

國立臺灣大學工學院土木工程學系

碩士論文

Department of Civil Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis



鋼及玻璃纖維橋面格柵板力學行為及試驗研究  
Mechanical Behaviors and Tests of Steel and Glass  
Fiber-Reinforced Polymer Grating Decks

王銘傳

Ming-Chuan Ong

指導教授：周中哲 博士

Advisor: Chung-Che Chou, Ph. D.

中華民國 102 年 7 月

July, 2013



國立臺灣大學碩士學位論文  
口試委員會審定書

鋼及玻璃纖維橋面格柵板力學行為及試驗研究  
Mechanical Behaviors and Tests of Steel and Glass  
Fiber-Reinforced Polymer Grating Decks

本論文係王銘傳君（學號 R00521220）在國立臺灣大學土木工程學系碩士班完成之碩士學位論文，於民國 102 年 7 月 26 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

周 中 哲

(指導教授)

張 國 鎮

洪 宏 基

王 仲 宇

胡 宣 德

系主任

呂 良 正

周中哲

張國鎮

洪宏基

王仲宇

胡宣德

呂良正

(簽名)

## 誌謝

本論文得以完成，由衷感謝恩師 周中哲 教授悉心的指導與教誨，使我學習到研究的精神與處事的態度，並匡正我許多缺點是愚生能更加的進步，在此獻上最真摯的感謝與祝福。



同時在論文口試期間，承蒙國立台灣大學 張國鎮 教授、洪宏基 教授、國立中央大學 王仲宇 教授及國立成功大學 胡宣德 教授的蒞臨指導，對本論文提供許多寶貴的意見，使得本論文更加完備，在此獻上由衷的謝意。

於試驗過程中，承蒙鴻舜機械工廠及國家地震中心(NCREE)的所有工作技術人員的幫忙，使試驗得以順利進行，在此致上萬二分的謝意。

研究所求學期間，特別感謝同窗好友 佳恩及宇岑在我遇到瓶頸時，總是願意卸下自己的職務，全心全意地協助我，使我在許多研究及生活上的盲點得以解決，能夠與你們成為同學，我真的感到十分地開心。此外在此也要感謝學弟 皓祥、宗翰、文璟及勝宣於每次實驗時鼎力相助，都是因為有你們，本論文才得以順利完成。

最後謹將本文獻給我身邊最重要的家人，感謝父親 王亞豐先生、母親 趙秀英女士、哥哥文俊、文健、姐姐文芬及女友巧佩，謝謝你們讓我能心無旁騖的致力於課業，且陪伴我渡過每個開心與難過的時刻，願與你們分享這份榮耀和喜悅。

## 摘要

本研究嘗試將國內目前救災用之便橋橋面板以重量較輕格柵板取代，以達到全程只須以人力方式即可進行組裝的可攜式簡易便利橋梁設計。為了了解兩種不同材料橋面格柵板的力學行為及傳力機制，本研究透過實尺寸結構試驗測試、理論分析與有限元素軟體 ABAQUS (2010)來對於兩種不同材料的橋面格柵板(鋼橋面格柵板及玻璃纖維橋面格柵板)進行分析，以釐清此兩種橋面格柵板在位移及傳力狀況上是否存在差異，以作為日後工程初步設計的參考指標。

為了探討橋面格柵板的力學行為，本研究根據 AASHTO (2007)對此兩種橋面格柵板分別進行了單向加載試驗及疲勞載重試驗。於單向加載試驗結果中顯示，鋼橋面格柵板橫桿因勁度太小，以致板整體撓曲勁度貢獻僅來自於載重施加處底下的主桿；而玻璃纖維橋面格柵板因橫、主桿斷面大小雷同且排列較密，造成玻璃纖維橋面格柵板在抵抗外力時，其板有效寬度比鋼橋面格柵板大得許多；而在疲勞載重試驗結果中顯示，鋼橋面格柵板在歷經五萬次反覆載重後並無任何顯著材料疲勞現象發生，然而玻璃纖維橋面格柵板則有大約 8%的勁度流失。

而在理論分析中，為了改善前學者 (Timoshenko and Krieger,1959)對於玻璃纖維橋面格柵板撓曲勁度矩陣的嚴重高估現象，本文也嘗試提出另一種等效撓曲勁度矩陣評估方法，並搭配古典連續板理論來進行分析。從分析結果中顯示，本文所提出的方法不但能彌補前學者(Timoshenko and Krieger,1959)在玻璃纖維橋面格柵板最大位移評估上的不足，且對於鋼橋面格柵板最大位移評估表現也尚可接受。此外為了探討有限元素分析的可靠性，本研究也使用 ABAQUS 有限元素軟體來對於兩種橋面格柵板進行分析及參數研究。在分析結果中，其 ABAQUS 分析結果與理論及試驗結果相符，而在參數研究結果中則顯示橋面格柵板的撓曲勁度貢獻絕多來自於主桿，因此若想將橋面格柵板在受到力量下的最大位移最小化，最佳的調整方法為對於橋面格柵板主桿間距作適度的調整。

關鍵字：橋面格柵板、單向及疲勞載重試驗、古典連續板理論、有限元素分析

## ABSTRACT

For the purpose of developing a newer deck system with portable, reusable and suitable capabilities for ease of transportation using manpower, this study attempts to replace the current temporary bridge deck system by grating deck system. So in order to providing a better understanding of grating deck behaviors (Steel grating deck and GFRP grating deck), a full-scale experimental testing, analytical and numerical analyses have been involved by this study.

In the experimental testing, based on the AASHTO 2007, two different type of grating decks were subjected to two different type of loading protocols, the first one is static load test, and the second is fatigue load test. From the result of static load test shows that the secondary bars of steel grating deck were unable to spread the force effectively due to its cross-section are too small if compared to its main bars, however, the situation of GFRP grating deck were be completely different. Despite the deformation of steel grating decks are always small than the deformation of GFRP Grating decks, but in the point of the effective width of decks (Load-transfer ability), the effective width of GFRP grating decks are larger than the steel grating decks all the times. In the fatigue load test, the steel grating decks were not have any significant loss in deck stiffness throughout 50000 cycles of cyclic loading in the range of 2 kN to 20 kN, However, the GFRP grating decks was about 8% stiffness loss found after the fatigue load applied.

In the theoretical analysis, we try to use the Classical Plate Theory combined with Timoshenko & Krieger's Method (1959) to analyze the responses of two grating decks. This method shows satisfying result in steel grating deck, but very poor result in GFRP grating deck due to the centroid of all bars in GFRP grating deck are not in the same plane. So to fix this problem, this study tries to propose another new method to improve the overestimation or underestimation of Timoshenko & Krieger's Method (1959) in GFRP grating deck. The result shows that the Classical Plate Theory combined with new proposed method success to fix the problem and get quite well result in both two specimens.

Besides, this research also uses the finite element software ABAQUS to analyze the grating decks behaviors and compare the results with testing results which is proved similar. In the parametric study, the parametric study indicates that the most significant influence on the maximum deflection at the center of deck is the spacing of main bar, followed by the number of main bar, and last is the spacing of secondary bar.

Keywords: Steel grating deck, GFRP grating deck, static and fatigue load test, Classical Plate Theory, Finite Element Analysis

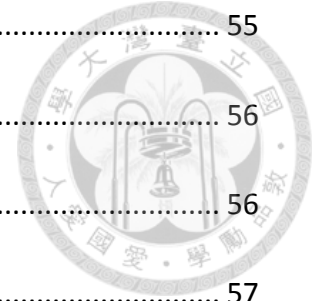
# 目錄



|                        |     |
|------------------------|-----|
| 口試委員審定書                |     |
| 誌謝 .....               | I   |
| 摘要 .....               | II  |
| ABSTRACT.....          | III |
| 目錄 .....               | V   |
| 表目錄.....               | X   |
| 圖目錄.....               | XI  |
| 照片目錄.....              | XIV |
| 附錄目錄.....              | XI  |
| 第一章 緒論 .....           | 1   |
| 1.1 前言 .....           | 1   |
| 1.2 研究動機.....          | 2   |
| 1.3 研究目的.....          | 2   |
| 1.4 研究內容.....          | 2   |
| 第二章 格柵板基本理論及力學行為 ..... | 3   |
| 2.1 前言 .....           | 3   |
| 2.2 文獻回顧.....          | 3   |
| 2.3 橋面格柵板力學行為.....     | 8   |

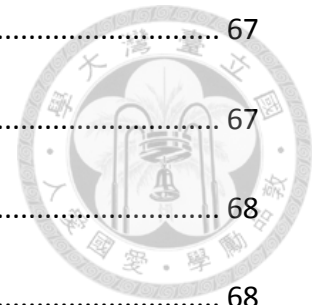
|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| 2.3.1      | 古典層板理論介紹 (Classical Laminated Plate Theory) ..... | 8         |
| 2.3.1.1    | 層板組成方程式 (Laminate Constitutive Equation).....     | 8         |
| 2.3.1.2    | 薄板平衡方程式 .....                                     | 11        |
| 2.3.2      | 均勻連續薄板位移理論解 .....                                 | 14        |
| 2.3.2.1    | 均勻連續薄板位移齊次解 $w_h(x, y)$ .....                     | 14        |
| 2.3.2.2    | 均勻連續薄板位移特殊解 $w_p(x, y)$ .....                     | 16        |
| 2.3.2.3    | 均勻連續薄板在板中央受到長方形均佈載重 $q_0$ 的總位移解 $w(x, y)$ .....   | 19        |
| 2.4        | 橋面格柵板等效撓曲勁度評估 .....                               | 43        |
| 2.4.1      | 均勻連續薄板板撓曲勁度評估方式 .....                             | 44        |
| 2.4.2      | 橋面格柵板撓曲勁度評估方式 .....                               | 45        |
| 2.5        | 橋面格柵板計算例子 .....                                   | 46        |
| 2.5.1      | 鋼橋面格柵板計算例子 .....                                  | 47        |
| 2.5.1.1    | 鋼橋面格柵板計算過程 .....                                  | 47        |
| 2.5.2      | 玻璃纖維橋面格柵板計算例子 .....                               | 49        |
| 2.5.2.1    | 玻璃纖維橋面格柵板計算過程 .....                               | 49        |
| 2.5.3      | 方法一與方法二之比較 .....                                  | 54        |
| <b>第三章</b> | <b>鋼及玻璃纖維橋面格柵板試驗及分析.....</b>                      | <b>55</b> |
| 3.1        | 前言 .....  | 55        |
| 3.2        | 試驗試體設計 .....                                      | 55        |

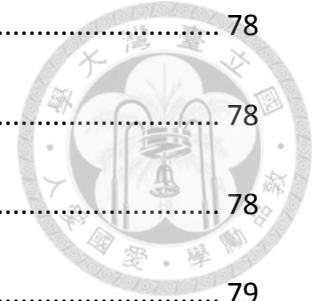




|         |                                 |    |
|---------|---------------------------------|----|
| 3.2.1   | 複合材料翼型梁 .....                   | 55 |
| 3.2.2   | 鋼橋面格柵板 .....                    | 56 |
| 3.2.3   | 玻璃纖維橋面格柵板 .....                 | 56 |
| 3.2.4   | 輪胎接觸面積 (Tire Contact Area)..... | 57 |
| 3.3     | 材料試驗及材料性質 .....                 | 58 |
| 3.4     | 試體試驗構架裝置及加載歷時.....              | 58 |
| 3.4.1   | 橋面格柵板試驗構架 .....                 | 58 |
| 3.4.2   | 油壓制動器 .....                     | 59 |
| 3.4.3   | 資料擷取系統 .....                    | 59 |
| 3.4.4   | 試驗載重歷時 .....                    | 59 |
| 3.4.4.1 | 單向加載試驗 .....                    | 60 |
| 3.4.4.2 | 疲勞測試試驗 .....                    | 60 |
| 3.4.5   | 試驗量測規劃 .....                    | 61 |
| 3.5     | 試體製作、組裝與試驗方式 .....              | 62 |
| 3.6     | SG1 單向加載試體試驗現象及結果分析 .....       | 63 |
| 3.6.1   | 試驗現象 .....                      | 63 |
| 3.6.2   | 試驗結果分析與理論驗證 .....               | 64 |
| 3.6.2.1 | 試驗結果分析 .....                    | 64 |
| 3.6.2.2 | 理論驗證 .....                      | 66 |

|            |                                |           |
|------------|--------------------------------|-----------|
| 3.7        | FRPG1 單向加載試體試驗現象及結果分析 .....    | 67        |
| 3.7.1      | 試驗現象 .....                     | 67        |
| 3.7.2      | 試驗結果分析與理論驗證 .....              | 68        |
| 3.7.2.1    | 試驗結果分析 .....                   | 68        |
| 3.7.2.2    | 理論驗證 .....                     | 69        |
| 3.8        | 兩組試驗結果比較 .....                 | 71        |
| 3.9        | SG2 疲勞測試載重試驗結果分析及比較 .....      | 72        |
| 3.9.1      | 試驗現象 .....                     | 73        |
| 3.9.1.1    | 疲勞測試載重試驗現象 .....               | 73        |
| 3.9.1.2    | 疲勞測試後再單壓試驗現象 .....             | 73        |
| 3.9.2      | 試驗結果分析與比較 .....                | 74        |
| 3.9.2.1    | 疲勞測試試驗結果分析與比較 .....            | 74        |
| 3.9.2.2    | 疲勞測試後單壓試驗結果分析與比較 .....         | 75        |
| 3.10       | FRPG2 疲勞測試載重試驗結果分析及比較 .....    | 76        |
| 3.10.1     | 試驗現象 .....                     | 76        |
| 3.10.1.1   | 疲勞測試載重試驗及疲勞測試後再單壓試驗現象 .....    | 76        |
| 3.10.2     | 試驗結果分析與比較 .....                | 76        |
| 3.10.2.1   | 疲勞測試載重試驗及疲勞測試後再單壓試驗分析與比較 ..... | 76        |
| <b>第四章</b> | <b>有限元素分析 .....</b>            | <b>78</b> |





|            |                       |           |
|------------|-----------------------|-----------|
| 4.1        | 前言 .....              | 78        |
| 4.2        | 試體有限元素模型建立 .....      | 78        |
| 4.2.1      | 結構模型 .....            | 78        |
| 4.2.2      | 材料模型 .....            | 79        |
| 4.2.2.1    | 鋼橋面格柵板模型材料性質 .....    | 79        |
| 4.2.2.2    | 玻璃纖維橋面格柵板模型材料性質 ..... | 79        |
| 4.3        | 有限元素分析結果 .....        | 80        |
| 4.3.1      | SG1 試體模型分析結果 .....    | 81        |
| 4.3.2      | FRPG1 試體模型分析結果 .....  | 82        |
| 4.4        | 參數分析及理論實用性驗證 .....    | 84        |
| 4.4.1      | 模型 1、2、5 .....        | 85        |
| 4.4.2      | 模型 1、6、7、2、4 .....    | 85        |
| 4.4.3      | 模型 6、9 .....          | 86        |
| 4.4.4      | 模型 2、3、1、8 .....      | 86        |
| 4.4.5      | 理論實用性驗證 .....         | 87        |
| <b>第五章</b> | <b>結論 .....</b>       | <b>88</b> |
| 5.1        | 結論 .....              | 88        |
| 5.2        | 建議 .....              | 90        |
|            | <b>參考文獻 .....</b>     | <b>91</b> |

## 表目錄



|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 表 2.1 | 鋼及玻璃纖維橋面格柵板理論分析模型參數.....                       | 94  |
| 表 2.2 | 廠商提供玻璃纖維及樹脂材料性質.....                           | 95  |
| 表 2.3 | 玻璃纖維橋面格柵板主、橫桿材料性質.....                         | 95  |
| 表 2.4 | 鋼橋面格柵板鋼材材料性質.....                              | 95  |
| 表 3.1 | 鋼及玻璃纖維橋面格柵板資訊.....                             | 96  |
| 表 3.2 | 高分子複合材料翼型梁參數 (Sun & Chou, 2012).....           | 96  |
| 表 3.3 | AASHTO 2007 Table 3.6.1.4.2-1.....             | 97  |
| 表 3.4 | 橋面格柵板於 20 kN 及 100 kN 時的試驗結果.....              | 97  |
| 表 3.5 | 橋面格柵板試驗結果 (續).....                             | 98  |
| 表 3.6 | 試驗與理論近似解比較 (SG1 & FRPG1).....                  | 98  |
| 表 4.1 | 有限元素分析與試驗及理論計算結果比較.....                        | 99  |
| 表 4.2 | SG1 試體有限元素分析與試驗及理論計算結果比較 (Force=100 kN).....   | 100 |
| 表 4.3 | FRPG1 試體有限元素分析與試驗及理論計算結果比較 (Force=100 kN). 100 |     |
| 表 4.4 | 各模型參數資訊.....                                   | 101 |
| 表 4.5 | ABAQUS 分析模型與理論比較.....                          | 102 |

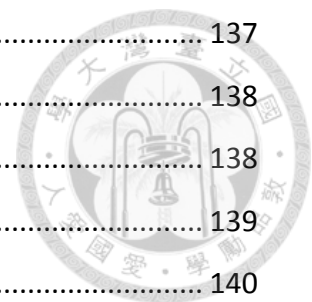
## 圖目錄



|        |  |     |
|--------|--|-----|
| 圖 2.1  | 平板整體示意圖.....   | 103 |
| 圖 2.2  | 多孔型格柵板 (Timoshenko & Krieger, 1959).....                   | 103 |
| 圖 2.3  | 各種不同型式的格柵板單元 (Chen & Tsai, 1996) .....                     | 103 |
| 圖 2.4  | 鋼橋面格柵板參數分析 (Huang et al., 2001) .....                      | 104 |
| 圖 2.5  | 複合材料格柵板壓力側之主桿產生局部挫屈破壞 (Biddah, 2005) .....                 | 104 |
| 圖 2.6  | 新型研發橋面板斷面形式及玻璃纖維橋面格柵板照片 (Ji et al., 2010) ....             | 104 |
| 圖 2.7  | 橋面板的最大力量位移圖及力量應變圖 (Ji et al., 2010) .....                  | 105 |
| 圖 2.8  | 彈性體單元在各方向上的位移表示示意圖 (Reddy, 2004) .....                     | 105 |
| 圖 2.9  | 均質連續之長方形薄板 (Vinson & Sierakowski, 1986) .....              | 105 |
| 圖 2.10 | 均質連續之長方形薄板中的自由體單元 dv (Vinson & Sierakowski, 1986)<br>..... | 106 |
| 圖 2.11 | 均質連續異向性薄板在板中央受到一塊長方形均佈載重狀況.....                            | 106 |
| 圖 2.12 | 薄板切割示意圖.....   | 107 |
| 圖 2.13 | 勁度修正因子法示意圖.....  | 107 |
| 圖 2.14 | 玻璃纖維橋面格柵板單元圖.....  | 108 |
| 圖 2.15 | 鋼橋面格柵板斷面圖.....   | 108 |
| 圖 2.16 | 玻璃纖維橋面格柵板斷面圖.....  | 108 |
| 圖 2.17 | 鋼橋面格柵板理論計算結果 (Force=100 kN).....                           | 109 |
| 圖 2.18 | 玻璃纖維橋面格柵板理論計算結果 (Force=100 kN).....                        | 110 |
| 圖 3.1  | 全玻纖複材梁整體尺寸及開孔處.....  | 111 |
| 圖 3.2  | 連接板焊接詳情.....   | 111 |
| 圖 3.3  | L型扣件扣於玻纖格柵板詳情 .....  | 112 |
| 圖 3.4  | AASHTO 貨車載重分配示意圖 (1994).....                               | 112 |
| 圖 3.5  | 試驗構架正面及側面示意圖 (Unit: mm) .....                              | 113 |
| 圖 3.6  | 車流量預估及疲勞測試載重示意圖.....                                       | 114 |

|        |  |     |
|--------|--|-----|
| 圖 3.7  | 鋼橋面格柵板位移計及應變計架設示意圖.....                              | 115 |
| 圖 3.8  | 玻璃纖維橋面格柵板位移計及應變計架設示意圖.....                           | 116 |
| 圖 3.9  | SG1 及 FRG1 位移變化比較圖 .....                             | 117 |
| 圖 3.10 | SG1 及 FRG1 應變變化比較圖 .....                             | 118 |
| 圖 3.11 | SG1 理論解 3-D 變形狀況 (Timoshenko & Krieger, 1959).....   | 119 |
| 圖 3.12 | SG1 理論解 3-D 變形狀況 (Proposed Method).....              | 120 |
| 圖 3.13 | 理論、有限元素及試驗最大力量位移圖比較 (SG1 & FRPG1).....               | 121 |
| 圖 3.14 | 理論、有限元素及試驗各點位移比較圖 (SG1).....                         | 122 |
| 圖 3.15 | FRPG1 理論解 3-D 變形狀況 (Timoshenko & Krieger, 1959)..... | 123 |
| 圖 3.16 | FRPG1 理論解 3-D 變形狀況 (Proposed Method).....            | 124 |
| 圖 3.17 | 理論、有限元素及試驗各點位移比較圖 (FRPG1).....                       | 125 |
| 圖 3.18 | SG1 及 FRG1 位移及應變變化比較圖 .....                          | 126 |
| 圖 3.19 | 疲勞測試試驗加載歷時 (50000 Cycles).....                       | 127 |
| 圖 3.20 | 疲勞測試載重試驗結果 (SG2 & FRPG2).....                        | 128 |
| 圖 3.21 | 疲勞測試後單向加載試驗與單純單向加載試驗線性回歸結果.....                      | 128 |
| 圖 3.22 | 疲勞測試後單向加載試驗與單純單向加載試驗比較 (SG1 V.S. SG2).....           | 129 |
| 圖 3.23 | 疲勞測試後單向加載試驗與單純單向加載試驗比較 (SG1 V.S. SG2) (續)            |     |
|        | .....  | 130 |
| 圖 3.24 | 疲勞測試後單向加載試驗與單純單向加載試驗比較 (FRPG1 V.S. FRPG2)            |     |
|        | .....  | 130 |
| 圖 3.25 | 疲勞測試後單壓試驗與單純單向加載試驗比較 (FRPG1 V.S. FRPG2) (續)          |     |
|        | .....  | 131 |
| 圖 4.1  | 鋼及玻璃纖維橋面格柵板模型.....                                   | 132 |
| 圖 4.2  | 試體模型網格.....  | 133 |
| 圖 4.3  | 模型邊界條件及外力施加方式.....                                   | 134 |
| 圖 4.4  | SG1 試體有限元素分析 3-D 變形圖 (Force=100 kN).....             | 135 |
| 圖 4.5  | SG1 試體有限元素分析 3-D 變形圖 (Force=264 kN).....             | 135 |
| 圖 4.6  | SG1 試體主桿軸向應變分佈圖 (ABAQUS) .....                       | 136 |

|        |  |     |
|--------|--|-----|
| 圖 4.7  | SG1 試體 Von-Mises 應力分佈圖 (ABAQUS).....       | 137 |
| 圖 4.8  | FRPG1 試體有限元素分析 3-D 變形圖 (Force=100 kN)..... | 138 |
| 圖 4.9  | FRPG1 試體有限元素分析 3-D 變形圖 (Force=186 kN)..... | 138 |
| 圖 4.10 | FRPG1 試體主桿軸向應變分佈圖 (ABAQUS).....            | 139 |
| 圖 4.11 | FRPG1 試體 Von-Mises 應力分佈圖 (ABAQUS).....     | 140 |
| 圖 4.12 | 不同橫、主桿間距試體分析模型側向位移分佈圖比較.....               | 141 |
| 圖 4.13 | 不同邊界條件試體分析模型側向位移分佈圖比較.....                 | 141 |



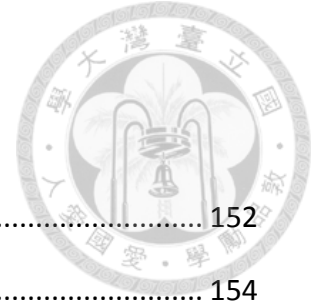
## 照片目錄



|         |                    |     |
|---------|--------------------|-----|
| 照片 1.1  | 鋼及玻璃纖維橋面格柵板.....   | 142 |
| 照片 2.1  | 鋼橋面格柵板.....        | 143 |
| 照片 2.2  | 玻璃纖維橋面格柵板.....     | 143 |
| 照片 3.1  | 全玻纖複合材料翼型梁.....    | 144 |
| 照片 3.2  | 鋼橋面格柵板.....        | 144 |
| 照片 3.3  | 玻璃纖維橋面格柵.....      | 145 |
| 照片 3.4  | 材料拉伸試驗.....        | 146 |
| 照片 3.5  | 試驗構架.....          | 146 |
| 照片 3.6  | 試體構架細節照.....       | 147 |
| 照片 3.7  | 位移計架設照片.....       | 147 |
| 照片 3.8  | SG1 試體照片.....      | 147 |
| 照片 3.9  | SG1 試體照片(續).....   | 148 |
| 照片 3.10 | FRPG1 試體照片.....    | 149 |
| 照片 3.11 | FRPG1 試體照片(續)..... | 150 |
| 照片 3.12 | SG2 試體照片.....      | 150 |
| 照片 3.13 | SG2 試體照片(續).....   | 151 |



## 附錄目錄



|   |     |
|---|-----|
| 附錄 1 (Case 1 : $(D_{12} + 2D_{66})^2 > D_{11}D_{22}$ )..... | 152 |
| 附錄 2 (Case 2 : $(D_{12} + 2D_{66})^2 = D_{11}D_{22}$ )..... | 154 |
| 附錄 3 (Case 3 : $(D_{12} + 2D_{66})^2 < D_{11}D_{22}$ )..... | 156 |

# 第一章 緒論



## 1.1 前言

橋梁為一連結兩岸之重要工具，對於山區偏遠地區，其扮演之角色更為重要。近年來由於台灣天然災害不斷，以致在災難發生後，往往都造成橋梁損壞，使到山區聯外道路中斷。為了緊急救災及物資運送等事宜，救難人員一般都採搭建救災用鋼橋來進行搶通，然而由於現有救災用橋之橋面板大多採鋼造，因此在組裝過程中往往都需要由外地調入重型機械器具來進行吊裝，因此這將會迫使橋梁組裝時間延長，大大縮短黃金救難時間。基於如此現況，若能於市場上尋找出一種重量相對較輕、強度高且又無須任何吊裝器具，僅用人力方式即可進行組裝的可攜帶式簡易便利橋梁橋面板的想法應運而生，而在經過一番搜尋後，本研究於市場中尋找到了兩種符合所有條件之橋面板，即為鋼及玻璃纖維橋面格柵板(照片 1.1)。

鋼橋面格柵板為一種由兩種不同方向的桿子交錯組成的鋼平板，若將其相較於同等重量下的連續鋼板，其具有結構堅固、勁度較大、排水性較佳之特性，而後者則為一種由高分子複合材料 (Fiber-Reinforced Polymer) 複合而成的格柵型平板。高分子複合材料為近年來新興的材料之一，其為由纖維(Fiber)、樹脂(Matrix)和填充物(Filler)組成，其中最常見的材料為玻璃纖維；而由於高分子複合材料具有重量輕、強度高、抗腐蝕性佳、耐久性好和組裝容易等優點，因此不論在更新補強或是新建建築或橋梁上，都有逐漸增加的應用趨勢。

然而儘管此兩種不同材料格柵板的製作技術早已日益成熟，但是由於其一般都僅用於承載量相對較小的各式廠房地板隔層或人行便道上，鮮少用於可讓汽車等交通工具通過之便道。因此為了測試其是否具有替代現有救災用連續鋼橋面板之可能性及發展一套可對於此類橋面格柵板最大位移評估的理論，以便能夠成為日後工程設計之方法即為本研究之目的出發點。

## 1.2 研究動機

本研究嘗試將國內目前救災用之便橋橋面板以重量較輕格柵板取代，以達到全程只須以人力方式，不須任何重型機具即可進行組裝的可攜式簡易便利橋梁設計，以便作為疏散災民及運送糧食物資之用途。此外由於有關橋面格柵板力學行為分析的相關研究較少，故基於此原因，本研究也將此兩種不同材料的橋面格柵板分別進行單向加載試驗與疲勞載重測試，以釐清不同材料橋面格柵板在受到同種載重下，在位移及受力狀況上是否存在差異。

## 1.3 研究目的

本研究著重之重點在於了解兩種不同材料橋面格柵板在受到單一輪胎載重下的力學行為，並嘗試建立一套可供日後工程設計的橋面格柵板最大位移分析理論。此外為了驗證理論實用性，本研究也透過實尺寸結構試驗測試與有限元素軟體 ABAQUS (2010) 之分析模型來進行分析比較及參數研究，以更進一步了解橋面格柵板的力學行為及傳力機制。

## 1.4 研究內容

本研究內容共分為五個章節，除本章外，第二章為文獻回顧及介紹格柵板基本理論及力學行為，第三章為試體試驗與結果分析；在此章中一共包括五個部分，其分別為介紹試體規劃、製作、組裝過程、試驗現象觀察及對第二章所提及之理論進行驗證。而第四章則為有限元素分析，敘述分析模型的建立並將分析結果與試驗結果及第二章所提出之理論進行相互比較及驗證。最後，第五章則為結論部分。

## 第二章 格柵板基本理論及力學行為



### 2.1 前言

本章一開始先對先前學者所進行的鋼及複合材料橋面格柵板的力學行為研究進行回顧，接著介紹橋面格柵板在受到單一輪胎載重下的力學行為，並藉由運用古典連續板理論及等效勁度觀念來探討此兩種橋面格柵板在板中央受到一等效輪胎載重下的最大位移。此外，為了研討所提出理論之可靠度，本研究也嘗試將所提出的位移近似解與前學者之結果進行比較。本章 2.2 節為文獻回顧，2.3 節為格柵板力學行為，2.4 節為介紹本研究發展之格柵板等效勁度推估方法。

### 2.2 文獻回顧

學者 Maurice Levy 於 1899 年運用半無窮正弦級數觀念 (Single infinite sine series Method) 對於一兩端為簡支撐 (Simply Supported)，另兩端為任一支撐形式 (Arbitrary Supported) 的等向性板結構 (Isotropic Plate) 在受到任一載重下之變形及外力，其假設之變形位移及外力分別如式(2.1)及(2.2)：

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(y) \sin \alpha_m x \quad (2.1)$$

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_n(y) \sin \alpha_m x \quad (2.2)$$

其中，

$$F_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a w(x, y) \sin \alpha_m x dx \quad (2.3)$$

$$Q_n(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q(x, y) \sin \alpha_m x dx \quad (2.4)$$

$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$ ， $m$  及  $a$  分別代表需累加次數及平板在  $x$  方向上之整體長度(圖 2.1)。



而在 1959 年，學者 Timoshenko 及 Krieger 則以 Levy's Method(1899)為基礎，利用 Kirchhoff-Love 板原理將連續平板結構的理論近似解求出。此外，這兩位學者也針對多孔型格柵板(圖 2.2)的勁度提出相關近似解，其所建議之等效勁度如式(2.5)所示：

$$D_x = \frac{E_x I_x}{b_1} \quad D_y = \frac{E_y I_y}{a_1} \quad (2.5)$$

其中，

$D_x$  = 格柵板在  $x$  方向上單位寬度之等效勁度 (kN.mm)， $D_y$  = 格柵板在  $y$  方向上單位寬度之等效勁度 (kN.mm)， $E_x I_x$  = 平行於  $x$  方向單根主桿之撓屈剛度， $E_y I_y$  = 平行於  $y$  方向單根橫桿之撓屈剛度， $a_1$  = 平行於  $y$  方向相鄰二主桿之間距， $b_1$  = 平行於  $x$  方向相鄰二橫桿之間距

由於前學者所建議之格柵板等效勁度只適用於主桿及橫桿正交排列之格柵板，而當遇到其它形式的格柵板時(如圖 2.3)，其等效勁度預測將會因並無考慮格柵板之扭轉向勁度而產生極大的誤差。針對於此缺點，學者 Chen And Tsai(1996)以 Timoshenko & Krieger(1959)所提出之格柵板等效勁度預測為基準，運用了疊加原理，並考慮了格柵板之扭轉向勁度，其等效勁度預測公式如式(2.6)所示：

$$[D^{rib}] = \begin{bmatrix} D_{11}^{rib} & D_{12}^{rib} & 0 \\ D_{12}^{rib} & D_{22}^{rib} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^{rib} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

其中，

$$D_{11}^{rib} = \frac{E_x I_0}{d_0} + 2 \frac{E_x I_\theta}{d_\theta} \cos^4 \theta + 2 \frac{GJ_\theta}{d_\theta} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \quad (2.7)$$

$$D_{22}^{rib} = \frac{E_x I_{90}}{d_{90}} + 2 \frac{E_x I_\theta}{d_\theta} \sin^4 \theta + 2 \frac{GJ_\theta}{d_\theta} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \quad (2.8)$$

$$D_{12}^{rib} = D_{21}^{rib} = 2 \frac{E_x I_\theta}{d_\theta} \cos^2 \theta \sin^2 \theta - 2 \frac{GJ_\theta}{d_\theta} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \quad (2.9)$$

$$D_{66}^{rib} = 2 \frac{E_x I_\theta}{d_\theta} \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \frac{GJ_0}{4d_0} + \frac{GJ_{90}}{4d_{90}} + \frac{GJ_\theta}{2d_\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 \quad (2.10)$$

在上式子中， $E_x$  為格柵板在  $x$  方向上之彈性模數， $G$  為格柵板之剪力模數， $I_0$  為在  $0^\circ$  方向上之面積二次慣性矩； $I_{90}$  為在  $90^\circ$  方向上之面積二次慣性矩； $I_\theta$  為在  $\theta$  方向上之面積二次慣性矩。 $J_0$  為在  $0^\circ$  方向上之扭轉慣性矩，而  $d_0$  則為相鄰二桿在  $0^\circ$  方向上之間距； $J_{90}$  為在  $90^\circ$  方向上之扭轉慣性矩，而  $d_{90}$  則為相鄰二桿在  $90^\circ$  方向上之間距； $J_\theta$  為在  $\theta$  方向上之扭轉慣性矩，而  $d_\theta$  則為相鄰二桿在  $\theta$  方向上之間距。

除此之外，學者 Li 及 Cheng 同樣也於 2007 年利用 Kirchhoff-Love 及古典層板理論(Classical Lamination Theory)針對正交複合型格柵加勁結構物(OrthoGrid Stiffened Composite Sandwich Structure)提出了一套廣義解析解。由於此種正交複合型格柵結構物一般會於相鄰二桿間填加額外填充物以進行加勁，因此為描述此種結構物在各桿件及相鄰二桿件間填充物撓曲勁度  $D_{ij}$  的不連續性，其也增加了一個形狀步階函數  $HP(x,y)$  來進行描述，而此形狀步階函數具有以下特質：

$$HP(x,y) = \begin{cases} 1 \Rightarrow \text{當在相鄰二桿間有填充物時} \\ 0 \Rightarrow \text{但在格柵板桿件時} \end{cases}$$

而經過導入此形狀步階函數  $HP(x,y)$  後，其正交複合型格柵加勁結構物之撓曲勁度  $D_{ij}$  可寫成式(2.11)：



$$D_{ij}(x, y) = \left[ Q_{ijs} \left( \frac{h_0^3}{12} - \frac{h_c^3}{12} \right) + \frac{h_c^3}{12} Q_{ijc}^1 \right] + \frac{h_c^3}{12} (Q_{ijc}^2 - Q_{ijc}^1) HP(x, y) \\ = D_{ij}^0 + D_{ij}^\Delta HP(x, y) \quad (2.11)$$



其中， $Q_{ijs}$ 、 $Q_{ijc}^1$ 及 $Q_{ijc}^2$ 分別為表面、格柵桿件(主桿或次桿)及相鄰二桿件間填充物的勁度矩陣； $h_0$ 及 $h_c$ 則為整板及核心(格柵桿件)厚度。若加以統整式(2.11)，我們可發現其中刮弧部分(即 $D_{ij}^0$ )可被視為一般連續層板之撓曲勁度，而 $D_{ij}^\Delta$ 則可被相鄰二桿件間填充物的撓曲勁度。

此外，Li 及 Cheng (2007)亦在文獻中針對格柵型結構物提出一些優缺點，其優缺點如下：

#### 優點

1. 格柵型結構物可抵抗衝擊破壞、分層(Delamination)及裂縫擴張(Crack Propagation)。
2. 格柵型結構物在各方向上的力學行為都比一般連續複合材料板來得佳。
3. 因複合材料格柵型結構物一般只將纖維放於 $0^\circ$ 及 $90^\circ$ 方向上，故在整體力量傳遞方面上可充分發揮其效用。
4. 在同重量材料製作下，格柵板一般能比連續型板具有更大之撓曲剛度。

#### 缺點

1. 因格柵型結構物的非連續性造成其缺乏側向剛度，以致容易產生局部挫屈之現象。
2. 若相鄰二桿件間間隙無填充物時，其間隙將會產生一個相對弱面以致無法有效地承受衝擊載重，造成力量穿透。

針對於格柵板試驗部分，學者 Huang 等人於 2002 年針對鋼橋面格柵板進行結構單壓試驗、理論及有限元素分析。從研究過程中，他們發現運用異向性薄板理論分析(Orthotropic Thin Plate Theory)並不能準確的預測出鋼橋面格柵板之真實行為，

其最大原因可能在於他們強制將格柵板之真實勁度以一等效勁度來代表，而造成整體勁度有高估或低估的現象發生。此外為了更加了解鋼橋面格柵板之力學行為，學者 Huang et al. (2002) 也利用有限元素模型進行參數分析，其參數分析結果如圖 2.4 所示。在此參數分析中，學者 Huang et al.(2002)主要針對了鋼橋面格柵板中的主桿間距、橫桿間距、主桿勁度及橫桿勁度這四個參數來進行探討，其得到其中兩個重要參數研究成果如下：

1. 對於增加主、橫桿勁度或減少主、橫桿間距，都能造成橋面格柵板中央處最大變位及最大應力下降。
2. 增加主桿勁度或減少主桿間距所引致之整體變位下降比例比增加橫桿勁度或減少橫桿間距所引致之整體變位下降比例來得更為明顯及有效。

2005 年，來自匹茲堡大學的學者 Pierce 研發出了一種無須運用焊接技術即可組合而成的鋼橋面格柵板。為了探討其實用性及力學行為，作者分別對此種鋼橋面格柵板進行了單壓強度試驗及橋面板疲勞測試試驗。在疲勞測試試驗中，作者根據美國公路橋梁規範規定(AASHTO)對此種橋面格柵板進行了五百萬次的反覆載重測試。在測試完畢後，作者發現其鋼橋面格柵板的整體勁度只下降了大約 10%，說明此種鋼橋面格柵板可運用於一般公路橋梁橋面板上。在同一年次，學者 Biddah 也嘗試將由玻璃纖維與樹脂複合製成的格柵板來進行單壓強度試驗，如圖 2.5 所示，其經測試後發現複合材料格柵板的破壞依然主要是由於在壓力側之主桿產生局部挫屈破壞所致。

此外，韓國學者 Ji 等人也於 2010 年將玻璃纖維格柵板配搭方鋼管製成一種新型橋面板來進行試驗測試。其所研發橋面板斷面形式示意圖及玻璃纖維橋面格柵板照片如圖 2.6，從學者所進行的疲勞測試結果中可看出此種新型橋面板在經兩百萬次反覆載重後，其橋面板依然保有非常佳的行為(圖 2.7 所示)。



## 2.3 橋面格柵板力學行為



### 2.3.1 古典層板理論介紹 (Classical Laminated Plate Theory)

#### 2.3.1.1 層板組成方程式 (Laminate Constitutive Equation)

本研究為探討橋面格柵板在受到外力下之力學行為，將採用古典層板理論 (Classical Laminated Plate Theory) 進行理論推導。在未進行理論推導前，本節將會針對此理論進行介紹，基本上，古典層板理論為古典板理論之延伸，故在古典板理論中所對於板之 Kirchhoff 假設也適用於此理論中，以下為古典層板理論所做之假設：

1. 板變形前後，其垂直於中間面之法線永遠為一條直線
2. 在板任意變形下，板厚並不會產生任何改變
3. 在板變形前後，其垂直於中間面之法線永遠與中間面互相垂直
4. 層板各層間需緊密接合
5. 各層之材料性質需為全彈性且對稱 (Orthotropic Material)
6. 每層層板之厚度為均勻厚度
7. 所有層板之應變即位移需要足夠小

在以上假設中，前三項為 Kirchhoff 假設，其分別隱含著板垂直向之變位與板厚度方向無關、板厚度方向之應變等於 0 (即  $\varepsilon_{zz}=0$ ) 及所有側向剪應變為 0 (即  $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$ )。

如圖 2.8 及根據以上古典層板理論假設可獲知對於任何彈性體而言，其層板各點任意位移可表示為：

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (2.12)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (2.13)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (2.14)$$

其中， $u_0(x, y)$ ,  $v_0(x, y)$ ,  $w_0(x, y)$  = 在任意時間內，中間層在  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向上之位移， $\frac{\partial w_0}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial w_0}{\partial y}$  = 在任意時間內，板在  $x$ ,  $y$  反向上單位長度之位移變化量（即轉角）， $z$  = 在厚度方向上，中間層至任意層板之距離。

而根據彈性力學中的應變－位移關係 (Strain-Displacement Relationship)：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.15)$$

我們可將式(2.12)、式(2.13)、式(2.14)及式(2.15)結合成一矩陣形式，其矩陣如式(2.16)所示：

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

其中，

$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$  = 層板中任意點上之正向應變， $\gamma_{xy}$  = 層板中任意點上之剪應變， $\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0$  = 層板中間層之正向應變， $\gamma_{xy}^0$  = 層板中間層之剪應變， $k_{xx}, k_{yy}$  = 層板之撓曲曲率， $k_{xy}$  = 層板之扭轉曲率

從上式中可清楚地看出一旦得到層板中間層之應變狀況，在此層板上任一點之應變即可通過簡單的線性幾何關係得知。此外，根據材料力學及廣義異向性材料虎克原理 (Generalized Anisotropic Hook's Law)，其層板之力及應變的關係可寫成式(2.17)及式(2.18)。



$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} dz \\
 &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}]_k dz + \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}]_k z dz \\
 &= [A] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + [B] \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \\
 &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}]_k z dz + \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}]_k z^2 dz \\
 &= [B] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + [D] \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

其中  $[A] = \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}]_k dz$ ， $[B] = \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}]_k z dz$ ， $[D] = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}]_k z^2 dz$ ，在上式中，

$[A]$ ,  $[B]$ ,  $[D]$  分別代表為在任一層上層板的勁度矩陣，而  $[\bar{Q}]_k$  為在任一層上層板的

材料勁度矩陣，對於單層異向性薄板，其  $[\bar{Q}]_k$  矩陣可寫成：

$$[\bar{Q}]_k = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & G_{12} \end{bmatrix}_k \tag{2.19}$$

其中， $E_{11,22}$  為層板在 11 及 22 方向上的楊氏係數， $\nu_{12,21}$  為層板在 12 及 21 方向上的柏松比， $G_{12}$  則為層板在 12 方向上的剪力係數。若此單層薄板為等向性材料所組成， $[\bar{Q}]_k$  矩陣可改寫成：

$$[\bar{Q}]_k = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ sym. & & G \end{bmatrix}_k \quad (2.20)$$

### 2.3.1.2 薄板平衡方程式

首先在還未進行薄板平衡方程式推導前，先定義一均質連續之長方形薄板沿 x 軸方向長度為 a，沿 y 軸方向寬度為 b，而沿 z 軸厚度為 h，且其薄板之厚度 h 遠小於其長度 a 及寬度 b (如圖 2.9)。由於假設薄板具有材料之連續性，若將此薄板切一微小自由體 dV 表示，其在此自由體上之受力狀況如圖 2.10 所示。利用基本力學觀念，假設自由體處於靜止狀態，其在 x, y, z 方向上之力學平衡式子分別如式 (2.21)，(2.22) 及 (2.23) 所示：

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + P_x &= 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + P_y &= 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \sum F_z &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + P_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

其中  $P_x$ 、 $P_y$  及  $P_z$  分別為在向對應方向上之物體力(Body Force)。以上三式為考慮一微小自由體  $dV$  之力平衡方程式。若將以上三式引入層板觀念並忽略物體力之貢獻，對  $z$  方向進行積分。根據前小節層板組成方程式所得之結果，其方程式可改成 (Vinson et al. (1986))：

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} + \tau_{1x} - \tau_{2x} = 0 \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \tau_{1y} - \tau_{2y} = 0 \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P_1 - P_2 = 0 \quad (2.26)$$

其中，

$$\sigma_{zx}(h_{top}) \equiv \tau_{1x}, \sigma_{zx}(h_{bottom}) \equiv \tau_{2x}, \sigma_{zy}(h_{top}) \equiv \tau_{1y}, \sigma_{zy}(h_{bottom}) \equiv \tau_{2y}, \sigma_z(h_{top}) \equiv P_1, \sigma_z(h_{bottom}) \equiv P_2$$

除了考慮力平衡條件外，其在彎矩上也必須滿足彎矩平衡，基於這樣的假設，將式(2.24)及式(2.25)分別乘上  $z$ ，再對  $z$  軸積分，式(2.27)及式(2.28)即可轉換為該自由體在  $x$ 、 $y$  方向上之彎矩平衡條件：

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x + [h_{top}\tau_{1x} - h_{bottom}\tau_{2x}] = 0 \quad (2.27)$$

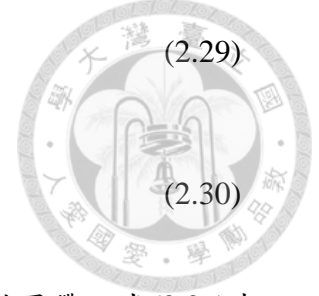
$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y + [h_{top}\tau_{1y} - h_{bottom}\tau_{2y}] = 0 \quad (2.28)$$

以上 5 個式子(式(2.24)、式(2.25)、式(2.26)、式(2.27)及式(2.28))即為均質連續長方形薄板之平衡方程式，其可適用於所有薄板。

若考慮一對稱堆疊之薄板( $[B]=0$ ,  $A_{16}=A_{26}=0$ ,  $D_{16}=D_{26}=0$ )，且假設薄板最外層的無任何剪應力參與狀況，其式(2.27)及(2.28)可改寫成：

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (2.30)$$



將式(2.29)及(2.30)加以整理，並分別對其進行偏微分，再將其結果帶入式(2.26)中即可得式子(2.31)：

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -P(x, y) \quad (2.31)$$

其中， $P(x, y) = P_1(x, y) - P_2(x, y)$

根據前節(2.3.1.1)中的層板組成方程式，若考慮一對稱堆疊之薄板，其任意點上彎矩及位移的關係式可簡化成，

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{cases} M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ M_{xy} = -D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (2.32)$$

利用式(2.31)及(2.32)之間的關係，即可得到一均質連續異向性薄板的位移平衡方程式：

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = P(x, y) \quad (2.33)$$

在此平衡方程式中， $D_{11}$ 、 $D_{12}$ 、 $D_{66}$ 及 $D_{22}$ 分別為薄板在各方向上之勁度，而式子中的 $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$ 、 $\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$ 、 $\frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y}$ 則為板任意點位移對 x 或 y 的偏微分，至於 $P(x, y)$ 則為

外力項。若考慮一均質連續等向性長方形薄板的位移平衡方程式，上式即可簡化成：

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P(x, y)}{D} \quad (2.34)$$

$$\text{其中， } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$



### 2.3.2 均勻連續薄板位移理論解

在本節中，吾人將利用前節所推導出的結果，針對一均質連續異向性薄板在板中央受到一塊長方形均布載重  $q_0$  (等效單一輪胎載重) 的狀況進行理論位移解推導，並求出在特定載重大小下，薄板的最大位移。

從前節板位移平衡方程式中(式子(2.33))可清楚地看出此式子為一偏微分方程，且擁有外力項的存在，故當解此偏微分方程時，其位移解  $w(x, y)$  必包涵兩項；即齊次解  $w_h(x, y)$  及特殊解  $w_p(x, y)$ ，可寫成：

$$w(x, y) = w_h(x, y) + w_p(x, y) \quad (2.35)$$

#### 2.3.2.1 均勻連續薄板位移齊次解 $w_h(x, y)$

根據學者 Levy 於 1899 年所提出的板位移理論中，對於一兩端為簡支撐 (Simply Supported)，另兩端為任意支撐 (Arbitrary Condition) 的均勻連續薄板，其板任意點位移  $w(x, y)$  及外力  $q(x, y)$  可假設為式(2.1)及式(2.2)。而根據前節的板位移平衡方程式(式(2.33))，將假設位移  $w(x, y)$  進行偏微，並帶入平衡方程式中，即可得到下列式子：

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ D_{11} \alpha_m^4 F_m(y) - 2(D_{12} + 2D_{66}) \alpha_m^2 \frac{\partial^2 F_m(y)}{\partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 F_m(y)}{\partial y^4} \right] \sin \alpha_m x = 0 \quad (2.36)$$

在式(2.36)中，若等式需成立，其在任意點上，中括弧內之方程式都必須等於零。

因此在此條件下，式(2.33)即透過一假設位移  $w(x, y)$  從一偏微分方程式降階成一元四階常微分方程式：

$$D_{22} \frac{\partial^4 F_m(y)}{\partial y^4} - 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha_m^2 \frac{\partial^2 F_m(y)}{\partial y^2} + D_{11}\alpha_m^4 F_m(y) = 0 \quad (2.37)$$

將式(2.37)同除  $D_{22}$ ，並假設  $F_m(y) = e^{\lambda y}$ ；對  $F_m(y)$  進行微分並帶回式(2.37)中，其式子即可轉變成一特徵方程式(Characteristic Equation)：

$$\lambda^4 - \frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{D_{22}}\alpha_m^2 \lambda^2 + \frac{D_{11}}{D_{22}}\alpha_m^4 \lambda = 0 \quad (2.38)$$

根據上述特徵方程式，利用工程數學上簡單的代數觀念( $b^2 - 4ac > 0$  或  $b^2 - 4ac = 0$  或  $b^2 - 4ac < 0$ )即可將  $F_m(y)$  的方程式形式求出。而  $F_m(y)$  的形式也會隨著薄板在各方向上的勁度不同，而會有三個完全不同的解，因此從下列結果中可得知，對於任意符合假設的異向性薄板，只要能組出該板的撓度矩陣( $D_{ij}$ )，即可從三個狀況中找出唯一齊次解  $w_h(x, y)$ ，而其劃分的區域及齊次解  $w_h(x, y)$  解如下列所示：

Case 1:  $(D_{12} + 2D_{66})^2 > D_{11}D_{22}$

$$w_h(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \cosh \lambda_1 y + B_m \sinh \lambda_1 y + C_m \cosh \lambda_2 y + D_m \sinh \lambda_2 y] \sin \alpha_m x \quad (2.39)$$

其中，

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{\alpha_m^2}{D_{11}} \left[ (D_{12} + 2D_{66}) \pm \sqrt{(D_{12} + 2D_{66})^2 - D_{11}D_{22}} \right]} \quad (2.40)$$

Case 2:  $(D_{12} + 2D_{66})^2 = D_{11}D_{22}$



$$w_h(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} [(A_m + D_m y) \cosh \lambda_1 y + (C_m + B_m y) \sinh \lambda_1 y] \sin \alpha_m x \quad (2.41)$$

其中，

$$\lambda_1 = \alpha_m \quad (2.42)$$

Case 3:  $(D_{12} + 2D_{66})^2 < D_{11}D_{22}$

$$w_h(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} [(A_m \cos \lambda_2 y + B_m \sin \lambda_2 y) \cosh \lambda_1 y + (C_m \cos \lambda_2 y + D_m \sin \lambda_2 y) \sinh \lambda_1 y] \sin \alpha_m x \quad (2.43)$$

其中，

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{\alpha_m^2}{2D_{22}} \sqrt{D_{11}D_{22} \pm (D_{12} + 2D_{66})}} \quad (2.44)$$

在上三式中，

$D_{11}, D_{22}, D_{12}, D_{66}$  = 薄板在各方向上的撓曲勁度； $A_m, B_m, C_m, D_m$  = 待定係數，此係數將會隨著薄板邊界條件(Boundary Conditions)不同，而有不同的解。

### 2.3.2.2 均勻連續薄板位移特殊解 $w_p(x, y)$

針對於特殊解部分，由於特殊解一般只跟外力項有關，所以在求解過程中，特殊解只會隨著外力形式的改變而改變。在本研究中就只會針對一板長為  $a$ ，板寬為  $b$  的均質連續異向性薄板在受到一外力載重施加長度為  $u$ ，施加寬度為  $v$  的長方形均布載重  $q_0$  的狀況下進行特殊解  $w_p(x, y)$  的推導。如圖 2.11，由於外力就只集中於板 IJKL 部分，因此可預知此種載重狀況下，唯有板 IJKL 部分的總位移為特殊



解  $w_p(x, y)$  加上齊次解  $w_h(x, y)$ ，而其餘的板位移部分則將只會有齊次解的貢獻。基於此項觀察，可將此板切成三大部分，並只針對板 EFGH 部分進行特殊解求解。

同理，根據 Levy 板理論，外力形式亦可使用與假設位移相似的傅立葉級數 (Fourier Series) 來表示，其計算方式如式(2.2)及式(2.4)所示。由於在板 EFGH 中，其外力載重形式為一長方形均布載重  $q_0$  佈滿於 IJKL 範圍中 (如圖 2.10)。因此基於整板外力均勻施加於平板及幾何上的對稱性。根據式(2.2)，其外力載重可用傅立葉級數觀念近似而得；而在傅立葉級數中，若要將一函數用傅立葉級數表示，首先需先將傅立葉係數(式(2.4))求出，再將傅立葉係數帶入假設傅立葉方程中，即可得此函數在傅立葉級數中的表示式，其大致過程由下列二式表示：

$$\begin{aligned}
 Q_n(y) &= \frac{2}{a} \int_0^a q(x, y) \sin \alpha_m x dx \\
 &= \frac{2}{a} \int_{\xi - \frac{u}{2}}^{\xi + \frac{u}{2}} q_0 \sin \alpha_m x dx \\
 &= \frac{-2q_0}{a\alpha_m} \cos \alpha_m x \Big|_{\xi - \frac{u}{2}}^{\xi + \frac{u}{2}} \\
 &= \frac{-2q_0}{a\alpha_m} \left[ \cos \alpha_m \left( \xi + \frac{u}{2} \right) - \cos \alpha_m \left( \xi - \frac{u}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{-2q_0}{a\alpha_m} \left[ -2 \sin \left( \frac{\alpha_m \xi + \frac{\alpha_m u}{2} + \alpha_m \xi - \frac{\alpha_m u}{2}}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha_m \xi + \frac{\alpha_m u}{2} - \alpha_m \xi + \frac{\alpha_m u}{2}}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{4q_0}{a\alpha_m} \left( \sin \alpha_m \xi \right) \left( \sin \alpha_m \left( \frac{u}{2} \right) \right) \\
 &= \frac{4q_0}{m\pi} \left( \sin \frac{m\pi}{a} \xi \right) \left( \sin \frac{m\pi}{2a} u \right)
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

在找到傅立葉係數後，只要將結果帶入假設傅立葉方程中(式(2.2))，即可得載重  $q(x, y)$  在傅立葉級數中的表示式：

$$\therefore q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} [Q_n(y)] \sin \alpha_m x$$

$$\therefore q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{4q_0}{m\pi} \left( \sin \frac{m\pi}{a} \xi \right) \left( \sin \frac{m\pi}{2a} u \right) \right] \sin \alpha_m x$$



(2.46)

其中， $q_0$  為均佈載重強度， $a$  為板長度， $\xi$  為載重施加位置， $u$  為載重施加長度，

而  $\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$ ，在式(2.46)中，若載重施加位置於板中央，既  $\xi = \frac{a}{2}$ ，式(2.46)可改寫

成：

$$q(x, y) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \left[ \frac{4q_0}{m\pi} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \left( \sin \frac{m\pi}{2a} u \right) \right] \sin \alpha_m x \quad (2.47)$$

在成功將外力載重  $q(x, y)$  化成傅立葉級數表示式後，為了得到板 EFGH 部分的特殊解  $w_p(x, y)$ ，吾人將式(2.47)帶入板位移平衡方程式(式(2.33))，再對其位移平衡方程式進行積分，即可得為了得到板 EFGH 部分的特殊解  $w_p(x, y)$ ：

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y)$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \left[ \frac{4q_0}{m\pi} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \left( \sin \frac{m\pi}{2a} u \right) \right] \sin \alpha_m x$$

(2.48)

在式(2.48)中，由於方程式右邊外力項為  $x$  的函數，因此可知所有與  $y$  有關的函數都可刪除，將式(2.48)分別對  $x$  進行四次積分，並把  $D_{11}$  移至方程式右邊，既可得到板 EFGH 部分的特殊解  $w_p(x, y)$  為：

$$\begin{aligned}
 w_p(x, y) &= \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D_{11}} \left( \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \sin \frac{m\pi}{2a} u \right) \sin \alpha_m x \\
 &= \sum_{m=1,3,5}^{\infty} q_m \sin \alpha_m x
 \end{aligned}
 \tag{2.49}$$



為了方便起見，接下來式(2.49)中的中括弧內的部分都以  $q_m$  表示之。

### 2.3.2.3 均勻連續薄板在板中央受到長方形均佈載重 $q_0$ 的總位移解 $w(x, y)$

根據前兩小節所推導出的齊次解  $w_h(x, y)$  及特殊解  $w_p(x, y)$ ，對於任意均勻連續異向性薄板而言，一旦可獲知此薄板的板撓曲勁度矩陣及足夠的邊界條件，便能將此薄板在任一點上的位移求出。本節中，吾人將利用前兩小節所推導出的結果，並結合邊界條件，分別將三種狀況下的均勻連續薄板在板中央受到長方形均佈載重  $q_0$  的總位移解  $w(x, y)$  推導而出。

根據前小節所提及，為了在分析上的方便，吾人將此薄板切成三大部分分別進行位移推導，而這三大部分分別為（如圖 2.12）：

1. 板上方佈滿均佈載重  $q_0$  的 EFGH 部分
2. 無任何外力於板上方的 ABEF 及 CDGH

而將此薄板切割成三大部分的目的是在於：

1. 在分析過程中，可分別對三塊薄板的位移進行求解，再適度的運用被切割面的邊界協和條件將此三大部分的位移解串聯起來，這樣子能大大簡化計算過程。
2. 可簡化薄板特殊解的複雜程度。
3. 薄板任一部分位移貢獻量變得較為明確。

縱然將此薄板切成三塊來進行分析，但是由於這三塊板在外力及幾何上都符

合完全對稱性。故在分析時，只需針對 CDGH 及一半的 EFGH 板進行分析。以下則為三種不同撓曲勁度狀況下，均勻連續薄板在板中央受到長方形均佈載重  $q_0$  的總位移解過程：



**Case 1:  $(D_{12} + 2D_{66})^2 > D_{11}D_{22}$**

根據前兩小節推出的結果可知對於板 EFGH 部分，其位移解形式將會如式(2.35)所示，將式(2.39)及式(2.49)一起代入式(2.35)，並考慮板結構對稱之問題，即可得式(2.50)：

$$\begin{aligned}
 w_{EFGH}(x, y) &= w_h(x, y) + w_p(x, y) \\
 &= \sum_{m=1,3,5}^{\infty} (A_m \cosh \lambda_1 y + B_m \sinh \lambda_1 y + C_m \cosh \lambda_2 y + D_m \sinh \lambda_2 y + q_m) \sin \alpha_m x
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

若細看式(2.50)，可發現此式子中與  $y$  方向相關之函數主要是由奇函數(Odd Function)及偶函數(Even Function)所組成。而在板 EFGH 中，很顯然無論是外力及邊界條件上，板 EFGH 都為一對稱結構。因此在  $y$  方向上的疊加過程中，奇函數貢獻必等於零，此疊加結果才會符合對稱性質。根據此現象，式(2.50)即可改寫成：

$$w_{EFGH}(x, y) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} (A_m \cosh \lambda_1 y + C_m \cosh \lambda_2 y + q_m) \sin \alpha_m x \tag{2.51}$$

其中  $A_m, C_m$  分別為待定係數，而  $\lambda_1, \lambda_2, q_m, \alpha_m$  則與前小節之結果相同。

而對於板 CDGH 部分，由於板上方並無任何外力參與，且邊界條件並無對稱，故在板 CDGH 部分，其板總位移僅為齊次解貢獻，無特殊解貢獻：

$$\begin{aligned}
 w_{CDGH}(x, y) &= w_h(x, y) \\
 &= \sum_{m=1,3,5}^{\infty} (A'_m \cosh \lambda_1 y + B'_m \sinh \lambda_1 y + C'_m \cosh \lambda_2 y + D'_m \sinh \lambda_2 y) \sin \alpha_m x
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

其中  $A'_m, B'_m, C'_m, D'_m$  分別為待定係數，而  $\lambda_1, \lambda_2, q_m, \alpha_m$  則與前小節之結果相同。

在得到板 EFGH 及 CDGH 的位移方程式後，若要解出此薄板在任一點上的總變位，還必須先將兩個式子中(式(2.51)及式(2.52))的六個待定係數

( $A_m, C_m, A'_m, B'_m, C'_m, D'_m$ ) 利用相關邊界條件求出。如圖 2.10，由於板 EFGH 及 CDGH 實屬同一塊薄板，故可獲知此板在同個邊界上，既 GH 邊界上，此二板的位移、轉角、剪力及彎矩都必須協和。此外當  $y=b/2$  時，由於此端為自由端，故在此端上 (CD 邊界上)，其剪力及矩彎必須等於零。若將以上邊界條件化為數學表示，並忽略格柵板中  $D_{12}$  及  $D_{66}$  貢獻，其分別為：

a) 在 GH 邊界上的位移、轉角協合條件

$$\text{I. } w_{EFGH} = w_{CDGH}$$

$$\text{II. } \frac{\partial w_{EFGH}}{\partial y} = \frac{\partial w_{CDGH}}{\partial y}$$

b) 在 GH 邊界上的力量、彎矩協合條件

$$\text{III. } M_y^{EFGH} = M_y^{CDGH} \Rightarrow \frac{\partial^2 w_{EFGH}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w_{CDGH}}{\partial y^2}$$

$$\text{IV. } V_y^{EFGH} = V_y^{CDGH} \Rightarrow \frac{\partial^3 w_{EFGH}}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 w_{CDGH}}{\partial y^3}$$

c) 在  $y=b/2$  端上的邊界條件

$$\text{V. } M_y = 0 \Rightarrow D_{11} \frac{\partial^2 w_{CDGH}}{\partial y^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_{CDGH}}{\partial x^2} = 0$$

$$\text{VI. } V_y = 0 \Rightarrow D_{11} \frac{\partial^3 w_{CDGH}}{\partial y^3} + H \frac{\partial^3 w_{CDGH}}{\partial x^2 \partial y} = 0, H = D_{12} + 4D_{66}$$

利用以上六項邊界協合條件，將式(2.51)及式(2.52)進行偏微分，再帶入相關邊界協合條件中，既可得到六個與待定係數相關的六個方程式，這時對這六個方程式進行整理，再利用簡單的數學方法即可將六個待定係數求出。而在還未對進行求解前，為了方便起見，首先先對於以下幾個參數進行定義：

$$\gamma_{m1} = \lambda_1 \left( \frac{v}{2} \right) \quad \gamma_{m2} = \lambda_2 \left( \frac{v}{2} \right) \quad \phi_{m1} = \lambda_1 \left( \frac{b}{2} \right) \quad \phi_{m2} = \lambda_2 \left( \frac{b}{2} \right)$$

在以上參數中， $\lambda_{1,2}$  為前小節(2.3.2.1)特徵方程式中的根， $v$  為長方形均佈載重  $q_0$  在  $y$  方向上的寬度，而  $b$  則為薄板在  $y$  方向上的寬度。在定義完參數後，接著便會展示求解 Case 1:  $(D_{12} + 2D_{66})^2 > D_{11}D_{22}$  薄板中六個係數的過程步驟：

步驟一

先將式(2.51)及式(2.52)偏微分成與邊界協合條件相同形式之偏微分方程，再帶入邊界協合條件中，並將等式中左右相同項消除，即可整理成一與待定係數相關的方程式。



a) 在 GH 邊界上  $\left(y = \frac{v}{2}\right)$  的位移、轉角協合條件

利用  $w_{EFGH} = w_{CDGH}$  條件可得式(2.53)：

$$\sum_{m=1,3,5}^{\infty} (A_m \cosh \lambda_1 y + C_m \cosh \lambda_2 y + q_m) \sin \alpha_m x = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} (A_m' \cosh \lambda_1 y + B_m' \sinh \lambda_1 y + C_m' \cosh \lambda_2 y + D_m' \sinh \lambda_2 y) \sin \alpha_m x \quad (2.53)$$

經將式(2.53)整理後，可得式(2.54)：

$$(A_m - A_m') \cosh \lambda_1 y - B_m' \sinh \lambda_1 y + (C_m - C_m') \cosh \lambda_2 y - D_m' \sinh \lambda_2 y = -q_m \quad (2.54)$$

帶入  $y = \frac{v}{2}$ ，並將  $\gamma_{m1} = \lambda_1 \left(\frac{v}{2}\right)$ ,  $\gamma_{m2} = \lambda_2 \left(\frac{v}{2}\right)$ ，上式即可轉化為：

$$(A_m - A_m') \cosh \gamma_{m1} - B_m' \sinh \gamma_{m1} + (C_m - C_m') \cosh \gamma_{m2} - D_m' \sinh \gamma_{m2} = -q_m \quad (2.55)$$

利用  $\frac{\partial w_{EFGH}}{\partial y} = \frac{\partial w_{CDGH}}{\partial y}$  條件可得式(2.56)：

$$\sum_{m=1,3,5}^{\infty} (A_m \lambda_1 \sinh \lambda_1 y + C_m \lambda_2 \sinh \lambda_2 y) \sin \alpha_m x = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} (A_m' \lambda_1 \sinh \lambda_1 y + B_m' \lambda_1 \cosh \lambda_1 y + C_m' \lambda_2 \sinh \lambda_2 y + D_m' \lambda_2 \cosh \lambda_2 y) \sin \alpha_m x \quad (2.56)$$

而將式(2.56)整理後，既可得式(2.57)：

$$(A_m - A_m') \lambda_1 \sinh \lambda_1 y - B_m' \lambda_1 \cosh \lambda_1 y + (C_m - C_m') \lambda_2 \sinh \lambda_2 y - D_m' \lambda_2 \cosh \lambda_2 y = 0 \quad (2.57)$$

同理，帶入  $y = \frac{v}{2}$  及令  $\gamma_{m1} = \lambda_1 \left(\frac{v}{2}\right)$ ,  $\gamma_{m2} = \lambda_2 \left(\frac{v}{2}\right)$ ，可得：

$$(A_m - A'_m) \lambda_1 \sinh \gamma_{m1} - B'_m \lambda_1 \cosh \gamma_{m1} + (C_m - C'_m) \lambda_2 \sinh \gamma_{m2} - D'_m \lambda_2 \cosh \gamma_{m2} = 0 \quad (2.58)$$

b) 在 GH 邊界上的力量、彎矩協合條件

利用  $\frac{\partial^2 w_{EFGH}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w_{CDGH}}{\partial y^2}$  條件可得式(2.59)：

$$\sum_{m=1,3,5}^{\infty} (A_m \lambda_1^2 \cosh \lambda_1 y + C_m \lambda_2^2 \cosh \lambda_2 y) \sin \alpha_m x = \quad (2.59)$$

$$\sum_{m=1,3,5}^{\infty} (A'_m \lambda_1^2 \cosh \lambda_1 y + B'_m \lambda_1^2 \sinh \lambda_1 y + C'_m \lambda_2^2 \cosh \lambda_2 y + D'_m \lambda_2^2 \sinh \lambda_2 y) \sin \alpha_m x$$

將式(2.59)整理後，既可得式(2.60)：

$$(A_m - A'_m) \lambda_1^2 \cosh \lambda_1 y - B'_m \lambda_1^2 \sinh \lambda_1 y + (C_m - C'_m) \lambda_2^2 \cosh \lambda_2 y - D'_m \lambda_2^2 \sinh \lambda_2 y = 0 \quad (2.60)$$

同理，帶入  $y = \frac{v}{2}$  及令  $\gamma_{m1} = \lambda_1 \left( \frac{v}{2} \right), \gamma_{m2} = \lambda_2 \left( \frac{v}{2} \right)$ ，可得：

$$(A_m - A'_m) \lambda_1^2 \cosh \gamma_{m1} - B'_m \lambda_1^2 \sinh \gamma_{m1} + (C_m - C'_m) \lambda_2^2 \cosh \gamma_{m2} - D'_m \lambda_2^2 \sinh \gamma_{m2} = 0 \quad (2.61)$$

利用  $\frac{\partial^3 w_{EFGH}}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 w_{CDGH}}{\partial y^3}$  條件可得式(2.62)：

$$\sum_{m=1,3,5}^{\infty} (A_m \lambda_1^3 \sinh \lambda_1 y + C_m \lambda_2^3 \sinh \lambda_2 y) \sin \alpha_m x = \quad (2.62)$$

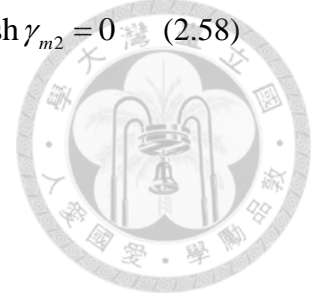
$$\sum_{m=1,3,5}^{\infty} (A'_m \lambda_1^3 \sinh \lambda_1 y + B'_m \lambda_1^3 \cosh \lambda_1 y + C'_m \lambda_2^3 \sinh \lambda_2 y + D'_m \lambda_2^3 \cosh \lambda_2 y) \sin \alpha_m x$$

經將式(2.62)整理後，既可得式(2.63)：

$$(A_m - A'_m) \lambda_1^3 \sinh \lambda_1 y - B'_m \lambda_1^3 \cosh \lambda_1 y + (C_m - C'_m) \lambda_2^3 \sinh \lambda_2 y - D'_m \lambda_2^3 \cosh \lambda_2 y = 0 \quad (2.63)$$

同理，帶入  $y = \frac{v}{2}$  及令  $\gamma_{m1} = \lambda_1 \left( \frac{v}{2} \right), \gamma_{m2} = \lambda_2 \left( \frac{v}{2} \right)$ ，可得：

$$(A_m - A'_m) \lambda_1^3 \sinh \gamma_{m1} - B'_m \lambda_1^3 \cosh \gamma_{m1} + (C_m - C'_m) \lambda_2^3 \sinh \gamma_{m2} - D'_m \lambda_2^3 \cosh \gamma_{m2} = 0 \quad (2.64)$$





以上這四個式子(式(2.55)、式(2.58)、式(2.61)及式(2.64))分別為二板在同一邊界GH上的邊界協合條件所結合出來的結果。



### 步驟二

在得到這些結果後，為了先簡化式子，可先將這四個式子(式(2.55)、式(2.58)、式(2.61)及式(2.64))整理成一矩陣形式，再利用矩陣運算方式對於這些係數進行求解，以下為將式(2.55)、式(2.58)、式(2.61)及式(2.64))化成矩陣的結果：

$$\begin{bmatrix} \cosh \gamma_{m1} & -\sinh \gamma_{m1} & \cosh \gamma_{m2} & -\sinh \gamma_{m2} \\ \lambda_1 \sinh \gamma_{m1} & -\lambda_1 \cosh \gamma_{m1} & \lambda_2 \sinh \gamma_{m2} & -\lambda_2 \cosh \gamma_{m2} \\ \lambda_1^2 \cosh \gamma_{m1} & -\lambda_1^2 \sinh \gamma_{m1} & \lambda_2^2 \cosh \gamma_{m2} & -\lambda_2^2 \sinh \gamma_{m2} \\ \lambda_1^3 \sinh \gamma_{m1} & -\lambda_1^3 \cosh \gamma_{m1} & \lambda_2^3 \sinh \gamma_{m2} & -\lambda_2^3 \cosh \gamma_{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_m - A'_m) \\ B'_m \\ (C_m - C'_m) \\ D'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

將以上矩陣進行矩陣運算，即可得：

$$\begin{bmatrix} (A_m - A'_m) \\ B'_m \\ (C_m - C'_m) \\ D'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_m}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} (\lambda_2^2 \cosh \gamma_{m1}) \\ \frac{q_m}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} (\lambda_2^2 \sinh \gamma_{m1}) \\ \frac{-q_m}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} (\lambda_1^2 \cosh \gamma_{m2}) \\ \frac{-q_m}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} (\lambda_1^2 \sinh \gamma_{m2}) \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

### 步驟三

在以上結果中，由於尚有兩個待定係數未知，因此為了求解，吾人尚須引入另外兩個邊界條件，此邊界條件為：

c) 在  $y=b/2$  端上的邊界條件，既當  $y=b/2$  時，該處的彎矩及剪力為零

利用  $D_{11} \frac{\partial^2 w_{CDGH}}{\partial y^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_{CDGH}}{\partial x^2} = 0$  條件，既可得：

$$\begin{aligned}
D_{11} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} (A'_m \lambda_1^2 \cosh \lambda_1 y + B'_m \lambda_1^2 \sinh \lambda_1 y + C'_m \lambda_2^2 \cosh \lambda_2 y + D'_m \lambda_2^2 \sinh \lambda_2 y) \sin \alpha_m x = \\
D_{12} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} (A'_m \cosh \lambda_1 y + B'_m \sinh \lambda_1 y + C'_m \cosh \lambda_2 y + D'_m \sinh \lambda_2 y) \alpha_m^2 \sin \alpha_m x
\end{aligned} \tag{2.67}$$

將上等式(2.67)中左右相同項消除，並帶入  $y = \frac{b}{2}$  及令  $\phi_{m1} = \lambda_1 \left(\frac{b}{2}\right)$ ,  $\phi_{m2} = \lambda_2 \left(\frac{b}{2}\right)$ ，上

式即變成：

$$\begin{aligned}
A'_m \cosh \phi_{m1} (D_{11} \lambda_1^2 - D_{12} \alpha_m^2) + B'_m \sinh \phi_{m1} (D_{11} \lambda_1^2 - D_{12} \alpha_m^2) + \\
C'_m \cosh \phi_{m2} (D_{11} \lambda_2^2 - D_{12} \alpha_m^2) + D'_m \sinh \phi_{m2} (D_{11} \lambda_2^2 - D_{12} \alpha_m^2) = 0
\end{aligned} \tag{2.68}$$

利用  $D_{11} \frac{\partial^3 w_{CDGH}}{\partial y^3} + H \frac{\partial^3 w_{CDGH}}{\partial x^2 \partial y} = 0$ ，其中  $H = D_{12} + 4D_{66}$  條件，可得式(2.69)：

$$\begin{aligned}
D_{11} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} (A'_m \lambda_1^3 \sinh \lambda_1 y + B'_m \lambda_1^3 \cosh \lambda_1 y + C'_m \lambda_2^3 \sinh \lambda_2 y + D'_m \lambda_2^3 \cosh \lambda_2 y) \sin \alpha_m x = \\
H \sum_{m=1,3,5}^{\infty} (A'_m \lambda_1 \sinh \lambda_1 y + B'_m \lambda_1 \cosh \lambda_1 y + C'_m \lambda_2 \sinh \lambda_2 y + D'_m \lambda_2 \cosh \lambda_2 y) \alpha_m^2 \sin \alpha_m x
\end{aligned} \tag{2.69}$$

同理，將上等式中左右相同項消除，並帶入  $y = \frac{b}{2}$  及令  $\phi_{m1} = \lambda_1 \left(\frac{b}{2}\right)$ ,  $\phi_{m2} = \lambda_2 \left(\frac{b}{2}\right)$ ，

式(2.69)即變成：

$$\begin{aligned}
A'_m \lambda_1 \sinh \phi_{m1} (D_{11} \lambda_1^2 - H \alpha_m^2) + B'_m \lambda_1 \cosh \phi_{m1} (D_{11} \lambda_1^2 - H \alpha_m^2) + \\
C'_m \lambda_2 \sinh \phi_{m2} (D_{11} \lambda_2^2 - H \alpha_m^2) + D'_m \lambda_2 \cosh \phi_{m2} (D_{11} \lambda_2^2 - H \alpha_m^2) = 0
\end{aligned} \tag{2.70}$$

替換上式(2.70)中的  $A'_m$  為主項，可得：

$$A'_m = \frac{-B'_m \lambda_1 \cosh \phi_{m1} (D_{11} \lambda_1^2 - H \alpha_m^2) - C'_m \lambda_2 \sinh \phi_{m2} (D_{11} \lambda_2^2 - H \alpha_m^2) - D'_m \lambda_2 \cosh \phi_{m2} (D_{11} \lambda_2^2 - H \alpha_m^2)}{\lambda_1 \sinh \phi_{m1} (D_{11} \lambda_1^2 - H \alpha_m^2)} \tag{2.71}$$

再將式(2.71)代入式(2.68)，即可得式子(2.72)：



$$\begin{aligned}
& \left[ -B_m' \lambda_1 \cosh \phi_{m1} (D_{11} \lambda_1^2 - H \alpha_m^2) - C_m' \lambda_2 \sinh \phi_{m2} (D_{11} \lambda_2^2 - H \alpha_m^2) \right] (D_{11} \lambda_1^2 - D_{12} \alpha_m^2) \\
& - D_m' \lambda_2 \cosh \phi_{m2} (D_{11} \lambda_2^2 - H \alpha_m^2) (D_{11} \lambda_1^2 - D_{12} \alpha_m^2) + \\
& B_m' \sinh \phi_{m1} (D_{11} \lambda_1^2 - D_{12} \alpha_m^2) \left[ \lambda_1 \tanh \phi_{m1} (D_{11} \lambda_2^2 - H \alpha_m^2) \right] + \\
& C_m' \cosh \phi_{m2} (D_{11} \lambda_2^2 - D_{12} \alpha_m^2) \left[ \lambda_1 \tanh \phi_{m1} (D_{11} \lambda_2^2 - H \alpha_m^2) \right] + \\
& D_m' \sinh \phi_{m2} (D_{11} \lambda_2^2 - D_{12} \alpha_m^2) \left[ \lambda_1 \tanh \phi_{m1} (D_{11} \lambda_2^2 - H \alpha_m^2) \right] = 0
\end{aligned} \tag{2.72}$$

將式(2.72)中的相同係數項合併，可得：

$$\begin{aligned}
& -B_m' \lambda_1 (D_{11} \lambda_1^2 - H \alpha_m^2) (D_{11} \lambda_1^2 - D_{12} \alpha_m^2) (\cosh \phi_{m1} - \sinh \phi_{m1} \tanh \phi_{m1}) \\
& -C_m' (D_{11} \lambda_1^2 - H \alpha_m^2) (D_{11} \lambda_1^2 - D_{12} \alpha_m^2) (\lambda_2 \sinh \phi_{m2} - \cosh \phi_{m2} \tanh \phi_{m1}) \\
& -D_m' (D_{11} \lambda_1^2 - H \alpha_m^2) (D_{11} \lambda_1^2 - D_{12} \alpha_m^2) (\lambda_2 \cosh \phi_{m2} - \sinh \phi_{m2} \tanh \phi_{m1}) = 0
\end{aligned} \tag{2.73}$$

為了方便表達，令：

$$C_B = \lambda_1 (D_{11} \lambda_1^2 - H \alpha_m^2) (D_{11} \lambda_1^2 - D_{12} \alpha_m^2) (\cosh \phi_{m1} - \sinh \phi_{m1} \tanh \phi_{m1}) \tag{2.74}$$

$$C_C = (D_{11} \lambda_1^2 - H \alpha_m^2) (D_{11} \lambda_1^2 - D_{12} \alpha_m^2) (\lambda_2 \sinh \phi_{m2} - \cosh \phi_{m2} \tanh \phi_{m1}) \tag{2.75}$$

$$C_D = D_m' (D_{11} \lambda_1^2 - H \alpha_m^2) (D_{11} \lambda_1^2 - D_{12} \alpha_m^2) (\lambda_2 \cosh \phi_{m2} - \sinh \phi_{m2} \tanh \phi_{m1}) \tag{2.76}$$

因此式(2.73)變成，

$$-B_m' C_B - C_m' C_C - D_m' C_D = 0 \tag{2.77}$$

將式(2.66)中的  $B_m'$  及  $D_m'$  代入上式，並將上式(2.77)中的  $C_m'$  替換成主項，即可得到待  
定係數  $C_m'$ ，

$$C_m' = -\frac{B_m' C_B + D_m' C_D}{C_C}$$

$$= - \frac{\left[ \frac{q_m}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} (\lambda_2^2 \sinh \gamma_{m1}) \right] C_B + \left[ \frac{-q_m}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} (\lambda_1^2 \sinh \gamma_{m2}) \right] C_D}{C_C} \quad (2.78)$$



同理，將式(2.78)及式(2.66)中的  $C_m'$ 、 $B_m'$  及  $D_m'$  代入式(2.71)，也同樣可得到待定係數  $A_m'$ ：

$$A_m' = \frac{-B_m' A_B - C_m' A_C - D_m' A_D}{A_A} \quad (2.79)$$

其中，

$$A_B = \lambda_1 \cosh \phi_{m1} (D_{11} \lambda_1^2 - H \alpha_m^2) \quad (2.80)$$

$$A_C = \lambda_2 \sinh \phi_{m2} (D_{11} \lambda_2^2 - H \alpha_m^2) \quad (2.81)$$

$$A_D = \lambda_2 \cosh \phi_{m2} (D_{11} \lambda_2^2 - H \alpha_m^2) \quad (2.82)$$

$$A_A = \lambda_1 \sinh \phi_{m1} (D_{11} \lambda_1^2 - H \alpha_m^2) \quad (2.83)$$

而一旦獲知  $A_m'$  及  $C_m'$  後，將結果代入式(2.66)，所有待定係數即可得到。在得到所有係數後，只要將所有係數代入式(2.51)或式(2.52)中，對於所有屬於 Case 1： $(D_{12} + 2D_{66})^2 > D_{11} D_{22}$  的薄板在任一點上的變位即可通過式(2.51)或式(2.52)獲知。

而針對於以上結果，吾人也特將 Case 1： $(D_{12} + 2D_{66})^2 > D_{11} D_{22}$  薄板所推導出的位移方程式及所有相關係數加以統整整理，並附於本研究附錄一中。

**Case 2:**  $(D_{12} + 2D_{66})^2 = D_{11}D_{22}$

針對於 Case 2:  $(D_{12} + 2D_{66})^2 = D_{11}D_{22}$  薄板，其求解過程大致上與 Case 1：  
 $(D_{12} + 2D_{66})^2 > D_{11}D_{22}$  薄板相同，唯不同之處在於薄板的齊次位移解部分。如式  
(2.35)所示，將式(2.41)及式(2.49)分別帶入式(2.35)，並考慮對稱問題，板 EFGH 部  
分的位移解形式可寫成式子(2.84)：

$$w_{EFGH}(x, y) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} (A_m \cosh \alpha_m y + B_m \alpha_m y \sinh \alpha_m y + q_m) \sin \alpha_m x \quad (2.84)$$

其中  $A_m, B_m$  分別為待定係數，而  $q_m, \alpha_m$  則與前小節之結果相同。

而對於板 CDGH 部分，由於板上方並無任何外力參與，且邊界條件並無對  
稱，故在板 CDGH 部分，其板總位移僅為齊次解貢獻，無特殊解貢獻：

$$w_{CDGH}(x, y) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} (A'_m \cosh \alpha_m y + B'_m \alpha_m y \sinh \alpha_m y + C'_m \sinh \alpha_m y + D'_m \alpha_m y \cosh \alpha_m y) \sin \alpha_m x \quad (2.85)$$

其中  $A'_m, B'_m, C'_m, D'_m$  分別為待定係數，而  $q_m, \alpha_m$  則與前小節之結果相同。

在得到板 EFGH 及 CDGH 的位移方程式後，若要解出此薄板在任一點上的  
總變位，就必須先將兩個式子中(式(2.84)及式(2.85))的六個待定係數  
 $(A_m, C_m, A'_m, B'_m, C'_m, D'_m)$  利用相關邊界條件求出，其求解的大致概念與 Case 1：

$(D_{12} + 2D_{66})^2 > D_{11}D_{22}$  薄板類同。

步驟一

先將式(2.84)及式(2.85)偏微分成與邊界協合條件相同形式之偏微分方程，再帶入邊  
界協合條件中，並將等式中左右相同項消除，即可整理成一與待定係數相關的方程  
式。

a) 在 GH 邊界上  $\left(y = \frac{v}{2}\right)$  的位移、轉角協合條件

利用  $w_{EFGH} = w_{CDGH}$  條件，可得：

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1,3,5}^{\infty} (A_m \cosh \alpha_m y + B_m \alpha_m y \sinh \alpha_m y + q_m) \sin \alpha_m x \\ &= \sum_{m=1,3,5}^{\infty} (A'_m \cosh \alpha_m y + B'_m \alpha_m y \sinh \alpha_m y + C'_m \sinh \alpha_m y + D'_m \alpha_m y \cosh \alpha_m y) \sin \alpha_m x \end{aligned} \quad (2.86)$$

將式(2.86)整理，可得式(2.87)：

$$(A_m - A'_m) \cosh \alpha_m y + (B_m - B'_m) \alpha_m y \sinh \alpha_m y - C'_m \sinh \alpha_m y - D'_m \alpha_m y \cosh \alpha_m y = -q_m \quad (2.87)$$

帶入  $y = \frac{v}{2}$ ，並令  $2\gamma_m = \alpha_m \left( \frac{v}{2} \right) = \frac{m\pi v}{2a}$ ，上式即可轉化為：

$$(A_m - A'_m) \cosh 2\gamma_m + (B_m - B'_m) 2\gamma_m \sinh 2\gamma_m - C'_m \sinh 2\gamma_m - D'_m 2\gamma_m \cosh 2\gamma_m = -q_m \quad (2.88)$$

利用  $\frac{\partial w_{EFGH}}{\partial y} = \frac{\partial w_{CDGH}}{\partial y}$  條件，同樣可得：

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1,3,5}^{\infty} (A_m \alpha_m \sinh \alpha_m y + B_m \alpha_m^2 y \cosh \alpha_m y + B_m \alpha_m \sinh \alpha_m y) \sin \alpha_m x \\ &= \sum_{m=1,3,5}^{\infty} [A'_m \alpha_m \sinh \alpha_m y + B'_m (\alpha_m^2 y \cosh \alpha_m y + \alpha_m \sinh \alpha_m y) + C'_m \alpha_m \cosh \alpha_m y + \\ & \quad D'_m (\alpha_m^2 y \sinh \alpha_m y + \alpha_m \cosh \alpha_m y)] \sin \alpha_m x \end{aligned} \quad (2.89)$$

將式(2.89)整理，可得：

$$(A_m - A'_m) \sinh \alpha_m y + (B_m - B'_m) (\alpha_m y \cosh \alpha_m y + \sinh \alpha_m y) - C'_m \cosh \alpha_m y - D'_m (\alpha_m y \sinh \alpha_m y + \cosh \alpha_m y) = 0 \quad (2.90)$$

同理，帶入  $y = \frac{v}{2}$  及令  $2\gamma_m = \alpha_m \left( \frac{v}{2} \right) = \frac{m\pi v}{2a}$ ，可得：

$$(A_m - A'_m) \sinh 2\gamma_m + (B_m - B'_m) (2\gamma_m \cosh 2\gamma_m + \sinh 2\gamma_m) - C'_m \cosh 2\gamma_m - D'_m (2\gamma_m \sinh 2\gamma_m + \cosh 2\gamma_m) = 0 \quad (2.91)$$

b) 在 GH 邊界上的力量、彎矩協合條件

利用  $\frac{\partial^2 w_{EFGH}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w_{CDGH}}{\partial y^2}$  條件，可得式(2.92)：

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1,3,5}^{\infty} (A_m \alpha_m^2 \cosh \alpha_m y + B_m \alpha_m^3 y \sinh \alpha_m y + 2B_m \alpha_m^2 \cosh \alpha_m y) \sin \alpha_m x \\ &= \sum_{m=1,3,5}^{\infty} [A_m' \alpha_m^2 \cosh \alpha_m y + B_m' (\alpha_m^3 y \sinh \alpha_m y + 2\alpha_m^2 \cosh \alpha_m y) + C_m' \alpha_m^2 \sinh \alpha_m y + \\ & \quad D_m' (\alpha_m^3 y \cosh \alpha_m y + 2\alpha_m^2 \sinh \alpha_m y)] \sin \alpha_m x \end{aligned} \quad (2.92)$$

經整理後，可得(2.93)：

$$\begin{aligned} & (A_m - A_m') \cosh \alpha_m y + (B_m - B_m') (\alpha_m y \sinh \alpha_m y + 2 \cosh \alpha_m y) - C_m' \sinh \alpha_m y - \\ & D_m' (\alpha_m y \cosh \alpha_m y + 2 \sinh \alpha_m y) = 0 \end{aligned} \quad (2.93)$$

同理，將  $y = \frac{v}{2}$  帶入上式並令  $2\gamma_m = \alpha_m \left(\frac{v}{2}\right) = \frac{m\pi v}{2a}$ ，可得：

$$\begin{aligned} & (A_m - A_m') \cosh 2\gamma_m + (B_m - B_m') (2\gamma_m \sinh 2\gamma_m + 2 \cosh 2\gamma_m) - C_m' \sinh 2\gamma_m - \\ & D_m' (2\gamma_m \cosh 2\gamma_m + 2 \sinh 2\gamma_m) = 0 \end{aligned} \quad (2.94)$$

利用  $\frac{\partial^3 w_{EFGH}}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 w_{CDGH}}{\partial y^3}$  條件，可得：

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1,3,5}^{\infty} (A_m \alpha_m^3 \sinh \alpha_m y + B_m \alpha_m^4 y \cosh \alpha_m y + 3B_m \alpha_m^3 \sinh \alpha_m y) \sin \alpha_m x \\ &= \sum_{m=1,3,5}^{\infty} [A_m' \alpha_m^3 \sinh \alpha_m y + B_m' (\alpha_m^4 y \cosh \alpha_m y + 3\alpha_m^3 \sinh \alpha_m y) + C_m' \alpha_m^3 \cosh \alpha_m y + \\ & \quad D_m' (\alpha_m^4 y \sinh \alpha_m y + 3\alpha_m^3 \cosh \alpha_m y)] \sin \alpha_m x \end{aligned} \quad (2.95)$$

經將上式(2.95)整理，即可得：



$$\begin{aligned} & (A_m - A'_m) \sinh \alpha_m y + (B_m - B'_m) (\alpha_m y \cosh \alpha_m y + 3 \sinh \alpha_m y) - C'_m \cosh \alpha_m y - \\ & D'_m (\alpha_m y \sinh \alpha_m y + 3 \cosh \alpha_m y) = 0 \end{aligned} \quad (2.96)$$

同理，將  $y = \frac{v}{2}$  帶入上式並令  $2\gamma_m = \alpha_m \left( \frac{v}{2} \right) = \frac{m\pi v}{2a}$ ，可得式(2.97)：

$$\begin{aligned} & (A_m - A'_m) \sinh 2\gamma_m + (B_m - B'_m) (2\gamma_m \cosh 2\gamma_m + 3 \sinh 2\gamma_m) - C'_m \cosh 2\gamma_m - \\ & D'_m (2\gamma_m \sinh 2\gamma_m + 3 \cosh 2\gamma_m) = 0 \end{aligned} \quad (2.97)$$

以上這四個式子(式(2.88)、式(2.91)、式(2.94)及式(2.97))分別為二板在同一邊界GH上的邊界協合條件所結合出來的結果。

## 步驟二

在得到這些結果後，為了先簡化式子，可先將這四個式子(式(2.88)、式(2.91)、式(2.94)及式(2.97))整理成一矩陣形式，再利用矩陣運算方式對於這些係數進行求解，以下為將式子(式(2.88)、式(2.91)、式(2.94)及式(2.97))化成矩陣的結果：

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \cosh 2\gamma_m & 2\gamma_m \sinh 2\gamma_m & -\sinh 2\gamma_m & -2\gamma_m \cosh 2\gamma_m \\ \sinh 2\gamma_m & 2\gamma_m \cosh 2\gamma_m + \sinh 2\gamma_m & -\cosh 2\gamma_m & -(2\gamma_m \sinh 2\gamma_m + \cosh 2\gamma_m) \\ \cosh 2\gamma_m & 2\gamma_m \sinh 2\gamma_m + 2 \cosh 2\gamma_m & -\sinh 2\gamma_m & -(2\gamma_m \cosh 2\gamma_m + 2 \sinh 2\gamma_m) \\ \sinh 2\gamma_m & 2\gamma_m \cosh 2\gamma_m + 3 \sinh 2\gamma_m & -\cosh 2\gamma_m & -(2\gamma_m \sinh 2\gamma_m + 3 \cosh 2\gamma_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_m - A'_m) \\ (B_m - B'_m) \\ C'_m \\ D'_m \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} -q_m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.98)$$

將上矩陣進行矩陣運算，即可得：





$$\begin{bmatrix} (A_m - A'_m) \\ (B_m - B'_m) \\ C'_m \\ D'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_m (\gamma_m \sinh 2\gamma_m - \cosh 2\gamma_m) \\ \frac{1}{2} q_m (\cosh 2\gamma_m) \\ q_m (\gamma_m \cosh 2\gamma_m - \sinh 2\gamma_m) \\ \frac{1}{2} q_m (\sinh 2\gamma_m) \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

步驟三

在以上結果中，由於尚有四個待定係數未知( $A_m, B_m, A'_m, B'_m$ )，因此為了求解，吾人尚須引入另外兩個邊界條件，此邊界條件為：

d) 在  $y=b/2$  端上的邊界條件，既在  $y=b/2$  上，彎矩及剪力都必須等於零

利用  $D_{11} \frac{\partial^2 w_{CDGH}}{\partial y^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_{CDGH}}{\partial x^2} = 0$  條件，可得：

$$\begin{aligned} & D_{11} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} [A'_m \alpha_m^2 \cosh \alpha_m y + B'_m (\alpha_m^3 y \sinh \alpha_m y + 2\alpha_m^2 \cosh \alpha_m y) + C'_m \alpha_m^2 \sinh \alpha_m y + \\ & \quad D'_m (\alpha_m^3 y \cosh \alpha_m y + 2\alpha_m^2 \sinh \alpha_m y)] \sin \alpha_m x \\ & = D_{12} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} [A'_m \cosh \alpha_m y + B'_m \alpha_m y \sinh \alpha_m y + C'_m \sinh \alpha_m y + D'_m \alpha_m y \cosh \alpha_m y] \alpha_m^2 \sin \alpha_m x \end{aligned} \quad (2.100)$$

將等式(2.100)中左右相同項消除，並帶入  $y = \frac{b}{2}$  及令  $\phi_m = \alpha_m \left( \frac{b}{2} \right) = \frac{m\pi}{a} \left( \frac{b}{2} \right)$ ，上式

即變成：

$$\begin{aligned} & A'_m (D_{11} - D_{12}) \cosh \phi_m + B'_m [(D_{11} - D_{12}) \phi_m \sinh \phi_m + 2D_{11} \cosh \phi_m] + \\ & C'_m (D_{11} - D_{12}) \sinh \phi_m + D'_m [(D_{11} - D_{12}) \phi_m \cosh \phi_m + 2D_{11} \sinh \phi_m] = 0 \end{aligned} \quad (2.101)$$

同理，利用  $D_{11} \frac{\partial^3 w_{CDGH}}{\partial y^3} + H \frac{\partial^3 w_{CDGH}}{\partial x^2 \partial y} = 0$ ，其中  $H = D_{12} + 4D_{66}$  條件，可得式(2.102)：

$$\begin{aligned}
& D_{11} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} [A'_m \alpha_m^3 \sinh \alpha_m y + B'_m (\alpha_m^4 y \cosh \alpha_m y + 3\alpha_m^3 \sinh \alpha_m y) + C'_m \alpha_m^3 \cosh \alpha_m y + \\
& \quad D'_m (\alpha_m^4 y \sinh \alpha_m y + 3\alpha_m^3 \cosh \alpha_m y)] \sin \alpha_m x \\
& = H \sum_{m=1,3,5}^{\infty} [A'_m \alpha_m \sinh \alpha_m y + B'_m (\alpha_m^2 y \cosh \alpha_m y + \alpha_m \sinh \alpha_m y) + C'_m \alpha_m \cosh \alpha_m y + \\
& \quad D'_m (\alpha_m^2 y \sinh \alpha_m y + \alpha_m \cosh \alpha_m y)] \alpha_m^2 \sin \alpha_m x
\end{aligned} \tag{2.102}$$

將等式(2.102)中左右相同項消除，並帶入  $y = \frac{b}{2}$  及令  $\phi_m = \alpha_m \left( \frac{b}{2} \right) = \frac{m\pi}{a} \left( \frac{b}{2} \right)$  上式即

變成：

$$\begin{aligned}
& A'_m (D_{11} - H) \sinh \phi_m + B'_m [(D_{11} - H) \phi_m \cosh \phi_m + (3D_{11} - H) \sinh \phi_m] + \\
& C'_m (D_{11} - H) \cosh \phi_m + D'_m [(D_{11} - H) \phi_m \sinh \phi_m + (3D_{11} - H) \cosh \phi_m] = 0
\end{aligned} \tag{2.103}$$

替換上式(2.103)中的  $A'_m$  為主項，可得：

$$A'_m = \frac{-B'_m E_B - C'_m E_C - D'_m E_D}{E_A} \tag{2.104}$$

其中，

$$H = D_{12} + 4D_{66} \tag{2.105}$$

$$E_B = (D_{11} - H) \phi_m \cosh \phi_m + (3D_{11} - H) \sinh \phi_m \tag{2.106}$$

$$E_C = (D_{11} - H) \cosh \phi_m \tag{2.107}$$

$$E_D = (D_{11} - H) \phi_m \sinh \phi_m + (3D_{11} - H) \cosh \phi_m \tag{2.108}$$

$$E_A = (D_{11} - H) \sinh \phi_m \tag{2.109}$$

將  $A'_m$  帶回式(2.101)並將相同係數項合併，既可得：

$$\begin{aligned}
& B'_m [-(D_{11} - H)(D_{11} - D_{12}) \phi_m \cosh \phi_m - (3D_{11} - H)(D_{11} - D_{12}) \sinh \phi_m \\
& + (D_{11} - H)(D_{11} - D_{12}) \phi_m \sinh \phi_m \tanh \phi_m + 2D_{11}(D_{11} - H) \sinh \phi_m] \\
& + C'_m [(D_{11} - H)(D_{11} - D_{12})(-\cosh \phi_m + \sinh \phi_m \tanh \phi_m)] \\
& + D'_m [-(D_{11} - H)(D_{11} - D_{12}) \phi_m \sinh \phi_m - (3D_{11} - H)(D_{11} - D_{12}) \cosh \phi_m \\
& + (D_{11} - H)(D_{11} - D_{12}) \phi_m \sinh \phi_m + 2D_{11}(D_{11} - H) \sinh \phi_m \tanh \phi_m] = 0
\end{aligned} \tag{2.110}$$

為了方便表達，令：

$$C_C = [(D_{11} - H)(D_{11} - D_{12})(-\cosh \phi_m + \sinh \phi_m \tanh \phi_m)] \quad (2.111)$$

$$C_B = [-(D_{11} - H)(D_{11} - D_{12})\phi_m \cosh \phi_m - (3D_{11} - H)(D_{11} - D_{12})\sinh \phi_m + (D_{11} - H)(D_{11} - D_{12})\phi_m \sinh \phi_m \tanh \phi_m + 2D_{11}(D_{11} - H)\sinh \phi_m] \quad (2.112)$$

$$C_D = [-(D_{11} - H)(D_{11} - D_{12})\phi_m \sinh \phi_m - (3D_{11} - H)(D_{11} - D_{12})\cosh \phi_m + (D_{11} - H)(D_{11} - D_{12})\phi_m \sinh \phi_m + 2D_{11}(D_{11} - H)\sinh \phi_m \tanh \phi_m] \quad (2.113)$$

因此式(2.110)可變成：

$$B_m' C_B + C_m' C_C + D_m' C_D = 0 \quad (2.114)$$

將式(2.99)中的  $C_m'$  及  $D_m'$  代入上式，並將上式(2.114)中的  $B_m'$  替換成主項，即可得到待定係數  $B_m'$ ：

$$B_m' = \frac{-C_m' C_C - D_m' C_D}{C_B} = \frac{-[q_m (\gamma_m \cosh 2\gamma_m - \sinh 2\gamma_m)] C_C - \left[ \frac{1}{2} q_m (\sinh 2\gamma_m) \right] C_D}{C_B} \quad (2.115)$$

在獲知  $B_m'$  後，同理將  $B_m'$  (式(2.115))及式(2.99)中的  $C_m'$  及  $D_m'$  帶入式(2.104)，既可得到係數  $A_m'$ 。而一旦獲知  $A_m'$  及  $B_m'$  後，將結果代入式(2.99)，所有待定係數即可得到。針對於以上結果，同樣地，我們也將 Case 2：  $(D_{12} + 2D_{66})^2 = D_{11}D_{22}$  薄板所推導出的位移方程式及所有相關係數加以整理，並附於本研究附錄二中。

### Case 3: $(D_{12} + 2D_{66})^2 < D_{11}D_{22}$

同理，此類薄板求解過程大致上與前兩個 case 的薄板相同。如式(2.35)所示，將式(2.43)及式(2.49)分別帶入式(2.35)，並考慮結構對稱，即可得式子(2.116)：

$$w_{EFGH}(x, y) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} [A_m (\cos \lambda_2 y) \cosh \lambda_1 y + D_m (\sin \lambda_2 y) \sinh \lambda_1 y + q_m] \sin \alpha_m x \quad (2.116)$$

其中  $A_m, D_m$  分別為待定係數，而  $q_m, \lambda_{1,2}, \alpha_m$  則與前小節之結果相同。

而對於板 CDGH 部分，由於板上方並無任何外力參與，且邊界條件並無對稱，故在板 CDGH 部分，其板總位移僅為齊次解貢獻，無特殊解貢獻：

$$w_{CDGH}(x, y) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \left[ (A'_m \cos \lambda_2 y + B'_m \sin \lambda_2 y) \cosh \lambda_1 y + (C'_m \cos \lambda_2 y + D'_m \sin \lambda_2 y) \sinh \lambda_1 y \right] \sin \alpha_m x \quad (2.117)$$

其中  $A'_m, B'_m, C'_m, D'_m$  分別為待定係數，而  $q_m, \lambda_{1,2}, \alpha_m$  則與前小節之結果相同。

在得到板 EFGH 及 CDGH 的位移方程式後，接下來便是將兩個式子中(式(2.116)及式(2.117))的六個待定係數( $A_m, C_m, A'_m, B'_m, C'_m, D'_m$ )利用相關邊界條件求出：

步驟一

先將式(2.116)及式(2.117)偏微分成與邊界協合條件相同形式之偏微分方程，再帶入邊界協合條件中，並將等式中左右相同項消除，即可得一與待定係數相關的方程式。

a) 在 GH 邊界上  $\left( y = \frac{v}{2} \right)$  的位移、轉角協合條件

利用  $w_{EFGH} = w_{CDGH}$  條件，可得：

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \left[ A_m (\cos \lambda_2 y) \cosh \lambda_1 y + D_m (\sin \lambda_2 y) \sinh \lambda_1 y + q_m \right] \sin \alpha_m x \\ &= \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \left[ (A'_m \cos \lambda_2 y + B'_m \sin \lambda_2 y) \cosh \lambda_1 y + (C'_m \cos \lambda_2 y + D'_m \sin \lambda_2 y) \sinh \lambda_1 y \right] \sin \alpha_m x \end{aligned} \quad (2.118)$$

上式(2.118)經整理後，可得式(2.119)：

$$\begin{aligned} & (A_m - A'_m) \cos \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y - B'_m \sin \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y - C'_m \cos \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y + \\ & (D_m - D'_m) \sin \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y = -q_m \end{aligned} \quad (2.119)$$



帶入  $y = \frac{v}{2}$ ，並令  $\gamma_{m1,2} = \lambda_{1,2} \left( \frac{v}{2} \right)$ ，上式(2.119)即可轉化為：

$$\begin{aligned} & (A_m - A'_m) \cos \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1} - B'_m \sin \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1} - C'_m \cos \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1} + \\ & (D_m - D'_m) \sin \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1} = -q_m \end{aligned} \quad (2.120)$$

利用  $\frac{\partial w_{EFGH}}{\partial y} = \frac{\partial w_{CDGH}}{\partial y}$  條件，可得下式(2.121)：

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1,3,5}^{\infty} [A_m (\lambda_1 \cos \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y - \lambda_2 \sin \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y) + D_m (\lambda_1 \sin \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y \\ & + \lambda_2 \cos \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y)] \sin \alpha_m x \\ & = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} [A'_m (\lambda_1 \cos \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y - \lambda_2 \sin \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y) + B'_m (\lambda_1 \sin \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y \\ & + \lambda_2 \cos \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y) + C'_m (\lambda_1 \cos \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y - \lambda_2 \sin \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y) \\ & + D'_m (\lambda_1 \sin \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y + \lambda_2 \cos \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y)] \sin \alpha_m x \end{aligned} \quad (2.121)$$

上式(2.121)經整理後，可得式(2.122)：

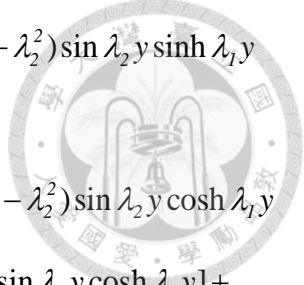
$$\begin{aligned} & (A_m - A'_m) (\lambda_1 \cos \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y - \lambda_2 \sin \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y) - B'_m (\lambda_1 \sin \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y \\ & + \lambda_2 \cos \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y) - C'_m (\lambda_1 \cos \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y - \lambda_2 \sin \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y) + \\ & (D_m - D'_m) (\lambda_1 \sin \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y + \lambda_2 \cos \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y) = 0 \end{aligned} \quad (2.122)$$

同理，將上式(2.122)帶入  $y = \frac{v}{2}$  及令  $\gamma_{m1,2} = \lambda_{1,2} \left( \frac{v}{2} \right)$ ，可得：

$$\begin{aligned} & (A_m - A'_m) (\lambda_1 \cos \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1} - \lambda_2 \sin \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1}) - B'_m (\lambda_1 \sin \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1} \\ & + \lambda_2 \cos \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1}) - C'_m (\lambda_1 \cos \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1} - \lambda_2 \sin \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1}) + \\ & (D_m - D'_m) (\lambda_1 \sin \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1} + \lambda_2 \cos \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1}) = 0 \end{aligned} \quad (2.123)$$

b) 在 GH 邊界上的力量、彎矩協合條件

利用  $\frac{\partial^2 w_{EFGH}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w_{CDGH}}{\partial y^2}$  條件，可得：



$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \{A_m[(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y - 2\lambda_1 \lambda_2 \sin \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y] + D_m[(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y \\
& \quad + 2\lambda_1 \lambda_2 \cos \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y]\} \sin \alpha_m x \\
= & \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \{A'_m[(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y - 2\lambda_1 \lambda_2 \sin \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y] + B'_m[(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y \\
& \quad + 2\lambda_1 \lambda_2 \cos \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y] + C'_m[(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y - 2\lambda_1 \lambda_2 \sin \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y] + \\
& \quad D'_m[(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y + 2\lambda_1 \lambda_2 \cos \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y]\} \sin \alpha_m x
\end{aligned} \tag{2.124}$$

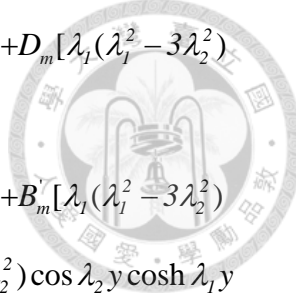
同理，將式(2.124)整理，可得：

$$\begin{aligned}
& (A_m - A'_m)[(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y - 2\lambda_1 \lambda_2 \sin \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y] - B'_m[(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y \\
& \quad + 2\lambda_1 \lambda_2 \cos \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y] - C'_m[(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y - 2\lambda_1 \lambda_2 \sin \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y] + \\
& (D_m - D'_m)[(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y + 2\lambda_1 \lambda_2 \cos \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y]
\end{aligned} \tag{2.125}$$

將上式(2.125)帶入  $y = \frac{v}{2}$  及令  $\gamma_{m1,2} = \lambda_{1,2} \left( \frac{v}{2} \right)$ ，可得式(2.126)：

$$\begin{aligned}
& (A_m - A'_m)[(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1} - 2\lambda_1 \lambda_2 \sin \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1}] - B'_m[(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1} \\
& \quad + 2\lambda_1 \lambda_2 \cos \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1}] - C'_m[(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1} - 2\lambda_1 \lambda_2 \sin \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1}] + \\
& (D_m - D'_m)[(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1} + 2\lambda_1 \lambda_2 \cos \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1}]
\end{aligned} \tag{2.126}$$

利用  $\frac{\partial^3 w_{EFGH}}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 w_{CDGH}}{\partial y^3}$  條件，可得式(2.127)：



$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \{A_m[\lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \cos \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y - \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y] + D_m[\lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \\
& \quad \sin \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y + \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y]\} \sin \alpha_m x = \\
& \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \{A'_m[\lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \cos \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y - \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y] + B'_m[\lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \\
& \quad \sin \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y + \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y] + C'_m[\lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \cos \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y \\
& \quad - \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y] + D'_m[\lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \sin \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y \\
& \quad + \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y]\} \sin \alpha_m x
\end{aligned} \tag{2.127}$$

將上式(2.127)進行整理，可得：

$$\begin{aligned}
& (A_m - A'_m)[\lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \cos \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y - \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y] - B'_m[\lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \\
& \quad \sin \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y + \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y] - C'_m[\lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \cos \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y \\
& \quad - \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y] + (D_m - D'_m)[\lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \sin \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y + \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \\
& \quad \cos \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y] = 0
\end{aligned} \tag{2.128}$$

同理，將上式(2.128)帶入  $y = \frac{v}{2}$  及令  $\gamma_{m1,2} = \lambda_{1,2} \left( \frac{v}{2} \right)$ ，可得式(2.129)：

$$\begin{aligned}
& (A_m - A'_m)[\lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \cos \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1} - \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1}] - B'_m[\lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \\
& \quad \sin \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1} + \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1}] - C'_m[\lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \cos \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1} \\
& \quad - \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1}] + (D_m - D'_m)[\lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \sin \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1} + \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \\
& \quad \cos \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1}] = 0
\end{aligned} \tag{2.129}$$

以上這四個式子(式(2.120)、式(2.123)、式(2.126)及式(2.129))分別為在板在同一邊界 GH 上的邊界協合條件所結合出來的結果。

步驟二

為了先簡化式子，可先將這四個式子整理成一矩陣形式，再利用矩陣運算方式對於這些係數進行求解，以下為將式(2.120)、式(2.123)、式(2.126)及式(2.129)化成矩陣的結果：

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_m - A'_m) \\ B'_m \\ C'_m \\ (D_m - D'_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.130)$$

其中，

$$A_{11} = \cos \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1} \quad (2.131)$$

$$A_{12} = -\sin \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1} \quad (2.132)$$

$$A_{13} = -\cos \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1} \quad (2.133)$$

$$A_{14} = -\sin \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1} \quad (2.134)$$

$$A_{21} = \lambda_1 \cos \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1} - \lambda_2 \sin \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1} \quad (2.135)$$

$$A_{22} = -(\lambda_1 \sin \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1} + \lambda_2 \cos \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1}) \quad (2.136)$$

$$A_{23} = -(\lambda_1 \cos \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1} - \lambda_2 \sin \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1}) \quad (2.137)$$

$$A_{24} = \lambda_1 \sin \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1} + \lambda_2 \cos \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1} \quad (2.138)$$

$$A_{31} = (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1} - 2\lambda_1 \lambda_2 \sin \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1} \quad (2.139)$$

$$A_{32} = -[(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1} + 2\lambda_1 \lambda_2 \cos \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1}] \quad (2.140)$$

$$A_{33} = -[(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1} - 2\lambda_1 \lambda_2 \sin \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1}] \quad (2.141)$$



$$A_{34} = (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1} + 2\lambda_1 \lambda_2 \cos \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1} \quad (2.142)$$

$$A_{41} = \lambda_1 (\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \cos \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1} - \lambda_2 (3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1} \quad (2.143)$$

$$A_{42} = -\left[ \lambda_1 (\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \sin \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1} + \lambda_2 (3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1} \right] \quad (2.144)$$

$$A_{43} = -\left[ \lambda_1 (\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \cos \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1} - \lambda_2 (3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1} \right] \quad (2.145)$$

$$A_{44} = \lambda_1 (\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \sin \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1} + \lambda_2 (3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1} \quad (2.146)$$

將上矩陣(式(2.130))進行矩陣運算，即可得：

$$\begin{bmatrix} (A_m - A'_m) \\ B'_m \\ C'_m \\ (D_m - D'_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_m \left[ (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1} - 2\lambda_1 \lambda_2 \cos \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1} \right]}{2\lambda_1 \lambda_2} \\ \frac{q_m \left[ (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1} + 2\lambda_1 \lambda_2 \sin \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1} \right]}{2\lambda_1 \lambda_2} \\ \frac{q_m \left[ (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1} - 2\lambda_1 \lambda_2 \cos \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1} \right]}{2\lambda_1 \lambda_2} \\ \frac{q_m \left[ (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1} + 2\lambda_1 \lambda_2 \sin \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1} \right]}{2\lambda_1 \lambda_2} \end{bmatrix} \quad (2.147)$$

### 步驟三

在以上結果中，由於尚有四個待定係數未知( $A_m, D_m, A'_m, D'_m$ )，因此為了求解，尚須

引入另外兩個邊界條件，此邊界條件為：

e) 在  $y=b/2$  端上的邊界條件，既在  $y=b/2$  時，彎矩及剪力必須等於零。

利用  $D_{11} \frac{\partial^2 w_{CDGH}}{\partial y^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_{CDGH}}{\partial x^2} = 0$  條件，可得式(2.148)：

$$\begin{aligned}
D_{11} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \{ & A_m' [(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y - 2\lambda_1 \lambda_2 \sin \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y] + B_m' [(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y \\
& + 2\lambda_1 \lambda_2 \cos \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y] + C_m' [(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y - 2\lambda_1 \lambda_2 \sin \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y] + \\
& D_m' [(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y + 2\lambda_1 \lambda_2 \cos \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y] \} \sin \alpha_m x = \\
D_{12} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \left[ & (A_m' \cos \lambda_2 y + B_m' \sin \lambda_2 y) \cosh \lambda_1 y + (C_m' \cos \lambda_2 y + D_m' \sin \lambda_2 y) \sinh \lambda_1 y \right] \alpha_m^2 \sin \alpha_m x
\end{aligned} \tag{2.148}$$

將上等式(2.148)中左右相同項消除，並帶入  $y = \frac{b}{2}$  及令  $\phi_{m,2} = \lambda_{1,2} \left( \frac{b}{2} \right)$ ，上式即變成：

$$A_m' E_A + B_m' E_B + C_m' E_C + D_m' E_D = 0 \tag{2.149}$$

其中，

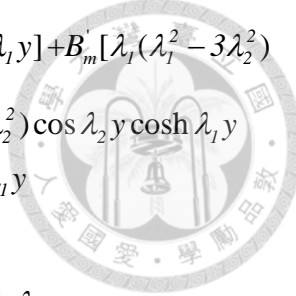
$$E_A = \left\{ \left[ D_{11} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - D_{12} \alpha_m^2 \right] \cos \phi_{m2} \cosh \phi_{m1} - 2D_{11} \lambda_1 \lambda_2 \sin \phi_{m2} \sinh \phi_{m1} \right\} \tag{2.150}$$

$$E_B = \left\{ \left[ D_{11} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - D_{12} \alpha_m^2 \right] \sin \phi_{m2} \cosh \phi_{m1} + 2D_{11} \lambda_1 \lambda_2 \cos \phi_{m2} \sinh \phi_{m1} \right\} \tag{2.151}$$

$$E_C = \left\{ \left[ D_{11} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - D_{12} \alpha_m^2 \right] \cos \phi_{m2} \sinh \phi_{m1} - 2D_{11} \lambda_1 \lambda_2 \sin \phi_{m2} \cosh \phi_{m1} \right\} \tag{2.152}$$

$$E_D = \left\{ \left[ D_{11} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - D_{12} \alpha_m^2 \right] \sin \phi_{m2} \sinh \phi_{m1} - 2D_{11} \lambda_1 \lambda_2 \cos \phi_{m2} \cosh \phi_{m1} \right\} \tag{2.153}$$

利用  $D_{11} \frac{\partial^3 w_{CDGH}}{\partial y^3} + H \frac{\partial^3 w_{CDGH}}{\partial x^2 \partial y} = 0$ ，其中  $H = D_{12} + 4D_{66}$  條件，可得：



$$\begin{aligned}
& D_{11} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \{A'_m[\lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \cos \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y - \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y] + B'_m[\lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \\
& \quad \sin \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y + \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y] + C'_m[\lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \cos \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y \\
& \quad - \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y] + D'_m[\lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \sin \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y \\
& \quad + \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y]\} \sin \alpha_m x = \\
& H \sum_{m=1,3,5}^{\infty} [A'_m(\lambda_1 \cos \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y - \lambda_2 \sin \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y) + B'_m(\lambda_1 \sin \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y \\
& \quad + \lambda_2 \cos \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y) + C'_m(\lambda_1 \cos \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y - \lambda_2 \sin \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y) \\
& \quad + D'_m(\lambda_1 \sin \lambda_2 y \cosh \lambda_1 y + \lambda_2 \cos \lambda_2 y \sinh \lambda_1 y)] \alpha_m^2 \sin \alpha_m x
\end{aligned} \tag{2.154}$$

同理，將等式(2.154)中左右相同項消除，並帶入  $y = \frac{b}{2}$  及令  $\phi_{m1,2} = \lambda_{1,2} \left( \frac{b}{2} \right)$  上式即變

成：

$$\begin{aligned}
& A'_m \{D_{11} [\lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \cos \phi_{m2} \sinh \phi_{m1} - \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \phi_{m2} \cosh \phi_{m1}] - \\
& \alpha_m^2 H (\lambda_1 \cos \phi_{m2} \sinh \phi_{m1} - \lambda_2 \sin \phi_{m2} \cosh \phi_{m1})\} + \\
& B'_m \{D_{11} [\lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \sin \phi_{m2} \sinh \phi_{m1} + \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \phi_{m2} \cosh \phi_{m1}] - \\
& \alpha_m^2 H (\lambda_1 \sin \phi_{m2} \sinh \phi_{m1} + \lambda_2 \cos \phi_{m2} \cosh \phi_{m1})\} + \\
& C'_m \{D_{11} [\lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \cos \phi_{m2} \cosh \phi_{m1} - \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \phi_{m2} \sinh \phi_{m1}] - \\
& \alpha_m^2 H (\lambda_1 \cos \phi_{m2} \cosh \phi_{m1} - \lambda_2 \sin \phi_{m2} \sinh \phi_{m1})\} + \\
& D'_m \{D_{11} [\lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \sin \phi_{m2} \cosh \phi_{m1} + \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \phi_{m2} \sinh \phi_{m1}] - \\
& \alpha_m^2 H (\lambda_1 \sin \phi_{m2} \cosh \phi_{m1} + \lambda_2 \cos \phi_{m2} \sinh \phi_{m1})\} = 0
\end{aligned} \tag{2.155}$$

為了方便表達，先令：

$$\begin{aligned}
C_B = D_{11} [\lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \sin \phi_{m2} \sinh \phi_{m1} + \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \phi_{m2} \cosh \phi_{m1}] - \\
\alpha_m^2 H (\lambda_1 \sin \phi_{m2} \sinh \phi_{m1} + \lambda_2 \cos \phi_{m2} \cosh \phi_{m1})
\end{aligned} \tag{2.156}$$

$$\begin{aligned}
C_C = D_{11} [\lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \cos \phi_{m2} \cosh \phi_{m1} - \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \phi_{m2} \sinh \phi_{m1}] - \\
\alpha_m^2 H (\lambda_1 \cos \phi_{m2} \cosh \phi_{m1} - \lambda_2 \sin \phi_{m2} \sinh \phi_{m1})
\end{aligned} \tag{2.157}$$

$$C_D = D_{11} \left[ \lambda_1 (\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \sin \phi_{m2} \cosh \phi_{m1} + \lambda_2 (3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \phi_{m2} \sinh \phi_{m1} \right] - \alpha_m^2 H (\lambda_1 \sin \phi_{m2} \cosh \phi_{m1} + \lambda_2 \cos \phi_{m2} \sinh \phi_{m1}) \quad (2.158)$$

$$C_A = D_{11} \left[ \lambda_1 (\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \cos \phi_{m2} \sinh \phi_{m1} - \lambda_2 (3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \phi_{m2} \cosh \phi_{m1} \right] - \alpha_m^2 H (\lambda_1 \cos \phi_{m2} \sinh \phi_{m1} - \lambda_2 \sin \phi_{m2} \cosh \phi_{m1}) \quad (2.159)$$

替換上式(2.155)主項為  $A_m'$ ，即可得：

$$A_m' = \frac{-(B_m' C_B + C_m' C_C + D_m' C_D)}{C_A} \quad (2.160)$$

再將式(2.160)代入式(2.149)，並將相同係數項合併，即可得式子(2.160)：

$$-(B_m' C_B + C_m' C_C + D_m' C_D) E_A + B_m' E_B C_A + C_m' E_C C_A + D_m' E_D C_A = 0$$

$$D_m' = \frac{B_m' (C_B E_A - E_B C_A) + C_m' (C_C E_A - E_C C_A)}{E_D C_A - C_D E_A} \quad (2.161)$$

將式(2.147)中的  $B_m'$  及  $C_m'$  代入式(2.161)，即可得到待定係數  $D_m'$ 。而再將所得到的待定係數  $D_m'$ 、 $B_m'$  及  $C_m'$  代入式(2.160)中， $A_m'$  亦可求出。在獲知  $A_m'$  及  $D_m'$  後，將結果代入式(2.147)，所有待定係數即可得到。針對於以上結果，我們也將 Case 3： $(D_{12} + 2D_{66})^2 < D_{11} D_{22}$  薄板所推導出的位移方程式及所有相關係數加以整理，並附於本研究附錄三中。

## 2.4 橋面格柵板等效撓曲勁度評估

格柵板為一種由許多不同方向桿子交錯組成的平板，一般上與車行方向平行的桿子稱為橫桿，反之則被稱為主桿。主桿在格柵板中的主要角色為提供軸向勁度，而橫桿則扮演著分散力量，將力量傳至更多主桿承受的角色。因此可預見，當格柵板在承受力量時，在格柵板中不同處的主桿，其受力形式將會隨著與載重施加處相差的距離而有所改變。當格柵板中的主桿越靠近載重施加處時，其受力形式就越像一受到集中荷載的簡支梁；而隨著橫桿將力量分散開來，越遠離載重施加處的主桿，

其受力形式便會漸漸從集中荷載形式轉化成為類似簡支梁受到均佈荷載的形式，此現象亦在學者 Huang et al.(2002)之文顯中有所提起。基於橫桿的主要角色為將力量分散，因此一般上橫桿斷面不宜過小，若橫桿斷面過小，將會造成格柵板受力局部，無法分散。

縱然均勻連續薄板的撓曲勁度評估並不適用於格柵板上，但是基於其整體板行為類似，因此在本研究中將會嘗試運用等效勁度的觀念，將橋面格柵板的撓曲勁度求出，並利用前節 2.3 所推導出之均勻連續薄板的理論位移解來進行計算，以得到橋面格柵板在受到單一等效輪胎載重下的最大位移。如前小節所示，如要計算一塊板在任一點上的位移，除了必須知道其板的位移方程外，其板的撓曲勁度也是一項十分重要的考量。因此於下面幾小節中，本研究將會針對均勻連續薄板撓曲勁度評估方式及格柵板的等效撓曲勁度評估方式進行一一介紹，其介紹如下幾小節所示。

## 2.4.1 均勻連續薄板撓曲勁度評估方式

根據前節 2.3.1.1 層板組成方程式中的式(2.18)可知，對於異向性均勻連續薄板在任一層上的層板撓曲勁度矩陣可寫成  $[D] = \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}]_k z^2 dz$ ，若此異向性均勻連續薄板僅由單方向纖維所堆疊而成，因此可將此板看成單層異向性薄板。對於單層異向性薄板，其  $[D]$  矩陣可寫成：

$$[D] = \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}]_k z^2 dz = \frac{1}{12} [\bar{Q}] h^3 = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ & \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \text{sym.} & & G_{12} \end{bmatrix} \frac{h^3}{12} \quad (2.162)$$

其中， $h$  為單層板厚度， $E_{11,22}$  為層板在 11 及 22 方向上的楊氏係數， $\nu_{12,21}$  為層板在 12 及 21 方向上的柏松比， $G_{12}$  則為層板在 12 方向上的剪力係數。若此單層薄板為等向性材料所組成， $[D]$  矩陣可改寫成：

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ sym. & & G \end{bmatrix} \frac{h^3}{12} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.163)$$

其中， $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

## 2.4.2 橋面格柵板撓曲勁度評估方式

### 方法 1

而根據前小節 2.2 中有提起，對於格柵板的等效勁度，學者 Timoshenko & Krieger(1959)建議可通過式(2.5)來進行評估。因此在本研究中將嘗試運用前學者所建議之方法來對於橋面格柵板整體行為進行探討。此外根據過往研究(Huang et al.,2001)提及，對於整體傳力機制較佳的格柵板，其一般所有主桿的中性軸位置都不在同一平面上，因此若使用學者 Timoshenko 及 Krieger(1959)所建議之勁度推估方法(式(2.5))對於格柵板等效撓曲勁度進行評估，或許會因錯估桿件中中性軸位置而造成整體有效撓曲勁度嚴重高估或低估的現象。

### 方法 2

為了改善這個問題，本研究也嘗試利用另一種觀念提出了一種的新的格柵板等效撓曲勁度評估方式，稱為勁度修正因子法(Stiffness Correction Factor Method，簡稱：SCFM)。由於從本研究第四章中的有限元素參數研究分析中獲知在此兩種橋面格柵板的橫桿在撓曲勁度貢獻上並不明顯，因此在此新的格柵板等效撓曲勁度

評估方法中，為了簡化複雜度，我們假設橫桿方向上並無任何與橫桿方向同向的纖維堆疊。在此假設下，我們便能利用前節 2.4.1 中之結果將一塊與格柵板同等厚度及材料組成的單層連續薄板，運用勁度修正因子，將其連續薄板的撓曲勁度的轉化為橋面格柵板的等效撓曲勁度，其示意圖如圖 2.13。

如圖 2.14 為一橋面格柵板中某單元(unit cell)的示意圖，首先先定義與  $x$  方向平行之桿件為主桿，反之為橫桿，相鄰二主桿之間距為  $a_x$ ，相鄰二橫桿間距為  $a_y$ ，主桿及橫桿寬度分別為  $b_x$  及  $b_y$ 。若我們觀察此單元，並將此元素視為一單向板 (既  $a_y/a_x > 1.5$ )，當力量施加在此元素上時，此元素上大多數撓曲勁度貢獻勢必為主桿所提供，此外若單元中主、橫桿斷面漸漸增加，其格柵板撓曲勁度也必然會有所上升。因此基於單向板及斷面性質理念，本研究嘗試將這些較重要的影響因子引入修正因子中。以下為所整理後之結果，對於  $a_y/a_x > 1.5$  的格柵板，其格柵板等效撓曲勁度可寫成：

$$\begin{aligned} [D]_{grid,equiv} &= [D]_{plate} \times (SCF) \\ &= [D]_{plate} \times \left( \frac{V_{grid}}{V_{plate}} \times \frac{b_x}{a_x} \right) \end{aligned} \quad (2.164)$$

其中， $[D]_{plate}$  為單層連續薄板的撓曲勁度矩陣(既式(2.162)或式(2.163))， $V_{grid}$  為玻璃纖維橋面格柵板格柵板的體積， $V_{plate}$  為與玻璃纖維橋面格柵板格柵板同等厚度及尺寸的連續薄板， $b_x$  為主桿寬度， $a_x$  為相鄰二主桿之間距。而在式(2.164)中，括弧之部分既稱為勁度修正因子。

## 2.5 橋面格柵板計算例子

為了探討本研究發展計算方法之可靠性，在本節中將會運用前幾節(2.3 及 2.4.2 節)所導出之均勻連續薄板位移方程式配搭橋面格柵板等效撓曲勁度評估方式分別對鋼及玻璃纖維橋面格柵板來進行演算，以探討橋面格柵板撓曲勁度評估方式

中兩種不同評估方法對於兩種不同材料格柵板的最大位移之差異性為何。2.5.1 節為鋼橋面格柵板計算例子，而 2.5.2 節則為玻璃纖維橋面格柵板計算例子



## 2.5.1 鋼橋面格柵板計算例子

### 2.5.1.1 鋼橋面格柵板計算過程

為了探討本研究所發展之計算方法，在本研究中嘗試將一真實鋼橋面格柵板(其全貌及斷面形式如圖 2.15 及照片 2.1 所示)化成一模型來進行演算分析，以探討所推導之近似理論解的有效性。如圖 2.11 所示，假設擁有一塊與真實鋼橋面格柵板同等斷面之試體，其長度  $a$  為 700 mm (簡支端)，寬度  $b$  為 996 mm (自由端)，而在板正中央處受到一  $u$  為 400 mm， $v$  為 250 mm 的均佈荷載，其均佈荷載大小為  $1 \text{ N/mm}^2$ 。

#### 方法 1 (Timoshenko & Krieger, 1959)

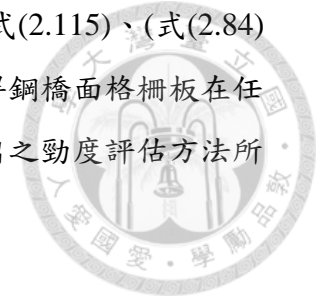
如照片 2.1 所示，由於鋼橋面格柵板的主桿尺寸遠大於橫桿尺寸。因此基於橫桿慣性矩相較主桿慣性矩甚遠，故在此分析中將會忽略其橫桿的撓曲勁度貢獻。根據式(2.5)，將表 2.1 中鋼橋面格柵板試體主桿的慣性矩  $I_{Main \text{ Bar}}$ 、相鄰二橫桿間距  $a_y$ 、A36 鋼彈性勁度 (假設 200GPa) 及柏松比 (0.3) 代入式(2.5)中，即可得鋼橋面格柵板之等效撓曲勁度  $[D]_{grid, equiv1}$ ：

$$[D]_{grid, equiv1} = \begin{bmatrix} \frac{E_x I_x}{a_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 274.63 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{ (N.mm)} \quad (2.165)$$

一旦得到鋼橋面格柵板之等效撓曲勁度後，根據前節(2.3)可知此撓曲勁度將會落於 Case 2： $(D_{12} + 2D_{66})^2 = D_{11}D_{22}$  中。因此根據此 Case 中位移方程式(式(2.84)、



及式(2.85))，將所有相關數據及參數代入式(2.99)、式(2.104)、式(2.115)、(式(2.84)及式(2.85)中，並利用數學商用軟體 Matlab 進行疊加運算即可得鋼橋面格柵板在任意點上的位移。圖 2.17(a)為利用 Timoshenko et al. (1959) 所提出之勁度評估方法所繪出之鋼橋面格柵板 3-D 變形圖。



## 方法 2 (Proposed Method)

在還未利用方法 2 進行鋼橋面格柵板等效勁度計算前，首先必須先將一塊與格柵板同等厚度及材料組成之連續薄板  $[D]_{Plate}$  算出。根據式(2.163)，將表 2.1 中鋼橋面格柵板試體主桿厚度  $h=65$  mm、A36 鋼彈性勁度 (假設  $E=200$  GPa) 及柏松比 ( $\nu=0.3$ ) 代入式(2.163)中，即可得到連續薄板的  $[D]_{Plate}$ ，在得到  $[D]_{Plate}$  後，再利用方法 2 中所提及的勁度修正因子 SCF 將此連續薄板的  $[D]_{Plate}$  修正成鋼橋面格柵板之等效撓曲勁度  $[D]_{grid,equiv2}$ 。而此勁度修正因子的計算方法就如式(2.164)所示。根據式 2.164，將  $[D]_{Plate}$  及表 2.1 中鋼橋面格柵板體積比  $\frac{V_{grid}}{V_{Plate}} = 0.224$ 、鋼橋面格柵板主桿寬度  $b_x = 6$  mm 及相鄰二主桿間距  $a_x = 30$  代入式(2.163)中，即可得鋼橋面格柵板之等效撓曲勁度  $[D]_{grid,equiv2}$ ：



$$\begin{aligned}
 [D]_{grid,equiv2} &= [D]_{plate} \times (SCF) \\
 &= [D]_{plate} \times \left( \frac{V_{grid}}{V_{plate}} \times \frac{b_x}{a_x} \right) \\
 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \times \left( \frac{V_{grid}}{V_{plate}} \times \frac{b_x}{a_x} \right) \\
 &= \frac{(200000)(65)^3}{12[1-(0.3)^2]} \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-0.3}{2} \end{bmatrix} \times \left( 0.224 \times \frac{6}{30} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 281.67 & 84.50 & 0 \\ 84.50 & 281.67 & 0 \\ 0 & 0 & 98.58 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{ (N.mm)} \tag{2.166}
 \end{aligned}$$

在得到式(2.166)後，根據前節(2.3)中之結果，可知此撓曲勁度落於 Case 2： $(D_{12} + 2D_{66})^2 = D_{11}D_{22}$  中。因此根據此 Case 中位移方程式(式(2.84)、及式(2.85))，將所有相關數據及參數代入式(2.99)、式(2.104)、式(2.115)、(式(2.84)及式(2.85)中，並利用數學商用軟體 Matlab 進行疊加運算即可得鋼橋面格柵板在任意點上的位移。圖 2.17(b)利用本研究所提出 SCF 勁度評估方法(Proposed Method)繪出之鋼橋面格柵板 3-D 變形圖。

## 2.5.2 玻璃纖維橋面格柵板計算例子

### 2.5.2.1 玻璃纖維橋面格柵板計算過程

除了探討本研究所發展之計算方法外，本研究亦針對兩種橋面格柵板撓曲勁度評估方法的有效性進行探討。同理，對於玻璃纖維橋面格柵板分析模型，吾人同

樣將一真實玻璃纖維橋面格柵板 (其全貌及斷面形式如圖 2.16 及照片 2.2 所示) 化為演算模型來進行分析, 如圖 2.11, 在此演算模型中, 其長度  $a$  為 700 mm (簡支端), 寬度  $b$  為 1028 mm (自由端), 厚度為 50 mm; 而在其模型正中央處有一  $u$  為 400 mm,  $v$  為 250 mm 的均佈荷載, 其均佈荷載大小為  $1 \text{ N/mm}^2$ 。

在還未進行演算前, 由於玻璃纖維橋面格柵板主、橫桿斷面都為梯形斷面 (圖 2.16), 因此為了計算上的方便, 在此分析模型中將會將全數梯形主、橫桿以等面積的觀念將其轉化成一等效長方形斷面, 再運用此轉化後之斷面去進行相關斷面性質計算, 而其轉化後之斷面大小及慣性矩也同樣列於表 2.1 中。

此外, 由於玻璃纖維橋面格柵板的製成過程中, 其格柵板中橫主桿內一般上就只會擺放單方向的玻纖, 再利用樹脂將其固化形成玻璃纖維橋面格柵板。因此本研究中, 我們將玻纖橋面格柵板橫主桿視為單層複合材料來進行計算。根據複合材料理論, 單層層板的彈性模數 ( $E_{11}$ ,  $E_{22}$ ), 剪力模數 ( $G_{12}$ ), 柏松比 ( $\nu_{21}$ ,  $\nu_{12}$ ), 計算方式如下:

$$E_{11} = E_f V_f + E_m V_m \quad (2.167)$$

$$E_{22} = \frac{E_f E_m}{E_f V_m + V_f E_m} \quad (2.168)$$

$$G_{12} = \frac{G_f G_m}{G_f V_m + V_f G_m} \quad (2.169)$$

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m \quad \nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_{22}}{E_{11}} \quad (2.170)$$

$$G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)} \quad (2.171)$$

其中,  $E_f$  為纖維的彈性模數 (GPa),  $E_m$  為樹脂的彈性模數 (GPa),  $V_f$  為單層層板中纖維體積百分比,  $V_m$  為單層層板中樹脂體積百分比,  $G_f$  為纖維的剪力模數

(GPa)， $G_m$  為樹脂的剪力模數 (GPa)， $\nu_f$  為纖維的柏松比 (GPa)， $\nu_m$  則為樹脂的柏松比 (GPa)。

而有了以上式子後，只要代入相關資訊，即可得到玻璃纖維橋面格柵板主桿的彈性模數 ( $E_{11}$ ， $E_{22}$ )，剪力模數 ( $G_{12}$ )及柏松比 ( $\nu_{12}$ ， $\nu_{21}$ )。而在本研究中，由於廠商只提供部分數據，因此為了分析用途，吾人參考了學者 Kollar (2003)書中附錄 C 裡的一些材料特性。其廠商及課本上所提供的玻璃纖維及樹脂材料性質將列於表 2.2 中；此外，由於在複合材料中，纖維的走向一般都擺放在 1-2 平面上，因此一般上都可將 2 和 3 方向上的彈性性質假設為相等，故  $G_{12} = G_{13}$ ，而  $G_{23}$  則根據式子 (2.171)計算：

$$G_{23} = \frac{E_{22}}{2(1+\nu_{23})} \quad (2.172)$$

$$\text{其中，} \nu_{23} = \nu_{12} \frac{1-\nu_{21}}{1-\nu_{12}}$$

綜合以上結果，將表 2.2 中的數據及步分計算出之結果代入以上式子(式 (2.167)、式(2.168)、式(2.169)、式(2.170)、式(2.171)、式(2.172))中，即可得玻璃纖維橋面格柵板在各方向上的材料性質，其結果列於表 2.3。

#### 方法 1 (Timoshenko & Krieger,1959)

在得到玻璃纖維橋面格柵板相關資訊後，首先先將表 2.1 中玻璃纖維橋面格柵板主桿的慣性矩  $I_{Main\ Bar} = 111979.2\ mm^4$ 、橫桿的慣性矩  $I_{Secondary\ Bar} = 83333.3\ mm^4$ 、相鄰二橫桿間距  $a_y = 50.8\ mm$ 、相鄰二主桿間距  $a_x = 25.4\ mm$  及表 2.3 中玻璃纖維

橋面格柵板主、橫桿彈性勁度  $E_{11} = 61900 \text{ MPa}$  全數代入式(2.5)中，即可得玻璃纖維橋面格柵板之等效撓曲勁度  $[D]_{grid,equiv1}$ ：



$$\begin{aligned}
 [D]_{grid,equiv1} &= \begin{bmatrix} \frac{E_x I_x}{a_y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_y I_y}{a_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{(61900)(111979.2)}{50.8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(61900)(83333.3)}{25.4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 136.45 & 0 & 0 \\ 0 & 203.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{ (N.mm)} \quad (2.173)
 \end{aligned}$$

一旦得到玻璃纖維橋面格柵板之等效撓曲勁度後，根據前節(2.3)可知此撓曲勁度將會落於 Case 3： $(D_{12} + 2D_{66})^2 < D_{11}D_{22}$  中。同理，利用該 Case 中所導出的位移方程式(式(2.116)及式(2.117))，將所有相關數據及參數代入式(2.147)、式(2.160)、式(2.161)、式(2.116)及式(2.117)，並利用數學商用軟體 Matlab 進行疊加運算即可得玻璃纖維橋面格柵板在任意點上的位移。圖 2.18(a)為利用 Timoshenko & Krieger(1959)所提出之勁度評估方法繪出之玻璃纖維橋面格柵板 3-D 變形圖。

## 方法 2 (Proposed Method)

同理，在還未利用方法 2 進行玻璃纖維橋面格柵板等效勁度計算前，同樣也必須先將一塊與格柵板同等厚度及材料組成之連續薄板  $[D]_{plate}$  算出。根據式(2.162)，將表 2.3 中玻璃纖維橋面格柵板主、橫桿材料性質代入式(2.162)，即可得

到連續薄板的 $[D]_{Plate}$ ，在得到 $[D]_{Plate}$ 後，再利用式(2.164)將 $[D]_{Plate}$ 修正成玻璃纖維橋面格柵板之等效撓曲勁度 $[D]_{grid,equiv2}$ 。而此勁度修正因子的計算方法如式

(2.164)所示。根據式 2.163，將 $[D]_{Plate}$ 及表 2.1 中玻璃纖維橋面格柵板體積比 $V_{grid}/V_{Plate} = 0.476$ 、玻璃纖維橋面格柵板等效主桿寬度 $b_x = 10.75$  mm 及相鄰二主桿

間距 $a_x = 25.4$ 代入式(2.164)中，即可得玻璃纖維橋面格柵板之等效撓曲勁度

$[D]_{grid,equiv2}$ ：

$$\begin{aligned}
 [D]_{grid,equiv2} &= [D]_{plate} \times (SCF) \\
 &= [D]_{plate} \times \left( \frac{V_{grid}}{V_{plate}} \times \frac{b_x}{a_x} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ & \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ sym. & & G_{12} \end{bmatrix} \frac{h^3}{12} \times \left( \frac{V_{grid}}{V_{plate}} \times \frac{b_x}{a_x} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{(61900)}{1-(0.242)(0.032)} & \frac{(0.032)(61900)}{1-(0.242)(0.032)} & 0 \\ & \frac{(8301)}{1-(0.242)(0.032)} & 0 \\ sym. & & 751 \end{bmatrix} \frac{(50)^3}{12} \times \left( 0.476 \times \frac{10.75}{25.4} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 130.93 & 4.25 & 0 \\ 4.25 & 17.56 & 0 \\ 0 & 0 & 1.58 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{ (N.mm)} \tag{2.174}
 \end{aligned}$$

在得到式(2.174)後，根據前節(2.3)中之結果，可知此撓曲勁度落於 Case 3：

$(D_{12} + 2D_{66})^2 < D_{11}D_{22}$  中。利用該 Case 中所導出的位移方程式(式(2.116)及式(2.117))，將所有相關數據及參數代入式(2.147)、式(2.160)、式(2.161)、式(2.116)及式(2.116)，

並利用數學商用軟體 Matlab 進行疊加運算即可得鋼橋面格柵板在任意點上的位移。圖 2.18(b)利用本研究所提出 SCF 勁度評估方法(Proposed Method)繪出之玻璃纖維橋面格柵板 3-D 變形圖。



### 2.5.3 方法一與方法二之比較

圖 2.17 及圖 2.18 為兩種不同材料之橋面格柵板在同等力量 (100 kN)及跨距 (0.7 m)下，利用兩種勁度評估方法及本論文 2.3 節理論近似解所計算出之結果。若分別從計算結果中沿著模型橫向及縱向將各點之最大位移輸出，即可得圖 2.17(c)、及圖 2.18(c)。比較此四圖中可看出兩種勁度評估方法對於鋼橋面格柵板之整體變位曲線趨勢而言大致雷同，唯不同之處在於無論在板橫向或縱向上，方法二所得到之各點變位都比方法一所算出之變位來得大，而其之間最大變位差異可達到大約 0.60 mm。而對於玻璃纖維橋面格柵板而言，兩種勁度評估方法所表現出的橋面格柵板之整體變位曲線趨勢不但差距甚大，而且其之間所計算出的最大位移差異可達到 3.77 mm。

在進行完兩種不同材料橋面格柵板之理論近似解及等效勁度評估方法後，為了驗證其等效勁度評估方法及理論近似解的準確度及適用性，在本研究中也特別規畫了相關實尺寸試驗，以透過真實狀況來驗證相關理論之正確性。其相關試驗細節將於本論文下章中進行介紹。

## 第三章 鋼及玻璃纖維橋面格柵板試驗及分析



### 3.1 前言

為了探討不同材料橋面格柵板在受到單一輪胎載重下的力學行為及驗證本研究於第二章中所提出之等效勁度評估方法及理論近似解的適用性。本研究預計將進行四組試體，在這四組試體中，其中兩組為鋼橋面格柵板，另兩組則為玻璃纖維橋面格柵板。而此兩種不同材料試體的資訊列於表 3.1 中。此外為了實際模擬輕便橋現場真實架設狀況及格柵板與複合材料梁的連結問題，本研究也將兩種橋面格柵板分別架設於兩根長 1100 mm 的複合材料翼型梁上，而兩根翼型梁腹板至腹板間距為 700 mm，並使用四顆 M6 螺栓(一邊各兩顆)進行連結，以模擬現場真實情形。本章 3.2 節為試驗試體設計，3.3 節為試體材料性質，3.4 節為試體試驗構架裝置及加載歷時，3.5 節為試體製作及組裝方式，3.6 節至 3.9 節則分別各組試驗結果分析及比較。

### 3.2 試驗試體設計

#### 3.2.1 複合材料翼型梁

在本研究中所使用的高分子複合材料翼型梁全長 1100 mm，斷面尺寸  $410 \times 200 \times 18 \times 20$  (mm)，為台灣威山公司所製造 (照片 3.1)；並於 2012 年由學者 Sun & Chou (2012)進行了材料試驗測試，其測試結果列於表 3.2 中。此外為探討其力學行為，Sun & Chou (2012)也嘗試將全長 6.5 m 的全玻纖複合材料翼型梁來進行四點彎矩試驗測試。試驗測試結果顯示，當千斤頂力量達到 156 kN 時，試體中間上翼板因擠壓而產生分層破壞 (Delamination)，這時試體的最大位移為 90 mm。由於從 Sun & Chou (2012)的試驗結果中顯示了全玻纖複合材料翼型梁具有良好的力學特性，因此在本研究中，吾人使用他們所測試過的全玻纖複合材料翼型梁來做為



兩種橋面格柵板的支撐，並於梁上翼板上鑽孔，以便固定橋面格柵板，其詳細開孔處如圖 3.1 所示。



### 3.2.2 鋼橋面格柵板

鋼橋面格柵板為台灣有馳有限公司所製造，其所使用之材質為 ASTM A36 鋼板，整體試體尺寸 1000 mm×996 mm，主桿尺寸 65 mm×6 mm，橫桿尺寸 6 mm×6 mm，試體 (1000 mm×996 mm) 總重量為 102 kg (詳細資訊列於表 3.1)。為能夠與複合材料翼型梁連接，特於鋼橋面格柵板底部加鉸四片厚 8 mm 的 A572 Gr.50 鋼板，並於鋼板上鑽孔，以便能使 F10T M6 螺栓通過，其試體焊接圖及完工照如圖 3.2 及照片 3.2 所示。

### 3.2.3 玻璃纖維橋面格柵板

玻璃纖維橋面格柵板則為中國大陸南通美固複合材料有限公司所製造，其主要是由梯形狀主桿及梯形狀橫桿交錯製成，整體試體尺寸 1020 mm×1020 mm，主桿尺寸 50 mm×(12/9.5) mm，橫桿尺寸 50 mm×(10/6) mm，試體總重量為 47 kg (詳細資訊亦列於表 3.1 中)，約為同尺寸鋼橋面格柵板的 50% 重量。

此種格柵板在製程上一般採用模組化製程，首先，分別先將玻璃纖維沿著格柵板主桿及橫桿位置交替擺放，並使用環氧樹脂及一些填充料來進行膠結。基於工業生產需求，為了加快其膠結時間，一般上都會採用加熱、製冷的方式來加速生產，以達到生產需求。在了解玻璃纖維橋面格柵板的製程後，從製程過程中可知基於絕大多數的玻璃纖維都只集中在橋面格柵板的主、橫桿上，因此一般上沿著這兩個方向上的勁度表現都比其他角度方向上的勁度表現來得佳。

除此之外，由於玻璃纖維橋面格柵板並非鋼製產品，無法進行鉸接，因此為了解決玻璃纖維橋面格柵板與複合材料翼型梁連接問題，在本研究中也使用扣件的

方式，製作了四支 8 mm 厚的 L 型扣件，並將其扣於格柵板橫桿上以作為固定作用 (如圖 3.3 及照片 3.3)。



### 3.2.4 輪胎接觸面積 (Tire Contact Area)

任一車輛載重一般都經由輪胎傳至橋面板，因此在真實試驗中如何模擬輪胎與橋面板接觸面積為一重要考量。如圖 3.4，根據美國公路橋梁設計規範 (American Association of State Highway and Transportation Officials，簡稱：AASHTO (1997) & (2007))，對於一般四輪貨車，其貨車載重傳遞方式可假設為貨車前二輪將會分配到貨車總重的 20%，而其他的 80% 則分別由後二輪所承擔；此外，根據 AASTHO 3.6.1.2.5，對於任一交通工具的輪胎接觸面積都可經由一轉化公式將輪胎與橋面板接觸面積轉化成一等效長方型平板面積，而此轉化公式如式 3.1：

$$\text{Tire Width (mm)} = P/142 \quad (3.1(a))$$

$$\text{Tire Length (mm)} = 165\gamma \left( 1 + \frac{IM}{100} \right) \quad (3.1(b))$$

其中， $P$  為設計輪胎載重，單位為  $N$ ， $\gamma$  為載重因子， $IM$  為動態力量補助百分比。(Dynamic Load Allowance Percent)

在本研究中經調查後，假設橋面格柵板上經過的貨車載重最大為 50 kN。由於本試驗中四組試體大小都約為  $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ ，而基於試驗試體的大小可知對於一般車輛而言，其前後輪及後後輪間距都遠大於試驗試體尺寸，因此若一輛貨車行經此試驗試體時，在試驗試體上僅有機會出現一個輪胎載重。基於這樣的理念，在考慮其最嚴重的狀況下，本試驗決定只將四輪貨車中的一個後輪載重做為我們的設計目標。根據 AASHTO 規範並考慮載重因子效應，可算得設計輪胎載重為：

$$\begin{aligned}
 P &= Load\ Factor \times Total\ Weight\ of\ Car \times \frac{0.8}{2} \\
 &= 1.75(50)(0.4) \\
 &= 35\ kN
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

在得到設計輪胎載重後，可從 AASTHO 規範第三章中的表 3.4.1-1 及表 3.6.2.1-1 中查得在一般狀況下  $\gamma = 1.75$ ,  $IM = 0.33$ 。將所有所得結果代入式子(3.1(a)) 及 (3.1(b)) 中，即可得輪胎接觸等效長方型平板面積約為  $400\ mm \times 250\ mm$ 。

### 3.3 材料試驗及材料性質

為了驗證廠商所給予的材料性質無誤，在本研究中也嘗試將兩種不同材料橋面格柵板的主桿裁出試片，並進行材料試驗(照片(3.4))，以測試其部分材料性質及強度為何，進而提高未來各項分析研究及有限元素程式之準確性。表 2.3 及 2.4 為經材料拉伸試驗後所測得之相關部分材料性質

針對於玻璃纖維橋面格柵板，由於其材料特性較為特殊，因此在進行完材料試驗後，我們亦可藉由廠商所提供的纖維和樹脂材料性質，再利用複合材料相關理論計算出玻璃纖維橋面格柵板的材料特性，其計算方法就如前章節 2.5.2.1 所示，從計算結果與試驗結果比對中顯示利用複合材料相關理論及廠商所給予的性質計算結果與試驗結果相符，證明其整體材料性質確為如此。

### 3.4 試體試驗構架裝置及加載歷時

#### 3.4.1 橋面格柵板試驗構架

本試驗於國家地震工程研究中心結構試驗室進行，試驗構架如圖 3.5 及照片 3.5 所示，為模擬橋梁現場實際狀況，本試驗分別使用兩根全玻纖複合材料翼型梁來做為兩種橋面格柵板試體的支撐。並運用四片鋼板將兩根複材梁固定於強力地板

上(照片 3.6)。而為模擬貨車後輪行經狀況，本試驗亦使用 AASHTO 規範，將設計輪胎載重轉化成一  $400\text{ mm}\times 250\text{ mm}$  的長方形平板，並利用門型構架及 500 kN 油壓制動器施力量予平板上，再由平板將力量傳至橋面格柵板。為減少平板邊緣與格柵板接觸而產生的應力集中現象，本試驗亦在平板及格柵板之間放置一片與平板同等大小的橡膠墊片，而其架設狀況如照片 3.6 所示。

### 3.4.2 油壓制動器

本研究在進行橋面格柵板加載試驗時，所提供施載力量的為一支 MTS 油壓制動器，其最大輸出力量為 500 kN，衝程限制為  $\pm 250\text{ mm}$ 。在試驗過程中，每當油壓制動器一移動，系統便會將油壓制動器的資料輸出連接至資料擷取系統，由擷取系統接收油壓制動器上輸出之力量及位移。此外，由於在本研究試驗中共有兩種不同的加載歷時需求，因此其相關加載速率將於本章下節 4.4.4 進行詳加敘述。

### 3.4.3 資料擷取系統

本研究所有試驗量測數據均藉由資料擷取系統收集，本試驗所採取之資料擷取系統為 InstruNet 100 資料擷取盒，系統共有 64 個頻道可供資料收集，同時配合 InstruNet World 軟體之操作，可適用於多種不同形式之量測儀器，而有關於量測儀器上之設定方式，皆依據 InstruNet World 軟體操作手冊進行設定。

### 3.4.4 試驗載重歷時

為了測試橋面格柵板在受到單一輪胎載重下的力學行為及驗證本研究於第二章中所提出之等效勁度評估方法及理論近似解的適用性。在此本研究中將會進行兩

種不同的試驗載重歷時來分別對兩種不同材料的橋面格柵板進行測試，以達到本研究預設之目的，其兩種試驗載重歷時及敘述分別如下所示：



#### 3.4.4.1 單向加載試驗

本研究中單向加載試驗採位移控制，其位移歷時為當油壓制動器位移未達到 2 mm 時，其施壓速率為 0.025 mm/sec，而當油壓制動器位移超過 2 mm 時，其施壓速率將會調整至 0.05 mm/sec；每當致動器多增加 0.5 mm 位移，試驗便會稍停下來，觀察格柵板、複合材料梁及螺栓接頭處是否有破壞情況，此動作將會一直持續，直到最後將格柵板壓至破壞，其單向加載試驗歷時示意圖如圖 3.6(a)所示。

#### 3.4.4.2 疲勞測試試驗

為了測試橋面格柵板在長期貨車行經下是否會發生材料疲勞現象，在此試驗中也規畫了疲勞測試試驗。由於此橋面格柵板的主要預設用途為替代現有緊急救難輕便橋鋼橋面板，以達到不須任何吊裝機具，僅用人力即可進行搬運及組裝的目的。基於僅為救難用途，因此在其生命週期內，橋面格柵板所歷經的車子行經次數勢必應遠小於一般公路橋面板需求。根據 AASHTO 規範 3.6.1.4.2，對於特殊橋面板系統，其可通過下列指標來推估橋面板於生命週期內單行車道上的日行車數量：

$$ADTT_{SL} = p \times ADTT \quad (3.3)$$

其中， $p$  為單行車道上車流量係數 (表 3.3)， $ADTT$  為在其生命週期內單方向平均日行車流輛，而  $ADTT_{SL}$  則為生命週期內單行車道上的平均日行車數量。

在此研究中，假設此橋梁僅為單行車道，而在每次災難發生後，輕便橋只會架設於災難現場兩個星期，且可連續使用 35 年，而在架設時間內(兩個星期內)，平均每十二分鐘便會有一輛客貨車經過，而一天則會有 120 輛客貨車通過，若此輕

便橋架設於現場兩個星期，便會有 1680 輛客貨車通過。因此若根據以上假設即可將輕便橋於每次架設時間內的車流量示意圖繪製成圖 3.6(b)。

根據以上假設並利用式(3.3)既可計算出此橋面格柵板在生命週期內(每年架設一次，一共可用 35 年)將會有 50400 輛車經過。為求方便起見，在此疲勞測試試驗中，我們預計將會進行 50000 次的反覆載重，而其反覆載力量重範圍則根據 AASHTO 規範計算而得。根據 AASHTO 3.6.1.4.2，對於疲勞測試中反覆載重的最大施力  $P_{\max}$  可用式(3.4)進行評估：

$$P_{\max} = 0.75[LL(1+IM)] \quad (3.4)$$

其中， $LL$  未乘以任何載重係數的設計活載重， $IM$  為動態力量補助百分比。經式(3.2)計算後，並將載重係數  $\gamma$  視為 1，在此研究中， $LL$  為 20 kN，而  $IM$  經 AASHTO 表 3.6.2.1-1 查得為 0.15，代入式子中即可得疲勞測試中的最大施力  $P_{\max} = 17.25 \approx 20$  kN，至於疲勞測試中的最小施力則採  $0.1 P_{\max} = 2$  kN，其力量加載示意圖如圖 3.6(c)。

### 3.4.5 試驗量測規劃

本試驗中為求取橋面格柵板的整體變位及主桿軸應變，分別於橋面格柵板架設了 9 個位移計及 13 個單軸應變計，此外為量測複合材料梁上翼板於試驗過程因載重施加而發生的扭轉程度為何，我們也分別於複合材料梁中間上下翼板間另架設了 4 個位移計，以量測其在試驗過程上翼板的扭轉程度，而其位移計及應變計架設位置如圖 3.7 及圖 3.8 所示。在圖 3.7 及圖 3.8 中，單軸應變計及位移計以 S 及 D 為標示，而圖中第二字母 B 及 T 則代表其應變計裝設位置，B 代表應變計裝於格柵板底部；而 T 則代表應變計裝於格柵板頂部，其真實架設狀況如照片 3.5。

### 3.5 試體製作、組裝與試驗方式

本研究試驗試體的正、側面示意圖及真實組裝照片如圖 3.5 及照片 3.5，為符合真實狀況，本試驗使用兩根間距為 0.7 m(梁腹板至腹板)的全玻纖複合材料梁作為支撐，並將兩種不同材料的橋面格柵板架設於複合材料梁上。由於複合材料梁長度不長，在試驗施力過程中，梁最大變位微乎其，因此在此研究中，我們直接將複合材料梁運用四片鋼板對鎖於強力地板上。此外為固定橋面格柵板，使梁及橋面格柵板之間不會發生分離現象，我們也委託廠商分別於複合材料梁上鑽孔(鑽孔位置如圖 3.1)，並用額外配件(焊接連接板及使用 L 型扣件)搭配 4 顆 F10T M6 螺栓及扳手手動將橋面格柵板及複合材料梁固定。當固定完畢後，再將橡膠墊片及 400×250 鋼板擺放至橋面格柵板正中央，以模擬貨車後輪胎的承壓面積，其組裝大致過程如照片 3.2 至 3.5 所示。

在所有試驗配置準備就緒後，即可依照 3.4.4 節提出的試驗載重歷時來進行試驗，在每次進行單向加載試驗前，為測試所有量測儀器是否正常運作，都會先施以彈性測試；既將油壓制動器啟動並放置於 400×25(鋼板上，再讓其以 0.025 mm/sec 的速率往下推至 2 mm，此時將擷取系統中的所有數據調出，繪製成圖觀察，以確保各裝置功能運作正常。此外為了避免油壓製動器發生爆衝的現象，在試驗時亦會於每個階段內設定位移及力量的限制，以避免試體因油壓製動器操作不當或故障而發生破壞。

在此試驗中，為了測試兩種不同材料橋面格柵板的極限強度，我們分別先對這兩種橋面格柵板進行了單向加載試驗，以測試其在強度上的表現為何。在充分了解兩種格柵板的大致行為後，接下來為了探討其實用性，我們也嘗試將此兩種橋面格柵板進行疲勞載重測試。若橋面格柵板在進行完疲勞載重測試後無發生任何損壞，我們則會再將其試體進行一次單壓加載試驗，以檢驗格柵板在經 50000 次反覆載重後，是否可依然保持原有的特性，而以下將會對兩項試驗結果一一介紹。

為了敘述上的便利，接下來於單壓試驗中的鋼橋面格柵板試體將會以 SG1 命名；於單壓試驗中的玻璃纖維橋面格柵板試體則以 FRPG1 命名。至於於疲勞測試中的所測試的鋼橋面格柵板試體則命名為 SG2；於疲勞測試中的所測試的玻璃纖維橋面格柵板試體則稱為 FRPG2。此外在此亦定義與主桿垂直的方向為長向 (Longitudinal Length)，其與本研究中所定義之 y 軸平行，而長向也恰好為車行方向；而與主桿平行的方向則稱為側向 (Transverse Length)。

## 3.6 SG1 單向加載試體試驗現象及結果分析

### 3.6.1 試驗現象

SG1 試體為鋼橋面格柵板，照片 3.5(a)為 SG1 試驗前的全景照片，在此單壓試驗中，全程加載方式採位移控制，其詳細試驗方式如 3.4.4.1 節所示。而有關 SG1 試體於試驗過程中的狀況描述如下：

- I. 由於複合材料梁上翼板本身製造不平整，因此在試體組裝完畢後，梁上翼板無法與 SG1 試體緊密接合在一起 (照片 3.8(a))
- II. 當千斤頂的位移達到 5 mm 時，縱然 SG1 試體整體無明顯變形，但是於 400×250 鋼板底下的橡膠墊片因受到鋼格柵板主桿的擠壓，而發生波浪狀的變形 (照片 3.8(b))
- III. 當千斤頂的位移達到 6.5 mm 時，左側複合材料梁上翼板中間內側 (最靠近施載處) 開始發生往內扭轉的現象，此時 SG1 試體變形漸為顯著 (照片 3.9(a))
- IV. 當千斤頂的位移達到 9 mm 時，SG1 試體開始有些微異常聲響產生，此時 SG1 試體整體變形日益顯著 (照片 3.9(b))
- V. 當千斤頂的位移達到 11 mm 時，因左側複合材料梁上翼板中間內側扭轉現象嚴重，深怕支撐瞬間破壞，以致壓壞 SG1 底下的量測儀器 (Dial Gauge)，因此試驗被迫停止。



VI. 當試驗結束並進行卸載後，發現 SG1 試體中央主桿及橫桿都產生了些微永久變形現象 (照片 3.9(c) 及照片 3.9(d))；此外為了觀察橋面板與複材梁接合處，我們也於試驗後將試體拆除，並進行觀察。觀察結果為縱然在如此大的載重下 (264 kN (大約為設計載重的 13 倍))，其接合處及配件並無發生任何破壞，唯於梁開孔處有少許被螺栓擠壓的痕跡 (照片 3.9(e) 及照片 3.9(f))

在測試完畢後，我們也將試驗中幾個重要時段的試驗結果列於表 3.4 及表 3.5 中，其中  $P$  為千斤頂力量， $P_{\max}$  為千斤頂最大力量， $\Delta_{20}$  及  $\Delta_{100}$  為當千斤頂力量為 20 kN、100 kN 時，於試體中央位置所量測到的最大變位 (位移計 D6 讀數)；而  $\Delta_{\max}$  則為在千斤頂最大力量下，於試體中央位置所量測到最大變位 (位移計 D6 讀數)。  $k$  則為橋面格柵板中央位置的勁度，其計算方式為利用千斤頂力量相除以橋面格柵板中央位置所量測到最大變位 (位移計 D6 讀數) 而得； $\varepsilon_{c,20}$  及  $\varepsilon_{c,100}$  為當千斤頂力量為 20 kN、100 kN 時，於格柵板主桿向位置所量測到的最大軸向壓應變；而  $\varepsilon_{c,\max}$  則為在千斤頂最大力量下，於格柵板主桿向位置所量測到的最大軸向壓應變； $\varepsilon_{t,20}$  及  $\varepsilon_{t,100}$  則為當千斤頂力量為 20 kN、100 kN 時，於格柵板主桿向位置所量測到的最大軸向拉應變；而  $\varepsilon_{t,\max}$  則為在千斤頂最大力量下，於格柵板主桿向位置所量測到的最大軸向拉應變。

## 3.6.2 試驗結果分析與理論驗證

### 3.6.2.1 試驗結果分析

此節主要藉由分析試驗數據來了解 SG1 試體在受等效單一輪胎載重下的力學行為及機制。在還未進行任何探討前，首先先訂立一個座標系統，以方便敘述。其座標系統將以板正中央為原點，往右及往上為正，反之則為負；而沿長向方向 (即與主桿垂直方向) 為  $y$  座標；沿側向方向 (即與主桿平行方向) 為  $x$  座標 (如圖 3.7)。

圖 3.9(a) 為 SG1 千斤頂最大力量和位移計 D6 的關係圖，從此力量位移圖中可發現此曲線的線性基本上呈現三種斜率的狀態；當力量小於 50 kN 時，因 SG1 試體中的主、橫桿斷面相差甚多，根據勁度分配原理，在橫桿還來不及分散力量的當兒，其大部分的力量便早已被鄰近的幾根主桿所承受，因此造成曲線線性斜率較緩；而隨著力量的漸增，橫桿的勁度提供漸漸穩定，將力量分散給更多主桿來共同承受，因此其曲線線性斜率便逐漸變陡，並維持在某一定值，而當力量到達大約 220 kN 時，由於 SG1 試體正中央部分主桿漸漸進入降伏階段，因此造成試體有軟化的趨勢，整體板勁度開始下降，造成曲線斜率變緩，此現象一直持續直到當千斤頂力量達到 264 kN 時，試驗因所用以支撐格柵板之複合材料翼型梁變形顯著，深怕支撐瞬間破壞，以致壓壞 SG1 底下的量測儀器，因此試驗被迫停止，此時鋼格柵板最大位移為 7.1 mm。若我們將側向及長向所佈置之位移計與其佈置位置繪製成圖即可得圖 3.9(b)及 3.9(d)，圖中的五條線分別為當千斤頂力量為 20 kN、50 kN、100 kN、186 kN 及 264 kN 時，沿著板正中央側向及長向上的變形分佈圖。若將此二圖的整體變形來進行比較，可看出在相同力量下，長向變形分佈圖(圖 3.9(d))的整體變形趨勢不如側向變形分佈圖(圖 3.9(b))的整體變形趨勢來得佳，說明在相同力量下，SG1 試體在長向上的橫桿斷面因過小，以致其無法有效地將力量分散，造成一旦遠離力量加載處(即板中央)，其所量測得到的 SG1 試體長向位移就產生疾數下降的趨勢(如圖 3.9(d))。此外此種現象亦可於 SG1 試體的力量應變圖中發現(圖 3.10(a)及圖 3.10(c))，圖 3.10(a)為 SG1 試體於同一根主桿(圖 3.7 中的標示 A 桿件，即  $y=15$  mm 處)，不同斷面上(圖 3.7 中的應變計 SB1、ST1、SB6 及 ST6 處)所量得主桿軸向應變對千斤頂力量繪製而成的圖，而同理，圖 3.10(c)則為 SG1 試體於同一根主桿(圖 3.7 中的標示 B 桿件，即  $y=138$  mm 處)，不同斷面上(圖 3.7 中的應變計 SB2、ST2、SB8 及 ST8 處)所量得主桿軸向應變對千斤頂力量繪製而成的圖，在此二圖中應變部份，正號代表受拉，負號則為受壓。在這二圖中同樣也顯示了隨著遠離力量加載處，SG1 試體中得主桿拉壓應變便會有著十分顯著的差異性，說明 SG1 試體橫桿並無法將力量分散，帶動更多主桿一同抵抗變形量。

除此之外在圖 3.10(e)及圖 3.10(g)則為在不同力量下，SG1 試體中 SB1 對 ST1 以及 SB2 對 ST2 上的斷面應變變化圖，若觀察此二圖中可發現，縱然在位置上的不同，但其二桿的中性軸 (Neutral Axis) 在不同力量下都大略落於 1/2 板厚，說明 SG1 試體中性軸有可能也落於此範圍中。



### 3.6.2.2 理論驗證

為了驗證本研究第二章所提出橋面格柵板理論近似解的可行性及兩種等效勁度評估方法的適用性，在本小節中，吾人將會以實際試驗結果與本研究中所提出的分析方法進行比較，以驗證其理論之可行性。由於在全程試驗中，SG1 試體的降伏現象並不太明顯，因此在理論分析裡，我們將其反應全程視為彈性階段來分析。由於 SG1 試體與前章節 2.5.1 鋼橋面格柵板計算例子中的演算模型相同，因此在此直接沿用其等效撓曲勁度計算結果(式(2.164)及式(2.165))。根據式(2.164)及式(2.165)，發現此二方法所計算出的等效撓曲勁度都落於 2.3.2.3 節中的 Case 2:  $(D_{12} + 2D_{66})^2 = D_{11}D_{22}$ ，利用前章節針對 Case 2 連續薄板所導出的位移方程式 (式(2.84)及式(2.85))，並將此二等效撓曲勁度結果、相關數據及參數代入式(2.99)、式(2.104)、式(2.115)、(式(2.84)及式(2.85))，即可得到由兩種不同等效勁度評估方法所計算出的 SG1 試體位移。

圖 3.11 為利用學者 Timoshenko & Krieger 等效勁度評估方法(1959) 與 Case 2:  $(D_{12} + 2D_{66})^2 = D_{11}D_{22}$  位移方程式所繪出的 SG1 試體 3-D 變形狀況。而圖 3.12 則為本研究所提出之 SCF 等效勁度評估方法 (Proposed Method) 與 Case 2:  $(D_{12} + 2D_{66})^2 = D_{11}D_{22}$  位移方程式所繪出的 SG1 試體 3-D 變形狀況。為比較本研究理論近似解對於 SG1 試體整體變形預測的有效性，吾人可將圖 3.11 及圖 3.12 中的最大位移輸出並與試驗中 SG1 試體的最大位移進行比較，其結果將列於表 3.6 及圖 4.13(a)中。從表 3.6 中可看出對於兩種勁度評估方法而言，利用 Timoshenko & Krieger 勁度評估方法(1959)搭配連續板位移方程式所計算之結果具有較佳的準確度，且其準確度將隨著力量的增加，而漸漸逼近試驗中的最大位移，說明運用

Timoshenko & Krieger 等效勁度(1959)觀念來對於 SG1 試體行為預測具有非常良好的效果；而對於 SCF 勁度評估方法(Proposed Method)而言，其表現雖不如前者，但尚可接受。


此外為觀察理論近似解的整體表現，我們也將理論近似解中板正中央側向及長向上位移計算結果輸出，並與實驗結果進行比較，其比較圖如圖 3.13(a)及圖 3.14 所示。圖 3.14(a)、圖 3.14 (c)、圖 3.14 (e)、圖 3.14 (g) 分別為當力量為 20 kN、50 kN、100 kN 及 264 kN 時，沿著板正中央側向的所計算出的理論近似位移解(包含 Timoshenko & Krieger(1959)及 Proposed Method)與實驗位移值。而圖 3.14(b)、圖 3.14 (d)、圖 3.14 (f)、圖 3.14 (h)則為當力量為 20 kN、50 kN、100 kN 及 264 kN 時，沿著板正中央長向的理論近似位移解(包含 Timoshenko & Krieger(1959)及 Proposed Method)與實驗位移值比較。從圖 3.14 中可看出在側向上，兩個理論近似解的整體預測表現還算不錯，其不但可預測到 SG1 試體板中央側向方向上的整體變位趨勢，而且 Timoshenko & Krieger(1959)還能準確的將 SG1 試體最大變位求出；然而在長向上，縱然兩種理論近似解所得變形趨勢相同，但是若與試驗值比較，其二整體表現就僅差強人意，說明此種理論近似解對於 SG1 試體位移行為預測尚有改進空間。

## 3.7 FRPG1 單向加載試體試驗現象及結果分析

### 3.7.1 試驗現象

FRPG1 試體為玻璃纖維橋面格柵板，照片 3.5(b)為 FRPG1 試驗前的全景照片，在此單壓試驗中，全程加載方式同樣採位移控制，且詳細試驗方式與 SG1 試體相同。而有關 FRPG1 試體於試驗過程中的狀況描述如下：

- I. 同樣地，在本次試驗中複合材料梁上翼板依然有製造不平整的問題，因此在試體組裝完畢後，我們於梁上翼板及 FRPG1 試體中塞入鋁片，以增大其接觸面積(照片 3.10(a))。

- 
- II. 當千斤頂的位移達到 5 mm 時，左側複合材料梁上翼板中間內側 (最靠近施載處) 開始發生些微往內扭轉的現象。
  - III. 當千斤頂的位移達到 10 mm 時，FRPG1 試體開始不時會有異常聲響產生，此時 FRPG1 試體整體變形日益顯著 (照片 3.10(b))。
  - IV. 當千斤頂的位移達到 13 mm 時，左側複合材料梁上翼板中間內側 (最靠近施載處) 扭轉現象顯著。此時位移計所量測到的最大位移早已超越千斤頂移動位移 (照片 3.10(c))。
  - V. 當千斤頂的位移達到 17 mm 時，藉由肉眼就可看出 FRPG1 試體的整體變形。此外，沿著長向方向最外圍的橫桿也因中間載重往下壓而發生往上翹的現象 (照片 3.10(d) 和照片 3.10(e))。
  - VI. 當千斤頂的位移達到 19 mm 時，因左側複合材料梁上翼板中間內側扭轉現象嚴重，此外於試驗過程中也陸續聽到類似於纖維斷裂的聲音，深怕其瞬間產生破壞，以致壓壞 FRPG1 底下的量測儀器 (Dial Gauge)，因此試驗被迫停止。
  - VII. 當試驗結束並進行卸載後，發現 FRPG1 試體沿橫向及長向方向上幾乎無任何的永久變形產生 (照片 3.11(a))；此外，我們也於試驗後將試體拆除並進行觀察。同樣地，在 FRPG1 所承受的最大的載重下 (186 kN (大約為設計載重的 9 倍))，其接合處及配件依然完好，無任何損壞跡象 (照片 3.10(f))。

## 3.7.2 試驗結果分析與理論驗證

### 3.7.2.1 試驗結果分析

圖 3.9(a) 為 FRPG1 千斤頂最大力量和位移計 D6 的關係圖。同樣的，當千斤頂最大力量達到 186 kN 時，試驗亦因所用以支撐格柵板的複合材料翼型梁變形過於顯著，而被迫停止。此時複材格柵板中央最大位移為 20 mm。從此力量位移圖中可看出 FRPG1 於力量正下方之格柵板的力量位移曲線線性斜率非常一致，並無

勁度遲滯現象，說明此種格柵板因橫桿勁度較大且排列較為緊密（相對於 SG1 橫桿），導致其在力量傳遞行為上較佳。

此外，我們同樣也將 FRPG1 試體沿著板中央側向及長向方向上所佈置的位移計對其配置位置繪製成圖。其結果列於圖 3.9(c)及圖 3.9 (e)中，圖中的四條線分別為當千斤頂力量為 20 kN、50 kN、100 kN 及 186 kN 時，沿著板正中央側向及長向上的變形分佈圖。若將此二圖的整體變形趨勢進行比較，可看出 FRPG1 試體可有效地將中間所受的載重傳至更多的主桿來一同承擔，以致其就算遠離力量加載處，其所量測得到的位移也不會因為無載重於上方而產生數位位移下降的趨勢（如圖 3.9(e)）。另外此種現象亦可於 FRPG1 試體的力量應變圖中發現（圖 3.10(b)及圖 3.10 (d)），縱然此二圖中所用以量測應變計的架設位置大約相差了 127 mm，但是其在兩個不同點的斷面上所量測到的應變量卻幾乎相同，說明此種格柵板的傳力機制佳。另外圖 3.10(f)及圖 3.10(h)則為在不同力量下沿著 FRPG1 試體中央(圖 3.8 中標示 A 桿件上的 SB1 VS ST1)及  $y=133$  mm 處(圖 3.8 中標示 B 桿件上的 SB2 VS ST2)的主桿斷面應變變化圖，觀察此二圖可獲知 FRPG1 試體的中性軸 (Neutral Axis)將會隨著力量的增加而往上提升。除此之外，從其應變變化圖亦可看出 FRPG1 試體的中性軸並不落於 1/2 板厚處。

### 3.7.2.2 理論驗證

由於複合材料一般屬於脆性材料，因此在破壞前，其板中央處力量位移曲線將會呈現一直線變化。而在本論文理論分析中，我們只對 FRPG1 試體於彈性階段的行為進行理論推導，並無考慮引入任何複合材料相關破壞理論。同理，由於 FRPG1 試體亦與 2.5.2 節中玻璃纖維橋面格柵板計算例子的演算模型相同，因此在此也直接沿用其等效撓曲勁度計算結果(式(2.172)及式(2.173))。而根據所計算出的兩個等效撓曲勁度結果(Timoshenko & Krieger (1959) 及 Proposed Method)，發現其二等效撓曲勁度也同樣落於 2.3.2.3 節中的 Case 3:  $(D_{12} + 2D_{66})^2 < D_{11}D_{22}$ ，利用 Case 3 所導出的位移方程式(式(2.115)及式(2.116))，並將所有相關係數求出(式(2.146))、

式(2.159)、式(2.160)、式(2.115)及式(2.116))，既可得 FRPG1 試體在任一點上的位移為何。圖 3.15 及圖 3.16 分別為利用學者 Timoshenko & Krieger 等效勁度評估方法(1959)與 Case 3:  $(D_{12} + 2D_{66})^2 < D_{11}D_{22}$  位移方程式及本研究所提出之 SCF 等效勁度評估方法(Proposed Method)與 Case 3:  $(D_{12} + 2D_{66})^2 < D_{11}D_{22}$  位移方程式所繪出的 FRPG1 試體 3-D 變形狀況。

同理，將圖 3.15 及圖 3.16 中的最大位移輸出並與試驗中 FRPG1 試體的最大位移進行比較，其結果將列於表 3.6 及圖 3.13(b)中。從表 3.6 顯示，若將 Timoshenko & Krieger 勁度評估方法(1959)搭配連續板位移方程式所計算之結果與試驗值比較，可發現其將會有嚴重高估的現象發生，而最大誤差可達到 37%。因此為了探究造成此誤差的主要來源為何。在本研究中將會嘗試以試驗的角度來進行解釋。根據圖 3.10(f)及圖 3.10(h)的斷面應變變化圖顯示，FRPG1 試體於力量正下方附近兩個不同位置上的主桿中性軸都不盡相同，此外由於格柵板為一由許多桿件縱橫交錯組合而成的平板，因此若使用學者 Timoshenko & Krieger 勁度推估方法(1959) (式 2.3)，並忽略主、橫桿在同方向上的共同撓曲勁度貢獻，只單純以一根主或橫桿的  $\frac{EI_x}{b_1}$  或  $\frac{EI_y}{a_1}$  來做為格柵板的撓曲勁度，定會造成橋面格柵板整體勁度高估或低估的現象發生，以致所表現出來之位移量產生誤差，此解釋亦於學者 Huang et al.(2002)文獻中有所提及。

然而若將本研究中所建議的勁度評估方法(Proposed Method)搭配連續板位移方程式來進行位移預測，其可發現所計算出之結果與 FRPG1 試體的最大位移試驗值相差甚小，且幾乎完全可準確的預測出 FRPG1 試體的最大位移。

此外為了觀察這兩種理論近似解(包含 Timoshenko & Krieger(1959)及 Proposed Method)的整體表現，我們也將理論近似解(包含 Timoshenko & Krieger(1959)及 Proposed Method)中板正中央側向及長向上位移計算結果輸出，並與實驗結果進行比較，其比較圖如圖 3.13(b)及圖 3.17 所示。圖 3.17(a)、圖 3.17 (c)、圖 3.17 (e)、圖 3.17 (g)分別為當力量為 20 kN、50 kN、100 kN 及 186 kN 時，沿著

板正中央側向的理論近似位移解與實驗位移值比較；而圖 3.17(b)、圖 3.17 (d)、圖 3.17 (f)、圖 3.17 (h)則為當力量為 20 kN、50 kN、100 kN 及 186 kN 時，沿著板正中央長向的理論近似位移解與實驗位移值比較。從圖 3.18 中可看出，無論在側向還是長向上，SCF 勁度評估方法(Proposed Method)搭配連續板位移方程式所計算出之結果表現都十分的優異，其不但可準確的預測到 FRPG1 試體板中央的最大變位，而且於其他點的變位趨勢也可大略描繪出來，說明本研究中所建議的勁度評估方法(Proposed Method)搭配連續板位移方程式所計算出之結果對於預估 FRPG1 試體的位移量具有良好的準確性。

### 3.8 兩組試驗結果比較

本節主要為探討 SG1 及 FRPG1 試體在受到相同單向加載試驗歷時下的試驗結果比較，其內容為：

#### 1) 試體橫桿對格柵板整體受力行為不同的比較

圖 3.18(b)為當力量為 20 kN、100 kN 時，沿著圖 3.7 及圖 3.8 中標示 A 的主桿所測得的主桿應變變化圖。而圖 3.18(c) 則為在相同千斤頂力量下，沿著圖 3.7 及圖 3.8 中標示 B 的主桿所測得的主桿應變變化圖。若比較圖 3.18(b)及 3.18(c)，我們可看出在相同力量及 x 軸位置下，FRPG1 於不同 y 軸位置上的應變量都無太大差距；反之 SG1 的則有相當大差距變化。這說明因兩種試體橫桿相對其主桿的斷面相差甚遠，以致當力量施加於板中央時，SG1 因橫主桿斷面比例及橫桿數量相對 FRPG1 而言少很多，而造成一旦遠離力量加載處，其主桿的應變產生顯著的下降。此外這也隱含著 SG1 試體的主要整體板勁度貢獻僅來自於載重施加處底下的主桿；而對於 FRPG1 試體而言，情況則恰恰相反，FRPG1 橫桿斷面因與主桿斷面大小雷同，且排列較密，導致在相同力量下有更多的主桿來共同承擔，進而造成 FRPG1 於不同 y 軸位置上的應變量都無太大差距。



圖 3.18(d)則為當力量為 20 kN 及 100 kN 時，沿著圖 3.7 及圖 3.8 中標示 C 線上不同主桿上的所量測到軸向應變變化圖。固然在不同力量大小下，FRPG1 沿著側向方向所表現出的應變變化曲線都極為類似，且在各點應變值都大於零，說明 FRPG1 大多數主桿在力量為 20 kN 至 100 kN 之間都處於受力狀態，共同提供整體板勁度。然而對於 SG1 而言，當力量處於 20 kN 時，SG1 試體中只有大約 1/3 的主桿處於應變值大於零的狀態，而隨著力量的逐漸增加，SG1 試體的受力主桿數也逐漸增加，然而其增加幅度不太一致。而此現象也恰好解釋了為何圖 3.9(a)中 SG1 試體的力量位移曲線具有三線性斜率特性。

## 2) SG1 與 FRPG1 試體整體勁度比較

圖 3.9(a)為兩種試體於單向加載試驗中千斤頂力量對位移計 D6 所繪製之曲線圖。若將此圖中二曲線來進行線性回歸，並取其線性斜率來當作力量正下方格柵板之勁度，其回歸後的結果將如圖 3.21(a)及圖 3.21(c)所示。在圖中其二試體回歸後的勁度值大約相差了 4.15 倍，分別為 38.915 kN/mm 及 9.379 kN/mm。吾人覺得 SG1 及 FRPG1 在勁度上之所以會有如此大的差距主要在於 SG1 在主桿斷面及材料彈性勁度上都大於 FRPG1，因此造成了 SG1 整體勁度表現上優於 FRPG1。然而若以整體傳力機制的有效性而言，FRPG1 將遠勝於 SG1。

而圖 3.9(f)、圖 3.18(a)則為當力量為 20 kN 及 100 kN 時，兩種試體沿著板中央側向及長向的量測位移分佈圖比較。觀察這些圖亦可看出因整體勁度的差異，造成此兩種試體在相同力量下，各點位移量均相差甚多。

## 3.9 SG2 疲勞測試載重試驗結果分析及比較

在已知兩種橋面格柵板整體的力學行為及彈性反應後，為了測試其耐久性及實用性，本試驗也分別針對此兩種橋面格柵板規劃了疲勞測試載重試驗。其疲勞測試載重試驗的相關反覆力量大小、施加次數如 3.4.4.2 節所示。若經疲勞測試載重試驗後，其試體無發生任何異樣，則將試體再進行一次單向加載試驗，以探討其試體

在經 50000 次反覆載重後的其單壓行為是否會有改變。而以下則針對 SG2 試體於疲勞測試載重試驗中的一些現象進行描述。



### 3.9.1 試驗現象


SG2 試體為鋼橋面格柵板，其試驗前的全景照片與 SG1 試驗相同(照片 3.4(a))。在此疲勞試驗中，全程加載方式採力量控制，力量施加週期為 3 Hz，而詳細試驗方式列於 3.4.4.2 節所示，而有關 SG2 試體於試驗過程中的狀況描述如下：

#### 3.9.1.1 疲勞測試載重試驗現象

- I. 當反覆載重施加至 10500 次時，油壓制動器疑因油壓運送不穩定而產生了高頻的共振現象，造成力量瞬間爆衝。此時於擷取系統中所量測到的最大力量為 84 kN。這時為求保險起見，試驗立即暫停並針對試體進行檢查。經檢查後，發現試體並無任何損傷，僅部分量測儀器及千斤頂因受到高頻振動而產生位置改變的現象。在調整回原本位置後，試驗繼續進行。
- II. 而當反覆載重施加至 16500 次時，同樣狀況亦再發生。經檢查後，試體同樣並無任何損壞，試驗繼續進行。
- III. 經對 SG2 試體施加 50000 次反覆載重後，疲勞測試試驗結束。由於 SG2 試體並無發生任何破壞或材料疲勞現象，因此我們便將 SG2 試體再進行一次單向加載試驗。

#### 3.9.1.2 疲勞測試後再單壓試驗現象

SG2 試體於疲勞測試後再單壓試驗中的整體現象基本上 SG1 試體類同，所以在此就只針對一些較特別的現象進行敘述。

- 
- I. 當千斤頂位移達到大約 11mm 時，此時千斤頂力量為 300 kN，為了探討 SG2 試體的整體破壞模式為何，我們將 SG2 試體底下的所有量測儀器移除，此時 SG2 試體及複合材料梁上翼板內側早已變形顯著(照片 3.12)。
  - II. 當千斤頂力量達到 345 kN 時，力量加載區域下的複合材料梁腹板交接處發出類似撕裂的聲響。經觀察後，發現複合材料梁腹板交接處發生了破壞，其裂縫沿著腹翼板交接處沿伸，裂縫全長大約 30cm (照片 3.13(a))。在還沒將力量卸載時亦對 SG2 試體變形狀況進行觀察，其觀察結果為，SG2 的變形都只集中於力量加載處附近，一旦一遠離力量加載處，SG2 試體便幾乎無任何變形產生(照片 3.13(b)及照片 3.13(c))。
  - III. 當試驗結束並進行卸載後，發現 SG2 試體於卸載後擁有顯著的殘餘變形(照片 3.13(d))。而於載重施加處底下的橡膠墊片也因受到 SG2 桿件擠壓，而有些許痕跡(照片 3.13(e))；此外為了觀察橋面格柵板與複材梁接合配件，我們也於試驗後將試體拆除，並進行觀察。同樣地，所有接合配件並無發生任何破壞(照片 3.13(f))。

## 3.9.2 試驗結果分析與比較

### 3.9.2.1 疲勞測試試驗結果分析與比較

圖 3.19(a)為 SG1 試體於疲勞測試試驗中的加載歷時圖，其反覆載重力量加載週期為 3 Hz。若將每週期中的反覆載重對於位移計 D6 做圖即可得圖 3.19(c)。由於資料擷取系統在每一刻所紀錄到力量及位移大小並非一致，因此為了探討其在反覆載重下是否會出現疲勞現象，在此研究中便利用其線性斜率(即勁度)來進行探討。而圖 3.20(a)則為將每階段所紀錄到的千斤頂力量除以位移計 D6 位移所得到的格柵板在該點上的勁度。若觀察此圖可發現此圖於 10000 至 20000 次之間有勁度突然上升又下降的現象。其推估原因可能為因為千斤頂在試驗過程中發生了不正常的高頻振盪現象，以致千斤頂架設角度改變，進而造成於同等力量下，SG2 試體於力量正下方的勁度有所上升下降的現象發生。若忽略圖中勁度突上伸又下降的那部分，可

看出雖然 SG2 承受了 50000 次反覆載重，其在勁度表現幾乎沒有太明顯的下降趨勢。而從圖 3.20(c)也可看出，一旦超過 20000 次反覆載重後，其於不同力量施加次數下的最大力量位移圖都幾乎重疊於一起，說明 SG2 試體於試驗中在該點上的勁度並無太大的變化，符合本研究預設之期待。



### 3.9.2.2 疲勞測試後單壓試驗結果分析與比較

圖 3.22 及圖 3.23 則為 SG2 試體於疲勞測試後單壓試驗的結果。從二圖中顯示 SG2 試體在承受 50000 次反覆載重後再進行單壓所呈現出的行為與單純只進行單壓試驗的 SG1 行為幾乎相同。此外我們亦將 SG2 試體於試驗中一些重要階段的數據整理於表 3.4 及表 3.5。從此二表及圖 3.22、圖 3.23 中可看出 SG2 試體並未產生任何疲勞現象。此外從圖 3.22(b)至圖 3.22 (e)的力量應變圖中(應變計架設位置如圖 3.7)也可看出於試驗全程中，只有 SG2 試體正中央的主桿(圖 3.22(b))進入了較明顯的降伏階段，其餘的幾乎都還處於彈性階段。這隱含著若載重可持續增加，SG2 依然可承受更大的載重。而圖 3.23 則為在不同力量下，SG2 試體沿板中央側向及長向的位移分佈圖(如圖 4.7 中的標示 A 桿件處及 C 桿件處)，從此圖中顯示在歷經疲勞測試後再單壓的 SG2 試體與只單純進行單向加載試驗的 SG1 試體在特定力量下的位移分佈量大致相同，說明 SG2 在歷經 5 萬次反覆載重後，其試體材料並無發生顯著的疲勞現象。而此結果亦可於圖 3.21 的線性回歸結果種看出。此外若觀察圖 3.23 中右側圖的位移分佈，我們亦可發現 SG2 試體外圍主桿位移甚小，說明大部分力量就只集中於中間部分主桿來承受，因此若可改善此現象，SG2 試體整體表現定可更佳。

## 3.10 FRPG2 疲勞測試載重試驗結果分析及比較



### 3.10.1 試驗現象

FRPG2 試體為玻璃纖維橋面格柵板，其試驗前的全景照片與 FRPG1 試驗相同(照片 3.5(b))，而加載方式則與前節中 SG2 加載方式相同。以下則為 FRPG2 試體於試驗過程中的狀況描述。

#### 3.10.1.1 疲勞測試載重試驗及疲勞測試後再單壓試驗現象

由於 FRPG2 的疲勞測試載重試驗中並無任何特殊狀況發生，因此在經過 50000 次反覆載重後，FRPG2 試體並無發生任何破壞或材料疲勞現象。而在疲勞測試載重試驗結束後，同樣地，我們也將 FRPG2 試體再進行一次單向加載試驗。但是基於 FRPG2 試體於疲勞測試後再單壓試驗中的整體現象與 FRPG1 試體類同，所以於本節中就不加以進行敘述。

### 3.10.2 試驗結果分析與比較

#### 3.10.2.1 疲勞測試載重試驗及疲勞測試後再單壓試驗分析與比較

同理，圖 3.19(b)為 FRPG2 於疲勞測試試驗中的加載歷時，若我們將此五萬次反覆載重對於位移計 D6 繪製成圖即可圖 3.19(c)中的右側圖。而根據圖 4.19(d)的力量位移曲線，我們可將每階段的千斤頂力量除以位移計 D6 位移，即可算出格柵板於力量正下方的勁度，圖 3.20(b)則為 FRPG2 試體於 50000 次反覆載重中的該點上勁度變化反應，從此圖中可看出 FRPG2 在承受了 50000 次反覆載重後，其整體板勁度基本上都還維持得十分良好，並無太大的變化現象。而圖 3.20(c)右側圖則為在不同力量施加次數下 FRPG2 的最大力量位移圖，同樣地，其線性也都幾乎重疊於一起，說明 FRPG2 試體在實用耐久性方面或許也符合本研究預設之最小要求。

此外，為了進一步驗證其試體無任何疲勞現象發生，在進行完疲勞測試後，我們同樣將此試體再進行一次單壓試驗，並相關數據繪製成圖與 FRPG1 比較。圖 3.24 及圖 3.25 為 FRPG2 試體在疲勞測試後單壓試驗中的結果。從圖 3.24 及圖 3.25(a)中可看出在相同力量下，FRPG2 試體在相同點上的位移較單純只進行單壓試驗的 FRPG1 大。然而若我們觀察 FRPG2 試體板正中央主桿(應變計 SB1 位置處)及  $y=127\text{ mm}$ (應變計 SB2 位置處)的主桿斷面應力狀況(圖 3.22(b)至圖 3.22(g))，我們可發現縱然 FRPG2 試體中的位移狀況有增大的趨勢，然而其在應變相關圖中卻無任何顯著的增加趨勢。為了更進一步了解狀況，本研究也分別將 FRPG1 及 FRPG2 的千斤頂力量對位移計 D6 所量測的位移作圖，並將其進行線性回歸，在求取其勁度(斜率)，而此線性回歸結果如圖 3.21(c)及圖 3.21(d)。從圖中顯示於疲勞測試後再單壓的 FRPG2 試體勁度比單純只進行單壓的 FRPG1 試體勁度少了大約 8%，其值分別為  $9.379\text{ kN/mm}$  及  $8.619\text{ kN/mm}$ 。基於此現象，因此推估 FRPG2 試體於 5 萬次反覆載重後，其位移最大處材料(板中央)似乎已產生了些許的疲勞現象，造成該點上勁度下降了 8%。此外吾人亦將 FRPG2 及 FRPG1 試體於千斤頂力量為 20 kN、100 kN 及破壞時的一些相關數據列於表 3.4 及表 3.5 中，以利進行比較。

## 第四章 有限元素分析



### 4.1 前言

本章使用美國 Dassault Systemes 公司所研發的 ABAQUS 有限元素分析程式 (2010) 進行鋼及玻璃纖維橋面格柵板的非線性有限元素分析，以評估有限元素分析的可靠性，並進一步探討兩種橋面格柵板的受力行為及差異比較。本章 4.2 節為試體有限元素模型建立，4.3 節為有限元素分析結果，4.4 節為理論實用性驗證。

### 4.2 試體有限元素模型建立

由於本研究重點為橋面格柵板力學行為之研究，因此為了減少模型之複雜度，本研究就只將橋面格柵板納入有限元素分析中，並無特別考慮其他試驗裝置(複合材料梁及接合配件)。而為了與試驗結果比較，兩種試體模型皆採用與試驗試體相同之尺寸來進行有限元素模擬，其相關試體模型如圖 4.1 所示。而有關分析模型之建立、材料性質、接觸性質的細節及特性與分析設定，分述如下。

#### 4.2.1 結構模型

兩組試體的模型建立皆為利用 ABAQUS 有限元素分析程式內的組合指令 (Assemble) 將數十根長約 0.7 m 及 1 m 的主、橫桿按試體實際的間距交錯複製排列 (Linear Pattern)，再將其利用合併指令 (Merge) 組合而成，而其主、橫桿相關資訊及排列間距列於表 3.1 中，而已建立好的分析模型則如圖 4.1 所示。

在此模型中，為取得較佳的預測效果，所有模型中的構件皆採用三維二次結構元素來進行模擬，而每一個元素則採用擁有 20 個節點的磚元素 (C3D20)；在磚

元素上的每個節點都具有 3 個位移和 3 個轉角自由度。圖 4.2 為分析模型之網格圖，圖中的兩組試體模型之網格皆採用  $10\text{ mm} \times 10\text{ mm} \times 10\text{ mm}$  之立方體。

由於在本研究中主要探討的重點為橋面格柵板的力學行為，因此在分析模型中並無考慮其他構件 (FRP 翼型梁等)，就只單純將其橋面格柵板的支撐狀況簡化成簡支撐狀況來進行模擬。此外針對於載重施加處，本研究亦利用 ABAQUS 軟體中的 Partition Face 指令將其等效施壓面積 ( $400\text{ mm} \times 250\text{ mm}$ ) 於模型正中央處切割而出，並使用壓力方式將力量平均施予該等效面積上，以模擬試驗實際狀況，而其模型邊界條件及外力施加方式如圖 4.3 所示。

## 4.2.2 材料模型

模型中的材料性質乃按照材料試驗之強度結果及廠商所提供之材料性質輸入，而其兩種不同材料的橋面格柵板材料性質分述如下。

### 4.2.2.1 鋼橋面格柵板模型材料性質

鋼橋面格柵板模型中的所有桿件降伏強度皆採用鋼材拉力試驗之值，如表 2.4 所示，鋼材之彈性模數  $E$  採用  $199.2\text{ GPa}$ ，柏松比為  $0.3$ 。所有桿件皆採雙線性型為模擬之。圖 4.4 為模型所採用之鋼材材料性質曲線。

### 4.2.2.2 玻璃纖維橋面格柵板模型材料性質

由於玻璃纖維橋面格柵板主、橫桿內的纖維走向僅沿著桿長方向擺放，因此在有限元素模擬中亦將其主、橫桿模型以單層異向性材料性質來模擬。根據 ABAQUS 軟體中，若要設定一異向性材料的材料性質，其可通過彈性 (Elastic) 中的工程常數 (Engineering Constants) 來進行設定。在工程常數指令底下分別需要輸入 9



個材料參數，其分別為  $E_{11}$ 、 $E_{22}$ 、 $E_{33}$ 、 $\nu_{12}$ 、 $\nu_{13}$ 、 $\nu_{23}$ 、 $G_{12}$ 、 $G_{13}$  及  $G_{23}$ 。而對於複合材料而言，由於其纖維一般都只擺放在 1-2 平面上，因此可適度將 2 和 3 方向上的彈性性質假設為相等，故  $E_{22} = E_{33}$ 、 $G_{12} = G_{13}$ 、 $\nu_{12} = \nu_{13}$ 。而其餘材料參數則可分別從材料試驗 ( $E_{11}$  及  $\nu_{12}$ ) 及 2.5.2.1 節中的式(2.166)、(2.167)、(2.168)、(2.169)、(2.170)及(2.169)所得，其相關結果列於表 2.3 中。

### 4.3 有限元素分析結果

本研究有限元素分析主要模擬兩組已進行單向加載試驗的試體，其包含 SG1 及 FRPG1 試體。圖 3.13 為兩組試體於有限元素分析中力量對於最大位移所作之力量位移圖，從圖中可知，在同等力量施加下，試驗結果與兩組分析試體的最大位移反應相當一致，而本節之主要目的為分析 SG1 及 FRPG1 試體的整體行為，並藉由有限元素分析之結果與試驗結果進行比較，進而與第二章中之理論計算結果作驗證。表 4.1 為有限元素分析與試驗及理論計算結果之比較， $\Delta_{20}$  及  $\Delta_{100}$  為當千斤頂力量為 20 kN、100 kN 時，於試體中央位置所量測到的最大變位(位移計 D6 讀數)；而  $\Delta_{\max}$  則為在千斤頂最大力量下，於試體中央位置所量測到最大變位(位移計 D6 讀數)。 $\varepsilon_{c,20}$  及  $\varepsilon_{c,100}$  為當千斤頂力量為 20 kN、100 kN 時，於格柵板主桿向位置所量測到的最大軸向壓應變；而  $\varepsilon_{c,\max}$  則為在千斤頂最大力量下，於格柵板主桿向位置所量測到的最大軸向壓應變； $\varepsilon_{t,20}$  及  $\varepsilon_{t,100}$  則為當千斤頂力量為 20 kN、100 kN 時，於格柵板主桿向位置所量測到的最大軸向拉應變；而  $\varepsilon_{t,\max}$  則為在千斤頂最大力量下，於格柵板主桿向位置所量測到的最大軸向拉應變。

### 4.3.1 SG1 試體模型分析結果

由於從 SG1 單向加載試驗結果中獲知 SG1 試體在試驗全程中 (千斤頂最大力量為 264 kN) 並無顯著的降伏現象發生。因此在有限元素分析中，本研究就只針對其在彈性下的反應進行模擬，並無考慮 SG1 試體在非彈性下的行為為何。圖 4.4、圖 4.5 為 SG1 試體在力量為 100 kN 及 264 kN 時，於 ABAQUS 有限元素軟體中所分析出的 SG1 試體 3-D 變形圖，當力量為 100 kN 及 264 kN 時，其 SG1 試體最大變形為 2.83 mm 及 7.43 mm。若將 SG1 試體在不同力量下的最大位移與其對應到力量作圖即可得圖 3.13(a)。圖 3.13(a) 為 SG1 試體於理論、有限元素及試驗中千斤頂力量對於最大位移所繪之力量位移圖比較。從此分析結果中顯示，在彈性反應下，有限元素分析與 Timoshenko & Krieger (1959) 對於預測 SG1 試體的最大變位具有非常佳的預測效果，然而為了更進一步瞭解有限元素分析對於 SG1 試體整體變形的準確度為何，我們也從分析模型中將三個實際試驗量測位移點的變位輸出整理成表 4.2、圖 3.14(a)、圖 3.14(c)、圖 3.14(e) 及圖 3.14(g)，並與試驗及第二章中所提及的理論位移解進行比較，而其三個位移輸出點分別對應到的位置為圖 3.7 中的 D5、D6 及 D7 位移計的架設位置 (即文中所定義的側向)。根據表 4.2、圖 3.14(a)、圖 3.14(c)、圖 3.14(e) 及圖 3.14(g) 顯示，在同等力量下，本研究中所使用的計算方法 (有限元素分析、Timoshenko & Krieger(1959) 及 Proposed Method) 都與 SG1 試體於側向上的試驗量測位移相當吻合，而其中同樣以有限元素分析及 Timoshenko & Krieger (1959) 表現最佳。

此外，由於本研究第二章理論解對於 SG1 試體長向上的位移量預估並不理想，因此在此也將 SG1 試體有限元素模型中的長向變位輸出來進行探討。圖 3.14(b)、圖 3.14(d)、圖 3.14(f) 及圖 3.14(h) 為有限元素模型輸出之結果，從結果中可獲知對於有限元素模型而言，其因過度低估了 SG1 試體橫桿的傳力能力，造成 SG1 試體變位只集中於板中央處。若將其結果與試驗長向量測位移值比較，也可發現有限元素分析對於 SG1 試體在長向的位移表現也僅差強人意，無法準確預測到 SG1 試體各點上的變位。

在對於 SG1 有限元素模型中的位移表現進行探討後，接下來本研究亦將 SG1 試體有限元素模型中的主桿軸向應變輸出並於試驗中所量測到的應變值來進行比較。圖 4.6 及圖 4.7 為 SG1 試體模型於力量 100 kN、264 kN 時，SG1 試體主桿的軸向應變分佈圖及 Von-Mises 應力分佈圖。從此二圖中可看因 SG1 試體變形全數集中於板正中央，因此其主要應力應變也只集中於變位較明顯處。若將 SG1 試體有限元素模型中的主桿軸向應變加以整理，即可得表 4.1 中的結果。從表 4.1 的 ABAQUS 主桿軸向應變值與同根主桿試驗量測軸向應變值比較可發現，在相同力量下，ABAQUS 所計算到的主桿軸向應變都會比試驗量測值來得大，且其最大幅度多可達 24% ( $1-0.76=0.24$ )。

綜合上述所有與試驗整體反應的比對結果可知，SG1 試體有限元素模型在預測板側向方向上的最大垂直位移皆有相當不錯的準確度，然而在預測 SG1 試體主桿軸向應變值時，雖然 SG1 試體有限元素模型中應變都會有應變放大的趨勢，但其整體結果尚可接受。

### 4.3.2 FRPG1 試體模型分析結果

圖 4.8、圖 4.9 為 FRPG1 試體在力量為 100 kN 及 186 kN 時，於 ABAQUS 有限元素軟體中所分析出的 FRPG1 試體 3-D 變形圖，當力量為 100 kN 及 186 kN 時，其 FRPG1 試體最大變形為 10.54 mm 及 20.06 mm (表 4.1)。若將 FRPG1 試體在不同力量下的最大位移與其對應到力量作圖即可得圖 3.13(b)。圖 3.13(b)為 FRPG1 試體的理論、有限元素及試驗中千斤頂力量對於最大位移所繪之力量位移圖比較。從此分析結果中顯示，在試體收壓全程反應中，有限元素分析與本研究所提出之 Proposed Method 對於預測 SG1 試體的最大變位具有非常佳的預測效果，反觀於 SG1 試體行為預測中表現良好的 Timoshenko & Krieger 出現了勁度高估的現象，其主要原因可能為因忽略主、橫桿在同方向上的共同撓曲勁度貢獻，以致造成橋面格柵板整體勁度被高估或低估。然而為了更進一步瞭解有限元素分析對於 FRPG1 試體整體變形的準確度為何，我們同樣也從分析模型中將三個試驗實際量

測位移點的變位輸出整理成表 4.3、圖 3.17(a)、圖 3.17(c)、圖 3.17(e)及圖 3.17(g)，並與試驗及第二章中所提及的理論位移解進行比較，而其三個位移輸出點分別對應到的位置為圖 3.8 中的 D5、D6 及 D7 位移計的架設位置 (即文中所定義的側向方向上垂直位移)。根據以上整理後的結果顯示，在同等力量下，有限元素分析及 Proposed Method 對於 FRPG1 試體於側向上的試驗量測位移非常吻合，唯 Timoshenko & Krieger (1959)表現略微遜色。

此外，在探討完 FRPG1 試體有限元素模型在側向方向上的預估表現後，在此我們也同樣將 FRPG1 試體有限元素模型中的長向垂直變位輸出以進行探討。圖 3.17(b)、圖 3.17(d)、圖 3.17(f)及圖 3.17(h)為 FRPG1 有限元素模型長向垂直變位輸出結果，從結果中可獲知對於有限元素模型而言，一旦遠離板正中央處，其同樣具有錯估了 FRPG1 試體在長向垂直變位的問題，但是其長向上的整體板變形趨勢仍可大致描繪而出，這說明在有限元素模擬上，FRPG1 試體的整體表現比 SG1 試體來得好。

在對於 FRPG1 有限元素模型中的位移表現進行探討後，接下來本研究亦將 FRPG1 試體有限元素模型中的主桿軸向應變輸出並於試驗中所量測到的應變值來進行比較。圖 4.10 及圖 4.11 為 FRPG1 試體模型於力量 100 kN、186 kN 時，FRPG1 試體主桿的軸向應變分佈圖及 Von-Mises 應力分佈圖。從此二圖中可看因 FRPG1 試體變形全數集中於板正中央，因此其主要應力應變也只集中於變位較明顯處。若將 FRPG1 試體有限元素模型中的主桿軸向應變加以整理，即可得表 4.1 中的結果。從表 4.1 的 ABAQUS 主桿軸向應變值與同根主桿試驗量測軸向應變值比較可發現，在不同力量下，於 ABAQUS 中所輸出兩個主桿軸向壓應變都具有不錯的預測效果，然而對於 ABAQUS 中所輸出兩個主桿軸向拉應變則不太理想，而其絕對誤差值都大於 60%。在經過進一步探討後，吾人認為引起如此大誤差的相關原因可能為 FRPG1 試體上表面的間隙太小，以致在貼應變計過程中，難以確保應變計所貼位置確實平行於主桿軸向，進而造成誤差來源。

綜合上述所有與試驗整體反應的比對結果可知，FRPG1 試體有限元素模型在預測板各點的垂直位移可靠度上皆優於 SG1 有限元素模型試體，然而在預測 FRPG1 試體主桿軸向應變值時的表現則有待加強。



#### 4.4 參數分析及理論實用性驗證

從前節有限元素分析結果中可獲知其在模擬兩種橋面格柵板的力學行為上都具有相當程度的可靠性，因此為了更進一步驗證本研究第二章中所提出理論的實用性及橋面格柵板中各參數的相互影響程度，在此節中吾人將會以玻璃纖維橋面格柵板及本研究第二章中新提及的等效勁度評估方法 (Proposed Method) 為主軸，並運用有限元素分析及理論來分別進行求解及比較，以探討本研究理論之實用性及橋面各柵板中的參數影響為何。

本研究所要進行的 9 組模型細節及設計值分別列於表 4.4，而這 9 組模型的所有材料組成皆與本研究第三章所測試的玻璃纖維橋面格柵板 FRPG1 相同，唯不同之處在於我們將格柵板中主桿支數的多寡、主桿間距、橫桿間距的大小及邊界條件作了些許的調整，以探討各參數的影響程度為何，此外為了進行比較，我們也將模型 1 之相關數據作為比較指標，利用其所呈現出之數據來與其他模型數據進行比較，而所有模型試體的詳情也將會於下節中一一進行詳述。在參數研究中，模型命名方式則以橫主桿間距比、板邊界條件及整板尺寸做為命名方式，以模型 5 (1.5SSFF1.4) 為例，由於模型 5 的橫主桿間距比  $\frac{a_y}{a_x}$  為 1.5，邊界條件為兩端簡支撐，

另兩端為無支撐狀態，且整板尺寸  $\frac{b}{a}$  為 1.4，因此為了方便起見，在繪圖時，我們便將模型 5 命名為 1.5SSFF1.4。

#### 4.4.1 模型 1、2、5

如表 4.4，模型 1、2、5 分別為由 30、40 及 50 根主桿以相同間距排列而成的橋面格柵板，此系列模型除主桿支數及試體長度  $b$  (因受到主桿支數的多寡而改變) 不同外，其餘相關參數(主桿間距、橫桿支數、橫桿間距及邊界條件)皆相同，其目的在於探討主桿支數的多寡對於整體格柵板勁度的影響為何。表 4.5 則為經有限元素分析後之結果，在表中  $\Delta_{ABAQUS}$  為在相同力量及邊界條件下，不同模型經有限元素分析後之最大位移結果，而在  $\Delta_{ABAQUS}$  欄位中括弧部份則為相對模型 1 而言，其模型最大位移量的增減比例為何，負號表示位移減少，正號則為位移增加。從模型 1、2、5 的最大位移結果中可看出主桿支數的增加的確能夠增加整體格柵板的板勁度，使板最大位移下降，然而其勁度增加效率並不太明顯，且勁度增加幅度會隨著增加主桿支數而漸漸下降，說明橋面格柵板也同樣具有有效寬度之觀念，一旦超過了橋面格柵板的有效寬度，就算再增加主桿支數，也不能使得其格柵板最大位移有明顯的下降。

#### 4.4.2 模型 1、6、7、2、4

此系列模型除橫桿間距不同外，其餘相關參數(主桿支數、主桿間距及邊界條件)皆相同，其目的在於探討橫桿間距的多寡對於整體格柵板勁度的影響大小為何。而其結果如圖 4.12 所示。模型 1、6、7 為由 14 根、9 根及 5 根橫桿以不同間距排列而成的橋面格柵板，同理，我們也將經有限元素分析後之結果列於表 4.5 中，在表中  $\Delta_{ABAQUS}$  為在相同力量及邊界條件下，不同模型經有限元素分析後之最大位移結果。從模型 1、6、7 的最大位移結果中可看出若我們將格柵板的橫桿間距增加，其將會造成格柵板最大位移上升，然而其上升幅度並不太顯著。此外，為了更進一步確定橫桿的勁度貢獻不大，我們也再另行建立了兩組整板尺寸  $\frac{b}{a}$  大約為 1 得模型 (模型 2、4) 來探討。而在此兩組模型中，其反映出的結果與模型 1、6、7 相同。這

說明若將橋面格柵板橫桿間距增加，其將會造成橋面格柵板傳力能力下降，進而造成其最大位移上升，然而其對於格柵板整體位移表現影響並不太大。



#### 4.4.3 模型 6、9

模型 6、9 則為在相同整體板尺寸，不同主桿間距排列而成的橋面格柵板，其目的在於探討主桿間距對於整體格柵板勁度的影響大小為何。表 4.5 則為經有限元素分析後之結果，從表中模型 6、9 結果顯示，若橫桿間距不變，而將主桿間距增大一倍，其在相同力量及邊界條件下，模型 6 的板最大位移為 10.66 mm，則模型 9 的板最大位移則為 31.31 mm，其一共相差了大約 2.94 倍。而若將模型 1 之板最大位移 10.06 mm 也納入考慮，即可看出這三個同樣尺寸及力量施加的模型中，主桿間距對於橋面格柵板的整體位移行為的影響程度遠大了橫桿間距。而此效應也可於圖 4.12 中看出。在經過此項比較後，可得對於橋面格柵板而言，主桿間距大小為一十分重要之參數，其影響橋面格柵板整體位移行為的程度遠大於橫桿間距，此外從此分析中亦可獲知橋面格柵板的撓曲勁度貢獻絕多是來自於主桿，因此在相同材料重量及組成下，若想要將一橋面格柵板在受到力量下的最大位移最小化，其最有效的調整方法即是對於橋面格柵板主桿間距作適度調整。

#### 4.4.4 模型 2、3、1、8

如圖 4.13 及表 4.5，模型 2、3、1、8 為探討相同主、橫桿間距，不同邊界條件及主桿支數下的橋面格柵板最大位移變化。從模型比較結果中可看出在模型整板尺寸比  $\frac{b}{a}$  為 1 至 1.4 之間，其邊界條件的改變 (從 SSFF 變成 SSSS) 將不會對於格柵板的最大位移造成太大影響，此現象推估為在此整板尺寸比下 ( $\frac{b}{a}=1\sim 1.4$ )，此種玻璃纖維橋面格柵板的特性依然還屬於單向板特性，因此邊界條件的改變並不會對其位移反應造成太大影響變化。

#### 4.4.5 理論實用性驗證

為了驗證本研究理論實用性，吾人同樣也將上節中的五個有限元素模型的相關資訊(表 4.4)帶入本研究第二章所提及的橋面格柵板理論位移解來進行求解，以探討本研究理論可靠度為何。表 4.5 為經計算後之結果，而在表中  $\Delta_{Proposed}$  即為利用本研究理論位移解搭配橋面格柵板撓曲勁度調正因子法 (Proposed Method) 所計算出之各模型最大位移結果。從表中可看出在不同模型的最大位移下， $\Delta_{Proposed}$  都與有限元素分析結果  $\Delta_{ABAQUS}$  相近，說明本研究所提出之理論對於評估橋面格柵板最大位移量具有相當不錯的可靠度。



## 第五章 結論



### 5.1 結論

本研究提出了一套可評估不同材料橋面格柵板位移行為的理論分析方法，其可靠性佳，且運算速度相較於有限元素分析快。此外確保兩種橋面格柵板在力學行為上符合本研究之需求。本研究亦一共進行了四組試體，兩種不同的載重歷時，其中於單向加載試驗中的鋼橋面格柵板試體以 SG1 命名；於單向加載試驗中的玻璃纖維橋面格柵板試體則以 FRPG1 命名。於疲勞載重測試中所測試的鋼橋面格柵板試體則命名為 SG2；於疲勞測試中所測試的玻璃纖維橋面格柵板試體則稱為 FRPG2，而由於 SG2 及 FRPG2 於疲勞載重測試後並無任何破壞產生，因此本研究再將其二試體進行單向加載試驗，以測試其在疲勞測試後整體材料行為是否發生任何疲勞現象。而為了方便敘述，在此也將於疲勞測試後再進行單壓試驗的 SG2 試體命名為 SG2M；於疲勞測試後再進行單壓試驗的 FRPG2 試體命名為 FRPG2M。

在此試驗配置安排中，其中 SG1 及 FRPG1 為研究兩種不同材料橋面格柵板的力學行為及傳遞力量方式；SG2 及 FRPG2 則為研究其橋面格柵板在架設生命週期內車子行經對其材料疲勞之影響；而 SG1 及 SG2M 與 FRPG1 及 FRPG2M 則為研究橋面格柵板在疲勞測試前及疲勞測試後整體力學行為及傳遞力量方式是否會因其材料疲勞而有所改變。在進行所有試驗中，由於擔心量測儀器受損，因此所有試驗試體均無壓至破壞。此外，本研究也針對各試體之試驗結果，以探討及分析鋼及玻璃纖維橋面格柵板在板中央受到等效單一輪胎載重（即長方形塊狀載重）之力學行為，並配合有限元素軟體 ABAQUS 對各組試驗試體進行分析模擬，以驗證由第二章提出之理論可行性。

根據本研究之試驗結果以及有限元素分析，可歸納出一下幾點結論：

1. 在格柵板系統中，主桿一般為提供勁度，而橫桿則扮演著將力量分散給更多主桿來共同抵抗變形之角色。縱然 SG1 及 FRPG1 同為格柵板，且在位移表現上，SG1 優於 FRPG1，但是其二試體整體傳力機制卻不盡相同。SG1 試體因橫桿斷面相較主桿斷面小很多，因此在整體板勁度貢獻上僅靠著載重施加處底下附近的幾根主桿來提供，然後對於 FRPG1 而言，由於其橫桿斷面與主桿斷面大小雷同，且排列較密，因此在整體板勁度貢獻上其靠著橫主桿的分工，將傳至更多的主桿來共同承擔，因此在整體傳力機制上 FRPG1 優於 SG1。
2. 針對於兩種橋面格柵板疲勞載重測試部分，從試驗結果中顯示，SG2 試體於五萬次反覆載重施加下，其鋼材料並無任何疲勞現象產生；反觀 FRPG2 於五萬次反覆載重施加下，其同點上所量測的變位相對未進行任何疲勞測試的 FRPG1 試體變位增加了 8%，說明 FRPG2 試體在歷經五萬次反覆載重下便會有些許材料疲勞的現象發生。
3. 利用本研究所導出之理論位移方程式及等效勁度矩陣評估方法可有效的去預測兩種橋面格柵板在受到等效單一輪胎載重下的最大位移，且其計算速度遠比有限元素分析快許多。因此其有望作為日後橋面格柵板相關工程設計之初步評估依據。
4. 從有限元素分析軟體 ABAQUS 分析結果與試驗結果比對中顯示有限元素分析對於兩種橋面格柵板在彈性範圍下位移行為預測準確度都相當令人滿意，唯應變預測部份有應變放大之趨勢，然而整體結果尚在可接受範圍，因此整明可利用有限元素軟體來進行參數研究。
5. 從參數研究結果顯示，無論改變橋面格柵板中的主、橫桿支數或間距都會造成橋面格柵板在同等力量施加下的位移有所改變，其中以改變主桿間距效果最為明顯。若按其位移影響程度排列可得以下結果：  
主桿間距 > 主桿支數 > 橫桿間距  
此外，從參書研究中也得知在橫桿的撓曲勁度貢獻不大，因此在理論分析上可忽略橫桿對於整體板勁度貢獻。

6. 本研究也嘗試利用有限元素軟體 ABAQUS 建模，將其所計算出之最大位移結果作為基準，並利用第二章相關理論及本研究所建議之橋面格柵板新等效勁度評估方法 (Proposed Method) 分別對其來進行計算，從所有計算比對結果當中顯示，利用本研究相關理論所計算出之結果幾乎都與有限元素分析之結果吻合，說明其對於評估  $\frac{a_y}{a_x} > 1.5$  的玻璃纖維橋面格柵板最大位移量方面具有相當不錯的可靠度，然而由於並無對於所有假設橋面格柵板進行相關真實單壓試驗，故在理論真實可靠度上，尚須進行更多結構試驗以進一步驗證。


## 5.2 建議

1. 由於本研究中所提及的理論及等效橋面格柵板撓曲勁度評估方式就僅適用於  $\frac{a_x}{a_y} > 1.5$  及兩端為簡支撐，另兩端為無支撐狀況的單跨橋面格柵板。而實際上，若將其橋面格柵板用於工程實務上，其跨度定為單跨以上且邊界條件也遠比研究中所運用的邊界條件來得複雜許多，因此建議未來應可朝將此理論及橋面格柵板撓曲勁度評估方式擴展的目標進行，以使到此理論能適用於更多各種不同狀況的橋面格柵板力學行為評估上。
2. 由於試驗所需成本龐大，故本研究就僅針對兩種橋面格柵板進行試驗研究，而未來應可朝測試各種同種材料但不同主、橫桿間距橋面格柵板的方式進行，以驗證由第二及第四章中所提出的橋面格柵板等效撓曲勁度矩陣評估方法及 ABAQUS 參數研究結果是否可適用於任意符合條件之橋面格柵板上。

## 參考文獻



1. ABAQUS (2010), Standard user's manual version 6.10, Dassault Systemes Simulia Corp., Providence, RI, USA, 2010.
2. AISC (2005), Manual of Steel Construction Load and Resistance Factor Design, American Institute of Steel Construction, Chicago, IL, 2005.
3. AASHTO (1994), Standard Specifications for Highway Bridges (15<sup>th</sup> Edition), The American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO), Washington, D. C., U.S.A, 1994
4. AASHTO (2007), AASHTO LRFD Bridge Design Specifications (Forth edition), The American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO), Washington, D. C., U.S.A, 2007.
5. Biddah, A. (2005), "Structural Reinforcement of Bridge Decks using Pultruded GFRP Grating," *Journal of Composite Structures*, 74(2006); 80-88.
6. Bejgum, M. (2006), "Testing and Analysis of Heavy Duty Riveted Gratings," Master Thesis. Thesis Advisor: Menzemer C., University of Akron, Ohio, U.S.A.
7. Chen, H.J. and Tsai, S.W. (1996), "Analysis and Optimum Design of Composite Grid Structures," *Journal of Composite Materials*, 30(4): 503-534.
8. Huang, H., Michael, J.C., Dennis, R.M., Harry, W.S, and Victor, N.K. (2001), "Behavior of Open Steel Grid Decks for Bridges," *Journal of Constructional Steel Research*, 58(2002): 819-842.

- 
9. Ji, H.S., Byun, J.K., Lee, C.S., Son, B.J., and Ma, Z.J. (2010), “Structural Performance of Composite Sandwich Bridge Decks with Hybrid GFRP-Steel Core,” *Journal of Composite Structures*, 93(2011):430-442.
  10. Kollar, L.P., and Springer, G.S. (2003), *Mechanics of Composite Structures*, Cambridge University, 2003.
  11. Keller, T., and Schollmayer, M. (2003), “Plate Bending Behavior of a Pultruded GFRP Bridge Deck System,” *Journal of Composite Structures*, 64(2004):285-295
  12. Levy, M. (1899), “Sur L’equilibre Elastique d’une Plaque Rectangulaire,” *Compt Rend 129*, pp. 535-539
  13. Li, G., and Cheng, J. (2007), “A Generalized Analytical Modeling of Grid Stiffened Composite Structures,” *Journal of Composite Materials*, (2007) 41:2939
  14. Pierce, M.J. (2005), “Evaluative Testing of a Novel Weldless Open Steel Grid Deck System.” MS thesis, Thesis Advisor: Christopher J.E., University of Pittsburgh, Pennsylvania, U.S.A.
  15. Reddy, J.N. (2004), *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shell: Theory and Analysis (Second Edition)*, CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, U.S.A, 2004.
  16. Timoshenko, S, and Krieger, W. S. (1959), *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York, U.S.A, 1959.
  17. Vinson, J.R., Sierakowski, R.L. (1986), *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*,” Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1986.
  18. Zhou, A. (2002), “Stiffness and Strength of Fiber Reinforced Polymer Composite Bridge Deck Systems,” Doctoral Dissertation, Dissertation Advisor: John J. L., Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, U.S.A.

- 
19. 陳逸 (2011) 「玻璃纖維橋面板與鋼梁接合行為研究」，碩士論文指導教授：  
周中哲，國立台灣大學土木工程系。(in Chinese)
  20. 周中哲，陳逸 (2013) 「玻璃纖維橋面板與鋼梁剪力接合設計及實驗評估」結構  
工程，第二十八卷，第一期，99-116 頁。(in Chinese)
  21. 周中哲，陳映全 (2012) 「預力雙核心自復位斜撐發展與耐震實驗」結構工程，  
第二十七卷，第三期，108-126 頁。(in Chinese)。
  22. 周中哲、陳逸 (2012) 「玻璃纖維橋面板與鋼梁剪力接合設計及實驗評估」，中  
華民國第十一屆結構工程研討會暨第一屆地震工程研討會，台中，台灣。
  23. 孫丕凡 (2012) 「高分子複合材料翼型梁螺栓結合試驗」，碩士論文指導教授：  
周中哲，國立台灣大學土木工程系。(in Chinese)
  24. 孫丕凡、周中哲、張國鎮、葉芳耀、宋裕祺、劉楨業、洪曉慧、尹世洵、邱毅宗  
(2012) 「高分子複合材料翼型梁螺栓接合試驗」，中華民國第十一屆結構工程  
研討會暨第一屆地震工程研討會，台中，台灣。

表 2.1 鋼及玻璃纖維橋面格柵板理論分析模型參數

|   | Steel Grating Decks      | GFRP Grating Deck                   |
|---|--------------------------|-------------------------------------|
| <b>Plate Panel Size</b>                   | 700 mm × 996 mm × 65 mm  | 700 mm × 1028 mm × 50 mm            |
| <b>Main Bar Dimension</b>                 | 6 mm × 65 mm (R.B)       | (12/9.5) mm × 50 mm (T.Z)           |
| <b>Idealized Main Bar Dimension</b>       | 6 mm × 65 mm (R.B)       | 10.75 mm × 50 mm (R.B)              |
| $I_{Main\ Bar}$                           | 137312.5 mm <sup>4</sup> | 111979.2 mm <sup>4</sup>            |
| <b>Num. of Main Bar</b>                   | 34                       | 41                                  |
| <b>Secondary Bar Dimension</b>            | 6 mm × 6 mm (R.B)        | (10/6) mm × 50 mm (T.Z)             |
| <b>Idealized Secondary Bar Dimension</b>  | 6 mm × 6 mm (R.B)        | 8 mm × 50 mm (R.B)                  |
| $I_{Secondary\ Bar}$                      | 108 mm <sup>4</sup>      | 83333.3 mm <sup>4</sup>             |
| <b>Num. of Secondary Bar</b>              | 7                        | 14                                  |
| <b>Mesh (<math>a_x \times a_y</math>)</b> | 30 mm × 100 mm           | 25.4 mm × 50.8 mm                   |
| $V_{grid} / V_{plate}$                    | 0.224                    | 0.476                               |
| <b>Material</b>                           | A36 Steel                | Glass Fiber, Polymer & some Fillers |

P/S: R.B represents Rectangular Bar

T.Z represents Trapezoidal Bar

表 2.2 廠商提供玻璃纖維及樹脂材料性質

|                                   | Glass Fiber       | Matrix            |
|-----------------------------------|-------------------|-------------------|
| <b>Volume Fraction</b>            | 0.72 <sup>+</sup> | 0.28 <sup>+</sup> |
| <b>Poisson Ratio</b>              | 0.2 <sup>+</sup>  | 0.35 **           |
| <b>Density (g/cm<sup>3</sup>)</b> | 2.56 <sup>+</sup> | 1.27 <sup>+</sup> |
| <b>Tensile Modulus (GPa)</b>      | 85 <sup>+</sup>   | 2.4 <sup>+</sup>  |
| <b>Tensile Strength (GPa)</b>     | 2.57 <sup>+</sup> | 0.65 <sup>+</sup> |
| <b>Shear Modulus (GPa)</b>        | 0.7 <sup>+</sup>  | 0.93*             |
| <b>Compressive Strength (MPa)</b> | 12 <sup>+</sup>   | -                 |

\*Adopted From the Equation (2.130)

\*\*Refer From Kollar (2003)

<sup>+</sup> Adopted From the Fabricator

表 2.3 玻璃纖維橋面格柵板主、橫桿材料性質

|                             | GFRP Grating Deck |             |
|-----------------------------|-------------------|-------------|
|                             | Theory            | Coupon Test |
| <b>E<sub>11</sub> (GPa)</b> | 61.900            | 62.529      |
| <b>E<sub>22</sub> (GPa)</b> | 8.301             | -           |
| <b>G<sub>12</sub> (GPa)</b> | 0.751             | -           |
| <b>ν<sub>12</sub></b>       | 0.242             | ≈0.255      |
| <b>ν<sub>21</sub></b>       | 0.032             | -           |
| <b>ν<sub>23</sub></b>       | 0.309             | -           |
| <b>G<sub>23</sub> (GPa)</b> | 3.170             | -           |

表 2.4 鋼橋面格柵板鋼材材料性質

|                         | Main Bar |
|-------------------------|----------|
| Thickness               | 6        |
| Young's Modulus E (GPa) | 199.2    |
| F <sub>y</sub> (MPa)    | 375      |
| F <sub>u</sub> (MPa)    | 455      |



表 3.1 鋼及玻璃纖維橋面格柵板資訊

|                                | <b>Steel Grating Decks</b> | <b>GFRP Grating Deck</b>               |
|--------------------------------|----------------------------|--|
| <b>Plate Panel Size</b>        | 1000 mm × 996 mm × 65 mm   | 1020 mm × 1020 mm × 50 mm              |
| <b>Support Conditions</b>      | SSFF                       | SSFF                                   |
| <b>Support Span</b>            | 700 mm                     | 700 mm                                 |
| <b>Open Area</b>               | 74 %                       | 52 %                                   |
| $V_{grid} / V_{plate}$         | 0.224                      | 0.476                                  |
| <b>Main bar Dimension</b>      | 6 mm × 65 mm (R.B)         | (12/9.5) mm × 50 mm (T.Z)              |
| <b>Secondary Bar Dimension</b> | 6 mm × 6 mm (R.B)          | (10/6) mm × 50 mm (T.Z)                |
| <b>Mesh (Center to Center)</b> | 30 mm × 100 mm             | 25.4 mm × 50.8 mm                      |
| <b>Weight</b>                  | 102 kg                     | 47 kg                                  |
| <b>Material</b>                | A36 Steel                  | Glass fiber, Polymer, and some fillers |

P/S: R.B represents Rectangular Bar

T.Z represents Trapezoidal Bar

表 3.2 高分子複合材料翼型梁參數 (Sun & Chou, 2012)

|                             | <b>Flange</b> | <b>Web</b> |
|-----------------------------|---------------|------------|
| $E_{11}$ (GPa)              | 22            | 13         |
| $E_{22}$ (GPa)              | 11            | 13         |
| $\nu_{12}$ (GPa)            | 0.3           | 0.4        |
| $G_{12}$ (GPa)              | 1.9           | 3.2        |
| $\sigma_{t,max}$ (MPa)      | 220           | 180        |
| $\varepsilon_{t,max}$ (MPa) | 1.1           | 1.3        |

表 3.3 AASHTO 2007 Table 3.6.1.4.2-1

| Number of Lanes Available to Trucks |      |
|-------------------------------------|------|
| 1                                   | 1.00 |
| 2                                   | 0.85 |
| 3 or more                           | 0.80 |



表 3.4 橋面格柵板於 20 kN 及 100 kN 時的試驗結果

| Specimen | $P$<br>(kN) | $\Delta_{20}$<br>(mm)  | $\varepsilon_{c,20}$<br>(%)  | $\varepsilon_{t,20}$<br>(%)  | Behavior  |
|----------|-------------|------------------------|------------------------------|------------------------------|---|
| SG1      | 20          | 0.64                   | 0.015                        | 0.032                        | Not any significant displacement can be seen by eyes                                  |
| SG2      |             | 0.63                   | 0.021                        | 0.31                         | Same situation with SG1   |
| FRPG1    |             | 2.3                    | 0.068                        | 0.054                        | Not any significant displacement can be seen by eyes                                  |
| FRPG2    |             | 2.6                    | 0.063                        | 0.057                        | Same situation with SG1   |
| Specimen | $P$<br>(kN) | $\Delta_{100}$<br>(mm) | $\varepsilon_{c,100}$<br>(%) | $\varepsilon_{t,100}$<br>(%) | Behavior  |
| SG1      | 100         | 2.76                   | 0.09                         | 0.11                         | Not any significant displacement can be seen by eyes                                  |
| SG2      |             | 2.78                   | 0.11                         | 0.12                         | Same situation with SG1   |
| FRPG1    |             | 10.54                  | 0.33                         | 0.19                         | Significant displacement can be seen by eyes. However, the whole specimen looks well. |
| FRPG2    |             | 11.3                   | 0.32                         | 0.20                         | Same situation with FRPG1   |



表 3.5 橋面格柵板試驗結果 (續)

| Specimen | $P_{\max}$<br>(kN) | $\Delta_{\max}$<br>(mm) | $k$<br>(kN/mm) | $\varepsilon_{c,\max}$<br>(%) | $\varepsilon_{t,\max}$<br>(%) | Failure Mode      |
|----------|--------------------|-------------------------|----------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------|
| SG1      | 264                | 7.1                     | 38.915         | 0.3                           | 0.32                          | -                 |
| FRPG1    | 186                | 20.1                    | 9.379          | 0.65                          | 0.36                          | -                 |
| SG2      | 345                | ≈12                     | 38.206         | 0.5                           | 0.55                          | GFRP Beam Failure |
| FRPG2    | 200                | 25.6                    | 8.619          | 0.68                          | 0.41                          | -                 |

表 3.6 試驗與理論近似解比較 (SG1 & FRPG1)

| Specimen | $P$<br>(kN) | $\Delta_{Test}$<br>(mm) | $\Delta_{Timoshenko}$<br>(mm) | $\Delta_{SCF}$<br>(mm) | $\frac{\Delta_{Timoshenko}}{\Delta_{SCF}}$ | $\frac{\Delta_{Timoshenko}}{\Delta_{Test}}$ | $\frac{\Delta_{SCF}}{\Delta_{Test}}$ |
|----------|-------------|-------------------------|-------------------------------|------------------------|--|---|--------------------------------------|
| SG1      | 20          | 0.64                    | 0.55                          | 0.66                   | 0.83                                       | 0.83  | 1.03                                 |
|          | 50          | 1.52                    | 1.36                          | 1.67                   | 0.81                                       | 0.89  | 1.10                                 |
|          | 100         | 2.76                    | 2.75                          | 3.33                   | 0.82                                       | 1.00  | 1.22                                 |
|          | 264         | 7.1                     | 7.20                          | 8.80                   | 0.82                                       | 1.01  | 1.24                                 |
| FRPG1    | 20          | 2.34                    | 1.36                          | 2.11                   | 0.59                                       | 0.64  | 0.91                                 |
|          | 50          | 5.35                    | 3.41                          | 5.29                   | 0.64                                       | 0.64  | 0.99                                 |
|          | 100         | 10.54                   | 6.81                          | 10.58                  | 0.65                                       | 0.65  | 1.00                                 |
|          | 186         | 20.06                   | 12.70                         | 19.68                  | 0.63                                       | 0.63  | 0.98                                 |

表 4.1 有限元素分析與試驗及理論計算結果比較

|        |                       | Specimen |         | $\Delta_{20}$<br>(mm) | $\Delta_{100}$<br>(mm) | $\Delta_{max}$<br>(mm) | $\epsilon_{c,100}$<br>(%) | $\epsilon_{t,100}$<br>(%) | $\epsilon_{c,max}$<br>(%) | $\epsilon_{t,max}$<br>(%) |
|--------|-----------------------|----------|---------|-----------------------|------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| Test   |                       | SG1      | (1)     | 0.64                  | 2.76                   | 7.10                   | 0.10                      | 0.11                      | 0.28                      | 0.31                      |
|        |                       | FRPG1    | (2)     | 2.34                  | 10.54                  | 20.06                  | 0.33                      | 0.19                      | 0.65                      | 0.36                      |
| Theory | Method 1              | SG1      | (3)     | 0.55                  | 2.75                   | 7.20                   | -                         | -                         | -                         | -                         |
|        |                       | Ratio    | (1)/(3) | 1.16                  | 1.00                   | 0.99                   | -                         | -                         | -                         | -                         |
|        |                       | FRPG1    | (4)     | 1.36                  | 6.81                   | 12.70                  | -                         | -                         | -                         | -                         |
|        |                       | Ratio    | (2)/(4) | 1.71                  | 1.55                   | 1.58                   | -                         | -                         | -                         | -                         |
|        | Method 2              | SG1      | (5)     | 0.66                  | 3.33                   | 8.80                   | -                         | -                         | -                         | -                         |
|        |                       | Ratio    | (1)/(5) | 0.97                  | 0.82                   | 0.81                   | -                         | -                         | -                         | -                         |
|        |                       | FRPG1    | (6)     | 2.11                  | 10.58                  | 19.68                  | -                         | -                         | -                         | -                         |
|        |                       | Ratio    | (2)/(6) | 1.10                  | 1.00                   | 1.02                   | -                         | -                         | -                         | -                         |
| ABAQUS | Full Elastic Behavior | SG1      | (8)     | 0.57                  | 2.86                   | 7.43                   | 0.13                      | 0.14                      | 0.37                      | 0.33                      |
|        |                       | Ratio    | (1)/(8) | 1.12                  | 0.96                   | 0.96                   | 0.77                      | 0.79                      | 0.76                      | 0.94                      |
|        |                       | FRPG1    | (9)     | 2.01                  | 10.06                  | 18.81                  | 0.43                      | 0.43                      | 0.80                      | 0.80                      |
|        |                       | Ratio    | (2)/(9) | 1.15                  | 1.05                   | 1.07                   | 0.77                      | 0.44                      | 0.81                      | 0.45                      |

Method 1: Timoshenko & Krieger, 1959

Method 2: Proposed Method

表 4.2 SG1 試體有限元素分析與試驗及理論計算結果比較 (Force=100 kN)

| Specimens |          |         | Transverse Length |            |            |
|-----------|----------|---------|-------------------|------------|------------|
|           |          |         | D5<br>(mm)        | D6<br>(mm) | D7<br>(mm) |
| SG1       | Test     | (1)     | 2.47              | 2.76       | 2.33       |
|           | ABAQUS   | (2)     | 2.28              | 2.83       | 2.28       |
|           | Method 1 | (3)     | 2.12              | 2.75       | 2.12       |
|           | Method 2 | (4)     | 2.61              | 3.33       | 2.61       |
|           | Ratio    | (1)/(2) | 1.08              | 0.98       | 1.02       |
|           | Ratio    | (1)/(3) | 1.16              | 1          | 1.09       |
|           | Ratio    | (1)/(4) | 0.95              | 0.82       | 0.89       |
|           | Ratio    | (2)/(3) | 1                 | 1.03       | 1          |
|           | Ratio    | (2)/(4) | 0.83              | 0.84       | 0.83       |

表 4.3 FRPG1 試體有限元素分析與試驗及理論計算結果比較 (Force=100 kN)

| Specimens |          |         | Transverse Length |            |            |
|-----------|----------|---------|-------------------|------------|------------|
|           |          |         | D5<br>(mm)        | D6<br>(mm) | D7<br>(mm) |
| FRPG1     | Test     | (1)     | 8.77              | 10.54      | 9.05       |
|           | ABAQUS   | (2)     | 7.92              | 10.06      | 7.92       |
|           | Method 1 | (3)     | 5.26              | 6.81       | 5.26       |
|           | Method 2 | (4)     | 8.17              | 10.58      | 8.17       |
|           | Ratio    | (1)/(2) | 1.11              | 0.98       | 1.14       |
|           | Ratio    | (1)/(3) | 1.67              | 1.55       | 1.72       |
|           | Ratio    | (1)/(4) | 1.07              | 1.00       | 1.11       |
|           | Ratio    | (2)/(3) | 1.50              | 1.48       | 1.50       |
|           | Ratio    | (2)/(4) | 0.97              | 0.95       | 0.97       |

Method 1: Timoshenko & Krieger, 1959

Method 2: Proposed Method

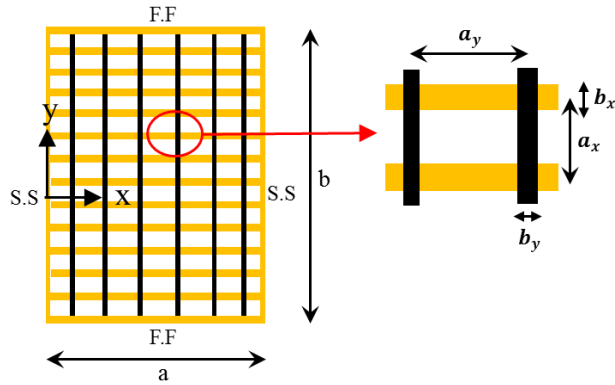


表 4.4 各模型參數資訊

|                 |                      | Model 1    | Model 2    | Model 3    | Model 4    | Model 5    | Model 6    | Model 7    | Model 8    | Model 9    |
|-----------------|----------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Panel Size      | a (mm)               | 700        | 700        | 700        | 700        | 700        | 700        | 700        | 700        | 700        |
|                 | b (mm)               | 1001.35    | 747.35     | 747.35     | 747.35     | 1255.35    | 1001.35    | 1001.35    | 1001.35    | 1001.35    |
|                 | $b/a$                | 1.43       | 1.07       | 1.07       | 1.07       | 1.79       | 1.43       | 1.43       | 1.43       | 1.43       |
|                 | $V_{grid}/V_{panel}$ | 0.476      | 0.476      | 0.476      | 0.445      | 0.476      | 0.458      | 0.445      | 0.476      | 0.3        |
| Main Bar        | Spacing $a_x$ (mm)   | 25.4       | 25.4       | 25.4       | 25.4       | 25.4       | 25.4       | 25.4       | 25.4       | 50.8       |
|                 | Bar Size (mm × mm)   | 10.75 × 50 | 10.75 × 50 | 10.75 × 50 | 10.75 × 50 | 10.75 × 50 | 10.75 × 50 | 10.75 × 50 | 10.75 × 50 | 10.75 × 50 |
|                 | Number of bar        | 40         | 30         | 30         | 30         | 50         | 40         | 40         | 40         | 21         |
| Secondary Bar   | Spacing $a_y$ (mm)   | 50.8       | 50.8       | 50.8       | 165.1      | 50.8       | 82.55      | 165.1      | 50.8       | 82.57      |
|                 | Bar Size (mm × mm)   | 8 × 50     | 8 × 50     | 8 × 50     | 8 × 50     | 8 × 50     | 8 × 50     | 8 × 50     | 8 × 50     | 8 × 50     |
|                 | Number of bar        | 14         | 14         | 14         | 5          | 14         | 9          | 5          | 14         | 9          |
| Patch load size | u (mm)               | 400        | 400        | 400        | 400        | 400        | 400        | 400        | 400        | 400        |
|                 | v (mm)               | 250        | 250        | 250        | 250        | 250        | 250        | 250        | 250        | 250        |
| B.C             |                      | SSFF       | SSFF       | SSSS       | SSFF       | SSFF       | SSFF       | SSFF       | SSSS       | SSFF       |

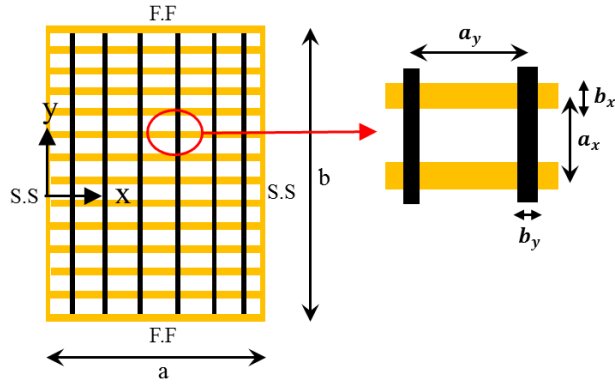


表 4.5 ABAQUS 分析模型與理論比較

|                     | Model 1 | Model 2         | Model 3           | Model 4           | Model 5         | Model 6        | Model 7         | Model 8                    | Model 9          |
|---------------------|---------|-----------------|-------------------|-------------------|-----------------|----------------|-----------------|----------------------------|------------------|
| $a_y/a_x$           | 1.5     | 1.5             | 1.5               | 6.5               | 1.5             | 3.25           | 6.5             | 1.5                        | 1.625            |
| <b>BC</b>           | SSFF    | SSFF            | SSSS              | SSFF              | SSFF            | SSFF           | SSFF            | SSSS                       | SSFF             |
| $b/a$               | 1.4     | 1.0             | 1.0               | 1.0               | 1.8             | 1.4            | 1.4             | 1.4                        | 1.4              |
| $\Delta_{ABAQUS}$   | 10.06   | 12.18<br>(+21%) | 11.82<br>(+17.5%) | 13.80<br>(+37.2%) | 9.95<br>(-1.1%) | 10.66<br>(+6%) | 11.89<br>(+18%) | 10.09<br>( $\approx 0\%$ ) | 31.31<br>(+211%) |
| $\Delta_{proposed}$ | 10.60   | 10.82           | -                 | 11.28             | 10.40           | 11.02          | 11.28           | -                          | 33.66            |
| <b>Ratio</b>        | 0.95    | 1.06            | -                 | 1.22              | 0.96            | 0.97           | 1.05            | -                          | 0.93             |

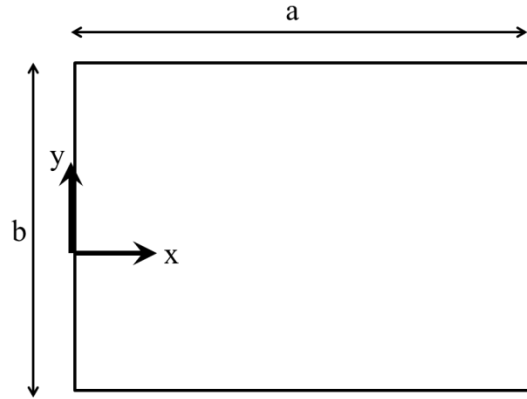


圖 2.1 平板整體示意圖

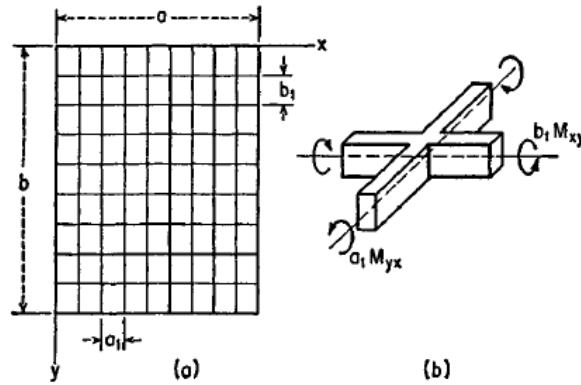


圖 2.2 多孔型格柵板 (Timoshenko & Krieger, 1959)

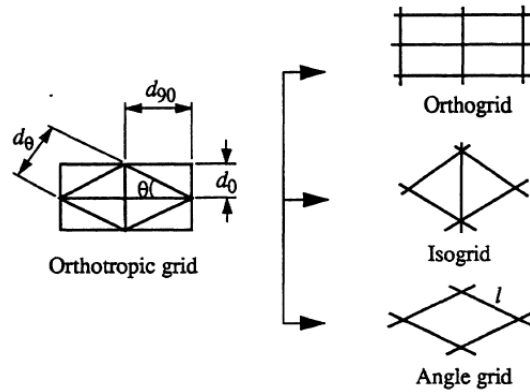


圖 2.3 各種不同型式的格柵板單元 (Chen & Tsai, 1996)



Effect of major parameters on the open grid deck\*

| Effect of major parameters on the open grid deck     |           |                |                |                |               |
|--|-----------|----------------|----------------|----------------|---------------|
| $S$ (mm)   | 95        | 190            | 285            |                |               |
| $\delta_{max}$ (mm)                                  | 1.9       | 2.9 (53.2%)    | 3.7 (95.8%)    |                |               |
| $\sigma_{max}$ (MPa)                                 | 104.1     | 158.6 (53.0%)  | 195.8 (89.0%)  |                |               |
| $d_s$ (mm)   | 599       | 711 (18.6%)    | 818 (36.4%)    |                |               |
| <i>Effect of main bar stiffness</i>                  |           |                |                |                |               |
| $EI$   | $0.5EI_0$ | $EI_0$         | $1.5EI_0$      | $2.0EI_0$      |               |
| $\delta_{max}$ (mm)                                  | 4.2       | 2.9 (-30.8%)   | 2.2 (-46.2%)   | 1.9 (-55.5%)   |               |
| $\sigma_{max}$ (MPa)                                 | 241.3     | 158.6 (-34.3%) | 120.7 (-50.0%) | 98.6(-59.2%)   |               |
| $d_s$ (mm)   | 742       | 711 (-4.1%)    | 683 (-7.9%)    | 663 (-10.6%)   |               |
| <i>Effect of cross bar spacing</i>                   |           |                |                |                |               |
| $s$ (mm)   | 95        | 190            | 285            |                |               |
| $\delta_{max}$ (mm)                                  | 2.9       | 3.2 (11.2%)    | 3.4 (18.9%)    |                |               |
| $\sigma_{max}$ (MPa)                                 | 158.6     | 170.3 (7.1%)   | 173.1 (9.1%)   |                |               |
| $d_s$ (mm)   | 711       | 668 (6.1%)     | 658 (7.5%)     |                |               |
| <i>Effect of cross bar stiffness</i>                 |           |                |                |                |               |
| $d_c$ (mm)   | 38        | 51             | 64             | 76             |               |
| $\delta_{max}$ (mm)                                  | 3.4       | 2.9 (-14.0%)   | 2.6 (-23.7%)   | 2.3 (-30.5%)   |               |
| $\sigma_{max}$ (MPa)                                 | 180.0     | 158.6 (-11.7%) | 143.4 (-20.4%) | 131.7 (-26.8%) |               |
| $d_s$ (mm)   | 632       | 711 (12.4%)    | 787 (24.5%)    | 851 (34.5%)    |               |
| <i>Effect of rotational stiffness in x-direction</i> |           |                |                |                |               |
| $k_x$ (MPa)  | 0         | =              |                |                |               |
| $\delta_{max}$ (mm)                                  | 2.9       | 2.9 (-0.1%)    |                |                |               |
| $\sigma_{max}$ (MPa)                                 | 110.3     | 110.3 (0%)     |                |                |               |
| $d_s$ (mm)   | 940       | 940 (0%)       |                |                |               |
| <i>Effect of rotational stiffness in y-direction</i> |           |                |                |                |               |
| $k_y$ (MPa)  | 0         | =              |                |                |               |
| $\delta_{max}$ (mm)                                  | 2.9       | 2.9 (1.9%)     |                |                |               |
| $\sigma_{max}$ (MPa)                                 | 111.0     | 110.3 (0.5%)   |                |                |               |
| $d_s$ (mm)   | 935       | 940 (0.5%)     |                |                |               |
| <i>Effect of rotational stiffness in z-direction</i> |           |                |                |                |               |
| $k_z$ (MPa)  | =         | 6895           | 3448           | 690            | 345           |
| $\delta_{max}$ (mm)                                  | 2.9       | 3.0 (5.0%)     | 3.1 (6.9%)     | 3.2 (12.3%)    | 3.3 (14.4%)   |
| $\sigma_{max}$ (MPa)                                 | 110.3     | 114.5 (3.8%)   | 117.2 (6.3%)   | 123.4 (11.9%)  | 125.5 (13.8%) |
| $d_s$ (mm)   | 940       | 907 (-3.5%)    | 894 (-4.9%)    | 853 (-9.2%)    | 843 (10.3%)   |
|  |           |                |                |                | 818 (-13.0%)  |

\* Note that parameters listed in bold are the baseline values for a standard 3-in 4-way grid deck.



H. Huang et al. / Journal of Constructional Steel Research 58 (2002) 819–842

圖 2.4 鋼橋面格柵板參數分析 (Huang et al., 2001)



圖 2.5 複合材料格柵板壓力側之主桿產生局部挫屈破壞 (Biddah, 2005)

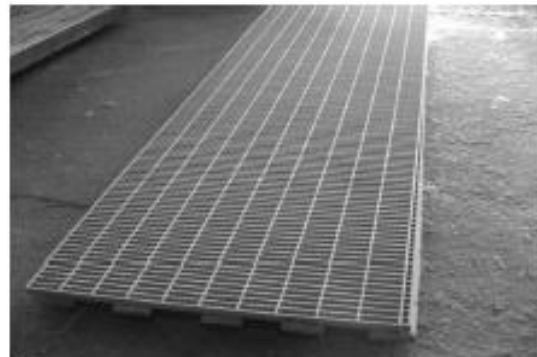
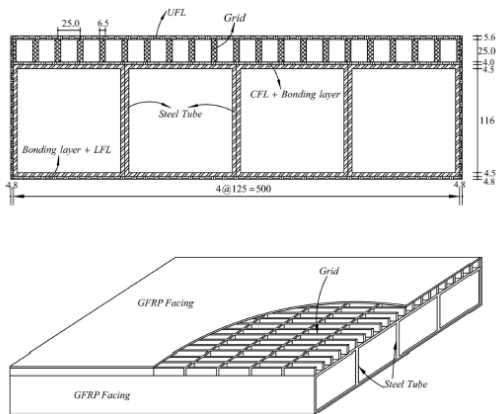


圖 2.6 新型研發橋面板斷面形式及玻璃纖維橋面格柵板照片 (Ji et al., 2010)

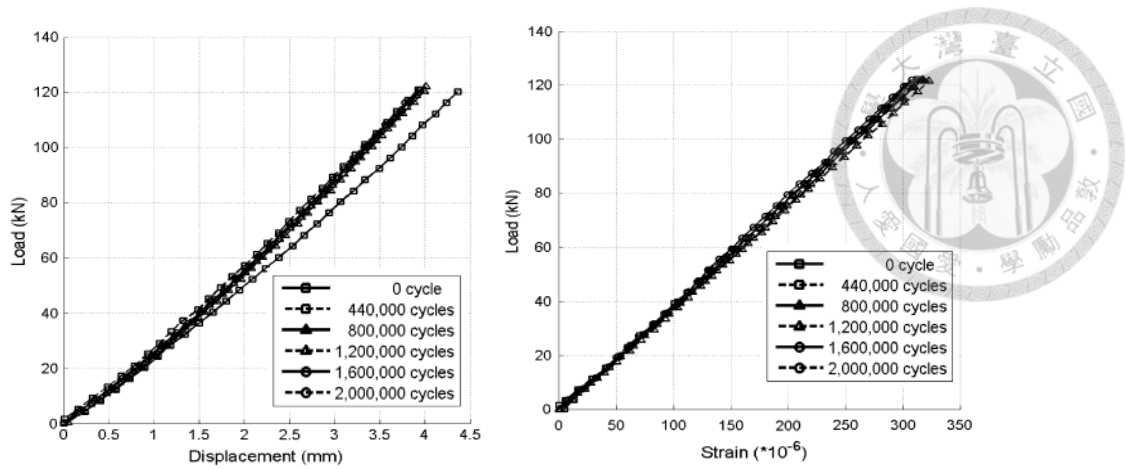


圖 2.7 橋面板的最大力量位移圖及力量應變圖 (Ji et al., 2010)

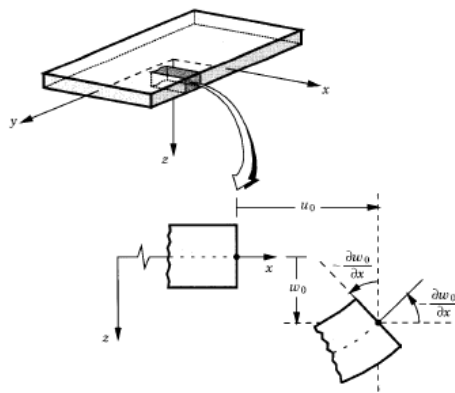


圖 2.8 彈性體單元在各方向上的位移表示示意圖 (Reddy, 2004)

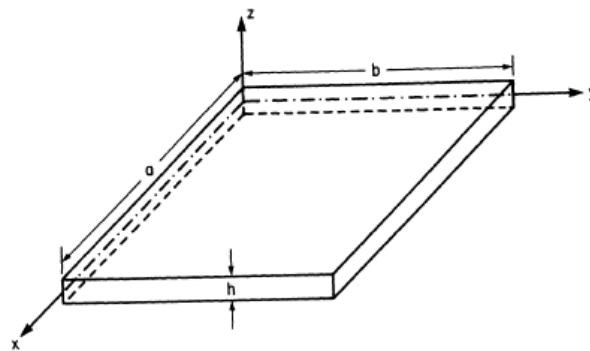


圖 2.9 均質連續之長方形薄板 (Vinson & Sierakowski, 1986)

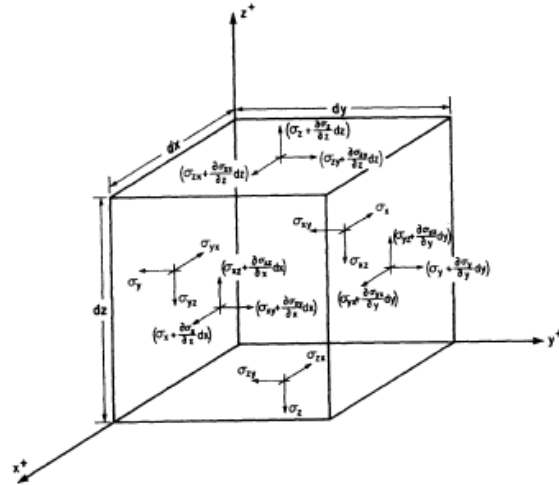


圖 2.10 均質連續之長方形薄板中的自由體單元  $dv$  (Vinson & Sierakowski, 1986)

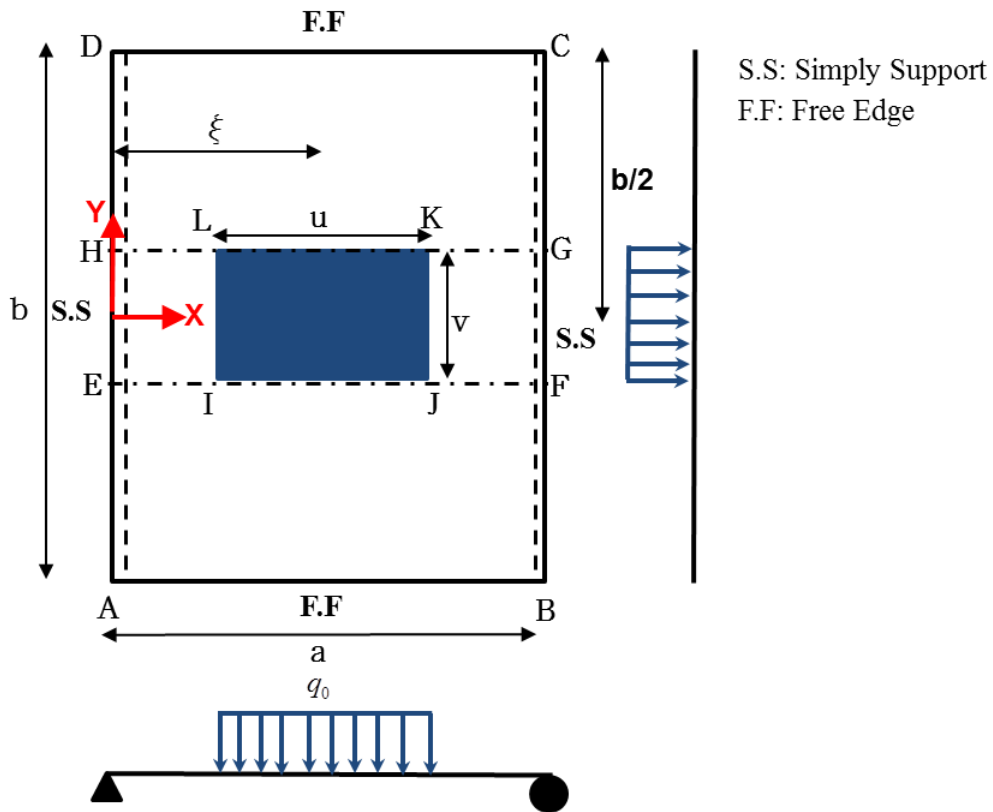


圖 2.11 均質連續異向性薄板在板中央受到一塊長方形均佈載重狀況

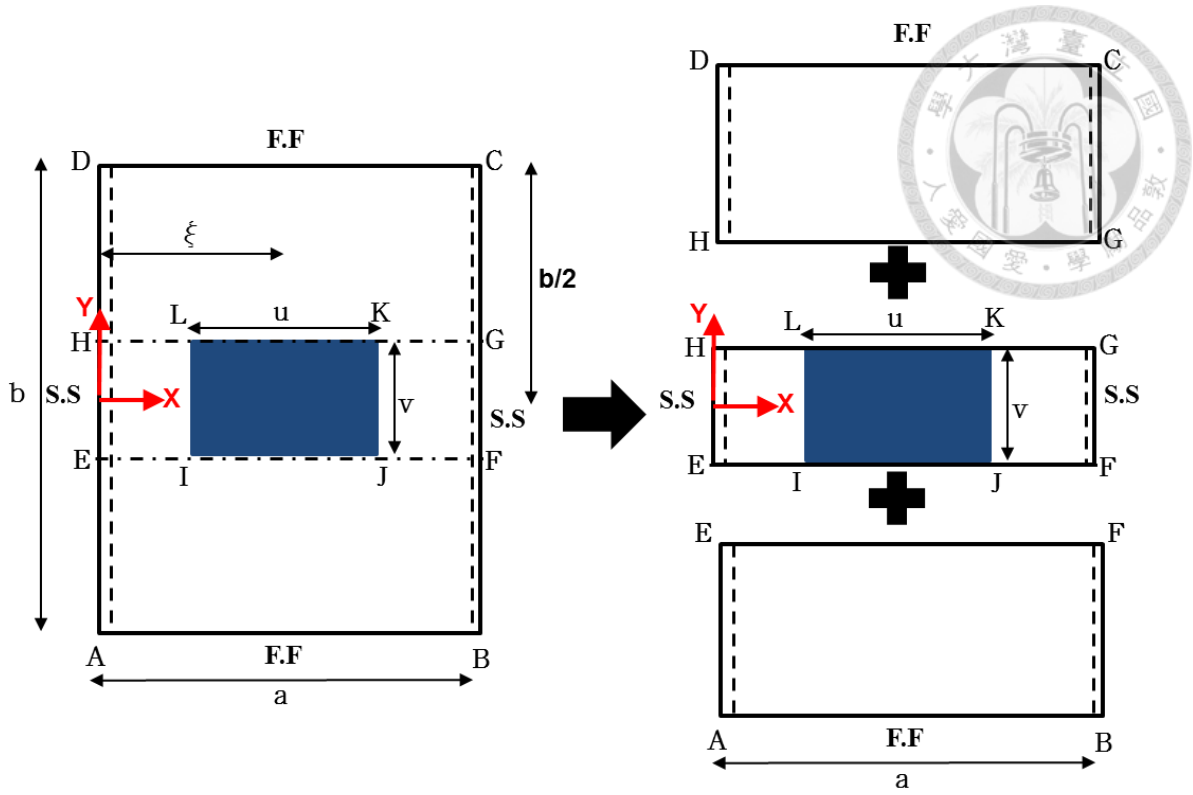


圖 2.12 薄板切割示意圖

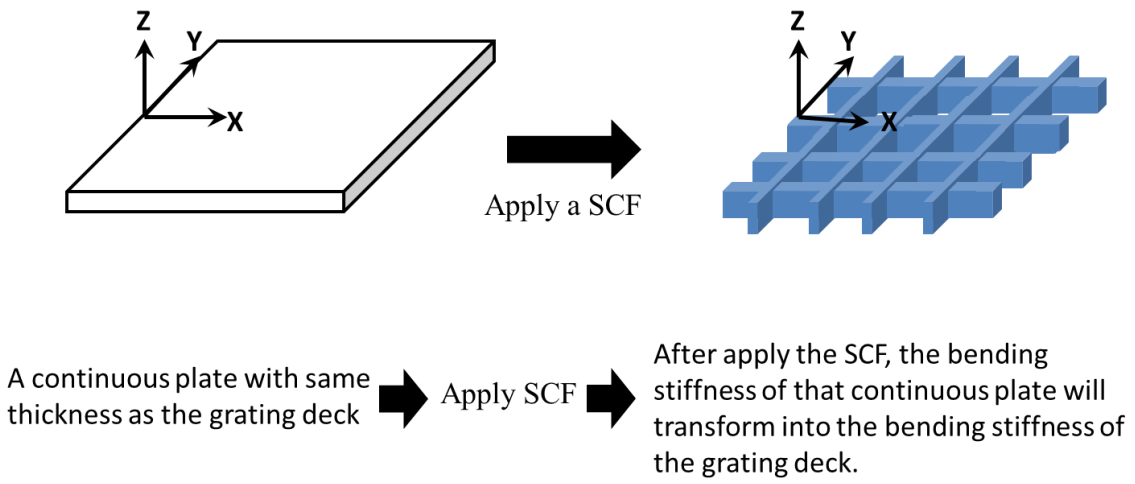


圖 2.13 勁度修正因子法示意圖

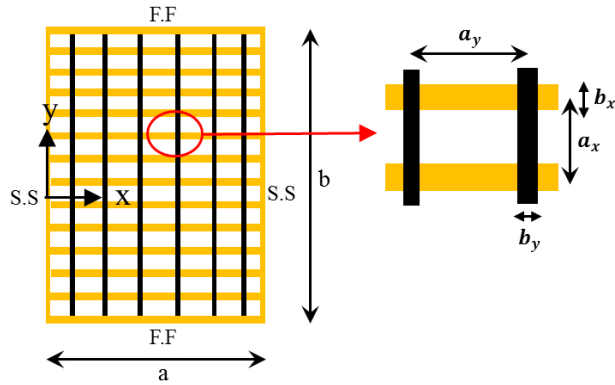


圖 2.14 玻璃纖維橋面格柵板單元圖

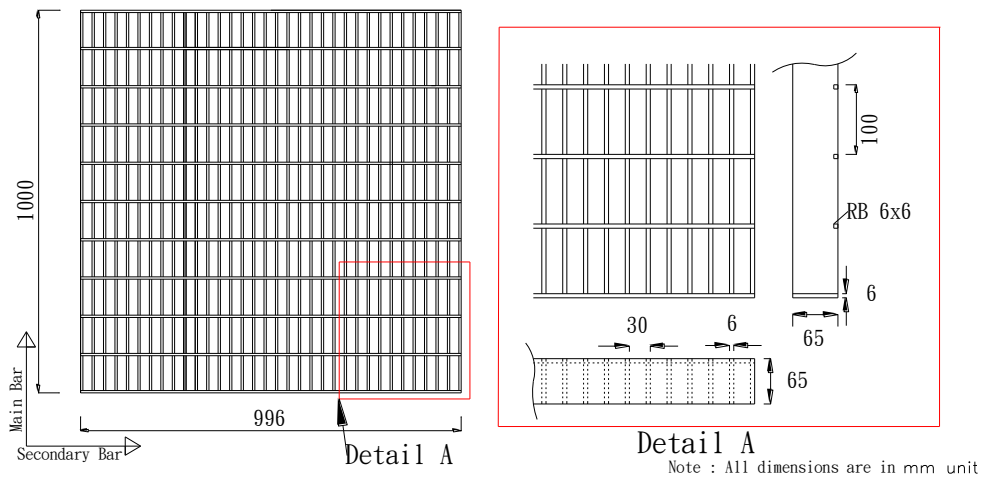


圖 2.15 鋼橋面格柵板斷面圖

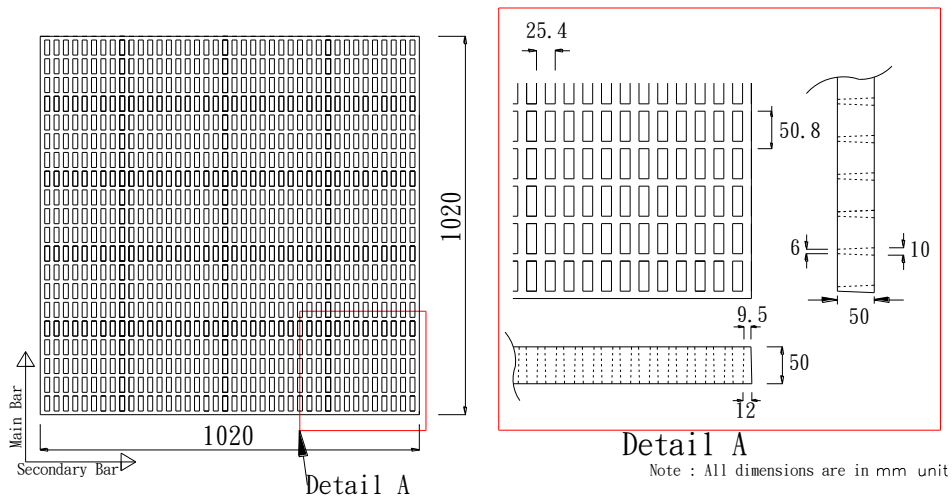
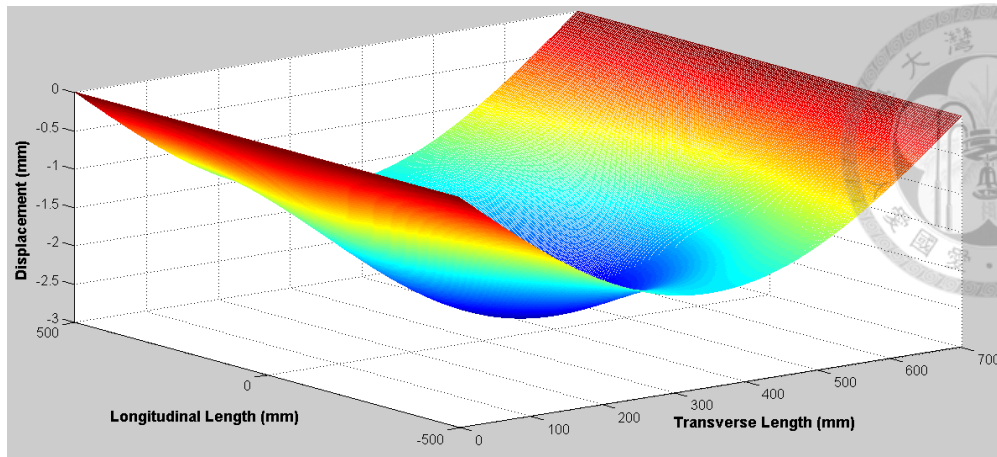
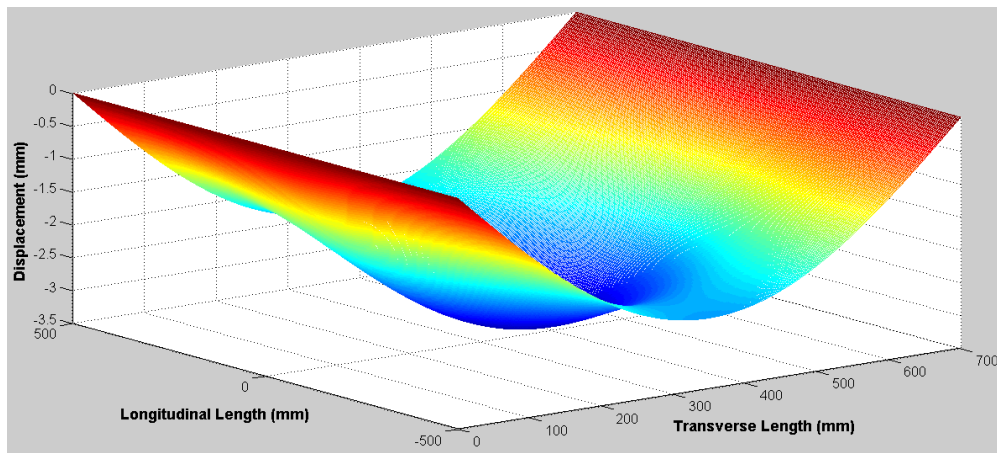


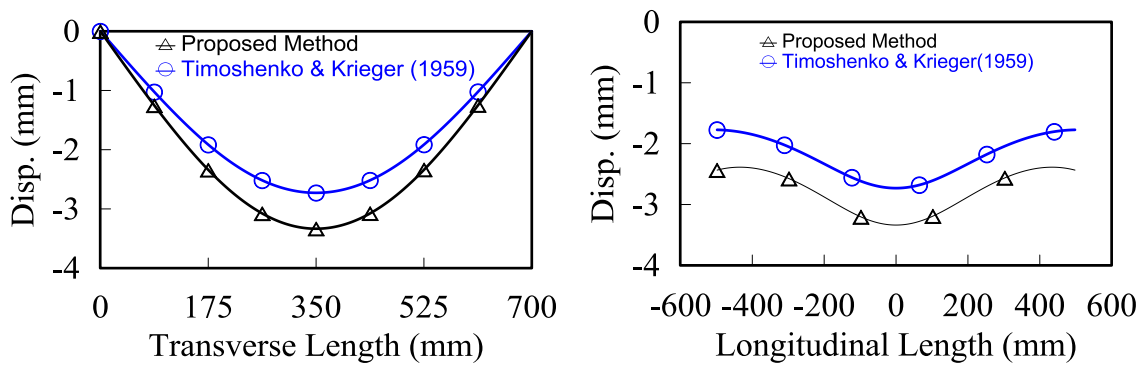
圖 2.16 玻璃纖維橋面格柵板斷面圖



(a) 鋼橋面格柵板 3-D 變形圖 (Timoshenko & Krieger, 1959)

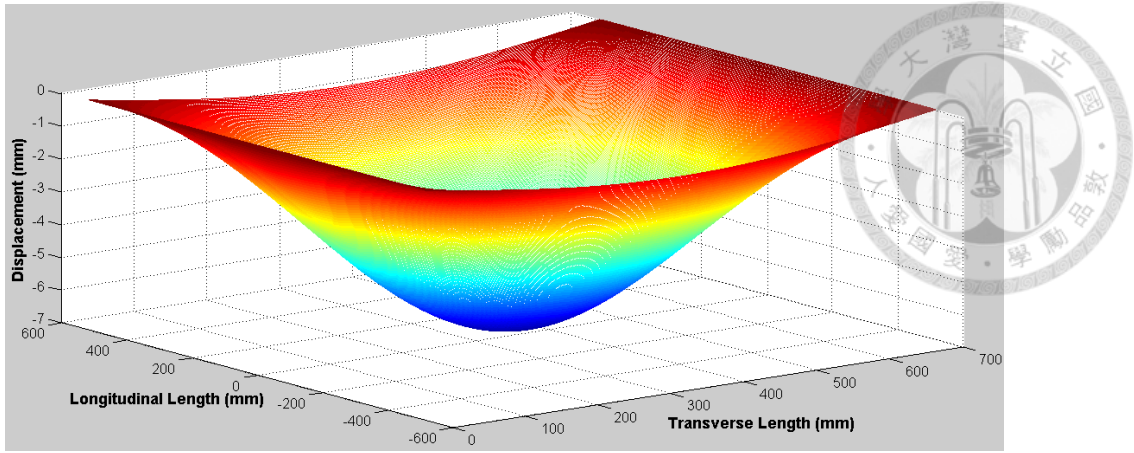


(b) 鋼橋面格柵板 3-D 變形圖 (Proposed Method)

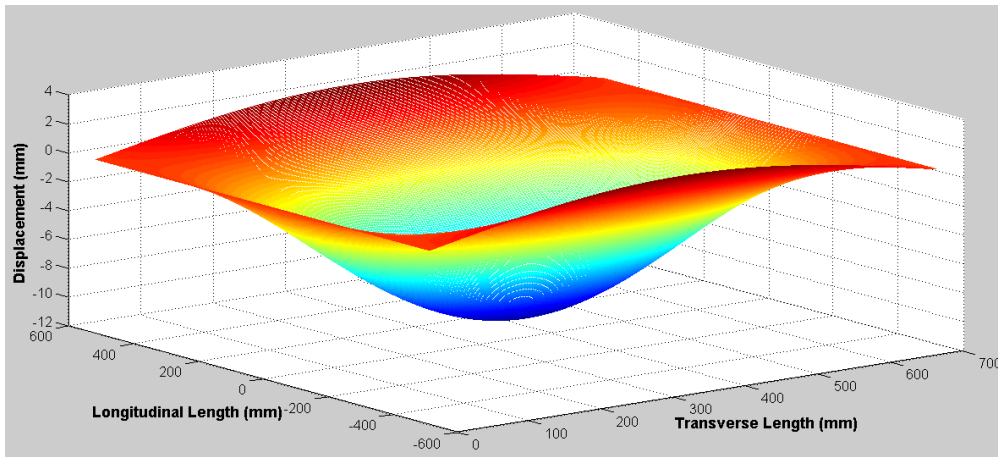


(c) Timoshenko at et. Method V.S. Proposed Method

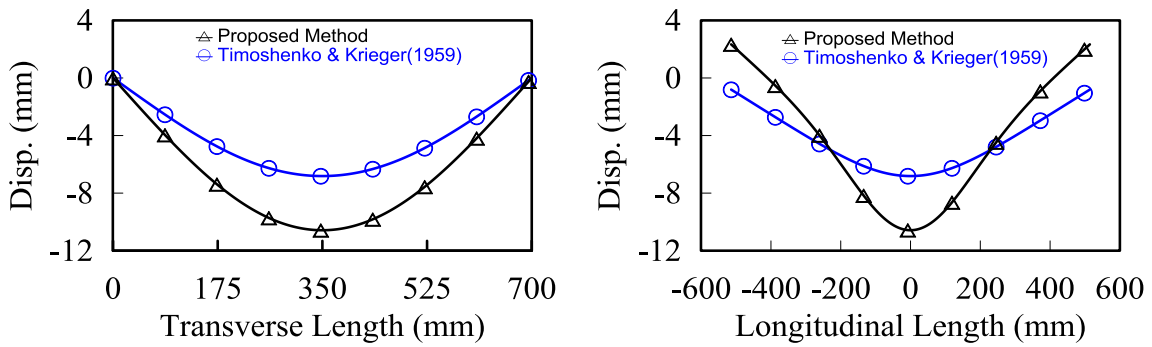
圖 2.17 鋼橋面格柵板理論計算結果 (Force=100 kN)



(a) 玻璃纖維橋面格柵板 3-D 變形圖 (Timoshenko & Krieger, 1959)



(b) 玻璃纖維橋面格柵板 3-D 變形圖 (Proposed Method)



(c) Timoshenko et. Method V.S. Proposed Method

圖 2.18 玻璃纖維橋面格柵板理論計算結果 (Force=100 kN)

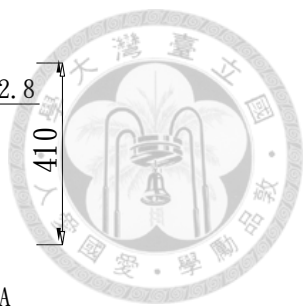
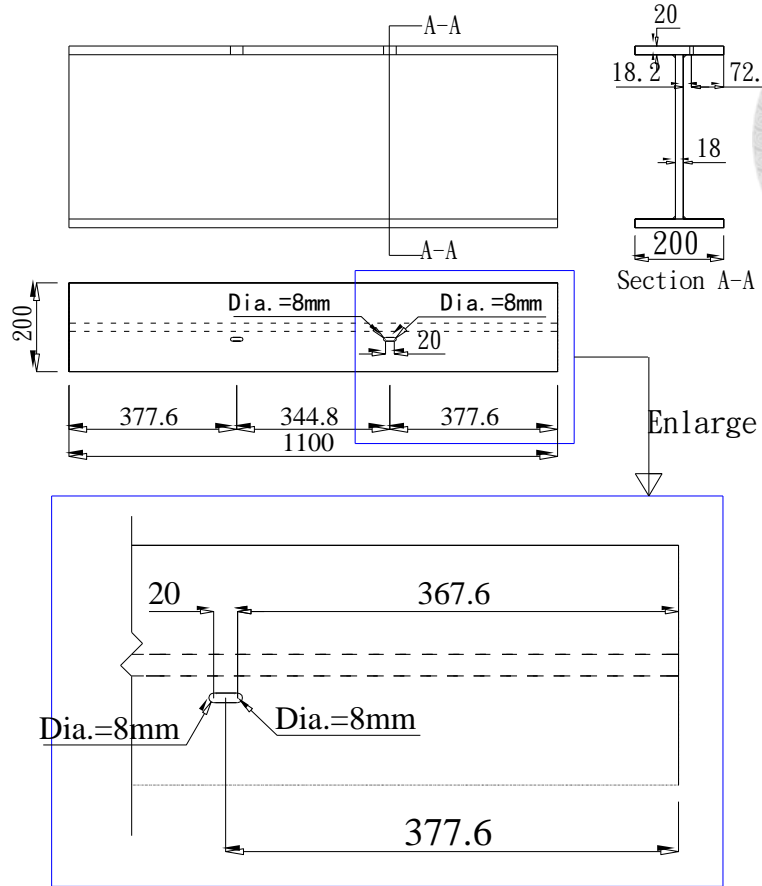


圖 3.1 全玻纖複材梁整體尺寸及開孔處

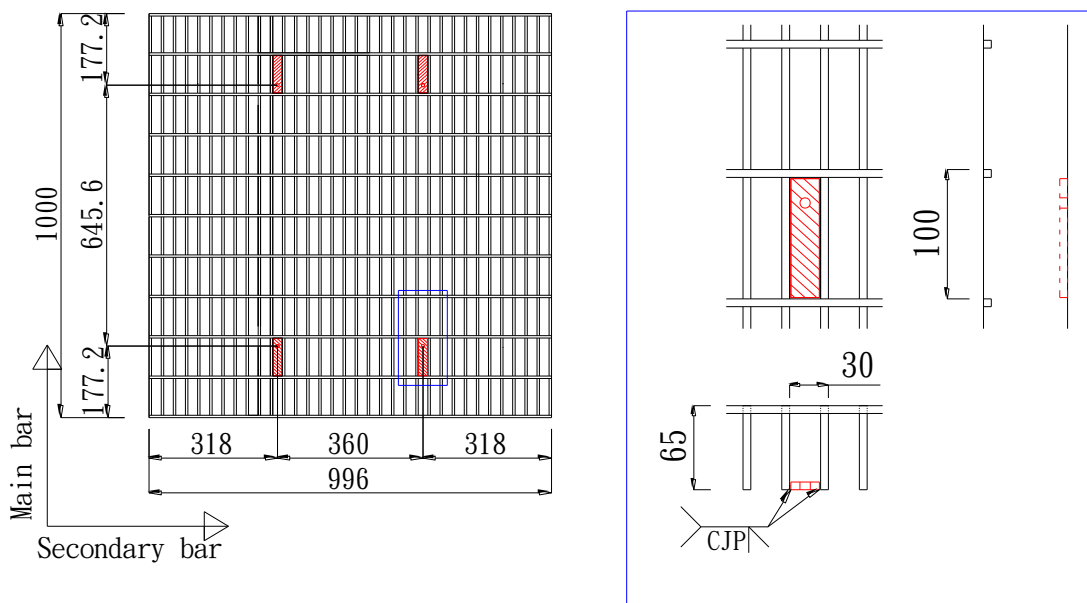


圖 3.2 連接板焊接詳情



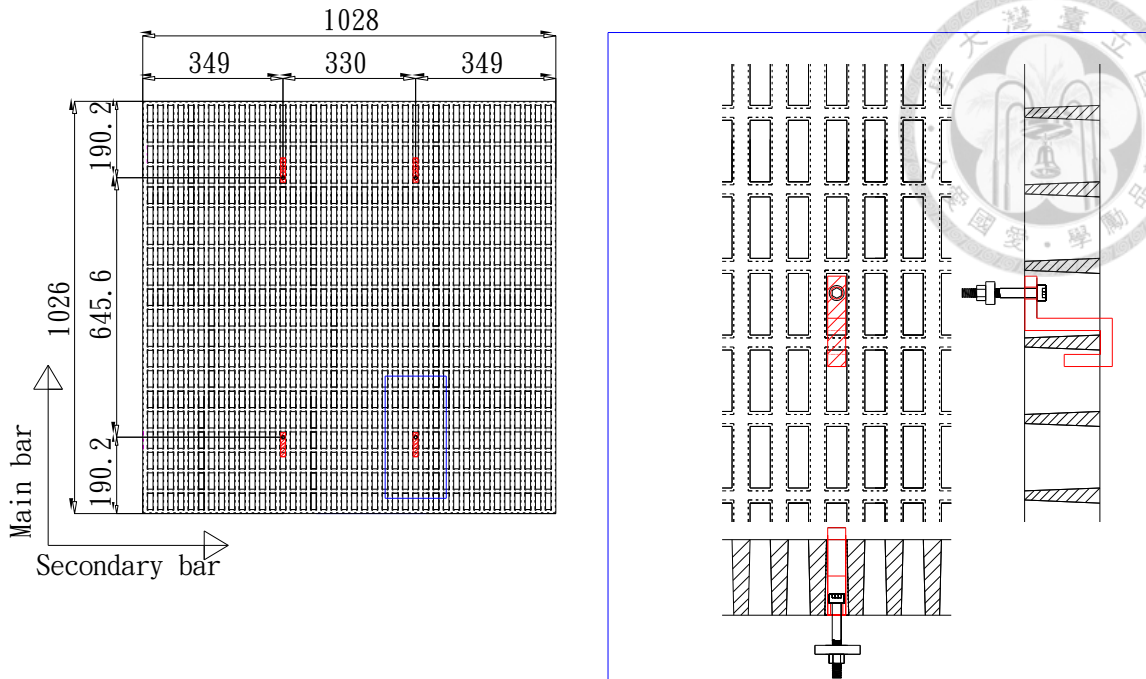


圖 3.3 L型扣件扣於玻纖格柵板詳情

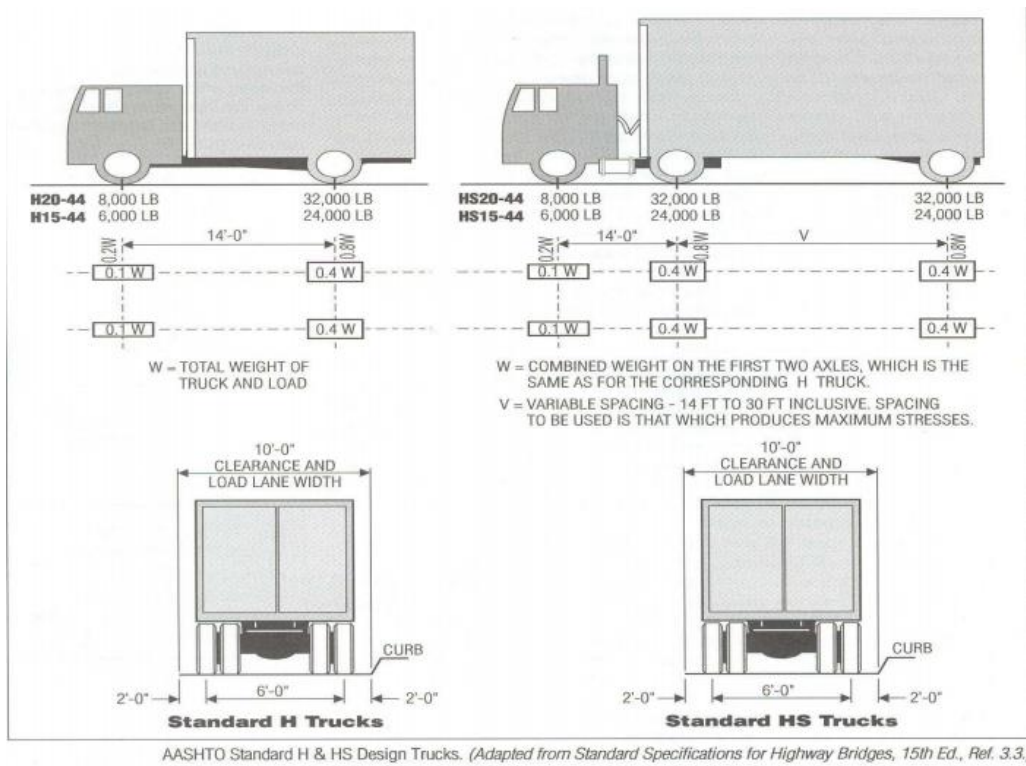


圖 3.4 AASHTO 貨車載重分配示意圖 (1994)

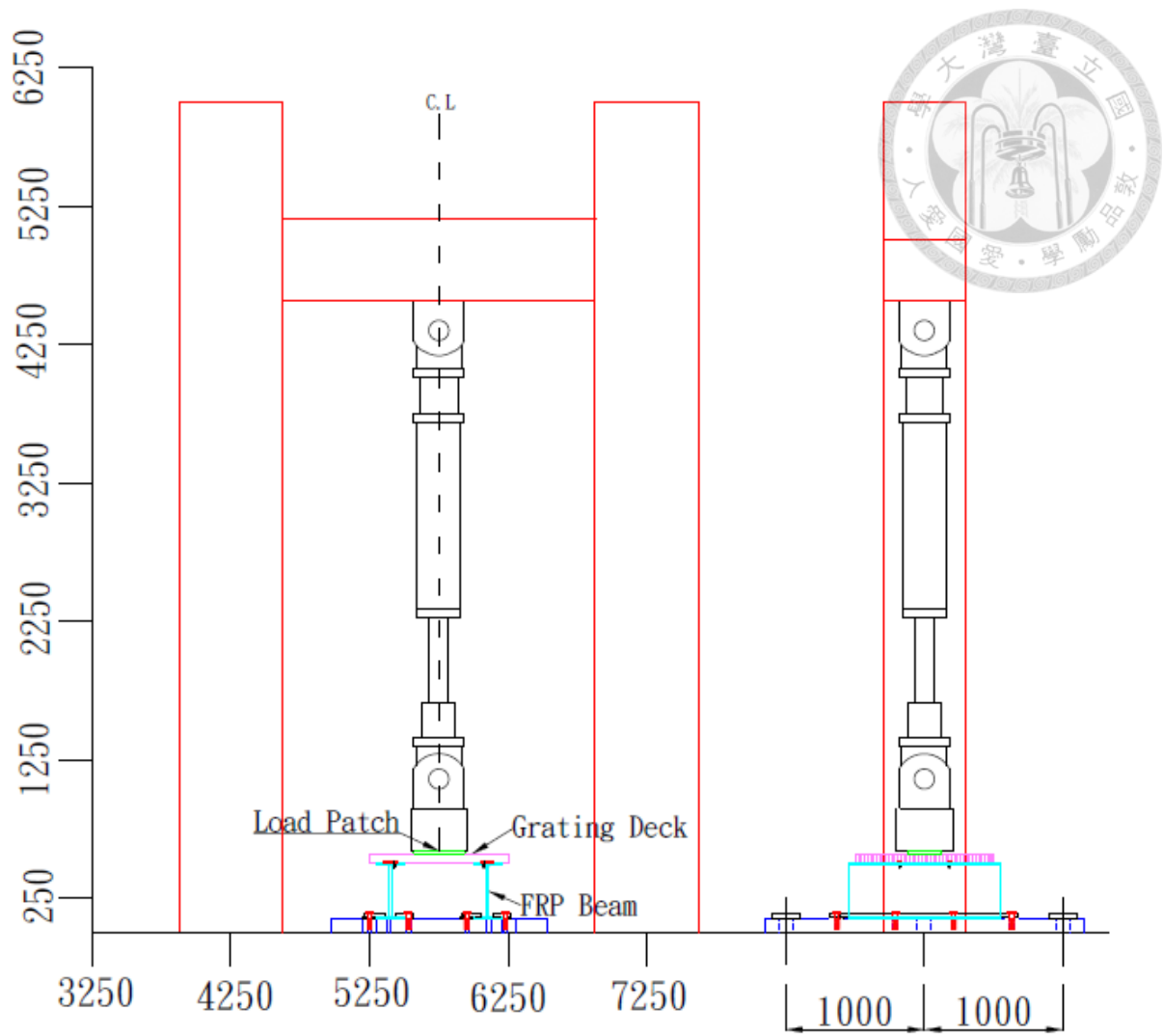
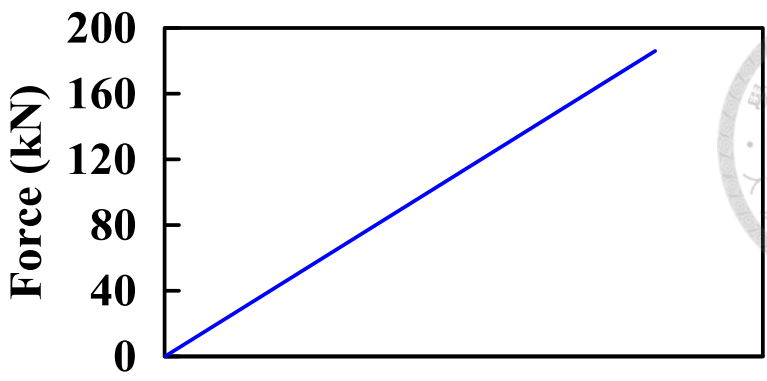
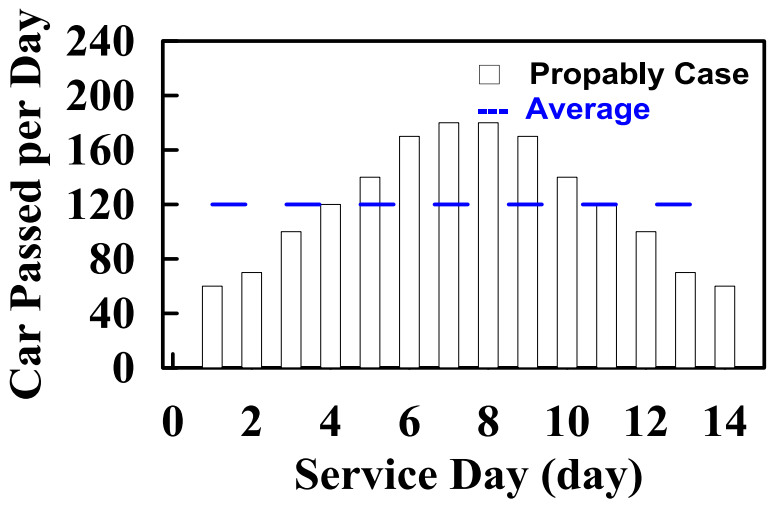


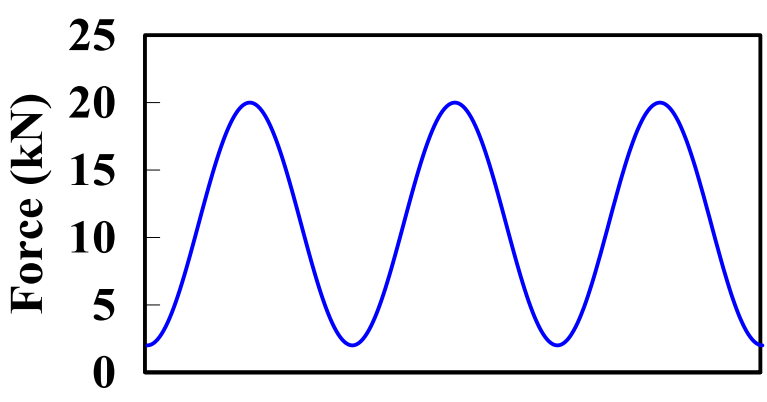
圖 3.5 試驗構架正面及側面示意圖 (Unit: mm)



(a) 單向加載試驗歷時示意圖



(b) 車流量示意圖



(c) 疲勞測試施載大小

圖 3.6 車流量預估及疲勞測試載重示意圖

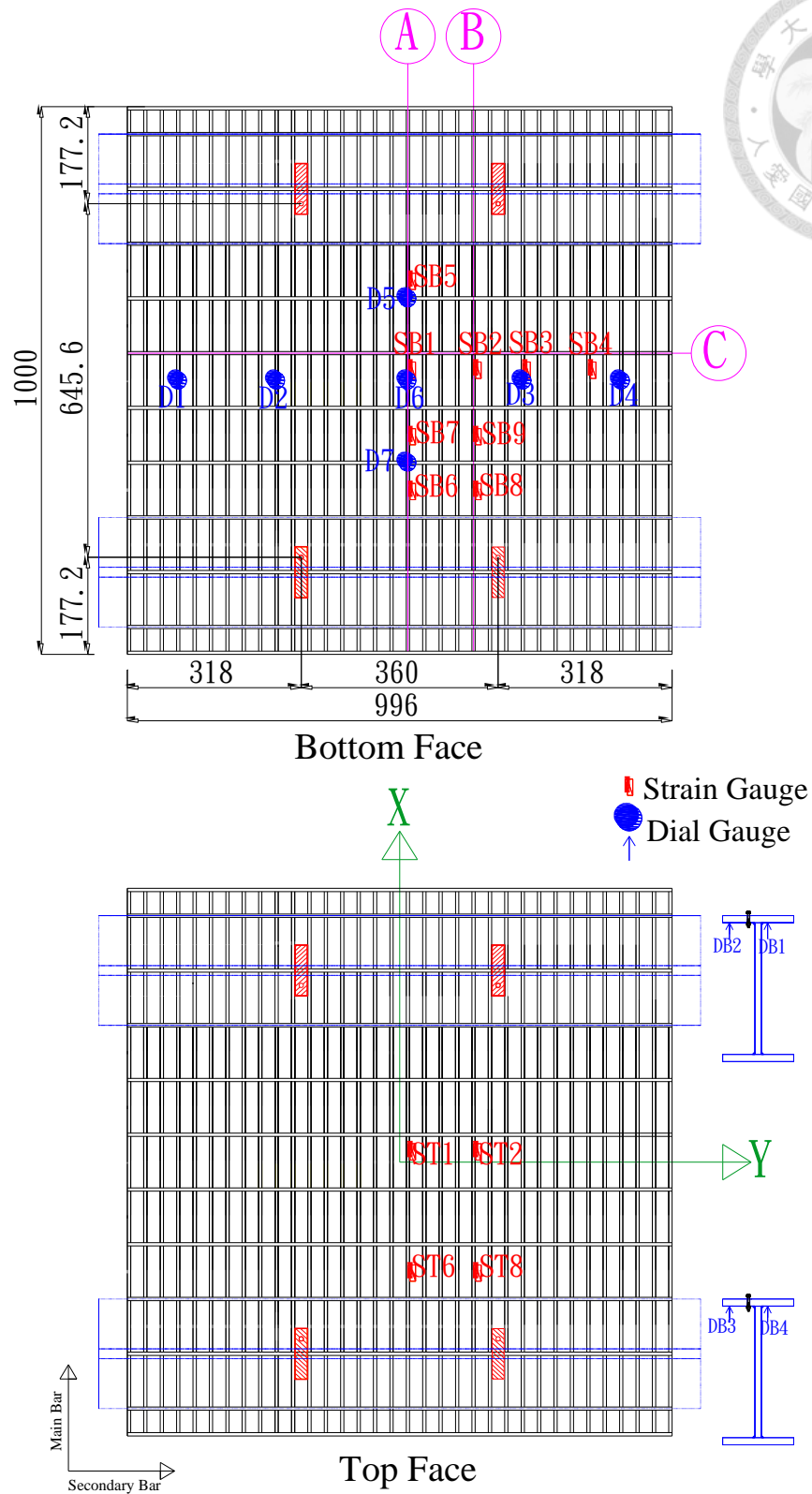


圖 3.7 鋼橋面格柵板位移計及應變計架設示意圖

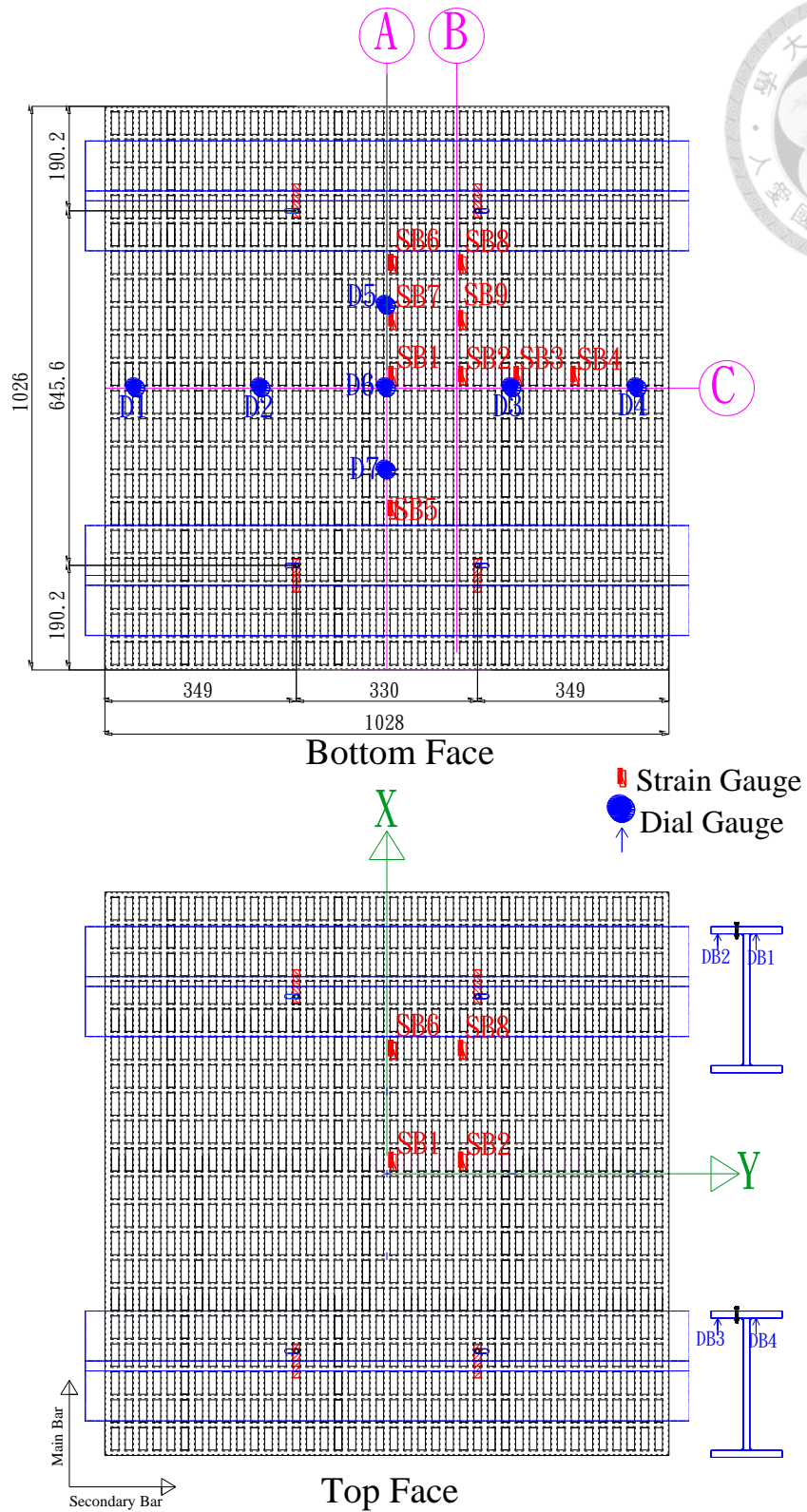
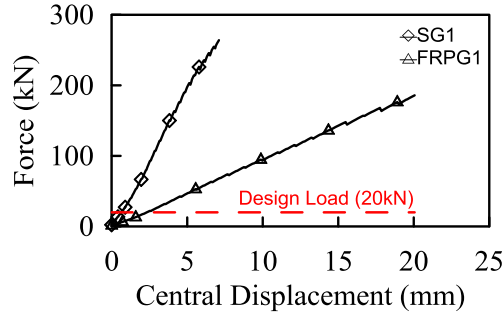
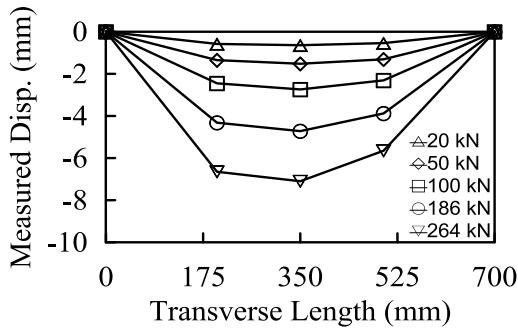


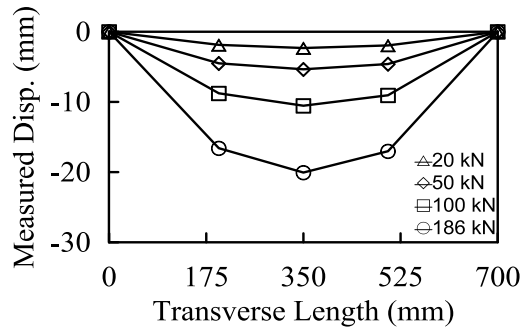
圖 3.8 玻璃纖維橋面格柵板位移計及應變計架設示意圖



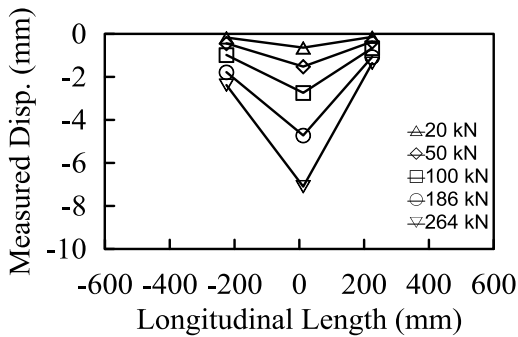
(a) Force V.S. D6 (SG1 & FRPG1)



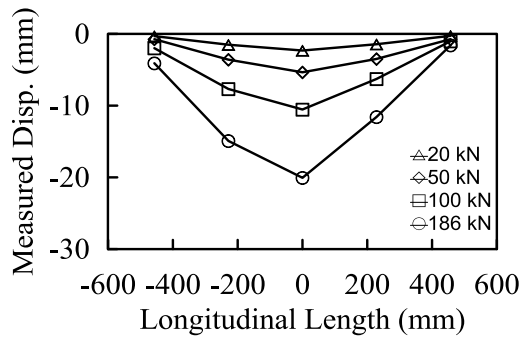
(b) Central Transverse Disp. of SG1



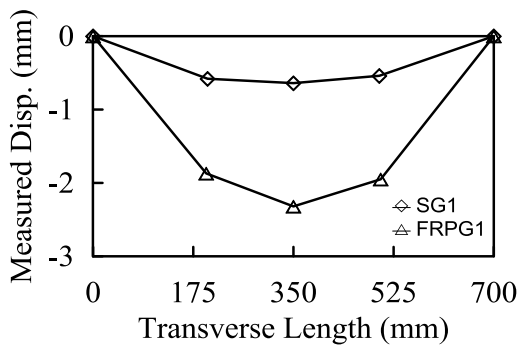
(c) Central Transverse Disp. of FRPG1



(d) Central Longitudinal Disp. of SG1



(e) Central Longitudinal Disp. of FRPG1



(f) Central Disp. Comparison of SG1 & FRPG1 (P=20 kN)

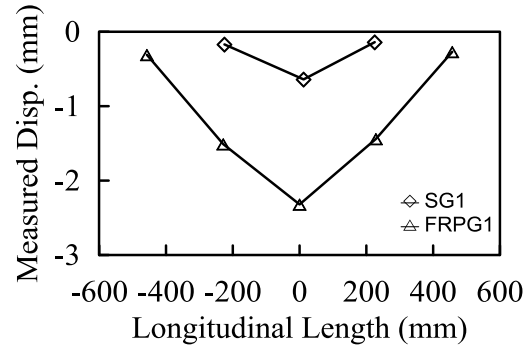
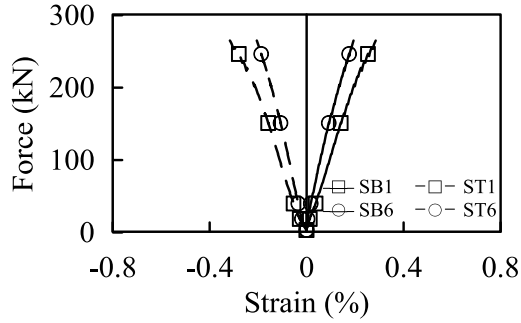
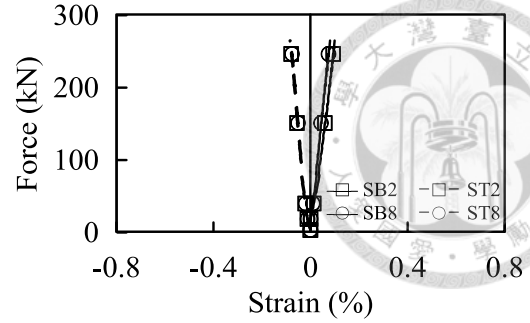


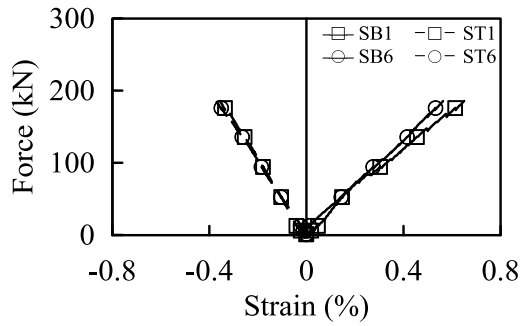
圖 3.9 SG1 及 FRG1 位移變化比較圖



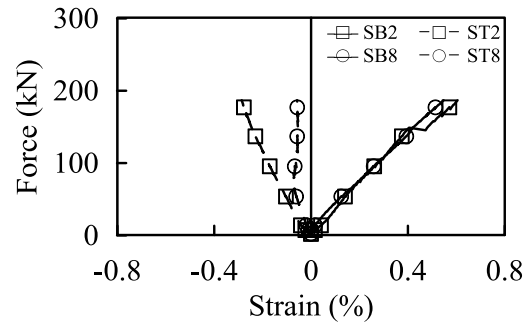
(a) Force V.S. Strain (SG1)



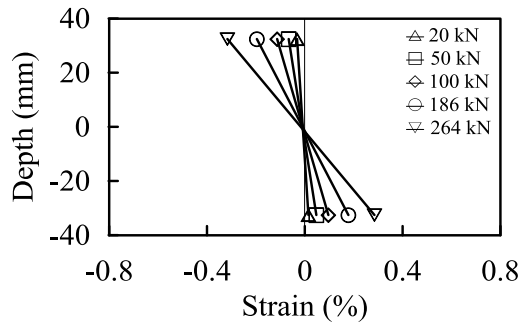
(b) Force V.S. Strain (SG1)



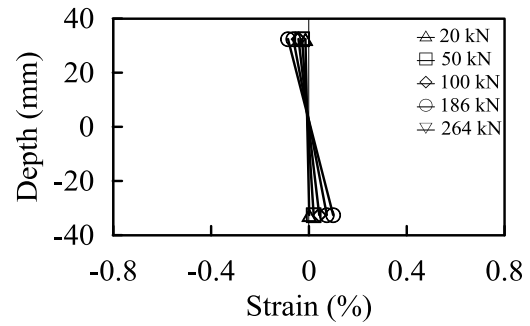
(c) Force V.S. Strain (FRPG1)



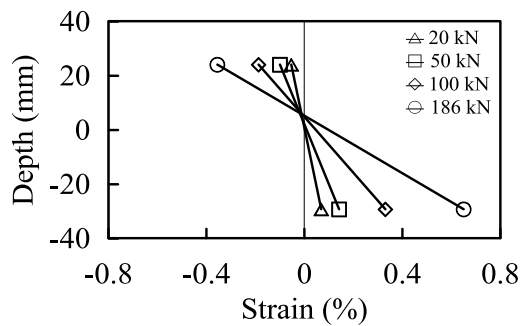
(d) Force V.S. Strain (FRPG1)



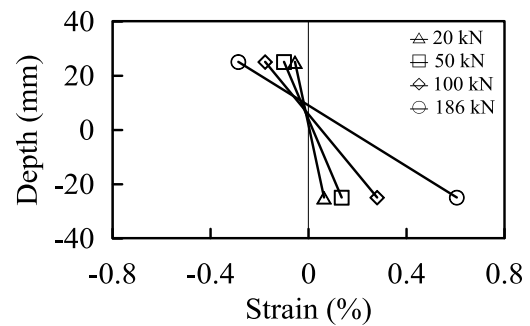
(e) Strain Profile of SG1 (SB1 & ST1)



(f) Strain Profile of SG1 (SB2 & ST2)

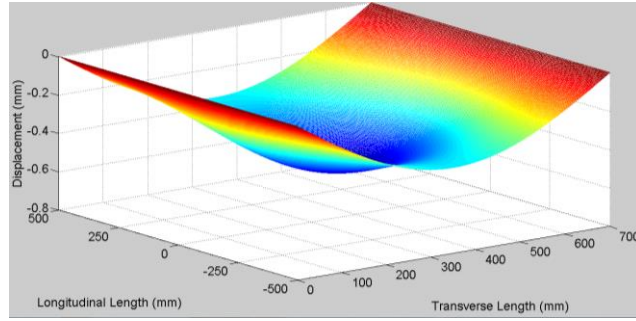


(g) Strain Profile of FRPG1 (SB1 & ST1)

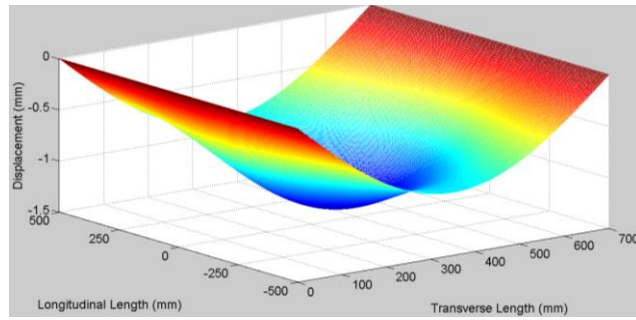


(h) Strain Profile of FRPG1 (SB2 & ST2)

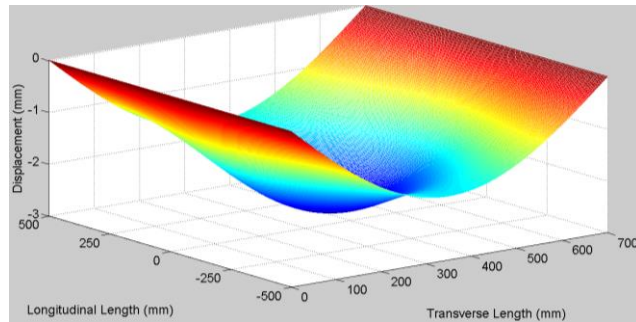
圖 3.10 SG1 及 FRG1 應變變化比較圖



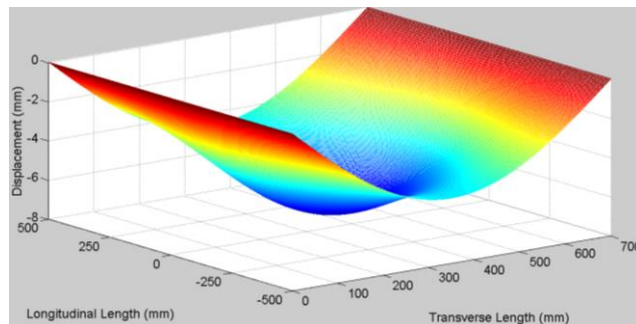
(a) Force=20 kN



(b) Force=50 kN



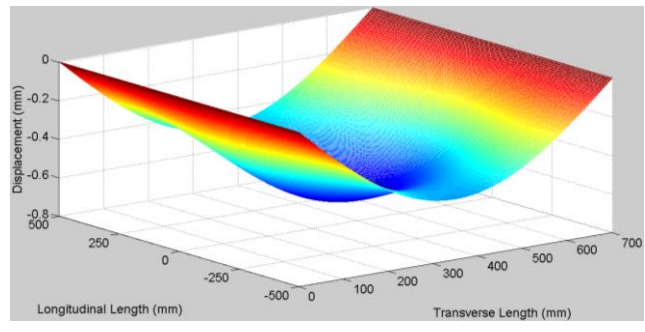
(c) Force=100 kN



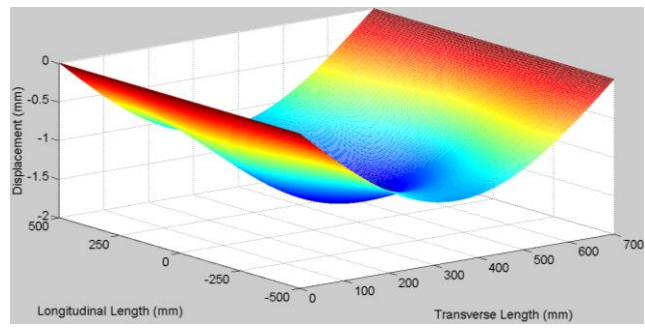
(d) Force=264 kN

圖 3.11 SG1 理論解 3-D 變形狀況 (Timoshenko & Krieger, 1959)

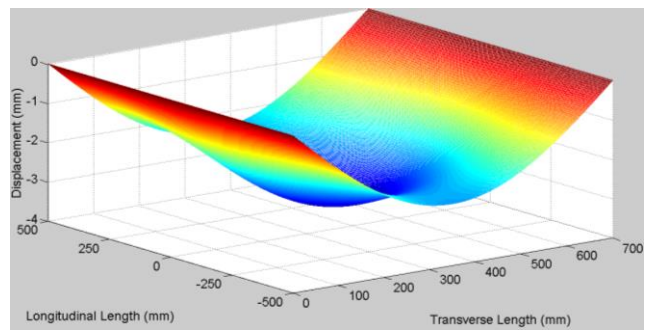




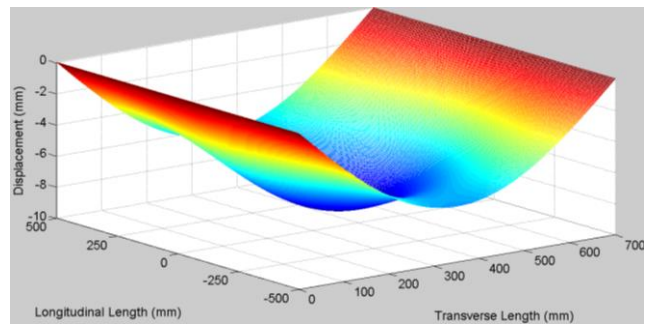
(a) Force=20 kN



(b) Force=50 kN

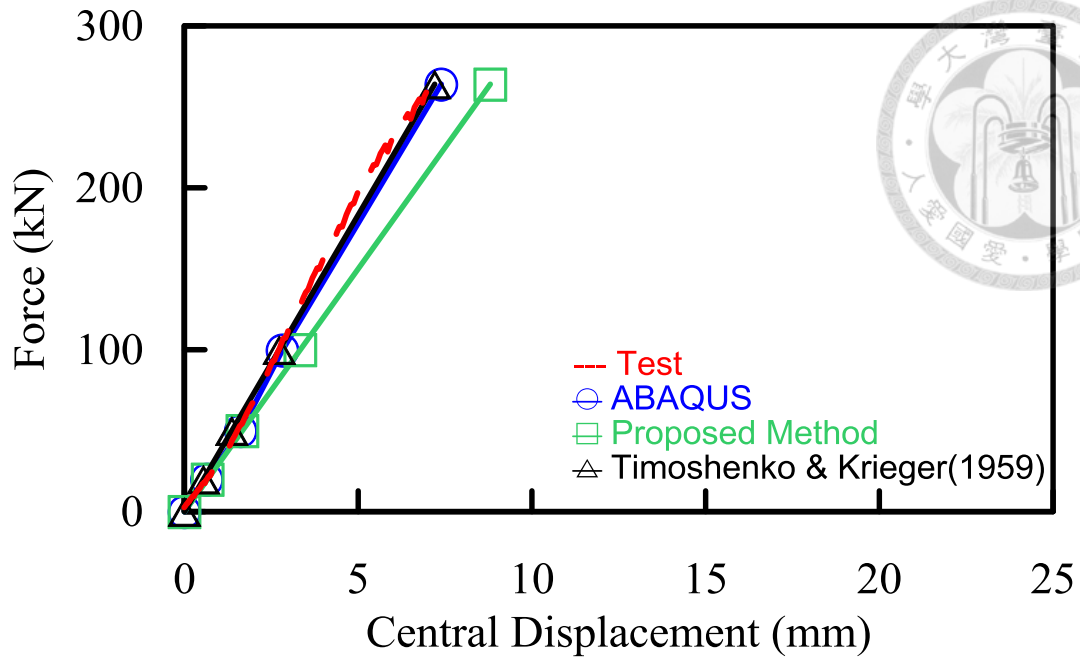


(b) Force=100 kN

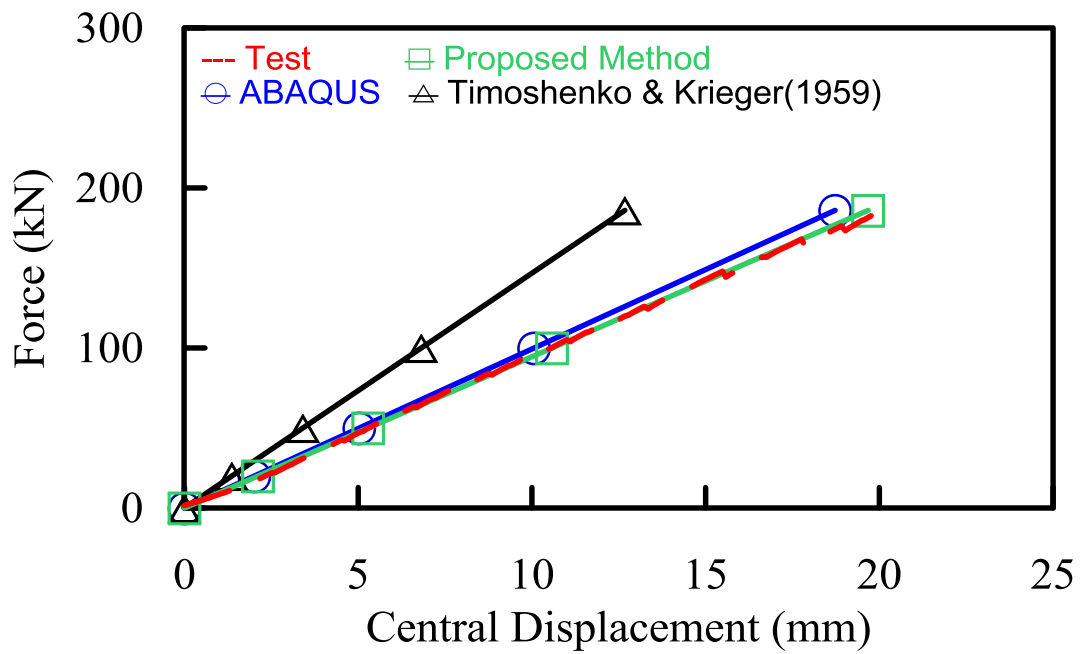


(b) Force=264 kN

圖 3.12 SG1 理論解 3-D 變形狀況 (Proposed Method)

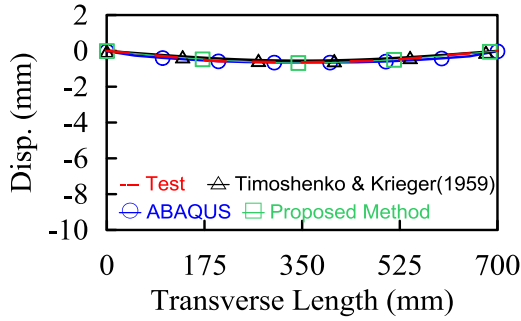


(a) Force V.S. D6 (SG1)

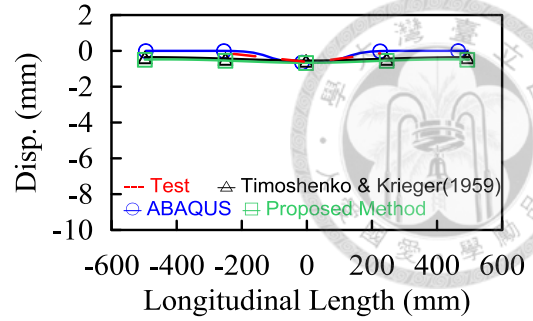


(b) Force V.S. D6 (FRPG1)

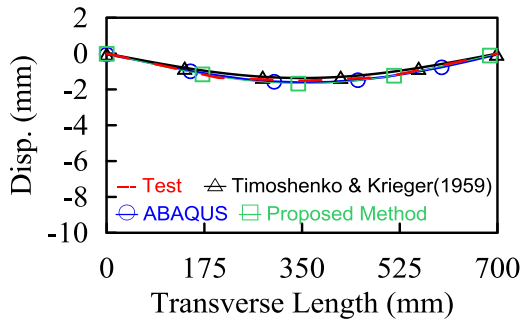
圖 3.13 理論、有限元素及試驗最大力量位移圖比較 (SG1 & FRPG1)



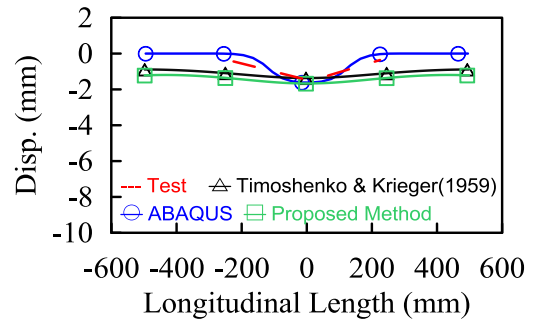
(a) Transverse Disp. Distribution (20 kN)



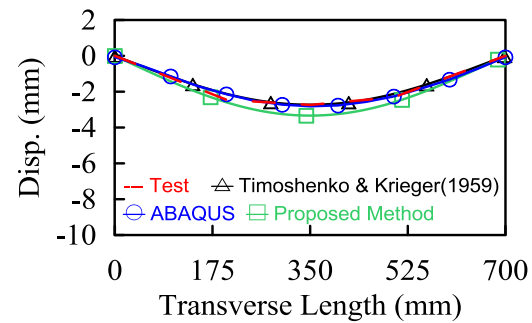
(b) Longitudinal Disp. Distribution (20 kN)



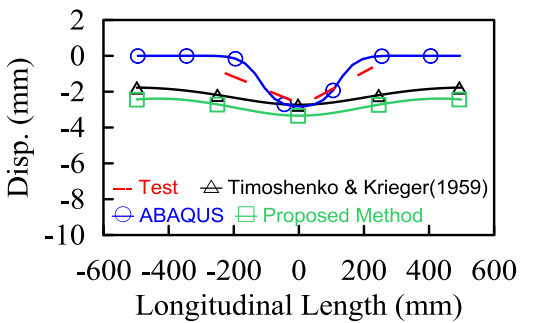
(c) Transverse Disp. Distribution (50 kN)



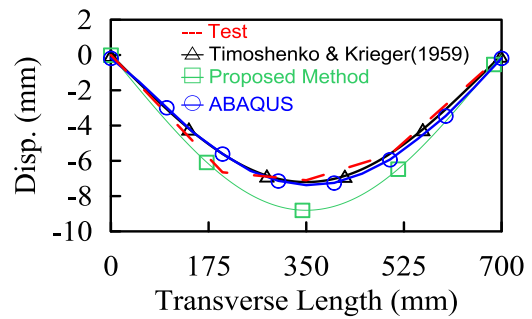
(d) Longitudinal Disp. Distribution (50 kN)



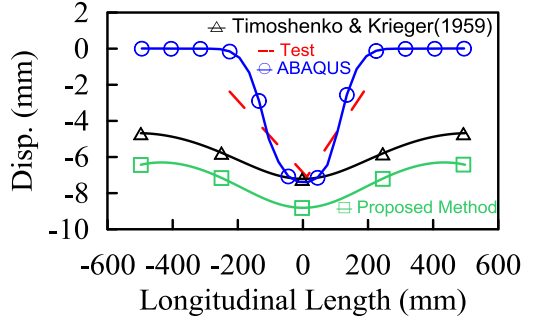
(e) Transverse Disp. Distribution (100 kN)



(f) Longitudinal Disp. Distribution (100 kN)

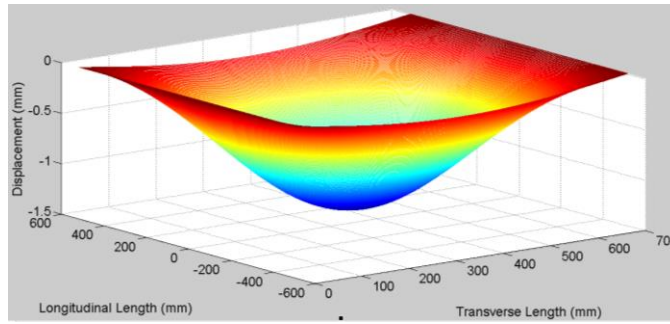


(g) Transverse Disp. Distribution (264 kN)

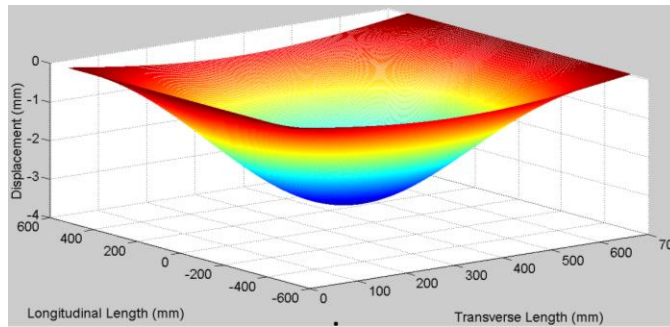


(h) Longitudinal Disp. Distribution (264 kN)

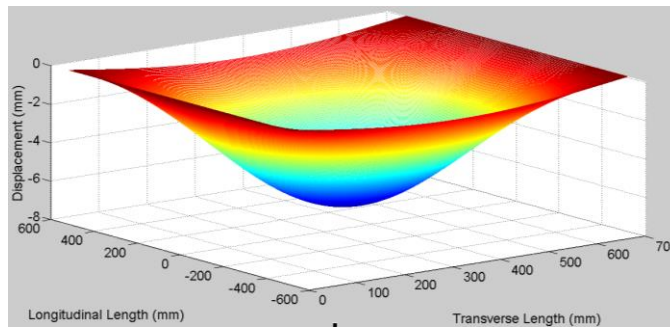
圖 3.14 理論、有限元素及試驗各點位移比較圖 (SG1)



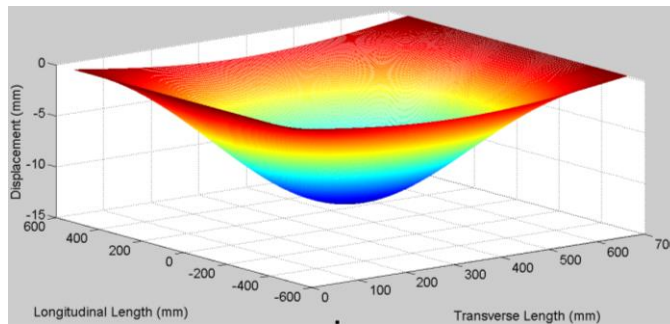
(a) Force=20 kN



(b) Force=50 kN

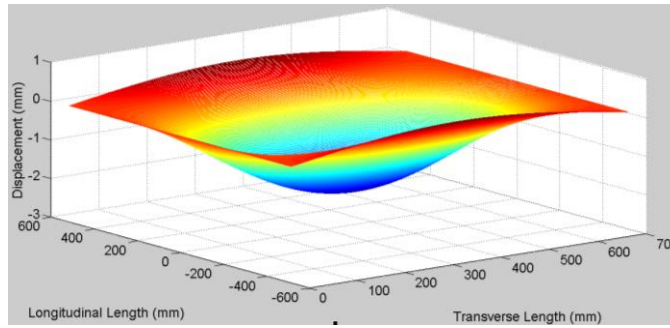


(c) Force=100 kN

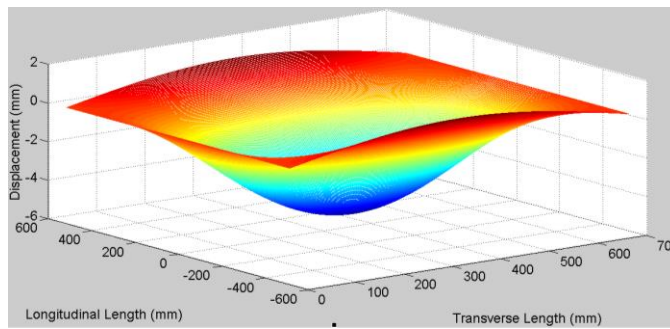


(d) Force=186 kN

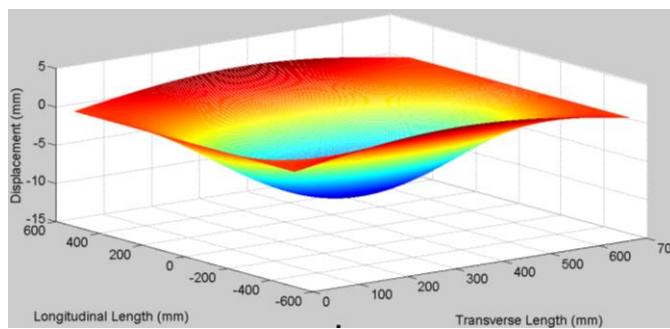
圖 3.15 FRPG1 理論解 3-D 變形狀況 (Timoshenko & Krieger, 1959)



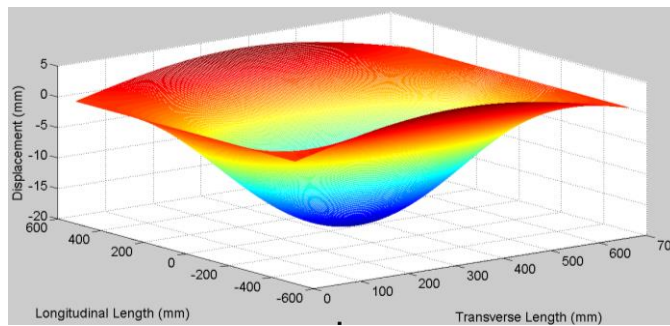
(a) Force=20 kN



(b) Force=50 kN



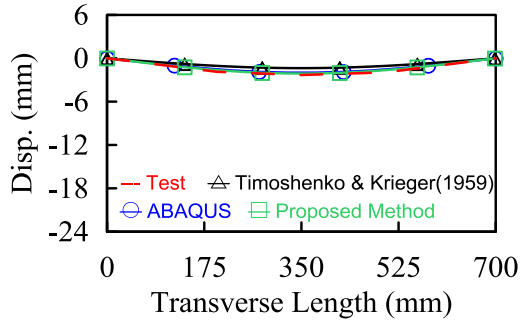
(c) Force=100 kN



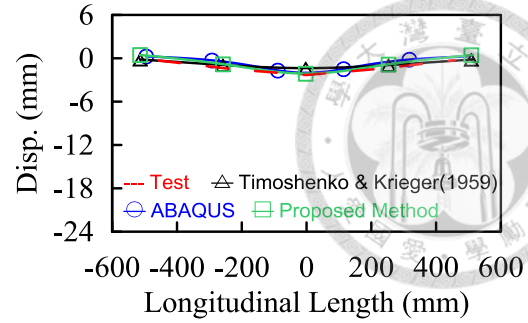
(d) Force=186 kN

圖 3.16 FRPG1 理論解 3-D 變形狀況 (Proposed Method)

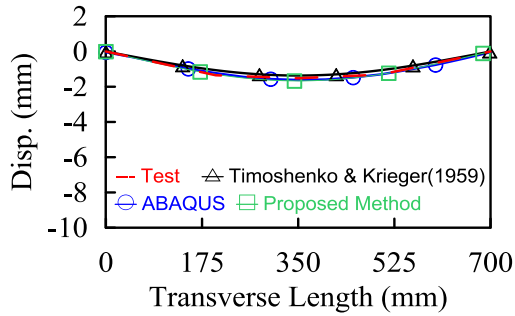




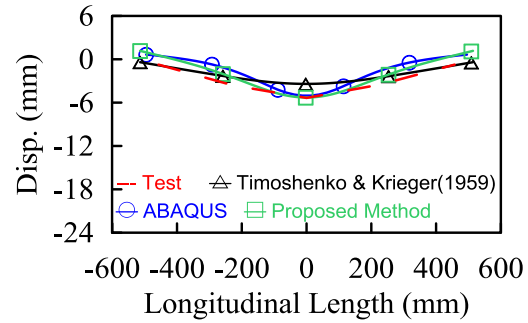
(a) Transverse Disp. Distribution (20 kN)



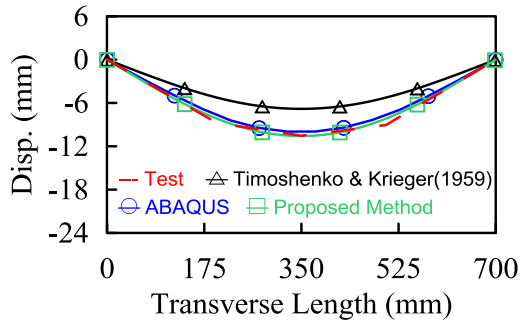
(b) Longitudinal Disp. Distribution (20 kN)



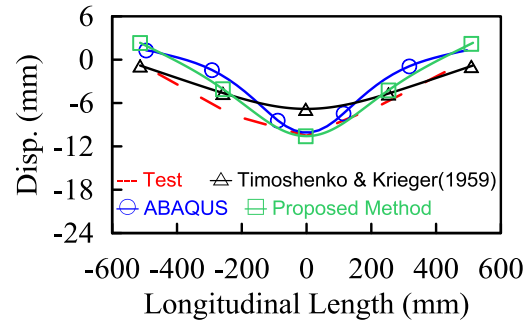
(c) Transverse Disp. Distribution (50 kN)



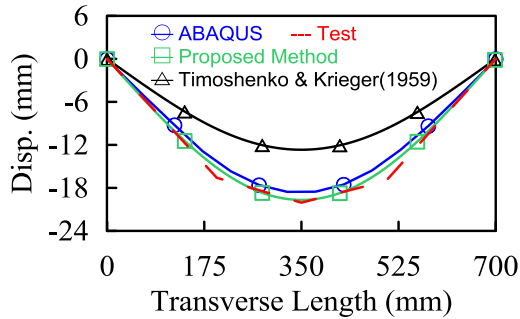
(d) Longitudinal Disp. Distribution (50 kN)



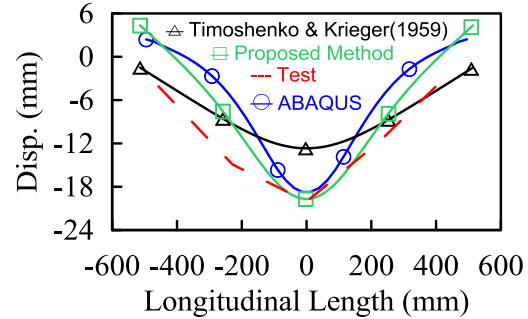
(e) Transverse Disp. Distribution (100 kN)



(f) Longitudinal Disp. Distribution (100 kN)

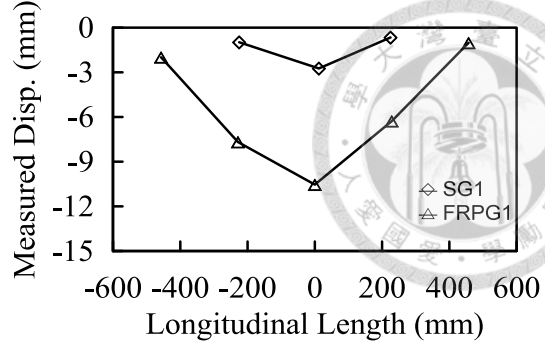
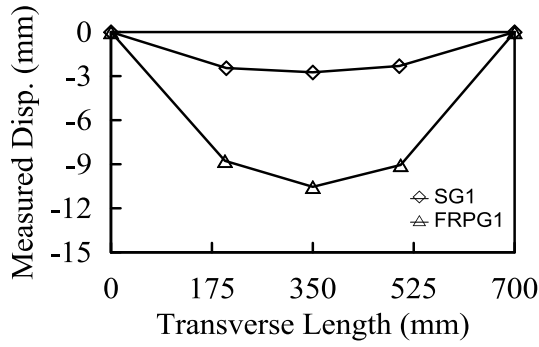


(g) Transverse Disp. Distribution (186 kN)

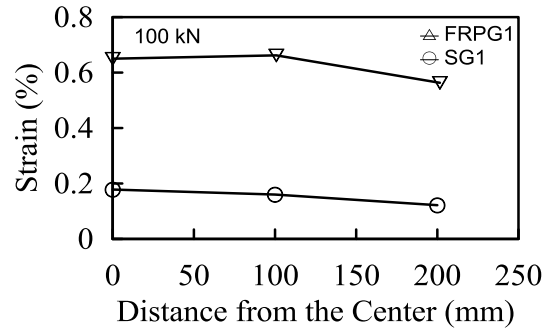
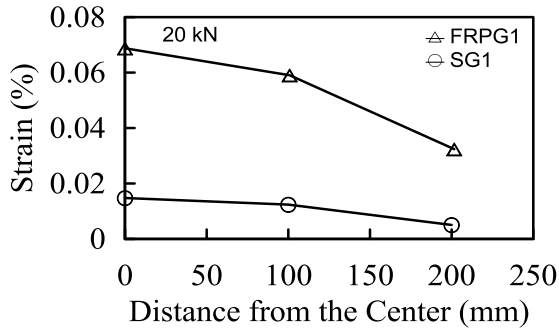


(h) Longitudinal Disp. Distribution (186 kN)

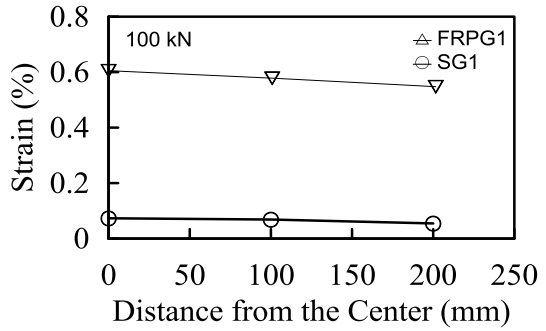
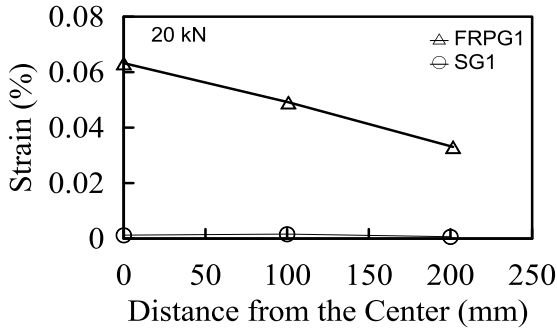
圖 3.17 理論、有限元素及試驗各點位移比較圖 (FRPG1)



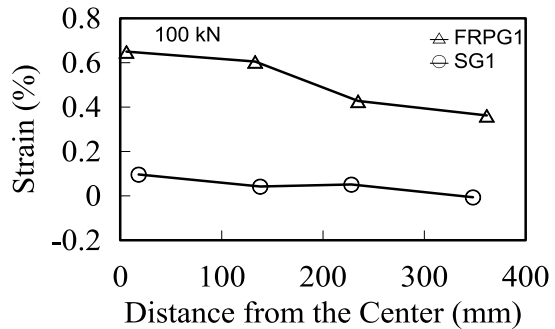
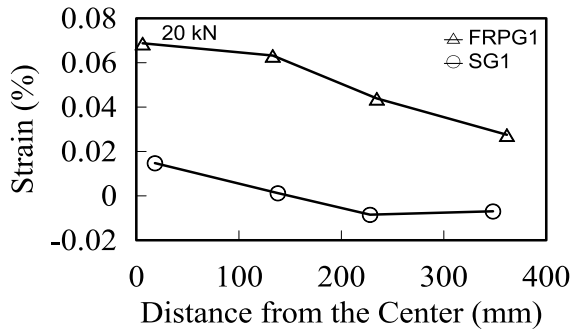
(a) Central Displacement Comparison of SG1 & FRPG1 (P=100 kN)



(b) Transverse Strain Distribution for the Main Bar at  $y \approx 0$  mm

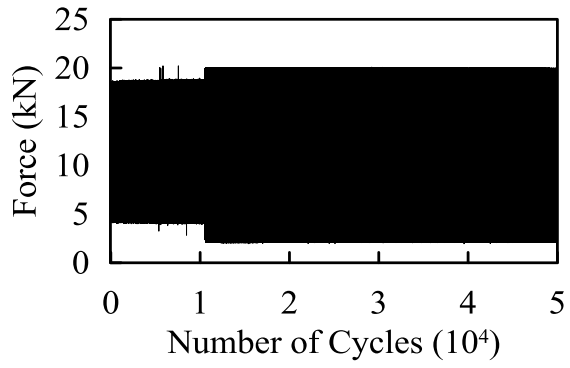


(c) Transverse Strain Distribution for the Main Bar at  $y \approx 127$  mm

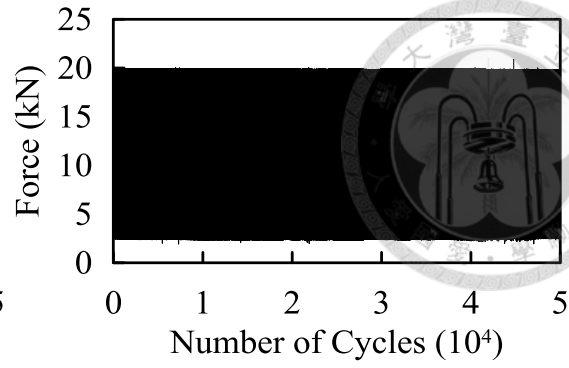


(d) Longitudinal Strain Distribution across the Center Line of Grating Decks

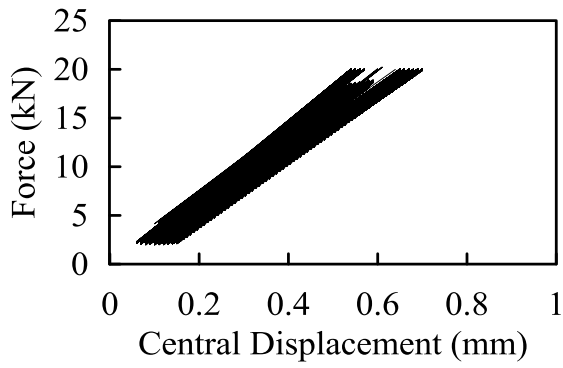
圖 3.18 SG1 及 FRG1 位移及應變變化比較圖



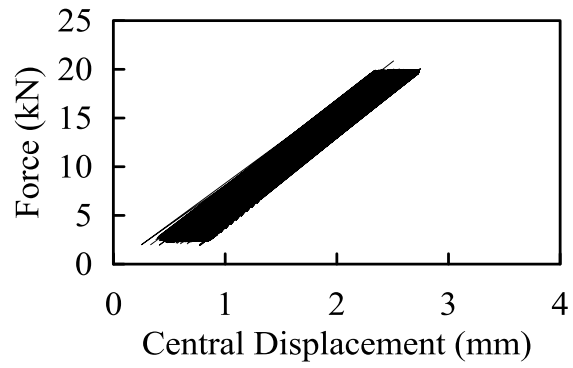
(a) Force V.S. Number of Cycles (SG2)



(b) Force V.S. Number of Cycles (FRPG2)



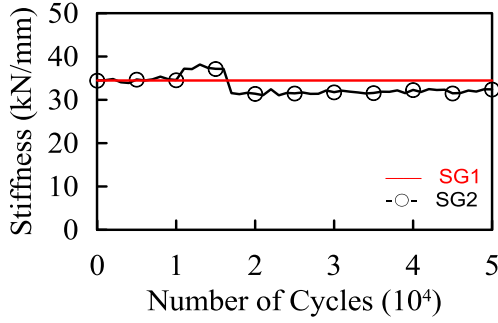
(c) Force V.S. D6 (SG2)



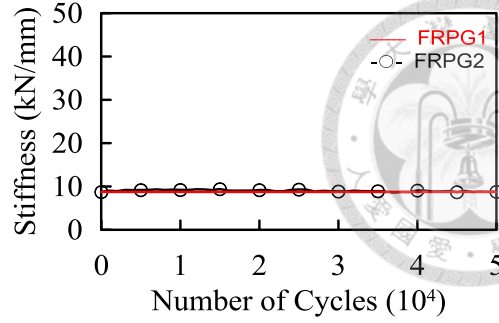
(d) Force V.S. D6 (FRPG2)

圖 3.19 疲勞測試試驗加載歷時 (50000 Cycles)

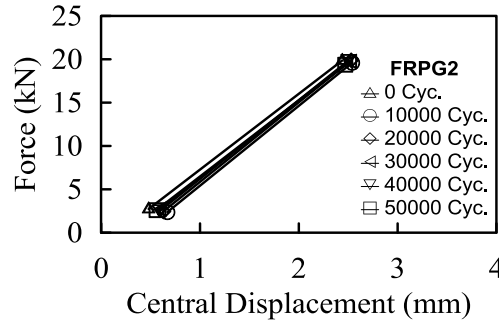
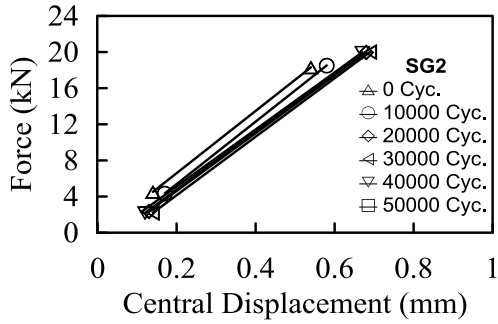




(a) Stiffness V.S. Number of Cycles

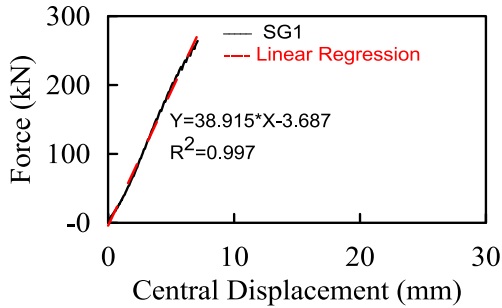


(b) Stiffness V.S. Number of Cycles

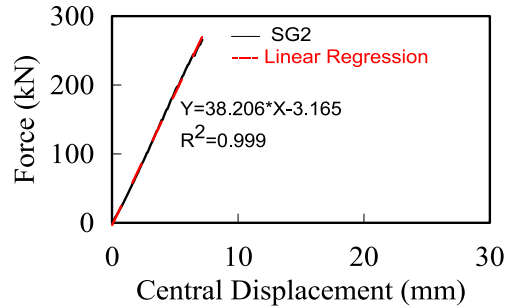


(c) Force V.S. Displacement (Under Different Fatigue cycling)

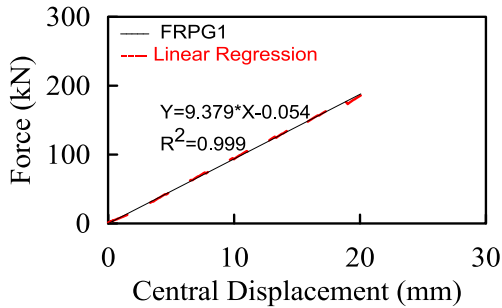
圖 3.20 疲勞測試載重試驗結果 (SG2 & FRPG2)



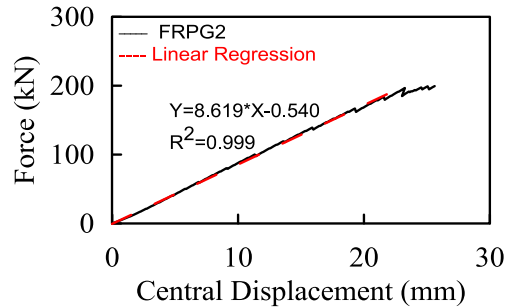
(a) Linear Regression of SG1



(b) Linear Regression of SG2

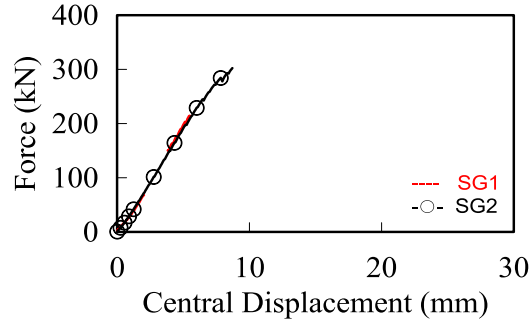


(c) Linear Regression of FRPG1

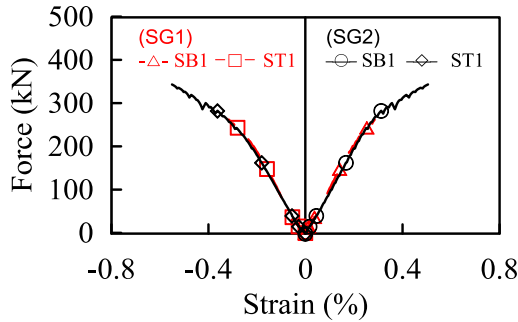


(d) Linear Regression of FRPG2

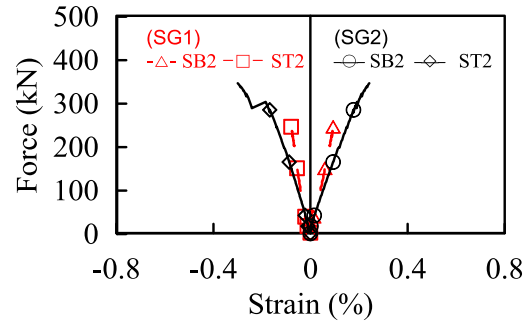
圖 3.21 疲勞測試後單向加載試驗與單純單向加載試驗線性回歸結果



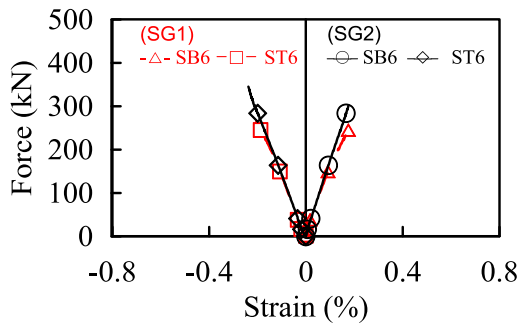
(a) Force V.S. D6



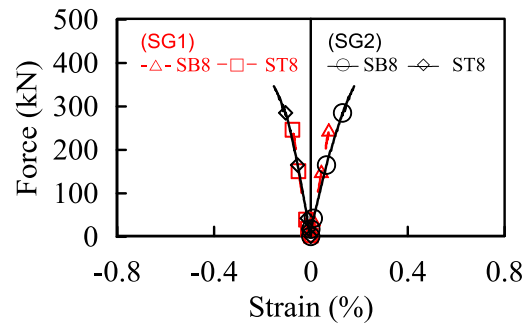
(b) Force V.S. Strain (SB1 & ST1)



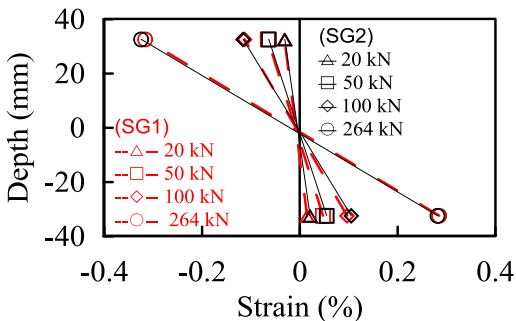
(c) Force V.S. Strain (SB2 & ST2)



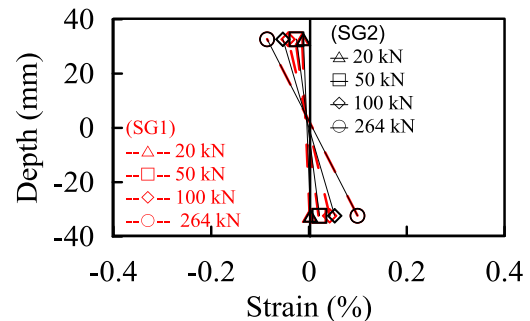
(d) Force V.S. Strain (SB6 & ST6)



(e) Force V.S. Strain (SB8 & ST8)



(f) Strain Profile (SB1 & ST1)



(g) Strain Profile (SB2 & ST2)

圖 3.22 疲勞測試後單向加載試驗與單純單向加載試驗比較 (SG1 V.S. SG2)

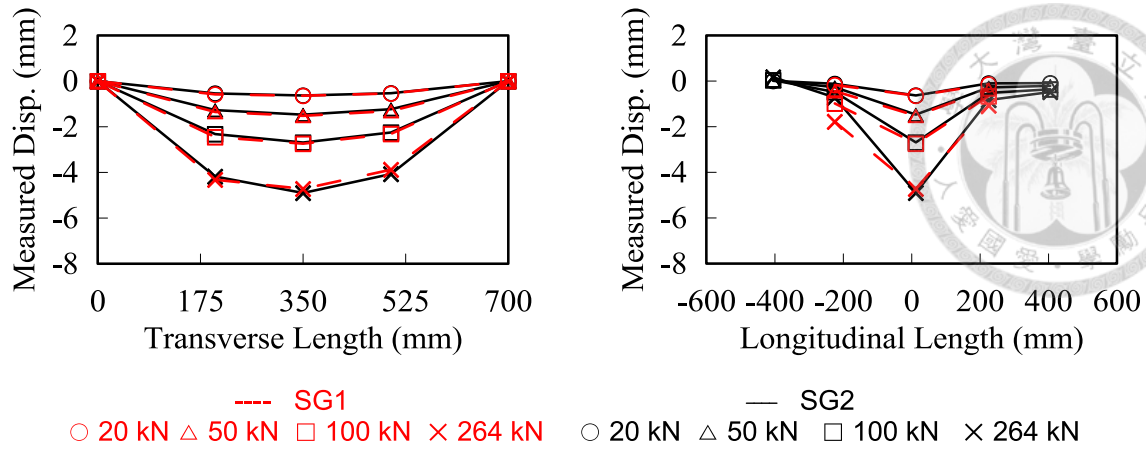


圖 3.23 疲勞測試後單向加載試驗與單純單向加載試驗比較 (SG1 V.S. SG2) (續)

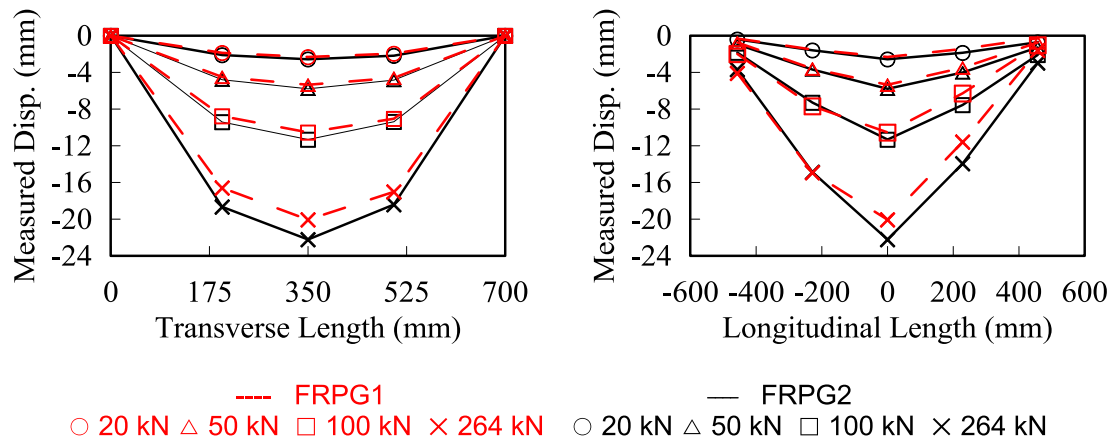
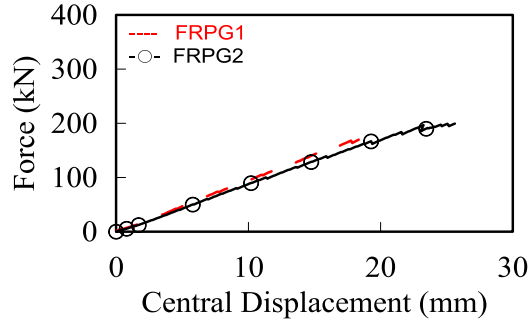
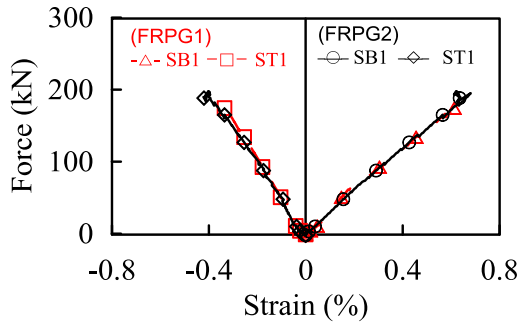


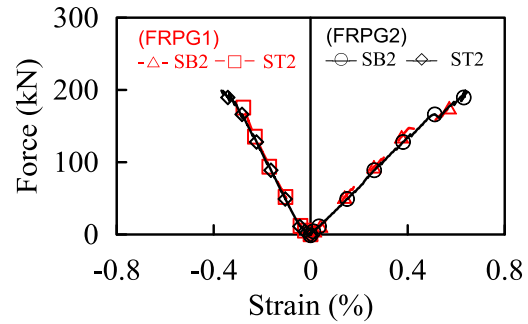
圖 3.24 疲勞測試後單向加載試驗與單純單向加載試驗比較 (FRPG1 V.S. FRPG2)



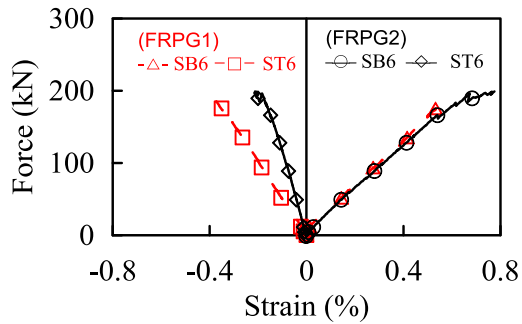
(a) Force V.S. D6



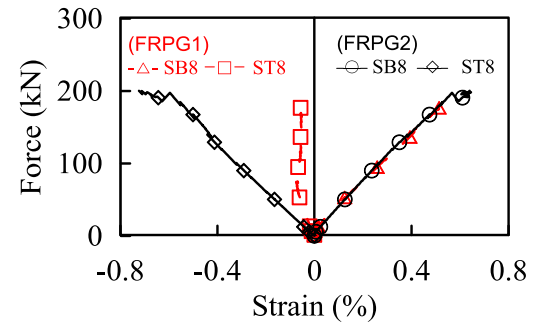
(b) Force V.S. Strain (SB1 & ST1)



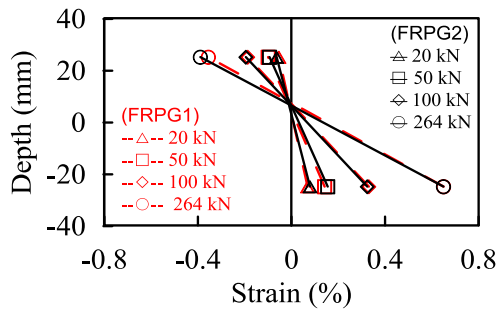
(c) Force V.S. Strain (SB2 & ST2)



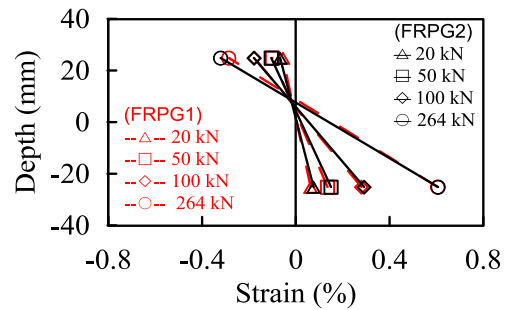
(d) Force V.S. Strain (SB6 & ST6)



(e) Force V.S. Strain (SB8 & ST8)

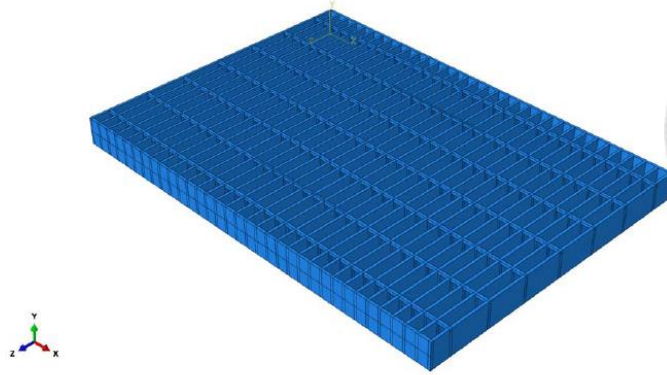


(f) Strain Profile (SB1 & ST1)

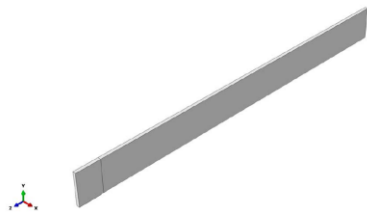


(g) Strain Profile (SB2 & ST2)

圖 3.25 疲勞測試後單壓試驗與單純單向加載試驗比較 (FRPG1 V.S. FRPG2) (續)



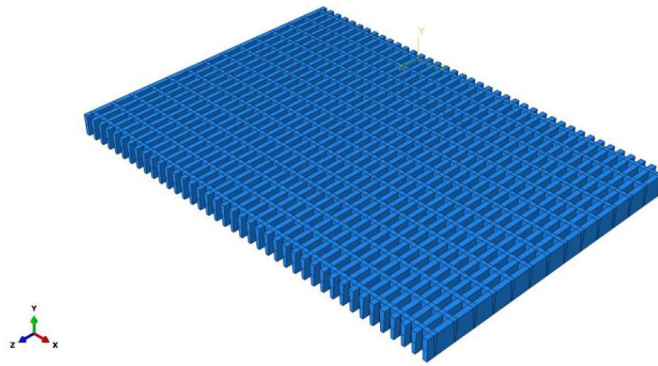
(a) 鋼橋面格柵板組合後模型



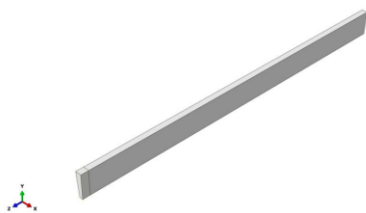
(a) 主桿模型



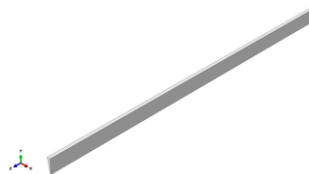
(b) 橫桿模型



(d) 玻璃纖維橋面格柵板組合後模型

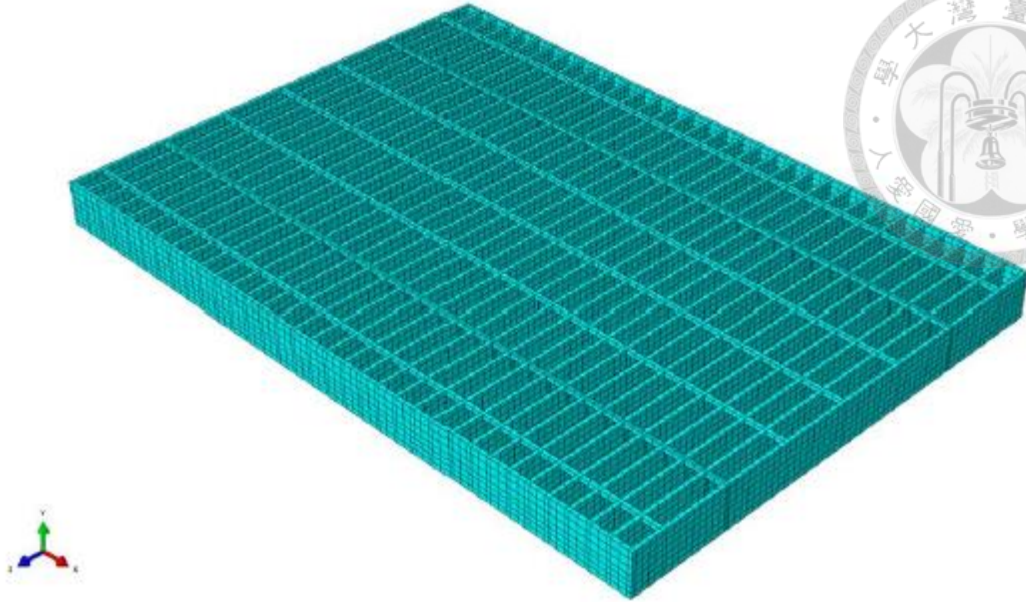


(e) 主桿模型

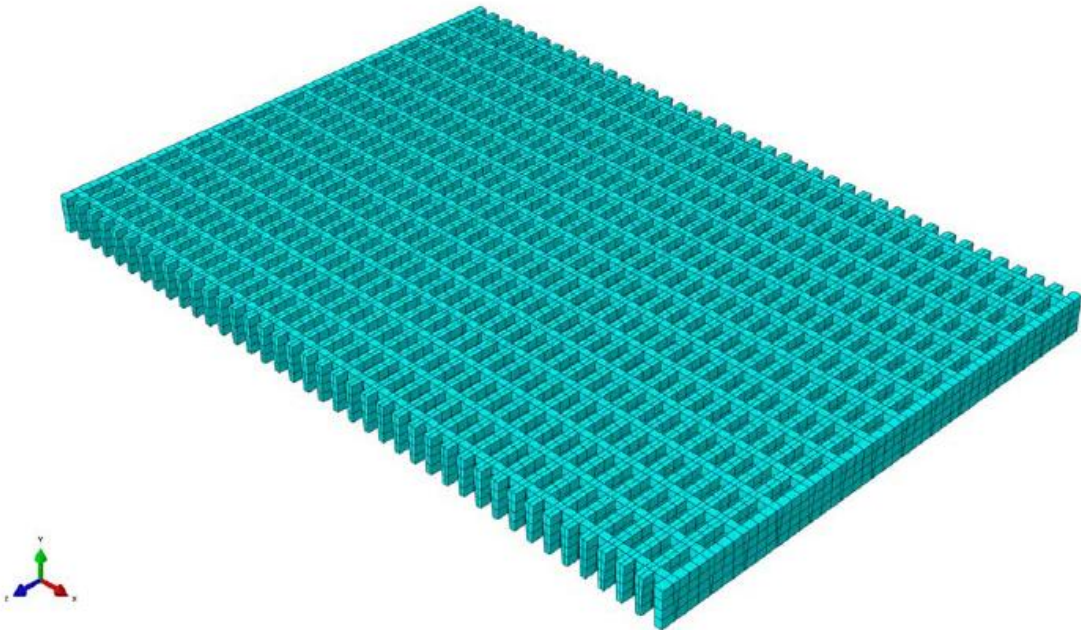


(f) 橫桿模型

圖 4.1 鋼及玻璃纖維橋面格柵板模型

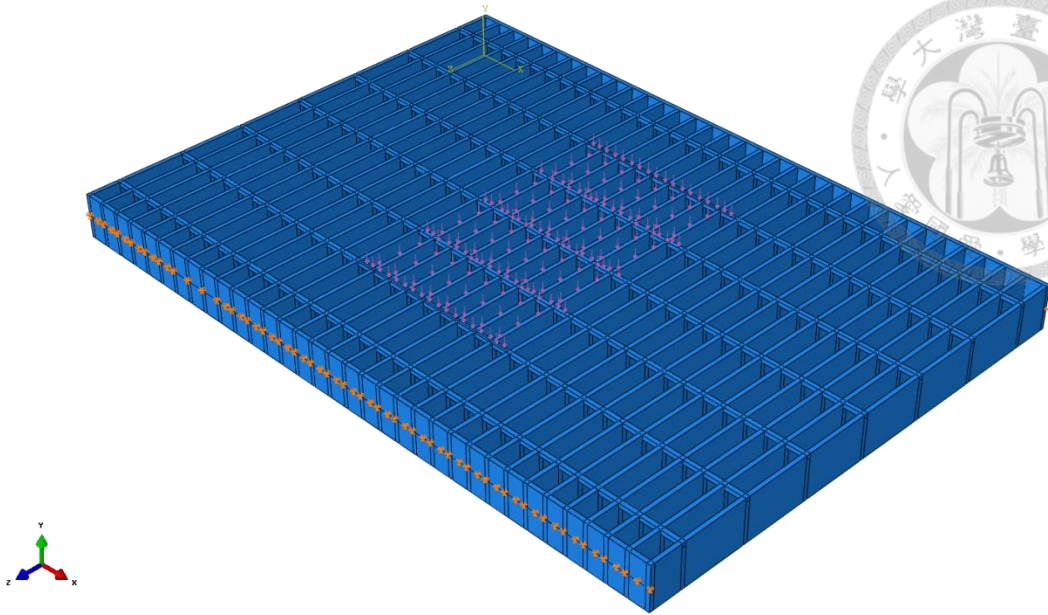


(a) 鋼橋面格柵板模型網格 (19144 個磚元素)

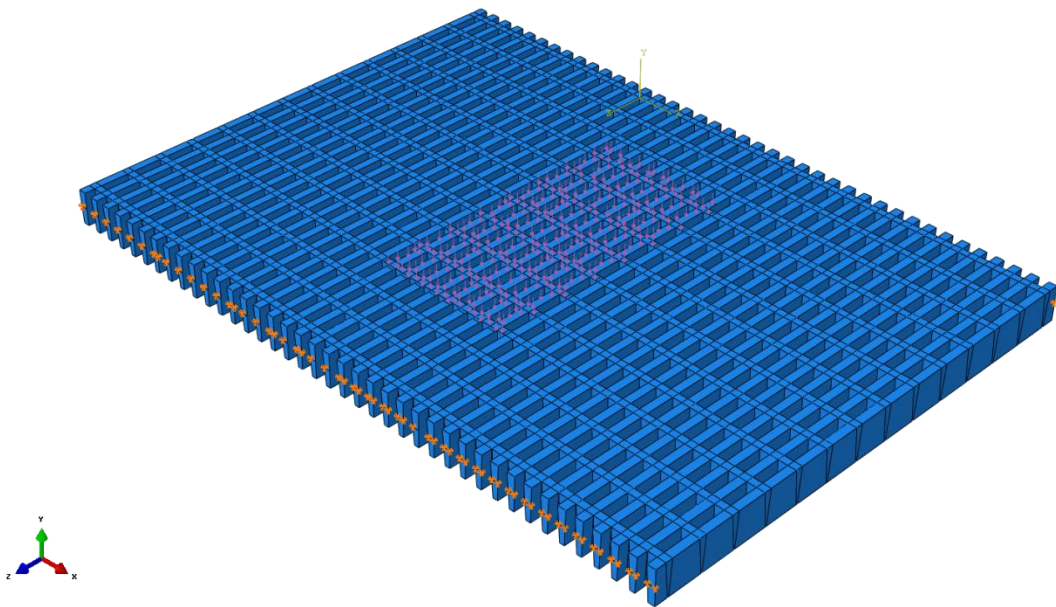


(b) 玻璃纖維橋面格柵板模型網格 (44732 個磚元素)

圖 4.2 試體模型網格

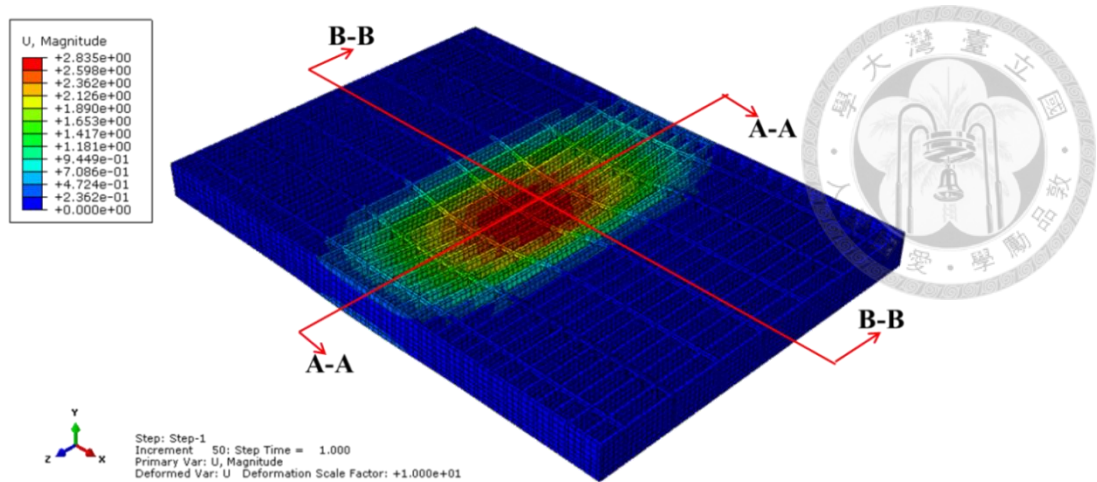


(a) 邊界條件及外力施加方式 (鋼橋面格柵板)



(b) 邊界條件及外力施加方式 (玻璃纖維橋面格柵板)

圖 4.3 模型邊界條件及外力施加方式



3-D Deformation Shape of SG1 (Scale=10)

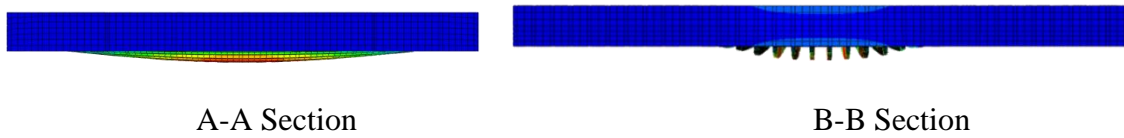
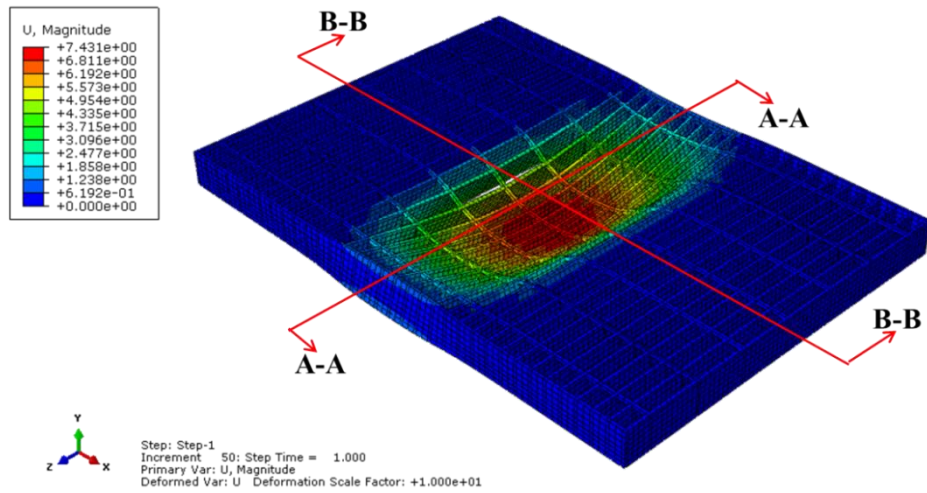


圖 4.4 SG1 試體有限元素分析 3-D 變形圖 (Force=100 kN)



3-D Deformation Shape of SG1 (Scale=10, Full Elastic Behavior)

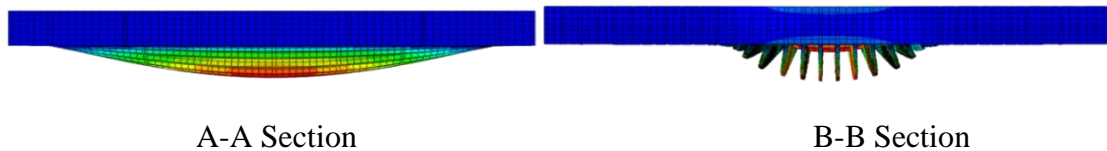
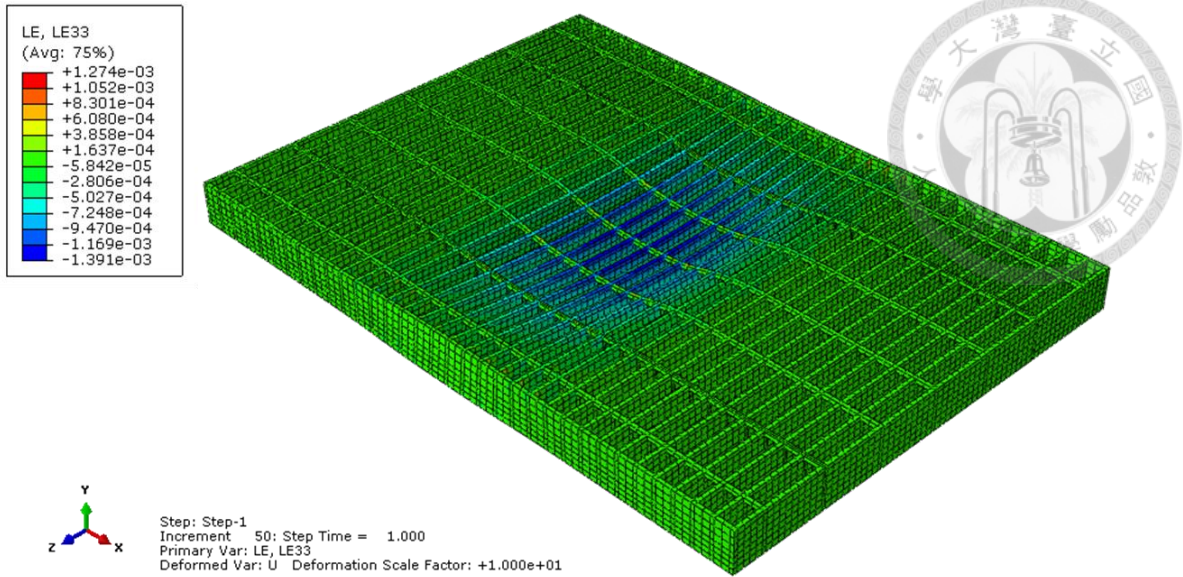
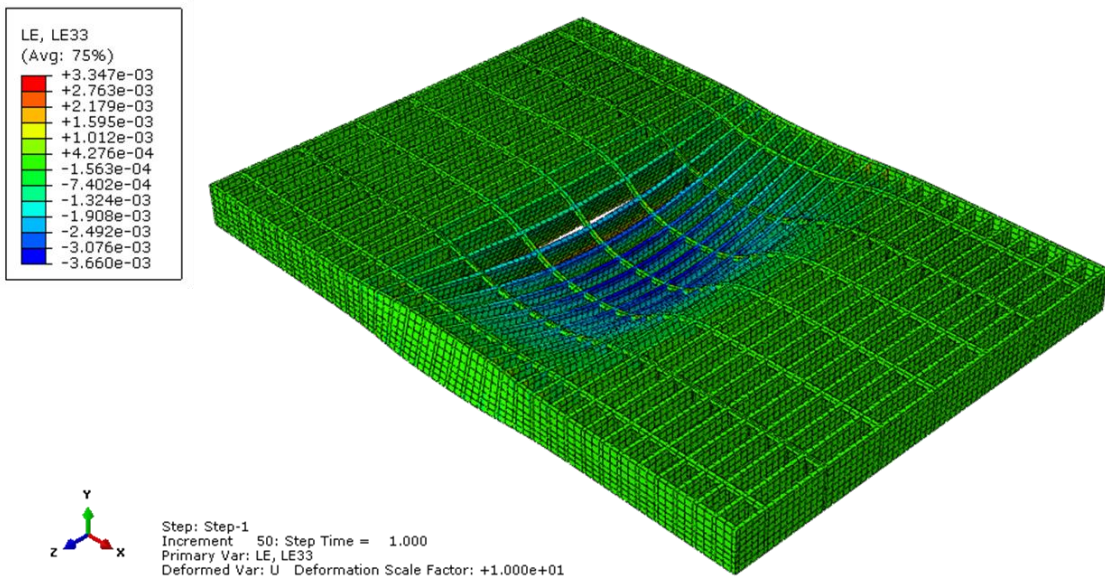


圖 4.5 SG1 試體有限元素分析 3-D 變形圖 (Force=264 kN)



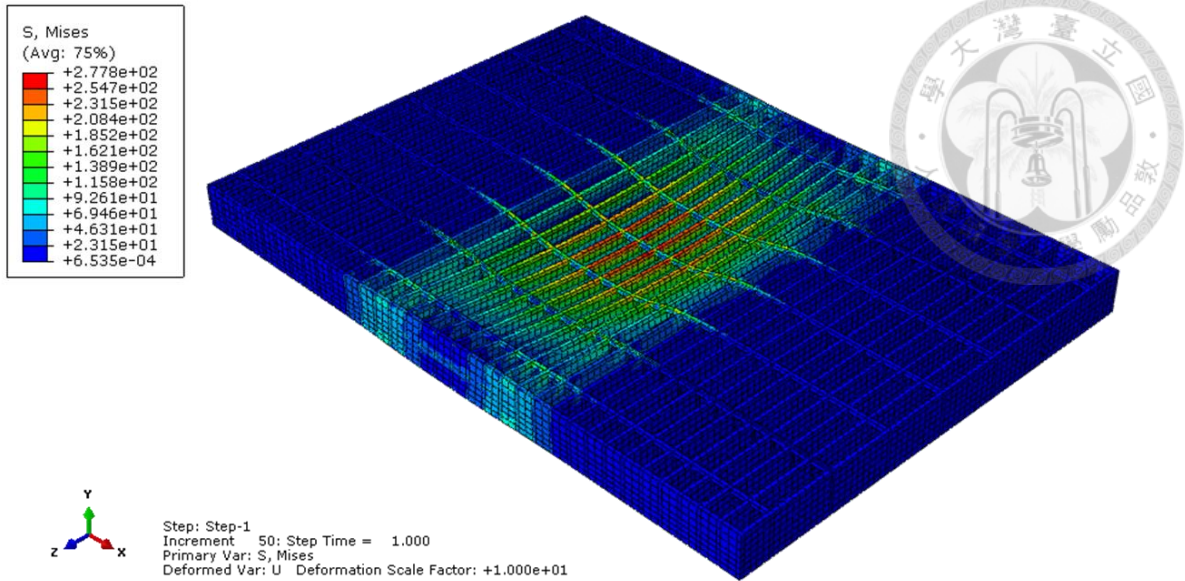


(a) Axial Strain Distribution of Main Bar (Force=100 kN, Scale=10)

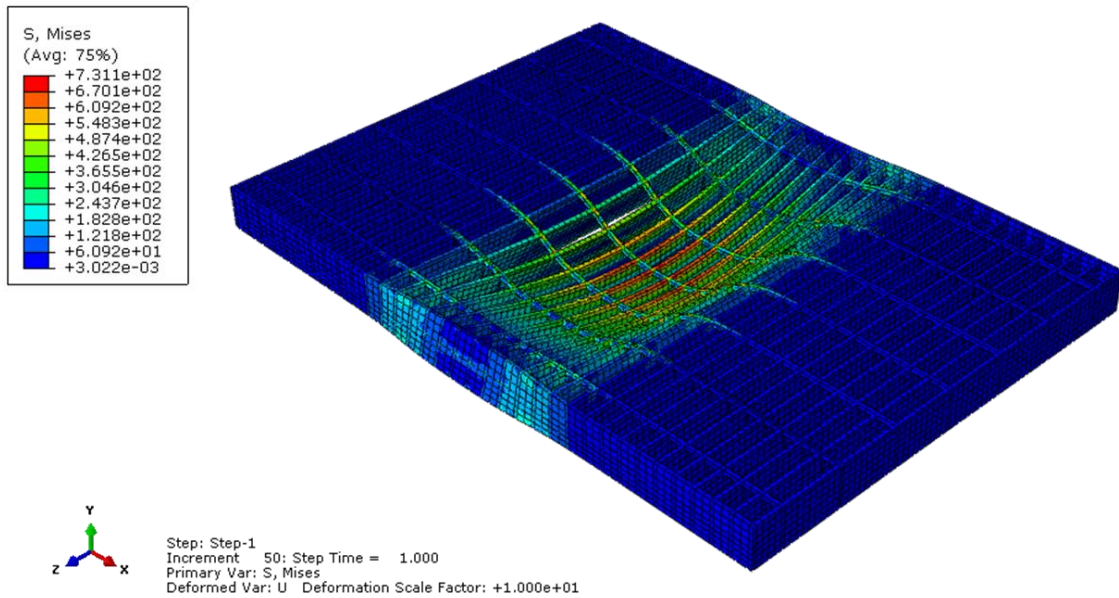


(b) Axial Strain Distribution of Main Bar (Force=264 kN, Scale=10)

圖 4.6 SG1 試體主桿軸向應變分佈圖 (ABAQUS)

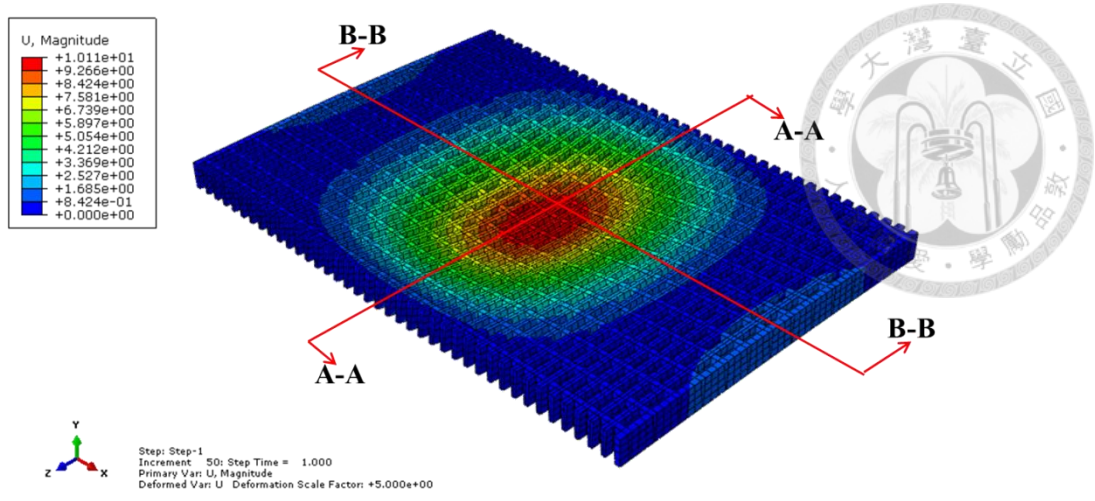


(a) Von-Mises Stress Distribution (Force=100 kN, Scale=10)



(a) Von-Mises Stress Distribution (Force=264 kN, Scale=10)

圖 4.7 SG1 試體 Von-Mises 應力分佈圖 (ABAQUS)



3-D Deformation Shape of FRPG1 (Scale=5)

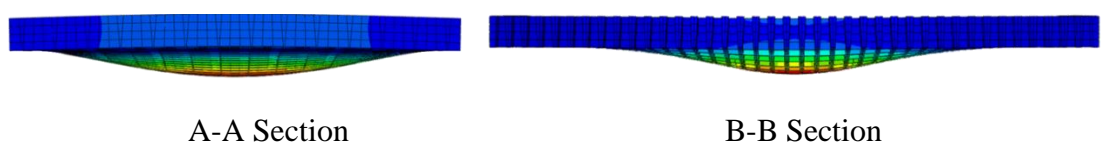
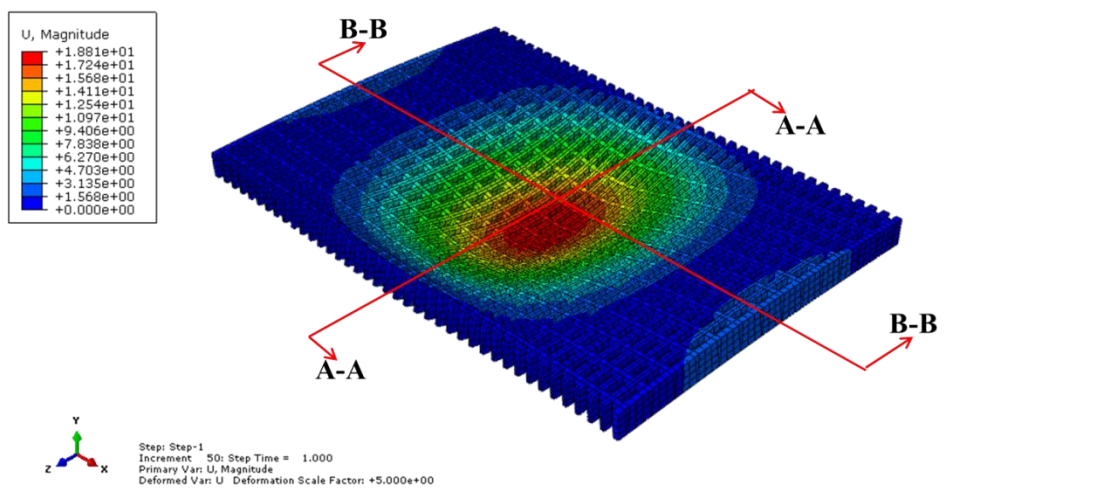


圖 4.8 FRPG1 試體有限元素分析 3-D 變形圖 (Force=100 kN)



3-D Deformation Shape of FRPG1 (Scale=5)

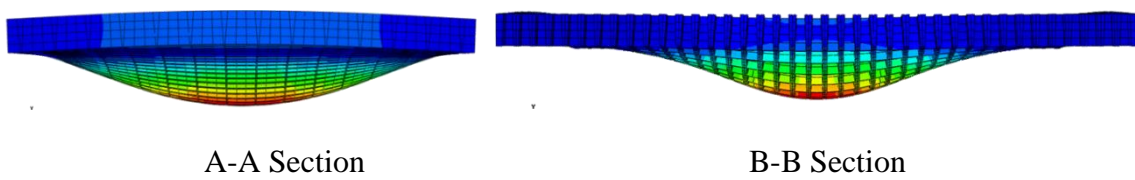
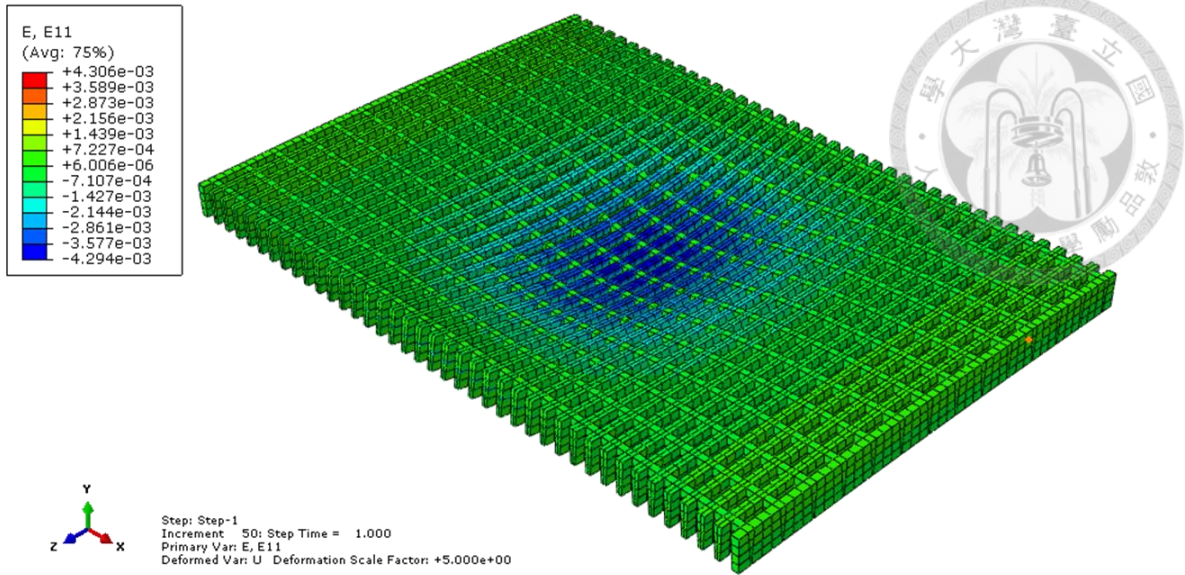
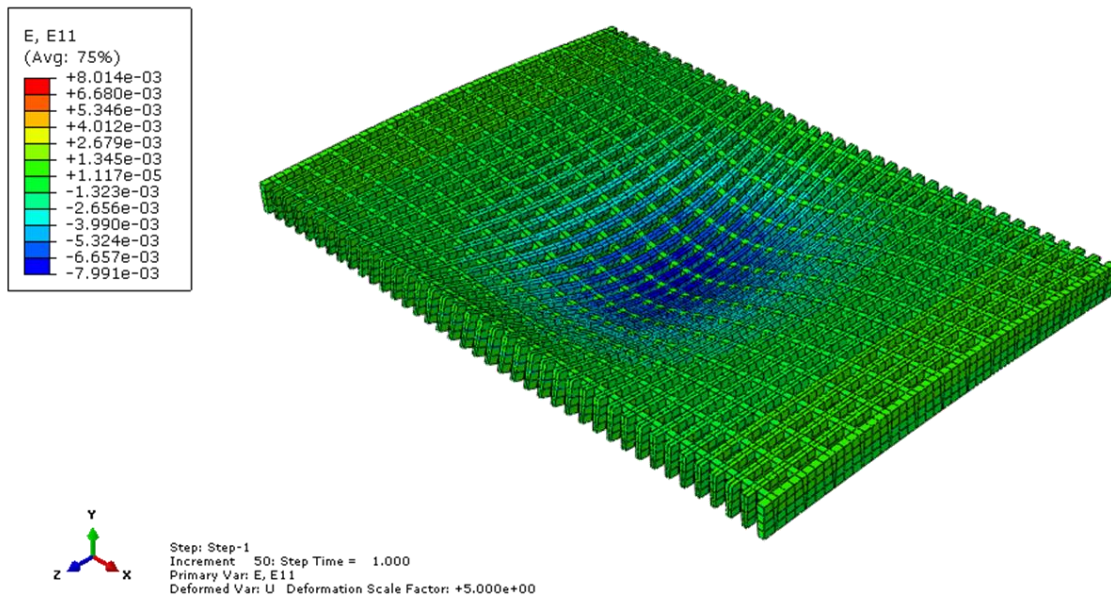


圖 4.9 FRPG1 試體有限元素分析 3-D 變形圖 (Force=186 kN)

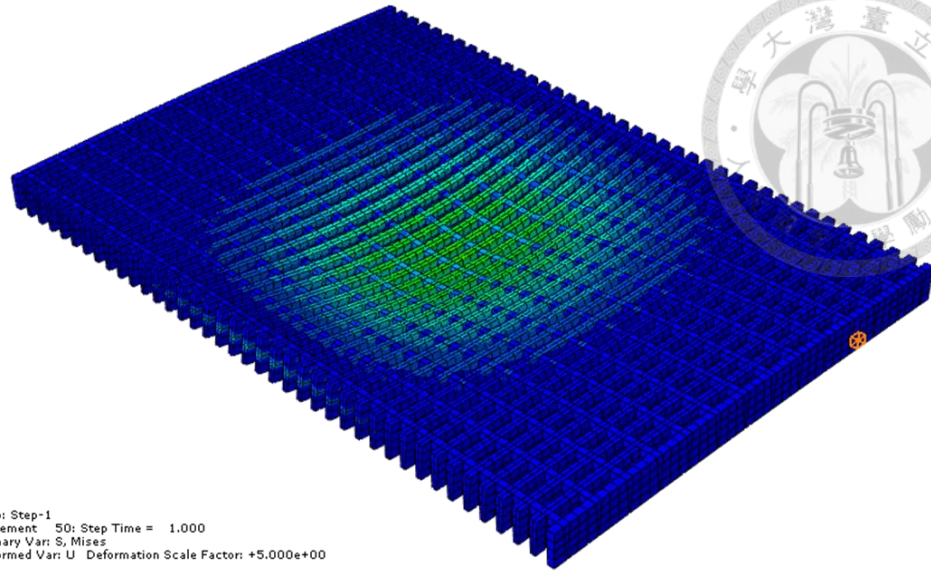
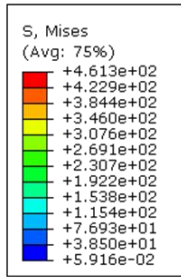


(a) Axial Strain Distribution of Main Bar (Force=100 kN, Scale=5)



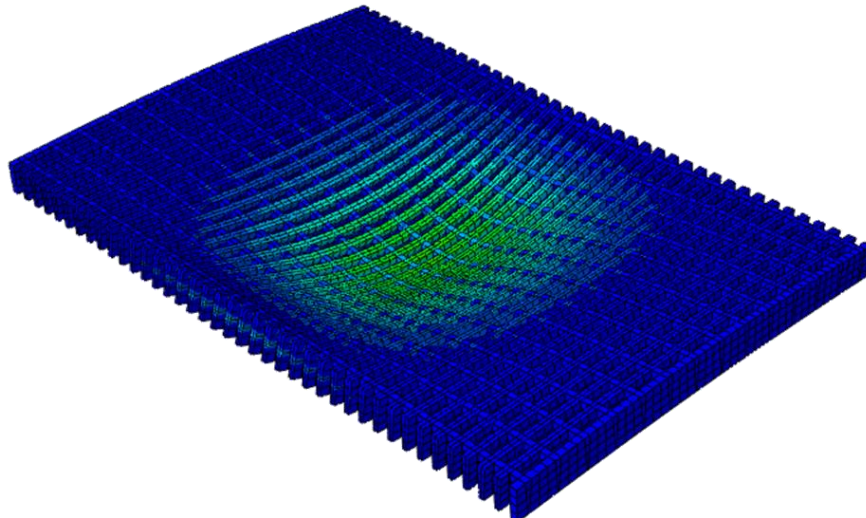
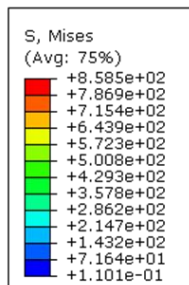
(b) Axial Strain Distribution of Main Bar (Force=186 kN, Scale=5)

圖 4.10 FRPG1 試體主桿軸向應變分佈圖 (ABAQUS)



Step: Step-1  
Increment: 50: Step Time = 1.000  
Primary Var: S, Mises  
Deformed Var: U Deformation Scale Factor: +5.000e+00

(a) Von-Mises Stress Distribution (Force=100 kN, Scale=5)



Step: Step-1  
Increment: 50: Step Time = 1.000  
Primary Var: S, Mises  
Deformed Var: U Deformation Scale Factor: +5.000e+00

(a) Von-Mises Stress Distribution (Force=186 kN, Scale=5)

圖 4.11 FRPG1 試體 Von-Mises 應力分佈圖 (ABAQUS)

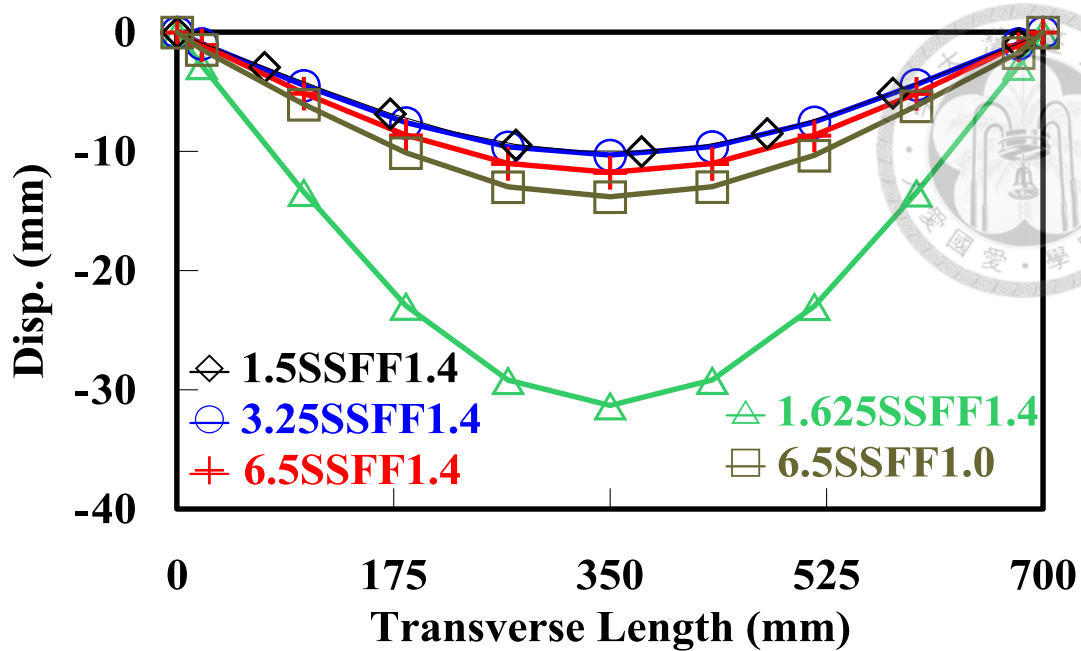


圖 4.12 不同橫、主樑間距試體分析模型側向位移分佈圖比較

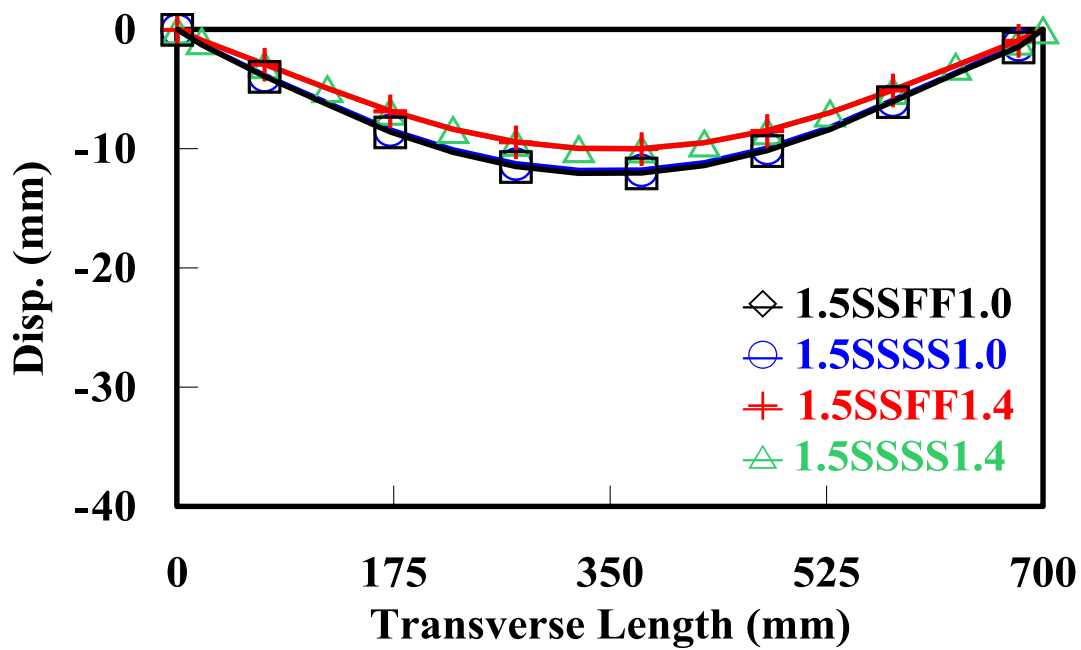


圖 4.13 不同邊界條件試體分析模型側向位移分佈圖比較



(a) 鋼橋面格柵板



(b) 玻璃纖維橋面格柵板

照片 1.1 鋼及玻璃纖維橋面格柵板



照片 2.1 鋼橋面格柵板



照片 2.2 玻璃纖維橋面格柵板

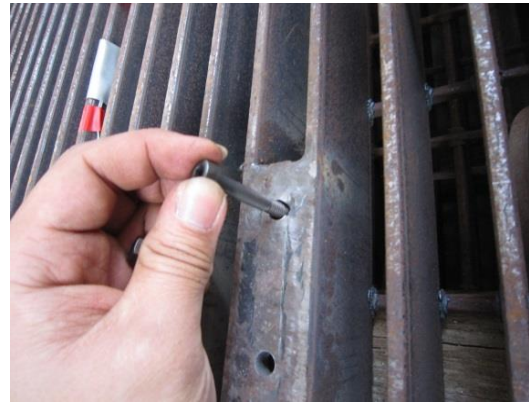




照片 3.1 全玻纖複合材料翼型梁



(a) 焊接鋼板於鋼格柵板



(b) M6 螺栓與焊接板



(c) 鋼格柵板與複材梁連接狀況

照片 3.2 鋼橋面格柵板



(a) L型扣件及 M6 螺栓



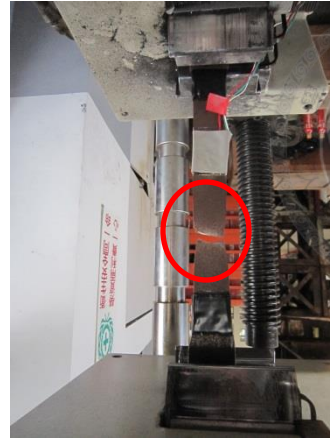
(b) 利用板手固定橋面板及腹材梁



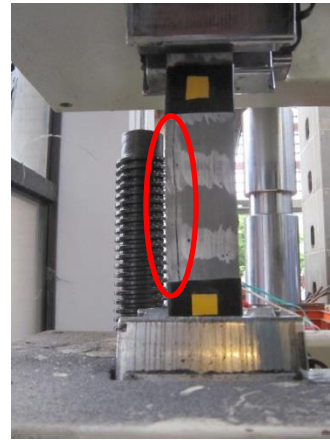
(c) 玻璃纖維橋面格柵板與複材梁連接狀況



照片 3.3 玻璃纖維橋面格柵

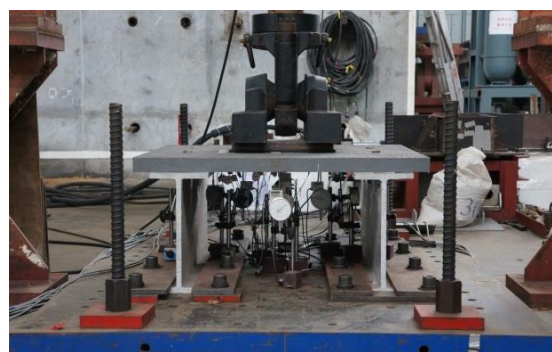
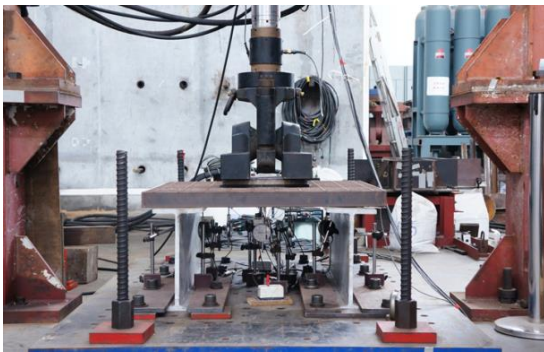


(a) 鋼格柵板主桿拉伸試驗 (試驗前) (b) 鋼格柵板主桿拉伸試驗 (破壞後)



(a) GFRP 格柵板主桿拉伸試驗 (試驗前) (b) GFRP 格柵板主桿拉伸試驗 (破壞後)

照片 3.4 材料拉伸試驗



(a) 鋼橋面格柵板

(b) 玻璃纖維橋面格柵板

照片 3.5 試驗構架



(a) 複合材料梁固定於強力地板



(b) 於格柵板及平板中央放置橡膠墊片

照片 3.6 試體構架細節照



(a) 鋼橋面格柵板位移計架設狀況

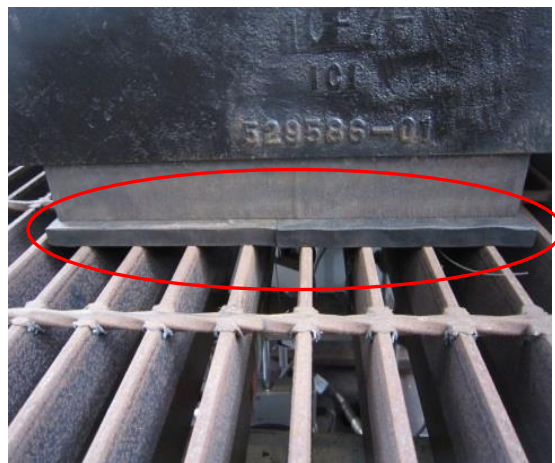


(b) 玻纖橋面格柵板位移計架設狀況

照片 3.7 位移計架設照片

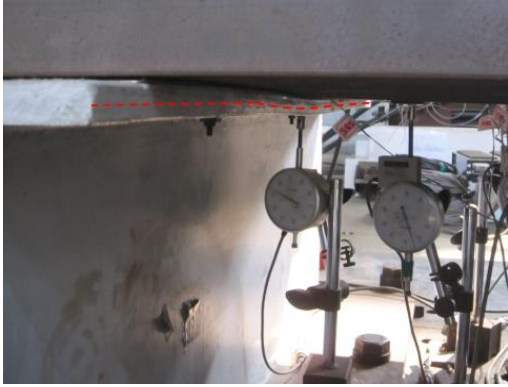


(a) 複材梁上翼板不平整

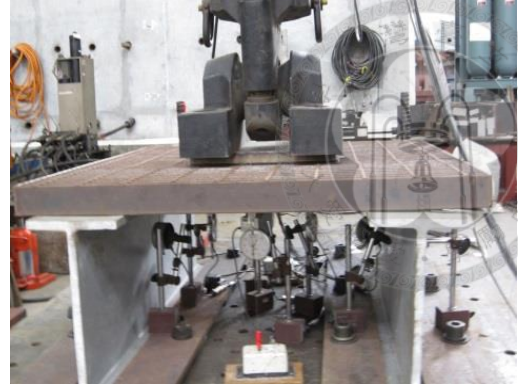


(b) 橡膠墊片波浪狀變形 (5 mm)

照片 3.8 SG1 試體照片



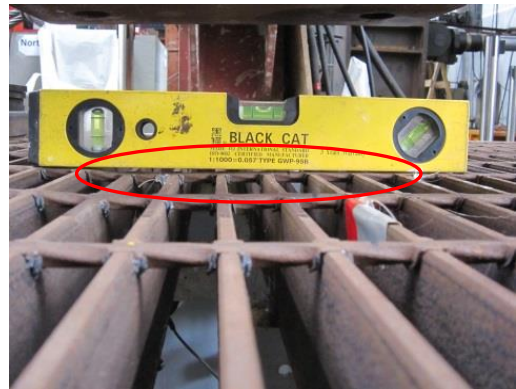
(a) 複材梁上翼板中間內側扭轉 (6.5mm)



(b) SG1 試體中央變形顯著 (9 mm)



(c) SG1 試體中央沉陷不平均 (264 kN)



(d) SG1 主桿永久變形 (264 kN)

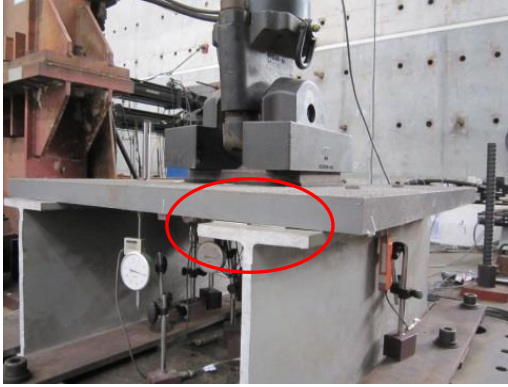


(e) 螺栓無產生任何損傷 (264 kN)



(f) 複材梁開孔處被螺栓擠壓 (264 kN)

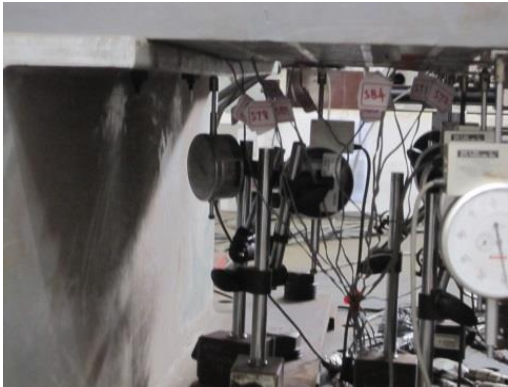
照片 3.9 SG1 試體照片 (續)



(a) 複合梁上翼板製造不平整



(b) FRPG1 試體長向變形 (10 mm)



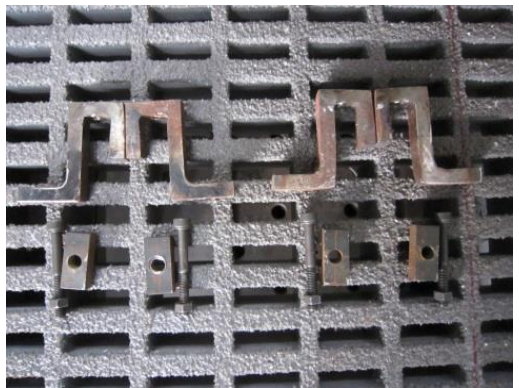
(c) 梁上翼板中間內側扭轉現象 (13 mm)



(d) FRPG1 整體變形顯著 (17 mm)



(e) 外圍橫桿往上翹現象 (17 mm)



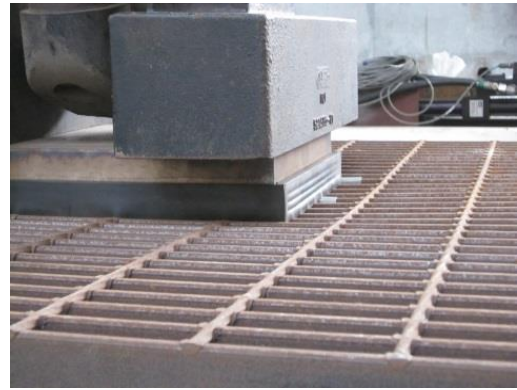
(f) 配件無任何損壞跡象 (186 kN)

照片 3.10 FRPG1 試體照片



(a) FRPG1 於橫向及長向方向上幾乎無任何的永久變形產生

照片 3.11 FRPG1 試體照片(續)



(a) 將 SG2 底下所有位移計移除 (300 kN)

(b) SG2 力量加載處變形明顯 (300 kN)



(c) 左、右側複材梁上翼板內側都發生扭轉顯著現象 (300 kN)

照片 3.12 SG2 試體照片



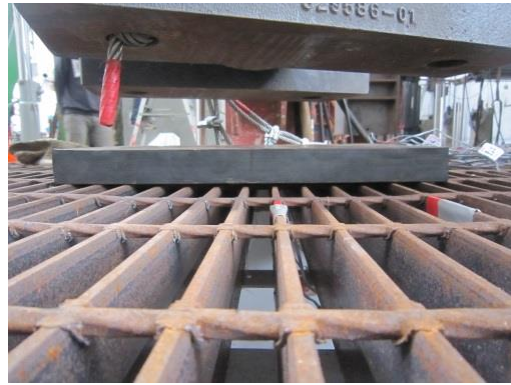
(a) 複材梁梁腹板交界處破壞 (345 kN)



(b) 遠離力量加載處，幾乎無任何變形 (345 kN)



(c) 變形只集中於力量加載處附近 (345 kN)



(d) SG2 殘餘變形(試驗後)



(e) 橡膠墊受 SG2 擠壓痕跡 (試驗後)

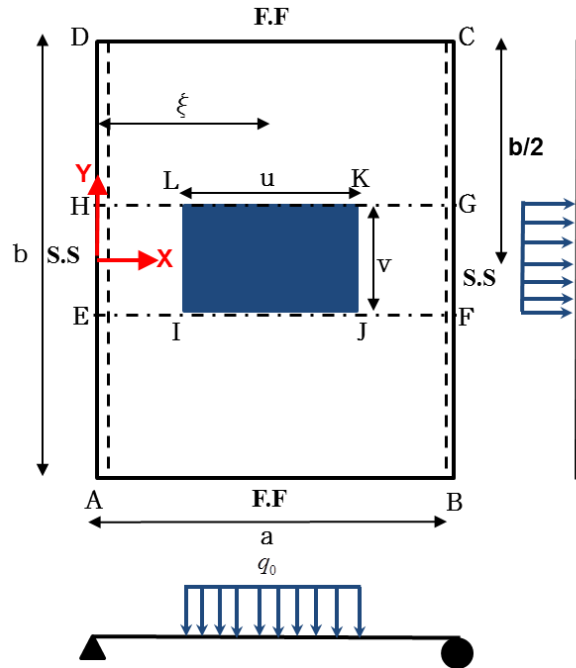


(f) 接合配件完好無損

照片 3.13 SG2 試體照片(續)



附錄 1 (Case 1 :  $(D_{12} + 2D_{66})^2 > D_{11}D_{22}$ )



S.S: Simply Support  
F.F: Free Edge



針對於板 EFGH 部分：

$$w_{EFGH}(x, y) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} (A_m \cosh \lambda_1 y + C_m \cosh \lambda_2 y + q_m) \sin \alpha_m x$$

針對於板 CDGH 部分：

$$w_{CDGH}(x, y) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} (A'_m \cosh \lambda_1 y + B'_m \sinh \lambda_1 y + C'_m \cosh \lambda_2 y + D'_m \sinh \lambda_2 y) \sin \alpha_m x$$

其中上式中的係數  $A'_m$ 、 $B'_m$ 、 $C'_m$ 、 $D'_m$ 、 $A_m$  及  $C_m$  為：



$$\begin{cases} B'_m \\ D'_m \\ C'_m \\ A'_m \\ A_m \\ C_m \end{cases} = \begin{cases} \frac{q_m}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} (\lambda_2^2 \sinh \gamma_{m1}) \\ \frac{-q_m}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} (\lambda_1^2 \sinh \gamma_{m2}) \\ -\frac{B'_m C_B + D'_m C_D}{C_C} \\ \frac{-B'_m A_B - C'_m A_C - D'_m A_D}{A_A} \\ \frac{q_m}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} (\lambda_2^2 \cosh \gamma_{m1}) + A'_m \\ \frac{-q_m}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} (\lambda_1^2 \cosh \gamma_{m2}) + C'_m \end{cases}$$

其中，

$$q_m = \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D_{11}} \left( \frac{(-1)^{m-1}}{m^5} \sin \frac{m\pi}{2a} u \right) \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{a} \quad \gamma_{m1,2} = \lambda_{1,2} \left( \frac{v}{2} \right) \quad \phi_{m1,2} = \lambda_{1,2} \left( \frac{b}{2} \right)$$

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{\alpha_m^2}{D_{11}} \left[ (D_{12} + 2D_{66}) \pm \sqrt{(D_{12} + 2D_{66})^2 - D_{11}D_{22}} \right]} \quad H = D_{12} + 4D_{66}$$

$$C_B = \lambda_1 (D_{11}\lambda_1^2 - H\alpha_m^2) (D_{11}\lambda_1^2 - D_{12}\alpha_m^2) (\cosh \phi_{m1} - \sinh \phi_{m1} \tanh \phi_{m1})$$

$$C_C = (D_{11}\lambda_1^2 - H\alpha_m^2) (D_{11}\lambda_1^2 - D_{12}\alpha_m^2) (\lambda_2 \sinh \phi_{m2} - \cosh \phi_{m2} \tanh \phi_{m1})$$

$$C_D = D'_m (D_{11}\lambda_1^2 - H\alpha_m^2) (D_{11}\lambda_1^2 - D_{12}\alpha_m^2) (\lambda_2 \cosh \phi_{m2} - \sinh \phi_{m2} \tanh \phi_{m1})$$

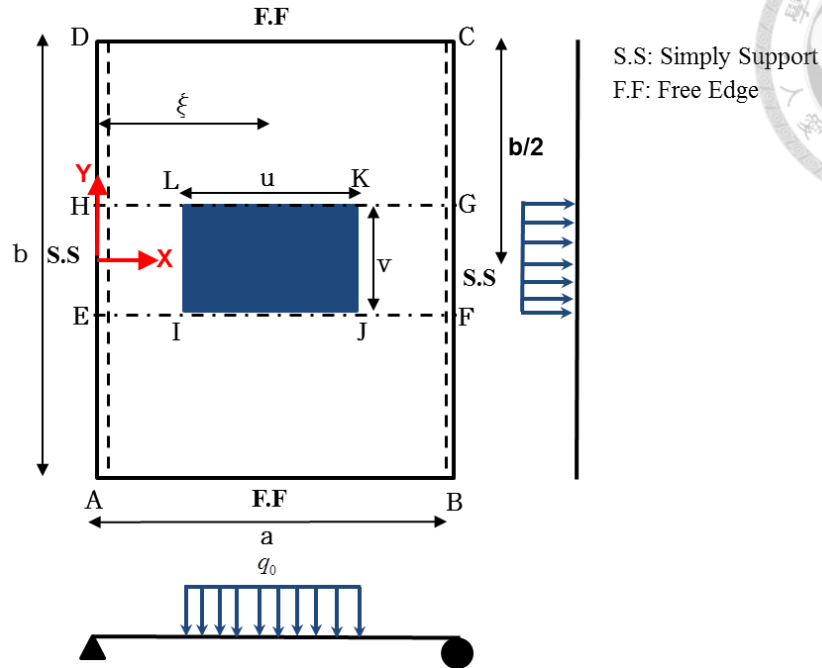
$$A_B = \lambda_1 \cosh \phi_{m1} (D_{11}\lambda_1^2 - H\alpha_m^2)$$

$$A_C = \lambda_2 \sinh \phi_{m2} (D_{11}\lambda_2^2 - H\alpha_m^2)$$

$$A_D = \lambda_2 \cosh \phi_{m2} (D_{11}\lambda_2^2 - H\alpha_m^2)$$

$$A_A = \lambda_1 \sinh \phi_{m1} (D_{11}\lambda_1^2 - H\alpha_m^2)$$

附錄 2 (Case 2 :  $(D_{12} + 2D_{66})^2 = D_{11}D_{22}$ )



針對於板 EFGH 部分：

$$w_{EFGH}(x, y) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} (A_m \cosh \alpha_m y + B_m \alpha_m y \sinh \alpha_m y + q_m) \sin \alpha_m x$$

針對於板 CDGH 部分：

$$w_{CDGH}(x, y) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} (A'_m \cosh \alpha_m y + B'_m \alpha_m y \sinh \alpha_m y + C'_m \sinh \alpha_m y + D'_m \alpha_m y \cosh \alpha_m y) \sin \alpha_m x$$

其中上式中的係數  $A'_m$ 、 $B'_m$ 、 $C'_m$ 、 $D'_m$ 、 $A_m$  及  $C_m$  為：



$$\left\{ \begin{array}{l} C'_m \\ D'_m \\ B'_m \\ A'_m \\ A_m \\ B_m \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} q_m (\gamma_m \cosh 2\gamma_m - \sinh 2\gamma_m) \\ \frac{1}{2} q_m (\sinh 2\gamma_m) \\ \frac{-C'_m C_C - D'_m C_D}{C_B} \\ \frac{-B'_m E_B - C'_m E_C - D'_m E_D}{E_A} \\ q_m (\gamma_m \sinh 2\gamma_m - \cosh 2\gamma_m) + A'_m \\ \frac{1}{2} q_m (\cosh 2\gamma_m) + B'_m \end{array} \right\}$$

在上式中，所有係數分別為：

$$q_m = \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D_{11}} \left( \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \sin \frac{m\pi}{2a} u \right)$$

$$\lambda_1 = \alpha_m$$

$$2\gamma_m = \alpha_m \left( \frac{v}{2} \right)$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$$

$$H = D_{12} + 4D_{66}$$

$$E_B = (D_{11} - H) \phi_m \cosh \phi_m + (3D_{11} - H) \sinh \phi_m$$

$$E_C = (D_{11} - H) \cosh \phi_m$$

$$E_D = (D_{11} - H) \phi_m \sinh \phi_m + (3D_{11} - H) \cosh \phi_m$$

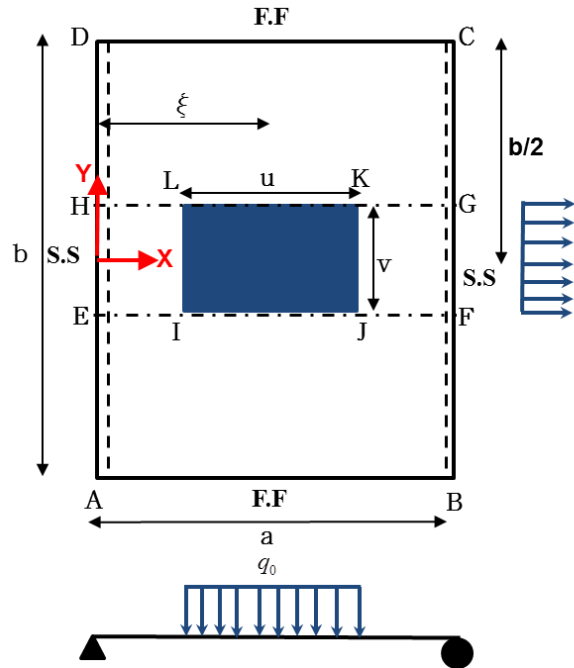
$$E_A = (D_{11} - H) \sinh \phi_m$$

$$C_C = [(D_{11} - H)(D_{11} - D_{12})(-\cosh \phi_m + \sinh \phi_m \tanh \phi_m)]$$

$$C_B = [-(D_{11} - H)(D_{11} - D_{12}) \phi_m \cosh \phi_m - (3D_{11} - H)(D_{11} - D_{12}) \sinh \phi_m \\ + (D_{11} - H)(D_{11} - D_{12}) \phi_m \sinh \phi_m \tanh \phi_m + 2D_{11}(D_{11} - H) \sinh \phi_m]$$

$$C_D = [-(D_{11} - H)(D_{11} - D_{12}) \phi_m \sinh \phi_m - (3D_{11} - H)(D_{11} - D_{12}) \cosh \phi_m \\ + (D_{11} - H)(D_{11} - D_{12}) \phi_m \sinh \phi_m + 2D_{11}(D_{11} - H) \sinh \phi_m \tanh \phi_m]$$

附錄 3 (Case 3 :  $(D_{12} + 2D_{66})^2 < D_{11}D_{22}$ )



針對於板 EFGH 部分：

$$w_{EFGH}(x, y) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \left[ A_m (\cos \lambda_2 y) \cosh \lambda_1 y + D_m (\sin \lambda_2 y) \sinh \lambda_1 y + q_m \right] \sin \alpha_m x$$

針對於板 CDGH 部分：

$$w_{CDGH}(x, y) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \left[ (A'_m \cos \lambda_2 y + B'_m \sin \lambda_2 y) \cosh \lambda_1 y + (C'_m \cos \lambda_2 y + D'_m \sin \lambda_2 y) \sinh \lambda_1 y \right] \sin \alpha_m x$$

在上式中，所有係數分別為：



$$\left\{ \begin{array}{l} B'_m \\ C'_m \\ A'_m \\ D'_m \\ A_m \\ D_m \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{q_m \left[ (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1} + 2\lambda_1 \lambda_2 \sin \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1} \right]}{2\lambda_1 \lambda_2} \\ \frac{q_m \left[ (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1} - 2\lambda_1 \lambda_2 \cos \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1} \right]}{2\lambda_1 \lambda_2} \\ \frac{-(B'_m C_B + C'_m C_C + D'_m C_D)}{C_A} \\ \frac{B'_m (C_B E_A - E_B C_A) + C'_m (C_C E_A - E_C C_A)}{E_D C_A - C_D E_A} \\ \frac{q_m \left[ (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1} - 2\lambda_1 \lambda_2 \cos \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1} \right]}{2\lambda_1 \lambda_2} + A'_m \\ \frac{q_m \left[ (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \gamma_{m2} \cosh \gamma_{m1} + 2\lambda_1 \lambda_2 \sin \gamma_{m2} \sinh \gamma_{m1} \right]}{2\lambda_1 \lambda_2} + B'_m \end{array} \right\}$$

其中，

$$q_m = \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D_{11}} \left( \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \sin \frac{m\pi}{2a} u \right)$$

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{\alpha_m^2}{2D_{22}} \sqrt{D_{11} D_{22} \pm (D_{12} + 2D_{66})}}$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$$

$$\gamma_{m1,2} = \lambda_{1,2} \left( \frac{v}{2} \right)$$

$$\phi_{m1,2} = \lambda_{1,2} \left( \frac{b}{2} \right)$$

$$H = D_{12} + 4D_{66}$$

$$E_A = \left\{ \left[ D_{11} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - D_{12} \alpha_m^2 \right] \cos \phi_{m2} \cosh \phi_{m1} - 2D_{11} \lambda_1 \lambda_2 \sin \phi_{m2} \sinh \phi_{m1} \right\}$$

$$E_B = \left\{ \left[ D_{11}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - D_{12}\alpha_m^2 \right] \sin \phi_{m2} \cosh \phi_{m1} + 2D_{11}\lambda_1\lambda_2 \cos \phi_{m2} \sinh \phi_{m1} \right\}$$

$$E_C = \left\{ \left[ D_{11}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - D_{12}\alpha_m^2 \right] \cos \phi_{m2} \sinh \phi_{m1} - 2D_{11}\lambda_1\lambda_2 \sin \phi_{m2} \cosh \phi_{m1} \right\}$$

$$E_D = \left\{ \left[ D_{11}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - D_{12}\alpha_m^2 \right] \sin \phi_{m2} \sinh \phi_{m1} - 2D_{11}\lambda_1\lambda_2 \cos \phi_{m2} \cosh \phi_{m1} \right\}$$

$$C_B = D_{11} \left[ \lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \sin \phi_{m2} \sinh \phi_{m1} + \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \phi_{m2} \cosh \phi_{m1} \right] - \alpha_m^2 H(\lambda_1 \sin \phi_{m2} \sinh \phi_{m1} + \lambda_2 \cos \phi_{m2} \cosh \phi_{m1})$$

$$C_C = D_{11} \left[ \lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \cos \phi_{m2} \cosh \phi_{m1} - \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \phi_{m2} \sinh \phi_{m1} \right] - \alpha_m^2 H(\lambda_1 \cos \phi_{m2} \cosh \phi_{m1} - \lambda_2 \sin \phi_{m2} \sinh \phi_{m1})$$

$$C_D = D_{11} \left[ \lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \sin \phi_{m2} \cosh \phi_{m1} + \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos \phi_{m2} \sinh \phi_{m1} \right] - \alpha_m^2 H(\lambda_1 \sin \phi_{m2} \cosh \phi_{m1} + \lambda_2 \cos \phi_{m2} \sinh \phi_{m1})$$

$$C_A = D_{11} \left[ \lambda_1(\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2) \cos \phi_{m2} \sinh \phi_{m1} - \lambda_2(3\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \phi_{m2} \cosh \phi_{m1} \right] - \alpha_m^2 H(\lambda_1 \cos \phi_{m2} \sinh \phi_{m1} - \lambda_2 \sin \phi_{m2} \cosh \phi_{m1})$$

