

國立台灣大學電機資訊學院電機工程學系



碩士論文

Department of Electrical Engineering

College of Electrical Engineering and Computer Science

National Taiwan University

Master Thesis

基於卡爾曼濾波器之合成時間尺度建立

Establishment of Composite Time Scale Based on Kalman Filter

謝政憲

Zheng-Xian Xie

指導教授：張帆人 博士 王立昇 博士

Advisors: Fan-Ren Chang, Ph.D. Li-Sheng Wang, Ph.D.

中華民國 102 年 7 月

July, 2013

國立臺灣大學碩士學位論文
口試委員會審定書



基於卡爾曼濾波器之合成時間尺度建立
Establishment of Composite Time Scale Based on Kalman Filter

本論文係謝政憲君（學號 R00921062）在國立臺灣大學電機工程學系完成之碩士學位論文，於民國 102 年 7 月 24 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明。

口試委員：
張帆人 (簽名)
卓大靖 (指導教授)
王伯祥
涂昆源

系主任 高淑娟 (簽名)

誌謝



本論文得以順利完成，首先感謝指導教授張帆人老師及王立昇老師的殷切教導。張老師治學嚴謹且和善親人，從張老師身上除了見識到做研究的思維，領悟最多的莫過於面對生活的態度與待人處事的道理，這對於我無疑是終身受用；王老師每週都會關心學生的進度，對於研究上的問題總是不吝指教及提供即時的修正。在此表達由衷的敬意與感謝。

感謝時間研究小組的得貴、逸群、炳輝學長與國家時頻研究室的林信嚴先生，因為有你們的專業指導及交流，使我的研究方向不至於走偏。同時感謝口試委員卓大靖教授、王伯群教授、涂昆源教授所給予的寶貴建議，使本論文的呈現更趨完善。

研究期間，特別感謝控制與決策實驗室中，伴我度過碩士生涯的好夥伴們：不時提供建議與關切的佑政學長、政昌學長、政達學長、沛宏學長；實驗室活動一手包辦的弘唯學長；一同熱血參與晨行人賭注的榮輝學長、舜丞學長、鈺婷學姊及中煒學弟；時常給予鼓勵與協助的佑榮學長、致豪學長、宜璋學長、椀潔學姐、明儒學長、懿瑄學姐、兆慶學弟、泓捷學弟與堂弟松晏、實驗室的開心果—志陽學弟及勁璋學弟；滿懷革命情感互相砥礪的同窗庭璋、培耕及雨弘。亦感謝應力所的三位同窗—澤民、敏琦及進業，每週與你們的討論使我增廣見聞。與諸多好夥伴們相處，我的碩士生活可謂多采多姿。

最後，非常感謝家人對我的提攜、付出與支持，使我能夠無後顧之憂地完成學業。感謝好友的陪伴，給我許多鼓勵與幫助。本論文的完成，意味著我的碩士生涯即將畫下休止符，僅以此微薄的研究成果與所有關心我的人分享。

摘要



時間，如影隨形地出現在你我生活之間。於日常生活中，所有與時間相關之應用皆需計時。一個相當精確的時鐘可作為時間尺度(Time Scale)，其如同一把尺，吾人可藉由比較以得到待測時鐘與其之相對時間差。本論文採用一時鐘集合，其內部皆為同樣等級之振盪器，藉由演算生成一虛擬時鐘，並將其作為時間尺度用以提供各時鐘參照與計時。

精確時間協定(Precision Time Protocol, PTP)為 IEEE 1588 標準所定義，其適用於區域網路系統各節點之即時時間同步。時間伺服器(Time Servo)為 PTP 之核心，其將透過網路訊息交換所獲取的時間戳記資料，加以運算得到從時鐘(Slave Clock)相對於主時鐘(Master Clock)之時間偏移量，並可進一步藉由控制法則讓從時鐘頻率不斷地微幅調整。

本論文於自行建立之區域網路下，採用精確時間協定常駐程式(Precision Time Protocol daemon, PTPd)開放原始碼，量測各從時鐘節點與主時鐘節點之時間偏移量，並透過卡爾曼濾波器估測其相對於主時鐘節點之實際相位，再藉由加權平均的演算，得知於過去運行量測相位程序時所對應之合成時間尺度與主時鐘節點的相位關係。在此系統架構下，透過修正型亞倫方差(Modified Allan Deviation)進行從時鐘節點及合成時間尺度之頻率穩定度分析，並模擬各從時鐘節點與此合成時鐘之同步行為。相較於時鐘集合內任一實體時鐘，透過演算所得之合成時間尺度具有長期穩定度及可靠度較佳之優點。

關鍵詞：卡爾曼濾波器、精確時間協定、時間同步

Abstract



In our life, time follows us wherever we go. All time-related applications require a timing mechanism. A fairly accurate clock can be used as a time scale. It's like a ruler, by comparison, we can obtain the relative time difference between it and any other clock. In this paper, we use a set of clocks to generate a virtual composite clock, and set this composite clock as a time scale for timing.

Precision Time Protocol (PTP) is defined in the IEEE 1588 Standard. It applies to a local-area network system for real-time time synchronization between two nodes. The time servo is the heart of PTP. Through calculation, we can get the time offsets between the slave clocks and the master clock from the timestamp data, which is obtained by message exchanging over the network. Furthermore, we can use these offset data as the input of the controller to adjust the slave clock frequency such that the frequency of the slave clocks and that of the master clock are the same.

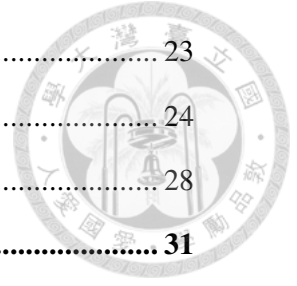
In this paper, the Precision Time Protocol daemon (PTPd) is used to measure the time offsets between the master clock and each slave clock over a network we established. Then we utilize the Kalman filter to estimate the time offset of each slave clock and generate the composite time scale. Within a four-node network, Modified Allan Deviation is used to analyze the frequency stability of each clock node and the composite time scale. Also, we simulate the time-synchronization behavior between each clock node and the composite time scale. We find that the reliability and long-term frequency stability of the composite time scale is superior to those of any individual clock in the ensemble.

Keywords: Kalman Filter, Precision Time Protocol, Time Synchronization



目錄

摘要.....	i
Abstract	ii
目錄.....	iii
圖目錄.....	v
表目錄.....	vii
第一章 序論.....	1
1.1 研究動機.....	1
1.2 研究方向.....	1
1.3 論文架構.....	2
第二章 背景知識.....	4
2.1 時間訊號的數學模型	4
2.1.1 時間訊號的數學表示式	4
2.1.2 時鐘的狀態方程式.....	8
2.2 雜訊的種類及性質	11
2.2.1 白色雜訊	12
2.2.2 閃爍雜訊	13
2.2.3 隨機漫步雜訊	14
2.3 頻率的穩定度.....	15
2.3.1 標準偏差	16
2.3.2 亞倫偏差	16
2.3.3 修正型亞倫偏差.....	19
2.4 合成時間尺度的原理	21
2.5 IEEE 1588 標準	22



2.5.1	精確時間協定(PTP)	23
2.5.2	精確時間協定之同步原理	24
2.5.3	精確時間協定常駐程式(PTPd).....	28
第三章	時鐘集合之相位估測	31
3.1	卡爾曼濾波器	31
3.1.1	卡爾曼濾波器之演算原理及運算式.....	31
3.1.2	於時頻應用之限制.....	33
3.2	精確時間協定常駐程式下之相位資料量測.....	33
3.2.1	實驗與系統環境.....	33
3.2.2	實驗結果	36
3.3	基於卡爾曼濾波器之相位估測	37
3.3.1	時鐘集合之狀態方程式	37
3.3.2	時鐘相位之量測方程式	40
3.3.3	採用卡爾曼濾波器之時鐘相位估測結果	41
第四章	合成時間尺度之建立及分析.....	47
4.1	合成時間尺度之運算模型.....	47
4.2	基於未校正之合成時間尺度追溯	48
4.3	基於校正時鐘之合成時間尺度生成模擬.....	50
4.4	穩定度分析及比較	52
第五章	結論與未來展望	55
5.1	結論	55
5.2	未來展望.....	55
	參考文獻.....	57



圖目錄

圖 2.1	兩時鐘間之時間差值量測.....	7
圖 2.2	白色雜訊之功率頻譜密度[6].....	13
圖 2.3	閃爍雜訊之功率頻譜密度[6].....	14
圖 2.4	隨機漫步雜訊之功率頻譜密度[6].....	15
圖 2.5	時鐘雜訊之片段線性功率頻譜.....	16
圖 2.6	時鐘雜訊之片段線性亞倫偏差.....	18
圖 2.7	各類時鐘之頻率穩定度.....	19
圖 2.8	時鐘雜訊之片段線性修正型亞倫偏差.....	20
圖 2.9	PTP 之主從式架構示意圖.....	23
圖 2.10	PTP 之同步訊息及時間資訊交換示意圖[11].....	25
圖 2.11	PTPd 原始碼之系統架構方塊圖[12].....	28
圖 2.12	PTPd 之時鐘伺服架構方塊圖[12].....	29
圖 3.1	卡爾曼濾波器之演算概念.....	31
圖 3.2	實驗環境架構.....	34
圖 3.3	未校正之從時鐘節點相位量測資料.....	36
圖 3.4	未校正之從時鐘節點相位估測結果.....	42
圖 3.5	未校正之從時鐘節點估測與量測相位時間差.....	43
圖 3.6	模擬之未校正時鐘相位量測資料.....	44
圖 3.7	模擬之未校正時鐘相位估測結果.....	44
圖 3.8	模擬之未校正時鐘估測與量測相位時間差.....	45
圖 4.1	未校正時鐘所產生之合成時間尺度相位資料.....	47
圖 4.2	未校正從時鐘與其生成之合成時間尺度 T_C 的相位資料.....	49
圖 4.3	模擬之校正時鐘相位量測資料.....	50
圖 4.4	模擬之校正時鐘相位估測結果.....	51
圖 4.5	校正時鐘所生成之合成時間尺度模擬結果.....	52

圖 4.6	未校正時鐘之頻率穩定度.....	52
圖 4.7	未校正時鐘所生成之合成時間尺度的頻率穩定度.....	53
圖 4.8	校正時鐘所生成之合成時間尺度的頻率穩定度.....	54





表目錄

表 2.1	各類型雜訊之冪次法則指數.....	12
表 2.2	雜訊型態與亞倫偏差之對數斜率關係.....	18
表 2.3	雜訊型態與修正型亞倫偏差之對數斜率關係.....	20



第一章 序論

1.1 研究動機

隨著科技的演進，許多領域的應用對於時間精確度之需求亦越加嚴謹，毫秒(Millisecond, ms)等級的精確度或許已無法滿足現代新興應用之規格，其所追求的微秒(Microsecond, μ s)甚至奈秒(Nanosecond, ns)等級之精度至今仍是時頻領域學者所致力研究的方向。

然而，在所有與時間量測有著直接或者間接關係的應用中，時間尺度(Time Scale)為時間量測之參考基準，其精確度將影響整體系統性能。所幸，原子鐘的誕生，提供了人們相當精確的時間尺度用以計時。拜其之賜，吾人對於秒的量測精確度已優於其它的度量單位。但因考量到成本，原子鐘較不適合作為一般用途之時鐘，現今常用的計時時鐘多為石英振盪器，其不同於原子鐘，係利用壓電效應產生固定的振盪頻率，故頻率穩定度相對於原子鐘較不理想，須繁複地作校正。

事實上，時間尺度可由一個別時鐘或是時鐘群組來產生，後者稱為合成時間尺度(Composite Time Scale)或是集合時間尺度(Ensemble Time Scale)，其穩定度及強健性皆優於群組內任一實體時鐘[1]。因此，若能以此概念藉由一組精度較差之低階振盪器來產生合成時間尺度，應能縮短其與高階時鐘之性能差異，同時亦可降低成本。更進一步地，吾人便可利用此優異的合成時間尺度作為時間基準，實現區域性的時間同步。

1.2 研究方向

基於實驗方便性之考量，本論文使用開放原始碼—精確時間協定常駐程式(Precision Time Protocol daemon, PTPd)取得時鐘群組內任二時鐘之間的時間差，且採用卡爾曼濾波器(Kalman Filter)實現各時鐘之時間偏移量估測。藉由上述估測資

訊，產生合成時間尺度並估算其與參考時鐘之時間差。再者，吾人以軟體模擬校正時鐘即時產生合成時間尺度之行為，最後針對各時鐘作頻率穩定度分析以評估其性能。



1.3 論文架構

本論文之架構共分為六章，茲將各章之要點簡述如下：

第一章 序論

本章簡述本論文之研究動機、研究方向與論文架構。

第二章 背景知識

本章首先針對時間訊號的定義與數學模型作初步的論述，其中包含了影響時間訊號的雜訊種類及性質，以期模擬之訊號結果符合實際量測情形。接著加以說明時鐘的頻率穩定度與合成時間尺度的概念及原理。最後對於 IEEE 1588 標準所定義的精確時間協定 PTP 與開放原始碼 PTPd 作粗略的介紹。

第三章 時鐘集合之相位估測

由於本論文採用卡爾曼濾波器以估測時鐘之相位，故率先介紹卡爾曼濾波器的演算原理及數學方程式。隨後，此章亦說明如何透過 PTPd 取得各時鐘節點之相位量測資料以作為卡爾曼濾波器之輸入。最後將估測之相位對於實際量測值作對照及分析。

第四章 合成時間尺度之建立及分析

本章首先對於合成時間尺度的數學運算模型作進一步地介紹。接著將第三章實驗所得到的相位資料作後處理運算，以追溯於過去實驗期間所對應之合成時間

尺度的相位資訊。相較於前述未校正時鐘之相位後處理運算，吾人亦模擬校正時鐘即時同步與產生合成時間尺度之行為。最後分析時鐘群組內各實體時鐘與所產生之合成時間尺度的頻率穩定度並作深入的探討。



第五章 結論與未來展望

本章為本論文研究結果之總結，其中指出藉由卡爾曼濾波器之相位估測，吾人可產生一虛擬合成時間尺度，其穩定度及可靠度皆較群組內任一實體時鐘為佳。且透過模擬及實驗結果比較，吾人亦發現若合成時間尺度係以校正時鐘所生成，則頻率穩定度將大幅提升。



第二章 背景知識

在日常生活周遭，舉凡氣候變化、年齡歲月、物理現象，乃至於社會行為，皆與時間有著密不可分的關係。因此自有人類文明以來，時間便一直是人們所研究的對象。

在古文明時期，人們透過觀察天體以確定時間、日期和季節，因其運行具有週期性。隨後，人類利用此規律的週期特性發明了各種裝置作為時間尺度，用以計時及報時。從早期的水鐘、沙漏、天文鐘至近代的石英振盪器及原子鐘，皆為人類文明下的產物。

秒是時間的基本單位，其定義為鈉 ^{133}Na 原子於基態時的兩個超精細能階間躍遷所對應輻射經過 9,192,631,770 個週期的持續時間，為七個國際單位制(SI)之一。然而，即便是以最準確的原子鐘作為時間尺度，其依舊會隨著時間的流逝累積著時間偏移量(或稱相位)。因此，如何補償此偏移量以致時鐘能維持固定等級之精度及穩定度，即為時頻研究者的重要課題。

2.1 時間訊號的數學模型

2.1.1 時間訊號的數學表示式

事實上，時鐘即為一產生時間訊號的頻率裝置。在理想情況之下，其所產生的時間訊號為一正弦波，其可表示為

$$V(t) = V_0 \sin(2\pi f_0 t) \quad (2.1)$$

其中 V_0 為振幅， f_0 為時鐘標稱頻率(Nominal Frequency)。將(2.1)式改寫為

$$V(t) = V_0 \sin(2\pi f_0 h_0(t)) \quad (2.2)$$



其中

$$h_0(t) = t \quad (2.3)$$

為理想時鐘讀值(Ideal Clock Reading)，亦即理想時鐘所顯示的時間。實際上，時間訊號的振幅及相位皆會受隨機擾動所影響，因此實際的時鐘振盪模型可表示為

$$V(t) = (V_0 + \varepsilon(t)) \sin(2\pi f_0 t + \varphi(t)) \quad (2.4)$$

其中 $\varepsilon(t)$ 為振幅擾動(Amplitude Fluctuation)， $\varphi(t)$ 為相位擾動(Phase Fluctuation)。

以時間的觀點來看，將(2.4)式改寫為

$$V(t) = (V_0 + \varepsilon(t)) \sin(2\pi f_0 h(t)) \quad (2.5)$$

式中 $h(t)$ 為時鐘讀值，將其與(2.4)式比較，可得

$$h(t) = t + \frac{1}{2\pi f_0} \varphi(t) \quad (2.6)$$

藉由(2.3)式，可將上式改寫為

$$h(t) = h_0(t) + x(t) \quad (2.7)$$

由(2.7)式可知，時鐘讀值 $h(t)$ 為理想時鐘讀值 $h_0(t)$ 與一時間偏移量(Time Offset) $x(t)$ 之和，其中 $x(t)$ 為

$$x(t) = \frac{1}{2\pi f_0} \varphi(t) \quad (2.8)$$

其表示真實時鐘相對於理想參考時鐘之時間偏差值，於時頻領域亦稱作相位(Phase)[2]。因其由相位擾動所產生，且為了與獨立時間變數 t 作區隔，故以「相位」稱之。由於吾人所關注的焦點為時頻之變化，故在(2.4)式中通常可忽略振幅擾動 $\varepsilon(t)$ 的部分，但不可忽略相位擾動 $\varphi(t)$ 所造成的影響。



從相角的觀點出發，吾人亦可將(2.4)式改寫為

$$V(t) = (V_0 + \varepsilon(t)) \sin(\theta(t)) \quad (2.9)$$

其中 $\theta(t)$ 為時鐘相角，與(2.4)式比較，其可表示為

$$\theta(t) = 2\pi f_0 t + \varphi(t) \quad (2.10)$$

將(2.10)式等號兩邊微分，可得角速度公式

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t) = 2\pi f(t) = 2\pi f_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (2.11)$$

因此可得時鐘的瞬時頻率 $f(t)$ 為

$$f(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (2.12)$$

為了避免時鐘的瞬時頻率 $f(t)$ 與時鐘標稱頻率 f_0 區隔，及推導其與相位 $x(t)$ 之關係，吾人定義正規化(Normalized)的頻率偏差值 $y(t)$ ，稱為分數頻率(Fractional Frequency)，其可表示為

$$y(t) = \frac{f(t) - f_0}{f_0} \quad (2.13)$$

將(2.12)式代入(2.13)式，並與(2.8)式比較，可得以下之關係

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (2.14)$$

亦即分數頻率 $y(t)$ 為相位 $x(t)$ 經由微分後所得之導函數。上述之相位 $x(t)$ 與分數頻率 $y(t)$ 通稱為時鐘偏差(Clock Deviation)，為分析時鐘時頻穩定度時所需之基本要素。

在實際量測時，吾人無法測得任一實體(Real)時鐘相對於理想時鐘之相位 $x(t)$ (即時間偏移量)，但能測得兩實體時鐘之間的時間差。假定有兩個理想時鐘，



其皆具有同樣標稱頻率 f_0 與訊號振幅 V_0 ，但不同於固定的相位偏移量，則個別對應之訊號可根據(2.4)式分別表示為

$$V_1(t) = V_0 \sin(2\pi f_0 t + \varphi_1) \quad (2.15)$$

及

$$V_2(t) = V_0 \sin(2\pi f_0 t + \varphi_2) \quad (2.16)$$

其中 φ_1 及 φ_2 為固定之相位偏移量。如圖 2.1，藉由相位比較器，吾人可以比較兩個訊號的正零交越(Positive Zero Crossing)時間，而測得時間間距(Time Interval) Δt 。

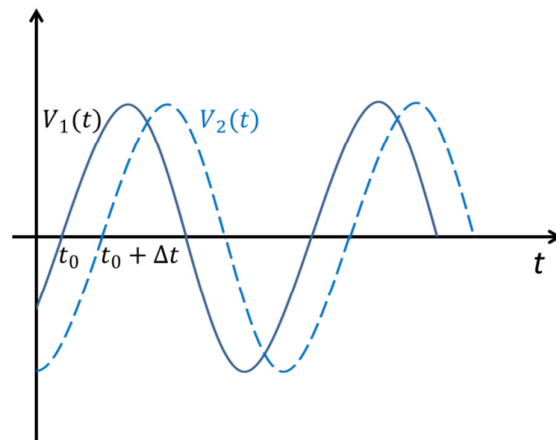


圖 2.1 兩時鐘間之時間差值量測

$V_1(t)$ 及 $V_2(t)$ 的正零交越點分別發生在

$$t_0 = -\frac{\varphi_1}{2\pi f_0} \quad (2.17)$$

及

$$t_0 + \Delta t = -\frac{\varphi_2}{2\pi f_0} \quad (2.18)$$

兩個時間點，從(2.8)式可知

$$x_1 = \frac{\varphi_1}{2\pi f_0} \quad (2.19)$$

及

$$x_2 = \frac{\varphi_2}{2\pi f_0} \quad (2.20)$$

將(2.18)式減去(2.17)式，並將(2.19)-(2.20)式代入，可得時間間距

$$\Delta t = x_1 - x_2 \quad (2.21)$$

於真實狀況下，若 $h_i(t)$ 及 $h_j(t)$ (參閱(2.5)式與(2.6式)) 為具有 N 個時鐘之時鐘群組內的兩個時鐘讀值，則兩時鐘間的時間差值(Clock Difference)定義為

$$x_{ij}(t) = h_i(t) - h_j(t), \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (2.22)$$

由(2.7)可改寫為

$$x_{ij}(t) = x_i(t) - x_j(t) \quad (2.23)$$

因此，(2.23)式所示之時間差值 $x_{ij}(t)$ 即為(2.21)式所述之時間間距 Δt 。

2.1.2 時鐘的狀態方程式

在作時鐘間之時頻比較及穩定度分析時，必須以一參考時鐘作為時間參考點 (Time Reference) 測量待測時鐘相對於該參考時鐘之相位。假設參考時鐘之雜訊遠小於待測時鐘之雜訊，則待測時鐘相對於參考時鐘之相位 $x(t)$ 為[3]

$$x(t) = x_0 + y_0 t + \frac{d_0}{2} t^2 + \frac{\phi(t)}{2\pi f_{nom}} \quad (2.24)$$

其中





x_0 ：待測時鐘相對於參考時鐘之初始相位

y_0 ：待測時鐘相對於參考時鐘之初始分數頻率

d_0 ：待測時鐘之初始頻率飄移量(Frequency Drift)

$\phi(t)$ ：待測時鐘之隨機相位偏差(Random Phase Deviation)

f_{nom} ：參考時鐘之標稱頻率

由(2.24)式，吾人可得時鐘的狀態方程式，其為一隨機微分方程(Random Differential Equation)

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{X}(t) + \xi(t) \quad (2.25)$$

其中系統矩陣(System Matrix) \mathbf{F} 為

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$\mathbf{X}(t)$ 為狀態向量(State Vector)

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ d(t) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

狀態向量包含三個元素： $x(t)$ 與 $y(t)$ 分別為待測時鐘相對於參考時鐘之相位及分數頻率， $d(t)$ 則為待測時鐘之頻率飄移量。其初始狀態為

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t_0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ d_0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

此外，吾人定義



$$\xi(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

為一白色高斯雜訊 (White Gaussian Noise) 向量，當中各元素的自相關 (Autocorrelation) 函數為

$$r_{\xi_k}(t_1, t_2) = E[\xi_k(t_1)\xi_k(t_2)] = q_k \delta(t_1 - t_2), \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.30)$$

由(2.30)式可知， $\xi(t)$ 的自相關矩陣為

$$\mathbf{r}_{\xi}(t_1, t_2) = E[\xi(t_1)\xi^T(t_2)] = \mathbf{Q}\delta(t_1 - t_2) \quad (2.31)$$

其中 \mathbf{Q} 為對角矩陣

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

若對(2.25)式求解，可得

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t - t_0)\mathbf{X}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - t')\xi(t')dt' \quad (2.33)$$

其中 t_0 為初始時間，且

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{F}t} = \mathbf{I} + \mathbf{F}t + \frac{1}{2}\mathbf{F}^2t^2 = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

為狀態轉移矩陣(State Transition Matrix)。將(2.33)式離散化，可得

$$\mathbf{X}(t_n) = \Phi(\tau_0)\mathbf{X}(t_{n-1}) + \boldsymbol{\eta}(t_{n-1}) \quad (2.35)$$

其中 τ_0 為取樣週期(Sampling Period)，其與取樣時間 t_n 的關係為 $t_n = n\tau_0$ ，當中



$n = 0, 1, 2, \dots$ 。而

$$\boldsymbol{\eta}(t_{n-1}) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \boldsymbol{\Phi}(t-t') \boldsymbol{\xi}(t') dt' \quad (2.36)$$

為一高斯隨機變數(Gaussian Random Variable)向量，其均值为零且共變異數矩陣(Covariance Matrix)為

$$\mathbf{C}_{\boldsymbol{\eta}} = E[(\boldsymbol{\eta}(t_{n-1}) - E[\boldsymbol{\eta}(t_{n-1})])(\boldsymbol{\eta}(t_{n-1}) - E[\boldsymbol{\eta}(t_{n-1})])^T] \quad (2.37)$$

$$= \int_{t_{n-1}}^{t_n} \boldsymbol{\Phi}(t_n - t') \mathbf{Q} \boldsymbol{\Phi}^T(t_n - t') dt' \quad (2.38)$$

將 $\boldsymbol{\Phi}$ 由(2.34)式代入(2.38)式，可得[4]

$$\mathbf{C}_{\boldsymbol{\eta}} = \begin{bmatrix} q_1 \tau_0 + \frac{1}{3} q_2 \tau_0^3 + \frac{1}{20} q_3 \tau_0^5 & \frac{1}{2} q_2 \tau_0^2 + \frac{1}{8} q_3 \tau_0^4 & \frac{1}{6} q_3 \tau_0^3 \\ \frac{1}{2} q_2 \tau_0^2 + \frac{1}{8} q_3 \tau_0^4 & q_2 \tau_0 + \frac{1}{3} q_3 \tau_0^3 & \frac{1}{2} q_3 \tau_0^2 \\ \frac{1}{6} q_3 \tau_0^3 & \frac{1}{2} q_3 \tau_0^2 & q_3 \tau_0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

2.2 雜訊的種類及性質

事實上，各種頻率裝置所輸出的頻率包含了非穩態成分，其通常為五大類型之雜訊組合，分別為白色調相雜訊(White Phase Modulation, WPM)、閃爍調相雜訊(Flicker Phase Modulation, FPM)、白色調頻雜訊(White Frequency Modulation, WFM)、閃爍調頻雜訊(Flicker Frequency Modulation, FFM)以及隨機漫步調頻雜訊(Random-Walk Frequency Modulation, RWFM)。

雜訊雖作為隨機訊號，但仍具有統計學上的特徵屬性。功率頻譜密度(Power Spectral Density)即是雜訊的特徵之一，吾人可藉此區分不同的雜訊類型。上述五種類型之雜訊，其功率頻譜密度正比於頻率 f 的 α 次方，亦即 $P_y(f) \propto f^\alpha$ ，因此它們皆屬於冪次法則雜訊(Power-Law Noise)[2]，其中 α 為冪次法則指數。下表即為

各類型雜訊與冪次法則指數之對照。



雜訊型態	α
白色調相雜訊(WPM)	2
閃爍調相雜訊(FPM)	1
白色調頻雜訊(WFM)	0
閃爍調頻雜訊(FFM)	-1
隨機漫步調頻雜訊(RWFM)	-2

表 2.1 各類型雜訊之冪次法則指數

在雜訊的分類方法中，通常會針對不同的功率頻譜密度給予不同的色彩謂稱，其乃將頻域中之雜訊功率頻譜密度及光波訊號作形式上的比較而得。

2.2.1 白色雜訊

白色雜訊(White Noise)係在單位頻寬下功率頻譜密度為固定常數之隨機訊號或隨機過程[5]，亦即

$$P_{white}(f) = P_0 \quad (2.40)$$

此訊號於各頻段的功率皆相同，如圖 2.2。由於其頻譜特性如同白光，其係由所有頻色的單色光均勻混合而成，故稱之為白色雜訊；相反地，其他不具有此性質之雜訊稱為有色雜訊。

白色雜訊 $n(t)$ 具有兩個主要的統計特性：

1. 其數學期望值為 0：



$$E[n(t)] = 0 \quad (2.41)$$

2. 其自相關函數為一 Dirac delta 函數：

$$r_{nn}(t) = E[n(t)n(t-\tau)] = \delta(\tau) \quad (2.42)$$

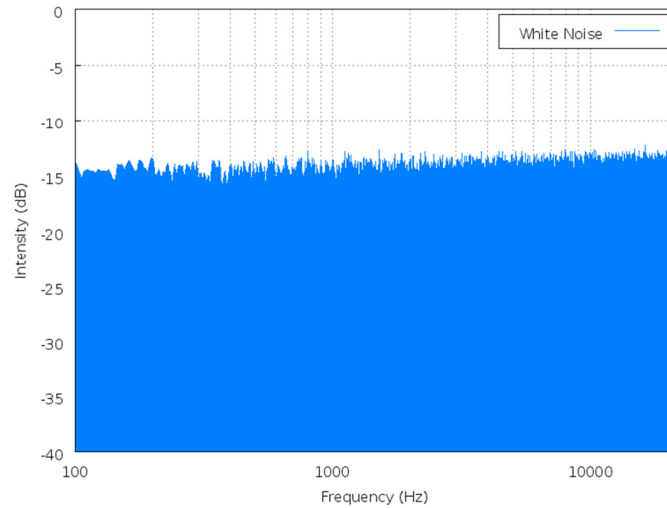


圖 2.2 白色雜訊之功率頻譜密度[6]

2.2.2 閃爍雜訊

閃爍雜訊(Flicker Noise)為一種電子雜訊，係由電子材料所產生之現象，其具有功率頻譜密度與頻率成反比的特性，亦即

$$P_{flicker}(f) \propto \frac{1}{f} \quad (2.43)$$

在有限頻寬內，此訊號以 -3dB/Octave 的趨勢衰減，如圖 2.3。

由於閃爍雜訊的功率頻譜密度與粉色可見光相同，故有時亦被稱為粉色雜訊(Pink Noise)。

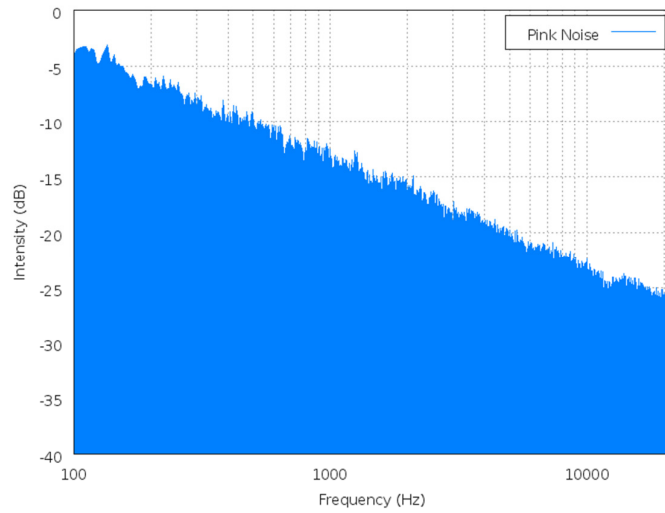


圖 2.3 閃爍雜訊之功率頻譜密度[6]

2.2.3 隨機漫步雜訊

隨機漫步雜訊(Random-Walk Noise)為一功率頻譜密度與頻率平方成反比之隨機訊號或隨機過程，亦即

$$P_{random-walk}(f) \propto \frac{1}{f^2} \quad (2.44)$$

此訊號隨著頻率增加呈-6dB/Octave 衰減，如圖 2.4。

因此種雜訊可透過針對布朗運動(Brownian Motion)運行演算法得到，故有時以布朗雜訊(Brown Noise)稱之。因上述之閃爍雜訊正比於 $1/f$ ，其介於 $1/f^2$ 與 $1/f^0$ 之間，而粉紅亦介於紅色與白色之間，故以顏色表示時，此訊號被稱作紅色雜訊(Red Noise)。

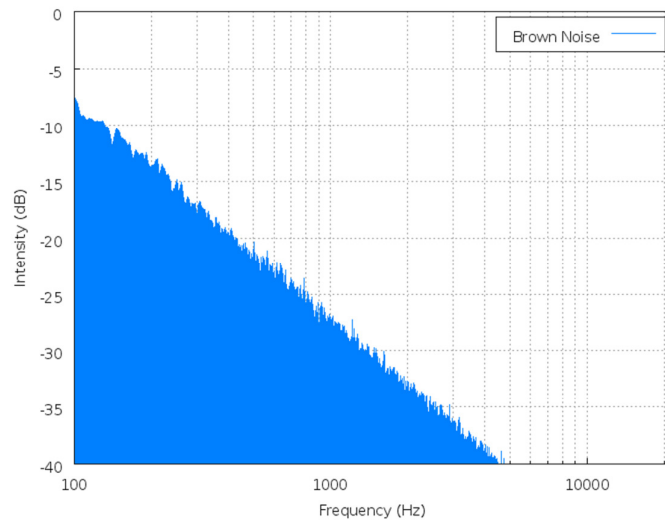


圖 2.4 隨機漫步雜訊之功率頻譜密度[6]

2.3 頻率的穩定度

由前一節的介紹，吾人可知所有冪次法則雜訊的功率頻譜密度可以表示為

$$P_y(f) = k_p f^\alpha \quad (2.45)$$

其中 k_p 為比例常數(Proportional Constant)。將(2.45)式等號兩邊以對數型式來表示，可為

$$\log P_y(f) = \log k_p + \alpha \log f \quad (2.46)$$

一般來說，時鐘偏差源自上述之冪次法則雜訊，其片段線性(Piecewise-Linear)的功率頻譜如圖 2.2 所示。吾人可藉由觀察時鐘訊號的功率頻譜斜率來辨別影響時鐘的雜訊類型，因此功率頻譜可用以評估時鐘的性能及判定造成偏差之異常行為。然而，相較於前述之頻域分析法，時頻研究者更偏好於時域來分析時鐘的穩定度，此方法是基於亞倫偏差(Allan Deviation)，如此一來可利用量測所得到的時間差直接分析，而不須估測訊號於頻域之功率。

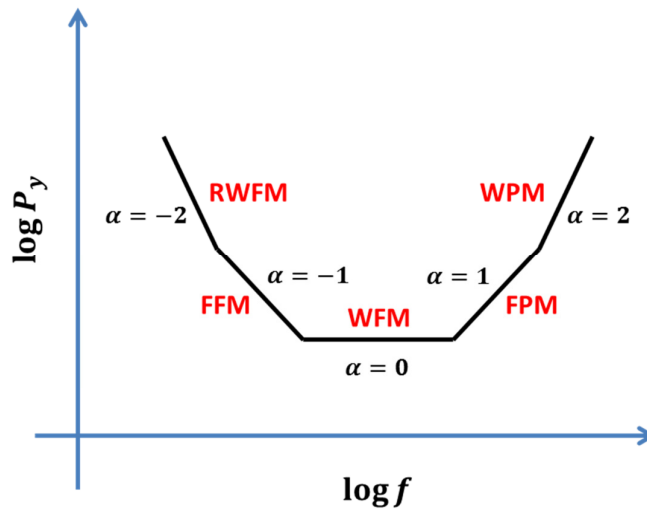


圖 2.5 時鐘雜訊之片段線性功率頻譜

2.3.1 標準偏差

頻率穩定度為描述時鐘特性的關鍵。直觀來看，頻率穩定度與分數頻率隨著時間的變動程度呈反比，亦即分數頻率隨著時間變動的幅度越小，則時鐘的穩定度越佳。若採用標準偏差(Standard Deviation)來定義時鐘的頻率穩定度，則數學表示式為

$$\sigma(t) = \sqrt{E[(y(t) - E[y(t)])^2]} \quad (2.47)$$

然而，時鐘偏差包含了隨機漫步雜訊的成分，其變異量為一時間函數，若以標準偏差 $\sigma(t)$ 作為頻率穩定度的指標，其將隨著時間變動，且會呈現發散的現象[7]，亦即時鐘隨著所經過的時間增加，其長期穩定度必然會惡化。因此，標準偏差並不適合作為頻率穩定度之分析工具。

2.3.2 亞倫偏差

對於長時間的觀測而言，標準偏差往往會發散。但因時鐘內的隨機漫步雜訊



成分隨著時間有穩定增加的趨勢，故時頻研究者分析時鐘的頻率穩定度時，往往採用亞倫偏差(Allan Deviation, ADEV)作為衡量指標。亞倫偏差的定義為

$$\sigma_y(\tau) = \sqrt{\frac{1}{2} \langle (\bar{y}(t+\tau) - \bar{y}(t))^2 \rangle} \quad (2.48)$$

其中 $\tau > 0$ 為分析週期(Analysis Period)，或一般通稱平均時間(Averaging Time)，其為取樣週期 τ_0 的整數倍(意即 $\tau = m\tau_0$)。運算子 $\langle \cdot \rangle$ 代表時間平均值(Time Average)

$$\langle (\bar{y}(t+\tau) - \bar{y}(t))^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (\bar{y}(t+\tau) - \bar{y}(t))^2 dt \quad (2.49)$$

$\bar{y}(t)$ 為分數頻率 $y(t)$ 的平均值，其定義為

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} y(t') dt' \quad (2.50)$$

由(2.14)式中相位 $x(t)$ 與分數頻率 $y(t)$ 的關係代入(2.48)式及(2.50)式，可得

$$\sigma_y(\tau) = \sqrt{\frac{1}{2\tau^2} \langle [x(t+2\tau) - 2x(t+\tau) + x(t)]^2 \rangle} \quad (2.51)$$

於離散之情況下，可表示為

$$\sigma_y(\tau) = \sqrt{\frac{1}{2(M-2)\tau^2} \sum_{i=1}^{M-2} [x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i]^2} \quad (2.52)$$

其中 M 為於平均時間 τ 內所取樣之相位資料總數。因此，吾人可由所量測到相對於參考時鐘之相位估算出於不同平均時間下之待測時鐘的頻率穩定度。

如 2.2 節所提及，時鐘的輸出頻率包含了五種類型之雜訊。個別對其計算亞倫偏差，可發現其值皆為有限，且亦具有冪次法則特性

$$\sigma_y(\tau) = k_\sigma \tau^\mu \quad (2.53)$$

其中 k_σ 為比例常數。將(2.53)式等號兩邊以對數型式來表示，可為



$$\log \sigma_y(\tau) = \log k_\sigma + \mu \log \tau \quad (2.54)$$

如圖 2.6 所示，在時域的對數座標軸上，各個冪次法則雜訊之亞倫偏差皆為一直線，其形態與斜率 μ 之關係列於表 2.2。因此透過亞倫偏差，吾人可利用直接所量測到相對於參考時鐘之相位與分數頻率，直接於時域分析時鐘的頻率穩定度。

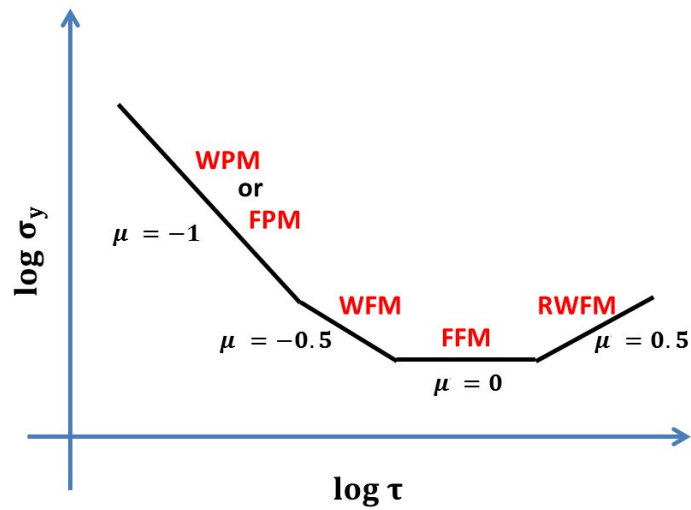


圖 2.6 時鐘雜訊之片段線性亞倫偏差

雜訊型態	μ
白色調相雜訊(WPM)	-1
閃爍調相雜訊(FPM)	-1
白色調頻雜訊(WFM)	-0.5
閃爍調頻雜訊(FFM)	0
隨機漫步調頻雜訊(RWFM)	0.5

表 2.2 雜訊型態與亞倫偏差之對數斜率關係

吾人將各類時鐘之亞倫變異數 σ_y^2 (亦即亞倫偏差之平方)繪於圖 2.7, 以比較不同類型時鐘之頻率穩定度。由圖可知銫原子鐘(Cesium Clock)於較長的平均時間下具有穩定度較佳的特性；銣原子鐘在短期的穩定度曲線相似於銫原子鐘, 但於長期平均時間下其性能並不如銫原子鐘。相反地, 氫微射原子振盪器(Hydrogen Maser Oscillator)具有短期穩定度佳但長期平均時間穩定度差之特性。若考量到成本與短期穩定度之需求, 石英晶體振盪器(Crystal Oscillator, Xtal Oscillator)將會是不錯的選擇, 其在非常短的平均時間內(約 1 秒至 100 秒之間), 穩定度會有不錯的表現。

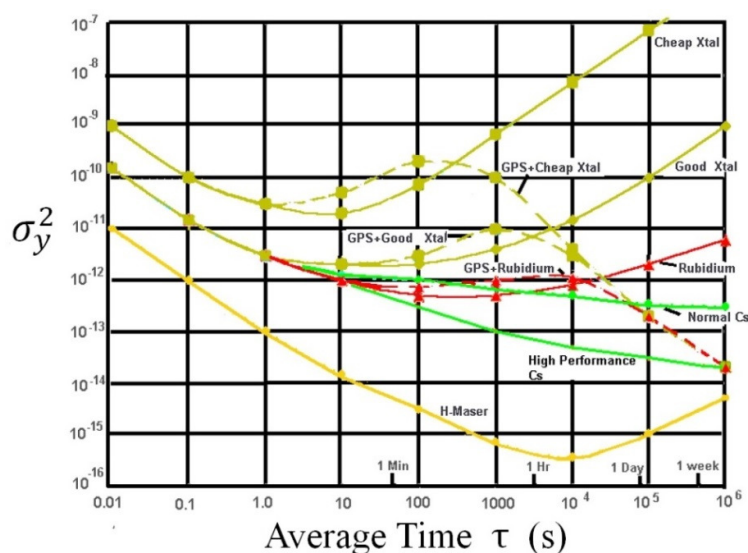


圖 2.7 各類時鐘之頻率穩定度[8]

2.3.3 修正型亞倫偏差

由圖 2.6 及表 2.2 可知, 於亞倫偏差中, 白色調相雜訊及閃爍調相雜訊於平均時間 τ 的響應及對數斜率幾乎相同, 故無法明確地辨別兩者。為了判定兩者所造成的影響, 吾人可採用修正型亞倫偏差(Modified Allan Deviation, MDEV)作為評估頻率穩定度的指標, 其定義如下[2]:

$$Mod\sigma_y(\tau) = \sqrt{\frac{1}{2m^2\tau^2(M-3m+1)} \sum_{j=1}^{M-3m+1} \left\{ \sum_{i=j}^{j+m-1} [x_{i+2m} - 2x_{i+m} + x_i] \right\}^2} \quad (2.55)$$



其中 m 為一整數，代表平均時間 τ 相對於取樣週期 τ_0 之倍數。

針對各類型時鐘雜訊分別計算修正型亞倫偏差，可發現其同亞倫偏差，具有
幕次法則特性

$$Mod\sigma_y(\tau) = k_{Mod\sigma}\tau^{\mu'} \quad (2.56)$$

同(2.54)式，將修正型亞倫偏差 $Mod\sigma_y$ 繪於對數座標軸上，如圖 2.7 所示，將可見
各類型雜訊呈現不同斜率的直線。其形態與斜率 μ' 之關係列於表 2.3。

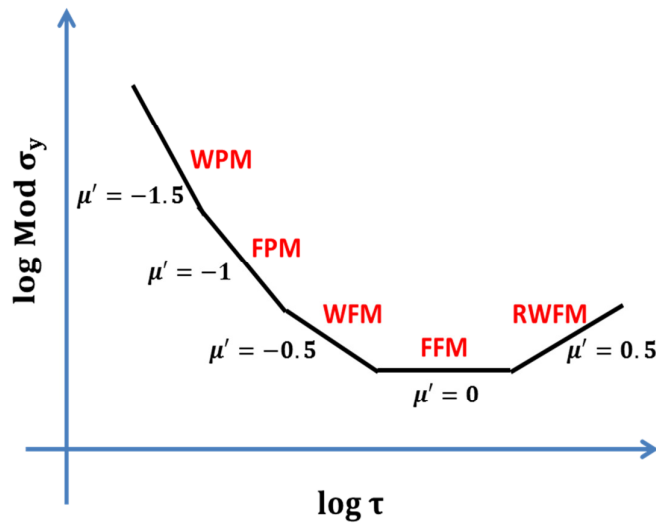


圖 2.8 時鐘雜訊之片段線性修正型亞倫偏差

雜訊型態	μ'
白色調相雜訊(WPM)	-1.5
閃爍調相雜訊(FPM)	-1
白色調頻雜訊(WFM)	-0.5
閃爍調頻雜訊(FFM)	0
隨機漫步調頻雜訊(RWFM)	0.5

表 2.3 雜訊型態與修正型亞倫偏差之對數斜率關係



由圖 2.7 及表 2.3 明顯可知，採用修正型亞倫偏差來分析時鐘的頻率穩定度時，將可明確地區分出白色調相雜訊及閃爍調相雜訊所導致的影響。因此修正型亞倫偏差為現階段許多時頻學者用以衡量頻率穩定度的主要指標。

2.4 合成時間尺度的原理

由一組時鐘所生成之時間尺度稱為合成時間尺度(Composite Time Scale)或集合時間尺度(Ensemble Time Scale)，其乃為一合成時鐘(Composite Clock)，相較於群組內任一獨立時鐘，具有較佳的頻率穩定度及強健性，且在時鐘群組內有時鐘突然毀損的情況下，其依舊能繼續運作。由 N 個時鐘所產生之合成時間尺度 $T_C(t)$ 可以數學表示之，其為[1]

$$T_C(t) = \sum_{j=1}^N w_j(t) [h_j(t) - \hat{h}_j(t)] \quad (2.57)$$

其中 $\hat{h}_j(t)$ 為時鐘讀值 $h_j(t)$ 的估測值， $w_j(t)$ 為組內時鐘的相對權重。由於 $T_C(t)$ 為一時鐘群組之相位的加權平均，故實際上其亦為一個相對於理想時鐘之相位。

所估測之時鐘讀值與理想時鐘讀值的關係為

$$\hat{h}_j(t) = h_0(t) + \hat{x}_j(t) \quad (2.58)$$

其中 $\hat{x}_j(t)$ 為時鐘 j 之估測相位。此外，合成時間尺度實為一組時鐘之加權平均，故權重係數在任何時間點 t 須滿足

$$\sum_{j=1}^N w_j(t) = 1 \quad (2.59)$$

群組內各時鐘的權重係數選擇方面有許多準則。一般而言，當時鐘之間彼此為統計獨立(Statistically Independent)時，權重係數會與時鐘之分數頻率的變異數成反比，例如亞倫變異數或古典變異數。倘若時鐘之間非獨立關係，則最佳的權重係數可根據高斯-馬可夫定理(Gaussian-Markov Theorem)由整組時鐘狀態的共變異



數矩陣估算之。

將(2.7)式及(2.58)式之 $\hat{h}_j(t)$ 代入(2.57)式，吾人可得到由各時鐘相位所生成之合成時間尺度方程式

$$T_C(t) = \sum_{j=1}^N w_j(t) [x_j(t) - \hat{x}_j(t)] \quad (2.60)$$

由於群組內任一時鐘相對於理想時鐘之相位無法觀測(亦即無法量測)，吾人實際上能測到的量值為時鐘之間的時間差，故將(2.57)式稍作修正，等號兩邊各減去群組內任一時鐘相對於理想時鐘之相位 $x_k(t)$ ，可得

$$T_C(t) - x_k(t) = \sum_{j=1}^N w_j(t) [x_{jk}(t) - \hat{x}_j(t)] \quad (2.61)$$

其中 $x_{jk}(t)$ 如(2.23)式所定義，為兩時鐘間的時間差。由(2.61)式可知，因群組內各時鐘相對於理想時鐘之相位無法量測，故實際上吾人無法透過 N 個時鐘產生一個相對於理想時鐘的合成時間尺度 $T_C(t)$ ，僅能透過 $N-1$ 個量測到的時間差配合適當的權重係數以得知組內各時鐘與此時間尺度之相對時間差。

2.5 IEEE 1588 標準

具時間同步需求的應用可約略分為廣域性(Wide-Area)及區域性(Local-Area)兩類。在廣域性應用中，如電力系統及全球定位系統(Global Positioning System, GPS)等，系統內各工作節點分布在大範圍的區域當中，且須與國家標準時間乃至於世界時間同步；而區域性應用，如實驗室的精密儀器、自動化工廠的工作機台等，則僅需與一個當地的時間參考標準同步，毋須追隨工作區域外的時間標準。

目前在網際網路(Internet)中最為廣泛使用的時間同步協定為網路時間協定(Network Time Protocol, NTP)。NTP 係由美國 Delaware 大學的教授 David L. Mills 於 1985 年所提出，此協定可使網路上各節點藉由向伺服器送出同步請求而達到校時的功能，其精確度可達毫秒等級[9]。但因應科技成長，毫秒等級的時間同步精



確度已無法滿足許多新興應用之需求。為此，IEEE 1588 標準[10]於 2002 年獲得 IEEE 標準委員會表決通過，成為新的時間同步標準。在此標準當中所定義之時間同步協定稱為精確時間協定(Precision Time Protocol, PTP)，主要目標為：

1. 可採用硬體與軟體結合，以獲得更精確之同步
2. 時間同步精確度達次微秒(Sub-Microsecond,亦即 $<10^{-6}$)等級
3. 於區域網路(Local-Area Network, LAN)中之時間同步
4. 支援多點傳播(Multicast)，且不限於乙太網路(Ethernet)
5. 支援不同精確度和穩定度的時鐘

2.5.1 精確時間協定(PTP)

相較於 NTP 的客戶端－伺服器(Client-Server)服務，PTP 於區域網路節點之間建立主從式(Master-Slave)架構關係，其透過定義之最佳主時鐘(Best Master Clock, BMC)演算法以決定各節點之主從關係，網路當中各節點為可支援 PTP 訊息之時鐘，且亦能藉由多個連接埠與其他節點互相連接，如圖 2.8 所示。

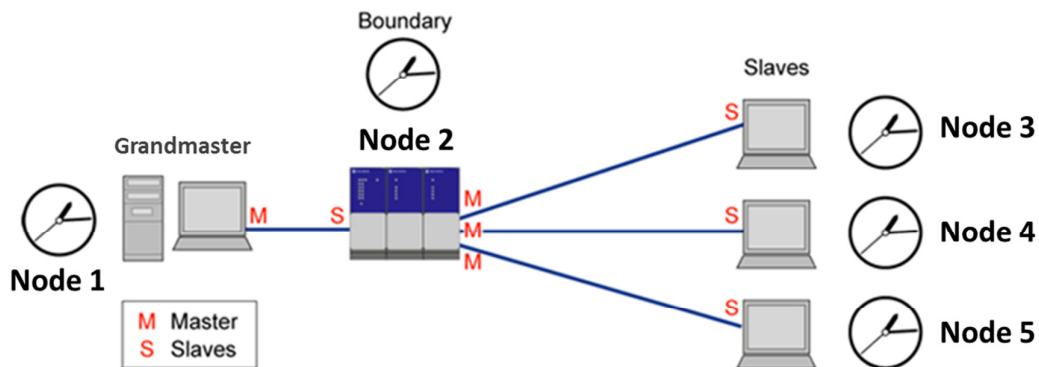


圖 2.9 PTP 之主從式架構示意圖

區域網路中所有節點時鐘同步之目標稱為根時鐘(Grandmaster Clock)，其通常具有最高的穩定度及精確性。因 PTP 之目標為達到次微秒等級之同步精度，故將

網路中可能產生數微秒延遲擾動的交換器(Switch)及路由器(Router)以邊界時鐘(Boundary Clock)取代。邊界時鐘為 PTP 主時鐘(Master Clock)及其從時鐘(Slave Clock)用戶端之間的媒介，其通常存在於網路邊緣，接受上游主時鐘封包作為主要參考時鐘信號，並對其網路下游的從時鐘提供同步訊息，且扮演著主時鐘的角色。

如圖 2.8 所示之情境，於 PTP 主從式架構底下，節點 3(Node 3)、節點 4(Node 4)及節點 5(Node 5)欲與根時鐘節點 1(Node 1)同步，則同步訊息將不直接通過節點 2(Node 2)，而是由節點 2 之邊界時鐘先以從時鐘的觀點與根時鐘節點 1 同步，再以主時鐘的角度與從時鐘節點 3、節點 4 及節點 5 同步。因此，網域內任一條通訊連結皆有一對主從時鐘，透過主時鐘發送 Sync 訊息至從時鐘，其再經由控制器以實現時頻同步校正。

2.5.2 精確時間協定之同步原理

PTP 之同步概念，係透過網路訊息的交換以得知系統特性及傳遞時間資訊。其原理如圖 2.9 所示：

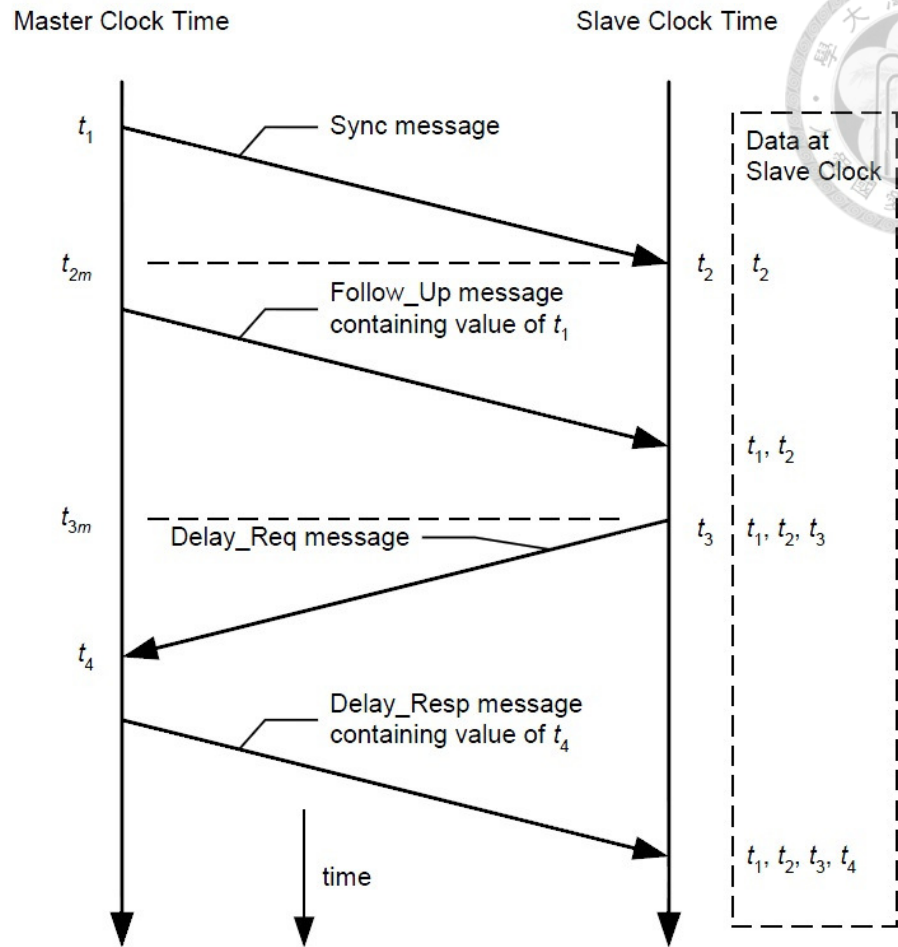


圖 2.10 PTP 之同步訊息及時間資訊交換示意圖[11]

PTP 訊息交換之流程如下：

1. 主時鐘節點發送 Sync 訊息至所有與其連接之從時鐘節點，並於傳送時產生時間戳記 t_1 ，其代表同步訊息於主時鐘節點所送出的時間。
2. 從時鐘節點接收到主時鐘節點所發送之 Sync 訊息，並於收到之當下產生時間戳記 t_2 ，其代表 Sync 訊息於從時鐘節點之接收時間。此時主時鐘節點之時間值為 t_{2m} 。
3. 主時鐘節點將時間戳記 t_1 資訊記載於 Follow_Up 訊息中，並傳送給從時鐘節點。

4. 從時鐘節點發送 Delay_Req 訊息至主時鐘節點，並於傳送時產生時間戳記 t_3 ，其代表 Delay_Req 訊息於從時鐘節點所送出的時間。此時主時鐘之時間值為 t_{3m} 。
5. 主時鐘節點接收由從時鐘節點所發送之 Delay_Req 訊息，並於收到之當下產生時間戳記 t_4 ，其代表 Delay_Req 訊息於從時鐘節點之接收時間。
6. 主時鐘節點將時間戳記 t_4 資訊記載於 Delay_Resp 訊息中，並將其傳送至從時鐘節點。

在結束雙方訊息的交換之後，從時鐘節點可藉由四個時間戳記 t_1 、 t_2 、 t_3 與 t_4 計算出其相對於主時鐘節點之相位(亦即時間偏移量)以及訊息傳送時之網路延遲。

吾人可定義 Sync 訊息自主時鐘節點送出至從時鐘節點接收之時間量測差值為

$$MS_difference = t_2 - t_1 \quad (2.62)$$

而 Delay_Req 訊息於從時鐘節點送出至主時鐘節點接受之時間量測差值則為

$$SM_difference = t_4 - t_3 \quad (2.63)$$

主時鐘節點與從時鐘節點實際的時間偏移量為

$$offset = t_{slave} - t_{master} \quad (2.64)$$

另外，吾人定義 Sync 訊息自主時鐘節點送出至從時鐘節點接收所經歷之傳輸延遲為

$$MS_delay = t_{2m} - t_1 \quad (2.65)$$

Delay_Req 訊息由從時鐘節點發送至主時鐘節點接收所歷經的傳輸延遲為



$$SM_delay = t_4 - t_{3m} \quad (2.66)$$

因此，藉由(2.64)-(2.66)式，吾人可將(2.62)式及(2.63)式分別改寫為

$$\begin{aligned} MS_difference &= t_2 - t_{2m} + t_{2m} - t_1 \\ &= offset + MS_delay \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} SM_difference &= t_4 - t_{3m} + t_{3m} - t_3 \\ &= -offset + SM_delay \end{aligned} \quad (2.68)$$

從上述二式可得

$$offset = \frac{1}{2}[(MS_difference - SM_difference) - (MS_delay - SM_delay)] \quad (2.69)$$

及

$$MS_delay + SM_delay = MS_difference + SM_difference \quad (2.70)$$

於(2.69)及(2.70)兩式中，包含了兩個已知的量測值($MS_difference$ 及 $SM_difference$)與三個未知數($offset$ 、 MS_delay 及 SM_delay)，因此若無額外的量測值或是假設，將無法對其進行求解。在 PTP 協定中，吾人將假設主時鐘節點與從時鐘節點之訊息交換路徑為對稱，亦即相互的傳輸延遲相同[10]，因此

$$MS_delay = SM_delay = one_way_delay \quad (2.71)$$

由前述之假設，吾人可對於(2.69)及(2.70)式求解，得到實際從時鐘節點相對於主時鐘節點之時間偏移量

$$offset = \frac{1}{2}(MS_difference - SM_difference)$$



$$= \frac{1}{2}[(t_2 - t_1) - (t_4 - t_3)] \quad (2.72)$$

以及所假設之單程傳遞延遲(One-Way Delay)

$$one_way_delay = \frac{1}{2}(MS_difference + SM_difference) \quad (2.73)$$

由於吾人假設從時鐘節點與主時鐘節點間資訊交換的傳輸延遲一致，故 PTP 協定僅支援區域網路以確保此假設成立。透過上述二式，吾人可對於從時鐘節點作時頻補償，進而實現兩時鐘節點之時間同步。

2.5.3 精確時間協定常駐程式(PTPd)

精確時間協定常駐程式(Precision Time Protocol daemon, PTPd)為一開放原始碼，由 George Neville-Neil 等多人團隊所致力開發，其系統架構如圖 2.10。PTPd 遵循 IEEE 1588 之規範，實現主從時鐘節點之 PTP 同步，但其非以硬體產生時間戳記(換言之，時間戳記係於網路堆疊中的應用層(Application Layer)而非理想中之實體層(Physical Layer)產生)，且採用 Linux 系統核心之軟體時鐘。儘管如此，PTPd 設計可將網路堆疊中底層至高層的時間擾動降至最低，使其性能盡可能接近硬體時鐘[12]。

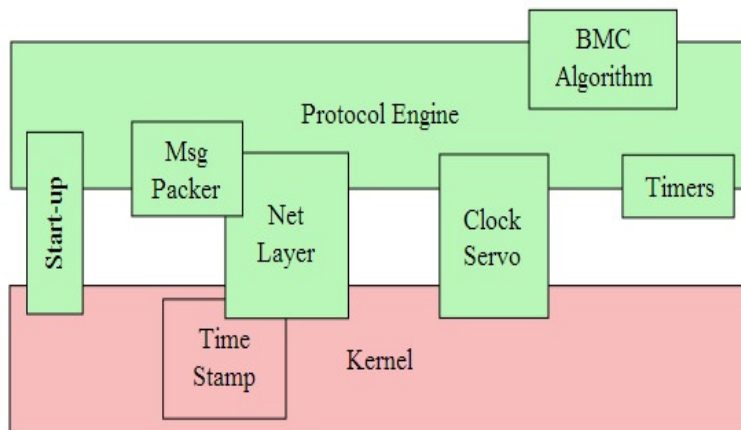


圖 2.11 PTPd 原始碼之系統架構方塊圖[12]

上圖中，Protocol Engine 為 PTP 當中所定義之協定狀態機，用以決定主從時鐘節點之狀態及動作；BMC Algorithm 為最佳主時鐘演算法，運行時可藉由其它 PTP 時鐘的統計資料，以判定區域網路中時鐘之性能，並進一步決定該時鐘之主從狀態；Clock Servo 為計算主從節點之時間偏移量(Offset-from-Master)與傳輸延遲時間之單元，其具有控制器並以 Linux 系統所提供之 adjtimex()指令調整時鐘之頻率，達到時間同步之實現；Message Packer 遵循 IEEE 1588 之資料結構規範，將資料寫入 PTP 訊息或由 PTP 訊息取出；Network Layer 負責 PTP 時鐘節點間之連線及資料收發的初始化；Time Stamp 紀錄了訊息於節點的發送及接收時間，進而用以計算主從節點之時間偏移量及單程傳遞延遲；Timer 提供了 Protocol Engine 低解析度的計時器以控制週期性的動作，如 Sync；Start-up 設定了程式的執行狀態且使程式開始運行；Kernel 則為 Linux 作業系統。

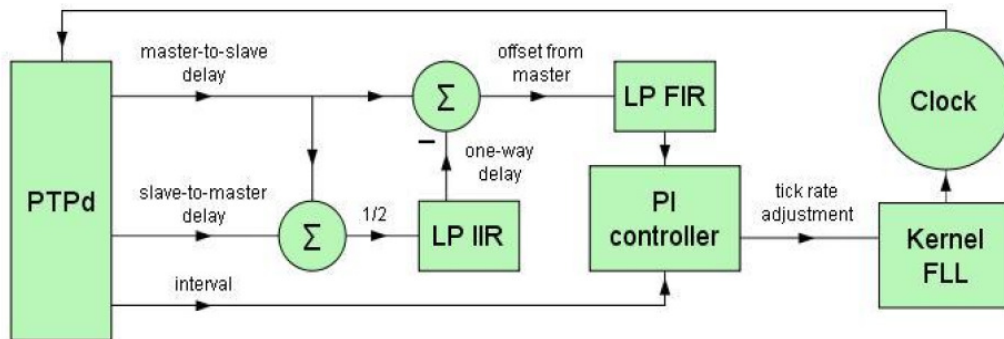


圖 2.12 PTPd 之時鐘伺服架構方塊圖[12]

前述之 PTPd 系統方塊中，尤以時鐘伺服(Clock Servo)為最重要之一環，其架構方塊圖如圖 2.11 所示。PTPd 之時鐘伺服採用比例積分控制器(Proportional-Integral Controller, PI Controller)產生控制訊號用以調整時鐘之頻率，其中比例項用以消除主從時鐘間之時間差，使從時鐘的時間能緊隨著主時鐘；積分項則用以消除主從時鐘間之時間穩態誤差。詳細的運算式如下：

比例項為

$$\frac{offset[n]}{a_p} \quad (2.74)$$



積分項為

$$drift[n] = drift[n-1] + \frac{offset[n]}{a_i} \quad (2.75)$$

其初始值為

$$drift[0] = 0 \quad (2.76)$$

PI 控制器所輸出之時間修正量為

$$adj[n] = - \left(\frac{offset[n]}{a_p} + drift[n] \right) \quad (2.77)$$

其中 a_p 的預設值為 10，而 a_i 的預設值為 1000。



第三章 時鐘集合之相位估測

在實際應用中，對於系統狀態的預測及補償而言，卡爾曼濾波器(Kalman filter)是一個非常有效的工具。其尤在時頻應用方面扮演著關鍵角色，用以產生時間尺度作為時間基準，且能估測待測時鐘相對於參考時鐘之相位，使得較低精度的待測時鐘能透過估測之相位作時頻校正，而同步於高精度之參考時鐘。

3.1 卡爾曼濾波器

3.1.1 卡爾曼濾波器之演算原理及運算式

卡爾曼濾波器係一種計算演算法，其藉由處理實際量測資料，得以估測出系統的狀態，此估測狀態(Estimated State)具有與欲求之真實狀態有著最小誤差的特性 [13]。其演算原理如圖 3.1，主要分為兩個階段，分別是量測更新(Measurement Update)及時間更新(Time Update)。量測更新階段藉由當前時間的量測值 $z(t_n)$ ，將前一時間點 t_{n-1} 所預測之當前時間狀態 $\hat{x}(t_n|t_{n-1})$ 更新，以得到更準確的狀態估測值 $\hat{x}(t_n|t_n)$ ；時間更新階段則是依照系統數學模型特性，於當前時間點 t_n 得以預先得知下一時間點之預測狀態 $\hat{x}(t_{n+1}|t_n)$ 。

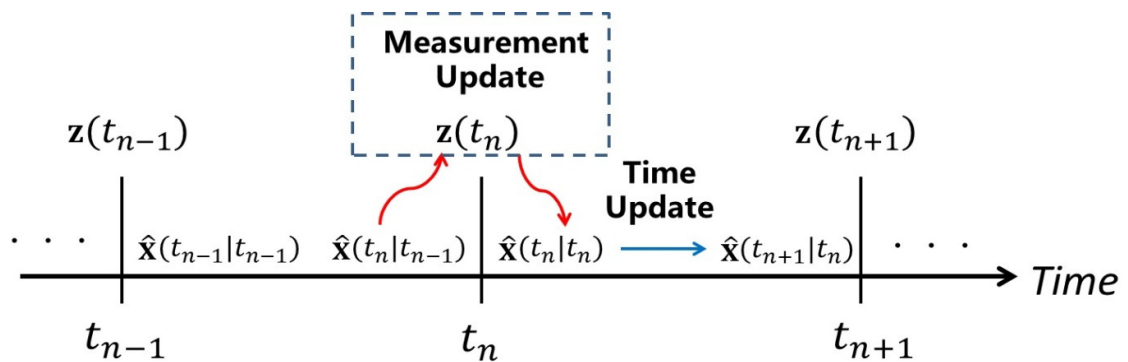


圖 3.1 卡爾曼濾波器之演算概念



於此節中所提及之符號皆與前後章節獨立。針對一個系統的動態方程式作離散化，可得相似於(2.35)式之方程式

$$\mathbf{x}(t_n) = \Phi(\tau_0)\mathbf{x}(t_{n-1}) + \boldsymbol{\eta}(t_{n-1}) \quad (3.1)$$

其中系統狀態 \mathbf{x} 為一 $N \times 1$ 之向量， $\Phi(\tau_0)$ 為 $N \times N$ 之轉移矩陣， $\boldsymbol{\eta}$ 則為一 $N \times 1$ 之高斯隨機變數向量，其均值为零且共變異數矩陣為 $\mathbf{Q} = E[\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^T]$ 。此外，量測方程式(Measurement Equation)為

$$\mathbf{z}(t_n) = \mathcal{H}\mathbf{x}(t_n) + \mathbf{v}(t_n) \quad (3.2)$$

其中 \mathbf{z} 為一 $L \times 1$ 之量測向量， \mathcal{H} 為 $L \times N$ 之量測矩陣， \mathbf{v} 為 $L \times 1$ 之量測雜訊向量，雜訊向量內之元素皆為高斯隨機變數，故其均值为零且共變異數矩陣為 \mathbf{R} 。

若吾人從估測狀態向量 $\hat{\mathbf{x}}(t_{n-1}|t_{n-1})$ 開始卡爾曼濾波器之運算，則在時間更新階段，下一時間點之預測狀態(Predicted State)為

$$\hat{\mathbf{x}}(t_n | t_{n-1}) = \Phi\hat{\mathbf{x}}(t_{n-1} | t_{n-1}) \quad (3.3)$$

其共變異數矩陣為

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}(t_n | t_{n-1}) = \Phi\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}(t_{n-1} | t_{n-1})\Phi^T + \mathbf{Q} \quad (3.4)$$

卡爾曼濾波器於下一時間點 t_n 時進入量測更新階段，將預測狀態 $\hat{\mathbf{x}}(t_n|t_{n-1})$ 與該時間點之量測向量 $\mathbf{z}(t_n)$ 資訊整合，從而得到更準確之估測狀態

$$\hat{\mathbf{x}}(t_n | t_n) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(t_n)\mathcal{H}]\hat{\mathbf{x}}(t_n | t_{n-1}) + \mathbf{K}(t_n)\mathbf{z}(t_n) \quad (3.5)$$

其共變異數矩陣為

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}(t_n | t_n) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(t_n)\mathcal{H}]\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}(t_n | t_{n-1}) \quad (3.6)$$

其中 $\mathbf{K}(t_n)$ 為卡爾曼增益矩陣(Kalman Gain Matrix)

$$\mathbf{K}(t_n) = \mathbf{C}_{\bar{x}}(t_n | t_{n-1}) \mathcal{H}^T [\mathbf{H} \mathbf{C}_{\bar{x}}(t_n | t_{n-1}) \mathcal{H}^T + \mathbf{R}]^{-1} \quad (3.7)$$



3.1.2 於時頻應用之限制

雖然採用卡爾曼濾波器可有效地估測時鐘偏差，但其於應用時仍受到一些限制，主要分為四項[1]：

1. 事實上，時鐘雜訊具有不可忽略之閃爍成分，它無法有效地以隨機動態系統模型表示。因此，若卡爾曼濾波器之應用將考慮到閃爍雜訊，則須將有限數量狀態之隨機動態模型加以近似才得以進行。
2. 於某些情況下，時鐘可能會發生異常狀況，例如相位跳躍(Phase Jump)，其為時鐘相位之不連續行為。應用卡爾曼濾波器時，此異常狀況通常並無被考慮至時鐘之數學模型內，因此可能對於所估測的結果造成不可預期之影響。
3. 以卡爾曼濾波器所產生之合成時間尺度於即時(Real-Time)運行時，可能會因整體性能之考量加入非群組內之時鐘，抑或是發現群組內時鐘發生異常行為而將其移除。組內時鐘數量的變動，將衍生系統狀態及量測向量維度須重新設置之問題。
4. 若於量測方程式中，量測向量 $\mathbf{z}(t_n)$ 之維度少於時鐘之個數時，將造成估測狀態之共變異數矩陣隨著時間不斷增長，使得卡爾曼濾波器之估測結果將會呈現發散的現象。

3.2 精確時間協定常駐程式下之相位資料量測

3.2.1 實驗與系統環境

本實驗之環境架構如圖 3.2 所示。吾人自行建立一區域網路，以運行 PTPd 量

測各個從時鐘節點之相位資料，其透過一網路交換器(Switch)連接四個節點，此四個節點皆為石英晶體振盪器，具有短期穩定度佳但長期穩定度差之特性(詳見圖 2.7)。當中主時鐘節點為一台 Asus F6S 筆記型電腦，從時鐘節點則為兩台 Asus F6S 與 Toshiba Portege M500 筆記型電腦。於四個時鐘節點上運行之作業系統皆為 Ubuntu 12.04，其以 Linux Kernel 3.2.14 為主要核心。

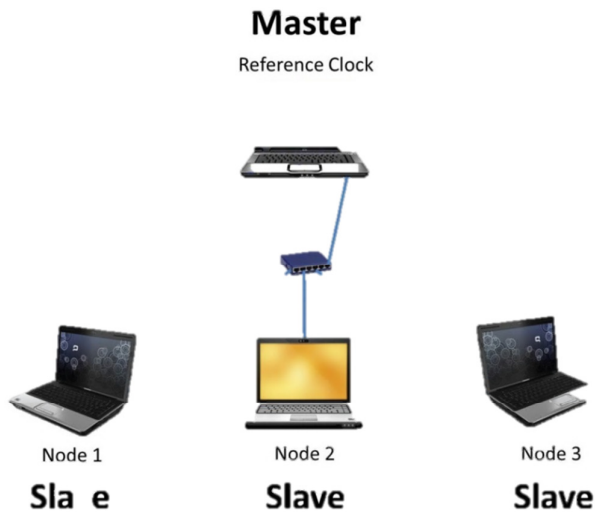


圖 3.2 實驗環境架構

實驗中所採用的 PTPd 版本為 2.2.2，於自行建立之網路運行時，須個別針對各節點設置參數，以確定網路內之主從架構關係與各節點負責訊息交換之網路介面。於主時鐘節點，吾人執行 PTPd 時所下之指令為

```
./ptpd2 -c -W -D -b eth0
```

其中引數 `-c` 可避免 PTPd 以背景常駐的方式執行；`-W` 設定節點以主時鐘身分運行 PTPd；`-D` 可將運行之結果顯示於終端機畫面；`-b eth0` 則設定訊息交換所指定之網路介面為 `eth0`。此外，於從時間節點執行 PTPd 時所下之指令為

```
./ptpd2 -c -g -D -b eth0 | tee filename
```

其中引數 `-g` 設定節點以從時鐘身分運行 PTPd；`tee` 可將 PTPd 運行過程之輸出同時轉存至指定檔案內，以便吾人作後續的資料處理。

PTPd 於運行時，主時鐘節點將透過群播(Multicast)的方式，達成與從時鐘節點交換訊息之機制，進而實現主從時鐘節點之時間同步。倘若須觀察各從時鐘節點長期之相位趨勢，則須修改內部原始碼 `servo.c`，將以下程式碼段落

```
/* clamp the accumulator to ADJ_FREQ_MAX for sanity */
    if (ptpClock->observed_drift > ADJ_FREQ_MAX)
        ptpClock->observed_drift = ADJ_FREQ_MAX;
    else if (ptpClock->observed_drift < -ADJ_FREQ_MAX)
        ptpClock->observed_drift = -ADJ_FREQ_MAX;

    adj = ptpClock->offsetFromMaster.nanoseconds / ap + ptpClock->observed_drift;
```

修改為

```
/* clamp the accumulator to ADJ_FREQ_MAX for sanity */
    if (ptpClock->observed_drift > ADJ_FREQ_MAX)
        ptpClock->observed_drift = ADJ_FREQ_MAX;
    else if (ptpClock->observed_drift < -ADJ_FREQ_MAX)
        ptpClock->observed_drift = -ADJ_FREQ_MAX;

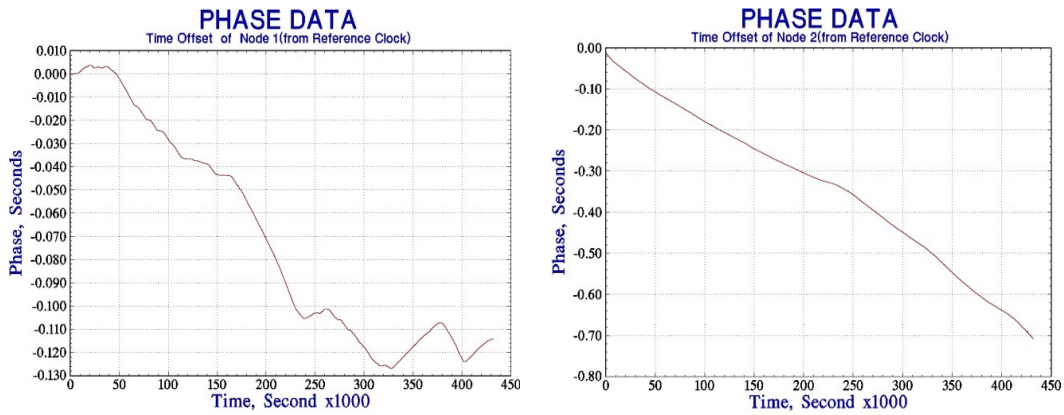
    adj = 0;
```

如此一來，時間伺服內部之 PI 控制器所產生之時間調整訊號即為 0，使得系統將不會藉由內部鎖頻迴路(Frequency-Lock Loop, FLL)調整核心時鐘(參考圖 2.11)。



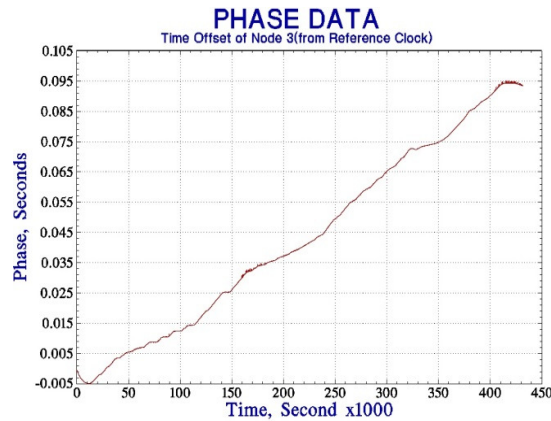
3.2.2 實驗結果

吾人將上述系統運行 120 小時，設置取樣週期為一秒，同時亦修改 PTPd 內部時間伺服原始碼 servo.c，使各個從時鐘節點之核心時鐘於運行時不作時頻校準，亦即各從時鐘節點皆未校正。藉以觀察各從時鐘相對於主時鐘節點之相位趨勢，可得圖 3.3 之結果。



(a) 節點 1 (Node 1)之量測相位

(b) 節點 2 (Node 2)之量測相位



(c) 節點 3 (Node 3)之量測相位

圖 3.3 未校正之從時鐘節點相位量測資料

藉由 PTPd 取得各個從時鐘節點之相位量測資料後，吾人可利用卡爾曼濾波器作更進一步的相位估測。



3.3 基於卡爾曼濾波器之相位估測

3.3.1 時鐘集合之狀態方程式

基於(2.25)-(2.29)所示之時鐘動態方程式，吾人可針對欲估測之群組內所有時鐘，用以下隨機微分方程模型表示

$$\frac{d\mathbf{H}(t)}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{H}(t) + \boldsymbol{\xi}(t) \quad (3.8)$$

其中 $\mathbf{H}(t)$ 為一 $N \times 1$ 之方塊向量，由 N 個時鐘讀值向量所組成

$$\mathbf{H}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1(t) \\ \vdots \\ \mathbf{h}_N(t) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

第 k 個時鐘讀值向量為

$$\mathbf{h}_k(t) = \begin{bmatrix} h_{k,1}(t) \\ h_{k,2}(t) \\ h_{k,3}(t) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

矩陣 \mathbf{F} 為一方塊矩陣

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_N \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

其中

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, N \quad (3.12)$$

$\boldsymbol{\xi}(t)$ 則由 N 個白色高斯雜訊向量所組成

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_N(t) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$



其中第 k 個時鐘之白色高斯雜訊向量為

$$\xi_{\mathbf{k}}(t) = \begin{bmatrix} \xi_{k,1}(t) \\ \xi_{k,2}(t) \\ \xi_{k,3}(t) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

由(3.14)式可知， $\xi_{\mathbf{k}}(t)$ 的自相關矩陣為

$$\mathbf{r}_{\xi_{\mathbf{k}}}(t_1, t_2) = E[\xi_{\mathbf{k}}(t_1)\xi_{\mathbf{k}}^T(t_2)] = \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}\delta(t_1 - t_2) \quad (3.15)$$

其中 $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$ 為

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} q_{k,1} & 0 & 0 \\ 0 & q_{k,2} & 0 \\ 0 & 0 & q_{k,3} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

如同(2.7)式，向量 $\mathbf{H}(t)$ 可以理想時鐘讀值 $\mathbf{H}_0(t)$ 與時鐘偏差 $\mathbf{X}(t)$ 之和表示

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_0(t) + \mathbf{X}(t) \quad (3.17)$$

且

$$\mathbf{H}_0(t) = \mathcal{H}_{\mathbf{R}}\mathbf{h}_0(t) \quad (3.18)$$

其中 $\mathbf{h}_0(t)$ 為單一時鐘之理想時間讀值向量

$$\mathbf{h}_0(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$\mathcal{H}_{\mathbf{R}}$ 則為複製矩陣(Replication Matrix)，由 N 個 3×3 的單位矩陣(Identity Matrix)所組成

$$\mathcal{H}_{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$



將(3.17)式代入(3.8)式中，因 $\frac{d\mathbf{H}_0(t)}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{H}_0(t)$ ，故吾人可得

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{X}(t) + \xi(t) \quad (3.21)$$

將其離散化，可以下列方程式示之

$$\mathbf{X}(t_n) = \Phi\mathbf{X}(t_{n-1}) + \eta(t_n) \quad (3.22)$$

式中 $t_n = n\tau_0$ ，為取樣週期 τ_0 之整數倍； Φ 為群組內個別時鐘的狀態轉移矩陣所組成之方塊矩陣

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_N \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

其中各時鐘之狀態轉移矩陣為

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} 1 & \tau_0 & \frac{\tau_0^2}{2} \\ 0 & 1 & \tau_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, N \quad (3.24)$$

η 則由組內各時鐘雜訊向量所組成

$$\eta(t_n) = \begin{bmatrix} \eta_1(t_n) \\ \vdots \\ \eta_N(t_n) \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

式中

$$\eta_k(t_n) = \begin{bmatrix} \eta_{k,1}(t_n) \\ \eta_{k,2}(t_n) \\ \eta_{k,3}(t_n) \end{bmatrix} \quad k = 1, \dots, N \quad (3.26)$$

其共變異數矩陣如(2.39)式所示之，為

$$\mathbf{C}_{\eta k} = \begin{bmatrix} q_{k,1}\tau_0 + \frac{1}{3}q_{k,2}\tau_0^3 + \frac{1}{20}q_{k,3}\tau_0^5 & \frac{1}{2}q_{k,2}\tau_0^2 + \frac{1}{8}q_{k,3}\tau_0^4 & \frac{1}{6}q_{k,3}\tau_0^3 \\ \frac{1}{2}q_{k,2}\tau_0^2 + \frac{1}{8}q_{k,3}\tau_0^4 & q_{k,2}\tau_0 + \frac{1}{3}q_{k,3}\tau_0^3 & \frac{1}{2}q_{k,3}\tau_0^2 \\ \frac{1}{6}q_{k,3}\tau_0^3 & \frac{1}{2}q_{k,3}\tau_0^2 & q_{k,3}\tau_0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$



方塊雜訊向量 $\boldsymbol{\eta}$ 之共變異數矩陣即為卡爾曼濾波器估測時鐘狀態時定義之 \mathbf{Q} 矩陣

$$\mathbf{Q} = E[\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^T] = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\eta 1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\eta N} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

3.3.2 時鐘相位之量測方程式

時鐘群組內各時鐘相位的測量，可以下列量測方程式示之

$$\mathbf{Z}(t_n) = \mathcal{H}\mathbf{X}(t_n) + \mathbf{V}(t_n) \quad (3.29)$$

其中量測向量為

$$\mathbf{Z}(t_n) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(t_n) \\ \vdots \\ \mathbf{z}_N(t_n) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

以及

$$\mathbf{V}(t_n) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(t_n) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_N(t_n) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

為一量測雜訊向量(Measurement Noise Vector)，其每一元素為統計獨立之高斯隨機變數。量測雜訊向量之均值為零且共變異數矩陣為 \mathbf{R} 。 \mathcal{H} 為一 $N \times 3N$ 之量測矩陣

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_N \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

其中

$$\mathbf{P}_k = [1 \ 0 \ 0], \quad k = 1, \dots, N$$



了解時鐘集合之方程式後，吾人將利用卡爾曼濾波器進行相位估測。

3.3.3 採用卡爾曼濾波器之時鐘相位估測結果

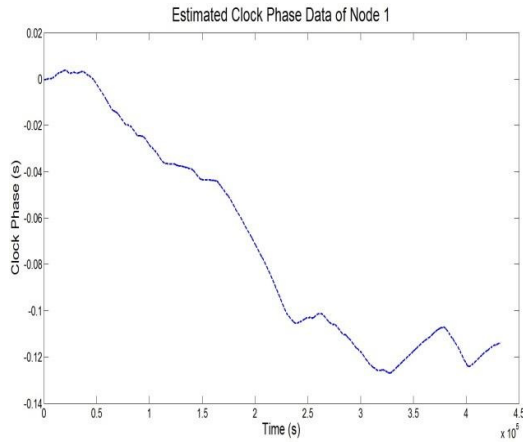
利用上述之時鐘集合方程式與 3.2 節實驗所量測之三個未校正從時鐘(亦即 $N = 3$)的相位資料，透過卡爾曼濾波器之演算(參照(3.1)-(3.7)式)，可產生圖 3.4 之估測結果。於量測時吾人設置取樣週期為一秒(亦即 $\tau_0 = 1$)，且參照亞倫變異數與標準變異數之關係[4]與實際情況，於運算時定義各時鐘之白色高斯雜訊向量 ξ_k 的共變異數矩陣為

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 10^{-18} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-20} & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-22} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

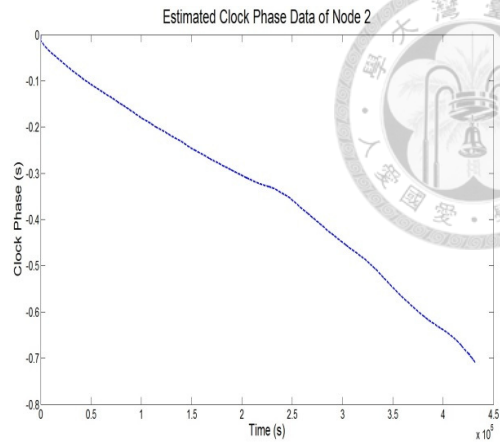
將其代入(3.27)與(3.28)式，即可得預設之離散系統共變異數矩陣 \mathbf{Q} 。

此外，量測雜訊向量之共變異數矩陣 \mathbf{R} 為

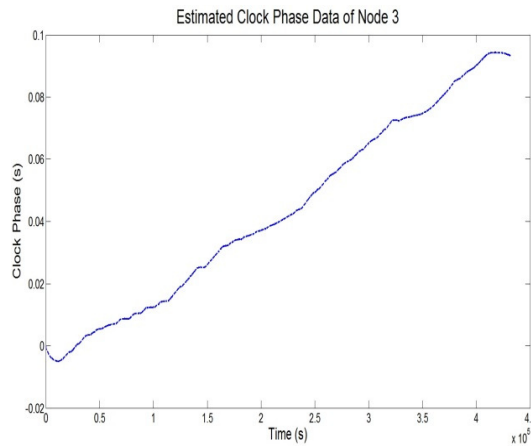
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-12} & 0 & 0 \\ 0 & 5 \times 10^{-12} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \times 10^{-12} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$



(a) 節點 1 (Node 1)之估測相位



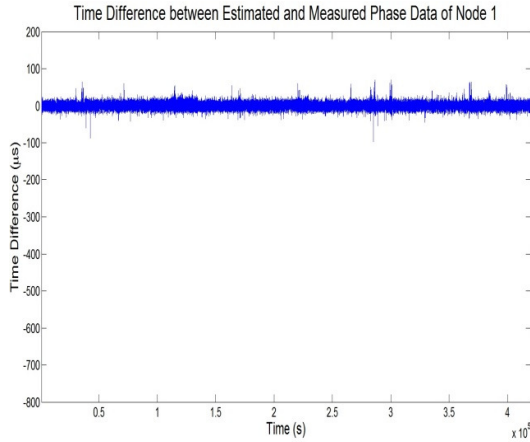
(b) 節點 2 (Node 2)之估測相位



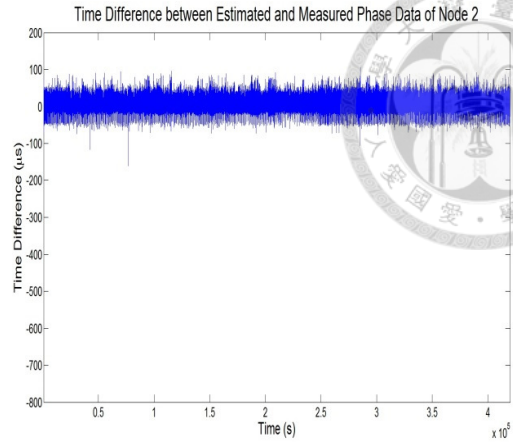
(c) 節點 3 (Node 3)之估測相位

圖 3.4 未校正之從時鐘節點相位估測結果

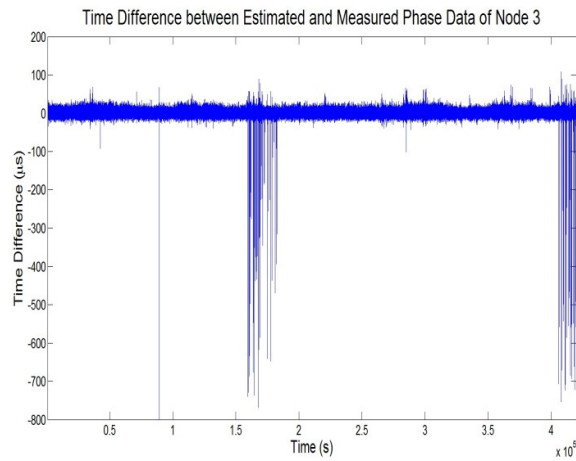
由圖 3.3 與圖 3.4 之比較，可知於時鐘群組內之三個未校正時鐘經由卡爾曼濾波器的相位估測結果皆近於其量測值，此為卡爾曼濾波器於隨機環境中進行最小平方計算所致。圖 3.5 為各未校正時鐘的相位估測結果與量測值之差，從圖中可發現此時間差會於某些時間點發生異常跳動之現象，此乃因吾人所定義之數學模型與實際時鐘行為間的差異所致。實際上，時鐘偏差亦包含閃爍及隨機漫步雜訊成分，而於吾人所定義之狀態方程式中，隨機雜訊的部分皆為白色雜訊，故數學模型與實際行為的差異導致卡爾曼濾波器於運算時產生估測失準的結果。



(a) 節點 1 之估測-量測相位時間差



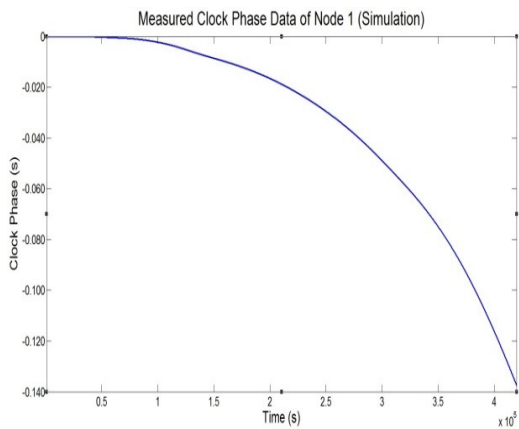
(b) 節點 2 之估測-量測相位時間差



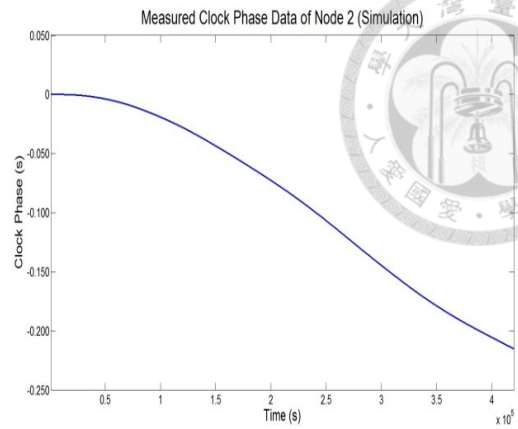
(c) 節點 3 之估測-量測相位時間差

圖 3.5 未校正之從時鐘節點估測與量測相位時間差

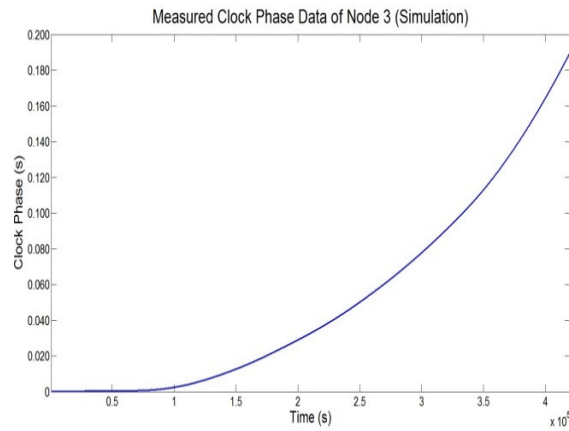
此外，吾人亦針對(3.22)-(3.33)之數學模型與(3.34)-(3.35)式定義之共變異數矩陣，模擬時鐘群組內三個未校正時鐘(Uncorrected Clock)的狀態，以驗證前述之量測及估測相位的時間差所產生的跳動現象，係為數學模型與實際行為的差異所致。圖 3.6 即為模擬各時鐘相位的量測結果。將此模擬量測結果透過卡爾曼濾波器之演算，吾人可得各時鐘的相位估測模擬結果，如圖 3.7 所示。



(a) 節點 1 (Node 1)之模擬量測相位

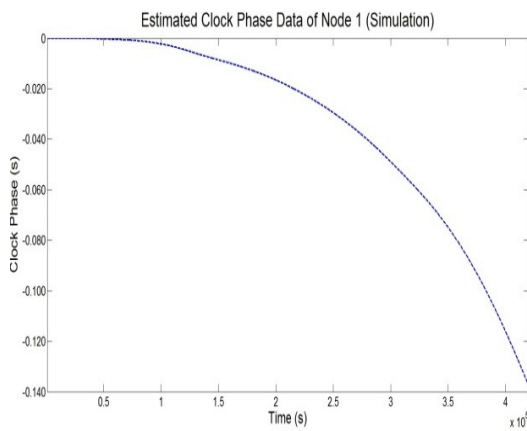


(b) 節點 2 (Node 2)之模擬量測相位

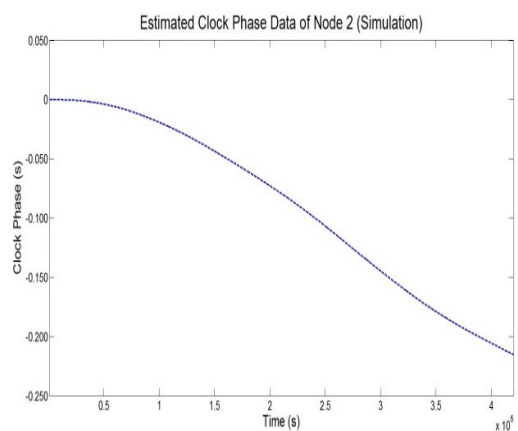


(c) 節點 3 (Node 3)之模擬量測相位

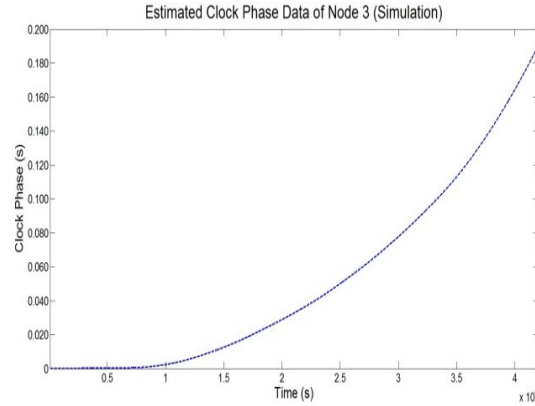
圖 3.6 模擬之未校正時鐘相位量測資料



(a) 節點 1 (Node 1)之模擬估測相位



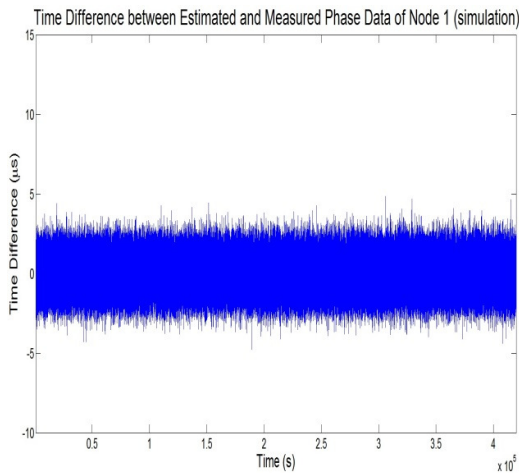
(b) 節點 2 (Node 2)之模擬估測相位



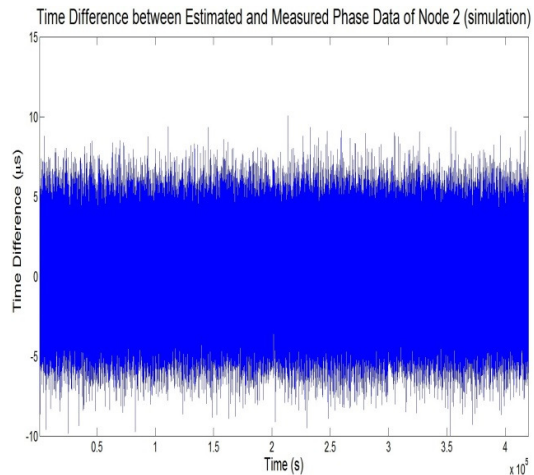
(c) 節點 3 (Node 3)之模擬估測相位

圖 3.7 模擬之未校正時鐘相位估測結果

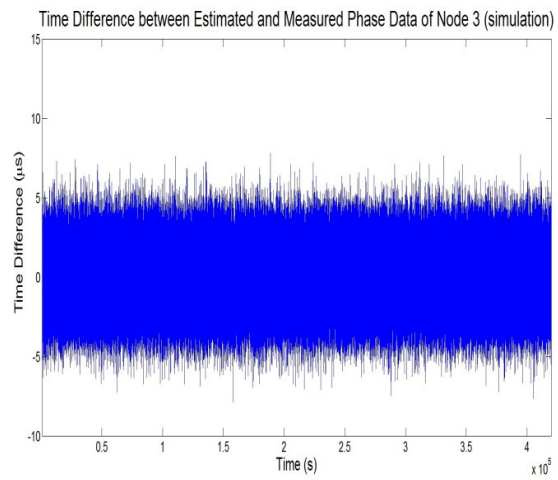
藉由觀察圖 3.6 與圖 3.7 之結果，可知各時鐘透過卡爾曼濾波器之模擬相位估測結果亦相當貼近於其量測值。圖 3.8 為模擬之未校正時鐘的相位估測值與量測值之差，由於所模擬的三個時鐘狀態皆遵循吾人所定義之數學模型，故不存在前述之異常跳動現象。



(a) 節點 1 之模擬估測-量測相位時間差



(b) 節點 2 之模擬估測-量測相位時間差



(c) 節點 3 之模擬估測-量測相位時間差

圖 3.8 模擬之未校正時鐘估測與量測相位時間差



第四章 合成時間尺度之建立及分析

由於前述之時鐘模型為一線性隨機動態系統，且實際量測方程式亦為簡單的線性關係，故卡爾曼濾波器對於產生合成時間尺度而言，是一個理想的工具。於本章節中，吾人將進一步透過加權平均係數的運算及調整，產生出相較於時鐘群組內任一個別時鐘強健及穩定之時間尺度，並模擬校正時鐘即時同步與生成合成時間尺度之行為，最後針對未校正時鐘與校正時鐘群組所產生之合成時間尺度作詳細的比較及分析。

4.1 合成時間尺度之運算模型

由 2.4 節所提及之概念，吾人將透過時鐘群組內之三個未校正時鐘經由卡爾曼濾波器的相位估測結果 $\hat{\mathbf{X}}(t_n)$ 及其共變異數矩陣 $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{X}}}(t_n)$ ，計算出於時間點 t_n 時之合成時間尺度

$$\mathbf{T}_C(t_n) = \begin{bmatrix} x_{T_C}(t_n) \\ y_{T_C}(t_n) \\ d_{T_C}(t_n) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

由(4.1)式可知，其為一時鐘狀態向量，亦即合成時間尺度實為一合成時鐘，其元素包含相對於參考時鐘之相位 $x_{T_C}(t_n)$ 與分數頻率 $y_{T_C}(t_n)$ ，以及線性頻率飄移量 $d_{T_C}(t_n)$ 。

合成時間尺度 $\mathbf{T}_C(t_n)$ 係透過加權平均運算產生，其定義為

$$\mathbf{T}_C(t_n) = \mathbf{W}(t_n)\mathbf{E}(t_n) \quad (4.2)$$

其中 $\mathbf{W}(t_n)$ 為 3×9 之權重矩陣(Weighting Matrix)，係利用高斯-馬可夫定理(Gauss-Markov Theorem)推導所得[14]



$$\mathbf{W}(t_n) = [\mathcal{H}_R^T \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{X}}}^{-1}(t_n) \mathcal{H}_R]^{-1} \mathcal{H}_R^T \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{X}}}^{-1}(t_n) \quad (4.3)$$

$\mathbf{E}(t_n)$ 為時鐘殘值向量(Clock Residual Vector)，其定義為

$$\mathbf{E}(t_n) = \mathbf{X}(t_n) - \hat{\mathbf{X}}(t_n) \quad (4.4)$$

亦即時鐘經估測校正補償後所剩餘之相位。但因實際上無法得知與參考時鐘之實際相位差，故吾人將量測向量之維度擴充以近似狀態向量 $\mathbf{X}(t_n)$

$$\mathbf{E}(t_n) = \mathbf{U}\mathbf{Z}(t_n) - \hat{\mathbf{X}}(t_n) \quad (4.5)$$

其中 \mathbf{U} 為維度擴充矩陣，將 3×1 之量測向量維度擴充至 9×1

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

4.2 基於未校正時鐘之合成時間尺度追溯

針對每一時間點將 3.2 節實驗所得之 120 小時未校正時鐘相位量測資料及 3.3 節卡爾曼濾波器之相位估測結果，代入合成時間尺度之加權平均式(4.2)、(4.3)及(4.5)加以運算，吾人可得到於過去 120 小時的量測期間中，所對應之合成時間尺度相對於參考時鐘的相位差 x_{T_C} ，如圖 4.1 所示，其相位偏移範圍約為 $-50 \mu\text{s}$ 至 $150 \mu\text{s}$ 。相較於從時間節點 1 至 3 (Node 1-3)，合成時間尺度 \mathbf{T}_C 相位偏移程度較低，但其依舊存在著異常跳動現象，同前一章所述，此為數學模型與實際時鐘行為間的差異所致。將其與從時鐘節點 1 至 3 之相位比較，並共同繪於圖 4.2。吾人發現經運算

所生成之合成時間尺度於過去 120 小時之相位偏移程度已明顯較時鐘集合內任一
時鐘為收斂，且緊隨著參考時鐘之時間。

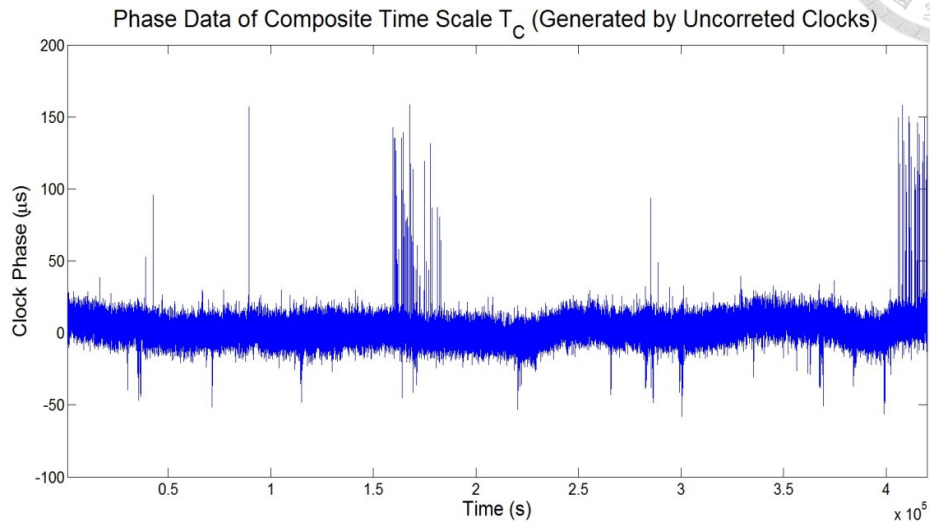


圖 4.1 未校正時鐘所產生之合成時間尺度相位資料

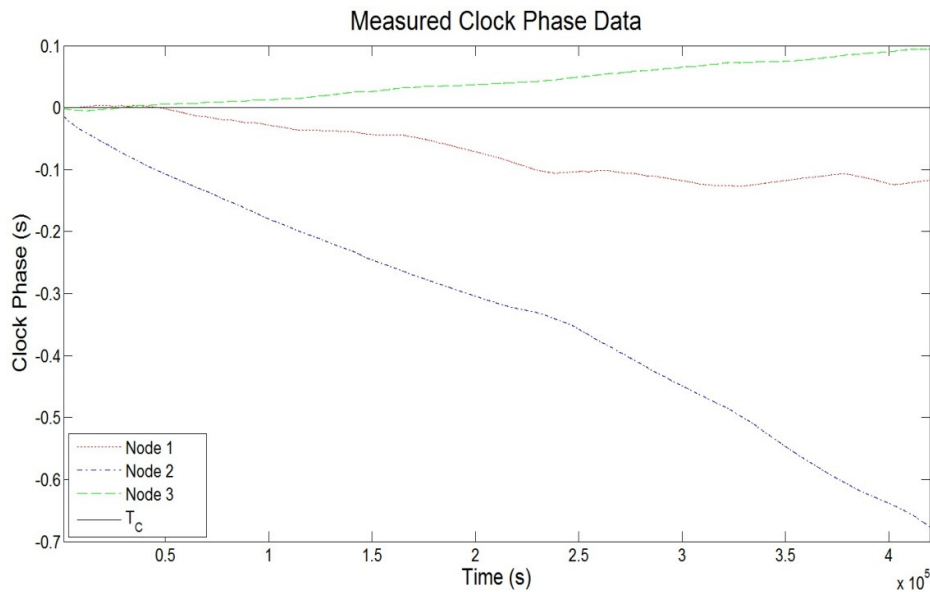
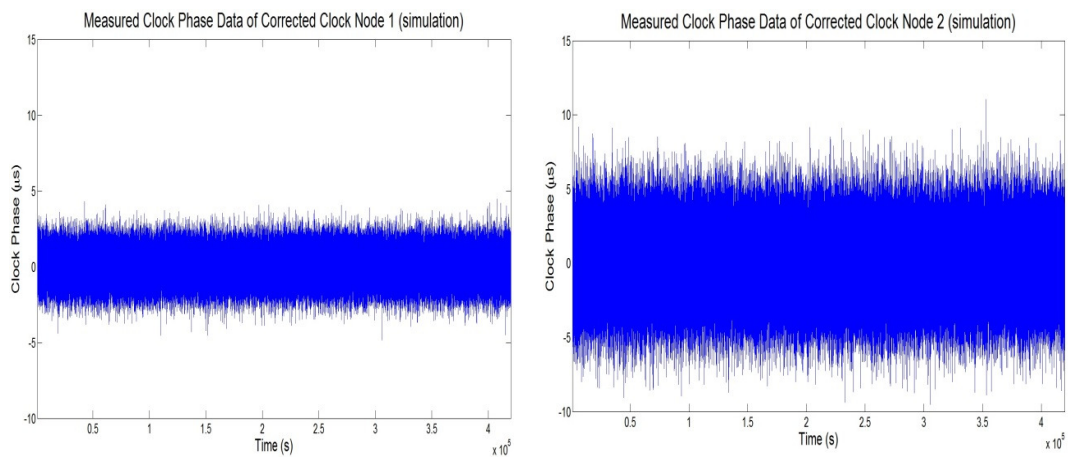


圖 4.2 未校正從時鐘與其生成之合成時間尺度 T_C 的相位資料



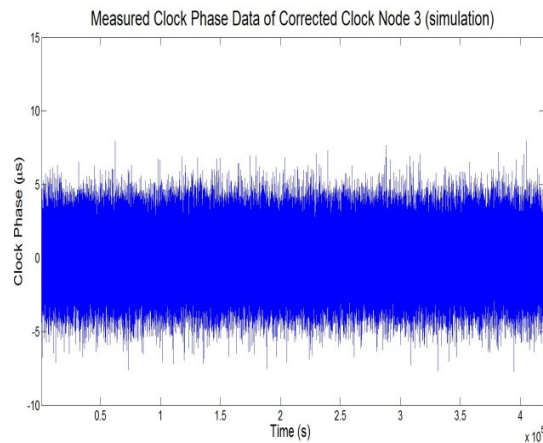
4.3 基於校正時鐘之合成時間尺度生成模擬

相較於 4.2 節透過三個未校正時鐘(Uncorrected Clock)產生合成時間尺度，此節吾人將模擬三個校正時鐘(Corrected Clock)節點即時同步與產生合成時間尺度之行為。於模擬實驗中，各時鐘節點每兩秒將即時同步於參考時鐘，且設置之雜訊相關參數同(3.34)及(3.35)式。吾人將三個校正時鐘之相位量測及卡爾曼濾波器估測模擬結果分別繪於圖 4.3 及圖 4.4。



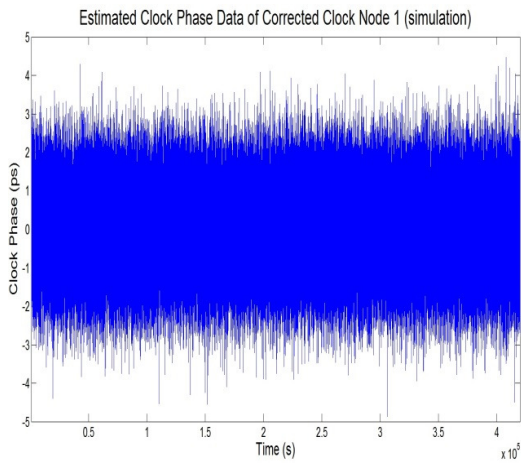
(a) 節點 1 (Node 1)之模擬量測相位

(b) 節點 2 (Node 2)之模擬量測相位

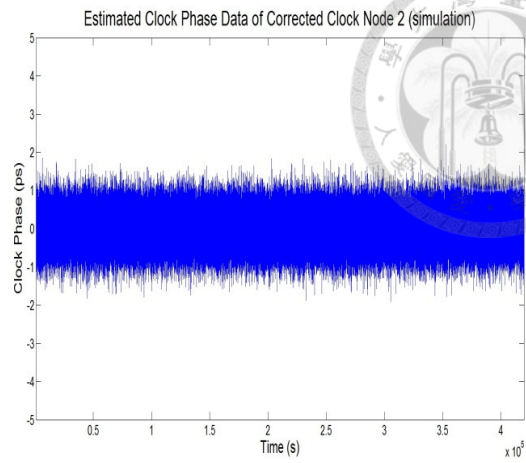


(c) 節點 3 (Node 3)之模擬量測相位

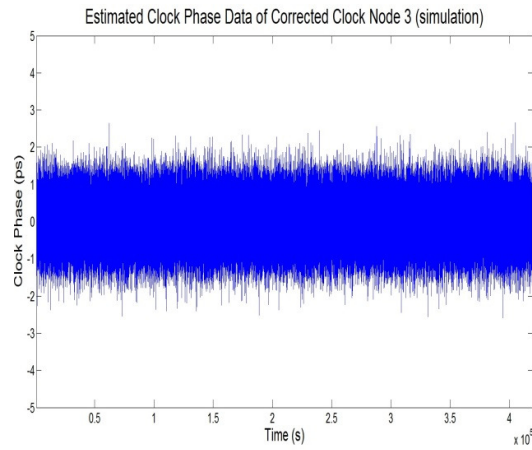
圖 4.3 模擬之校正時鐘相位量測資料



(a) 節點 1 (Node 1)之模擬估測相位



(b) 節點 2 (Node 2)之模擬估測相位



(c) 節點 3 (Node 3)之模擬估測相位

圖 4.4 模擬之校正時鐘相位估測結果

由圖可知，各時鐘節點之相位量測與估測值皆有微秒(10^{-6})等級之差異，此乃模擬時所定義之量測雜訊共變異數矩陣 \mathbf{R} 所致。將此結果藉由加權平均式(4.2)、(4.3)及(4.5)作即時運算模擬，吾人可得於 120 小時模擬週期中，每秒即時生成之合成時間尺度的相位資料，並將結果繪於圖 4.5。由模擬結果可知，藉由校正時鐘所生成之合成時間具有微秒等級的偏移範圍，其約落在 $-5 \mu\text{s}$ 至 $5 \mu\text{s}$ 間，較未校正時鐘所生成之時間尺度為佳。

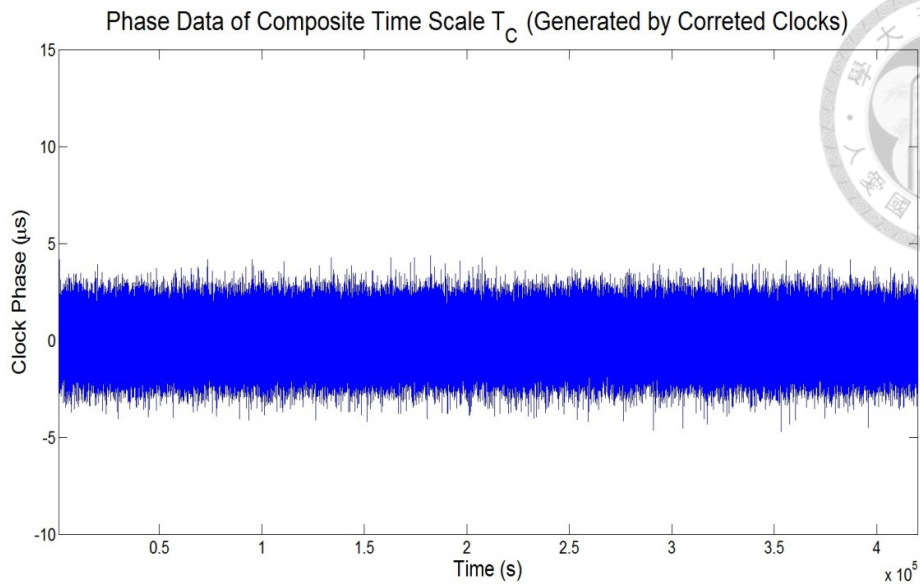
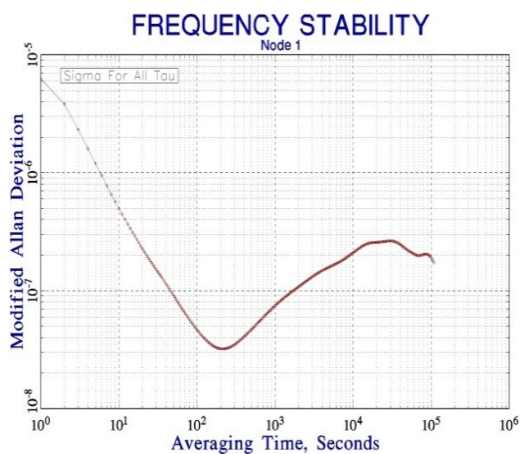


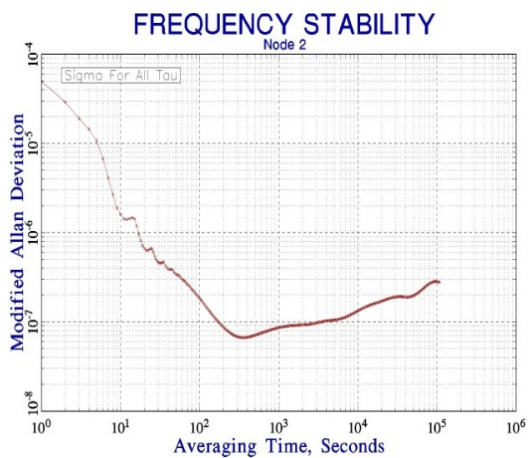
圖 4.5 校正時鐘所生成之合成時間尺度模擬結果

4.4 穩定度分析及比較

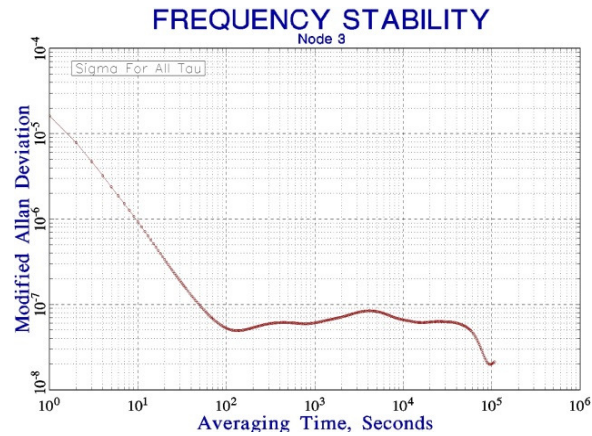
吾人藉由 3.2 節未校正時鐘相位量測實驗所得之結果，分別針對時鐘群組內各時鐘計算修正型亞倫偏差(MDEV)，並將其結果繪於圖 4.6：



(a) 節點 1 (Node 1)之 MDEV



(b) 節點 2(Node 2)之 MDEV



(c) 節點 3(Node 3)之 MDEV

圖 4.6 未校正時鐘之頻率穩定度

如圖所示，三個未校正從時鐘節點之石英振盪器皆具有短期穩定度佳但長期穩定度差的特性，且各時鐘之長期穩定度約在 10^{-6} 與 10^{-7} 級數(Order)範圍間。同時從曲線斜率亦可得知其時鐘雜訊具有除白色雜訊外之成分，此乃為造成卡爾曼濾波器估測失準的主要原因。

此外，吾人亦利用 4.2 節之運算結果，針對由未校正時鐘生成之合成時間尺度 T_C 計算修正型亞倫偏差，並將其結果繪於圖 4.7：

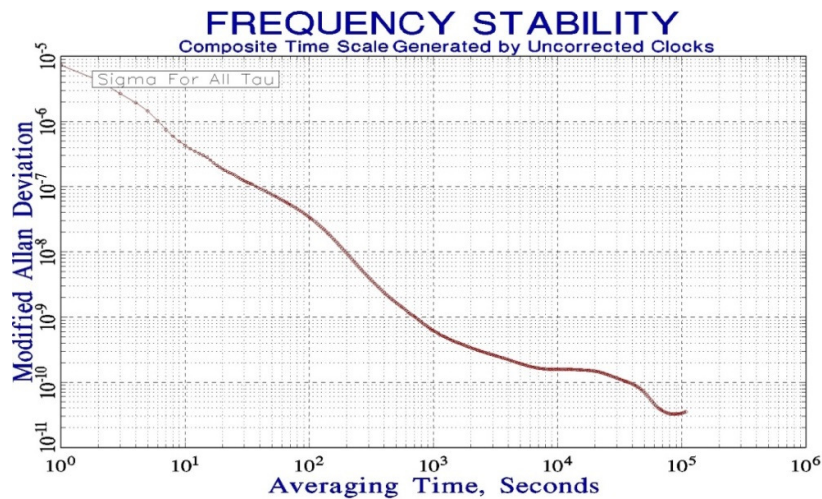


圖 4.7 未校正時鐘所生成之合成時間尺度的頻率穩定度

由圖可知，相較於三個未校正的從時鐘節點，所生成之合成時間尺度具有較佳的長期穩定度，其優於前者三至四個級數，且有較平滑之穩定度曲線，故所受白色雜訊外之成分干擾較少。

此外，吾人亦探討時鐘的校正與否對於合成時間尺度頻率穩定度的影響，針對 4.3 節所得模擬結果針對校正時鐘所生成之時間尺度計算修正型亞倫偏差，並將其結果繪於圖 4.8。藉由圖 4.7 與圖 4.8 之比較，可發現由校正時鐘合成之時間尺度具有更佳的頻率穩定度，其乃因透過校正使得各時鐘之性能提高所致。

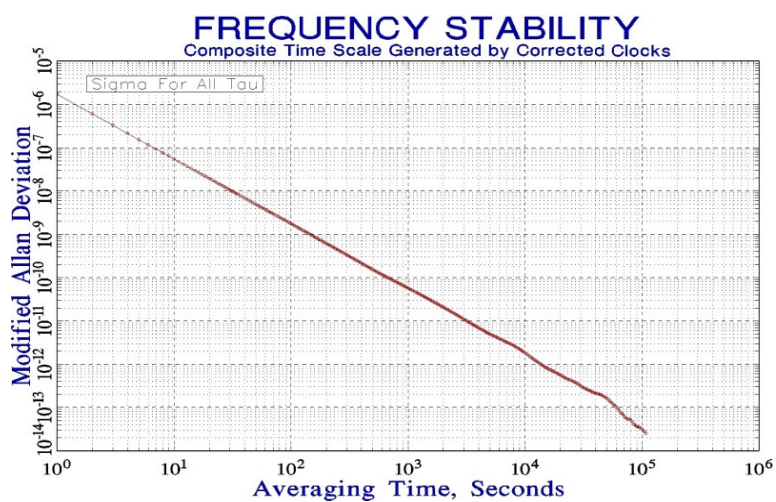


圖 4.8 校正時鐘所生成之合成時間尺度的頻率穩定度



第五章 結論與未來展望

5.1 結論

本論文所提及之合成時間尺度實為一虛擬時鐘，其係以卡爾曼濾波器估測相位所生成。透過相位比較，可知合成時間尺度相對於參考時鐘之時間偏移量較時鐘群組內任一實體時鐘為低；且藉由計算修正型亞倫偏差可知其亦具有較佳的頻率穩定度。

除此之外，透過模擬及實驗結果比較，吾人亦了解若合成時間尺度能以經校正而提升性能之時鐘群組產生，則將能大幅提升其頻率穩定度。最後，因合成時間尺度係由多個時鐘所生成，故當組內有時鐘發生異狀、損毀，或是有新的時鐘加入時，其皆能持續運行。因此，除較佳之頻率穩定度外，合成時間尺度亦具有較高之可靠度。

5.2 未來展望

本論文採用 PTPd 作為量測相位之工具，其乃於網路堆疊之應用層產生時間戳記，故將因時間擾動影響其精確度。若吾人透過硬體，盡可能將時間戳記產生器置於網路堆疊之底層，則可得到更加準確之時間資訊，此亦為高精度同步校正之關鍵[15]。

此外，本論文透過量測所得之相位資料作後續運算，得以追溯於過去期間合成時間尺度之相位。若能在網路中設置一節點，透過時間資訊的封包交換，提供即時的運算產生合成時間尺度，則對於即時性應用將為一重大突破。且未來吾人可進一步與中華電信研究院合作，以國家標準時間作為實驗參考依據，使合成時間尺度更具參考價值。

最後，於本論文所定義之數學模型中，吾人忽略了除白色雜訊外之其餘成分，


因而造成卡爾曼濾波器的估測失準。倘若未來能考慮其餘雜訊成分並加以分析，
將對於時鐘行為的描述更貼近真實。



參考文獻



- [1] L. Galleani and P. Tavella, (2010, Apr.). Time and the Kalman Filter. *IEEE Control Systems Mag.* pp. 44-65.
- [2] W. J. Riley. (2008, Jul., 01). *Handbook of Frequency Stability Analysis* [Online]. Available: <http://www.nist.gov/>
- [3] P. H. Hsu, “Software Simulation of Oscillator Behaviors in Precision Time Protocol Synchronization” M.S. thesis, Dept. Elect. Eng., National Taiwan Univ., Taipei, ROC, 2011.
- [4] C. Zucca and P. Tavella, “The clock model and its relationship with the Allan and related variances,” *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr.*, vol. 52, no. 2, pp. 289-296, Feb. 2005.
- [5] J. S. Bendat and A. G. Piersol, *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, 3rd ed. New York: John Wiley & Sons Inc., 2000.
- [6] <http://zh.wikipedia.org/wiki/> (維基百科)
- [7] K. Y. Tu, “Frequency Syntonization Using GPS Carrier Phase Measurements” Ph.D. thesis, Dept. Elect. Eng., National Taiwan Univ., Taipei, ROC, 2001.
- [8] J. R. Clynch. (2002). *Precise time and time interval clocks, time frames and frequency* [Online]. Available: http://www.gmat.unsw.edu.au/snap/gps/clynch_pdfs/pttinode.pdf
- [9] D. L. Mills. RFC 1305 – Network Time Protocol (version 3): Specification, Implementation and Analysis, March 1992.
- [10] *IEEE Standard for a Precision Clock Synchronization Protocol for Network Measurement and Control Systems*, IEEE Std. 1588-2008.

- 
- [11] J. C. Eidson, *Measurement, Control, and Communication Using IEEE 1588*.
London, UK: Springer-Verlag, 2006
- [12] <http://ptpd.sourceforge.net/> (PTPd 開放原始碼社群)
- [13] A. Gelb, *Applied Optimal Estimation*. Cambridge, MA: MIT Press, 1974.
- [14] D.J. Lewis, *Optimal Estimation*. New York: Wiley, 1986
- [15] I. C. Chao, "Precision Time Synchronization System of Embedded Devices in Distributed Subnet Network" M.S. thesis, Dept. Elect. Eng., National Taiwan Univ., Taipei, ROC, 2009.