

國立臺灣大學社會科學院經濟學系

碩士論文

Department of Economics

College of Social Sciences

National Taiwan University

Master Thesis



臺灣自然利率的估計

Estimating the Natural Rate of Interest in Taiwan

陳敬宇

Ching-Yu Chen

指導教授：王泓仁博士、陳南光博士

Advisor: Hung-Jen Wang, Ph.D, Nan-Kuang Chen, Ph.D.

中華民國 112 年 7 月

July, 2023

國立臺灣大學碩士學位論文

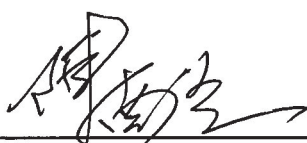
口試委員會審定書

臺灣自然利率的估計

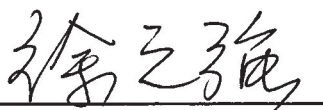
Estimating the Natural Rate of Interest in Taiwan

本論文係陳敬宇君 (R10323044) 在國立臺灣大學經濟學系完成之碩士學位論文，於民國 112 年 7 月 28 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：



王淑仁
(指導教授)





誌謝



轉瞬之間，碩士生涯即將畫下句點，快得有些不真實。回首過去這兩年，修習了許多具有挑戰性的課程，花費大量時間準備教材，努力練習英文口說，並在最後兩個月內全力補足研究進度，真是一段充實愉快又難忘的時光。

首先感謝我的兩位指導老師：王泓仁教授和陳南光教授，王老師給予我許多關於資料處理和計量方法的寶貴意見，而陳老師對於模型設定的合理性相當敏銳，總能精準點出不適當之處，並為我指明新的嘗試方向。很慶幸能在兩位老師細心的指導下做研究，著實收穫許多，也感謝老師們及時提供建議，使我得以順利完成這份論文。同時感謝陳旭昇教授和徐之強教授指正我的盲點，使本研究得以更加完善。

感謝臺大經濟系優秀的老師們傾力傳授知識。感謝家人與親朋好友不時地關心我的研究進度。最後感謝正就讀於清大社會所碩士班的信秀同學，妳的鼓勵總能給予我研究動力，也祝福妳接下來的田野調查與訪談都能順利進行，完成一份令人滿意的研究。

摘要



本研究旨在估計臺灣的中長期自然利率，我們採用不可觀測成分 (UC) 模型，結合卡爾曼濾波器 (Kalman Filter) 以及最大期望演算法 (EM Algorithm) 進行估計，並分析 1995 年至 2021 年臺灣自然利率的走勢。我們的 UC 模型參考自 Berger and Kempa (2014)，相比於 Laubach and Williams (2003) 的原始版本，前者納入實質匯率的影響，並引進未拋補利率平價等式，用以解釋匯率缺口和利率缺口的關係。比對估計結果後我們發現，這些調整使得原先不顯著的 IS Curve 係數變為顯著之負數，並且讓自然利率的平均標準誤從 3.98 個百分點大幅下降至 1.27 個百分點。根據本文的估計結果，臺灣的自然利率呈現下滑的趨勢，並且從 2008 年起長期處在低於 0 的水準。

關鍵字：自然利率、小型開放經濟體、不可觀測成分模型、卡爾曼濾波器、最大期望演算法

Abstract



This paper aims to estimate the medium to long-term natural rate of interest in Taiwan. We adopt the Unobserved Components (UC) model, incorporating the Kalman Filter and the EM Algorithm for the estimation. Furthermore, we conduct an analysis on the natural rate of interest in Taiwan, tracing its trend from 1995 to 2021. Our UC model is based on the approach presented by Berger and Kempa (2014). In comparison with the model pioneered by Laubach and Williams (2003), the former incorporates the influence of the real exchange rate, introducing the uncovered interest rate parity equation to link the exchange rate gap with the interest rate gap. After comparing the estimation results, we found that these adjustments turned the initially insignificant IS curve coefficient into a significant negative value. Also, the average standard error of the natural rate of interest was greatly reduced from 3.98 percentage points to 1.272 percentage points. Based on our estimates, the natural rate of interest in Taiwan has been on a downward trend and has remained below zero since 2008.

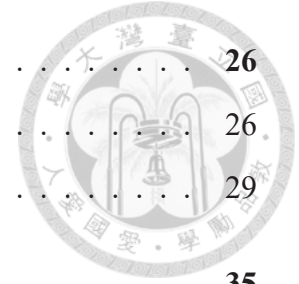
Keywords: Natural Rate of Interest, Small Open Economy, Unobserved Components Model, Kalman Filter, EM Algorithm



目錄

口試委員會審定書	i
誌謝	ii
摘要	iii
Abstract	iv
1 前言	1
2 文獻回顧	5
2.1 自然利率	5
2.2 UC 模型與自然利率	6
2.3 UC 模型的小型開放經濟體版本	7
3 變數與模型設定	9
3.1 資料與變數說明	9
3.2 自然利率	13
3.3 封閉經濟體 UC 模型	16
3.4 小型開放經濟體 UC 模型	19
4 估計方法	21
4.1 狀態空間表達式與卡爾曼濾波器 (Kalman Filter)	21
4.2 最大期望演算法 (EM Algorithm)	21
4.3 單端式估計與雙端式估計	23
4.4 堆積問題 (Pile-Up Problem)	23
4.5 三階段估計過程	25

5	實證結果分析	26
5.1	係數與參數估計結果	26
5.2	狀態變數估計結果	29
6	問題與討論	35
7	結論	38
	參考文獻	39
	附錄一	44
	附錄二	45





圖目錄

圖 1	臺灣名目利率走勢	1
圖 2	通膨率和預期通膨率走勢	12
圖 3	實質利率走勢	12
圖 4	粗估產出成長率和實質利率走勢	15
圖 5	產出缺口 \tilde{y}_t 估計值	30
圖 6	潛在產出 y_t^* 估計值	30
圖 7	產出成長率 g_t 估計值	30
圖 8	利率缺口 \tilde{r}_t 估計值	31
圖 9	自然利率 r_t^* 估計值	31
圖 10	自然利率剩餘因素 z_t 估計值	31
圖 11	匯率缺口 \tilde{q}_t 估計值	32
圖 12	均衡匯率 q_t^* 估計值	32
圖 13	利率缺口剩餘因素 κ_t 估計值	32



表目錄

表 1	資料來源與說明	9
表 2	資料之敘述統計量	10
表 3	變數說明	11
表 4	預期通膨率計算方法	11
表 5	通膨率、預期通膨率和實質利率之敘述統計量	13
表 6	係數和參數估計結果	27
表 7	本文與其他研究的係數估計結果比較	28
表 8	狀態變數平均標準誤	33

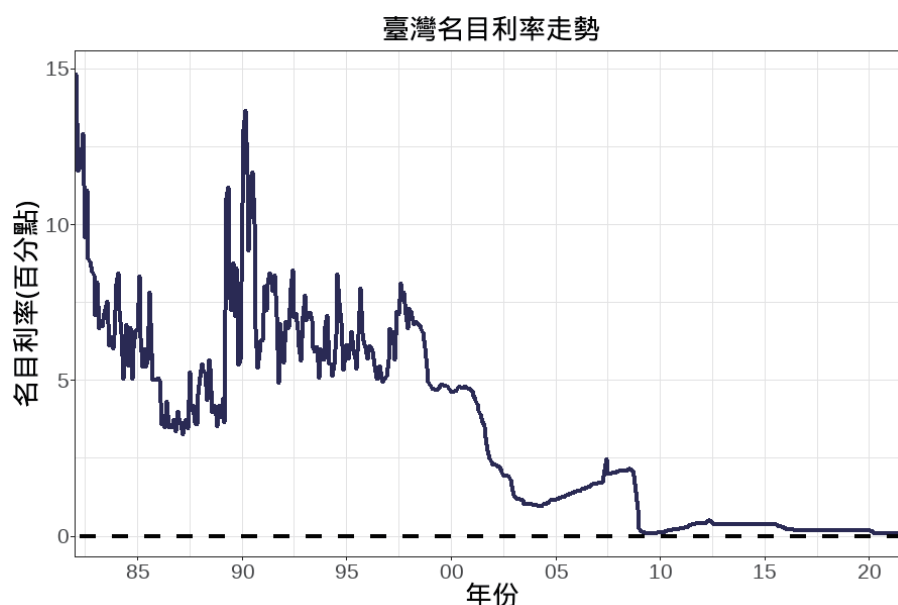
1. 前言



許多研究者發現，自 1990 年代以後各國的利率普遍呈現下降趨勢，Del Negro et al. (2019) 就注意到，包含美國、英國和日本在內的許多先進經濟體，在過去 30 年間實質利率都顯著下降，並且走勢已趨於一致。

圖 1 是臺灣自 1982 年至 2021 年的名目利率走勢，¹ 我們發現從 1990 年代中期開始，臺灣的名目利率確實有下滑的趨勢，雖然 2005 年後短暫回升，但 2008 年金融海嘯爆發後又迅即下跌，甚至達到接近 0 的歷史新低點。時至今日，臺灣的名目利率仍明顯低於 1990 年代的平均水準。

圖 1: 臺灣名目利率走勢

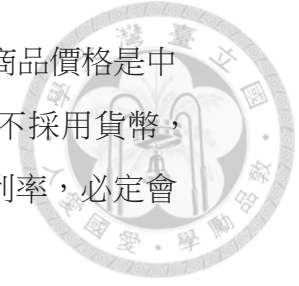


部分研究者認為，考慮到各國的通膨率相對穩定，利率的下滑趨勢很可能是由「自然利率」的變動所引起。何謂自然利率？這個詞彙與概念最早由瑞典經濟學家 Knut Wicksell 提出：

“There is a certain rate of interest on loans which is neutral in respect to commodity prices, and tends neither to raise nor to lower them. This is necessarily the same as the rate of interest which would be determined by supply and demand if no use were made of money and all lending were effected in the form

¹我們採用各大官股銀行的隔夜拆款利率加權平均，詳細說明請參見章節3.1。

of real capital goods.” (存在一種特定的貸款利率，它對於商品價格是中立的，不會導致價格上升或下降。而如果該經濟體完全不採用貨幣，並且所有借貸都由實際資本財進行，則由供需所決定的利率，必定會與這個特定利率相同。)



- Knut Wicksell, *Interest and Prices*, 1936, p. 102

後續研究者，包括Friedman (1968)、Taylor (1993) 和Woodford (2003) 等人，又進一步以更詳細完善的定義來描述自然利率，並探討如何根據這個概念來制定政策。在這些研究者的努力下，自然利率已成為許多國家在制定貨幣政策時的重要依據。

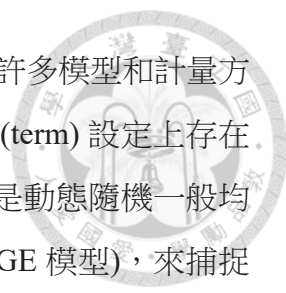
我們參考Archibald and Hunter (2001)、Laubach and Williams (2003) 和Wynne and Zhang (2018) 等近代研究，將自然利率定義為「能夠使一段期間內，經濟體的通膨率和預期通膨率維持穩定，並且產出達到潛在產出的實質利率」，其中潛在產出是指「經濟體充分運用勞動力和資本下，所能達到的最大產出」。

根據上述定義，Laubach and Williams (2003) 強調，若貨幣政策的目標是穩定通膨率和失業率，可以將中長期實質利率錨定於自然利率，對此他們用封閉經濟體版本的泰勒法則進行說明：

$$i_t = \pi_t^e + \hat{r}_t^* + \alpha_\pi(\pi_t - \pi^*) + \alpha_y \tilde{y}_t, \quad (1.1)$$

其中 i_t 是目標名目利率， π_t^e 是預期通膨率， $\pi_t - \pi^*$ 是實際通膨率和目標通膨率的差距， \tilde{y}_t 是實際產出和潛在產出的差距 (下稱利率缺口)，而 \hat{r}_t^* 即是貨幣政策制定者所預測的自然利率，可視作泰勒法則中的截距項。當經濟體的產出或通膨率偏離目標值，可藉由非零係數 α_π 和 α_y 調整目標名目利率，最終使經濟體的通膨率維持穩定，產出缺口接近 0 (隱含充分就業)，實質利率也趨近於自然利率。

至此，我們已說明自然利率在政策制定上的重要性，並且過去研究者指出，自然利率的變動極有可能是各國利率大幅下滑的原因。遺憾的是，關於臺灣自然利率的研究相當匱乏，最近的研究甚至需要追溯至十餘年前 (吳懿娟, 2005)，並且 2006 年後臺灣的自然利率走勢可謂無人知曉。我們試圖估計臺灣過去二十多年間的自然利率，也期望本研究能喚起國內學者對於自然利率的關注。



鑒於自然利率是不能被直接觀測的變數，過去研究者已嘗試許多模型和計量方法，來估計各國的自然利率。不過這些文獻在自然利率的期間 (term) 設定上存在差異，關注短期波動的研究者傾向採用較具結構性的模型，像是動態隨機一般均衡模型 (Dynamic Stochastic General Equilibrium model，下稱 DSGE 模型)，來捕捉經濟體在受到短期外生衝擊下的「短期自然利率」，這種估計值在實時 (real-time) 預測和政策制定上相當有幫助 (Grossman et al., 2019)。


不過相對於指引未來的貨幣政策，我們的研究目的更偏重於估計和分析自然利率的歷史值，因此本文將聚焦於不受短期產出和物價波動影響的「中長期自然利率」，並基於「半結構性模型」進行估計，其優勢在於模型設定更簡單易懂，同時也具備一定程度的經濟解釋性。

首度採用半結構性模型來估計自然利率的是 Laubach and Williams (2003)，他們以 IS Curve 和 Phillips Curve 為理論基礎，建構多變量不可觀測成分模型 (Unobserved Components model，下稱 UC 模型)，並假設產出成長率為自然利率的決定因素 (determinant)，依此估計美國從 1961 年至 2000 年的自然利率。後續依循這種 UC 模型的研究不計其數，例如 Mesonnier and Renne (2007) 和 Humala and Briones (2011) 分別使用調整後的模型，估計歐洲地區和秘魯的自然利率。

不過許多研究者認為，Laubach and Williams (2003) 提出的模型 (下稱 LW 模型) 並不完善，無法有效地估計小型開放經濟體的自然利率。例如 Basdevant et al. (2004) 發現，LW 模型無法解釋紐西蘭的實質利率下降，產出成長率卻沒有明顯變化之現象；吳懿娟 (2005) 也曾嘗試使用 LW 模型估計臺灣的自然利率，但由於「結果並不理想」，最終選擇放棄。

Berger and Kempa (2014) 體認到 LW 模型的侷限性，將其改良為適合小型開放經濟體的擴展 UC 模型，具體的調整是控制「實質匯率」和引入「未拋補利率平價等式」，依此估計加拿大的自然利率。後續許多研究者，如 Pedersen (2015) 和 Kupkovič (2020) 等，雖然對細部設定有諸多討論，但大致認同 Berger and Kempa (2014) 的模型架構，並實際運用於估計其他小型開放經濟體的自然利率。

臺灣是典型的小型開放經濟體，貿易依存度位居世界前列，我們推測如果多變量 UC 模型額外控制實質匯率，或許能大幅改變臺灣自然利率的估計結果，進一步修正吳懿娟 (2005) 所描述的「結果並不理想」之情形。不過吳懿娟並未公開



當時得到的數據，而為了驗證前述的猜想，本文分別採用 LW 模型和 Berger and Kempa (2014) 的擴展模型，來估計臺灣從 1995 年至 2021 年的自然利率。最終發現，後者的係數估計值更符合理論預期，而且自然利率的標準誤也明顯低於前者。第二章會說明過去文獻如何逐步擴展半結構式模型，以及自然利率估計方法的發展脈絡，第三章介紹經濟變數資料以及模型架構，第四章描述估計方法和流程，第五章是估計結果的分析，第六章討論我們的研究發現與不足之處，第七章為結論。

2. 文獻回顧



2.1 自然利率

自然利率是不可直接觀測的潛變數 (latent variable)，必須蒐集相關的資料，依照特定的計量模型，才能推導出自然利率的數值 (Holston et al., 2017)。而近代文獻使用的時間序列方法或模型，大致分為三個類別：

1. 單純統計方法或非結構性模型：如Lubik and Matthes (2015) 提出的 TVP-VAR 模型 (Time-Varying Parameter Vector Autoregressive model)，或是Hamilton et al. (2016) 採用的簡單移動平均方法。Grossman et al. (2019) 認為這類文獻的估計結果通常不具備經濟解釋性，而且在物價不穩定的期間，研究者所定義的「自然利率」可能與通膨率脫鉤，估計值之準確性容易受到質疑 (Laubach and Williams, 2003)。
2. 半結構性模型：以Laubach and Williams (2003) 為代表，他們從一系列關於潛在產出 (potential output) 的研究中得到啟發，開創以 UC 模型估計自然利率的先河。此類 UC 模型大多以 IS Curve 和 Phillips Curve 為理論基礎，串起利率、產出以及通膨率的連動關係，來推導出自然利率的數值。
3. 結構性模型：最為常見的是 DSGE 模型，Smets and Wouters (2007) 建構的 DSGE 模型包含金融摩擦 (financial frictions) 對經濟體的影響，是歐洲中央銀行在貨幣政策研究上的主要參考模型 (陳旭昇、湯茹茵, 2012)。Andrade et al. (2019) 指出，DSGE 模型的主要優點是變數之間的結構性關係明確，因此相比於單純時間序列模型和半結構性模型，DSGE 模型更適合做為制定貨幣政策時的參考依據。²

基於前言所提及的原因，我們最終採用多變量 UC 模型 (隸屬於半結構性模型)，來估計臺灣的自然利率。

²因為 DSGE 模型對於外部經濟衝擊較為敏感，能捕捉到自然利率更短期的變化，便於讓政策制定者根據當前經濟情況即時調整最適政策。



2.2 UC 模型與自然利率

UC 模型適用於將時間序列變數分解為趨勢性 (trend) 成分、循環性 (cyclical) 成分、季節性 (seasonal) 成分以及不規則 (irregular) 成分等不可觀測成分。假設 y_t 是取過對數的產出，則將 y_t 分解的基本單變量 UC 模型可以表示成

$$y_t = x_t + s_t, \quad (2.1)$$

其中 x_t 為趨勢性 (可能也包含循環性) 成分， s_t 為季節性成分。(2.1) 的概念起源甚早，常見於探討季節性調整的研究中。

不過自然利率文獻所提及的 UC 模型，主要是指 Engle (1978) 和 Nerlove et al. (1979) 等人初步設計，而後由 Harvey (1990) 發展完善並詳盡解釋的 UCARIMA 模型 (Unobserved Components Autoregressive Integrated Moving Average model)，意即包含不可觀測成分的 ARIMA 模型。

Nerlove et al. (1979) 認為 UCARIMA 模型可以被視為結構性的疊加版 ARIMA 模型 (superimposed ARIMA model)，然而因為 UCARIMA 模型中仍然含有縮減式，被後續研究者歸類為半結構性模型，詳細請見章節 3.3 和 4.1。為避免混淆，本文以下所述的 UC 模型都是指 UCARIMA 模型。

Harvey and Todd (1983) 選擇使用 UC 模型和 ARIMA 模型來分析英國的產出、消費和物價等六個經濟變數的非定態 (unstationary) 趨勢性成分，發現不論是在樣本內或樣本外的預測能力，UC 模型都不遜色於 ARIMA 模型。另外 Harvey (1985) 指出，儘管 ARIMA 模型也能應用於分解經濟變數，但在某些情況下，需要仰賴先備知識來設定限制式，否則 ARIMA 模型將無法認定 (not identifiable)，這使得模型選擇上的靈活性可能不復存在；相較之下，UC 模型最大的特色便是簡單易懂，並且 Pagan et al. (1975) 和 Watson and Engle (1983) 提出的方法已大幅降低了 UC 模型的估計困難度 (詳見章節 4.1)，使其更具有吸引力。

P. K. Clark (1987) 大致沿用 Harvey 的 UC 模型，但認為產出成長率並非定值，而是帶有飄移項的隨機漫步 (Random Walk with a Drift)，在這個假設下，他發現自 1947 年起，美國的產出有明顯的上升趨勢。Kuttner (1994) 的多變量 UC 模型採用 Phillips Curve 和奧肯法則 (Okun's Law) 來連接通膨率和產出，進一步估計在物價

穩定下，美國可能達到的最大產出 (即潛在產出)。Laubach and Williams (2003) 的多變量 UC 模型又納入了 IS Curve，串接起產出、通膨率與利率這三個經濟變數，計算出在維持物價穩定下，經濟體必須設定的自然利率，以及相對應的潛在產出。

LW 模型的一個關鍵性假設是認定產出成長率為自然利率的決定因素，儘管其正確性受到 T. E. Clark and Kozicki (2005) 質疑，這個假設仍被許多後續研究者沿用，Mesonnier and Renne (2007) 也發現，根據歐洲地區自 1979Q2 到 2002Q4 的經濟資料，自然利率和產出成長率存在強烈的關聯性。

2.3 UC 模型的小型開放經濟體版本

LW 模型採用的 IS Curve 和 Phillips Curve 是參考自 Svensson (1997) 和 Rudebusch and Svensson (1999) 的「簡單雙方程式模型」(simple two-equations model)，這兩篇研究旨在探討最適目標通膨率，並藉由此模型來描繪一個國家的總體經濟情勢。但是 Svensson (2000) 明確指出「簡單雙方程式模型」只適用於封閉經濟體，所以包含 Basdevant et al. (2004) 在內的許多研究者，都認為 LW 模型並不能有效估計小型開放經濟體的自然利率。

Holston et al. (2017)³ 提出新版的多變量 UC 模型 (下稱 HLW 模型)，他們參照開放經濟體版本的新興凱因斯模型 (Galí, 2008)，將模型中的通膨率改以「國內生產商品價格」計算，而非「國內總物價」，並進一步估計美國、歐洲地區、加拿大和英國的自然利率。

然而因為缺乏合宜的「國內生產商品價格」指標，Holston et al. (2017) 仍基於核心 CPI 或核心 PCE 等「國內總物價」，來計算這四個地區的通膨率；另外，HLW 模型選擇移除 Phillips Curve 中的進口物價與石油價格，這將忽略國際因素對於該地區物價的影響。有鑒於此，Del Negro et al. (2019) 認為 HLW 模型依然不適合用於估計小型開放經濟體的自然利率。

實際上，「簡單雙方程式模型」存在擴展版本，考量到絕大多數國家都屬於開放經濟體，Svensson (2000) 又提出「簡單小型開放經濟體模型」(simple model of a small open economy)，最顯著的改變是新增「未拋補利率平價等式」，並假設「實

³作者包含 Laubach 和 Williams，我們認為可以視其為 Laubach and Williams (2003) 的後續延伸研究。

質匯率」和經濟體的通膨率、產出和利率都有高度相關。Berger and Kempa (2014) 參考以上調整，率先提出適用於小型開放經濟體的 UC 模型，並依此估計加拿大的自然利率。時日今日，仍有許多研究者致力於改良 UC 模型，嘗試控制其他國際相關因素，像是「各國風險貼水」或「貿易國家的產出成長率」等，以更精確地估計小型開放經濟體的自然利率。

Berger and Kempa (2014) 在 UC 模型中引入了「均衡匯率」(equilibrium exchange rate) 這一概念，我們參考MacDonald and Stein (1999, p. 69)，將其定義為「能夠使一段期間內，經濟體的國際收支維持平衡，並且產出達到潛在產出的實質匯率」。值得注意的是，Archibald and Hunter (2001) 在定義自然利率時，已經預設對於每一組自然利率和潛在產出，皆存在一個相對應的均衡匯率數值，從而確保這三者的定義都能被滿足。

3. 變數與模型設定



3.1 資料與變數說明

表 1 描述本文所使用到的資料之來源與說明，樣本期間為 1994Q1 至 2021Q4 共 112 季，惟估計過程需要使用 4 個季度的資料來計算部分參數的初始值，因此實際估計期間是 1995Q1 至 2021Q4 共 108 季。

表 1: 資料來源與說明

變數類別	資料來源	說明
名目利率	中央銀行	隔夜拆款利率加權平均，單位為百分點。原採用臺灣銀行、合作金庫銀行、第一商業銀行、華南商業銀行和彰化商業銀行之平均利率，2008 年 11 月以後將彰化商業銀行改為臺灣土地銀行。
國內總物價	主計處	核心消費者物價指數 (core CPI)，經季節調整，以 2016 年為參考年 (該年平均值訂為 100)。
實質產出	主計處	連鎖實質國內生產毛額 (GDP)，經季節調整，以 2016 年為參考年。
實質匯率	國際清算銀行	新臺幣的廣義實質有效匯率。根據我國 43 個主要貿易夥伴之貿易權重，組成一籃子貨幣 (currency basket)，來計算新臺幣的間接報價匯率。經季節調整，以 2020 年為參考年 (該年平均值訂為 100)。

我們參考Berger and Kempa (2014) 的建議，以「實質有效匯率」作為實質匯率之變數數值，但注意國際清算銀行 (BIS, Bank for International Settlements) 是採用間接報價法來計算各國的實質匯率。因此在本文中，實質匯率上升是指新臺幣的實質購買力上升，利於進口而不利於出口。

除實質產出外，其餘變數的原始資料皆為月資料。我們先計算三個月的平均值，再參照我國國家發展委員會的作法，以美國普查局 (United States Census Bureau) 發布的 X-13ARIMA-SEAT 法進行季節調整 (Sax and Eddelbuettel, 2018)。表 2 是季資料的敘述統計量。

表 2: 資料之敘述統計量

變數	平均值	標準差	最小值	最大值
名目利率	2.09	2.36	0.08 (2021Q4)	7.59 (1997Q3)
國內總物價	92.71	6.95	77.92 (1994Q1)	105.34 (2021Q4)
log(實質產出)	14.98	0.32	14.33 (1991Q1)	15.51 (2021Q4)
實質匯率	105.06	12.62	89.79 (2011Q4)	133.49 (1994Q1)

藉由以上資料，我們便能進一步估算 UC 模型中的變數。表 3 說明本文會出現的變數之意義以及符號，注意所有的變數都帶有下列標 t ，亦即本文假設這些經濟變數都具有時變性 (time-varying)，其中產出成長率 g_t 的時變性在 P. K. Clark (1987) 的研究中獲得驗證，而關於自然利率的時變性，請參見章節 3.2 的說明。

本文的通膨率和產出成長率之計算方式，是以季節調整後的資料，估算相對於上一季的成長率，再將之折算為年成長率，即經季節調整之季增年率 (saar, seasonally adjusted annualized rate)。我們參照 Holston et al. (2017) 的作法，以 4 倍率的季成長率作為年成長率的近似值，考量到季成長率普遍介於正負 4 個百分點之內，我們認為近似誤差並不會明顯影響估計結果。但注意部分文獻，如 Berger and Kempa (2014) 和 Pedersen (2015)，是採用經季節調整之季增率 (saqr, seasonally adjusted quarterly growth rate)，因此這些文獻中的部分係數需要先經過適當倍率調整，才能與本文之估計結果進行比較。

關於自然利率的假設，本文主要是參照 Galí (2008) 的新興凱因斯模型的推導結果 (見章節 3.2)，該模型採用以下型式的費雪方程式 (Fisher equation)，來計算實質利率：

$$i_t = r_t + \pi_t^e, \quad (3.1)$$

其中 π_t^e 是預期通膨率，因此本文的實質利率屬於事前 (ex ante) 實質利率，而非以



表 3: 變數說明

符號	名稱	說明
π_t	通膨率	國內總物價的年成長率，單位為百分點。
π_t^e	預期通膨率	以過去四期通膨率的移動平均計算。
y_t	實質產出	原始值取對數再乘上 100。
y_t^*	潛在產出	在物價穩定下的最大可能產出，參見前言。
\tilde{y}_t	產出缺口	實質產出與潛在產出的差額。
g_t	產出成長率	潛在產出的年成長率，單位為百分點。
i_t	名目利率	同表 1。
r_t	實質利率	名目利率扣除預期通膨率。
r_t^*	自然利率	足以維持物價穩定的實質利率，參見前言。
\tilde{r}_t	利率缺口	實質利率與自然利率的差額。
q_t	實質匯率	同表 1。
q_t^*	均衡匯率	足以維持產出和國際收支穩定的實質匯率，參見章節 2.3。
\tilde{q}_t	匯率缺口	實質匯率與均衡匯率的差額。
z_t	自然利率剩餘因素	自然利率中，與產出成長率無線性相關的因素之加總。
κ_t	利率缺口剩餘因素	利率缺口中，與匯率缺口無線性相關的因素之加總。

實際通膨率所計算的事後 (ex post) 實質利率。

表 4 是文獻中提及的 4 種預期通膨率計算方式，前三個公式是參考自 Basdevant et al. (2004)，最後一個則是參考自 Laubach and Williams (2003)。Basdevant et al. (2004) 並未說明如何設定公式 2 的係數項 w ，我們選擇訂為 0.5；公式 3 的 $\bar{\pi}$ 是過去一段期間的平均通膨率，我們設定為樣本期間的平均值 1.1。另外值得注意的是，在理性預期假設下，民眾能完全預測物價的變化，此時預期通膨率即為實際通膨率，事前實質利率也會與事後實質利率相等。

表 4: 預期通膨率計算方法

公式	描述
$\pi_{t+1}^e = \pi_{t+1}$	理性預期
$\pi_{t+1}^e = w\pi_{t+1} + (1-w)\pi_t$	不完全理性預期
$\pi_{t+1}^e = w\bar{\pi} + (1-w)\pi_t$	永續學習
$\pi_{t+1}^e = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^3 \pi_{t-i}$	四期移動平均



圖 2: 通膨率和預期通膨率走勢

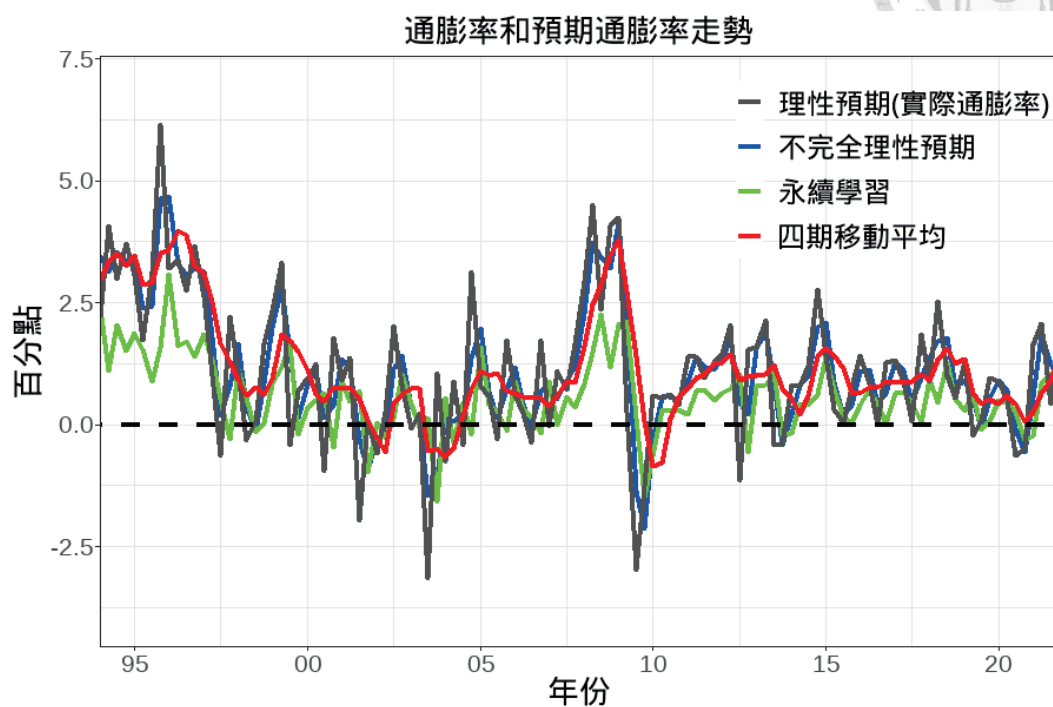
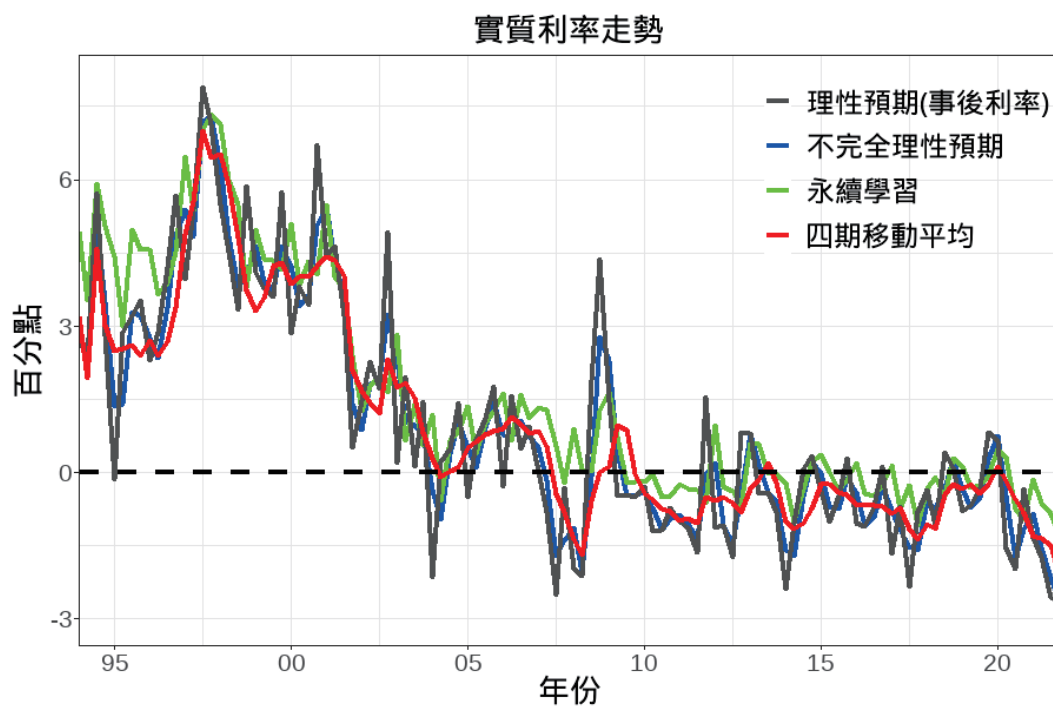


圖 3: 實質利率走勢



我們以這 4 種公式，分別計算臺灣的預期通膨率，以及相對應的實質利率。單就走勢而言 (見圖 2 和圖 3)，我們無從判斷哪一種計算方法比較合理，不過 Basdevant et al. (2004) 提到，根據紐西蘭針對消費者和廠商的調查結果，民眾的預期通膨率通常比實際通膨率更加穩定。另外 Holston et al. (2017) 指出，當資料不充足時，係數項 w 將難以被估計，而採用移動平均法即可避免此問題。

因此本文決定採用四期移動平均法，來估計預期通膨率和事前實質利率，表 5 是這兩者以及 (實際) 通膨率的敘述統計量。

表 5: 通膨率、預期通膨率和實質利率之敘述統計量

變數	平均值	標準差	最小值	最大值
通膨率	1.10	1.45	-3.16 (2002Q4)	6.15 (1995Q1)
預期通膨率	1.10	1.03	-0.85 (2009Q2)	3.97 (1995Q3)
實質利率	0.98	2.13	-2.08 (2021Q4)	7.00 (1997Q3)

3.2 自然利率

有一部分的研究者認為中長期自然利率是非時變的常數，並基於這個假設，以通膨穩定期間的實質利率之平均，作為中長期自然利率的估計值。不過 Williams (2015) 指出，根據定義，自然利率是由經濟體的總供給和總需求所決定，而總供給或總需求曲線可能存在持續性變動 (highly persistent shifts)，並沒有充分理由相信自然利率是恆常不變的數值。本文亦認定中長期自然利率具備時變性，再依此假設建構模型。

Laubach and Williams (2003) 根據最適成長模型 (optimal growth model)，假設經濟體的儲蓄率達到最適值，並且符合平衡成長條件 (balanced growth condition)，自然利率 r_t^* 會滿足以下等式：

$$r_t^* = \frac{1}{\sigma} g_{L,t} + n_t + \theta_t, \quad (3.2)$$

其中 σ 是跨期消費替代彈性 (假設為常數)， $g_{L,t}$ 是勞動擴張型技術進步率 (labor-augmenting technological change rate)， n_t 是人口成長率， θ_t 為時間偏好率。

Laubach and Williams (2003) 將這條等式修改為：

$$r_t^* = cg_t + z_t, \quad (3.3)$$

其中 c 為常數， g_t 是潛在產出的成長率， z_t 則涵蓋了其他所有會影響自然利率的因素，這可能包括但不限於人口成長率 (n_t) 和時間偏好率 (θ_t)。對此，作者們在後續的回顧性研究中提到 (Laubach and Williams, 2016)，LW 模型的貢獻在於連結自然利率 (r^*) 與潛在產出成長率 (g_t)，並進一步用多變量 UC 模型同時估計這兩者，但自然利率的確切型式並非他們關注的重點，因此只粗略地以 z_t 來涵蓋除了 g_t 之外，所有會影響自然利率的因素，此舉可能是為了降低模型的複雜度。

不過我們認為上述的設定有兩個問題，一是 Laubach and Williams (2003) 並沒有明確說明(3.2)的出處，二是(3.3)中的 g_t 與(3.2)中的 $g_{L,t}$ 並不相同。在考慮勞動擴張型的成長模型中，假設勞動收入份額 (labor share) 為 α ，則兩者的關係會滿足

$$g_t = g_{L,t}^\alpha. \quad (3.4)$$

由上式可知 $g_t = g_{L,t}$ 若且唯若 $\alpha = 1$ ，然而近代研究計算得到的勞動收入份額約為 0.66 (Karabarbounis and Neiman, 2014)，這使 $\alpha = 1$ 之假設顯得有些牽強。

因此本文棄用(3.2)，轉而援引 Galí (2008) 所提及之理論，在考慮家戶以及廠商的基本新興凱因斯模型 (basic New Keynesian model) 中，如果滿足市場結清條件 (關鍵在於 $Y_t = C_t$ ，即總產出與總消費相等)，會有以下等式：

$$r_t^* = \frac{1}{\sigma}g_t + \theta_t. \quad (3.5)$$

接著仿照 LW 模型，將這條等式改寫為：

$$r_t^* = cg_t + z_t. \quad (3.6)$$

雖然(3.6)的形式與(3.3)大致相同，但(3.6)是承襲自(3.5)，並不需要(3.4)的假設。

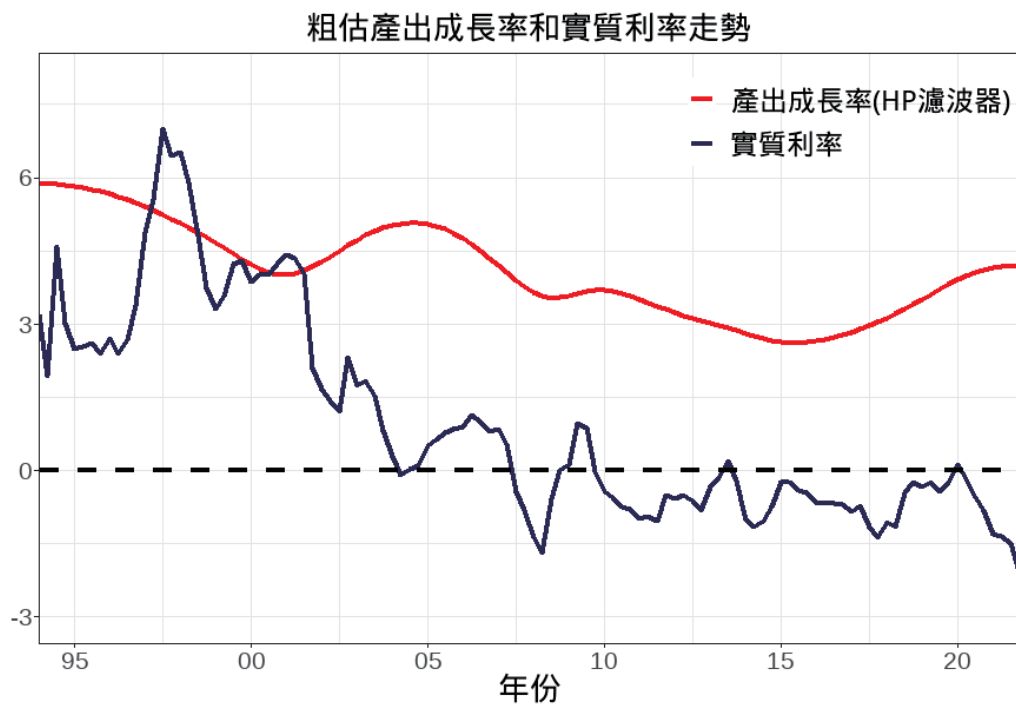
Laubach and Williams (2003) 使用美國自 1961Q1 到 2000Q4 的資料，計算得到的 c 非常接近 1。因此 Holston et al. (2017) 在額外假設 $c = 1$ 下，估計美國、加拿



大、歐洲地區以及英國的自然利率，此舉或可降低估計的不確定性，但 Laubach and Williams (2016) 指出， c 的估計值會受到模型設定以及使用資料的影響，例如在 z_t 為定態的假設下，他們以美國自 1990Q1 到 2015Q2 的資料，得到的 c 之估計值為 1.3。

對於是否追加 $c = 1$ 這項限制，我們決定先觀察臺灣的產出成長率與自然利率的走勢，為簡單起見，這裡採用 HP 濾波器 (Hodrick-Prescott Filter) 粗略估計產出成長率，⁴ 並用實質利率代替自然利率。

圖 4: 粗估產出成長率和實質利率走勢



從圖 4 可見，兩者的走勢確實相似，但波動度並不完全一致，我們認為不額外追加限制的 $r_t^* = c g_t + z_t$ 是更為合理的假設，並依此建構模型。

⁴HP 濾波器為不奠基於結構性模型和經濟理論假設的單純統計方法，適用於分解二階整合，即 I(2) 的變數，而本文以及過去文獻中都假設產出取對數後會是 I(2) 變數，因此能藉由 HP 濾波器估計產出成長率。根據經驗法則，我們將 HP 濾波器參數設定為 1600，以處理季資料的分解。



3.3 封閉經濟體 UC 模型

本文使用多變量 UC 模型處理經濟變數的趨勢循環分解 (trend-cycle decomposition)，在封閉經濟體模型中，我們要分解的變數為實質產出以及實質利率：

$$y_t = \underbrace{y_t^*}_{trend} + \underbrace{\tilde{y}_t}_{cyclical}, \quad (3.7)$$

$$r_t = \underbrace{r_t^*}_{trend} + \underbrace{\tilde{r}_t}_{cyclical}, \quad (3.8)$$

其中 y_t^* 和 \tilde{y}_t 分別為潛在產出和產出缺口， r_t^* 和 \tilde{r}_t 分別為自然利率和利率缺口。注意我們省去了季節性成分和不規則成分，因為採用的資料都已做過季節性調整，並且Engle (1978) 指出不規則成分對估計結果的影響有限。我們後續將展示如何藉由 Phillips Curve 分解通膨率，見(3.14)和(3.22)。

根據(3.6)的設定，自然利率的型式為

$$r_t^* = cg_t + z_t. \quad (3.9)$$

接著參考P. K. Clark (1987)，假設 y_t^* 呈現局部線性趨勢 (local linear trend)：

$$y_t^* = y_{t-1}^* + g_{t-1} + e_t^{y^*}, \quad (3.10)$$

$$g_t = g_{t-1} + e_t^g. \quad (3.11)$$

z_t 則參照 LW 模型，設定為不帶漂移項的隨機漫步：

$$z_t = z_{t-1} + e_t^z. \quad (3.12)$$

最後這兩個等式涵蓋了剩餘的變數：

$$\tilde{y}_t = a \left(\frac{\tilde{r}_{t-1} + \tilde{r}_{t-2}}{2} \right) + \Phi_{\tilde{y},1} \tilde{y}_{t-1} + \Phi_{\tilde{y},2} \tilde{y}_{t-2} + e_t^{\tilde{y}}, \quad (3.13)$$

$$\pi_t = b \tilde{y}_t + \Phi_{\pi,1} \pi_{t-1} + \Phi_{\pi,2} \pi_{t-2} + \Phi_{\pi,3} \pi_{t-3} + \Phi_{\pi,4} \pi_{t-4} + e_t^\pi. \quad (3.14)$$



(3.13)假設平均利率缺口與產出缺口為跨期負相關 ($a < 0$)，(3.14)假設產出缺口與通膨率為正相關 ($b > 0$)，可以分別被視為 IS Curve 和 Phillips Curve，模型因而獲得認定 (identification)。⁵

上述的 IS Curve 和 Phillips Curve，是參考自 Svensson (1997) 與 Rudebusch and Svensson (1999) 的「簡單雙方程式模型 (simple two-equations model)」，Svensson 等人相信這個小巧的模型足以大致描繪 (封閉經濟體的) 總體經濟情勢，並且與部分央行採用的複雜模型有幾分相似。

另外，我們參照 Holston et al. (2017) 的設定，選擇移除 Phillips Curve 中原本控制的石油價格和進口物價，因此模型可謂完全沒有涵蓋到國際因素。而關於落遲項期數，則大致遵循 LW 模型的設定，但經過嘗試後，我們認為 Phillips Curve 中控制四期通膨率的落遲項表現更好，並且與計算預期通膨率時的期數設定一致 (我們以四期移動平均做計算)；此外，Phillips Curve 中的產出缺口與通膨率是同期相關，而非跨期相關，這參考自 Berger and Kempa (2014) 和 Pedersen (2015) 的設定。

原始版本的 LW 模型和 HLW 模型大致由(3.7)至(3.14)構成，但 Fiorentini et al. (2018) 發現，並沒有任何一個等式能解釋利率缺口的變化，並且這將導致(3.9)中的 z_t 難以被估計。我們參照他們的模擬結果與建議，額外添加以下等式至模型中：

$$\tilde{r}_t = \rho \tilde{r}_{t-1} + e_t^k. \quad (3.15)$$

他們表示此舉不僅讓模型得以更精確地解釋利率缺口的更新過程，也能大幅降低 z_t 的均方誤差。我們預期 $|\rho| < 1$ ，即產出缺口符合均值回歸。

本文的封閉經濟體 UC 模型即由(3.7)至(3.15)所構成，為簡單起見，以下簡稱

⁵Rudebusch and Svensson (1999) 假設 $\sum_{i=1}^4 \Phi_{\pi,i} = 1$ ，並發現檢定結果都為無法拒絕，因此(3.14)是加速型式 (accelerationist form) 的 Phillips curve，我們也沿用這項假設。而雖然沒有設定限制式，但我們預期 $|\Phi_{\tilde{y},1} + \Phi_{\tilde{y},2}| < 1$ ，亦即產出缺口符合均值回歸 (mean reversion)。此外我們移除 LW 模型中 $a \leq -0.0025$ 以及 $b \geq 0.025$ 的限制，但使用蒙地卡羅法計算標準誤時，會捨棄 a 與 b 介於 $[-0.025, 0.025]$ 之間的模擬數值，若估計值落於此區間，則再進一步縮小捨棄之區間。

為封閉模型，它的狀態空間表達式為 (詳細結構請參見附錄一)：

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_t + \mathbf{A}\mathbf{z}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\eta}_t, \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.17)$$



其中

- $p \times 1$ 向量 \mathbf{y}_t 為 p 個可觀測之內生變數，
- $m \times 1$ 向量 \mathbf{x}_t 為 m 個無法觀測之狀態變數，
- $k \times 1$ 向量 \mathbf{z}_t 為 k 個可觀測之控制變數。

而 $\mathbf{H}, \mathbf{A}, \mathbf{F}$ 包含(3.7)至(3.15)的所有係數項，以下統稱為係數矩陣。 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 和 $\boldsymbol{\eta}_t$ 則包含(3.7)至(3.15)的所有誤差項，其中我們以 $\sigma_{e_{ij}}$ 表示 $e_{ij}^{\tilde{y}}$ 的標準差，其餘變數也是採用同樣的形式，注意所有誤差項的標準差 (σ) 都不帶下標 t ，即不具時變性。接著假設 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 和 $\boldsymbol{\eta}_t$ 服從以下常態分配：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}), \quad (3.18)$$

$$\boldsymbol{\eta}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}). \quad (3.19)$$

\mathbf{R} 和 \mathbf{Q} 為對稱矩陣，對角線元素為正數，其餘元素皆為 0，意即我們假設誤差之間都相互獨立，以下統稱 \mathbf{R} 和 \mathbf{Q} 為誤差共變異矩陣。

(3.16)被稱作觀測方程式 (measurement equation)，描述可觀測之內生變數的結構；而(3.17)被稱作狀態方程式 (state equation)，描述不可觀測之狀態變數的更新過程，而本文的狀態變數服從 ARIMA(p, d, q) 並且 p, d, q 都有界，因此狀態方程式可被視為縮減 VAR 模型 (Reduced Vector Autoregression model)。正因為 UC 模型可由一組結構式(3.16)和一組縮減式(3.17)所表示，使其被歸類為半結構性模型。

將 UC 模型改寫成狀態空間表達式後，再藉由卡爾曼濾波器搭配最大概似法，就可以有效率地估計係數矩陣 ($\mathbf{H}, \mathbf{A}, \mathbf{F}$) 以及狀態變數 (\mathbf{x}_t)，詳細請參見章節4.1。



3.4 小型開放經濟體 UC 模型

本文參照Berger and Kempa (2014) 對 LW 模型進行調整，首先在模型中額外納入實質匯率，並且參與趨勢循環分解：

$$q_t = \underbrace{q_t^*}_{trend} + \underbrace{\tilde{q}_t}_{cyclical}, \quad (3.20)$$

其中 q_t^* 為均衡匯率， \tilde{q}_t 為匯率缺口。

接著參考Ball (1999) 和Svensson (2000)，將 IS Curve 和 Phillips Curve 修改為開放經濟體版本：

$$\tilde{y}_t = a \left(\frac{\tilde{r}_{t-1} + \tilde{r}_{t-2}}{2} \right) + \Phi_{\tilde{y},1} \tilde{y}_{t-1} + \Phi_{\tilde{y},2} \tilde{y}_{t-2} + \theta_1 \tilde{q}_{t-1} + \theta_2 \tilde{q}_{t-2} + e_t^{\tilde{y}}, \quad (3.21)$$

$$\pi_t = b \tilde{y}_t + \Phi_{\pi,1} \pi_{t-1} + \Phi_{\pi,2} \pi_{t-2} + \Phi_{\pi,3} \pi_{t-3} + \Phi_{\pi,4} \pi_{t-4} + \psi \Delta q_{t-1} + e_t^{\pi}. \quad (3.22)$$

這兩條等式隱含前兩期的匯率缺口 ($\tilde{q}_{t-1}, \tilde{q}_{t-2}$) 會影響當期的產出缺口，並且前一期的實質匯率波動 (Δq_{t-1}) 會影響當期的通膨率，而係數的限制式則與封閉模型相同 (參見腳註 5)。

除了需求面的 IS Curve 以及供給面的 Phillips Curve，Berger and Kempa (2014) 認為國際收支也是影響小型開放經濟體的關鍵因素，因此於 UC 模型中引進未拋補利率平價 (UIP, Uncover Interest Rate Parity) 等式：

$$\tilde{r}_t = \gamma \tilde{q}_{t-1} + \kappa_{t-1}, \quad (3.23)$$

$$\kappa_t = \rho \kappa_{t-1} + e_t^{\kappa}. \quad (3.24)$$

與傳統的 UIP 不同，(3.23)並沒有認定實質匯率和實質利率會影響彼此的均衡值 (也就是自然利率和均衡匯率)，而只假設匯率缺口和利率缺口為跨期正相關 ($\gamma > 0$)，這隱含的概念與假設是，實質匯率暫時高於均衡值時會產生貶值預期，為維持國際收支平衡，利率缺口必須為正。(3.24)則認定利率缺口的誤差項 (κ_t) 服從 AR(1)，型式與(3.15)大致相同，並且也預期 $|\rho| < 1$ 。

至於潛在匯率，假定其服從不帶漂移項的隨機漫步：

$$q_t^* = q_{t-1}^* + e_t^{q^*}. \quad (3.25)$$



並假設匯率缺口服從定態的 AR(2)

$$\tilde{q}_t = \Phi_{\tilde{q},1}\tilde{q}_{t-1} + \Phi_{\tilde{q},2}\tilde{q}_{t-2} + e_t^{\tilde{q}}. \quad (3.26)$$

雖然沒有設定係數限制式，但我們預期 $|\Phi_{\tilde{q},1} + \Phi_{\tilde{q},2}| < 1$ ，亦即匯率缺口也符合均值回歸。

最後再加上 LW 模型原有的等式：

$$y_t = y_t^* + \tilde{y}_t, \quad (3.27)$$

$$r_t = r_t^* + \tilde{r}_t, \quad (3.28)$$

$$r_t^* = cg_t + z_t, \quad (3.29)$$

$$y_t^* = y_{t-1}^* + g_{t-1} + e_t^{y^*}, \quad (3.30)$$

$$g_t = g_{t-1} + e_t^g, \quad (3.31)$$

$$z_t = z_{t-1} + e_t^z. \quad (3.32)$$

小型開放經濟體 UC 模型即由(3.20)至(3.32)組成，為簡單起見，以下簡稱為開放模型。在假設誤差互相獨立並服從常態假設下，可將開放模型改寫成狀態空間表達式 (詳細結構請參見附錄二)，再由卡爾曼濾波器搭配最大概似法，便能估計係數矩陣與狀態變數。

4. 估計方法



4.1 狀態空間表達式與卡爾曼濾波器 (Kalman Filter)

在Mehra (1974) 與Pagan et al. (1975) 的指引下，越來越多研究者注意到，包含 UC 模型在內的許多經濟領域時間序列模型，只要稍微轉換表示方法，其實架構與控制工程 (control engineering) 領域的狀態空間模型 (state-space model) 十分相似，而狀態空間模型發展出的演算法，相比於過去經濟學界用的估計方法，過程通常更為精簡且效率更高，卡爾曼濾波器 (Kalman Filter) 便是其中一個例子。

在章節3.3和章節3.4中，我們整理出 UC 模型的狀態空間表達式：

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_t + \mathbf{A}z_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}), \quad (4.1)$$

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\eta}_t, \quad \boldsymbol{\eta}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}), \quad t = 1, \dots, T. \quad (4.2)$$

接著進一步假設狀態變數 \mathbf{x}_t 服從條件常態分配：

$$\mathbf{x}_t | z_t \sim N(\boldsymbol{\xi}_t, \mathbf{P}_t). \quad (4.3)$$

條件期望值 $\boldsymbol{\xi}_t$ 和條件共變異矩陣 \mathbf{P}_t 都帶有下列標 t ，符合狀態變數具備時變性的假設。

在第 0 期條件期望值 ($\boldsymbol{\xi}_0$) 和條件共變異矩陣 (\mathbf{P}_0) 以及誤差共變異矩陣 (\mathbf{R}, \mathbf{Q}) 已知下，可以依照Kalman (1960) 所設計的方程式，計算各期的狀態變數條件期望值 ($\boldsymbol{\xi}_t$)，並動態調整條件共變異矩陣 (\mathbf{P}_t)，接著依據每一期的預測誤差 ($\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\eta}_t$) 來計算概似函數，便能得到係數矩陣 ($\mathbf{H}, \mathbf{A}, \mathbf{F}$) 的最大概似估計值，和狀態變數 \mathbf{x}_t 之點估計與區間估計 (由 $\boldsymbol{\xi}_t$ 和 \mathbf{P}_t 計算而來)。

4.2 最大期望演算法 (EM Algorithm)

在控制工程領域文獻中，通常研究者對於要估計的狀態變數有一定程度的認識，所以大致能掌握 $\boldsymbol{\xi}_0, \mathbf{P}_0, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$ 的數值；相較之下，經濟學界對於潛在產出、自然利

率等變數所知甚少，而且如果錯誤地設定這些超參數，將拖慢估計的收斂速度或甚至發散 (Watson and Engle, 1983)。

就如同以上敘述，我們曾經嘗試以普通版本的卡爾曼濾波器之演算法，⁶ 但發現估計結果對於 ξ_0, P_0, R, Q 等超參數相當敏感，且概似函數發散之情形並不少見。此外，在過去文獻中，雖有研究者採用和本文類似的 UC 模型來估計臺灣的自然利率，卻都沒有公開相關數據，這使我們無從得知對於臺灣的資料而言，何謂「適當且合理」的超參數數值。

因此，我們改為使用經濟領域研究中更為常見的最大期望演算法卡爾曼濾波器 (EM Algorithm Kalman Filter)，其優點是不需要固定 ξ_0, P_0, R, Q ，而是將它們視作參數，並在估計過程中逐步微調這些參數，這將使概似函數的收斂過程更加穩定 (Shumway and Stoffer, 1982)。

最大期望演算法由 E 步驟 (expectation step) 和 M 步驟 (maximization step) 構成，藉由反覆地計算期望值和極大化概似函數，以獲得收斂的估計結果。其應用於卡爾曼濾波器的具體過程如下 (Shumway and Stoffer, 1982)：

1. 設定第 0 期狀態變數的條件期望值和條件共變異矩陣之初始猜想值 $\xi_0(0)$ 和 $P_0(0)$ ，以及係數矩陣與誤差共變異矩陣的初始猜想值 $H(0), A(0), F(0), R(0)$ 和 $Q(0)$ 。
2. M 步驟：固定 $\xi_0(0)$ 和 $P_0(0)$ ，計算係數矩陣與誤差共變異矩陣的最大概似估計值 $H(1), A(1), F(1), R(1)$ 和 $Q(1)$ 。
3. E 步驟：根據前一步得到的 $H(1), A(1), F(1), R(1)$ 和 $Q(1)$ ，更新第 0 期狀態變數的條件期望值 $\xi_0(1)$ 和條件共變異矩陣 $P_0(1)$ 。
4. 重複第 2 步和第 3 步，以 $\xi_0(j)$ 和 $P_0(j)$ 計算 $H(j+1), A(j+1), F(j+1), R(j+1)$ 和 $Q(j+1)$ 的估計值，直到概似函數收斂為止。
5. 最後由第 4 步得到的收斂解 H, A, F, R 和 Q ，估計各期的狀態變數 x_t 。

儘管最大期望演算法卡爾曼濾波器需要由研究者手動設定初始猜想值 (見步驟 1)，但 Shumway and Stoffer (1982) 發現，即使初始猜想值並不準確，在重複數次的 M 步驟和 E 步驟後，通常也能得到合理的估計值。Harvey and Todd (1983) 則強

⁶即文獻中稱呼的 likelihood method (Shumway and Stoffer, 1982) 或 scoring algorithm (Watson and Engle, 1983)。

調，最大期望演算法卡爾曼濾波器收斂與否的關鍵，在於 P_0 的數值是否合理，對此，我們遵照他們提及之經驗法則，根據經濟知識，替潛在產出、產出成長率等狀態變數設定足夠大的初始猜想變異數 (即 $P_0(0)$ 的對角元素)，便能讓 $P_0(j)$ 在重複的 M 步驟和 E 步驟中，向下收斂至合理範圍。

另外在估計過程中，我們會先對 R 和 Q 中所有誤差項的變異數 (σ^2) 做對數轉換，這可以確保變異數的估計結果都不為負數，毋須額外設定限制式。

4.3 單端式估計與雙端式估計

卡爾曼濾波器能夠計算兩種類型的狀態變數估計值，單端式估計 (one-sided estimation) 是由當期和更早期的資料來計算，通常用於實時預測 (Laubach and Williams, 2003)；而雙端式估計 (two-sided estimation) 則會根據單端式估計的誤差，額外運用卡爾曼平滑器 (Kalman Smoother) 來更新所有期數的估計值，雖然不具備實時預測性，但通常比單端式估計更為準確，尤其是期數較早的狀態變數。

然而因為本文採用最大期望演算法，在卡爾曼濾波器的迭代計算過程中，單端式估計仍必須使用樣本內的所有資料，動態修正係數和參數，來得到最終的估計值。在這種情況下，我們認為單端式估計已不能被視為實時預測的方法，而且相比於預測性，本篇研究更注重估計值的準確度，因此全面採用雙端式估計結果。

4.4 堆積問題 (Pile-Up Problem)

Laubach and Williams (2003) 強調在使用多變量 UC 模型分解變數時，需要注意 Stock (1994) 提及的「堆積問題」(pile-up problem)。

簡單而言，多變量 UC 模型中的堆積問題是指，在被趨勢循環分解的變數中，如果包含兩個以上的非定態狀態變數，並且這些狀態變數的變異數存在較大的差距，此時採用最大概似法同時估計這些狀態變數會產生估計偏誤。當狀態變數波動度相對較大，它的變異數將會被高估，反之則是變異數被低估，而若波動度差異過大，部分狀態變數甚至會被誤認為常數。

卡爾曼濾波器的計算過程中，同一期的狀態變數 (即 x_t 的元素)，正好就是被最大概似法一起估計的，即便採用最大期望演算法版本，依然可能產生堆積問題，導致狀態變數的變異數存在估計偏誤。

接著我們檢視封閉模型中，被分解的變數是否含有多個非定態狀態變數：

$$y_t = y_t^* + \tilde{y}_t, \quad (4.4)$$

$$r_t = cg_t + z_t + \tilde{r}_t, \quad (4.5)$$

其中

$$y_t^* = y_{t-1}^* + g_{t-1} + e_t^{y^*}, \quad (4.6)$$

$$g_t = g_{t-1} + e_t^g, \quad (4.7)$$

$$z_t = z_{t-1} + e_t^z. \quad (4.8)$$

根據假設， $\{y_{t-1}^*, g_t, z_t\}$ 都是服從隨機漫步的非定態變數，因此由(4.6)，可知在潛在產出 y_t^* 之中，含有兩個需要被估計的非定態狀態變數 g_{t-1} 和 y_{t-1}^* ；而(4.5)指出在實質利率 r_t 之中，也含有兩個需要被估計的非定態狀態變數 g_t 和 z_t 。

開放模型還包含實質匯率的分解：

$$q_t = q_t^* + \tilde{q}_t, \quad (4.9)$$

其中

$$q_t^* = q_{t-1}^* + e_t^{q^*}, \quad (4.10)$$

$$\tilde{q}_t = \Phi_{\tilde{q},1}\tilde{q}_{t-1} + \Phi_{\tilde{q},2}\tilde{q}_{t-2} + e_t^{\tilde{q}}. \quad (4.11)$$

我們假設 \tilde{q}_t 服從定態的 AR(2)，所以實質匯率 q_t 之中，只含有一個需要估計的非定態狀態變數 q_t^* 。

由以上的整理可知，不管是封閉模型或開放模型，如果採用卡爾曼濾波器搭配最大概似法進行估計， y_t^* 和 r_t 的趨勢循環分解都有可能面臨堆積問題。



4.5 三階段估計過程

我們參照Stock and Watson (1998) 的作法與說明，使用多階段最大概似估計過程，搭配中位數不偏估計法 (median unbiased estimation)，以避免堆積問題導致的估計偏誤。本文的 UC 模型中， y_t 和 r_t 總共多出兩個非定態狀態變數，因此需要增加兩個估計階段，共計三階段。具體步驟如下：

第一階段：先忽略 r_t ，以簡化版的 UC 模型處理 y_t 的趨勢循環分解，但在 g_t 為常數的虛無假設下進行估計，接著藉由(3.10)中的誤差項 $e_t^{y^*}$ ，對照Stock and Watson (1998) 模擬得到的檢定統計量表，計算出 g_t 與 y_t^* 的誤差標準差比值之中位數不偏估計值：

$$\lambda_g = \frac{\sigma_{eg}}{\sigma_{ey^*}}. \quad (4.12)$$

在其後的估計過程中，只要控制 λ_g 即能避免 g_t 的變異數估計偏誤。

第二階段：在控制 λ_g 下，以完整的模型處理所有變數的趨勢循環分解，但在 z_t 為常數的假設下進行估計，接著藉由(3.13)或(3.21)的 IS Curve 中， a 的估計值以及誤差項 $e_t^{\tilde{y}}$ ，計算出 z_t 與 \tilde{y}_t 的誤差標準差比值之中位數不偏估計值：

$$\lambda_z = |a| \times \frac{\sigma_{ez}}{\sigma_{e\tilde{y}}}. \quad (4.13)$$

在其後的估計過程中，只要控制 λ_z 即能避免 z_t 的變異數估計偏誤。

第三階段：在控制 λ_g 和 λ_z 下估計完整的模型，從而得到不偏的估計結果。

本文將採用第三階段的係數以及狀態變數估計結果，再以Hamilton (1986) 設計的蒙地卡羅法計算狀態變數之標準誤和信賴區間。

5. 實證結果分析



5.1 係數與參數估計結果

在檢視自然利率的走勢之前，我們必須先驗證模型中的係數估計值是否符合理論假設和預期，確保本文的自然利率估計值具備經濟解釋性。表 6 列出了封閉模型和開放模型中，各項係數和參數的估計結果；表 7 則是本文開放模型與其他相關研究的係數估計值比較。

首先檢查產出缺口、利率缺口和匯率缺口的是否符合均值回歸。在封閉模型和開放模型中，它們的落遲項係數之點估計總和皆小於 1，這符合我們對於循環性成分 (cyclical component) 的預期。

但值得注意的是，在封閉模型中，利率缺口落遲項係數 ρ 之點估計為 0.988，非常接近 1，這隱含封閉模型的利率缺口可能不具備均值回歸性質，我們將會於章節 5.2 檢查其估計值的走勢。

接著比較 IS Curve 的估計結果，以下是兩種模型分別採用的 IS Curve 型式：

$$\text{封閉：}\tilde{y}_t = a \left(\frac{\tilde{r}_{t-1} + \tilde{r}_{t-2}}{2} \right) + \Phi_{\tilde{y},1}\tilde{y}_{t-1} + \Phi_{\tilde{y},2}\tilde{y}_{t-2} + e_t^{\tilde{y}}, \quad (5.1)$$

$$\text{開放：}\tilde{y}_t = a \left(\frac{\tilde{r}_{t-1} + \tilde{r}_{t-2}}{2} \right) + \Phi_{\tilde{y},1}\tilde{y}_{t-1} + \Phi_{\tilde{y},2}\tilde{y}_{t-2} + \theta_1\tilde{q}_{t-1} + \theta_2\tilde{q}_{t-2} + e_t^{\tilde{y}}. \quad (5.2)$$

開放模型中額外控制兩期匯率缺口，然而因為係數項 θ_1 和 θ_2 都未達顯著水準，不足以認定匯率缺口會影響臺灣的產出缺口。

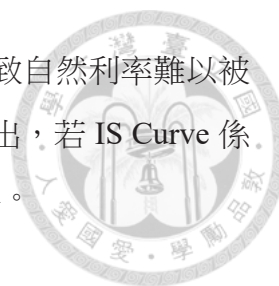
不過我們注意到，兩種模型的 IS Curve 係數項 a 之估計結果存在明顯差異，開放模型的 a 顯著小於 0，代表臺灣的產出缺口與前兩期的平均利率缺口呈現負相關，與 IS Curve 的理論假設一致；相較之下，在沒有控制匯率缺口的封閉模型中，我們無法拒絕 a 為 0 的虛無假設。

許多研究者強調，IS Curve 係數項 a 是否顯著，將會高度影響自然利率的估計結果。Holston et al. (2017) 發現，在使用 HLW 模型下 (我們將之歸類為封閉經濟體 UC 模型)，英國和歐洲地區的 IS Curve 係數項 a 之估計值，只落在顯著臨界值



表 6: 係數和參數估計結果

類別	項目	封閉模型		開放模型	
		估計值	90% 信賴區間	估計值	90% 信賴區間
標準差	λ_g	0.105		0.098	
比值	λ_z	0.030		0.048	
產出	a	-0.106	[-0.426, 0.215]	-0.239	[-0.460, -0.018]
	$\Phi_{\tilde{y},1}$	0.949	[0.786, 1.111]	0.886	[0.698, 1.075]
	$\Phi_{\tilde{y},2}$	-0.207	[-0.385, -0.028]	-0.140	[-0.351, 0.071]
	θ_1			-1.522	[-4.009, 0.966]
	θ_2			1.649	[-1.041, 4.339]
	$\sigma_{e\tilde{y}}$	1.463		1.393	
	σ_{ey^*}	0.405		0.401	
	σ_{eg}	0.043		0.039	
通膨率	b	0.114	[0.003, 0.226]	0.151	[0.014, 0.287]
	$\Phi_{\pi,1}$	0.476	[0.325, 0.627]	0.474	[0.302, 0.646]
	$\Phi_{\pi,2}$	0.124	[-0.104, 0.352]	0.156	[-0.087, 0.398]
	$\Phi_{\pi,3}$	-0.046	[-0.265, 0.174]	-0.076	[-0.307, 0.155]
	ψ			-0.207	[-0.407, -0.007]
	$\sigma_{e\pi}$	1.311		1.263	
利率	c	-0.124	[-2.677, 2.429]	0.313	[-0.244, 0.870]
	γ			1.040	[-0.624, 2.704]
	ρ	0.988	[0.935, 1.042]	0.978	[0.887, 1.069]
	σ_{ez}	0.665		0.280	
	$\sigma_{e\kappa}$	0.257		0.138	
匯率	$\Phi_{\tilde{q},1}$			1.496	[1.244, 1.748]
	$\Phi_{\tilde{q},2}$			-0.728	[-0.995, -0.462]
	σ_{eq^*}			1.716	
	$\sigma_{e\tilde{q}}$			0.227	
對數 概似 函數		-463.092		-654.441	



的邊緣，他們認為這是自然利率的標準誤過大之主因，進而導致自然利率難以被認定 (barely identified)。Fiorentini et al. (2018) 的模擬結果也指出，若 IS Curve 係數項 a 之信賴區間包含或接近 0，將大幅提高自然利率的標準誤。

表 7: 本文與其他研究的係數估計結果比較

係數	本文開放模型		Berger and Kempa (2014)		Pedersen (2015)	
	臺灣		加拿大		丹麥	
	估計值	90% 信賴區間	估計值	90% 信賴區間	估計值	90% 信賴區間
a	-0.24	[-0.46, -0.02]	-0.03	[-0.05, -0.01]	-0.35	[-0.40, -0.31]
θ_1	-1.52	[-4.01, 0.97]	0.04	[0.02, 0.07]	-0.04	[-0.07, -0.01]
θ_2	1.65	[-1.04, 4.34]	-0.05	[-0.08, -0.03]	-0.02	[-0.05, 0.02]
b	0.15	[0.01, 0.29]	0.22	[0.13, 0.30]	0.02	[0.01, 0.04]
ψ	-0.21	[-0.41, -0.01]	-0.07	[-0.11, -0.04]	-0.25	[-0.27, -0.23]
c	0.31	[-0.24, 0.87]	0.94	[0.80, 1.07]	0.93	[0.83, 1.00]
γ	1.04	[-0.62, 2.70]	0.15	[0.10, 0.20]	0.03	[0.01, 0.05]

Phillips Curve 主要的用途為衡量產出缺口和通膨率的關係：

$$\pi_t = b\tilde{y}_t + \sum_{i=1}^4 \Phi_{\pi,i} \pi_{t-i} + e_t^{\pi}, \quad (5.3)$$

$$\pi_t = b\tilde{y}_t + \sum_{i=1}^4 \Phi_{\pi,i} \pi_{t-i} + \psi \Delta q_{t-1} + e_t^{\pi}. \quad (5.4)$$

開放模型的 Phillips Curve 額外控制實質匯率，並且係數項 ψ 顯著為負，代表實質匯率變化量與臺灣的通膨率為負相關，這與我們對「輸入性通膨」的認知相同。

在開放模型和封閉模型中，係數項 b 都顯著為正，符合「產出過剩會推升物價」的經濟理論。由表 7 可知加拿大的 b 之估計值為 0.22，這低於 Berger and Kempa (2014) 的預期值，他們援引近代學者提出的「Phillips Curve 平坦化現象」(flattening of the Phillips curve) 來解釋此結果。而本文開放模型的 b 之估計值 0.15 相比之下又更小，並且與劉淑敏 (2011) 使用 SVAR 模型 (結構化向量自我迴歸模型) 得到的結果頗為相似，這隱含臺灣可能也面臨平坦化的 Phillips Curve，意即需要更大幅度地限縮實質產出，才能有效降低臺灣的通膨率。

下一步是驗證Laubach and Williams (2003) 提出的關鍵性假設：

$$r_t^* = c g_t + z_t. \quad (5.5)$$

雖然我們先前根據圖 4，判斷 r_t^* 和 g_t 的走勢可能有些類似，但估計結果顯示，兩種模型都無法拒絕 c 為 0 的虛無假設，不足以支持「產出成長率是自然利率的決定因素」這項假說。

最後我們檢視開放模型中，未拋補利率平價等式之估計結果：

$$\tilde{r}_t = \gamma \tilde{q}_{t-1} + \kappa_{t-1}. \quad (5.6)$$

γ 之估計值雖是符合預期的正數 (1.04)，但由於標準誤過大，我們無法斷言新臺幣的遠期升水會造成臺灣的利率下滑。

綜合以上觀察，兩種模型的係數估計值都並未有明顯不合理之處，不過相較於封閉模型，開放模型的 IS Curve 係數項 a 呈現負顯著，更加符合理論假設。而根據前人的研究結果，我們推測這將使開放模型的自然利率之標準誤明顯下降。

值得注意的是，本文的開放模型顯示，實質匯率並不會顯著影響臺灣的實質利率和實質產出，這與其他國家的估計結果有明顯的區別 (見表 7)，我們將會進一步討論此問題。

5.2 狀態變數估計結果

表 8 展示本文模型中各個狀態變數的平均標準誤，從中可以發現相比於封閉模型，開放模型的狀態變數之平均標準誤皆下降，其中又以自然利率最為明顯，其平均標準誤從 3.98 個百分點，大幅下滑至 1.27 個百分點。

圖 5 至圖 13 是本文的狀態變數估計值走勢，以及相對應的 90% 信賴區間，其中圖 5 至圖 10 的左側是封閉模型之估計結果，右側則是開放模型；圖 11 至圖 13 為開放模型額外設定的狀態變數之走勢。

首先我們觀察到，開放模型和封閉模型的產出缺口之走勢極度相似 (見圖 5)，同樣地，兩種模型的潛在產出和產出成長率之估計值也沒有顯著的差別 (見圖 6 和圖 7)，平均標準誤亦只有微幅的變化 (見表 8)。我們認為這隱含控制「實質匯率」



圖 5: 產出缺口 \tilde{y}_t 估計值

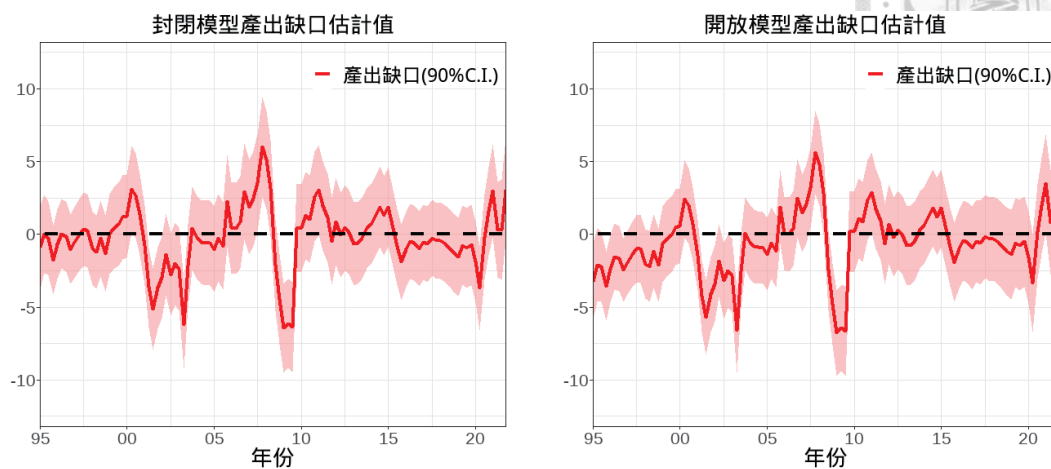


圖 6: 潛在產出 y_t^* 估計值

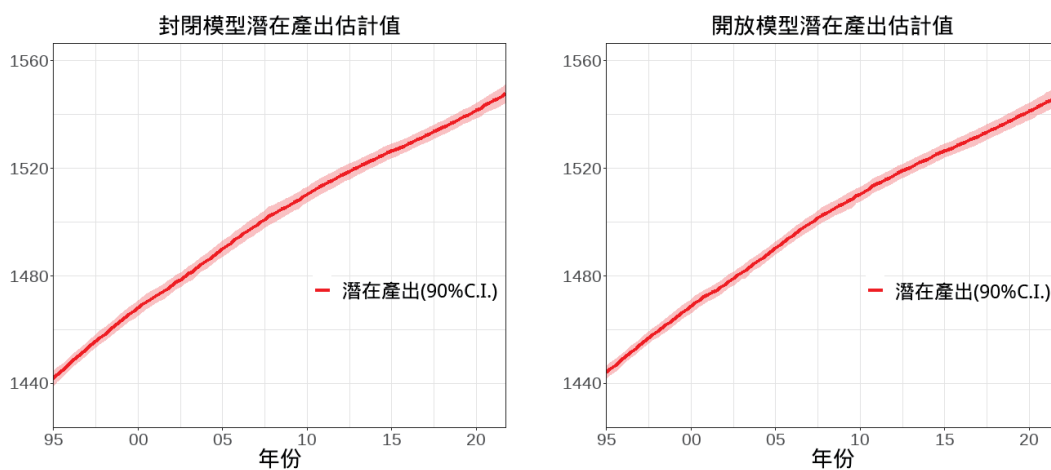


圖 7: 產出成長率 g_t 估計值

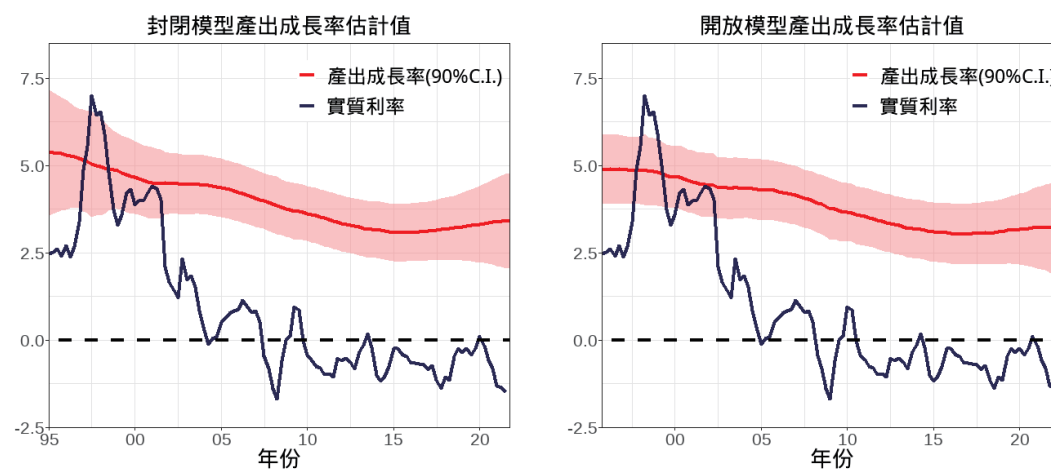




圖 8: 利率缺口 \tilde{r}_t 估計值

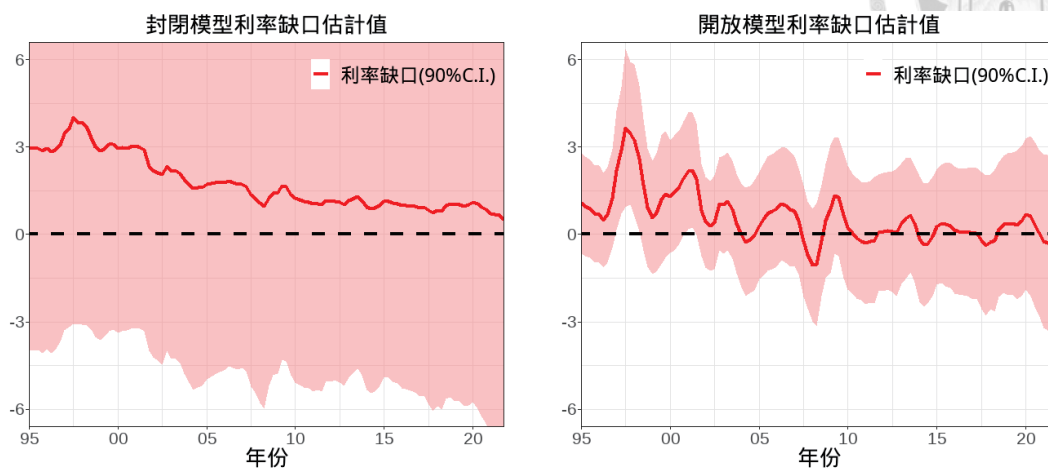


圖 9: 自然利率 r_t^* 估計值

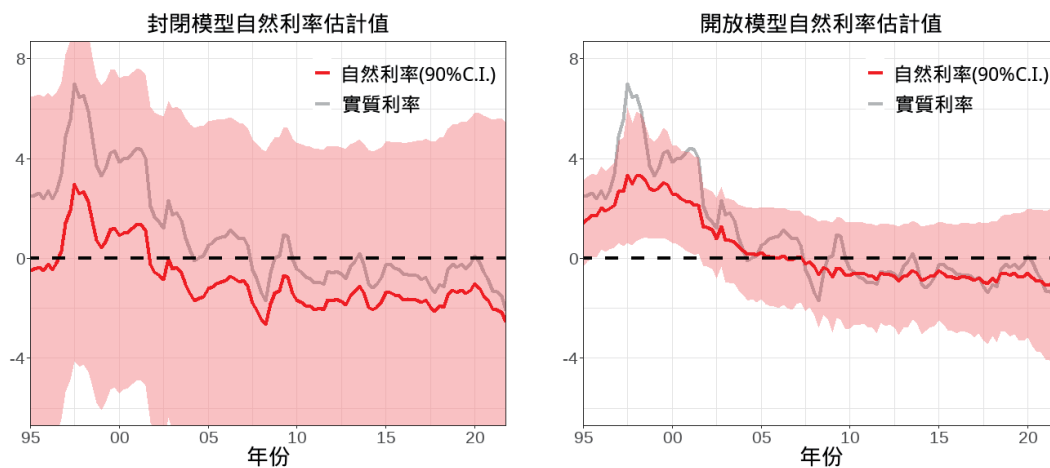


圖 10: 自然利率剩餘因素 z_t 估計值

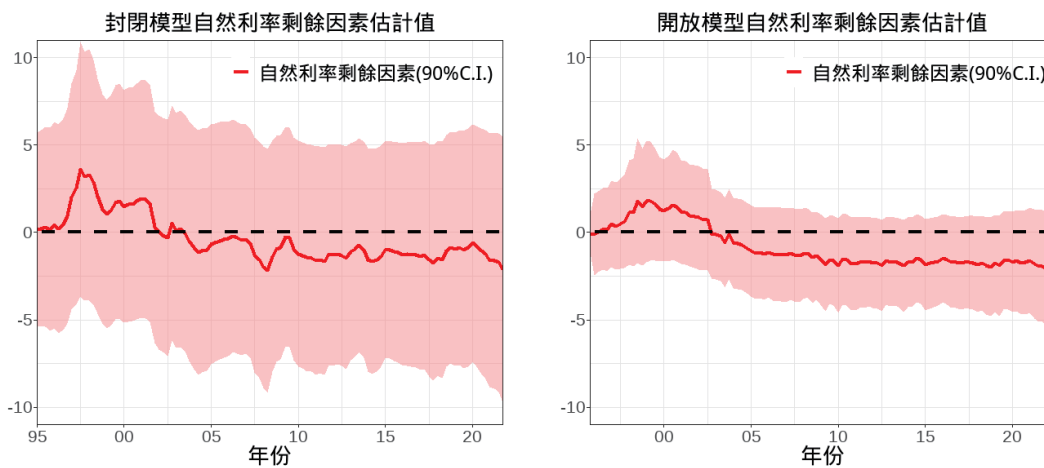




圖 11: 匯率缺口 \tilde{q}_t 估計值

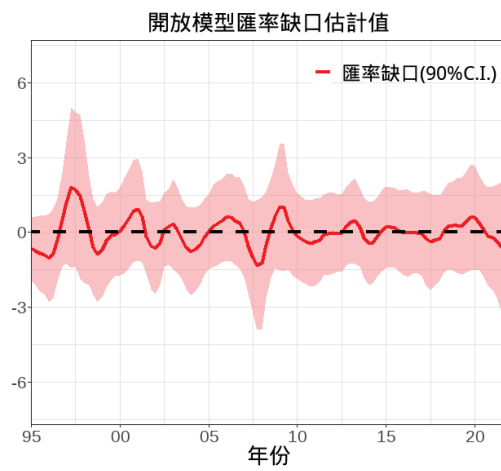


圖 12: 均衡匯率 q_t^* 估計值

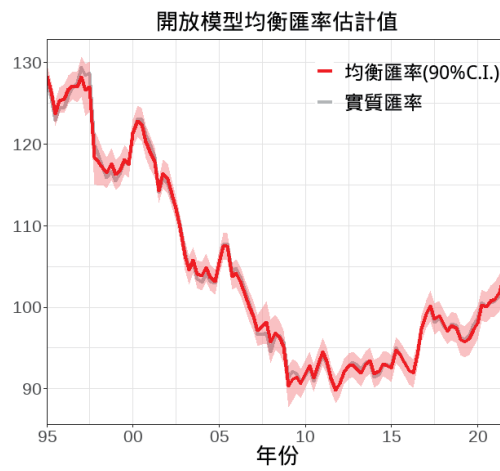


圖 13: 利率缺口剩餘因素 κ_t 估計值

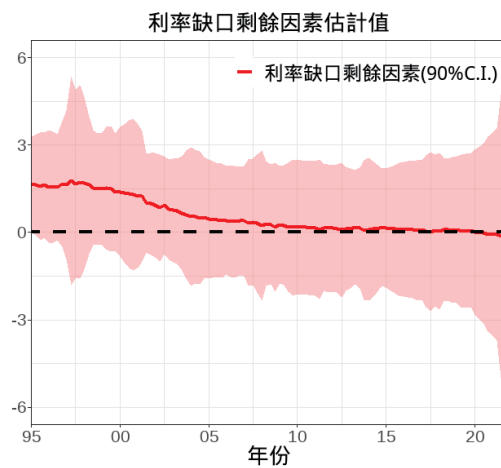




表 8: 狀態變數平均標準誤

狀態變數	平均標準誤	
	封閉模型	開放模型
\tilde{y}_t	1.735	1.648
y_t^*	1.735	1.648
g_t	0.599	0.556
\tilde{r}_t	3.984	1.272
r_t^*	3.984	1.272
z_t	4.011	1.672
q_t^*		1.133
\tilde{q}_t		1.133
κ_t		1.416

和「未拋補利率平價等式」與否，並不會明顯影響實質產出的趨勢循環分解結果。

不過實質利率的分解結果就有極為顯著的區別。由圖 8 可見，封閉模型的利率缺口之點估計雖然有逐漸向 0 收攏的趨勢，但在整個樣本期間都為正數。我們於章節 5.1 就有發現在封閉模型中，利率缺口落遲項係數 ρ 的估計值非常接近 1，而在檢視圖 8 的走勢後，我們斷定封閉模型的利率缺口，並不具備循環性成分的均值回歸性質，這也隱含封閉模型的自然利率可能存在估計偏誤。而且從圖 9 可以觀察到，由於標準誤過大，封閉模型在整個樣本期間皆無法拒絕自然利率為 0 的虛無假設，其走勢圖只提供極為有限的資訊。

相對地，由圖 8 可以發現在開放模型中，利率缺口的點估計並不全為正數，而且在 2004 年後皆於零值上下震盪，符合我們對循環性成分的預期。同時由圖 9 可見，在自然利率的標準誤顯著降低後，我們已能辨識出在 1997Q1 到 1998Q2 這六個季度，臺灣的實質利率明顯高於自然利率，剩餘期間兩者的差異則不顯著。根據以上觀察，我們認為相較於封閉模型，開放模型的自然利率估計值似乎更可信。

接著我們進一步由開放模型之估計結果來分析臺灣自然利率的走勢。由圖 9 可以大致判斷在 1996 年時臺灣的自然利率還顯著為正，但從 2002 年起已無法拒絕自然利率為 0 的虛無假設。我們依此判斷臺灣的自然利率從 1990 年代中後期便出

現下滑的趨勢，這與吳懿娟 (2005) 的發現一致。另外，點估計則顯示臺灣的自然利率在 2008 年時已跌至 0 以下的水準，且直至今日仍未有明顯回升的跡象。不過根據開放模型的係數估計結果，自然利率和產出成長率並沒有顯著相關，而依照現有的模型設定，我們完全無法解釋為何臺灣的自然利率會下滑，也無法得知其走勢是受到哪些因素所影響。

接著我們檢視實質匯率的分解結果。封閉模型假設利率缺口服從 AR(1)：

$$\tilde{r}_t = \rho \tilde{r}_{t-1} + e_t^{\kappa}. \quad (5.7)$$

而開放模型引入未拋補利率平價等式，假設匯率缺口與利率缺口存在跨期相關性，並且匯率缺口服從 AR(2)：

$$\tilde{r}_t = \gamma \tilde{q}_{t-1} + \kappa_{t-1}, \quad (5.8)$$

$$\tilde{q}_t = \Phi_{\tilde{q},1} \tilde{q}_{t-1} + \Phi_{\tilde{q},2} \tilde{q}_{t-2} + e_t^{\tilde{q}}. \quad (5.9)$$

檢視圖 8 和圖 11 後，我們發現在開放模型中，匯率缺口和利率缺口不論是走勢方向和震盪幅度都非常相似，這與 $\hat{\gamma} = 1.04$ 的點估計結果相符。我們推測正因為追加了(5.8)和(5.9)之設定，使得相比於封閉模型，開放模型的利率缺口更頻繁地在零值上下震盪。而圖 13 顯示，可能存在某些因素驅使臺灣的實質利率超出自然利率水準，並且在 2002 年之前尤為突出。

接著從圖 12 中我們注意到匯率缺口的震盪幅度有限，並且在整個樣本期間內，都無法判斷實質匯率是否偏離均衡匯率，即使在 1997 年到 1998 年的亞洲金融風暴，以及 2008 年到 2009 年的金融海嘯期間，匯率缺口的 90% 信賴區間仍然包含 0。此外，表 7 顯示本文開放模型中的 θ_1, θ_2, ψ 和 γ 這四個與實質利率有關之係數項，其點估計絕對值和標準誤都遠高於加拿大和丹麥的估計結果。

有鑒於此，我們認為開放模型可能低估了新臺幣的匯率缺口波動性，或許需要進一步修正開放模型的設定，或是調整估計方法，才能夠得到更準確的匯率缺口估計值，並修正係數和自然利率的估計結果。

6. 問題與討論



封閉模型的自然利率之標準誤過大，難以從中獲取有效資訊，這應是源自於封閉模型的兩個主要問題：IS Curve 係數項 a 不顯著，並且無法有效捕捉利率缺口的走勢，我們推測吳懿娟 (2005) 或許也遇到類似的問題，導致其估計結果並不理想。

而開放模型額外控制了實質匯率，並引入未拋補利率平價等式以解釋匯率缺口和利率缺口的關係。從估計結果來看，這不僅讓 IS Curve 係數項 a 變為顯著，也大幅改變利率缺口之走勢，使其更符合循環性成分的均值回歸預期。在修正這兩個問題後，自然利率之平均標準誤從 3.98 個百分點，大幅降低至 1.27 個百分點。

根據以上結果，我們認為這意味著 Berger and Kempa (2014) 所提出的模型調整，確實更貼近小型開放經濟體的總體經濟情勢，並有效提升臺灣自然利率之估計精準度。而從開放模型的估計結果，我們已能大致判斷臺灣的自然利率存在下降的趨勢，並很可能長期處在低於 0 的水準。

需要注意的是，本文得到的自然利率和利率缺口估計值，並不能直接用以判斷臺灣的實質利率 (或政策利率) 是否介於合理水準，必須先選定適當的泰勒法則，再代入自然利率之估計值進行計算，才能有效且全面地評估貨幣政策之寬鬆或緊縮程度。

此外，本文旨在估計「中長期自然利率」，其特性是不受產出、物價或匯率的短期波動所影響，若要將本文之估計結果運用於分析貨幣政策，需特別留意短期外生衝擊之潛在效果。像是在 1997 年到 1998 年間，臺灣遭遇亞洲金融風暴，使新臺幣的實質匯率急遽下滑 (見圖 12)，未來研究者應將此現象納入政策制定的考量因素。

而本文的開放模型仍有其不足之處。我們參照 LW 模型的做法，基於以下假設來估計臺灣的自然利率：

$$r_t^* = cg_t + z_t. \quad (6.1)$$

不過開放模型中的係數項 c 並不顯著。若研究者認為這應歸咎於本文之模型設定

與估計方法未臻完善，實際上「產出成長率」和「自然利率」應存在一對一的關係，則可以參考Holston et al. (2017) 的做法，基於 $c = 1$ 的假設進行估計：

$$r_t^* = g_t + z_t. \quad (6.2)$$

而若研究者相信臺灣的「產出成長率」和「自然利率」確實不相關，則可以參考Laubach and Williams (2016) 的做法，假設 $c = 0$ ，即自然利率服從隨機漫步來進行估計：

$$r_t^* = r_{t-1}^* + e_t^{r^*}. \quad (6.3)$$

Laubach and Williams (2016) 分別以(6.1)和(6.3)的假設進行估計，發現這並不會明顯影響美國自然利率的估計值之走勢和轉折點，只有波動度會出現些微的變化。這值得我們進一步驗證。

而係數項 c 不顯著也導致本文無法解釋臺灣自然利率為何下滑，未來研究者可以嘗試控制章節3.2提及的人口成長率、時間偏好率等因素，進而更深入地探討這個問題。實際上，也有許多篇研究是基於其他假設來估計自然利率，例如Hledik and Vlcek (2018) 認為實質匯率的變化是自然利率的決定因素，Wynne and Zhang (2018) 假設其他國家的產出成長率會影響本國的自然利率，Silva and Holanda Barbosa (2021) 則藉由控制美國的自然利率和遠期匯率風險貼水，來估計巴西的自然利率。上述設定似乎都有一定程度之合理性，值得我們參考。

在前面提到的文獻中，部分研究者採用不同型式的「未拋補利率平價等式」，來解釋實質利率和實質匯率之間的關係。對此，我們鼓勵後續研究者多方嘗試，更透澈地探討實質匯率對於臺灣經濟情勢的影響，並驗證本文是否低估了匯率缺口的波動度。

另外，Berger and Kempa (2014) 和Pedersen (2015) 皆採用貝式估計法來處理 UC 模型的堆積問題，這種方法不僅有效簡化估計過程，還具備更高的可讀性。期待本文得到的係數估計結果，能作為後續研究者在設定先驗分配時的參考。

最後必須強調，本文得到的估計值只能用於粗略判斷臺灣自然利率的走勢，不應被視作是精準的估計結果，這是因為我們發現樣本期數、樣本起始期、模型設

定都可能高度影響估計結果，而且卡爾曼濾波器也容易導致估計標準誤偏大(吳懿娟, 2005)。此外，三階段估計法與最大期望演算法使得本文的估計流程較為繁瑣，進而產生更多不確定因素。因此本文之估計值應被審慎看待，不宜進行過度解讀。

期待本篇研究能引起更多國內學者關注臺灣的自然利率，藉由更新穎的模型設定和估計方法，持續修正臺灣自然利率的估計值，再探討如何將其運用於審視和制定臺灣的貨幣政策。

7. 結論



關於臺灣自然利率的研究頗為鮮少，雖然曾有研究者嘗試採用多變量不可觀測成分模型，以實質產出和實質利率等變數來估計臺灣的自然利率，但結果並不理想，這使研究者推測，該模型或許只適用於封閉經濟體。

考量到臺灣為小型開放經濟體，本文參照相關研究的建議，在原始版本模型中額外控制實質匯率，並引入未拋補利率平價等式，來捕捉實質匯率對於實質利率的影響。我們發現這些調整大幅影響了估計結果，具體而言，新版本模型中的利率缺口與產出缺口呈現顯著地跨期負相關，並且利率缺口的走勢頻繁於零值上下震盪，這些結果更符合經濟理論與模型假設。此外我們也發現，自然利率的平均標準誤，從 3.98 個百分點大幅下降至 1.27 個百分點。

藉由新版本模型的估計結果，我們判斷臺灣的自然利率在 1990 年代中後期出現下降的趨勢，並且在 2008 年時已下跌至低於 0 的水準，至今仍沒有明顯回升的跡象。鑒於「產出成長率」和「自然利率」之相關性並不顯著，臺灣自然利率下滑的確切原因還有待釐清。

本研究得到的估計結果應被謹慎地看待，而若要將其應用於審視和制定臺灣的貨幣政策，後續研究者應選擇適當的法則，並充分考慮短期波動的潛在影響，才能更全面地評估臺灣實質利率的合理區間。

參考文獻



中文部分

劉淑敏 (2011), 「臺灣產出缺口與通貨膨脹關係之研究」, 中央銀行季刊, 33(4), 17–43。

吳懿娟 (2005), 「台灣中性短期實質利率的估測」, 中央銀行季刊, 27(2), 41–70。

陳旭昇、湯茹茵 (2012), 「動態隨機一般均衡 (DSGE) 模型在貨幣政策制定上的應用: 一個帶有批判性的回顧與展望」, 經濟論文叢刊, 40(3), 289–323。

英文部分

Andrade, P., J. Gali, H. Le Bihan and J. Matheron (2019), “The Optimal Inflation Target and the Natural Rate of Interest.”, *Brookings Papers on Economic Activity*, 173–256.

Archibald, J. and L. Hunter (2001), “What is the neutral real interest rate, and how can we use it?” , *Reserve Bank of New Zealand Bulletin*, 64(3), 15–28.

Ball, L. M. (1999), “Policy rules for open economies”, *Monetary Policy Rules*, 127–156.

Basdevant, O., N. Björkstén and Ö. Karagedikli (2004), *Estimating a time varying neutral real interest rate for New Zealand*, Technical report, Reserve Bank of New Zealand.


Berger, T. and B. Kempa (2014), “Time-varying equilibrium rates in small open economies: Evidence for Canada” , *Journal of Macroeconomics*, 39, 203–214.


Clark, P. K. (1987), “The cyclical component of US economic activity” , *The Quarterly Journal of Economics*, 102(4), 797–814.


Clark, T. E. and S. Kozicki (2005), “Estimating equilibrium real interest rates in real time” , *The North American Journal of Economics and Finance*, 16(3), 395–413.

Del Negro, M., D. Giannone, M. P. Giannoni and A. Tambalotti (2019), “Global trends in interest rates” , *Journal of International Economics*, 118, 248–262.

Engle, R. F. (1978), “Estimating structural models of seasonality”, *Seasonal analysis of economic time series*, 281–308.

- 
- Fiorentini, G., A. Galesi, G. Pérez Quirós and E. Sentana (2018), “The rise and fall of the natural interest rate” , *Documentos de trabajo/Banco de España* , (22).
- Friedman, M. (1968), “The Role of Monetary Policy” , *American Economic Review* , 58(1) , 1–17.
- Galí, J. (2008), *Introduction to Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle: An Introduction to the New Keynesian Framework*, Technical report, Princeton University Press.
- Grossman, V., E. Martinez-Garcia, M. A. Wynne and R. Zhang (2019), *Ties That Bind: Estimating the Natural Rate of Interest for Small Open Economies*, Technical report, Federal Reserve Bank of Dallas.
- Hamilton, J. D. (1986), “A standard error for the estimated state vector of a state-space model” , *Journal of Econometrics* , 33(3) , 387–397.
- Hamilton, J. D., E. S. Harris, J. Hatzius and K. D. West (2016), “The equilibrium real funds rate: Past, present, and future” , *IMF Economic Review* , 64 , 660–707.
- Harvey, A. C. (1990), *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter* , Cambridge University Press.
- Harvey, A. C. (1985), “Trends and cycles in macroeconomic time series” , *Journal of Business & Economic Statistics* , 3(3) , 216–227.
- Harvey, A. C. and P. H. Todd (1983), “Forecasting economic time series with structural and Box-Jenkins models: A case study” , *Journal of Business & Economic Statistics* , 1(4) , 299–307.
- Hledik, T. and J. Vlcek (2018), *Quantifying the Natural Rate of Interest in a Small Open Economy-The Czech Case*, Technical report, Czech National Bank.
- Holston, K., T. Laubach and J. C. Williams (2017), “Measuring the natural rate of interest: International trends and determinants” , *Journal of International Economics* , 108 , S59–S75.
- Humala, A. and G. H. R. Briones (2011), *Estimation of a time varying natural interest rate for Peru* , Pontificia Universidad Católica del Perú. Departamento de Economía.

- 
- Kalman, R. E. (1960), “A new approach to linear filtering and prediction problems” , *Journal of Basic Engineering* , 82 , 35–45.
- Karabarbounis, L. and B. Neiman (2014), “The global decline of the labor share” , *The Quarterly Journal of Economics* , 129(1) , 61–103.
- Kupkovič, P. (2020), “R-star in transition economies: evidence from Slovakia” , *Ekonomický časopis* , 68(8) , 761–786.
- Kuttner, K. N. (1994), “Estimating potential output as a latent variable” , *Journal of Business & Economic Statistics* , 12(3) , 361–368.
- Laubach, T. and J. C. Williams (2003), “Measuring the natural rate of interest” , *Review of Economics and Statistics* , 85(4) , 1063–1070.
- Laubach, T. and J. C. Williams (2016), “Measuring the natural rate of interest redux” , *Business Economics* , 51 , 57–67.
- Lubik, T. A. and C. Matthes (2015), “Time-varying parameter vector autoregressions: specification, estimation, and an application” , *Economic Quarterly* , 101(4) , 323–353.
- MacDonald, R. and J. L. Stein (1999), *Equilibrium Exchange Rates* , vol. 69, Springer Science & Business Media.
- Mehra, R. (1974), “Topics in stochastic control theory identification in control and econometrics: Similarities and differences” , *Annals of Economic and Social Measurement* , 3(1) , 21–48.
- Mesonnier, J.-S. and J.-P. Renne (2007), “A time-varying “natural” rate of interest for the euro area” , *European Economic Review* , 51(7) , 1768–1784.
- Nerlove, M., D. Grether and J. L. Carvalho (1979), *Analysis of Economic Time Series*, Technical report, Elsevier.
- Pagan, A. R. et al. (1975), “A Note on the Extraction of Components from Time Series” , *Econometrica* , 43(1) , 163–168.
- Pedersen, J. (2015), *The Danish natural real rate of interest and secular stagnation*, Technical report, Danmarks Nationalbank Working Papers.

- 
- Rudebusch, G. and L. E. Svensson (1999), “Policy rules for inflation targeting”, *Monetary Policy Rules*, 203–262.
- Sax, C. and D. Eddelbuettel (2018), “Seasonal adjustment by x-13arima-seats in r”, *Journal of Statistical Software* , 87 , 1–17.
- Shumway, R. H. and D. S. Stoffer (1982), “An approach to time series smoothing and forecasting using the EM algorithm” , *Journal of Time Series Analysis* , 3(4) , 253–264.
- Silva, F. B. da and F. de Holanda Barbosa (2021), “Measuring the natural interest rate in a small open economy” , *Available at SSRN 3970456*.
- Smets, F. and R. Wouters (2007), “Shocks and frictions in US business cycles: A Bayesian DSGE approach” , *American Economic Review* , 97(3) , 586–606.
- Stock, J. H. (1994), “Unit roots, structural breaks and trends” , *Handbook of econometrics* , 4 , 2739–2841.
- Stock, J. H. and M. W. Watson (1998), “Median unbiased estimation of coefficient variance in a time-varying parameter model” , *Journal of the American Statistical Association* , 93(441) , 349–358.
- Svensson, L. E. (1997), “Inflation forecast targeting: Implementing and monitoring inflation targets” , *European Economic Review* , 41(6) , 1111–1146.
- Svensson, L. E. (2000), “Open-economy inflation targeting” , *Journal of International Economics* , 50(1) , 155–183.
- Taylor, J. B. (1993), “Discretion versus policy rules in practice” , *Carnegie-Rochester conference series on public policy* , 39 , 195–214.
- Watson, M. W. and R. F. Engle (1983), “Alternative algorithms for the estimation of dynamic factor, mimic and varying coefficient regression models” , *Journal of Econometrics* , 23(3) , 385–400.
- Wicksell, K. (1936), *Interest and Prices* , Ludwig von Mises Institute, translation of 1898 edition by R.F. Kahn.
- Williams, J. C. (2015), “The decline in the natural rate of interest” , *Business Economics* , 50 , 57–60.

Woodford, M. (2003), *Interest and Prices* , Princeton Univ. Press.

Wynne, M. A. and R. Zhang (2018), “Estimating the natural rate of interest in an open economy” , *Empirical Economics* , 55 , 1291–1318.



附錄一



封閉經濟體 UC 模型(3.7)-(3.15)的狀態空間表達式

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_t + \mathbf{A}\mathbf{z}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R})$$

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\eta}_t \quad \boldsymbol{\eta}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$$

$$\mathbf{y}_t = [y_t \quad r_t \quad \pi_t]'; \quad \mathbf{z}_t = [\pi_{t-1} \quad \pi_{t-2} \quad \pi_{t-3} \quad \pi_{t-4}]'$$

$$\mathbf{x}_t = [y_t^* \quad g_t \quad \tilde{y}_t \quad \tilde{y}_{t-1} \quad \tilde{r}_t \quad \tilde{r}_{t-1} \quad z_t]'$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_{\pi,1} & \Phi_{\pi,2} & \Phi_{\pi,3} & \Phi_{\pi,4} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{\tilde{y},1} & \Phi_{\tilde{y},2} & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{diag}(\mathbf{R}) = [0 \quad 0 \quad \sigma_{e\pi}^2]$$

$$\text{diag}(\mathbf{Q}) = [\sigma_{ey^*}^2 \quad \sigma_{eg}^2 \quad \sigma_{e\tilde{y}}^2 \quad 0 \quad \sigma_{e\kappa}^2 \quad 0 \quad \sigma_{ez}^2]$$

限制式：(1) $\Phi_{\pi,4} = 1 - \sum_{j=1}^3 \Phi_{\pi,j}$ (2) $\sigma_{eg}^2 = \lambda_g^2 \sigma_{ey^*}^2$ (3) $\sigma_{ez}^2 = a^2 \lambda_z^2 \sigma_{e\tilde{y}}^2$

附錄二



小型開放經濟體 UC 模型(3.20)-(3.32)的狀態空間表達式

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_t + \mathbf{A}\mathbf{z}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R})$$

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\eta}_t \quad \boldsymbol{\eta}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$$

$$\mathbf{y}_t = [y_t \quad r_t \quad q_t \quad \pi_t]'; \quad \mathbf{z}_t = [\pi_{t-1} \quad \pi_{t-2} \quad \pi_{t-3} \quad \pi_{t-4} \quad \Delta q_t]'$$

$$\mathbf{x}_t = [y_t^* \quad g_t \quad \tilde{y}_t \quad \tilde{y}_{t-1} \quad \tilde{r}_t \quad \tilde{r}_{t-1} \quad \kappa_t \quad q_t^* \quad \tilde{q}_t \quad \tilde{q}_{t-1} \quad z_t]'$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_{\pi,1} & \Phi_{\pi,2} & \Phi_{\pi,3} & \Phi_{\pi,4} & \psi \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{\tilde{y},1} & \Phi_{\tilde{y},2} & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & 0 & 0 & \theta_1 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{\tilde{q},1} & \Phi_{\tilde{q},2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{diag}(\mathbf{R}) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \sigma_{e\pi}^2]$$

$$\text{diag}(\mathbf{Q}) = [\sigma_{ey^*}^2 \quad \sigma_{eg}^2 \quad \sigma_{e\tilde{y}}^2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \sigma_{e\kappa}^2 \quad \sigma_{eq^*}^2 \quad \sigma_{e\tilde{q}}^2 \quad 0 \quad \sigma_{ez}^2]$$

限制式：(1) $\Phi_{\pi,4} = 1 - \sum_{j=1}^3 \Phi_{\pi,j}$ (2) $\sigma_{eg}^2 = \lambda_g^2 \sigma_{ey^*}^2$ (3) $\sigma_{ez}^2 = a^2 \lambda_z^2 \sigma_{e\tilde{y}}^2$