

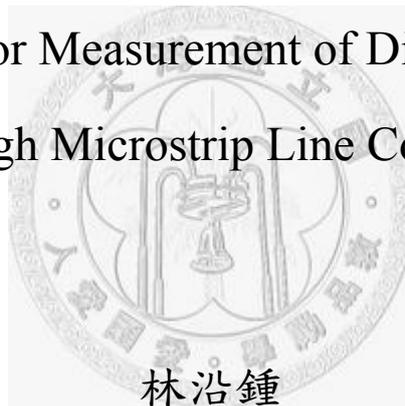
國立臺灣大學電機資訊學院電信工程學研究所

碩士論文

Graduate Institute of Communication Engineering  
College of Electrical Engineering & Computer Science  
National Taiwan University  
master thesis

耦合於微帶線之介質共振器品質因數量測

Quality Factor Measurement of Dielectric Resonator  
Through Microstrip Line Coupling



林沿鍾

Lin Yen-Chung

指導教授：瞿大雄 博士

Advisor: Chu Ta-Hsiung, Ph.D.

中華民國 97 年 7 月

July, 2008



## 誌謝

經過了兵荒馬亂，尤其搬家竟與口試撞期，連續一週的校稿、送件、打包、簽約，直到現在坐在空盪的公用電腦室裡，寂靜的 527 正適合讓人細細回想，過去發生的一切何等令人感恩。

沒有老師不厭其煩、耐心的指導，就不會有這篇論文。謝謝老師用心的開導，即使您已經知道問題所在，還是希望我們能自己去發掘答案。雖然我總是一而再再而三的辜負您的用心，我還是要帶著愧對的心情向您說聲謝謝。

感謝我的電磁學啟蒙老師，您盡心盡力教給我們的知識，是我們在這個領域裡最堅不可摧的磐石。您恨鐵不成鋼一般地教學，讓我們在知識之外，更看到滿滿的熱情。感念您全心的付出，蔡智明老師。

感謝我那位從小牛奶就只喝 5 c.c. 的女朋友，即使工作回來已經很疲累，但在我兵荒馬亂的那一週還是不斷幫助我，尤其口試當日獨力完成最後的打包，真是人小志氣高。

感謝我的朋友，每次都記得我生日的滷蛋，還有大樹。碩二結束時一起征服北橫的誌亨、建賢及博程，到晚上都還騎不出山路的那一夜，直到現在回想起都還很感動。

感謝我那位為了兩個弟弟犧牲最愛戲劇跟舞台的大姊。還有越

來越成熟，不再讓家人擔心的小弟。你們不知不覺中給我的支持，都是完成我們這個家，以及這篇論文的力量。

最後，我要隆重感謝我的父母。當我在有冷氣的高中教室上課時，炙熱的七月豔陽天，上午十點，我的母親把自己包得密不透風在田裡農忙。當我理所當然地接下學校的繳費通知，我的父親為了津貼，唯恐不及地不斷接下危險的高壓活電作業。在你們無微不至的保護傘下，我們安心地嬉鬧與成長。感謝上天給了我們一家平平安安的日子，也祈願天下無災難。僅將所有榮耀歸於您們，我最敬愛的父母。



## 摘要

介質共振器係由高介電常數材質構成，其電磁特性與相同幾何形狀，且包覆 PMC 之空腔共振器極為類似。但由於其高介電常數，相較空腔共振器，在相同工作頻率下，其體積較小。以 Trans-Tech 公司所提供 8700 系列介質共振器為例，其相對介電係數約 30，相較於空腔共振器，電氣長度可縮減約 5.5 倍。另外介質共振器的高品質因數，使得它具有優異的窄頻共振特性，因此廣泛應用在天線、濾波器及共振器等微波及毫米波電路。

介質共振器在不同微波電路中，其品質因數為電路設計的主要依據。尤其在濾波器電路，依據[1]所敘述的濾波器設計方法，可以經由量測第一階的  $Q_e$  值，確知該電路架構是否符合所設計的濾波器特性。因此，一個正確有效的品質因數量測方法，成為介質共振器應用的重要一環。

本論文係依據[2]所提出的量測方法，論文首先敘述介質共振器以及品質因數，以及簡單的等效電路，接著參考[3]的方式建立幾個基礎量測雛型，並參考[4]的方式考慮更複雜的情況，最後延伸到介質共振器耦合於微帶線的量測方法，以及敘述量測結果。

摘要



# Abstract

Dielectric resonator (DR) is made of high dielectric constant materials and acts as a cavity enclosed by perfect magnetic conductor (PMC). Because of the high dielectric constant, its dimensions are much smaller than other types of resonators at the same frequency. Take the 8700 series DRs offered by Trans-Tech for example. Its  $\epsilon_r \cong 30$ , hence its electrical length is about 5.5 times smaller than that of an air-filled cavity. Besides, dielectric resonator has ultra high quality factor, resulting in a quite narrow operating bandwidth. Therefore, dielectric resonator is widely used in the microwave and millimeter wave circuits, for example, antennas, filters and oscillators.

In many aspects, the quality factor of dielectric resonator is the major characteristic to be taken into account in the microwave circuit design. Especially in filter design, for example, the method given in [1], after giving the design parameters of a filter, the circuit layout would meet the design requirements by measuring the first-order external Q of the resonator. In other words, an accurate and effective quality factor measurement becomes an important issue in the applications of dielectric resonator.

For this reason, this thesis uses the method developed in [2]. In Chapter one, we give a brief description of quality factor and dielectric resonator, then present some basic measurement models [3] based on the simple equivalent circuits. After the discussion about the advantages and disadvantages of this model, we then take more complicated situations into account based on [4] and describe in Chapter two. Finally, we consider the situation about the dielectric resonator coupled to a microstrip line in Chapter three with simulation and measurement results.



# 目錄

誌謝	i
中文摘要	iii
英文摘要	v
目錄	vii
圖表目錄	ix
<b>第一章 簡介</b>	<b>1</b>
1-1 品質因數定義	1
1-2 品質因數理論值計算與量測雛形	5
1-3 圓柱形介質共振器模態與模型	9
1-3-1 圓柱形介質共振器模態	9
1-3-2 圓柱形介質共振器電磁模型	12
1-4 結論	20
<b>第二章 品質因數量測方法</b>	<b>21</b>
2-1 反射係數相位量測法	21
2-2 傳輸量測法	26
2-3 阻抗量測法	28
2-3-1 使用史密斯圖	30
2-3-2 使用駐波比	33
2-4 考慮耦合效應之品質因數量測	37
<b>第三章 耦合於微帶線之介質共振器品質因數量測</b>	<b>41</b>
3-1 量測理論	41
3-2 模擬與量測結果	45
3-2-1 TRL 校準與驗證	45

3-2-2 模擬與量測.....	48
<b>第四章 結論</b> .....	<b>58</b>
參考文獻 .....	62



# 圖表目錄

圖 1.1.1	串聯共振電路	2
圖 1.1.2	史密斯圖上的 Q 軌跡	4
圖 1.1.3	考慮外接損耗之串聯共振器	4
圖 1.2.1	長方體共振腔及其 $TE_{101}$ 共振模態	6
圖 1.3.1	介質共振器之 $TE_{01\delta}$ 與耦合於微帶線之磁場示意	10
圖 1.3.2	介質共振器 $TE_{01\delta}$ 的電場分佈	10
圖 1.3.3	以微帶線激發 $TM_{01\delta}$ 模態之磁場分佈	11
圖 1.3.4	介質共振器之 (a) $HEM_{11\delta}$ 模態電場分佈及 (b) 激發方式	12
圖 1.3.5	$HEM_{11\delta}$ 模態抑制法	12
圖 1.3.6	存有介質共振器之金屬空腔近似模型	13
圖 1.3.7	考慮外洩電磁場之獨立介質共振器電磁模型	13
圖 1.3.8	考慮電路板及金屬空腔之介質共振器電磁模型	14
表 1.3.1	第一類貝索函數的零點	16
圖 1.3.9	考慮 $\rho > a$ 處電磁場的介質共振器電磁模型	19
表 1.4.1	耦合大小分類	20
圖 2.1.1	接於傳輸線上之無損耗共振器	21
圖 2.1.2	考慮無損耗共振器之反射係數相位變化	23

圖 2.1.3	接於傳輸線上之帶有損耗的共振器	24
圖 2.1.4	考慮共振器損耗之反射係數相位變化	24
圖 2.1.5	耦合於雙端之共振器 (a) 等效電路及 (b) 簡化電路	26
圖 2.3.1	考慮耦合效應之共振器等效電路	29
圖 2.3.2	使用史密斯圖量測品質因數	32
圖 2.3.3	使用駐波比量測品質因數在史密斯圖上的行為	34
圖 2.3.4	使用駐波比對頻率之變化量測品質因數	35
圖 2.4.1	考慮耦合效應之簡化共振電路	37
圖 2.4.2	考慮耦合效應之共振器輸入阻抗軌跡	39
圖 3.1.1	耦合於微帶線之介質共振器	41
圖 3.1.2	考慮耦合效應之介質共振器等效電路	42
圖 3.1.3	忽略耦合的自感效應之介質共振器等效電路	42
圖 3.1.4	耦合於微帶線上之介質共振器阻抗軌跡	44
表 3.2.1	實驗使用之介質共振器參數	45
圖 3.2.1	TRL 校準套件與介質共振器	46
圖 3.2.2	延遲線 $S_{21}$ 相位理論與量測結果	46
圖 3.2.3	修正後延遲線 $S_{21}$ 相位理論與量測結果	47
圖 3.2.4	修正介電常數後 $\Gamma_A$ 相位理論與量測結果	47
圖 3.2.5	修正後反射係數模擬與量測結果	48

圖 3.2.6	品質因數對 $\delta$ 作圖之(a)量測及(b)模擬結果	50
圖 3.2.7	$\tan \varphi$ 對 $\delta$ 作圖的(a)量測結果及(b)正規化輸入阻抗	51
圖 3.2.8	$S_{11}$ 及 $S_{21}$ 模擬與量測結果	53
圖 3.2.9	實驗裝置	53
圖 3.2.10	介質共振器 B 其修正後反射係數模擬與量測結果	54
圖 3.2.11	介質共振器 B 其品質因數對 $\delta$ 作圖之(a)量測及(b)模擬結果	54
圖 3.2.12	介質共振器 B 其 $\tan \varphi$ 對 $\delta$ 作圖之(a)量測結果與(b)正規化輸入阻抗	55
圖 3.2.13	介質共振器 C 其修正後反射係數模擬與量測結果	56
圖 3.2.14	介質共振器 C 其品質因數對 $\delta$ 作圖之(a)量測及(b)模擬結果	56
圖 3.2.15	介質共振器 C 其 $\tan \varphi$ 對 $\delta$ 作圖之(a)量測結果與(b)正規化輸入阻抗	57
圖 4.1	介質共振器 B 由等效電路所得之品質因數	59
圖 4.2	介質共振器 B 與其等效電路在史密斯圖上的軌跡	59
圖 4.3	微帶線的品質因數	60

# 第一章 簡介

由於品質因數在微波電路的設計及分析上相當重要，而透過對品質因數量測法的瞭解以及實地操作，便能知道各量測法的優劣與限制，並依需求加以推廣。從而在設計微波電路時，選擇適當的量測法，並分析出正確可靠的數據，因此本論文著重在品質因數量測法的理論與實作。本章的前段將討論品質因數，首先由定義出發，導出較為廣泛引用的定義之後，介紹外部品質因數以及整體品質因數。最後在後段說明實驗中所使用的介質共振器之模態與電磁模型，並於末節總結本章論述。



## 1-1 品質因數定義

品質因數 (quality factor, 簡稱  $Q$ ) 是一個在微波領域中相當常見的參數，用以描述共振特性。一般說來， $Q$  值越大，其共振頻寬越窄，在簡單證明這一點之前，必須先對  $Q$  值原始定義有所瞭解，

$$Q \equiv \frac{\omega \times (\text{貯存於電場和磁場的平均能量})}{\text{功率損失}} = \omega \frac{W_m + W_e}{P_{loss}} \quad (1.1)$$

其中  $W_m$  及  $W_e$  分別為一週期內的平均磁場及電場貯能，

$$W_m = \frac{1}{T} \int_0^T U_m dt \quad , \quad W_e = \frac{1}{T} \int_0^T U_e dt \quad (1.2)$$

故品質因數為描述一週期內的平均總貯能與總消耗能量的比值。



圖 1.1.1 串聯共振電路。

由於品質因數的基本定義在使用上須處理積分，計算較為不便。因此我們可以對一些簡單常見的電路作分析，並取其結論以利日後快速分析。今考慮一串聯共振電路或共振器如圖 1.1.1，由電路分析可得

$$P_{loss} = \frac{1}{2} |I|^2 R \quad (1.3a)$$

$$W_m = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{Li^2(t)}{2} dt = \frac{1}{4} |I|^2 L \quad (1.3b)$$

$$W_e = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{Cv_c^2(t)}{2} dt = \frac{1}{4} |I|^2 \frac{1}{\omega^2 C} \quad (1.3c)$$

已知在共振頻率  $\omega_0$  下，貯存的電能與磁能相等，故(1.1)可寫成

$$Q|_{f=f_0} = \frac{2\omega_0 W_e}{P_{loss}} = \frac{2\omega_0 W_m}{P_{loss}} \quad (1.4)$$

將 (1.3b) 及 (1.3c) 分別代入 (1.4) 可得

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} \quad (1.5)$$

如此，品質因數的計算便由積分式簡化為阻抗比值。對於並聯共振電路，也有類似的結果

$$P_{loss} = \frac{1}{2} \frac{|V|^2}{R} \quad (1.6a)$$

$$W_m = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{Li_L^2(t)}{2} dt = \frac{1}{4} |V|^2 \frac{1}{\omega^2 L} \quad (1.6b)$$

$$W_e = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{Cv^2(t)}{2} dt = \frac{1}{4} |V|^2 C \quad (1.6c)$$

故並聯共振電路於共振頻率時的品質因數為

$$Q = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 RC \quad (1.7)$$

又串聯共振器與並聯共振器，在共振頻率時的輸入阻抗分別為

$$Z_{in} = R + j(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}) \quad (1.8)$$

$$Z_{in} = \frac{R}{1 + R^2(\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L})^2} (1 - jR(\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L})) \quad (1.9)$$

顯示品質因數可簡化為，電感或電容在共振頻率下，於輸入阻抗的貢獻與輸入阻抗實部的比值。亦即若電感或電容於輸入阻抗中佔有  $jX$ ，則

$$Q = \frac{|X|}{R} \quad (1.10)$$

上式為一非常簡潔的計算方式，因此廣泛用以描述共振器的品質因數。唯需注意的是，上式的推導是在共振頻率下所得，因此只成立在共振頻率及鄰近的頻帶。但如果足夠的理由，能說明該共振器有極高的品質因數，由於它必然共振在極窄頻的範圍內，因此一般說來，該式在共振頻帶內皆能被引用。

由於(1.10)被廣泛的使用，幾乎取代了品質因數的的原始定義，因此在史密斯上可據以繪出所謂的  $Q$  軌跡，如圖 1.1.2 所示，圖中構成橄欖球狀的四條線，由內而外分別為  $Q=1$  和  $Q=2$  所形成的軌跡。值

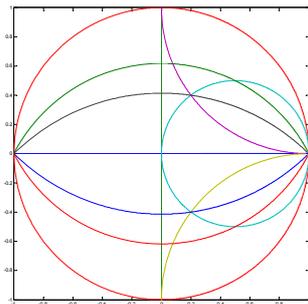


圖 1.1.2 史密斯圖上的 Q 軌跡。

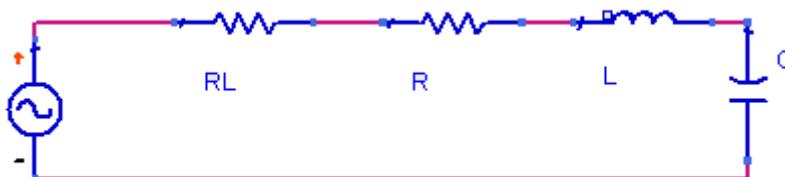


圖 1.1.3 考慮外接損耗之串聯共振器。

得注意的是，這些軌跡的形成是直接將阻抗平面（impedance plane）上實部與虛部相差固定倍數的點，對應到史密斯圖上，是一個直接的結果，而與品質因數的原始定義並沒有直接關係。

由於共振器在接上外接電路之後，相當於將自身的能量向外傳輸，對共振器而言，等於增加損耗，其品質因數勢必有所改變。因此，為了方便後續與外接電路的分析，必須將原始定義做適當的延伸。今考慮一串聯共振器如圖 1.1.3 所示，其中  $R_L$  即為描述外接所形成的損耗。由(1.5)知該串聯共振器的品質因數為  $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$ ，而仿照前面的流程，可得到考慮  $R_L$  之後的品質因數為

$$Q_L = \frac{\omega_0 L}{R + R_L} \quad (1.11)$$

若定義外部品質因數（external quality factor）為

$$Q_e = \frac{\omega_0 L}{R_L} \quad (1.12)$$

則  $Q$ 、 $Q_L$  及  $Q_e$  之間之關係為

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q} + \frac{1}{Q_e} \quad (1.13)$$

若改考慮並聯共振器，則其時  $Q = \frac{R}{\omega_0 L}$ 、 $Q_L = \frac{(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_L})^{-1}}{\omega_0 L}$  及  $Q_e = \frac{R_L}{\omega_0 L}$ ，

與 (1.13) 相同的結論。

由以上過程知道，外部品質因數係用以描述只考慮外接損耗，而不考慮自身損耗時的品質因數。以原始定義分別描述如下

$$Q \equiv \frac{\omega \times (\text{貯存於電場及磁場內的平均能量})}{\text{內部功率損失}} \quad (1.14a)$$

$$Q_e \equiv \frac{\omega \times (\text{貯存於電場及磁場內的平均能量})}{\text{外部功率損失}} \quad (1.14b)$$

$$Q_L \equiv \frac{\omega \times (\text{貯存於電場及磁場內的平均能量})}{\text{內部及外部功率損失}} \quad (1.14c)$$

由 (1.14a) 至 (1.14c) 也可得到 (1.13) 的結論。

由於在實際應用上，共振器必定存有外部損失，而品質因數也必須透過外接電路進行量測。因此除非有充分理由，能說明外部損失與內部損失其中一者遠大於另外一者，否則在分析過程中，便必須釐清這三個品質因數的異同。

## 1-2 品質因數理論值計算與量測雛形

瞭解品質因數的原始定義之後，便可對一個電磁結構進行品質因

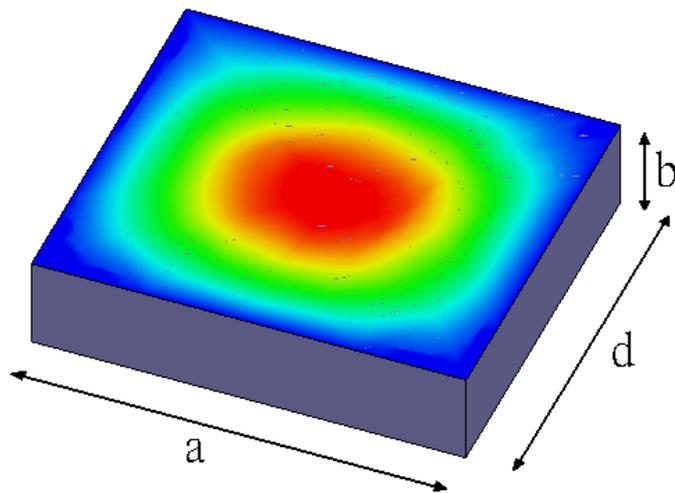


圖 1.2.1 長方體共振腔及其 TE<sub>101</sub> 共振模態。

數的理論值推算，以下係以長方體空腔共振器為例。

上圖為長方體共振腔的幾何結構，以及 TE<sub>101</sub> 的電場場形分佈，欲計算共振於此模態下的品質因數，則必須瞭解此時的電磁場，由基礎電磁學可知，

$$E_y = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{d}z\right) \quad (1.15a)$$

$$H_x = \frac{-jE_0}{Z_{TE}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{d}z\right) \quad (1.15b)$$

$$H_z = \frac{j\pi E_0}{k\eta a} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{d}z\right) \quad (1.15c)$$

其中 a、b 及 d 分別為該共振腔在 x、y 及 z 上的長度。有了電磁場的表示式，便能進行品質因數的計算，首先求出  $W_m$  及  $W_e$  為

$$W_e = \frac{\epsilon}{4} \int |E_y|^2 dv = \frac{\epsilon abd}{16} E_0^2 \quad (1.16a)$$

$$W_m = \frac{\mu}{4} \int (|H_x|^2 + |H_z|^2) dv = \frac{\mu abd}{16} E_0^2 \left( \frac{1}{Z_{TE}^2} + \frac{\pi^2}{k^2 \eta^2 a^2} \right) \quad (1.16b)$$

其中  $Z_{TE} = \frac{k\eta}{\sqrt{k^2 - (\frac{\pi}{a})^2}}$ ，代入 (1.16b)，即可得

$$W_m = \frac{\epsilon abd}{16} E_0^2 = W_e \quad (1.17)$$

由 (1.17) 可瞭解於共振頻率時，共振腔貯存之電能及磁能相等。

透過上述過程可得到電磁貯能，以下則為推導空腔損耗，損耗主要由導體和介電質造成，分別表示如下

$$P_c = \frac{R_s}{2} \int_{walls} |H_t|^2 ds = \frac{R_s E_0^2 \lambda^2}{8\eta^2} \left( \frac{ab}{d^2} + \frac{bd}{a^2} + \frac{a}{2d} + \frac{d}{2a} \right) \quad (1.18)$$

其中  $R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}}$ ， $H_t$  為在金屬邊界上的磁場，故 (1.18) 為金屬所造成的損耗。而介電值損耗則可表示如下

$$P_d = \frac{\omega \epsilon''}{2} \int |E|^2 dv = \frac{abd\omega \epsilon'' |E_0|^2}{8} \quad (1.19)$$

由於上式積分與 (1.16a) 極為類似，故可直接引用。因此空腔共振器在  $TE_{101}$  模態，便可分別得到各損耗造成的品質因數

$$Q_c = \omega_0 \frac{W_e + W_m}{P_c} = \frac{(kad)^3 b \eta}{2\pi^2 R_s} \frac{1}{2a^3 b + 2bd^3 + a^3 d + ad^3} \quad (1.20a)$$

$$Q_d = \omega_0 \frac{W_e + W_m}{P_d} = \frac{\epsilon'}{\epsilon''} = \frac{1}{\tan \delta} \quad (1.20b)$$

其中  $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$ ，而損耗正切 (loss tangent)  $\tan \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}$ 。

值得注意的是，由於共振模態直接影響電流在導體中的流動方式，因此  $Q_c$  與共振模態會有關連。反觀  $Q_d$  由於目前考慮的材質為等向性，因此與共振模態無關。回到原始定義後，便能得到  $TE_{101}$  的品質因數理論值

$$Q = \left( \frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_d} \right)^{-1} \quad (1.21)$$

雖然上述推導品質因數的理論值計算公式，然而在應用上，共振腔的複雜幾何結構，使得大部分的情況都難有解析解。尤其介質共振器 (dielectric resonator)，係以等效電磁模型，或數值分析方法近似表示，而無數學解析式，使得其在一般共振腔的品質因數計算上有所困難，故本論文提出藉由建構量測方法得到品質因數。在本節末段將簡單介紹如何運用品質因數的定義，建立一個可行的量測方法。

今考慮如圖 1.1.1 的串聯共振器，共振器內能量損耗可表示如下

$$P_{loss} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{VI^*\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{Z_{in} |I|^2\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{ Z_{in} \left| \frac{V}{Z_{in}} \right|^2 \right\} = \frac{1}{2} \frac{|V|^2}{|Z_{in}|^2} \operatorname{Re}\left( R + j\left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right) \quad (1.22)$$

令  $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ ，其中共振頻率  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ，則 (1.22) 式中  $\omega L - \frac{1}{\omega C}$  項，

在共振頻率附近可如下近似

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C} = \frac{(\omega_0^2 + 2\omega_0 \cdot \Delta\omega + \Delta\omega^2)LC - 1}{\omega C} \doteq \frac{2\Delta\omega}{\omega_0 C} \quad (1.23)$$

今定義頻寬  $BW = 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ ，則上式可簡寫成

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} \doteq \frac{BW}{\omega_0 C} \quad (1.24)$$

(1.22) 顯示在共振頻率時， $P_{loss}(\omega_0) = \frac{1}{2} \frac{|V|^2}{R}$ 。若在共振頻率附近存有某頻率使得  $|Z_{in}(\omega)|^2 = 2R^2$ ，則此時的共振器內損耗為

$$P_{loss}(\omega) = \frac{1}{2} R \frac{|V|^2}{|Z_{in}|^2} = \frac{1}{4} \frac{|V|^2}{R} = \frac{1}{2} P_{loss}(\omega_0) \quad (1.25)$$

此時損耗為共振時的一半，而欲使 $|Z_{in}(\omega)|^2 = 2R^2$ ，則(1.24)必須等於R

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} \doteq \frac{BW_{3dB}}{\omega_0 C} = R \quad (1.26)$$

將(1.5)代入(1.26)可得以下結論

$$BW = \omega_0 RC = \frac{1}{Q} \quad (1.27)$$

亦即半功率頻寬為品質因數的倒數。因此可以經由量測共振時的損耗功率，並在該頻率附近尋找損耗功率減半的兩個頻率點，由頻寬倒數即可得共振腔的品質因數。

### 1-3 圓柱形介質共振器模態與模型

由於本文所採用的共振器為圓柱形介質共振器，因此本節簡單介紹其電磁特性及其電磁模型。

#### 1-3-1 圓柱形介質共振器模態

##### A. 橫電模態 (TE)

圓柱形介質共振器工作的模態主要可分為橫電模態 (TE)、橫磁模態 (TM) 以及電磁混成模態 (HEM) 三類，其中前者由於其場形與

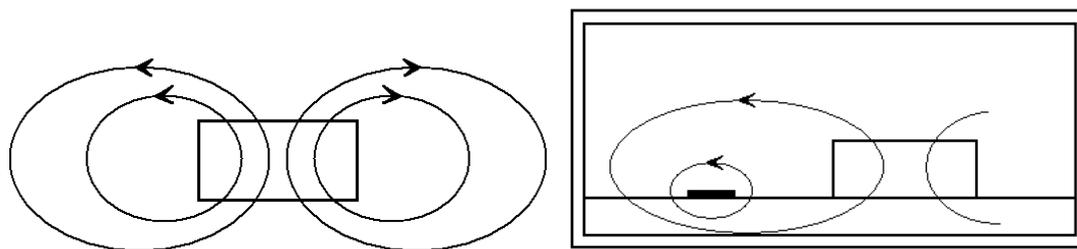


圖 1.3.1 介質共振器之  $TE_{01\delta}$  與耦合於微帶線之磁場示意圖。

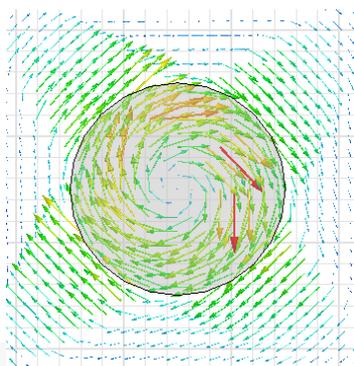


圖 1.3.2 介質共振器  $TE_{01\delta}$  的電場分佈。

微帶線的磁場能自然地接合，如圖 1.3.1 所示，因此在耦合於微帶線的相關電路中，多使用其  $TE_{01\delta}$  主模態。由於  $TE_{01\delta}$  的電場分佈與微帶線的電場方向幾乎正交，故在激發 TE 模態上，電場幾乎沒有耦合發生，如圖 1.3.2 所示。因此當考慮介質共振器操作在 TE 模態，且耦合於微帶線時，其耦合機制多以電感描述，以符合磁場耦合的現象。

## B. 橫磁模態 (TM)

TM 模態與 TE 模態可由類比對應，只需將磁場與電場互換便能得到橫磁模態的場分佈。因此以微帶線激發 TM 模態時，只要將圖 1.3.1 中的介質共振器轉九十度置放，就是一種簡單的耦合方式，如圖 1.3.3 所示。除了以微帶線激發之外，只要將介質共振器的中心軸垂直於長

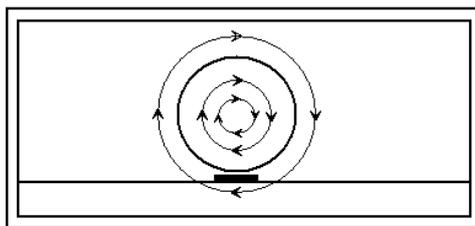


圖 1.3.3 以微帶線激發  $TM_{01\delta}$  模態之磁場分佈。

方體導波管的縱向，以及  $TE_{01}$  的電場方向擺放，則此時  $TM_{01\delta}$  與導波管的磁場為同向，因此  $TM_{01\delta}$  也可以由長方體導波管的  $TE_{01}$  模態激發。另外由於  $TM_{01\delta}$  的電場分佈與  $TE_{01\delta}$  的磁場類似（如圖 1.3.1 所示），都是貫穿共振器的中心軸而出，又  $TE_{01\delta}$  在中心軸的電場相當微弱，因此在某些只需要  $TE_{01\delta}$  存在，而不希望出現  $TM_{01\delta}$  的應用時，會使用管狀的共振器，甚至在中心軸的部分置入金屬柱以抑制  $TM_{01\delta}$  的電場。

### C. 電磁混成模態 (HEM)

最後，圓柱形介質共振器尚存有電磁混成模態。該模態中擁有最低頻率的是  $HEM_{11\delta}$ ，此模態可用於設計天線[5]以及雙模態濾波器[6 7]。其電場分佈以及激發方式如圖 1.3.4 所示，顯示由於其電場的特性，因此可以使用一半高度的介質共振器，置放於金屬平板上，經過適當的激發之後，就能產生  $HEM_{11\delta}$  響應。然而值得注意的是， $HEM_{11\delta}$  有時候共振頻率會相當接近  $TE_{01\delta}$ 。因此，在一些主要操作在  $TE_{01\delta}$  模態的電路裡，為了避免  $HEM_{11\delta}$  模態的干擾，可以透過瞭解這兩者的電場特性，如圖 1.3.5 所示，在共振器上綁上模態抑制金屬線，由圖

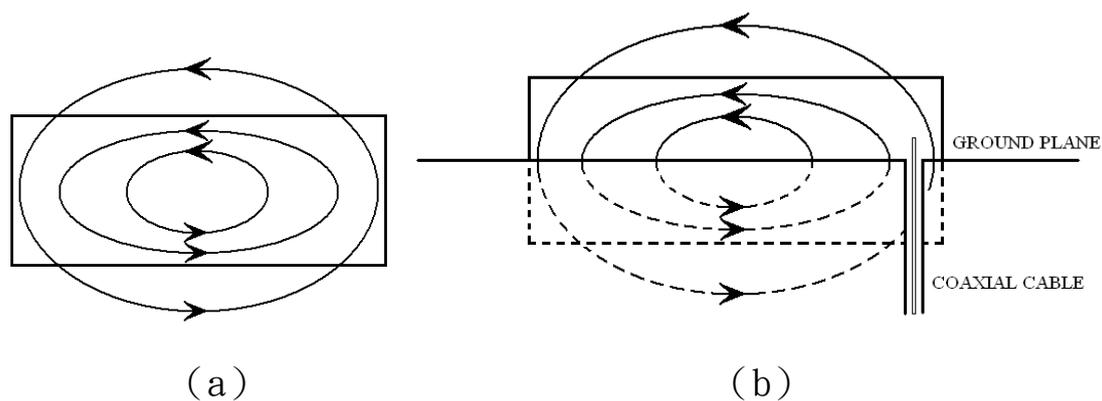


圖 1.3.4 介質共振器之 (a)  $HEM_{11\delta}$  模態電場分佈及 (b) 激發方式。

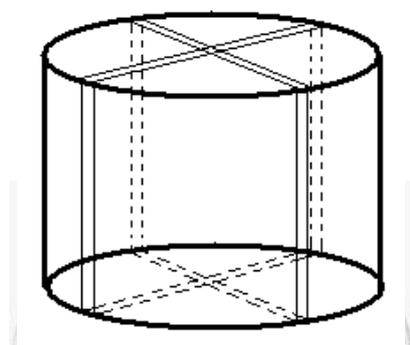


圖 1.3.5  $HEM_{11\delta}$  模態抑制法。

1.3.2、圖 1.3.4 (a) 以及圖 1.3.5 顯示， $HEM_{11\delta}$  在共振器邊界附近的電場，皆平行於金屬線，反觀  $TE_{01\delta}$  在邊界上的電場皆與金屬線垂直，故此法可以在不破壞  $TE_{01\delta}$  模態的情況下，達到抑制  $HEM_{11\delta}$  模態的目的。

### 1-3-2 圓柱形介質共振器電磁模型

在瞭解了圓柱形介質共振器的模態之後，本節將介紹幾個介質共振器的電磁模型。首先考慮一個置於空氣中，半徑為  $a$ ，介電係數為

$\epsilon_r$  的介質共振器。若從共振器內部向外看出去，則在  $\rho = a$  處的反射係數為

$$\Gamma = \frac{\eta_0 - \eta}{\eta_0 + \eta} = \frac{\sqrt{\epsilon_r} - 1}{\sqrt{\epsilon_r} + 1} \quad (1.28)$$

(1.28) 顯示當  $\epsilon_r$  極大時，反射係數趨近於 1，其行為類似完全磁導體 (PMC) 或開路。故在建構介質共振器的電磁模型，常會引用 PMC 邊界條件。值得一提的是，若觀察點在共振器外面，則反射係數將與 (1.28) 差一個負號，亦即原本的 PMC 可置換成完全電導體 (PEC)。

以一個置於金屬空腔裡的介質共振器為例，若腔內的電場平行於共振器的上下邊界，則可如下圖近似

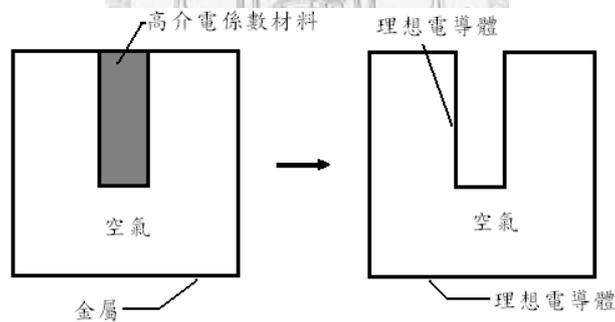


圖 1.3.6 存有介質共振器之金屬空腔近似模型。

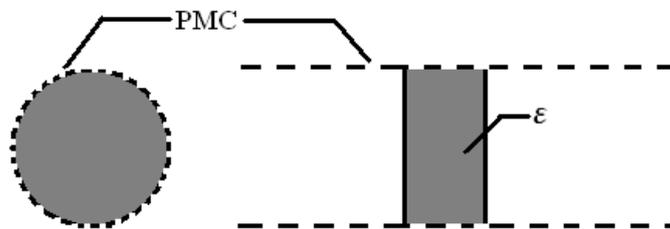


圖 1.3.7 考慮外洩電磁場之獨立介質共振器電磁模型。

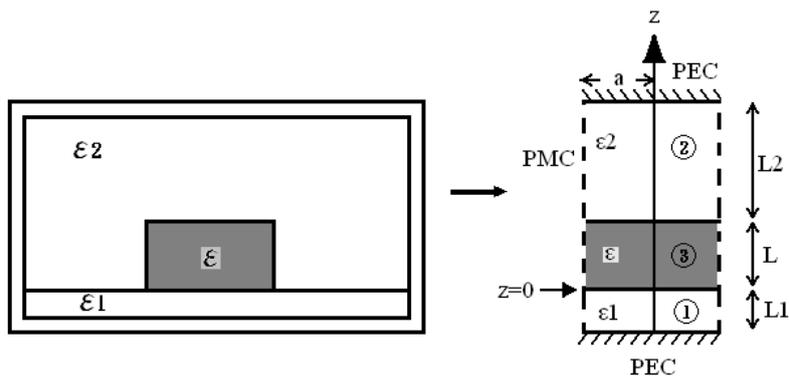


圖 1.3.8 考慮電路板及金屬空腔之介質共振器電磁模型。

由 (1.28) 已知介質共振器的邊界可以 PMC 近似，因此最簡單的模型，係在共振器外包覆一層 PMC，不過很明顯的，這個模型無法考慮到外洩的電磁場，而與量測的結果有約 20% 的誤差 [8]。

為了修正上述模型的誤差，Cohn [9] 提出該模型的延伸，如圖 1.3.7 所示，保留原共振器的側邊 PMC，並將其無限延伸，以及移除上下方的 PMC。整個電磁模型成為一個充滿空氣，並以 PMC 包覆的圓形導波管，其中一段放置一塊介電質。由於相對於介電質的區段，導波管內的空氣為低介電常數，因此從共振器外洩到管內的電磁場，將因低於導波管的截止頻率而成為衰減波。

依據此模型可準確描述介質共振器，實際應用時如擺放於電路板上，如圖 1.3.8 所示。此一模型為圖 1.3.7 的延伸。主要是將原本無限長的 PMC 導波管兩端以 PEC 封閉，並引入板材的介電常數。相較於上兩個模型，圖 1.3.8 較具可適性。例如將  $L_2$  無限延伸，就是共振器置於板上的情況。若  $L_1$ 、 $L_2$  為零，便為平行板夾住共振器的情況。因

此本節將依據此模型分別描述區域 1、區域 2 及區域 3 的電磁場，再利用類似模態匹配 (mode matching) 方式，求得此模型的電磁場特性。

首先考慮一 PMC 圓形導波管的  $TE_{01}$  模態，在區域 3，即  $0 < z < L$  內的行為。由於此區域內的  $\epsilon_r \gg 1$ ，故此區段內的電磁波操作在截止頻率之上。若假設介質無損耗，傳播常數為  $\gamma = j\beta$  則縱向磁場可寫為

$$H_z = (Ae^{j\beta z} + Be^{-j\beta z})J_0(k_\rho \rho) \quad (1.29)$$

又在導波管內

$$H_\rho = \frac{1}{k_\rho^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial z \partial r} \quad (1.30a)$$

$$E_\phi = \frac{j\omega \mu_0}{k_\rho^2} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \quad (1.30b)$$

將 (1.29) 代入 (1.30a) 及 (1.30b) 可得

$$H_\rho = -\frac{j\beta}{k_\rho} (Ae^{j\beta z} - Be^{-j\beta z})J_1(k_\rho \rho) \quad (1.31a)$$

$$E_\phi = -\frac{j\omega \mu_0}{k_\rho} (Ae^{j\beta z} + Be^{-j\beta z})J_1(k_\rho \rho) \quad (1.31b)$$

由於 PMC 的邊界條件，使得  $H_z$  在  $\rho = a$  的地方為零。透過此一關係與表 1.3.1，則可求得  $\rho$  方向上的傳播常數。由於  $H_z(\rho = a) = 0$ ，故  $k_\rho a = x_{01} = 2.4048$ 。因為區域 1 以及區域 2 中的  $k_\rho$ ，都可以經由一樣的方式求得，故三個區域中的  $k_\rho$  為同樣結果。

表 1.3.1 第一類貝索函數的零點。

$J_m(x_{mn})=0$			
m	N		
	1	2	3
0	2.4048	5.5201	8.6537
1	3.8317	7.0156	10.1735
2	5.1356	8.4172	11.6198
3	6.3802	9.761	13.0152

至於區域 1 中的電磁場，由於是以衰減模態 (evanescent mode)

存在，故在  $z$  方向上的傳播常數為  $\gamma = \alpha_1$ ，其  $H_{z1}$  可寫成

$$H_{z1} = (C_1 e^{\alpha_1 z} + D_1 e^{-\alpha_1 z}) J_0(k_\rho \rho) \quad (1.32)$$

將 (1.32) 代入 (1.30b) 可得  $E_{\phi 1}$

$$E_{\phi 1} = -\frac{j\omega \mu_0}{k_\rho} (C_1 e^{\alpha_1 z} + D_1 e^{-\alpha_1 z}) J_1(k_\rho \rho) \quad (1.33)$$

而由於金屬邊界條件，使得  $E_{\phi 1}(z = -L_1) = 0$ ，因此

$$D_1 = -C_1 e^{-2\alpha_1 L_1} \quad (1.34)$$

將 (1.34) 代入 (1.33) 及 (1.32)，可得以雙曲函數表示的  $E_{\phi 1}$  及  $H_{z1}$

$$E_{\phi 1} = -\frac{j\omega \mu_0}{k_\rho} 2C_1 e^{-\alpha_1 L_1} \sinh \alpha_1(z + L_1) J_1(k_\rho \rho) \quad (1.35)$$

$$H_{z1} = 2C_1 e^{-\alpha_1 L_1} \sinh \alpha_1(z + L_1) J_0(k_\rho \rho) \quad (1.36)$$

同樣將 (1.32) 代入 (1.30a)，再引入 (1.34)，可得  $H_{\rho 1}$

$$H_{\rho 1} = -\frac{\alpha_1}{k_\rho} 2C_1 e^{-\alpha_1 L_1} \cosh \alpha_1(z + L_1) J_1(k_\rho \rho) \quad (1.37)$$

經由相同流程，可以求得同為衰減模態的區域 2 內的電磁場

$$H_{z2} = 2C_2 e^{\alpha_2(L_2+L)} \sinh \alpha_2(z-L_2-L) J_0(k_\rho \rho) \quad (1.38)$$

$$E_{\varphi 2} = -\frac{j\omega \mu_0}{k_\rho} 2C_2 e^{\alpha_2(L_2+L)} \sinh \alpha_2(z-L_2-L) J_1(k_\rho \rho) \quad (1.39)$$

$$H_{\rho 2} = -\frac{\alpha_2}{k_\rho} 2C_2 e^{\alpha_2(L_2+L)} \cosh \alpha_2(z-L_2-L) J_1(k_\rho \rho) \quad (1.40)$$

其中 (1.29) 中的  $\beta$ ，以及 (1.32) 及 (1.38) 中的  $\alpha_1$  及  $\alpha_2$  分別為

$$\beta^2 = k_0^2 \varepsilon_r - \left( \frac{x_{01}}{a} \right)^2 \quad (1.41a)$$

$$\alpha_1^2 = \left( \frac{x_{01}}{a} \right)^2 - k_0^2 \varepsilon_{r1} \quad (1.41b)$$

$$\alpha_2^2 = \left( \frac{x_{01}}{a} \right)^2 - k_0^2 \varepsilon_{r2} \quad (1.41c)$$

有了三個區段內的電磁場表示式後，則可經由各區域介面上場的連續性，解出未知係數。首先在  $z=0$  處， $E_{\varphi 1} = E_\varphi$  且  $H_{\rho 1} = H_\rho$ ，故結合 (1.35)、(1.31a) 以及 (1.37)、(1.31b) 可得

$$2C_1 e^{-\alpha_1 L_1} \sinh(\alpha_1 L_1) = A + B \quad (1.42)$$

$$\alpha_1 2C_1 e^{-\alpha_1 L_1} \cosh(\alpha_1 L_1) = j\beta(A - B) \quad (1.43)$$

兩式相除可得

$$\tanh(\alpha_1 L_1) = \frac{\alpha_1}{j\beta} \frac{A+B}{A-B} \quad (1.44)$$

同樣利用  $z=L$  的邊界條件可得

$$\tanh(-\alpha_2 L_2) = \frac{\alpha_2}{j\beta} \frac{Ae^{j\beta L} + Be^{-j\beta L}}{Ae^{j\beta L} - Be^{-j\beta L}} \quad (1.45)$$

而由於 A 及 B 對應於描述在共振器內，分別沿  $z$  方向及反向傳播的電磁波。而在介電質內由於共振現象，因此沿  $z$  方向為一駐波，故 A 及

B 強度相同，亦即

$$\frac{B}{A} = e^{j\varphi} \quad (1.46)$$

因此 (1.44) 中  $\frac{A+B}{A-B}$  項可表為

$$\frac{A+B}{A-B} = j \cot\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (1.47)$$

同樣 (1.45) 中  $\frac{Ae^{j\beta L} + Be^{-j\beta L}}{Ae^{j\beta L} - Be^{-j\beta L}}$  項可表為

$$\frac{Ae^{j\beta L} + Be^{-j\beta L}}{Ae^{j\beta L} - Be^{-j\beta L}} = -j \cot\left(\beta L - \frac{\varphi}{2}\right) \quad (1.48)$$

將 (1.47) 代回 (1.44)，則

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{\varphi_1}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha_1}{\beta} \coth(\alpha_1 L_1)\right) \quad (1.49)$$

因此上述表示式，可完整描述圖 1.3.8 模型中的電磁場。

若再將 (1.48) 代回 (1.45)

$$\beta L - \frac{\varphi_1}{2} = \frac{\varphi_2}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha_2}{\beta} \coth(\alpha_2 L_2)\right) \quad (1.50)$$

故由 (1.50) 可知當共振成立時

$$\beta L = \frac{\varphi_1}{2} + \frac{\varphi_2}{2} + l\pi \quad l=0,1,2,3,\dots \quad (1.51)$$

其中最低的共振模態發生在  $l=0$  時，由 (1.49) 及 (1.50) 顯示此時

$\beta L < \pi$ ，亦即在 z 方向上共振的電磁場中，存在於共振器內的部分，

其實不足半波長。因此介質共振器其最低模態以  $TE_{01\delta}$  表示，其中

$\delta < 1$ ，其值為

$$\delta = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\varphi_1}{2} + \frac{\varphi_2}{2} \right) \quad (1.52)$$

當要表示更高模態時，則以  $TE_{01n+\delta}$  表示。

經由以上流程，可以獲得較為準確的模型，透過比較此模型與精確的數值分析結果，其共振頻率誤差可以縮小到-4.8% [8]，較 PMC 空腔共振器模型 32% 誤差，已有相當改善。

然而由於未考慮  $\rho > a$  以外的場，故仍有一定程度的誤差，因此有其他改良方法提出。其中一種較為直接的方法，係將圖 1.3.8 的模型再延伸至圖 1.3.9。

其分析方式概述如下，首先引用圖 1.3.8 模型的結論，設定區域 1、6 及 2 內部的電場，接著將 PMC 移走，引入延伸的區域 3、4 及 5。由於在這些延伸區域中的電場，隨  $\rho$  增加而遞減，故在假設這些區域的電場時，需引入具有相同遞減特性的第二類修正型貝索函數，最後再使用各邊界的場連續性進行求解。

另一種改良方式係由 Itoh 及 Rudokas 所提出 [10]，它與以上模型的差別，在於直接從介電質導波管出發，因此能精準地描述區域 6 與區域 4 之間的電磁場變化。

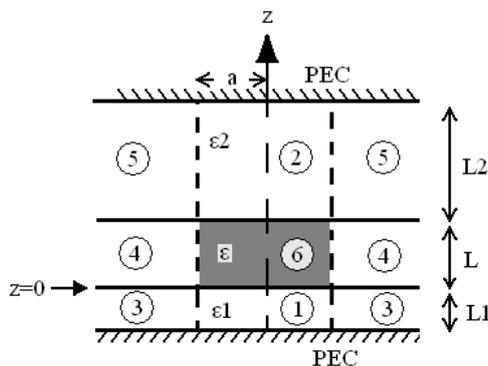


圖 1.3.9 考慮  $\rho > a$  處電磁場的介質共振器電磁模型。

## 1-4 結論

本章首先敘述品質因數的定義，以及一般常出現的表示方式，同時由於外部電路的影響，進而介紹外部品質因數。之後由簡單的電路，敘述品質因數與半功率頻寬的關係，從而可應用於量測品質因數。接著簡單介紹介質共振器的模態及電磁模型，透過以上基礎，便可以考慮更接近實際的品質因數量測法，並將於下章敘述。

最後可定義共振器與外部電路的耦合係數

$$\beta = \frac{Q}{Q_e} \quad (1.53)$$

其物理意義即為共振器內部與外部所消耗的能量比。分析共振電路時，常利用此式將 (1.13) 改寫成  $Q = (1 + \beta)Q_L$ ，並可根據耦合係數的大小，將共振電路分為三類，如表 1.4.1 所示。

表 1.4.1 耦合係數分類。

$\beta < 1$	低耦合 (under couple)
$\beta = 1$	臨界耦合 (critical couple)
$\beta > 1$	過耦合 (over couple)

## 第二章 品質因數量測方法

由上一章我們知道品質因數的定義，並依照其定義介紹了一個量測方式。然而此法所考慮的情況太過單純，只使用集總電路 (lump circuit) 模型，與實際量測狀況有所差距，因此本章將介紹其它量測方法。首先參考[3]，將考慮的情況擴展至傳輸線電路，並據以建立一簡單的量測方式。其後將參考[4]的方式，將耦合效應納入電路模型中，並以移動參考平面的方式扣除耦合效應。最後由於某些量測環境影響，無法直接將參考平面移動，因此嘗試在存有耦合效應的情況下，進行品質因數量測[11]。

### 2-1 反射係數相位量測法

首先考慮一連接於傳輸線上的無損耗共振器，如圖 2.1.1 所示。

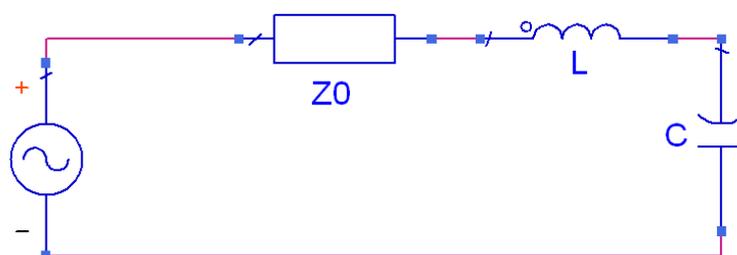


圖 2.1.1 接於傳輸線上之無損耗共振器。

若定義參考平面在負載與傳輸線的交接處，則反射係數為

$$S_{11} = \frac{-Z_0 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{Z_0 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad (2.1)$$

將 (1.24) 代入 (2.1)，可得

$$S_{11} \doteq \frac{-Z_0 + j\frac{BW}{\omega_0 C}}{Z_0 + j\frac{BW}{\omega_0 C}} = \frac{-1 + j\frac{1}{\omega_0 Z_0 C} BW}{1 + j\frac{1}{\omega_0 Z_0 C} BW} \quad (2.2)$$

上式中  $\frac{1}{\omega_0 Z_0 C}$  項即為外部品質因數，因此 (2.2) 可改寫成

$$S_{11} \doteq \frac{-1 + jQ_e BW}{1 + jQ_e BW} \quad (2.3)$$

假設在頻率  $\omega_1$  及  $\omega_2$  時，反射係數的相位分別為  $-90^\circ$  及  $+90^\circ$ ，亦即  $Q_e BW$  分別等於  $+1$  及  $-1$ ，則

$$Q_e \frac{2\Delta\omega_1}{\omega_0} = 1 \quad (2.4a)$$

$$Q_e \frac{2\Delta\omega_2}{\omega_0} = -1 \quad (2.4b)$$

其中  $\Delta\omega_1$  及  $\Delta\omega_2$  分別為

$$\omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega_1$$

$$\omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega_2$$

故由 (2.4a) 減去 (2.4b) 可得

$$2Q_e \frac{\Delta\omega_1 - \Delta\omega_2}{\omega_0} = 2 \quad (2.5)$$

若定義  $\Delta f_{\pm 90}$  為反射係數相位在  $\pm 90^\circ$  之間的頻寬，則

$$Q_e = \frac{f_0}{\Delta f_{\pm 90}} \quad (2.6)$$

因此 (2.6) 可用以量測共振器的外部品質因數。

值得一提的是，由第一章中介绍的半功率频宽显示，如果共振器输入阻抗的虚部，亦即 (1.23) 的近似式  $\omega L - \frac{1}{\omega C} \doteq \frac{BW}{\omega_0 C}$  等於 R，則

$$BW = \omega_0 RC = \frac{1}{Q} \quad (2.7)$$

因此量测时须掌握住共振器输入阻抗的虚部变化，就可以在品质因数与频宽之间建立适当关系。而 (2.7) 式中 R 的选择，就决定了所计算出来的 Q 值，是外部、内部、或是整体品质因数。以半功率频宽法为例，式中的 R 代表共振器内部损耗，因此计算的 Q 值为内部品质因数。而在反射系数相位法中，以  $Z_0$  取代 (2.7) 的 R，则可得到外部品质因数。

至於反射系数相位法的原理，可以由圖 2.1.2 说明。該圖為複數平面，其中左半部代表 (2.1) 的分子部分，右半部則代表分母。當共振時兩者的虚部皆為零，但由於特徵阻抗不隨频率变化，因此當频率離開共振频率之後，反射系数將沿著圖中虚線移動。由圖顯示，當输入阻抗的虚部等同於特徵阻抗，亦即 (1.23) 等於  $\pm Z_0$  時，反射系数的相位恰為  $\pm 90^\circ$ ，因此從  $\Delta f_{\pm 90}$  中便可得到外部品质因数的資訊。

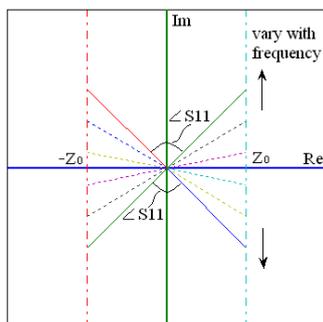


圖 2.1.2 考慮無損耗共振器之反射系数相位变化。

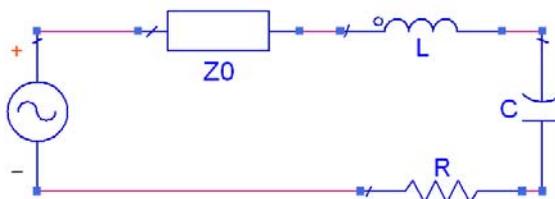


圖 2.1.3 接於傳輸線上之帶有損耗的共振器。

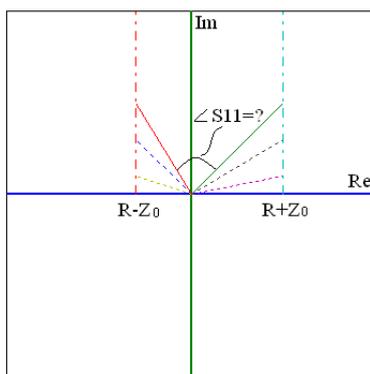


圖 2.1.4 考慮共振器損耗之反射係數相位變化。

使用圖 2.1.2 除了可以說明反射係數相位法的原理之外，同時也可以看出此法的缺點。圖 2.1.3 為一帶有損耗的共振器，其反射係數為

$$S_{11} = \frac{(R - Z_0) + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{(R + Z_0) + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad (2.8)$$

依據反射係數相位法，圖 2.1.2 則成為如圖 2.1.4 所示。

由圖 2.1.4 顯示，由於對共振器的損耗不明，因此共振器輸入阻抗的虛部不論等於  $R \cdot Z_0$  或是  $R+Z_0$ ，都無法得知其相對應的反射係數相位。因此反射係數相位法只能使用在無損耗，或是相對於外部損耗而言，內部損耗極小的共振器才有效。

不過對於有內損的共振器，下述方法可以測得其整體品質因數。

考慮圖 2.1.3 電路，定義能量損耗為

$$P_{loss} \equiv \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}V^+I^{+*}\right) - \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}V^-I^{-*}\right) \quad (2.9)$$

則上式以反射係數表示可寫為

$$P_{loss} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\frac{|V^+|^2}{Z_0^*} (1 - |\Gamma|^2)\right) \quad (2.10)$$

若考慮無損耗之傳輸線，則 (2.10) 可簡化為

$$P_{loss} = \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{Z_0} (1 - |\Gamma|^2) \quad (2.11)$$

亦即  $P_{loss}$  只和  $1 - |\Gamma|^2$  成正比。而

$$\Gamma(\omega) = \frac{(R - Z_0) + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{(R + Z_0) + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad (2.12)$$

故  $|\Gamma(\omega)|^2 = \frac{(R^2 - Z_0^2 + X^2) + 2jXZ_0}{[(R + X)^2 + X^2]}$ ，其中  $X = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ ，因此

$$1 - |\Gamma(\omega)|^2 = \frac{4RZ_0}{(R + Z_0)^2 + X^2} \quad (2.13)$$

於共振頻率時，則

$$1 - |\Gamma(\omega_0)|^2 = \frac{4RZ_0}{(R + Z_0)^2} \quad (2.14)$$

假設在某頻率時，(2.13) 為 (2.14) 的一半，則

$$X = R + Z_0 \quad (2.15)$$

因此，在損耗功率為共振時的一半時，共振器輸入阻抗的虛部恰為

$R + Z_0$ 。再由 (2.7) 可知，可由量測這些頻率點，計算整體品質因數。

## 2-2 傳輸量測法

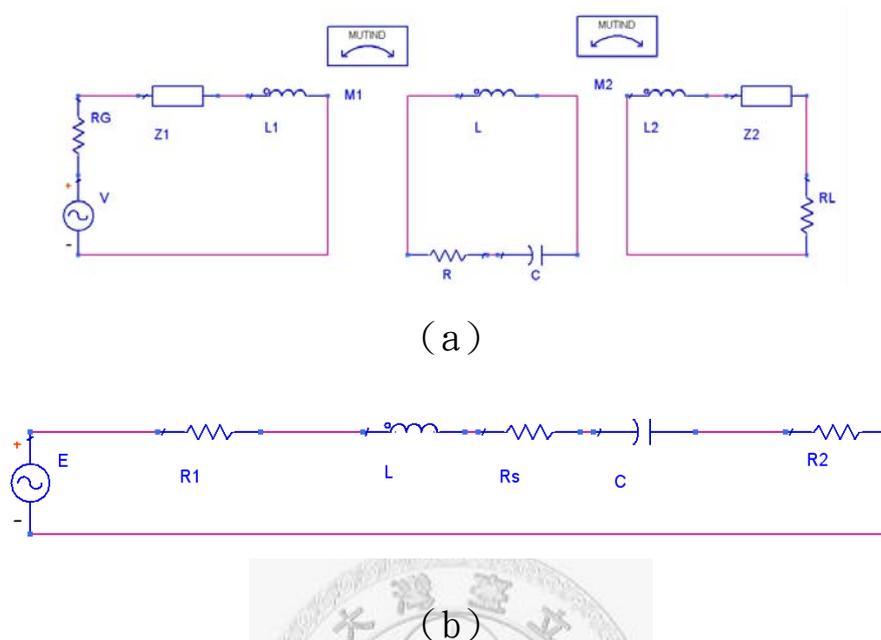


圖 2.1.5 耦合於雙端之共振器 (a) 等效電路及 (b) 簡化電路。

使用半功率頻寬進行品質因數量測，在第一章及前節都有提及，然而都是討論單埠網路。在某些量測中，如[8]中所使用的量測裝置係雙埠網路，因此本節將介紹雙埠測試法，首先考慮如圖 2.1.5 電路

上圖 (a) 為描述雙端耦合於傳輸線之共振器，其中  $L_1$  及  $L_2$  為耦合效應， $M_1$  及  $M_2$  為其互感值。若假設  $R_G$ 、 $R_L$  與特徵阻抗匹配，不考慮耦合機制的損耗，且忽略  $L_1$  及  $L_2$ ，則上圖 (a) 可簡化為圖 (b)，

其中  $R_1 = \frac{(\omega M_1)^2}{Z_1}$ ， $R_2 = \frac{(\omega M_2)^2}{Z_2}$ 。由圖 (b) 可求得整體品質因數為

$$Q_L = \frac{\omega_0 L}{R_s + \frac{(\omega M_1)^2}{Z_1} + \frac{(\omega M_2)^2}{Z_2}} \quad (2.16)$$

若定義傳輸損耗 (transmission loss)

$$T(\omega) = \frac{P_L}{P_0} \quad (2.17)$$

其中  $P_L$  為傳輸給負載的能量，而  $P_0$  為信號源在匹配負載下所能供應的最大能量，則根據 (2.17)，傳輸損耗可寫為

$$T(\omega) = \frac{4\beta_1\beta_2}{(1+\beta_1+\beta_2)^2 + 4Q^2\delta^2} \quad (2.18)$$

其中  $\beta_1 = \frac{(\omega M_1)^2}{R_S Z_1}$  及  $\beta_2 = \frac{(\omega M_2)^2}{R_S Z_2}$  為耦合係數，而  $\delta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega}$  為頻率調變

係數，因此在共振頻率時， $\delta = 0$ ，(2.18) 則簡化為

$$T(\omega_0) = \frac{4\beta_1\beta_2}{(1+\beta_1+\beta_2)^2} \quad (2.19)$$

又由於  $Q = Q_L(1+\beta_1+\beta_2)$ ，故將 (2.18) 及 (2.19) 相除可得

$$T(\omega) = \frac{T(\omega_0)}{1+4Q_L^2\delta^2} \quad (2.20)$$

由 (2.20) 即可看出半功率的頻率點發生在  $2Q_L\delta = \pm 1$  時，故

$$Q_L = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_1 - \Delta\omega_2} = \frac{f}{\Delta f} \quad (2.21)$$

其中  $\Delta f$  為兩個半功率頻率點之間的頻帶。

依據 (2.21) 可以在雙埠環境中，進行整體品質因數的量測。然而由於整體品質因數與內部品質因數有  $Q = Q_L(1+\beta_1+\beta_2)$  的關係，因此在量測中，若有充分理由說明  $\beta_1$  及  $\beta_2$  均遠小於一，則上述的量測結果，也可以當成內部品質因數。通常實務上的作法是不斷的降低耦合強度，直到傳輸損耗  $T(\omega)$  對頻率的曲線，不再隨耦合的降低而有明顯改變時，便認定已經達到近似條件。因此傳輸測試法能不能成為簡便

的內部品質因數量測法，關鍵就在於是否有可靠的方法控制 $\beta_1$ 及 $\beta_2$ 。

雖然傳輸測試法較下節敘述的阻抗測試法為準確，且即使耦合機制存有損耗，也可以透過降低耦合強度，減少其對內部品質因數的影響，這是阻抗測試法較難做到的。然而此法無法直接由量測的數據獲得品質因數，因此一般較常使用下述阻抗量測法。

## 2-3 阻抗量測法

阻抗量測法係直接量測共振器的輸入阻抗，得到品質因數。由於品質因數在共振頻率附近，可以其阻抗實部虛部的比值定義，因此由量測共振器的輸入阻抗變化，可較快速求得品質因數。

然而實際上量得之輸入阻抗，都是經過耦合機制所得之阻抗值，而非原本共振器的輸入阻抗。因此在正式說明阻抗量測法前，須先瞭解如何避開耦合機制的影響。首先考慮一共振電路，如圖 2.3.1 所示，則由 a 點之輸入阻抗為

$$Z_{aa} = jX_1 + \frac{(\omega M)^2}{R_s + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad (2.22)$$

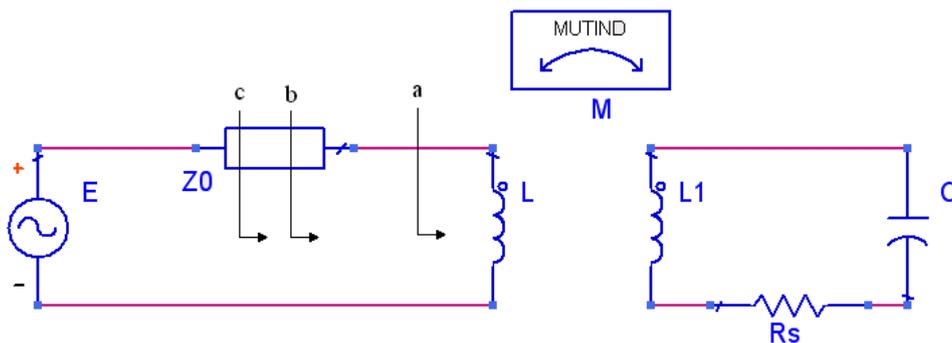


圖 2.3.1 考慮耦合效應之共振器等效電路。

若考慮操作頻率在共振點附近，則 (2.22) 對特徵阻抗正規化的結果可以近似為

$$\frac{Z_{aa}}{Z_0} \cong j \frac{X_1}{Z_0} + \frac{\beta_1}{1 + j2Q\delta} \quad (2.23)$$

其中  $\delta$  的定義同 (2.18)，而  $\beta_1 = \frac{(\omega M)^2}{Z_0 R_s}$ ， $Q = \frac{\omega L}{R_s}$ 。

現由距離 a 點為  $l$  的觀察點 b，則輸入阻抗為

$$\frac{Z_{bb}}{Z_0} = \frac{Z_{aa} + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_{aa} \tan \beta l} \quad (2.24)$$

若將操作頻率稍偏離共振點，則由於此時共振器阻抗劇烈變化，圖

2.3.1 中的共振器將形同開路，因此此時  $Z_{aa} = jX_1$ 。

若調整  $l$ ，使得此時在觀察點 b 的輸入阻抗為零，則

$$\tan \beta l = -\frac{X_1}{Z_0} \quad (2.25)$$

將 (2.25) 代回 (2.24)，可得

$$\frac{Z_{bb}}{Z_0} = \frac{\beta}{1 + j2Q(\delta - \delta_0)} \quad (2.26)$$

其中  $\delta_0 = \frac{\beta}{2Q} \left( \frac{X_1}{Z_0} \right)$ ，而  $\beta = \beta_1 \frac{1}{1 + \left( \frac{X_1}{Z_0} \right)^2}$ 。

比較 (2.26) 與 (2.23)，顯示原本在觀察點 a 的耦合效應被移除，然而代價是在 b 觀察點的共振頻率已經飄移，且共振器輸入阻抗的強度也已改變，然而由  $\delta_0$  以及  $\beta$  表示式顯示，若代表耦合效應的  $X_1$  值不太顯著，則 a 及 b 觀察點的結果頗為接近。而在物理意義上，其實就是先經由偏離共振點移除共振器效應，使得輸入阻抗主要包含耦合效應。接著在傳輸線上移動參考平面，找出看不到耦合效應的觀察點，則在該頻率附近都可視同耦合效應不存在。然而代價就是共振器的輸入阻抗，會經過觀察點的移動而改變。如果耦合機制微弱，則觀察點的移動距離就短，觀察到的輸入阻抗也就會相近。

另外，為避開耦合效應可選擇的觀察點並非唯一。例如在距離 b 點四分之一波長處亦可當作觀察點。唯此時觀察到的共振行為，將從並聯轉成串聯，但都將不受耦合效應的影響。

### 2-3-1 使用史密斯圖

在阻抗量測法中，使用史密斯圖為最直觀的方式，因為其中並沒有太複雜的運算。首先透過前述的方式找到觀察點 b，唯需注意的是，將操作頻率偏離共振點時，若共振器的共振頻率是可以調整的，則以調走共振器的中心頻率的作法較優，若無法做到才改調信號源的頻

率。主要是因為若調整信號源的頻率，則找到參考點 b 之後，將信號源調回操作頻率時，由於電氣長度的改變，將使得 b 點失去原有的特性。

找到 b 點後，觀察 (2.26) 可發現若有兩個頻率點  $\delta_1$  及  $\delta_2$  使得

$$2Q(\delta_1 - \delta_0) = 1 \quad (2.27a)$$

$$2Q(\delta_2 - \delta_0) = -1 \quad (2.27b)$$

則可解得內部品質因數為

$$Q = \frac{1}{\delta_1 - \delta_2} \quad (2.28)$$

同理若將 (2.26) 改寫如下

$$\frac{Z_{bb}}{Z_0} = \frac{\beta}{1 + j2Q_L(1 + \beta)(\delta - \delta_0)} = \frac{\beta}{1 + j2Q_e\beta(\delta - \delta_0)} \quad (2.29)$$

則亦有類似結論，若  $\delta_3$  及  $\delta_4$  使得  $2Q_e(\delta - \delta_0) = \pm 1$ ， $\delta_5$  及  $\delta_6$  使得  $2Q_L(\delta - \delta_0) = \pm 1$ ，則可如 (2.28) 解得外部及整體品質因數。

由以上流程顯示，其概念與 (2.7) 所表達的相同，主要在於討論導納的虛部等於某些特定值時，所對應的頻率。只是並聯串聯互換而已。在上述流程中，其導納虛部依次被設定成等於  $R_s$ 、 $Z_0$  及  $Z_0 + R_s$ ，所對應之品質因數分別為  $Q$ 、 $Q_L$  及  $Q_e$ 。因此在史密斯圖上，若能得到  $Z_m = \frac{1}{r + jr}$ 、 $Z_m = \frac{1}{r \pm j(r+1)}$  及  $Z_m = \frac{1}{r \pm j}$  的軌跡，並找出與  $\frac{Z_{bb}}{Z_0}$  的交點，則其交會的頻率點即為  $\delta_1 \sim \delta_6$ ，如圖 2.3.2 所示。



## 2-3-2 使用駐波比

由上節討論顯示，若得到在觀察點  $b$  的輸入阻抗在史密斯圖上的軌跡與三條參考線的交點，則可由各對應交點之間的頻寬，可求得品質因數。又由史密斯圖的基本性質知道，若量得無損耗傳輸線上某點的輸入阻抗  $Z_{in}$ ，則該線上的駐波比 (VSWR)，為  $Z_{in}$  在史密斯圖上，繞原點旋轉與正實軸交點所對應的阻抗值。亦即當阻抗軌跡與參考線的交點決定，則其駐波比也被決定。因此透過量測駐波比與頻率的關係，也能分別求得三個品質因數。今以內部品質因數為例，令  $a = 2Q(\delta - \delta_0)$ ，則 (2.26) 可改寫為

$$\frac{Z_{bb}}{Z_0} = \frac{\beta}{1 + j2Q(\delta - \delta_0)} = \frac{\beta}{1 + ja} \quad (2.30)$$

當 (2.30) 與內部品質因數的參考線相交時，其虛部與實部相等

$$\left. \frac{Z_{bb}}{Z_0} \right|_Q = \frac{\beta}{1 + a^2} (1 - ja) \Big|_{a=1} = \frac{\beta}{2} (1 + j) \quad (2.31)$$

此時反射係數為

$$\Gamma = \frac{Z_n - 1}{Z_n + 1} = \frac{\frac{\beta}{2}(1 + j) - 1}{\frac{\beta}{2}(1 + j) + 1} = \frac{(\beta - 2) + j\beta}{(\beta + 2) + j\beta} \quad (2.32)$$

即

$$|\Gamma| = \frac{\sqrt{(\beta - 2)^2 + \beta^2}}{\sqrt{(\beta + 2)^2 + \beta^2}} \quad (2.33)$$

因此在史密斯圖上，以 $|\Gamma|$ 為半徑的圓與正實軸的交點所對應的阻抗為

$$r_0 = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = \frac{1 + \frac{\sqrt{(\beta-2)^2 + \beta^2}}{\sqrt{(\beta+2)^2 + \beta^2}}}{1 - \frac{\sqrt{(\beta-2)^2 + \beta^2}}{\sqrt{(\beta+2)^2 + \beta^2}}} \quad (2.34)$$

整理後可得

$$r_0 = \frac{2 + \beta^2 + \sqrt{4 + \beta^4}}{2\beta} \quad (2.35)$$

經由類似的流程，可以求出外部品質因數與整體品質因數所對應的駐波比

$$r_L = \frac{1 + \beta + \beta^2 + (1 + \beta)\sqrt{1 + \beta^2}}{\beta} \quad (2.36)$$

$$r_e = \frac{1 + 2\beta^2 + \sqrt{1 + 4\beta^4}}{2\beta} \quad (2.37)$$

以上為使用駐波比進行品質因數量測的原理。而此法在史密斯圖

上的行為可由下圖說明

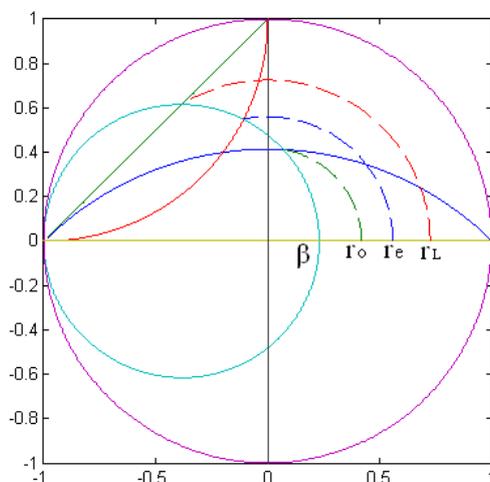


圖 2.3.3 使用駐波比量測品質因數在史密斯圖上的行為。

比較圖 2.3.3 與圖 2.3.2，便能清楚發現  $\delta_1 \sim \delta_6$  的頻率點分別對應出唯一的駐波比，因此在這裡觀察駐波比對頻率的變化，等效於直接觀察史密斯圖上的阻抗軌跡。

在實際使用時，會先調整頻率以得到如圖 2.3.4 所示，亦即駐波比對頻率的圖形。由圖 2.3.2 可以知道，其最低點即為共振點，而該點的駐波比即為  $\beta$ 。得到  $\beta$  後就可由 (2.35) ~ (2.37)，得知當阻抗軌跡與參考線交會時所對應的駐波比。經由反查駐波比對頻率的圖形，便可得知相對應的頻寬，從而求得三個品質因數。

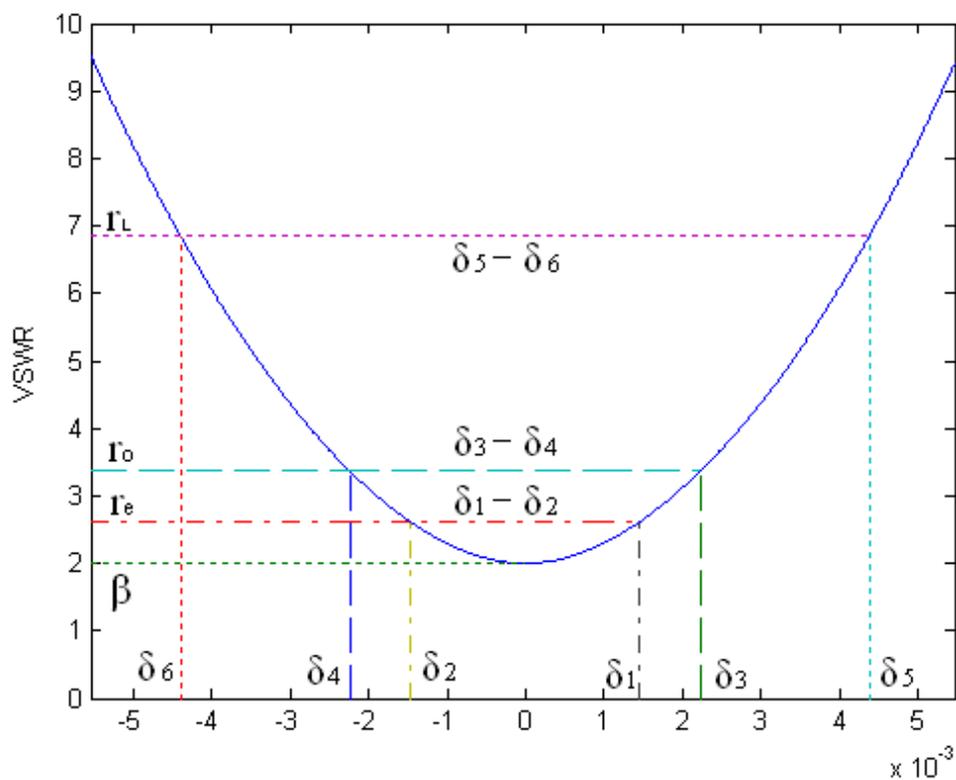


圖 2.3.4 使用駐波比對頻率之變化量測品質因數。

在阻抗量測法中，除了上述兩法之外，還可使用相位求得品質因數。然而此法與反射係數相位量測法，其限制與結論皆雷同，都是在內部損耗遠小於外部損耗的前提下，獲得外部品質因數。唯其取得相位的方式，是找出各頻率下電壓最小點的位置，然而其本質與反射係數相位量測法相同。故整體而言是經過較複雜的演算過程，獲得與 2-1 相同的結論。

由 2-3-1 與 2-3-2 的方法顯示，雖然都可以求得三個品質因數，然而在實務上，可以依據耦合的強烈與否，選擇較為準確的量測方式。觀察圖 2.3.2，當耦合太微弱時，阻抗軌跡會向左收縮，此時各個指標頻率會因為太過相近而不易分辨。反之若選用駐波比，由於繞到與正實軸交接時，在短距離內就會有顯著的駐波比變化，因此鑑別度相當好。而當耦合太強烈時，阻抗軌跡向右擴大，此時若使用 2-3-2 之方法，會因為駐波比分佈得太緊密，而難以讀得正確值。反觀 2-3-1 之方法，在此時便有較好的頻率鑑別性，至於相位法則是限制在  $\beta \gg 1$  的情況，故欲使用阻抗量測法，可以依據實際的耦合情況，選用較適合的方法。

## 2-4 考慮耦合效應之品質因數量測

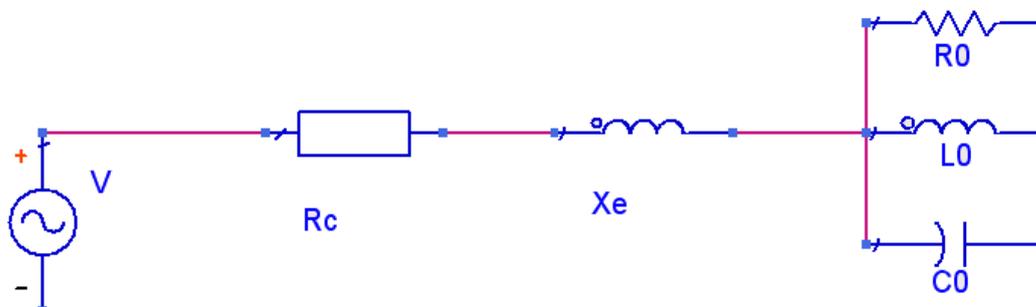


圖 2.4.1 考慮耦合效應之簡化共振電路。

本章至此已經介紹了數種品質因數量測法，並在前節中首次考慮耦合效應，並以移動參考平面的方式扣除該效應。然而電路多在各端點即已有饋入電路，亦即參考平面不容易移動。因此本節將敘述當耦合效應存在時的量測方法。

考慮一簡化後的等效共振電路，如圖 2.4.1 所示，其中假設耦合效應  $X_e$  隨頻率有一次變動項，即

$$X_e = \omega_0 L_e (1 + \delta) = X_1 (1 + \delta) \quad (2.38)$$

其中  $\delta$  的定義同 (2.18)，因此連同耦合效應的輸入阻抗可以寫成

$$Z_i = j(X_1 + 2R_c Q_1 \delta) + \frac{R_0}{1 + j2Q \delta} \quad (2.39)$$

而傳輸線上的反射係數為

$$\Gamma_i = \frac{Z_i - R_c}{Z_i + R_c} \quad (2.40)$$

(2.39) 中的前項，其對頻率的變率，相對於後項而言緩慢得多。因

此可把 (2.40) 重寫如下

$$\Gamma_i = \frac{Z_F - Z_S^*}{Z_F + Z_S} \quad (2.41)$$

其中  $Z_F$  與  $Z_S$  分別代表快速變動以及慢速變動的部分

$$Z_F = \frac{R_0}{1 + j2Q\delta} \quad (2.42)$$

$$Z_S = R_C \left[ 1 + j \left( \frac{X_1}{R_C} + 2Q_1\delta \right) \right] \quad (2.43)$$

由於在遠離共振頻率時，(2.42) 趨近於零，因此 (2.41) 成為

$$\Gamma_D = -\frac{Z_S^*}{Z_S} \quad (2.44)$$

將 (2.41) 與 (2.44) 相減即可得到

$$\Gamma_i - \Gamma_D = \frac{2R_C}{Z_S^2 \left( \frac{1}{Z_S} + \frac{1}{Z_F} \right)} \quad (2.45)$$

其中分母可近似為

$$\frac{1}{Z_S} + \frac{1}{Z_F} \cong \frac{1}{R_C} \left( \frac{1}{1 + x_1^2} + \frac{R_C}{R_0} \right) (1 + j2Q_L\delta_L) \quad (2.46)$$

其中  $\delta_L$  及  $Q_L$  分別表示為

$$\delta_L = \frac{\omega - \omega_L}{\omega_0} = \delta - \frac{x_1 k}{2Q} \quad (2.47)$$

$$Q_L = \frac{Q}{1 + k} \quad (2.48)$$

其中  $k = \frac{R_0}{R_C(1 + x_1^2)}$ 。若暫不考慮 (2.43) 中  $\delta$  的影響，則  $Z_S^2$  可近似成

$$Z_S^2 \cong R_C^2 (1 + x_1^2) e^{j2 \tan^{-1} x_1} \quad (2.49)$$

將 (2.49) 及 (2.46) 代回 (2.45) 可得

$$\Gamma_i - \Gamma_D = \frac{2e^{-j2 \tan^{-1} x_1}}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)(1 + j2Q_L \delta_L)} \quad (2.50)$$

其輸入阻抗在史密斯圖上的變化，如圖 2.4.2 所示。

然而 (2.50) 在  $Q_L \delta_L \gg 1$  時會無法成立，因此最好限制量測頻率範圍為  $Q_L \delta_L \leq 1$ 。因此此方法不能如 2-3-1 所敘述的方法，可偏離共振頻率直到阻抗軌跡與某些參考線相交。然而由 (2.50) 與圖 2.4.2 顯示

$$\tan \varphi_L = -2Q_L \delta_L \quad (2.51)$$

由 (2.51) 得知，若取得輸入阻抗軌跡之後，可以量出  $\varphi_L$ ，並查得相對應的頻寬之後，透過上式求得  $Q_L$ 。

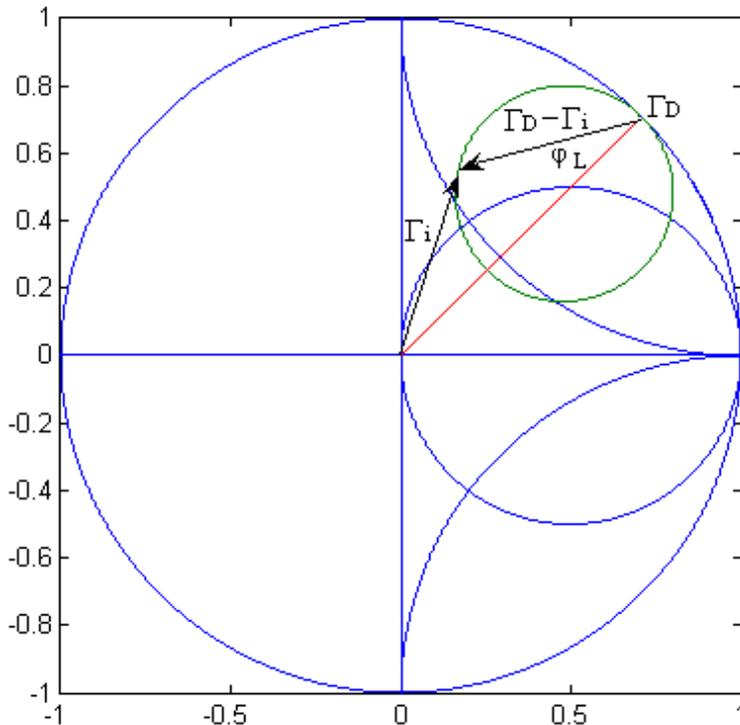


圖 2.4.2 考慮耦合效應之共振器輸入阻抗軌跡。

本章介紹了各種品質因數量測法，包括使用反射係數相位、傳輸量測法及阻抗量測法等等，並逐步考慮共振器損耗及耦合效應的影響。此外也說明了如何按照實際耦合情況，選用適當的量測法以提升準確度。而下一章將進行實物量測。針對耦合於微帶線之介質共振器，首先建立其等效電路，並於推導出量測方法後，附上模擬與量測結果。



## 第三章 耦合於微帶線之介質共振器 品質因數量測

在瞭解介質共振器的行為，品質因數的定義，及其量測方法之後。本章將敘述耦合於微帶線的介質共振器品質因數量測。

### 3-1 量測理論

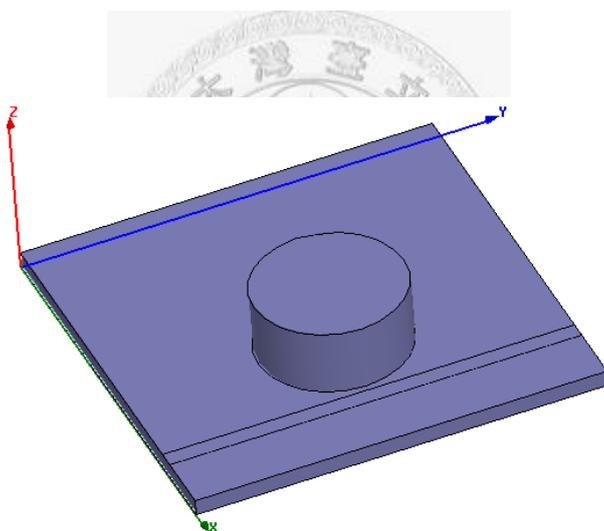


圖 3.1.1 耦合於微帶線之介質共振器。

考慮如圖 3.3.1 所示之介質共振器，其中介質共振器直接置於電路板上，並未架空。由 1-3-1 A. 以及圖 1.3.1 知道，此時介質共振器主要由磁場與微帶線耦合，其耦合機制可由互感表示。其等效電路如圖 3.1.2 所示。

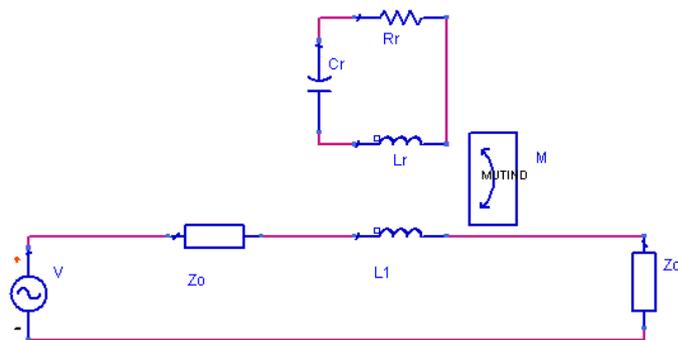


圖 3.1.2 考慮耦合效應之介質共振器等效電路。

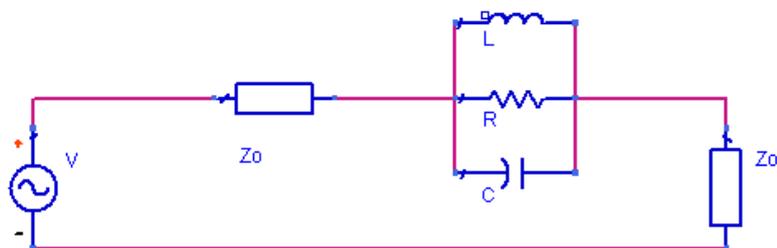


圖 3.1.3 忽略耦合的自感效應之介質共振器等效電路。

其輸入阻抗為

$$Z_{in} = j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{R_r + j\left(\omega L_r + \frac{1}{\omega C_r}\right)} \quad (3.1)$$

若忽略耦合的自感效應，則 (3.1) 為一並聯共振表示式。因此若忽略耦合的自感效應，則圖 3.1.2 可簡化為圖 3.1.3。此時其輸入阻抗為

$$Z_{in} = Z_0 + \frac{R}{1 + jQ\delta} \quad (3.2)$$

其中  $\delta$  的定義同 (2.18) 中的  $\delta$ 。

(3.2) 顯示，由於輸入阻抗含有一  $Z_0$  項，因此無論頻率如何變動， $Z_{in}$  在史密斯圖上之軌跡，永遠不會超過  $Z=1$  的圓。因此如果能

在該圓內，參考 2-3-1 的方法，找出 (3.2) 中分子的虛部等於實部、虛部等於  $\frac{1}{2Z_0}$  以及虛部等於  $\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2Z_0}\right)$  的軌跡，便能得到類似圖 2.3.2 中的三條參考線。因此就能依照 2-3-1 的方法，得到阻抗軌跡與參考線之交點所對應的頻率，進而求得三個品質因數。

$$\text{首先考慮參考線 } Z_{in} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\frac{1}{R}} + Z_0, \text{ 將其正規化之後可得}$$

$$Z_n = \frac{1}{\frac{Z_0}{R} + j\frac{Z_0}{R}} + 1 \quad (3.3)$$

令  $a = \frac{Z_0}{R}$ ，則反射係數可寫為

$$\Gamma = \Gamma_r + j\Gamma_i = \frac{Z_n - 1}{Z_n + 1} = \frac{1}{(1 + 2a) + j2a} \quad (3.4)$$

或

$$\Gamma_r(1 + 2a) + j2a\Gamma_r + j(1 + 2a)\Gamma_i - 2a\Gamma_i = 1 \quad (3.5)$$

由 (3.5) 可得以下兩式

$$\Gamma_r(1 + 2a) - 2a\Gamma_i = 1 \quad (3.6a)$$

$$2a\Gamma_r + (1 + 2a)\Gamma_i = 0 \quad (3.6b)$$

由 (3.6b) 可解得  $a$  為

$$a = \frac{-\Gamma_i}{2(\Gamma_r + \Gamma_i)} \quad (3.7)$$

將 (3.7) 反代回 (3.6a)，整理之即可得

$$\left(\Gamma_r - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \quad (3.8)$$

因此由(3.8)可以得知，內部品質因數的參考線，係以 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 為圓心， $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 為半徑的圓。如圖 3.1.4 所示，其與史密斯圖上 $Q=1$ 的軌跡很類似。

另兩條參考線可經過同樣流程求得，分別為 $Z_{in} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\frac{1}{2Z_0}} + Z_0$ 以

及 $Z_{in} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2Z_0}\right)} + Z_0$ 的軌跡，前者對應的參考線為

$$\Gamma_r^2 + \left(\Gamma_i \pm \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad (3.9)$$

而後者為

$$\Gamma_r + j\Gamma_i = \frac{1}{2+4a}(1 \pm j) \quad (3.10)$$

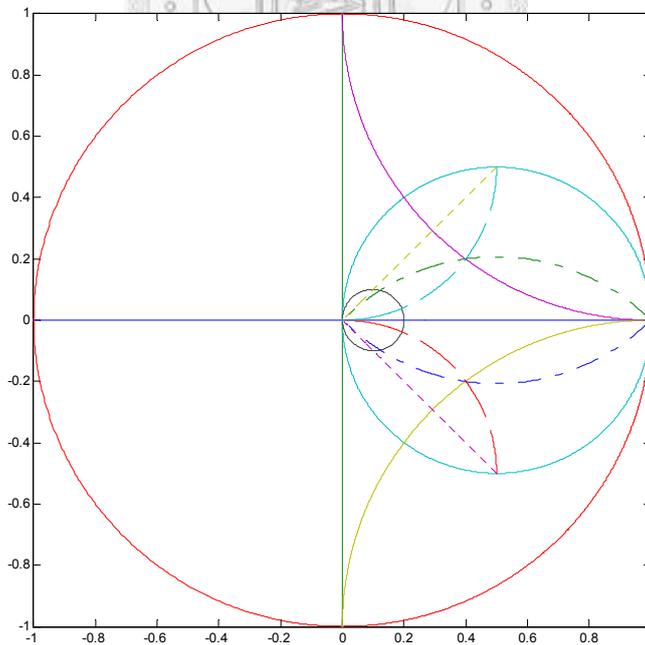


圖 3.1.4 耦合於微帶線上之介質共振器阻抗軌跡。

### 3-2 模擬與量測結果

本節將敘述依據上述方法，分別進行模擬與量測之結果。使用之介質共振器係 Trans-Tech 產品，其特性參數如表 3.2.1 所示。量測儀器包含 Agilent E8364B 向量網路分析儀及 Cascade Microtech MTF-26 微帶線電路板夾具。介質共振器雖係以微帶線激發，但因需網路分析儀及夾具的校正，因此在進行品質因數的量測前，進行 TRL 校準與驗證，以將量測參考平面移至微帶線上。

介質共振器	直徑(mm)	高度(mm)	介電係數	共振頻率 (GHz)
A	7.747	3.8735	≐30	≐8
B	5.842	2.921	≐30	≐10.5
C	4.064	2.032	≐30	≐14.5

表 3.2.1 實驗使用之介質共振器參數。

#### 3-2-1 TRL 校準與驗證

由於所使用的量測實驗結構單純，因此 TRL 校準套件相當簡易，圖 3.2.1 為所使用的校準套件與介質共振器。其中延遲線 (delay line)，即為耦合介質共振器之微帶線。

為了達到 TRL 校準與量測共用硬體的原則，必須要確保放置介質共振器之後，在新參考平面上的電磁場仍然為單一模態。另外考慮到 TRL 校準計算時，所求解根的鑑別度問題，因此延遲線設計為四分之

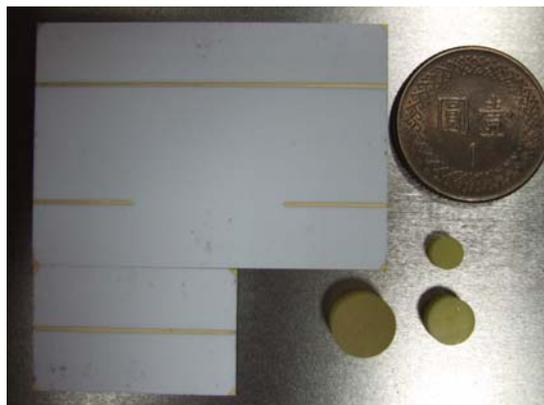


圖 3.2.1 TRL 校準套件與介質共振器。

一波長再增加整數個波長長度，以避開介質共振器附近的高階模態。

實際上，係以最低的共振頻率設計延遲線，而在另外兩顆較高頻的介質共振器的共振頻率時，延遲線大致都接近  $(n + \frac{1}{4})\lambda$  的要求，因此不需另外針對其他頻率製作延遲線。

校準之後則直接比較延遲線的  $S_{21}$  相位理論值與量測值，以進行校準結果驗證。

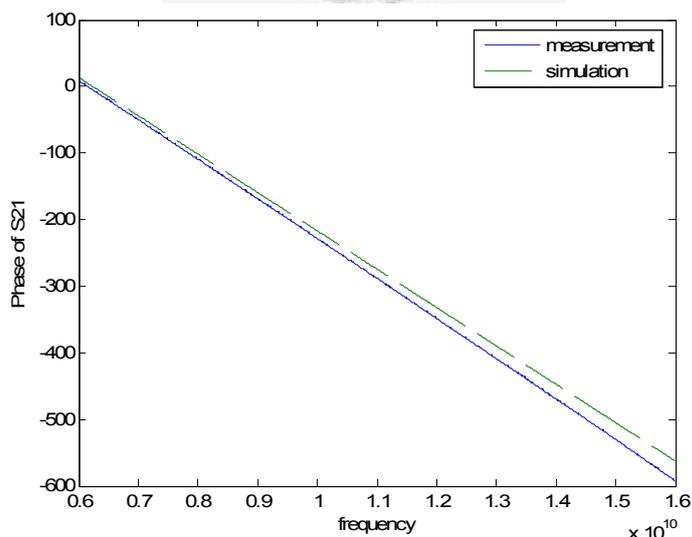


圖 3.2.2 延遲線  $S_{21}$  相位理論與量測結果。

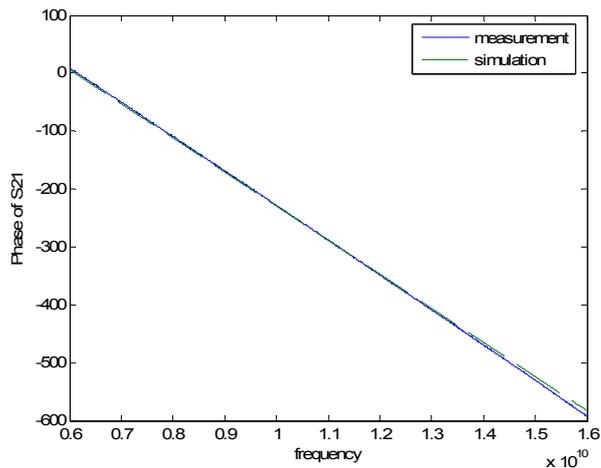


圖 3.2.3 修正後延遲線  $S_{21}$  相位理論與量測結果。

圖 3.2.2 為比較結果，其中理論值係使用 HFSS 模擬微帶線在 8GHz，根據頻率變化及延遲線的長度而得。其與量測結果之差異，應係模擬使用的  $Al_2O_3$  板材介電係數為廠商提供的 9.6，經調整至 10.03 則彼此吻合，如圖 3.2.3 所示。

為確定  $Al_2O_3$  板材介電係數，則利用此介電係數進行模擬，計算 TRL 套件中反射線之反射係數  $\Gamma_A$  的相位，並與量測結果比較。

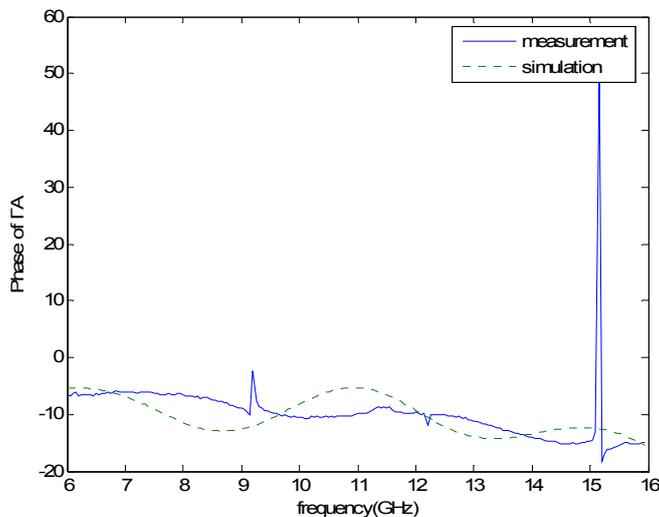


圖 3.2.4 修正介電常數後  $\Gamma_A$  相位理論與量測結果。

由圖 3.2.4 顯示，模擬與量測的差異最大約僅 5.615 度，故可說明校準的正確性。此外上圖在約 9.15 GHz、12.2 GHz 及 15 GHz 有較劇烈變化，係因延遲線長度在這些頻率時，為  $1.5\lambda$ 、 $2\lambda$  及  $2.5\lambda$ 。

### 3-2-2 模擬與量測

由於校準後的參考平面所看進去的等效電路不一定如圖 3.1.3 所示，因此取得的軌跡可能不如圖 3.1.4 般在  $Z=1$  的圓內，而是會繞原點旋轉一定角度。另外 TRL 校準後的參考平面，為物理上的某固定位置，因此在頻率變化時會有少許傳輸線特性調變的問題。為解決上述問題，可經由尋找  $S_{11}$  的最大點得到共振頻率，接著針對該頻率將原始結果反轉回原位，最後針對每個頻率點相對於中心頻率抵銷傳輸線調變效應，由以上流程處理過後的軌跡如圖 3.2.5 所示。

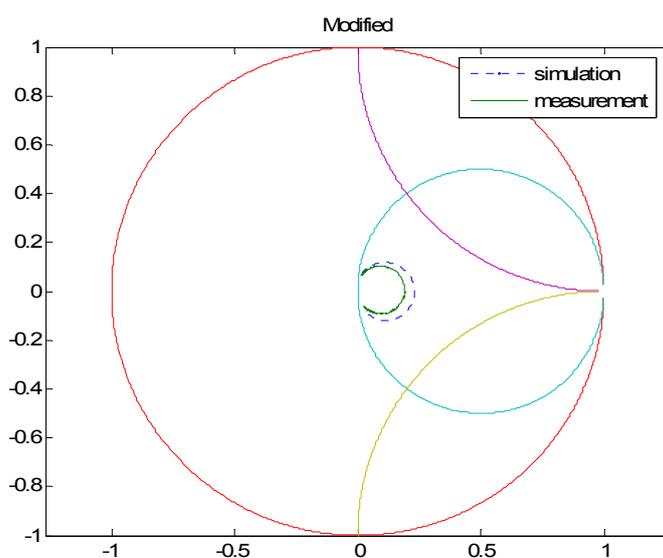


圖 3.2.5 修正後反射係數模擬與量測結果。

上圖為共振頻率在 8GHz 附近介質共振器 A 之結果，雖然由此圖，可使用 3-1 節所描述的方法，計算出品質因數的模擬與量測值分別為 168 及 273.26。然而此法實際上是由並聯電路描述共振行為，只能在共振頻率附近成立，而無法考慮更複雜的電磁行為，因此單純以此法取得的品質因數的正確性仍有討論空間。參考 2-4 節的描述了解，品質因數之準確量測關鍵，在於取得反射係數相位對頻率的變率。因此以下將討論反射係數的相位與頻率之間的變化，了解不同頻率時所求得之品質因數。

考慮圖 3.1.3，則正規化輸入阻抗為



$$Z_n = 1 + \frac{\frac{R}{Z_0}}{1 + j2Q\delta} \quad (3.11)$$

故反射係數為

$$\Gamma = \frac{Z_n - 1}{Z_n + 1} = \frac{\frac{R}{Z_0}}{\frac{R}{Z_0} + 2 + j4Q\delta} \quad (3.12)$$

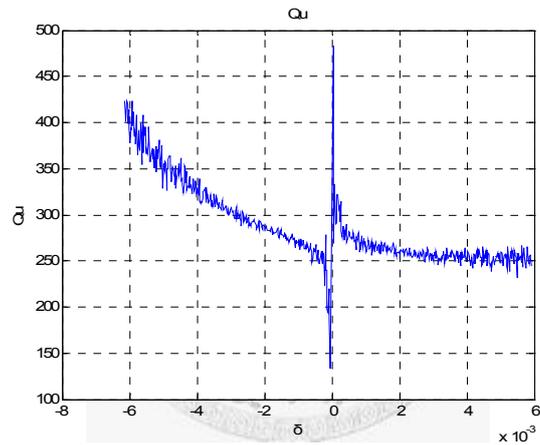
因此在史密斯圖上的張角為

$$\varphi = \tan^{-1} \left( -\frac{\frac{2Q\delta}{R}}{\frac{R}{2Z_0} + 1} \right) = \tan^{-1} \left( -\frac{2Q\delta}{1 + \beta} \right) \quad (3.13)$$

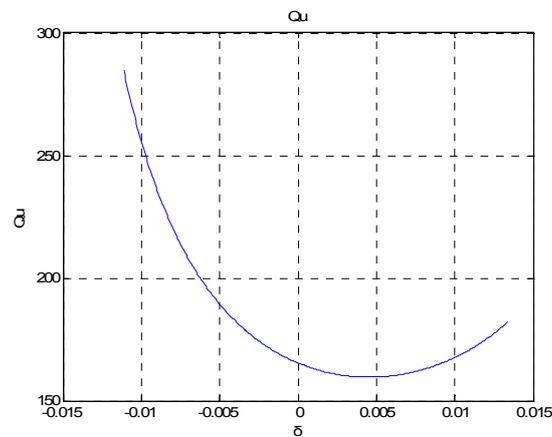
故內部品質因數為

$$Q = -\frac{(1 + \beta) \tan \varphi}{2\delta} \quad (3.14)$$

(3.14) 顯示，在並聯模型下，過去所介紹與參考線交會的頻率點為便於計算的特例。理想情況下，由 (3.14) 所得到的品質因數對  $\delta$  作圖應該是一條直線。但實際情況，原本的模型可能無法描述遠離共振點時的高階效應。故量測的結果應如圖 3.2.6 所示，在共振頻率附近趨於平坦，而在遠離共振時，所計算出的品質因數則失去參考性。其中模擬部分，其板材之損耗正切設定為 0.006，介質共振器為無損耗。

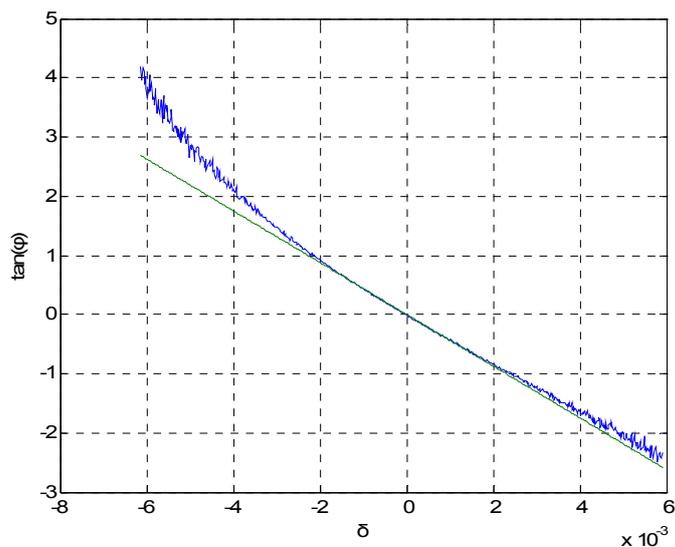


(a)

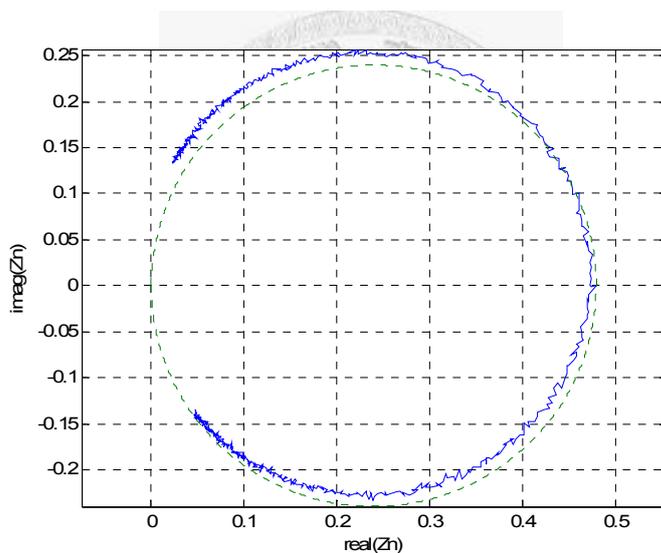


(b)

圖 3.2.6 品質因數對  $\delta$  作圖之(a)量測及(b)模擬結果。



(a)



(b)

圖 3.2.7  $\tan \varphi$  對  $\delta$  作圖之(a)量測結果及(b)正規化輸入阻抗。

由 (3.14) 顯示，圖 3.2.6 中在遠離共振頻率時的變異只可能是  $\tan \varphi$  與  $\beta$ 。若  $\tan \varphi$  對頻率變化不為線性，或  $\beta$  不為常數，都有可能造成上圖彎曲。因此觀察其對頻率的變化，便可以進一步瞭解原因。

圖 3.2.7 (a) 中的斜直線為  $\tan \varphi$  在  $-0.002 < \delta < 0.002$  趨勢的延伸

線，而圖(b)中的虛線圓，為當耦合係數為常數時，所繪之輸入阻抗軌跡。顯示雖然兩者在遠離共振頻率時皆有偏移，但由於圖(b)中的耦合係數，直接正比於軌跡上各點與圓心的距離，因此可明顯看出 $\beta$ 對頻率的變動相當和緩。反觀 $\tan\varphi$ 的變異趨勢與圖 3.2.6(a)很類似。尤其在最低頻處，比較後可發現 $\tan\varphi$ 由約 2.7 躍升到 4，與同一頻率的品質因數從原本的 270 成為 400，有相當高的相似性。因此可以知道造成圖 3.2.6 彎曲的主要原因，為共振器輸入阻抗的虛部，隨頻率的改變超過原模型所預期。

此外由圖 3.2.8 可以了解模擬與量測的共振頻率有所差異，且先前計算得到的品質因數也明顯不同。造成差異的主要原因，可能是模擬時使用的介質共振器的介電係數為廠商提供的 30，與其實際值有差異。此外模擬時，介質共振器與微帶線邊緣的間距，設定為 0.25mm，而實際量測的情形如圖 3.2.9 所示，共振器是以鑷子擺放並微調位置，其實際間距難以控制及量測，因而造成模擬與量測之間的差異。

上述過程主要敘述共振於 8GHz 共振器，其品質因數模擬和實驗結果。以下係再針對另兩顆介質共振器，重複上述步驟以量得其品質因數，結果如圖 3.2.10 至圖 3.2.14 所示。

由比較介質震盪器 A~C 的量測結果可以發現，其共通點為，在偏離共振頻率之後，品質因數都有上升的趨勢。但隨著共振頻率增

加，品質因數對頻率的變化也越劇烈。基於品質因數與  $\tan \varphi$  變化趨勢的相似性，推測共振於高頻的介質共振器，其等效電感與電容對頻率的變化較低頻共振器顯著。另外圖 3.2.15 (b) 顯示，共振器 C 的耦合係數隨頻率的變動相較於共振器 B 及 C 更為顯著。推測共振器 C 的耦合機制與 B 及 C 相較有較明顯的高階效應，而無法單純以圖 3.1.2 的耦合電感描述。

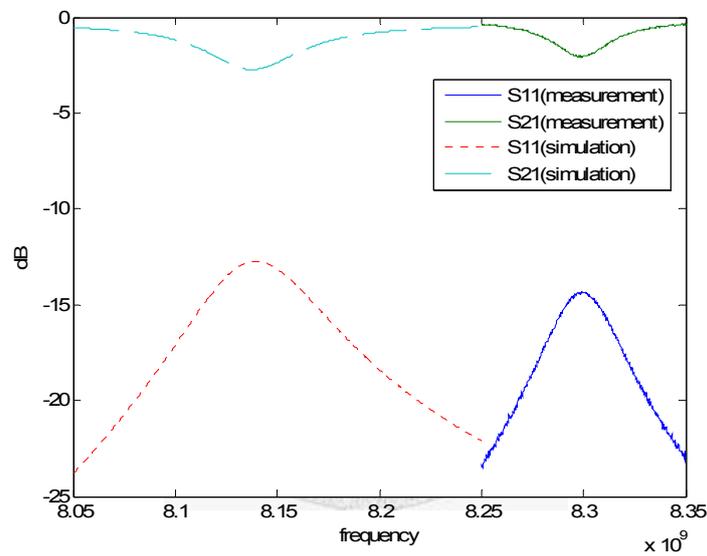


圖 3.2.8  $S_{11}$  及  $S_{21}$  模擬與量測結果。

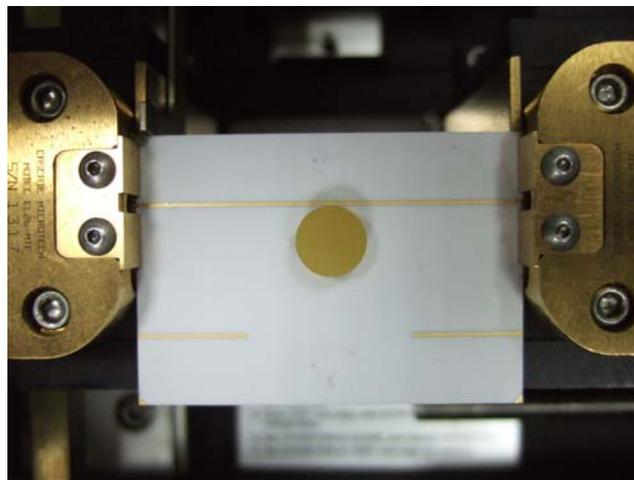


圖 3.2.9 實驗裝置。

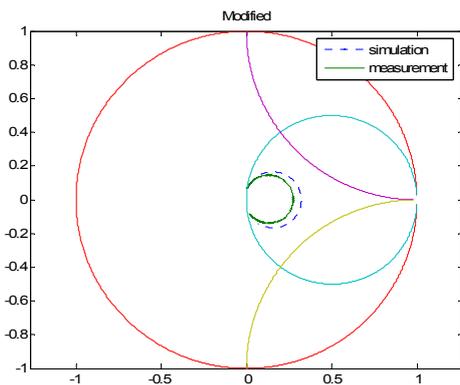


圖 3.2.10 介質共振器 B 其修正後反射係數模擬與量測結果。

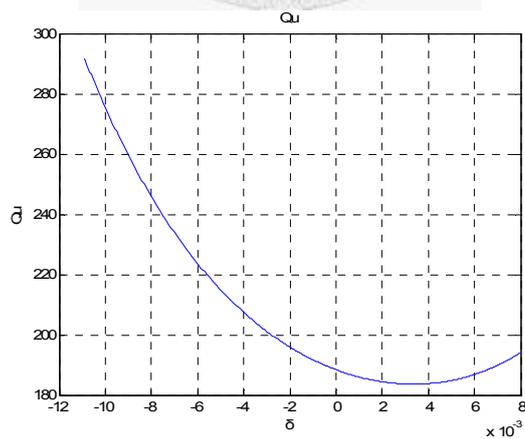
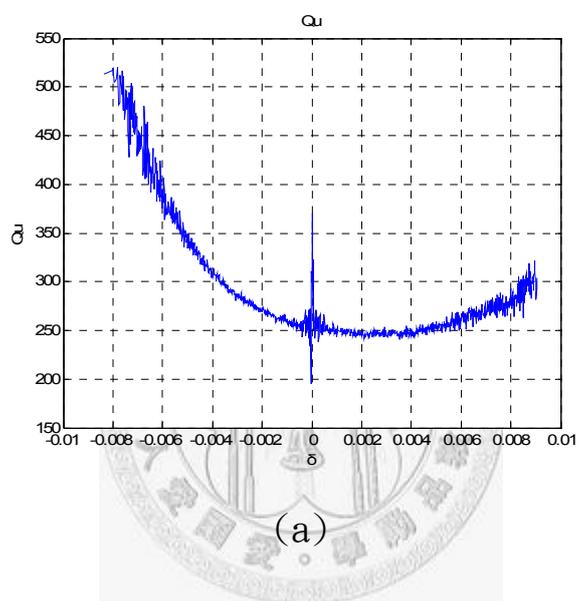
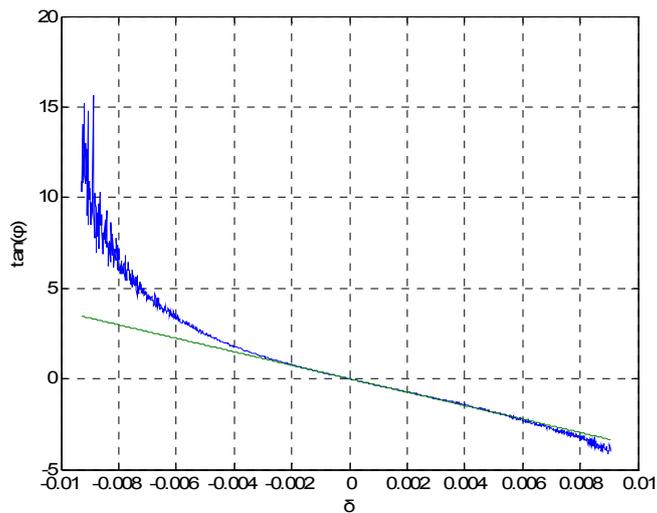
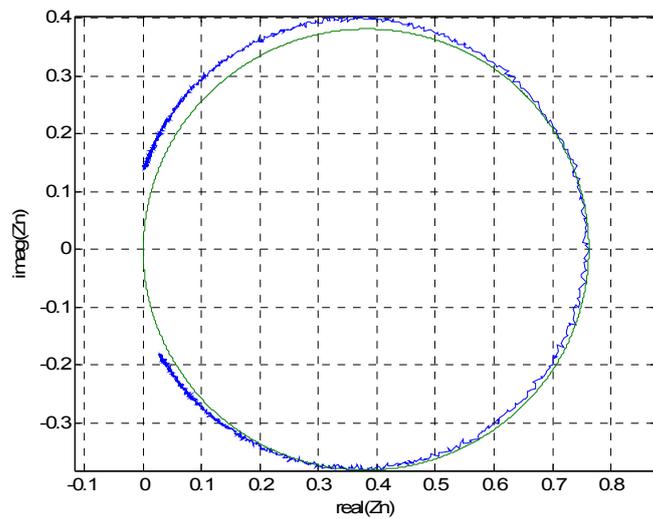


圖 3.2.11 介質共振器 B 其品質因數對  $\delta$  作圖之 (a) 量測及 (b) 模擬結果。



(a)



(b)

圖 3.2.12 介質共振器 B 其  $\tan \phi$  對  $\delta$  作圖之 (a) 量測結果與 (b) 正規化輸入阻抗。

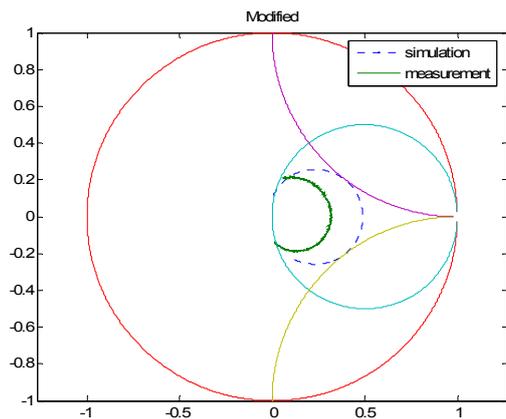
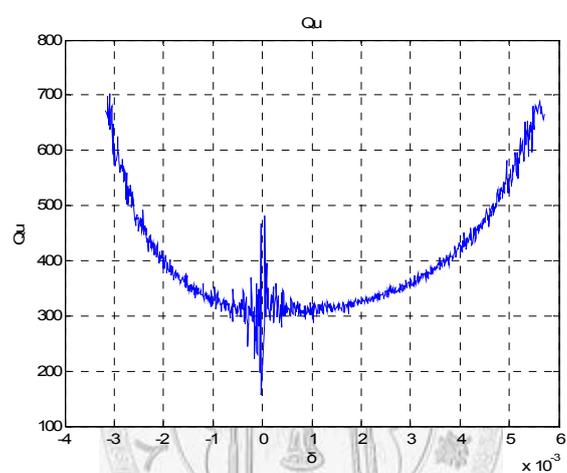
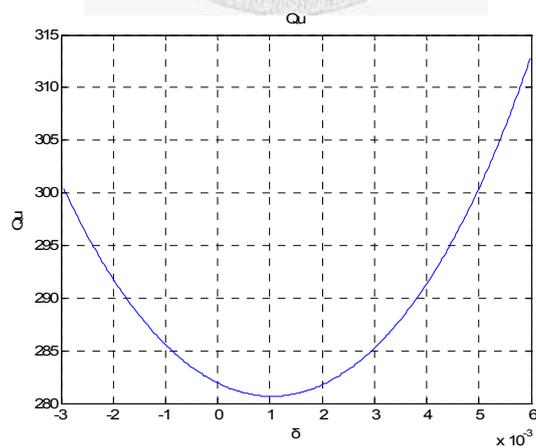


圖 3.2.13 介質共振器 C 其修正後反射係數模擬與量測結果。

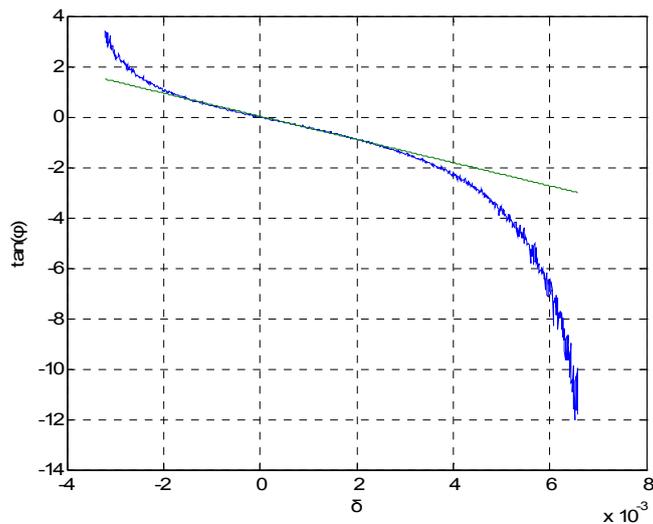


(a)

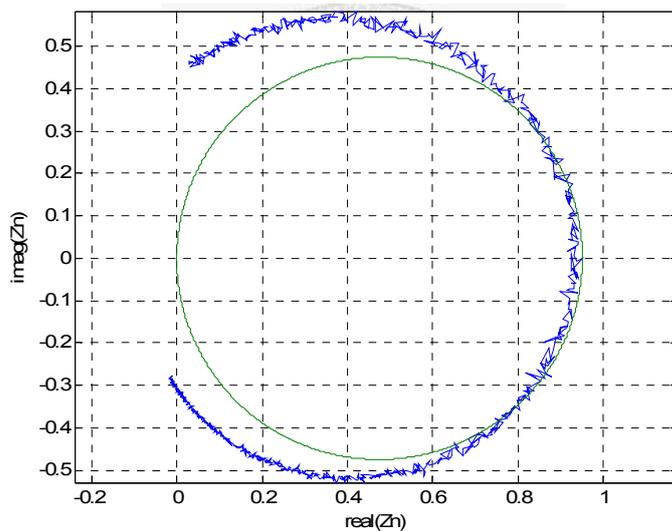


(b)

圖 3.2.14 介質共振器 C 其品質因數對  $\delta$  作圖之(a)量測及(b)模擬結果。



(a)



(b)

圖 3.2.15 介質共振器 C 其  $\tan \phi$  對  $\delta$  作圖之 (a) 量測結果與 (b) 正規化輸入阻抗。

## 第四章 結論

經由第三章所描述的過程，可以量得耦合於微帶線上的介質共振器的各品質因數，並且依據 (3.14) 繪得內在品質因數  $Q$  與  $\delta$  的關係圖。經由該圖可以得知，在何種  $\delta$  區間裡計算的品質因數是正確可信賴的，進而得知依據 3-1 節計算而得之品質因數是否具有參考價值。

參考廠商提供的介質共振器參數，顯示實驗所使用的介質共振器，其品質因數可達千位甚至萬位的數量級，但實驗量測結果卻約為數百。造成差異的原因主要是實驗環境的不同，廠商係提供單獨介質共振器的品質因數，量測時係將其放置在圓柱形共振腔內，並以電磁特性接近空氣的材料架空介質共振器，以期近似在自由空間中的情形。而在本論文所使用的方法，係將介電常數約 30 的介質共振器，直接放在介電常數為 10 的氧化鋁基板上，因此共振器包覆電磁場的能力，便不如處在自由空間中一般。而由品質因數的原始定義知道，若共振器內貯存電磁能的能力下降，則品質因數也會隨之下降。因此放置在基板上的介質共振器品質因數，自然比放在圓柱形共振腔內低。

另外，由於耦合係數與等效電路中的電阻相關，且由共振頻率可以求得電感與電容互乘值，最後品質因數又相關於電阻與電抗的比

值。因此透過量測品質因數，可以建立在該架構下的等效共振電路。

以共振於 10GHz 的介質共振器 B 為例，假設微帶線特性阻抗為 1，若取  $R=0.76228$ 、 $L=0.042742\text{pH}$  及  $C=4.988\text{nF}$ ，如圖 4.1 所示，與圖 3.2.11(a)比較，顯示在共振頻率附近的品質因數極為相近，且在史密斯圖上的軌跡也幾乎重疊，如圖 4.2 所示。

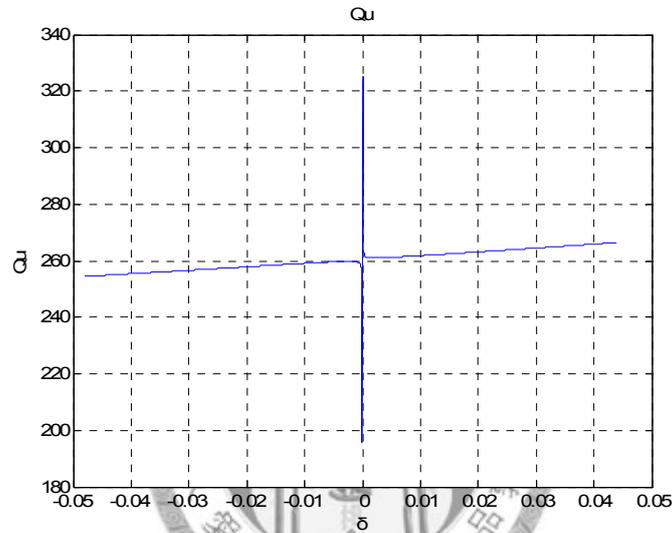


圖 4.1 介質共振器 B 由等效電路所得之品質因數。

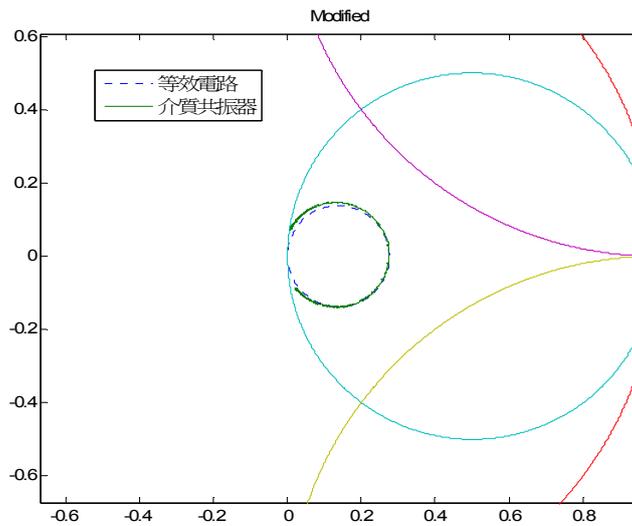


圖 4.2 介質共振器 B 與其等效電路在史密斯圖上的軌跡。

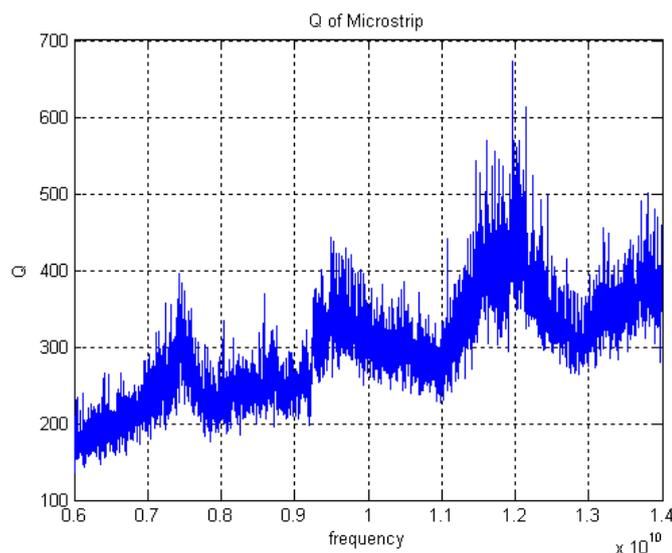


圖 4.3 微帶線的品質因數

透過分析 TRL 驗證時所取得的延遲線  $S_{21}$  數據，並利用  $\frac{\beta}{2\alpha}$  一式便能求出本實驗所使用的微帶線的品質因數，如圖 4.3 所示。觀察該圖可發現在 8GHz、10GHz 及 14GHz 的品質因數相當接近介質共振器 A、B 及 C 的量測結果。而與廠商所提供的約數千或數萬的介質共振器品質因數比較，可知本實驗所量得的結果實際上為微帶線所主導。該現象說明了如欲量測一共振器之品質因數，則其耦合環境的 Q 值越高，所得到的結果也越接近該共振器本身的品質因數。因此以高品質因數的共振腔耦合，可以得到比微帶線耦合更準確的介質共振器品質因數。

雖然依據以上方法可以量得耦合於微帶線上之介質共振器的品質因數，然而實際上均無法避開其耦合效應，物理結構上的耦合電路，必然會影響原本的共振器。以方形共振器為例，雖然在 1-2 中可

以計算其品質因數，然而為了將能量饋入，須破壞原有的封閉結構，因此使得內部模態，由於邊界條件的改變，而有所不同。換言之，即使精準的量測，均很難求得一獨立共振器的品質因數。因此希望透過對品質因數性質的瞭解，或許可能經過例如對同一耦合機制，行為相似的不同共振器進行量測，藉由多次實驗量測數據，可嘗試還原獨立共振器的行為。



## 參考文獻

- [1] J.H. Lee, S. Pinel, J. Papapolymerou, J. Laskar and M.M. Tentzeris, 'Low-loss LTCC cavity filters using system-on-package technology at 60 GHz,' *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-53, pp. 3817-3824, Dec. 2005.
- [2] A. Khanna and Y. Garault, "Determination of loaded, unloaded, and external quality factors of a dielectric resonator coupled to a microstrip line," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-31, pp. 261-264, March 1983.
- [3] J.S. Hong and M.J. Lancaster, *Microstrip Filters for RF/Microwave Applications*, New York: Wiley, 2001.
- [4] A.E. Bailey, *Microwave Measurement*, London, UK : P. Peregrinus on behalf of the Institution of Electrical Engineers, 1989.
- [5] S.A. Long, M. McAllister, and L.C. Shen, "The resonant cylindrical dielectric cavity antenna," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-31, pp. 406-412, May 1983.
- [6] P. Guillon and Y. Garault, "Dielectric resonator dual modes filters," *Electron. Lett.*, vol. 16, p.646, Aug 1980.
- [7] S.J. Fiedziuszko, "Dual-mode dielectric resonator loaded cavity filters," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-30, pp. 1311-1316, Sept. 1982.
- [8] D. Kajfez and P. Guillin, *Dielectric Resonators*, Tucker, Ga. : Noble Pub. Corp., 1998.
- [9] S.B. Cohn, "Microwave bandpass filters containing high-Q dielectric resonators," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-16, pp. 218-227, April 1968.
- [10] T. Itoh and R.S. Rudokas, "New method for computing the resonant frequencies of dielectric resonators," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-25, pp.

參考文獻

52-54, Jan 1977.

- [11] D. Kajfez and E.J. Hwan, "Q-Factor measurement with network analyzer," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-32, pp. 666-670, July 1984.

