

國立臺灣大學生物資源暨農學院生物環境系統工程學研究所

碩士論文

Department of Bioenvironmental Systems Engineering

College of Bio-Resources and Agriculture

National Taiwan University

Master Thesis

擬譜法於多孔隙介質之最佳化控制分析

Pseudospectral Method for Optimal Control Analysis

in Porous Media

蔡昊宸

Hao-Cheng Tsai

指導教授：胡明哲 博士

Advisor: Ming-Che Hu, Ph.D.

中華民國 105 年 6 月

June, 2016





## 誌謝

這篇論文的生成，首先我要感謝我的指導教授胡明哲教授在這條研究的路上給我諸多的指引與提攜。對數值資料或是數理推導不怎麼敏感的我，在研究的過程中總是跌跌撞撞，每次遇到困難時，當自己感覺快找到出口，下個障礙馬上出現在轉角處，來來回回卡在這死胡同裡，對自己失望之情日益而生，但是每當與胡明哲教授討論過後，教授都會給我一些靈感或是不一樣的想法使我的思路更加清晰且明朗，大大幫助了我完成這篇論文。

除此之外我還要感謝梁文寧、沈佳慧這兩位研究室的好戰友，在我身在美國學術研討的時候處處幫我打理有關學業上的雜事，並且在撰寫論文時忍受我的各種抱怨以及碎碎念，在我快崩潰之際幫我加油打氣並且免費請我喝紅牛讓我晚上更有精神，感謝你們忍受我這種凡事隨隨便便的個性兩年，沒有你們我可能就沒辦法完成這篇論文了。

感謝口試委員童慶斌老師、余化龍老師、許少瑜老師和溫在弘老師所給的指導與建議，提供了我不同面向的建議，讓我了解到我不同面向的不足且需要改進的地方，讓我獲益良多，並感謝當時幫我記錄的林軒德、劉泰億、以及賴宇謙學弟以免我遺漏了哪位老師的建議。

最後感謝我的家人在我忙於此研究時成為我最強力的依靠，雖然你們不懂我到底是在做甚麼，但你們仍然會用你們的方式給我諸多幫助，看我灰心喪志時帶我去居酒屋微買醉，謝謝你們。

蔡昊宸 誌於

國立台灣大學生物環境系統工程學系

中華民國一零五年六月

## 中文摘要

在一油滴抽取的過程中，在多孔隙介質內的油滴因為毛細作用的抗力而被困在毛細管中不能輕易被抽出，因此在抽取過程中會額外施加一振動頻率，使油滴產生共振抵抗毛細作用的抗力，因此提升油滴抽取的效率。而本研究即以在抽取過程中最低能量消耗為目標建構一最佳化控制問題，並調整額外施加之振動頻率與外力以達使油滴可抽出之最小距離。

為解決此一最佳化控制問題，本研究使用擬譜法最佳化控制解決。擬譜法最佳化控制為一數值分析方法，其過程首先為離散化原函數簡化原函數的複雜度，並選取適當之節點逼近，其後在加入微分轉換與積分轉換處理函數中的微分積分項，最後再加入可容許誤差值彌補離散化過程後的微小偏差，再經過一連串的轉換後，便能使原問題轉變為一非線性問題，再利用 GAMS、MATLAB 等軟體便能得到此一問題之解答。

關鍵字：油滴抽取、毛細作用、擬譜法、最佳化分析

## ABSTRACT



In the process of extracting oil, it is common that there is still a large amount of oil remaining in the crust because of the tension force and resistance caused by the capillary in the porous media. To eliminate the trapped oil in the porous media, a excitation frequency is applied and causes oil blobs resonance. Because of the resonance, oil blobs can easily cancel out the resistance of capillarity and tension force. In this research, an optimal control problem is constructed in order to minimize the energy consumption by adjusting the excitation frequency and extracting force. Pseudospectral method, which is a numerical method specializing in solving partial differential equation, is applied to simplify the origin function and transforms the origin optimal control problem into a nonlinear program. Therefore, this problem can eventually be solved by GAMS.

Key words: pseudospectral method, trapped oil, capillarity, optimal control

## 目錄



誌謝 .....	I
中文摘要 .....	II
ABSTRACT .....	III
目錄 .....	IV
圖目錄 .....	VI
表目錄 .....	VI
Chapter1 緒論 .....	1
1.1 研究動機 .....	1
1.2 研究目的 .....	1
1.3 章節說明 .....	2
Chapter2 文獻回顧 .....	3
2.1 油滴運動 .....	3
2.2 擬譜法 .....	3
2.2.1 譜方法 .....	3
2.2.2 運用擬譜法於最佳化控制問題 .....	4
Chapter3 研究方法 .....	5
3.1 擬譜法(Pseudospectral method) .....	5
3.1.1 離散化原函數 .....	6
3.1.2 選取節點 .....	10
3.1.3 產生微分矩陣與積分權重 .....	11
3.1.4 加入容許誤差 .....	13
Chapter4 模型介紹 .....	15
4.1 最佳化問題變數意義 .....	15
4.2 均勻管之最佳化模式 .....	16

4.3 漸變管之最佳化模式 .....	17
4.4 以擬譜法最佳化控制分析問題 .....	19
Chapter5 結果與討論 .....	23
5.1 參數設定 .....	23
5.2 結果 .....	23
Chapter6 結論與建議 .....	26
參考文獻 .....	27



## 圖目錄

圖 3-1 擬譜法流程.....	5
圖 3-2 原函數 $y = f(t)$ .....	6
圖 3-3 內插多項式 $li(t)$ .....	7
圖 3-4 調整振幅之內插多項式 $f(t_i)li(t)$ .....	8
圖 3-5 比較 $f(t)$ 與 $P(t)$ .....	9
圖 3-6 比較利用均勻點與 LGL 點模擬之情形.....	10
圖 3-7 從區間 $-1,1$ 映射到區間 $[a, b]$ .....	11
圖 4-1 均勻管示意圖.....	17
圖 4-2 漸變管示意圖.....	18
圖 4-3 20 階 Legendre 多項式微分.....	19
圖 4-4 20 階 Legendre 多項式微分在 0-10 區間內.....	20
圖 4-5 $21 \times 21$ 之微分矩陣 $D$ .....	20
圖 4-6 積分權重.....	21
圖 5-1 不同外力下油滴之振動軌跡.....	24
圖 5-2 在 5 秒內通過油滴可被抽出之最小位置之軌跡.....	25
圖 5-3 在 10 秒內通過油滴可被抽出之最小位置之軌跡.....	25
圖 6-1 $N=30$ 與 $N=50$ 之比較.....	26

## 表目錄

表 5-1 設定之參數.....	23
表 5-2 通過時間 5 秒與 10 秒時之最佳解.....	26



## Chapter1 緒論

### 1.1 研究動機

現今抽取原油的過程共分成三個階段。在第一階段中利用自然氣的擴張、溶解在原油中的氣體擴張、重力洩油……等自然的機制使原油自然的溢出，或在一壓力足夠大的存油處建立一人工抽取裝置(類似油泵千斤頂)。第二階段則是注入水、氮氣或是二氧化碳至井的底部置換地殼中的原油並驅使他到表面。第三階段又稱 EOR，在這階段會利用熱能降低原油的黏滯力藉此增強他的流動力，或是加入化學活性劑去降低原油的表面張力使油從孔隙中分解出來。

然而經過統計，上述三個步驟大約只能抽出 75% 的原油量，其原因是因為原油在形成的過程中主要是儲存在砂岩或石灰岩中，而這些岩石就如同海綿具有細小的孔洞但不可被壓縮，此特性稱之為多孔性，在抽取多孔隙介質中的不可溶油滴時，孔洞裡的油滴會因表面張力或毛細作用的抗力困在孔洞中導致儲存在孔洞中的油滴難以被抽出。

### 1.2 研究目的

為解決油滴被困在孔洞中的問題，在抽取油滴的過程中會額外施加一振動頻率使油滴產生共振抵抗毛細作用的抗力，此類的問題也可以被用在清除多孔隙介質中的污染物或是去除水體裡的氣泡。而本研究是以抽取者的立場考量如何以最小的能量消耗控制所施的外力以及振動頻率以滿足油滴的抽出條件。

模型設計主要是參考 Shao-Yiu Hsu(2007)油滴位移與施加外力及振動頻率之常微分方程關係式，並引入能量的概念，探討在一段時間中如何控制力與頻率的大小使消耗的能量最小，並利用 MATLAB 軟體操作擬譜法(Pseudospectral method)中的計算過程，最終在以 GAMS 軟體求解經過擬譜法離散過後的最佳化問題。



### 1.3 章節說明

本研究以第二章回顧有關油滴在毛細管中運動的相關研究，並綜觀擬譜法的歷史演進與重要性。第三章介紹本研究的主要理論方法—擬譜法並簡述其計算的步驟。第四章介紹本研究設計之兩種毛細管模型，並詳列所有在運算過程中所運用的代號、變數，並在最後呈現轉換後模型之改動。第五章則呈現帶入參數後所得出之結果。最後在第六章提出研究結論。



## Chapter2 文獻回顧



### 2.1 油滴運動

Shao-Yiu Hsu(2012)在研究中利用平面激光可視化油滴在多孔隙介質中的運動情況，透過觀察的結果利用 Navier-Stokes 極座標方程式建構出一簡單的油滴在毛細管中反應外在振動的模型，並假設兩端壓力差足夠小可使液面可以密合，而後展示油滴共振的現象。

Markus Hilpert(2006)根據油滴困在多孔隙介質中的模型，利用 Lattice-Boltzmann (LB)模擬假設從外在施予一振動頻率使油滴達共振，擴大其振幅並使油滴可以脫困之情形，並利用數值分析檢視所作的假設是否與現實情況相同。

Shao-Yiu Hsu(2007)提出利用一和諧振盪器代表其所施加之振盪頻率，並把油滴運動反應於外力與施加頻率關係式透過最大共振頻率相同連結修改關係式，並在後面加入時間變數，簡化原方程式的複雜度並使運動方程式呈現為一常微分方程式。

### 2.2 擬譜法

#### 2.2.1 譜方法

石賢棟(2013)提出混和 Jacobi-Fourier 的譜方法，其目的主要是處理區域中心的奇異性，並參考 Jacobi 和 Fourier 地逼近結果，得出混和逼近的結果。在結論的數值分値中說明了此方法能提升解決此問題之效率，使用廣義的 Jacobi 逼近能避免問題的奇異性，簡化了理論分析的困難度。並闡明此數值解在空間方向上具有譜方法之精度。

馬石莊(2011)認為擬譜法能快速處理高維度非線性問題和頻譜迭代之穩態問題，且在實際應用中，擬譜法比譜方法更有效率，但擬譜法容易產生 Gibbs 型振

盪現象，在端點處容易振盪並產生誤差，引起能量的反常增長。黃奕安(2012)提出對 Gibbs 現象的解決方法，藉由加寬資料點間距，與降低系統空間頻率，盡量減少誤差。、



## 2.2.2 運用擬譜法於最佳化控制問題

Qi gong, I. Michael Ross and Fariba Fahroo(2009)在研究中說明了除了用一般擬譜法所運用的 Chebyshev 多項式節點或是 LGL 節點，擬譜法可以透過任何一種節點模擬原始函數，並推導出各個節點所繁衍出來的公式，而再利用各種不同的節點比較各種方法之優劣，選出最適之節點，並在後段講解了擬譜法之對偶性並以 KKT 解之。

I. M. Ross and M. Karpenko(2012)認為最佳化控制問題必須擁有三個特性，目標函數、控制系統的動態微分方程以及邊界的約束條件。解決問題的過程必須利用到正交函數集，且此函數集與插值函數的配合影響到未來解之精度。陳佑航(2008)以擬譜法為解決光電類的最佳化控制問題，且成功達到多變數系統下的時變目標，並應用共軛梯度法大幅減少數值迭代所需的次數。

Qi Gong, Wei Kang and I. Michael Ross(2006)對同一最佳化問題利用三種不同的離散化方法解決，發現利用擬譜法模擬函數具有較高的精確度且其誤差在選取的節點增加後具有指數型下降的趨勢。其後又證明了利用 LGL 點在節點增加後具有收斂性與唯一性。

## Chapter3 研究方法



### 3.1 擬譜法(Pseudospectral method)

擬譜法又稱為離散變數表示法(discrete variable representation methods，DVR)，為一種解決偏微分方程式的數值分析方法，其步驟首先先利用內插多項式離散化原函數，再以正交函數的節點為內插多項式的插值點以逼近原函數特性，其後再用已知的內插多項式與節點導出微分矩陣與積分權重解決離散化中微分及積分的問題，最後再加入可容許誤差滿足此方法的存在性與收斂性，圖 3-1 為其流程圖。

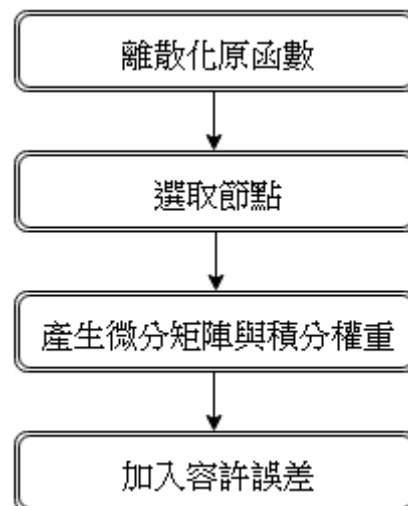


圖 3-1 擬譜法流程

此研究即為利用擬譜法的特性解決在一連續時間間距中具有狀態變數及容許控制的最佳化問題。



### 3.1.1 離散化原函數

在離散化原函數的階段，利用圖形的疊加即為離散函數的方法。舉例來說，首先假設一函數為 $y = f(t)$ 且通過三個點 $(t_0, f(t_0))$ 、 $(t_1, f(t_1))$ 、 $(t_2, f(t_2))$ ，其圖形為：

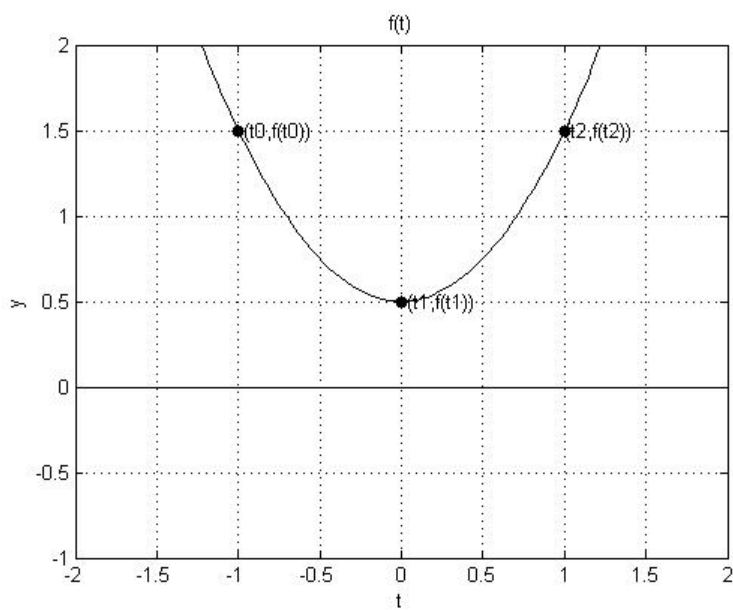


圖 3-2 原函數  $y = f(t)$



定義內插多項式 $l_i(t_j)$ 其性質為當 $i = j$ 時， $l_i(t_j) = 1$ ；當 $i \neq j$ 時， $l_i(t_j) = 0$ ，  
則 $l_0(t)$ 、 $l_1(t)$ 、 $l_2(t)$ 的圖形可由圖 3-3 表示：

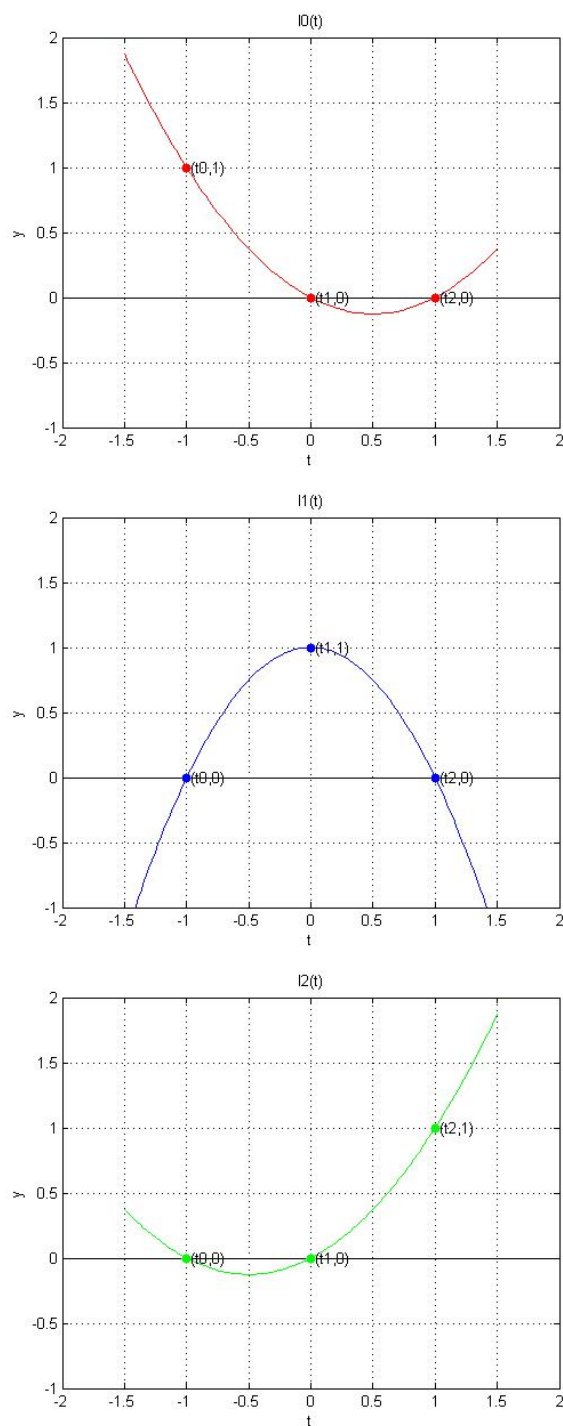


圖 3-3 內插多項式  $l_i(t)$



分別對 $l_0(t)$ 、 $l_1(t)$ 、 $l_2(t)$ 乘上 $f(t_0)$ 、 $f(t_1)$ 、 $f(t_2)$ ，其特性即為當 $i = j$ 時， $f(t_i)l_i(t_j) = f(t_i)$ ；當 $i \neq j$ 時， $l_i(t_j) = 0$ 。以圖形來說，即為將圖 3-3 的振幅放大(縮小)且仍然能使其值為 0 的點維持其值，如圖 3-4 所示：

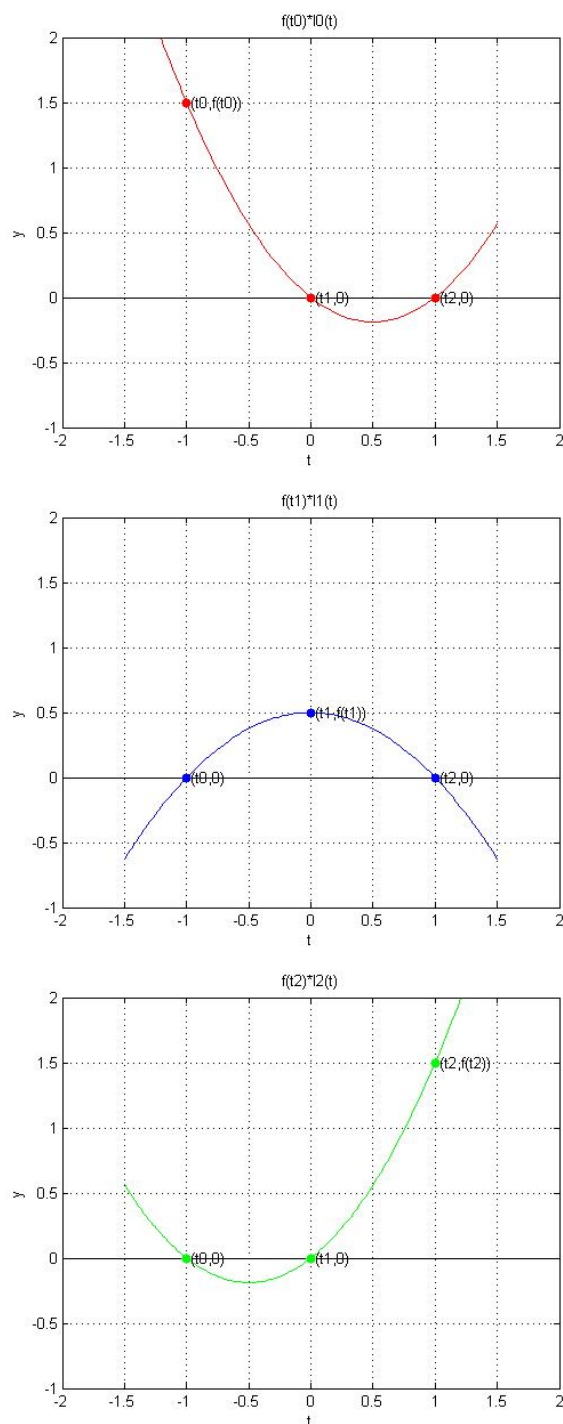


圖 3-4 調整振幅之內插多項式  $f(t_i)l_i(t)$



根據上述的概念，對 $f(t_0)l_0(t)$ 、 $f(t_1)l_1(t)$ 、 $f(t_2)l_2(t)$ 此三個函數疊加，可得到離散方程式 $P(t) = f(t_0)l_0(t) + f(t_1)l_1(t) + f(t_2)l_2(t)$ 且在已選定的點 $t_0$ 、 $t_1$ 、 $t_2$ 上原函數與離散化方程式的值完全相等，如圖 3-5 所示：

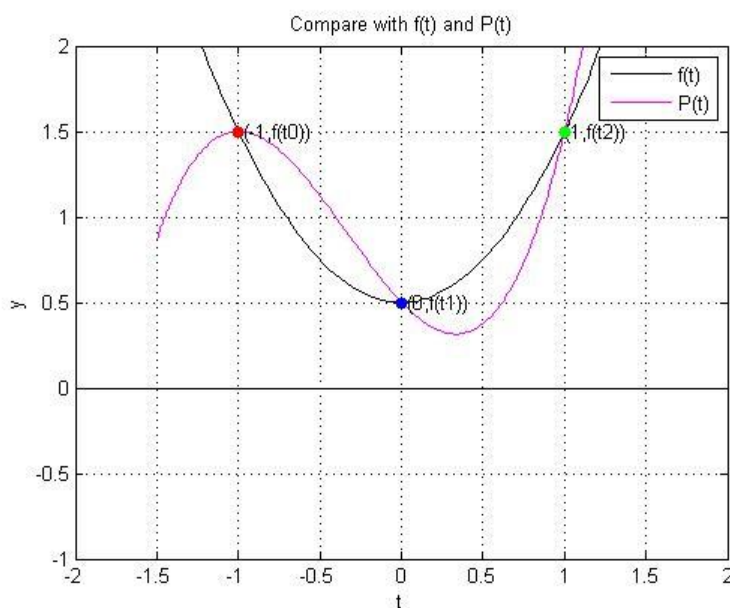


圖 3-5 比較  $f(t)$  與  $P(t)$

因此當選取點的數目趨近無限大時，所做出來的離散化方程式便能更代表原始函數，離散化過程中所造成的誤差也能更小，即離散化方程式 $P^N(t) = \sum_{i=0}^N f(t_i)l_i(t)$ 越能趨近於原函數 $f(t)$ ，其中  $N$  代表總共選取  $N + 1$  個點。在這個研究中利用 Lagrange 多項式為內插多項式，其定義為

$$l_i(t) = \frac{(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2) \cdots (t - t_{i-1})(t - t_{i+1}) \cdots (t - t_N)}{(t_i - t_0)(t_i - t_1)(t_i - t_2) \cdots (t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i+1}) \cdots (t_i - t_N)}$$

而通式為 $l_i(t) = \frac{g^N(t)}{g^{N'}(t_i)(t - t_i)}$ ，其中 $g^N(t) = \prod_{i=0}^N (t - t_i)$ 。

在此最佳化問題中以調整的振幅為決定變數，乘上各自的內插多項式並找出所需的最佳化函數。





### 3.1.2 選取節點

根據 3.1.1 的概念，一個函數須由一組內插多項式為基底，改變其振幅再組合而成，而一組內插多項式是由選取的節點而決定的，因此所選取的節點決定了利用內插值多項式模擬原函數的準確度。

舉例來說，假設一函數  $f(t) = \frac{1}{(1+16t^2)}$ ，在  $[-1,1]$  區間內利用均勻點與

Legendre-Gauss-Lobatto (LGL) 點產生內插多項式並模擬原函數  $f(t)$ ，如圖 3-6 所示

可以知道利用均勻點的模擬法在接近邊界的區域時無法有效的反應出原函數的趨勢，而在節點數一樣的情況下利用 LGL 點較能呈現原函數的趨勢。

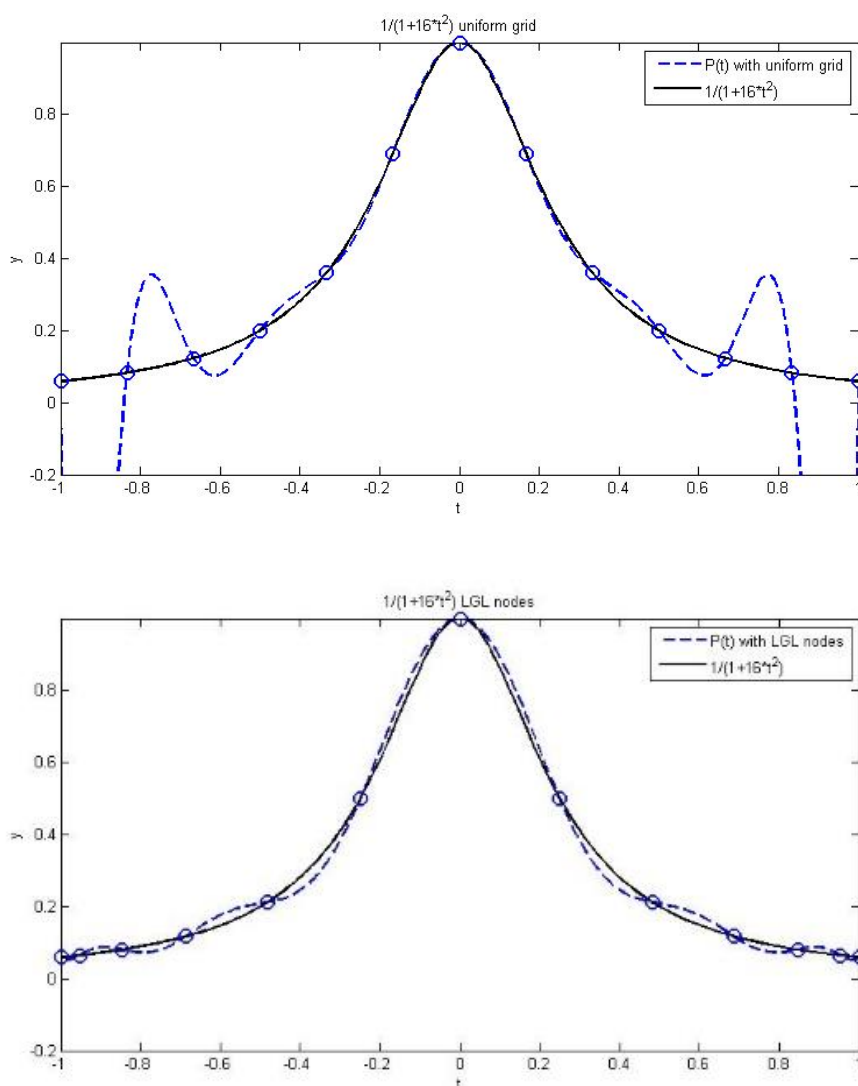


圖 3-6 比較利用均勻點與 LGL 點模擬之情形

而在 Qi Gong, Wei Kan and I. Michael Ross(2006)證明了令 LGL 點為節點可使離散化後的函數具有收斂性以及唯一性，因此此研究中利用 LGL 點為選取的節點。LGL 點是由  $n$  階 Legendre 多項式  $L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$  微分後的  $N - 1$  個根再加上  $-1$ 、 $1$  兩點所組成的一組節點。

假設所取的間距不為  $[-1, 1]$ ，可以利用映射使  $[-1, 1]$  中的節點轉換到所需的間距上，如圖 3-7 所示：

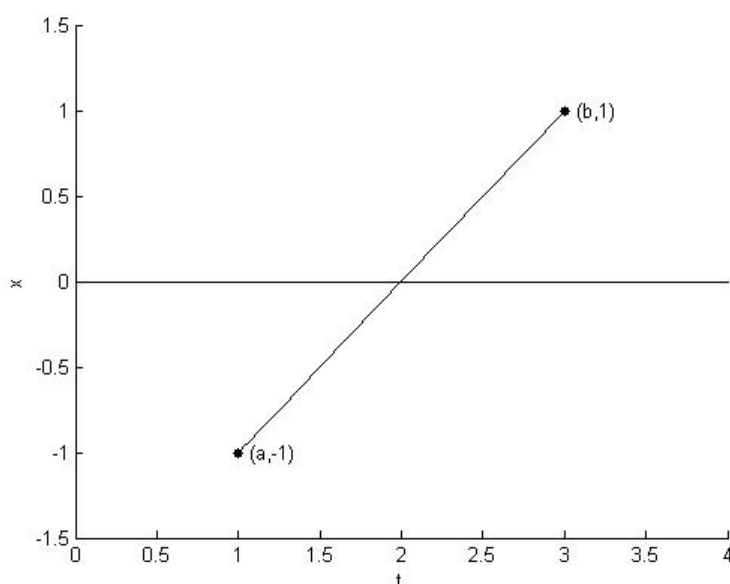


圖 3-7 從區間  $[-1, 1]$  映射到區間  $[a, b]$

在  $x$  軸上間距  $[-1, 1]$  的點均可利用  $t = \frac{1}{2}[(b - a)x + a + b]$  映射到一間距為  $[a, b]$  的  $t$  軸上，產生在間距  $[a, b]$  裡的節點。

### 3.1.3 產生微分矩陣與積分權重

透過 3.1.1 和 3.1.2 選擇使用何種內插多項式以及選取節點後，此小節說明了如何解決離散微分函數以及積分函數的問題。



由 3.1.1 可知一函數可經由離散化方程式表示

$$f(t) \approx P^N(t) = \sum_{i=0}^N f(t_i) l_i(t)$$

在解決微分函數問題時，對兩側同時微分，可得

$$f'(t) \approx P^{N'}(t) = \left[ \sum_{i=0}^N f(t_i) l_i(t) \right]'$$

從右側可知  $f(t_i)$  為一常數，因此在右側只須對  $l_i(t)$  微分

$$f'(t) \approx P^{N'}(t) = \sum_{i=0}^N f(t_i) l_i'(t)$$

而在往後的計算中只須計算節點上的微分值，因此上式可改寫為  $f'(t)|_{t_i} = \sum_{j=0}^N D_{ij} f(t_j)$ ，其中  $D_{ij}$  為微分矩陣且

$$D_{ij} = \begin{cases} \frac{g^{N'}(t_i)}{g^{N'}(t_i)} \frac{1}{(t_i - t_j)}, & i \neq j \\ \frac{g^{N''}(t_i)}{2g^{N'}(t_i)}, & i = j \end{cases}$$

同理在解決積分問題時，對兩側同時積分可得

$$\int_a^b f(t) dt \approx \int_a^b P^N(t) dt = \sum_{i=0}^N f(t_i) \int_a^b l_i(t) dt$$

因此可得積分權重  $w_i(t) = \int_a^b l_i(t) dt$ ，則上式可改寫為

$$\int_a^b f(t) dt \approx \int_a^b P^N(t) dt = \sum_{i=0}^N f(t_i) w_i(t)$$



### 3.1.4 加入容許誤差

假設一最佳化問題為

目標函數(Objective function)

$$\min \quad J[x(.), u(.)] = E(x(-1), x(1)) + \int_{-1}^1 F(x(t), u(t)) dt$$

限制式(Constraints)

$$\dot{x} = f(x(t), u(t))$$

$$e(x(-1), x(1)) = 0$$

$$h(x(t), u(t)) \leq 0$$

經由上述離散化過程轉變為

目標函數(Objective function)

$$\min \quad J^N[x, u] = E(x_0, x_N) + \sum_{i=0}^N F(x_i, u_i) w_i$$

限制式(Constraints)

$$\sum_{i=0}^N D_{ij} x_j - f(x_i, u_i) = 0$$

$$e(x_0, x_N) = 0$$

$$h(x_i, u_i) \leq 0$$

但由於在利用離散化模擬函數的過程中一定存在誤差，而此誤差在某些條件下會造成當選取的節點增加時所得到的解無法收斂到某個值或是不存在，因此在 Qi Gong, Michael Ross and Fariba Fahroo(2009) 中提到加入一微小容許誤差值 $\delta^N$ 彌補誤差所帶來的影響，利用 $\delta^N = (N - 1)^{-\frac{1}{2}}$ 表示當所選取的節點越多可容許的誤差越小，代表模擬出的函數越能趨近原函數。因此離散化的結果可改寫為

目標函數(Objective function)

$$\min \quad J^N[x, u] = E(x_0, x_N) + \sum_{i=0}^N F(x_i, u_i) w_i$$

限制式(Constraints)

$$\left\| \sum_{i=0}^N D_{ij} x_j - f(x_i, u_i) \right\|_{\infty} \leq \delta^N$$

$$\|e(x_0, x_N)\|_{\infty} \leq \delta^N$$

$$h(x_i, u_i) \leq \delta^N \cdot 1$$





## Chapter4 模型介紹

本研究參考 Shao-Yiu Hsu(2007)的油滴移動位置與所施外力和振動頻率的常微分關係式。以所施的外力與振動頻率為控制變數、油的的移動位置為狀態決定變數。建立均勻管與漸變管兩種不同情況下的模式。

以下將先以 4.1 節介紹在模型中各個變數意義，4.2 節介紹均勻管之最佳化模式，4.3 節介紹漸變管之最佳化模式，4.4 節則利用擬譜法轉換原問題並簡單利用 GAMS 軟體求得最佳解。

### 4.1 最佳化問題變數意義

$J[a_0, \omega]$ ：目標函數，即為在滿足限制式的條件下所能達到的最佳結果，本研究為在抽取過程中所消耗的能量( $N \cdot m$ )。

$a_0$ ：控制變數，本研究為所施外力之加速度( $m/s^2$ )。

$\omega$ ：控制變數，本研究為提供之振動頻率( $rad/s$ )。

$t$ ：任意時間( $s$ )。

$\rho_n$ ：油滴密度( $kg/m^3$ )。

$L_n$ ：油滴長度( $m$ )。

$R$ ：均勻管管徑( $m$ )。

$\theta$ ：油滴與管接觸面之夾角( $rad$ )。

$x_N$ ：在時間 $t_N$ 時油滴的位置( $m$ )。

$t_N$ ：最終時間( $s$ )。

$x(t)$ ：油滴在任一時間之平均位置( $m$ )。

$p_w(L, t) - p_w(0, t)$ ：為油滴兩端之壓力差( $Pa$ )。

$\omega_0$ ：共振頻率( $rad/s$ )，算法為 $\sqrt{\frac{4\sigma}{(L_n\rho_n + L_w\rho_w)R^2} \sin \theta (1 + \sin \theta)^2}$ ，其中 $\sigma$ 為表面張

力( $N/m$ )， $L_w$ 與 $\rho_w$ 分別為管徑中不與油滴互溶液體之長度與密度。



$\omega_c$ ：特徵頻率(rad/s)，算法為 $\frac{\eta_n}{\rho_n R^2(x)}$ ， $\eta_n$ 為油滴之動力黏滯係數(Pa·s)。

$\bar{x}$ ：可使油滴被抽出之最小位置(m)。

$L_w^-$ ：為初始時之左油滴面平均位置(m)。

$x_L(t)$ ：在任意時間左油滴面的平均位置(m)。

$x_R(t)$ ：在任意時間右油滴面的平均位置(m)。

$V$ ：在漸變管中之油滴體積(m<sup>3</sup>)。

$\bar{R}(t)$ ：在任意時間之平均管徑(m)。

$R(x)$ ：漸變管之管徑函數(m)。

## 4.2 均勻管之最佳化模式

目標函數(Objective function)

$$\begin{aligned} \min J[a_0, \omega] &= \int_0^{x_N} \rho_n (\pi R^2 L_n + \frac{2}{3} R^3 \frac{\cos \theta (2 + \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)^2}) a_0 \cos(\omega t) dx \\ &= \int_0^{t_N} \rho_n (\pi R^2 L_n + \frac{2}{3} R^3 \frac{\cos \theta (2 + \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)^2}) a_0 \cos(\omega t) \frac{dx(t)}{dt} dt \end{aligned} \quad (1)$$

限制式(Constraints)

$$\begin{aligned} -a_e(t) &= -\left(a_0 + \frac{p_w(L, t) - p_w(0, t)}{\rho_n L_n}\right) \cos(\omega t) \\ &= \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \sqrt{2\omega_0 \omega_c} \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) \end{aligned} \quad (2)$$

$$x(0) = 0 \quad (3)$$

$$x'(0) = 0 \quad (4)$$

$$\text{且在時間 } t_N \text{ 內 } x(t) \text{ 需大於 } \bar{x} \quad (5)$$

式(1)為均勻管之目標函數，代表油滴在時間 $t_N$ 內在均勻管抽取過程中所消耗的總能量，此處著眼於此油滴的平均位置，且由於油滴在均勻管運動中並不會改變油滴左右兩端液面之半徑，因此利用油滴之平均移動距離即可代表左

右液面之移動距離。 $\pi R^2 L_n$  為油滴在均勻管中之圓柱體積而  $\frac{2}{3} R^3 \frac{\cos \theta (2 + \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)^2}$  為油滴在均勻管中兩端半月型之體積，而在移動的過程中需滿足油滴振動位置和所施外力與頻率之關係式(2)，其中微分二次項代表的是油滴的運動加速度，微分一次項代表油滴在運動過程中所受到的摩擦阻力，而微分零次項代表油滴受表面張力影響之力，式(3)式(4)則假設此研究的初始條件為油滴的初始位置在 0 且初始速度也為 0，且在式(5)中代表在選取的時間間距[0, T]內需達到可最小油滴可抽出之距離，也就是在此過程中至少要使油滴移動距離大於最小油滴可抽出之距離才可抽出被困在多孔隙介質中的油滴。

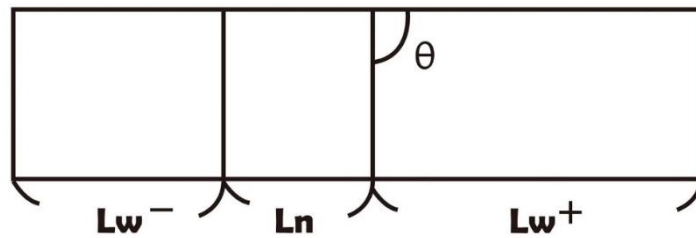


圖 4-1 均勻管示意圖

### 4.3 漸變管之最佳化模式

目標函數(Objective function)

$$\begin{aligned} \min J[a_0, \omega] &= \int_0^{x_N} \rho_n (\pi R^2 L_n + \frac{2}{3} R(x)^3 \frac{\cos \theta (2 + \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)^2}) a_0 \cos(\omega t) dx \\ &= \int_0^{t_N} \rho_n (\pi \bar{R}(t)^2 L_n + \frac{2}{3} \bar{R}(t)^3 \frac{\cos \theta (2 + \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)^2}) a_0 \cos(\omega t) \frac{dx(t)}{dt} dt \quad (6) \end{aligned}$$





限制式(Constraints)

$$-a_e(t) = -(a_0 + \frac{p_w(L, t) - p_w(0, t)}{\rho_n L_n}) \cos(\omega t) \\ = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \sqrt{2\omega_0 \omega_c} \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) \quad (7)$$

$$V = \int_{L_w^-}^{L_w^- + L_n} \pi R(x)^2 dx = \int_{x_L(t)}^{x_R(t)} \pi R(x)^2 dx \quad (8)$$

$$\bar{R}(t) = \int_{x_L(t)}^{x_R(t)} \frac{R(x)}{x_R(t) - x_L(t)} dx = R(x) \quad (9)$$

$$x_L(0) = 0 \quad (10)$$

$$x'(0) = 0 \quad (11)$$

$$\text{且在時間 } t_N \text{ 內 } x_L(t) \text{ 需大於 } \bar{x} \quad (12)$$

式(6)為漸變管之最佳化模式，代表油滴在時間 $t_N$ 內在漸變管中透過抽取所消耗的能量，此處由於油滴在漸變管運動中會改變油滴左右兩端液面之半徑，因此此處需另令左液面與右液面之位置函數，且在式(10)中的初始條件需調整為左油滴液面的初始位置為0，而為滿足目標函數與式(7)中以平均位置計算，因此利用式(8)中體積固定得出左液面與右液面關係式，並利用式(9)連結兩液面位置與平均位置的關係。

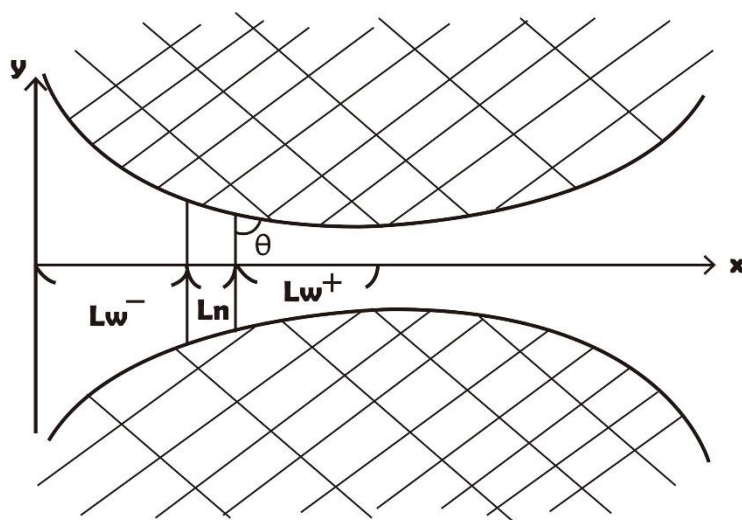


圖 4-2 漸變管示意圖



#### 4.4 以擬譜法最佳化控制分析問題

首先模擬目標函數及限制式，以  $N$  為 20 為例，利用階層 20 之 Legendre 多項式微分的根並加入  $(-1,1)$  找到 LGL 點，如圖 4-3 所示

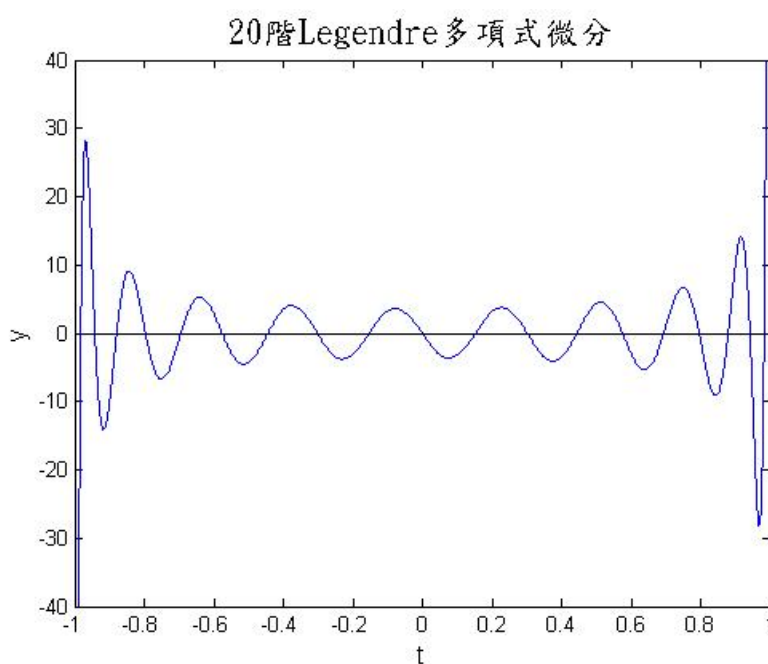


圖 4-3 20 階 Legendre 多項式微分

假設時間間距為  $[0,10]$ ，把上述的 LGL 點映射到間距內並用 MATLAB 計算出各點的值，如圖 4-4：

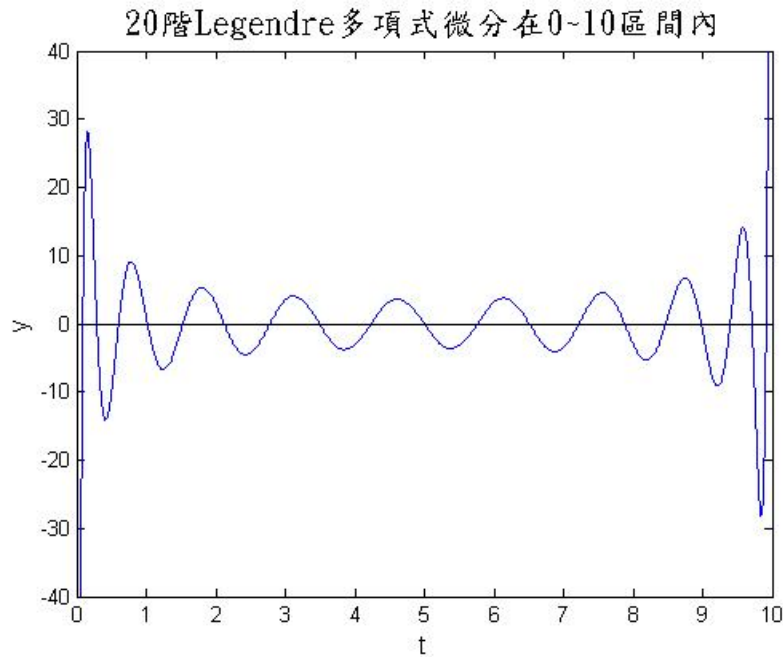
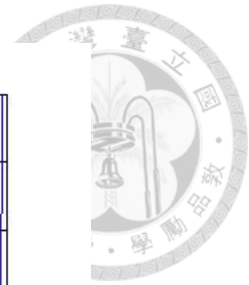


圖 4-4 20 階 Legendre 多項式微分在 0-10 區間內

根據這些節點決定各點之內插多項式與微分矩陣(圖 4-5)與積分權重(圖 4-6)

$$l_i(t) = \frac{(t-0)(t-0.087139)(t-0.290119) \cdots (t-t_{i-1})(t-t_{i+1}) \cdots (t-10)}{(t_i-0)(t_i-0.087139)(t_i-0.290119) \cdots (t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1}) \cdots (t_i-10)}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	-21	28.41045	-11.3731	6.499624	-4.33233	3.149237	-2.4202	1.933041	-1.58784	1.33192	-1.13509	0.978865	-0.85126	0.744086	-0.65145	0.568758	-0.49209	0.417464	-0.33981	0.249741	-0.1
1	-4.63555	1.791-10	6.566196	-3.06846	1.913446	-1.34893	1.019491	-0.8061	0.657808	-0.54931	0.466636	-0.40147	0.348518	-0.30423	0.266085	-0.23213	0.200718	-0.17021	0.138506	-0.10177	0.040749
2	1.044646	-3.69641	-2.51E-10	3.793318	-1.83491	1.177818	-0.84973	0.654127	-0.52486	0.433345	-0.3652	0.312389	-0.27003	0.234951	-0.20498	0.178488	-0.15412	0.130552	-0.10616	0.077971	-0.03121
3	-0.4224	1.22216	-2.68387	2.72E-10	2.704925	-1.32595	0.862381	-0.62947	0.489416	-0.39596	0.329088	-0.27872	0.239182	-0.20699	0.179847	-0.15612	0.134484	-0.11373	0.092369	-0.06779	0.02713
4	0.221864	-0.60056	1.023038	-2.13152	-2.3E-10	2.138681	-1.05515	0.691045	-0.50771	0.397006	-0.3227	0.269144	-0.22843	0.196085	-0.16934	0.146331	-0.12563	0.105975	-0.08593	0.062998	-0.0252
5	-0.13569	0.356218	-0.55251	0.879117	-1.79942	1.37E-10	1.802508	-0.89243	0.5868	-0.43275	0.339481	-0.2766	0.230976	-0.19597	0.167803	-0.14408	0.123118	-0.10351	0.083728	-0.0613	0.024506
6	0.091861	-0.23716	0.351135	-0.50367	0.782042	-1.58784	-5.6E-11	1.589378	-0.78851	0.519666	-0.38404	0.301726	-0.24598	0.205252	-0.17366	0.147819	-0.12551	0.10504	-0.08471	0.061898	-0.02473
7	-0.06697	0.171148	-0.24671	0.335545	-0.46747	0.717516	-1.45062	1.38E-11	1.451441	-0.72093	0.475707	-0.35186	0.276486	-0.22517	0.187334	-0.15756	0.132644	-0.11034	0.088613	-0.06459	0.025777
8	0.051705	-0.13128	0.18607	-0.24523	0.322828	-0.44347	0.676473	-1.36431	-1.8E-12	1.364746	-0.67827	0.447751	-0.33114	0.259888	-0.21103	0.174558	-0.14525	0.119845	-0.09573	0.069554	-0.02772
9	-0.04184	0.105757	-0.1482	0.191396	-0.24353	0.315502	-0.43009	0.653373	-1.31657	6.16E-14	1.316763	-0.65451	0.431946	-0.31907	0.249717	-0.20166	0.165096	-0.13473	0.106838	-0.07729	0.03075
10	0.035239	-0.08879	0.123437	-0.15721	0.195628	-0.2446	0.314117	-0.42631	0.646658	-1.30133	1.95E-15	1.301331	-0.64666	0.426312	-0.31412	0.244603	-0.19563	0.157209	-0.12344	0.088788	-0.03524
11	-0.03075	0.077294	-0.10684	0.134728	-0.1651	0.201657	-0.24972	0.319067	-0.43195	0.654512	-1.31676	6.6E-14	1.316574	-0.65373	0.43009	-0.3155	0.243528	-0.1914	0.148205	-0.10576	0.04184
12	0.027719	-0.06955	0.095728	-0.11985	0.145248	-0.17456	0.21103	-0.25989	0.331137	-0.44775	0.678267	-1.36475	1.94E-12	1.364313	-0.67647	0.443468	-0.32283	0.245229	-0.18607	0.13128	-0.0517
13	-0.02578	0.064594	-0.08861	0.110338	-0.13264	0.157563	-0.18733	0.225167	-0.27649	0.351863	-0.47571	0.720926	-1.45144	-1.5E-11	1.450623	-0.71752	0.467466	-0.33555	0.246707	-0.17115	0.066965
14	0.024726	-0.0619	0.084705	-0.10504	0.125512	-0.14782	0.173662	-0.20525	0.245982	-0.30173	0.38404	-0.51967	0.788513	-1.58938	5.84E-11	1.587844	-0.78204	0.503674	-0.35113	0.23716	-0.09186
15	-0.02451	0.0613	-0.08373	0.103506	-0.12512	0.144082	-0.1678	0.195972	-0.23098	0.276597	-0.33948	0.43275	-0.5868	0.892429	-1.80251	-1.4E-10	1.799417	-0.87912	0.55251	-0.35622	0.135693
16	0.0252	-0.063	0.085926	-0.10598	0.125628	-0.14633	0.169344	-0.19609	0.228429	-0.26914	0.322701	-0.39701	0.507707	-0.69104	1.055149	-2.13868	2.05E-10	2.131521	-1.02304	0.600563	-0.22186
17	-0.02713	0.067793	-0.09237	0.113728	-0.13448	0.156115	-0.17985	0.206989	-0.23918	0.278724	-0.32909	0.395955	-0.48942	0.629467	-0.86238	1.325948	-2.70492	-1.6E-10	2.683869	-1.22216	0.423996
18	0.031213	-0.07797	0.10616	-0.13055	0.154116	-0.17849	0.204982	-0.23495	0.270025	-0.31239	0.365204	-0.43335	0.524858	-0.65413	0.849731	-1.17782	1.834912	-3.79332	-2.9E-11	3.696406	-1.04465
19	-0.04075	0.101774	-0.13851	0.170207	-0.20072	0.23213	-0.26609	0.304234	-0.34852	0.401467	-0.46664	0.549309	-0.65781	0.806095	-1.01949	1.348926	-1.91345	3.068458	-6.5662	1.98E-10	4.635553
20	0.1	-0.24974	0.339814	-0.41746	0.492085	-0.56876	0.651447	-0.74409	0.851257	-0.97887	1.135093	-1.33192	1.587839	-1.93304	2.420199	-3.14924	4.332326	-6.49962	11.37313	-28.4105	21

圖 4-5 21 × 21 之微分矩陣 D



w0: 0.023809523805285  
 w1: 0.145924200503624  
 w2: 0.259215844989918  
 w3: 0.366369590936390  
 w4: 0.464927339789645  
 w5: 0.552585416082906  
 w6: 0.627290605972648  
 w7: 0.687292314283322  
 w8: 0.731184312253517  
 w9: 0.757937875546837  
 w10: 0.766925951671753  
 w11: 0.757937875547104  
 w12: 0.731184312252972  
 w13: 0.687292314284289  
 w14: 0.627290605970729  
 w15: 0.552585416086657  
 w16: 0.464927339784146  
 w17: 0.366369590940278  
 w18: 0.259215844991765  
 w19: 0.145924200498022  
 w20: 0.023809523808195

圖 4-6 積分權重

透過上述的推導，均勻管與漸變管的最佳化模式可轉變為：

## 均勻管

目標函數(Objective function)

$$\min J[a_0, \omega] = \sum_{i=0}^{20} \rho_n (\pi R^2 L_n + \frac{2}{3} R^3 \frac{\cos \theta (2 + \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)^2}) a_0 \cos(\omega t_i) D x(t_i) w(t_i)$$

限制式(Constraints)

$$\left\| \sum_{i=0}^{20} D D x(t_i) + \sqrt{2 \omega_0 \omega_c} D x(t_i) + \omega_0^2 x(t_i) + (a_0 + \frac{p_w(L_n, t_i) - p_w(0, t_i)}{\rho_n L_n}) \cos(\omega t_i) \right\| \leq \delta^{20}$$

$$x(t_0) = 0$$

$$x'(t_0) = 0$$

且在時間 $t_N$ 內  $x(t_i)$  需大於 $\bar{x}$



## 漸變管

目標函數(Objective function)

$$\min J[a_0, \omega] = \sum_{i=0}^{20} \rho_n (\pi R^2 L_n + \frac{2}{3} \bar{R}(t_i)^3 \frac{\cos \theta (2 + \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)^2}) a_0 \cos(\omega t_i) D x(t_i) w(t_i)$$

限制式(Constraints)

$$\left\| \sum_{i=0}^{20} D D x(t_i) + \sqrt{2 \omega_0 \omega_c} D x(t_i) + \omega_0^2 x(t_i) + (a_0 + \frac{p_w(L_n, t_i) - p_w(0, t_i)}{\rho_n L_n}) \cos(\omega t_i) \right\| \leq \delta^{20}$$

$$V = \int_{L_w^-}^{L_w^- + L_n} \pi R(x)^2 dx = \int_{x_L(t)}^{x_R(t)} \pi R(x)^2 dx$$

$$\bar{R}(t) = \int_{x_L(t)}^{x_R(t)} \frac{R(x)}{x_R(t) - x_L(t)} dx = R(x)$$

$$x_L(t_0) = 0$$

$$x'(t_0) = 0$$

且在時間 $t_N$ 內 $x_L(t_i)$ 需大於 $\bar{x}$

轉換完成後，即可利用 GAMS 軟體進行最佳化運算並顯示出最佳化狀態時的各項變數結果。



## Chapter5 結果與討論

### 5.1 參數設定

假設溫度維持在25°C，其個別資料如表 5-1 所示：

	油	水
密度 $\rho(\text{kg/m}^3)$	915	997.1
長度 $L(\text{m})$	0.001	0.009
動力黏滯係數 $(\text{Pa} \cdot \text{s})$	0.081	0.00894
均勻管管徑 $(\text{m})$	0.001	
接觸面之夾角 $(\text{rad})$	$\pi/6$	
油滴兩端之壓力差 $(\text{Pa})$	-100	
表面張力 $(\text{N/m})$	0.03668	
可使油滴被抽出之最小位置 $(\text{m})$	0.1	

表 5-1 設定之參數



## 5.2 結果

首先為測試假設模型的正確性，固定所施加之外力與振動頻率並忽略一次微分項不考慮摩擦力所造成之影響，以 31 個節點為例利用 GAMS 軟體求得油滴振動的振動位置與時間的關係並以一施加外力更大之參數與原來的軌跡做比較，透過圖形(圖 5-1)可看出在振動頻率不變的條件下，油滴振動的軌跡且在施力較大的狀態下振幅亦會增加，且不影響油滴的振動趨勢，因此可預期在施力較大的條件下，油滴有更能被抽取出的趨勢。

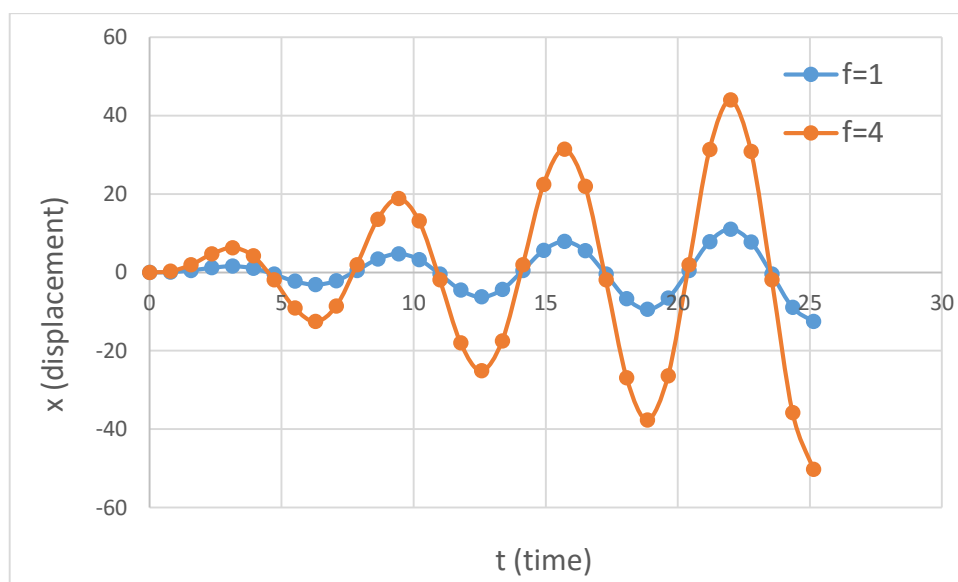


圖 5-1 不同外力下油滴之振動軌跡

確定限制式的正確性後，即可以所施外力與振動頻率為控制變數，以消耗能量最小為目標函數，並加入管壁對油滴造成摩擦力之能量損耗，選取 51 個節點模擬此運動過程如圖 5-2、圖 5-3 所示，並求出在某個時間下之最佳施加外力與振動頻率以及最少的能量消耗如表 5-2。

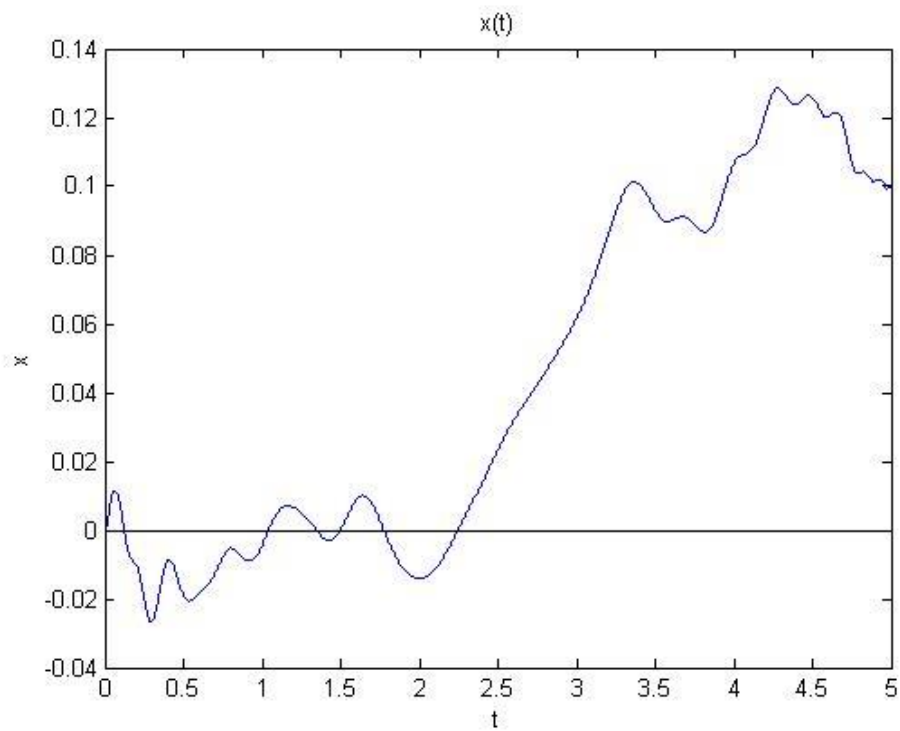
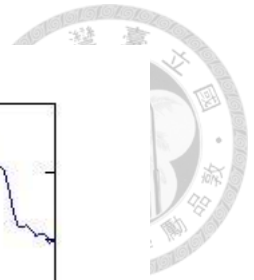


圖 5-2 在 5 秒內通過油滴可被抽出之最小位置之軌跡

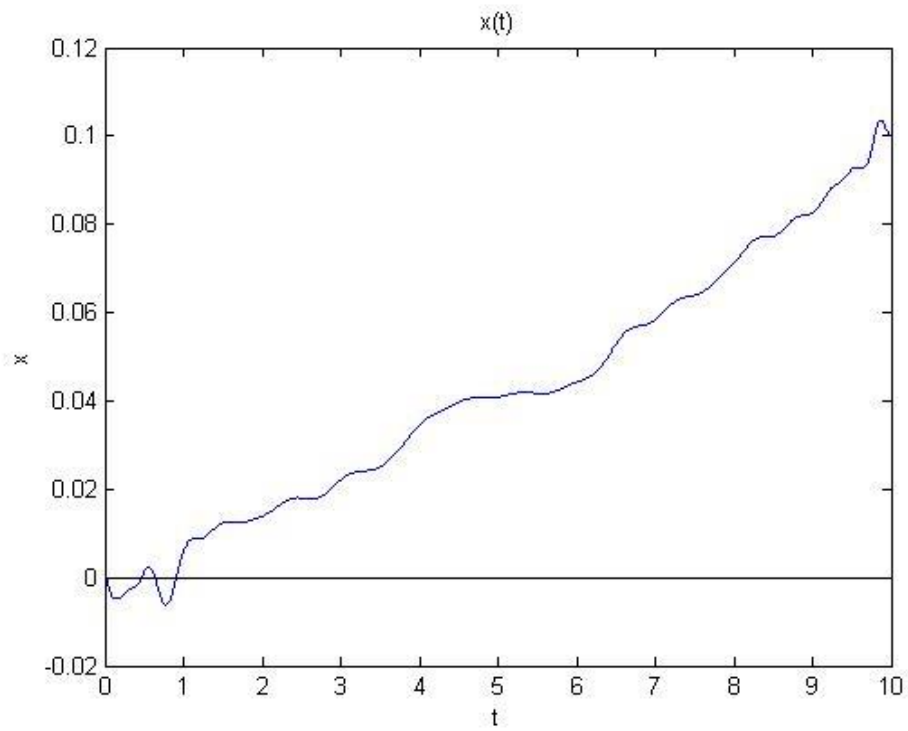


圖 5-3 在 10 秒內通過油滴可被抽出之最小位置之軌跡



	在 5 秒內通過	在 10 秒內通過
最佳所施外力(N)	102.164	99.834
最佳振動頻率(rad/s)	202.719	99.975
最低能量消耗(N·m)	$2.633 \times 10^{-5}$	$7.754 \times 10^{-6}$

表 5-2 通過時間 5 秒與 10 秒時之最佳解

## Chapter6 結論與建議

在使用擬譜法離散原函數的過程中，假使選取的節點不足，便會在兩端端點附近產生振盪現象因此較容易產生誤差，而在模擬一運動過程為振動的情況下，此誤差更容易被隱藏在所模擬之運動過程中而錯估了實際運動的位置，因此往後所選之原函數期望以趨勢較為穩定之函數較合適，又或者在訂定區間時選擇尺度較小的間隔，才較能反映原函數的走向。

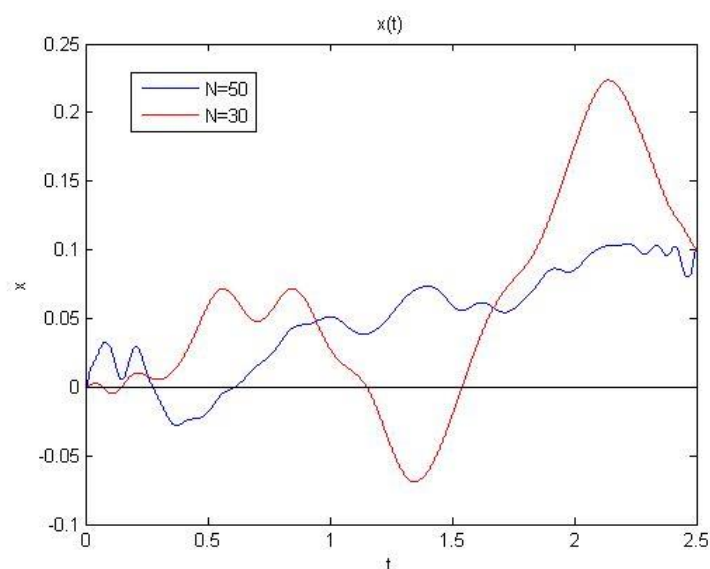


圖 6-1 N=30 與 N=50 之比較

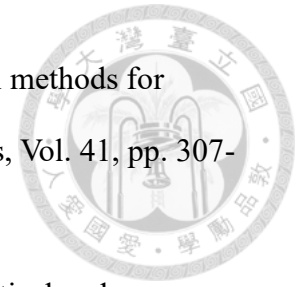
而在此研究模擬之油滴在毛細管之運動過程只僅限在單一毛細管，在實際案例裡振動的方向更會從不同角度影響油滴的運動，因此在往後是否能套用到一三維模型模擬真實情況之抽取情形是未來研究的首要目標。

## 參考文獻



- [1]. 石賢棟(2013),「Mixed Jacobi-Fourier Spectral Method for Fisher Equation」,上海師範大學計算數學系碩士班碩士論文。
- [2]. 馬石莊(2011),「應用偏微分方程與科學計算講義」。
- [3]. 陳佑航(2008),「以第一原理含時密度泛函理論研究研究雙原子分子在超短牆場雷射下的多光子效應及量子最佳控制理論」,台灣大學物理系碩士班碩士論文。
- [4]. Garg, Divya, et al, 2009, “An overview of three pseudospectral methods for the numerical solution of optimal control problems.” *Advances in the Astronautical Sciences* 135.1.
- [5]. I. M. Ross and M. Karpenko, 2012, “A Review of Pseudospectral Optimal Control: From Theory to Flight”, *Annual Reviews in Control*, Vol.36, pp.182-197,2012.
- [6]. Kamron Saniee, 2007, “A Simple Expression for Multivariate Lagrange Interpolation”.
- [7]. Markus Hilpert, 2006, “Capillary-induced resonance of blobs in porous media: Analytical solutions, Lattice-Boltzmann modeling, and blob mobilization”, *Journal of Colloid and Interface Science*.
- [8]. M. Hilpert, G. H. Jirka and E. J. Plate, 2000, “Capillarity-induced resonance of oil blobs in capillary tubes and porous media”, *Geophysics*, 2000.
- [9]. Qi Gong, I. Michael Ross and Fariba Fahroo, 2009, “Pseudospectral optimal control on arbitrary grids”, *AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*.
- [10]. Qi Gong, Wei Kang and I. Michael Ross, 2006, “A Pseudospectral Method for the Optimal Control of Constrained Feedback Linearizable Systems”, *IEEE Transactions On Automatic Control*, VOL 51, 50.7.
- [11]. Qi. Gong, M. Ross, W. Kang, F. Fahroo, 2008, “Connections between the

convector mapping theorem and convergence of pseudospectral methods for optimal control”, Computational Optimization and Applications, Vol. 41, pp. 307-335.



- [12]. Shao-Yiu Hsu, Joseph Katz and Markus Hilpert, 2012, “Theoretical and experimental study of resonance of blobs in porous media”, GEOPHYSICS, VOL. 77, NO. 5.
- [13]. Shao-Yiu Hsu and Markus Hilpert, 2007, “An Ordinary Differential Equation for an oil Blob Excited by a Seismic Wave”.
- [14]. Solomonoff, A., and E. Turkel, 1989, “Global properties of pseudospectral methods.” Journal of Computational Physics 81.2.
- [15]. W. Kang, Q. Gong and I. M. Ross, 2007, “On the convergence of nonlinear optimal control using pseudospectral methods for feedback linearizable systems, International Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol. 17, Issue 14, pp. 1251-1277.