國立臺灣大學理學院數學系

碩士論文

Department of Mathematics

College of Science

National Taiwan University

Master Thesis

文史學生的數學教室：愉悅的體驗旅程

Mathematical Classroom for High School Students with Humanity Tendency: A Delightful Journey Experiencing the Power and Value of Mathematics

高子婷

Tze-Ting Kao

指導教授：翁秉仁 博士

Advisor: Ping-Zen Ong, Ph.D.

中華民國 102 年 1 月

2013 January

國立臺灣大學碩士學位論文
口試委員會審定書

文史學生的數學教室：愉悅的體驗旅程

本論文係高子婷君（r96221009）在國立臺灣大學數學系、所完成之碩士學位論文，於民國 102 年 1 月 21 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

翁秉仁 （簽名）

（指導教授）

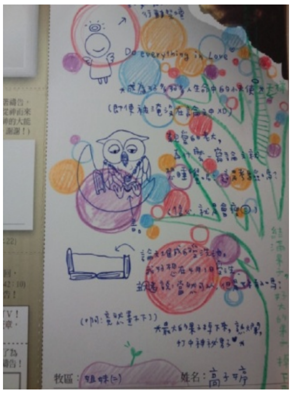
張海潮

系主任、所長 （簽名）

謝詞

到了真的要寫謝詞的時候，反而卡住了，五年半的我啊如何訴說，就變成之後生命的養分吧。從一股不甘心衝動考研究所，到休學去北一實習，到考上大直，到以為要結婚，到家裡一團混亂，到美國，到 Berkeley 的哲學課，我說，I want to find the meaning of life。然後助教說，I'm afraid that you may be disappointed。然後看著台下的學生，心裡想著對不起老師也不知道數學學好又怎樣。

感謝翁秉仁老師，容許我的三心二意以及胡作非為，我想我真是一個想大鬧一場卻又沒膽的人；現在就覺得在老師的保護之下應該可以更亂來的，可惜(笑)。感謝張海潮老師、陳宏老師、蔡聰明老師，推了我的論文一把，啊！順便謝謝葛登能好了，開啟我的亂畫人生。



感謝我親愛的爸爸、媽媽、弟弟、妹妹、奶奶，(這行打完就哭了，嘖嘖）又想推到結婚再說，應該不會太久，哈哈哈，只有內行人才能了解這行的重量，熱熱的飯、默默的洗碗、開房間門的問候、遙遠的電話...太多了，你們多多多的愛，讓我總是用不完。就讓我用行動回報吧 :)

大直的朋友們，數學科、兆珍、雨萍、芸欣、可瑜...我的天列不完，你們讓我有勇氣瘋狂，並為能來到大直不止一次感謝上帝。感謝我的學生，能夠站在你們面前表演，真是我的榮幸，讓我每次都覺得能當老師真是賺到了。琬青、麗敏、北一老師們，幫助我茁壯、開花。感謝籃球人！籃乙、工數...像我這樣圓滾滾的人好幾次在籃球場上透過你們又獲得能量，啊，十二年。凱機、錦屏，謝謝妳們讓我當一坨爛肉。前前前、前前、前男友 XD (保護當事者)，這篇論文部份歸功於你們在我生命擦出的痛苦和搞笑，謝啦。眾友人及前輩，誠溫良、朝陽、醉月...對不起我真的沒有辦法全部列出來，請讓我用請客表達我的誠意。

感謝眾姊妹，真的，真的，瓊芳的明娟及清玉小組、慎貞的伊吟小組...讓我爬出黑暗入奇妙光明，然後還可以繼續不斷結結結出美麗的果子，發出燦爛的光芒。這一路、這一路，這一路有多美好，讓生命剛強，讓生命芬芳，充滿暴跳的眼淚、幾乎不可能的饒恕、深深的感恩、滿滿滿滿的恩典，及亮亮亮亮的愛。對了，大家都快去認識上帝吧，這比看論文重要唷。最後，感謝我的親愛的上帝老大，何其有幸，能為人師，讓我所有恩賜都成為祢合用的器皿吧。

摘要

本研究替高中數學老師找到較適合**文史學生**的**體驗脈絡的教學立場**，老師的任務是帶領學生進行以故事為主軸的體驗旅程，使其能親自體驗數學知識的威力及價值。本文將以向量、虛數、數學歸納法的教案作為示例。

關鍵字：文史學生、體驗脈絡的教學立場、威力、向量、虛數、數學歸納法

Abstract

This research project develops a mathematical pedagogy called ***experience-context stance***, which is more appropriate for high school ***students with humanity tendency***. The major task of the teacher is to guide students going through a story or epic telling journey, so that the students can experience, by themselves, the power and value of the learning subject. We also provide three lesson scenarios, which include vector, imaginary number and mathematical induction, to demonstrate this teaching stance.

Key words: students with humanity tendency, experience-context stance, power, vector, imaginary number, mathematical induction

目次

表次

圖次

第一章　緒論

一位主修英文的學生如果反對學習必修數學課程，
那麼他總是有道理的——至少由他看來。
教師就有責任向他說明這項課程對接受高等教育的人一生的價值。[1]

第一節　研究動機與前言

走在數學老師的道路上，「為什麼要學數學？」的困惑總是不斷浮現，對於我以及我的職業，這當然是非常重要的問題，對此最俗氣卻實際的回答莫過於「考試會考」，此解答勉強被某些師生接受，但要是身為數學老師的我，除此外沒有別的答案，我實在教不下去。幾年來，給過自己許多答案，大多為暫時的搪塞，若不強迫自己停止思考，總害怕沒完沒了、沒答案，那麼，隔天站在黑板前的我豈不心虛？

然而，每次碰到社會組學生，「為什麼要學數學？」就成為不得不面對的大哉問，尤其是遇到當中志向為文學、歷史、戲劇、設計…的**文史學生**，內心的糾結就特別難纏。

某年暑假教導社會組的數學重修，班上有大部分學生屬於文史學生，甚至有確定錄取設計相關學系的學生，因為未拿到必修數學學分被迫重修。當時的課程內容是空間向量，空間向量是社會組及自然組的共同必修。我手裡拿著空間平面與法向量的模型，正在教導外積的內涵，心裡卻一直想替這些文史學生找一個「為什麼要學數學？」的完美答案；然而，所有聲稱世界處處有數學的例子，沒有一個能說服我，因為我很確定：空間向量、平面方程式、外積、點到平面的距離...，這些文史學生以後用到的機會真的微乎其微。於是，面對文史學生的我，每每只好搬出最大王牌「數學訓練思考」，硬壓下「為什麼要學數學？」在我心中的迴盪。

2009 年，許多文史學生心目中的第一志願台大外文系，決定不採計指定考科

的數學乙成績，引起軒然大波，台大外文系主任梁欣榮在接受《台大學生報》專訪時，如此說明：

> 基於教育部要減輕學生升學壓力的原則，而數學對外文系學生的重要性較低，所以成了不採計的對象。…大部分外文系學生在大學中都不會接觸數學，畢業後也很少以此為業，而且外文系是要培養英文頂尖的專業人士，數學對此幫助很小，所以讓有數學優勢而英文不太好的學生進入外文系並不明智。以往採計數學成績，會把一些英文能力好、數學不好的學生排除在外，這對於趨向專業知識分工的臺灣社會也沒有好處；現在不採計數學，可以招收多一些英文很好的同學，也是在『為國家做好事』…[1][36]

台大外文系宣佈「外文不計數」後，許多對於文史學生學習高中數學的不諒解瞬間爆發，但反對「外文不計數」者也所在多有。反對「外文不計數」者認為數學提供文史學生思考的訓練，且現今要培養通才而非專才，故文史學生當然也要學數學；贊成「外文不計數」者則提出不同的論點，認為文史學生缺乏數學訓練依舊能有好表現，而且文史學生真的用不到數學；另一種較折衷的看法是文史科系維持採計數學，但降低數學的權重，且要改變教學文化。各方聲音從「為什麼要學數學？」一路吵到「要怎麼教數學？」，眾人意見交戰，一直沒有圓融解決。

隔年 11 月，台大外文系決定恢復採計數學乙，風波雖然平息，但已鼓動我想解決矛盾的靈魂，剛巧新學期又接任兩個社會組班，看著當中文史學生因數學憂愁的眼神，最大王牌「數學訓練思考」再也說不出口。正如張海潮針對「外文不計數」的反省：

> 社會組的科系包括文學、藝術、法學、教育、政治、經濟、財經、管理等，學生人數約是自然組的 1.5 倍，如此眾多的學生在進入大學後，都在最短時間內把高中所學的數學忘得一乾二淨。我們不禁要問教育家，這樣的投資到底

[1] 底線為筆者所加

值不值得？[16]

在台灣的升學制度下，不管這樣的投資值不值得，每位文史學生都被規定得紮紮實實完成三年的學習。有些文史學生由於升學，老實的跟著學校學習；也有很多一邊罵：「為什麼要學這個？以後又用不到！要不是考試要考…」，但另一邊又知道數學成績好很吃香，硬著頭皮學；最直接的在紙條上憂憂詢問：「親愛的老師，到底為什麼我要學數學？」

大哉問常駐我心，一路上跌撞閃躲，卻總是躲不過文史學生的糾纏。如今，終於有勇氣好好面對，究竟怎麼樣的數學課才是我希望帶給文史學生的？什麼才是我希望離開高中後的文史學生能留在心中的？無論哪門學科，總要為自己任教的學科辯護。現階段，雖然我還是菜鳥老師，也想試著為自己對於文史學生的意義辯護。希望藉由這次淺薄的討論，為文史學生的數學學習找到可能的出路，找到 M.Kline 所指的「一生的價值」[2]。

當然，更重要的是，找到有幸成為數學老師的我的一生的價值。

第二節　研究目的

本文最終目的是想替教導文史學生的高中數學老師找到一條可能的出路。按照較狹義的解釋，文史學生指性向為文學、歷史的學生，本文的**文史學生**則泛指其往後就讀的科系，幾乎用不到一點高中數學的學生，此類科系涵蓋中文、外文、傳播、藝術、歷史、設計…等，商管、財經相關學系則不在範圍內。

本研究一開始將先討論適合文史學生的**教學立場**。「外文不計數」事件中各方聲音從「為什麼要學數學？」一路吵到「要怎麼教數學？教什麼數學？」，即是從**數學學習目的**之爭論自然衍伸到教學立場之爭論。回首自己幾年來徘徊於「為什

[2] 此處「一生的價值」呼應緒論開頭引言最後一行的「一生的價值」

麼要學數學？」的問題時，也發現自己在短短幾年內，曾採取各種不同的教學立場，即在不同數學學習目的下，因教學目標的差異，進行教學的流程不盡相同，有時選取不同的教材、有時強調不同的例題……等。教學立場與數學學習目的密切相關，故本文雖從「為什麼要學數學？」的疑惑出發，但在解釋文史學生的數學學習目的之後，更重要的是針對文史學生的數學學習目的，提出對應的教學立場。

在理論之外，本文希望能兼顧實際面，故欲嘗試在現行《九九課綱》內容中，以新教學立場發展適合文史學生的教案。除做為新教學立場的舉例外，也希望在教案中能查驗以往教學上常見的問題，希望以此說明在實際教案中，採用新教學立場的優點，突顯新教學立場的特性。

簡而言之，本研究將針對高中文史學生，回答以下問題：

1. 文史學生的數學學習目的為何？
2. 適合文史學生的教學立場為何？
3. 在現行《九九課綱》內容中，新教學立場呈現出的教案可能為何？

第二章　常見的教學立場

為替教導文史學生的高中數學老師找到不同的出路，本章將反省目前教學現場中常見的教學立場。由於教學立場與數學學習目的密切相關，教學者呈現教學立場的背後，常隱含某種數學學習目的，故此章先分類常見的數學學習目的，分析其論點及其不完滿處，再將常見的教學立場分成**實用脈絡的教學立場**、**邏輯脈絡的教學立場**、**人性脈絡的教學立場**三大類，探討各教學立場對於文史學生的適用性。

第一節　常見的數學學習目的

關於數學學習目的，不論是我自身的心路歷程，或是「外文不計數」事件中各方人士提出的意見，皆略可歸入蕭文強於《為什麼要學習數學》中所分出的「實用知識、思維訓練、文化素養」三大目的[26]。本節將略以此分類為架構，融入眾家所言，將數學學習目的分為**實用性目的**、**思維性目的**、**文化性目的**作討論，釐清各方理由，並指出其套用於文史學生時，可能所受的批評。

一、實用性目的

外文系不採計數乙的決定，除配合教育部政策，最重要的意見是外文系學生用不到數學，反對「外文不計數」的人馬則不斷提出數學實用的證據，其爭吵的關鍵就在數學學習的**實用性目的**。

(一) 實用性目的之主張

欲以實用性目的說服文史學生學習高中數學者，主張數學充滿實際用途，故文史學生當然要學高中數學。日常的實用性、科學的實用性是最常見的兩種實用性，另外，針對文史學生也有不少人提及刻劃美的實用性。

日常的實用性指例如計算金錢的基本算術，或是在日趨量化的社會趨勢下，

職業或現代公民所需處理數量的能力。如 S. K. Stein 在《給青年數學家的信》的序言中表示：數學實際應用無孔不入，認為數學沒有實用價值，只是沒有意識到數學早已滲透其中──若將用到數學的事物貼上紅色標籤，整個地球必定會被紅色標籤蓋滿[4]。在現代化社會中，量化的思想滲入生活，故支持實用性目的者認為文史學生很難真的與數學[3]畫清界線。

再者，幾乎所有人都同意解釋物理時常會遇到「數學不合理的有效性」(unreasonable effectiveness of mathematics) [3]；除去數學，科學不會是今日豐富面貌，此即數學在科學的實用性。數學的不同稱號，諸如科學的皇后、科學的語言、科學的工具、科學的夥伴等，也肯定數學在科學中的實用性。隨著計算機的發展、統計學的興起，數學也深入生命科學、社會科學，故支持實用性目的者認為，文史學生處在現今的科學時代絕不能缺少數學訓練。

針對文史學生，實用性目的較特別的一種解釋是刻劃美的實用性，即以數學刻劃與文史學生較有關的領域。例如：以黃金比例分析人體完美比例、以碎形描述某種重複形式的美感、以射影幾何表示繪畫透視法…等；坊間的科普書，也常提及隱藏的數學謎題，例如：欣賞雕像的最適合距離、最節省材料的裝飾方式…等，無非都在試圖連結數學與文史學生較有關的領域。

(二)　實用性目的之相關批評

身為現代公民的文史學生需要處理數量的能力，然處理數量的能力究竟屬於何種深度的數學有待釐清。U. Dudley(2010)就特別區分了*初等算術*(arithmetic)與*數學*(mathematics)。他認為一般人會有大部分職業都需要一點「數學」的迷思，是因為誤把初等算術與數學劃上等號，初等算術在美國是指八年級以前的數學課程[37]。在台灣，現代公民於日常生活中所必備的數學能力，大多在高中以前學習完畢，故若單以日常的實用性說服文史學生學習高中數學，稍嫌不足。

---

[3] 此處「數學」實為下文中 Dudley(2010) 所指出的「初等算術」(arithmetic)

另一批評完全同意高中數學實用，但認為高中數學實用性無法強迫所有人學高中數學。大眾多同意現代社會之所以能順利運作，很大部份是依賴初等算術之上的數學，也同意數學擁有刻劃美的實用性。然而，一個學科擁有豐富的實用成果，並不代表所有人都必須學它，一如並非所有人都必須學會寫非常實用的電腦程式，也並非懂了數學，才能進行偉大的藝術創作。因此，實用性目的很難做為文史學生學習高中數學的目的。

二、思維性目的

反對外文系不採計數乙的另一派意見，認為數學可以訓練文史學生思考，不該單以實用性作為採計與否的判斷依據。數學本身的特性，使世人大多認為數學可以訓練思考，是一所「很好的思考學校」[8]，此即數學學習的**思維性目的**。然而，也有不少人認為思考一詞範圍太廣，數學訓練的思考是否為文史學生所必需，又是否只有數學才能訓練文史學生所需的思考便成為爭論關鍵。

(一) 思維性目的之主張

欲以思維性目的說服文史學生學習高中數學者，主張高中數學訓練學生如何思考，文史學生的學科本身多半強烈需要思考，故文史學生當然要學高中數學。思維性目的長期作為數學學習目的的最大王牌，在「外文不計數」的爭論中，諸如：「文學家需要有充份的邏輯訓練」[16]、「日常生活需要下判斷」、「凡事說理」、「學習解決問題」、「抽象思考可看見問題本質」…，就是以思維性目的作為反對「外文不計數」的理由。文史學生即便用不到數學，在其專業領域的學習中，諸如詮釋、批判、創作、辯論、決策、管理…等的過程裡，還是需要解決問題、下判斷的思考，故思維性目的便成為辯護文史學生必須學習高中數學最被人接受的論點。

(二) 思維性目的之相關批評

數學訓練的思考通常與**邏輯思考**及**抽象思考**劃上等號：邏輯思考即數學的演繹推理，數學是特別要求嚴謹論證的學科，數學裡，凡事追根究底；抽象思考則

是數學優異於其他學科的特色，因為抽象，數學常能掌握問題本質，也因為抽象，數學享有「思維的自由想像與創造」[25]。然而，文史學生的此兩種思考是否需要到達高中數學所訓練的深度，又是否一定得經由高中數學訓練，便成為考慮關鍵。

文史學生日後所需的思考需要訓練，但不一定要來自高中數學。《紅樓夢》作者曹雪芹當年的數學不過小學算術程度，張海潮就曾以此為反例質問「數乙與邏輯何干」[16]。蕭文強則指出生活的判斷根本不必由數學中學[26]。M.Kline 也表明人們過份誇耀數學演繹推理在人生中的價值：「在數學訓練心智的爭論中，即使學生也嗅到職業騙徒的味道」[1]。數學訓練思考並不代表其他學科不訓練思考，文史學生的重點科目如國文、公民、歷史…等課程也訓練思考，且其訓練的面向比高中數學更貼近文史學生的未來。

另一個批評認為數學雖然講求道理，但常希望用抽象的數學語言說理。然在文史學生生活的一般世界裡，雖然還是需要一點抽象思考，但不需要太多抽象的數學語言，國中階段所學似乎就已足夠。抽象的數學語言，雖可突顯問題本質，但文史學生面對的問題，通常不需要太多高中數學裡的抽象語言，那麼，文史學生投資大量時間熟練高中數學裡抽象語言的必要性就消失了。故即便數學能訓練抽象思考，但若其只是著重在抽象語言的熟練，就不一定能訓練到文史學生真正需要的層面，思維性目的也就不如一般認為的有說服力。

三、文化性目的

從非歐幾何動搖幾何真理的地位、經歷基礎化運動、乃至哥德爾不完備定理的這段時期，數學哲學經歷較大的變動，I. Lakatos 提出擬經驗(quasi-empirical)數學觀，肯定數學有人類活動的經驗成分[41]；P. Ernest 進一步提出社會建構主義(social constructivism)，強調數學裡充滿人的影響，他認為數學整體知識的建構，雖非主觀恣意生長，但也並非如演繹系統脈絡歷歷[38]。數學哲學的變動多少提醒數學教育數學有另一面向：數學是人類建構的知識、是一種人類的活動、是一種

文化。因此，學習數學可以幫助我們了解人類文化，此即數學學習的**文化性目的**。

在「外文不計數」事件中，討論焦點是實用性目的及思維性目的，軟性的文化性目的也許因為不是數學課堂上最主要的面向，幾乎未被提及，然而，文史學生與人類文化息息相關，在討論適合文史學生的教學立場時，文化性目的應該占有一席之地。

(一) 文化性目的之主張

支持文化性目的者認為，高中數學與人類文化密切相關，文史學生當然要學習數學。數學與文化的密切性，可由被動面或主動面切入，數學可以是人在類進步中被發展的智慧，也可以主動深刻影響人類文化。

數學可視作人類進步中所發展的工具，故數學發展反映人的發展，如蕭文強所言：「數學發源於生產實踐，人類在活動中累積感性知識，逐漸把這些知識綜和整理，最後再把數學知識放到實踐中考驗」，其以「數學發展史」稱之[26]。文史學生透過數學發展史，能瞭解人類文化發展一個重要面向。

數學更常轉而主動深刻影響文化，如懷德海所云：「數學的脈絡造就了歷史」。鄭毓信就曾指出西方文明對上帝的想法隨著數學改變，從希臘數學藍圖的自然觀，經過中世紀結合神學後，人們認為上帝依數學創造世界[25]。M.Kline 也曾說明文史學生學習數學的重點：

> …[學習數學的]首要目的，不是精通數學的概念和技巧，而是能夠欣賞數學角色如何影響、甚至決定西方文化[4]。欣賞和技巧久已認為是文學、藝術和音樂的目標，同樣的理由，也應是數學的目標。…[1]

支持文化性目的者同意克萊因的觀點，明白數學影響文化甚鉅，而因為高中數學

[4] 底線為筆者所加

是數學知識的一部分，其認為文史學生若忽略高中數學，對於文化將缺少重要的理解。

(二) 文化性目的之相關批評及反思

文化性目的範圍極廣，數學發展史幾乎等同於學習數學史，主體是歷史而非數學，已使「為什麼要學數學？」的反省轉換到「為什麼要學歷史？」[26]。另外，在數學的主動面上，若希望學生達到如 M. Kline 要求的水準，學生需要有深厚的人文知識及數學知識，才能由數學的變革深刻反省文化，在目前高中數學的教學現場中，不論是教學時間、教學材料、師資…都有執行的困難，故以文化性目的作為高中數學學習目的稍嫌不實際。

第二節　常見的教學立場

在實際教學現場中，並沒有特別為文史學生設計的教學立場，文史學生會碰到的教學立場與一般學生無異。本節從常見的教學立場中分出三種類型**──實用脈絡的教學立場、邏輯脈絡的教學立場、人性脈絡的教學立場**，分析各教學立場背後數學學習目的，並以文史學生的角度反省各教學立場的適用性。雖然在實際教學現場中，教學者大多混和採取各種立場，很少純粹出現某立場，但為了方便討論，本節在介紹各立場時，僅呈現各立場較看重的面向。另外，以升學考試為學習目的之教學立場，雖然很常見，但由於無法真的使正常數學老師及一般學生心服，遑論文史學生，故不再深入探討。

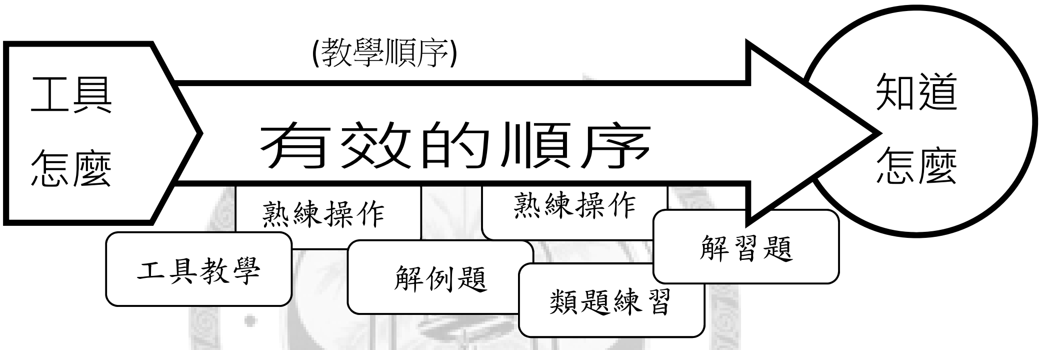
一、實用脈絡的教學立場

實用脈絡的教學立場是非常普遍的教學立場，目前高中數學教學現場所遵行的《九九課綱》就鼓勵此立場[5]。其認為學習數學是為了熟悉各項數學工具的運用、能以數學工具解決問題、或為將來較深的數學工具打基礎，即肯定學習數學的實

[5] 詳見第四章第一節

用性目的。教學最重要的目標是教會學生如何應用數學工具，並使學生熟悉各項數學工具的操作，其它目標皆為次要，故稱實用脈絡的教學立場。常見的教學順序如：以例題講解工具，再請學生練習類題，並無固定的教學順序，只要最後能使學生熟悉數學工具的操作及使用即可。整理如下。

1. 教學目標：使學生熟悉如何使用數學工具
2. 隱含的數學學習目的：實用性目的
3. 教學重點：教導數學工具的正確使用方法，並知道如何應用
4. 教學流程：



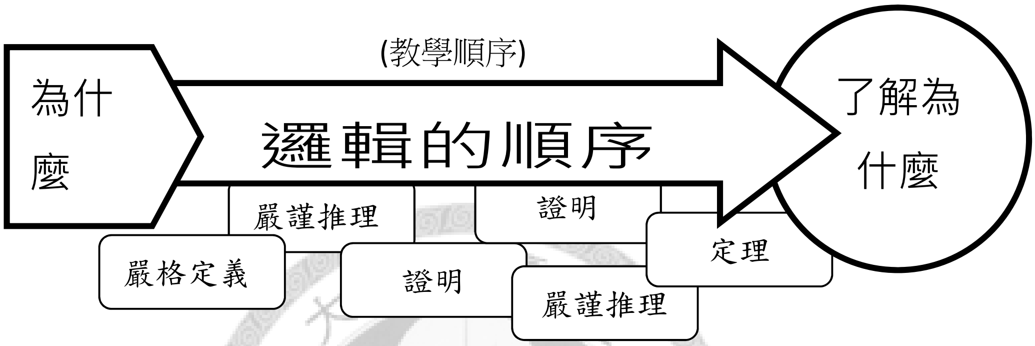
實用脈絡教學立場的教學目標為使學生熟悉數學工具的使用，期能幫助學生實際運用數學工具，其立場以實用性目的為基礎，對於日後需要大量應用數學工具的自然組學生，是很適合且有效率的教學立場；然由上一節的分析，已知實用性目的不完全適合文史學生，故即便文史學生達成了實用脈絡教學立場的學習目標，熟悉高中數學中各個數學工具的應用，對於其日後的幫助並不顯著。

二、邏輯脈絡的教學立場

邏輯脈絡的教學立場，教學上呈現嚴謹的邏輯架構，以**邏輯的順序**為教學順序，故稱邏輯脈絡的教學立場。教學最重要的目標是使學生徹底了解數學知識為什麼正確。1960 年美國的新數學(New Math)即屬此立場。此立場較不重視機械式的數學工具練習，認為數學的嚴格證明及嚴謹架構能訓練思考，以思維性目的作為學習數學最重要的目標。新數學失敗後，已少有教學者採取極端邏輯脈絡的教

學立場，但「由於大多數教師都經過嚴格的純數學訓練，形式主義的典型現象，或多或少仍發生在我們的教學場域中」[35]，特此一提。

1. 教學目標：使學生了解數學知識為什麼正確
2. 隱含的數學學習目的：思維性目的
3. 教學重點：呈現數學理論結構以及思考的嚴謹邏輯架構
4. 教學流程：



邏輯脈絡教學立場的教學目標為使學生了解數學知識為什麼正確，期能使學生在證明推理中，達到思維性目的。然而，人們從新數學的失敗中明白極端的邏輯脈絡的教學立場不僅往往不能達到思維性目的，也因為完全依從邏輯順序過於冰冷抽象，非常違反學生的學習進程，故幾乎所有學生都不適用極端邏輯脈絡的教學立場，遑論文史學生。

在現今教學現場，教學者常混和採取邏輯脈絡與實用脈絡的教學立場，一方面希望學生熟悉數學工具的應用，一方面教導其背後的原理，然而，文史學生即使了解數學知識為什麼正確，心中也會嘀咕：「那又如何？我又用不到！」，不明白該數學知識正確與否的重要性在何處，故邏輯脈絡與實用脈絡的混和立場，似乎還是沒有特別照顧到文史學生。

三、人性脈絡的教學立場

人性脈絡的教學立場可能是最接近文史學生的教學立場，相對於邏輯脈絡，其較注重數學中的人味，在教學上欲呈現人類整體或個體發展數學的過程，期使

知識建構過程更符合學生心理自然發生的順序，故稱人性脈絡的教學立場。通常會與其他立場混用，是輔助性的教學立場。最重要的目標是幫助學生了解數學知識發展的自然過程，使學生感受數學人性的一面，而較不排斥數學。常以**歷史的順序**或**發現的順序**為教學順序。

歷史的順序呈現人類整體發展數學的過程，由於此過程也常反映學生學習的順序，故按照史實編排教學順序，往往能顧及學生心理自然發生的順序。其常見的教學材料如：數學家傳記、古文本、數學歷史。目前台灣許多 HPM 的教案即屬此[6]。其除做為輔助性立場外，也有許多教學者希望透過史料，呈現數學與人類文化的關係，隱含數學學習之文化性目的。整理如下。

1. 教學目標：使學生了解人類的數學發展史
2. 隱含的數學學習目的：文化性目的
3. 教學重點：呈現人類整體發展數學的過程
4. 教學流程：

發現的順序則更加強調學生的主權，期待學生能以自身的發現自然建構出數學內容，藉此呈現人類個體發展數學的過程。教學上希望透過學生本身的建構過程，使學生明白數學與人類活動密切相關，並經由建構的過程，訓練學生解決問題或思考的能力。教學常見的活動如：提問、腦力激盪、自由猜想、討論…等。隱含數學學習之文化性目的、思維性目的。整理如下。

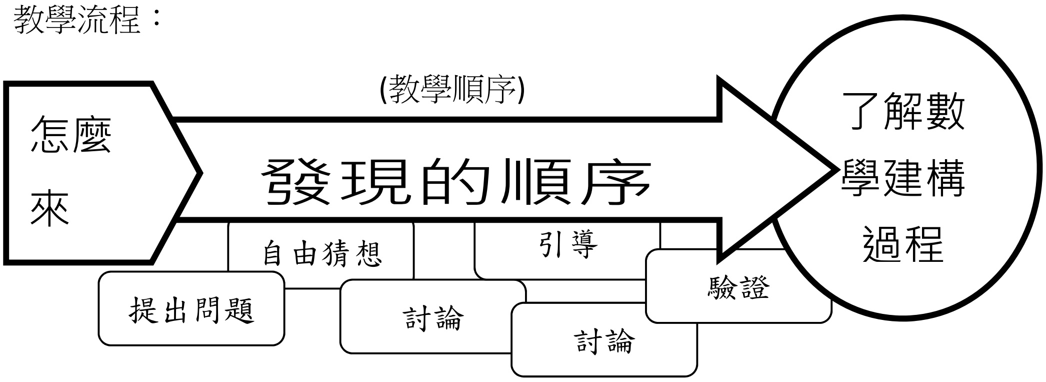
1. 教學目標：使學生了解建構數學知識的自然過程

[6] 見第四章第二節

2. 隱含的數學學習目的：文化性目的、思維性目的

3. 教學重點：呈現人類個體發展數學的過程

4. 教學流程：



乍看之下，充滿人味的人性脈絡的教學立場似乎已經替文史學生找到一條學習高中數學的出路，然實際施行時，卻往往使文史學生負擔更重。

以歷史的順序進行數學教學，幾乎等同於教導數學發展史。過程中歷史變為主角，史料及文本的摻雜，學生不容易抓到數學的重點，尤其套用於文史學生時，文史學生常關注於數學發展史中非數學的部份，使重要數學內容失焦。

再者，數學發展史裡的主要人物，通常都是數學名家，掌握數學的能力非一般人可比，希望文史學生短時間消化由其呈現的數學發展史，實顯困難。如以當初的「sinus」介紹到現今正弦表的記號「sin」[20]，雖使正弦定理中外接圓半徑的出現較符合人性，文史學生卻容易因為過多的符號而混亂；另外，也由於濃厚的歷史感，即使文史學生了解數學工具的來龍去脈，也會認為那已是歷史、是當時的事，不見得明白現在「為什麼要學數學？」。

而若以發現的順序取代歷史的順序，期待文史學生自行建構數學知識，享受發現的樂趣[23]，也會有實際教學上的困難；高中數學已經是成熟的數學工具，並非一蹴可幾，通常需要長時間沉澱、簡化、選擇符號，文史學生很難在濃縮的高中數學課堂裡，自行經歷如此漫長的發現過程；若由教學者給予提示，又因缺少緩慢的累積與修正，容易使日久醞釀的創意發想變成神來之筆，失去原來希冀的

人性脈絡。

總之，為了遵循人性脈絡，不只可能使文史學生學習數學的過程更加繁雜，也往往因需要非常長的教學時間而無法徹底落實。

四、教學立場的統整

在實際的教學現場裡，教學立場不一定壁壘分明，有時教學者會混用不同的教學立場，但仍常有主要及次要的分別。表 2-2 為各教學立場的統整，可作為分辨教學立場的參考依據。

教學立場	實用脈絡	邏輯脈絡	人性脈絡
學習目的	實用性	思維性	文化性、思維性
教學目標	熟悉如何使用及應用數學工具	了解數學知識為什麼正確	了解數學知識發展的自然過程
教學重點	教導數學工具的使用方法及其應用	呈現數學理論結構以及思考的嚴謹邏輯架構	呈現人類整體或個體發展數學的過程
套用於文史學生的狀況	不太適用文史學生	邏輯脈絡不可行	有實行困難

表 2-2：常見教學立場的統整

第三章　體驗脈絡的教學立場

第二章已說明在文史學生不太適合現有的教學立場，本章將嘗試提出適合文史學生的教學立場——**體驗脈絡的教學立場**。第一節討論不同於實用性目的、思維性目的、文化性目的之**價值性目的**；第二節說明價值性目的下，數學學習內容及課程進行方式的應有的調整，提出體驗脈絡的教學立場；第三節則將體驗脈絡的教學立場與實用脈絡的教學立場、邏輯脈絡的教學立場、人性脈絡的教學立場作比較。

第一節　數學學習的價值性目的

對於文史學生而言，實用性目的、思維性目的、文化性目的縱使皆有其缺失，當中仍有觀點可供參考。實用性目的、思維性目的雖然被過分延伸以至被否決，但數學本身擁有的**威力**並未被否定，數學在實用性的豐碩成果有目共睹，且思維性目的提及的邏輯思考及抽象思考，也的確是人類用以接近世界及追求真理的重要方法；文化性目的則反映數學哲學的變革，雖然用於教學現場時太過理想，但也作為思考數學學習目的時一種提醒，即在考慮數學時，不可忽略人參與的份量。不僅肯定數學的威力，同時也注意數學中人的參與，融合此兩反省，就產生了數學學習的**價值性目的**。

一、價值性目的

數學學習的價值性目的意指：學習數學，才能在數學的**威力**當中，深刻**體驗**人類深度思考的價值。數學是「人的發明力和創造力的紀念碑」[1]，是人類一窺世界的鑰匙，身為人類的文史學生，至少要能明白屬於全人類的紀念碑究竟紀念了什麼、了解以數學理解世界及探究真理的優點是什麼、解決問題的過程中以邏輯思考及抽象思考的好處是什麼，此即數學的威力；而由於數學是人類的產物，在學習數學的過程中經歷數學的威力，即是在經歷人發明力與創造力的威力，因此學習數學，便能體驗人擁有以數學接近世界的天賦，進而在數學威力中，體驗

到人的價值。數學的威力提供媒介使文史學生能體驗人類深度思考的價值，此即數學學習的價值性目的。

二、價值性目的與文化性目的之比較

在實用性目的、思維性目的、文化性目的當中，價值性目的因以新的數學觀作為基礎，考慮數學裡人的份量，與前兩者有明顯的分別，而與文化性目的較接近，但兩者仍有很大的差別。

文化性目的之支持者認為，數學與人類文化密切相關，其認為學習數學後，才能對文化有更深的理解，其目光在人類文化上。以微積分的學習為例，文化性目的可能是思想微積分的產生對於人類世界觀的改變、探討微積分如何影響科學的地位；價值性目的則聚焦在數學本身的威力，微積分的學習使文史學生能反思人類如何單單以數學的抽象思考及邏輯思考，解決原本不簡單的切線問題或是求面積問題，使文史學生能體驗數學本身的威力，並在當中體驗到人類深度思考的價值。文化性目的關心數學如何影響數學之外的文化，價值性目的則在數學內部做反思，兩者並不相同。

第二節　體驗脈絡的教學立場

本節將自價值性目的出發，參考前一章對於各教學立場的反省，保留人性脈絡的教學立場當中擁有較高的說服力的人味，但同時考慮教學的實際層面，提出適合文史學生的體驗脈絡的教學立場。

一、價值性目的對應的數學學習內容：體驗旅程

價值性目的之主張是透過數學的學習，文史學生能在數學的威力當中，體驗人類深度思考的價值，所以，若肯定價值性目的，所採取的教學立場就必須能帶領學生進行一趟**體驗旅程**。體驗旅程中，對一數學知識要做的事，是顯明該數學知識的威力，著重數學知識出現前後的反思，反思使用該數學知識的好處為何，

即帶領學生體驗其威力所在。

體驗意謂學生必須親自參與其中，是一個過程，在親自運用該數學知識的過程裡去感受其威力，即價值性目的所在意的人的份量；且既稱為**旅程**，就不可輕易省略中間過程。故該數學知識的威力不能單單以數學知識造成的最後產品呈現，例如，教學者拿著電器一邊說明若是沒有根號負一就沒有電器，企圖只透過最後產品直接說服學生該數學知識的威力所在，學生未親自經歷深度思考的過程，只看到深度思考的結果，就不算是體驗旅程。

威力要以數學本身的威力為主，使學生體驗數學中抽象思考或邏輯思考的好處。例如：對數的威力，不在於幫助文史學生實際生活中即使沒有電腦也能完成大量繁雜的運算,而是使學生體驗以化乘除為加減的想法完成任務的精簡及好處；三角學的威力，也不在於要幫助文史學生在實際生活中進行間接測量，而是在學習三角學的過程中，體驗人類如何單單以抽象及量化的幾何圖形或定理完成間接測量。透過親身經歷數學的體驗旅程，讓學生體驗人類深度思考的極致，體驗人類深度思考的價值。

總之，對於文史學生，高中數學課程最重要的是提供體驗威力的旅程。威力的體驗不只在課程開頭引起學習動機，中間過程不可省略，整個課程的主體是威力的體驗，才可稱作體驗旅程。

二、體驗旅程的設計方式及取材

設計以體驗旅程為本的數學課程時，要設法使學生體驗一個**故事**。由於其基礎為價值性目的，目標是使學生在經歷故事後，能體驗該數學知識的威力，因此故事情節沒有制式的安排順序，數學知識可以在故事開頭出現，一登場就大顯神威，即教學者直接介紹數學知識，再以數學知識解決問題，顯現其威力；也可以在故事中間出現，臨危受命跳出來解圍，即教學者佈置困境，不斷嘗試錯誤，再

引入能夠巧妙解決很有威力的數學知識。體驗旅程可用任何方式鋪陳故事情節，惟所有安排要把握最大原則——呈現數學知識的威力。

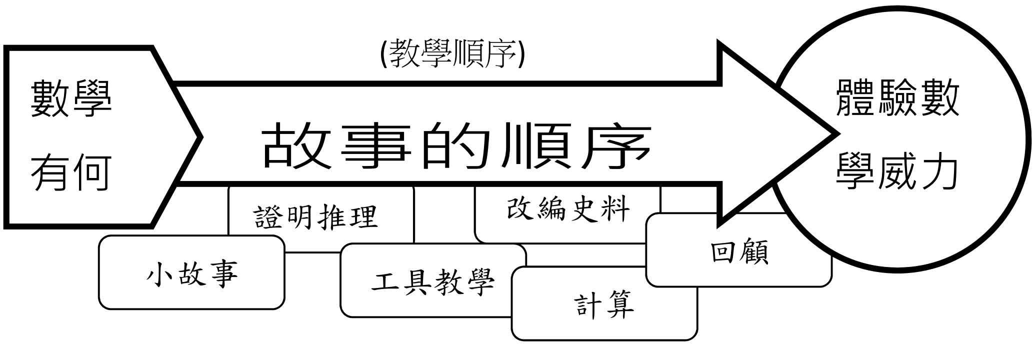
為呈現數學知識的威力，體驗旅程設計故事時的取材極廣，惟該材料的必要性取決於是否能更加彰顯該數學知識的威力，所以，故事不能完全依從數學史或數學發展史；史實固然有其重要性，但只是幫助學生體驗數學知識威力的輔助背景，當其與最大原則衝突或因太零碎而使故事衍伸過多枝節時，將選擇改編史實或刪去，換而言之，史料只是鋪陳故事的參考。

另外，在體驗旅程中請學生計算及嚴謹證明都是允許的，「故事」並不意味其只看重軟性的史料部分或情意部分，一般認為較生硬的嚴謹證明，若能幫助體驗旅程的進行，使故事裡數學知識的威力更加突顯，都能採納；但注意仍以最大原則為優先，最重要是使學生明白該數學知識的威力；因此，證明並非一定要鉅細靡遺，過於瑣碎的詳盡證明，可適度裁減或提點關鍵。

三、體驗脈絡的教學立場

以體驗旅程設計課程的教學立場即稱為**體驗脈絡的教學立場**。體驗脈絡的教學立場以價值性目的為根本，在教學上呈現數學知識的威力，使學生在課程之後能體驗數學的威力。教學順序以**故事的順序**為主，故事安排及取材沒有限制，諸如史料、工具計算、證明推理、趣味問題...都能出現在故事情節裡，惟不能偏離最大原則——呈現數學知識的威力。最重要的目標是使學生明白該數學知識的威力是什麼，學習後即便不能熟練的操作數學，也至少曾經體驗過。整理如下。

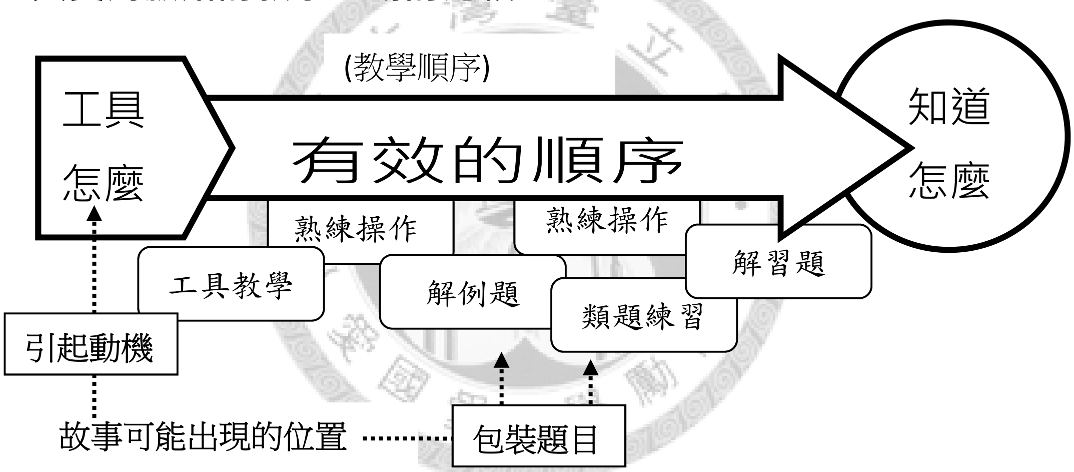
1. 教學目標：使學生體驗數學知識的威力
2. 數學學習目的：價值性目的
3. 教學重點：呈現數學知識的關鍵威力
4. 教學流程：

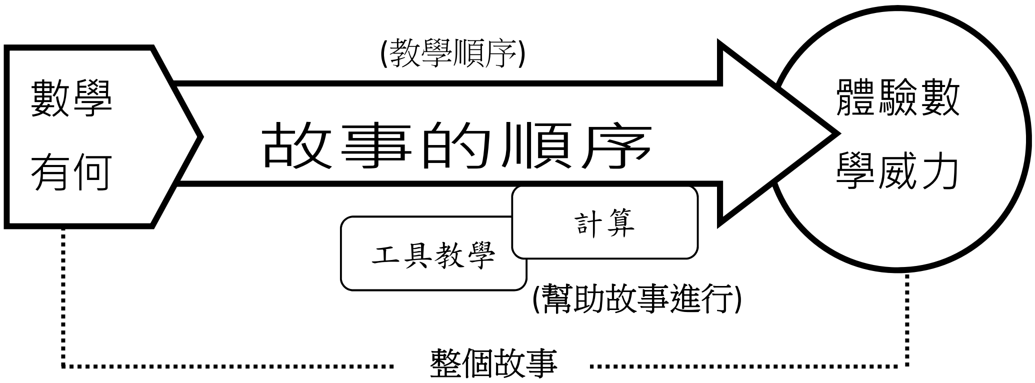


第三節　體驗脈絡的教學立場與其他立場的比較

體驗脈絡的教學立場，因以價值性目的作為出發點，與其他教學立場有多處不同，以下將針對主要的不同點作比較。

一、與實用脈絡的教學立場的比較



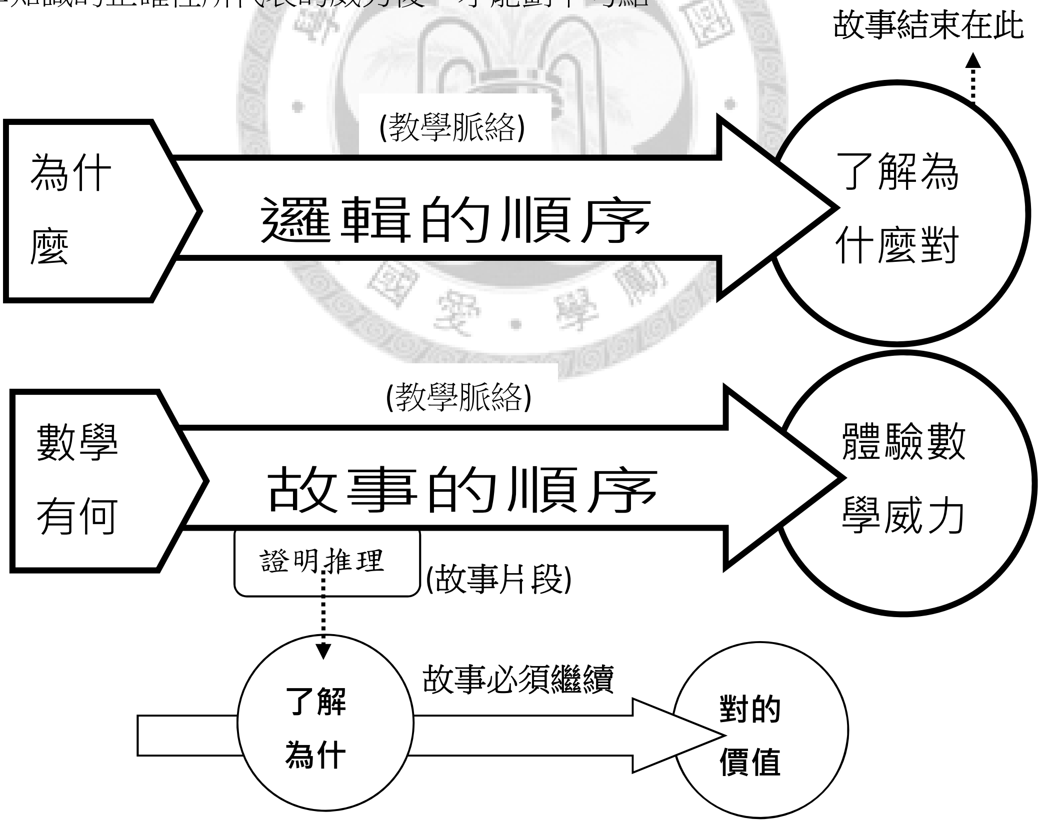


實用脈絡教學立場的教學現場，並不缺乏「故事」，但其意義不同於體驗脈絡教學立場的故事。實用脈絡的教學立場出現故事的目的大致有二，一為引起動機，在課程起始鋪陳故事，接著花大部分的時間介紹數學工具並帶領學生熟練操作；

一為包裝練習題，熟悉數學工具需要練習，但為避免題型過於單調[37]，有時會以不同的故事作包裝。因此，在實用脈絡教學立場裡的故事服務數學工具，其故事是零碎鬆散的，但在體驗脈絡的教學立場裡，故事指整個課程，數學工具的操作或熟練都是為了使整個故事進行、為了使學生能體驗數學的威力而存在，在體驗脈絡的教學立場裡的數學工具是為了服務故事。

二、與邏輯脈絡的教學立場的比較

邏輯脈絡的教學立場的教學目標為使學生了解該數學知識為什麼是對的，故證明推理完畢課程即可結束，但在體驗脈絡的教學立場中，證明推理不是整個故事，只是故事的片段，是體驗旅程中的一個過程。為使學生能體驗數學的威力，在了解該數學知識為什麼是對的之後，體驗旅程尚未結束，故事必須繼續，呈該數學知識的正確性所代表的威力後，才能劃下句點。

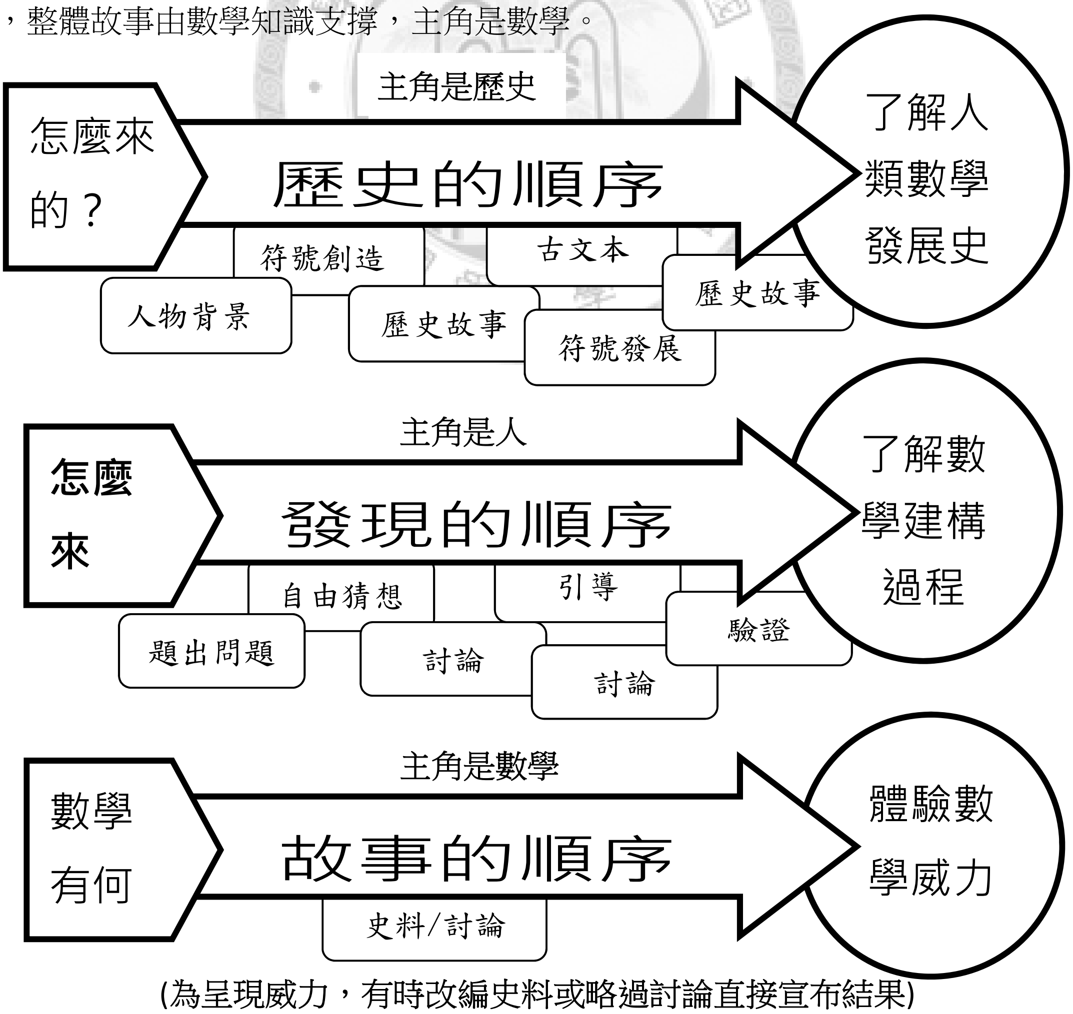


三、與人性脈絡的教學立場的比較

人性脈絡的教學立場，強調歷史的順序或發現的順序，呈現人類整體或個體發展數學的過程，期使知識建構過程符合學生心理自然發生的順序，幫助學生感

受數學人性的一面。在當中學生有時也能恰巧體會到數學的威力，這是因為歷史的順序或發現的順序裡關鍵的突破點，往往就是該數學知識的威力所在。是故雖然在執行人性脈絡的教學立場時，教學者往往太過遵從史實順序或學生心理自然的順序而模糊焦點，但此立場提供許多材料給教學者作為思想威力的參考。因此，兩者的差別在於，其不一定完全依從歷史的順序或發現的順序，而只是將其當作參考，除非其能幫助學生體驗該數學知識的威力，否則即便與歷史的順序有出入或不符合發現的順序也被允許。換句話說，在同樣考慮數學中人參與份量的情況下，體驗脈絡教學立場的重點是該數學知識的威力。

此相異處也可由兩者組成故事的主成分看出端倪。人性脈絡的教學立場常說故事，但若服從歷史的順序，整體故事必須由數學史支撐，而若服從發現的順序，則由學生自行發展故事，主角是學生；體驗脈絡的教學立場的主成分則是數學知識，整體故事由數學知識支撐，主角是數學。



(為呈現威力，有時改編史料或略過討論直接宣布結果)

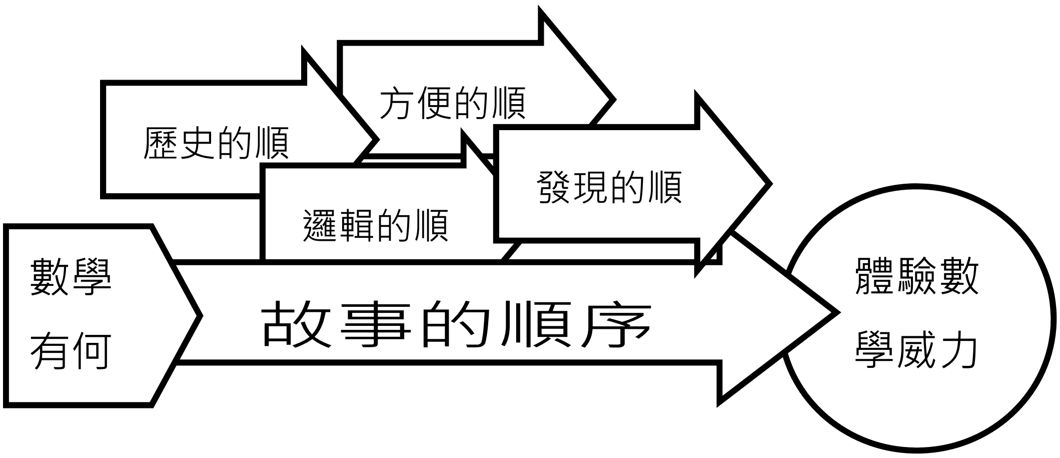
四、小結

由於體驗脈絡的教學立場最終目標為使學生明白該數學知識的威力所在，不論是實用脈絡的教學立場著重的數學工具熟練、邏輯脈絡的教學立場重視的嚴謹推理、人性脈絡的教學立場裡史料或學生自然發現的過程，各教學立場中原本著重的區塊，在體驗脈絡的教學立場裡，都轉換為呈現數學知識威力的材料，安排取捨都取決於能否幫助到體驗旅程。整理如表 3-3。

	實用脈絡	邏輯脈絡	人性脈絡
各教學立場	零碎的故事、 故事服務數學工具	說明數學知識為什麼正確後，故事結束	故事主體是數學史或學生
體驗脈絡的教學立場	整體的故事、 數學工具服務故事	故事必須繼續說明該數學知識的正確性所代表的威力	故事主體是數學知識

表 3-3：各教學立場與體驗脈絡教學立場的比較

換句話說，體驗脈絡的教學立場以數學知識為主體發展整個故事，必須在學生明白該數學知識的威力後才能結束故事。因此，體驗脈絡的教學立場並不排斥其他立場的教學順序，甚至在過程中常混合其他教學立場的教學順序，其與不同教學立場最大的差別，在於教學安排中有無將呈現數學知識威力視為最大原則。體驗脈絡的教學立場可以說是統整所有立場的最大骨幹。如下所示。



第四章　發展體驗脈絡教學立場的教案

第二章已完整討論各種數學學習目的及教學立場，在第三章也已提出適合文史學生的價值性目的及對應之體驗脈絡的教學立場，將嘗試以此回歸實際面發展適合文史學生的教案。

在正式為文史學生發展教案之前，本章先分析高中數學的目前狀況。第一節關注現行高中數學遵行的《九九課綱》，分析在《九九課綱》中，為文史學生發展教案時適合選用的教學立場；第二節則由一般認為較能幫助文史學生的 HPM 教學切入，作為發展教案的參考；第三節則說明如何發展體驗脈絡的教學立場的教案，並在該節最後解釋本研究如何發展體驗脈絡的教學立場的教案。

第一節　九九課綱

教育部於九十七年一月公佈之《普通高級中學課程綱要》裡的〈高中數學綱要〉，在九十九學年度正式上路，簡稱《九九課綱》，本研究所提及的數學教學內容皆屬之。《九九課綱》分成必修課程及選修課程，必修課程是文史學生與非文史學生都需修習的內容，本節首先針對必修課程做簡介，並說明《九九課綱》較鼓勵的教學立場，最後探討《九九課綱》中採用體驗脈絡的教學立場的可能性。

一、九九課綱的必修課程內容

《九九課綱》的必修課程有清楚架構——高一數學包含【函數】[7]及【有限數學】，內容定位為「學習與生活關聯或其他學科需要用到的數學，以建立學生在各學科進行量化分析時所需要的基礎」。高二數學包含【平面坐標與向量】及【線性代數】，內容定位為「社會組與自然組學生在學習上所應具備的數學知識，其主題為坐標、向量幾何與線性代數」[35]。

---

[7] 粗體括號【】專指九九課綱中數學內容的名稱，如【函數】指九九課綱中的函數主題。

四冊的詳細內容如表 4-1。其又分成 A、B 兩版，文史學生大多會參與的大學學測範圍為 A 版內容，A 版、B 版前三冊的學習內容完全相同，但在數學 IV，A 版不含以下內容：三階行列式的定義與性質、點到直線的距離、兩平行線的距離、兩歪斜線的距離、三平面幾何關係的代數判定、平面上的線性變換與二階方陣。本文第五章開始所發展的教案主題皆在 A 版中。

學年次	第一學年		第二學年	
分冊	數學 I	數學 II	數學 III	數學 IV
主題	函數	有限數學	平面坐標 與向量	線性代數
內容	數與式	數列與級數	三角	＃空間向量[8]
	多項式函數	排列、組合	直線與圓	＃空間中的 平面與直線
	指數 對數函數	機率	平面向量	＃矩陣
		數據分析		二次曲線

表 4-1：《九九課綱》的必修課程

二、九九課綱與常見的教學立場

《九九課綱》非常鼓勵實用脈絡的教學立場。首先，其三項修訂理念「強調數學的基礎性、界定核心數學概念內容、導正數學學習文化」的前兩項，表明《九九課綱》看重學生是否學會使用數學工具，以作為日後「自然科學與社會科學的基礎」或滿足「生活或其他學科的實際需要」，節錄如下：

[8] 符號“＃”表示該主題分為 A 版、B 版

1. 強調數學的基礎性

數學是研究各種規律性所發展出來的語言，是人類理性思維的產物，也是自然科學與社會科學的共同基礎；二十世紀計算機的發明，更促成當代各學科進行「數量化」與「數學化」的革命。…

2. 界定核心數學概念內容

…高中時期所應學習的數學，應是界定在由生活上的需要、或是其他學科的需要，所形成的核心內容…[9][35]

再來，《九九課綱》選擇強化的內容，如插值多項式、數據分析，其強化原因不外乎應用性高、生活連結性高、與具體世界關聯度高，顯示該數學工具是否實用乃篩檢的重要標準，也反映《九九課綱》重視數學學習的實用性目的。因此，在《九九課綱》下進行教學，很自然會選擇實用脈絡的教學立場。

《九九課綱》支持實用性目的，也支持思維性目的，其明確提出「培養學生以數學思考問題、分析問題和解決問題的能力」作為必修數學的三項目標之一，在其訂定的七項核心能力中，除了「演算能力」、「使用計算工具的能力」是機械式操作數學的能力，其餘五項——將具體世界中的概念以數學形式表徵的「抽象化能力」、認識證明並進行推論的「推理能力」、能整合數學內部並與具體世界作連結的「連結能力」、解決數學形式與生活情境中的數學問題的「解題能力」、能利用口語或文字表達解題想法的「溝通能力」[35]——皆與邏輯思考與抽象思考的訓練密切相關，是數學學習的思維性目的。

雖然《九九課綱》支持思維性目的，但其強烈反對邏輯脈絡的教學立場。《九九課綱》明言其重要任務是避免以形式主義形成數學教育，記取六O年代美國與法國新數學教育改革失敗的教訓，不以邏輯順序為教學順序的重要依歸，而希望將學生所學的數學與現實世界連結。

[9] 底線為筆者所加

至於人性脈絡的教學立場，因其為輔助性的教學立場，在《九九課綱》中不容易直接看出端倪。《九九課綱》中，除了特別重申數學是「研究各種規律性所發展出的語言」，而強調數學思維模式裡與演繹法同等重要但較符合人性的歸納法之外，課綱內找不到直接討論人性脈絡教學立場的蹤跡，《九九課綱》對於此立場的態度是中性的。

三、九九課綱與體驗脈絡的教學立場

體驗脈絡的教學立場在《九九課綱》中雖然看似缺席，但其實已隱藏在《九九課綱》中。重新檢視《九九課綱》必修數學課程欲達成的三點目標，前兩者分別對應數學學習的思維性目的及實用性目的，第三點則有價值性目的之味道，顯示《九九課綱》擁有發展體驗脈絡教學立場的可能性。

1. 培養學生以數學思考問題、分析問題和解決問題的能力
2. 培養學生具備實際生活應用和學習相關學科所需的數學知能
3. 培養學生欣賞數學內涵中以簡馭繁的精神和結構嚴謹完美的特質[35]

甚至，若將「培養學生以數學思考問題、分析問題和解決問題的能力」與「培養學生欣賞數學內涵中以簡馭繁的精神和結構嚴謹完美的特質」結合，可成為以欣賞為重點的目標——培養學生欣賞以『以簡馭繁的精神和結構嚴謹完美的數學』思考問題、分析問題和解決問題的優點。「培養學生欣賞」意即帶領學生體驗，而「以『以簡馭繁的精神和結構嚴謹完美的數學』思考問題、分析問題和解決問題的優點」即指數學本身的威力；因此，在《九九課綱》所訂的目標下施行體驗旅程，與《九九課綱》原意相符。體驗脈絡的教學立場雖不易在課綱內容細目中明確指出，但在《九九課綱》中選用體驗脈絡的教學立場，非常值得一試。

第二節　HPM教學

HPM 是三個英文單字的縮寫，「H」表歷史(History)、「P」表教學法(Pedagogy)、 「M」表數學(Mathematics)，HPM 泛指各種數學史對數學教育的應用[13]。本文中**HPM 教學**為運用數學史進行教學的簡稱，**HPM 教案**為運用數學史於課堂的教案簡稱。以下先談談進行 HPM 教學的理由，說明其教學立場及指出為何一般認為其能幫助文史學生，接著就現有的 HPM 教案反思 HPM 教學所遭遇的問題。

一、進行 HPM 教學的理由

HPM 教學特別希望能幫到容易害怕數學或無法親近數學的學生，在學者曾提出 HPM 教學許多優點中皆可看出此期待，茲將 Fauvel 的十五點理由整理成六大點作為代表說明[17]，見表 4-2.1。

本文的分類	Fauvel 的理由
1. 增加數學的人味	(1)促進學生的學習動機 (5)改變學生對數學的感覺 (13)使數學不再(在)顯得那麼嚇人
2. 使數學與文化接軌	(2)給數學一個人文面向 (7)有助於發展一個多重文化的表現方式 (12)有助於解釋數學在社會中的角色
3. 歷史脈絡有助學習	(3)歷史的發展有助於課程主題的編排 (4)向學生展現概念的發展過程，幫助他們了解概念
4. 呈現數學的價值	(6)比較古代與現代以確立現代方法的價值
5. 提供教師或學生 5. 延伸學習的機會	(8)提供研究的機會 (11)鼓勵敏銳的學生將眼光放遠 (14)探究歷史有助於支撐數學教師對數學的興趣與熱誠 (15)提供與其他教師或科目作涉及多項課程的研究工作的機會

6. 有助於了解學習 5. 困難的發生處	(9)過去發展中出現的阻礙，有助於解釋今日學生學習困難的產生 (10)學生從瞭解到他們並非唯一遇到麻煩問題的人，可以獲得一些安慰

表 4-2.1：採用 HPM 教學的理由

HPM 教學與文史學生關係可先在第 1、6 點理由看出，其點明採用 HPM 教學是希望能使數學課程加添人味，期待能幫助容易害怕數學或無法親近數學的學生，此類學生在文史學生中占大多數；第 2 點理由顯示 HPM 教學注重與文史學生較有關連的文化性目的；而由第 3、5、6 點理由可看出 HPM 教學的最大特徵為在教學上鼓勵遵行歷史的順序，不只顯示 HPM 教學偏向人性脈絡的教學立場，也因為歷史常與文史學生有興趣的學科較相關，使多數人認為以 HPM 教學能大幅幫助文史學生的數學學習。

二、HPM 教學的問題

如同第二章對於人性脈絡的教學立場的分析，HPM 教學雖希望帶給學生數學的人味，幫助其親近數學，卻常顧及數學史的如實引用，而擾亂數學本身的學習，使教學得到反效果。例如：林倉億所設計的對數表學習單中，就利用尼可拉斯 • 許凱(Nicholas Chuquet,1445~1488)的觀察指數的史料，希望藉以引導學生自然的討論對數含意[10]；然而尼可拉斯當時的符號是以「8^3」代表「8 是 2 的 3 次方」，此史料雖忠實呈現了發想過程及符號的變化，學生在接受「$log_2 8 = 3$」前，需先理解「8^3」的不同於「8 的 3 次方」。此即欲保留歷史的順序，造成學生易與現今指數符號混淆。

是故 HPM 教案發展至今，多數教案設計者都注意到重點是數學而非歷史，即運用數學史於課堂並不等同教導數學史，盡量將數學史置於輔佐的地位，希望回歸數學。但由於其常無法完全跳脫歷史的順序，仍舊無法真正避免人性脈絡教學

立場所遭遇的問題。

不過，既然採用 HPM 教學常是期待能夠幫助較害怕數學的學生如文史學生，選擇以 HPM 教學進行一個數學課程的原因，除了可能因為該數學主題的史料豐富，也可能反映了文史學生容易感到數學學習無意義的地方。因此下一段將整理台灣現有的 HPM 教案，作為發展體驗脈絡的教學立場教案時，選取主題的參考。

三、九九課綱現有的 HPM 教案

台灣在相關教師與研究者的努力下，已累積不少 HPM 教案，蘇惠玉與林倉億曾先後將近十五年來與高中較相關的 HPM 資源作彙整[10] [12] [28]，本文保留當中適合《九九課綱》的教案，以教案為單位作整理。

<table>
<tr><th>冊</th><th>主題</th><th>子題</th><th>作者</th><th>篇數</th></tr>
<tr><td rowspan="4">函數</td><td>數與式[11]</td><td></td><td></td><td>0</td></tr>
<tr><td>多項式函數</td><td>插值多項式
複數
複數</td><td>蘇惠玉 [29]
蘇意雯 [31]
蔡佳燕 [24]</td><td>3</td></tr>
<tr><td>指數對數函數</td><td>對數表
對數</td><td>林倉億 [10]
宋永耀 [6]</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">有限數學</td><td>數列與級數</td><td>數學歸納法
數學歸納法
等比數列</td><td>蘇俊鴻 [33]
馬婉華 [14]
蔡佳燕 [24]</td><td>3</td></tr>
<tr><td>排列、組合</td><td>二項式定理</td><td>林志全 [9]</td><td>1</td></tr>
<tr><td>機率</td><td>機率
機率</td><td>蘇惠珍、陳彥宏 [30]
許志昌 [15]</td><td>2</td></tr>
</table>

[10] HPM 資源為林倉億的用詞。其資料來自《HPM 通訊》(1998-2011)、教育部高中數學學科中心的〈高中數學電子報〉(-2011)、學位論文(2000-)

[11]【數與式】有許多關於「根號二是無理數」的 HPM 教案，但《九九課綱》已將該內容挪至附錄，故與此相關教案皆不列入計算。

	數據分析			0
平面坐標與向量	三角	海龍公式 和角公式	蘇意雯 [32] 陳建丞 [17]	2
	直線與圓	圓 直角坐標	蘇意雯 [32] 蔡佳燕 [24]	2
	平面向量			0
線性代數	**空間向量**			0
	空間的直線與平面	空間的直線與平面 克拉瑪公式	王耀璋 [5] 林倉億 [11]	1
	矩陣	矩陣的列運算 矩陣 矩陣	王耀璋 [5] 蘇意雯 [31] 蘇駿鴻 [34]	3
	二次曲線	二次曲線	蘇惠玉 [27]	1

表 4-2.2：《九九課綱》中的 HPM 教案

以《九九課綱》架構整理 HPM 教案的結果見表 4-2.2，其分佈並不均勻，某些子題重複出現，如：【複數】、【數學歸納法】、【矩陣】；同時卻有主題沒有任何教案，如：【數與式】、【數據分析】、【平面向量】、【空間向量】。本研究將從次數較多及較少的主題做發展教案的選擇。藉此說明體驗脈絡的教學立場與 HPM 教學並無絕對相關。

次數較多的如【複數】與【數學歸納法】，本為學生容易問「為什麼要學數學？」的主題，且【複數】與【數學歸納法】對於文史學生的確較抽象，故選擇【複數】與【數學歸納法】發展體驗脈絡的教學立場的教案。次數較少的【向量】及【數據分析】，可能因為是較年輕的主題，缺乏統整好的史料[21]，因而較缺少 HPM 教案，有時連帶著在教學上容易缺乏人味，使學生想問「為什麼要學數學？」。由於【數據分析】的應用性較明顯，文史學生於此較少產生「為什麼要學數學？」的疑問，將以【向量】發展體驗脈絡的教學立場的教案。

第三節　教案發展

一、體驗脈絡的教學立場教案發展

體驗脈絡教學立場的教學目標為使學生了解該數學知識的威力，並以體驗旅程為手段，使學生經歷一個設計好的故事，在故事當中親自體驗到該數學知識的威力。因此，教學者採取體驗脈絡的教學立場發展教案時，可粗略分成三步驟。第一步驟為**了解威力**，教學者必須徹底了解該數學知識的威力所在；第二步驟為**設計故事**，以第一步驟分析的威力為核心發想故事，故事的情節設計緊抓著「呈現數學知識威力」的大原則，最後第三步驟為**發展旅程**，以第二步驟的故事為主軸發展教學活動，即體驗旅程，完成整個教案。

了解威力 → 設計故事 → 發展旅程

在實際教學時，教學者除了要緊抓著該數學知識的威力外，手邊最好有一份故事，使在體驗旅程中進行的活動皆能隨時對應到故事的情節，明白當時活動在整個故事中的地位。

另外，由於體驗旅程的時間通常大於一節課，學生手邊也必須要有一份故事，方便教學者在體驗旅程進行中，不斷提醒學生故事進行至何處。惟若有時為了呈現數學知識威力時的效果，不適合一開始就讓學生知道故事的所有情節，可適度切割故事，扣留一部分，將劇情留待下回分曉，不過在整體驗旅程結束後，學生還是必須要擁有一份完整的故事。

二、本研究的教案發展

本章之後連續三章，將在現行《九九課綱》內容中，發展三個教案作為體驗脈絡教學立場的例子。第五章為向量的教案，第六章為虛數單位的教案，第七章為數學歸納法的教案，這些數學主題即上一節末的選擇。此三章皆包含兩部分，

前半部分析該教案的數學主題，進行第一步驟「了解威力」，並為第二步驟「設計故事」及第三步驟「發展旅程」選取材料；後半部為教案，將詳細說明故事及體驗旅程的內容。

(一) 數學主題的分析重點

欲以體驗脈絡的教學立場回歸高中數學的實際面發展教案，最重要的步驟是了解威力，現今高中數學的綱領為《九九課綱》，本研究的教案希望能實際在《九九課綱》下施行，故針對該數學主題提出教案前，將先配合《九九課綱》確立該數學主題的威力，同時討論該數學主題在實際教學中常見的問題，做為發展體驗旅程教學材料選取的考慮依據。簡而言之，對於各選取的數學主題，第五章、第六章、第七章的前半部分將探討下列問題：

1. 在《九九課綱》中，該數學主題的威力為何？
2. 該數學主題教學時常見的問題為何？
3. 欲採取體驗脈絡的教學立場時，應如何選用該數學主題的教學材料？

(二) 教案呈現方式

了解該數學主題的威力及選取對應材料後，後半部分為正式教案，將在當中呈現本研究設計的故事。本研究將以漫畫呈現故事，搭配對應的活動流程解釋體驗旅程的帶領方式。

漫畫是教學者手邊整個故事的依據，配合教學流程說明，能了解使用的教學材料在整個體驗旅程的地位；學生手上擁有的講義中也會呈現漫畫，此部分見附錄，提醒學生處在整個體驗旅程當中，幫助學生在故事中查驗數學主題的威力。

各章節解釋體驗旅程的帶領方式時，以漫畫的不同階段分隔不同教學活動，配合各階段的故事情節，解釋實際課堂對應的教學活動，如：示範證明、數學運算、討論、引導思考……等，指出體驗旅程中埋下伏筆、鋪陳、反思的重要時間點。

(三) 注意事項

1. 漫畫只是呈現故事的方式之一

漫畫只是本研究選擇清楚呈現整體故事的方式，在體驗脈絡教學立場的教案裡，漫畫並非必需，若能達到清楚呈現整體故事的效果，任何方式皆可採用。

2. 體驗旅程並非閱讀漫畫就能完成

雖然漫畫呈現了整體故事主軸，但漫畫中出現的數學過程不一定完整，且關於該數學知識威力的反思，學生不見得光靠閱讀漫畫就能主動進行，故學生無法只看漫畫就完成體驗旅程。主要學習仍需要在數學課堂上完成，由教學者帶領學生完成體驗旅程，惟所有體驗旅程的活動都能對應到漫畫呈現的故事主軸上。

3. 教案不特別列出所有習題

本研究在三個教案中雖然只列舉少數習題，但不代表實際操作這些教案時只提供學生少數習題。只是因為體驗脈絡的教學立場並不排拒其他的教學立場，以往常見的教學立場中出現的習題，大多也適合在體驗脈絡的教學立場裡提供學生做練習，故教案不再針對習題說明。另由於體驗旅程最終期望學生能了解該數學知識的威力，教學者可適度在習題中提點威力所在，也可利用故事提到的例題當作習題，幫助學生重溫體驗旅程。

第五章　向量教案

第一節　九九課綱中的向量

一、向量在課綱中的地位

課綱中向量分成【平面向量】、【空間向量】兩部分。【平面向量】是數學 III 最後的主題，前有【三角】、【直線與圓】;【空間向量】則是數學 IV 最開始的主題，後接【空間中的平面與直線】、【矩陣】、【二次曲線】。雖可彈性分配章節內容，但各家版本教科書皆按照課綱將向量分置於數學 III 及數學 IV 兩冊。如下整理。

1. 數學 III：三、平面向量

數學 III 坐標與向量幾何	一、三角
	二、直線與圓
	三、平面向量

表 5-1.1：數學 III 的內容架構

2. 數學 IV：一、空間向量

數學 IV 線性代數	一、空間向量
	二、空間中的平面與直線
	三、矩陣
	四、二次曲線

表 5-1.2：數學 IV 的內容架構

針對向量的地位，課綱如此說明：「…[向量]就如同實數系般，是平面與空間至精至簡的表現，可將幾何問題代數化，也可將線性方程組的問題賦予幾何意涵，是學生未來學習線性代數、多變量微積分、向量分析和多變量統計分析的基礎」[35]。顯示向量在課綱中的兩個主要地位：至精至簡的處理幾何、作為線性代數基礎。

然而，就課綱中【平面向量】及【空間向量】出現的位置，可看出兩者被強調的價值不同。數學III介紹坐標與向量幾何，【平面向量】在此冊最後才出現，向量是作為探討幾何的最高層次；數學IV則介紹線性代數，【空間向量】在此冊最前

頭就出現，是作為未來線性代數的起點；然而為文史學生未來的數學奠定基礎不夠有威力，故本章選定向量的威力是至精至簡表現幾何，將以此發展教案。

為了呈現向量至精至簡表現幾何的威力，課綱特別以幾何的角度安排向量在數學III 的進程。內容以【三角】開頭，為「進入具角度概念的向量幾何」打基礎；【直線與圓】則進入坐標幾何，不同於歐氏幾何的層次，「透過直角坐標系的架設，將幾何問題代數化，以代數的形式運算解決幾何問題」[35]；最後才進入【平面向量】所代表的向量幾何。因此，若按照課綱安排，在「歐氏幾何→坐標幾何→向量幾何」的架構下引進向量，理應能呈現向量至精至簡表現幾何的威力。

二、目前呈現威力的問題

《九九課綱》特別安排「歐氏幾何→坐標幾何→向量幾何」的大架構，希望呈現不同層次的幾何，但由於與以往課綱安排不同，若非刻意經營，教學者極可能忽略大架構安排的幾何脈絡，以致未能突顯向量的威力。例如大部分的教科書雖會以向量重新處理三角形中點定理，但常為蜻蜓點水，不一定會刻意回應「歐氏幾何→坐標幾何→向量幾何」的大架構。

另因為向量對於學生是全新的工具系統，熟悉新的運算模式必佔據部分學習時間，且在《九九課綱》中，【平面向量】最後的內容是線性方程組，多少模糊向量總結幾何的目標。因此，若只是承襲舊習慣將向量拆成兩部分教學，將無法突顯向量的威力。

第二節　高中幾何現有的教學問題

本章發展的教案以向量在幾何中的威力為主，然而，現今學生卻常認為高中沒有幾何，更別提其能否明白向量在幾何中的威力，茲將高中幾何教學不明顯的理由歸為兩點：

1. 高中幾何著重代數形式運作，易忽略其對應的幾何概念
2. 高中幾何著重「定量」而非「定性」，使幾何味無連貫

一、著重代數形式運作，易忽略對應的幾何概念

學生在高中階段所面對的幾何圖形，幾乎都有對應的代數方程式，不論是學生或教學者，都必須投入較多時間熟悉操作代數方程式。

蘇惠玉曾將《九五暫綱》及舊課程中高一、二的幾何內容簡單分成「函數圖形、複數平面與向量、解三角形問題、空間、圓與球與圓錐曲線」五部份，並指出當中「除了解三角形的問題以及空間概念中有關立體圖形的基本觀念之外，在引進座標系統之後，都是以代數形式來進行幾何概念的學習」[27]，即說明有坐標幾何後，幾乎都是以代數形式的操作學習幾何。

《九九課綱》更動後，高一、二的幾何除了刪去【複數平面的幾何意義】及【球】的內容外，其餘大致相同；由【圓錐曲線】改成【二次曲線】的舉動看來，其更加強坐標幾何裡代數形式的操作；故若非更謹慎處理坐標幾何的幾何層面，「數學教師們以解析幾何的代數形式，讓學生從幾何圖形的抽象性與貧乏的想象力中解脫」[27]的初衷，將只存留代數形式，而忘記作為源頭的幾何，使學生在操作代數形式時，無法感受到其正在處理幾何問題。

二、著重「定量」而非「定性」，使幾何味無連貫

高中以前的學生對幾何的印象，大多來自歐氏幾何，其處理許多幾何圖形中的「定性」問題；然而高中所學的幾何，往往著重「定量」的處理。如在向量幾何中，「透過向量的運算（如線性組合、內積、外積），處理幾何中長度、角度、面積等問題」[35]；又如在【三角】，正弦定理的前身是國中時期所習之「大邊對大角，小邊對小角」性質；學生在學高中數學的幾何時，大部分時間都在進行量的計算，因此，學生常認為沒有幾何，其實只是與其熟悉的定性問題不同。

以上兩點問題，皆來自於國中幾何與高中幾何屬不同層次。因此，在高中幾何教學中，若未仔細進行不同層次幾何的比對，學生將不容易連結現行所學的幾何與以往的幾何，更不能察覺到自己正以新的強大工具處理舊的幾何問題，也就不能體驗到新工具的威力。

總之，在向量的故事中，若欲突顯其至精至簡處理幾何的威力，首先必須讓

學生意識到其正在學幾何，按照《九九課綱》中數學 III 的設計，在坐標幾何及向量幾何進行後，必須在大架構下回頭檢視不同層次的幾何。

第三節　故事材料的分析

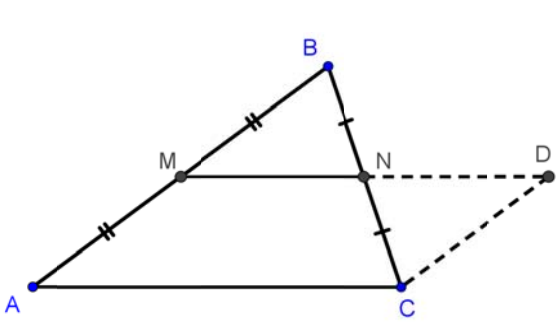
前一節已說明設計向量的故事時，最重要是有「歐氏幾何→坐標幾何→向量幾何」的大架構，以突顯向量在幾何中的威力，因此，挑出適合的幾何例子為關鍵所在。現行教科書在【平面向量】中，已有兩個較常見的幾何例子試圖以新層次處理舊的問題，一為「三角形中點定理」，另一為「三角形三高交於一點」。三角形中點定理為引入向量後的經典範例，但較缺乏坐標幾何的層次；三角形三高交於一點則常是為了介紹垂心、練習求交點坐標或向量分解，不太著重幾何不同層次的比較。本節分析此兩定理不同層次的證明，作為體驗旅程材料的選取及故事主軸安排的依據。

一、兩個經典例子不同層次的證明

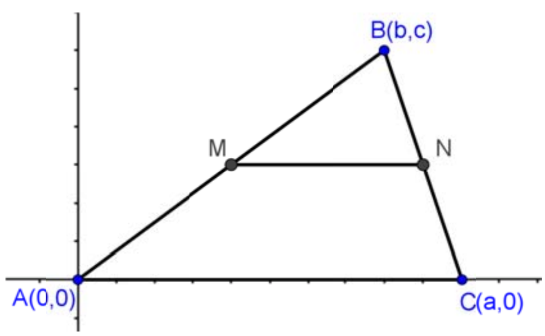
在高中數學中，除了歐氏幾何、坐標幾何、向量幾何外，向量坐標幾何也常在證明中混用，以下列出此四種層次的證明，惟分析時仍以《九九課綱》大架構中的三層次為主。

(一) 三角形中點定理

在三角形中，兩邊中點的連線段平行於第三邊，且等於第三邊長的一半。



▲ 圖 5-3.1
中點定理證明（無坐標）



▲ 圖 5-3.2
中點定理證明（有坐標）

1. 歐氏幾何的證明 (圖 5-3.1)

過 C 作平行 $\overline{AB}$ 的直線交 $\overleftrightarrow{MN}$ 於 D，

$\because \angle NBM = \angle NCD, \angle BNM = \angle CND, \overline{BN} = \overline{CN} \quad \therefore \Delta BNM \cong \Delta CND(AAS)$

$\Rightarrow \overline{CD} = \overline{BM} = \overline{AM}, \quad \overline{MN} = \overline{DN}$

$\overline{AM} = \overline{CD}, \overline{AM} // \overline{CD} \quad \therefore ACDM$ 為一平行四邊形

$\Rightarrow \overline{MD} // \overline{AC}, \quad \overline{MD} = \overline{AC} \quad \Rightarrow \overline{MN} // \overline{AC}, \quad \overline{MN} = \overline{DN} = \frac{1}{2}\overline{MD} = \frac{1}{2}\overline{AC}$

2. 坐標幾何的證明 (圖 5-3.2)

在△ABC 中，設 $A(0,0)$、$B(b,c)$、$C(a,0)$，則可得 $M(\frac{b}{2},\frac{c}{2})$、$N(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2})$

故 $\overleftrightarrow{MN} : y = \frac{c}{2} \Rightarrow \overleftrightarrow{MN} // x$軸；$\overline{MN} = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\overline{AC}$

3. 向量幾何的證明 (圖 5-3.1)

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

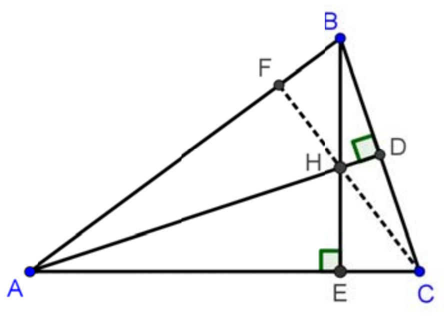
4. 向量坐標幾何的證明 (圖 5-3.2)

在△ABC 中，設 $A(0,0)$、$B(b,c)$、$C(a,0)$，則可得 $M(\frac{b}{2},\frac{c}{2})$、$N(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2})$

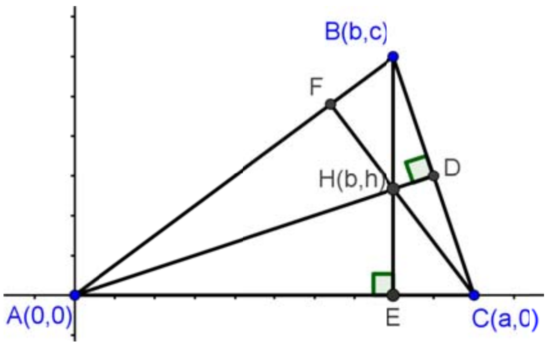
$\overrightarrow{MN} = (\frac{a}{2},0) = \frac{1}{2}(a,0) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

(二) 三角形三高交於一點

在△ABC 中，設 $\overline{BC}$ 上的高 $\overline{AD}$ 與 $\overline{AC}$ 上的高 $\overline{BE}$ 交於 H，則 $\overleftrightarrow{CH} \perp \overline{AB}$



▲ 圖 5-3.3
三高交一點證明(無坐標)



▲ 圖 5-4.4
三高交一點證明(有坐標)

1. 歐氏幾何的證明 (圖 5-3.3)

$\because \Delta AEH \sim \Delta ADC(AA\text{相似}), \Delta ADC \sim \Delta BEC(AA\text{相似}) \quad \therefore \Delta AEH \sim \Delta BEC$

$\Rightarrow \overline{AE}:\overline{BE}=\overline{EH}:\overline{EC} \Rightarrow \overline{AE}:\overline{EH}=\overline{BE}:\overline{EC}$

$\because \overline{AE}:\overline{EH}=\overline{BE}:\overline{EC}, \angle AEB=\angle HEC \quad \therefore \Delta AEB \sim \Delta HEC$

$\Rightarrow \angle ECH = \angle EBA$

$\because$在$\Delta CEH, \Delta BFH$中，$\angle ECH=\angle EBA, \angle CHE=\angle BHF$(對頂角相等)

$\therefore \angle BFH=\angle CEH=90^\circ \quad \Rightarrow \overline{CF}\perp\overline{AB}$

2. 坐標幾何的證明 (圖 5-3.4)

設$A(0,0)$、$\mathrm{B}(b,c)$、$C(a,0)$，

$\overleftrightarrow{AD}$ 過$A(0,0)$，且其斜率$m_{AD}=-\dfrac{1}{m_{BC}}=-\dfrac{b-a}{c}$，得$\overleftrightarrow{AD}: y=-\dfrac{b-a}{c}x$

$\overleftrightarrow{BE}$ 過$\mathrm{B}(b,c)$，且其為鉛直線，得$\overleftrightarrow{BE}: x=b$

$\overleftrightarrow{CF}$ 過$C(a,0)$，且其斜率$m_{CF}=-\dfrac{1}{m_{AB}}=-\dfrac{b}{c}$，得$\overleftrightarrow{CF}: y=-\dfrac{b}{c}(x-a)$

將$\overleftrightarrow{AD}$ 與$\overleftrightarrow{BE}$ 兩式聯立解出交點$H(b,-\dfrac{(b-a)b}{c})$

將$\overleftrightarrow{CF}$ 與$\overleftrightarrow{BE}$ 兩式聯立解出交點$H(b,-\dfrac{(b-a)b}{c})$

3. 向量幾何的證明 (圖 5-3.3)

$\because \overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{CA}$

$\therefore \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{CB}=0, \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=(\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{CA}=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CH}\cdot(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$

4. 向量坐標幾何的證明 (圖 5-3.4)

設$A(0,0)$、$\mathrm{B}(b,c)$、$C(a,0)$，已知$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{CA}$，則可設$H(b,h)$

$\because \overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{CB} \quad \therefore \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB}=(b,h)\cdot(b-a,c)=0$

$\Rightarrow b(b-a)+hc=0$

$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=(b-a,h)\cdot(b,c)=(b-a)b+hc=0 \quad \Rightarrow \overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$

二、故事裡幾何例子的安排

為達到呈現不同幾何層次的目標，所選例子必須要能呈現不同層次的特色——歐氏幾何神來一筆的巧思；坐標幾何以代數機械操作幾何的一板一眼；向量幾何的至精至簡，不同層次須有明顯分別。另外，證明過程中所使用的數學工具應以《九九課綱》的內容為主。

(一) 各例子呈現幾何不同層次的明顯度

以歐氏幾何證明中點定理與三高交一點時，證明過程皆有呈現歐氏幾何的神巧。中點定理的證明仰賴輔助線，三高交一點的證明則不斷轉換不同的相似三角形組合。但中點定理的證明，學生有時容易從相似三角形著手，造成類似以餘弦定理證明畢氏定理的謬誤[19]，造成不必要的枝節。

以坐標幾何證明中點定理與三高交一點時，證明過程皆有呈現坐標幾何的一板一眼，將幾何物件轉換為代數處理，尤其三高交一點的證明過程中，更因需要求交點而突顯了坐標幾何的優點；中點定理後半段的證明則易與向量坐標幾何混用，當坐標架設完畢後，因 $\overrightarrow{MN}=(\frac{a}{2},0)=\frac{1}{2}(a,0)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ 的概念非常直接，即使學生不知何謂 $\overrightarrow{MN}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ ，也容易在學習向量前，自然運用 $(\frac{a}{2},0)=\frac{1}{2}(a,0)$ 進行後半段證明，使坐標幾何證明的後半段顯得造作。

以向量幾何證明中點定理與三高交一點時，證明過程皆有呈現向量幾何的至精至簡。以向量幾何證明中點定理時，不同於其歐氏幾何與坐標幾何的證明，長度、方向晉升到合一處理，顯示向量幾何至精至簡的關鍵是長度及方向合一；三高交一點的證明則用到向量幾何裡非常強大的內積工具，內積能將「定性」的垂直轉換為「定量」，使幾何的性質可以計算。

$$\begin{cases}\overleftrightarrow{MN}\,//\,x\text{軸}\\ \overline{MN}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad \overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

分開處理 (坐標幾何)	合一處理 (向量幾何)

中點定理與三高交一點證明的三個層次，皆有呈現不同幾何的特色，區分明

顯，整理如表 5-3.1。惟帶領學生執行中點定理的證明時，有些許細節要注意。

	三角形 中點定理	三角形三高 交於一點
歐氏幾何	偶有邏輯順序問題	亟需巧思
坐標幾何	後半段易混用 向量坐標幾何	求交點的過程突顯 坐標幾何的優點
向量幾何	顯示向量幾何 至精至簡的關鍵	用到向量幾何 強大的內積工具

表 5-3.1：兩定理不同幾何層次證明的統整

(二) 各例子所用工具

在同一層次上，中點定理與三高交一點的證明過程中，主要使用的數學工具不盡相同。以歐氏幾何證明中點定理的過程中，不斷用到三角形的全等，三高交一點的證明過程則用到三角形的全等與相似；以坐標幾何證明中點定理時，過程中幾乎只用到中點公式，三高交一點的證明過程則反覆利用直線方程式解交點，直線方程式解交點是《九九課綱》中坐標幾何的常用工具，也是很能反映坐標幾何連結代數與幾何的簡單例子；而在以向量幾何證明中點定理時，過程中只用到簡單的係數積與拆解，就精簡了原來較繁複的過程，故中點定理的證明是介紹向量幾何時很好的引例，但並未如三高交一點的證明過程中，大量使用向量幾何中最強大且為《九九課綱》重點的內積。整理如表 5-3.2，可發現三高交一點的證明過程不論在哪一層次，皆較有利用到該層次具代表性的工具。

綜合以上討論，在安排向量故事的材料時，雖然中點定理與三高交一點的證明過程在不同層次上皆區分明顯，但三高交一點的證明過程較有使用到該層次較具代表性的工具，是故將以三高交一點的證明為主發展教案。至於中點定理向量幾何的證明，由於其能顯示向量至精至簡處理幾何的關鍵是長度及方向合一，將安排於最開始引入向量幾何時。

	三角形中點定理	三角形三高交於一點
歐氏幾何	全等	相似、全等
坐標幾何	中點公式	直線方程式、解交點
向量幾何	向量拆解、係數積	向量拆解、內積

表 5-3.2：兩定理不同幾何層次證明時所用到的數學工具

第四節　向量的教案

一、教案大綱

(一) 教學目標

使學生體驗到向量處理幾何時至精至簡的威力。

(二) 教學細目

1. 示範以歐氏幾何證明三角形三高交於一點
2. 複習如何以坐標幾何證明三角形三高交於一點
3. 使學生能以向量幾何證明三角形三高交於一點
4. 比較歐氏幾何、坐標幾何、向量幾何的證明

(三) 教學時機

1. 向量基本運算教完，包含加減法、係數積、線性組合、內積。
2. 已向學生呈現如何以向量幾何證明中點定理。

(四) 相關數學內容

全等、相似形；斜率、直線方程式；內積、向量拆解。

(五) 縱覽體驗旅程

1. 故事設計理念

分別以歐氏幾何、坐標幾何、向量幾何證明三角形三高交於一點，將不同層次的幾何觀點並列，以課綱設計數學 III 的原意，強調「歐氏幾何→坐標幾何→向量幾何」的大架構，突顯向量處理幾何時至精至簡的威力。

2. 體驗旅程預估時間：3 小時

3. 體驗旅程活動順序

	重要活動
教學活動 A	◎ 說明三角形三高共點的不簡單(non-trivial)性質，並指出體驗旅程的任務為證明此性質 ◎ 以歐氏幾何證明三角形三高交於一點，並連結學生國中時期的舊知識 ◎ 點出歐氏幾何常需要巧思的感想
教學活動 B	◎ 以坐標幾何證明三角形三高交於一點，同時連結學生前一學月[12]的舊知識 ◎ 比較歐氏幾何及坐標幾何，突顯坐標幾何的一板一眼
教學活動 C	◎ 以向量幾何證明三角形三高交於一點 ◎ 將向量幾何與歐氏幾何及坐標幾何比較，感受向量幾何的至精至簡 ◎ 以漫畫 VT.A、VT.B、VT.C 回顧故事

二、教學活動 A

(一) 旅程重點

1. 佈題：試證明三角形三高交於一點

2. 呈現歐氏幾何的巧思

[12] 按照《九九課綱》，坐標幾何為高二上學期第二次段考範圍，但學生可能在高一或國中已接觸。

(二) 活動流程

活動	格次	活動流程
佈題	1,2,3	◎ 說明三角形三高共點的不簡單(non-trivial)性質，並指出體驗旅程的任務為證明此性質 ◎ 連結國中幾何學習的舊經驗，複習關於相似三角形的性質與證明手法──AA 相似、SAS 相似 ◎ 將證明三高共點的目標作轉換，轉換為證明兩高交點與第三頂點的交線是三角形的第三個高
示範證明	4	◎ 以歐氏幾何證明三角形三高交於一點 ◎ 漫畫 VT.A4.1[13]：利用 AA 相似指出幾組顯而易見的相似三角形，說明 $\Delta AEH \sim \Delta BDH \sim \Delta BEC \sim \Delta ADC$ ◎ 漫畫 VT.A4.2：聚焦 $\Delta AEH \sim \Delta BEC$，得到其對應邊成比例 ◎ 漫畫 VT.A4.3：將上述對應邊重新組合後，轉而觀察另一組三角形，聚焦$\Delta AEB \sim \Delta HEC$，得到 $\angle ECH = \angle EBA$ ◎ 漫畫 VT.A4.4：聚焦 $\Delta BFH, \Delta CEH$，引導學生自行說出 $\angle BFH = \angle CEH = 90^\circ$，並宣布證明完畢 ◎ 以漫畫 VT.A4 的四張圖回顧整體證明流程
回顧反思	5,6,7	◎ 漫畫 VT.A5：讓學生發表對此證明的感覺 ◎ 視情況可彈性說明此證明發想的背後過程 ◎ 漫畫 VT.A7：點出歐氏幾何常需要巧思的感想，以托勒密學習幾何沒有皇家大道(There is no royal road to geometry.)的軼事作結[22]

[13]漫畫 VT.A4 代表漫畫 VT.A 的第四格漫畫。漫畫 VT.A4.1 則代表漫畫 VT.A4 中，由上至下的第一個圖。本文所有漫畫編碼皆以此類推。

(三) 活動說明

1. 以漫畫 VT.A4 回顧歐氏幾何的整體證明

回顧整體證明流程時，說明證明步驟的巧妙在於利用不同相似三角形，使得角度的性質能夠互相傳遞，搭配漫畫 VT.A4 的四張三角形圖，四張圖分別對應證明過程中不同相似三角形的組合，以整體回顧加強歐氏幾何需要巧思的想法。

2. 引導學生發表對此證明需要巧思的感覺

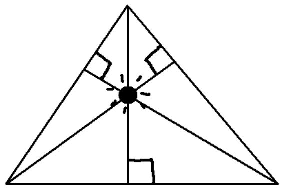
學生對此證明的想法常為其過於巧妙，教學者可順水推舟指出兩點較為巧妙的關鍵。一為漫畫 VT.A4.1,2，在眾多相似三角形中挑選對證明有幫助的組合，的確是不簡單的任務；二為漫畫 VT.A4.2,3，用到 SAS 相似性質，比起 AA 相似的普遍性，學生較不習慣 SAS 的性質，又此處將對應邊重新組成為另一組相似三角形的對應邊，連用兩次 SAS 性質，且其一為逆定理，拉高此步驟的困難度。故教學者在此處可特別提出此兩步驟讓學生討論，緊扣歐氏幾何常需要巧思的小結論。

3. 視情況可分析此證明的發想過程

若學生程度及時間許可，可嘗試分析此證明的發想過程作為補充。例如：
若 $\angle BFH = \angle CEH = 90^{\circ}$，那麼應該要有$\angle ECH = \angle FBH$，因此關鍵就變為如何證明 $\angle ECH = \angle FBH$，而由於目前欠缺關於 F的資訊，想辦法將 ΔBFH 換成其他三角形，與 $\angle FBH$ 有關還有 ΔAEB，於是企圖證明 $\Delta AEB \sim \Delta HEC \ldots$。由於教學活動 A 的目標為透過歐氏幾何證明的實際操作，使學生體驗到歐氏幾何需要巧思，為爾後坐標幾何、向量幾何建立比較點，因此，分析證明的發想過程並非為了自然想到證明，而是更能加強歐氏幾何證明的巧思。

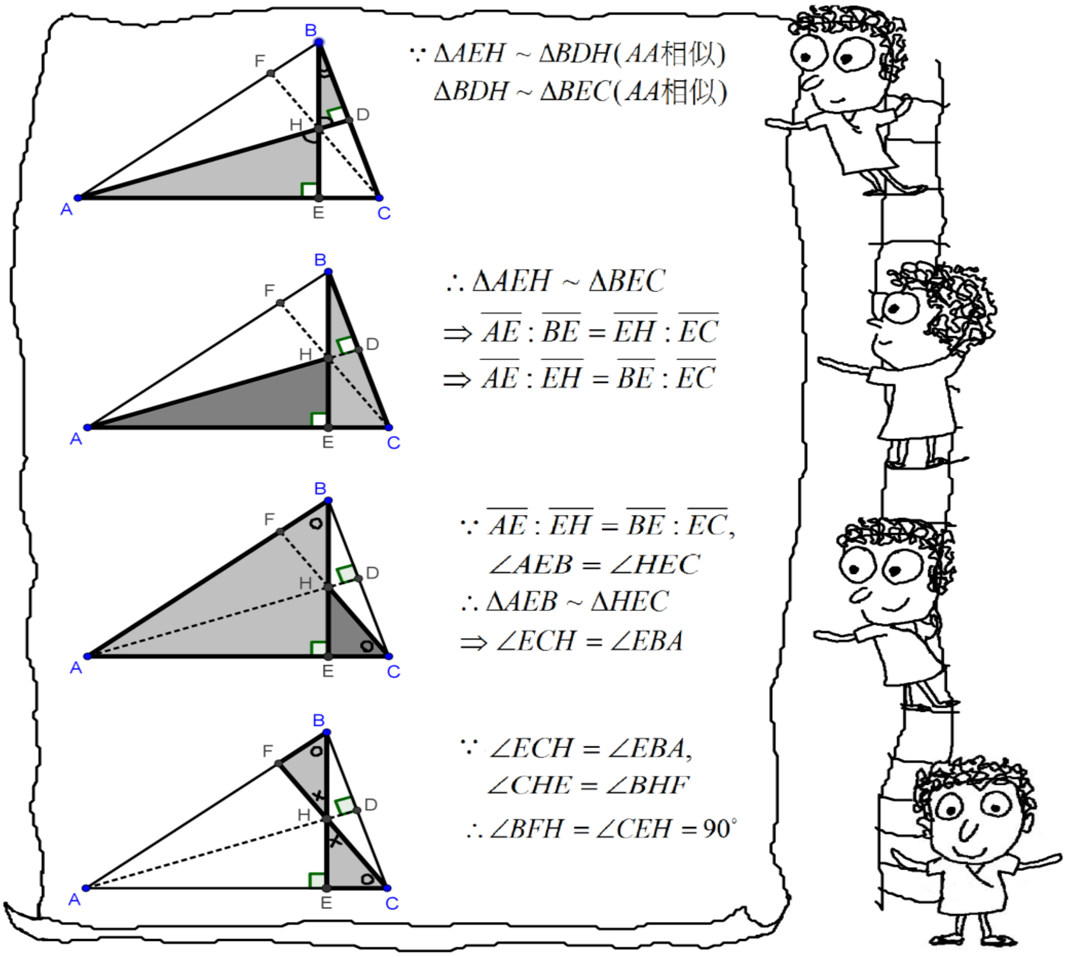
■ 漫畫 VT.A

1 我是小歐，我喜歡奇蹟
所以我，喜歡三角形

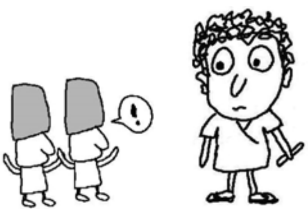


2 三角形總是有辦法，
讓三條線輕易的交會

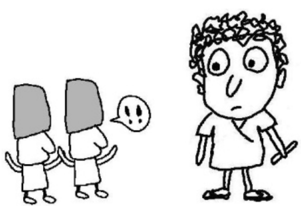
3 奇蹟中的奇蹟是，
我能保證奇蹟。



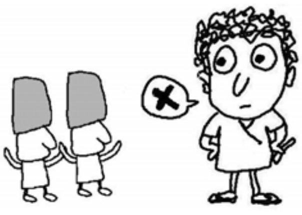
4



5 好難。太神了！想不到。



6 樓梯好長！！



7 奇蹟，本來就沒有捷徑

三、教學活動 B

(一) 旅程重點

呈現坐標幾何的一板一眼及其威力。

(二) 活動流程

活動	格次	活動流程
引進坐標	1,2,3	◎ 引進坐標平面，解釋即將把問題放至坐標平面上 ◎ 複習坐標幾何中「點坐標、斜率、直線方程式」的概念
證明	4	◎ 詢問學生如何以坐標幾何證明三角形三高交於一點，引導至以兩兩直線方程式解交點的策略 ◎ 漫畫 VT.B4.1：將圖擺放至坐標平面上，引導學生選擇較好的坐標架設方式，並假設各點坐標 ◎ 漫畫 VT.B4.2：求三高方程式。利用垂直線斜率相乘為負一的性質，求出三高斜率，因三高必各過頂點，利用點斜式求得三高方程式 ◎ 漫畫 VT.B4.3：計算兩高之方程式聯立解 ◎ 漫畫 VT.B4.4：因任兩高之方程式聯立解相同，故任兩高交點相同，宣布證明完畢 ◎ 以漫畫 VT.B4 的四張圖回顧整體證明
回顧反思	5,6,7	◎ 讓學生發表對此證明的感覺 ◎ 漫畫 VT.B5：點出坐標幾何不需要巧思，即坐標平面是幾何的皇家大道 ◎ 漫畫 VT.B6：強調整體過程的一板一眼 ◎ 漫畫 VT.B7：總結坐標幾何的威力在於定位，雖犧牲幾何成為死板的代數式，但卻完成抓住幾何的笛卡爾之夢

(三) 活動說明

1. 以漫畫 VT.B4 回顧坐標幾何的整體證明

回顧重點在重現架設坐標後證明步驟的自然，引導學生感受坐標幾何的一板一眼。由於此證明過程非常流暢，學生不見得能意識到自己正在處理一個不簡單的問題，而無法感受坐標幾何的威力。因此，回顧坐標幾何證明時，要與歐氏幾何作對比，以歐氏幾何的巧思突顯坐標幾何一板一眼所帶來的威力，坐標幾何架上坐標後毋須再動腦，只剩呆版的計算，與歐氏幾何絞盡腦汁找出路形成對比。

2. 坐標幾何的威力：點有坐標、線有方程式

感受坐標的威力後，教學者進一步點明其威力：點有坐標、線有方程式。在歐氏幾何裡，將點定位很難，但在坐標幾何中，只需一組數對就可將點定位，甚至只需一次多項方程式就可將直線也定位；一旦定位後，計算雖繁雜，但已不需要巧思。在坐標幾何中，定位是關鍵，故高中課程花很大力氣將以往的幾何圖形定位，因為只要定位成功，許多幾何問題「一切好辦」。

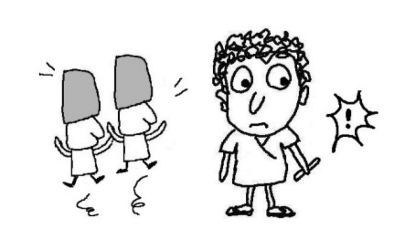
3. 說明坐標平面是幾何與代數的橋梁

在坐標平面上，三角形的邊及頂點轉換成代數式，轉成代數式後，以任兩高方程式之聯立解取代任兩高交點，由於每個點都有獨特坐標，故判斷共點只需確認其坐標相同。頂點、邊、共點、兩線交點等幾何元件在坐標平面上轉為坐標、方程式、坐標相同、聯立解的代數元件。以此說明坐標平面連結了本來毫無瓜葛的幾何與代數，代數使原來抓不著的幾何被看得透徹，坐標是幾何裡的皇家大道。

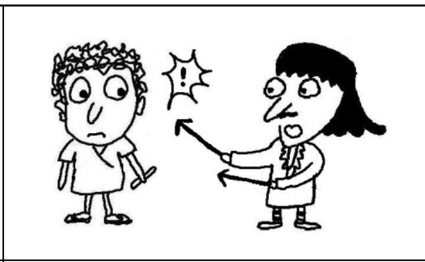
4. 解交點的過程要仔細呈現

求高解交點的過程是感受坐標幾何一板一眼機械操作重要的體驗，此部分由教學者示範或學生親自操作皆可，漫畫中雖並未呈現詳細計算過程，但它是體驗旅程極其重要的一環，絕不可省略。

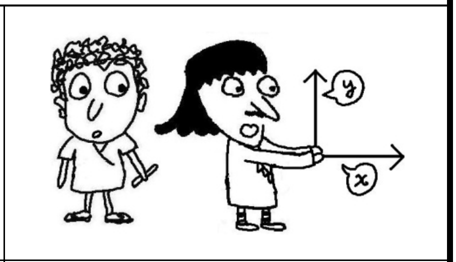
■ **漫畫 VT.B**



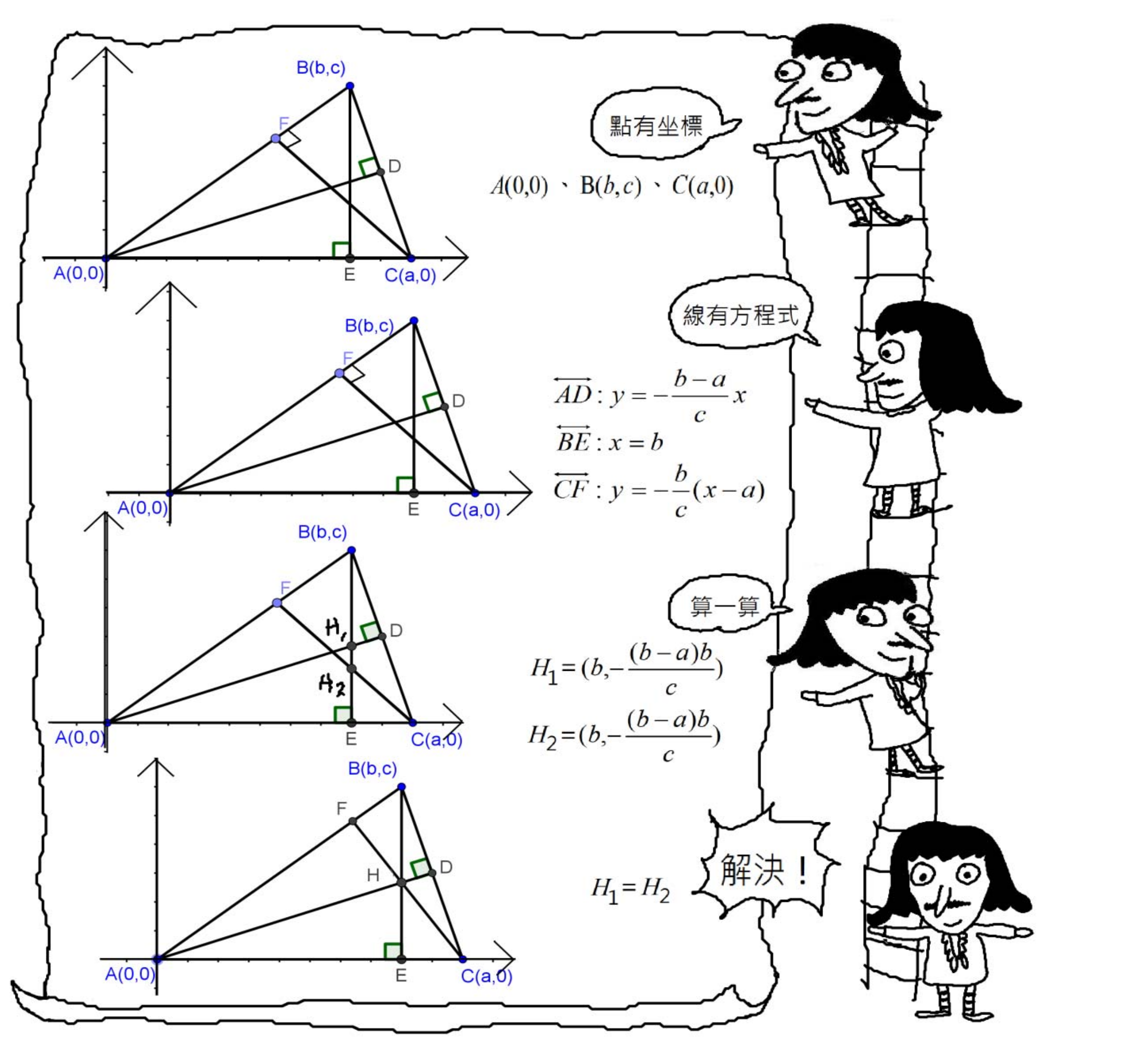
[1]誰說沒有！！



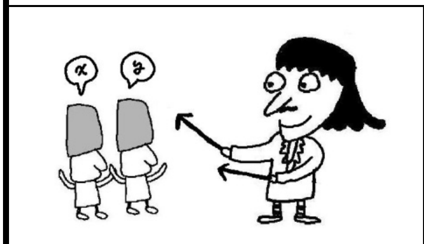
[2]看我兩把劍闖出一條！



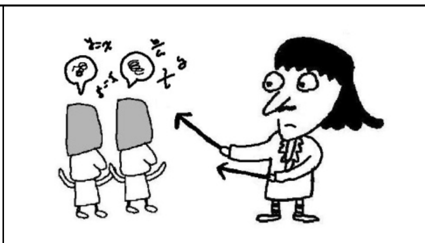
[3]x 軸！y 軸！



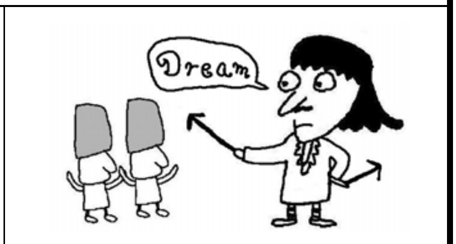
4



[5]奇蹟有捷徑，
才是奇蹟中的奇蹟



[6]但是好煩！
好死板！



[7]有坐標，一切好辦！
是我阿笛的夢！別要求太多！

三、教學活動 C

(一) 旅程重點

1. 呈現向量處理幾何時的至精至簡，使學生體驗到其威力
2. 以漫畫 VT.A、VT.B、VT.C 回顧整體故事

(二) 活動流程

活動	格次	活動流程
引進向量幾何	1,2,3	◎ 試圖將問題放至向量幾何 ◎ 複習向量幾何常用手法：兩非零向量內積為零若且唯若其垂直、利用向量減法將某向量拆解成同樣始點的兩向量 ◎ 可利用中點定理的證明複習向量幾何 ◎ 將證明三高共點的目標作轉換，轉換為證明兩高交點與第三頂點決定的向量，會垂直第三邊決定的向量
證明	4	◎ 詢問學生如何以向量幾何觀點證明：兩高交點與第三頂點決定的向量，會垂直第三邊決定的向量，引導至檢驗其內積是否為零的策略 ◎ 漫畫 VT.C4.1：拉出三個兩高交點及三頂點決定的向量 ◎ 接著參考活動說明第 2 點，引導學生進行證明 ◎ 漫畫 VT.C4.2：將已知條件轉換為向量語言。將已知的兩高對應之兩組垂直向量，轉換成其內積為零的式子 ◎ 漫畫 VT.C4.3：利用減法拆解，將條件中的向量拆解為同一始點的向量 ◎ 漫畫 VT.C4.4：計算最關鍵的內積。將其拆解成同樣始點的向量，代入已知條件，得其值為零，宣布證明完畢 ◎ 以漫畫 VT.C 回顧整體證明

回顧 反思	5,6,7	◎ 讓學生發表對此證明的感覺 ◎ 漫畫 VT.C5：以架設坐標平面類比引入向量 ◎ 漫畫 VT.C6：再次強調內積與線性組合是向量幾何的重要工具 ◎ 漫畫 VT.C7：為向量威力下註解──至精至簡的表現幾何 ◎ 以漫畫 VT.A、VT.B、VT.C 回顧整體故事

(三) 活動說明

1. 可先讓學生自行思考向量幾何的證明過程

由於此處證明的發想不難，可盡量讓學生自行思考，使其在體驗到坐標幾何較繁複的計算後，更加體驗向量語言的精簡。證明之前，教學者的責任在於提醒向量證明的常用手法──內積為零、拆解成同始點向量；利用向量減法將向量拆解成同始點向量的手法，可在複習中點定理證明時特意強調，使證明流程更順。

2. 向量幾何證明發想的過程

引導學生證明時，與漫畫順序不盡相同，證明發想過程如下：已知條件為 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB}=0$ 、 $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0$ ，欲證明 $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ 。以簡單減法拆解，將所有向量拆解為同始點向量的線性組合，則已知條件拆為 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{CB}=0$ 、 $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=(\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{CA}=0$，命題則拆為 $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CH}\cdot(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})$，將其展開稍加對應即可得 $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CH}\cdot(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=0$。以此發想過程與歐氏幾何比較，說明轉換為向量語言後，並不如歐氏幾何般需要大量巧思。

3. 以漫畫 **VT.C4** 的四張圖對證明作整體回顧

此處回顧重點在重現以向量語言證明的精簡。漫畫 VT.C4.1 將三角形放入向量的世界，拉出兩高交點及頂點決定的三向量後，漫畫 VT.C4.2 將已知條件以內積轉換成精簡的向量語言，漫畫 VT.C4.3 則進行拆解，接著漫畫 VT.C4.4 將原命題也以

向量語言寫出後，即完成證明。不同於坐標幾何，向量幾何的證明簡單俐落，過程可全寫在四張圖中。

4. 反思向量處理幾何時至精至簡的關鍵：拆解與內積

引導學生反思向量處理幾何時至精至簡的關鍵在於拆解與內積。拆解成線性組合使有向線段可輕易自由變換，內積則使得幾何性質可以運算，是向量幾何中同時處理長度及方向的重要工具。兩相搭配，使所關心的幾何性質僅透過簡單運算就能有深入了解。

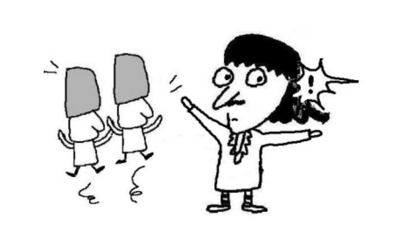
5. 說明向量引入的不自然如同坐標平面的引入

有些學生對忽然出現的向量感到不自在，教學者可利用學生較熟悉的坐標平面進行類比：三角形本來沒有坐標，坐標是人引入的，但它使人更容易了解三角形；如同三角形本來沒有向量，但引入向量後能夠更了解三角形。在現行制度下，學生花非常多時間熟悉坐標平面，故容易忘記自身已在用不同層次的手段處理幾何，也容易忘記坐標平面起初的不自然，以此提醒學生，剛學習向量幾何會覺得不自在很正常，但向量幾何的威力大於不自在感。

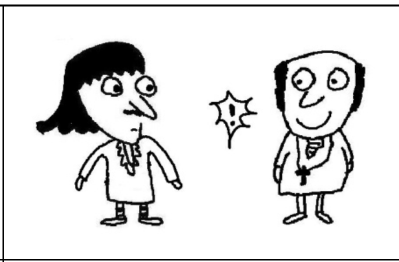
6. 並排漫畫 VT.A、VT.B、VT.C 回顧整體故事

體驗旅程最後，並排漫畫 VT.A、VT.B、VT.C，排出「歐氏幾何→坐標幾何→向量幾何」的大架構，總結不同幾何的處理態度及層次──歐氏幾何的巧思，坐標幾何的一板一眼，向量幾何的至精至簡，為數學 III 向量與坐標幾何的內容作整體總結。

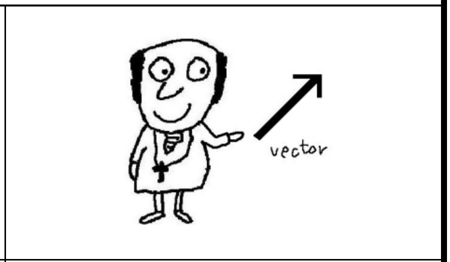
■ 漫畫 VT.C



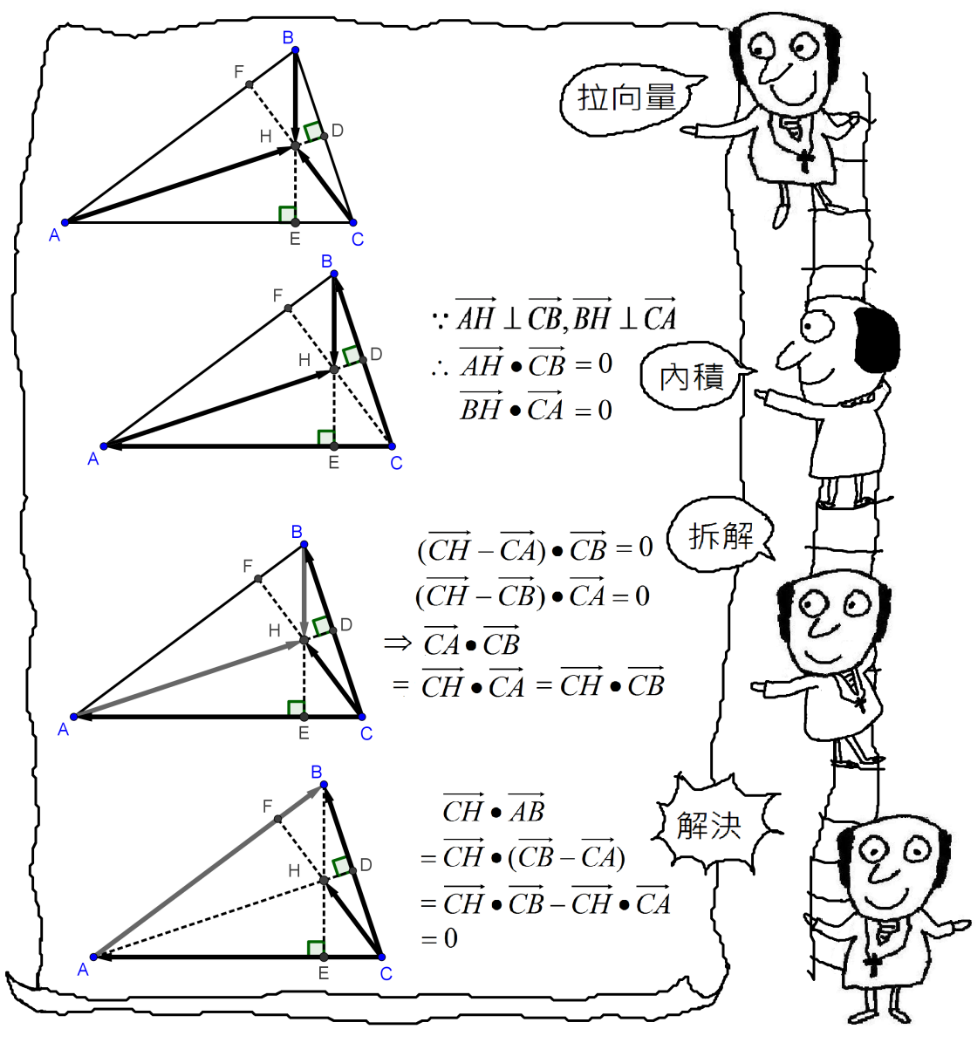
1誰說太多！



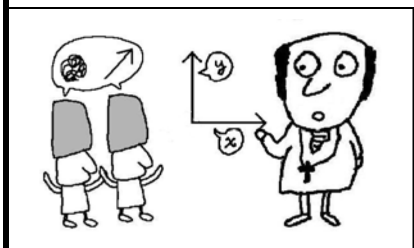
2嗨，我是大漢！



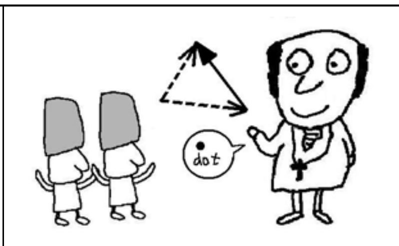
3在此鄭重介紹～～向˙量！



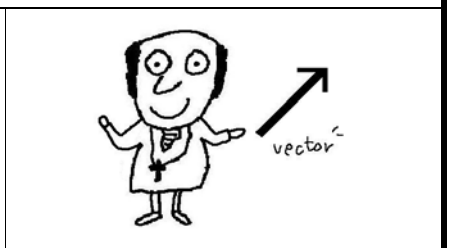
4



5為什麼忽然有箭頭？
不也忽然抽出兩把劍？



6拆拆拆，內積！



7有向量，
世界不一樣。

第六章　虛數單位教案

第一節　九九課綱中的虛數單位

一、虛數單位在課綱中的地位

課綱中虛數單位「i」共出現三次，首兩次在數學 I 的【多項式函數】，另一次在數學甲的【三角函數】。由於數學乙並無 i 的內容，故對於文史學生而言，i 只在【多項式方程式】曾經出現。如下整理。

1. 數學 I：二- 3.1 二次方程式與複數系
2. 數學 I：二- 3.3 實係數多項式代數基本定理、虛根成對定理

二、多項式函數	1.簡單多項式函數及其圖形	1.1 一次函數 1.2 二次函數 1.3 單項函數：奇偶性、單調性和圖形的平移	1.3 僅介紹 4 次（含）以下的單項函數
	2.多項式的運算與應用	2.1 乘法、除法（含除式為一次式的綜合除法）、除法原理（含餘式定理、因式定理）及其應用、插值多項式函數及其應用	2.1 不含最高公因式與最低公倍式、插值多項式的次數不超過三次
	3.多項式方程式	3.1 二次方程式的根與複數系 3.2 有理根判定法、勘根定理、$\sqrt[n]{a}$ 的意義 3.3 實係數多項式的代數基本定理、虛根成對定理	3.1 不含複數的幾何意涵
	4.多項式函數的圖形與多項式不等式	4.1 辨識已分解的多項式函數圖形及處理其不等式問題	4.1 不含複雜的分式不等式

表 6-1：【多項式函數】內容架構[35]

3. 數學甲 I：二- 3.複數的幾何意涵 (數學乙無複數課程)

課綱兩次安排 i 皆為使數學理論完整。i 首先在【3.1 二次方程式的根與複數系】登場，其登場使二次方程式皆有兩根，使判別式、公式解及根與係數的討論能完整；i 於【3.3 實係數多項式的代數基本定理、虛根成對定理】再次出現，隨後接著介紹代數基本定理——n 次多項方程式必有 n 個複數解——的內涵。此兩次都是為了讓方程式解的討論更加完整，前者使判別式小於零的方程式有解，後者在接受 i 的前提下，才能介紹代數基本定理，兩者皆顯示在《九九課綱》中 i 的

威力在於其能使數學理論完整。

課綱大致依邏輯脈絡安排 i 的相關內容，其先於解二次方程式時引進 i ，定義複數後接著「介紹複數系，包括複數的四則運算、共軛複數，以及二次方程式的共軛複數根」[綱]，學生於此熟悉 i 的簡易運算，使其在學習實係數多項式的代數基本定理、虛根成對定理時，能直接將 i 視為可以運用的數。課綱未於開始呈現 i 的威力，直到理論統整時才揭露 i 的威力。

二、目前呈現威力的問題

按照課綱的架構設計 i 的教案，特別容易只突顯邏輯的順序：由 $x^2+1=0$ 引進虛數單位 i，規定其平方為負一，接著介紹複數系，宣佈至此以後 $x^2+1=0$ 有解。若以此順序進行教學，學生被迫遵守新的遊戲規則，卻不明白為何要遵守此規定。《九九課綱》極力避免形式主義，按照此架構卻讓學生在學習 i 時難以避免形式主義的感受，不僅如此，使數學理論完整的目標更如同數學家硬規定的遊戲規則，即便在 i 的課程結束後，數學理論很完整，學生也感受不到 i 的威力。

第二節　虛數單位現有的教學問題

蘇意雯曾在複數單元後，彙整學生對於 i 的感覺，如：「一個虛幻不實的數，但我們為何要去研究一個『不存在』的數呢？它有啥實際用途嗎」、「我是覺得虛數是根本不存在的，只因為要方程式有解或公式能完美，就創造這種數來自圓其說，似乎真的是違背自己的良心…」[31]，在在顯示學生普遍不能接受 i 的出現。學生不能明白為何要學 i 就是目前虛數單位教學中最大的問題。

造成此問題的原因，追根究柢是 i 使數學理論完整的威力不夠強烈，文史學生尤其無法感受此威力；再者，《九九課綱》的【多項式函數】架構裡，最終並不太強調虛根 (見下文討論)，更使得事先忽然被引進的 i，徒留使數學理論完整的功用，反而加強學生認為數學是無意義符號的操作。

因此，若要徹底解決此問題，必須對 i 的威力有新的切入點，在發展體驗脈

絡的教學立場的教案前，本節將先從課綱中找出 i 較隱微卻強大的威力。回頭檢視課綱中【多項式方程式】的目標，再在此目標下找到 i 的新地位，作為故事發展的主軸。

一、九九課綱中多項式方程式的教學目標

「多項式方程式的課題是求多項式的根」[35]，然《九九課綱》強調實根而非虛根，這可由【多項式方程式】在大架構的地位以及其內部編排看出。

第一學期課綱的主架構為函數，且為實變函數，故虛根便顯得枝節。【多項式方程式】如何連結於【函數】的大架構，課綱如此說明：

> …辨識到已分解的多項式函數的圖形特徵（包括零根位置、重根的意涵、函數值的正負），其中零根的位置與單項函數圖形的平移作連結，重根的意涵與單項函數的圖形作連結，函數值的正負與二次式的恆正性作連結…[14][35]

此處提及的零根、重根皆指實根，判別式小於零的二次式只關心恆正性，並不在意其虛根為何。

再者，仔細查看課綱細項，【3.1 二次方程式的根與複數系】首次要求學生注意到虛根；【3.2 有理根判定法、勘根定理、$\sqrt[n]{a}$的意義】則在介紹實根的求法，課綱更清楚說明此部分重點在於「求 n 次方（實）根，以及低次多項式方程式的實根」[35]；【3.3 實係數多項式的代數基本定理、虛根成對定理】再度提及虛根，然依據課綱，此處虛根是為了介紹虛根成對定理，虛根成對定理則是為了「讓學生知道實係數多項式可分解為一次式與二次式的乘積的事實」[35]，此事實延續到【4. 多項式的函數圖形及不等式】中用來處理多項式不等式；處理多項式不等式的過程中，多項式分解成實係數的一次式或二次式，而非複係數的一次式；由以上可知，在【3.1 二次方程式的根與複數系】之後，重點皆在實根，虛根的地位皆非常低微。

[14] 底線為筆者所加

二、虛數單位 i 擁有幫助求實根的威力

明白【多項式方程式】真正的目標是實根後，可將 i 在《九九課綱》中的威力轉換為幫助求實根。高中求實根的過程，仰賴「實係數多項式可分解為一次式與二次式的乘積」的事實，其證明過程中需要的複數運算及代數基本定理，皆有 i 的參與。因此，課綱架構中 i 最直接的威力雖是使數學理論完整，但使數學理論完整的最終目的是幫助求實根；比起使數學理論完整的功用，能幫助求實根對於文史學生的說服度較高，故應強調 i 擁有能幫助求實根的威力，使引進 i 的緣由與【多項式方程式】的目標一致。

雖然在《九九課綱》中，i 是透過代數基本定理及虛根成對定理與求實根沾上邊，但此兩定理除可推導「實係數多項式可分解為一次式與二次式的乘積」的事實外，沒有延伸至社會組的其他數學內容，何況就算沒有「實係數多項式可分解為一次式與二次式的乘積」理論的支撐，學生因式分解時也會自然停在實係數的因式，更加使得文史學生無法感受到建立背後完整理論的必要。因此，在說明 i 對於求實根的幫助時，若僅以此切入，學生還是容易認為 i 的存在只是要完整說明數學定理，以致於弱化 i 的威力及模糊其對於求實根的幫助，是故發展故事時，要在代數基本定理外，設計 i 幫助求實根的情節。

第三節　故事材料的分析

前一節已說明設計虛數單位 i 的故事時，最重要是將 i 的威力設定為幫助求實根，因此，故事材料的選取，要能突顯其對於求實根的幫助。由於課綱裡 i 的出現有些自圓其說，許多 HPM 的相關文章都曾嘗試在教學中提供 i 出現的理由，本節將從中找尋能突顯 i 幫助求實根的史料。

一、HPM 解決的兩種方式

HPM 資源裡，嘗試在教學中提供 i 出現的理由大致有二。其一為補充 i 發展的史料，呈現人們從排斥 i 到慢慢接受的掙扎；其二則補充能以 i 簡化解法的

問題，突顯 i 的妙用。

(一) 虛數單位 i 的發展史[15]

虛數單位 i，可從卡當諾(Cardano , 1501~1576)於 1545 年所發表的《大術》(Ars Magna)談起，卡當諾在《大術》第三十七章提到：「把 10 分為兩部分，其乘積是 40…分成的兩部分應是$5+\sqrt{-15}$和$5-\sqrt{-15}$」，接著他又補充說：「不管會受到多大的良心責備，把$5+\sqrt{-15}$和$5-\sqrt{-15}$相乘，便得到$25-(-15)$，即是 40。可見算術是怎樣神秘的發展下去，正如我先前說過，它的目標既精緻但也是不重用的」[31]，由此可見卡當諾自己對虛數感到非常不自在，故並無將之發展。

同時，《大術》裡卡當諾討論了形如 $x^3+mx=n$ 三次方程式的公式解：

$$x=\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}$$

然而，針對一個有簡單「實數解 4」的方程式 $x^3=15x+4$，若套入卡當公式，只能得到根號裡是負數的不可能結果，無法繼續化簡：

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}-\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}}$$

義大利的數學家邦貝力(R. Bombelli,1526~1573)拋開成見，視被根號障蔽的負數當作數學上可以處理的物件，將其大膽開立方[16]而順利導出實數解 4：

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}-\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}}=\left(2+\sqrt{-1}\right)-\left(-2+\sqrt{-1}\right)=4$$

其後，經過伯努利、萊布尼茲、尤拉、柯西、高斯、漢彌爾頓，虛數進入分析學，逐漸發展出複變函數論，並於 1837 年由漢彌爾頓建立了較直觀的邏輯基礎，「數學家之所以願意如此為虛數『扶正』身份，全都是因為它十分『有用』。…代數、

15 此部分參考[7] [18] [31]的資料整理而成

16 此開立方過程並非正式。令 $a+b\sqrt{-1}=\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}}$，得$(a+b\sqrt{-1})^3=-2+\sqrt{-121}$，可解得$a=-2, b=1$

分析、幾何與數論的問題上，皆可看到複數的蹤跡」[18]。

(二) 虛數單位提供漂亮解法的問題

提供以 i 漂亮解出的數學問題，是 HPM 另一種說明 i 出現理由的方式。如以下證明：

兩組兩個整數平方和的乘積，總是可用兩種不同的兩個整數的平方和來表示，

即 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(A^2+B^2)=(C^2+D^2)$， $a,b,c,d,A,B,C,D\in\mathbb{N}$

【證】

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(c^2+d^2)&=[(a+bi)(a-bi)][(c+di)(c-di)]\\&=[(a+bi)(c+di)][(a-bi)(c-di)]\\&=[(ac-bd)+(ad+bc)i][(ac-bd)-(ad+bc)i]\\&=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(c^2+d^2)&=[(a+bi)(a-bi)][(c+di)(c-di)]\\&=[(a+bi)(c-di)][(a-bi)(c+di)]\\&=[(ac+bd)+(ad-bc)i][(ac+bd)-(ad-bc)i]\\&=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2\ \text{[18]}\end{aligned}$$

二、故事裡史料的安排

HPM 提供的兩種方向中，前者與【多項式方程式】的學習內容相關，並突顯 i 對於求實根的幫助，故將由其發展教案。從 i 出現到世人慢慢接受它的三百年間，人們對於 i 經歷不同階段的想法，體驗旅程將大致依此呈現，惟不同階段偶有重疊或交錯，非依時間順序直線前進，史料的選用依教學上能帶領學生體驗到 i 對於求實根的幫助為準。

卡當諾突發奇想暫時接受根號裡的負數，正是 I. M. Gelfand 所指數學裡的「瘋狂念頭」(crazy ideas) [39]，但數學裡雖有異想天開的自由，卻不會輕易被接受，除前述卡當諾自己略表心虛的註解外，往後數學家也常對其感到不自在，因此，

在體驗旅程最初階段可與學生分享不自然的感受，讓學生體驗人類對於新觀念的擺盪掙扎。

人們最後接受 i 是因其有威力，教學最後必須讓學生體驗到其有威力；至今複數系的廣泛應用雖不在話下，然針對至此以後很難再接觸 i 的文史學生，需要提供更立即的理由，與代數、分析、幾何等高等數學應用相比，邦貝力大膽使用虛數後得到實數解，就是很直接的理由，呈現了 i 幫助求實根的威力，下節教案將參考此史料發展故事。雖然引入複數時如此呈現，還是難以避免學生形式主義的感受，但若能強化 i 擁有幫助求實根的威力，將能蓋過形式主義的不自在。

第四節 虛數單位的教案

一、教案大綱

(一) 教學目標

使學生體驗到虛數單位 i 雖然不自然，但其擁有幫助求實根的威力。

(二) 教學細目

1. 引進虛數單位 i
2. 使學生能操作複數四則運算
3. 完整討論二次方程式公式解
4. 使學生了解世人慢慢接受 i 的原因

(三) 教學時機

1. 以二次方程式進入【多項式方程式】的教學時。
2. 學生已非常熟悉二次方程式相關內容：公式解、判別式。

(四) 相關數學內容

虛數單位 i、複數的四則運算、二次方程式公式解

(五) 縱覽體驗旅程

1. 故事設計理念

帶領學生以三次方程式的公式解嘗試解 $x^3-15x=4$ 的實數解，卻發現若沒有 i 的幫忙，無法解出簡單的實數解 4，以此讓學生體驗到 i 擁有能幫助求實根的威力。

2. 體驗旅程預估時間：3 小時

3. 體驗旅程活動順序

此故事有兩條看似無關的線同時進行，一條大致依《九九課綱》的架構發展，由二次方程式引進複數系，介紹其運算性質，並統整二次方程式，惟在當中融入史料，強調其不自然感；另一條線為三次方程式公式解發展史的改編劇情[17]，從卡當公式的發展說起，到阿邦[18]成功利用 i 求得實根；最後兩條線交會，由阿邦的成功回頭檢視 i 的不自然，突顯 i 的威力。

	重要活動	
	略依課綱架構	三次方程式
教學活動 A	◎ 引進複數及其四則運算 ◎ 補充人們對 i 的排斥	◎ 佈置故事背景，營造求方程式根很重要的氛圍
教學活動 B	◎ 完整討論二次方程式的公式解	◎ 介紹三次方程式公式解 ◎ 引導學生了解公式解的重要
教學活動 C	◎ 帶領學生發現 i 能幫助解 $x^3-15x=4$ 的實數解 ◎ 回顧三部分漫畫，討論世人慢慢接受 i 的可能原因	

[17] 此部分故事情節參考[7]

[18] 由於故事劇情與史實有出入，以「阿邦」代替真實名字「邦貝力」，下文「阿卡」亦然

二、教學活動 A

(一) 重要目標

1. 引進複數及其四則運算

2. 佈置故事背景，營造求方程式根很重要的氛圍

(二) 活動流程

活動	格次	活動流程
佈置背景	1	◎ 佈置故事背景：在極欲解方程式的時代中，知道如何解方程式因可獲得賞賜，故其方法都列為機密；點出解方程式為貫穿故事的重要任務 ◎ 以漫畫 CP.A1 懸賞圖中的方程式 $x^3-15x=4$ 或其他高次方程式詢問學生是否會解，以此呈現解方程式的困難。 ◎ 將任務先行簡化為解二次方程式，複習國中相關內容：公式解、十字交乘、判別式
引進複數	2-6	◎ 佈題：把 10 分為兩部分，其乘積是 40。帶領學生列出方程式 $(10-x)x=40$，並引導其發現該式判別式小於零 ◎ 教學者硬解為 $x=5+\sqrt{-15}, x=5-\sqrt{-15}$ ◎ 正式以方程式 $x^2+1=0$ 定義虛數單位 i ◎ 正式定義複數 $a+bi$ ◎ 教導複數的四則運算 ◎ 補充反對 i 的史料，同理學生對於 i 出現的錯愕 ◎ 以漫畫 CP.A2-A6 突顯解三次方程式奧秘人人欲得之，為之後故事的發展埋下伏筆

(三) 活動說明

1. 教學時刻意加強 i 的不自然

以強硬給解的方式引進複數後，學生大多不能接受，於此順勢刻意加強 i 的不自然。除介紹取名「虛數」(imaginary number) 的原由，也可補充數學家對於虛數曾發表的不自在感受：

柯西—我們可以完全鄙棄它，沒有也不致有任何遺憾，因為無人知道這個虛假的記號代表什麼，也無人知道應賦予它什麼意義[2]。

高斯—只要分數、負數與實數都已完全了解，那麼虛數是可以容忍的[2]。

萊布尼茲—聖靈在分析的奇觀中找到超凡的顯示，就是那理想世界的端兆，那個藉乎存在與不存在間的兩棲物，那個我們稱之為虛幻的負一的平方根[31]。

此舉除為之後不得不用 i 的掙扎作鋪陳，也以數學家的想法同理學生對於 i 的錯愕，破除其認為數學家喜歡亂發明無意義符號的迷思。

2. 故事的兩條線孰前孰後不一定

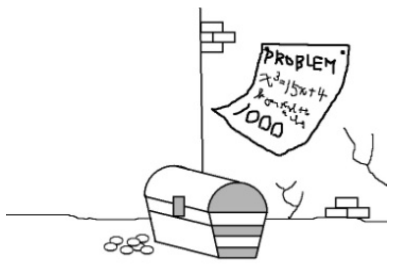
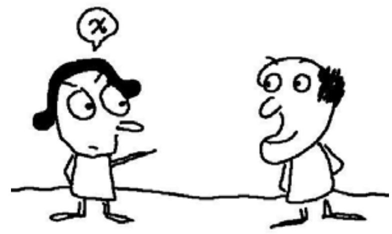
故事起初為兩條線，一條來自為使二次方程式有解的瘋狂發明，一條為解三次方程式的任務，至最終兩條線才合併，此兩條線交錯呈現，孰前孰後不一定。只要教學活動 A 結束後，有達成重要目標即可。

3. 《大術》史料的運用

本教案由「把 10 分為兩部分，其乘積是 40」引進複數，可視情況帶到此問題的歷史背景，但其目的是透過史料強調卡當諾對 i 也感到不自在，才有諸如「受到多大的良心責備」的言詞：

卡丹諾(Cardano, 1501-1576)在其著作大術裡，提到一個問題：「把 10 分為兩部分，其乘積是 40…不管會受到多大的良心責備，把$5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$ 相乘，便得到$25-(-15)$，即是 40。可見算術是怎樣神秘的發展下去，正如我先前說過，它的目標既精緻但也是不重用的。」[18]

■ **漫畫 CP.A**

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>[1]中世紀是賞金的年代，
任何發現都被藏起。</td>
<td>[2]聰明如小飛，
三次公式解守口如瓶，
只告訴了小廢和小奈</td>
<td>[3]絕對不能說的祕密，
絕對會被說出去。
小廢急著出名，
向大舌頭提出挑戰。</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>[4]「你們互出 30 題
一元三次方程式，
30 天後，我們見真章」</td>
<td>[5]30 天過去了，
小廢一題也沒解出來，
大舌頭卻輕鬆解決。</td>
<td>[6]一夕成名的大舌頭，
人們搶著認識，
阿卡是其中一個。</td>
</tr>
</table>

三、教學活動 B

(一) 重要目標

1. 完整討論二次方程式公式解，並引進三次方程式公式解
2. 了解公式解的價值

(二) 活動流程

活動	格次	活動流程
完整討 論二次	1-3	◎ 帶領學生練習數題解為虛根的二次方程式 ◎ 解方程式$x^2+x-2=0$、$x^2+x-1=0$、$x^2+x+1=0$

公式解		，此三方程式的解法分別對應十字交乘、公式解出兩相異實根、公式解出共軛虛根 ◎ 詢問學生 $x^2+x-2=0$ 可否以公式解解出 ◎ 完整討論二次方程式公式解。就判別式的正負做討論，將判別式小於零的結果從無解修正為解為共軛虛根 ◎ 總結公式解的價值在於一次解決所有二次方程式，為三次方程式公式解的出現作鋪陳 ◎ 說明三次方程式公式解你爭我奪的故事情節
三次公式解登場	4-5	◎ 介紹三次方程式公式解 ◎ 請學生計算$(\sqrt{3}+1)^3$、$(\sqrt{3}-1)^3$的值，為 $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}$、$\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$ 的開立方做預備 ◎ 請學生以卡當公式解方程式 $x^3+6x=20$ 的實根-2，並解出所有解：-2、$-1+\sqrt{3}i$、$-1-\sqrt{3}i$ ◎ 詢問學生對三次方程式公式解的感受，與二次方程式公式解一併說明公式解的重要性 ◎ 調查學生對於虛根的接受度，刻意提醒其不自在的感受，並呼應以解方程式為最大任務的故事主軸，將解方程式的焦點集中在求實根
再試公式解	7-8	◎ 承襲學生於教學活動 B 時對虛根的不自在，將解方程式的任務聚焦在求實根，宣佈接下來的任務是以卡當公式求實根 ◎ 請學生以卡當公式解方程式 $x^3-15x=4$

		◎ 套公式分別計算 $\sqrt[3]{\frac{4}{2}+\sqrt{\frac{4^2}{4}+\frac{(-15)^3}{27}}}$、$\sqrt[3]{-\frac{4}{2}+\sqrt{\frac{4^2}{4}+\frac{(-15)^3}{27}}}$ 可得 $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$、$\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}}$ ◎ 詢問學生此方程式是否有實根

(三) 活動說明

1. 故事中運用到幾次非正式的數學運算，教學者務必做澄清

由於體驗旅程的最大目標為使學生體驗到 i 的威力，故事中有許多數學運算並非正式且不完整，教學者務必做澄清。

(1) 三次方程式公式解並不完整

三次方程式必有三解，完整的三次方程式公式解應該包含三個解，但因三次方程式公式解在故事中的角色是佈置求實根的任務，以突顯 i 的威力，其出現並非完整版本，可讓學生稍微了解正式公式的型態，同時做澄清。

(2) 開立方的運算並不正式

如同(1)，教學活動 B 及接下來的教學活動 C 套用卡當公式的過程中，皆須做開立方的運算，此部分的開立方並不正式，且有事後諸葛感，但由於故事重點在於 i 的威力，為避免開立方過程的冗長、模糊焦點，故以此呈現。若學生能力許可，教學者可彈性補充假設立方根為 $a+b\sqrt{3}$ 、$a+bi$ 的反推流程。

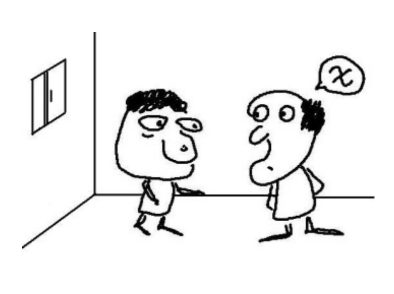
2. 故事與數學史實有出入：三次方程式於此尚未接受「負」數

故事雖參考史實，但不依從數學史的事實，如故事中的三次方程式公式解與史實略有落差：數學發展至當時，人們尚未完全接受「負」數，有時因此而使數學形式變得複雜。可以此點提醒學生歷史發展與故事不盡相同，並呼應此時學生對於 i 依舊感到的不自在，以當時人們尚未接受負數的史實，同理不能接受 i 的現代學生。

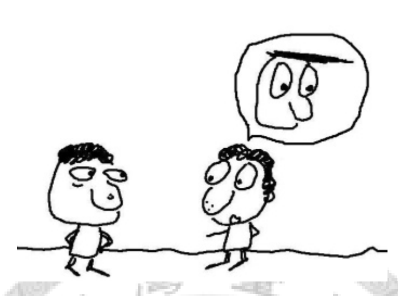
3. 公式解的地位

此部分務必強調公式解的地位，說明為何人們希望求得公式解，再次呼應解方程式的任務，配合漫畫 CP.B4 阿卡的得意神情，解釋為何擁有三次方程式公式解的人會備受尊崇。

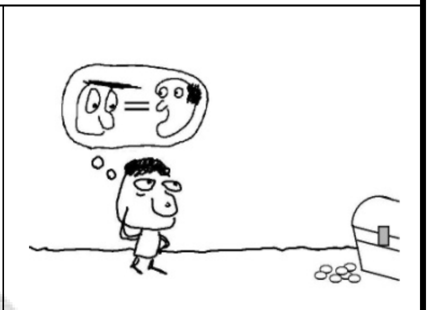
■ **漫畫 CP.B**



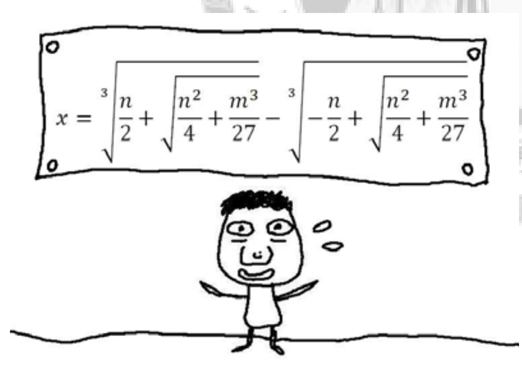
1 在阿卡苦苦哀求下，
大舌頭勉強透漏祕訣。



2 阿卡本來答應保密，
直到有一天，
他輾轉得知小飛的解法。

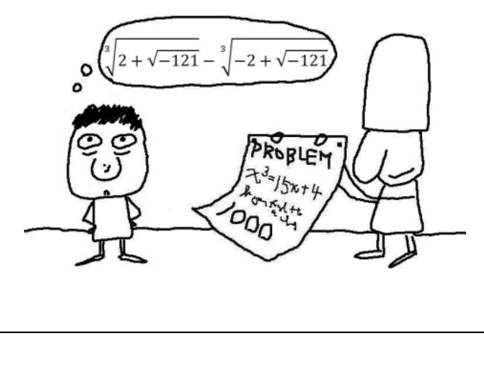


3 阿卡反覆思量，
發現小飛和大舌頭解法
根本完全一樣！



4 也不顧當初的承諾，
阿卡直接發表解法，
成為著名的**卡當公式**。

5「請你解這個。」
「簡單，看我套個公式！」



6 根號裡是負的啊…「無解！」

四、教學活動 C

(一) 重要目標

1. 呈現 i 幫助解實根的過程
2. 回顧三部分漫畫，討論接受 i 的可能原因

(二) 活動流程

活動	格次	活動流程
公式解的失靈	1-2	◎ 配合漫畫 CP.C1，發現方程式 $x^3-15x=4$ 有實根 4 ◎ 帶領學生討論卡當公式無法求出實根的原因 ◎ 探討無法求實根對於阿卡打擊如此大的原因，以及其如何弱化三次方程式公式解的地位。
i 幫助求實根	3-5	◎ 以漫畫 CP.C3 阿邦的台詞「阿卡，接受根號負一吧」，宣布即將勉強進入 i 的世界。 ◎ 請學生計算 $(2+i)^3$、$(-2+i)^3$ 的值，預備 $\sqrt[3]{2+11i}$、$\sqrt[3]{-2-11i}$ 非正式的開立方，順道提醒學生此刻處於可以運算 i 的世界。 ◎ 在接受 i 可運算的前提下，帶領學生處理 $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$、$\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}}$，使其成為 $\sqrt[3]{2+11i}$、$\sqrt[3]{-2-11i}$，再經由開立方得 $2+i$、$-2+i$，最後得實根 4 ◎ 說明 i 在成功求出實根 4 的過程中的幫助。
回顧	6	◎ 回顧虛數出現後，人對它的排斥，但為了求實根不得不接受 i 的勉為其難

		◎ 帶領學生討論為何虛數被留至今 ◎ 以克萊因的評論為故事作結，並略提複數的貢獻

(三) 活動說明

1. 扣留漫畫 CP.C 不讓學生發現實根

實數根 4 的發現，可以自由營造不同進程。在教學活動 B 中，學生再次嘗試三次方程式的公式解前，建議先扣留漫畫 CP.C，並多討論此方程式是否有實根，讓學生發表其認為有無實根的理由，此時有些對數字敏感的學生能自行發現實數根 4，若未有學生主動發現，可再發下漫畫 CP.C 作為提示。

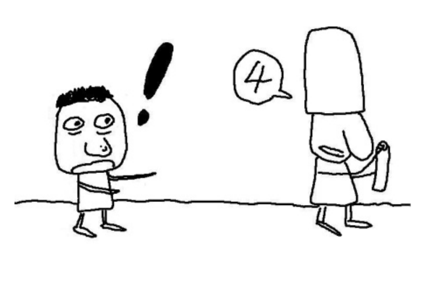
2. 帶領學生討論為何複數存留至今

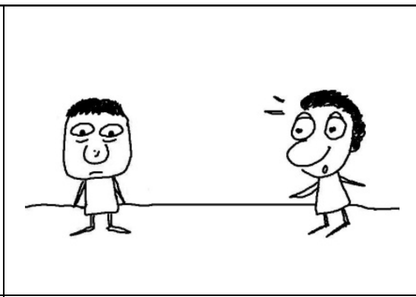
故事結尾時，帶領學生討論為何複數存留至今。一方面對複數感到不安，另一方面在故事中的卡當公式，明明有實數解卻必須仰賴 i 才可得到，可詢問學生若其身歷其境是否會偷偷請虛數幫忙，或請學生猜測當時人們是否會偷偷請虛數幫忙，討論後以克萊因對虛數的注解作小結：「虛數…其強自佔入算數計算也，未嘗獲得世人之承諾，抑且與算學家之始願相違，但終以日積月累之功，流行日廣」[18]。最後可略提虛數其實有許多應用，並可補充Girard所指出的三個虛數的好處：「它能肯定一般法則、它們有用、除此之外再也沒有別的解」[18]。

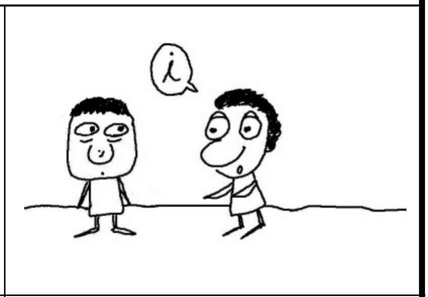
3. 接受複數的理由是幫助解實根

《九九課綱》設定複數的威力是使理論完整，對應劇情為教學活動 A；教學活動 A 中 i 予人無用之感，才會有「受到多大的良心責備」[31]的言詞，加上教學活動 B 中的卡當公式如此有用，更顯得 i 的無用，然而，故事進行到教學活動 C 時，看似無用的 i 竟幫助了有用的卡當公式；因此，故事並未脫離《九九課綱》教學順序太遠，只是將 i 有幫助解實根的威力加入其間，教案務必抓住此精神。

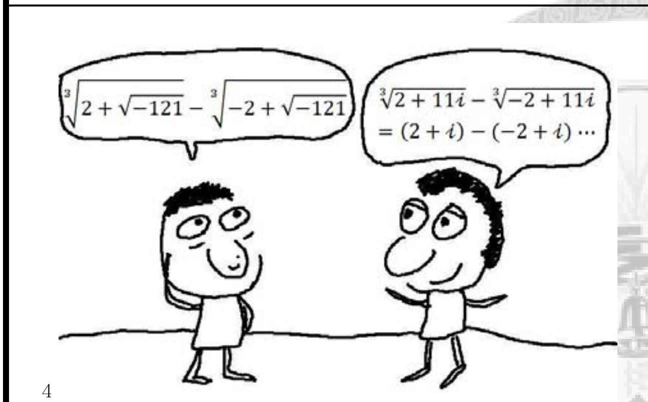
■ **漫畫 CP.C**



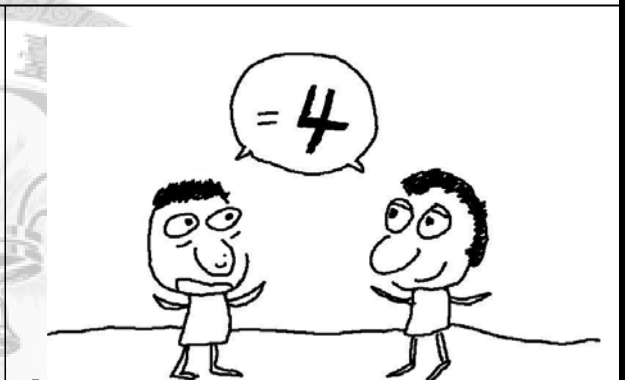




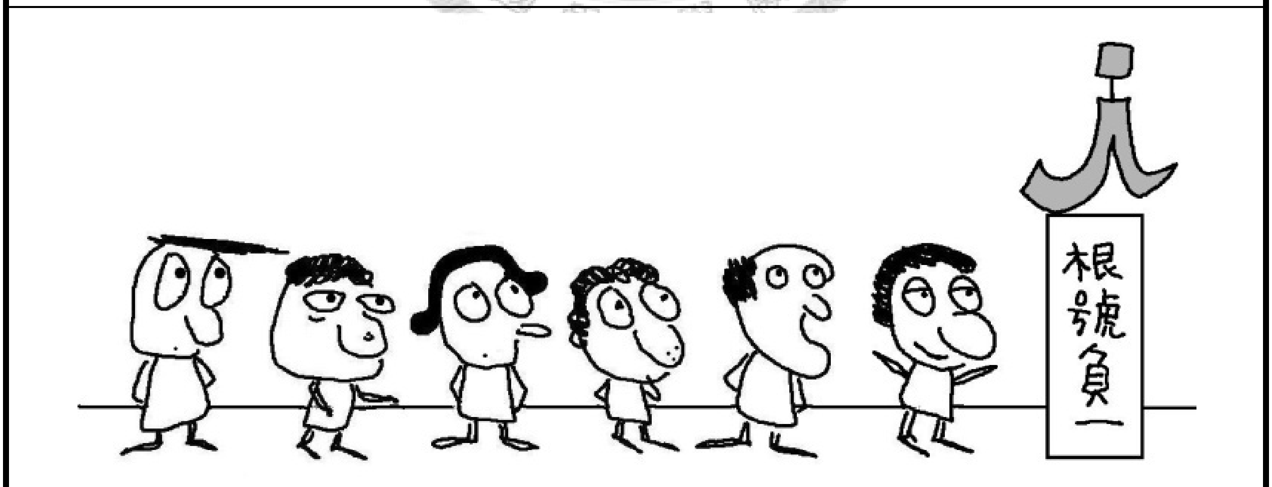
1「很抱歉，4 明顯是個解 哼，卡當公式，名不符實。」	2 難過的阿卡， 被好朋友阿邦瞧見	3「阿卡，接受根號負一吧」



4



5



6 虛數…其強自佔入算數計算也，未嘗獲得世人之承諾，抑且與算學家之始願相違，
但終以日積月累之功，流行日廣。　　　～克萊因

第七章　數學歸納法教案

第一節　九九課綱中的數學歸納法

一、數學歸納法在課綱中的地位

課綱中數學歸納法共出現三次，首兩次在數學 II 的【數列與級數】中，先後幫助證明在【數列】及【級數】中發現的規律；不等式形式的數學歸納法則延至數學乙 II 的【極限與函數】。如下整理。

1. 數學 II：一- 1.2 數學歸納法
2. 數學 II：一- 2.1 介紹 Σ 符號及其基本操作

一、數列與級數	1.數列	1.1 發現數列的規律性	1.1 只談實數數列、不含二階遞迴關係
		1.2 數學歸納法	1.2 不等式型式的數學歸納法置於數學甲/乙 I 數列與極限中討論
	2.級數	2.1 介紹 Σ 符號及其基本操作	

表 7-1.1：【數列與級數】內容架構 [35]

3. 數學乙 II：一- 1.1 兩數列的比較

一	1.數列及其極限	1.1 兩數列的比較	
		1.2 數列的極限及極限的性質	1.2 以圖形、電腦展示的範例建立學生對於極限的直觀

表 7-1.2：【數列及其極限】內容架構 [35]

按照課綱的設計，數學歸納法的三次出現皆為證明僅由歸納法所得的結論。在【數列】裡，數學歸納法是為證明由遞迴數列前幾項觀察歸納的一般項；在【級數】裡，數學歸納法是為證明基本求和公式；在【數列及其極限】介紹不等式形式的數學歸納法，則是為了證明由前幾項的觀察所歸納的兩數列大小關係。顯示《九九課綱》中，數學歸納法的威力是為歸納法提供證明。

因此，教學時應先執行歸納法的觀察發現，才進行數學歸納法。課綱在【數列與級數】引進數學歸納法時，冀求學生能夠「發現數列的規律性，歸納成公式，

並用數學歸納法加以證明」[35]，即在強調數學歸納法出場前，必先有歸納法；故呈現數學歸納法的威力時，若欲符合《九九課綱》的精神，數學歸納法必出現在歸納法之後。

二、目前呈現威力的問題

《九九課綱》希望數學歸納法出現在歸納法之後，藉以顯示數學歸納法作為歸納法補強的威力，然在課綱中，並非所有例子都適合歸納法。比如【數列】裡，核心公式為一階線性遞迴關係，其標準內容為等差數列 $a_{n+1} = a_n + d$ 及等比數列 $a_{n+1} = ra_n$，一般項不需要猜測歸納；基本求和公式 $a_{n+1} = a_n + n$ 及 $a_{n+1} = a_n + n^2$，會在第三節探討【級數】時分別說明其不適合處。

總之，課綱裡的基本數列或級數公式，不見得適合作為數學歸納法的例子，若希望歸納法先出現，通常教學現場會另外找適合的例子；但若不謹慎處理章節規定的公式與數學歸納法間的關係，學生很容易對數學歸納法有錯誤的認識，使數學歸納法的威力銳減。

第二節　數學歸納法現有的教學問題

蘇駿鴻曾將高中生在數學歸納法的學習上，較易出現困難的部份整理成三點，本節針對此三點分析原因：

1. 對歸納法與數學歸納法的差異不夠了解
2. 忽略數學歸納法中奠基步驟的重要性
3. 對數學歸納法中的遞推步驟的邏輯性無法掌握 [33]

一、對歸納法與數學歸納法的差異不夠了解的原因

課綱希冀的教學流程為先以歸納法發現猜測，再以數學歸納法作嚴謹證明，兩者地位分明，若能強調此流程，理當能突顯歸納法與數學歸納法的差異；然而【級數】的求和公式中，能確實進行此流程的為 $\sum_{k=1}^{n} k^3$、$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$，其餘則完全沒有歸納法的容身之處[19]，且最不自然的 $\sum_{k=1}^{n} k^2$ 在各家版本皆出現在數學歸納法的練習裡，大幅削弱學生對歸納法與數學歸納法各司其職的感受。求和公式例

[19] 詳細分析見本章第三節

子的選取非常影響學生對歸納法與數學歸納法差異的了解程度，數學歸納法的威力呈現能否成功幾乎取決於此。

二、忽略奠基步驟重要性的原因

針對忽略奠基步驟的學生，某些教學者喜歡舉出荒謬例子，試圖告訴學生忽略奠基步驟的數學歸納法能「證明」許多離譜的結果，藉以說服學生奠基步驟的重要性，例如：

試以數學歸納法證明：$\forall n \in N, n+1=n$

△ 錯誤證明的示範

假設 $n=k$時成立，即 $k+1=k$

則 $n=k+1$時，$(k+1)+1=(k)+1$ 亦成立！

由數學歸納法得證原式對所有自然數皆正確

然而，我認為學生並非忽略奠基步驟；若按照《九九課綱》裡數學歸納法希望的進程，應是先有歸納法的觀察猜測，才有數學歸納法的補強，奠基步驟早在歸納法便已執行，而後以歸納法猜測出的規律，本來就只需補上遞推步驟，其進程應為：

奠基步驟 → 歸納法 → 遞推步驟

故在歸納法之後出現的數學歸納法缺少奠基步驟並非忽略它，只是不熟悉重新書寫證明的方式。故在此筆者認為並非要強調奠基步驟的重要性，而是要讓學生思考奠基步驟需要檢查幾項才足夠奠基，在寥寥幾項的檢查中，更加體驗到數學歸納法的威力。

三、無法掌握遞推步驟的原因

在遞推步驟中，學生常未使用歸納假設，以至其根本不是用數學歸納法證明結果，此狀況在基本求和公式裡常出現，例如：

試以數學歸納法證明：$S_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{n}{(n+1)}$

△ 錯誤證明示範

(i) $S_1=\frac{1}{1(1+1)}=\frac{1}{(1+1)}$

(ii) 假設 $n = k$時成立，即 $S_k = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \cdots + \frac{1}{k\times(k+1)} = \frac{k}{(k+1)}$

則 $n = k + 1$時，

$$S_{k+1} = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \cdots + \frac{1}{k\times(k+1)} + \frac{1}{(k+1)\times(k+2)}$$

$$= (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) + (\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}) \text{..(*)}$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{k+2} = \frac{k+1}{k+2} \text{ 亦成立！}$$

由數學歸納法得證原式對所有自然數皆正確。

由於分項對消能直接推導此級數一般式，式(*)明顯受到其干擾。同理，若要求以數學歸納法證明 $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$，遞推步驟因受梯形公式干擾，未用到假設的情況也常發生，錯誤的遞推步驟如下：

$$\begin{array}{rl} S_{k+1} = & 1 + 2 + \quad \ldots \quad + k + (k+1) \\ +) \quad S_{k+1} = & (k+1) + k + \quad \ldots \quad + 2 + 1 \\ \hline 2S_{k+1} = & (k+2) + (k+2) + \cdots + (k+2) + (k+2) \\ S_{k+1} = & \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad \text{亦成立！} \end{array}$$

故若要幫助學生釐清遞推步驟，就需特別注意其他簡單推導方式的干擾，避免混淆而無法突顯數學歸納法的必要性，以致於削弱數學歸納法的威力。

第三節　故事材料的分析

數學歸納法在《九九課綱》的【級數】裡比重不少，本章主要在【級數】中設計數學歸納法的教案，前一節已提醒求和公式例子的選取將大幅影響學生能否體驗到數學歸納法的威力，本節將分析各求和公式，作為選取故事材料及安排體驗旅程時的依據。

一、各求和公式的特性

若按課綱希望進行數學歸納法的教學，求和公式例子需適合執行歸納法，其適合度由兩個向度決定，一為其規律容易被觀察發現；二為在學生歸納該公式以前，最好無其他簡易證明干擾遞推步驟，藉以突顯數學歸納法的威力，避免事後

諸葛。以下由此兩向度探討四基本求和公式：$\sum_{k=1}^{n} k$、$\sum_{k=1}^{n} k^2$、$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$、$\sum_{k=1}^{n} k^3$，前三者為《九九課綱》中【級數】明定的基本求和公式，$\sum_{k=1}^{n} k^3$ 雖不在《九九課綱》內，但不少教科書及教學現場皆提及，故納之。

(一) 各求和公式的規律明顯度

以歸納法觀察猜測一般項，$\sum_{k=1}^{n} k^3$、$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ 的規律明顯，但 $\sum_{k=1}^{n} k$、$\sum_{k=1}^{n} k^2$ 就很難單由歸納法猜測出一般項，如表 7-3.1。

基本級數	級數前五項	一般項	規律明顯度
$\sum_{k=1}^{n} k$	1,3,6,10,15 …	$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$	不明顯
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	1,5,14,30,55 …	$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	不明顯
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	1,9,36,100,225 …	$S_n = (\frac{n(n+1)}{2})^2$	明顯
$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$	$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6}\cdots$	$S_n = \frac{n}{n+1}$	明顯

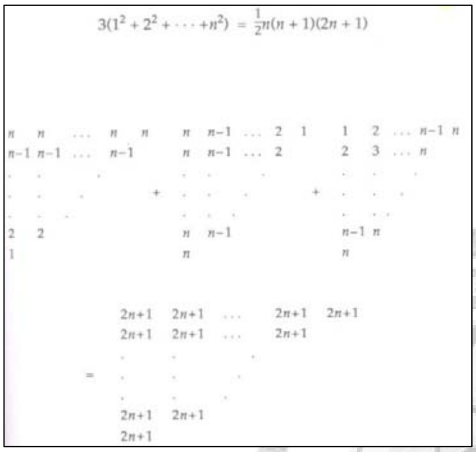
表 7-3.1：基本求和公式的規律明顯度

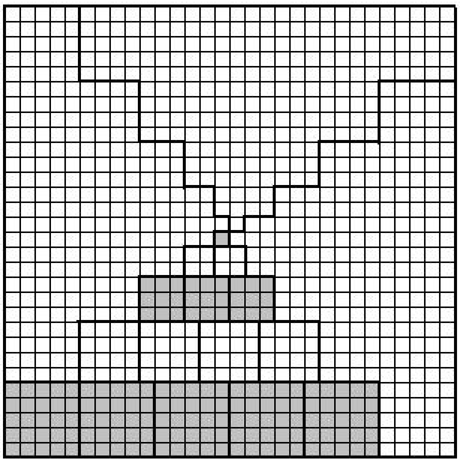
(二) 歸納法以外瞭解各求和公式的其他方式

求和公式的來源，除歸納法外，也可直接推導。熟為人知的高斯小故事 $S = 1+2+3+\cdots+100$，求 S，就是教學生推導梯形公式 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ 最常用的方式。 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ 在教學現場則常以分項對消進行推導：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} &= \frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\times n}+\frac{1}{n\times(n+1)}\\ &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= \frac{1}{1}-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 不像 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ 有為大眾所熟悉的梯形意像，無法輕易推導得之；不少人試圖彌補 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 的不自然，分享類似梯形意象的「無字證明」[40]，最常見的版本如圖 7-3.1，許多教學手冊的補充資料都曾經提及。圖 7-3.2 則為 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$ 的無字證明[40]。





▲ 圖 7-3.1：$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 的無字證明

▲ 圖 7-3.2：$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$ 的無字證明

然而，$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 與 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$ 的「無字證明」非常特殊，不像 $\sum_{k=1}^{n} k$ 的梯形公式與等差級數的推導相同，也不像 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ 的分項分式是處理分式常見的手段，故通常僅在介紹公式後提供學生欣賞，少有人以此切入推導公式，教學時也不一定會補充，但梯型公式及分項分式則幾乎一定會提及。關於瞭解四個基本求和公式的其他方式整理如表 7-3.2。

基本級數	認識公式的 其他方式	認識方式的 普遍性
$\sum_{k=1}^{n} k$	梯形公式	普遍

$\sum_{k=1}^{n} k^2$	無字證明	不普遍
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	無字證明	不普遍
$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$	分項對消	普遍

表 7-3.2：認識基本求和公式的其他方式

二、故事裡求和公式的安排

將前面兩向度整理如表 7-3.3，可發現 $\sum_{k=1}^{n} k^3$ 及 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ 規律明顯，可見得 $\sum_{k=1}^{n} k^3$ 及 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ 都是數學歸納法的好例子，或許這是不屬於課綱的 $\sum_{k=1}^{n} k^3$ 總是出現在正規課程內的原因。惟必須注意以 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ 為例子時，要避免分項分式的干擾。

至於 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$，學生在學習數學歸納法前早以明白，且其規律不明顯，若要以 $\sum_{k=1}^{n} k$ 為例子，只適合單單作為數學歸納法標準形式的練習，較無法從中體驗到數學歸納法的威力。

基本級數	規律明顯度	認識方式的普遍性	作為數學歸納法例子的適合度
$\sum_{k=1}^{n} k$	不明顯	普遍	不適合
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	不明顯	不普遍	不適合
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	明顯	不普遍	適合

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$	明顯	普遍	適合，注意干擾

表 7-3.3：基本求和公式作為數學歸納法例子的適合度

問題最大的是 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ，其規律不明顯，無法使用歸納法，本不適合作為數學歸納法的例子，缺乏適合的推導方式，偏偏又是基本求和公式，教科書總以天外飛來一筆的方式處理，常將其列為練習數學歸納法標準形式的例題，無法避免學生不自然的感覺，即使補上圖 7-3.1 的無字證明，終究是馬後砲，間接加強數學歸納法總是在「事後諸葛」[33]，弱化數學歸納法為歸納法補強的威力。故若欲在【級數】中安排數學歸納法的教案，必須要為 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 找到歸納法的出路。

綜合以上所述，在【級數】中採取體驗脈絡的教學立場設計數學歸納法的體驗旅程時，有四點注意事項：

1. 數學歸納法必在歸納法之後
2. 要設計奠基步驟的討論
3. 避免以 $\sum_{k=1}^{n} k$ 作為數學歸納法的引例
4. 一定要處理 $\sum_{k=1}^{n} k^2$ 歸納法的部分

第四節　數學歸納法教案

一、教案大綱

(一) 教學目標

使學生體驗到能為歸納法提供嚴謹證明的數學歸納法之威力。

(二) 教學細目

1. 使學生能猜測公式 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，並以數學歸納法證明

2. 使學生能猜測公式 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$，並以數學歸納法證明

3. 使學生能了解數學歸納法的證明步驟

4. 使學生能明白數學歸納法與歸納法的差異

(三) 教學時機

1. 【數列】大多教學完畢，但遞迴數列中以歸納法猜測的一般式尚未證明

2. 已引進符號「Σ」，學生明白 $\sum_{k=1}^{n} k$ 表示 $1+2+3+\cdots+n$

3. 學生已非常熟悉 $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

(四) 相關數學內容

數學歸納法；基本求和公式：$\sum_{k=1}^{n} k$、$\sum_{k=1}^{n} k^2$、$\sum_{k=1}^{n} k^3$

(五) 縱覽體驗旅程

1. 故事設計理念

以歸納法猜測基本求和公式，同時以簡單例子提醒歸納法的不足後，引進數學歸納法證明各公式；按照課綱安排數學歸納法的原意，使歸納法、數學歸納法各司其職，恢復數學歸納法補強的地位。從中感受數學歸納法保證真確的威力。

2. 體驗旅程預估時間：3 小時

3. 體驗旅程活動順序

	重要活動
教學活動 A	◎ 以簡單歸納法暖身，提醒學生擁有歸納本能 ◎ 複習求和公式 $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$ ◎ 以歸納法猜出 $\sum_{k=1}^{n} k^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2$
教學活動 B	◎ 以 n^2+n+41不必然為質數的事實提醒歸納法的缺陷
教學活動 C	◎ 以數學歸納法證明 $\sum_{k=1}^{n} k^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2$

教學活動 D	◎ 以歸納法猜出 $\sum_{k=1}^{n} k^2$ 應為 n 的三次式，並找之 ◎ 回顧四部分漫畫，體會歸納法的不簡單以及數學歸納法的補強角色

二、教學活動 A

(一) 旅程重點

1. 提醒學生其擁有歸納法本能
2. 配角 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ 登場
3. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$ 準備登場

(二) 活動流程

活動	格次	活動細目
歸納法暖身	1,2,3	◎ 以頭三隻黑天鵝，引導學生歸納天鵝是黑的 ◎ 介紹歸納法，使學生了解歸納法是常用手段，但同時以此誇張例子，提醒歸納法的易謬性
	4,5	◎ a_n：2,4,6 ...，以此三項引導學生猜測 $a_n = 2n$ ◎ 類比黑天鵝的例子，提醒學生此猜測來自歸納法，故不一定正確。
複習 $\sum_{k=1}^{n} k$	6	◎ 學生計算 $\sum_{k=1}^{n} k$ 的至少前 4 項 ◎ 嘗試歸納 $\sum_{k=1}^{n} k$ 的一般式發現困難，以此提醒學生歸納法不一定可行
	7,8	◎ 以高斯小故事複習梯形公式 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
歸納 $\sum_{k=1}^{n} k^3$	9,10	◎ 學生計算 $\sum_{k=1}^{n} k^3$ 的前 4 項，並觀察規律

(三) 活動說明

1. 白天鵝與數列的類比

全世界天鵝都為黑色的錯誤結論故事性較高，易查覺歸納法造成的荒謬，相較之下，以 a_n：2,4,6 ... 的前三項歸納一般項 $a_n = 2n$，學生易忘記其同樣不完整；兩相並列類比，使學生感受數列與天鵝的例子完全一樣，進而明白只要是歸納法的結論都不算完整。

2. 複習 $\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{n(n+1)}}{\boldsymbol{2}}$ 之目的

本體驗旅程一定要先複習求和公式 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ，目的有三個：

(1) 提醒學生歸納法不一定可行

在 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ 的教學上，通常直接推導公式，很少先嘗試歸納法，故在此特別帶領學生進行歸納的動作，提醒學生歸納法不一定可行。

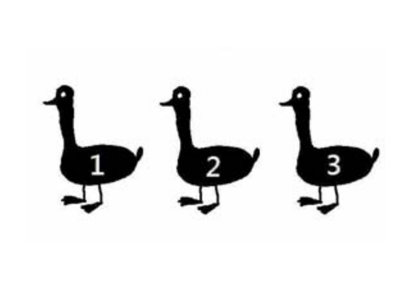
(2) 為猜測 $\sum_{k=1}^{n} k^3$ 公式作準備

由 $\sum_{k=1}^{n} k^3$ 的前幾項 1,9,36,100… 可猜出 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots n)^2$；但學生必須已熟悉 $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots n = \frac{n(n+1)}{2}$，才能順勢得到$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots n)^2 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$。

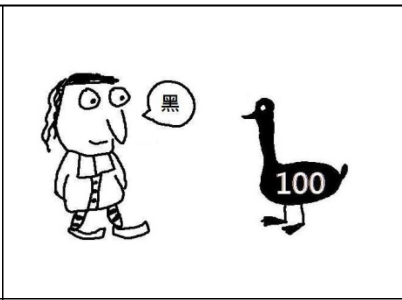
(3) 輔助 $\sum_{k=1}^{n} k^2$為 n 的三次式的猜測

由於 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ 是 n 的二次式，且 $\sum_{k=1}^{n} k^3\ (\frac{n(n+1)}{2})^2$ 是 n 的四次式，體驗旅程設計以此切入協助學生猜出 $\sum_{k=1}^{n} k^2$ 是 n 的三次式，輔助 $\sum_{k=1}^{n} k^2$ 的猜測歸納，故一定要讓身為配角的 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ 先有戲份。

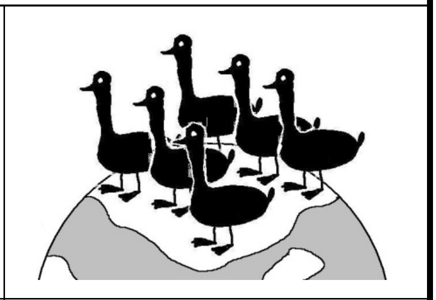
■ **漫畫 MI.A**



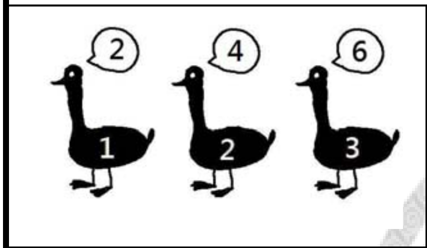
[1]阿瓦非常愛找規律，



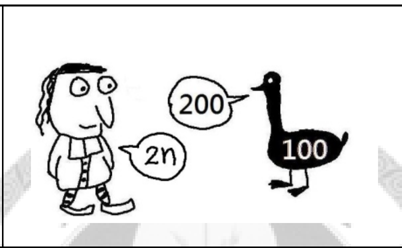
[2]彷彿找到規律，



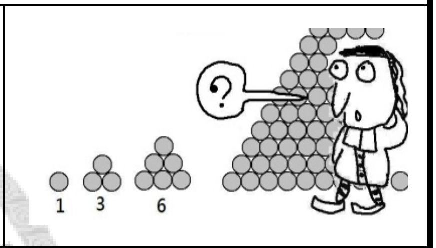
[3]就可以控制世界。



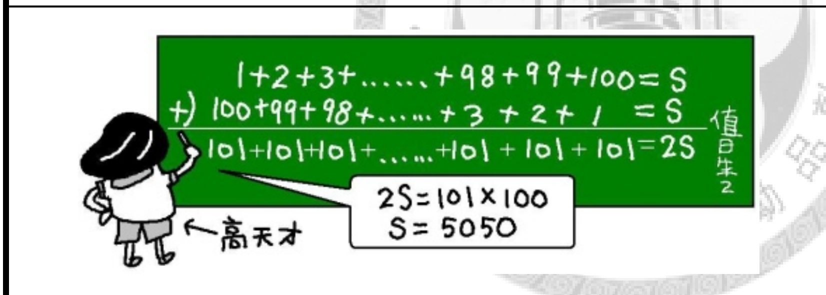
[4]大部分的時候，



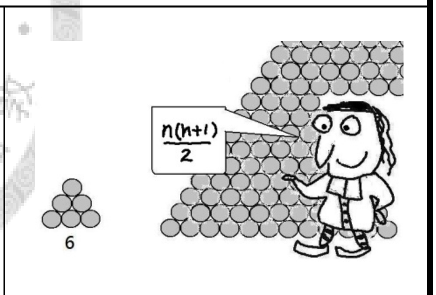
[5]阿瓦都能輕鬆解決；



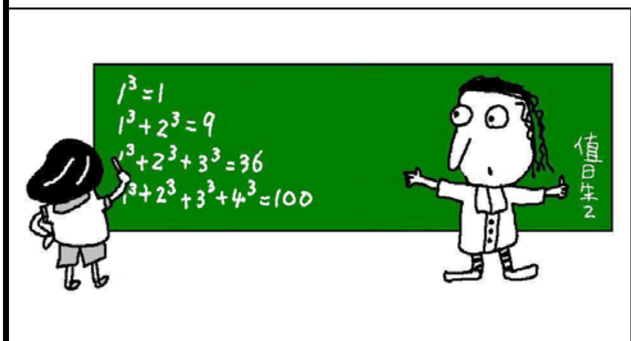
[6]但有時，阿瓦也會卡住，



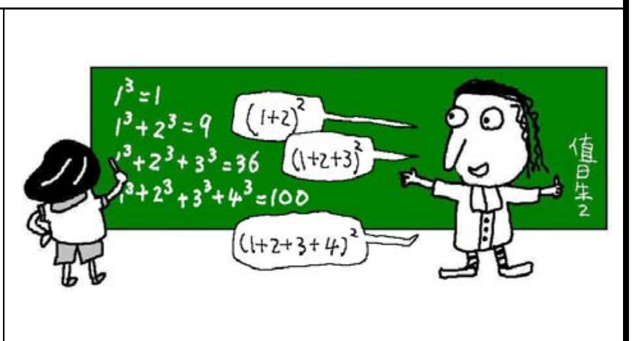
[7]幸好總是有高手神助，



[8]讓阿瓦可以另謀解答。



[9]一日，阿瓦如往常般到處觀察，



[10]找到了有趣的規律...

三、教學活動 B

(一) 旅程重點

1. 以歸納法完成 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$ 的猜測

2. 以 n^2+n+41 不必然是質數為反例，提醒學生歸納法的不足

(二) 活動流程

活動	格次	活動細目
歸納法： $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k^3 =}$ $\boldsymbol{(\frac{n(n+1)}{2})^2}$	1	◎ 利用級數公式 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$，帶領學生將漫畫 MI.A 最後猜測的公式整理成： $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1+2+3+\cdots n)^2 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$
	2-5	◎ 詢問學生對於此猜測可靠度的評價 ◎ 帶領學生更進一步計算 $\sum_{k=1}^{n} k^3$ 的後幾項，營造 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$ 更真確的氛圍 ◎ 詢問學生「要檢查幾項才能完全確定？」，由學生討論歸納法的缺陷在何處 ◎ 小結：一個反例就能使歸納法瓦解
錯誤歸納： $\boldsymbol{n^2+n+}$ **41為質數**	6-9	◎ 學生計算 n^2+n+41 至少前 10 項 ◎ 引導學生歸納出 n^2+n+41是質數的猜測 ◎ 帶領學生更進一步計算 n^2+n+41 的後幾項，營造 n^2+n+41 更真確的氛圍 ◎ 再問一次「要檢查幾項才能完全確定？」，並將 n^2+n+41是質數的猜測列為暫時結論
	10	◎ 學生計算 $40^2+40+41$，引導其以此反例瓦解 n^2+n+41是質數的暫時結論，說明一個反例就足以

		破壞歸納法 ◎ 可再觀察下一項 $41^2+41+41$，其為更明顯的反例 ◎ 強調歸納法的脆弱來自於：無法確定下一隻天鵝是否會是白的

(三) 活動說明

1. $\boldsymbol{n^2+n+41}$ 例子的必要性

白天鵝出現，呼應前已提及的歸納法之易謬性，但數學例子所歸納的結論，往往給學生一定會對的錯覺，學生不一定相信攪局的白天鵝會出現在數學中，故以 n^2+n+41 不必然為質數為例，破除學生的迷思。

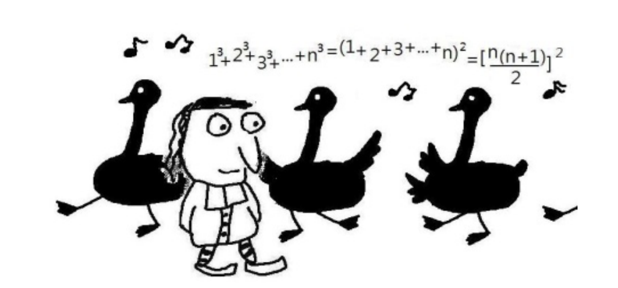
2. 提高嘗試次數製造「真確」的感覺

於 n^2+n+41 此例提高嘗試次數，刻意製造歸納法易謬的反面聲音，由於課內數學例子的歸納結論往往都正確，學生不容易將白天鵝與數學例子結合，認為白天鵝只是在雞蛋裡挑骨頭，而無法突顯之後數學歸納法的威力。

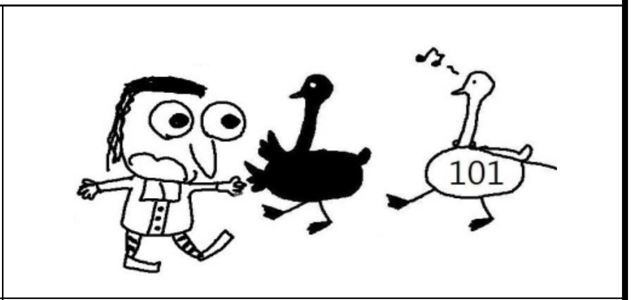
3. 以白天鵝象徵歸納法的反例

討論歸納法的真確時，以漫畫 MI.B4 的第 101 隻白天鵝象徵反例——只要一隻白天鵝，歸納法就瓦解；只要一個反例，歸納法的結論就不真。再次將天鵝與數學例子作類比。

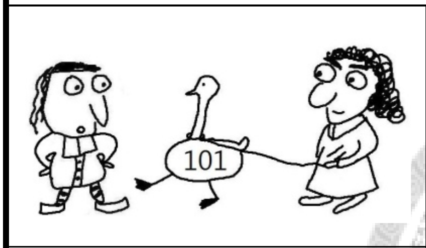
■ 漫畫 MI.B



[1]阿瓦愉快的散著步，美妙規律迴盪腦中

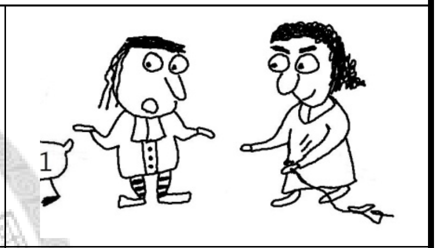


[2]忽然，來了一隻，白•天•鵝。

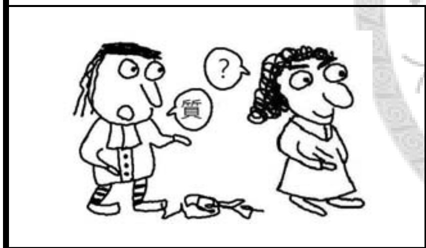


[3]「噢，阿巴，別鬧了」

[4]「我有憑有據...」



[5]「已經檢查快 30 項了...」

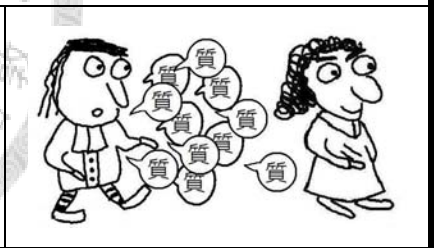


[6]「$1^2+1+41=$ ？」

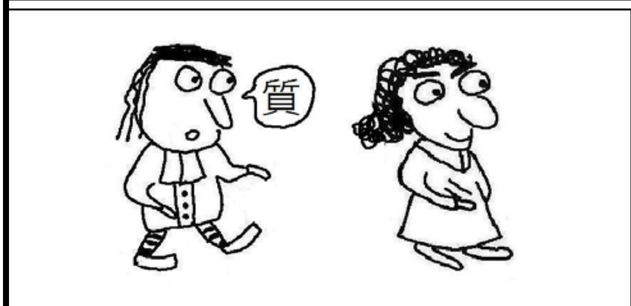
「43。」

[7]「$2^2+2+41=$ ？」

「47，噢！都是質數！」

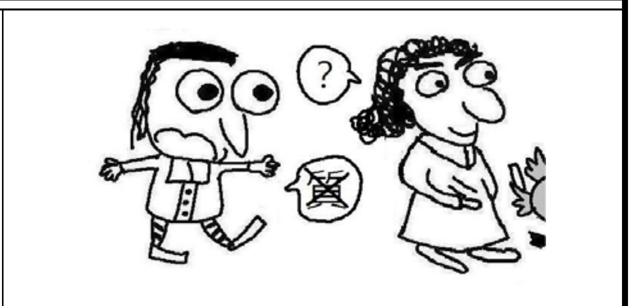


[8]「我再試…質數！…質數！…質數！…質數！…」



[9]「$39^2+39+41=1601$，質數！」

「噢，阿巴，夠了，它們都是質數！」



[10]「$40^2+40+41=$ ？」

「1681，當然是質…噢！噢！它不是！」

四、教學活動C

(一) 旅程重點

主角數學歸納法出場：以數學歸納法證明級數公式 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$

(二) 活動流程

活動	格次	活動細目
遞推步驟：$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$	1-5	◎ 點題：如何確定歸納猜測的結果正確？ ◎ 示範數學歸納法證明 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$ 遞推步驟 ◎ 介紹遞推步驟正式寫法：設 $n = k$ 時，猜測成立，則 $n = k + 1$時⋯猜測亦成立
數學歸納法步驟討論	6,7	◎ 講解遞推步驟重複迭代的關係 ◎ 講解遞推步驟能以此項保證下一項，故可證明猜測為真 ◎ 討論奠基步驟，發現只要留下起點即足夠
小結	8	◎ 整理數學歸納法的完整證明步驟，包含奠基步驟、遞推步驟 ◎ 將數學歸納法與缺少遞推步驟的歸納法作分別，點出數學歸納法不是歸納法，作為此段落的總結。

(三) 活動說明

1. 遞推步驟能以此項保證下一項的真確

特別說明遞推步驟「設$n = k$時，猜測成立，則$n = k + 1$時⋯猜測亦成立」的證明目標，在於證明此項的真能保證下一項的真，將有遞推步驟的下一項與下一隻天鵝作對比，突顯遞推步驟與以往歸納法的不同。

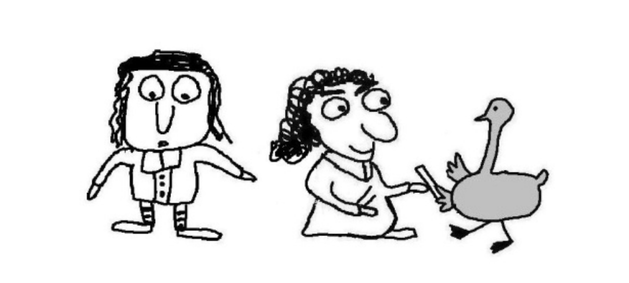
2. 示範遞推步驟的迭代

以漫畫 MI.C6 示範遞推步驟重複迭代的關係，使學生了解其能迭代至任意自然數，因而能保證結論正確，使之更加體會遞推步驟保證的環環相扣。

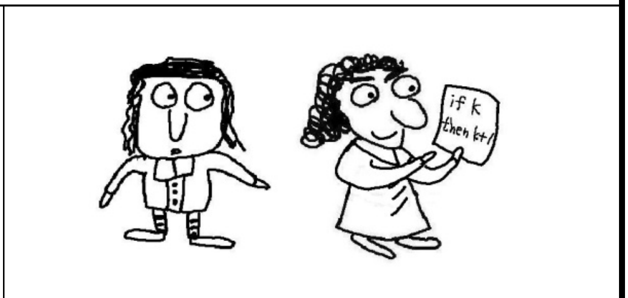
3. 奠基步驟是留下起點

以整個故事的角度觀看，以數學歸納法證明 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$ 的奠基步驟，早在漫畫 MI.A9-10、漫畫 MI.B1 已執行，故奠基步驟的地位並非加添使數學歸納法完整，反而是彙整數學歸納法證明時刪去枝節的動作。奠基步驟的討論應在討論遞推步驟後才進行，請學生思考「奠基步驟需要多少才夠？」，引導將所有嘗試歸納的過程留下起點，使之了解整理此例的證明時，只需檢查 $n = 1$ 時的狀況即可，是謂奠基步驟。

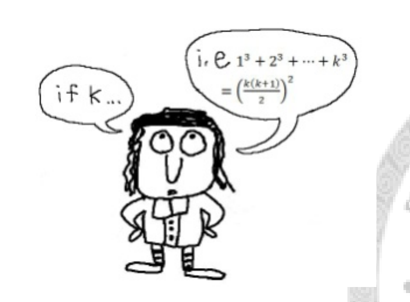
■ **漫畫 MI.C**



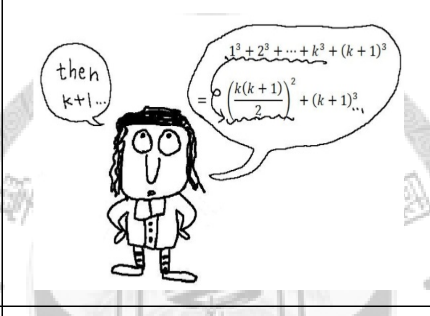
1「噢，好吧，但是它看起來真的應該是啊，我又不可能試完全部…」



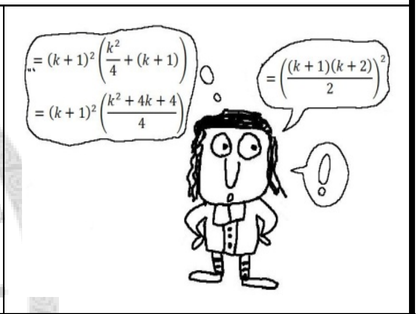
2「那是什麼？若 k 對，則 k+1…」



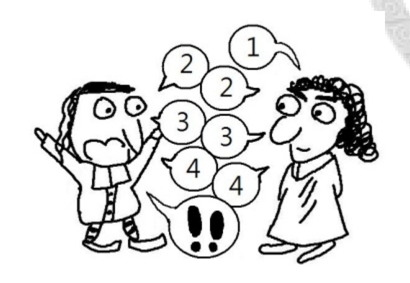
3「如果 k 對，」



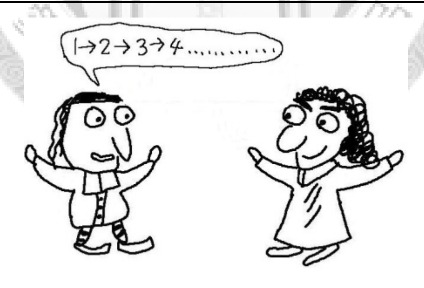
4「那 k+1，就是 k 的下一個...」



5「也會對！可是又怎樣？」



6「1 對…」
「下一個，2 就對！」
「2 對…」
「下一個，3 就對！噢！」



7「有 1 就有 2，有 2 就有 3，有 3 就有 4，有 4 就有…噢！數數相扣到永久！」

8「好聰明，有『數學』果然不一樣！」

五、教學活動 D

(一) 重要目標

1. 歸納 $\sum_{k=1}^{n} k^2$ 的公式

2. 以漫畫 MI.A、MI.B、MI.C、MI.D 回顧故事

(二) 活動流程

	格次	
觀察歸納： $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	1,2	◎ 學生計算 $\sum_{k=1}^{n} k^2$ 的至少前四項 ◎ 嘗試進行歸納，再次體會歸納猜測並不簡單
	3	◎ 將 $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$、$\sum_{k=1}^{n} k^2$、$\sum_{k=1}^{n} k^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2$ 並列，引導學生猜測 $\sum_{k=1}^{n} k^2$ 的一般式可能為 n 的三次式
	4-7	◎ 設 $\sum_{k=1}^{n} k^2=an^3+bn^2+cn+d$，利用前四項解出 a,b,c,d，猜測求和公式：$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ◎ 詢問學生為何阿巴都不說話，提醒學生歸納法無法確定級數公式 $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 是否真確
總回顧	8,9	◎ 在學生考慮歸納法的不足後，使其明白數學歸納法可以補強歸納法 ◎ 將 $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 的完整證明作為隨堂練習或作業 ◎ 回顧漫畫 MI.A、MI.B、MI.C、MI.D，點明威力

(三) 活動說明

1. 習題設計

在故事結尾須讓學生了解 $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 只完成了歸納猜測的部分，所以此結論尚不完整，$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 的完整證明列入故事後的隨堂練習或作業，不一定要放入故事中。另一基本求和公式 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$ 亦可納入練習題，讓學生仿造故事先歸納猜測，再以數學歸納法證明之。

2.回顧四部分漫畫

回顧四部分漫畫時，要突顯故事的主軸——在歸納法的不足中，體驗數學歸納法證明提供的確定性，因此，回顧故事時教學者要強調兩個重點：

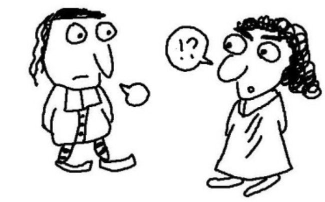
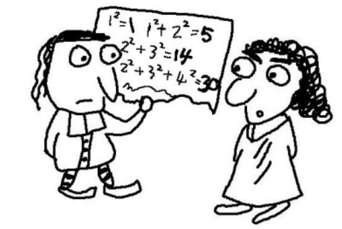
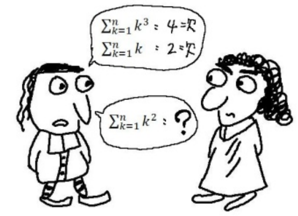
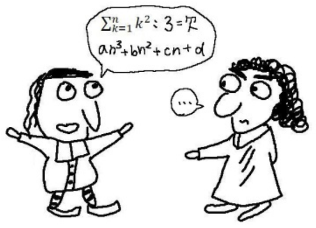
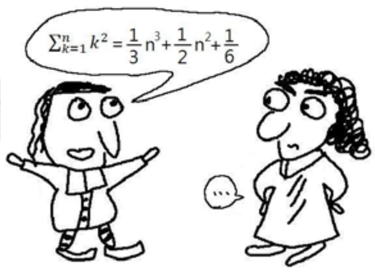
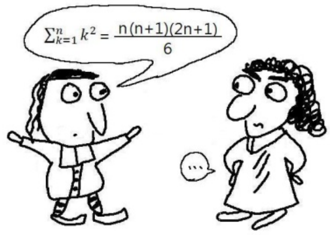
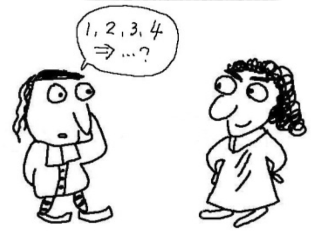
(1) 數學歸納法必在歸納法之後

帶領學生注意數學歸納法的出現時機。數學歸納法在整個故事中共出現兩次：一次在漫畫 MI.C2-C8 證明 $\sum_{k=1}^{n} k^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2$，此公式在漫畫 MI.B1 已猜測；另一次是漫畫 MI.D9，提到數學歸納法可以證明 $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，此公式在漫畫 MI.D2-D7 已猜測歸納。兩次數學歸納法皆在歸納法之後，以此恢復數學歸納法與歸納法的各司其職，點出數學歸納法的角色是為歸納法提供證明，也是其威力所在。

(2) 歸納法的篇幅較多

故事設計歸納法所佔篇幅較高，引導學生明白以歸納法猜測合理結果與數學歸納法同等重要，甚至更重要——若沒有歸納法的大膽猜測，就無法進行數學歸納法的小心求證。因此，歸納法雖易謬，但花時間歸納猜測是值得的，以此鼓勵學生遇到問題時勇敢嘗試，同時提醒學生再怎麼看似合理的歸納法都是不足的，所以才需要數學歸納法。

■ **漫畫 MI.D**

		
1 數學歸納法雖然厲害， 但阿瓦還是有嘆氣的日子。	2「找不到…」	3「奇怪，三次方都會了，一次方也簡單，怎麼獨獨卡在平方？」
		
4「啊！三次式！ 平方一定是三次式！」 「……」	5「an^3+bn^2+cn+d， 代入四項就可以解…」 「……」	6「噢，太棒了！解出來了！ 再化簡一下…」 「……」
		
7「$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ …怎麼了？」 「……」	8「噢，老毛病又犯了， 那怎麼辦？」	9「噢！數學歸納法！」

第八章　總結

本文最終目的是想替煩惱文史學生該如何教學的高中數學老師，找到一條可能的出路。即針對高中文史學生回答以下問題：

1. 文史學生的數學學習目的為何？
2. 適合文史學生的教學立場為何？
3. 在現行《九九課綱》內容中，新教學立場呈現出的教案可能為何？

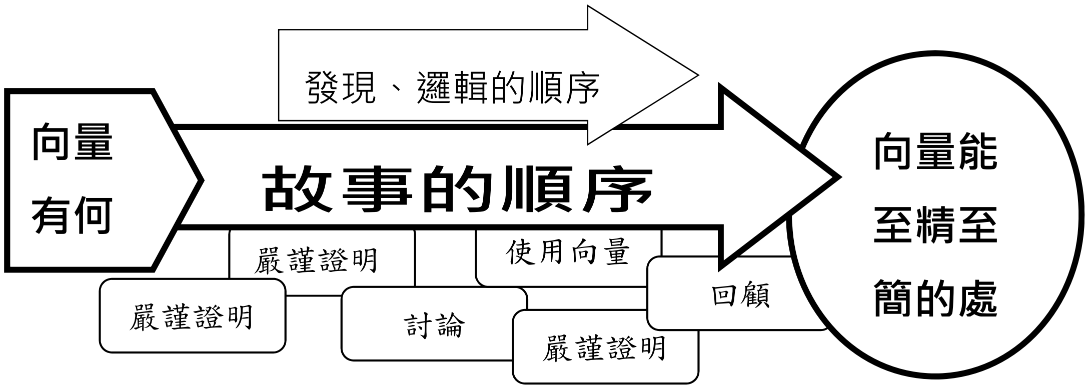
針對前兩個問題，第二章及第三章提出了適合文史學生的體驗脈絡的教學立場，並在第四章連結理論與實際，說明了體驗脈絡的教學立場如何發展教案；最後的第五章、第六章、第七章則回答第三個問題，在現行《九九課綱》中，實際以體驗脈絡的教學立場發展了向量、虛數單位、數學歸納法三個教案。本章彙整前七章內容，提供各界往後參考。

第一節　教案綜合討論

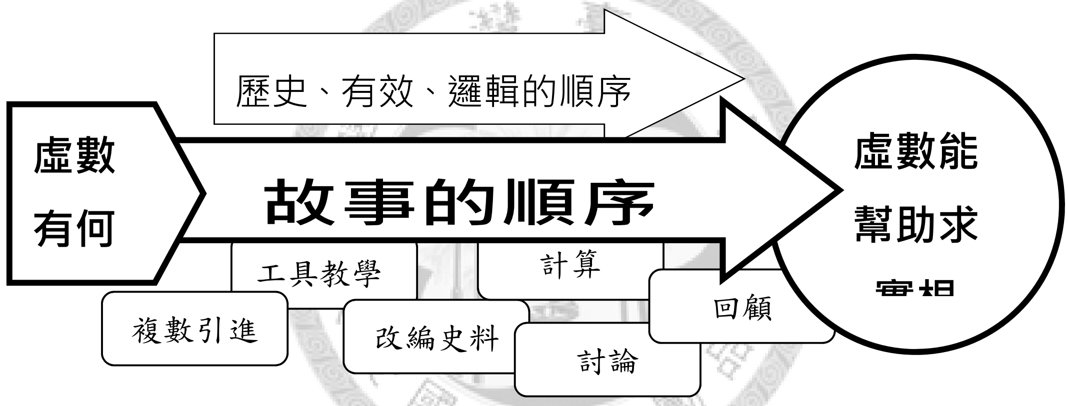
本節將綜合比較第五章向量的教案、第六章虛數單位的教案、第七章數學歸納法的教案。如圖 8-1。

向量的體驗旅程，依序以歐氏幾何、坐標幾何、向量幾何嚴謹證明三角形三高交於一點，最後將不同層次的幾何觀點並列，強調課綱中「歐氏幾何→坐標幾何→向量幾何」的大架構，突顯向量處理幾何時至精至簡的威力。

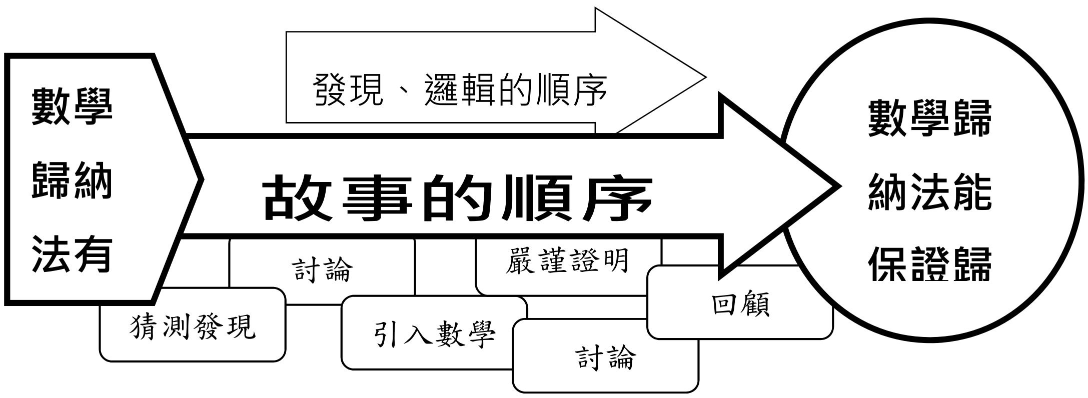
虛數單位的體驗旅程，由兩條看似無關的劇情同時進行，一條由二次方程式略依邏輯的順序引進複數系，搭配史料刻意強調其不自然感；另一條線則為三次方程式公式解發展史，略依歷史的順序；最終兩條線交會，由阿邦的成功突顯 i 的威力。



△ 向量的教案架構



△ 虛數單位的教案架構



△ 數學歸納法單位的教案架構

▲ 圖 8-1：三個教案的架構圖

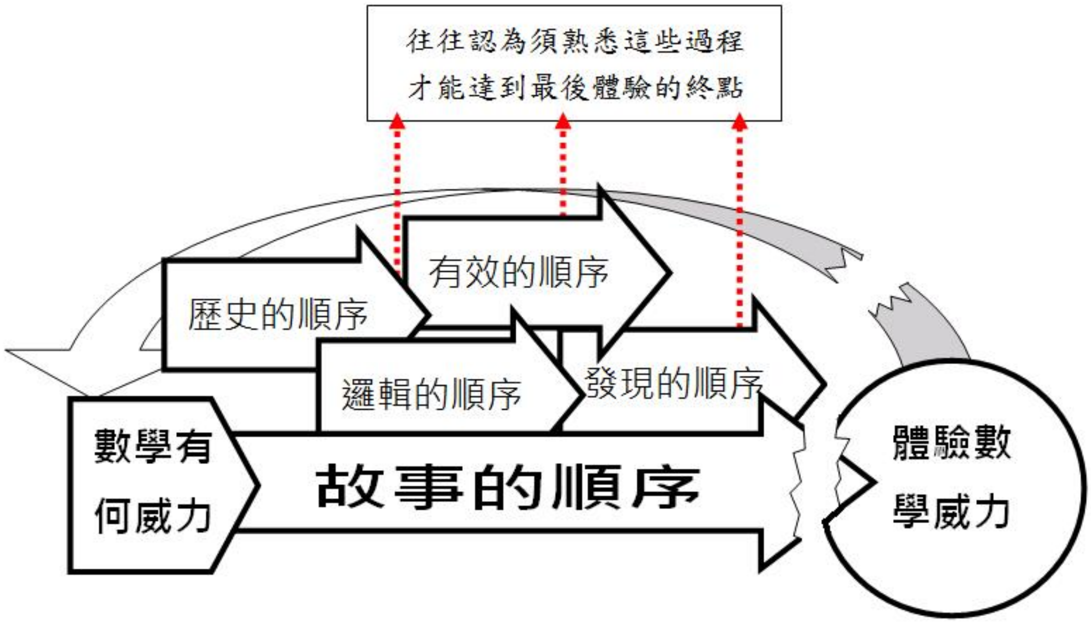
數學歸納法的體驗旅程，首先引導學生使用歸納法並提醒其不足，使其自行發現求和公式 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$ 後，引入數學歸納法證明該公式；接著，再次利用歸納法使學生發現求和公式 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，留下其證明當作習題確立數學歸納法的補強地位，感受數學歸納法的威力。

三個教案雖然皆採取體驗脈絡的教學立場，但架構迥異，唯一相同的是其設計皆以故事為主幹，所有活動皆為幫助學生體驗數學的威力。向量教案幫助學生體驗到向量處理幾何時至精至簡的威力；虛數單位教案幫助學生體驗到虛數單位有助求實根的威力；數學歸納法教案幫助學生體驗到數學歸納法補足歸納法的威力。除此之外，不論是故事劇情架構或是體驗旅程的活動形式，三教案的設計不盡相同。例如：向量的教案裡有邏輯的順序；虛數單位的教案裡有歷史的順序、邏輯的順序、有效的順序；數學歸納法的教案裡有發現的順序、邏輯的順序。因此，若不仔細查看，不一定能發現此三教案擁有相同的教學立場。

這顯示了未能確實執行體驗脈絡教學立場的可能原因，由於其並不排斥其他立場的教學順序，教學材料或活動安排也不一定與以往不同，一旦教學者或學生並非有意識的緊抓著威力的呈現，很容易停留在中間過程或是太過強調其他順序，使得體驗脈絡的教學立場無異於其他立場。即使以「數學有何威力？」引起動機，但簡單帶過後就進入各教學立場的順序，並非總是緊扣「數學有何威力？」的學習目標，就無法完成體驗脈絡的教學立場對於學生最大的幫助——體驗數學的威力。

此也顯示教學者選擇放棄體驗脈絡教學立場的可能原因，在體驗旅程中，學生必須經過類似其他教學立場的教學順序，教學者往往認為學生必須先熟悉數學工具的操作、了解嚴謹證明、以數學自行發現解決問題的方法，才能達到體驗的目標，體驗數學的威力如同欣賞數學，被視為較高的學習層次；因此，教學者容

易花較多心力氣在中間過程，將體驗數學的威力當作理想，體驗旅程往往卡在中間無法前進。前三章教案的嘗試則打破此觀點，即使學生未能完全達到以往其他教學立場的教學目標，如未能自如的使用數學工具、也未能自行嚴謹證明、該數學工具也不是學生自行發現的…等，數學課還是能提供學生威力的體驗。



總之，有沒有徹底講完故事是體驗脈絡教學立場的關鍵，上述三個教案中，教學流程混和的教學立場雖有不同，但三個故事都有完整呈現——故事結束後，學生應較能體驗數學的威力，並能以各數學知識的威力回答「為什麼要學向量？」、「為什麼要學虛數單位？」、「為什麼要學數學歸納法？」。換句話說，體驗脈絡教學立場的教案本身，其能回答本研究最開始對於文史學生「為什麼要學高中數學」的疑問。

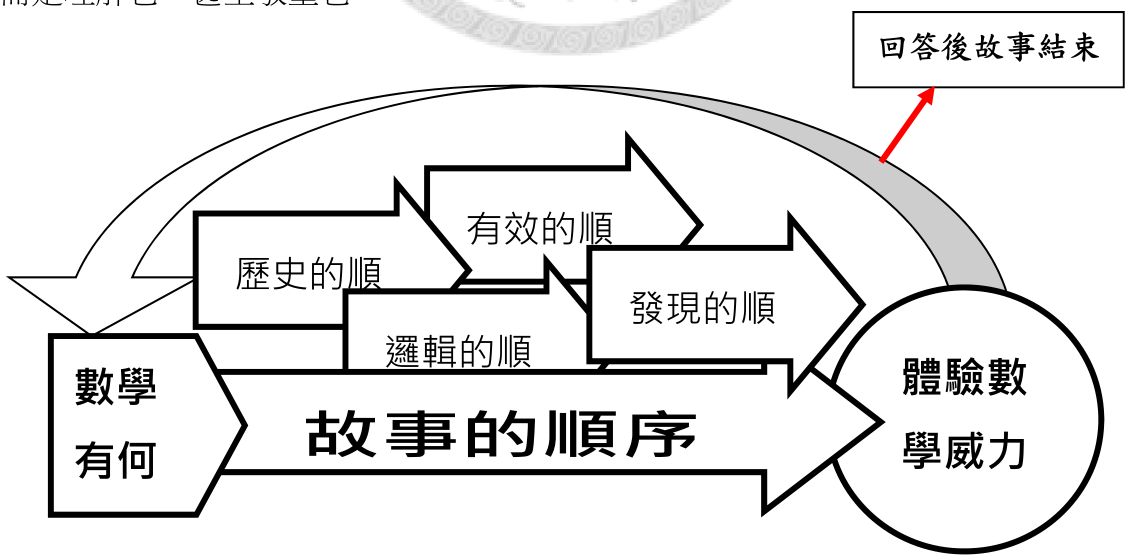
第二節　結語

在教學現場中，大部分的高中數學老師都會碰到為數不少的文史學生，這些文史學生在高中之後幾乎不會再遇到任何高中數學，諸如：三角函數、向量、複數、二次曲線...等等的內容，他們會再後碰到的機會微乎其微。因此對於文史學生

而言，高中數學若能提供他們一趟體驗旅程，體驗以數學理解世界及探究真理的優點是什麼、解決問題的過程中以邏輯思考及抽象思考的好處是什麼，使文史學生可以至少留下數學很有**威力**的印象，是很值得的嘗試。

體驗脈絡的教學立場就是以此理念發展的教學立場，其提供的**體驗旅程**幫助學生在學習過程中親身經歷數學的威力，使學生以高中數學為媒介，一窺人類發明力與想像力的精緻與巧妙，即便教學對象是未來用不到高中數學的文史學生，在經歷數學威力的過程中，也能體驗人類思考的**價值**。

體驗脈絡的教學立場最重要是呈現數學知識的威力，使學生在課程之後能體驗數學的威力。教學者於課堂上就如一位導遊，帶領學生攀爬數學的知識山，旅程中，教學者的任務是提醒學生重要且壯觀的景點，學生是否熟練爬山的技能、是否完全了解景點的成因、是否知道其他人如何爬山、或是了解以前山景如何...，重要性都不大過於爬完一次山的體驗，大部份的文史學生也許日後再也不會爬這座山，但體驗旅程至少使其擁有帶著走的感動。換句話說，以體驗脈絡的教學立場進行高中數學教學，就是要讓學生體驗數學存在的價值，使學生不是懼怕它，而是理解它，甚至敬重它。



因此，體驗脈絡教學立場的教案中，所有活動設計皆在幫助學生體驗數學的威力，教學活動進行時必以**故事**為主幹，帶領學生親自走過故事，課程在呈現該

數學知識的威力後才可結束。如同前三章的教案示範，體驗脈絡的教學立場過程中，不僅接納其他立場，甚至大量利用其他教學立場協助體驗旅程的進行，混用何種立場並非其關鍵所在，有無緊扣威力才是判斷一個教案是否為體驗脈絡教學立場的標準。

在以往的數學教學中，體驗數學的威力常被視為較高的學習層次，教學者往往認為學生必須先徹底完成其他教學立場的學習目標，才有可能達到體驗威力的層次，因而花較多心力氣帶領學生學會中間過程，使體驗旅程卡在其他教學立場的目標無法前進。三個教案則嘗試轉移教學時關注的焦點，首要任務為說完故事，即使文史學生未能完全達到其他教學立場的要求，但藉由教學者適度的幫助，還是能走完一趟體驗旅程，體驗數學的威力。

欲採取體驗脈絡教學立場的教學者，可參考第四章第三節的三步驟「了解威力→設計故事→發展旅程」來製作教案。首先教學者要熟悉該數學知識的威力，現行《九九課綱》中，對於高中數學裡不同主題的威力，大多已有一定程度的說明，如【三角】間接測量的威力、【對數】以簡馭繁的威力、【矩陣】系統化的威力…等。再來，教學者在了解該數學主題的威力後，即可由該威力為核心發想故事，最後以故事為主軸發展教學活動，即體驗旅程，完成整個教案。教學者要特別獨立呈現教案中的故事，手邊的故事能幫助教學者及學生在進行體驗旅程的任何活動時，隨時對應到故事的情節，使其明白當時活動在整個故事的地位。前三章的教案以漫畫獨立呈現故事，以漫畫呈現故事純屬我的教學風格，也可僅以文字呈現故事，較簡便的呈現方式為列出故事大綱，故事大綱類似以往的教學大綱，只是必須以該數學知識的威力為主軸。

在實際教學現場中，欲採取體驗脈絡教學立場自然會產生的另一個問題是，教學者通常無法判斷哪些學生是文史學生，但由於體驗脈絡的教學立場只是在原有的教學過程中，特別強調數學威力的主軸，不僅不排斥原有教學立場，還能使

原有課程架構更完整，因此，體驗脈絡的教學立場除能提供文史學生數學學習的意義外，也能幫助文史學生以外的學生。例如自然組學生，雖擁有較好的數學敏感度，通常能迅速理解證明的邏輯、熟悉數學工具的使用，但若缺少「導遊」的提點，不見得能自己深刻體驗該數學知識的威力，是故若能採取體驗脈絡的教學立場，自然組學生於課程中，將更能明白自己正位於「山中何處」，進而更能感受到所習知識的價值。

我曾連續兩年在高一進行虛數單位的教學，第一年在正規課程結束後，以虛數單位的威力說服學生所習內容的價值所在，利用漫畫 CP.A、CP.B、CP.C 解釋學習虛數單位的原因，但由於故事並非貫穿整體課程，許多學生認為故事只是正課以外的補充教材，未能投入其中。第二年，我有意識的採取體驗脈絡的教學立場[20]，以同樣的漫畫 CP.A、CP.B、CP.C 呈現故事，將故事貫穿整體課程，教學過程大致符合第五章的教案設計，在學生身上產生的效果就與第一年不太相同，不僅升上高二選擇社會組的學生，有不少還能大致記得虛數單位的威力所在，更有許多選擇自然組的學生，讚嘆虛數的巧妙。由此看來，在教學現場採取體驗脈絡的教學立場時，教學者不太需要明確篩出文史學生，因為體驗脈絡的教學立場不僅適用文史學生，也是面對文史學生之外的學生時，教學者一個很好的選擇。

教學者是否擁有足夠的時間完成體驗旅程，是對於體驗脈絡教學立場另一個可能的質疑，這幾乎是所有在數學課中嘗試摻入軟性層面的教學方式時，都必須解決的問題。以往採取 HPM 教學的教學者，由於在正規教學之外常需引進為數不少的補充史料，軟性的學習層面如欣賞，與硬性的數學知識做了切割，學生往往未有足夠時間消化兩部分的內容。然而，體驗脈絡的教學立場是用硬性的數學知識重新組織一個故事，數學運算是體驗活動的一部分，體驗旅程當中，較少正規數學知識外的內容，如第七章數學歸納法的故事，情節由歸納法、級數、數學歸納法組成，全是正規學習內容；第六章虛數單位的故事雖參考三次方程式的史料，

[20] 當時尚未正式定義「體驗脈絡的教學立場」

但裁剪後的情節幾乎只單由複數運算支撐，經歷故事的同時也在做複數運算；體驗旅程只是將以往硬性的數學知識作新的編排，並未額外加入太多故事材料，因此，體驗脈絡教學立場較無時間充足與否的顧慮，我採取體驗脈絡的教學立場至今，也尚未遇到時間不足的問題。

教育現場中最現實的考量莫過於學生的成績，教學者採取體驗脈絡的教學立場時，有時得將常見立場的教學目標置於次要，此舉看似無法顧及學生成績，但如同前所提及，體驗脈絡的教學立場並非與現有教學立場抗衡，而是在當中側重威力的體驗，使原有立場更完整。因此，若教學者正確採取體驗脈絡的教學立場，理應不會犧牲學生原應有的學習，雖然現在無法斷言體驗脈絡的教學立場能提升學生數學的學習成就，但至少不會使學生成績退步。我自己採取體驗脈絡教學立場的這幾年，課堂上不僅氣氛愉快，且學生成績並未與其他班級出現落差。

相信每個教學者都希望帶給學生有意義而且有內涵的數學課，也都希望能與學生分享數學的威力，更希望教學雙方在數學課中不僅愉悅且學得深刻。「外文不計數」所有利弊得失牽涉層面極廣，外文系究竟要不要採計數學乙，我也不太能提出一個明確的建議。但不論往後會不會再發生類似「外文不計數」的事件，也不論教學者是否正面對文史學生，本研究都提供教學者一條不同的出路。體驗脈絡的教學立場並非完全新的想法，身在教育前線的我，也僅僅以此篇論文，將眾前輩與自身淺淺的教學經驗抽絲剝繭，指出較關鍵的層面，並以幾個簡單教案呈現此立場的可行性，期待能夠拋磚引玉，讓更多教學者有勇氣突破其他教學立場的目標，發展更多體驗脈絡教學立場的教案，使高中數學課擁有新的面貌。

參考文獻

中文部分

[1] Kline, Morris (1984)：**教授為何教不好** (方祖同譯)。台北：科學月刊社。

[2] Kline, Morris (2004)：**數學：確定性的失落** (趙學信、翁秉仁譯)。台灣：台灣商務。

[3] Livio, Mario (2011)：數學是發明還是發現？(翁秉仁譯)。**科學人**，115，44-47。

[4] Stewart, Ian (2008)：**給青年數學家的信** (李隆生譯)。台北：聯經。

[5]王耀彰(2006)：**數學史融入教學以提升學生學習成效之行動研究**。國立彰化師範大學教育研究所碩士論文，未出版，彰化。

[6]宋永耀(2002)：**融入數學史教學對高一學生數學學習成效之研究**。國立高雄師範大學數學系碩士論文，未出版，高雄。

[7]李白飛(1969)：代數學的故事。**科學月刊**，10(4)，332。

[8]李國偉(2011)：**中學數學教育所為何來**。100 年度全國高中數學教學研討會，國立師範大學。

[9]林志全(2002)：**融入數學史教學對高一學生數學學習成效─以「二項式定理」單元為例**。國立高雄師範大學數學系碩士論文，未出版，高雄。

[10]林倉億(2010)：數學史融入教學－以對數表為例。**HPM 通訊**，13(12)。

[11]林倉億(2011)：數學史融入教學－以克拉瑪公式為例。**HPM 通訊**，14(12)。

[12]林倉億(2012)：高中數學的 HPM 相關資源。**HPM 通訊**，15(1)。

[13]洪萬生(1998)：HPM 隨筆(一)。**HPM 通訊**，1(2)。

[14]馬婉華(2005)：**融入數學史教學對高一學生數學學習成效─以「數學歸納法」單元為例**。國立高雄師範大學數學系碩士論文，未出版，高雄。

[15]許志昌(2006)：數學史融入教學－以「機率」單元為例。**HPM 通訊**，9(7)。

[16]張海潮(2011)：臺大外文系與 GMAT。**科學人**，110。

[17]陳建丞(2002)：**融入數學史教學對高一學生數學學習成效─以「和角公式」單元為例**。國立高雄師範大學數學系碩士論文，未出版，高雄。

[18]陳鳳珠(2000)：虛數 $\sqrt{-1}$ 的誕生。**HPM 通訊**，3(2)。

[19]馮振業(2005)：為什麼不學幾何？。**數學教育**，21，43-49。

[20]單維彰(2011)：正弦的英文字源。**科學月刊**，42(10)，734。

[21]單維彰(2010)：「向量」從何而來？。**科學月刊**，41(5)，332。

[22]蔡聰明(1995)：從畢氏學派的夢想到歐氏幾何的誕生。**科學月刊**，26(7)。

[23]蔡聰明(2000)：**數學的發現趣談**。台北：三民。

[24]蔡佳燕(2003)：**數學史融入教學對高一學生數學學習成效影響之研究**。國立高雄師範大學數學系碩士論文，未出版，高雄。

[25]鄭毓信(1998)：**數學教育哲學**。台北：九章。

[26]蕭文強(2009)：**為什麼要學習數學？：數學發展史給我們的啓發**。台北：九章。

[27]蘇惠玉(2008)：HPM 與高中幾何教學：以圓錐曲線的正焦弦為例。**HPM 通訊**，11(2)。

[28]蘇惠玉(2008)：與高中數學課程相關之 HPM 文章。**HPM 通訊**，11(4)。

[29]蘇惠玉(2010)：插值多項式的教與學問題及其學習單設計。**HPM 通訊**，13(6)。

[30]蘇惠珍、陳彥宏(2007)：賭金分配的課堂教學。**高中數學學科中心電子報**，17。

[31]蘇意雯(2004)：**數學教師專業發展的一個面向: 數學史融入數學教學之實作與研究**。國立台灣師範大學數學系博士論文，未出版，台北。

[32]蘇意雯(2006)：數學史融入數學教學－以海龍公式探討為例。**HPM 通訊**，9(4)。

[33]蘇駿鴻(2008)：數學史融入教學－以數學歸納法為例。**HPM 通訊**，11(2)。

[34]蘇駿鴻(2009)：數學的多元文化進路－以矩陣的教學為例。**高中數學學科中心電子報**，38。

[35]教育部(2009)。**普通高級中學課程綱要**。台北。

[36]數學採計風波 外文系主任說明 (2009 年 12 月 5 日)。**臺大學生報**，113 期。

外文部分

[37] Dudley, Underwood (2010). What Is Mathematics For ? *Notices*, 57, 608-613.

[38] Ernest, Paul (1991). *The philosophy of mathematics education.* Falmer Press.

[39] Gelfand, Israel M. (2003). Mathematics as an adequate language. *The Unity of Mathematics*. Birkhäuser.

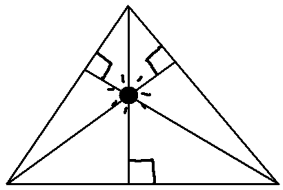
[40] Nelsen, Roger B. (1993). *Proofs without words : exercises in visual thinking.* The Mathematical Association of America.

[41] Tymoczko, Thomas (ed.) (1998). *New Directions in the Philosophy of Mathematics.* Princeton university Press.

附錄：學生手邊的向量故事

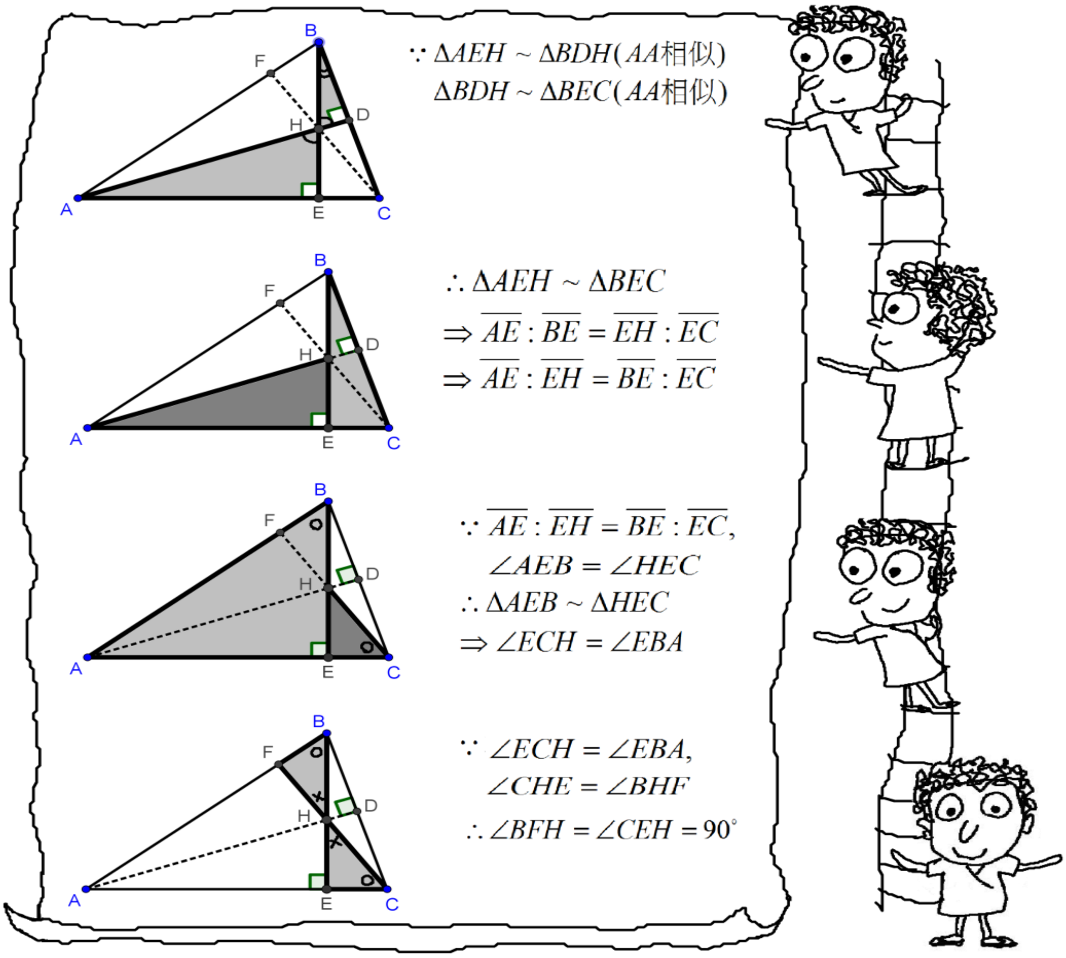
■ 漫畫 VT.A

1 我是小歐，我喜歡奇蹟
所以我，喜歡三角形

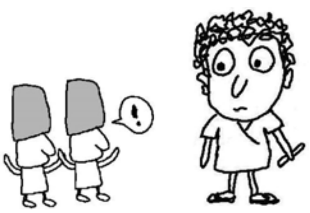


2 三角形總是有辦法，
讓三條線輕易的交會

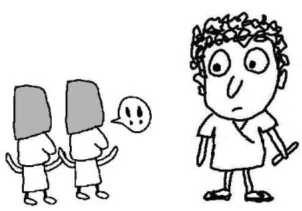
3 奇蹟中的奇蹟是，
我能保證奇蹟。



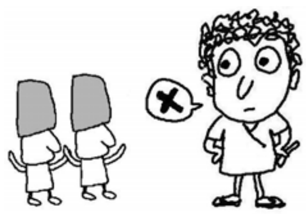
4



5 好難。太神了！想不到。

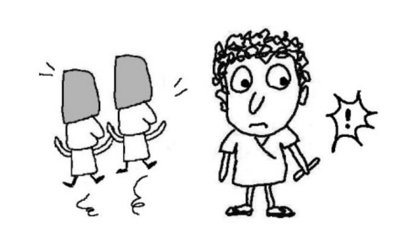


6 樓梯好長！！

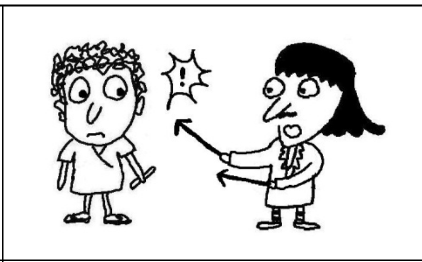


7 奇蹟，本來就沒有捷徑

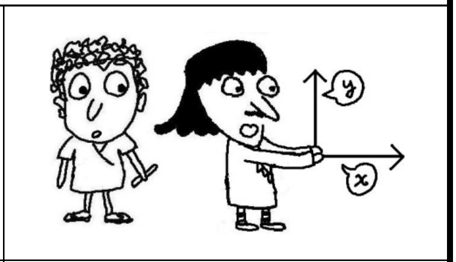
■ **漫畫 VT.B**



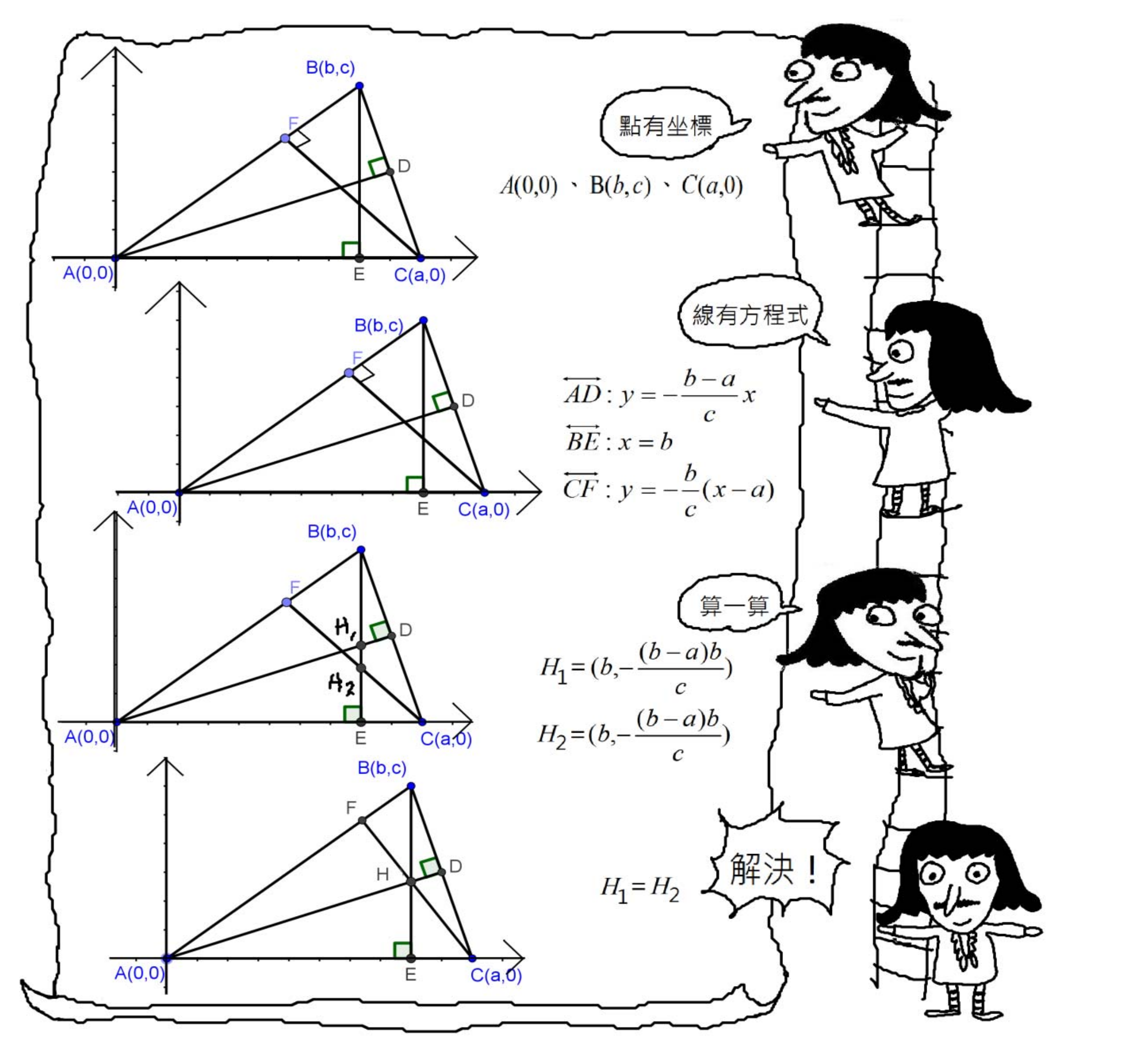
1誰說沒有！！



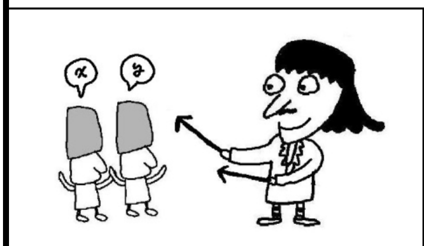
2看我兩把劍闖出一條！



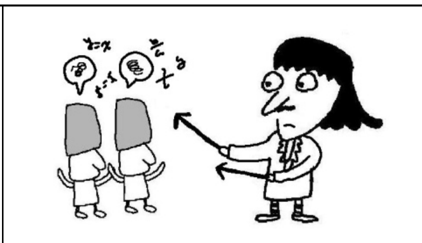
3x 軸！y 軸！



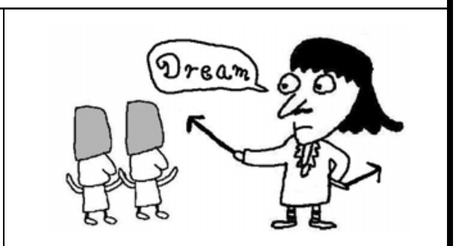
4



5奇蹟有捷徑，
才是奇蹟中的奇蹟



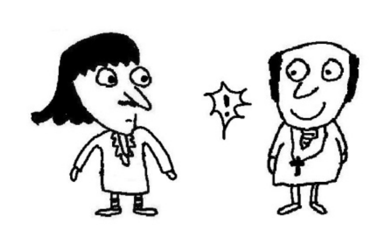
6但是好煩！
好死板！



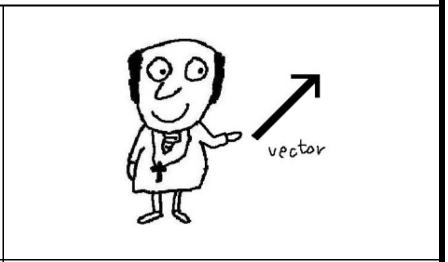
7有坐標，一切好辦！
是我阿笛的夢！別要求太多！

■ **漫畫 VT.C**

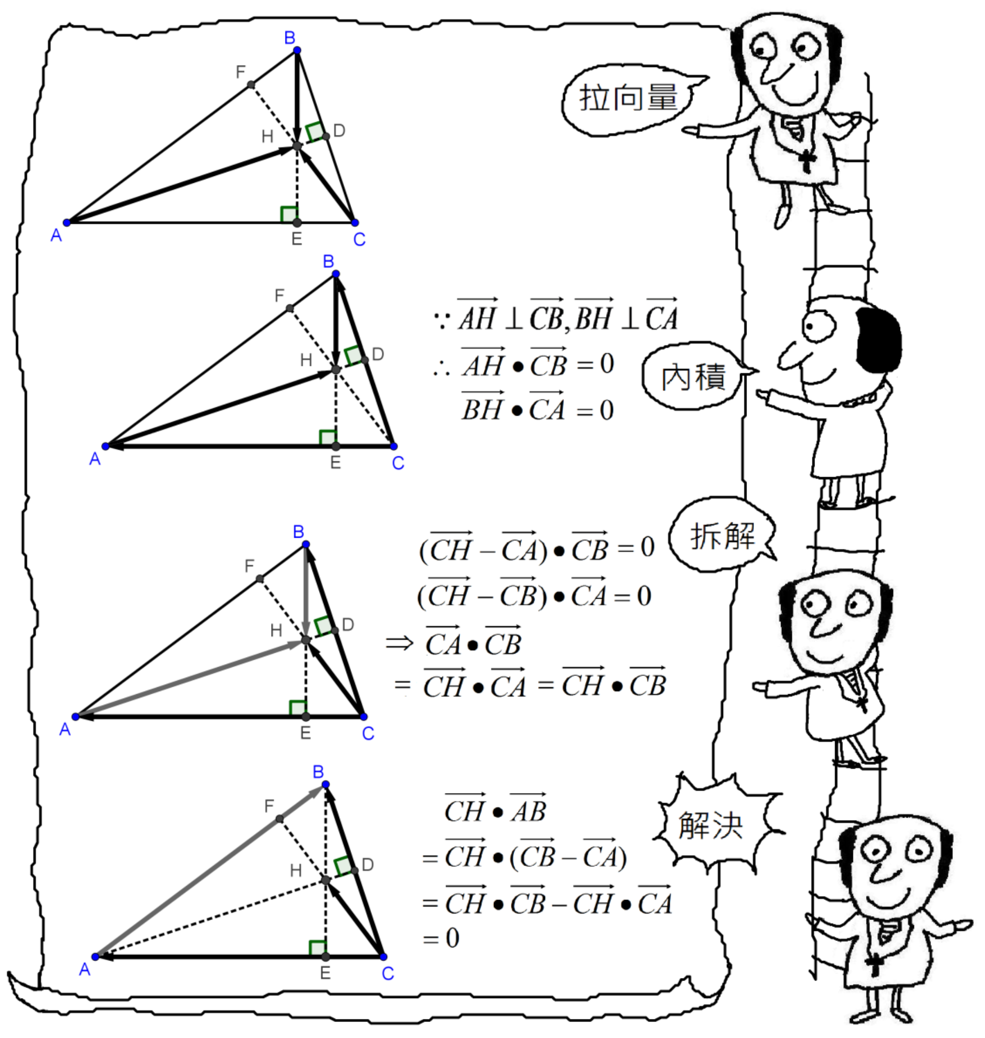
[1]誰說太多！



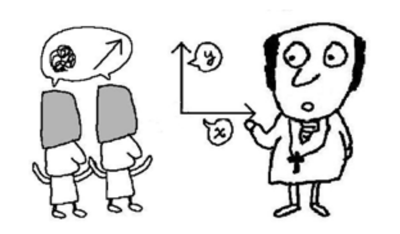
[2]嗨，我是大漢！



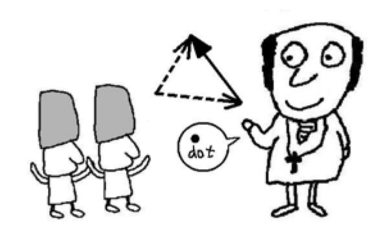
[3]在此鄭重介紹～～向量！



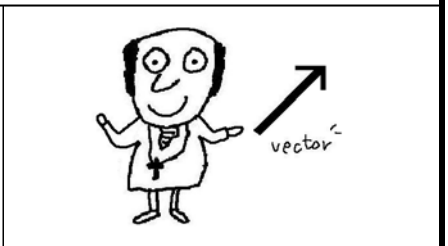
4



[5]為什麼忽然有箭頭？
不也忽然抽出兩把劍？

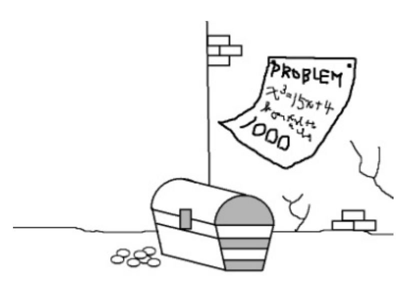
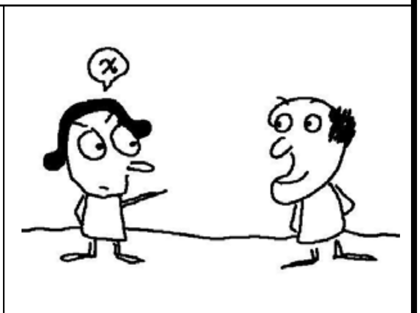
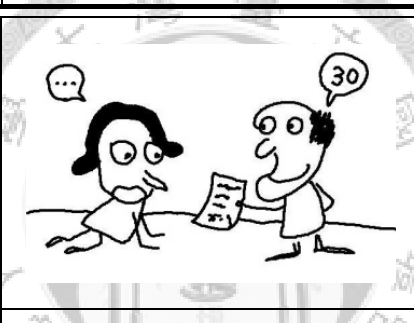


[6]拆拆拆，內積！



[7]有向量，
世界不一樣。

附錄：學生手邊的虛數單位故事

■ 漫畫 CP.A		
		
1 中世紀是賞金的年代， 任何發現都被藏起。	2 聰明如小飛， 三次公式解守口如瓶， 只告訴了小廢和小奈	3 絕對不能說的祕密， 絕對會被說出去。 小廢急著出名， 向大舌頭提出挑戰。
		
4「你們互出 30 題 一元三次方程式， 30 天後，我們見真章」	5 30 天過去了， 小廢一題也沒解出來， 大舌頭卻輕鬆解決。	6 一夕成名的大舌頭， 人們搶著認識， 阿卡是其中一個。

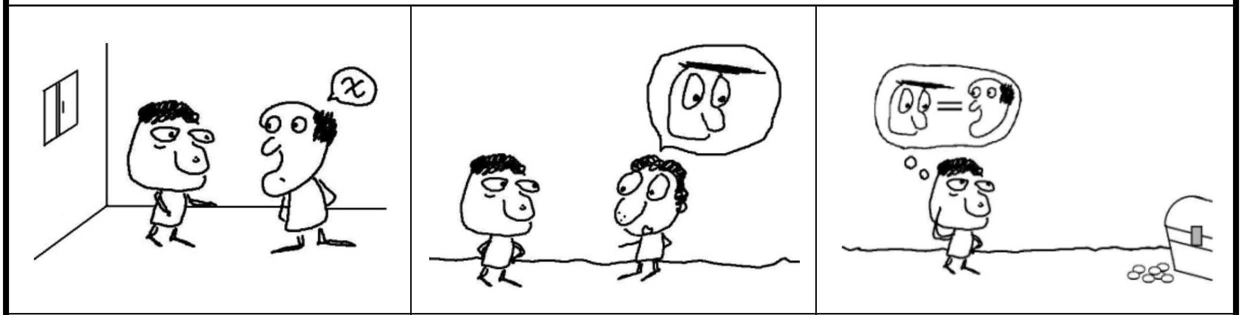
【數學家對虛數的看法】

柯西——我們可以完全鄙棄它，沒有也不致有任何遺憾，因為無人知道這個虛假的記號代表什麼，也無人知道應賦予它什麼意義。

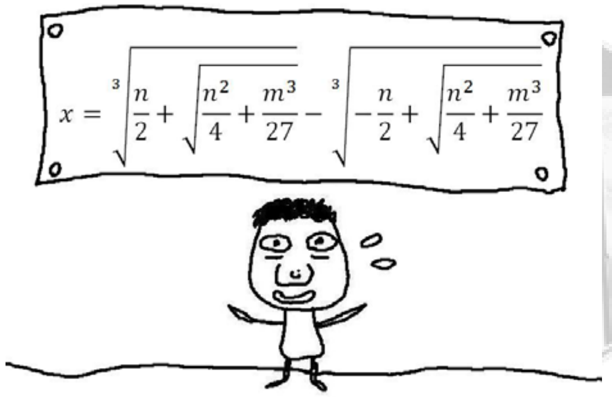
高斯——只要分數、負數與實數都已完全了解，那麼虛數是可以容忍的

萊布尼茲——聖靈在分析的奇觀中找到超凡的顯示，就是那理想世界的端兆，那個藉乎存在與不存在之間的兩棲物，那個我們稱之為虛幻的負一的平方根。

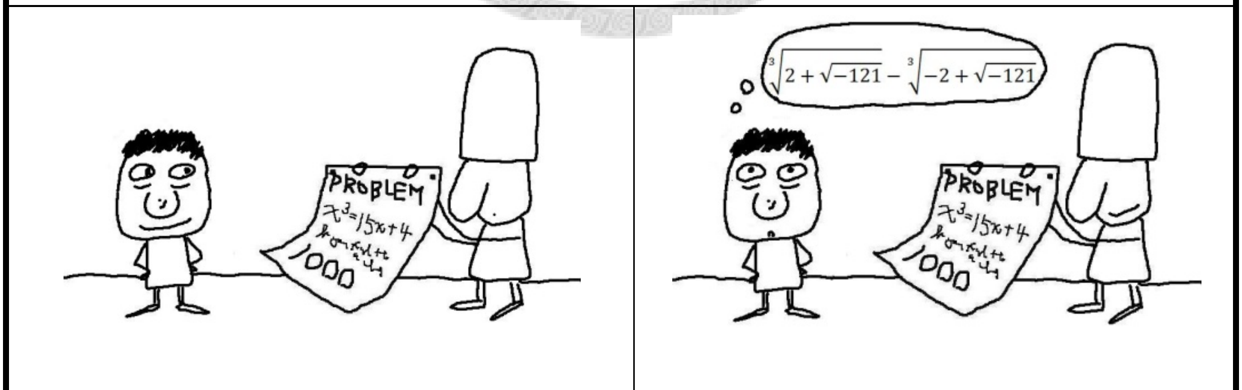
■ **漫畫 CP.B**



[1]在阿卡苦苦哀求下， 大舌頭勉強透漏祕訣。	[2]阿卡本來答應保密， 直到有一天， 他輾轉得知小飛的解法。	[3]阿卡反覆思量， 發現小飛和大舌頭解法 根本完全一樣！



[4]也不顧當初的承諾，
阿卡直接發表解法，
成為著名的**卡當公式**。

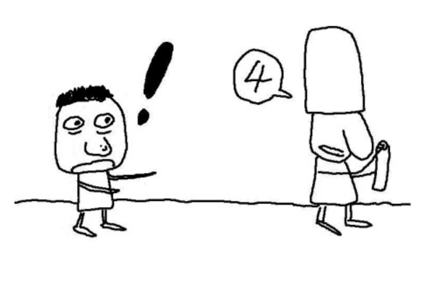


[5]「請你解這個。」 「簡單，看我套個公式！」	[6]根號裡是負的啊…「無解！」

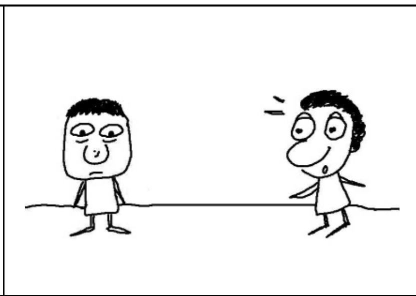
【**嘗試**】試計算 $(\sqrt{3}+1)^3$、$(\sqrt{3}-1)^3$，並以卡當公式解方程式 $x^3+6x=20$

【**嘗試**】試以卡當公式解方程式 $x^3-15x=4$

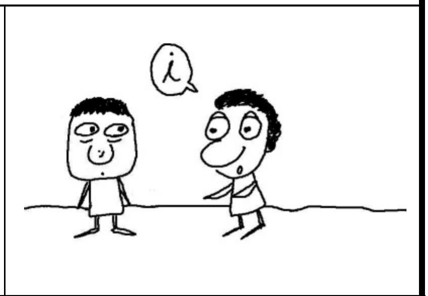
■ **漫畫 CP.C**



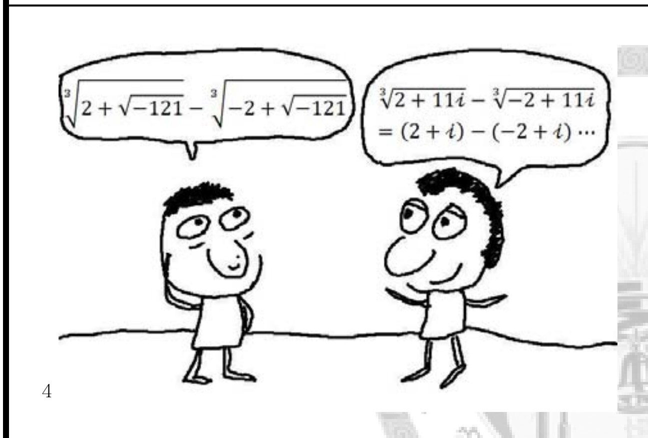
1「很抱歉，4 明顯是個解哼，卡當公式，名不符實。」

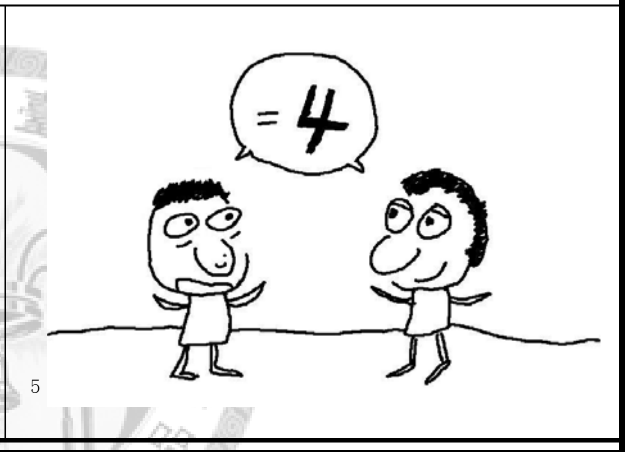


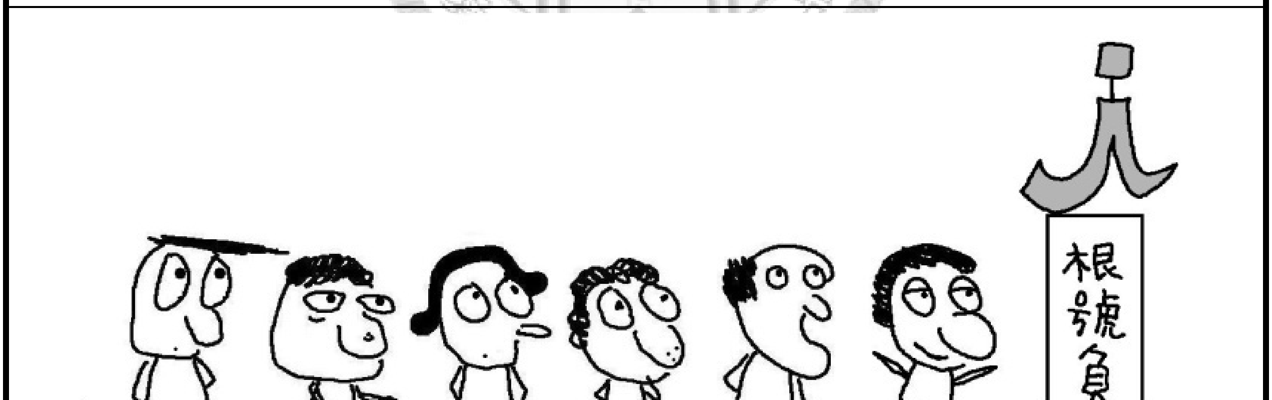
2 難過的阿卡，被好朋友阿邦瞧見



3「阿卡，接受**根號負一**吧」





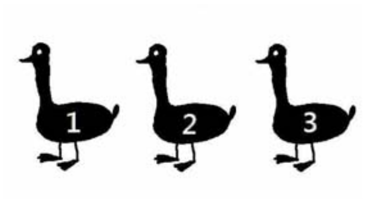


6 虛數…其強自佔入算數計算也，未嘗獲得世人之承諾，抑且與算學家之始願相違，但終以<u>**日積月累之功**</u>，<u>**流行日廣**</u>。　　　　～克萊因

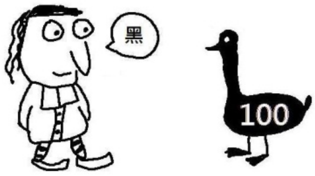
【嘗試】試計算 $(2+i)^3$、$(-2+i)^3$，並以卡當公式解方程式 $x^3-15x=4$

附錄：學生手邊的數學歸納法故事

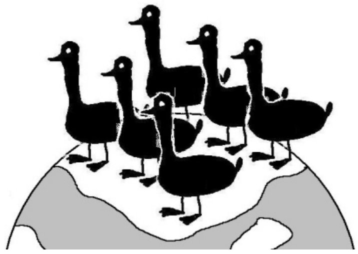
■ 漫畫 MI.A



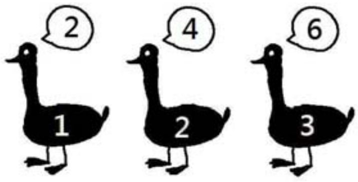
[1]阿瓦非常愛找規律，



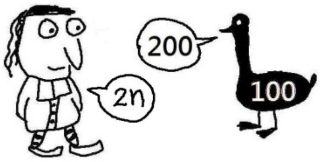
[2]彷彿找到規律，



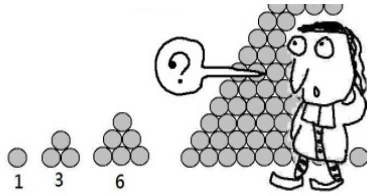
[3]就可以控制世界。



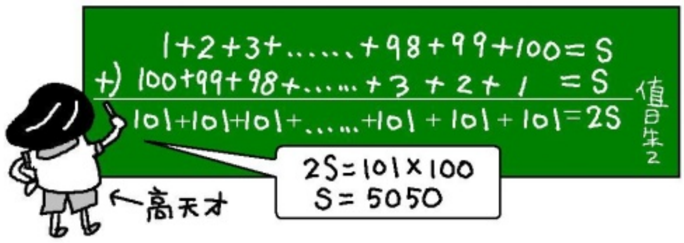
[4]大部分的時候，



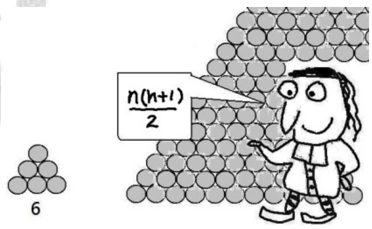
[5]阿瓦都能輕鬆解決；



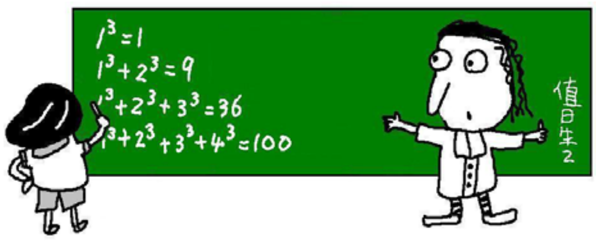
[6]但有時，阿瓦也會卡住，



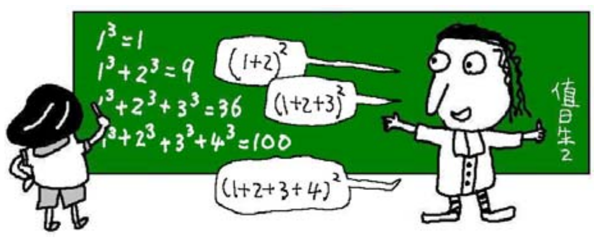
[7]幸好總是有高手神助，



[8]讓阿瓦可以另謀解答。

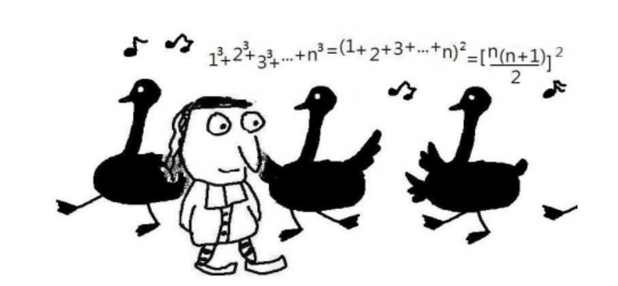


[9]一日，阿瓦如往常般到處觀察，

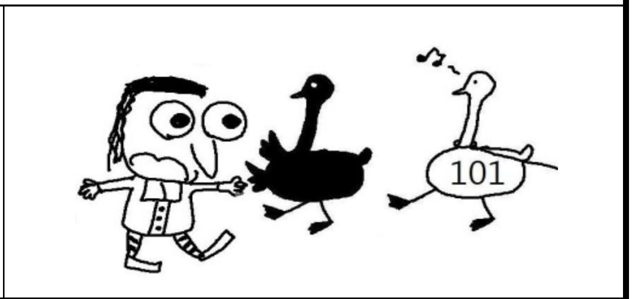


[10]找到了有趣的規律...

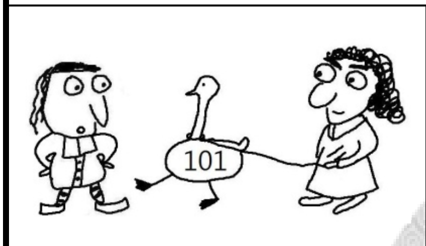
■ **漫畫 MI.B**



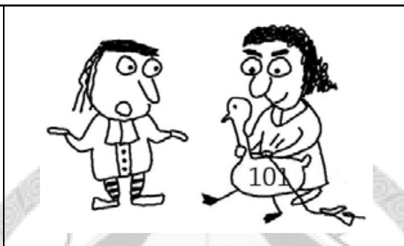
1 阿瓦愉快的散著步，美妙規律迴盪腦中



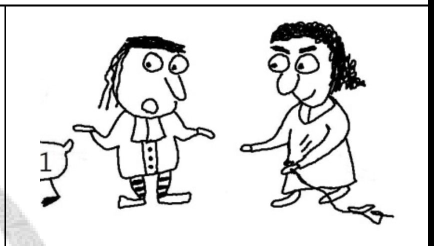
2 忽然，來了一隻，白•天•鵝。



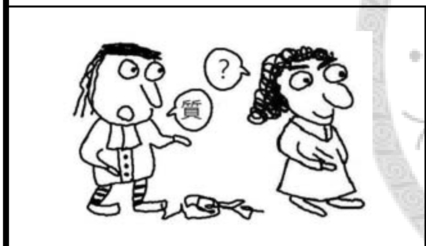
3「噢，阿巴，別鬧了」



4「我有憑有據…」

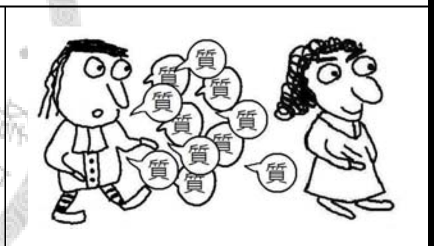


5「已經檢查快 30 項了…」

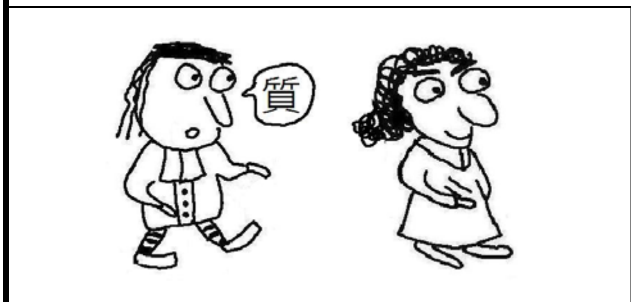


6「$1^2+1+41=$ ？」
「43。」

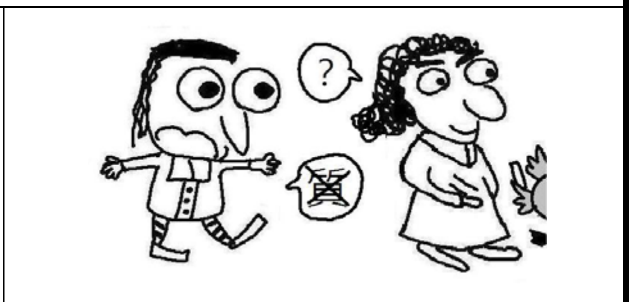
7「$2^2+2+41=$ ？」
「47，噢！都是質數！」



8「我再試…質數！…質數！…質數！…質數！…」

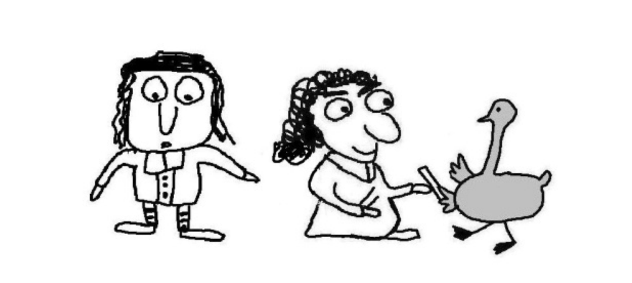


9「$39^2+39+41=1601$，質數！」
「噢，阿巴，夠了，它們都是質數！」



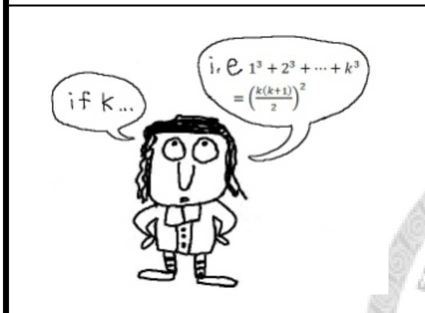
10「$40^2+40+41=$ ？」
「1681，當然是質…噢！噢！它不是！」

■ **漫畫 MI.C**

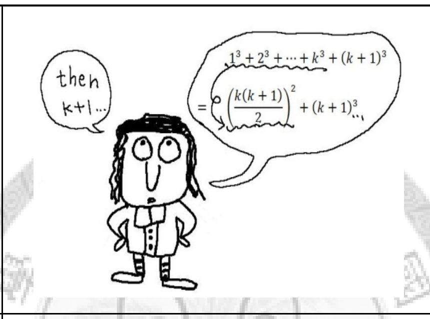


[1]「噢，好吧，但是它看起來真的應該是啊，我又不可能試完全部…」

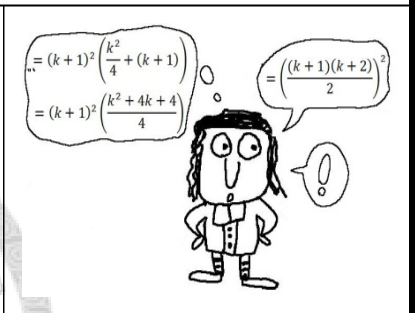
[2]「那是什麼？若 k 對，則 k+1…」



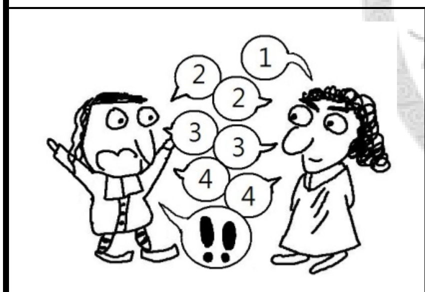
[3]「如果 k 對，」



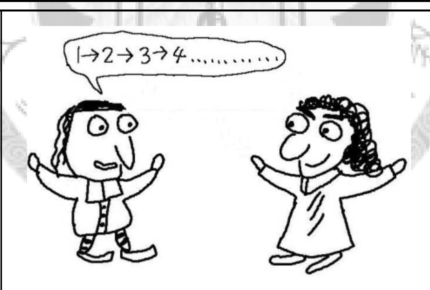
[4]「那 k+1，就是 k 的下一個…」



[5]「也會對！可是又怎樣？」



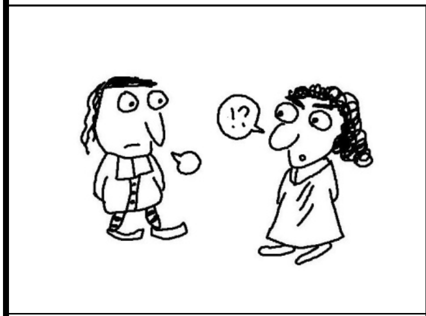
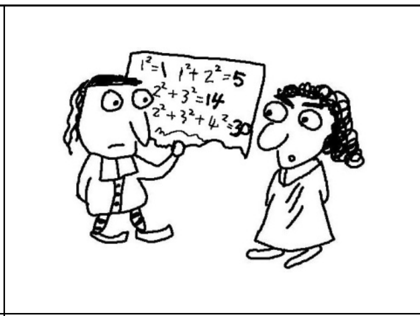
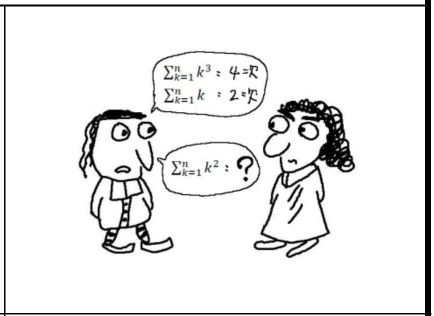
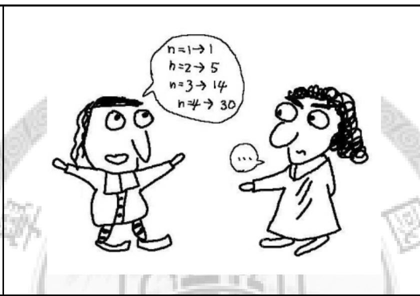
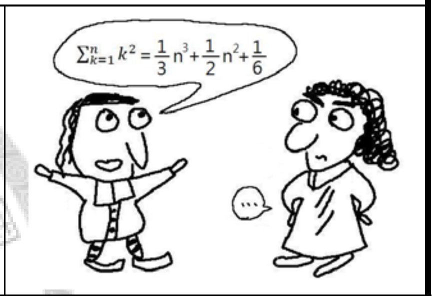
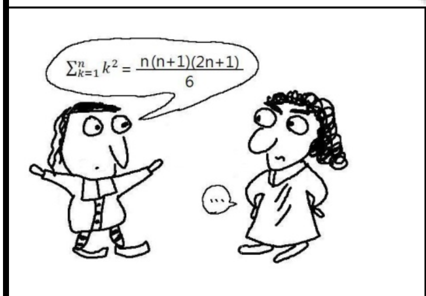
[6]「1 對…」
「下一個，2 就對！」
「2 對…」
「下一個，3 就對！噢！」



[7]「有 1 就有 2，有 2 就有 3，有 3 就有 4，有 4 就有…噢！數數相扣到永久！」

[8]「好聰明，有『數學』果然不一樣！」

【例題】試以數學歸納法證明 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$

■ 漫畫 MI.D		
		
1數學歸納法雖然厲害， 但阿瓦還是有嘆氣的日子。	2「找不到…」	3「奇怪，三次方都會了，一次方也簡單，怎麼獨獨卡在平方？」
		
4「啊！三次式！ 平方一定是三次式！」 「……」	5「an^3+bn^2+cn+d， 代入四項就可以解…」 「……」	6「噢，太棒了！解出來了！ 再化簡一下…」 「……」
		
7「$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ …怎麼了？」 「……」	8「噢，老毛病又犯了， 那怎麼辦？」	9「噢！數學歸納法！」

【習題】試以數學歸納法證明 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$