

國立臺灣大學工學院機械工程學系

碩士論文

Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis

數據驅動之迭代學習控制於多變數非線性動態系統之研究

Data-driven Iterative Learning Control for Multivariable

Nonlinear Dynamic Systems

鄭奕泰

Yi-Tai Cheng

指導教授：李宇修 教授

Advisor: Dr. Yu-Hsiu Lee

中華民國 112 年 6 月

June, 2023



誌謝



感謝指導教授李宇修老師，也感謝實驗室的每一位成員對我的支持與鼓勵，謝謝大家。

(宇)宇宙天地生萬物，(修)休得浮生半日閒？

(博)博覽群書常自省，(嘉)嘉言謹行求道音。

(泳)泳仰學海得一智，(震)振聲發聵上九天。

(彥)雁飛知返思故里，(宏)宏圖大展毋忘情。

(詩)詩文難書離別意，(媚)寐案共守數群星。

(楷)慨我解囊澆愁緒，(翔)翔游銀河月輝清。

(煜)浴火更要添薪柴，(翔)鵝翎不滅熱腸心。

(卉)卉穠馥展又一歲，(蓁)榛熟葉黃度三秋。

(妹)袂連再敘同窗誼，(臻)臻恆致遠憶存膺。

(慈)詞題十岳記青春，(宇)瑤藏懷中常思卿。

(奕)熠日顯，

(泰)太一湮。

(多)多言矯情不忌俗，

(謝)榭為君敞宴嘉賓。

(你)擬言胸中無點墨，

(們)悶聲羞寫拙藏頭。

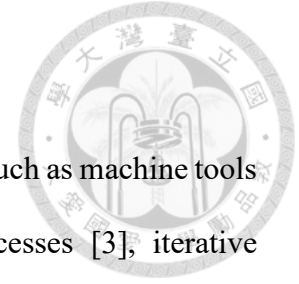
中文摘要



在高度重複性運作的精密系統場域中例如：工具機[1]、工業機器人[2]、半導體製程[3]等，迭代學習控制因為其優異的追蹤性能已經被廣泛應用在各種工業量產製程中。迭帶學習控制的效能與收斂性主要建基於系統模型的準確性和有效的學習演算法。對於具有非線性動態的系統，其模型取得不易且成本高昂，設計對應的演算法亦是一個技術挑戰。在先輩的方法中[4]，適應性濾波被巧妙地使用來追蹤單變數非線性系統沿著動態軌跡變化的線性化模型並產生對應的逆動態系統，因此從迭代學習的觀點能夠將輸入輸出視作一線性的非時變系統進行分析和演算法實理。因其數據驅動的特性，減少了建模成本與不確定性造成的影響，並提供了演算法收斂性分析的依據。然而，該方法在具有動態耦合之多變數系統的延伸未有著墨，由於轉移函數矩陣乘法交換律的不成立會對演算法設計與分析帶來更多挑戰。本論文即對此部分提出推廣至多變數的數據驅動迭代學習演算法，提出數種能夠針對加速誤差收斂速度的演算法進行比較，在線性非時變系統與非線性動態系統上進行模擬，並在龍門式 x - y 平台上實驗驗證。

關鍵字：迭代學習控制、數據驅動、自適應逆濾波、多變數系統，非線性動態。

ABSTRACT



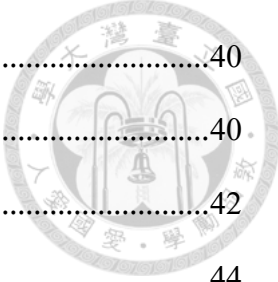
In highly repetitive operations within precision systems fields, such as machine tools [1], industrial robots [2], and semiconductor manufacturing processes [3], iterative learning control (ILC) has been widely applied in various industrial production processes due to its exceptional tracking performance. The effectiveness and convergence of ILC primarily depend on the accuracy of the system model and the efficiency of the learning algorithms. However, obtaining an accurate model for systems with nonlinear dynamics is a demanding and costly task, presenting a significant technical hurdle. Previous approaches [4] have cleverly employed adaptive filtering to track the linearized model of single-variable nonlinear systems along their dynamic trajectories and generate corresponding inverse dynamic systems. This perspective enables the analysis and algorithm development of the input-output relationship as a linear time-invariant system, providing a data-driven solution that mitigates the impact of modeling costs and uncertainties. Moreover, it offers a foundation for convergence analysis of the algorithms. Nevertheless, extending this method to multivariable systems with dynamic coupling remains unexplored. The non-commutativity of transfer function matrix multiplication introduces additional complexities in algorithm design and analysis. This thesis addresses this gap by proposing an extension of the data-driven iterative learning algorithm to multivariable systems. Several algorithms capable of accelerating error convergence rate are compared, with simulations conducted on both linear time-invariant systems and nonlinear dynamic systems. Experimental verification is performed on a gantry-type x-y platform.

Key words: Iterative learning control(ILC), Data driven, Adaptive Inverse filtering, Coupling systems, Nonlinear dynamics.

CONTENTS



口試委員會審定書	#
誌謝	i
中文摘要	ii
ABSTRACT	iii
CONTENTS	iv
LIST OF FIGURES	vi
LIST OF TABLES	ix
Chapter 1 Introduction	1
1.1 Background and Motivation	1
1.2 Literature Review	2
1.2.1 ILC	2
1.2.2 Model Based ILC	3
1.2.3 Data-driven ILC	3
Chapter 2 ILC Preliminaries	5
Chapter 3 Algorithm	7
3.1 SISO Algorithm	7
3.2 MIMO Algorithm	11
3.2.1 Left Inverse Method	14
3.2.2 Right Inverse Method with Exhaust Transpose	19
3.2.3 Right Inverse Method with Fast Transpose	26
3.2.4 Summary	32
3.3 Parameter Design	34
Chapter 4 Results	40



4.1	LTI System.....	40
4.1.1	Test System Introduction.....	40
4.1.2	Simulation Results	42
4.1.3	Experiment Results	44
4.2	Non-LTI System	50
4.2.1	Test System Introduction.....	50
4.2.2	Simulation Results	51
Chapter 5	Conclusions and Future works	56
5.1	Conclusions	56
5.2	Future works	57
REFERENCE		59

LIST OF FIGURES



Fig 2.1	ILC 圖解[30]	5
Fig 3.1	線性化系統過程示意圖	8
Fig 3.2	SISO 演算法方塊圖	9
Fig 3.3	SISO Algo.步驟(1)圖	10
Fig 3.4	SISO Algo.步驟(2)圖	10
Fig 3.5	SISO Algo.步驟(3)圖	11
Fig 3.6	左反矩陣法 LTI 演算法方塊圖	15
Fig 3.7	Δ 方塊圖	16
Fig 3.8	左反矩陣法 Non-LTI 演算法方塊圖	17
Fig 3.9	權重濾波器 H 示意圖	18
Fig 3.10	Δ 與 Δ' 示意圖	18
Fig 3.11	Right MIMO with Exhaust Transpose 演算法方塊圖	20
Fig 3.12	雙輸入雙輸出合成轉置訊號示意	22
Fig 3.13	雙輸入雙輸出 2 taps FIR 濾波器轉置例	22
Fig 3.14	Δ 方塊圖	23
Fig 3.15	加入權重濾波器 H 示意圖	24
Fig 3.16	權重濾波器 H 示意圖	24
Fig 3.17	Δ 與 Δ' 示意圖	24
Fig 3.18	Right MIMO with Fast Transpose 演算法方塊圖	26
Fig 3.19	轉置 FIR 擬和系統，雙輸入雙輸出 2 taps 例圖	27
Fig 3.20	Δ_1 與 Δ_2 示意圖	28

Fig 3.21	加入權重濾波器 H 示意圖	29
Fig 3.22	權重濾波器 H 示意圖	29
Fig 3.23	Δ_1 與 Δ_2 示意圖	30
Fig 3.24	受控系統 G 脈衝響應.....	34
Fig 3.25	自適應逆濾波結構	35
Fig 3.26	反系統 G^{-1} 脈衝響應.....	36
Fig 3.27	2×2 系統填充零示意	37
Fig 3.28	激發 g ·線性化過程.....	37
Fig 3.29	Q 對收斂條件修整示意	38
Fig 3.30	非 LTI 左反矩陣法步驟(2).....	39
Fig 3.31	H 對收斂條件影響示意	39
Fig 4.1	測試硬體與命令軌跡圖	40
Fig 4.2	系統示意圖	41
Fig 4.3	系統波德圖	41
Fig 4.4	軌跡追蹤的方均根誤差	42
Fig 4.5	SISO 與 MIMO Exh.四次迭代中頻域的 Adap. Err. 比較	43
Fig 4.6	右反矩陣快速轉換法步驟(2)方塊圖.....	44
Fig 4.7	實驗結果軌跡方均根誤差比較	45
Fig 4.8	LTI+摩擦力模擬系統	46
Fig 4.9	實驗系統(圖左)，LTI+摩擦力模擬系統(圖右)的軌跡追蹤方均根誤差.....	46
Fig 4.10	將斜率參數調大(圖左)，將平移參數調大(圖右).....	47
Fig 4.11	加入激發訊號的命令訊號 u	47

Fig 4.12	左反矩陣法輸入收斂條件分析圖	48
Fig 4.13	多次試驗法誤差收斂條件分析圖	49
Fig 4.14	快速轉置法誤差收斂條件分析圖	49
Fig 4.15	測試硬體與命令軌跡圖	50
Fig 4.16	系統示意圖	51
Fig 4.17	IILTV 模擬系統	51
Fig 4.18	浮動增益 K	52
Fig 4.19	IILTV 系統模擬軌跡追蹤方均根誤差	52
Fig 4.20	左反矩陣法輸入第 30 次迭代收斂條件分析圖	53
Fig 4.21	右反矩陣多次試驗法誤差第 30 次迭代收斂條件分析圖(圖左)；右反矩陣快速轉置法誤差第 30 次迭代收斂條件分析圖(圖右).....	53
Fig 4.23	IILTV+摩擦力模擬系統	54
Fig 4.24	IILTV 系統+摩擦力模擬軌跡追蹤方均根誤差	55
Fig 5.1	IILPV 實驗系統軌跡追蹤方均根誤差	57

LIST OF TABLES



Table 3-1	兩種左反矩陣法適用場域與適用分析條件表	19
Table 3-2	兩種右反矩陣多次試驗法適用場域與適用分析條件表	25
Table 3-3	兩種右反矩陣快速轉置法適用場域與適用分析條件表	31
Table 3-4	MIMO 演算法適用場域與適用分析條件總表	32
Table 3-5	MIMO 演算法試驗與自適應濾波次數表	32
Table 3-6	兩右反矩陣方法優劣關係表	33
Table 4-1	MIMO 算法自適應濾波次數	44
Table 4-2	LTI 算法實驗參數使用表	45
Table 4-3	演算法觸發非連續性誤差次數表	48
Table 4-4	三種演算法的收斂條件分析	50
Table 4-5	收斂條件實際算法	54
Table 5-1	三種演算法可分析誤差收斂條件的場域	56
Table 5-2	三種演算法在方陣系統下收斂速度差異排名	57

Chapter 1 Introduction

1.1 Background and Motivation



精密運動控制、特別是軌跡追蹤在工業製程中直接決定了產品的品質與精度，像是機械加工[5][6]、晶圓定位[7]、工業用機械手臂[8]等，無論是針對產能還是精度需求，都需要工具更快速與更精確的運作。上述精密系統從事大量生產作業時，有一個共通的特性，即是任務具有重複性，在此特性下，迭代學習控制(Iterative Learning Control, ILC)具備很好的追蹤性能，並被廣泛的運用在如：工具機[1]、工業機器人[2]、半導體製程[3]等系統。以模型為基礎(Model based)的 ILC，在線性非時變(Linear Time Invariant, LTI)系統上的應用已經發展得相當成熟，然而真實系統往往存在耦合與非線性動態，例如常見的串聯式機械手臂在不同位置時有不同的動態特性、且機器人位置與馬達關節角度為一非線性映射關係；或是運輸工具與建築測試的振動台[9][10]不同軸間存在耦合，液壓致動器本身便具有非線性的動態特性。在這樣的情況下，若直接使用 LTI 的技術，在性能與收斂速度上都會遭遇瓶頸。在先輩的方法[4]中，嘗試解決了在單輸入單輸出(Single-Input Single-Output, SISO)非線性動態系統的 ILC 問題。然而該演算法主要是針對控制訊號的收斂性開發而得，而非控制目標的誤差訊號，對於多輸入多輸出(Multiple-Input Multiple-Output, MIMO)系統的延伸應用，因為轉移函數矩陣交換律的不成立影響尤其為甚。因此，本論文主要針對此部分研發合適的演算法，並為其發展相對應的收斂性分析工具，提升演算法的性能並拓展其應用範疇。

1.2 Literature Review

以下將文獻回顧分成三個部分，第一部分會先介紹 ILC 的基本原理與特性，第二部分將回顧習知 Model based ILC 在線性與非線性動態系統上的應用，由於基於模型的設計方法常受到模型擬合誤差的影響，第三部分將說明數據驅動(Data-driven)ILC 的方法。

1.2.1 ILC

ILC 的精神是利用系統過去實驗的結果和誤差資訊，經由不斷增加實驗運作的次數迭代改善控制目標，主要在 80 年代由 Arimoto 等人提出[11]。在軌跡追蹤的應用中常針對使用某個特定的重複性軌跡，使其在每一次運作中基於此前的誤差資訊來修正之後的控制輸入命令，在不停的運作迭代中，產生一組收斂的、適配於該重複性軌跡命令的最佳控制輸入，讓追蹤誤差最小化，屬於一種前饋式控制策略。對比於實時(Real-Time)的回饋控制方法，可以解決其在暫態下對命令或擾動處置的相位延遲誤差。因為迭代的特性，ILC 能夠做到非因果性(Non-causal)的控制，若是軌跡任務或擾動模式在每次迭代下不變(Iteration-Invariant, II)的條件下，便可藉由系統之前運作的資訊生成適當的控制作為補償，相較於回饋控制法在實作上的離線特性也給予了更多安全上的保障。。

狹義上用於軌跡追蹤的 ILC 生成的控制訊號通常只能針對某個特定的命令軌跡，若是任務軌跡有變動則需要迭代運作才能得知最佳的命令輸入。從應用端來看，收斂所需的迭代次數直接反映了學習所需的時間成本，因此除了追蹤效能外，快速收斂的要求亦相當重要。能否產生一有效且快速收斂的命令，則建基於對系統特性的了解，即控制工程中所謂的模型準確度。如同一般物理與工程中的應用，ILC 演算法的設計事實上是一個逆問題的求解：若能使用系統輸入對輸出的逆映射關係

生成命令，則能達成輸入等於輸出的目標。底下將使用系統模型或數據設計 ILC 演算法的相關研究進行回顧。



1.2.2 Model Based ILC

基於模型的線性非時變(Linear Time Invariant, LTI)系統的 ILC 演算法發展相當成熟，這包含了使用轉移函數模型與頻域設計的演算法[12][13]、基於時域模型的二次函數最佳化演算法[14][15] 等，其核心便是設計以系統逆動態為學習函數以達到快速收斂的目的，不同逆系統求取方法在 ILC 和前饋控制法的應用在[16] 有很好的回顧與整理，提供感興趣的讀者參閱。這一類方法的性能與收斂速度很大程度取決於模型的精確性，若要將其影響納入演算法的設計考量，可以將不確定性(uncertainty)量化並結合強韌控制的手法處理[17][18]。

針對已知模型的非線性動態系統，常見的技巧則包含機器人控制中的線性化回授(feedback linearization)將線性化非線性系統後再建置線性 ILC[19]；在[20] 則從系統的狀態空間表達法出發，將系統看作是輸入向量映射到輸出向量的靜態非線性函數，利用最佳化的牛頓法設計控制訊號往誤差懲罰函數的負梯度方向修正達到迭代改善的效果；另有一類演算法則是針對非線性系統，依據軌跡追蹤任務定義類似黎雅普諾夫的純量函數，並設計學習控制律使其收斂[21][22]。

1.2.3 Data-driven ILC

由於模型與真實系統之間存在因為量測雜訊與參數化擬合所造成的誤差，使用基於模型的 ILC 演算法可能會造成性能下降、收斂速度變慢，甚至是發散的情形。有鑑於此，利用實驗的數據直接建構學習函數或控制修正命令的數據驅動方法相應而生。以 LTI 系統為例，在[23] 中使用了輸入輸出訊號傅立葉轉換在頻域的除商作為學習函數；在[24]中則巧妙地將學習函數的求取化成 ILC 的追蹤問題，從



實驗中建構非參數化的逆動態有限脈衝響應(finite impulse response)生成學習函數，並在[25]中以學習函數的更新加速流程；近期[26]的研究中，利用系統和其伴隨算符(adjoint operator)相乘為零相位(zero phase)的特性，以誤差訊號的正向與逆向時序濾波建構控制修正方向的梯度使得誤差最小化，該方法實為一線性系統最小平方的求解，因此可以使用近似牛頓法進一步加速誤差收斂速度。上述方法均利用了線性非時變系統的特性，如何將其延伸到非線性系統並不直觀。

非線性系統的數據驅動方法中基於神經網絡模型(neural network model)的研究最廣為人知[27][28]，由於該模型對於任意函數擬合的能力，結合目前發達的電腦算力通常能取得很好的效能，唯一較為人詬病的是前期大量資料的收集所需的成本、控制律的設計困難和參數調變的不可解釋性等。在[29]中則是將系統在迭代軸上視為一靜態的線性映射關係，並據此估測系統與其逆運算作為學習函數，然而此方法的初始化與參數設計需要有系統部分的先驗知識，演算法中也有可能因為遭遇數值奇異點而需要重置，收斂速度可能相當緩慢而不利於工程應用。為了突破這些技術困難點，在[4]中利用了非線性系統在軌跡上的線性化，以適應性濾波自動生成追蹤線性化時變系統的逆動態學習函數達成快速收斂，且 ILC 的輸入輸出關係近似於一時變系統，因此可使用線性工具進行收斂性分析。此數據驅動方法具有快速收斂、非參數化、計算高效的優勢，然而在具有耦合的多變數系統延伸未有著墨。本論文主要立基於[4]擴展演算法的應用，由於矩陣轉移函數乘法交換律的不成立，多變數的延伸並非單純的增加演算法的維度，而是必須透過巧妙的訊號處理手法加快目標追蹤誤差的收斂速度，將在以下 Chapter 3 作更詳盡的算法介紹。

Chapter 2 ILC Preliminaries

為了替後續演算法論述提供基礎，這一章將介紹線性 ILC 的基礎理論以及分析方式。

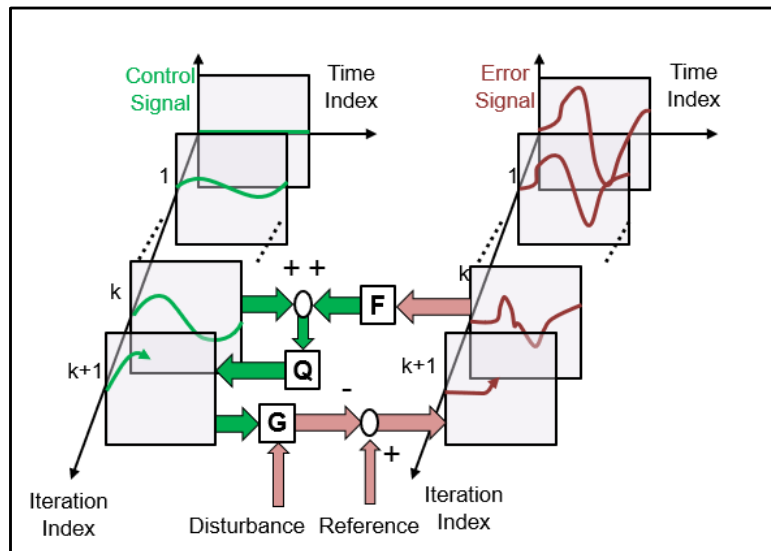


Fig 2.1 ILC 圖解[30]

ILC，是一種在迭代軸上使用上一次的追蹤結果的後驗誤差優化下一次的控制輸入的控制方法，如上 Fig 2.1，其基於誤差的控制迭代數學式可以寫成：

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{Q}(\mathbf{u}_k + \mathbf{F}\mathbf{e}_k) \quad (2-1)$$

其中， $\mathbf{u}_{k+1}$ 是第 $k+1$ 次迭代之控制輸入行向量， $\mathbf{Q}$ 是低通濾波器矩陣， $\mathbf{F}$ 是學習控制矩陣， $\mathbf{e}_k$ 是第 k 次迭代之追蹤誤差訊號，而式子(2-1)在假設系統 $\mathbf{G}$ 為 LTI 的情況下又可以進一步推導成：

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{k+1} &= \mathbf{Q}(\mathbf{u}_k + \mathbf{F}\mathbf{e}_k) \\ &= \mathbf{Q}\mathbf{u}_k + \mathbf{Q}\mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{G}\mathbf{u}_k) \\ &= \mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{r} + \mathbf{Q}(\mathbf{I} - \mathbf{F}\mathbf{G})\mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (2-2)$$

根據式子(2-1)，控制輸入訊號迭代方程式的收斂條件：

$$\gamma = \|Q(I - FG)\|_2 < 1 \quad (2-3)$$

收斂條件中可以看出，當學習控制器 $F \cong G^{-1}$ 時，控制輸入訊號有最佳收斂速度。

誤差訊號迭代方程式也能利用式子(2-1)推導出：

$$\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{r} - \mathbf{y}_{k+1} \quad (2-4)$$

$$= \mathbf{r} - \mathbf{G}\mathbf{u}_{k+1}$$

$$= \mathbf{r} - \mathbf{GQ}(\mathbf{u}_k + \mathbf{F}\mathbf{e}_k) \quad (2-5)$$

$$= (\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{r} + \mathbf{Q}(\mathbf{I} - \mathbf{GF})\mathbf{e}_k \quad (2-6)$$

須注意式(2-5)推導至(2-6)， $\mathbf{G}$ 需為循環矩陣(Circulant matrix)才成立[31]，也就是系

統必須為 LTI。根據(2-6)，誤差訊號迭代方程式的收斂條件：

$$\rho = \|Q(I - GF)\|_2 < 1 \quad (2-7)$$

又可得誤差性能表現方程式：

$$\mathbf{e}_\infty = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\mathbf{I} - \mathbf{GF}))^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{r} \quad (2-8)$$

ILC 在 LTI 場域下亦可被寫為轉移函數的型態：

$$U_{k+1}(z^{-1}) = Q(z^{-1})(U_k(z^{-1}) + F_{k+1}(z^{-1})E_k(z^{-1})) \quad (2-9)$$

根據[13]輸入收斂條件可被寫成：

$$\|Q(I - FG)\|_\infty < 1 \quad (2-10)$$

$$\sup_\omega \bar{\sigma}(Q(I - FG)) < 1 \quad (2-11)$$

$\sup_\omega \sigma(\cdot)$ 函數是取所有可能頻率矩陣奇異值的上界。

加入系統模型的不確定性的收斂條件可以被定義為：

$$\|Q[I - FG(I + W\Delta)]\|_\infty < 1 \quad (2-12)$$

真實系統 $g(\cdot)$ 被視為 $G(I + W\Delta)$ ， W 是頻域的權重濾波矩陣， Δ 則是相位不確定性，

且定義 $\|\Delta\|_\infty < 1$ 。

Chapter 3 Algorithm

此章會先在 3.1 節介紹適配於 SISO 非線性動態系統的演算法[4]的設計與限制，接著在 3.2 節根據原 SISO 算法推廣以及優化針對 MIMO 系統的演算法。

3.1 SISO Algorithm

上一章 Chapter 2 提及，ILC 能快速收斂的關鍵是找到優秀的學習控制器 $\mathbf{F}$ ，根據式子(2-3)，最好使 $\mathbf{F}$ 為反系統，下方將演示如何在單變數系統下使用數據驅動自適應逆濾波系統取得 $\mathbf{F}$ ，且以此更新下一次迭代控制輸入。

未知的非線性系統 $g(\cdot)$ ，輸入 u 與輸出 y 的在連續時間 t 下的映射關係可以寫成：

$$y(t) = g(u(t)) \quad (3-1)$$

$$= g(u_0(t)) + \frac{dg(u)}{du} \delta u(t) + H.O.T. \quad (3-2)$$

若使 $\delta y(t) = y(t) - g(u_0(t))$ ，且假設 $\delta u(t)$ 很小，則使用小訊號模型 (small-signal modeling) 下泰勒級數的高次項 $H.O.T.$ 可以概略不計，則令：

$$\delta y(t) = G(t, q^{-1}) \delta u(t) \quad (3-3)$$

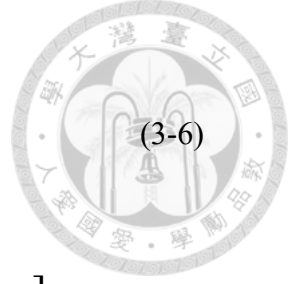
其中 $G(t, q^{-1}) = \frac{dg(u)}{du}$ 。 q 為延遲運算符：

$$q^{-d}x[n] = x[n-d] \quad (3-4)$$

若 $g(\cdot)$ 可以被線性化成 G ，且為 SISO 系統，ILC 輸入之迭代更新方程式的矩陣形式可以寫成：

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{QFr} + \mathbf{Q(I - FG)u}_k \quad (3-5)$$

其中：



$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r[0] \\ r[1] \\ r[2] \\ \vdots \\ r[N-1] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} u[0] \\ u[1] \\ u[2] \\ \vdots \\ u[N-1] \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} l_0[0] & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_1[1] & l_0[0] & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{N-2}[N-2] & l_{N-2}[N-3] & \cdots & l_{N-2}[0] & 0 \\ l_{N-1}[N-1] & l_{N-1}[N-2] & \cdots & l_{N-1}[1] & l_{N-1}[0] \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

$\mathbf{G}$ 為線性時變(Linear Time-Varying, LTV)系統， $l_n[m]$ 為系統在 n 秒時的脈衝響應， N 為命令訊號長度。

在系統為 LTV 的情況下，為了求取近似反系統的 $\mathbf{F}$ ，傳統的 LTI 系統識別方法將難以勝任，適用於 LTV 系統的自適應控制(Adaptive Control)法將被引入，作為識別 LTV 反系統，也就是學習控制器 $\mathbf{F}$ 的手段，具體的實作邏輯如下 Fig 3.1。

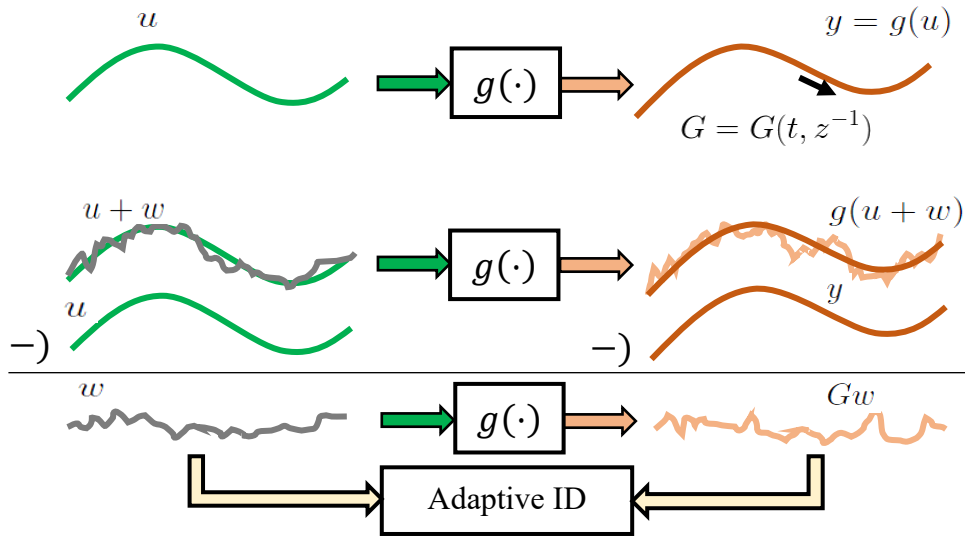


Fig 3.1 線性化系統過程示意圖

假設 $g(\cdot)$ 在小訊號輸入範圍下，也就是 $\delta g(\cdot)$ 很小時符合疊加原理，將原輸入加上激發訊號 w ，如同將式(3-3)之 $\delta u(t)$ 設置為 $w(t)$ ，並且將此輸出減去未加激發訊號之原輸出得到 $\delta y(t)$ ，其中 $w(t)$ 選用有限頻寬的高斯白噪音(Gaussian white noise)，

目的是盡可能的激發所有系統頻段響應的同時，滿足自適應算法輸入平均為零的假設，為了更快速的收斂，這裡是使用 SISO 遞迴最小平方(Recursive Least Square, RLS)有限脈衝響應(Finite Impulse Response, FIR)自適應逆濾波器架構：

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdots & f_n[L-d] & \cdots & \cdots & f_n[-d] \\ & f_{n+1}[L-d] & \cdots & \cdots & f_{n+1}[-d] \\ & & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

在每一次迭代中每一個訊號的取樣時間 n 中 $f_n[m]$ 都會進行更新，其中 $L+1$ 為 FIR 濾波器之長度。具體演算法步驟如下：

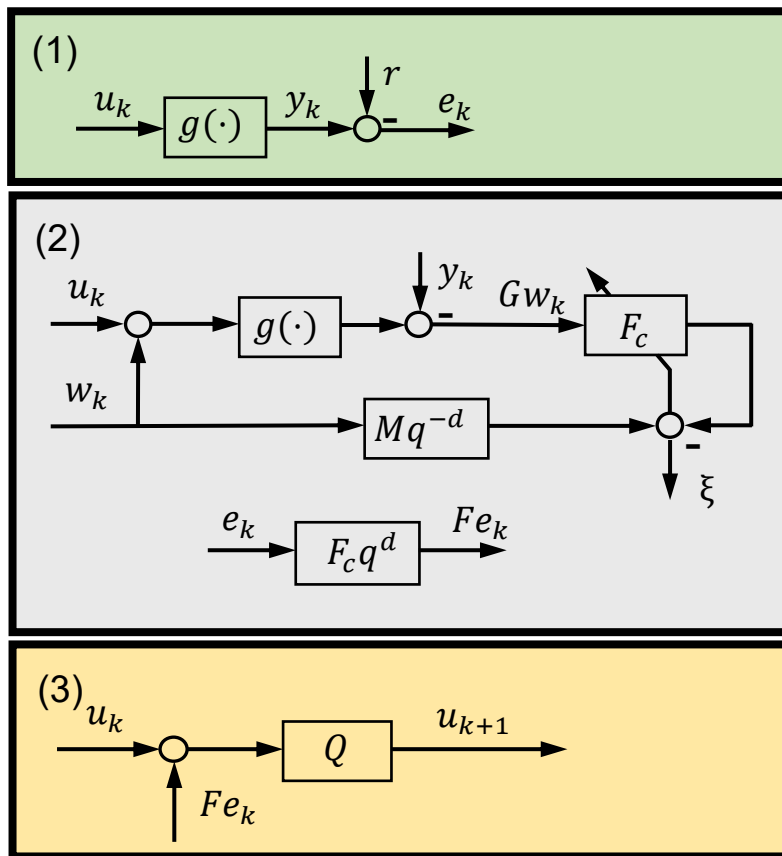


Fig 3.2 SISO 演算法方塊圖

其中 $g(\cdot)$ 為未知非線性系統對於輸入輸出的映射函數， u_k 為第 k 次迭代之控制輸入， y_k 為第 k 次迭代之系統輸出， r 是目標軌跡命令， e_k 為第 k 次迭代之追蹤誤差， G 為線性化後之系統， w_k 為第 k 次迭代進行適應性濾波的激發訊號， F 為學習控制器，



F_c 為因果性(causal)FIR 濾波器， Q 、 M 為低通濾波器。

$$F(t, q^{-d}) = F_c(t, q^{-d})q^d \quad (3-9)$$

如 Fig 3.2 演算法可以主要由三個步驟理解：

(1) 將控制輸入 u_k 輸入系統 $g(\cdot)$ 以取得其輸出 y_k 與誤差 e_k 訊號。

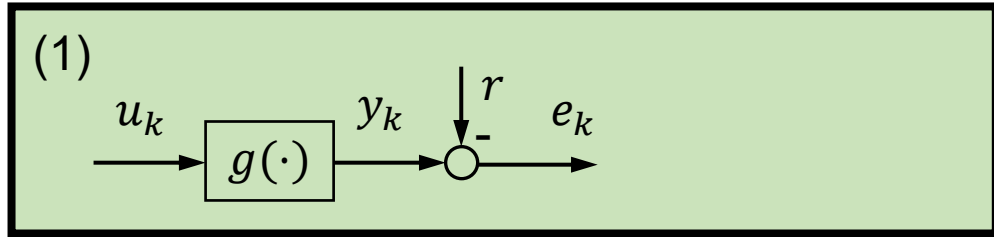


Fig 3.3 SISO Algo.步驟(1)圖

(2) 將非線性系統 $g(\cdot)$ 沿著控制輸入 u_k 線性化成線性時變系統 G ，取得其反系統做為學習控制器 F 將誤差訊號 e_k 同步濾波。

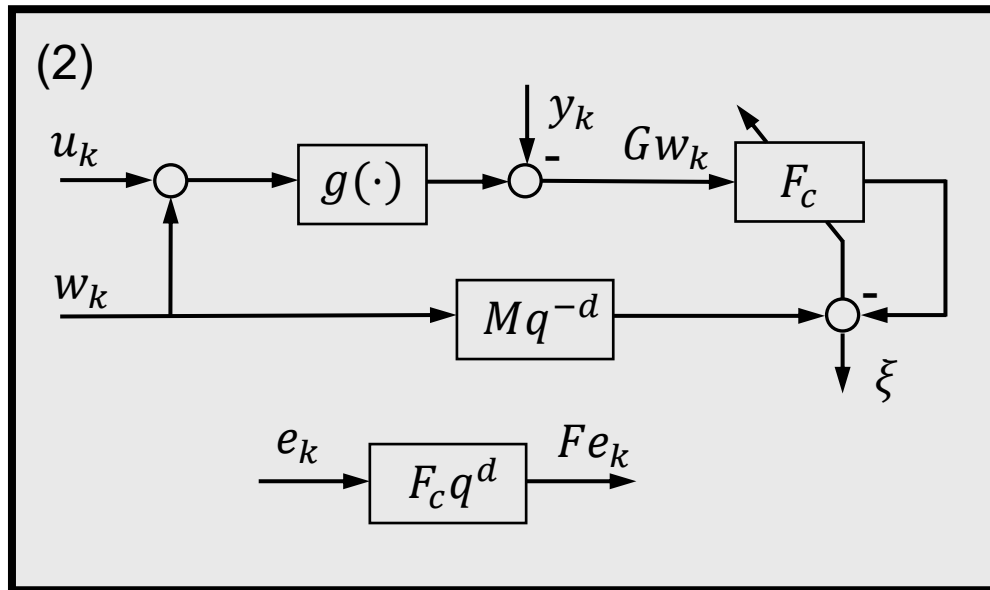


Fig 3.4 SISO Algo.步驟(2)圖

(3) 使用學習控制器濾波完成的訊號 $F e_k$ ，更新下一次迭代輸入 u_{k+1} 。

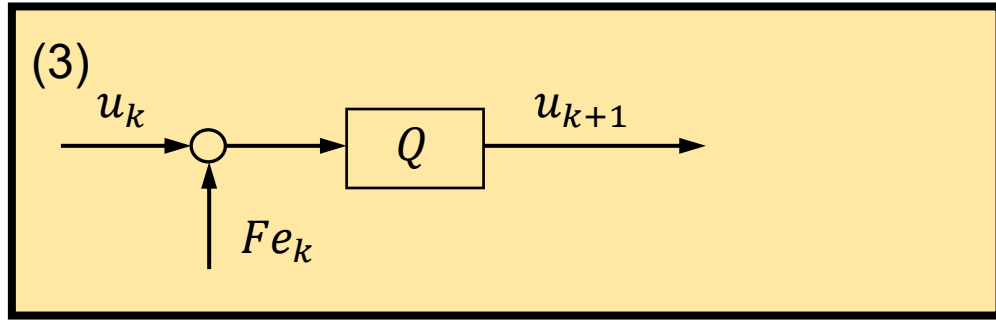


Fig 3.5 SISO Algo.步驟(3)圖

此方法面對 MIMO 系統的限制之處在於其一次只能針對一個輸入對一個輸出的單通道，遭遇耦合系統時，若無法將系統對角化，且耦合大小無法忽略，直接導入演算法，等同忽略這些無法被忽視的耦合效性，SISO 的自適應逆濾波器也無法處理 MIMO 反系統，兩者都可能造成 ILC 性能下降、無法根據輸入輸出資訊分析，甚至無法收斂。

3.2 MIMO Algorithm

根據上一節 3.1 結尾闡述 SISO 算法的限制，在 MIMO 系統上，勢必需要重新檢視該種 ILC 在數學上的結構，以多變數的角度出發，會衍生出交換律無法時時成立的問題，若直接導入 MIMO 自適應逆濾波系統於該算法如左反矩陣法(Left Inverse Method)將於 3.2.1 小節提及，會遭遇誤差收斂條件無法分析的困境，於是在 3.2.2 小節提出右反矩陣多次試驗法(Right Inverse Method with Exhaust Transpose)，在 3.2.3 小節提出右反矩陣快速轉置法(Right Inverse Method with Fast Transpose)，對交換律問題作出應對，兩者皆利用系統轉置的方式求取右反矩陣。

回到 ILC 數學結構，假設 MIMO 系統 $g(\cdot)$ 為 LTI 具耦合效性的系統，輸入的更新方程式與誤差的更新方程式分別為：

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{r} + \mathbf{Q}(\mathbf{I} - \mathbf{F}\mathbf{G})\mathbf{u}_k \quad (3-10)$$

$$\mathbf{e}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{r} + \mathbf{Q}(\mathbf{I} - \mathbf{GF})\mathbf{e}_k \quad (3-11)$$

其中：

$$\mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{k,1} \\ \mathbf{u}_{k,2} \\ \mathbf{u}_{k,3} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k,xi-1} \end{bmatrix}, \mathbf{u}_{k,xi-1} = \begin{bmatrix} u_{k,xi-1}[0] \\ u_{k,xi-1}[1] \\ u_{k,xi-1}[2] \\ \vdots \\ u_{k,xi-1}[N-1] \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

$$\mathbf{e}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{k,1} \\ \mathbf{e}_{k,2} \\ \mathbf{e}_{k,3} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{k,xo-1} \end{bmatrix}, \mathbf{e}_{k,xo-1} = \begin{bmatrix} e_{k,xo-1}[0] \\ e_{k,xo-1}[1] \\ e_{k,xo-1}[2] \\ \vdots \\ e_{k,xo-1}[N-1] \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{1,1} & \cdots & \mathbf{G}_{1,xi} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{xo,1} & \cdots & \mathbf{G}_{xo,xi} \end{bmatrix} \quad (3-14)$$

$$\mathbf{G}_{xo,xi} = \begin{bmatrix} l_0^{xo,xi}[0] & 0 & \cdots & 0 \\ l_1^{xo,xi}[1] & l_1^{xo,xi}[0] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{N-2}^{xo,xi}[N-2] & l_{N-2}^{xo,xi}[N-3] & \cdots & 0 \\ l_{N-1}^{xo,xi}[N-1] & l_{N-1}^{xo,xi}[N-2] & \cdots & l_{N-1}^{xo,xi}[0] \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{1,1} & \cdots & \mathbf{F}_{1,xo} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{F}_{xi,1} & \cdots & \mathbf{F}_{xi,xo} \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

$\mathbf{F}_{xi,xo}$

$$= \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & \ddots & \\ \cdots & f_n^{xi,xo}[L-d] & \cdots & f_n^{xi,xo}[-d] & \\ & f_{n+1}^{xi,xo}[L-d] & \cdots & f_{n+1}^{xi,xo}[-d] & \\ & & \cdots & & \ddots \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{Q}_{xi} \end{bmatrix} \quad (3-18)$$

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2 = \cdots = \mathbf{Q}_{xi} \quad (3-19)$$

其中 xi 為輸入數， xo 為輸出數。



因為假設系統 LTI，則 MIMO 系統中每個子系統 $\mathbf{G}_{x_o, x_i}$ 皆為循環矩陣(Circulant-matrix)即：

$$l_0^{x_o, x_i}[m] = \dots = l_n^{x_o, x_i}[m] = \dots = l_N^{x_o, x_i}[m] \quad (3-20)$$

又 $\mathbf{Q}_{x_i}$ 為 LTI 低通濾波器且為循環矩陣(circulant matrix)：

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{x_i} \mathbf{I}_{x_i \times x_i} \quad (3-21)$$

且 $\mathbf{G}$ 為方陣則：

$$\mathbf{Q}\mathbf{G} = \mathbf{G}\mathbf{Q} \quad (3-22)$$

故式子(2-4)~(2-6)之推導才成立。

輸入的收斂條件：

$$\gamma = \|\mathbf{Q}(\mathbf{I} - \mathbf{F}\mathbf{G})\|_2 < 1 \quad (3-23)$$

誤差的收斂條件：

$$\rho = \|\mathbf{Q}(\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{F})\|_2 < 1 \quad (3-24)$$

根據學習控制器 $\mathbf{F}$ 在(3-10)(3-11)兩式中的相對於 $\mathbf{G}$ 的位置，當自適應逆濾波系統擬合 $\mathbf{F}$ 為系統左反矩陣抑或系統右反矩陣時，將造成的性能差異，因為我們較在意的性能指標為誤差訊號，因此應使用右反矩陣作為學習函數。若在 SISO 算法中直接導入的多變數自適應逆濾波系統，架構 Fig 3.4，也就是左反矩陣法，將只會得到系統的左反矩陣，其無法藉由系統輸入與輸出資訊分析針對誤差的收斂性，因為 $\mathbf{F}$ 是一非因果性(non-causal)時變 FIR 濾波器，無法直接將其直接置入誤差收斂條件式，在此之前，沒有做 $\mathbf{G}$ 的系統識別也無從談起，這有違數據驅動的本意。故提出兩種不同的 MIMO 自適應逆濾波系統結構以完成學習控制器 $\mathbf{F}$ 為方陣系統的右反矩陣之算法，用以正確分析與加強誤差收斂速度。

上方推演的 MIMO ILC 數學結構中，有一個強假設是系統為 LTI。若系統存在平滑的非線性動態如：類多項數式非線性因素，或系統為 LTV 時，上方的誤差更新方程式(3-11)將不成立，因為式(3-20)將不再成立，於是將非線性動態系統線性化成時變系統的本論文受控體，不得不將低通濾波器 $\mathbf{Q}$ 自 ILC 算法中移除，則輸入與誤差的更新方程式：

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{F}r + (\mathbf{I} - \mathbf{F}\mathbf{G})\mathbf{u}_k \quad (3-25)$$

$$\mathbf{e}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{F})\mathbf{e}_k \quad (3-26)$$

輸入與誤差的收斂條件：

$$\gamma' = \|\mathbf{I} - \mathbf{F}\mathbf{G}\|_2 < 1 \quad (3-27)$$

$$\rho' = \|\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{F}\|_2 < 1 \quad (3-28)$$

而 $\mathbf{F}$ 所在的位置仍然造成性能差異，而移除 $\mathbf{Q}$ 所造成的影響，這一節也會提出在自適應逆濾波結構上加上權重濾波器 $\mathbf{H}$ 做為應對，用以抑制輸入或誤差在更新時高頻處的增益，以針對非 LTI 系統的算法。

3.2.1 Left Inverse Method

左反矩陣法是將前一節 3.1 的算法直接導入 MIMO 自適應濾波器，架構並無改變，這裡自適應逆濾波系統擬合的學習控制器 F_L 為系統的左反矩陣，接下來關於左反矩陣法的介紹將會分為針對 LTI 系統與針對非 LTI 系統的兩部分，內容中會包含演算法步驟、收斂性分析方法與限制。

3.2.1.1 LTI system

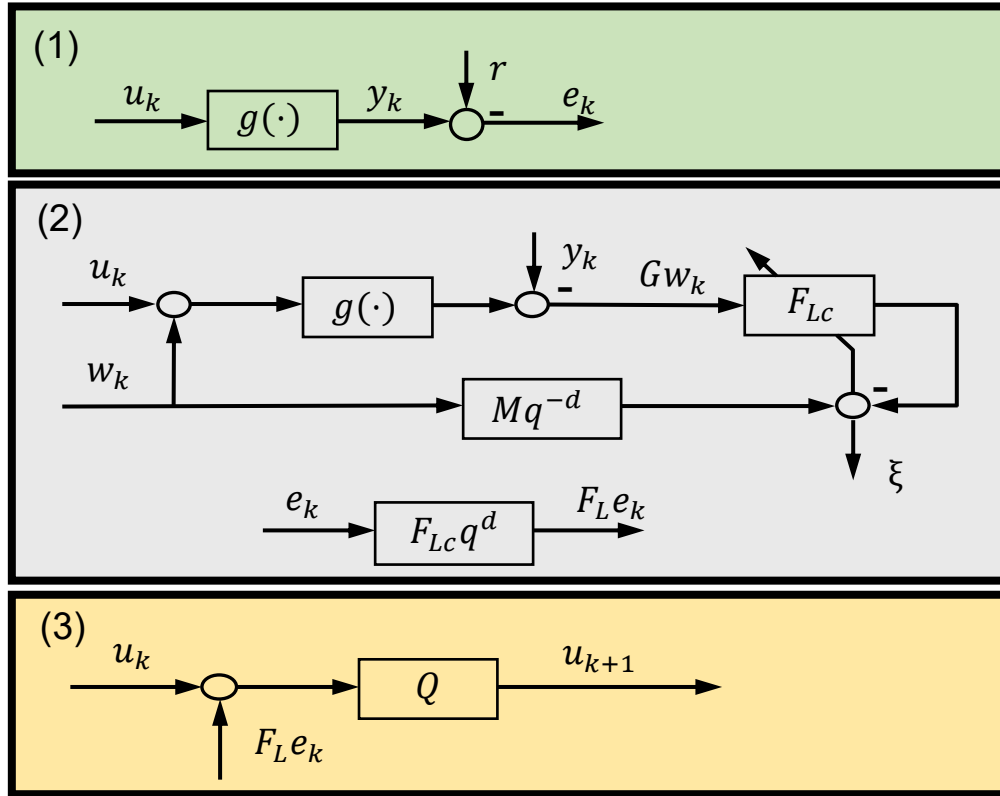


Fig 3.6 左反矩陣法 LTI 演算法方塊圖

演算法分成三個步驟：

- (1) 將控制輸入 u_k 輸入系統 $g(\cdot)$ 以取得其輸出 y_k 與誤差訊號 e_k 。
- (2) 將線性系統 $g(\cdot)$ 沿著控制輸入 u_k 線性化成線性時變系統 G ，取得其反系統做為學習控制器 F_L 將誤差訊號 e_k 同步濾波。
- (3) 使用學習控制器濾波完成的訊號 $F_L e_k$ ，更新下一次迭代輸入 u_{k+1} 。

須注意此處的學習控制器 F_L 是擬合系統 G 的左反矩陣，因為自適應濾波過程的數學邏輯如下：

$$\min_{F_L} \|(M - F_L G)w_k\|_2 \quad (3-29)$$

這裡假設 MIMO 系統 $g(\cdot)$ 為 LTI 系統，步驟(2) 因為線性系統的疊加原理因此仍然成立，使用輸入訊號軌跡疊加可能降低系統在低速運動下的摩擦力等非理想效應，輸入訊號的收斂性分析也成立，比較請見 Table 3-4，缺點在於無法對誤差收斂性

分析。在收斂性分析中，針對輸入輸出資訊，只能分析演算法的輸入收斂性，也因為 $\mathbf{F}_L$ 為非因果性濾波器，無法直接置入誤差收斂條件式。輸入訊號的收斂條件為：

$$\gamma = \|\mathbf{Q}(\mathbf{I} - \mathbf{F}_L \mathbf{G})\|_2 < 1 \quad (3-30)$$

若要分析輸入收斂條件 γ ，需要假借 $\Delta(z^{-1})$ 系統， $\Delta(z^{-1})$ 可以從演算法步驟(2)自適應逆濾波系統的輸入 w_k 與輸出 ξ 中求出[37]。

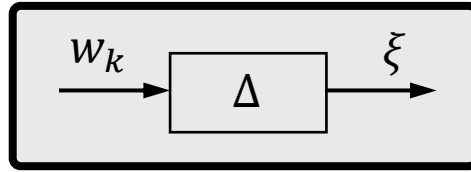


Fig 3.7 Δ 方塊圖

$$\Phi_{\xi w_k} \Phi_{w_k w_k}^{-1} = \Delta(z^{-1}) = M - F_L G \quad (3-31)$$

其中 $\Phi_{\xi w_k}$ 為訊號 ξ 與訊號 w_k 的互功率譜密度(Cross power spectral density)， $\Phi_{w_k w_k}$ 為訊號 w_k 的功率譜密度(Power spectral density)：

$$\Phi_{\xi w_k} = \mathcal{F}\{\xi\}^* \mathcal{F}\{w_k\} \quad (3-32)$$

$$\Phi_{w_k w_k} = \mathcal{F}\{w_k\}^* \mathcal{F}\{w_k\} \quad (3-33)$$

$\mathcal{F}\{\cdot\}$ 為離散傅立葉轉換， A^* 為 A 的共軛轉置。

若 $F_L G \approx M$ ，也就是自適應逆濾波系統的性能精良的情況下，假設 $\Delta(z^{-1})$ 為 LTI，

則收斂條件 γ 可被轉換成：

$$\|\mathbf{Q}(\mathbf{I} - \mathbf{F}_L \mathbf{G})\|_2 = \|\mathbf{Q}(I - F_L G)\|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}(\mathbf{Q}(I - F_L G)) \quad (3-34)[13]$$

$$\sup_\omega \bar{\sigma}(\mathbf{Q}(I - F_L G)) = \sup_\omega \bar{\sigma}(\mathbf{Q}(I - M + \Delta)) \quad (3-35)$$

3.2.1.2 Non-LTI system

若 $g(\cdot)$ 不是 LTI 系統，則使用下方的演算法：

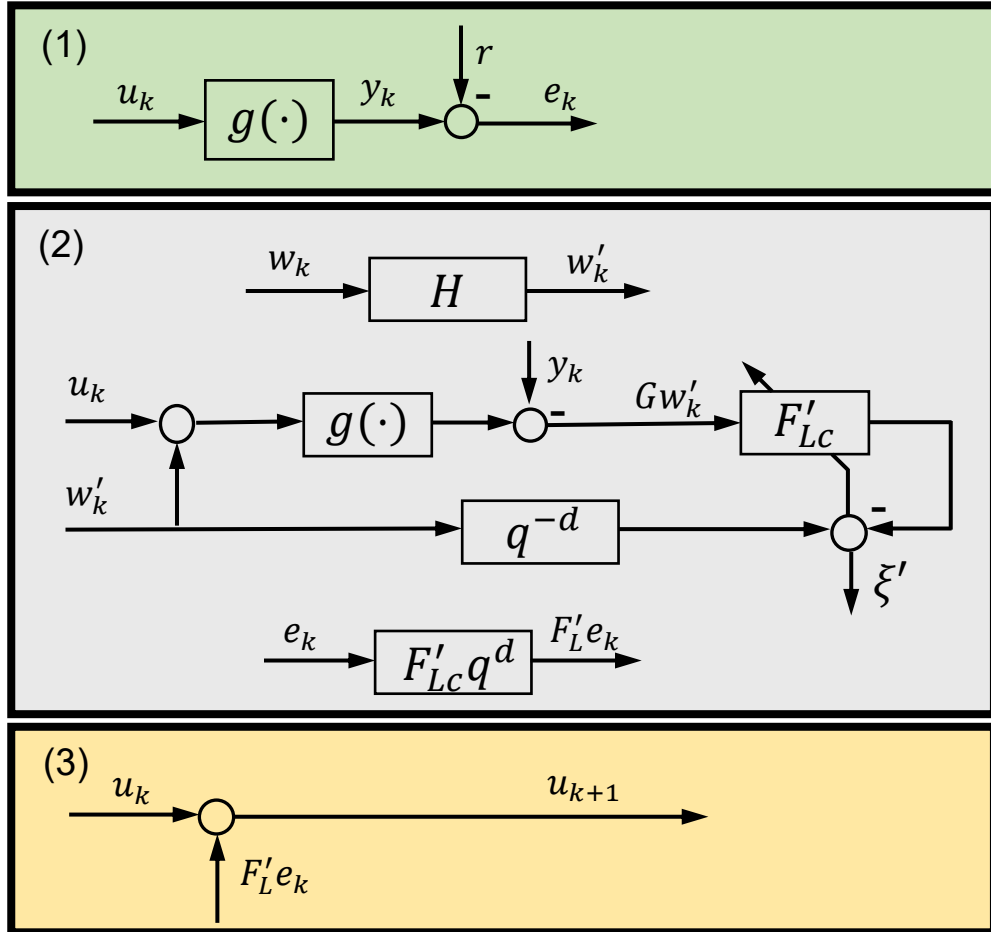


Fig 3.8 左反矩陣法 Non-LTI 演算法方塊圖

演算法分成三個步驟：

- (1) 將控制輸入 u_k 輸入系統 $g(\cdot)$ 以取得其輸出 y_k 與誤差訊號 e_k 。
- (2) 將非線性系統 $g(\cdot)$ 沿著控制輸入 u_k 線性化成線性時變系統 G ，取得其反系統做為學習控制器 F'_L 將誤差訊號 e_k 同步濾波。
- (3) 使用學習控制器濾波完成的訊號 $F'_L e_k$ ，更新下一次迭代輸入 u_{k+1} 。

這裡與上方 Fig 3.6 所示之演算法最大的不同，在於將步驟(3)的低通濾波器 Q 移除，以規避在非線性系統 $g(\cdot)$ 線性化成線性時變系統 G 後的交換律疑慮，並且將步驟(2)

的激發訊號 w_k 通過一個頻域權重濾波器 H 並且移除低通濾波器 M ，用以彌補原低通濾波器 Q 之用途，抑制輸入收斂條件在高頻上的增益，而權重的調整可參考如下範例，實作上可以藉由第一次實驗的奇異值上升處頻率來調節權重濾波器的轉折頻率(corner frequency)使其收斂：

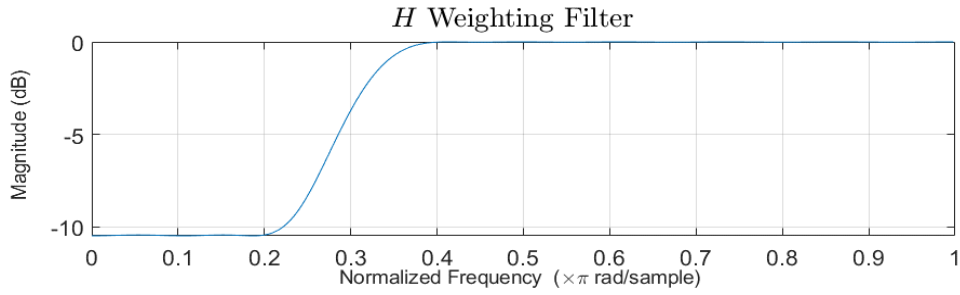


Fig 3.9 權重濾波器 H 示意圖

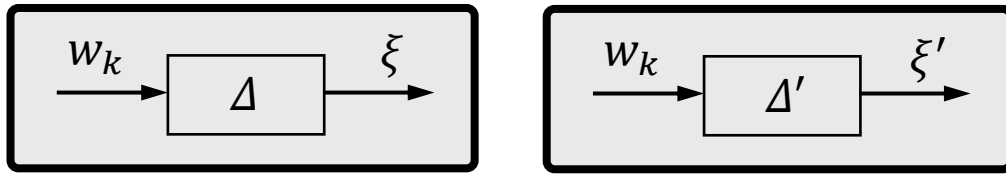


Fig 3.10 Δ 與 Δ' 示意圖

對比有加上權重濾波器 H ，：

$$\Phi_{\xi w_k} \Phi_{w_k w_k}^{-1} = \Delta(z^{-1}) = I - F_L G \quad (3-36)$$

$$\Phi_{\xi' w_k} \Phi_{w_k w_k}^{-1} = \Delta'(z^{-1}) = (I - F_L' G) H \quad (3-37)$$

$\Phi_{\xi w_k}$ 為訊號 ξ 與訊號 w_k 的互功率譜密度(Cross power spectral density)， $\Phi_{w_k w_k}$ 為訊號 w_k 的功率譜密度(Power spectral density)。

自適應濾波過程的數學邏輯：

$$\min_{F_L} \|(I - F_L G) w_k\|_2 \quad (3-38)$$

$$\min_{F_L'} \|(I - F_L' G) H w_k\|_2 \quad (3-39)$$

這裡的 $g(\cdot)$ 是非線性系統，在收斂分析中，如 LTI 算法一樣只能分析輸入收斂性條件，輸入訊號的收斂性條件：

$$\gamma' = \|(I - F_L'G)\|_2 < 1 \quad (3-40)$$

要分析此輸入收斂條件 γ' ，需要假借 $\Delta'(z^{-1})$ ，若 $F_L'G \approx I$ ，也就是自適應逆濾波系統的性能精良的情況下，假設 $\Delta'(z^{-1})$ 為 LTI，收斂條件 γ' 可被轉換成：

$$\|(I - F_L'G)\|_2 = \|(I - F_L'G)\|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}(I - F_L'G) \quad (3-41)$$

$$\sup_\omega \bar{\sigma}(I - F_L'G) = \sup_\omega \bar{\sigma}(\Delta'H^{-1}) \quad (3-42)$$

兩種左反矩陣法適用場域與分析條件限制：

	左反矩陣法	
	LTI 算法	非 LTI 算法
LTI 系統	○	○
LTI 輸入收斂條件分析	○	○
LTI 誤差收斂條件分析	×	×
非 LTI 系統	○	○
非 LTI 輸入收斂條件分析	○	○
非 LTI 誤差收斂條件分析	×	×

Table 3-1 兩種左反矩陣法適用場域與適用分析條件表

根據上方對兩種左反矩陣法的介紹，此種算法無論對 LTI 系統還是非 LTI 系統皆無法分析誤差收斂條件，且學理上都無法直接針對誤差使之衰減，收斂速度可能受到影響，為了解決這個問題，提出了以下兩個關於右反矩陣的算法。

3.2.2 Right Inverse Method with Exhaust Transpose

右反矩陣多次試驗法是以試驗方式調整進入自適應逆濾波系統的訊號，來達到調整自適應逆濾波結構擬合物的方法。接下來關於右反矩陣多次試驗法的介紹將會分為針對 LTI 系統與針對非 LTI 系統的兩部分，內容中會包含演算法步驟、收斂性分析方法與限制。



3.2.2.1 LTI system

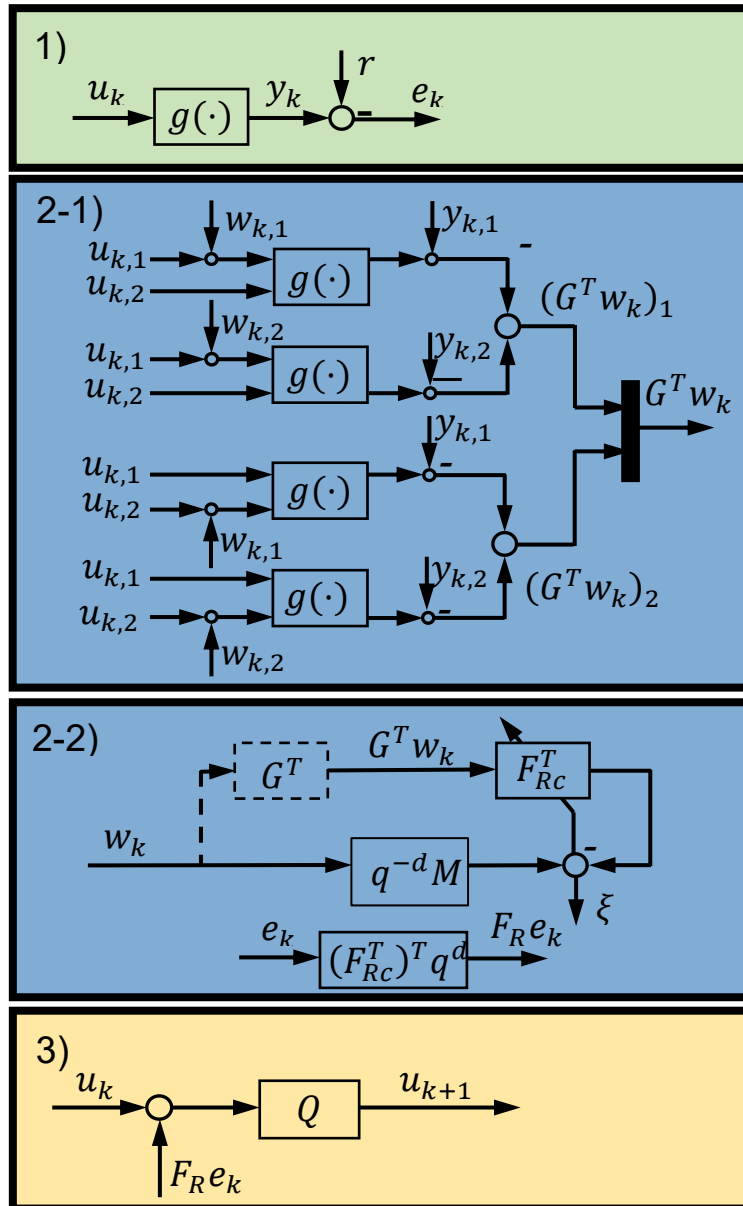


Fig 3.11 Right MIMO with Exhaust Transpose 演算法方塊圖

演算法分為三步驟：

- (1) 將控制輸入 u_k 輸入系統 $g(\cdot)$ 以取得其輸出 y_k 與誤差訊號 e_k 。
- (2-1) 多次分別將線性系統 $g(\cdot)$ 沿著控制輸入 u_k 線性化成線性時變系統 G ，經過訊號重組後取得轉置過後的系統激發輸出 $G^T w_k$ 。

(2-2)將步驟(2-1)的輸出 $G^T w_k$ 置入自適應逆濾波系統，得出轉置過後系統的左反矩陣 F_R^T ，再同步轉置其成原系統 G 的右反矩陣 F_R 作為學習控制器並將誤差訊號 e_k 同步濾波。

(3) 使用學習控制器濾波完成的訊號 $F_R e_k$ ，更新下一次迭代輸入 u_{k+1} 。

自適應濾波過程的數學邏輯如下：

$$\min_{F_R} \|(M - F_R^T G^T) w_k\|_2 \quad (3-43)$$

假設 MIMO 系統 $g(\cdot)$ 是 LTI 方陣的情形，步驟(2-1)前半有些弔詭，但這是為了比較在非線性系統 $g(\cdot)$ 使用該演算法的緣故，在 LTI 系統上做線性化確實無效益，但也不應該影響性能。在本節 3.2 開頭中提到，為了得到系統的右反矩陣 F_R ，以盡可能提升誤差收斂性能，因為誤差的收斂條件為：

$$\rho = \|Q(I - GF)\|_2 < 1 \quad (3-44)$$

此演算法使用系統轉置的方式得出：

$$(M - F_R^T G^T)^T = M - GF_R \quad (3-45)$$

將置入自適應濾波結構的系統 G 更改為 G^T 時，如 Fig 3.11 步驟(2-2)，就可以得到轉置過後的系統 G^T 的左反矩陣 F_R^T ，再將其進一步轉置，就能得到原系統 G 的右反矩陣 F_R 。因為系統未知，如 Fig 3.11 步驟(2-1)以雙輸入雙輸出系統為例，使用訊號拆分重組的共(輸入數×輸出數)次實驗，重組經分散激發的原系統 G 資訊輸出，合成模擬轉置後的系統 G^T 行為後，再將其資訊送入自適應逆濾波結構。

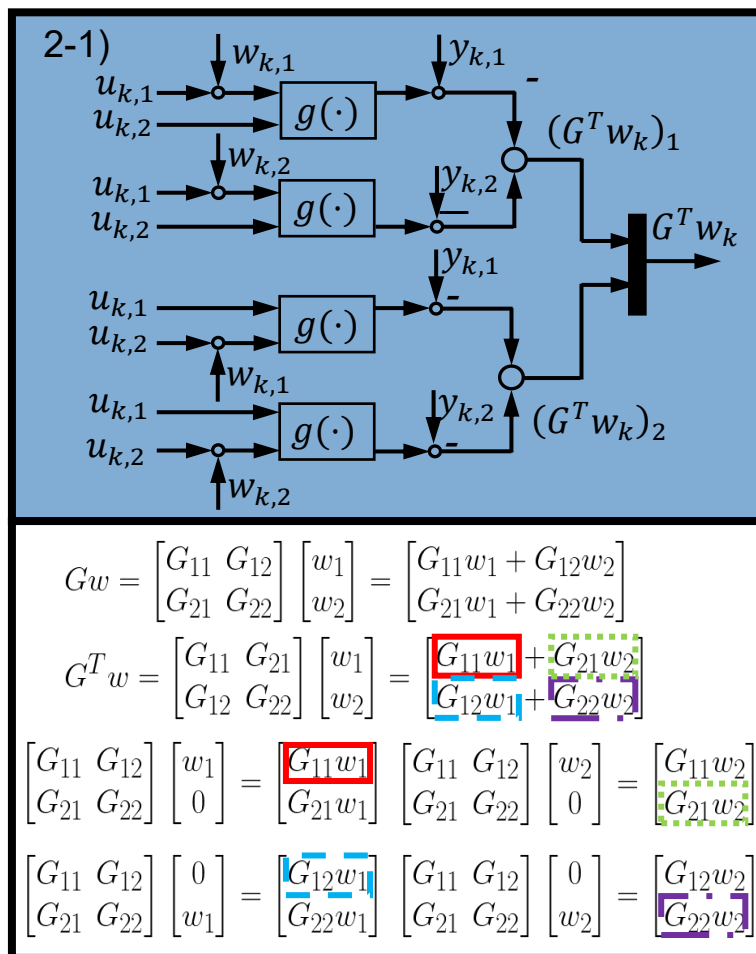


Fig 3.12 雙輸入雙輸出合成轉置訊號示意

最後將得出的學習控制器 F_R^T 再次轉置為 F_R 用以實行 ILC，而轉置多變數 FIR 濾波器如下 Fig 3.13 所示：

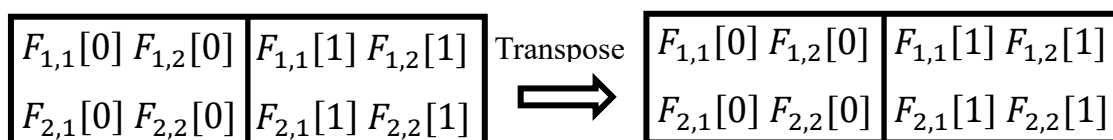


Fig 3.13 雙輸入雙輸出 2 taps FIR 濾波器轉置例

其餘 Fig 3.11 步驟(1)(3)皆與 3.2.1 中步驟相同。

在收斂性分析中，終於可以分析我們最關心的性能指標，誤差訊號的收斂條件為：

$$\rho = \|\mathbf{Q}(\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{F}_R)\|_2 < 1 \quad (3-46)$$

若要分析誤差收斂條件 ρ ，需要假借 $\Delta(z^{-1})$ 系統， $\Delta(z^{-1})$ 可以從演算法步驟(2)自

適應逆濾波系統的輸入 w_k 與輸出 ξ 中求出。

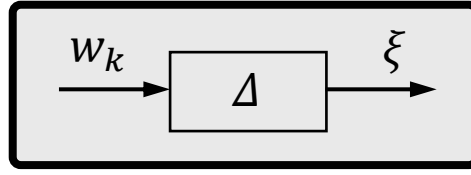


Fig 3.14 Δ 方塊圖

$$\Phi_{\xi w_k} \Phi_{w_k w_k}^{-1} = \Delta(z^{-1}) = M - F_R^T G^T = (M - G F_R)^T \quad (3-47)$$

其中 $\Phi_{\xi w_k}$ 為訊號 ξ 與訊號 w_k 的互功率譜密度(Cross power spectral density)， $\Phi_{w_k w_k}$ 為訊號 w_k 的功率譜密度(Power spectral density)。若 $F_R^T G^T \approx M$ ，也就是自適應擬濾波系統的性能精良的情況下，假設 $\Delta(z^{-1})$ 為 LTI，則收斂條件 ρ 可以被轉換成：

$$\|Q(I - G F_R)\|_2 = \|Q(I - G F_R)\|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}(Q(I - G F_R)) \quad (3-48)$$

$$\sup_\omega \bar{\sigma}(Q(I - G F_R)) = \sup_\omega \bar{\sigma}\left(Q\left(I - M + \Delta^T\right)\right) \quad (3-49)$$

3.2.2.2 Non-LTI system

若 $g(\cdot)$ 不是 LTI 系統，步驟(2)中將激發訊號 w_k 通過一個權重濾波器 H ，移除低通濾波器 M ，並移除步驟(3)ILC 低通濾波器 Q 。

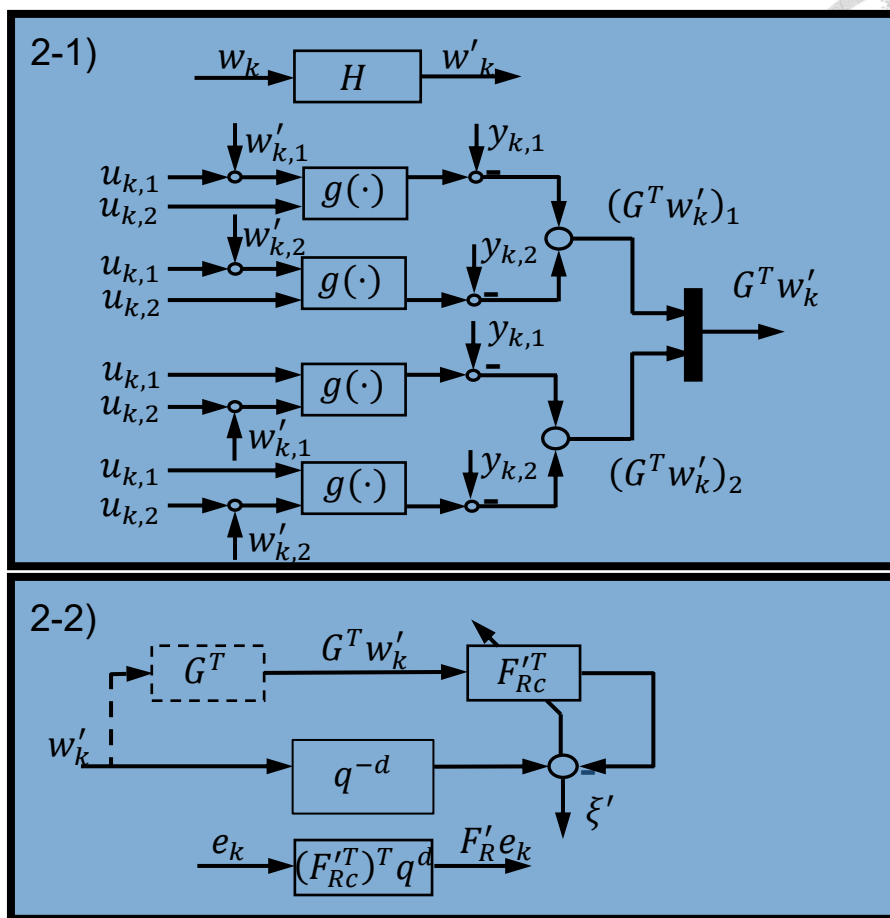


Fig 3.15 加入權重濾波器 H 示意圖

權重的調整如下：

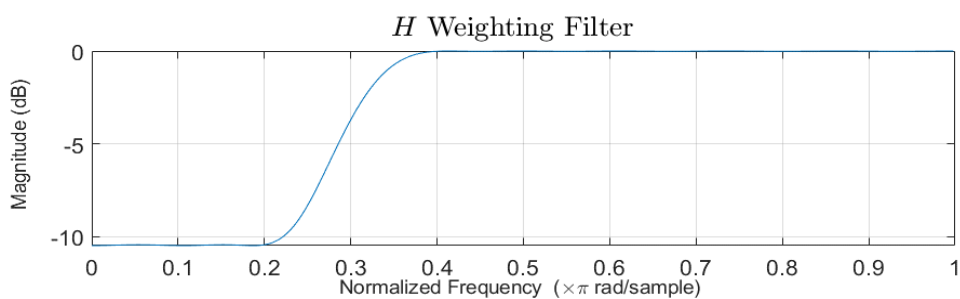


Fig 3.16 權重濾波器 H 示意圖

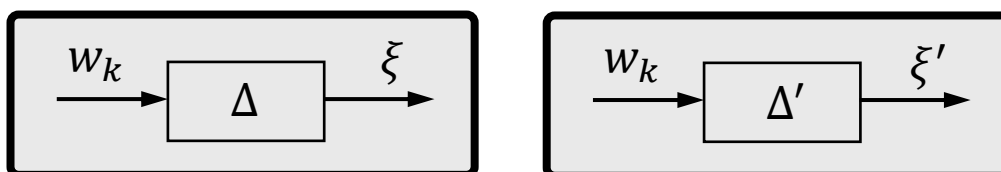
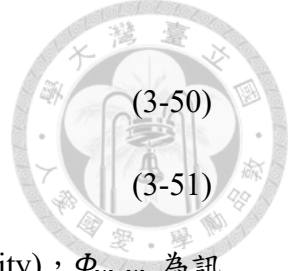


Fig 3.17 Δ 與 Δ' 示意圖



對比有無加上權重濾波器 H ：

$$\Phi_{\xi w_k} \Phi_{w_k w_k}^{-1} = \Delta(z^{-1}) = (I - F_R^T G^T) \quad (3-50)$$

$$\Phi_{\xi' w_k} \Phi_{w_k w_k}^{-1} = \Delta'(z^{-1}) = (I - F_R'^T G^T) H \quad (3-51)$$

$\Phi_{\xi w_k}$ 為訊號 ξ 與訊號 w_k 的互功率譜密度(Cross power spectral density)， $\Phi_{w_k w_k}$ 為訊號 w_k 的功率譜密度(Power spectral density)。

自適應濾波過程：

$$\min_{F_R} \|(I - F_R^T G^T) w_k\|_2 \quad (3-52)$$

$$\min_{F_R'} \|(I - F_R'^T G^T) H w_k\|_2 \quad (3-53)$$

在收斂性分析中，我們在意的性能指標，誤差訊號的收斂性條件：

$$\rho' = \|(I - G F_R')\|_2 < 1 \quad (3-54)$$

要分析此收斂條件 ρ' ，需要假借 $\Delta'(z^{-1})$ ，若 $F_R'^T G^T \approx I$ ，也就是自適應擬濾波系統

的性能精良的情況下，假設 $\Delta'(z^{-1})$ 為 LTI，則收斂條件 ρ' 可以被轉換成：

$$\|(I - G F_R')\|_2 = \|(I - G F_R')\|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}(I - G F_R') \quad (3-55)$$

$$\sup_\omega \bar{\sigma}(I - F_R' G) = \sup_\omega \bar{\sigma}(H^{-1} \Delta'^T) \quad (3-56)$$

兩種右反矩陣多次試驗法的適用場域與分析條件限制：

	右反矩陣多次試驗法	
	LTI 算法	非 LTI 算法
LTI 系統	○	○
LTI 輸入收斂條件分析	×	×
LTI 誤差收斂條件分析	○	○
非 LTI 系統	×	○
非 LTI 輸入收斂條件分析	×	×
非 LTI 誤差收斂條件分析	×	○

Table 3-2 兩種右反矩陣多次試驗法適用場域與適用分析條件表

此兩種右反矩陣多次試驗法的優點在於直接針對誤差訊號使之衰減，使之加快收斂速度，其也可以對誤差條件進行分析；缺點是需要共(輸入數×輸出數)次試驗，相當耗時，且可能觸發更多次源自試驗的非理想誤差來源，例如：非連續性的庫倫摩擦力(Coulomb friction)，LTI 算法針對非方陣 MIMO 系統時也無法使用，因



為要描述收斂誤差方程式必須滿足 $\mathbf{Q}\mathbf{G} = \mathbf{G}\mathbf{Q}$ 。

3.2.3 Right Inverse Method with Fast Transpose.

由於上述方法對於維度較高的多變數系統需要許多實驗才能建構學習函數，在此提倡一個建構右反矩陣的快速轉置法[32]，主要是利用兩次自適應濾波過程擬合系統右反矩陣的方法。接下來的介紹會分成針對 LTI 方陣系統與針對非 LTI 系統兩部分，內容中會包含演算法步驟、收斂性分析方法與限制。

3.2.3.1 LTI system

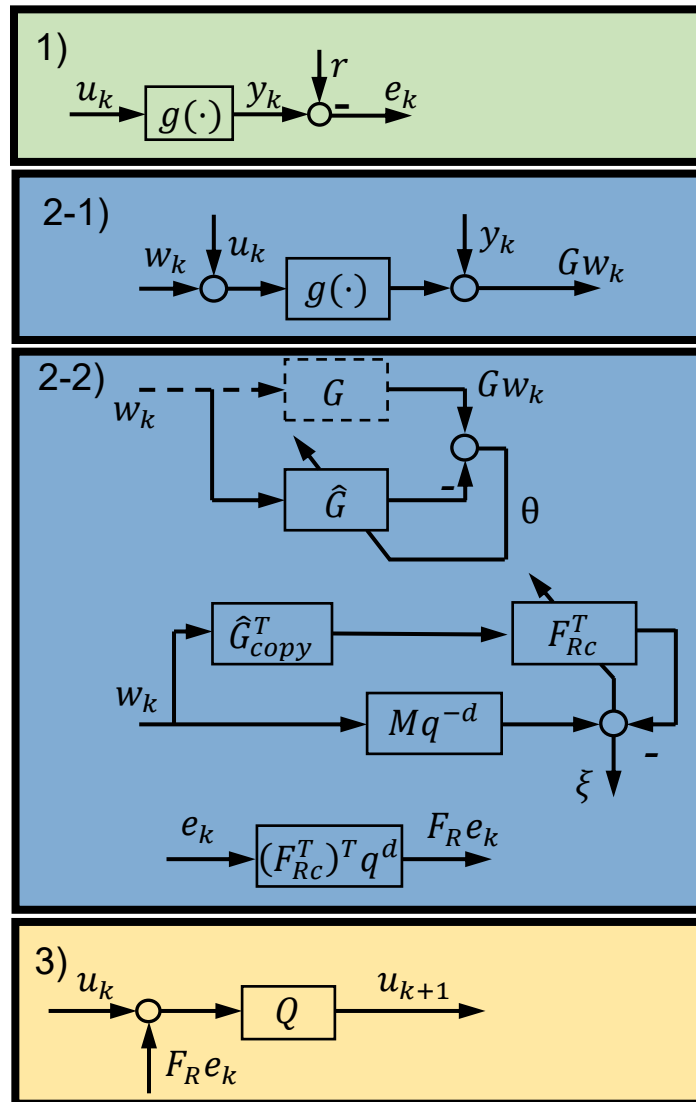


Fig 3.18 Right MIMO with Fast Transpose 演算法方塊圖



演算法分為三步驟：

- (1) 將控制輸入 u_k 輸入系統 $g(\cdot)$ 以取得其輸出 y_k 與誤差訊號 e_k 。
- (2-1)將線性系統 $g(\cdot)$ 沿著控制輸入 u_k 線性化成線性時變系統 G ，將受激發系統輸出 Gw_k 經過自適應濾波識別系統擬和系統 $\hat{G}$ 。
- (2-2)將步驟(2-1)得到的擬和系統 $\hat{G}$ 轉置後放入自適應逆濾波系統，得出轉置過後系統 $\hat{G}^T$ 的左反矩陣 F_R^T ，再同步轉置其成原擬合系統 $\hat{G}$ 的右反矩陣，作為學習控制器 F_R 並將誤差訊號 e_k 同步濾波。
- (3) 使用學習控制器濾波完成的訊號 $F_R e_k$ ，更新下一次迭代輸入 u_{k+1} 。

假設 MIMO 系統 $g(\cdot)$ 是 LTI 方陣的情形，步驟(2-1)前半有些弔詭，但這是為了比較在非線性系統 $g(\cdot)$ 使用該演算法的緣故，在 LTI 系統上做線性化確實無效益，但也不應該影響性能。如同前一個小節 3.2.2，此演算法一樣為了得到系統的右反矩陣 F_R ，利用轉置系統的方式得出，與上一個演算法不同的是，為求轉置過後系統受激發的訊號 $G^T w_k$ ，這裡使用自適應濾波系統識別的方式，擬合轉置過後的系統 $\hat{G}^T$ ，如 Fig 3.18 一開頭所示。這裡一樣使用 RLS FIR 型自適應濾波器作為擬和過後的系統。

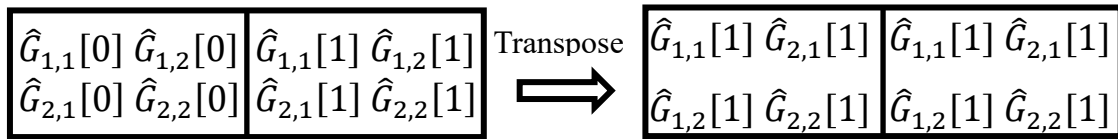


Fig 3.19 轉置 FIR 擬和系統，雙輸入雙輸出 2 taps 例圖

在收斂性分析中，誤差訊號的收斂條件為：

$$\rho = \|\mathbf{Q}(\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{F}_R)\|_2 < 1 \quad (3-57)$$

而在這邊可以一樣使用兩個自適應濾波結構中的訊號構成收斂條件 ρ ，假借 $\Delta_1(z^{-1})$ 與 $\Delta_2(z^{-1})$ 系統：

$$\|Q(I - GF_R)\|_2 = \|Q[I - M + M - (G - \hat{G} + \hat{G})F_R]\|_\infty \quad (3-58)$$

$$= \|Q(I - M) + Q(M - \hat{G}F_R) - Q(G - \hat{G})F_R\|_\infty \quad (3-59)$$

$$\leq \|Q(I - M)\|_\infty + \|Q(M - \hat{G}F_R)\|_\infty + \|Q(G - \hat{G})F_R\|_\infty \quad (3-60)$$

$$\|Q(I - M)\|_\infty + \|Q\Delta_2^T\|_\infty + \|Q\Delta_1 F_R\|_\infty < 1 \quad (3-61)$$

$$\sup_\omega \bar{\sigma}(Q(I - M)) + \sup_\omega \bar{\sigma}(Q\Delta_2^T) + \sup_\omega \bar{\sigma}(Q\Delta_1) \cdot \frac{\|F_R e_k\|_2}{\|e_k\|_2} < 1 \quad (3-62)$$

(3-60)的第一項是使用參考模型的性能，第二項是參考模型的匹配誤差，第三項則是系統識別的加權誤差，每一項 H_∞ norm 都可以藉由步驟(2)訊號處理得出，其中：

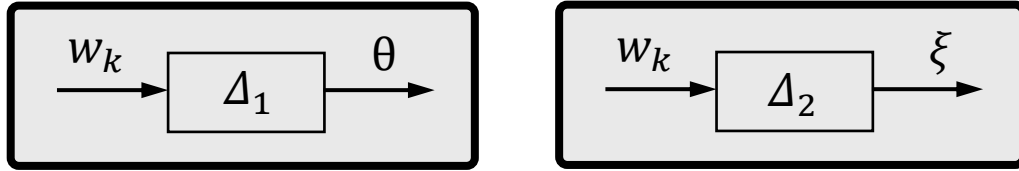


Fig 3.20 Δ_1 與 Δ_2 示意圖

$$\Phi_{\theta w_k} \Phi_{w_k w_k}^{-1} = \Delta_1(z^{-1}) = (G - \hat{G}) \quad (3-63)$$

$$\Phi_{\xi w_k} \Phi_{w_k w_k}^{-1} = \Delta_2(z^{-1}) = M - F_R^T \hat{G}^T \quad (3-64)$$

$\Phi_{\theta w_k}$ 為訊號 θ 與訊號 w_k 的互功率譜密度(Cross power spectral density)， $\Phi_{w_k w_k}$ 為訊號 w_k 的功率譜密度(Power spectral density)。這裡假設 $\hat{G} \approx G$ 、 $F_R^T \hat{G}^T \approx M$ ， $\Delta_1(z^{-1})$ 、 $\Delta_2(z^{-1})$ 為 LTI。

3.2.3.2 Non-LTI system

若 $g(\cdot)$ 不是 LTI 系統，Fig 3.18 步驟(2)中將激發訊號通過一個權重濾波器 H ，移除低通濾波器 M ，並移除 Fig 3.18 步驟(3)ILC 低通濾波器 Q 。

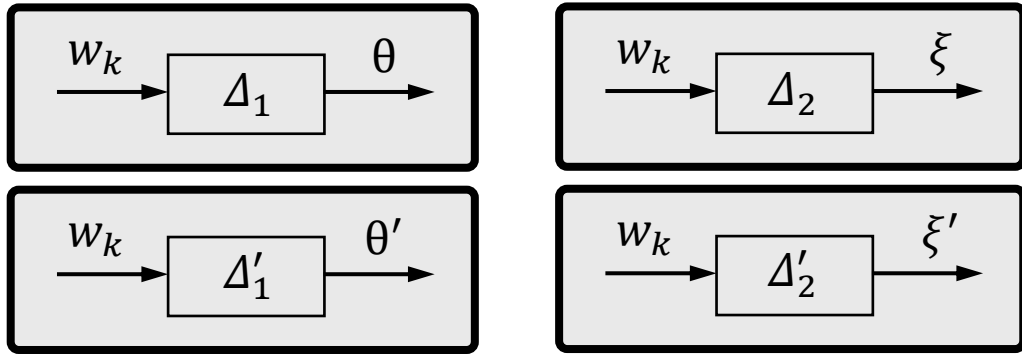


Fig 3.23 Δ_1 與 Δ_2 示意圖

對比有無加上權重濾波器 H ：

$$\Phi_{\theta w_k} \Phi_{w_k w_k}^{-1} = \Delta_1(z^{-1}) = (G - \hat{G}) \quad (3-65)$$

$$\Phi_{\theta' w'_k} \Phi_{w_k w_k}^{-1} = \Delta'_1(z^{-1}) = (G - \hat{G}')H \quad (3-66)$$

$$\Phi_{\xi w_k} \Phi_{w_k w_k}^{-1} = \Delta_2(z^{-1}) = (I - \hat{G}F_R)^T \quad (3-67)$$

$$\Phi_{\xi' w'_k} \Phi_{w_k w_k}^{-1} = \Delta'_2(z^{-1}) = (I - \hat{G}'F'_R)^T H \quad (3-68)$$

$\Phi_{\theta w_k}$ 為訊號 θ 與訊號 w_k 的互功率譜密度(Cross power spectral density)， $\Phi_{w_k w_k}$ 為訊號 w_k 的功率譜密度(Power spectral density)。

自適應濾波過程：

$$\min_{\hat{G}} \|(G - \hat{G})\|_2 \quad (3-69)$$

$$\min_{\hat{G}'} \|(G - \hat{G}')H\|_2 \quad (3-70)$$

$$\min_{F_R} \|(I - \hat{G}F_R)^T\|_2 \quad (3-71)$$

$$\min_{F'_R} \|(I - \hat{G}'F'_R)^T H\|_2 \quad (3-72)$$

在收斂性分析中，誤差訊號的收斂條件：

$$\rho' = \|(I - \mathbf{G}\mathbf{F}'_R)\|_2 < 1 \quad (3-73)$$

為分析誤差收斂條件 ρ' ，需要假借 $\Delta'_1(z^{-1})$ 與 $\Delta'_2(z^{-1})$ 系統，若 $\hat{G}' \approx G \cdot F_R^T \hat{G}'^T \approx I$ ，

也就是自適應逆濾波系統的性能精良的情況下，誤差收斂條件 ρ' 可以被轉換成：

$$\|(I - \mathbf{G}\mathbf{F}'_R)\|_2 = \|(I - GF'_R)\|_\infty = \|(I - \hat{G}'F'_R - (G - \hat{G}')F'_R)\|_\infty \quad (3-74)$$

$$\leq \|I - \hat{G}'F_R'\|_\infty + \|(G - \hat{G}')\|_\infty \cdot \|F_R'\|_2 \quad (3-75)$$

$$\sup_\omega \bar{\sigma}(I - \hat{G}'F_R') + \sup_\omega \bar{\sigma}((G - \hat{G}')) \cdot \frac{\|F_R'e_k\|_2}{\|e_k\|_2} < 1 \quad (3-76)$$

$$\sup_\omega \bar{\sigma}(H^{-1}\Delta_2'^T) + \sup_\omega \bar{\sigma}(\Delta_1'H^{-1}) \cdot \frac{\|F_R'e_k\|_2}{\|e_k\|_2} < 1 \quad (3-77)$$

兩種右反矩陣快速轉置法的適用場域與分析條件限制：

	右反矩陣快速轉置法	
	LTI 算法	非 LTI 算法
LTI 系統	○	○
LTI 輸入收斂條件分析	×	×
LTI 誤差收斂條件分析	○	○
非 LTI 系統	×	○
非 LTI 輸入收斂條件分析	×	×
非 LTI 誤差收斂條件分析	×	○

Table 3-3 兩種右反矩陣快速轉置法適用場域與適用分析條件表

此兩種右反矩陣快速轉置法的優點是學理上直接針對誤差訊號使之衰減，加快誤差收斂速度，且不需要多增加試驗次數；缺點是需要多承受一次自適應濾波誤差，且 LTI 算法無法在非方陣系統下運作，因為描述收斂誤差方程式必須滿足 $\mathbf{Q}\mathbf{G} = \mathbf{G}\mathbf{Q}$ 。

3.2.4 Summary

三種 MIMO 演算法適用的場域與適用分析條件：



	左反矩陣法		右反矩陣多次試驗法		右反矩陣快速轉置法	
	LTI 算法	非 LTI 算法	LTI 算法	非 LTI 算法	LTI 算法	非 LTI 算法
LTI 系統	○	○	○	○	○	○
LTI 輸入收斂條件分析	○	○	×	×	×	×
LTI 誤差收斂條件分析	×	×	○	○	○	○
非 LTI 系統	○	○	×	○	×	○
非 LTI 輸入收斂條件分析	○	○	×	×	×	×
非 LTI 誤差收斂條件分析	×	×	×	○	×	○

Table 3-4 MIMO 演算法適用場域與適用分析條件總表

三種 MIMO 演算法試驗與自適應濾波次數：

	左反矩陣法	右反矩陣多次試驗法	右反矩陣快速轉置法
總試驗次數	1 次	$(x_i \times x_o)$ 次	1 次
自適應濾波次數	1 次	1 次	2 次

Table 3-5 MIMO 演算法試驗與自適應濾波次數表

兩種右反矩陣算法優劣關係如下：



	右反矩陣多次試驗法	右反矩陣快速轉置法
優勢	求取系統轉置訊號時只需承受一次自適應濾波誤差。	只需一次試驗，省時的同時無觸發更多源自試驗中的誤差。
劣勢	試驗次數隨著系統輸入數與輸出數增多而增加，費時的同時可能觸發更多源自試驗的誤差。	需承受兩次自適應濾波誤差。

Table 3-6 兩右反矩陣方法優劣關係表



3.3 Parameter Design

此節將詳細介紹關於上述三個演算法的參數設計，開頭會先介紹無論針對 LTI 或是針對非 LTI 系統算法都適用的參數設計邏輯，接著分別介紹個別演算法獨有的參數。

FIR 學習控制器 F 的長度(taps) L 選用邏輯：

用一個假設系統 $G_f(z^{-1})$ 為例：

$$G_f(z^{-1}) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, a \in R, 0 \leq a < 1 \quad (3-78)$$

若一個穩定的 SISO 受控系統 $G = G_f^x(z^{-1})$ 則學習控制器 F 應該擬合成：

$$F \approx G^{-1} = G_f^{-x} = (1 - az^{-1})^x \quad (3-79)$$

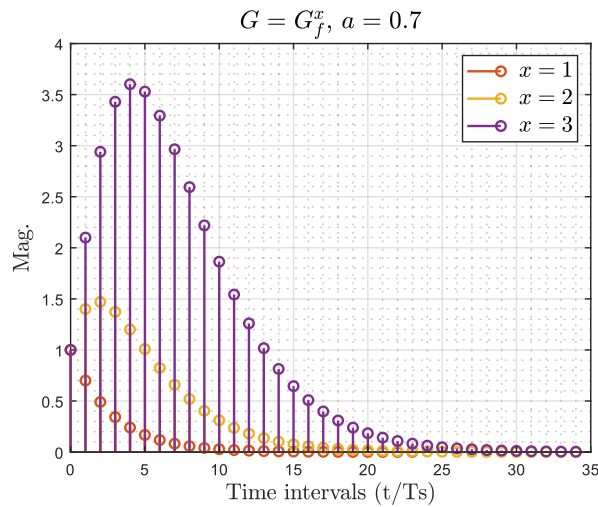


Fig 3.24 受控系統 G 脈衝響應

從 Fig 3.24 得知，若 x 越大， G 收斂的就越晚；從式(3-79)看出，若 x 越大， F 所需的長度就越長。以此可以大概理解成，若將 G 轉換成 FIR 濾波器形式，其有效長度(衰減至零前)越長，需要被擬合的 G^{-1} 也就越長，而 F 選用的長度 L 就應該更長才能包含所有資訊。需注意的是， L 不是越長越好，因為本論文選用 RLS 自適應濾波器求取 F ，而此種自適應濾波器對於過度擬合(over fitting)沒有針對性的解決手段，也因

此在未來中可以考慮導入 LRLS(Lattice Recursive Least Square) [33]，此種方法有階數遞迴的特性(order recursive property)，對過度擬合相對不敏感，能減少對此參數 L 的設計試錯時間；除此之外過長的 FIR 濾波器也會造成運算負擔，在多變數場域尤其明顯，因為一個取樣時間 T_s 區間中自適應濾波器擬合 F 的計算量會以 $O(L \times xi \times xo)$ 的速度增長，可能導致設計出的 FIR 濾波器無法實際投入應用。若遇到系統有效脈衝響應時間過長，使得 FIR 濾波器長度 L 過長時，可以嘗試幾種處置方向：

- (1) 若系統沒有高頻動態可選用較大的取樣時間 T_s 。
- (2) 選用計算更有效率的 LRLS 自適應濾波方法[4]。
- (3) 選用不同基底的濾波器來描述系統，例如：拉蓋爾濾波器(Laguerre filter)[34]。

自適應逆濾波結構中延遲 d 選用邏輯：

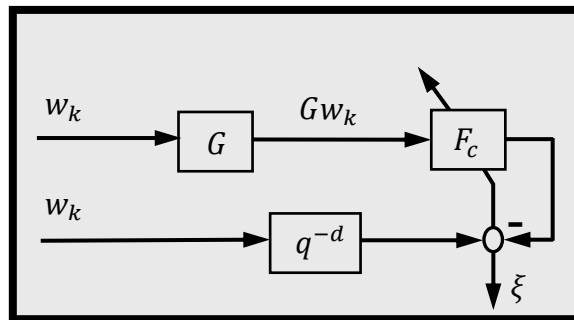


Fig 3.25 自適應逆濾波結構

F_c 為因果性 FIR 濾波器，假設一個穩定的 SISO 受控系統 $G = z^{-v}G_f(z^{-1})$ ，

$$G_f(z^{-1}) = 1 - bz^{-1} \quad (3-80)$$

若無延遲 d ，學習控制器 $F = F_c$ 需要擬合為：

$$F_c G \approx 1 \quad (3-81)$$

$$F_c \approx G^{-1} = z^v G_f^{-1} = z^v \frac{z}{z-b} = z^v (1 + bz^{-1} + b^2 z^{-2} + \dots) \quad (3-82)$$

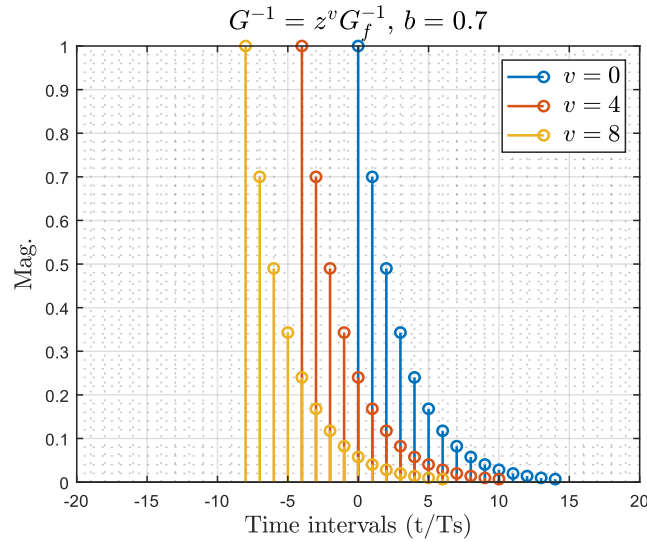


Fig 3.26 反系統 G^{-1} 脈衝響應

因為 F_c 為因果性的(causal)，當 G 的分子分母階數差 v 越大時， F_c 能蒐集到的反系統資訊就越少，於是需要引入延遲 d ，使得 $F = F_c z^d$ ，而 F_c 要擬合成：

$$F_c G \approx z^{-d} \quad (3-83)$$

$$F_c \approx z^{-d} G^{-1} = z^{v-d} (1 + bz^{-1} + b^2 z^{-2} + \dots) \quad (3-84)$$

這裡不寫 $F = F_c q^d$ 而寫 $F = F_c z^d$ 是因為 $G = z^{-v} G_f(z^{-1})$ ， G 為 LTI，為說明方便，否則 LTV 的 F 使用頻域的 z 做表示不甚恰當。延遲 d 的選用還有處置 G 不穩定零點(unstable zero)的作用，與 G 的雙邊反系統(two sided-inverse)有關，因為 F 可以是非因果性的[35]。

填充初始值數(Pad length)選用邏輯：

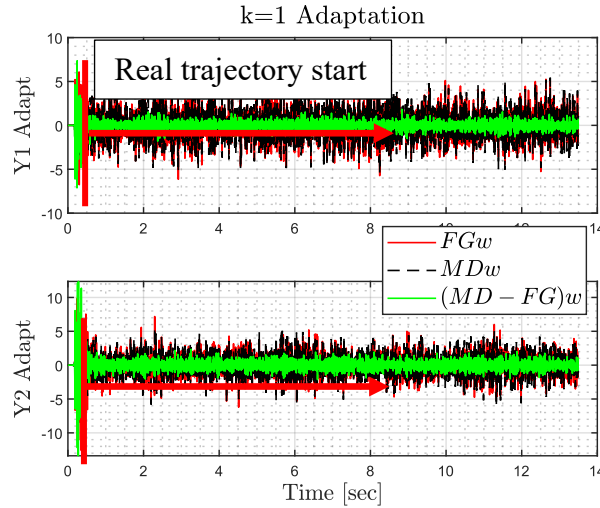


Fig 3.27 2×2 系統填充零示意

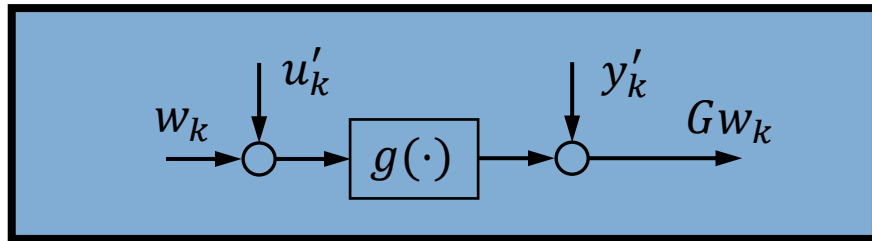


Fig 3.28 激發 $g(\cdot)$ 線性化過程

為了減少自適應濾波初始誤差的影響，使用填充初始命令值的方式，如 Fig 3.27，以一個 2×2 的系統為例，紅色箭頭的起始點是真實軌跡的起始點，當置入激發訊號 w_k 時使用的是填充過的 u'_k ，減去的也是填充過的 y'_k ，更新時會再將 u_k 自 u'_k 中從填充數目為起點擷取出來。

LTI 算法中的低通濾波器 Q 選用邏輯：

根據 LTI 算法輸入與誤差收斂條件：

$$\gamma = \|Q(I - FG)\|_2 < 1 \quad (3-85)$$

$$\rho = \|Q(I - GF)\|_2 < 1 \quad (3-86)$$

Q 的作用是使收斂條件的高頻增益受抑制，因為使用的激發訊號頻段為了保護系統，有經過一個低通濾波器，也就是說學習控制計 F 的擬合主要集中於低頻，高頻的響

應與系統不甚相關，選用軌跡的頻段也集中於中低頻，所以用 Q 來抑制更新輸入時的高頻部分。而又根據穩態誤差表現式：

$$\mathbf{e}_{\infty} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{F}))^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{r} \quad (3-87)$$

Q 的選用越接近全通，穩態誤差越小，所以必須在收斂速度與穩態誤差之間權衡，當然前提是可以收斂。下方 Fig 3.29 以針對 2×2 的系統為例，左圖左反矩陣法輸入收斂條件為式(3-88)，右圖為 Q 的選用頻段。

$$\|Q(\mathbf{I} - \mathbf{F}\mathbf{G})\|_{\infty} < 1 \quad (3-88)$$

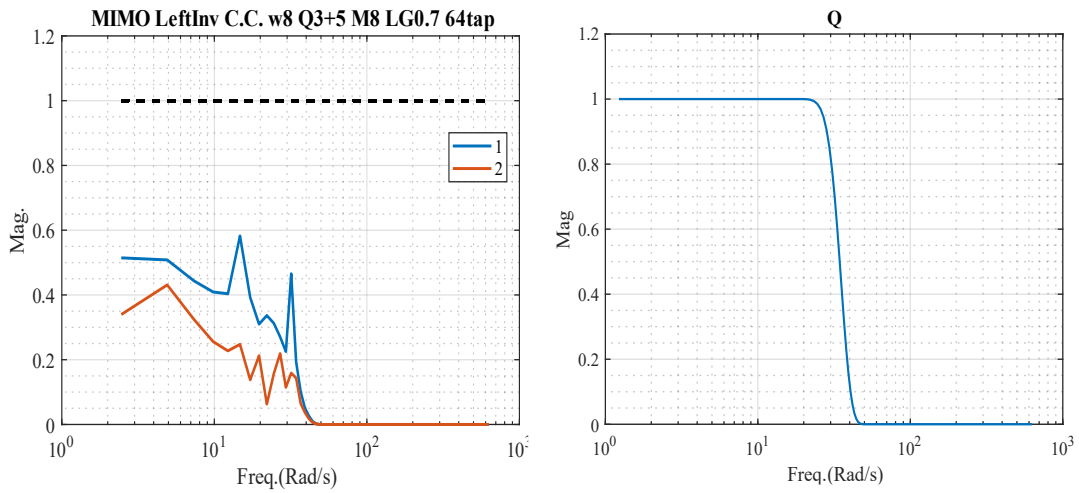


Fig 3.29 Q 對收斂條件修整示意

權重濾波器 H 選用邏輯：

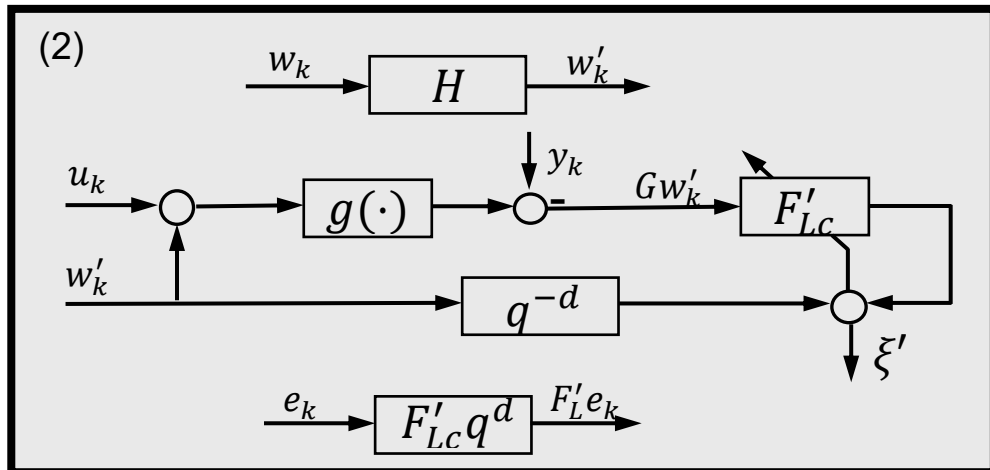


Fig 3.30 非 LTI 左反矩陣法步驟(2)

以 Fig 3.30 為例，自適應濾波數學邏輯：

$$\min_{F_L'} \|(I - F_L' G) H w_k\|_2 \quad (3-89)$$

H 的選用必須要隨著收斂條件圖調整，像是將最小平方法的運算重心給放在高頻上一樣，使得高頻處 F_L' 更接近 G^{-1} [36]，下方 Fig 3.31，以 2×2 系統為例，選用的 H 頻段，以及對左反矩陣法輸入收斂條件的影響。

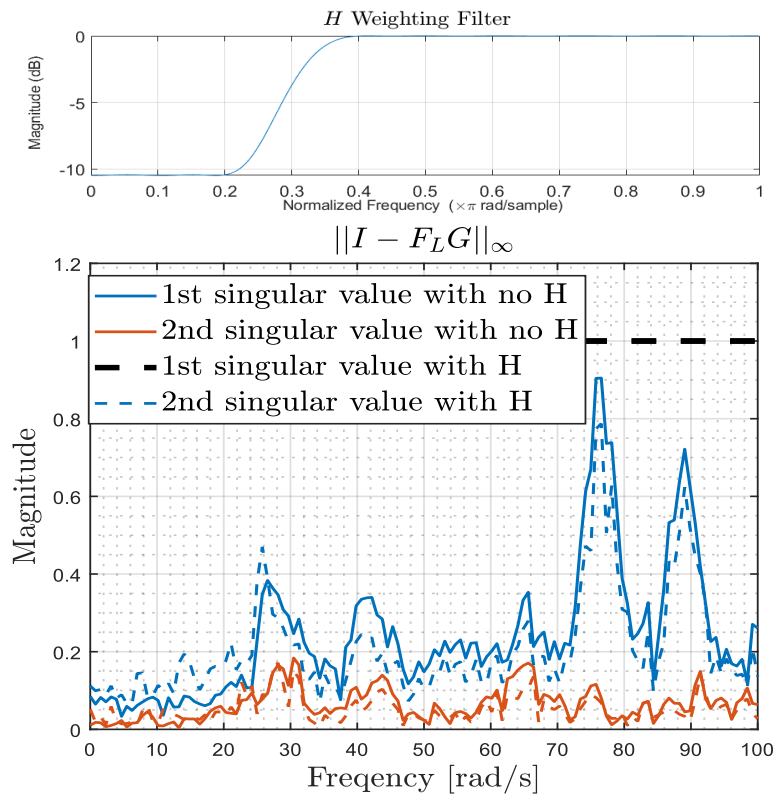


Fig 3.31 H 對收斂條件影響示意

Chapter 4 Results

本章將對選定的測試系統進行演算法的模擬和實驗結果的比較，以分析兩者之間的差異及其原因。關於應對非 LTI 系統的演算法，及具有權重濾波器 H 的演算法，在頻域上， H 的型式類似於高通濾波器，但在機構上輸入高頻激發命令可能引起一些疑慮，因此在未來，實驗中仍需解決一些相關問題。

4.1 LTI System

4.1.1 Test System Introduction

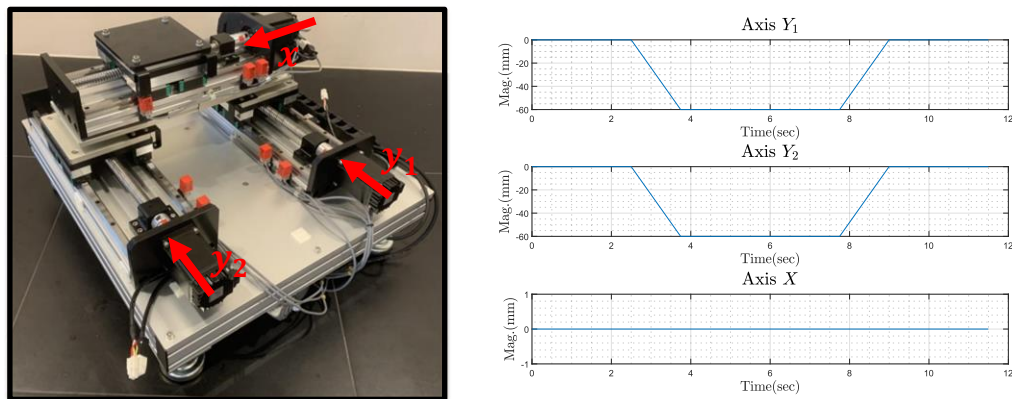


Fig 4.1 測試硬體與命令軌跡圖

選定一個龍門式 $x-y$ 運動平台與軌跡命令作為測試 LTI 系統演算法之硬體，如 Fig 4.1，該系統的目標為同時追蹤兩個 y 軸的軌跡命令，這項測試旨在驗證演算法能夠解決系統耦合的問題，因為平台在 y 方向上兩 y 軸有相互耦合的現象。系統耦合的來源主要來自於機構，當 y_1 軸向前移動時會在龍門重心處施一向上的力矩， y_2 軸必須要補償向前的力才能平衡力矩達到兩 y 軸同步。需要注意的是，龍門的重心不一定落在兩 y 軸距離之中點。龍門式架構常見於平台式印表機(flatbed printer)[38][39]，波型重建平台(waveform replication)[40]，這樣的平台通常具有耦合效性與參數(如圖中負載的 x 方向位置)變化特性。

在此測試中，取樣時間為 0.005 秒，及奈氏頻率為 100 赫茲，這個選擇是依據系統軌跡、馬達與機構限制，因為所需控制信號的頻段主要集中於低頻範圍。控制訊號藉由控制器發出後，通過控制箱將電壓輸入馬達，所有馬達都連接機構並與各自的旋轉編碼器提供的迴授輸出形成封閉迴路如 Fig 4.2 所示。

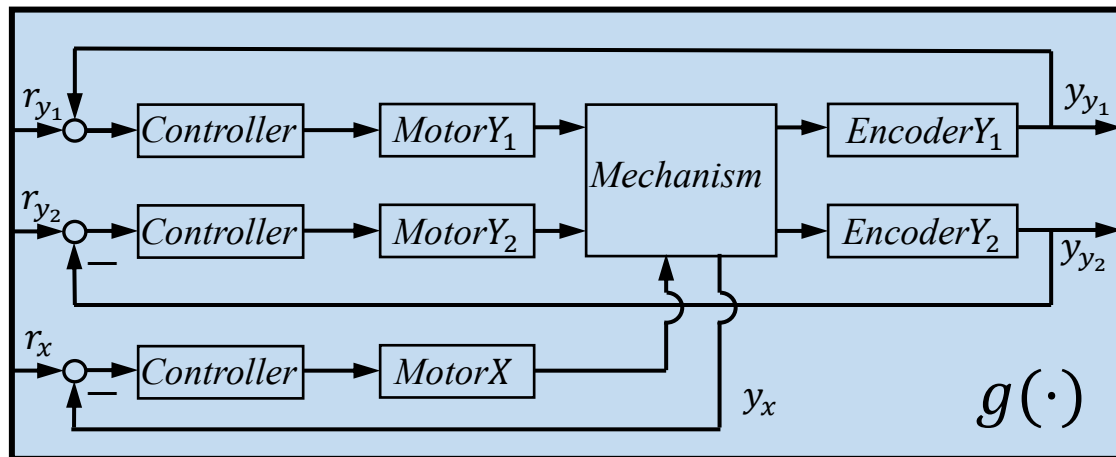


Fig 4.2 系統示意圖

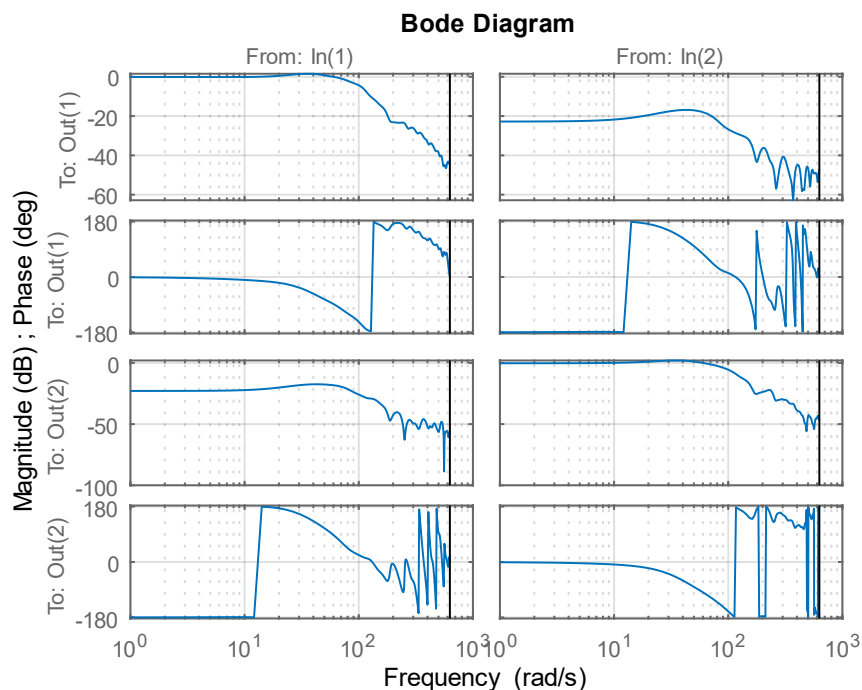


Fig 4.3 系統波德圖

雖然本論文的方法強調數據驅動，但依舊在學理驗證的需求中，進行系統識別，在

此是使用系統斜坡軌跡輸出經過二次差分的方式得到一組系統的脈衝響應，再將其進行離散傅立葉轉換得到系統頻域響應以及一組代表系統的 FIR 濾波器，系統頻域響應如 Fig 4.3，可以在其中看出系統耦合現象，大概是系統對角線上響應的負十分之一左右。

4.1.2 Simulation Results

此處使用上一小節 4.1.1 提及的 FIR 模擬系統，四個方法都是有低通濾波器 Q 的算法，軌跡追蹤的方均根誤差如下。

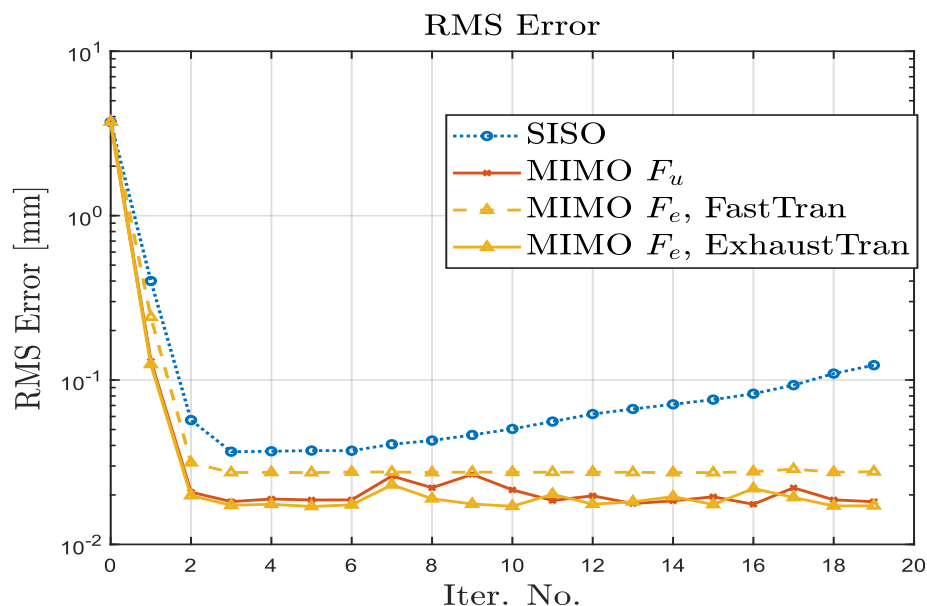


Fig 4.4 軌跡追蹤的方均根誤差

從 Fig 4.4 中可以看到 SISO 的算法會發散，在這裡是以 SISO 算法分別對兩個 y 軸實現運算，因為其忽略了系統耦合之因素，對比 MIMO 的算法將永遠存在耦合帶來的誤差，但可以從前兩個迭代中可以發現，算法還是有收斂的可能性，只要耦合效性足夠微小。

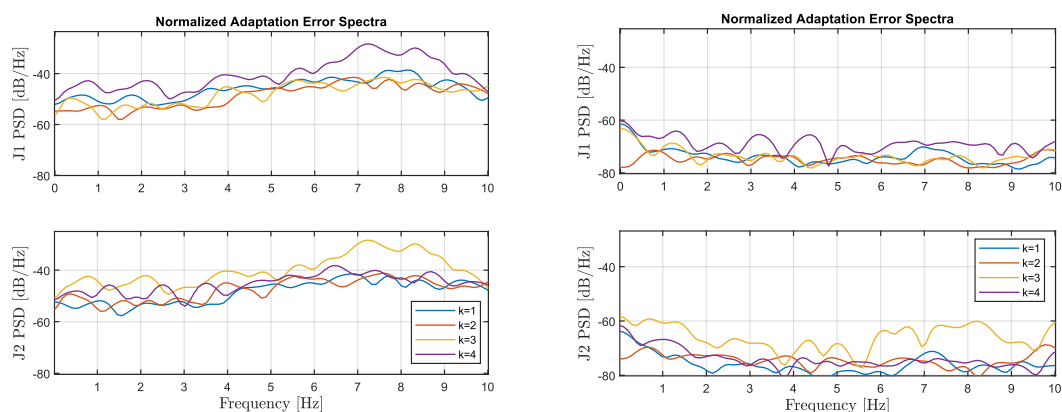


Fig 4.5 SISO 與 MIMO Exh.四次迭代中頻域的 Adap. Err. 比較

這裡的頻域因為低通濾波器 Q 的原因，此處設為 8 赫茲，高頻的誤差將不會被帶進 ILC 當中，故不考慮更高頻的頻域誤差響應，其中自適應逆濾波結構中的低通濾波器 M ，此處亦是設置為 8 赫茲，也是為此而設計，將自適應濾波的性能表現盡可能集中於低頻段，可從 Fig 4.5 看出自適應濾波在沒有考慮耦合的情況，在使用頻段上將永遠存在識別誤差。

再次回到 Fig 4.4 中，紅色左反矩陣法對比黃色右反矩陣多次試驗法，可以看出後者好上一些，但在黃色虛線的右反矩陣快速轉置法，性能卻並不如學理預期，相較紅色左反矩陣法，性能反而更差，看到演算法方塊圖 Fig 4.6，這是因為右反矩陣快速轉換法將承受兩次自適應濾波誤差，系統識別轉置一次，學習控制器一次，這兩次誤差將導致，在此模擬系統中，右反矩陣造成的性能提升不足以蓋過此兩次誤差帶來的影響。

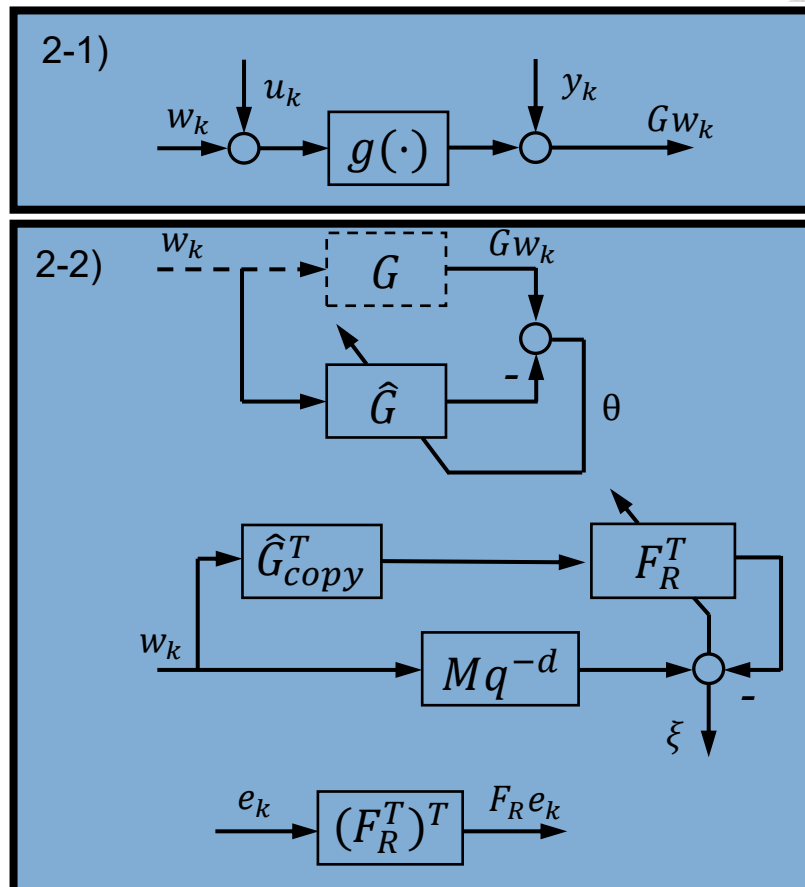


Fig 4.6 右反矩陣快速轉換法步驟(2)方塊圖

	左反矩陣法	右反矩陣多次試驗法	右反矩陣快速轉置法
自適應濾波次數	1 次	1 次	2 次

Table 4-1 MIMO 算法自適應濾波次數

4.1.3 Experiment Results

下方 Fig 4.7 是實驗結果的軌跡追蹤方均根誤差，可以看出藍色 SISO 算法依舊發散，而黃色虛線快速轉置法性能反倒對比其他兩個 MIMO 算法而言還要稍微優秀一些，前一小節 4.1.2 有提及，此算法需要承擔兩次自適應濾波誤差，但在實驗中，有原先模擬未考量的摩擦力因素，這裡判斷摩擦力是造成性能對比差異的主要因素，為了確認此論斷，下方將嘗試在模擬中還原摩擦力帶來的影響。

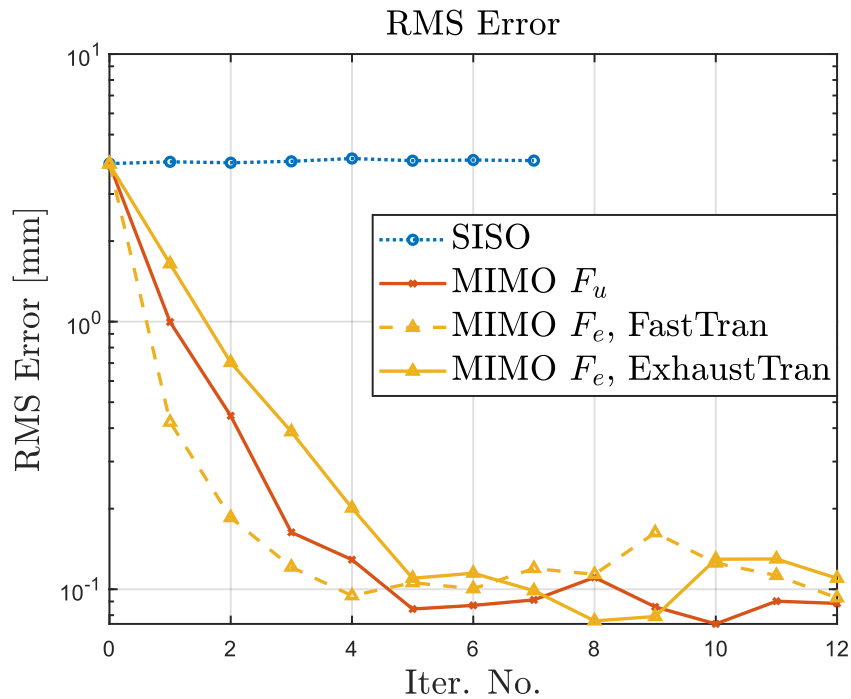


Fig 4.7 實驗結果軌跡方均根誤差比較

Q cut off freq. (Hz)	M cut off freq. (Hz)	w_k cut off freq. (Hz)	w_k std. (mm)
8	8	8	2
Pad length (Sampling time)	Learning gain α (N/A)	L (taps)	
400	0.7	64	

Table 4-2 LTI 算法實驗參數使用表

Table 4-2 中 w_k 的截止頻率使用原因是為了保護系統，使激發的最高頻濾小於 8 赫茲，而其標準差大小是為了跨越系統靜摩擦力帶來的死區(dead zone)，學習增益 (Learning gain) α 則是一個介於數值 0~1 的倍數，加在更新迭代式中的學習控制器前方，如(4-1)，目的是為了讓輸入更新不太過劇烈，但會放棄一部份收斂速度。

$$u_{k+1} = Q(u_k + \alpha F e_k) \quad (4-1)$$

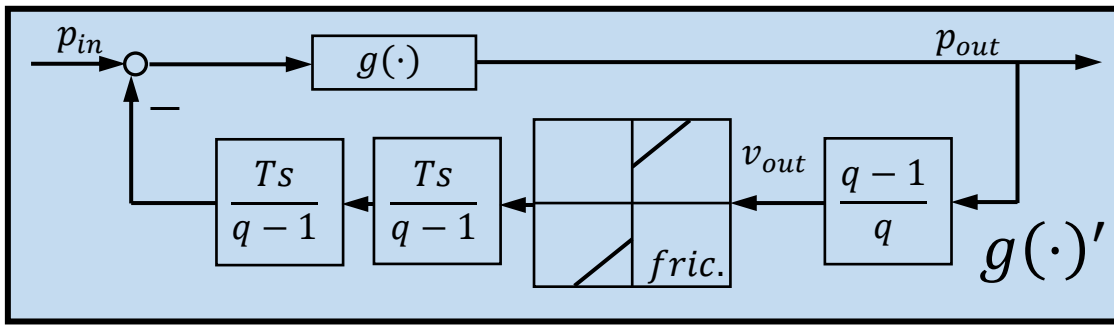


Fig 4.8 LTI+摩擦力模擬系統

摩擦力模擬的結構如 Fig 4.8，這裡的摩擦力是由黏滯摩擦力與庫倫摩擦力 (Coulomb friction) 組成，由原系統位置輸出 p_{out} 差分後得到速度輸出 v ，再通過摩擦力模擬方塊 $fric.$ 得到兩種摩擦力輸出，再將此力輸出經由兩次離散積分轉換回位置訊號迴授。摩擦力方塊中有兩個參數，分別是代表黏滯摩擦力的斜率參數與代表庫倫摩擦力的平移參數，這裡的兩個參數設置並無透過實驗精確求出，只是為了驗證不同算法在摩擦力影響下的相對應優劣趨勢。

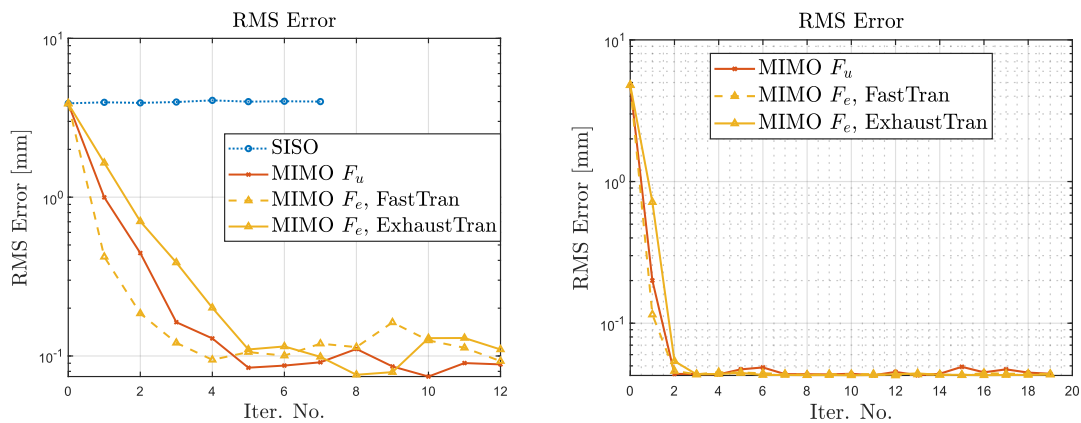


Fig 4.9 實驗系統(圖左)，LTI+摩擦力模擬系統(圖右)的軌跡追蹤方均根誤差

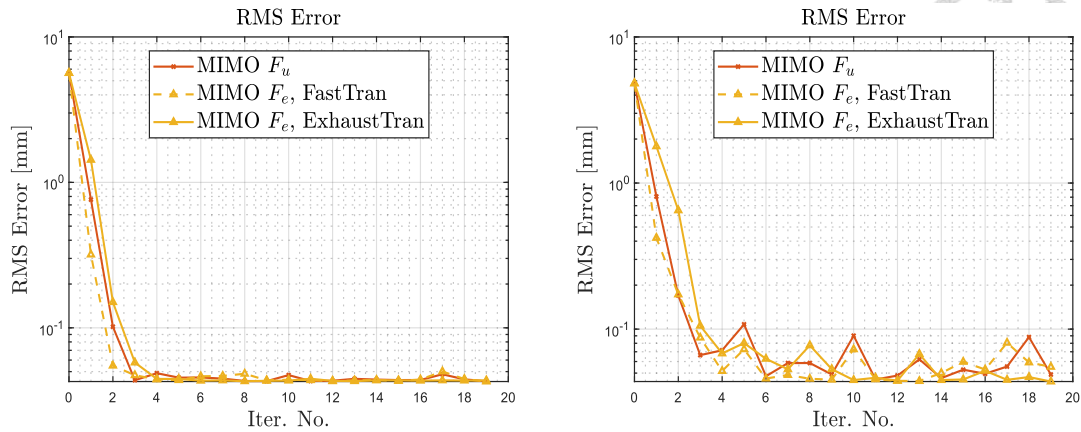


Fig 4.10 將斜率參數調大(圖左)，將平移參數調大(圖右)

可以從 Fig 4.10 看出三個算法對實驗系統與摩擦力模擬系統的軌跡追蹤方均根誤差結果趨勢吻合，摩擦力造成非連續性的響應是主因，在此系統上，多次試驗法會比其他兩種算法多四次實驗，在線性化訊號重組的過程中必要減去原輸出四次，這個相減的過程中也將承受四次摩擦力帶來得影響，因為激發訊號會使每一次軌跡方向改變如 Fig 4.11 都會觸發非連續性摩擦力，而這樣的加減過程中，必定會帶來誤差，三種算法都會引起，只是右反矩陣多次試驗法引起的次數最多。

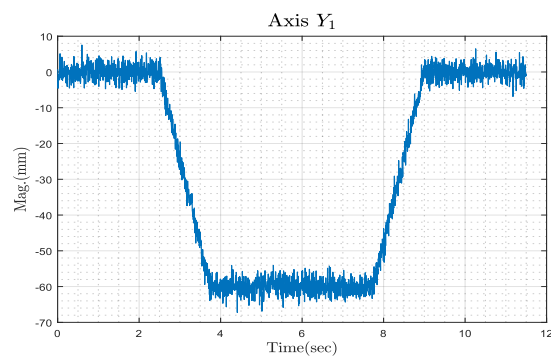


Fig 4.11 加入激發訊號的命令訊號 u

	左反矩陣法	右反矩陣快速轉置法	右反矩陣多次試驗法
觸發非連續性誤差次數	1 次	1 次	4 次

Table 4-3 演算法觸發非連續性誤差次數表

最後也提供實驗的收斂條件分析圖，在 MIMO 演算法的狀況下，可以藉由每次迭代的收斂條件分析圖判斷下一次迭代是否會收斂，而 SISO 算法上無法提供以數據驅動得出收斂條件分析圖的方法，因為本質上該算法就忽略的耦合效性。

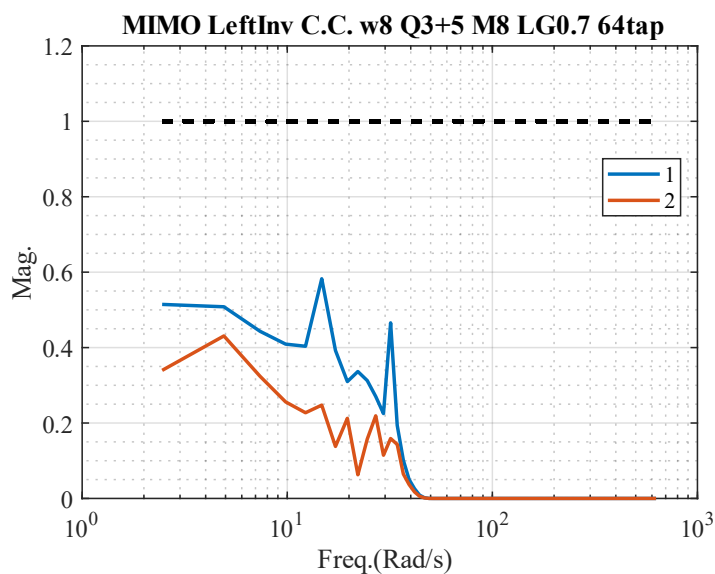


Fig 4.12 左反矩陣法輸入收斂條件分析圖

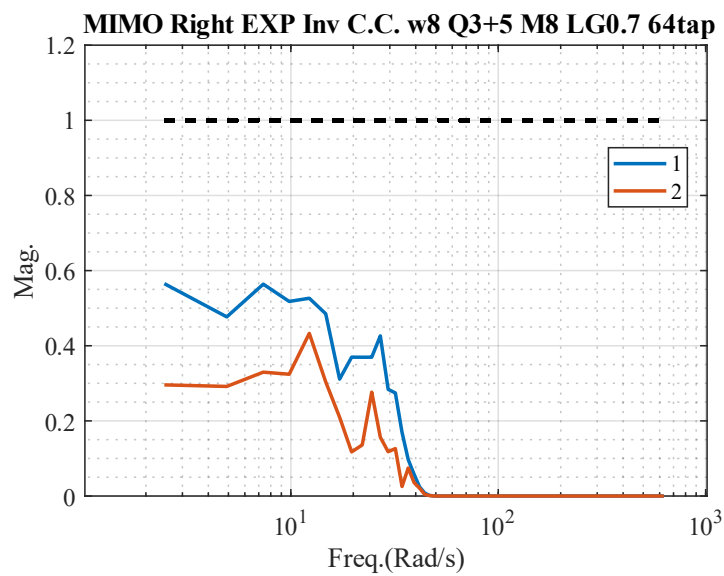


Fig 4.13 多次試驗法誤差收斂條件分析圖

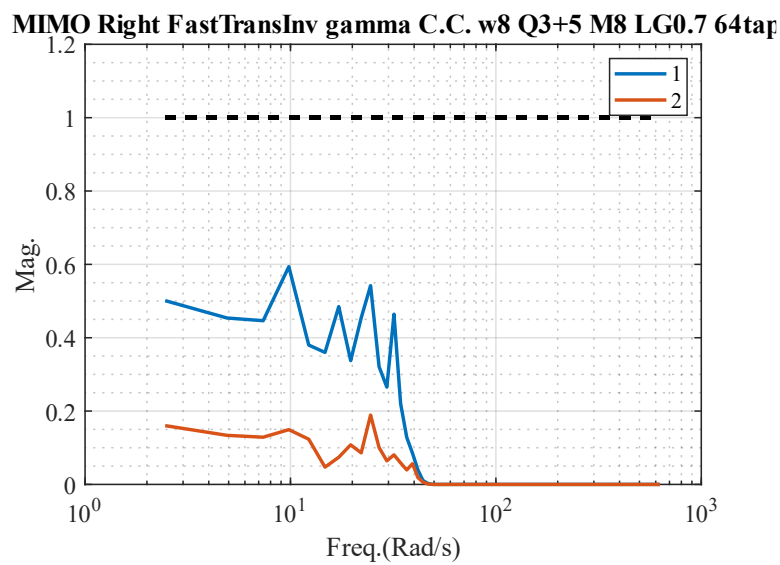


Fig 4.14 快速轉置法誤差收斂條件分析圖

演算法種類	左反矩陣法	右反矩陣多次試驗法	右反矩陣快速轉換法
收斂條件	$\ Q(I - F_L G)\ _\infty$	$\ Q(I - G F_R)\ _\infty$	$\ Q(I - G F_R)\ _\infty$

實際算法： 頻域奇異值	$\sigma(Q(I - M + \Delta))$	$\sigma\left(Q(I - M + \Delta^T)\right)$	$\sigma(Q(I - M))$ $+ \sigma(Q\Delta_2^T)$ $+ \sigma(Q\Delta_1 F_R)$
--------------------	-----------------------------	--	--

Table 4-4 三種演算法的收斂條件分析

4.2 Non-LTI System

4.2.1 Test System Introduction

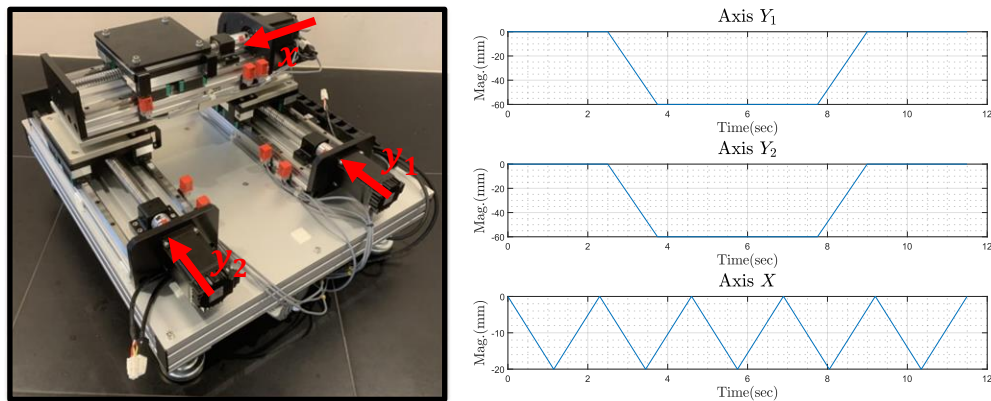


Fig 4.15 測試硬體與命令軌跡圖

這裡一樣選定原龍門式 $x - y$ 運動平台與軌跡命令作為測試非 LTI 系統演算法之硬體，目標為同時追上兩個 y 軸的軌跡命令，這裡與前一節 4.1 不同的是，在 x 軸上的滑塊將會在每次迭代的過程中運動，這會造成龍門架的重心隨著 x 軸上的滑塊軌跡發生改變，也就是系統將不會再是 LTI，在此情形下 ILC 更新式中有低通濾波器 Q 的演算法雖然誤差會收斂，但在學理上的分析會失效，所以引進權重濾波器 H 的算法來針對非 LTI 系統的情形。這裡的目的是除了解決耦合效性之外，還要解決系統非線性動態。該系統選擇 0.005 秒作為取樣時間，奈氏頻率 100 赫茲，是依據命

令軌跡、機構與馬達限制，主要使用低頻段，馬達各自穿過機構與編碼器形成封閉迴路如 Fig 4.16。

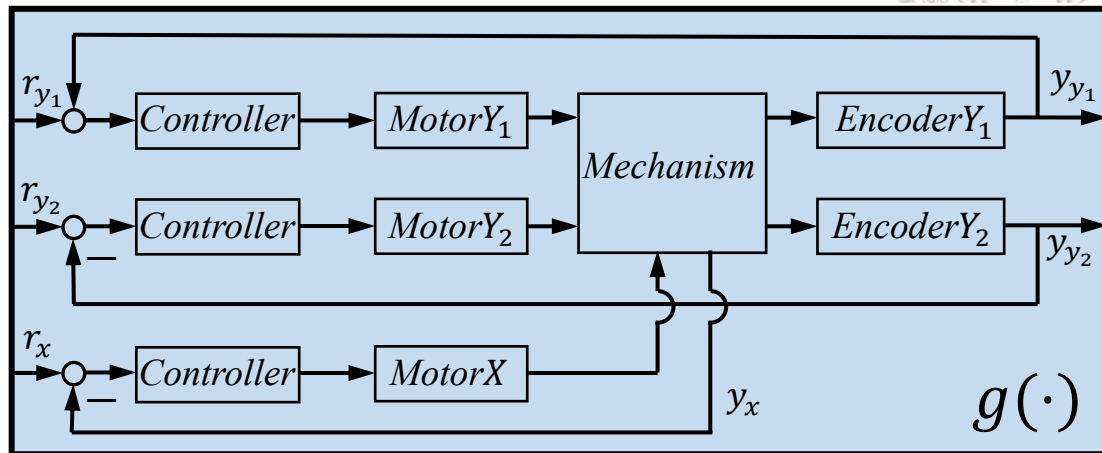


Fig 4.16 系統示意圖

4.2.2 Simulation Results

為了要模擬非 LTI 系統的特性，有鑑於單變數之算法已證明可微分型非線性系統已經可以被轉換成線性時變系統[4]，這裡採用了對兩y軸施加浮動增益的手法，雖並無在實驗上精確證實該增益的參數合理性，但能驗證針對非 LTI 系統的三種演算法在迭代不變線性時變(Iterative-Invariant Linear Time Varying, IILTV)系統上的正確性與優劣趨勢。這裡的系統 $g(\cdot)$ 是使用 4.1.1 所提系統識別的 FIR 擬和系統。

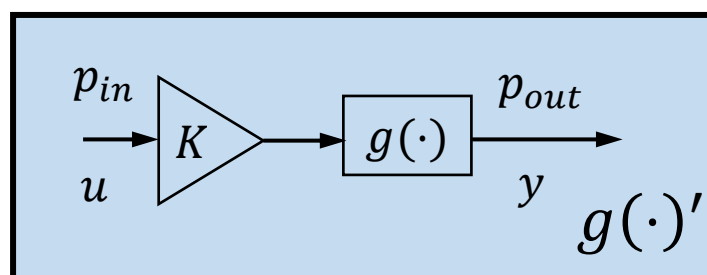


Fig 4.17 IILTV 模擬系統

這裡的 K 是一個時間的函數，具體 K 值的設計如下：

$$K = \begin{bmatrix} K_1[n] & 0 \\ 0 & K_2[n] \end{bmatrix}$$

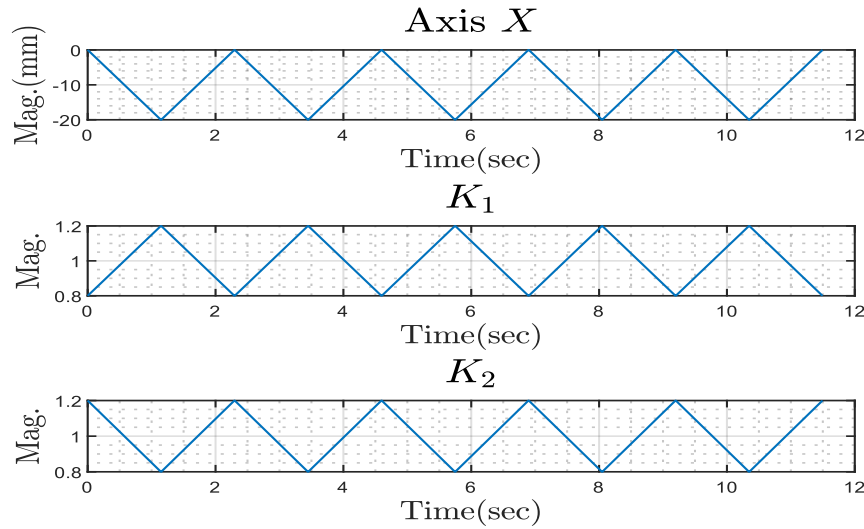


Fig 4.18 浮動增益 K

浮動增益 K 如 Fig 4.18 會隨著 x 軸的軌跡命令變化浮動， K_1 與 K_2 差了 90 度相位是為了模擬隨著 x 軸的軌跡命令變化的重心對兩 y 軸的影響。模擬的結果如 Fig 4.19 所示，左反矩陣法在這個情形下與其他兩個計算右反矩陣的多次試驗法與快速轉置法的收斂性能較差，在 IILTV 系統中，左右反矩陣算法的性能差異主導了誤差收斂性能趨勢。在多次試驗法與快速轉置法的比較中，快速轉置法承受了兩次自適應

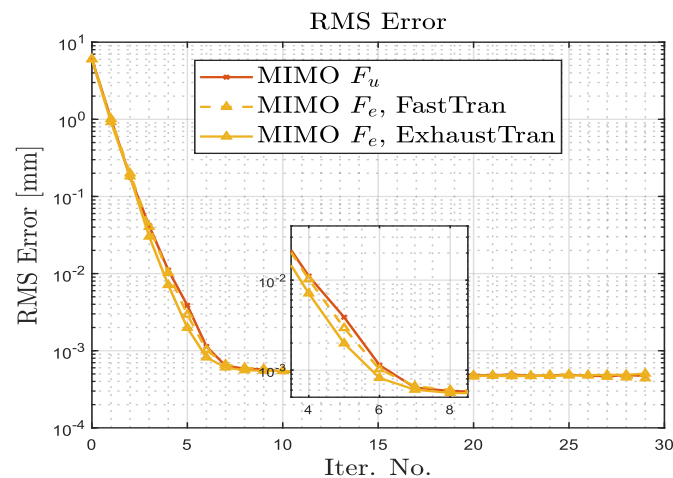


Fig 4.19 IILTV 系統模擬軌跡追蹤方均根誤差

濾波誤差 Table 4-1，造成性能上比多次試驗法差一些，以下是三種不同演算法的收斂條件分析。

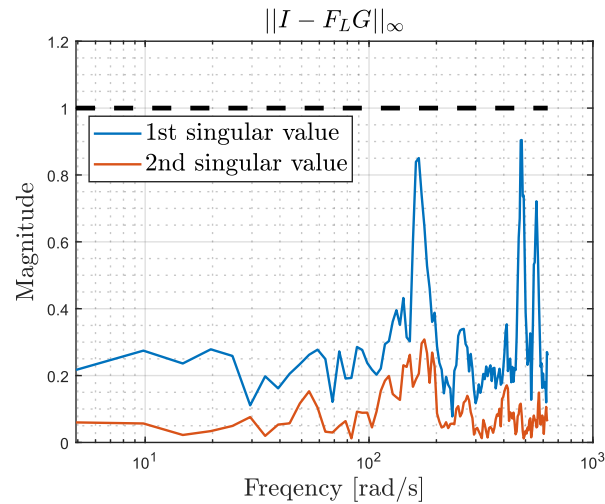


Fig 4.20 左反矩陣法輸入第 30 次迭代收斂條件分析圖

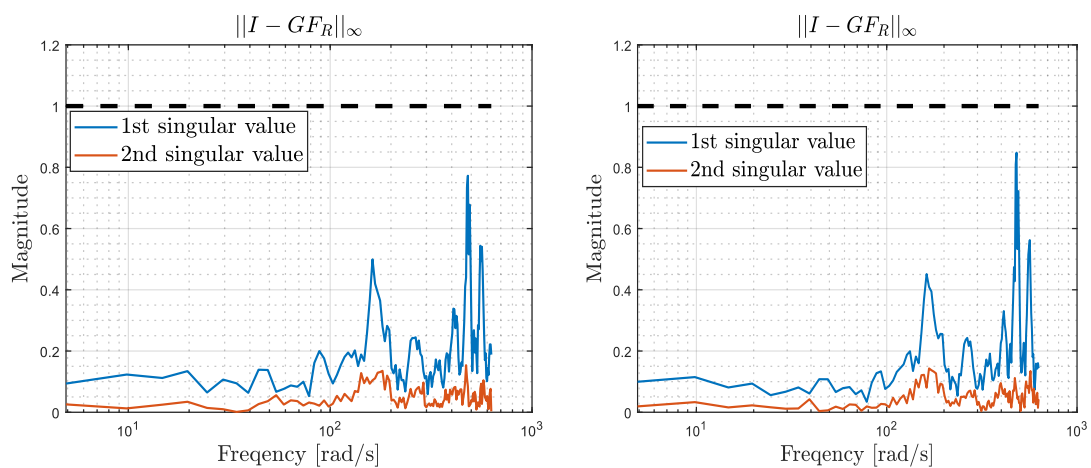


Fig 4.21 右反矩陣多次試驗法誤差第 30 次迭代收斂條件分析圖(圖左)；右反矩陣快速轉置法誤差第 30 次迭代收斂條件分析圖(圖右)

演算法種類	左反矩陣法	右反矩陣多次試驗法	右反矩陣快速轉換法
收斂條件	$ I - F_L G _\infty$	$ I - G F_R _\infty$	$ I - G F_R _\infty$

實際算法： 頻域奇異值	$\sigma(\Delta' H^{-1})$	$\sigma(H^{-1} \Delta'^T)$	$\sigma(H^{-1} \Delta_2'^T)$ $+ \sigma(H^{-1} \Delta_1'^T)$ $\cdot \frac{\ F_R' e_k\ _2}{\ e_k\ _2}$
----------------	--------------------------	----------------------------	--

Table 4-5 收斂條件實際算法

此前也有提到受摩擦力會影響算法性能，下方也將模擬不同算法在具摩擦力的 IILTV 系統下的性能差異，模擬系統結構如下：

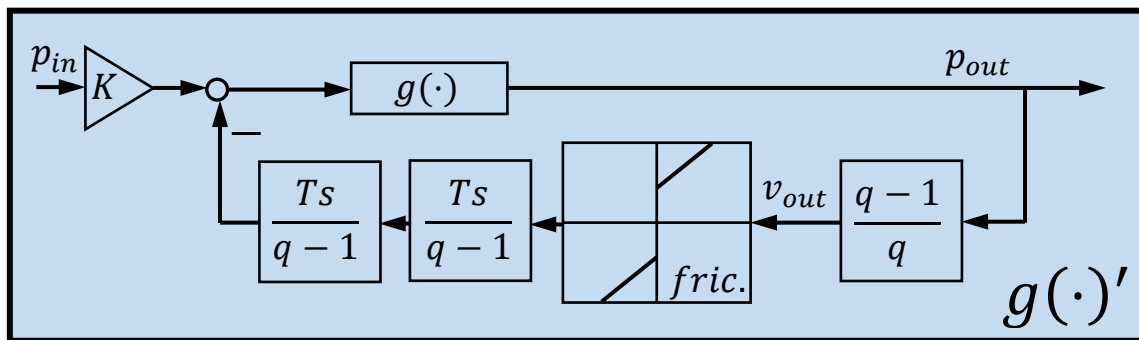


Fig 4.22 IILTV+摩擦力模擬系統

摩擦力方塊 *fric.* 的參數沒有經過精確的實驗證實，只是用來驗證摩擦力對於算法的影響， Fig 4.23 中，比較多次試驗法與左反矩陣法，多次試驗法的性能明顯受到觸發四次摩擦力 Table 4-3 帶來的非連續性誤差影響，而左右反矩陣的性能差異無法補足摩擦力帶來的誤差；比較快速轉置法與多次試驗法，兩次的自適應濾波誤差 Table 4-1 將無法蓋過四次觸發非連續性摩擦力造成的影響。

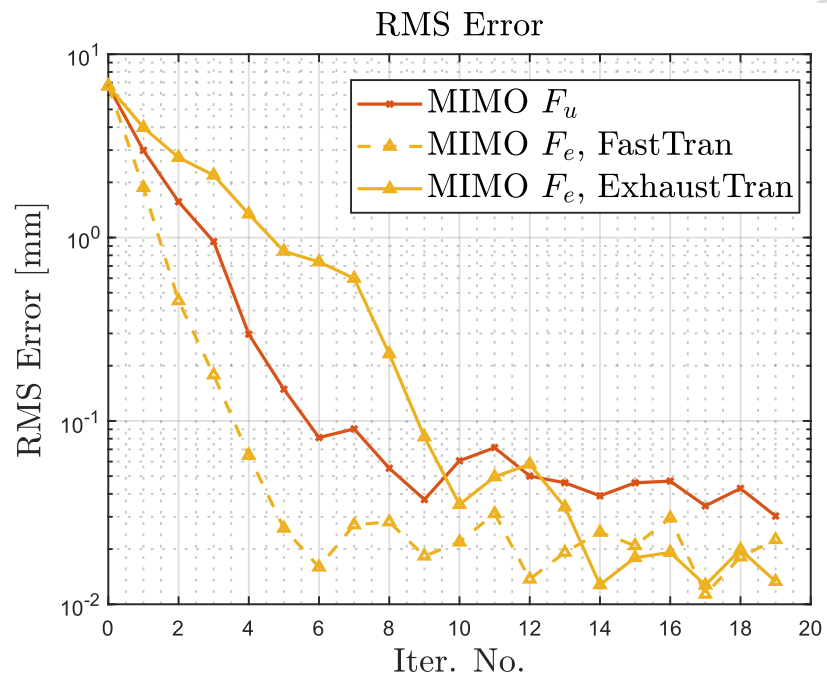


Fig 4.23 IILTV 系統+摩擦力模擬軌跡追蹤方均根誤差

Chapter 5 Conclusions and Future works



5.1 Conclusions

本論文為數據驅動迭代學習控制自適應逆濾波演算法從 SISO 推展至 MIMO 場域提供了三個方法，左反矩陣法、以及兩個右反矩陣法，並分別為其設計了針對 LTI 與非 LTI 的算法，使用右反矩陣的兩個方法雖然比起左反矩陣的方法可以使 ILC 性能提升，但針對 LTI 的多次試驗法與快速轉置法只能在系統輸入數等於輸出數的場域下實施，否則無法分析收斂條件。

	LTI 方陣	LTI 非方陣	非 LTI 方陣	非 LTI 非方陣
左反矩陣法	×	×	×	×
多次試驗法	○	×	○	○
快速轉置法	○	×	○	○

Table 5-1 三種演算法可分析誤差收斂條件的場域

在 Table 5-1 中，雖然左反矩陣法在任何提出的情形中都無法藉由輸入輸出資訊分析誤差收斂條件，但實驗的方均根誤差結果卻是收斂的，也就是說雖然在學理上無法保證其誤差收斂，在實理是有機會可行的。

	LTI	LTI+摩擦力	IILTV	IILTV+摩擦力
左反矩陣法	1	2	3	2
多次試驗法	2	3	1	3

快速轉置法	1	1	2	1
-------	---	---	---	---

Table 5-2 三種演算法在方陣系統下收斂速度差異排名

而針對 LTI 系統的算法雖然在非 LTI 系統場域中學理上無法分析，但在實驗結果上是可行的，實驗的結果如下，快速轉置法在收斂速度上優於其他兩個算法。

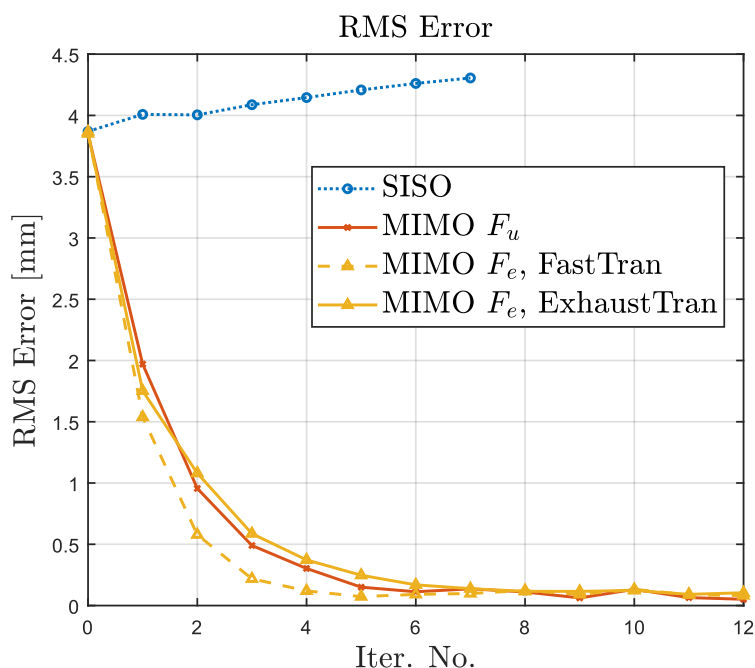


Fig 5.1 IILPV 實驗系統軌跡追蹤方均根誤差

5.2 Future works

(1) 針對非 LTI 系統的算法中，權重濾波器 H 會使三種算法的激發訊號包含高頻段資訊，目前還在研擬在此平台系統上使用高頻段激發命令時不損害機構的方式，並且需要抵抗摩擦力維持自適應濾波的性能，使用的命令軌跡可能也需要做相應的調整。

(2) 在更泛用的 MIMO 系統中，例如：輸入頻道之間物理量尺度不相同等情形，系統將無法輕易被實驗轉置，需要找到方法調整輸入輸出關係或其他擬和系統右反

矩陣的辦法。

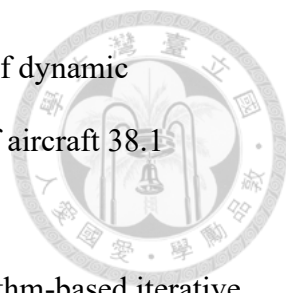
- (3) 在更快速的時變系統上，三種演算法可能無法勝任，需要使用更快速收斂的自適應濾波方法，此時可考慮利用過去迭代的濾波誤差加速適應性學習。
- (4) 需要構思摩擦力的補償辦法，針對受往復式激發訊號來偵測系統資訊的方法而言，靜摩擦力會使標準差過小的高斯白噪音激發訊號失效，演算法性能也將受非連續性的摩擦力影響。

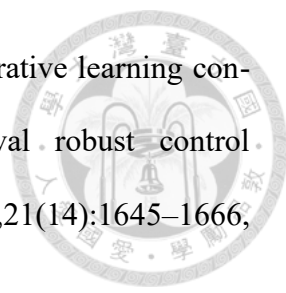


REFERENCE



- [1] D.-I. Kim and S. Kim, "An iterative learning control method with application for CNC machine tools," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 32, no. 1, pp. 66–72, Jan./Feb. 1996.
- [2] A. Steinhauser and J. Swevers, "An efficient iterative learning approach to time-optimal path tracking for industrial robots," *IEEE Trans Ind. Informat.*, vol. 14, no. 11, pp. 5200–5207, Nov. 2018.
- [3] Mishra, Sandipan & Coaplen, Joshua & Tomizuka, Masayoshi. (2007). Precision Positioning of Wafer Scanners Segmented Iterative Learning Control for Nonrepetitive Disturbances [Applications of Control]. *Control Systems, IEEE*. 27. 20 - 25. 10.1109/MCS.2007.384130.
- [4] Y. -H. Lee, S. Rai and T. -C. Tsao, "Data-Driven Iterative Learning Control of Nonlinear Systems by Adaptive Model Matching," in *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 27, no. 6, pp. 5626-5636, Dec. 2022.
- [5] Rai, Sandeep, et al. "Mimo repetitive control of an active magnetic bearing spindle." *IFAC-PapersOnLine* 49.21 (2016): 192-199.
- [6] Sencer, B., Y. Altintas, and E. Croft. "Feed optimization for five-axis CNC machine tools with drive constraints." *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 48.7-8 (2008): 733-745.
- [7] Oomen, Tom, et al. "Connecting system identification and robust control for next-generation motion control of a wafer stage." *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 22.1 (2013): 102-118.
- [8] Lee, Yu-Hsiu, et al. "Industrial robot accurate trajectory generation by nested loop iterative learning control." *Mechatronics* 74 (2021): 102487.

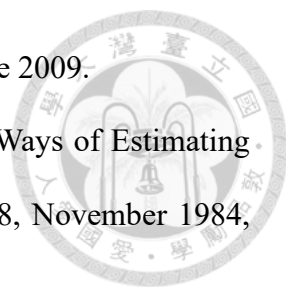
- 
- [9] Eksteen, Jan, and Anton Raath. "Time-domain reconstruction of dynamic multiaxial responses in aeronautical fatigue testing." *Journal of aircraft* 38.1 (2001): 147-153.
- [10] Wang, Xiao, et al. "Modified quasi-newton optimization algorithm-based iterative learning control for multi-axial road durability test rig." *IEEE access* 7 (2019): 31286-31296.
- [11] S. Arimoto, S. Kawamura, and F. Miyazaki, "Bettering operation of robots by learning," *J. Robot. Syst.*, vol. 1, no. 2, pp. 123–140, 1984.
- [12] Longman, R. W. (2000). "Iterative learning control and repetitive control for engineering practice." *International Journal of Control*, 73(10), 930–954.
- [13] Norrlöf, M., & Gunnarsson, S. (2002). "Time and frequency domain convergence properties in iterative learning control." *International Journal of Control*, 75(14), 1114–1126.
- [14] Hatonen, J. J., Harte, T. J., Owens, D. H., Ratcliffe, J. D., Lewin, P. L., & Rogers, E. (n.d.). A new robust iterative learning control algorithm for application on a gantry robot. EFTA 2003. 2003 IEEE Conference on Emerging Technologies and Factory Automation. Proceedings (Cat. No.03TH8696).
- [15] Owens, D. H., & Hätönen, J. (2005). Iterative learning control — An optimization paradigm. *Annual Reviews in Control*, 29(1), 57–70.
- [16] J. van Zundert and T. Oomen, "On inversion-based approaches for feedforward and ILC," *Mechatronics*, vol. 50, pp. 282–291, 2018.
- [17] Tong Duy Son, Goele Pipeleers, Jan Swevers, Experimental Validation of Robust Iterative Learning Control on an Overhead Crane Test Setup, *IFAC Proceedings Volumes*, Volume 47, Issue 3, 2014, Pages 5981-5986, ISSN 1474-6670, ISBN 9783902823625.

- 
- [18] JJM Van De Wijdeven, MCF Donkers, and OH Bosgra. "Iterative learning control for uncertain systems: Noncausal finite time interval robust control design." *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 21(14):1645–1666, 2011.
- [19] Spong, Mark W., et al. "Control of Robots and Manipulators." *Control System Applications*. CRC Press, 2018. 165-193.
- [20] T. Lin, D. H. Owens & J. Hätonen (2006) Newton method based iterative learning control for discrete non-linear systems, *International Journal of Control*, 79:10, 1263-1276.
- [21] A. Tayebi and C.-J. Chien, "A unified adaptive iterative learning control framework for uncertain nonlinear systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 52, no. 10, pp. 1907–1913, Oct. 2007.
- [22] J.-X. Xu, "A survey on iterative learning control for nonlinear systems," *Int. J. Control*, vol. 84, no. 7, pp. 1275–1294, 2011.
- [23] S. Tien, Q. Zou, and S. Devasia, "Iterative control of dynamics-coupling caused errors in piezoscanners during high-speed AFM operation," *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 13, no. 6, pp. 921–931, Nov. 2005.
- [24] Chen, Cheng-Wei, Sandeep Rai, and Tsu-Chin Tsao. "Iterative learning of dynamic inverse filters for feedforward tracking control." *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 25.1 (2019): 349-359.
- [25] C.-W. Chen and T.-C. Tsao, "Accelerated convergence interleaving iterative learning control and inverse dynamics identification," *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 30, no. 1, pp. 45–56, Jan. 2022.
- [26] X. Yu, Z. Hou, M. M. Polycarpou and L. Duan, "Data-Driven Iterative Learning Control for Nonlinear Discrete-Time MIMO Systems," in *IEEE Transactions on*

Neural Networks and Learning Systems, vol. 32, no. 3, pp. 1136-1148, March 2021.

- [27] C.-J. Chien and L.-C. Fu, "An iterative learning control of nonlinear systems using neural network design," *Asian J. Control*, vol. 4, no. 1, pp. 21–29, 2002.
- [28] Y. Li, K. Li, and S. Tong, "Adaptive neural network finite-time control for multi-input and multi-output nonlinear systems with positive powers of odd rational numbers," *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.*, vol. 31, no. 7, pp. 2532–2543, Jul. 2020.
- [29] R. Chi, Z. Hou, S. Jin, and B. Huang, "Computationally efficient datadriven higher order optimal iterative learning control," *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.*, vol. 29, no. 12, pp. 5971–5980, Dec. 2018.
- [30] D. A. Bristow, M. Tharayil and A. G. Alleyne, "A survey of iterative learning control," in *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 26, no. 3, pp. 96-114, June 2006.
- [31] Gray, Robert M. "Toeplitz and circulant matrices: A review." *Foundations and Trends® in Communications and Information Theory* 2.3 (2006): 155-239.
- [32] Plett, Gregory L. "Efficient linear MIMO adaptive inverse control." *IFAC Proceedings Volumes* 34.14 (2001): 89-94.
- [33] Yang, Bin, and Johann F. Bohme. "Rotation-based RLS algorithms: Unified derivations, numerical properties, and parallel implementations." *IEEE Transactions on Signal Processing* 40.5 (1992): 1151-1167.
- [34] Oliveira, Tomás. "Laguerre filters: An introduction." *Eletrónica e Telecomunicações* 1.3 (1995): 237-248.
- [35] Widrow, Bernard, and Eugene Walach. *Adaptive inverse control: a signal processing approach*. John Wiley & Sons, 2008.
- [36] N. O. Pérez-Arancibia, J. S. Gibson and T. -C. Tsao, "Frequency-Weighted Minimum-Variance Adaptive Control of Laser Beam Jitter," in *IEEE/ASME*

Transactions on Mechatronics, vol. 14, no. 3, pp. 337-348, June 2009.

- 
- [37] Vold, Håvard, John Crowley, and G. Thomas Rocklin. "New Ways of Estimating Frequency Response Functions." *Sound and Vibration*. Vol. 18, November 1984, pp. 34–38.
- [38] Lennart Blanken, Jeroen Willems, Sjirk Koekebakker, Tom Oomen, "Design Techniques for Multivariable ILC: Application to an Industrial Flatbed Printer", IFAC-PapersOnLine, Volume 49, Issue 21, 2016, Pages 213-221, ISSN 2405-8963.
- [39] L. Blanken, G. Isil, S. Koekebakker and T. Oomen, "Data-Driven Feedforward Learning using Non-Causal Rational Basis Functions: Application to an Industrial Flatbed Printer," *2018 Annual American Control Conference (ACC)*, Milwaukee, WI, USA, 2018, pp. 6672-6677.
- [40] Shen Gang, Zhu Zhen-Cai, Zhang Lei, Tang Yu, Yang Chi-fu, Zhao Jin-song, Liu Guang-da, Han Jun-Wei, "Adaptive feed-forward compensation for hybrid control with acceleration time waveform replication on electro-hydraulic shaking table", *Control Engineering Practice*, Volume 21, Issue 8, 2013, Pages 1128-1142, ISSN 0967-0661.