

國立臺灣大學工學院機械工程學研究所
碩士論文



Graduate Institute of Mechanical Engineering
College of Engineering
National Taiwan University
Master Thesis

浸潤參考映射技術於流固耦合力學解析研究

Immersed Reference Map Technique for
Analytical Mechanics Investigation of
Fluid-Structure Interactions

詹冠緯

Kuan-Wei Zhan

指導教授：王建凱 博士
Advisor: Dr. Chien-Kai Wang

中華民國 111 年 6 月

June 2022

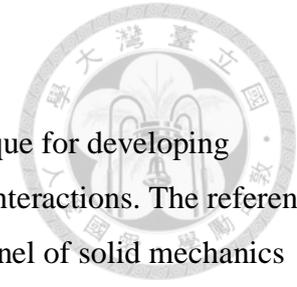
摘要

本論文研究提出一新穎浸潤參考映射技術，建立出全歐拉式 (Full-Eulerian) 流固耦合力學解析與計算架構，於此新式研究架構中，是以參考映射技術 (Reference Map Technique) 為固體力學解析基礎以及計算流體動力學 (Computational Fluid Dynamics) 為流場求解核心，並藉由水平集 (Level Sets) 函數精準判定固體與流體材料邊界位置，融合了參考映射技術解析所得固體變形場域分佈與計算流體力學求解所得流體場域資訊以及基於浸潤式有限元素理論 (Immersed Finite Element Method) 解析所得相互干涉之流固耦合力場，且能與以固定格點觀察流體運動之歐拉守恒描述，具有完全的相容性。基於上述各連體力學理論，本論文研究實作了相應的應用數學方法，包含：水平集函數耦合流場演進、流體力學演算法、徑向基函數插值 (Radial Basis Function Interpolation) 與所需共軛梯度與介面面積比例解方法。

論文內容方面：第一章回顧流體與固體耦合力學的研究發展背景與相關歷程；第二章深入介紹參考映射技術的核心概念，將連體力學理論描述於歐拉空間中，以解析固體系統控制方程式與材料組成方程式，更進一步精準求解於歐拉固定格點之固體變形場域分佈，並提供線性彈性固體之靜態與擬靜態計算範例與相關數值準確性與收斂性的驗證；第三章為本論文之核心內容，提出本研究發展用以解析流固耦合力學之新式浸潤參考映射技術，以及融合水平集函數耦合流場演進、計算流體動力學、徑向基函數插值、共軛梯度與面積比例求解等應用數學方法，以建立全歐拉式流固耦合計算力學架構；第四章為應用此新式流固耦合力學理論與計算方法，透過一系列的計算例，系統性地探討流固耦合力中的解析組成對於流體場域與固體變形分佈相互牽制的影響，包含環境重力、系統慣性與材料彈性三個項目；第五章為論文結論與未來研究展望。

關鍵字: 流固耦合、參考映射技術、水平集函數、連體力學、固體力學、計算流體動力學

Abstract



This thesis research presents a novel immersed reference map technique for developing full-Eulerian analytical and computational frameworks of fluid-structure interactions. The reference map technique is utilized in the proposed frameworks as the analytical kernel of solid mechanics analysis. Concerning the extensive physics of surrounding fluids, numerics of computational fluid dynamics serves as a modeling engine of flow fields. The level-set functions are deeply applied to accurately determine the locations of interfaces between solid and fluid materials. It is important that mutually interfered deformation distributions of solids and flow fields of fluids obtained by the reference map technique and the computational fluid dynamics can be integrated with the resolved fluid-structure interaction force information based on the theory of immersed finite element method. Consequently, such full-Eulerian frameworks are entirely compatible with the descriptions of fixed grids commonly adopted by various numerical solvers of fluid mechanics. According to the continuum mechanics theories aforementioned above, this research implements several corresponding applied mathematics methods for validation studies, including the evolutions of level sets coupling with flow fields, the algorithms of fluid dynamics, the interpolations using radial basis functions, the conjugate gradient method, and the interface area ratio method.

The thesis is organized as follows: The background and research history of the fluid-structure interactions are thoroughly reviewed in Chapter 1. Chapter 2 introduces the essential concepts of the reference mapping technique, delineating governing equations of continuum mechanics in Eulerian descriptions and further solving deformation distributions of solid materials at such fixed grids. Static and quasi-static equilibrium examples of linear elastic solids are also given for validation study of numerical accuracy and convergence associated with computation grid sizes. Chapter 3 is the core of this study, embracing the theoretical derivations of the proposed immersed reference map technique and the computational integration of related powerful scheme implementations, including the evolutions of level sets coupling with flow fields, the algorithms of fluid dynamics, the interpolations using radial basis functions, the conjugate gradient method, and the interface area ratio method. In Chapter 4, the immersed reference map technique is implemented in a series of computational examples to systematically investigate the influences of fluid-structure interaction forces over mutually interfered fluid flows and solid deformations, including environmental gravity, physical inertia, and material elasticity. Chapter 5 wraps the conclusion and future work of the thesis.

Keywords: Fluid-structure interaction; Reference map technique; Level-set functions; Continuum mechanics; Solid mechanics; Fluid mechanics

目錄



中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
第一章 緒論.....	1
1.1. 研究背景.....	1
1.2. 研究介紹.....	2
1.3. 文獻探討.....	3
1.3.1. 參考映射技術.....	3
1.3.2. 浸潤式有限元素法.....	4
第二章 參考映射技術.....	8
2.1. 參考座標定義.....	8
2.2. 歐拉空間的連續體控制方程式.....	9
2.2.1. 運動力學.....	10
2.2.2. 參考座標演進條件.....	11
2.3. 參考映射技術演算法.....	11
2.3.1. 場域分布.....	11
2.3.2. 參考映射技術演算步驟.....	12
2.4. 靜態分析.....	13
2.4.1. 有限元素分析實作.....	14
2.4.2. 參考映射技術實作.....	14
2.4.3. 收斂性分析.....	15
2.5. 擬靜態分析.....	16
第三章 浸潤式參考映射技術.....	26
3.1. 固體場域與流體場域定義.....	26
3.2. 參考座標與水平集函數.....	27



3.3.	歐拉空間的流體與固體力學控制方程式	29
3.3.1.	運動力學	29
3.3.2.	流固耦合力之推導	29
3.3.3.	流體控制方程式	31
3.3.4.	固體控制方程式	31
3.3.5.	參考座標和水平集函數之演進	32
3.4.	流體與固體邊界之處理	33
3.4.1.	共軛梯度法	33
3.4.2.	面積比例方法	36
3.5.	數值方法	40
3.5.1.	場域分布	40
3.5.2.	基本步驟	40
3.5.3.	徑向基函數插值	42
3.5.4.	有限元素法	42
3.5.5.	有限差分法	47
第四章	應用浸潤式參考映射技術於流固耦合解析	59
4.1.	流固耦合計算例設定	59
4.2.	流固耦合力之環境重力要素	59
4.3.	流固耦合力之固體慣性要素	61
4.4.	流固耦合力之材料剛性要素	62
第五章	結論與未來展望	96
5.1.	結論	96
5.2.	未來展望	96
參考文獻	97
附錄	100

圖目錄



圖 1-1 流固耦合數值方法分支圖	5
圖 1-2 浸潤式參考座標技術架構圖	6
圖 1-3 (左) 浸潤式有限元素法固體、流體場域分布、(右)流固耦合力分佈區域... 7	
圖 2-1 運動函數 $\chi(X, t)$ 與映射函數 $\xi(x, t)$	17
圖 2-2 參考座標技術場域分布：包含參考座標、速度、應力與變形梯度場.....	17
圖 2-3 參考座標技術場域分布：包含參考座標與變形梯度場.....	18
圖 2-4 參考座標技術場域分布：包含速度與應力場.....	19
圖 2-5 (左) 變形前的固體節點分布、(右) 變形後的固體節點分布.....	20
圖 2-6 變形前與變形後節點位置比較 (黑色為變形前、紅色為變形後).....	20
圖 2-7 有限元素法計算之固體 ϵ_{11} 應變.....	21
圖 2-8 參考映射技術計算之固體 E_{11} 應變	21
圖 2-9 有限元素法計算之固體 ϵ_{21} 應變.....	22
圖 2-10 參考映射技術計算之固體 E_{21} 應變	22
圖 2-11 有限元素法計算之固體 ϵ_{22} 應變.....	23
圖 2-12 參考映射技術計算之固體 E_{22} 應變	23
圖 2-13 參考坐標場域之誤差百分比、收斂速度比較.....	24
圖 2-14 參考座標的梯度場域之誤差百分比、收斂速度比較.....	24
圖 2-15 固體材料擬靜態變形分析.....	25
圖 2-16 參考映射技術解析所得固體格林-拉格朗日應變 (擬靜態變形過程) ..	25
圖 3-1 歐拉網格場域 Ω 定義	49
圖 3-2 早期流固耦合問題場域定義	49
圖 3-3 浸潤式邊界方法流固耦合力分布	50
圖 3-4 (左)浸潤式參考映射技術場域定義、(右)流固耦合力分布.....	50
圖 3-5 (左)水平集函數與高度為零的平面相切、(右) 相應平面封閉曲線 L.....	51



圖 3-6	元素分布示意圖.....	51
圖 3-7	共軛梯度法處理之前的場域分布圖.....	52
圖 3-8	共軛梯度法處理之後的場域分布圖.....	52
圖 3-9	單位元素 x 方向力平衡圖.....	53
圖 3-10	(左)連體元素示意圖(右)與連體元素共用節點之流體元素示意圖.....	53
圖 3-11	單位元素依照圖 3-10 分成兩區域之 x 方向力平衡圖.....	54
圖 3-12	(左)坐標系U、V分布圖、(右)坐標系U之元素定義.....	55
圖 3-13	純固體元素.....	55
圖 3-14	純流體元素.....	56
圖 3-15	固體流體邊界元素(固體流體邊界跨越相鄰的邊).....	56
圖 3-16	固體流體邊界元素(固體流體邊界跨越相對的邊).....	57
圖 3-17	浸潤式參考映射技術場域分布.....	57
圖 3-18	單一元素場域定義.....	58
圖 3-19	有限差分法流場求解器之場域分布圖.....	58
圖 4-1	流固耦合問題模型架構圖.....	64
圖 4-2	組合一， $Re = 0.1$ 、 $\rho_s = 0.5$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖	65
圖 4-3	組合二， $Re = 0.1$ 、 $\rho_s = 1.5$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖	66
圖 4-4	組合三， $Re = 0.1$ 、 $\rho_s = 2$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖 ...	67
圖 4-5	組合四， $Re = 0.5$ 、 $\rho_s = 0.5$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖	68
圖 4-6	組合五， $Re = 0.5$ 、 $\rho_s = 1.5$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖	69
圖 4-7	組合六， $Re = 0.5$ 、 $\rho_s = 2$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖 ...	70
圖 4-8	組合七， $Re = 1$ 、 $\rho_s = 0.5$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖 ...	71
圖 4-9	組合八， $Re = 1$ 、 $\rho_s = 1.5$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖 ...	72
圖 4-10	組合九， $Re = 1$ 、 $\rho_s = 2$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖	73
圖 4-11	重力項影響比較圖表.....	74

圖 4-12	流固耦合問題(慣性項)模型架構圖	75
圖 4-13	組合一， $Re = 1$ 、 $\rho s = 0.5$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖 ..	76
圖 4-14	組合二， $Re = 1$ 、 $\rho s = 1$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖	77
圖 4-15	組合三， $Re = 1$ 、 $\rho s = 2$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖	78
圖 4-16	組合四， $Re = 50$ 、 $\rho s = 0.5$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖 ..	79
圖 4-17	組合五， $Re = 50$ 、 $\rho s = 1$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖 ..	80
圖 4-18	組合六， $Re = 50$ 、 $\rho s = 2$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖 ..	81
圖 4-19	組合七， $Re = 100$ 、 $\rho s = 0.5$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖	82
圖 4-20	組合八， $Re = 100$ 、 $\rho s = 1$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖 ..	83
圖 4-21	組合九， $Re = 100$ 、 $\rho s = 2$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖 ..	84
圖 4-22	慣性項影響比較圖表	85
圖 4-23	組合一， $Re = 0.1$ 、 $E = 0$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖 ...	86
圖 4-24	組合二， $Re = 0.1$ 、 $E = 500$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖 ..	87
圖 4-25	組合三， $Re = 0.1$ 、 $E = 1000$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖	88
圖 4-26	組合四， $Re = 0.5$ 、 $E = 0$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖 ...	89
圖 4-27	組合五， $Re = 0.5$ 、 $E = 500$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖 ..	90
圖 4-28	組合六， $Re = 0.5$ 、 $E = 1000$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖	91
圖 4-29	組合七， $Re = 1$ 、 $E = 0$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖	92
圖 4-30	組合八， $Re = 1$ 、 $E = 500$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖 ..	93
圖 4-31	組合九， $Re = 1$ 、 $E = 1000$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖 ..	94
圖 4-32	剛性項影響比較圖表	95

表目錄



表 2-1 參考映射技術演算步驟.....	12
表 3-1 共軛梯度迭代數值方法.....	35
表 3-2 浸潤式參考映射技術之流固耦合數值方法概要.....	41
表 3-3 無因次化參數.....	43
表 3-4 無因次化參數.....	44
表 3-5 有限差分數值方法.....	47

第一章 緒論



1.1. 研究背景

隨著計算機效能日漸提升，拉格朗日(Lagrangian)方法與歐拉(Euler)座標描述方法在連體力學中，皆為廣為使用之數值分析與模擬系統空間，基於材料單元之變形與運動性質，以上兩座標描述方法各擅勝場：於固體材料方面，根據其組成特性，固體材料應力取決於變形，且變形可以從相鄰材料節點之相對位置進行計算；於流體材料方面，根據其流變特性，流體材料應力取決於變形率，且變形率可以從固定觀察格點之速度場進行有限差分估計。故於大多的固體力學問題中，多數使用具移動特性材料節點的拉格朗日方法，如有限元素法；於大多的流體力學問題中，多數使用固定觀察格點的歐拉方法，如有限差分法。

流固耦合(Fluid-structure interaction)在科學與工程問題中為相當常見之力學機制，並廣泛應用於各種技術發展之中，除機械工程研究領域外，更如航太工程之翼型和發動機葉片([3]、[16])、生醫工程之人工心臟瓣膜和藥物顆粒([5]、[15]、[19])、建築工程之橋樑和摩天大樓([6]、[7]、[18])、海事工程之立管和海上平台([2]、[12]、[24])等，研究人員透過實驗架設和數值計算之努力，對於涉及流體與固體材料相互擾動之流固耦合力學研究做出了重大貢獻，近年來基於不同座標描述方法，用於模擬流固耦合機制與現象之數值模擬技術蓬勃地發展，並可分類為：流體與固體均在歐拉格點上求解之完全歐拉方法、流體與固體均使用拉格朗日網格上求解之完全拉格朗日方法、流體在歐拉格點且固體在拉格朗日網格上求解之拉格朗日歐拉混合方法[11]，完整分類詳見(圖 1-1)，本論文研究將針對完全歐拉方法和拉格朗日歐拉混合方法進行詳細探討。

在流固耦合力學發展進程中，最早使用區域劃分之拉格朗日歐拉混合方法進行研究，流體和固體場域各自於不同格點與網格系統分別求解，如：任意拉格朗日歐拉描述(Arbitrary Lagrangian Eulerian，簡記為 ALE)([8]、[9])、變形空間域/穩定時空(deforming-spatial-domain/stabilized space-time，簡記為 DSD/SST)([10]、[22])，



此分析方法在固體為完全剛性材料 (即剛體) 的問題中, 展現了高度的可行性; 然而對於具巨量變形固體材料的問題, 為維持數值求解準確與穩定性, 常須在各計算時間步生成新的固體網格分佈, 因而需要昂貴的計算成本, 故此混合方法大幅減縮了流固耦合力學問題之應用空間。為克服具巨量變形固體材料與流體流場分佈相互干涉機制所需極高計算門檻的問題, 本論文研究提出「浸潤式參考映射技術」, 考慮以浸潤方式存在於液體環境之固體, 基於參考映射技術, 根據固體材料分佈與變形, 解析出固體劃分區域之微體式耦合力場, 並將此耦合力場配置於流體平衡方程式之外力項中, 再將滿足流體平衡方程式之流場分佈, 用以演進描述固體輪廓之水平集函數, 再重複上述參考映射技術, 解析出固體材料分佈與變形引致耦合力場, 以更新接續時間步進之流場分佈狀態。本論文研究提出之「浸潤式參考映射技術」將相互干涉之流體與固體場域於同一歐拉格點系統進行求解, 對於巨量變形固體的問題, 不僅不需在各時間步生成新拉格朗日網格設計, 亦節省了拉格朗日網格與歐拉網格相互轉換的可觀計算成本, 因而本質上具有高計算效率之優點。

1.2. 研究介紹

本論文研究提出一新穎浸潤參考映射技術, 建立起全歐拉式 (Full-Eulerian) 流固耦合力學解析與計算架構, 於此新式研究架構中, 是以參考映射技術為固體力學解析基礎以及計算流體動力學為流場求解核心, 並藉由水平集函數精準判定固體與流體材料邊界位置, 融合了參考映射技術解析所得固體變形場域分佈與計算流體力學求解所得流體場域資訊以及基於浸潤式有限元素理論解析所得相互干涉之流固耦合力場, 且能與以固定格點觀察流體運動之歐拉守恆描述, 具有完全的相容性。基於上述各連體力學理論, 本論文研究實作了相應的應用數學方法, 包含: 參考映射技術(Reference map technique, 簡記為 RMT)、浸潤式有限元素法(Immersed finite element method, 簡記為 IFEM)、水平集(Level sets)函數、計算流體力學(Computational Fluid Dynamics, 簡記為 CFD)、徑向基函數插值(Radial basis function,

簡記為 RBF)、共軛梯度(Conjugate gradient)法等，如(圖 1-2)所示。

論文內容方面：第一章回顧流體與固體耦合力學的研究發展背景與相關歷程；第二章深入介紹參考映射技術的核心概念，將連體力學理論描述於歐拉空間中，以解析固體系統控制方程式與材料組成方程式，更進一步精準求解於歐拉固定格點之固體變形場域分佈，並提供線性彈性固體之靜態與擬靜態計算範例與相關數值準確性與收斂性的驗證；第三章為本論文之核心內容，提出本研究發展用以解析流固耦合力學之新式浸潤參考映射技術，以及融合水平集函數耦合流場演進、計算流體動力學、徑向基函數插值、共軛梯度與面積比例求解等應用數學方法，以建立全歐拉式流固耦合計算力學架構；第四章為應用此新式流固耦合力學理論與計算方法，透過一系列的計算例，系統性地探討流固耦合力中的解析組成對於流體場域與固體變形分佈相互牽制的影響，包含環境重力、系統慣性與材料彈性三個項目；第五章為論文結論與未來研究展望。

1.3. 文獻探討

1.3.1. 參考映射技術

參考映射技術歸屬於完全歐拉方法（見圖 1-1），始於美國麻省理工學院機械工程學系 Kamrin 教授領導研究團隊 2012 年的研究成果[13]，為一歐拉空間之連續體力學完整理論架構，尤其在固體力學於固定觀察格點之歐拉系統解析上，做出巨大的貢獻，核心理論為將參考座標定義為質點運動函數之反函數映射結果，連體材料質點得以滿足歐拉空間描述的連續體守恆與平衡方程式等，因而能成功且具高效率地實現固體力學於歐拉空間中之解析與數值計算工作。

回顧文獻，Kamrin 教授應用參考座標技術理論，實做了一系列的靜態與擬靜態之數值模擬分析，以驗證此理論架構之正確性與收斂性，本論文第二章亦成功重現了基於上述參考座標技術理論之驗證實例，做為本論文研究提出新式浸潤參考



映射技術中固體力學解析之基礎；另以計算流體動力學為流體場域求解核心，結合能精準判定固體與流體材料邊界位置之水平集函數耦合流場演進數值方法，浸潤參考映射技術成功解析與計算超彈性固體材料(如 neo-Hookean 固體材料)沈浸於流體環境之流固耦合力學問題，綜觀此新式流固耦合力學理論，相互干涉之流體與固體場域安排於同一歐拉格點系統進行求解，對於巨量變形固體的問題，不僅不需在各時間步生成新拉格朗日網格設計，亦節省了拉格朗日網格與歐拉網格相互轉換的可觀計算成本，因而本質上具有高計算效率之優點。

1.3.2. 浸潤式有限元素法

浸潤式有限元素法歸屬於拉格朗日歐拉混合方法(見圖 1-1)，始於美國西北大學機械工程學系 Liu 教授領導研究團隊 2008 年的研究成果[25]，為一融合歐拉格點與拉格朗日網格之連續體力學完整理論架構，涉及歐拉與拉格朗日兩不同質點運動描述方式，浸潤於流體環境之彈性固體以拉格朗日網格於歐拉流體格點中運動，當中拉格朗日網格與歐拉格點為相互獨立空間描述(如圖 1-3， Ω^f 為流體場域、 Ω^s 為固體場域以及 $\Omega^{s'}$ 為 Ω^s 映射至 Ω^f 之耦合力場分佈區域)，考量在流體場域與固體場域的連續性，藉由狄拉克德爾塔函數 δ 將拉格朗日網格之固體場域與歐拉格點之流體場域資訊做相互插值橋接，降低了可觀的計算成本，於此新穎有限元素法理論中，基於流體與固體控制系統方程式，推導了由完全浸潤於流體之固體所引致流體與固體耦合力場解析式，除流固運動場域連續性外，更為流體與固體提供了相互干涉力分佈場域的對話機制理論。

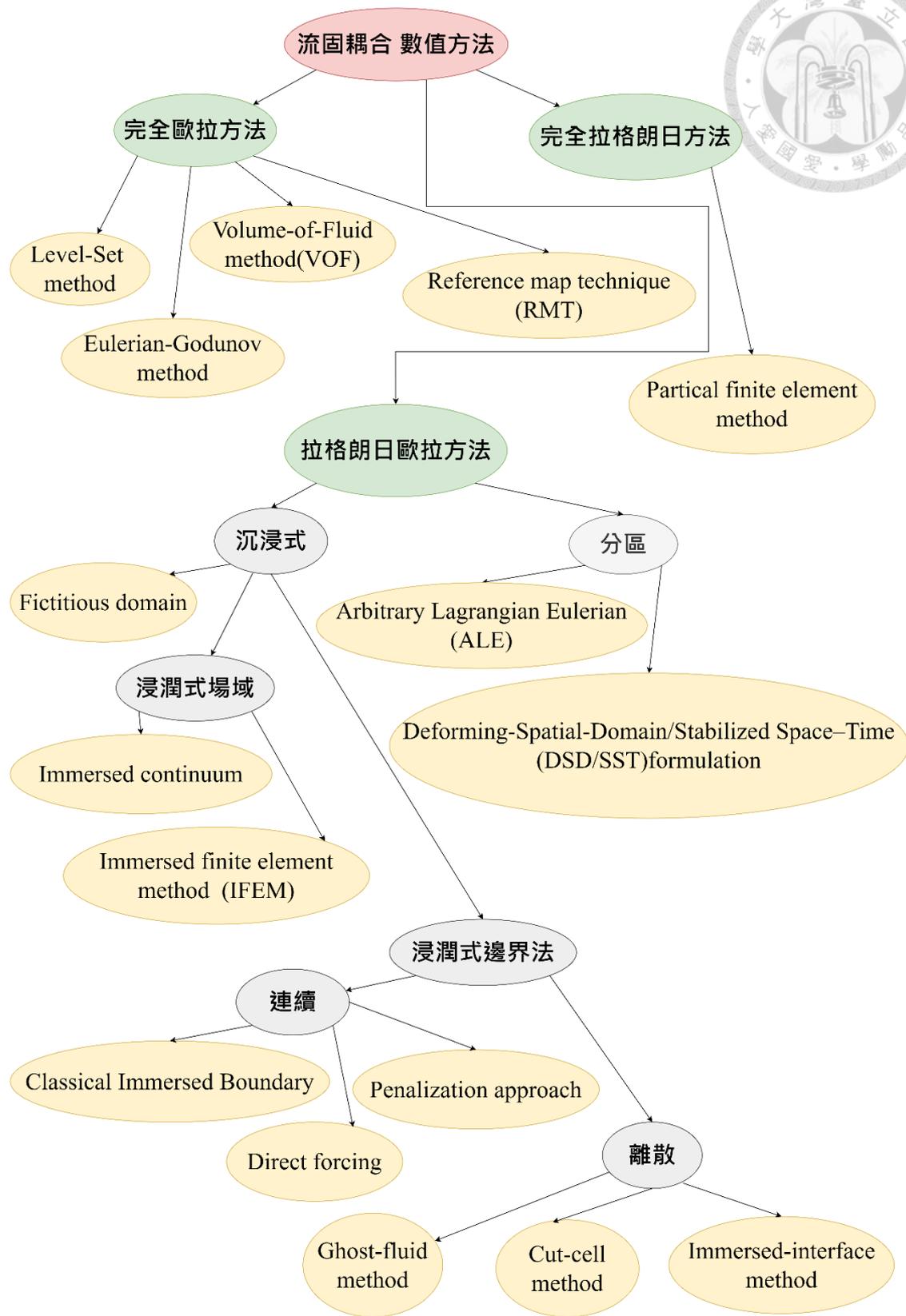


圖 1-1 流固耦合數值方法分支圖

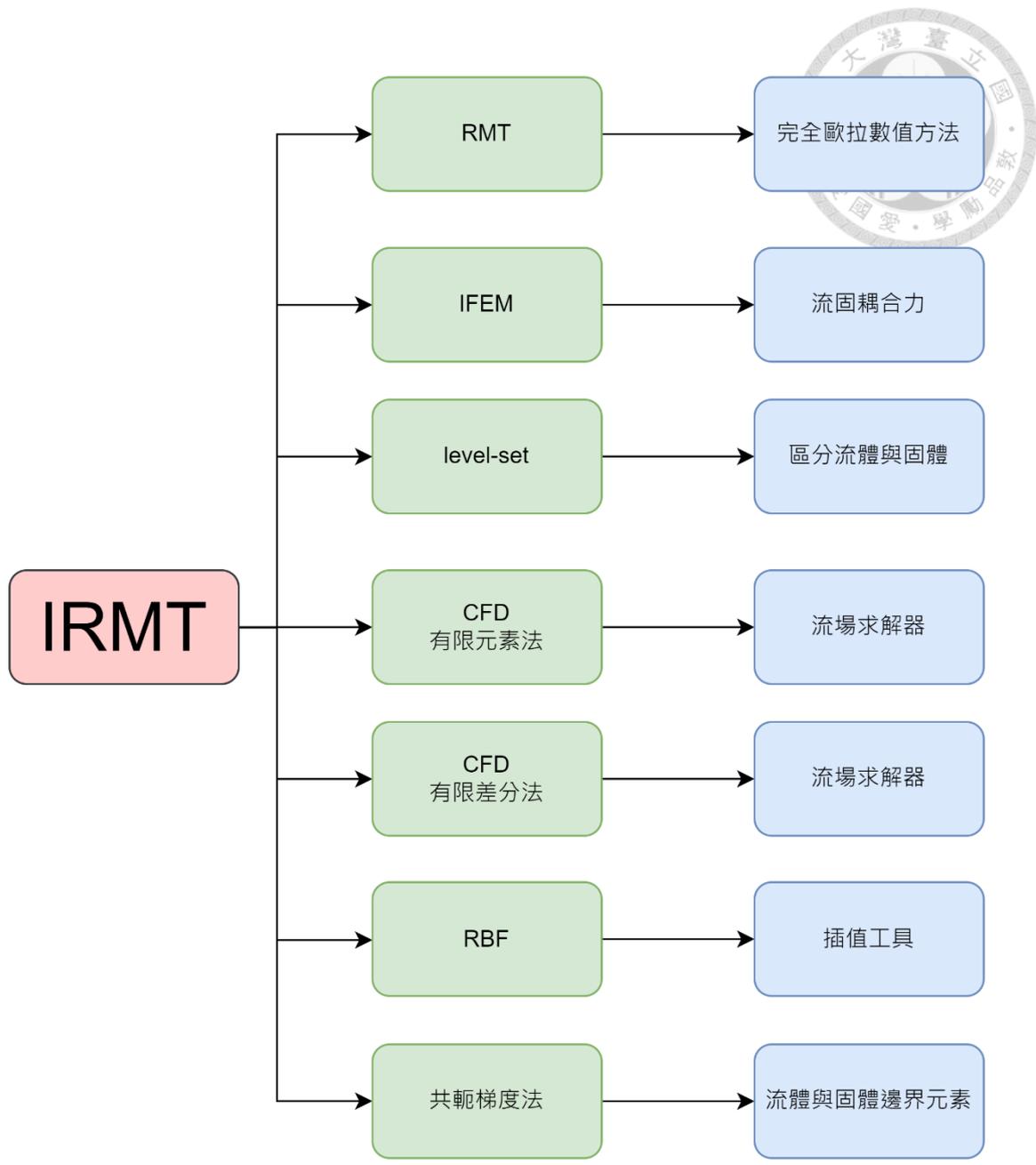


圖 1-2 浸潤式參考座標技術架構圖

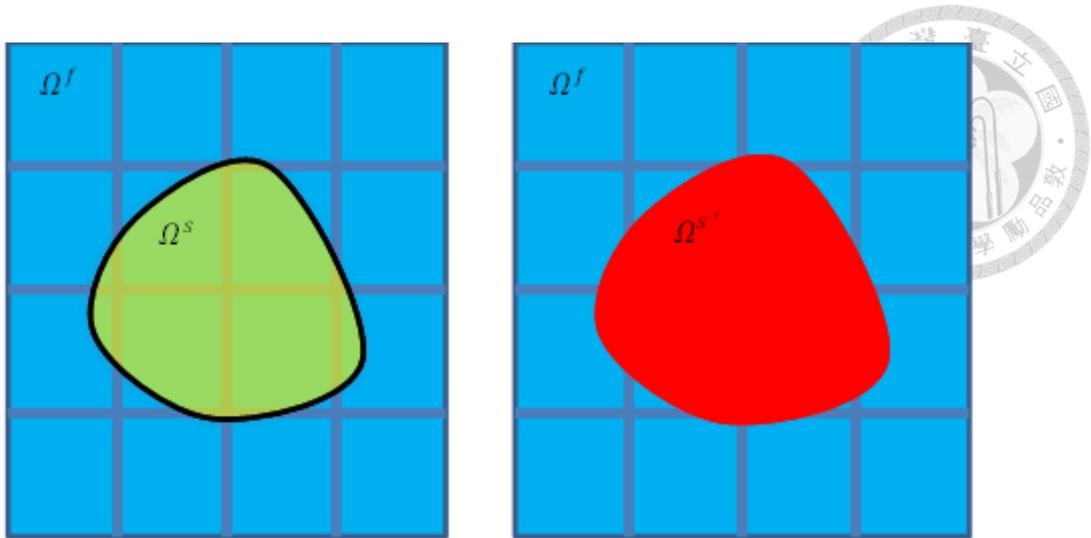


圖 1-3 (左) 浸潤式有限元素法固體、流體場域分布、(右)流固耦合力分佈區域

第二章 參考映射技術



參考映射技術始於 2012 年，為一歐拉空間之連續體力學完整理論架構，尤其在固體力學於固定觀察格點之歐拉系統解析上，做出巨大的貢獻，核心理論為將參考座標定義為質點運動函數之反函數映射結果，連體材料質點得以滿足歐拉空間描述的連續體守恆與平衡方程式等，因而能成功且具高效率地實現固體力學於歐拉空間中之解析與數值計算工作，本章將深入的介紹參考映射技術的核心概念與理論內容。

為確認本論文研究提出浸潤參考映射技術的正確性與適用性，本章節將實作參考映射技術理論，以相應的數值方法進行具巨量變形固體材料之靜態與擬靜態實例，透過拉格朗日格點有限元素法與本研究實作數值方法的結果做比較，並進行網格收斂性分析，檢核參考映射技術與有限元素法實作結果之一致性，以及網格收斂速度之演算效率。

2.1. 參考座標定義

進一步探討由質點運動座標之反函數映射所得參考座標定義，以下將回顧於拉格朗日格點描述系統中，如何表示可變形固體材料組成的運動力學 (Kinetics) 描述，從幾何的角度著手探討彈性固體材料分佈位置隨時間變化的規律：考慮初始 ($t = 0$) 時，一固體材料質點所在的參考座標為 \mathbf{X} ，而當固體材料經過一系列的變形過程後之 t 時間點，材料質點從原來的 \mathbf{X} 位置移動至 \mathbf{x} 位置，定義此變形過程之運動函數為 $\chi(\mathbf{X}, t)$ ，由質點的參考座標位置 \mathbf{X} 與透過運動函數將得質點移動後座標位置 \mathbf{x} ，即 $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$ ，進而可得材料質點之變形梯度 (Deformation gradient) \mathbf{F} 為運動函數 $\chi(\mathbf{X}, t)$ 向量之雅各比矩陣 (Jacobian matrix)：

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (2-1)$$



即 $F_{ij} = \frac{\partial x_i(X,t)}{\partial X_j}$ 於二維問題中， $i = 1, 2$ ， $j = 1, 2$ 。

相較於拉格朗日格點描述方式，參考映射技術定義運動函數 $\chi(\mathbf{X}, t)$ 的反函數為此變形過程之映射函數 $\xi(\mathbf{x}, t)$ ，由質點移動後座標位置 \mathbf{x} 與透過映射函數將得質點移動前參考座標位置 \mathbf{X} ，即

$$\mathbf{X} = \xi(\mathbf{x}, t) \quad (2-2)$$

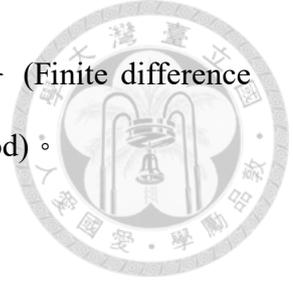
將作用於 n 維空間純量場函數 f 之梯度運算子 ∇ 記為： $\nabla f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ， $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \mathbf{e}_n$ ，以及 $f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ ；在此 t 時間點，基於(2-2)式，進而可將材料質點之變形梯度 \mathbf{F} 表示為對應映射函數梯度之反函數：

$$F_{ij}(\mathbf{X}, t) = \left(\xi_{i,j}(\mathbf{x}, t) \right)^{-1} \quad (2-3)$$

(2-3)式為材料質點變形梯度與對應映射函數梯度的轉換式，連結了此材料質點參考座標 \mathbf{X} 、質點移動後座標位置 \mathbf{x} 與變形梯度三者之關係，此連結關係為參考映射技術成功以歐拉空間做為固體力學解析描述的核心概念，相較於拉格朗日空間，固體場域呈現於相應於 t 時間點材料質點移動後座標之網格位置，而參考映射技術所使用歐拉空間，固體場域則是呈現於固體材料變形全過程中皆為固定的觀察格點位置。

2.2. 歐拉空間的連續體控制方程式

本章節探討描述於歐拉空間之連續體運動力學與固體材料質點參考座標的演進條件，以利完整推導以歐拉空間描述之連續體控制方程式，並進一步建立解析方程式之數值方法，值得深究的是，基於拉格朗日空間之有限元素分析是透過網格搭配形狀函數 (Shape functions) 之空間離散化與時間步進方式，對於系統偏微分方程組之弱形式 (Weak form) 在滿足邊界條件的要求下求解可行近似解；在基於歐拉空間之參考座標技術架構中，所有用以描述連續體運動與變形之控制方程組均以原始強形式 (Strong form) 來呈現，故可運用相應合適之偏微分方程數值解法進



行各時間點場域估計，例如廣為應用於規則區域之有限差分法 (Finite difference method) 以及具全域高精確度與收斂性之值譜法 (Spectral method)。

2.2.1. 運動力學

在歐拉空間描述之運動力學 (Kinematics) 中，於固定的觀察格點位置，連續體材料質點須滿足質量守恆律、線性動量守恆律與角度動量守恆律，分別為：

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2-4)$$

$$\text{即 } \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \rho_{,i} + \rho v_{i,i} = 0$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} \quad (2-5)$$

$$\text{即 } \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j v_{i,j} = \frac{1}{\rho} \sigma_{i,j,j} + g_i$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (2-6)$$

$$\text{即 } \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

其中 ρ 代表材料密度、 \mathbf{v} 代表空間速度場、 $\boldsymbol{\sigma}$ 代表柯西應力、 \mathbf{g} 代表單位質量外力場，以及 $\frac{D(\cdot)}{Dt}$ 為場域之物質導數 (Material derivative or substantial derivative)：

$$\frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + v_i (\cdot)_{,i} \quad (2-7)$$

於二維問題中， $i = 1, 2$ ， $j = 1, 2$ 。若連續體材料密度不隨時間與空間位置變化，由 (2-8) 可得：

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2-9)$$

$$\text{即 } v_{i,i} = 0$$

另基於連體力學，變形梯度之行列式，記為 $J = \det(\mathbf{F})$ ，滿足變形前材料單元體積 dV 與變形後材料單元體積 dv 之關係： $dv = J dV$ ，根據連體材料之質量守恆性質，變形後材料單元之質量密度 ρ 可由其初始值 ρ_0 估計為：

$$\rho = \frac{\rho_0}{J} \quad (2-10)$$



2.2.2. 參考座標演進條件

物質導數的物理意義為跟隨一連續體材料質點所得之某性質變化率，由於循各材料質點於變形或運動過程中，其歐拉空間之參考座標具有性質恆定的特性，故其物質導數始終保持為零，即：

$$\frac{D\xi_i}{Dt} = \frac{d\xi_i}{dt} + v_j \xi_{i,j} \equiv 0 \quad (2-11)$$

此為參考映射技術中，參考座標演進條件方程式，於本論文研究中，亦視為連體運動或變形過程中，歐拉與拉格朗日空間描述之重要轉換式。

2.3. 參考映射技術演算法

在本章節中，將基於 2.2.1 節和 2.2.2 節中所推導的強形式控制方程式，建立起參考映射技術之演算法。

2.3.1. 場域分布

考慮二維問題，由水平與垂直間隔均為 h 之 m 列與 n 行固定格點構成一歐拉空間，部分相似於計算流體力學廣為使用之歐拉交錯式標記與單元格點 (Eulerian staggered marker-and-cell grid) 系統，在參考映射技術中，一共使用了三個位置系統，第一個位置系統記為 $\{U\}$ ，位於格點元素之垂直邊中點，具 $((m-1) \times n)$ 個格點之場域分布，第二個位置系統記為 $\{V\}$ ，位於格點元素的水平邊中點，具 $(m * (n-1))$ 個格點之場域分布，第三個位置系統記為 $\{X\}$ ，位於格點元素中心，具 $((m-1) * (n-1))$ 個格點之場域分布，所有場域皆定義在此三位置系統上，如(圖 2-2)所示，參考座標與速度場域定義於 $\{U\}$ 與 $\{V\}$ 位置系統，而材料質點應力與變形梯度場域定義於 $\{X\}$ 系統上。



2.3.2. 參考映射技術演算步驟

在本章節中，根據在歐拉空間描述之運動力學控制方程式、參考座標演進條件方程式與上述位置系統，能以參考映射技術實作出具變形或運動過程固體材料之場域平衡分析：考慮已知時間步進 n 時刻的速度場域 v^n 與參考座標場域 ξ^n ，由表 2-1 所列參考映射技術演算步驟，可將速度場域與參考座標場域更新至下一個時間步進 $n+1$ 時刻，而各時間步進時刻之變形梯度 F 與材料應力 σ 分布即可由各時間步進時刻參考座標場域以顯式方式求得。

表 2-1 參考映射技術演算步驟

已知： ρ_0 、 v^n 、 ξ^n

目標： v^{n+1} 、 ξ^{n+1}

(1) 計算參考座標場域之梯度，藉由參考座標梯度可得變形梯度場與質量密度

$$F_{ij}^n = (\xi_{i,j}^n)^{-1}, \rho^n = \frac{\rho_0}{J} \quad (2-12)$$

(2) 基於材料組成律，由變形梯度場可得材料應力場

$$\sigma_{ij}^n = \widehat{\sigma}(F_{ij}^n) \quad (2-13)$$

(3) 由線性動量守恆律更新速度場

$$\left(\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} + v_j^n v_{i,j}^n\right) = \frac{1}{\rho^n} (\sigma_{ij,j}^n + g_i) \quad (2-14)$$

(4) 由參考座標演進條件更新參考座標場域

$$\frac{\xi_i^{n+1} - \xi_i^n}{\Delta t} + v_j^n \xi_{i,j}^n = 0 \quad (2-15)$$

本方法中參考座標、速度場與應力場的梯度皆以中央有限差分法(Central finite difference)評估。如(圖 2-3)所示，定義於 $\{U\}$ 與 $\{V\}$ 位置系統之參考座標以及定義於 $\{X\}$ 位置系統之材料質點變形梯度場域，由有限中心差分法可得：



$$\left. \frac{\partial \xi_k^n}{\partial x_1} \right|_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})} = \frac{\xi_{k(i+\frac{1}{2}, j+1)}^n - \xi_{k(i+\frac{1}{2}, j)}^n}{h} \quad (2-16)$$

$$\left. \frac{\partial \xi_k^n}{\partial x_2} \right|_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})} = \frac{\xi_{k(i+1, j+\frac{1}{2})}^n - \xi_{k(i, j+\frac{1}{2})}^n}{h} \quad (2-17)$$

於二維問題中， $k = 1, 2$ ，可得位於格點元素中心的 $\frac{\partial \xi_k^n}{\partial x_1}$ 與 $\frac{\partial \xi_k^n}{\partial x_2}$ ，相應 (表 2-1) 中的步驟(1)，並滿足了 $\xi_{i,j}^n$ 與 F_{ij}^n 的位置一致之相符條件；更進一步，如(圖 2-4)所示，定義於 $\{U\}$ 與 $\{V\}$ 位置系統之速度場域以及定義於 $\{X\}$ 位置系統之材料質點應力場域：對 $\{U\}$ 位置系統而言， v_k^n 位於格點元素的垂直邊上， σ_{kl}^n 位於格點元素中心，由中心有限差分法可得：

$$\left. \frac{\partial \sigma_{kl}^n}{\partial x_1} \right|_{(i+\frac{1}{2}, j+1)} = \frac{\sigma_{kl(i+\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2})}^n - \sigma_{kl(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^n}{h} \quad (2-18)$$

$$\left. \frac{\partial \sigma_{kl}^n}{\partial x_2} \right|_{(i+\frac{1}{2}, j+1)} = \frac{\sigma_{kl(i+\frac{3}{2}, j+\frac{3}{2})}^n - \sigma_{kl(i-\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2})}^n + \sigma_{kl(i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2})}^n - \sigma_{kl(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^n}{4h} \quad (2-19)$$

可得位於格點元素垂直邊中點的 $\frac{\partial \sigma_{kl}^n}{\partial x_1}$ 與 $\frac{\partial \sigma_{kl}^n}{\partial x_2}$ ，相應 (表 2-1) 中的步驟(3)，並滿足了 $\sigma_{ij,j}^n$ 與 v_i^n 的位置一致之相符條件；對 $\{V\}$ 位置系統而言，同理亦同。

2.4. 靜態分析

靜態模擬為呈現固體系統於外力與幾何邊界條件中，內部各材料單元達到靜力平衡的過程，在本章節中，分別使用參考映射技術與有限元素分析 (Finite element analysis) 進行靜態模擬，相互比較與驗證兩方法所得模擬結果，更進一步針對參考映射技術進行網格收斂性分析，檢核實作參考映射技術之演算網格收斂性是否合乎預期。



2.4.1. 有限元素分析實作

有限元素法為基於拉格朗日網格之廣為運用固體力學分析方法，透過網格變數離散化與系統能量泛函 (Functional)，將融合材料組成律之強形式 (Strong form) 偏微分控制方程組轉化成弱形式 (Weak form) 代數方程組，以求得網格各節點自由度物理量之近似解，以線性彈性材料構成之固體系統靜態問題為例，傳統上以如下之代數方程組表示系統有限元素數值模型之靜態平衡：

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (2-20)$$

其中， \mathbf{K} 為對應網格各離散節點自由度之系統全域勁度矩陣、 \mathbf{p} 為靜態節點外力向量、 \mathbf{u} 為網格節點位移向量，而經過元素形狀函數之插值運算，可得固體的變形與應力場域分布。

為驗證參考映射技術實作結果之正確性，考慮以下一線性彈性材料構成之固體系統靜態二維計算例，固體為均質且各向同性之線性彈性材料，具有楊氏彈性模數 $E = 1 \text{ MPa}$ 與普松比 $\nu = 0.4$ 之材料參數，初始形狀為固定半徑之圓，外力邊界條件維持為零且幾何邊界條件為一輪廓節點之星狀位移，如圖 2-5 所示；經由有限元素分析可得固體變形後內部材料質點之靜態平衡分布，如圖 2-6 所示。

2.4.2. 參考映射技術實作

同 2.4.1 節計算例，於本章節之參考映射技術實作中，以上一章節有限元素分析結果之位移場做為參考映射技術之時間步進 $n = 0$ 時刻速度場域初始評估依據，其中以徑向基函數插值法將拉格朗日網格速度轉化成歐拉格點速度，實作參考座標演進條件，當演進達收斂，即可得各歐拉格點之參考座標分布，並可計算出相應材料質點之變形梯度，根據格林-拉格朗日應變 (Green-Lagrangian strain) 定義：

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}), \text{ 其中} \quad (2-21)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (2-22)$$

為格林應變張量 (Green's deformation tensor)，對應上一章節微小應變分量解析：



$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$ ，於變形量遠小於物體尺寸之情況，廣用於有限變形量之格林-拉

格朗日應變接近於微小應變：

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2} (F_{ki} F_{kj} - \delta_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\delta_{ki} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right) \left(\delta_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) - \delta_{ij} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \\ &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) = \epsilon_{ij} \quad \text{when } \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \ll 1 \end{aligned}$$

與有限元素分析所得結果比較，可見圖 2-7、2-8、2-9、2-10、2-11 與 2-12。值得注意的是，以參考映射技術進行分析之優點在於：固定歐拉觀察格點並不隨著高度變形之固體材料質點移動，故不如有限元素分析之拉格朗日網格般，隨著材料質點巨量移動而可能引致數值求解不易收斂的問題。

2.4.3. 收斂性分析

在本節中，將針對 2.3.2. 節所介紹的參考映射技術進行收斂性分析，藉由一系列不同大小的格點間距：41×41 ($h = 0.1$ 單位)、81×81 ($h = 0.05$ 單位)、161×161 ($h = 0.025$ 單位)、321×321 ($h = 0.0125$ 單位)、641×641 ($h = 0.00625$ 單位)，檢核解得場域對應不同格點間距的收斂速度，此處引用了 $O(h^q)$ 來表示離散數值方法收斂速度，為場域誤差絕對值小於 h^q 之常數倍，其中 h 為格點間距、 q 為收斂速度階數：

$$q \approx \frac{\log\left(\frac{e_{new}}{e_{old}}\right)}{\log\left(\frac{h_{new}}{h_{old}}\right)} \quad (2-23)$$

其中 h_{new} 與 h_{old} 為不同大小的格點間距、 e_{new} 與 e_{old} 為其相對應的誤差，即 $q = 1$ 表示場域的收斂速度為線性， $q = 2$ 表示場域的收斂速度為二階，以此類推。

而誤差(e)的計算方式為：以加總所有固體格點上的絕對值場域除以固體格點總數作為場域的指標，令1281×1281 的格點配置所得計算結果做為基準場域，不同的

格點配置之場域減去基準場域的絕對值除以基準場域即為該格點配置的場域誤差。

在此將以 1281×1281 的格點配置所得計算結果做為解析基準，首先對參考座標場域 ξ 進行分析，由圖 2-13 可得，參考映射技術方法之參考座標計算具有二階的收斂速度，但尚不及三階收斂程度，圖中 h^1 、 h^2 、 h^3 分別為對網格步長具有一、二與三階的完美收斂速度。

接而對參考座標梯度場域 $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ （即其雅各比矩陣）進行收斂性分析，由(圖 2-14)可得參考座標梯度場域計算具有一階的收斂速度，但尚不及二階收斂速度，故此可知本方法使用中央有限差分法進行參考座標以及材料質點應力之位置梯度場域為可行，對應於格點間距大小，參考坐標場域具有二階的收斂速度(如圖 2-13)，而參考坐標之位置梯度場域亦具有一階的收斂速度(如圖 2-14)。

2.5. 擬靜態分析

在連體力學中，擬靜態荷載是指與時間有關的荷載序列，但時間序列間隔足夠地慢，以致系統慣性效應可以忽略，即系統慣性力不計。同 2.4 節的靜態模擬計算例，本章節使用參考映射技術進行擬靜態分析，本例設定至已知最終變形共歷時 1 秒，並根據介於 0 至 1 秒之時間參數以線性比例給定固體材料輪廓節點的位移邊界條件(如圖 2-15)，並將此擬靜態變形過程分為 5 個時間序列步數，即一個時間步長為 0.2 秒，由參考映射技術解析出各時間點之格林-拉格朗日應變分量 E_{11} 場域結果為圖 2-16。

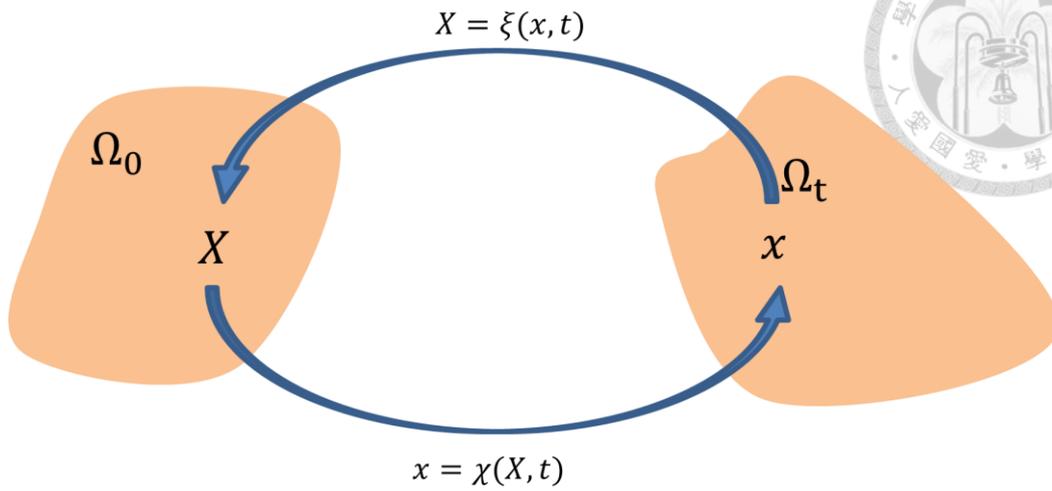


圖 2-1 運動函數 $\chi(X, t)$ 與映射函數 $\xi(x, t)$

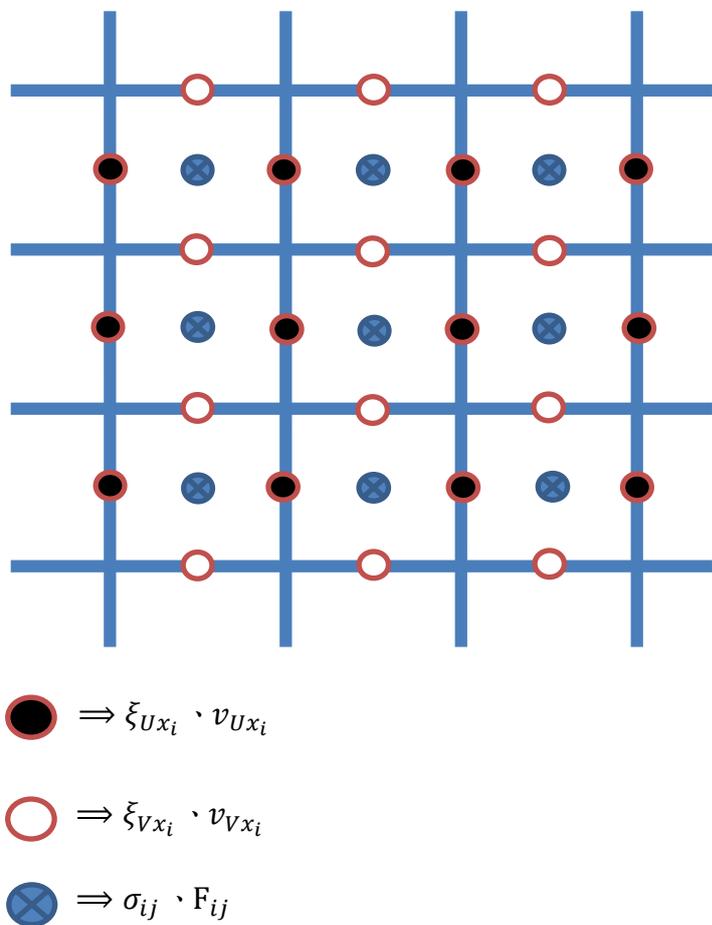


圖 2-2 參考座標技術場域分布：包含參考座標、速度、應力與變形梯度場

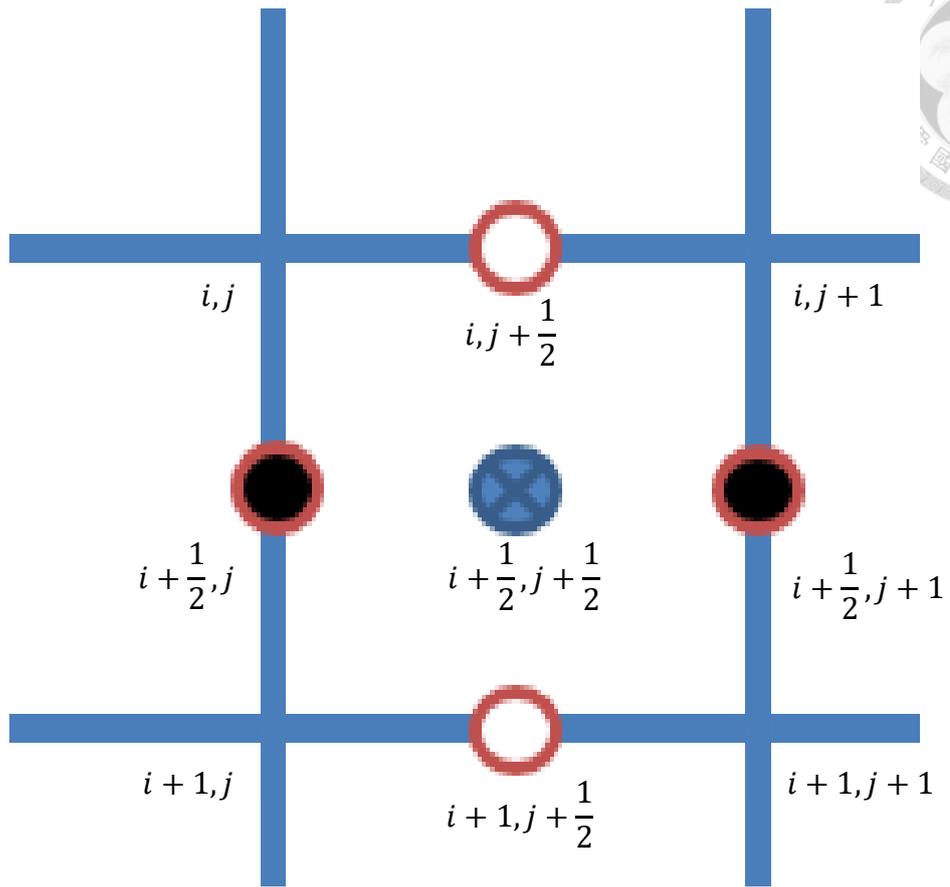


圖 2-3 參考座標技術場域分布：包含參考座標與變形梯度場

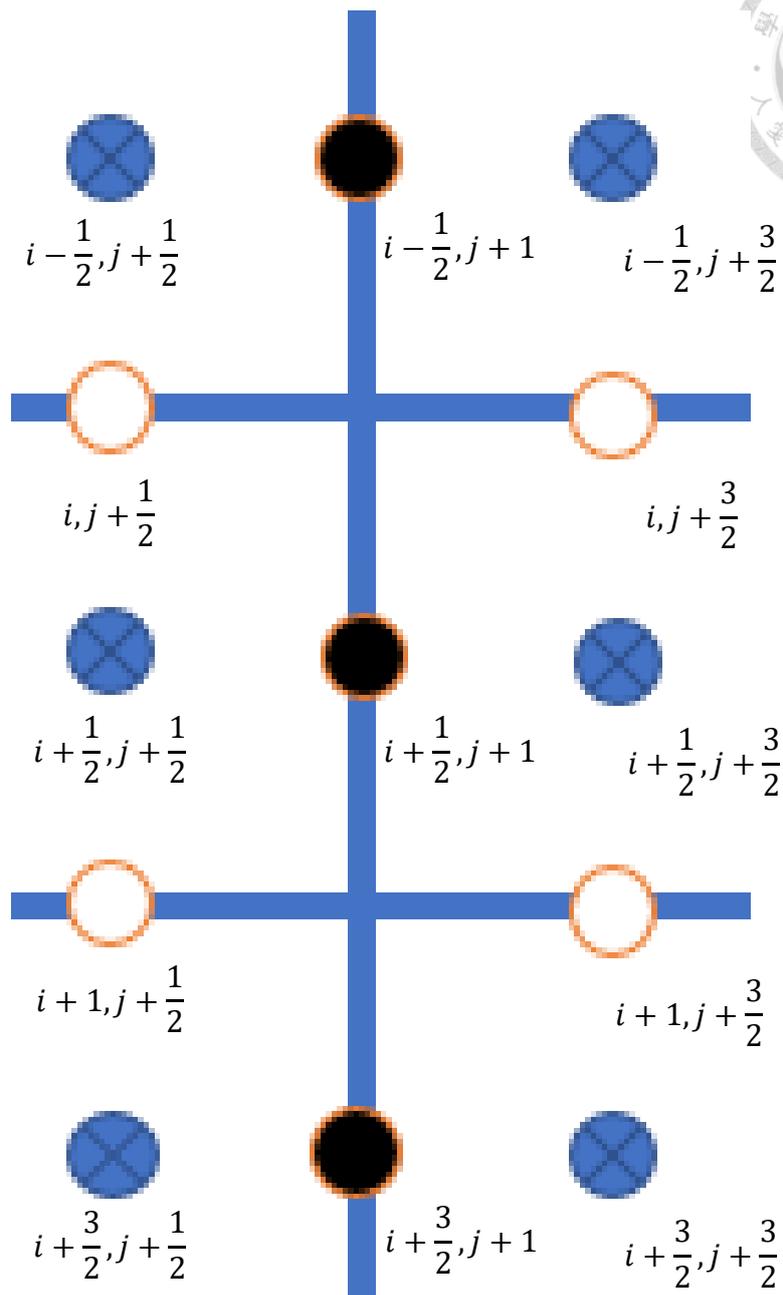


圖 2-4 參考座標技術場域分布：包含速度與應力場

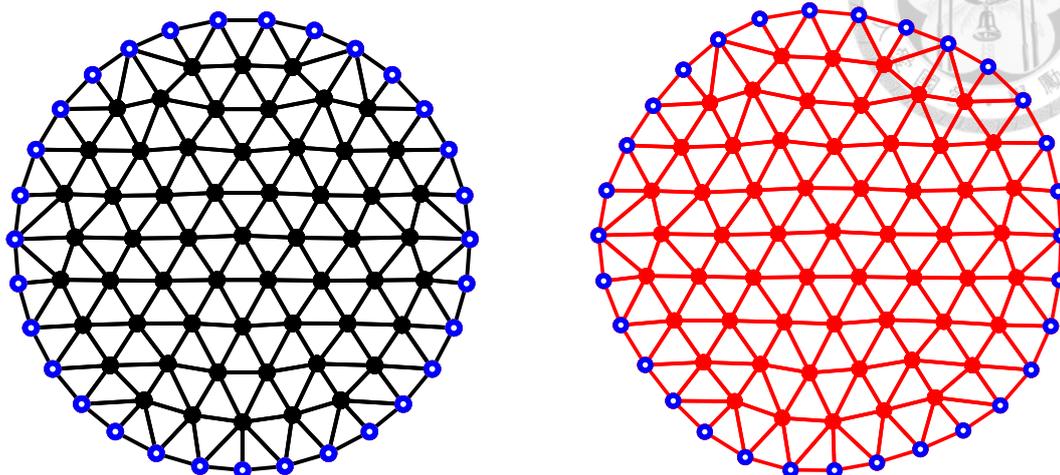


圖 2-5 (左) 變形前的固體節點分布、(右) 變形後的固體節點分布

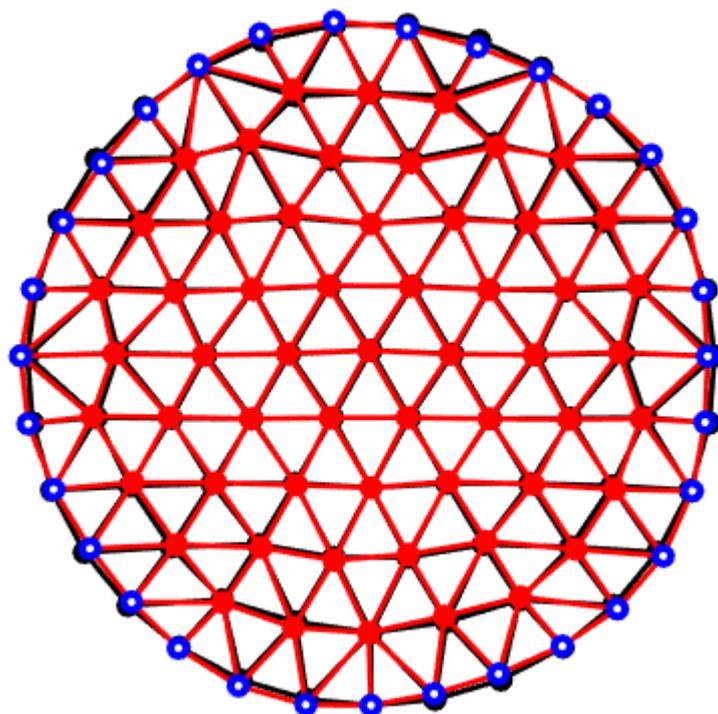


圖 2-6 變形前與變形後節點位置比較 (黑色為變形前、紅色為變形後)

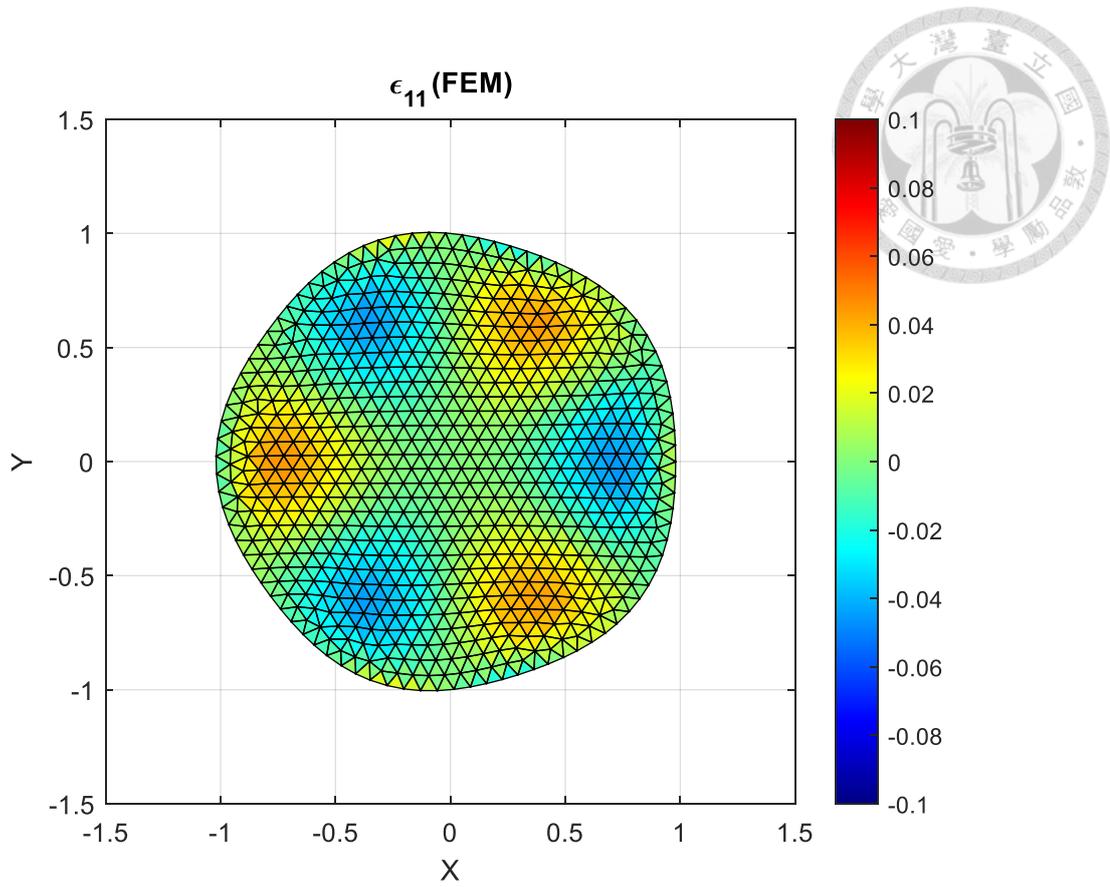


圖 2-7 有限元素法計算之固體 ϵ_{11} 應變

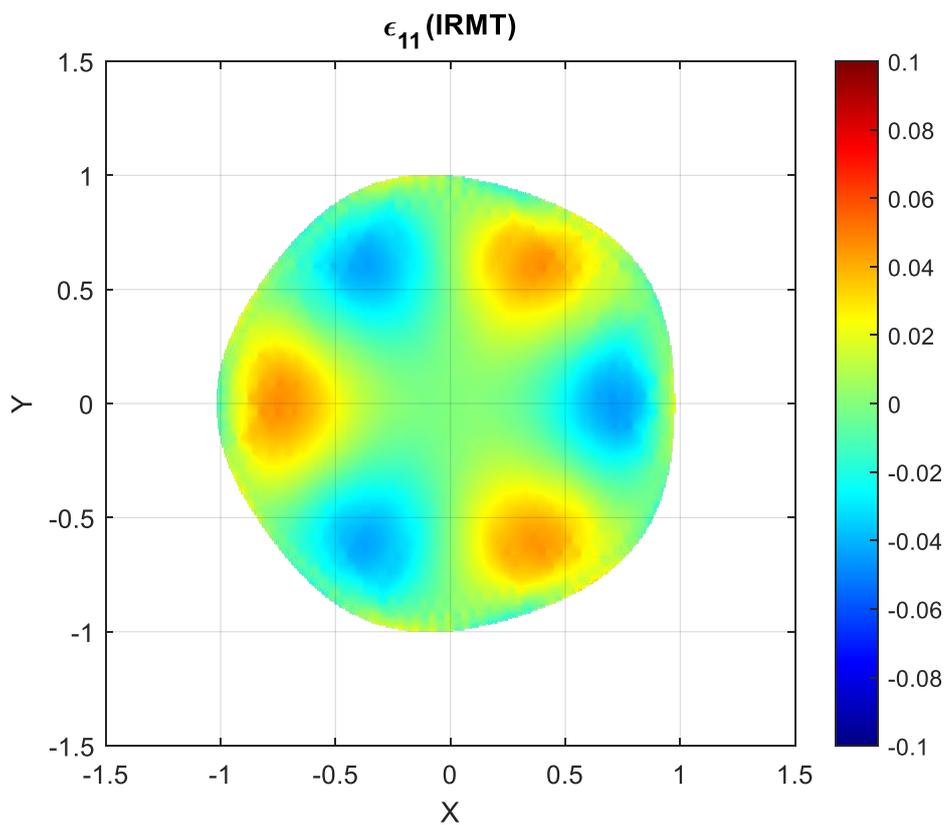


圖 2-8 參考映射技術計算之固體 ϵ_{11} 應變

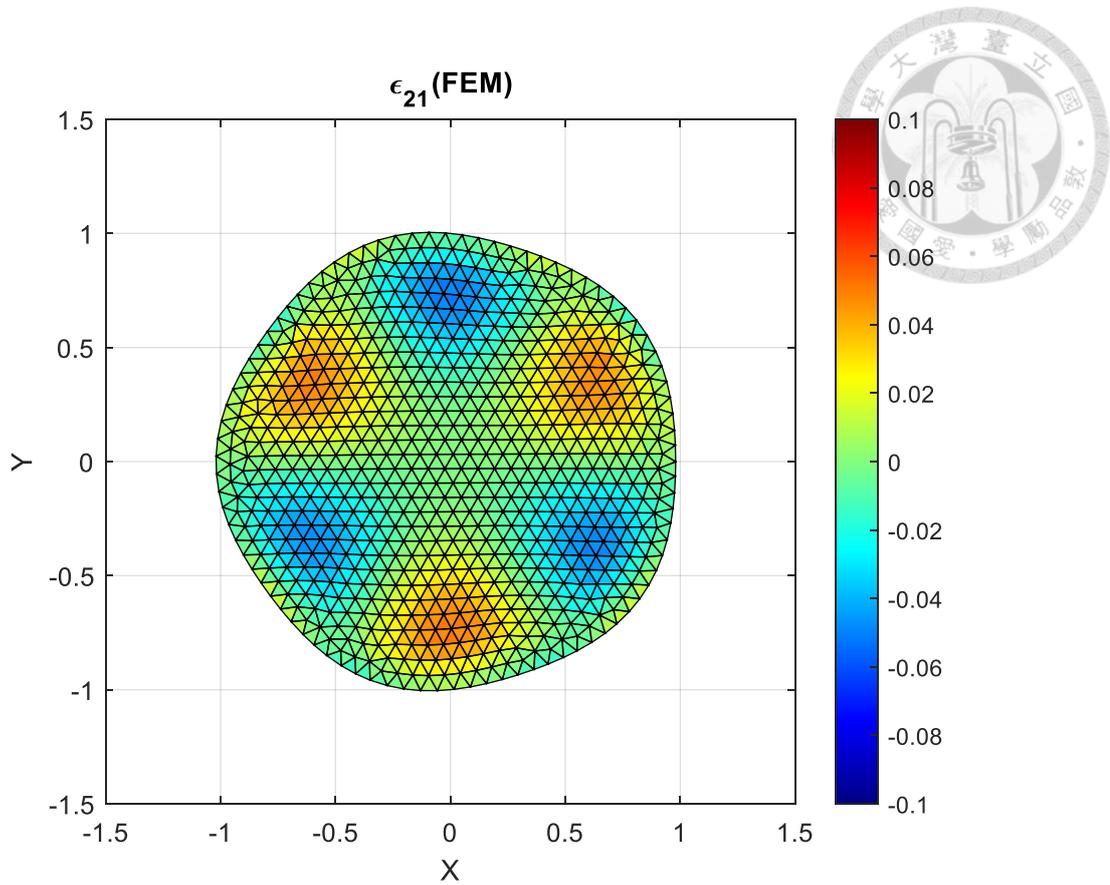


圖 2-9 有限元素法計算之固體 ϵ_{21} 應變

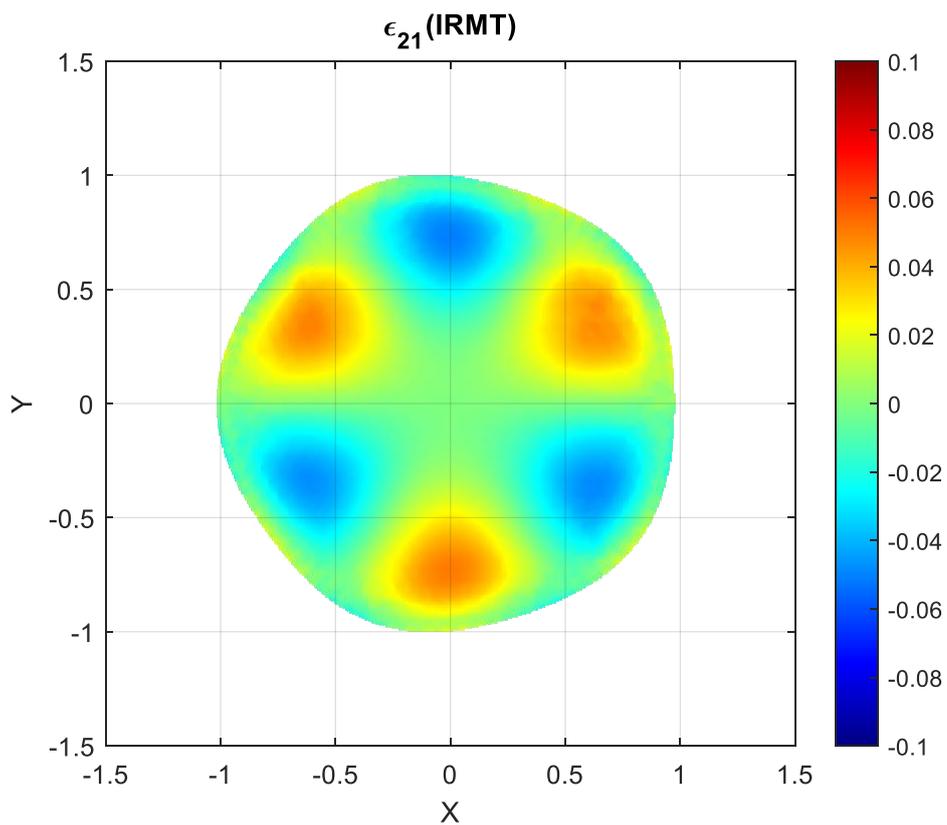


圖 2-10 參考映射技術計算之固體 E_{21} 應變

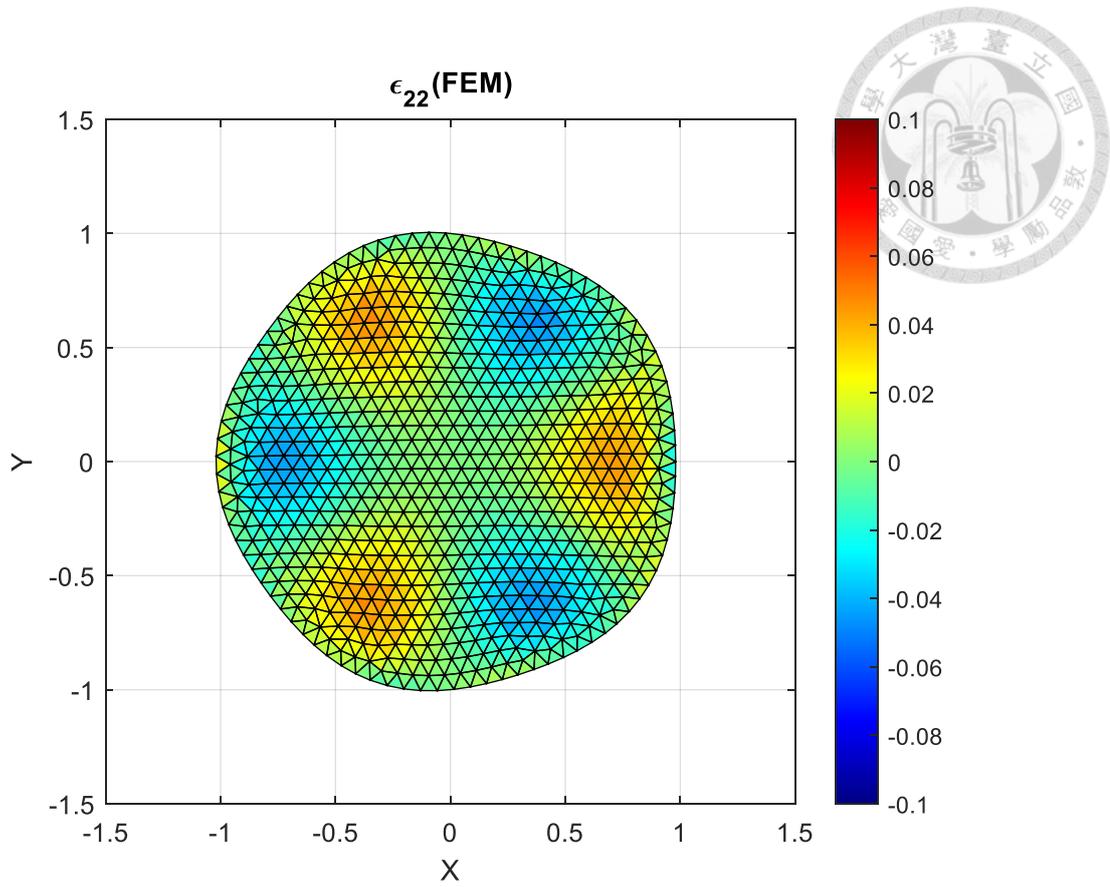


圖 2-11 有限元素法計算之固體 ϵ_{22} 應變

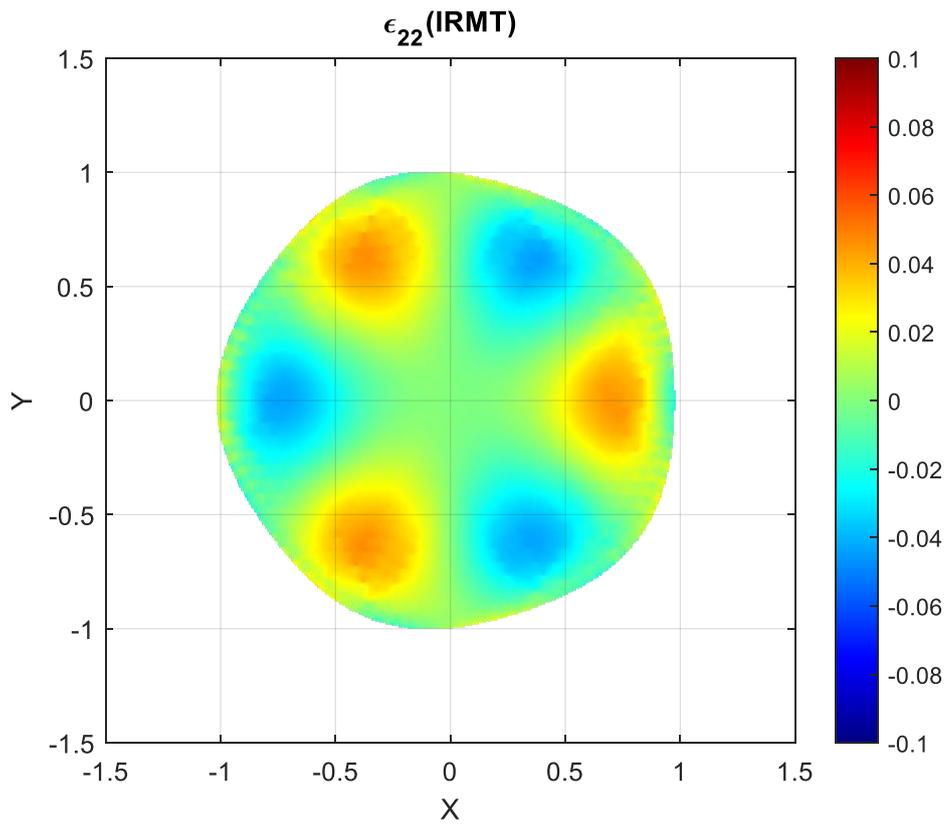


圖 2-12 參考映射技術計算之固體 E_{22} 應變

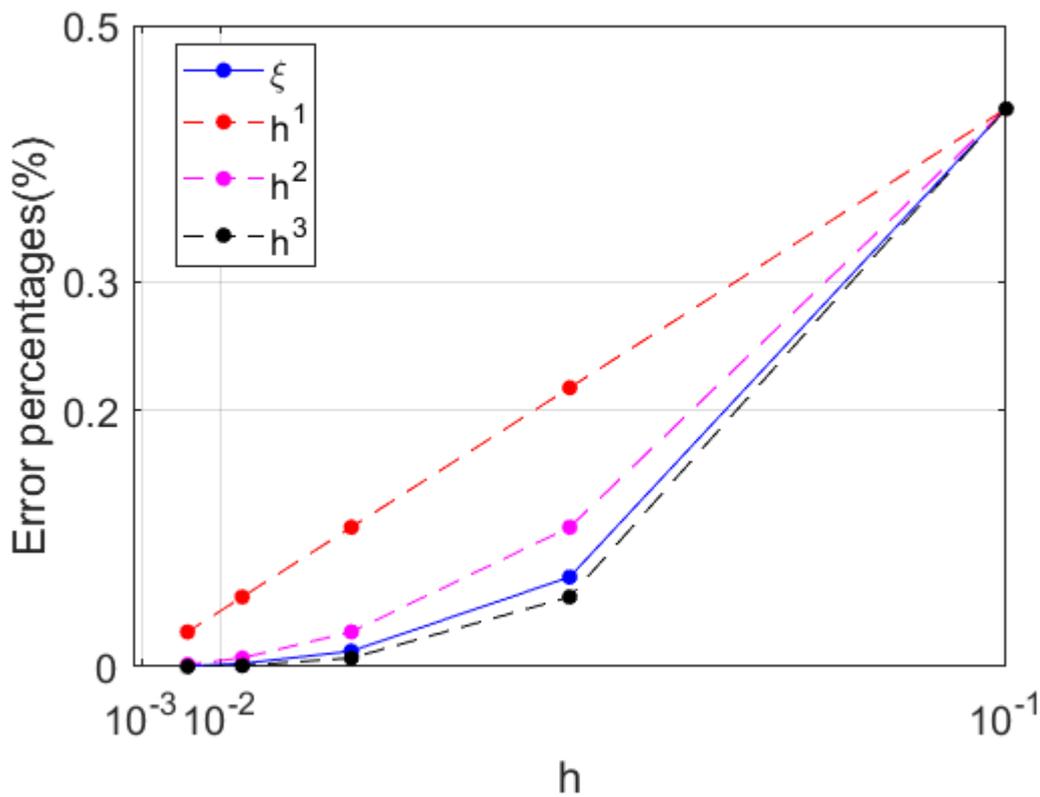


圖 2-13 參考坐標場域之誤差百分比、收斂速度比較

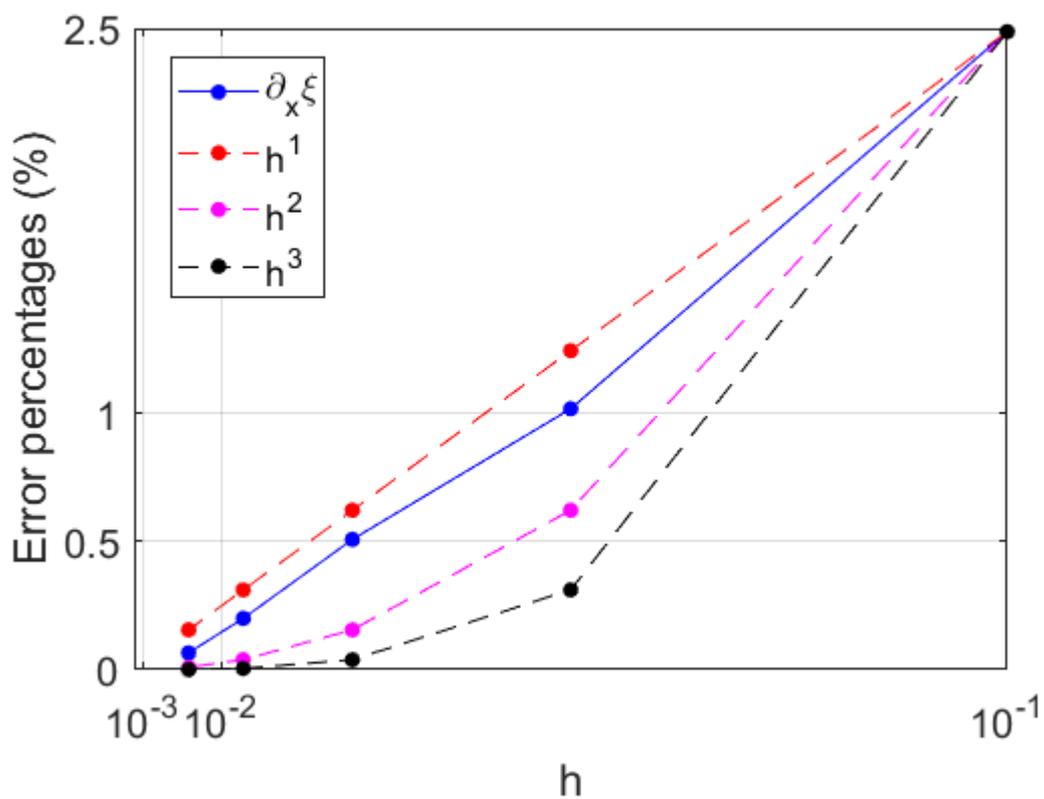


圖 2-14 參考座標的梯度場域之誤差百分比、收斂速度比較

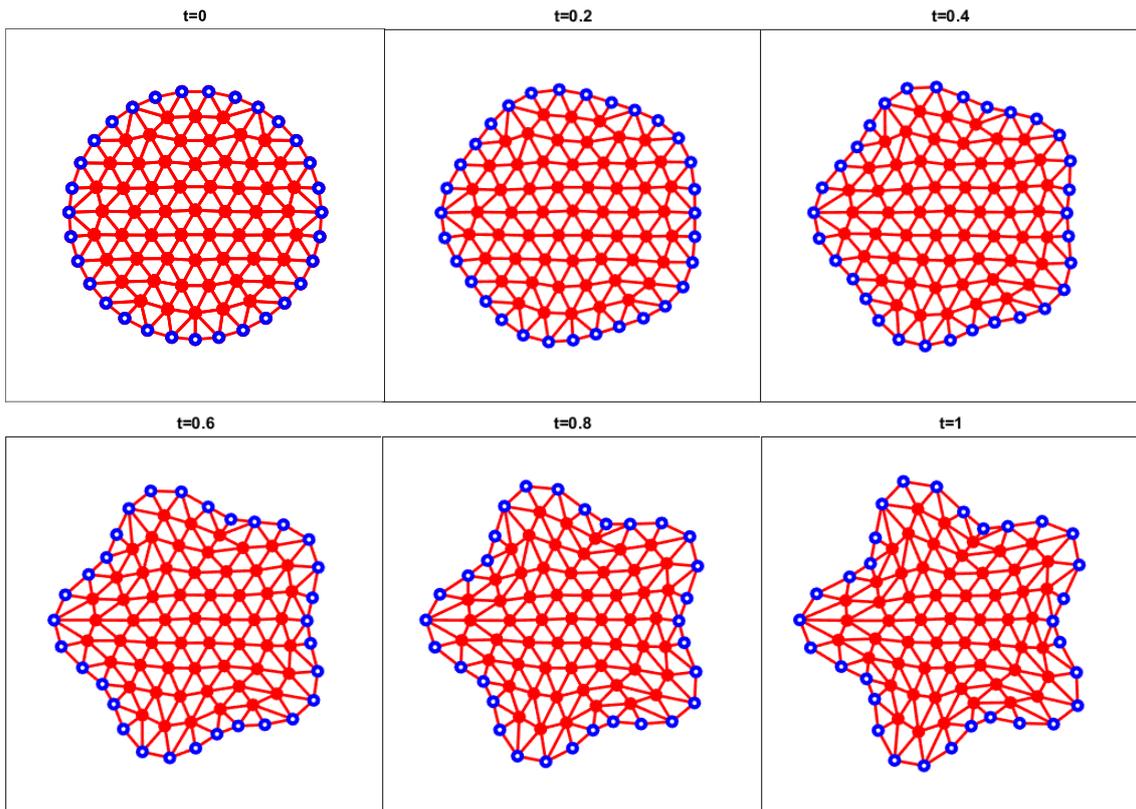


圖 2-15 固體材料擬靜態變形分析

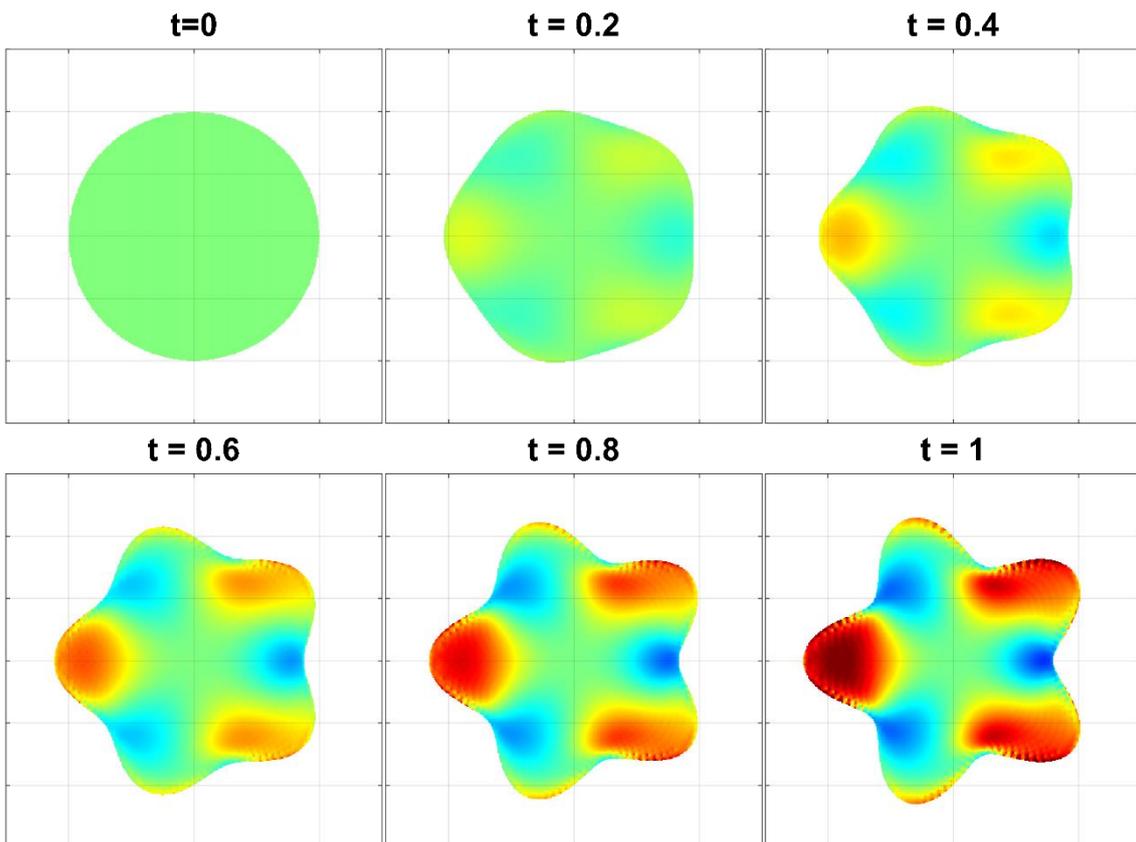


圖 2-16 參考映射技術解析所得固體格林-拉格朗日應變（擬靜態變形過程）

第三章 浸潤式參考映射技術



本論文提出浸潤式參考映射技術 (Immersed reference mapping technique, 簡記為 IRMT), 以參考坐標技術 (RMT)、浸潤式有限元素法 (IFEM) 為理論基礎, 並融合數個應用數學方法, 包含: 水平集函數、有限元素法、有限差分法、徑向基函數插值與共軛梯度法等將固體材料分布場域解析於歐拉空間中, 搭配原嵌於歐拉格點之流場求解器, 使得流固耦合問題可以完全在歐拉空間中進行求解, 可大幅免去諸多流體系統於歐拉與固體系統於拉格朗日空間轉換與資訊交換的計算成本, 為本研究發展出一新式完全歐拉式流固耦合之分析與計算方法。

本章將完整介紹浸潤式參考映射技術的核心概念並且建立強形式控制方程式之數值直接分析程序。

3.1. 固體場域與流體場域定義

首先定義場域 Ω 為整體歐拉格點之二維場域 (如圖 3-1), 綜觀研究文獻, 不同的流固耦合方法對流體、固體場域具有不同的定義方法。當設定固體為完全剛性材料組成, 流體與固體場域分別被定義為如圖 3-2 所示與 (3-1) 式所述:

$$\Omega^f = \Omega / \Omega^s \quad (3-1)$$

流體場域為 Ω 與 Ω^s 的差集, 在計算流體場域時僅把固體邊界界定為流體場域的邊界, 且由於固體為剛性體所致, 於流體與固體界面上, 無任何水平與垂直方向流場產生, 且尚未涉及耦合力場機制。

而後隨著浸潤式邊界法 (Immersed boundary method) 的發展, 流固耦合力學研究拓展至可變形固體的範疇, 流體與固體場域之定義與所示和(3-1)所述相同, 且由於固體為彈性體所致, 於流體與固體界面上, 存在流場分布, 且與固體運動相容 (Compatible), 且存在固體變形與流體流場相互干涉之界面耦合力分布 (如圖 3-3 紅色曲線所示)。

本論文研究發展出一新式完全歐拉式流固耦合之分析與計算方法, 結合參考



映射技術與浸潤式有限元素法理論，如同浸潤式邊界法，設定一個不可壓縮的可變形固體場域 Ω^S 完全浸潤於一不可壓縮流體當中，而於本研究方法中，採用與浸潤式有限元素法理論相同之分析場域設定：

$$\Omega^f = \Omega \tag{3-2}$$

$$\Omega^S = \Omega \cap \Omega^S \tag{3-3}$$

而實際流體佔據的區域為 Ω / Ω^S 。

相較於浸潤式邊界法，在本研究方法中，流固耦合力分布區域 $\Omega^{S'}$ 完全散佈於固體區域，即 $\Omega^{S'} = \Omega^S$ ，而非僅存在於流體與固體界面上（如圖 3-4 所示），為解析出完全散佈於固體場域之流固耦合力場，對於流體和固體在 Ω^S 中的同空間共存之設置，在滿足流體與固體之間機械平衡與變形乃至運動諧和之條件下，需在連體力學之動量方程式和連續設定式進行進一步推導。

而相較於浸潤式有限元素法，在本研究方法中，固體力學場域解析是使用歐拉固定格點系統，而非使用隨材料質點變形或運動而移動之拉格朗日網格，由於本論文研究設定流體與固體材料均為不可壓縮，故可將 Ω 視為一整體具有符合材料連續且不可壓縮的連續體速度分布場域空間：於流體場域求解方面，對於完整之 Ω 場域空間，採用歐拉固定格點系統，在滿足邊界條件下進行未知流場求解；於固體場域求解方面，對於 Ω^S 場域空間，亦採用歐拉固定格點系統，以前一章節所述參考映射技術，在滿足流固之連體運動諧和條件下，步進式地進行未知參考座標場域求解，並以顯式方式求得材料質點變形梯度 \mathbf{F} 與應力 $\boldsymbol{\sigma}$ ，進而反饋至固體變形與流體流場相互干涉之耦合力場分布。

3.2. 參考座標與水平集函數

本技術沿用參考映射技術中所提出的參考座標概念（詳見 2.1.節），融合參考座標與有向距離函數（Sign distance function 簡記為 SDF），本研究定義出一個不僅能追蹤流體與固體交界，亦能解析固體變形狀態之水平集函數。



綜觀文獻研究，水平集方法是一種常使用於界面追蹤的演算技術，其優點之一在於水平集函數可以在歐拉格點上進行演進，故在歐拉空間中，水平集方法成為隨時間變化之連續體的有力模型定義工具，即便物體變形量相當巨大，乃至是一分為二，水平集方法都能準確地追蹤連體系統的輪廓形狀。

在此使用一個簡單的範例來介紹水平集方法的核心概念，如(圖 3-5)所示。水平集函數 $\phi(x, y)$ 為一個曲面， $\phi(x, y) = 0$ 表示以一個函數高度為零的取值平面與水平集函數相交所得曲線，故水平集方法意味著將平面上的封閉曲線 L 表示為 $\phi(x, y)$ 的零水平集，如 (3-4) 式所述：

$$L = \{(x, y) | \phi(x, y) = 0\} \tag{3-4}$$

而在水平集函數的定義方面，本技術使用有向距離函數定義出對應特定平面封閉輪廓之水平集函數。假設固體的初始形狀為一個圓心座標在 $(x_c = 0, y_c = 0)$ 、半徑為 r 之圓形，圓形邊界的封閉曲線可定義為：

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2 \tag{3-5}$$

根據(3-5)得知：

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - r < 0 & (x, y) \text{ 在圓形內部} \end{cases} \tag{3-6}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - r > 0 & (x, y) \text{ 在圓形外部} \end{cases} \tag{3-7}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - r = 0 & (x, y) \text{ 在圓形邊界} \end{cases} \tag{3-8}$$

故水平集函數 $\phi(x, y)$ 可以被定義為：

$$\phi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - r \tag{3-9}$$

利用以上特性，水平集函數在浸潤式參考映射技術中被使用來區分材料質點當前的材料屬性： $\phi(x, y, t) > 0$ 表示此材料點為流體， $\phi(x, y, t) < 0$ 表示此材料點為固體，而 $\phi(x, y, t) = 0$ 則表示此材料點為固體與流體之材料界面。

$$\begin{cases} \phi(x, y, t) > 0 & x \in \text{流體} \end{cases} \tag{3-10}$$

$$\begin{cases} \phi(x, y, t) < 0 & x \in \text{固體} \end{cases} \tag{3-11}$$

$$\begin{cases} \phi(x, y, t) = 0 & x \in \text{流體與固體交界} \end{cases} \tag{3-12}$$



3.3. 歐拉空間的流體與固體力學控制方程式

本節將介紹在歐拉空間中流體和固體的運動方程式，藉由浸潤式分析，推導出流固耦合力解析式與提出參考座標和水平集函數的歐拉演進方程式，以及自以上方程式中衍生出流固耦合力學問題須滿足之各控制方程式。

3.3.1. 運動力學

於歐拉空間中，包括流體與固體之連體系統皆須滿足以下守恆律，包括了質量守恆、線動量守恆與角動量守恆)：

$$\frac{d\rho}{dt} + v_i \rho_{,i} + \rho v_{i,i} = 0 \quad (3-13)$$

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{1}{\rho} (\sigma_{ij,j} + f_i^{ext} + \rho g_i) \quad (3-14)$$

$$\sigma = \sigma^T \quad (3-15)$$

其中， ρ 代表材料的密度、 v 代表空間速度場、 σ 代表柯西應力場、 f_i^{ext} 代表外力場，由於本論文研究設定流體與固體材料均為不可壓縮，故流體的速度場需要額外滿足 (3-16)式之材料連續條件：

$$v_{i,i} = 0 \quad (3-16)$$

3.3.2. 流固耦合力之推導

本論文之固體場域解析與流體場域計算共用完全相同的歐拉格點設置與格點速度資訊：在固體場域方面，由水平集函數與參考座標分別追蹤固體輪廓變化與材料變形分佈，並以格點速度場更新水平集函數 ϕ 與參考座標 ξ (詳見 3.3.5 節)；在流體場域方面，根據浸潤式分析基礎，計算流體場域定義為實質流體與浸潤其中之固體所佔據空間總和，即全域空間，在固體浸潤空間中，即使由於材料連續分佈條件，固體質點與流體質點之移動速度相同，但因為固體與流體材料之機械性質相

異，故兩材料在格點上具有固有之線動量差異，本論文基於浸潤式連體理論，以流體與固體線動量差異分佈求得流固耦合力場，以此浸潤固體引致之流固耦合力場更新全域空間之速度場分佈，進而可用以固體場域水平集函數與參考座標之演進。

由(2-5)可得知，連續體材料質點之慣性力應與材料內應力 $\sigma_{ij,j}$ 、外力刺激 f_i^{ext} 達成平衡，假設固體的密度為 ρ^s 、流體的密度為 ρ^f ，即在 Ω^s 場域空間中 $\rho = \rho^s$ ，而在 Ω^f 場域空間中 $\rho = \rho^f$ ，因而可將(2-5)式之慣性力項拆為兩部分：

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \begin{cases} \rho^f \frac{Dv_i}{Dt} & x \in \Omega^f / \Omega^{s'} \\ \rho^f \frac{Dv_i}{Dt} + (\rho^s - \rho^f) \frac{Dv_i}{Dt} & x \in \Omega^{s'} \end{cases} \quad (3-17)$$

其中， $\Omega^{s'}$ 代表固體場域 Ω^s 之流固耦合力映射到流固共存分析場域空間 (即 Ω^s 浸潤於 Ω^f 中之區域)、 $\Omega^f / \Omega^{s'}$ 表示全流體場域 Ω^f 扣除 $\Omega^{s'}$ 的區域；再者對外力項進行討論，考慮環境力場 \mathbf{g} (如重力場)，將外力項亦拆為兩部分：

$$f_i^{ext} = \begin{cases} \rho^f g_i & x \in \Omega^f / \Omega^{s'} \\ \rho^f g_i + (\rho^s - \rho^f) g_i & x \in \Omega^{s'} \end{cases} \quad (3-19)$$

柯西應力的導數項也可以被分為：

$$\sigma_{ij,j} = \begin{cases} \sigma_{ij,j}^f & x \in \Omega^f / \Omega^{s'} \\ \sigma_{ij,j}^f + \sigma_{ij,j}^s - \sigma_{ij,j}^f & x \in \Omega^{s'} \end{cases} \quad (3-21)$$

由於實際流體佔據的區域為 Ω / Ω^s ，且於計算空間為完整 Ω 場域，即 $\Omega^f = \Omega$ ，故在 Ω^s 場域中為流體和固體同空間共存之設置，在基於連體系統之線動量守恆律(2-5)且綜合(3-17)至(3-22)，可以將流固耦合力定義為：

$$f_i^{FSI} = \begin{cases} 0 & x \in \Omega^f / \Omega^{s'} \\ -(\rho^s - \rho^f) \frac{Dv_i}{Dt} + \sigma_{ij,j}^s - \sigma_{ij,j}^f + (\rho^s - \rho^f) g_i & x \in \Omega^{s'} \end{cases} \quad (3-23)$$

其中， f_i^{FSI} 表示流固耦合力，FSI 代表流固耦合 (Fluid-structure interaction)，

因此包含流固耦合力場之全流體場域之控制方程式(原(2-5))為：

$$\rho^f \frac{Dv_i}{Dt} = \sigma_{ij,j}^f + \rho^f g + f_i^{FSI} \quad x \in \Omega^f \quad (3-25)$$



3.3.3. 流體控制方程式

在歐拉空間下空間速度場的材料時間導數可以被分為時間導數項與對流項：

$$\frac{Dv_i}{Dt} = v_{i,t} + v_j v_{i,j} \quad (3-26)$$

將(3-26)代入(3-25)，流體控制方程式可以寫為：

$$\rho^f (v_{i,t} + v_j v_{i,j}) = \sigma_{ij,j}^f + \rho^f g + f_i^{FSI} \quad (3-27)$$

$$v_{i,i} = 0 \quad (3-28)$$

假設流體為不可壓縮且等向性的牛頓流體，流體的黏滯應力可寫為：

$$\tau_{ij}^f = \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (3-29)$$

其中 μ 為流體黏滯係數，而連體之柯西應力通常可以被分為靜應力(Hydrostatic stress)與偏應力(Deviatoric stress)， σ^{hyd} 代表靜應力，只改變材料單元大小、 σ^{dev} 代表偏應力，只改變材料單元形狀；故流體中壓力 p 與黏滯應力 τ_{ij}^f 分別為其柯西應力之靜應力與偏應力：

$$\sigma_{ij}^f = \sigma_{ij}^{\text{hyd}} + \sigma_{ij}^{\text{dev}} = -p\delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (3-30)$$

由於在二維空間中，偏應力須滿足以下條件：

$$\sigma_{11}^{\text{dev}} + \sigma_{22}^{\text{dev}} = 0 \quad (3-31)$$

根據(3-16)式，即可驗證：

$$\tau_{11}^f + \tau_{22}^f = 2\mu(v_{1,1} + v_{2,2}) = 2\mu(v_{i,i}) = 0 \quad (3-32)$$

3.3.4. 固體控制方程式

固體場域 Ω^S 中由於固體亦使用歐拉空間描述，根據(2-5)式，空間速度場的材料時間導數可以被分為時間導數項與對流項，故可以將固體內部的力平衡方程式寫為：

$$\rho^s (v_{i,t} + v_j v_{i,j}) = \sigma_{ij,j}^s + \rho^s g_i \quad (3-33)$$



當為滿足固體不可壓縮的需求，對於線性彈性材料而言，體擴張性 (Dilation) 定義為單位體積之體積變化 (即為體應變， Volumetric strain)

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \epsilon_{ii} \quad (3-34)$$

顧及材料組成律：

$$\epsilon_{ii} = K\sigma^s \quad (3-35)$$

其中 K 為體模數 (Bulk modulus)，且

$$\sigma^s = \frac{\sigma_{ii}^s}{2} (i = 1, 2 \text{ in } 2D) \text{ 或} \quad (3-36)$$

$$\sigma^s = \frac{\sigma_{ii}^s}{3} (i = 1, 3 \text{ in } 3D) \quad (3-37)$$

為固體材料單元平均應力，在滿足固體不可壓縮的設定下，可設置材料泊松比 (Poisson's ratio) 接近 0.5 之理論值，即：

$$\nu \rightarrow 0.5 \quad (K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \rightarrow \infty) \quad (3-38)$$

抑或是對於柯西靜應力項引致體積變化即不敏感之固體材料，在進行流固耦合運動力學 (Kinematics) 分析時，可合理地僅考量由固體柯西偏應力項引致之材料變型狀態。

3.3.5. 參考座標和水平集函數之演進

本章節建立用以更新參考座標和水平集函數之控制方程式：首先在歐拉系統中，在由流體控制方程式求解出於某一時間步進之流場分布後，為準確解析出固體材料質點之運動或變型過程，藉由追蹤其材料質點之參考座標恆定特性，即各質點參考座標之材料時間導數始終保持為零：

$$\frac{D\xi_i}{Dt} = \frac{d\xi_i}{dt} + v_j \xi_{i,j} = 0 \quad (3-39)$$

可求得次一時間步進之參考映射函數，為隨質座標與對應在運動或變型過程前參考座標之映射解析技術，對於任意二維歐拉固定計算格點位置 (x_1^0, x_2^0) 上，即： $X_1 = \xi_1(x_1^0, x_2^0)$ 且 $X_2 = \xi_2(x_1^0, x_2^0)$ ，其中 ξ_1 與 ξ_2 為更新至次一時間步進之參考

映射函數， X_1 與 X_2 為此歐拉格點映射之參考座標；再回顧 3.2 節之水平集函數定義，考慮一固體初始材料分布之輪廓可由水平集函數 $\phi^0(x_1^0, x_2^0)$ 描述，在 $t = 0$ 時，由計算格點位置直接映射至參考座標，即 $\phi^0(X_1, X_2) = \phi^0(x_1^0, x_2^0)$ ；在 $t > 0$ 時，由該時刻之參考映射函數可得

$$\phi^t(x_1^0, x_2^0) = \phi^0(\xi_1(x_1^0, x_2^0), \xi_2(x_1^0, x_2^0)) \quad (3-40)$$

當 $\xi_1(x, y, t)$ 與 $\xi_2(x, y, t)$ 隨時間演進時，固體輪廓水平集函數 $\phi^t(x_1^0, x_2^0)$ 亦可經由參考映射函數同步逕行演進；當 $\phi^t(x_1^0, x_2^0)$ 非為顯式函數，而為離散數值分布，須以插值運算來估計(3-40)適中更新之 $\phi^t(x_1^0, x_2^0)$ ；為提高計算效率且免去插值引致之數值誤差，本論文研究提出可透過數值求解此輪廓水平集函數之漢米爾頓-雅各比 (Hamilton-Jacobi) 偏微分方程式： $\frac{D\phi^t}{Dt} + v \cdot \nabla \phi^t = 0$ ，對應 t 時刻流體速度場域 v ，進行一單位時間演進，以求得次一時刻之 $\phi^t(x_1^0, x_2^0)$ [17]。綜上所述，(3-39) 式與 (3-40) 式為求解全歐拉式浸潤於流體中可變形固體之流固耦合問題所仰賴核心控制方程式，得以實現在歐拉系統中解析相互干涉之流場分布演進與固體運動變形以及精準地追蹤流體與固體材料間邊界位置變化。

3.4. 流體與固體邊界之處理

第二章的固體變形靜態與擬靜態範例中，尚未針對邊界進行特別處理。但為了使流固耦合的模擬可以更加精確，本節將介紹兩種方法處理流體與固體的邊界。藉由這兩種方法，可以將已知的固體內部流固耦合力延展至整個固體場域(包含內部與邊界)。

3.4.1. 共軛梯度法

共軛梯度法(conjugate gradient method) 最初由 Hestenes 和 Stiefel 於 1952 年為求解線性方程組而提出，是一個適用於實對稱正定矩陣的線性方程組數值解法。共軛梯度法的核心概念為共軛、梯度，其中共軛可以使此方法迅速收斂、梯度則提



供正交性。在面對龐大的矩陣時往往無法使用直接法求解，然而採用迭代方式計算的共軛梯度法可以大大的減少計算成本，共軛梯度數值方法如下。

令 A 為 $n \times n$ 實對稱正定矩陣 ($A^T = A$ 、 $\forall x \neq 0$ $x^T A x > 0$)、 b 為非零向量、 $P = [p_1 \cdots p_n]$ 為一組相對於 A 正交的集合，線性方程組 $Ax = b$ 的精確解 x^* 可以表示為 $x^* = A^{-1}b$ 令 x^* 為：

$$x^* = \alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_n p_n = P\alpha \tag{3-41}$$

其中 $\alpha = [\alpha_1, \cdots, \alpha_n]^T$ ，將線性方程組 $Ax = b$ 的等號兩邊各乘上 P^T 結合上式可以得到：

$$P^T A P \alpha = P^T b \tag{3-42}$$

由於 P 為相對於 A 正交的集合，上是可以寫為：

$$\begin{bmatrix} P_1^T A P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_n^T A P_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^T b \\ \vdots \\ P_n^T b \end{bmatrix} \tag{3-43}$$

故 α 可以寫成

$$\alpha_i = \frac{P_i^T b}{P_i^T A P_i}, \quad i = 1, \cdots, n \tag{3-44}$$

假設 x 初始值為 x_0 (可以訂 x_0 為任意數)，如果想要使用迭代方法找出近似解必須將 (3-41) 改寫為：

$$x^* - x_0 = \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_{n-1} p_{n-1} \tag{3-45}$$

$$x_j - x_0 = \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_{j-1} p_{j-1}, \quad j > 0 \tag{3-46}$$

$$x_{j+1} = x_j + \alpha_j p_j \tag{3-47}$$

將線性方程組 $Ax = b$ 的等號兩邊各乘上 P_j^T 結合上式可以得到：

$$P_j^T A (x^* - x_j) = P_j^T A (\alpha_j p_j + \cdots + \alpha_{n-1} p_{n-1}) = \alpha_j P_j^T A p_j \tag{3-48}$$

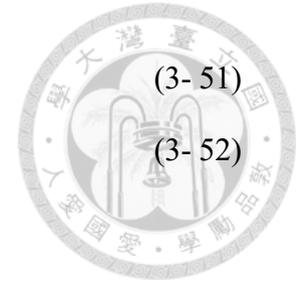
故 α 可以寫成：

$$\alpha_j = \frac{P_j^T A (x^* - x_j)}{P_j^T A p_j} = \frac{P_j^T (b - A x_j)}{P_j^T A p_j} = \frac{P_j^T r_j}{P_j^T A p_j} \tag{3-49}$$

其中， $r_j = b - A x_j$ 為殘值。假設 P_{j+1} 可以寫為 r_0, \cdots, r_{j+1} 的線性組合，令：

$$P_{j+1} = r_{j+1} + \beta_j p_j \tag{3-50}$$

將上式轉置在乘上 $A p_j$ 可以得到：



$$P_{j+1}^T A P_j = 0 = r_{j+1}^T A P_j + \beta_j p_j^T A P_j \quad (3-51)$$

$$\beta_j = \frac{-r_{j+1}^T A P_j}{p_j^T A P_j} = \frac{r_{j+1}^T r_{j+1}}{r_j^T r_j} \quad (3-52)$$

同整以上推導，共軛梯度迭代數值方法可以簡化為：

表 3-1 共軛梯度迭代數值方法

假設 x 初始值為 x_0 、容許誤差 $\text{tol} = x - x^*$

(1)

$$r_0 := b - A x_0$$

$$p_0 := r_0$$

$$j = 0$$

(2)

$$\alpha_j = \frac{P_j^T r_j}{P_j^T A P_j}$$

$$x_{j+1} = x_j + \alpha_j p_j$$

$$r_{j+1} = r_j - \alpha_j A p_j$$

如果 r_{j+1} 小於 tol ，則共軛梯度迭代數值方法所得到的近似解為 x_{j+1} ，並且終止

$$\beta_j = \frac{r_{j+1}^T r_{j+1}}{r_j^T r_j}$$

$$P_{j+1} = r_{j+1} + \beta_j p_j$$

$$k = k + 1$$

(3) 重複步驟二

本技術引用此方法處理固體與流體交界元素上流固耦合力場域的分布。已知純固體元素(元素四個角落的水平集函數都小於零)的流固耦合力、純流體元素(元素四個角落的水平集函數都大於零)的流固耦合力，藉由共軛梯度法得到固體流體邊界元素(元素被固體流體邊界穿越)的流固耦合力，其中純固體元素、純流體元素與固體流體邊界元素將在 3.4.2 章節中提出詳細的定義。

在此使用一個簡單的範例來解說，如(圖 3-6)所示，假設黑色實線內部元素為純固體元素、黑色虛線以外之元素為純流體元素、介於黑色實線外部與黑色虛線內部的元素為固體流體邊界元素，在共軛梯度法處理之前純固體元素上的場域為 $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$ 、純流體元素上的場域為 $f(x,y) = 0$ 、假設固體流體邊界元素上的場域為負一(圖 3-7)。經過共軛梯度法處理之後，可以發現純固體元素、純流體元素上的場域均無變化，而藉由共軛梯度法的幫忙可以計算出固體流體邊界元素上合理的場域(圖 3-8)。

3.4.2. 面積比例方法

面積比例方法藉由水平集函數的物理特性(本技術使用距離函數定義水平集函數)可以得到材料點目前屬於固體或流體、材料點與流體固體邊界的距離。有了以上特性，藉由以下方法可以計算出整個場域中各個元素的固體流體面積比例。其中， A^s 代表固體在元素中佔據的面積比例、 A^f 代表流體在元素中佔據的面積比例，本方法定義固體、流體在同一元素中佔據的面積比例總和必須為一。

回顧連體線動量守恆方程式之推導，假設元素在 x 方向與 y 方向上的長度分別為 dx 、 dy 且元素面積為 $dxdy$ ，由圖 3-9 可得元素 x 方向上的力平衡方程式可以寫為：

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x+dx)dy - \sigma_{xx}(x)dy + \tau_{yx}(y+dy)dx - \tau_{yx}(y)dx + \rho g_x dxdy \\ = \rho \frac{Dv}{Dt} dxdy \end{aligned} \quad (3-53)$$

將上(3-53)左右同除以 $dxdy$ 可以得到：

$$\frac{\sigma_{xx}(x+dx) - \sigma_{xx}(x)}{dx} + \frac{\tau_{yx}(y+dy) - \tau_{yx}(y)}{dy} + \rho g_x = \rho \frac{Dv_x}{Dt} \quad (3-54)$$

以此類推，可以得到元素在 y 方向上的力平衡方程式可以寫為：

$$\frac{\sigma_{yy}(y+dy) - \sigma_{yy}(y)}{dy} + \frac{\tau_{xy}(x+dx) - \tau_{xy}(x)}{dx} + \rho g_y = \rho \frac{Dv_y}{Dt} \quad (3-55)$$

結合(3-54)、(3-55)，可以得到連體方型元素的線動量守恆方程式與(3-14)相符。

本論文對流固耦合力的定義為：在固體與流體共用的相同格點上，因固體與流體材料之機械性質相異，使兩材料在格點上具有固有之線動量差異，本論文基於浸潤式連體理論，以流體與固體線動量差異分佈求得流固耦合力場，即須計算單位元素內固體與流體材料之線動量差異，方可定義流固耦合力場。由圖 3-10 可知：左圖為固體與流體分別佔據面積比例 A^s 與 A^f 之連體元素，右圖為與連體元素共用相同格點之純流體元素，綜合上述可知，由左圖固體佔據的三角形區域與右圖相映的三角形兩者間的線動量差異可以定義該元素之流固耦合力場。其中， a 、 b 、 c 、 d 各別代表該線段長度 ($a + b = dy$ 、 $c + d = dx$)。

由(3-53)可得純固體元素 x 方向上的力平衡方程式為：

$$\frac{\sigma_{xx}(x + dx) - \sigma_{xx}(x)}{dx} + \frac{\tau_{yx}(y + dy) - \tau_{yx}(y)}{dy} + \rho^s g_x = \rho^s \frac{Dv_x}{Dt} \quad (3-56)$$

依照圖 3-10 將純固體元素分為兩個部分，如圖 3-11 所示。其中， F 為兩交界面間之作用力。五角形區域之 x 方向上的力平衡方程式為：

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x + dx)dy - \sigma_{xx}(x)b + \tau_{yx}(y + dy)d - \tau_{yx}(y)dx + \rho^s g_x A^f dx dy \\ - F = \rho^s \frac{Dv}{Dt} A^f dx dy \end{aligned} \quad (3-57)$$

三角形區域之 x 方向上的力平衡方程式為：

$$F - \sigma_{xx}(x)a + \tau_{yx}(y + dy)c + \rho^s g_x A^s dx dy = \rho^s \frac{Dv}{Dt} A^s dx dy \quad (3-58)$$

將(3-58)乘以 $\frac{A^f}{A^s}$ 減去(3-57)可以得到：

$$\begin{aligned} F = A^s \sigma_{xx}(x + dx)dy + A^f \sigma_{xx}(x)a - A^s \sigma_{xx}(x)b + A^s \tau_{yx}(y + dy)d \\ - A^f \tau_{yx}(y + dy)c - A^s \tau_{yx}(y)dx \end{aligned} \quad (3-59)$$

將(3-59)代入(3-58)可以得到純固體元素三角形區域之 x 方向上的力平衡方程式為：

$$\begin{aligned} A^s (\sigma_{xx}(x + dx)dy - \sigma_{xx}(x)dy + \tau_{yx}(y + dy)dx - \tau_{yx}(y)dx) \\ + \rho^s g_x dx dy = \rho^s \frac{Dv}{Dt} A^s dx dy \end{aligned} \quad (3-60)$$

$$A^s \left(\frac{\sigma_{xx}(x+dx) - \sigma_{xx}(x)}{dx} + \frac{\tau_{yx}(y+dy) - \tau_{yx}(y)}{dy} + \rho^s g_x \right) = A^s \rho^s \frac{Dv_x}{Dt} \quad (3-61)$$

以此類推可以得到可以得到，純固體元素三角形區域的線動量守恆方程式為：

$$A^s \rho^s \frac{Dv_i}{Dt} = A^s \rho^s g_i + A^s \sigma_{ij,j}^s \quad (3-62)$$

式可以作為圖 3-10 中左圖三角形區域的線動量守恆方程式，以相同方式推導可以得到右圖純流體元素三角形區域的線動量守恆方程式為：

$$A^s \rho^f \frac{Dv_i}{Dt} = A^s \rho^f g_i + A^s \sigma_{ij,j}^f \quad (3-63)$$

綜合上述，元素的流固偶合力場可以定義為(3-61)與(3-62)間的動量差異：

$$f_i^{FSI} = A^s \left(-(\rho^s - \rho^f) \frac{Dv_i}{Dt} + \sigma_{ij,j}^s - \sigma_{ij,j}^f + (\rho^s - \rho^f) g_i \right) \quad (3-64)$$

以坐標系U為例，在此坐標系上存放x方向的流固耦合力 f_x^{FSI} 。如(圖 3-12)所示，黑色圓圈表示坐標系U、白色圓圈表示坐標系V，黑色圓圈相鄰的四個白色圓圈組成一元素，元素中央所存放的 f_x^{FSI} 代表此元素的平均x方向的流固耦合力，故可以將 f_x^{FSI} 定義為：

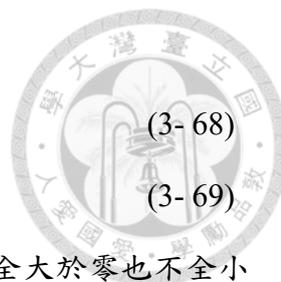
$$f_x^{FSI} = A^s \left(-(\rho^s - \rho^f) \frac{Dv_x}{Dt} + \sigma_{xy,y}^s - \sigma_{xy,y}^f + (\rho^s - \rho^f) g_x \right) \quad (3-65)$$

接下來介紹，該如何使用水平集函數定義 A^s 和 A^f ，由於 A^s 和 A^f 被定義在一個元素內，故假設固體流體邊界跨越元素時為直線。可以將所有元素分為三種情況，第一種為純固體元素(圖 3-13)，元素所有角落點的水平集函數均小於零，故純固體元素所有角落點均被判定為固體材料點，而純固體元素的固體面積比例 A^s 被定義為一、流體面積比例 A^f 被定義為零。

$$A^s = 1 \quad (3-66)$$

$$A^f = 0 \quad (3-67)$$

第二種元素為純流體元素(圖 3-14)，元素所有角落點的水平集函數均大於零，故純流體元素所有角落點均被判定為流體材料點，而純流體元素的面積比例 A^s 被定義為零、 A^f 被定義為一。



$$A^s = 0 \quad (3-68)$$

$$A^f = 1 \quad (3-69)$$

第三種為固體流體邊界元素，元素角落點的水平集函數不全大於零也不全小於零。固體流體邊界元素又可分為兩個種類，其一為固體流體邊界跨越相鄰的邊(圖 3- 15)，計算面積比例的方法如下，假設 $\phi_1 < 0$ ，且 ϕ_2 、 ϕ_3 、 $\phi_4 > 0$ 由三角形相似形概念可以得知：

$$|\phi_1| : |\phi_2| = c : d \quad (3-70)$$

$$|\phi_1| : |\phi_3| = a : b \quad (3-71)$$

假設元素的水平長度與垂直長度均為一、單位元素面積為一，則(圖 3-15)中左上三角形面積所占比例(固體面積比例)可以寫為：

$$A^s = \frac{ac}{2(A^s + A^f)} \quad (3-72)$$

$$A^f = 1 - A^s \quad (3-73)$$

已知元素邊長為一由(3-70)、(3-71)可以得到

$$a = \frac{|\phi_1|}{|\phi_1| + |\phi_3|} \quad (3-74)$$

$$c = \frac{|\phi_1|}{|\phi_1| + |\phi_2|} \quad (3-75)$$

將(3-74)、(3-75)帶入(3-72)即可得到面積比例 A^s 、 A^f 。其二為固體流體邊界跨越相對的邊(圖 3- 16)，計算面積比例的方法如下，假設 ϕ_1 、 $\phi_2 < 0$ 且 ϕ_3 、 $\phi_4 > 0$ ，由三角形相似形概念可以得知：

$$|\phi_1| : |\phi_3| = e : f \quad (3-76)$$

$$|\phi_2| : |\phi_4| = g : h \quad (3-77)$$

由於 ϕ_1 、 $\phi_2 < 0$ (圖 3- 16)中左邊的梯形為固體，右邊的梯形為流體，故固體、流體面積比例可以寫為：

$$A^s = \frac{(e + g)}{2(A^s + A^f)} \quad (3-78)$$



$$A^f = \frac{(f + h)}{2(A^s + A^f)} \quad (3-79)$$

由(3-76) 、(3-77)可以得到

$$e = \frac{|\phi_1|}{|\phi_1| + |\phi_3|} \quad (3-80)$$

$$f = \frac{|\phi_3|}{|\phi_1| + |\phi_3|} \quad (3-81)$$

$$g = \frac{|\phi_2|}{|\phi_2| + |\phi_4|} \quad (3-82)$$

$$h = \frac{|\phi_4|}{|\phi_2| + |\phi_4|} \quad (3-83)$$

將(3-80)、(3-81)、(3-82)、(3-83)帶入(3-78)、(3-79)即可得到面積比例 A^s 、 A^f 。

3.5. 數值方法

本節結合了 2.3.2.節所介紹的不考慮邊界處理的參考映射技術數值方法、RBF 插值函數、有限差分法以及有限元素法，建立了一個適用於流固耦合問題的浸潤式參考坐標技術數值方法，並在其中介紹以上各個數值工具的原理與用途，本數值方法更添加了固體流體邊界的處理使得流體控制方程式的外力項場域更加平順。

3.5.1. 場域分布

在浸潤式參考映射技術中，延續了第二章參考映射技術時的場域定義，並增加了兩個新的場域(水平集函數與流固耦合力)。如(圖 3-17)所示，座標系 $\{U\}$ 與 $\{V\}$ 格點各自存放了水平集函數 ϕ_U 、 ϕ_V ，而 x 方向與 y 方向的流固耦合力則各別存放於座標系 $\{U\}$ 與座標系 $\{V\}$ 格點中。

3.5.2. 基本步驟

本節提出一套浸潤式參考映射技術之流固耦解析與計算方法，已知在時間步數 n 時的 v^n 、 ξ^n 、 ρ^s 、 ρ^f 、 ϕ^n ，此方法將建立一系列的歐拉控制方程式為以上



場域更新至下一個時間步數($n + 1$)。其中應力場、密度場也會在每個時間步數中被更新。表 3- 2 列出了浸潤式參考映射技術在計算流固耦合問題時的步驟，其中所有的散度與梯度運算子均使用中心差分法(2.3.2.節介紹過)完成。

表 3-2 浸潤式參考映射技術之流固耦合數值方法概要

已知： v^n 、 ξ^n 、 ρ^s 、 ρ^f 、 ϕ^n

目標： v^{n+1} 、 ξ^{n+1} 、 ρ^{n+1} 、 ϕ^{n+1}

(1) 計算參考座標的梯度，藉由參考座標的梯度可以得到變形梯度場

$$F = (\xi_{i,j})^{-1} \quad (3-84)$$

(2) 計算固體與流體應力場

● 如果 $\phi^n(x) < 0$

$$\sigma = \sigma^s = \widehat{\sigma^s}(F) \quad (3-85)$$

● 如果 $\phi^n(x) > 0$

$$\sigma = \sigma_{ij}^f = \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (3-86)$$

(3) 流固耦合力與邊界處理

$$f_i^{FSI} = \begin{cases} 0 & x \in \Omega^f / \Omega^{S'} \quad (3-87) \\ -(\rho^s - \rho^f) \frac{Dv_i}{Dt} + \sigma_{ij,j}^s - \sigma_{ij,j}^f + (\rho^s - \rho^f) g_i & x \in \Omega^{S'} \quad (3-88) \end{cases}$$

(3-87)、(3-88)得知純固體元素、純流體元素上的流固耦合力，藉由 3.4 節所介紹之流體與固體邊界處理方法即可得到整體流場的流固耦合力。

(4) 更新速度場

$$\rho^f \left(\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} + v_j^n v_{i,j}^n \right) = \sigma_{ij,j}^f + f_i^{FSI} + \rho^f g_i \quad (3-89)$$

(5) 速度場外插

由於有限差分法的計算流體力學求解器得到的速度場並不完整，藉由 RBF 插值函數的幫忙可議使速度場更加完整。



(6) 更新參考座標

$$\frac{\xi^{n+1} - \xi^n}{\Delta t} + v_j^n \xi_{i,j}^n = 0 \quad (3-90)$$

(7) 更新水平集函數

$$\phi^{n+1} = \sqrt{\left((\xi_x^{n+1} - x_{center})^2 + (\xi_y^n - y_{center})^2\right)} - r \quad (3-91)$$

(8) 更新密度場

■ 如果 $\phi^n(x) < 0$

$$\rho^{n+1} = \rho^s \quad (3-92)$$

■ 如果 $\phi^n(x) > 0$

$$\rho^{n+1} = \rho^f \quad (3-93)$$

3.5.3. 徑向基函數插值

徑向基函數插值 (Radial Base Functions Interpolation) 為一高精準度且已知資料點位於非結構化網格的插值演算法[4]，本論文研究以 MATLAB (Mathworks, Inc.) 語言實作分析程式，運用其曲線擬合工具箱 (Curve fitting toolbox)，並採用雙諧 (Biharmonic) 模組，於標記與單元式 (Marker-and-cell，簡記為 MAC) 歐拉格點，將基於有限差分運算出流場資訊精確且平滑地插值至參考映射技術之座標系統格點 ($\{U\}$ 、 $\{V\}$ 與 $\{X\}$) 上。

3.5.4. 有限元素法

在本節與 3.5.5. 節中，將分別介紹有限元素法的計算流體力學求解器與有限差分法的計算流體力學求解器。首先在有限元素法中使用的統御方程式可以寫為：

$$v_{i,i} = 0 \quad (3-94)$$

$$\rho (v_j v_{i,j}) = -p_{,j} + \mu (v_{i,jj}) + f_i \quad (3-95)$$

其中，(3-94) 代表不可壓縮、(3-95) 代表線動量守恆方程式。而在流體力學中，無



因次化是一項普遍會使用的技術，可以透過減少自由參數的數量來簡化問題的分析，故接下來需要先對(3-95)進行無因次化，藉由選擇固定的特徵長度與特徵速度，可以將無因次的參數定義為(表 3-3)：

表 3-3 無因次化參數

$\bar{x}_1 = \frac{x_1}{l^*}$	$\bar{x}_2 = \frac{x_2}{l^*}$
$\bar{v}_1 = \frac{v_1}{v^*}$	$\bar{v}_2 = \frac{v_2}{v^*}$
$\bar{f}_1 = \frac{f_1 l^*}{\rho v^{*2}}$	$\bar{f}_2 = \frac{f_2 l^*}{\rho v^{*2}}$
$\bar{p} = \frac{p}{\rho v^{*2}}$	

藉由以上無因次化參數的協助，(3-94)、(3-95)可以被寫為無因次化的形式

$$v_{i,i} = 0 \quad (3-96)$$

$$v_j v_{i,j} = -p_{,i} + \frac{1}{Re} (v_{i,jj}) + f_i \quad (3-97)$$

其中， $Re = \frac{\rho v^* l^*}{\mu}$ 代表雷諾數。

在有限元素法的計算流體力學求解器中，使用八個點的方形元素進行模擬，在這元素中的每個點上都具有速度分量 v_x 、 v_y ，而壓力場只被分配在元素的四個角落如(圖 3-18)所示，元素的形狀函數以局部坐標系 (ξ_1, ξ_2) 表示，而局部坐標系 (ξ_1, ξ_2) 與全域坐標系 (x_1, x_2) 之間的轉換如下：

$$\xi_i = \frac{2(x_i - x_i^c)}{l_i} \quad (3-98)$$

其中， (x_1^c, x_2^c) 代表元素的質心座標、 l_1 、 l_2 代表元素在x、y方向的長度。(圖 3-18)點1~8的局部座標為 $(-1, -1), (0, -1), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (0, 1), (-1, 1), (-1, 0)$ 。藉由形狀函數的特性我們可以將四個點的形狀函數與八個點的形狀函數定義為 $M(\xi_1, \xi_2)$ 、 $N(\xi_1, \xi_2)$ 詳細內容請見(表 3-4)：

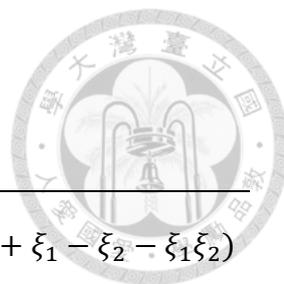


表 3-4 無因次化參數

$M^1(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1 - \xi_2 + \xi_1\xi_2)$	$M^2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1 - \xi_2 - \xi_1\xi_2)$
$M^3(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1 + \xi_2 + \xi_1\xi_2)$	$M^4(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1 + \xi_2 - \xi_1\xi_2)$
$N^1(\xi_1, \xi_2) = -\frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_1 + \xi_2)$	$N^2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2)$
$N^3(\xi_1, \xi_2) = -\frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_1 + \xi_2)$	$N^4(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(1 - \xi_2^2)(1 + \xi_1)$
$N^5(\xi_1, \xi_2) = -\frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_1 - \xi_2)$	$N^6(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)(1 + \xi_2)$
$N^7(\xi_1, \xi_2) = -\frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(1 + \xi_1 - \xi_2)$	$N^8(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(1 - \xi_2^2)(1 - \xi_1)$

以上函數中，雙線性插質函數 M^a 為壓力場所需，而二次插值函數 N^a 則為速度場所需，故在每個元素中都會有二十個未知的參數(v_i 十六個、 p 四個)：

$$p = \sum_{a=1}^4 M^a p^a \quad (3-99)$$

$$v_i = \sum_{a=1}^8 N^a v_i^a \quad (3-100)$$

在推導弱形式的統御方程式之前需要先介紹兩個定理，假設 $f(x_1, x_2)$ 、 $g(x_1, x_2)$ 為二維空間中的兩個純量場、 $h(x_1, x_2)$ 為 R 場域中的向量場：

$$\nabla \cdot (f\nabla g) = f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g \quad (3-101)$$

$$\int_R \nabla \cdot h \, dA = \oint_{\partial R} h \cdot n \, dS \quad (3-102)$$



將以上定理應用到動量守恆方程式中的拉普拉斯項，虛加速度場被使用在對整個場域的積分中：

$$\begin{aligned}
 & \int_R \delta a_1 \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) dA \\
 &= \int_R \delta a_1 \nabla^2 v_1 dA \\
 &= \int_R \nabla \cdot (\delta a_1 \nabla v_1) dA - \int_R \nabla \delta a_1 \cdot \nabla v_1 dA \\
 &= \oint_{\partial R} \nabla \delta a_1 \cdot \nabla v_1 dS - \int_R \nabla \delta a_1 \cdot \nabla v_1 dA \\
 &= - \int_R \nabla \delta a_1 \cdot \nabla v_1 dA
 \end{aligned} \tag{3-103}$$

其中 $\delta a_1 = 0$ ，因為 v_1 在 ∂R 中為已知。同理：

$$\int_R \delta a_2 \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) dA = - \int_R \nabla \delta a_2 \cdot \nabla v_2 dA \tag{3-104}$$

先忽略外力場 f_1 、 f_2 ，(3-97) 可以寫成：

$$\int_R \delta a_1 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \delta a_1 v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \delta a_1 \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{1}{Re} \nabla \delta a_1 \cdot \nabla v_1 dA = 0 \tag{3-105}$$

$$\int_R \delta a_2 v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \delta a_2 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \delta a_2 \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{1}{Re} \nabla \delta a_2 \cdot \nabla v_2 dA = 0 \tag{3-106}$$

虛壓力場被使用在對整個場域的積分中，(3-96) 可以寫成：

$$\int_R \delta p \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) dA = 0 \tag{3-107}$$

(3-105)、(3-106)、(3-107) 可以以形狀函數與節點的數值再改寫為：

$$\delta a_1 = \sum_{a=1}^8 N^a \delta a_1^a \tag{3-108}$$

$$\delta a_2 = \sum_{a=1}^8 N^a \delta a_2^a \tag{3-109}$$

$$\delta p = \sum_{a=1}^4 M^a \delta p^a \tag{3-110}$$



$$\left[\int_R N^a \bar{v}_1 \frac{\partial N^b}{\partial x_1} v_1^b + N^a \bar{v}_2 \frac{\partial N^b}{\partial x_2} v_1^b + N^a \frac{\partial M^d}{\partial x_1} p^d + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial N^a}{\partial x_1} \frac{\partial N^b}{\partial x_1} v_1^b + \frac{\partial N^a}{\partial x_2} \frac{\partial N^b}{\partial x_2} v_1^b \right) dA \right] \delta a_1^a = 0 \quad (3-111)$$

$$\left[\int_R N^a \bar{v}_1 \frac{\partial N^b}{\partial x_1} v_2^b + N^a \bar{v}_2 \frac{\partial N^b}{\partial x_2} v_2^b + N^a \frac{\partial M^d}{\partial x_2} p^d + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial N^a}{\partial x_1} \frac{\partial N^b}{\partial x_1} v_2^b + \frac{\partial N^a}{\partial x_2} \frac{\partial N^b}{\partial x_2} v_2^b \right) dA \right] \delta a_2^a = 0 \quad (3-112)$$

$$\left[\int_R M^c \frac{\partial N^b}{\partial x_1} v_1^b + M^c \frac{\partial N^b}{\partial x_2} v_2^b dA \right] \delta p^c = 0 \quad (3-113)$$

其中 $\bar{v}_1 = N^b v_1^b$ 、 $\bar{v}_2 = N^b v_2^b$ ，由於在任意的 δa_1^a 、 δa_2^a 、 δp^c 情況下(3-111)、(3-112)、

(3-113)均為零，故又可以簡化為：

$$\int_R N^a \bar{v}_1 \frac{\partial N^b}{\partial x_1} v_1^b + N^a \bar{v}_2 \frac{\partial N^b}{\partial x_2} v_1^b + N^a \frac{\partial M^d}{\partial x_1} p^d + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial N^a}{\partial x_1} \frac{\partial N^b}{\partial x_1} v_1^b + \frac{\partial N^a}{\partial x_2} \frac{\partial N^b}{\partial x_2} v_1^b \right) dA = 0 \quad (3-114)$$

$$\int_R N^a \bar{v}_1 \frac{\partial N^b}{\partial x_1} v_2^b + N^a \bar{v}_2 \frac{\partial N^b}{\partial x_2} v_2^b + N^a \frac{\partial M^d}{\partial x_2} p^d + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial N^a}{\partial x_1} \frac{\partial N^b}{\partial x_1} v_2^b + \frac{\partial N^a}{\partial x_2} \frac{\partial N^b}{\partial x_2} v_2^b \right) dA = 0 \quad (3-115)$$

$$\int_R M^c \frac{\partial N^b}{\partial x_1} v_1^b + M^c \frac{\partial N^b}{\partial x_2} v_2^b dA = 0 \quad (3-116)$$

由(3-114)、(3-115)、(3-116)，可以組合出一個元素的勁度矩陣A(20 * 20)需滿足：

$$Ah = b$$

h 代表自由度矩陣由於一個元素具有 20 個自由度所以h 的大小為(20*1)，b 代表外力矩陣在忽略外力的情況下h 為(20*1)的零矩陣。

藉由連接性的幫助可以將所有勁度矩陣串成一個大的全域勁度矩陣配合正確的外力矩陣即可完成整個場域的流場計算，由於上式推導的線動量守恆方程式中與時間無關，故有限元素法的計算流體力學求解器只適用於靜態與準靜態問題無法處理動態的問題。



3.5.5. 有限差分法

在有限差分法中使用的統御方程式可以寫為：

$$v_{i,i} = 0$$

$$v_{1,t} + p_{,1} = -v_1 v_{1,1} - v_2 v_{1,2} + \frac{1}{Re} (v_{1,11} + v_{1,22}) + f_1 \quad (3-118)$$

$$v_{2,t} + p_{,2} = -v_1 v_{2,1} - v_2 v_{2,2} + \frac{1}{Re} (v_{2,11} + v_{2,22}) + f_2 \quad (3-119)$$

其中，(3-117)代表連續體方程式、(3-118)、(3-119)代表線動量守恆方程式。跟 3.5.4 節中介紹的方法一樣，以上三條方程式已經經過無因次化的處理 ($Re = \frac{\rho v^* l^*}{\mu}$)。

假設 U^n 、 V^n 分別代表在時間步數為 n 時的 x 方向速度場與 y 方向速度場。可以藉由以下三個步驟計算出時間步數為 $n + 1$ 時的 U^{n+1} 、 V^{n+1} (表 3-5)：

表 3-5 有限差分數值方法

1. 非線性項

由於在處理非線性的系統上顯式方法會比隱式方法簡單許多，所以在這個方法中使用顯式方法來處理非線性項。但由於使用顯式方法，需要遵守 CFL 的條件 ($\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$) 才能使數值方法穩定。加上此條件的目的是，防止流體質點在一個時間

步階 Δt 內，流過一個空間大於網格的距離 Δx

$$\frac{U^* - U^n}{\Delta t} = -U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} - V^n \frac{\partial U^n}{\partial y} \quad (3-120)$$

$$\frac{V^* - V^n}{\Delta t} = -U^n \frac{\partial V^n}{\partial x} - V^n \frac{\partial V^n}{\partial y} \quad (3-121)$$

2. 黏滯項

黏滯項如果也使用顯式方法處理，將需要一個更加嚴格的限制 ($\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1$)，而使用隱式方法只需在每個時間步內多處理兩個線性系統，故在黏滯項部分選擇隱式方法



$$\frac{U^{**} - U^*}{\Delta t} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 U^{**}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U^{**}}{\partial y^2} \right) \quad (3-122)$$

$$\frac{V^{**} - V^*}{\Delta t} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 V^{**}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V^{**}}{\partial y^2} \right) \quad (3-123)$$

3. 壓力項

藉由壓力場(p^{n+1})的梯度，校正速度場(U^{**}, V^{**})以保證不可壓縮的特性

$$\frac{U^{n+1} - U^{**}}{\Delta t} = -\frac{\partial(p^{n+1})}{\partial x} \quad (3-124)$$

$$\frac{V^{n+1} - V^{**}}{\Delta t} = -\frac{\partial(p^{n+1})}{\partial y} \quad (3-125)$$

可以將以上兩式寫成向量型式：

$$\frac{1}{\Delta t} U^{n+1} - \frac{1}{\Delta t} U^n = -\nabla p^{n+1} \quad (3-126)$$

將上式的左右邊都進行散度：

$$-\nabla^2 p^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot U^n \quad (3-127)$$

因此修正步驟為：

(1) 計算 $F = \nabla \cdot U^n$

(2) 求解帕松方程式 $-\nabla^2 p^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} F^n$

(3) 計算 $G^{n+1} = \nabla p^{n+1}$

(4) 更新速度場 $U^{n+1} = U^n - \Delta t G^{n+1}$

值得一提的是，場域的分布如(圖 3-19)所示，水平速度場 v_x 與水平外力場 f_x 在此求解器中只分布在坐標系 U 上、垂直速度場 v_y 與垂直外力場 f_y 在此求解器中只分布在坐標系 V 上、壓力場則分布在元素的中心處，由於這些場域的需求，在 2.3.1. 節中可設定相應浸潤式參考映射技術的場域，可免去許多不必要的場域轉換。

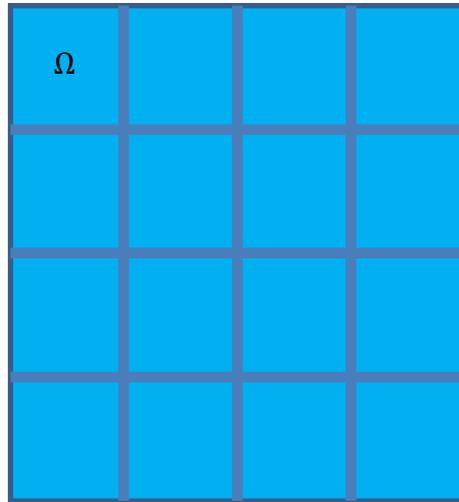


圖 3-1 歐拉網格場域 Ω 定義+

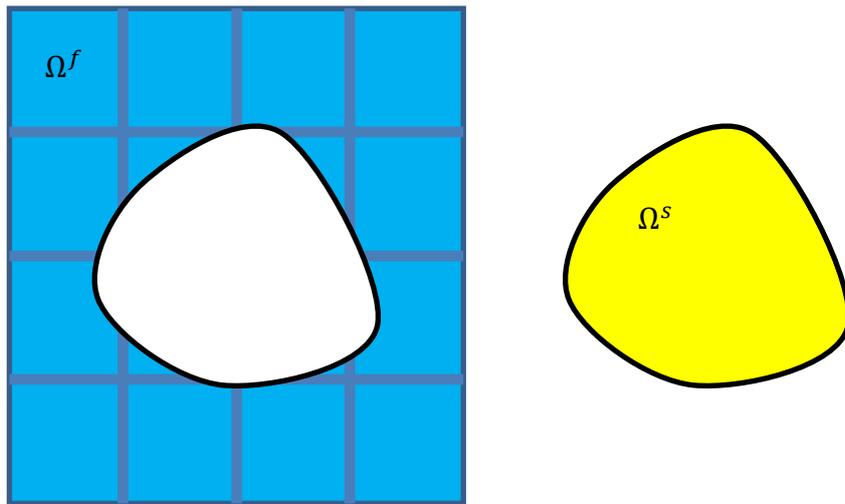


圖 3-2 早期流固耦合問題場域定義

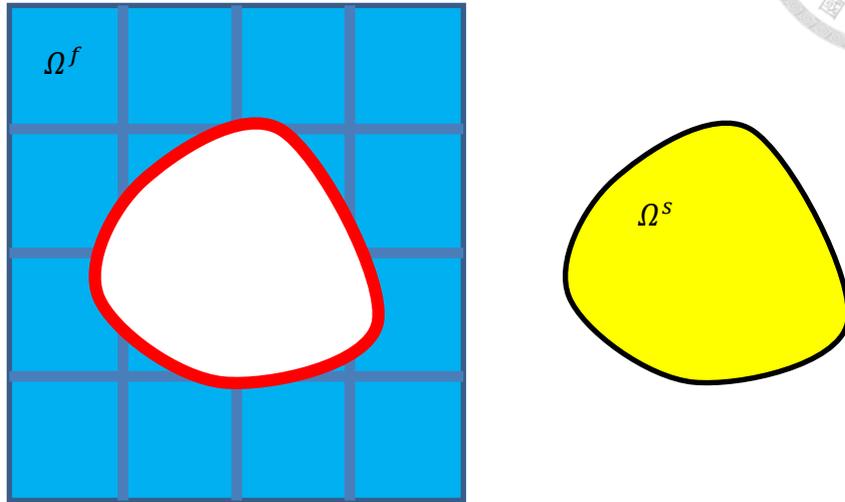


圖 3-3 浸潤式邊界方法流固耦合力分布

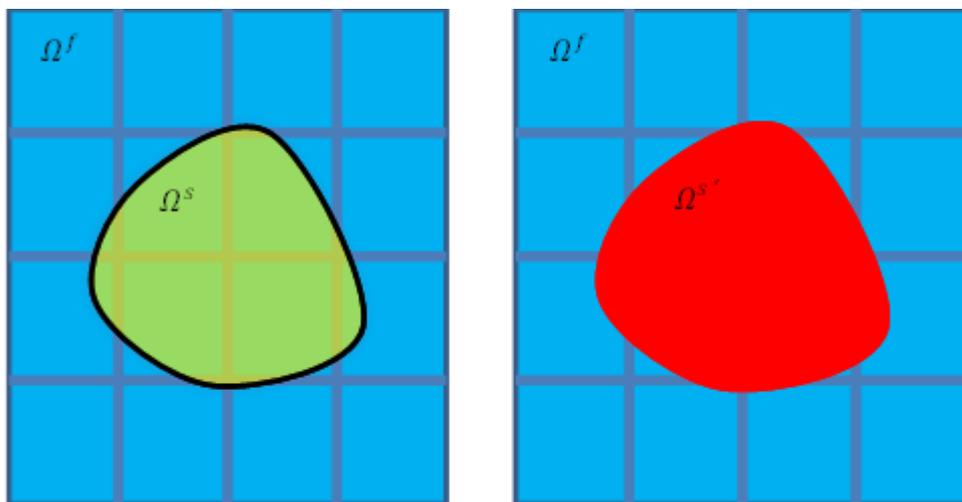


圖 3-4 (左)浸潤式參考映射技術場域定義、(右)流固耦合力分布

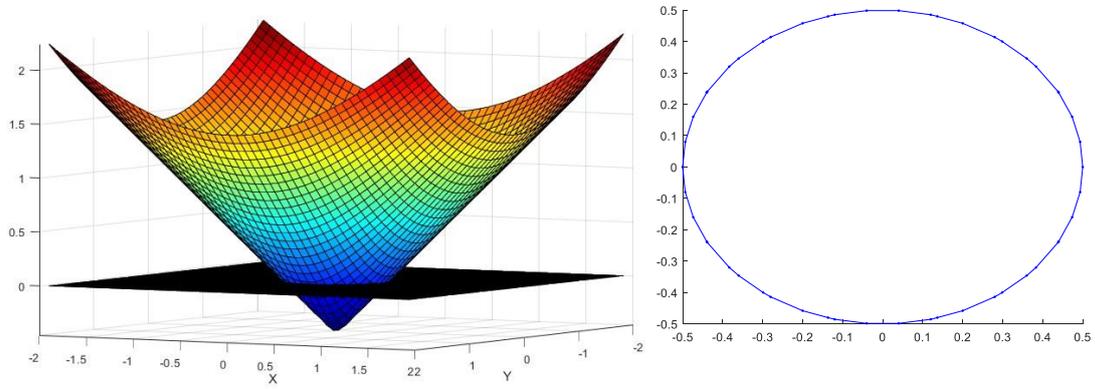


圖 3-5 (左)水平集函數與高度為零的平面相切、(右) 相應平面封閉曲線 L

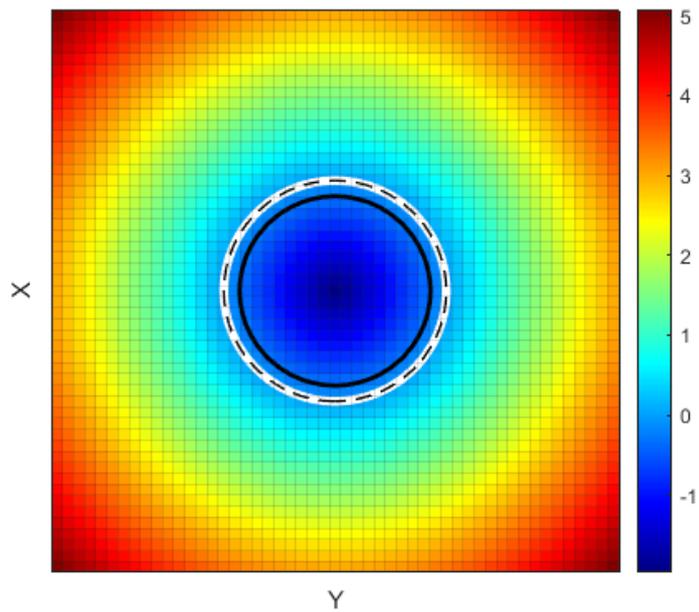


圖 3-6 元素分布示意圖

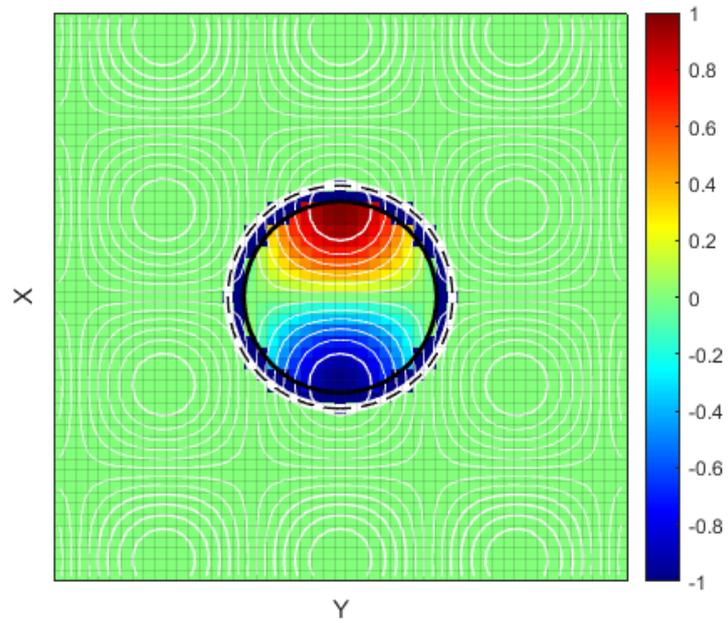


圖 3-7 共軛梯度法處理之前的場域分布圖

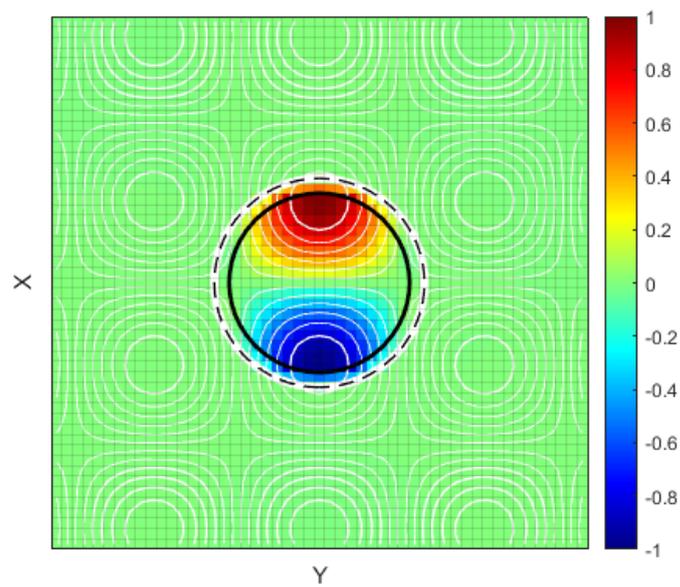


圖 3-8 共軛梯度法處理之後的場域分布圖

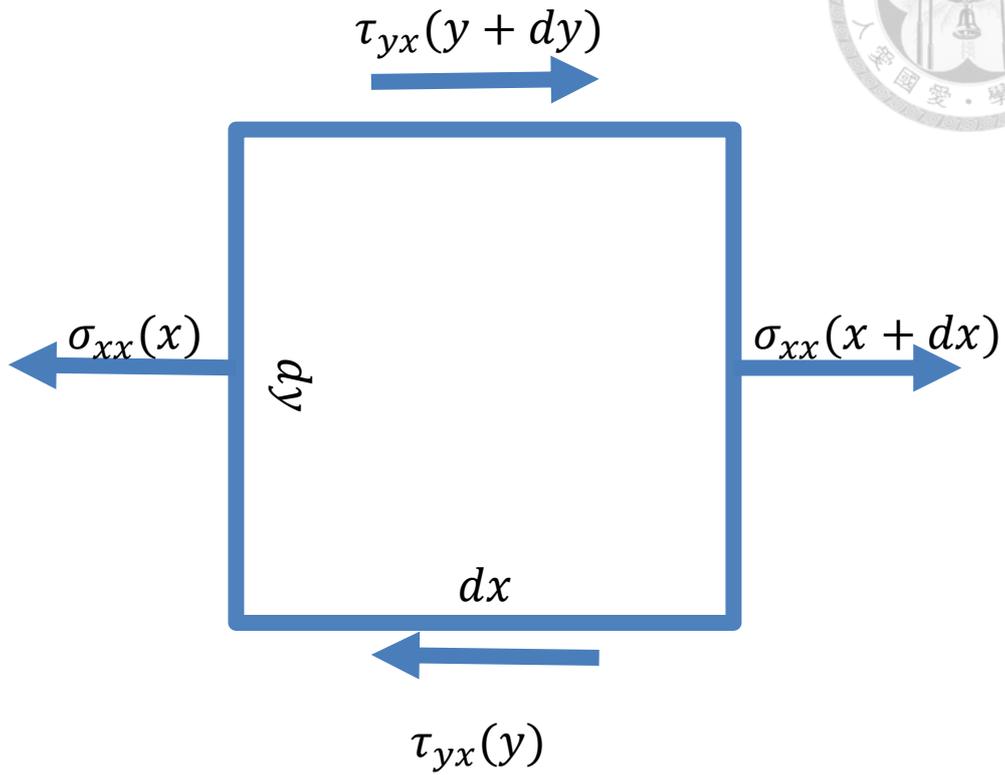


圖 3-9 單位元素 x 方向力平衡圖

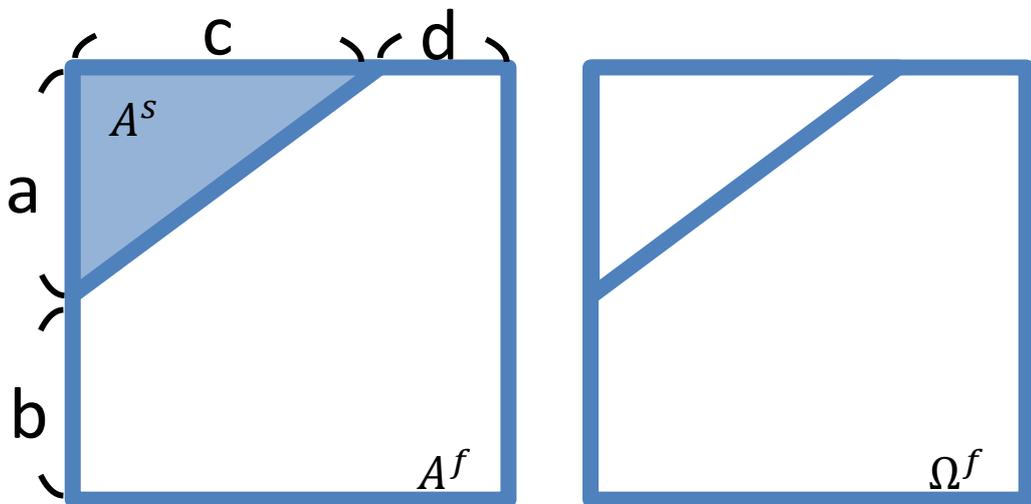


圖 3-10(左)連體元素示意圖(右)與連體元素共用節點之流體元素示意圖

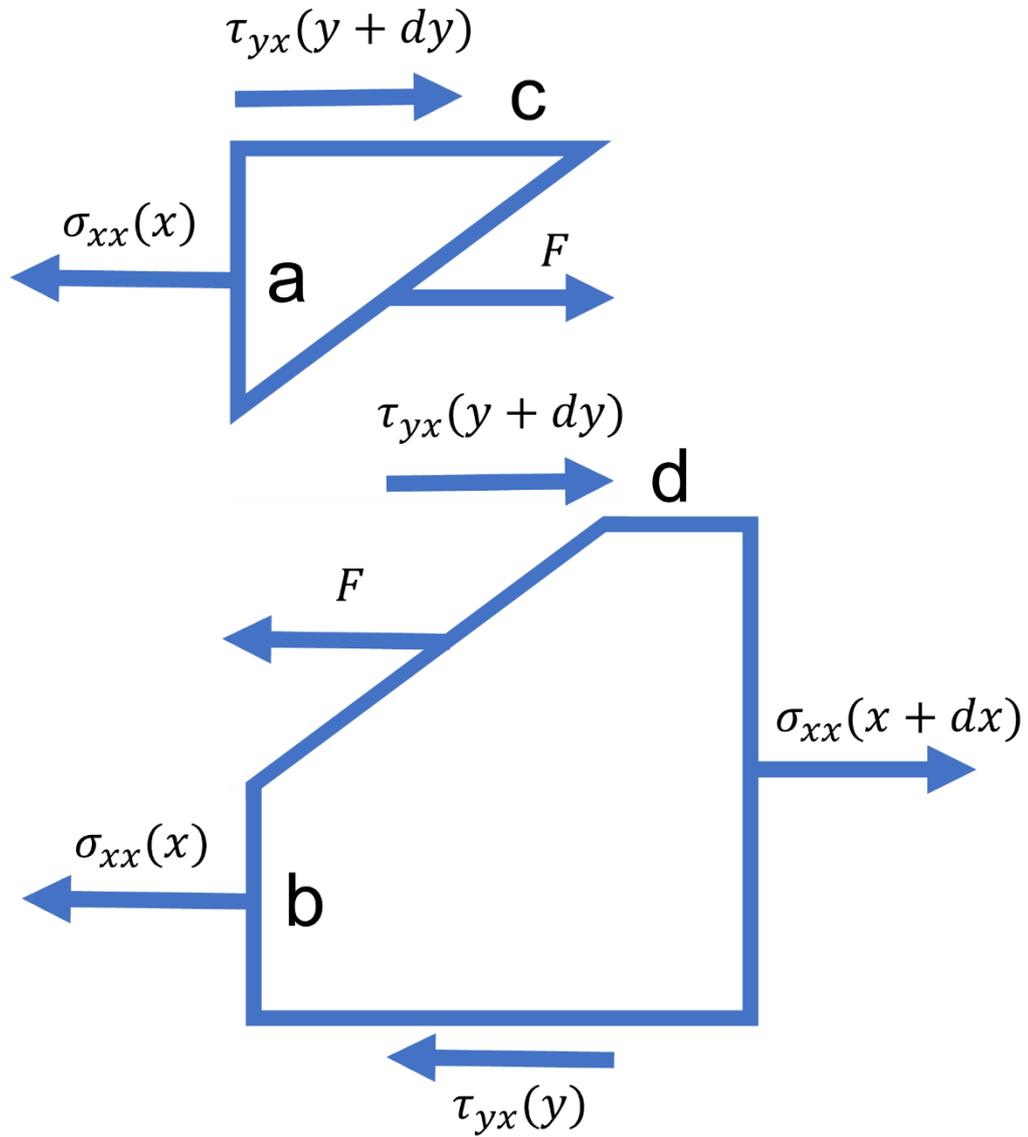


圖 3-11 單位元素依照圖 3-10 分成兩區域之 x 方向力平衡圖

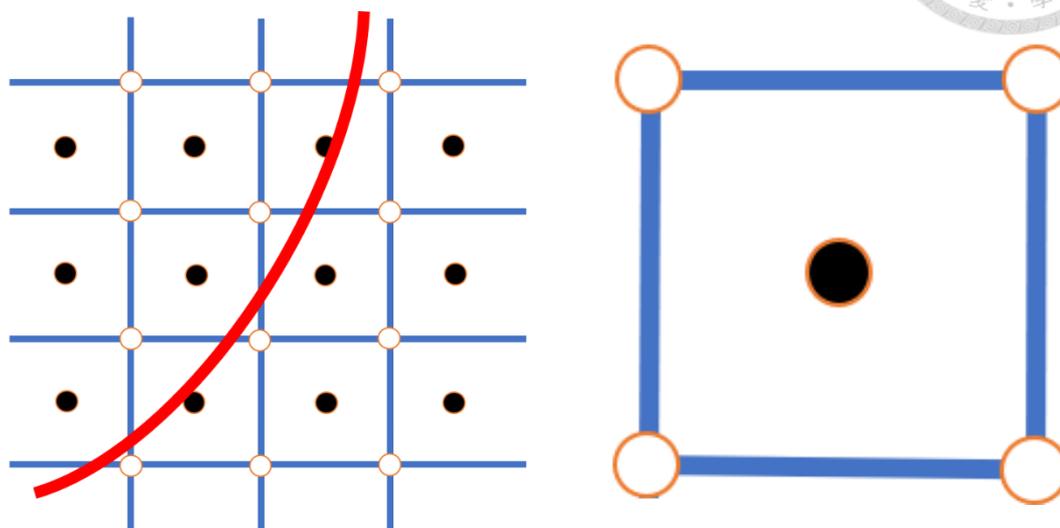


圖 3-12 (左) 坐標系U、V分布圖、(右) 坐標系U之元素定義

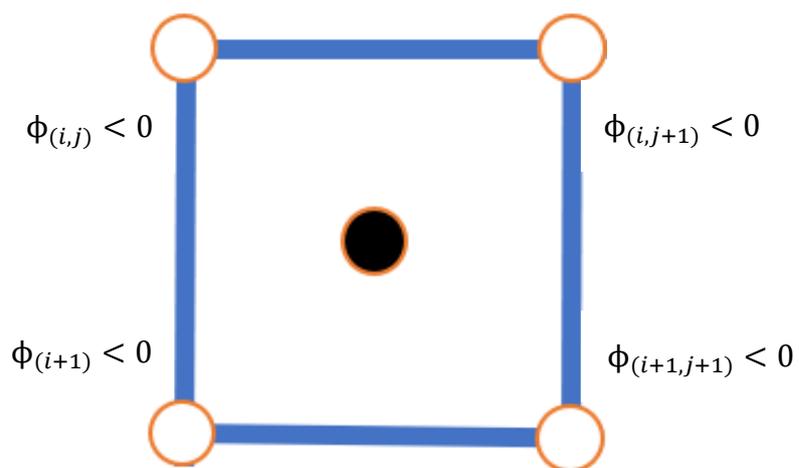


圖 3-13 純固體元素

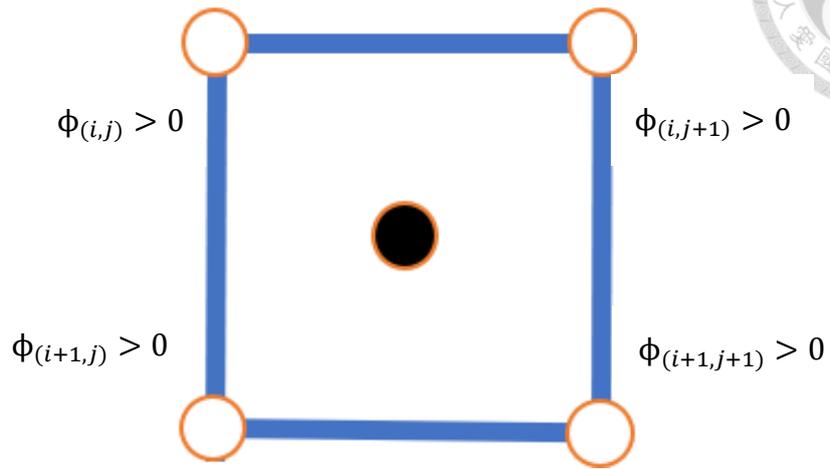


圖 3-14 純流體元素

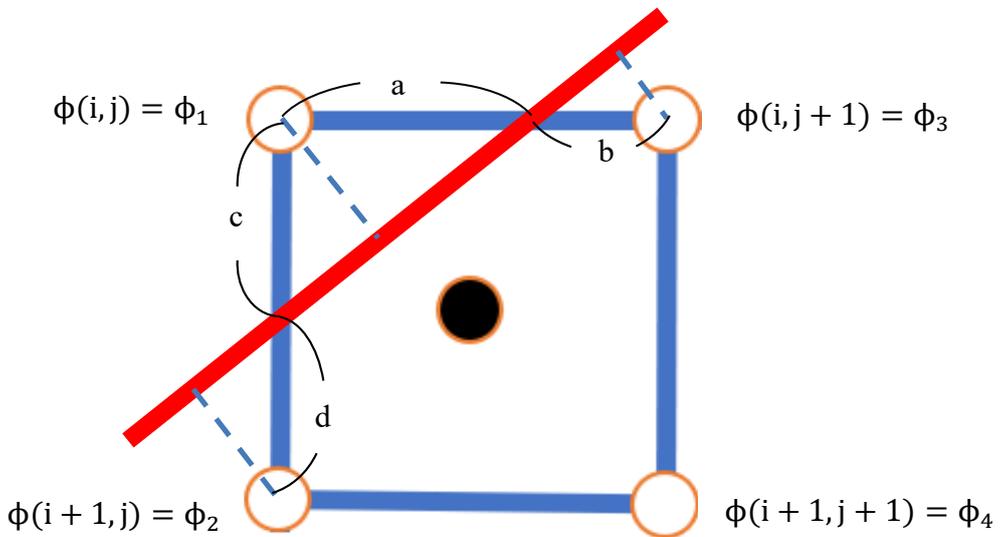


圖 3-15 固體流體邊界元素(固體流體邊界跨越相鄰的邊)

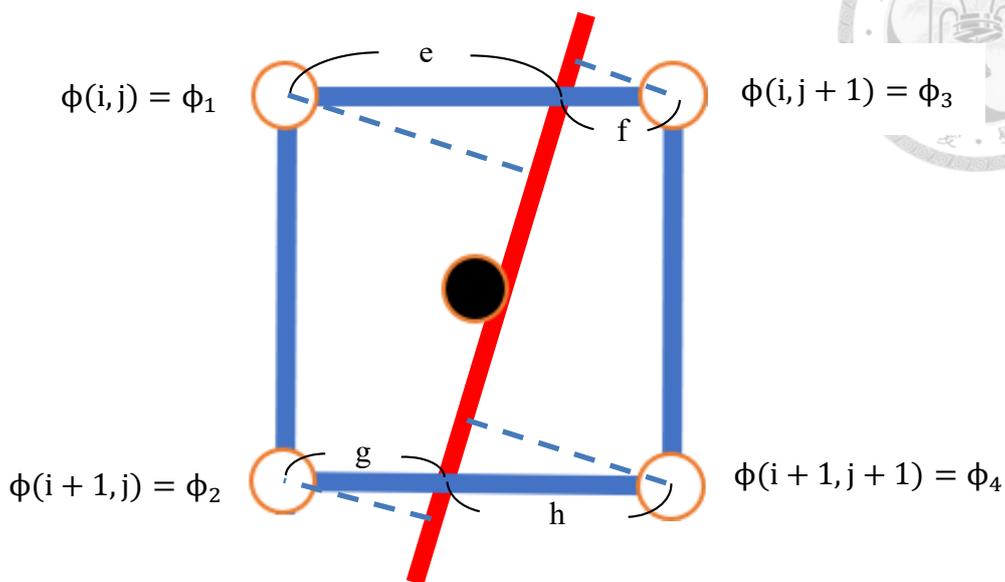
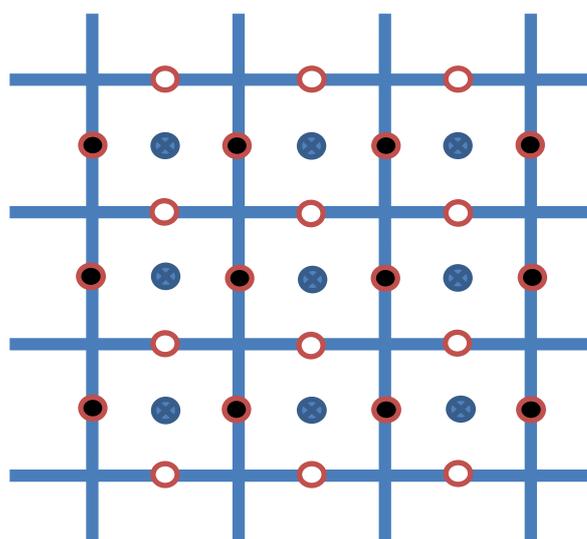


圖 3-16 固體流體邊界元素(固體流體邊界跨越相對的邊)



● $\Rightarrow \xi_{Ux}, \xi_{Uy}, v_{Ux}, v_{Uy}, \phi_U, f_x^{ext}$

○ $\Rightarrow \xi_{Vx}, \xi_{Vy}, v_{Vx}, v_{Vy}, \phi_V, f_y^{ext}$

⊗ $\Rightarrow \sigma, F$

圖 3-17 浸潤式參考映射技術場域分布

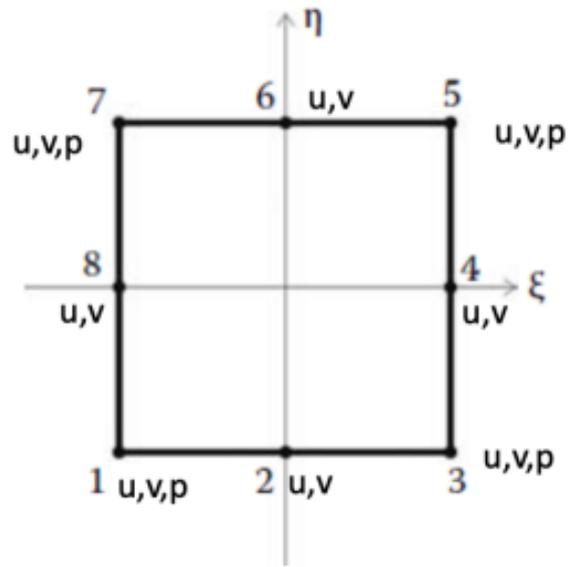
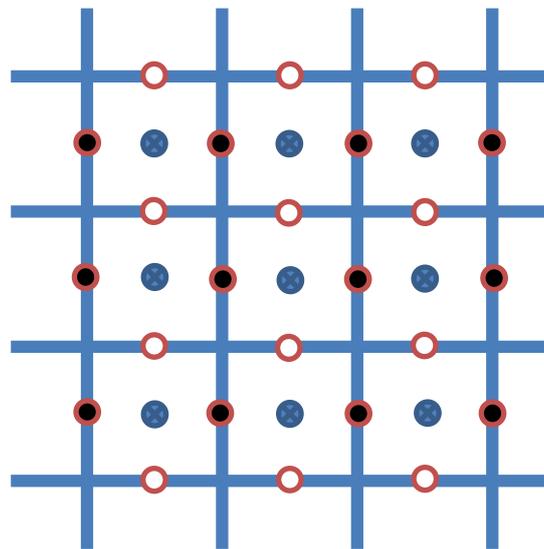


圖 3-18 單一元素場域定義



 $\Rightarrow v_y \cdot f_y$

 $\Rightarrow v_x \cdot f_x$

 $\Rightarrow P$

圖 3-19 有限差分法流場求解器之場域分布圖

第四章 應用浸潤式參考映射技術於流固耦合解析

由本論文第二章靜態與擬靜態算例之驗證結果，得以確認以本研究開發之參考映射技術數值方法進行計算分析為正確且穩定收斂的，在本章節中將基於第三章中提出的新穎浸潤式映射座標技術理論，實作前述參考映射技術與相關應用數學方法，建立起全歐拉式 (Full-Eulerian) 流固耦合力學解析與計算架構，以進行流固耦合問題解析計算與模擬，探討流體與固體各材料參數對於流場分布與固體運動變形相互干涉的影響。

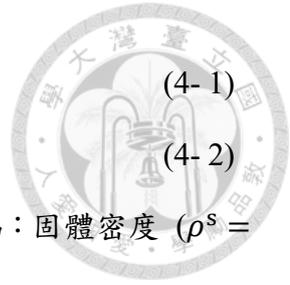
4.1. 流固耦合計算例設定

在本章節建立一系列之計算例，所有參數均經過無因次化處理，具有無因次單位，假設流體場域為 $[-2,2] \times [-2,2]$ 之二維空間，格點間距大小 h 為 0.04，在此流體場域中置放一圓心座標為 (0,0)、半徑為 0.5 之圓形固體，並設定場域邊界無任何流體通量，即邊界水平與垂直流速分量皆為零，流場受重力外力刺激 $g = 981$ ，由於使用面積比例法與共軛梯度法所得到的模擬結果差距甚小，其中面積比例法可以大幅減少計算成本，故在邊界場域處理上採用面積比例法。如圖 4-1 所示，藍色與黃色區域分別為流體與固體實際佔據之場域空間，且藍色區域與黃色區域之聯集為流體計算場域 Ω^f 、黃色區域為流固耦合力分布場域 Ω^{sf} 、紅色線條為流場的邊界。基於以上假設，本節將各別針對流固耦合力場之三要素：包含 (1) 環境重力、(2) 物質慣性與 (3) 材料剛性一一進行解析計算、模擬與結果討論。

4.2. 流固耦合力之環境重力要素

本範例將探究流固耦合力場之環境重力要素對於流場分布與固體運動變形相互干涉的影響，由於流體計算場域佈滿全二維空間，因而可忽略由環境重力引致之流體靜壓力之影響，故考慮流固耦合力場為：

$$f_i^{FSI} = \begin{cases} 0 & x \in \Omega^f / \Omega^{S'} \\ (\rho^s - \rho^f)g_i & x \in \Omega^{S'} \end{cases} \quad (4-1)$$



材料參數方面，設定控制變因為：流體密度($\rho^f = 1$)；操縱變因為：固體密度 ($\rho^s = 0.5$ 、 $\rho^s = 1.5$ 、 $\rho^s = 2$)、雷諾數($RE = 0.1$ 、 $RE = 0.5$ 、 $RE = 1$)，本例題將探究在不同的雷諾數與不同的固體密度的情況下，環境重力要素對於動態流體與固體相互干涉的影響，故本計算例共實作九種不同參數組合的計算模擬。如圖 4- 2 至圖 4- 10 所示，模擬結果將以兩不同類型圖做呈現，第一類型之圖主要提供流場資訊(左圖)，其中背景顏色代表壓力分布、藍色封閉曲線代表流體與固體的交界(即固體邊界)、黑色箭頭代表流速方向與相對大小(即箭頭愈大代表速度愈大)；第二類型之圖提供固體變形狀態(右圖)，藉由第二章所述參考映射函數與距離函數之特性，可得於任何時間步進之材料質點初始座標位置，其中背景顏色代表水平集函數值，設定深藍色封閉曲線代表於該時間步進之固體邊界、固體邊界外區域(即流體分布區域)之水平集函數值皆為零以及淺藍色封閉曲線代表固體在變形與運動前($t = 0$)之初始邊界。圖 4- 2 至圖 4- 10 分別演示了在不同的固體密度、雷諾數參數組合下，探究環境重力要素之流固耦合力場引致流場分布與固體運動變形相互干涉情況，故將以上九組解析結果於時間步進 $t = 1$ 時的情形進行比較。

由圖 4- 11 可得，當固體密度小於流體密度時($\rho^s = 0.5$)固體最終位置相對於變形前向 Y 軸的正方向移動，反之當固體密度大於流體密度時($\rho^s = 1.5$ 、 $\rho^s = 2$)固體最終位置相對於變形前向 Y 軸的負方向移動，比較固體密度($\rho^s = 1.5$ 、 $\rho^s = 2$)的結果可以看出固體密度越大固體的位移量越大、從圖中亦可以發現固體的圓心(在此處由於假設固體等向性、均質可以視圓心為重心(水平集函數 $\phi = -0.5$ 的部分))隨著密度越大往 Y 軸的負方向偏移的越多。

雷諾數方面，本範例討論三種不同的雷諾數($RE = 0.1$ 、 $RE = 0.5$ 、 $RE = 1$)對流固耦合問題所造成的影響，在本範例將雷諾數定義為：

$$Re = \frac{\rho v^* l^*}{\mu} \quad (4-3)$$

其中 ρ 代表流體密度(在本範例中假設 $\rho = 1$)、 v^* 代表特徵速度(在本範例中假設 $v^* = 1$)、 l^* 代表特徵長度(在本範例中假設 $l^* = 1$)、 μ 代表流體的黏滯係數(在本範例中隨著雷諾數改變而改變)。由雷諾數的定義可以知道雷諾數與黏滯係數呈反比，雷諾數越小代表流體越黏，由結果可以觀察到在同樣的時間步數下 $RE = 1$ 的固體偏移、變形量較 $RE = 0.1$ 大，可以將其原因歸於流體控制方程式的黏滯項所造成，由於流體較黏導致固體較不易變形與偏移。

4.3. 流固耦合力之固體慣性要素

本範例將探究流固耦合力場之物質慣性要素對於流場分布與固體運動變形相互干涉的影響，故考慮流固耦合力場為：

$$f_i^{FSI} = \begin{cases} 0 & x \in \Omega^f / \Omega^{s'} \\ -(\rho^s - \rho^f) \frac{Dv_i}{Dt} & x \in \Omega^{s'} \end{cases} \quad (4-4)$$

如果依照原本的流場設置，因為本例題中流固耦合力只有慣性項，流場在只受到重力與慣性項作用時，流速會相當小導致固體變形不明顯不便於觀察。為了使慣性項對於流固耦合問題的影響更加容易觀察，本範例更動了流場的設定如(圖 4-12)所示，固體與流體的配置均不改變、假設流場的外力項只有流固耦合力項(將重力拿掉)、左右邊界(紅色線條) 水平流速與垂直流速皆為零、上下邊界(綠色線條)水平流速為零而垂直流速為 0.5 向上，其餘條件皆與 4.1 節所介紹的一致。

材料參數方面，設定控制變因為：流體密度($\rho^f = 1$)；操縱變因為：固體密度($\rho^s = 0.5$ 、 $\rho^s = 1$ 、 $\rho^s = 2$)、雷諾數 ($RE = 1$ 、 $RE = 50$ 、 $RE = 100$)，本例題將探究在不同的雷諾數與不同的固體密度的情況下，物質慣性要素對於動態流體與固體相互干涉的影響，故本計算例共實作九種不同參數組合的計算模擬。圖 4-13 至圖 4-21 分別演示了在不同的固體密度、雷諾數參數組合下，探究物質慣性要素之流固耦合力場引致流場分布與固體運動變形相互干涉情況，故將以上九組解析結果於時間步進 $t=1$ 時的情形進行比較。

圖 4-22 可得，以固體密度 $\rho^s = 1$ 為基準，在此情況中因固體密度與流體密度相同，可以視為固體材料不提供任何慣性特性給流體，而在 $\rho^s = 0.5$ 、 $\rho^s = 2$ 時固體密度分別小於、大於固體密度，藉由慣性項將固體慣性特性提供給流體，可以發現固體密度越大，固體質心的偏移量越少這代表材料的慣性特性較為顯著，固體具有較大抵抗變形的能力。

本範例選用了三種不同的雷諾數($RE = 1$ 、 $RE = 50$ 、 $RE = 100$)，根據雷諾數的定義(4-3)在不改變特徵長度與特徵速度的前提下，雷諾數可以視為慣性項與黏滯項的比值($\frac{\rho}{\mu}$)，表示雷諾數的大小可以影響流場的統御方程式中慣性項與黏滯項的比重，雷諾數大代表慣性項影響大，反之雷諾數小代表慣性項影響小。由結果可發現使用雷諾數 $RE = 100$ 時的流固耦合動態模擬結果物質慣性要素對於流固耦合問題的影響較 $RE = 1$ 時顯著。

4.4. 流固耦合力之材料剛性要素

本範例將探究流固耦合力場之固體剛性要素對於流場分布與固體運動變形相互干涉的影響，為了更方便看出固體剛性要素的影響，考慮流固耦合力場為：

$$f_i^{FSI} = \begin{cases} 0 & x \in \Omega^f / \Omega^{s'} \\ -(\rho^s - \rho^f) \frac{Dv_i}{Dt} + \sigma_{ij,j}^s - \sigma_{ij,j}^f + (\rho^s - \rho^f) g_i & x \in \Omega^{s'} \end{cases} \quad (4-6)$$

本範例假設流固耦合力場包含環境重力要素、物質慣性要素和材料剛性要素，若假設流固耦合力場只有材料剛性要素，則材料剛性要素對於流場分布與固體運動變形相互干涉的影響並不明顯，故作此假設。材料參數方面，設定控制變因為：流體密度($\rho^f = 1$)、固體密度 ($\rho^s = 2$)、普松比($\nu = 0.3$)；操縱變因為：楊式係數 ($E = 0$ 、 $E = 500$ 、 $E = 1000$)、雷諾數 ($RE = 0.1$ 、 $RE = 0.5$ 、 $RE = 1$)。本例題使用線彈性、均質、等向性的固體材料，固體的應力 σ_{ij}^s 應滿足虎克定律：

$$\sigma_{11}^s = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} ((1 - \nu)\epsilon_{11} + \nu\epsilon_{22}) \quad (4-8)$$

$$\sigma_{21}^s = \frac{E}{(1+\nu)} \epsilon_{21} \quad (4-9)$$

$$\sigma_{12}^s = \frac{E}{(1+\nu)} \epsilon_{12} \quad (4-10)$$

$$\sigma_{22}^s = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu\epsilon_{11} + (1-\nu)\epsilon_{22}) \quad (4-11)$$



為了滿足不可壓縮的特性固體應力應經過 3.3.4.節所介紹的方法將固體應力轉換為固體的偏斜應力。圖 4-23 至圖 4-31 分別演示了在不同的楊式係數和雷諾數組合下，流固耦合力場引致流場分布與固體運動變形相互干涉情況，故將以上九組解析結果於時間步進 $t=1$ 時的情形進行比較。

由(4-32)可以發現，楊式係數越大固體的變形量越小、質心的偏移量也會越少。可能原因為，楊式係數越大表示固體材料越硬，具有較大抵抗變形的能力，藉由流體統御方程式中的固體剛性項可以將固體的特性傳遞至流體場域進而影響流體速度使的固體的變形量、質心的偏移量較小。而不同雷諾數的結果趨勢和前兩個例題的結果相似，雷諾數越大則固體越不喜歡變形與偏移。

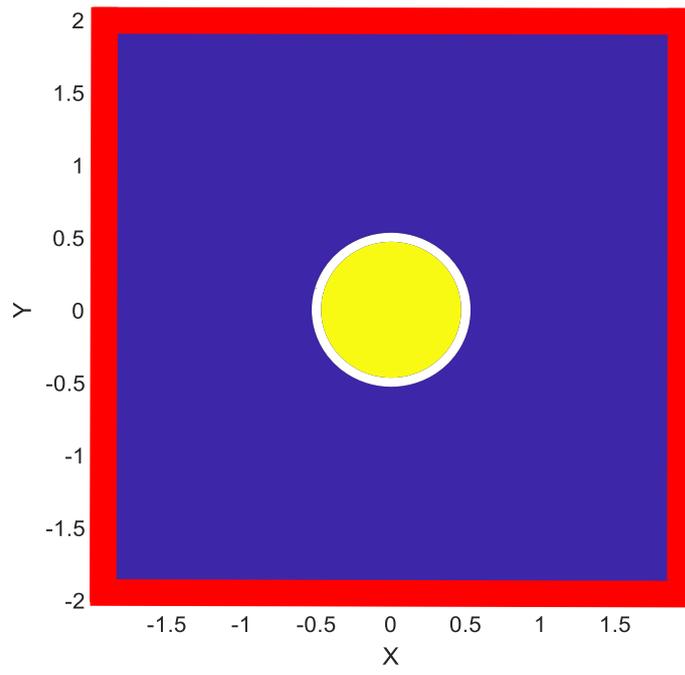


圖 4-1 流固耦合問題模型架構圖

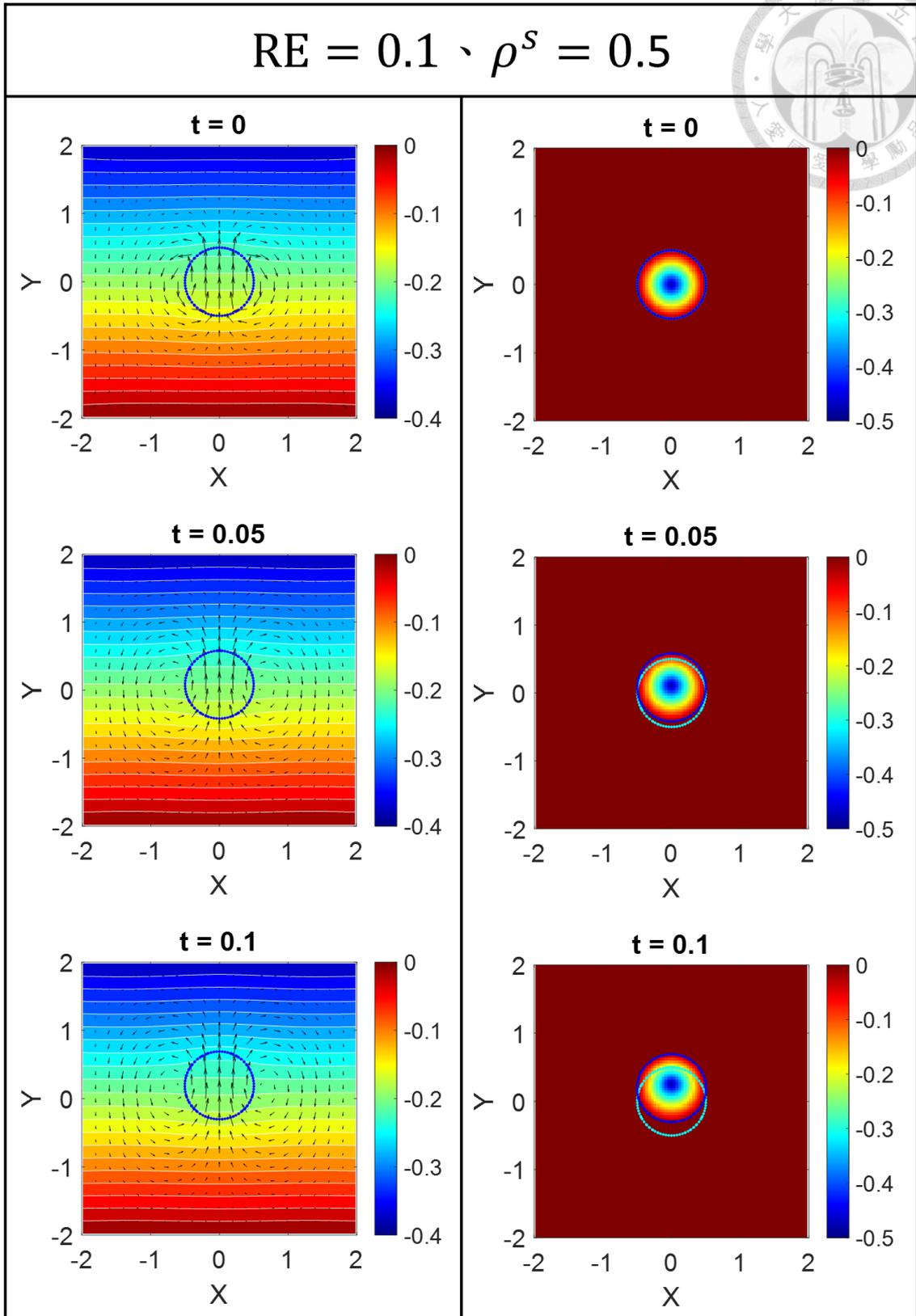


圖 4-2 組合一， $Re = 0.1$ 、 $\rho^s = 0.5$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖

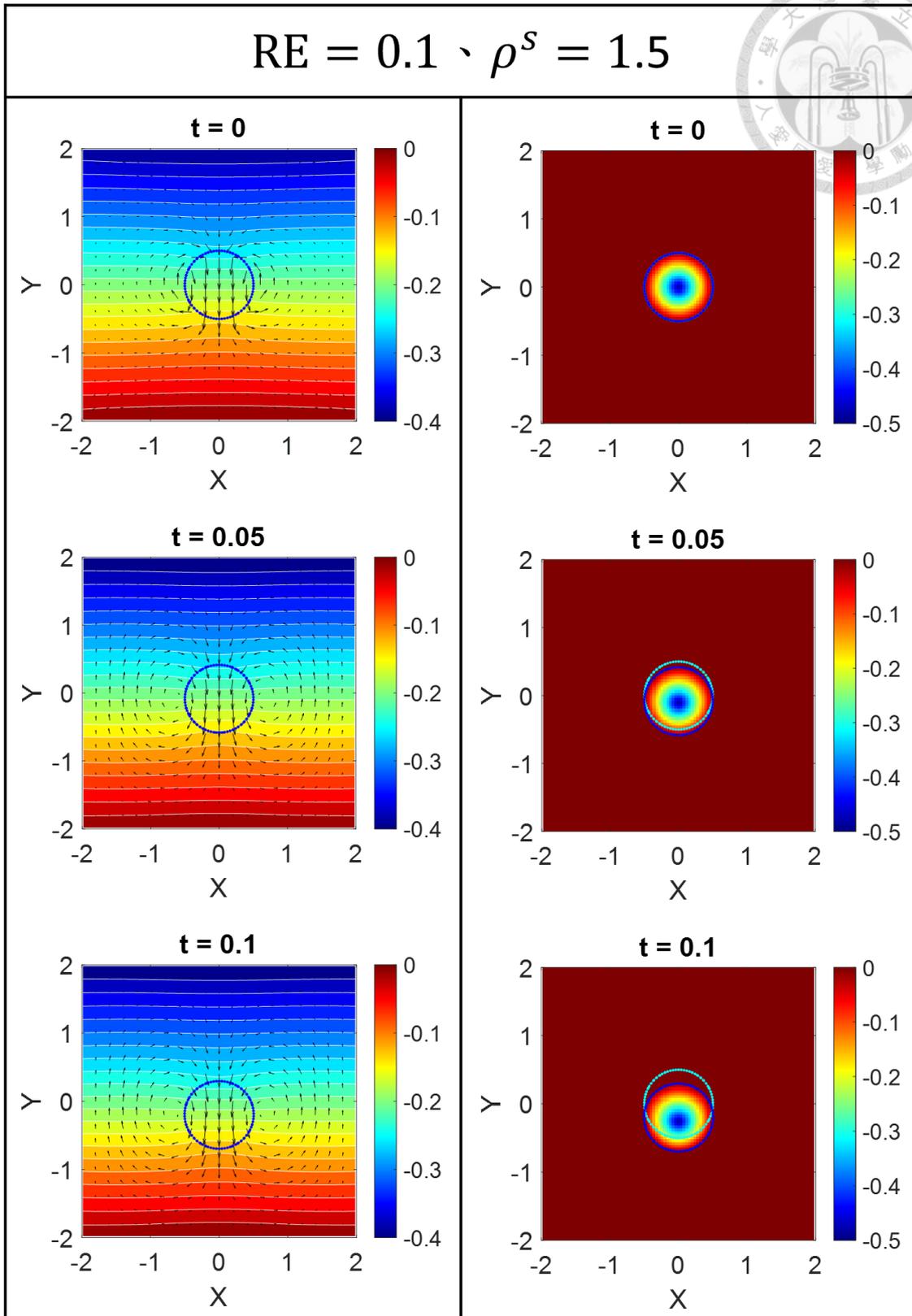


圖 4-3 組合二， $Re = 0.1$ 、 $\rho^s = 1.5$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖

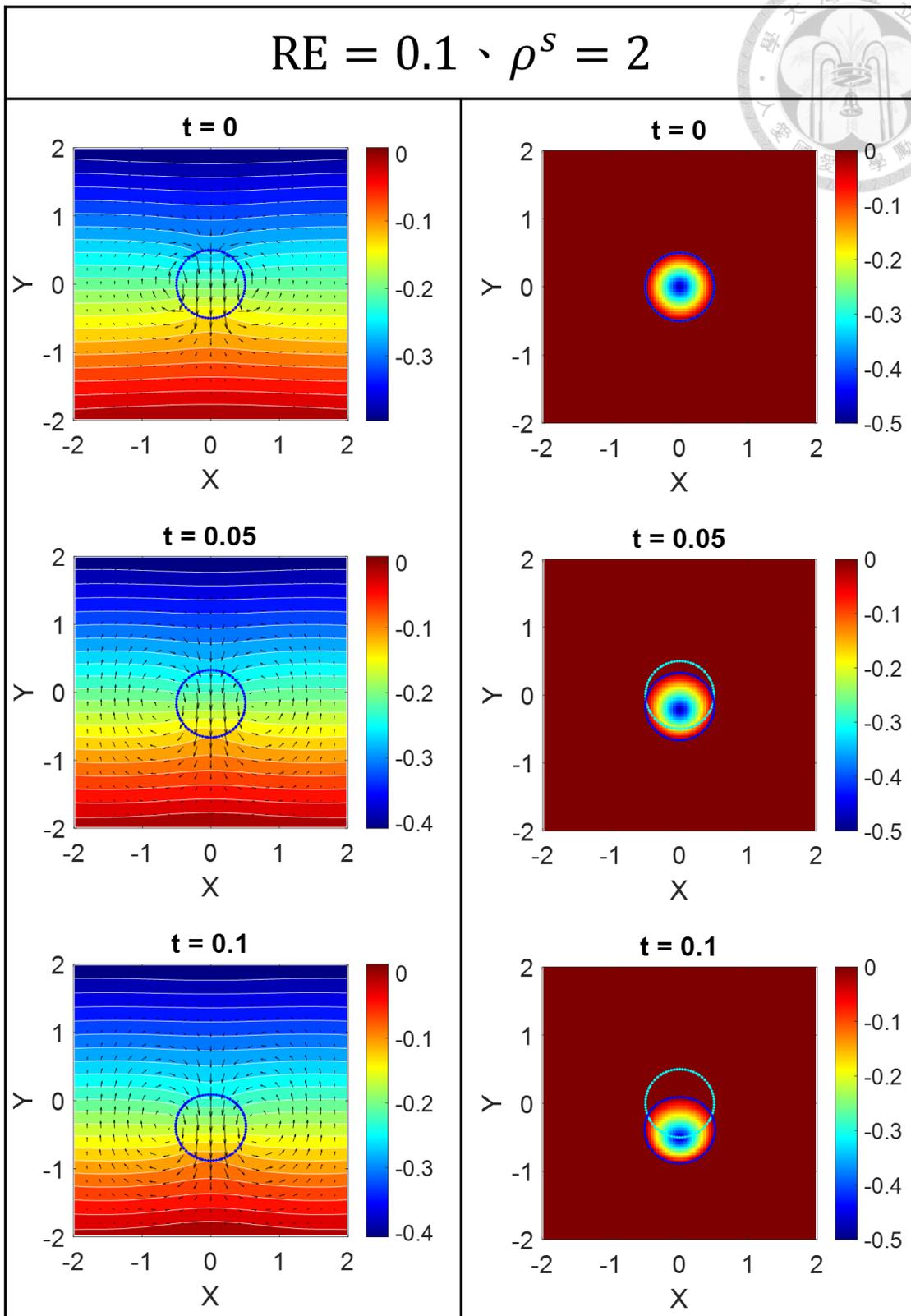


圖 4-4 組合三， $Re = 0.1, \rho^s = 2$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖

$$Re = 0.5, \rho^s = 0.5$$

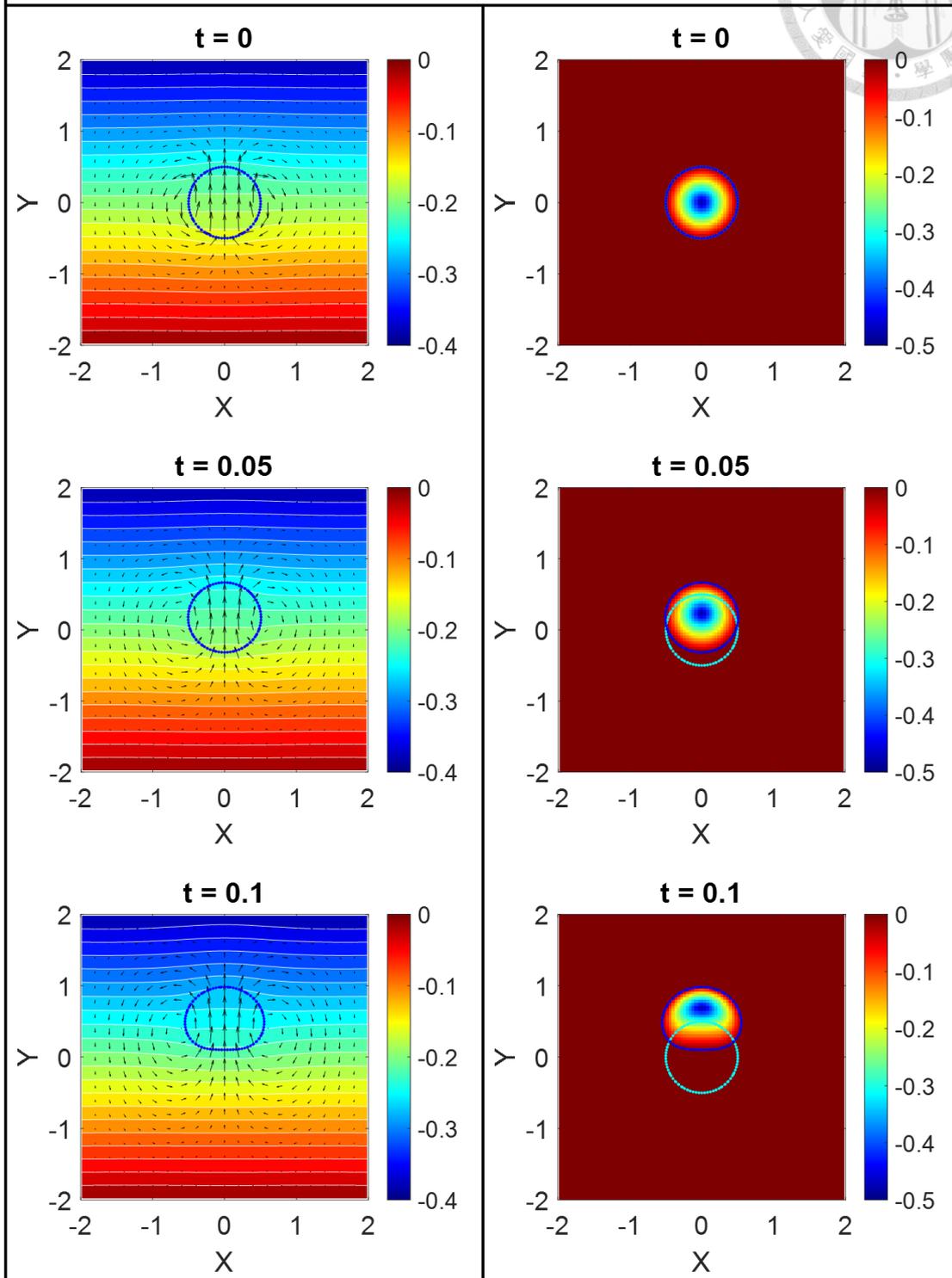


圖 4-5 組合四， $Re = 0.5$ 、 $\rho^s = 0.5$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖

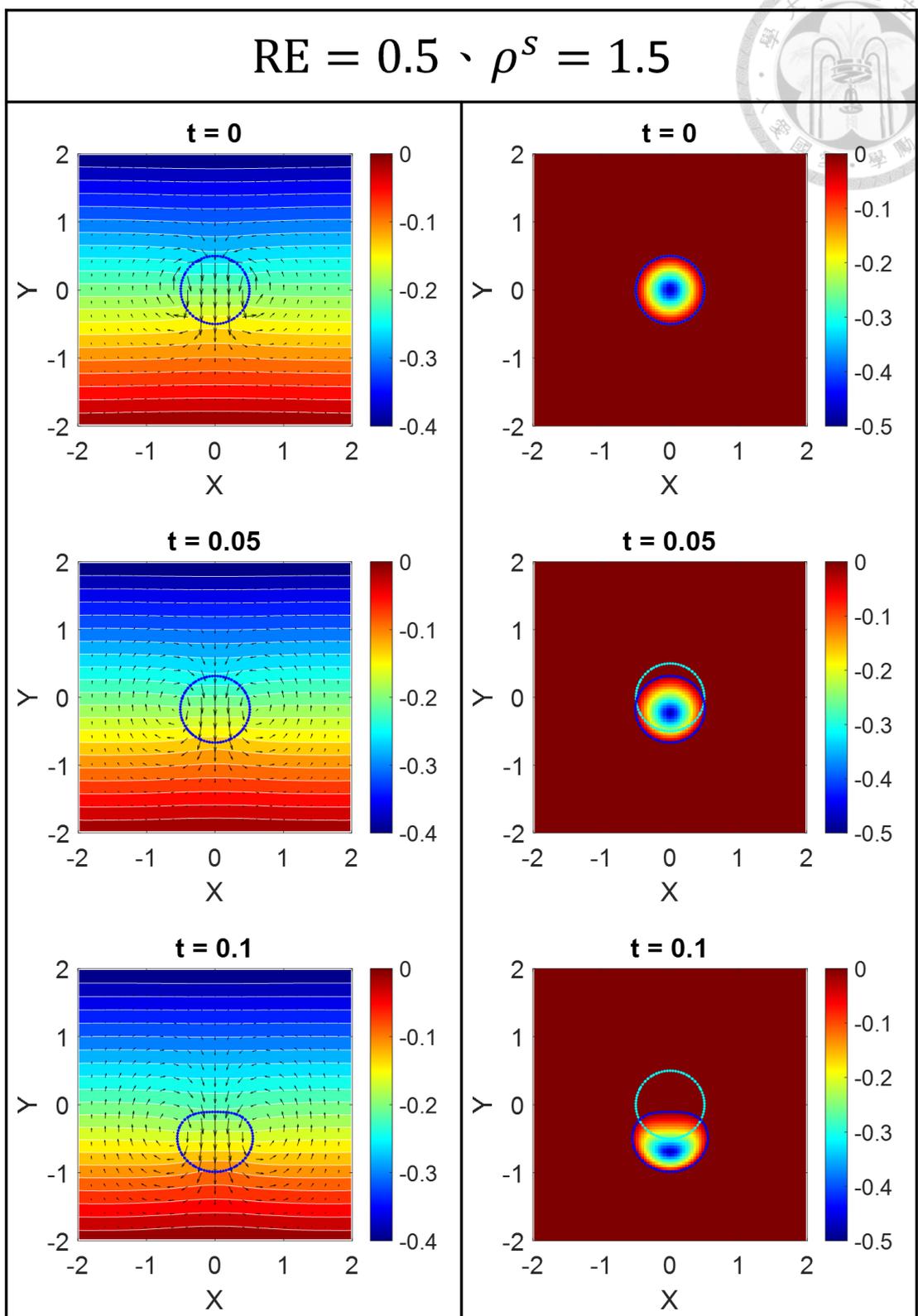
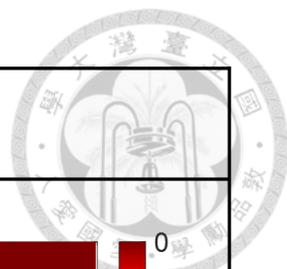


圖 4-6 組合五， $Re = 0.5$ 、 $\rho^s = 1.5$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖

$$Re = 0.5, \rho^s = 2$$

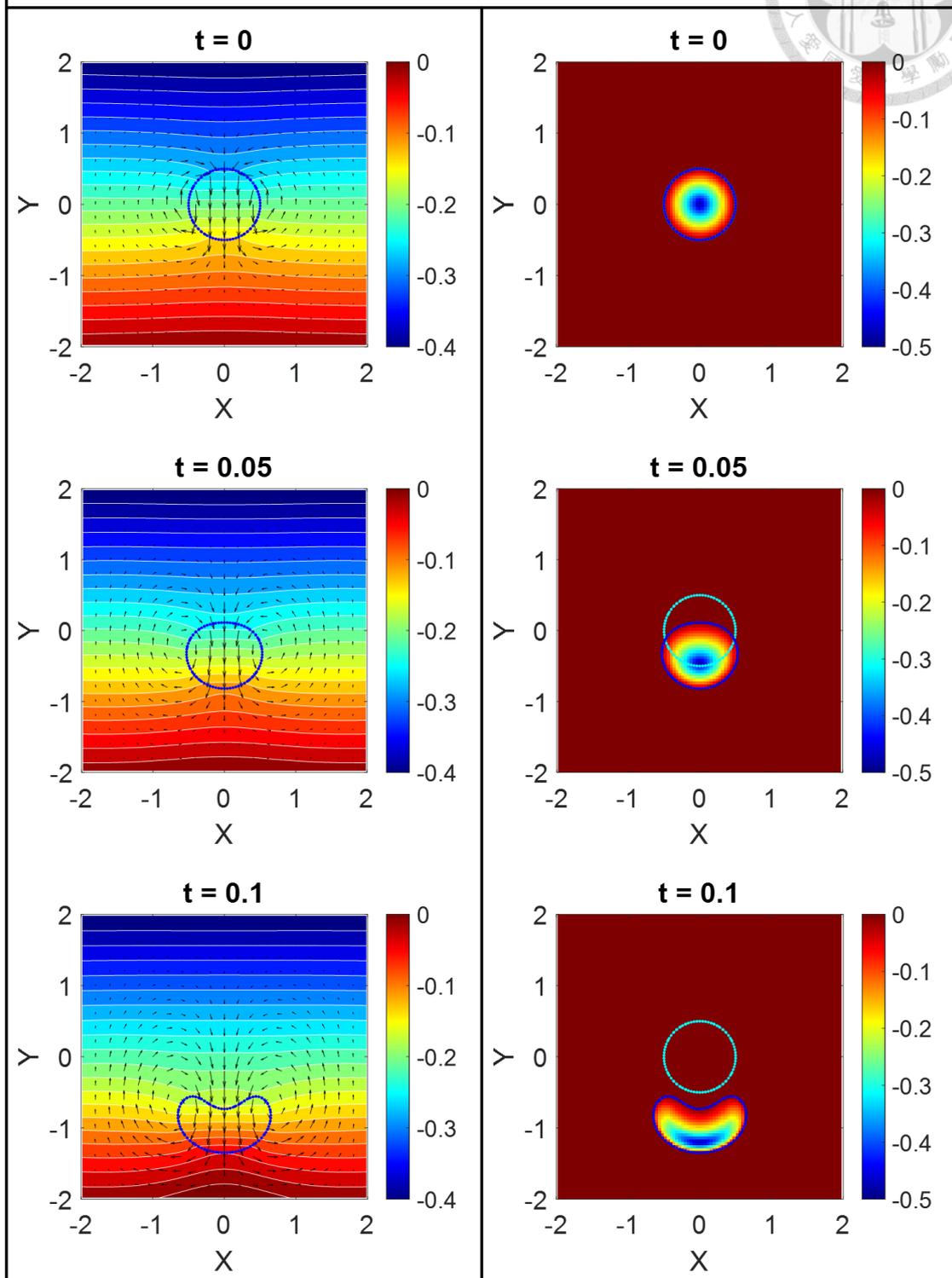


圖 4-7 組合六， $Re = 0.5$ 、 $\rho^s = 2$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖

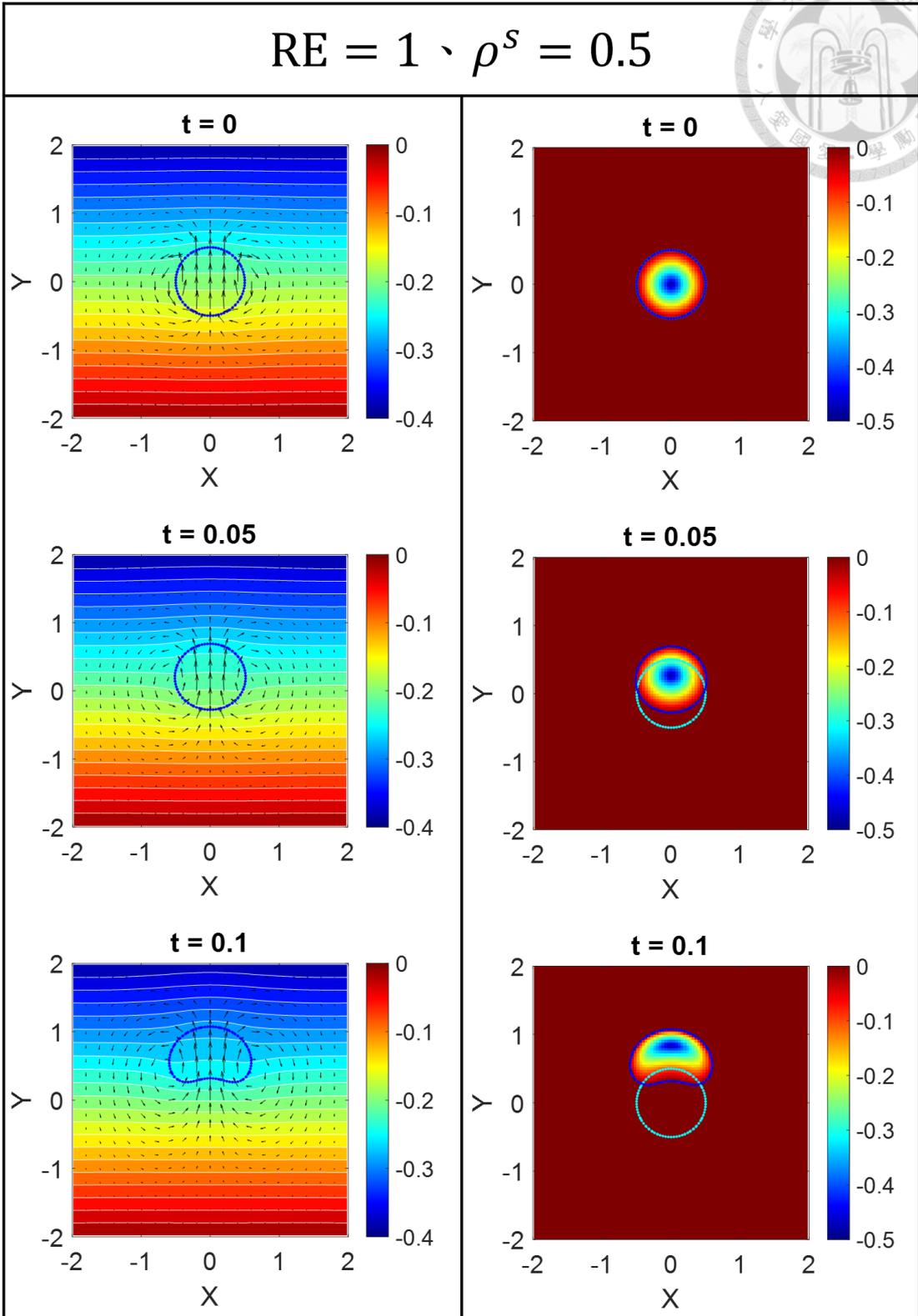
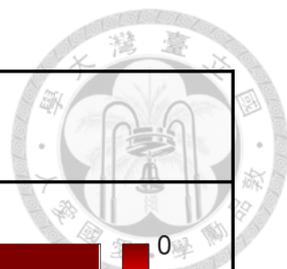


圖 4-8 組合七， $Re = 1, \rho^s = 0.5$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖

$$Re = 1, \rho^s = 1.5$$

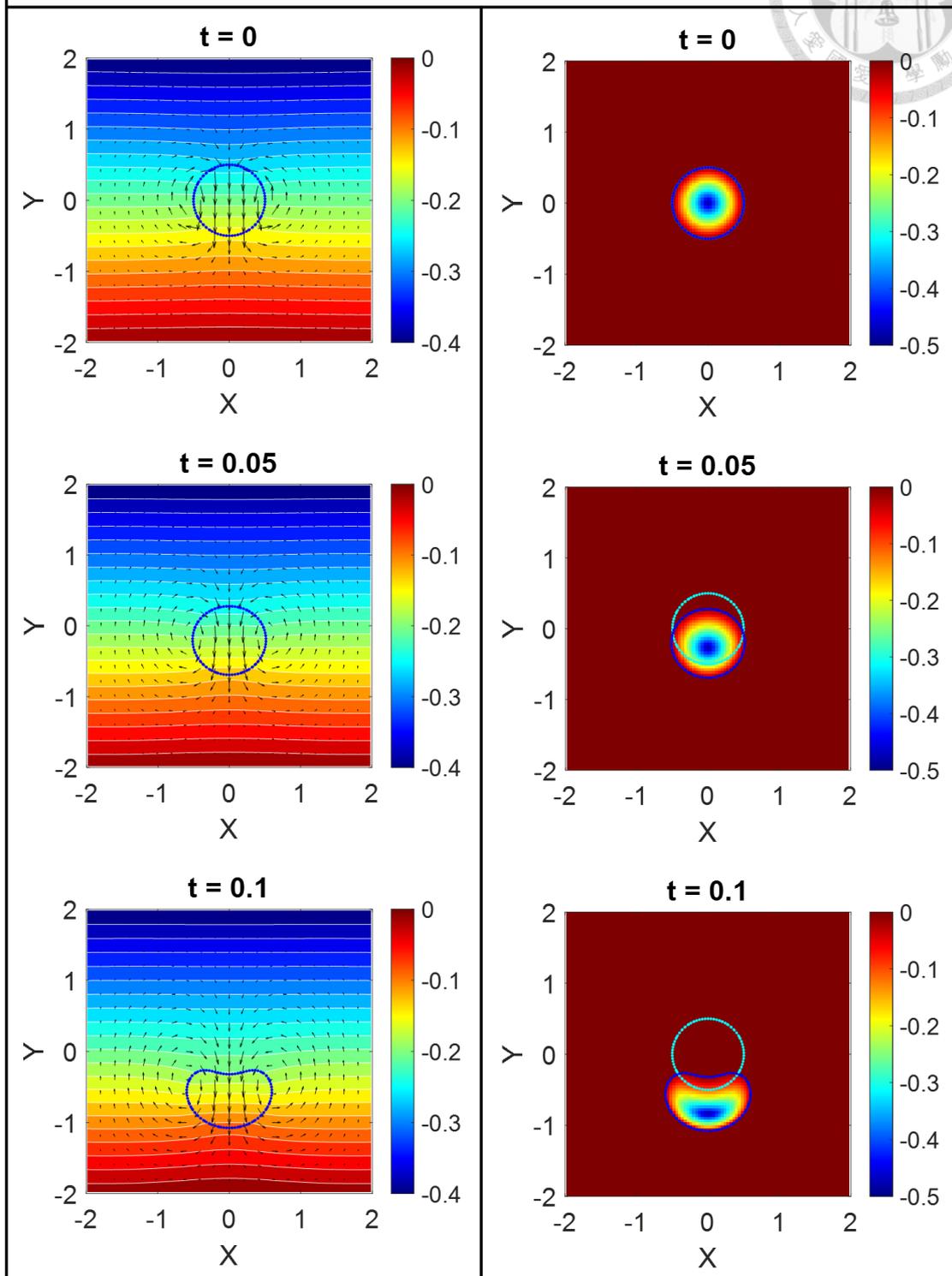


圖 4-9 組合八， $Re = 1, \rho^s = 1.5$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖

$$Re = 1, \rho^s = 2$$

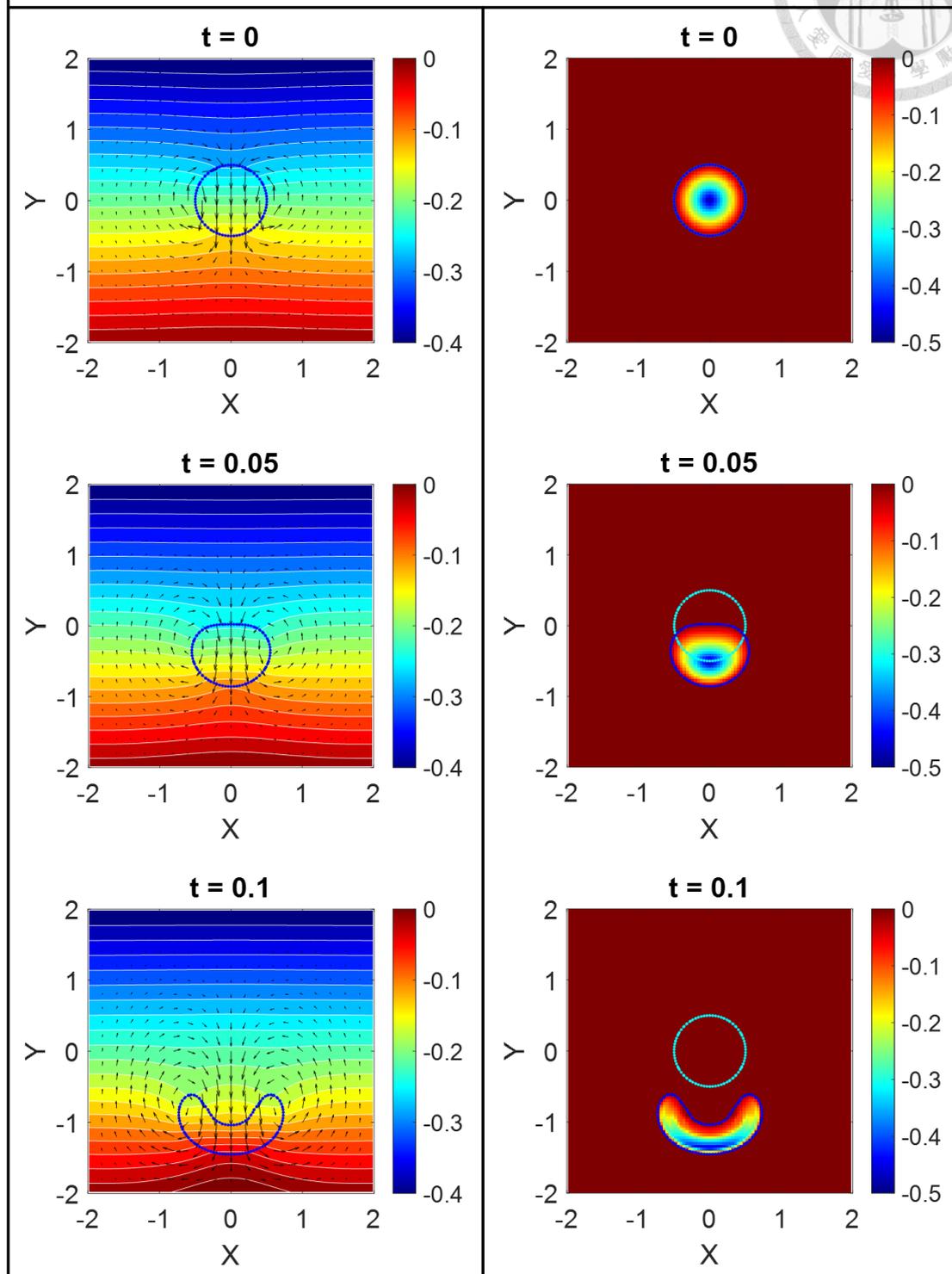


圖 4-10 組合九， $Re = 1$ 、 $\rho^s = 2$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖

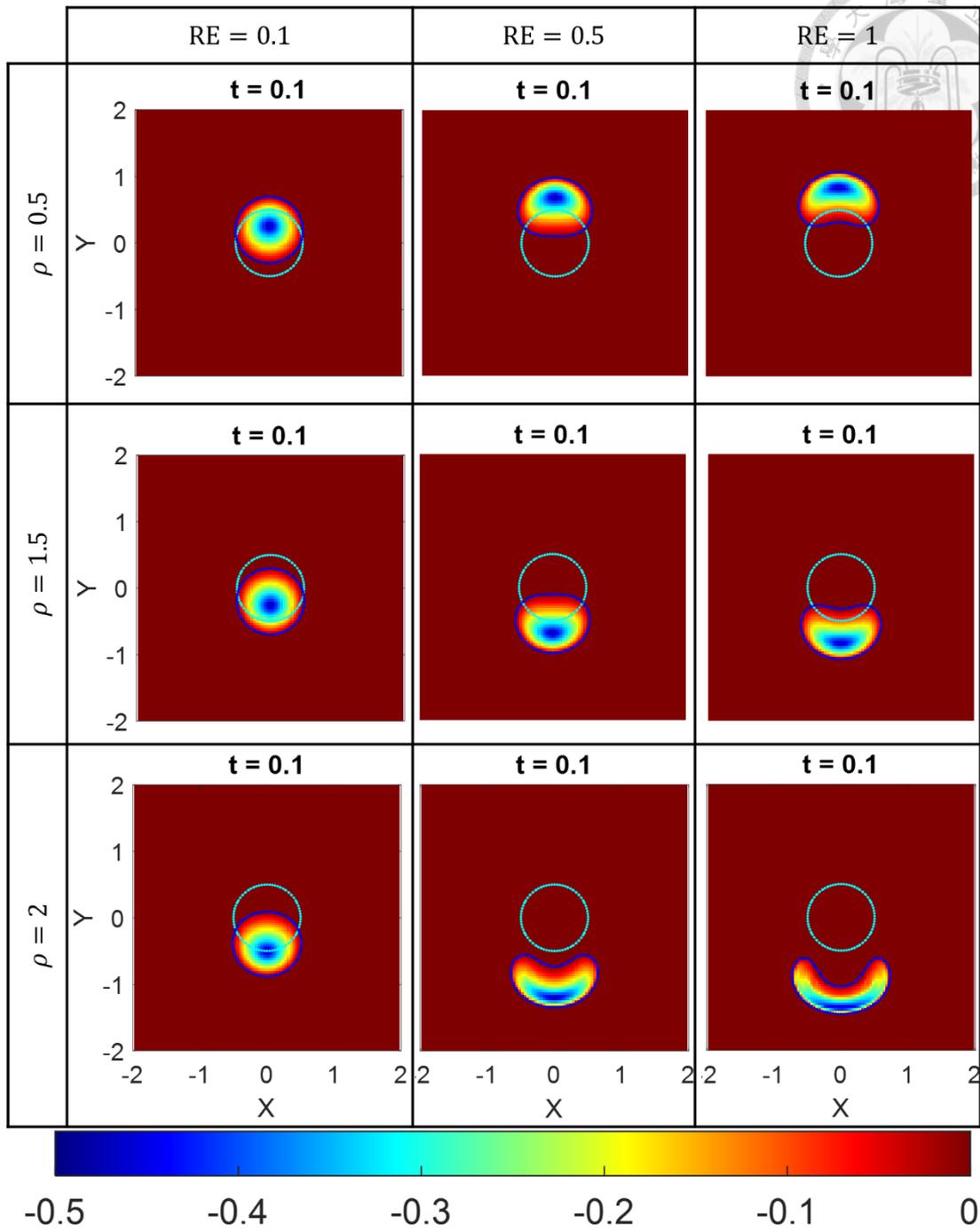


圖 4-11 重力項影響比較圖表

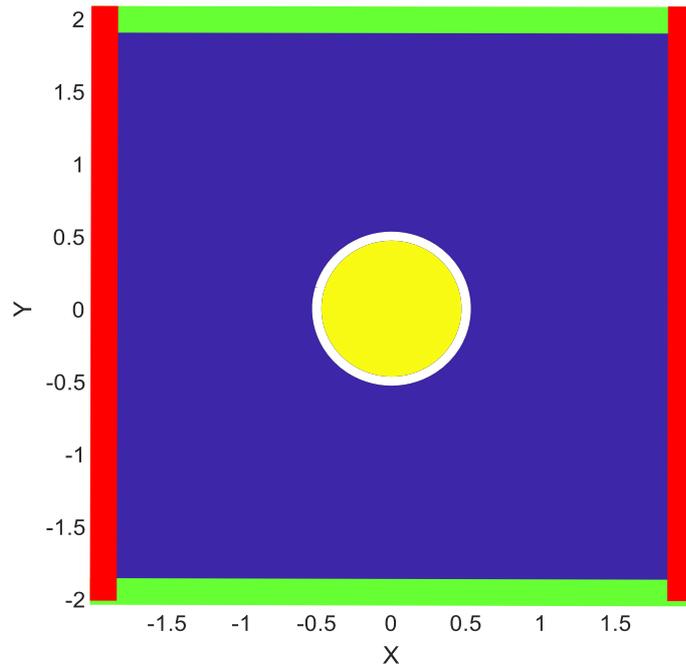


圖 4-12 流固耦合問題(慣性項)模型架構圖

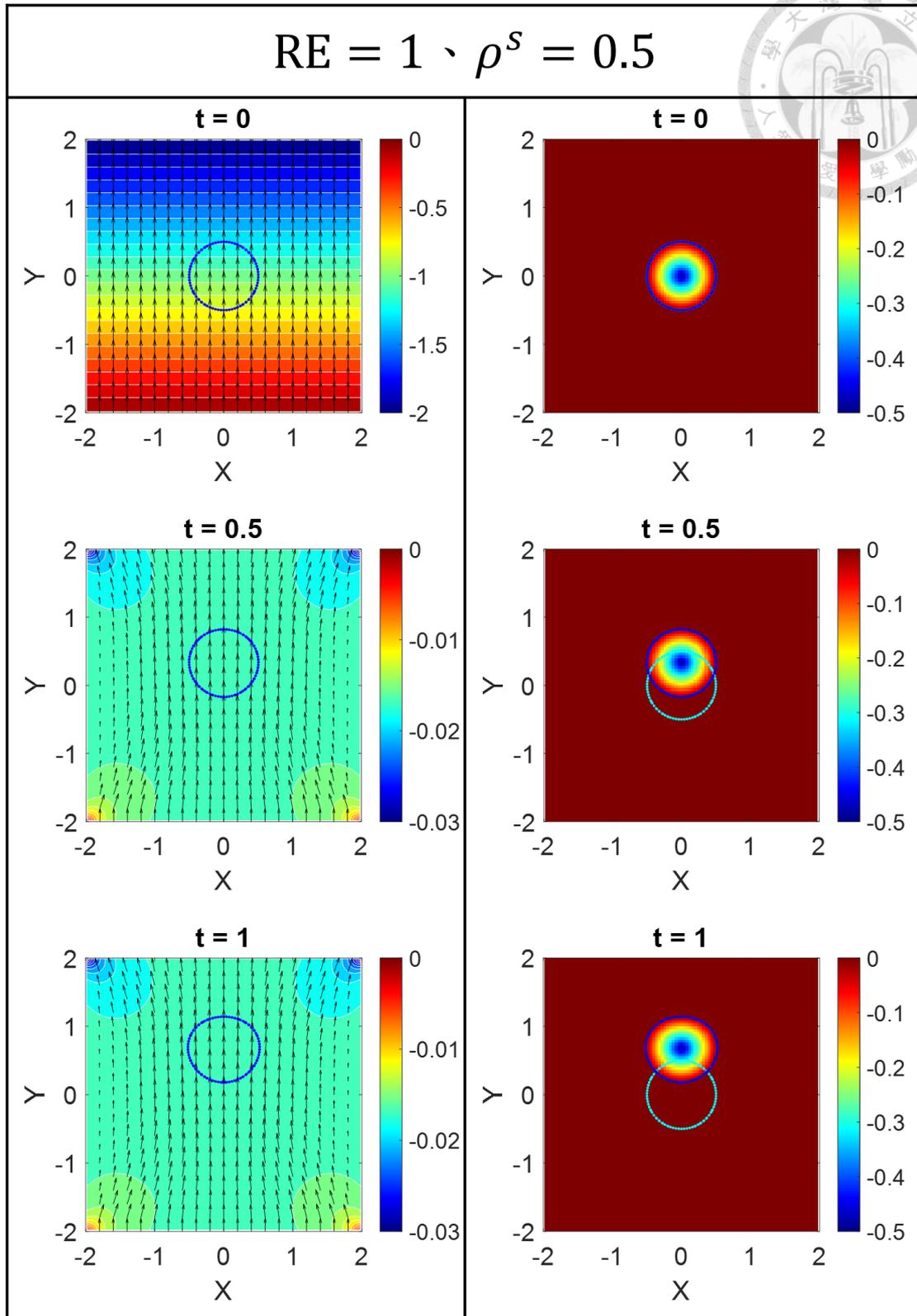


圖 4-13 組合一， $Re = 1, \rho^s = 0.5$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖

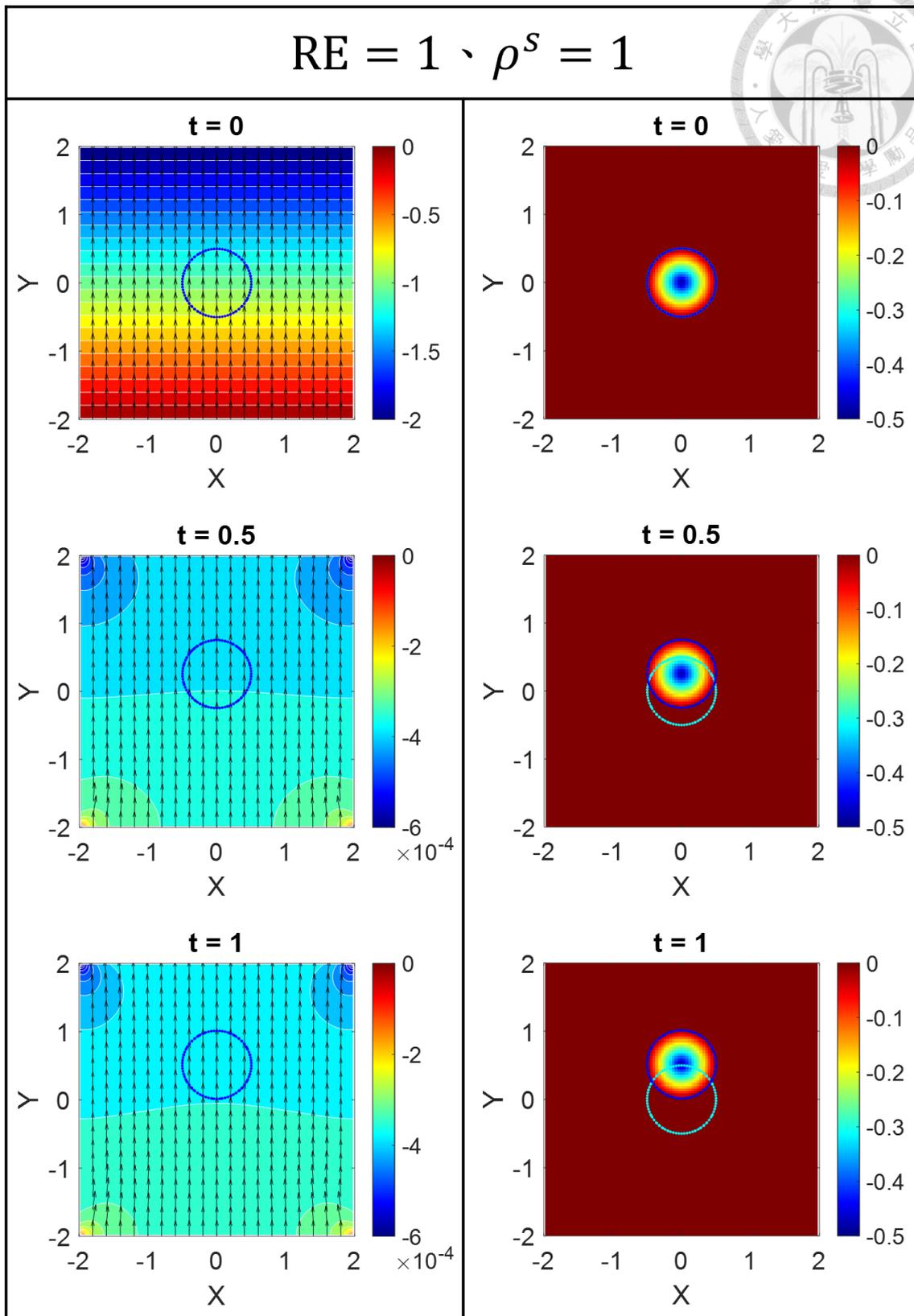


圖 4-14 組合二， $Re = 1, \rho^s = 1$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖

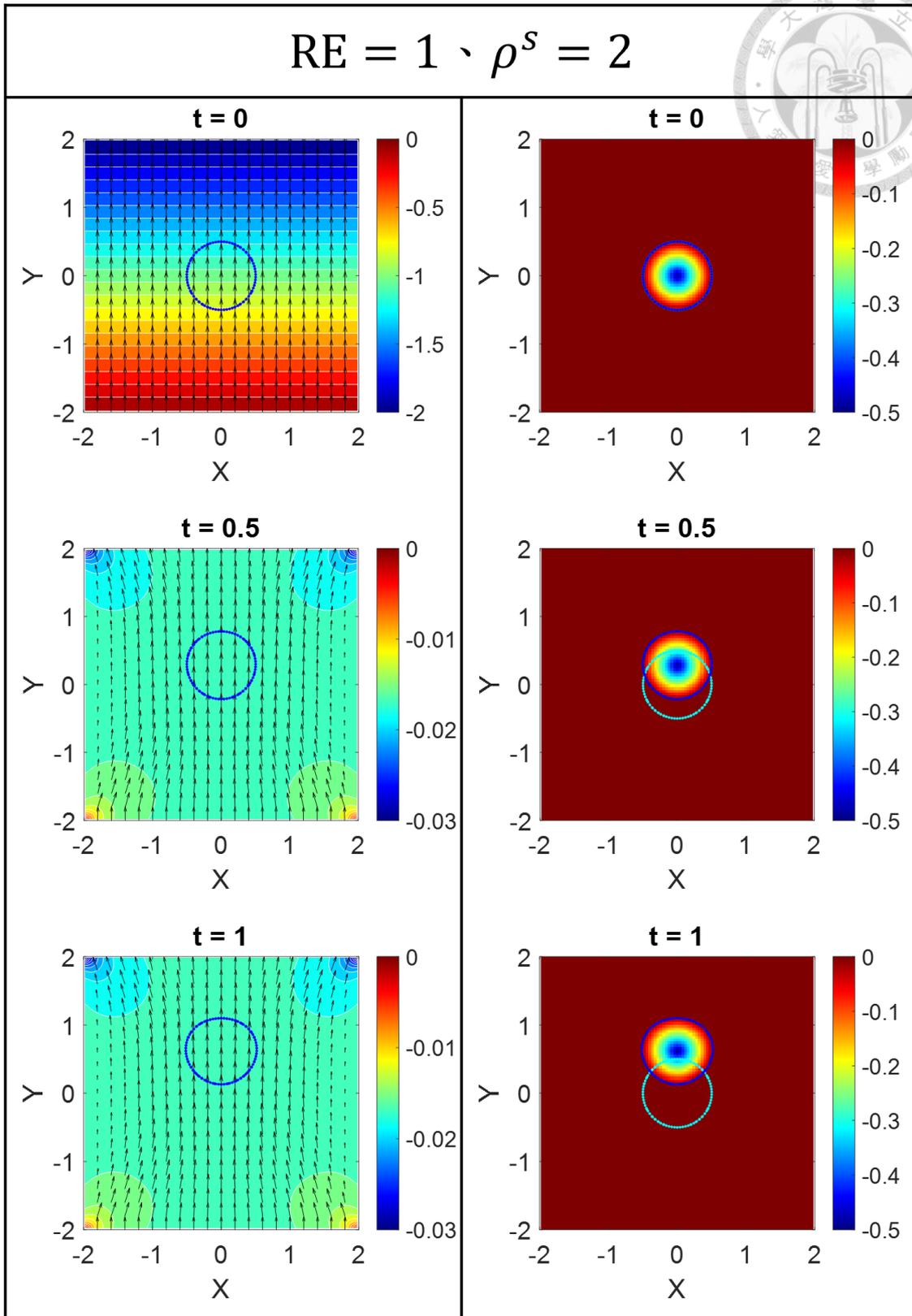


圖 4-15 組合三， $Re = 1, \rho^s = 2$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖

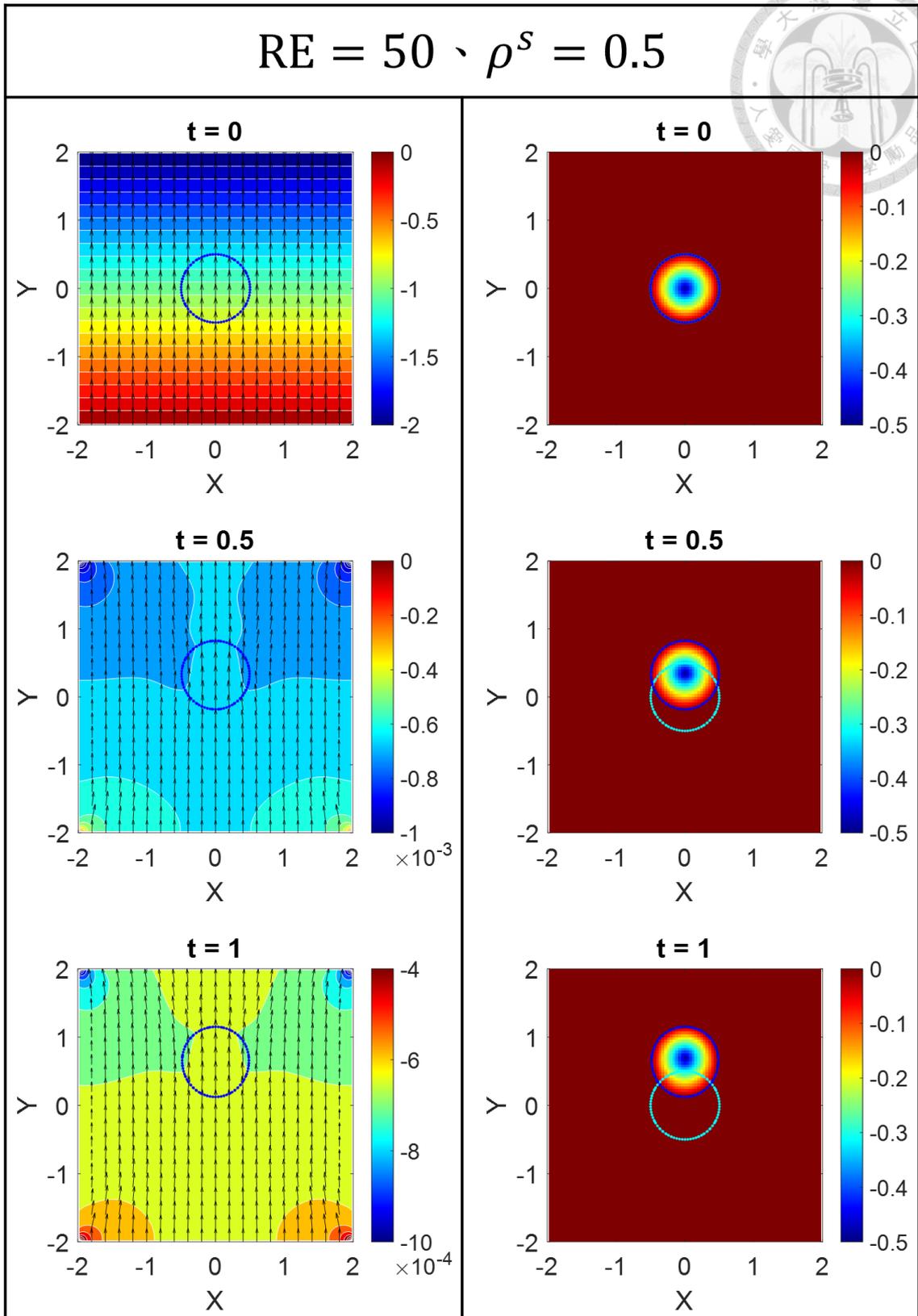


圖 4-16 組合四， $Re = 50$ 、 $\rho^s = 0.5$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖

$$Re = 50, \rho^s = 1$$

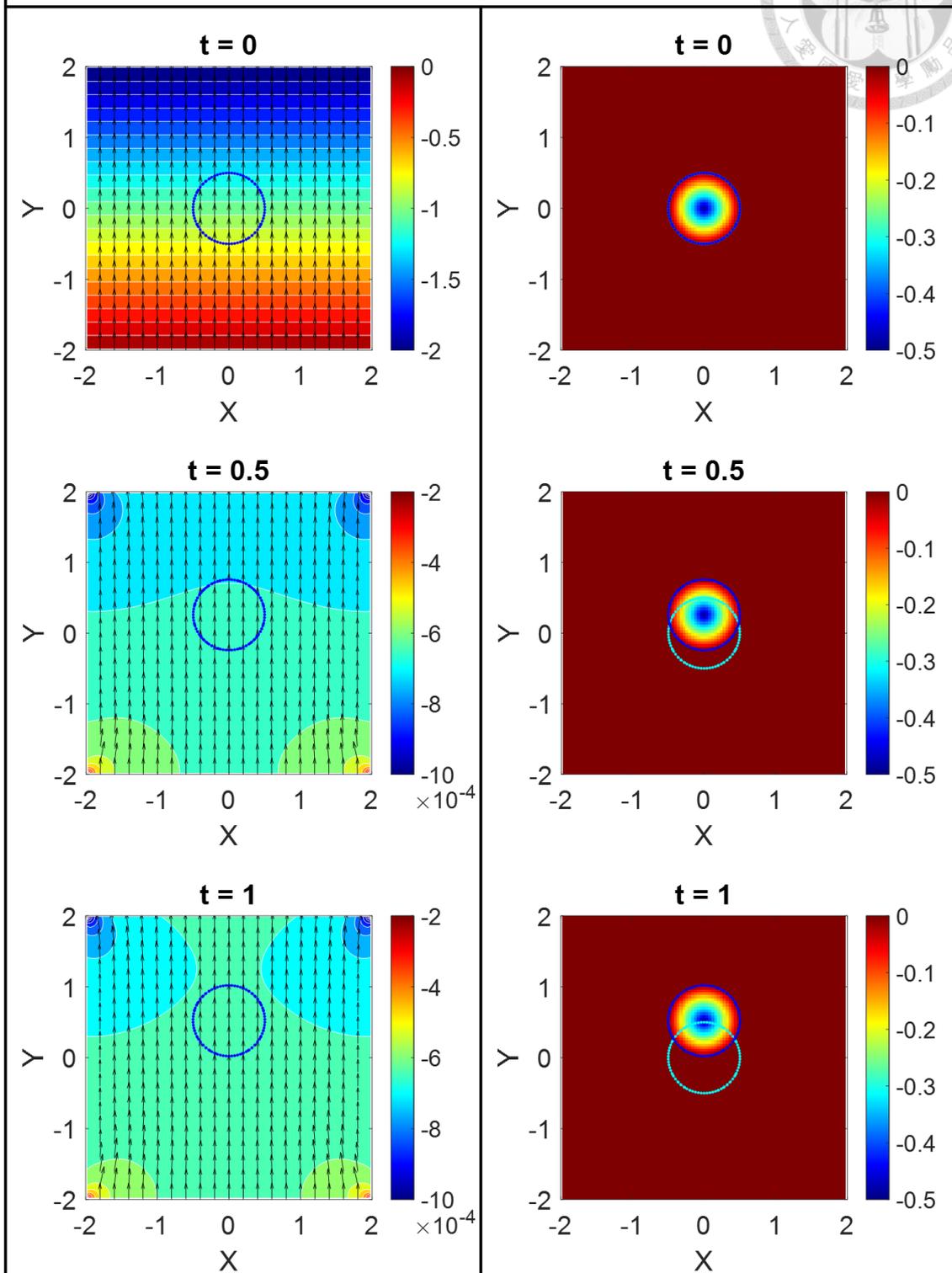


圖 4-17 組合五， $Re = 50$ 、 $\rho^s = 1$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖

$$Re = 50, \rho^s = 2$$

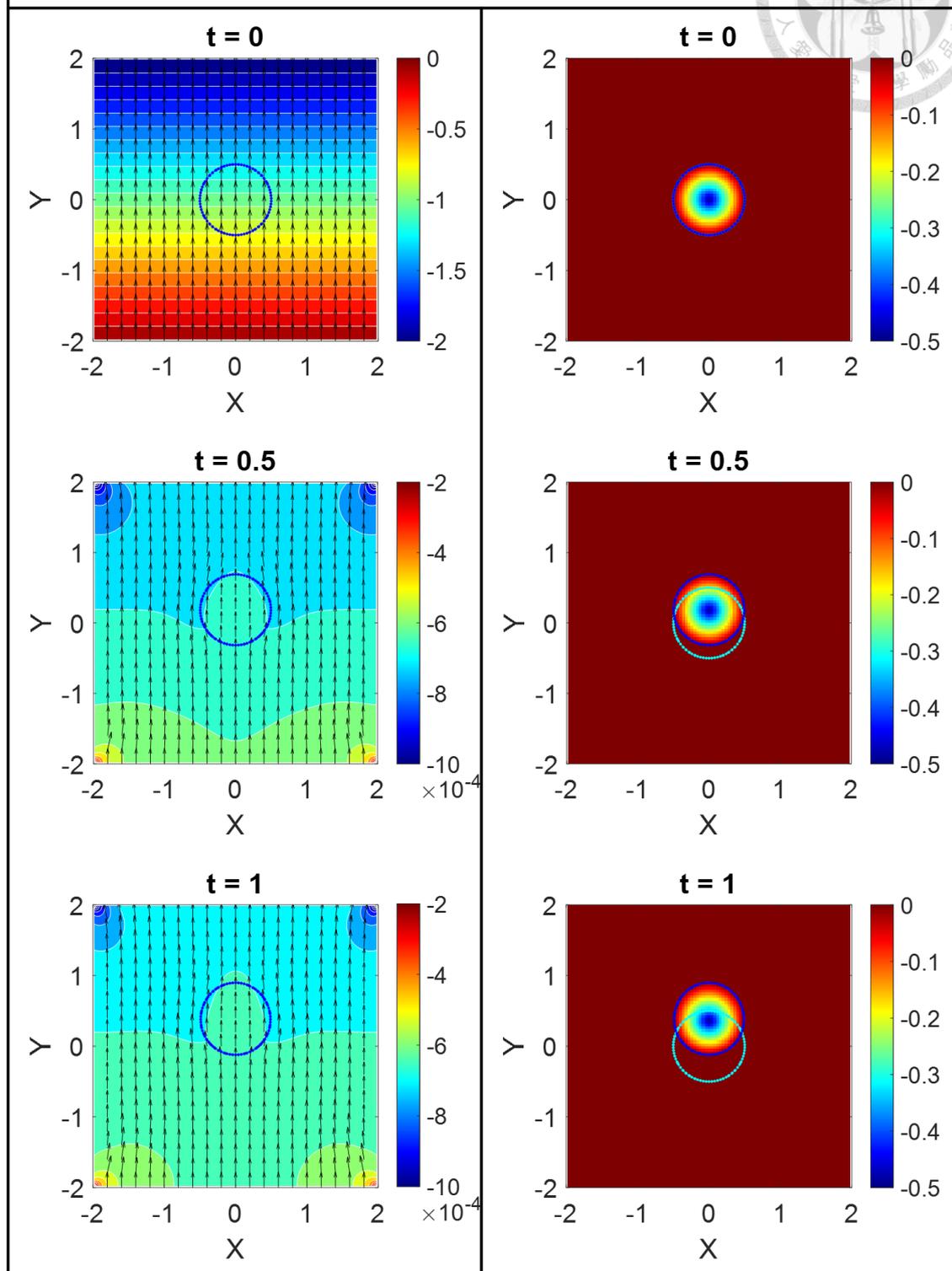


圖 4-18 組合六， $Re = 50$ 、 $\rho^s = 2$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖

$$Re = 100, \rho^s = 0.5$$

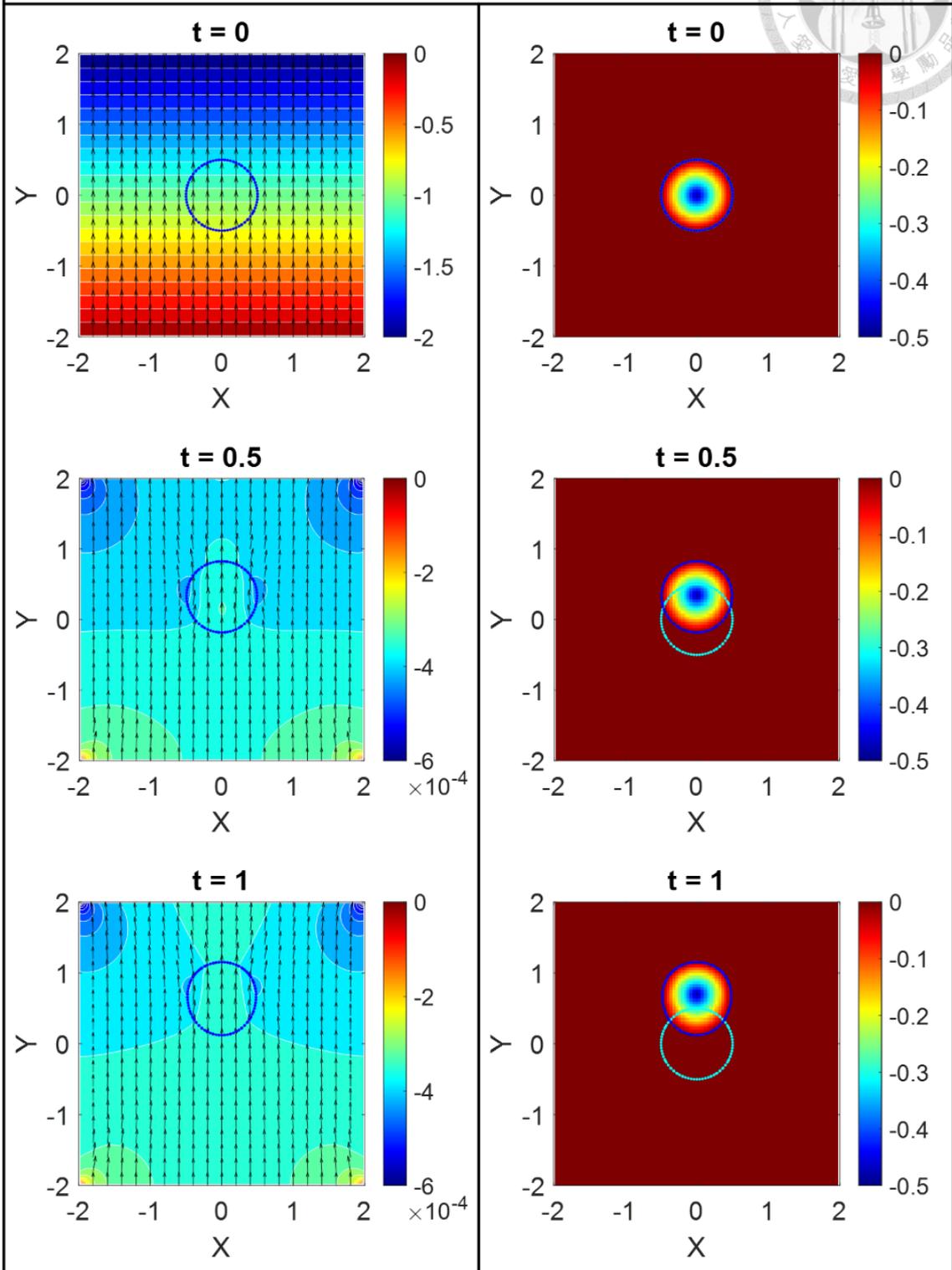


圖 4-19 組合七， $Re = 100$ 、 $\rho^s = 0.5$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖

$$Re = 100, \rho^s = 1$$

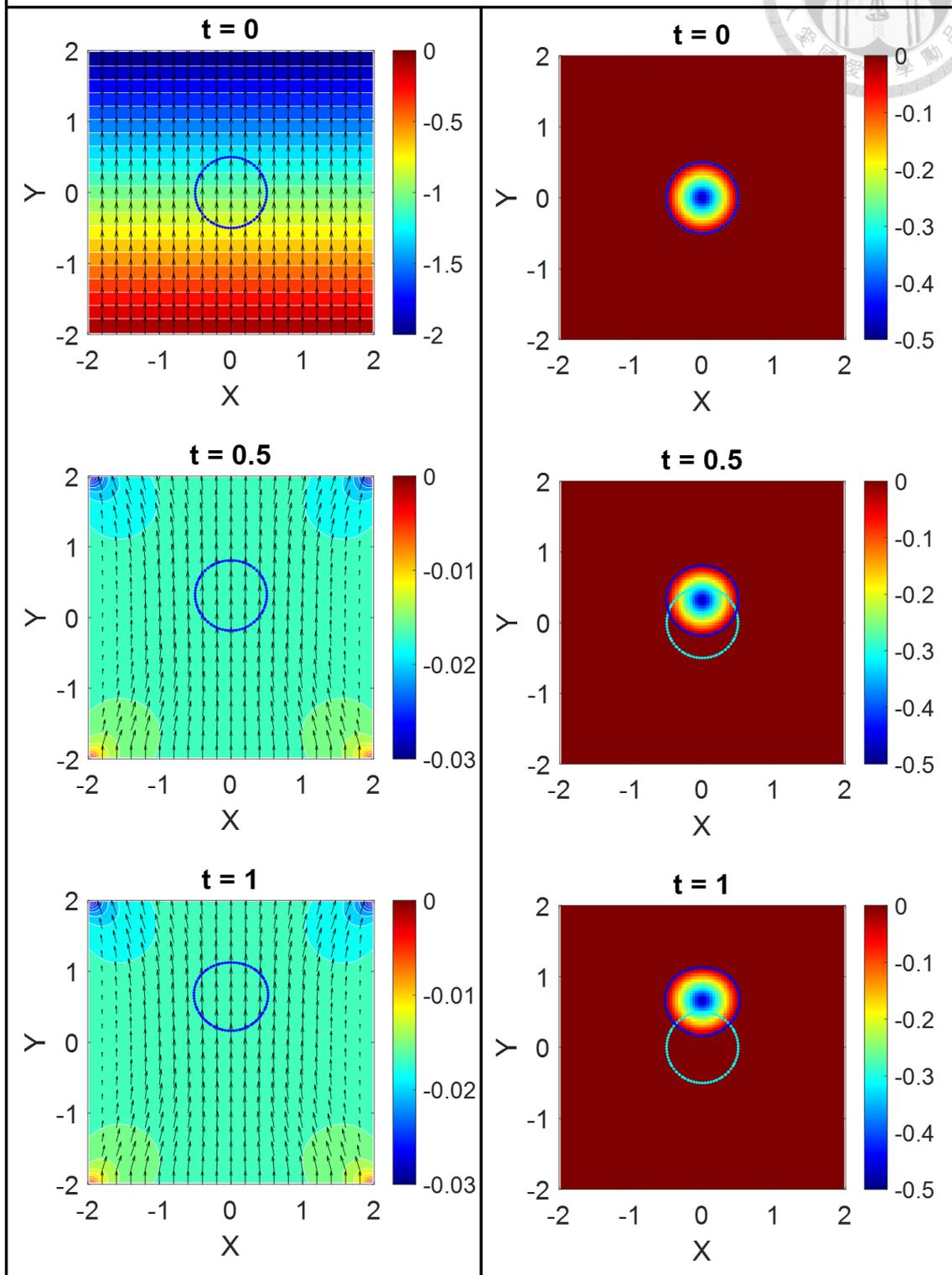


圖 4-20 組合八， $Re = 100$ 、 $\rho^s = 1$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖

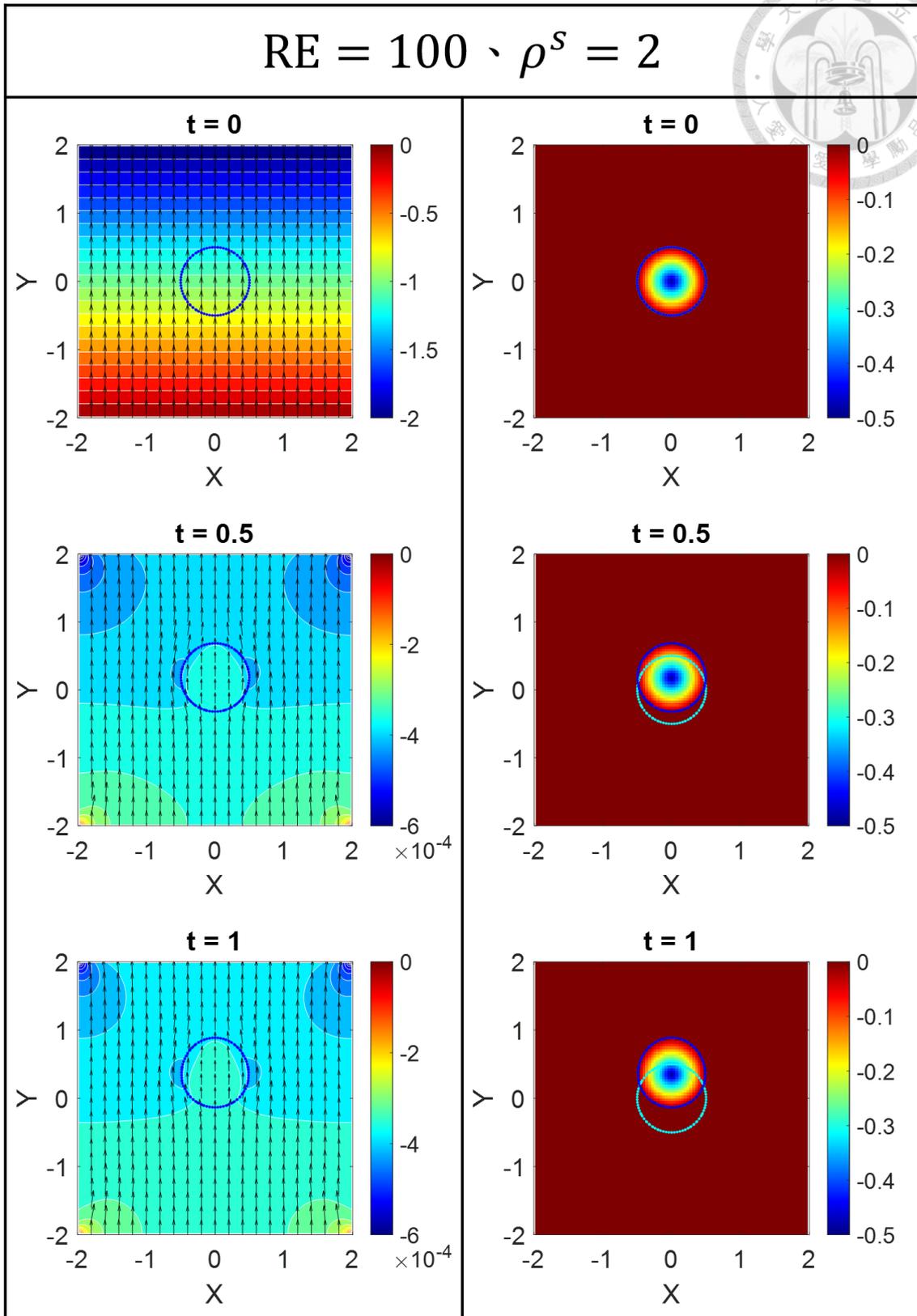


圖 4-21 組合九， $Re = 100, \rho^s = 2$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖

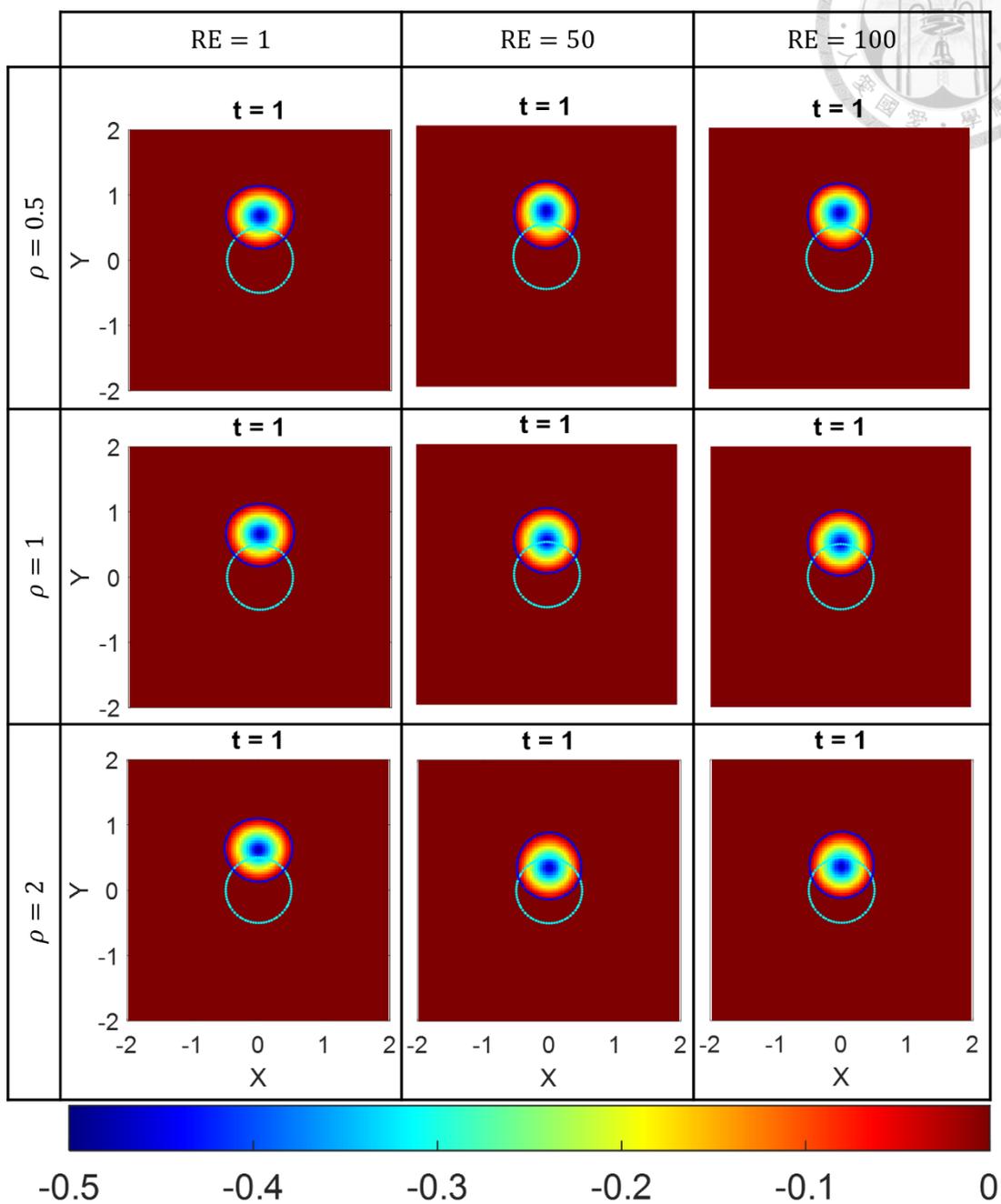
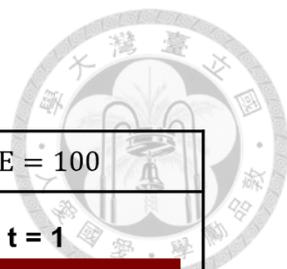


圖 4-22 慣性項影響比較圖表

$Re = 0.1$ 、 $E = 0$

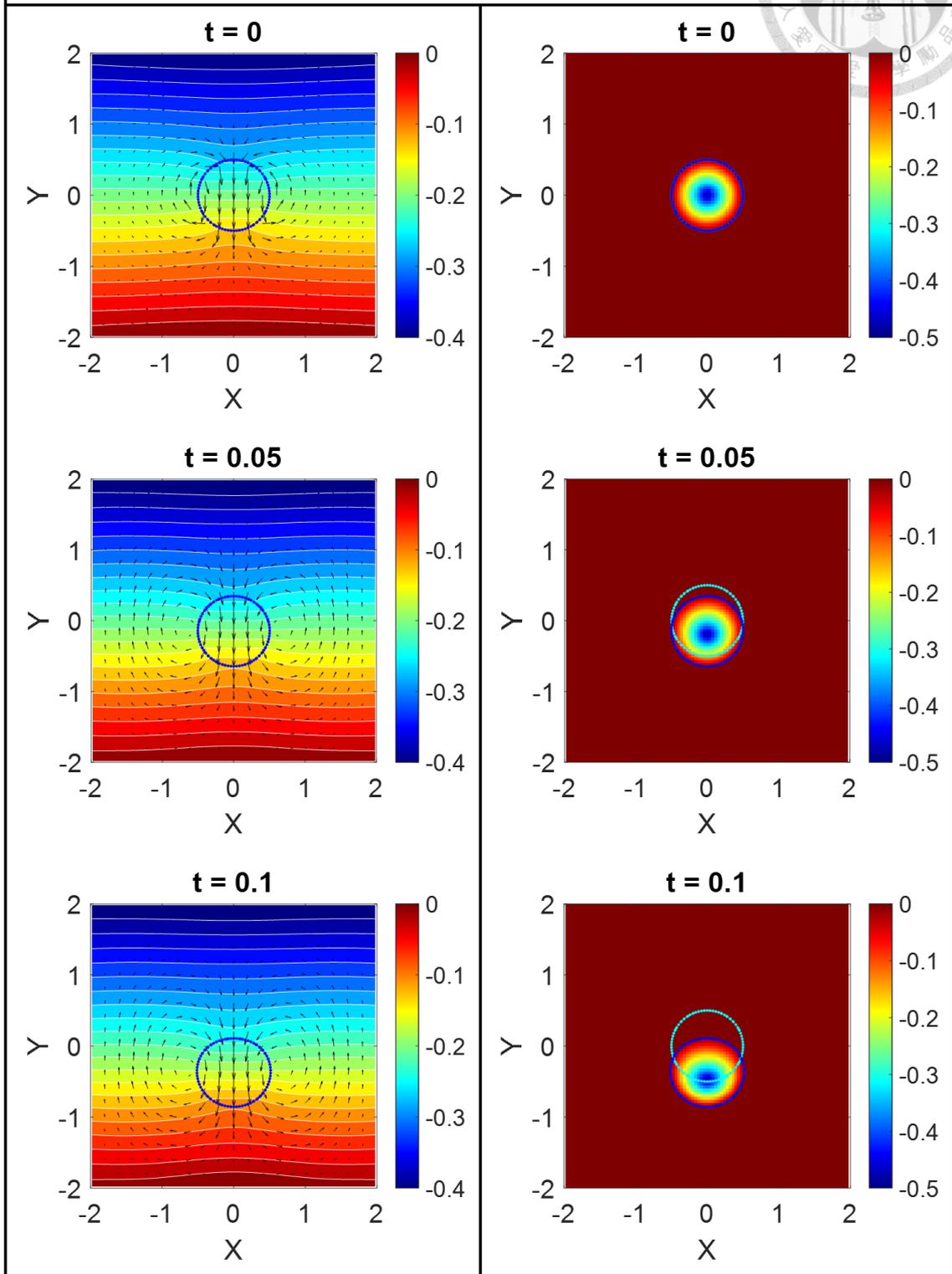


圖 4-23 組合一， $Re = 0.1$ 、 $E = 0$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖

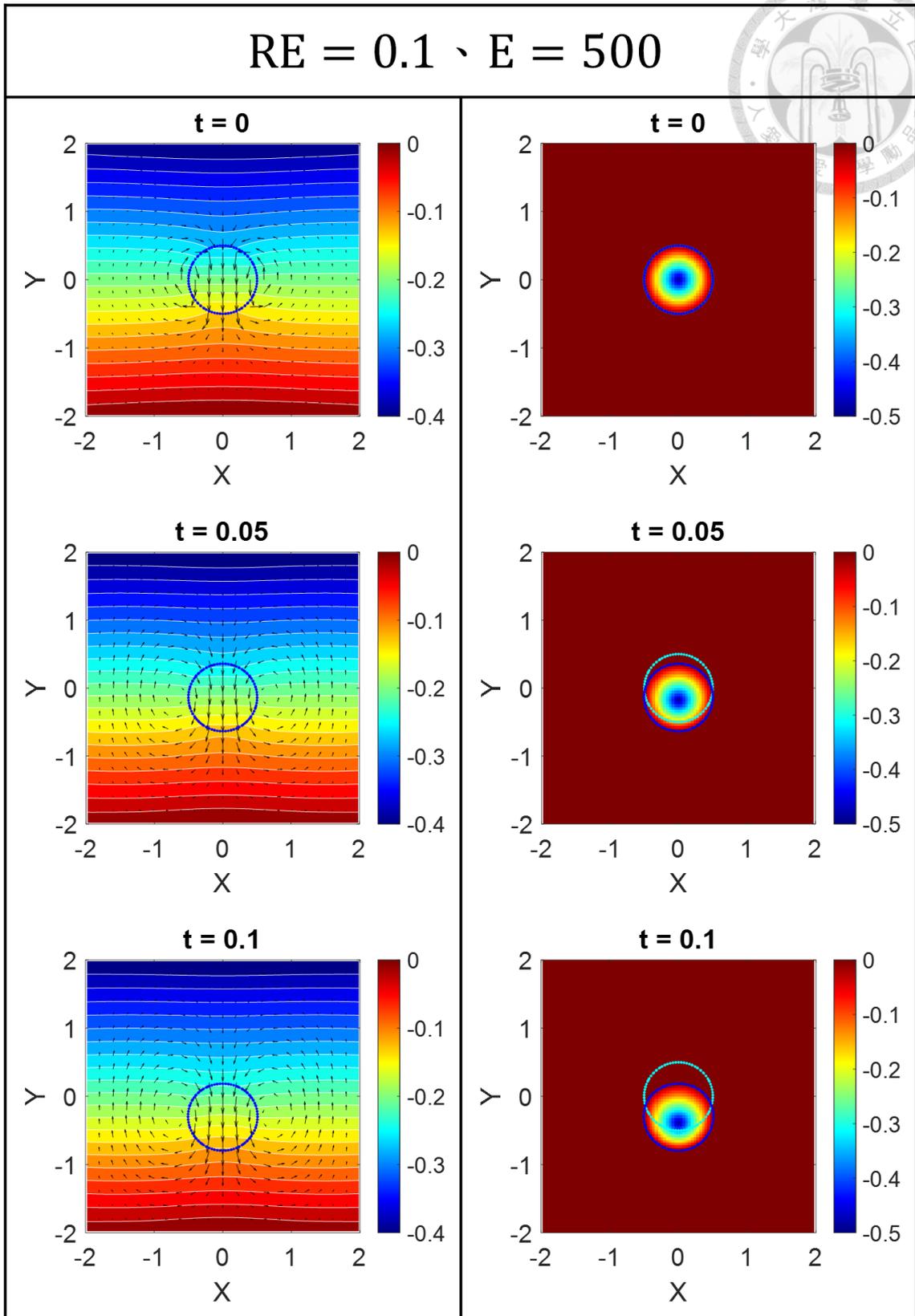


圖 4-24 組合二， $Re = 0.1$ 、 $E = 500$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖

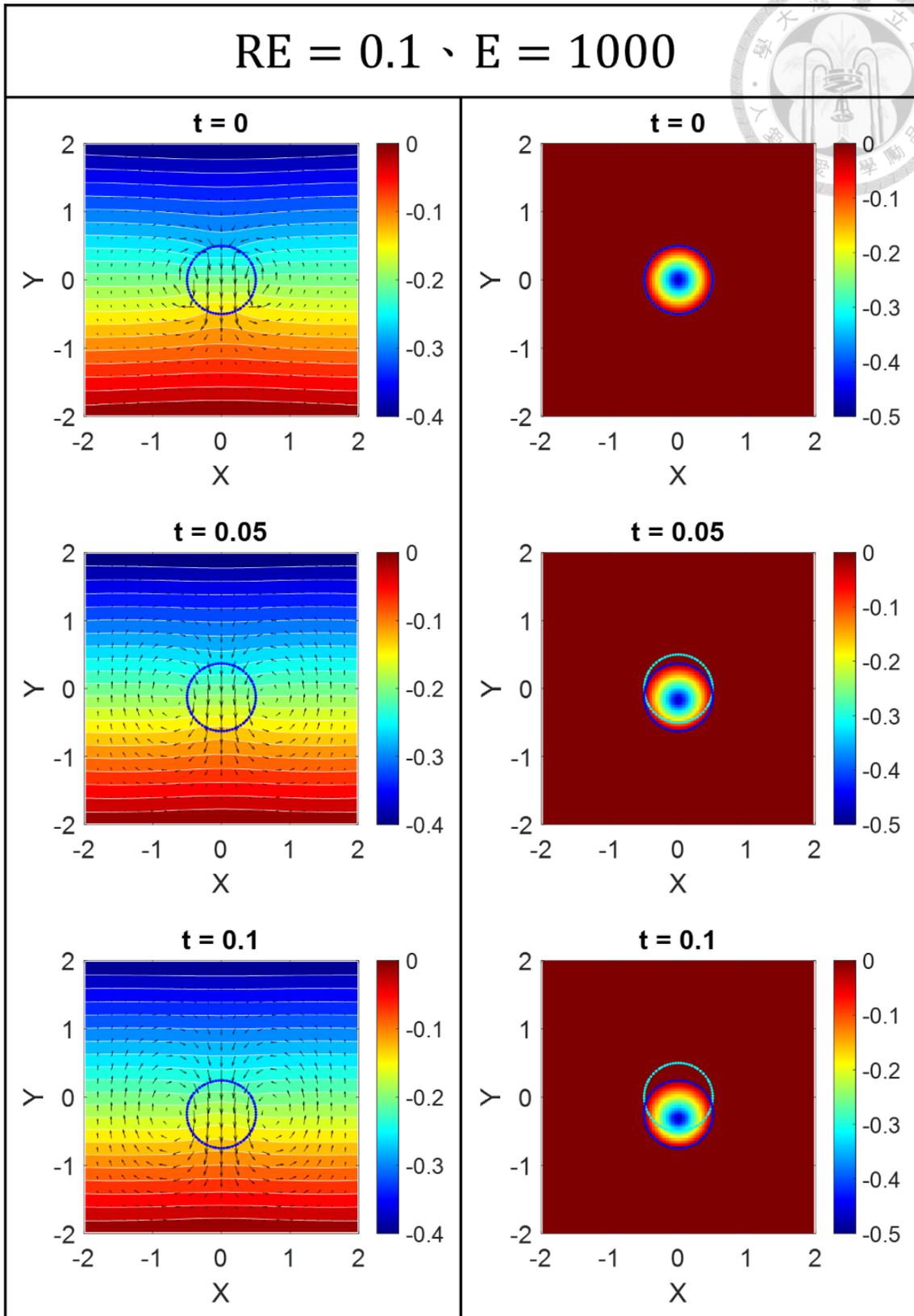


圖 4-25 組合三， $Re = 0.1$ 、 $E = 1000$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖

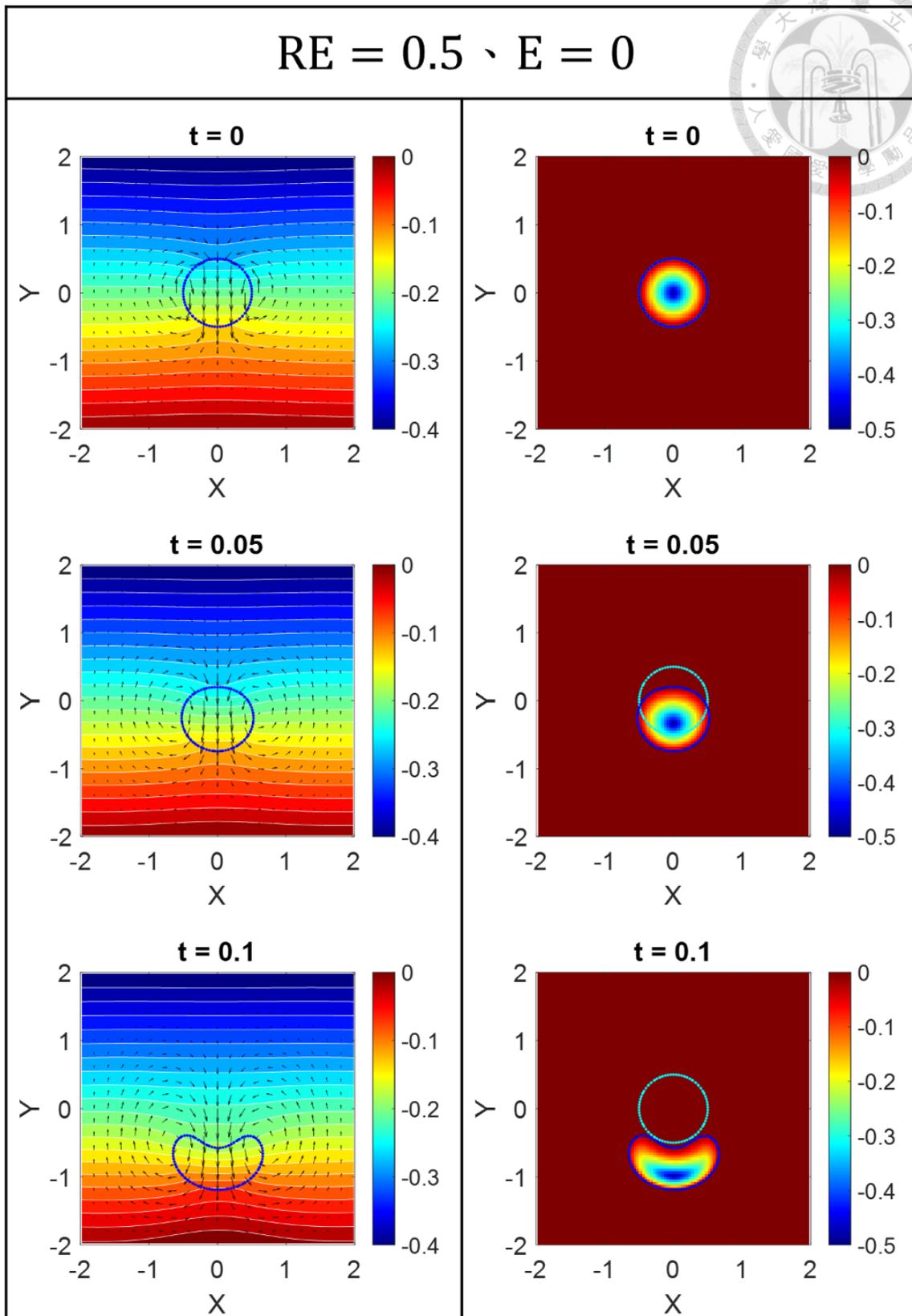


圖 4-26 組合四， $Re = 0.5$ 、 $E = 0$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖

RE = 0.5 、 E = 500

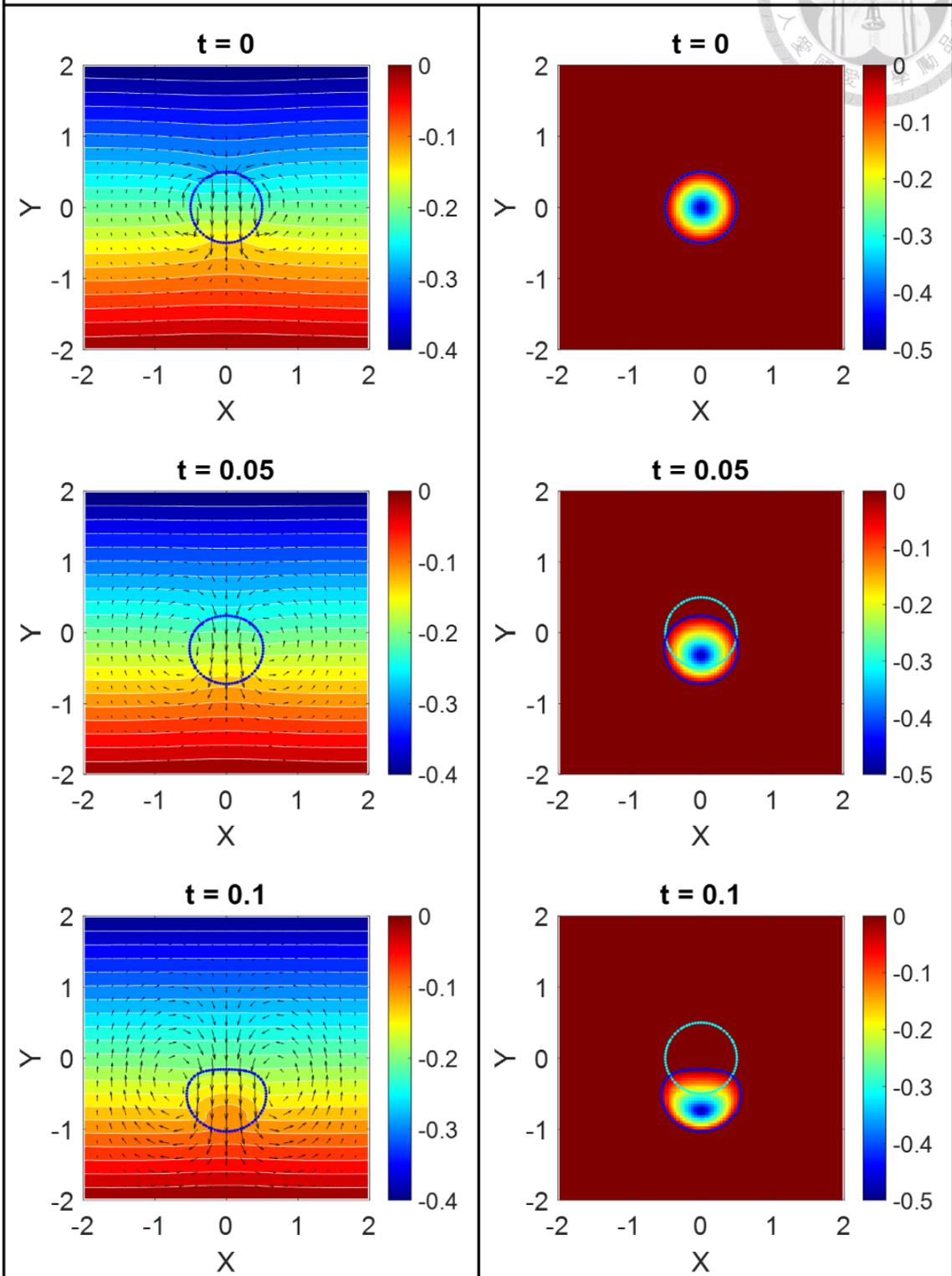


圖 4-27 組合五， $Re = 0.5$ 、 $E = 500$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖

RE = 0.5 、 E = 1000

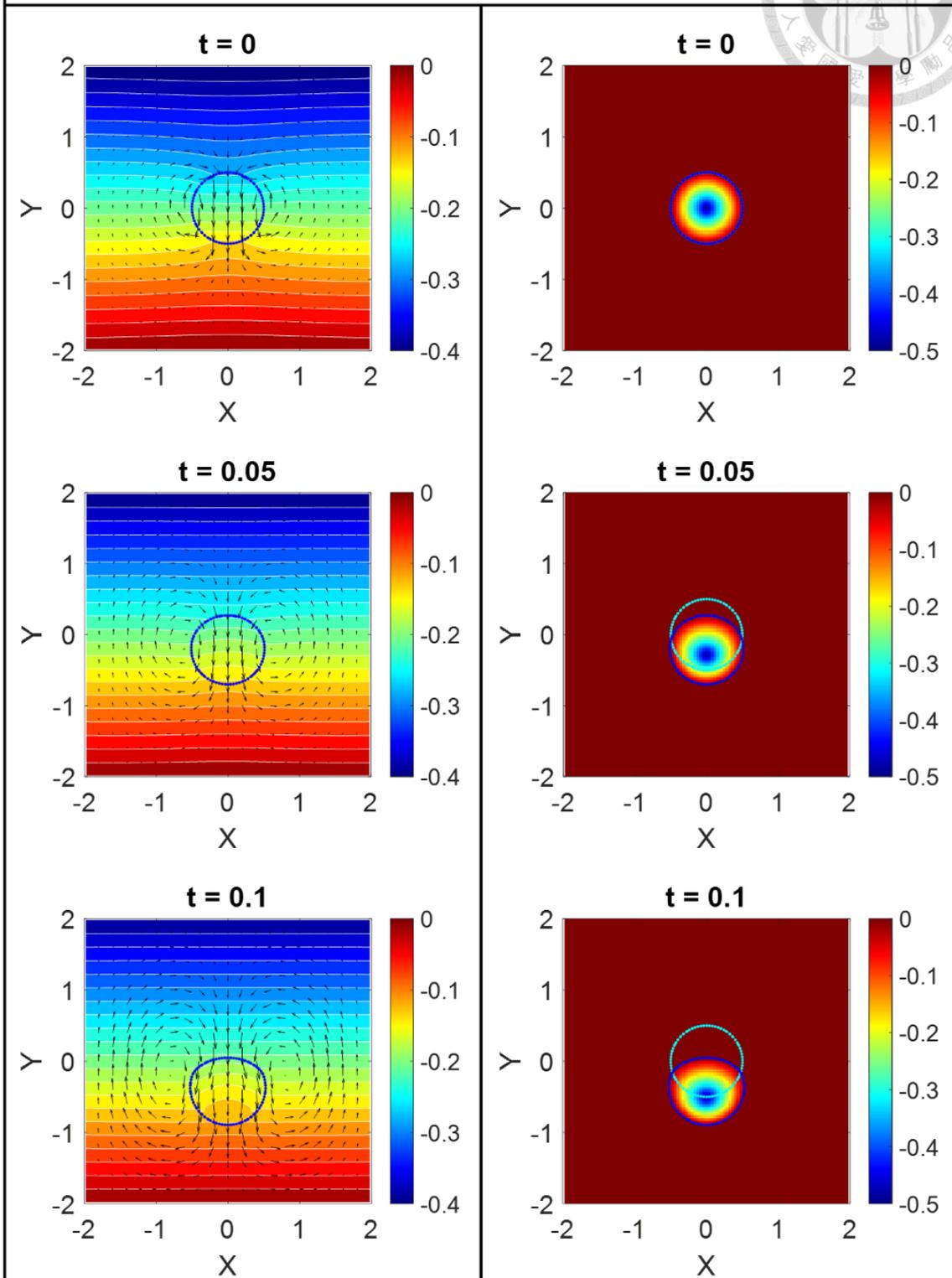


圖 4-28 組合六， $Re = 0.5$ 、 $E = 1000$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖

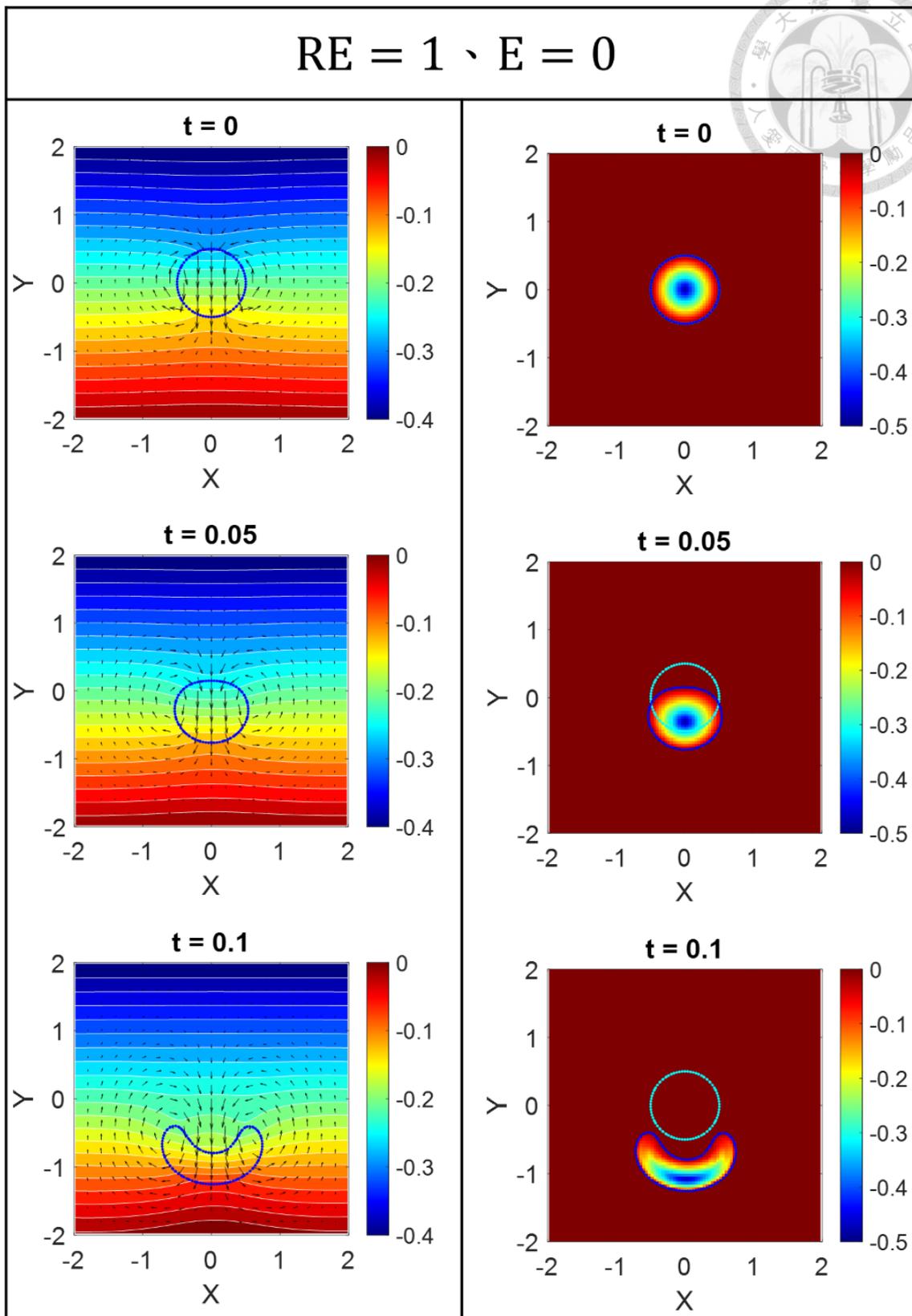


圖 4-29 組合七， $Re = 1$ 、 $E = 0$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖

RE = 1、E = 500

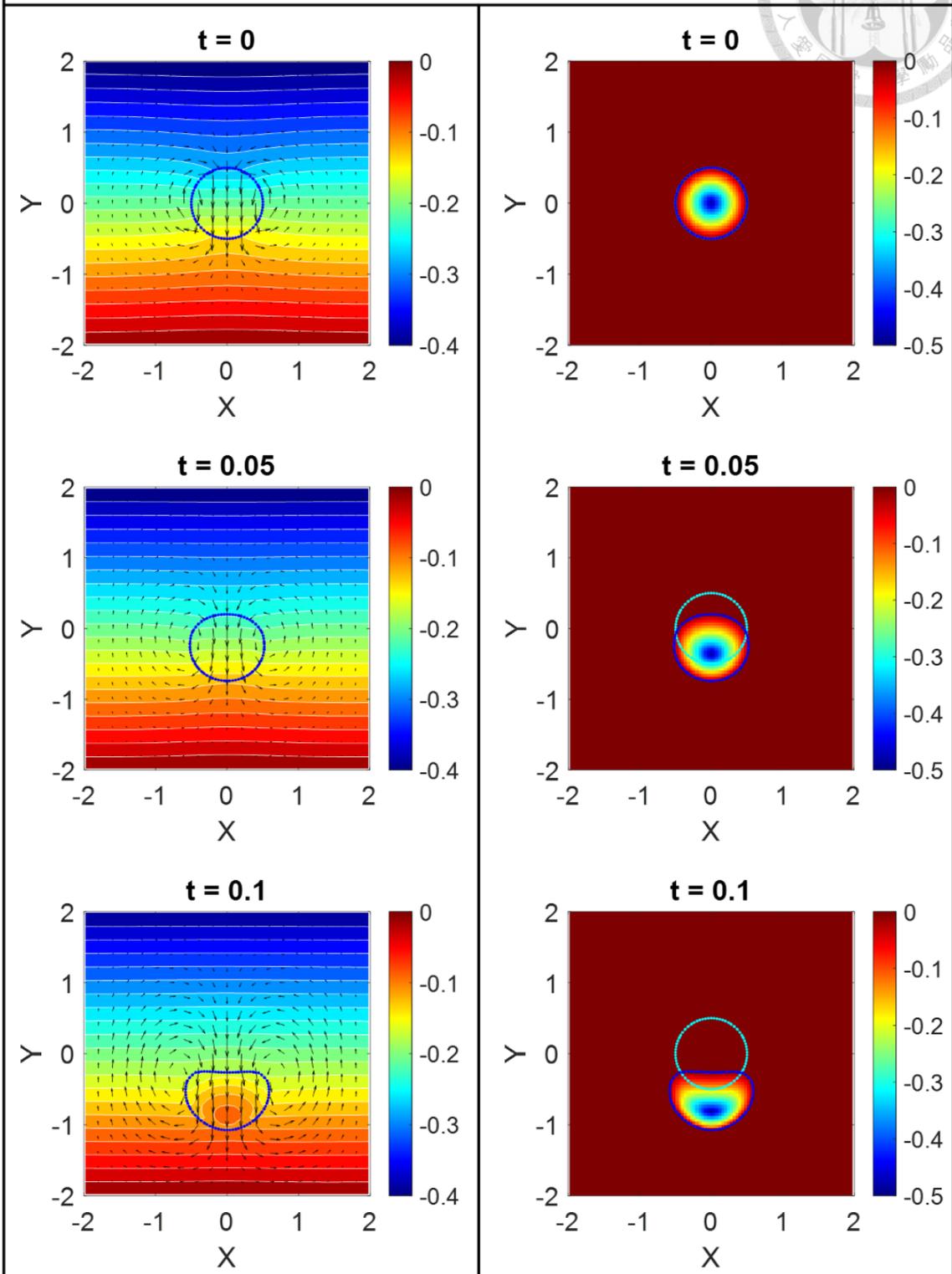


圖 4-30 組合八， $Re = 1$ 、 $E = 500$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖

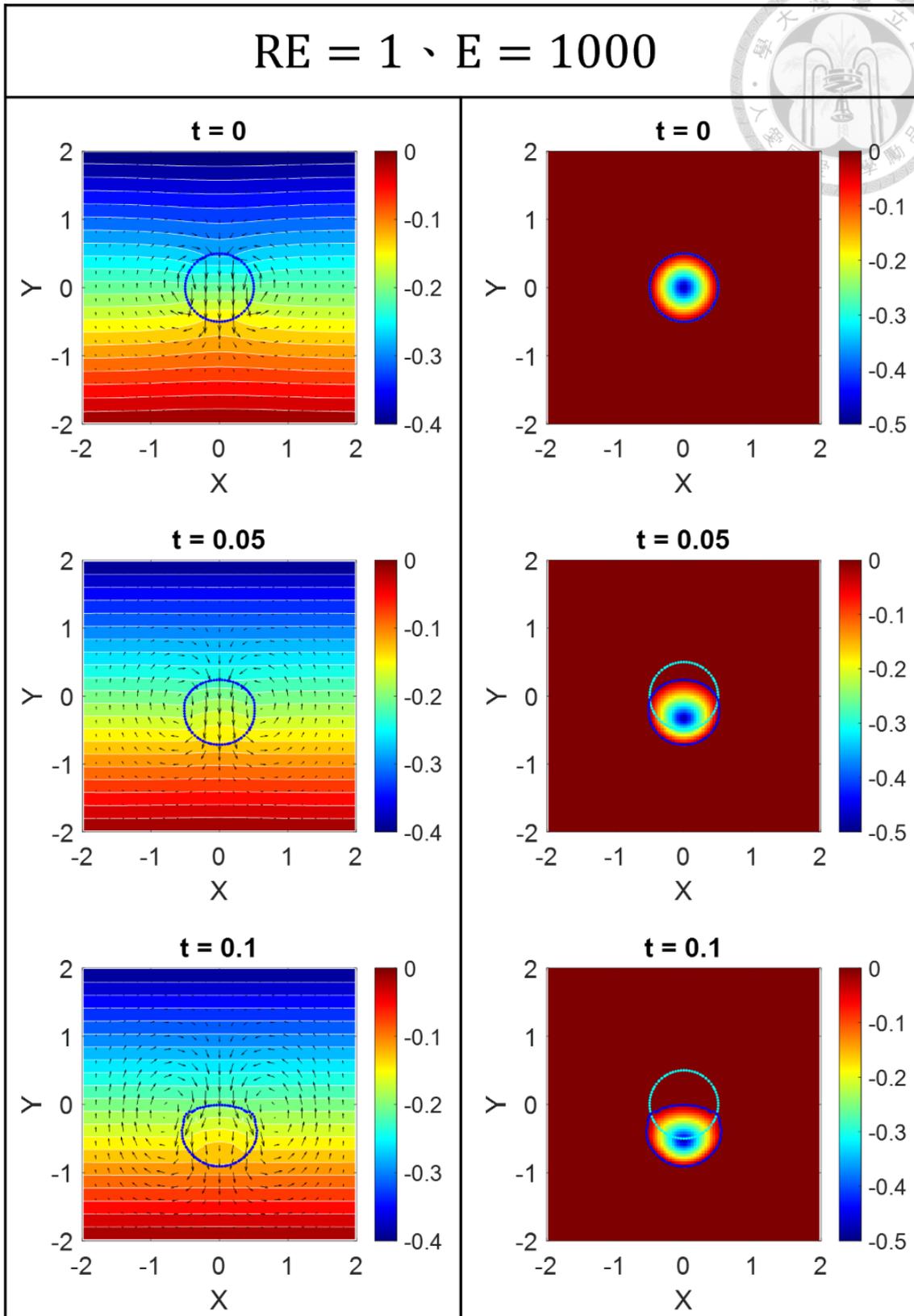
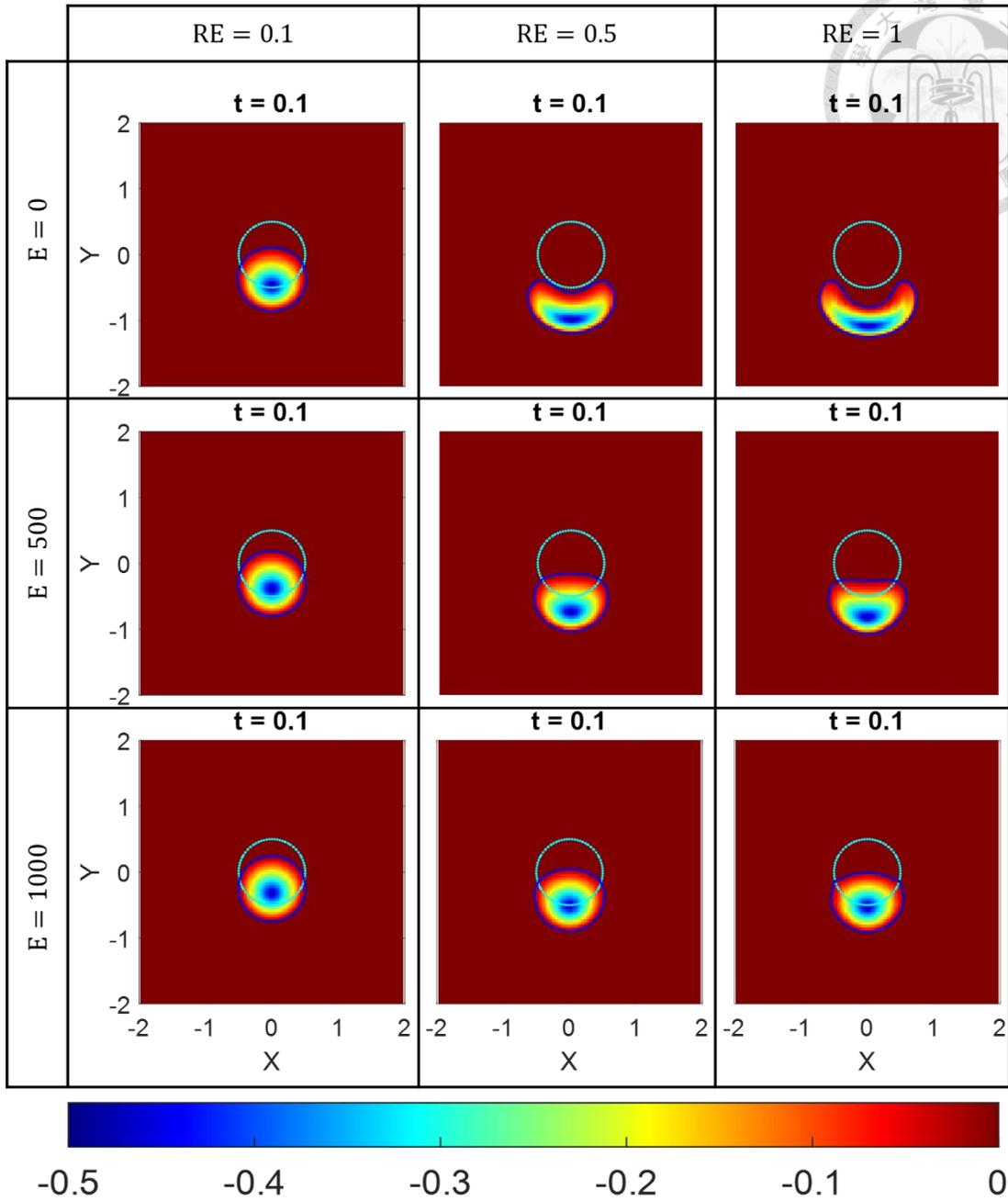


圖 4-31 組合九， $Re = 1$ 、 $E = 1000$ (左)流場分布圖、(右)水平集函數分布圖



4- 32 剛性項影響比較圖表

第五章 結論與未來展望



5.1. 結論

本論文以參考映射技術與浸潤式有限元素法為基礎，基於以上兩理論進行解析公式推導，以及輔以相應應用數學方法實作，成功建立了一個全歐拉式全歐拉式流固耦合力學解析與計算架構—「浸潤式參考映射法」。此一新穎浸潤式參考映射法高度適合用以處理浸潤於流體中巨量變形或運動固體之流固耦合力學問題，且由本論文成果可得知，提出的浸潤式參考映射法具有一定的穩定性與計算效率，解析所得流固耦合力場，更是完整地扮演在流場分布與固體變形或運動相互干涉的過程中，在兩者間相互傳達資訊的橋樑。

透過本研究採用之參考映射技術，由於固體場域與流體場域同在歐拉固定格點上進行分析，可免去固體拉格朗日描述因巨量變形或運動而引致網格高度扭曲的問題，並藉由水平集函數精準判定固體與流體材料邊界位置，故一方面固體與流體材料質點彼此與相互間運動力學連續特性，與另一方面固體與流體耦合力場之生成，皆分別能以顯式型式準確地滿足與傳遞；本論文亦應用此新式流固耦合力學理論與計算方法，透過一系列的計算例，系統性地探討流固耦合力場組成要素：包含環境重力、物質慣性與材料剛性對於流體場域與固體變形分佈相互牽制的影響。

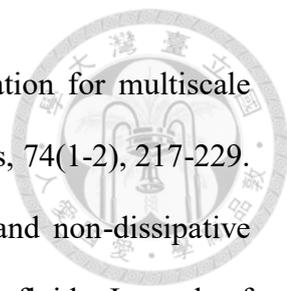
5.2. 未來展望

本研究開發了新穎浸潤式參考映射法之力學理論基礎與計算分析架構，未來可推廣至包含氣相與液相之流體與固體場域耦合問題中，例如考量單一固體浸潤於兩種以上流體或是兩種以上固體浸潤單一流體之分析，其中除固體與流體邊界位置判定外，亦須顧及固體與固體接觸面以及流體與流體交界面問題。除此之外，並可進一步應用於浸潤於流場環境之固體材料幾何配置最佳設計研究，透過融合各式設計理論，依照不同設計需求產出最佳效能之固體系統產品。

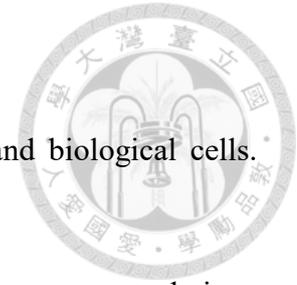
參考文獻



- [1] 王建凱, "Finite element solution to flow problems,"課程講義, 機械工程學研究所, 臺灣大學, 2022.
- [2] Anagnostopoulos, S. A. (1982). Dynamic response of offshore platforms to extreme waves including fluid-structure interaction. *Engineering Structures*, 4(3), 179-185.
- [3] Aksenov, A., Iliine, K., Schelayev, A., Garipov, A., Luniewsky, T., & Shmelev, V. (2007, November). Modeling fluid structure interaction for aerospace applications. In *Proc. of Abaqus User Conference* (p. 2006).
- [4] Chirokov, A. (2006). Interpolation and approximation using radial base function (RBF). A presentation included with a Matlab toolbox.
- [5] Fogelson, A. L., & Guy, R. D. (2004). Platelet–wall interactions in continuum models of platelet thrombosis: formulation and numerical solution. *Mathematical Medicine and Biology*, 21(4), 293-334.
- [6] Glück, M., Breuer, M., Durst, F., Halfmann, A., & Rank, E. (2001). Computation of fluid–structure interaction on lightweight structures. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 89(14-15), 1351-1368.
- [7] Huang, S., Li, R., & Li, Q. S. (2013). Numerical simulation on fluid-structure interaction of wind around super-tall building at high reynolds number conditions. *Struct. Eng. Mech*, 46(2), 197-212.
- [8] Hu, H. H., Patankar, N. A., & Zhu, M. (2001). Direct numerical simulations of fluid–solid systems using the arbitrary Lagrangian–Eulerian technique. *Journal of Computational Physics*, 169(2), 427-462.
- [9] Hughes, T. J., Liu, W. K., & Zimmermann, T. K. (1981). Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 29(3), 329-349.

- 
- [10] Hughes, T. J., & Stewart, J. R. (1996). A space-time formulation for multiscale phenomena. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 74(1-2), 217-229.
- [11] Jain, S. S., Kamrin, K., & Mani, A. (2019). A conservative and non-dissipative Eulerian formulation for the simulation of soft solids in fluids. *Journal of Computational Physics*, 399, 108922.
- [12] Jaiman, R. K., Shakib, F., Oakley Jr, O. H., & Constantinides, Y. (2009, January). Fully coupled fluid-structure interaction for offshore applications. In *International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering* (Vol. 43451, pp. 757-765).
- [13] Kamrin, K., Rycroft, C. H., & Nave, J. C. (2012). Reference map technique for finite-strain elasticity and fluid–solid interaction. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60(11), 1952-1969.
- [14] Kamrin, K., & Nave, J. C. (2009). An Eulerian approach to the simulation of deformable solids: Application to finite-strain elasticity. *arXiv preprint arXiv:0901.3799*.
- [15] Kamensky, D., Hsu, M. C., Schillinger, D., Evans, J. A., Aggarwal, A., Bazilevs, Y., ... & Hughes, T. J. (2015). An immersogeometric variational framework for fluid–structure interaction: Application to bioprosthetic heart valves. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 284, 1005-1053.
- [16] Kamakoti, R., & Shyy, W. (2004). Fluid–structure interaction for aeroelastic applications. *Progress in Aerospace Sciences*, 40(8), 535-558.
- [17] Loch, E. (2013). The level set method for capturing interfaces with applications in two-phase flow problems (Doctoral dissertation, Aachen, Techn. Hochsch., Diss., 2013).
- [18] Morgenthal, G., & McRobie, A. (2002). A comparative study of numerical methods for fluid structure interaction analysis in long-span bridge design. *Wind &*

- Structures, 5(2), 101-114.
- [19] Pozrikidis, C. (2003). Modeling and simulation of capsules and biological cells. Chapman and Hall/CRC.
- [20] Rycroft, C. H., Wu, C. H., Yu, Y., & Kamrin, K. (2020). Reference map technique for incompressible fluid–structure interaction. *Journal of Fluid Mechanics*, 898.
- [21] Seibold, B. (2008). A compact and fast Matlab code solving the incompressible Navier-Stokes equations on rectangular domains mit18086 navierstokes. m. Massachusetts Institute of Technology.
- [22] Tezduyar, T. E., Behr, M., Mittal, S., & Liou, J. (1992). A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces—the deforming-spatial-domain/space-time procedure: II. Computation of free-surface flows, two-liquid flows, and flows with drifting cylinders. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 94(3), 353-371.
- [23] Valkov, B., Rycroft, C. H., & Kamrin, K. (2015). Eulerian method for multiphase interactions of soft solid bodies in fluids. *Journal of Applied Mechanics*, 82(4), 041011.
- [24] Yan, J., Korobenko, A., Deng, X., & Bazilevs, Y. (2016). Computational free-surface fluid–structure interaction with application to floating offshore wind turbines. *Computers & Fluids*, 141, 155-174.
- [25] Zhang, L., Gerstenberger, A., Wang, X., & Liu, W. K. (2004). Immersed finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(21-22), 2051-2067.



附錄



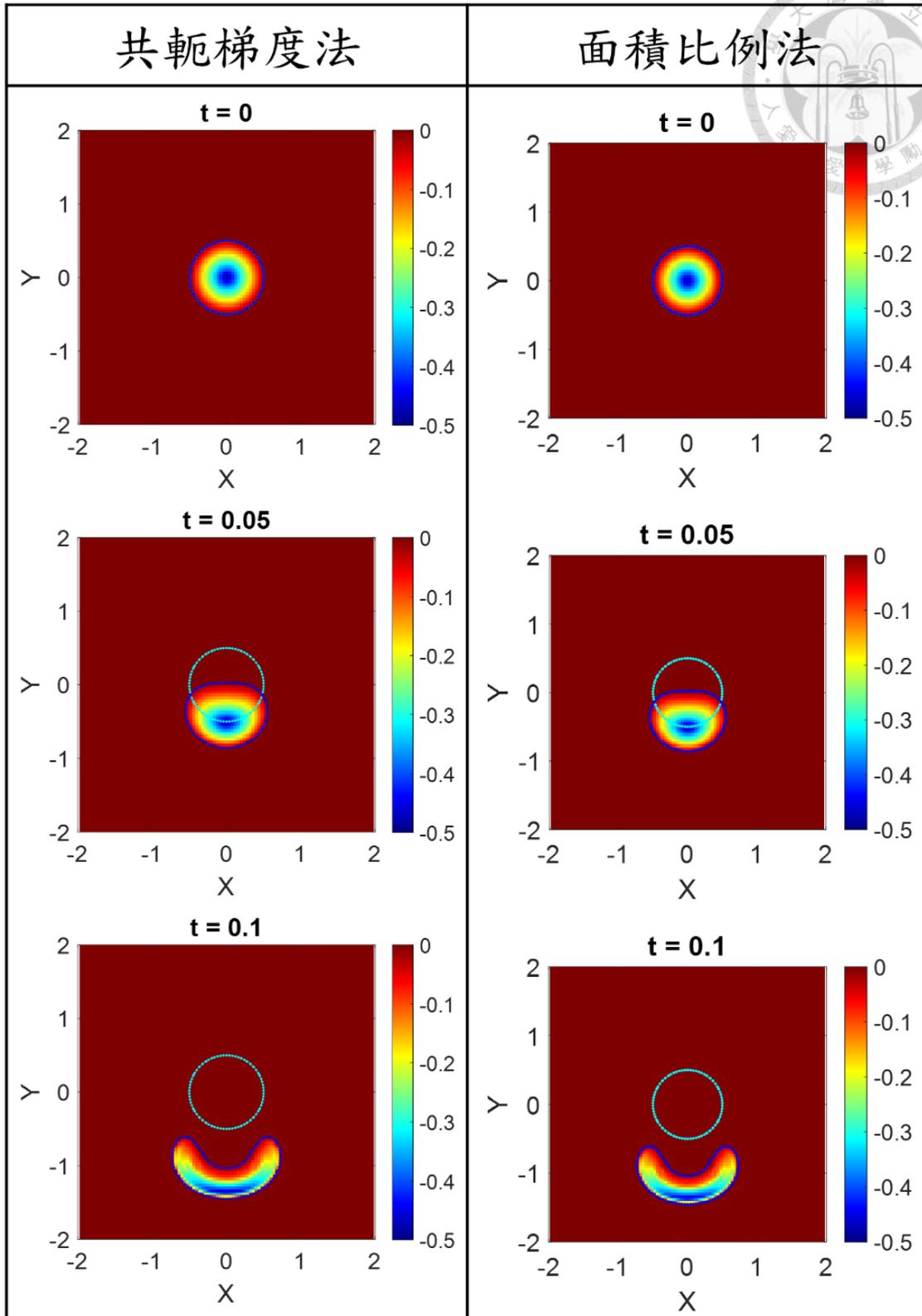
附錄一 共軛梯度法與面積比例法之比較

本論文在處理固體流體邊界元素上之流固耦合力場使用了兩種不同的方法：雙諧方程式擬和之共軛梯度法；本論文結合水平集函數所提出之面積比例法。在此以變形量最可觀的範例：環境重力要素中參數配置 $Re = 1$ 、 $\rho^s = 2$ ，分別以兩種的方法進行模擬，並且比較兩種方法的計算時間與模擬結果。

在計算效率上，由表一可以發現面積比例法的計算效率明顯比共軛梯度法高，且隨著網格密度提高，效率有顯著的差距。

表一 計算時間			
格點數目	2500	10000	40000
共軛梯度法	38(秒)	183(秒)	979(秒)
面積比例法	30(秒)	135(秒)	580(秒)

最後，雙諧方程式利用龐大的已知資訊擬和小範圍的未知資訊在[]中已驗證過其可行性，而本論文所提出之面積比例法在如此巨量變形的範例中所得到的結果與共軛梯度法近乎相同(圖一)，故可驗證面積比例法是一具計算效率與正確性之方法。



圖一 結果比較