

國立臺灣大學理學院地質科學研究所

碩士論文

Department of Geosciences

College of Science

National Taiwan University

Master's Thesis

利用克來勞方程式估計 LLSVP 造成之 CMB 非自轉扁率

Estimating the Non-Rotational Flattening of the CMB

Caused by LLSVPs Using Clairaut's Equation

王祐翔

Yu-Hsiang Wang

指導教授：吳逸民 博士

趙丰 博士

Advisor: Yih-Min Wu Ph.D.

Benjamin F. Chao Ph.D.

中華民國 114 年 6 月

June, 2025



摘要



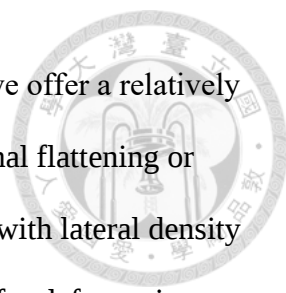
克來勞定理(Clairaut's theory)是描述受牛頓古典重力與相對小的自轉離心力之天體達靜力平衡時，自轉離心力與天體內部扁率兩者關係之理論，為大地測量學(geodesy)中歷久不衰之經典定理。本文中，我們以 Chao & Shih (2024)與 Poisson & Will (2014)為基礎(i) 擴張經典的克來勞定理，使其能夠計算天體於不連續面以上擁有微小的側向密度變化且達靜力平衡時，天體內部之扁率或形變係數隨半徑的變化，並嘗試使用此理論計算地球內部 LLSVP (large low shear velocity province) 對於 CMB (core mantle boundary) 扁率、地表扁率、地球 J_2 參數之影響；(ii) 計算克來勞定理於球諧函數(spherical harmonics)任何一次之形狀變化，並討論潮汐鎖定即自轉與公轉同步之天體，受重力與相對微小之引潮力的二次項後達靜力平衡時的形變大小；(iii) 證明經典的克來勞定理於等密度層中有解析解，並嘗試將 PREM (preliminary reference earth model) 換算成 n 層密度模型(n-layer density model)，避開數值積分，以疊代的方式直接計算地球內部扁率之強近似值。透過結合克來勞定理與地殼均衡學說(isostasy)即能夠以相對精簡的方式計算天體內部之不連續面，包括天體表面之上有側向密度變化時天體內部的扁率或形變係數隨半徑的變化，並且此方法能夠同時計算側向密度變化之荷重造成的形變與重力位變化造成的形變，因此相較於傳統的地殼均衡學說(isostasy)，此方法能夠完整計算天體達靜力平衡後之各深度的形狀，尤其是地殼均衡學說從未考慮之側向密度變化對遠處之扁率或形變係數的影響。

關鍵字: 重力位理論、重力異常與地球結構、行星大地測量與重力、地殼均衡學說、地形起伏

Abstract



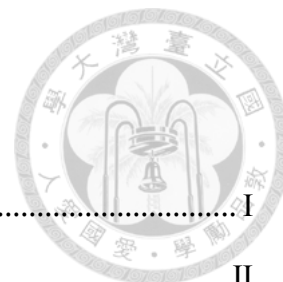
Clairaut's theory describes the relationship between the internal flattening of a celestial body and the rotational effects under hydrostatic equilibrium governed by Newtonian gravity and small rotational centrifugal force. As a foundational theory in geodesy, Clairaut's theorem has remained a cornerstone for centuries. In this study, we build upon the classical formulation following Chao & Shih (2024) and Poisson & Will (2014) to extend its applicability in three directions: (i) We generalize the classical Clairaut's theory to accommodate celestial bodies with small lateral density variations above discontinuities, still under hydrostatic equilibrium. This generalized formulation allows us to compute the radial profiles of internal flattening or deformation coefficients. We apply this theory to estimate the influence of Large Low Shear Velocity Provinces (LLSVPs) in Earth's deep mantle on the flattening of the core-mantle boundary (CMB), surface flattening, and the Earth's J_2 gravitational coefficient; (ii) We compute the shape deformation of celestial bodies expressed in spherical harmonics of arbitrary degree, based on the generalized Clairaut equation. We further analyze tidally locked bodies—those in synchronous rotation with their orbital motion—under the influence of gravity and second-order tidal force, to assess the magnitude of resulting equilibrium deformations; (iii) We demonstrate that the classical Clairaut equation admits analytical solutions in constant-density layers. Based on this, we attempt to approximate the Preliminary Reference Earth Model (PREM) with an n -layer density model, thereby avoiding direct numerical integration and instead employing an iterative approach to obtain accurate approximations of Earth's internal flattening profile.



By integrating Clairaut's theory with the principle of isostasy, we offer a relatively simplified yet robust method for computing radial variations in internal flattening or deformation coefficients within celestial bodies, including scenarios with lateral density heterogeneities at the surface. This method simultaneously accounts for deformation due to lateral mass loading and the resulting gravitational potential perturbations. Compared to traditional isostatic models, which do not consider the gravitational effects of lateral density variations on remote deformation, our approach provides a more complete description of the hydrostatic shape of a celestial body across all depths.

Key words: Geopotential theory, Gravity anomalies and Earth structure, Planetary geodesy and gravity, Isostatic equilibrium, Topography

目次



摘要	I
Abstract.....	II
目次	IV
圖次	V
表次	VI
第一章 緒論	1
第二章 克來勞定理	2
2.1 完全歸一化面球諧函數.....	2
2.2 靜力平衡與克來勞定理.....	3
2.3 天體自轉變形.....	6
2.4 天體因二次潮汐($l=3$)之變形.....	8
第三章 克來勞微分方程式於等密度層之解析解	11
3.1 等密度層之解析解.....	11
3.2 利用 n 層密度模型計算天體內部扁率分布之近似值與其誤差.....	12
第四章 荷重變形與克來勞定理	15
4.1 密度側向微小變化造成之重力位與荷重.....	15
4.2 荷重變形.....	17
4.3 荷重變形造成之重力位變化	18
第五章 LLSVP 對 CMB 扁率與地表扁率、重力場係數 J_2 之影響	21
5.1 LLSVP 造成之地球內部扁率變化	21
5.2 結果與討論.....	23
結論	28
參考文獻	29
附錄 A	31

圖 次

圖 3.1	PREM 之等效 500 層密度模型示意圖	14
圖 3.2	n 層密度模型所求之扁率近似值的誤差	14
圖 4.1	密度不連續面受荷重形變示意圖	18
圖 4.2	CMB 上之微小荷重造成的地球扁率隨半徑的變化	20
圖 5.1	CMB 上方之剪力波低速帶分布圖	23
圖 5.2	極軸橫躺於赤道上之 $Y_{20}(\psi)$ 成分分布圖	23
圖 5.3	荷重變形和 LLSVP 之重力位造成的地球內部扁率變化	26
圖 5.4	荷重變形與 LLSVP 之重力位造成的地球內部扁率變化	27

表 次

表 5.1 荷重與 LLSVP 之重力位於地表與 CMB 形變參數表	25
--	----



第一章 緒論



地殼均衡學說(isostasy)為假設地球是半空間時，地殼會透過形變使其荷重與地函浮力平衡的模型，已知核函邊界(core mantle boundary, CMB)之上亦具有與地表相似之側向的密度變化，故估計 CMB 達靜力平衡的形狀時，前人常沿用地殼均衡之想法套用在地球內部，但是地殼均衡學說本身無視如地殼或 CMB 上方之側向的密度變化造成之額外的重力相關的力平衡與地球形狀變化。而克來勞定理(Clairaut's theory) 能夠計算天體受如離心力等相較於重力微小的外力後達靜力平衡的形狀，而此定理亦能夠計算地球內部額外的重力造成的形變，因此若能夠正確考慮額外的重力量值，即可彌補地殼均衡模型之不足，故本文嘗試結合兩模型，正確理解天體達靜力平衡時之形狀，尤其是距離側向密度變化較遠處的扁率，會因重力非接觸力的性質，造成之不能忽視的形變。

在本論文中，我們以 Chao & Shih (2024)與 Poisson & Will (2014)為基礎，嘗試將微小側向密度變化造成的形變，以克來勞微分方程式的形式表示。故首先於第二章利用微擾理論(perturbation theory)與帕松方程式(Poisson equation)的特性整理計算球諧函數(spherical harmonics)任一次與任一階之克來勞方程式，證明無論側向的密度變化之形式，皆能以類似的方式計算相應之天體形變的一次近似解；第三章利用克來勞定理於等密度層有解析解的性質，嘗試以疊代的方式計算克來勞方程式之強近似解；並於第四章擴張克來勞定理使其能夠計算天體擁有微小的側向密度變化時，天體內部之形變隨半徑的變化；最後第五章嘗試利用地球之一維模型、第三章之近似解與第四章之理論計算 LLSVP(large low shear velocity province)可能對地球內部造成之額外的扁率變化。透過上述推導即能夠計算任何密度主要隨半徑變化的球狀天體有微小側向密度變化與其荷重與時的形變隨半徑的變化之一次近似值。

第二章 克來勞定理



2.1 完全歸一化面球諧函數

已知固定座標系中任意物體內外特定位置的重力位 U 能夠精確地以多極展開形式(multipole formalism)表示作(詳參見 Chao & Shih, 2021):

$$U(r, \theta, \phi) = -4\pi G \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \{Q_{lm}(r) r^{-l-1} + q_{lm}(r) r^l\} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (1)$$

G 為萬有引力常數，而 Q_{lm} 與 q_{lm} 分別為：

$$Q_{lm}(r) \equiv \int_0^r dr_1 \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi r_1^l \rho(r_1, \theta, \phi) r_1^2 Y_{lm}^*(\theta, \phi) \quad (2a)$$

$$q_{lm}(r) \equiv \int_r^R dr_1 \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi r_1^{-l-1} \rho(r_1, \theta, \phi) r_1^2 Y_{lm}^*(\theta, \phi) \quad (2b)$$

式(2)為半徑為 r 的球內部質量相關的多極展開項，以及半徑為 r 的球面以外至天體半徑 R 以內之質量相關的多極展開項， r_1 是徑向積分的虛指標(dummy index)。其中：

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{lm}(\cos\theta) \exp(im\phi) \quad \{m \geq 0\} \quad (3a)$$

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \phi) \quad (3b)$$

該函數是次數為 $l (= 0, 1, \dots, \infty)$ 、階數為 $m (= -l, \dots, 0, \dots, l)$ 的完全歸一化面球諧函數 (fully normalized surface spherical harmonic)，而 $P_{lm}(\cos\theta)$ 為連帶雷建德函數 (associated Legendre function)。式(2)中的密度函數與體球諧函數的乘積對物體體積($dV = r^2 dr d\cos\theta d\phi$)的積分，數學上為兩函數之內積。



2.2 靜力平衡(hydrostatic equilibrium)與克來勞定理

克來勞定理(Clairaut's theory)之物理原理是基於靜力平衡(hydrostatic equilibrium)，根據其定義： $\nabla p = -\rho \nabla \Phi$ ，即壓力梯度等於密度乘以負的位之梯度，已知密度為球對稱且只受重力影響之天體會達靜力平衡並符合該式，若此時天體之壓力、位與密度皆受額外的微小擾動 δp 、 $\delta \Phi$ 、 $\delta \rho$ ，靜力平衡之式可展開後無視高次項並減去與擾動無關且已達平衡的項後可表示為：

$$\nabla \delta p + \delta \rho \nabla \tilde{\Phi}(r) + \rho(r) \nabla \delta \Phi = 0 \quad (4)$$

其中 $\tilde{\Phi}(r)$ 、 $\rho(r)$ 為擾動前之位與密度。其中各項皆可以利用球諧函數展開作：

$$\delta p = \sum_{l,m} p_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (5a)$$

$$\delta \rho = \sum_{l,m} \rho_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (5b)$$

$$\delta \Phi = \sum_{l,m} [U_{lm}(r) + V_{lm}(r)] Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (5c)$$

其中 U_{lm} 為形變造成的重力位，而 V_{lm} 為自轉離心位或引潮位等外位。此外 $\nabla \tilde{\Phi}$ 為形變前的位之梯度，在微擾一次的精確度下即為球狀天體內部的重力位之梯度，根據式(1)可表示作：

$$\frac{d}{dr} \tilde{\Phi} \cong \frac{Gm(r)}{r^2}, \quad m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(s) s^2 ds \quad (6)$$

而 $\tilde{\Phi}$ 側向 (θ, ϕ) 之梯度為0。因此徑向的平衡透過球諧函數各項的拆解可表示作：

$$p'_{lm} + \rho_{lm} \frac{Gm(r)}{r^2} + \rho(U'_{lm} + V'_{lm}) = 0 \quad (7)$$

「'」以下皆指徑向 (r) 的微分。因等密度層不再是球對稱，描述變形後的密度 ρ_{lm} 較為困難，故本文將物體由球座標變換至最早由 Kopal (1980)提出的克來勞座標系(Clairaut coordinate)，使密度重新為「徑向」的函數。該座標系之三軸不再正

交，而是以固定徑長表示特定的形變後之球面。球座標 r 可透過以下關係式轉換成新座標之 ξ ：

$$r = \xi [1 + \sum_{l,m} f_{lm}(\xi) Y_{lm}(\theta, \phi)] \quad (8a)$$

f_{lm} 為表示 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ 形式之形變的無因次參數，形變量可透過 $\xi f_{lm}(\xi) Y_{lm}(\theta, \phi)$ 計算。式(8a)的反函數在 $O(f_{lm})$ 一次的精確度下可以表示作：

$$\xi \cong r [1 - \sum_{l,m} f_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \phi)] \quad (8b)$$

因克來勞座標系中之密度分布 $\rho_c(\xi)$ 與形變前球座標系中之密度分布 $\rho(r)$ 相同，故形變後的天體中相同半徑 r 的密度為可透過泰勒展開近似作：

$$\rho_c(\xi(r)) = \rho(\xi(r)) \cong \rho(r) - r \rho'(r) \sum_{l,m} f_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (9)$$

根據式(5b)得：

$$\rho_{lm} = -r f_{lm} \rho' \quad (10)$$

如上所述， $\tilde{\Phi}(r)$ 為形變前之重力位，其側向之梯度為 0，因此可由式(4)側向 (θ, ϕ) 的關係得知：

$$p_{lm} + \rho(U_{lm} + V_{lm}) = 0 \quad (11a)$$

$$p'_{lm} = -[\rho(U_{lm} + V_{lm})]' \quad (11b)$$

將式(10、11b)代入式(7)整理得：

$$f_{lm} \frac{Gm(r)}{r} + U_{lm} + V_{lm} = 0 \quad (12)$$

此乃克來勞方程式之積分形式。根據帕松方程式(Poisson's equation)於天體內部 (Poisson & Will, 2014):

$$\nabla^2 \sum_{l,m} U_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) = 4\pi G \sum_{l,m} \rho_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (13)$$

已知 $r^2 \nabla^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = -l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi)$ ，故整理上式後將式(10)代入得：

$$\frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} U_{lm}(r) - l(l+1) U_{lm}(r) = 4\pi G r^2 \rho_{lm} \cong -4\pi G r^3 f_{lm} \rho' \quad (14)$$

已知 $\nabla^2 V_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) = 0$ ， $V_{lm}(r)$ 於原點不發散的解為：

$$V_{lm}(r) = -\frac{4\pi}{2l+1} D_{lm} r^l \quad (15)$$

D_{lm} 為外位之係數。將式(12)以式(14)的方式計算並整理得：

$$\frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} u_{lm} - l(l+1) u_{lm} = 0, \quad u_{lm} = f_{lm} \frac{Gm}{r} + U_{lm} + V_{lm} \quad (16)$$

$$r^2 f_{lm}'' + 6 \frac{\rho(r)}{\bar{\rho}(r)} (r f_{lm}' + f_{lm}) - l(l+1) f_{lm} = 0 \quad (17)$$

式(17)即為克來勞微分方程式。 $\bar{\rho}$ 為形變前之天體中，半徑 r 的球以內之平均密度：

$$m(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \bar{\rho}(r), \quad \bar{\rho}(r) \equiv \frac{3}{r^3} \int_0^r \rho s^2 ds \quad (18)$$

式(17)於 r 趨近於 0， $\frac{\rho(r)}{\bar{\rho}(r)}$ 趨近於 1，此時該方程式於原點附近不發散的解為：

$$f_{lm} \sim a_{lm} r^{l-2} \quad (19)$$

因此當 $l=2$ 時常以該係數之微分 $f_{2m}' = 0$ 表示其邊界條件，但須注意此時密度於原點之梯度 ρ'_0 需為 0 (詳見附錄)。另一個邊界條件可利用式(1)與式(15)計算式(12)與其微分於 $r=R$ 之值：

$$\frac{GM}{R} f_{lm,R} = \frac{4\pi}{2l+1} \left[\frac{GQ_{lm,R}}{R^{l+1}} + D_{lm} R^l \right] \quad (20a)$$

$$\frac{GM}{R} [R f'_{lm,R} - f_{lm,R}] = \frac{4\pi}{2l+1} \left[-(l+1) \frac{GQ_{lm,R}}{R^{l+1}} + l D_{lm} R^l \right] \quad (20b)$$



根據式(20)得知:

$$D_{lm} = \frac{GM}{4\pi R^{l+1}} [R f'_{lm,R} + l f_{lm,R}] \quad (21a)$$

$$GQ_{lm,R} = -\frac{GM}{4\pi} R^l [R f'_{lm,R} - (l+1) f_{lm,R}] \quad (21b)$$

M 為天體之總質量。其中式(21a)為已知外位時之邊界條件，式(17)的克來勞微分方程式中並無外力位之係數 D_{lm} ，而只以線性的定標因子(scaling factor)的形式進入此邊界條件，而式(20a)對應克來勞關係式(Clairaut's relation，詳下述)。

2.3 天體自轉變形

天體受自轉變形時，離心位(centrifugal potential)可表示為：

$$V(r, \theta) = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta = -\frac{1}{3} \omega^2 r^2 \left[1 - \sqrt{\frac{4\pi}{5}} Y_{20}(\theta, \phi) \right] \quad (22)$$

ω 為自轉角速度，其中第一項會改變式(6)的值，但在微擾一次的精確度下可忽略。根據式(15)得知:

$$D_{20} = -\sqrt{\frac{5}{4\pi}} \frac{\omega^2}{3} \quad (23)$$

為了滿足扁率的定義， $f_L \equiv 1 - (\text{半短軸}/\text{半長軸})$:

$$f_L = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} f_{20} \quad (24)$$



適用於受離心位形變之天體之克來勞微分方程式可根據式(17)並代入 $[l=2, m=0]$ 即得:

$$r^2 f_L'' + 6 \frac{\rho}{\bar{\rho}} r f_L' - 6 \left(1 - \frac{\rho}{\bar{\rho}}\right) f_L = 0 \quad (25)$$

由於式(24)只使 f_{20} 呈常數倍，因此不影響式(17)之形式。而上式之邊界條件除了原點可根據式(19)可表示為 $f_{L,0}' = 0$ 之外，天體表面之邊界條件可將式(23、24)代入式(21a)並得:

$$R f_{L,R}' + 2 f_{L,R} = \frac{5 R^3 \omega^2}{2 GM} = \frac{5}{2} q \quad (26)$$

其中 q 為離心力之無因次參數，與式(2b)之 q 無關。已知四極子項 Q_{20} 的物理意義與重力場係數 J_2 有關，兩者之關係式可根據 Chao & Shih (2024)表示為:

$$-\sqrt{\frac{4\pi}{5}} Q_{20,R} = J_2 M R^2 \quad (27)$$

將式(23、24、27)代入式(20a)整理後得:

$$f_{L,R} = \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} q \quad (28)$$

此乃扁率版本之克來勞關係式(Clairaut's relation)。

由於克來勞微分方程式沒有一般的解析解，因此除了有解析解之等密度層之外(詳見第三章)，傳統的課本常介紹 Radau 於 1885 年提出的變數變換，將克來勞二階微分方程式轉換為一階微分方程式。近年由密度分布直接計算的數值解已經完全取代上述方法，如 Dahlen & Tromp (1998)利用 PREM 的密度分布直接求解。其結果正如 Jeffreys (1924)根據式(25)的性質所述，當 ρ' 為負時 f_L' 為正，即天體密度隨半徑增加而減少時，天體隨半徑增加而變扁平。須注意式(17、25)如

Rogister & Rochester (2004)所述，式中密度梯度 ρ' 項於推導過程中相互抵消，表示克來勞定理中，密度不連續之處（如：核-幔邊界或內核-外核邊界）扁率 f 仍連續甚至可微分一次，即地球內部沒有空隙或物質的重疊，此性質已可由式(12)確認。

$f_L=0$ 是式(25)的平凡解(trivial solution)，根據式(26)物體需不旋轉，即 $\omega = 0$ 。而扁率 f_L 為常數亦為式(25)的解，根據式(25) $\bar{\rho}(r) = \rho(r)$ 需成立，則根據式(18)右式，密度 ρ 需為常數。已知受牛頓重力模型之重力與自轉離心力之均質天體達靜力平衡時，會呈數學上嚴格的橢球體稱作馬克勞林橢球體(Maclaurin spheroid) (Poisson & Will, 2014)，而均質天體根據式(25、26)其扁率應為 $f_L \cong \frac{5}{4}q$ ，此為馬克勞林橢球體的扁率之一次近似至 $O(q)$ ，以此計算的地球扁率約為 1/230.7，此乃牛頓估算之地球扁率。

2.4 天體因二次潮汐($l=3$)之變形

克來勞微分方程式常用於描述 2 次($l=2$)的形變，除扁率之外，例如 Chao & Shih (2024)亦有計算受潮汐鎖定的天體因引潮位造成之 $Y_{22}(\theta, \phi)$ 的形變，由於作用在潮汐鎖定的天體上之引潮位造成的形變皆能用克來勞微分方程式計算，但因高次的變形受彈性力等影響，常與靜力平衡無關，而大於 2 次之相對低次項，除了產生該形變的外位較小之外，例如 $Y_{40}(\theta, \phi)$ 的形變會受 $Y_{20}(\theta, \phi)$ 形變的高次項影響，故本文嘗試計算接近靜力平衡，且與球諧函數 2 次項($l=2$)形變之高次項無關之 $Y_{30}(\theta, \phi)$ 項達靜力平衡時的形變。由於引潮位中 $Y_{30}(\theta, \phi)$ 項相對 $Y_{20}(\theta, \phi)$ 項小，但其造成之形變仍可能在氣體行星與矮行星系統之衛星上觀測。

以圓軌道運動之衛星於主星周圍產生之引潮位可表示作(Dermott & Murray, 1999):

$$V_{tide} = -\frac{Gm_s}{a} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{l0}(\theta, \phi) \quad (29)$$



此時主星質心為座標系原點， z 軸由原點往衛星質心方向為正， m_s 為衛星質量， a 為衛星軌道長半徑在一次精確度下會造成 $Y_{30}(\theta, \phi)$ 的形變之引潮位只有：

$$V_{30} = -\sqrt{\frac{4\pi}{7}} \frac{Gm_s}{a^4} r^3 \quad (30)$$

根據式(15)得知：

$$D_{30} = \sqrt{\frac{7}{4\pi}} \frac{Gm_s}{a^4} \quad (31)$$

由於 $P_{30}(\cos \theta)$ 之數值範圍為 $[-1, 1]$ 較方便計算，故根據式(3a)定義：

$$f_3 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} f_{30} \quad (32)$$

適用於此形變之克來勞微分方程式可根據式(17)並代入 $[l=3, m=0]$ 得：

$$r^2 f_3'' + 6 \frac{\rho}{r} f_3' - 6 \left(2 - \frac{\rho}{r}\right) f_3 = 0 \quad (33)$$

如上所述式(32)不影響式(17)之係數。上式之邊界條件除原點可根據式(19)得知為 $f_3 = 0$ 之外，天體表面之邊界條件可將式(31、32)代入式(21a)並得：

$$R f_{3,R}' + 3 f_{3,R} = 7 \frac{m_s}{M} \frac{R^4}{a^4} \quad (34)$$

M 為主星質量， R 為主星半徑。 f_3 與 2 次($l=2$)的克來勞微分方程式中之扁率一樣連續且可微分一次，即主星內部沒有空隙或物質的重疊。 $f_3 = 0$ 是式(33)的平凡解(trivial solution)，由式(34)可知此時無外力作用。而當密度為常數時，由式(33)與兩個邊界條件得知 $f_3 \cong \frac{7}{4} \frac{m_s}{M} \frac{R^3}{a^4} r$ ，故若衛星密度為常數，且此時引起衛星之潮汐的天體為主星時， M 須代入衛星質量而 m_s 須代入主星質量，則衛星表面因第二次的潮汐($l=3$)造成之形變的幅度為 $f_3 R_s \cong \frac{7}{4} \frac{m_p}{m_s} \frac{R_s^5}{a^4}$ ，其中 m_p 、 m_s 、 R_s 與 a 分別為主星

質量、衛星質量、衛星半徑與衛星軌道長半徑。於太陽系內既受潮汐鎖定又接近靜力平衡的天體中，木衛一(Io)可產生最大的此種形變，其幅度可達約 20 m (Jacobson, 2021)，而其他接近靜力平衡之天體的形變皆小於 10 m，此乃非 2 次 ($l \neq 2$) 之克來勞微分方程式罕見之主因。

第三章 克來勞微分方程式於等密度層之解析解



3.1 克來勞微分方程式於等密度層之解析解

當天體一維密度模型中半徑 r 介於 $[r_b, r_t]$ 間密度相等可記作 ρ_c ，根據式(18)右式得知密度 ρ_c 與半徑 r 以內的平均密度 $\bar{\rho}(r)$ 的比值為：

$$\frac{\rho_c}{\bar{\rho}(r)} = \left\{ 1 + \left[\frac{\bar{\rho}(r_b)}{\rho_c} - 1 \right] \left(\frac{r_b}{r} \right)^3 \right\}^{-1} \quad (35)$$

此比值的一階導函數與二階導函數可分別表示作：

$$\frac{d}{dr} \frac{\rho_c}{\bar{\rho}} = \frac{3}{r} \frac{\rho_c}{\bar{\rho}} \left(1 - \frac{\rho_c}{\bar{\rho}} \right) \quad (36a)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} \frac{\rho_c}{\bar{\rho}} = \frac{6}{r^2} \frac{\rho_c}{\bar{\rho}} \left(1 - \frac{\rho_c}{\bar{\rho}} \right) \left(1 - 3 \frac{\rho_c}{\bar{\rho}} \right) \quad (36b)$$

設：

$$f_{lm} = \frac{\rho_c}{\bar{\rho}(r)} g_{lm} \quad (37)$$

並將上式代入式(17)後透過式(36)的關係整理得：

$$r^2 g_{lm}'' + 6(r g_{lm}' + g_{lm}) - l(l+1)g_{lm} = 0 \quad (38)$$

上式與式(17)於密度為常數時之微分方程式相同，將 $g_{lm} = r^l$ 代入上式並求 l 之解得知半徑 r 介於 $[r_b, r_t]$ 時：

$$f_{lm} = \frac{\rho_c}{\bar{\rho}(r)} (A_n r^{-l-3} + B_n r^{l-2}) \quad (39)$$

邊界條件為端點 f_{lm} 連續且其一階導函數 f_{lm}' 連續，與式(19、21a)所表示的條件。

以兩層之天體 2 次 ($l=2, m$ 不限) 的形變為例，第 n 層之形變係數 f_n 可表示作：

$$f_1 = \mu \frac{5(1+ls_1^3)^2}{(5ls_1^3+2)(2l+5)-9ls_1^5} \quad (40a)$$

$$f_2 = \mu \frac{(1+ls_1^3)^2}{(5ls_1^3+2)(2l+5)-9ls_1^5} \frac{3ls_1^5 s^{-2} + (2l+5)s^3}{s^3 + ls_1^3} \quad (40b)$$



$s = r/R$, $s_1 = r_1/R$, $l = (\rho_1 - \rho_2)/\rho_2$, 且 r_1 為兩層之邊界半徑、 R 為天體半徑、 ρ_n 為第 n 層之密度, μ 根據式(21a)為 $D_{lm} \frac{4\pi R^3}{GM}$, 此時天體內部兩層之邊界和表面的扁率與 Dermott & Murray (1999) 之式(4.79, 4.80, 4.83)於有效剛性率 (effective rigidity) 為 0 時的數值相同。

3.2 利用 n 層密度模型計算天體內部扁率分布之近似值與其誤差

因等密度層有解析解, 故能夠將天體內部連續變化之密度改作等效之離散且各層密度一致之 n 層密度模型(n -layer density model)(圖 3.1), 即可根據式(39)計算天體內部形變係數 f_{lm} 分布之近似值。若定義各層邊界為 r_n ($r_0=0$), 而各邊界以內的平均密度根據式(18)右式, 可表示為:

$$\bar{\rho}_n = \bar{\rho}(r_n) \equiv \frac{3}{r_n^3} \int_0^{r_n} \rho(s) s^2 ds \quad (41)$$

其中 $\rho(r)$ 是形變前的密度一維分布。 $\bar{\rho}_n$ 為此方法中唯一需要透過數值積分所求之值, 而層間的有效密度為層內質量除以層內體積, 可以透過 $\bar{\rho}_n$ 表示作:

$$\rho_n \equiv \frac{\bar{\rho}_n r_n^3 - \bar{\rho}_{n-1} r_{n-1}^3}{r_n^3 - r_{n-1}^3} \quad (42)$$

須注意 ρ_n 與上述 $\rho(r)$ 不同。

以 2.3 節之自轉造成的扁率為例, 各邊界之扁率 $f_n = f_L(r_n)$, 根據上述之邊界條件, 兩種積分常數可表示作:

$$B_n = \frac{3}{5} f_{n-1} + \frac{1}{5} \frac{\bar{\rho}_{n-1}}{\rho_n} [2f_{n-1} + f'_{n-1} r_{n-1}] \quad (43a)$$

$$A_n r_{n-1}^{-5} = \frac{\bar{\rho}_{n-1}}{\rho_n} f_{n-1} - B_n \quad (43b)$$

根據式(19)之邊界條件已知 $f'_1 = 0$ 。下一個邊界之扁率與其導函數為:

$$f_n = \frac{\rho_n}{\bar{\rho}_n} \left[A_n r_{n-1}^{-5} \left(\frac{r_{n-1}}{r_n} \right)^5 + B_n \right] \quad (44a)$$

$$f'_n r_n = 5 \frac{\rho_n}{\bar{\rho}_n} B_n - \left(2 + 3 \frac{\rho_n}{\bar{\rho}_n} \right) f_n \quad (44b)$$

由於 f_0 未知, 因此需先假設 $f_0 = f_0^t = f_1^t$, 並且計算至 f_R^t 後, 可如同式(26)計算下



式：

$$Rf_R'^t + 2f_R^t = \frac{5}{2}q^t \quad (45)$$

如第二章所述， $q = \frac{R^3\omega^2}{GM}$ 只以線性的定標因子之形式進入克來勞微分方程式端點的邊界條件，因此所求之內部扁率分布為：

$$f_n = \frac{q}{q^t} f_n^t \quad (46)$$

此方法之計算與 Ragazzo (2020)等價，只是該文中是利用式(12)之克來勞方程式之積分形式計算。

已知密度 $\rho = \rho_0 \frac{\sin(x)}{x}$ 時，克來勞微分方程式具有解析解(Poisson & Will, 2014):

$$f_{lm} = \frac{xj_l(x)}{x\cos(x) - \sin(x)} \quad (47a)$$

$$f_{2m} = \frac{3}{x^2} - \frac{\sin(x)}{\sin(x) - x\cos(x)} \quad (47b)$$

$j_l(x)$ 為球貝索函數(spherical Bessel functions)，而 x 為距離的無因次參數。比較 500 層密度模型計算之 f_{2m} 分布與式(47b)之解析解，得知兩者誤差的數量級僅為 $10^{-3}\%$ (圖 3.2)，此誤差於地球表面相當於長半徑與短半徑之差 $\Delta(a - b)$ 只與解析解相差約 8 公分。

若比較利用四階 Runge-Kutta 法與 500 層密度模型計算之 PREM 地球內部扁率分布，可知兩者誤差的數量級約為 $10^{-4}\%$ (圖 3.2)，相當於在地表長半徑與短半徑之差 $\Delta(a - b)$ 約只與數值解相差約 3 公分，扁率的倒數 f^{-1} 之有效位數可達小數點後第三位，該數值比 Radau 提出之近似值精確。利用 n 層密度模型之好處除了計算簡便與近似值精確之外，由於所有密度均離散，因此不必額外處理密度不連續點，並且無需顧慮 f'' 於原點附近急遽的變化，是計算天體內部扁率分布近似值之優良方法。

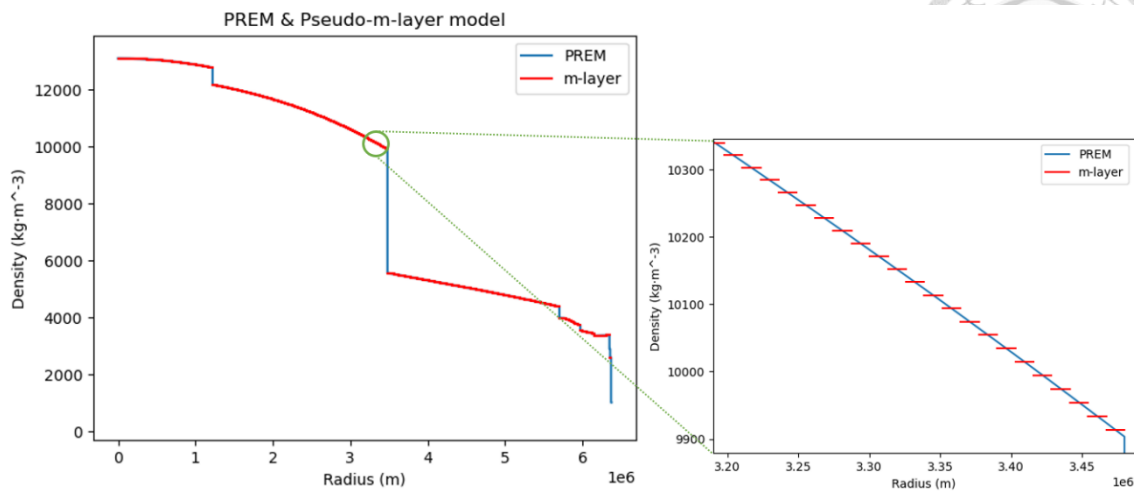


圖 3.1 PREM 之等效 500 層密度模型示意圖。

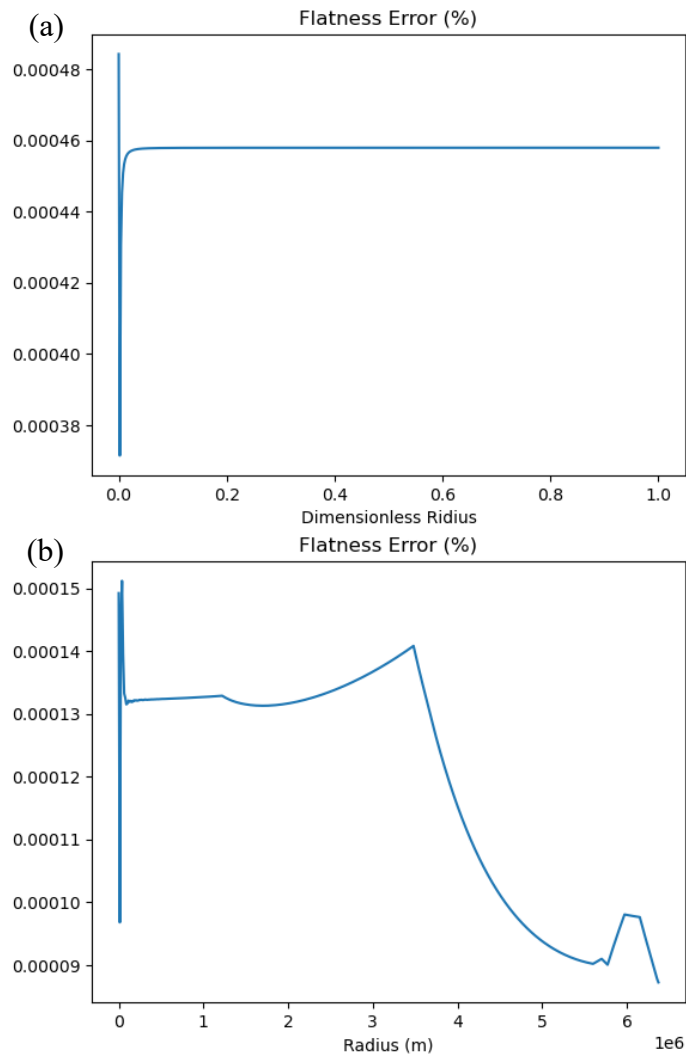


圖 3.2 (a) 500 層密度模型所求之扁率近似值與解析解之誤差。(b) PREM 以 500 層等效密度模型所求之扁率近似值與數值解之誤差。

第四章 荷重變形與克來勞定理



第二章我們假設天體於變形之前密度只隨半徑變化，但已知實際的天體具有側向的密度變化，本文嘗試利用克來勞定理計算此側向的密度變化對天體形變的影響，嘗試了解如地球 CMB (core mantle boundary) 以上之 LLSVP (large low shear velocity province) 達靜力平衡時，地球內部之形變量。由於側向的密度變化會透過本身的重力位與荷重影響地球內部的形狀，因此本章先於 4.1 節計算其重力位造成的形變、4.2 節計算其荷重造成的形變，並於 4.3 節計算該形變產生之重力位變化造成的形變。若側向密度變化是由流體造成，則達到靜力平衡時該流體無法維持密度變化，因此本章假設側向密度變化與地殼均衡理論相似，是由黏滯係數遠大於周圍並可近似為「剛體」的物質造成(Hemingway & Matsuyama, 2017)，而該「剛體」內允許存在因額外密度造成的水平壓力變化，而此壓力變化於「剛體」內產生之力會與「剛體」的內力平衡而不會形變，並只需要上下邊界之壓力與浮力(正向力)平衡，整個「剛體」即達靜力平衡，實際上此「剛體」亦非嚴格的剛體，如 4.2 節所述，其形狀會隨邊界條件而稍微變形。

4.1 密度側向微小變化造成之重力位與荷重

受微擾的天體達靜力平衡時須符合式(4)，而若天體於形變之前即具有側向的密度變化，式(5b、5c)則改寫作：

$$\delta\rho = \sum_{l,m} [\rho_{lm}(r) + \epsilon_{lm}(r)\rho(r)] Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (48a)$$

$$\delta\Phi = \sum_{l,m} [U_{lm}(r) + U_{lm}^{\epsilon}(r) + V_{lm}(r)] Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (48b)$$

$\epsilon_{lm}(r)$ 為額外側向密度變化之係數， U_{lm}^{ϵ} 為該側向密度變化產生之重力位，且物理上要求 $\epsilon_{lm}(0) = 0$ ，而 $\rho_{lm}(r)$ 為因形變產生之密度變化。則式(7)需改寫作：

$$p'_{lm} + (\rho_{lm} + \epsilon_{lm}\rho) \frac{Gm(r)}{r^2} + \rho(U'_{lm} + U'_{lm}{}^{\epsilon} + V'_{lm}) = 0 \quad (49a)$$



其中 $\epsilon_{lm}\rho\frac{Gm(r)}{r^2}$ 與密度不連續面所受之荷重有關，此部分將於下一節討論，因此計算額外側向密度變化產生之重力位造成的天體形變時須如下式減去該項：

$$p'_{lm} + (\rho_{lm} + \epsilon_{lm}\rho)\frac{Gm(r)}{r^2} + \rho(U'_{lm} + U'^{\epsilon}_{lm} + V'_{lm}) = \epsilon_{lm}\rho\frac{Gm(r)}{r^2} \quad (49b)$$

$$p^L_{lm,d} \cong \int_{r_d}^R \epsilon_{lm}\rho g(s) ds \quad (49c)$$

$g(r) = \frac{Gm(r)}{r^2}$ 為天體內部重力加速度中最大的零次項。式(49b)表示天體只受額外密度造成的重力位影響，因此單位體積仍存在向中心的力 $= \epsilon_{lm}\rho\frac{Gm(r)}{r^2}$ ，而於 $r=r_d$ 之不連續面單位面積會受 $p^L_{lm,d}Y_{lm}(\theta, \phi)$ 之向中心的力，即為荷重的壓力，此荷重與下一節討論之浮力平衡後天體內部方達靜力平衡。因此克來勞方程式之積分形式可由式(12)改寫為：

$$f_{lm}\frac{Gm(r)}{r} + U_{lm} + U^{\epsilon}_{lm} + V_{lm} = 0 \quad (50)$$

根據式(14)：

$$\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr}U^{\epsilon}_{lm}(r) - l(l+1)U^{\epsilon}_{lm}(r) = 4\pi Gr^2\epsilon_{lm}\rho \quad (51)$$

故透過與式(17)相同的推導得：

$$r^2f''_{lm} + 6\frac{\rho}{\bar{\rho}}(rf'_{lm} + f_{lm}) - l(l+1)f_{lm} = -3\frac{\rho}{\bar{\rho}}\epsilon_{lm} \quad (52)$$

因 $\epsilon_{lm}(0) = 0$ ，故若 $\epsilon'_{lm}(0) = 0$ ，則中心的邊界條件與式(19)相同，而天體表面的邊界條件可根據式(1、20a)改寫為：

$$\frac{GM}{R}f_{lm,R} = \frac{4\pi}{2l+1}\left[\frac{G(Q_{lm,R} + Q^{\epsilon}_{lm,R})}{R^{l+1}} + D_{lm}R^l\right] \quad (53)$$

$Q^{\epsilon}_{lm,R}$ 為側向密度變化造成之額外的多極矩(multipole moment)。故式(21a)之邊界條



件不變。

4.2 荷重變形

當位於 $r=r_d$ 之密度不連續面受到荷重而形變時，該邊界層不再符合式(50)所呈現之位的平衡，故假設不連續面上下皆緊鄰補償深度(compensation depths)，並且兩層補償深度以外與以內符合式(50)之位平衡(如圖 4.1)。為了簡化問題，假設兩補償深度至不連續面之密度分別為常數，並且於微擾一次的精確度下，可透過一維模型表示作 $\lim_{r \rightarrow r_d^\pm} \rho(r) = \rho_d^\mp$ ，因假設兩補償深度之間的厚度薄，且密度梯度不大，故一般的天體能夠符合密度分別為常數的要求。若此不連續面於天體表面，則只需假設地表面與下方的補償深度，而以下計算會歸結為地殼均衡理論(isostasy)。

根據 Dermott & Murray (1999)之式(4.74)，被夾在補償深度之間的密度不連續面受荷重之變形須符合：

$$p_{lm,d}^L = (\rho_d^+ - \rho_d^-) \left(f_{lm,d} \frac{Gm(r_d)}{r_d} + U_{lm,d} + V_{lm,d} \right) \quad (54)$$

$p_{lm,d}^L$ 為密度不連續面受到的荷重可透過式(49c)計算而得，須注意密度不連續面上下補償深度皆須符合式(12)之位平衡上式方成立，因此不得直接更改為微分形式(詳見 Dermott & Murray, 1999 第四章)。由上式可知，若密度連續則荷重變形不得以式(54)計算；若密度不連續面符合式(12)之位平衡，則表示不連續面上無額外荷重。上下補償深度與不連續面之平衡根據式(12、54)可表示作：

$$\begin{cases} f_{lm,d}^- \frac{Gm(r_d^-)}{r_d^-} + U_{lm,d}^- + V_{lm,d}^- = 0 \\ f_{lm,d} \frac{Gm(r_d)}{r_d} + U_{lm,d} + V_{lm,d} = -p_{lm,d}^L / (\rho_d^- - \rho_d^+) \\ f_{lm,d}^+ \frac{Gm(r_d^+)}{r_d^+} + U_{lm,d}^+ + V_{lm,d}^+ = 0 \end{cases} \quad (55)$$

假設荷重造成的形變小，使：

$$r_d^- \cong r_d \cong r_d^+ \quad (56)$$



則：

$$U_{lm,d}^- + V_{lm,d}^- \cong U_{lm,d} + V_{lm,d} \cong U_{lm,d}^+ + V_{lm,d}^+ \quad (57a)$$

$$\frac{Gm(r_d^-)}{r_d^-} \cong \frac{Gm(r_d)}{r_d} \cong \frac{Gm(r_d^+)}{r_d^+} \cong g_d r_d \quad (57b)$$

由式(55、57)得知：

$$f_{lm,d}^- \cong f_{lm,d}^+ \quad (58a)$$

$$f_{lm,d}^+ - f_{lm,d} \cong f_{lm,d}^- - f_{lm,d} \cong \frac{p_{lm,d}^l}{(\rho_d^- - \rho_d^+) g_d r_d} \quad (58b)$$

式(58b)與平面壓力平衡的公式 $\Delta p = \Delta \rho g h$ 相同，即額外荷重(壓力)等於密度差乘以重力加速度乘以形變量，表示若密度不連續面之荷重形變小時，其形變量不受球面幾何形狀影響。

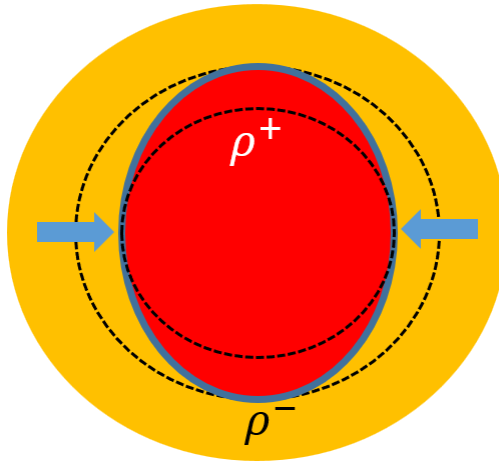


圖 4.1 密度不連續面受荷重形變示意圖。黑色虛線為補償深度，藍色實線為密度不連續面，藍色箭頭為密度不連續面所受的荷重。

4.3 荷重變形造成之重力位變化

補償深度之間(圖 4.1)因荷重形變產生之額外的重力位可根據式(1)並假設式(56)成立時可表示為：

$$\begin{cases} U_{lm}^{L-}(r) \cong u_{lm}^L \left(\frac{r}{r_d} \right)^l & \{r \lesssim r_d\} \\ U_{lm}^{L+}(r) \cong u_{lm}^L \left(\frac{r}{r_d} \right)^{-l-1} & \{r \gtrsim r_d\} \end{cases} \quad (59)$$

其中 u_{lm}^L 為係數，可根據式(58b)整理得知：

$$u_{lm}^L = -\frac{4\pi G r_d^2}{2l+1} [\rho_d^+ (f_{lm,d}^+ - f_{lm,d}) - \rho_d^- (f_{lm,d}^- - f_{lm,d})] \cong \frac{3}{2l+1} \frac{p_{lm,d}^l}{\bar{\rho}(r_d)} \quad (60)$$



此時由於 $U_{lm}^L(r)$ 於 $r = r_d$ 不可微分，故 $f'_{lm}(r)$ 於 $r = r_d$ 不再連續，根據式(12)的一階導函數得知：

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow r_d^-} \left[f'_{lm} \frac{Gm}{r} + f_{lm} \frac{d}{dr} \left(\frac{Gm}{r} \right) + U'_{lm} + U_{lm}^{L-} + V'_{lm} \right] = 0 \\ \lim_{r \rightarrow r_d^+} \left[f'_{lm} \frac{Gm}{r} + f_{lm} \frac{d}{dr} \left(\frac{Gm}{r} \right) + U'_{lm} + U_{lm}^{L+} + V'_{lm} \right] = 0 \end{cases} \quad (61)$$

故根據式(57、58a、59、60)整理得知 $f'_{lm,d}$ 的邊界條件為：

$$f_{lm,d}^{'+} = f_{lm,d}^{'-} + \frac{3p_{lm,d}^L}{\bar{\rho}_d g_d r_d^2} \quad (62)$$

須注意此時以克來勞微分方程式所求之 $f_{lm,d}$ 為補償深度之形變係數，因此根據式(58a)，該係數連續，若欲求密度不連續面實際之形變係數，則需依據式(58b)計算(圖 4.2 之紅點)。

而天體表面的邊界條件可根據式(20a、59、60)改寫為：

$$\frac{GM}{R} f_{lm,R} = \frac{4\pi}{2l+1} \left[\frac{GQ_{lm,R}^L}{R^{l+1}} + D_{lm} R^l \right] \quad (63a)$$

$$Q_{lm,R}^L = Q_{lm,R} - \frac{p_{lm,d}^L}{g_d} r_d^{l+2} \quad (63b)$$

故式(21a)之邊界條件仍舊不變。

若欲考慮(1)側向的密度變化之重力位對天體形變的影響，(2)側向的密度變化於密度不連續面之荷重造成的局部形變，(3)荷重造成的重力位變化對天體形變的影響，則須同時考慮 4.1、4.2 與 4.3 節之三效應，但若密度側向變化層極薄，則根據式(49c)：

$$p_{lm,d}^L \cong \epsilon_{lm} \rho_d g_d \Delta r \quad (64)$$

Δr 為密度側向變化層之厚度，根據式(2)側向密度變化造成之該層上下的重力位為：

$$\begin{cases} U_{lm}^{\epsilon-}(r) = u_{lm}^{\epsilon} \left(\frac{r}{r_d} \right)^l & \{r \lesssim r_d\} \\ U_{lm}^{\epsilon+}(r) = u_{lm}^{\epsilon} \left(\frac{r}{r_d} \right)^{-l-1} & \{r \gtrsim r_d\} \end{cases} \quad (65a)$$

$$u_{lm}^{\epsilon} \cong -\frac{4\pi G r_d}{2l+1} \epsilon_{lm} \rho_d \Delta r \quad (65b)$$

由(59、60、64)得知 $u_{lm}^L \cong -u_{lm}^\epsilon$ ，故若密度變化層的厚度遠小於天體半徑時，可無視密度側向變化之重力位造成的額外形變，並只需要考慮荷重造成的局部形變，但如 LLSVP 厚約數百公里，重力位則可能會導致地球額外的變形，故第五章嘗試計算 LLSVP 之荷重與重力位對於 CMB 扁率 f_L 的影響。

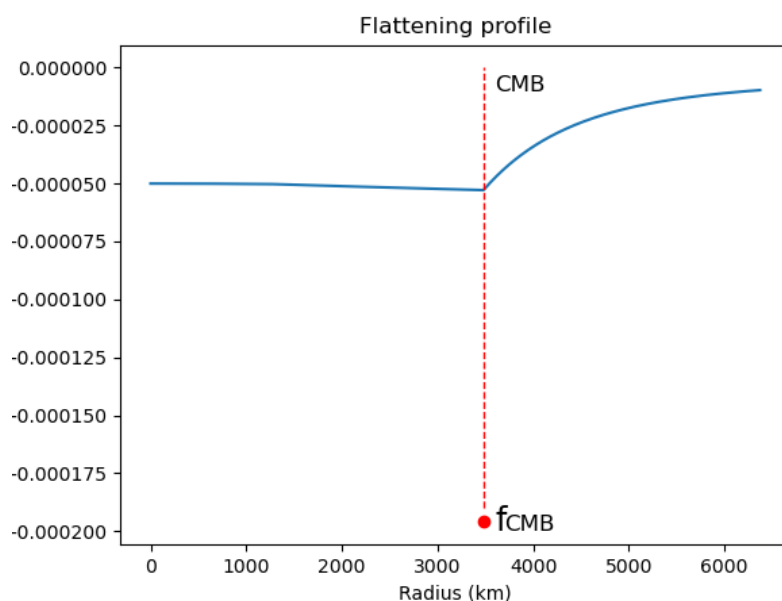


圖 4.2 CMB 上之微小荷重造成的 PREM 地球扁率隨半徑的變化，包含荷重變形(紅點)與荷重變形之重力位變化對地球產生的形變(藍線)，紅虛線為 CMB 的位置，紅點為 CMB 的扁率，藍線與圖 5.3 相同，邊界條件可參考 5.2 節。

第五章 LLSVP 對 CMB 扁率與地表扁率、重力場係數 J_2 之影響

根據自由核章動(free core nutation)所計算之 CMB 的扁率，其長半徑與短半徑之差值相較於地球一維模型受自轉離心力後達靜力平衡的數值大將近 400 m(Gwinn et al., 1986)，而 LLSVP 之密度分布如圖 5.2 所示可以具有 $Y_{20}(\theta, \phi)$ 的成分，能夠影響 CMB 之扁率。故本章基於 2.3 節與第四章的推導，並利用 3.2 節之方法與 PREM 的地球 500 層密度模型(Dziewonski & Anderson, 1981)，計算 LLSVP 對 CMB 扁率、地表扁率與球表的重力場係數 J_2 之影響。

5.1 LLSVP 造成之地球內部扁率變化

本節之扁率定義與式(24)相同，而為了使與扁率有關之側向密度變化 $\epsilon_{20}\rho Y_{20}(\theta, \phi)$ 滿足 $\epsilon_L \equiv 1 - (\text{極密度}/\text{赤道密度})$ ，根據式(3)， ϵ_L 和 ϵ_{20} 的關係式與式(24)相似：

$$\epsilon_L = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\epsilon_{20} \quad (66)$$

須注意物理上要求 $\epsilon_L(0) = 0$ 以免扁率於原點發散，且根據與附錄相同之討論，得知當 $\epsilon_L'(0) = 0$ 時， $f_L'(0)$ 方為 0。而克來勞微分方程式與式(52)相同：

$$r^2 f_L'' + 6\frac{\rho}{\bar{\rho}}(r f_L' + f_L) - 6f_L = -3\frac{\rho}{\bar{\rho}}\epsilon_L \quad (67)$$

於 500 層密度模型中，定義各層邊界為 r_n ($r_0=0$)、受荷重之不連續面位於 $r=r_d$ ，且 ϵ_L 於 $[r_d, r_t]$ 的範圍內為常數，其餘為 0 以簡化問題，而各層密度與平均密度可透過式(41、42)計算，並能夠以 3.1 節的方式整理上式：

$$f_{L,n} = \frac{\rho_n}{\bar{\rho}(r)} g_{L,n} \quad (68a)$$

$$r^2 g_{L,n}'' + 6r g_{L,n}' = -3\epsilon_{L,n} \quad (68b)$$

$$f_{L,n} = \frac{\rho_n}{\bar{\rho}(r)} \left[-\frac{3}{5}\epsilon_{L,n} \ln\left(\frac{r}{r_{n-1}}\right) + A_n r^{-5} + B_n \right] \quad (68c)$$



邊界條件根據式(19、21a、49c、62)，而外位為離心位時，可透過式(23)整理得：

$$f_{L,n}(r_n) = f_{L,n+1}(r_n); f'_{L,n}(r_n) = f'_{L,n+1}(r_n) \quad (69a)$$

$$f'_{L,0} = 0 \quad (69b)$$

$$Rf'_{L,R} + 2f_{L,R} = \frac{5}{2}m \quad (69c)$$

$$f'_{L,d}{}^+ = f'_{L,d}{}^- + \frac{3\epsilon_L \int_{r_d}^{r_t} \rho g(s) ds}{\bar{\rho}_d g_d r_d^2} \{r = r_d\} \quad (69d)$$

由上式可知除了受荷重之密度不連續面只有扁率連續之外，任兩層之間扁率與扁率一階導函數連續。再根據式(53、63)，得知式(28)仍舊成立，惟式(27)需改寫作：

$$-\sqrt{\frac{4\pi}{5}} [Q_{20,R} + Q_{20,R}^\epsilon] - \frac{8\pi}{15} \epsilon_L \int_{r_d}^{r_t} \rho g(s) ds g_d^{-1} r_d^{l+2} = J_2 M R^2 \quad (70)$$

須注意由式(48c)求得之扁率為補償面之扁率，實際的扁率根據式(58b)：

$$f_{L,d} \cong f_{L,d}^\pm - \frac{\epsilon_L \int_{r_d}^{r_t} \rho g(s) ds}{(\rho_d^- - \rho_d^+) g_d r_d} \quad (71)$$

根據上述之邊界條件，兩種積分常數可如式(43、44)表示作：

$$B_n = \frac{3}{5} f_{n-1} + \frac{1}{5} \frac{\bar{\rho}_{n-1}}{\rho_n} [2f_{n-1} + f'_{n-1} r_{n-1}] + \frac{3}{25} \epsilon_n \quad (72a)$$

$$A_n r_{n-1}^{-5} = \frac{\bar{\rho}_{n-1}}{\rho_n} f_{n-1} - B_n \quad (72b)$$

根據式(69b)之邊界條件已知 $f'_1 = 0$ 。下一個邊界之扁率與其導函數為：

$$f_n = \frac{\rho_n}{\bar{\rho}_n} \left[A_n r_{n-1}^{-5} \left(\frac{r_{n-1}}{r_n} \right)^5 + B_n - \frac{3}{5} \epsilon_n \ln \left(\frac{r_n}{r_{n-1}} \right) \right] \quad (73a)$$

$$f'_n r_n = 5 \frac{\rho_n}{\bar{\rho}_n} B_n - \left(2 + 3 \frac{\rho_n}{\bar{\rho}_n} \right) f_n - 3 \frac{\rho_n}{\bar{\rho}_n} \epsilon_n \left[\frac{1}{5} + \ln \left(\frac{r_n}{r_{n-1}} \right) \right] \quad (73b)$$

此外，因各層密度相同，因此於同一密度層內根據式(1、18)：

$$\begin{aligned} (g_d r_d)^{-1} \int_{r_{n-1}}^{r_n} \rho_n g(s) ds &= -\frac{\rho_n}{g_d r_d} [U_{00}(r_{n-1}) - U_{00}(r_n)] \\ &= \frac{\rho_n}{\bar{\rho}_d r_d^2} \left[\frac{3}{2} \rho_n (r_n^2 - r_{n-1}^2) - (\bar{\rho}_n r_n^2 - \bar{\rho}_{n-1} r_{n-1}^2) \right] \end{aligned} \quad (74)$$

因此只須將各層數值相加，即可計算(69d、71)。而實際計算時則需先於中心代入任意兩實數為中心扁率，疊代至地表後再利用地表的邊界條件與線性內插求取正確的中心扁率。

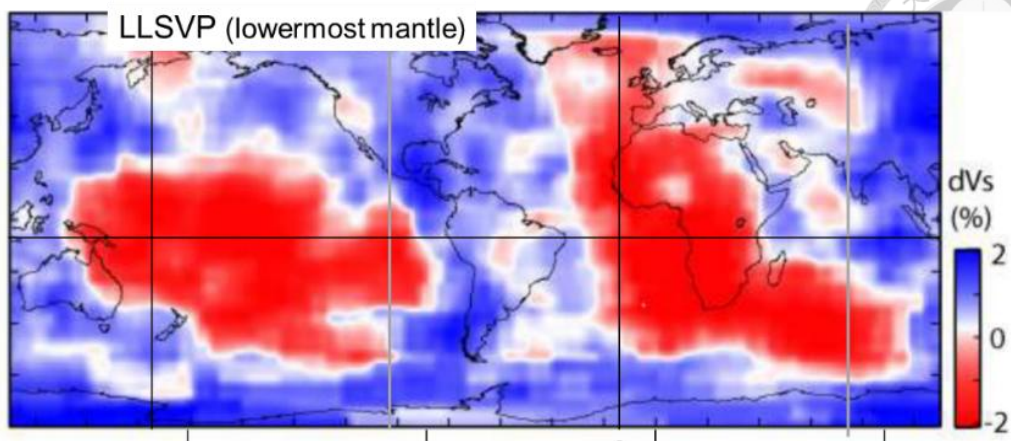


圖 5.1 CMB 上方之剪力波低速帶分布圖(Grand, 2002)。

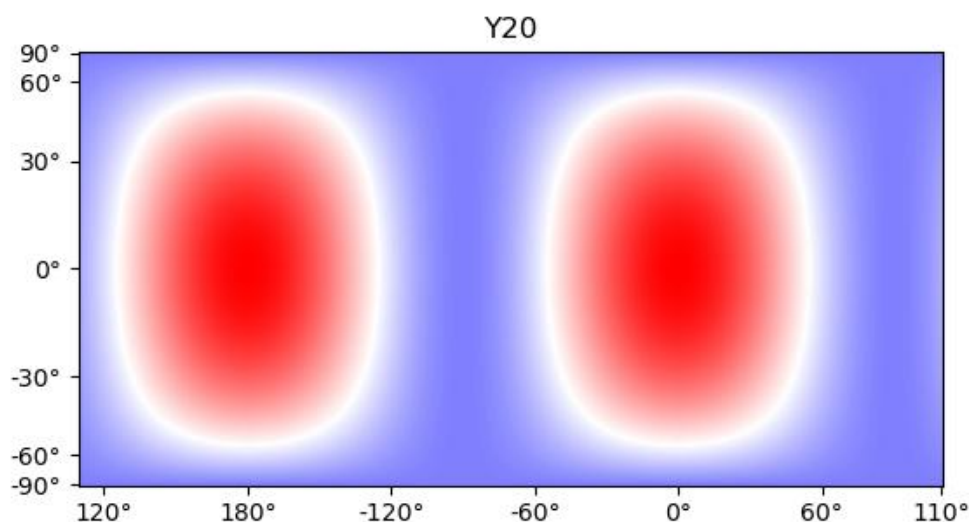


圖 5.2 極軸橫躺於赤道上之 $Y_{20}(\psi)$ 值分布圖，與圖 5.1 之分布類似，因此 LLSVP 應具有此成分。若 LLSVP 具有此成分，則可透過球諧函數之特性拆解出極軸與地球極軸一致之 $Y_{20}(\theta, \phi)$ 形式的剪力波低速帶分布，而若該分布與密度相關，則密度亦具有 $Y_{20}(\theta, \phi)$ 的成分。

5.2 結果與討論

假設 $\epsilon_L = 0.001$ ，使 LLSVP 密度為正且具有赤道較重的成分，且無自轉、LLSVP 厚度為 400 km 時，如第四章所述，有三種成分會影響 CMB 之扁率，(1) 因荷重之局部變形，此項影響最大，(2) LLSVP 之重力位造成的變形，(3) 因荷重局部變形而於密度邊界產生之重力位造成的變化，其中(2)與(3)會於 CMB 產生將近 200 m 的形變，但兩項形變方向相反，故會大致抵銷(圖 5.3)，這與式(65)討

論之極薄的側向密度變化層之情形相似，因此 CMB 基本上只會因 LLSVP 之荷重而變細長，形變量 $\Delta(a_d - b_d)$ 約為-500 m。LLSVP 厚度 400 km 是根據 Yuan & Li (2022)中 LLSVP 於約 CMB 上方 800 km 處剪力波波速與背景值相同，因此假設有效且一致的密度異常大約只有其一半的厚度而定；而 $\epsilon_L = 0.001$ 對應到 CMB 密度之 $Y_{20}(\theta, \phi)$ 成分於赤道與兩極相差約 $\Delta\rho_{CMB} \cong 5.6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ，若 LLSVP 分布與圖 5.2 相同，則圖 5.2 之密度最高處比最低處高約 $11.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ，而密度最高處相較於 CMB 之平均密度高出約0.13%，最低處則低約0.07%，此數值相較於 CMB 之密度擾動小約一個數量級(Grand, 2002)，因此為合理的數值範圍。因式(49c)之荷重與克來勞方程式皆為線性方程式，故形變量可表示作： $\Delta(a_d - b_d) \sim -500 \cdot \frac{\epsilon_L}{0.001} \text{ m}$ ，此外 LLSVP 會造成地球表面額外的扁率 $\Delta f(R)$ 與額外的重力場係數 ΔJ_2 之變化，兩者分別為 $\Delta f_{L,R} R \sim 12 \cdot \frac{\epsilon_L}{0.001} \text{ m}$ ，與 $\Delta J_2 \sim 0.12 \cdot \frac{\epsilon_L}{0.001} \cdot J_{2,E}$ ， $J_{2,E}$ 為地球之 J_2 係數，由於質量愈遠離赤道，質量二次矩就越大，此乃 LLSVP 於地表產生之 J_2 變化大於荷重形變產生之負的 J_2 變化之原因，而根據式(28)，地表扁率亦相應變大。若假設沒有 LLSVP，但有額外的力作用於 CMB 之上(例如動力壓)，使 CMB 能夠變扁約 $\Delta(a_d - b_d) \sim 500 \text{ m}$ ，並使 CMB 上下之補償深度以外達靜力平衡，則荷重局部變形產生之重力位對地球內部產生的額外扁率與圖 5.3 之左圖僅差一個負號，而若 LLSVP 存在，且有相同之額外的力作用於 CMB 之上，則 LLSVP 之重力位造成的地球內部扁率變化即為圖 5.3 之右圖，而兩者之差值即為圖 5.4，因此我們發現 LLSVP 的存在能夠放大於 CMB 之動力壓對地表形變之影響約 20%。若固定 CMB 額外的扁率與觀測值同為 $\Delta(a_d - b_d) \sim 400 \text{ m}$ ，並假設因 CMB 造成之 $\Delta J_2 \leq 0.01 J_{2,E}$ ，則根據式(28)，地表至多能夠允許 $\Delta(a - b) \sim 103 \text{ m}$ 的形變，則根據表 5.1，若額外的力作用於 CMB 產生 $h_d \text{ m}$ 之形變，則地表會產生 $0.0908 h_d \text{ m}$ 的形變，而當 LLSVP 厚度為 400 km 時，CMB 產生 $182 \cdot \frac{\epsilon_L}{0.001} \text{ m}$ 之形變、地表會產生 $182 \cdot 0.407 \cdot \frac{\epsilon_L}{0.001} \text{ m}$ 的形變，因此透過下式：

$$\begin{cases} h_d + 182 \cdot \frac{\epsilon_L}{0.001} = 400 \\ 0.0908h_d + 0.407 \cdot \frac{\epsilon_L}{0.001} = 103 \end{cases} \quad (75)$$



可簡單估計 ϵ_L 之上限約為 0.12 %，而額外的力作用於 CMB 產生 189 m 之形變，其他厚度時之 ϵ_L 上限記於表 5.1 中，可知當 LLSVP 愈厚 ϵ_L 值即愈小，且 ϵ_L 值皆小於 1%，故下述估計皆屬合理，惟精確度皆不高。

形變類型	$(f_R R)/(f_d r_d)$	$\epsilon_L = 0.1 \%$ 時之 $f_d r_d$ (m)	$\Delta J_2 = 0.01 J_{2,E}$ 時之 ϵ_L 值
荷重+荷重變形之重力位	0.0908		
荷重變形之重力位 厚度~0 km	0.337		
LLSVP 重力位 厚度:304 km	0.388	138	0.163 %
LLSVP 重力位 厚度:406 km	0.407	182	0.116 %
LLSVP 重力位 厚度:508 km	0.427	226	0.088 %

表 5.1 第一列為地表形變與 CMB 形變之比值 $=\Delta(a-b)/\Delta(a_d-b_d)$ ，第二列為 $\epsilon_L = 0.1 \%$ 時之 CMB 形變量 $\Delta(a_d-b_d)$ ，若與第一列相乘即得地表形變量 $\Delta(a-b)$ ，第三列為固定 $\Delta J_2 = 0.01 J_{2,E}$ 、 $\Delta(a_d-b_d) = 400 \text{ m}$ 時之 ϵ_L 值上限。 $\epsilon_L = 0.1\%$ 對應到 CMB 密度之 $Y_{20}(\theta, \phi)$ 成分於赤道與兩極相差約 $\Delta\rho_{CMB} \cong 5.6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 。

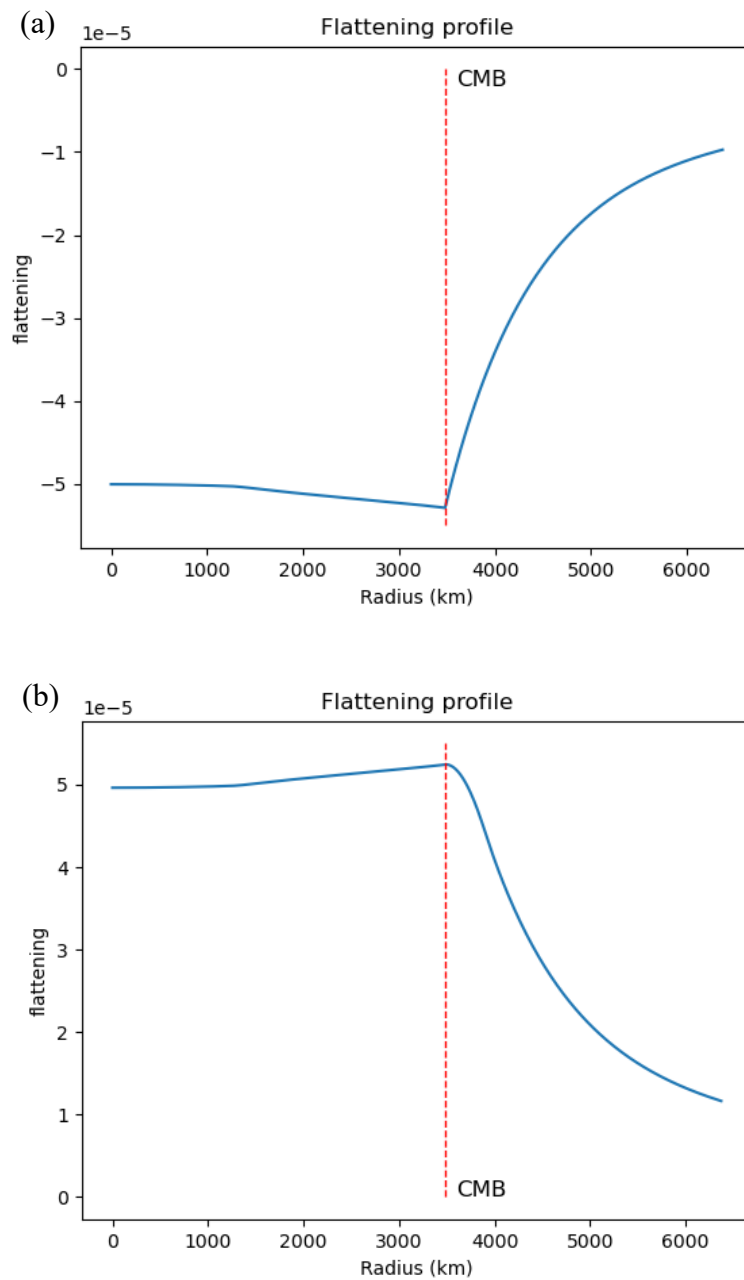


圖 5.3 (a)荷重局部變形產生之重力位的變化造成的地球內部扁率變化。(b) LLSVP 之重力位造成的地球內部扁率變化。此時因荷重之局部變形產生之額外的扁率 $\sim -1.4 \cdot 10^{-4}$ ，相對大小可參考圖 4.2。

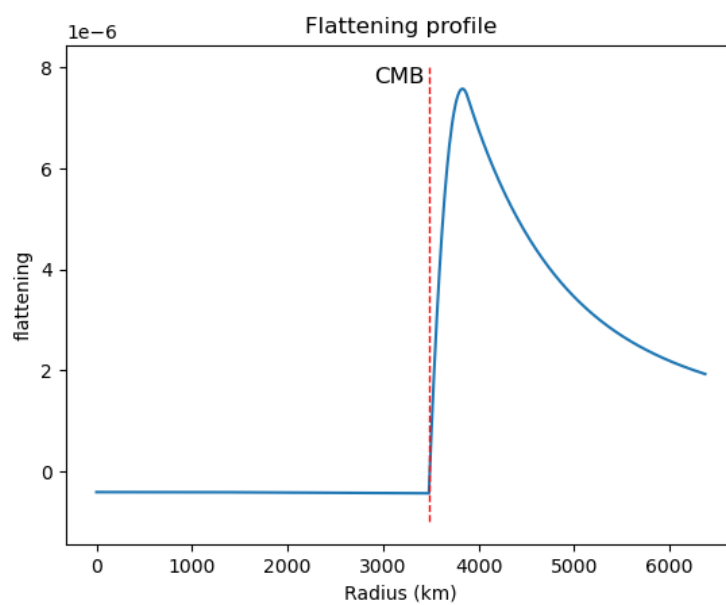


圖 5.4 LLSVP 之重力位與荷重變形而於密度邊界產生之重力位造成的地球內部扁率變化，即為圖 5.3 之兩圖的和。

第六章 結論

本研究透過微擾理論與帕松方程式，成功推導任何一次與任何一階之克來勞定理並且計算受潮汐鎖定之天體因二次潮汐的變形，得知於太陽系內達靜力平衡的天體中，該變形的幅度最大者為木衛一(Io)，其幅度只有約 20 m，此乃二次形變以上的克來勞微分方程式罕見之原因。接著本文利用克來勞微分方程式於等密度層具有解析解之性質，將連續的密度換算作 n 層密度模型，成功以疊代的方式求得克來勞微分方程式之近似解，此方法不僅演算法簡單，近似值精確，亦不必額外處理中心與不連續面，是計算克來勞微分方程式近似解之好方法。本文接續討論荷重變形與荷重變形造成之重力位變化，與造成荷重之密度側向變化本身之重力位，並嘗試將兩種重力位以修改克來勞微分方程式的形式呈現，並且發現若造成荷重之密度側向變化層徑向的厚度能夠忽略時，兩種重力位會相互抵消，因此只需要計算局部之荷重變形即可。最後本研究結合上述所有結果，嘗試計算地球 CMB 上 LLSVP 之荷重、該荷重變形造成之重力位變化與 LLSVP 本身之重力位造成的扁率變化，並且以 n 層密度模型，疊代計算克來勞微分方程式之近似值。由計算結果得知，額外的兩種重力位幾乎不影響 CMB 之扁率，而若 LLSVP 之厚度為 400 km，CMB 則會因荷重變扁約 $\Delta(a_d - b_d) \sim 500 \cdot \frac{\epsilon_L}{0.001} m$ ，而地表則會變扁約 $\Delta(a - b) \sim 12 \cdot \frac{\epsilon_L}{0.001} m$ ，若固定 CMB 額外的扁率與觀測值同為 $\Delta(a_d - b_d) \sim 400 m$ ，且限制 $\Delta J_2 = 0.01 J_{2,E}$ 則 LLSVP 之厚度為 400 km 時其 ϵ_L 值上限大約為 $\epsilon_L \sim 0.116 \%$ 。

參考文獻



- Chao, B.F. & Shih, S.A., 2021. Multipole expansion: unifying formalism for Earth and planetary gravitational dynamics, *Surv. Geophys.*, 42, 803-838.
- Chao, B.F. & Shih, S.A., 2024. On Clairaut's theory and its extension for planetary hydrostatic equilibrium derived using gravitational multipole formalism, *Geophys. J. Int.* 236, 1567-1576.
- Dahlen, F.A. & Tromp, J., 1998. *Theoretical Global Seismology*, Princeton Univ. Press.
- Deschamps, F. & Li, Y., 2019. Core-mantle boundary dynamic topography: Influence of postperovskite viscosity. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 124, 9247-9264.
- Dziewonski, A.M. & Anderson, D.L., 1981. Preliminary reference Earth model, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 25, 297-356.
- Grand, S. P., 2022. Mantle shear wave tomography and the fate of subducted slabs. *Phil.Trans. R. Soc. Lond. A* 360, 2475-2491.
- Gwinn, C. R., Herring, T. A. and Shapiro, I. I., 1986. Geodesy by Radio Interferometry: Studies of the Forced Nutations of the earth, 2, Interpretation, *J. Geophys. Res.*, 91, 4755-4765.
- Hemingway, D. J. & Matsuyama, I., 2017. Isostatic equilibrium in spherical coordinates and implications for crustal thickness on the Moon, Mars, Enceladus, and elsewhere, *Geophys. Res. Lett.*, 44, 7695-7705.
- Jacobson, R.A. 2021. The Orbits of the Regular Jovian Satellites and the Orientation of the Pole of Jupiter. Personal communication to Horizons/NAIF.
- Jeffreys, H., 1924. *The Earth, Its Origin, History and Physical Constitution*, Cambridge Univ. Press.
- Kopal, Z., 1980. Clairaut coordinates and the vibrational stability of distorted stars,

- 
- Astrophys. Space Sci., 70, 407-424.
- Murray C.D. & Dermott S.F., 2000. Tides, Rotation, and Shape. In: Solar System Dynamics. Cambridge University Press, 130-188.
- Poisson, E. & Will, C.M., 2014. Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic. Cambridge University Press, 63-137.
- Rogister, Y. & Rochester, M.G., 2004. Normal-mode theory of a rotating Earth model using a lagrangian perturbation of a spherical model of reference, Geophys. J. Int., 159, 874-908.
- Ragazzo, C., 2020. The theory of figures of Clairaut with focus on the gravitational modulus: inequalities and an improvement in the Darwin–Radau equation. São Paulo J. Math. Sci. 14, 1–48.
- Yuan, Q., Li, M., 2022. Instability of the African large low-shear-wave-velocity province due to its low intrinsic density. Nat. Geosci. 15, 334–339.

附錄 A 克來勞微分方程式於原點之邊界條件



中心的邊界條件直觀上也是如式(20)計算式(12)於 $r = 0$ 之值，但因分子、分母皆為 0 而無法直接計算。故假設密度於中心附近可微分，則可利用式(9)取代式(2)之 $\rho(r_1, \theta, \phi)$ 後得：

$$Q_{lm} \cong - \int_0^r r_1^{l+3} f_{lm}(r) \rho'(r) dr_1 \quad \{l \geq 2\} \quad (\text{a1a})$$

$$\frac{m(r)}{4\pi} = \frac{Q_{00}}{\sqrt{4\pi}} \cong \int_0^r \rho(r) r_1^2 dr_1 \quad (\text{a1b})$$

已知於中心($r=0$)扁率 f 與密度 ρ 不發散，故可透過馬克勞林級數展開兩參數，由於二次以上與邊界條件無關，故只須展開至一次，即 $f_{lm} \cong f_{lm,0} + f'_{lm,0}r$
 $\rho \cong \rho_0 + \rho'_0 r$ ，並代入式(a1)得：

$$Q_{lm} = - \frac{1}{l+4} r^{l+4} f_{lm,0} \rho'_0 + O(r^{l+5}) \quad (\text{a2a})$$

$$\frac{Q_{00}}{\sqrt{4\pi}} = \frac{1}{3} \rho_0 r^3 + \frac{1}{4} \rho'_0 r^4 + O(r^5) \quad (\text{a2b})$$

再將式(12)乘以 r^{-l} 再微分，並將式(a2)代入得：

$$\frac{d}{dr} r^{-l} u_{lm} = 0, \quad u_{lm} = f_{lm} \frac{Gm}{r} + U_{lm} + V_{lm} \quad (\text{a3a})$$

$$\left[\frac{2-l}{3} f_{lm,0} \rho_0 + \frac{3-l}{3} f'_{lm} \rho_0 r - \left(\frac{1}{l+4} + \frac{l-3}{4} \right) f_{lm,0} \rho'_0 r + O(r^2) \right] r^{-l+1} = 0 \quad (\text{a3b})$$

當 r 趨近於 0 時式(a3b)需成立，故 $l \geq 2$ 時：

$$\begin{cases} \frac{2-l}{3} f_{lm,0} \rho_0 = 0 \\ \frac{3-l}{3} f'_{lm} \rho_0 - \left(\frac{1}{l+4} + \frac{l-3}{4} \right) f_{lm,0} \rho'_0 = 0 \end{cases} \quad (\text{a4})$$



假設 $\rho_0 \neq 0$ 且 $l \geq 3$ ，則 $f_{lm,0} = 0, f'_{lm} = 0$ ，與式(19)之結果相符，但若 $l = 2$ ，則 $f_{2m,0}$ 可不為0，因此得：

$$f'_{2m}\rho_0 + \frac{1}{4}f_{2m,0}\rho'_0 = 0 \quad (\text{a5})$$

故二次($l=2$)之克來勞微分方程式於原點的邊界條件 $f'_0 = 0$ 乃因 $\rho'_0 = 0$ 所致。因天體中心重力加速度接近0，物質分層不明顯，因此成分不變，且壓力梯度與溫度梯度為0(假設中心無熱能湧出)，則中心的密度梯度 ρ'_0 應為0，且實際上地球也沒有觀測到來自中心之地震反射波，因此 $\rho'_0 = 0$ 的假設與實際的天體相符。

無論物理上是否允許，因恰巧存在 $\rho'_0 \neq 0$ 之解析解，故以下嘗試利用該解驗證式(a5)無誤。若假設一 $\rho'_0 \neq 0$ 之密度分布為：

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{\alpha}{2}r} \left(\frac{\alpha}{6}r + 1 \right) \quad (\text{a6})$$

α 為任意實數。則根據式(18)：

$$\bar{\rho} = \rho_0 e^{\frac{\alpha}{2}r} \quad (\text{a7a})$$

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}} = \frac{\alpha}{6}r + 1 \quad (\text{a7b})$$

當 $l=2$ 時，將式(a7b)代入式(17)得：

$$r^2 f''_{2m} + (\alpha r + 6)(r f'_{2m} + f_{2m}) - 6f_{2m} = 0 \quad (\text{a8a})$$

$$(r f'_{2m})' + 5f'_{2m} + \alpha(r f_{2m})' = 0 \quad (\text{a8b})$$

故 f_{2m} 之一般解為：

$$f_{2m} = A[(\alpha r)^{-1} - 4(\alpha r)^{-2} + 12(\alpha r)^{-3} - 24(\alpha r)^{-4} + 24(\alpha r)^{-5}] + B r^{-5} e^{-\alpha r} \quad (\text{a9})$$

A、B 為積分常數。上式各項看似皆於原點發散，但若：

$$B = -24A\alpha^{-5} \quad (\text{a})$$

則根據 $e^{-\alpha r}$ 於原點附近之泰勒展開式得知：

$$-24A(\alpha r)^{-5}e^{-\alpha r} \cong A \left[-24(\alpha r)^{-5} + 24(\alpha r)^{-4} - 12(\alpha r)^{-3} + 4(\alpha r)^{-2} - (\alpha r)^{-1} + \frac{1}{5} - \frac{1}{30}\alpha r \right] \quad (\text{a10})$$

此時 f_{2m} 於原點不發散。因此 f_{2m} 之解為：

$$f_{2m} = 5f_{2m,0}[(\alpha r)^{-1} - 4(\alpha r)^{-2} + 12(\alpha r)^{-3} - 24(\alpha r)^{-4} + 24(\alpha r)^{-5}(1 - e^{-\alpha r})] \quad (\text{a11})$$

而 $f_{2m,0}$ 值與地表邊界條件有關。根據式(a6、a11) $f'_{2m,0}$ 與 ρ'_0 可表示作：

$$f'_{2m,0} = -\frac{\alpha}{6}f_{2m,0}; \quad \rho'_0 = \frac{2}{3}\alpha\rho_0 \quad (\text{a12})$$

代入式(a5)後得知該式成立。