

國立台灣大學工學院工程科學及海洋工程學系

碩士論文

Graduate Institute of Engineering Science and Ocean Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis

利用自我迴歸模型與模態曲率理論

以研究懸臂樑結構之損傷偵測

Using AR Model and Theory of Curvature Modal Shape to

Study Damage Detection of Cantilever Beam

鄧皓元

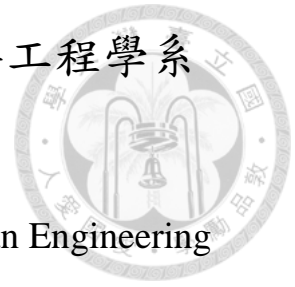
Hao-Yuan Teng

指導教授：柯文俊 博士

Advisor: Wen-Jiunn Ko, Ph.D.

中華民國 102 年 11 月

November, 2013



## 中文摘要



損傷偵測於結構工程問題中為一門重要研究，而樑式結構於工程中又有著廣泛之應用，如：橋梁、建築等。對於樑式結構使用上之安全檢測已存在許多方法；有鑑於近年來結構系統識別發展的完善，並參考了以結構模態參數作為偵測結構損傷狀況之相關文獻後，其內容多以有限元素法作數值上之模擬，但未有許多考慮實際應用狀況之研究。因此本文將結構系統識別所得之模態參數結合結構系統之模態曲率理論考慮實際狀況下偵測懸臂樑結構損傷之情形。

本文使用自我迴歸模型及狀態空間系統理論實際識別出懸臂樑結構之模態參數，利用上述識別成果估算結構之雷利阻尼矩陣係數，透過此方式建立近似於實際狀況懸臂樑之有限元模型並由電腦程式分別模擬多種受損狀況下受損與未受損懸臂樑結構含雜訊之輸出響應，由此一流程即可模擬在僅含輸出響應之情況下，首先以自我迴歸模型反向識別出懸臂樑之模態參數，並基於結構模態曲率之理論對懸臂樑作損傷狀況之偵測。而在考慮實際情況所假設之各種不同受損狀況中，本文以上述方式模擬之成果顯示此損傷偵測方法於實際情況下對受損懸臂樑結構能給予一定程度之鑑別功效。

**關鍵字：**系統識別、自我迴歸模型、狀態空間系統、損傷偵測、模態曲率

# Abstract



Problems of damage detection in structural engineering are a major research topic. Beams have extensive applications in structures. For example, bridges and buildings are about that. The use of beam structure already exists in many safety testing methods. The development of structural system identification plays a good role in these fields in recent years. With the references of damage detection by structures modal parameters, its content are more about using finite element method to simulate damage detection. This thesis consider a way to detect the injury situation of cantilever structure through modal parameters obtained from system identification and the curvature modal shape theory.

This thesis uses the Autoregressive model and the state-space system to identify modal parameters of cantilever beam structure and estimate its coefficient of Rayleigh damping. With the above steps, this thesis create finite element model to be similar to the actual cantilever beam. By generating responses of damaged and undamaged cantilever beams from a computer program, we can simulate the damage detection based on curvature modal shapes. The results showed that the proposed method for the variety injury situations has a good effect.

**Keyword:** System Identification, Autoregressive Model(AR), State-Space System, Damage Detection, Curvature Modal Shape

## 謝誌



我能順利完成這份研究論文真的需要感謝非常多人在各方面的協助，無論是在專業領域或是陪伴我度過生活上的各種大小雜事等，都是讓我能度過這兩年多研究生涯的動力。

首先承蒙並且感謝各位口試委員：宜蘭大學生物機電工程學系 程安邦教授、澳汰爾工程股份有限公司總經理 徐培譽博士、本所 陳國在教授、薛文證教授。感謝您們不吝提出建議與指正讓這份碩士論文更加地完善。

感謝指導教授 柯文俊老師，這兩年多來您的諄諄教誨都讓我覺得自己成長不少，您常教導我們嚴謹做人處事的態度我會銘記在心，非常幸運能接受您的指導，除了感謝還是感謝，希望您身體健康順心。

感謝研究室的后鐘學長、偉庭學長及仁豪學長，你們總是在我不知所措時給予協助，感謝你們耐心地傳承實驗室大小事務。感謝旻毅學長，你平時給的種種意見都讓我有不同的思考方向。感謝宜庭及俊蔚，你們的協助使我的口試能順利完成，祝你們未來研究順利。鴻洲，感謝你的各種幫助，祝你一切順利。

感謝好友莊又全，你的數學能力絕對是我心目中的第一。感謝近四年陪伴我的筱迪，你讓我有信心能順利取得碩士學位。

最後特別感謝我的父母親，謝謝您們給了我一個這樣的環境讓我可以不用擔心家中事務專心讀書而能順利完成學業，萬分感謝，希望你們身體健康愉快。

鄧皓元 謹識

2013 年 11 月於新北市永和

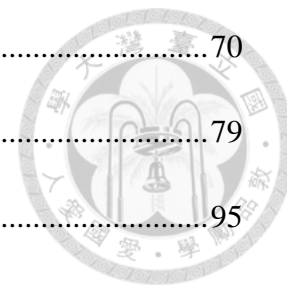
# 目錄



中文摘要 .....	I
Abstract .....	II
謝誌 .....	III
圖目錄 .....	VII
表目錄 .....	XII
簡稱術語對照表 .....	XIV
符號說明 .....	XV
第一章 導論 .....	1
1.1 研究動機.....	1
1.2 文獻回顧.....	2
1.3 論文架構.....	5
第二章 時間序列模型及狀態空間系統識別理論 .....	7
2.1 狀態空間系統.....	7
2.2 時間序列模型.....	9
2.2.1 ARX 模型 .....	10
2.2.2 ARX 模型轉換至離散狀態空間系統 .....	12
2.3 凝縮及連續等效狀態空間系統.....	14
2.4 矩陣轉換法.....	19

2.5	狀態空間系統識別流程.....	24
第三章 結構系統識別與有限元素模型 .....		25
3.1	直立式懸臂鋼樑結構.....	25
3.1.1	直立式懸臂鋼樑結構理論解.....	26
3.1.2	直立式懸臂鋼樑結構有限元素模型.....	30
3.2	直立式懸臂鋼樑結構之識別.....	34
3.2.1	識別成果.....	37
3.2.2	估算直立式懸臂鋼樑結構之雷利阻尼係數.....	40
第四章 模態曲率於結構損傷偵測之理論基礎 .....		44
4.1	模態曲率理論.....	44
4.1.1	損傷因子.....	46
4.1.2	連續體模態曲率.....	47
4.1.3	離散體模態曲率.....	49
4.1.4	中央差分法.....	50
4.2	損傷偵測模擬例.....	51
4.2.1	模擬分散多單元受損.....	55
4.2.2	模擬集中多單元受損.....	58
4.2.3	模擬同單元不同損傷程度.....	61
4.3	損傷偵測流程.....	64
第五章 模擬結構輸出響應之損傷偵測 .....		66
5.1	二階段式選取量測通道位置偵測損傷.....	66

5.1.1	單處損傷偵測.....	70
5.1.2	多處損傷偵測.....	79
5.2	模態振形於數值處理後偵測損傷.....	95
第六章	結論與未來展望 .....	110
6.1	結論.....	110
6.2	未來展望.....	112
參考文獻	.....	114



# 圖目錄



圖 2.1 單自由度系統之 ARX 模型特徵根分布圖 .....	18
圖 2.2 狀態空間系統識別流程圖 .....	24
圖 3.1 直立式懸臂樑結構示意圖 .....	26
圖 3.2 數值方法求解特徵方程式示意圖 .....	29
圖 3.3 直立式懸臂鋼樑實際結構圖 .....	31
圖 3.4 直立式懸臂鋼樑實際結構底座 .....	32
圖 3.5 直立式懸臂樑有限元素模型頂部與底部 .....	32
圖 3.6 懸臂樑有限元素模型邊界條件示意圖 .....	33
圖 3.7 加速規黏貼位置示意圖 .....	35
圖 3.8 量測之加速規 .....	35
圖 3.9 加速規量測各通道之加速度歷時圖 .....	36
圖 3.10 加速規量測各通道之加速度時譜圖 .....	37
圖 3.11 AR 模型識別之頻譜模態疊合圖 .....	38
圖 3.12 AR 模型識別之階數與阻尼比關係圖 .....	38
圖 3.13 由 AR 模型識別、理論值及有限元素分析之模態振形比較圖 .....	39
圖 3.14 AR 模型各階數與雷利阻尼係數關係圖 .....	41
圖 3.15 AR 模型各階數之雷利阻尼係數平均值 .....	42
圖 3.16 AR 模型各階數雷利阻尼係數之標準差 .....	42



圖 4.1 懸臂樑撓曲示意圖 .....	45
圖 4.2 未受損直立式懸臂樑有限元素模型 .....	52
圖 4.3 直立式懸臂樑分割單元與節點示意圖 .....	52
圖 4.4 直立式懸臂樑截面幾何關係示意圖 .....	53
圖 4.5 直立式懸臂樑分散受損之有限元素模型 .....	55
圖 4.6 前四模態之模態振形(分散多單元受損).....	56
圖 4.7 前四模態之模態曲率(分散多單元受損).....	57
圖 4.8 前四模態之模態曲率差(分散多單元受損).....	57
圖 4.9 直立式懸臂樑集中受損有限元素模型 .....	58
圖 4.10 直立式懸臂樑前四模態之模態振形(集中多單元受損).....	59
圖 4.11 前四模態之模態曲率(集中多單元受損).....	60
圖 4.12 前四模態之模態曲率差(集中多單元受損).....	60
圖 4.13 第一模態之模態曲率差(同單元不同受損程度).....	62
圖 4.14 第二模態之模態曲率差(同單元不同受損程度).....	62
圖 4.15 第三模態之模態曲率差(同單元不同受損程度).....	63
圖 4.16 第四模態之模態曲率差(同單元不同受損程度).....	63
圖 4.17 基於模態曲率理論之損傷偵測流程圖 .....	65
圖 5.1 原始訊號與含雜訊 SNR 值 30dB 之時間歷時圖 .....	67
圖 5.2 選取通道恰含受損位置 .....	68
圖 5.3 實際選取通道位置示意圖 .....	68
圖 5.4 集中式選取通道位置示意圖 .....	69

圖 5.5 前四模態之模態振形(單處損傷 D <sub>1</sub> ).....	71
圖 5.6 前四模態之模態曲率(單處損傷 D <sub>1</sub> ).....	71
圖 5.7 第一模態之模態曲率差(單處損傷 D <sub>1</sub> ).....	72
圖 5.8 第二模態之模態曲率差(單處損傷 D <sub>1</sub> ).....	72
圖 5.9 第三模態之模態曲率差(單處損傷 D <sub>1</sub> ).....	73
圖 5.10 第四模態之模態曲率差(單處損傷 D <sub>1</sub> ).....	73
圖 5.11 前四模態之模態振形(單處損傷 D <sub>4</sub> ).....	74
圖 5.12 前四模態之模態曲率(單處損傷 D <sub>4</sub> ).....	74
圖 5.13 等分式選取通道第一模態之模態曲率差(單處損傷 D <sub>4</sub> ).....	75
圖 5.14 等分式選取通道第二模態之模態曲率差(單處損傷 D <sub>4</sub> ).....	75
圖 5.15 等分式選取通道第三模態之模態曲率差(單處損傷 D <sub>4</sub> ).....	76
圖 5.16 等分式選取通道第四模態之模態曲率差(單處損傷 D <sub>4</sub> ).....	76
圖 5.17 集中式選取通道前四模態之模態曲率差(單處損傷 D <sub>1</sub> ).....	78
圖 5.18 集中式選取通道前四模態之模態曲率差(單處損傷 D <sub>4</sub> ).....	78
圖 5.19 前四模態之模態振形(多處損傷狀況一).....	81
圖 5.20 前四模態之模態曲率(多處損傷狀況一).....	81
圖 5.21 等分式選取通道第一模態之模態曲率差(多處損傷狀況一).....	82
圖 5.22 等分式選取通道第二模態之模態曲率差(多處損傷狀況一).....	82
圖 5.23 等分式選取通道第三模態之模態曲率差(多處損傷狀況一).....	83
圖 5.24 等分式選取通道第四模態之模態曲率差(多處損傷狀況一).....	83
圖 5.25 集中式選取通道前四模態之模態曲率差(多處損傷狀況一).....	84

圖 5.26 前四模態之模態振形(多處損傷狀況二).....	84
圖 5.27 前四模態之模態曲率(多處損傷狀況二).....	85
圖 5.28 等分式第一模態之模態曲率差(多處損傷狀況二).....	85
圖 5.29 等分式第二模態之模態曲率差(多處損傷狀況二).....	86
圖 5.30 等分式第三模態之模態曲率差(多處損傷狀況二).....	86
圖 5.31 等分式第四模態之模態曲率差(多處損傷狀況二).....	87
圖 5.32 集中式第一模態之模態曲率差(多處損傷狀況二).....	87
圖 5.33 集中式第二模態之模態曲率差(多處損傷狀況二).....	88
圖 5.34 集中式第三模態之模態曲率差(多處損傷狀況二).....	88
圖 5.35 集中式第四模態之模態曲率差(多處損傷狀況二).....	89
圖 5.36 前四模態之模態振形(多處損傷狀況三).....	90
圖 5.37 前四模態之模態曲率(多處損傷狀況三).....	90
圖 5.38 等分式第一模態之模態曲率差(多處損傷狀況三).....	91
圖 5.39 等分式第二模態之模態曲率差(多處損傷狀況三).....	91
圖 5.40 等分式第三模態之模態曲率差(多處損傷狀況三).....	92
圖 5.41 等分式第四模態之模態曲率差(多處損傷狀況三).....	92
圖 5.42 集中式第一模態之模態曲率差(多處損傷狀況三).....	93
圖 5.43 集中式第二模態之模態曲率差(多處損傷狀況三).....	93
圖 5.44 集中式第三模態之模態曲率差(多處損傷狀況三).....	94
圖 5.45 集中式第四模態之模態曲率差(多處損傷狀況三).....	94
圖 5.46 立方雲線(Cubic Spline)示意圖 .....	97

圖 5.47 前四模態含數值處理後之模態振形(多處損傷狀況一).....	98
圖 5.48 前四模態含數值處理後之模態曲率(多處損傷狀況一).....	99
圖 5.49 第一模態經數值處理之模態曲率差(多處損傷狀況一).....	99
圖 5.50 第二模態經數值處理之模態曲率差(多處損傷狀況一).....	100
圖 5.51 第三模態經數值處理之模態曲率差(多處損傷狀況一).....	100
圖 5.52 第四模態經數值處理之模態曲率差(多處損傷狀況一).....	101
圖 5.53 前四模態含數值處理後之模態振形(多處損傷狀況二).....	102
圖 5.54 前四模態含數值處理後之模態曲率(多處損傷狀況二).....	103
圖 5.55 第一模態經數值處理之模態曲率差(多處損傷狀況二).....	103
圖 5.56 第二模態經數值處理之模態曲率差(多處損傷狀況二).....	104
圖 5.57 第三模態經數值處理之模態曲率差(多處損傷狀況二).....	104
圖 5.58 第四模態經數值處理之模態曲率差(多處損傷狀況二).....	105
圖 5.59 前四模態含數值處理後之模態振形(多處損傷狀況三).....	106
圖 5.60 前四模態含數值處理後之模態曲率(多處損傷狀況三).....	107
圖 5.61 第一模態經數值處理之模態曲率差(多處損傷狀況三).....	107
圖 5.62 第二模態經數值處理之模態曲率差(多處損傷狀況三).....	108
圖 5.63 第三模態經數值處理之模態曲率差(多處損傷狀況三).....	108
圖 5.64 第四模態經數值處理之模態曲率差(多處損傷狀況三).....	109

## 表目錄



表 2.1 轉換矩陣對應不同量測資訊之關係 .....	23
表 3.1 直立式懸臂樑結構幾何與材料參數 .....	25
表 3.2 實體元素與樑元素有限元模型前六模態自然頻率(Hz) .....	33
表 3.3 量測之加速規型號與規格 .....	36
表 3.4 AR(40)模型識別與理論解及有限元素分析之模態參數比較 .....	39
表 3.5 AR(40)識別之自然頻率與阻尼比 .....	43
表 4.1 損傷因子之各項參數數值 .....	53
表 4.2 模擬懸臂樑受損狀況 .....	54
表 4.3 懸臂樑分散多單元受損狀況 .....	55
表 4.4 懸臂樑於分散多單元受損前後之自然頻率(Hz) .....	56
表 4.5 懸臂樑集中多單元受損狀況 .....	58
表 4.6 懸臂樑於集中多單元受損前後自然頻率(Hz) .....	59
表 4.7 懸臂樑同單元不同損傷程度受損狀況 .....	61
表 4.8 損傷偵測方法對於損傷識別指標之比較 .....	64
表 5.1 選取通道位置與受損位置之距離 .....	69
表 5.2 模擬單處受損狀況之受損單元與損傷因子 .....	70
表 5.3 單處受損狀況 AR 模型 40 階識別所得自然頻率(單位：Hz).....	70
表 5.4 模擬多處受損狀況之受損單元與損傷因子 .....	79

表 5.5 多處受損狀況由 AR 模型 40 階識別所得自然頻率(單位：Hz).....	80
表 5.6 多處損傷狀況一之受損單元與損傷因子 .....	98
表 5.7 多處損傷狀況二之受損單元與損傷因子 .....	102
表 5.8 多處損傷狀況三之受損單元與損傷因子 .....	106
表 6.1 本文所模擬各受損狀況之偵測成效 .....	111
表 6.2 本文所考慮各影響損傷偵測因素之結論 .....	111



# 簡稱術語對照表



AR	AutoRegressive	自我迴歸
ARX	AutoRegressive with eXogeneous	含外變數的自我迴歸
ARMA	AutoRegressive Moving Average	自我迴歸移動平均
ARMAX	AutoRegressive Moving Average with eXogeneous	含外變數的自我迴 歸移動平均
NDT	Non-Destructive Testing	非破壞性檢測
FEM	Finite Element Method	有限元素法
FEA	Finite Element Analysis	有限元素分析
CAE	Computer Aided Engineering	電腦輔助工程
MS	Modal Shape	模態振形
CMS	Curvature Modal Shape	模態曲率

## 符號說明



$a_i$	AR 模型之參數矩陣
$\tilde{A}$	離散時間狀態系統矩陣
$A_c$	連續時間狀態系統矩陣
$\overline{A_c}$	等效連續時間之狀態系統矩陣
$A_s$	直立式懸臂鋼樑結構之截面積
$b_j$	ARX 模型之外力參數矩陣
$b_s$	直立式懸臂鋼樑結構之寬度
$\tilde{B}$	離散時間輸入影響矩陣
$B_c$	連續時間輸入影響矩陣
$\overline{B_c}$	等效離散時間之輸入影響矩陣
$B_e$	結構系統之應變矩陣
$\overline{C_c}$	等效離散時間之輸出影響矩陣
$\tilde{C}$	離散時間輸出影響矩陣
$C_a$	加速度輸出響應矩陣



$C_c$	連續時間輸出影響矩陣
$C_d$	位移輸出響應矩陣
$C_n$	懸臂樑結構模態振形理論解公式之係數
$C_v$	速度輸出響應矩陣
$C_\zeta$	黏性阻尼係數
$d$	依照選取通道間隔決定之平移距離
$\tilde{D}$	離散時間直接傳輸矩陣
$D_c$	連續時間直接傳輸矩陣
$\overline{D}_c$	等效連續時間之直接傳輸矩陣
$D_{damage}$	結構之損傷因子
$e_q$	誤差項構成之誤差矩陣
$E$	結構系統之阻尼矩陣
$E_s$	直立式懸臂鋼樑結構之楊氏模數
$E_{s,total}$	結構有限元素模型各元素對應之楊氏模數矩陣
$G_i(x)$	立方雲線多項式
$I$	直立式懸臂鋼樑截面之面積慣性矩



$K$	結構系統之勁度矩陣
$l_i$	懸臂樑有限元素模型之元素長度
$L$	直立式懸臂鋼樑結構之長度
$m(x,t)$	$x$ 位置與 $t$ 時間樑於 $m_x$ 方向所受彎矩
$M$	結構系統之質量矩陣
$N$	結構系統之型函數矩陣
$n_a$	AR 及 ARX 模型之 AR 階數
$n_b$	AR 及 ARX 模型之 X 階數
$O$	懸臂樑變形曲線曲率中心
$p_i$	立方雲線多項式常數項係數
$P(x)$	拉格朗治多項式
$P_q$	ARX 之參數矩陣
$q_i$	立方雲線多項式一次項係數
$q(t)$	廣義座標向量
$r_i$	立方雲線多項式二次項係數
$s_i$	立方雲線多項式三次項係數
$t_s$	直立式懸臂鋼樑結構之厚度



$T_c$	轉換矩陣
$T_{cd}$	僅量測位移響應之轉換矩陣
$T_{cv}$	僅量測速度響應之轉換矩陣
$T_{ca}$	僅量測加速度響應之轉換矩陣
$u_s(t)$	結構系統外力向量
$w_n$	結構系統第 $n$ 模態之自然頻率
$w(x,t)$	懸臂樑於 $x$ 位置 $t$ 時間橫向之理論位移
$x_s(t)$	結構系統位移向量
$y_d(x)$	懸臂樑變形曲線方程式
$y_k$	ARX 模型表示式
$y_m(t)$	量測所得之輸出向量
$y_q$	輸出響應構成之矩陣
$Y_q$	輸出響應與輸入外力共構成之輸出入資料矩陣
$Y(x)$	結構系統受損前後之模態曲率差
$z(t)$	狀態變數向量
$\phi(x)$	模態振形函數
$\theta$	懸臂樑彎曲之轉角



$\alpha$	雷利阻尼中質量項之係數
$\alpha_a$	雷利阻尼中質量項係數之平均值
$\alpha_n$	懸臂樑結構各模態模態振形理論解公式之係數
$\alpha_s$	雷利阻尼中質量項係數之標準差
$\beta$	雷利阻尼中勁度項之係數
$\beta_a$	雷利阻尼中勁度項係數之平均值
$\beta_n$	懸臂樑結構各模態模態振形理論解公式之係數
$\beta_s$	雷利阻尼中勁度項係數之標準差
$\varepsilon_k$	模擬量測與計算時所造成之誤差項
$\kappa(x)$	結構系統之模態曲率
$\rho$	直立式懸臂鋼樑結構之質量密度
$\rho_R$	懸臂樑變形曲線曲率半徑
$\nu$	直立式懸臂鋼樑結構之蒲松比
$\zeta_n$	結構系統第 $n$ 模態之阻尼比
$\Lambda$	系統之特徵根
$\Psi$	系統之特徵向量
$\text{var}(x)$	原始訊號之變異數
$\text{var}(x - \hat{x})$	原始訊號與量測訊號之變異數



[*UNDCUR*]

未受損結構之模態曲率矩陣

[*DCUR*]

受損結構之模態曲率矩陣



# 第一章 導論

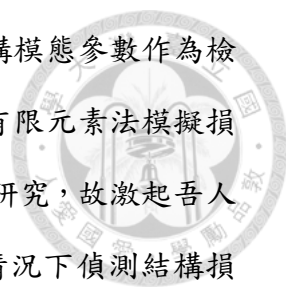


## 1.1 研究動機

損傷偵測一直是結構、建築工程中的熱門研究領域，損傷偵測之主要目的：及時發現結構損壞並掌握受損狀況進而避免損傷情況愈趨嚴重輕則造成財產損失，重則足以威脅生命安全。整體來說，對於識別結構損傷狀況的基本問題而言，主要又分成四項指標：判斷有無損傷、損傷位置、損傷程度及估算壽命。

而由於樑式結構在工程中有著廣泛的應用，因此對於樑式結構的損傷偵測就顯得十分重要；目前對於損傷偵測的方法可以概括為直接法與間接法兩大類型；直接法方面，主要是利用先進的儀器設備來直接觀測結構的金相變化，即觀察金屬材料組織(或缺陷)及其變化規律的一種材料物理試驗；而間接法方面，則是間接透過量測結構的物理特性，如電阻、聲速、結構的勁度及振動特性等[1]，以達到對結構之損傷能有一定程度的瞭解。

任何一個結構系統的振動問題可由輸入外力、結構系統及輸出響應此三部分構成，且結構在受到輸入外力影響時，因結構的不同，會有獨一無二的輸出響應，而系統識別(System Identifications)即為一反向問題，一般可分為以下狀況：(1)同時含有輸入及輸出響應資訊(I/O Data)、(2)僅含有輸出響應資訊(Output Data Only)，而在僅含輸出響應資訊的情況下又可分為：(i)自由振動(Free Vibration Response)、(ii)強迫振動(Forced Vibration Response)。如何由以上資訊反向識別出結構模態參數，如：自然頻率(Natural Frequency)、阻尼比(Damping Ratio)以及模態振型(Modal Shapes)即為系統識別技術所關切。

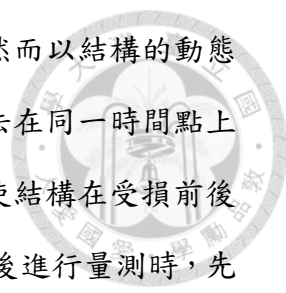


有鑑於近年來線性結構體系統識別之完善，吾人參考以結構模態參數作為檢測結構損傷準則之相關文獻[1-8, 31]，其相關研究中主要多以有限元素法模擬損傷偵測，而並未找到許多關於考慮實際狀況下偵測結構損傷之研究，故激起吾人將系統識別成果結合模態曲率損傷偵測理論嘗試模擬於實際情況下偵測結構損傷狀況之動機。本文即是要考慮在僅含有輸出響應的情況下，透過量測懸臂樑的輸出響應，以時間序列模型及狀態空間系統識別理論識別出結構物之模態參數，由此模態參數基於模態曲率之理論模擬懸臂樑結構之損傷偵測。本文研究目的正是期望以間接性的方式偵測出結構損傷，並探討此流程於實際情況中可能之情況。

## 1.2 文獻回顧

根據結構動力學的內容，對於任意之結構系統而言，其三大特徵參數分別為質量、勁度與阻尼；每個結構系統都有獨一無二的特徵，若掌握此原則，那麼系統在損傷前後的特徵定會有所改變，而這些改變也必將會反應於結構系統的特徵參數以及模態參數中；因此在損傷偵測的相關研究中，依據結構動力特性的變化來檢測結構的受損情況一直受到廣泛的關注。

以結構系統振動特性其相關內容進行量測進而對結構進行損傷偵測在 1960 年代已有學者進行此一類型的相關研究，1969 年 Lifshitz 與 Rotem 透過振動量測以偵測結構損傷[2]。1978 年 Cawley 與 Adam 也以振動量測進行非破壞性之損傷偵測[3]。Stubbs 和 Osegueda 在 1990 年提出了一套以結構受損前後自然頻率變化的靈敏度作為偵測損傷之方法[4]，其中以有限元素法作為分析途徑。



前述偵測損傷之方法皆為比較受損前後之結構模態參數，然而以結構的動態特性進行量測而作為偵測損傷的方式普遍存在著一個問題：無法在同一時間點上分別量測結構在受損前後之數據；就一般而言，這意味著無法使結構在受損前後以完全相同的邊界條件與環境下進行量測，當必須要在破壞前後進行量測時，先天上就產生了一些隨機的誤差進而影響到量測之正確性。1977 年 Doebbling 與 Farrar 的研究指出對於在結構受損前後自然頻率改變量所受到隨機誤差來源之影響相對於其他參數是非常小的[5]；但自然頻率之變化對於結構受損前後之靈敏度是不夠理想的，甚至在實驗操作過程中或是受到環境因素影響所造成之誤差即大於此變化，例如：結構因溫度膨脹。因此若要以自然頻率的改變量對結構進行損傷偵測須有非常精確的量測或是結構受損程度很嚴重才会有明顯之鑑別成果。1980 年後，除了以自然頻率作為結構損傷偵測的標準外，開始有研究學者將結構模態振型應用在結構損傷偵測上；1984 年 West 以模態振型而沒有搭配有限元素之相關方法進行偵測損傷的相關研究[6]，利用 MAC(Modal Assurance Criteria) 指標來計算兩個不同模態振型之相關性，若兩個模態振型分別為由受損前後之結構所得，那麼此二模態振型之不同處即很有可能是結構受損位置。但若是在對結構系統不夠瞭解的情況下，量測點為接近某模態下的節點，則量測所得資訊也無法清楚反應結構之受損情況。不同於直接以結構模態振型作為損傷偵測之判斷依據，有學者採用模態振型的二次微分，定義上與曲率相同，故其稱為模態曲率(Curvature Modal Shape)，Pandey 等人於 1991 年以數值模擬的方式證明模態曲率的變化對於結構受損所造成的影響非常敏感[7]，此研究文獻中將模態振型以中央差分法計算得模態曲率，對於文中模擬的懸臂樑以及簡支樑，結果顯示此法用於損傷偵測中效果良好，若模態曲率於受損前後有明顯改變即表示此結構發生受損，同時此明顯改變之位置即為受損處。1996 年 Stubbs 與 Kim 也在沒有對照組的情況下，測試以模態曲率之方法作為偵測結構損傷準則的適用性[8]。Peng 等



人於 2006 年在理論上證明了模態曲率差法對結構損傷偵測之可行性，並提出了計算結構損傷因子矩陣的公式，最後基於兩種線性假設提出了一種簡易評估結構使用壽命的計算方法[9]。相關文獻中也有提到定義損傷指標(Damage Index)的方法[10]。

在結構系統識別的研究領域中，僅含輸出響應可供系統識別分析的情況下，差分方程式法的使用頗為廣泛；其中包含自我回歸(AutoRegressive, AR)模型、自我迴歸移動平均(AutoRegressive Moving Average, ARMA)模型以及狀態空間模型等。系統識別技術已發展多年，以下針對在僅含有輸出響應資訊的系統識別下作一簡單之文獻回顧：1983 年 Pandit 等人整合了時間序列模型，應用於動態系統分析，其包含了自我迴歸模型、自我迴歸移動平均模型等[11]。1991 年 Pandit 將狀態空間模型歸類為時間序列模型中之特別形式，並將其應用於結構系統之模態與頻譜分析[12]。Overschee 與 Moor 於 1991 年提出了隨機次空間(stochastic subspace)運算法[13, 14]，可由輸出響應以獲得狀態空間模型，其中的物理意義與理論推導本文隨後的章節也有作一詳細的解釋[15]。1996 至 1997 年間，Lardies 利用狀態空間模型及多變數自我迴歸模型識別出在僅有輸出響應情況下之結構模態參數[16, 17]。Hung 與 Ko 等人利用最小平方原理估計一個多變數自我迴歸模型的自我迴歸參數矩陣，並將識別所得的模態參數應用於結構之修正及更新的問題[18]。而同時具有輸出響應及輸入外力之系統識別中，Ljung 與 Soderstrom 的書籍完整地將含外變數的自我迴歸(Autoregressive with eXogeneous variable, ARX)模型及含外變數的自我迴歸移動平均(Autoregressive Moving Average with eXogeneous variable, ARMAX)模型作理論及參數估計法的介紹[19, 20]，其中又以含外變數的自我迴歸模型之應用最為廣泛。McGraw 等人指出只要適當地提高 AR 模型的階數，在理論上與含外變數的自我迴歸移動平均模型近似等效[21]。Soderstrom 等人利用最小平方參數估計法來識別一個連續時間中含外變數的自

我迴歸模型[22]。Hung 與 Ko 等人利用最小平方技術識別含外變數的自我迴歸模型，並應用於結構更新及修正問題。除此之外還結合含外變數的自我迴歸模型與 ERA 自混合位移、速度及加速度輸出響應及輸入外力來鑑定結構系統之矩陣[23, 24]。而狀態空間系統萃取模態參數之理論，其中囊括了：離散時間序列模型、離散狀態空間系統、等效離散狀態空間系統、等效連續狀態空間系統及狀態空間系統其彼此間的轉換過程；此外，為了刪除非系統本身之特徵根而發展出的凝縮理論，及為了萃取系統特徵參數之矩陣轉換法、馬克夫參數不變原理等[25-28]。

本文即是要在僅含有輸出響應的情況下以自我迴歸模型與狀態空間系統識別出懸臂樑結構之模態參數，以此參數實際利用 Pandey 等人及 Peng 等人提出之模態曲率以及模態曲率差法並考慮於實際結構偵測損傷時可能之情況模擬結構損傷偵測，最後以數值處理方式增進識別成效。

## 1.3 論文架構

### 第一章：導論

本章敘述本文之研究目的與研究動機，並對結構損傷偵測研究近況與本文欲使用之結構系統識別等相關研究作一簡單之文獻回顧，希望透過此章節以概略方式介紹後能帶領讀者迅速地瞭解本文之概要。

### 第二章：時間序列模型及狀態空間系統識別理論

本章將介紹本文所使用之時間序列模型及使用狀態空間系統識別等相關理論。對時間序列模型如何轉換至離散等效狀態空間系統作推導，判斷是否凝縮後再轉換至連續等效狀態空間系統，最後經矩陣轉換法轉換至狀態空間並萃取系統之模態參數。本章末並有一完整之流程圖方便理解完整過程。



### 第三章：結構系統識別與有限元素模型

由第二章介紹之系統識別理論實際對結構進行識別，並估算系統之雷利阻尼係數以建立有限元素模型；本章也將針對本文所使用之有限元素軟體及有限元素法作一概略之介紹。

### 第四章：模態曲率於結構損傷偵測之理論基礎

本章首先完整介紹基於結構模態曲率差之損傷偵測理論，包括連續體模態曲率相關理論基礎及多自由度模態曲率有限元素理論。此外也將模擬結構多種損傷狀況，並就此理論實際數值模擬損傷偵測。

### 第五章：模擬結構輸出響應之損傷偵測

由第三章實際識別出之結構雷利阻尼係數，分別建立完整與未受損之結構，並在多種損傷狀況下以第四章所介紹之損傷偵測理論對結構受損情況進行偵測，且嘗試以數值處理方式增進偵測效果。

### 第六章：結論與未來展望

綜合本文之損傷偵測成果，作出結論並提出未來展望。

## 第二章 時間序列模型及狀態空間系統識別理論



本章將對本文所使用之系統識別相關理論與實踐理論之識別流程作完整說明，其中更詳細的內容可參考文獻資料[24-28]。狀態空間系統是一種用以描述運動方程式之表示式，其系統矩陣中隱含著結構系統之特徵參數；而一組未知的數據資料，排序方式通常為依照時間先後，此種數據資料稱之為時間序列。若能將此時間序列予以合適之模型來描述，如：自我迴歸(AutoRegressive, AR)模型、含外變數的自我迴歸(AutoRegressive with eXogeneous variable, ARX)模型。再透過對其控制、分析並加以預測，利用所得到之差分方程式搭配相關的轉換公式與狀態空間系統即可準確的識別出結構系統未知的特徵與模態參數。

### 2.1 狀態空間系統

理論上，任何實際結構系統之動態行為皆為無限多自由度之系統，而狀態空間系統即是利用一偏微分方程式做為其控制方程式。然而在系統識別面對的實際工程問題中，須考量到實驗器材數量之限制，故通常將結構系統視為  $n$  個自由度之系統以近似實際結構系統。若以  $x_s(t)$ 、 $u_s(t)$  分別表示結構系統  $n \times 1$  之位移向量及外力向量，則可將結構系統之運動方程式表示為如下之二階微分方程式：

$$M \ddot{x}_s(t) + E \dot{x}_s(t) + K x_s(t) = u_s(t) \quad (2.1.1)$$

其中， $M$ 、 $E$  及  $K$  分別表示  $n$  階之質量、阻尼與勁度矩陣； $\dot{x}_s(t)$  與  $\ddot{x}_s(t)$  分別為結構之  $n \times 1$  速度及加速度響應。式(2.1.1)中，若質量、阻尼與勁度為已知，

即正向地求解一個矩陣系統方程式，然而對於實際結構體而言，要獲取其特徵參數通常不易，結構系統識別即為此類型之反向問題，藉由實驗儀器，如位移計、速度計與加速規等，量測結構之輸出響應並考慮輸入外力資料以推算結構之模態參數。若將式(2.1.1)所示之二階矩陣微分方程式以一階矩陣微分方程式表示，以  $x_s(t)$  及  $\dot{x}_s(t)$  表示位移及速度向量作為  $2n \times 1$  之狀態變數向量  $z(t)$ ，則有一階狀態空間運動方程式：

$$z(t) = \begin{Bmatrix} x_s(t) \\ \dot{x}_s(t) \end{Bmatrix} \quad (2.1.2)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_s(t) \\ \ddot{x}_s(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_s(t) \\ \dot{x}_s(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} u_s(t) \quad (2.1.3)$$

考慮在實際量測中， $l$  個自由度且任一自由度只採用一種儀器之情況下(若實際結構為  $n$  自由度，通常  $l \leq n$ )，則式(2.1.1)可表示為：

$$y_m(t) = C_a \ddot{x}_s(t) + C_v \dot{x}_s(t) + C_d x_s(t) \quad (2.1.4)$$

其中， $y_m(t)$  為量測所得之  $l \times 1$  輸出響應向量， $C_a$ 、 $C_v$  及  $C_d$  分別為  $l \times n$  之加速度、速度與位移輸出響應矩陣(Output Influence Matrix)，且這些矩陣中各元素之數值僅為 0 或 1，其意義表示若值為 1 則顯示該自由度使用了其矩陣代表之量測儀器，而若值為 0 則反之。若將式(2.1.4)同樣以一階矩陣微分方程式表示，則有：

$$y_m(t) = \begin{bmatrix} C_d - C_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & C_v - C_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_s(t) \\ \dot{x}_s(t) \end{Bmatrix} + C_a \mathbf{M}^{-1} u_s(t) \quad (2.1.5)$$

綜合式(2.1.2)、式(2.1.3)與式(2.1.5)，則有一階狀態空間運動方程式組，將其以矩陣型式表示：

$$\dot{z}(t) = A_c z(t) + B_c u_s(t) \quad (2.1.6)$$

$$y_m(t) = C_c z(t) + D_c u_s(t) \quad (2.1.7)$$

其中， $A_c$  為  $2n$  階方陣且表示結構狀態方程式之連續時間狀態系統矩陣， $B_c$  為  $2n \times n$  且表示連續時間輸入影響矩陣， $C_c$  為  $l \times 2n$  且表示連續時間輸出影響矩陣， $D_c$  為  $l \times n$  且表示連續時間直接傳輸矩陣。在本文往後的章節中，為了方便閱讀及篇幅的簡潔，皆以  $\langle A_c, B_c, C_c, D_c \rangle$  表示式(2.1.6)與式(2.1.7)。本節推導之狀態空間方程式組  $\langle A_c, B_c, C_c, D_c \rangle$ ，其中系統矩陣  $A_c$  蘊含了結構之特徵參數，質量、阻尼及勁度，在本章接續的章節中將介紹所使用之矩陣轉換法，將連續等效狀態空間系統轉換至狀態運動方程式，透過凝縮、萃取等過程，目的為識別出系統之線性模態參數。

## 2.2 時間序列模型

普遍來說，對於觀察所得之數據序列而言，其通常為按照時間排序，此外亦有按照別種方式排列如空間位置，此處將通稱為時間數列。有別於統計學之研究，時間數列之研究關心的重點在於對觀察所得數值其前後的相關性，雖然某些問題中其觀察所得數值在統計上是獨立存在的，但考慮大多數的情況下，這些數值其前後是有相關性存在的。本節將介紹近年來廣泛應用於系統識別中之時間序列模型。在此附加說明，對於資料統計相關性多為以自我相關函數表示，也因此時間數列分析的方法同樣為建立在測量自我相關函數之基礎上。



## 2.2.1 ARX 模型

本節中將介紹如何透過輸出、輸入之資料加以預測或作為本文使用系統識別之過程，而本文所主要使用之時間序列模型為 ARX 模型，其表示式為：

$$y_k = \sum_{i=1}^{n_a} a_i y_{k-i} + \sum_{j=0}^{n_b} b_j u_{k-j} + \varepsilon_k \quad (2.2.1)$$

其中， $a_i$ 、 $b_j$  分別表示  $l \times l$  之自我迴歸(AR)參數矩陣與  $l \times n$  之外力(X)參數矩陣； $n_a$ 、 $n_b$  則分別表示 AR 與 X 部分之階數； $\varepsilon_k$  用以表示模擬時之量測誤差、計算誤差、未考慮到的高頻模態及可能存在的非線性動態特性。一般 ARX 模型應用於結構模態參數識別時，常與狀態空間系統作結合應用，多假設 AR 與 X 部分之階數相同以簡化問題。此處假設 AR 與 X 部分階數相同，即  $n_a = n_b = q$ ，並依序展開式(2.2.1)如下：

$$y_1 = b_0 u_1 + e_1$$

$$y_2 = a_1 y_1 + b_0 u_2 + b_1 u_1 + e_2$$

⋮

$$y_q = \sum_{i=1}^{q-1} a_i y_{q-i} + \sum_{j=0}^{q-1} b_j u_{q-j} + e_q$$

$$y_{q+1} = \sum_{i=1}^q a_i y_{q+1-i} + \sum_{j=0}^q b_j u_{q+1-j} + e_{q+1}$$

$$y_{q+2} = \sum_{i=1}^{q+1} a_i y_{q+2-i} + \sum_{j=0}^{q+1} b_j u_{q+2-j} + e_{q+2}$$

⋮

$$y_N = \sum_{i=1}^N a_i y_{N-i} + \sum_{j=0}^N b_j u_{N-i} + e_N \quad (2.2.2)$$

上述展開式中，前  $q$  項由於初始資訊不足且並未完整地含括整個 ARX 模型應含的參數，故將其捨棄以避免在估計參數時造成負面的影響。而若將 ARX 之參數矩陣以  $l \times (lq + n(q+1))$  之  $P_q$  表示，則  $P_q = [a_1 \ \cdots \ a_q \ b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_q]$ ，並考慮捨棄前  $q$  項後之方程式如下：

$$\begin{bmatrix} y_{q+1} & y_{q+2} & \cdots & y_n \end{bmatrix} = P_q \begin{bmatrix} y_q & y_{q+1} & \cdots & y_{N-1} \\ y_{q-1} & y_q & \cdots & y_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{N-q} \\ u_{q+1} & u_{q+2} & \cdots & u_N \\ u_q & u_{q+1} & \cdots & u_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_{N-q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{q+1} & e_{q+2} & \cdots & e_n \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

可將式(2.2.3)以簡潔形式表示：

$$y_p = P_q Y_q + e_q \quad (2.2.4)$$

其中， $y_q$  為輸出響應所構成之  $l \times (N-q)$  矩陣， $Y_q$  為輸出響應與輸入外力所共同構成之  $(lq + n(q+1)) \times (N-q)$  輸出入資料矩陣， $e_q$  為誤差項所構成  $l \times (N-q)$  之誤差矩陣。若經過 Moore-Penrose 擬似反式估算後，可以將 ARX 模型之形式替換為如下之系統識別後所得之差分方程系統表示式：

$$y_k \cong \sum_{i=1}^q \hat{a}_i y_{k-i} + \sum_{j=0}^q \hat{b}_j u_{k-j} \quad (2.2.5)$$



由本節介紹之內容，在擁有系統之輸出響應及輸入外力後，建立 ARX 模型之 AR 與 X 參數矩陣，便可將其轉換至離散時間之狀態空間模型，以下將接續介紹相關內容。



## 2.2.2 ARX 模型轉換至離散狀態空間系統

接續前節之內容，將 ARX 模型轉換至離散狀態空間；首先令一狀態向量，第一個元素為輸出，第二個元素為輸入；並令第  $k$  時間選擇前  $q$  個輸出響應所構成之向量  $y_{k-1/k-q}$ 、前  $q$  個輸入外力所構成之向量  $u_{k-1/k-q}$  如下：

$$z_k = \begin{Bmatrix} y_{k-1/k-q} \\ u_{k-1/k-q} \end{Bmatrix} \quad (2.2.6)$$

且

$$y_{k-1/k-q} = \begin{Bmatrix} y_{k-1} \\ \vdots \\ y_{k-q} \end{Bmatrix}, u_{k-1/k-q} = \begin{Bmatrix} u_{k-1} \\ \vdots \\ u_{k-q} \end{Bmatrix} \quad (2.2.7)$$

則式(2.2.6)與式(2.2.7)可改寫為如下之狀態空間系統表示式：

$$z_{k+1} = \tilde{A}z_k + \tilde{B}u_k \quad (2.2.8)$$

$$y_k = \tilde{C}z_k + \tilde{D}u_k \quad (2.2.9)$$

且

$$z_{k+1} = \begin{Bmatrix} y_{k-1/k-q+1} \\ u_{k-1/k-q+1} \end{Bmatrix} \quad (2.2.10)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.2.11)$$

$$\tilde{B} = \begin{Bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.2.12)$$

其中， $\tilde{A}$  為 ARX 模型轉換至離散時間後之  $q(l+n) \times q(l+n)$  狀態系統矩陣， $\tilde{B}$  則為  $q(l+n) \times n$  之輸入影響矩陣，式(2.2.9)、式(2.2.11)與式(2.2.12)中，其狀態空間參數矩陣表示如下：

$$\tilde{A}_{11} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 & \hat{a}_2 & \dots & \hat{a}_{q-1} & \hat{a}_q \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.13)$$

$$\tilde{A}_{12} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 & \hat{b}_2 & \dots & \hat{b}_q \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.14)$$

$$\tilde{A}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.15)$$

$$\tilde{B}_1 = \begin{Bmatrix} \hat{b}_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.2.16)$$

$$\tilde{B}_2 = \begin{Bmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.2.17)$$

$$\tilde{C}_1 = [\hat{a}_1 \quad \dots \quad \hat{a}_q] \quad (2.2.18)$$

$$\tilde{C}_2 = [\hat{b}_1 \quad \dots \quad \hat{b}_q] \quad (2.2.19)$$



其中， $\tilde{C}$  為轉換至離散時間後之  $l \times q(l+n)$  輸出影響矩陣， $\tilde{D}$  則為  $l \times n$  之直接傳輸矩陣，由本節所介紹之內容，即可將原建立模型後所得之差分方程式轉換至離散時間狀態空間系統  $\langle \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D} \rangle$ 。

## 2.3 凝縮及連續等效狀態空間系統

系統識別中很重要的一環為獲取系統之特徵根，然而在識別過程中，無可避免地會有諸多誤差產生，如：實驗量測誤差、環境造成之雜訊干擾及計算上的誤差等，為求更良好的精確度，在將 ARX 模型透過轉換後得到離散等效狀態空間方程組時，通常會增加 ARX 模型之建模階數，但相對地則會導致因次過大而產生更多非系統之特徵根，因其常不具規則地出現在不同階數之 ARX 模型中，故之為幽靈根(Ghost Roots)，本節即要介紹去除幽靈根並留下系統特徵根之過程，稱為凝縮。而在離散等效狀態空間方程組經凝縮後，還須將其轉換至連續時間系統上，此一過程可透過連續與離散系統之間的關係式得以完成，以下將依序介紹凝縮及轉換過程。

由上節中 ARX 模型轉換後之離散狀態空間方程組，此未凝縮之狀態空間方程式為：

$$z_{k+1} = \tilde{A}z_k + \tilde{B}u_k \quad (2.3.1)$$

$$y_k = \tilde{C}z_k + \tilde{D}u_k \quad (2.3.2)$$

將系統之特徵根與特徵向量分別表示為  $\Lambda_s$  及  $\Psi$ ，則  $\tilde{A}$  矩陣經特徵分解後：

$$\tilde{A} = \Psi \Lambda \Psi^{-1} = \begin{bmatrix} \Psi_{ss} & \Psi_{sp} \\ \Psi_{ps} & \Psi_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_s & 0 \\ 0 & \Lambda_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{ss} & \Psi_{sp} \\ \Psi_{ps} & \Psi_{pp} \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.3.3)$$

式(2.3.3)中，下標  $s$  表示系統(System)本身之特徵根， $p$  表示虛假(Spurious)之特徵根，將  $\tilde{A}$  矩陣中，系統本身和虛假的所分別對應之特徵向量與特徵根分開後，再將其代入式(2.3.1)：

$$z_{k+1} = \Psi \Lambda \Psi^{-1} z_k + \tilde{B}u_k \quad (2.3.4)$$

將  $\Psi^{-1}$  由左向右乘上式(2.3.4)，並設  $\hat{z}_k = \Psi^{-1} z_k$ ，則有：

$$\hat{z}_{k+1} = \Lambda \hat{z}_k + \Psi^{-1} \tilde{B}u_k = \Lambda \hat{z}_k + \hat{B}u_k \quad (2.3.5)$$

以此類推，式(2.3.2)同樣可改寫為：

$$y_k = \tilde{C} \Psi \hat{z}_k + \tilde{D}u_k = \hat{C} \hat{z}_k + \hat{D}u_k \quad (2.3.6)$$

將轉換過之狀態向量與輸出訊號同樣分成系統自身及虛假之特徵根與特徵向量，則式(2.3.5)與式(2.3.6)：

$$\begin{Bmatrix} \hat{z}_{k+1}^s \\ \hat{z}_{k+1}^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_s & 0 \\ 0 & \Lambda_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{z}_k^s \\ \hat{z}_k^p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_s \\ \hat{B}_p \end{bmatrix} u_k \quad (2.3.7)$$



以及

$$y_k = \begin{bmatrix} \hat{C}_s & \hat{C}_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{z}_k^s \\ \hat{z}_k^p \end{Bmatrix} + \hat{D}u_k \quad (2.3.8)$$

其中

$$\Psi^{-1} \tilde{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_s \\ \hat{B}_p \end{bmatrix} \quad (2.3.9)$$

$$\tilde{C}\Psi = \begin{bmatrix} \hat{C}_s & \hat{C}_p \end{bmatrix} \quad (2.3.10)$$

經過篩選，將不屬於系統自身之特徵根與特徵向量忽略，其篩選方式將稍後介紹，則式(2.3.7)及式(2.3.8)有如下之近似式：

$$\hat{z}_{k+1}^s \cong \Lambda_s \hat{z}_k^s + \tilde{B}_s u_k \quad (2.3.11)$$

$$y_k \cong \hat{C}_s \hat{z}_k^s + \tilde{D}u_k \quad (2.3.12)$$

而狀態向量轉換前後關係則為：

$$\begin{Bmatrix} z_k^s \\ z_k^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{ss} & \Psi_{sp} \\ \Psi_{ps} & \Psi_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{z}_k^s \\ \hat{z}_k^p \end{Bmatrix} \quad (2.3.13)$$

由式(2.3.13)可得  $z_k^s \cong \Psi_{ss} \hat{z}_k^s$  或  $\hat{z}_k^s \cong \Psi^{-1} z_k^s$  之關係式，並將此關係式代入式(2.3.11)與式(2.3.12)：

$$\Psi_{ss}^{-1} z_{k+1}^s = \Lambda_s \Psi_{ss}^{-1} z_k^s + \widehat{B}_s u_k \quad (2.3.14)$$

$$y_k \cong \widehat{C}_s \Psi_{ss}^{-1} z_k^s + \widetilde{D} u_k = \bar{C} z_k^s + \bar{D} u_k \quad (2.3.15)$$



接著將式(2.3.14)自左向右乘上  $\Psi_{ss}$ ，則有：

$$z_{k+1}^s = \Psi_{ss} \Lambda_s \Psi_{ss}^{-1} z_k^s + \Psi_{ss} \widehat{B}_s u_k = \bar{A} z_k^s + \bar{B} u_k \quad (2.3.16)$$

式(2.3.15)與式(2.3.16)即為凝縮後之狀態空間系統：

$$z_{k+1}^s = \bar{A} z_k^s + \bar{B} u_k \quad (2.3.17)$$

$$y_k = \bar{C} z_k^s + \bar{D} u_k \quad (2.3.18)$$

由前節所介紹之形式，可知凝縮後離散時間等效狀態空間系統  $\langle \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D} \rangle$  之轉換式分別為：

$$\bar{A} = \Psi_{ss} \Lambda_s \Psi_{ss}^{-1} \quad (2.3.19)$$

$$\bar{B} = \Psi_{ss} \widehat{B}_s \quad (2.3.20)$$

$$\bar{C} = \widehat{C}_s \Psi_{ss}^{-1} \quad (2.3.21)$$

$$\bar{D} = \widetilde{D} \quad (2.3.22)$$

而在得到離散時間等效狀態方程組  $\langle \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D} \rangle$  後，須將其轉換至連續時間等效狀態方程組  $\langle \bar{A}_c, \bar{B}_c, \bar{C}_c, \bar{D}_c \rangle$ ，其轉換關係式：

$$\bar{A}_c = \ln(\bar{A}) / \Delta t \quad (2.3.23)$$

$$\bar{B}_c = \ln(\bar{A})(\bar{A} - I)^{-1} \bar{B} / \Delta t \quad (2.3.24)$$

$$\bar{C}_c = \bar{C} \quad (2.3.25)$$

$$\bar{D}_c = \bar{D} \quad (2.3.26)$$



前述篩選系統本身之特徵根之過程，即為本節所介紹之凝縮。此法之重點在於如何排除非系統特徵根並保留自身特徵根；事實上，對於任一系統而言，其特徵有一特性，無論使用模型之階數為何，其特徵根為固定值，圖(2.1)將說明此情況：

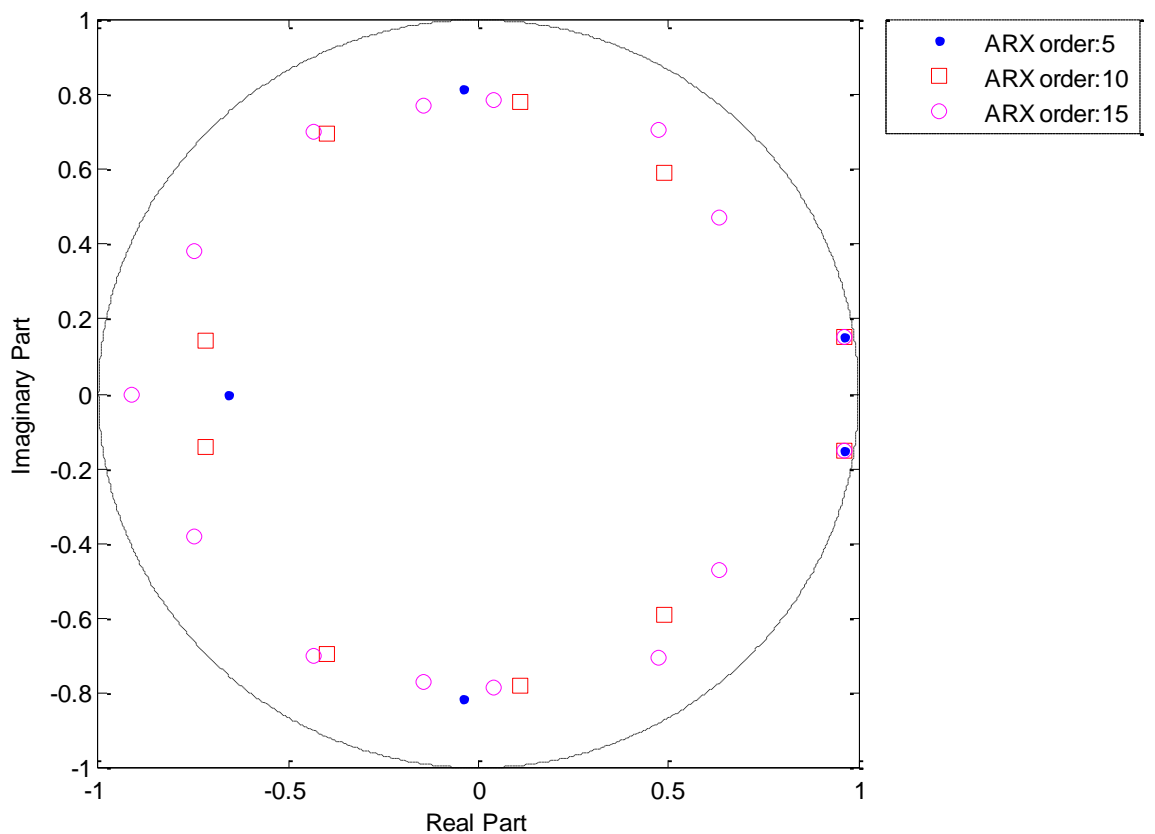


圖 2.1 單自由度系統之 ARX 模型特徵根分布圖

假設一單自由度系統，建立其 ARX 模型以識別其特徵根，依序分別為 5 階、10 階及 15 階，並將各不同階數之特徵根如圖中註記之符號繪於單位圓內，觀察其分布狀況。由圖中所示，不同階數之特徵根將不固定位置地散布於單位圓內，唯獨圖中右側兩處之特徵根在階數不同時皆重合，若增加更高階數之根值也將重合，而此二位置即為系統自身之特徵根。我們即可利用系統此一特性，配合前述介紹之理論，篩選掉系統之幽靈根藉以選取出系統之特徵根，以達到凝縮之功效。

## 2.4 矩陣轉換法

透過前幾節所介紹之內容並依其步驟，已可得到一組連續時間等效狀態方程組  $\langle \bar{A}_c, \bar{B}_c, \bar{C}_c, \bar{D}_c \rangle$ ，但若欲將狀態空間系統中之實際特徵參數萃取出，還須進行本節將介紹之矩陣轉換法理論，如此一來即可完整識別出系統之線性特徵參數。本節中，將說明一系列之推導，如何將此一連續時間等效狀態方程組轉換至狀態空間方程組  $\langle A_c, B_c, C_c, D_c \rangle$ 。

為便於理論推導，假設一  $2n \times 2n$  之非奇轉換矩陣以  $T_c$  表示，其可使欲轉換之兩組狀態方程組， $\langle A_c, B_c, C_c, D_c \rangle$  與  $\langle \bar{A}_c, \bar{B}_c, \bar{C}_c, \bar{D}_c \rangle$  具如下之關係：

$$A_c = T_c \bar{A}_c T_c^{-1} \quad (2.4.1)$$

$$B_c = T_c \bar{B}_c \quad (2.4.2)$$



$$C_c = \bar{C}_c T_c^{-1} \quad (2.4.3)$$

$$D_c = \bar{D} \quad (2.4.4)$$



將此一轉換矩陣  $T_c$  列分割為上下兩部分，其分別具有相同之列因次：

$$T_c = \begin{bmatrix} T_{c1} \\ T_{c2} \end{bmatrix} \quad (2.4.5)$$

將  $T_c$  由右向左乘上式(2.4.1)，則有：

$$A_c T_c = T_c \bar{A}_c \quad (2.4.6)$$

若以矩陣形式表示則為：

$$\begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -M^{-1}K & -M^{-1}E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{c1} \\ T_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{c1} \\ T_{c2} \end{bmatrix} \bar{A}_c \quad (2.4.7)$$

其中，式(2.4.7)可表示為二方程式：

$$T_{c2} = T_{c1} \bar{A}_c \quad (2.4.8)$$

$$-M^{-1}K T_{c1} - M^{-1}E T_{c2} = T_{c2} \bar{A}_c = T_{c1} \bar{A}_c^2 \quad (2.4.9)$$

由式(2.4.8)與式(2.4.9)可以得到  $T_{c1}$  與  $T_{c2}$  之關係，並由式(2.4.2)：

$$B_c = \begin{bmatrix} 0_n \\ M^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{c1} \\ T_{c2} \end{bmatrix} \bar{B}_c \quad (2.4.10)$$

同樣將式(2.4.10)表示為兩方程式：

$$T_{c1}\bar{B}_c = 0_n \quad (2.4.11)$$

$$M^{-1} = T_{c2}\bar{B}_c \quad (2.4.12)$$



將式(2.4.8)代入式(2.4.12)，並由式(2.4.3)可得：

$$M^{-1} = T_{c2}\bar{B}_c = T_{c1}\bar{A}_c\bar{B}_c \quad (2.4.13)$$

$$C_c T_c = \bar{C}_c \quad (2.4.14)$$

$$\begin{bmatrix} C_d - C_a M^{-1} K & C_v - C_a M^{-1} E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{c1} \\ T_{c2} \end{bmatrix} = \bar{C}_c \quad (2.4.15)$$

$$(C_d - C_a M^{-1} K)T_{c1} + (C_v - C_a M^{-1} E)T_{c2} = \bar{C}_c \quad (2.4.16)$$

觀察式(2.4.11)， $T_{c1}$ 其實可透過 $\bar{B}_c^T$ 之零空間來求解，即 $T_{c1}^T \bar{B}_c^T = 0_{2n}$ 其所有解構成之次空間；但實際上當無輸入外力時是無法求出其通解的，因無法獲得 $\bar{B}_c$ 。

有鑑於此一限制，故將不使用此式求解，僅以剩餘方程式進行求解。

將式(2.4.16)改寫為：

$$C_d T_{c1} + C_v T_{c2} + C_a (-M^{-1} K T_{c1} - M^{-1} E T_{c2}) = \bar{C}_c \quad (2.4.17)$$

將式(2.4.8)與式(2.4.9)代入式(2.4.17)，則可整理為：

$$C_d T_{c1} + C_v T_{c1} \bar{A}_c + C_a T_{c1} \bar{A}_c^2 = \bar{C}_c \quad (2.4.18)$$

分別將 $C_d$ 、 $C_v$ 及 $C_a$ 自左向右乘上式(2.4.18)，則有：

$$C_d^2 T_{c1} + C_d C_v T_{c1} \bar{A}_c + C_d C_a T_{c1} \bar{A}_c^2 = C_d \bar{C}_c \quad (2.4.19)$$

$$C_v C_d T_{c1} + C_v^2 T_{c1} \bar{A}_c + C_v C_a T_{c1} \bar{A}_c^2 = C_v \bar{C}_c \quad (2.4.20)$$

$$C_a C_d T_{c1} + C_a C_v T_{c1} \bar{A}_c + C_a^2 T_{c1} \bar{A}_c^2 = C_a \bar{C}_c \quad (2.4.21)$$

其中  $C_d$ 、 $C_v$  及  $C_a$  矩陣中之元素僅包含 0 或 1，如 2.1 節所述之輸出響應矩陣。而當每一自由度只使用一種形式之輸出量測時，則有如下之關係：

$$C_d^2 = C_d, C_v^2 = C_v, C_a^2 = C_a \quad (2.4.22)$$

$$C_d C_v = C_v C_d = 0, C_d C_a = C_a C_d = 0, C_v C_a = C_a C_v = 0 \quad (2.4.23)$$

利用式(2.4.22)與式(2.4.23)所述之關係式，將式(2.4.19)至式(2.4.21)改寫為：

$$C_d T_{c1} = C_d \bar{C}_c \quad (2.4.24)$$

$$C_v T_{c1} \bar{A}_c = C_v \bar{C}_c \quad \text{或} \quad C_v T_{c1} = C_v \bar{C}_c \bar{A}_c^{-1} \quad (2.4.25)$$

$$C_a T_{c1} \bar{A}_c^2 = C_a \bar{C}_c \quad \text{或} \quad C_a T_{c1} = C_a \bar{C}_c \bar{A}_c^{-2} \quad (2.4.26)$$

將式(2.4.24)、式(2.4.25)與式(2.4.26)相加可得：

$$(C_d + C_v + C_a) T_{c1} = C_d \bar{C}_c + C_v \bar{C}_c \bar{A}_c^{-1} + C_a \bar{C}_c \bar{A}_c^{-2} \quad (2.4.27)$$

而在每一個自由度僅採用一種輸出量測之條件下，有  $C_d + C_v + C_a = I$  之關係，代入式(2.4.27)：

$$T_{c1} = C_d \bar{C}_c + C_v \bar{C}_c \bar{A}_c^{-1} + C_a \bar{C}_c \bar{A}_c^{-2} \quad (2.4.28)$$



由式(2.4.8)， $T_{c2} = T_{c1} \bar{A}_c$ 之關係，將式(2.4.28)由右向左乘上 $\bar{A}_c$ ：

$$T_{c2} = C_d \bar{C}_c \bar{A}_c + C_v \bar{C}_c + C_a \bar{C}_c \bar{A}_c^{-1} \quad (2.4.29)$$

綜合以上，可將轉換矩陣 $T_c$ 表示為：

$$T_c = \begin{bmatrix} T_{c1} \\ T_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{c1} \\ T_{c1} \bar{A}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_d \bar{C}_c + C_v \bar{C}_c \bar{A}_c^{-1} + C_a \bar{C}_c \bar{A}_c^{-2} \\ C_d \bar{C}_c \bar{A}_c + C_v \bar{C}_c + C_a \bar{C}_c \bar{A}_c^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.4.30)$$

式(2.4.30)即為混合量測條件下之通解形式，其於含輸出入響應資訊之狀況與僅含輸出響應之狀況下皆可應用。以下接著討論僅採用單種形式量測儀器時， $T_c$ 於對應不同狀況時之特有形式：

表 2.1 轉換矩陣對應不同量測資訊之關係

狀況	輸出響應矩陣	對應之 $T_c$
僅量測位移訊號	$C_d = I_n, C_a = C_v = 0_n$	$T_{cd}$
僅量測速度訊號	$C_v = I_n, C_d = C_a = 0_n$	$T_{cv}$
僅量測加速度訊號	$C_a = I_n, C_v = C_d = 0_n$	$T_{ca}$

對照表(2.1)，則有：

$$T_{cd} = \begin{bmatrix} \bar{C}_c \\ \bar{C}_c \bar{A}_c \end{bmatrix}, T_{cv} = \begin{bmatrix} \bar{C}_c \bar{A}_c^{-1} \\ \bar{C}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_c \\ \bar{C}_c \bar{A}_c \end{bmatrix} \bar{A}_c^{-1}, T_{ca} = \begin{bmatrix} \bar{C}_c \bar{A}_c^{-2} \\ \bar{C}_c \bar{A}_c^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_c \\ \bar{C}_c \bar{A}_c \end{bmatrix} \bar{A}_c^{-2} \quad (2.4.31)$$

由以上矩陣轉換公式，即可依照不同量測狀況而採用適當之轉換矩陣，並得到狀態空間方程組，進而萃取結構系統本身之特徵參數。

## 2.5 狀態空間系統識別流程



總結本章所介紹之內容，對狀態空間系統識別過程作完整流程圖以易於理解。須注意的是，本文使用之識別理論僅針對線性系統，因此流程圖也僅限於識別線性特徵參數。

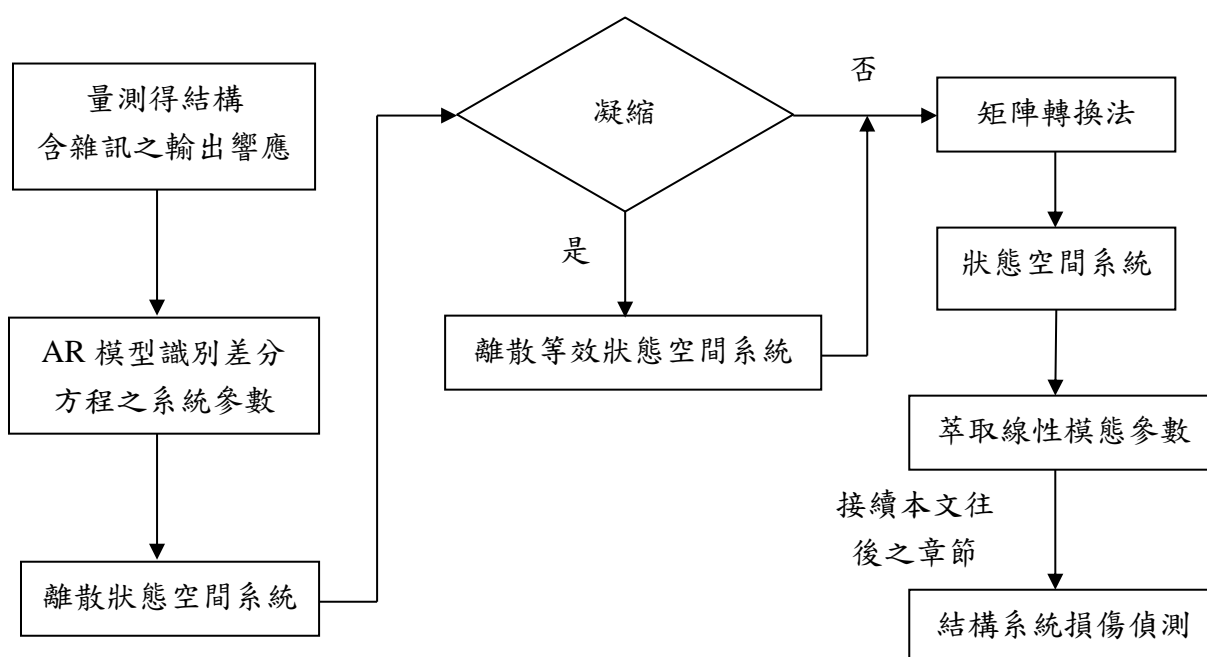


圖 2.2 狀態空間系統識別流程圖

由此流程圖可知，透過量測結構系統之輸出響應，首先由 AR 模型識別出其差分方程系統參數，並將之轉換至離散狀態空間方程組  $\langle \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D} \rangle$ 。至此，須判斷離散狀態空間方程組是否須進行凝縮之過程，假設經凝縮後得其離散等效狀態空間方程組  $\langle \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D} \rangle$ ，再將此方程組轉換至連續等效狀態空間方程組  $\langle \bar{A}_c, \bar{B}_c, \bar{C}_c, \bar{D}_c \rangle$ ，最後經矩陣轉換法將其轉換至狀態空間系統方程組  $\langle A_c, B_c, C_c, D_c \rangle$  後即可進行模態參數的萃取。而本文往後之章節將接著介紹於識別得結構模態參數後，對結構損傷識別之相關理論。

### 第三章 結構系統識別與有限元素模型



本章將循序漸進地說明由第二章所介紹之 AR 模型與狀態空間系統識別理論其實際應用於結構之識別成果，並介紹本文所使用受測結構體，為往後之章節鋪陳。首先推導結構模態參數之理論解，並分別比較理論解、有限元分析與經過系統識別等三者之結果。接著，為建立更為近似於實際結構之有限元素模型，利用識別所得之模態參數進一步估算結構系統的雷利阻尼係數，並將此估算之係數套用至有限元素模型中。此外，本章也將對所使用之有限元素軟體作一簡單地介紹。

#### 3.1 直立式懸臂鋼梁結構

本文中實際使用之待測結構體為一直立式懸臂鋼樑結構，其幾何、材料參數與結構示意圖將分別列於表(3.1)與圖(3.1)中：

表 3.1 直立式懸臂樑結構幾何與材料參數

幾何性質	
寬度， $b_s$ (m)	0.05
厚度， $t_s$ (m)	0.009
長度， $L$ (m)	1.5
材料參數	
楊氏模數， $E_s$ (GPa)	200
浦松比， $\nu$	0.3
質量密度， $\rho$ ( $kg/m^3$ )	7850

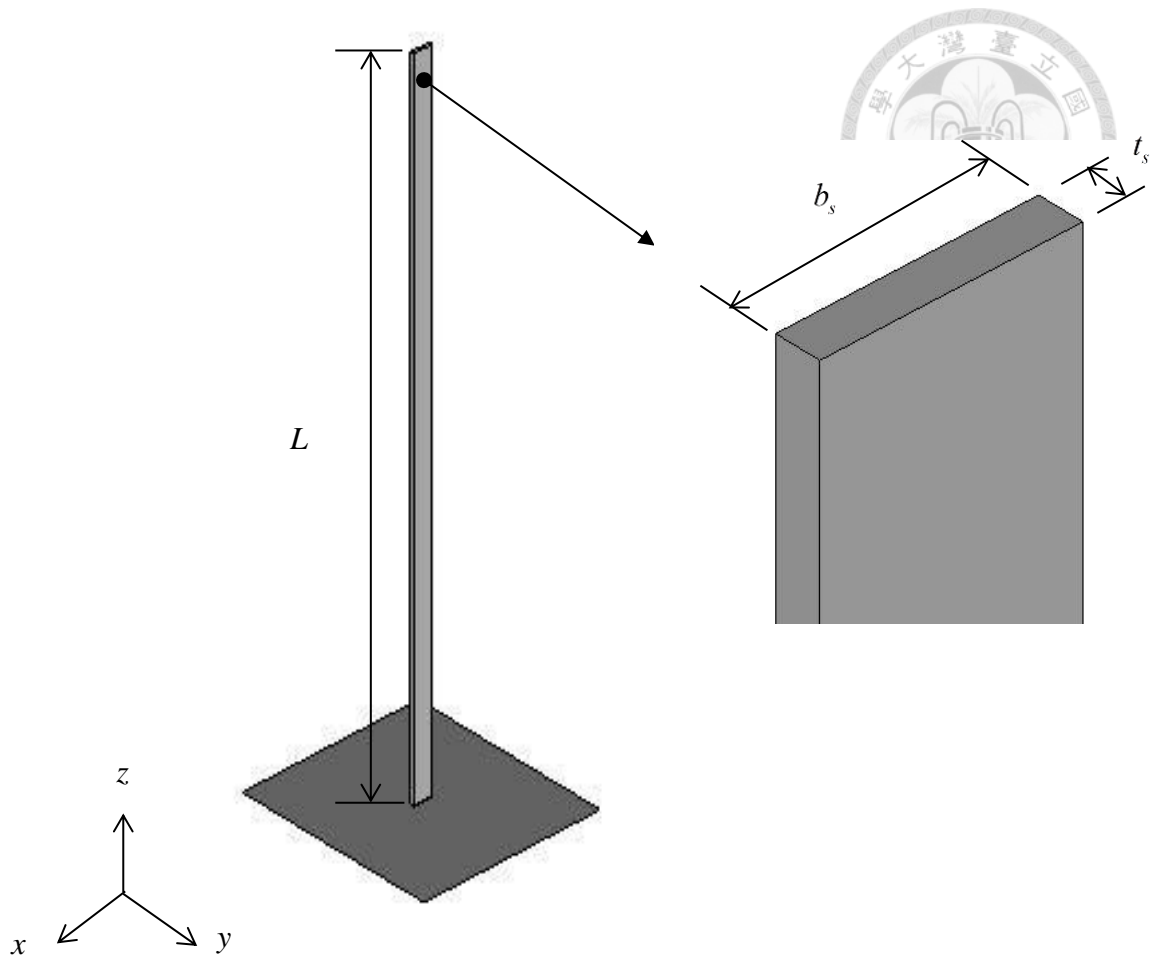


圖 3.1 直立式懸臂樑結構示意圖

### 3.1.1 直立式懸臂鋼樑結構理論解

此直立式懸臂鋼樑結構於實際情況下應為無限多自由度之結構系統，為了將有限元素模型及經系統識別所得之結果相互對照比較，以下首先推導懸臂樑其模態參數之理論解，更詳細之內容可參考文獻資料[29]。

由歐拉—伯努力薄樑理論(Euler-Bernoulli)與樑之彎曲理論可得式(3.1.1)與式(3.1.2)如下：

$$-\frac{\partial^2 m(x,t)}{\partial x^2} + u_s(x,t) = \rho A_s(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.1.1)$$

$$m(x,t) = E_s I(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (3.1.2)$$



其中， $m(x,t)$  表示在  $x$  位置與  $t$  時間樑  $m_x$  方向所受之彎矩， $u_s(x,t)$  表示在  $x$  位置與  $t$  時間樑所受之外力， $w(x,t)$  表示在  $x$  位置與  $t$  時間的  $y$  方向之位移響應， $E_s$  表示鋼材料(Steel)之楊氏模數(Young's Modulus)， $I$  表示直立式懸臂鋼樑其截面之面積慣性矩(Moment of Inertia)， $\rho$  表示直立式懸臂鋼樑之密度， $A_s$  則表示其截面積。

綜合式(3.1.1)與式(3.1.2)，可得：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ E_s I(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] + \rho A_s(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = u_s(x,t) \quad (3.1.3)$$

由於求解模態參數時，考慮懸臂樑結構為自由振動不受外力且為等斷面均值樑，則式(3.1.3)可化簡為一偏微分方程式如：

$$c^2 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1.4)$$

其中， $c = \sqrt{\frac{E_s I}{\rho A_s}}$ ；並利用分離變數法，則假設結構系統之位移響應為：

$$w(x,t) = \phi(x)q(t) \quad (3.1.5)$$

其中， $\phi(x)$  表示模態振形函數， $q(t)$  表示廣義座標向量；根據懸臂樑結構之邊界條件及初始狀況：固定端其位移與初始速度為零、自由端其彎矩與剪力為零，由以上給定之限制，則有：



$$w(0,t) = 0, \quad \left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (3.1.6)$$

$$\left. \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} \right|_{x=L} = 0 \quad (3.1.7)$$



將式(3.1.5)代回式(3.1.4)之偏微分方程，並且透過式(3.1.6)與式(3.1.7)之條件，則可求得一特徵方程式如下：

$$1 + \cos(\beta_n L) \cosh(\beta_n L) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.1.8)$$

若透過兩函數之假設以表示式(3.1.8)，則式(3.1.8)可表示為：

$$M(\beta_n L) = N(\beta_n L) \quad (3.1.9)$$

其中， $M(\beta_n L) = \cos(\beta_n L)$  與  $N(\beta_n L) = \frac{-1}{\cosh(\beta_n L)}$ 。

使用數值方法求解式(3.1.9)，分別將  $M(\beta_n L)$  與  $N(\beta_n L)$  繪於同張圖中，並由圖中求得兩函數之交點得解，如圖(3.2)：

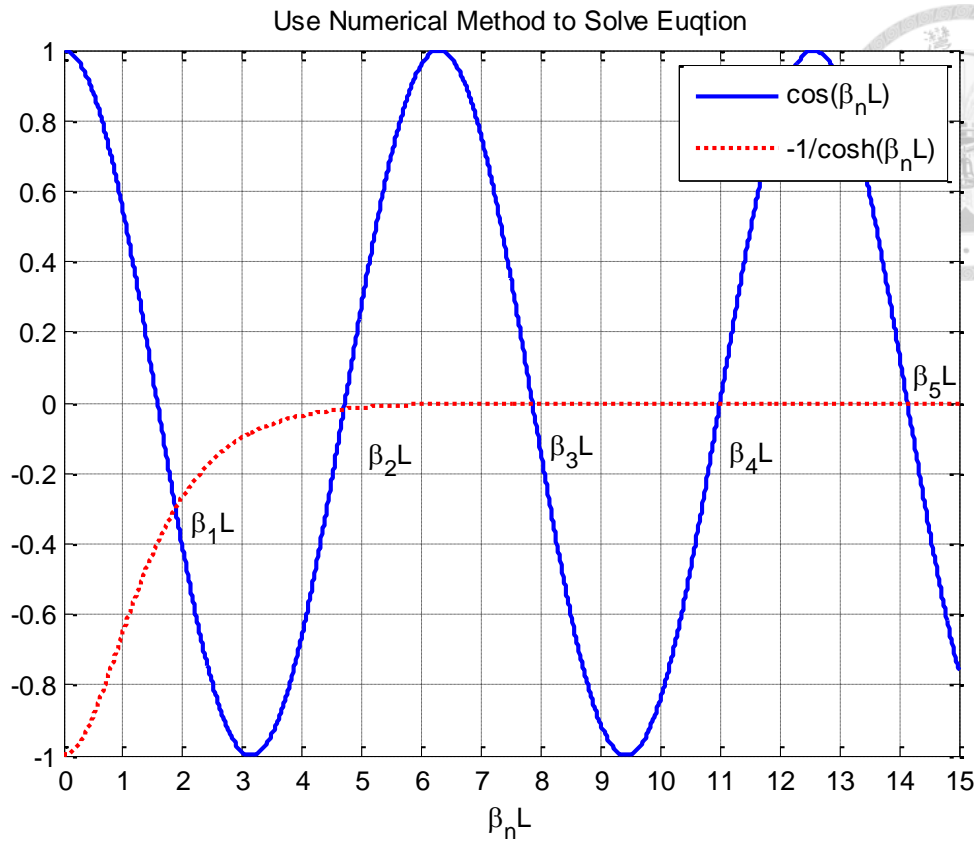


圖 3.2 數值方法求解特徵方程式示意圖

則可解得式(3.1.8)中特徵方程式之特徵值：

$$\begin{aligned} \beta_1 L &= 1.875104 \\ \beta_2 L &= 4.694091 \\ \beta_3 L &= 7.854757 \\ \beta_4 L &= 10.995541 \\ \beta_5 L &= 14.137168 \\ &\vdots \end{aligned}$$

並可代入系統之自然頻率計算公式求解，注意其單位為(rad/second)：

$$w_n = (\beta_n L)^2 \sqrt{\frac{E_s I}{\rho A_s L^4}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.1.10)$$

而懸臂樑結構之模態振形則可透過將特徵值代入其計算公式求得：

$$\phi_n(x) = C_n \left[ \sin \beta_n x - \sinh \beta_n x - \alpha_n (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x) \right] \quad (3.1.11)$$

其中， $C_n = \frac{1}{\sqrt{\rho A_s L}}$  且  $\alpha_n = \left( \frac{\sin \beta_n L + \sinh \beta_n L}{\cos \beta_n L + \cosh \beta_n L} \right)$ 。



應用本小節所介紹之模態分析理論公式，則可求得如圖(3.1.1)懸臂樑結構 y 方向各模態之模態參數，而在取得理論解後，隨後將以有限元素分析與經系統識別所得之結果對照比較。

### 3.1.2 直立式懸臂鋼樑結構有限元素模型

對於現實生活中實際的結構而言，無論其動態或靜態行為皆為我們所廣泛研究並且關心的範疇，而在很多情況下，想瞭解或預測結構確切的行為並不是一件容易的事情，除了實際進行實驗外，此時有限元素法(Finite Element Method, FEM)即可協助我們，在面臨問題時可適時地以有限元素分析(Finite Element Analysis, FEA)之數據供作我們判斷的參考依據。有限元素分析基本的概念，即是將一個連續結構體分割為多個離散之單元，再分別依照結構實際的狀況給予條件限制，並對離散後之單元作數值上的運算。

近年來由於電腦軟硬體之快速進步，有限元素分析在結構設計與優化領域中已經成為非常重要的工具，有限元素分析能處理的問題種類、範圍擴大了許多，也因此發展出許多相應之電腦輔助工程 (Computer Aided Engineering, CAE) 軟體，而本文中使用的有限元素 CAE 軟體為 Hyperworks 11.0 與 Ansys 12.0。

本文中使用的結構即為前節所介紹之直立式懸臂鋼樑，本小節將介紹其有限元素模型。由於往後之章節將繼續對其作損傷識別之模擬，考慮到後續損傷識別模擬過程之計算量，接著將進一步介紹在建立有限元素模型時，將其合理簡化之過程。

此直立式懸臂鋼樑實際結構如圖(3.3)與圖(3.4)，底座經量測為長 0.5 公尺、寬 0.48 公尺且厚度為 0.04 公尺之鋼板，並由四個可固定式之滾輪支撐固定。



圖 3.3 直立式懸臂鋼樑實際結構圖



圖 3.4 直立式懸臂鋼樑實際結構底座

由表(3.1)中之幾何與材料參數，建立直立式懸臂鋼樑及其底座之有限元素模型，樑身與底座分別選用實體(Solid)與殼(Shell)元素並以方格之網格劃分，各單元邊長為0.0025公尺，整個有限元素模型共包含87152個元素(Element)及102606個節點(Node)，其模型示意圖與給定之邊界條件如圖(3.5)與圖(3.6)：

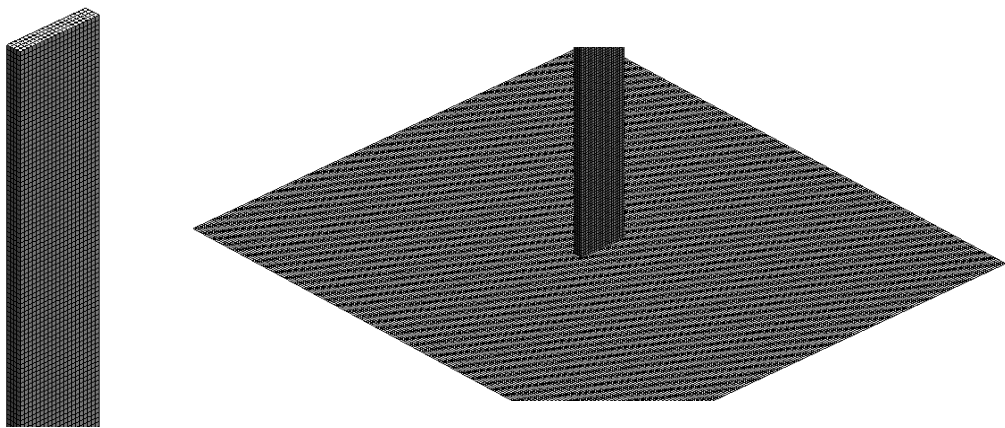


圖 3.5 直立式懸臂樑有限元素模型頂部與底部

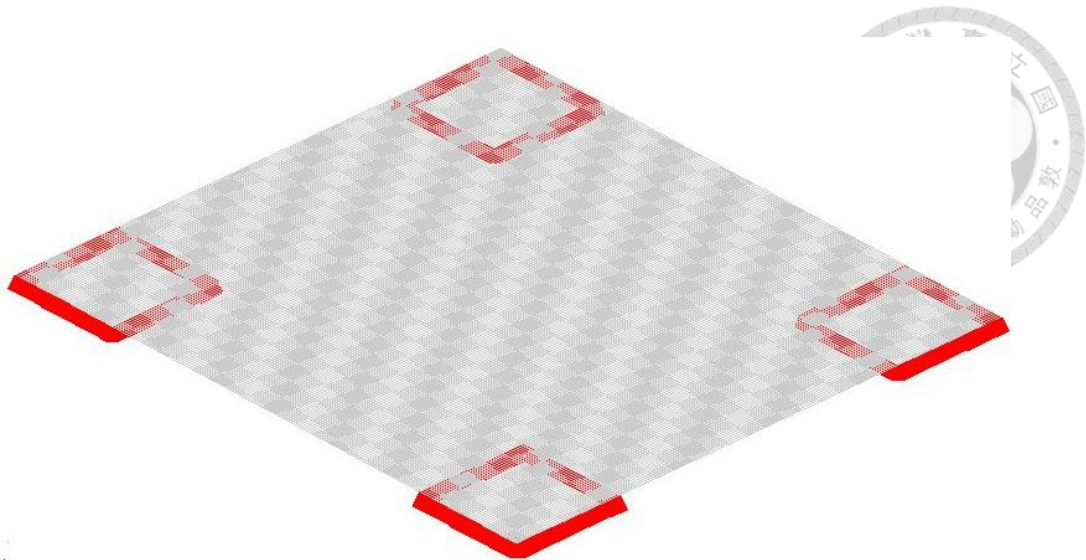


圖 3.6 懸臂樑有限元素模型邊界條件示意圖

由於往後接續之章節中，將透過有限元素分析後，以有限元素模型之質量、勁度與阻尼矩陣代表其結構，而圖(3.5)與圖(3.6)所示之直立式懸臂鋼樑有限元素模型於往後計算上其矩陣維度過於龐大，考慮到電腦硬體之限制，故接著以樑 (beam) 元素建立有限元模型，並拘束懸臂樑底端，劃分為 150 個單元，每單元長度為 1 公分，比較此二者前五模態之自然頻率如表(3.1.2)：

表 3.2 實體元素與樑元素有限元模型前六模態自然頻率(Hz)

元素種類 模態	實體元素	樑元素	相對誤差 (%)
第一模態	3.2537	3.2615	0.2399
第二模態	17.8179	18.1157	1.6712
第三模態	20.3881	20.4386	0.2476
第四模態	57.0798	57.2249	0.2542
第五模態	111.1688	112.1269	0.8618
第六模態	111.8350	113.3834	1.3845

其中，相對誤差計算公式： $\left| \frac{w_{beam} - w_{solid}}{w_{solid}} \times 100\% \right|$ ， $w_{beam}$  與  $w_{solid}$  分別為樑元素

與實體元素有限元模型求得之各模態自然頻率。

表(3.2)中，以實體元素與樑元素建立之直立式懸臂鋼樑有限元素模型，其前六個模態自然頻率之相對誤差介於0.2399%~1.6712%間，考慮到往後之損傷偵測模擬中有將量測訊號參入雜訊，此誤差可視為極小之雜訊干擾，且以後續結果來看，其並未造成嚴重之影響，故於本文往後之損傷偵測模擬章節中，此懸臂樑之有限元模型皆為以後者方式建立之。

### 3.2 直立式懸臂鋼樑結構之識別

以本文第二章介紹之狀態空間系統識別理論對直立式懸臂鋼樑進行識別，主要識別內容為結構如圖示  $y$  方向前四模態之模態參數，為避免分析中於頻率域多餘之映射，計算其第四模態之自然頻率約為 112Hz，根據採樣理論以採樣頻率 250Hz 擷取前 10 秒自由振動下  $y$  方向之加速度訊號，將三加速規黏貼於懸臂樑擷取訊號，加速規黏貼位置與其實體如圖(3.7)與圖(3.8)，其型號規格則列於表(3.3)：

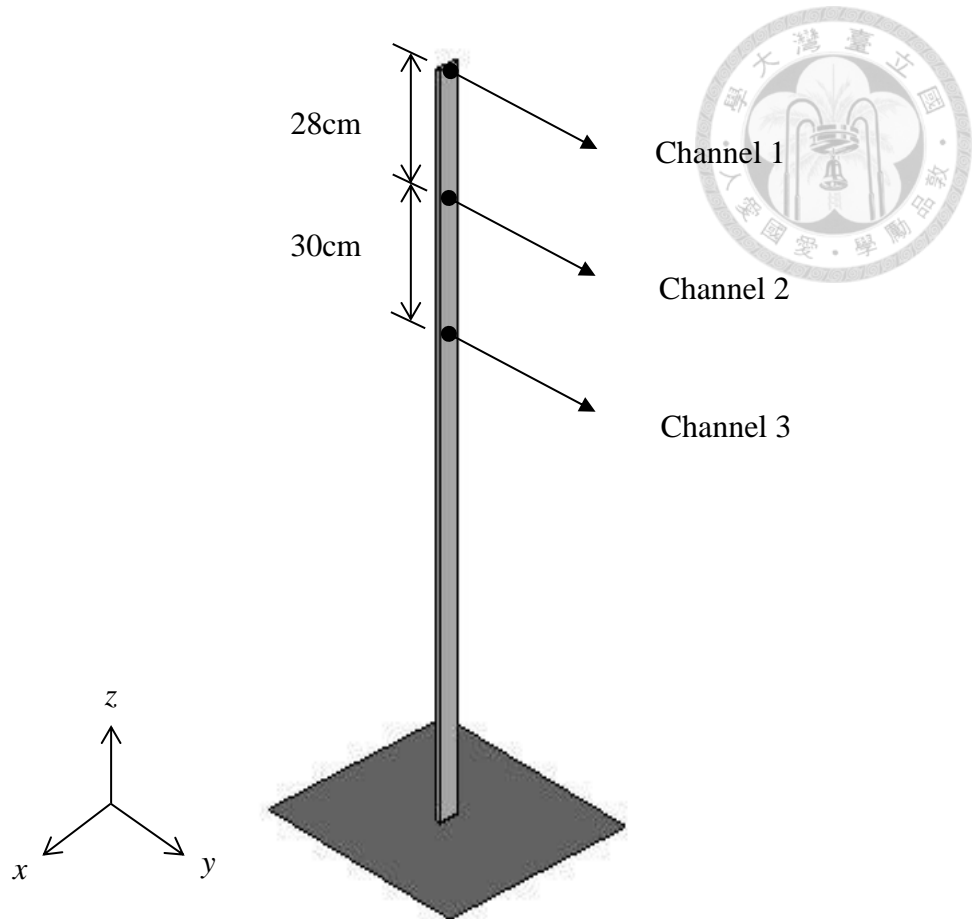


圖 3.7 加速規黏貼位置示意圖



圖 3.8 量測之加速規



表 3.3 量測之加速規型號與規格

Channel	Model	Serial#	Sensitivity	Range	Bias Level
1	333B42	16663	527 mv/g	0.5~3000 Hz	10.5 V
2	333B40	22067	510 mv/g	0.5~3000 Hz	11.7 V
3	333B42	16665	530 mv/g	0.5~3000 Hz	10.4 V

加速規量測各通道位置之加速度歷時圖與時譜圖如圖(3.9)與圖(3.10)：

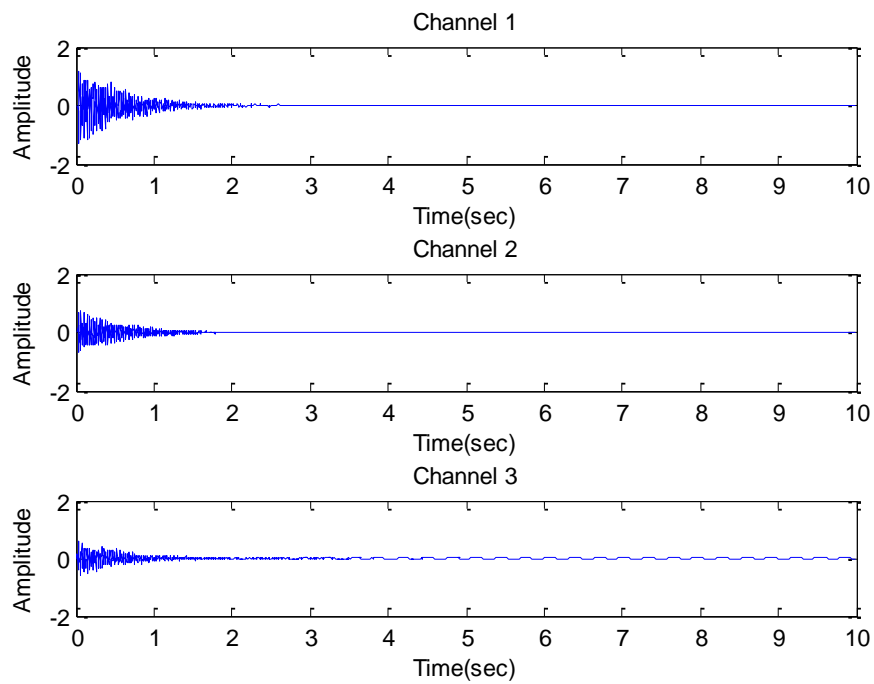


圖 3.9 加速規量測各通道之加速度歷時圖

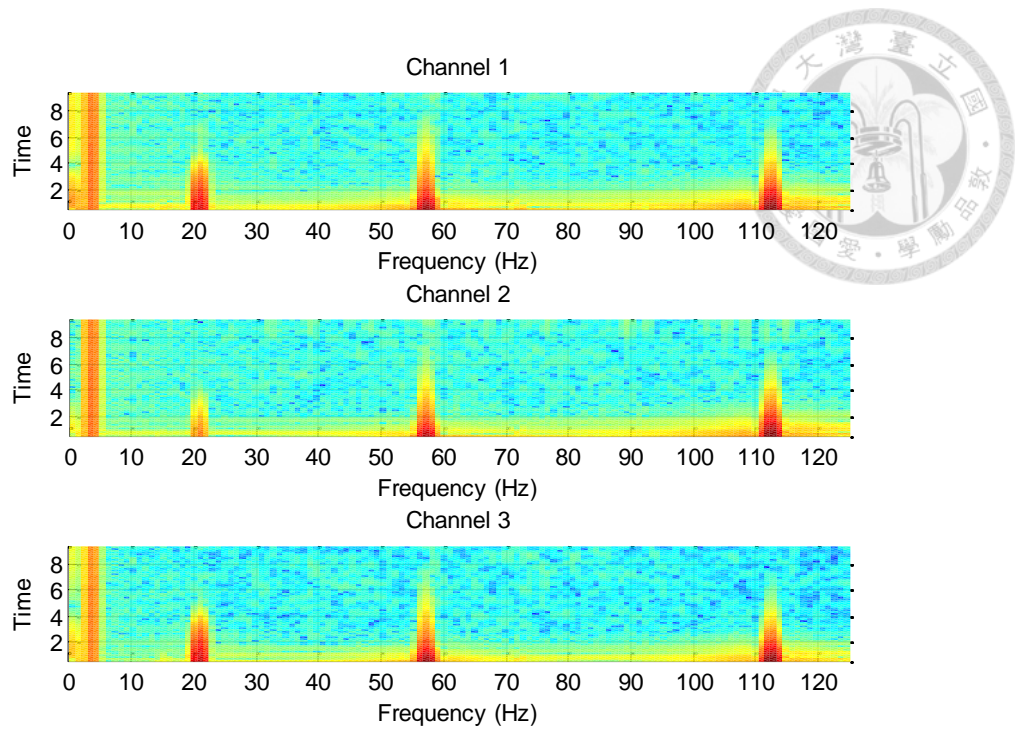


圖 3.10 加速規量測各通道之加速度時譜圖

### 3.2.1 識別成果

將擷取之加速度訊號以 AR 模型識別後，繪出其頻譜模態疊合圖及識別階數與阻尼比關係圖如圖(3.11)與圖(3.12)：

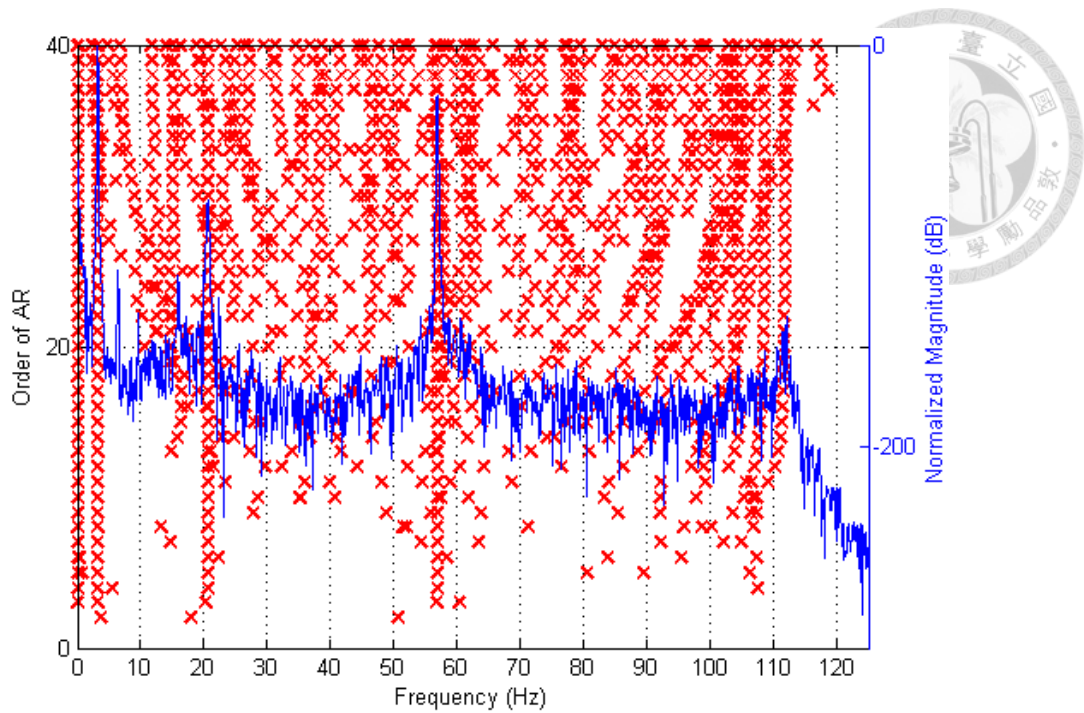


圖 3.11 AR 模型識別之頻譜模態疊合圖

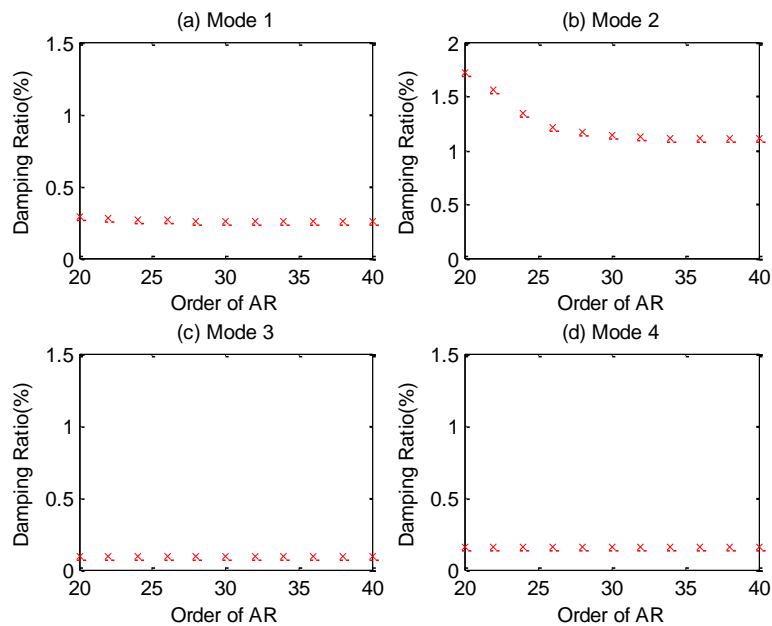


圖 3.12 AR 模型識別之階數與阻尼比關係圖

識別過程中 AR 模型各階數皆會求出許多飄忽不定之根植，而結構系統自身之特徵根在不同階數有不變動之特性，圖(3.11)即顯示了此情況，觀察圖(3.12)，於前四模態中 AR 模型識別之階數於 20 至 30 階間趨於穩定，以下列出透過 AR 模型 40 階識別之模態參數，並與理論解及有限元素分析所得結果比較：

表 3.4 AR(40)模型識別與理論解及有限元素分析之模態參數比較

模態參數		模態	第一模態	第二模態	第三模態	第四模態
自然頻率 (Hz)	理論值		3.2615	20.4396	57.2315	112.1516
	FEM		3.2615	20.4386	57.2249	112.1269
	AR(40)		3.1846	20.5765	56.8530	111.8380
阻尼比(%)	AR(40)		0.2681	1.0086	0.0984	0.1506
模態振形	理論值		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
			0.7436	0.1278	-0.3285	-0.6106
			0.4780	-0.5612	-0.5213	0.2321
	FEM		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
			0.7436	0.1278	-0.3286	-0.6107
			0.4780	-0.5612	-0.5213	0.2322
	AR(40)		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
			0.7381	0.0939	-0.3662	-0.6486
			0.4563	-0.6313	-0.4385	0.4452

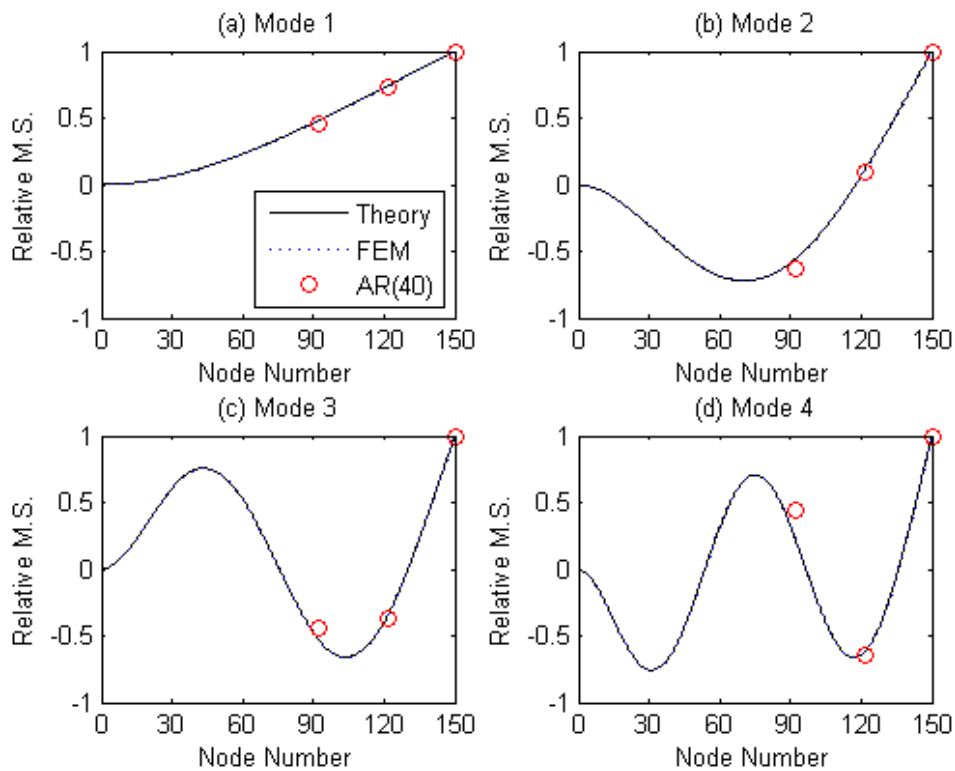


圖 3.13 由 AR 模型識別、理論值及有限元素分析之模態振形比較圖

比較前四模態中，以 40 階 AR 模型識別結果與理論解及有限元素分析之模態參數，其中自然頻率與模態振形部分，理論解及有限元素分析結果非常相近，AR 模型識別之結果則有些許差異，但觀察其三者各模態之模態振形如圖(3.13)，識別所得模態振形同樣吻合其趨勢，則可知識別所得之模態參數近似於實際直立式懸臂鋼樑結構，往後損傷偵測模擬中將以識別所得之模態參數用於偵測損傷中。由於此結構之線性特徵較為強烈，負模態對於正模態而言相對較小，因此並未列於表中。

### 3.2.2 估算直立式懸臂鋼樑結構之雷利阻尼係數

結構系統之阻尼不易由理論公式推導出，本文中所探討之結構為細長柔性懸臂樑，其阻尼對結構之影響一般而言較不明顯，故可以雷利阻尼(Rayleigh Damping)之形式建立阻尼矩陣以近似結構實際之情況，式中之質量與勁度矩陣則透過前節介紹之有限元素分析得到，則有：

$$E = \alpha M + \beta K \quad (3.2.1)$$

其中， $M$ 、 $E$  及  $K$  分別表示結構系統之質量、阻尼及勁度矩陣，由式(3.2.1)可得雷利阻尼係數  $\alpha$ 、 $\beta$  之單位分別為 1/秒、秒。其與各模態之自然頻率、阻尼比則有如下之關係：

$$\alpha + w_n^2 \beta = 2\zeta_n w_n, n=1,2,3,\dots \quad (3.2.2)$$

其中， $w_n$  與  $\zeta_n$  分別表示第  $n$  模態之自然頻率與阻尼比，若考慮前四模態，並以矩陣之形式表示，則：



$$\begin{bmatrix} 1 & w_1^2 \\ 1 & w_2^2 \\ 1 & w_3^2 \\ 1 & w_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \zeta_1 w_1 \\ \zeta_2 w_2 \\ \zeta_3 w_3 \\ \zeta_4 w_4 \end{bmatrix} \quad (3.2.3)$$

識別出前四模態之自然頻率與阻尼比並且代入式(3.2.3)後則可求出雷利阻尼係數  $\alpha$ 、 $\beta$  之近似值，吾人實際擷取 10 組加速度訊號，分別以 20 階至 40 階 AR 模型識別出其模態參數並求出各階數相應之  $\alpha$  與  $\beta$  值，其 10 組訊號之各階數與雷利阻尼係數關係圖、各階數之雷利阻尼係數平均值與各階數雷利阻尼係數之標準差分別如圖(3.14)、圖(3.15)與圖(3.16)：

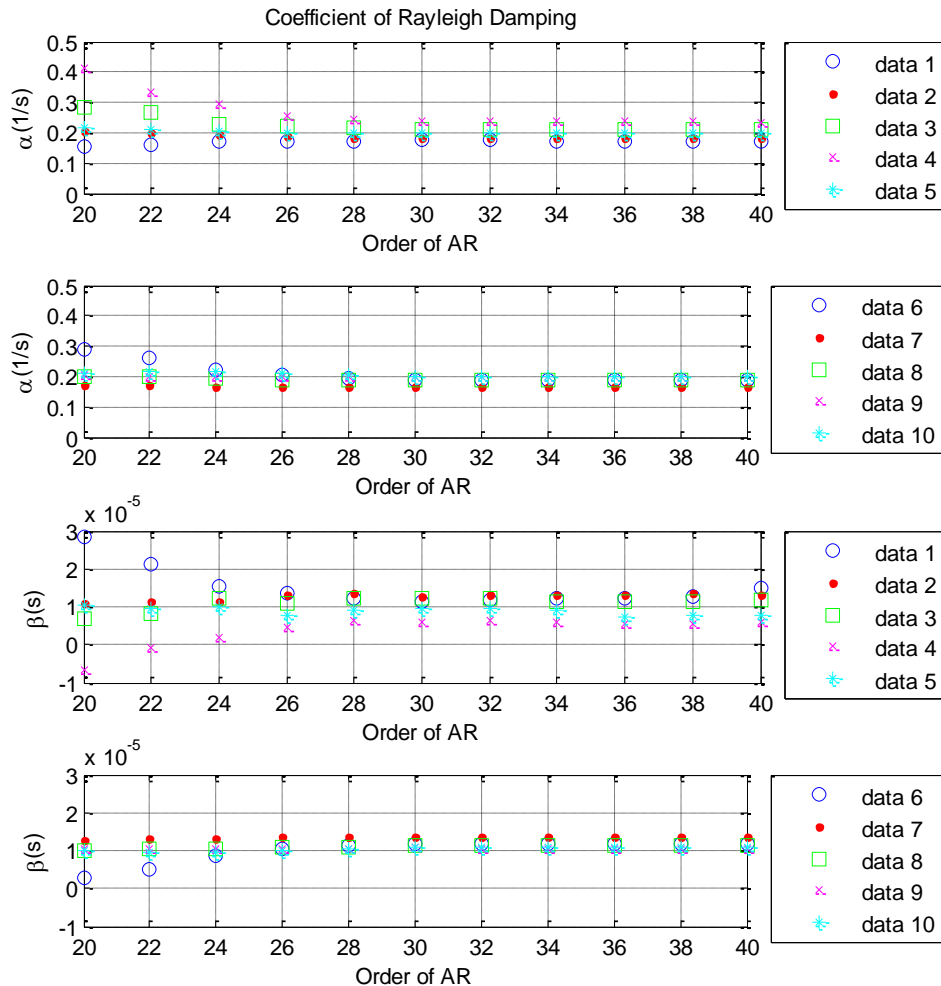


圖 3.14 AR 模型各階數與雷利阻尼係數關係圖

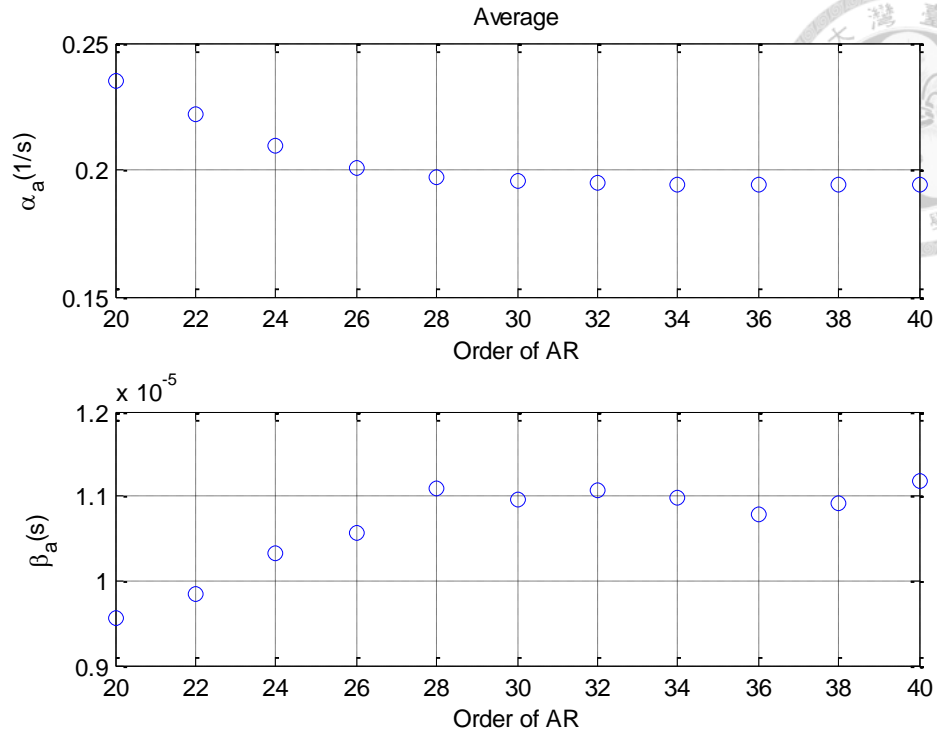


圖 3.15 AR 模型各階數之雷利阻尼係數平均值

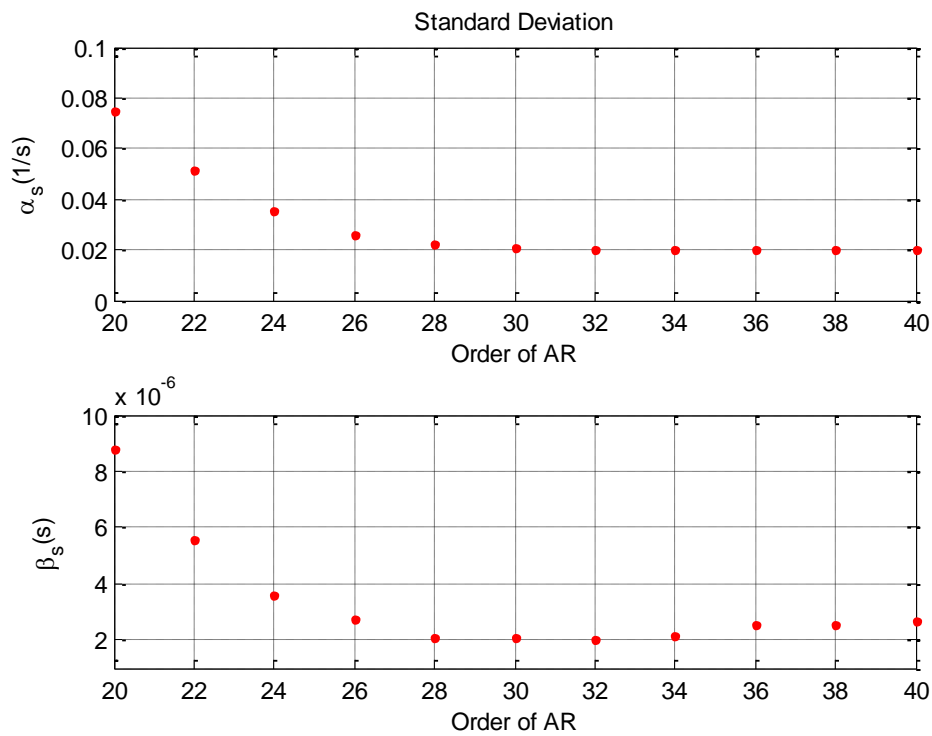


圖 3.16 AR 模型各階數雷利阻尼係數之標準差

其中，圖(3.15)即為計算圖(3.14)中各階數求得雷利阻尼係數之平均值，觀察圖(3.14)至圖(3.16)，於 AR 模型 30 階以後計算所得之雷利阻尼係數已趨於穩定，故吾人選用以 AR 模型 40 階進行求值，10 組數據之識別成果如表(3.5)：

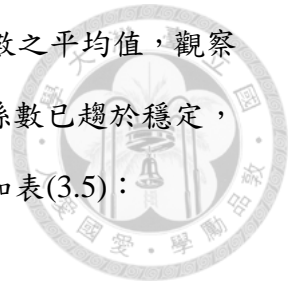


表 3.5 AR(40)識別之自然頻率與阻尼比

實驗數據	第一模態		第二模態		第三模態		第四模態	
	自然頻率 (Hz)	阻尼比 (%)	自然頻率 (Hz)	阻尼比 (%)	自然頻率 (Hz)	阻尼比 (%)	自然頻率 (Hz)	阻尼比 (%)
1	3.1846	0.2836	20.5813	1.0174	56.8532	0.0985	111.8359	0.1696
2	3.1863	0.2739	20.5819	1.0725	56.8529	0.1036	111.9322	0.1644
3	3.1857	0.2869	20.5975	1.2454	56.8548	0.1011	111.9050	0.1694
4	3.1857	0.2900	20.6087	1.3806	56.8546	0.1028	111.9113	0.1506
5	3.1862	0.2886	20.5945	1.1526	56.8556	0.1005	111.9359	0.1402
6	3.1836	0.2589	20.5739	1.1029	56.8558	0.0959	111.9304	0.1594
7	3.1844	0.2340	20.5834	0.9879	56.8580	0.0917	111.9330	0.1584
8	3.1843	0.2352	20.5914	1.1260	56.8583	0.0932	111.9367	0.1564
9	3.1827	0.3121	20.6073	1.2016	56.8605	0.0915	111.9375	0.1598
10	3.1843	0.2369	20.5927	1.2067	56.8588	0.0936	111.9360	0.1608

以此 10 組識別所得之自然頻率與阻尼比求出雷利阻尼係數近似值，再計算此 10 組  $\alpha$  與  $\beta$  近似值之平均，則可得  $\alpha = 0.1939(1/s)$ ， $\beta = 1.1181 \times 10^{-5}(s)$ ；將其代入式(3.2.1)，則雷利阻尼矩陣可表示為：

$$E = 0.1939M + 1.1181 \times 10^{-5}K \quad (3.2.4)$$

則往後模擬結構系統之阻尼矩陣皆採用以式(3.2.4)之形式建立。



## 第四章 模態曲率於結構損傷偵測之理論基礎

在結構損傷偵測之研究領域中，對於偵測方法而言，可以粗略地分為直接法與間接法兩種，在直接法部分，通常為透過先進的設備或儀器對結構物進行直接量測與觀察；以懸臂鋼樑為例，觀察其金屬相的變化來判斷結構健康之程度。一般來說此法對於結構損傷分析較為精確，但缺點是過程耗時且設備昂貴。而在間接法方面，一般又稱為非破壞性檢測(Non-Destructive Testing, NDT)，顧名思義是以不會破壞結構體之方式來檢測結構物內部之劣化現象及程度之一種檢測方式，常見的方法如：超音波檢測法、反彈錘試驗法及衝擊彈性波法等。在非破壞性檢測中對於不同材料也有分別適用的方法。本文所使用的方法類似於上述非破壞性檢測之概念，在間接求出結構模態振形後，再分別以模態振形曲率與模態振形曲率差對結構進行損傷偵測。

本章首先完整介紹基於結構模態曲率差之損傷偵測理論，包括連續體模態曲率相關理論基礎及多自由度模態曲率有限元理論。此外也將模擬結構多種損傷狀況，並以此法對結構受損狀況進行偵測；在損傷識別領域中，由四項指標來探討識別之成果，分別為判斷是否存在損傷、損傷定位、受損程度與估算壽命。

### 4.1 模態曲率理論

本節中將介紹樑式結構變形方程式與彎矩微分方程式及其與模態曲率之關係，並定義了損傷因子以描述受損結構與未受損結構之差異。在對樑定義邊界條件後即可表示不同形式之樑，如：懸臂樑、簡支樑及兩端固定樑等等。此處將以懸臂樑為例，針對上述關係作說明。樑之彎曲微分方程相關推導以及符號定義：

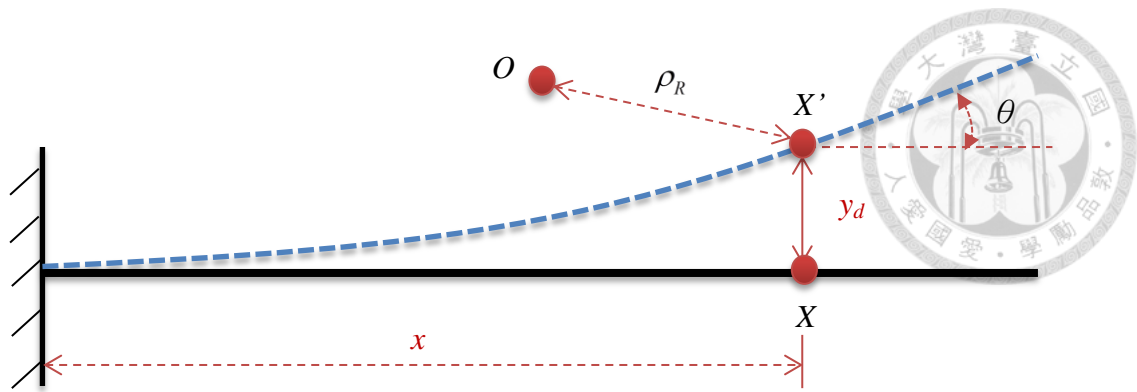


圖 4.1 懸臂樑撓曲示意圖

如圖(4.1)所示， $O$  點為曲率中心， $X$  及  $X'$  點分別為樑上變形前與變形後之對應位置，而  $X$  與  $X'$  距離即為撓度  $y_d$  (Deflection)， $\theta$  為樑之轉角(Slope)， $\rho_R$  為曲率半徑。其中  $y_d$  為  $x$  之函數，即變形曲線方程式  $y_d = y_d(x)$ 。一般而言，曲率的定義如下：

$$\kappa = \frac{1}{\rho_R} = \frac{\frac{d^2 y_d}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy_d}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (4.1.1)$$

當樑為小變形時， $\frac{dy_d}{dx} \ll 1$ ，故  $\left(\frac{dy_d}{dx}\right)^2$  將趨近於 0，則有：

$$\kappa = \frac{d^2 y_d}{dx^2} \quad (4.1.2)$$

樑之彎曲理論是假設樑任何斷面在受到彎曲後仍保持為平面，此種情況只適用於樑受純彎曲的情況，若是樑斷面上同時也受到剪力作用，則因剪應力作用必將造成翹曲(Warpage)，即斷面變形為曲面，但透過前人實驗證明，當樑的長度遠大於斷面高時，翹曲之影響甚小可合理忽略，故以平斷面假設之彎曲理論仍能

適用於常見之樑式結構。而不考慮時間變數  $t$  則樑之彎曲微分方程式可以式(4.1.3)表示：

$$\frac{d^2 y_d}{dx^2} = \frac{m(x)}{E_s I(x)} \quad (4.1.3)$$

綜合式(4.1.2)與式(4.1.3)得：

$$\kappa = \frac{d^2 y_d}{dx^2} = \frac{m(x)}{E_s I(x)} \quad (4.1.4)$$

由式(4.1.4)，考慮到任意時刻結構之狀態，則樑中性面之曲率方程式：

$$\kappa(x, t) = \frac{m(x, t)}{E_s I(x, t)} \quad (4.1.5)$$

其中， $m(x, t)$  表示樑任意截面任意時刻所受彎矩； $E_s I(x, t)$  表示樑任意截面任意時刻之抗彎剛度； $\kappa(x, t)$  表示樑任意點任意時刻之曲率。若不考慮時間變數  $t$  則  $\kappa(x)$  即可表示為模態振形曲率向量。

#### 4.1.1 損傷因子

本文是以結構受損前後之模態曲率與其差值變化為損傷偵測的指標，為了瞭解結構在受損前後其模態曲率的變動情形，在參考國內外相關期刊論文對損傷結構之假設方式後[8, 30]，對結構損傷因子之定義如下：

$$D_{damage}(x) = \frac{E_s I'(x)}{E_s I(x)} \quad (4.1.6)$$

其中， $E_s I'(x)$ 表示結構受損後之抗彎剛度； $E_s I(x)$ 表示結構未受損時之抗彎剛度。一般來說，結構受到外在環境之物理影響下，理應只會發生形狀上的改變，故式(4.1.6)中應只有結構斷面之面積慣性矩受到影響；但考慮到實際情況中，結構可能受環境作用起化學反應，如生鏽等；而楊氏模數可能也會有些微變化，故本文中將結構之楊氏模數與面積慣性矩之乘積作為結構強度之指標，結構受損後其損傷因子值應視受損程度而降低。

#### 4.1.2 連續體模態曲率

結構在實際情況中為連續體，即結構上有無窮多個斷面，由於本文所考慮之曲率模態為結構受損前與受損後之某特定時刻，即與時間無關之量值，綜合式(4.1.5)與式(4.1.6)後，可得：

$$\kappa = \frac{m(x)}{D_{damage}(x)E_s I(x)} \quad (4.1.7)$$

若以前述損傷因子來定義結構受損狀況並代入式(3.1.7)中，則有受損與未受損結構之模態曲率差：

$$\begin{aligned} Y(x) &= |\kappa(x)| - |\kappa_D(x)| \\ &= \left| \frac{m(x)}{E_s I(x)} \right| - \left| \frac{m(x)}{D_{damage}(x)E_s I(x)} \right| \\ &= |\kappa(x)| \times \left( \frac{1 - D_{damage}(x)}{D_{damage}(x)} \right) \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

其中， $Y(x)$  表示結構受損前後之模態曲率差； $\kappa_D(x)$  表示受損結構之模態曲率。由 4.1.8 式可知結構受損前後之模態曲率差  $Y(x)$  與損傷因子  $D_{damage}(x)$  成反比，而  $D_{damage}(x)$  值越小表示其受損程度越大，意即理論上在損傷程度越大時，結構其受損前後之模態曲率差應越大。若以  $D_{damage}(x)=1$  代入式(4.1.8)，此即未受損結構，則此時模態曲率差  $Y(x)=0$ 。

對於歐拉—伯努力樑（Euler-Bernoulli Beam）之振動微分方程式：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E_s I(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) + \rho A_s(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + C_\zeta \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = u_s(x,t) \quad (4.1.9)$$

考慮受損後之微分方程式：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( D_{damage}(x) E_s I(x) \frac{\partial^2 w_D(x,t)}{\partial x^2} \right) + \rho A_s(x) \frac{\partial^2 w_D(x,t)}{\partial t^2} + C_\zeta \frac{\partial w_D(x,t)}{\partial t} = u_s(x,t) \quad (4.1.10)$$

其中， $w(x,t)$  表示  $x$  位置  $t$  時間之橫向振動位移； $\rho$  表示樑之密度； $A_s(x)$  表示樑  $x$  位置之截面積； $E_s I(x)$  表示樑之抗彎剛度； $C_\zeta$  表示黏性阻尼係數； $u_s(x,t)$  表示  $t$  時刻作用在樑上的外力。將不同形式樑所對應之邊界條件代入式(4.1.9) 與式(4.1.10)中，將可分別求解得到在樑受損前後，樑之位移響應函數  $w(x,t)$  及  $w_D(x,t)$ ，並可由式(4.1.8)計算出其受損前後之模態曲率差如式(4.1.11)：

$$\frac{\partial^2 w_D(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = |\kappa(x)| \times \left( \frac{1 - D_{damage}(x)}{D_{damage}(x)} \right) \quad (4.1.11)$$



### 4.1.3 離散體模態曲率

由 4.1.2 節介紹了連續體之模態曲率理論，然而，要求解前節末所述之振動微分方程式之解析解是不容易的，為解決此一問題，有限元素法與數值分析可幫助我們更實際地得到其近似解。本文引用了振動學、結構動力學及有限元素法中，將連續結構體離散為有限個單元，並對此多自由度振動系統定義其運動方程式：

$$M[\ddot{x}_s] + E[\dot{x}_s] + K[x_s] = [u_s] \quad (4.1.12)$$

其中， $M$  表示結構之總質量矩陣， $K$  表示結構之總勁度矩陣， $E$  表示阻尼矩陣， $[x_s]$  表示所有節點之位移向量， $[u_s]$  表示結構各節點所受外加附載向量，由有限元素法：

$$M = \sum_{i=1}^n \iiint_v \rho N^T N dv \quad (4.1.13)$$

其中， $\rho$  為結構之質量密度， $N$  表示結構之型函數矩陣(Shape Function Matrix)。

$$K = \sum_{i=1}^n \iiint_v B_\epsilon^T E_{s,total} B_\epsilon dv \quad (4.1.14)$$

其中， $B_\epsilon$  表示結構之應變矩陣(Strain Matrix)， $E_{s,total}$  表示結構離散後各單元對應之楊氏模數矩陣。

$$E = \alpha M + \beta K \quad (4.1.15)$$

本文考慮之阻尼矩陣為雷利阻尼，其表示方式如式(4.1.15)，於本文第三章曾估算  $\alpha$  與  $\beta$ ，代入式(4.1.15)後可得  $E = 0.1939M + 1.1181 \times 10^{-5} K$ 。



#### 4.1.4 中央差分法

為了計算出結構之模態曲率以及模態曲率差，對於將連續結構體離散後之有限元模型，模態曲率在定義上即為模態振形之二次微分，透過對損傷前後結構之模態振形以中央差分法計算後，即可求得損傷前後結構之模態曲率，中央差分法計算式如下：

$$\text{Modal Curvature}_{i,j} = \frac{\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{l_i^2} \quad (4.1.16)$$

式(4.1.16)即為結構之模態曲率，其中  $\phi_{i,j}$  表示於模態振形向量中，第  $i$  個節點，第  $j$  模態其位置之相對量值， $l_i$  為每段單元長。為比較受損與未受損結構之差異，將 AR 模型識別所得模態振形向量規一化後，均令振形向量中最大數值為 1，以相對模態振形之形式較方便觀察出因受損造成之差異。而在分別求得受損前後之模態曲率後，便可直接以此二矩陣計算模態曲率差矩陣：

$$[CHANGE] = [UNDCUR] - [DCUR] \quad (4.1.17)$$

透過 4.1 節所介紹之方式可將實際結構合理簡化為有限元模型，並透過數值方法以模態曲率與模態曲率差對結構之損傷加以偵測，在 4.2 節中將會以實際模擬例說明。

## 4.2 損傷偵測模擬例



本節將延續 4.1 節中所介紹的方法，並透過有限元模擬分析軟體建立結構之有限元素模型，接著透過數值分析方式計算得到系統其模態參數之數值解，並在此基礎上，由自然頻率、模態振形以至基於結構之模態曲率與模態曲率差之方法對結構損傷加以偵測。而欲模擬之結構即第二章所介紹之直立式懸臂樑，分別建立完整與模擬受損傷後之懸臂樑，其中受損懸臂樑之定義依照 4.1.1 節中所介紹之損傷因子予以假設，即在分割單元中，對特定單元之截面作不同之幾何設定，並依據損傷位置的分布狀況與受損程度模擬了三種受損狀況。綜合以上，將建立多個有限元模型，分別是完整之懸臂樑、以及分別對應受損狀況一至三之懸臂樑。懸臂樑之有限元模型使用樑元素，由本文第三章之內容，將有限元模型簡化，邊界條件設定樑底部拘束 6 個自由度，即底部為固定端如圖(4.2)，本節將針對樑之模態參數探討，故將樑分割後之節點編號如圖(4.3)以方便敘述，樑共分割為 150 單元，共 151 個節點，每個節點均有 6 個自由度。



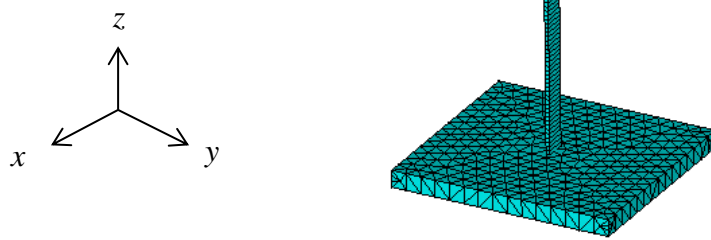


圖 4.2 未受損直立式懸臂樑有限元素模型

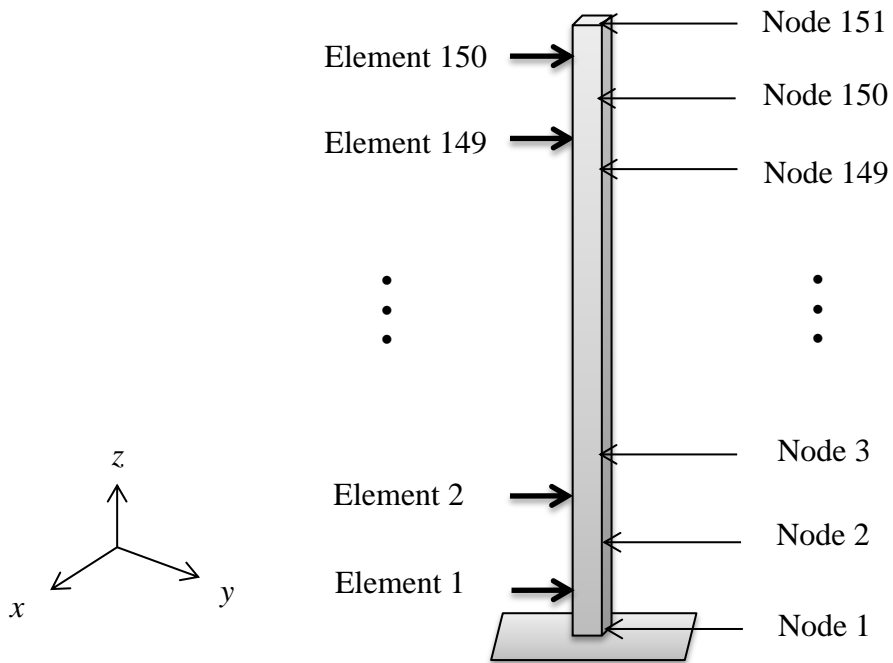


圖 4.3 直立式懸臂樑分割單元與節點示意圖

由 4.1.1 節中所定義之損傷因子：

$$D_{damage}(x) = \frac{E_s I'(x)}{E_s I(x)} \quad (4.1.6)$$



若考慮結構為等截面懸臂樑，如圖(4.4)：

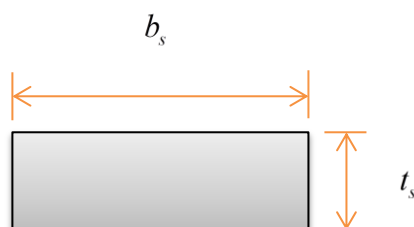


圖 4.4 直立式懸臂樑截面幾何關係示意圖

由式(4.1.6)，則有：

$$D_{damage} = \frac{E_s I'(x)}{E_s I(x)} = \frac{\frac{1}{12} b_s' t_s'^3}{\frac{1}{12} b_s t_s^3} = \frac{b_s'}{b_s} \times \left( \frac{t_s'}{t_s} \right)^3 = \frac{A_s'}{A_s} \times \left( \frac{t_s'}{t_s} \right)^2 \quad (4.2.1)$$

其中， $b_s$  表示樑截面寬， $t_s$  表示樑截面厚度， $A_s$  表示樑截面積。而由式(4.2.1)

與式(4.2.2)定義了結構四種不同破壞程度之損傷因子如下表(4.1)：

表 4.1 損傷因子之各項參數數值

損傷因子		截面寬度 (m)	截面厚度 (m)	截面積 (m <sup>2</sup> )	截面損失 (%)
編號	數值				
D <sub>1</sub>	0.2500	0.4219	0.0600	2.5313×10 <sup>-4</sup>	43.7489
D <sub>2</sub>	0.4011	0.4000	0.0715	2.86×10 <sup>-4</sup>	36.4444
D <sub>3</sub>	0.6321	0.4500	0.0800	3.6×10 <sup>-4</sup>	20.0000
D <sub>4</sub>	0.8003	0.4750	0.0850	4.0375×10 <sup>-4</sup>	10.2778

由表(4.1)定義之損傷因子分別考慮了四種不同的破壞程度， $D_1 \sim D_4$  為依照破壞程度嚴重至輕微之損傷因子；對於樑受損位置之不同，以受損單元分布狀況又分為集中與分散兩種，綜合受損程度與受損單元，對應的受損單元號以及損傷因子如下表(4.2)，其中單元號對照圖(4.3)。

表 4.2 模擬懸臂樑受損狀況

受損狀況	受損單元號	對應之損傷因子號
分散多單元受損狀況	30、60、90、120	$D_1、D_2、D_3、D_4$
集中多單元受損狀況	60、62、64、66	$D_1$
同單元不同損傷程度	75	$D_1、D_2、D_3、D_4$

參考過去對結構損傷偵測的研究，Stubbs 和 Osegueda 提出自然頻率法[4]，根據結構受損前後自然頻率的改變判斷結構是否存在破壞。West 等人以結構受損前後之模態振形的差異用以偵測損傷[6]。本文所使用的方法即綜合 Pandey 等人以及 Peng 等人所提出之方法[7, 9]，基於結構受損前後模態曲率的改變進而以模態曲率差法作為偵測結構受損狀況之準則，其對於受損位置及程度皆提供了判斷依據。

在 4.2.1 節至 4.2.3 節中將以表(4.2)所述之三種假設模擬懸臂樑受損情形，並由圖(4.2)中 y 方向之前四個模態受損前後之自然頻率、模態振形與模態曲率作為偵測懸臂樑受損狀況之準則。



### 4.2.1 模擬分散多單元受損

本節考慮懸臂樑四處受損位置並分別對應四種程度之破壞，其有限元模型以及單元對應受損狀況如下，其中損傷因子為對照前述表(4.1)所定義之值：

表 4.3 懸臂樑分散多單元受損狀況

受損狀況	受損單元號	對應之損傷因子號
分散多單元受損	30、60、90、120	$D_1$ 、 $D_2$ 、 $D_3$ 、 $D_4$

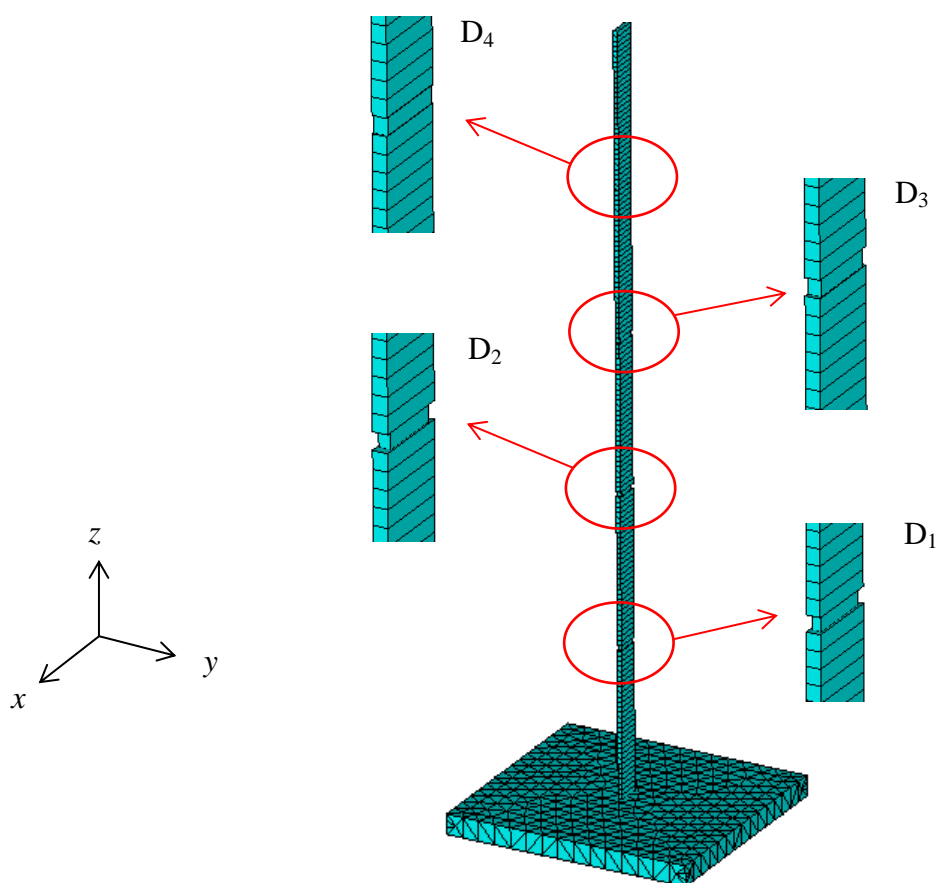


圖 4.5 直立式懸臂樑分散受損之有限元素模型

損傷偵測成果如下：



表 4.4 懸臂樑於分散多單元受損前後之自然頻率(Hz)

模態	第一模態		第二模態		第三模態		第四模態	
有無受損	未受損	受損	未受損	受損	未受損	受損	未受損	受損
自然頻率 (Hz)	3.2615	3.1846	20.4386	20.2934	57.2249	56.7239	112.1269	110.4433
頻率變化 (%)	-2.4160		-0.7158		-0.8832		-1.5244	

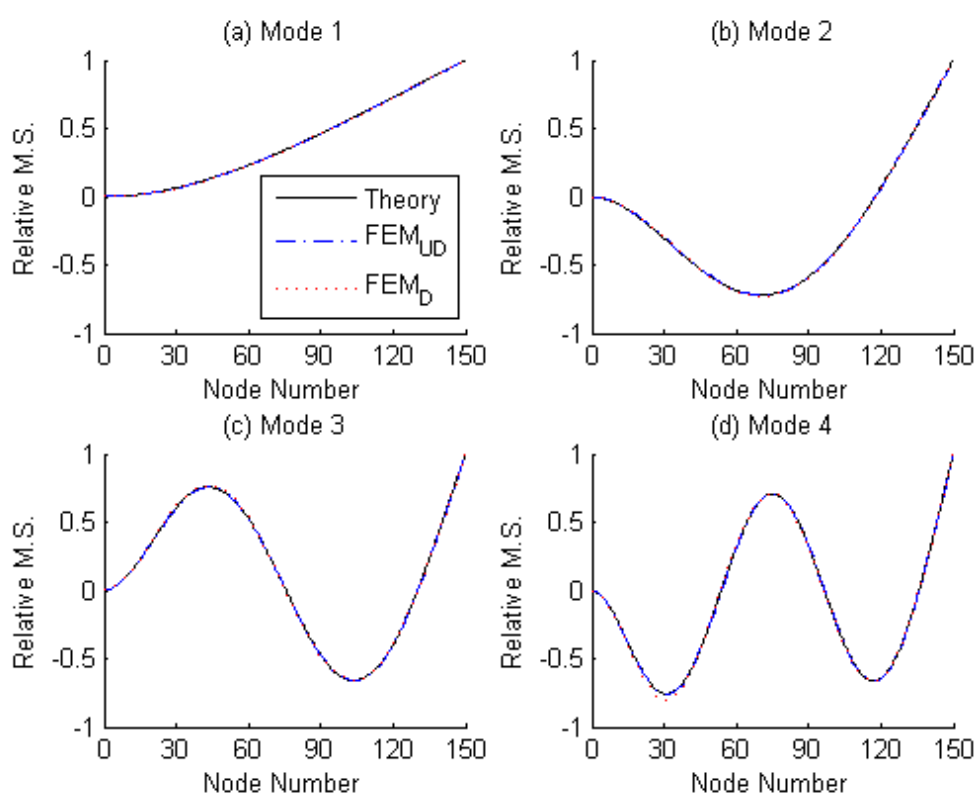


圖 4.6 前四模態之模態振形(分散多單元受損)

懸臂樑於受損後，對結構而言即強度減弱，其前四模態之自然頻率皆產生改變，而變化則介於-0.7158%至-2.416%間。圖(4.6)中  $x$  軸為對應圖(4.3)之節點號，觀察自然頻率與模態振形變化，仍不足以顯著地偵測出懸臂樑之損傷。

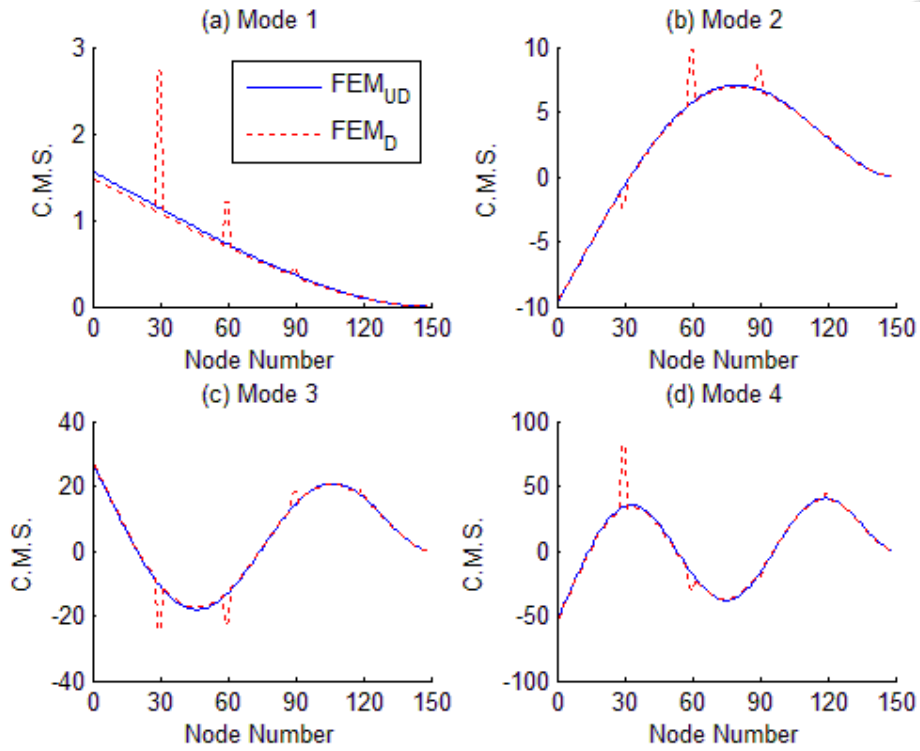


圖 4.7 前四模態之模態曲率(分散多單元受損)

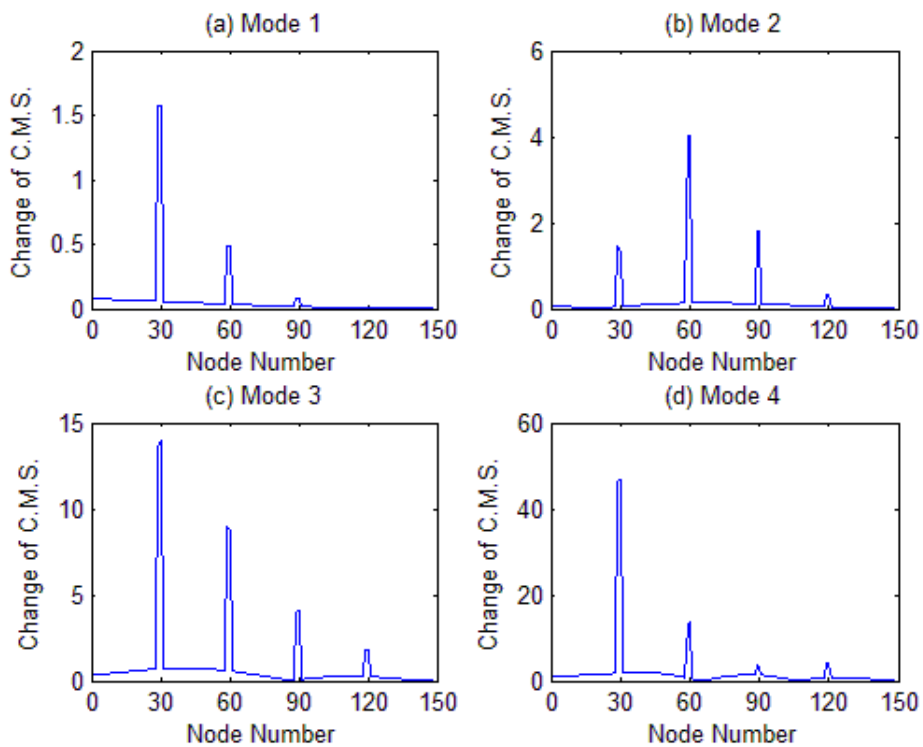


圖 4.8 前四模態之模態曲率差(分散多單元受損)

圖(4.7)即懸臂樑受損前後前四模態之模態曲率， $x$  軸為對應之節點號，觀察受損前後之模態曲率圖形可以清楚看出在受損位置有著明顯的數值差異，若計算其差值並取絕對值，意即只考慮懸臂樑因受損傷而造成之模態曲率變化量，如圖(4.8)，即前四模態之模態曲率差，觀察其差值極大處並對照表(4.3)，均對應此受損狀況下之受損單元號。

#### 4.2.2 模擬集中多單元受損

本節考慮懸臂樑受損位置集中之情況，其有限元模型及單元對應受損狀況如下，其中損傷因子為對照前述表(4.1)所定義之值：

表 4.5 懸臂樑集中多單元受損狀況

受損狀況	受損單元號	對應之損傷因子號
集中多單元受損	60、62、64、66	$D_1$

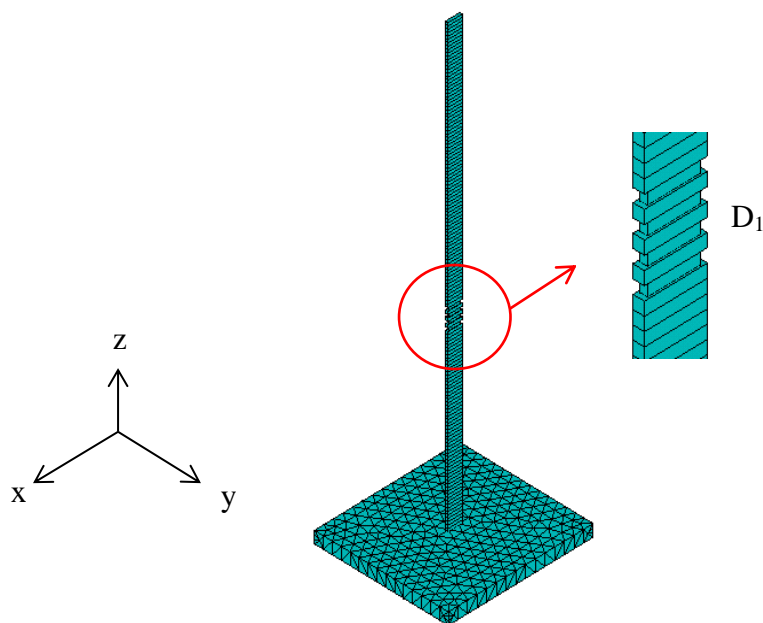


圖 4.9 直立式懸臂樑集中受損有限元素模型

損傷偵測成果如下：



表 4.6 懸臂樑於集中多單元受損前後自然頻率(Hz)

模態	第一模態		第二模態		第三模態		第四模態	
有無受損	未受損	受損	未受損	受損	未受損	受損	未受損	受損
自然頻率 (Hz)	3.2615	3.1684	20.4386	19.5899	57.2249	56.2683	112.1269	109.8887
頻率變化 (%)	-2.9387		-4.3326		-1.7001		-2.0368	

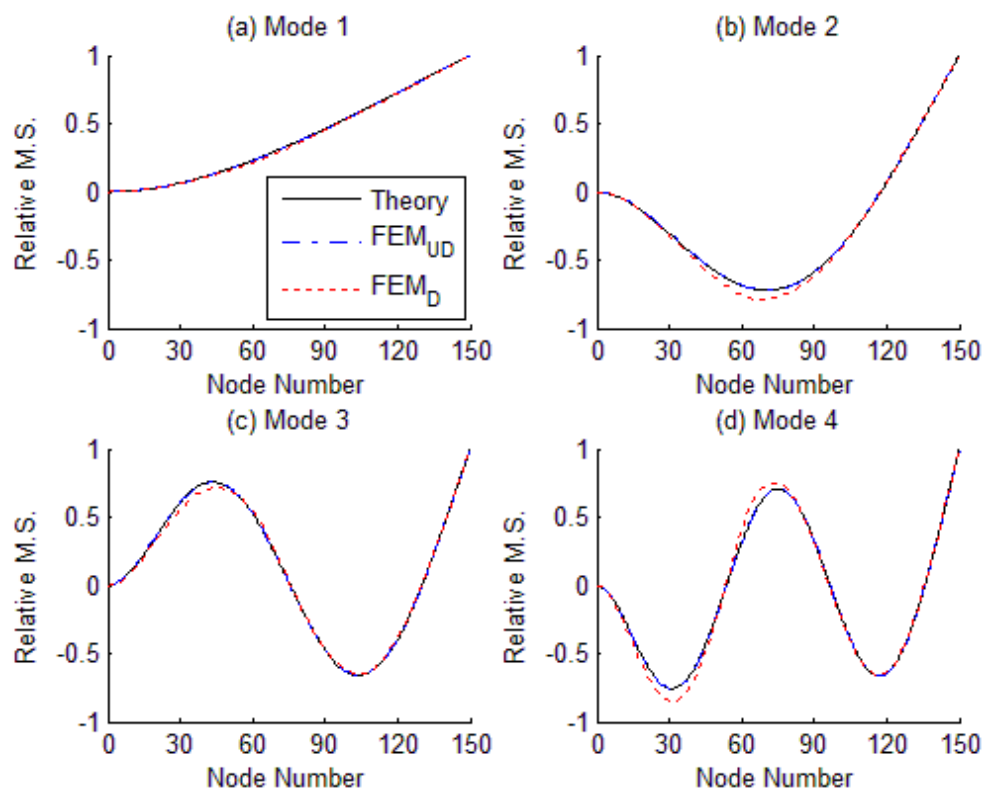


圖 4.10 直立式懸臂樑前四模態之模態振形(集中多單元受損)

觀察表(4.6)，相較於分散損傷，集中損傷造成自然頻率變化更高，其變化率介於-1.7001%至-4.3326%間，由圖(4.10)可觀察出集中損傷造成之模態振形變化較分散損傷大，但對於偵測懸臂樑之損傷仍不夠敏感。



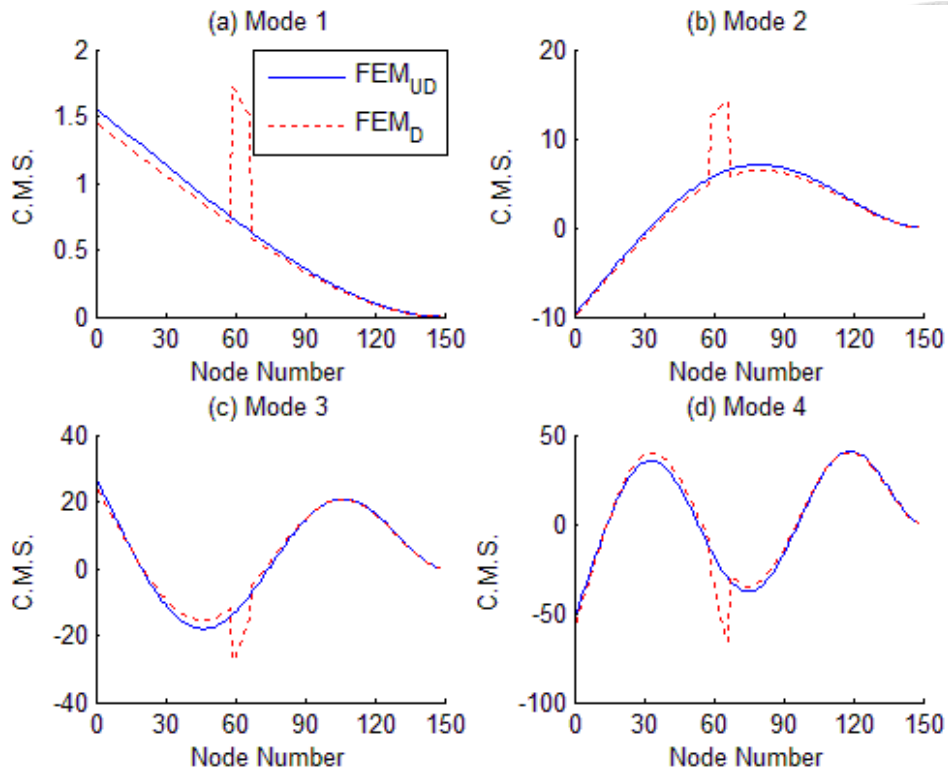


圖 4.11 前四模態之模態曲率(集中多單元受損)

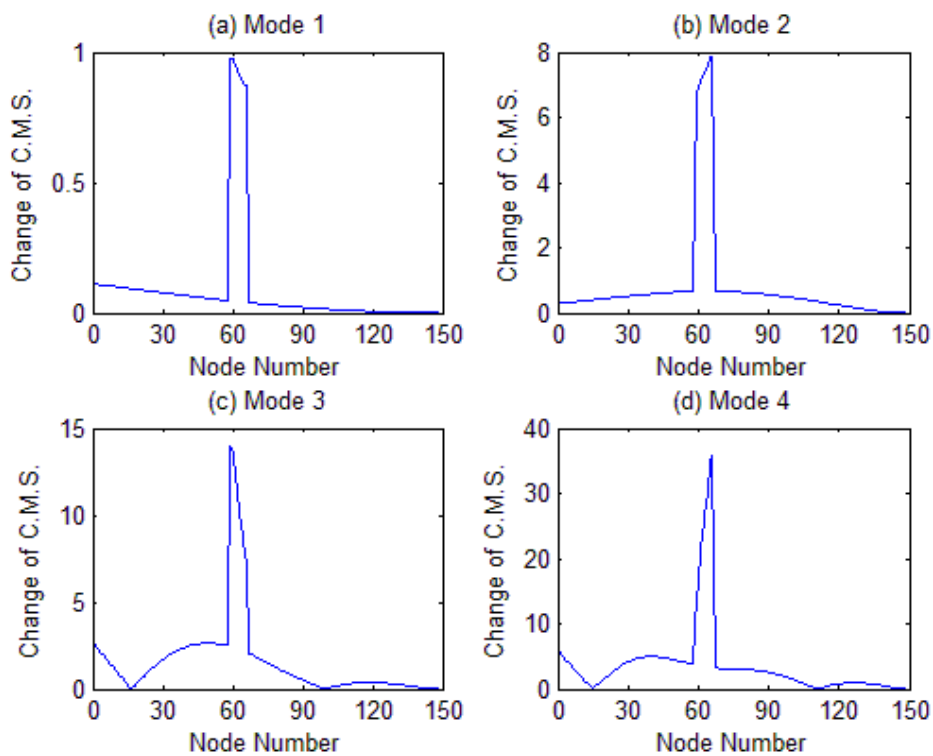


圖 4.12 前四模態之模態曲率差(集中多單元受損)

圖(4.11)為懸臂樑受損前後前四模態之模態曲率， $x$  軸為對應之節點號，計算其模態曲率差值並取絕對值後可得圖(4.12)所示前四模態之模態曲率差，對照表(4.5)，圖中顯示差值極大處即為對應之受損單元號。



綜合 4.2.1 節與 4.2.2 節之結果，對懸臂樑而言，集中位置受損較分散位置受損具有更嚴重的破壞性，而反應在模態參數上則是造成自然頻率變化，模態振形改變，但以此二參數之改變程度仍不夠顯著，不足以作為判斷損傷的依據，可能在量測訊號的過程中受雜訊干擾即失去此變化量，若欲以自然頻率之改變判斷懸臂樑是否受損或是以模態振形之變化對受損處定位仍具有相當程度的難度；而若以模態曲率及其差值作為損傷偵測的準則，由模擬之結果顯示其可定位出懸臂樑受損位置且有不錯之成效。

### 4.2.3 模擬同單元不同損傷程度

在結構損傷偵測領域中，一般而言有四項指標：是否存在損傷、損傷定位、受損程度及估測使用壽命，前兩節之結果顯示了模態曲率差法對於判斷有無損傷與損傷定位皆有著良好的成效，本節將探討在不同受損程度下，模態曲率差法對於受損程度之辨別度。損傷因子之定義參考表(4.7)， $D_1$  至  $D_4$  分別對應受損程度嚴重至輕微，而受損位置定義如下：

表 4.7 懸臂樑同單元不同損傷程度受損狀況

受損狀況	受損單元號	對應之損傷因子號
同單元不同損傷程度	75	$D_1$ 、 $D_2$ 、 $D_3$ 、 $D_4$

將懸臂樑中之固定單元分別予以四種不同程度之損傷，比較其前四模態之模態曲率差，如下：

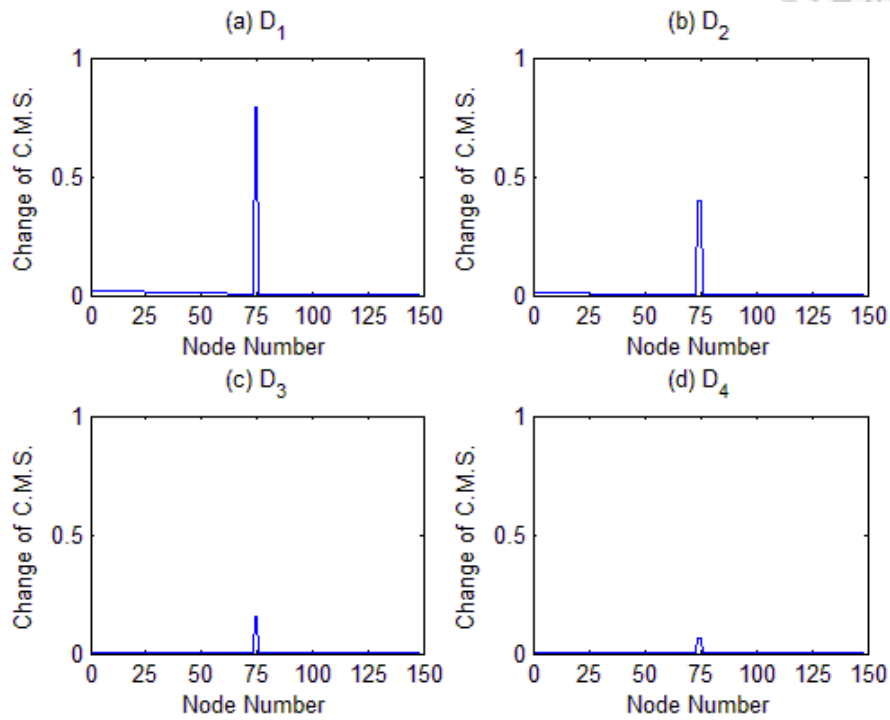


圖 4.13 第一模態之模態曲率差(同單元不同受損程度)

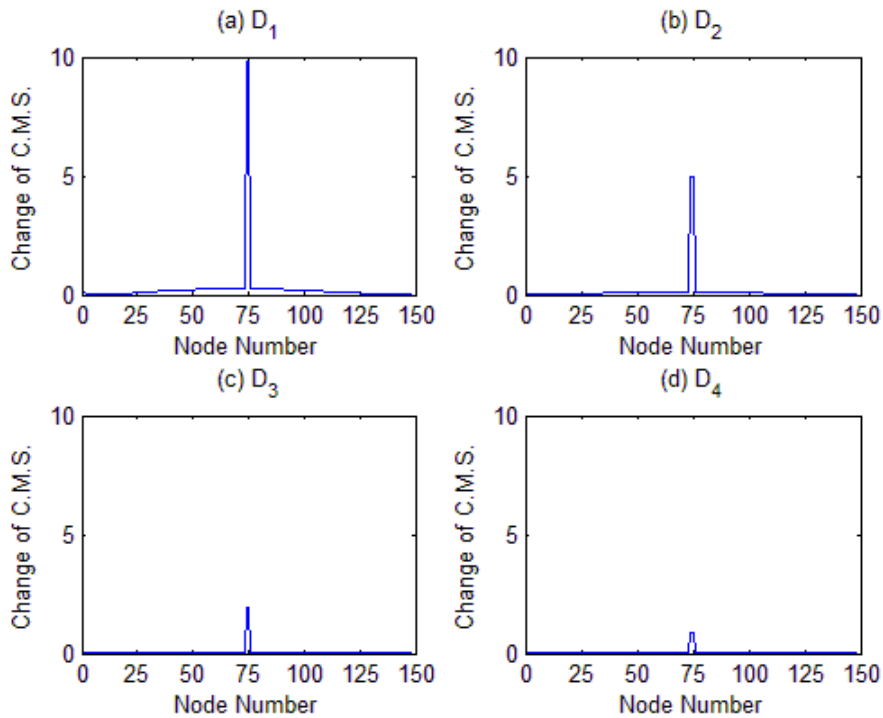


圖 4.14 第二模態之模態曲率差(同單元不同受損程度)

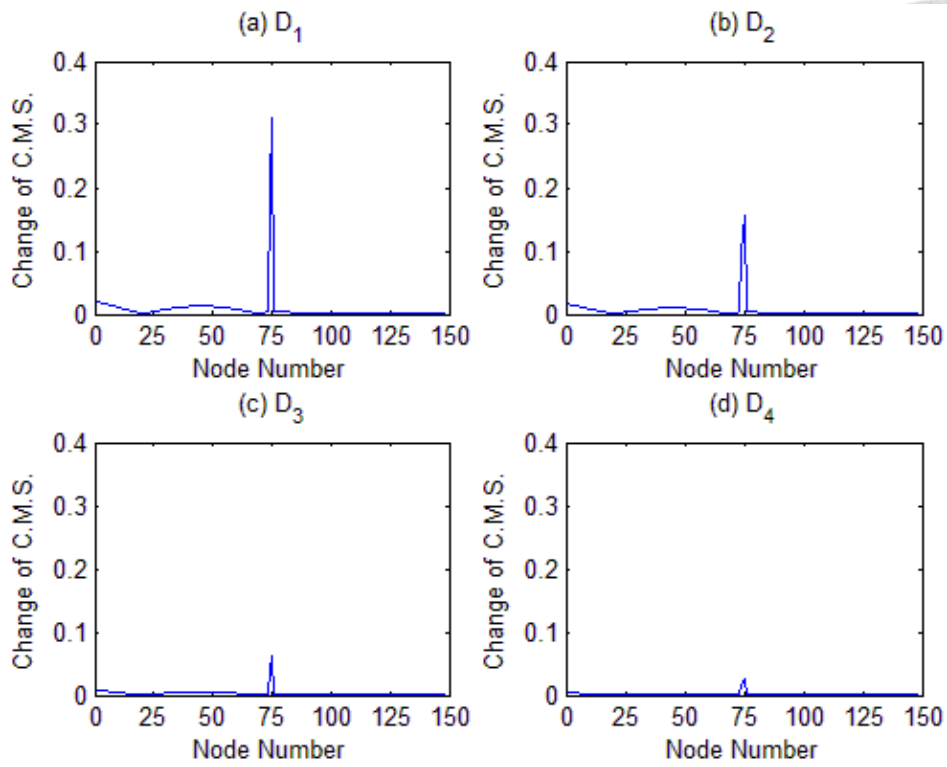
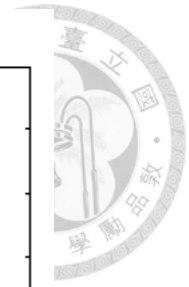


圖 4.15 第三模態之模態曲率差(同單元不同受損程度)

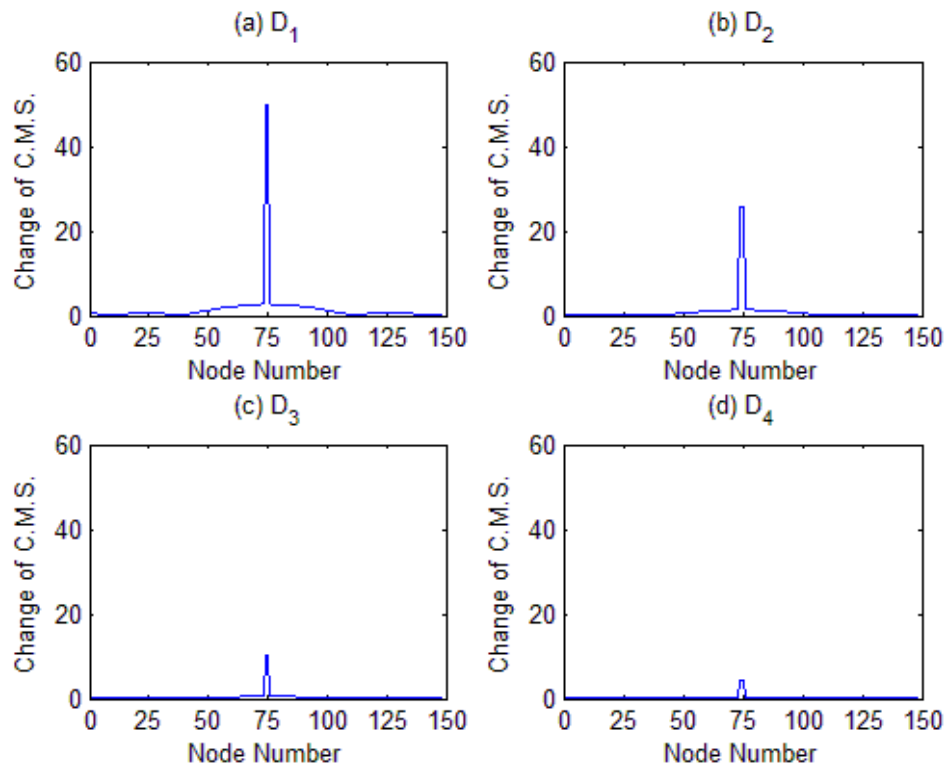


圖 4.16 第四模態之模態曲率差(同單元不同受損程度)

圖(4.13)至圖(4.16)中， $x$  軸皆為對應之節點號，對於四種不同之受損程度，受損較嚴重者相對於受損較輕微者，其模態曲率差明顯可以觀察出大小差異，而此差異順序也與受損程度相同。綜合本章模擬之結果：



表 4.8 損傷偵測方法對於損傷識別指標之比較

偵測方法 識別指標	自然頻率法	模態振形法	模態曲率差法
判斷受損有無	劣	劣	優
定位受損位置	無法	無法	優
比較受損程度	無法	無法	可

表(4.8)說明了以模態曲率差法作為偵測結構損傷準則之優越性，其能夠準確地判斷受損位置，更能分辨出其相對受損程度。但前提是能夠獲取結構受損前後之模態振形，並不失其精確性。而本章中所用以數值計算之模態振形均為透過有限元分析獲得之數值解，雖與解析解存在著誤差，但仍具有相當程度之參考價值，其仍可視為近似於實際之情況。

### 4.3 損傷偵測流程

由第一章至第四章所介紹之內容，包括狀態空間系統識別理論、模態曲率損傷偵測理論以及相關實驗操作步驟與有限元建模等，為便於瞭解完整之損傷偵測過程，以下將以一流程圖說明：

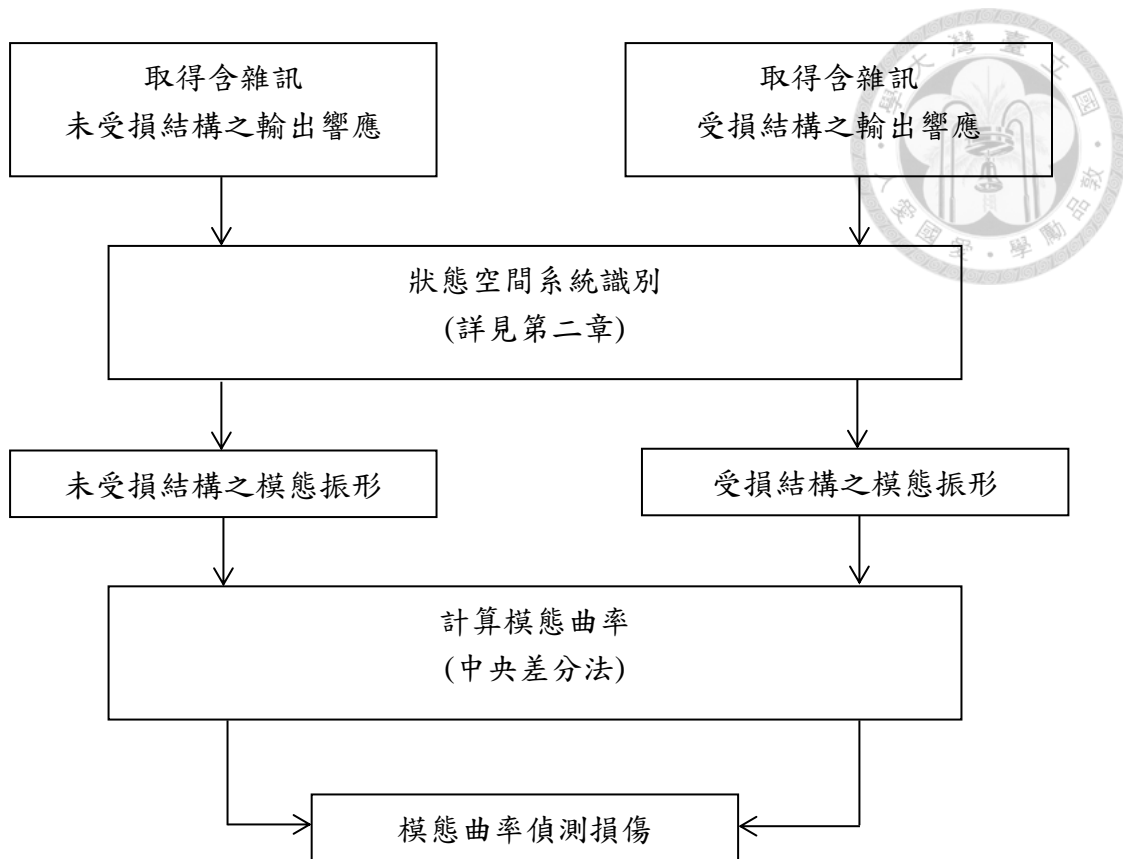


圖 4.17 基於模態曲率理論之損傷偵測流程圖

本章完整介紹偵測損傷之理論，並於 4.2 節中模擬不同受損情況之損傷偵測，其模擬中採用之模態參數均為經由有限元素分析求得，本文第五章將接續介紹依循上述流程圖，實際以狀態空間系統識別所得模態參數進行損傷偵測之成果。

## 第五章 模擬結構輸出響應之損傷偵測

由第四章損傷偵測模擬例中可以得知，理論上以結構之模態曲率偵測其受損位置具有良好的成效，不同於前章，本章將以電腦模擬受損與未受損懸臂樑結構含雜訊之輸出響應，並由 AR 模型及狀態空間系統識別出其受損與未受損之模態參數後，基於模態曲率及其差值進行損傷偵測。

然而考慮到實際情況下對於結構之受損情形並不瞭解，損傷偵測本身即為處理一反向問題，且能使用之實驗儀器(本文使用加速規擷取訊號)也有數量上的限制，反應在損傷偵測過程中即為可採用數據之節點數受限，在此限制條件下黏貼加速規的位置儼然成為能否偵測出損傷的關鍵，本章中第一部分提出以兩階段式選取加速規通道位置並先後進行訊號之擷取以偵測損傷，分別為：(一)等分式與(二)集中式；第二部分中考慮在有限筆數據情形下，將 AR 模型識別所得之模態振形經數值處理後再行偵測其損傷，以下將依序介紹上述內容。

### 5.1 二階段式選取量測通道位置偵測損傷

為模擬實際對懸臂樑偵測損傷之情形，其受損狀況應為未知，於此前提下吾人先後以等分與集中式分別選取加速規量測訊號之通道位置，反應在模擬中之情況即選取懸臂樑有限元模型之特定節點模擬產生其輸出響應；懸臂樑分割為 150 個單元，含固定端共 151 個節點，其模型詳細之建立過程可參考本文第三章，各通道所模擬之輸出響應以採樣頻率 400Hz 產生 5 秒鐘之加速度訊號共 2000 點，並加入訊雜比(Signal Noise Ratio)30dB 之雜訊，其中輸出響應之時間歷時圖如圖(5.1)。

計算訊雜比使用之公式為：

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \frac{\text{var}(x)}{\text{var}(x - \hat{x})} \quad (5.1.1)$$



其中， $\text{var}(x)$  表示原始訊號之變異數， $\text{var}(x - \hat{x})$  表示原始訊號  $x$  與量測訊號  $\hat{x}$  差值之變異數；式(5.1.1)計算所得 SNR 值單位為 dB，其值越小表示量測訊號與原始訊號差異越大，其值越大則反之。

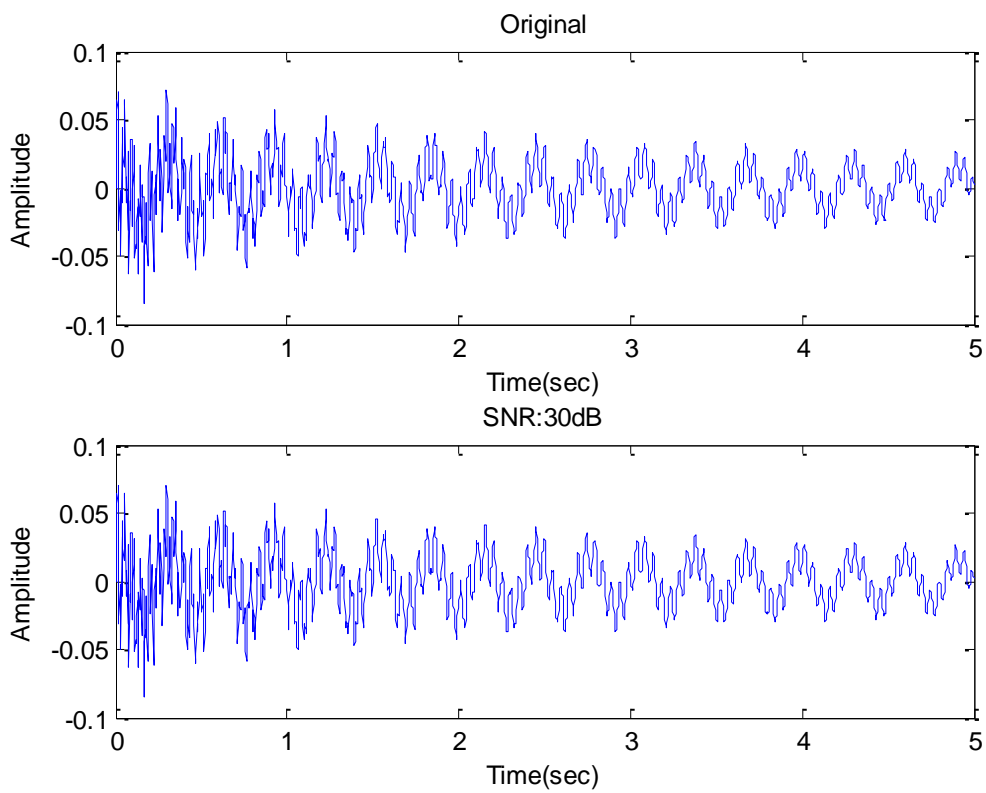


圖 5.1 原始訊號與含雜訊 SNR 值 30dB 之時間歷時圖



(一) 等分式選取通道位置：

此處選用 10 個通道進行偵測，於實際情況中即使用量測儀器之數量；為等分長度 150 公分之懸臂樑，取其相鄰兩通道間距離為 15 公分，則通道位置示意圖如圖(5.2)與圖(5.3)：

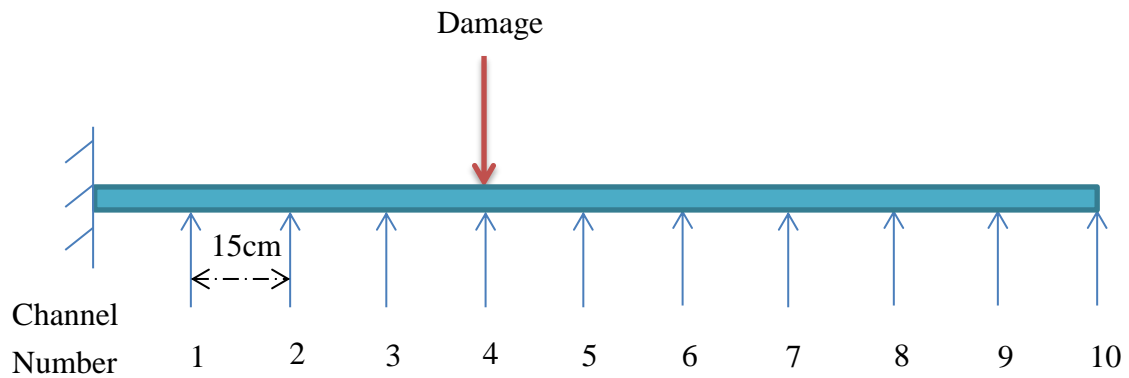


圖 5.2 選取通道恰含受損位置

圖(5.2)所示情況為所選取之通道恰含受損位置，然而在任何情況下，所選取通道中包含受損位置的機率是非常低的，故以下接續考慮所選取通道位置未包含受損處之情形，如圖(5.3)：

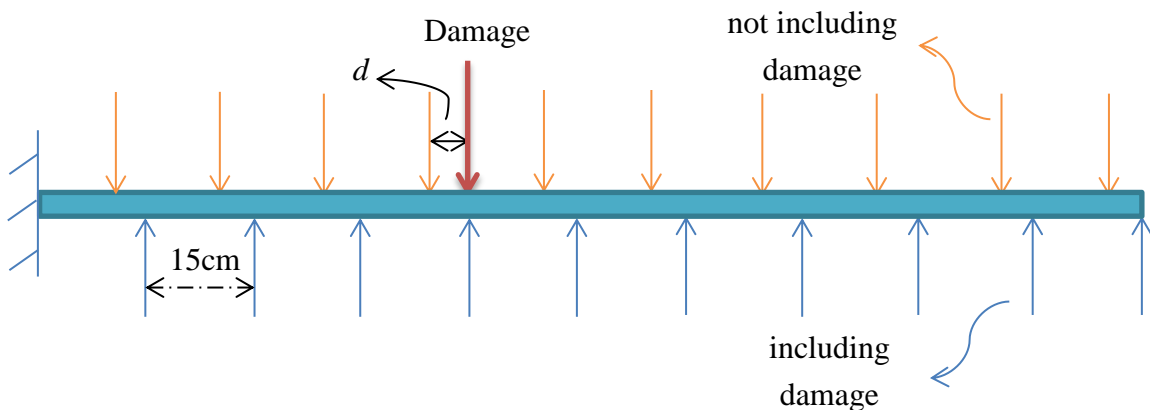


圖 5.3 實際選取通道位置示意圖

圖(5.3)中，上方選擇之通道位置即考慮選用通道中未含受損位置，參考圖(5.2)中通道 1 至 10 之位置，其相當於圖(5.3)中下方選擇之通道位置，若以位置此為基準，將此 10 個通道位置全部向左逐步移動後即考慮到等分式選取通道位置之全部情況，依照向左移動的距離  $d$  可分為以下 8 種情況：

表 5.1 選取通道位置與受損位置之距離

選取通道位置與受損位置之距離 (即 $d$ 值) (單位：cm)	$d=0$	$d=4$
	$d=1$	$d=5$
	$d=2$	$d=6$
	$d=3$	$d=7$

表(5.1)中所列為針對 10 個通道時之情況作說明，相鄰兩通道間距離為 15 公分，若  $d > 7$  即重複位置。

(二)集中式選取通道位置：

若以等分方式選取通道位置偵測損傷時有明顯觀察出某些相鄰通道間所求得之模態曲率有明顯差值，則可進一步重新選取通道位置為更靠近明顯差值處之位置，極有可能於此處存在損傷，相鄰通道距離與平移距離  $d$  則視情況而定：

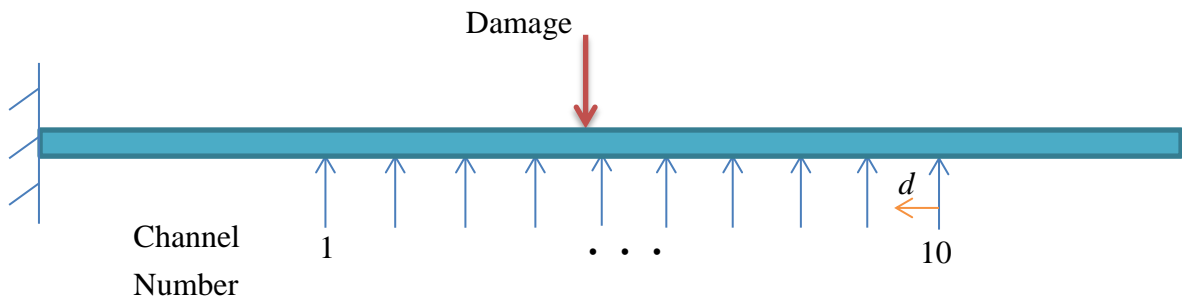


圖 5.4 集中式選取通道位置示意圖



### 5.1.1 單處損傷偵測

由 5.1 節介紹之兩階段式選取通道位置，本節模擬偵測單處損傷之情況，礙於本文之篇幅，以第四章模擬例中受損程度最輕微與最嚴重之情形檢視損傷偵測狀況，損傷因子參數定義參考表(4.1)，受損單元狀況如表(5.2)，以 AR 模型 40 階識別受損與未受損懸臂樑之自然頻率列於表(5.3)，則此二損傷狀況以等分式選取通道位置之模態振形與其模態曲率及模態曲率差則如圖(5.5)至圖(5.16)：

表 4.1 損傷因子之各項參數數值

損傷因子		截面寬度 (m)	截面厚度 (m)	截面積 (m <sup>2</sup> )	截面損失 (%)
編號	數值				
D <sub>1</sub>	0.2500	0.4219	0.0600	2.5313×10 <sup>-4</sup>	43.7489
D <sub>2</sub>	0.4011	0.4000	0.0715	2.86×10 <sup>-4</sup>	36.4444
D <sub>3</sub>	0.6321	0.4500	0.0800	3.6×10 <sup>-4</sup>	20.0000
D <sub>4</sub>	0.8003	0.4750	0.0850	4.0375×10 <sup>-4</sup>	10.2778

表 5.2 模擬單處受損狀況之受損單元與損傷因子

受損狀況	受損單元號	對應之損傷因子號
嚴重	75	D <sub>1</sub>
輕微	75	D <sub>4</sub>

表 5.3 單處受損狀況 AR 模型 40 階識別所得自然頻率(單位：Hz)

模態 (未受損)	第一模態 (3.2616)		第二模態 (20.4386)		第三模態 (57.2244)		第四模態 (112.1244)	
	D <sub>1</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>1</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>1</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>1</sub>	D <sub>4</sub>
受損狀況 (損傷因子)	3.2483	3.2607	20.1017	20.4185	57.2253	57.2250	110.3865	112.0186
改變率(%)	-0.4078	-0.0276	-1.6484	-0.0983	0.0016	0.0010	-1.5500	-0.0944

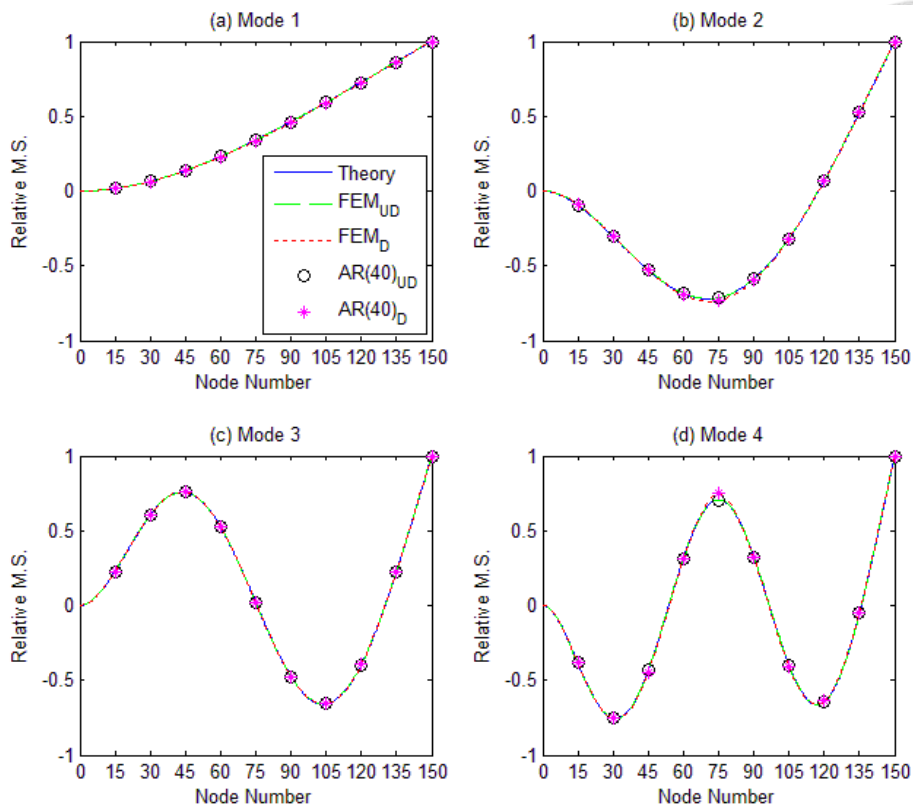


圖 5.5 前四模態之模態振形(單處損傷  $D_1$ )

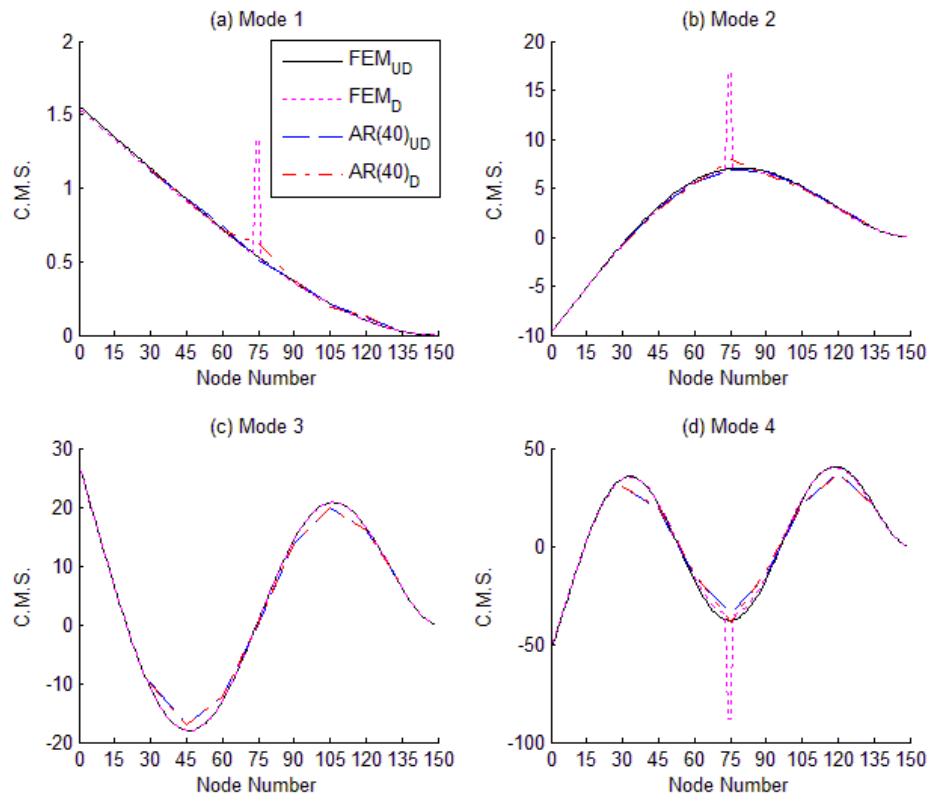


圖 5.6 前四模態之模態曲率(單處損傷  $D_1$ )

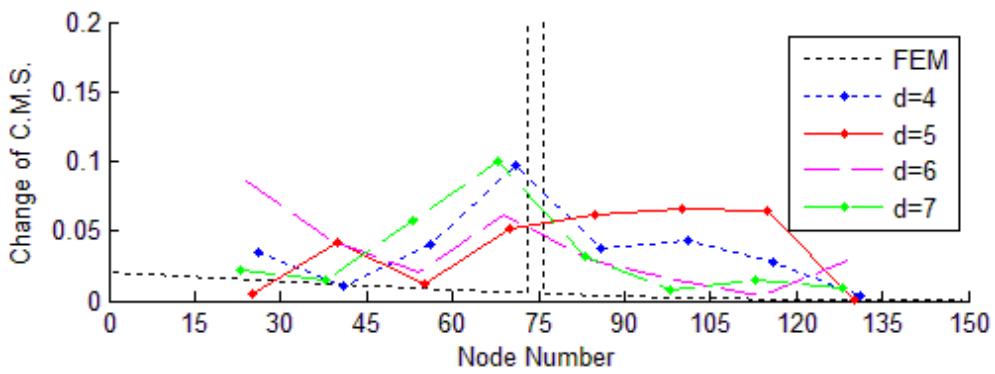
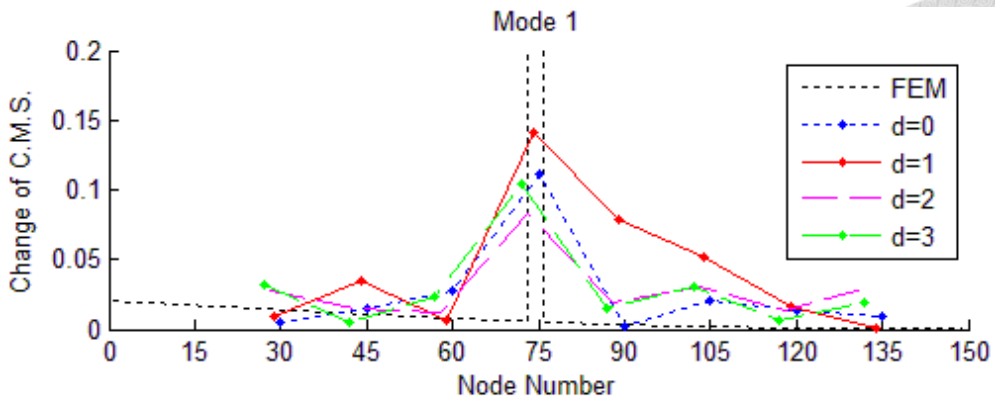


圖 5.7 第一模態之模態曲率差(單處損傷  $D_1$ )

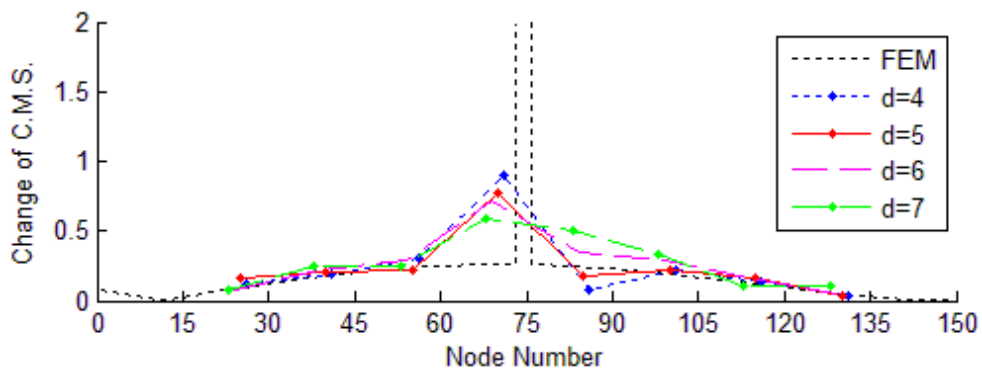
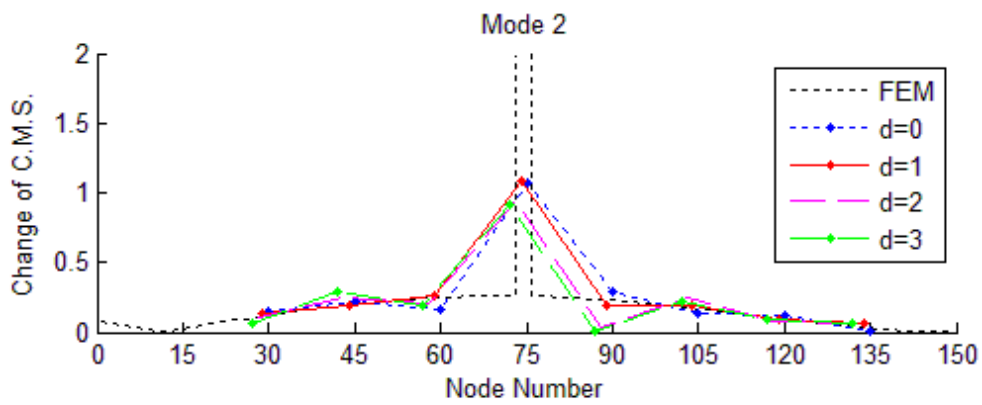


圖 5.8 第二模態之模態曲率差(單處損傷  $D_1$ )

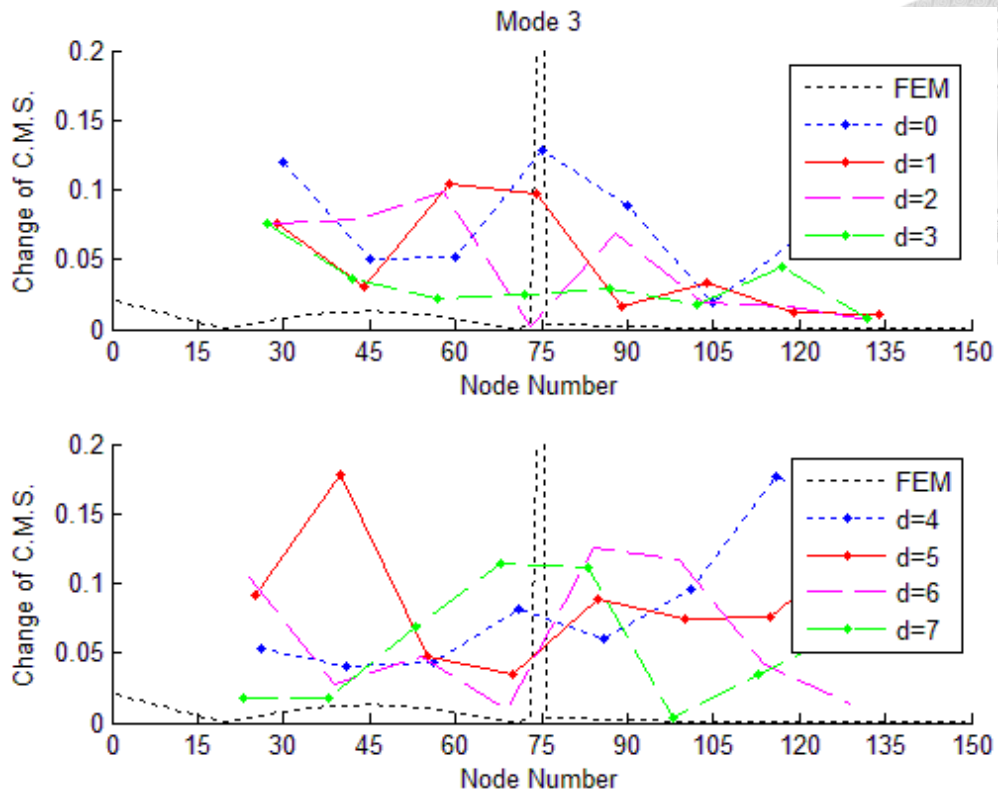


圖 5.9 第三模態之模態曲率差(單處損傷  $D_1$ )

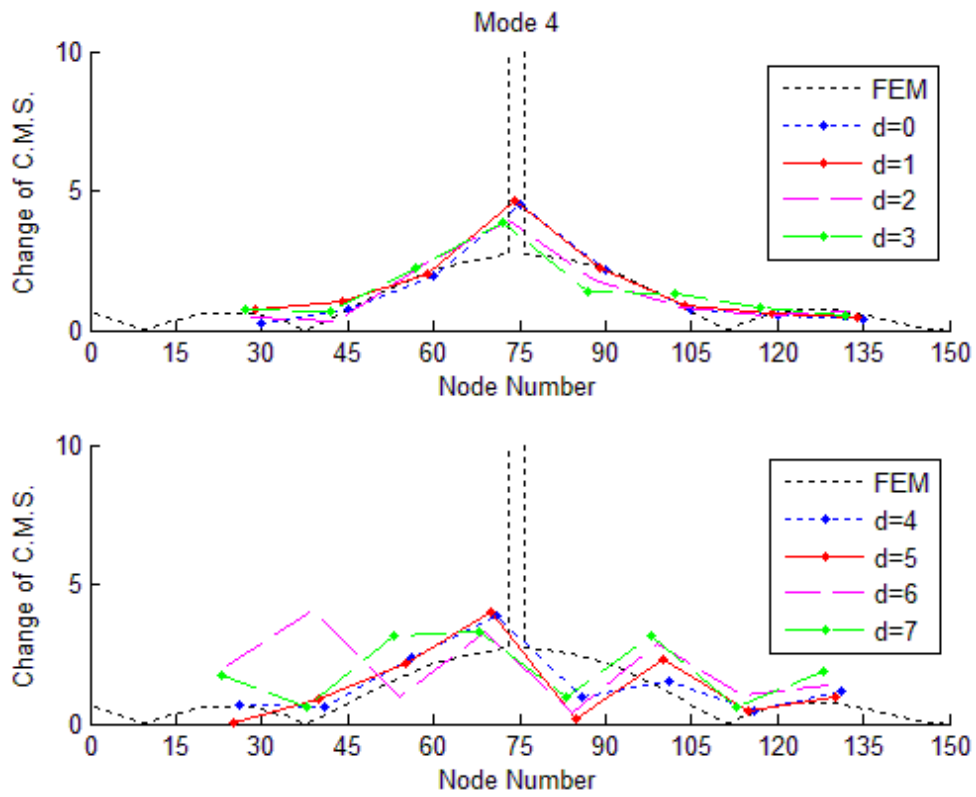


圖 5.10 第四模態之模態曲率差(單處損傷  $D_1$ )

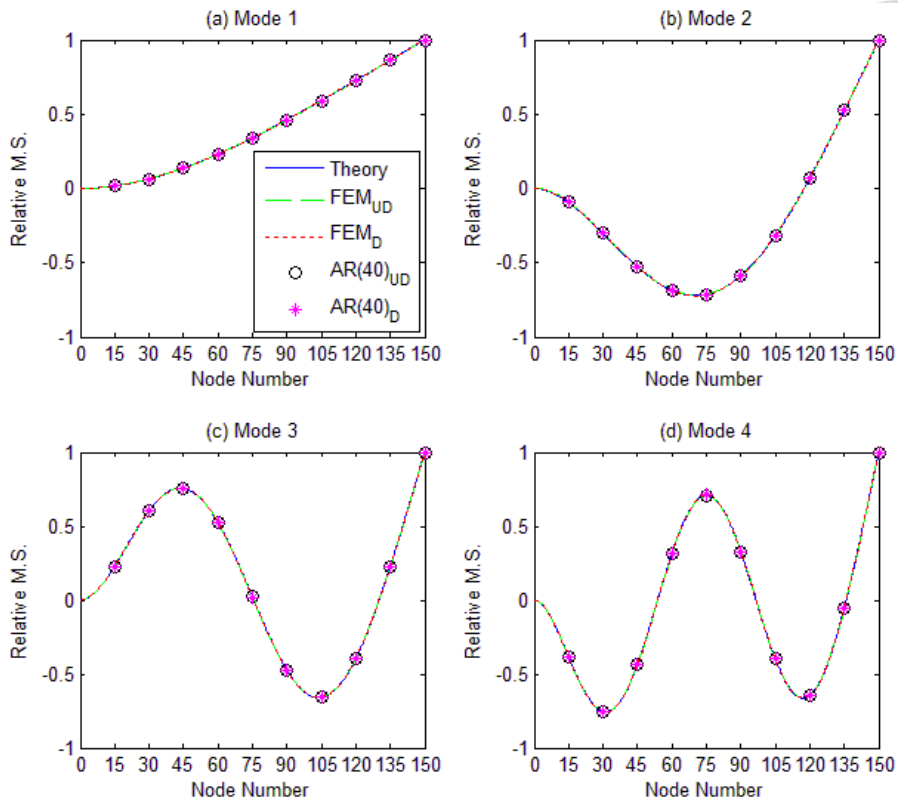


圖 5.11 前四模態之模態振形(單處損傷 D<sub>4</sub>)

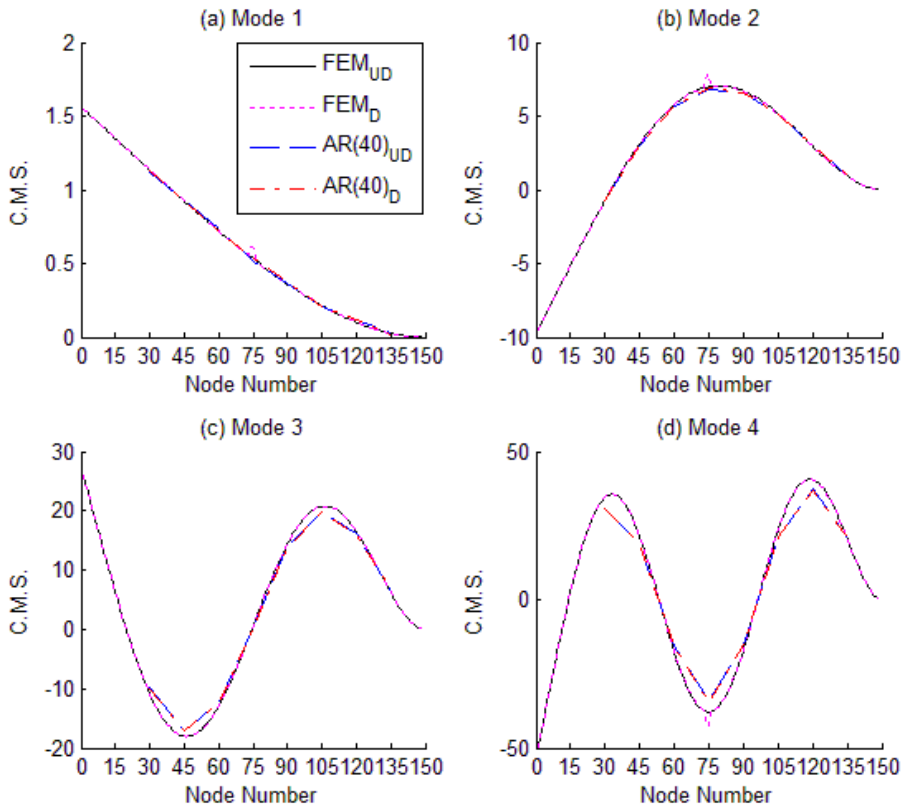


圖 5.12 前四模態之模態曲率(單處損傷 D<sub>4</sub>)

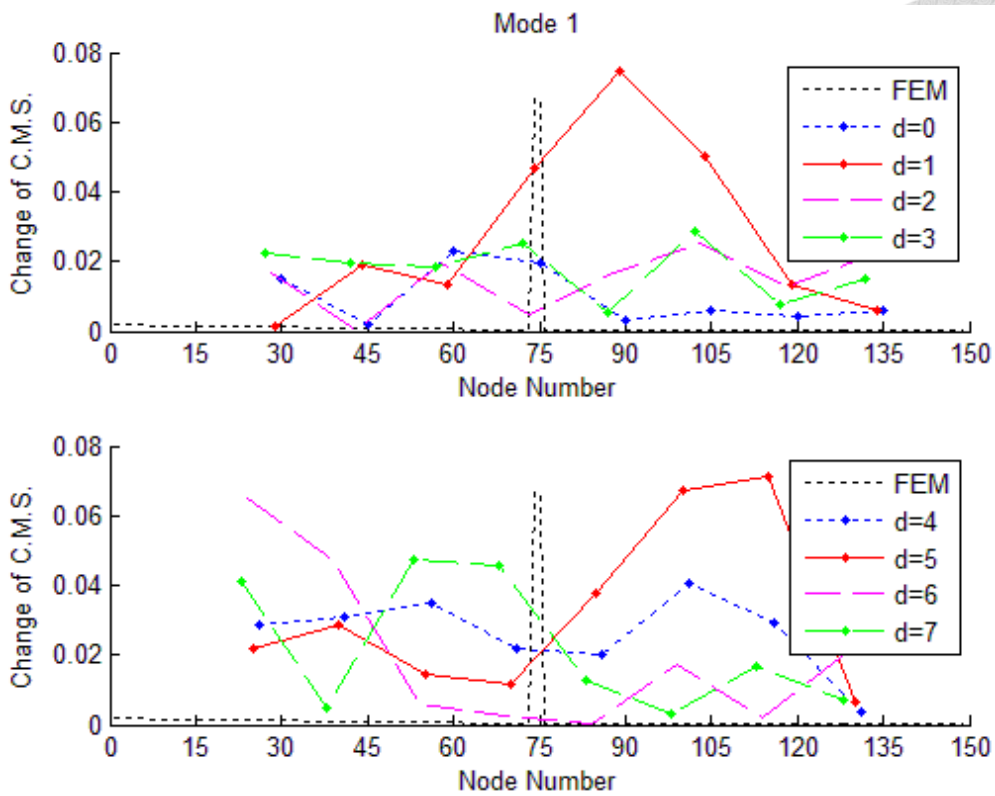


圖 5.13 等分式選取通道第一模態之模態曲率差(單處損傷  $D_4$ )

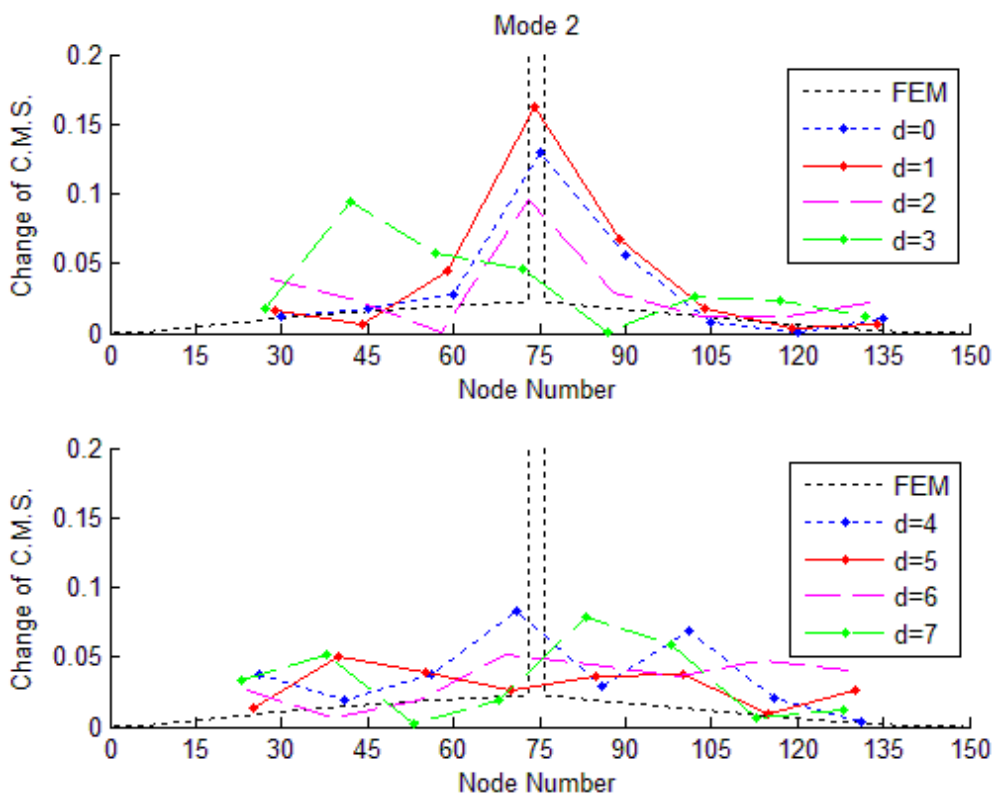


圖 5.14 等分式選取通道第二模態之模態曲率差(單處損傷  $D_4$ )



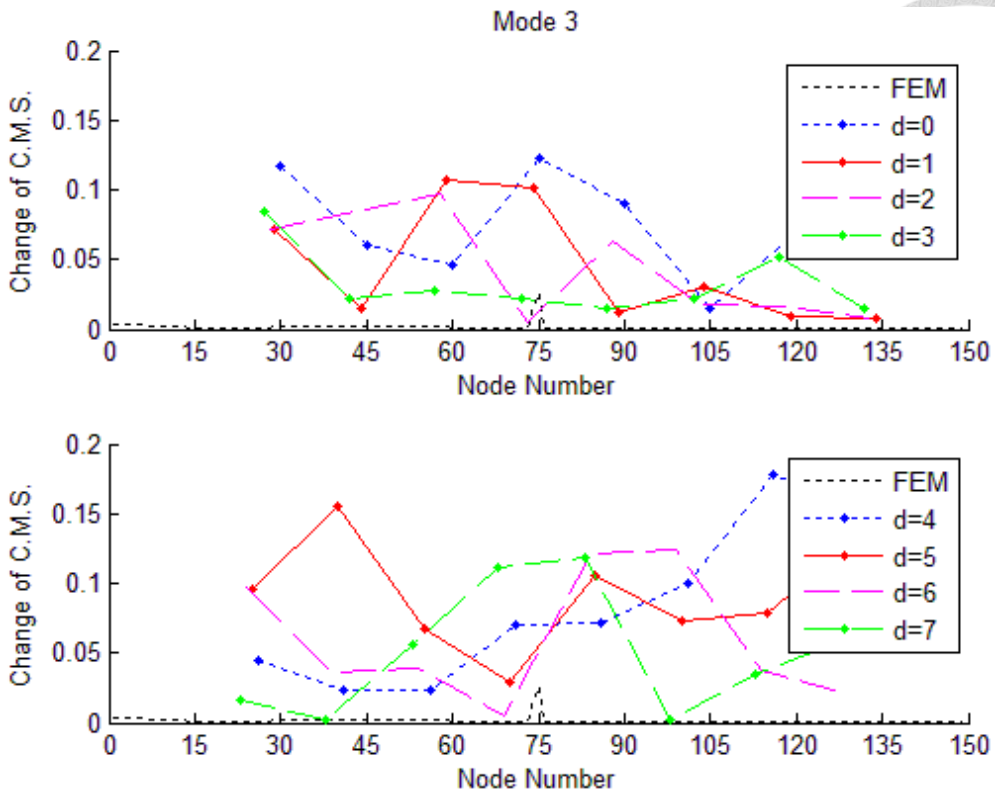


圖 5.15 等分式選取通道第三模態之模態曲率差(單處損傷  $D_4$ )

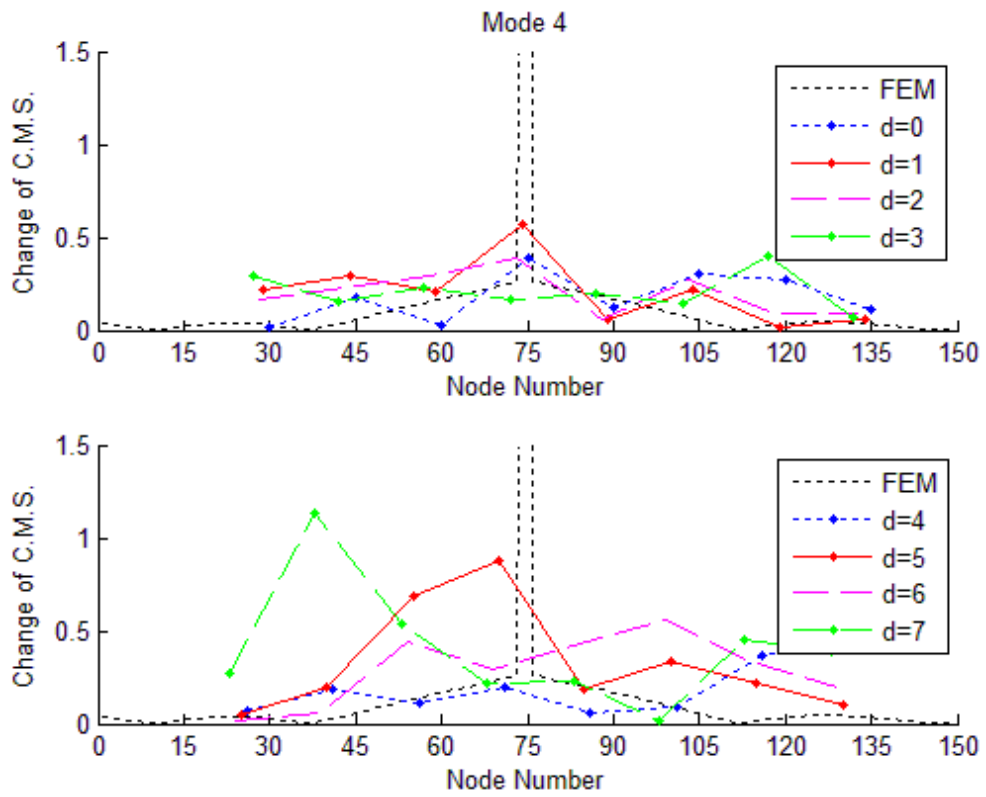


圖 5.16 等分式選取通道第四模態之模態曲率差(單處損傷  $D_4$ )

由以上損傷偵測成果顯示，懸臂樑於此二受損情況下受損前後前自然頻率之變化非常小，若於含雜訊之前提下將難由自然頻率判定受損與否；觀察模態此二受損狀況下之模態振形圖，圖中同時繪出理論解與有限元素分析之數值解供參考，以模態振形仍難斷定懸臂良受損與否；分別由此二受損情況之模態曲率與模態曲率差圖形，受損較嚴重者(損傷因子  $D_1$ )於第一、第二與第四模態之模態曲率與模態曲率差圖形中皆可明顯觀察出於單元號 75 之位置有較大之差值；而受損較輕微者(損傷因子  $D_4$ )則僅於第二與第四模態之模態曲率差圖形中可觀察出於受損單元位置附近有較為明顯之差值。

由第一階段之等分式選取通道位置偵測損傷後，綜觀各模態之模態曲率差圖形，若於特定模態中顯示出在某位置具有一致性之明顯差值，則可合理猜測懸臂樑於其位置可能存在損傷，並進一部由第二階段之集中式選取通道位置再次進行偵測。分別將此二受損情況中所選取之通道位置往受損單元位置集中，取相鄰兩通道位置之距離為 5 公分，則平移距離則有  $d=0, 1, 2$  三種情況，此二受損狀況以集中式選取通道位置偵測損傷，其模態曲率差圖形如圖(5.17)與圖(5.18)：

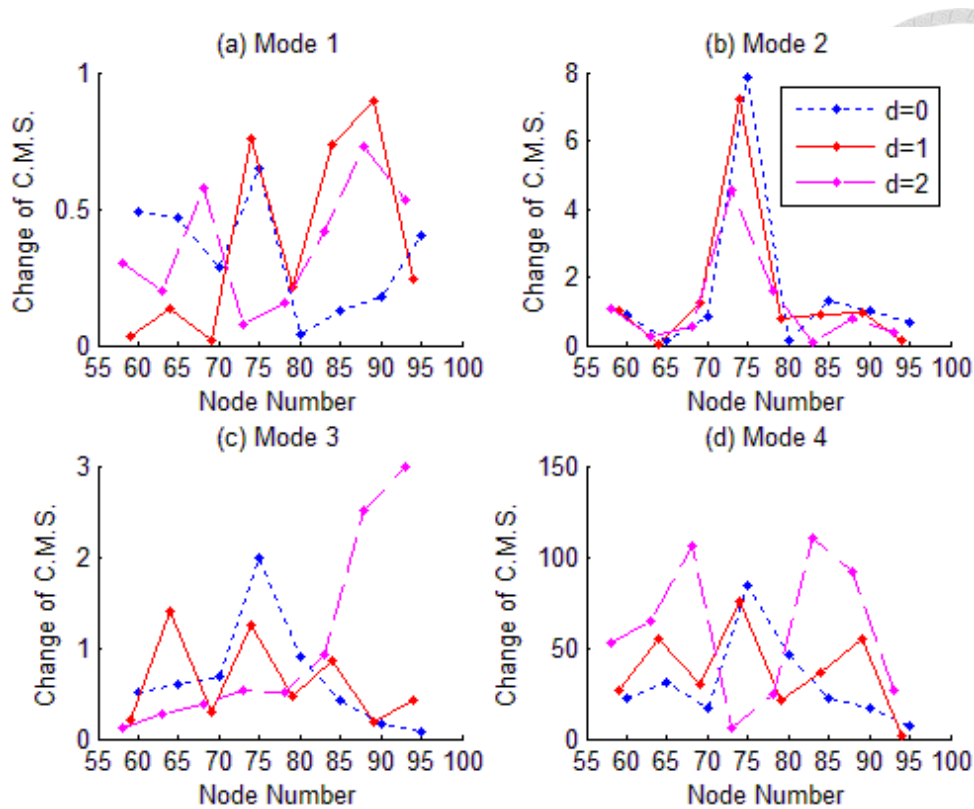


圖 5.17 集中式選取通道前四模態之模態曲率差(單處損傷  $D_1$ )

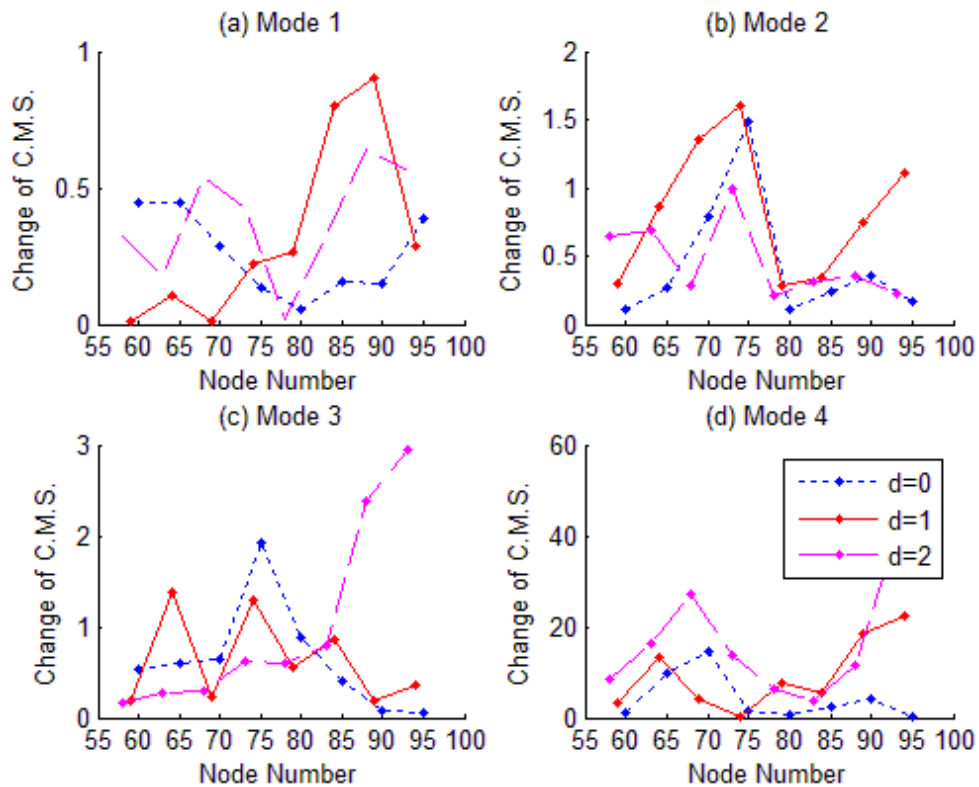
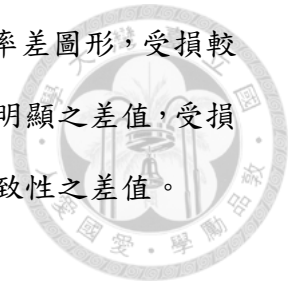


圖 5.18 集中式選取通道前四模態之模態曲率差(單處損傷  $D_4$ )

由圖(5.17)與圖(5.18)中所呈現集中式選取通道後之模態曲率差圖形，受損較嚴重者(損傷因子  $D_1$ )於前四模態中皆可觀察出於受損位置有著明顯之差值，受損較輕微者(損傷因子  $D_4$ )於第二、第三與第四模態也可觀察出一致性之差值。



### 5.1.2 多處損傷偵測

本節將繼續以懸臂樑多處受損下之偵測損傷，假設之受損狀況如表(5.4)：

表 5.4 模擬多處受損狀況之受損單元與損傷因子

受損狀況	損傷說明	受損單元號	對應之損傷因子號
狀況一	集中多單元受損	60、62、64、66	$D_1$
狀況二	分散多單元受損	60、90	$D_1$ 、 $D_2$
狀況三		60、75、90	$D_1$ 、 $D_2$ 、 $D_3$

以 AR 模型 40 階識別各損傷狀況之自然頻率，則結果列於表(5.5)中：

表 5.5 多處受損狀況由 AR 模型 40 階識別所得自然頻率(單位：Hz)

<b>模態 (未受損)</b>	<b>第一模態 (3.2616)</b>		
受損狀況	狀況一	狀況二	狀況三
	3.1684	3.2343	3.2292
改變率(%)	-2.8575	-0.8370	-0.9934
<b>模態 (未受損)</b>	<b>第二模態 (20.4386)</b>		
受損狀況	狀況一	狀況二	狀況三
	19.5900	20.0831	20.0385
改變率(%)	-4.1519	-1.7394	-1.9576
<b>模態 (未受損)</b>	<b>第三模態 (57.2244)</b>		
受損狀況	狀況一	狀況二	狀況三
	56.2679	56.5691	56.7252
改變率(%)	-1.6715	-1.1451	-0.8724
<b>模態 (未受損)</b>	<b>第四模態 (112.1244)</b>		
受損狀況	狀況一	狀況二	狀況三
	109.8903	111.6305	111.0001
改變率(%)	-1.9925	-0.4405	-1.0027

則表(5.5)所列之各損傷狀況以 5.1 節介紹之兩階段式選取通道進行偵測，以下將依序列出其模態振形，模態曲率圖形及模態曲率差圖形供偵測損傷作參考。

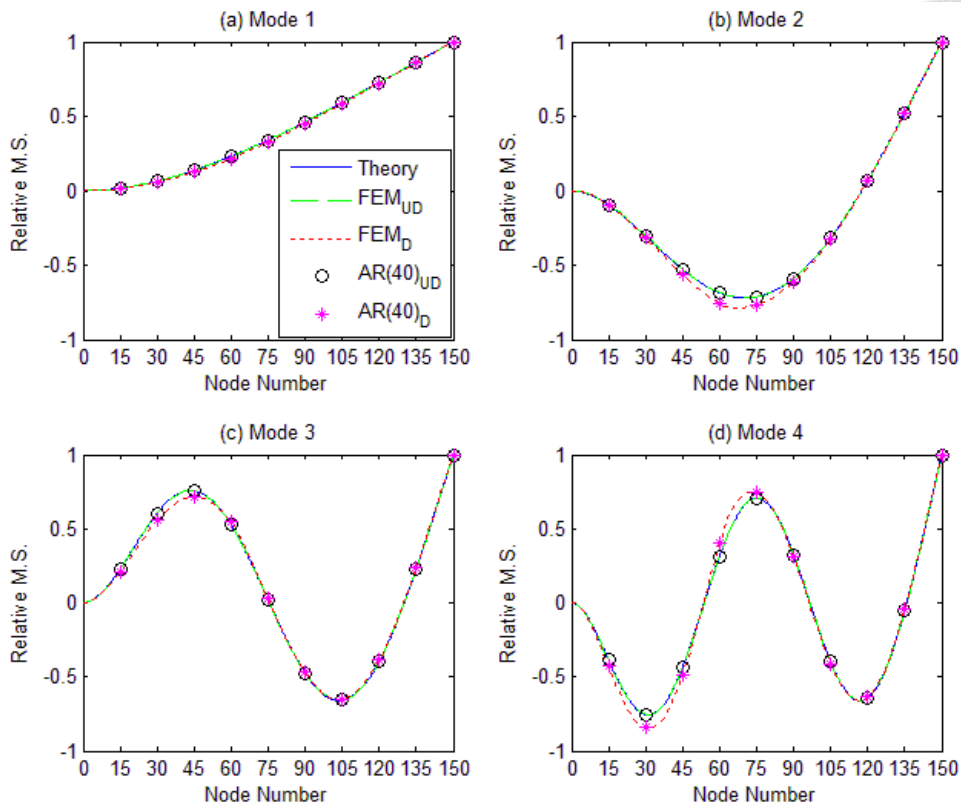


圖 5.19 前四模態之模態振形(多處損傷狀況一)

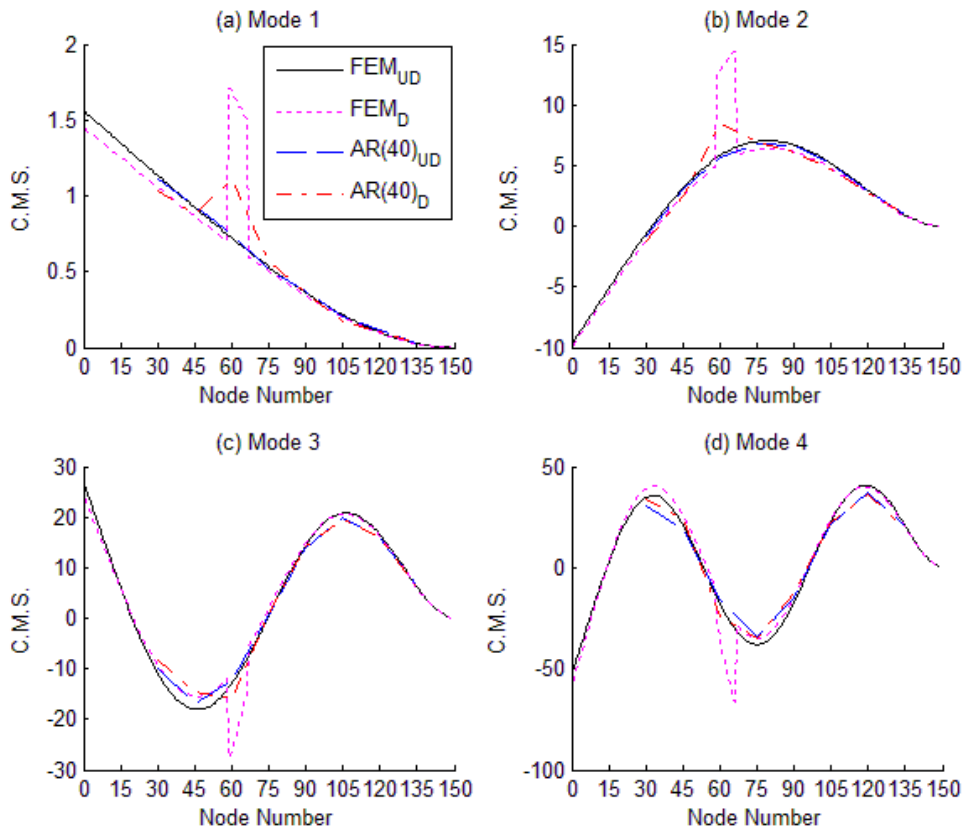


圖 5.20 前四模態之模態曲率(多處損傷狀況一)

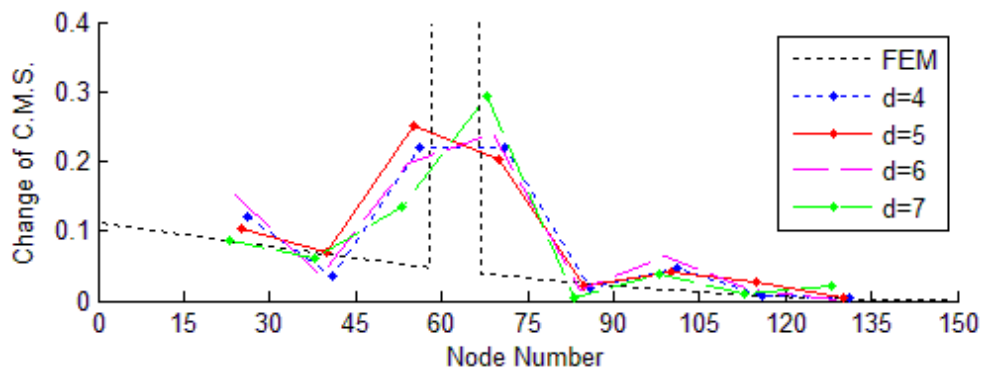
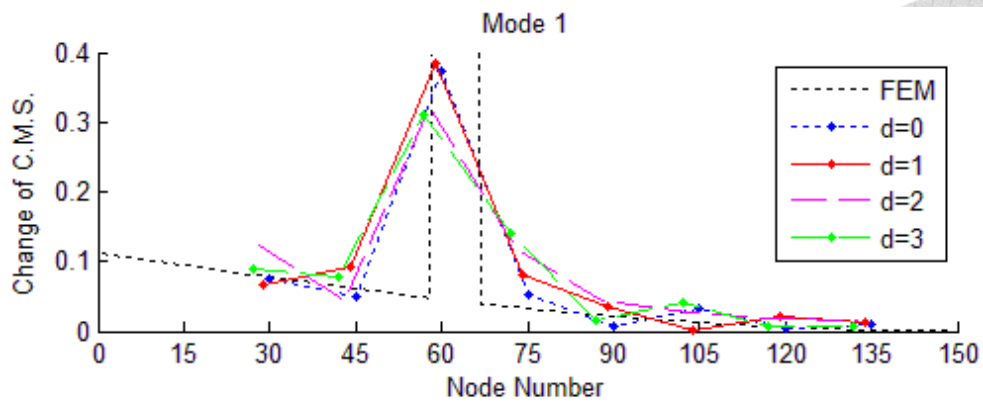


圖 5.21 等分式選取通道第一模態之模態曲率差(多處損傷狀況一)

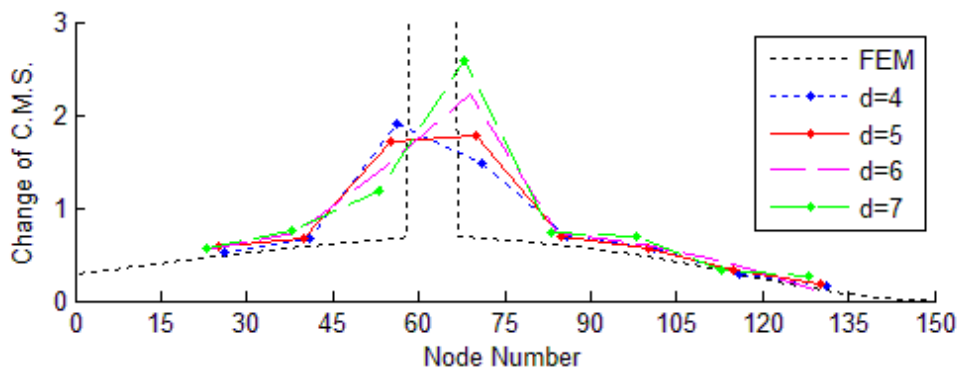
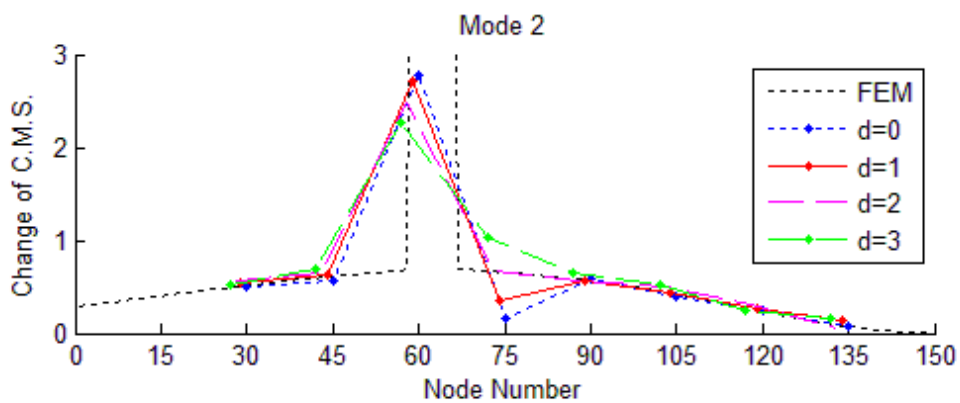


圖 5.22 等分式選取通道第二模態之模態曲率差(多處損傷狀況一)

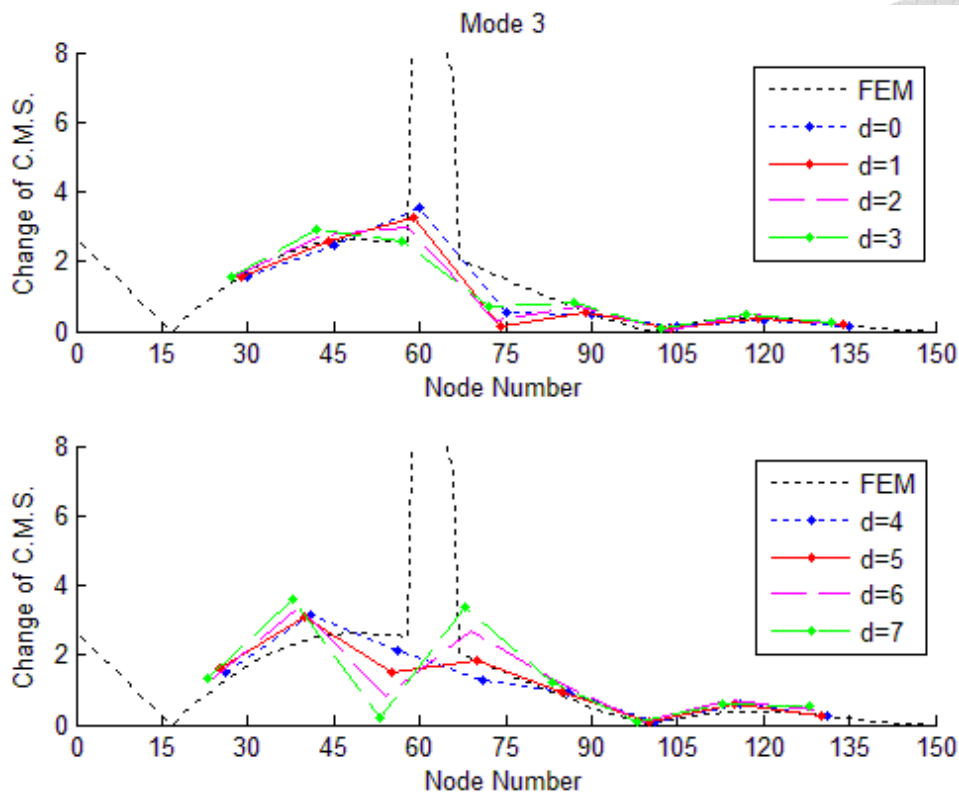
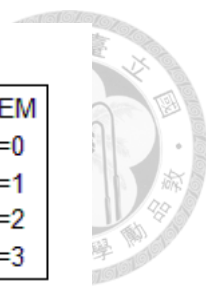


圖 5.23 等分式選取通道第三模態之模態曲率差(多處損傷狀況一)

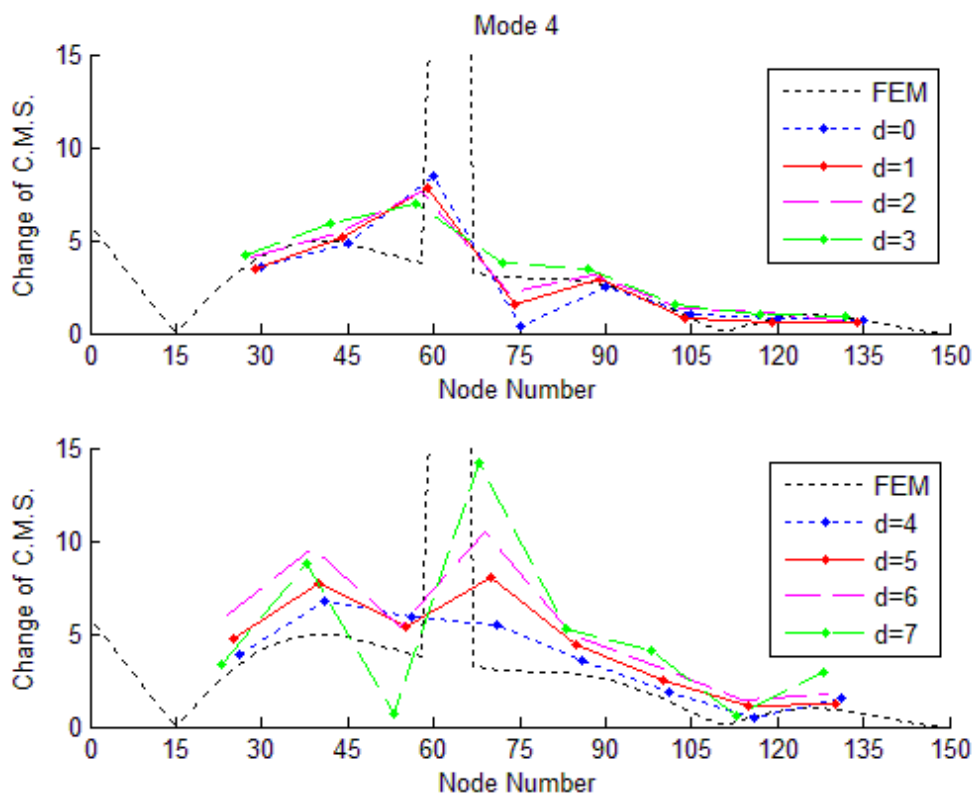


圖 5.24 等分式選取通道第四模態之模態曲率差(多處損傷狀況一)



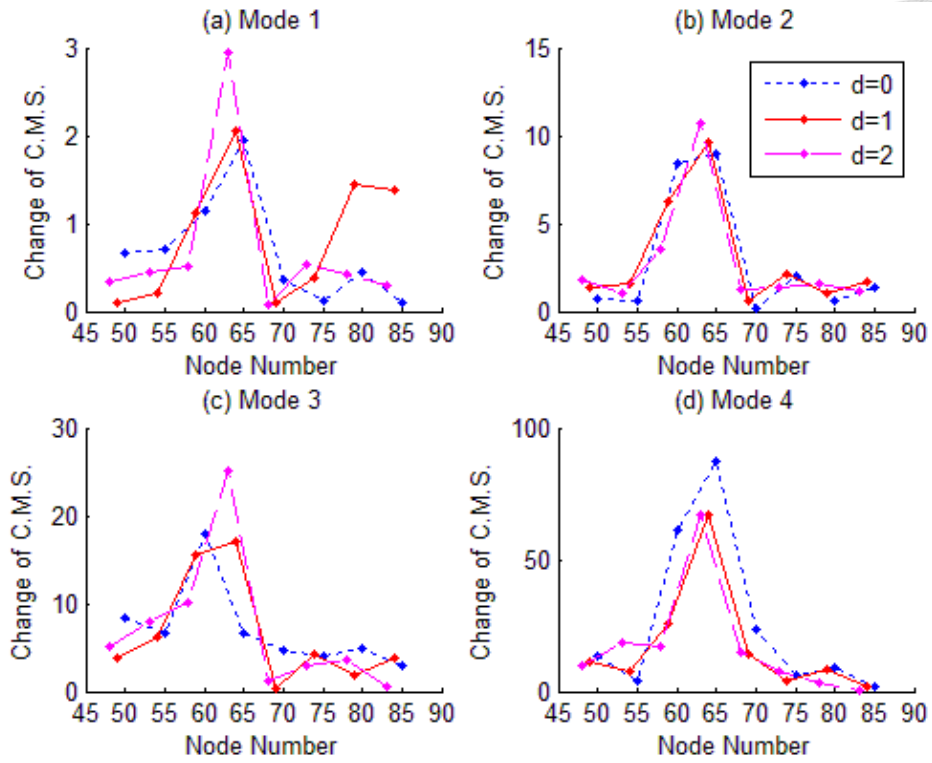


圖 5.25 集中式選取通道前四模態之模態曲率差(多處損傷狀況一)

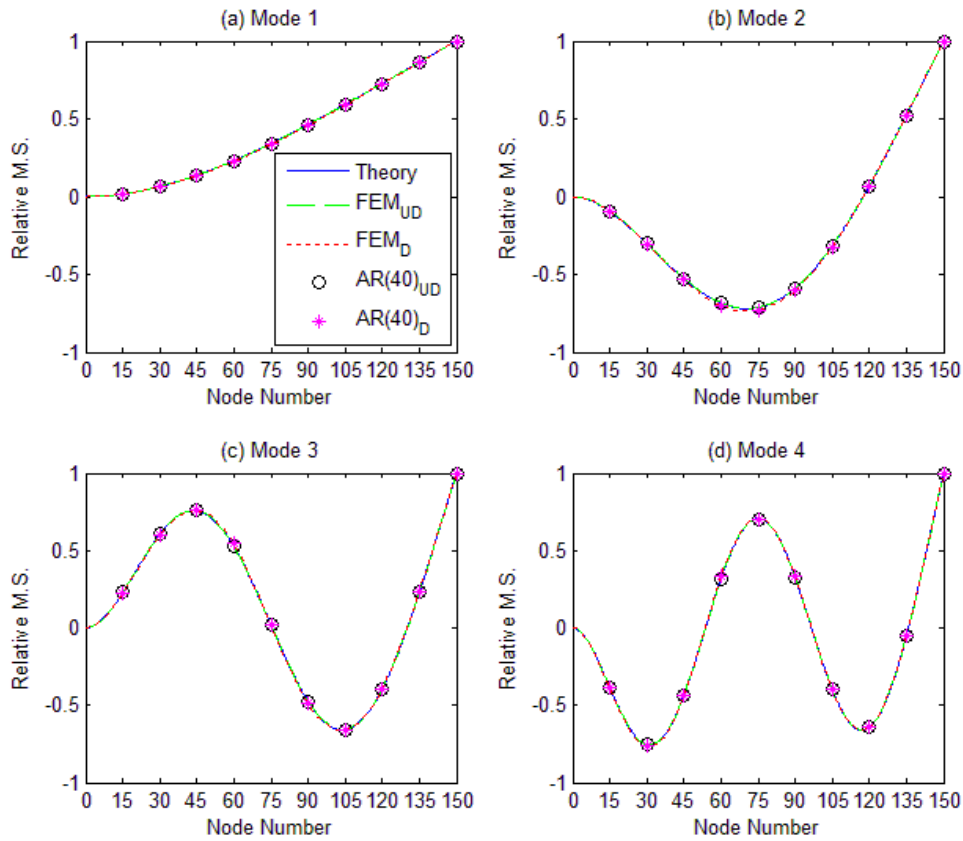


圖 5.26 前四模態之模態振形(多處損傷狀況二)

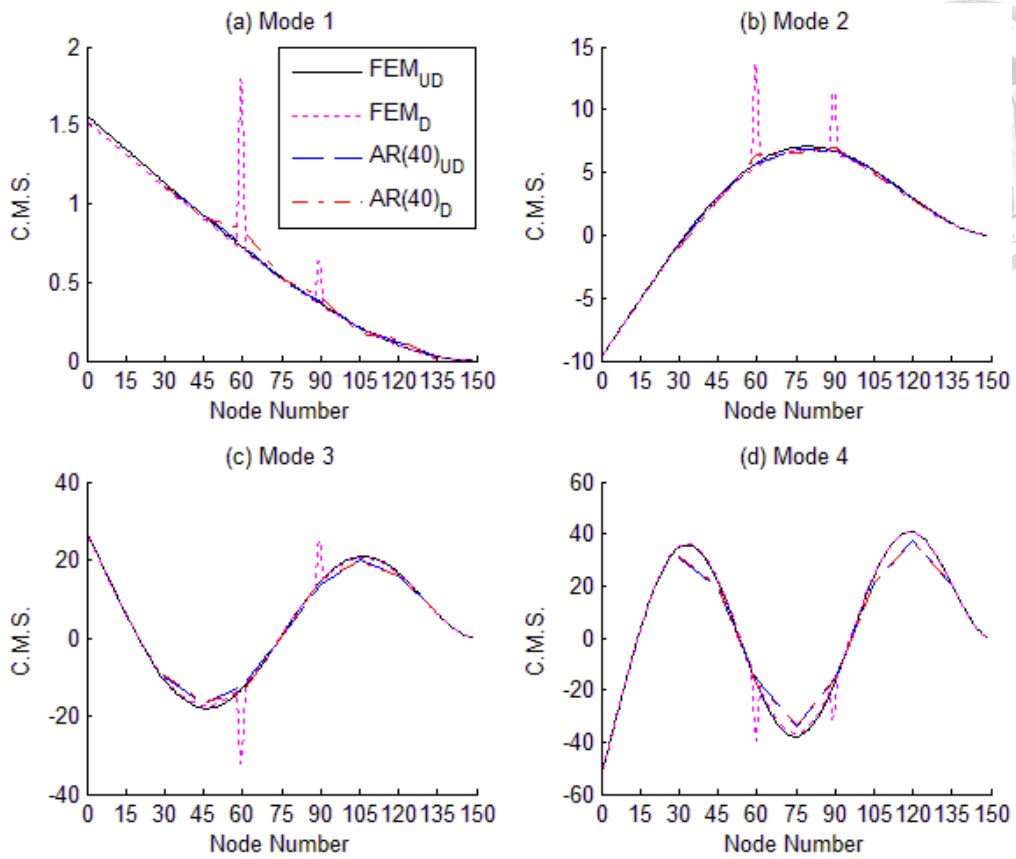


圖 5.27 前四模態之模態曲率(多處損傷狀況二)

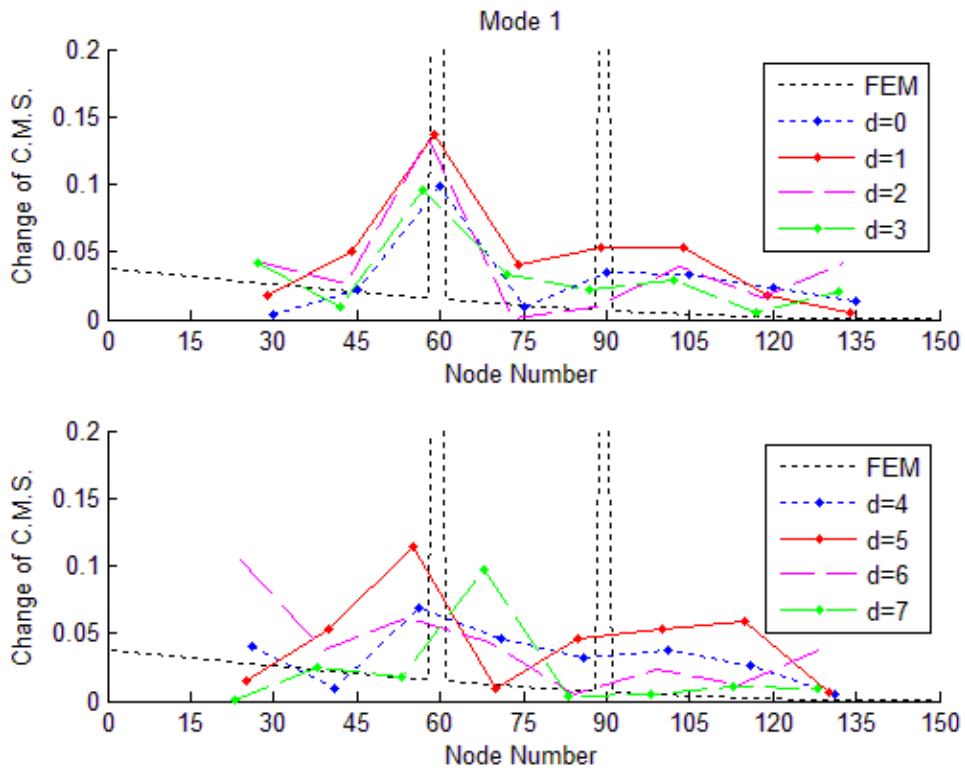


圖 5.28 等分式第一模態之模態曲率差(多處損傷狀況二)

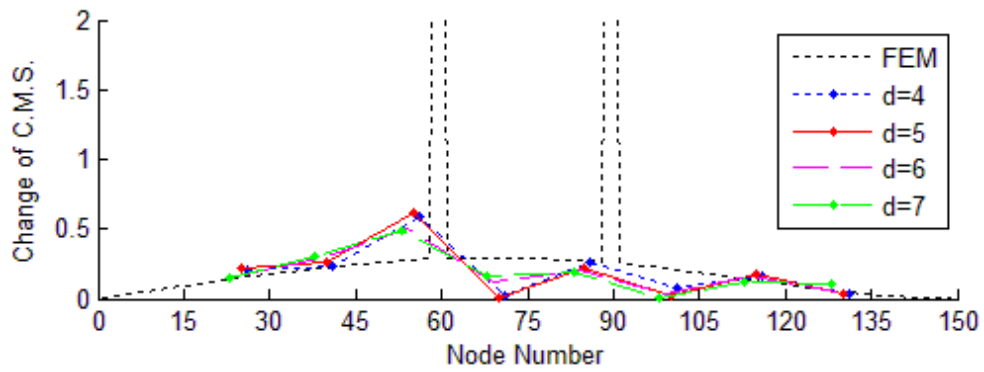
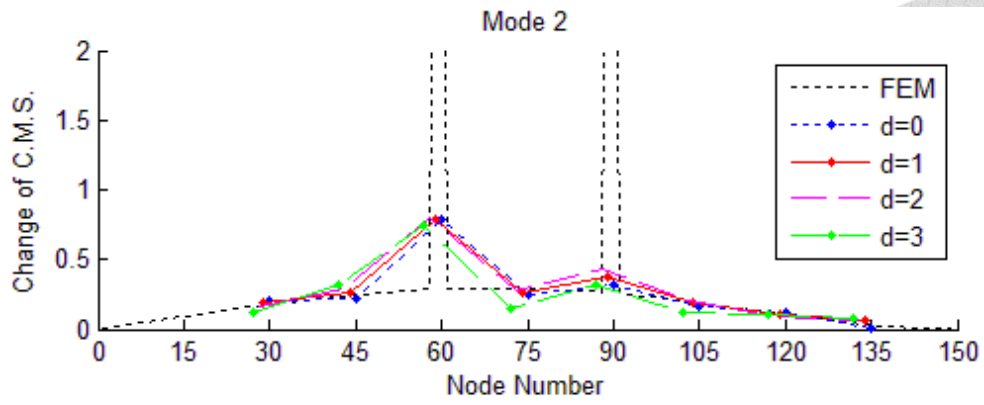


圖 5.29 等分式第二模態之模態曲率差(多處損傷狀況二)

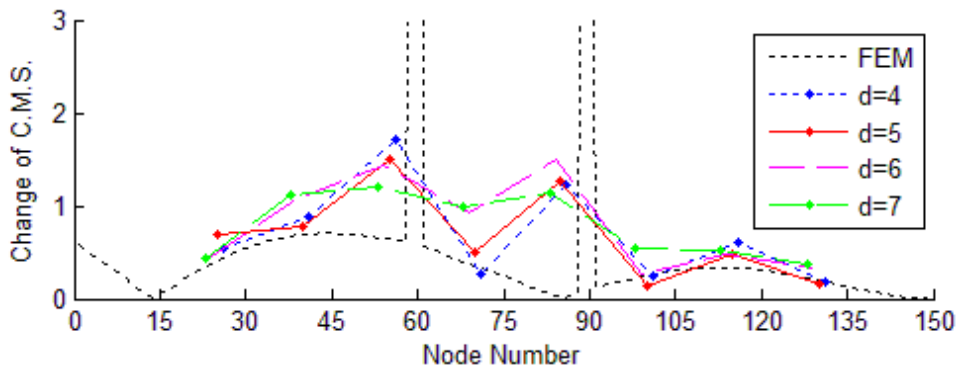
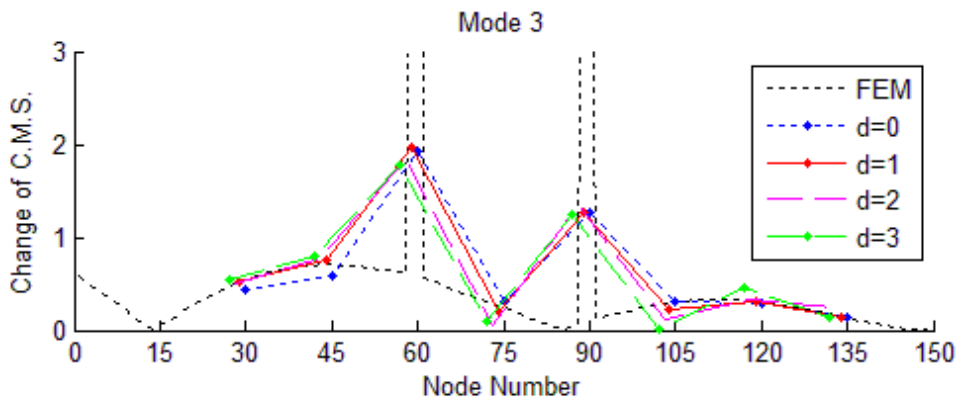


圖 5.30 等分式第三模態之模態曲率差(多處損傷狀況二)

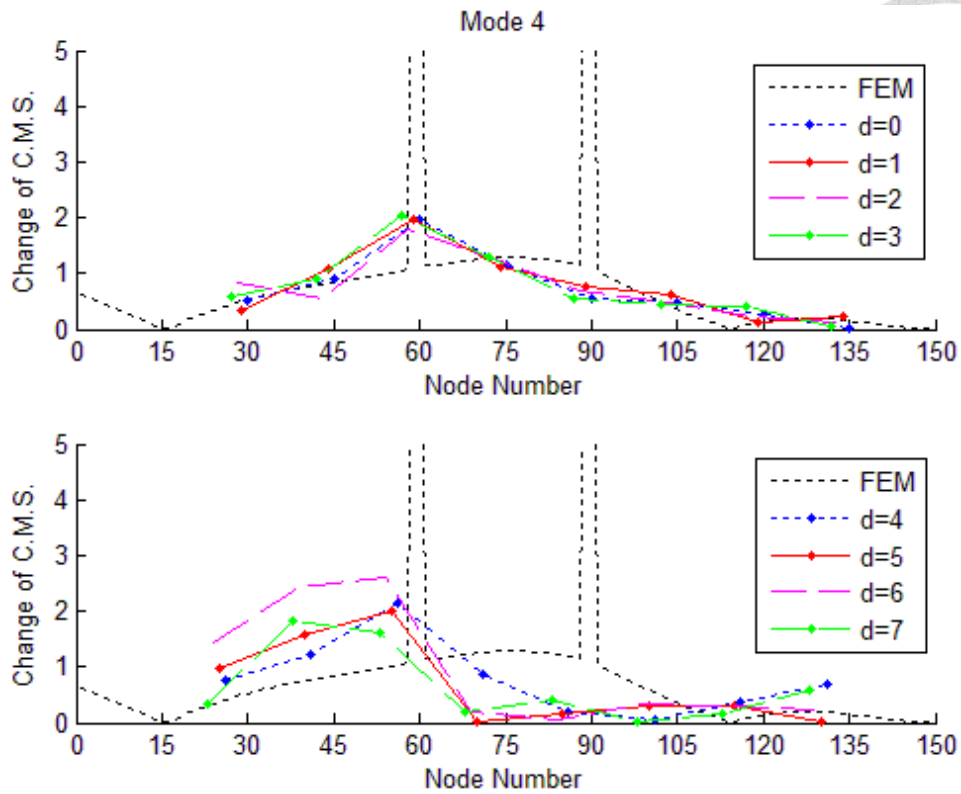
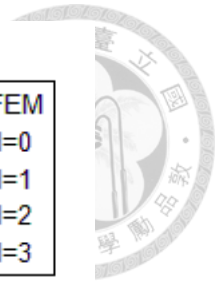


圖 5.31 等分式第四模態之模態曲率差(多處損傷狀況二)

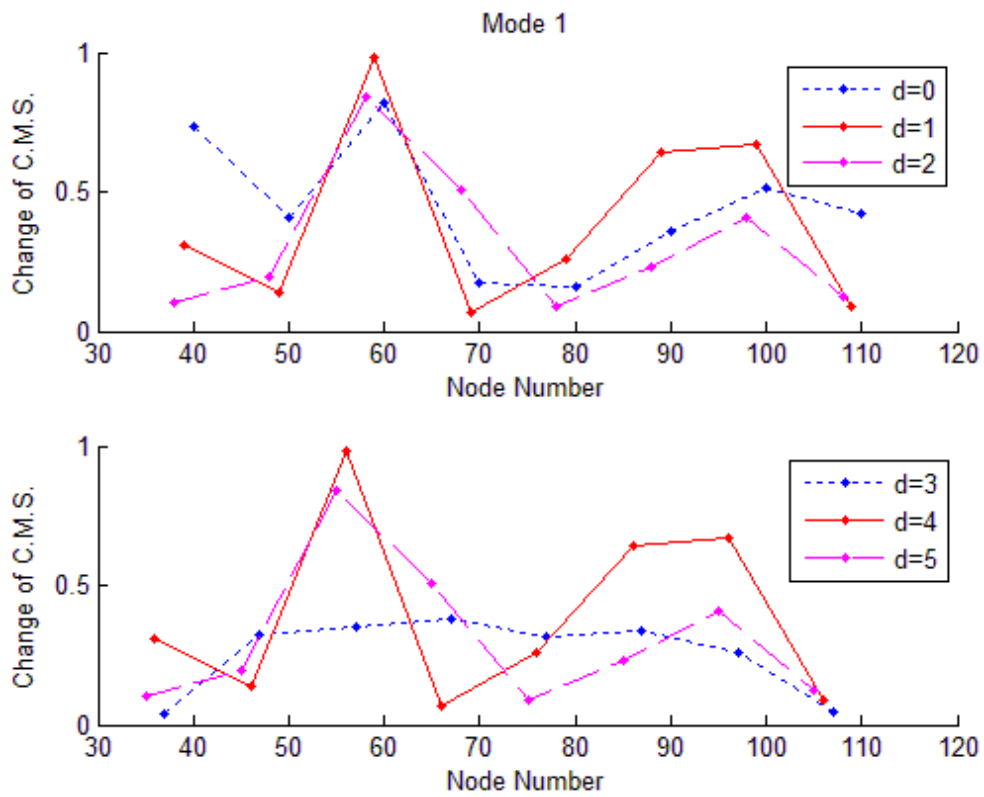


圖 5.32 集中式第一模態之模態曲率差(多處損傷狀況二)

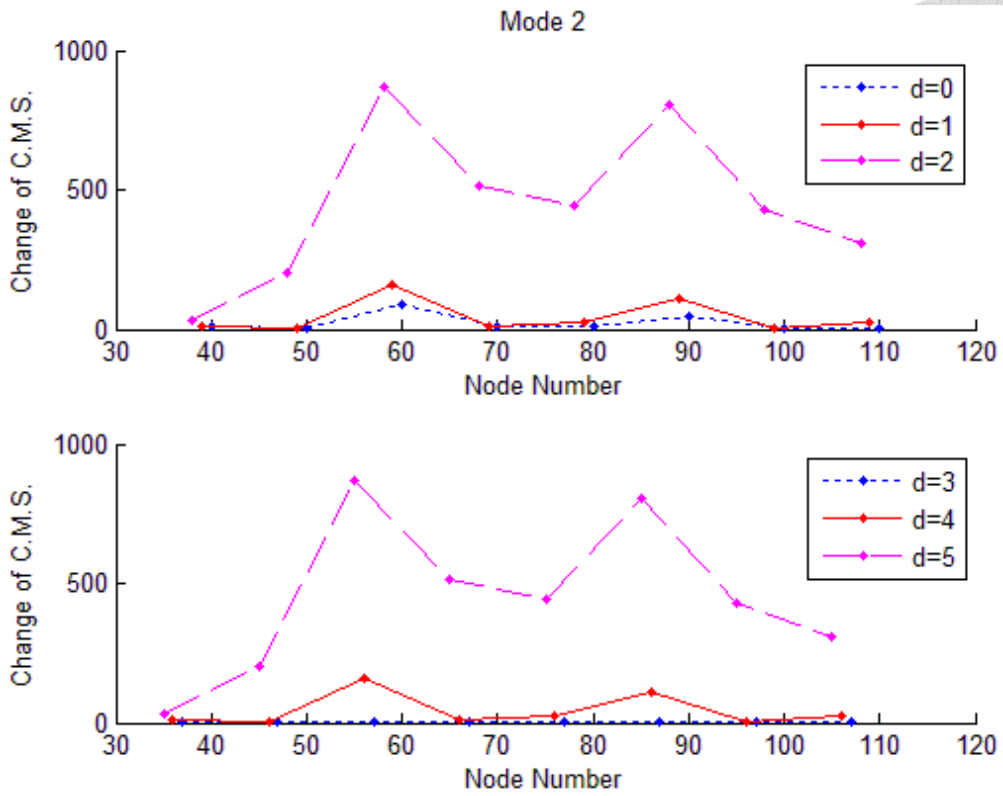


圖 5.33 集中式第二模態之模態曲率差(多處損傷狀況二)

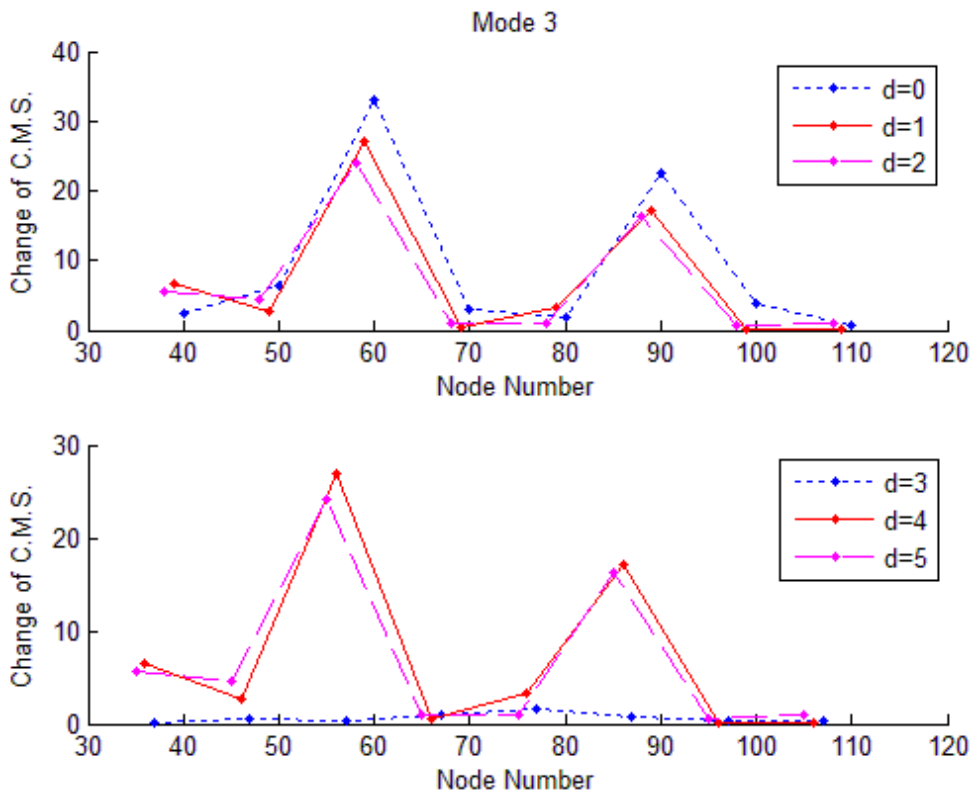


圖 5.34 集中式第三模態之模態曲率差(多處損傷狀況二)

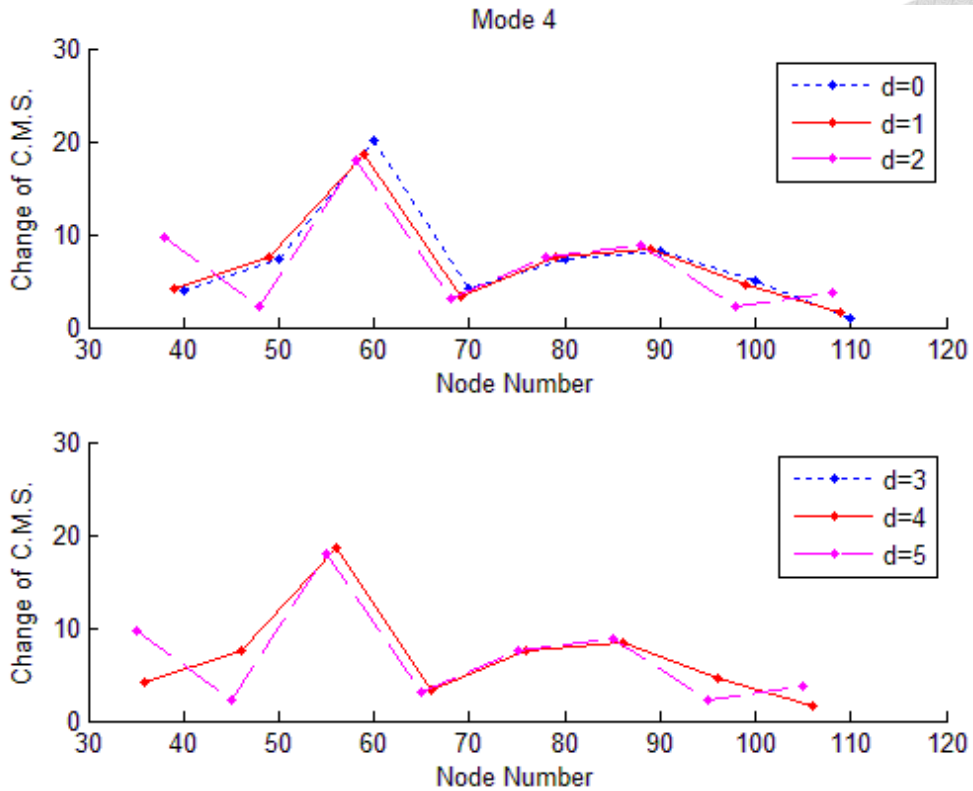


圖 5.35 集中式第四模態之模態曲率差(多處損傷狀況二)

圖(5.19)至圖(5.35)為多處損傷狀況一與二之識別內容，觀察此二受損狀況各模態之等分式模態曲率差圖形，於受損位置附近處皆可觀察出一致性之差值，而圖(5.35)中  $d=3$  之曲線遠超出此  $y$  軸範圍故未呈現於圖中。再進而觀察其集中式各模態之模態曲率差圖形，後者對偵測損傷有更明顯之效果。其中，狀況一與二於等分式選取通道位置時相鄰兩通道距離皆為 15 公分，而於集中式選取通道位置時則分別為 5 公分與 10 公分。

接著繼續考慮懸臂樑為受損狀況三時之偵測損傷成果，分別繪出其模態振形、模態曲率與模態曲率差圖形：

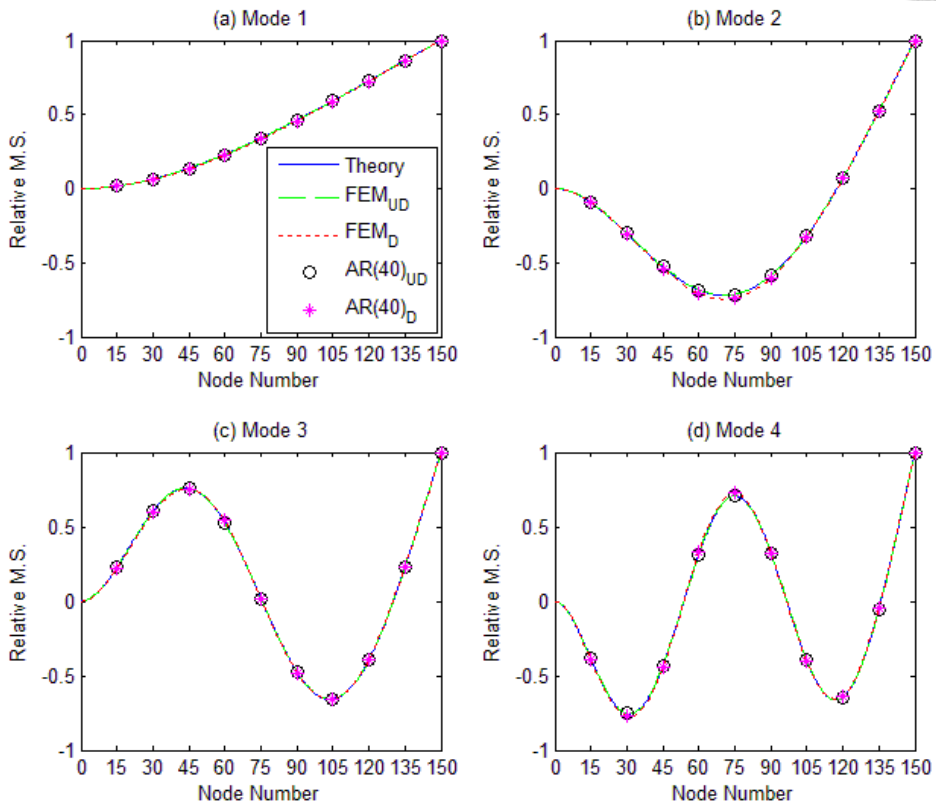


圖 5.36 前四模態之模態振形(多處損傷狀況三)

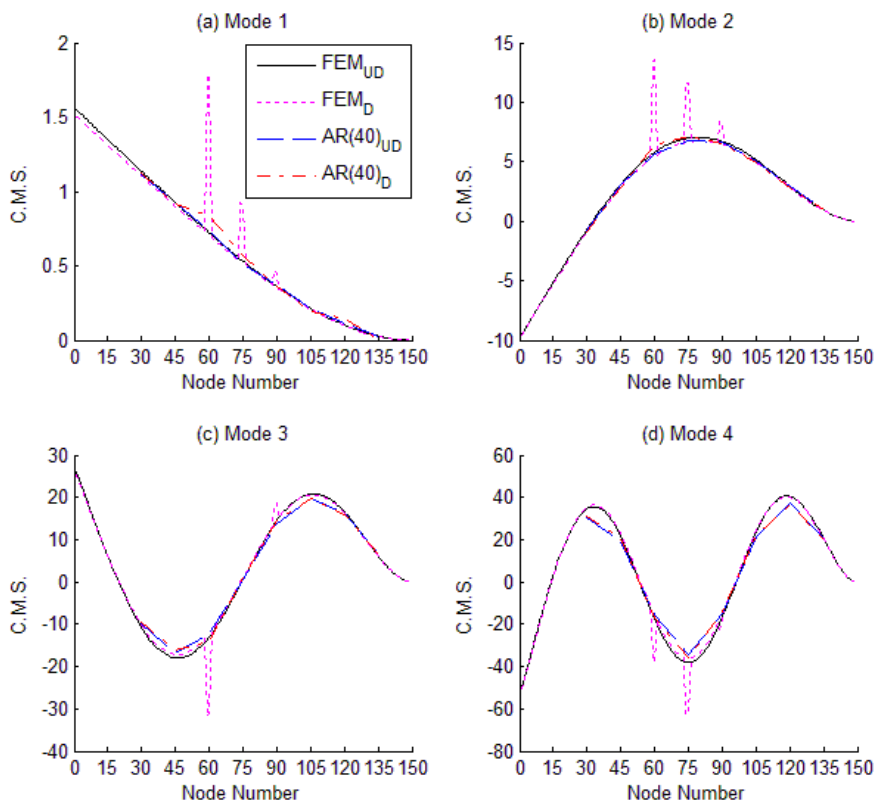


圖 5.37 前四模態之模態曲率(多處損傷狀況三)

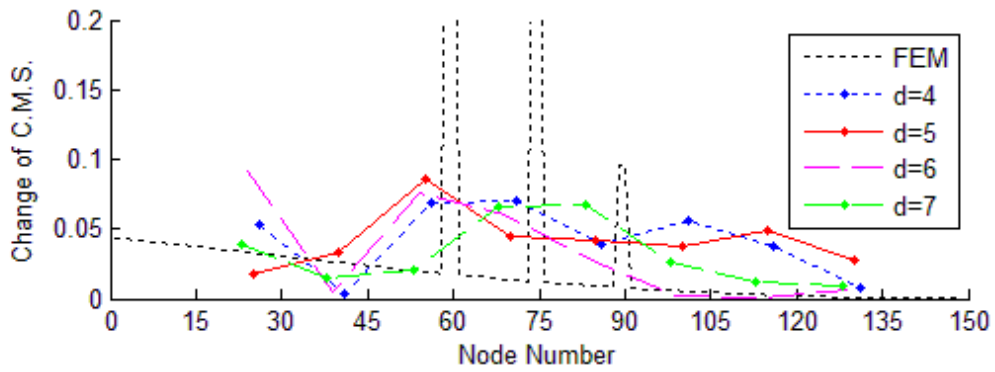
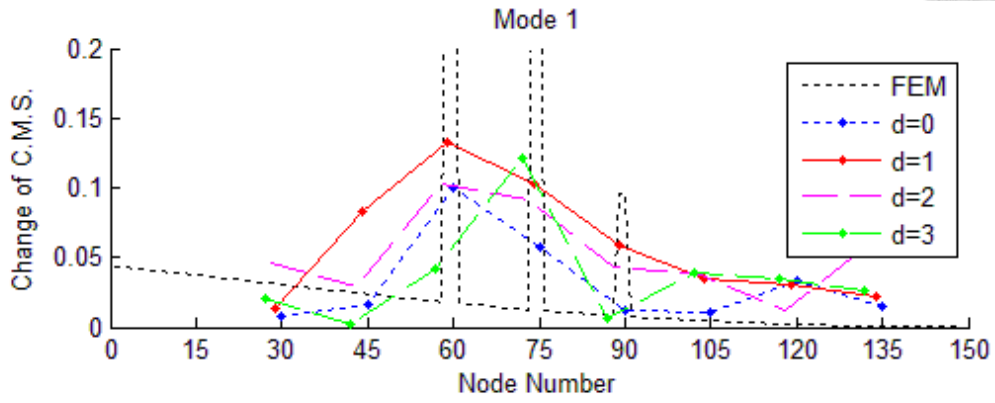


圖 5.38 等分式第一模態之模態曲率差(多處損傷狀況三)

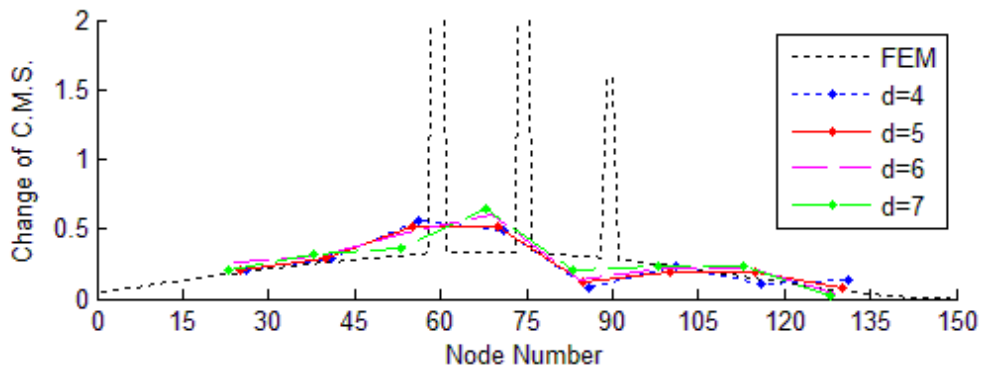
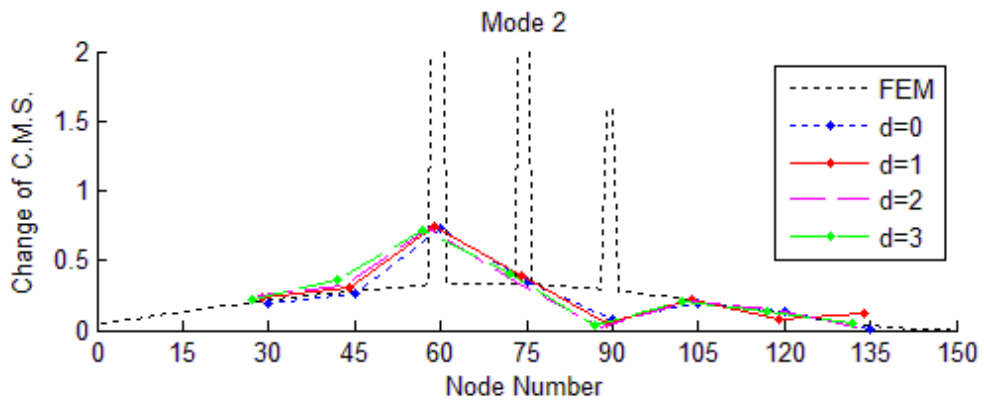


圖 5.39 等分式第二模態之模態曲率差(多處損傷狀況三)



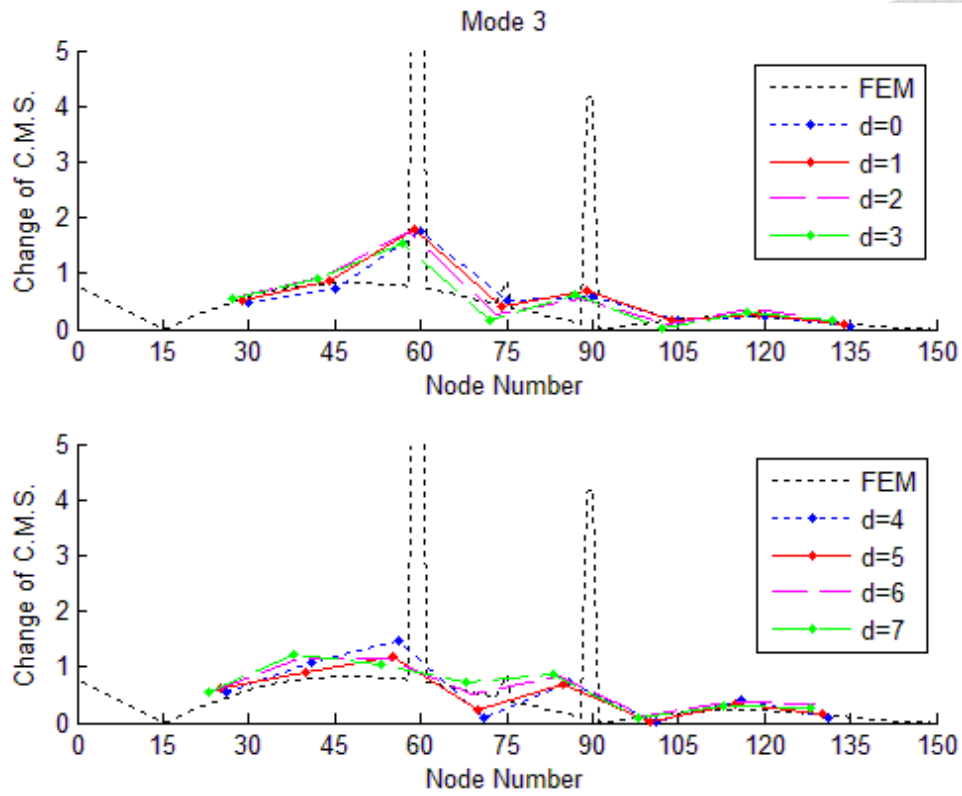


圖 5.40 等分式第三模態之模態曲率差(多處損傷狀況三)

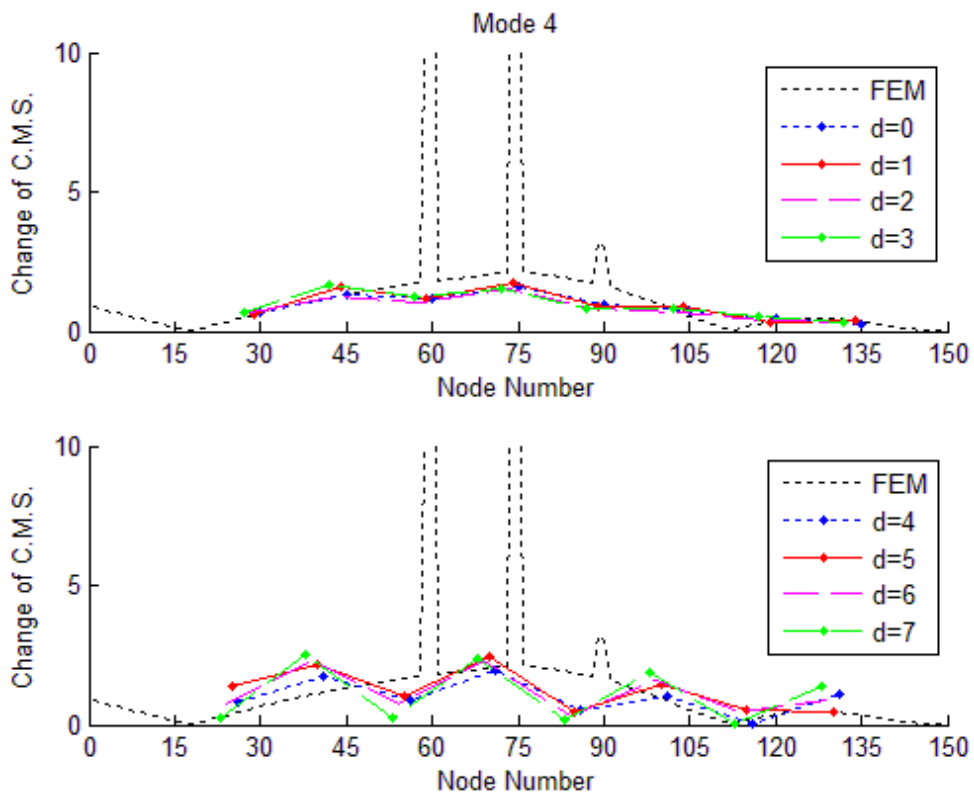


圖 5.41 等分式第四模態之模態曲率差(多處損傷狀況三)

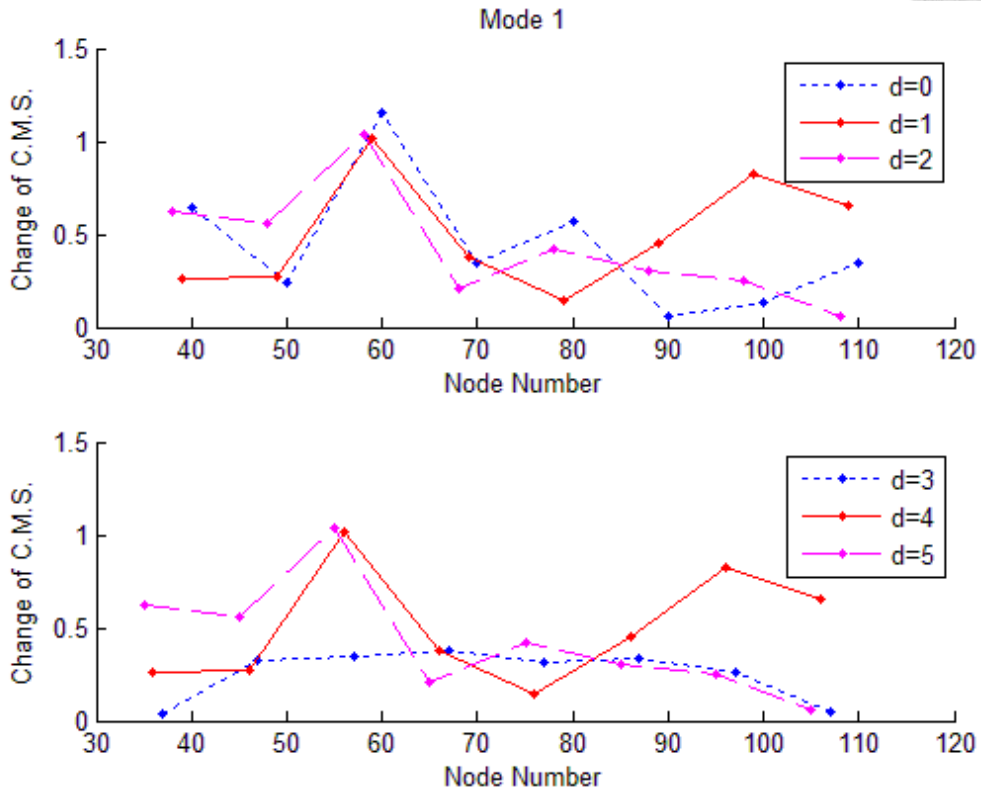


圖 5.42 集中式第一模態之模態曲率差(多處損傷狀況三)

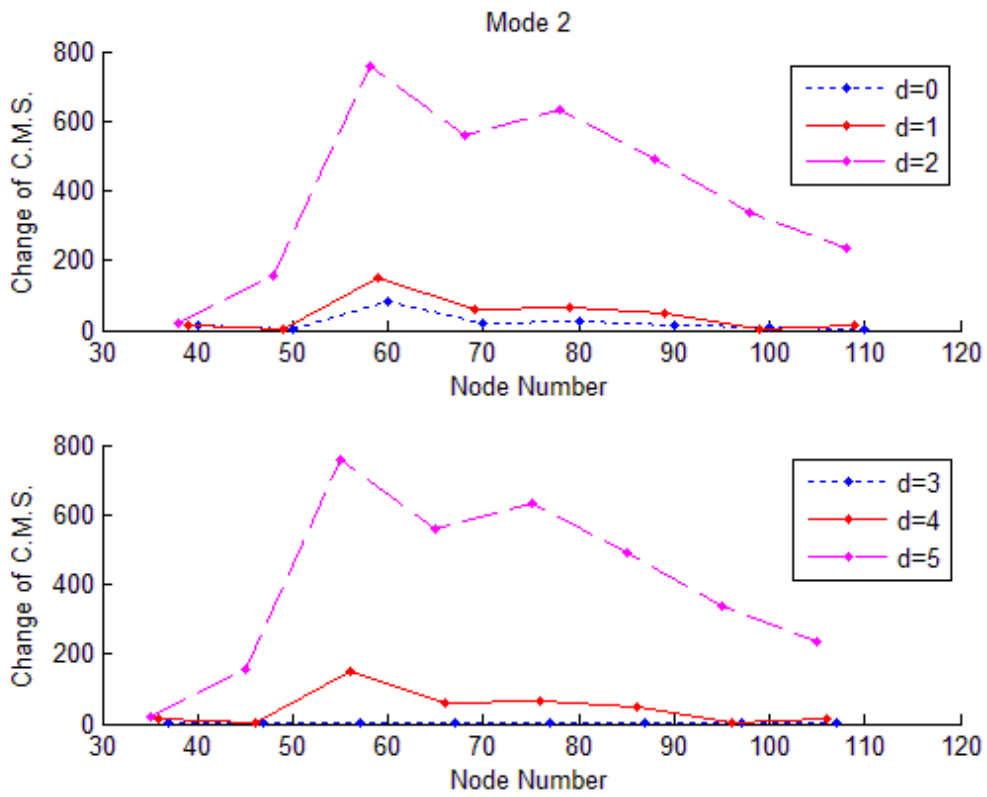


圖 5.43 集中式第二模態之模態曲率差(多處損傷狀況三)

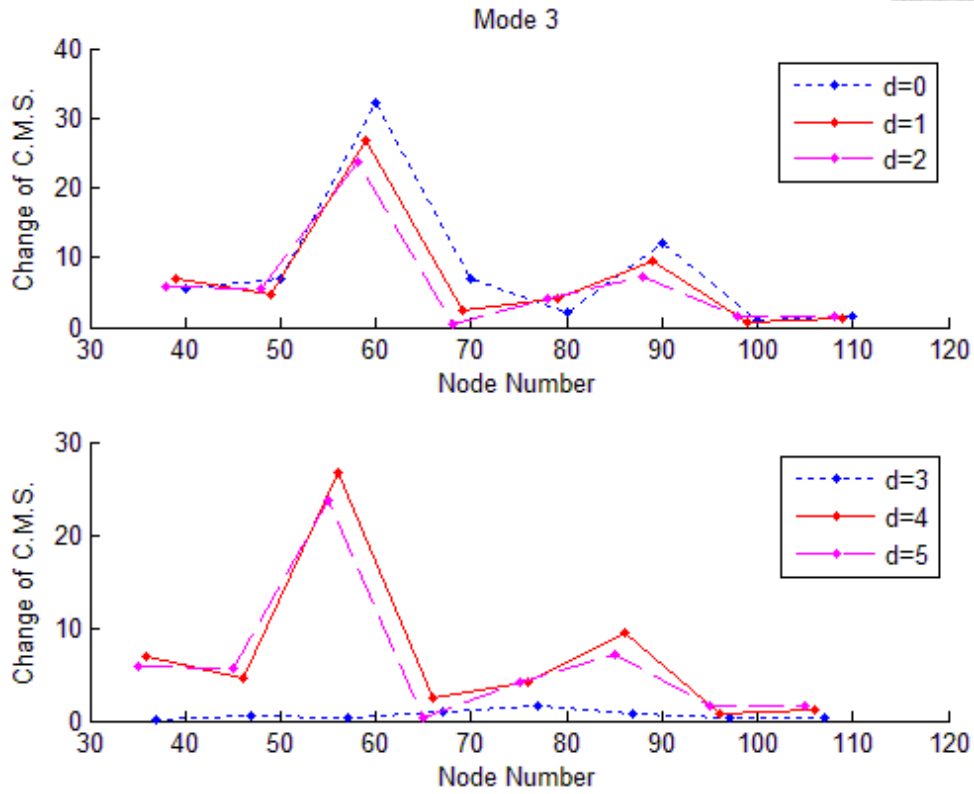
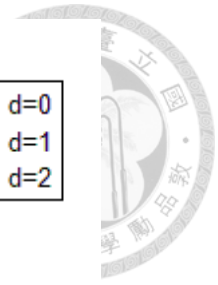


圖 5.44 集中式第三模態之模態曲率差(多處損傷狀況三)

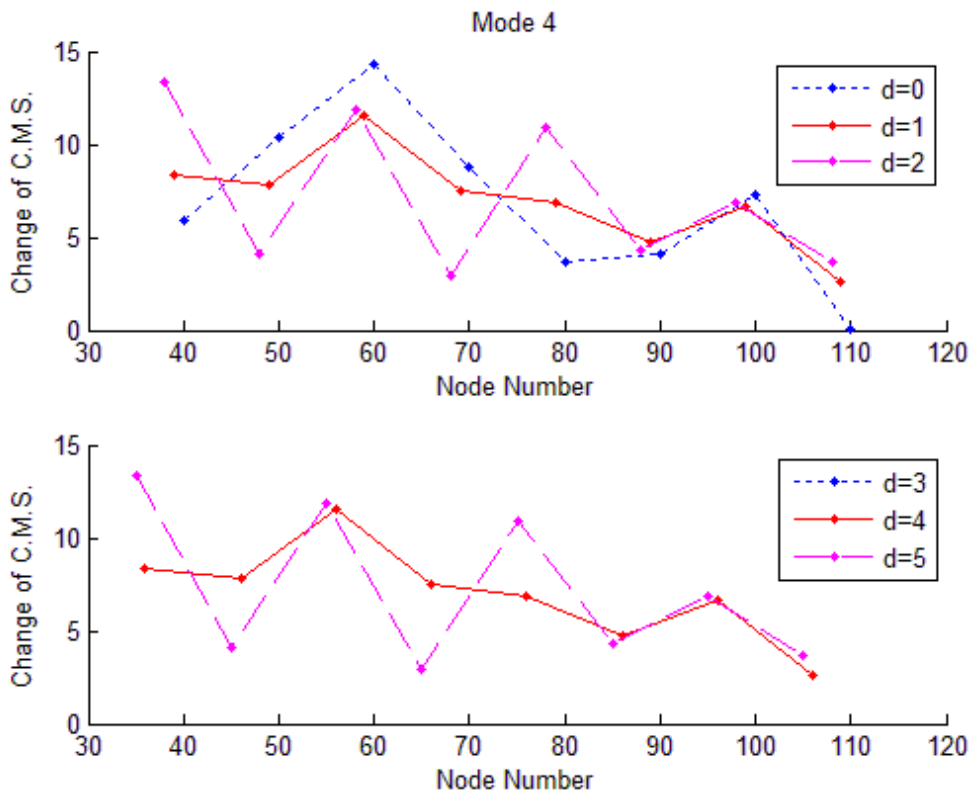


圖 5.45 集中式第四模態之模態曲率差(多處損傷狀況三)

觀察懸臂樑受損狀況三時之偵測損傷成果，其中圖(5.45) d=3 之曲線遠超出此 y 軸範圍故未呈現於圖中；在等分式選取通道位置偵測損傷中，模態曲率差對於此狀況受損位置之敏感度已不足以明顯定位出受損單元位置，若進一步將選取通道往受損單元處集中，其偵測效果略為提升，但若欲準確判別受損之位置則無法提供相當程度上的幫助。

本節之偵測成果顯示出以模態曲率差定位懸臂樑之受損位置最重要之關鍵仍為採用之通道數量，相對於第四章所介紹之損傷偵測模擬例，若於足夠數量之通道情況下，以模態曲率差定位損傷位置為可行且有不錯之成效；有鑑於此，吾人將以 10 個通道數為基準，並於 5.2 節中先行將 AR 模型識別所得之模態振形以數值方式處理後再計算其模態曲率與模態曲率差，嘗試提升此法在偵測損傷上之效益。

## 5.2 模態振形於數值處理後偵測損傷

由 5.1 節中偵測懸臂樑損傷之結果來看，若可利用之通道數量增加則能增進對損傷定位之效益，故吾人嘗試將由 AR 模型識別此 10 個通道所得之模態振形以內插法之方式增加振形點數後再行計算其模態曲率與模態曲率差，先後測試過下列方式：

### (1) 懸臂樑之模態振形理論公式

參考本文 3.1.1 節中推導之理論公式：

$$w_n = (\beta_n L)^2 \sqrt{\frac{E_s I}{\rho A_s L^4}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.1.10)$$

$$\phi_n(x) = C_n \left[ \sin \beta_n x - \sinh \beta_n x - \alpha_n (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x) \right] \quad (3.1.11)$$

將狀態空間系統識別所得各模態之自然頻率與懸臂樑各項幾何及材料參數代入式(3.1.10)後可求得相應之特徵值  $\beta_n L$ ，並代入式(3.1.11)後則可以此理論公式擷取懸臂樑各位置之振形，但由於式(3.1.10)中考慮懸臂樑為等截面，而受損之懸臂樑並非等截面，嘗試過後則不採用此法。

## (2) 拉格朗治曲線擬合多項式(Lagrange Polynomial)

考慮在  $n$  限筆數據之情況下：

$$x_1, y_1 = f(x_1); x_2, y_2 = f(x_2); \dots; x_n, y_n = f(x_n) \quad (5.2.1)$$

拉格朗治多項式  $P(x)$  可表示為：

$$P(x) = \sum_{j=1}^n P_j(x) \quad (5.2.2)$$

$$P_j(x) = y_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k} \quad (5.2.3)$$

其中， $P(x)$  之次數  $\leq (n-1)$ 。若將使用之通道數  $n = 10$  代入後則有：

$$P(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{10})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_{10})} y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_{10})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_{10})} y_2 \\ + \cdots + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_9)}{(x_{10}-x_1)(x_{10}-x_2)\cdots(x_{10}-x_9)} y_{10} \quad (5.2.4)$$

嘗試以此法擬合出懸臂樑受損與未受損之模態振形多項式並計算其模態曲率與模態曲率差後，此一途徑對於損傷定位無增進之效益；受損與未受損之模態振形經此法內插點數後其振形會趨於平滑反而失去在受損位置曲率之差異，經測試後不採用此法。

### (3) 立方雲線(Cubic Spline)

若以  $n$  筆數據為例，計算這組數據之立方雲線時必須求得  $n-1$  條三次多項式以進行點與點間之內插，且由這些三次多項式所共同組成之圖形必須通過這  $n$  筆數據，參考式(5.2.5)與圖(5.46)：

$$G_i(x) = p_i + q_i x + r_i x^2 + s_i x^3 \quad (5.2.5)$$

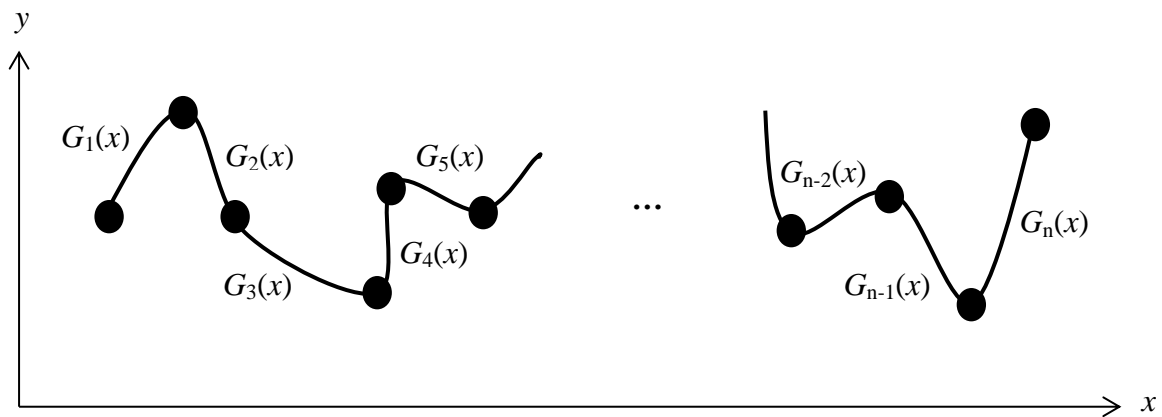


圖 5.46 立方雲線(Cubic Spline)示意圖

考慮到曲率即二次微分，以立方雲線之定義顯示其內插之模態振形可準確至二次微分，故本節將接著介紹以此法內插後再進行偵測損傷之成果。分別以 5.1 節所假設之三種多處損傷狀況，將 AR 模型識別所得之 10 通道模態振形求得其立方雲線，並由最左端與最右端通道間經內插後共為 136 點(節點號 15 至 150)之模態振形，利用此數值處理後之模態振形計算其模態曲率與模態曲率差。

識別所得之模態振形經數值處理之後將以前節假設之損傷狀況來進一步探討損傷偵測成效。



表 5.6 多處損傷狀況一之受損單元與損傷因子

損傷說明	受損單元號	對應之損傷因子號
集中多單元受損	60、62、64、66	D <sub>1</sub>

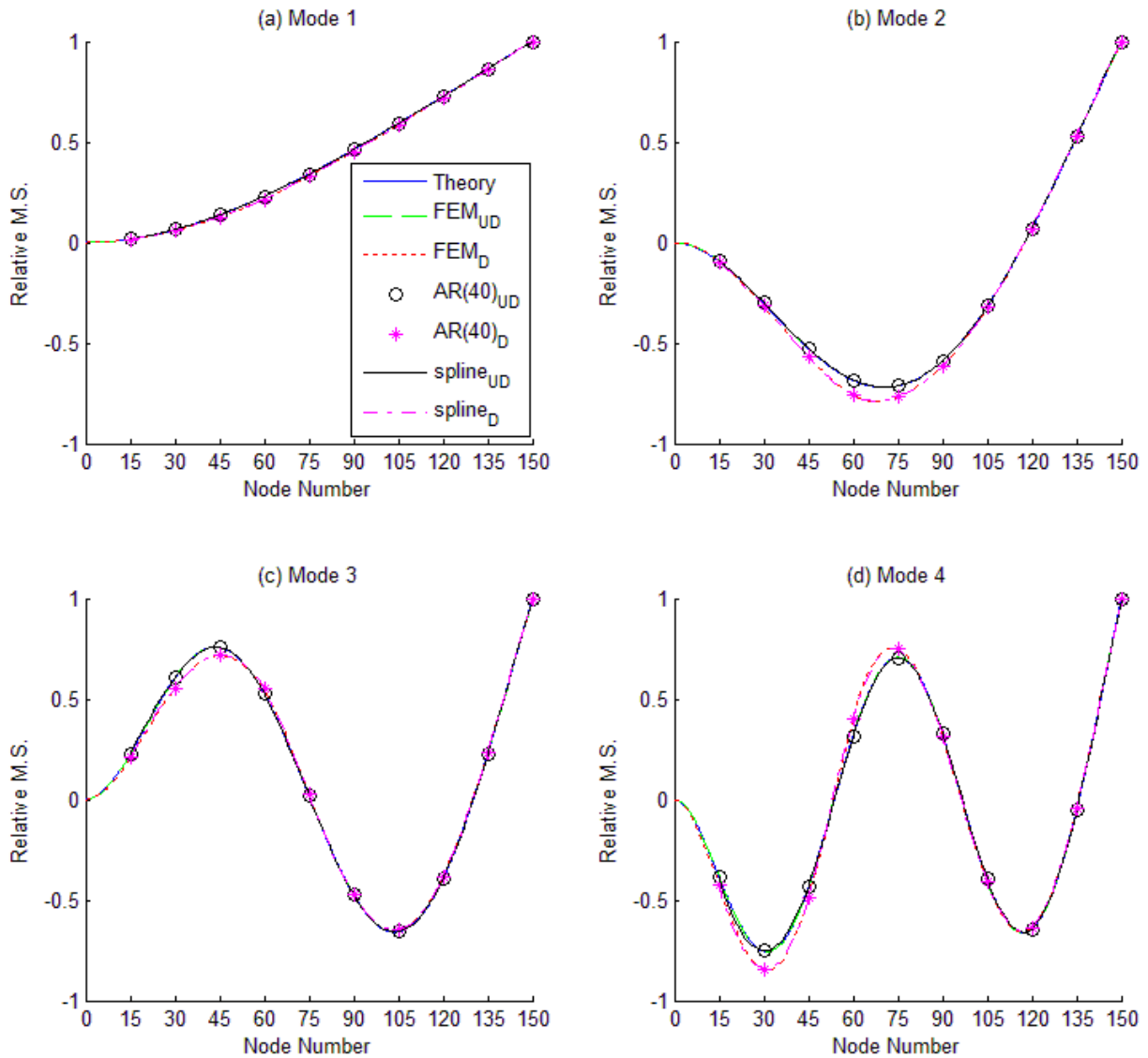


圖 5.47 前四模態含數值處理後之模態振形(多處損傷狀況一)

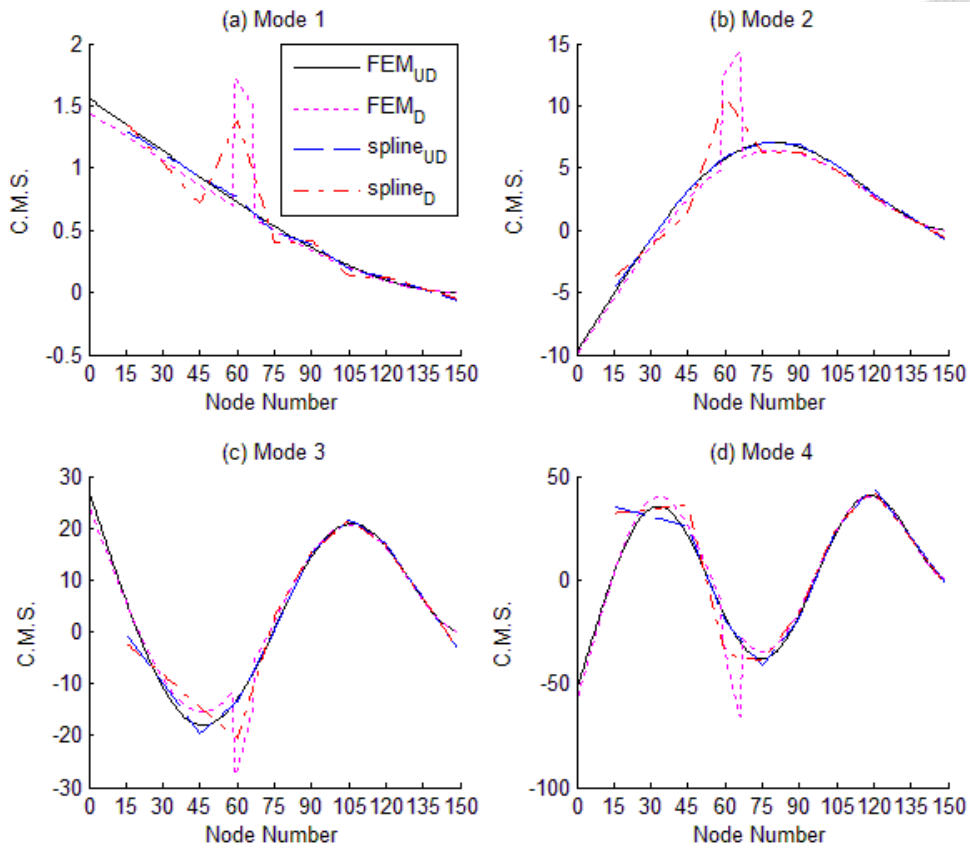


圖 5.48 前四模態含數值處理後之模態曲率(多處損傷狀況一)

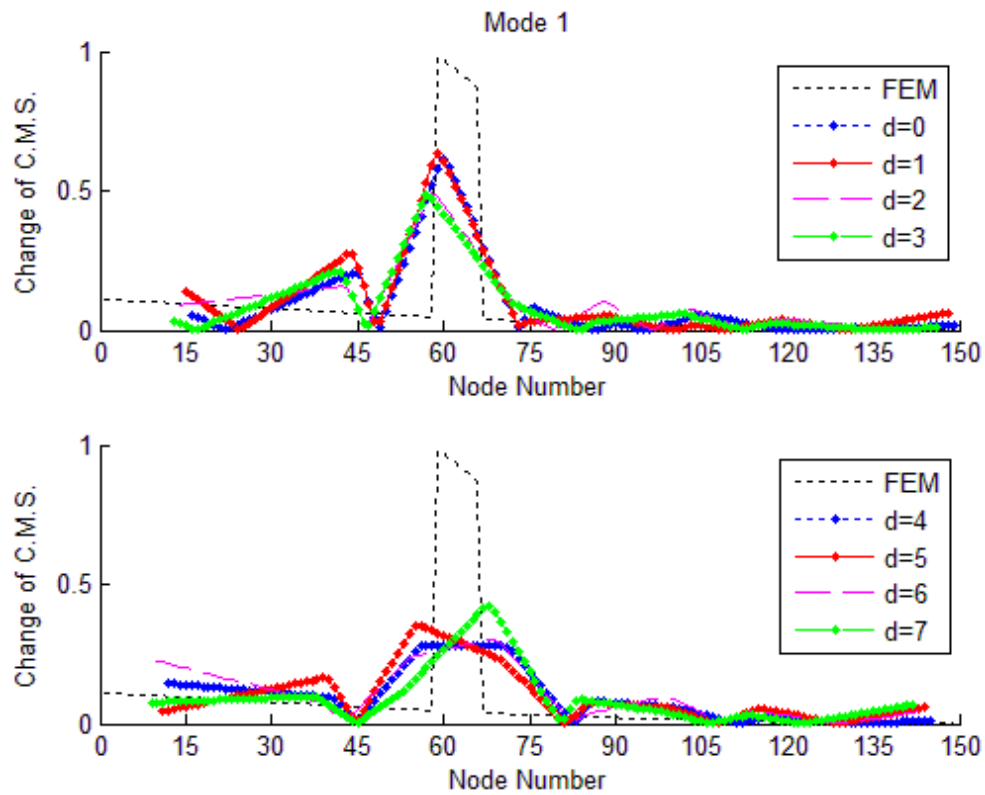


圖 5.49 第一模態經數值處理之模態曲率差(多處損傷狀況一)



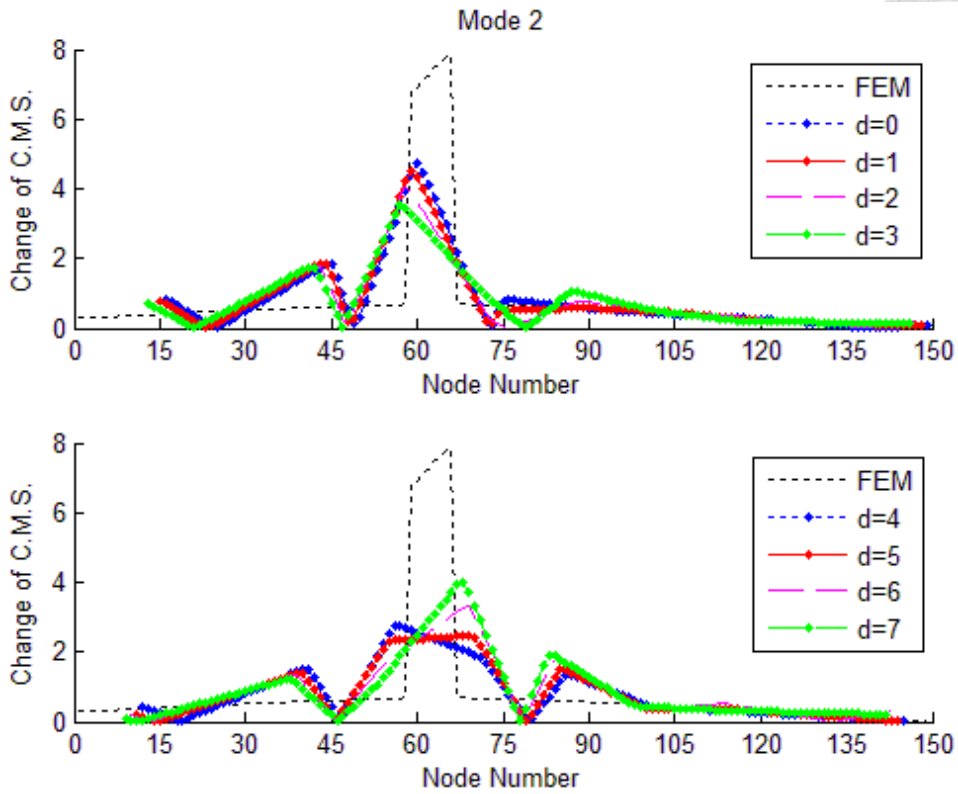
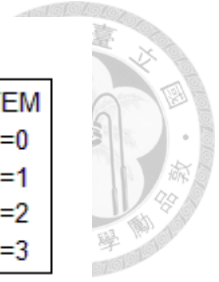


圖 5.50 第二模態經數值處理之模態曲率差(多處損傷狀況一)

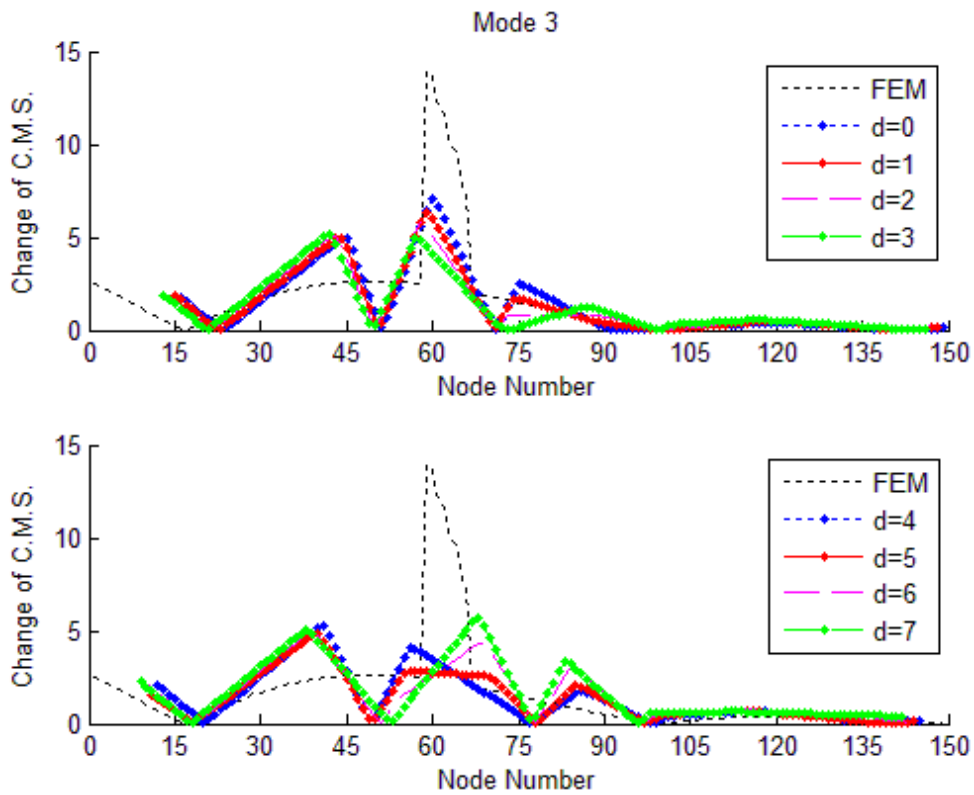


圖 5.51 第三模態經數值處理之模態曲率差(多處損傷狀況一)

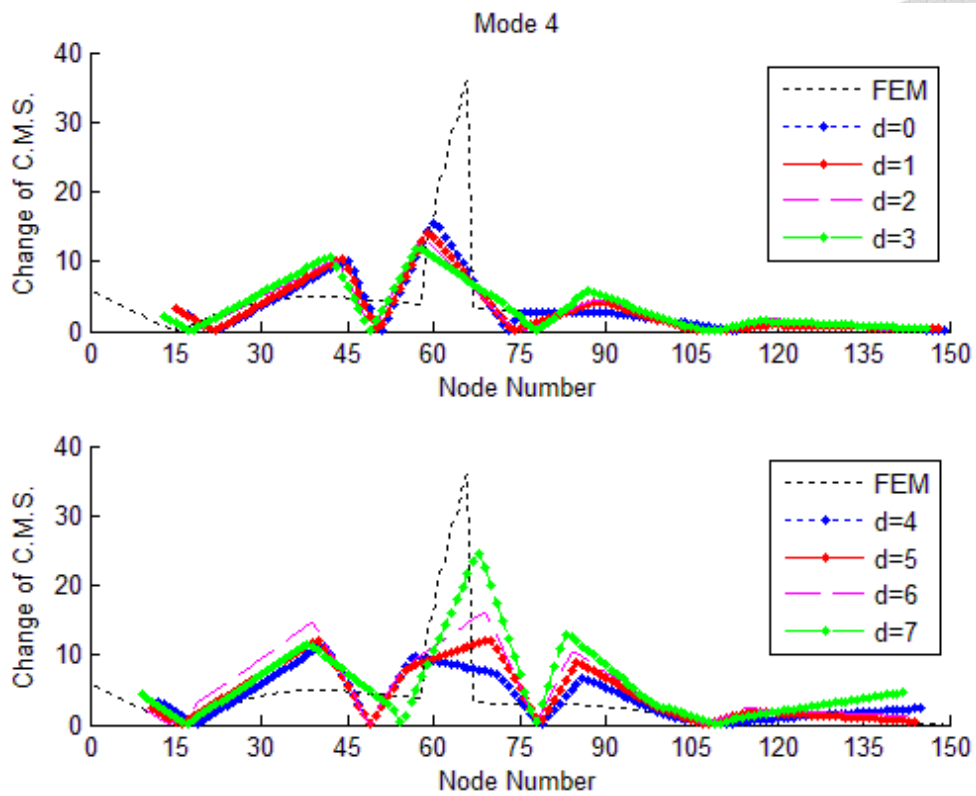


圖 5.52 第四模態經數值處理之模態曲率差(多處損傷狀況一)

多處受損狀況一模擬之情況為受損位置較為集中，由以上之偵測成果顯示對懸臂樑受損位置之定位效果有明顯提升，但觀察各模態之模態曲率差圖形後對於未受損之曲率可能發生誤判之情況。以下繼續說明受損狀況二之識別狀況。

表 5.7 多處損傷狀況二之受損單元與損傷因子

損傷說明	受損單元號	對應之損傷因子號
分散多單元受損	60、90	$D_1$ 、 $D_2$

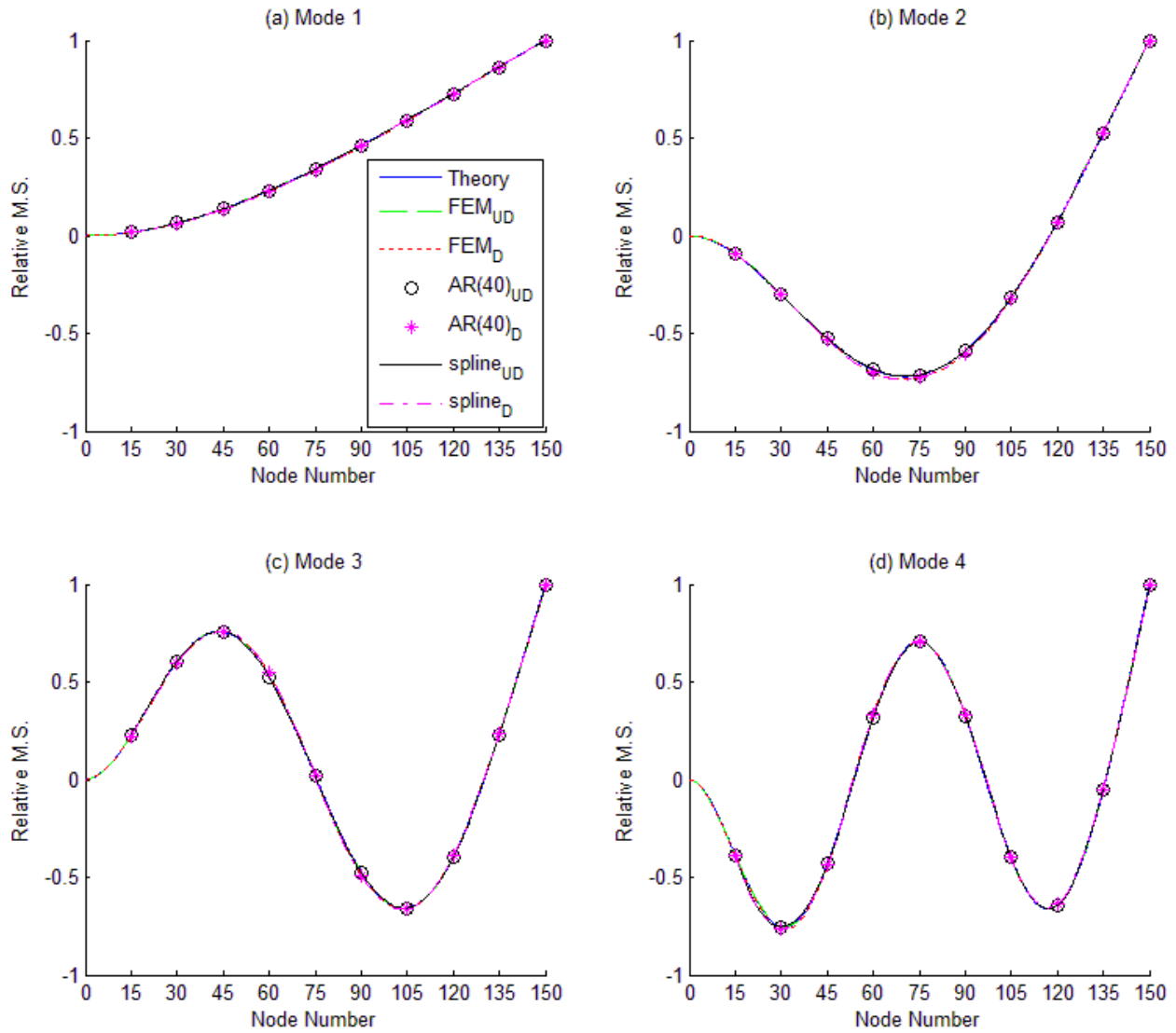


圖 5.53 前四模態含數值處理後之模態振形(多處損傷狀況二)

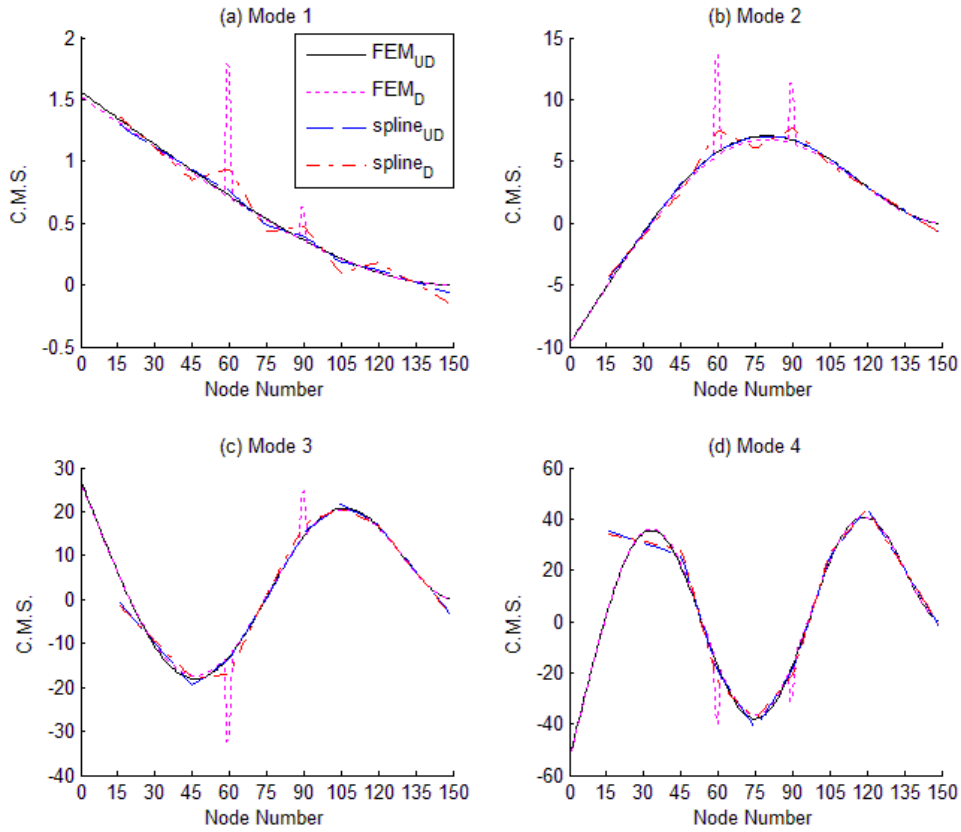


圖 5.54 前四模態含數值處理後之模態曲率(多處損傷狀況二)

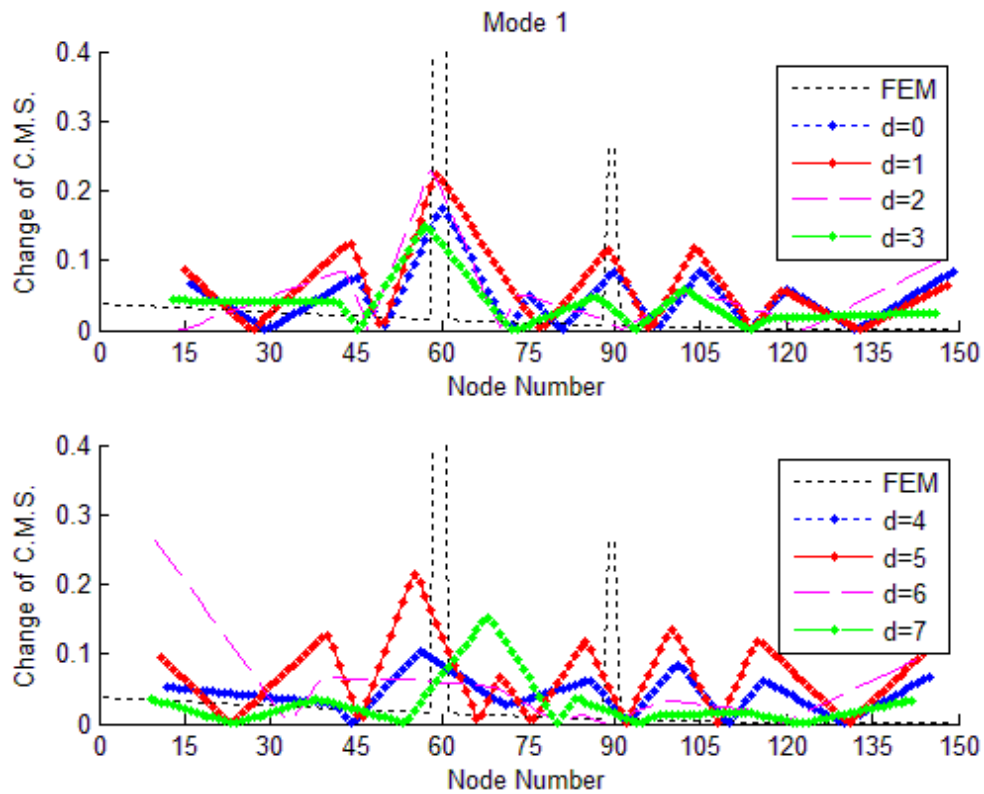


圖 5.55 第一模態經數值處理之模態曲率差(多處損傷狀況二)

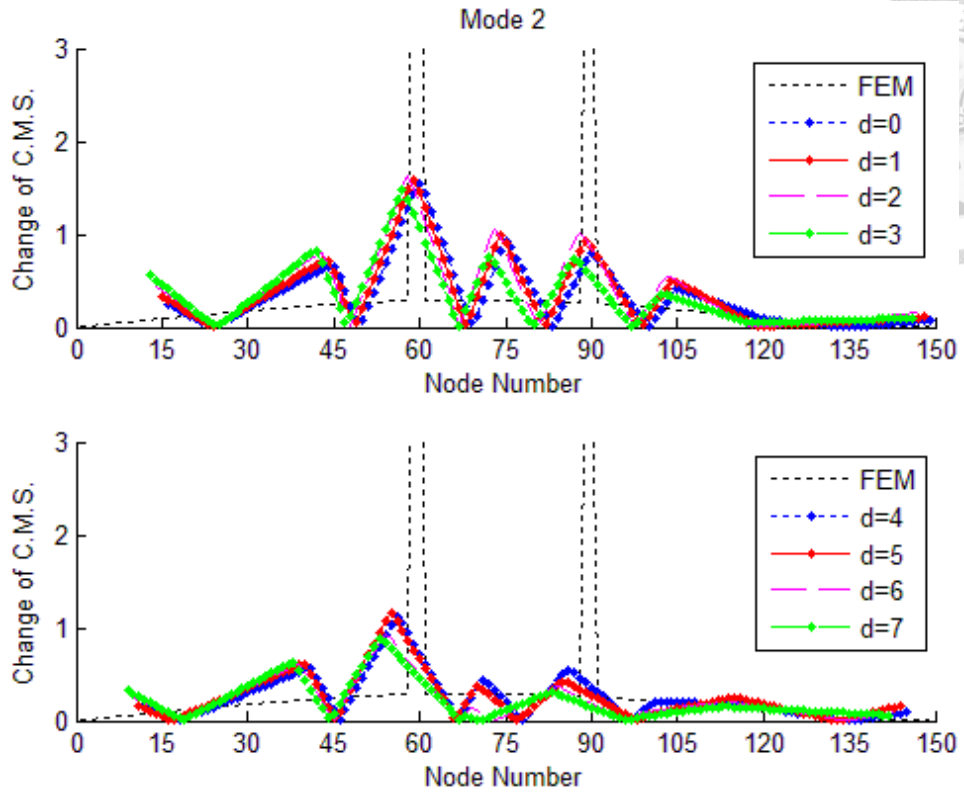


圖 5.56 第二模態經數值處理之模態曲率差(多處損傷狀況二)

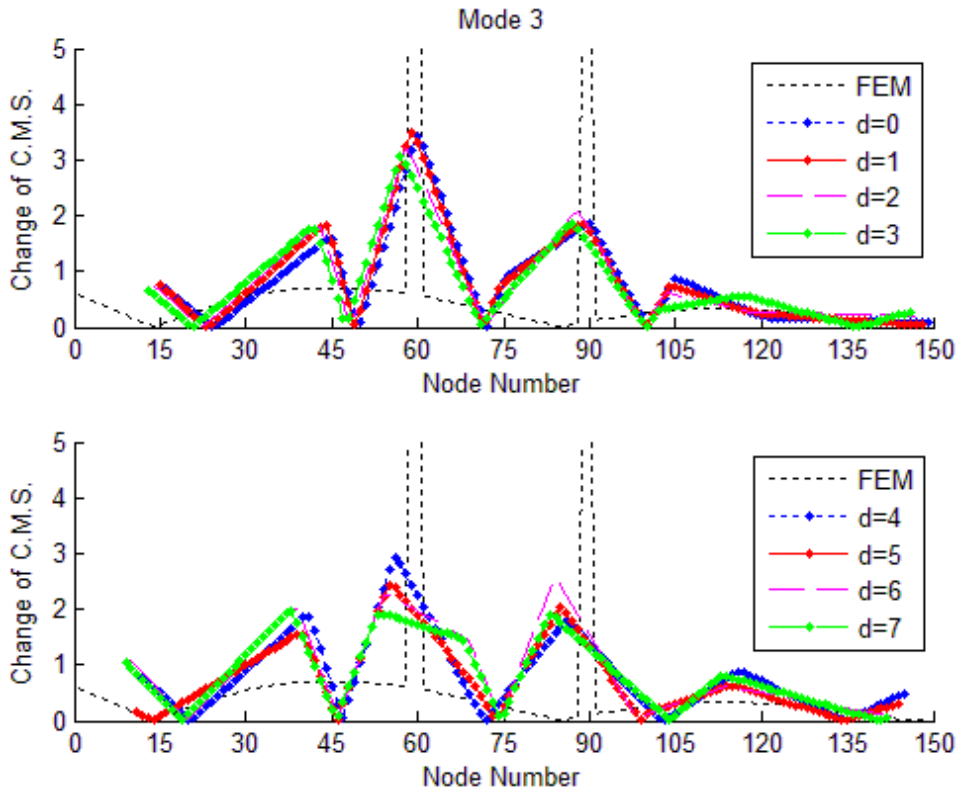


圖 5.57 第三模態經數值處理之模態曲率差(多處損傷狀況二)

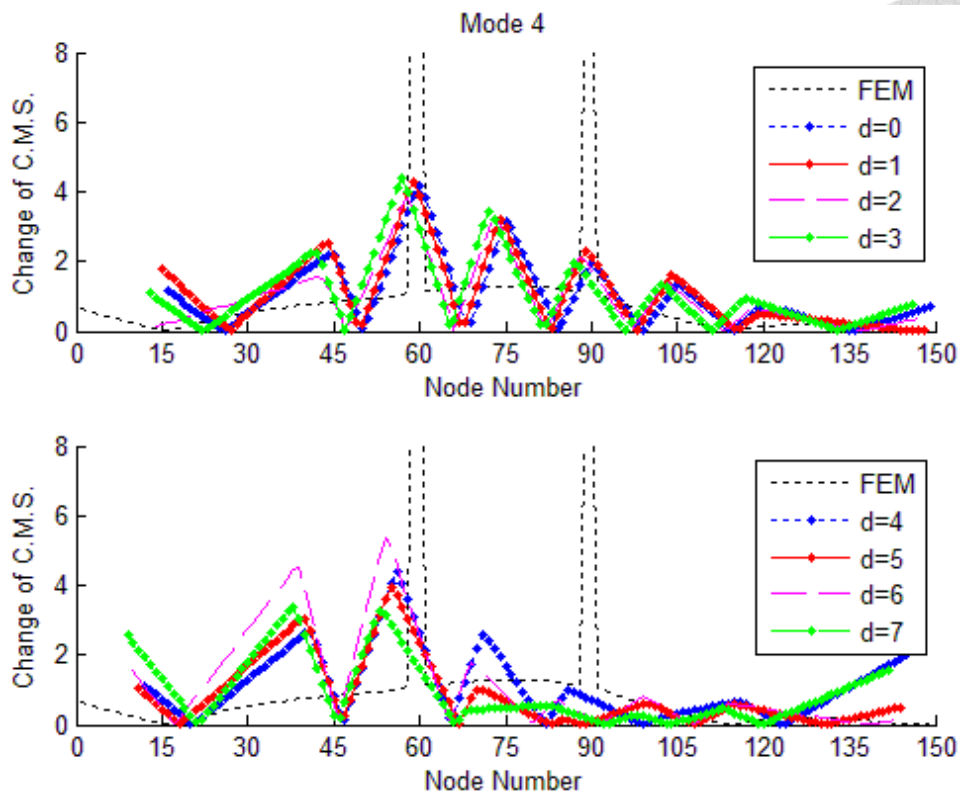


圖 5.58 第四模態經數值處理之模態曲率差(多處損傷狀況二)

狀況二模擬之受損情形為分散之兩損傷，而若對照未經數值內插前之偵測成果，經內插後確實對於受損位置可以更準確的定位，對受損位置均有顯示出明顯之差值，但同樣地在某些模態會出現於未受損處誤判的狀況。以下接續說明受損狀況三之偵測成果。

表 5.8 多處損傷狀況三之受損單元與損傷因子

損傷說明	受損單元號	對應之損傷因子號
分散多單元受損	60、75、90	$D_1$ 、 $D_2$ 、 $D_3$

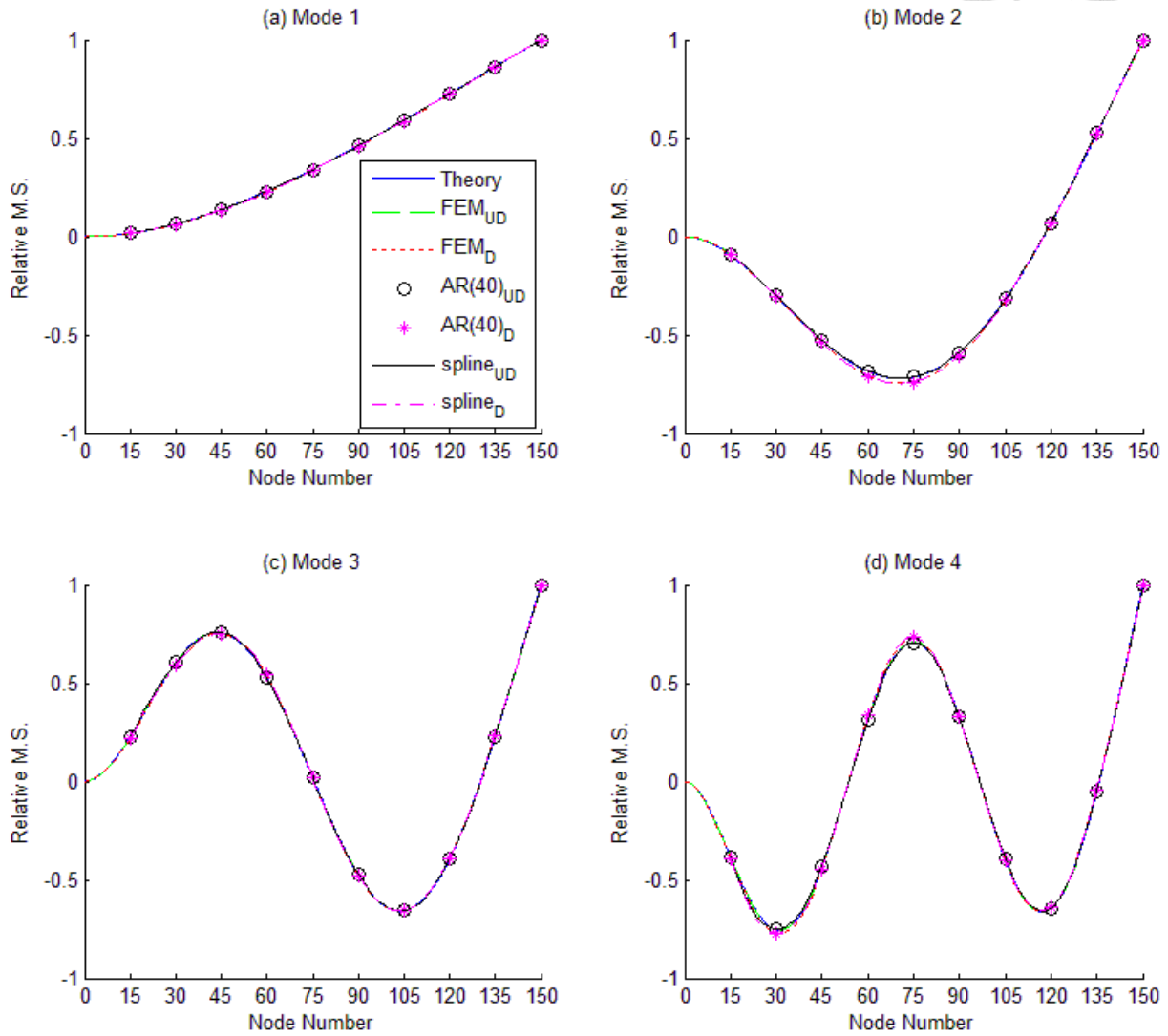


圖 5.59 前四模態含數值處理後之模態振形(多處損傷狀況三)

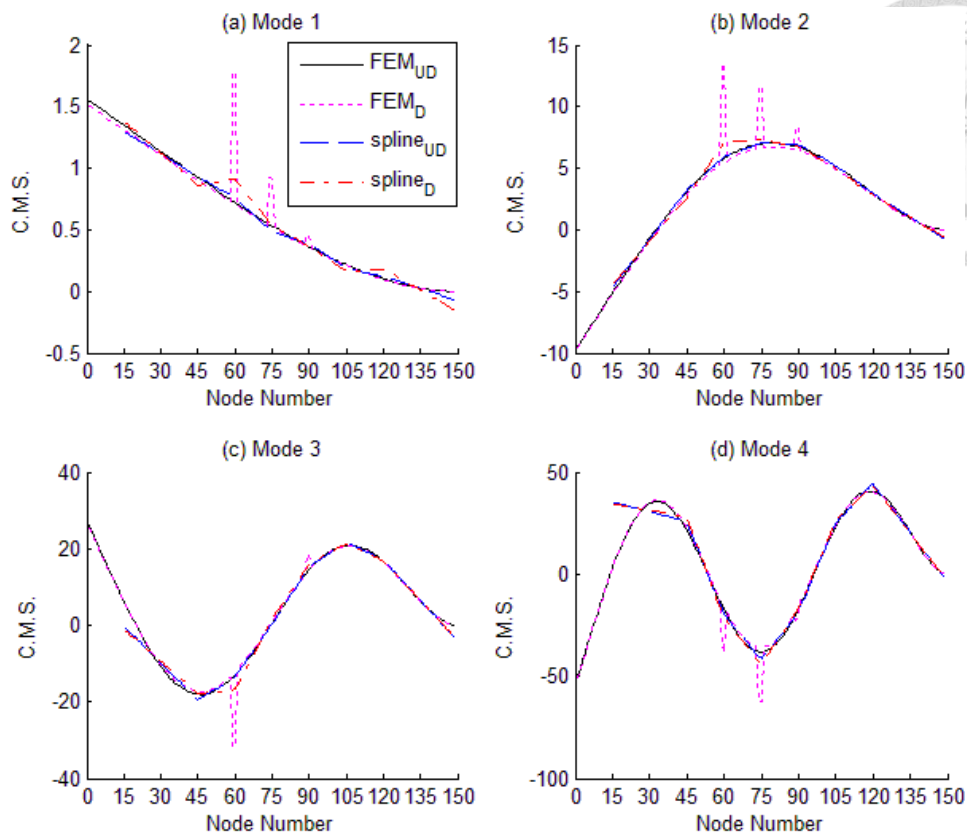


圖 5.60 前四模態含數值處理後之模態曲率(多處損傷狀況三)

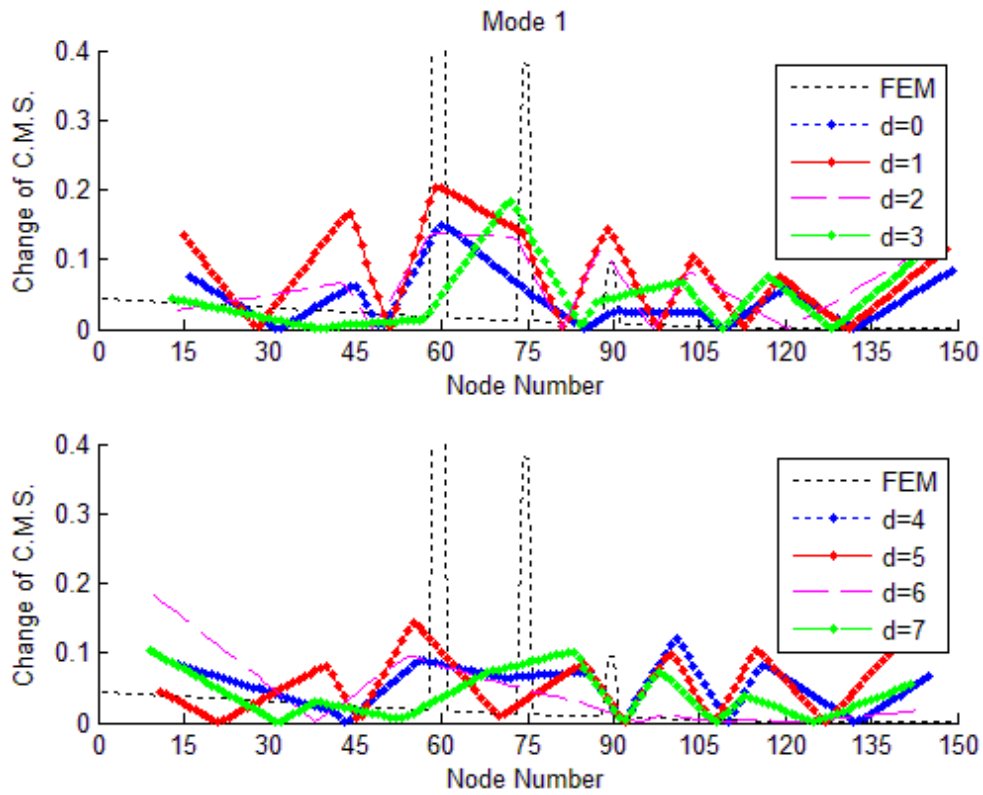


圖 5.61 第一模態經數值處理之模態曲率差(多處損傷狀況三)



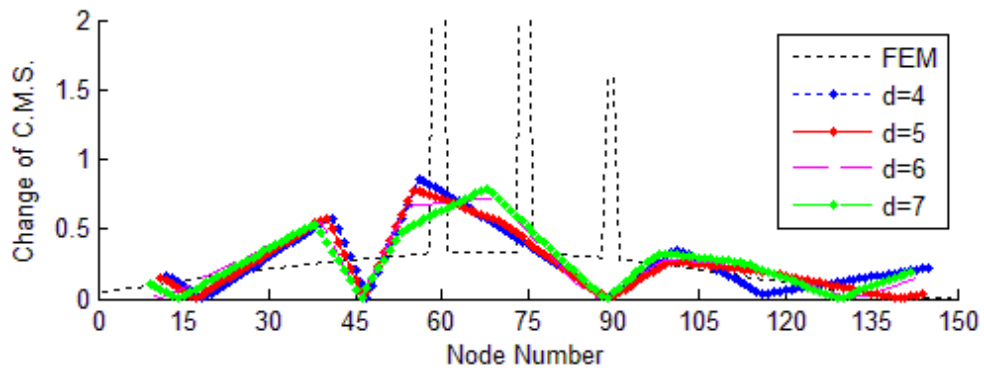
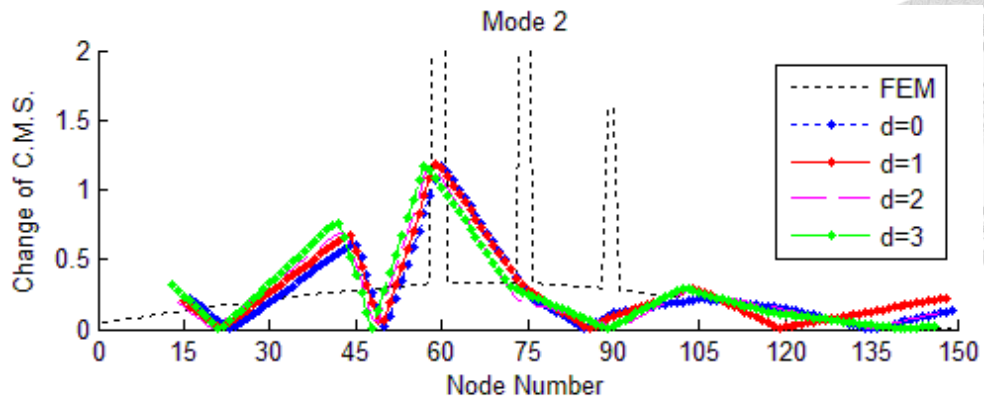


圖 5.62 第二模態經數值處理之模態曲率差(多處損傷狀況三)

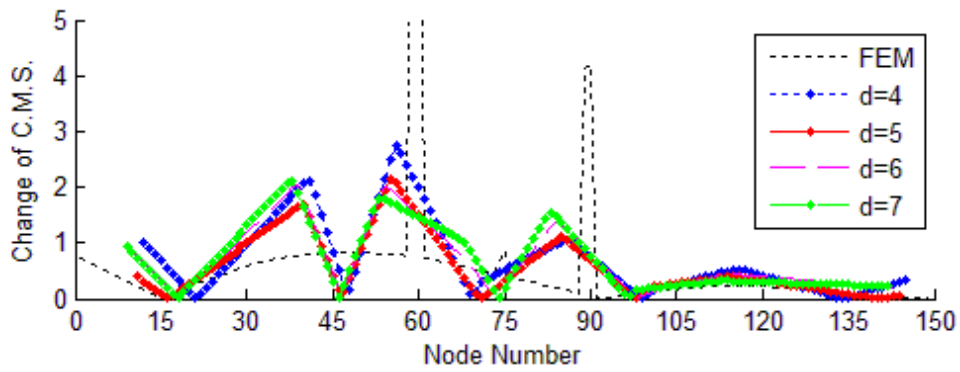
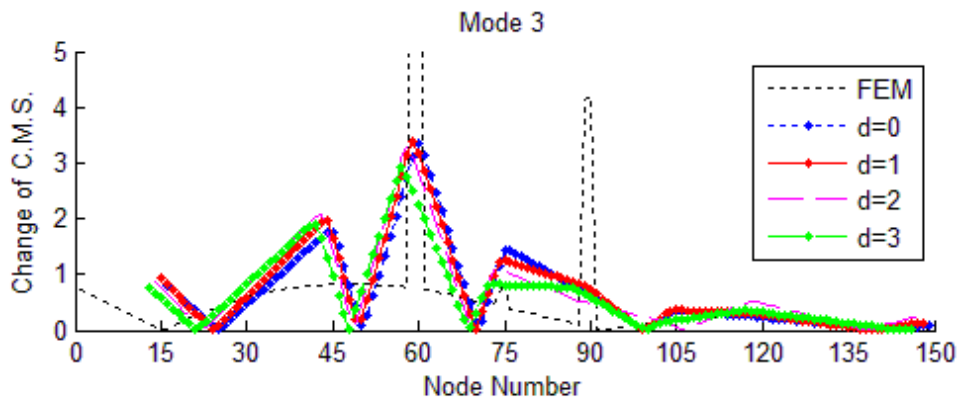


圖 5.63 第三模態經數值處理之模態曲率差(多處損傷狀況三)

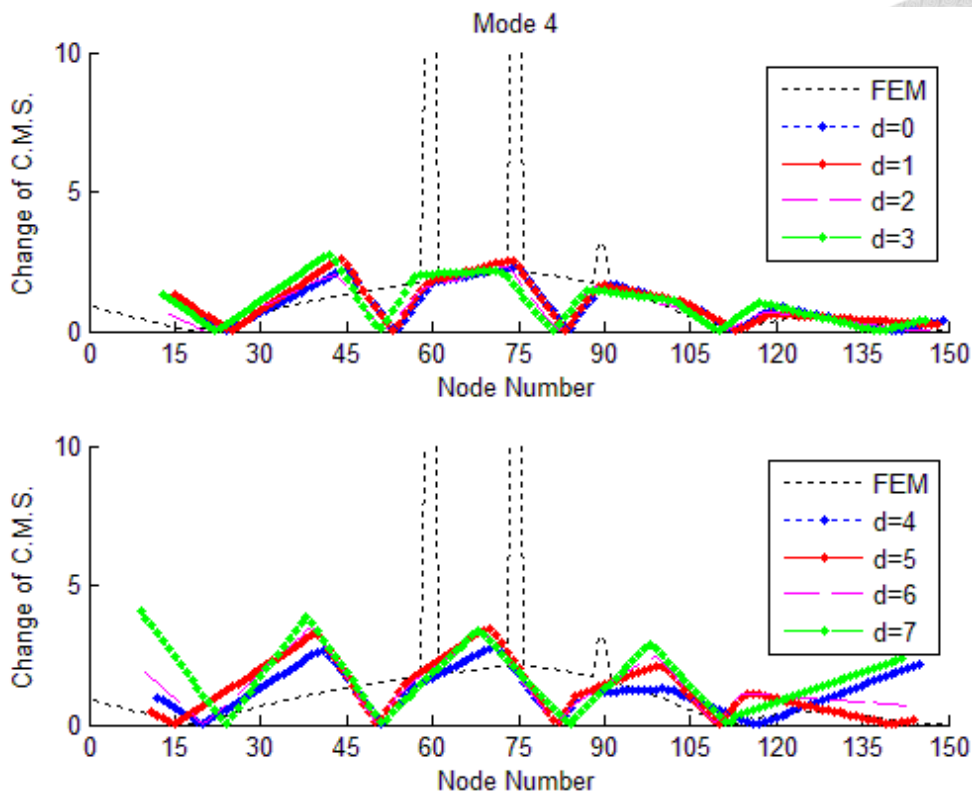


圖 5.64 第四模態經數值處理之模態曲率差(多處損傷狀況三)

狀況三模擬懸臂樑分散三處受損之情形，綜合前四模態大致上對於受損位置仍能定位，但同樣會對未受損位置造成誤判；相較於狀況二與狀況一之偵測成果，於使用相同通道數偵測損傷時，若受損位置越多時則對受損位置之定位將更為困難，但綜觀本章所作之模擬，基於模態曲率差法偵測懸臂樑之單處受損、多處集中受損至三處分散受損皆能提供有效之鑑別資訊。

## 第六章 結論與未來展望



綜合本文全部內容後，將在本章節歸納出所得到之結論，並進一步探討其中可再深入研究之可能內容。

### 6.1 結論

本文所介紹之內容主要可分為兩大部分，首先為第二章所介紹之 AR 模型及狀態空間系統識別理論，並於第三章中實際進行實驗以擷取直立式懸臂樑鋼樑之輸出響應後，透過識別所得之模態參數估算懸臂樑結構雷利阻尼係數之估算值，將此係數代入並建立有限元素模型，在此部分中將能模擬取得受損與未受損結構含雜訊之輸出響應，接著模擬以有限通道數對此懸臂樑由第四章所介紹之基於結構模態曲率損傷偵測理論偵測其受損狀況，而由第五章所模擬之受損情況中可得到以下之結論：

1. 無論以等分式抑或集中式選取通道位置均需多次量測以取得輸出響應，且仍需以人工方式篩選特徵根始能計算模態曲率與模態曲率差，過程須時不少。
2. 若於偵測損傷前先計算求得以 AR 模型識別所得模態振形之立方雲線，有增加偵測損傷時通道數量之功用且其實際偵測成效也優於僅以 10 通道進行損傷偵測之情況，產生誤判之情形則可以進階方式針對特定位置偵測損傷。


3. 若單純以有限元素法模擬損傷偵測時，模態曲率法對於受損位置以及受損程度皆能夠精確地辨別出，說明了有限元素法對模擬結構行為趨勢的優越性；但考慮到實際情況中可使用之儀器數量以及人為選擇通道位置之因素則偵測損傷之成效皆較單純以有限元素分析所得之結果為差。
4. 由本文中實際模擬之結果，損傷偵測時並非所有模態皆能提供明顯之模態曲率差，須人工判讀模態曲率值較為一致性之模態以定位受損範圍，此部分可能在不同觀測者會有些許差異性之存在。
5. 綜合本文模擬之各種損傷狀況時偵測受損之成果，並針對所考慮影響損傷偵測成效之各項因素作結，分別列於表(6.1)與表(6.2)中：

表 6.1 本文所模擬各受損狀況之偵測成效

假設之受損狀況	損傷偵測成效
<b>單處受損</b>	
嚴重(D <sub>1</sub> )	良好
輕微(D <sub>4</sub> )	尚可
<b>多處受損</b>	
集中多單元受損(狀況一)	良好
分散多單元受損(狀況二)	尚可
分散多單元受損(狀況三)	不佳

表 6.2 本文所考慮各影響損傷偵測因素之結論


影響損傷偵測因素	結論
通道數量	若小於 10 將難以定位受損位置
雜訊	大於 SNR 30dB 將難以準確定位受損位置
損傷因子	大於 0.8 時，受損前後模態曲率難觀察出明顯差值
受損位置與數量	若受損位置大於 3 處，以 10 通道難以準確定位受損位置

- 
6. 若以損傷識別程度之四項指標來評估此法之偵測損傷成效，比較單純以有限元素法與考慮實際狀況所得之模態曲率差，兩者仍存在差異，故無法明確判別出精確之模態曲率差值，則識別成效僅止於損傷定位。

## 6.2 未來展望

由有限元素分析模擬偵測損傷例中可知，欲以結構模態曲率理論偵測其損傷需要擁有足夠之通道數與取得精確之模態振形，基於這些原因，吾人提出些許之建議可供未來研究之參考：

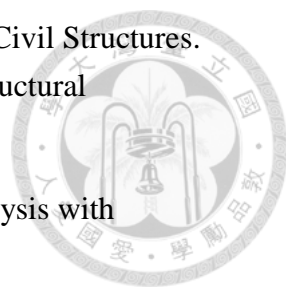
1. 由 6.1 節中結論所提到，若能自動化過篩選系統特徵根，則可提升識別模態振形之速率；此外如能先將含雜訊之輸出響應配合系統識別前處理等相關濾訊過程，則可增加識別模態振形之精確度。
2. 本文考慮之損傷偵測狀況為含雜訊輸出響應下識別結構之模態參數而未考慮有輸入外力之情況，根據系統識別相關文獻[19-28]，理論上以 ARX 模型同樣也可識別出結構之模態參數後搭配模態曲率理論進行損傷偵測，此部分本研究中未嘗試過相關之模擬。
3. 本文所使用數值處理之方式中僅於立方雲線可有增進偵測損傷之成效，或許仍存在其餘更為良好之數值處理方法。
4. 可嘗試模態曲率法對不同形式結構之適用性，本研究中僅針對懸臂樑結構探討其損傷偵測之內容，理論上對於不同之結構形式可假設相應之邊界條件與初始狀況，此部分則未進行相關之模擬。

- 
5. 本文以模態振形透過中央差分法計算模態曲率，此外模態曲率也與結構之撓曲應變有著直接的關係，可藉由應變之量測以得到模態曲率；Chance 曾在相關研究中表示，若改以量測應變間接得到模態曲率，對於模態曲率而言有較好之精確度[31]。
6. 損傷偵測相關研究之終極目標是為了對結構使用壽命作出正確的評斷，而本文中所介紹之損傷偵測內容可達到對受損位置之定位，對於結構受損程度與估算其剩餘使用壽命並未作深入之研究，但於參考資料[8]中有提出以假設結構材料性能之劣化程度為時間之線性函數之前提下，以損傷因子之假設估算結構剩餘使用壽命，若可搭配相關理論並取得實驗數據則可接續探討此部分。

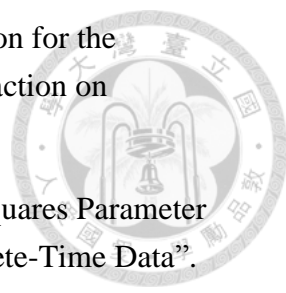
## 參考文獻



- [1] H. Ma and G. Yang, “Methods and Advances of Structural Damage Detection”. *Journal of Advances in Mechanic*, Vol. 29, No. 4, 1999, pp. 513-527 (in Chinese).
- [2] J.M. Lifshitz and A. Rotem, “Determination of Reinforcement unbonding of Composites by a Vibration Technique”. *Journal of Composite Materials*, Vol. 3, No. 3, 1969, pp. 412-423.
- [3] R. D. Adams, P. Cawley, C. J. Pye and B. J. Stone, “A Vibration Technique for Non-Destructively Assessing the Integrity of Structures”. *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 20, No. 2, 1978, pp. 93-100.
- [4] N. S. Stubbs and R. A. Osegueda, “Global Damage Detection in Solids-Experimental Verification”. *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 5, No. 2, 1990, pp. 81-97.
- [5] S. W. Doebling and C. R. Farrar, “Effect of Measurement Statistics on the Detection of Damage in the Alamosa Canyon Bridge”, *Proceedings 15<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference*, 1997, pp. 919-929, Orlando.
- [6] W. M. West, “Illustration of the Use of Modal Assurance Criterion to Detect Structural Changes in an Orbiter Test Specimen”, *Air Force Conference*, 1984, pp. 93-100.
- [7] A. K. Pandey, M. Biswas and M. M. Samman, “Damage Detection from Changes in Curvature Mode Shapes”. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 145, No. 2, 1991, pp. 321-332.
- [8] N. Stubbs and J. T. Kim, “Damage Localization in Structures without Baseline Modal Parameters”. *Journal of AIAA*, Vol. 34, No. 8, 1996, pp. 1644-1649.
- [9] H. Peng, C. You and Y. Meng, “Damage Diagnosis of Beam Structures by Modal Curvature Difference Method”. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 23, No. 7, 2006, pp. 49-53.

- 
- [10] B. Moaveni. 2007. System and Damage Identification of Civil Structures. PhD dissertation. San Diego: University of California, Structural Engineering.
- [11] S. M. Pandit and S. M. Wu, Time Series and System Analysis with Applications. New York: John Wiley and Sons, 1983.
- [12] S. M. Pandit and S. M. Wu, Modal and Spectrum Analysis: Data Dependent System in State Space. John Wiley and Sons, Inc., 1991.
- [13] P. Van Overschee and B. De Moor, "Subspace Algorithms for System Identification and Stochastic Realization". Proceedings Conference on Mathematical Theory for Networks and System, MTNS, Kobe, Japan, 1991.
- [14] P. Van Overschee and B. De Moor, "Subspace Algorithms for the Stochastic Identification Problem". Proceedings 30<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control, Brighton, UK, 1991, pp. 1321-1326.
- [15] P. Van Overschee and B. De Moor, Subspace Identification for Linear System: Theory. Implementation and Applications, Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [16] J. Lardies, "Analysis of Multivariate Autoregressive Process". Journal of Mechanical System and Signal Processing, Vol. 10, No. 6, 1996, pp. 747-761.
- [17] J. Lardies, "Modal Parameter Identification from Output-only Measurement". Mechanics Research Communication, Vol. 24, No. 5, 1997.
- [18] 洪振發、戴志豪與柯文俊，利用量測鑑定模態參數以直接法修正結構分析模型的質量與勁度矩陣，中國造船輪機工程學刊第十九卷第三期，中華民國八十九年，pp. 1-12。
- [19] L. Ljung, System Identification: Theory for the User. New Jersey: Prentice-Hall, 1987.
- [20] T. Soderstrom, System Identification. Hemel Hempstead: Prentice-Hall, 1989.



- 
- [21] G. A. McGraw, C. L. Gustafson and J. T. Gillis, "Condition for the Equivalence of ARMAX and ARX System". IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 38, No. 4, 1993, pp. 632-636.
- [22] T. Soderstrom, H. Fan, B. Carlsson and S. Bigi, "Least Squares Parameter Estimation of Continuous-Time ARX Models from Discrete-Time Data". IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 42, No. 5, 1997, pp. 659-673.
- [23] 洪振發、柯文俊與戴志豪，ARX 模型之結構動態系統鑑定與配合量測資料修正有限元素分析模型，第十一屆中國造船暨輪機工程研討會論文集，中華民國八十七年十一月。
- [24] W. J. Ko and C. F. Hung, "Extraction of Structural System Matrices from an Identified State-Space System Using the Combined Measurement of DVA". Journal of Sound and Vibration, Vol. 41, 2001, pp. 329-344.
- [25] 柯文俊，由狀態空間系統萃取結構系統矩陣與模態參數，博士論文，工程科學及海洋工程研究所，國立臺灣大學，台北，2002。
- [26] C. F. Hung, W. J. Ko and Y. T. Peng, "Identification of Modal Parameters from Measured Input and Output Data Using a Vector Backward Auto-regressive with Exogeneous model". Journal of Sound and Vibration, Vol. 276, 2004, pp. 1043-1063.
- [27] C. F. Hung, W. J. Ko and C. H. Tai, "Identification of Dynamic Systems from Data Composed by Combination of their Response Components". Engineering Structures, Vol. 24, 2002, pp. 1441-1450.
- [28] C. S. Li, W. J. Ko, H. T. Lin and R. J. Shyu, "Vector Autoregressive Modal Analysis with Application to Ship Structures". Journal of Sound and Vibration, Vol. 167, 1993, pp. 1-15.
- [29] S. S. Rao, Mechanical Vibration. USA: Addison-Wesley, 1995.
- [30] 余壽文與馮西橋，損傷力學，北京，清華大學出版社，1997。
- [31] J. Chance, G. R. Tomlinson and K. Worden, "A Simplified Approach to the Numerical and Experimental Modeling of the Dynamics of a Cracked Beam". The 12<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference, 1994.