

國立臺灣大學物理學系研究所



碩士論文

Department of Physics
National Taiwan University
Master Thesis

在非交換規範場中的膺能隙形成機制

Pseudogap Formation in Non-abelian Gauge System

黃柏傑

Bo-Jie Huang

指導教授：陳智泓 博士

Advisor: Chyh-Hong Chern, Ph.D.

中華民國 104 年 6 月

June, 2015

誌謝



在整篇論文的最後，我才開始來寫感謝，最主要原因是我這一路上受了太多人太多恩惠了，已不知從何表達，最感謝的便是我指導教授陳智泓老師，感謝老師願意收留我這個從外系轉來一點基礎都沒有的學生，也在我的求學路途中，耐心指導，也許比起老師的稱號，他更像一個朋友，再來我非常感謝胡崇德老師，自從碩一上的古典力學後，每每遇到不管是學術上或是人生上的難題，胡崇德老師也沒有一次拒絕我，願意給出他的建言，這兩位老師在我碩班求學路上真的給我許多恩惠，十分感激。

再來我十分感謝U，S，景洲，有你們在許多問題也不是問題了，還有一盒，原閔，友樵，時常陪我到處亂吃東西散心，還有 lulu，楊民，橘子，蓉兒，哲哲，馨安，奶怪，銘浩，小孟，晉哲，翔哥，Jerry，采薇，H，清淵，嘉駿……地質系的大家，以及許許多多在這一路上曾幫助過我的人

最後感謝家人的支持，也感謝自己真的去做了孩提時的物理夢，縱然辛苦，也十分有趣。

中文摘要



在高溫超導中，許多的特性並不同於一般超導體，尤其是在銅氧化物在尚未進入超導相時便出現了膺能隙，這個問題困擾著凝態物理學家長達 30 年，近來隨著鐵基超導體、重費米子超導體的誕生也發現有膺能隙的生成，於是物理學家們便希望對這種特性有一個統一的解釋。

2014 年，陳智泓教授利用 $U(1)$ 規範場在反鐵磁場擾動中獲得質量，希望能解釋膺能隙的產生，而本文希望能將適用範圍擴大到 $SU(2)$ 及更高的對稱性，而進一步解釋在擁有多重能帶超導體中膺能隙的形成機制。

關鍵字：膺能隙；非交換；規範場；超導體

ABSTRACT



There are many special and novel characteristics in high T_c superconductors which do not show in conventional superconductors. One of most peculiar features is the pseudogap. It confuses physicist that why the cuprates go into a gap phase which doesn't show superconductivity. Recently, many materials are discovered and showing unconventional superconductivity, such as Iron pnictide superconductors and heavy fermion superconductors, which also perform the pseudogap feature. It drives physicist to find out the relation between those materials.

In 2014, Prof. Chern considered the pseudogap may be explained by a $U(1)$ gauge field acquiring mass from a Stuckelberg field, which comes from antiferromagnetic fluctuation. In this thesis, I will generalize the abelian system to the non-abelian systems such as $SU(2)$ systems or higher symmetry systems.

Categories : Pseudogap ; Non-abelian ; Gauge system ; Superconductor

CONTENTS



口試委員會審定書.....	#
誌謝.....	i
中文摘要.....	ii
ABSTRACT.....	iii
CONTENTS.....	iv
Chapter 1 Introduction.....	1
Chapter 2 SU(2) Symmetry.....	3
2.1 Construct SU(2) Symmetry.....	4
2.1.1 From SU(2) Higgs mechanism	4
2.1.2 Energy gap.....	11
2.2 SU(2) in adjoint representation	15
Chapter 3 SU(N) Symmetry.....	18
3.1 SU(N) Mass Matrix.....	18
3.1.1 SU(N) Generators	18
3.2 Coupling to Fermion	20
3.2.1 Propogators	20
3.2.2 Feynman rules.....	23
Chapter 4 Real system.....	25
4.1 Iron pnictide	25
4.2 Discussion	26
Chapter 5 Conclusion	27

REFERENCE.....	28
Appendix A.....	29
Appendix B	31
Appendix C	33



Chapter 1 Introduction



在 1911 年，Prof. Onnes 發現水銀在接近絕對零度，呈現的低電阻狀態，開啟了百年以上的超導體狂熱潮，經過了長達半個世紀的嘗試，在 1957 年由 Bardeen、Cooper、Schrieffer 所設想的 BCS 理論近乎完美的解釋了傳統超導體的物理機制，並且深深地影響了凝態物理，甚至催化了高能領域中希格斯機制的誕生，實屬 20 世紀最重要的物理理論之一。

過了 30 年，Dr. Bednorz 和 Dr. Muller 在原本被認為不可能會有超導性質的銅氧化物陶瓷材料中發現了超導現象，且臨界溫度相對傳統金屬超導體而言，高上了許多，這無疑是在物理學界投下震撼彈，隨之而來的膺能隙的特殊性質，更加困惑了凝態物理學家們長達 30 幾年。

對於這詭譎的特性，物理學家嘗試了許多可能如自旋密度波、電荷密度波、自旋液體等等，仍無法完整的描述膺能隙的產生，但物理學家並非毫無收穫，許多證據指出，膺能隙的產生應該與母化合物的反鐵磁有序有關。

Prof. Chern 設想了反鐵磁有序會形成一個內在的 Stuckelberg 場，並從 Hubbard 模型出發，考慮電流的交互作用後，將一個 $U(1)$ 的規範場引入，利用規範波色子將 Stuckelberg 場的自由度吸收後產生質量，進而使能帶中的電子與規範波色子交互作用產生變化，使電子的質量變大了一點，進而產生了膺能隙。

然而，在多能帶系統中，是不是有類似的行為或是大為相異呢？這邊仍是未知

的範圍。

本文將利用 Higgs 機制討論在更高的對稱下，探討膺能隙的形成機制，並且期望對應到真實系統。



Chapter 2 SU(2) Symmetry



在 Prof. Chern 的文章中[1]，從一個簡單的單能帶 Hubbard 模型做修改，加入了電流-電流交互作用，整個的 Hamiltonian 密度函數如下

$$H = -t \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} (c_{i,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma} + h.c.) + U_0 \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow} + U_1 \sum_q \vec{J}_\uparrow(q) \cdot \vec{J}_\downarrow(-q) \quad (2-1)$$

考慮在連續性極限下，寫出 Lagrange 密度函數以及 Partition 函數

$$L = \sum_\sigma \psi_\sigma^\dagger(x) (i\partial_0 + \frac{\nabla^2}{2m}) \psi_\sigma(x) - u_0 \rho_\uparrow(x) \rho_\downarrow(x) - u_1 \vec{J}_\uparrow(x) \cdot \vec{J}_\downarrow(x) \quad (2-2)$$

$$Z = \int D\psi D\psi^\dagger e^{i[S(x)]} \quad (2-3)$$

考慮到這是一個四費米子交互作用之後，便利用在高能理論中處理四費米子交互作用的方法—引入一個規範場來描述更精細的作用力結構。爾後，為了描述膺能隙的生成，考慮到反鐵磁有序在空間方向上的不均勻性，引入一個 Stuckelberg 場，描述反鐵磁擾動

$$\phi(x,t) = \frac{1}{q} e^{i\sigma(t,x)} \quad (2-4)$$

式(2-4)中的 Stuckelberg 場只具有 XY 方向上的對稱性，且不具有 Z 方向分量。

如此一來便可將整個 Lagrange 密度函數完整的寫下



$$L = \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger}(x)(i\partial_0)\psi_{\sigma} - \frac{1}{2m} \left[\left(-\frac{\nabla}{i} - g\bar{a} \right) \psi_{\sigma}^{\dagger} \right] \left[\left(\frac{\nabla}{i} - g\bar{a} \right) \psi_{\sigma} \right] - ga_0 \psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma} - \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + \frac{1}{2} M_0^2 (D_0\phi)^{\dagger} (D_0\phi) - \frac{1}{2} M_1^2 (D_i\phi)^{\dagger} (D_i\phi) \quad (2-5)$$

2.1 Construct SU(2) Symmetry

然而，當試圖要構築多能帶系統時，我們會發現，對於 SU(N) 對稱性而言，我們會擁有 N 種費米子，表示在做 SU(N) 規範變換時，我們的轉換的修正——也就是我們的規範場，勢必夾帶 SU(N) 變換的產生子，對於 SU(N) 規範變換而言，產生子是一個 N×N 的矩陣 τ

如此一來，我們便無法使用身為純量的 Stuckelberg 場，或者會產生不可重整化的問題。考慮到這點，我們改為考慮利用 Higgs 場及 Goldstone 場來描述，最後再使 Higgs 場的質量趨近無限大來近似 Stuckelberg 場。

我們首先會考慮 SU(N) 中的最簡單情形——SU(2) 對稱性

2.1.1 From SU(2) Higgs mechanism

當我們利用 Higgs 機制後，我們便可以寫下 Lagrange 密度函數，並且在基本表示下

$$L = \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger}(x)(i\partial_0)\psi_{\sigma} - \frac{1}{2m} \left[\left(-\frac{\nabla}{i} - g\bar{a} \right) \psi_{\sigma}^{\dagger} \right] \left[\left(\frac{\nabla}{i} - g\bar{a} \right) \psi_{\sigma} \right] - ga_0 \psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma} - \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + \frac{1}{2} M_0^2 (D_0\phi_k)^{\dagger} (D_0\phi_k) - \frac{1}{2} M_1^2 (D_i\phi_k)^{\dagger} (D_i\phi_k) + \frac{\mu^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4 \quad (2-1-1)$$



其中，各個場是

$$\begin{aligned}\bar{a}_i &= \tau^a a_i^a \\ a_0 &= \tau^a a_0^a\end{aligned}\quad (2-1-2)$$

這邊的 τ^a 指的是旋轉對稱的產生子，a 是表示指標，對 SU(2) 對稱來說我們有

$\tau^a = \frac{\sigma^a}{2}$, 其中 σ^a 是包立矩陣

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2-1-3)$$

為了方便起見，我們令

$$L_0 = \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger}(x)(i\partial_0)\psi_{\sigma} - \frac{1}{2m} \left[\left(-\frac{\nabla}{i} - g\bar{a} \right) \psi_{\sigma}^{\dagger} \right] \left[\left(\frac{\nabla}{i} - g\bar{a} \right) \psi_{\sigma} \right] - ga_0 \psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma} - \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} \quad (2-1-4)$$

$$L = L_0 + \frac{1}{2} M_0^2 (D_0 \phi_k)^{\dagger} (D_0 \phi_k) - \frac{1}{2} M_1^2 (D_i \phi_k)^{\dagger} (D_i \phi_k) + \frac{\mu^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4 \quad (2-1-5)$$

之後，我們給定 $\phi = (\phi_1 + i\phi_2, i\phi_3 + \phi_4 + v)$ ，注意我們這裡的 k 指標，雖然表示的是分量相乘，然而規範場中會帶有矩陣，嚴格說起來並不能寫下指標，所以之後我們邊直接展開，當我們將低系統能量時，本來對整個 Lagrange 密度函數是擁有 SU(2) 對稱性，此時的 ϕ 場的大小會降低直到 $\phi^2 = v^2$ ，我們可以選定一個特定的空間方向做為自發對稱破缺的方向，在這裡為了方便起見，選定 $\phi_i^0 = (0, v)$ ，我們接著可以計算在 ϕ 場和規範場的交互作用，我們會有



$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} M_0^2 (D_0 \phi)^\dagger (D_0 \phi) - \frac{1}{2} M_1^2 (D_i \phi)^\dagger (D_i \phi) \\
&= \frac{1}{2} M_0^2 [(\partial_0 \phi_k)^\dagger (\partial_0 \phi_k) + g' a_0^a \partial^0 (\phi_k^\dagger i \tau_{kl}^a \phi_l) + g'^2 a_0^a a^{0b} \phi_k^\dagger \tau_{kl}^a \tau_{lm}^b \phi_m] \\
&- \frac{1}{2} M_i^2 [(\partial_i \phi_k)^\dagger (\partial_i \phi_k) + g' a_i^a \partial^i (\phi_k^\dagger i \tau_{kl}^a \phi_l) + g'^2 a_i^a a^{ib} \phi_k^\dagger \tau_{kl}^a \tau_{lm}^b \phi_m]
\end{aligned}$$

(2-1-6)

因為規範場的質量項是來自於二次項，我們將有規範場二次項獨立出來看

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} M_0^2 (g' a_0 \phi)^\dagger (g' a_0 \phi) - \frac{1}{2} M_1^2 (g' a_i \phi)^\dagger (g' a_i \phi) \\
&= [M_0^2 a_i^a a_i^b - M_1^2 a_i^a a_i^b] [\frac{g'^2}{2} (\phi)^\dagger \tau^a \tau^b (\phi)]
\end{aligned}$$

(2-1-7)

當能量降低時，我們有質量項是

$$[M_0^2 a_i^a a_i^b - M_1^2 a_i^a a_i^b] [\frac{g'^2}{2} (\phi^0)^\dagger \tau^a \tau^b (\phi^0)]$$

(2-1-9)

其中的 $\frac{1}{2} (\phi^0)^\dagger \tau^a \tau^b (\phi^0)$ 項被稱作規範波色子的質量矩陣，為了得到規範波色子

的真正質量，我們必須對角化質量矩陣，得到

$$\frac{g'^2}{2} (\phi^0)^\dagger \tau^a \tau^b (\phi^0) = \frac{g'^2 v^2}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2-1-10)

此時我們重寫我們的 Lagrange 密度函數，我們只考慮所有的二次項



$$\begin{aligned}
L = L_0 + [M_0^2 a_i^a a_i^b - M_1^2 a_i^a a_i^b] & \left[\frac{g'^2 v^2}{2} (\phi^0)^\dagger \tau^a \tau^b (\phi^0) \right] + \frac{1}{2} M_0^2 (\partial_0 \phi_k)^\dagger (\partial_0 \phi_k) \\
& - \frac{1}{2} M_1^2 (\partial_i \phi_k)^\dagger (\partial_i \phi_k) + \frac{1}{2} M_0^2 g' a_0^a \partial^0 (\phi_k^\dagger i \tau_{kl}^a \phi_l^0) - \frac{1}{2} M_i^2 g' a_i^a \partial^i (\phi_k^\dagger i \tau_{kl}^a \phi_l^0) \\
& + M_{ij}^2 \phi^i \phi^j + O(a\phi^2, a^2\phi, \phi^3 \dots)
\end{aligned} \tag{2-1-11}$$

其中 M_{ij}^2 指的是 ϕ 的質量矩陣

$$M_{ij}^2 = \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi^i \partial \phi^j}, \quad V(\phi) = -\frac{\mu^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} (\phi^2)^2 \tag{2-1-12}$$

然而，我們知道在量子場論中，只考慮運動方程式是不夠的，必須將整個 Partition 函數考慮進去，則我們有

$$Z = \int Da^\mu D\phi_i D\psi D\psi^\dagger e^{i[S(x)]} \tag{2-1-13}$$

在這整個 Partition 函數中，Lagrange 密度函數是規範不變的，且物理現象也是應該是規範不變的，然而對所有規範場積分的步驟會和如何選定規範場有關，此時利用 Faddeev-Popov 量子化方法，我們可得

$$\begin{aligned}
L = L_0 + [M_0^2 a_i^a a_i^b - M_1^2 a_i^a a_i^b] & \left[\frac{g'^2 v^2}{2} (\phi^0)^\dagger \tau^a \tau^b (\phi^0) \right] + \frac{1}{2} M_0^2 (\partial_0 \phi_k)^\dagger (\partial_0 \phi_k) \\
& - \frac{1}{2} M_1^2 (\partial_i \phi_k)^\dagger (\partial_i \phi_k) + \frac{1}{2} M_0^2 g' a_0^a \partial^0 (\phi_k^\dagger i \tau_{kl}^a \phi_l^0) - \frac{1}{2} M_i^2 g' a_i^a \partial^i (\phi_k^\dagger i \tau_{kl}^a \phi_l^0) \\
& + M_{ij}^2 \phi^i \phi^j - \frac{1}{2} G^2 + O(a\phi^2, a^2\phi, \phi^3 \dots)
\end{aligned} \tag{2-1-14}$$

$$Z = C' \int Da^\mu D\phi_i D\psi D\psi^\dagger e^{i[S(x) - \frac{1}{2} G^2]} \det\left(\frac{\delta G^a}{\delta \alpha^b}\right) \tag{2-1-15}$$



其中 G^a 是規範固定

$$G^a = \frac{1}{\sqrt{\xi}} (M_0^2 \partial_0 A^{a0} + M_1^2 \partial_i A^{ai} - \xi g \phi^\dagger i \tau^a \phi^0) = 0 \quad (2-1-16)$$

$\det(\frac{\delta G^a}{\delta \alpha^b})$ 作為 Partition 函數在規範轉換下不變的副產物,我們考慮引入一個鬼

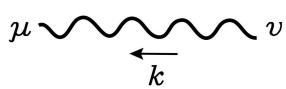
魅場 c

$$\frac{\delta G^a}{\delta \alpha^b} = \frac{1}{\sqrt{\xi}} (\frac{1}{g'} (M_0^2 \partial_0 D^0 + M_1^2 \partial_i D^i)^{ab} - \xi g' \phi^\dagger \tau^a \tau^b \phi^0) \quad (2-1-17)$$

$$L_{ghost} = c^\dagger (\frac{1}{g'} (M_0^2 \partial_0 D^0 + M_1^2 \partial_i D^i)^{ab} - \xi g' \phi^\dagger \tau^a \tau^b \phi^0) c \quad (2-1-18)$$

接著我們寫出關於包含規範場的各個場的傳遞子

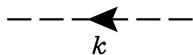
對於任一個規範場



$$\Delta_{\mu\nu}^{-1} = i[(g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) + t^2 (M_0^2 \delta_{00} - M_1^2 \delta_{ij}) - \frac{1}{\xi} (M_0^4 k_0^2 + 2M_0^2 M_1^2 k_0 k_i + M_1^4 k_i k_j)] \quad (2-1-19)$$

其中 t 是規範玻色子的質量

對於 Higgs 場是



$$\Delta_{Higgs} = \frac{i}{M_0^2 k_0^2 - M_1^2 k_i^2 - 2\mu^2} \quad (2-1-20)$$

對於 Goldstone 場是



$$\Delta_{Goldstone} = \frac{i}{M_0^2 k_0^2 - M_1^2 k_i^2 - \xi t^2} \quad (2-1-21)$$

對於鬼魅場是



$$\Delta_{Ghost} = \frac{i}{M_0^2 k_0^2 - M_1^2 k_i^2 - \xi t^2} \quad (2-1-22)$$

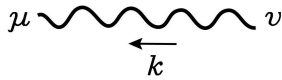
對於費米子而言



$$\Delta_{Fermion} = \frac{i}{k_0 - \frac{k_i^2}{2m}} \quad (2-1-23)$$

此時仍有一個未定參數 ξ ，我們可以選定 $\xi \rightarrow \infty$ ，使整個傳遞子相對簡單，如此一來我們便可以知道所有場是如何在空間中傳遞。

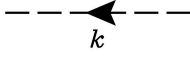
對於規範玻色子



$$\begin{aligned} \Delta_{00} &= -i(k_0^2 - t^2 M_1^2) / (t^2(-k_0^2 M_0^2 + (k_1^2 + k_2^2 + t^2 M_0^2)M_1^2)) \\ \Delta_{11} &= -i(-k_0^2(k_1^2 + t^2 M_0^2) + (k_1^2 + k_2^2 + t^2 M_0^2)(k_1^2 + t^2 M_1^2)) / (t^2(-k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + t^2 M_1^2)(-k_0^2 M_0^2 + (k_1^2 + k_2^2 + t^2 M_0^2)M_1^2)) \\ \Delta_{22} &= -i(-k_0^2(k_2^2 + t^2 M_0^2) + (k_1^2 + k_2^2 + t^2 M_0^2)(k_2^2 + t^2 M_1^2)) / (t^2(-k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + t^2 M_1^2)(-k_0^2 M_0^2 + (k_1^2 + k_2^2 + t^2 M_0^2)M_1^2)) \\ \Delta_{01} &= \Delta_{10} = i((k_0 k_1) / (t^2(-k_0^2 M_0^2 + (k_1^2 + k_2^2 + t^2 M_0^2)M_1^2))) \\ \Delta_{02} &= \Delta_{20} = i((k_0 k_2) / (t^2(-k_0^2 M_0^2 + (k_1^2 + k_2^2 + t^2 M_0^2)M_1^2))) \\ \Delta_{12} &= \Delta_{21} = -i(k_1 k_2(-k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + t^2 M_0^2)) / (t^2(-k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + t^2 M_1^2)(-k_0^2 M_1^2 + (k_1^2 + k_2^2 + t^2 M_0^2)M_1^2)) \end{aligned} \quad (2-1-24)$$

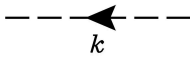


對於 Higgs 場是依然維持不變

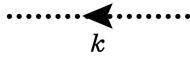


$$\Delta_{Higgs} = \frac{i}{M_0^2 k_0^2 - M_1^2 k_i^2 - 2\mu^2}$$

對於 Goldstone 場和鬼魅場是，



$$\Delta_{Goldstone} = \frac{i}{M_0^2 k_0^2 - M_1^2 k_i^2 - \xi t^2} \rightarrow 0$$



$$\Delta_{Ghost} = \frac{i}{M_0^2 k_0^2 - M_1^2 k_i^2 - \xi t^2} \rightarrow 0$$

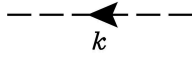
傳遞子等於零表示在我們取的這個規範下，我們不必要去考慮擁有 Goldstone 場和鬼魅場的費曼圖

對於我們的計算來說，我們可以考慮質量 μ 是任意值，而為了方便，我們可以令 Higgs 場的質量 μ 趨近無限大，但是我們這樣設有沒有任何的合理性呢？

我們都知道超導體是利用規範玻色子吸收了 Cooper 對的自由度後所產生，然而在凝態物理中，我們並沒有觀察到任何的 Higgs 激發態，原因在於當我們意圖激發 Higgs 時，我們所給的能量反而會拆開 Cooper 對，在這情形下等於是破壞了我們所給定的系統，所以我們可以將這系統的能量上限設定在我們要激發 Higgs 的能量，換而言之，假定我們要不破壞系統，我們可以將 Higgs 的質量想成無窮大。



上述討論中，Higgs 質量無窮大會使 v 趨近無窮大，導致我們這樣計算真空值會有問題，所以我們令 $\lambda \propto \mu^2$ ，使整個真空值仍是一個有限的常數，但此時 Higgs 場就變為

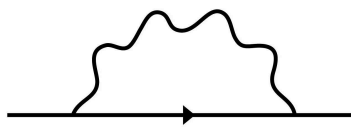


$$\Delta_{Higgs} = \frac{i}{M_0^2 k_0^2 - M_1^2 k_i^2 - 2\mu^2} \rightarrow 0, \text{ if } \mu \rightarrow \infty$$

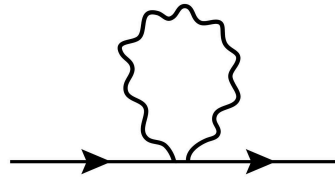
於是，Higgs 的自由度我們也可不計

2.1.2 Energy gap.

接著我們想問這個規範波色子是如何對費米子的質量產生影響的。我們可以考慮費米子的自身能量，以下兩張 Feynman 圖表示



Fig(1)



Fig(2)

在微擾的第一階圖圖，我們只擁有以上的兩種自身能量，於是我們便可以計算兩張圖的大小是多少

我們先考慮我們的 Feynman 規則考慮第一種費米子藉由圈圖從第一個規範玻色子所獲得的修正



對於第一個圖，我們有

$$(-ig)^2 \int \frac{d\omega d^2k}{(2\pi)^3} v^\mu v^\nu G_{\mu\nu}(k, \omega) G_{Fermion}(p-k, E-\omega) \quad (2-1-25)$$

其中

$$v^\mu = (1, \frac{k^1}{m}, \frac{k^2}{m}) \quad (2-1-26)$$

由於非常的複雜，考慮在較簡單情形下，令 $M_0 = M_1$ ，則原本的積分變成

$$(-ig)^2 \int \frac{d\omega d^2k}{(2\pi)^3} \frac{1 - \frac{k_i^2}{m^2} - \frac{1}{M_0^2}(\omega + \frac{k_i^2}{m})^2}{\omega^2 - k_i^2 - M_0^2 + i\eta} \frac{1}{E - \omega - \frac{(p_i - k_i)^2}{2m} + i\eta} \quad (2-1-27)$$

但還是很繁複，不過我們考慮我們真正要求的是 $\Sigma(0,0)$ ，所以我們先令

$$E = p_i = 0$$

$$(-ig)^2 \int \frac{d\omega d^2k}{(2\pi)^3} \frac{1 - \frac{k_i^2}{m^2} - \frac{1}{M_0^2}(\omega + \frac{k_i^2}{m})^2}{\omega^2 - k_i^2 - M_0^2 + i\eta} \frac{-1}{\omega + \frac{k_i^2}{2m} + i\eta} \quad (2-1-28)$$

接著我們可以用複變積分來去計算，之後我們也用重整化去計算真正的大小，

其中在後面代表電子傳遞子的部分要考慮化學位勢，然而做完第一部份的能量計

算後我們發現前面必定有一個係數 i ，這使得不管我們後來對動量計算的數值最後

是多少，結果必定不會以實數方式出現，最後我們會得到積分結果是零，所以這

部分不貢獻質量修正



而第二個積分我們有

$$\frac{-ig^2}{2m} \frac{1}{4} \int \frac{d\omega d^2k}{(2\pi)^3} G_{ii}(k, \omega) \quad (2-1-29)$$

將傳遞子代入後，

$$\frac{-ig^2}{8m} \int \frac{d\omega d^2k}{(2\pi)^3} \frac{-\omega^2(k_i^2 + 2t^2 M_1^2) + (k_i^2 + t^2 M_1^2)(k_i^2 + 2t^2 M_0^2)}{t^2(-\omega^2 + k_i^2 + t^2 M_0^2 + i\eta)} \frac{1}{(-\omega^2 M_1^2 + (k_i^2 + t^2)M_0^2 + i\eta)} \quad (2-1-30)$$

在這個積分中有紫外發散的問題，我們可以先給定一個 cut off，最後利用重整化的技巧，我們會得到

$$\Sigma_2(\omega, p) = \frac{g^2}{4\pi m} \frac{t}{4} [M_1 + \frac{M_1}{3M_0^2}] = \frac{g^2}{4\pi m} \frac{g'v}{8} [M_1 + \frac{M_1}{3M_0}] \quad (2-1-31)$$

我們將重整化後質量改變寫成 $\Delta m = \Sigma_1 + \Sigma_2$

再者我們考慮與費米子耦合的規範波色子有哪些

$$\mathcal{L}_{couple} = \sum_{\sigma} -\frac{1}{2m} [(g\vec{a})\psi_{\sigma}^{\dagger}][g\vec{a})\psi_{\sigma}] - ga_0\psi_{\sigma}^{\dagger}\psi_{\sigma} \quad (2-1-32)$$

$$\mathcal{L}_{\Sigma_1} = \sum_{\sigma} -\frac{1}{2m} [(g^2\vec{a} \cdot \vec{a})\psi_{\sigma}^{\dagger}\psi_{\sigma}] \quad (2-1-33)$$

我們可以將整個展開會看得更清楚，

$$\mathcal{L}_{\Sigma_1} = \sum_{\sigma} -\frac{1}{2m} [\psi_{\sigma}^{\dagger} (g^2 \tau^a \cdot \tau^b) \psi_{\sigma} \bar{a}^a \bar{a}^b] = \sum_{\sigma} -\frac{1}{8m} [g^2 \psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma} \bar{a}^a \bar{a}^a] + \dots$$

我們看到中間有一個旋轉產生子的平方，對於 SU(2) 的旋轉產生子而言，每個產生子的平方都等於 $\frac{1}{4}I_2$ ，這表示我們的任一個規範玻色子都會和所有的費米子有均等的耦合

另外我們又考慮價帶理論中也擁有電洞，此種考慮下，此時我們就可以得到我們的能隙大小

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 = \frac{3g^2}{4\pi m} \frac{g'v}{4} [M_1 + \frac{M_1^2}{3M_0}] \quad (2-1-34)$$

而我們在實驗上所量到的能隙大小便是這個 Δm ，下標 1,2 指的是費米子的編號。

這邊我們會得到相當有趣的結果，當我們破壞掉局域對稱後，我們仍留下全域對稱，而這結果是如何產生的呢？我們注意到這是因為我們所有規範玻色子獲得了均相同的質量，並且都與所有費米子有相同的耦合而導致，然後在 SU(N) 系統中則不然，我們會在第三章說明得更加清楚。

2.2 SU(2) in adjoint representation



當我們做了 SU(2)的基本表示後，我們便會思考要如何將寫下在伴隨表示的結果，我們先考慮將費米子的部分，我們仍以 SU(2)的基本表示形式寫下

$$\begin{aligned}\psi &= (\psi_1, \psi_2) \\ \psi^\dagger &= (\psi_1^\dagger, \psi_2^\dagger)\end{aligned}\tag{2-3-1}$$

我們知道 SU(2)的伴隨表示是 SO(3)，所以 ϕ 場是

$$\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)\tag{2-3-2}$$

此時我們將 Pauli 矩陣的 σ^i 利用 SU(2)和 SO(3)的對應關係，對應到 ε^{ijk} ，此時對於 ϕ 場和費米子而言，他們的轉換可以用 SU(2)和 SO(3)映射得到，然而在伴隨表示下，我們會對於 ϕ 場的伴隨表示應為

$$\phi = \phi_i \tau_i$$

並且我們可以利用 SU(2)旋轉，選擇我們的對稱破缺方向是只在對角線上有值的（當然我們可以不這樣選，其結果只是將我們等等所算出來的質量矩陣複雜化而已，然而特徵值一樣維持相同），所以我們的質量矩陣是

$$\frac{1}{2} g'^2 \text{tr}([\tau^a, \phi^0][\tau^b, \phi^0]) = \frac{g'^2 v^2}{16} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

當我們建立完質量矩陣後，我們重新看我們的 Lagrange 密度函數

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger}(x)(i\partial_0)\psi_{\sigma} - \frac{1}{2m} [(-\frac{\nabla}{i} - g\vec{a})\psi_{\sigma}^{\dagger}][(\frac{\nabla}{i} - g\vec{a})\psi_{\sigma}] - ga_0\psi_{\sigma}^{\dagger}\psi_{\sigma} - \frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} \\
 & + tr[\frac{1}{2}M_0^2(D_0\phi_k)^{\dagger}(D_0\phi_k) - \frac{1}{2}M_1^2(D_i\phi_k)^{\dagger}(D_i\phi_k)] + \frac{\mu^2}{2}tr[\phi^2] - \frac{\lambda}{4}tr[\phi^2]^2
 \end{aligned}
 \tag{2-3-3}$$

我們可以在裡面看到 Feynman 規則，並且做相同的 Feynman 圖計算，如此一來我們便可以得到能隙大小，當然，我們會看到結果並不同於基本表示，但是也是是倍數差。

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 = \frac{g^2}{4\pi m} \frac{\sqrt{2}g'v}{4} [M_1 + \frac{M_1^2}{3M_0}]$$

對於最簡單的 SU(2) 的情形基本上就是這樣，然而伴隨表示在更高對稱下有更加複雜的情形，有時候會隨著所選定的對稱破缺形式不同而有不同行為。

當我們做完了 SU(2) 的基本表示和伴隨表示後，我們想問這時候的 ϕ 場可能是什麼，首先我們看基本表示，在這裡面我們總共有四個獨立的自由度，但是與跟反鐵磁場有關的自由度數量不相同，所以我們很難將他連結到反鐵磁上面，反倒是這比較像有 SU(2) 對稱 Cooper 對的超導理論，雖然不是我們想要的結果。

再來我們看伴隨表示，在伴隨表示中，我們有一個 Higgs 場，兩個 Goldstone 場，於是我們可以將它跟 Neel 有序參數連結，所以依然是個反鐵磁態。

最後我們想問的是到底可不可以將我們的 SU(2) 系統類比到原先的 U(1) 系統，

答案很明顯是否定的，因為在 $U(1)$ 的情形下，我們只有一個 Goldstone 場，但在 $SU(2)$ 的基本與伴隨表示下，Goldstone 場的數量都不只一個，而我們試著加入 ϕ^3 的平方項，使整個系統只有一個 Goldstone 場，但此舉直接破壞了 $SU(2)$ 對稱性，使得新的對稱性變為 $U(1) \cong SO(2)$ ，但是這個對稱是 Abelian 群，也就是說與我們原先希望做的 Non-Abelian 背道而馳。

Chapter 3 SU(N) Symmetry



上一章我們已經討論過 SU(2) 系統在 Higgs 機制下應該是如何運作，現在的問題便是如何將其延伸至 SU(N)系統？

3.1 SU(N) Mass Matrix

就如同 SU(2)中的情形，首先我們一樣寫下我們的 Lagrange 密度函數

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger}(x)(i\partial_0)\psi_{\sigma} - \frac{1}{2m} \left[\left(-\frac{\nabla}{i} - g\vec{a} \right) \psi_{\sigma}^{\dagger} \right] \left[\left(\frac{\nabla}{i} - g\vec{a} \right) \psi_{\sigma} \right] - ga_0 \psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma} - \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{2} M_0^2 (D_0 \phi_k)^{\dagger} (D_0 \phi_k) - \frac{1}{2} M_1^2 (D_i \phi_k)^{\dagger} (D_i \phi_k) + \frac{\mu^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4 \end{aligned} \quad (3-1-1)$$

接著探討在 ϕ 場及費米子都是 N 個複數所組成的情形

3.1.1 SU(N) Generators

首先我們要做的便是利用 SU(N)轉換的生成子 τ 來找出質量矩陣，首先他有

SU(N-1)的產生子

$$\tau^a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \leq (N-1)^2 - 1 \quad (3-1-2)$$

再來還有

$$\tau^a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & & 1 \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (N-1)^2 \leq a \leq N^2 - N - 2 \quad (3-1-3)$$

$$\tau^a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & & -i \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 - N - 1 \leq a \leq N^2 - 2$$

$$\tau^a = \sqrt{\frac{1}{2N(N-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-N \end{pmatrix}, \quad a = N^2 - 1$$



(3-1-3)

(3-1-4)

接著我們可以選定一個自發對稱破缺的方向 $\phi_i^0 = (0, 0, \dots, v)$ ，此時質量矩陣是

$$\frac{g'^2}{2} (\phi_k^0)^\dagger \tau^a \tau^b (\phi_k^0) = \frac{g'^2 v^2}{8} \begin{pmatrix} 0_{(N^2-2N)} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2N-2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(N-1)}{N} \end{pmatrix}$$

(3-1-5)

很明顯的，對 SU(N) 旋轉而言，共有 $2N-1$ 個規範玻色子獲得了質量，並且我們也得到所有規範玻色子的質量。

我們共有 $2N-2$ 質量是 $\frac{g'v}{2}$ 的規範玻色子，一個質量是 $\frac{g'v}{2} \sqrt{\frac{2(N-1)}{N}}$ 的規範玻色子，以及 $N^2 - N$ 個沒有質量的規範玻色子



3.2 Coupling to Fermion

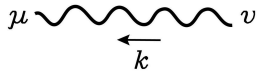
3.2.1 Propagators

接著我們需要討論的，一樣是在此種情形下，規範波色子的傳遞子。首先我們先回顧我們之前寫下的質量矩陣，明顯的只有在對角線上才有不為零的值，這表示我們並不需要再對這些規範場做任何的線性組合以獲得真正的傳遞子，所以我們可以寫下有質量及沒有質量的規範波色子傳遞子，並且整個傳遞子只和質量有關

$$\Delta_{\mu\nu}^{-1} = -i[(g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu) + t^2(M_0^2\delta_{00} - M_1^2\delta_{ij}) - \frac{1}{\xi}(M_0^4k_0^2 + 2M_0^2M_1^2k_0k_i + M_1^4k_ik_j)] \quad (3-2-1)$$

所以可以直接套用 SU(2)的結果，然而我們仍有許多沒有質量的規範波色子，我們一樣要計算他們的傳遞子以及他們的鬼魅場，最後計算圈圖

對於沒有質量的規範波色子我們有



$$\Delta_{\mu\nu} = -\frac{1}{k^2}(g_{\mu\nu} + (1 - \frac{1}{\xi})\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}) \quad (3-2-2)$$

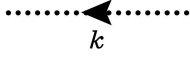
一樣的，我們可以先計算鬼魅場的傳遞子，我們寫下我們的規範固定

$$G^a = \frac{1}{\sqrt{\xi}}(\partial_\mu A^{a\mu}) = 0 \quad (3-2-3)$$

$$L_{ghost} = \bar{c}^a(\partial_\mu D^\mu)^{ab}c^b \quad (3-2-4)$$

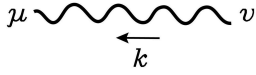


則我們的鬼魅傳遞子是



$$\Delta_{Ghost} = \frac{i}{k^2} \quad (3-2-5)$$

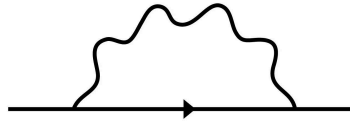
這時候我們可以選定普通的 Feynman 規範，讓 $\xi=1$, 則我們的規範玻色子是



$$\Delta_{\mu\nu} = -\frac{i}{k^2} g_{\mu\nu} \quad (3-2-6)$$

這時候我們一樣要算兩張費曼圖，於是我們重新寫下我們的積分式

對第一張圖而言

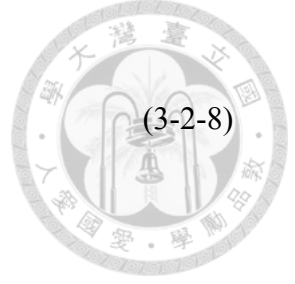


Fig(1)

我們有

$$(-ig)^2 \int \frac{d\omega d^2k}{(2\pi)^3} v^\mu v^\nu G_{\mu\nu}(k, \omega) G_{Fermion}(p-k, E-\omega) \quad (3-2-7)$$

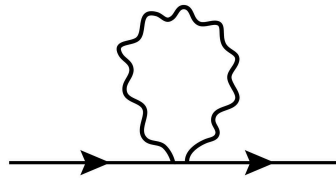
將傳遞子帶入後我們有



$$(ig)^2 \int \frac{d\omega d^2k}{(2\pi)^3} \frac{1 - (\frac{k_i}{m})^2}{\omega^2 - k^2 + i\eta} \frac{1}{E - \omega - \frac{(p_i - k_i)^2}{2m} + i\eta}$$

同樣的我們一樣取 $E = p_i = 0$ ，在做完重整化後，我們得到它不貢獻質量修正

對第二張圖而言



Fig(2)

我們寫下積分式

$$\frac{-ig^2}{2m} \frac{1}{4} \int \frac{d\omega d^2k}{(2\pi)^3} G_{ii}(k, \omega) \quad (3-2-9)$$

帶入傳遞子後，我們有

$$\frac{ig^2}{2m} \int \frac{d\omega d^2k}{(2\pi)^3} \frac{2}{\omega^2 - k^2 + i\eta} \quad (3-2-10)$$

同樣的我們也去計算大小，同樣在做完重整化後，我們得到的大小是零。我們會發現對於沒有質量的規範玻色子而言，並不會產生質量修正，所以之後我們需要關注的只是有質量的規範玻色子



3.2.2 Feynman rules

接著我們可以看費米子與規範玻色子的耦合項

$$\mathcal{L}_{couple} = \sum_{\sigma} -\frac{1}{2m} [(g\bar{a})\psi_{\sigma}^{\dagger}][g\bar{a})\psi_{\sigma}] - ga_0\psi_{\sigma}^{\dagger}\psi_{\sigma} \quad (3-2-11)$$

再來與 SU(2)相同，要計算兩張自身能量的 Feynman 圖，我們可以得到

對於每種不同的費米子所擁有的能隙大小為


$$\begin{aligned} \Delta m_i &= \frac{g^2}{4\pi m} \frac{g'v}{4} [M_1 + \frac{M_1}{3M_0^2}] \times [2 + \sqrt{\frac{8}{N^3(N-1)}}] \\ \Delta m_N &= \frac{g^2}{4\pi m} \frac{g'v}{4} [M_1 + \frac{M_1}{3M_0^2}] \times [(2N-2) + \sqrt{\frac{8(N-1)^3}{N^3}}] \end{aligned} \quad (3-2-12)$$

我們可以和 SU(2)的情形互相比較，此時我們會發現結果很類似，而當 N=2

時便會回到我們原先的計算結果

我們可以嘗試用群論的角度來看待這件事，本來對於 SU(N)而言，應該有 N^2-1 個產生子，然而當我們在基本表現下選定其中之一的自發對稱破缺方向後，便有了 $2N-1$ 個 Goldstone mode，所以會產生 $2N-1$ 個有質量的規範玻色子，所以會留下 N^2-N 個產生子，恰好是 SU(N-1)的旋轉對稱產生子數量，所以會有 $N-1$ 個費米子表現相同。

值得一提的是若當我們選定 $\phi_i^0 = (0, 0, \dots, \frac{v}{\sqrt{2}}, \frac{v}{\sqrt{2}})$ ，我們應該會看到有 $N-2$



個費米子表現相同，然而從群論的角度，我們會發現應該還是 $N-1$ 個費米子表現相同，這時候我們會發現原本以為應該是 $SU(N-2) \times SU(2)$ 的對稱，但除了這些旋轉產生子以外，還有其他產生子，這時候我們發現原因應該是在原本所選定的狀態底下，發生完對稱破缺，本來只剩下 $SU(N-1)$ 的對稱性，但我們卻利用已經不存在的 $SU(N)$ 旋轉去改變它，而最明顯的證據在我們所算出來的原先預計對最後兩個費米子存在的 $SU(2)$ 對稱，其實並不存在（產生子的數量並不是 3），所以最後我們會發現我們依舊得到 $SU(N-1)$ 的對稱性。我們也可以另外的角度來理解他，我們在群論中所使用的表現必定是不可約化表現，而我們在這差一個相似變換的話我們並不會認為他有兩種不同結果。

另外，當我們算完有質量及無質量的規範玻色子所貢獻的質量修正時，我們發現我們只需考慮有質量的波色子，並且貢獻質量修正的形式只與玻色子質量及 Feynman 規則有關，意思是不論我們之後寫下的群形式如何，我們也只需關注有質量的玻色子部分，進而很快速地得到總質量修正。

Chapter 4 Real system



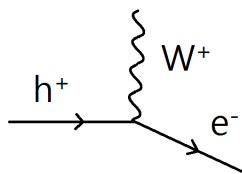
上述的第二章、第三章都在討論我們應該如何將理論運用到非交換規範系統中，然而物理是需要實驗的對應的。我們已經知道利用 stuckelberg 場可以成功描述銅氧化物超導體的膺能隙性質，這時我們會想問的是，是不是有真實的系統對應到上述所說的 $SU(2)$ 乃至 $SU(N)$ 系統呢？

4.1 Iron pnictide

2014 年 12 月，東京大學 Dr. Ishizaka 所率領的團隊，利用 ARPES 技術，成功的在鐵基超導體 $BaFe_2(As_{1-x}P_x)_2$ 中，發現了多重能帶的膺能隙結構。

在 $BaFe_2(As_{1-x}P_x)_2$ 這個化合物中，共有兩個電子能帶、三個電洞能帶，且所開的膺能隙大小都約略相同，於是乎我們會希望可以利用上面的討論來解釋數據。

在一開始的想法中，我們原本設想的是這個系統可能是一個 $SU(5)$ 的情形，然而，如果真是如此，勢必存在下面這種 Feynman 圖



(Fig.3) Feynman 圖

很明顯的，此時的規範玻色子會帶有電荷，但如果是這種情形，應該會造成實驗上的一些電荷擾動才對。



這對我們來說是其中一個奇怪的困難點，而另外的問題在對 $SU(N)$ 系統而言，我們會存在有 $N^2 - 1$ 的規範玻色子，然而我們整個系統內是不是真的有這麼多的激發態呢？我認為在現在的實驗上並沒有出現任何的證據支持更多的規範玻色子存在。

4.2 Discussion

對於 $SU(N)$ 的系統而言，我們可以加入很多種不對稱項，使整個系統 Goldstone mode 數目已及形式是我們想要的，與 $SU(2)$ 不同的是，我們所加入的不對稱項可能要是四次方項，原因在於如果是平方項的話我們必定可以把他想成一個 $SU(N-m)$ 的子群而無法出現 $SU(K) \times SU(L)$ 這些情形。

另外，如果我們只關心 Lagrange 的話，我們可以注意到整個模型的成立只需要二維的反鐵磁有序以及準二維系統，而並不侷限陶瓷超導體或者金屬上面，事實上，在有機超導體的研究上的確發現了能隙的存在。

然而，對於 $BaFe_2(As_{1-x}P_x)_2$ 這個系統而言，很有可能不是非交換系統，所以我們在實驗上可能看不到帶電荷的規範玻色子，不過許多其他的鐵基超導體仍然在持續實驗中，將來還是會有許多希望的。

Chapter 5 Conclusion



在本文中，嘗試利用 Higgs 機制來推廣 Prof. Chern 的 Stuckelberg 理論，我們發現，在 $SU(2)$ 對稱底下我們可以利用能帶形成的 ϕ 場寫下 Lagrange 密度函數，寫下在一個更加推廣的情形，另外我們可以給定不對稱的特定條件，使 $SU(2)$ 會退化到 $U(1)$ 對稱性，可以近似於原先的 stuckelberg 場，雖然這並不符合我們原先的初衷。

在更高對稱性 $SU(N)$ 下，我們發現會有 $N-1$ 個電子所獲的質量修正相同，另外會有一個電子的質量修正較大，並且整個系統保有 $SU(N-1)$ 的對稱性，對於多能帶系統而言，我們確實跨出了一步。

在擁有多重能帶的膺能隙的系統，我們给出了一些初步的想法，剩下的問題就在於實驗上的觀測證據。

然而，對於真實系統而言，並非一定要用更高的對稱性來描述他，但這並不表示沒有真實系統對應到本文的非交換規範系統，對於多能帶系統而言，有許多化合物的認知尚淺，期望在不久的將來可以看到真正對應的本文的系統。

REFERENCE



- [1] Chyh-Hong Chern , Annals of Physics 350, 159 (2014)
- [2] T. Shimojima , T. Sonobe, K. Ishizaka, Phys. Rev. B 89, 045101(2014)
- [3] F. Buccella , H. Ruegg, Carlos A. Savoy, Nucl.Phys. B169 (1980) 68
- [4] Ling Fong Li, Phys. Rev. D9 (1972) 1723
- [5] Michael E. Peskin , Daniel V. Schroeder, “An introduction to Quantum field theory”(1995)
- [6] Lewis H. Ryder, “Quantum field theory”(1996)
- [7] Howard Goergi, “Lie Algebras in Particle Physics”(1999)
- [8] <https://en.wikipedia.org/wiki/Superconductivity>
- [9] https://en.wikipedia.org/wiki/BCS_theory
- [10] https://en.wikipedia.org/wiki/High-temperature_superconductivity
- [11] https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_spin_liquid

Appendix A

廣義 Gell-mann 矩陣



對於 $SU(N)$ 而言，我們可以從 $SU(N-1)$ 的子群開始建構，已知對於每種李群而言，我們可以從簡單的 Cartan 子代數下手。

首先，我們給定一些 Cartan 產生子，並且限定他們有以下的條件

$$H_i = H_i^\dagger, \quad [H_i, H_j] = 0$$

這邊的 i, j 所表示的是線性獨立的產生子的標示，對一個 $SU(N)$ 群而言，我們有 $N-1$ 個獨立的產生子，接著我們選定基底及 normalized 的條件，使

$$\text{tr}(H_i H_j) = \frac{1}{2} \delta_{ij}$$

此時，為了方便起見，我們可以利用尚存的額外自由度來對角化我們的產生子

$$[H_m]_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2m(m+1)}} \left(\sum_{k=1}^m \delta_{ik} \delta_{jk} - m \delta_{i,m+1} \delta_{j,m+1} \right)$$

爾後為了建構整個群的表示，我們可以先給定基底

$$[b_m]_j = \delta_{mj}$$

接著我們可以討論在所有 Cartan 產生子所形成的 $N-1$ 為空間，並且討論這些

給定的基底在 Cartan 產生子的空間的權重，對於單一基底的權重形成權重向量 α_i ，對於每個權重向量就代表一個固定狀態，同時給定一個狀態是在會給出固定權重向量的狀態

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha$$

這些狀態並不是厄米共軛的

$$[H_i, E_\alpha^\dagger] = -\alpha_i E_\alpha^\dagger$$

我們可以定義

$$E_\alpha^\dagger = E_{-\alpha}$$

$$\langle E_\beta | E_\alpha \rangle = \delta_{\alpha\beta}$$

所以我們有

$$[E_\alpha, E_\alpha^\dagger] = \alpha_i H_i$$

由此我們可以建構對於不同的基底向量來說他們的升降算符，就像我們在量物課所學到的一樣，所以我們有/2

$$E_{mn} = (I_{mn} + I_{nm})/2$$

$$E_{mn}^* = -i(I_{mn} - I_{nm})/2$$

這邊的 E 指的是產生子， I_{nm} 指第 m,n 項為一，其他都是零，且 $m < n < N$

Appendix B

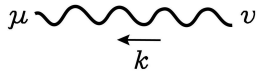


Feynman 規則

給定

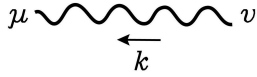
$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger}(x)(i\partial_0)\psi_{\sigma} - \frac{1}{2m} [(-\frac{\nabla}{i} - g\vec{a})\psi_{\sigma}^{\dagger}][(\frac{\nabla}{i} - g\vec{a})\psi_{\sigma}] - ga_0\psi_{\sigma}^{\dagger}\psi_{\sigma} - \frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{2}M_0^2(D_0\phi_k)^{\dagger}(D_0\phi_k) - \frac{1}{2}M_1^2(D_i\phi_k)^{\dagger}(D_i\phi_k) + \frac{\mu^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 \end{aligned}$$

則



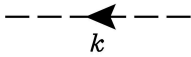
$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}^{-1} = & -i[(g_{\mu\nu}k^2 - k_{\mu}k_{\nu}) + t^2(M_0^2\delta_{00} - M_1^2\delta_{ij}) \\ & - \frac{1}{\xi}(M_0^4k_0^2 + 2M_0^2M_1^2k_0k_i + M_1^4k_ik_j)] \end{aligned}$$

(有質量的)

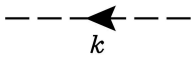


$$\Delta_{\mu\nu} = \frac{-i}{k^2}(g_{\mu\nu} + (1 - \frac{1}{\xi})\frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2})$$

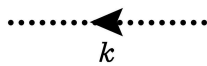
(無質量的)



$$\Delta_{Higgs} = \frac{i}{M_0^2k_0^2 - M_1^2k_i^2 - 2\mu^2}$$



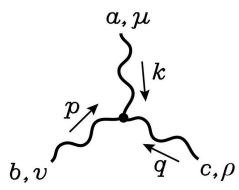
$$\Delta_{Goldstone} = \frac{i}{M_0^2k_0^2 - M_1^2k_i^2 - \xi t^2}$$



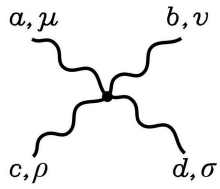
$$\Delta_{Ghost} = \frac{i}{M_0^2k_0^2 - M_1^2k_i^2 - \xi t^2}$$



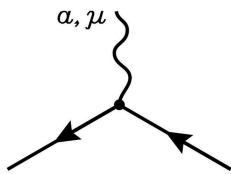
$$\Delta_{Fermion} = \frac{i}{k_0 - \frac{k_i^2}{2m}}$$



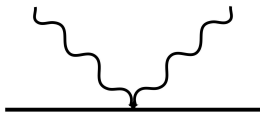
$$gf^{abc}[g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu]$$



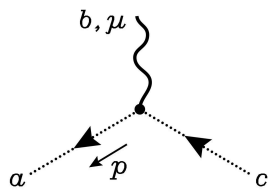
$$-ig^2[f^{abe}f^{cde}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) + f^{ace}f^{bde}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) + f^{ade}f^{bce}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})]$$



$$igv^\mu\tau^a, \quad v^\mu = (1, \frac{k^i}{m})$$



$$\frac{ig^2}{2m}$$



$$-gf^{abc}k^u$$

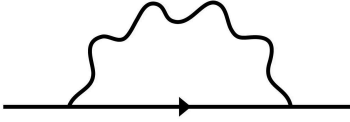
Appendix C



圈圖計算

一．獲得質量的規範玻色子

A.



$$(-ig)^2 \int \frac{d\omega d^2k}{(2\pi)^3} v^\mu v^\nu G_{\mu\nu}(k, \omega) G_{Fermion}(p-k, E-\omega)$$

帶入傳遞子後，並給定 $M_1 = M_0$

$$(-ig)^2 \int \frac{d\omega d^2k}{(2\pi)^3} \frac{1 - \frac{k_i^2}{m^2} - \frac{1}{M_0^2}(\omega + \frac{k_i^2}{m})^2}{\omega^2 - k_i^2 - M_0^2 + i\eta} \frac{1}{E - \omega - \frac{(p_i - k_i)^2}{2m} + i\eta}$$

給 $E = p_i = 0$ 定

$$g^2 \int \frac{d\omega d^2k}{(2\pi)^3} \frac{1 - \frac{k^2}{m^2} - \frac{1}{M_0^2}(\omega + \frac{k_i^2}{m})^2}{\omega^2 - k_i^2 - M_0^2 + i\eta_1} \frac{-1}{\omega + \frac{k_i^2}{2m} - i\eta_2}$$

對能量作下半平面複變積分，並且注意化學位勢

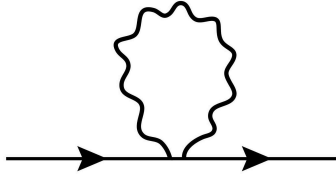
$$2\pi i g^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^3} \left(\frac{1 - \frac{k_i^2}{m^2} - \frac{1}{M_0^2}(\sqrt{k^2 + M_0^2} - \frac{k_i^2}{m} - i\eta_1)^2}{\sqrt{k^2 + M_0^2} - 2i\eta_1} \frac{-1}{\sqrt{k^2 + M_0^2} + \frac{k_i^2}{2m} - i\eta_1 - i\eta_2} \right) - \frac{1 - \frac{k^2}{m^2} - \frac{1}{M_0^2}(-\frac{k_i^2}{2m} + i\eta_2 + \frac{k_i^2}{m})^2}{(\frac{k_i^2}{2m} - i\eta_2)^2 - k_i^2 - M_0^2 + i\eta_1}$$

考慮質量修正應為實數值，則我們取出實數部分，其值正比於 η ，此時令 η 足夠快

的速度趨近於零，我們便可得到大小為零的實數值



B.



$$\frac{-ig^2}{2m} \frac{1}{4} \int \frac{d\omega d^2k}{(2\pi)^3} G_{ii}(k, \omega)$$

帶入傳遞子後

$$\frac{-ig^2}{8m} \int \frac{d\omega d^2k}{(2\pi)^3} \frac{-\omega^2(k_i^2 + 2t^2 M_1^2) + (k_i^2 + t^2 M_1^2)(k_i^2 + 2t^2 M_0^2)}{t^2(-\omega^2 + k_i^2 + t^2 M_0^2 + i\eta)} \frac{1}{(-\omega^2 M_1^2 + (k_i^2 + t^2)M_0^2 + i\eta)}$$

對能量積分作複變積分，在上下半平面各有兩個極點，所以有兩項，得

$$2\pi i \times \frac{ig^2}{8m} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{2\sqrt{k_i^2 + t^2 M_0^2}} + \frac{\sqrt{k_i^2 + t^2 M_1^2}}{2t^2 M_0 M_1} \right)$$

之後對動量積分

$$2\pi i \times \frac{ig^2}{8m} \frac{\pi}{(2\pi)^3} \left(\sqrt{k_i^2 + t^2 M_0^2} + \frac{(\sqrt{k_i^2 + t^2 M_1^2})^3}{3t^2 M_0 M_1} \right)_0^\infty$$

給定一個能量上限 Λ ，則

$$2\pi i \times \frac{ig^2}{8m} \frac{\pi}{(2\pi)^3} \left(\Lambda - tM_1 + \frac{\Lambda^3 - t^3 M_1^3}{3t^2 M_0 M_1} \right)$$

我們可以利用重整化的技巧，給定一個 counter 項，消掉能量上限 Λ 項，剩下重整

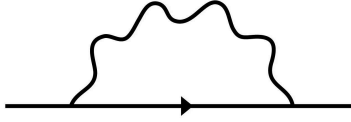
化完的質量是

$$\frac{g^2}{8m} \frac{1}{4\pi} \left(tM_1 + \frac{tM_1^2}{3M_0} \right)$$



二．沒有質量的規範玻色子

A.



$$(-ig)^2 \int \frac{d\omega d^2k}{(2\pi)^3} v^\mu v^\nu G_{\mu\nu}(k, \omega) G_{Fermion}(p-k, E-\omega)$$

帶入傳遞子後，得

$$(ig)^2 \int \frac{d\omega d^2k}{(2\pi)^3} \frac{1 - (\frac{k_i}{m})^2}{\omega^2 - k^2 + i\eta} \frac{1}{E - \omega - \frac{(p_i - k_i)^2}{2m} + i\eta}$$

同樣的給定 $E = p_i = 0$

$$g^2 \int \frac{d\omega d^2k}{(2\pi)^3} \frac{1 - \frac{k^2}{m^2}}{\omega^2 - k_i^2 + i\eta_1} \frac{-1}{\omega + \frac{k_i^2}{2m} - i\eta_2}$$

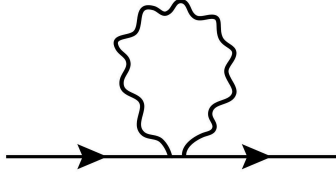
對下半平面積分，並且取出實數部分

$$2\pi i g^2 \int \frac{d\omega d^2k}{(2\pi)^3} \frac{(1 - \frac{k^2}{m^2})[(|k_i| + \frac{k_i^2}{2m})i\eta_1 + |k_i|i(\eta_2 + \eta_1)]}{2k_i^2 + 2\eta_1^2} \frac{-1}{(-|k_i| + \frac{k_i^2}{2m})^2 + (\eta_2 + \eta_1)^2} - \frac{1 - \frac{k^2}{m^2}}{(\frac{k_i^2}{2m} - i\eta_2)^2 - k_i^2 + i\eta_1}$$

同樣的我們可以給定 η 以足夠快的速度趨近於零，所以這部分一樣不貢獻質量



B.



$$\frac{-ig^2}{2m} \frac{1}{4} \int \frac{d\omega d^2k}{(2\pi)^3} G_{ii}(k, \omega)$$

帶入傳遞子後

$$\frac{ig^2}{2m} \int \frac{d\omega d^2k}{(2\pi)^3} \frac{2}{\omega^2 - k^2 + i\eta}$$

讓這個個函數做一個時間域的轉換 $i\tau = \omega$ ，則變成

$$\frac{g^2}{2m} \int \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2}$$

結果為

$$\frac{g^2}{2m} \frac{1}{2\pi^2} k]_0^\infty$$

同樣的給定一個能量上限

$$\frac{g^2}{2m} \frac{1}{2\pi^2} \Lambda$$

這整項都可以被 counter 項給重整化至零，於是我們會得到不帶質量的玻色子不貢

獻任何費米子的質量修正