反射係數。



doi:10.6342/NTU202500715

圖 3-8 為水波流經 1 倍邊界層厚之具不同彈性的黏彈性底泥時產生的反射係數與水波流經一無彈性黏性底泥時產生之反射係數的插值。

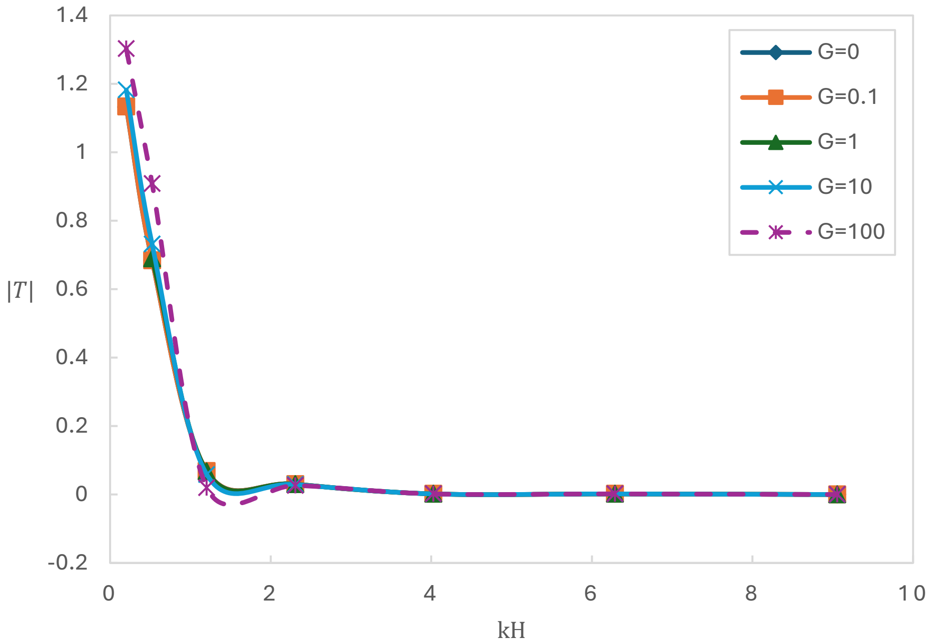
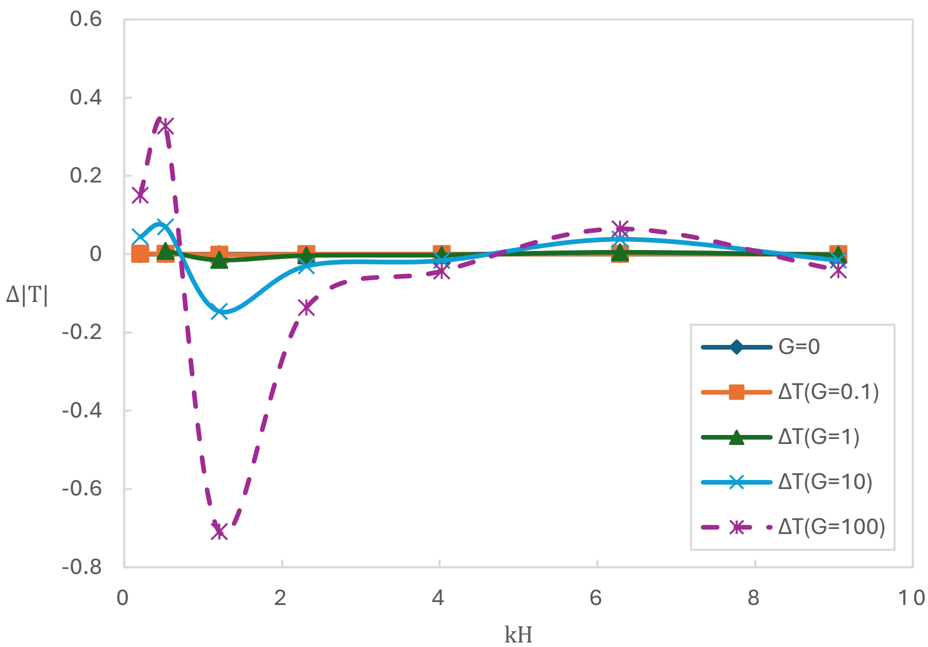


圖 3-9 為水波流經 1 倍邊界層厚之具不同彈性的黏彈性底泥時產生的透射係數。



doi:10.6342/NTU202500715

圖 3-10 為水波流經 1 倍邊界層厚之具不同彈性的黏彈性底泥時產生的透射係數與水波流經一無彈性黏性底泥時產生之透射係數的插值。

比較不同彈性的黏彈性底泥對水波通過一障礙物時產生的反射及透射係數所造成的影響。藉由觀察可發現，彈性的變化對於淺水波通過障礙物時產生的反射係數有較大影響，但對於深水波則影響有限。隨深水波頻率提高，彈性項對水波通過障礙物時產生之反射係數影響逐漸變小且不同彈性造成之反射係數會趨近一定值。

藉觀察透射係數可發現彈性項對淺水波及介於淺水波與深水波之間的中間性波 ($\pi / 10 < kH < \pi$)具最明顯的影響，對深水波的影響則隨頻率的提高影響逐漸降低。

doi:10.6342/NTU202500715

3.2 速度剖面分析

為分析底泥厚度、水波頻率及彈性對水波流經一具黏彈性邊界層厚底泥之障礙物前後水平速度的影響，我們先由第二章所得出之勢能函數推導出速度場(2.9.2)、(2.9.3)、(2.9.4)。並比較障礙物後具最大水面水平速度時沿深度的水平速度剖面。

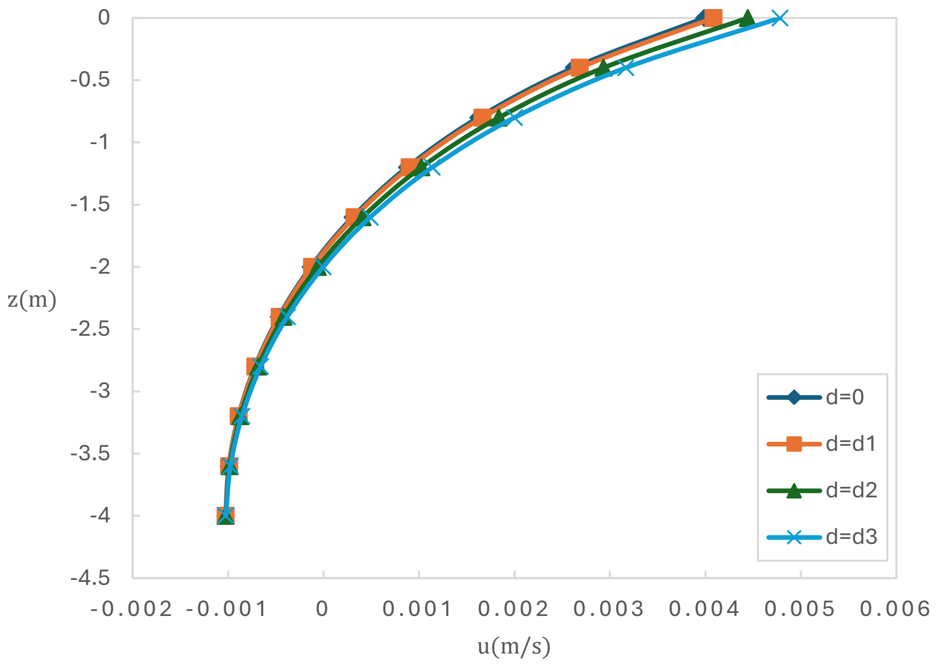


圖 3-11 為水波 $\omega=\pi$ 時，分別通過無底泥、1 倍、2 倍及 3 倍邊界層厚度黏性底泥障礙物，後方 6 公尺之沿水深水平速度剖面。

doi:10.6342/NTU202500715

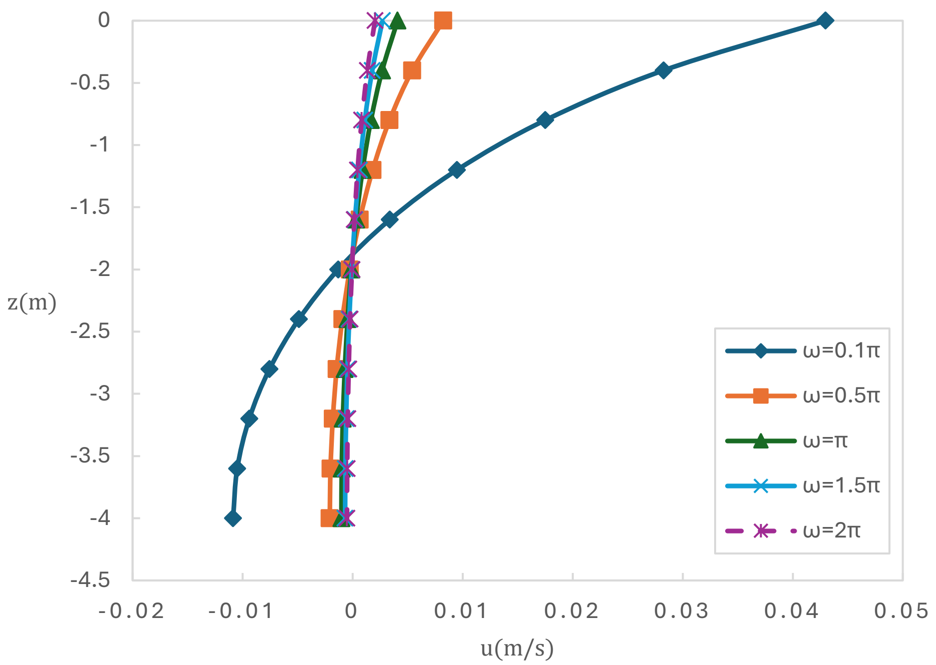


圖 3-12 分別為 5 種不同頻率之水波通過 1 倍邊界層厚度黏性底泥障礙物後方 6 公尺之水平速度剖面

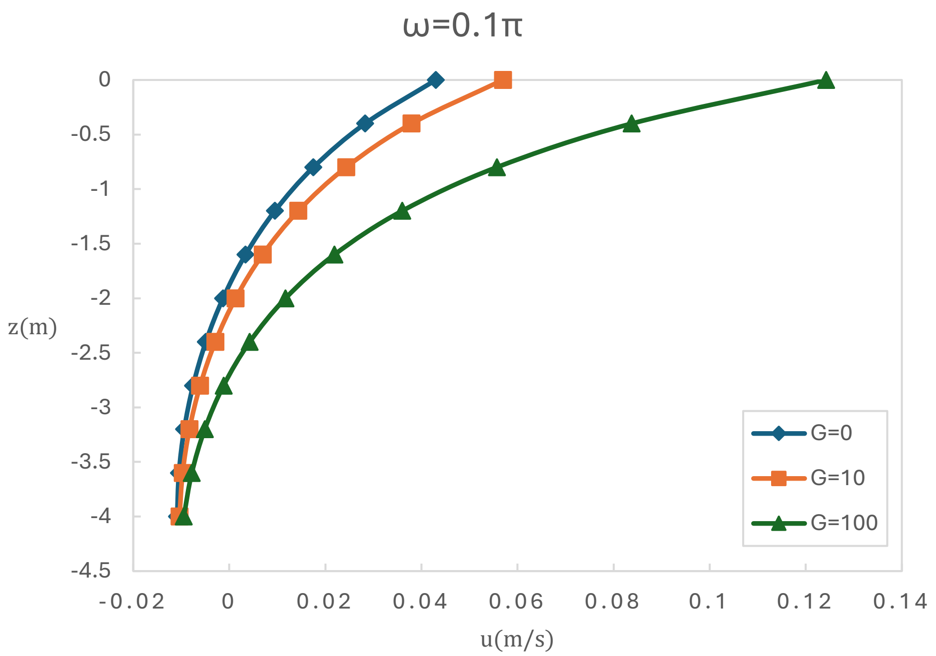


圖 3-13 為水波 $\omega = 0.1\pi$ 時，通過 1 倍邊界層厚度黏彈性底泥障礙物後方 6 公尺處沿深度水平速度剖面，底泥彈性模數 G 分別為 0、10 及 100。

doi:10.6342/NTU202500715

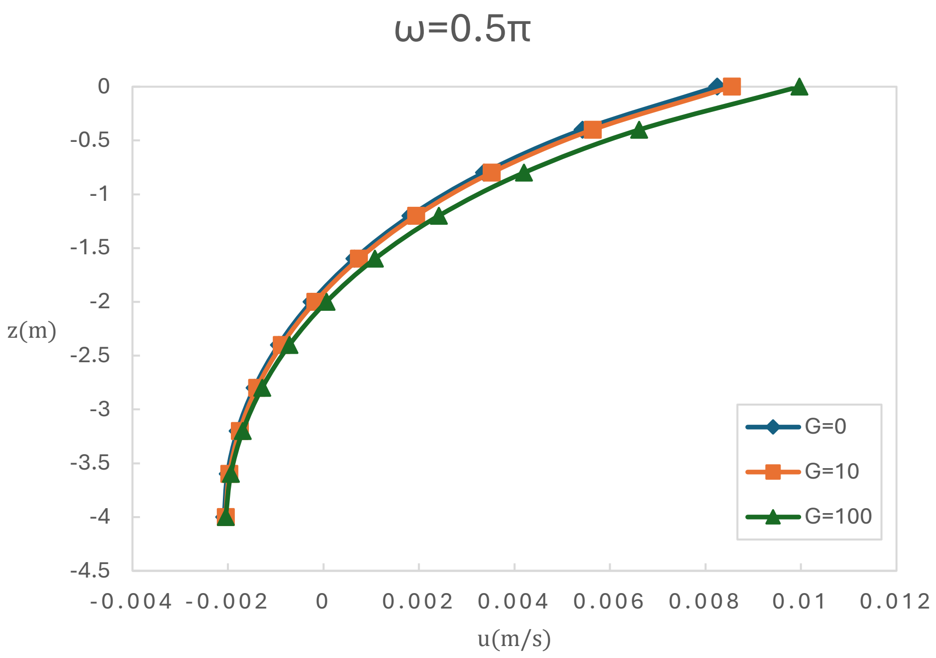


圖 3-14 為水波 $\omega = 0.5\pi$ 時，通過 1 倍邊界層厚度黏彈性底泥障礙物後方 6 公尺處沿深度水平速度剖面，底泥彈性模數 G 分別為 0、10 及 100。

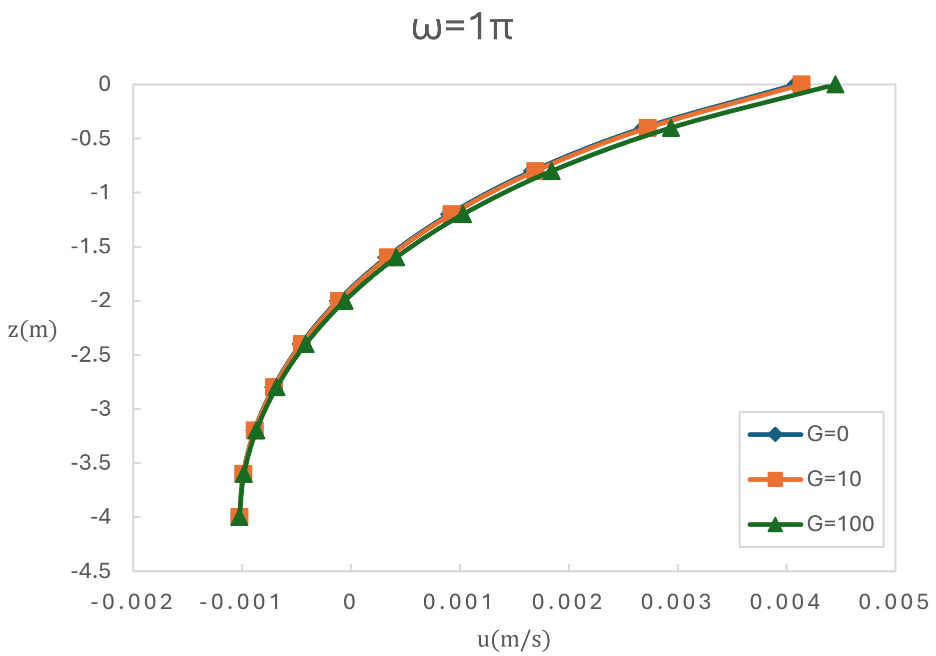


圖 3-15 為水波 $\omega = \pi$ 時，通過 1 倍邊界層厚度黏彈性底泥障礙物後方 6 公尺處沿深度水平速度剖面，底泥彈性模數 G 分別為 0、10 及 100。

doi:10.6342/NTU202500715

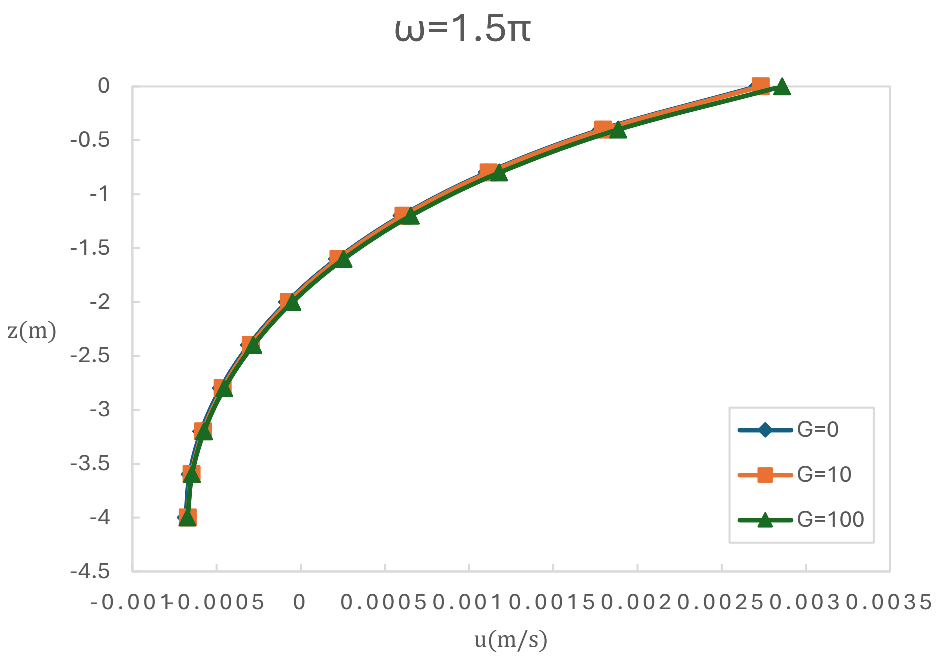


圖 3-16 為水波 $\omega = 1.5\pi$ 時，通過 1 倍邊界層厚度黏彈性底泥障礙物後方 6 公尺處沿深度水平速度剖面，底泥彈性模數 G 分別為 0、10 及 100。

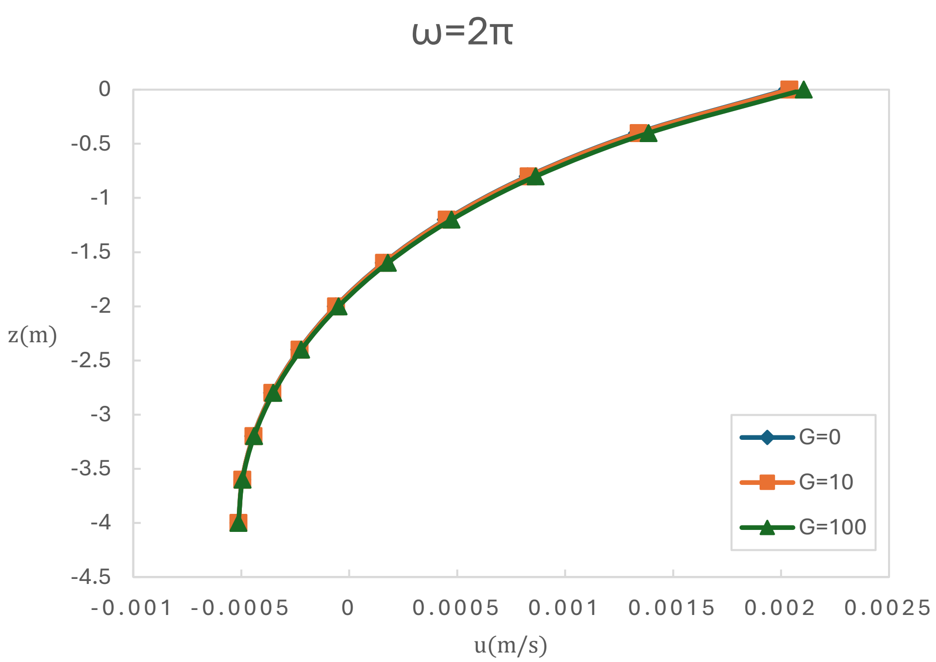


圖 3-17 為水波 $\omega = 2\pi$ 時，通過 1 倍邊界層厚度黏彈性底泥障礙物後方 6 公尺處沿深度水平速度剖面，底泥彈性模數 G 分別為 0、10 及 100。

doi:10.6342/NTU202500715

由觀察可發現彈性對淺水波具有較大的影響，水平速度在 $\omega = 0.1\pi$ 時，具高彈性底泥障礙物後方的水平速度明顯比無彈性黏性底泥障礙物後方的水平速度來的大，意味著當底泥的彈性越高，底泥對水波的衰弱效果越弱。當通過水波為深水波時，不論彈性大小，水波的水平速度幾乎相同。

doi:10.6342/NTU202500715

第四章 結論與未來展望

4.1 結論

本文使用 Navier–Stokes 方程式計算底泥速度場，並利用底泥厚度屬邊界層等級的特性，其壓力不隨深度變化，故將其延伸而得到水域的下邊界條件，最後使用特徵函數展開法求解出水域的勢能函數。透過改變水波、障礙物及底泥的物理量並相互比較三者的交互作用，我們能得出一些結論。

在底泥為邊界層厚度的前提下，底泥越厚於障礙物後方的水平速度也會越高，因為底泥下邊界的無滑移邊界條件會隨厚度越大而有越小的影響力。其中底泥厚度對淺水波及中間性波的影響會比深水波的影響來的大，但不論底泥的厚度是多少，當底泥厚度仍屬邊界層厚度的級距下，厚度對於水波的影響都很小。隨障礙物深度的增加透射係數也明顯開始下降，但障礙物深度的影響似乎只在淺水波有明顯差別，隨水波頻率增加，影響逐漸消失，對於深水波而言，其反射及透射係數便逐漸趨近。可見對於深水波的消散，興建更深浮式防波堤並不是一個有效的方式。底泥彈性對於淺水波波的消散似乎有著反效果，但對於深水波時有些微消散的作用。整體而言，邊界層厚度等級的黏彈性底泥，對深水波的消散並沒有發揮太大的作用，其影響範圍只有在面對淺水波時有較為顯著的影響。

doi:10.6342/NTU202500715

4.2 未來展望與建議

1. 底泥厚度：

本文假設之黏彈性底泥厚度僅為邊界層等級，其對波浪消散的影響十分有限，且現實中的海岸及海底大多有更加厚重的底泥。

2. 三維流場：

本文為簡化計算，故使用二維流場作為模型。但若要計算圓柱形或是不規則形狀的浮式結構物，如：浮式離岸風機、半潛式平台或充氣式漂浮防波堤等，便需要設計一個三維的模型進行解析，方能使結果更完整更實用。

3. 水面障礙物的旋轉與位移

現實中的浮式結構，即使有以纜繩固定於海床上使其不會漂走，但大多會有某種程度的位移及旋轉，若能將水面結構物的移動也納入計算中，便能使結果更加貼近於現實。

doi:10.6342/NTU202500715

參考文獻

Cebada-Relea, A. J., López, M., & Aenlle, M. (2022). Time-domain numerical modelling of the connector forces in a modular pontoon floating breakwater under regular and irregular oblique waves. Ocean Engineering, 243, 110263.

張振緯. (2021). 波浪通過泥質底床上之水面結構物的理論分析. 國立臺灣大學土木工程學系學位論文, 2021, 1-131.

Shamsnia, S. H., Soltanpour, M., Bavandpour, M., & Gualtieri, C. (2019). A study of wave dissipation rate and particles velocity in muddy beds. Geosciences, 9(5), 212.

Dai, J., Wang, C. M., Utsunomiya, T., & Duan, W. (2018). Review of recent research and developments on floating breakwaters. Ocean Engineering, 158, 132-151.

Soltanpour, M., Shamsnia, S. H., Shibayama, T., & Nakamura, R. (2018). A study on mud particle velocities and mass transport in wave-current-mud interaction. Applied Ocean Research, 78, 267-280.

Hejazi, K., Soltanpour, M., & Sami, S. (2013). Numerical modeling of wave–mud interaction using projection method. Ocean Dynamics, 63, 1093-1111.

Hsu, W. Y., Hwung, H. H., Hsu, T. J., Torres-Freyermuth, A., & Yang, R. Y. (2013). An experimental and numerical investigation on wave-mud interactions. Journal of Geophysical Research: Oceans, 118(3), 1126-1141.

Niu, X., & Yu, X. (2011). A numerical model for wave propagation over muddy slope. Coastal Engineering Proceedings, (32), 27-27.

Diamantoulaki, I., & Angelides, D. C. (2010). Analysis of performance of hinged floating breakwaters. Engineering Structures, 32(8), 2407-2423.

doi:10.6342/NTU202500715

Zhang, D. H., & Ng, C. O. (2006). A numerical study on wave-mud interaction. 中國海洋工程 (英文版).

Ng, C. O. (2000). Water waves over a muddy bed: a two-layer Stokes' boundary layer model. Coastal engineering, 40(3), 221-242.

Williams, A. N., & Abul-Azm, A. G. (1997). Dual pontoon floating breakwater. Ocean Engineering, 24(5), 465-478.

Sakakiyama, T., & Byker, E. W. (1989). Mass transport velocity in mud layer due to progressive waves. Journal of waterway, port, coastal, and ocean engineering, 115(5), 614-633.

Hsiao, S. V., & Shemdin, O. H. (1980). Interaction of ocean waves with a soft bottom. Journal of Physical Oceanography, 10(4), 605-610.

Macpherson, H. (1980). The attenuation of water waves over a non-rigid bed. Journal of Fluid Mechanics, 97(4), 721-742.

Dalrymple, R. A., & Liu, P. L. (1978). Waves over soft muds: a two-layer fluid model. Journal of Physical Oceanography, 8(6), 1121-1131.

Noble, H. M. (1976, May). Use of wave-maze flexible floating breakwater to protect offshore structures and landings. In Offshore Technology Conference (pp. OTC-2542). OTC.

Noble, H. M. (1969, December). Wave-maze, floating breakwater. In Civil Engineering in Oceans Conf Proceedings (2nd).

Kamel, A. M., & Davidson, D. D. (1968). Hydraulic characteristics of mobile breakwaters composed of tires or spheres. TR H-68-2.

doi:10.6342/NTU202500715

Newman, J. N. (1965). Propagation of water waves over an infinite step. Journal of Fluid Mechanics, 23(2), 399-415.

Stitt, R. L., & Nobel, H. M. (1963). Introducing Wave-Maze Floating Breakwater. unnumbered report, Temple City, California.

Dean, R. G., & Ursell, F. (1959). Interaction of a fixed, semi-immersed circular cylinder with a train of surface waves (Vol. 37). Massachusetts Institute of Technology, Hydrodynamics Laboratory.

Gade, H. G. (1958). Effects of a nonrigid, impermeable bottom on plane surface waves in shallow water. Journal of Marine Research , 16, 61-82.

Macagno, E. O. (1953). Fluid mechanics: experimental study of the effects of the passage of a wave beneath an obstacle. Proceedings of the Academic des Sciences.

Ursell, F. (1947, July). The effect of a fixed vertical barrier on surface waves in deep water. In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society (Vol. 43, No. 3, pp. 374-382). Cambridge University Press.

Dean, W. R. (1945, November). On the reflexion of surface waves by a submerged plane barrier. In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society (Vol. 41, No. 3, pp. 231-238). Cambridge University Press.

Joly, J. (1905). On floating breakwaters. With 2 plates. The Scientific proceedings of the Royal Dublin Society, Vol. X, pp. 378-383.

doi:10.6342/NTU202500715

附錄 A

本文使用之 Matlab 求解程式

附錄 A.1 求出第 I、III 區之特徵值初始猜值

```
function F1 = F1(x)
    g=9.81;
    H=4;
    w=0.1*pi;
    F1=x*tanh(x*H)-(w^2)/g;
end
```

附錄 A.2 求出第 I、III 區之特徵值

```
function Fi = Fi(x)
    g=9.81;          % gravitational acceleration
    H=4;             % water depth (m)
    w=0.1*pi;            % angular frequency ω
    rhow=1000;       % water density
    rhom=1200;       % mud density
    num=3*10^(-3);  % kinematic viscosity of mud
    %G=100;  %elastic modulus (Pa)
    %num=3*10^(-3)+1i*G/rhom/w;         %complex form of viscosity
    d=sqrt(2*num/w);                   % mud depth
    %d=0;
    alpha=(1+1i)*sqrt(w/2/num);         %計算邊界層厚度底泥沿散方程式中 Π 裡的 α
    PI=rhow/rhom*(tan(alpha*d)/alpha-d);%計算邊界層厚度底泥沿散方程式中的 Π

    %將初始猜值 x 帶入第一區之沿散方程式並找出使 Fi 趨近於 0 對應之 x
    Fi=PI*x-(1+PI*(w^2)/g)*tanh(x*H)+(w^2)/g/x; %計算第一區的沿散方程式
end
```


doi:10.6342/NTU202500715

附錄 A.3 求解第 II 區特徵值

```
function F2 = F2(x)
    s=2;
    H=4;
    h=H-s;
    w=0.1*pi;
    rhow=1000;
    rhom=1200;
    num=3*10^(-3);
    %G=100;  %elastic modulus
    %num=3*10^(-3)+1i*G/rhom/w;
    d=sqrt(2*num/w);
    %d=0;
    alpha=(1+1i)*sqrt(w/2/num);
    PI=rhow/rhom*(tan(alpha*d)/alpha-d);

    F2=PI*x-tan(x*h);
end
```


doi:10.6342/NTU202500715

附錄 A.4 計算反透射係數

```
g=9.81;          %gravitational acceleration
L=1;             %width of obstacle
H=4;             %water depth
s=2;             %obstacle depth
h=H-s;           %water depth beneath obstacle
rhow=1000;       %water density
rhom=1200;       %mud density
num=3*10^(-3);   %%kinematic viscosity of mud

N=50;            %secI&III's i=1,2,...,50,...
R=50;            %sec.II's r=1,2,3,...,R
options = optimoptions(@fsolve,'StepTolerance',1e-20,...
    'FunctionTolerance',1e-20,'OptimalityTolerance',1e-20);
w=0.1*pi;
%G=100;
%num=3*10^(-3)+1i*G/rhom/w;
d=sqrt(2*num/w);
%d=0;
alpha=(1+1i)*sqrt(w/2/num);
PI=rhow/rhom*(tan(alpha*d)/alpha-d);

%%------------------------------k------------------------------%%
%k(i=1)
fun=@F1;
k1=fsolve(fun,1,options); %k1(1)
fun=@Fi;
k(1)=fsolve(fun,k1,options); %k(1)
%errork(1)=abs(PI*k(1)-(1+PI*(w^2)/g)*tanh(k(1)*H)+(w^2)/g/k(1));

%k1(i≠1)
for ii=1:1:N
    fun=@F1;
    upsilon(ii)=fsolve(fun,1i*ii*pi/H,options);
    errorupsilon(ii)=abs(upsilon(ii)*tanh(upsilon(ii)*H)-w^2/g);
    fun=@Fi;
    k(ii+1)=fsolve(fun,upsilon(ii),options);
    errork(ii+1)=abs(PI*k(ii+1)-(1+PI*(w^2)/g)*tanh(k(ii+1)*H)+...
```


doi:10.6342/NTU202500715

```
        (w^2)/g/k(ii+1));
end
%%---------------------------Lambda R---------------------------%%
for ii=1:1:R
    lr2=atan(PI*pi*ii/h)/h;
    lr0(ii)=ii*pi/h+lr2;

    fun=@F2;
    LR(ii)=fsolve(fun,lr0(ii),options);

    errorlr0(ii)=abs(PI*lr0(ii)-tan(lr0(ii)*h));
    errorLR(ii)=abs(PI*LR(ii)-tan(LR(ii)*h));
end
%%------------------------- ∫ fp,pp,ff dz -------------------------%%
% ∫f(i)p(r')dz
for jj=1:1:N
    fp(1,jj)=sinh(k(jj)*h)/k(jj)+PI*(1-cosh(k(jj)*h));
    for ii=1:1:R
        fp(ii+1,jj)=(k(jj)*sinh(k(jj)*h)+LR(ii)*sin(LR(ii)*h) ...
            -PI*k(jj)^2*(cosh(k(jj)*h)-cos(LR(ii)*h)))...
            /(k(jj)^2+LR(ii)^2);
    end
end
%∫p(r)p(r')dz
pp(1,1)=h;
for ii=1:1:R
    pp(ii+1,1)=sin(LR(ii)*h)/LR(ii);
    pp(1,ii+1)=sin(LR(ii)*h)/LR(ii);
end
for ii=1:1:R
    for jj=1:1:R
        pp(ii+1,jj+1)=(LR(ii)*sin(LR(ii)*h)*cos(LR(jj)*h)...
            -LR(jj)*cos(LR(ii)*h)*sin(LR(jj)*h))...
            /(LR(ii)^2-LR(jj)^2);
    end
    pp(ii+1,ii+1)=h/2+(sin(2*LR(ii)*h))/(4*LR(ii));
end
%∫f(i)f(f')dz
```


doi:10.6342/NTU202500715

```
for ii=1:1:N
    for jj=1:1:N
        ff(ii,jj)=PI*(1-cosh(k(ii)*H)*cosh(k(jj)*H))...
            +(1+k(ii)*k(jj)*PI^2)/(2*(k(ii)+k(jj)))*sinh((k(ii)+k(jj))*H)...
            +(1-k(ii)*k(jj)*PI^2)/(2*(k(ii)-k(jj)))*sinh((k(ii)-k(jj))*H);
    end
    ff(ii,ii)=((k(ii)*PI)^2+1)/(4*k(ii))*sinh(2*k(ii)*H)...
        +(PI/2)*(1-cosh(2*k(ii)*H))+(H/2)*(1-(k(ii)*PI)^2);
end
%%-------------------------------Λ------------------------------%%
for ii=1:1:(R+1)
    for jj=1:1:N
        A1(ii,jj)=fp(ii,jj);
    end
end
for ii=1:1:(R+1)
    for jj=1:1:(R+1)
        A2(ii,jj)=pp(ii,jj);
    end
end
for ii=1:1:N
    A4(ii,1)=0;
    A5(ii,1)=fp(1,ii)/L;
    for jj=1:1:N
        A3(ii,jj)=1i*k(jj)*ff(ii,jj);
        A4(ii,jj+1)=-1*LR(jj)*tanh(LR(jj)*L)*fp(jj+1,ii);
        A5(ii,jj+1)=LR(jj)*coth(LR(jj)*L)*fp(jj+1,ii);
    end
end
%%-------------------------------A------------------------------%%
zeroRN=zeros(R+1,N);
zeroNN=zeros(N,N);
A=[A1 zeroRN -A2 A2; zeroRN A1 -A2 -A2;A3 zeroNN A4 A5; zeroNN A3 A4 -A5];
%%-------------------------------B------------------------------%%
a0=0.3;
x0=-84;% 84m brfore obstacle
a1=a0*g/(1i*w*(cosh(k(1)*H)-k(1)*PI*sinh(k(1)*H)))*exp(-1i*k(1)*(x0+L));
for ii=1:1:(R+1)
```


doi:10.6342/NTU202500715

```
    B(ii,1)=-a1*fp(ii,1);
    B(ii+(R+1),1)=0;
end
for ii=1:1:N
    B(ii+(2*(R+1)),1)=1i*k(1)*a1*ff(ii,1);
    B(ii+(N+2*(R+1)),1)=0;
end
%%-------------------------------x-------------------------------%%
x = A\B;

for ii=1:1:N
    Bi(ii)=x(ii);
    Fi(ii)=x(ii+N);
end
for ii=1:1:R+1
    Dr(ii)=x(ii+2*N);
    Er(ii)=x(ii+2*N+R+1);
end


%%---R & T---%
B_1=Bi(1);
F_1=Fi(1);
```


doi:10.6342/NTU202500715

附錄 A.5 計算水平速度剖面

```
g=9.81;         %gravitational acceleration
L=4;            %width of obstacle
H=4;            %water depth
s=2;            %obstacle depth
h=H-s;          %water depth beneath obstacle
rhow=1000;      %water density
rhom=1200;      %mud density
num=3*10^(-3);  %%kinematic viscosity of mud

N=50;           %secI&III's i=1,2,...,50,...
R=50;           %sec.II's r=1,2,3,...,R
options = optimoptions(@fsolve,'StepTolerance',1e-20,...
    'FunctionTolerance',1e-20,'OptimalityTolerance',1e-20);
w=0.1*pi;
G=100;
num=3*10^(-3)+1i*G/rhom/w;
d=1*sqrt(2*num/w);
%d=0;
alpha=(1+1i)*sqrt(w/2/num);
PI=rhow/rhom*(tan(alpha*d)/alpha-d);

%%------------------------------k------------------------------%%
%k(i=1)
fun=@F1;
k1=fsolve(fun,1,options); %k1(1)
fun=@Fi;
k(1)=fsolve(fun,k1,options); %k(1)
%errork(1)=abs(PI*k(1)-(1+PI*(w^2)/g)*tanh(k(1)*H)+(w^2)/g/k(1));

%k1(i≠1)
for ii=1:1:N
    fun=@F1;
    upsilon(ii)=fsolve(fun,1i*ii*pi/H,options);
    errorupsilon(ii)=abs(upsilon(ii)*tanh(upsilon(ii)*H)-w^2/g);
    fun=@Fi;
    k(ii+1)=fsolve(fun,upsilon(ii),options);
    errork(ii+1)=abs(PI*k(ii+1)-(1+PI*(w^2)/g)*tanh(k(ii+1)*H)+...
```


doi:10.6342/NTU202500715

```
        (w^2)/g/k(ii+1));
end
%%---------------------------Lambda R----------------------------%%
for ii=1:1:R
    lr2=atan(PI*pi*ii/h)/h;
    lr0(ii)=ii*pi/h+lr2;

    fun=@F2;
    LR(ii)=fsolve(fun,lr0(ii),options);

    errorlr0(ii)=abs(PI*lr0(ii)-tan(lr0(ii)*h));
    errorLR(ii)=abs(PI*LR(ii)-tan(LR(ii)*h));
end
%%------------------------- ∫ fp,pp,ff dz --------------------------%%
% ∫f(i)p(r')dz
for jj=1:1:N
    fp(1,jj)=sinh(k(jj)*h)/k(jj)+PI*(1-cosh(k(jj)*h));
    for ii=1:1:R
        fp(ii+1,jj)=(k(jj)*sinh(k(jj)*h)+LR(ii)*sin(LR(ii)*h) ...
            -PI*k(jj)^2*(cosh(k(jj)*h)-cos(LR(ii)*h)))...
            /(k(jj)^2+LR(ii)^2);
    end
end
%∫p(r)p(r')dz
pp(1,1)=h;
for ii=1:1:R
    pp(ii+1,1)=sin(LR(ii)*h)/LR(ii);
    pp(1,ii+1)=sin(LR(ii)*h)/LR(ii);
end
for ii=1:1:R
    for jj=1:1:R
        pp(ii+1,jj+1)=(LR(ii)*sin(LR(ii)*h)*cos(LR(jj)*h)...
            -LR(jj)*cos(LR(ii)*h)*sin(LR(jj)*h))...
            /(LR(ii)^2-LR(jj)^2);
    end
    pp(ii+1,ii+1)=h/2+(sin(2*LR(ii)*h))/(4*LR(ii));
end
%∫f(i)f(f')dz
```


doi:10.6342/NTU202500715

```
for ii=1:1:N
    for jj=1:1:N
        ff(ii,jj)=PI*(1-cosh(k(ii)*H)*cosh(k(jj)*H))...
            +(1+k(ii)*k(jj)*PI^2)/(2*(k(ii)+k(jj)))*sinh((k(ii)+k(jj))*H)...
            +(1-k(ii)*k(jj)*PI^2)/(2*(k(ii)-k(jj)))*sinh((k(ii)-k(jj))*H);
    end
    ff(ii,ii)=((k(ii)*PI)^2+1)/(4*k(ii))*sinh(2*k(ii)*H)...
        +(PI/2)*(1-cosh(2*k(ii)*H))+(H/2)*(1-(k(ii)*PI)^2);
end
%%-------------------------------A-------------------------------%%
for ii=1:1:(R+1)
    for jj=1:1:N
        A1(ii,jj)=fp(ii,jj);
    end
end
for ii=1:1:(R+1)
    for jj=1:1:(R+1)
        A2(ii,jj)=pp(ii,jj);
    end
end
for ii=1:1:N
    A4(ii,1)=0;
    A5(ii,1)=fp(1,ii)/L;
    for jj=1:1:N
        A3(ii,jj)=1i*k(jj)*ff(ii,jj);
        A4(ii,jj+1)=-1*LR(jj)*tanh(LR(jj)*L)*fp(jj+1,ii);
        A5(ii,jj+1)=LR(jj)*coth(LR(jj)*L)*fp(jj+1,ii);
    end
end
%%-------------------------------A-------------------------------%%
zeroRN=zeros(R+1,N);
zeroNN=zeros(N,N);
A=[A1 zeroRN -A2 A2; zeroRN A1 -A2 -A2;A3 zeroNN A4 A5; zeroNN A3 A4 -A5];
%%-------------------------------B-------------------------------%%
a0=0.3;
x0=-12; % 8m brfore obstacle
a1=a0*g/(1i*w*(cosh(k(1)*H)-k(1)*PI*sinh(k(1)*H)))*exp(-1i*k(1)*(x0+L));
for ii=1:1:(R+1)
```


doi:10.6342/NTU202500715

```
    B(ii,1)=-a1*fp(ii,1);
    B(ii+(R+1),1)=0;
end
for ii=1:1:N
    B(ii+(2*(R+1)),1)=1i*k(1)*a1*ff(ii,1);
    B(ii+(N+2*(R+1)),1)=0;
end
%%-------------------------------x-------------------------------%%
x = A\B;

for ii=1:1:N
    Bi(ii)=x(ii);
    Fi(ii)=x(ii+N);
end
for ii=1:1:R+1
    Dr(ii)=x(ii+2*N);
    Er(ii)=x(ii+2*N+R+1);
end
%%---------------------------------u,w,Cη?,ηw------------------------------
---%%
%given t and x draw u distribution along z axis
%given x find t then draw u distribution along z axis
%compare between different G d w L

x1=-8;
x3=8;
%find t with maxium u1 and u3
for tt=1:1:2000
    z=0;
    t=(tt-1)*0.01;  %find t with max u1 or u3 in 20s period
    u1Az0=1i*k(1)*a1*exp(1i*k(1)*(x1+L))*(cosh(k(1)*(z+H))...
        -k(1)*PI*sinh(k(1)*(z+H)));

    for iii=1:1:50
        u1Bz0(iii)=1i*k(iii)*Bi(iii)*exp(-1i*k(iii)*(x1+L))...
            *(cosh(k(iii)*(z+H))-k(iii)*PI*sinh(k(iii)*(z+H)));
        u3Fz0(iii)=1i*k(iii)*Fi(iii)*exp(1i*k(iii)*(x3-L))...
            *(cosh(k(iii)*(z+H))-k(iii)*PI*sinh(k(iii)*(z+H)));
```


doi:10.6342/NTU202500715

```
    end
    u1z0(tt)=real((u1Az0-sum(u1Bz0))*exp(-1i*w*t));
    u3z0(tt)=real(sum(u3Fz0)*exp(-1i*w*t));
end

[M1,I1]=max(u1z0);
[M3,I3]=max(u3z0);

t1=(I1-1)*0.01;
t3=(I3-1)*0.01;

%take t with maxium u at z=0, and caculate u distribution along z axis
for kk=1:1:11
    z(kk)=(kk-1)*-0.4;
    u1A=1i*k(1)*a1*exp(1i*k(1)*(x1+L))*(cosh(k(1)*(z(kk)+H))...
        -k(1)*PI*sinh(k(1)*(z(kk)+H)));

    for iii=1:1:50
        u1B(iii)=1i*k(iii)*Bi(iii)*exp(-1i*k(iii)*(x1+L))...
            *(cosh(k(iii)*(z(kk)+H))-k(iii)*PI*sinh(k(iii)*(z(kk)+H)));
        u3F(iii)=1i*k(iii)*Fi(iii)*exp(1i*k(iii)*(x3-L))...
            *(cosh(k(iii)*(z(kk)+H))-k(iii)*PI*sinh(k(iii)*(z(kk)+H)));
    end

    u1(kk)=real((u1A-sum(u1B))*exp(-1i*w*t1));
    u3(kk)=real(sum(u3F)*exp(-1i*w*t3));
end
```


doi:10.6342/NTU202500715

附錄 B

(2.8.27) 之推導過程

$$\int_{-H}^{-s} f^{(i)} p^{(r)} dz$$

當 $r = 0$

$$\int_{-H}^{-s} f^{(i)} p^{(0)} dz$$

$$= \int_{-H}^{-s} \left[\cosh k^{(i)}(z+H) - k^{(i)} \Pi \sinh k^{(i)}(z+H)\right][1] dz$$

$$= \frac{\sinh k^{(i)} h}{k^{(i)}} + \Pi\left[1 - \cosh k^{(i)} h\right]$$

當 $r \neq 0$

$$\int_{-H}^{-s} f^{(i)} p^{(r \neq 0)} dz$$

$$= \int_{-H}^{-s} \left[\cosh k^{(i)}(z+H) - k^{(i)} \Pi \sinh k^{(i)}(z+H)\right]\left[\cos \lambda^{(r)}(z+s)\right] dz$$

$$= \int_{-H}^{-s} \left[\cosh k^{(i)}(z+H) \cos \lambda^{(r)}(z+s) - k^{(i)} \Pi \sinh k^{(i)}(z+H) \cos \lambda^{(r)}(z+s)\right] dz$$

$$\begin{aligned} = \frac{k^{(i)}}{{k^{(i)}}^2 + {\lambda^{(r)}}^2}&\left[\sinh k^{(i)}(z+H) \cos \lambda^{(r)}(z+s)\right] \\ &+ \frac{\lambda^{(r)}}{{k^{(i)}}^2 + {\lambda^{(r)}}^2}\left[\cosh k^{(i)}(z+H) \sin \lambda^{(r)}(z+s)\right] \\ &- k^{(i)} \Pi \frac{k^{(i)}}{{k^{(i)}}^2 + {\lambda^{(r)}}^2}\left[\cosh k^{(i)}(z+H) \cos \lambda^{(r)}(z+s)\right] \\ &+ \frac{\lambda^{(r)}}{{k^{(i)}}^2 + {\lambda^{(r)}}^2}\left[\sinh k^{(i)}(z+H) \sin \lambda^{(r)}(z+s)\right] \Bigg|_{-H}^{-s} \end{aligned}$$

doi:10.6342/NTU202500715

$$= \frac{k^{(i)}}{{k^{(i)}}^2 + {\lambda^{(r)}}^2} \sinh k^{(i)} h + \frac{\lambda^{(r)}}{{k^{(i)}}^2 + {\lambda^{(r)}}^2} \sin \lambda^{(r)} h$$

$$- k^{(i)} \Pi \frac{k^{(i)}}{{k^{(i)}}^2 + {\lambda^{(r)}}^2} \left[\cosh k^{(i)} h - \cos \lambda^{(r)} (-h)\right]$$

$$= \frac{k^{(i)} \sinh k^{(i)} h + \lambda^{(r)} \sin \lambda^{(r)} h - \Pi {k^{(i)}}^2 \left(\cosh k^{(i)} h - \cos \lambda^{(r)} h\right)}{{k^{(i)}}^2 + {\lambda^{(r)}}^2}$$

(2.8.28) 之推導過程

$$\int_{-H}^{-s} p^{(r)} p^{(r\prime)} dz$$

當 $r = 0,\ r' = 0$

$$\int_{-H}^{-s} p^{(r=0)} p^{(r\prime=0)} dz$$

$$= \int_{-H}^{-s} 1 dz = h$$

當 $r \neq 0,\ r' = 0$

$$\int_{-H}^{-s} p^{(r\neq0)} p^{(r\prime=0)} dz$$

$$= \int_{-H}^{-s} \cos \lambda^{(r)} (z + s)\, dz = \frac{\sin \lambda^{(r)} h}{\lambda^{(r)}}$$

當 $r = 0,\ r' \neq 0$

$$\int_{-H}^{-s} p^{(r=0)} p^{(r\prime\neq0)} dz$$

$$= \int_{-H}^{-s} \cos \lambda^{(r\prime)} (z + s)\, dz = \frac{\sin \lambda^{(r\prime)} h}{\lambda^{(r\prime)}}$$

當 $r \neq 0,\ r' \neq 0,\ r = r'$

$$\int_{-H}^{-s} {p^{(r\neq0)}}^2 dz$$

doi:10.6342/NTU202500715

$$\int_{-H}^{-s} \cos^2 \lambda^{(r)}(z+s)\, dz = \frac{h}{2} + \frac{\sin 2\lambda^{(r)} h}{4\lambda^{(r)}}$$

當 $r \neq 0,\ r' \neq 0,\ r \neq r'$

$$\int_{-H}^{-s} p^{(r\neq 0)} p^{(r\prime\neq 0)} dz$$

$$= \int_{-H}^{-s} \cos \lambda^{(r)}(z+s) \cos \lambda^{(r\prime)}(z+s)\, dz$$

$$\left. \frac{\sin\left[\left(\lambda^{(r)} - \lambda^{(r\prime)}\right)(z+s)\right]}{2\left(\lambda^{(r)} - \lambda^{(r\prime)}\right)} + \frac{\sin\left[\left(\lambda^{(r)} + \lambda^{(r\prime)}\right)(z+s)\right]}{2\left(\lambda^{(r)} + \lambda^{(r\prime)}\right)} \right|_{-H}^{-s}$$

$$= \frac{\sin\left(\lambda^{(r)} - \lambda^{(r')}\right)h}{2\left(\lambda^{(r)} - \lambda^{(r')}\right)} + \frac{\sin\left(\lambda^{(r)} + \lambda^{(r')}\right)h}{2\left(\lambda^{(r)} + \lambda^{(r')}\right)}$$

$$= \frac{\sin \lambda^{(r)} h \cos \lambda^{(r')} h - \cos \lambda^{(r)} h \sin \lambda^{(r')} h}{2\left(\lambda^{(r)} - \lambda^{(r')}\right)} + \frac{\sin \lambda^{(r)} h \cos \lambda^{(r')} h + \cos \lambda^{(r)} h \sin \lambda^{(r')} h}{2\left(\lambda^{(r)} + \lambda^{(r')}\right)}$$

$$= \frac{\lambda^{(r)} \sin \lambda^{(r)} h \cos \lambda^{(r')} h - \lambda^{(r')} \cos \lambda^{(r)} h \sin \lambda^{(r')} h}{{\lambda^{(r)}}^2 - {\lambda^{(r\prime)}}^2}$$

(2.8.29) 之推導過程

$$\int_{-H}^{0} f^{(i)} f^{(i\prime)} dz$$

當 $i = i'$

$$\int_{-H}^{0} {f^{(i)}}^2 dz$$

$$= \int_{-H}^{0} \left[\cosh k^{(i)}(z+H) - k^{(i)} \Pi \sinh k^{(i)}(z+H)\right]^2 dz$$

doi:10.6342/NTU202500715

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-H}^{0} \cosh^2 k^{(i)}(z+H) - 2k^{(i)}\Pi \sinh k^{(i)}(z+H) \cosh k^{(i)}(z+H) \\
&\qquad + \left(k^{(i)}\Pi\right)^2 \sinh^2 k^{(i)}(z+H)\, dz \\
&= \frac{z+H}{2} + \frac{\sinh 2k^{(i)}(z+H)}{4k^{(i)}} - 2k^{(i)}\Pi \frac{\cosh 2k^{(i)}(z+H)}{4k^{(i)}} \\
&\qquad + \left(k^{(i)}\Pi\right)^2 \left[\frac{\sinh 2k^{(i)}(z+H)}{4k^{(i)}} - \frac{z+H}{2}\right]\Bigg|_{-H}^{0}
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{\left(k^{(i)}\Pi\right)^2 + 1}{4k^{(i)}} \sinh 2k^{(i)}H + \frac{\Pi}{2}\left(1 - \cosh 2k^{(i)}H\right) + \frac{H}{2}\left[1 - \left(k^{(i)}\Pi\right)^2\right]
$$

當 $i \neq i'$

$$
\int_{-H}^{0} f^{(i)} f^{(i')} dz
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-H}^{0} \cosh k^{(i)}(z+H) \cosh k^{(i')}(z+H) \\
&\qquad - \cosh k^{(i)}(z+H)\, k^{(i')}\Pi \sinh k^{(i')}(z+H) \\
&\qquad - k^{(i)}\Pi \sinh k^{(i)}(z+H) \cosh k^{(i')}(z+H) \\
&\qquad + k^{(i)}k^{(i')}\Pi^2 \sinh k^{(i)}(z+H) \sinh k^{(i')}(z+H)\, dz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{k^{(i)} \sinh k^{(i)}(z+H) \cosh k^{(i')}(z+H) - k^{(i')} \sinh k^{(i')}(z+H) \cosh k^{(i)}(z+H)}{{k^{(i)}}^2 - {k^{(i')}}^2} \\
&- k^{(i')}\Pi \frac{k^{(i)} \sinh k^{(i)}(z+H) \sinh k^{(i')}(z+H) - k^{(i')} \cosh k^{(i)}(z+H) \cosh k^{(i')}(z+H)}{{k^{(i)}}^2 - {k^{(i')}}^2} \\
&- k^{(i)}\Pi \frac{k^{(i')} \sinh k^{(i')}(z+H) \sinh k^{(i)}(z+H) - k^{(i)} \cosh k^{(i')}(z+H) \cosh k^{(i)}(z+H)}{{k^{(i')}}^2 - {k^{(i)}}^2} \\
&+ k^{(i)}k^{(i')}\Pi^2 \frac{k^{(i)} \sinh k^{(i')}(z+H) \cosh k^{(i)}(z+H) - k^{(i')} \cosh k^{(i')}(z+H) \sinh k^{(i)}(z+H)}{{k^{(i)}}^2 - {k^{(i')}}^2}\Bigg|_{-H}^{0}
\end{aligned}
$$

doi:10.6342/NTU202500715

$$
\begin{aligned}
&= \frac{k^{(i)} \sinh k^{(i)}H \cosh k^{(i\prime)}H - k^{(i\prime)} \sinh k^{(i\prime)}H \cosh k^{(i)}H}{{k^{(i)}}^2 - {k^{(i\prime)}}^2} \\
&- k^{(i')}\Pi \frac{k^{(i)} \sinh k^{(i)}H \sinh k^{(i')}H - k^{(i')} \cosh k^{(i)}H \cosh k^{(i')}H + k^{(i')}}{{k^{(i)}}^2 - {k^{(i')}}^2} \\
&+ k^{(i)}\Pi \frac{k^{(i')} \sinh k^{(i')}H \sinh k^{(i)}H - k^{(i)} \cosh k^{(i')}H \cosh k^{(i)}H + k^{(i)}}{{k^{(i)}}^2 - {k^{(i')}}^2} \\
&+ k^{(i)}k^{(i\prime)}\Pi^2 \frac{k^{(i)} \sinh k^{(i\prime)}H \cosh k^{(i)}H - k^{(i')} \cosh k^{(i')}H \sinh k^{(i)}H}{{k^{(i)}}^2 - {k^{(i')}}^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{k^{(i)} - k^{(i)}{k^{(i')}}^2\Pi^2}{{k^{(i)}}^2 - {k^{(i')}}^2} \sinh k^{(i)}H \cosh k^{(i')}H \\
&\qquad + \frac{{k^{(i)}}^2 k^{(i')}\Pi^2 - k^{(i')}}{{k^{(i)}}^2 - {k^{(i')}}^2} \sinh k^{(i')}H \cosh k^{(i)}H \\
&\qquad - \frac{\left({k^{(i)}}^2 - {k^{(i')}}^2\right)\Pi}{{k^{(i)}}^2 - {k^{(i')}}^2} \cosh k^{(i)}H \cosh k^{(i')}H + \frac{{k^{(i)}}^2 - {k^{(i')}}^2}{{k^{(i)}}^2 - {k^{(i')}}^2}\Pi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \Pi\left(1 - \cosh k^{(i)}H \cosh k^{(i')}H\right) \\
&\qquad + \frac{k^{(i)} - k^{(i)}{k^{(i')}}^2\Pi^2}{{k^{(i)}}^2 - {k^{(i')}}^2} \frac{\sinh\left(k^{(i)} + k^{(i\prime)}\right)H + \sinh\left(k^{(i)} - k^{(i\prime)}\right)H}{2} \\
&\qquad + \frac{{k^{(i)}}^2 k^{(i')}\Pi^2 - k^{(i')}}{{k^{(i)}}^2 - {k^{(i')}}^2} \frac{\sinh\left(k^{(i)} + k^{(i\prime)}\right)H - \sinh\left(k^{(i)} - k^{(i\prime)}\right)H}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \Pi\left(1 - \cosh k^{(i)}H \cosh k^{(i')}H\right) \\
&\qquad + \frac{k^{(i)} - k^{(i')} - k^{(i)}{k^{(i')}}^2\Pi^2 + {k^{(i)}}^2 k^{(i')}\Pi^2}{(k^{(i)} + k^{(i\prime)})(k^{(i)} - k^{(i\prime)})} \frac{\sinh\left(k^{(i)} + k^{(i\prime)}\right)H}{2} \\
&\qquad + \frac{k^{(i)} + k^{(i')} - k^{(i)}{k^{(i')}}^2\Pi^2 - {k^{(i)}}^2 k^{(i')}\Pi^2}{(k^{(i)} + k^{(i\prime)})(k^{(i)} - k^{(i\prime)})} \frac{\sinh\left(k^{(i)} - k^{(i\prime)}\right)H}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \Pi\left(1 - \cosh k^{(i)}H \cosh k^{(i')}H\right) + \frac{1 + k^{(i)}k^{(i')}\Pi^2}{2(k^{(i)} + k^{(i\prime)})} \sinh\left(k^{(i)} + k^{(i\prime)}\right)H \\
&\qquad + \frac{1 - k^{(i)}k^{(i')}\Pi^2}{2(k^{(i)} - k^{(i\prime)})} \sinh\left(k^{(i)} - k^{(i\prime)}\right)H
\end{aligned}
$$

doi:10.6342/NTU202500715

附錄 C

1/21(二)林業凱碩士論文口試，以下為 3 位口試委員提出的意見，依序為黃友麟老師、呂冠鴻老師、詹益齊老師。

黃委員口試建議與修正

問題與建議 1：

請問全部(內文)的推導都是你自己做的嗎?還是是有延續性的?你的文獻回顧裡似乎(沒有提及)?

回應與修正：

算式的推導參照張(2021)推倒的流程，將黏滯係數換為

將張(2021)所做之論文介紹新增至文獻回顧章節 1.2.3 中。相關修正請參見論文第 10 頁

將第二章中式(2.2.9)(2.2.10)從 Ng(2000)引用之推導結果來源紀錄於式的推導描述之中。相關修正請參見論文第 15 頁

將第二章中式(2.5.4)～(2.5.10)從張(2021)引用之推導結果來源紀錄於式的推導描述之中。相關修正請參見論文第 21 頁。

問題與建議 2：

請記得左右確實對齊。

回應與修正：

已將論文內文全部左右對齊。

問題與建議 3：

doi:10.6342/NTU202500715

文獻回顧中遺漏兩種浮式防波堤的介紹

回應與修正：

Tethered float type 浮式防波堤屬於較為特別的一種浮式防波堤。Tethered float type 浮式防波堤由數個小型浮球以繫繩將其固定於水面下方漂浮於水中，相較於其他浮式防波主要仰賴反射作為主要的消波方法，Tethered float type 浮式防波堤利用浮球於水中產生的摩擦來達成其消波的效果。

Horizontal plate type 浮式防波堤由一個或數個堆疊的薄平板以數根細小的柱子固定於水中。Horizontal plate type 浮式防波堤的優勢在於其能在不需要受到水面兇猛的水面波沖刷就能達到消波效果。

已於章節 1.2.1 補上 Tethered float type 及 Horizontal plate type 浮式防波堤的介紹。相關修正請參見論文第 4 頁。

問題與建議 4：

(初稿)第 41 頁淺水波與深水波的定義範圍錯誤

回應與修正：

已將淺水波的定義範圍修正為 $(kh < \pi/10)$，深水波的定義範圍修正為 $(kH > \pi)$。相關修正請參見論文第 42 頁。

問題與建議 5：

請問第 45 頁倒數第二行所提及之中間波的定義範圍是什麼？

回應與修正：

中間性波的定義範圍為介於淺水波與深水波之間 $(\pi\ /\ 10 < kH < \pi)$。相關修正請參見論文第 46 頁。

doi:10.6342/NTU202500715

呂委員口試建議與修正

問題與建議 1：

主要貢獻在哪？

回應與修正：

本文將參考張(2021)所使用的求解流程之下，結合 MacPherson (1980)所使用的包含了黏性及彈性項的複數形式的運動黏滯係數，求解出水波通過具有黏彈性底泥的水面障礙物的勢能函數。

問題與建議 2：

水域的假設為無黏滯性，請說明式(2.3.9)中剪力連續的部分。

回應與修正：

因為水域為無黏性流使得式(2.3.9)中等式的左半部得以為零，又底泥的黏滯性不為零，進而得出在 $z = -H$ 處時 $\frac{\partial u_m}{\partial z} = 0$ 的結論，即式(2.3.10)。相關修正請參見論文第 17 頁。

問題與建議 3：

為什麼使用邊界層厚度底泥的假設？

回應與修正：

因底泥厚度為邊界層厚度級，由 Ng(2000)之推倒結果，所以壓力不隨深度變化，使得底泥邊界層動量方程式可用於整個底泥的範圍。如此一來便能簡化底泥動量方程式，重新定義水域的底部邊界條件，方便後續求解特徵方程式。

問題與修正 4：

doi:10.6342/NTU202500715

第 16 頁的式(2.3.5)及式(2.3.6)中z的範圍標記錯誤。

回應與修正：

式(2.3.5)及式(2.3.6)為表面結構物的不透水邊界層條件，原記載之範圍為水面至水深，已修正為水面至水面結構物深 $-s < z < 0$。相關修正請參見論文第 16 頁。

詹委員口試建議與修正

問題與修正 1：

麻煩請說清楚，你針對的問題到底是什麼?你的結構物可代表...?

回應與修正：

本文研究的水面結構物為浮式防波堤，已將緒論中結構物，離岸堤等詞彙統一改成浮式防波堤，避免不同詞彙造成的誤解。相關修正請參見論文第 17 頁。

問題與修正 2：

圖 1-1 應該在正文中有所說明

回應與修正：

1944 年 6 月，數百艘拖船拖著總計數百萬噸的混凝土浮箱從英國出發，於法國諾曼第外海一英里處搭建 Mulberry A 及 Mulberry B 人工港 (圖 1-1)。

已於第一章第一段補上針對圖 1-1 的敘述及修改第 1.1 章第一段的內文。相關修正請參見論文第 1 頁。

問題與修正 3：

doi:10.6342/NTU202500715

圖 1-2 的圖片說明與內文描述兩者對不起來。

回應與修正：

圖 1-2 的圖片使用原因是為清楚展示 Jian(2018)所彙整之六種浮式防波堤的種類，而於尋找圖片時於 A.J. Cebada-Relea (2022)文章中找到最適合示意圖，已將示意圖的內容與圖片出處標示於圖片下方。相關修正請參見論文第 3 頁。

問題與修正 4：

所以，你研究中的浮式防坡堤是考慮哪一種?

回應與修正：

因 Box type 浮式防波堤的構造單純，故本文以 Box type 浮式防波堤作為欲求解之水面障礙物，以方便將水域依 Box type 浮式防波堤的界線分為障礙物前、障礙物下及障礙物後方三區域。相關修正請參見論文第 4 頁。

問題與修正 5：

圖 1-3 應該在正文中有所說明

回應與修正：

Mei & Black (1969) 則提出不需有水深無限深或障礙物無限長等等的限制，假設水波為線性波，並通過一個矩形水面或水底障礙物，圖 1-3 為 Mei & Black (1969)所使用之模型。相關修正請參見論文第 5 頁。

問題與修正 6：

Gade (1958)可以簡短說明實驗的設置：哪種波、哪種泥床等

回應與修正：

doi:10.6342/NTU202500715

Gade (1958) 在淺水波的假設下提出了上層為水域為理想流體，下層為黏性底泥的模型，通過水波為線性波，將解析結果與水槽之實驗結果進行比較驗證，發現波高會受泥床黏滯力的影響而隨傳遞距離衰減，而 Gade (1958) 的初步理論成為之後眾多學者對水域與底泥交互作用的研究基礎。相關修正請參見論文第 6 頁。

問題與修正 7：

Ng (2000)得到什麼結果?圖 1-4 應該在正文中有所說明。

回應與修正：

Ng (2000) 假設為水面之進行波微小振幅波且底泥厚度約等同其 Stokes's boundary layer，如圖 1-4，以微擾法的方式，將各物理量以級數表示並升冪排列。在微擾法的分析下推導出流體在一階的流速、消散率及二階的底泥與水的質量傳輸速度。Ng (2000)發現在底泥厚度約為 1.5 倍底泥邊界層厚度時，黏性底泥能產生最大的波浪衰減效果，Ng (2000)認為更厚的底泥會不利於底泥的質量傳輸進而減少消波的效果。相關修正請參見論文第 7 頁。

問題與修正 8：

Soltanpour et al.(2018)、Hejazi et al.(2013)請至少簡要說明他們的數值模型與方法並點出他們的成果與貢獻。

回應與修正：

Soltanpour et al.(2018) 則透過實驗研究當水域有水流存在時，觀察水流速度、底泥質量傳輸及波浪的衰減情形，發現當水波與水流的方向相向時，波的衰減會增加，同向時則減少。

doi:10.6342/NTU202500715

Hejazi et al.(2013) 以 Navier-Stokes 作為控制方程式，結合完整的動力邊界條件及運動邊界條件，得出一非線性模型，模擬出水與底泥之運動行為。發現波浪衰減會隨入射波波高的提高而降低，而越低的底泥密度會有更好的波浪衰減，並隨底泥越薄，水面行進波的波數也會降低。

相關修正請參見論文第 8 頁。

問題與修正 9：

請注意 SH Shamsnia (2019)引用的格式

回應與修正：

已將原本錯誤的格式修正成 SH Shamsnia (2019)。相關修正請參見論文第 9 頁。

問題與修正 10：

所以呢? 這些文獻對你的有什麼直接的影響/啟發...，或這些過往的研究有什麼不足的地方，你想要補足?

回應與修正：

本文從 Jian (2018)所彙整之浮式防波堤中選擇了適合本文研究的防波堤種類。Mei & Black (1969)提出了分析水波通過水面障礙物的解析解，Ng (2000)則提出了分析水波通過邊界層厚度級牛頓流體底泥的解析方式，而張(2021)則提出了將 Mei & Black (1969)與 Ng (2000)兩者著作結合的推導流程。本文希望能在此之上結合 MacPherson (1980)文中所使用的複數型黏彈性項帶入底泥的動量方程式中並提出新的見解，以解析解的方式，推導出底泥、水波及水面結構物三者交互作用下的勢能函數。

將文獻回顧中得到的啟發於第 1.3.1 章研究目的中提及，相關修正請參見論文第 11 頁。

doi:10.6342/NTU202500715

問題與修正 11：

圖 2-1 應該在文字中都有說明，每一個符號都請仔細說明清楚，並請說明一下採用"兩層"的系統有什麼基本假設，可引用相關文獻。

回應與修正：

本文使用二維卡氏座標 (x,z)，並參考張(2021)提出的將 Mei & Black (1969)與 Ng (2000)合併的模型，模型示意圖如圖 2-1，其中 x 軸為水平座標，波的行徑方向為正，z 軸為縱向座標，向上為正。原點 O 為障礙物水面上的中心，水波由左向右傳遞通過障礙物下方。水域為一無黏性且不可壓縮之理想流體，底泥為約為其邊界層厚度厚之不可壓縮黏彈性底泥，而水面障礙物與水域之交界具不透水層邊界條件，且我們假設水無法從障礙物上方通過。H為水深，s 為障礙物吃水深，h 為障礙物下方的水深，d 為底泥厚度，水面結構物長為 $2L$。η 為水面自由液面，ξ 為底泥液面，a_0 為入射波波高，k 為波數，ω 為角頻率。相關修正請參見論文第 13 頁。

問題與修正 12：

式(2.2.2)符號解釋離太遠

回應與修正：

u_w 為水域的水平速度，w_w 為水域的垂直速度。已將符號的解釋移至式子下方。相關修正請參見論文第 14 頁。

問題與修正 13：

式(2.2.6)你(泥床)是考慮黏彈性？

回應與修正：

doi:10.6342/NTU202500715

泥床為一不可壓縮之黏彈性流體，先前之牛頓流體之敘述為錯誤，已修正。相關修正請參見論文第 15 頁。

問題與修正 14：

式(2.2.7)底泥厚度應該不是"$d = \delta$"。

回應與修正：

底泥厚度屬邊界層厚度等級，可介於 1~3 倍邊界層厚度，已修改敘述為 $d \cong \delta$。相關修正請參見論文第 15 頁。

問題與修正 15：

方程式如果是自己推導，請給詳細過程，如果是引用，請附參考文獻

回應與修正：

式(2.2.9)、(2.2.10)為引用 Ng(2000)著作中之敘述，已補上相關註記。相關修正請參見論文第 15 頁。

問題與修正 16：

式(2.3.1)、(2.3.2)運動方程式、動力方程式應改為運動邊界條件及動力邊界條件。

回應與修正：

已將原敘述修改成運動邊界條件及動力邊界條件相關修正請參見論文第 16 頁。

問題與修正 17：

「在入射水波週期固定的前提下」 這句話是什麼意思?

回應與修正：

doi:10.6342/NTU202500715

因入射水波為週期固定的線性波，水域勢能函數 $\Phi_w = X(x)Z(z)T(t)$ 中的時間函數 $T(t)$ 可以表示為 $T(t) = e^{-i\omega t}$。相關修正請參見論文第 17 頁。

問題與修正 18：

可以解釋式式(2.5.12)的不合理處嗎？

回應與修正：

第 II 區水域勢能函數之通解為求解拉普拉絲方程式 $\frac{X''}{X} = -\frac{Z''}{Z} = \sigma$ 時，令 $\sigma = 0$ 及 $\sigma = \lambda^2$ 時得到之 $X(x)$ 及 $Z(z)$，水域之通解應為 $\sigma = 0$ 及 $\sigma = \lambda^2$ 得到之 $\phi(x,z) = X(x)Z(z)$ 相加，即式(2.5.7)乘式(2.5.8)加上式(2.5.9)乘式(2.5.10)。故式(2.5.12)已修正為

$$\phi_w^{(II)} = \left(D_0 + E_0 \frac{x}{L}\right) + \left(D \frac{\cosh \lambda x}{\cosh \lambda L} + E \frac{\sinh \lambda x}{\sinh \lambda L}\right) \cos \lambda(z + s)$$

相關修正請參見論文第 21 頁。

問題與修正 19：

請說明為什麼出現 summation

回應與修正：

因特徵值為使用微擾法所展開之無數個特徵值 $k^{(i)}$ 及 $\lambda^{(r)}$ 所組成，故帶入原本的勢能函數通解(2.5.11)、(2.5.12)、(2.5.13)時，各自的特徵值皆有其對應的係數，新的勢能函數通解應改以級數的形式表示。相關修正請參見論文第 27 頁。

問題與修正 20：

目前這章(第三章)所展示的成果都沒有清楚說明所使用的輸入條件。因此，目前的結果很難有什麼有意義的分析

doi:10.6342/NTU202500715

回應與修正：

若無特別說明則，本文模型使用參數如下

物理量名稱	符號	物理量值	物理量名稱	符號	物理量值
最大項數	N	50 項	結構物下水深	h	2m
最大項數	R	50 項	水密度	ρ_w	$1000\,kg/m^3$
入射波波高	a_0	0.3m	底泥密度	ρ_m	$1200\,kg/m^3$
水深	H	4m	底泥運動黏度	υ_m	$0.003\,m^2/s$
結構物吃水深	s	2m			

相關修正請參見論文第 38 頁。

問題與修正 21：

請較為詳細的說明這些係數的定義與提供參考文獻

回應與修正：

由前述所推導之控制方程式我們利用 Mei & Black (1969)所使用之無因次反射係數 $|R|$ 及透射係數參數 $|T|$，我們令

反射係數$|R|$為反射波係數 B_1除以入射波係數 A_1

$$|R| = \left|\frac{Re(B_1)}{Re(A_1)}\right| \tag{3.2.1}$$

透射係數$|T|$為透射波係數 F_1除以入射波係數 A_1

$$|T| = \left|\frac{Re(F_1)}{Re(A_1)}\right| \tag{3.2.2}$$

相關修正請參見論文第 38 頁。

問題與修正 22：

doi:10.6342/NTU202500715

請確實檢查(參考文獻)格式正確性

回應與修正：

參考文獻的格式統一使用 APA 格式。相關修正請參見論文第 54~56 頁。

問題與修正 23：

方程式如果是自己推導，請給詳細過程

回應與修正：

已將積分式(2.8.27)~(2.8.29)之推倒過程紀錄於附錄 B。相關修正請參見論文第 68~72 頁。

doi:10.6342/NTU202500715