

國立臺灣大學理學院應用物理學研究所

碩士論文

Graduate Institute of Applied Physics

College of Science

National Taiwan University

Master Thesis



開口式共振腔之特性探討與數值模擬

A Study on the Spectra of Open Cavities and Numerical Simulation

劉乙力

Yi-Li Liu

指導教授：朱國瑞 博士

Advisor: Kwo-Ray Chu, Ph.D.

中華民國105 年7 月

July 2016

國立臺灣大學碩士學位論文

口試委員會審定書

開口式共振腔之特性探討與數值模擬

A Study on the Spectra of Open Cavities and Numerical Simulation

本論文係 劉乙力 君 (R03245013) 在國立臺灣大學物理學系、所完成之碩士學位論文，於民國 105 年 7 月 12 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

朱國瑞

(簽名)

(指導教授)

陳俊龍

鄭復興

吳佳勳



## 中文摘要

論文的內容主要圍繞著開口式共振腔，開口式共振腔常用於磁旋震盪管和磁旋調速管中。在電子束通過其開口端的期間，開口式共振腔可以有效率的得到電子束產生的電磁場。

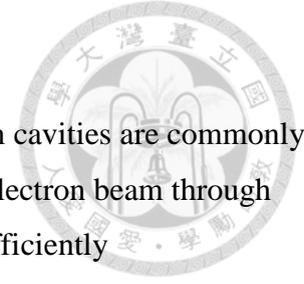
開口式共振腔與閉口式共振腔，兩者的差別在於開口式共振腔缺乏明確的邊界條件，因此無法如閉口式共振腔一般求出解析解，因此，我們利用 Cavity 以及 RFS2 兩個程式做數值模擬，從中了解物理現象及意義。

本文從時域模型和頻域模型的理論介紹切入，在時域模型中我們藉由改變主腔體長度，以及改變傾斜角度探討對共振頻率以及品質因子的影響。在頻域模型中我們介紹最大場強法、總場能法與反射法的結果與時域模型的差異，並提出物理解釋，接著改變各種變數並計算反射係數，並觀察改變變數對反射率的影響。

最後我們嘗試模擬新的結構，並對結果提出適當的物理解釋，同時將結果與典型的開口式共振腔相比較，確認是否一致。

關鍵字：開口式共振腔、共振頻率、品質因子、最大場強法、總場能法、反射法

# Abstract



The main contents of this thesis around the open cavity, open cavities are commonly used in gyromonotron oscillators and gyrokystron. During the electron beam through the open end, open cavities can get EM-field of electron beam efficiently

Open cavities and closed cavity, are different from that open cavities does not have well-defined boundary conditions, so there has not analytical solution. So, we use two programs Cavity and RFS2 to do numerical simulation to know physical phenomena and significance

We started from the introduction of time-domain model and spectral-domain model. In the time domain model, by change the length and taper angle, to know the influences of Quality factor. In the spectral-domain we introduce max-field spectrum, field-energy spectrum and reflection spectrum, and give physical explanations then change some variable and calculate reflection coefficient, to know the influence.

In the last, we try to simulate new structure, and make some appropriate physical interpretation, and compare our result to the classic open cavity, to confirm the result is identical or not.

Key words: open cavity, resonant frequency, quality factor, max-field spectrum, field-energy spectrum, reflection spectrum

# 內容



中文摘要 .....	i
Abstract.....	ii
圖目錄 .....	v
第一章 緒論 .....	1
第二章 時域分析 .....	2
2.1 理論模型 .....	2
2.2 時域模型 .....	3
2.3 模擬結果 .....	6
2.3.1 開口式共振腔與閉口式共振腔之比較 .....	6
2.3.2 場強以及相位對 Z 軸之關係 .....	8
2.3.3 改變傾斜角 $\theta$ .....	10
2.3.4 改變管長 L .....	11
2.3.5 存在不匹配附載的共振腔 .....	12
第三章 頻域分析 .....	16
3.1 理論推導 .....	16
3.2 頻域法模型理論 .....	19
3.3 最大場強法 .....	21
3.4 場能法〈總場能法〉 .....	25
3.5 反射法 .....	27
3.6 數值模擬結果 .....	29
第四章 品質因子在時域與頻域下的差異 .....	32
第五章 嘗試模擬其他結構 .....	36

第六章 結論 .....	41
參考文獻 .....	42
附錄 A 圓柱對稱波動方程式之推導 .....	43
B.1 軸向之平均淨功率 .....	50
B.2 前進波和反向波之平均功率 .....	52
B.3 管壁上的歐姆損耗 .....	55
B.4 電磁場場能 .....	58



# 圖目錄



圖 1-1 開口式共振腔的典型結構剖面圖.....	1
圖 2-1 閉口式共振腔尺度圖.....	6
圖 2-2 場強分布圖.....	8
圖 2-3 相位分布圖.....	9
圖 2-4 品質因子 $Q$ 與傾斜角 $\theta$ 圖.....	10
圖 2-5 品質因子 $Q$ -管長 $L$ 對照圖.....	11
圖 2-6 不匹配附載以及共振腔.....	12
圖 2-7 品質因子與不匹配載之 $d/R$ 圖.....	13
圖 2-8 共振頻率與不匹配載之 $d/R$ 圖.....	14
圖 2-9 最大品質因子與最小品質因子之場強分佈圖.....	15
圖 3-1 頻域所使用之結構.....	16
圖 3-2 開口式共振腔定點量測頻譜之數值模擬圖.....	23
圖 3-3 最大場強頻譜圖.....	24
圖 3-4 計算反射係數之結構.....	30
圖 3-5 反射係數 $\Gamma$ 與入射角頻率比值 $\omega/\omega_c$ 的關係曲線.....	30
圖 3-6 測量反射係數 $\Gamma$ 之不匹配開口式共振腔結構.....	31
圖 3-7 固定錐角 $\theta = 10^\circ$ 、改變半徑 $R$ 之 $\omega/\omega_c$ 圖.....	31
圖 4-1 開口式共振腔反轉結構.....	33
圖 4-3 使用半高寬法求品質因子.....	34
圖 4-4 不同傾斜角下的品質因子值.....	35
圖 5-1 嘗試模擬的結構.....	37
圖 5-2 不同入射頻率下的反射係數.....	37
圖 5-3 固定傾斜角 $\theta$ 不同主腔體長度下的場強分布圖.....	39
圖 5-4 固定主腔體長度 不同傾斜角之場強分布圖.....	40



# 第一章 緒論

開口式共振腔 (open cavity) 由多段均勻且略為傾斜的波導管所構成，結構如圖 1-1 所示。開口式共振腔常用於磁旋管 (gyrotron) 和磁旋調速管 (gyroklystron) 的研究中。其開口端的結構可以在電子束通過的期間，有效率地取出電子束產生的電磁場。

共振腔有兩個重要的參數：共振頻率 (resonant frequency,  $f_0$ ) 和品質因子 (quality factor,  $Q$ )。在磁旋管中，通常使用低  $Q$  值的開口式共振腔，以利於高功率輸出。由於在磁旋管中，電子繞磁場作圓形旋轉，所以本文所討論的開口式共振腔為圓柱對稱，且腔體內壁半徑對對稱軸  $z$  軸的變化為緩變結構，並忽略管壁內的歐姆損耗。

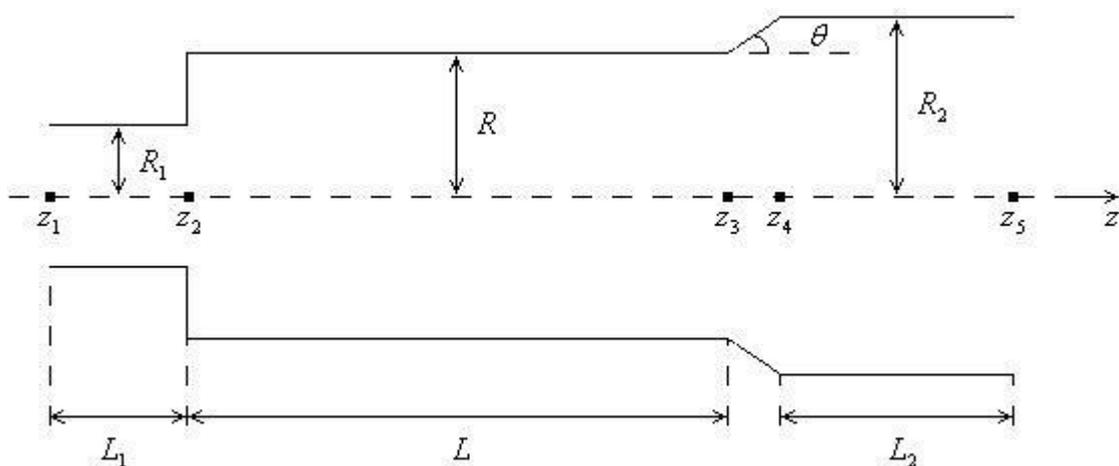


圖 1-1 開口式共振腔的典型結構剖面圖。 $z < z_2$  區間為截止波導管， $z_2 \sim z_3$  區間為共振腔的主體。 $z_3 \sim z_4$  區間略微傾斜用來提供部分反射回共振腔主體及部分穿透至出口端波導管。

## 第二章 時域分析



### 2.1 理論模型

在未加電子束的冷測試 (cold test) 中，共振腔內的電磁場須滿足無源的馬克士威方程組 (Maxwell's equations)。在共振腔為圓柱對稱的情況下，假設電磁場為諧波場，腔體內壁半徑沿對稱軸  $z$  軸為緩變，且只考慮  $TE_{mn}$  模，並忽略不同  $m$ 、 $n$  模式之間的轉換，則可由馬克士威方程組推導出波動方程式(詳細推導見附錄 A)

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + k_z^2(z) \right] f(z) = 0 \quad (2-1)$$

在(2-1)式中， $f(z)$ 為  $z$  方向磁場的場形分布，而  $k_z^2(z)$ 在管壁導體內沒有歐姆損耗 (ohmic loss) 時則為

$$k_z^2(z) = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{x_{mn}^2}{r_w^2(z)} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{cmn}^2(z)}{c^2} \quad (2-2)$$

其中， $\omega_{cmn}(z) \equiv \frac{x_{mnc}}{r_w(z)}$  為  $TE_{mn}$  模的截止角頻率。為了敘述方便，定義  $\kappa_z$  為

$$\kappa_z^2(z) \equiv -k_z^2(z) \quad (2-3)$$

若考慮管壁導體內的歐姆損耗時，則  $k_z^2(z)$  修正為

$$k_z^2(z) = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{cmn}^2(z)}{c^2} \left[ 1 - (1+i) \frac{\delta}{r_w(z)} \left( 1 + \frac{m^2}{x_{mn}^2 - m^2} \frac{\omega^2}{\omega_{cmn}^2(z)} \right) \right] \quad (2-4)$$

其中， $\delta$  為管壁之集膚深度 (skin depth)。

我們令共振腔的左右兩端的區段為固定半徑、固定電阻率的均勻 (uniform) 波導管。以圖 1-1 為例，在  $z < z_2$  和  $z > z_4$  的區段為均勻波導管，而中間的區段則為共振腔的範圍。均勻波導管一方面表示為此區段沒有波反射回中間，另一方面則

是給程式判定電磁場在離開共振腔的區段時該遵循的邊界條件。此時， $k_z(z)$  為一常數， $f(z)$  的型式遵守

$$f(z) = \begin{cases} Ae^{ik_z z} + Be^{-ik_z z} , if \ \omega > \omega_{cmn} \\ Ce^{ik_z z} + Be^{-ik_z z} , if \ \omega < \omega_{cmn} \end{cases} \quad (2-5)$$



為了適度簡化問題，在我們的模型中，不考慮模態轉換 (mode conversion)。一般來說，結構變化越不劇烈，模態轉換的情況就會越少。而在前面推導波動方程式時，就有用到緩變結構的條件，所以不考慮模態轉換是個合理的假設。

## 2.2 時域模型

在時域模型裡，假設共振模一開始就存在於共振腔內，沒有額外的能量流入共振腔。腔體內的場隨著時間變化項  $e^{-i\omega t}$  作振盪。如果存在腔體內共振模的共振頻率高於任何一端的截止頻率，則能量會從該端流失，稱為繞射損耗 (diffraction loss)。此時，會用複數來表示共振角頻率  $\omega$ ，

$$\omega = \omega_r + i\omega_i \quad (2-6)$$

其中， $\omega_r$  為共振角頻率， $\omega_i$  則代表場衰減率 (decay rate)，所以  $\omega_i < 0$ 。z 方向磁場  $B_z$  則正比於

$$B_z \propto e^{-i\omega t} = e^{\omega_i t} e^{-i\omega_r t} \quad (2-7)$$

共振腔內總場能  $W_f$  正比於

$$W_f \propto |B_z|^2 \propto e^{2\omega_i t} \quad (2-8)$$

能量損耗的功率  $P_{loss}$  為

$$P_{loss} = \left| \frac{dW_f}{dt} \right| = 2|\omega_i|W_f \quad (2-9)$$

由品質因子  $Q$  在時域下的定義

$$Q \equiv \frac{\omega_r W_f}{P_{loss}} = \frac{\omega_r}{2|\omega_i|} \quad (2-10)$$

在時域模型下，左右兩端的區域為均勻波導管，則電磁波的解在此遵循(2-5)式。由於假設沒有能量流入共振腔裡面，可得在  $Z_1$  時  $A=D=0$  以及在  $Z_5$  時  $B=C=0$ ，得到下式

$$f(z_2 > z > z_1) = \begin{cases} B e^{-ik_z z}, & \text{if } \omega_r > \omega_{cmn} \\ C e^{\kappa_z z}, & \text{if } \omega_r < \omega_{cmn} \end{cases} \quad (2-11)$$

$$f(z_5 > z > z_4) = \begin{cases} A e^{ik_z z}, & \text{if } \omega_r > \omega_{cmn} \\ D e^{-\kappa_z z}, & \text{if } \omega_r < \omega_{cmn} \end{cases} \quad (2-12)$$

由(2-1)式可得其他邊界條件如下：

$$f = \text{任意複數常數} \quad (2-13)$$

$$f'(z_1) = \begin{cases} -ik_z(z_1)f(z_1), & \text{if } \omega_r > \omega_{cmn}(z_1) \\ \kappa_z(z_1)f(z_1), & \text{if } \omega_r < \omega_{cmn}(z_1) \end{cases} \quad (2-14)$$

$$f'(z_5) = \begin{cases} ik_z(z_5)f(z_5), & \text{if } \omega_r > \omega_{cmn}(z_5) \\ -\kappa_z(z_5)f(z_5), & \text{if } \omega_r < \omega_{cmn}(z_5) \end{cases} \quad (2-15)$$

數值方法的求解過程大致如下。在  $z = z_1$  處，給定一任意常數  $f(z_1)$ ，而  $f'(z_1)$  則由(2-14)式決定。接著合理的猜測共振角頻率  $\omega$ ，並將它帶入(2-1)式和(2-4)式（當腔體管壁上沒有歐姆損耗時，(2-4)式則簡化成(2-2)式），再將上式從  $z_1$  積分到  $z_5$ ，修正所猜測的  $\omega$  值並代回原式反覆積分，最後得到的  $\omega$  值將使得  $\omega$  和  $f(z)$  滿足邊界條件(2-15)式。其中，本文所使用的積分方法為 Runge-Kutta 法。而(2-15)式中，等號左右兩端皆為  $\omega$  的隱函數。為了方便，將(2-14)式改寫成函數  $D(\omega)$ 。

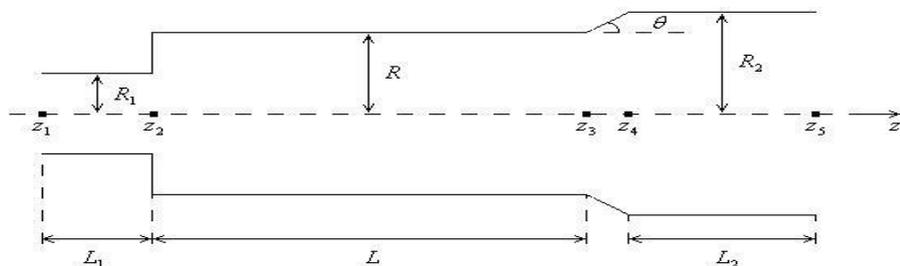
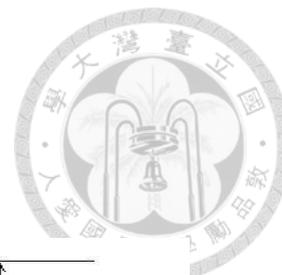
$$D(\omega) = \begin{cases} f'(z_5) - ik_z(z_5)f(z_5), & \text{if } \omega_r > \omega_{cmn}(z_5) \\ f'(z_5) + \kappa_z(z_5)f(z_5), & \text{if } \omega_r < \omega_{cmn}(z_5) \end{cases} \quad (2-16)$$

然後我們可以由 Muller 法解  $D(\omega)=0$  的來求適當的  $\omega$  值。在固定  $mn$  模的情況下，將會找到一組不連續的解  $\omega$ ，這些解對應到不同的軸向模(axial mode)。



## 2.3 模擬結果

接下來使用的結構以及尺度如下：



R	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	L	L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>	$\theta$
0.9 cm	0.5 cm	1.1 cm	11.7cm	3.0 cm	5.0 cm	10°

表 2-1 開口式共振腔尺度表。

### 2.3.1 開口式共振腔與閉口式共振腔之比較

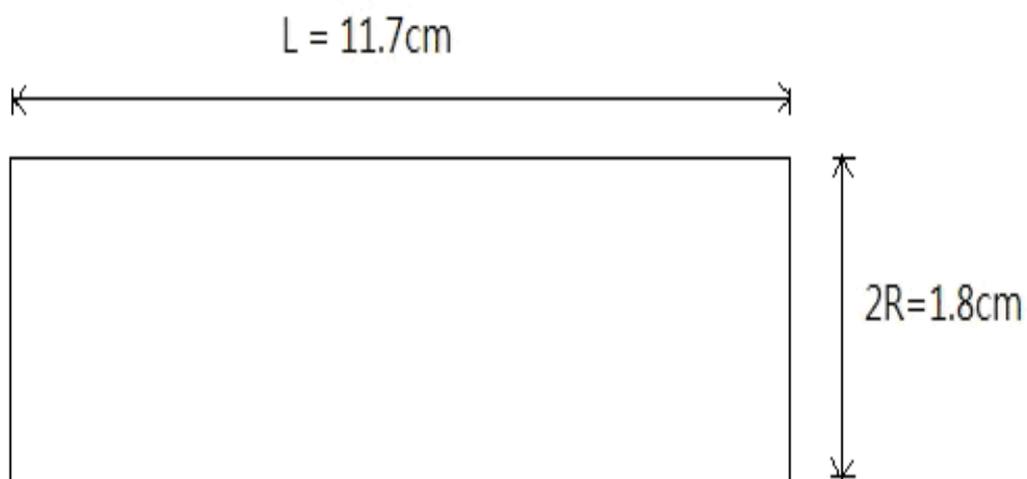


圖 2-1 閉口式共振腔尺度圖

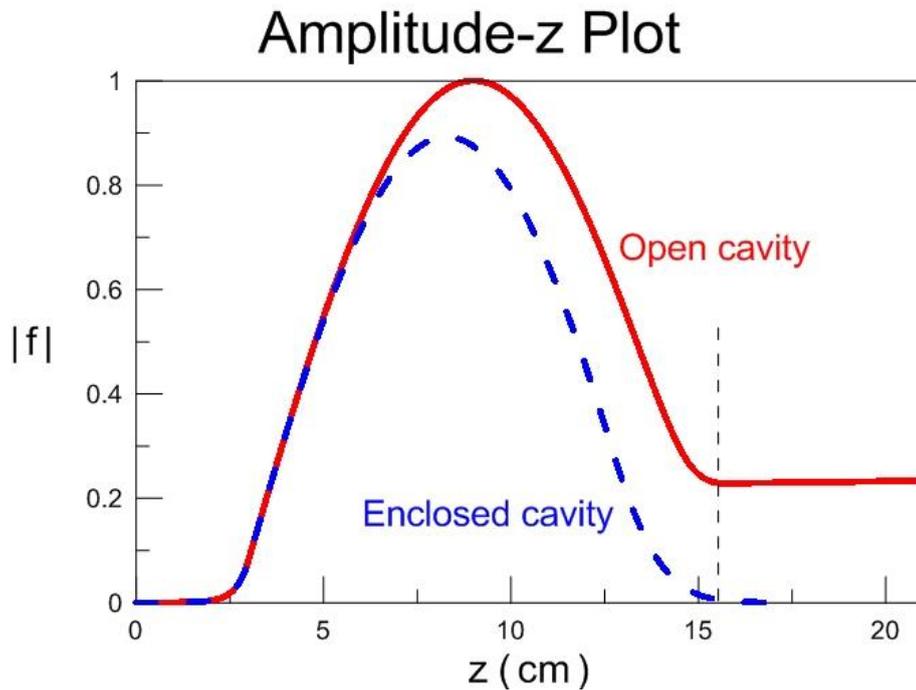


圖 2-2 閉口式共振腔與開口式共振腔之場強分布圖

相較於閉口式共振腔，於第三部分( $z_3 \sim z_5$ )，不是完美的邊界線，所以第三部

分還是有些微的共振作用，從共振頻率  $f = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{x_{mn}}{r_w}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2}$  可知，當有效長度

$L$  越長，共振頻率  $f$  會越低，故開口式共振腔的有效長度會大於閉口式共振腔。

經過 cavity 程式的計算，我們得到開口式共振腔的共振頻率為 9.831 GHz，而閉

口式共振腔因為有明確的邊界條件，可以直接求出共振頻率為 9.872 GHz，以上

結果符合我們的預測。

。

### 2.3.2 場強以及相位對 Z 軸之關係

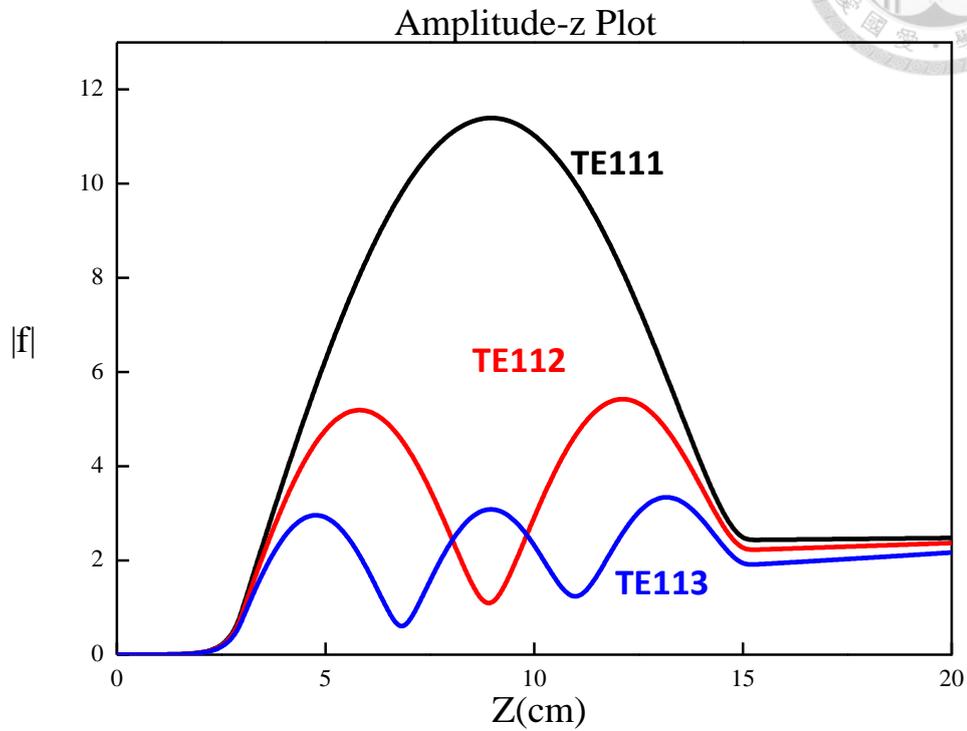


圖 2-2 場強分布圖

由圖可以看出在  $z < z_2$  時因為截止頻率  $\omega < \omega_c$  故場強為幾乎為零，而在  $z_2$  到  $z_3$  場強接近於一駐波的形式，在  $z_3$  之後因為有部分反射以及部分傳遞，輸出端為一斜率為正的斜直線，這是因為共振腔內的場強為衰減狀態，越早流出的場強越大，所以輸出端右邊之場強大於輸出端左邊之場強。

接下來是相位對Z軸的分佈圖

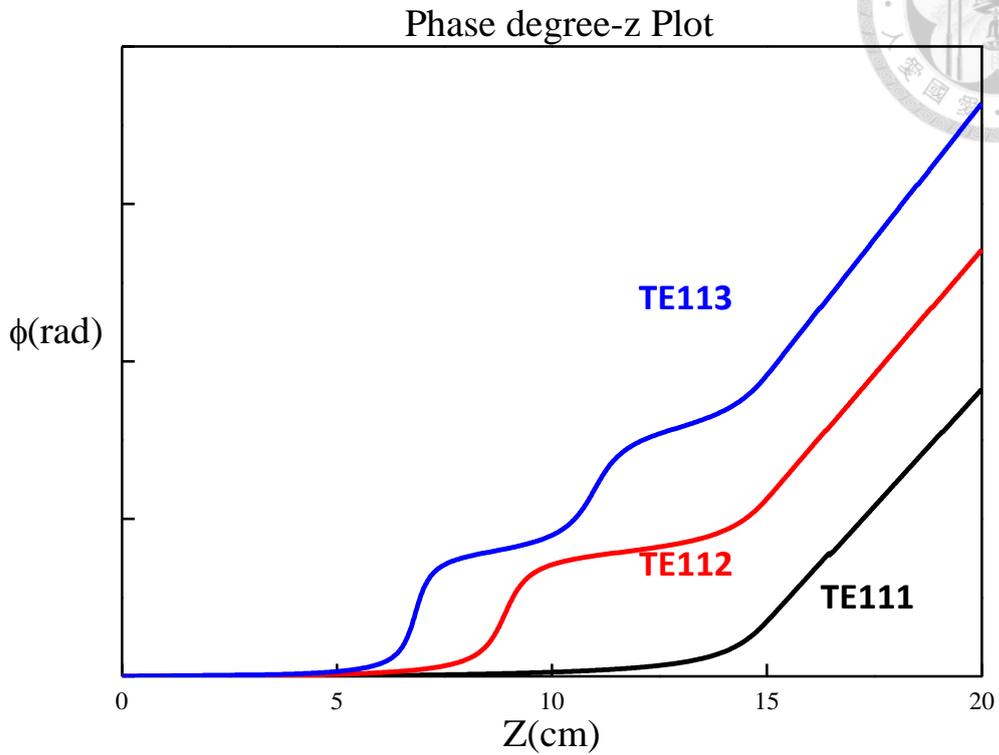


圖 2-3 相位分布圖

由圖 2-2 可知看出由於場強在主腔體內會形成駐波，所以相位  $\phi$  固定，即圖 2-3 中的水平線。當場強於主腔體開口端輸出，代表為行進波，所以相位  $\phi$  會增加，即 2-3 圖中的斜直線。

### 2.3.3 改變傾斜角 $\theta$

當傾斜角度增大，於  $Z_3$  處的不連續性增加了，於  $Z_3$  處的反射也隨之增加，使得傳遞出腔體的能量減少，儲存在腔體內部的能量增加，因此  $Q$  值也會增加，如圖(2-4)。

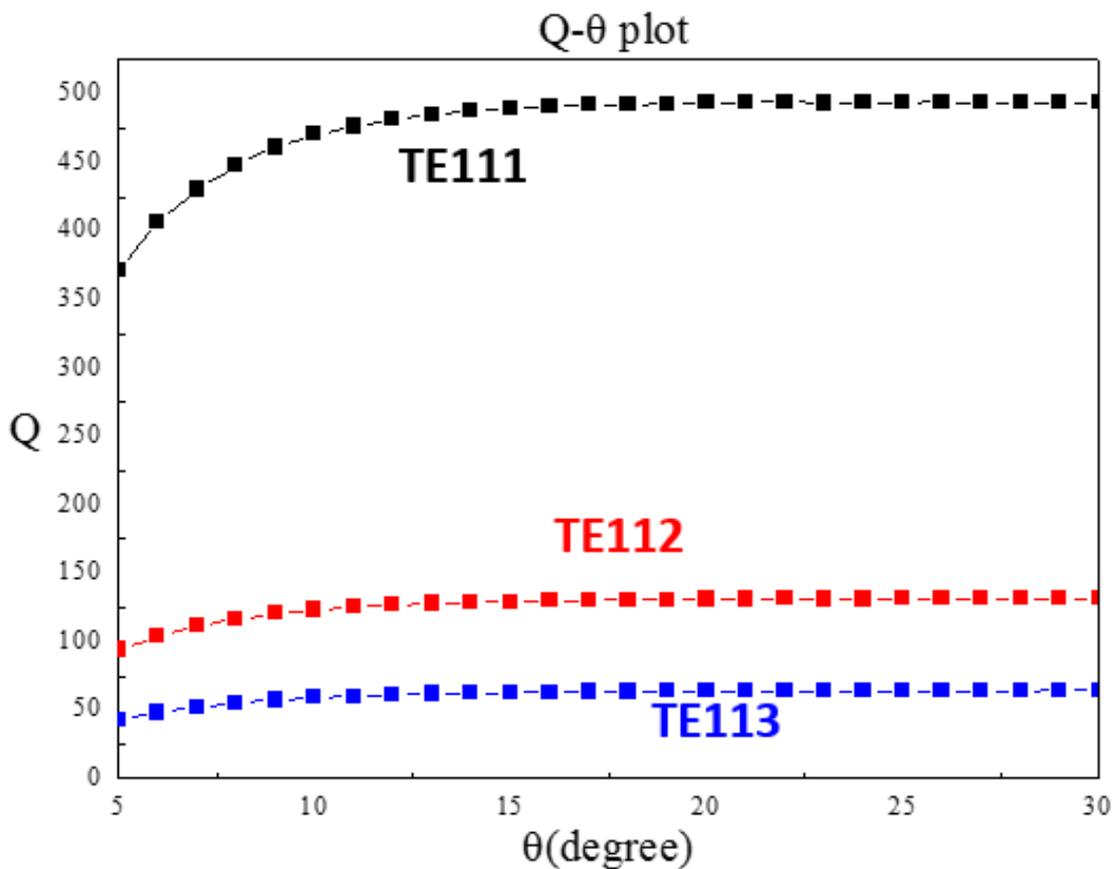


圖 2-4 品質因子  $Q$  與傾斜角  $\theta$  圖

而在不同的 TE 模式中， $Q$  隨著不同的  $l$  值呈現快速下降，這是因為當  $l$  上升時，共振頻率會隨之上升，使得流出主腔體的能量增加，造成  $Q$  值下降。

### 2.3.4 改變管長 L

接下來，嘗試改變管長，並觀察品質因子 Q 隨管長的變化，長度增加，由

$$f = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{x_{mn}}{r_w}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2}$$

可知，共振波長也會隨之增加，共振頻率減小；而腔體越

長，場形邊界越大，儲存能量多，所以 Q 值越大，如圖(2-5)所示。

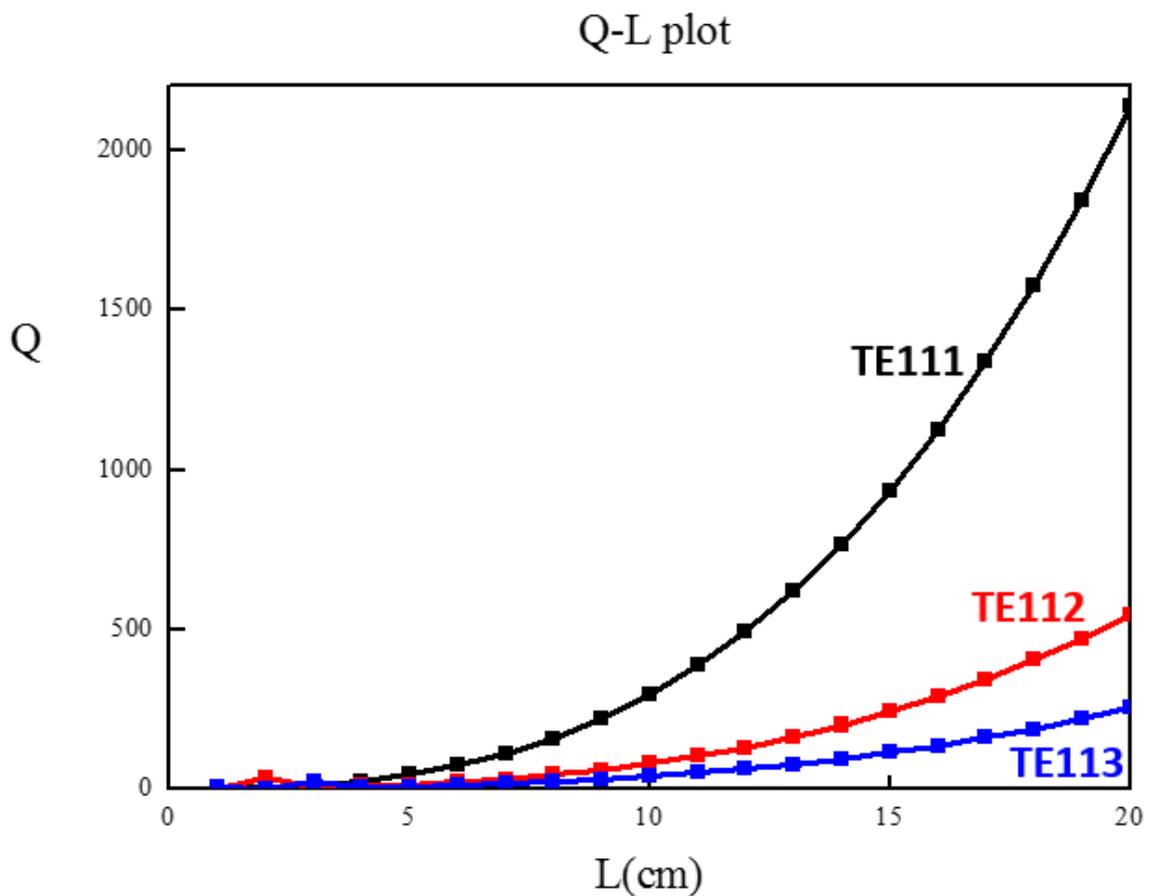


圖 2-5) 品質因子 Q-管長 L 對照圖

而在不同的 TE 模式中，Q 隨著不同的  $l$  值呈現快速下降，這是因為當  $l$  上升時，共振頻率會隨之上升，使得流出主腔體的能量增加，造成 Q 值下降。



### 2.3.5 存在不匹配附載的共振腔

不匹配負載的開口式共振腔剖面圖，如圖 2-6，由於此不匹配負載會導致場強在另一面也產生反射，可以當作兩個共振腔耦合。當第二個腔體的共振頻率  $f'$  越接近原來共振腔的共振頻率  $f$ ，將會有較多的能量從原來的共振腔傳播至第二個共振腔。

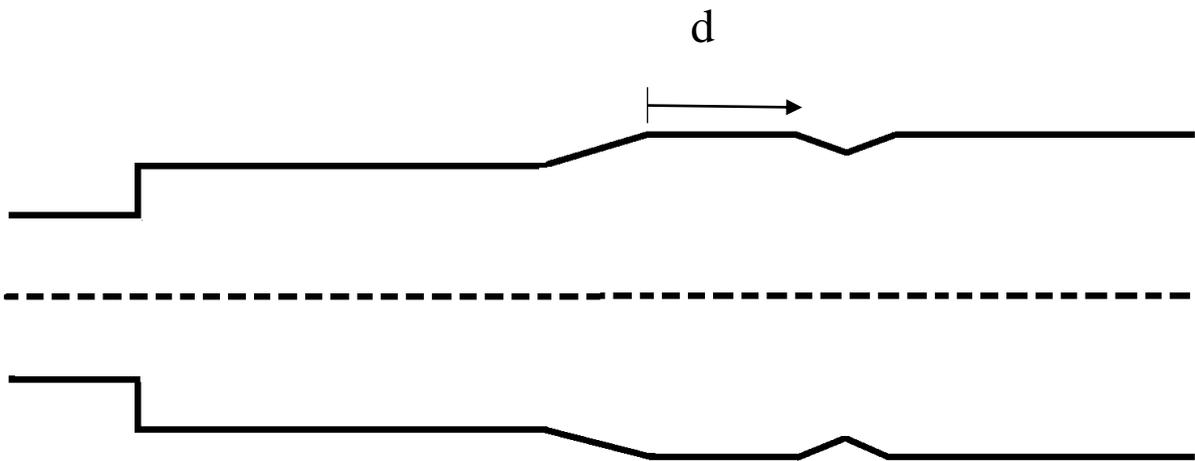


圖 2-6 不匹配附載以及共振腔

為了瞭解開口式共振腔的不匹配負載對品質因子  $Q$  與對共振頻率  $f$  的影響，首先，先改變不匹配負載的距離  $d$ ，然後描繪出  $TE_{111}$  模的  $Q-\frac{d}{R}$  圖，如圖 2-7，與  $f-\frac{d}{R}$  圖，如圖 2-8。

由圖可知，隨著不匹配負載的距離  $d$  改變，第共振頻率  $f$  有週期性的變化，所以可以猜測，耦合腔體的品質因子  $Q$  將會隨著不匹配負載的距離  $d$  而有週期性變化，而週期性變化的平均值與沒有不匹配附載時的值接近。

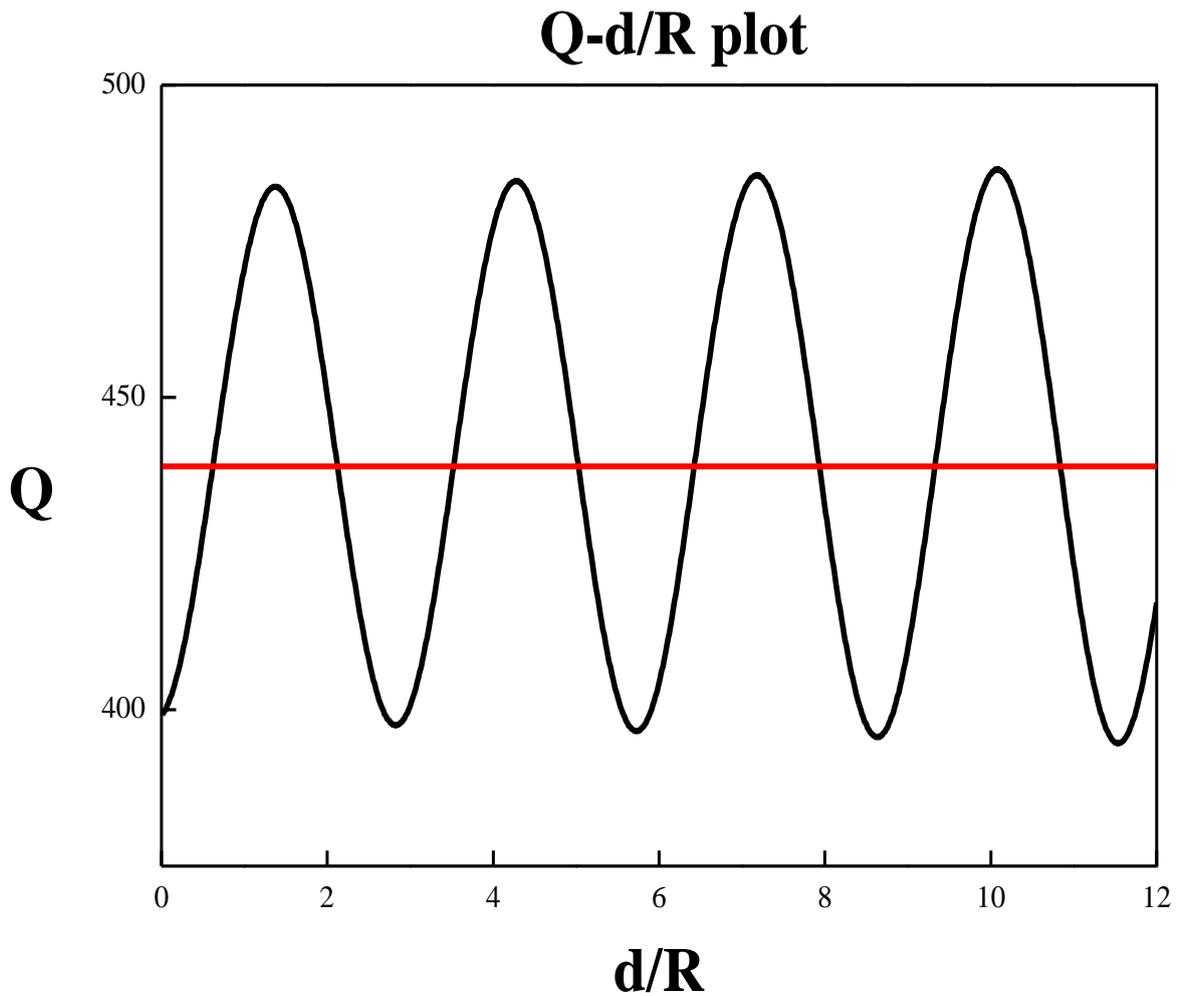


圖 2-7 品質因子與不匹配載之  $d/R$  圖

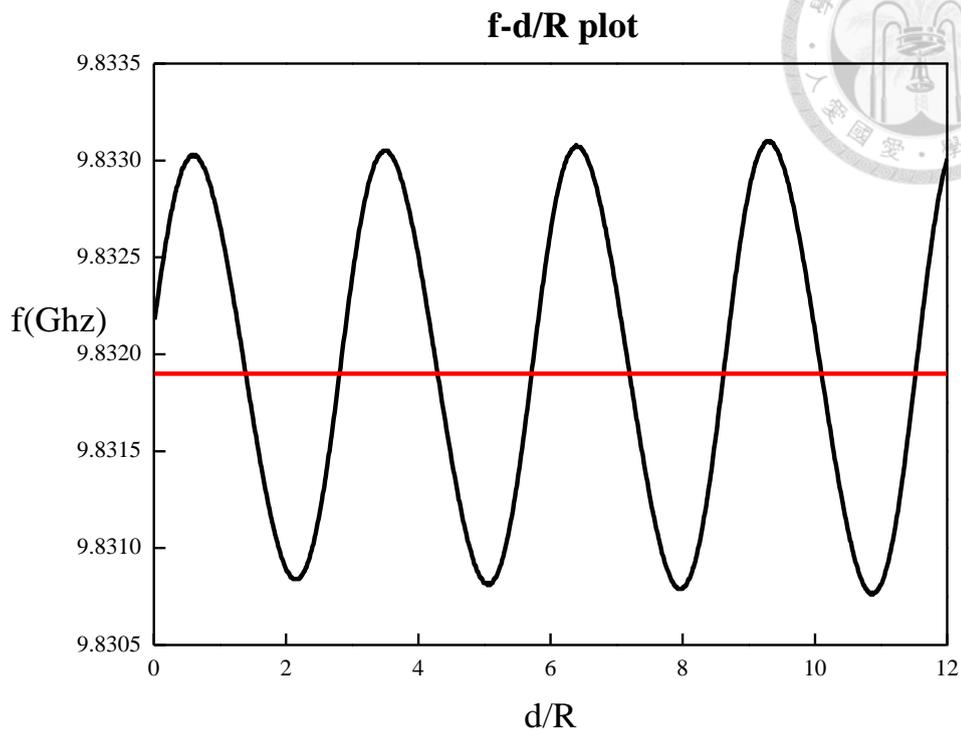


圖 2-8 共振頻率與不匹配載之  $d/R$  圖

接下來我們分析  $Q$  再發生最大值與最小值時的場強情形，如圖 2-9，正如我們預測的， $Q$  與兩個共振腔的耦合頻率有關， $Q$  有最小值時，是因為兩個共振腔的耦合頻率較大，使得傳遞到第二個共振腔的能量增加， $Q$  因此變小，而當  $Q$  有最大值時，是因為兩個共振腔的耦合頻率較小，使得傳遞到第二個共振腔的減少， $Q$  因此變大。

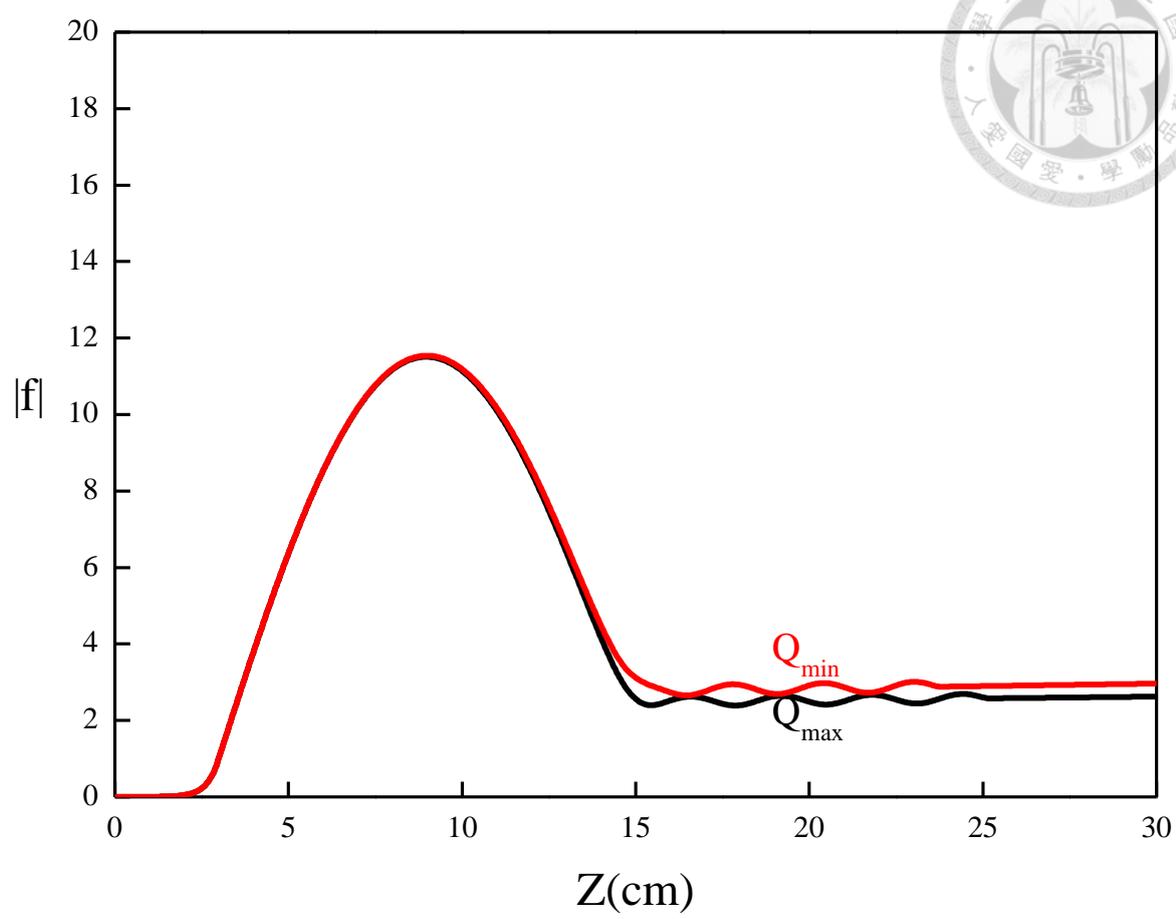


圖 2-9 最大品質因子與最小品質因子之場強分佈圖

## 第三章 頻域分析



### 3.1 理論推導

為了敘述方便，將圖 1-1 中開口共振腔的結構對 x-y 平面作反轉。如圖 3-1 所示。

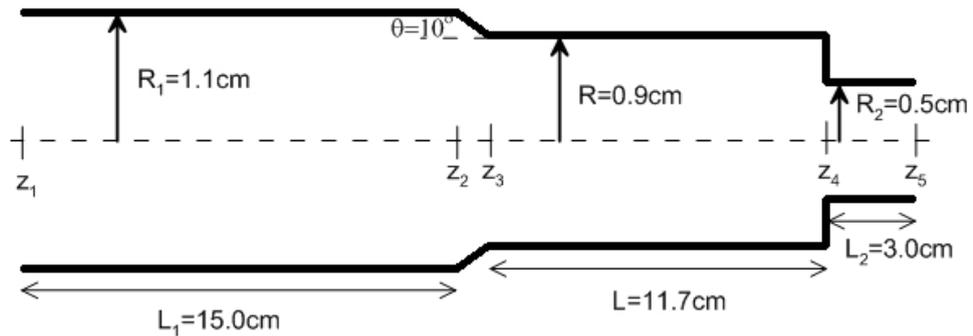


圖 3-1 頻域模型所使用之結構

考慮一截面為緩變裝置，裝置兩端接均勻的波導管。將已知單頻且能量固定的電磁波從圖 3-1 左端位置  $z = z_1$  處連續入射，而且入射頻率高於左端波導管的截止頻率。入射波會被微波裝置反射，在左端波導管產生反射波。如果入射波頻率高於右端波導管的截止頻率，則部份的入射波會穿透微波裝置到右端波導管，形成出射波。如果入射波頻率低於右端波導管的截止頻率，則右端波導管形成衰減場〔evanescent field〕。

在時域模型中，是假設在結構中已經存在單一個共振模在微波裝置中；而在頻域模型裡，則是假設電磁波在穩定態 (steady state，即波的振幅在任何位置都不隨時間改變) 的情況下，因此共振角頻率  $\omega$  為實數。而電磁波在此遵循的波動方程式和時域模型相同，邊界條件則如下述。假設場  $f(z)$  隨著時間項  $e^{-i\omega t}$  作振盪。將在左端波導管的場分解成正向波和反向波：

$$f(z) = f_+ e^{ik_z z} + f_- e^{-ik_z z} \quad (3-1)$$

其中  $f_+$  和  $f_-$  為複數常數，且假設場  $f(z)$  隨時間項  $e^{-i\omega t}$  作振盪。(2-4)式的傳播常數  $k_z$  可表示為

$$k_z = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_{c1}^2}}{c} \quad (3-2)$$

其中  $\omega_{c1}$  為左端波導管的截止角頻率。

在左端波導管的不同位置  $z$  之反射係數  $\Gamma(z)$  定義為

$$\Gamma(z) = \frac{f_- e^{-ik_z z}}{f_+ e^{ik_z z}} \quad (3-3)$$

若再定義

$$\Gamma \equiv \frac{f_-}{f_+} \quad (3-4)$$

則(3-3)式可表示為

$$\Gamma(z) = \Gamma e^{-2ik_z z} \quad (3-5)$$

且  $\Gamma = \Gamma(0)$  為位置  $z=0$  處的反射係數。

利用(3-4)式，可將(3-1)式表示為

$$f(z) = f_+ (e^{ik_z z} + \Gamma e^{-ik_z z}) \quad (3-6)$$

因此，在位置  $z_1$  的邊界條件為

$$f(z_1) = f_+ (e^{ik_z z_1} + \Gamma e^{-ik_z z_1}) \quad (3-7)$$

$$f'(z_1) = ik_z f_+ (e^{ik_z z_1} - \Gamma e^{-ik_z z_1}) \quad (3-8)$$

其中  $f_+$  由入射波的功率和相位決定。

在右端波導管，波為輸出或消逝，即

$$f(z) = \begin{cases} f_0 e^{ik_z z} & , \text{if } \omega > \omega_{c5} \\ f_0 e^{-\kappa_z z} & , \text{if } \omega < \omega_{c5} \end{cases} \quad (3-9)$$

其中  $\omega_{c5}$  為右端波導管的截止角頻率，

且

$$k_z = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_{c5}^2}}{c} \quad (3-10)$$

$$\kappa_z = \frac{\sqrt{\omega_{c5}^2 - \omega^2}}{c} \quad (3-11)$$

在位置  $z = z_5$  處，場型式可寫為

$$f(z_5) = \begin{cases} f_0 e^{ik_z z_5} & , \text{if } \omega > \omega_{c5} \\ f_0 e^{-\kappa_z z_5} & , \text{if } \omega < \omega_{c5} \end{cases} \quad (3-12)$$

注意，(3-12)式不是位置  $z_5$  的邊界條件， $f(z_5)$  值無法反映物理狀況，因為  $f(z)$  代表的是出射波或消逝波。然而，在位置  $z = z_5$  處  $f(z)$  的微分型式

$$f'(z_5) = \begin{cases} ik_z f(z_5) & , \text{if } \omega > \omega_{c5} \\ -\kappa_z f(z_5) & , \text{if } \omega < \omega_{c5} \end{cases} \quad (3-13)$$

可以說明波的性質。因此，由(3-13)式給定位置  $z_5$  的邊界條件。

數值模擬的過程大致如下。在(3-7)式和(3-8)式任意設定  $f_+$  或藉由入射波的功率和相位設定  $f_+$ ，其中  $f_+$  為複數，因此需要兩個數字的格式。然後猜測反射係數  $\Gamma$ ，並將(2-1)式從位置  $z_1$  積分至位置  $z_5$ ，反覆積分，每一次修正反射係數  $\Gamma$ ，最後反射係數  $\Gamma$  收斂到一符合(3-13)式的正確值。

由於  $f(z)$  是反射係數  $\Gamma$  的隱函數，可將邊界條件(3-13)式改寫為

$$D(\Gamma) = \begin{cases} f'(z_5) - ik_z f(z_5) = 0 & , \text{if } \omega > \omega_{c5} \\ f'(z_5) + \kappa_z f(z_5) = 0 & , \text{if } \omega < \omega_{c5} \end{cases} \quad (3-14)$$

猜測反射係數  $\Gamma$  可轉換為解  $D(\Gamma) = 0$  的根。找根的演算法可以用 Muller's 法。

求出反射係數  $\Gamma$  後，回推場  $f(z)$  在  $z$  軸上的分佈，還可進一步算出我們有興趣的值，例如場能。由改變不同入射頻率而得到的頻譜圖，可藉由下面幾節的討論，得到共振腔的重要參數：共振頻率  $f$ 、品質因子  $Q$ 。

### 3.2 頻域法模型理論

假設在時間  $t=0$  時，共振腔內已經存在若干共振模，在時域法模型計算下，每個共振模都有自己的共振角頻率  $\omega_j$  和品質因子  $Q_j^{(t)}$ 。腔體內的場是由許多不同模態的場疊加而成，在沒有能量輸入的情況下，某定點的場強可寫為

$$f(t) = \sum_j f_j e^{-i\omega_j t - \frac{\omega_j}{2Q_j^{(t)}} t}, \quad (3-15)$$

其中  $f_j = |f_j| e^{i\phi_j}$  為第  $j$  個軸向模的場強振幅。

將(3-15)式作傅立葉轉換，由時域法模型轉換至頻域法模型，則可得

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_j f_j \frac{i}{\omega - \omega_j + i \frac{\omega_j}{2Q_j^{(t)}}}. \quad (3-16)$$

單點場能正比於場強的平方

$$|f(\omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_j |f_j|^2 \frac{1}{(\omega - \omega_j)^2 + \left(\frac{\omega_j}{2Q_j^{(t)}}\right)^2} + \frac{1}{2\pi} \sum_j \sum_{j' \neq j} |f_j f_{j'}| \frac{2 \cos(\phi_j + \phi_j - \phi_{j'} - \phi_{j'})}{\left[ (\omega - \omega_j)^2 + \left(\frac{\omega_j}{2Q_j^{(t)}}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[ (\omega - \omega_{j'})^2 + \left(\frac{\omega_{j'}}{2Q_{j'}^{(t)}}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (3-17)$$

其中  $\phi_j = \tan^{-1} \left[ \frac{2Q_j^{(t)}(\omega - \omega_j)}{\omega_j} \right]$ 。

(3-17)式的第一項為共振腔中各個不同共振模譜線之集合；第二項為共振模之間任兩個模交互作用的影響，且沒有明顯的峰值，這兩項構成了共振腔的頻域譜線。當角頻率  $\omega$  接近共振角頻率  $\omega_j$  時，不同共振模態間的交互作用之貢獻相較於第  $j$  個共振模之貢獻來得小，而第一項集合中其他之貢獻值也遠小於第  $j$  個共

振模之貢獻值。因此，譜線的峰值會發生在角頻率  $\omega = \omega_j$  時，即  $\omega_j$  為第  $j$  個模態的共振角頻率。

由(3-17)式可知，對於高品質因子  $Q$  的共振模而言，其共振頻寬會較窄，當頻寬遠小於鄰近共振模的距離時，此時該共振模的頻譜主要由(3-17)式第一項集合中的單一一項共振模所決定。故該頻段附近的頻譜可由下式表示

$$|f(\omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} |f_j|^2 \frac{1}{(\omega - \omega_j)^2 + \left(\frac{\omega_j}{2Q_j^{(t)}}\right)^2} \quad (3-18)$$

當角頻率  $\omega = \omega_j$  時，頻譜有區域極大值

$$|f(\omega_j)|^2 = \frac{1}{2\pi} |f_j|^2 \frac{1}{\left(\frac{\omega_j}{2Q_j^{(t)}}\right)^2} \quad (3-19)$$

當  $(\omega - \omega_j)^2 = \left(\frac{\omega_j}{2Q_j^{(t)}}\right)^2$  時， $|f(\omega)|^2 = \frac{1}{2} |f(\omega_j)|^2$ 。令此時的角頻率  $\omega$  值為  $\omega_1$  和

$\omega_2$ ， $\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2| = \frac{\omega_j}{Q_j^{(t)}}$ 。則由此可得

$$Q_j^{(t)} = \frac{\omega_j}{\Delta\omega} \quad (3-20)$$

因此，定義頻域法模型的品質因子  $Q$  為

$$Q_j^{(\omega)} = \frac{\omega_j}{\Delta\omega} \quad (3-21)$$

其中  $\Delta\omega$  為共振頻譜的半高寬〔FWHM, full width of half maximum〕。

當品質因子  $Q$  不是很大時，共振模的頻寬較寬，不同模態之間的疊加效應增加，則會使得共振頻寬變寬，造成  $\Delta\omega$  增加，使得  $Q^{(\omega)}$  降低。因此，頻域法模型之品質因子  $Q^{(\omega)}$  比時域法模型之品質因子  $Q^{(t)}$  來的小，即  $Q^{(\omega)} \leq Q^{(t)}$ 。

接下來有三種計算共振頻率  $f$  與品質因子  $Q$  之方法，分別為：最大場強法、總場能法、反射法。

### 3.3 最大場強法

在封閉式共振腔中，由於有明確的腔體邊界，所以同一個共振模式下，其波峰和節點的位置不隨著頻率而改變。因此，在掃頻過程中，在一固定位置且同一共振模式下所量得的場強頻譜和其他位置所量的的場強頻譜，會有固定的比例關係。若我們將頻譜歸一，會得到完全相同的頻譜。亦即，在相同共振模式下，最大場強的位置不變，在一定點量測的的場強頻譜，和最大場強處的頻譜，有一固定比例。所以，定點量測的場強頻譜，即為該共振模式下的場強頻譜。

傳統量測共振腔的共振頻率和品質因子的方式如下：在腔壁上一定點位置，在盡量不影響腔體的情況下，將電磁場耦合出來，量測不同頻率下的場強分布  $|f(\omega)|^2$ 。共振頻率即為頻譜的區域極大值，而品質因子則為  $|f(\omega)|^2$  頻譜的共振頻率除以半高寬。

相較於封閉式共振腔，開口式共振腔沒有明確的腔體邊界。對於不同頻率，腔體內的波導波長 (guide wavelength) 也跟著改變，節點產生的位置也會因此不同，連帶跟著場的最大值位置也跟著改變。如果模擬傳統量測頻譜的方式，在固定位置  $z = z_3 + \frac{L}{2}$ 、 $z_3 + \frac{L}{3}$ 、 $z_3 + \frac{L}{4}$ 、 $z_3 + \frac{L}{5}$  四個點量測場強頻譜，則可利用程式 RFS2，掃描角頻率從  $0.98 \omega_c$  到  $1.15 \omega_c$ ，得到開口式共振腔光譜曲線，如圖 3-2。在圖 3-2 中顯示，同一共振模式下，不同位置測量的場強頻譜所對應的峰值頻率不同，這表示在開口式共振腔中，場強頻譜不再是單純頻率的函數  $|f(\omega)|^2$ ，而是角頻率  $\omega$  和位置  $z$  的函數  $|f(z, \omega)|^2$ 。

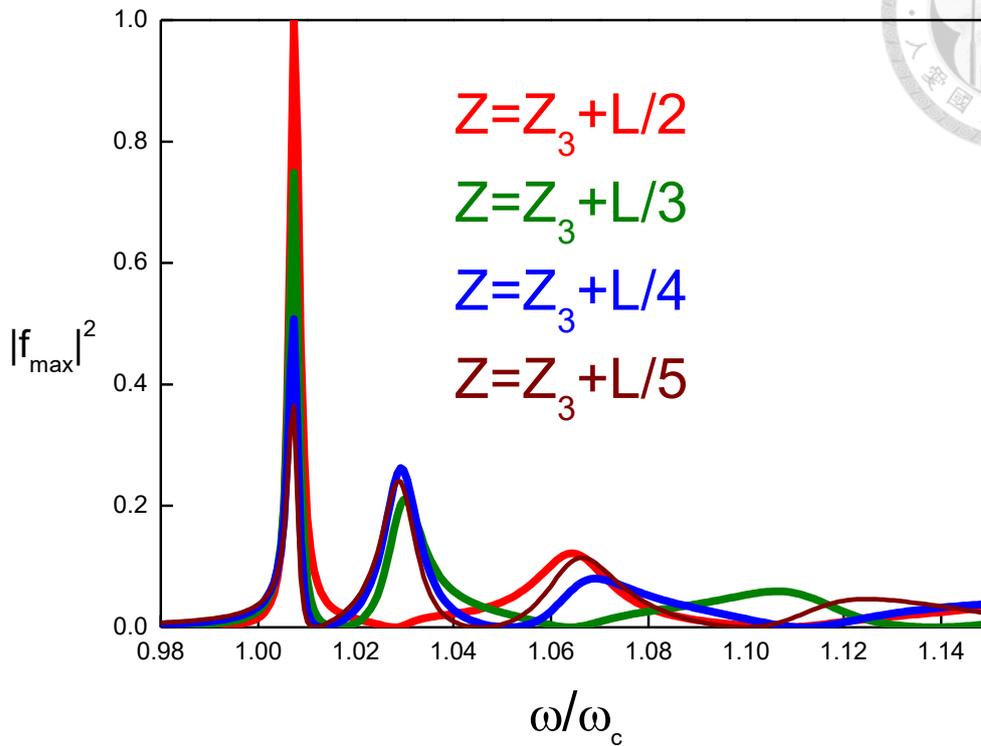


圖 3-2 開口式共振腔定點量測頻譜之數值模擬圖。

從圖 3-2 可知，光譜與測量位置  $z$  有關，另，可看出開口式共振腔之共振角頻率  $\omega$ ，雖然有些微偏差，但大致相同，品質因子  $Q$  可能因為  $\Delta\omega$  對於這些共振角頻率  $\omega$  不同而改變。

由於開口式共振腔沒有明確的邊界，所以不同角頻率對應的最大場強位置會不相同。若在同一頻率下，除去因為沒有明確邊界所造成的影響，可得到場強分佈的最大值，即最大場強，所以每個不同的角頻率  $\omega$  都可找出整個腔體中的最大場強，且最大場強和位置  $z$  無關，即可得到和位置  $z$  無關的頻譜  $|f_{\max}(\omega)|^2$ ，如

圖 3-3，稱為最大場強法。此頻譜的極大值為共振頻率，藉由半高寬的計算可得品質因子  $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ 。



最大場強法是先固定角頻率，然後找出空間中的最大場強，再進行掃頻動作得到頻譜。若先固定位置進行掃頻得到頻譜，再對每一個  $z$  軸上的位置重複掃頻的動作，可得到不同的頻譜，最後將每個頻譜重疊起來尋找每個角頻率下的最大場強，則會和最大場強頻譜一樣。因此，將所有定點量測頻譜重疊起來，最外圍的那層曲線，即為最大場強頻譜。

定性上，共振腔在共振角頻率  $\omega$  下，腔體和電磁波之間的交互作用會最強，也就是在共振角頻率  $\omega$  下，腔體內的場能分佈會是附近角頻率  $\omega$  的區域極大值。由於我們探討的共振腔體結構較為簡單，TE 模的母函數 [generating

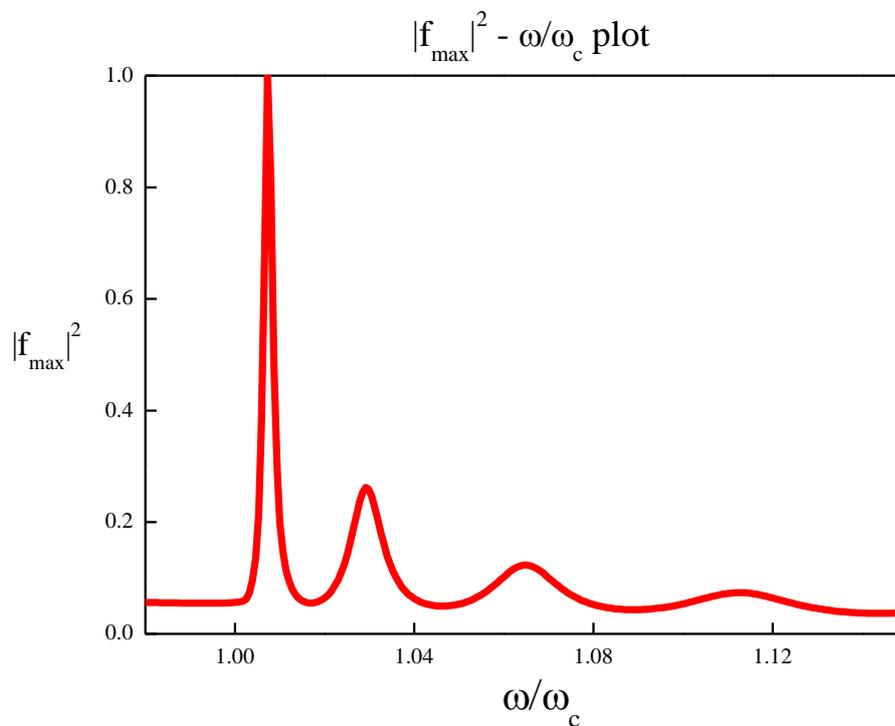


圖 3-3 最大場強頻譜圖

function  $B_z$  的場形約略為正弦函數。  $|B_z|^2 = \frac{4|B_{z0}|^2 \sin^2(k_z z)}{1 + 2|\Gamma| \cos \alpha + |\Gamma|^2}$





### 3.4 場能法〈總場能法〉

在閉口式共振腔中，由於有明確的腔體邊界，所以同一個共振模式下，不同入射頻率，最大場強的位置固定。在固定入射頻率下，腔體內每個位置上的場能密度和最大場強處的場能密度比例固定；在不同頻率下，總場能和一固定位置的場能密度成正比。因此，共振腔內的場能正比於最大場強的平方，所以在閉口式共振腔中，場能頻譜和最大場強頻譜並無不同。然而，開口式共振腔沒有明確的邊界，不同的入射頻率，最大場強的位置不同，場形分佈也不同，因此，在開口式共振腔中，「場能正比於最大場強的平方」的關係不再成立。

場能頻譜  $W_f(\omega)$  的定義如下：

$$W_f(\omega) = \int_{z_1}^{z_4} w_f(z, \omega) dz \quad (3-22)$$

其中

$$\begin{aligned} w_f(z, \omega) &= w_E(z, \omega) + w_B(z, \omega) \\ &= \frac{1}{16c^2} \omega^2 x_{mn}^2 J_m^2(x_{mn}) \left( 1 - \frac{m^2}{x_{mn}^2} \right) \left[ |f(z, \omega)|^2 + \frac{\omega_{cmn}^2}{\omega^2} |f(z, \omega)|^2 + \frac{c^2}{\omega^2} |f'(z, \omega)|^2 \right] \end{aligned} \quad (3-23)$$

詳細推導請參看附錄 B。

在開口式共振腔的結構圖中，如圖 1-1，由於討論的頻段在半徑  $R_1$  波導管的截止頻率之下，所以電磁場在位置  $z_1 \sim z_2$  區間為衰減場，對整體場能的影響不大。但由於後面的章節要討論反射頻率及與場能頻譜的比較，又討論反射頻譜需要考慮管壁上的歐姆損耗和能量守恆，因此不可忽略位置  $z_1 \sim z_2$  區間的歐姆損耗。為了比較的一致性，故將位置  $z_1 \sim z_2$  區間納入總場能的積分中；位置  $z_3 \sim z_4$

區間為斜波導管結構，對波有部分反射回共振腔的影響，因此仍是共振腔的一部分；位置  $z_4 \sim z_5$  區間為結構均勻的波導管，向外進行的出射波不會反射回共振腔體內，因此不算共振腔的一部分。



由於討論的開口式共振腔中，電場能量和磁場能量很接近，因此(3-23)式可以簡化為

$$\begin{aligned}
 W_f(\omega) &\cong 2W_E(\omega) = 2 \int_{z_1}^{z_4} w_E(z, \omega) dz \\
 &= \frac{1}{8c^2} \omega^2 x_{mn}^2 J_m^2(x_{mn}) \left( 1 - \frac{m^2}{x_{mn}^2} \right) \int_{z_1}^{z_4} |f(z, \omega)|^2 dz \propto \omega^2 \int_{z_1}^{z_4} |f(z, \omega)|^2 dz
 \end{aligned} \tag{3-24}$$

場能法是由(3-24)式掃頻獲得的頻譜。而頻譜  $W_f(\omega)$  中的區域極大值即為共振角頻率  $\omega$ ，品質因子  $Q$  則是由半高寬法求得。



### 3.5 反射法

一已知角頻率、固定功率的電磁波從圖 3-1 的位置  $z_1$  端持續入射，其在共振腔內經歷多次反射達到平衡，會有一穩定的反射波自位置  $z_1$  端流出，此平衡狀態稱為穩定態。穩定態下，反射波的功率不隨時間改變。反射法即是在不同角頻率下，所得到的頻譜。

考慮入射角頻率低於半徑  $R_2$  波導管的截止角頻率，沒有能量自位置  $z_5$  流出。在穩定態下，腔體內的場能不隨時間改變，入射波的能量最後只能轉變為反射波的能量或腔體管壁上的歐姆損耗。因此，根據能量守恆，入射波的功率  $P_{in}$  會等於反射波的功率  $P_{ref}$  加上管壁上歐姆損耗功率  $P_{ohm}$ 。即

$$P_{in} = P_{ref} + P_{ohm} \tag{3-25}$$

而  $P_{ref} = |\Gamma|^2 P_{in}$ ， $\Gamma$  為反射係數，因此可得

$$1 - |\Gamma|^2 = \frac{P_{in} - P_{ref}}{P_{in}} = \frac{P_{ohm}}{P_{in}} \tag{3-26}$$

當入射角頻率靠近共振角頻率  $\omega$  時，腔體內的場強較強，所以管壁上的歐姆損耗也較大。從數學的推導可得到驗證〈參考附錄(B-38)式的推導〉。

$$P_{ohm} = \int p_{ohm} dz \tag{3-27}$$

$$p_{ohm} = \frac{1}{8} \omega x_{mn}^2 K_{mn} \frac{\omega_{cmn}^2}{c^2} \frac{\delta}{r_w} \left( 1 + \frac{m^2}{x_{mn}^2 - m^2} \frac{\omega^2}{\omega_{cmn}^2} \right) |f|^2 \tag{3-28}$$

因此， $1 - |\Gamma|^2$  能反映出腔體的共振角頻率  $\omega$ 。將掃頻得到的反射頻譜  $R(\omega)$  定義為

$$R(\omega) = 1 - |\Gamma|^2 \tag{3-29}$$

反射法的共振角頻率  $\omega$  即為反射頻譜的區域極大值，品質因子  $Q$  則可由半高寬法得到。

當管壁為完美導體時，管壁上沒有歐姆損耗，所以穩定態下，任何入射角頻率得到的反射係數  $\Gamma$  皆為 1，因此無法藉由反射法得之共振角頻率  $\omega$  和品質因子  $Q$ 。由良好導體所製成的共振腔，雖然管壁上有歐姆損耗可以測量反射頻率，但這也使得在位置  $z_1 \sim z_2$  區間的波導管會吸收反射波，在此區間的反射係數  $\Gamma$  不僅是角頻率  $\omega$  的函數，還是位置  $z$  的函數，即  $\Gamma = \Gamma(z, \omega)$ 。若改變  $L_1$  的長度，則在位置  $z_1$  處所得到的反射係數  $\Gamma$  會不一樣，進而影響到反射頻譜。我們要探討的反射頻譜是在位置  $z_2$  處所計算的反射頻譜，若將位置  $z_4 \sim z_5$  區間的歐姆損耗考慮進去，則在位置  $z_2 \sim z_5$  區間依然遵守(3-25)式能量守恆的關係。因此將反射頻譜修正為

$$R(\omega) = 1 - |\Gamma(z_2, \omega)|^2 = \frac{\int_{z_2}^{z_5} P_{ohm}(z, \omega) dz}{P_{fwd}(z_2, \omega)} \quad (3-30)$$

其中  $P_{fwd}(z_2, \omega)$  為在位置  $z_2$  處往腔體內行進波的功率。反射法的重要性，在於它是可以做實際測量。

### 3.6 數值模擬結果



首先我們先使用 RFS2 程式碼計算反射係數與輸入頻率的關係，我們使用如圖 3-4 的結構，將波由左端射入並改變角頻率  $\omega$ ，得到反射係數  $\Gamma$  對入射頻率的圖 3-5。

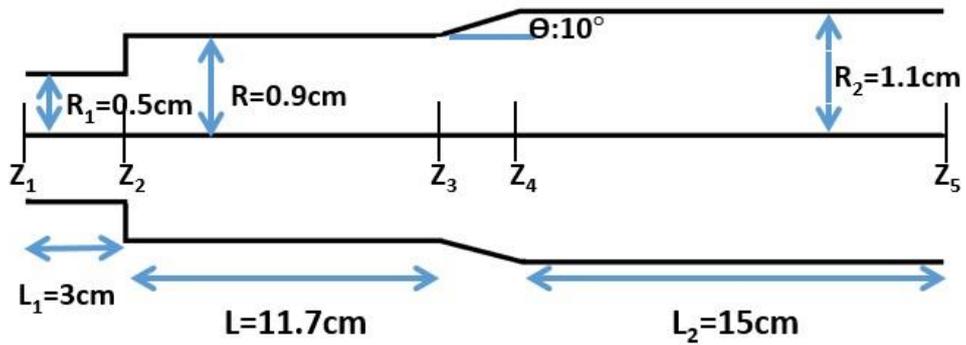


圖 3-4 計算反射係數之結構

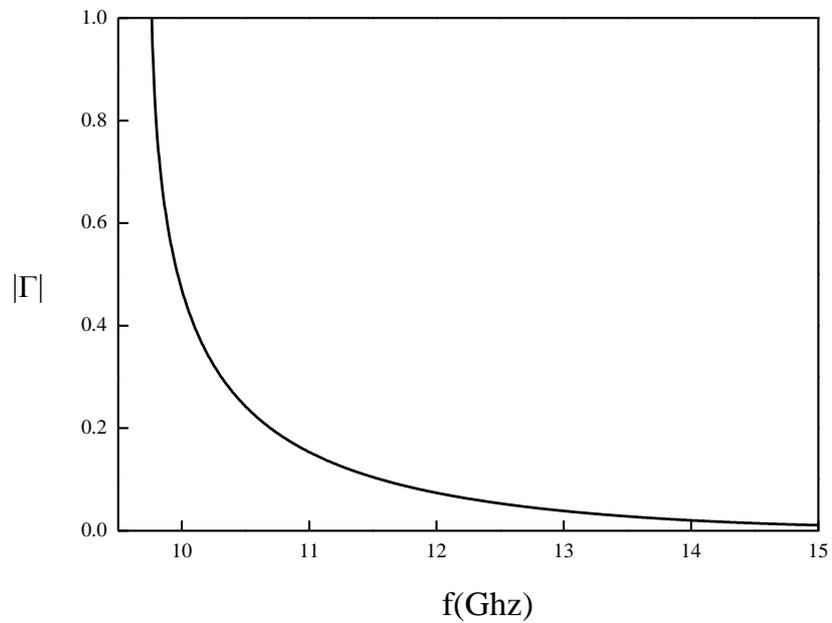


圖 3-5 反射係數  $\Gamma$  與入射角頻率比值  $\omega/\omega_c$  的關係曲線



從圖 3-5 可以發現，當增加入射波的角頻率  $\omega$ ，開口式共振腔於位置  $z_3$  的反射係數  $\Gamma$  將減少。當入射角頻率  $\omega$  越接近截止角頻率  $\omega_c$ ，反射係數  $\Gamma$  趨近於 1，即表示全反射。

接著，我們模擬之前章節提到的不匹配負載，與反射係數  $\Gamma$  的關係，波由左端射入，在位置  $z_3$  的反射係數  $\Gamma$ ，為了適度簡化問題我們使用的結構如圖 3-6。

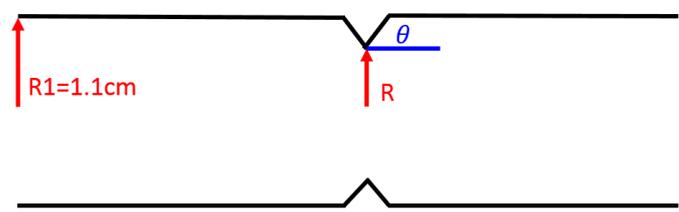


圖 3-6 測量反射係數  $\Gamma$  之不匹配開口式共振腔結構

之後，利用程式 RFS2 計算數據，並在不同的半徑  $R$  繪製反射係數  $\Gamma$  與入射角頻率  $\frac{\omega}{\omega_c}$  的關係曲線，如圖 3-7。

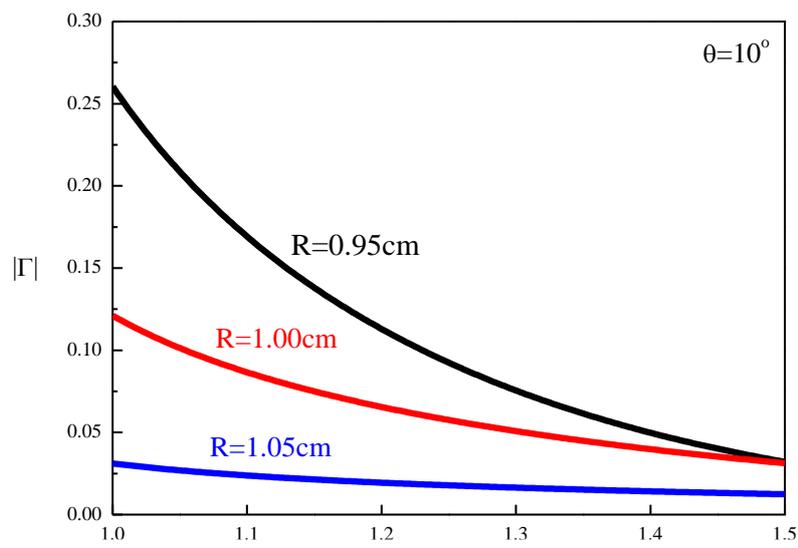


圖 3-7 固定錐角  $\theta = 10^\circ$ 、改變半徑  $R$  之  $\omega/\omega_c$  圖

由圖 3-7 我們依然可以觀察到，當固定錐角  $\theta = 10^\circ$ 、改變半徑  $R$  時，增加入射波角頻率  $\omega$ ，反射係數  $\Gamma$  會減少。而對於幾乎所有的掃頻頻帶，入射波通過較小半徑  $R$  之反射係數  $\Gamma$  較大。



## 第四章 品質因子在時域與頻域下的差異



在時域模型中，我們使用程式碼 Cavity 計算品質因子，此時品質因子的定義是

$$Q^{(t)} = \frac{\omega_r}{2|\omega_i|}, \quad (4-1)$$

而頻域法模型下得到的品質因子  $Q$  定義為

$$Q^{(\omega)} = \frac{\omega}{\Delta\omega}, \quad (4-2)$$

其中  $\Delta\omega$  為半高寬頻寬。

接下來計算頻域法下的品質因子  $Q^{(\omega)}$ ，在此使用程式碼 RFS2 掃描開口式共振腔反轉結構，如圖 4-1，將一電磁波從最左端  $z = z_1$  入射，頻率從  $0.98\omega_c$  到  $1.16\omega_c$ ，計算各頻率對應之最大場強。

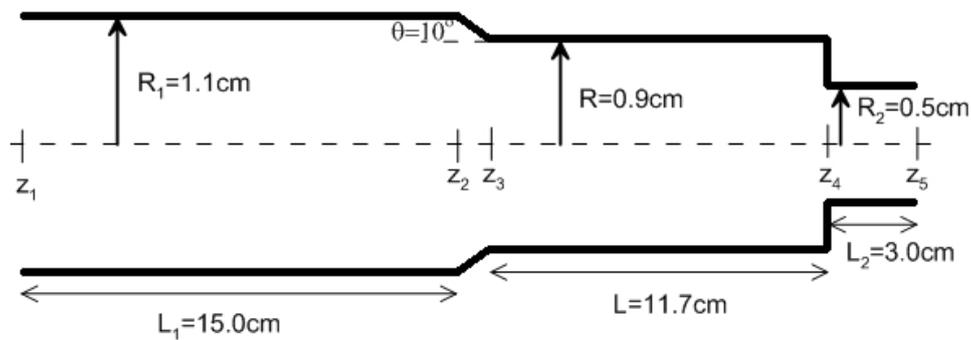


圖 4-1 開口式共振腔反轉結構

為了計算不同傾斜角度  $\theta$  的品質因子，我們改變成程式碼中的變數  $\theta$ ，得到圖 4-2。

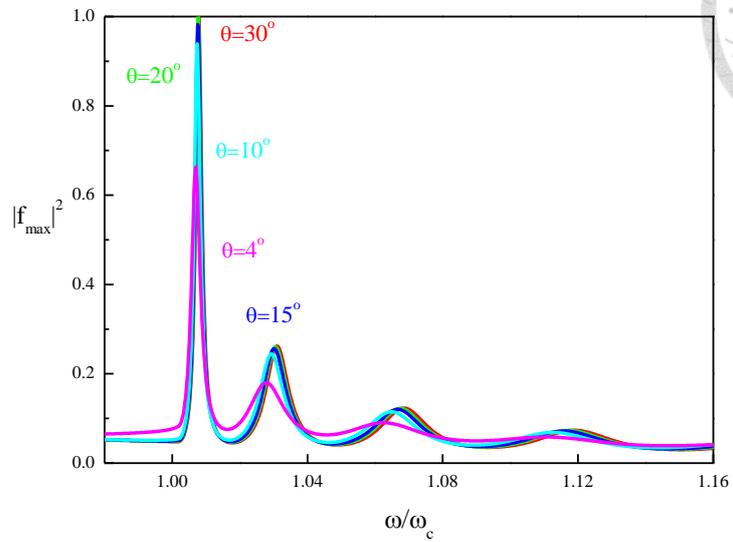


圖 4-2 不同錐角  $\theta$  之  $|f_{\max}|^2 - \frac{\omega}{\omega_c}$  圖

接下來，對不同的傾斜角度，根據 (4-2) 式計算各個傾斜角度的品質因子，如圖 4-3，並將求出的品質因子製表、製圖。

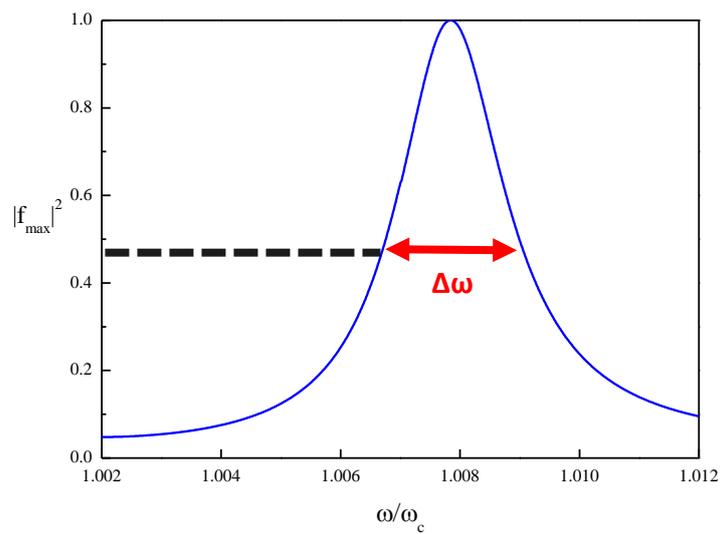


圖 4-3 使用半高寬法求品質因子

繪製不同角度下，兩個模型的品質因子對照表，如下表 4-1。

$\theta$	$l$	$Q^{\omega}$	$Q^t$	$f^{\omega}/f_c$	$f^t/f_c$	$ f_{max}/f_{min} ^2$
4°	1	297.84	311.67	1.0063	1.0062	0.118
10°	1	438.83	439.02	1.0067	1.0066	0.057
15°	1	445.62	455.19	1.0068	1.0067	0.052
20°	1	452.40	459.88	1.0069	1.0068	0.046
30°	1	451.90	459.42	1.0071	1.0071	0.047

表 4-1 不同傾斜角  $\theta$  之數據

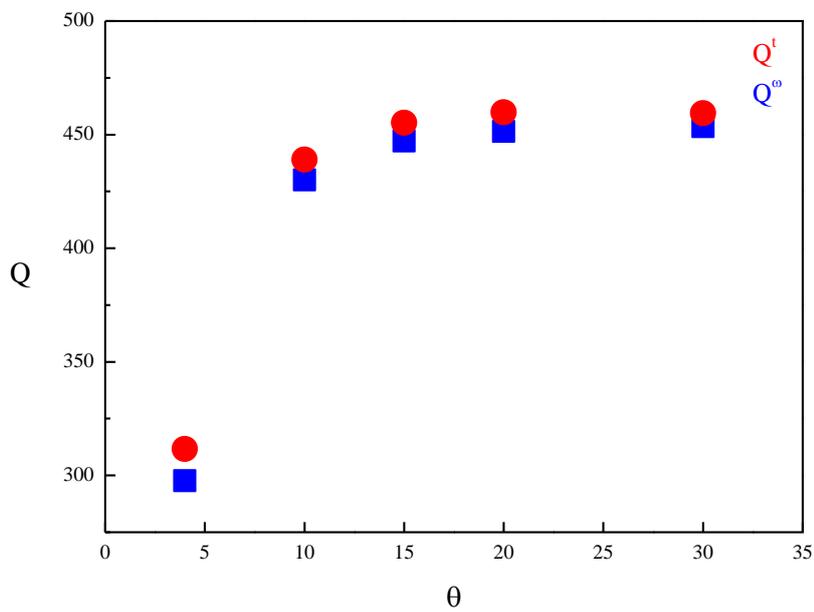


圖 4-4 不同傾斜角下的品質因子值



綜合以上我們可以發現，在每一個角度，頻域的品質因子皆小於時域的品質因子。這是由於使用程式碼 RFS2 計算品質因子時，是將電磁波入射開口式共振腔的反轉結構，會導致多模態重疊(mode overlaping)，而頻域法中對品質因子的定義僅適用於單頻場分布，模態重疊將加寬  $\Delta\omega$ ，使得  $Q^{(\omega)}$  比正確值小。而使用程式碼 CAVITY 所得到的品質因子  $Q^{(t)}$  為正確值，因此  $Q^{(\omega)} > Q^{(t)}$  為正常現象，表 4-1 中的  $|f_{\max}/f_{\min}|^2$  值可以顯示模態重疊對於品質因子  $Q$  的影響程度，當此值越大，於求得的  $Q^{(t)}$  誤差也越大。

## 第五章 嘗試模擬其他結構



在本章中，我們嘗試對不同結構的開口式共振腔進行模擬，並對其模擬結果作適當的物理解釋，在此使用的結構如下圖。

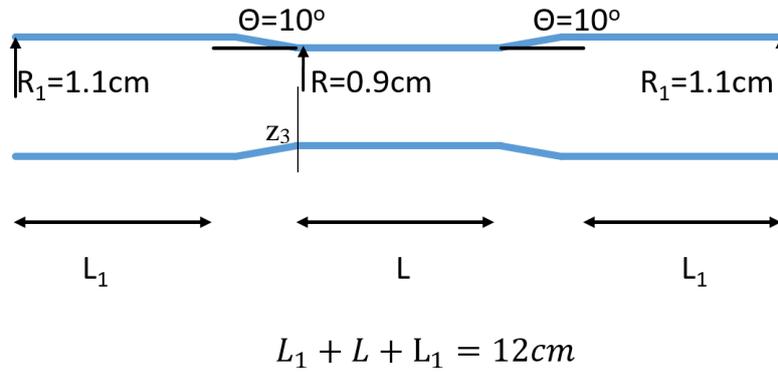


圖 5-1 嘗試模擬的結構

首先，我們先使用 RFS2 計算對於  $z_3$  處的反射係數，從共振腔的左端入射不同頻率的電磁波，並改變主腔體長度，得到圖 5-2。

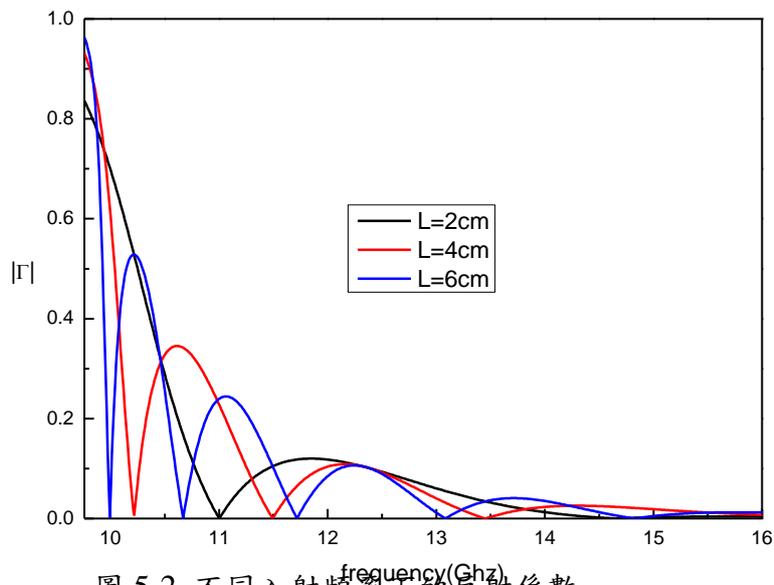


圖 5-2 不同入射頻率下的反射係數

之前所用的 open cavity 如圖 1-1，在半徑 0.9 cm 的結構下，所算出的截止頻率為 9.76Ghz，但由圖 5-2 可以看出，此結構於 9.76Ghz 時反射係數仍不為 1，推測是因此結構兩邊皆為緩變結構，而非圖 1-1 的左側為完美邊界。

而當主腔體長度  $L$  增加時，9.76Ghz 的反射係數會越來越接近 1，推測是當主腔體長度  $L$  增加，傾斜角  $\theta$  的影響會相對越來越小。

接下來，我們使用程式碼 CAVITY 計算此結構的品質因子  $Q$ ，並改變傾斜角  $\theta$  以及主腔體長度  $L$ ，觀察品質因子  $Q$  的變化，並將數據製成表 5-1。

$\theta=10^\circ$	$Q$
$L = 2 \text{ cm}$	4.00
$L = 4 \text{ cm}$	18.66
$L = 6 \text{ cm}$	44.56
$\theta=30^\circ$	$Q$
$L = 2 \text{ cm}$	3.83
$L = 4 \text{ cm}$	14.18
$L = 6 \text{ cm}$	37.69

表 5-1 不同結構下的品質因子

由上表我們可以得知，品質因子在固定傾斜角  $\theta$  並增加主腔體長度  $L$  時，品質因子會上升，顯示儲存在共振腔內的能量較多，而當固定主腔體長度  $L$  並傾斜角  $\theta$  增加時，品質因子會下降，推測是此結構兩端皆為緩變結構，能量從

兩端流出所致，為了佐證上述的解釋，我們分別固定主腔體長度  $L$  以及傾斜角  $\theta$  並畫出場強對於  $z$  軸的圖，如圖 5-3、圖 5-4。

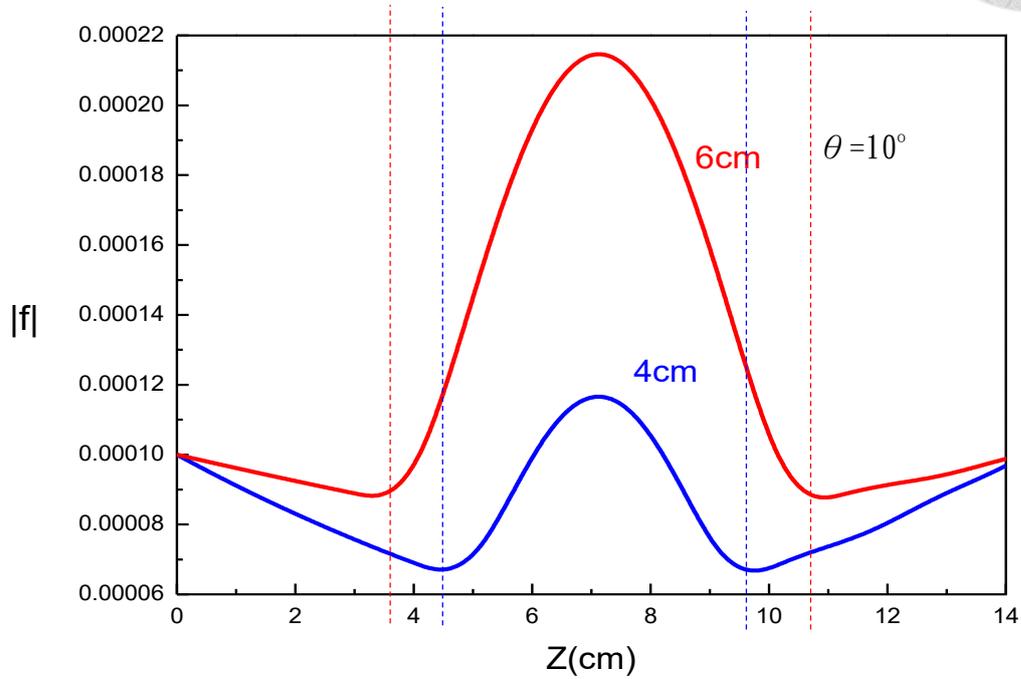


圖 5-3 固定傾斜角  $\theta$  不同主腔體長度下的場強分布圖

由圖 5-3 我們可以看出，共振腔的中間為儲存能量的主要區域，較長的管長有較多儲存能量的空間，所以品質因子較大。

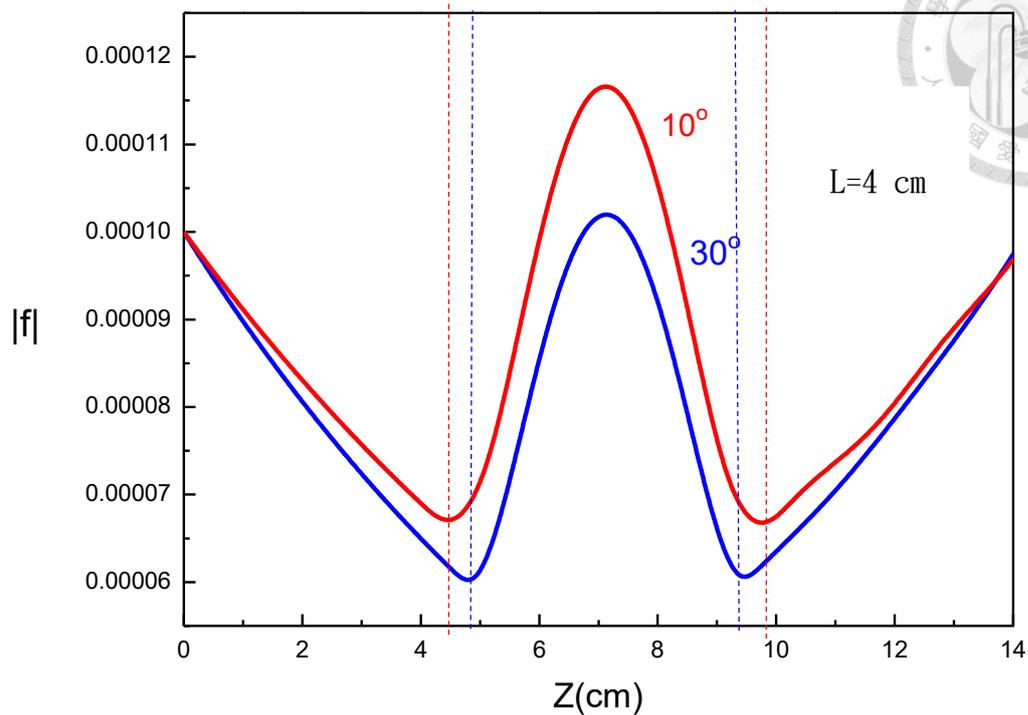


圖 5-4 固定主腔體長度 不同傾斜角之場強分布圖

由圖 5-4 可以看出，傾斜角  $\theta$  較小的共振腔，擁有較長的有效管長，因此所儲存的能量較多，品質因子因此較大。

在本章我們得到的解論如下：

1. 若兩端開口皆為緩變的共振腔，因能量會從兩端流出，品質因子  $Q$  會較圖 1-1 的開口式共振腔為小。
2. 當管長增加時，本章節所使用的結構與典型開口式共振腔的結構相同，因有效管長的增加，品質因子  $Q$  皆會增加。

3. 當傾斜角  $\theta$  增加，在本章節所使用的結構下，品質因子  $Q$  會降低，而典型開口式共振腔之品質因子會增加，這是因為本章節所使用的結構兩端皆為緩變，能量會從兩端流出，因此有效管長成為決定品質因子的因素，對比典型開口式共振腔，則是因為當傾斜角  $\theta$  增加，使出口處的布連續性增加造成更多反射，使的品質因子增加。

## 第六章 結論



本論文討論了兩種模型：時域法模型與頻域法模型。

在時域法模型中，我們改變了傾斜角  $\theta$  和主腔體長度  $L$ ，發現皆會影響品質因子  $Q$  和共振頻率  $f$ 。

在頻域法模型中，我們對最大場強法、總場能法與反射法做理論推導與數值模擬。而在頻域法模型中，獲得的開口式共振腔頻譜，以定點穿透頻譜  $f(z, \omega)$ 。比較時域法模型與頻域法模型，可得到不同的品質因子  $Q$ ，代表開口式共振腔由於沒有明確的邊界，定點量測在開口式共振腔中並不適用。而最大場強法雖然修正定點量測的缺點，但是為了量測腔體每個位置的頻譜，必須在腔壁上製造的耦合孔，會影響到共振腔的性質，因此造成最大場強法在量測上有實際執行的困難。而場能法所求得的共振頻率比起最大場強法更接近時域法模型的結果，此外，場能法可由理論推導出與反射法之間的關係，這使得模擬的結果可以和實驗量測作驗證，而比較頻域法與時域法之品質因子，我們可以發現因為模態重疊(mode overlapping)，使得頻域法所求得的品質因子有些微誤差。

最後我們模擬了不同的結構，並利用程式碼 CAVITY 計算品質因子，發現當兩端開口皆為緩變時，因為兩端皆會有能量流出，使得所求得的品質因子遠較典型開口式共振腔為小，並且在改變傾斜角  $\theta$  時，品質因子的變化與典型開口式共振腔也有所不同。

## 參考文獻



- [1] K. R. Chu, “Time Domain Analysis of Open Cavity”, Tsing Hua University, Taiwan, R.O.C. (1993)
- [2] K. R. Chu, C. S. Kou, J. M. Chen, Y. C. Tasi, C. Cheng, S. S. Bor, and L. H. Chang, “Spectral Domain Analysis of Open cavities,” Int. J. Infrared and Millimeter Wave, vol. 13, pp.1571-1598, 1992.
- [3] J. D. Jackson, “Classical Electrodynamics”, John Wiley & Son, Inc., p.p. 352-374 (1998)
- [4] J. Mathews and R. L. Walker, “Mathematical Methods of Physics”, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., p.p. 178-187 (1970)
- [5] 盧姿穎, “開口式共振腔頻譜特性之研究”, 台灣大學碩士論文, (2015)

## 附錄 A 圓柱對稱波動方程式之推導

無源的〈沒有電荷與電流〉馬克士威方程組〈Maxwell's equation〉出發，  
假設空氣中的介電常數〈dielectric constant,  $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ 〉和磁導率〈permeability,  $\frac{\mu}{\mu_0}$ 〉皆  
為 1，推導出圓柱對稱的波動方程式。

無源的馬克士威方程組：

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \quad (\text{A-1})$$

$$\nabla \times B = -\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (\text{A-2})$$

$$\nabla \cdot E = 0 \quad (\text{A-3})$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (\text{A-4})$$

由上式可推得

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times B) \\ \Rightarrow \nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

同理，

$$\nabla^2 B - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A-6})$$

我們所研究的模態為 TE 模， $z$  軸方向無電場分量，且其他方向的電磁場都可以用  $z$  軸方向磁場來表示，則  $z$  分量的波動方程式為

$$\nabla^2 B_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A-7})$$

$$\text{其中 } \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

假設電磁場為簡諧場，隨時間變化的形式為  $e^{-i\omega t}$ ，則方程式  $B_z$  的解可近似表示為

$$B_z \approx f(z) J_m [k_{mn}(z)r] e^{im\theta} e^{-i\omega t} \quad (\text{A-8})$$

將(A-8)式代入(A-7)式，則可得

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] B_z = 0 \quad (\text{A-9})$$

其中

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) B_z = \left( \frac{m^2}{r^2} - k_{mn}^2 \right) B_z, \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} B_z = -\frac{m^2}{r^2} B_z, \quad -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} B_z = \frac{\omega^2}{c^2} B_z \text{ 則(A-9)}$$

式可寫為

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{m^2}{r^2} \right) B_z = 0 \quad (\text{A-10})$$

假設管壁沿  $z$  軸方向的變化為緩變結構，即

$$\frac{\partial}{\partial z} k_{mn}(z) = 0 \quad (\text{A-11})$$

則可得

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} - k_{mn}(z) \right] f(z) = 0 \quad (\text{A-12})$$

由  $n \cdot B = 0$  可得知邊界條件為平行導體表面的電場為零

$$\frac{\partial}{\partial r} B_z \Big|_{r=r_w(z)} = 0 \quad (\text{A-13})$$

其中， $r_w$  為腔體半徑。

由上式條件可得

$$k_{mn}(z) = \frac{x_{mn}}{r_w(z)} \quad (\text{A-14})$$

其中  $x_{mn}$  為  $J_m(x) = 0$  的第  $n$  個根。

定義

$$k_z^2(z) \equiv \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{x_{mn}^2}{r_w^2(z)} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{cmn}^2(z)}{c^2} \quad (\text{A-15})$$

其中  $\omega_{cmn}(z) \equiv \frac{x_{mn}c}{r_w(z)}$  為  $\text{TE}_{mn}$  模的截止角頻率。

則可由(A-12)式得到圓柱對稱的波動方程式



$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + k_z^2(z) \right] f(z) = 0$$



當考慮管壁有歐姆損耗時，色散關係〈dispersion relation〉式(A-15)式須修正為

$$k_z^2(z) = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{cmn}^2(z)}{c^2} \left[ 1 - (1+i) \frac{\delta}{r_w(z)} \left( 1 + \frac{m^2}{x_{mn}^2 - m^2} \frac{\omega^2}{\omega_{cmn}^2(z)} \right) \right] \quad (\text{A-17})$$

其中  $\delta$  為管壁之集膚深度〈skin depth〉。

## 附錄 B 圓柱對稱結構中的場能與歐姆損耗



在圓形波導管中，圓柱半徑固定為  $r_w$ ，且管壁材質均勻，電阻固定，則其  $TE_{mn}$  模的電磁場可表示為下列式子的實部與虛部

$$B_z = B_{z0} J_m(k_{mn} r) e^{-i(\alpha r - k_z z - m\theta)} \quad (B-1)$$

$$B_r = \frac{ik_z}{k_{mn}} B_{z0} J'_m(k_{mn} r) e^{-i(\alpha r - k_z z - m\theta)} \quad (B-2)$$

$$B_\theta = \frac{-k_z m}{k_{mn}^2 r} B_{z0} J_m(k_{mn} r) e^{-i(\alpha r - k_z z - m\theta)} \quad (B-3)$$

$$E_r = \frac{-\omega m}{k_{mn}^2 c r} B_{z0} J_m(k_{mn} r) e^{-i(\alpha r - k_z z - m\theta)} \quad (B-4)$$

$$E_\theta = \frac{-i\omega}{k_{mn} c} B_{z0} J'_m(k_{mn} r) e^{-i(\alpha r - k_z z - m\theta)} \quad (B-5)$$

其中  $k_{mn} = \frac{x_{mn}}{r_w}$  且  $x_{mn}$  為  $J_m(x) = 0$  的第  $n$  個根。 $k_z$  由有歐姆損耗下之

$TE_{mn}$  模的色散關係決定，關係式如下：

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 - \frac{\omega_{cmn}^2}{c^2} \left[ 1 - (1+i) \frac{\delta}{r_w} \left( 1 + \frac{m^2}{x_{mn}^2 - m^2} \frac{\omega^2}{\omega_{cmn}^2} \right) \right] = 0 \quad (B-6)$$

其中  $\omega_{cmn} \equiv k_{mn} c$  且  $\delta$  為管壁之集膚深度。 $k_z$  的實部大於 0，表示為前進波； $k_z$  的實部小於 0，表示為後退波。

考慮一管壁半徑或材料電阻率隨  $z$  軸變化的不均勻為波裝置，其電磁場解的形式可用本徵態 (eigen modes) 來展開表示。假設其結構的不均勻性較小，以至於模態之間的轉換可以忽略，則可以建立單一  $TE_{mn}$  模態的解。

將(B-1)式 ~ (B-5)式皆乘上  $k_{mn}^2(z)$ ，則  $TE_{mn}$  模場為下列式子的實部與虛部

$$B_z = k_{mn}^2 f(z) J_m(k_{mn} r) e^{-i(\alpha z - m\theta)} \quad (B-7)$$

$$B_r = k_{mn} f'(z) J'_m(k_{mn} r) e^{-i(\alpha z - m\theta)} \quad (B-8)$$

$$B_\theta = \frac{im}{r} f'(z) J_m(k_{mn} r) e^{-i(\alpha z - m\theta)} \quad (B-9)$$

$$E_r = \frac{-\omega m}{cr} f(z) J_m(k_{mn} r) e^{-i(\alpha z - m\theta)} \quad (B-10)$$

$$E_\theta = \frac{-i\omega k_{mn}}{c} f(z) J'_m(k_{mn} r) e^{-i(\alpha z - m\theta)} \quad (B-11)$$

其中  $f(z) = B_{z0} e^{ik_z z}$ 、 $f'(z) = ik_z B_{z0} e^{ik_z z}$ ，且  $f(z)$  遵循波動方程式

$$\frac{d^2}{dz^2} f(z) + k_z^2(z) f(z) = 0 \quad (B-12)$$

又

$$k_z^2(z) \equiv \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{cmn}^2(z)}{c^2} \left[ 1 - (1+i) \frac{\delta(z)}{r_w(z)} \left( 1 + \frac{m^2}{x_{mn}^2 - m^2} \frac{\omega^2}{\omega_{cmn}^2(z)} \right) \right] \quad (B-13)$$

且  $\omega_{cmn} \equiv k_{mn}c$ 。

對於均勻波導管， $k_z$  為一常數。因此從(B-12)式可得知  $f = e^{\pm ik_z z}$ ，且(B-7)式 ~ (B-11)式會化減為(B-1)式 ~ (B-2)式。





## B.1 軸向之平均淨功率

定義軸向傳輸淨功率為  $P_{net}$ ，當  $\omega > \omega_{cmm}$  時， $P_{net}$  為正向波的功率減去反向波的功率，而  $P_{net}$  可由 Poynting 向量的  $z$  分量給出，

$$P_{net} = \frac{c}{8\pi} \int_0^{r_w} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \operatorname{Re} \left[ (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{B}}^*) \cdot \bar{\mathbf{e}}_z \right] \quad (\text{B-14})$$

假設在穩定態下  $\langle \omega$  為實數  $\rangle$ ，將(B-7)式 ~ (B-8)式中的電場代入，則可得

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_z \cdot (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{B}}^*) &= E_r B_\theta^* - E_\theta B_r^* \\ &= \frac{-\omega m}{cr} f(z) J_m(k_{mn} r) \left( \frac{-im}{r} \right) f'^*(z) J_m(k_{mn} r) \\ &\quad + \frac{i\omega k_{mn}}{c} f(z) J'_m(k_{mn} r) k_{mn} f'^*(z) J'_m(k_{mn} r) \\ &= \frac{i\omega k_{mn}^2}{c} f(z) f'^*(z) \left[ \frac{m^2}{k_{mn}^2 r^2} J_m^2(k_{mn} r) + J_m'^2(k_{mn} r) \right] \end{aligned} \quad (\text{B-15})$$

且

$$\operatorname{Re} \left[ (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{B}}^*) \cdot \bar{\mathbf{e}}_z \right] = \frac{\omega k_{mn}^2}{c} \frac{i}{2} (ff'^* - f^* f') \left[ \frac{m^2}{k_{mn}^2 r^2} J_m^2(k_{mn} r) + J_m'^2(k_{mn} r) \right] \quad (\text{B-16})$$

因此，(B-14)式中，對  $\theta$  變數的積分得到  $2\pi$ ，而對  $r$  變數的積分為

$$\int_0^{r_w} r dr \left[ \frac{m^2}{k_{mn}^2 r^2} J_m^2(k_{mn} r) + J_{mn}'^2(k_{mn} r) \right] = \frac{r_w^2}{2} J_m^2(x_{mn}) \left( 1 - \frac{m^2}{x_{mn}^2} \right) \quad (\text{B-17})$$



將(B-16)式和(B-17)式代入(B-14)式中，可得

$$\begin{aligned} P_{net} &= \frac{c}{8\pi} 2\pi \frac{\omega k_{mn}^2}{c} \frac{i}{2} (ff'^* - f^* f') \frac{r_w^2}{2} J_m^2(x_{mn}) \left( 1 - \frac{m^2}{x_{mn}^2} \right) \\ &= \frac{i}{16} \omega x_{mn}^2 K_{mn} (ff'^* - f^* f') \end{aligned} \quad (\text{B-18})$$

$$\text{其中 } K_{mn} \equiv J_m^2(x_{mn}) \left( 1 - \frac{m^2}{x_{mn}^2} \right)$$

(B-18)式所代表的軸向傳輸淨功率在  $\omega > \omega_{cmn}$  和  $\omega < \omega_{cmn}$  時均成立。另外，(B-18)式中，括號內的  $ff'^*$  和  $f^* f'$  為共軛複數，其相減為虛數，因此， $P_{net}$  為一實數。

## B.2 前進波和反向波之平均功率



在  $\omega > \omega_{cmn}$  時，(B-7)式 ~ (B-11)式中的電磁場可看成由前進波和反向波組成，為了得到局部區域的傳播常數  $k_{zr}$  和  $k_{zi}$  衰減常數，將(B-13)式改寫為

$$k_z(z) = k_{zr}(z) + ik_{zi}(z) = \left\{ \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{cmn}^2(z)}{c^2} \left[ 1 - (1+i) \frac{\delta(z)}{r_w(z)} \left( 1 + \frac{m^2}{x_{mn}^2 - m^2} \frac{\omega^2}{\omega_{cmn}^2(z)} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B-19})$$

假設  $\delta \ll r_w$  以至於  $k_{zi} \ll k_{zr}$ ，可將(B-19)式化簡為

$$k_{zr} \cong \frac{1}{c} (\omega^2 - \omega_{cmn}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B-20})$$

$$k_{zi} \cong \frac{1}{2} \frac{\delta}{r_w} \frac{\omega_{cmn}^2}{k_{zr} c^2} \left( 1 + \frac{m^2}{x_{mn}^2 - m^2} \frac{\omega^2}{\omega_{cmn}^2} \right) \quad (\text{B-21})$$

其中  $k_{zr}$ 、 $k_{zi}$ 、 $\omega_{cmn}$ 、 $r_w$  和  $\delta$  皆為位置  $z$  的函數。

將場  $f(z)$  分解為

$$f(z) \cong f_+(z)e^{ik_{zr}z} + f_-(z)e^{-ik_{zr}z} \quad (\text{B-22})$$

對於緩變截面積和均勻電阻率的坡導管而言，前進波和反射波會彼此獨立傳播與衰減，不會互相轉換。因此可將  $f_+$  和  $f_-$  寫成

$$f_+(z) = C_1 e^{-k_{zr}z} \quad (\text{B-23})$$

$$f_-(z) = C_2 e^{-k_z z} \quad (\text{B-24})$$

其中  $C_1$  和  $C_2$  為複數常數。

當截面積不再是緩變結構或電阻率不再均勻時，前進波和反向波會發生轉換，這時候  $f_+(z)$  和  $f_-(z)$  型式將會更複雜，而且通常只能用數值解。但是，當結構的不均勻性變化不大，且  $\omega > \omega_{cmn}$  時， $f_+(z)$  和  $f_-(z)$  對變數  $z$  的變化相較於  $e^{\pm ik_z z}$  小很多。因此， $f_+(z)$  和  $f_-(z)$  對  $z$  的微分可以忽略，而場  $f(z)$  對位置  $z$  的微分可寫為

$$f'(z) \cong ik_z f_+ e^{ik_z z} - f_- e^{-ik_z z} \quad (\text{B-25})$$

將(B-22)式和(B-25)式聯立求解，可得

$$f_+ \cong \frac{ik_z f + f'}{2ik_z} e^{-ik_z z} \quad (\text{B-26})$$

$$f_- \cong \frac{ik_z f - f'}{2ik_z} e^{ik_z z} \quad (\text{B-27})$$

從(B-26)式和(B-27)式可得到

$$\begin{aligned} ff'^* - f^* f' &= (f_+ e^{ik_z z} + f_- e^{-ik_z z}) (-ik_z f_+^* e^{-ik_z z} + ik_z f_-^* e^{ik_z z}) \\ &\quad - (f_+^* e^{-ik_z z} + f_-^* e^{ik_z z}) (ik_z f_+ e^{ik_z z} - ik_z f_- e^{-ik_z z}) \\ &= ik_z \left[ -|f_+|^2 + f_+ f_-^* e^{2ik_z z} - f_+^* f_- e^{-2ik_z z} + |f_-|^2 \right. \\ &\quad \left. - |f_+| + f_+ f_- e^{-2ik_z z} - f_-^* f_+ e^{2ik_z z} + |f_-|^2 \right] \\ &= 2ik_z \left[ -|f_+|^2 + |f_-|^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{B-28})$$

將(B-28)式代入(B-18)式，可得

$$P_{net} \cong \frac{k_{zr}}{8} \omega x_{mn}^2 K_{mn} (|f_+|^2 - |f_-|^2) \quad (\text{B-29})$$

也可以寫成

$$P_{net} = P_{fwd} - P_{bwd} \quad (\text{B-30})$$

其中

$$P_{fwd} \cong \frac{k_{zr}}{8} \omega x_{mn}^2 K_{mn} |f_+|^2 \quad (\text{B-31})$$

$$P_{bwd} \cong \frac{k_{zr}}{8} \omega x_{mn}^2 K_{mn} |f_-|^2 \quad (\text{B-32})$$

在管壁的歐姆損耗夠小，以至於  $k_{zi} \ll k_{zr}$  的情況下，(B-29)式、(B-31)式和 (B-32)式在  $\omega > \omega_{cmn}$  時是很好的近似，但是不能用在  $\omega < \omega_{cmn}$  的區域。隨著結構不均勻性增加〈截面積和電阻率的改變〉，(B-29)式、(B-31)式和(B-32)式的可信度將會降低。

### B.3 管壁上的歐姆損耗



在管壁上歐姆損耗時，在穩定態下， $P_{net}$  沿  $z$  軸方向為一常數，即

$\frac{dP_{net}}{dz} = 0$ 。當管壁上有歐姆損耗時，根據能量守恆，可以知道

$$P_{ohm} = -\frac{d}{dz} P_{net} \quad (B-33)$$

其中  $p_{ohm}$  為沿著  $z$  軸方向上之單位長度的歐姆損耗。

將(B-18)式代入(B-33)式，得到

$$\frac{d}{dz} P_{net} = \frac{i}{16} \omega x_{mn}^2 K_{mn} (ff^{n*} - f^* f^n) \quad (B-34)$$

從波動方程式(B-12)式，可得知

$$f'' = -k_z^2 f \quad (B-35)$$

$$f^{n*} = -k_z^{*2} f^* \quad (B-36)$$

將(B-35)式和(B-36)式代入(B-34)式，可得

$$\frac{d}{dz} P_{net} = \frac{i}{16} \omega x_{mn}^2 K_{mn} (k_z^2 - k_z^{*2}) |f|^2 \quad (B-37)$$

在沒有歐姆損號的情況下，集膚深度  $\delta$  趨近於零。由(B-12)式可得知， $k_z$  為一實數或虛數。因此， $\frac{dP_{net}}{dz} = 0$  且遵守能量守恆。當管壁上有歐姆損耗時，由 (B-33)式、(B-37)式、(B-13)式和(B-21)式可得單位長度的歐姆損耗  $p_{ohm}$

$$p_{ohm} = \frac{1}{8} \omega x_{mn}^2 K_{mn} \frac{\omega_{cmn}^2}{c^2} \frac{\delta}{r_w} \left( 1 + \frac{m^2}{x_{mn}^2 - m^2} \frac{\omega^2}{\omega_{cmn}^2} \right) |f|^2 \quad (\text{B-38})$$

而(B-38)式可用在  $\omega > \omega_{cmn}$  和  $\omega < \omega_{cmn}$  的區域。

在  $\omega > \omega_{cmn}$  的區域，可以確認(B-38)式和將場  $f(z)$  拆為前進波和反向波的出發點之間的一致性。由(B-23)式和(B-24)式可知，距離內的場可約略寫為

$$f_+ \cong C_1 e^{-k_z z} \quad (\text{B-39})$$

$$f_- \cong C_2 e^{-k_z z} \quad (\text{B-40})$$

則

$$\frac{d}{dz} |f_+|^2 \cong -2k_{zi} |f_+|^2 \quad (\text{B-41})$$

$$\frac{d}{dz} |f_-|^2 \cong -2k_{zi} |f_-|^2 \quad (\text{B-42})$$

由(B-31)式、(B-34)式、(B-41)式和(B-42)式，在  $k_{zr}$  隨位置  $z$  變化量很小的情況下可得

$$\begin{aligned}
P_{ohm} &= -\frac{d}{dz} P_{net} \\
&\cong -\frac{k_{zr}}{8} \omega x_{mn}^2 K_{mn} \left( \frac{d}{dz} |f_+|^2 - \frac{d}{dz} |f_-|^2 \right) \\
&\cong \frac{k_{zr}}{4} \omega x_{mn}^2 K_{mn} k_{zi} \left( |f_+|^2 + |f_-|^2 \right) \\
&= \frac{1}{8} \omega x_{mn}^2 K_{mn} \frac{\omega_{cmn}^2}{c^2} \frac{\delta}{r_w} \left( 1 + \frac{m^2}{x_{mn}^2 - m^2} \frac{\omega^2}{\omega_{cmn}^2} \right) \left( |f_+|^2 + |f_-|^2 \right)
\end{aligned}$$



(B-43)

由(B-43) 式和(B-38)式比較可知，在  $\omega > \omega_{cmn}$  的區域，歐姆損耗  $P_{net}$  為正向波和反向波的歐姆損耗之合。



## B.4 電磁場場能

由(B-7)式~(B-11)式，可算出單位長度內電場的能量為

$$\begin{aligned}
 w_E &= \frac{1}{16\pi} \int_0^{r_w} r dr \int_0^{2\pi} d\theta |\bar{E}|^2 \\
 &= \frac{1}{8c^2} \omega^2 k_{mn}^2 |f|^2 \int_0^{r_w} r dr \left[ \frac{m^2}{k_{mn}^2 r^2} J_m^2(k_{mn} r) + J_m'^2(k_{mn} r) \right] \\
 &= \frac{1}{16c^2} \omega^2 x_{mn}^2 J_m^2(x_{mn}) \left( 1 - \frac{m^2}{x_{mn}^2} \right) |f|^2
 \end{aligned} \tag{B-44}$$

單位長度內磁場的能量為

$$\begin{aligned}
 w_B &= \frac{1}{16\pi} \int_0^{r_w} r dr \int_0^{2\pi} d\theta |\bar{B}|^2 \\
 &= \frac{1}{8c^2} k_{mn}^4 \int_0^{r_w} r dr \left\{ |f|^2 J_m^2(k_{mn} r) + \frac{|f'|^2}{k_{mn}^2} \left[ J_m'^2(k_{mn} r) + \frac{m^2}{k_{mn}^2} J_m^2(k_{mn} r) \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{16c^2} \omega^2 x_{mn}^2 J_m^2(x_{mn}) \left( 1 - \frac{m^2}{x_{mn}^2} \right) \left[ \frac{k_{mn}^2 c^2}{\omega^2} |f|^2 + \frac{c^2}{\omega^2} |f'|^2 \right]
 \end{aligned} \tag{B-45}$$

單位長度內總場能為

$$\begin{aligned}
 w_f &= w_E + w_B \\
 &= \frac{1}{16c^2} \omega^2 x_{mn}^2 J_m^2(x_{mn}) \left( 1 - \frac{m^2}{x_{mn}^2} \right) \left[ |f|^2 + \frac{\omega_{cmm}^2}{\omega^2} |f|^2 + \frac{c^2}{\omega^2} |f'|^2 \right]
 \end{aligned} \tag{B-46}$$

而在結構均勻且沒有歐姆損耗的波導管中，電場的場能會和磁場的能量相等。

