



國立臺灣大學工學院應用力學研究所

碩士論文

Institute of Applied Mechanics

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis

以最佳控制理論研究肌肉持續施力之最佳控制策略

The optimal control strategy for studying sustained muscle force
production based on optimal control theory

邱友岑

You-Tsen Chiu

指導教授：林哲宇 博士

Advisor: Che-Yu Lin, Ph.D.

中華民國 112 年 7 月

July, 2023



致謝

能夠完成這篇論文首先要感謝的是我的指導教授—林哲宇老師，感謝老師在研究上的指導，使我能順利完成碩士論文。每當研究上遇到困難及瓶頸時，老師總是能提供解決問題的方向，讓我用不同的方向去思考，使研究過程可以很順利。另外，也從老師身上學到很多做事情的態度，凡事少根筋的我，受到老師的影響，讓我更能注重很多事情的細節。不管是在學業上或是做人處事，真的很感謝老師。

再來要感謝的是我同屆的同學們，承峰、又群、韋廷，謝謝有你們的陪伴鼓勵及平常課業的討論，讓我在碩士這兩年能夠順利的度過。以及我從小到大的好朋友均懋，謝謝每當我遇到困難時，你能給我建議。最後，還要感謝支持我的家人，讓我能無後顧之憂的完成我的學業。

這段旅程終於畫上了句點，帶著感恩與期待的心，迫不及待要繼續往前衝了。

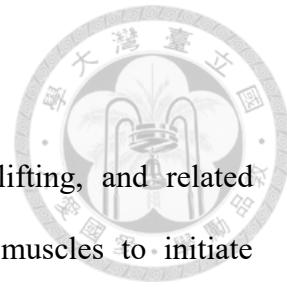


摘要

在特定的工作和運動中，例如拔河、重訓以及相關勞力工作，大腦下達指令使肌肉進行活動。然而，上述持續施力之活動可能導致肌肉疲勞和相應的肌肉損傷，進而影響工作效率。本論文以肌肉持續施力的數學模型為基礎，探討肌肉在持續施力情境中，施力大小與疲勞程度之關係。在肌肉活動中，施力策略對於減少疲勞和最大程度地提高工作效率極為重要，本研究運用最佳控制理論（Optimal Control Theory）來找尋最佳策略。最佳控制理論為一種數學工具及優化方法，透過解決動態系統的控制問題，以求解出在給定限制條件下的最佳操作策略。

利用最佳控制理論來制定最佳的持續施力策略，以最大程度地減少肌肉疲勞並提高工作效率，使我們肌肉在持續施力情況下，找到大腦控制肌肉的最佳省力模式，以在不引起肌肉過度疲勞的同時實現高效的肌肉活動，故本研究提出了三種施力目標函數，並由數值軟體 MATLAB 進行量化。這些目標函數考慮大腦施加命令程度、肌肉施力大小及疲勞程度之間關係，並且將此關係結合最佳控制理論，找尋最佳控制策略。同時本研究也將提出之目標函數與未使用最佳控制策略進行分析。藉由上述分析，我們能夠評估不同施力策略的優勢和劣勢，並選擇最有效率的施力方式。

關鍵詞：最佳控制理論、肌肉施力、肌肉疲勞、運動單元、大腦自主施力



Abstract

In specific tasks and activities such as tug-of-war, weightlifting, and related physically demanding work, the brain sends commands to the muscles to initiate movement. However, the sustained exertion involved in such activities can lead to muscle fatigue and subsequent muscle damage, ultimately affecting work efficiency. This paper is based on a mathematical model of sustained muscle exertion and explores the relationship between the magnitude of force applied and the level of fatigue experienced. In muscle activities, the strategy of force application plays a crucial role in reducing fatigue and maximizing work efficiency. This study employs Optimal Control Theory to identify the optimal strategy. Optimal Control Theory is a mathematical tool and optimization approach that solves control problems of dynamic systems to determine the best operational strategy under given constraints. Utilizing Optimal Control Theory, this study aims to develop an optimal sustained exertion strategy to minimize muscle fatigue and enhance work efficiency. By considering the optimal energy-saving mode of muscle control by the brain during sustained exertion, we seek to achieve efficient muscle activity without inducing excessive fatigue. To accomplish this, the study proposes three objective functional, quantified using the MATLAB numerical software. These objective functional consider the relationship between the level of commands issued by the brain, the magnitude of muscle force exertion, and the degree of fatigue. By integrating this relationship with Optimal Control Theory, the study seeks to identify the optimal control strategy. Additionally, an analysis comparing the proposed objective functional with the absence of optimal control strategy will be conducted. Through analysis, we can evaluate the advantages and disadvantages of different force strategies and select the optimal approach.

Keywords : Optimal Control Theory, Muscle strength, Muscle fatigue, Motor units,

Voluntary brain effort



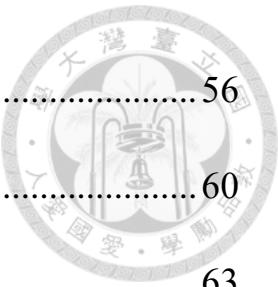
目 錄



致謝	i
摘要	ii
Abstract	iii
目 錄	v
圖目錄	viii
表目錄	x
第一章 緒論	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究動機與目的	3
第二章 最佳控制理論	4
2.1 定義及目標函數	4
2.1.1 定義	4
2.1.2 目標函數	4
2.1.3 必要條件推導	6
2.1.4 求解問題步驟	10
2.2 最佳化原則	11
2.3 回報項	16
第三章 研究方法	19



3.1 肌肉持續施力之數學模型	19
3.1.1 數學模型背景與機制	19
3.1.2 數學模型建立	22
3.2 目標函數建立	25
3.3 最佳控制理論分析	26
3.3.1 目標函數一	27
3.3.2 目標函數二	30
3.3.3 目標函數三	34
第四章 模擬結果與分析	38
4.1 目標函數一	38
4.1.1 未加入權重常數	38
4.1.2 加入權重常數	40
4.2 目標函數二	43
4.2.1 未加入權重常數	43
4.2.2 加入權重常數	45
4.3 目標函數三	50
4.3.1 未加入權重常數	50
4.3.2 加入權重常數	52
4.4 未使用最佳控制之策略	55



4.5 分析	56
第五章 結果與討論	60
參考文獻	63



圖目錄

圖 2-1 最佳控制 u^* 及最佳狀態 x^* (實線)及未最佳化之控制 u^ε 與狀態 x^ε (虛線)[14]	6
圖 2-2 貪婪演算法示意圖[19]	11
圖 2-3 貪婪演算法示意圖[19]	12
圖 3-1 人類神經系統與肌肉示意圖[20]	20
圖 3-2 動作電位圖[20]	20
圖 3-3 三組運動單元及其動態關係，其中箭頭方向表示作用方向[20]	22
圖 4-1 最佳化後活動中之運動單元數量(M_A^*)	38
圖 4-2 最佳化後已疲勞運動單元數量(M_F^*)	39
圖 4-3 最佳化後大腦使運動單元進入活動狀態之速率(u^*).....	39
圖 4-4 最佳化後活動中之運動單元數量(M_A^*)	40
圖 4-5 最佳化後已疲勞運動單元數量(M_F^*)	40
圖 4-6 最佳化後大腦使運動單元進入活動狀態之速率(u^*).....	41
圖 4-7 最佳化後活動中之運動單元數量(M_A^*)	41
圖 4-8 最佳化後已疲勞運動單元數量(M_F^*)	42
圖 4-9 最佳化後大腦使運動單元進入活動狀態之速率(u^*).....	42
圖 4-10 最佳化後活動中之運動單元數量(M_A^*)	43
圖 4-11 最佳化後已疲勞運動單元數量(M_F^*)	44
圖 4-12 最佳化後大腦使運動單元進入活動狀態之速率(u^*).....	44
圖 4-13 最佳化後活動中之運動單元數量(M_A^*)	45
圖 4-14 最佳化後已疲勞運動單元數量(M_F^*)	45
圖 4-15 最佳化後大腦使運動單元進入活動狀態之速率(u^*).....	46
圖 4-16 最佳化後活動中之運動單元數量(M_A^*)	46
圖 4-17 最佳化後已疲勞運動單元數量(M_F^*)	47
圖 4-18 最佳化後大腦使運動單元進入活動狀態之速率(u^*).....	47

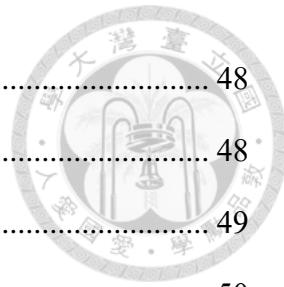


圖 4-19 最佳化後活動中之運動單元數量(M_A^*)	48
圖 4-20 最佳化後已疲勞運動單元數量(M_F^*)	48
圖 4-21 最佳化後大腦使運動單元進入活動狀態之速率(u^*).....	49
圖 4-22 最佳化後活動中之運動單元數量(M_A^*)	50
圖 4-23 最佳化後已疲勞運動單元數量(M_F^*)	51
圖 4-24 最佳化後大腦使運動單元進入活動狀態之速率(u^*).....	51
圖 4-25 最佳化後活動中之運動單元數量(M_A^*)	52
圖 4-26 最佳化後已疲勞運動單元數量(M_F^*)	52
圖 4-27 最佳化後大腦使運動單元進入活動狀態之速率(u^*).....	53
圖 4-28 最佳化後活動中之運動單元數量(M_A^*)	53
圖 4-29 最佳化後已疲勞運動單元數量(M_F^*)	54
圖 4-30 最佳化後大腦使運動單元進入活動狀態之速率(u^*).....	54
圖 4-31 活動中運動單元數量(M_A)	55
圖 4-32 已疲勞運動單元數量(M_F)	56
圖 4-33 大腦使運動單元進入活動狀態之速率(u)	56



表目錄

表 3-1 參數 B 、 F 、 R 及其單位	24
表 4-1 未加入權重常數之目標函數與未使用最佳策略之量化結果	57
表 4-2 目標函數一加入權重常數項比較表	58
表 4-3 目標函數二加入權重常數項比較表	58
表 4-4 目標函數三加入權重常數項比較表	59



第一章 緒論

1.1 研究背景

疲勞在各個社會和工作場景中普遍存在，其通常被認為是嚴重的疲倦感、缺乏活力和精疲力盡的感覺，這樣的行為使人在進行自主活動時感到窒礙難行。若不解決長期累積的疲勞，會導致過度勞累、過度訓練症候群(Overtraining Syndrome)及慢性疲勞症候群(Chronic Fatigue Syndrome)，甚至是內分泌失調、免疫功能下降，對人體健康構成威脅[1]。以美國為例，美國勞工在工作中產生之疲勞每年給雇主帶來約 1360 億美元的成本[2]；而在日本，每年約有 30 萬億日圓的醫療支出用於治療與疲勞相關的問題，對社會造成間接成本的同時，也可能導致經濟損失，其中又以肌肉疲勞為大多數[3]。因此，對於尋找合適的施力方式以減輕疲勞的研究至關重要。此外，可以根據疲勞影響原因及恢復時間分為急性疲勞或慢性疲勞。急性疲勞是由於體力勞動、情緒壓力、恢復不良或暫時疾病而導致，並且可以透過適當休息、適當飲食、體力鍛鍊改善不適。相對的，慢性疲勞指的是較嚴重疾病或治療時而引發的副作用，例如：糖尿病、類風濕關節炎，慢性疲勞的症狀較鮮少能藉由休息來改善之狀態。

除了區分急性疲勞和慢性疲勞外，疲勞還可以分為肌肉疲勞及精神疲勞。肌肉疲勞是指施加力量或執行任務的能力下降，通常為長時間體力活動過程中代謝或神經功能衰退之結果，精神疲勞是由一種長時間且高強度的認知行為引起的生物心理學狀態。在工作場所中，精神疲勞會增加犯錯的風險，並且也是神經系統疾病患者常見的症狀之一。精神疲勞可以由行為和生理上表現出，例如：在生理上，缺發活力、警覺性下降、疲勞感增加；在行為上，會以反應速度、行為準確性下降來表現[4][5]。

然而，在許多運動領域或工作中，如拔河、重量訓練或相關持續施力之工作，肌肉持續施力是達到高強度或長時間活動的關鍵。疲勞的肌肉若不斷活動，使運動



員或是相關工作者在施力過程中，易導致肌肉過勞，不僅限制活動之持久度，也容易影響運動中的力量表現，進而導致肌肉因疲勞造成的受傷風險[6][7]。

肌肉疲勞讓產生力量之能力逐漸下降，肌肉很難維持原有的強度和運動能力[8]。肌肉的疲勞由很多種原因造成，包括肌肉肌纖維疲勞、代謝產物累積、神經疲勞等。在長時間或高強度的活動中，肌肉不停地消耗能量並且產生代謝產物，這些代謝產物可能在肌肉中持續累積，干擾肌肉正常的活動功能[9]。

肌肉疲勞的定義包含任何型態的運動所引起的肌肉力量下降。在運動中，肌肉所產生的疲勞與肌肉收縮有關，以及其相關的疲勞機制；這些疲勞機制與肌肉的變化皆會削弱原先肌肉所產生的力量。肌肉疲勞的其中一個機制，便是肌肉纖維受到中樞神經系統(Central Nervous System)驅動時，中樞神經系統逐漸減少對肌肉的驅動力，導致肌肉所施力量減少，影響運動表現[10]。然而，肌肉疲勞與中樞神經系統存在著密不可分的關係，神經系統負責控制和調節肌肉收縮，來啟動肌肉纖維。在高強度運動中，中樞神經系統逐漸降低對肌肉驅動力，是為了保護肌肉，避免過度使用造成損傷。除了靜態和動態的運動外，中樞神經系統的退化也會使肌肉疲勞發生[4]。

Taylor, J. L.[11]也指出中樞神經系統驅動肌肉纖維，促使肌肉施力，因此，若腦部和中樞神經內減少對肌肉神經驅動，導致肌肉力量下降，影響工作表現，這樣的行為稱為中樞疲勞。為了延緩中樞神經的疲勞，可以透過合理的訓練計劃和休息，來維持中樞神經的運作，提高運動表現。如此可知神經系統在肌肉活動中扮演著重要角色，長時間的肌肉持續施力會對神經傳遞速度和效率產生影響，表示大腦向肌肉發送指令的速度減慢，影響運動的協調性與準確性。這類疲勞可能是較小範圍的肌肉疲勞，如單一關節的持續性運動—手肘、手腕等等；亦可能是較大範圍的全身性肌肉疲勞，這類活動包含多個關節的持續性運動，如騎自行車或重訓等[11]。

全身性的肌肉疲勞是指身體感到疲倦以及精疲力竭，而局部性的肌肉疲勞通常涉及某一部分肌肉因無力導致無法執行任務，然而這類全身疲勞衍伸的肌肉疲



勞是受到許多研究人員關注的議題[12]。

在日常生活中，肌肉疲勞會限制長時間劇烈運動之表現。在常見的活動或任務進行時，施力之主要肌肉會藉由其他輔助肌肉來施力以維持任務進行，此行為稱為肌肉代償[13]，例如：提重物、舉重或抱著兒童時，除了手指、手掌、手腕，亦包含手臂的肌肉互相輔助以撐住重物的力量。另一種替換方式是從原本慣用的肌肉交換到另一組肌肉來進行活動。例如：爬樓梯時，若其中一隻腳因肌肉疲勞而感到不適，另一隻腳就會施較大力氣來進行任務。由此可知，肌肉於疲勞時，會明顯改變活動的方式，使活動執行效率或速度降低，甚至無法執行。

1.2 研究動機與目的

肌肉疲勞時常成為運動員及勞動工作者所面臨的挑戰，這不僅限制活動能力，還可能增加活動受傷之風險。因此，尋找施力過程中的最佳模式對於優化運動表現和預防肌肉疲勞是至關重要的。

最佳控制理論（Optimal Control Theory）能根據不同的情境，幫助我們找到理想的策略來達成系統之最佳化。故本研究以最佳控制理論來尋找肌肉在持續施力時，最有效率的施力模式，讓肌肉能在活動過程中，最小程度地累積疲勞，同時使肌肉達到施力最大之效果，減少肌肉負擔。

本研究希望提供一個以最佳控制理論出發的方法，讓運動員或相關勞動工作者在施力過程中，得以選擇適當的施力模式。使其在過程中更省力，即在工作與活動的時候減少疲勞感，且更有效率完成目標工作或活動。同時，施力者將更有效的利用肌肉，如此一來不僅減少疲勞帶給身體的風險，也能使運動表現或工作效率提升。本研究利用最佳控制理論計算相關結果，盼以此角度提出相關從業人員或研究者可參考的方針。



第二章 最佳控制理論

2.1 定義及目標函數

2.1.1 定義

最佳控制理論(Optimal Control Theory)為一實用的數學工具，其領域涉及航空、經濟、工程，更可以用於做出複雜的生物決策，可以在給定的系統動態條件及目標函數下，找到一個理想的控制策略，使系統達到最佳化[14]。在最佳控制問題中， $u(t)$ 作為控制變量， $x(t)$ 為狀態變量，其中狀態變量 $x(t)$ 滿足系統動態方程：

$$x'(t) = g(t, x(t), u(t)) \quad (2.1.1)$$

系統行為可以透過操作控制變量 $u(t)$ 來調整狀態 $x(t)$ ，影響系統的變化，因此可以將控制與狀態之關係視為映射： $u(t) \mapsto x = x(u)$ 。並且最大化或最小化給定的目標函數，可表示為：

$$\begin{aligned} & \max_u \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \\ & \text{subject to } x'(t) = g(t, x(t), u(t)), \\ & \quad x(t_0) = x_0, x(t_1) \text{ free.} \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

其中 $x(t_1)$ free. 意義為 $x(t_1)$ 之值不受限制。

由於我們希望問題在時間區間內為連續不間斷執行，故在最佳控制問題中， f 和 g 為連續可微分函數。因此，在 f 和 g 中， t 、 $x(t)$ 、 $u(t)$ 也為連續可微分函數。

2.1.2 目標函數

在最佳控制理論中，目標函數用來描述決策者期望在控制系統中追求的性能指標。將系統狀態及控制作為變量，產生一個做為執行系統性能的策略。其定義為：

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.1.3)$$

目標函數的設立取決於控制者的問題及目的，在最佳控制問題中，透過調整系統的



控制，來最大化或是最小化目標函數，而實現特定的目標。例如：在癌症病患治療策略中，目標函數可以為最小化腫瘤密度，也可以為最大化病患體內藥物濃度[14]。

在確定目標函數前，需要考慮有關系統性能要求以及限制條件，這些要求及條件可包括生物生長率、反應速度、環境因素、耗能等方面。目標函數也可以根據真實情形，設置成單一函數，或多個函數組合，來達成目的。這裡舉出一目標函數實例，描述真菌及殺菌劑之關係[14]：

$$\begin{aligned} \min_u \int_0^T [Ax(t)^2 + u(t)^2] dt &= \min_u J(u) \\ \text{subject to } x'(t) &= r[M - x(t)] - u(t)x(t), \\ x(t_0) &= x_0, \quad x_0 > 0 \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

其中 $x(t)$ 為真菌隨時間之濃度， $u(t)$ 為隨時間加入之殺菌劑濃度， r 為真菌自然增長率， M 為環境承載量， A 為權重常數。此目標函數意義為：在時間 T 內，希望最小化真菌之濃度，同時也希望最小化殺菌劑之濃度，以免造成環境汙染。我們可以藉由設置 r 及 M ，來設立系統之條件，或更改 A 之大小，以平衡策略的取捨。

在最佳控制問題中，為了使最佳策略為唯一，並且使必要條件之運算能順利求解，因此在設置目標函數時，會將目標函數中的控制項 $u(t)$ 之次數設置為二次，避免最佳化後之結果 $u(t)^*$ 為無解或無限多組解。相對地，對於狀態項 $x(t)$ 在目標函數中的設置，將其設置為平方是為了使其在策略中之重要性給予次方放大。在問題中，也時常藉由權重常數 A 來更改各項函數在策略中之重要性。

最佳控制理論的目標是透過優化目標函數來制定最佳控制策略，來實現所需目的，透過分析目標函數意義和限制條件將其設置，可依照需求者之目的實現系統之最佳性能。



2.1.3 必要條件推導

必要條件是由 Pontryagin 等人在 1950 年代在莫斯科所開發[15]。Pontryagin 將必要條件引入伴隨函數(adjoint function)之概念，將系統微分方程與目標函數建立連結，利用此關係，能求解出最佳化結果。以下為在最佳控制問題運算中，三個不可或缺的必要條件之推導[14]：

考慮圖[2-1]為一最佳化系統及未最佳化之系統。令一片段連續之最佳控制 u^* 及相對應最佳化狀態 x^* 存在(其中上標*為最佳化之結果)，並且對於所有目標函數來說，由於 u^* 為問題之最佳解，所以對於所有以 u 為控制之目標函數之範圍為 $J(u) \leq J(u^*) < \infty$ 。設 $h(t)$ 為一任意片段連續函數，及 ε 為常數，則任意控制函數 $u^\varepsilon(t)$ 為：

$$u^\varepsilon(t) = u^*(t) + \varepsilon h(t) \quad (2.1.5)$$

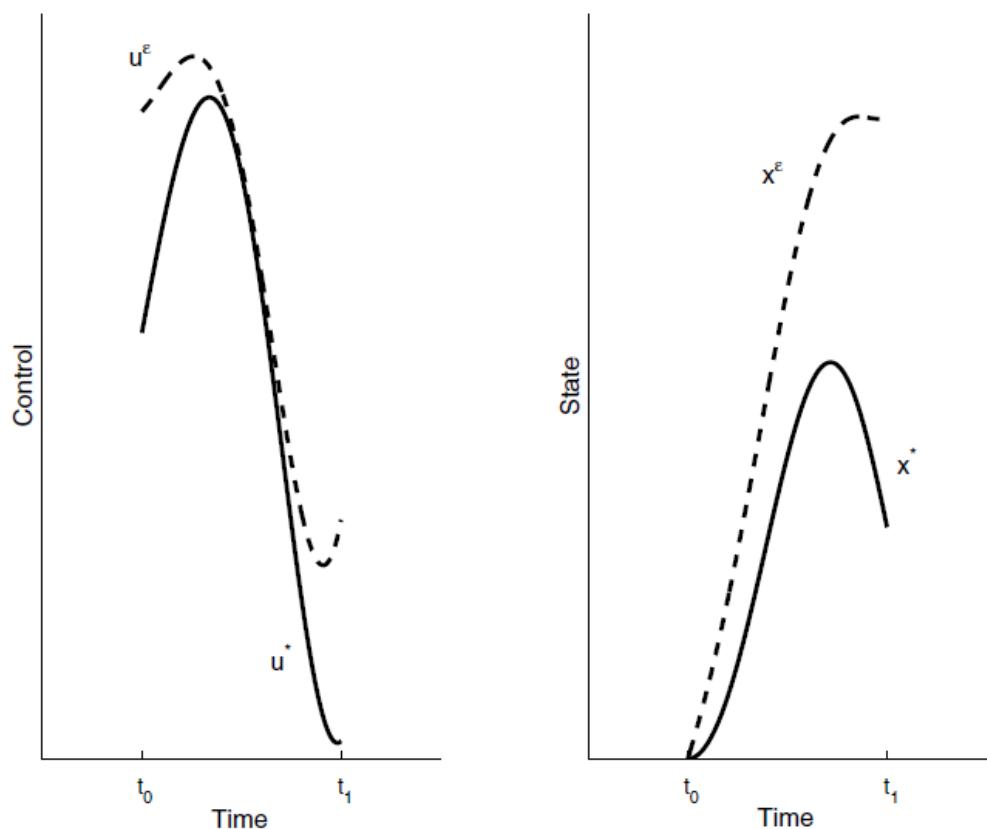
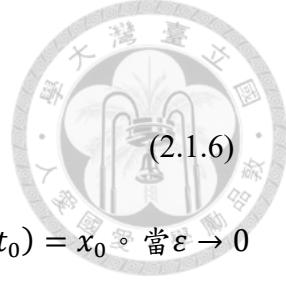


圖 2-1 最佳控制 u^* 及最佳狀態 x^* (實線)及未最佳化之控制 u^ε 與狀態 x^ε (虛線)[14]



再令 $x^\varepsilon(t)$ 為 $u^\varepsilon(t)$ 相對應之狀態，且滿足：

$$\frac{d}{dt}x^\varepsilon = g(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) \quad (2.1.6)$$

因狀態之軌跡皆由相同起始點開始(圖 2-1)，故可得 $x^\varepsilon(t_0) = x(t_0) = x_0$ 。當 $\varepsilon \rightarrow 0$ 時，可得 $u^\varepsilon(t) \rightarrow u^*(t)$ 。再者，也可以得知：

$$h(t) = \left. \frac{\partial u^\varepsilon(t)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \quad (2.1.7)$$

存在於任意時間點 t 。同樣地，當 $\varepsilon \rightarrow 0$ 時，因 $u^\varepsilon(t) \rightarrow u^*(t)$ 存在於 g ，故可得：

$$x^\varepsilon(t) \rightarrow x^*(t) \quad (2.1.8)$$

存在於任意時間點 t 。再由上述關係，可得導數關係：

$$\left. \frac{\partial x^\varepsilon(t)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \quad (2.1.9)$$

存在於每個時間點 t 。此關係的實際數值對於此推導過程不重要，僅需得知存在即可。

以 u^ε 為控制之目標函數為：

$$J(u^\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) dt \quad (2.1.10)$$

再另設 $\lambda(t)$ 為一片段可微分之函數在 $[t_0, t_1]$ ，且藉由微積分基本定理可得關係：

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} [\lambda(t)x^\varepsilon(t)] dt = \lambda(t_1)x^\varepsilon(t_1) - \lambda(t_0)x^\varepsilon(t_0) \quad (2.1.11)$$

移項可得：

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} [\lambda(t)x^\varepsilon(t)] dt - \lambda(t_1)x^\varepsilon(t_1) + \lambda(t_0)x^\varepsilon(t_0) = 0 \quad (2.1.12)$$

將 2.1.10 式與 2.1.12 式相加：

$$\begin{aligned} J(u^\varepsilon) &= \int_{t_0}^{t_1} [f(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) + \frac{d}{dt}(\lambda(t)x^\varepsilon(t))] dt + \lambda(t_0)x^\varepsilon(t_0) \\ &\quad - \lambda(t_1)x^\varepsilon(t_1) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [f(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) + \lambda'(t)x^\varepsilon(t) + \lambda(t)g(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t))] dt \\ &\quad + \lambda(t_0)x_0 - \lambda(t_1)x^\varepsilon(t_1) \end{aligned} \quad (2.1.13)$$



由於 J 之最大值發生在當 u 為 u^* 時，故 $J(u^\varepsilon)$ 於 ε 之導數為 0，即：

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} J(u^\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} \quad (2.1.14)$$

利用此關係運算，並且根據勒貝格控制收斂定理[16][17]，可以使極限符號及導數符號移至積分內：

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\varepsilon} J(u^\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [f(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) + \lambda'(t)x^\varepsilon(t) \\ &\quad + \lambda(t)g(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t))] dt \Big|_{\varepsilon=0} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [\lambda(t_0)x_0] \Big|_{\varepsilon=0} - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [\lambda(t_1)x^\varepsilon(t_1)] \Big|_{\varepsilon=0} \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

由圖 2-1 可得知， $x_0=0$ ，因此可得：

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [f(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) + \lambda'(t)x^\varepsilon(t) \\ &\quad + \lambda(t)g(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t))] \Big|_{\varepsilon=0} dt - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [\lambda(t_1)x^\varepsilon(t_1)] \Big|_{\varepsilon=0} \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

運用連鎖律運算後如下：

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^{t_1} [f_x \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon} + f_u \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \lambda'(t) \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \lambda(t)(g_x \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon} + g_u \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \varepsilon})] \Big|_{\varepsilon=0} dt \\ &\quad - \lambda(t_1) \frac{\partial x^\varepsilon(t_1)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[(f_x + \lambda'(t) + \lambda(t)g_x) \frac{\partial x^\varepsilon(t)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + (f_u + \lambda(t)g_u)h(t)dt \right] dt \\ &\quad - \lambda(t_1) \frac{\partial x^\varepsilon(t_1)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

最終結果即為：

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^{t_1} \left[(f_x + \lambda'(t) + \lambda(t)g_x) \frac{\partial x^\varepsilon(t)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + (f_u + \lambda(t)g_u)h(t) \right] dt \\ &\quad - \lambda(t_1) \frac{\partial x^\varepsilon(t_1)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \end{aligned} \quad (2.1.18)$$



因等號左端為 0，故希望使等號右端 $\frac{\partial x^\varepsilon(t)}{\partial \varepsilon}$ 之係數為 0，以選擇必要條件簡化上式，

因此選擇必要條件為：

1. $f_x + \lambda'(t) + \lambda(t)g_x = 0$ (adjoint equation)

$$\Rightarrow \lambda'(t) = -[f_x(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)g_x(t, x^*(t), u^*(t))] \quad (2.1.19)$$

相對應之邊界條件為：

2. $\lambda(t_1) = 0$ (transversality condition) (2.1.20)
3. 2.1.17 式經簡化後可得

$$\int_{t_0}^{t_1} [f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)g_u(t, x^*(t), u^*(t))h(t)] dt = 0 \quad (2.1.21)$$

由於 $h(t)$ 為任意片段連續函數，故令

$$h(t) = f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)g_u(t, x^*(t), u^*(t)) \quad (2.1.22)$$

代入 2.1.20 式可得

$$\int_{t_0}^{t_1} [f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)g_u(t, x^*(t), u^*(t))]^2 dt = 0 \quad (2.1.23)$$

並取：

$$f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)g_u(t, x^*(t), u^*(t)) = 0, t_0 \leq t \leq t_1 \quad (2.1.24)$$

即為必要條件 optimality condition。

上述推導之方程式，即為最佳化問題必須滿足之必要條件。然而，求解最佳化問題時，不需重新推導上述方程再進行運算。事實上，我們能將必要條件以 Hamiltonian H 形式來表示[14]。其定義為：

$$\begin{aligned} H(t, x, u, \lambda) &= f(t, x, u) + \lambda g(t, x, u) \\ &= \text{被積分函數} + \text{adjoint * 系統方程之RHS} \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

必要條件之 Hamiltonian 形式為：

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \text{ at } u^* \Rightarrow f_u + \lambda g_u = 0 \quad (\text{optimality condition}), \quad (2.1.26)$$

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow \lambda' = -(f_x + \lambda g_x) \quad (\text{adjoint equation}), \quad (2.1.27)$$



$$\lambda(t_1) = 0 \quad (\text{transversality condition}). \quad (2.1.28)$$

以及系統狀態方程：

$$x' = g(t, x, u) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.1.29)$$

2.1.4 求解問題步驟

我們能將最佳化問題視為求解兩未知數： u^* 及 x^* ，藉由引入類似於拉格朗日乘數(Lagrange multiplier)之伴隨變量 λ ，將欲求解之系統微分方程連結至目標函數上，以下概述如何利用此方法求解最佳化之問題[14]。

1. 寫出問題之 Hamiltonian

$$\begin{aligned} & \max_u \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \\ & \text{subject to} \quad x'(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \\ & \quad H(t, x, u, \lambda) = f(t, x, u) + \lambda g(t, x, u) \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

2. 寫出必要條件之 Hamiltonian 形式：optimality condition、adjoint equation、transversality condition。
3. 利用 optimality condition $H_u = 0$ 求解出 u^* (此時為 x 和 λ 表達式，不為最後結果)。
4. 將 u^* 帶入 x' 及 λ' 之微分方程，利用系統給定之邊界條件及必要條件聯立求解，求解後以最佳控制表達式表達結果(x^* 、 λ)。
5. 將 x^* 及 λ 帶回 u^* 後，即為最佳控制問題之解。

求解出最佳控制問題後，求解出之 x^* 及 u^* 即為該問題之最佳控制系統。



2.2 最佳化原則

最佳化原則(Principle of Optimality)[18]為一決策理論及動態規劃的方法，表示最佳解是由最佳子解所組成，也就是說，每一決策，都必須是最佳決策，才能得到最終的最佳策略。因此，最佳化原則為動態規劃法的核心原則。以下利用貪婪演算法(greedy algorithms)例子[19]及最佳控制問題證明最佳化原則之特點。

如圖 2-2 所示，數字意義代表從一節點至另一節點之距離長短。以 A 為起點，J 為終點，目標為在過程中所需距離為最短。若未應用最佳化原則，希望以最短距離抵達終點 J，以 A 為起點，其中路程經過 B、F、I 最後至 J。所選擇之路線，皆為當下最佳路線，經過距離為 17。此路線在每個節點上做出當前的最佳選擇，但並未考慮到後續的節點路線可能導致整體的路線為更佳。以下將敘述若使用最佳化原則，把整體結果考慮至每一步驟之結果。

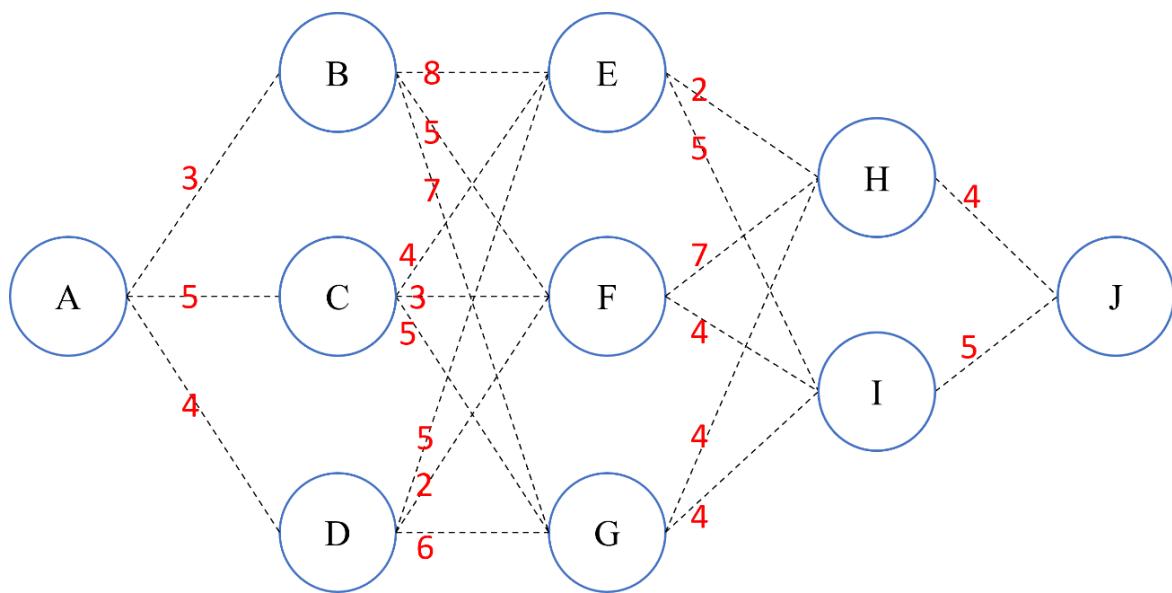


圖 2-2 貪婪演算法示意圖[19]

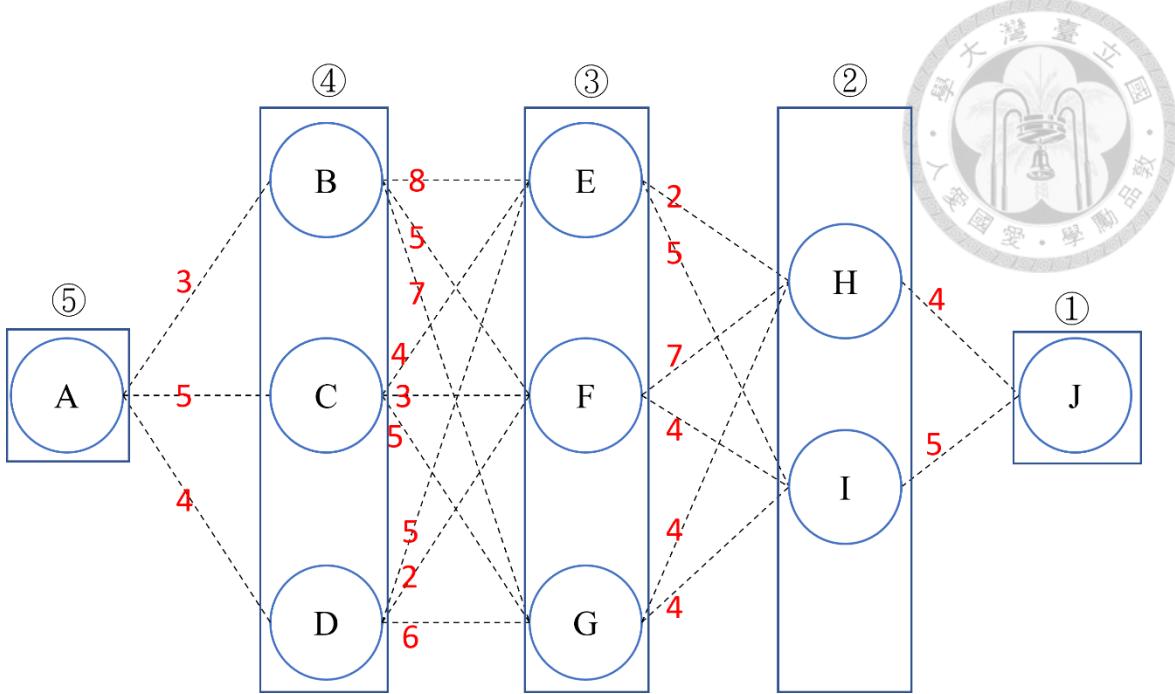


圖 2-3 貪婪演算法示意圖[19]

如圖 2-3 所示，令 $K(X)$ 為節點 X 到達 J 所需之最短距離，並以節點末端 J 開始，沿著編號①、②、③、④、⑤依序向左討論。

- ① $K(J) = 0$
- ② $K(H) = 4$, $K(I) = 5$
- ③ $K(E) = \min\{2 + K(H), 5 + K(I)\} = 6$, $K(F) = \min\{7 + K(H), 4 + K(I)\} = 9$,
 $K(G) = \min\{4 + K(H), 4 + K(I)\} = 8$
- ④ $K(B) = \min\{8 + K(E), 5 + K(F), 7 + K(G)\} = 14$, $K(C) = \min\{4 + K(E), 3 + K(F), 5 + K(G)\} = 10$, $K(D) = \min\{5 + K(E), 2 + K(F), 6 + K(G)\} = 11$
- ⑤ $K(A) = \min\{3 + K(B), 5 + K(C), 4 + K(D)\} = 15$

由結果可得知，實際上 A 至 J 最短之距離為 $A-D-E-H-J$ 及 $A-D-F-I-J$ 兩路線，即為最佳路線，距離為 15，結果較先前路線 $A-B-F-I-J$ 距離還少，由此二示例可證，若追求一系統之最佳策略，利用最佳化原則能確保每個子策略皆為最佳，並避免後續步驟帶來的潛在風險，而非關注當前的最佳選擇，無法顧慮全局，故最佳化原則在進行決策中扮演著不可或缺的角色。接下來利用最佳控制問題進行進一步實際舉



例[14]。

考慮一目標函數：

$$\begin{aligned} \min_u & \int_0^2 [x(t) + \frac{1}{2}u^2(t)]dt \\ \text{subject to } & x'(t) = x(t) + u(t), \quad x(0) = \frac{1}{2}e^2 - 1 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Hamiltonian 為：

$$H = x + \frac{1}{2}u^2 + \lambda(x + u) \tag{2.2.3}$$

必要條件為：

$$1. \quad 0 = \frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda \text{ at } u^* \Rightarrow u^* = -\lambda \text{ (optimality condition)} \tag{2.2.4}$$

$$2. \quad \lambda' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(1 + \lambda) \text{ (adjoint equation)} \tag{2.2.5}$$

$$3. \quad \lambda(2) = 0 \text{ (transversality condition)} \tag{2.2.6}$$

由 adjoint equation 及 transversality condition 可得 $\lambda(t)$ 為：

$$\lambda(t) = e^{2-t} - 1 \tag{2.2.7}$$

將上式帶回 optimality condition 可得最佳化控制：

$$u^* = -\lambda = 1 - e^{2-t} \tag{2.2.8}$$

即可得相對應之狀態方程：

$$x^* = \frac{1}{2}e^{2-t} - 1 \tag{2.2.9}$$

此問題結果得出後，考慮同一問題，將時間區間改為 $[1,2]$ ，即：

$$\begin{aligned} \min_u & \int_1^2 [x(t) + \frac{1}{2}u^2(t)]dt \\ \text{subject to } & x'(t) = x(t) + u(t), \quad x(1) = \frac{1}{2}e - 1 \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Hamiltonian 為：

$$H = x + \frac{1}{2}u^2 + \lambda(x + u) \tag{2.2.11}$$



必要條件為：

$$1. \quad 0 = \frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda \text{ at } u^* \Rightarrow u^* = -\lambda \text{ (optimality condition)} \quad (2.2.12)$$

$$2. \quad \lambda' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(1 + \lambda) \text{ (adjoint equation)} \quad (2.2.13)$$

$$3. \quad \lambda(2) = 0 \text{ (transversality condition)} \quad (2.2.14)$$

由 adjoint equation 及 transversality condition 可得：

$$\lambda(t) = e^{2-t} - 1 \quad (2.2.15)$$

將上式帶回 optimality condition 可得最佳化控制：

$$u^* = -\lambda = 1 - e^{2-t} \quad (2.2.16)$$

即可得相對應之狀態方程：

$$x^* = \frac{1}{2}e^{2-t} - 1 \quad (2.2.17)$$

由此問題能得知，因時間終端始終保持不變，所以無論時間間隔多長，Hamiltonian 皆為相同，必要條件保持不變，故最佳控制系統即為相同。再一次考慮同一問題，並將時間區間設置為[0,1]進行討論：

$$\begin{aligned} & \min_u \int_0^1 [x(t) + \frac{1}{2}u^2(t)]dt \\ & \text{subject to } x'(t) = x(t) + u(t), \quad x(0) = \frac{1}{2}e^2 - 1 \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Hamiltonian 為：

$$H = x + \frac{1}{2}u^2 + \lambda(x + u) \quad (2.2.19)$$

由於被積分函數及系統動態方程與前兩問題相同，因此 Hamiltonian 保持不變，以致於必要條件中之 optimality condition 及 adjoint equation 也不會改變。然而，因終端時間改變了，故 transversality condition 在此問題中也會改變。因此，必要條件變



為：

$$1. \quad 0 = \frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda \text{ at } u^* \Rightarrow u^* = -\lambda \text{ (optimality condition)} \quad (2.2.20)$$

$$2. \quad \lambda' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(1 + \lambda) \text{ (adjoint equation)} \quad (2.2.21)$$

$$3. \quad \lambda(1) = 0 \text{ (transversality condition)} \quad (2.2.22)$$

可得：

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(1 + \lambda), \lambda(1) = 0 \Rightarrow \lambda(t) = e^{1-t} - 1 \quad (2.2.23)$$

最佳控制為：

$$u^*(t) = -\lambda(t) = 1 - e^{1-t} \quad (2.2.24)$$

以及相對應之最佳狀態為：

$$x^*(t) = \frac{1}{2}e^{1-t} + \frac{1}{2}(e^2 - e)e^t - 1 \quad (2.2.25)$$

由此三例可得出結論，在決策系統中，若已制定出最佳策略，由最佳化原則可知，其子策略也必為最佳策略，所以任意更改決策之起始時間，並不影響整體之最佳決策。反之，若已制定出最佳策略，當決策系統之終端時間發生變化時，由最佳化原則可得，需要重新計算出新的最佳決策，以確保新的終端時間下，能使系統以最佳之方式運作[14]。



2.3 回報項

在特定狀況下，希望在特定時間點裡，最大化或最小化系統狀態，特別是時間區間之末端，例如：希望在癌症模型中之終端時間最小化腫瘤細胞、希望流行病模型最後時刻最小化感染個體數量，因此，在目標函數中引入 $\varphi(x(t_1))$ ，來達成此目的[14]。其中 $\varphi(x(t_1))$ 被稱為回報項(Payoff term)。加入回報項後，最大化目標函數形式為：

$$\begin{aligned} & \max_u \left[\varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \right] \\ & \text{subject to } x' = g(t, x(t), u(t)), x(t_0) = x_0 \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

為了取得此情況下目標函數之必要條件，將與 2.1.3 節相似方式推導。考慮圖 2-1 為一最佳化系統及未最佳化之系統。假設一片段連續之最佳控制 u^* 及相對應最佳化狀態 x^* 存在，對於所有以 u 為控制之目標函數來說，目標函數之範圍為 $J(u) \leq J(u^*) < \infty$ 。 $h(t)$ 為一任意片段連續函數，及 ε 為常數，令一任意控制 $u^\varepsilon(t)$ 為：

$$u^\varepsilon(t) = u^*(t) + \varepsilon h(t) \quad (2.3.2)$$

再令 $x^\varepsilon(t)$ 為 $u^\varepsilon(t)$ 相對應之狀態，且滿足：

$$\frac{d}{dt} x^\varepsilon = g(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) \quad (2.3.3)$$

因狀態之軌跡皆由相同起始點開始(圖)，故可得 $x^\varepsilon(t_0) = x(t_0)$ 。當 $\varepsilon \rightarrow 0$ 時，可得 $u^\varepsilon(t) \rightarrow u^*(t)$ 。再者，也可以得知：

$$h(t) = \left. \frac{\partial u^\varepsilon(t)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \quad (2.3.4)$$

存在於每個時間點 t 。同樣地，當 $\varepsilon \rightarrow 0$ 時，因 $u^\varepsilon(t) \rightarrow u^*(t)$ 存在於 g ，故可得：

$$x^\varepsilon(t) \rightarrow x^*(t) \quad (2.3.5)$$

存在於每個時間點 t 。再由上述關係，可得導數關係為：

$$\left. \frac{\partial x^\varepsilon(t)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \quad (2.3.6)$$

存在於每個時間點 t 。此關係的實際數值對於此證明過程不重要，僅需得知存在即



可。以 u^ε 為控制之目標函數為：

$$J(u^\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} [f(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) dt + \varphi(x^\varepsilon(t_1))] dt \quad (2.3.7)$$

設 $\lambda(t)$ 為一片段可微分之函數在 $[t_0, t_1]$ ，藉由微積分基本定理可得：

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} [\lambda(t)x^\varepsilon(t)] dt = \lambda(t_1)x^\varepsilon(t_1) - \lambda(t_0)x^\varepsilon(t_0) \quad (2.3.8)$$

移項可得：

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} [\lambda(t)x^\varepsilon(t)] dt - \lambda(t_1)x^\varepsilon(t_1) + \lambda(t_0)x^\varepsilon(t_0) = 0 \quad (2.3.9)$$

將 2.3.7 式與 2.3.9 式相加：

$$\begin{aligned} J(u^\varepsilon) &= \int_{t_0}^{t_1} [f(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) + \frac{d}{dt}(\lambda(t)x^\varepsilon(t))] dt + \varphi(x^\varepsilon(t_1)) \\ &\quad + \lambda(t_0)x^\varepsilon(t_0) - \lambda(t_1)x^\varepsilon(t_1) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [f(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) + \lambda'x^\varepsilon(t) + \lambda g(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t))] dt \\ &\quad + \varphi(x^\varepsilon(t_1)) + \lambda(t_0)x_0 - \lambda(t_1)x^\varepsilon(t_1) \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

因 J 之最大值發生在當控制 u 為 u^* 時，故 $J(u^\varepsilon)$ 於 ε 之導數為 0，即：

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\varepsilon} J(u^\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [f(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) + \lambda'x^\varepsilon(t) + \lambda g(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t))] \Big|_{\varepsilon=0} dt \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [\lambda(t_0)x_0] \Big|_{\varepsilon=0} - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [\lambda(t_1)x^\varepsilon(t_1)] \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [\varphi(x^\varepsilon(t_1))] \Big|_{\varepsilon=0} \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

運用連鎖律運算，並將 $x_0 = 0$ 帶入：

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^{t_1} \left[f_x \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon} + f_u \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \lambda' \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \lambda \left(g_x \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon} + g_u \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) \right] \Big|_{\varepsilon=0} dt \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [-\lambda(t_1)x^\varepsilon(t_1) + \varphi(x^\varepsilon(t_1))] \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[f_x \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon} + f_u \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \lambda' \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \lambda \left(g_x \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon} + g_u \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) \right] \Big|_{\varepsilon=0} dt \\ &\quad + \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon} [-\lambda(t_1) + \varphi'(x^\varepsilon(t_1))] \Big|_{\varepsilon=0} \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

最終結果即為：



$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \left[(f_x + \lambda'(t) + \lambda(t)g_x) \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon} |_{\varepsilon=0} + (f_u + \lambda(t)g_u)h(t) \right] dt \\ + \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon} [-\lambda(t) + \varphi'(x^\varepsilon(t_1))] |_{\varepsilon=0} \quad (2.3.13)$$

與 2.1.3 節相同運算方式可得必要條件為：

$$1. \quad \lambda'(t) = -[f_x(t, x^*, u^*) + g_x(t, x^*, u^*)] \text{ (adjoint equation)} \quad (2.3.14)$$

$$2. \quad f_u + \lambda g_u = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \text{ (optimality condition)} \quad (2.3.15)$$

$$3. \quad \lambda(t_1) = \varphi'(x^*(t_1)) \text{ (transversality condition)} \quad (2.3.16)$$

由推導結果可得，在目標函數加入 Payoff term 後，其對應之必要條件中，僅 transversality condition 改變。

第三章 研究方法

3.1 肌肉持續施力之數學模型

3.1.1 數學模型背景與機制

本研究採用了Jing Z. Liu等人於2001年提出的數學模型作為研究方法的基礎[20]。該數學模型建立在大腦長期自主施力（voluntary brain effort），促使肌肉產生力量的生物物理學原理(Biophysical Principles)，並預測了肌肉在長時間活動、疲勞和恢復過程中力量的變化。該模型將大腦和肌肉建立起連結，利用大腦的自主施力作為輸入變量來控制肌肉的活動。另外，此數學模型是假設大腦自主施力為定值的條件下進行研究，透過對健康的人類受試者進行3分鐘持續最大自主握力收縮實驗，實驗結果證實了該數學模型針對肌肉最大力量產生的可能性推斷，並且指出在最大自主施力下，只能達到真實最大力量的97%[20]。

肌肉是由肌纖維所組成，且肌肉在活動時所產生之力量和活動，是由神經系統命令肌肉纖維收縮所而產生[21][22]，然而，肌肉持續不斷收縮時，肌肉會因為受到疲勞作用及神經系統恢復作用使肌肉力量受到影響[8][23-25]。

肌肉在運動系統中，基本功能單位稱為運動單元(motor units)，是由運動神經元及其控制的肌肉纖維組成，運動單元的活動數量決定了肌肉之力量及疲勞程度[26]。運動神經元為主要將神經系統訊息傳至肌肉[27]，使肌肉纖維能受到控制。此外，肌肉纖維與運動神經元有相同代謝模式，因此當受到刺激而啟動時，兩者會表現出相同行為。



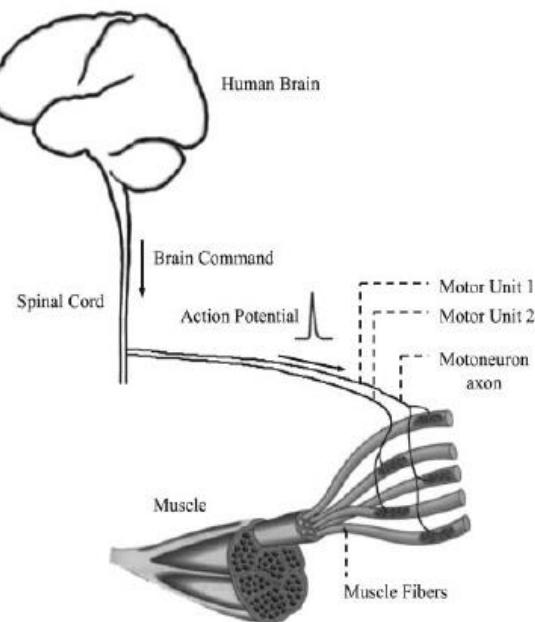


圖 3-1 人類神經系統與肌肉示意圖[20]

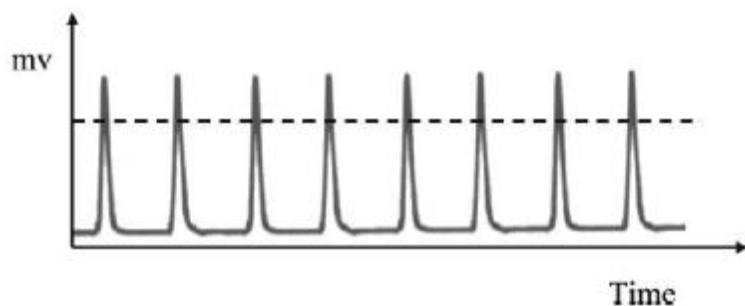


圖 3-2 動作電位圖[20]

如圖 3-1 所表示，肌肉是由運動單元組成，每一個運動單元皆包含運動神經元及其控制之肌肉纖維。為了使肌肉產生活動，大腦透過脊髓和周圍神經向肌肉下達指令，這樣的指令就稱為自主施力（Voluntary effort），指令以電脈衝方式將大腦指令傳輸至運動神經元，若命令超過閾值(threshold)，將會觸發運動單元之動作電位[28][29]，在運動單元中觸發動作電位後，該運動單元中所有肌纖維將同步收縮，我們就會將此運動單元視為啟動。值得關注的是，電脈衝引起的刺激需達到足夠的強度才會引發動作電位，使肌肉活動，若刺激未達所需程度，則不會觸發動作電位，



也不會使運動單元啟動。

當肌肉長時間持續收縮時，大腦將不斷加強指令強度，在此情況下，一連串的動作電位被連續激發，並且不斷刺激運動單元，如圖 3-2 所示。由於被刺激一段時間後，被刺激的運動單元會因氧氣及糖原供應不足，血液及肌肉中乳酸水平升高等因素而開始產生疲勞[28][30]，當疲勞發生時，運動單元的放電傾向將逐漸降低[6]。當疲勞持續累積，運動單元最終達到閾值，若進一步超越此閾值，運動單元將無法再被啟動，變得完全疲勞[23][24][28][30]。

當產生力並且維持強度時，肌肉中的運動單元會逐漸被募集，其中一部分運動單元率先被啟動，然而，當這些肌肉感到疲勞時，就需要從運動單元庫中募集更多運動單元，以補足因疲勞造成的力量損失，同時，受到疲勞的運動單元開始恢復功能。對於施力要求極低的任務來說，疲勞不會累積，肌肉能輕易地完成任務，但對於施力要求很高的任務來說，例如：執行持續最大自主收縮(Maximal Voluntary Contraction)[7][31]，肌肉的恢復無法快速的抵銷疲勞效應，因此，在此狀況下持續施力，運動單元將產生疲勞而無法再被啟動，而使肌肉完全疲勞，無法產生力量[32]。綜合以上所述，我們可以將在活動中的肌肉，其運動單元劃分成三類：正在活動、已疲勞、靜止。在下節中，將這三類運動單元的行為，透過數學模型描述。



3.1.2 數學模型建立

如圖 3-3 所示， M_0 代表肌肉在活動中，運動單元之總數， M_A 為正在活動的運動單元數量， M_F 為活動一段時間後，已疲勞的運動單元數量， M_{uc} 為尚未被驅動的運動單元數量，即靜止之數量。 M_A 、 M_F 、 M_{uc} 皆為時間之函數，在初始時間($t = 0$)時皆處於靜止狀態。因此，當 $t = 0$ 時， $M_A = 0$, $M_F = 0$, $M_{uc} = M_0$ 。

在此模型中，大腦下達指令之行為即對運動單元之刺激，為激發肌肉活動之驅動力，由 B 表示。 B 描述了運動單元被刺激後進入活動狀態之速率。另外，肌肉之疲勞效應由 F 表示，而恢復效應由 R 表示。 F 描述正在活動之運動單元進入疲勞狀態之速率， R 描述已疲勞運動單元由疲勞狀態恢復之速率。因此，隨著 F 值越大表示疲勞效應越大，同理， R 值越大，表示疲勞恢復的越快。然而，由於 B 、 F 、 R 之數值可以根據不同受測者之身體條件，有不同測量結果。

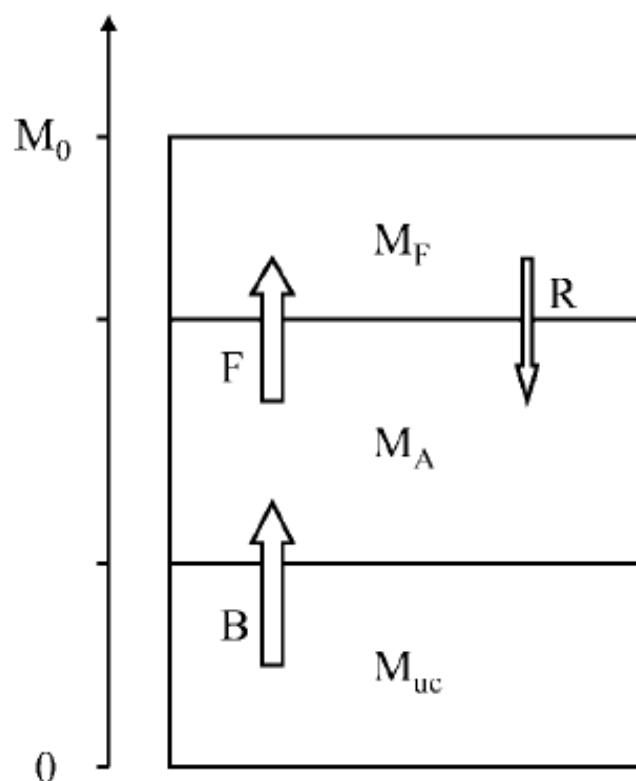


圖 3-3 三組運動單元及其動態關係，其中箭頭方向表示作用方向[20]



由圖 3-3 可將其關係寫成數學動態方程：

$$\frac{dM_A}{dt} = B \cdot M_{uc} - F \cdot M_A + R \cdot M_F, \quad (3.1.1)$$

$$\frac{dM_F}{dt} = F \cdot M_A - R \cdot M_F, \quad (3.1.2)$$

$$M_{uc}(t) = M_0 - M_A(t) - M_F(t). \quad (3.1.3)$$

以及相對應之初始條件為：

$$M_A(0) = 0, \quad (3.1.4)$$

$$M_F(0) = 0, \quad (3.1.5)$$

$$M_{uc}(0) = M_0. \quad (3.1.6)$$

上述三微分方程及對應初始條件，即描述了肌肉中運動單元在活動、疲勞、恢復時之行為。在一般形式中，大腦下達命令為時間之函數，即 $B(t)$ ，其值取決於實際情況變化。在 Jing Z. Liu 等人研究中，將 B 設置為常數，應用在此數學模型中進行研究[20]。

在本研究中，為了探討在應用最佳控制理論下，持續施力之系統，大腦之命令會有如何的最佳策略，因此將 B 設置為時間函數 $u(t)$ 作為控制項，如表 3-1[20]。另外，也將運動單元總數 M_0 正規化，設置為 100(%)。最後，應用於本研究之 F 、 R 之參數為 Jing Z. Liu 等人研究中，受試者之平均結果，如表 3-1[20]。故本研究之數學模型為：

$$\frac{dM_A}{dt} = u(t) \cdot M_{uc} - F \cdot M_A + R \cdot M_F, \quad (3.1.7)$$

$$\frac{dM_F}{dt} = F \cdot M_A - R \cdot M_F, \quad (3.1.8)$$

$$M_{uc}(t) = M_0 - M_A(t) - M_F(t). \quad (3.1.9)$$

以及相對應之初始條件為：

$$M_A(0) = 0, \quad (3.1.10)$$

$$M_F(0) = 0, \quad (3.1.11)$$

$$(3.1.12)$$

$$M_{uc}(0) = 100.$$

本研究之數學模型中之數學符號意義為： $M_A(t)$ 為活動中之運動單元數量、 $M_F(t)$ 為已疲勞之運動單元數量、 $M_{uc}(t)$ 為靜止之運動單元數量、 M_0 為運動單元總數、 $u(t)$ 為大腦刺激運動單元進入活動狀態之速率、 F 為活動中之運動單元進入疲勞狀態之速率、 R 為已疲勞運動單元由疲勞狀態恢復成可活動狀態之速率。值得注意的是，這裡所描述的運動單元數量為正規化之結果，因此單位由百分比(%)表示。此外，如 3.1.1 節所敘述，肌肉之施力大小和疲勞程度會取決於運動單元之活動數量[26]，故 $M_A(t)$ 和 $M_F(t)$ 會正比於肌肉之施力大小以及肌肉疲勞程度。

表 3-1 參數 B 、 F 、 R 及其單位[20]

參數	B	F	R
本研究設定值	$u(t)$	0.0206	0.0084
單位	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s}$



3.2 目標函數建立

在本節中，利用 3.1 節所介紹之數學模型，建立了三個目標函數，考慮在 30 秒內，肌肉在持續施力過程中最佳的施力方式，提供了不同的角度和觀點，以幫助制定最佳的肌肉施力策略，分別為：

1. 目標函數一：

$$\max_u \int_0^{30} (M_A - u^2) dt \quad (3.2.1)$$

目標函數一考慮肌肉施力和大腦命令強度，以達到最大化施力並最小化大腦給予肌肉的命令程度。目的是追求最大化肌肉施力的能力，提供最大的力量輸出，同時也希望大腦對肌肉的命令程度能最小化，以降低大腦的負荷。

2. 目標函數二：

$$\max_u \int_0^{30} (M_A - M_F - u^2) dt \quad (3.2.2)$$

目標函數二希望能最大化肌肉施力強度，並且最小化肌肉疲勞程度和大腦命令強度，與目標函數一相比，目標函數二把肌肉疲勞程度多考慮進策略內，意味著在制定策略時更注重肌肉產生之疲勞，以平衡肌肉施力與疲勞之關係。

3. 目標函數三：

$$\max_u \int_0^{30} (-M_F - u^2) dt \quad (3.2.3)$$

目標函數三與前兩者相比，僅希望最小化肌肉疲勞程度及大腦命令強度，而不考慮肌肉之施力大小。這樣的目標函數設計傾向於減少肌肉疲勞和大腦命令強度，而不是追求最大化肌肉施力，更關注在肌肉活動過程中如何減少疲勞的累積和減輕大腦的負荷，以提高肌肉持久力和運動效能。

同時，本研究也將目標函數中各項加入權重常數進行變化，以觀察每項重要性帶來的影響。設定權重常數，可以調整每個函數在最佳化過程中的相對重要性，找到適合的最佳化結果。故加入權重常數之目標函數為：



目標函數一：

$$\max_u \int_0^{30} (2M_A - u^2) dt \quad (3.2.4)$$

及

$$\max_u \int_0^{30} (M_A - 2u^2) dt \quad (3.2.5)$$

目標函數二：

$$\max_u \int_0^{30} (2M_A - M_F - u^2) dt \quad (3.2.6)$$

和

$$\max_u \int_0^{30} (M_A - 2M_F - u^2) dt \quad (3.2.7)$$

以及

$$\max_u \int_0^{30} (M_A - M_F - 2u^2) dt \quad (3.2.8)$$

最後，將目標函數三設置為：

$$\max_u \int_0^{30} (-2M_F - u^2) dt \quad (3.2.9)$$

及

$$\max_u \int_0^{30} (-M_F - 2u^2) dt \quad (3.2.10)$$

上述即為三組目標函數加入權重常數之形式。

3.3 最佳控制理論分析

透過在第 3.2 節中建立的目標函數，以及在第 3.1.2 節中描述的肌肉持續施力的動態方程式，我們即可應用最佳控制理論進行分析，分析後之數值解結果是藉由 MATLAB 計算出。



3.3.1 目標函數一

(1)

$$\begin{aligned}
 & \max_u \int_0^{30} (M_A - u^2) dt \\
 \text{subject to} \quad & M'_A(t) = u(t) \cdot M_{uc} - F \cdot M_A + R \cdot M_F, \\
 & M'_F(t) = F \cdot M_A - R \cdot M_F, \\
 & M_{uc}(t) = M_0 - M_A(t) - M_F(t). \\
 & M_A(0) = 0, M_F(0) = 0, M_{uc}(0) = M_0 = 100
 \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Hamiltonian H 為：

$$\begin{aligned}
 H = & (M_A - u^2) + \lambda_1 [u(t) \cdot M_{uc} - F \cdot M_A + R \cdot M_F] \\
 & + \lambda_2 (F \cdot M_A - R \cdot M_F)
 \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

必要條件為：

$$1. \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \text{at } u^*, u^* = \frac{\lambda_1}{2} (M_0 - M_A - M_F) \text{ (optimality condition)} \tag{3.3.3}$$

$$2. \lambda'_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial M_A}, \lambda'_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial M_F} \text{ (adjoint equation)} \tag{3.3.4}$$

$$3. \lambda_1(30) = 0, \lambda_2(30) = 0 \text{ (transversality condition)} \tag{3.3.5}$$

將 optimality condition 之結果 u^* 帶入至系統動態方程及 adjoint equation 可得微分方程組：

$$M'_A(t) = \frac{21M_F}{2500} - \frac{103M_A}{5000} + \frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)^2}{2} \tag{3.3.6}$$

$$M'_F(t) = \frac{103M_A}{5000} - \frac{21M_F}{2500} \tag{3.3.7}$$

$$\lambda'_1(t) = -\frac{103\lambda_2}{5000} - \lambda_1 \left[\frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)}{2} - \frac{103}{5000} \right] - 1 \tag{3.3.8}$$

$$\lambda'_2(t) = \frac{21\lambda_2}{2500} - \lambda_1 \left[\frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)}{2} + \frac{21}{2500} \right] \tag{3.3.9}$$

將上述微分方程組及相對應之邊界條件輸入至 MATLAB 後並帶回 optimality condition，即可求出最佳化結果 M_A^* 、 M_F^* 、 u^* 之數值解結果。



(2)

$$\begin{aligned}
 & \max_u \int_0^{30} (2M_A - u^2) dt \\
 \text{subject to} \quad & M'_A(t) = u(t) \cdot M_{uc} - F \cdot M_A + R \cdot M_F, \\
 & M'_F(t) = F \cdot M_A - R \cdot M_F, \\
 & M_{uc}(t) = M_0 - M_A(t) - M_F(t). \\
 & M_A(0) = 0, M_F(0) = 0, M_{uc}(0) = M_0 = 100
 \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Hamiltonian 為：

$$\begin{aligned}
 H = & (2M_A - u^2) + \lambda_1 [u(t) \cdot M_{uc} - F \cdot M_A + R \cdot M_F] \\
 & + \lambda_2 (F \cdot M_A - R \cdot M_F)
 \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

必要條件為：

$$1. \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \text{at } u^*, u^* = \frac{\lambda_1}{2} (M_0 - M_A - M_F) \quad (\text{optimality condition}) \tag{3.3.12}$$

$$2. \quad \lambda'_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial M_A}, \quad \lambda'_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial M_F} \quad (\text{adjoint equation}) \tag{3.3.13}$$

$$3. \quad \lambda_1(30) = 0, \quad \lambda_2(30) = 0 \quad (\text{transversality condition}) \tag{3.3.14}$$

將 optimality condition 之結果 u^* 帶入至系統動態方程及 adjoint equation 可得微分方程組：

$$M'_A(t) = \frac{21M_F}{2500} - \frac{103M_A}{5000} + \frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)^2}{2} \tag{3.3.15}$$

$$M'_F(t) = \frac{103M_A}{5000} - \frac{21M_F}{2500} \tag{3.3.16}$$

$$\lambda'_1(t) = -\frac{103\lambda_2}{5000} - \lambda_1 \left[\frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)}{2} - \frac{103}{5000} \right] - 2 \tag{3.3.17}$$

$$\lambda'_2(t) = \frac{21\lambda_2}{2500} - \lambda_1 \left[\frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)}{2} + \frac{21}{2500} \right] \tag{3.3.18}$$

將上述微分方程組及相對應之邊界條件輸入至 MATLAB 後並帶回 optimality condition，即可求出最佳化結果 M_A^* 、 M_F^* 、 u^* 之數值解結果。



(3)

$$\begin{aligned}
 & \max_u \int_0^{30} (M_A - 2u^2) dt \\
 \text{subject to} \quad & M'_A(t) = u(t) \cdot M_{uc} - F \cdot M_A + R \cdot M_F, \\
 & M'_F(t) = F \cdot M_A - R \cdot M_F, \\
 & M_{uc}(t) = M_0 - M_A(t) - M_F(t). \\
 & M_A(0) = 0, M_F(0) = 0, M_{uc}(0) = M_0 = 100
 \end{aligned} \tag{3.3.19}$$

Hamiltonian 為：

$$\begin{aligned}
 H = & (M_A - 2u^2) + \lambda_1[u(t) \cdot M_{uc} - F \cdot M_A + R \cdot M_F] \\
 & + \lambda_2(F \cdot M_A - R \cdot M_F)
 \end{aligned} \tag{3.3.20}$$

必要條件為：

$$1. \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \text{at } u^*, u^* = \frac{\lambda_1}{4}(M_0 - M_A - M_F) \quad (\text{optimality condition}) \tag{3.3.21}$$

$$2. \quad \lambda'_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial M_A}, \quad \lambda'_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial M_F} \quad (\text{adjoint equation}) \tag{3.3.22}$$

$$3. \quad \lambda_1(30) = 0, \quad \lambda_2(30) = 0 \quad (\text{transversality condition}) \tag{3.3.23}$$

將 optimality condition 之結果 u^* 帶入至系統動態方程及 adjoint equation 可得微分方程組：

$$M'_A(t) = \frac{21M_F}{2500} - \frac{103M_A}{5000} + \frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)^2}{4} \tag{3.3.24}$$

$$M'_F(t) = \frac{103M_A}{5000} - \frac{21M_F}{2500} \tag{3.3.25}$$

$$\lambda'_1(t) = -\frac{103\lambda_2}{5000} - \lambda_1 \left[\frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)}{4} - \frac{103}{5000} \right] - 1 \tag{3.3.26}$$

$$\lambda'_2(t) = \frac{21\lambda_2}{2500} - \lambda_1 \left[\frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)}{4} + \frac{21}{2500} \right] \tag{3.3.27}$$

將上述微分方程組及相對應之邊界條件輸入至 MATLAB 後並帶回 optimality condition，即可求出最佳化結果 M_A^* 、 M_F^* 、 u^* 之數值解結果。



3.3.2 目標函數二

(1)

$$\begin{aligned}
 & \max_u \int_0^{30} (M_A - M_F - u^2) dt \\
 \text{subject to} \quad & M'_A(t) = u(t) \cdot M_{uc} - F \cdot M_A + R \cdot M_F, \\
 & M'_F(t) = F \cdot M_A - R \cdot M_F, \\
 & M_{uc}(t) = M_0 - M_A(t) - M_F(t), \\
 & M_A(0) = 0, M_F(0) = 0, M_{uc}(0) = M_0 = 100
 \end{aligned} \tag{3.3.28}$$

Hamiltonian 為：

$$\begin{aligned}
 H = & (M_A - M_F - u^2) + \lambda_1 [u(t) \cdot M_{uc} - F \cdot M_A + R \cdot M_F] \\
 & + \lambda_2 (F \cdot M_A - R \cdot M_F)
 \end{aligned} \tag{3.3.29}$$

必要條件為：

$$1. \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \text{at } u^*, u^* = \frac{\lambda_1}{2} (M_0 - M_A - M_F) \quad (\text{optimality condition}) \tag{3.3.30}$$

$$2. \quad \lambda'_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial M_A}, \quad \lambda'_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial M_F} \quad (\text{adjoint equation}) \tag{3.3.31}$$

$$3. \quad \lambda_1(30) = 0, \quad \lambda_2(30) = 0 \quad (\text{transversality condition}) \tag{3.3.32}$$

將 optimality condition 之結果 u^* 帶入至系統動態方程及 adjoint equation 可得微分方程組：

$$M'_A(t) = \frac{21M_F}{2500} - \frac{103M_A}{5000} + \frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)^2}{2} \tag{3.3.33}$$

$$M'_F(t) = \frac{103M_A}{5000} - \frac{21M_F}{2500} \tag{3.3.34}$$

$$\lambda'_1(t) = -\frac{103\lambda_2}{5000} - \lambda_1 \left[\frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)}{2} - \frac{103}{5000} \right] - 1 \tag{3.3.35}$$

$$\lambda'_2(t) = \frac{21\lambda_2}{2500} - \lambda_1 \left[\frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)}{2} + \frac{21}{2500} \right] + 1 \tag{3.3.36}$$

將上述微分方程組及相對應之邊界條件輸入至 MATLAB 後並帶回 optimality condition，即可求出最佳化結果 M_A^* 、 M_F^* 、 u^* 之數值解結果。



(2)

$$\begin{aligned}
 & \max_u \int_0^{30} (2M_A - M_F - u^2) dt \\
 \text{subject to} \quad & M'_A(t) = u(t) \cdot M_{uc} - F \cdot M_A + R \cdot M_F, \\
 & M'_F(t) = F \cdot M_A - R \cdot M_F, \\
 & M_{uc}(t) = M_0 - M_A(t) - M_F(t). \\
 & M_A(0) = 0, M_F(0) = 0, M_{uc}(0) = M_0 = 100
 \end{aligned} \tag{3.3.37}$$

Hamiltonian 為：

$$\begin{aligned}
 H = & (2M_A - M_F - u^2) + \lambda_1 [u(t) \cdot M_{uc} - F \cdot M_A + R \cdot M_F] \\
 & + \lambda_2 (F \cdot M_A - R \cdot M_F)
 \end{aligned} \tag{3.3.38}$$

必要條件為：

$$1. \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \text{at } u^*, u^* = \frac{\lambda_1}{2} (M_0 - M_A - M_F) \quad (\text{optimality condition}) \tag{3.3.39}$$

$$2. \quad \lambda'_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial M_A}, \quad \lambda'_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial M_F} \quad (\text{adjoint equation}) \tag{3.3.40}$$

$$3. \quad \lambda_1(30) = 0, \quad \lambda_2(30) = 0 \quad (\text{transversality condition}) \tag{3.3.41}$$

將 optimality condition 之結果 u^* 帶入至系統動態方程及 adjoint equation 可得微分方程組：

$$M'_A(t) = \frac{21M_F}{2500} - \frac{103M_A}{5000} + \frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)^2}{2} \tag{3.3.42}$$

$$M'_F(t) = \frac{103M_A}{5000} - \frac{21M_F}{2500} \tag{3.3.43}$$

$$\lambda'_1(t) = -\frac{103\lambda_2}{5000} - \lambda_1 \left[\frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)}{2} - \frac{103}{5000} \right] - 2 \tag{3.3.44}$$

$$\lambda'_2(t) = \frac{21\lambda_2}{2500} - \lambda_1 \left[\frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)}{2} + \frac{21}{2500} \right] + 1 \tag{3.3.45}$$

將上述微分方程組及相對應之邊界條件輸入至 MATLAB 後並帶回 optimality condition，即可求出最佳化結果 M_A^* 、 M_F^* 、 u^* 之數值解結果。



(3)

$$\begin{aligned}
 & \max_u \int_0^{30} (M_A - 2M_F - u^2) dt \\
 \text{subject to} \quad & M'_A(t) = u(t) \cdot M_{uc} - F \cdot M_A + R \cdot M_F, \\
 & M'_F(t) = F \cdot M_A - R \cdot M_F, \\
 & M_{uc}(t) = M_0 - M_A(t) - M_F(t). \\
 & M_A(0) = 0, M_F(0) = 0, M_{uc}(0) = M_0 = 100
 \end{aligned} \tag{3.3.46}$$

Hamiltonian 為：

$$\begin{aligned}
 H = & (M_A - 2M_F - u^2) + \lambda_1 [u(t) \cdot M_{uc} - F \cdot M_A + R \cdot M_F] \\
 & + \lambda_2 (F \cdot M_A - R \cdot M_F)
 \end{aligned} \tag{3.3.47}$$

必要條件為：

$$1. \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \text{at } u^*, u^* = \frac{\lambda_1}{2} (M_0 - M_A - M_F) \quad (\text{optimality condition}) \tag{3.3.48}$$

$$2. \quad \lambda'_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial M_A}, \quad \lambda'_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial M_F} \quad (\text{adjoint equation}) \tag{3.3.49}$$

$$3. \quad \lambda_1(30) = 0, \quad \lambda_2(30) = 0 \quad (\text{transversality condition}) \tag{3.3.50}$$

將 optimality condition 之結果 u^* 帶入至系統動態方程及 adjoint equation 可得微分方程組：

$$M'_A(t) = \frac{21M_F}{2500} - \frac{103M_A}{5000} + \frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)^2}{2} \tag{3.3.51}$$

$$M'_F(t) = \frac{103M_A}{5000} - \frac{21M_F}{2500} \tag{3.3.52}$$

$$\lambda'_1(t) = -\frac{103\lambda_2}{5000} - \lambda_1 \left[\frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)}{2} - \frac{103}{5000} \right] - 1 \tag{3.3.53}$$

$$\lambda'_2(t) = \frac{21\lambda_2}{2500} - \lambda_1 \left[\frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)}{2} + \frac{21}{2500} \right] + 2 \tag{3.3.54}$$

將上述微分方程組及相對應之邊界條件輸入至 MATLAB 後並帶回 optimality condition，即可求出最佳化結果 M_A^* 、 M_F^* 、 u^* 之數值解結果。



(4)

$$\begin{aligned}
 & \max_u \int_0^{30} (M_A - M_F - 2u^2) dt \\
 \text{subject to} \quad & M'_A(t) = u(t) \cdot M_{uc} - F \cdot M_A + R \cdot M_F, \\
 & M'_F(t) = F \cdot M_A - R \cdot M_F, \\
 & M_{uc}(t) = M_0 - M_A(t) - M_F(t). \\
 & M_A(0) = 0, M_F(0) = 0, M_{uc}(0) = M_0 = 100
 \end{aligned} \tag{3.3.55}$$

Hamiltonian 為：

$$\begin{aligned}
 H = & (M_A - M_F - 2u^2) + \lambda_1 [u(t) \cdot M_{uc} - F \cdot M_A + R \cdot M_F] \\
 & + \lambda_2 (F \cdot M_A - R \cdot M_F)
 \end{aligned} \tag{3.3.56}$$

必要條件為：

$$1. \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \text{at } u^*, u^* = \frac{\lambda_1}{4} (M_0 - M_A - M_F) \quad (\text{optimality condition}) \tag{3.3.57}$$

$$2. \quad \lambda'_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial M_A}, \quad \lambda'_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial M_F} \quad (\text{adjoint equation}) \tag{3.3.58}$$

$$3. \quad \lambda_1(30) = 0, \quad \lambda_2(30) = 0 \quad (\text{transversality condition}) \tag{3.3.59}$$

將 optimality condition 之結果 u^* 帶入至系統動態方程及 adjoint equation 可得微分方程組：

$$M'_A(t) = \frac{21M_F}{2500} - \frac{103M_A}{5000} + \frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)^2}{4} \tag{3.3.60}$$

$$M'_F(t) = \frac{103M_A}{5000} - \frac{21M_F}{2500} \tag{3.3.61}$$

$$\lambda'_1(t) = -\frac{103\lambda_2}{5000} - \lambda_1 \left[\frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)}{4} - \frac{103}{5000} \right] - 1 \tag{3.3.62}$$

$$\lambda'_2(t) = \frac{21\lambda_2}{2500} - \lambda_1 \left[\frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)}{4} + \frac{21}{2500} \right] + 1 \tag{3.3.63}$$

將上述微分方程組及相對應之邊界條件輸入至 MATLAB 後並帶回 optimality condition，即可求出最佳化結果 M_A^* 、 M_F^* 、 u^* 之數值解結果。



3.3.3 目標函數三

(1)

$$\begin{aligned}
 & \max_u \int_0^{30} (-M_F - u^2) dt \\
 \text{subject to} \quad & M'_A(t) = u(t) \cdot M_{uc} - F \cdot M_A + R \cdot M_F, \\
 & M'_F(t) = F \cdot M_A - R \cdot M_F, \\
 & M_{uc}(t) = M_0 - M_A(t) - M_F(t), \\
 & M_A(0) = 0, M_F(0) = 0, M_{uc}(0) = M_0 = 100
 \end{aligned} \tag{3.3.64}$$

Hamiltonian 為：

$$\begin{aligned}
 H = & (-M_F - u^2) + \lambda_1 [u(t) \cdot M_{uc} - F \cdot M_A + R \cdot M_F] \\
 & + \lambda_2 (F \cdot M_A - R \cdot M_F)
 \end{aligned} \tag{3.3.65}$$

必要條件為：

$$1. \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \text{at } u^*, u^* = \frac{\lambda_1}{2} (M_0 - M_A - M_F) \text{ (optimality condition)} \tag{3.3.66}$$

$$2. \lambda'_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial M_A}, \lambda'_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial M_F} \text{ (adjoint equation)} \tag{3.3.67}$$

$$3. \lambda_1(30) = 0, \lambda_2(30) = 0 \text{ (transversality condition)} \tag{3.3.68}$$

將 optimality condition 之結果 u^* 帶入至系統動態方程及 adjoint equation 可得微分方程組：

$$M'_A(t) = \frac{21M_F}{2500} - \frac{103M_A}{5000} + \frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)^2}{2} \tag{3.3.69}$$

$$M'_F(t) = \frac{103M_A}{5000} - \frac{21M_F}{2500} \tag{3.3.70}$$

$$\lambda'_1(t) = -\frac{103\lambda_2}{5000} - \lambda_1 \left[\frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)}{2} - \frac{103}{5000} \right] \tag{3.3.71}$$

$$\lambda'_2(t) = \frac{21\lambda_2}{2500} - \lambda_1 \left[\frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)}{2} + \frac{21}{2500} \right] + 1 \tag{3.3.72}$$

將上述微分方程組及相對應之邊界條件輸入至 MATLAB 後並帶回 optimality condition，即可求出最佳化結果 M_A^* 、 M_F^* 、 u^* 之數值解結果。



(2)

$$\begin{aligned}
 & \max_u \int_0^{30} (-2M_F - u^2) dt \\
 \text{subject to} \quad & M'_A(t) = u(t) \cdot M_{uc} - F \cdot M_A + R \cdot M_F, \\
 & M'_F(t) = F \cdot M_A - R \cdot M_F, \\
 & M_{uc}(t) = M_0 - M_A(t) - M_F(t). \\
 & M_A(0) = 0, M_F(0) = 0, M_{uc}(0) = M_0 = 100
 \end{aligned} \tag{3.3.73}$$

Hamiltonian 為：

$$\begin{aligned}
 H = & (-2M_F - u^2) + \lambda_1 [u(t) \cdot M_{uc} - F \cdot M_A + R \cdot M_F] \\
 & + \lambda_2 (F \cdot M_A - R \cdot M_F)
 \end{aligned} \tag{3.3.74}$$

必要條件為：

$$1. \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \text{at } u^*, u^* = \frac{\lambda_1}{2} (M_0 - M_A - M_F) \quad (\text{optimality condition}) \tag{3.3.75}$$

$$2. \quad \lambda'_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial M_A}, \quad \lambda'_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial M_F} \quad (\text{adjoint equation}) \tag{3.3.76}$$

$$3. \quad \lambda_1(30) = 0, \quad \lambda_2(30) = 0 \quad (\text{transversality condition}) \tag{3.3.77}$$

將 optimality condition 之結果 u^* 帶入至系統動態方程及 adjoint equation 可得微分方程組：

$$M'_A(t) = \frac{21M_F}{2500} - \frac{103M_A}{5000} + \frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)^2}{2} \tag{3.3.78}$$

$$M'_F(t) = \frac{103M_A}{5000} - \frac{21M_F}{2500} \tag{3.3.79}$$

$$\lambda'_1(t) = -\frac{103\lambda_2}{5000} - \lambda_1 \left[\frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)}{2} - \frac{103}{5000} \right] \tag{3.3.80}$$

$$\lambda'_2(t) = \frac{21\lambda_2}{2500} - \lambda_1 \left[\frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)}{2} + \frac{21}{2500} \right] + 2 \tag{3.3.81}$$

將上述微分方程組及相對應之邊界條件輸入至 MATLAB 後並帶回 optimality condition，即可求出最佳化結果 M_A^* 、 M_F^* 、 u^* 之數值解結果。



(3)

$$\begin{aligned}
 & \max_u \int_0^{30} (-M_F - 2u^2) dt \\
 \text{subject to} \quad & M'_A(t) = u(t) \cdot M_{uc} - F \cdot M_A + R \cdot M_F, \\
 & M'_F(t) = F \cdot M_A - R \cdot M_F, \\
 & M_{uc}(t) = M_0 - M_A(t) - M_F(t). \\
 & M_A(0) = 0, M_F(0) = 0, M_{uc}(0) = M_0 = 100
 \end{aligned} \tag{3.3.82}$$

Hamiltonian 為：

$$\begin{aligned}
 H = & (-M_F - 2u^2) + \lambda_1 [u(t) \cdot M_{uc} - F \cdot M_A + R \cdot M_F] \\
 & + \lambda_2 (F \cdot M_A - R \cdot M_F)
 \end{aligned} \tag{3.3.83}$$

必要條件：

$$1. \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \text{at } u^*, u^* = \frac{\lambda_1}{4} (M_0 - M_A - M_F) \quad (\text{optimality condition}) \tag{3.3.84}$$

$$2. \quad \lambda'_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial M_A}, \quad \lambda'_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial M_F} \quad (\text{adjoint equation}) \tag{3.3.85}$$

$$3. \quad \lambda_1(30) = 0, \quad \lambda_2(30) = 0 \quad (\text{transversality condition}) \tag{3.3.86}$$

將 optimality condition 之結果 u^* 帶入至系統動態方程及 adjoint equation 可得微分方程組：

$$M'_A(t) = \frac{21M_F}{2500} - \frac{103M_A}{5000} + \frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)^2}{4} \tag{3.3.87}$$

$$M'_F(t) = \frac{103M_A}{5000} - \frac{21M_F}{2500} \tag{3.3.88}$$

$$\lambda'_1(t) = -\frac{103\lambda_2}{5000} - \lambda_1 \left[\frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)}{4} - \frac{103}{5000} \right] \tag{3.3.89}$$

$$\lambda'_2(t) = \frac{21\lambda_2}{2500} - \lambda_1 \left[\frac{\lambda_1(M_A + M_F - M_0)}{4} + \frac{21}{2500} \right] + 1 \tag{3.3.90}$$

將上述微分方程組及相對應之邊界條件輸入至 MATLAB 後並帶回 optimality condition，即可求出最佳化結果 M_A^* 、 M_F^* 、 u^* 之數值解結果。

為了評估使用最佳控制理論之效益，本研究同時對 3.1 節中之數學模型進行了額外的求解，涵蓋了 3.1.7 式至 3.1.12 式。在求解過程中，本研究將 3.1.7 式中的

$u(t)$ 設置為常數 10，即未使用最佳控制策略，模擬結果於 4.4 節中呈現。目的是為了比較使用最佳控制策略及未使用最佳控制策略之間差異。透過比較，我們可以更清楚理解最佳控制理論帶來的優勢和效益。





第四章 模擬結果與分析

在本章中，呈現了使用和未使用最佳控制策略之模擬結果，並且將各結果進行量化比較。

4.1 目標函數一

4.1.1 未加入權重常數

由 MATLAB 模擬後可得目標函數一未加入權重常數(3.3.1 式)之結果為：

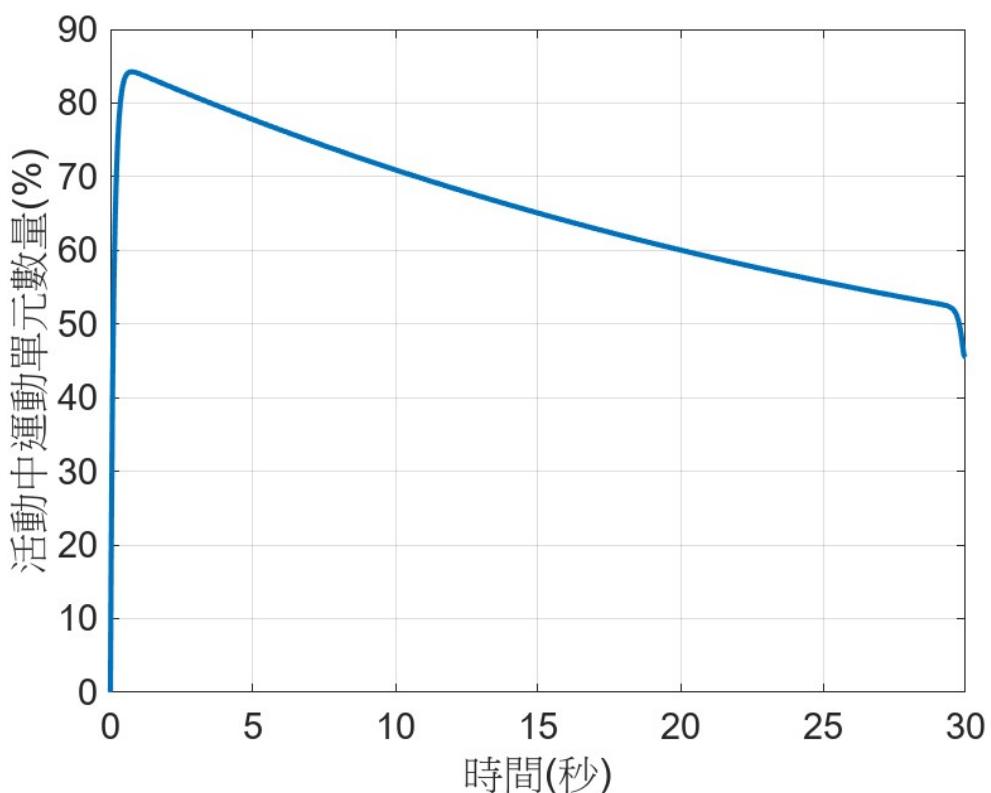


圖 4-1 最佳化後活動中之運動單元數量(M_A^*)

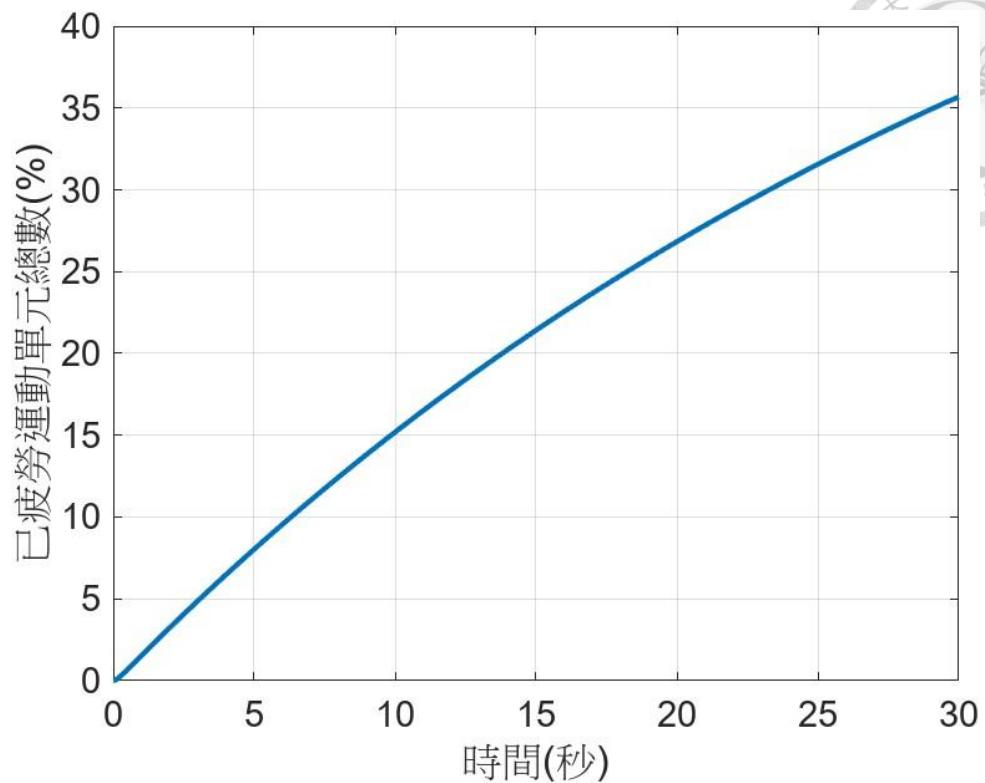
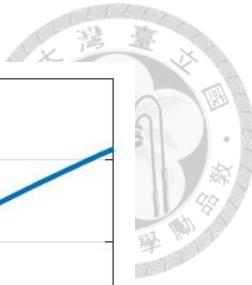


圖 4-2 最佳化後已疲勞運動單元數量(M_F^*)

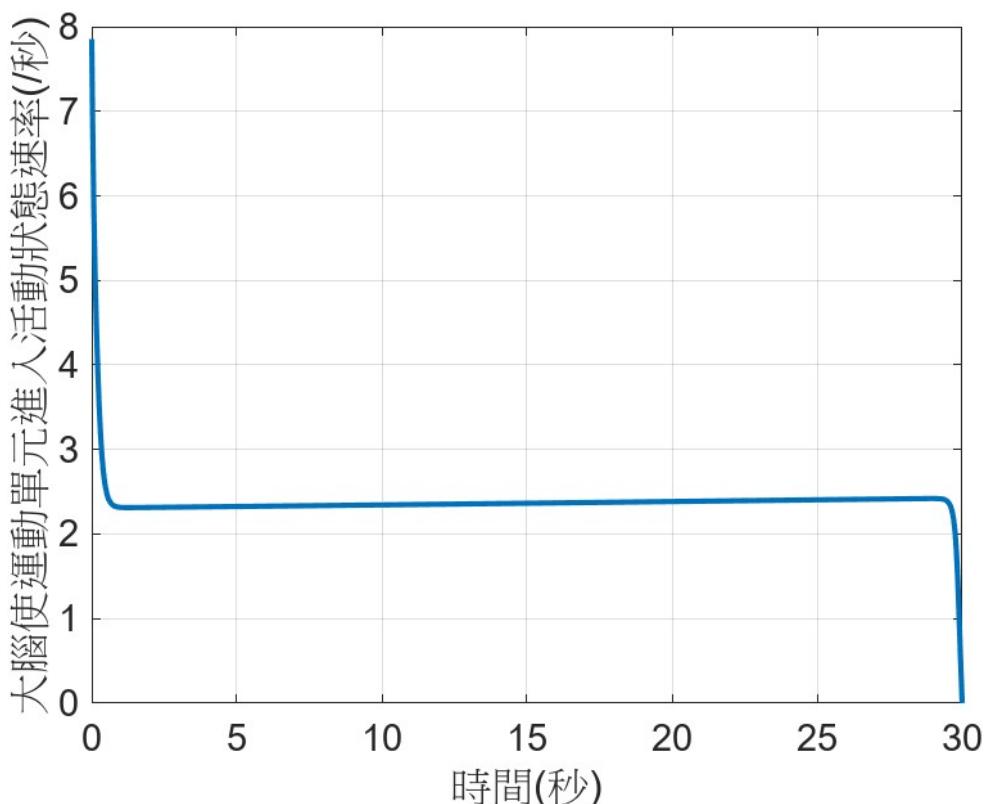


圖 4-3 最佳化後大腦使運動單元進入活動狀態之速率(u^*)



4.1.2 加入權重常數

在目標函數一中 M_A 項加入權重常數(3.3.10 式)之結果為：

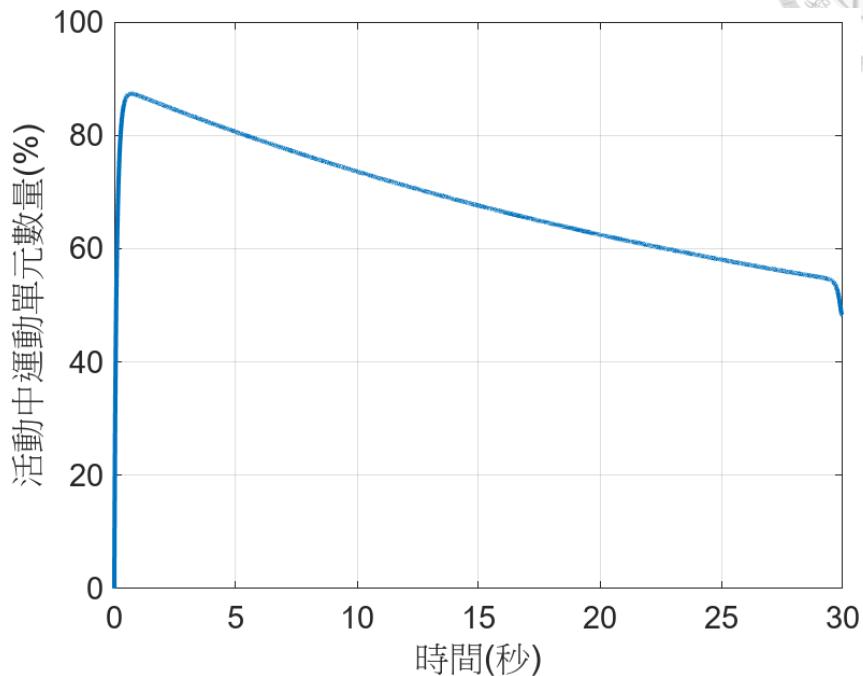


圖 4-4 最佳化後活動中之運動單元數量(M_A^*)

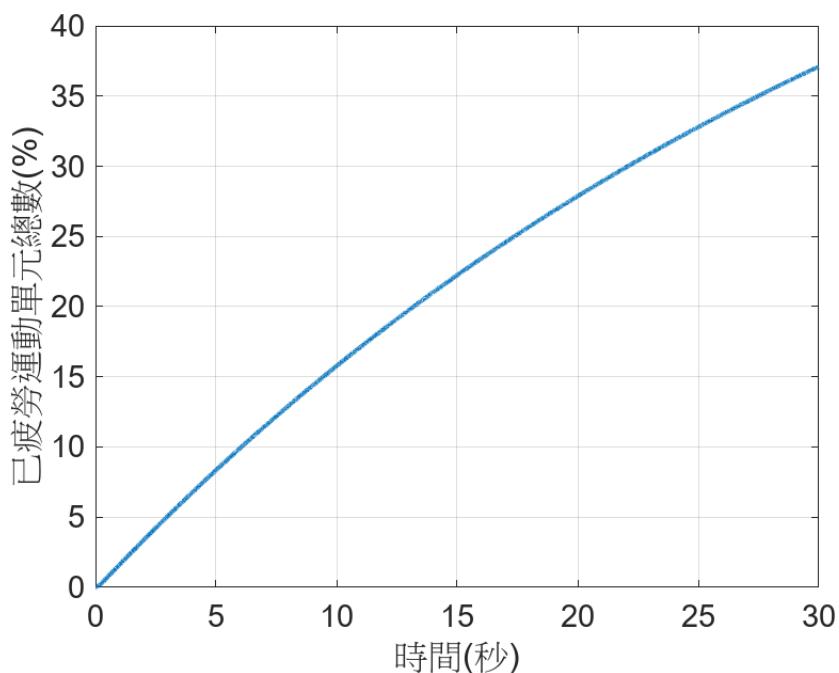


圖 4-5 最佳化後已疲勞運動單元數量(M_F^*)

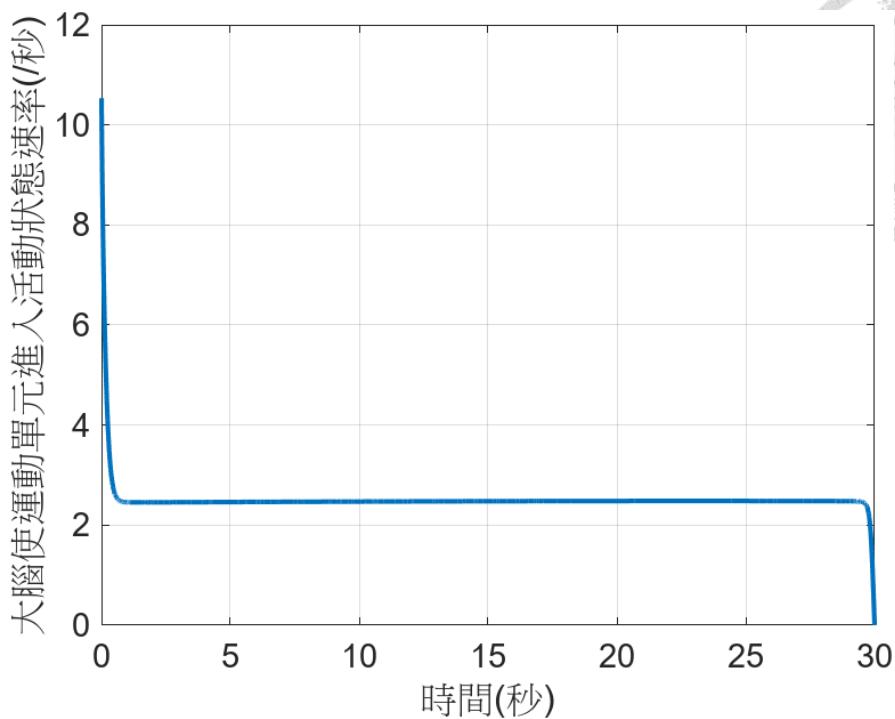


圖 4-6 最佳化後大腦使運動單元進入活動狀態之速率(u^*)

在目標函數一中 u^2 項加入權重常數(3.3.19 式)之結果為：

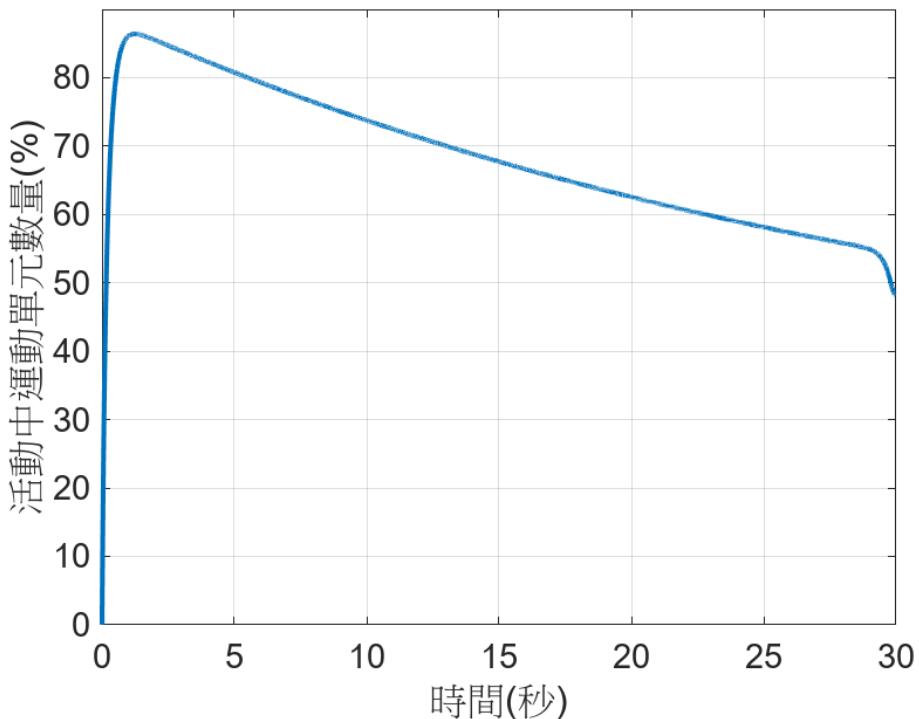


圖 4-7 最佳化後活動中之運動單元數量(M_A^*)

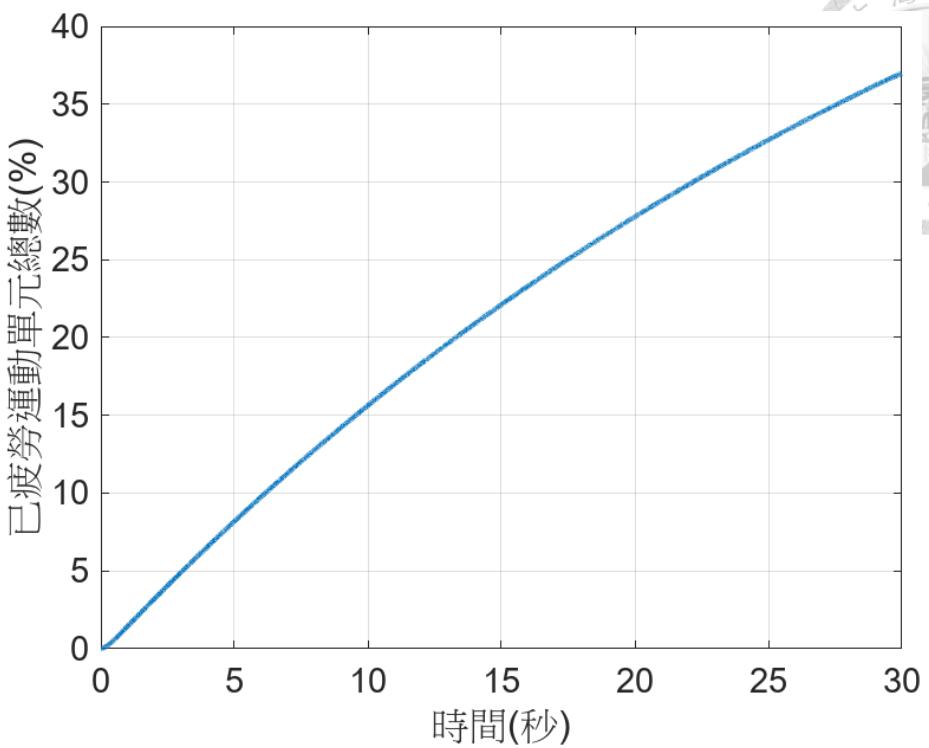
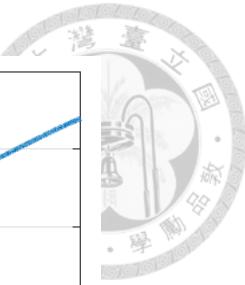


圖 4-8 最佳化後已疲勞運動單元數量(M_F^*)

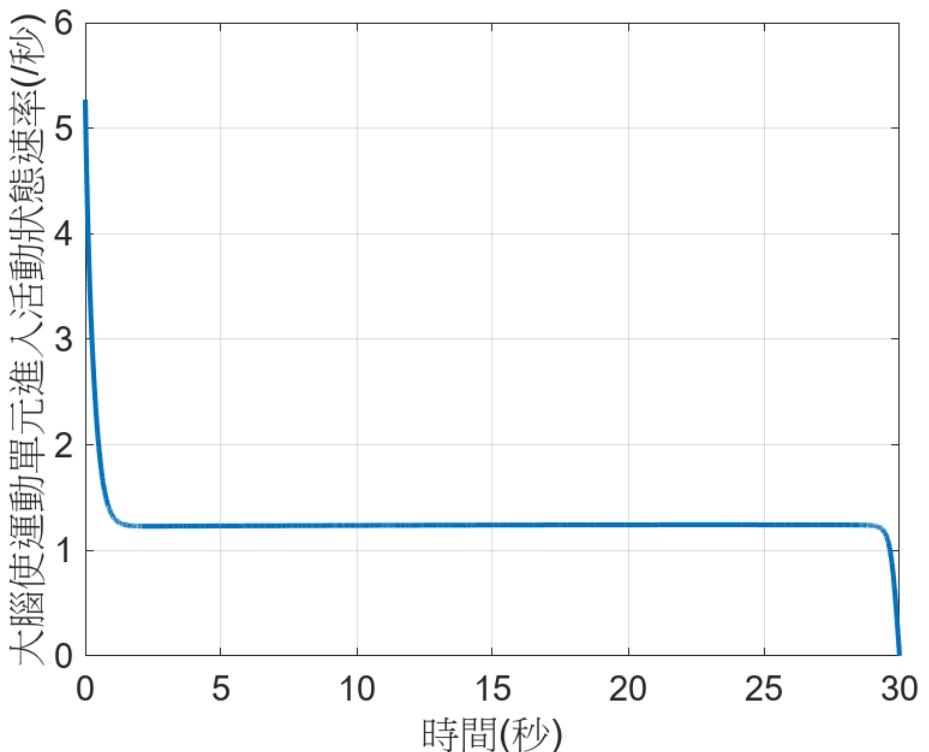


圖 4-9 最佳化後大腦使運動單元進入活動狀態之速率(u^*)



4.2 目標函數二

4.2.1 未加入權重常數

由 MATLAB 模擬後可得目標函數二未加入權重常數(3.3.28 式)之結果為：

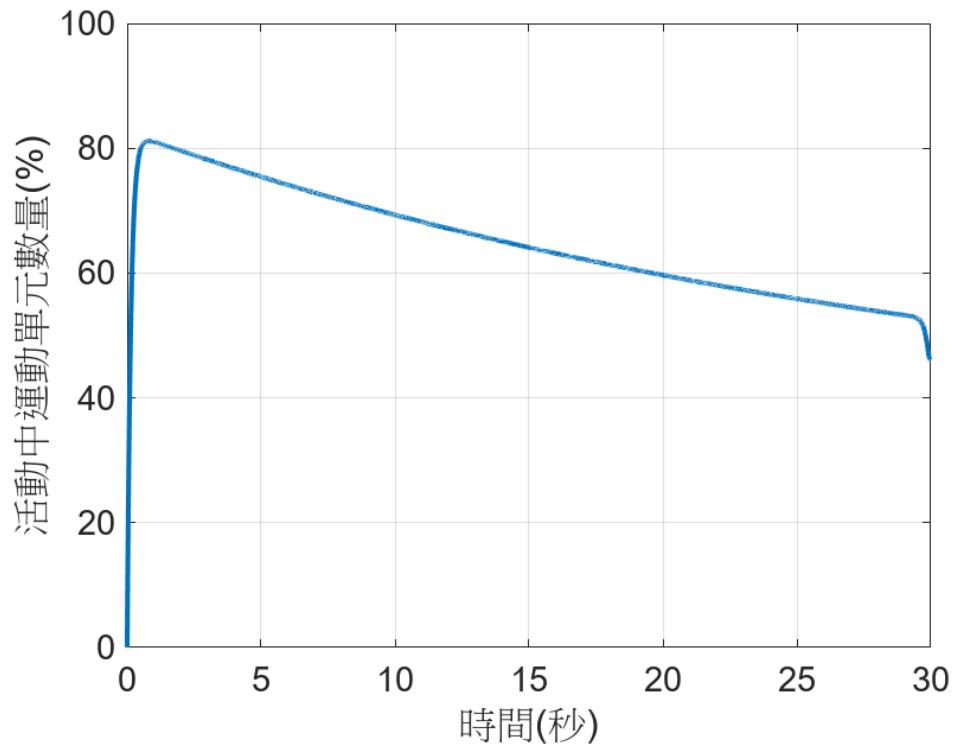


圖 4-10 最佳化後活動中之運動單元數量(M_A^*)

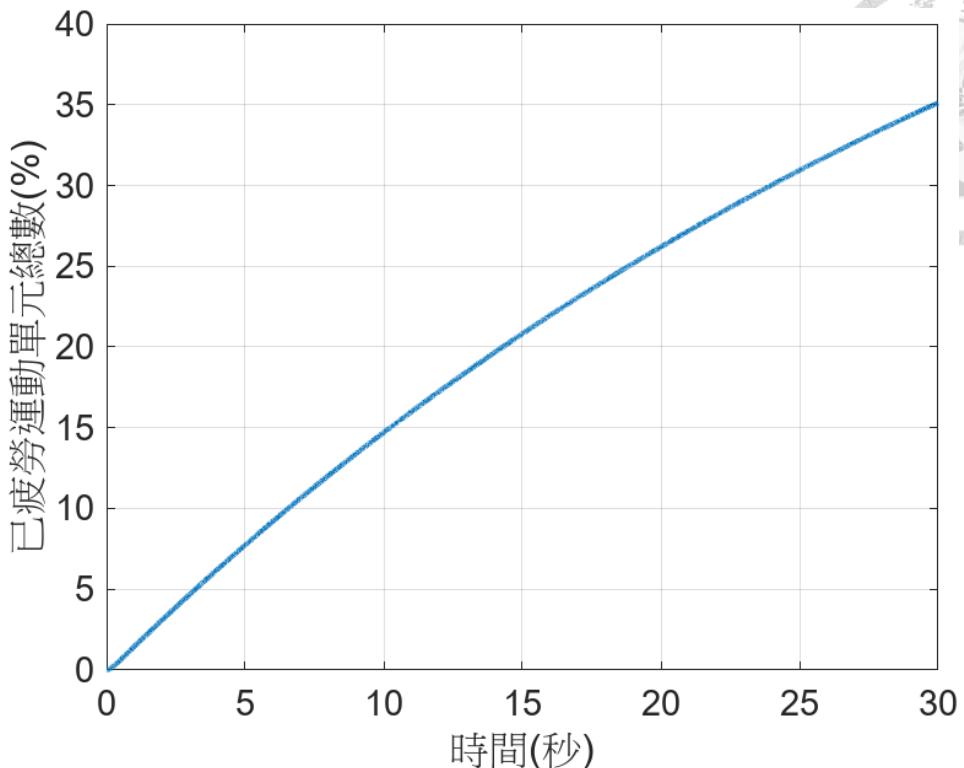
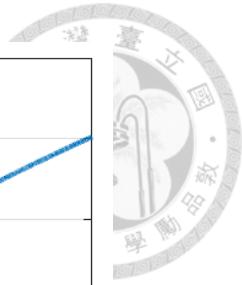


圖 4-11 最佳化後已疲勞運動單元數量(M_F^*)

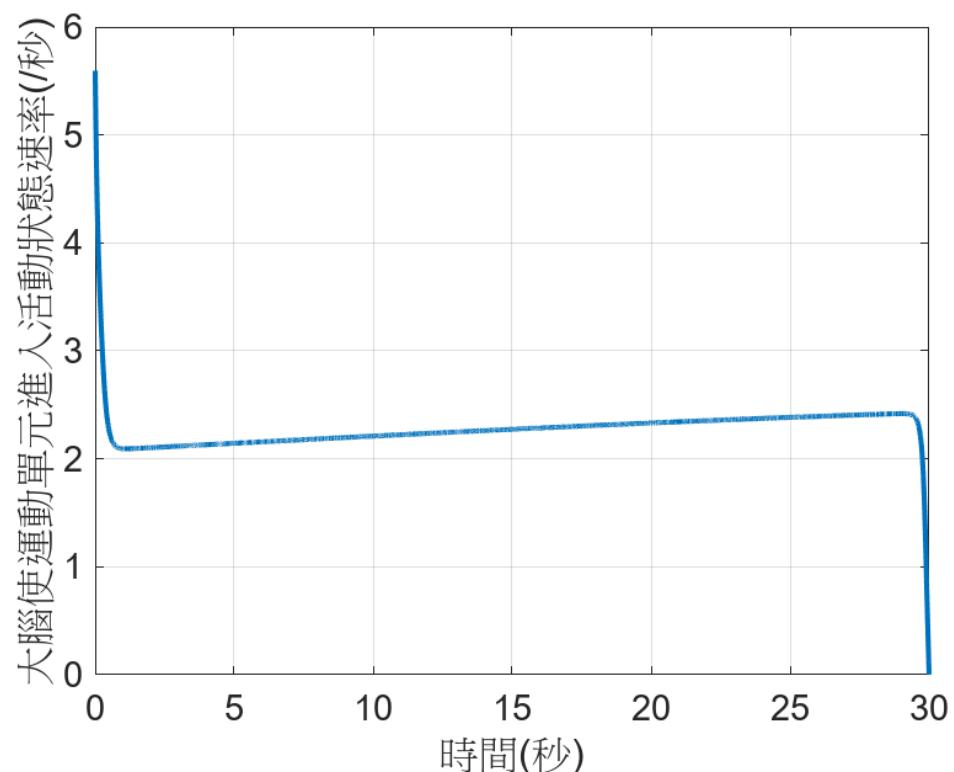


圖 4-12 最佳化後大腦使運動單元進入活動狀態之速率(u^*)



4.2.2 加入權重常數

在目標函數二中 M_A 項加入權重常數(3.3.37 式)之結果為：

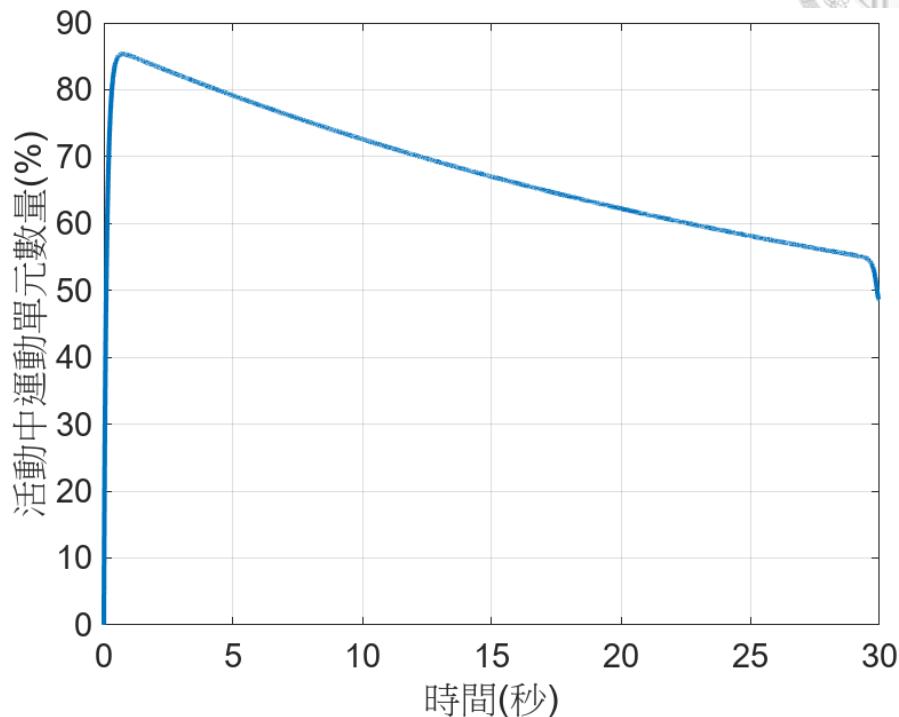


圖 4-13 最佳化後活動中之運動單元數量(M_A^*)

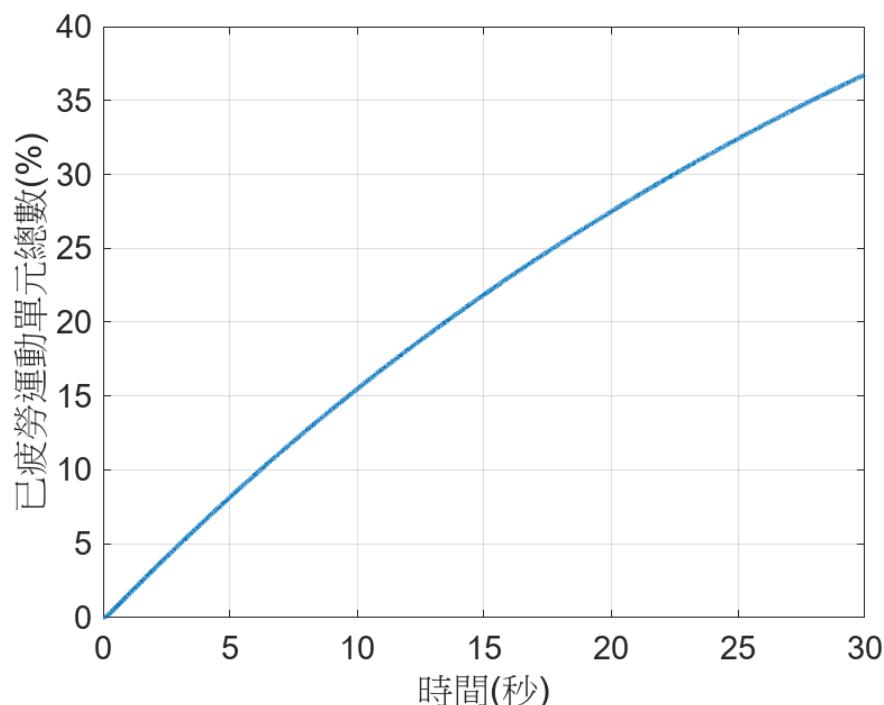


圖 4-14 最佳化後已疲勞運動單元數量(M_F^*)

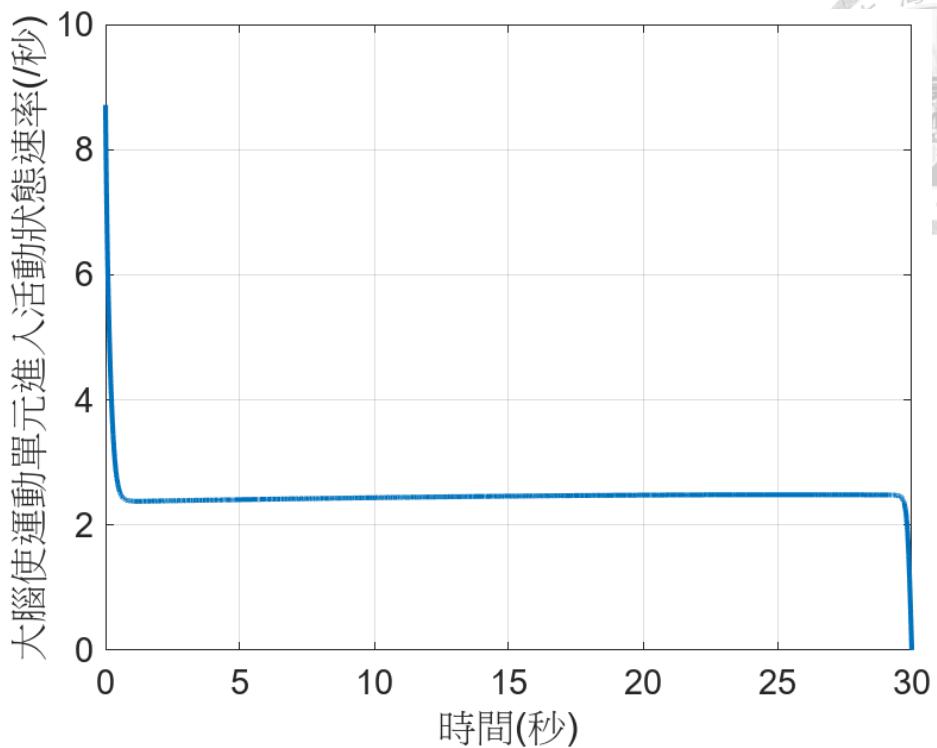


圖 4-15 最佳化後大腦使運動單元進入活動狀態之速率(u^*)

在目標函數二中 M_F 項加入權重常數(3.3.46 式)之結果為：

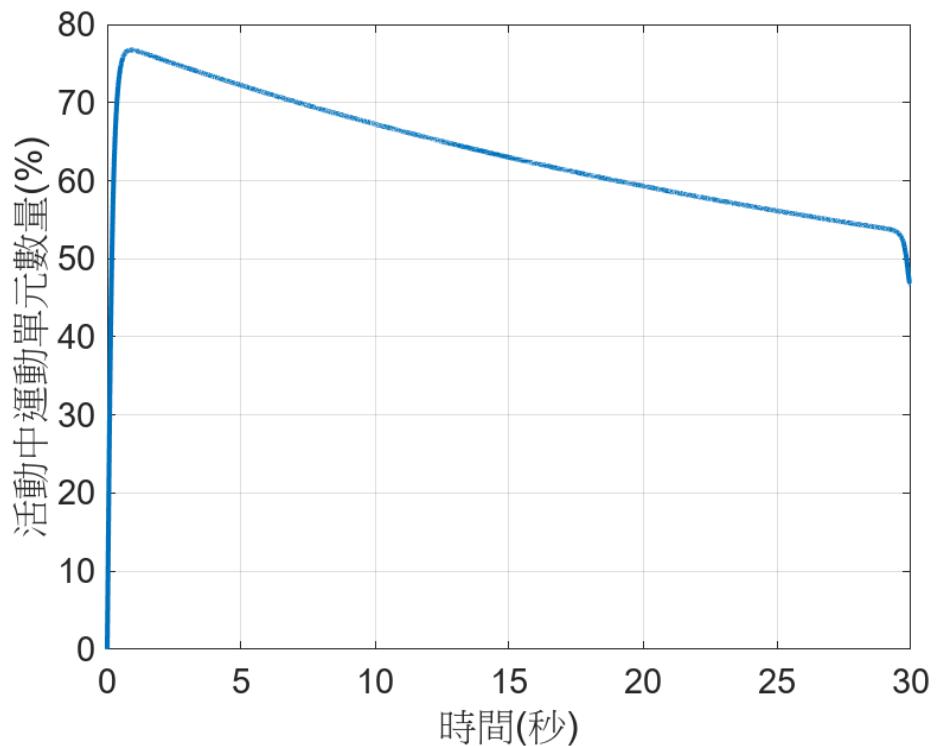


圖 4-16 最佳化後活動中之運動單元數量(M_A^*)

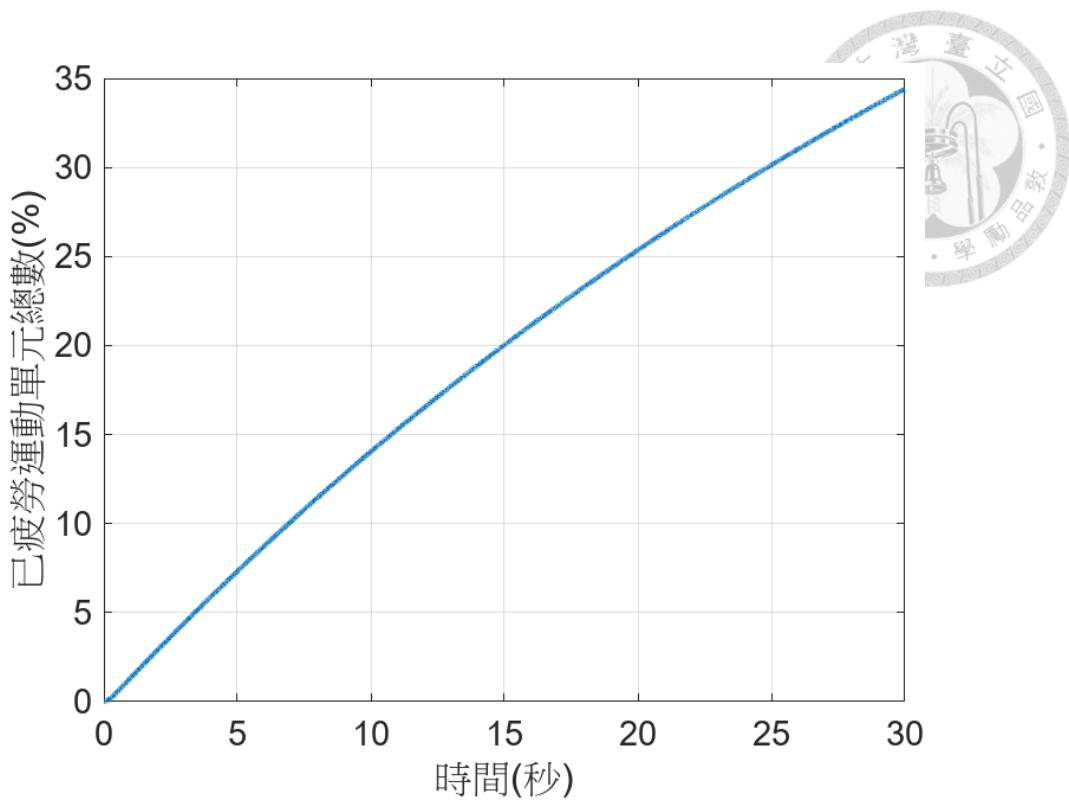


圖 4-17 最佳化後已疲勞運動單元數量(M_F^*)

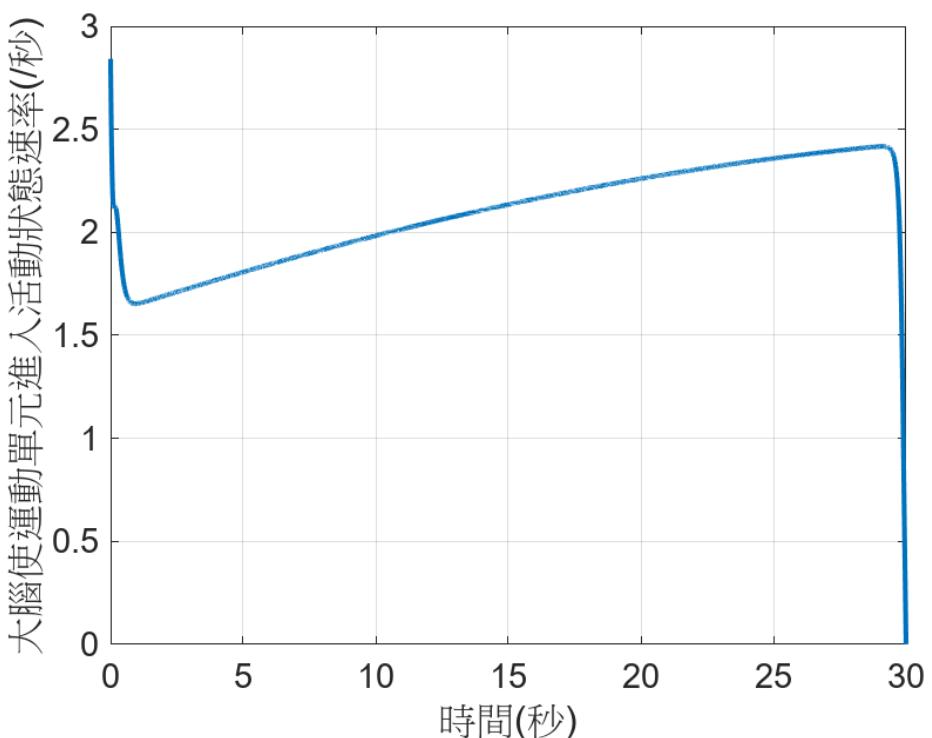
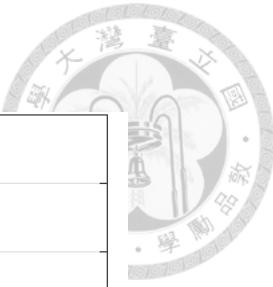


圖 4-18 最佳化後大腦使運動單元進入活動狀態之速率(u^*)



在目標函數一中 u^2 項加入權重常數(3.3.55 式)之結果為：

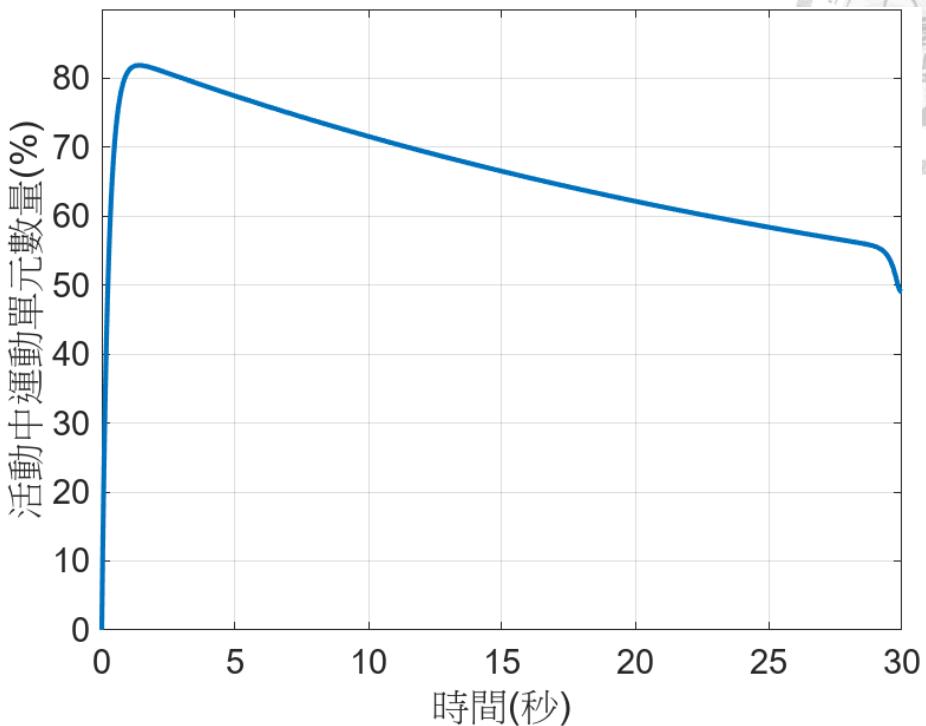


圖 4-19 最佳化後活動中之運動單元數量(M_A^*)

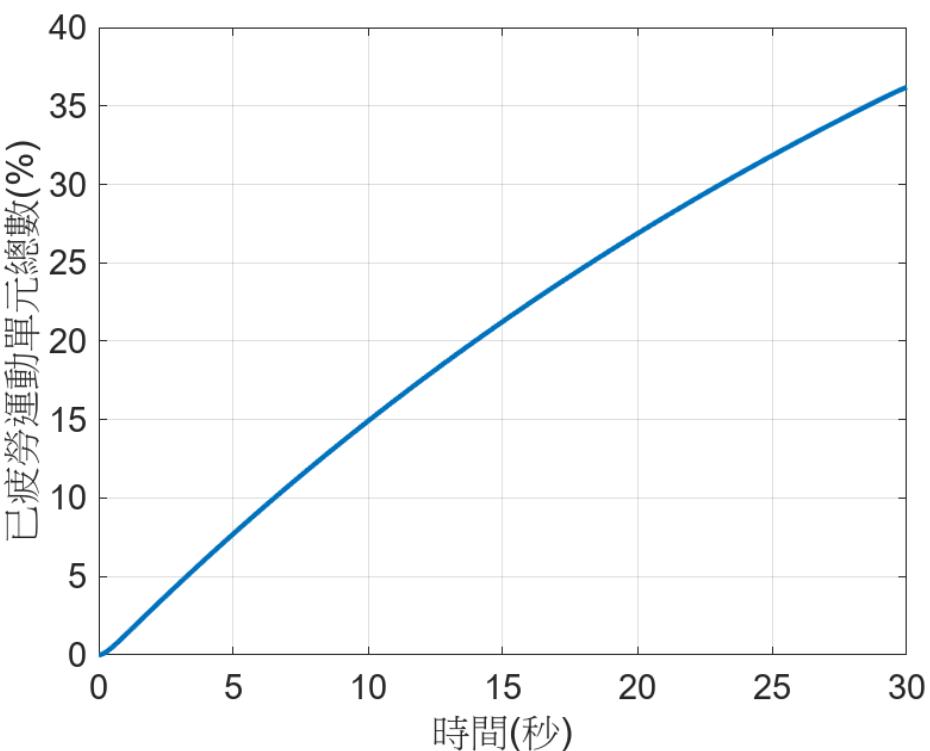


圖 4-20 最佳化後已疲勞運動單元數量(M_F^*)

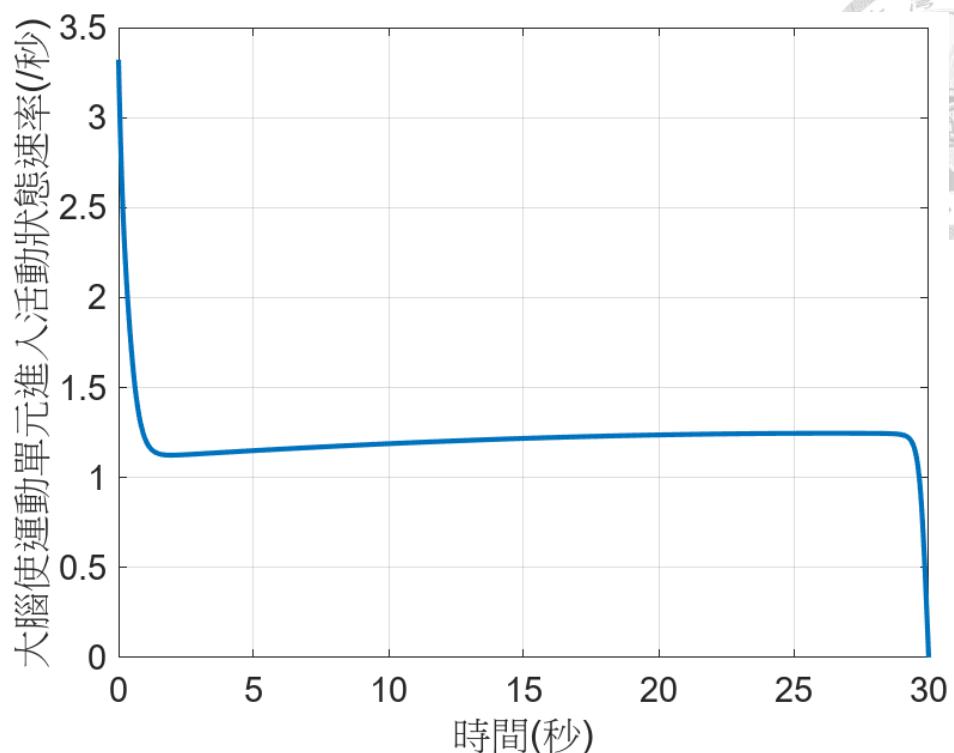


圖 4-21 最佳化後大腦使運動單元進入活動狀態之速率(u^*)



4.3 目標函數三

4.3.1 未加入權重常數

由 MATLAB 模擬後可得目標函數三未加入權重常數(3.3.64 式)之結果為：

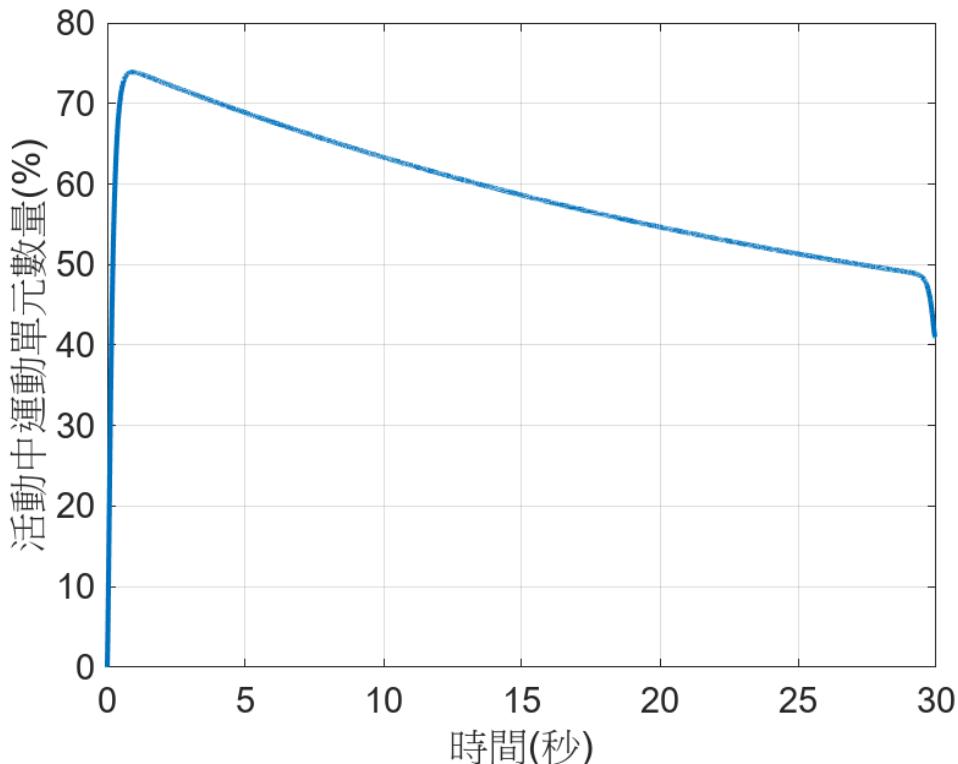


圖 4-22 最佳化後活動中之運動單元數量(M_A^*)

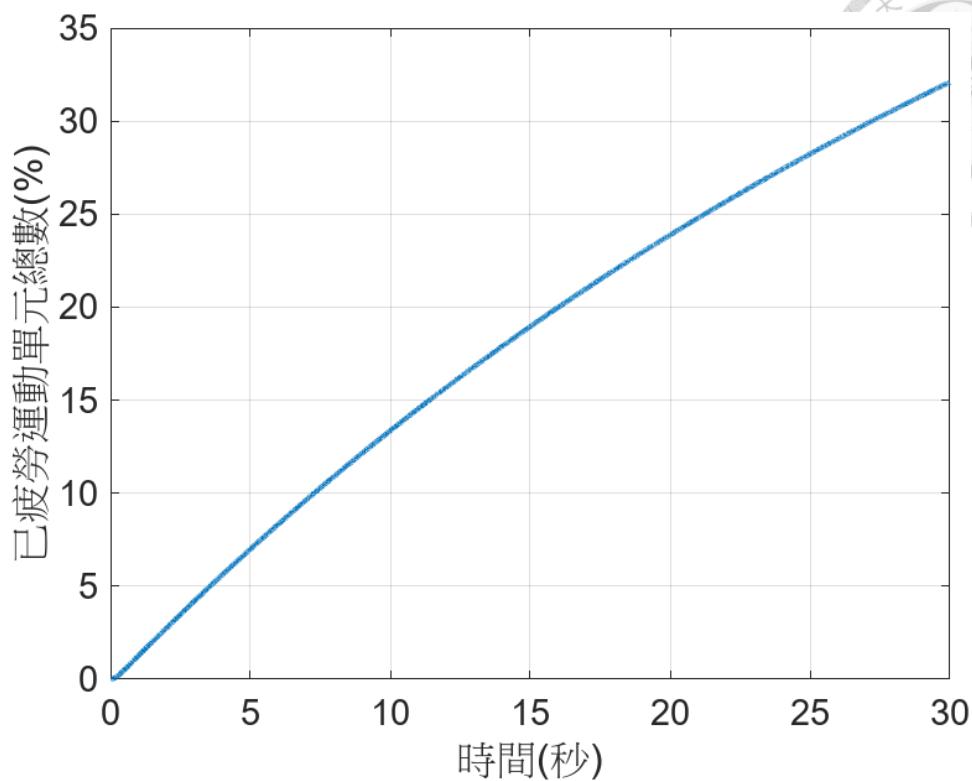
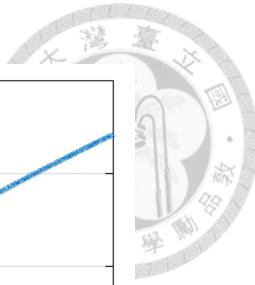


圖 4-23 最佳化後已疲勞運動單元數量(M_F^*)

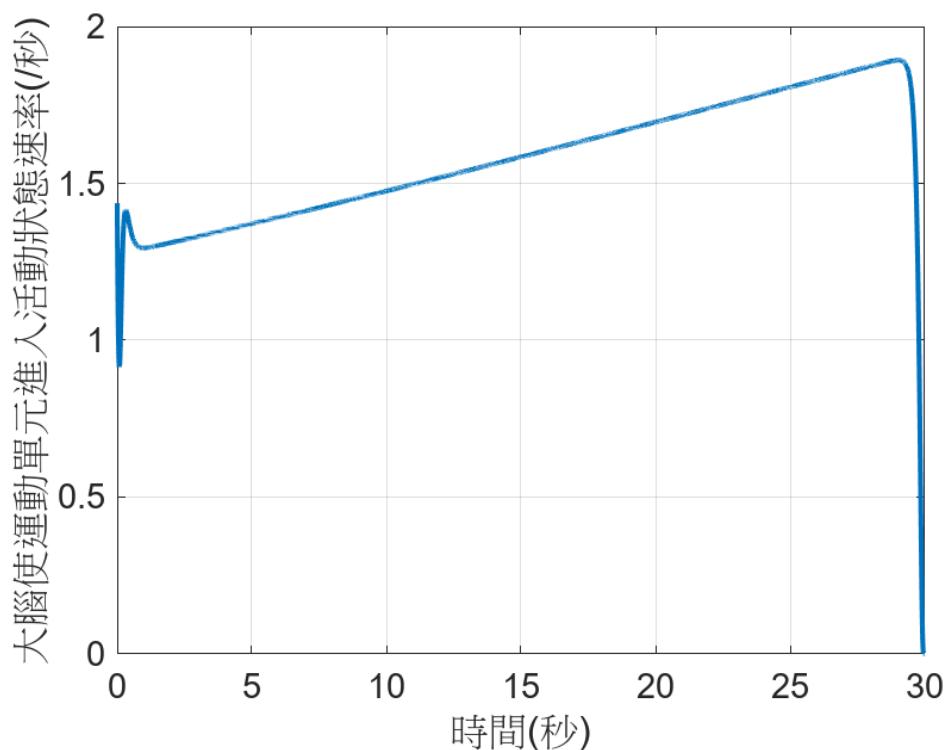


圖 4-24 最佳化後大腦使運動單元進入活動狀態之速率(u^*)



4.3.2 加入權重常數

在目標函數三中 M_F 項加入權重常數(3.3.73 式)之結果為：

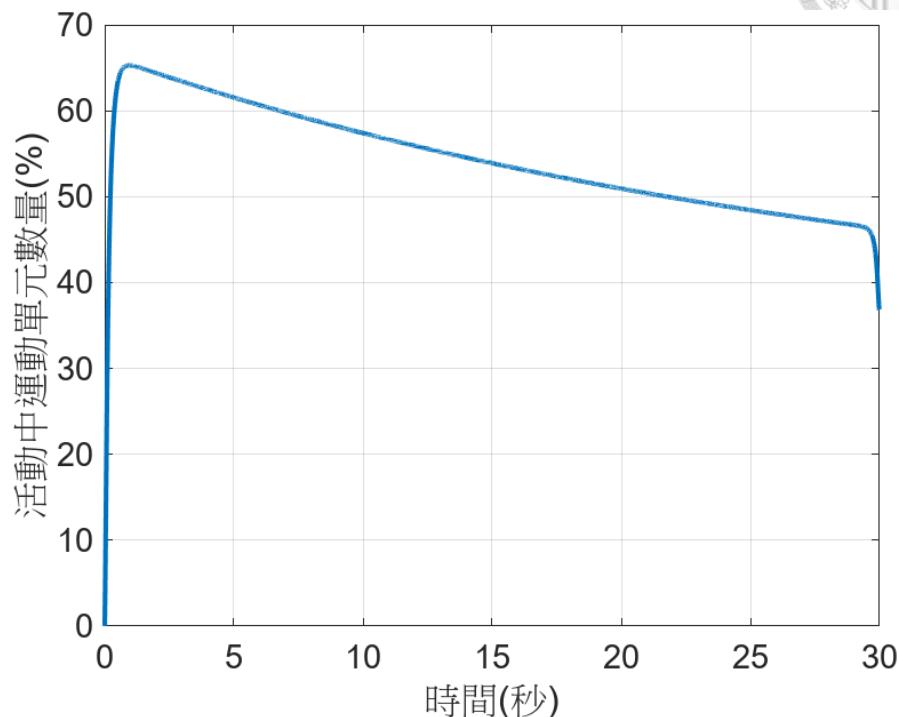


圖 4-25 最佳化後活動中之運動單元數量(M_A^*)

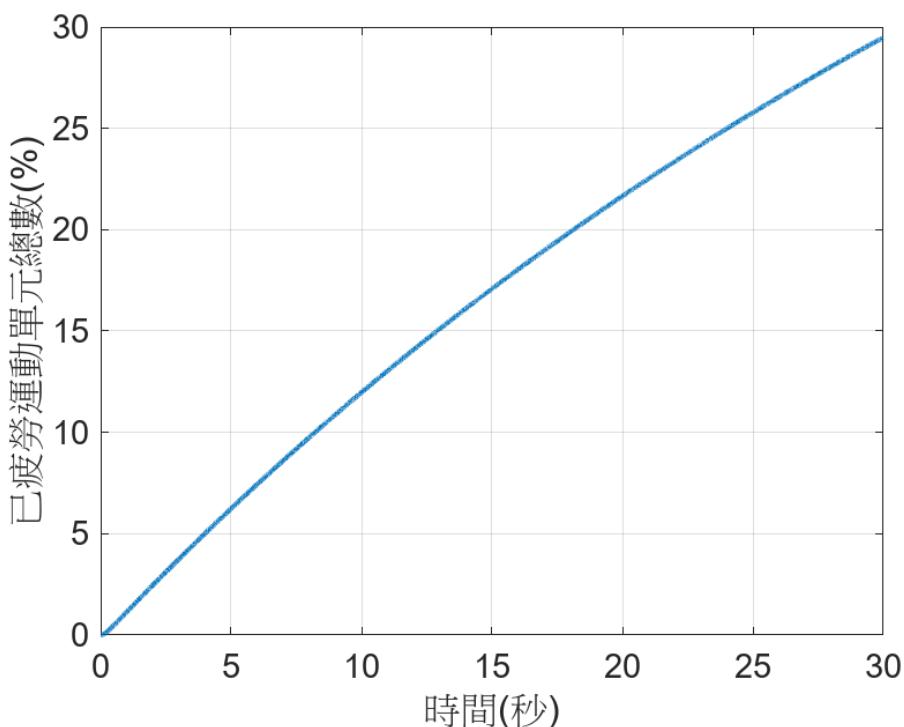


圖 4-26 最佳化後已疲勞運動單元數量(M_F^*)

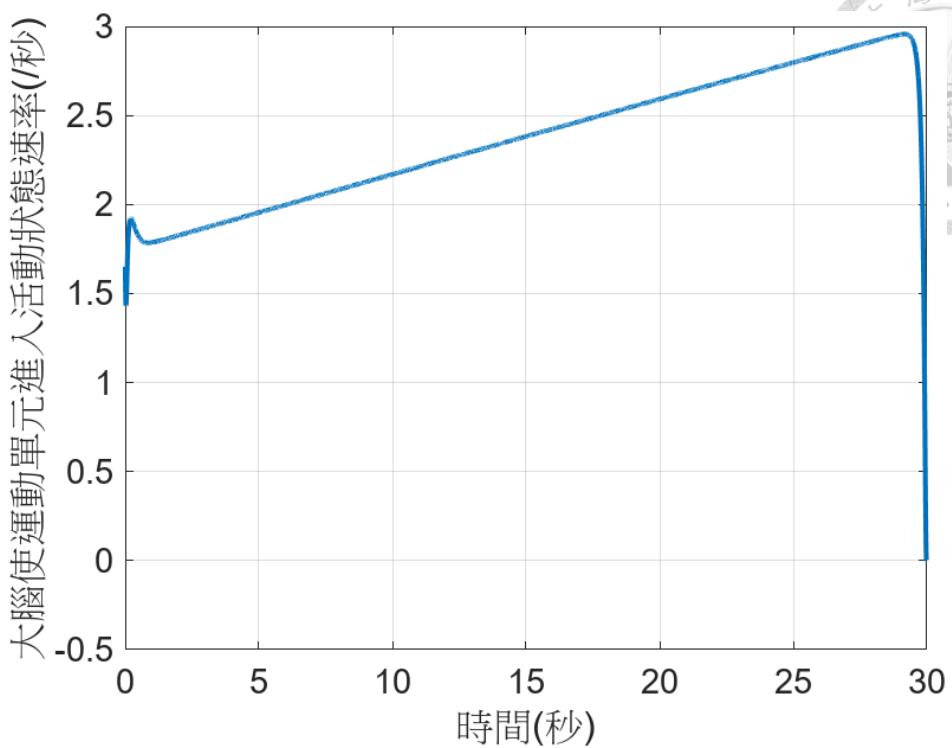
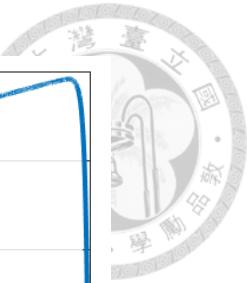


圖 4-27 最佳化後大腦使運動單元進入活動狀態之速率(u^*)

在目標函數三中 u^2 項加入權重常數(3.3.82 式)之結果為：

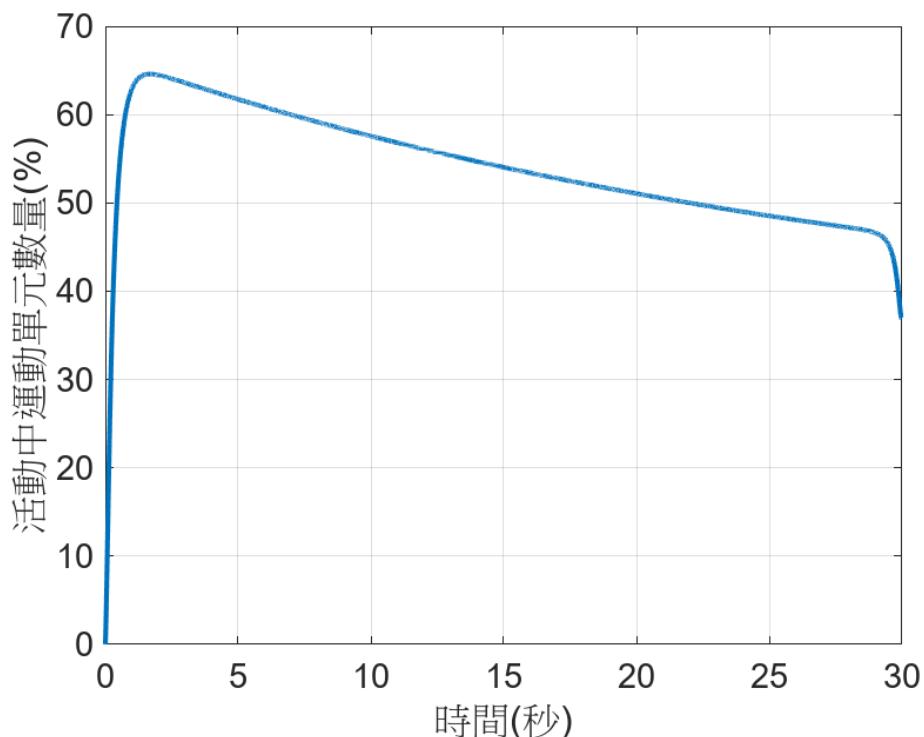


圖 4-28 最佳化後活動中之運動單元數量(M_A^*)

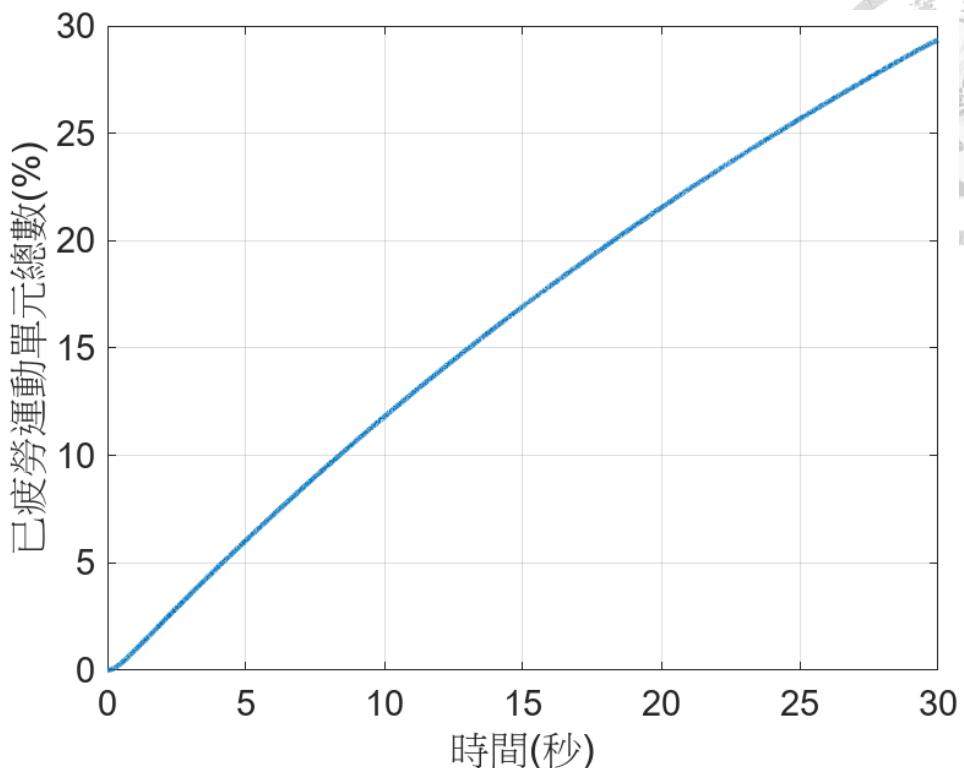
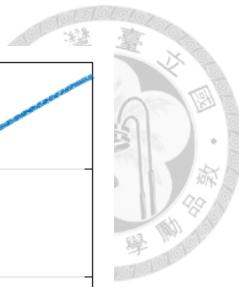


圖 4-29 最佳化後已疲勞運動單元數量(M_F^*)

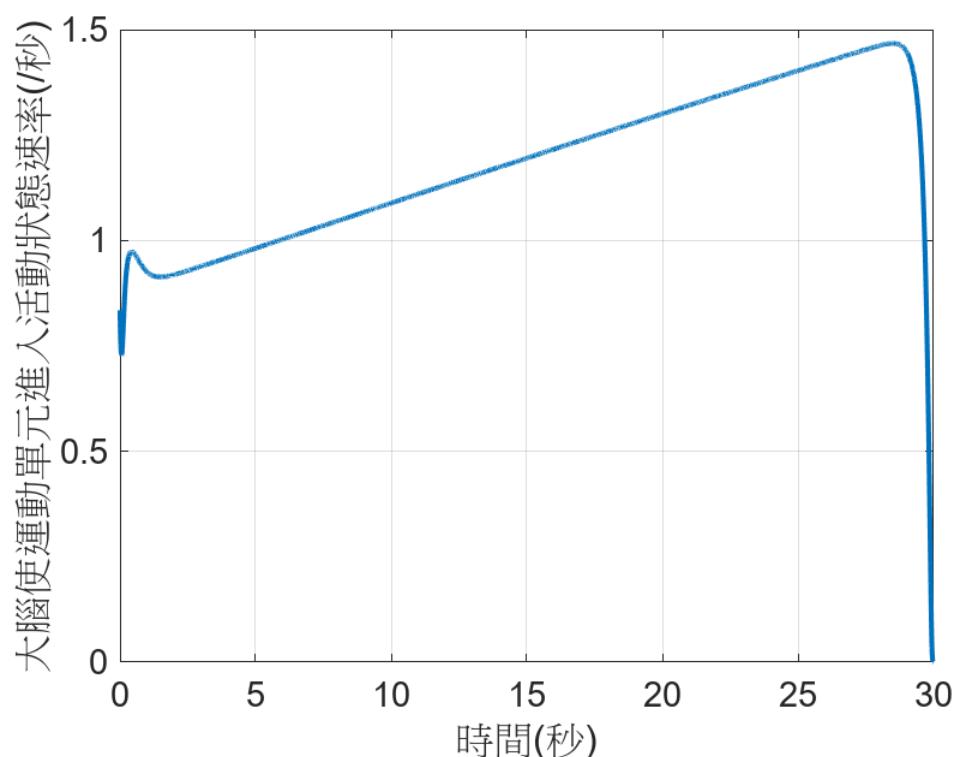


圖 4-30 最佳化後大腦使運動單元進入活動狀態之速率(u^*)



4.4 未使用最佳控制之策略

本研究藉由直接求解數學模型(3.1.7 式~3.1.12 式)，並將 $u(t)$ 設置為常數 10 作為未使用最佳控制之策略，其結果為：

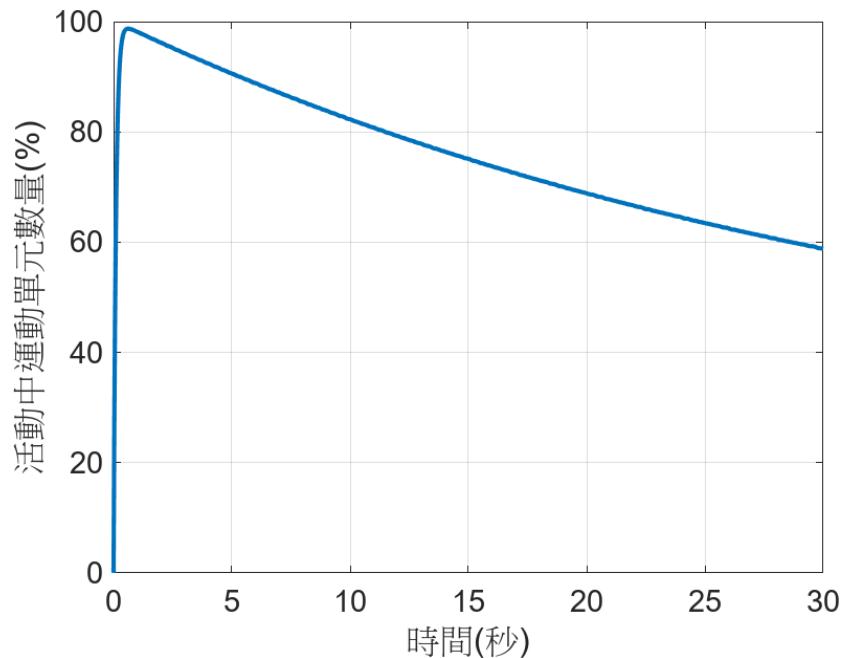


圖 4-31 活動中運動單元數量(M_A)

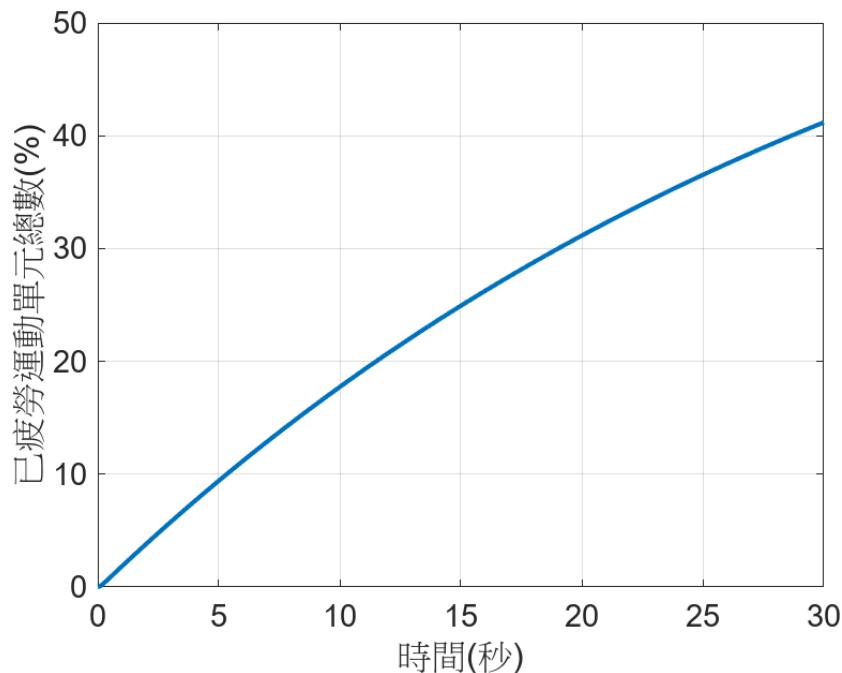




圖 4-32 已疲勞運動單元數量(M_F)

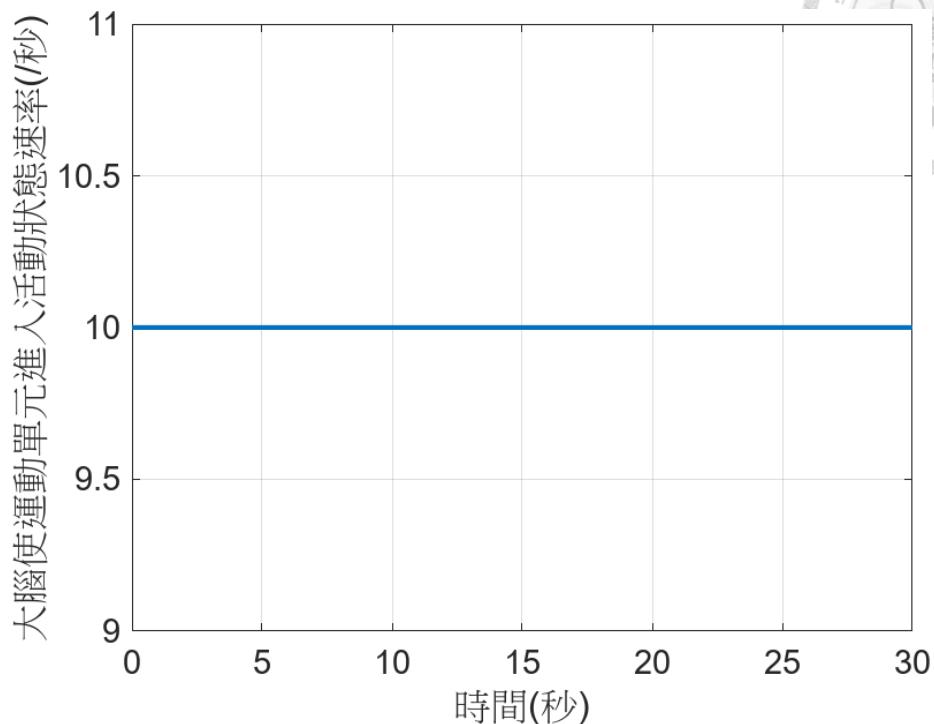


圖 4-33 大腦使運動單元進入活動狀態之速率(u)

4.5 分析

獲得 M_A^* 、 M_F^* 、 u^* 之數值解後，可觀察到 u^* 及 u 之圖形，理論解所解出之圖形是從非 0 為起點，實際上，當肌肉施力時，大腦之指令是從 0 開始對肌肉下達指令。另外，藉由獲得之數值解，本研究利用梯形數值積分方法將此數值結果進行量化，這些量化結果分別為： a ：肌肉施力的總量、 b ：肌肉疲勞的總量，以及 c ：大腦施加命令的總程度。透過量化結果，我們可以進一步分析肌肉施力、疲勞和大腦命令程度之間關係，分別為： $\frac{a}{b}$ ：肌肉施力大小相對於肌肉疲勞之關係、 $\frac{a}{c}$ ：肌肉施力大小相對於大腦命令程度之關係，以及 $\frac{a}{bc}$ ：肌肉施力大小相對於肌肉疲勞與大腦命令程度之關係。

對於上述關係，本研究也針對三個方面進行了目標函數的比較。首先，比較了三個目標函數於未加入權重常數的情況下的結果，並選擇了最佳的肌肉施力策略。



其次，我們將未使用最佳施力策略之結果與未變化的目標函數進行了比較，最後，在每個目標函數內比較了加入權重常數之結果，並進行分析。目的是為了深入瞭解每個目標函數的影響以及加入權重常數對最佳化結果的影響。透過比較，可以評估不同目標函數的優勢和劣勢，並得出相應的結論。同時，比較未使用最佳施力策略的結果與未變化的目標函數，並對比其中差異，以了解最佳控制策略對肌肉施力之影響。

表 4-1 為未變化之最佳策略及未使用最佳策略之結果，可以觀察到不管策略如何變化，肌肉施力大小相對於肌肉疲勞之關係 $\frac{a}{b}$ 結果皆幾乎相同，由此可知，在持續施力系統中，肌肉施力大小與肌肉疲勞之關係為正相關，因此，在提高整個持續施力系統效率的過程中，重點在於大腦對肌肉施力程度的指令。另外，可觀察到在最佳控制策略下，目標函數三之量化結果 $\frac{a}{b}$ 、 $\frac{a}{c}$ 、 $\frac{a}{bc}$ 皆高於目標函數一、二。

同時，由表 4-1 清楚得知，未使用最佳控制策略時， $\frac{a}{c}$ 及 $\frac{a}{bc}$ 之結果皆遠低於使用最佳控制策略時之值。當我們使用最佳控制策略時，關係 $\frac{a}{c}$ 和關係 $\frac{a}{bc}$ 的數值都顯著提高。

表 4-1 未加入權重常數之目標函數與未使用最佳策略之量化結果

	a	b	c	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{c}$	$\frac{a}{bc}$
目標函數一	1978.7	605.97	71.47	3.27	27.69	0.0456
目標函數二	1945.4	591.22	68.25	3.29	28.51	0.048
目標函數三	1776.5	538.46	47.17	3.3	37.66	0.07
未使用最佳策略	2286.3	703.65	300	3.25	7.62	0.011

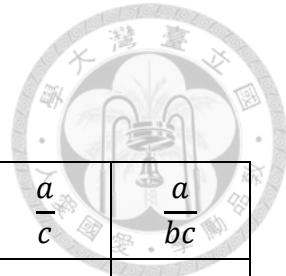


表 4-2 目標函數一加入權重常數項比較表

	a	b	c	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{c}$	$\frac{a}{bc}$
$\max_u \int_0^{30} (M_A - u^2) dt$	1978.7	605.97	71.47	3.27	27.69	0.0456
$\max_u \int_0^{30} (2M_A - u^2) dt$	2062.1	631.31	73.81	3.27	27.94	0.044
$\max_u \int_0^{30} (M_A - 2u^2) dt$	2050.4	625.83	38.02	3.28	53.93	0.086

表 4-2 為目標函數一加入權重常數之結果，若在 M_A 項加入權重常數，代表我們更在乎肌肉施力大小，重要性大於最小化 u^2 項，由表 4-2 可觀察，肌肉施力總量 a 增加了 4.2%，但伴隨而來的是增加肌肉疲勞程度和大腦耗能。另外，若在 u^2 項加入權重常數，代表我們較在意大腦之耗能，由表 4-2 可得，大腦施加命令總程度 c 減少了 47%，另外，由於 c 大幅減少，故肌肉施力、疲勞及大腦之關係 $\frac{a}{bc}$ 也遠高於先前兩者。

表 4-3 目標函數二加入權重常數項比較表

	a	b	c	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{c}$	$\frac{a}{bc}$
$\max_u \int_0^{30} (M_A - M_F - u^2) dt$	1945.4	591.22	68.25	3.29	28.51	0.048
$\max_u \int_0^{30} (2M_A - M_F - u^2) dt$	2036.3	620.33	74.17	3.28	27.45	0.044
$\max_u \int_0^{30} (M_A - 2M_F - u^2) dt$	1902.3	571.44	62.76	3.33	30.31	0.053
$\max_u \int_0^{30} (M_A - M_F - 2u^2) dt$	2003.8	604.37	36.55	3.32	54.82	0.09



表 4-3 為目標函數二加入權重常數之結果，若在 M_A 項加入權重常數，代表較在乎肌肉施力大小，由表 4-3 可知，相對應之肌肉施力總量 a 上升了 4.6%，並且隨著力量上升，所受之疲勞總量 b 也上升。其次，在 M_F 項加入權重常數，意味著我們希望所受疲勞能更少，由表 4-3 可得，在此累積之疲勞程度減少了 3.3%，但取而代之的是施力程度下降。最後，將權重常數加入至 u^2 項中，代表我們更希望大腦耗能減少，故由結果可得知，大腦施加命令總程度減少了約 46%，並且綜合肌肉施力、疲勞程度及大腦命令程度來看， $\frac{a}{bc}$ 之數值相較於未加入權重常數大幅成長了 87.5%。

表 4-4 為目標函數三加入權重常數之結果，由表 4-4 可得知，在 M_F 項加入權重常數後，疲勞總程度相較未加入權重常數減少了約 9.3%，但大腦施加命令總程度增加了 50%，這是因為加入權重常數後，在策略上來說，我們變得較不重視 u^2 ，導致大腦耗能增加。另外，在 u^2 項加入權重常數後，代表我們在制定策略時更注重大腦之耗能，以至於大腦命令肌肉施力總程度 c 減少了 25%，並且，綜合肌肉施力、疲勞程度及大腦命令程度來看，其之間關係 $\frac{a}{bc}$ 成長了 35.7%。

表 4-4 目標函數三加入權重常數項比較表

	a	b	c	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{c}$	$\frac{a}{bc}$
$\max_u \int_0^{30} (-M_F - u^2) dt$	1776.5	538.46	47.17	3.3	37.66	0.07
$\max_u \int_0^{30} (-2M_F - u^2) dt$	1629.5	488.27	70.91	3.34	22.98	0.048
$\max_u \int_0^{30} (-M_F - 2u^2) dt$	1621.8	483.9	35.37	3.35	45.85	0.095



第五章 結果與討論

本研究使用最佳控制理論模擬肌肉持續施力之行為，提出三種主要目標函數，並將這些目標函數進一步變化比較。透過這些目標函數，可將本研究分為三種類型：(1)比較是否使用最佳控制策略效率之差異、(2)比較三種最佳控制策略之差異、(3)在各目標函數中加入權重常數後之比較。首先，由模擬結果可得知，應用最佳控制理論的確能大幅提高施力過程之效率。其次，透過數據結果，挑選三種主要目標函數中，最佳的施力策略。最後，透過量化結果可得，在目標函數中各項加入權重常數後，對應的數據結果都有更顯著的成果。

由模擬結果可觀察，不論是否使用最佳控制策略或是加入權重常數，肌肉施力總量與肌肉疲勞總量比值 $\frac{a}{b}$ 皆於 3.3 左右，表示不管大腦施予命令程度 $u(t)$ 為多少，肌肉施力大小及肌肉疲勞皆為正比關係，因此，在本研究中，能使整體活動效率提高之方式中，降低大腦施力總程度 c 就扮演重要的角色。由研究進一步可得知，在每項目標函數中，於 u^2 項加入權重常數後，肌肉施力、疲勞與大腦命令程度比值 $\frac{a}{c}$ 及 $\frac{a}{bc}$ ，皆高於該項中其他目標函數，並且在減少大腦命令程度 c 的同時也增加肌肉施力大小 a ，這樣的結果更能彰顯大腦命令程度在活動中扮演的重要性。

由研究結果可得知，在未加入權重常數之目標函數中，目標函數三之量化結果皆高於目標函數一、二。因此，若考慮持續施力之行為，應將「降低肌肉疲勞程度」及「降低大腦施加命令程度」作為策略制定時之首要考量，才能達到施力目的之最佳效益。另外，在未使用最佳控制策略時，雖然施力程度有優異的表現，但伴隨而來的是肌肉疲勞及大腦耗能的大幅提高，導致整體活動效率降低，由數據結果可得，在使用最佳策略時，量化結果 $\frac{a}{c}$ 及 $\frac{a}{bc}$ 皆優於未使用最佳控制之結果，這意味著我們能夠使系統效率提升，因此，在設計施力策略時，應該優先考慮最佳控制策略。量化結果指出最佳控制理論在決策中扮演重要的角色，更證明最佳控制理論的有



效性和價值。

本研究結果能應用在運動員或勞動工作者在施力過程中，透過模擬之結果圖，提醒施力者何時需要較大施力，或何時需要較小施力，來達到有效率之工作目的。例如：在重量訓練中(以臥推為例)，可以藉由此模擬結果的指示，如圖 4-24，要將啞鈴推起時，首先施予一點程度的力，再把施力程度下降，接著再逐步地將力慢慢提升，最後將啞鈴推起時，所施的力就快速下降。如此一來，就能使在施力活動中達到減少疲勞之目的

本研究選擇使用之數值計算軟體為 MATLAB，其相較於其他數值計算軟體能更簡潔且直觀的來編寫程式碼，並且有很多已知內建指令能即時應用，使研究人員能應付各種特定的模擬需求。例如：在本研究中需求解聯立微分方程之邊界值問題，在 MATLAB 中就能利用 bvp4c 及 bvp5c 指令來解決此問題。

本研究在研究過程中遇到之限制包括：由於本研究需要求解四個微分方程式的邊界值問題，需要利用數值方法來求解，故本研究利用 MATLAB 中的 bvp5c 指令來求解此問題，但因 bvp5c 指令是利用有限差分法之原理來運作，在這樣的方法中，需要設置大量的網格數來準確求解出實際值。然而，於本研究之數值軟體網格設置上，最大僅能設置至 300 萬點，如果進一步增加網格數，即超越設備效能之上限，因此數據之誤差值最高約為 3%。若微分方程式組比本研究更複雜、更多非線性項，就勢必要升級設備，形成額外成本或甚至無法求解。然而，目標函數之設計於本研究應用的數學模型有無限多種可能，本研究只選擇具有代表性及容易理解的方式來設計。然而，因礙於研究時設備之效能有限，僅能將目標函數非控制項設置為一次方，若研究設備效能允許，將目標函數中非控制項次方設置為更高，可能有不同的結果。此外，在討論權重常數之目標函數時，本研究將權重常數設置為 2，若將權重常數提高至更高數值，結果可能也會不同。

另外，在真實情況下，在進行施力活動時，由於人體的生理結構複雜性，使我們無法確定大腦在進行施力活動時所採用的目標函數。因此，我們只能根據使用最



佳化策略之模擬結果圖所呈現的曲線，來提供運動員或勞動工作者在實際情境中使用最有效率的施力方式。

最後，為了使本研究探討之方法更加完善及提升應用價值，對於研究過程中遇到的問題和限制，提出三項能夠繼續研究及解決的方向。

1. 目標函數之設計

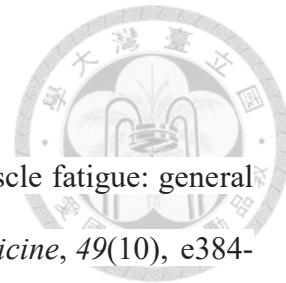
在目標函數設計上，本研究已將數學模型中主要的數學函數符號納入目標函數，並且較直觀的用日常生活之概念將其簡易設計。而在未來若可以進一步將目標函數的設計針對持續施力之目的能夠嘗試更多組合，例如：將被積分符號內之非控制項函數次方數提高、權重常數數值提高或是將被積分符號內之函數相乘，透過這些方式，能更貼近大腦在施力時之情形，也能給予運動員及勞動工作者更多的施力策略選擇。

2. 數值軟體之選擇或程式碼優化

本研究目前利用 MATLAB 中的 bvp5c 來解決最佳控制問題之邊界值問題。但隨著日後研究中目標函數的多樣化及複雜化，依照目前研究所開發之程式碼，研究之設備可能無法承受負荷，因此，若要解決此問題，程式碼的優化就極為重要。例如：捨棄 bvp5c 方法或開發新的數值系統，以降低設備耗能。此外，也可以使用其他數值軟體來進行此研究，例如：Python、C 或 Mathematica 等，透過其他數值軟體，或許就能解決本研究在模擬中遇到之限制。

3. 延伸施力場景

本研究著重探討肌肉持續施力時之情形，未來可以利用不同數學模型，討論更多不同的施力場景，例如：間歇性運動、爆發性運動。針對不同的施力背景的肌肉功能與疲勞機制之研究，最後再將其整合。此外，本研究是以最佳控制理論作為本研究之基礎，未來也可以嘗試利用其他理論運用在肌肉施力上，可以全面的使肌肉系統相關研究更為完善。由於影響肌肉施力大小與疲勞狀態之原因有很多種，例如：壓力、肌肉量、心肺能力或營養狀態，亦可能從此類角度切入研究。



參考文獻

- [1] Wan, J. J., Qin, Z., Wang, P. Y., Sun, Y., & Liu, X. (2017). Muscle fatigue: general understanding and treatment. *Experimental & Molecular Medicine*, 49(10), e384-e384.
- [2] Ricci, J. A., Chee, E., Lorandeau, A. L., & Berger, J. (2007). Fatigue in the US workforce: prevalence and implications for lost productive work time. *Journal of Occupational and Environmental Medicine*, 1-10.
- [3] Kajimoto, O. (2008). Development of a method of evaluation of fatigue and its economic impacts. *Fatigue Science for Human Health*, 33-46.
- [4] Techera, U., Hallowell, M., Stambaugh, N., & Littlejohn, R. (2016). Causes and consequences of occupational fatigue. *Journal of Occupational and Environmental Medicine*, 58(10), 961-973.
- [5] Van Cutsem, J., Marcora, S., De Pauw, K., Bailey, S., Meeusen, R., & Roelands, B. (2017). The effects of mental fatigue on physical performance: a systematic review. *Sports Medicine*, 47(8), 1569-1588.
- [6] Rahnama, N., Reilly, T., Lees, A., & Graham-Smith, P. (2003). Muscle fatigue induced by exercise simulating the work rate of competitive soccer. *Journal of Sports Science*, 21(11), 933-942.
- [7] Liu, J. (2000). *FMRI studies on human brain function and model of muscle activation and fatigue*. Case Western Reserve University.
- [8] Bigland-Ritchie, B. (1981). EMG/force relations and fatigue of human voluntary contractions. *Exercise and Sport Sciences Reviews*, 9(1), 75-118.
- [9] Gandevia, S. C. (2001). Spinal and supraspinal factors in human muscle fatigue. *Physiological Reviews*.
- [10] Bigland-Ritchie, B. W. J. J., & Woods, J. J. (1984). Changes in muscle contractile



properties and neural control during human muscular fatigue. *Muscle & Nerve: Official Journal of the American Association of Electrodiagnostic Medicine*, 7(9), 691-699.

- [11] Taylor, J. L., Amann, M., Duchateau, J., Meeusen, R., & Rice, C. L. (2016). Neural contributions to muscle fatigue: from the brain to the muscle and back again. *Medicine & Science in Sports & Exercise*, 48(11), 2294-2306.
- [12] Mahdavi, N., Dianat, I., Heidarimoghadam, R., Khotanlou, H., & Faradmal, J. (2020). A review of work environment risk factors influencing muscle fatigue. *International Journal of Industrial Ergonomics*, 80, 103028.
- [13] Stutzig, N., & Siebert, T. (2015). Muscle force compensation among synergistic muscles after fatigue of a single muscle. *Human Movement Science*, 42, 273-287.
- [14] Lenhart, S., & Workman, J. T. (2007). *Optimal Control Applied to Biological Models*. CRC press.
- [15] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelize, and E. F. Mishchenko. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Wiley, New York, 1962.
- [16] H. L. Royden. *Real Analysis*. McMillan Publishing Company, Inc., New York, 1968.
- [17] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.
- [18] Bellman, R. (1966). Dynamic programming. *Science*, 153(3731), 34-37.
- [19] Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., & Stein, C. (2022). *Introduction to Algorithms*. MIT press.
- [20] Liu, J. Z., Brown, R. W., & Yue, G. H. (2002). A dynamical model of muscle activation, fatigue, and recovery. *Biophysical Journal*, 82(5), 2344-2359.
- [21] Canu, M. H., Fourneau, J., Coq, J. O., Dannhoffer, L., Cieniewski-Bernard, C., Stevens, L., ... & Dupont, E. (2019). Interplay between hypoactivity, muscle

properties and motor command: How to escape the vicious deconditioning circle?. *Annals of Physical and Rehabilitation Medicine*, 62(2), 122-127.

[22] Gandevia, S. C. (1987). Roles for perceived voluntary motor commands in motor control. *Trends in Neurosciences*, 10(2), 81-85.

[23] McComas, A. J., Miller, R. G., & Gandevia, S. C. (1995). Fatigue brought on by malfunction of the central and peripheral nervous systems. *Fatigue: Neural and Muscular Mechanisms*, 495-512.

[24] Enoka, R. M., and D. G. Stuart. 1992. Neurobiology of muscle fatigue. *J. Appl. Physiol.* 72:1631–1648.

[25] Merton, P. A. 1954. Voluntary strength and fatigue. *J. Physiol. (Lond.)*. 123:553–564.

[26] Adrian, E. D., & Bronk, D. W. (1929). The discharge of impulses in motor nerve fibres: Part II. The frequency of discharge in reflex and voluntary contractions. *The Journal of Physiology*, 67(2), i3.

[27] Burke, D., & Howells, J. (2016). The motor unit. *Oxford Textbook of Clinical Neurophysiology*, 9.

[28] McArdle, W. D., Katch, F. I., & Katch, V. L. (2010). *Exercise Physiology: Nutrition, Energy, and Human Performance*. Lippincott Williams & Wilkins.

[29] Ganong, W. F. 1971. Review of Medical Physiology. 5th ed. Lange Medical Publications, Los Altos, California.

[30] Fitts, R. H. 1994. Cellular mechanisms of muscle fatigue. *Physiol. Rev.* 74:49 –94.

[31] Liu, J. Z., Dai, T. H., Siemionow, V., Sahgal, V., & Yue, G. H. (1999). Brain activation during muscle fatigue. *In Soc Neurosci Abstr* (Vol. 25, p. 1145).

[32] Heckman, C. J., & Enoka, R. M. (2012). Motor unit. *Comprehensive Physiology*, (4), 2629-2682.