

國立臺灣大學工學院土木工程學系

碩士論文

Department of Civil Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis



以邊界積分方程方法求解尤拉梁的反算外力問題  
By Using Boundary Integral Equation Method to Solve  
the Inverse Problems of Forces of Euler-Bernoulli Beams

許桓誠

Huan-Cheng Hsu

指導教授：劉進賢 博士

Advisor: Chein-Shan Liu Ph.D.

中華民國 105 年 7 月

July, 2016

國立臺灣大學碩士學位論文  
口試委員會審定書

以邊界積分方程方法求解尤拉梁的反算外力問題

By Using Boundary Integral Equation Method to Solve the  
Inverse Problems of Forces of Euler-Bernoulli Beams

本論文係許桓誠君 (R03521208) 在國立臺灣大學土木工程學系碩士班完成之碩士學位論文，於民國 105 年 07 月 11 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

劉進賢

(指導教授)

張致文

郭仲倫

劉進賢

張致文

郭仲倫

系主任

呂良正

呂良正

(簽名)

## 誌謝

歲月如流，研究所的時光即將邁入尾聲，學生時代也即將劃上句點，但這並不是結束，而是另一個開始。回顧這兩年的點點滴滴，受之於太多人的幫忙以及照顧，感謝這些日子裡老師們不遺餘力的教導、研究室同學們的幫助與勉勵，以及家人給予了我這個機會能夠來到這學術的殿堂，並不時地鼓勵與支持尚不成熟的我，使我得以完成學業。若沒有各位老師、同學、貴人以及家人，我是無法順利完成這段歷程的。

感謝指導教授劉進賢老師於論文的指導，諸多提攜使我從對數值方法一知半解，到現在能夠窺得邊界積分方程方法的一貌，可謂是受益良多。而劉老師平時也從未鬆懈，教導我們之餘也仍在孜孜不倦的努力、推陳出新，期間也提出許多新奇有創意的的方法，相信對未來的工程與科學方面能夠產生深遠的影響。老師對於學問夙夜匪懈、毫不馬虎的態度，吾等將謹記在心。


感謝口試委員張致文博士與郭仲倫學長能撥空前來，提供了許多寶貴的意見與修正，也謝謝學長在百忙之餘還能幫忙校對與潤飾文句，並在不斷的勘誤與修改中使本論文更趨完善。

感謝學長育誠、子鳴、芳毅、聖學、庭瑜、揚志、章靖及學姐孟芹、汶欣，或課業或生活上的指點與解惑。也感謝勝宣、小美學長的經驗分享以及歡快的遊戲時光。感謝暄雯、定恩、易佑、郁傑、博竣、昱志、偉汝與昱文，有了你們的陪伴與鼓勵，讓我能夠有所成長，也總能在我迷惘時為我解惑，沒有了你們，這兩年的生活將不會是這麼美好的光景。另外，要感謝鍾立來老師團隊實驗組的郁傑、昱志，讓我們也能有參與實驗的機會，雖然實驗過程是很辛苦勞累，但能參與到實驗的各個環節、見證試體的破壞也能感到與有榮焉。也感謝博竣同學，不論是在課業或論文都給予莫大幫助，使本論文得以建立雛形。謝謝王者們賴濤與致寬以及學弟魏蒙、柏彰與毅恩，有你們的生活點滴、日常中言不及義的瞎扯以及在口試前後的幫忙，你們的幫忙我將銘記在心，也為這兩年的生活增添了許多

色彩，恭喜我們也祝福學弟們都能夠順利走過這兩年。最後要感謝我的女友，在這段努力奮鬥的日子裡始終沒有來打擾過我，讓我得以專心致志於學術，順利完成畢業論文。

「回首向來蕭瑟處，歸去、也無風雨也無晴。」一路上充滿著多少歡笑、多少淚水，但總歸是要結束的。或有不捨、或有失落，但人生仍是得繼續向前行。

## 摘要



在梁的分析模型中，通常使用尤拉—伯努力梁方程理論，在正算尤拉梁問題其解決方法則不計其數。然而當問題的待求項變為系統參數之一時，其複雜度則非一般正算問題可比擬。本論文介紹了解決非齊性的尤拉梁方程反問題的一種數值方法，其目的為在梁上找回其外力(源識別問題)。本篇論文將邊界積分方程方法應用至尤拉梁上，以其振態作為伴隨測試函數，再以我們假設的試解帶入積分方程，以數值方法解此代數方程組，即可得到外力源之數值解。在論文中將以數值算例實際求解尤拉梁的反問題，其中包含四種不同邊界條件的梁以及使用傅立葉級數與振型函數兩種試解之基底，並分析其數值結果。

**關鍵字：**尤拉梁、邊界積分方程方法、反問題、源識別問題，格林第二定理。

## ABSTRACT

Euler-Bernoulli beam theory is a typical beam theory when discussing the behavior of beams. There are several methods to obtain the behaviors of the Euler-Bernoulli beam under an external force, but without knowing the external force, the problem becomes an inverse source problem which is the subject of this thesis. Different from the direct problems, the inverse problems are considered more ill-posed. In this thesis, the boundary integral equations method will be adopted to solve the Euler-Bernoulli beam problem, with its mode shape as an adjoint test function. Then, we assume the trial solution of the integral equation. Finally, we can obtain the numerical solution of the external force. Six examples of Euler beam are used to test the performance of the present method.

**Keywords:** Euler-Bernoulli beam, Boundary integral equations method, Inverse problem, Source identification problem, Green's second identity

# 目錄



口試委員審定書 .....	i
誌謝 .....	ii
摘要 .....	iv
ABSTRACT.....	v
目錄 .....	vi
表目錄 .....	viii
圖目錄 .....	ix
第一章 緒論 .....	1
1.1 前言 .....	1
1.2 文獻回顧 .....	2
1.3 研究動機與目的 .....	3
1.4 論文架構 .....	3
第二章 理論基礎 .....	5
2.1 自我伴隨運算子(Self-Adjoint Operator).....	5
2.2 Trefftz 方法(Trefftz Method).....	6
2.3 廣義格林第二定理(General Green's Second Identity).....	6
2.4 尤拉法(Euler Method).....	8
2.5 辛普森法(Simpson's Rule).....	9
2.6 龍格—庫塔法(Runge-Kutta Method).....	11
2.7 高斯—克朗羅德法(Gauss-Kronrod Quadrature Formula).....	12
2.8 擬時間積分法(Fictitious Time Integration Method).....	15
2.9 共軛梯度法(Conjugate Gradient Method).....	16
2.10 傅立葉級數(Fourier Series).....	19
第三章 尤拉梁的邊界積分方程 .....	21

3.1	反問題 .....	21
3.2	尤拉梁的邊界積分方程推導 .....	21
3.3	簡支梁分析 .....	24
3.4	懸臂梁分析 .....	26
3.5	兩端固定梁分析 .....	28
3.6	一端固定與一端簡支梁 .....	30
第四章	數值算例 .....	34
4.1	數值算例一 .....	34
4.2	數值算例二 .....	36
4.3	數值算例三 .....	38
4.4	數值算例四 .....	39
4.5	數值算例五 .....	40
4.6	數值算例六 .....	43
第五章	結論與未來工作 .....	63
參考文獻	.....	66





## 表目錄

表 2-1	高斯點的數目與其位置、權重列表 .....	14
表 2-2	G7 高斯點位置與權重 .....	14
表 2-3	K15 克朗羅德點位置與權重 .....	14
表 4-1	以不同積分法求得 $C_1 \times C_3$ 之比較表 .....	43



## 圖目錄



圖 2-1	格林定理定義區間示意圖 .....	6
圖 2-2	尤拉法示意圖 .....	9
圖 2-3	辛普森積分法示意圖 .....	11
圖 2-4	RK4 法示意圖 .....	12
圖 2-5	共軛梯度法流程圖 .....	18
圖 3-1	簡支梁示意圖 .....	24
圖 3-2	懸臂梁示意圖 .....	26
圖 3-3	兩端固定梁示意圖 .....	28
圖 3-4	一端固定與一端簡支梁示意圖 .....	31
圖 4-1	算例一，簡支梁外力之數值解與解析解之比較 .....	45
圖 4-2	算例一，簡支梁外力之數值解與解析解之誤差 .....	45
圖 4-3	算例一，簡支梁外力函數 $F(x,t)$ 之數值解與解析解之誤差 .....	46
圖 4-4	算例二，FTIM 於求解懸臂梁之特徵值與近似解之差值 .....	46
圖 4-5	算例二，FTIM 求解懸臂梁之特徵值之殘差 .....	47
圖 4-6	算例二，懸臂梁外力之數值解與解析解之比較 .....	47
圖 4-7	算例二，懸臂梁外力之數值解與解析解之誤差 .....	48
圖 4-8	算例二，懸臂梁外力函數 $F(x,t)$ 之數值解與解析解之誤差 .....	48
圖 4-9	算例二，共軛梯度法之初值選擇對於外力反算之影響 .....	49
圖 4-10	算例二，選取最佳 CGM 之初值後，外力之數值解與解析解之比較 .....	49
圖 4-11	算例二，選取最佳 CGM 之初值後，外力之數值解與解析解之誤差 .....	50
圖 4-12	算例二，懸臂梁外力函數 $F(x,t)$ 之數值解與解析解之誤差 .....	50
圖 4-13	算例二，懸臂梁外力函數 $F(x,t)$ 之數值解與解析解之誤差 .....	51

圖 4-14	算例三， $G(t)$ 之共軛梯度法初值選擇之影響 .....	51
圖 4-15	算例三， $G(t)$ 之數值解與解析解之比較 .....	52
圖 4-16	算例三， $G(t)$ 之數值解與解析解之誤差 .....	52
圖 4-17	算例三，懸臂梁外力函數 $F(x,t)$ 之數值解 .....	53
圖 4-18	算例三，懸臂梁外力函數 $F(x,t)$ 之解析解 .....	53
圖 4-19	算例三，懸臂梁外力函數 $F(x,t)$ 之數值解與解析解之誤差 .....	54
圖 4-20	算例三， $G(t) = \sin(t)$ 的數值解與正解之比較 .....	54
圖 4-21	算例三， $G(t) = \sin(t)$ 的數值解與正解之誤差 .....	55
圖 4-22	算例三， $G(t) = (1-t)^2$ 的數值解與正解之比較 .....	55
圖 4-23	算例三， $G(t) = (1-t)^2$ 的數值解與正解之誤差 .....	56
圖 4-24	算例四，兩端固定梁共軛梯度法初值選擇之影響 .....	56
圖 4-25	算例四，兩端固定梁外力之數值解與解析解比較 .....	57
圖 4-26	算例四，兩端固定梁外力之數值解與解析解之誤差 .....	57
圖 4-27	算例五，外力之數值解(辛普森法)與解析解比較 .....	58
圖 4-28	算例五，外力之數值解(高斯-克朗羅德法與 RK4)與解析解比較 ..	58
圖 4-29	算例五，外力之數值解(高斯-克朗羅德法)與解析解之誤差 .....	59
圖 4-30	算例五，外力之數值解(RK4)與解析解之誤差 .....	59
圖 4-31	算例五，不同數值積分方法求得之 $e_k$ 之比較 .....	60
圖 4-32	算例五，不同數值積分方法求得之 $C_2 \times C_3$ 之比較 .....	60
圖 4-33	算例五，不同數值積分方法求得之 $C_1 \times C_3$ 之比較 .....	61
圖 4-34	算例六，外力之數值解與解析解比較 .....	61
圖 4-35	算例六，外力之數值解與解析解之誤差 .....	62

# 第一章 緒論



## 1.1 前言

土木工程其涵蓋的範疇甚廣，舉凡一切與水、土、民生議題相關的基礎建設包括，道路、橋梁、房屋、交通以及水利之規劃階段、建造到維修，均脫離不出其框架。由於其包含之內容廣泛，加上隨著時間演進，工程理論與科技也隨之完善、複雜，並且各自獨立成科。雖然土木學門已分為眾多分支，但其旨仍在提高人類之生活品質，跨領域結合各自的專業，使我們更具深度與廣度，以期能發展出獨特且創新的概念，以利應付與解決對於未知的各種問題。

在研究工程問題當中，因為對於現實中，無論來自人為、天災或是資訊的不充足，以及真實情況的複雜性等等因素造成研究、分析的困難，因此我們常會設想其為一理想的情況，或是加上合理的假設及前提，例如：尤拉梁(Euler-Bernoulli beam)，其關鍵在於假設為梁的法線是保持筆直且與梁的中線垂直的，考慮線彈性理論，而梁內部的剪力變形則很小且可忽略的，接著切割取其元素做力平衡即可得到尤拉梁的控制方程式。而隨著邊界條件或初始條件的變動，又可分為邊界值問題或初值問題，問題不僅多元化，其定義域也隨之複雜，對於解析解的求得也隨之更加困難，此時，數值分析方法就將會是一個相當重要的工具。於是許多學者發展出了如有限元素法(FEM, Finite element method)、有限差分法(FDM, Finite difference method)、邊界元素法(BEM, Boundary element method)等等。而有限元素法的快速發展不僅僅在結構分析上廣泛使用，在熱傳導及電磁波等現象的描述也有不錯的表現，有限元結合了變分原理(variational principle)和差分格式，利用假設形函數(shape function)，加上節點(node)的設置，進而求得變位場(displacement field)，從而建立整體力學系統之關係，即解出節點上未知場量後，可以由內插法(interpolation)求出場內任何位置的未知變量。而邊界元素法則主要利用散度定理(divergence theorem)降低了原問題的維度，使我們僅需對邊界作離散化(discretization)，意即可以將區域問題轉化為邊界問題，藉著只需在邊界上做處理，即可得到原問題之解。

而傳統的邊界積分方程(BIE, Boundary integral equation)其解析之方式乃將其

邊界條件離散化，並利用格林函數(Green functions)作為其基本解，組合而成積分方程式，沿邊界積分並得知定義域內的變化情形，獲得域內任何一點之場量。而本論文將其應用至尤拉梁上，使用尤拉梁之振型函數(mode shape)作為其基本解的型式，並稱之為邊界積分方程方法(Boundary integral equations method)。

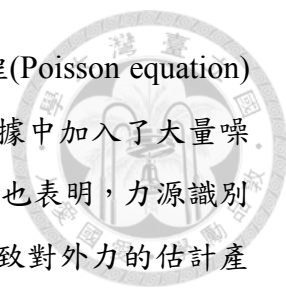
## 1.2 文獻回顧

在工程結構當中，梁是一個相當重要的基本元件之一，對於邊界條件、初始條件、外力與系統參數等等皆已知的情況下，解出系統之位移、速度與加速度，即為外力振動之正算問題，此方面已有相當豐碩的研究成果。而反過來當位移、速度與加速度為已知，其它參數有任何一項為未知的情形，則稱為反算問題。

而最為常用的梁模型則是基於經典的尤拉-伯努力梁方程理論，即我們所廣泛使用的尤拉梁，且其為工程各大領域的基本模型，對於非齊性的動態尤拉梁，其振動由  $u_{tt}(x,t) + \alpha u_{xxxx}(x,t) = H(x)G(t)$  決定。這裡  $u(x,t)$  為位移函數，取決於空間  $x \in (0, \ell)$  和時間  $t \in (0, t_f)$  的變量， $H(x)$  和  $G(t)$  為在空間和時間的外力分佈， $\alpha = EI / (\rho A)$  為常數，由彈性模數  $E$ 、轉動慣量  $I$ 、斷面積  $A$  與材料密度  $\rho$  所決定。

而在偏微分方程的控制理論中，有許多在尤拉梁的控制方程上進行參數辨識的問題獲得了相當多的關注，如 Lagnese[16]、郭[8]，Krstic 等人[14]，Krstic 與 Smyshlyaev [13]、張與郭[4]，劉[21]等等諸多研究。而尤拉梁的參數識別問題大致可分為兩類：第一類為反頻譜問題[2][7]，其方法主要仰賴頻譜數據得到梁的物理參數而得以進行，然而在實際應用上測得之數據，很難獲得其頻譜數據的部分。第二類則是基於觀察的方法[4,17,18]，由邊界輸入和觀測來探討尤拉梁方程在可變空間係數的識別。

而在源識別問題的部分則有一維熱傳導方程的熱源問題[3,5,6,15,20,26]、振動懸臂梁的未知源識別問題[9]，以及學者劉[21]結合了李群自適應法(LGAM, Lie-group adaptive method)與微分求積法(DQM, Differential quadrature method)來求解在尤拉梁振動方程的恢復未知外力問題。另外，劉[22]利用全域邊界積分方程方法，透過選擇適當的 Trefftz 測試函數(Trefftz test function)，對於求解未知的邊界條件的



柯西反問題(inverse Cauchy problems)效果非常好，且在帕松方程(Poisson equation)的逆源問題(inverse source problems)中，即使是非常病態或在數據中加入了大量噪音的情況下，仍能得到相當穩定且有效的數值解。而從以上結果也表明，力源識別問題是一種高度病態問題，即若量測數據中有一小擾動，可能導致對外力的估計產生巨大的錯誤。

縱上所觀，雖然參數識別問題的研究已然相當全面，但在尤拉梁的源識別問題[9,10,12,17,21]部分結果並不多。而由前述的文獻中可發現對於尤拉梁方程式中的反問題，邊界積分方程方法應能有效地解決問題，且具有相當的可靠性。

### 1.3 研究動機與目的

在工程上我們常以尤拉梁作為真實橋梁的簡化模型，而在尤拉梁正算的部分，此方面已經有相當多的研究成果[1,11,13,25,27]。而系統參數未知的問題統稱反問題，然而反問題又可依據其未知參數的類型分為五大類，此部分將於後續說明。對於尤拉梁的力源問題，學者劉[21]則以李群自適應法搭配微分求積法得到解決。

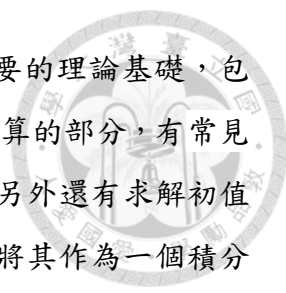
依據學者劉提出的邊界積分方程方法(BIEM, Boundary integral equations method)，其能夠有效解決各類偏微分方程問題，且也能取得誤差很小之數值解，在2015年的柯西反問題與帕松方程[22]中，已然得到相當穩定的結果。

於是本論文嘗試將邊界積分方程方法應用至尤拉梁的力源反算問題，並且以選取特定之伴隨測試函數來消除尤拉梁的未知邊界條件，最後則以不同之試解基底測試不同基底對於求解結果的精度與穩定性的影響。

### 1.4 論文架構

本文共計分為五個章節，各章的簡述如下：

第一章為緒論，講述為了求解尤拉梁之控制方程式的數值解，多種數值方法的發展與演進，以及回顧過去文獻中的諸多成果，且經由這些文獻促使我們發展新的研究方向，也就是將邊界積分方程方法應用到尤拉梁的力源識別問題，再嘗試以不同的試解基底使求解結果更加完善。



第二章主要介紹本篇論文之核心—邊界積分方程方法所需要的理論基礎，包括自我伴隨運算子、Trefftz 方法與廣義格林定理等；而在數值計算的部分，有常見的數值積分方法，如尤拉法、辛普森法、高斯—克朗羅德法等，另外還有求解初值問題最為泛用的四階龍格—庫塔法，且因其具有四階精度，我們將其作為一個積分精度的參考標準；還包括用以求解線性代數方程組的共軛梯度法、以及劉教授於 2008 年發展的一套用以解非線性代數方程的方法—擬時間積分法[19]。

第三章將以第二章的理論基礎，發展本篇論文的核心，推導尤拉梁的邊界積分方程，並列舉了邊界積分方程應用於數種不同支承類型的梁之情形，由邊界條件推導其各自的特徵方程式、振態與伴隨測試函數等。

第四章為數值算例驗證，從簡支梁、懸臂梁開始，對於以傅立葉級數作為試解之基底的反求外力是否有其可行性，分析與檢討其結果成功與不足的地方，並針對不足的地方加以改善，再討論試解之基底的選擇對於數值解的反應與影響，確認其是否仍保有精確性。

第五章為結論與未來工作，對於數值算例所得到之結果進行討論，分析其成功與失敗、不足的地方，提出可能改善的空間以及對於未來能得以繼續研究的方向，並期望能有更好的發展。

## 第二章 理論基礎



### 2.1 自我伴隨運算子(Self-Adjoint Operator)

定義一運算子  $L$ ，當其作用在一函數  $u$  時，會產生另一函數  $f$ ，數學型式表示為

$$Lu = f \quad (2.1)$$

若存在某一數學型式

$$\int_{\alpha}^{\beta} vLudx = J(u, v) + \int_{\alpha}^{\beta} uL^*vdx \quad (2.2)$$

則稱  $L^*$  是伴隨運算子(adjoint operator)，其中若  $L^* = L$  時，則  $L$  稱之為自我伴隨運算子。

舉一維拉普拉斯算符(Laplacian)為例，定義  $Lu = \frac{d^2u}{dx^2}$ ，可以得到

$$\int_{\alpha}^{\beta} vLudx = \int_{\alpha}^{\beta} v \frac{d^2u}{dx^2} dx \quad (2.3)$$

經由分部積分法(integration by parts)可以得到

$$\int_{\alpha}^{\beta} v \frac{d^2u}{dx^2} dx = v \frac{du}{dx} \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} dx \quad (2.4)$$

再進行一次分部積分可以得到

$$\int_{\alpha}^{\beta} v \frac{d^2u}{dx^2} dx = v \frac{du}{dx} \Big|_{\alpha}^{\beta} - \left[ \frac{dv}{dx} u \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d^2v}{dx^2} u dx \right] \quad (2.5)$$

經過整理得到

$$\int_{\alpha}^{\beta} v \frac{d^2u}{dx^2} dx = \left[ v \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} u \right] \Big|_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d^2v}{dx^2} u dx \quad (2.6)$$

表示為

$$\int_{\alpha}^{\beta} vLudx = J(u, v) + \int_{\alpha}^{\beta} uL^*vdx \quad (2.7)$$

其中  $L^* = \frac{d^2}{dx^2} = L$ ，即  $L$  為自我伴隨運算子。





## 2.2 Trefftz 方法(Trefftz Method)

Trefftz 方法(Trefftz, 1926)是用來解決線性偏微分方程式的數值方法，其方法是以數個同樣滿足控制方程式的基底函數(basis function)之線性組合來近似方程式的解，基底推導的過程不需理會初始條件與邊界條件。而其基底的係數是由邊界條件來確定，進而構成一代數方程組(system of algebraic equations)，以這樣近似求解的方法來處理正算或反算問題。

學者劉於 2012 年將其發展為尤拉梁的來源識別(source identification)問題，並於 2016 年找到一函數不僅能滿足伴隨控制方程式，也滿足邊界條件，即結合 Trefftz 方法與伴隨函數的特性，並稱其為伴隨測試函數(adjoint test function)。其中伴隨函數的性質為其滿足的邊界條件與待求函數  $u$  一致，使得方程式中含有未知邊界條件的項將會消失，藉由消去多餘的未知項，使方程式具有唯一解。

對於不同邊界條件的梁的類型，其伴隨測試函數也不盡相同。此部分將於第三章針對不同邊界條件的狀況推導其各自的伴隨測試函數。

## 2.3 廣義格林第二定理(General Green's Second Identity)

格林定理給予了在封閉區間  $\Omega$  的雙重積分與沿其封閉曲線上  $\Gamma$  的線積分之間的關係。

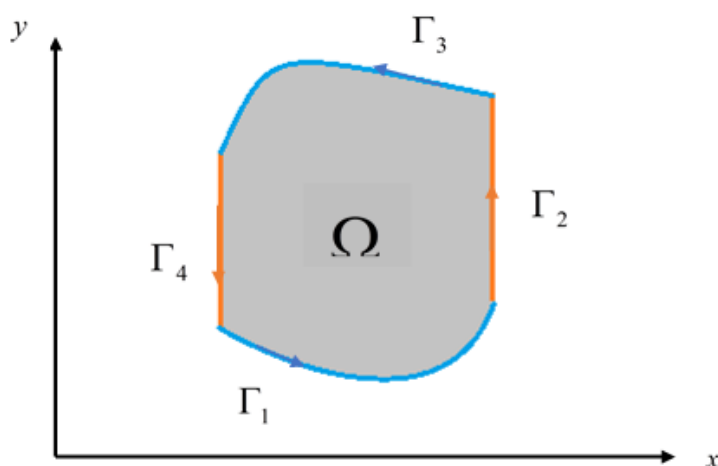


圖 2-1 格林定理定義區間示意圖



格林定理的內容如下：若函數  $M(x, y)$  與  $N(x, y)$  在定義在區間  $\Omega$  且具有連續偏導數，則

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} (M dx + N dy) \quad (2.8)$$

再來將其推廣到梁的方程式上，定義梁運算子 (beam operator) 為  $\square$ ，即

$$\square u(x, y) = u_{tt} + \alpha u_{xxxx} \quad (2.9)$$

假設  $\Omega$  為一於  $(x, t)$  平面上的有界區域，且由一逆時針方向的環線  $\Gamma$  包圍，而此環線由數段光滑曲線組成。令函數  $u(x, t)$  與  $v(x, t)$  在  $\Omega$  上可微且於  $\Omega$  上連續，並結合自我伴隨運算子與伴隨測試函數的概念，可以得到

$$\iint_{\Omega} (v \square u - u \square v) dx dt = \oint_{\Gamma} (M dx + N dt) \quad (2.10)$$

其中  $u$  即為梁的位移函數、 $v$  為上節提到的伴隨測試函數、 $M$  與  $N$  是與梁的邊界條件有關，接下來推導(2.10)式。

考慮梁運算子的部分

$$\iint (v \square u) dx dt \quad (2.11)$$

展開可以得到

$$\iint v u_{tt} dx dt + \alpha \iint v u_{xxxx} dx dt \quad (2.12)$$

分成

$$\iint v u_{tt} dx dt \quad (2.13a)$$

$$\iint v u_{xxxx} dx dt \quad (2.13b)$$

兩個部分來進行處理。

首先處理(2.13a)式的部分，先考慮一數學式

$$u v_t - v u_t \quad (2.14a)$$

由分部積分法可以得到

$$\begin{aligned} u v_t - v u_t &= \left( \int u_t v_t dt + \int u v_{tt} dt \right) - \left( \int v_t u_t dt + \int v u_{tt} dt \right) \\ &= \int u v_{tt} dt - \int v u_{tt} dt \end{aligned} \quad (2.14b)$$

將(2.14b)式經過移項後再對  $x$  積分可以得到



$$\begin{aligned}\iint vu_{tt}dtdx &= \iint uv_{tt}dtdx - \int (uv_t - vu_t)dx \\ &= -\iint uv_{tt}dtdx - \int (uv_t - vu_t)dx\end{aligned}\quad (2.14c)$$

由(2.14c)式可以得到(2.13a)式表示為

$$\begin{aligned}\iint vu_{tt}dtdx &= -\iint vu_{tt}dtdx \\ &= -(-\iint uv_{tt}dtdx - \int (uv_t - vu_t)dx) \\ &= \iint uv_{tt}dtdx + \int (uv_t - vu_t)dx\end{aligned}\quad (2.15)$$

而同樣的(2.13b)式可經由分部積分法得到

$$\iint vu_{xxxx}dtdx = \iint uv_{xxxx}dtdx + \int (vu_{xxx} - v_x u_{xx} + v_{xx} u_x - v_{xxx} u)dt \quad (2.16)$$

將(2.15)與(2.16)式代入(2.12)式，得到

$$\begin{aligned}&\iint vu_{tt}dtdx + \alpha \iint vu_{xxxx}dtdx \\ &= (\iint uv_{tt}dtdx + \int (uv_t - vu_t)dx) + \alpha (\iint uv_{xxxx}dtdx + \int (vu_{xxx} - v_x u_{xx} + v_{xx} u_x - v_{xxx} u)dt)\end{aligned}\quad (2.17)$$

經移項整理後得到

$$\begin{aligned}&\iint v(u_{tt} + \alpha u_{xxxx}) - u(v_{tt} + \alpha v_{xxxx})dtdx \\ &= \int (uv_t - vu_t)dx + \alpha \int (vu_{xxx} - v_x u_{xx} + v_{xx} u_x - v_{xxx} u)dt\end{aligned}\quad (2.18)$$

最後得到

$$\iint_{\Omega} (v \square u - u \square v)dtdx = \oint_{\Gamma} (uv_t - vu_t)dx + \alpha \int (vu_{xxx} - v_x u_{xx} + v_{xx} u_x - v_{xxx} u)dt \quad (2.19)$$

(2.19)式為之後推導邊界積分方程的基礎。

## 2.4 尤拉法(Euler Method)

尤拉法是一種求解已知初始值的常微分方程問題的方法，其為一階方法，是解決常微分方程問題中最為簡單的一種，其方法為將時間部分細分，再利用初值與微分項進行求解。

以一階常微分方程為例，並給定初始值

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_n \quad (2.20)$$



將區間  $[t_0, t_n]$  切割成  $N$  個子區間，則每一子區間

$$h = \frac{t_n - t_0}{N} \quad (2.21)$$

其中  $h$  稱為積分間距(step size)，且

$$t_i = t_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (2.22)$$

並經過計算能得微分方程之近似解

$$\begin{aligned} y(t_0) &= y_0 \\ y(t_1) &:= y_1 \approx y_0 + hF(t_0, y_0) \\ y(t_2) &:= y_2 \approx y_1 + hF(t_1, y_1) \\ &\vdots \\ y(t_n) &:= y_n \approx y_{n-1} + hF(t_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

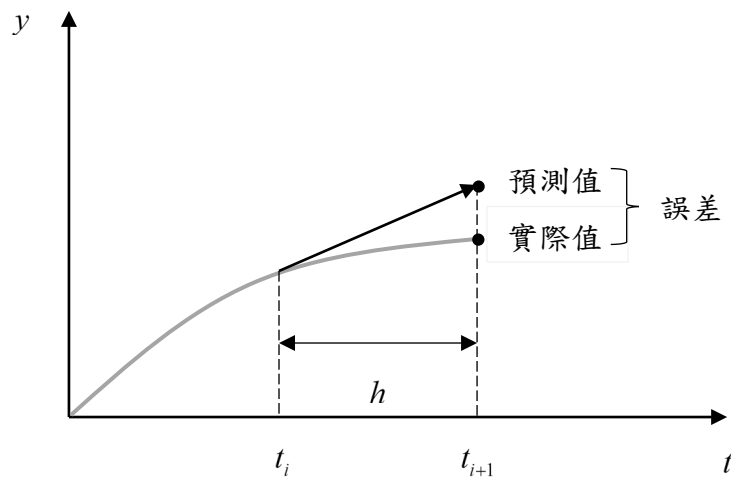


圖 2-2 尤拉法示意圖

## 2.5 辛普森法(Simpson's Rule)

辛普森法是一種求解定積分的數值方法，利用二次曲線去逼近，以求得定積分的數值解。

考慮定積分型式

$$\int_a^b f(x)dx, \quad a \leq x \leq b \quad (2.24)$$



將區間 $[a, b]$ 切割為偶數個子區間，則每一子區間

$$h = \frac{b-a}{2N} \quad (2.25)$$

故(2.24)式可寫為

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx \quad (2.26)$$

對於

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \quad (2.27)$$

考慮過 $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ 三點之二階多項式 $P(x)$ ，即

$$P(x_0) = f(x_0), P(x_1) = f(x_1), P(x_2) = f(x_2) \quad (2.28)$$

則(2.27)式可寫為

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx &\approx \int_{x_0}^{x_2} P(x)dx \\ &= \frac{x_2 - x_0}{6} \left[ P(x_0) + 4P\left(\frac{x_0 + x_2}{2}\right) + P(x_2) \right] \\ &= \frac{2h}{6} [P(x_0) + 4P(x_1) + P(x_2)] \\ &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \end{aligned} \quad (2.29)$$

同理可得

$$\begin{aligned} \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx &\approx \frac{h}{3} [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] \\ &\vdots \\ \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx &\approx \frac{h}{3} [f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \end{aligned} \quad (2.30)$$

由(2.29)與(2.30)式代入(2.26)式可得

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) \\ &\quad + \cdots + f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \end{aligned} \quad (2.31)$$

(2.31)式即為辛普森法計算定積分的近似解。

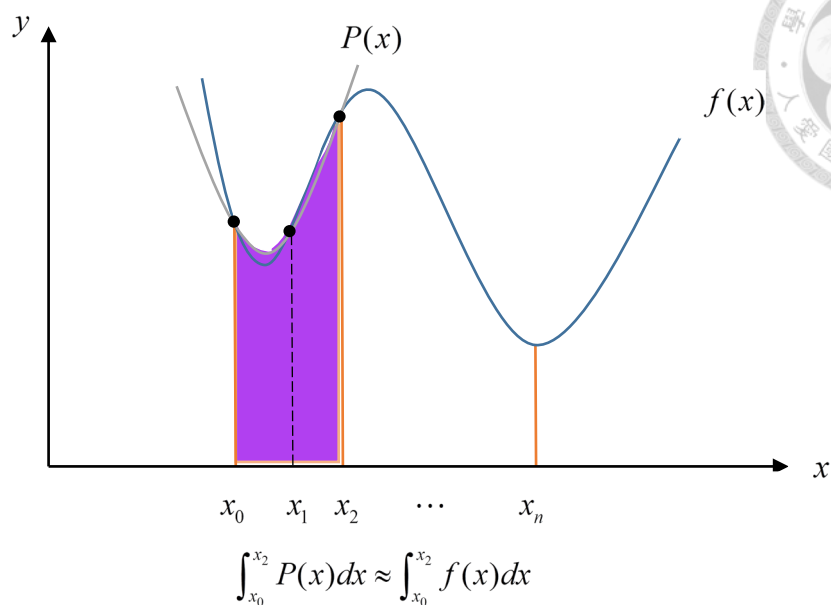


圖 2-3 辛普森積分法示意圖

## 2.6 龍格—庫塔法(Runge-Kutta Method)

龍格—庫塔法是德國數學家卡爾·龍格(Carl Runge)和馬丁·威爾海姆·庫塔(Martin Wilhelm Kutta)於 1900 年左右發展用以求解已知初值的非線性常微分方程的數值方法，其與尤拉法最大的不同點是其於一時間段之中再細分數個時間點取得斜率，並給予相對應的權重加以平均，以得到較精確的平均斜率。

龍格—庫塔法依其精度可區分為三類，二階精度的中點法(Midpoint method)、三階精度的尤恩法(Heun's method)或稱修正尤拉法(modified Euler method)以及四階精度的四階精度龍格—庫塔法(4<sup>th</sup> order Runge-Kutta method)，其中四階龍格庫塔法即廣為人知的 RK4 法。

考慮一階常微分方程，且已知初始值

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_n \quad (2.32)$$

將區間  $[t_0, t_n]$  分為  $N$  等分，則每一子區間

$$h = \frac{t_n - t_0}{N} \quad (2.33)$$

則 RK4 的表示型為



$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.34)$$

其中

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= f(t_{i+1}, y_i + k_3) \end{aligned} \quad (2.35)$$

$k_1$  是時間段開始時的斜率； $k_2$  是用尤拉法以斜率  $k_1$  算得時間段中點的斜率；而  $k_3$  同為時間段中點的斜率，但是是以斜率  $k_2$  決定其值； $k_4$  為時間段終點的斜率，其值由斜率  $k_3$  決定。最後，再將此四個斜率加權平均得到此時間段之平均斜率。

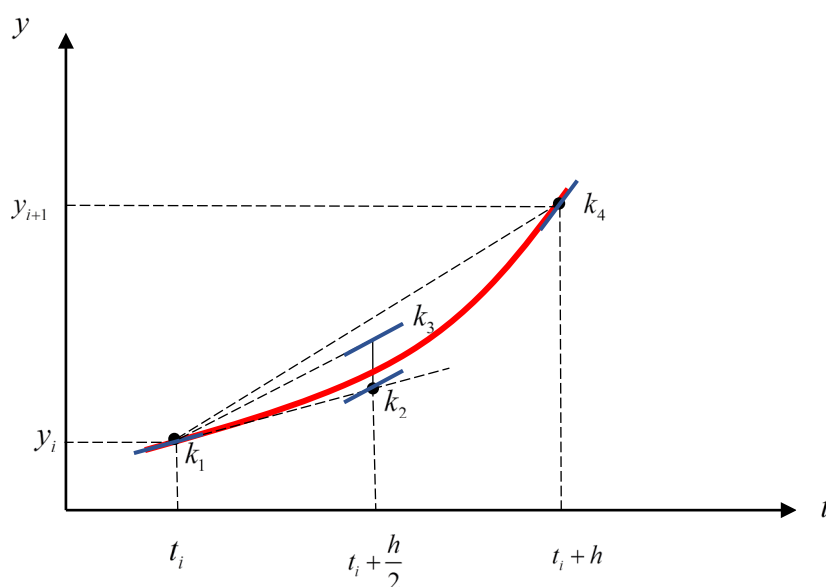


圖 2-4 RK4 法示意圖

## 2.7 高斯－克朗羅德法 (Gauss-Kronrod Quadrature Formula)

高斯－克朗羅德法為高斯積分之變種，是由數學家卡爾·弗里德里希·高斯 (Carl Friedrich Gauss) 發展的一種用以計算定積分的數值方法，而後亞歷山大·克朗



羅德(Aleksandr Semenovich Kronrod)針對同一組函數，提出兩套積分規則，一組高階而另一組低階，並以兩近似值之差用以估算積分函數的數值誤差。

高斯積分之規則通常表示為加權和的型式，且僅在積分區間 $[-1,1]$ 才能獲得準確的近似解，但不適合具有奇異點的函數，其數學型式為

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^{n_{gp}} W_i f(x_i) \quad (2.36)$$

其中 $n_{gp}$ 為高斯點的數目、 $x_i$ 為高斯點、 $W_i$ 為高斯點對應之權重。而對於一般積分區間 $[a,b]$ 之定積分，則需將其定義域作線性映射至 $[-1,1]$ ，才能使用高斯積分。

考慮定積分型式

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad (2.37)$$

做變數變換將 $[a,b]$ 轉換至 $[-1,1]$ 上，令

$$\xi = \frac{2\left(x - \frac{a+b}{2}\right)}{b-a} \quad (2.38)$$

其中當 $x=a$ 時， $\xi=-1$ ；當 $x=\frac{a+b}{2}$ 時， $\xi=0$ ；當 $x=b$ 時， $\xi=1$ 。

因此

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi, \quad dx = \frac{1}{2}(b-a)d\xi = Jd\xi \quad (2.39)$$

其中 $J = \frac{1}{2}(b-a)$ ，則(2.37)式可寫為

$$I = \int_a^b f(x)dx = J \int_{-1}^1 f(\xi)d\xi = J \hat{I} \quad (2.40)$$

其中 $\hat{I} = \int_{-1}^1 f(\xi)d\xi$ ，而 $\hat{I}$ 已然符合高斯積分的型式，套入高斯點 $\xi_i$ 與其權重 $W_i$ 得到

$$\hat{I} = W_1 f(\xi_1) + W_2 f(\xi_2) + \cdots + W_n f(\xi_n) = \sum_{i=1}^{n_{gp}} W_i f(\xi_i) \quad (2.41)$$

將(2.41)式代入(2.40)式得到

$$I = \int_a^b f(x)dx = J \sum_{i=1}^{n_{gp}} W_i f(\xi_i) \quad (2.42)$$

(2.42)式即為高斯積分的一般型式。



表 2-1 高斯點的數目與其位置、權重列表

高斯點的數目 $n_{gp}$	高斯點位置 $\xi_i$	權重 $W_i$
1	0.0	2.0
2	$\pm 1/\sqrt{3} = \pm 0.5773502692$	1.0
3	$\pm 0.7745966692$	0.555 555 5556
	0.0	0.888 888 8889
4	$\pm 0.3399810436$	0.652 145 1549
	$\pm 0.8611363116$	0.347 854 8451
5	$\pm 0.9061798459$	0.236 926 8854
	$\pm 0.5384693101$	0.478 628 6705
	0.0	0.568 888 8889

若高斯積分使用  $n$  個高斯點，則高斯-克朗羅德法增加至  $(2n+1)$  個積分點，同時以低階與高階去計算同一函數值，並以兩結果之差做為估計數值誤差的依據。以一經典例子說明如下。

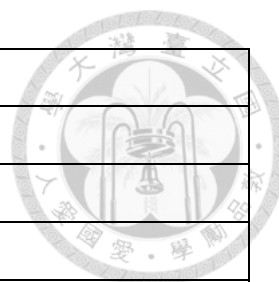
以 7 個高斯點與 15 個克朗羅德點同時做數值計算，以下列出  $(G7, K15)$  的位置與權重。

表 2-2 G7 高斯點位置與權重

G7 高斯點位置 $\xi_i$	權重 $W_i$
$\pm 0.94910 79123 42759$	0.12948 49661 68870
$\pm 0.74153 11855 99394$	0.27970 53914 89277
$\pm 0.40584 51513 77397$	0.38183 00505 05119
0.0	0.41795 91836 73469

表 2-3 K15 克朗羅德點位置與權重

K15 克朗羅德點位置 $\xi_i$	權重 $W_i$
$\pm 0.99145 53711 20813$	0.02293 53220 10529
$\pm 0.94910 79123 42759$	0.06309 20926 29979



±0.86486 44233 59769	0.10479 00103 22250
±0.74153 11855 99394	0.14065 32597 15525
±0.58608 72354 67691	0.16900 47266 39267
±0.40584 51513 77397	0.19035 05780 64785
±0.20778 49550 07898	0.20443 29400 75298
0.0	0.20948 21410 84728

並給予一容許誤差  $\varepsilon$ ，以兩種方法計算一定積分並得到其差值  $|G7 - K15|$ ，若  $|G7 - K15| < \varepsilon$ ，則此積分結果是可接受的。反之若  $|G7 - K15| > \varepsilon$ ，則需在原有定積分區間  $[a, b]$  作切割，例如區間  $[a, c]$  與區間  $[c, b]$ ，分別以兩種數值積分方法並得到兩種積分方法結果之差  $\varepsilon_1 = |G7 - K15|_{ac}$  與  $\varepsilon_2 = |G7 - K15|_{cb}$ ，並比較若  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \varepsilon$  則接受此數值積分結果，若  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > \varepsilon$ ，則繼續切割積分區間，直至總誤差小於容許誤差為止。

## 2.8 擬時間積分法(Fictitious Time Integration Method)

擬時間積分法是學者劉與 Atluri 提出的一套用以解非線性代數方程問題的數值方法，且具有相當高的精確度。其方法概念是藉由引入擬時間的觀念，將原本  $n$  維空間的問題，增廣為  $n+1$  維空間，藉由多一個維度而使得原先的問題得以改善。

接著介紹擬時間積分法求解非線性代數方程的流程，考慮一個非線性代數方程如下

$$F(x) = 0 \quad (2.43)$$

(2.43)式中只有一單變數  $x$ ，因此引入擬時間變數  $t$ ，接著建立其關係式

$$y(t) = (1+t)x \quad (2.44)$$

其中  $t$  與  $x$  為獨立變數，因此

$$y' = \frac{dy}{dt} = x \quad (2.45)$$

另外將(2.43)式乘上一常數  $c$ ，其中  $c \neq 0$ ，得到

$$0 = -cF(x) \quad (2.46)$$

將(2.45)式加入(2.46)式得到



$$y' = x - cF(x) \quad (2.47)$$

把(2.44)式的條件代入(2.47)式

$$y' = \frac{y}{1+t} - cF\left(\frac{y}{1+t}\right) \quad (2.48)$$

如此(2.48)式為一階常微分方程，且由(2.44)式可得初始條件為

$$y(0) = x \quad (2.49)$$

但(2.49)式為未知的初始條件，仍需要初始猜值：

將(2.48)式同時乘上積分因子(integrating factor)  $\frac{1}{1+t}$  得到

$$\frac{y'}{1+t} - \frac{y}{(1+t)^2} = -\frac{c}{1+t} F\left(\frac{y}{1+t}\right) \quad (2.50)$$

合併之後可以得到

$$\frac{(1+t)y' - y}{(1+t)^2} = -\frac{c}{1+t} F\left(\frac{y}{1+t}\right) \quad (2.51)$$

由除法定則(quotient rule)可得

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y}{1+t} \right) = -\frac{c}{1+t} F\left(\frac{y}{1+t}\right) \quad (2.52)$$

將  $\frac{y}{1+t} = x$  代入(2.52)式可得

$$\frac{dx}{dt} = x' = -\frac{c}{1+t} F(x) \quad (2.53)$$

上式可由  $x' = 0$  得到  $F(x) = 0$  之解，並由初始值  $x_0$  開始，應用尤拉法求得  $x$  的迭代公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{hc}{1+t_k} F(x_k) \quad (2.54)$$

其中  $h$  為積分間距，當時間為  $t_k$  時，可得  $x_k = x(t_k)$ 。

## 2.9 共軛梯度法(Conjugate Gradient Method)

共軛梯度法是由馬格努斯·海斯納斯(Magnus Hestenes)與愛德華·施蒂費爾(Eduard Stiefel)於 1950 年代提出的一套用以解線性方程組的數值方法，為一種迭代方法，較適用於稀疏(sparse)系統，但僅限於正定(positive-definite)且對稱(symmetric)的矩陣；因此對於一般任意的線性方程組，需先做處理轉換為正定且對



稱的矩陣，如此方可利用共軛梯度法求解。

以任意線性代數方程組求解過程為例，其型式為

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{e} \quad (2.55)$$

為將(2.55)式轉換成正定且對稱的型式，等號兩邊同乘  $\mathbf{A}^T$  得到

$$\mathbf{Dx} = \mathbf{b}_1 \quad (2.56)$$

其中  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{A}^T \mathbf{e}$ 、且  $\mathbf{D} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} > 0$ ，已然符合使用共軛梯度法的條件，接著給定一初始猜值  $\mathbf{x}_0$  (一般通常取  $\mathbf{x}_0 = 0$ ，除非有其它原因而改變其值)，並求得初始殘差 (residual)  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{Dx}_0 - \mathbf{b}_1$  並令  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0$ ，而得以進行以下迭代過程

$$\begin{aligned} \eta_k &= \frac{\|\mathbf{r}_k\|^2}{\mathbf{p}_k^T \mathbf{D} \mathbf{p}_k} \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k - \eta_k \mathbf{p}_k \\ \mathbf{r}_{k+1} &= \mathbf{Dx}_{k+1} - \mathbf{b}_1 \\ \alpha_{k+1} &= \frac{\|\mathbf{r}_{k+1}\|^2}{\|\mathbf{r}_k\|^2} \\ \mathbf{p}_{k+1} &= \alpha_{k+1} \mathbf{p}_k + \mathbf{r}_{k+1} \end{aligned} \quad (2.57)$$

其中  $k = 0, 1, 2, \dots$ ，並給予其收斂誤差  $\varepsilon$ ，且當  $\|\mathbf{r}_{k+1}\| < \varepsilon$  時，則  $\mathbf{x}_{k+1}$  收斂，否則繼續進行(2.57)式之迭代過程。圖 2-5 為共軛梯度法之流程圖。

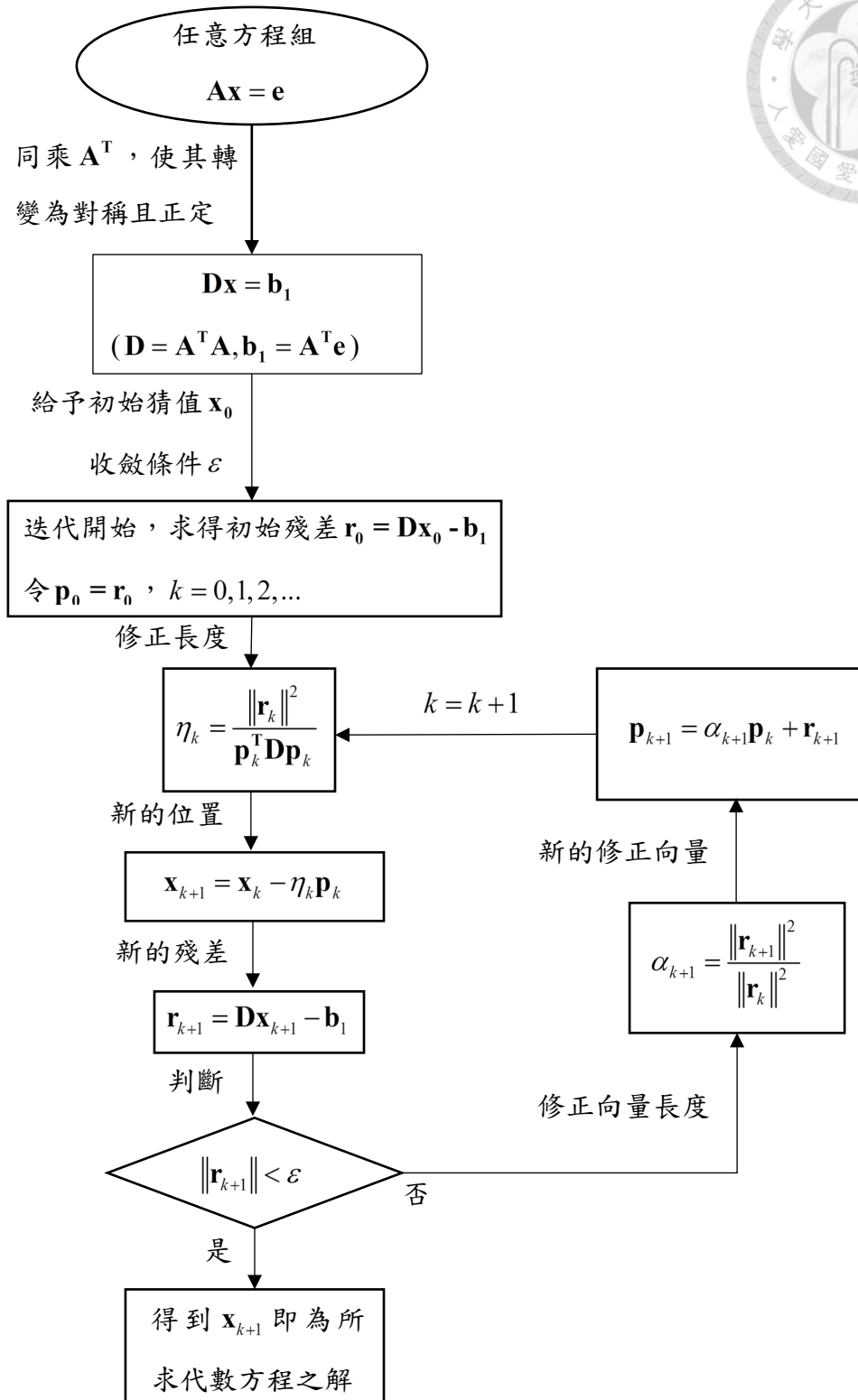


圖 2-5 共軛梯度法流程圖



## 2.10 傅立葉級數(Fourier Series)

傅立葉級數是由數學家約瑟夫·傅立葉(Joseph Fourier)所提出，其是由一連串的正弦函數與餘弦函數項組合而成，用以表示出一般的週期函數；或者說任意之週期函數可以分解成數個正弦函數與餘弦函數。因此假設任意函數可以表示為以下型式

$$f(x) \approx b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(kx) + d_k \sin(kx), \quad -\pi < x < \pi \quad (2.58)$$

(2.58)式即為傅立葉級數的型式，若  $f(x)$  為已知，則對(2.58)式進行積分可以得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = b_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left( b_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx + d_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx \right) \quad (2.59)$$

其中由  $\cos(kx)$  與  $\sin(kx)$  之週期性可以得到

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx &= 0, \quad k \neq 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx &= 0 \end{aligned} \quad (2.60)$$

因此可以得到常數項  $b_0$

$$b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (2.61)$$

同理若將(2.58)式分別乘上  $\cos(nx)$  與  $\sin(nx)$  並進行積分得到

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( b_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx + d_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) dx \right) \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( b_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(nx) dx + d_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(nx) dx \right) \end{aligned} \quad (2.62)$$

接著由積分公式得到以下性質

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(nx) dx = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ \pi, & n = k \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(nx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) dx = 0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

由(2.62)式與(2.63)式的性質可得到正弦函數與餘弦函數之係數  $b_k, d_k$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \\ d_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \end{aligned} \quad (2.64)$$

因此當  $f(x)$  為已知時，可由(2.61)式與(2.64)式將其展開為傅立葉級數。反之若當傅

立葉級數之係數  $b_0, b_k, d_k$  為已知時，也可將其組合為目標函數  $f(x)$ 。

值得一提的是，傅立葉級數常會出現吉布斯現象(Gibbs phenomenon)，即對於不連續函數展開之傅立葉級數，在其斷點或不連續點的地方，會產生過射(overshooting)的現象，也就是對於其不連續點的位置會產生振盪，較無法準確的擬合。關於此部分的理論與相關證明相當複雜，故不在本論文作詳細說明。

### 第三章 尤拉梁的邊界積分方程



#### 3.1 反問題

反問題即為在正問題中，有一條件不滿足或是未知時，即稱為反問題，於反問題的探討中，依其未知的條件常分類為以下五種

1. 初始條件未知，缺少初始條件之問題
2. 邊界問題未知，缺少邊界條件之問題。
3. 源類型未知，為力源識別問題。
4. 物性未知，為系統識別或參數識別問題。
5. 定義域未知，為缺乏場域的反問題。

於本文將以邊界積分方程方法探討尤拉梁的外力反算問題，為缺少力源或消耗源的反算問題。

#### 3.2 尤拉梁的邊界積分方程推導

我們將格林定理與自伴隨運算子的概念運用在梁運算子上，得到

$$\iint_{\Omega} (v \square u - u \square v) dx dt = \oint_{\Gamma} (u v_t - v u_t) dx + \alpha (v u_{xxx} - v_x u_{xx} + v_{xx} u_x - v_{xxx} u) dt \quad (3.1)$$

(3.1)式之推導過程已於 2.3 節闡述說明過，接著考慮梁長度為  $\ell$ ，計算時間為  $t_f$ ，

將其展開得到

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \int_0^{\ell} v \square u dx dt - \int_0^{t_f} \int_0^{\ell} u \square v dx dt \\ &= \int_0^{\ell} [u(x, 0) v_t(x, 0) - v(x, 0) u_t(x, 0)] dx - \int_0^{\ell} [u(x, t_f) v_t(x, t_f) - v(x, t_f) u_t(x, t_f)] dx \\ &+ \alpha \int_0^{t_f} [v(\ell, t) u_{xxx}(\ell, t) - v_x(\ell, t) u_{xx}(\ell, t) + v_{xx}(\ell, t) u_x(\ell, t) - v_{xxx}(\ell, t) u(\ell, t)] dt \\ &- \alpha \int_0^{t_f} [v(0, t) u_{xxx}(0, t) - v_x(0, t) u_{xx}(0, t) + v_{xx}(0, t) u_x(0, t) - v_{xxx}(0, t) u(0, t)] dt \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中若能找到一伴隨測試函數  $v(x, t)$ ，使得其自動滿足  $\square v(x, t) = 0$ ，則可以簡化(3.2)

式使得  $\int_0^{t_f} \int_0^{\ell} u \square v dx dt = 0$ ，意即

$$\square v = v_{tt} + \alpha v_{xxxx} = 0 \quad (3.3)$$

而(3.3)式即為考慮自由振動下的尤拉梁，為求解此偏微分方程的邊界條件問題，可





採用分離變數法將其轉變為常微分方程問題，因此假設方程式之解可表示為

$$v(x,t) = X(x)Y(t) \quad (3.4)$$

將(3.4)式代入(3.3)式中可得到

$$\frac{\partial^2 X(x)Y(t)}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial^4 X(x)Y(t)}{\partial x^4} = 0 \quad (3.5)$$

變數分離後移項得到

$$\frac{1}{X} \frac{d^4 X}{dx^4} = -\frac{1}{\alpha Y} \frac{d^2 Y}{dt^2} \quad (3.6)$$

上式為兩個相等的不同變數之函數，因此其結果必等於常數，因此令其結果為  $a^4$ ，

即

$$\frac{1}{X} \frac{d^4 X}{dx^4} = -\frac{1}{\alpha Y} \frac{d^2 Y}{dt^2} = a^4 \quad (3.7)$$

接著可以得到兩條方程式為

$$X'''' - a^4 X = 0 \quad (3.8a)$$

$$Y'' + \omega^2 Y = 0 \quad (3.8b)$$

其中  $\omega^2 = \alpha a^4$ 。而(3.8a)式為四階齊性常微分方程，解其特徵值為  $\lambda = \pm a, \pm ia$ ，得

(3.8a)式之解為

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 e^{iax} + c_2 e^{-iax} + c_3 e^{ax} + c_4 e^{-ax} \\ &= A \cos(ax) + B \sin(ax) + C \cosh(ax) + D \sinh(ax) \end{aligned} \quad (3.9)$$

(3.8b)式為二階齊性常微分方程，解其特徵值為  $\lambda = \pm ia$ ，得(3.8b)式之解為

$$\begin{aligned} Y(t) &= c_5 e^{i\omega t} + c_6 e^{-i\omega t} \\ &= C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (3.10)$$

因此可得其通解為

$$\begin{aligned} v(x,t) &= X(x)Y(t) \\ &= [A \cos(ax) + B \sin(ax) + C \cosh(ax) + D \sinh(ax)] [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)] \end{aligned} \quad (3.11)$$

其中我們關注的是  $X(x)$  的部分，此部分將隨著梁的邊界條件的不同而去調整其相對應的邊界條件，進而確定  $X(x)$  之係數。而  $Y(t)$  的部分，由於係數  $C_1, C_2$  為任意常

數，因此令  $C_1 = (1-R), C_2 = R$ ，並將其平移  $t_f$  相位，使得我們可以更方便計算在任

何時間當  $t = t_f$  之位移函數，因此可以得到伴隨測試函數  $v(x,t)$  為

$$v(x,t) = \left[ (1-R) \cos(\omega(t-t_f)) + R \sin(\omega(t-t_f)) \right] X(x) \quad (3.12)$$

接著將(3.2)式改寫為



$$\begin{aligned}
& \int_0^\ell [u(x, t_f)v_t(x, t_f) - v(x, t_f)u_t(x, t_f)] dx \\
&= \int_0^\ell [u(x, 0)v_t(x, 0) - v(x, 0)u_t(x, 0)] dx - \int_0^{t_f} \int_0^\ell v \square u dx dt \\
&+ \alpha \int_0^{t_f} [v(\ell, t)u_{xxx}(\ell, t) - v_x(\ell, t)u_{xx}(\ell, t) + v_{xx}(\ell, t)u_x(\ell, t) - v_{xxx}(\ell, t)u(\ell, t)] dt \\
&- \alpha \int_0^{t_f} [v(0, t)u_{xxx}(0, t) - v_x(0, t)u_{xx}(0, t) + v_{xx}(0, t)u_x(0, t) - v_{xxx}(0, t)u(0, t)] dt
\end{aligned} \tag{3.13}$$

將(3.12)式的伴隨測試函數  $v(x, t)$  代入上式可以得到

$$\begin{aligned}
& \int_0^\ell [R\omega X(x)u(x, t_f) - (1-R)X(x)u_t(x, t_f)] dx \\
&= \int_0^\ell [u(x, 0)v_t(x, 0) - v(x, 0)u_t(x, 0)] dx - \int_0^{t_f} \int_0^\ell v \square u dx dt \\
&+ \alpha \int_0^{t_f} [v(\ell, t)u_{xxx}(\ell, t) - v_x(\ell, t)u_{xx}(\ell, t) + v_{xx}(\ell, t)u_x(\ell, t) - v_{xxx}(\ell, t)u(\ell, t)] dt \\
&- \alpha \int_0^{t_f} [v(0, t)u_{xxx}(0, t) - v_x(0, t)u_{xx}(0, t) + v_{xx}(0, t)u_x(0, t) - v_{xxx}(0, t)u(0, t)] dt
\end{aligned} \tag{3.14}$$

(3.14)式即為正算所求尤拉梁之位移與速度之型式，當  $R=1$  時可由(3.14)式求得時間  $t=t_f$  時尤拉梁之位移  $u(x, t_f)$ ，同理當  $R=0$  時可求得其速度  $u_t(x, t_f)$ ，不過後續推導求解部分非本文探討的內容，故不在此多做著墨。

而當  $\square u = u_{tt} + \alpha u_{xxxx} = 0$  時為尤拉梁之自由振動，非本文考慮之問題，本文考慮的部份為包含外力之尤拉梁振動，即當  $\square u = u_{tt} + \alpha u_{xxxx} = F(x, t)$  時，因此將(3.13)式改寫為

$$\begin{aligned}
& \int_0^{t_f} \int_0^\ell v(x, t)F(x, t) dx dt \\
&= \int_0^\ell [u(x, 0)v_t(x, 0) - v(x, 0)u_t(x, 0)] dx - \int_0^\ell [u(x, t_f)v_t(x, t_f) - v(x, t_f)u_t(x, t_f)] dx \\
&+ \alpha \int_0^{t_f} [v(\ell, t)u_{xxx}(\ell, t) - v_x(\ell, t)u_{xx}(\ell, t) + v_{xx}(\ell, t)u_x(\ell, t) - v_{xxx}(\ell, t)u(\ell, t)] dt \\
&- \alpha \int_0^{t_f} [v(0, t)u_{xxx}(0, t) - v_x(0, t)u_{xx}(0, t) + v_{xx}(0, t)u_x(0, t) - v_{xxx}(0, t)u(0, t)] dt
\end{aligned} \tag{3.15}$$

上式即為本文所使用之尤拉梁的邊界方程，當一尤拉梁之位移或速度為已知時，我們即可配合其邊界條件求得之特定伴隨測試函數  $v(x, t)$ ，進而反求得到外力函數  $F(x, t)$ 。在接下來的章節將介紹尤拉梁對於其不同型式的邊界條件所調整的伴隨測試函數。



### 3.3 簡支梁分析

上一節已推導出伴隨測試函數與尤拉梁之邊界積分方程之通式，因此在這節我們首先選用簡支梁(simple beam)來討論邊界條件對於伴隨測試函數之影響。

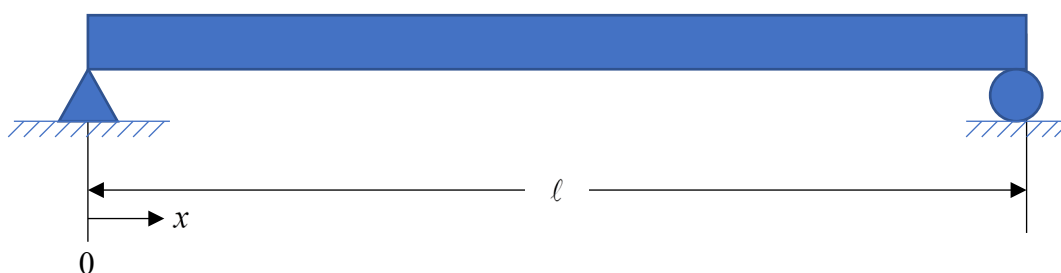


圖 3-1 簡支梁示意圖

對於一長度為  $l$  之簡支梁，其邊界條件如下

$$u(0, t) = 0 \quad (3.16a)$$

$$u_{xx}(0, t) = 0 \quad (3.16b)$$

$$u(l, t) = 0 \quad (3.16c)$$

$$u_{xx}(l, t) = 0 \quad (3.16d)$$

將以上條件代入(3.15)式，可以得到

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \int_0^l v(x, t) F(x, t) dx dt \\ &= \int_0^l [u(x, 0)v_t(x, 0) - v(x, 0)u_t(x, 0)] dx - \int_0^l [u(x, t_f)v_t(x, t_f) - v(x, t_f)u_t(x, t_f)] dx \\ &+ \alpha \int_0^{t_f} [v(l, t)u_{xxx}(l, t) + v_{xx}(l, t)u_x(l, t)] dt - \alpha \int_0^{t_f} [v(0, t)u_{xxx}(0, t) + v_{xx}(0, t)u_x(0, t)] dt \end{aligned} \quad (3.17)$$

由於邊界條件  $u_{xxx}(0, t), u_x(0, t), u_{xxx}(l, t), u_x(l, t)$  仍為未知，因此我們對於  $v(x, t)$  給予以下邊界條件



$$v(0, t) = 0 \quad (3.18a)$$

$$v_{xx}(0, t) = 0 \quad (3.18b)$$

$$v(\ell, t) = 0 \quad (3.18c)$$

$$v_{xx}(\ell, t) = 0 \quad (3.18d)$$

並將以上條件代入(3.11)式，只考慮  $X(x)$  部分即得到

$$X(0) = 0 \quad (3.19a)$$

$$X''(0) = 0 \quad (3.19b)$$

$$X(\ell) = 0 \quad (3.19c)$$

$$X''(\ell) = 0 \quad (3.19d)$$

由(3.19a)可以得到  $A+C=0$ ，且由(3.19b)可以得到  $A-C=0$ ，故有

$$A = C = 0 \quad (3.20)$$

接著由(3.19c)與(3.19d)得到

$$B \sin(a\ell) + D \sinh(a\ell) = 0 \quad (3.21)$$

$$-B \sin(a\ell) + D \sinh(a\ell) = 0$$

其中當  $a\ell \neq 0$  時， $\sinh(a\ell) \neq 0$ ，因此得到  $D=0$ 。於是得到簡支梁的特徵方程式為

$$\sin(a\ell) = 0 \quad (3.22)$$

並得到其特徵值為

$$a_n = \frac{n\pi}{\ell}, n=1, 2, 3, \dots \quad (3.23)$$

且其頻率為

$$\omega_n = a_n^2 \sqrt{\alpha}, n=1, 2, 3, \dots \quad (3.24)$$

因此其對應之振型函數為

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), n=1, 2, 3, \dots \quad (3.25)$$

其中取  $B=1$ ，且可以得到簡支梁之伴隨測試函數為

$$v_n(x, t) = \left[ (1-R) \cos(\omega(t-t_f)) + R \sin(\omega(t-t_f)) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), n=1, 2, 3, \dots \quad (3.26)$$

將伴隨測試函數  $v_n(x, t)$  代入(3.17)式即可得到簡支梁的邊界積分方程為

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \int_0^\ell \left[ (1-R) \cos(\omega(t-t_f)) + R \sin(\omega(t-t_f)) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) F(x, t) dx dt \\ & = \int_0^\ell \left[ u(x, 0)v_{n,t}(x, 0) - v_n(x, 0)u_t(x, 0) - u(x, t_f)v_{n,t}(x, t_f) + v_n(x, t_f)u_t(x, t_f) \right] dx \end{aligned} \quad (3.27)$$



### 3.4 懸臂梁分析

在這節我們考慮懸臂梁(cantilever beam)之情況。

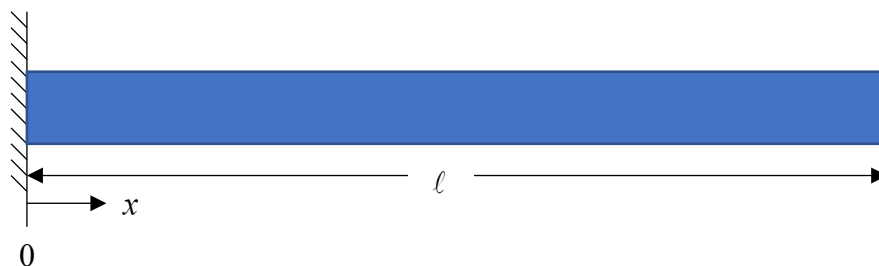


圖 3-2 懸臂梁示意圖

對於一長度為  $l$  之懸臂梁，取其固定端作為坐標系之原點 ( $x=0$ )，故得到其邊界條件如下

$$u(0,t) = 0 \quad (3.28a)$$

$$u_x(0,t) = 0 \quad (3.28b)$$

$$u_{xx}(\ell,t) = 0 \quad (3.28c)$$

$$u_{xxx}(\ell,t) = 0 \quad (3.28d)$$

將以上條件代入(3.15)式，可以得到

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \int_0^\ell v(x,t)F(x,t)dxdt \\ &= \int_0^\ell [u(x,0)v_t(x,0) - v(x,0)u_t(x,0)]dx - \int_0^\ell [u(x,t_f)v_t(x,t_f) - v(x,t_f)u_t(x,t_f)]dx \\ &+ \alpha \int_0^{t_f} [v_{xx}(\ell,t)u_x(\ell,t) - v_{xxx}(\ell,t)u(\ell,t)]dt - \alpha \int_0^{t_f} [v(0,t)u_{xxx}(0,t) - v_x(0,t)u_{xx}(0,t)]dt \end{aligned} \quad (3.29)$$

由於邊界條件  $u_{xxx}(0,t), u_{xx}(0,t), u_x(\ell,t), u(\ell,t)$  仍為未知，因此我們對於懸臂梁之伴隨測試函數  $v(x,t)$  給予以下邊界條件



$$v(0, t) = 0 \quad (3.30a)$$

$$v_x(0, t) = 0 \quad (3.30b)$$

$$v_{xx}(\ell, t) = 0 \quad (3.30c)$$

$$v_{xxx}(\ell, t) = 0 \quad (3.30d)$$

並將以上條件代入(3.11)式，只考慮  $X(x)$  部分即得到

$$X(0) = 0 \quad (3.31a)$$

$$X'(0) = 0 \quad (3.31b)$$

$$X''(\ell) = 0 \quad (3.31c)$$

$$X'''(\ell) = 0 \quad (3.31d)$$

由(3.31a)得到  $A+C=0$ ，並由(3.31b)得到  $B+D=0$ ，故有

$$A = -C \quad (3.32)$$

$$B = -D$$

接著由(3.31c)式與(3.31d)式與(3.32)式得到

$$A[\cos(a\ell) + \cosh(a\ell)] + B[\sin(a\ell) + \sinh(a\ell)] = 0 \quad (3.33)$$

$$A[\sin(a\ell) - \sinh(a\ell)] + B[-\cos(a\ell) - \cosh(a\ell)] = 0$$

於(3.33)式中，欲使  $A, B$  具有非零解的充分必要條件為

$$\begin{vmatrix} \cos(a\ell) + \cosh(a\ell) & \sin(a\ell) + \sinh(a\ell) \\ \sin(a\ell) - \sinh(a\ell) & -\cos(a\ell) - \cosh(a\ell) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.34)$$

將(3.34)式展開並經過整理後即可得到懸臂梁的特徵方程式為

$$\cos(a\ell) \cosh(a\ell) + 1 = 0 \quad (3.35)$$

(3.35)式為超越方程式，無法由一般方法求得其特徵值之解析解，其特徵值可由數

值方法求得，得到其特徵值為  $(a_n \ell), n=1, 2, 3, \dots$ ，且得到其頻率為

$\omega_n = a_n^2 \sqrt{\alpha}, n=1, 2, 3, \dots$ ，求得其特徵值後可由(3.33)式得到係數  $A, B$  之比值為

$$\frac{B}{A} = -\frac{\cos(a_n \ell) + \cosh(a_n \ell)}{\sin(a_n \ell) + \sinh(a_n \ell)} = \frac{\sin(a_n \ell) - \sinh(a_n \ell)}{\cos(a_n \ell) + \cosh(a_n \ell)} \quad (3.36)$$

由(3.36)式，我們取第一組的部分，令

$$A = \frac{1}{\cos(a_n \ell) + \cosh(a_n \ell)}, B = -\frac{1}{\sin(a_n \ell) + \sinh(a_n \ell)} \quad (3.37)$$

由(3.32)式與(3.37)式代入(3.9)式可得懸臂梁之振態為

$$X_n(x) = \frac{\cos(a_n x) - \cosh(a_n x)}{\cos(a_n \ell) + \cosh(a_n \ell)} - \frac{\sin(a_n x) - \sinh(a_n x)}{\sin(a_n \ell) + \sinh(a_n \ell)} \quad (3.38)$$

接著就可得到懸臂梁之伴隨測試函數為

$$v_n(x,t) = \left[ (1-R) \cos(\omega(t-t_f)) + R \sin(\omega(t-t_f)) \right] \left[ \frac{\cos(a_n x) - \cosh(a_n x)}{\cos(a_n \ell) + \cosh(a_n \ell)} - \frac{\sin(a_n x) - \sinh(a_n x)}{\sin(a_n \ell) + \sinh(a_n \ell)} \right] \quad (3.39)$$

將伴隨測試函數  $v_n(x,t)$  代入(3.29)式即可得到懸臂梁的邊界積分方程為

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \int_0^\ell \left[ (1-R) \cos(\omega(t-t_f)) + R \sin(\omega(t-t_f)) \right] \\ & \quad \left[ \frac{\cos(a_n x) - \cosh(a_n x)}{\cos(a_n \ell) + \cosh(a_n \ell)} - \frac{\sin(a_n x) - \sinh(a_n x)}{\sin(a_n \ell) + \sinh(a_n \ell)} \right] F(x,t) dx dt \\ & = \int_0^\ell \left[ u(x,0)v_{n,t}(x,0) - v_n(x,0)u_t(x,0) - u(x,t_f)v_{n,t}(x,t_f) + v_n(x,t_f)u_t(x,t_f) \right] dx \end{aligned} \quad (3.40)$$

### 3.5 兩端固定梁分析

於此節我們討論兩端固定梁(fixed beam)之部分。

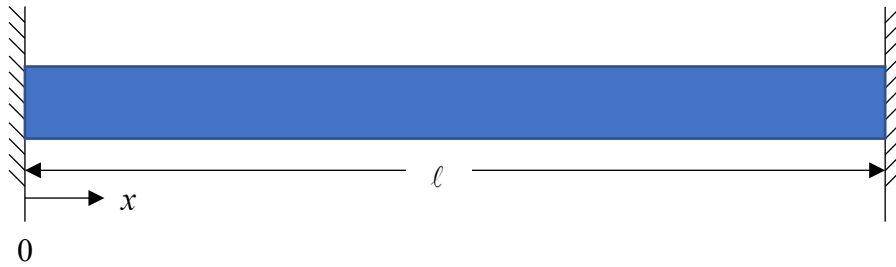


圖 3-3 兩端固定梁示意圖

考慮一長度為  $l$  之兩端固定梁，取其左端固定端作為坐標系之原點 ( $x=0$ )，故得到其邊界條件如下



$$u(0,t) = 0 \quad (3.41a)$$

$$u_x(0,t) = 0 \quad (3.41b)$$

$$u(\ell,t) = 0 \quad (3.41c)$$

$$u_x(\ell,t) = 0 \quad (3.41d)$$

將以上條件代入(3.15)式，可以得到

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \int_0^{\ell} v(x,t)F(x,t)dxdt \\ &= \int_0^{\ell} [u(x,0)v_t(x,0) - v(x,0)u_t(x,0)]dx - \int_0^{\ell} [u(x,t_f)v_t(x,t_f) - v(x,t_f)u_t(x,t_f)]dx \\ &+ \alpha \int_0^{t_f} [v(\ell,t)u_{xxx}(\ell,t) - v_x(\ell,t)u_{xx}(\ell,t)]dt - \alpha \int_0^{t_f} [v(0,t)u_{xxx}(0,t) - v_x(0,t)u_{xx}(0,t)]dt \end{aligned} \quad (3.42)$$

由於邊界條件  $u_{xxx}(0,t), u_{xx}(0,t), u_{xxx}(\ell,t), u_{xx}(\ell,t)$  仍為未知，因此我們對於兩端固定梁之伴隨測試函數  $v(x,t)$  給予以下邊界條件

$$v(0,t) = 0 \quad (3.43a)$$

$$v_x(0,t) = 0 \quad (3.43b)$$

$$v(\ell,t) = 0 \quad (3.43c)$$

$$v_x(\ell,t) = 0 \quad (3.43d)$$

並將以上條件代入(3.11)式，且只考慮  $X(x)$  部分即得到

$$X(0) = 0 \quad (3.44a)$$

$$X'(0) = 0 \quad (3.44b)$$

$$X(\ell) = 0 \quad (3.44c)$$

$$X'(\ell) = 0 \quad (3.44d)$$

由(3.44a)得到  $A+C=0$ ，並由(3.44b)得到  $B+D=0$ ，故有

$$\begin{aligned} A &= -C \\ B &= -D \end{aligned} \quad (3.45)$$

接著由(3.44c)式與(3.44d)式與(3.45)式得到

$$A[\cos(a\ell) - \cosh(a\ell)] + B[\sin(a\ell) - \sinh(a\ell)] = 0 \quad (3.46)$$

$$A[-\sin(a\ell) - \sinh(a\ell)] + B[\cos(a\ell) - \cosh(a\ell)] = 0$$

欲使(3.46)式中之係數  $A, B$  具有非零解的充分必要條件為

$$\begin{vmatrix} \cos(a\ell) - \cosh(a\ell) & \sin(a\ell) - \sinh(a\ell) \\ -\sin(a\ell) - \sinh(a\ell) & \cos(a\ell) - \cosh(a\ell) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.47)$$

將(3.47)式展開並經過整理後即可得到兩端固定梁之特徵方程式為

$$1 - \cos(a\ell)\cosh(a\ell) = 0 \quad (3.48)$$

(3.48)式也仍為超越方程式，只能透過數值方法求得其特徵值，求解得到其特徵值





為  $(a_n \ell), n=1,2,3,\dots$ ，得到其頻率為  $\omega_n = a_n^2 \sqrt{\alpha}, n=1,2,3,\dots$ ，接著可由(3.46)式得到係數  $A, B$  之比值為

$$\frac{B}{A} = -\frac{\cos(a_n \ell) - \cosh(a_n \ell)}{\sin(a_n \ell) - \sinh(a_n \ell)} = \frac{\sin(a_n \ell) + \sinh(a_n \ell)}{\cos(a_n \ell) - \cosh(a_n \ell)} \quad (3.49)$$

由(3.49)式，令

$$A = \frac{1}{\cos(a_n \ell) - \cosh(a_n \ell)}, B = -\frac{1}{\sin(a_n \ell) - \sinh(a_n \ell)} \quad (3.50)$$

由(3.45)式與(3.50)式代入(3.9)式可得

$$X_n(x) = \frac{\cos(a_n x) - \cosh(a_n x)}{\cos(a_n \ell) - \cosh(a_n \ell)} - \frac{\sin(a_n x) - \sinh(a_n x)}{\sin(a_n \ell) - \sinh(a_n \ell)} \quad (3.51)$$

接著就可得到兩端固定梁之伴隨測試函數  $v_n(x, t)$  為

$$v_n(x, t) = \left[ (1-R) \cos(\omega(t-t_f)) + R \sin(\omega(t-t_f)) \right] \left[ \frac{\cos(a_n x) - \cosh(a_n x)}{\cos(a_n \ell) - \cosh(a_n \ell)} - \frac{\sin(a_n x) - \sinh(a_n x)}{\sin(a_n \ell) - \sinh(a_n \ell)} \right] \quad (3.52)$$

將(3.52)式得到之伴隨測試函數代入(3.42)式即可得到兩端固定梁的邊界積分方程為

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \int_0^\ell \left[ (1-R) \cos(\omega(t-t_f)) + R \sin(\omega(t-t_f)) \right] \\ & \quad \left[ \frac{\cos(a_n x) - \cosh(a_n x)}{\cos(a_n \ell) - \cosh(a_n \ell)} - \frac{\sin(a_n x) - \sinh(a_n x)}{\sin(a_n \ell) - \sinh(a_n \ell)} \right] F(x, t) dx dt \\ & = \int_0^\ell \left[ u(x, 0)v_{n,t}(x, 0) - v_n(x, 0)u_t(x, 0) - u(x, t_f)v_{n,t}(x, t_f) + v_n(x, t_f)u_t(x, t_f) \right] dx \end{aligned} \quad (3.53)$$

### 3.6 一端固定與一端簡支梁

再來我們考慮到一端固定與一端簡支梁(clamped-pinned beam)。

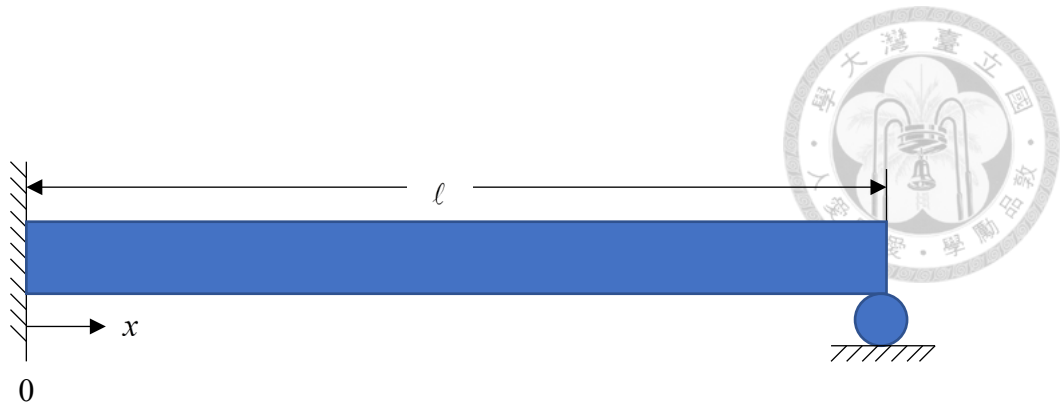


圖 3-4 一端固定與一端簡支梁示意圖

考慮一長度為  $l$  之一端固定與一端簡支梁，令其固定端於左端，並以其作為坐標系之原點 ( $x=0$ )，故得到其邊界條件如下

$$u(0,t) = 0 \quad (3.54a)$$

$$u_x(0,t) = 0 \quad (3.54b)$$

$$u(l,t) = 0 \quad (3.54c)$$

$$u_{xx}(l,t) = 0 \quad (3.54d)$$

將以上條件代入尤拉梁之邊界積分方程，可以得到

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \int_0^l v(x,t)F(x,t)dxdt \\ &= \int_0^l [u(x,0)v_t(x,0) - v(x,0)u_t(x,0)]dx - \int_0^l [u(x,t_f)v_t(x,t_f) - v(x,t_f)u_t(x,t_f)]dx \\ &+ \alpha \int_0^{t_f} [v(l,t)u_{xxx}(l,t) + v_{xx}(l,t)u_x(l,t) - v(0,t)u_{xxx}(0,t) + v_x(0,t)u_{xx}(0,t)]dt \end{aligned} \quad (3.55)$$

由於邊界條件  $u_{xxx}(0,t), u_{xx}(0,t), u_{xxx}(l,t), u_x(l,t)$  仍為未知，因此我們對於此例的梁之伴隨測試函數  $v(x,t)$  給予以下邊界條件

$$v(0,t) = 0 \quad (3.56a)$$

$$v_x(0,t) = 0 \quad (3.56b)$$

$$v(l,t) = 0 \quad (3.56c)$$

$$v_{xx}(l,t) = 0 \quad (3.56d)$$

並將以上條件代入(3.11)式，且只考慮  $X(x)$  部分可以得到

$$X(0) = 0 \quad (3.57a)$$

$$X'(0) = 0 \quad (3.57b)$$

$$X(l) = 0 \quad (3.57c)$$



$$X''(\ell) = 0 \quad (3.57d)$$

由(3.57a)得到  $A+C=0$ ，並由(3.57b)得到  $B+D=0$ ，故有

$$\begin{aligned} A &= -C \\ B &= -D \end{aligned} \quad (3.58)$$

由(3.57c)式與(3.57d)式與(3.58)式的條件得到

$$\begin{aligned} A[\cos(a\ell) - \cosh(a\ell)] + B[\sin(a\ell) - \sinh(a\ell)] &= 0 \\ A[-\cos(a\ell) - \cosh(a\ell)] + B[-\sin(a\ell) - \sinh(a\ell)] &= 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

欲使(3.59)式中之係數  $A, B$  具有非零解的充分必要條件為

$$\begin{vmatrix} \cos(a\ell) - \cosh(a\ell) & \sin(a\ell) - \sinh(a\ell) \\ -\cos(a\ell) - \cosh(a\ell) & -\sin(a\ell) - \sinh(a\ell) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.60)$$

將上式展開並整理後得到一端固定與一端簡支梁的特徵方程式為

$$\tan(a\ell) - \tanh(a\ell) = 0 \quad (3.61)$$

將(3.61)式由數值方法求得其特徵值為  $(a_n \ell), n=1, 2, 3, \dots$ ，其頻率為

$\omega_n = a_n^2 \sqrt{\alpha}, n=1, 2, 3, \dots$ ，接著由(3.59)式可得到係數  $A, B$  之比值為

$$\frac{B}{A} = -\frac{\cos(a_n \ell) - \cosh(a_n \ell)}{\sin(a_n \ell) - \sinh(a_n \ell)} = -\frac{\cos(a_n \ell) + \cosh(a_n \ell)}{\sin(a_n \ell) + \sinh(a_n \ell)} \quad (3.62)$$

由(3.62)式，取

$$A = \frac{1}{\cos(a_n \ell) - \cosh(a_n \ell)}, B = -\frac{1}{\sin(a_n \ell) - \sinh(a_n \ell)} \quad (3.63)$$

將(3.58)式與(3.63)式代入(3.9)式可得一端固定與一端簡支梁的振態為

$$X_n(x) = \frac{\cos(a_n x) - \cosh(a_n x)}{\cos(a_n \ell) - \cosh(a_n \ell)} - \frac{\sin(a_n x) - \sinh(a_n x)}{\sin(a_n \ell) - \sinh(a_n \ell)} \quad (3.64)$$

可發現其與兩端固定梁有相同之振態，差別在於特徵方程式的不同，接著將其代入

(3.12)式可得一端固定與一端簡支梁之伴隨測試函數  $v_n(x, t)$  為

$$\begin{aligned} v_n(x, t) &= \left[ (1-R) \cos(\omega(t-t_f)) + R \sin(\omega(t-t_f)) \right] \\ &\quad \left[ \frac{\cos(a_n x) - \cosh(a_n x)}{\cos(a_n \ell) - \cosh(a_n \ell)} - \frac{\sin(a_n x) - \sinh(a_n x)}{\sin(a_n \ell) - \sinh(a_n \ell)} \right] \end{aligned} \quad (3.65)$$

將伴隨測試函數代入(3.42)式即可得到一端固定與一端簡支梁的邊界積分方程為

$$\begin{aligned}
& \int_0^{t_f} \int_0^\ell \left[ (1-R) \cos(\omega(t-t_f)) + R \sin(\omega(t-t_f)) \right] \\
& \quad \left[ \frac{\cos(a_n x) - \cosh(a_n x)}{\cos(a_n \ell) - \cosh(a_n \ell)} - \frac{\sin(a_n x) - \sinh(a_n x)}{\sin(a_n \ell) - \sinh(a_n \ell)} \right] F(x, t) dx dt \\
& = \int_0^\ell \left[ u(x, 0) v_{n,t}(x, 0) - v_n(x, 0) u_t(x, 0) - u(x, t_f) v_{n,t}(x, t_f) + v_n(x, t_f) u_t(x, t_f) \right] dx
\end{aligned}$$



(3.66)

## 第四章 數值算例



### 4.1 數值算例一

第一個算例將以簡支梁為例，以由其邊界條件得出之簡支梁邊界積分方程與已知位移函數反求其外力型式之數值解，並用尤拉梁的梁運算子，配合已知位移函數可得到外力之解析解( $\square u = u_{tt} + \alpha u_{xxxx} = F_{exact}(x, t)$ )，並以兩者間作比較。

簡支梁的邊界積分方程為以下型式

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \int_0^\ell \left[ (1-R) \cos(\omega(t-t_f)) + R \sin(\omega(t-t_f)) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) F(x, t) dx dt \\ & = \int_0^\ell \left[ u(x, 0)v_{n,t}(x, 0) - v_n(x, 0)u_t(x, 0) - u(x, t_f)v_{n,t}(x, t_f) + v_n(x, t_f)u_t(x, t_f) \right] dx := e_n \end{aligned} \quad (4.1)$$

其中(4.1)式之 R.H.S.之積分結果令其為  $e_n$ ，而  $n=1, 2, 3, \dots$  共可產生出  $n$  條方程式。

接著考慮位移之解析解(analytical solution)為

$$u(x, t) = x(\ell^3 - 2\ell x^2 + x^3) \sin(t), \quad 0 < x < \ell, \quad 0 < t < t_f \quad (4.2)$$

其中  $u(0, t) = 0$ ,  $u'(\ell, t) = 0$ ,  $u(\ell, t) = 0$ ,  $u'(0, t) = 0$ ，令參數  $\alpha = 1$ ，則可得到外力之解析解  $F_{exact}(x, t) = -(x^4 - 2\ell x^3 + \ell^3 x - 24) \sin(t)$ ，我們令梁長  $\ell = \pi$ 、結束時間  $t_f = 1.0$  秒，取  $R = 1$ ，數值積分方法選用辛普森積分法、容許誤差為  $\varepsilon = 10^{-10}$ 。

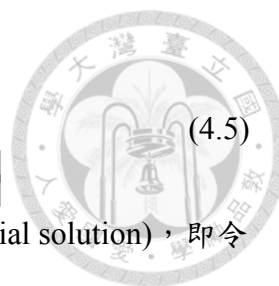
在此我們假設  $F(x, t)$  為變數可分離之型式，因此令  $F(x, t) = H(x)G(t)$ ，且因  $v_n(x, t)$  也可分離為  $v_n(x, t) = v_{n1}(x)v_{n2}(t)$ ，則邊界積分方程之雙重積分可轉變為兩個一維積分，其目的為方便計算且一維積分在數值計算上也較雙重積分快速省時，可以得到(4.1)式之結果為

$$\int_0^\ell v_{n,1}(x) H(x) dx \int_0^{t_f} v_{n,2}(t) G(t) dt = e_n \quad (4.3)$$

如簡支梁之  $v(x, t)$  為

$$v_n(x, t) = \left[ (1-R) \cos(\omega(t-t_f)) + R \sin(\omega(t-t_f)) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad (4.4)$$

則可分離為



$$v_{n,1}(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad (4.5)$$

$$v_{n,2}(t) = \left[ (1-R) \cos(\omega(t-t_f)) + R \sin(\omega(t-t_f)) \right]$$

接著假設  $G(t) = \sin(t)$  為已知，將  $H(x)$  取傅立葉級數作為試解(trial solution)，即令

$$H(x) = b_0 + \sum_{j=1}^m b_j \cos(jx) + d_j \sin(jx) \quad (4.6)$$

代入可得到

$$\int_0^{\ell} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \left( b_0 + \sum_{j=1}^m b_j \cos(jx) + d_j \sin(jx) \right) dx \int_0^{t_f} \sin(\omega(t-t_f)) \sin(t) dt = e_n \quad (4.7)$$

我們於此算例取  $m=4$ ，因此共有  $b_0, b_j, d_j$  共  $2m+1=9$  個未知數，令  $k=2m+1$ ，接著取  $n=10$  ( $n > k=9$ )，因此共有 10 條方程式，將數值積分之結果寫成矩陣型式為

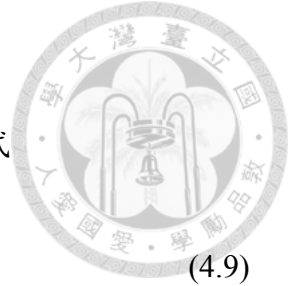
$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ c_{31} & c_{32} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nk} \end{bmatrix}_{n \times k} \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_m \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}_{k \times 1} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad (4.8)$$

(4.6)式即為  $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}$  的代數方程組型式，其中  $\mathbf{A}$  矩陣之階數為  $n \times k$ ，因此將其轉換為正交且對稱的型式後使用共軛梯度法求解其係數  $b_0, b_j, d_j$ ，接著可以得到復原後

的外力函數之數值解  $H(x) = b_0 + \sum_{j=1}^n b_j \cos(jx) + d_j \sin(jx)$ 。

在圖 4-1 中可以看出當外力函數之試解選用傅立葉級數算出的數值解與解析解相當吻合，代表邊界積分方程方法在求解尤拉梁外力反算的精度也相當良好，而在圖 4-2 中數值解之誤差均在  $10^{-3}$  之數量級的範圍，而兩端之誤差稍大應是因傅立葉級數對於端點這種不連續點所產生的吉布斯現象，而其梁中央之誤差均在  $10^{-4} \sim 10^{-6}$  之間，表現出相當高的精度。

而圖 4-3 則是外力函數加入時間參數後之數值解與解析解之誤差，可看出梁中段的誤差相當小且穩定，而端點的誤差雖隨著時間而增大，不過仍保持在  $10^{-3}$  之數量級，代表邊界積分方程方法(BIEM)在求解簡支梁的外力反算問題能得到相當高的精度。



## 4.2 數值算例二

第二個算例將以懸臂梁為例，而其邊界積分方程為如下型式

$$\int_0^{t_f} \int_0^{\ell} \left[ (1-R) \cos(\omega(t-t_f)) + R \sin(\omega(t-t_f)) \right] \left[ \frac{\cos(ax) - \cosh(ax)}{\cos(a\ell) + \cosh(a\ell)} - \frac{\sin(ax) - \sinh(ax)}{\sin(a\ell) + \sinh(a\ell)} \right] F(x,t) dx dt = e_n \quad (4.9)$$

其中懸臂梁之特徵方程式為

$$\cos(a\ell) \cosh(a\ell) + 1 = 0 \quad (4.10)$$

於本文選用擬時間積分法(FTIM)求得前其幾個特徵值為

$$\begin{aligned} a_1 \ell &= 1.8751 \\ a_2 \ell &= 4.6941 \\ a_3 \ell &= 7.8548 \\ a_4 \ell &= 10.9955 \\ a_5 \ell &= 14.1372 \\ &\vdots \\ a_n \ell &= \dots \end{aligned} \quad (4.11)$$

其中對應於  $n \geq 3$  之特徵值可以以  $a_n \ell = \left( n - \frac{1}{2} \right) \pi, n = 3, 4, 5, \dots$  來相當準確的近似，圖

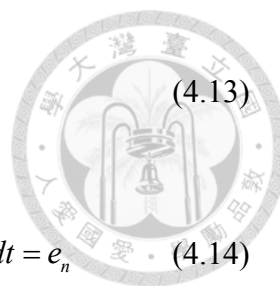
4-4 為 FTIM 數值解求得之特徵值與上式求得之近似值之差值，而圖 4-5 為將特徵值代入特徵方程之殘差，由圖中的結果看來以 FTIM 求解非線性代數方程的結果相當精確，相當符合理想之結果。

接著考慮此例之懸臂梁的位移解析解為

$$u(x,t) = x^2(x-\ell)^4 e^{-t}, \quad 0 < x < \ell, \quad 0 < t < t_f \quad (4.12)$$

其中  $u(0,t) = 0, u'(0,t) = 0, u''(\ell,t) = 0, u'''(\ell,t) = 0$ ，且參數  $\alpha = 1$ ，則可得到外力之解析解  $F_{exact}(x,t) = (x^6 - 4\ell x^5 + 6\ell^2 x^4 - 4\ell^3 x^3 + (\ell^4 + 360)x^2 - 480\ell x + 144\ell^2) e^{-t}$ ，接著我們令梁長  $\ell = 1.0$ 、結束時間  $t_f = 1.0$  秒，取  $R = 0$ ，數值積分方法選用辛普森積分法，容許誤差為  $\varepsilon = 10^{-10}$ 。

於邊界積分方程中，假設  $G(t) = e^{-t}$  為已知，將  $H(x)$  取傅立葉級數作為試解 (trial solution)，即



$$H(x) = b_0 + \sum_{j=1}^m b_j \cos(jx) + d_j \sin(jx) \quad (4.13)$$

將上式代入(4.3)式之形式可得到

$$\int_0^{\ell} v_{n,1}(x) \left( b_0 + \sum_{j=1}^m b_j \cos(jx) + d_j \sin(jx) \right) dx \int_0^{t_f} v_{n,2}(t) e^{-t} dt = e_n \quad (4.14)$$

其中  $v_{n,1}(x) = \left[ \frac{\cos(a_n x) - \cosh(a_n x)}{\cos(a_n \ell) + \cosh(a_n \ell)} - \frac{\sin(a_n x) - \sinh(a_n x)}{\sin(a_n \ell) + \sinh(a_n \ell)} \right]$ ， $v_{n,2}(t) = \cos(\omega(t - t_f))$ ，接

著我們取參數  $m = 4$ ， $k = 2m + 1 = 9$ ，取  $n = 10$ ，將其數值積分之結果寫成矩陣型式並用共軛梯度法求解其係數  $b_0, b_j, d_j$ ，可以得到復原後的外力函數之數值解

$$H(x) = b_0 + \sum_{j=1}^n b_j \cos(jx) + d_j \sin(jx)。$$

在圖 4-6 中可以看出以傅立葉級數求得之數值解仍能得到與解析解相同的趨勢，唯在端點處有較大之誤差，顯示其依然保有一定的精度，而從圖 4-7 中可知其在距離梁固定端 0.2 後的數值解誤差均在 2.0 以下，而固定端之誤差為最大已超過 25，可看出其在端點的地方誤差已然相當大。

而圖 4-8 為外力函數加入時間項函數  $G(t)$  之數值解與解析解的誤差，因誤差是從  $H(x)$  的數值解產生的，而  $G(t) = e^{-t}$  為隨著時間  $t$  增加而減少，因此在圖中端點  $x = 0$  的地方其誤差也隨著時間而降低。

接著我們嘗試以改變共軛梯度法之初值選擇，改善求解傅立葉級數之係數，由圖 4-9 中可看出藉由改變初值  $x_0$  能夠改變復原後之外力函數  $H(x)$  的最大誤差，在初值為 -155.34 時，能使得數值解之誤差為最小。由圖 4-10 與圖 4-6 中可看出經過調整初值能夠有效的影響回復的外力函數結果，並降低其誤差，而在圖 4-11 誤差圖部分可以看出梁中段的誤差仍維持在 2.0 以下，顯示其依然保有其穩定度，而端點的地方其誤差已由原先的 25 降低到 4.0 以下。

圖 4-12 為將經過調整後的  $H(x)$  加入時間項之數值解與解析解之誤差，其誤差之函數圖形與圖 4-11 相同；而圖 4-13 與圖 4-12 為同一張圖，只是將其座標軸範圍拉至與圖 4-8 相同以方便做比較，可看出這樣的嘗試對於改善求解精度是相當有效且明顯的。





### 4.3 數值算例三

算例三為使用與算例二相同的懸臂梁，梁長  $\ell = 1.0$ 、結束時間  $t_f = 1.0$  秒，取  $R = 0$ ，數值積分方法選用辛普森積分法、容許誤差為  $\varepsilon = 10^{-10}$ 。不同的是在此算例是假設外力函數  $F(x, t) = H(x)G(t)$  中的時間項函數  $G(t)$  為未知，即  $H(x) = x^2(x - \ell)^4 + (360x^2 - 480\ell x + 144\ell^2)$  為已知函數，因此將  $G(t)$  作傅立葉級數展開，即

$$G(t) = b_0 + \sum_{j=1}^m b_j \cos(jt) + d_j \sin(jt) \quad (4.15)$$

將上式代入(4.3)式之形式可得到

$$\int_0^\ell v_{n,1}(x)H(x)dx \int_0^{t_f} v_{n,2}(t) \left( b_0 + \sum_{j=1}^m b_j \cos(jt) + d_j \sin(jt) \right) dt = e_n \quad (4.16)$$

其中  $v_{n,1}(x) = \left[ \frac{\cos(a_n x) - \cosh(a_n x)}{\cos(a_n \ell) + \cosh(a_n \ell)} - \frac{\sin(a_n x) - \sinh(a_n x)}{\sin(a_n \ell) + \sinh(a_n \ell)} \right]$ 、 $v_{n,2}(t) = \cos(\omega(t - t_f))$ ，參

數取  $m = 2$ ， $k = 2m + 1 = 5$ ，取  $n = 6$ ，將其結果求解後可得時間項函數之數值解

$$G(t) = b_0 + \sum_{j=1}^n b_j \cos(jt) + d_j \sin(jt)。$$

在圖 4-14 中可以看出於時間項之復原函數對於共軛梯度法之初值  $\mathbf{x}_0$  並無需刻意要求，當其為預設值 0 時求得之解的誤差為最小，已然相當符合要求，刻意改變其初值反而增加其誤差，影響求解之精度。圖 4-15 表現出時間函數的復原結果相當良好，得到之函數曲線與解析解相當吻合，而在圖 4-16 中的誤差部分，可得到其誤差均在 0.002 以下，代表著即使改變外力函數的已知項，也仍能得到不錯的精度。圖 4-17 與圖 4-18 分別為反算外力之數值解與解析解，可看出其具有相同的形狀，而圖 4-19 為兩者間之誤差，可看出其誤差最大也僅為 0.245，顯示其復原的結果相當好。

接著在此固定  $H(x) = x^2(x - \ell)^4 + (360x^2 - 480\ell x + 144\ell^2)$  為已知項，變更  $G(t)$  部分，另外使用了  $\sin(t)$  與  $(1-t)^2$  做為解析解型式，以傅立葉級數復原之。圖 4-20 與圖 4-21 為復原  $G(t) = \sin(t)$  之結果，圖中可看到其曲線相當吻合、且其誤差僅至  $10^{-4}$



數量級。圖 4-22 與 4-23 則為復原  $G(t) = (1-t)^2$  之結果，由比較圖也能得到相近的趨勢，而在誤差圖則得到最大約為 0.06，結果也還不錯。從整體來看，算例三復原  $G(t)$  的結果相比算例二復原  $H(x)$  的結果是準確地多，考慮其可能的原因為  $G(t)$  的函數較  $H(x)$  簡單的多，以致其復原誤差均較小。

#### 4.4 數值算例四

第四個算例將以兩端固定梁為例，其邊界積分方程為如下型式

$$\int_0^{t_f} \int_0^\ell \left[ (1-R) \cos(\omega(t-t_f)) + R \sin(\omega(t-t_f)) \right] \left[ \frac{\cos(ax) - \cosh(ax)}{\cos(a\ell) - \cosh(a\ell)} - \frac{\sin(ax) - \sinh(ax)}{\sin(a\ell) - \sinh(a\ell)} \right] F(x,t) dx dt = e_n \quad (4.17)$$

而其特徵方程式為

$$1 - \cos(a\ell) \cosh(a\ell) = 0 \quad (4.18)$$

使用 FTIM 可求得前其幾個特徵值。接著考慮此兩端固定梁的位移為

$$u(x,t) = x^2(x-\ell)^2 e^{-t}, \quad 0 < x < \ell, \quad 0 < t < t_f \quad (4.19)$$

其中  $u(0,t) = 0$ ,  $u'(\ell,t) = 0$ ,  $u(\ell,t) = 0$ ,  $u'(0,t) = 0$ ，參數  $\alpha = 1$ ，則可得到外力之解析解  $F_{exact}(x,t) = (x^2(x-\ell)^2 + 24)e^{-t}$ ，梁長  $\ell = 1.0$ 、結束時間  $t_f = 1.0$  秒，取  $R = 0$ ，數值積分方法選用辛普森積分法及容許誤差為  $\varepsilon = 10^{-10}$ 。

於邊界積分方程中，假設  $G(t) = e^{-t}$  為已知，將  $H(x)$  取傅立葉級數作為試解 (trial solution)

$$H(x) = b_0 + \sum_{j=1}^m b_j \cos(jx) + d_j \sin(jx) \quad (4.20)$$

將上式代入(4.3)式之形式可得到

$$\int_0^\ell v_{n,1}(x) \left( b_0 + \sum_{j=1}^m b_j \cos(jx) + d_j \sin(jx) \right) dx \int_0^{t_f} v_{n,2}(t) e^{-t} dt = e_n \quad (4.21)$$

其中  $v_{n,1}(x) = \left[ \frac{\cos(a_n x) - \cosh(a_n x)}{\cos(a_n \ell) - \cosh(a_n \ell)} - \frac{\sin(a_n x) - \sinh(a_n x)}{\sin(a_n \ell) - \sinh(a_n \ell)} \right]$ 、 $v_2(t) = \cos(\omega(t-t_f))$ ，接

著我們取參數  $m = 2$ ， $k = 2m + 1 = 5$ ，取  $n = 6$ ，求解後可得到兩端固定梁之反算外

力函數之數值解  $H(x) = b_0 + \sum_{j=1}^m b_j \cos(jx) + d_j \sin(jx)$ 。

由圖 4-24 中可得其解在初值  $x_0$  為 -54.62 時誤差為最小。而由圖 4-26 中的數值解與解析解的誤差比較可看到其誤差均在 2.0 以下，其結果看似還不錯，不過從圖 4-25 的數值解與解析解之比較中可看出數值解的曲線趨勢與圖形與解析解相差甚大，僅僅是曲線數值相近造成誤差較小之結果。因此兩端固定梁之反算外力函數的試解選取傅立葉級數的結果並不理想，雖能找到最小誤差解，但函數曲線並無法準確與解析解吻合。

## 4.5 數值算例五

算例五將接續算例四的兩端固定梁，使用傅立葉級數作為試解展開得到之復原外力的結果不甚良好，又因任何具有完備性之函數均可拿來展開作為試解，而形函數即為具備完備性之函數之一，因此此例將改用兩端固定梁之振態作為測試函數之基底。

以兩端固定梁之振型函數  $X(x) = \frac{\cos(ax) - \cosh(ax)}{\cos(a\ell) - \cosh(a\ell)} - \frac{\sin(ax) - \sinh(ax)}{\sin(a\ell) - \sinh(a\ell)}$  當作基

底，且重新令其為  $w(x)$  以避免混淆，即

$$w(x) = \frac{\cos(ax) - \cosh(ax)}{\cos(a\ell) - \cosh(a\ell)} - \frac{\sin(ax) - \sinh(ax)}{\sin(a\ell) - \sinh(a\ell)} \quad (4.22)$$

接著令試解

$$H(x) = \sum_{k=1}^n b_k w_k(x) + H(0) + \frac{x}{\ell} [H(\ell) - H(0)] \quad (4.23)$$

其中

$$H(0) = \sum_{k=1}^n b_k w_k(0) + H(0) + \frac{0}{\ell} [H(\ell) - H(0)] = H(0) \quad (4.24)$$

$$H(\ell) = \sum_{k=1}^n b_k w_k(\ell) + H(0) + \frac{\ell}{\ell} [H(\ell) - H(0)] = H(\ell)$$

因振態之性質為  $w_k(0) = 0, w_k(\ell) = 0$ ，無法滿足外力在端點不為零的情況，因此假設已知其在端點之值  $H(0), H(\ell)$ ，需另外加上  $H(0) + \frac{x}{\ell} [H(\ell) - H(0)]$  此項使其能夠滿足邊界條件。

將兩端固定梁之試解(4.23)式代入(4.3)式之形式可得到



$$\int_0^\ell v_{n,1}(x) \left( \sum_{k=1}^n b_k w_k(x) + H(0) + \frac{x}{\ell} [H(\ell) - H(0)] \right) dx \int_0^{t_f} v_{n,2}(t) G(t) dt = e_n \quad (4.25)$$

其中  $v_{n,1}(x) = \left[ \frac{\cos(a_n x) - \cosh(a_n x)}{\cos(a_n \ell) - \cosh(a_n \ell)} - \frac{\sin(a_n x) - \sinh(a_n x)}{\sin(a_n \ell) - \sinh(a_n \ell)} \right]$ ,

$v_{n,2}(t) = (1-R) \cos(\omega(t-t_f)) + R \sin(\omega(t-t_f))$  接著將(4.25)式經過展開可得

$$\left( \int_0^\ell v_{n,1}(x) \sum_{k=1}^n b_k w_k(x) dx + \int_0^\ell v_{n,1}(x) \left( H(0) + \frac{x}{\ell} [H(\ell) - H(0)] \right) dx \right) \int_0^{t_f} v_{n,2}(t) G(t) dt = e_n \quad (4.26)$$

其中在不同的模態之間，因其具有互相正交之特性，即

$$v_i(x) w_j(x) \begin{cases} = 0, & \text{if } i \neq j \\ \neq 0, & \text{if } i = j \end{cases} \quad (4.27)$$

因此(4.26)式可寫為

$$\left( \int_0^\ell b_k v_{n,1}(x) w_k(x) dx + \int_0^\ell v_{n,1}(x) \left( H(0) + \frac{x}{\ell} [H(\ell) - H(0)] \right) dx \right) \int_0^{t_f} v_{n,2}(t) G(t) dt = e_n \quad (4.28)$$

因此若寫為先前之  $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}$  的代數方程組型式，則會發現係數矩陣  $\mathbf{A}$  為對角矩陣 (diagonal matrix)，故可以不用透過共軛梯度法求代數方程組之解。接著將(4.28)式之積分項結果分別表示為

$$\int_0^\ell v_{n,1}(x) w_k(x) dx \equiv C_1 \quad (4.29)$$

$$\int_0^\ell v_{n,1}(x) \left( H(0) + \frac{x}{\ell} [H(\ell) - H(0)] \right) dx \equiv C_2 \quad (4.30)$$

$$\int_0^{t_f} v_{n,2}(t) G(t) dt \equiv C_3 \quad (4.31)$$

將(4.29)、(4.30)、(4.31)之結果代入(4.28)式，則(4.28)式可簡化為

$$(b_k C_1 + C_2) C_3 = e_k \quad (4.32)$$

則即可得到其係數  $b_k$  為

$$b_k = \frac{e_k - C_2 C_3}{C_1 C_3} \quad (4.33)$$

將係數  $b_k$  帶回(4.23)式即可得到復原的外力函數

$$H(x) = \sum_{k=1}^n b_k w_k(x) + H(0) + \frac{x}{\ell} [H(\ell) - H(0)]。$$

參數部分我們取  $k = 4$  代表著選取到第四組振態，且我們在同一組振態分別取

$R=0$ ，可以得到一條位移之方程式，與取  $R=1$  可得到另一條速度之方程式，因此共有  $2k=8$  組方程式，數值積分方法則總共選用辛普森積分法(Simpson's rule)、高斯-克朗羅德法(Gauss-Kronrod)、龍格-庫塔法(RK4)總共三種積分方法並比較之，容許誤差為  $\varepsilon=10^{-10}$ 。

將以上計算過程分別使用三種積分方法後可得到三組外力數值解。圖 4-27 為使用辛普森積分法得到之數值解與解析解之比較，可看出其數量級相差相當大，是為一個失敗的結果。而圖 4-28 則是使用高斯-克朗羅德法與龍格-庫塔法得到之數值解與解析解的比較，由圖中可看出其結果與解析解的曲線十分吻合，表現相當令人滿意。圖 4-29 與圖 4-30 則分別為使用高斯-克朗羅德法與龍格-庫塔法得到之數值解的誤差圖，由兩張圖中可知其誤差均在  $10^{-4}$  之數量級內，顯示其復原的外力函數相當準確，並且由於這兩種積分方法得到之誤差結果差不多且曲線類似，可說明此兩種積分方法均帶有相當高的精度。

由於係數  $b_k = \frac{e_k - C_2 C_3}{C_1 C_3}$ ，影響其結果的因素即為帶有積分項的  $e_k, C_2 C_3, C_1 C_3$  這

三項，因此圖 4-31、圖 4-32 與圖 4-33 分別表示  $e_k, C_2 C_3, C_1 C_3$  由辛普森積分法、高斯-克朗羅德法與龍格-庫塔法之積分結果比較。由三張圖中可看出辛普森積分法能夠準確的算得  $\varepsilon=10^{-10}$  以上的值，除了在圖 4-31 有幾個值之數量級相差較大之外，其它數值積分結果雖說並無相差太多。將圖 4-33 之數據列表為表 4-1，可看出它們均能求至同一數量級，大多僅為幾個位數的差別，但在其相當小的數量級之下，對於最終結果的影響甚鉅；而高斯-克朗羅德法與龍格-庫塔法之數值積分結果曲線重合，表示其具有可信的積分精度。

此算例為選取形函數作為試解之基底，而最後得到之外力函數數值解與解析解相當吻合，從其表現來看可知其帶有很高的精度，由此結果來看是相當令人滿意的。而選用不同的數值積分方法的部分，其目的為由數值積分結果的精度來看對於求解結果的影響；由圖 4-31、圖 4-32 與圖 4-33 可看出隨著  $k$  變大，其數量級也愈來愈小，其中在圖 4-33 的  $C_1 C_3$  代表的相當於代數方程組  $\mathbf{Ax}=\mathbf{e}$  中的對角矩陣  $\mathbf{A}$ ，最小可達  $10^{-27}$  之數量級，可判斷此為一個相當病態的系統、其條件數非常大，因



此可知若有微小擾動(積分精度不佳、或其它外在因素影響),則對數值解造成相當大的影響。

表 4-1 以不同積分法求得  $C_1 \times C_3$  之比較表

$C_1 \times C_3$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
辛普森法	-1.78E-05	-8.96E-09	-2.78E-12	-1.17E-14
高斯-克朗羅德法	-1.78E-05	-8.96E-09	-3.06E-12	-9.81E-15
龍格-庫塔法	-1.78E-05	-8.96E-09	-3.06E-12	-9.81E-15
$C_1 \times C_3$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
辛普森法	-1.25E-17	1.21E-20	-3.44E-23	1.68E-27
高斯-克朗羅德法	-1.79E-17	1.31E-20	-2.45E-23	2.17E-27
龍格-庫塔法	-1.79E-17	1.31E-20	-2.45E-23	2.17E-27

## 4.6 數值算例六

在算例六將以一端固定與一端簡支梁為例,且選用其振態作為測試函數之基底,而其邊界積分方程為以下形式

$$\int_0^{t_f} \int_0^{\ell} \left[ (1-R) \cos(\omega(t-t_f)) + R \sin(\omega(t-t_f)) \right] \left[ \frac{\cos(ax) - \cosh(ax)}{\cos(a\ell) - \cosh(a\ell)} - \frac{\sin(ax) - \sinh(ax)}{\sin(a\ell) - \sinh(a\ell)} \right] F(x,t) dx dt = e_k \quad (4.34)$$

且其特徵方程式為

$$\tan(a\ell) - \tanh(a\ell) = 0 \quad (4.35)$$

使用擬時間積分法(FTIM)可求得其特徵值,接著即可得到振態為

$$w(x) = \frac{\cos(ax) - \cosh(ax)}{\cos(a\ell) - \cosh(a\ell)} - \frac{\sin(ax) - \sinh(ax)}{\sin(a\ell) - \sinh(a\ell)} \quad (4.36)$$

考慮此梁的位移為

$$u(x,t) = x^2(\ell-x)^3 e^{-t}, \quad 0 < x < \ell, \quad 0 < t < t_f \quad (4.xx)$$

參數  $\alpha = 1$ ，則可得到外力之解析解  $F_{exact}(x, t) = (x^2(\ell - x)^3 - 120x + 72\ell)e^{-t}$ ，其中假設  $G(t) = e^{-t}$  為已知。接著給定梁之參數，梁長  $\ell = 1.0$ 、結束時間  $t_f = 1.0$  秒，數值積分方法選用高斯-克朗羅德法，容許誤差為  $\varepsilon = 10^{-10}$ ，振態取到第四組  $k = 4$ 。

於圖 4-34 的數值解與解析解比較中，可以清楚的觀察到兩者的曲線是十分吻合的，在圖 4-35 的數值解誤差圖中，可看出其誤差僅在  $10^{-5}$  之數量級範圍，仍具有相當高的精度。



數值解與正解的比較

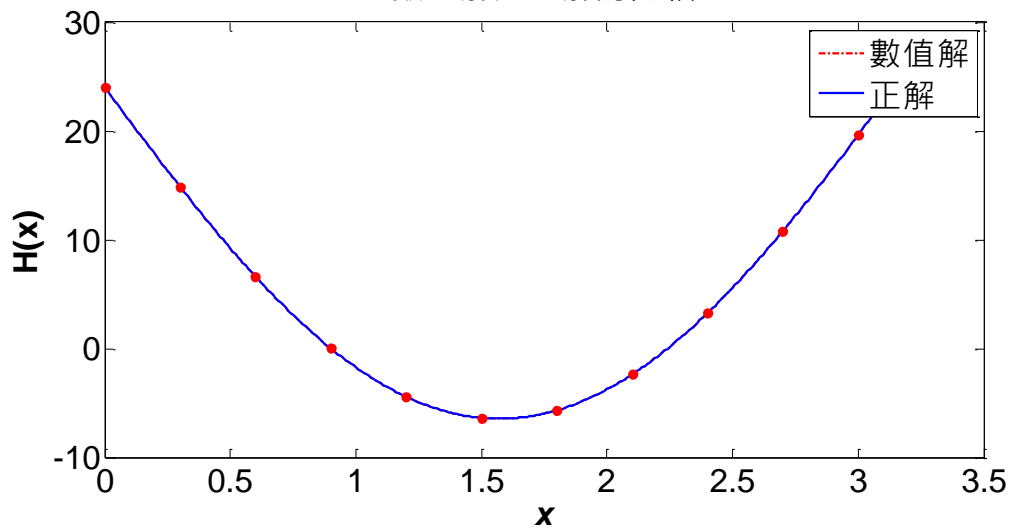


圖 4-1 算例一，簡支梁外力之數值解與解析解之比較

數值解與正解之誤差

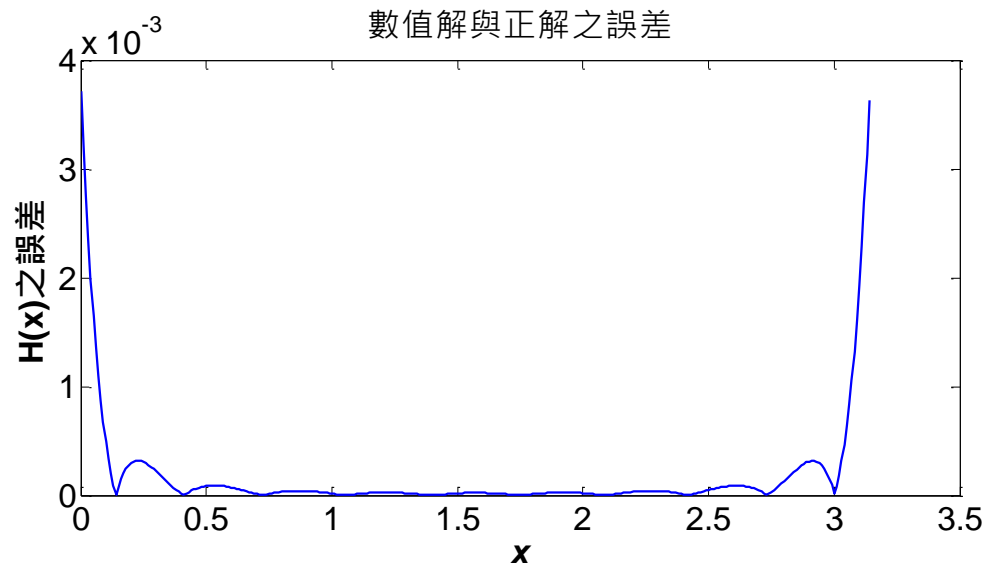


圖 4-2 算例一，簡支梁外力之數值解與解析解之誤差



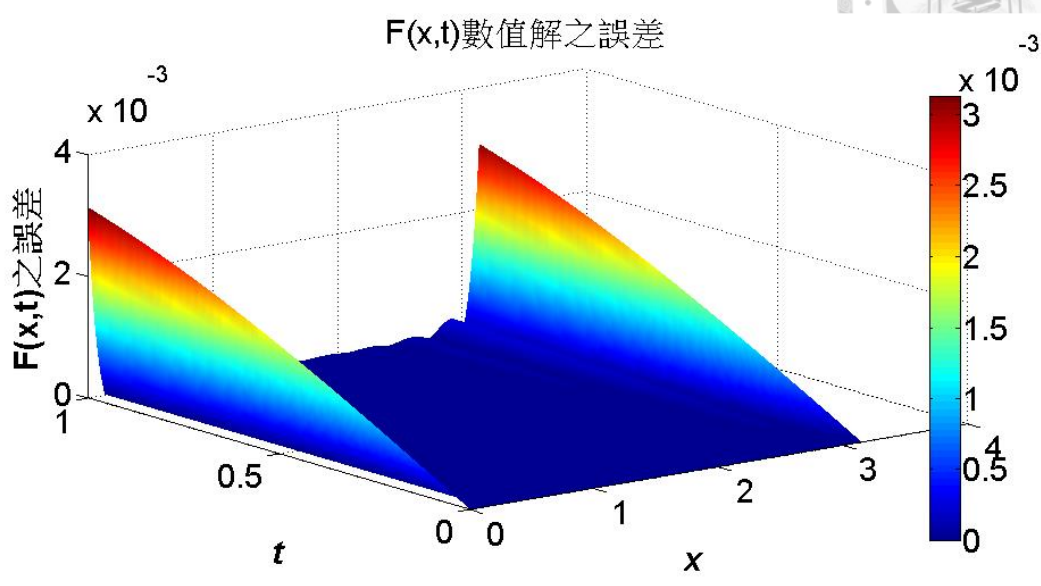


圖 4-3 算例一，簡支梁外力函數  $F(x,t)$  之數值解與解析解之誤差

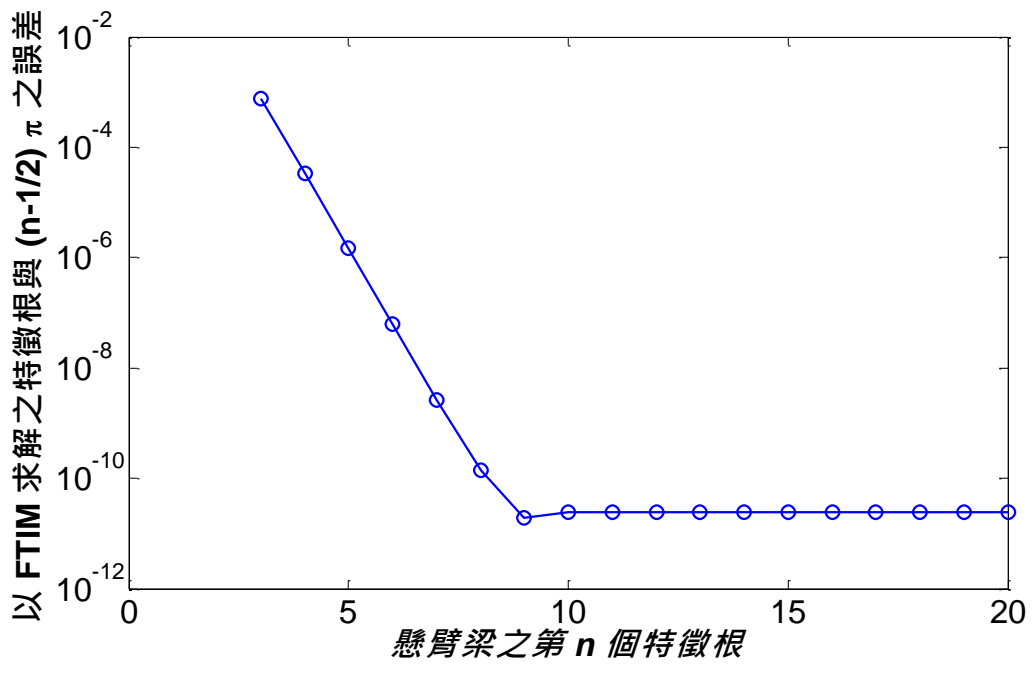


圖 4-4 算例二，FTIM 於求解懸臂梁之特徵值與近似解之差值

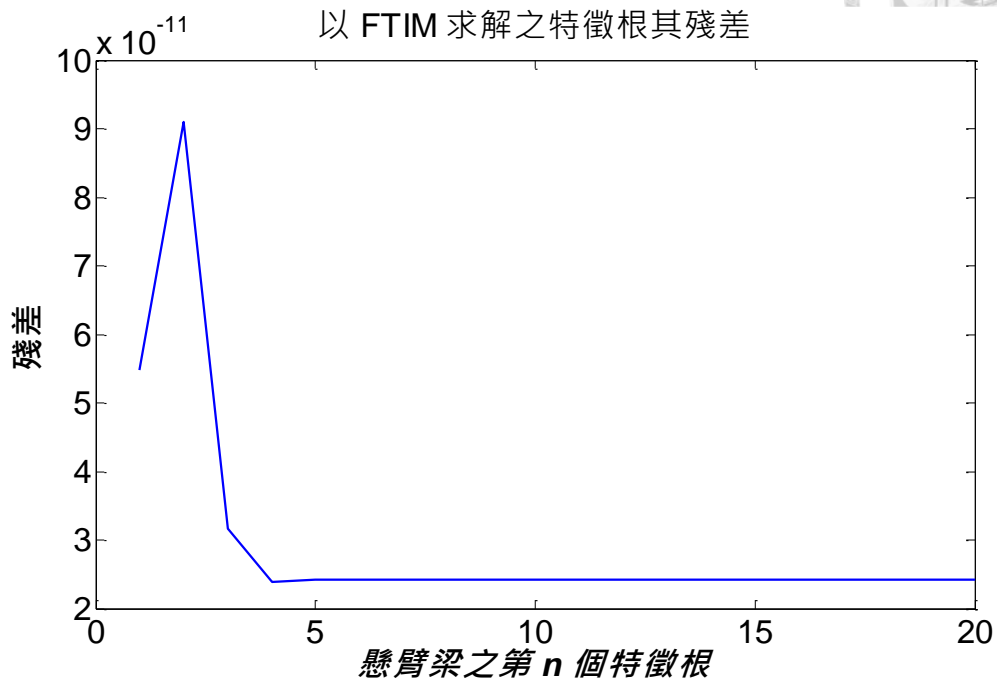


圖 4-5 算例二，FTIM 求解懸臂梁之特徵值之殘差

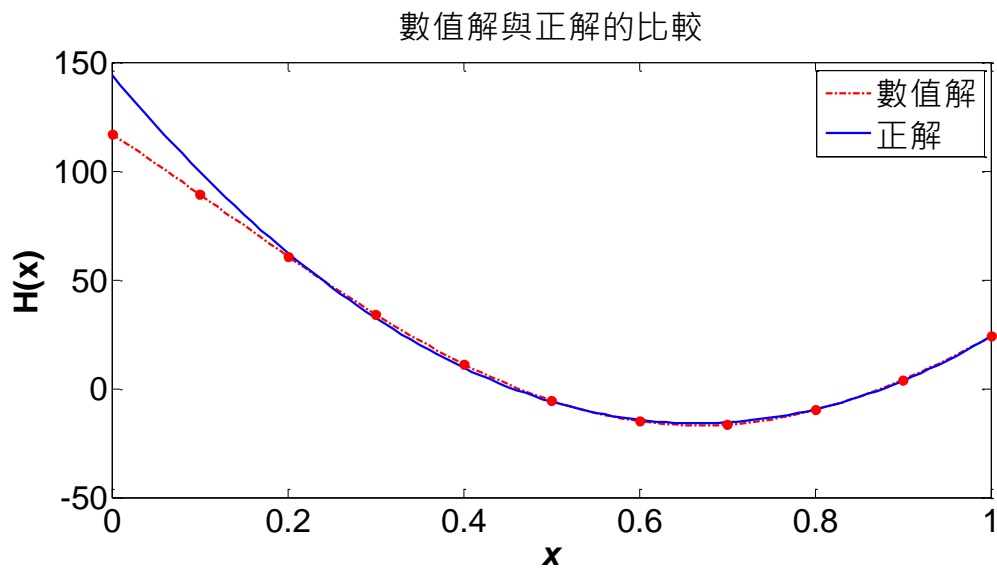


圖 4-6 算例二，懸臂梁外力之數值解與解析解之比較



數值解與正解之誤差

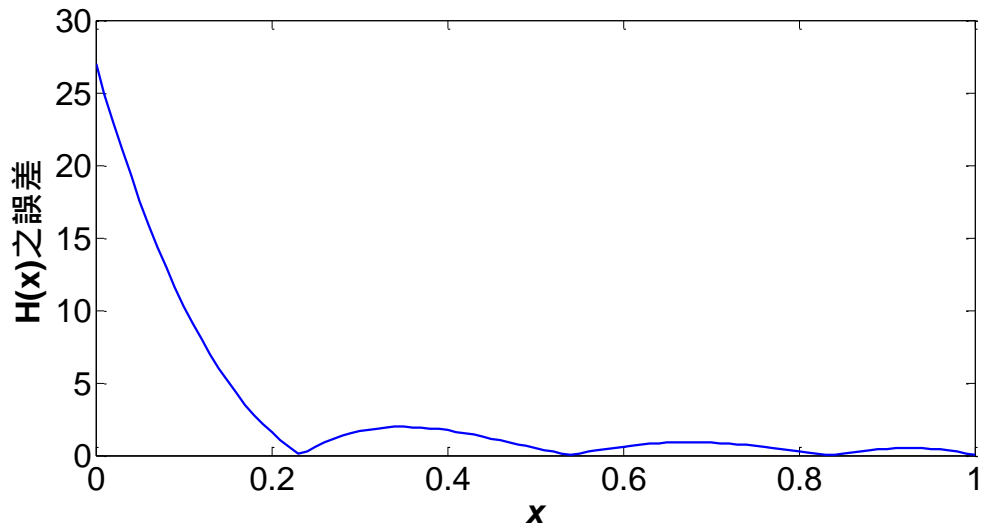


圖 4-7 算例二，懸臂梁外力之數值解與解析解之誤差

F(x,t)數值解之誤差

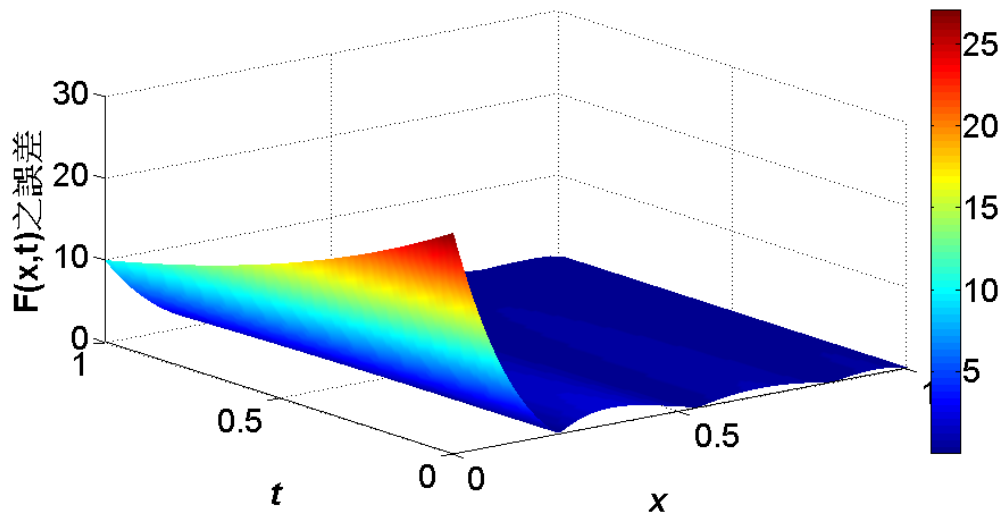
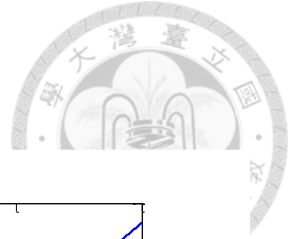


圖 4-8 算例二，懸臂梁外力函數  $F(x,t)$  之數值解與解析解之誤差



共軛梯度法之初值最佳化選擇

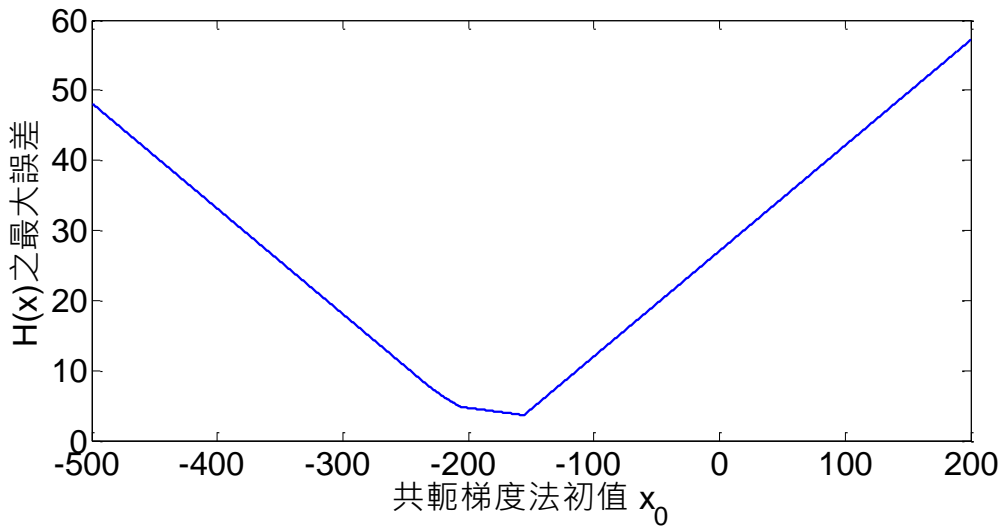


圖 4-9 算例二，共軛梯度法之初值選擇對於外力反算之影響

數值解與正解的比較

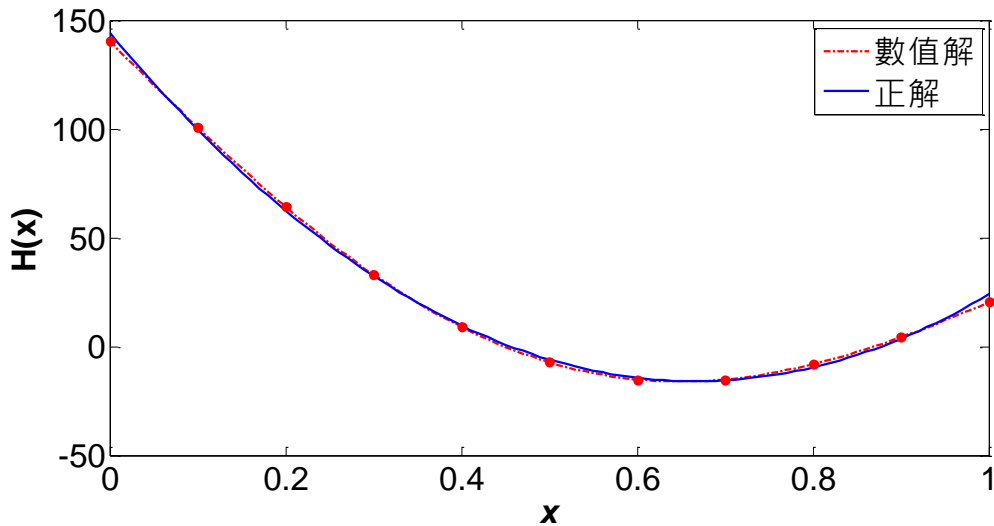


圖 4-10 算例二，選取最佳 CGM 之初值後，外力之數值解與解析解之比較

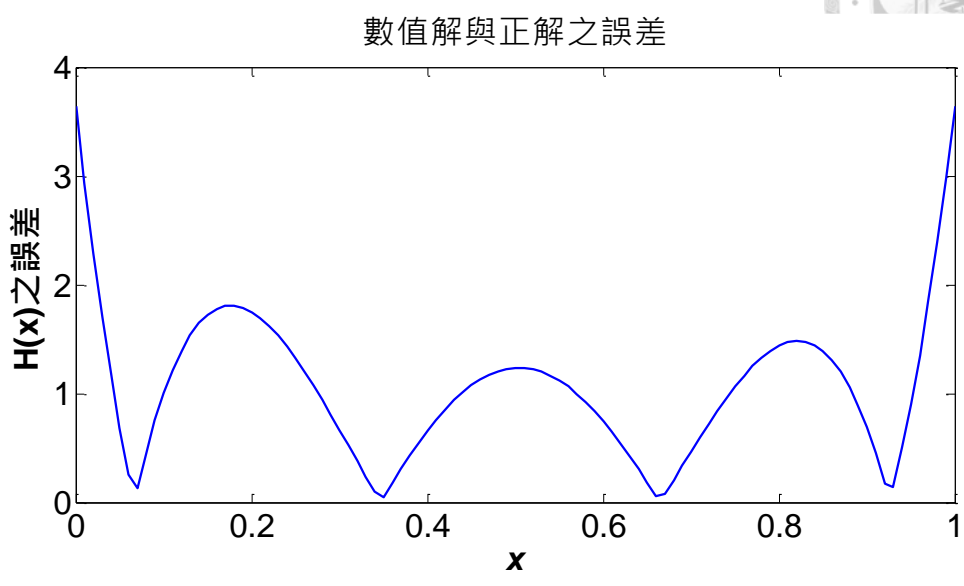


圖 4-11 算例二，選取最佳 CGM 之初值後，外力之數值解與解析解之誤差

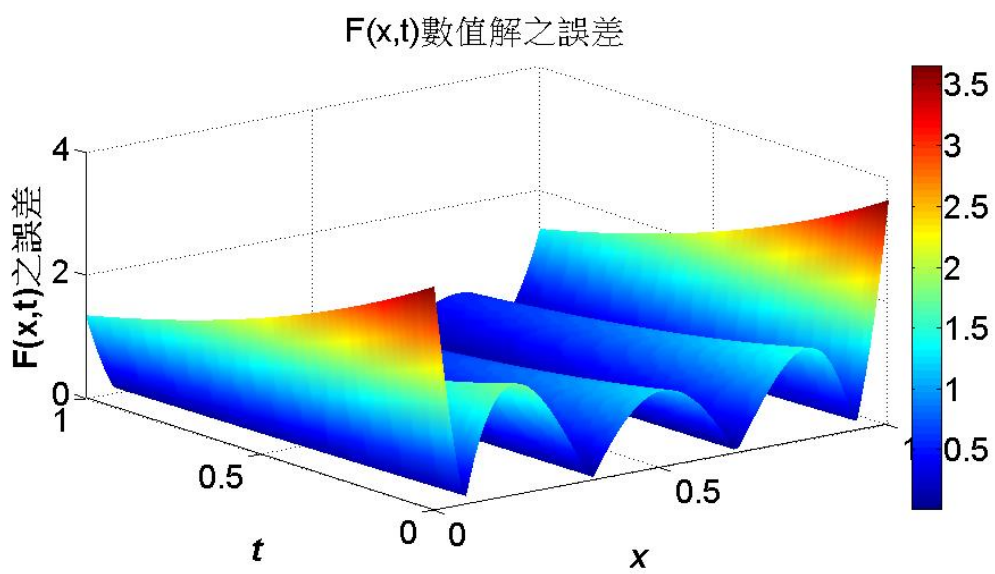


圖 4-12 算例二，懸臂梁外力函數  $F(x,t)$  之數值解與解析解之誤差

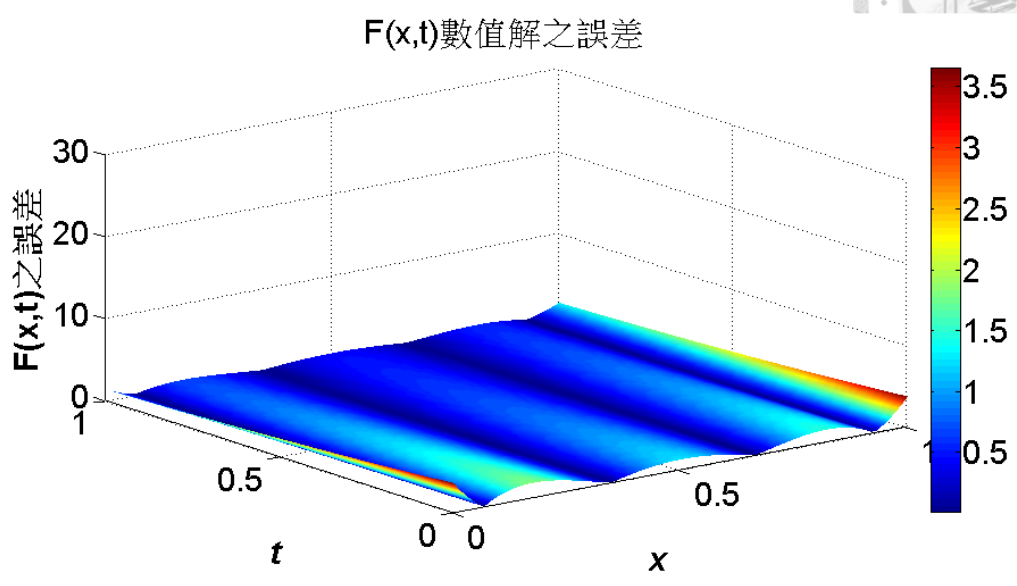
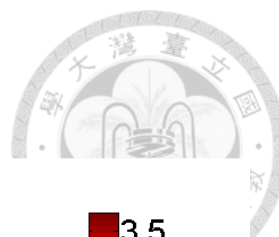


圖 4-13 算例二，懸臂梁外力函數  $F(x,t)$  之數值解與解析解之誤差

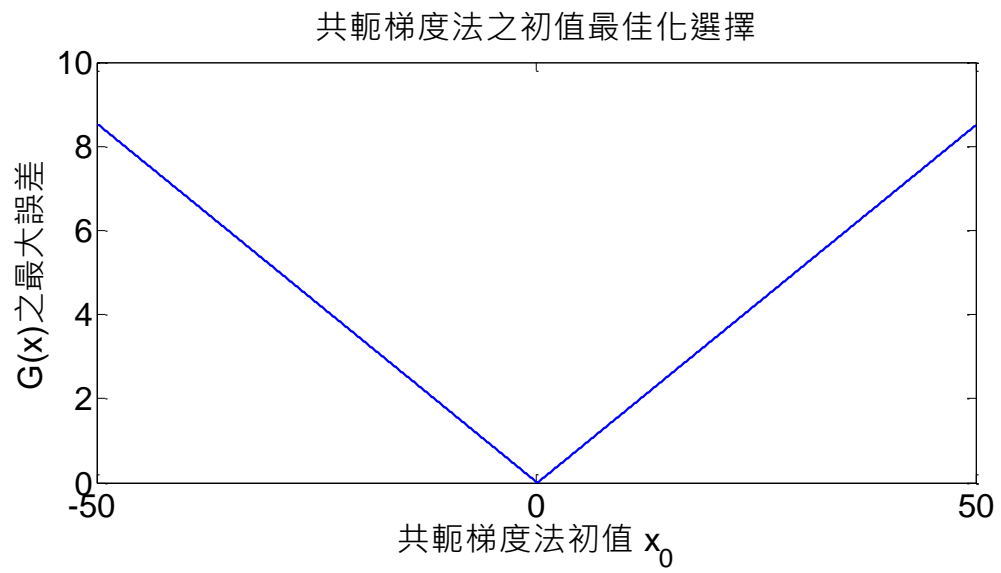


圖 4-14 算例三， $G(t)$  之共軛梯度法初值選擇之影響



數值解與正解的比較

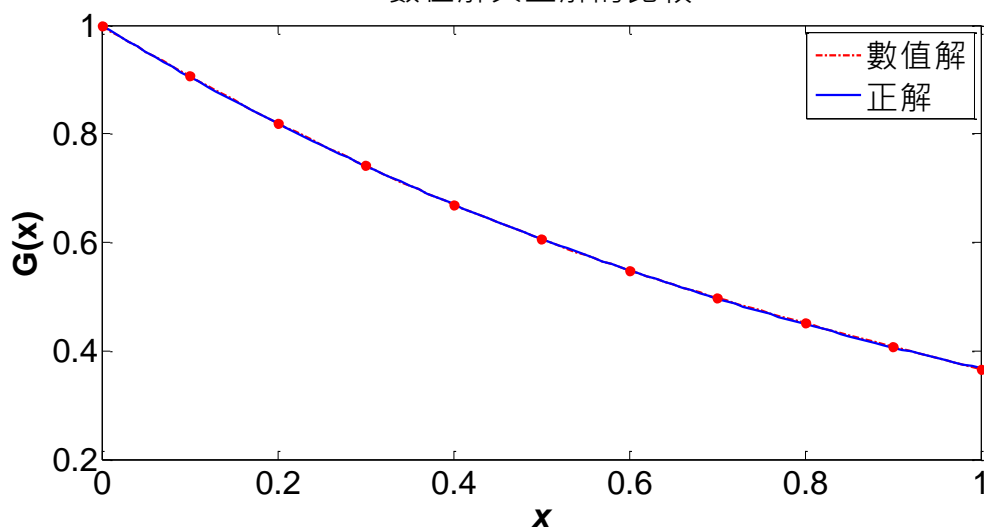


圖 4-15 算例三， $G(t)$  之數值解與解析解之比較

數值解與正解之誤差

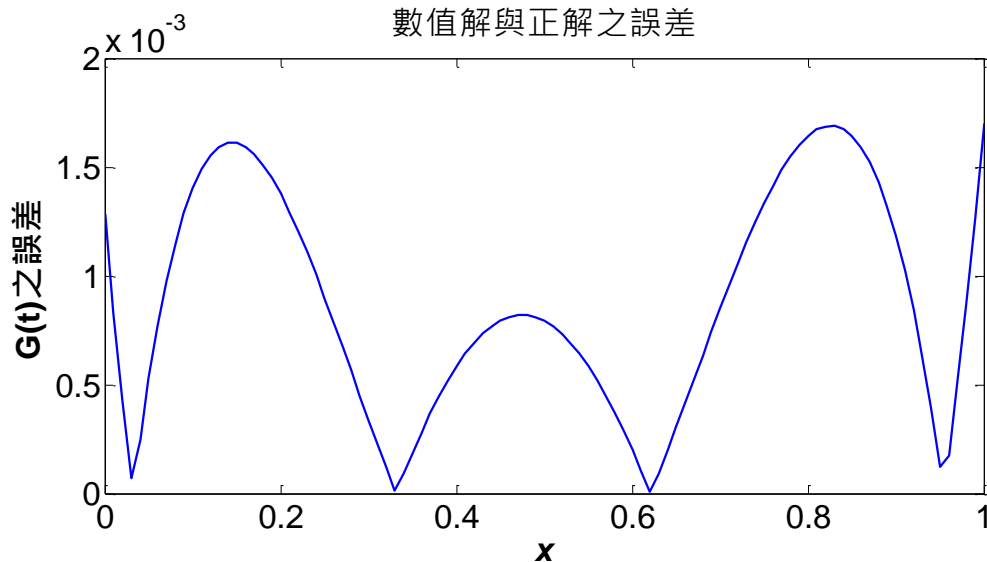


圖 4-16 算例三， $G(t)$  之數值解與解析解之誤差

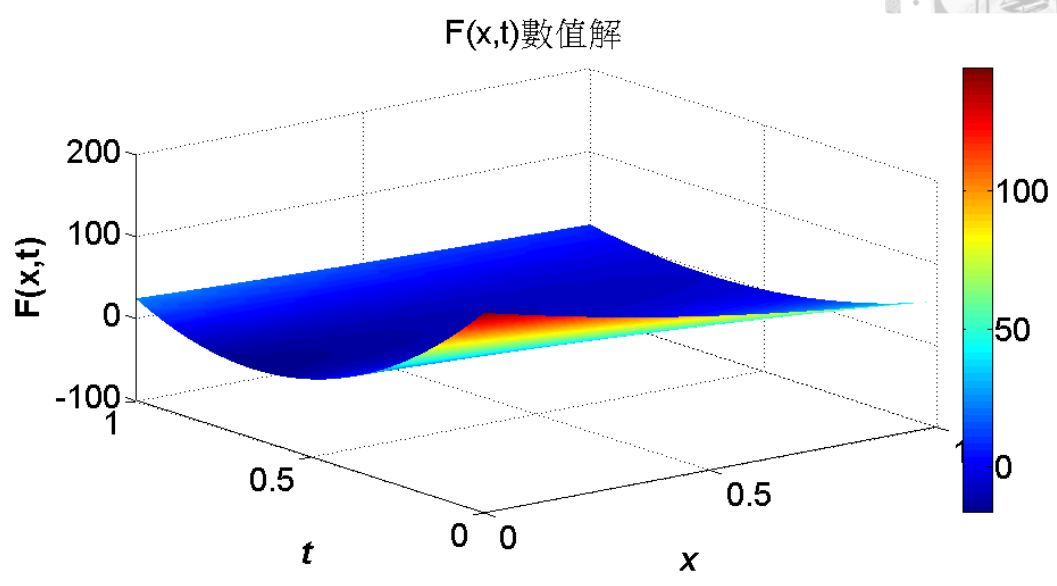


圖 4-17 算例三，懸臂梁外力函數  $F(x,t)$  之數值解

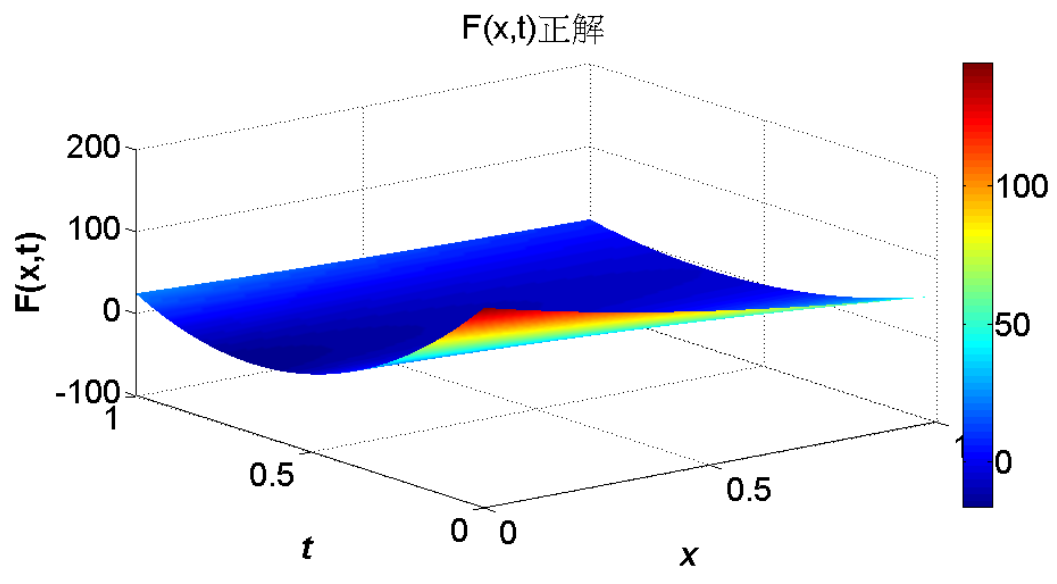


圖 4-18 算例三，懸臂梁外力函數  $F(x,t)$  之解析解



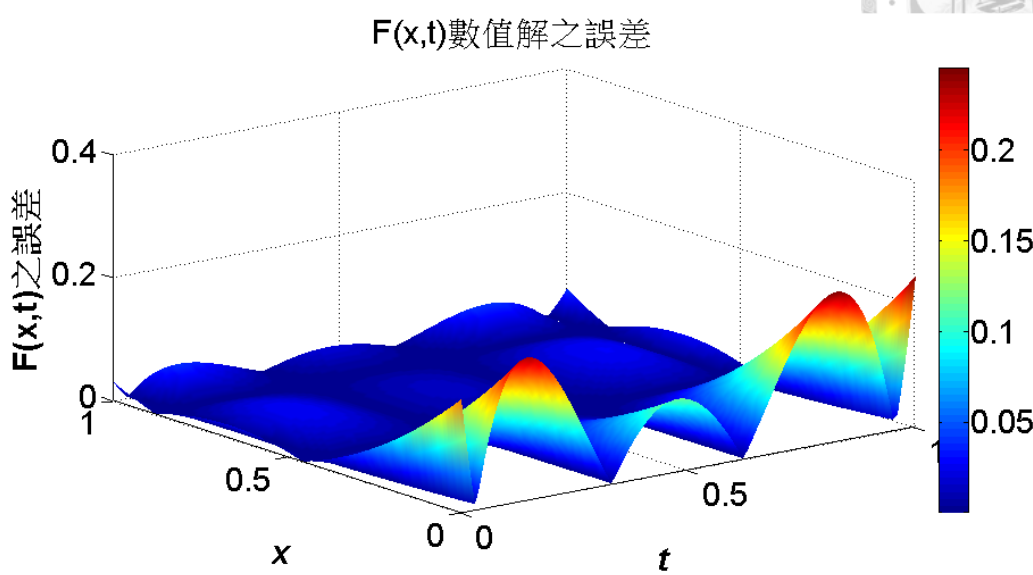


圖 4-19 算例三，懸臂梁外力函數  $F(x,t)$  之數值解與解析解之誤差

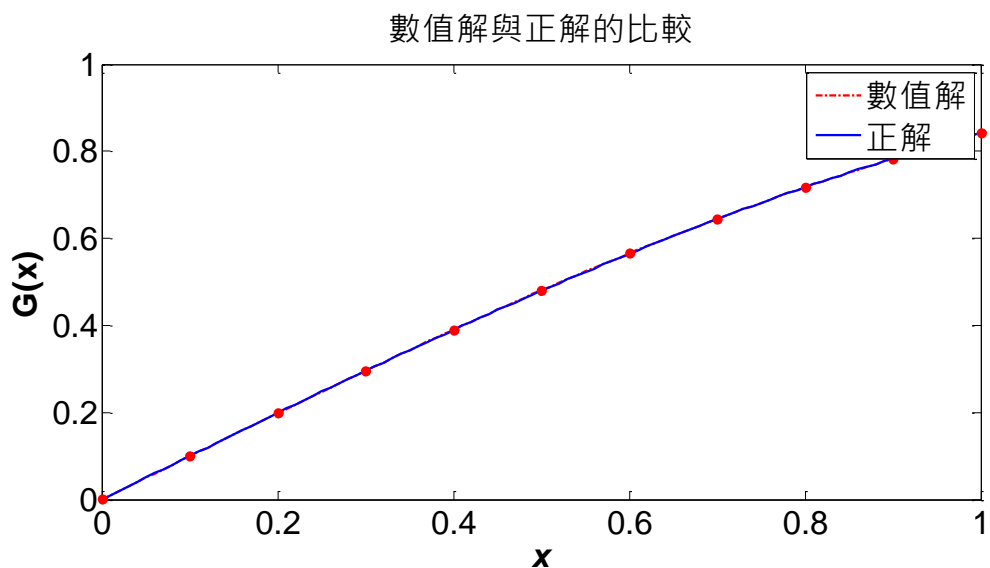


圖 4-20 算例三， $G(t) = \sin(t)$  的數值解與正解之比較

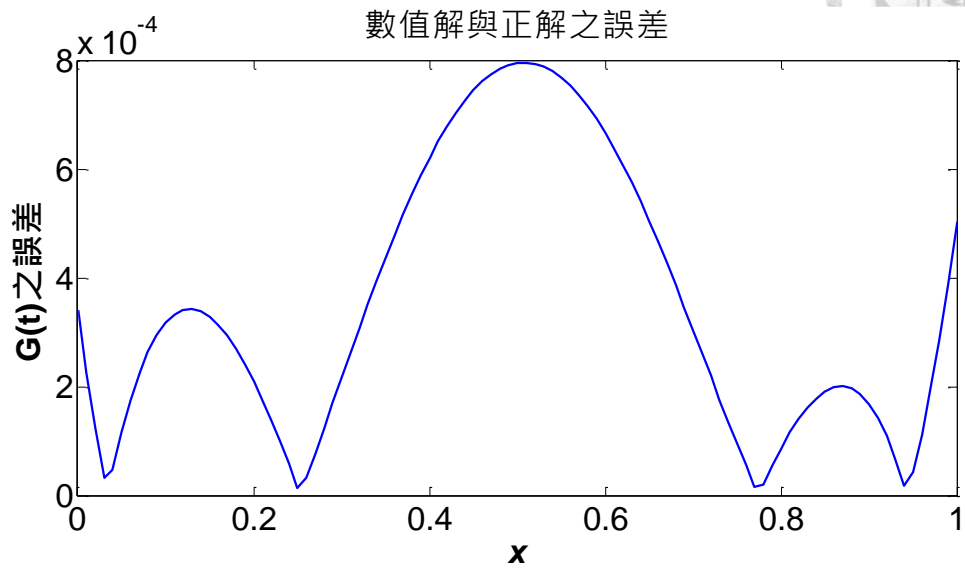


圖 4-21 算例三， $G(t) = \sin(t)$  的數值解與正解之誤差

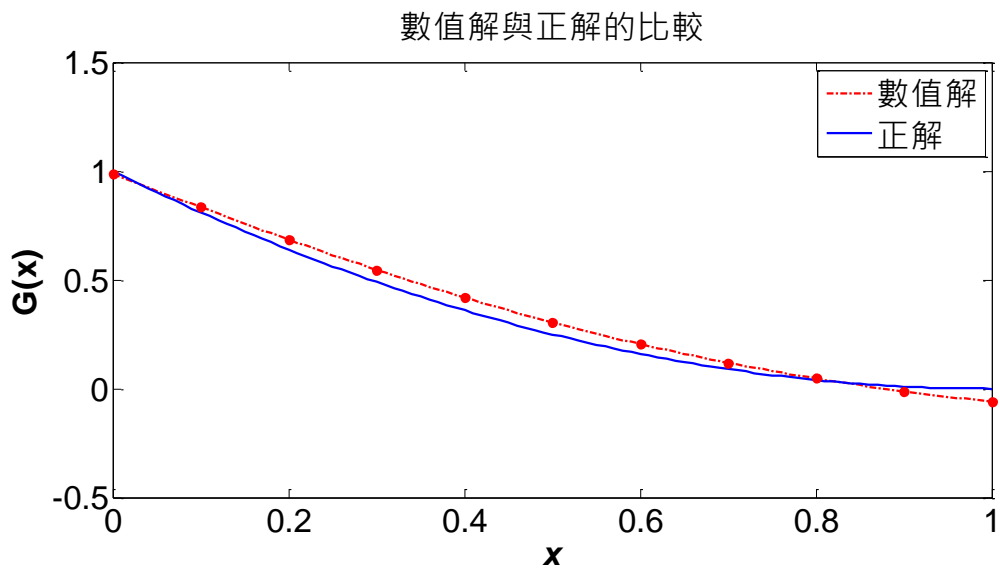


圖 4-22 算例三， $G(t) = (1-t)^2$  的數值解與正解之比較

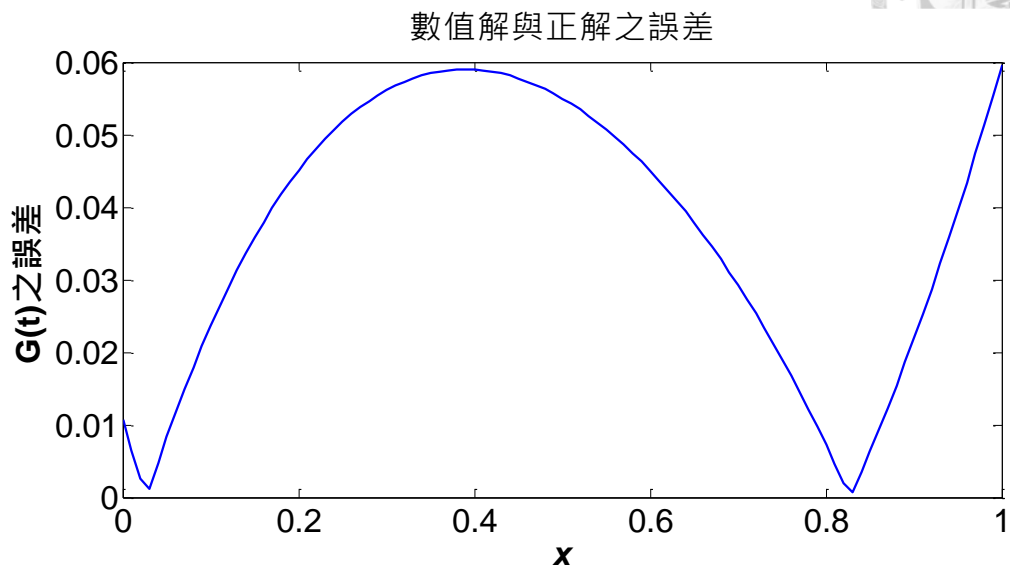


圖 4-23 算例三， $G(t) = (1-t)^2$  的數值解與正解之誤差

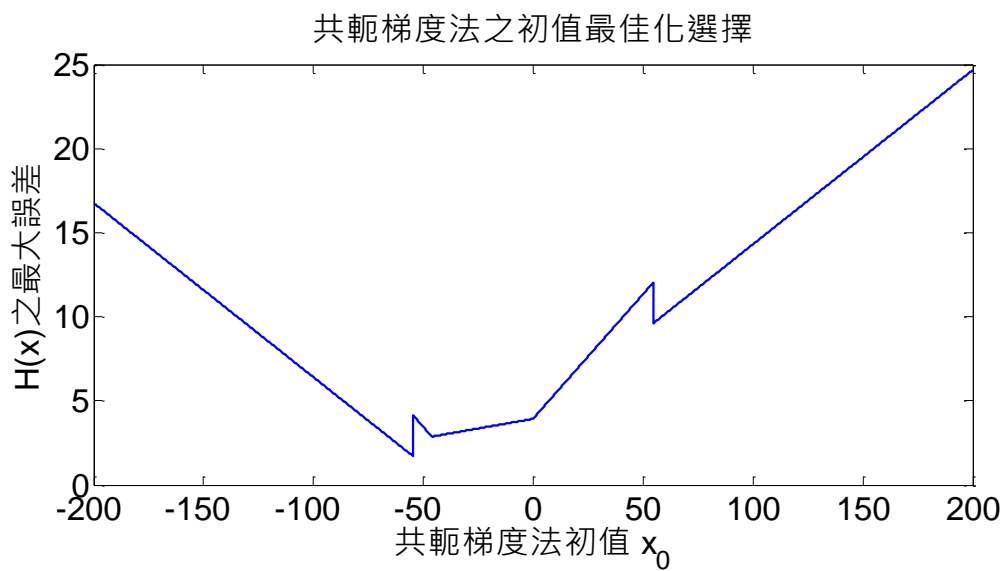


圖 4-24 算例四，兩端固定梁共軛梯度法初值選擇之影響



數值解與正解的比較

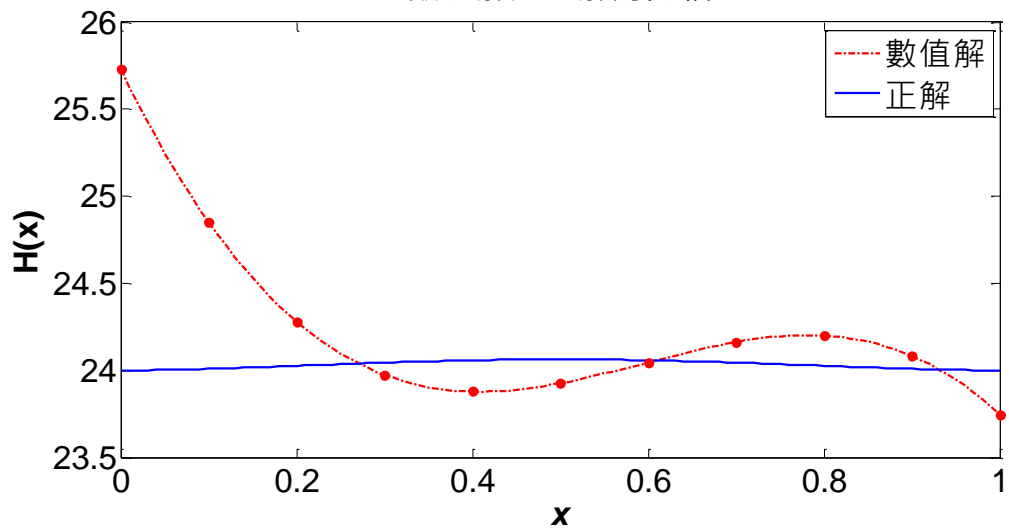


圖 4-25 算例四，兩端固定梁外力之數值解與解析解比較

數值解與正解之誤差

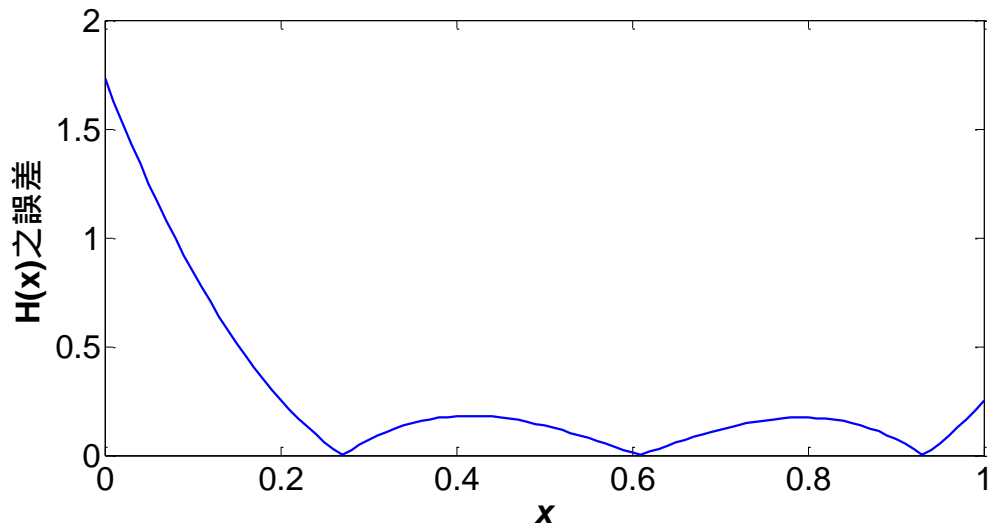


圖 4-26 算例四，兩端固定梁外力之數值解與解析解之誤差

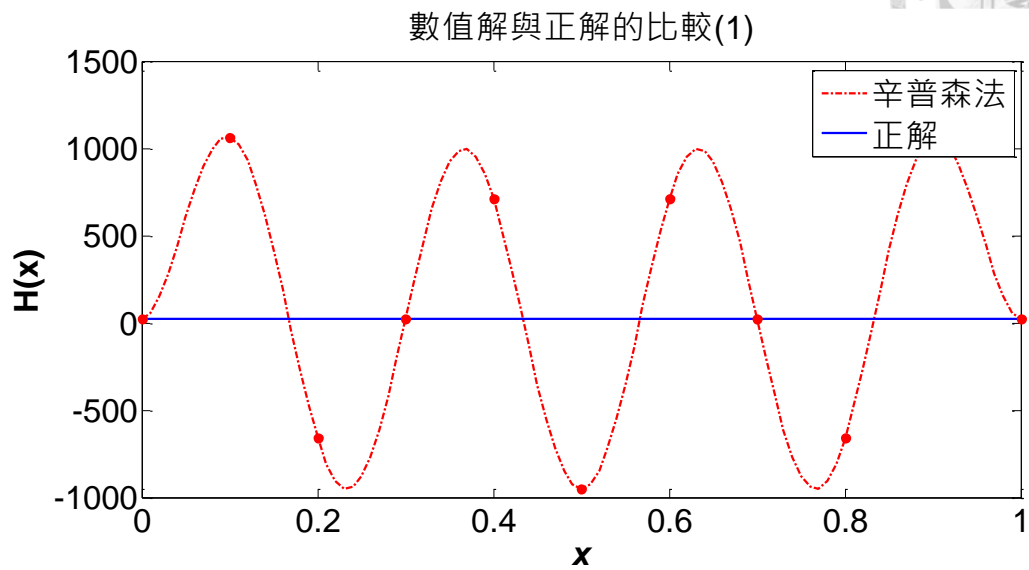


圖 4-27 算例五，外力之數值解(辛普森法)與解析解比較

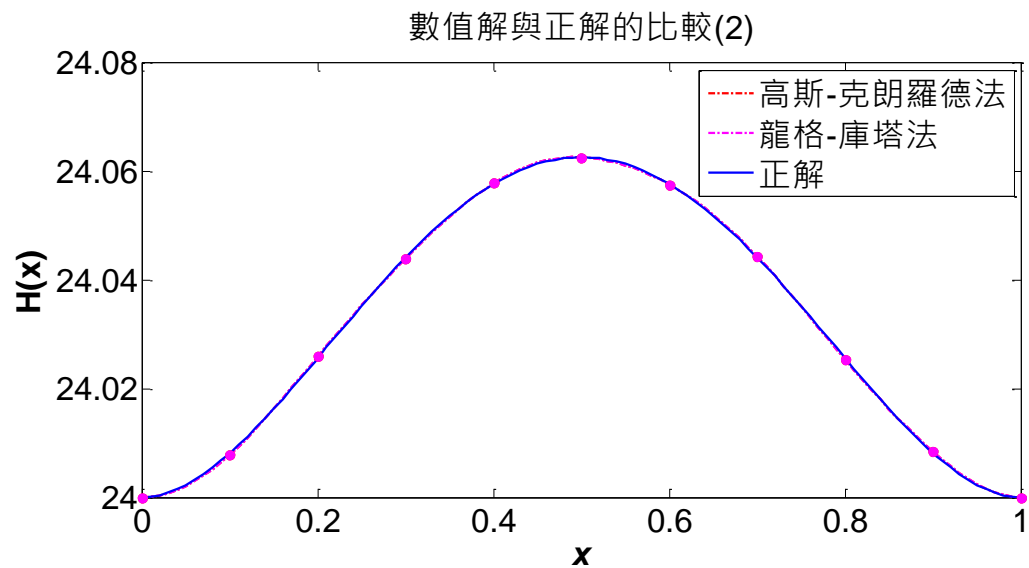


圖 4-28 算例五，外力之數值解(高斯-克朗羅德法與 RK4)與解析解比較

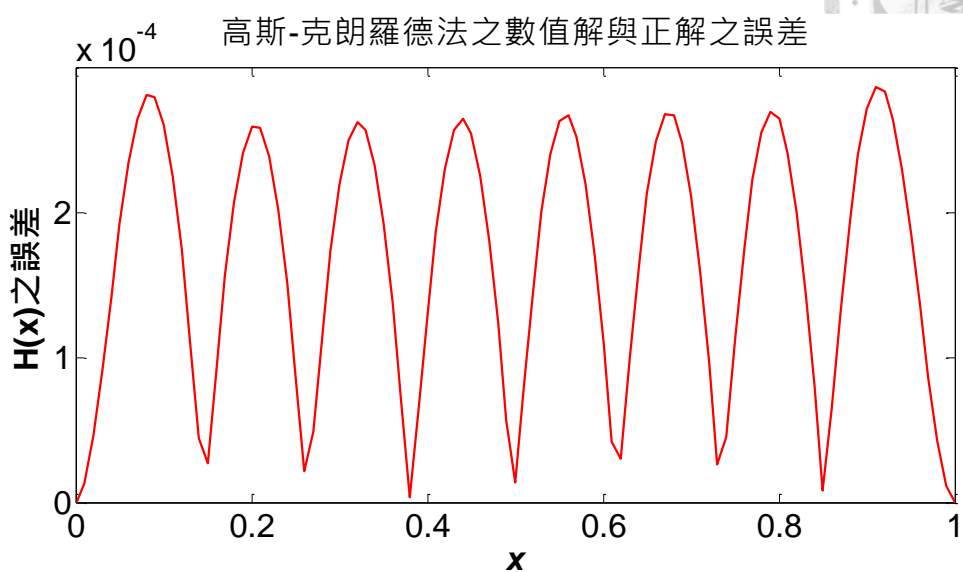


圖 4-29 算例五，外力之數值解(高斯-克朗羅德法)與解析解之誤差

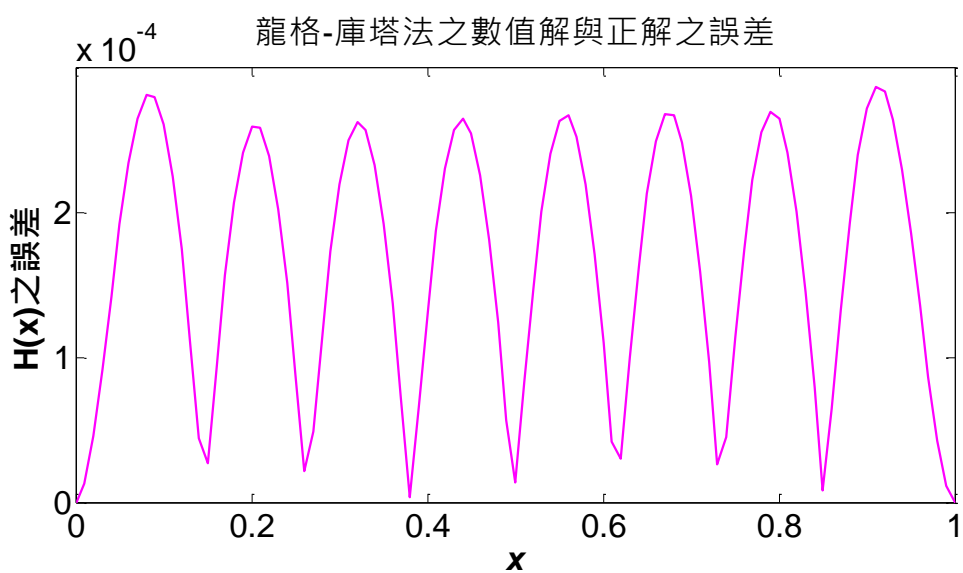


圖 4-30 算例五，外力之數值解(RK4)與解析解之誤差



比較不同數值積分方法得到之  $e_k$

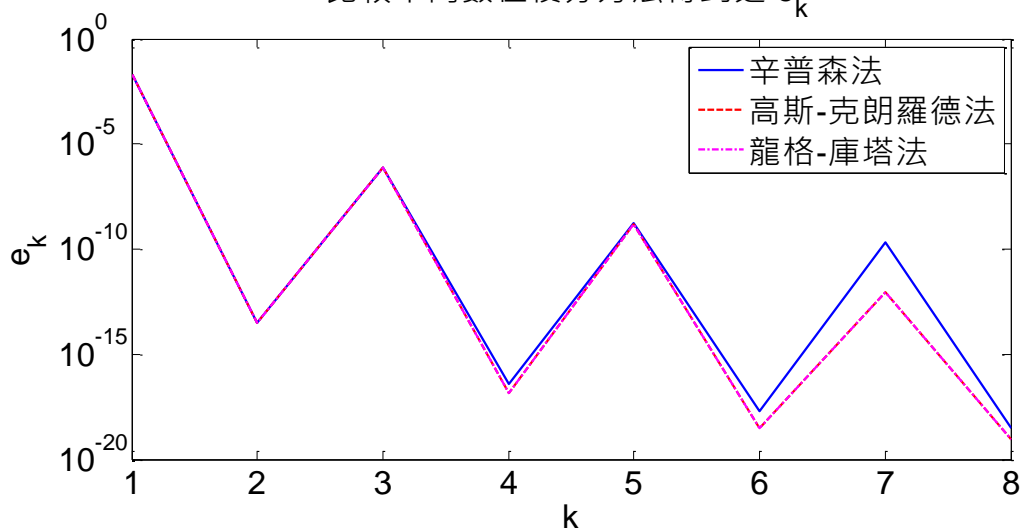


圖 4-31 算例五，不同數值積分方法求得之  $e_k$  之比較

比較不同數值積分方法得到之  $C_2 * C_3$

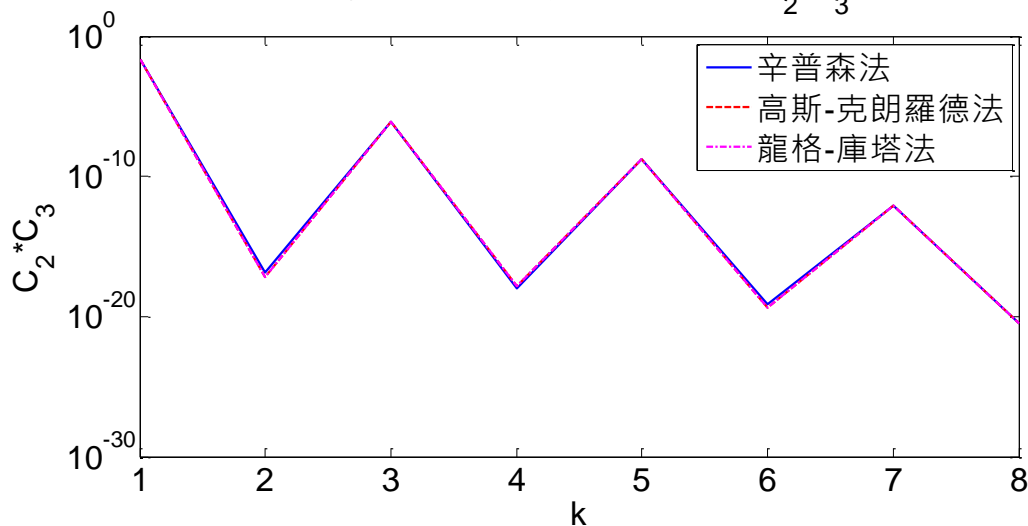


圖 4-32 算例五，不同數值積分方法求得之  $C_2 \times C_3$  之比較



比較不同數值積分方法得到之  $C_1 * C_3$

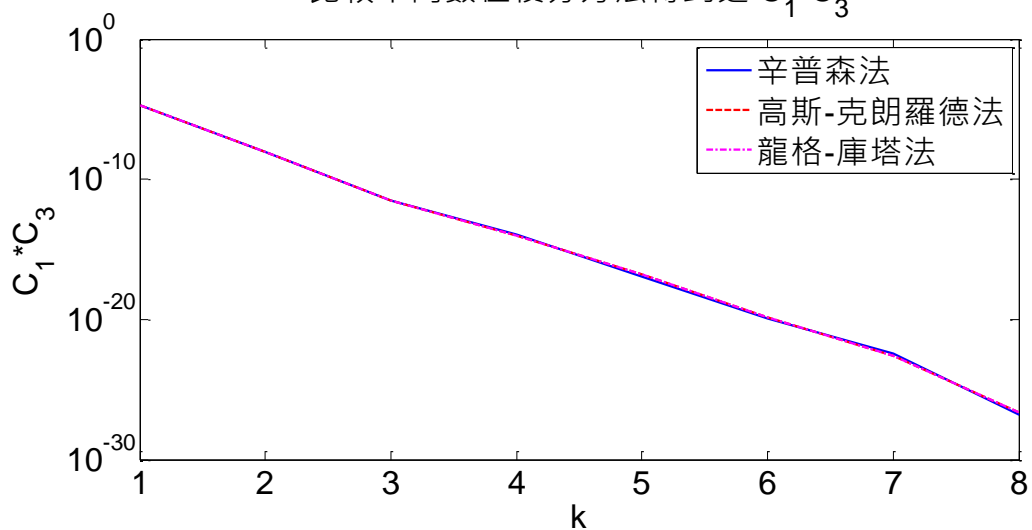


圖 4-33 算例五，不同數值積分方法求得之  $C_1 \times C_3$  之比較

數值解與正解的比較

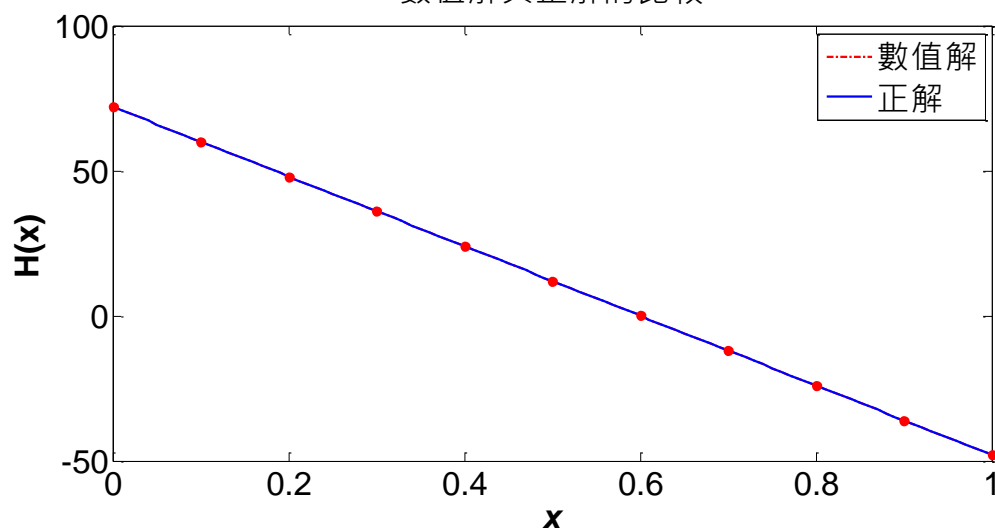


圖 4-34 算例六，外力之數值解與解析解比較



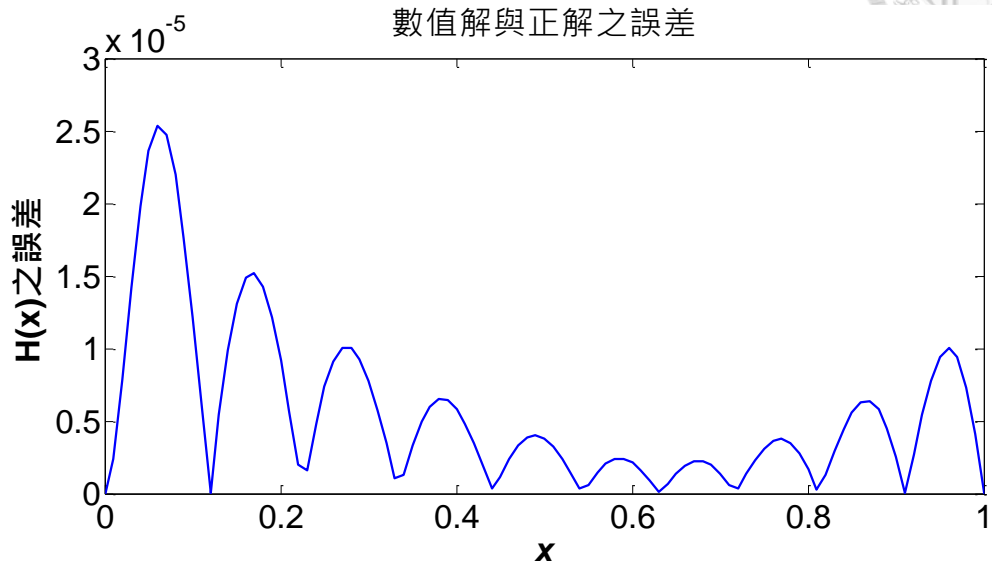


圖 4-35 算例六，外力之數值解與解析解之誤差

## 第五章 結論與未來工作



在第一章節與第二章節，我們完整地介紹了邊界積分方程方法的理論基礎，其中包括了自我伴隨運算子、Trefftz 方法、廣義格林定理，都是為了推導邊界積分方程做準備。而為了方便我們進行數值計算，介紹了在數值分析中常見的尤拉法、RK4 法與數值積分方法中的辛普森法與高斯—克朗羅德法等等。而傅立葉級數則能展開作為試解之基底，讓我們對於未知的函數能表示為傅立葉級數之形式，提供了一個參考性的解，無論其結果正確與否，均為不錯的嘗試與參考。接著由邊界積分方程所形成的線性代數方程組，可以利用共軛梯度法來有效求解之，則能得到外力函數的數值解。以及學者劉提出的擬時間積分法，提供了一個快速有效且精確的解非線性代數方程的方法，提高了我們找特徵值的準確度與穩定性，這些方法都是讓我們求解尤拉梁的反算問題的計算基礎。

在第三章節中，首先簡單介紹了何謂反問題以及反問題的種類，接著使用第二章節介紹的理論基礎，由廣義格林定理與自我伴隨運算子運用在梁運算子為引，以分離變數法分別求二階與四階常微分方程式，得到核心的伴隨測試函數之形式，完整地推導尤拉梁的邊界積分方程之一般式。接著分別詳細介紹了不同支承類型的梁運用在邊界積分方程的情況，其中包括簡支梁、懸臂梁、兩端固定梁與一端固定與一端簡支梁的情形，並列舉且推導其邊界條件、特徵方程式、振型函數與伴隨測試函數等等在邊界積分方程方法所需之函數。而在其它形式的梁的情況，由於其它支承之梁的求解過程大同小異，故只列舉以上形式之梁的條件做為參考。

在第四章節中，為了驗證邊界積分方程方法用於求解各種邊界條件之尤拉梁的外力反算問題之可行性以及其準確度，我們列舉了六個算例。算例一為簡支梁情形，我們假設特定函數為已知項，並利用其伴隨測試函數與選取適當之傅立葉級數的有限項代入邊界積分方程所形成之線性代數方程組，再以共軛梯度法求解之，而在共軛梯度法之迭代過程中發現其收斂次數較少，使得分析過程簡易且收斂速度快，且由其最終誤差最大為 $10^{-3}$ 、最小可小至 $10^{-6}$ ，可推論此法具有相當高的準確度。

而算例二與算例三為懸臂梁情形，除簡支梁之外的特徵方程式均為超越方程，無法求得其特徵值之解析解，我們使用了擬時間積分法分析之，透過選定適當之參數，能夠快速且準確的得到其數值解。由分析結果中發現，數值解在固定端這種不連續點的誤差較大，約是其它梁段的平均誤差的十倍以上，但所幸此結果可藉由改變共軛梯度法之初始值來影響最大誤差，透過最佳化可將誤差降至平均值之範圍，且不論外力函數  $F(x,t) = H(x)G(t)$  中的已知項為何者，雖然數值解的誤差有大有小、精度有所差異，但仍在可接受的範圍內，均能得到不錯的復原結果。

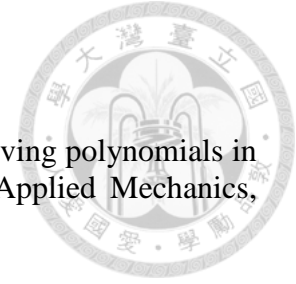
算例四與算例五則為兩端固定梁情形，原先使用傅立葉級數作為試解之基底在簡支梁與懸臂梁均能得到不錯的結果，不過在兩端固定梁的部分卻無法得到理想的結果，因此改用了其振態函數作為試解之基底，且利用其不同振態間相互正交的性質，免去了先前需透過共軛梯度法中迭代運算與初值影響的因素，對於求解的過程顯得更為簡潔與快速。由積分結果可以看到其數量級最大約  $10^{-5}$ 、最小則為  $10^{-27}$ ，由此判斷為病態之系統，對於精度有相當高的要求，因而在數值積分之部分則是以辛普森積分法、高斯-克朗羅德法、龍格-庫塔法做比較，其中因龍格-庫塔法能有效地求解微分方程且其具有四階精度，所以其求出的結果是令人信賴的，因此藉由高斯-克朗羅德法與龍格-庫塔法求得之解來比較而得到相同的結果，可以得知高斯-克朗羅德法的精確度與穩定性。且由最終外力之數值解與解析解的比較及誤差中，證明此種方法之準確度較先前的傅立葉級數有顯著提升。

算例六則是一端固定與一端簡支梁情形，鑒於算例五使用振態函數作為基底的成功，在此也使用其振態函數作為嘗試，且其結果之誤差也能精確至  $10^{-5}$ ，是個相當滿意的結果。由算例五與算例六可知，以梁之振態函數作為其試解之基底，其對於反算求解外力函數的效果非常好，其誤差也能夠穩定地維持相當高的精度，當然，前提是要確保其數值積分的高精度。


在本論文的研究範圍說明邊界積分方程方法對於求解尤拉梁的外力反算問題是可行的，不過其求解結果與試解的型態選擇有很密切的關係，且本文所提到的理論與算例，皆是以理想的情況為出發點，如尤拉梁本身就是一理想的線彈性梁以及在算例中為了方便我們求解而設的諸多假設與已知項，在實際的梁上是很難實現

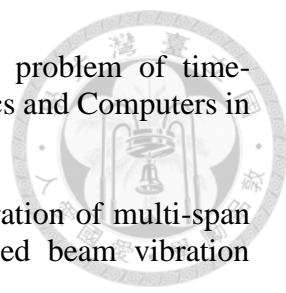
的，因此推導出來的結果雖然仍有其參考的價值，但其實還是需要仰賴諸多數值軟體。因此在未來工作方面，希望能夠將其推廣至現實的梁，實際應用如位移函數使用偵測到的位移訊號，或許其會帶有噪音或雜訊等，這都是值得去討論克服的；或是考慮非齊性之問題，如梁之支承遭遇沉陷或因地震波影響而使得原梁之支承端發生相對位移等等改變原梁之邊界條件的情況。因此其實際應用仍需要更多後續的嘗試與研究，相信在未來會有不錯的發展，以期能提高邊界積分方程方法的使用性。

## 參考文獻



- [1] Al-Khatib MJ, Grysa K, Maciag A (2008) The method of solving polynomials in the beam vibration problems. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 46(2),(347–366).
- [2] Barcilon V (1986). Inverse eigenvalue problems. In G. Talenti (Ed.), *Inverse problems*. Lecture Notes in Mathematics, 1225 (1–51).
- [3] Cannon JR, Duchateau P (1998). Structural identification of an unknown source term in a heat equation. *Inverse Problems*, 14, (535–551).
- [4] Chang J-D, Guo B-Z (2007). Identification of variable spatial coefficients for a beam equation from boundary measurements. *Automatica*, 43, (732–737).
- [5] Ciałkowski MJ, Frackowiak A, Grysa K (2007) Solution of a stationary inverse heat conduction problems by means of Trefftz non-continuous method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50,(2170–2181).
- [6] Ciałkowski MJ, Futakiewicz S, Hołzejowski L (1999) Heat polynomials applied to direct and inverse heat conduction problems. *Proceedings of the international symposium on trends in continuum physics*, (79–88).
- [7] Gladwell GML (1986). The inverse problem for the Euler-Bernoulli beam. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 407(1832), (199-218).
- [8] Guo B-Z (2002). On boundary control of a hybrid system with variable coefficients. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 114(2), (373–395).
- [9] Hasanov, A. (2009). Identification of an unknown source term in a vibrating cantilevered beam from final overdetermination. *Inverse Problems*, 25.
- [10] Hasanov A, Baysal O (2015). Identification of an unknown spatial load distribution in a vibrating cantilevered beam from final overdetermination. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 23(1), (85–102).
- [11] Hodges DH, Rutkowski MJ (1981). Free-Vibration Analysis of Rotating Beams by a Variable-Order Finite-Element Method. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 19(11), (1459-1466).
- [12] Hurlbaas S, Gaul L (2006). Uniqueness in the identification of asynchronous sources and damage in vibrating beams. *Inverse Problems*, 30.
- [13] Krstic M, Smyshlyaev A (2008). *Boundary Control of PDEs: A Course on Backstepping Designs*. Philadelphia: SIAM.

- 
- [14] Krstic M, Guo B-Z, Balogh A, Smyshlyaev A (2008). Control of a tip-force destabilized shear beam by observer-based boundary feedback. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47, (553–574).
- [15] Kuo C-L, Chang J-R, Liu C-S (2013). The modified polynomial expansion method for solving the inverse heat source problems. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 63, (357–370).
- [16] Lagnese JE (1991). Recent progress in exact boundary controllability and uniform stabilizability of thin beams and plates. *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, 128, (61–111).
- [17] Lesnic L, Elliott L, Ingham DB (1999). Analysis of coefficient identification problems associated to the inverse Euler-Bernoulli beam theory. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 62, (101–116).
- [18] Lesnic L, Hasanov A (2008). Determination of the leading coefficient in fourth-order Sturm-Liouville operator from boundary measurements. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 16(4), (413–424).
- [19] Liu C-S, Atluri SN (2008). A novel time integration method for solving a large system of non-linear algebraic equations. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 31(2), (71-83).
- [20] Liu C-S (2009). A two-stage LGSM to identify time-dependent heat source through an internal measurement of temperature. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52, (1635–1642).
- [21] Liu C-S (2012). A Lie-group adaptive differential quadrature method to identify unknown force in an Euler–Bernoulli beam equation. *Acta Mech*, 223, (2207–2223).
- [22] Liu C-S (2015). A BIEM using the Trefftz test functions for solving the inverse Cauchy and source recovery problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 62, (177–185).
- [23] McLaughlin JR (1984). On constructing solutions to an inverse Euler-Bernoulli problem, *Inverse Problems of Acoustic and Elastic Waves*. Philadelphia: SIAM.
- [24] Nicaise S, Zair O (2004). Determination of point sources in vibrating beams by boundary measurements: identifiability, stability, and reconstruction results. *Electronic Journal of Differential Equations*, 20, (1–17).
- [25] Wang X, Bert C-W (1993). A new approach in applying differential quadrature to static and free vibrational analyses of beams and plates. *Journal of Sound and Vibration*, 162, (566–572).

- 
- [26] Yang L, Dehghan M, Yu J-N, Luo G-W (2011). Inverse problem of time-dependent heat sources numerical reconstruction. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81, (1656–1672).
- [27] Zheng D-Y, Cheung Y-K, Au FTK, Cheng Y-S (1998). Vibration of multi-span non-uniform beams under moving loads by using modified beam vibration functions. *Journal of Sound and Vibration*, 212(3), (455-467).