

國立臺灣大學工學院機械工程學系

碩士論文

Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis

二維位勢流場中平板以形變與剛體模式擺動所產生之推力比較

Comparison of Thrust Produced by Rigid and Undulated Flat Plates

Swinging in a 2-D Potential Flow

許仁達

JenTa Hsu

指導教授：伍次寅 博士

Advisor: TzuYin Wu, Ph.D.

中華民國 100 年 7 月

July, 2011

國立臺灣大學碩士學位論文  
口試委員會審定書

二維位勢流場中平板以形變與  
剛體模式擺動所產生之推力比較

Comparison of Thrust Produced by Rigid and  
Undulated Flat Plates Swinging in a 2-D Potential Flow

本論文係許仁達君(R98522122)在國立臺灣大學機械工程學系、所完成之碩士學位論文，於民國 100 年 7 月 28 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：伍次寅 伍次寅 (簽名)  
(指導教授)  
盧中仁 盧中仁  
楊馥菱 楊馥菱

系主任、所長 楊耀升 (簽名)

## 致謝

一年半的時間一眨眼就過去了，我的碩士生涯與大多數人不同，走得顛顛頗頗，若不是指導老師伍次寅博士的耐心教導，我是沒辦法如此順利完成這份論文。伍老師的學識豐富，教學認真，面對學生的各種問題總是充滿耐心的指導，使我不僅在知識上有所增長，也學會待人處事的道理。同時也相當感謝口試委員盧中仁教授與楊馥菱教授，因為兩位老師不吝提出指正與建議，使得本論文能更加完備。

感謝這一年半來陪我一同學習一同成長的朋友們，士瑋、欣灝、振翰、稚游及景韓。尤其是士瑋，不僅在課業上協助我學習，平時更與我分享生活的體驗以及對教學的想法，讓我的思想能更成熟，對人也更具包容心，有你這位良師益友的陪伴與教導，讓我這一年半的學習才能如此順利。也感謝高中及大學社團的夥伴，以及認識快二十年的小學同學們，謝謝你們豐富了我的生命。還有一位重要的人，我想要在這裡好好感謝她，盈潔謝謝妳走入我的生命，陪我度過這麼多忙碌的日子，因為妳的陪伴讓我在很疲憊的時候仍能充滿歡笑與喜悅，真的非常謝謝妳。

最後我要感謝我的父母，謝謝你們如此用心的栽培我，並且包容尊重支持我的每個選擇，讓我的求學生涯充滿多彩多姿的回憶，謝謝你們。

## 摘要

魚類在水中快速啟動是非常獨特的泳動機制。過去有相當多的研究是針對魚類在穩態泳動時周遭所引生的流場來進行觀察與量測，並以簡單的流體力學理論來解釋魚前行力的來源及推估其值。然而對於魚類快速啟動時如何有效利用流體流動形態於瞬間產生極大推力之論述則並不多見。本文以一無厚度的波浪狀形變平板來模擬魚快速啟動時尾部的擺動動作。為簡化分析，流場假設為二維勢流場(potential flow)，並配合非穩態之 Kutta 條件來處理平板末端渦流剝離(vortex shedding)的現象。本文採用板格法(panel method)來計算此二維勢流場，而作用於平板上的推力則是藉由求解非穩態 Bernoulli 方程式來得出。為了比較平板形變擺動模式與剛體擺動所產生之推力，本文提出了三種比較基準，計算的結果顯示無論在何種基準之下平板以形變模式擺動一周期的最大推力、平均推力以及平板前行的位移量皆大於剛體模式之擺動。本研究亦探討了數種不同的平板形變擺動模式，藉以說明魚類如何巧妙應用魚尾擺動時在其後方所形成的初始渦流，並配合適當的形變姿態來協助其向前作加速運動。

關鍵詞：快速啟動；形變平板；板格法

## Abstract

Fast-start swimming of fish is a very special type of locomotion. Many existing studies involved using the DPIV flow-visualizing technique to measure the flow field around a steadily swimming fish and exploiting the basic fluid dynamic theories to interpret the source of the propulsion force. However, few researches had focused on the area of how fish utilize the dynamic of the flow field to produce large thrust in the fast-start motion. In this study, we model the body movement of a fast-start fish by a 2-D zero-thickness flat plate with prescribed undulating motions. For simplicity, a potential flow is assumed, along with the unsteady Kutta condition to simulate the vortex-shedding phenomenon at the end of the flat plate. The panel method is adopted to solve the flow field numerically, and the force acting on the flat plate is calculated by using the unsteady Bernoulli equation. In order to compare the thrust generated by an undulating plate with that by a rigid flat plate, three different standards of comparison are proposed. Calculated results show that under all standards, the propelling force and forwarding distance produced by a flat plate with undulating motion are larger than that produced by a rigid-body motion. The present research also compares and discusses several different types of flat-plate undulating motions, with a view to explain how a fish benefits from the impetus of the starting vortex generated by its swinging tail and properly adjusts its configuration to help accelerate itself through the fluid.

Keywords: fast-start, undulated flat plate, panel method

# 目錄

口試委員會審定書 .....	i
致謝 .....	ii
中文摘要 .....	iii
英文摘要 .....	iv
目錄 .....	v
圖目錄 .....	vii
第一章 導論 .....	1
第二章 統御方程式及數值計算 .....	4
2.1 流場統御方程式 .....	4
2.2 邊界條件 .....	4
2.3 非穩態庫達條件(Unsteady Kutta Condition).....	5
2.4 數值方法 .....	6
2.5 形變平板推力計算 .....	10
2.6 平板形變數學模型建構 .....	13
2.7 無因次化 .....	15
第三章 形變平板與剛體平板擺動所產生推力之比較與分析 .....	17
3.1 固定不移動情形下形變平板與剛體平板擺動所產生之推力比較 .....	18
3.2 可移動情形下平板的加速度、前行位移以及邊界條件 .....	31
3.3 行進中的形變平板與剛體平板擺動所產生之推力及位移比較 .....	33
第四章 平板以不同形變擺動模式所產生推力之比較與分析 .....	36
4.1 固定不移動情形下平板以不同擺動模式所產生之流場與推力 .....	36
4.1.1 第 II 類型之擺動模式 .....	36
4.1.2 第 III 類型之擺動模式 .....	44

4.1.3 各種擺動模式之推力比較.....	51
4.2 移動情形下平板以不同擺動模式所產生之推力及位移 .....	53
第五章 結論與未來展望 .....	59
參考文獻 .....	62



## 圖目錄

圖 2.1 涡流自物體尾端尖端處脫離的情形。 .....	5
圖 2.2 板格法示意圖。 .....	7
圖 2.3 形變平板示意圖。 .....	8
圖 2.4 環流量積分路徑示意圖。 .....	12
圖 2.5 Pedley (2004)的數學模型示意圖。 .....	14
圖 2.6 以行進波模擬魚的擺動。 .....	14
圖 3.1 形變平板擺動的周期變化圖。 .....	19
圖 3.2 剛體平板擺動的周期變化圖。 .....	20
圖 3.3 固定不移動情形下，形變平板與剛體平板水平推力比較圖。 .....	21
圖 3.4 平板傾斜角度不同造成水平推力不同的示意圖。 .....	22
圖 3.5 平板沿垂直方向作加速-減速運動時流場示意圖。 .....	23
圖 3.6 平板作逆向加速時流場示意圖。 .....	23
圖 3.7 形變平板擺盪至最高點附近之渦流與平板位置圖。 .....	24
圖 3.8 剛體平板擺盪至最高點附近之渦流與平板位置圖。 .....	25
圖 3.9 在 $7/40 T^*$ 時刻形變平板與渦流位置圖。 .....	26
圖 3.10 在 $4/40T^*, 6/40T^*, 8/40T^*$ 時刻形變平板與流場的速度向量圖。 .....	28
圖 3.11 形變平板後方流場動量變化示意圖。 .....	28
圖 3.12 在 $28/40T^*$ 時刻的形變平板與渦流位置圖。 .....	29
圖 3.13 在 $20/40T^*, 24/40T^*, 28/40T^*$ 時刻的形變平板與流場速度向量圖。 .....	31
圖 3.14 移動情形下形變平板與剛體平板之推力比較圖。 .....	34
圖 3.15 形變平板與剛體平板前行距離對時間的關係圖。 .....	34
圖 3.16 移動情形下形變平板與剛體平板水平速度比較圖。 .....	35
圖 4.1 第 II 類擺動模式平板的周期變化圖。 .....	37

圖 4.2 固定不移動情形下第 II 類型擺動模式平板之推力對時間關係圖。 .....	39
圖 4.3 第 II 類型擺動模式在 $6/40T^*$ 時刻的平板與渦流位置圖。 .....	39
圖 4.4 第 II 類型擺動模式在 $2/40T^*$ 、 $2/40T^*$ 、 $6/40T^*$ 時刻的速度向量圖。 .....	41
圖 4.5 第 II 類型擺動平板附近的流場動量變化示意圖。 .....	41
圖 4.6 第 II 類型擺動模式在 $28/40T^*$ 時刻的平板與渦流位置圖。 .....	42
圖 4.7 第 II 類型擺動模式在 $22/40T^*$ 和 $28/40T^*$ 時刻的速度向量圖。 .....	43
圖 4.8 第 III 類型擺動模式平板的周期變化圖。 .....	45
圖 4.9 固定不移動情形下第 III 類型擺動模式平板推力對時間關係圖。 .....	46
圖 4.10 第 III 類型擺動模式在 $2/40T^*$ 時刻的平板與渦流位置圖。 .....	46
圖 4.11 第 III 類型擺動模式在 $1/40T^*$ 、 $2/40T^*$ 和 $3/40T^*$ 時刻的速度向量圖。 ....	48
圖 4.12 第 III 類型擺動平板附近的流場動量變化示意圖。 .....	49
圖 4.13 第 III 類型擺動模式平板從最低點上擺之渦流位置圖。 .....	49
圖 4.14 第 III 類型擺動模式在 $20/40T^*$ , $30/40T^*$ , $35/40T^*$ 時刻的速度向量圖。 ..	51
圖 4.15 固定不移動情形下三種平板擺動模式一周期內推力對時間關係圖。 ....	53
圖 4.16 移動情形下三種擺動模式的推力對時間關係圖。 .....	54
圖 4.17 第 I 類型擺動模式在移動與不移動情形下的推力比較。 .....	54
圖 4.18 第 II 類型擺動模式在移動與不移動情形下的推力比較。 .....	55
圖 4.19 第 III 類型擺動模式在移動與不移動情形下的推力比較。 .....	55
圖 4.20 平板前行時阻力示意圖。 .....	57
圖 4.21 移動情形下三種擺動模式的平板平移速度對時間關係圖。 .....	58
圖 4.22 移動情形下三種擺動模式一周期內平板的位移對時間關係圖。 .....	58

## 第一章 導論

有關魚類在水中游動的機制曾在過去被廣泛的研究。Webb (1984, 1998) 將魚的運動模式分為三類：(1)魚尾穩定擺動,(2)魚尾加速擺動(快速啟動),(3)側鰭擺動。其中針對魚尾的穩定擺動的研究最為普遍，Lighthill(1960)和 Wu (1961)以彈性的二維平板在流體中擺動來模擬魚尾在水中擺動產生推力的情形。兩人各自提出不同的行進波來模擬魚尾擺動的機制，其中 Lighthill 在 1960 年所提出的行進波模型是在魚身狹長的假設下模擬魚類穩定游動，而行進波的擺動幅度在全長的十分之一左右。之後 Lighthill(1971)提出適合擺動幅度較大的魚穩定游動之擺動模型。而 Wu(1961)針對魚類穩定游動所提出的行進波模型則沒有擺動幅度上的限制。

快速啟動是魚重要的運動模式，藉由這項機制魚可以快速脫逃或捕捉獵物。這種運動模式是魚類演化的一個特色，最原始的水中脊椎生物並不具有這樣的能力。有關快速啟動的生物力學研究著重在以身體及尾鰭(body and caudal fin, BCF)擺動產生推力的魚類，探討牠們的生理構造以及擺動的形態(Weihs, 1973; Webb, 1977, 1978; Harper & Blake, 1990; Frith & Blake, 1991, 1995; Westneat & Hale, 1998; Brainerd & Patek, 1998)。Westneat 和 Hale(1998)在魚身前中後三個部位貼上感測器，藉由量測魚在快速啟動時身上的肌肉電位，從生物力學的角度去了解魚快速啟動的機制。Brainerd 和 Patek 則是研究魚的脊椎骨所能產生的曲率和快速啟動機制的相關性。就擺動型態而言，可以將快速啟動的類型分為 C 形啟動與 S 形啟動，兩種類型的差異在於啟動時，魚身軸向肌肉彎曲成 C 形或 S 形。不論是 C 形或 S 形，啟動的過程都可以分成三步驟(1)軸向肌肉彎曲 (2)轉向拍打產生推力 (3)魚身恢復平緩。在 1980 年左右的研究都認定不論是何種身體及尾鰭擺動的魚，平均加速度都落在  $40\text{-}50\text{ms}^{-2}$  之間，然而隨著高速攝影的影像處理技術更加純熟之後，Harper & Blake (1989a, b)發現早期的研究有明顯的誤差，這誤差來自於高速攝影的取景率以及圖像放大都偏離最佳值，重新量測 C 形啟動的最大加速度可達到  $250\text{ ms}^{-2}$ 。而

且 C 形啟動的不同種魚類產生的加速度也有很大的不同。

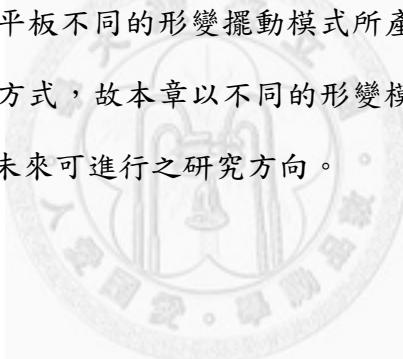
近期有關魚類快速啟動的流體力學研究大多著重在高速攝影量測、流場的分析以及仿生機械魚的製作。Drucker 和 Lauder (1999)以兩台高速攝影觀察魚穩定游動時側鰭和尾部產生的流場，並試圖以流場圖來解釋魚在游動時產生的渦流及推力關係。Epps 和 Techet(2007)則是利用高速攝影觀察魚快速啟動時後方渦流的位置與強度，並設法估算出魚的動量變化。Lauder 和 Madden(2007)則是使用多台高速攝影機，設法捕捉魚在游動時的三維流場，設法從流場的變化估算出魚的推力。Conte 和 Sadeghi 等人(2010)是以針對特定魚類作出相仿的機械魚，使機械魚也能作出快速啟動，並藉由量測機械魚來推測真實魚快速啟動的情形。

有關魚游動時產生的推力計算大多是針對魚在穩定游動的情形，且在計算上也作了諸多假設以便簡化問題。Wu(1960)以給定形變平板的方式模擬魚的穩定游動，在計算推力時只考慮非常靠近平板的流體因平板形變被擠壓產生的動量變化，且假設流體為理想流體，由流體動量變化反推出魚游動時的推力。Lighthill(1971)是以無厚度平板擺動來模擬魚的游動，並提出魚尾以大擺幅穩定游動的數學模型，在推力計算推力時是採用與 Wu(1960)相同的假設。一直到近十年電腦效能提升，才有以三維模型來計算魚在水中游動所產生的流場與推力的研究。Ramamurti(1996)針對金槍魚建構了一個三維模型，在建構模型上沒有做任何的幾何簡化，並計算出在三維不可壓縮黏性流中金槍魚非穩態運動在三個軸向上所產生的推力對時間關係。上述的研究都著重在研究魚類快速啟動時所產生的流場，或是設法估算魚類擺動所產生的推力，但是有關魚類在快速啟動時為何要以形變方式擺動，形變擺動有何益處，以及魚究竟是如何利用流場來達到快速啟動的效果則未加以解釋。

有鑑於上述的情形，本文試圖探討魚如何以形變擺動來達到快速啟動，藉由模擬魚啟動時的流場以及所產生的推力來分析魚如何巧妙利用流場來達到快速的移動。由於魚快速啟動產生的推力幾乎都來自魚尾的擺動，故本文以二維無厚度

平板擺動來模擬魚類快速啟動。由於啟動的過程非常短暫，因此可忽略黏滯性的效應而改以位勢能流場來探討此問題。在上述的假設之下，可將問題簡化為求解二維勢流場中平板擺動造成的推力。由於在無黏性流體中無論平板如何擺動都無法產生推力，必須在平板末端引介剝離渦流才能模擬真實流場中的情形。整個勢流場及渦流可以板格法(panel method)來求得其數值解，而作用在平板上的推力則可藉由非穩態 Bernoulli 方程式來計算。

本文的第二章介紹統御方程式及所使用的數值方法，第三章比較平板以剛體模式與形變模式擺動產生的推力差異。由於形變模式擺動難以定義擺幅，無法直接與剛體模式進行比較，因此本章中提出了三種形變模式與剛體模式比較的基準。此章的重點在了解魚尾為何以形變模式擺動而非剛體模式，並分析形變模式擺動有何優點。第四章則探討平板不同的形變擺動模式所產生的推力及位移比較。因不同的魚類有不同的啟動方式，故本章以不同的形變模式探討不同啟動方式之間的差異。第五章為結論及未來可進行之研究方向。



## 第二章 統御方程式及數值計算

### 2.1 流場統御方程式

理想流場若起始是非旋性(irrotational)的，根據 Kelvin 定理，在接下來的流動過程中都會保持非旋性，也就是在流場內任何位置的渦度(vorticity)都必須為零。

$$\nabla \times \vec{u} = 0 \quad (2.1)$$

由於對任何純量函數 $\phi$ 作旋度運算(curl)都必定會等於零，即

$$\nabla \times \nabla \phi = 0 \quad (2.2)$$

因此非旋性流場流體的速度可由一純量函數的梯度(gradient)表示

$$\vec{u} = \nabla \phi \quad (2.3)$$

函數 $\phi$ 稱為速度勢(velocity potential)，此流場稱為勢流(potential flow)。對不可壓縮流場而言，流體速度必須滿足連續方程式：

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.4)$$

將(2.3)帶入連續方程式，可以得到位勢能流場的統御方程式

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.5)$$

(2.5)式稱之為 Laplace 方程式。Laplace 方程式是一個線性方程式，線性方程式具有疊加性，因此可以利用滿足 Laplace 方程式基本解的疊加來求得二維位勢能流場的通解。

### 2.2 邊界條件

在流場中有物體的情形下，由於流體不能穿越物體，只能沿著物體表面的切線方向流動，因此在位勢能流場中的物體表面必須滿足下述不可穿越性(no penetration)的條件

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \vec{V}_n \quad (2.6)$$

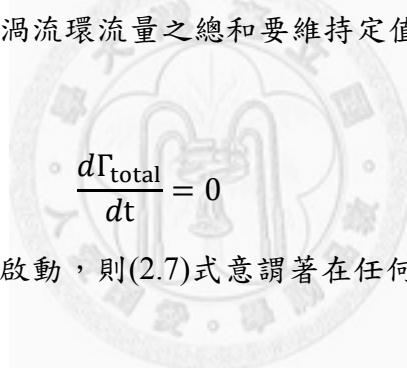
也就是位勢能流場在物體表面垂直方向上的速度大小( $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ )必須與運動固體在垂直於其表面方向上的速度分量( $\vec{V}_n$ )一致。

### 2.3 非穩態庫達條件(Unsteady Kutta Condition)

在真實的流場裡，因為受黏滯效應影響，流體在物體表面所形成之邊界層(boundary layer)會自物體尾端尖銳處脫離物體(boundary layer separation)而形成渦流。若物體在黏性流體中做非穩態運動，在其後方會產生一尾流區(wake)。上述狀況在位勢能流場的假設中則是在物體末端處引入一持續剝離的點渦流(shedding vortex)所形成之無厚度的渦流面(vortex sheet)來模擬黏性流中的尾流，而根據物體非穩態運動的形式，點渦流會沿著物體尾端上表面或下表面切線方向剝離(參考圖 2.1)。在本文中討論的形變平板沒有厚度，因此是沿著平板末端的切線方向引介剝離的點渦流來模擬黏性流中的邊界層分離現象。根據 Kelvin 定理，位勢能流場中整體的環流量(circulation)必須保持定值，因此任何時刻環繞平板的環流量加上隨著時間剝離出去所有渦流環流量之總和要維持定值，也就是環流量對時間的微分為零。

$$\frac{d\Gamma_{\text{total}}}{dt} = 0 \quad (2.7)$$

若物體是由靜止狀態開始啟動，則(2.7)式意謂著在任何時刻流場之總環流量 $\Gamma_{\text{total}}$ 為零。



上述兩條件：

<1> 涡流沿著平板尾端切線方向剝離，

<2> 環流量隨時間的變化率為零，

一般稱之為非穩態流場之 Kutta 條件。

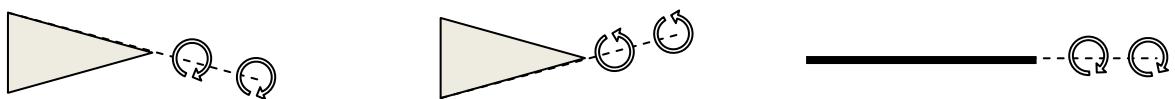


圖 2.1 涡流自物體尾端尖端處脫離的情形。

## 2.4 數值方法

一般在求解任意形狀物體運動時所產生之位勢能流場是將物體表面切割成很多的小板格(panel)，在每一個小板格上放上點源流(source/sink)或點渦流(vortex)，並調整其強度，使得這些點源流或點渦流在原先物體表面上所引生之流體速度滿足(2.6)式之不可穿越條件，則物體在流場中移動的情形就可以完全以點源流或點渦流之效應來取代，參見圖 2.2，此方法稱為板格法(panel method)。由於點源流與點渦流皆為滿足 Laplace 方程式之基本解，因此將沿著物體表面小板格上所分佈的源流與渦流疊加即可得到整個位勢能流場的解。

由於本文探討之物體無厚度平板，因此將任意形狀平板分割成  $m$  個小板格，並在小板格上放置線性分佈的渦流，稱為固定渦流(bound vortex)來模擬平板運動所產生的效應。在數值計算時，將平板擺動一周期的時間  $T$  切割成  $N+1$  個步驟來計算，每一步都會從平板後方切線方向剝離出一個渦流，稱之為自由渦流(shedding vortex  $\Gamma_L$ )，此渦流則會根據流場在該處的速度流動，如圖 2.3 所示，圖中  $(x_i, y_i)$  是第  $i$  個控制點的座標， $(X_j, Y_j)$  是第  $j$  個小板格左端點的座標， $\gamma_j$  是第  $j$  個小板格左端點的自由渦流強度。 $V_{p_i}$  是第  $i$  個板格控制點的形變速度。而在任何時刻下，平板上的流體都要符合不可穿越的邊界條件。

平板之不可穿越性可藉由控制點(control point)上流場垂直平板的速度與平板形變速度一致來達成。流場在控制點上的速度貢獻來自於模擬平板運動的固定渦流、該時刻剝離的自由渦流以及在該時刻前剝離出去的所有自由渦流。在本文中平板於任何時刻之形狀為給定，因此平板形變的速度由控制點的座標與下一時刻同一控制點的座標差值得求得。將控制點設在每一個小板格的中點，一共有  $m$  個控制點，也就是有  $m$  個不可穿越邊界條件。

在第  $i$  個控制點上的勢流可以表示為：

$$\phi(x_i, y_i) = - \sum_{j=1}^m \int_j \frac{\gamma(s_j)}{2\pi} \tan^{-1} \left( \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right) ds_j - \sum_{k=1}^L \frac{\Gamma_k}{2\pi} \tan^{-1} \left( \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k} \right) \quad (2.8)$$

(2.8)式的第一項是固定渦流在第  $i$  個控制點上所引生的速度勢，第二項是所有剝離渦流對第  $i$  個控制點所產生的速度勢。方程式中的  $\gamma(s_j)$  是小板格上線性分佈的渦流強度，可以表示成

$$\gamma(s_j) = \gamma_j - (\gamma_{j+1} - \gamma_j) \frac{s_j}{S_j} \quad (2.9)$$

其中  $\gamma_j, \gamma_{j+1}$  分別表示第  $j$  個小板格兩端點的渦流。採用線性分佈的渦流是為了要使固定渦流在小板格間的轉折處強度會連續，如此可以增加流場計算的準確性。

根據平板不可穿越性的邊界條件，在控制點垂直方向上，流場產生的速度必須等於平板形變的速度，因此可以導出  $m$  個邊界條件如下。

$$\frac{\partial}{\partial n_i} \phi(x_i, y_i) = \vec{V}_{p_i} \cdot \vec{n}_i ; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.10)$$

其中  $\vec{V}_{p_i}$  是平板在第  $i$  個小板格處的形狀速度向量， $\vec{n}_i$  則是第  $i$  個小板格的垂直單位向量。

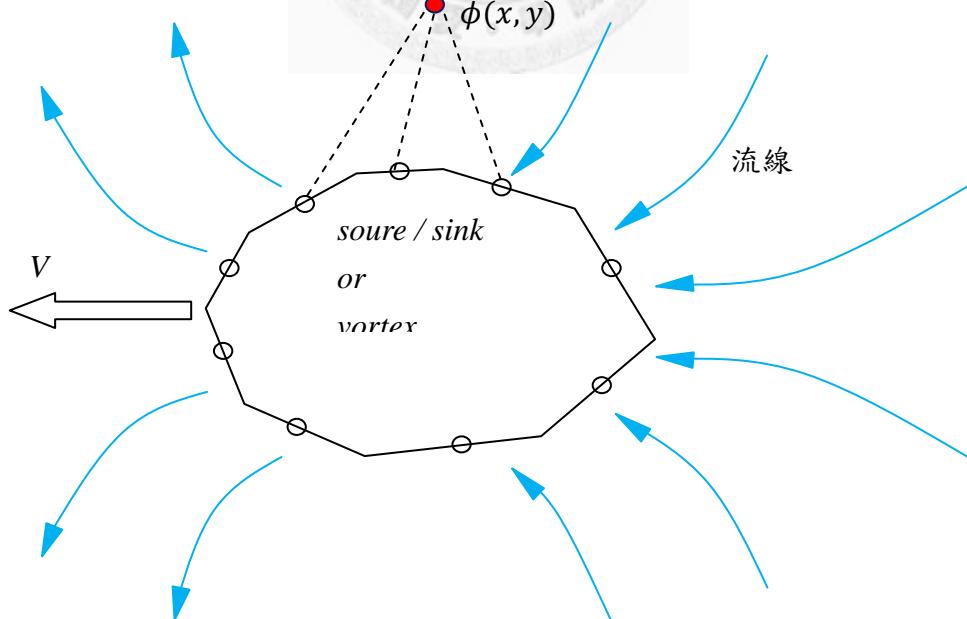


圖 2.2 板格法示意圖。

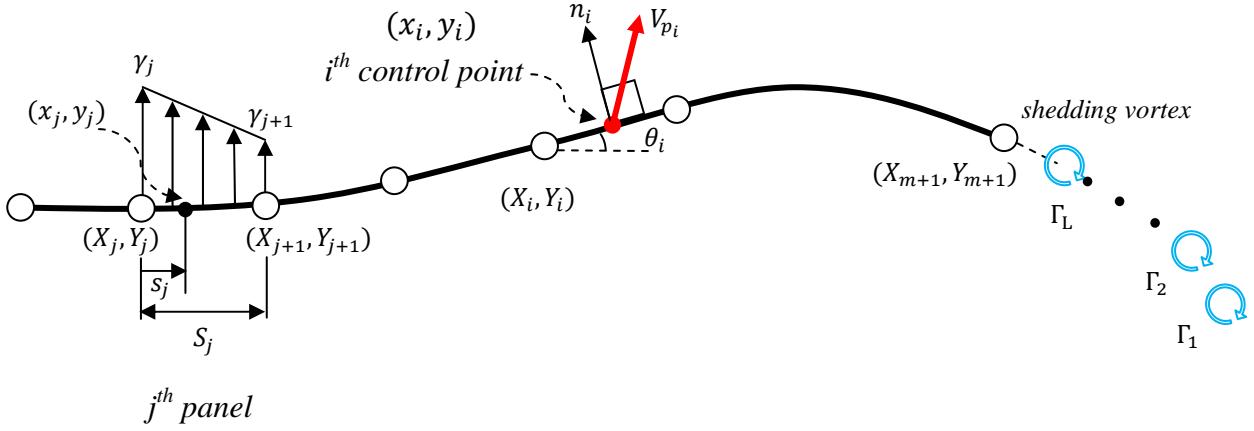


圖 2.3 形變平板示意圖。

將(2.8)式在 $\vec{n}_i$ 方向作微分並代入(2.10)式，經整理後可寫成

$$\sum_{j=1}^m (M_{ij} \gamma'_j + N_{ij} \gamma'_{j+1}) = \vec{V}_{p_i} \cdot \vec{n}_i - \sum_{k=1}^L \vec{V}_{\Gamma_k} \cdot \vec{n}_i; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.11)$$

上式中  $\gamma'_j = \frac{\gamma_j}{2\pi}$ ,  $\vec{V}_{\Gamma_k}$  是第  $k$  個剝離渦流在控制點上產生的速度向量。

參考 Kuethe & Chow (1999)可以得到上述方程式各項係數如下

$$M_{ij} = 0.5DF + CG - N_{ij}$$

$$N_{ij} = D + 0.5 \frac{QF}{S_j} - (AC + DE) \frac{G}{S_j}$$

$$A = -(x_i - X_j) \cos \theta_j - (y_i - Y_j) \sin \theta_j$$

$$B = (x_i - X_j)^2 + (y_i - Y_j)^2$$

$$C = \sin(\theta_i - \theta_j)$$

$$D = \cos(\theta_i - \theta_j)$$

$$E = (x_i - X_j) \sin \theta_j - (y_i - Y_j) \cos \theta_j$$

$$\begin{aligned}
F &= -\ln \left( 1 + \frac{S_j^2 + 2AS_j}{B} \right) \\
G &= \tan^{-1} \left( \frac{ES_j}{B + AS_j} \right) \\
P &= (x_i - X_j) \sin(\theta_i - 2\theta_j) + (y_i - Y_j) \cos(\theta_i - 2\theta_j) \\
Q &= (x_i - X_j) \cos(\theta_i - 2\theta_j) - (y_i - Y_j) \sin(\theta_i - 2\theta_j)
\end{aligned} \quad (2.12)$$

當  $i=j$  時

$$\begin{aligned}
M_{ii} &= -1 \\
N_{ii} &= 1
\end{aligned} \quad (2.13)$$

將(2.12)和(2.13)式帶入(2.11)式整理可以得到

$$\sum_{j=1}^{m+1} (A_{ij} \gamma'_j) = \vec{V}_{p_i} \cdot \vec{n}_i - \sum_{k=1}^L \vec{V}_{\Gamma_k} \cdot \vec{n}_i , \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned}
A_{i1} &= M_{i1} \\
A_{ij} &= M_{ij} + N_{ij-1} ; \quad j = 2, 3, \dots, m \\
A_{im+1} &= N_{im}
\end{aligned} \quad (2.15)$$

在(2.14)式中  $m$  個邊界條件所組成的聯立方程式卻有  $m+2$  個未知數，分別為  $m+1$  個固定渦流  $\gamma_j$  以及該時刻產生的剝離渦流  $\Gamma_L$ ，因此必須再選擇兩個邊界條件。根據非穩態庫達條件可知，任何時刻流場的總環流量都必須守恆，因此可以得出(2.16)式

$$\sum_{j=1}^m \int \gamma(s_j, t) ds_j + \sum_{k=1}^L \Gamma_k = 0 \quad (2.16)$$

以及在真實流場中，平板最末端  $m+1$  的點上壓力必須連續

$$\Delta p_{m+1} = 0 \quad (2.17)$$

(2.17)式在下一節中會有詳細的推導。將(2.14)、(2.16)和(2.17)式聯立，即可解出  $m+2$  個未知數。

## 2.5 形變平板推力計算

由於位勢能流場沒有黏滯性，因此平板所受之力來自平板兩側流體的壓差，壓力的計算在流場處於穩態時可藉由白努力方程式得出

$$p(r, t) = p_\infty - \rho_f \left[ \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right] \quad (2.18)$$

其中  $p_\infty$  是無窮遠處流場的參考壓力， $\rho_f$  為流體的密度。由於本文所討論的平板會隨時間不斷變形擺動，因此穩態的白努力方程式不適用，必須以非穩態白努力方程式來計算每個小板格上的壓力。平板上第  $i$  個小板格的壓力可以表示為：

$$p_i(t) = p_\infty - \rho_f \left[ \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi_i)^2 \right] \quad (2.19)$$

在非穩態白努力方程式中的  $\frac{\partial \phi_i}{\partial t}$  這一項可以從  $\phi_i$  對時間的全微分來得到，推導如下

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_i}{dt} &= \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \vec{V}_{p_i} \cdot \nabla \phi_i \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial t} &= \frac{d\phi_i}{dt} - \vec{V}_{p_i} \cdot \nabla \phi_i \end{aligned} \quad (2.20)$$

將此項代入原方程式中，可以得到

$$p_i(t) = p_\infty - \rho_f \left[ \frac{d\phi_i}{dt} - \vec{V}_{p_i} \cdot \nabla \phi_i + \frac{1}{2} (\nabla \phi_i)^2 \right] \quad (2.21)$$

由於環繞平板的環流量不為零，小板格上方的速度勢  $(\phi_i)_u$  和下方的速度勢  $(\phi_i)_l$  不同，因此板格兩側的速度勢對時間的全微分  $\left( \frac{d\phi_i}{dt} \right)$  以及兩側的速度向量  $(\nabla \phi_i)$  會不同，在第  $i$  個小板格的壓力就必須分成上表面壓力  $p_{i_u}$  和下表面壓力  $p_{i_l}$  分別計算

$$\begin{aligned} p_{i_u}(t) &= p_\infty - \rho_f \left[ \left( \frac{d\phi_i}{dt} \right)_u - \vec{V}_{p_i} \cdot (\nabla \phi_i)_u + \frac{1}{2} (\nabla \phi)_u^2 \right] \\ &= p_\infty - \rho_f \left[ \left( \frac{d\phi_i}{dt} \right)_u - \vec{V}_{p_i} \cdot (\vec{u}_{i_u} + \vec{v}_{i_u}) + \frac{1}{2} (|\vec{u}_{i_u}|^2 + |\vec{v}_{i_u}|^2) \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} p_{i_l}(t) &= p_\infty - \rho_f \left[ \left( \frac{d\phi_i}{dt} \right)_l - \vec{V}_{p_i} \cdot (\nabla \phi_i)_l + \frac{1}{2} (\nabla \phi_i)_l^2 \right] \\ &= p_\infty - \rho_f \left[ \left( \frac{d\phi_i}{dt} \right)_l - \vec{V}_{p_i} \cdot (\vec{u}_{i_l} + \vec{v}_{i_l}) + \frac{1}{2} (|\vec{u}_{i_l}|^2 + |\vec{v}_{i_l}|^2) \right] \end{aligned} \quad (2.23)$$

其中  $(\vec{u}_{i_u}, \vec{v}_{i_u})$  以及  $(\vec{u}_{i_l}, \vec{v}_{i_l})$  分別代表流場在第  $i$  個小板格上表面及下表面平行及垂

直小板格方向的速度分量。由於必須符合平板的不可穿越性，因此平板上下方流場在垂直平板方向的速度大小必需一致。因此第  $i$  個小板格的上下方的壓差為

$$\begin{aligned}\Delta p_i(t) &= p_{i_l}(t) - p_{i_u}(t) \\ &= -\rho_f \left[ \left( \frac{d\phi_i}{dt} \right)_l - \left( \frac{d\phi_i}{dt} \right)_u - \vec{V}_{p_i} \cdot (\vec{u}_{i_l} - \vec{u}_{i_u}) + \frac{1}{2} (|\vec{u}_{i_l}|^2 - |\vec{u}_{i_u}|^2) \right] \quad (2.24)\end{aligned}$$

根據 Stokes 定理，在位勢能流場中環繞任何未圈住渦流的封閉曲線之環流量為零。若定義順時針方向之環流量為正，則從第  $i$  個小板格下方順時針沿著途徑  $R$  繞到小板格上方，再沿著平板上下表面以逆時針方向  $R_b$  繞回到小板格下方，此一封閉曲線的環流量為零，如圖 2.4 所示。

$$\Gamma = \oint_{R+R_b} d\phi = 0 \quad (2.25)$$

上式可以改寫為

$$\oint_R d\phi = - \oint_{R_b} d\phi = \oint_{R_b(CW)} d\phi \quad (2.26)$$

而沿著平板上下表面積分之環流量值為該時刻積分曲線  $R_b$  內平板上固定渦流旋度之總和即

$$\oint_{R_b(CW)} d\phi = \int_0^{x_i} \gamma(s, t) ds \quad (2.27)$$

則平板上  $x_i$  處上下方的位勢能差可以表示成

$$\begin{aligned}(\phi_i)_u - (\phi_i)_l &= \oint_{CW} d\phi \\ &= \int_0^{x_i} \gamma(x, t) dx \quad (2.28)\end{aligned}$$

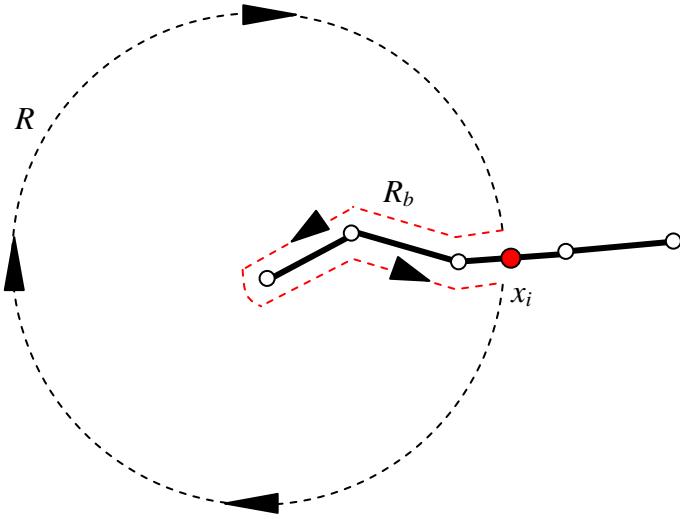


圖 2.4 環流量積分路徑示意圖。

因此壓力差的公式(2.24)中前兩項可以改寫為

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\phi_i}{dt}\right)_l - \left(\frac{d\phi_i}{dt}\right)_u &= \frac{d[(\phi_i)_l - (\phi_i)_u]}{dt} \\ &= -\frac{\int_0^{x_i} d\gamma(s, t)}{dt} ds \end{aligned} \quad (2.29)$$

將上式代入壓力差公式可得整理後可以得到(2.30)式。

$$\Delta p_i(t) = -\rho_f \left[ -\frac{\int_0^{x_i} d\gamma(s, t)}{dt} ds - \vec{V}_{p_i} \cdot (\vec{u}_{i_l} - \vec{u}_{i_u}) + \frac{1}{2} (|\vec{u}_{i_l}|^2 - |\vec{u}_{i_u}|^2) \right] \quad (2.30)$$

平板的壓差會造成  $x$ 、 $y$  兩個方向的力，在本文中只探討在形變平板在  $x$  方向產生的推力，在接下來的討論中所提及的推力皆為水平推力。因此計算壓力差在水平方向的分量可以求得每個小板格所受的水平推力  $f_{x_i}$ ，將每一個小板格的水平推力加總即可計算出平板於時刻  $y$  在水平方向所受的總推力  $F_x(t)$ 。

$$\begin{aligned} f_{x_i}(t) &= \Delta p_i(t) \cdot dx \cdot \sin\theta_i \\ F_x(t) &= \sum_{i=1}^m f_{x_i}(t) \end{aligned} \quad (2.31)$$

計算平板最末端的壓力差時，(2.30)式中的第一項可以視為在時刻  $t - \Delta t$  與  $t$  環繞整個平板上的固定渦流的差值。由於流場的總環流量必須守恆，這個差值即等於在  $t$  時刻剝離出去的渦流強度  $\Gamma_L$ 。因此在 2.4 節中所敘述的最後一個邊界條件

(2.17)，平板最末端上下壓力差 $\Delta p_{m+1}$ 可以表示為

$$\begin{aligned}
 \Delta p_{m+1} &= -\rho_f \left[ \frac{\Gamma_L}{\Delta t} - \vec{V}_{p_{m+1}} \cdot \left( \left( -\frac{\vec{\gamma}_{m+1}}{2} + \vec{u}' \right) - \left( \frac{\vec{\gamma}_{m+1}}{2} + \vec{u}' \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \left| -\frac{\vec{\gamma}_{m+1}}{2} + \vec{u}' \right|^2 - \left| \frac{\vec{\gamma}_{m+1}}{2} + \vec{u}' \right|^2 \right) \right] \\
 &= -\rho_f \left[ \frac{\Gamma_L}{\Delta t} - \vec{V}_{p_{m+1}} \cdot (-\vec{\gamma}_{m+1}) + (-\vec{\gamma}_{m+1} \cdot \vec{u}') \right] \\
 &= -\rho_f \left[ \frac{\Gamma_L}{\Delta t} + (-\vec{V}_{p_{m+1}} + \vec{u}') \cdot (-\vec{\gamma}_{m+1}) \right]
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

$\vec{u}'$ 是第 1 到  $m-1$  個小板格的固定渦流以及所有剝離渦流在平板最末端所產生平行第  $m$  個小板格的速度大小， $\pm \frac{\vec{\gamma}_{m+1}}{2}$  是  $t$  時刻第  $m$  個小板格在平板最末端上方及下方所產生平行第  $m$  個小板格的速度大小。 $\Gamma_L$  是該時刻平板末端分離出去的渦流強度。由於平板末端處上下方壓力必須連續，因此 $\Delta p_{m+1} = 0$ ，亦即邊界條件(2.17)可改寫為

$$\frac{\Gamma_L}{\Delta t} + (-\vec{V}_{p_{m+1}} + \vec{u}') \cdot (-\vec{\gamma}_{m+1}) = 0 \tag{2.33}$$

## 2.6 平板形變數學模型建構

魚在穩定游動的情形下，Lighthill(1960)提出以行進波模擬魚擺動的概念。Pedley(2004)則以數學模型(2.34)式來描述魚的擺動。

$$h = h_1 R \left\{ \left[ A * \exp \left( \frac{\alpha(s-l)}{l} \right) - iB \left( \frac{l}{s} \right)^\beta \right] \exp \left( i * k \left( \frac{s-Vt}{l} \right) \right) \right\} \tag{2.34}$$

上式是在 $(s,h)$ 座標下描述魚的擺動， $s$  是沿著魚中心軸計算的距離， $h$  是  $y$  座標，如圖 2.5 所示。 $h_1$  是振幅函數， $l$  是魚的總長， $A$ 、 $B$ 、 $k$ 、 $\alpha$  和  $\beta$  是魚類的參數，不同的魚有不同的參數。 $V$  是行進波的波速。此數學模型是描述魚的穩態游動，因此魚尾的振幅不大， $h/l$  必須在 0.15 以內，無法用來描述快速啟動時魚尾大幅度的擺動行為。

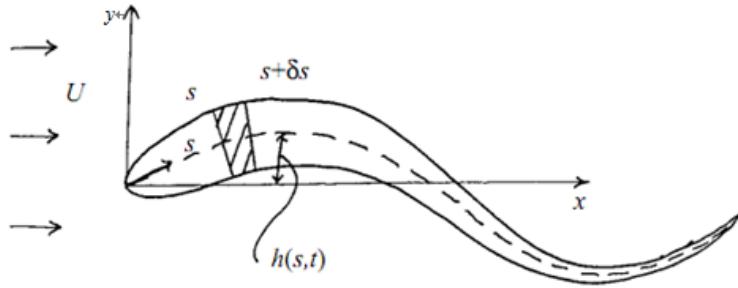


圖 2.5 Pedley (2004)的數學模型示意圖。

Liu(2004)提出另一個相似的數學模型，此模式是以四個重要參數  $\{c_1, c_2, k, \omega\}$  來決定魚的擺動模型。

$$y(x, t) = (c_1 x + c_2 x^2) \sin(kx + \omega t) \quad (2.35)$$

上式是以魚首為原點， $x$  軸是中軸， $y(x, t)$ 是在  $t$  時刻魚身各處離中軸的距離。變數  $k$  決定魚尾擺動產生的正弦波數， $\omega$  決定擺動速度。 $c_1, c_2$  是振幅函數的係數。此數學模型也是在模擬穩態游動，但是並不限制魚尾振幅大小。

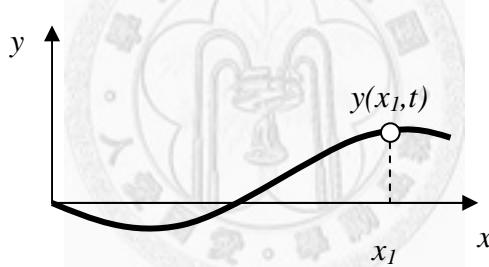


圖 2.6 以行進波模擬魚的擺動。

本文所討論的情形是以波浪狀形變平板來模擬魚尾快速啟動，擺盪過程中平板全長與末端振幅的比值都在 0.3 以上，因此(2.34)式不適用於此狀況。且平板擺動的模式是啟動時會呈現大振幅的擺動，一周期後平板又會回復到平緩狀態，亦即平板擺動振幅的大小不僅跟各點位置有關，也隨著時間變化，與(2.35)式所描述的不盡相同。因此本文參考(2.35)式提出一修正後平板形變的模型為

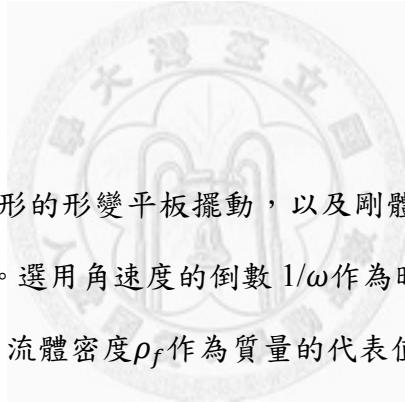
$$\begin{aligned} y(x, t) &= G(x) \cdot T(t) \cdot \sin(kx + \omega t) \\ G(x) &= (c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4) \\ T(t) &= (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5) \end{aligned} \quad (2.36)$$

其中  $G(x)$  為位置-振幅函數， $T(t)$  為時間-振幅函數，兩者與行進波疊合之後可以模

擬出魚快速啟動的魚尾擺動情形。時間-振幅函數的目的是使平板都從接近水平狀態開始啟動，當完成一周期時平板又會回到接近水平狀態。本文中，依擺動模式不同， $G(x)$ 的選用也不同，但  $T(t)$ 採用相同的函數，因為不論是何種快速啟動的平板都是從平緩開始大振幅擺盪，最後再回復平緩，因此假設各種形變平板的差異來自於  $G(x)$ 與  $\sin(kx + \omega t)$ ，而  $T(t)$ 都選用如下的相同式子(2.37)，此時間振幅函數是本文假定的情形。

$$T(t) = (0.0383656 + 15.2091t - 71.905t^2 + 144.575t^3 - 128.672t^4 + 40.7729t^5) \quad (2.37)$$

調整[位置-振幅函數]的係數和[行進正弦波]的變數  $k$  就可以產生不同的擺動模式。



## 2.7 無因次化

為了方便比較不同類形的形變平板擺動，以及剛體平板和形變平板擺動的差異，可將方程式無因次化。選用角速度的倒數  $1/\omega$  作為時間的代表尺度，平板的總長  $L$  作為長度的參考值，流體密度  $\rho_f$  作為質量的代表值，各個物理量的無因次形式如下。

$$\begin{aligned} t^* &= \omega t & x^* &= \frac{x}{L} & V^* &= \frac{V}{\omega L} & \gamma^* &= \frac{\gamma}{\omega L} \\ \Gamma^* &= \frac{\Gamma}{\omega L^2} & \Delta p^* &= \frac{\Delta p}{\rho_f \omega^2 L^2} & k^* &= kL & F_x^* &= \frac{F}{\rho_f \omega^2 L^3} \end{aligned}$$

經無因次化之後，平板形變的方程式為

$$\begin{aligned} y(x^*, t^*) &= G(x^*) \cdot T(t^*) \cdot \sin(k^* x^* + t^*) \\ G(x^*) &= (c_1 x^* + c_2 x^{*2} + c_3 x^{*3} + c_4 x^{*4}) \\ T(t^*) &= (a_1 t^* + a_2 t^{*2} + a_3 t^{*3} + a_4 t^{*4} + a_5 t^{*5}) \end{aligned} \quad (2.38)$$

將  $\gamma$ 、 $\vec{V}_{p_i}$ 、 $\vec{u}_{i_l}$  和  $\vec{u}_{i_u}$  分別無因次化後可得平板邊界條件的無因次式為

$$\sum_{j=1}^{m+1} (A_{ij} \gamma_j'^*) = (\vec{V}_{p_i}^*) \cdot \vec{n}_i - \sum_{k=1}^L \vec{V}_{\Gamma_k}^* \cdot \vec{n}_i , \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.39)$$

$$\sum_{j=1}^m \int \gamma^*(s_j^*, t^*) ds_j^* + \sum_{k=1}^L \Gamma_k^* = 0 \quad (2.40)$$

$$\frac{\Gamma_L^*}{\Delta t^*} + (-(\vec{V}_{p_{m+1}}^*) + \vec{u}'^*) \cdot (-\vec{\gamma}_{m+1}^*) = 0 \quad (2.41)$$

第  $i$  個小板格上的無因次壓力差為

$$\Delta p_i^*(t^*) = - \left[ -\frac{\int_0^{x_i} d\gamma^* t^*(s^*, t^*) ds^*}{dt^*} - \vec{V}_{p_i}^* \cdot (\vec{u}_{i_l}^* - \vec{u}_{i_u}^*) + \frac{1}{2} (|\vec{u}_{i_l}^*|^2 - |\vec{u}_{i_u}^*|^2) \right] \quad (2.42)$$

而平板(單位寬度)所受水平方向之無因次推力則為



$$f_{x_i}^* = \Delta p_i^* \cdot dx^* \cdot \sin \theta_i$$

$$F_x^* = \sum_{i=1}^m f_{x_i}^* \quad (2.43)$$

### 第三章 形變平板與剛體平板擺動所產生推力之比較與分析

觀察魚在游動時，魚尾大多以波浪狀之形變方式擺動。在過往的文獻中不斷提到泳動生物以波浪形變擺動能有效利用流場中的渦流來產生較大的推力。然而諸多的論述都沒有以非形變方式擺動作為對照組去比較兩者的推力，因此本章即著重於探討形變平板擺動與剛體平板擺動所產生的推力有何不同。

不論是剛體平板或形變平板，擺動的幅度越大、速度越快，能夠產生的推力自然也就越大，因此必須讓兩者在相同的基準條件下進行比較。然而形變平板在擺動時，各處的振幅與擺動角度皆隨位置變化，一般而言，前半段的振幅與擺角較小，而後半段的擺動則較大。因此形變平板的振幅與擺角難以定義，無法以振幅和擺角作為兩者比較的基準。

針對上述的困難，本文提出三種比較基準：在擺動一周時間 $T^*$ 相同的情況下，  
<i>兩者的平均線動量(linear momentum)絕對值相等；<ii>平均角動量(angular momentum)絕對值相等；<iii>平均力矩(torque)絕對值相等。

$$\text{平均線動量絕對值} = \left( \sum_t \sum_i |m_{b_i} \vec{V}_i| \right) / T \quad (3.1)$$

$$\text{平均角動量絕對值} = \left( \sum_t \sum_i |m_{b_i} \vec{r}_i \times \vec{V}_i| \right) / T \quad (3.2)$$

$$\text{平均力矩絕對值} = \left( \sum_t \sum_i |\vec{r}_i \times \vec{F}_i| \right) / T \quad (3.3)$$

平均線動量絕對值是將平板分成 $m$ 個小板格，每個小板格的質量為 $m_{b_i}$ ，將每個時刻每個小板格的動量絕對值相加，再除以一周期的時間，得到平均線動量絕對值，讓形變平板與剛體平板在一周期內兩者的值相等，再進行推力比較。平均角動量絕對值也是將平板分成 $m$ 個小板格，將每隔時刻每個小板格對原點(平板最左端的點)的角動量絕對值相加，再除以一周期的時間，得到平均角動量絕對值。

平均力矩絕對值與平均角動量絕對值計算方法相似，是將每個時間每個小板格對原點的力矩絕對值相加後求平均值。

由於形變平板的形變模式一旦確定後，上述三個基準值就已定，只能調整剛體平板的擺幅來達到兩者基準相等。以下將討論兩者在固定不移動以及加速前行兩種情形下推力之比較。

### 3.1 固定不移動情形下形變平板與剛體平板擺動所產生之推力比較

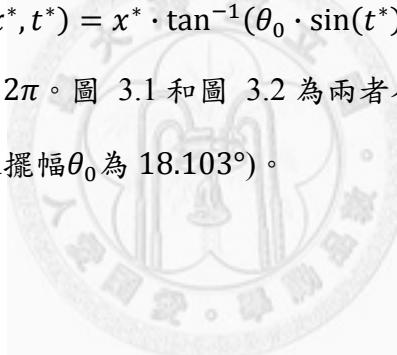
本章所選用的形變平板 [位置-時間] 及 [行進正弦波] 疊合函數為

$$y^*(x^*, t^*) = 0.4(0.5x^{*2} + x^{*4}) \cdot T(t^*) \cdot \sin(2.8x^* - t^*) \quad (3.4)$$

其中時間-振幅函數  $T(t^*)$  為無因次化後的(2.37)式，而剛體平板的擺動方程式為

$$y^*(x^*, t^*) = x^* \cdot \tan^{-1}(\theta_0 \cdot \sin(t^*)) \quad (3.5)$$

兩者擺動周期皆相同  $T^* = 2\pi$ 。圖 3.1 和圖 3.2 為兩者在擺動一周期內各時刻形狀位置圖(圖中的剛體平板之擺幅  $\theta_0$  為  $18.103^\circ$ )。



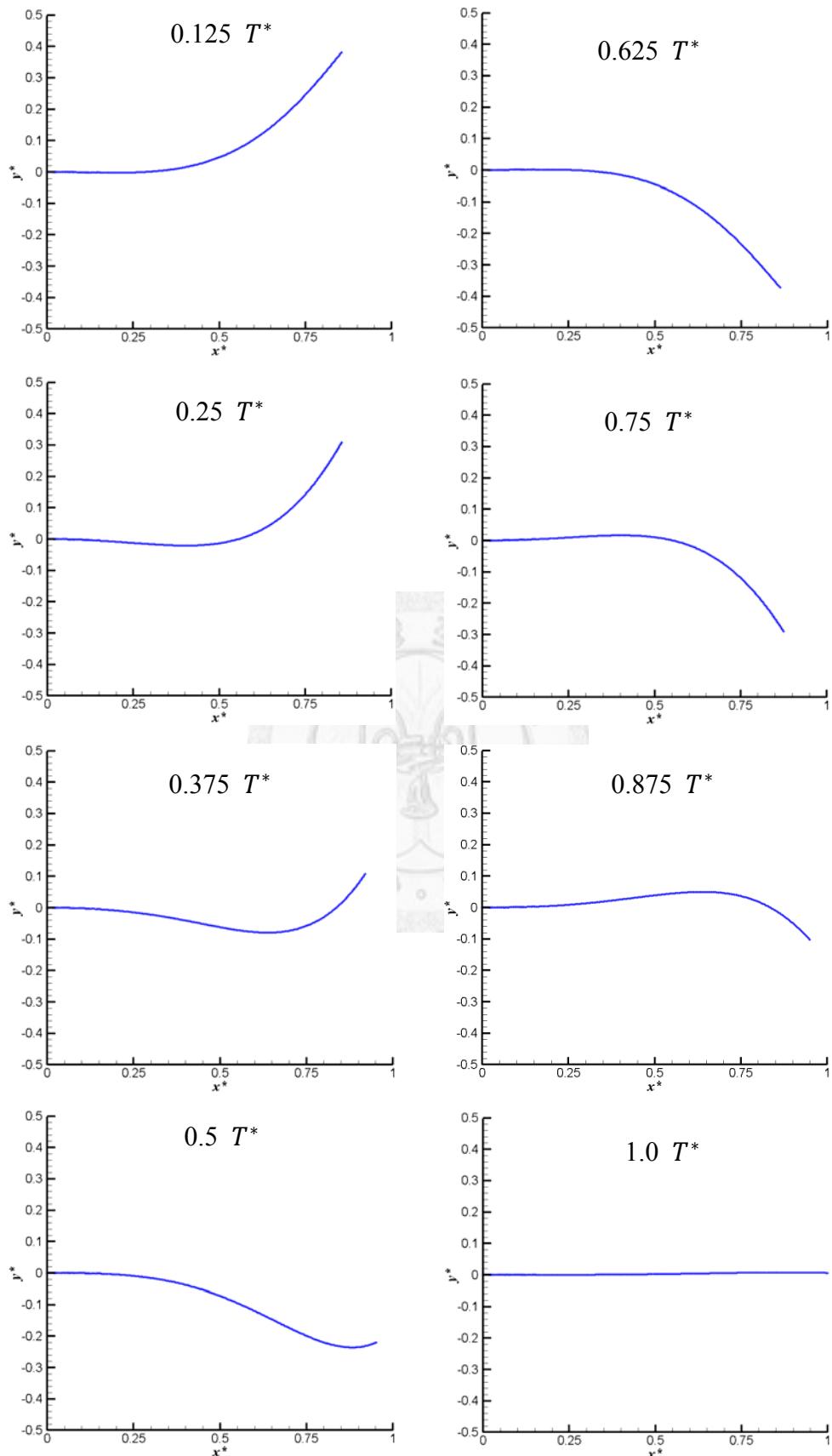


圖 3.1 形變平板擺動的周期變化圖。

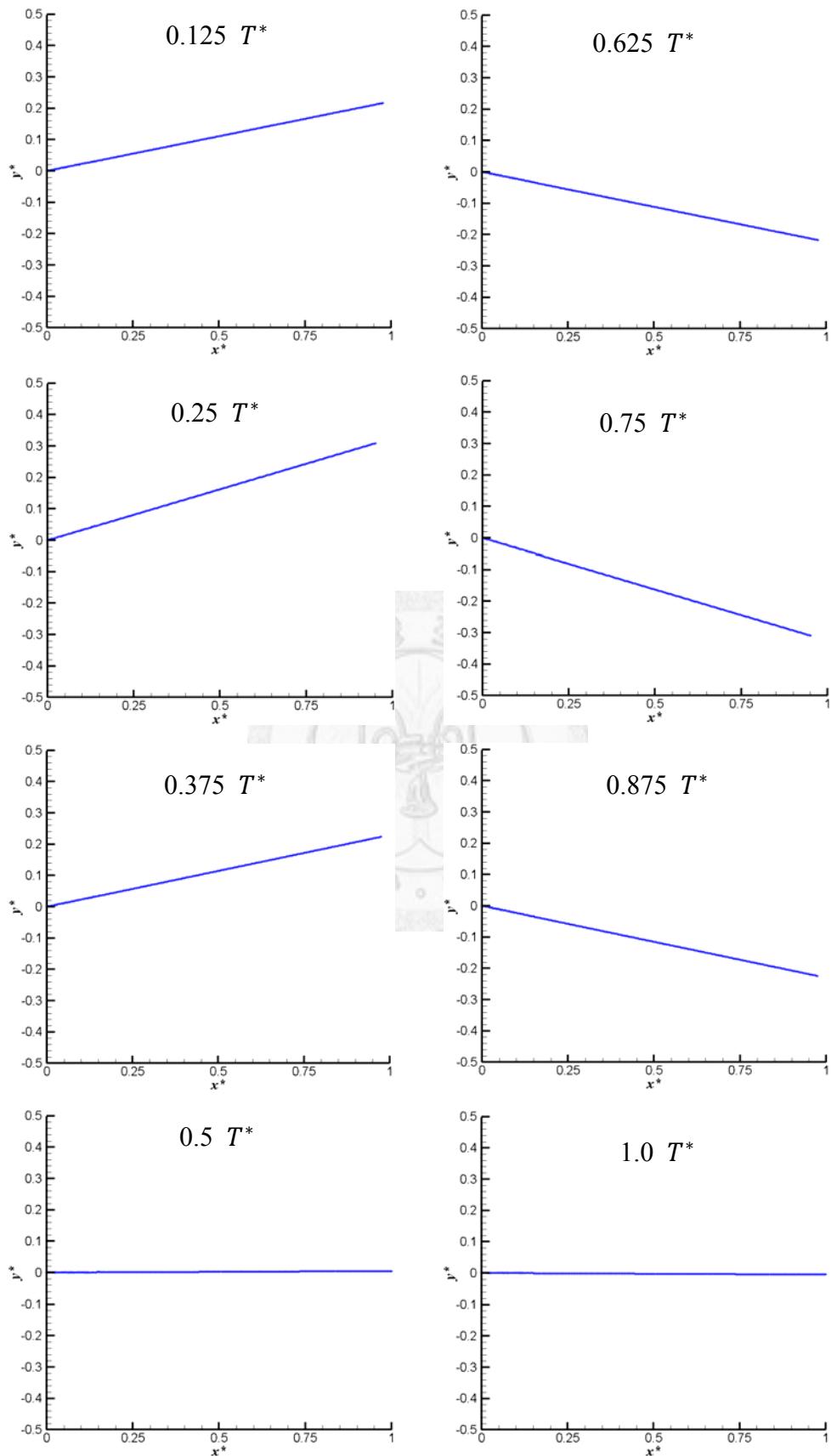


圖 3.2 剛體平板擺動的周期變化圖。

根據(3.1)至(3.3)式求得形變平板擺動一周期之平均線動量絕對值為 0.515，平均角動量絕對值為 0.381，平均力矩絕對值為 0.558，再運用第二章所描述之板格法計算出一周期內形變平板所產生之平均推力為 0.0488。為了與剛體平板作比較，調整剛體平板擺動的擺幅，找出三個基準值相等情形下所對應的擺幅分別為

<i> 當 $\theta_0$ 為 $14.71^\circ$ 時，平均線動量絕對值為 0.515，由白努力方程式所計算出的平均推力為 0.0163。

<ii> 當 $\theta_0$ 為 $16.33^\circ$ 時，平均角動量絕對值為 0.381，由白努力方程式所計算出的平均推力為 0.0204。

<iii> 當 $\theta_0$ 為 $18.10^\circ$ 時，平均力矩絕對值為 0.558，由白努力方程式所計算出的平均推力為 0.0258。

結果顯示在三種不同比較基準下，形變平板擺動所產生之推力皆大於剛體平板，其推力比值分別為<i>2.99、<ii>2.39 與<iii>1.89。三種基準下形變平板與剛體平板擺動一周期內的水平推力與時間關係如下圖所示

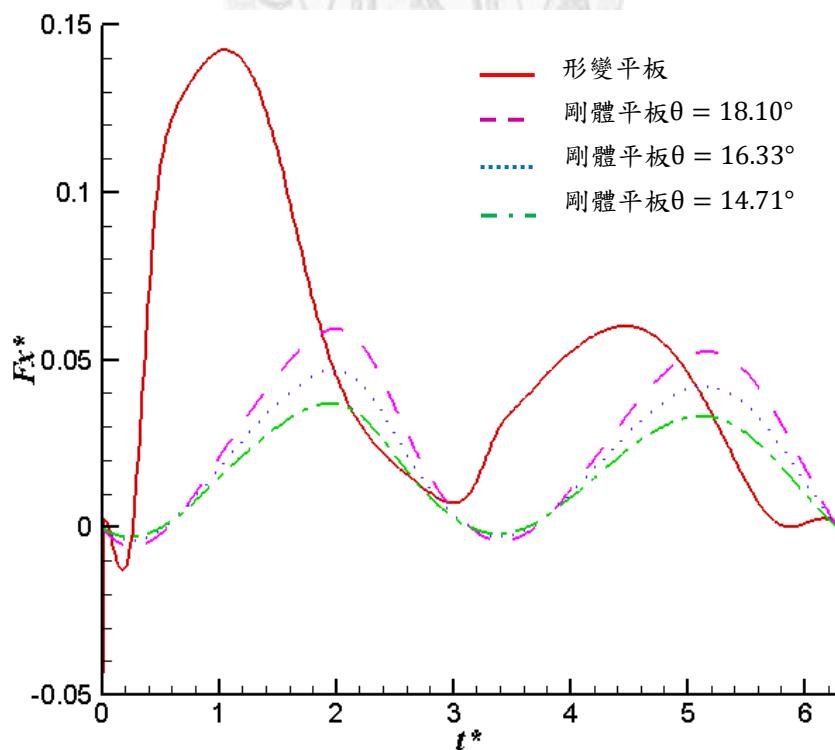


圖 3.3 固定不移動情形下，形變平板與剛體平板水平推力比較圖。

由圖中可知形變與剛體平板在擺動一周期內都會產生兩個推力的極大值。比較兩者的第一個推力極大值，形變平板明顯大於剛體平板，而第二個推力極大值則差距不大。觀察兩者產生推力極大值的時間點，形變平板都比剛體平板來得早。

不論是形變平板或剛體平板，在向上抬升的過程中都會因渦流剝離而在平板尾端後方形成一漩渦並跟隨平板運動。剛開始上抬的時候因為前後的壓差，平板會受到向後的阻力，然而隨著平板上擺速度漸減，快速旋轉渦流所帶動的流體因慣性會從後方推動平板，平板即獲得向前的推力。從靜止開始上抬的起始速度越快，平板後方所產生的渦流越強，越能夠帶動後方流體快速向平板移動，之後平板所獲得的推力也會越大。同時在流體向前推擠平板的期間，只要平板傾斜角度越接近垂直，平板所受水平象的推力也就越大(參見圖 3.4)。當平板上擺達到最高點時，若後方渦流越靠近平板，則平板下擺時就能在瞬間產生極大的反作用推力。

上述概念可以一個平板在流場中沿其垂直方向作加速運動來說明。平板從靜止的流場中快速向前移動隨即減速靜止，流場的變化大致如圖 3.5 所示，雖然起始的時候受到向後的阻力，但開始減速之後就會持續獲得向前推力。若是上述垂直平板靜止後又再度向相反方向運動，則逆向推擠流體的結果可以獲得更大的反向推力，如圖 3.6。因此平板若能有效利用其後方所產生之渦流流場，則能產生較大的水平推力。

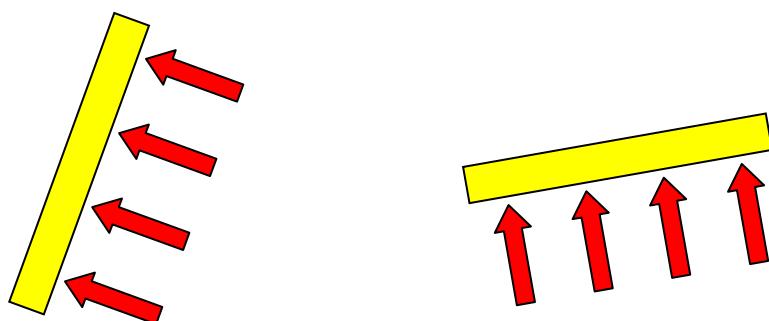


圖 3.4 平板傾斜角度不同造成水平推力不同的示意圖。

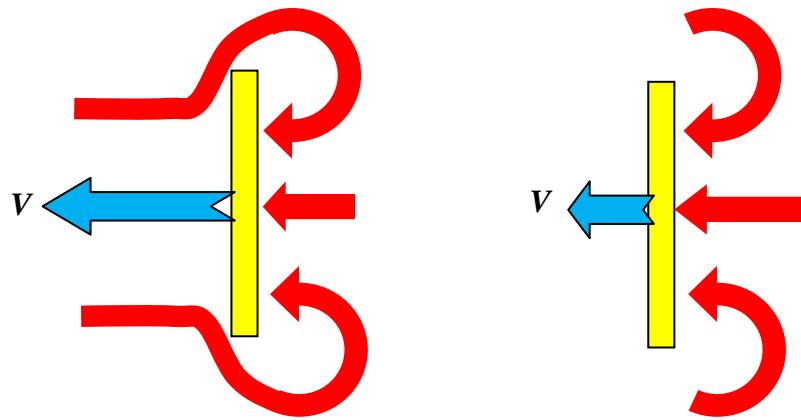


圖 3.5 平板沿垂直方向作加速-減速運動時流場示意圖。

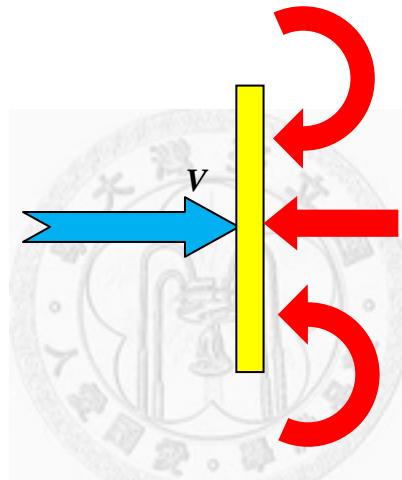


圖 3.6 平板作逆向加速時流場示意圖。

觀察形變及剛體平板上擺過程中產生的渦流位置圖(圖 3.7、圖 3.8)。可以明顯的看出形變平板以比較垂直的角度正對後方渦流。再觀察兩者擺動一周期的位置圖，形變平板在  $0.125T^*$  時末端就已經擺到最高點， $0.25T^*$  時已開始向下擺動；剛體平板直到  $0.25T^*$  時才抬升到最高點正要向下擺動。在兩者末端最大高度相近的情形下，形變平板的抬升速度較快，後方產生的渦流場也會較強。因此不論在哪一個基準之下，形變平板產生的平均水平推力都比剛體平板大。

仔細分析形變平板擺動的過程，從推力與時間關係圖可以看出整個過程中形變平板有兩個極大值，分別出現在無因次時間  $1.1(7/40T^*)$  和  $4.5(28/40T^*)$ 。在無因次時間  $1.1(7/40 T^*)$  時，形變平板及渦流位置如圖 3.9。此時平板末端毫無彎曲，

呈 45 度斜線正對後方快速向前移動的流體，緊接著平板又向下擺動拍打流體，因此產生一個相當大的水平推力。

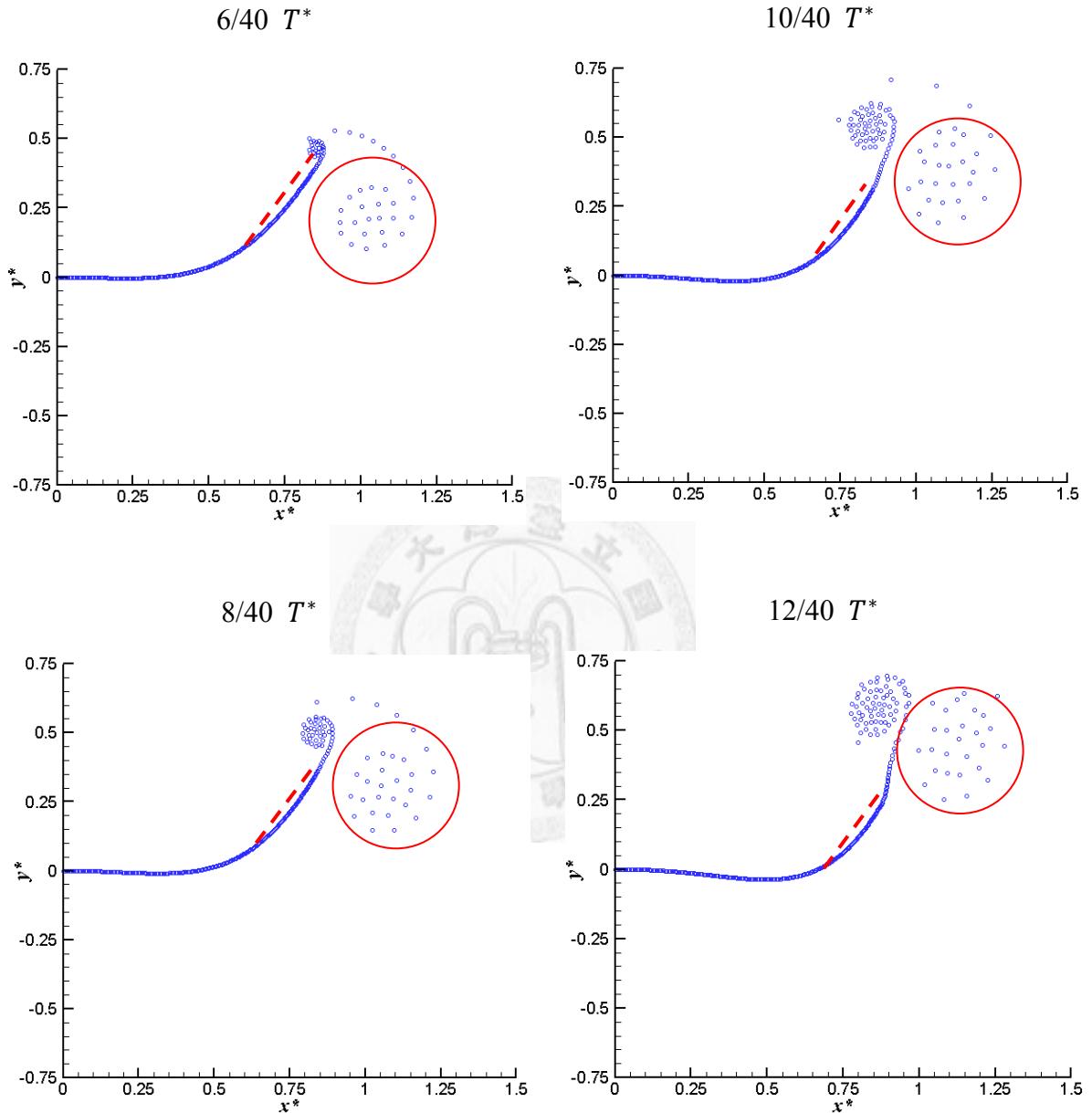


圖 3.7 形變平板擺盪至最高點附近之渦流與平板位置圖。

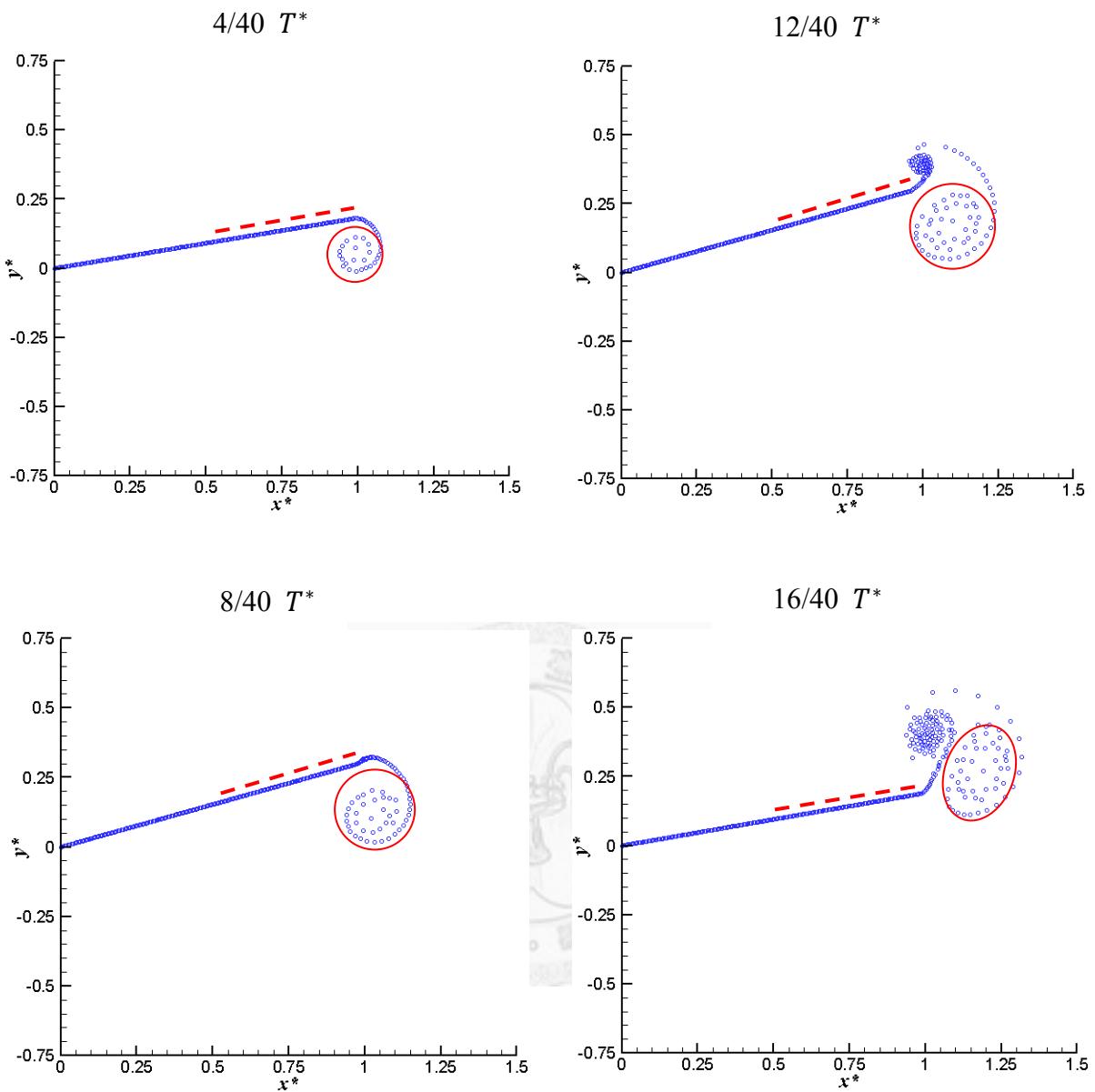


圖 3.8 剛體平板擺盪至最高點附近之渦流與平板位置圖。

7/40  $T^*$

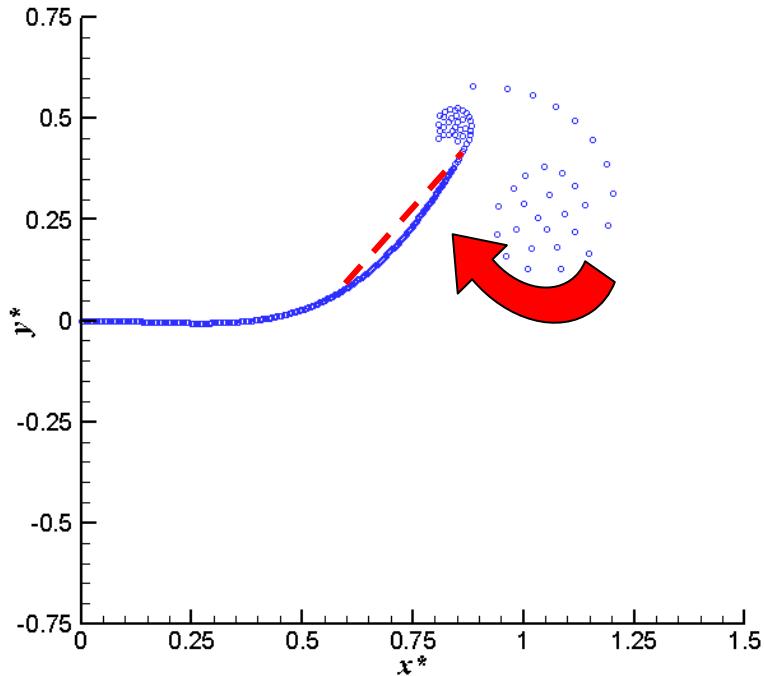
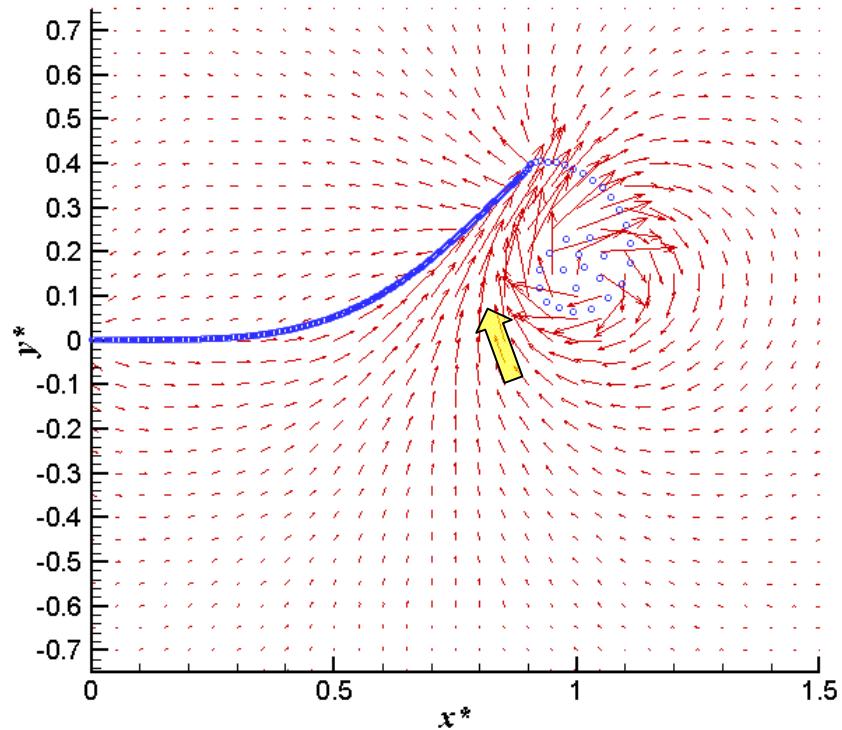


圖 3.9 在  $7/40 T^*$  時刻形變平板與渦流位置圖。

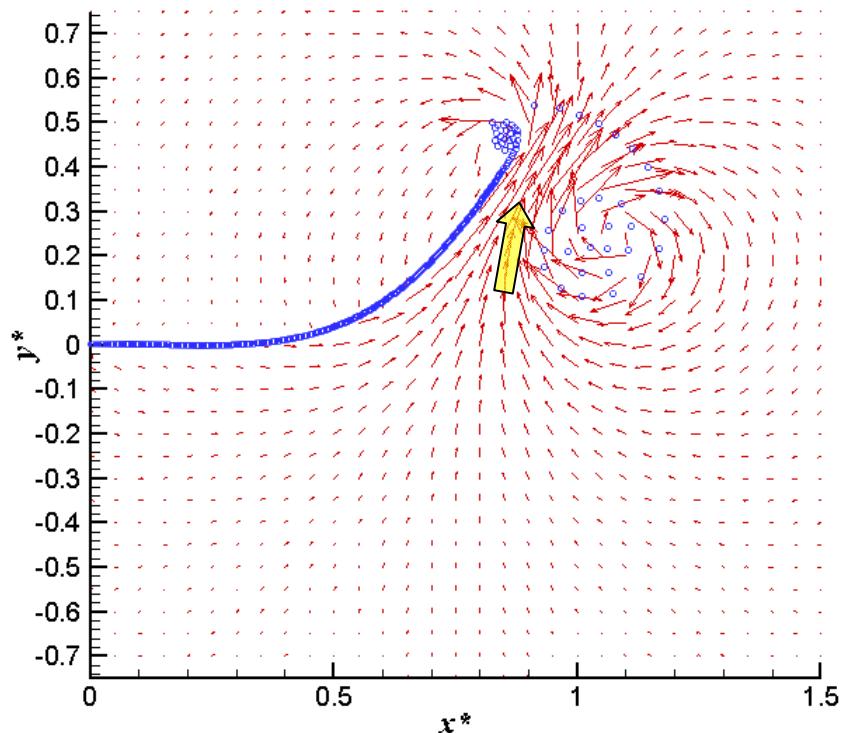
從速度向量圖 3.10 也可以看出在  $4/40T^*$  時，形變平板後方的渦流帶動平板末端的流體流向平板，流體會撞擊平板然後順著平板末端切線方向流動。在  $6/40T^*$  的速度向量圖可以看出，有一道向右上方噴射流產生。在  $8/40T^*$  時，噴射流最為明顯，表示原本垂直撞上平板的流體受到平板的擠壓，因而迅速轉向，順著平板切線方向流動。

上段所描述形變平板後方流場速度的變化可用圖 3.11 中的流體動量向量圖來表示。渦流所帶動的流體因受到周遭流體及平板的擠壓而改變其動量，此動量變化給予周圍流體及平板一個反作用力。流體動量變化越大，則平板所受之反作用力也越大。

4/40  $T^*$



6/40  $T^*$



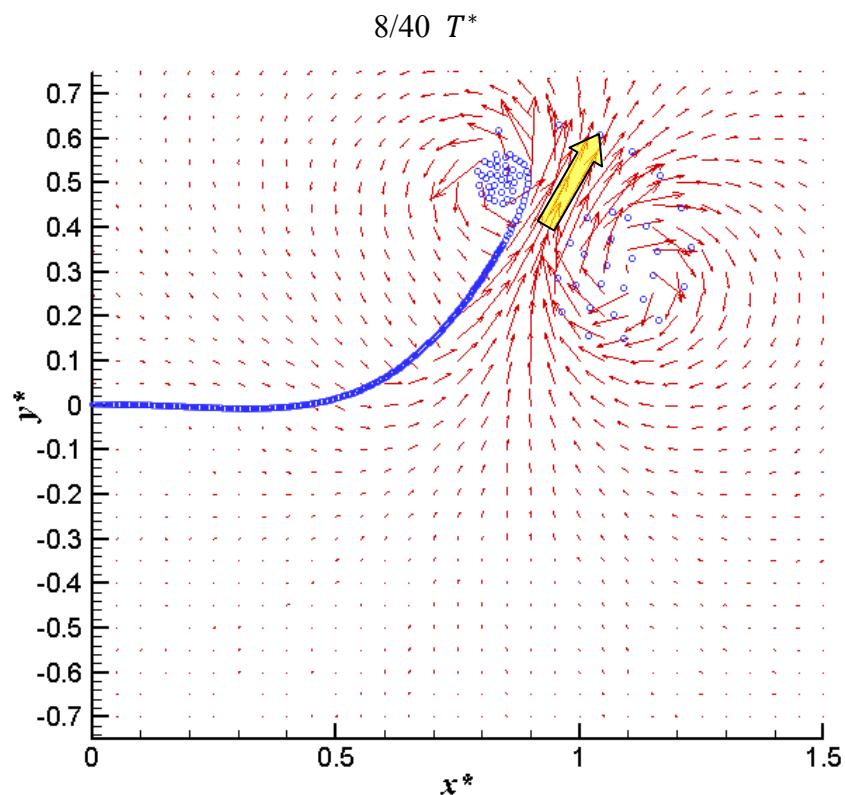


圖 3.10 在  $4/40T^*$ , $6/40T^*$ , $8/40T^*$  時刻形變平板與流場的速度向量圖。

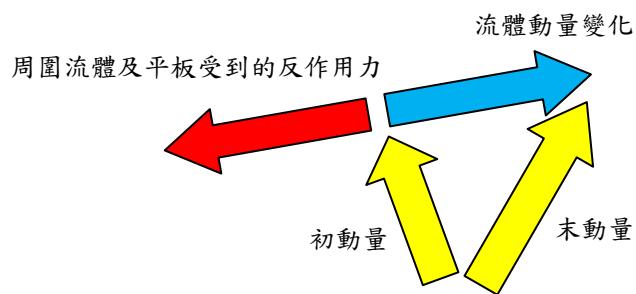


圖 3.11 形變平板後方流場動量變化示意圖。

圖 3.12 為形變平板向下擺盪至最低點並開始上行時平板與渦流的相關位置圖。此時平板後方剝離的渦流並未匯聚成一快速旋轉之漩渦，而是形成一近乎連續的渦面(vortex sheet)，且此渦面離平板尚有一段距離，因此流場給予平板的推力不如平板上擺時來得大。這也是圖 3.3 中推力第二個極值比第一個極值小的原因。

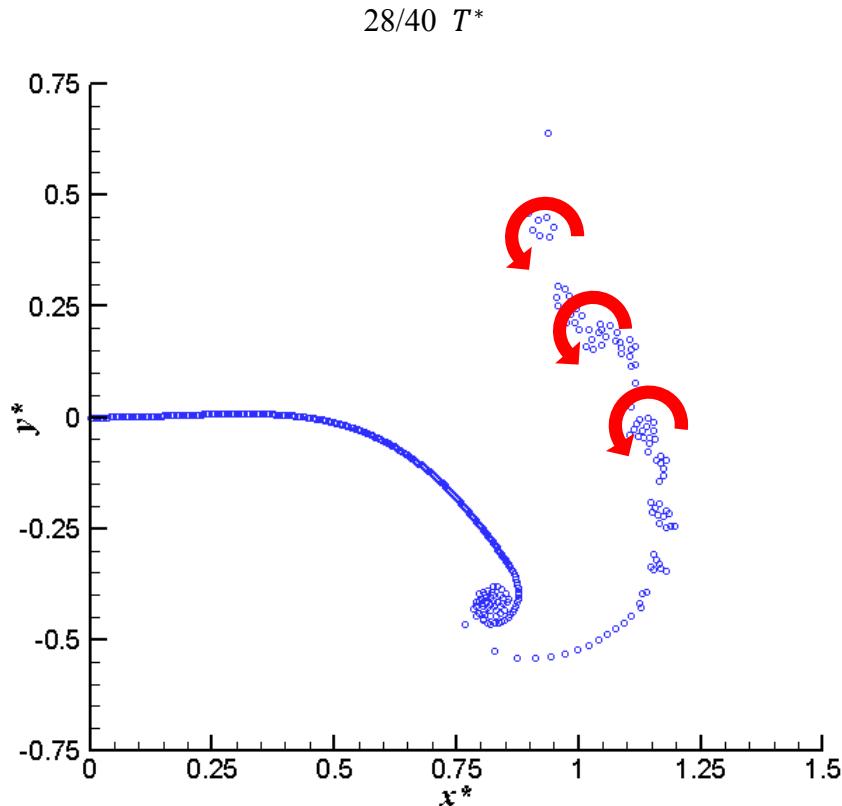
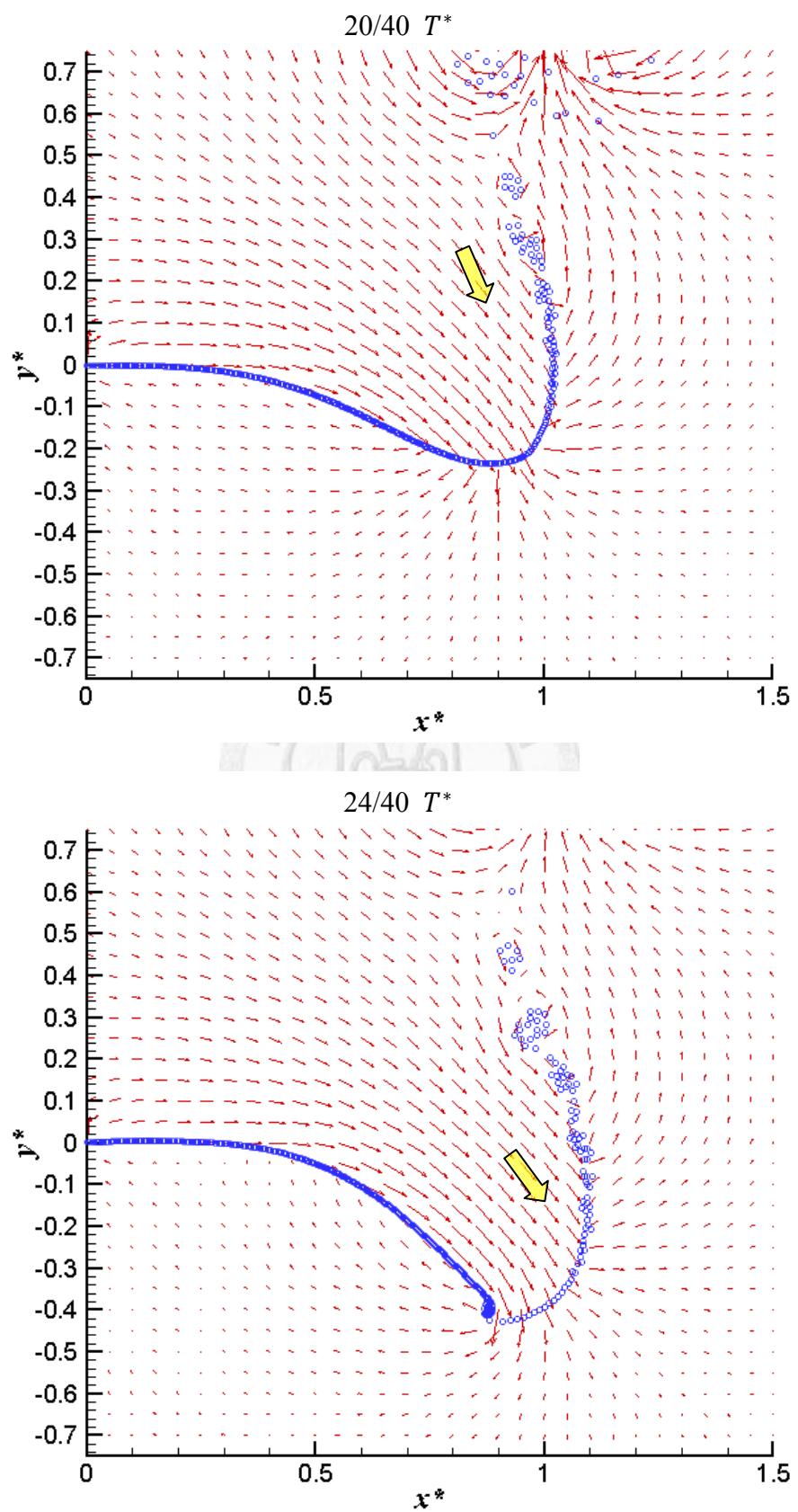


圖 3.12 在  $28/40T^*$  時刻的形變平板與渦流位置圖。

從圖 3.13 中時間  $20/40T^* \sim 28/40T^*$  的流場速度向量圖亦可看出，當平板擺盪到下方時，後方的渦面會帶動流體向下移動，撞擊平板之後順著切線方向流出產生一個噴流，此噴流比起平板上擺時( $8/40T^*$ )所形成的噴流來得小，因此作用於平板上的推力也較小。



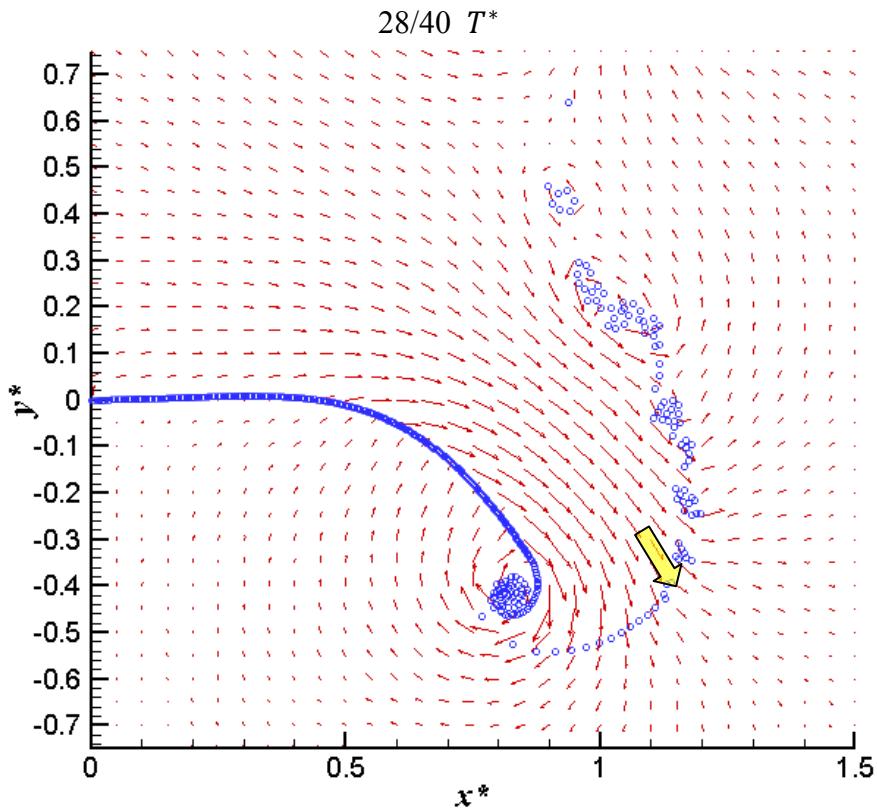


圖 3.13 在  $20/40T^*, 24/40T^*, 28/40T^*$  時刻的形變平板與流場速度向量圖。

### 3.2 可移動情形下平板的加速度、前行位移以及邊界條件

一般而言，平板擺動所產生之力會使得平板本身向前方及側方作加速運動。假設不考慮所受之側向力，則在每一時刻平板因水平方向推力所產生的前行加速度可利用牛頓第二運動定律計算求得。

$$a_x = \frac{F_x}{m_b} \quad (3.6)$$

$F_x$ 是平板在  $t$  時刻下單位寬度的水平推力， $m_b$ 是平板單位寬度的質量， $a_x$ 時刻平板在水平方向上加速度。由牛頓運動公式可得出在 $\Delta t$ 時間內，平板的位移量 $\Delta S_x$ 為

$$\Delta S_x(t) = V_x(t) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a_x(t) \cdot (\Delta t)^2 \quad (3.7)$$

平板在  $t + \Delta t$  時刻之總位移  $S_x(t + \Delta t)$  則為

$$S_x(t + \Delta t) = S_x(t) + \Delta S_x(t) \quad (3.8)$$

而平板在  $t + \Delta t$  時刻之速度可由下式求出

$$V_x(t + \Delta t) = 2 \frac{\Delta S_x(t)}{\Delta t} - V_x(t) \quad (3.9)$$

以  $\rho_b$  表示平板單面積的質量，因此平板單位寬度的質量可以表示為

$$m_b = \rho_b \cdot L \quad (3.10)$$

若選用流體單位體積質量  $\rho_f$  為代表值，則平板單位寬度的質量和加速度的無因次式可以表示為

$$\begin{aligned} m_b^* &= \frac{\rho_b}{\rho_f \cdot L} & a_x^* &= \frac{F_x^*}{m_b^*} \\ &= F_x^* \cdot \left( \frac{\rho_f \cdot L}{\rho_b} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

其中參數  $\left( \frac{\rho_f \cdot L}{\rho_b} \right)$  代表流體與平板的密度比。無因次的位移及速度仍為(3.7)與(3.9)的形式。

由於考慮了平板向前移動的速度，第二章中的邊界條件(2.39)和(2.41)式須要做如下的修正

$$\sum_{j=1}^{m+1} (A_{ij} \gamma_j'^*) = (\vec{V}_{p_i}^* + \vec{V}_x^*) \cdot \vec{n}_i - \sum_{k=1}^L \vec{V}_{\Gamma_k}^* \cdot \vec{n}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.12)$$

$$\frac{\Gamma_L^*}{\Delta t^*} + ((\vec{V}_{p_{m+1}}^* + \vec{V}_x^*) + \vec{u}'^*) \cdot (-\vec{\gamma}_{m+1}^*) = 0 \quad (3.13)$$

亦即在每一個小板格控制點上，除了原本平板的形變速度外，還要加上平板前行的水平速度，才能確實計算出在小板格垂直方向上的速度以滿足不可穿越邊界條件。在計算平板末端的壓差式(3.13)時亦須要考慮向前移動的速度造成的影响，而環流量守恆的條件(2.40)式則不需修正，仍為

$$\sum_{j=1}^m \int \gamma^*(s_j^*, t^*) ds_j^* + \sum_{k=1}^L \Gamma_k^* = 0 \quad (3.14)$$

本文假設密度比  $\left( \frac{\rho_f \cdot L}{\rho_b} \right)$  為 10，在這個參數值下計算無因次的水平加速度及位移。

### 3.3 行進中的形變平板與剛體平板擺動所產生之推力及位移比較

本節將比較在移動情形下形變平板與剛體平板的推力，剛體平板選用的擺角與 3.1 節中相同。在移動情形下，剛體平板與形變平板擺動一周期無因次推力與時間關係如所示圖 3.14。由於在向前移動的過程中，平板前後的壓差會形成阻力，使得平板產生的推力小於固定位置的情形。從圖中可以看出，擺幅 $18.10^\circ$ 的剛體平板與形變平板兩者的推力極大值差距變小。計算一周期擺動， $18.10^\circ$ 剛體平板的平均無因次推力為 0.011，形變平板為 0.0170，雖然形變平板的平均推力仍大於剛體平板約 55%，但此值小於固定不移動情形下之差距(比值為 1.89)。其原因在於形變平板擺動時後半段的角度較剛體平板擺動時來得大，因此行進時則受到較大的阻力。由此可知在平板行進的情形下，平板擺動角度越大並不代表所產生的平均推力越大，尚需考慮行進所造成的阻力也會增加的負面效應。

然而擺動一周期之後，兩者的行進總位移卻有明顯的差距。圖 3.15 為形變平板與剛體平板前行距離對時間的關係圖。從圖中可以觀察到，在無因次時間 0.6 之後，形變平板的前行量就明顯大於剛體平板。在擺動一周期後，擺幅 $18.10^\circ$ 之剛體平板前行的無因次距離為 1.33，是剛體平板在三種基準下的最大位移，而形變平板的前行距離為 2.20，形變平板的位移量是剛體平板的 1.65 倍。

兩者的平均水平推力相近，位移卻有很大的差距，由此可知水平推力的平均值對平板位移的影響不大，真正影響水平位移的應該是水平推力對時間的關係。從兩者的推力與時間關係圖(圖 3.14)可以看出，形變平板比剛體平板更快達到推力極大值，在很短的時間內就向前作加速運動。圖 3.16 為形變平板與剛體平板行進速度比較圖，由圖中可看出形變平板的水平速度在無因次時間 0.3 之後即快速上升且都大於剛體平板的水平速度，因此擺動一周期後前行的距離亦較遠。

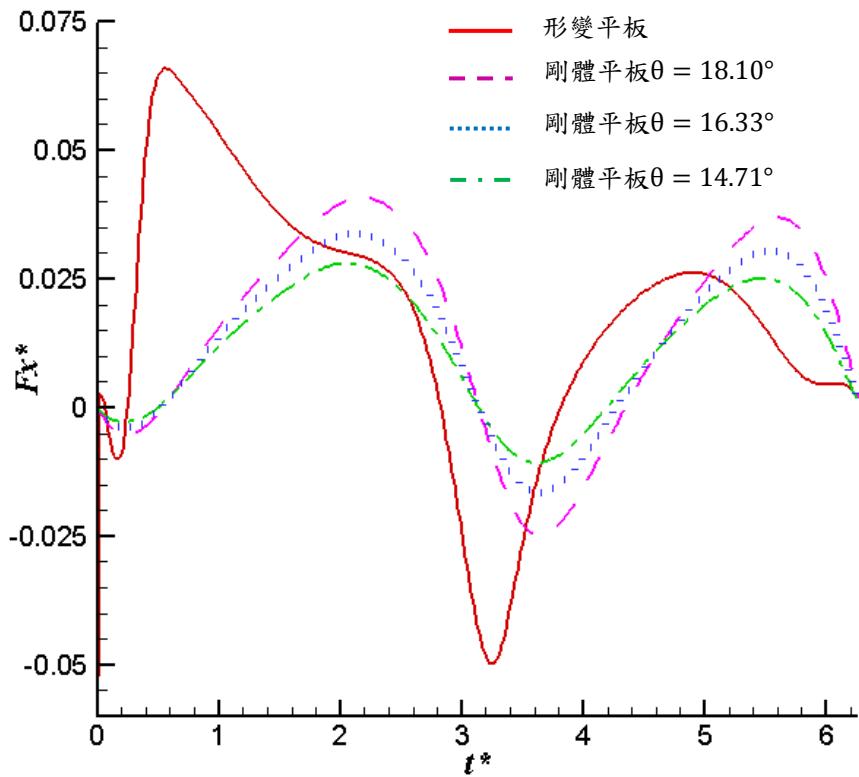


圖 3.14 移動情形下形變平板與剛體平板之推力比較圖。

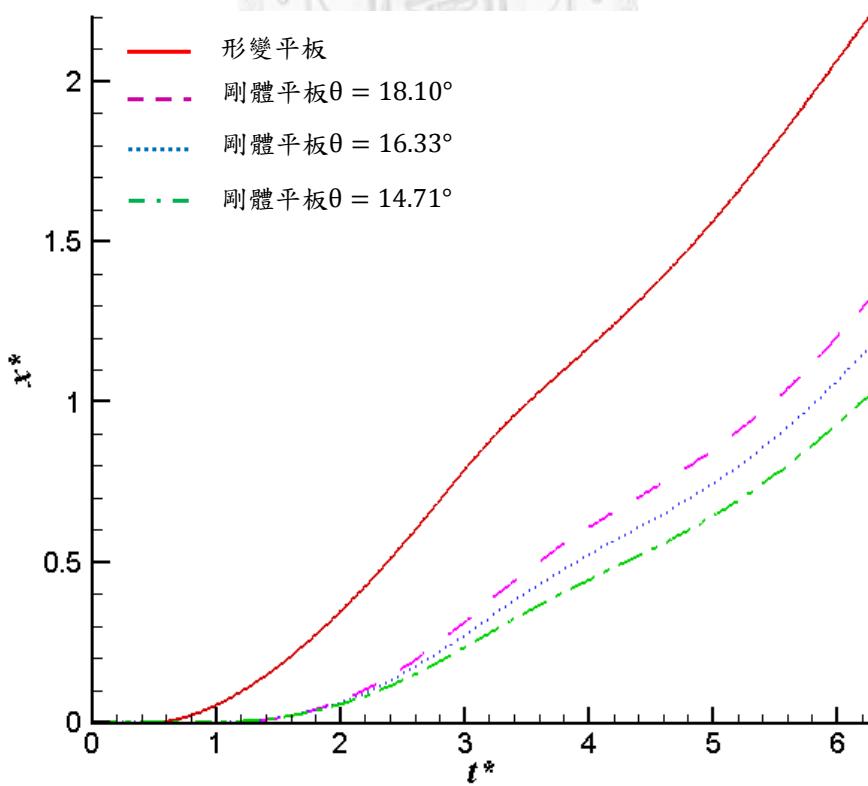


圖 3.15 形變平板與剛體平板前行距離對時間的關係圖。

從圖 3.14 中亦可觀察到在  $1/2T^*$  附近，形變平板與剛體平板都會受到大的阻力，使得向前的速度減緩，然後才再次加速向前移動。當平板向下擺動到最低點的時候，因為有向前的速度，因此平板前後壓差很大，造成明顯的阻力，使得平板減速，當平板再次向上擺動時，水平推力才再次提升。若能將形變平板的擺動模式加以修正，降低平板在下擺時所產生的阻力，則能有效增加平板的平均推力及前行距離。

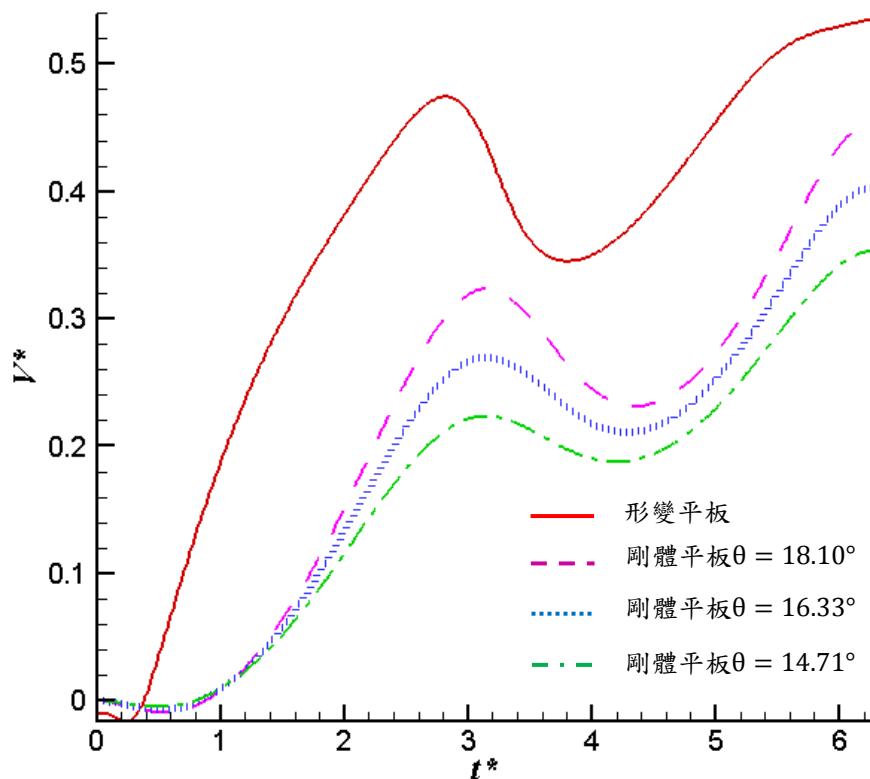


圖 3.16 移動情形下形變平板與剛體平板水平速度比較圖。

從上面的敘述中可以得知，在固定的時間內要達到最大的位移，推力必須迅速達到最大值，使得水平方向的速度在短時間內迅速增加，即使形變平板在向下擺動時會產生很大的阻力，水平速度會減速，位移仍比緩慢加速且產生較小阻力的剛體平板來得大。魚類作快速啟動時，其主要的目的是為了要在短時間內迅速行進一較長的距離，以形變平板模式擺動比剛體模式要來得更有利。針對移動情形的形變平板推力在 4.2 節中會有更詳細的敘述。

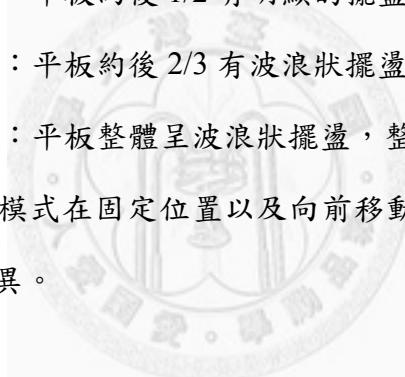
## 第四章 平板以不同形變擺動模式所產生推力之比較與分析

魚會因為種類的不同而有不同的魚尾構造，魚尾擺動的形式也會有所不同。在作快速啟動時會有不同的推力、加速度以及位移量。為了探討不同的魚尾擺動模式產生的水平推力及位移的大小，本章將比較不同形變模式之平板擺動時所產生的推力及前行位移。

在第三章所提出的平板形變模式的特點是後半段的平板有明顯大幅度的擺盪，前半段平板則沒有明顯的起伏。本章提出另外兩種形變模式來進行比較分析，一種是平板在中段有較明顯的波浪狀形變，另一類是整個平板都有明顯的波浪狀形變，且啟動時平板末端是先向下勾再上擺。三種形變模式依序為：

- (一) 第 I 類擺動模式 : 平板約後 1/2 有明顯的擺盪，前半段起伏不明顯。
- (二) 第 II 類擺動模式 : 平板約後 2/3 有波浪狀擺盪，中段有較明顯的起伏。
- (三) 第 III 類擺動模式 : 平板整體呈波浪狀擺盪，整體的擺幅不大。

本章將探討三種平板擺動模式在固定位置以及向前移動兩種情形下產生的推力及位移大小並分析彼此的差異。



### 4.1 固定不移動情形下平板以不同擺動模式所產生之流場與推力

首先考慮三種平板擺動模式在不移動的情形下所產生的流場與推力。其中第 I 類擺動模式產生的流場以及推力大小在前一章中已經有詳細的描述，因此不再贅述以下將直接探討第 II 類及第 III 類擺動模式。

#### 4.1.1 第 II 類型之擺動模式

第 II 類形變模式所選用的[位置-時間]及[行進正弦波]疊合的函數為

$$y^*(x^*, t^*) = 2(0.08x^* + 0.08x^{*2}) \cdot T(t^*) \cdot \sin(3x^* - t^*) \quad (4.1)$$

其中時間-振幅函數  $T(t^*)$  為無因次化後的(2.37)式，此種擺動模式在一周期內的形狀位置如圖 4.1 所示。

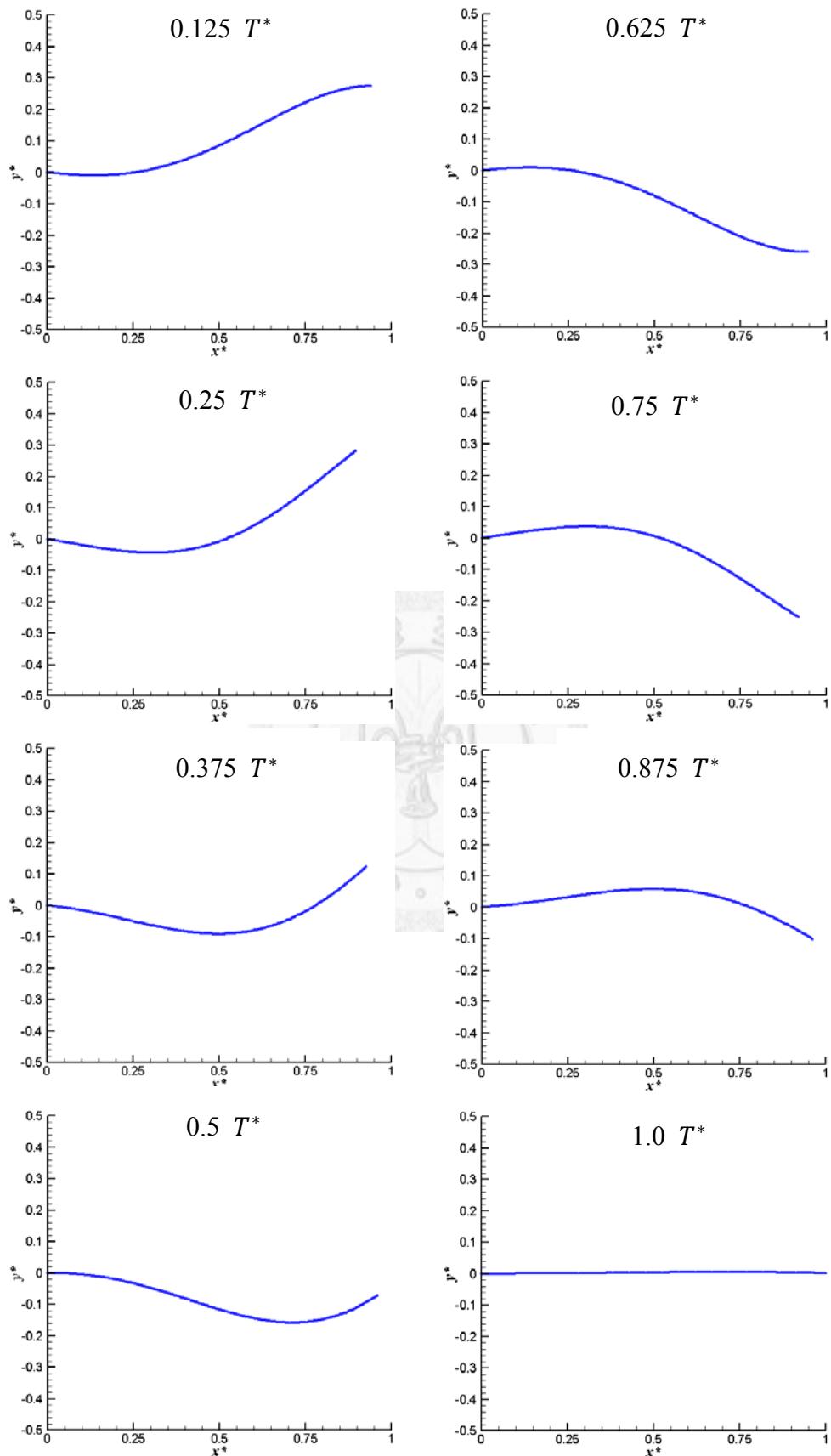


圖 4.1 第 II 類擺動模式平板的周期變化圖。

從圖 4.1 可以發現相較於第 I 類擺動模式，第 II 類擺動模式在平板的中段有較明顯的波浪狀起伏，此種差異主要是來自於位置-振福函數的不同，第 II 類的擺動模式的位置-振幅函數在平板中段有較大的值，因此平板中段的擺動會比第 I 類明顯。

擺動一周期內的推力對時間關係如圖 4.2 所示。平板在擺動一周期的過程中會產生兩個推力極大值，大約在無因次時間  $0.9(6/40 T^*)$  以及  $4.5(28/40 T^*)$ 。在  $6/40 T^*$  的時候，平板與渦流位置如圖 4.3，此時平板產生推力的原因與 3.1 節中所述的相同，是由後方剝離的渦流匯聚成快速旋轉的漩渦帶動流體推擠平板而產生推力。

從速度向量圖 4.4 亦可看出在  $2/40 T^*$  時，後方的剝離渦流帶動流體向平板流動，而在時間  $4/40T^*$  及  $6/40 T^*$  時後方流體受到平板擠壓，然後順著平板切線方向流出，形成一個明顯的噴流。如同 3.1 節中所述，觀察平板後方受渦流帶動的流體的動量變化可以大致判斷出周遭流體和平板所受的反作用力方向(圖 4.5)。當流體擠壓平板的效應越明顯，平板所受的反作用力也越大，在水平方向的分量也越大。

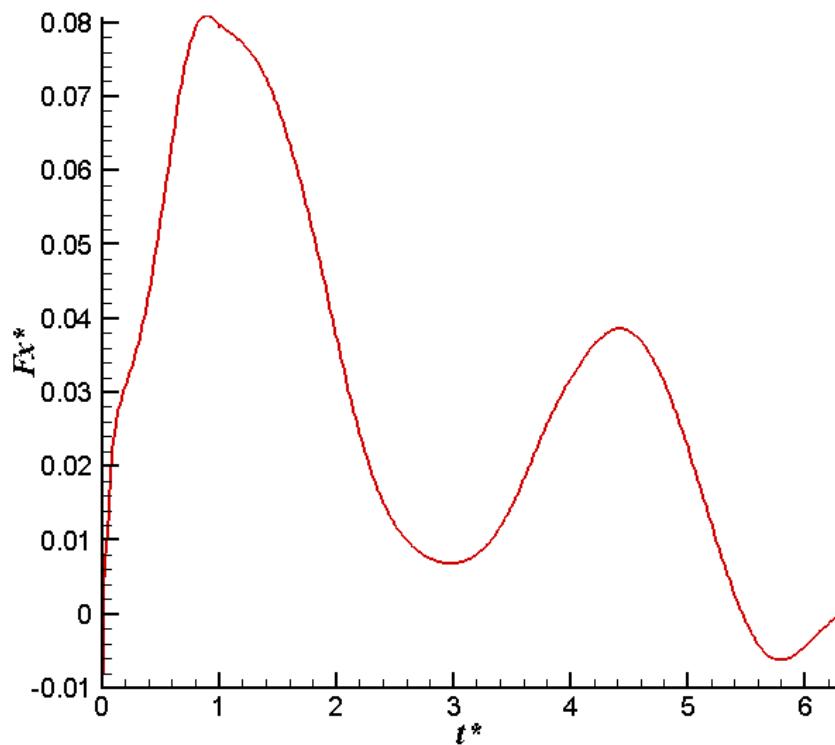


圖 4.2 固定不移動情形下第 II 類型擺動模式平板之推力對時間關係圖。

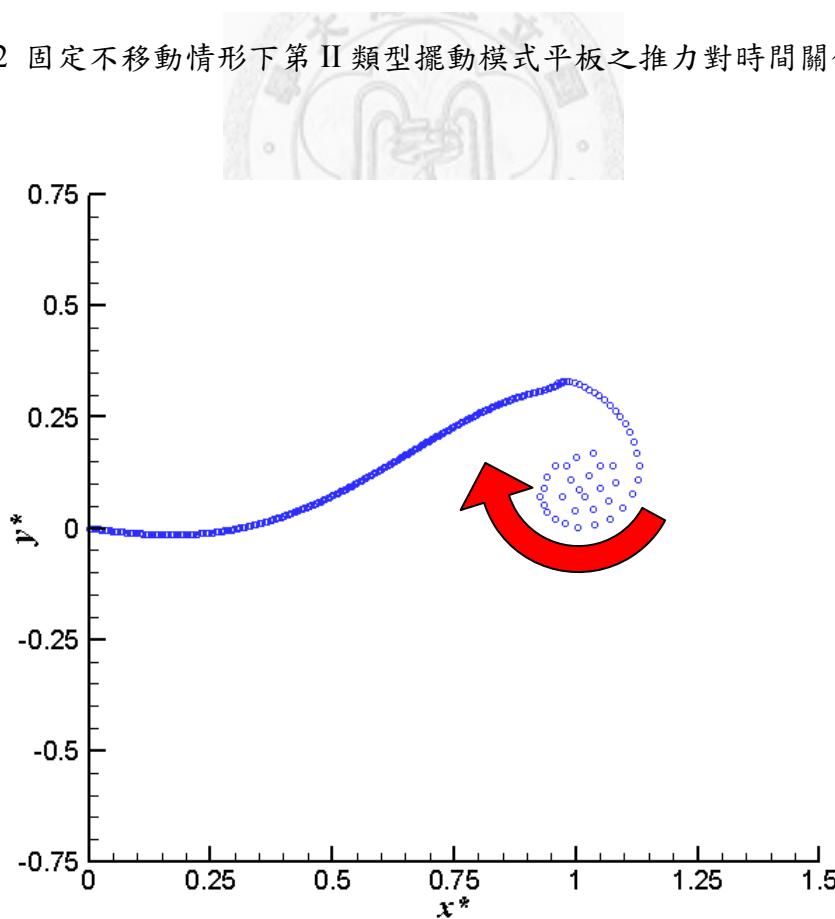
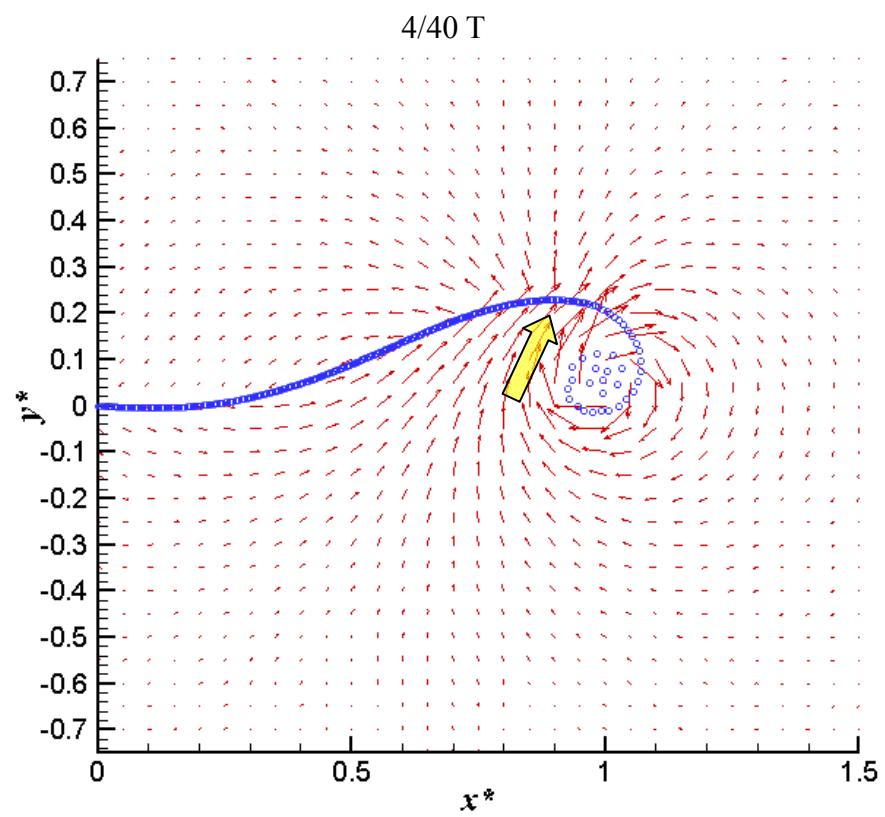
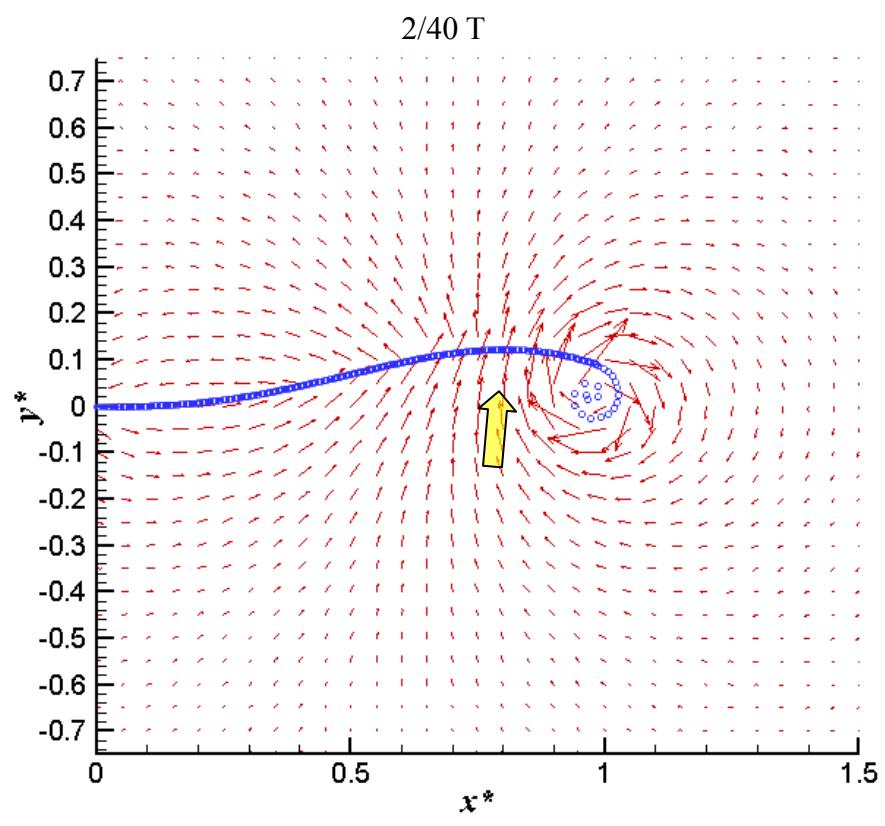


圖 4.3 第 II 類型擺動模式在  $6/40 T^*$  時刻的平板與渦流位置圖。



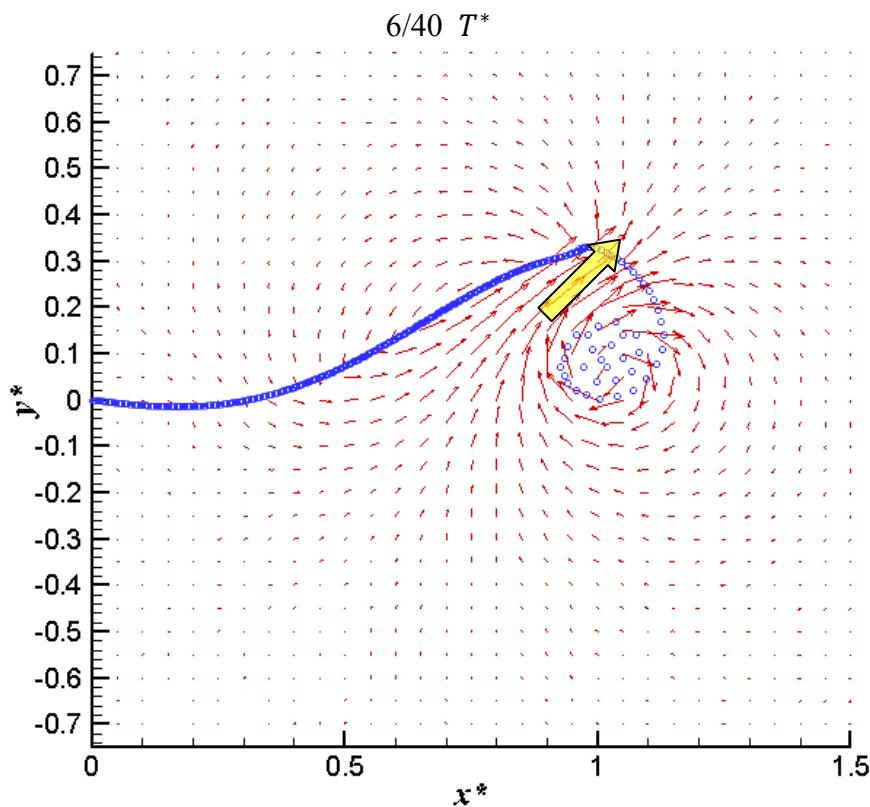
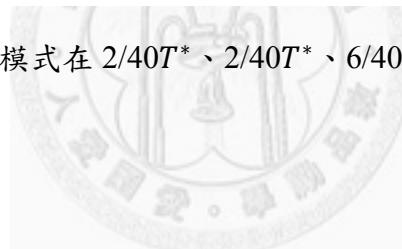


圖 4.4 第 II 類型擺動模式在  $2/40T^*$ 、 $2/40T^*$ 、 $6/40T^*$  時刻的速度向量圖。



周遭流體及平板受到的反作用力      流體動量變化量

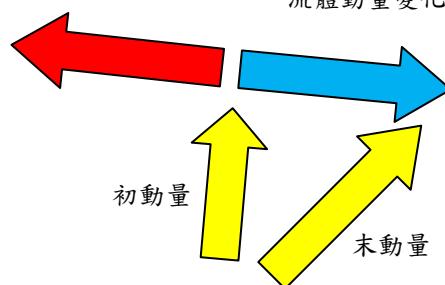


圖 4.5 第 II 類型擺動平板附近的流場動量變化示意圖。

當平板下擺至最低點時( $28/40T^*$ )，平板及渦流位置如圖 4.6 所示。此時平板後方的渦流並未匯聚成漩渦，只形成一個近似連續的渦面，且離平板尚有一段距離，平板推擠流體的效應不如  $6/40T^*$  明顯，產生的噴流較小(參考速度向量圖 4.7)，因此平板所產生的推力也不如上擺時來的大。

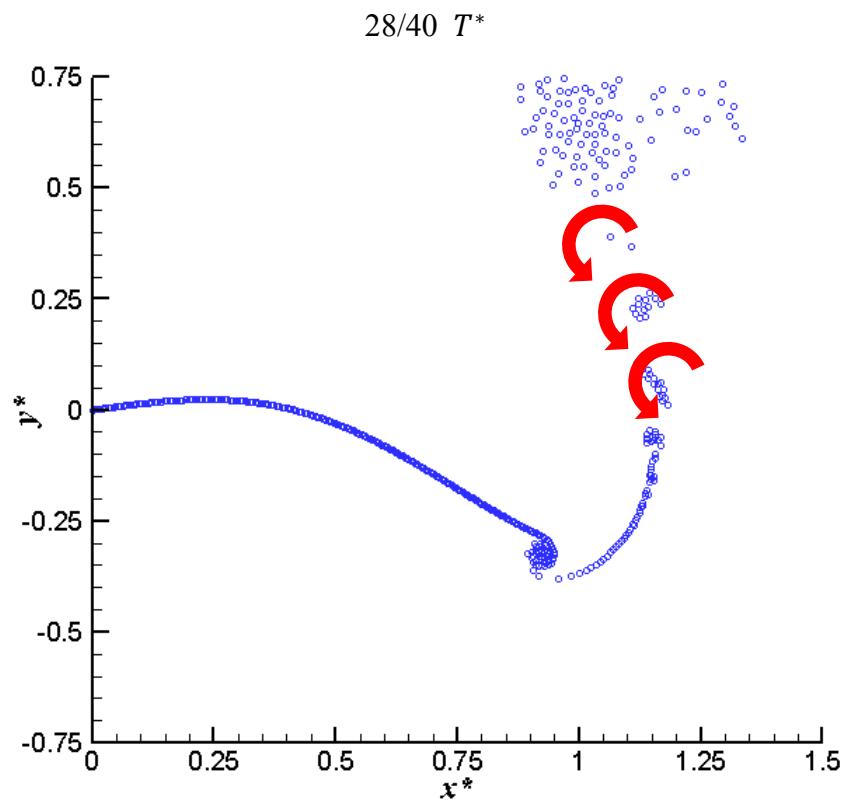


圖 4.6 第 II 類型擺動模式在  $28/40T^*$  時刻的平板與渦流位置圖。

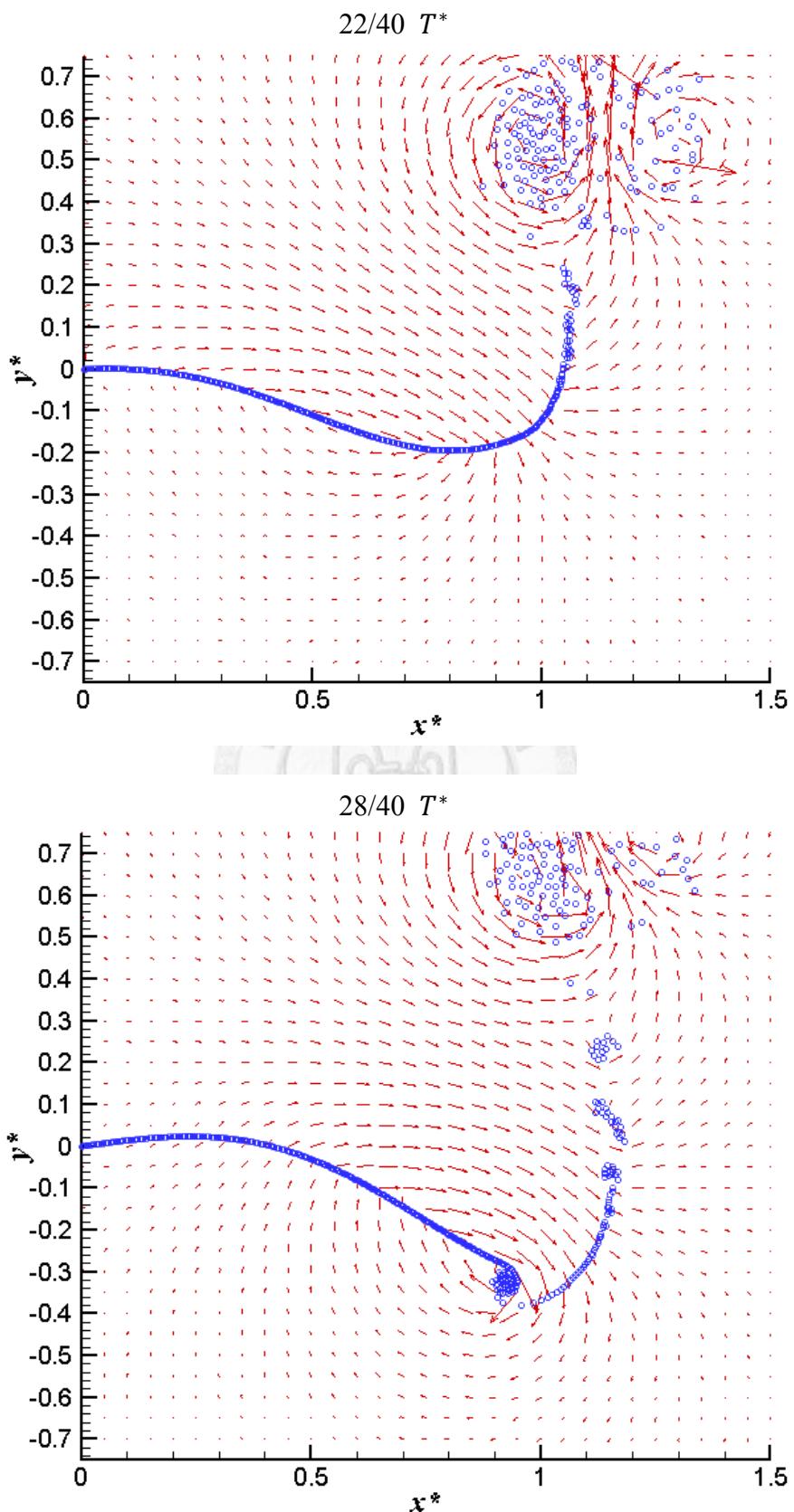


圖 4.7 第 II 類型擺動模式在  $22/40T^*$  和  $28/40T^*$  時刻的速度向量圖。

#### 4.1.2 第 III 類型之擺動模式

第 III 類擺動模式所選用的[位置-時間]及[行進正弦波]疊合函數為

$$y^*(x^*, t^*) = 2(0.08x^* + 0.08x^{*2}) \cdot T(t^*) \cdot \sin(5x^* - t^*) \quad (4.2)$$

其中時間-振幅函數  $T(t^*)$  為無因次化後的(2.37)式。擺動一周期內的形狀位置如圖 4.8 所示。從圖 4.8 可以發現此種擺動模式與前兩種截然不同，此種模式的平板是呈現較明顯的 S 形擺動。在平板剛啟動時，平板末端先向下勾，然後才向上抬升，向上抬升的速度也比前兩種形變模式來得慢。此種差異主要是來自於所選用的正弦函數的  $k$  值較大，整體的波動形變就更加明顯。

平板擺動一周期內的推力對時間關係如圖 4.9 所示。圖 4.9 中仍可觀察道推力在一周期內仍會產生兩個極值，大約在無因次時間  $0.3(2/40 T^*)$  和  $3.3(20/40 T^*)$ ，而  $0.3$  時刻的推力又遠大於  $3.3$ 。在  $2/40 T^*$  時的平板與渦流位置如圖 4.10 所示。剛啟動時產生推力的原因與 3.1 節中所述的相同，都是因為剝離渦流在後方形成快速旋轉的漩渦帶動流體推擠平板所致。然而此種形變模式啟動時的剝離渦流所形成的漩渦是在平板的上方，與前兩例的情形不同，且此類擺動模式的平板末端是以向下傾斜的方式承受後方流體的推擠而產生推力。

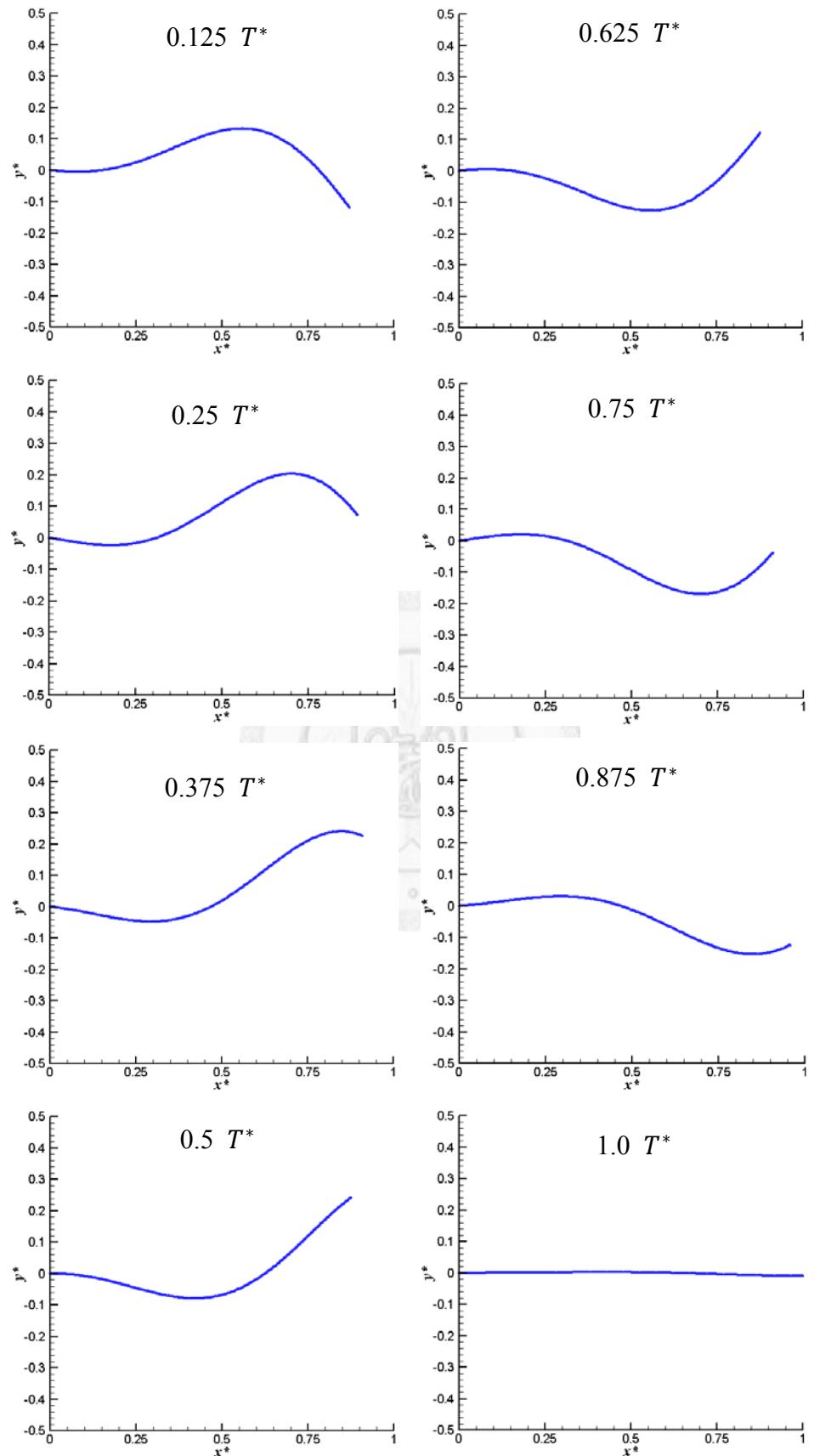


圖 4.8 第 III 類型擺動模式平板的周期變化圖。

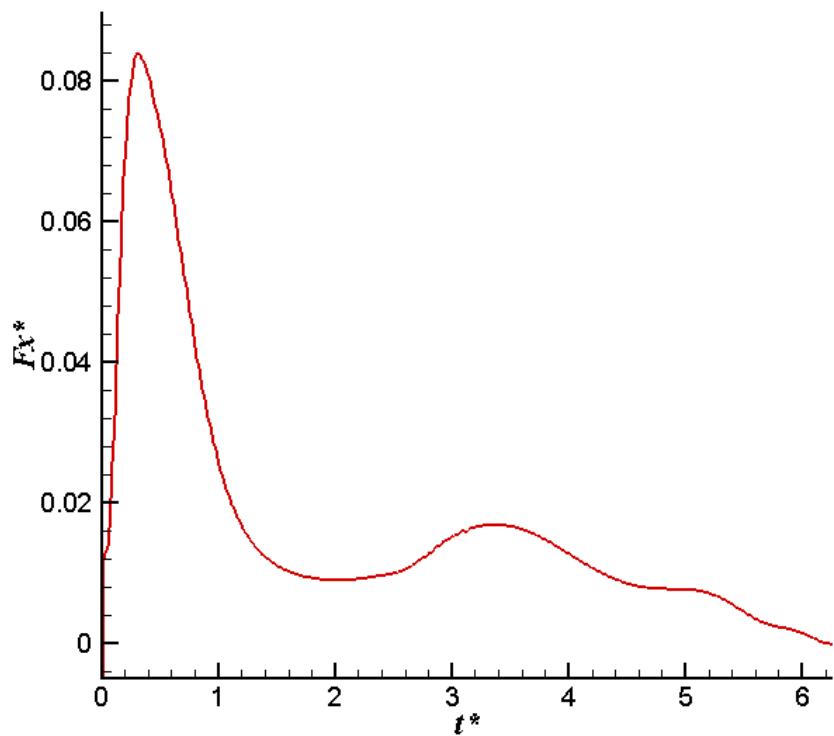


圖 4.9 固定不移動情形下第 III 類型擺動模式平板推力對時間關係圖。

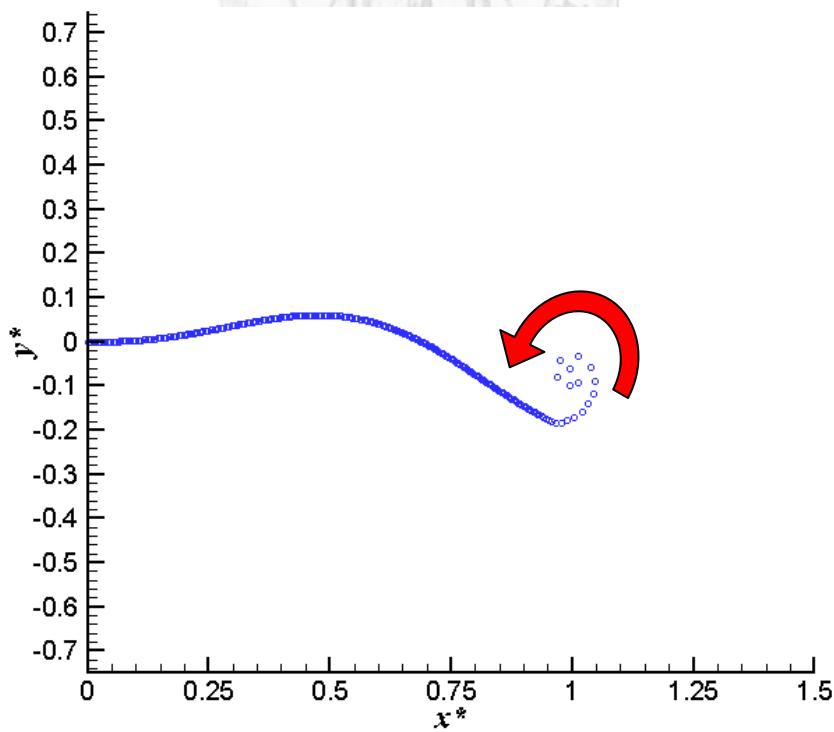
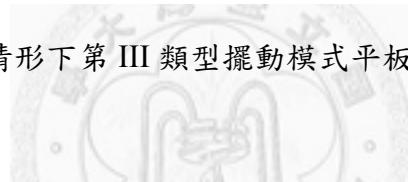
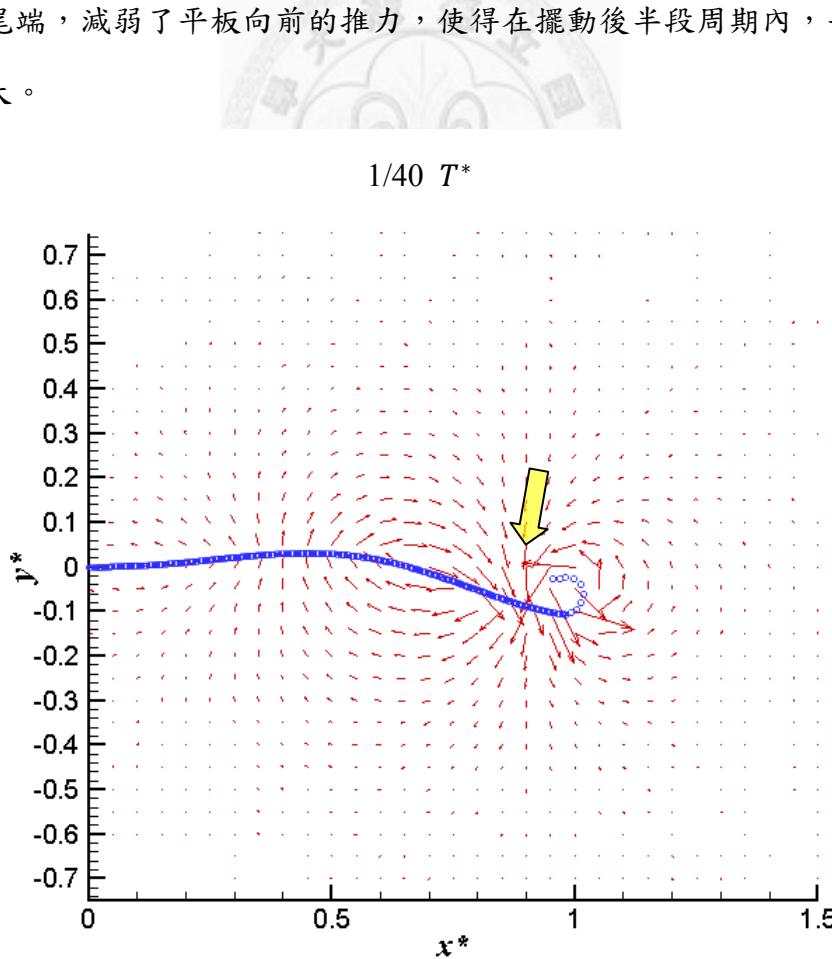


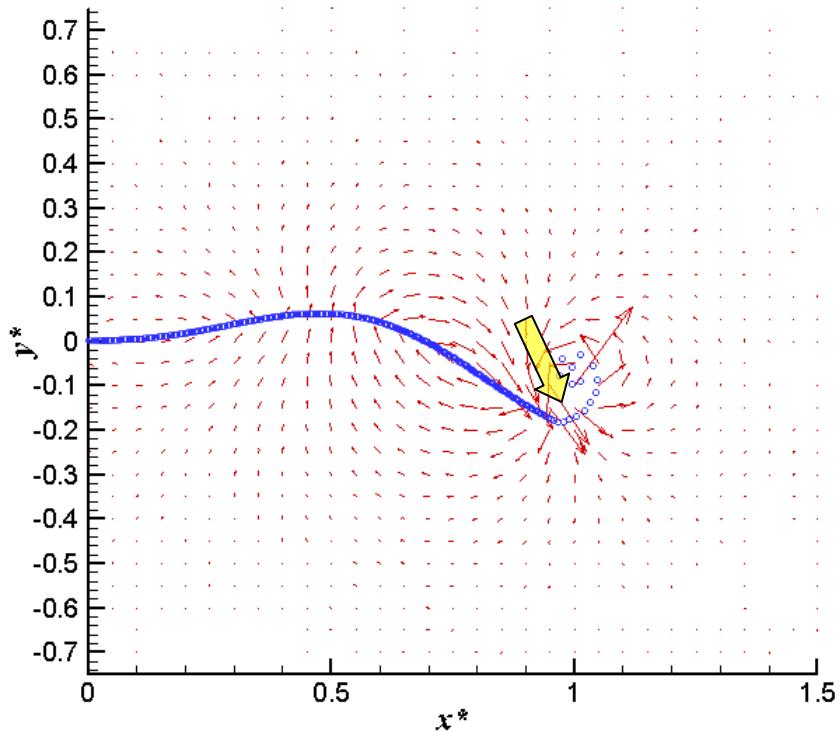
圖 4.10 第 III 類型擺動模式在  $2/40 T^*$  時刻的平板與渦流位置圖。

從速度向量圖 4.11 也可以看出在  $1/40 T^*$  時，剝離渦流帶動平板後方的流體向平板流動，在  $2/40 T^*$  時，平板上方開始出現一道噴流，在  $3/40 T^*$  時，噴流最為明顯，表示平板後方的流體朝平板流動後受到平板擠壓而迅速轉向，並順著平板切線方向流動。圖 4.12 是從流體動量變化判斷平板受力的示意圖。

在  $3/40T^*$  之後，平板開始緩慢上擺(圖 4.13)，此時從平板剝離的初始渦流已在平板末端的後方，因此平板產生的推力驟減。當平板末端擺盪到最高處並向下擺動時，水平推力只有些微上升，其原因在於平板向下拍打的速度太慢，最初產生的渦流都已經向下漂離平板(圖 4.14)，且平板上擺過程中剝離渦流形成的渦面強度太弱，無法有效帶動流體在平板向下拍時推擠平板提供反作用力。在加上  $20/40 T^*$  之後，平板末端剝離的逆時針方向旋轉的渦流所帶動的流體是以逆向的方式衝擊平板的尾端，減弱了平板向前的推力，使得在擺動後半段周期內，平板所受的推力都不大。



2/40  $T^*$



3/40  $T^*$

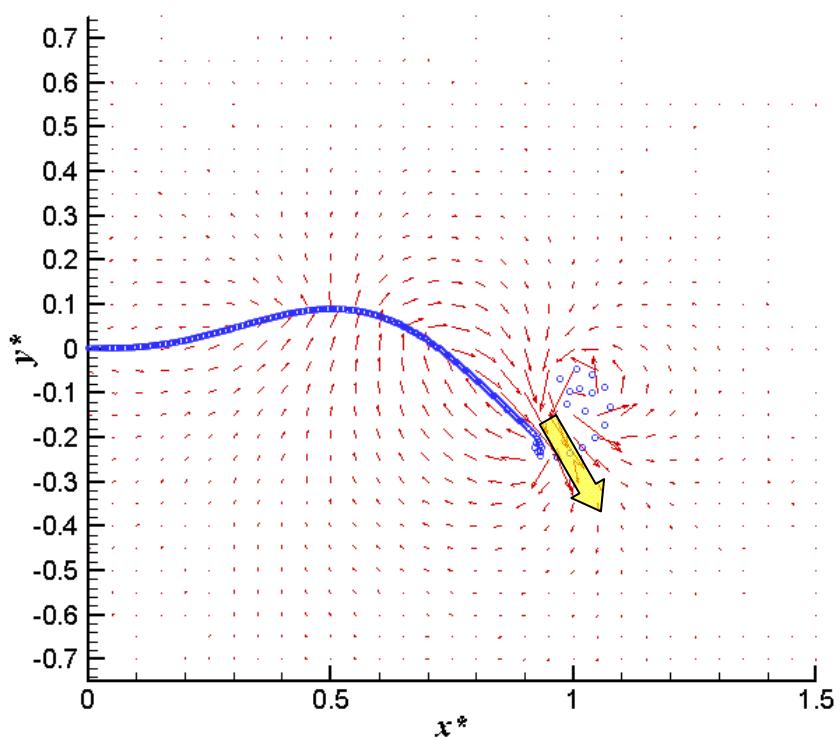


圖 4.11 第 III 類型擺動模式在  $1/40T^*$ 、 $2/40T^*$  和  $3/40T^*$  時刻的速度向量圖。

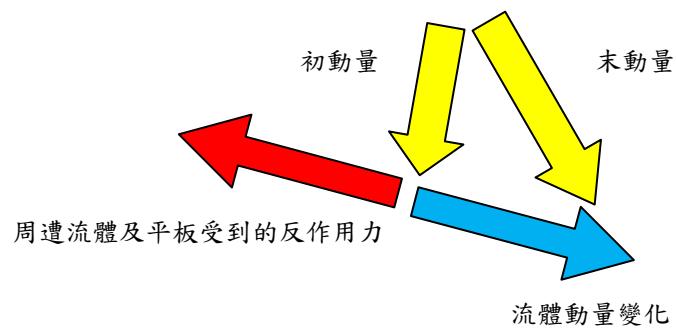


圖 4.12 第 III 類型擺動平板附近的流場動量變化示意圖。

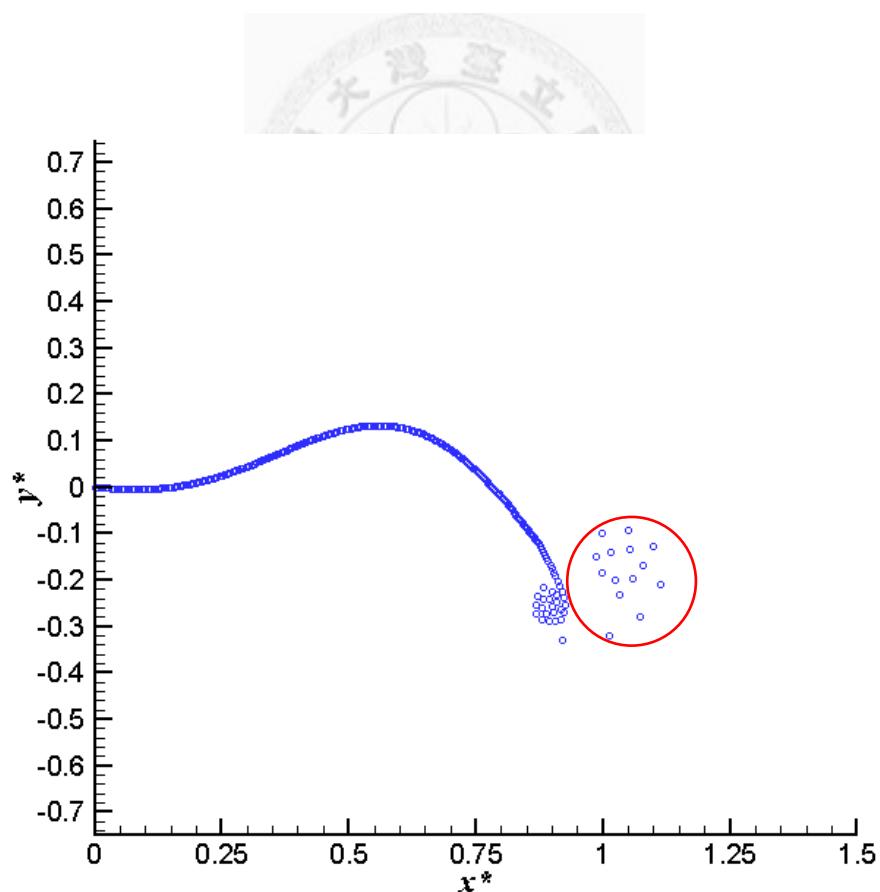
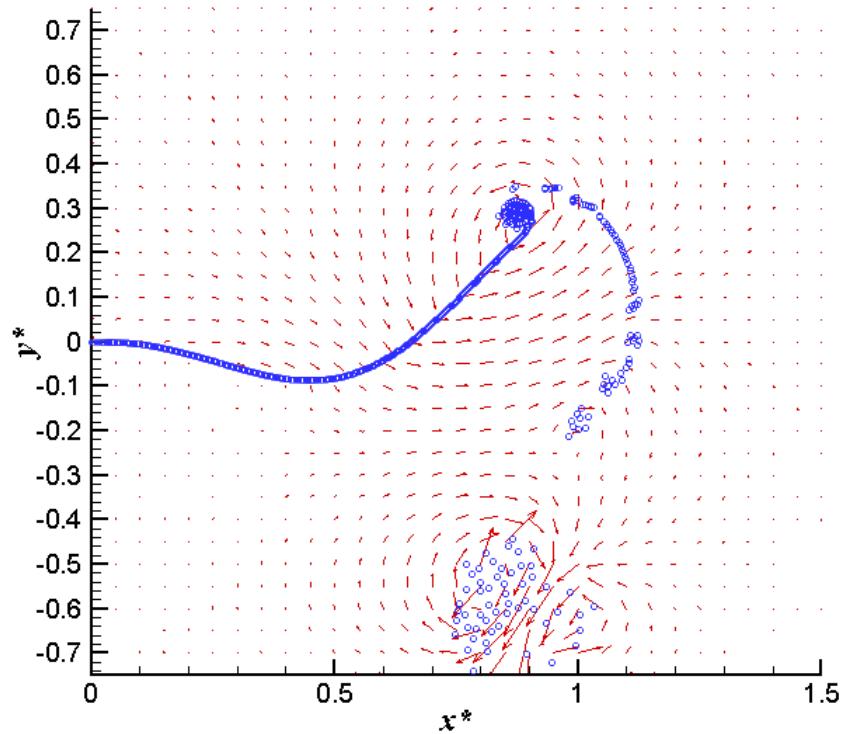
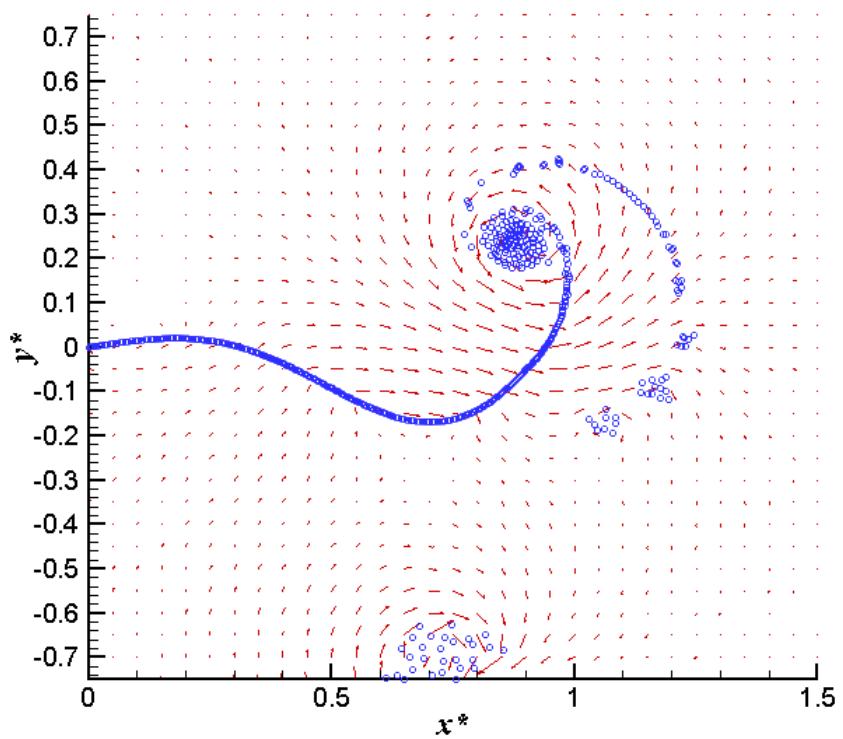


圖 4.13 第 III 類型擺動模式平板從最低點上擺之渦流位置圖。

20/40  $T^*$



30/40  $T^*$



35/40  $T^*$

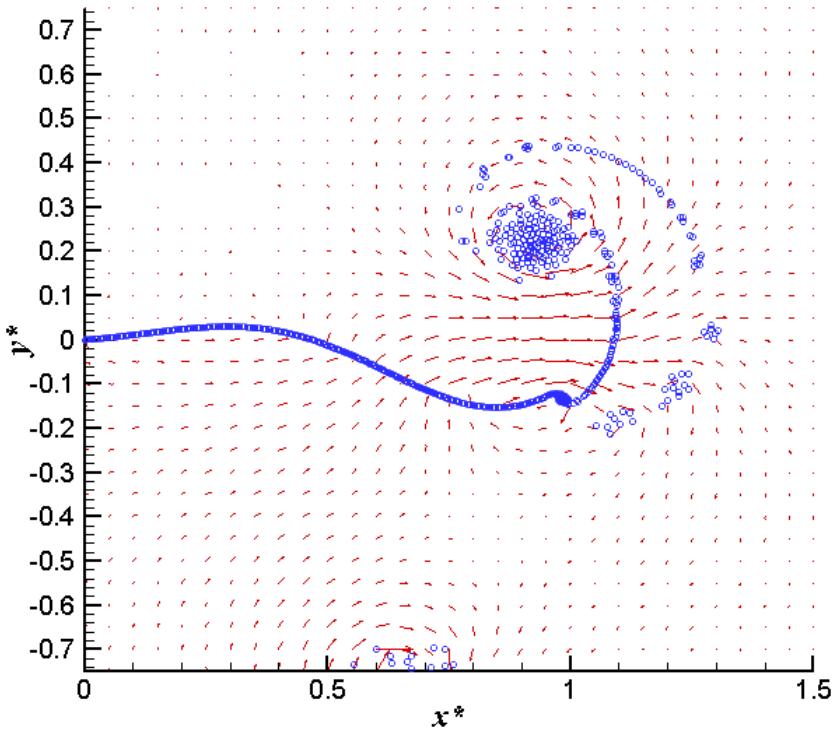


圖 4.14 第 III 類型擺動模式在  $20/40\ T^*, 30/40\ T^*, 35/40\ T^*$  時刻的速度向量圖。

#### 4.1.3 各種擺動模式之推力比較

圖 4.15 是三種形變模式在固定不移動情形下產生的推力對時間關係圖。從圖中可以觀察到，第 I 類與第 II 類擺動模式產生的推力對時間關係曲線非常相似。兩者的差異在於第 I 類抬升的速度比第 II 類來得快速，因此在啟動之後有一個明顯的阻力使得第 I 類的推力先降後升，第 II 類則沒有。還有當兩者擺盪到最高點時，第 I 類平板後方的剝離渦流形成的漩渦比較靠近平板，同時平板後半段擺盪的角度較大。因此平板末端從最高點向下擺盪時，水平推力會繼續增加。第 II 類平板則因為後方的漩渦較遠，且平板擺盪到最高處傾斜角度較小，導致水平推力無法持續增加，反而緩慢下降。

在三種模式中，第 III 類擺動模式所產生的推力極大值出現得最早，原因在於第 III 類的平板在啟動時並非直接向上擺，而是讓平板中段向上拱起，末端向下傾

斜，整體呈現 S 形曲線，之後才開始向上擺盪(參考圖 4.8)。在呈現 S 曲線的過程中，平板末端快速的向下傾斜，在平板後方產生較強的剝離渦流，渦流所形成的漩渦則帶動流體擠壓平板(參考圖 4.11)，因此第 III 類模式在剛啟動時就能產生較大的推力。然後後方的漩渦並未持續跟隨平板，因此平板在接下來向下擺盪的過程中就無法有效推擠漩渦，使得推力迅速下降。

三種形變模式在  $1/2 T^*$  之後，只有第 I 類和第 II 類擺動模式有再次產生推力極大值，原因在於兩者向下擺盪的速度較快，下擺過程中剝離渦流形成的渦面強度較大，流體擠壓平板的效應較明顯。而第 III 類擺動模式的擺動速度太過緩慢，擺盪的幅度也不夠大，剝離渦流形成的渦面強度太弱，使得流體擠壓平板的效應不明顯，因此在  $1/2 T^*$  之後都沒有明顯的推力。三者在一周期內的平均無因次推力依序為 0.0488、0.0295 及 0.0169，第 I 類的推力最大，是第 II 類的 1.65 倍，是第 III 類的 2.89 倍。

綜合以上幾點可知，固定位置的平板剛啟動的推力來自於尾端剝離渦流形成漩渦帶動流體擠壓平板。若剝離渦流的強度夠強，形成的漩渦離平板夠近，則平板反向拍打漩渦，流體被擠壓的效應就更明顯，在速度向量圖上會形成明顯的噴流，若此時平板尾端傾斜的角度夠大，作用於平板上的水平推力也會較大。當平板後方剝離的渦流無法匯聚成漩渦，而只能形成近似連續的渦面時，則平板拍打流體所受的反作用力不強，所產生的推力也就不大。

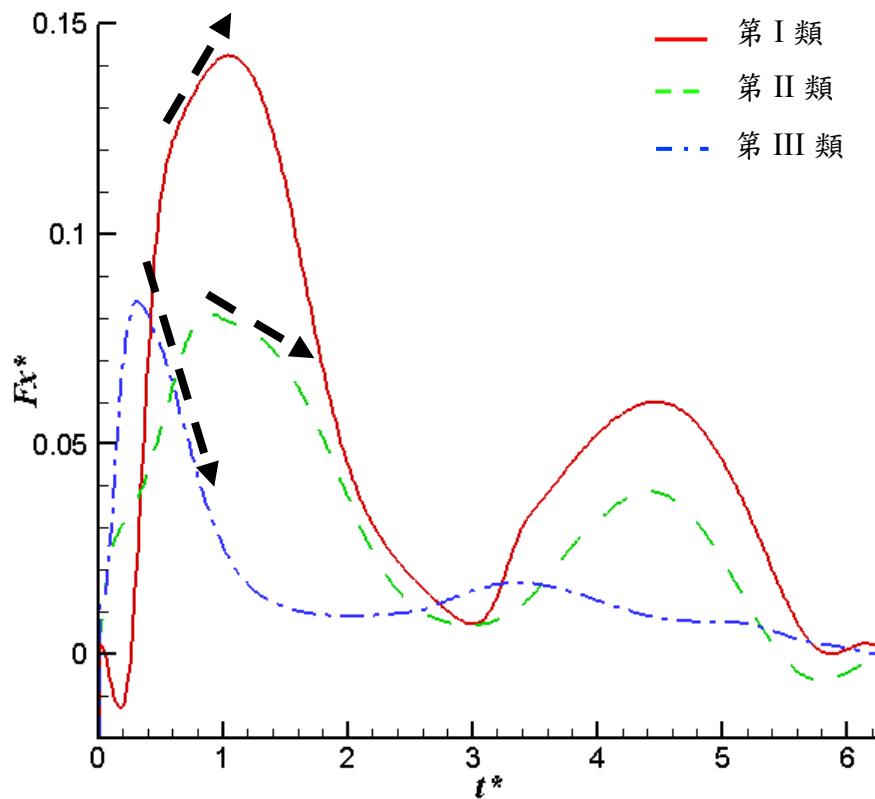


圖 4.15 固定不移動情形下三種平板擺動模式一周期內推力對時間關係圖。

#### 4.2 移動情形下平板以不同擺動模式所產生之推力及位移

如 3.3 節所述，在向前移動的平板會因為前後壓差產生的阻力使得平板的推力降低，甚至出現負的推力。在本節中將探討三種擺動模式下平板向前加速度移動時所受的推力及位移。

圖 4.16 是三種形變模式在移動情形下的推力比較圖。從圖中可以觀察到，原本在固定不移動情形下第 I 類擺動模式的推力極大值明顯大於其他兩者，但在移動情形下三者的第一個推力極大值反而沒有明顯差距，由此可知第 I 類擺動模式在前行時所受的阻力最大。而三種平板擺動模式在移動情形下皆因受到阻力所以產生的推力都小於固定不移動的情形。(參見圖 4.17、圖 4.18、圖 4.19)

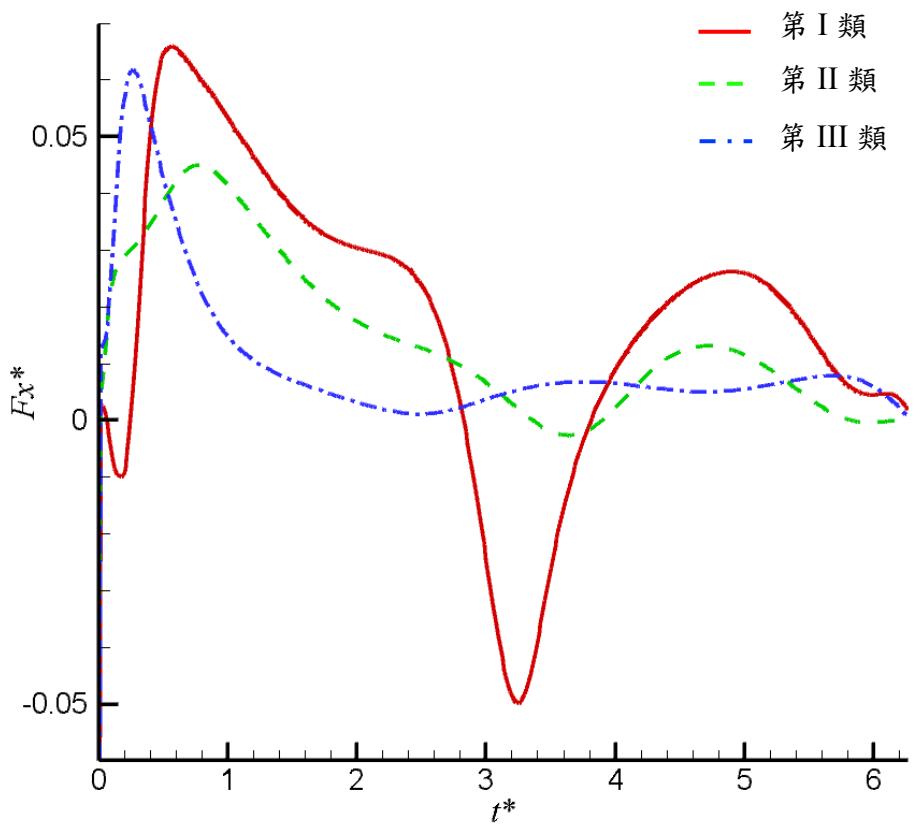


圖 4.16 移動情形下三種擺動模式的推力對時間關係圖。

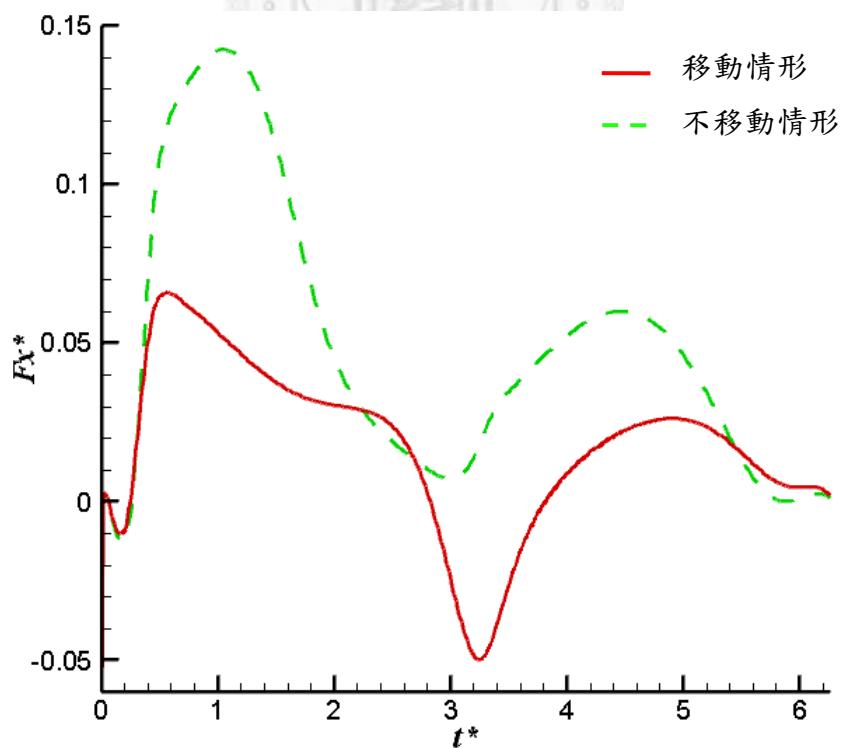


圖 4.17 第 I 類型擺動模式在移動與不移動情形下的推力比較。

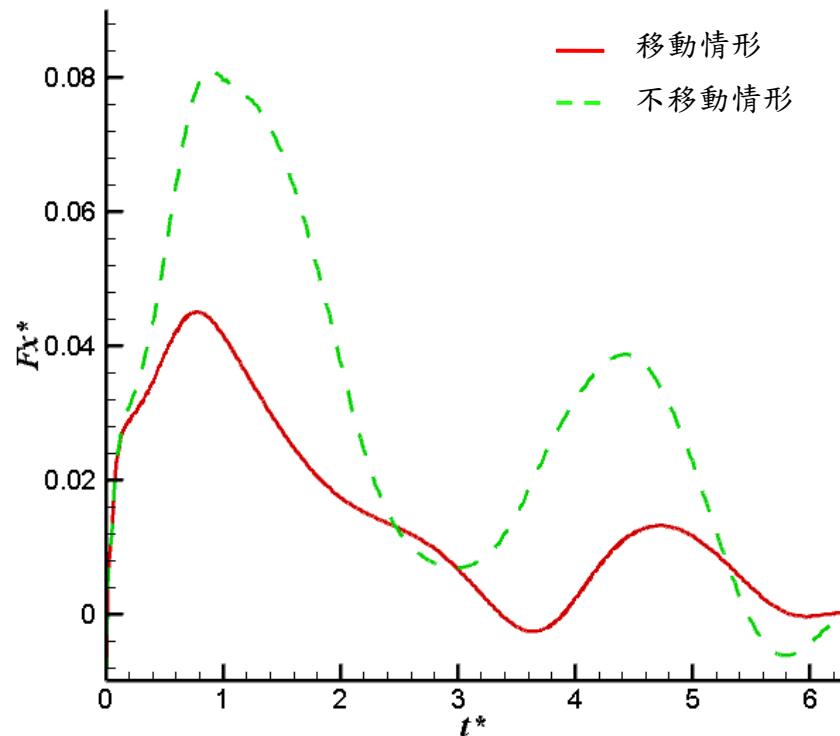


圖 4.18 第 II 類型擺動模式在移動與不移動情形下的推力比較。

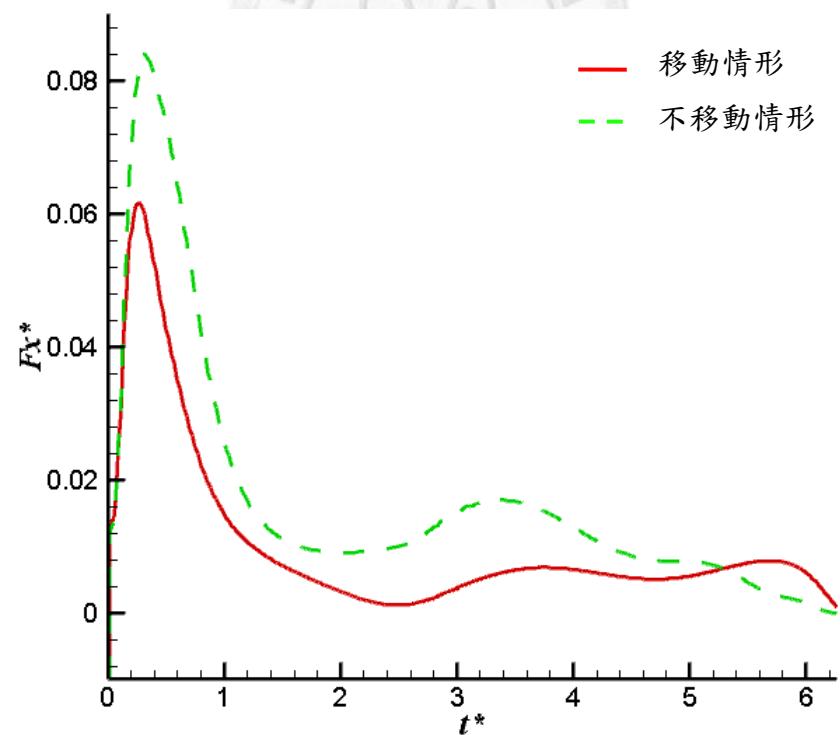


圖 4.19 第 III 類型擺動模式在移動與不移動情形下的推力比較。

三種擺動模式在平板移動情形下一周期內的平均推力依序為 0.0170、0.0144、0.0100，而三者在固定情形下一周期內的平均推力依序為 0.0488、0.0295、0.0169。三者平均推力下降的百分比為 65%、51%、41%。雖然第 I 類有最大的平均水平推力但推力下降的程度是三者中最大的，第 III 類擺動模式的平均水平推力雖然最小，但是推力下降程度也是三者中最小的。

上述現象是因為第 III 類擺動模式主要不是靠平板作大幅度擺動來產生推力，因此在擺幅較小的情形下，平板向前移動時產生的阻力就會較小。反觀第 I 與第 II 類模式的擺幅都較大，在移動時平板所受的阻力就會較明顯，推力下降的程度也較大。尤其是接近  $1/2 T^*$  時，因為第 I 類及第 II 類模式平板後段向下擺動的幅度較大(參見圖 4.20)，阻力就明顯上升，第 I 類擺動產生的推力甚至降低到 -0.05。原本在固定不移動時能夠產生較大推力的優勢，在移動情形下反而造成阻力。

圖 4.21 是三種擺動模式在一周期內的速度對時間關係圖，從圖中可以發現第 III 類擺動模式在剛啟動時有最大的速度，與圖 4.16 中第 III 類擺動模式在啟動後最早達到推力極大值的情形是相互吻合的。當接近  $1/2 T^*$  時，第 I 類擺動模式會產生負的推力，平板作減速運動，從圖 4.21 中也可以看到第 I 類的平板速度在  $1/2 T^*$  附近有一個明顯的下凹。

在一周期內三者行進的距離分別為 2.21、2.02 及 1.36(參考圖 4.22)，第 I 類形變模式在一周期內會有最大的位移量，但並沒有明顯超前第 II 類。原因在於第 II 類啟動的速度比較快，剛開始的位移也會較大，此外在  $1/2 T^*$  時，第 II 類形擺動式推力下降的幅度較小，而第 I 類推力下降到 -0.05 使得平板向後減速，因此一周期後兩者的位移非常相近。

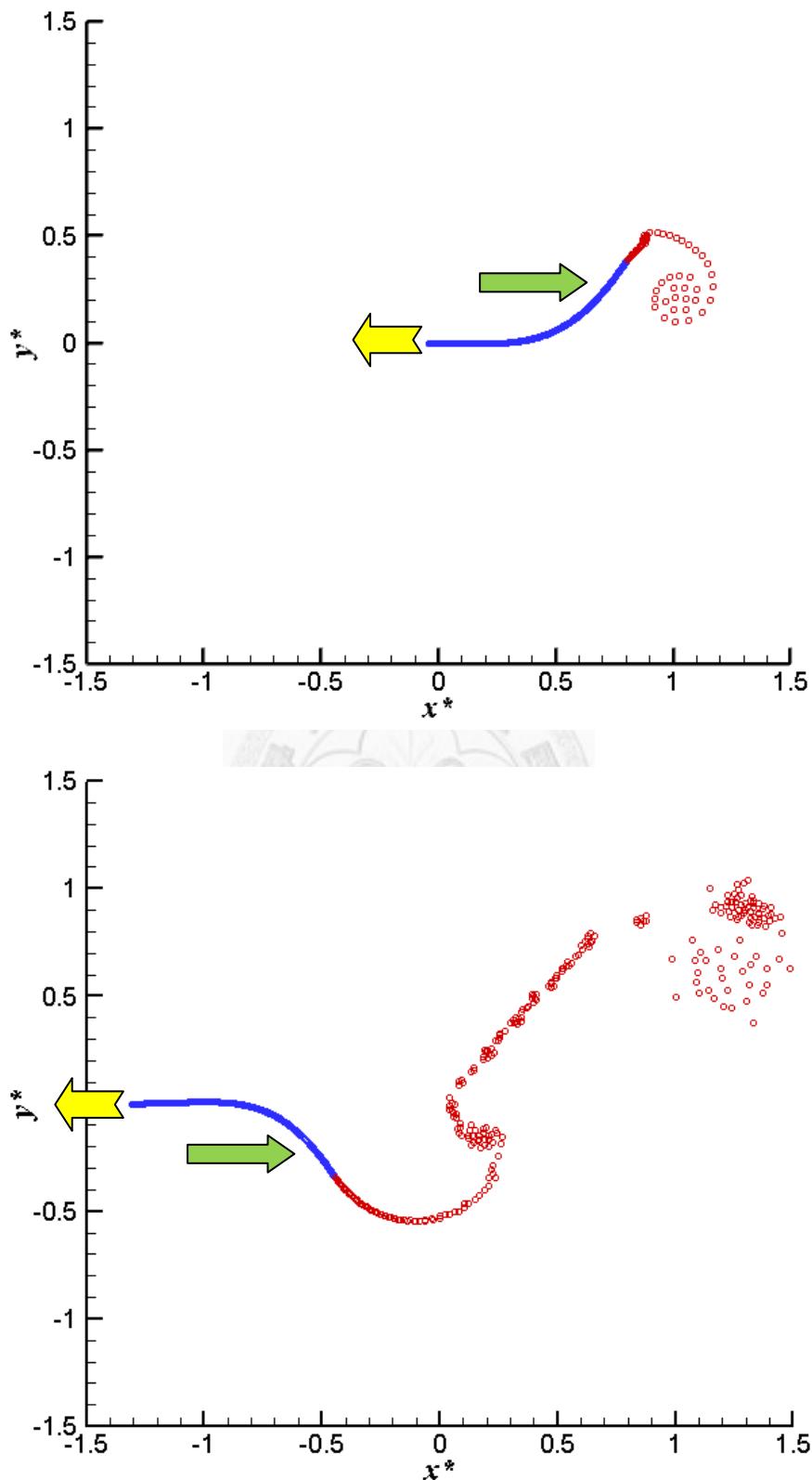


圖 4.20 平板前行時阻力示意圖。

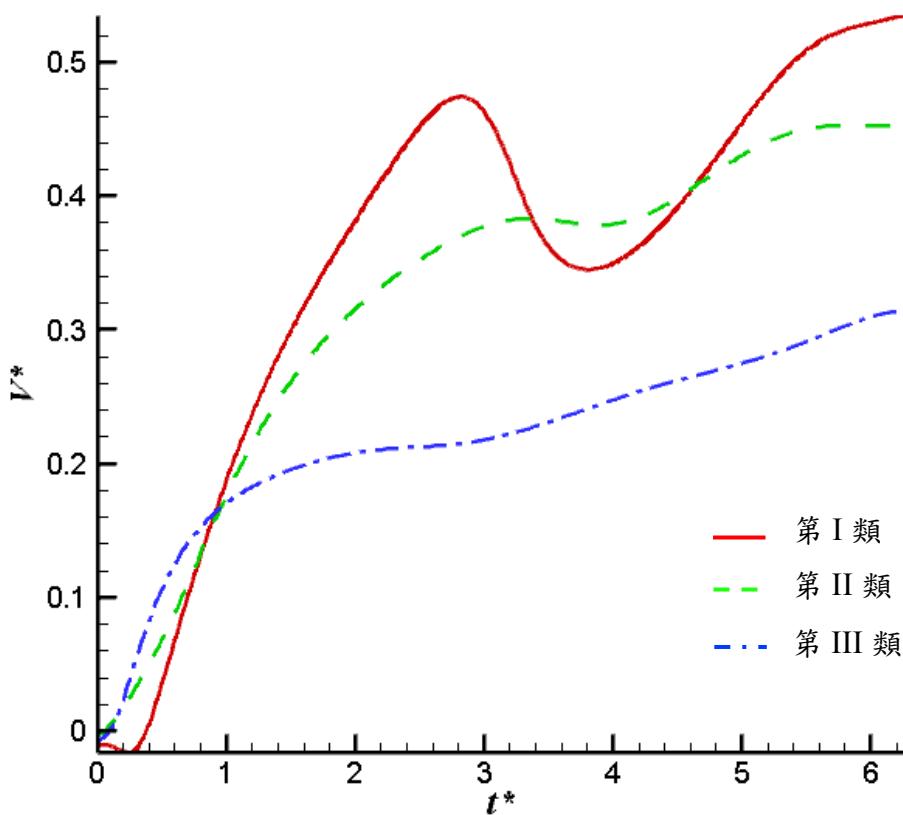


圖 4.21 移動情形下三種擺動模式的平板平移速度對時間關係圖。

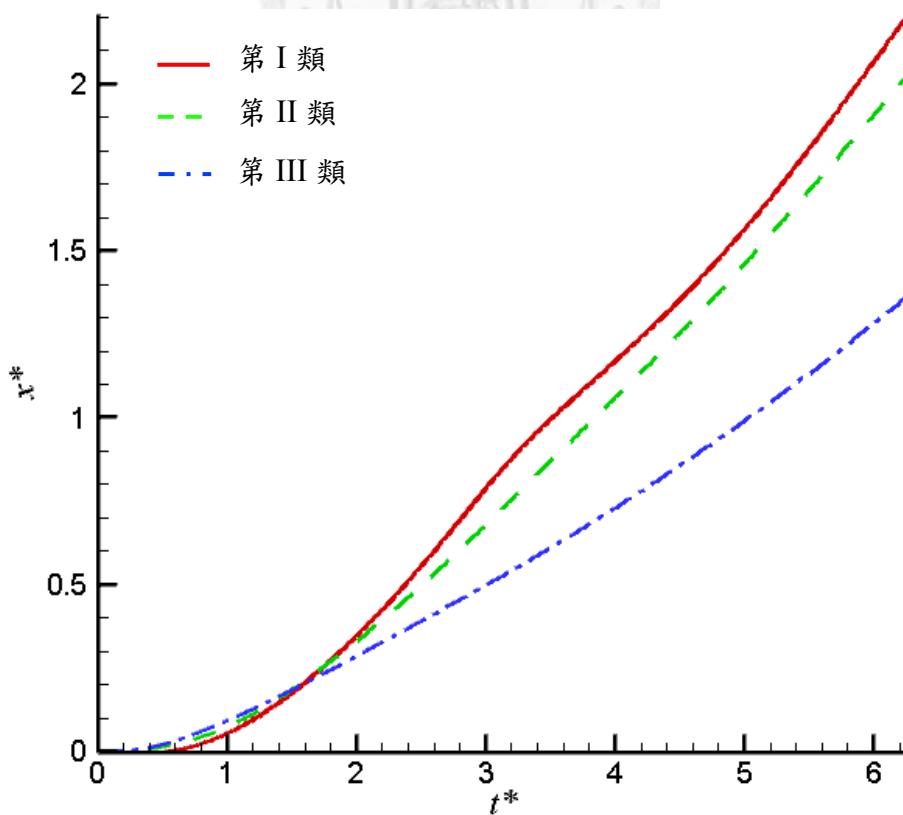


圖 4.22 移動情形下三種擺動模式一周期內平板的位移對時間關係圖。

## 第五章 結論與未來展望

本文運用二維勢能流場中一無厚度的平板以波浪形變模式擺動來模擬並探討魚類在快速啟動時的運動及受力情形。平板擺動所引生的流場及後端剝離的渦流是以板格法配合平板不可穿透性及整體流場環流量守恆等條件來求得其數值解。擺動過程中平板所受的推力則是透過非穩態 Bernoulli 方程式計算平板兩側的壓差而取得。

本文所採用的平板形變擺動數學模式是由一正弦行進波以及一結合位置與時間的振幅函數疊合而成，藉由調整行進波函數與振幅函數即可產生不同的形變模式。由於形變模式的平板在擺動時的擺角及擺幅難以定義，為了與剛體擺動的平板作比較，本文提出了以線動量、角動量以及力矩作為基準的三種比較方式，在基準條件相同的情形下，分別比較平板以形變擺動與剛體擺動所產生之推力大小。比較之結果有助於了解魚類在水中泳動時為何是採取形變擺動的模式。

除了比較形變模式與剛體擺動模式的差異，本文也分析了三種不同的形變擺動模式下，流場的型態，平板所受的推力及前行的位移量。本文所討論的第一類擺動模式為平板後半段有明顯擺盪且擺幅較大；第二類擺動模式為平板後方約 2/3 段呈正弦波擺盪，平板中段的起伏比第一類明顯，但末端的擺幅比第一類小；第三類擺動模式是平板整體呈現明顯的 S 形擺動，前段的起伏比前兩類明顯，但整體擺幅不大，且與前兩類最大的差異在於啟動時平板末端是先向下勾再上擺。

綜合比較分析的結果，本文得到以下的結論：

- (1) 平板擺動時會因後方剝離的渦流形成漩渦帶動流體擠壓平板產生推力。若後方渦流所形成的漩渦越強，越靠近平板，且平板反向拍打漩渦時的傾斜角度越接近垂直，則作用在平板上的推力就會越大。此現象可以解釋魚類在快速啟動時如何有效利用流場之流動型態並調整其姿態，在瞬間產生極大的推力與前行加速度。

- (2) 在平板固定不向前移動的情形下，不論是採用何種基準來作比較，第 I 類擺動模式所產生的平均水平推力都會大於剛體模式，且兩者至少相差 1.89 倍。若在平板向前移動情形下作比較，第 I 類擺動模式的平均水平推力仍大於剛體模式，但由於受到阻力的影響，兩者的差距下降為 1.54 倍；然而在前行距離的比較上，第 I 類擺動模式的位移是剛體模式的 1.69 倍。由此可知，當魚類快速啟動時所作的大幅度形變擺動雖然會產生較大的阻力，但是擺動一周期內的位移仍會比剛體模式大得多，有利其快速逃脫。
- (3) 比較三種擺動模式時可以發現在不移動情形下，第 I 類擺動模式的平板會有最大的平均推力以及推力極大值，其平均推力是第 II 類的 1.65 倍，是第 III 類的 2.89 倍。然而三者在移動情形下的比較，第 I 類的優勢就不如固定不移動情形下的明顯。雖然第 I 類仍有最大的平均推力，但是與不移動情形的平均推力相比下降了 65%，是三種類型中下降比例最多的。第 III 類的平均推力在兩種情形下都是最小，但是因移動所產生的阻力而使推力下降的比例也是三者中最小的，推力只下降 41%。三種擺動模式下平板的位移量分別為 2.21、2.02 和 1.36。

由以上的討論可以得知，當魚類作快速啟動時，若選用大幅度的擺盪模式，雖然可以產生較大的推力與位移，但同時也受到較大的阻力，效率較差。若選擇擺幅較小的第 III 類擺動模式，雖然位移不如第 I 類來得大，但卻比較省力。因此推斷若魚類需要逃脫獵食者的捕捉，很可能會採取第 I 類的擺動模式，若只是一般的啟動則採用第 III 類擺動模式。

本文僅用了簡略的模式來探討分析魚類啟動時所引生流場的特性及比較各種不同擺動模式之利弊。至於未來的研究可朝著下述三方向來改進：

- (1) 本文所討論的平板擺動模型是以行進波與兩個振幅函數疊合產生，未必吻合真實魚尾的擺動情形。真實的魚在快速啟動時魚身會有大角度的彎曲及轉向，目前難以找到適合的對應函數。未來可以實際量測魚快速啟動時各個瞬間的姿態

來建立平板擺動模型，如此計算的流場及推力會更貼近真實情形。

- (2) 本文是以二維形變平板來模擬魚尾擺動，然而魚尾是一個三維的幾何體，因此未來可嘗試以板格法建立三維平板在位勢流場中擺動所產生之推力與位移。
- (3) 本文所考慮的流場是一位勢能流場，忽略了流體的黏滯效應所造成影響。未來可嘗試改以渦流法來計算形變平板在黏性流場中擺動的受力情形。



## 參考文獻

- Brainerd, E. L. & Patek, S. (1998) Vertebral column morphology, C-start curvature, and the evolution of mechanical defenses in tetraodontiform fish. *Copeia* **4**, pp. 971-984.
- Conte, J. & Modarres-Sadeghi, Y (2010) A fast-starting mechanical fish that accelerates at 40 ms<sup>-2</sup>. *Bioinsp. Biomim.* **5**.
- Drucker, E. & Lauder, G. (1999) Locomotor force on a swimming fish:three-dimensional vortex wake dynamics quantified using digital particle image velocimetry. *Journal of Experimental Biology* **202**, pp. 2393-2412.
- Epps, B. P. & Techet, A. H. (2007) Impulse generated during unsteady maneuvering of swimming fish. *Exp Fluids* **43**, pp. 691-700.
- Frith, H. D. & Blake, R. W. (1995) The mechanical power output and hydrodynamic efficiency of northern pike (*Esox lucius*) fast-starts. *Journal of Experimental Biology* **198**, pp. 1863-1873.
- Frith, H. R. & Blake, R. W. (1991) Mechanics of the startle response in northern pike. *Canadian Journal of Zoology* **69**, pp. 2831–2839.
- Harper, D. G. (1989a) A critical analysis of the use of high-speed film to determine maximum acceleration in fish. *Journal of Experimental Biology* **142**, pp. 465-471.
- Harper, D. G. (1989b) On the error involved in high-speed film when used to evaluate maximum accelerations of fish. *Canadian Journal of Zoology* **67**, pp. 1929–1936.
- Harper, D. G. & Blake, R. W. (1990) Prey capture and the fast-start performance of rainbow trout *Salmo gairdneri* and northern pike. *Journal of Experimental Biology* **150**, pp. 321-342.
- Kuethe, A. M. & Chow, C. Y. (1998) *Foundations of aerodynamics*. John Wiley.

- Lauder, G. V. & Madden, G. A. (2007) Fish locomotion: kinematics and hydrodynamics of flexible foil-like fins. *Exp Fluids* **43**, pp. 641-653.
- Lighthill, J. M. (1960) Note on the swimming of slender fish. *J. Fluid Mech.* **9**, pp. 305-317.
- Lighthill, M. J. (1971) Large-amplitude elongated-body theory of fish locomotion. *Proc. B. Soc. Lond.* **179**, pp. 125-138.
- Liu, J. & Hu, H. (2004) A 3D Simulator for Autonomous Robotic Fish. *International Journal of Automation and Computing* **1**, pp. 42-50.
- Pedley, T. J. & Hill, S. J. (1999) Large-amplitude undulatory swimming: fluid mechanics coupled to internal mechanics. *Journal of Experimental Biology* **202**, pp. 3431-3438.
- Ramamurti, R. (1996) Computation of the unsteady flow past a tuna with caudal fin oscillation. *Transactions on Engineering Science* **9**, pp. 1743-3533.
- Webb, P. W. (1977) Effects of median-fin amputation on fast-start performance of rainbow trout (*Salmo gairdneri*). *Journal of Experimental Biology* **68**, pp. 123-135.
- Webb, P. W. (n.d.). Fast-start performance and body form in seven species of teleost fish. *Journal of Experimental Biology* **74**, pp. 211--226.
- Weihs, D. (1973). The mechanism of rapid starting of slender fish. *Biorheology* **10**.
- Westneat, M. W. & Hale, M. E. (1998) Mechanics of the fast-start: muscle function and the role of intramuscular pressure in the escape behavior of *Amia calva* *Polypterus palmas*. *Journal of Experimental Biology* **201**, pp. 3041-3055.
- Wu, T. Y. (1961). Swimming of a waving plate. *J. Fluid Mech* **10**, pp. 321-344.