

國立臺灣大學工學院機械工程學系

碩士論文

Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Masters Thesis



機械手臂之關節間隙評估與運行精度提升之方法
Analysis and Accuracy Improvement of Robot
Manipulators with Joint Clearance

李冠霖

Kuan-Lin Li

指導教授：詹魁元博士

Advisor: Kuei-Yuan Chan, Ph.D.

中華民國 105 年 7 月

July, 2016



國立臺灣大學碩士學位論文
口試委員會審定書



機械手臂之關節間隙評估與運行精度提升之方法
Analysis and Accuracy Improvement of Robot
Manipulators with Joint Clearance

本論文係李冠霖君 (R03522612) 在國立臺灣大學機械工程學系完成之碩士學位論文，於民國 105 年 7 月 22 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

A blue ink signature, likely of the advisor, written in a stylized cursive script.

(簽名)

(指導教授)

A blue ink signature, likely of a committee member, written in a stylized cursive script.

A blue ink signature, likely of a committee member, written in a stylized cursive script.

系主任、所長

A blue ink signature, likely of the department head, written in a stylized cursive script.

(簽名)





誌謝

兩年前，大學剛畢業的我邁出研究生涯的第一步，此刻，在完成論文的之際同時也暫時畫下學生生涯的休止符，我即離開實驗室走向下個階段的旅程。兩年間，學習到各領域的知識、生活的態度及處事的方法，這一路上心中有許多感謝。首要感謝指導老師，詹魁元博士。在我遇上生活上的難題與研究上的瓶頸時老師總熱心的提點我方向，老師的用心、關懷與鼓勵幫助學生成長、茁壯，讓思想更廣、見識更遠。

同時，也要感謝口試委員，李志中教授與林沛群教授。委員們給予本研究以及論文上的許多指導與建議，使本論文之內容能夠更加完善。

這些日子裡，在實驗室生活的點滴、學術的交流與生活的分享豐富整個研究生涯。感謝學長子頓、Joseph、佑安、祐晨給予學業與研究上的幫助，感謝柏安、柏伸、岳羿、欣怡在課業與研究上互相扶持，感謝顯主、冠龍、右均、盈樺幫忙處理生活上的些許雜事以及口試相關的準備，感謝學弟穎寬幫忙撰寫期刊論文。感謝朋友們的支持與幫助，特別是武德，我們一起執行兩年的研究計畫，有你的幫忙讓我在研究過程中輕鬆不少。虹羽，謝謝妳，很幸運這些日子有妳陪在身旁。回想這段時光所經歷過的一切，心中盡是感謝，感謝大家的陪伴，有你們真好。

最後要感謝我最親愛的家人，在日夜奔忙下提供良好的資源與環境讓我在求學的生涯不需要煩惱課業外的事物，特此致上最高敬謝之意，謝謝。

李冠霖 謹識於

國立臺灣大學 機械工程學系

中華民國一百零五年八月





摘要

本論文以設計、分析的方法探討機器手臂的準度提昇方案，提出一套由機械手臂運行軌跡推估關節間隙的方法。透過建立機械手臂結合關節間隙之動態模型，並探討關節間隙所導致的軌跡誤差，建立關節間隙與軌跡誤差間的關係式。當給定機械手臂軌跡誤差後藉由此關係式可推估出關節間隙之大小，再經由最佳化流程規劃出誤差較小之路徑，提升機械手臂之準度。本研究之方法可評估重複精度相同但間隙不同的機械手臂位於工作空間中的性能，並將一存在三個關節間隙（其值為 0.328 mm、0.171 mm、0.483 mm）之機械手臂位於目標點的平均誤差由 0.637 mm 降低至 0.031 mm，準度改善了 95.1%，結果顯示本研究方法能比較機械手臂間的性能，並有效提高機械手臂之準度。

關鍵字：機械手臂、關節間隙、最佳化、路徑規劃、動態模型





Abstract

This study presents a method to improve manipulator accuracy by predicting uncertainty from the trajectory of manipulators. We construct the dynamic of manipulators with clearances equations and use them to obtain the operation error of a given trajectory. We are able to predict the joint clearance and arrange a trajectory with smaller error through optimization techniques using the proposed method. This study reduces the average error at target points from 0.637 mm to 0.031 mm for robot manipulator with joint clearance 0.328 mm, 0.171 mm, and 0.483 mm, that is a 95.1% improvement in accuracy over the same manipulator before optimization. Our method can not only compare the true manufacturing quality of two robot manipulators, but also provide a more accurate operation.

Keywords: Robot manipulator, Joint clearance, Optimization, Trajectory planning, Dynamic model





目錄

口試委員會審定書	i
誌謝	iii
摘要	v
Abstract	vii
目錄	ix
圖目錄	xiii
表目錄	xvi
符號列表	xix
第一章 緒論	1
1.1 前言	1
1.2 現行精準度規範簡介	2
1.3 研究動機與研究目的	3
1.4 本文架構	4
第二章 研究背景與文獻回顧	7
2.1 關節間隙之相關文獻	7
2.1.1 關節間隙之影響與分析	7
2.1.2 存在關節間隙之機械手臂動態模型	8



2.2 機械手臂精準度提昇方法	8
2.2.1 機械手臂之不確定因素	9
2.2.2 提升精準度之方法	9
2.3 先前研究——串連式機械手臂最佳參數校正與精度提昇	14
2.3.1 研究方法	14
2.3.2 最佳化方法	17
2.3.3 研究結果	18
2.4 小結	19
第三章 機械手臂動態模型	21
3.1 理想 DELTA 平行五連桿動態模型	21
3.1.1 動態模型	22
3.1.2 力分析	25
3.2 結合關節間隙之 DELTA 平行五連桿動態模型	27
3.2.1 關節間隙模型	28
3.2.2 接觸力與摩擦力模型	30
3.2.3 動態模型	32
第四章 研究方法	39
4.1 機械手臂之設計參數	40
4.2 目標路徑規劃	41
4.3 由逆向運動學取得理想模型之輸入扭矩	45
4.4 計算軌跡誤差與軌跡誤差曲線	45
4.5 建立關節間隙與軌跡誤差曲線之關係式	47
4.5.1 取得關節間隙與軌跡誤差曲線間的特徵	47

4.5.2 特徵實驗驗證	50
4.5.3 建立特徵與關節間隙間之關係式	54
4.6 設計最佳目標路徑	54
第五章 工程案例	59
5.1 機械手臂之參數與性能量測	60
5.2 推估關節間隙大小並比較工作空間中之表現	62
5.2.1 推估關節間隙大小	63
5.2.2 工作空間中之表現	66
5.3 最佳化目標路徑	70
5.3.1 最佳化方程式與最佳化結果	70
5.4 小結	75
第六章 結論與未來展望	77
6.1 結論	77
6.2 研究建議與未來研究方向	78
參考文獻	80
作者簡歷	85





圖目錄

1.1	全球每年工業機器人供給數量 (2018 為估計值) [7]	2
1.2	論文架構圖	5
2.1	系統方塊圖	9
2.2	機械手臂 DH 參數之定義	10
2.3	三自由度串連式機械手臂模型	13
2.4	校正 DH 參數之研究流程圖	15
2.5	機械手臂校正系統 ¹ (a) 校正桌 (b) 校正板上視圖 (c) 傾斜機構 (d) 傾斜機構 上視圖	16
2.6	校正桌傾斜方向 (a) 水平放置, (b) roll 方向 (c) pitch 方向	16
2.7	真實實驗、虛擬實驗與研究方法之關係示意圖	20
3.1	理想平行五連桿機械手臂	22
3.2	桿件 1 的力分析圖	22
3.3	桿件 2 的力分析圖	23
3.4	桿件 3 的力分析圖	24
3.5	桿件 4 的力分析圖	24
3.6	平行五連桿機械手臂向量迴路	26
3.7	存在關節間隙之機械手臂模型示意圖	28
3.8	存在關節間隙之 revolute joint 示意圖	29
3.9	存在關節間隙時軸在軸承內部的運動狀態 2D 示意圖	29
3.10	revolute joint 的關節間隙模型。(a) 軸與軸承無接觸 (b) 軸與軸承有接觸	30

3.11 軸與軸承相接觸時的相對速度向量示意圖	30
3.12 桿件 1 與桿件 4 的系統示意圖	32
3.13 桿件 2 的自由體圖	35
3.14 桿件 3 的自由體圖	36
3.15 存在關節間隙之機械手臂動態模型計算流程圖	37
4.1 研究流程圖	39
4.2 存在關節間隙之機械手臂初始靜止狀態	40
4.3 圖 4.2 中的關節間隙 (a) J_2 關節 (b) J_3 關節 (c) J_4 關節	40
4.4 x 與 y 方向目標路徑規劃之加速度與速度	42
4.5 目標路徑規劃	43
4.6 理想手臂運行實驗路徑 y_1 所需輸入的扭矩	45
4.7 非理想軌跡與理想軌跡之對比圖	46
4.8 軸中心於關節內的移動軌跡 (a) J_2 (b) J_3 (c) J_4	46
4.9 軌跡誤差曲線	47
4.10 y 方向之實驗路徑之軌跡誤差曲線 (a) 實驗路徑 y_1 (b) 實驗路徑 y_3	48
4.11 x 方向之實驗路徑之軌跡誤差曲線 (a) 實驗路徑 x_2 (b) 實驗路徑 x_5	48
4.12 x 方向之實驗路徑之軌跡誤差曲線快速傅立葉轉換頻譜圖 (a) 實驗路徑 x_2 (b) 實驗路徑 x_5	49
4.13 x 方向之實驗路徑之軌跡誤差曲線快速傅立葉轉換頻譜圖 (取頻率 0Hz~20Hz) (a) 實驗路徑 x_2 (b) 實驗路徑 x_5	49
4.14 J_3 間隙為 0.1 mm 時擬合的斜率曲面	50
4.15 J_3 間隙為 0.1 mm 時擬合的截距曲面	51
4.16 J_3 間隙為 0.1 mm 時擬合的震幅曲面	51
4.17 J_3 間隙為 0.25 mm 時擬合的斜率曲面	51
4.18 J_3 間隙為 0.25 mm 時擬合的截距曲面	52
4.19 J_3 間隙為 0.25 mm 時擬合的震幅曲面	52
4.20 J_3 間隙為 0.5 mm 時擬合的斜率曲面	53
4.21 J_3 間隙為 0.5 mm 時擬合的截距曲面	53
4.22 J_3 間隙為 0.5 mm 時擬合的震幅曲面	53

4.23 路徑最佳化流程	55
5.1 工程案例之流程	59
5.2 位置分佈範圍示意圖	61
5.3 機械手臂 A、B 重複精度之測試路徑 (a) 機械手臂 A (b) 機械手臂 B	62
5.4 機械手臂 A 運行實驗路徑 y1 的軌跡誤差曲線	63
5.5 機械手臂 A 運行實驗路徑 y3 的軌跡誤差曲線	64
5.6 機械手臂 A 運行實驗路徑 y7 的軌跡誤差曲線	64
5.7 平行五連桿機械手臂工作時常用之理想路徑示意圖	67
5.8 理想路徑與參數設定	68
5.9 理想路徑上的速度與加速度與參數設定	68
5.10 理想路徑與最佳化目標路徑比較 (a) 理想路徑 (b) 最佳化目標路徑	72
5.11 非理想機械手臂實際軌跡比較 (a) 以理想路徑控制 (b) 以最佳化目標路徑控制	73
5.12 以逆向運動學所得之控制扭矩 (a) 理想路徑 (b) 最佳化目標路徑	74
5.13 路徑上的速度與加速度 (a) 理想路徑 (b) 最佳化目標路徑	75





表目錄

1.1	ISO industrial robots performance criteria [8]	3
2.1	理想 DH 參數表	13
2.2	存在不確定因素之 DH 參數表	14
2.3	校正前後 DH 參數之比較	18
2.4	校正後準度驗證 (單位: mm)	19
4.1	機械手臂之幾何參數	41
4.2	機械手臂動態模型參數	41
4.3	x 方向實驗路徑之設計參數	43
4.4	y 方向實驗路徑之設計參數	44
5.1	機械手臂 A、B 之幾何參數	60
5.2	機械手臂 A、B 之動態模型參數	60
5.3	機械手臂之關節間隙與重複精度	62
5.4	機械手臂 A 之軌跡誤差曲線的特徵量化值	65
5.5	機械手臂 A 推估之間隙大小	65
5.6	機械手臂 A 以截距與震幅推估出間隙的準確率	65
5.7	機械手臂 B 推估之間隙大小	66
5.8	機械手臂 B 以截距與震幅推估出間隙的準確率	66
5.9	理想路徑之參數設定	69
5.10	誤差結果比較與驗證	69
5.11	最佳目標路徑之參數	71

5.12 目標點之誤差表現比較	71
-----------------------	----







符號列表

a_i	第 i 個座標系的 DH 參數
c_e	restitution coefficient
c_i	機械手臂第 i 個考量關節間隙存在之關節內的關節間隙量值
C	路徑參數
d_i	第 i 個座標系的 DH 參數
\mathbf{e}_i	機械手臂第 i 個關節內的關節間隙向量
e_i	機械手臂第 i 個考量關節間隙存在之關節內軸承中心與軸中
E_k	行經第 k 個目標點的誤差
E_B	軸承的 Young's modulus
E_J	軸的 Young's modulus
F	機械手臂懸掛重物的負重
F'_{ix}	理想機械手臂第 i 個關節內 \mathbf{x} 方向分力的量值
F'_{iy}	理想機械手臂第 i 個關節內 \mathbf{y} 方向分力的量值
\mathbf{F}_{Bi}	軸承所受的合力向量
$-\mathbf{F}_{Bi}$	軸所受的合力向量
F_{Bix}	第 i 考量關節間隙存在之關節內軸承與軸接處時 \mathbf{x} 方向分力
F_{Biy}	第 i 考量關節間隙存在之關節內軸承與軸接處時 \mathbf{y} 方向分力
F_N	關節內軸承與軸間的接觸力量值
\mathbf{F}_T	關節內的摩擦力向量
G	Lagrange equation 中的廣義力向量



I_i	機械手臂第 i 的桿件的轉動慣量
J_i	機械手臂第 i 個關節的代號
k	目標點的總數
\mathbf{L}_i	機械手臂第 i 個桿件的位置向量
L_i	機械手臂第 i 個桿件的桿長
m_i	機械手臂第 i 個桿件的質量
$m_i g$	機械手臂第 i 個桿件的重量
\mathbf{M}	Lagrange equation 中的質量矩陣
M_i	理想手臂與非理想手臂第 i 個輸入端所輸入之扭矩
\mathbf{p}_i	設計路徑上的第 i 個斷點
\mathbf{P}	機械手臂 end effector 位置向量
$\dot{\mathbf{P}}$	機械手臂 end effector 速度向量
$\ddot{\mathbf{P}}$	機械手臂 end effector 加速度向量
\mathbf{q}	Lagrange equation 中的廣義座標向量
\mathbf{Q}	最佳化過程中的目標點
R_{Bi}	機械手臂第 i 個考量關節間隙存在之關節內的軸承內半徑
R_{Ji}	機械手臂第 i 個考量關節間隙存在之關節內的軸半徑心的距離
t_i	機械手臂運行在第 i 斷路徑時所用的時間
v_{ix}	機械手臂運行至第 i 個段點時的 x 方向速度
v_{iy}	機械手臂運行至第 i 個段點時的 y 方向速度
\mathbf{V}_N	關節內軸相對於軸承的法線速度向量
\mathbf{V}_T	關節內軸相對於軸承的切線速度向量
V_T	關節內軸相對於軸承的切線速度量值
W	機械手臂的工作空間
α	Baumbarte 參數
α_i	第 i 個座標系的 DH 參數
β	Baumbarte 參數
δ_i	機械手臂第 i 個關節內的變形量
$\dot{\delta}$	關節內軸承與軸間的衝擊過程中的相對法向量速度量值

$\dot{\delta}^{(-)}$	關節內軸承與軸間的衝擊時的初始相對法向量速度量值
θ_i	機械手臂第 i 個桿件的轉角
$\dot{\theta}_i$	機械手臂第 i 個桿件的角速度
$\ddot{\theta}_i$	機械手臂第 i 個桿件的角加速度
λ	Lagrange equation 中的 Lagrange multipliers 向量
μ	軸承與軸之間的動摩擦係數
ν_B	軸承的 Poisson's ratio
ν_J	軸的 Poisson's ratio
Φ_q	Lagrange equation 中限制條件方程式的 Jacobian 矩陣
ψ_i	第 i 個座標系的 DH 參數
ω_k	第 k 個目標點的權重







緒論

1.1 前言

隨著科技的發展，機器人從過去只能做單一、重複性高的工作 [1]，進步成高精度且具備智能的機器 [2]。根據國際機器人協會（International Federation of Robotics）的定義，可將機器人分為「服務機器人」與「工業機器人」兩大類。服務機器人中已有 Google 的無人駕駛車以及由軟體銀行開發委託鴻海製造的 pepper 機器人，前者為一如火如荼發展之領域，許多車廠與學術單位均投入相當大量的人力與資源發展此無人駕駛技術；後者為「具有情感的機器人」的仿人機器人，透過與人互動帶來娛樂並提高人類生活品質，使人們感到幸福其主要目的地。由此可預想未來機器人將會大量的進入人類的生活中，並逐步的擴大機器人的應用範圍。

工業機器人主要用於汽車、電子晶圓、智慧型手機等產業中，負責焊接、打磨、組裝、運送等任務。而在勞工成本增加、青壯年日益減少導致勞力不足、產品傾向客製化、產品需快速且大量生產等因素下，工業自動化的發展為目前之趨勢，有越來越多的企業在產線中設置工業機器人輔助生產作業，甚至完全取代人力的需求以減少成本並提高產能，這些任務主要由機械手臂運行，可見機械手臂為未來產業中極關鍵且重要的一環，扮演著革命性的角色。而圖1.1可以發現近年來工業機器人的供給有著爆炸性的成長，2010 年至 2014 年全球的供給量成長了 88% 達到了 229,261 個，藉此趨勢預估，全球總供給量每年將有 15% 的成長量，在 2018 年時將達到 400,000 個。未來，一個沒有勞工、全由機械手臂及機器人組合成的工廠是可預期的現象。

為了使機械手臂應用於生產線，或是未來應用於醫療照護或居家生活，機械手臂系統往更高準度、更高精度發展為基本需求。而影響手臂精度與準度的主要因素為機械手臂之不確定因素，其中包含幾何誤差，如零件加工誤差、桿件的變形 [3]、組配誤差、關節磨耗、關節間隙 [4] 等，或者非幾何誤差，如齒輪箱背隙 [5] 和零件磨耗等 [6]，均會使實際的機械手臂與設計時的不同而導致手臂運行時產生誤差。因此，近年來如何減少機械手臂誤差提高精度與準度為一重要目標。

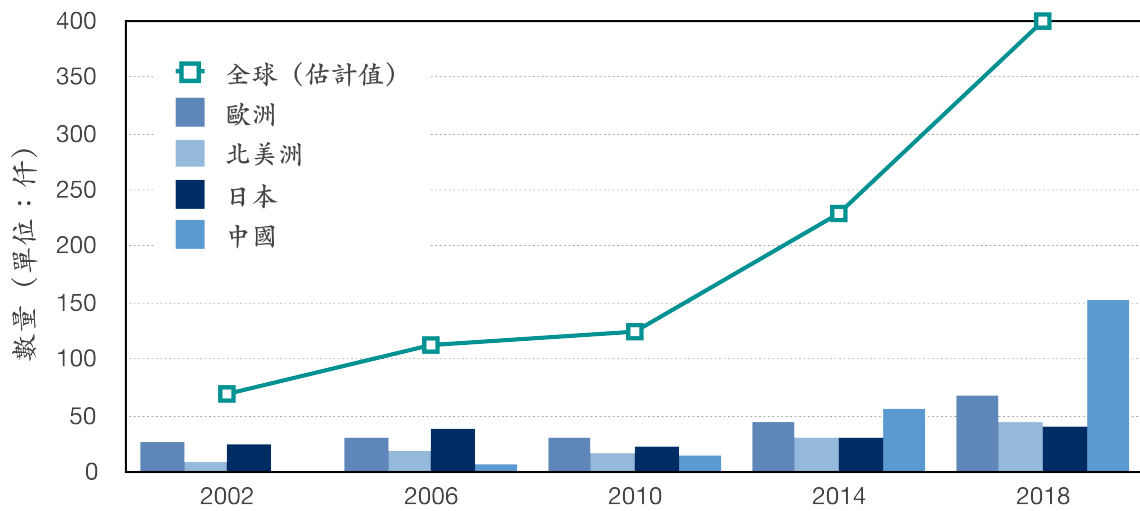


圖 1.1: 全球每年工業機器人供給數量 (2018 為估計值) [7]

1.2 現行精準度規範簡介

目前機械手臂有其評估性能的相關指標，如位置重複性、位置準確度、擺動偏差等性能，這些性能均為 ISO 9283 標準中對機械手臂的性能指標規範。ISO 9283 標準規範這些性能的測試環境及方法，並以性能指標表示機械手臂之精度，其中的主要的性能指標如下表 1.1:

表 1.1: ISO industrial robots performance criteria [8]

Performance criteria	
· pose accuracy and pose repeatability	· path accuracy and path repeatability
· multi-directional pose accuracy variation	· path accuracy on reorientation
· distance accuracy and distance repeatability	· cornering deviations
· position stabilization time	· path velocity characteristics
· position overshoot	· minimum posing time
· drift of pose characteristics	· static compliance
· exchangeability	· weaving deviations

ISO 9283 標準中主要以路徑作為測試目標，藉由量測實際運動之軌跡與目標路徑的差異取出上述之性能指標，這些指標均以該項目測試時的單位或以公式計算出的單位表示，並無將這些數值量化成精度之標準，而在路徑的選取上建議在預期應用最多的工作空間中進行測試。

然而此標準在實際應用上有其限制，主要有以下兩點：

1. 無法得知廠商如何進行性能指標測試 [9]：由於在 ISO 9283 標準中的測試路徑只有建議在預期應用最多的工作空間中進行測試，而廠商在內部進行測試時則可能忽略 ISO 9283 的建議，改以精度最高的工作空間進行性能測試，導致使用者實際操作機械手臂時無法達到廠商所宣稱之性能。
2. 廠商提供的機械手臂型錄中標示出的性能指標不足 [10]：通常向廠商取得的機械手臂型錄上的性能指標只會有重複精度一項，其他於 ISO 9283 中規範之性能幾乎無從得知，因此若要比較不同廠牌的機械手臂何者準度較高、何者較可靠有其困難，進而導致選用機械手臂時多以品牌為主、性能其次的現象，使具有高品質的新品牌機械手臂鮮少被選用。

1.3 研究動機與研究目的

在前文中提到目前機械手臂精度與準度的需求日漸提高，但相關規範對測試機械手臂性能時之路徑缺乏強制力，使此規範在使用上有其限制。從現行機械手臂精度與準度的表現中可以發現準度的表現較差，因此本論文以提高機械手臂準度為目的，而在機械手臂確定因素中發現關節間隙會使關節產生磨耗 [6]，使機械手臂的關節間隙會隨著運作時間增

加而變大，讓機械手臂的精度與準度逐漸降低，藉此影響可於未來規劃出機械手臂之可靠度規範。

本論文主要探討關節間隙對機械手臂之影響，提出一套透過機械手臂運行之軌跡推估不確定因素的方法，並以此方法比較不同機械手臂位於工作空間中的準度，再以路徑規劃來提高機械手臂於工作空間中的準度，本論文以文獻上較常見的 DELTA 型平行五連桿機械手臂作為研究對象，可有效的和其他方法比較，亦可推廣到其他種類手臂。

本論文的研究目的條列如下：

1. 建立存在關節間隙之機械手臂的動態模型。
2. 透過模型分析不同路徑下的軌跡誤差，並取得不同路徑下的軌跡誤差曲線。
3. 藉由觀察誤差曲線找出與關節間隙間的特徵，並建立兩者間的關係式。
4. 透過軌跡誤差曲線與關節間隙間的關係式推估關節間隙量值，規劃出誤差較小之路徑使精度提昇。

1.4 本文架構

本文一共分為六章，內容架構如下：

- 第一章：序論

由前言的機械手臂相關議題舉出目前對精度的需求日漸增加，簡介機械手臂精準度規範，並藉此引入本文知研究動機與研究目的。

- 第二章：研究背景與文獻回顧

概略介紹本研究相關領域，並對文獻進行統整分類與先前研究之介紹。

- 第三章：機械手臂動態模型

針對本研究建構動態模型所需的數學式進行介紹。

- 第四章：研究方法

說明本論文研究方法的流程。

- 第五章：工程案例

對本研究之研究成果進行案例演示。

- 第六章：結論與未來展望

整理本研究之結論與未來研究方向之建議。

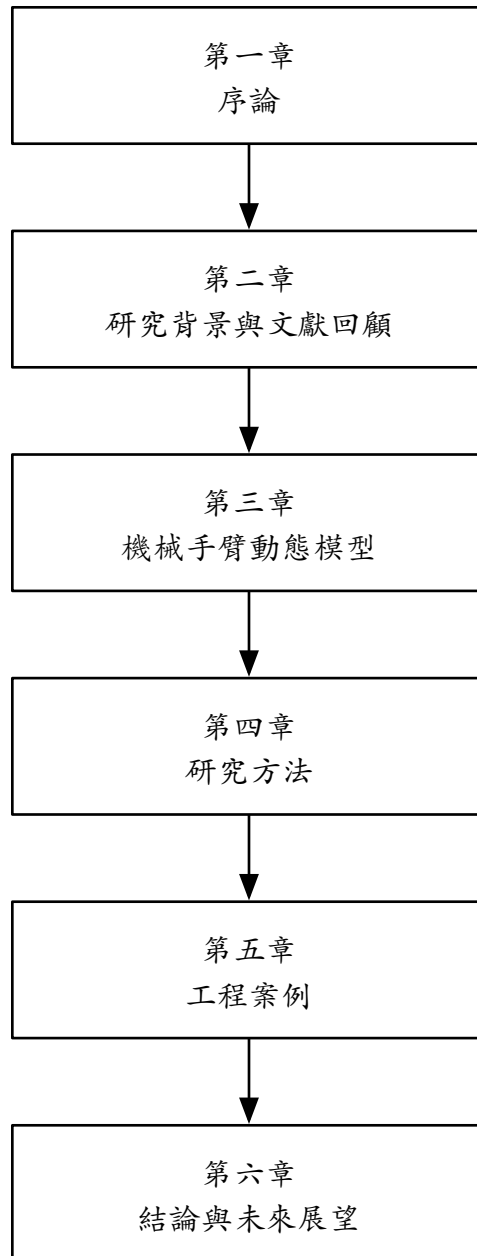


圖 1.2: 論文架構圖





研究背景與文獻回顧

本論文旨在提出一套經由機械手臂運行之軌跡推估關節間隙大小並透過最佳化方法提高機械手臂準度的方法，因此需建立考量自身重量、負重與關節間隙之機械手臂動態模型，以此動態模型分析關節間隙對機械手臂準度之影響並改善手臂之準度，由上述之描述將下列要點做為文獻探討之分類依據：

1. 關節間隙之相關文獻
2. 機械手臂精準度提昇方法

2.1 關節間隙之相關文獻

2.1.1 關節間隙之影響與分析

具有旋轉功能的關節主要可分為 ball joint 與 revolute joint 這兩種，而本論文所探討的關節為 revolute joint，故對探討 revolute joint 中的關節間隙文獻進行整理。

由於加工誤差為無法避免的不確定因素，因此無法避免關節內存在間隙，因此 K. L. Ting 等人 [11] 以幾何的方式分析連桿機構存在關節間隙時的誤差範圍，而 S. Mukras 等人 [6] 則進一步探討因關節間隙使關節內發生磨耗的現象，並以存在關節間隙的 slider crank 為例。



2.1.2 存在關節間隙之機械手臂動態模型

Screw theory 建模

而存在關節間隙之機械結構的動態模型建構方法可以分為兩種，第一種為使用 screw theory 方法建模，如 C. R. Tischer 等人 [12] 探討關節間隙對連桿機構的精度影響，而 O. Altuzarra 等人 [13] 則以此方法建立平面五連桿機械手臂存在五個關節間隙時的動態模型，分析軌跡的誤差。J. Aginaga 等人 [14] 考量關節間隙與桿件變形透過此方法建立平面五連桿機械手臂的動態模型探討軌跡誤差。

Lagrange equation 的 multiplier 方法建模

第二種方法考量因關節間隙產生的接觸力與摩擦力以 Lagrange equation 的 multiplier 方法與牛頓第二運動定理建模，Y. Zhao 等人 [15] 以此方法建立存在一個關節間隙的平面兩連桿機械手臂的動態模型，而 X. Zhang 等人 [16] 探討 3-RRR 平面機構存在 6 個關節間隙時的影響，L. X. Xu 等人 [17] 則探討平行五連桿機械手臂存在兩個關節間隙時的影響。

2.2 機械手臂精準度提昇方法

工程系統如機械手臂往往涵蓋許多不同性能任務的次系統及其元件，系統間複雜的關係雖使功能更多樣化，也加深了分析的難度。隨著元件的增加，分析影響機械手臂精準度之因素也更加困難，而一般要分析一個系統必須

1. 對系統的輸入，輸出，及各子系統之連結有充分瞭解（如圖2.1之 Input）：以機械手臂為例，其系統中的各桿件尺寸與關節尺寸、機械手臂中各馬達的轉動角度、機械手臂與工件座標系，加上控制系統的相關參數，整體成為系統的輸入。
2. 對系統本身所存在的非理想環境有所瞭解（如圖2.1之 Noise）：在機器手臂的使用上，系統受環境溫度影響、控制系統誤差、機械缺陷（間隙、背隙、摩擦）等都可視為實際應用時的非理想環境。
3. 對系統在非理想環境下之性能有所掌控（如圖2.1之 Output）：也因為以上的非理想環境，機械手臂的 end-effector 位置與姿態、操作精度與準度以及機械手臂之可靠度都會受影響，分析這樣的影響過程便為可靠度的分析。

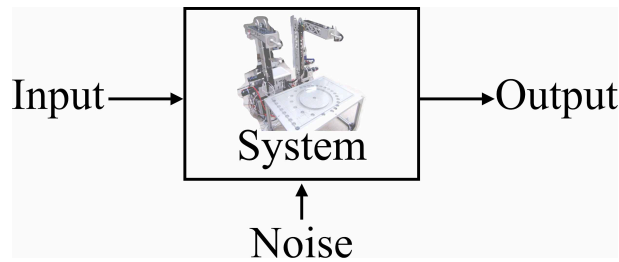


圖 2.1: 系統方塊圖

因此若要提高機械手臂之精準度，探討不確定因素所造成之影響為重要步驟，而此步驟也為大部分提高機械手臂精準度相關研究的方向。

2.2.1 機械手臂之不確定因素

由於機械手臂為複雜之系統，因此對機械手臂不確定因素的探討為重要一環。J. L. Caenen 等人 [18] 與 J. H. Jang 等人 [19] 將造成誤差的不確定因素分為幾何誤差與非幾何誤差兩類，而 K. L. Conrad 等人 [20] 則歸類為結構誤差（例如關節內的摩擦與桿件變形）、設計誤差（例如桿長與、關節位置與設計時不同）與動態誤差（例如馬達轉角的誤差）。

2.2.2 提升精準度之方法

在機械手臂的發展上通常透過校正受不確定因素影響之參數的方式提高精準度，因此 Z. S. Roth 等人 [21] 的研究將校正分為三個層級，第一層級為校正馬達的位置感測器。由於早期的感測器性能較差，所以需要校正，但隨著感測器技術的進步，此種校正方法以不常使用。第二層級為校正機械手臂的運動學模型，而大部分的運動模型使用 Denavit-Hartenberg 齊次轉換矩陣 [22] (DH 矩陣) 建構，故此層級代表校正 DH 矩陣中的參數，如 B. Karan 等人 [23] 透過修正系統 DH 矩陣中的參數 (DH 參數) 來提高手臂精準度。第三層級為針對其他因素校正，包含馬達背隙、桿件的撓性和磨耗等。而 A. Y. Elatta 等人 [24] 將常見的校正方法流程歸納為四個步驟，依序為建立機械手臂幾何模型、測量機械手臂的幾何參數、辨別幾何參數的誤差、補償幾何參數誤差。

理想 Denavit-Hartenberg 齊次轉換矩陣參數

DH 齊次轉換矩陣是一個座標間轉換的系統方法，廣泛用於計算機械手臂的順逆運動學，而在計算運動學之前，需先訂定機械手臂連桿與關節間的關係以及關節的座標系。連

桿與關節間的關係為：第 i 根連桿近端為 i 接頭，遠端為 $(i+1)$ 接頭，如圖2.2所示，而座標系統的制定需遵循以下規則：

1. z_i 軸在第 $(i+1)$ 個接頭之軸線上，方向可任意制定。
2. x_i 軸定義為第 i 個與第 $(i+1)$ 個接頭之軸線的公垂線方向。若兩接頭軸線平行， x_i 軸與 z_i 軸和 z_{i+1} 軸的交點 H_{i-1} 、 O_i 位置可任選，只要遵守垂直兩軸線即可，若兩接頭軸線相交， x_i 軸的方向可定義為與 $z_{i-1} \times z_i$ 同向或反向，而原點則在兩軸相交的位置。
3. y_i 軸使用右手定則原理制定。

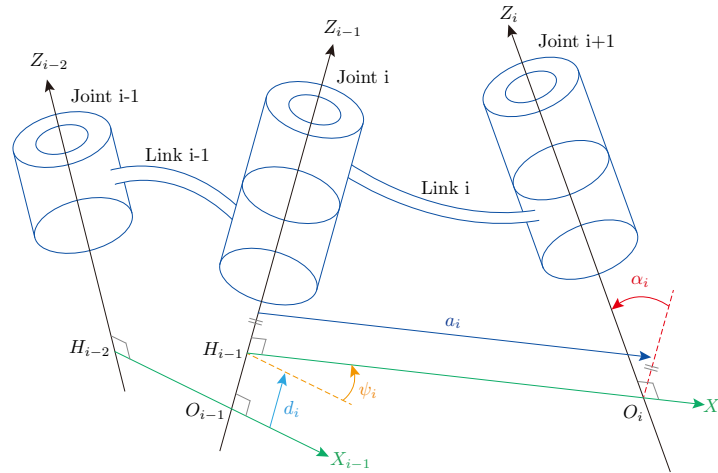


圖 2.2: 機械手臂 DH 參數之定義

圖2.2中共有四個參數分別為 d_i 、 ψ_i 、 a_i 、 α_i ，合稱 DH 參數，以下為各參數所代表之意義：

1. d_i : x_{i-1} 與 x_i 軸間公垂線之距離， $d_i = \overline{H_{i-1}O_{i-1}}$ ，若方向為 $+z_{i-1}$ ， d_i 即為正值，反之亦然。
2. ψ_i : x_{i-1} 與 x_i 軸間之夾角。
3. a_i : 兩相鄰接頭之軸線偏移距離，及 z_{i-1} 與 z_i 軸間公垂線之距離， $a_i = \overline{H_{i-1}O_i}$ 。
4. α_i : 兩鄰近接頭軸線之夾角，及 z_{i-1} 與 z_i 軸間之夾角。

以下將使用 DH 齊次轉換矩陣的方法由 $(i-1)$ 座標系透過轉換矩陣 ${}^{i-1}A_i$ 轉換至 i 座標系， ${}^{i-1}A_i$ 即稱為 DH 齊次轉換矩陣而計算出 ${}^{i-1}A_i$ 需經下列四個座標轉換步驟：

步驟 1. $(i-1)$ 座標系統沿著 z_{i-1} 軸平移 d_i ，使座標原點 O_{i-1} 與 H_{i-1} 重合。對應的轉換矩陣為

$$T(z, d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

步驟 2. $(i-1)$ 座標系統繞著 z_{i-1} 軸旋轉 ψ_i ，使 x_{i-1} 和 x_i 同方向。對應的轉換矩陣為

$$T(z, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi_i & -\sin \psi_i & 0 & 0 \\ \sin \psi_i & \cos \psi_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

步驟 3. $(i-1)$ 座標系統沿著 x_i 軸平移 a_i ，使座標原點 O_{i-1} 與 O_i 重合。對應的轉換矩陣為

$$T(x, L) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

步驟 4. $(i-1)$ 座標系統繞著 z_{i-1} 軸旋轉 α_i ，使兩座標系完全重合。對應的轉換矩陣為

$$T(x, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$



將上述步驟 1 至 4 的四個矩陣依序相乘，便能夠得到由 $(i-1)$ 座標系統轉換至 i 座標系統之轉換矩陣 ${}^{i-1}A_i$ 如下

$${}^{i-1}A_i = T(z, d)T(z, \psi)T(x, a)T(x, \alpha) \quad (2.5)$$

將上式展開便得到

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \psi_i & -\cos \alpha_i \sin \psi_i & \sin \alpha_i \sin \psi_i & a_i \cos \psi_i \\ \sin \psi_i & \cos \alpha_i \cos \psi_i & -\sin \alpha_i \cos \psi_i & a_i \sin \psi_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

方程式 (2.6) 中的下標 i 與上標 $(i-1)$ 代表此轉換矩陣將第 i 個座標系轉換至第 $(i-1)$ 個座標系。

對於一個三自由度的串連式機械手臂而言如圖2.3，其理想 DH 參數如表2.1：

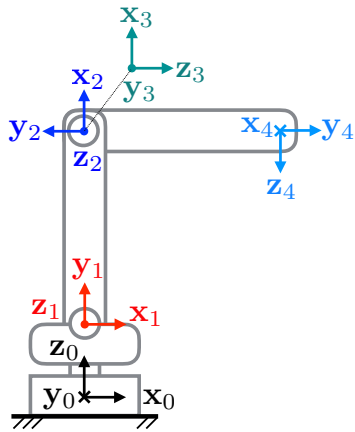


圖 2.3: 三自由度串連式機械手臂模型

表 2.1: 理想 DH 參數表

座標系	d_i	ψ_i	a_i	α_i
1	0.076 m	ψ_1	0 m	90°
2	0 m	$90^\circ + \psi_2$	0.4 m	0°
3	-0.012 m	ψ_3	0 m	90°
4	0.3543 m	0°	0 m	90°

非理想 Denavit-Hartenberg 齊次轉換矩陣參數

理想機械手臂系統可以表視為方程式 (2.7)， f 為機械手臂系統， \mathbf{d} 、 $\boldsymbol{\psi}$ 、 \mathbf{a} 與 $\boldsymbol{\alpha}$ 為機械手臂之理想 DH 參數， Y 為機械手臂 end effector 之理想座標。

$$f(\mathbf{d}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}) = Y \quad (2.7)$$

而實際的機械手臂系統則表示為方程式 (2.8)， $\Delta\mathbf{d}$ 、 $\Delta\boldsymbol{\psi}$ 、 $\Delta\mathbf{a}$ 與 $\Delta\boldsymbol{\alpha}$ 為機械手臂的真實 DH 參數， ΔY 為機械手臂 end effector 之真實座標。

$$f(\Delta\mathbf{d}, \Delta\boldsymbol{\psi}, \Delta\mathbf{a}, \Delta\boldsymbol{\alpha}) = \Delta Y \quad (2.8)$$

由於存在著不確定因素因此真實的 DH 參數往往與設計時的理想 DH 參數不同，造成機械手臂操作時產生誤差，而不確定因素對於 DH 參數的影響為下：

d, L : 參數 d 和 a 會受桿件上的幾何誤差 δd 、 δa 影響，因此真實的 Δd_i 與 Δa_i 可分別表示成 $d_i + \delta d_i$ 與 $a_i + \delta a_i$ 。

ψ, α : 參數 ψ 和 α 會受加工誤差、組配誤差等因素影響產生 $\delta\psi$ 與 $\delta\alpha$ ，因此真實的 $\Delta\psi_i$ 與 $\Delta\alpha_i$ 可分別表示成 $\psi_i + \delta\psi_i$ 與 $\alpha_i + \delta\alpha_i$ 。

因此將不確定因素加入圖2.3之手臂後，其真實 DH 參數表可表示為表：

表 2.2: 存在不確定因素之 DH 參數表

座標系	d_i	ψ_i	L_i	α_i
1	$(0.076+\delta d_1)$ m	$\delta\psi_1+\psi_1$	$(0+\delta a_1)$ m	$\delta\alpha_1+90^\circ$
2	$(0+\delta d_2)$ m	$90^\circ+\delta\psi_2+\psi_2$	$(0.4+\delta a_2)$ m	$\delta\alpha_2+0^\circ$
3	$(-0.012+\delta d_3)$ m	$\delta\psi_3+\psi_3$	$(0+\delta a_3)$ m	$\delta\alpha_3+90^\circ$
4	$(0.3543+\delta d_4)$ m	0°	$(0+\delta a_4)$ m	90°

2.3 先前研究——串連式機械手臂最佳參數校正與精度提昇

機器手臂實體幾何參數之精確度，為決定該手臂能否依預設軌跡運作的一項重要因子，一般手臂幾何參數的尋找仰賴其他高定位精度系統的輔佐，因此我們先前的研究以設計的方法探討機器手臂的準度提昇方案，分析機械手臂之不確定因素並探討不確定因素所導致的加工誤差，進而了解並提升手臂的運作效能。藉由觸碰校正板上之校正點所產生之封閉機構鏈，再以最佳化方式，尋找出在封閉鏈中最佳化的手臂幾何參數，免除仰賴外在設備校正手臂真實幾何參數之繁瑣程序，達到提昇精度的效果，結果經由實驗驗證有實際效益。

2.3.1 研究方法

先前研究以校正 DH 參數的方式來提高手臂準度，因此設計一組機械手臂校正桌，使用相機系統取得校正點的座標，讀取各關節馬達的 encorder 取得各軸轉角，並用最佳化的方法迭代 DH 參數來降低不確定因素之影響，找出滿足精度要求的 DH 參數以提高機械手臂精度，圖2.4此研究流程圖。

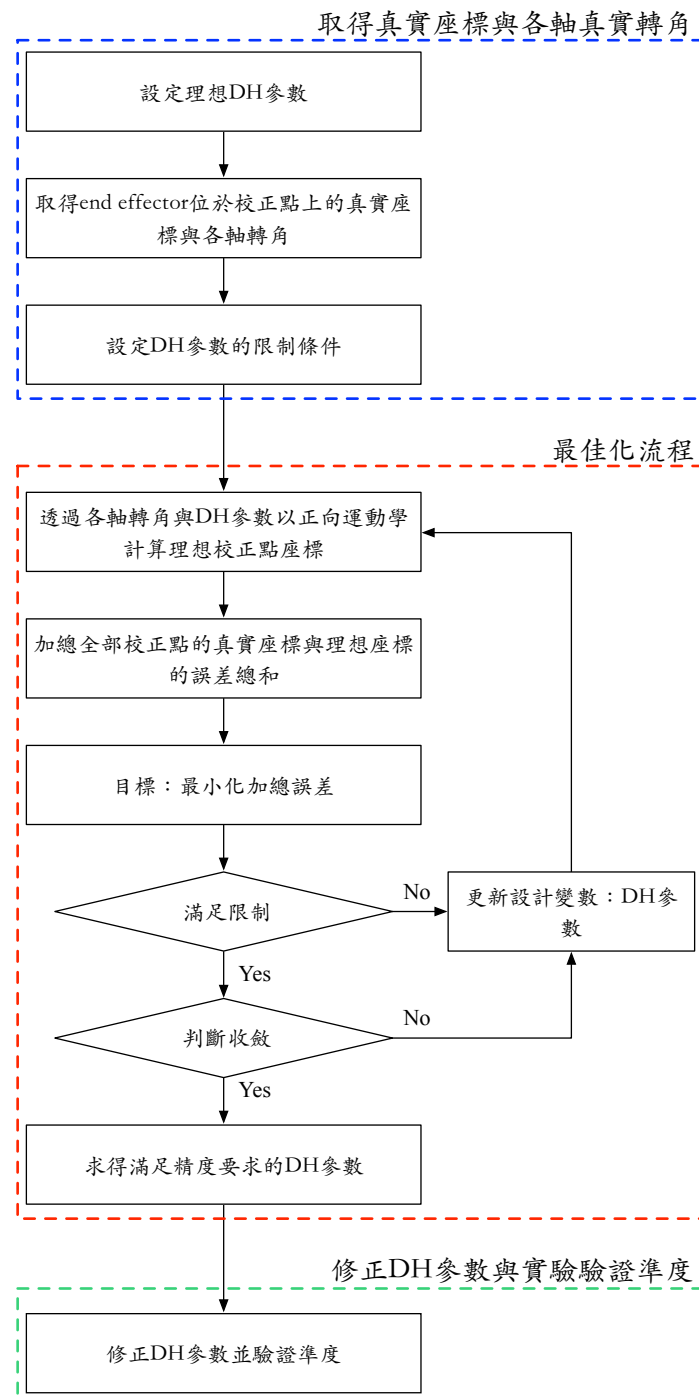


圖 2.4: 校正 DH 參數之研究流程圖

校正桌之設計與相機系統

此研究之對象為 3 自由度串連式機械手臂 [25]，其關節均為 revolute joint，而存在不確定因素的 DH 參數為表 2.2，我們設計一校正桌與機械手臂整合為機械手臂校正系統如圖 2.5，其中校正桌包含校正板與傾斜機構此兩部分。

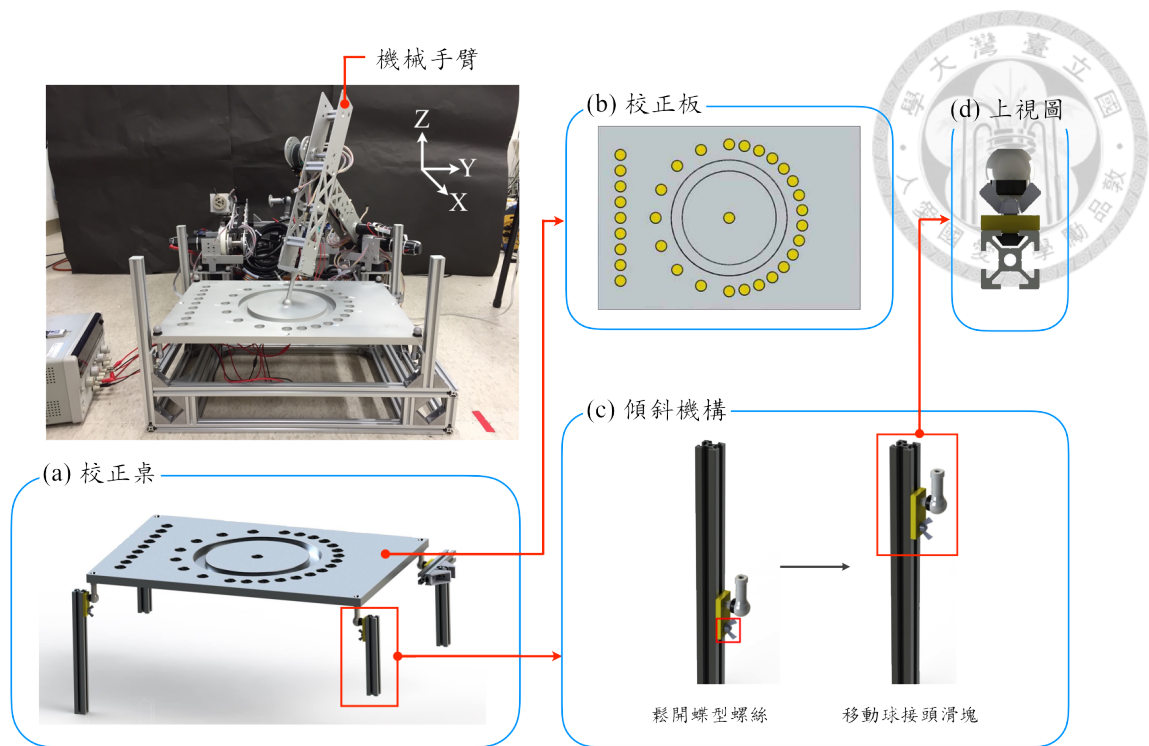


圖 2.5: 機械手臂校正系統¹(a) 校正桌 (b) 校正板上視圖 (c) 傾斜機構 (d) 傾斜機構上視圖

1. 校正桌設計

校正桌中的校正板上共有 33 個校正點分別組成圓形與直線兩種形狀。傾斜機構為增加校正桌自由度之設計如圖2.6，主要為提供校正板能夠有 roll 與 pitch 方向的傾斜，其目的在於探討不同的校正空間下精度校正之結果，而此研究中 roll 與 pitch 方向轉角分別為 11.7° 與 11.8° 。

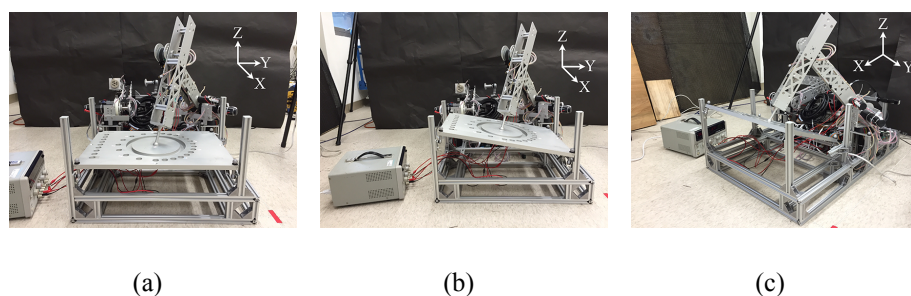


圖 2.6: 校正桌傾斜方向 (a) 水平放置, (b) roll 方向 (c) pitch 方向

• 相機系統

我們以 T-20S 相機系統² (Vicon Motion System Ltd.) 抓取校正點座標以及驗證校

¹本實驗平台為台大機械系林沛群教授提供

²相機系統為台大機械系林沛群教授提供

正後機械手臂的精度。



2.3.2 最佳化方法

此研究的最佳化流程如圖2.4所示，取得校正點位於機械手臂系統中的真實座標與各軸轉角後，由正向運動學計算出理想校正點座標，將每個校正點真實座標與理想座標的誤差加總後得到目標函數，透過修正機械手臂的 DH 參數找出滿足限制條件下的最佳 DH 參數，其限制條件為平均精度與各 DH 參數的誤差範圍。上述最佳化過程所建構出的最佳化方程式 (2.9) 為下：

$$\min_{\mathbf{DH}'} E = \sum_{j=1}^k (|X_j - X'_j(\mathbf{DH}')|)$$

with respect to $\delta d_i, \delta \psi_i, \delta a_i, \delta \alpha_i$

$$\text{subject to } |\delta d_i| \leq e_d$$

$$|\delta \psi_i| \leq e_\psi$$

$$|\delta a_i| \leq e_a$$

$$|\delta \alpha_i| \leq e_\alpha$$

$$E \leq kA \quad (2.9)$$

where $i = 1, 2, \dots, N$

$j = 1, 2, \dots, k$

$$\mathbf{DH}' = [\Delta \mathbf{d}, \Delta \boldsymbol{\psi}, \Delta \mathbf{a}, \Delta \boldsymbol{\alpha}]_{N \times 4}$$

$$\Delta \mathbf{d} = [d_1 + \delta d_1 \ d_2 + \delta d_2 \dots d_N + \delta d_N]^T$$

$$\Delta \boldsymbol{\psi} = [\psi_1 + \delta \psi_1 \ \psi_2 + \delta \psi_2 \dots \psi_N + \delta \psi_N]^T$$

$$\Delta \mathbf{a} = [a_1 + \delta a_1 \ a_2 + \delta a_2 \dots a_N + \delta a_N]^T$$

$$\Delta \boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 + \delta \alpha_1 \ \alpha_2 + \delta \alpha_2 \dots \alpha_N + \delta \alpha_N]^T$$

最佳化設計的目標函數 E 為所有校正點真實座標與理想座標的誤差總和， X_j 與 X'_j 分別為校正點的真實座標與理想座標， i, j 為手臂關節與校正點的順序， N, k 為關節與校正點的總數量， \mathbf{DH}' 為最佳化過程中要設計的機械手臂 DH 參數， d_i, a_i, α_i 為機械手臂的初始 DH 參數， ψ_i 為機械手臂位於校正點上時的關節轉角，而 $\delta d_i, \delta \psi_i, \delta a_i, \delta \alpha_i$ 是最佳

化過程中的設計變數，為機械手臂 DH 參數的修正量， e_d 、 e_ψ 、 e_a 、 e_α 為 DH 參數的修正量範圍， A 為校正點的平均準度。此研究的最佳化程式是透過 matlab 的 fmincon 函數找出滿足限制條件的最佳 DH 參數。



2.3.3 研究結果

經由前述之步驟後取得三種校正空間最佳化之 DH 參數如表2.3:

表 2.3: 校正前後 DH 參數之比較

i	Model	d_i	ψ_i	a_i	α_i
1	original	0.076 m	ψ_1	0 m	90°
	normal	0.0755 m	$-0.6036^\circ + \psi_1$	0.0003 m	90.0783°
	roll	0.0740 m	$-0.6093^\circ + \psi_1$	0.0020 m	90.0783°
	pitch	0.0780 m	$-0.7509^\circ + \psi_1$	0.0020 m	88.0000°
2	original	0 m	$90^\circ + \psi_2$	0.4 m	0°
	normal	-0.0004 m	$90.0704^\circ + \psi_2$	0.4002 m	-1.0250°
	roll	0.0003 m	$91.4311^\circ + \psi_2$	0.4020 m	-1.0250°
	pitch	-0.0009 m	$90.5759^\circ + \psi_2$	0.4020 m	1.8774°
3	original	-0.012 m	ψ_3	0 m	90°
	normal	-0.0124 m	$-0.1320^\circ + \psi_3$	-0.0001 m	89.4740°
	roll	-0.0117 m	$-0.3118^\circ + \psi_3$	0.0004 m	89.4740°
	pitch	-0.0127 m	$0.4572^\circ + \psi_3$	-0.0002 m	88.0000°
4	original	0.3543 m	0°	0 m	90°
	normal	0.3545 m	0°	-0.0001 m	90°
	roll	0.3563 m	0°	0.0004 m	90°
	pitch	0.3523 m	0°	-0.0002 m	90°

將這三組 DH 參數分次更新至機械手臂控制系統中，從控制系統中操作手臂移動至目標座標位置，透過相機系統抓取實際座標位置計算誤差，其誤差結果為表2.4:

表 2.4: 校正後準度驗證 (單位: mm)

Verification point	Initial error	Normal	Roll	Pitch
point 1 (355,-275,50)	26.234	15.849	18.793	22.375
point 2 (355,-135,50)	26.522	17.444	15.677	20.094
point 3 (495,-275,50)	28.178	17.122	26.898	27.686
point 4 355,-415,50)	27.651	16.329	21.531	23.417
point 5 (215,-275,50)	25.949	16.230	12.514	16.230
point 6 (355,-275,150)	26.568	15.643	19.179	23.440
Average error	26.850	16.436	19.099	22.207
Improvement		38.789%	28.868%	17.292%

上述之結果顯示此研究對於提升機械手臂之準度已有初步且不錯之結果，最好的校正空間為校正板平放之空間，其平均誤差由 26.850 mm 改善至 16.436 mm，提高了 38.789% 的準度，而最差的空間為校正板傾斜 pitch 方向之空間，平均誤差改善至 22.207 mm，提高了 17.292% 的準度，我們推測造成此結果差距之因素為機械手臂結構中剛性不足、馬達背隙等因素所造成，使此研究之機械手臂最適合校正板水平放置的校正空間進行校正，而對於其他不同結構的機械手臂，其所適合之校正空間則可能不完全相同，因此也得知，不同空間下機械手臂會有不同的準度表現。

2.4 小結

真實系統中存在著許多不確定因素，使系統的表現相較於理想系統中有一定程度的差距，而探討不確定因素之影響為改善真實系統表現的主要方法。透過大量的真實實驗可找出大部分不確定因素對系統造成的影響，但真實實驗需花費大量的時間、人力與成本。因此在不確定因素的相關研究中通常會建構出只考量特定不確定因素的虛擬系統來代替真實系統，並以虛擬實驗代替真實實驗的方式探討特定不確定因素對真實系統的影響，透過研究方法從虛擬實驗的結果中找出不確定因素並驗證研究方法是否有效。以機械手臂為例，上述之過程如圖2.7所示。

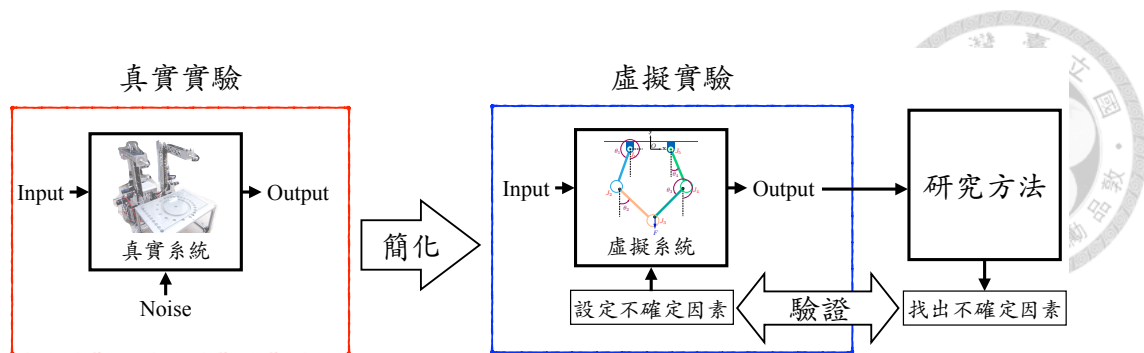


圖 2.7: 真實實驗、虛擬實驗與研究方法之關係示意圖

在機械手臂的不確定因素的相關文獻中提到當機械手臂存在關節間隙時關節內部會產生磨耗，此特性有發展出機械手臂可靠度規範的潛力，故本研究所探討的不確定因素為機械手臂的關節間隙。而目前建立存在關節間隙之機械手臂動態模型的方法有兩種，第一種方法在建構模型時並無考慮間隙所產生的幾何影響，因此本論文以建模時考慮間隙幾何影響的第二種方法建立動態模型。在 Y.C. Hsueh 等人 [3] 的研究中發現機械手臂負重時運行不同的軌跡會有不同的誤差，但目前以 Lagrange 方法建立平行五連桿機械手臂動態模型的相關研究中鮮少同時考量負重與間隙的準度影響，且尚未發現改善此影響之研究，因此我們將探討如何減少此影響來提高機械手臂準度。

絕大部分提升機械手臂精準度的校正方法均需辨別出機械手臂中的幾何參數誤差，但部分幾何參數存在於機械手臂的內部量測上有困難。先前研究中我們不對手臂外部結構與內部結構進行量測，藉由校正桌並透過最佳化的方式校正 DH 參數，並已有不錯之結果，故本論文進一步提出藉由機械手臂的軌跡誤差來評估幾何參數誤差（關節間隙）的方法，再以最佳化方法規劃出較小誤差的路徑使準度提昇。



機械手臂動態模型

爲了探討關節間隙對機械手臂準度的影響，必須建立理想機械手臂動態模型與結合關節間隙之機械手臂動態模型，藉由比較兩模型運行的軌跡計算出軌跡誤差。因此本章節建立理想機械手臂的運動方程式並輸入 end effector 的位置、速度、加速度來進行力分析，目標爲計算出控制理想機械手臂所需輸入的扭矩。將此扭矩輸入至非理想的機械手臂運動方程式後即可計算出非理想手臂 end effector 的軌跡誤差。

3.1 理想 DELTA 平行五連桿動態模型

圖3.1爲本論文選用的理想 DELTA 平行五連桿模型，共有 5 個桿件與 5 個關節。 O 點爲機械手臂的系統原點， L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 、 L_5 分別爲各桿件 1 至桿件 5 的桿長， θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 分別爲各桿件之轉角， J_1 、 J_2 、 J_3 、 J_4 、 J_5 分別代表機械手臂的關節且均爲 revolute joint，其中 J_1 與 J_5 爲控制端其餘關節均爲被動端，在控制時會施加額外的扭矩於 J_1 、 J_5 ，而系統的重力方向爲 $-y$ 方向， F 爲爲額外施加於機械手臂的負重，此負重用於模擬抓取物體移動時的動態。

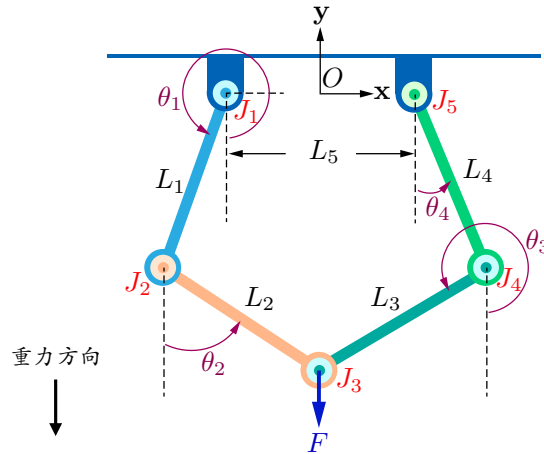


圖 3.1: 理想平行五連桿機械手臂

3.1.1 動態模型

本論文使用牛頓第二運動定理建立理想平行五連桿機械手臂的動態模型，此方法分別計算出各桿件於 t_n 時刻的 x 方向、 y 方向之加速度與角加速度，再使用積分法取得各桿件於 t_{n+1} 時刻的位置，此即為理想平行五連桿機械手臂的動態模型。

- 桿件 1: 假設為均質材料，圖3.2為桿件 1 的力分析圖， F_{1x} 與 F_{1y} 為桿件 1 於 J_1 關節內的受力量值， F_{2x} 與 F_{2y} 為桿件 1 於 J_2 關節內的受力量值， M_1 為控制端施於桿件 1 的扭矩量值， m_1g 為重力，轉動慣量為 I_1 ，上述力與扭矩之方向均如圖中所示。

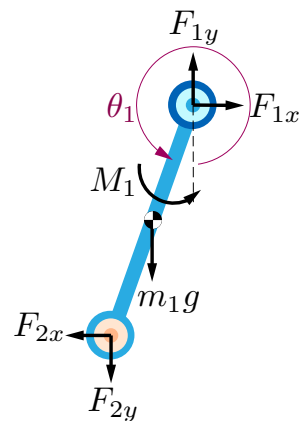


圖 3.2: 桿件 1 的力分析圖



由牛頓第二運動定理所建立之力方程式為下：

$$\begin{aligned}\Sigma \mathbf{F}_x &= F_{1x} - F_{2x} = m_1 \ddot{x}_1 \\ \Sigma \mathbf{F}_y &= F_{1y} - F_{2y} - m_1 g = m_1 \ddot{y}_1 \\ \Sigma \mathbf{M} &= -(F_{1y} + F_{2y}) \frac{L_1}{2} \sin \theta_1 - (F_{1x} + F_{2x}) \frac{L_1}{2} \cos \theta_1 + M_1 = I_1 \ddot{\theta}_1\end{aligned}\quad (3.1)$$

- 桿件 2：假設為均質材料，圖3.3為桿件 2 的力分析圖， F_{2x} 與 F_{2y} 為桿件 2 於 J_2 關節內的受力量值， F_{3x} 與 F_{3y} 為桿件 2 於 J_3 關節內的受力量值， $m_2 g$ 為重力，轉動慣量為 I_2 ，上述之力方向均如圖中所示。

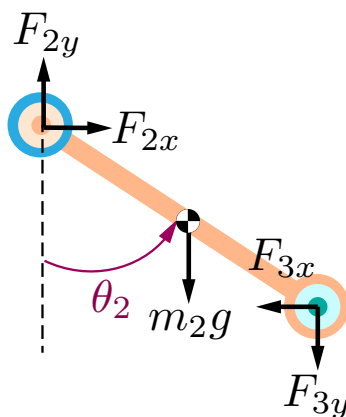


圖 3.3: 桿件 2 的力分析圖

由牛頓第二運動定理所建立之力方程式為下：

$$\begin{aligned}\Sigma \mathbf{F}_x &= F_{2x} - F_{3x} = m_2 \ddot{x}_2 \\ \Sigma \mathbf{F}_y &= F_{2y} - F_{3y} - m_2 g = m_2 \ddot{y}_2 \\ \Sigma \mathbf{M} &= -(F_{2y} + F_{3y}) \frac{L_2}{2} \sin \theta_2 - (F_{2x} + F_{3x}) \frac{L_2}{2} \cos \theta_2 = I_2 \ddot{\theta}_2\end{aligned}\quad (3.2)$$

- 桿件 3：假設為均質材料，圖3.4為桿件 3 的力分析圖， F_{3x} 與 F_{3y} 為桿件 3 於 J_3 關節內的受力量值， F_{4x} 與 F_{4y} 為桿件 3 於 J_4 關節內的受力量值， $m_3 g$ 為重力， F 為額外施加於機械手臂的負重，轉動慣量為 I_3 ，上述之力方向均如圖中所示。

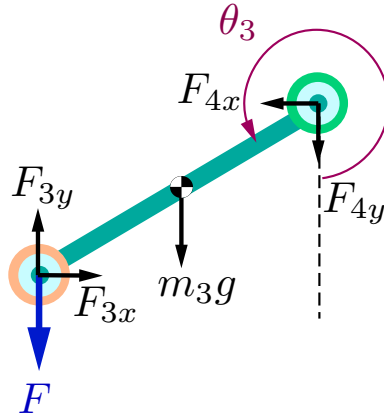


圖 3.4: 桿件 3 的力分析圖

由牛頓第二運動定理所建立之力方程式為下:

$$\begin{aligned}\Sigma \mathbf{F}_x &= F_{3x} - F_{4x} = m_3 \ddot{x}_3 \\ \Sigma \mathbf{F}_y &= F_{3y} - F_{4y} - m_3 g - F = m_3 \ddot{y}_3 \\ \Sigma \mathbf{M} &= (F_{3y} + F_{4y}) \frac{L_3}{2} \sin \theta_3 + (F_{3x} + F_{4x}) \frac{L_3}{2} \cos \theta_3 - F \frac{L_3}{2} \sin \theta_3 = I_3 \ddot{\theta}_3\end{aligned}\quad (3.3)$$

- 桿件 4: 假設為均質材料, 圖3.5為桿件 4 的力分析圖, F_{4x} 與 F_{4y} 為桿件 4 於 J_4 關節內的受力量值, F_{5x} 與 F_{5y} 為桿件 4 於 J_5 關節內的受力量值, M_2 為控制端施於桿件 4 的扭矩量值, $m_4 g$ 為重力, 轉動慣量為 I_4 , 上述力與扭矩之方向均如圖中所示。

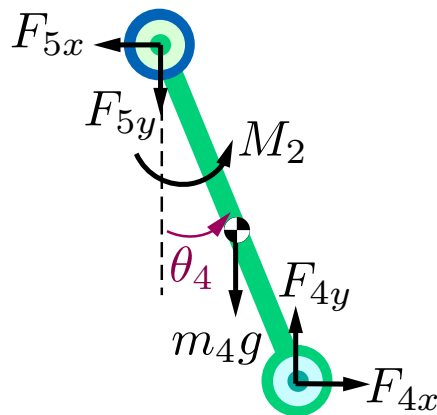


圖 3.5: 桿件 4 的力分析圖

由牛頓第二運動定理所建立之力方程式為下：

$$\begin{aligned}\Sigma \mathbf{F}_x &= F_{4x} - F_{5x} = m_4 \ddot{x}_4 \\ \Sigma \mathbf{F}_y &= F_{4y} - F_{5y} - m_4 g = m_4 \ddot{y}_4 \\ \Sigma \mathbf{M} &= (F_{4y} + F_{5y}) \frac{L_4}{2} \sin \theta_4 + (F_{4x} + F_{5x}) \frac{L_4}{2} \cos \theta_4 + M_2 = I_4 \ddot{\theta}_4\end{aligned}\quad (3.4)$$

將方程式 (3.1、3.2、3.3、3.4) 表示成矩陣形式可得：

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{X} &= \mathbf{B} \\ \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} F_{1x} & F_{1y} & F_{2x} & F_{2y} & F_{3x} & F_{3y} & F_{4x} & F_{4y} & F_{5x} & F_{5y} & M_1 & M_2 \end{bmatrix}^T\end{aligned}\quad (3.5)$$

3.1.2 力分析

本論文將理想模型運行目標路徑時控制端所輸入之扭矩輸入至非理想模型中，藉此探討關節間隙之影響。因此需將目標路徑上每個時刻桿件的位置、轉角與角加速度輸入至運動方程式中進行力分析，以方程式 (3.5) 計算出每個時刻控制端所需輸入的扭矩。

位置、轉角與角加速度計算

本論文使用向量迴路進行角速度與角加速度計算，圖3.6中 P 點為機械手臂之 end effector，共有兩個迴路其關係如下：

$$\mathbf{P} = -\frac{1}{2}\mathbf{L}_5 + \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 \quad (3.6)$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}\mathbf{L}_5 + \mathbf{L}_4 + \mathbf{L}_3 \quad (3.7)$$

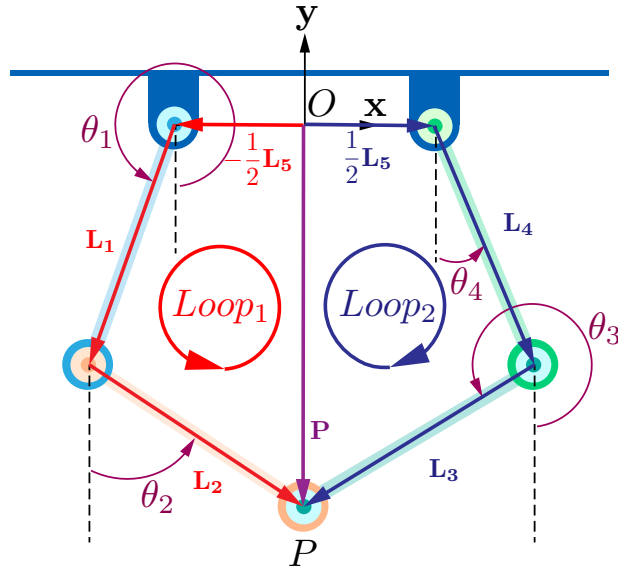


圖 3.6: 平行五連桿機械手臂向量迴路

將方程式 (3.6) 與 (3.7) 的 x 與 y 方向獨立出可得位置方程式:

$$\begin{aligned}
 P_x &= -\frac{1}{2}L_5 + L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2 \\
 P_y &= -L_1 \cos \theta_1 - L_2 \cos \theta_2 \\
 P_x &= \frac{1}{2}L_5 + L_4 \sin \theta_4 + L_3 \sin \theta_3 \\
 P_y &= -L_4 \cos \theta_4 - L_3 \cos \theta_3
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

對方程式 (3.8) 微分後可得速度方程式:

$$\begin{aligned}
 \dot{P}_x &= L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + L_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\
 \dot{P}_y &= L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_2 L_2 \sin \theta_2 \\
 \dot{P}_x &= L_4 \dot{\theta}_4 \cos \theta_4 + L_3 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 \\
 \dot{P}_y &= L_4 \dot{\theta}_4 \sin \theta_4 + L_3 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3
 \end{aligned} \tag{3.9}$$



對方程式 (3.9) 微分後可得加速度方程式：

$$\begin{aligned}
 \ddot{P}_x &= -L_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 - L_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + L_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 + L_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\
 \ddot{P}_y &= L_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2^2 L_2 \cos \theta_2 + L_1 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \ddot{\theta}_2 L_2 \sin \theta_2 \\
 \ddot{P}_x &= -L_4 \dot{\theta}_4^2 \sin \theta_4 - L_3 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 + L_4 \ddot{\theta}_4 \cos \theta_4 + L_3 \ddot{\theta}_3 \cos \theta_3 \\
 \ddot{P}_y &= L_4 \dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4 + L_3 \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 + L_4 \ddot{\theta}_4 \sin \theta_4 + L_3 \ddot{\theta}_3 \sin \theta_3
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

將方程式 (3.9) 與 (3.10) 簡化為矩陣形式：

$$\begin{bmatrix} L_1 \cos \theta_1 & L_2 \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ L_1 \sin \theta_1 & L_2 \sin \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 \cos \theta_3 & L_4 \cos \theta_4 \\ 0 & 0 & L_3 \sin \theta_3 & L_4 \sin \theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \\ \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

$$\begin{bmatrix} L_1 \cos \theta_1 & L_2 \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ L_1 \sin \theta_1 & L_2 \sin \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 \cos \theta_3 & L_4 \cos \theta_4 \\ 0 & 0 & L_3 \sin \theta_3 & L_4 \sin \theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{P}_x + L_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + L_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 \\ \ddot{P}_y - L_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 - L_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 \\ \ddot{P}_x + L_3 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 + L_4 \dot{\theta}_4^2 \sin \theta_4 \\ \ddot{P}_y - L_3 \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 - L_4 \dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

若已知 \dot{P}_x 、 \dot{P}_y 、 \ddot{P}_x 、 \ddot{P}_y 及可透過方程式 (3.8、3.11、3.12) 計算出各桿件的位置、轉角、角速度與角加速度，最後再以方程式 (3.5) 計算出控制端所需輸入之扭矩及完成力分析。

3.2 結合關節間隙之 DELTA 平行五連桿動態模型

圖3.7為本論文建立的結合關節間隙之 DELTA 平行五連桿模型示意圖，共有 5 個桿件與 5 個關節。 O 點為機械手臂的系統原點，桿件編號與長度均與理想模型相同， θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 分別為各桿件之轉角， J_1 、 J_2 、 J_3 、 J_4 、 J_5 分別代表機械手臂的關節且均為 revolute joint，其中 J_1 與 J_5 為控制端其餘關節均為被動端，在控制時會施加額外的扭矩於 J_1 、 J_5 ，

關節間隙存在於 J_2 、 J_3 、 J_4 ，而系統的重力方向為 $-y$ 方向， F 為額外施加於機械手臂的負重，此負重施於桿件 3 於 J_3 關節內的軸心，用於模擬抓取物體移動時的動態。

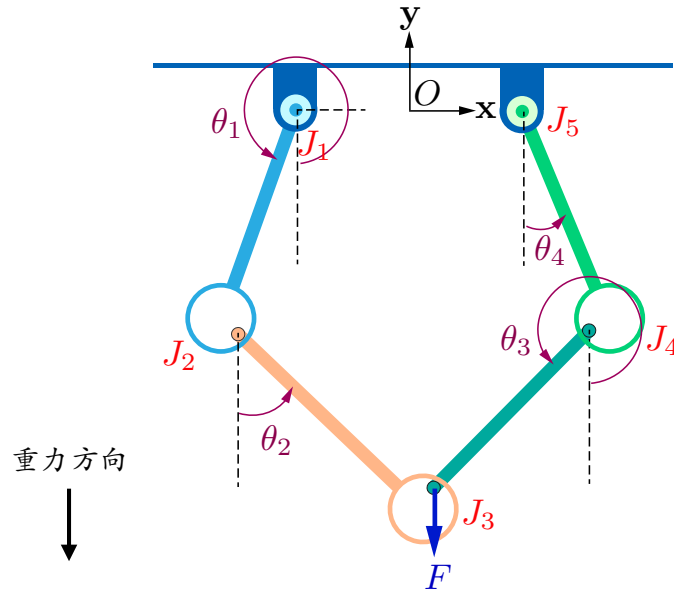


圖 3.7: 存在關節間隙之機械手臂模型示意圖

3.2.1 關節間隙模型

本論文探討存在於 revolute joint 中的關節間隙如圖3.8，此類型的關節間隙是因為軸承內徑大於軸徑 ($R_{Bi} > R_{Ji}$) 所產生的不確定因素，而關節間隙的存在會使軸呈現不穩定的運動狀態，如圖3.9所示，這些運動狀態包含撞擊軸承、與軸承接觸發生滾動或滑動、與軸承無接觸自由移動，而這些運動狀態發生的時刻可藉由觀察軸中心運動軌跡得知，途中 i 為第 i 個關節， R_{Bi} 、 R_{Ji} 分別為關節內軸承與軸的半徑， c_i 為軸中心軌跡邊界之半徑即為關節間隙，其值為：

$$c_i = R_{Bi} - R_{Ji} \quad (3.13)$$

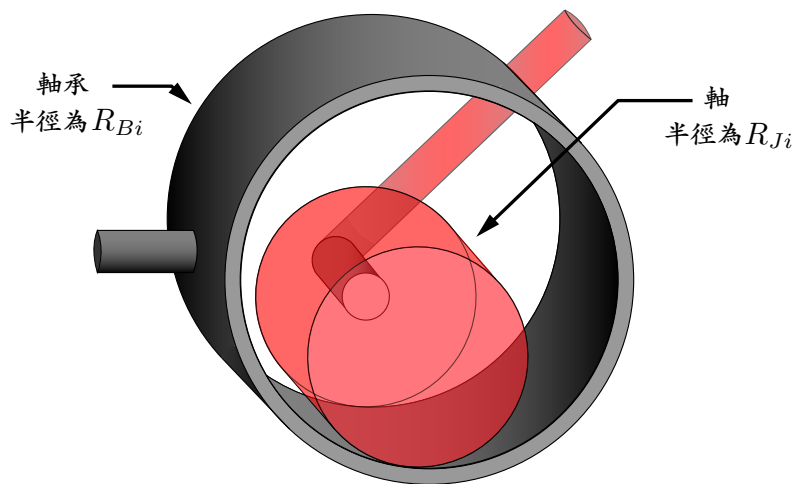


圖 3.8: 存在關節間隙之 revolute joint 示意圖

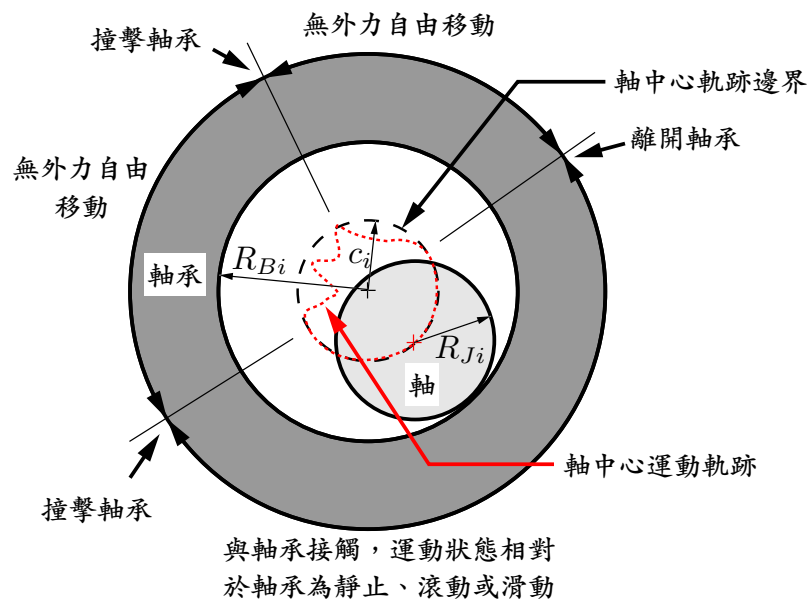


圖 3.9: 存在關節間隙時軸在軸承內部的運動狀態 2D 示意圖

透過上述之運動狀態可以將軸與軸承間可能發生之情形分為有接觸與無接觸兩類如圖3.10所示，而發生接觸前兩者間會先發生衝擊，使兩者間產生變形且出現接觸力與摩擦力。圖中 i 為第 i 個關節， R_{Bi} 、 R_{Ji} 分別為關節內軸承與軸的半徑， \mathbf{e}_i 為間隙向量， δ_i 為衝擊時產生的變形量，其 \mathbf{e}_i 、 δ_i 與關節間隙 c_i 之關係為：

無接觸：

$$e_i < c_i \quad (3.14)$$



接觸:

$$e_i \geq c_i \quad (3.15)$$

接觸時的變形量:

$$\delta_i = e_i - c_i \quad (3.16)$$

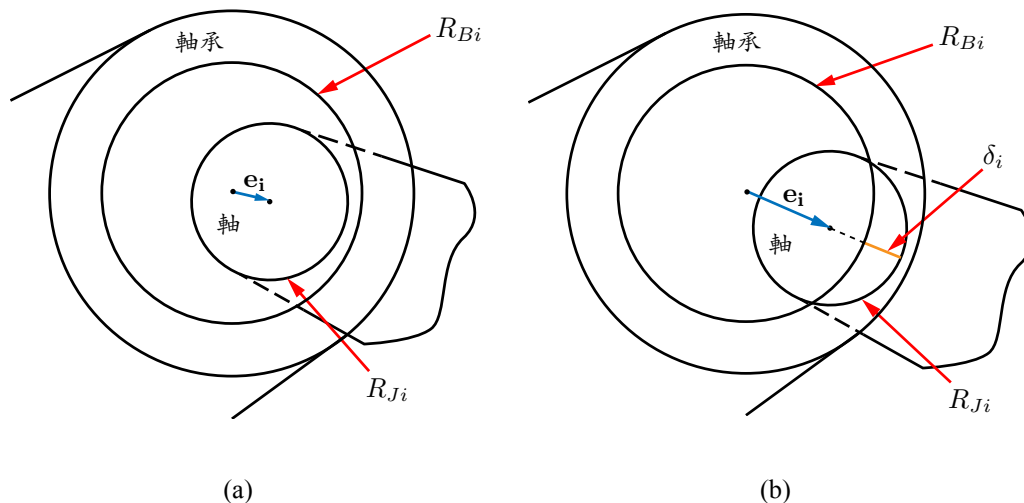


圖 3.10: revolute joint 的關節間隙模型。(a) 軸與軸承無接觸 (b) 軸與軸承有接觸

3.2.2 接觸力與摩擦力模型

圖3.11為軸與軸承相接觸時的相對速度向量示意圖， Q_J 與 Q_B 分別為位於軸與軸承上的接觸點， \mathbf{n} 與 \mathbf{t} 為接觸點上的法向量與切向量， \mathbf{V}_T 與 \mathbf{V}_N 為軸相對於軸承的切線速度向量與法線速度向量， \mathbf{V}_{Q_J} 與 \mathbf{V}_{Q_B} 分別為軸接觸點上之速度向量與軸承接觸點上之速度向量。

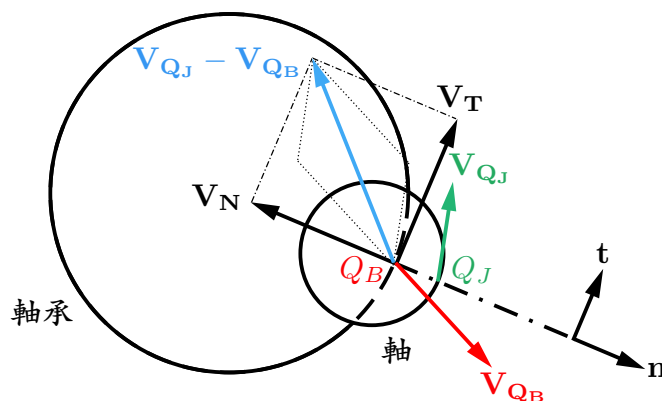


圖 3.11: 軸與軸承相接觸時的相對速度向量示意圖

本論文所使用之接觸力模型為 Lankarani–Nikravesh 接觸力模型，摩擦力模型為 Rooney and Deravi 摩擦力模型，以下敘述為此兩者模型之數學方程式：



接觸力模型

Lankarani–Nikravesh 的接觸力模型 [26] 被廣泛的用於機械系統中，因為此模型簡單、容易計算，同時也考慮到的衝擊過程中的能量消耗。此模型套用於軸承上為：

$$F_N = K\delta^{1.5}\left(1 + \frac{3(1 - c_e^2)}{4} \frac{\dot{\delta}}{\dot{\delta}^{(-)}}\right) \quad (3.17)$$

F_N 為接觸力量值， δ 為變形量， $\dot{\delta}^{(-)}$ 為衝擊時的初始相對法向量速率， $\dot{\delta}$ 為衝擊過程中的相對法向量速率， c_e 為 restitution coefficient，其中 K 可由下列方程式計算：

$$K = \frac{4}{3(h_B + h_J)} \left(\frac{R_{Bi}R_{Ji}}{R_{Bi} - R_{Ji}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.18)$$

$$h_k = \frac{1 - \nu_k^2}{E_k} \quad (k = B, J) \quad (3.19)$$

上述方程式中下標的 B 、 J 分別代表著軸承與軸， ν 、 E 為 Poisson's ratio 與 Young's modulus。

摩擦力模型

Rooney and Deravi 的摩擦力模型 [27] 廣泛的運用在分析存在關節間隙的多體系統中。此模型套用於軸承上為：

$$\mathbf{F}_T = -\mu F_N \frac{\mathbf{V}_T}{V_T} \quad (3.20)$$

\mathbf{F}_T 為摩擦力向量， μ 為動摩擦係數， F_N 為接觸力量值， \mathbf{V}_T 為切線速度向量， V_T 為切線速率。

軸與軸承接觸時兩者所受之力

軸承所受到的接觸力方向為 \mathbf{n} ，摩擦力方向為 \mathbf{t} ，故軸承受的的總力為：

$$\mathbf{F}_{Bi} = \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_N \quad (3.21)$$

軸所受之力與軸承所受之力互為作用力與反作用力，故軸所受的總力為 $-\mathbf{F}_{B_i}$ 。

3.2.3 動態模型

本論文使用 Lagrange equation 的 multiplier 方法及牛頓第二運動定理建立結合關節間隙之平行五連桿機械手臂的動態模型，透過給定 t_n 時刻控制端輸入的扭矩計算出各桿件的加速度與角加速度，再使用積分法取得各桿件於 t_{n+1} 時刻的位置，此即為結合關節間隙之平行五連桿機械手臂的動態模型。

桿件 1、桿件 4 運動方程式

此兩桿使用 Lagrange equation 的 multiplier 方法建立運動方程式：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \Phi_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{G} \quad (3.22)$$

\mathbf{M} 為系統的質量矩陣， \mathbf{q} 為廣義座標向量， Φ_q 為限制條件方程式的 Jacobian 矩陣， $\boldsymbol{\lambda}$ 為 Lagrange multipliers 向量， \mathbf{G} 為廣義力向量。

圖3.12為桿件 1 與桿件 4 的系統示意圖， F_{B_1x} 、 F_{B_1y} 、 F_{B_3x} 、 F_{B_3y} 均為該關節中軸與軸承相接觸時 x 與 y 正方向上的分力量值，若無接觸則均為 0。

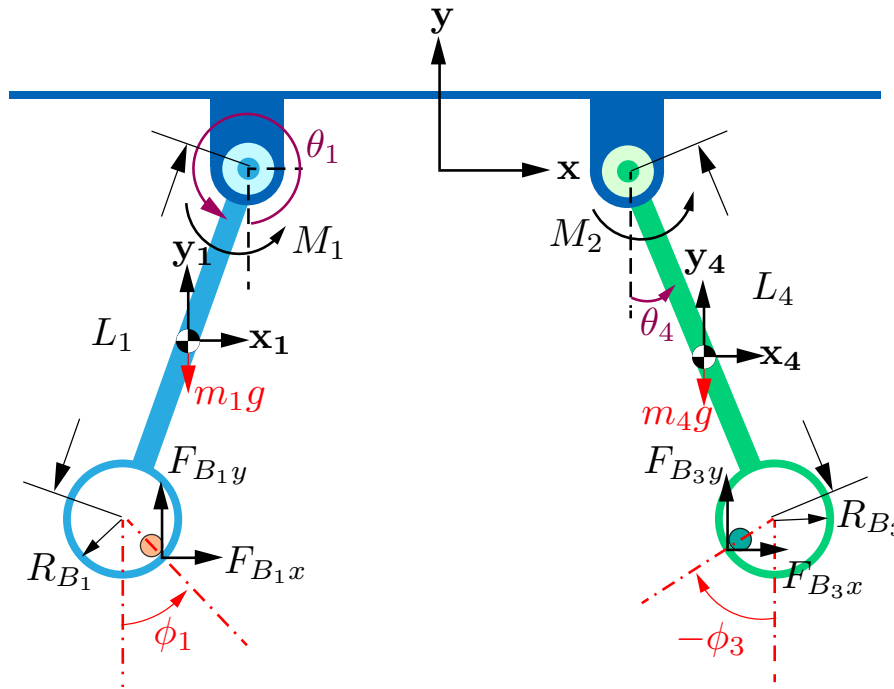


圖 3.12: 桿件 1 與桿件 4 的系統示意圖

此系統質量矩陣 \mathbf{M} :

$$\mathbf{M} = \text{diag}(m_1 \ m_1 \ I_1 \ m_4 \ m_4 \ I_4) \quad (3.23)$$

廣義座標向量 \mathbf{q} :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \theta_1 & x_4 & y_4 & \theta_4 \end{bmatrix}^T \quad (3.24)$$

廣義力向量 \mathbf{G} :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} F_{B_1x} \\ F_{B_1y} - m_1g \\ M_1 + F_{B_1x}(\frac{L_1}{2} \cos \theta_1 + c_1 \cos \phi_1) + F_{B_1y}(\frac{L_1}{2} \sin \theta_1 + c_1 \sin \phi_1) \\ F_{B_3x} \\ F_{B_3y} - m_3g \\ M_2 + F_{B_3x}(\frac{L_4}{2} \cos \theta_4 + c_3 \cos \phi_3) + F_{B_3y}(\frac{L_4}{2} \sin \theta_4 + c_3 \sin \phi_3) \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

位置限制方程式爲:

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = \begin{bmatrix} x_1 - \frac{1}{2}L_1 \sin \theta_1 + \frac{1}{2}L_5 \\ y_1 + \frac{1}{2}L_1 \cos \theta_1 \\ x_4 - \frac{1}{2}L_4 \sin \theta_4 - \frac{1}{2}L_5 \\ y_4 + \frac{1}{2}L_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.26)$$

對方程式 (3.26) 對時間作一階微分後可得速度限制方程式:

$$\Phi_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = -\Phi_t \equiv \mathbf{v} \quad (3.27)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{y}_1 & \dot{\theta}_1 & \dot{x}_4 & \dot{y}_4 & \dot{\theta}_4 \end{bmatrix}^T \quad (3.28)$$



其中 Φ_q 爲：

$$\Phi_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \cos \theta_1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \sin \theta_1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \cos \theta_4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \sin \theta_4 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$



對方程式 (3.26) 對時間作二階微分後可得加速度限制方程式：

$$\Phi_q \ddot{\mathbf{q}} = -(\Phi_q \dot{\mathbf{q}})_q - 2\Phi_{qt} \dot{\mathbf{q}} - \Phi_{tt} \equiv \gamma = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \\ \frac{1}{2} L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ -\frac{1}{2} L_4 \dot{\theta}_4 \sin \theta_4 \\ \frac{1}{2} L_4 \dot{\theta}_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 & \ddot{y}_1 & \ddot{\theta}_1 & \ddot{x}_4 & \ddot{y}_4 & \ddot{\theta}_4 \end{bmatrix}^T \quad (3.31)$$

將方程式 (3.22)、(3.30) 化爲矩陣形式後可寫成：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_q^T \\ \Phi_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

而在 Baumgarte 的方法中 [28] 將方程式 (3.32) 改爲：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_q^T \\ \Phi_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \gamma' \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

其中 $\gamma' = \gamma - 2\alpha\Phi - \beta^2\Phi$, α 與 β 爲 Baumbarte 參數，此方法能夠有效讓系統維持穩定狀態，避免在計算過程中違反位置限制方程式（當方程式 (3.26) 不爲 0 時即爲違反）。



桿件 2 運動方程式

桿件 2 使用牛頓第二運動定理建立運動方程式：

$$\Sigma \mathbf{F}_x = F_{B_2x} - F_{B_1x} = m_2 \ddot{x}_2$$

$$\Sigma \mathbf{F}_y = F_{B_2y} - F_{B_1y} - m_2 g = m_2 \ddot{y}_2$$

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{M} = & F_{B_2x} \left(\frac{L_2}{2} \cos \theta_2 + R_{B_2} \cos \phi_2 \right) + F_{B_2y} \left(\frac{L_2}{2} \sin \theta_2 + R_{B_2} \sin \phi_2 \right) + \\ & F_{B_1x} \left(\frac{L_2}{2} \cos \theta_2 - R_{J_1} \cos \phi_1 \right) + F_{B_1y} \left(\frac{L_2}{2} \sin \theta_2 - R_{J_1} \sin \phi_1 \right) = I_2 \ddot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

圖3.13為桿件 2 的自由體圖， F_{B_1x} 、 F_{B_1y} 為 J_2 關節中軸與軸承相接觸時 x 與 y 負方向上的分力量值， F_{B_2x} 、 F_{B_2y} 為 J_3 關節中軸與軸承相接觸時 x 與 y 正方向上的分力量值，若無接觸則均為 0。

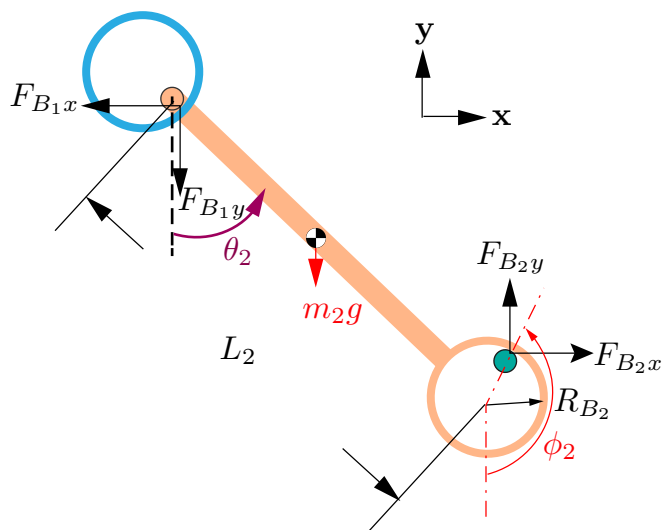


圖 3.13: 桿件 2 的自由體圖



桿件 3 運動方程式

桿件 3 使用牛頓第二運動定理建立運動方程式：

$$\begin{aligned}\Sigma \mathbf{F}_x &= -F_{B_2x} - F_{B_3x} = m_3 \ddot{x}_3 \\ \Sigma \mathbf{F}_y &= -F_{B_2y} - F_{B_3y} - m_3 g - F = m_3 \ddot{y}_3 \\ \Sigma \mathbf{M} &= -F_{B_2x} \left(\frac{L_3}{2} \cos \theta_3 + R_{J_2} \cos \phi_2 \right) + F_{B_2y} \left(-\frac{L_3}{2} \sin \theta_3 - R_{J_2} \sin \phi_2 \right) + \\ &\quad F_{B_3x} \left(\frac{L_3}{2} \cos \theta_3 - R_{J_3} \cos \phi_3 \right) - F_{B_3y} \left(-\frac{L_3}{2} \sin \theta_3 + R_{J_3} \sin \phi_3 \right) = I_3 \ddot{\theta}_3\end{aligned}\quad (3.35)$$

圖3.14為桿件 3 的自由體圖， F_{B_2x} 、 F_{B_2y} 為 J_2 關節中軸與軸承相接觸時 x 與 y 負方向上的分力量值， F_{B_3x} 、 F_{B_3y} 為 J_3 關節中軸與軸承相接觸時 x 與 y 負方向上的分力量值，若無接觸則均為 0。

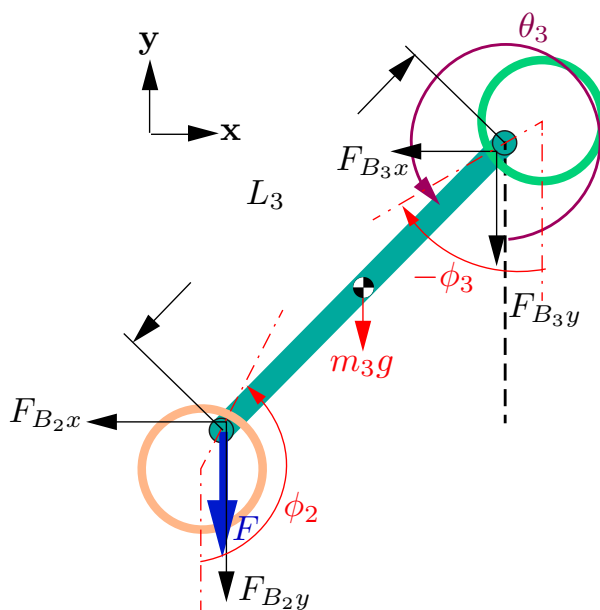


圖 3.14: 桿件 3 的自由體圖

動態模型計算流程圖

建立完各桿件之運動方程式後將方程式 (3.33、3.34、3.35) 串在一起即為存在關節間隙之機械手臂的運動方程式，而其動態計算流程如圖3.15所示：

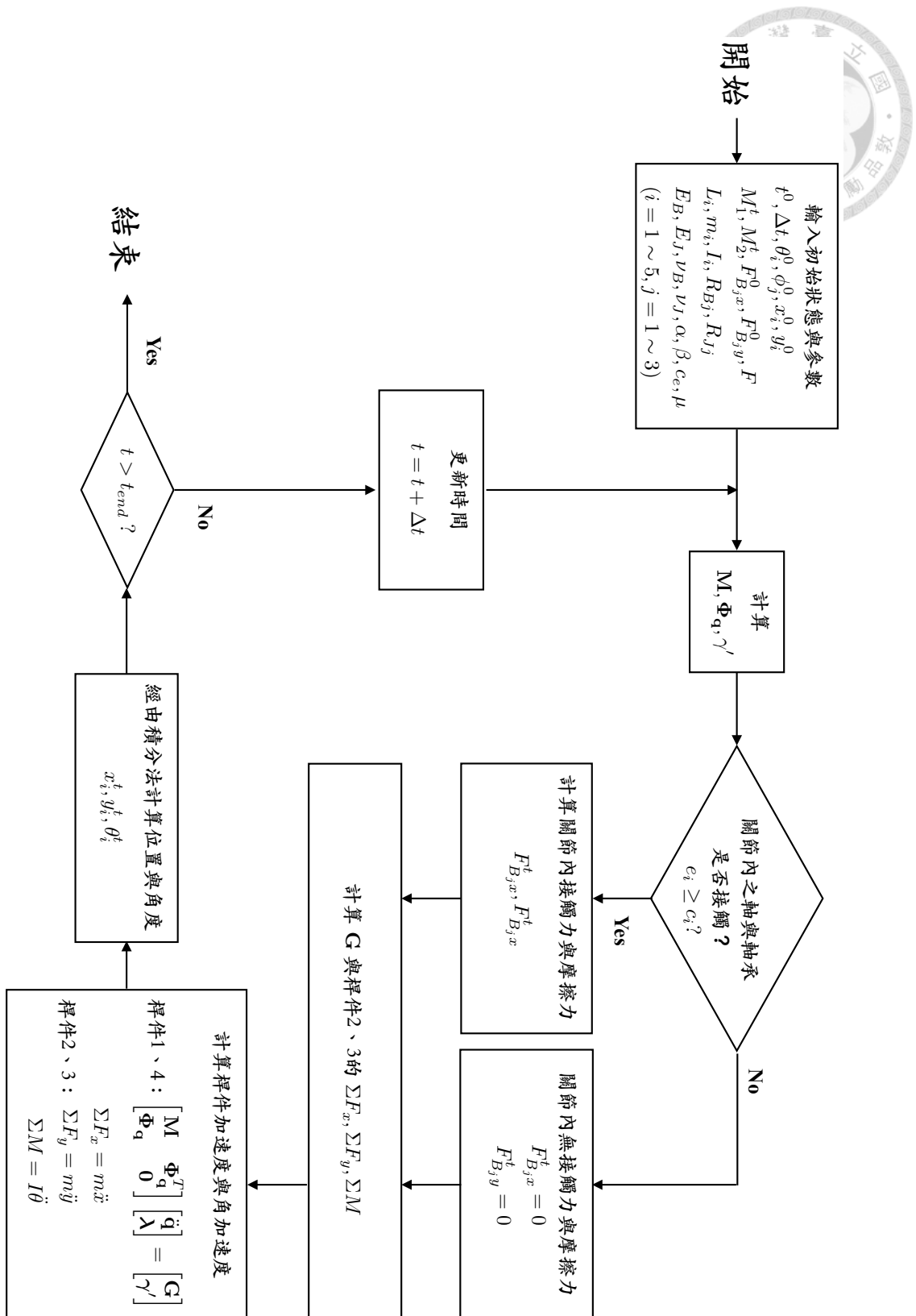


圖 3.15: 存在關節間隙之機械手臂動態模型計算流程圖



研究方法

本論文的研究流程如圖4.1中所示，由於前一章節建構之動態模型均由扭矩控制至目標位置，因此透過力分析計算出理想模型運作於目標路徑時所需輸入之扭矩後，將此扭矩輸入非理想模型中計算非理想軌跡與軌跡誤差（非理想軌跡與理想路徑的誤差）即可取得軌跡誤差曲線，藉由觀察分析不同關節間隙值對軌跡誤差曲線的變化，量化此變化之特徵建立出關節間隙與軌跡誤差曲線間的關係式，並透過最佳化方法設計最佳目標路徑。

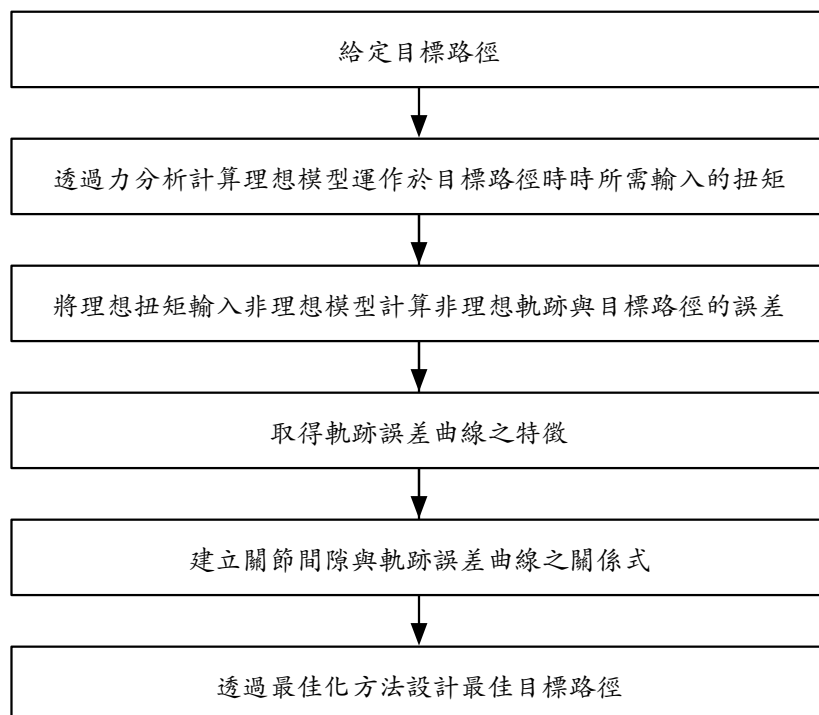


圖 4.1: 研究流程圖



4.1 機械手臂之設計參數

本論文設計之機械手臂如圖4.2所示， J_1 與 J_5 為控制端，手臂移動所需之扭矩從此兩關節輸入 J_2 、 J_3 、 J_4 ，額外之負重施於桿件 3 於 J_3 關節內的軸心，表4.1為手臂之設計參數

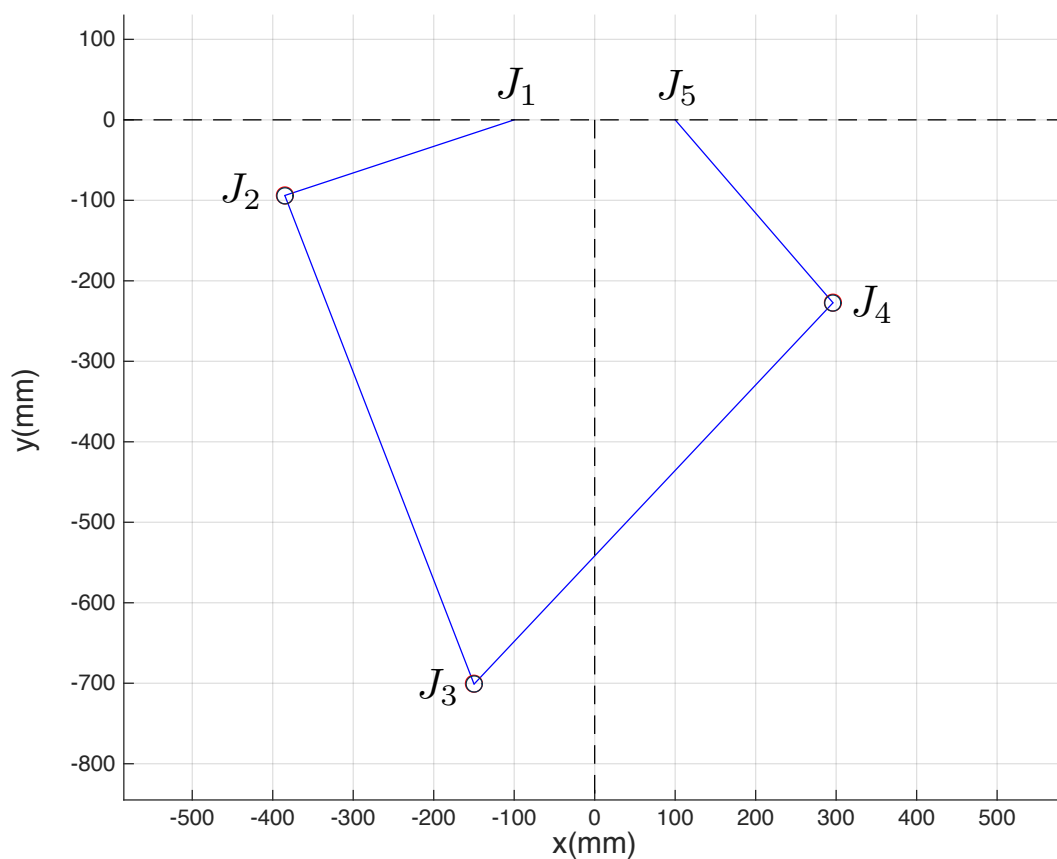


圖 4.2: 存在關節間隙之機械手臂初始靜止狀態

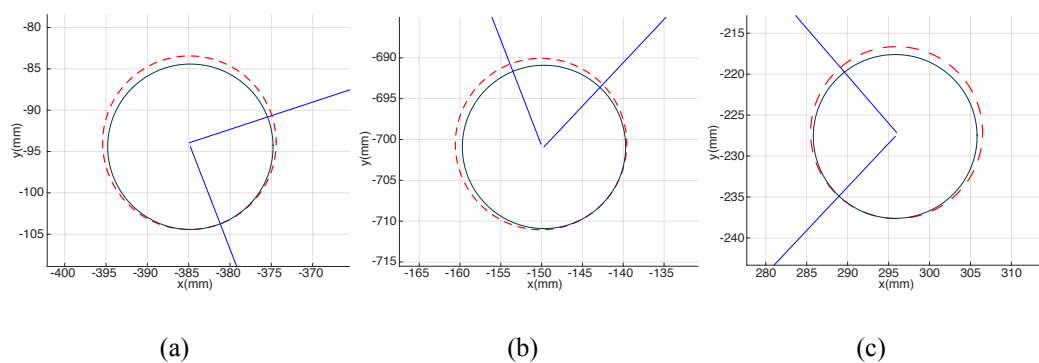


圖 4.3: 圖4.2中的關節間隙 (a) J_2 關節 (b) J_3 關節 (c) J_4 關節



表 4.1: 機械手臂之幾何參數

桿件編號	桿長 (m)	質量 (kg)	轉動慣量 ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$)
1	0.3	2.5	0.0233
2	0.65	0.8	0.0282
3	0.65	0.8	0.0282
4	0.3	2.5	0.0233
5	0.2	1.7	0.0084

表 4.2: 機械手臂動態模型參數

軸半徑	10.0mm	Baumgarte- α	20
軸承半徑	10.1 mm ~ 10.5 mm	Baumgarte- β	20
間隙範圍	0.1 mm ~ 0.5 mm	Restitution coefficient	0.9
動摩擦係數	0.05	Young's modulus	207 GPa
額外負重 F	0.98 N	Poisson's ratio	0.3
Integration step size	0.00001 s		

4.2 目標路徑規劃

本研究透過設計 24 條實驗路徑來探討不同路徑與不同關節間隙之關係，而實驗路徑的規劃是從 x 與 y 方向上的加速度分開規劃在藉由積分取得速度與位置，如圖 4.4 所示，其中 a 與 c 分別為加速與減速段， b 為等速度段。圖 4.5 為研究中所規劃的 24 條實驗路徑，主要分為 x 與 y 兩種路徑的順逆方向，其中路徑的設計變數為起迄點位置、 x 與 y 方向的最大速度、加速減速段所需的時間。

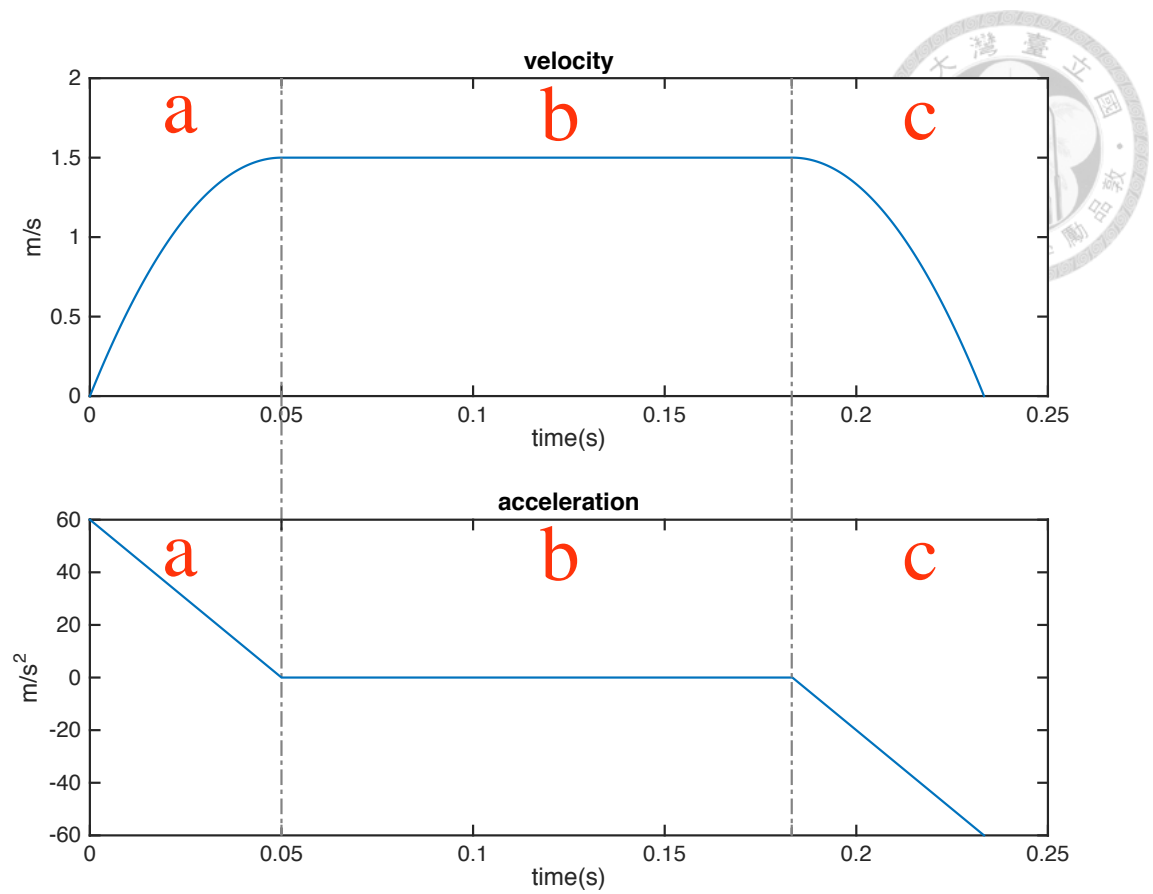


圖 4.4: x 與 y 方向目標路徑規劃之加速度與速度

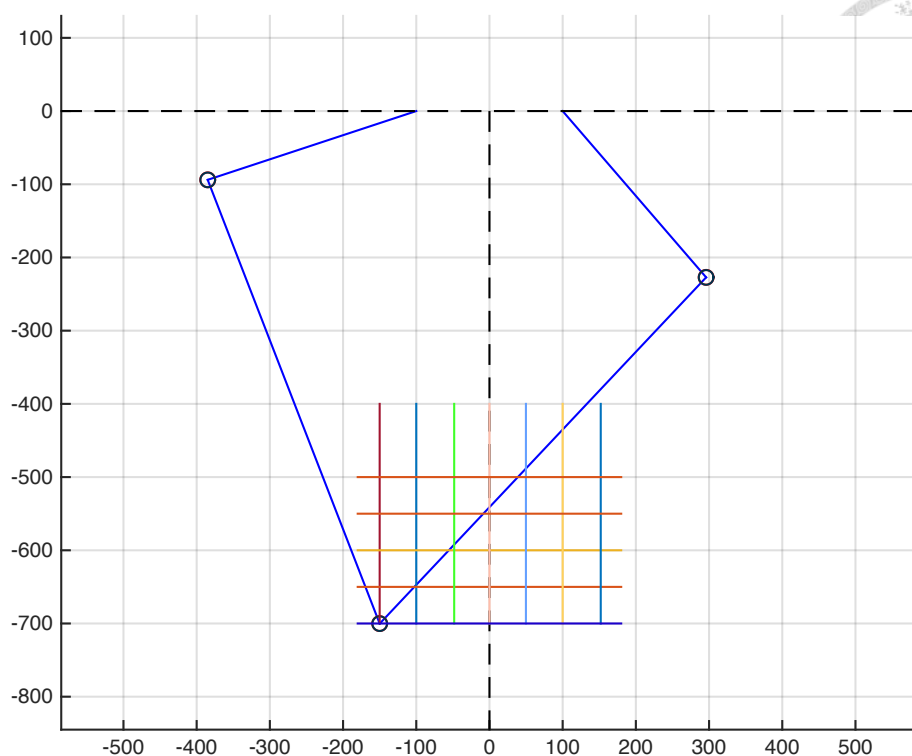


圖 4.5: 目標路徑規劃

此 24 條路徑之設計參數如下:

表 4.3: x 方向實驗路徑之設計參數

實驗路徑編號	起點 (mm)	迄點 (mm)	x 方向的最大速度	加減速時間
x1	(-180,-700)	(180,-700)	1.5 m/s	0.05 s
x2	(-180,-650)	(180,-650)	1.5 m/s	0.05 s
x3	(-180,-600)	(180,-600)	1.5 m/s	0.05 s
x4	(-180,-550)	(180,-550)	1.5 m/s	0.05 s
x5	(-180,-500)	(180,-500)	1.5 m/s	0.05 s
x6	(180,-700)	(-180,-700)	1.5 m/s	0.05 s
x7	(180,-650)	(-180,-650)	1.5 m/s	0.05 s
x8	(180,-600)	(-180,-600)	1.5 m/s	0.05 s
x9	(180,-550)	(-180,-550)	1.5 m/s	0.05 s
x10	(180,-500)	(-180,-500)	1.5 m/s	0.05 s

表 4.4: y 方向實驗路徑之設計參數

實驗路徑編號	起點 (mm)	迄點 (mm)	y 方向的最大速度	加減速時間
y1	(-150,-700)	(-150,-400)	1.5 m/s	0.05 s
y2	(-100,-700)	(-100,-400)	1.5 m/s	0.05 s
y3	(-50,-700)	(-50,-400)	1.5 m/s	0.05 s
y4	(0,-700)	(0,-400)	1.5 m/s	0.05 s
y5	(50,-700)	(50,-400)	1.5 m/s	0.05 s
y6	(100,-700)	(100,-400)	1.5 m/s	0.05 s
y7	(150,-700)	(150,-400)	1.5 m/s	0.05 s
y8	(-150,-400)	(-150,-700)	1.5 m/s	0.05 s
y9	(-100,-400)	(-100,-700)	1.5 m/s	0.05 s
y10	(-50,-400)	(-50,-700)	1.5 m/s	0.05 s
y11	(0,-400)	(0,-700)	1.5 m/s	0.05 s
y12	(50,-400)	(50,-700)	1.5 m/s	0.05 s
y13	(100,-400)	(100,-700)	1.5 m/s	0.05 s
y14	(150,-400)	(150,-700)	1.5 m/s	0.05 s



4.3 由逆向運動學取得理想模型之輸入扭矩

理想手臂之幾何參數同表4.1中之設定，額外施加負重 F 同表4.2，經由路徑規劃可以得到手臂 end effector 的位置、速度、加速度，透過方程式 (3.8、3.11、3.12、3.5) 可計算出運作於目標路徑時每一時刻所需輸入的扭矩。以實驗路徑 y1 為例，圖4.6為理想手臂運行實驗路徑 y1 所需輸入的扭矩

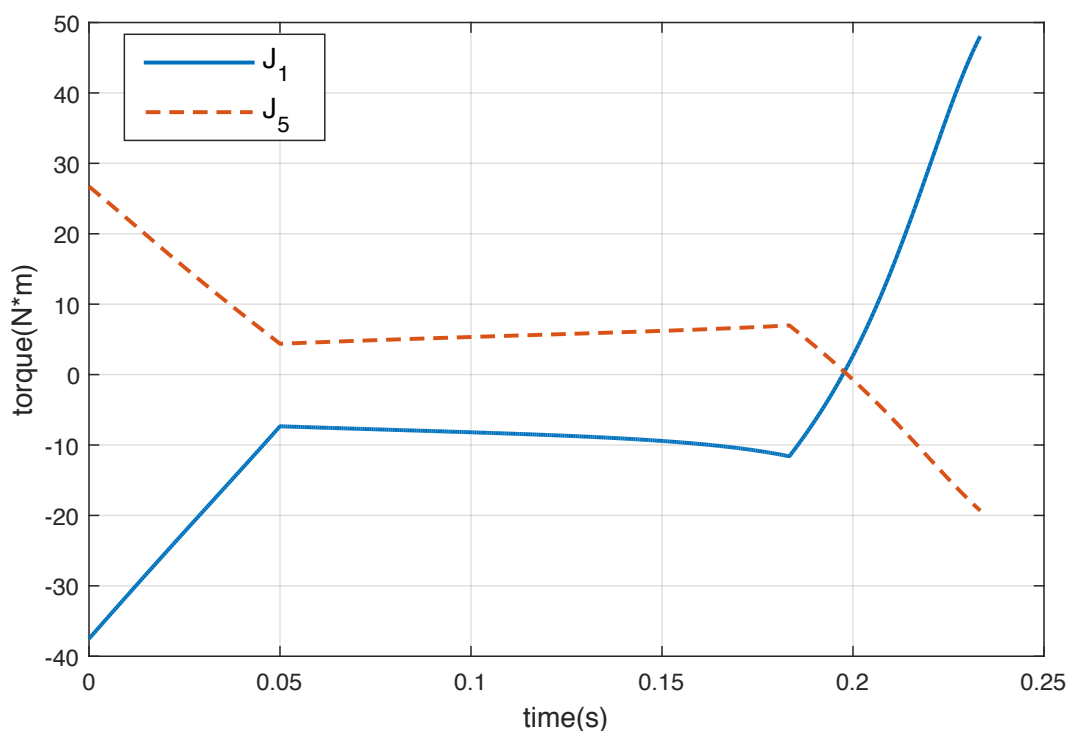


圖 4.6: 理想手臂運行實驗路徑 y1 所需輸入的扭矩

4.4 計算軌跡誤差與軌跡誤差曲線

軌跡誤差

將圖4.6中扭矩輸入至存在關節間隙於 J_2 、 J_3 、 J_4 且間隙最大值均為 0.5 mm 的機械手臂為例，圖4.7為計算出的非理想軌跡與理想軌跡之對比圖， x 方向最大誤差為 0.2893 mm y 方向最大誤差為 0.9231 mm。圖4.8為軸中心在各個關節內的移動軌跡，可以發現機械手臂剛開始移動時三個關節內的間隙值均維持最大值，當手臂運行至減速的路徑時 J_3 、 J_4 關節內的軸脫離與軸承的接觸並發生衝擊使間隙大小發生改變。

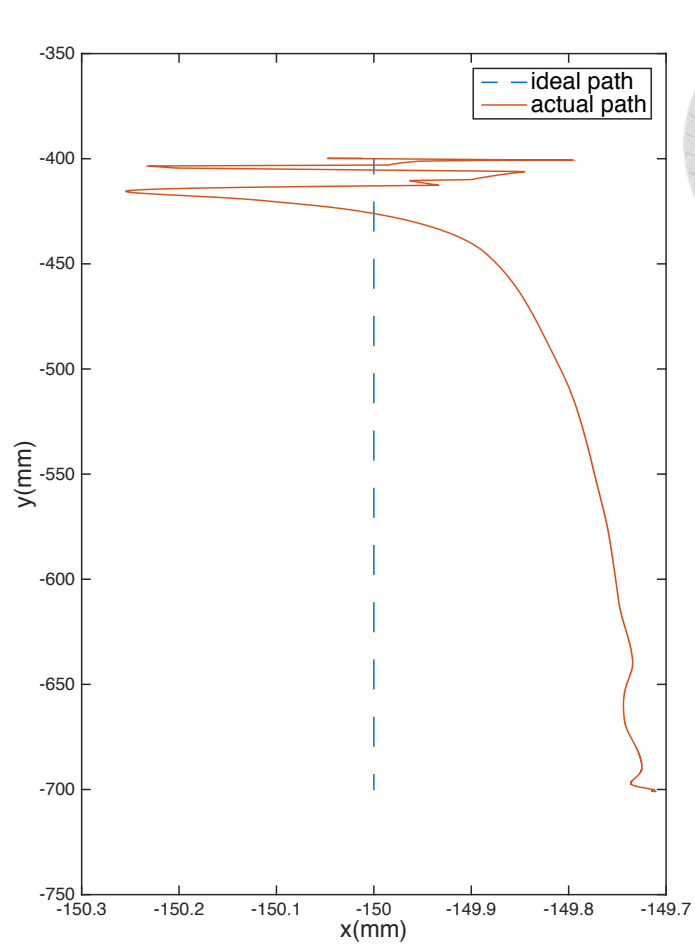


圖 4.7: 非理想軌跡與理想軌跡之對比圖

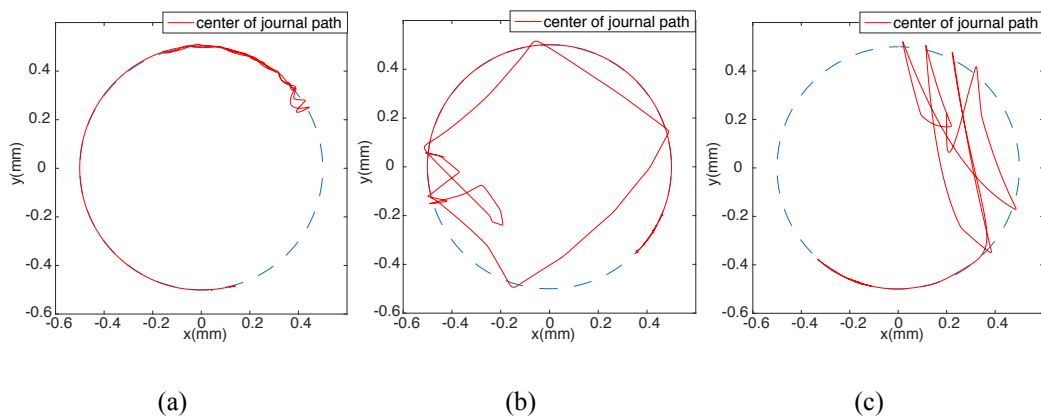


圖 4.8: 軸中心於關節內的移動軌跡 (a) J_2 (b) J_3 (c) J_4

軌跡誤差曲線

圖4.9所標示的誤差為每一時刻下機械手臂 end effector 實際到達位置與目標路徑上所需到達位置的方均根誤差，將方均跟誤差與時間做圖後及為本論文定義之軌跡誤差曲線。

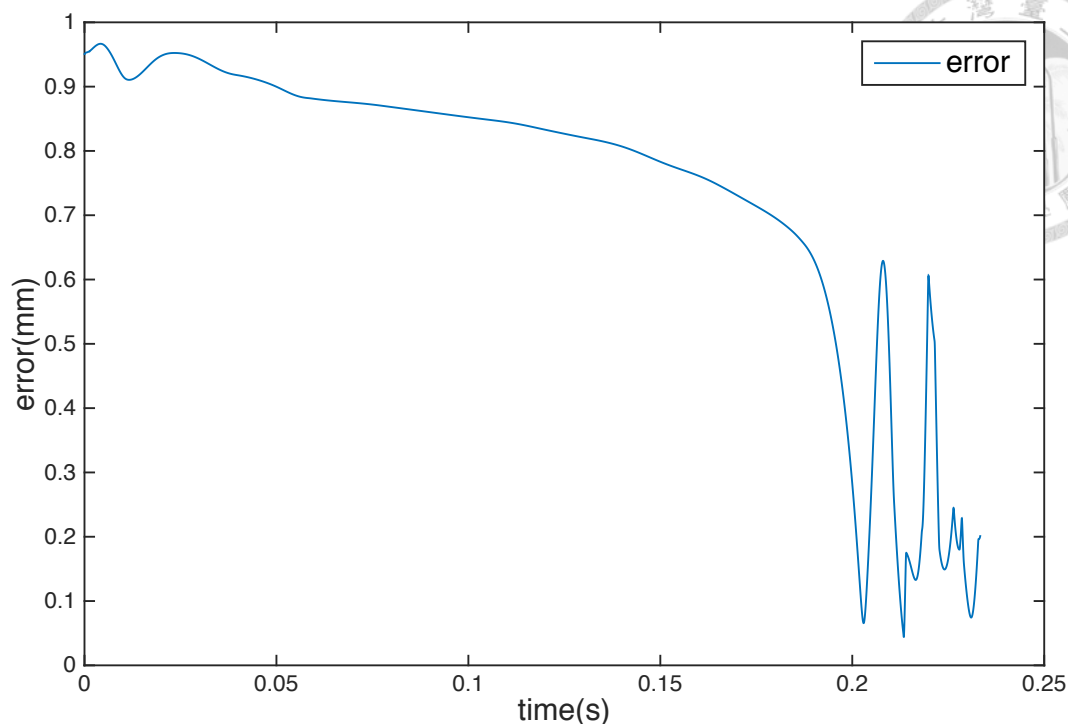


圖 4.9: 軌跡誤差曲線

4.5 建立關節間隙與軌跡誤差曲線之關係式

4.5.1 取得關節間隙與軌跡誤差曲線間的特徵

本論文將機械手臂內的三個關節間隙之最大值均以 0.1 mm、0.25 mm、0.5 mm 進行排列組合後共取得 27 組間隙組合，這些組合分別帶入手臂模型中取得 24 條實驗路徑的軌跡誤差曲線，因此共有 648 組軌跡誤差曲線。透過觀察這 648 組軌跡誤差曲線後獲得以下發現：

1. 手臂運行 y 方向之實驗路徑所得的軌跡誤差曲線上均有一段近似斜直線的部分，且在不同的間隙組合或不同的路徑下斜直線的斜率及截距均不同，如圖4.10所示。由於只有 y 方向的軌跡誤差曲線才有現象，故猜測造成此現象之原因可能為重力方向與路徑方向平行，使關節內的軸較不易脫離與軸承的接觸，讓關節間隙的大小與方向較穩定，導致軌跡誤差不易發生較大的變動。

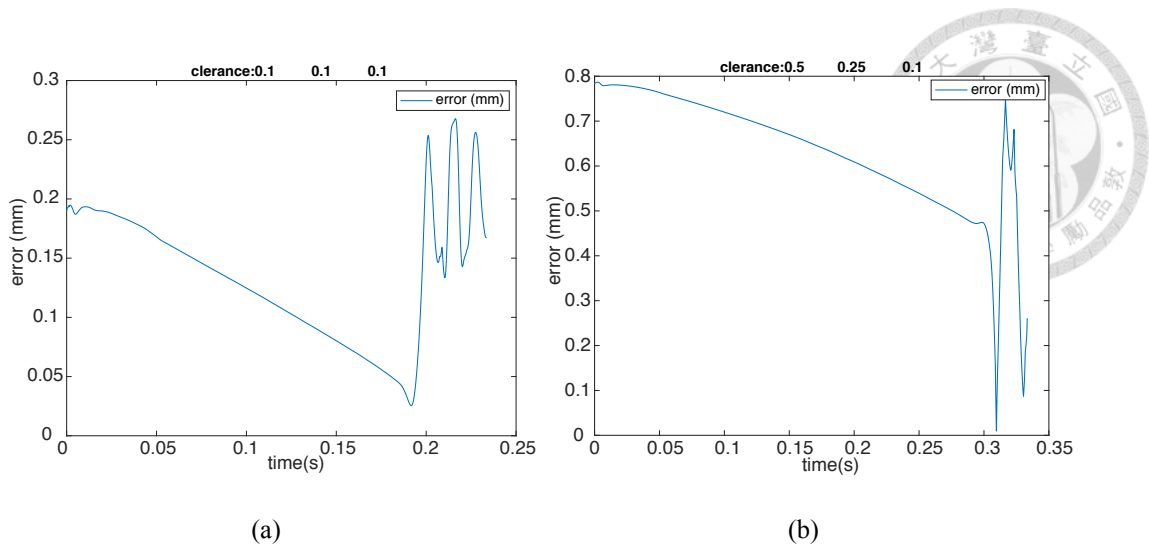


圖 4.10: y 方向之實驗路徑之軌跡誤差曲線 (a) 實驗路徑 y1 (b) 實驗路徑 y3

2. 手臂運行 x 方向之實驗路徑所得的軌跡誤差曲線在運行等速度路徑時呈現出類似 sin 函數的波形，如圖5.13所示。此現象提供了對軌跡誤差曲線進行快速傅立葉轉換的想法，而從快速傅立葉轉換的結果中發現不同間隙組合或不同路徑下最大的震幅均不同，如圖4.12、4.13所示。

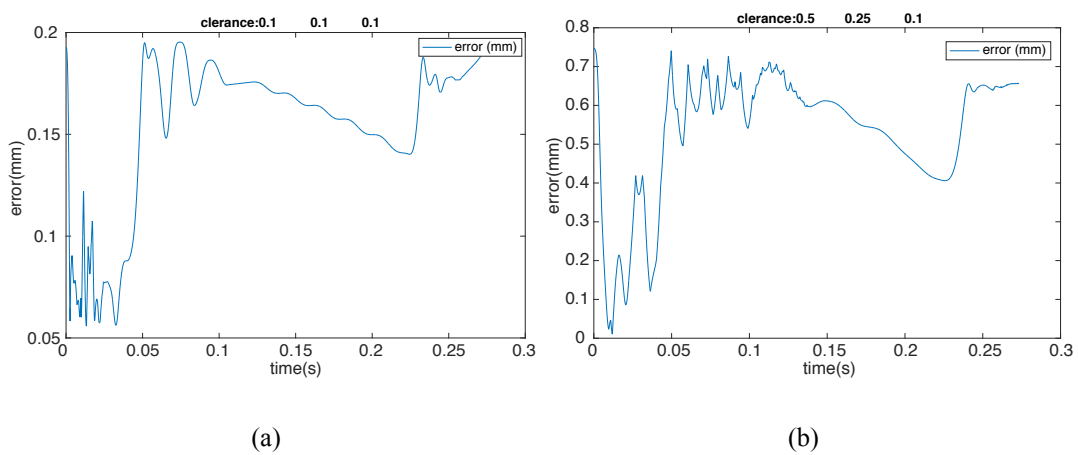


圖 4.11: x 方向之實驗路徑之軌跡誤差曲線 (a) 實驗路徑 x2 (b) 實驗路徑 x5

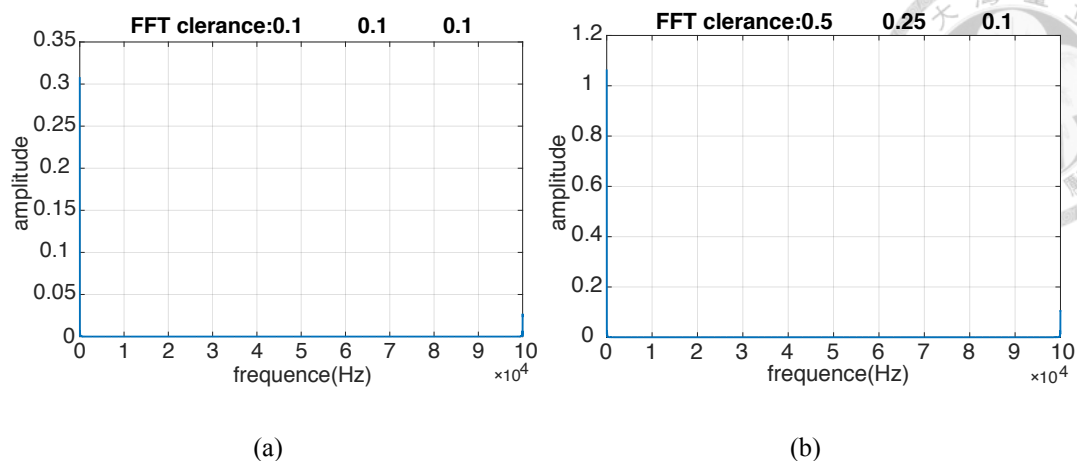


圖 4.12: x 方向之實驗路徑之軌跡誤差曲線快速傅立葉轉換頻譜圖 (a) 實驗路徑 x_2 (b) 實驗路徑 x_5

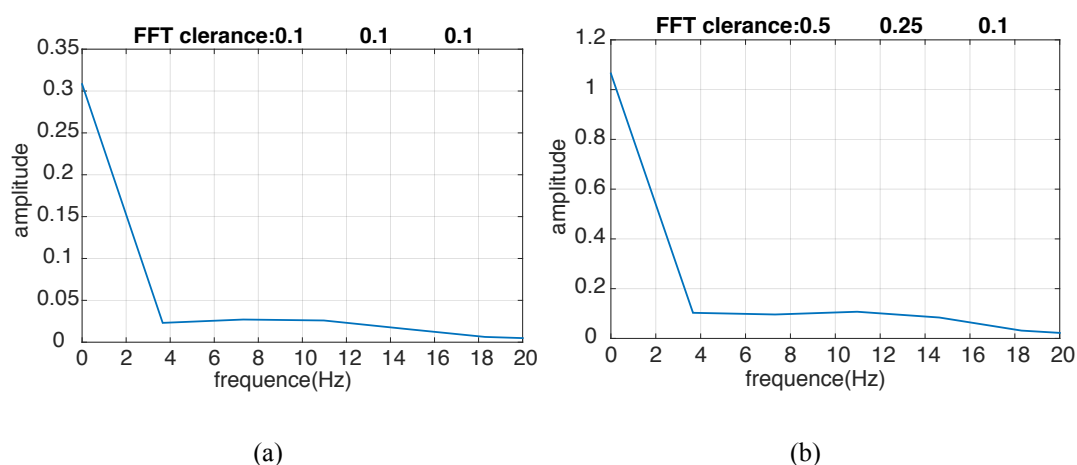


圖 4.13: x 方向之實驗路徑之軌跡誤差曲線快速傅立葉轉換頻譜圖 (取頻率 0Hz~20Hz)
(a) 實驗路徑 x_2 (b) 實驗路徑 x_5

根據上述之發現，觀察出三個關節間隙與軌跡誤差曲線可能相關的特徵，分別為：

1. y 方向軌跡誤差曲線近似斜直線段的斜率
2. y 方向軌跡誤差曲線近似斜直線段的截距
3. 軌跡誤差曲線進行快速傅立葉轉換後的最大震幅

因此本論文使用下列兩種方法量化軌跡曲線的特徵：

1. 對 y 方向軌跡誤差曲線位於 $t=0.07$ 至 $t=0.12$ 的數據進行一次多項式之曲線擬合，根據擬合後的結果取得該斜直線的斜率與截距。
2. 對軌跡誤差曲線進行快速傅立葉轉換取其轉換結果中的最大震幅量值。

4.5.2 特徵實驗驗證

為了確保這三個特徵在關節間隙與軌跡誤差曲線間確實有關係存在，我們設計一套實驗進行驗證，此實驗將進行三次，分別為固定 J_3 關節的間隙最大值於 0.1 mm、0.25 mm、0.5 mm，而其餘兩間隙的最大值則均為 0.1 mm、0.15 mm、0.2 mm、0.25 mm、0.3 mm、0.35 mm、0.4 mm、0.45 mm、0.5 mm 的所有排列組合。透過計算這些間隙組合分別於測試路徑 $y1$ 下的特徵後，我們將這些數據透過三次多項式進行曲面擬合，觀察個別實驗的結果可以發現每個特徵均可由數學式表達出與 J_2 及 J_4 之關節間隙間的關係，而藉由比較三次實驗間的曲面結果，可發現每個特徵在 J_3 關節間隙不同的情形下擬合出的曲面皆不同，藉此推斷出每個特徵與 J_3 關節間隙間也存在著關係，總結上述之描述，此實驗證實了每個特徵與 J_2 、 J_3 、 J_4 之關節間隙間均存在著關係式。

實驗結果圖如下：

- 第一次實驗， J_3 關節的間隙固定為 0.1 mm 之結果

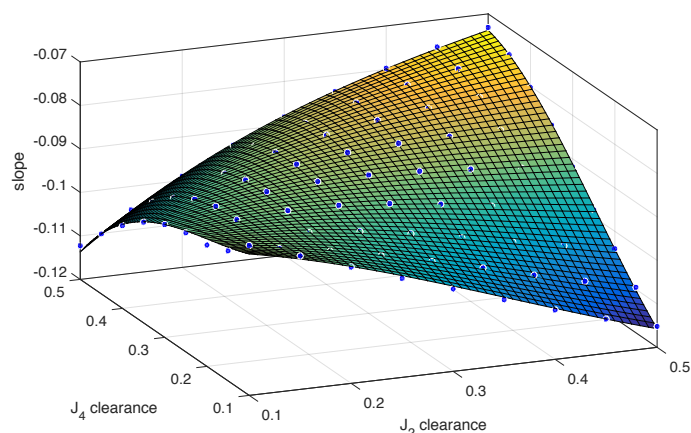


圖 4.14: J_3 間隙為 0.1 mm 時擬合的斜率曲面

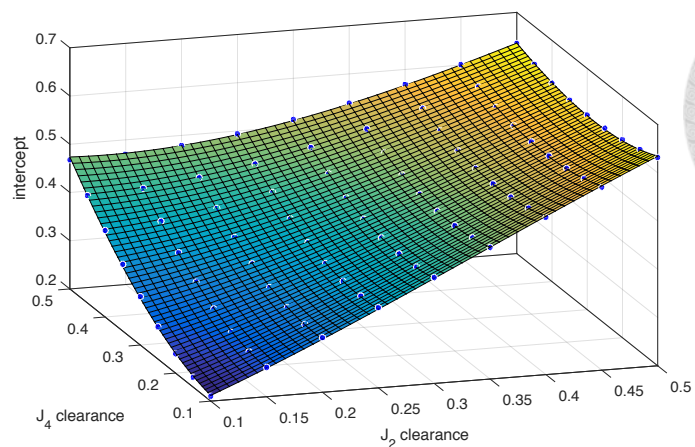


圖 4.15: J_3 間隙為 0.1 mm 時擬合的截距曲面

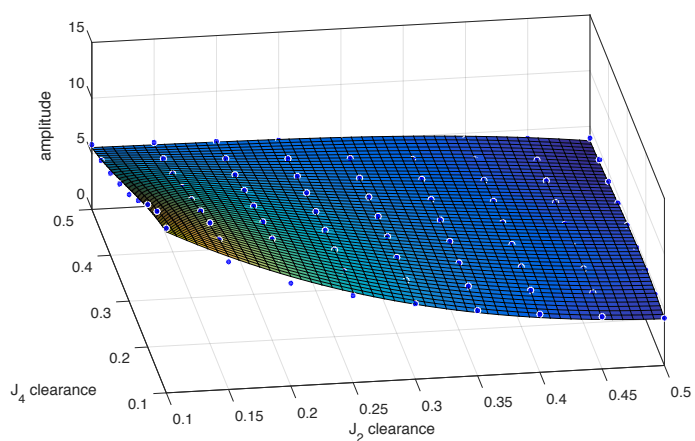


圖 4.16: J_3 間隙為 0.1 mm 時擬合的震幅曲面

- 第二次實驗, J_3 關節的間隙固定為 0.25 mm 之結果

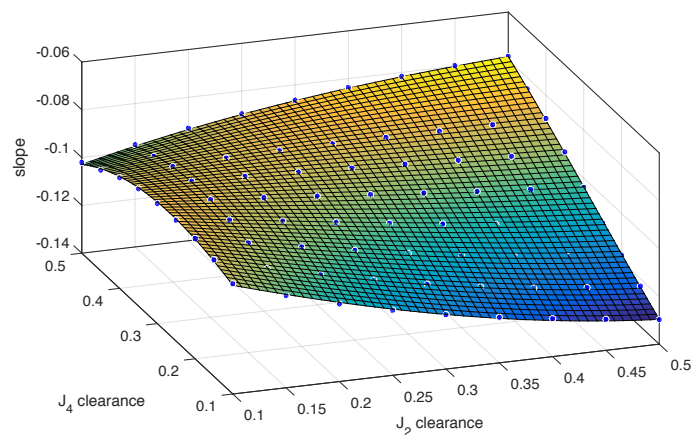


圖 4.17: J_3 間隙為 0.25 mm 時擬合的斜率曲面

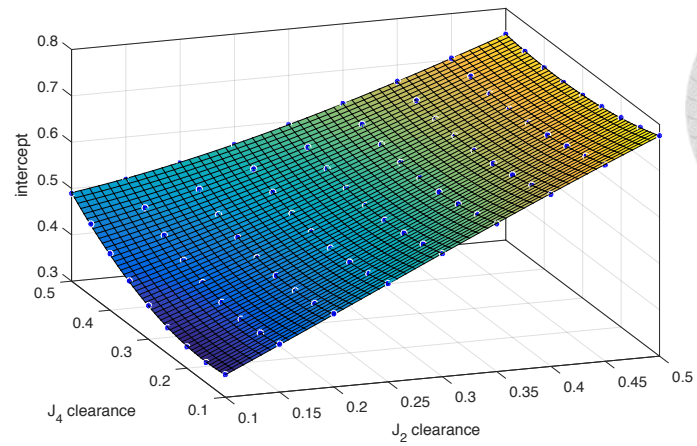


圖 4.18: J_3 間隙為 0.25 mm 時擬合的截距曲面

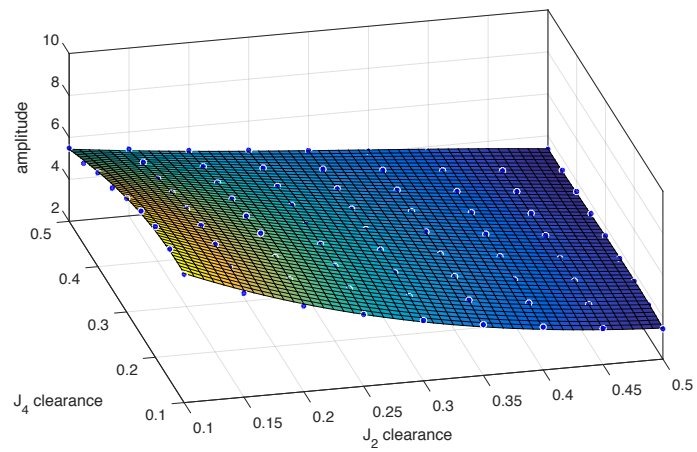


圖 4.19: J_3 間隙為 0.25 mm 時擬合的震幅曲面

- 第三次實驗, J_3 關節的間隙固定為 0.5 mm 之結果

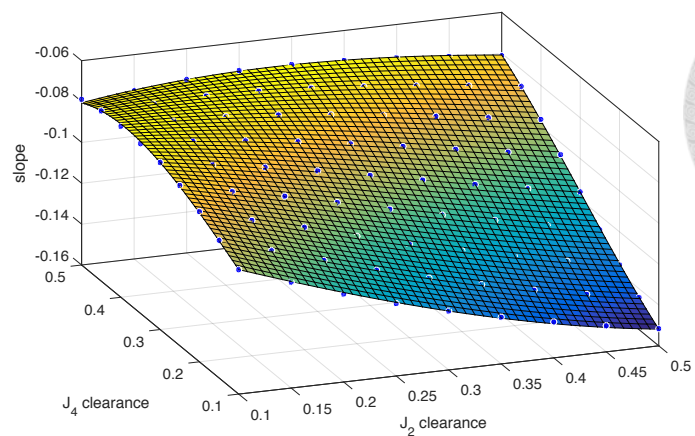


圖 4.20: J_3 間隙為 0.5 mm 時擬合的斜率曲面

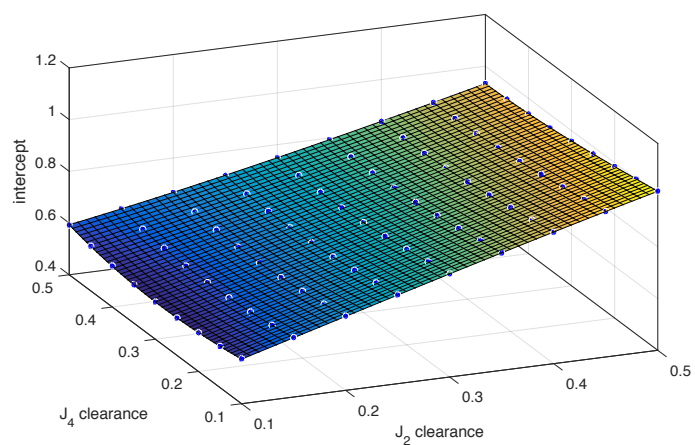


圖 4.21: J_3 間隙為 0.5 mm 時擬合的截距曲面

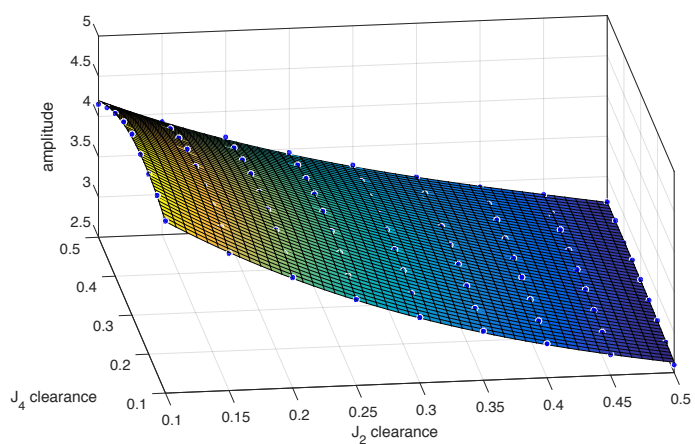


圖 4.22: J_3 間隙為 0.5 mm 時擬合的震幅曲面



4.5.3 建立特徵與關節間隙間之關係式

爲了建立特徵與關節間隙間之關係式如方程式 (4.1、4.2、4.3):

$$Y_{slope} = f_{slope}(c_2, c_3, c_4) \quad (4.1)$$

$$Y_{intercept} = f_{intercept}(c_2, c_3, c_4) \quad (4.2)$$

$$Y_{amplitude} = f_{amplitude}(c_2, c_3, c_4) \quad (4.3)$$

我們將 J_2 、 J_3 、 J_4 關節的關節間隙最大值之組合爲 0.1 mm、0.15 mm、0.2 mm、0.25 mm、0.3 mm、0.35 mm、0.4 mm、0.45 mm、0.5 mm 的所有排列組合，此組合總數爲 729 組，透過機械手臂動態模型運作於同一測試路徑後取得 729 組特徵，即可以擬合的方法取得關係式。重複此動作取得 3 個測試路徑上特徵與關節間隙之關係式，便能以三個方程式（各特徵於三個路徑上關係式）解三個未知數（三個關節間隙）。

而本論文使用的擬合方法爲高斯程序回歸（Gaussian Process Regression，又稱克利金法，Kriging），此方法源自於地理統計學，利用量測點的取樣資料，內插推測其他座標點上之預測值。

4.6 設計最佳目標路徑

本研究中之路徑定義：

1. 實驗路徑

用於建立關節間隙與軌跡之關係所使用的路徑。

2. 目標路徑

最佳化過程中所使用之路徑。在控制非理想機械手臂運動時，我們透過調整目標路徑而改變控制非理想機械手臂運動的扭矩，使非理想機械手臂實際運行的軌跡產生變化。



3. 理想路徑

在無任何不確定因素下，理想機械手臂所運行之路徑。

本研究對機械手臂工作路徑進行最佳化設計，工作路徑上有目標點，最小化行經目標點時的誤差為路徑設計之目標，此路徑最佳化流程如圖4.23所示：

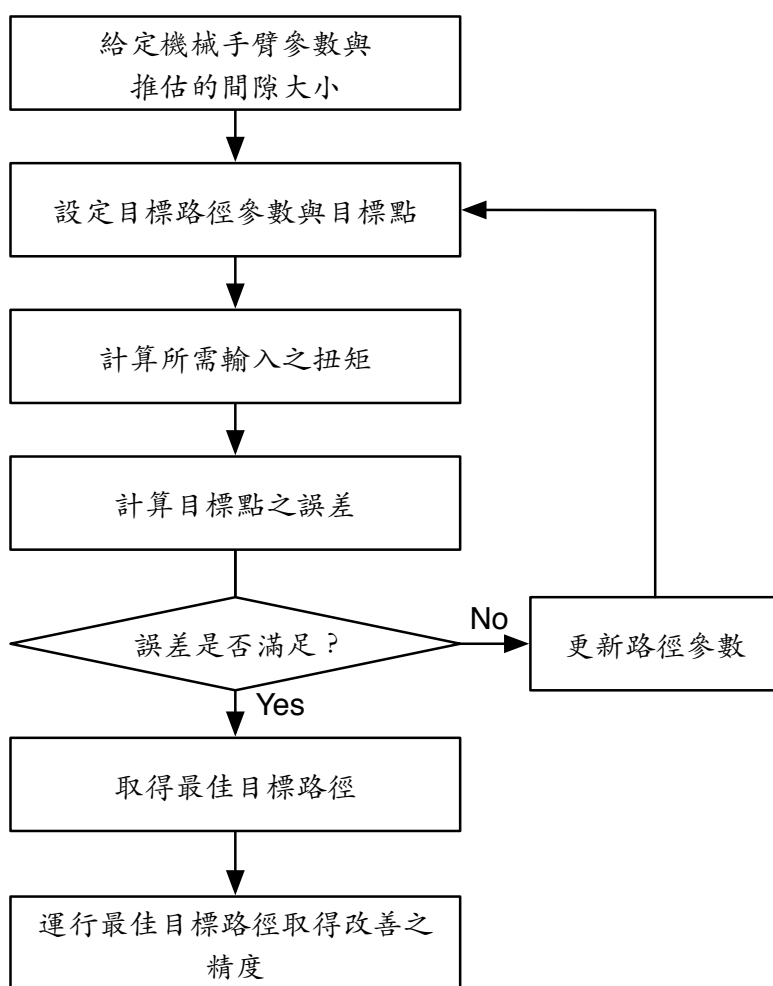


圖 4.23: 路徑最佳化流程

而最佳化架構為：

$$\begin{aligned} &\text{Optimize} \quad \{\text{Error}\} \\ &\text{with respect to} \quad \{\text{Path}\} \\ &\text{subject to} \quad \{\text{Workspace}\} \\ &\text{under} \quad \{\text{Joint clearance}\} \end{aligned} \quad (4.4)$$



其最佳化步驟為：

步驟 1. 給定機械手臂參數：

給定桿長 L 、質量 m 、轉動慣量 I 、推估出的間隙大小 c 、與其他動態模型參數。

步驟 2. 設定路徑參數：

設定路徑參數 \mathbf{C} 與路徑上之目標點 $\mathbf{Q}_j, j = 1, 2, \dots, k$ 。

步驟 3. 經由逆向運動學計算輸入之扭矩：

透過理想手臂動態模型的逆向運動學計算出需輸入之扭矩 M_1 、 M_2 。

步驟 4. 計算目標點誤差

透過存在間隙之機械手臂動態模型計算 end effector 行經目標點時的誤差 E_j 。

$$E_j = \sqrt{(Q_{jx} - P_{jx})^2 + (Q_{jy} - P_{jy})^2 + (Q_{jz} - P_{jz})^2}, \quad (4.5)$$
$$\forall j = 1, 2, \dots, k$$

j 為目標點的順序， k 為目標點的總數量。 \mathbf{P}_j 為存在關節間隙之手臂行經目標點時的 end effector， \mathbf{Q}_j 為目標點，在誤差計算上給定每個目標點之權重 ω_j 。

$$f(\mathbf{C}) = E_{error} = \sum_{j=1}^k \omega_j E_j(\mathbf{C})$$
$$\sum_{j=1}^k \omega_j = 1 \quad (4.6)$$

where $j = 1, 2, \dots, k$

步驟 5. 判斷收斂：

判斷行經目標點時的誤差是否滿足。

步驟 6. 更新路徑參數：

若誤差無收斂則更新路徑參數 \mathbf{C} ，在更新路徑參數的過程中將反覆進行 Step 2~6，找出存在關節間隙時的最小目標點總誤差。

經由上序步驟，將最佳化方程式建構為：

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{C}} \quad & f(\mathbf{C})E_{error} = \sum_{j=1}^k \omega_j E_j(\mathbf{C}) \\
 \text{subject to} \quad & g : \mathbf{Q}_j, \mathbf{P}_j \in W \\
 & \sum_{j=1}^k \omega_j = 1 \\
 \text{where} \quad & j = 1, 2, \dots, k
 \end{aligned} \tag{4.7}$$



最佳化之目標函數 E_{error} 為目標點之總誤差， E 代表目標點之誤差， ω_j 為第 j 個目標點之權重， W 為機械手臂的工作空間。



工程案例

本章節模擬使用者選用機械手臂時的現況，並以本研究之方法進行演示。假設情境為使用者取得廠商提供的機械手臂型錄後要從中比較兩台機械手臂（A、B）於工作空間中何者的準度較高，但從型錄中只能得知兩者的重複精度相同，無法從其他的資訊得知工作空間中的表現，且若選用的機械手臂於工作空間中的表現不如預期時要如何改善。

將本研究之方法用於此工程案例中之流程如下：

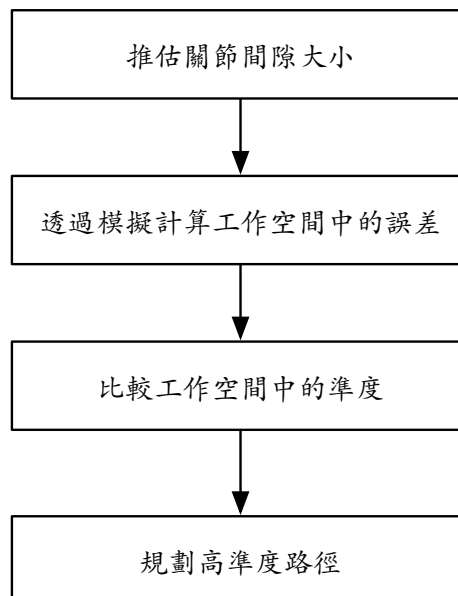


圖 5.1: 工程案例之流程



5.1 機械手臂之參數與性能量測

此小節旨在呈現「廠商以不同的路徑測試出機械手臂較優的性能指標，使消費者難於比較機械手臂間的性能高低，也無法得知廠商如何測試性能以及這些性能是否滿足工作空間中的需求」之情境。因此以兩不同關節間隙之機械手臂 A、B 為例，使用不同的路徑量測出相同的重複精度，並說明重複精度的定義與量測方法。

機械手臂參數

機械手臂 A 與機械手臂 B 的幾何參數與動態模型參數均相同如表 5.1 與 5.2:

表 5.1: 機械手臂 A、B 之幾何參數

桿件編號	桿長 (m)	質量 (kg)	轉動慣量 ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$)
1	0.3	2.5	0.0233
2	0.65	0.8	0.0282
3	0.65	0.8	0.0282
4	0.3	2.5	0.0233
5	0.2	1.7	0.0084

表 5.2: 機械手臂 A、B 之動態模型參數

軸半徑	10.0mm	Baumgarte- α	20
動摩擦係數	0.05	Baumgarte- β	20
額外負重 F	0.98 N	Restitution coefficient	0.9
Integration step size	0.00001 s	Young's modulus	207 GPa
Poisson's ratio	0.3		

重複精度定義與計算

ISO 中所定義的機械手臂重複精度為：對同一個位置指令從同一方向重複運行 n 次後實際到達位置的一致程度，如圖5.2所示。其中 RP 為位置分佈範圍的球半徑，而重複精度的計算公式為下：

$$RP = \bar{l} \pm 3S \quad (5.1)$$

式中：

$$\begin{aligned} \bar{l} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i \\ l_i &= \sqrt{(x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2 + (z_i - \bar{z})^2} \\ S &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (l_i - \bar{l})^2}{n-1}} \end{aligned} \quad (5.2)$$

其中： S 為標準差， x_i 、 y_i 、 z_i 為運行第 i 次的位置， \bar{x} 、 \bar{y} 、 \bar{z} 為平均位置且為分佈中心。

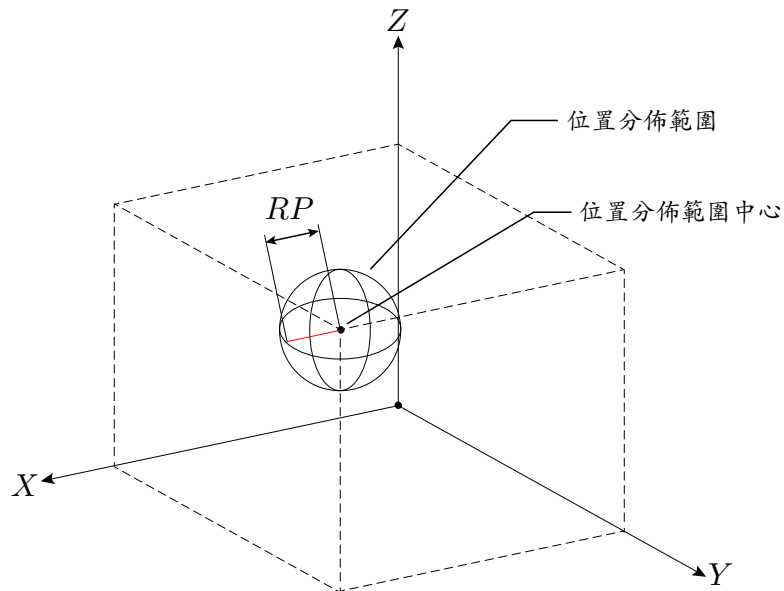


圖 5.2: 位置分佈範圍示意圖

機械手臂 A、B 之重複精度量測

機械手臂 A、B 所量測的路徑如圖 5.3 所示，手臂 A 進行測試時的最大速度為 1m/s，手臂 B 進行測試時的最大速度為 0.5m/s，每次所運行之路徑為 $U_1 \rightarrow U_2 \rightarrow U_1$ ，共進行 30 次循環量測 U_1 點的重複精度，量測結果與關節間隙如表 5.3 所示。

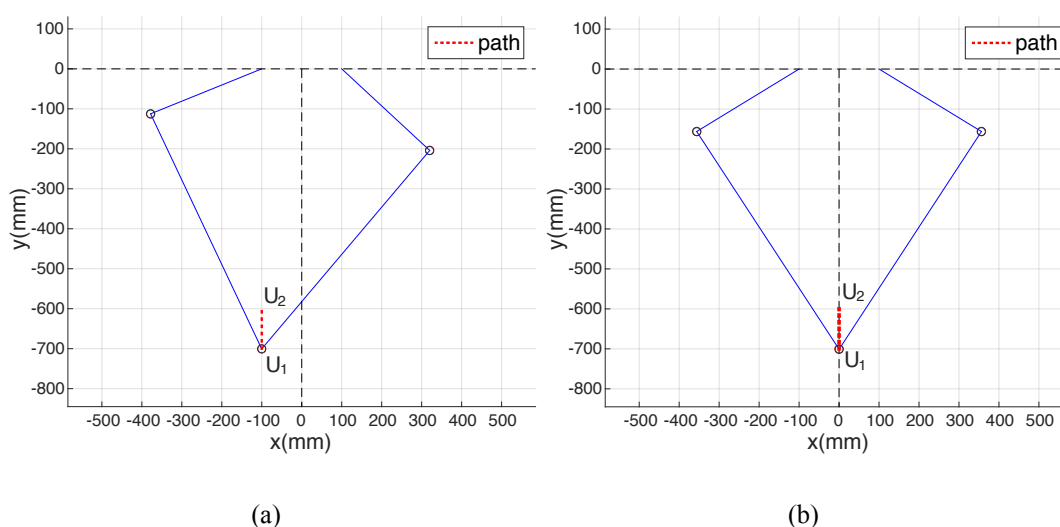


圖 5.3: 機械手臂 A、B 重複精度之測試路徑 (a) 機械手臂 A (b) 機械手臂 B

表 5.3: 機械手臂之關節間隙與重複精度

機械手臂	關節間隙			重複精度
	c_2	c_3	c_4	
A	0.328 mm	0.171 mm	0.483 mm	0.056mm
B	0.460 mm	0.480 mm	0.460 mm	0.056mm

5.2 推估關節間隙大小並比較工作空間中之表現

本小節以第四章之方法推估機械手臂 A、B 之關節間隙大小，透過模擬計算常用之工作路徑上的誤差來比較手臂 A、B 於工作空間中的表現，並以手臂 A 演示推估關節間隙之方法。

5.2.1 推估關節間隙大小

由於每條路徑均可取得三個特徵，理論上三個未知數只需三個方程式即可求解，因此只需運行一條路徑就可用三種特徵的關係式推估出三個關節間隙，但為了探討三種特徵間何者較能準確推估出間隙，因此選用三條不同實驗路徑 y1、y3、y7 上同一特徵之方程式求解關節間隙如方程式 (5.3) 所示（以截距關係式為例）。表5.1、5.2、5.3為機械手臂 A、B 之參數。

$$\begin{aligned} Y_{y1,slope} &= f_{y1,slope}(c_2, c_3, c_4) \\ Y_{y3,slope} &= f_{y2,slope}(c_2, c_3, c_4) \\ Y_{y7,slope} &= f_{y3,slope}(c_2, c_3, c_4) \end{aligned} \quad (5.3)$$

實驗數據圖

以下為三個實驗路徑之誤差曲線圖及其特徵表5.4:

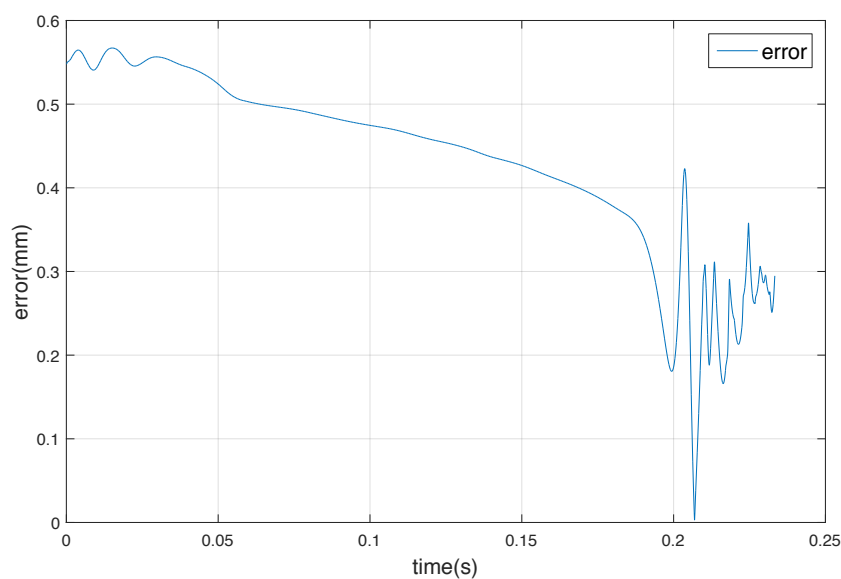


圖 5.4: 機械手臂 A 運行實驗路徑 y1 的軌跡誤差曲線

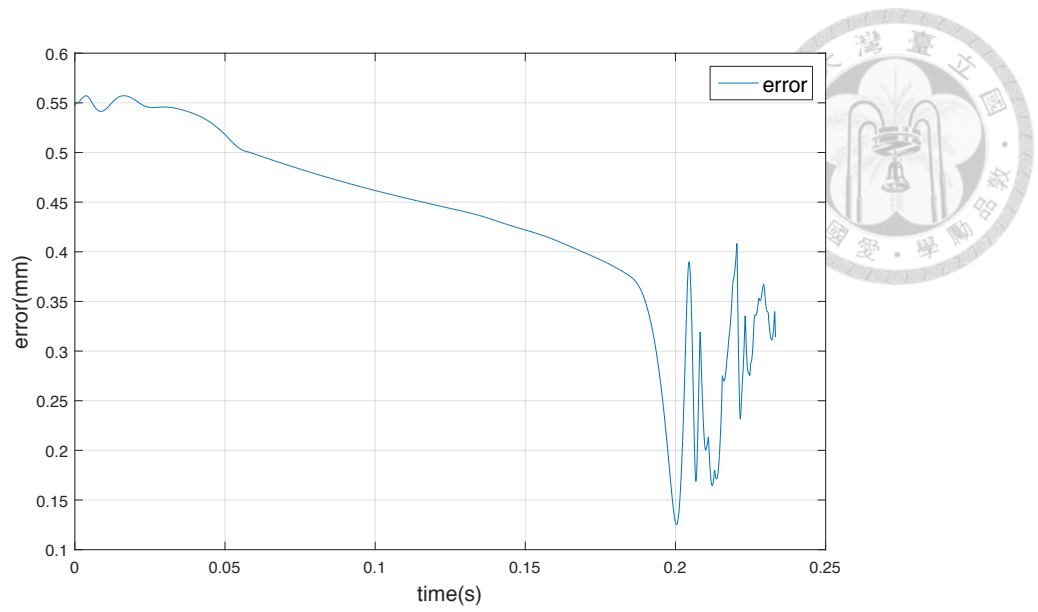


圖 5.5: 機械手臂 A 運行實驗路徑 y3 的軌跡誤差曲線

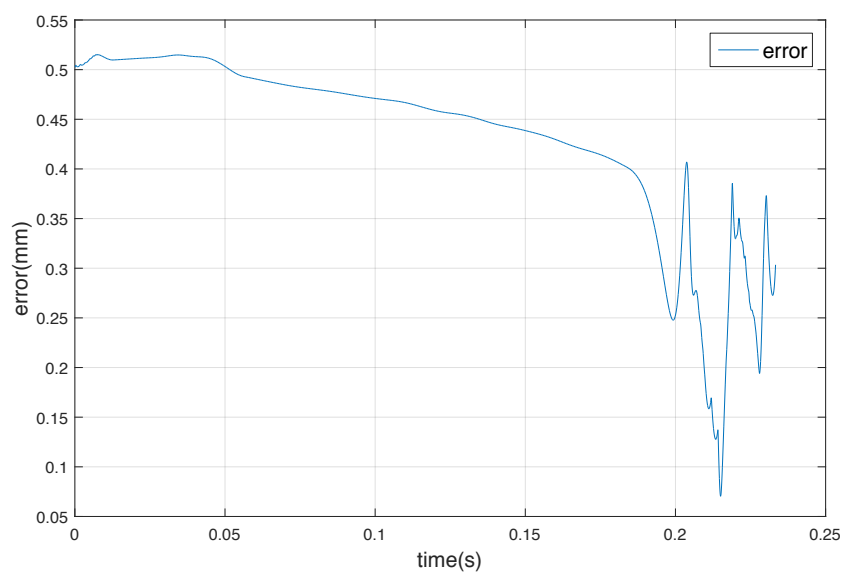


圖 5.6: 機械手臂 A 運行實驗路徑 y7 的軌跡誤差曲線



表 5.4: 機械手臂 A 之軌跡誤差曲線的特徵量化值

實驗軌跡	斜率	截距	震幅
y1	-0.0759	0.5504	0.8699
y3	-0.0817	0.5439	0.8676
y7	-0.0480	0.5187	0.8658

關節間隙推估之結果

表5.5~5.8為關節間隙推估之結果，其中斜率特徵無法求出關節間隙之解，推測是因量化斜率特徵時的軌跡誤差曲線擬合誤差較大使此特徵無法準確推估間隙值。最後選擇以準確度較高的截距特徵推估出的關節間隙進行工作路徑誤差計算。

表 5.5: 機械手臂 A 推估之間隙大小

關節間隙	c_2	c_3	c_4
給定之間隙大小	0.328 mm	0.171 mm	0.483 mm
斜率	無解	無解	無解
特徵 截距	0.340 mm	0.159 mm	0.478 mm
震幅	0.317 mm	0.190 mm	0.478 mm

表 5.6: 機械手臂 A 以截距與震幅推估出間隙的準確率

特徵	關節間隙			平均準確度
	c_2	c_3	c_4	
截距	96.34%	92.98%	98.96%	96.09%
震幅	96.65%	88.89%	98.96%	94.83%

表 5.7: 機械手臂 B 推估之間隙大小

關節間隙		c_2	c_3	c_4
給定之間隙大小		0.460 mm	0.480 mm	0.460 mm
斜率		無解	無解	無解
特徵	截距	0.449 mm	0.487 mm	0.469 mm
	震幅	0.432 mm	0.502 mm	0.491 mm

表 5.8: 機械手臂 B 以截距與震幅推估出間隙的準確率

特徵	關節間隙			平均準確度
	c_2	c_3	c_4	
截距	97.61%	98.54%	98.04%	97.41%
震幅	93.91%	95.42%	93.26%	94.20%

5.2.2 工作空間中之表現

由於平行五連桿機械手臂主要實際用途為抓放物件為主，如圖5.7所示，於起點 S_1 抓取物件並放置於終點 S_2 即達成任務，因此本研究以一理想工作路徑來評估機械手臂 A、B 於工作空間中之性能高低。透過模擬間隙對機械手臂於工作空間中的性能影響，比較出性能較高的機械手臂。

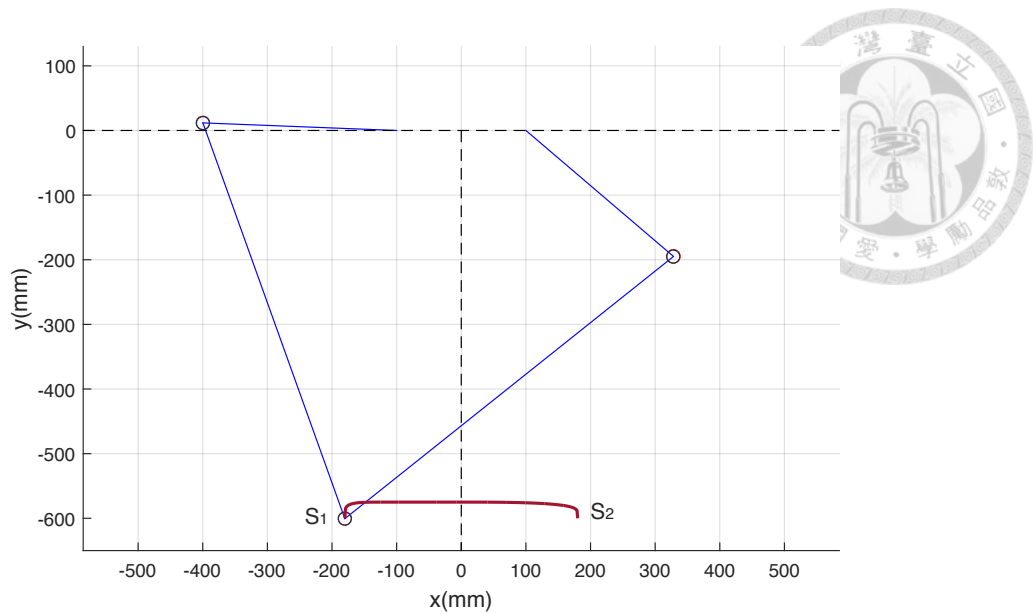


圖 5.7: 平行五連桿機械手臂工作時常用之理想路徑示意圖

路徑參數設定

路徑參數之設定如圖5.8、5.9所示， Q_1 、 Q_2 、 Q_3 為目標點其座標分別為 $(-180 \text{ mm}, -600 \text{ mm})$ 、 $(0 \text{ mm}, -575 \text{ mm})$ 、 $(180 \text{ mm}, -600 \text{ mm})$ ，透過計算行經這三個目標點時的誤差來比較機械手臂 A、B 的性能高低。 p_1 、 p_2 、 p_3 、 p_4 、 p_5 為路徑上的斷點並將路徑分成 4 個段落 part 1~part 4，而每個段落上所運行的時間為 t_1 、 t_2 、 t_3 、 t_4 ， v_{2y} 、 v_{3y} 、 v_{5y} 分別為到達 p_2 、 p_3 、 p_5 時 y 方向的速度， v_{2x} 、 v_{3x} 、 v_{4x} 分別為到達 p_2 、 p_3 、 p_4 時 x 方向的速度，其中 p_2 可由 t_1 、 v_{2y} 、 v_{2x} 決定， p_{3x} 固定為 0， p_4 的 y 座標可由 t_3 與 v_{3y} 決定且 p_{4x} 與 p_{5x} 相同， t_4 可由 p_{4y} 、 p_{5y} 、 t_3 計算，因此可將以上參數可分為固定參數與設計變數。

- 固定變數： p_2 、 t_1 、 v_{2y} 、 v_{3y} 、 v_{5y} 、 v_{2x} 、 v_{3x} 、 v_{4x}
- 設計變數： p_1 、 p_{3y} 、 p_5 、 t_2 、 t_3

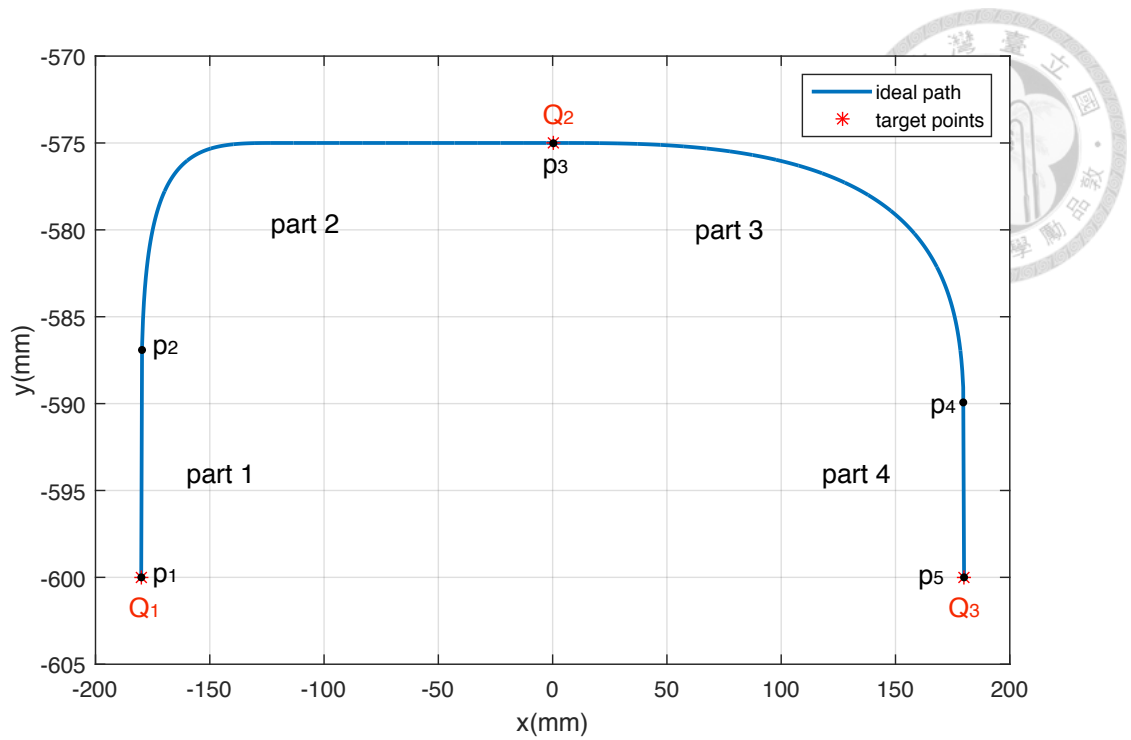


圖 5.8: 理想路徑與參數設定

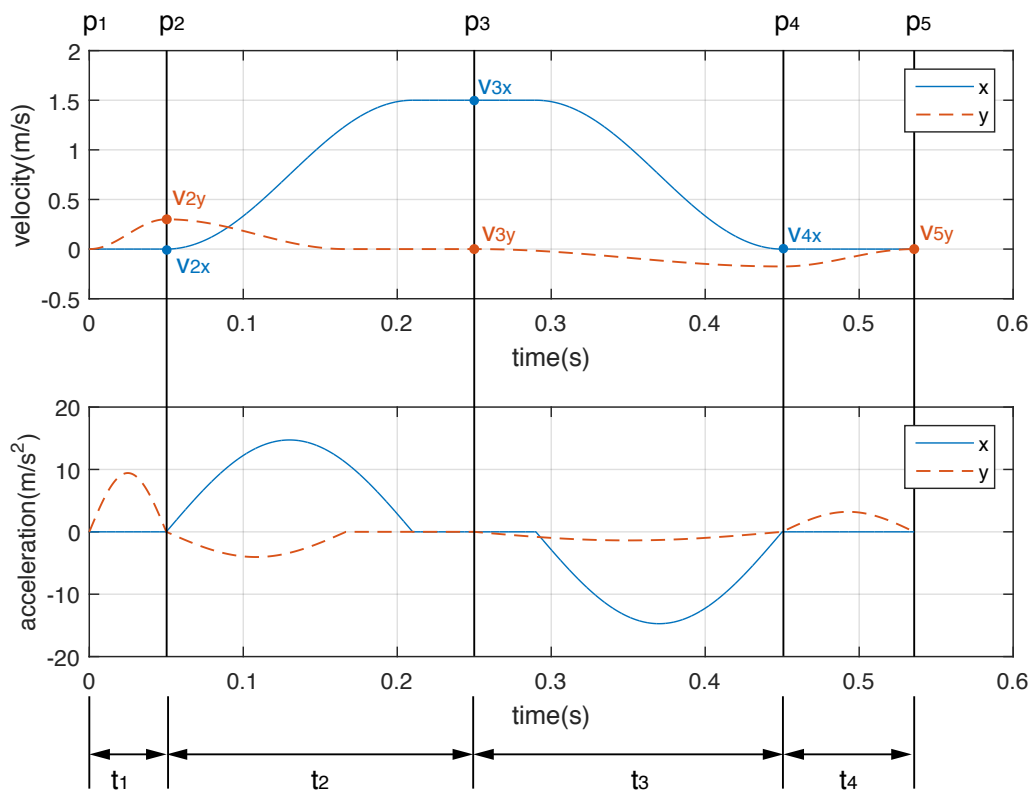


圖 5.9: 理想路徑上的速度與加速度與參數設定



而理想路徑之參數設定為下:

表 5.9: 理想路徑之參數設定

i	p_i	$v_{ix}(m/s)$	$v_{iy}(m/s)$	$t_i(s)$
1	(-180 mm, -600 mm)	0	0	0.05
2	$p_2(t_1, v_{2x}, v_{2y})$	0	0.3	0.2
3	(0 mm, -575 mm)	1.5	0	0.2
4	(180 mm, $p_{4y}(t_3, v_{3y})$)	0	$v_{4y}(v_{3y}, t_3)$	$t_4(\mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5, t_3)$
5	(180 mm, -600 mm)	0	0	

機械手臂性能模擬結果

將機械手臂之關節間隙設定為推估出之間隙大小，透過模擬計算出機械手臂 A、B 行經目標點的誤差，兩者之平均誤差分別為 0.652 mm 與 0.816 mm，以此結果判定機械手臂 A 於工作空間之性能表現優於機械手臂 B。而手臂 A、B 原先給定之間隙所計算出之目標點平均誤差分別為 0.637 mm 與 0.813 mm，兩者之性能比較手臂 A 確實優於 B，可以發現此方法能準確比較出工作空間中性能較好之機械手臂，但性能較好的手臂仍有可能無法滿足工作空間之需求，因此本研究透過最佳化方法規劃誤差較小的目標路徑來提升手臂的準度。誤差結果比較如表 5.10 所示：

表 5.10: 誤差結果比較與驗證

	機械手臂	Q_1 誤差	Q_2 誤差	Q_3 誤差	平均誤差	性能
給定之關節間隙	A	0.562 mm	0.569 mm	0.780 mm	0.637 mm	較優
	B	0.915 mm	0.698 mm	0.826 mm	0.813 mm	
推估之關節間隙	A	0.560 mm	0.566 mm	0.829 mm	0.652 mm	較優
	B	0.912 mm	0.708 mm	0.828 mm	0.816 mm	



5.3 最佳化目標路徑

本小節以機械手臂 A 為對象，使用最佳化方法規劃誤差較小之目標路徑來提升工作空間中的準度。非理想機械手臂的運行通常是以理想路徑來控制，但實際軌跡與理想路徑間存在誤差，因此本研究以最佳化目標路徑來控制非理想機械手臂的方式，使手臂實際軌跡與理想路徑上之目標點的誤差降低讓手臂準度提昇。

5.3.1 最佳化方程式與最佳化結果

目標路徑的參數與章節5.2.2中描述的相同，在考量推估之關節間隙影響下透過最佳化方法調整設計變數 \mathbf{p}_1 、 p_{3y} 、 \mathbf{p}_5 、 t_2 、 t_3 減少機械手臂形經目標點時的誤差，藉此設計出誤差較小的目標路徑。最佳化目標路徑方程式為下：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{C}} \quad & f(\mathbf{C}) = E_{error} = \sum_{j=1}^k \omega_j E_j(\mathbf{C}) \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{Q}_j, \mathbf{P}_j \in W \\ & \mathbf{C} = [\mathbf{p}_1, p_{3y}, \mathbf{p}_5, t_2, t_3] \\ & \sum_{j=1}^k \omega_j = 1 \\ & \text{where } j = 1, 2, \dots, k \end{aligned} \tag{5.4}$$

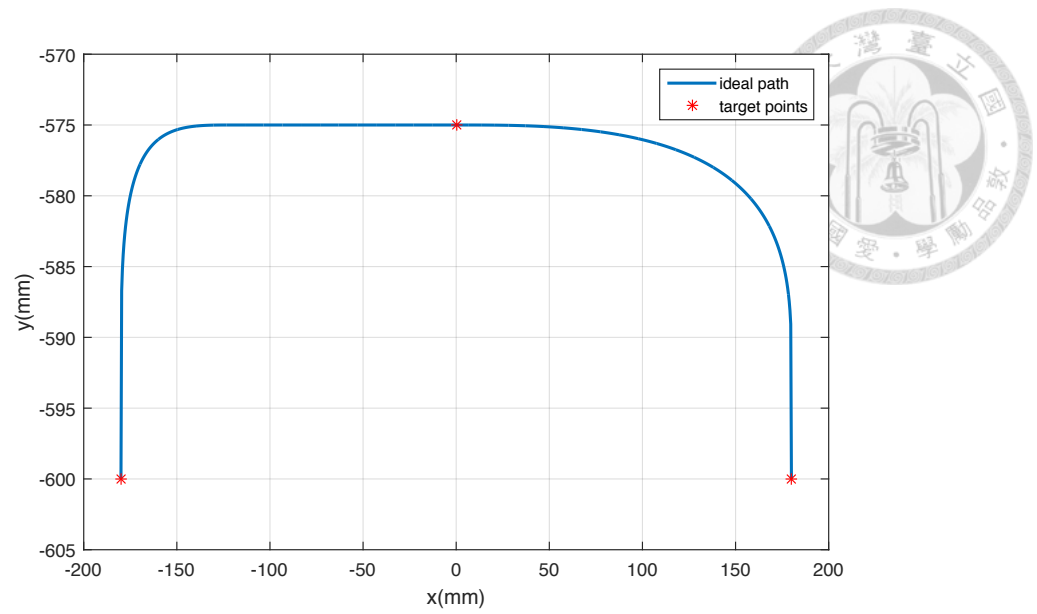
其中 j 為目標點的順序， k 為目標點的總數量，此案例中 $k = 3$ ， \mathbf{P}_j 為存在關節間隙之手臂行經目標點時的 end effector， \mathbf{Q}_j 為目標點，在誤差計算上給定每個目標點之權重 ω_j ，此案例中三個目標點之權重相同均為 $\frac{1}{3}$ ，最佳化之目標函數 E_{error} 為目標點之總誤差， E 代表目標點之誤差， ω_j 為第 j 個目標點之權重， W 為機械手臂的工作空間。表5.11為最佳化目標路徑之參數，表5.12為考量原先給定之關節間隙以最佳化目標路徑控制機械手臂 A 的準度表現。

表 5.11: 最佳目標路徑之參數

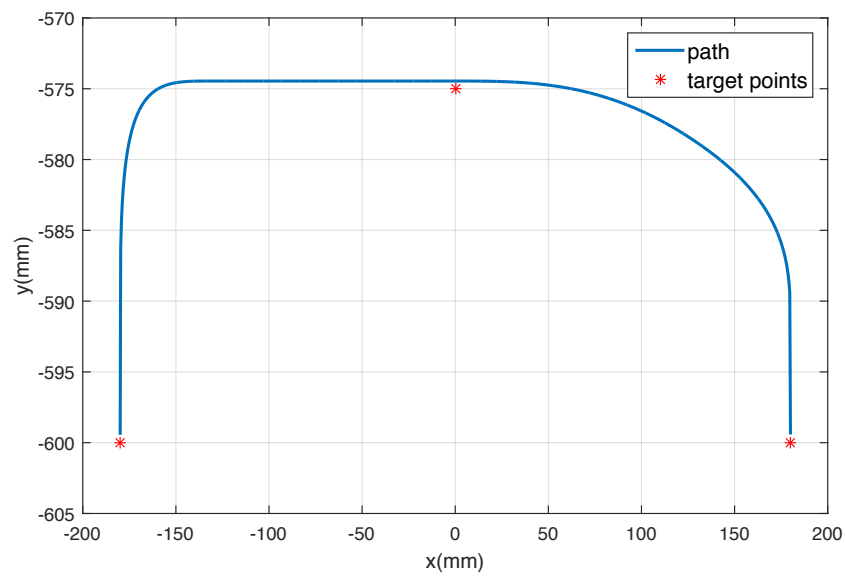
i	p_i	$v_{ix}(m/s)$	$v_{iy}(m/s)$	$t_i(s)$
1	(-179.901 mm, -599.444 mm)	0	0	0.05
2	$p_2(t_1, v_{2x}, v_{2y})$	0	0.3	0.212
3	(0 mm, -574.457 mm)	1.5	0	0.154
4	(180 mm, $p_{4y}(t_3, v_{3y})$)	0	$v_{4y}(v_{3y}, t_3)$	$t_4(\mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5, t_3)$
5	(180 mm, -599.420 mm)	0	0	

表 5.12: 目標點之誤差表現比較

	Q_1	Q_2	Q_3	平均誤差
理想路徑控制下的目標點誤差	0.562 mm	0.569 mm	0.780 mm	0.637 mm
最佳目標路徑控制下的目標點誤差	0.004 mm	0.011 mm	0.080 mm	0.031 mm
準度改善	99.3%	98.1%	89.7%	95.1%

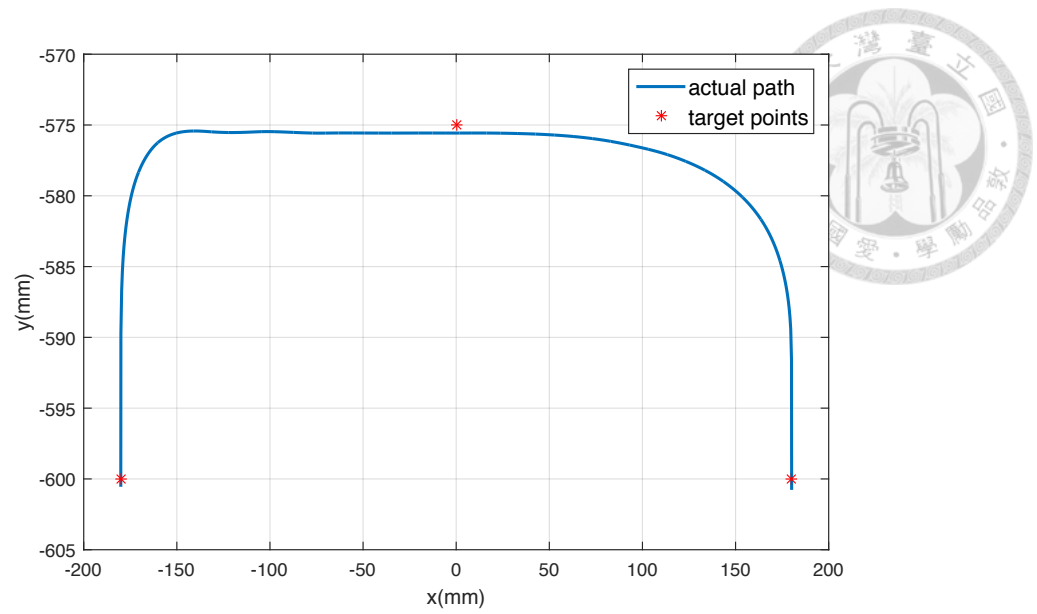


(a)

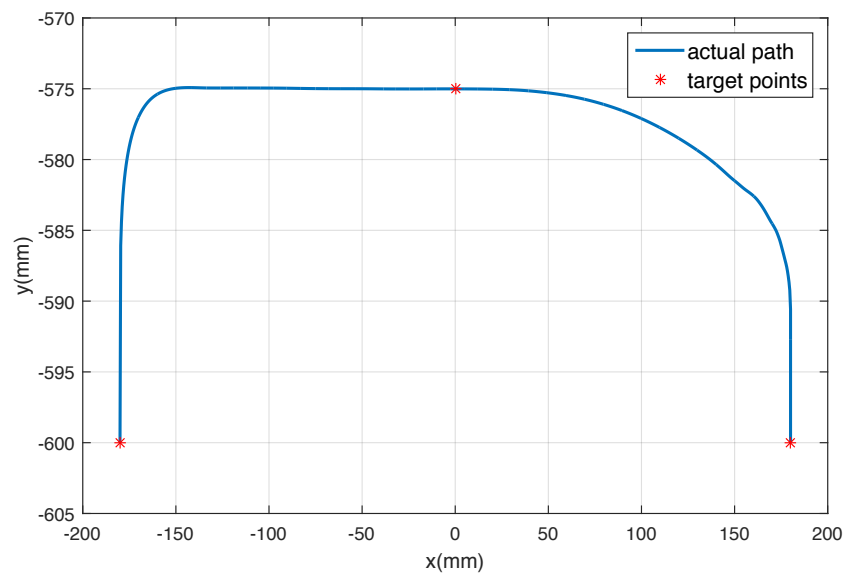


(b)

圖 5.10: 理想路徑與最佳化目標路徑比較 (a) 理想路徑 (b) 最佳化目標路徑

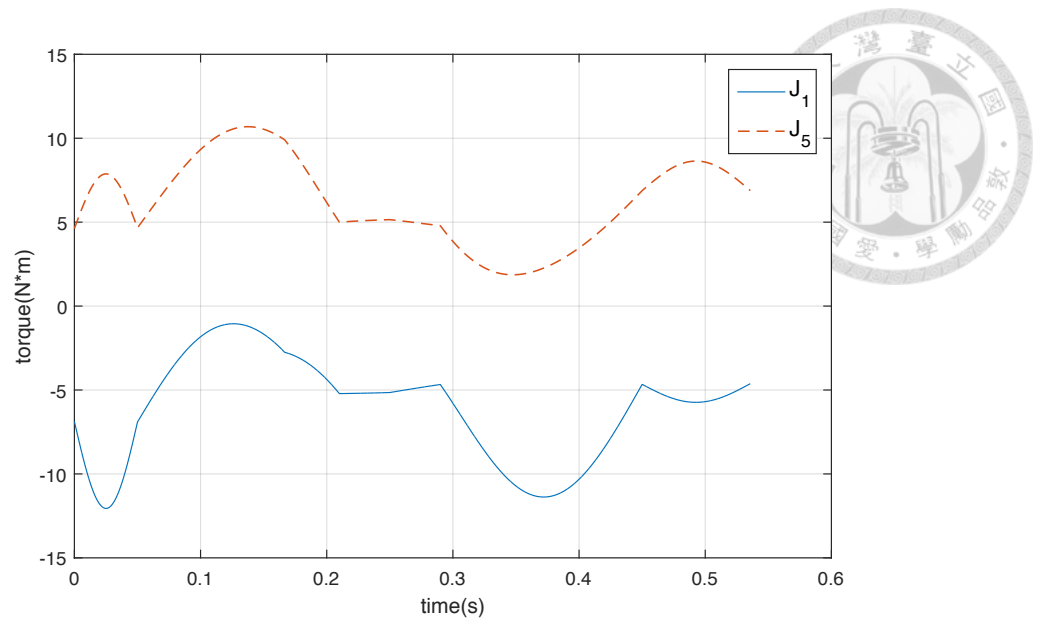


(a)

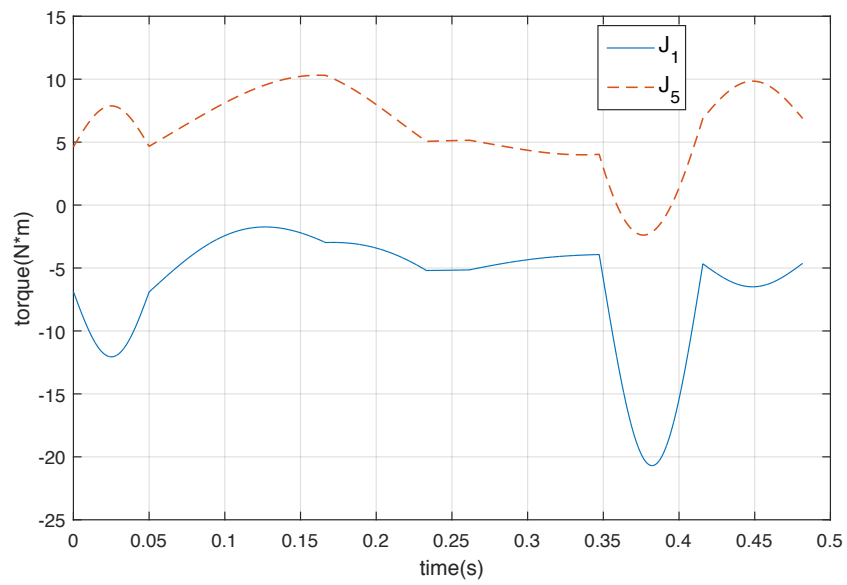


(b)

圖 5.11: 非理想機械手臂實際軌跡比較 (a) 以理想路徑控制 (b) 以最佳化目標路徑控制

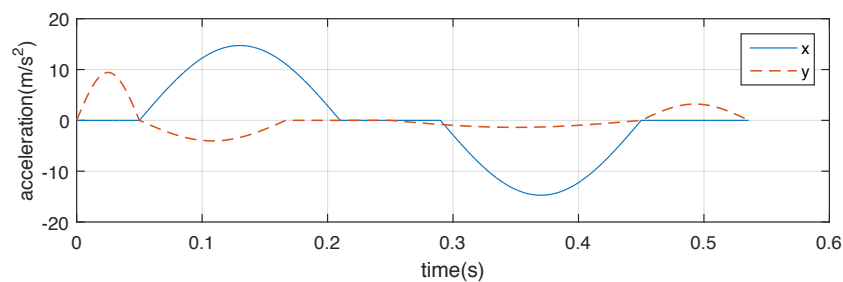
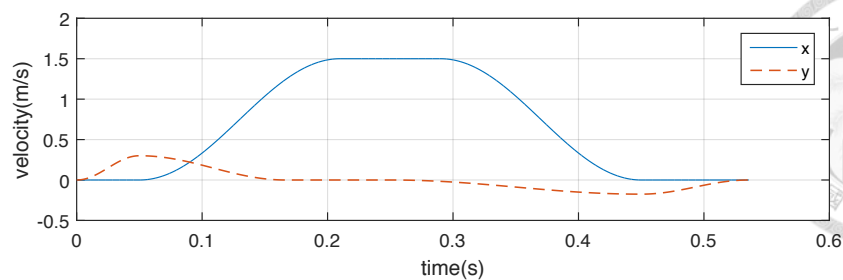


(a)

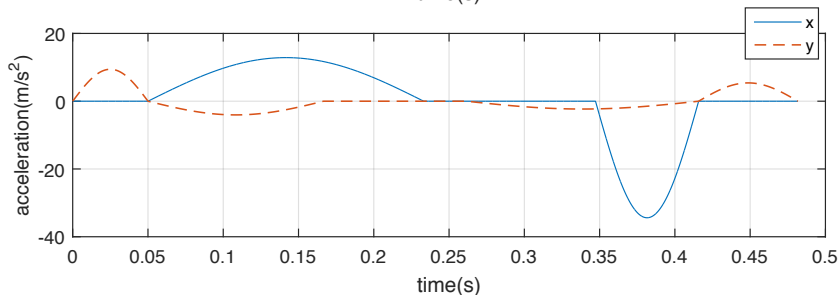
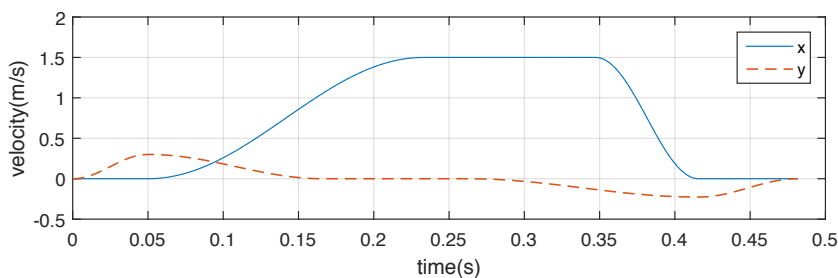


(b)

圖 5.12: 以逆向運動學所得之控制扭矩 (a) 理想路徑 (b) 最佳化目標路徑



(a)



(b)

圖 5.13: 路徑上的速度與加速度 (a) 理想路徑 (b) 最佳化目標路徑

5.4 小結

本章節探討現實中使用者選用機械手臂時所遇之問題，透過模擬現實情境並以本研究之方法解決所探討之問題，得到以下結果：

1. 以 ISO 9283 中量測機械手臂重複精度的程序，計算出手臂 A、B 於不同測試路徑下有相同的重複精度 0.056 mm，藉此模擬現實中「廠商提供之性能指標大多只有重複

精度讓使用者難以比較機械手臂間性能高低」之現況。

2. 透過高斯程序回歸 (Kringing) 建立軌跡誤差曲線與關節間隙之關係式來推估機械手臂 A、B 的關節間隙大小。在三種特徵中，使用截距與震幅的關係式能夠有效推估出間隙大小，推估準確度分別超過 95% 與 90%。由於以截距關係式所得的推估準確度最高，因此最佳化目標路徑時考量的間隙大小是透過截距關係式推估出的間隙值。
3. 為了改善機械手臂的性能，考量推估出之關節間隙下對機械手臂 A 進行目標路徑最佳化使目標點的誤差減少。並以原先給定之間隙大小的機械手臂 A 進行準度驗證，在理想路徑的控制下機械手臂 A 於目標點的平均誤差為 0.637 mm，而透過最佳目標路徑控制時的平均誤差則為 0.031 mm，準度改善率為 95.1%。上述之結果驗證本研究之方法能夠有效的提高機械手臂之性能。

結論與未來展望

6.1 結論

本論文針對 DELTA 型平行五連桿機械手臂存在關節間隙時探討其對準度之影響。研究中建立的非理想機械手臂動態模型同時考量了手臂負重與自身質量之影響，以此模型探討不同大小之間隙對機械手臂運行不同路徑時的誤差，並建立出軌跡誤差與關節間隙之間的關係式。取得機械手臂運行時的軌跡誤差並量化特徵後，透過此關係式即可推估出關節間隙之大小，再以最佳化方法規劃出誤差較小的目標路徑使準度提升。

本論文的研究貢獻主要可分為下列幾點：

1. 建立結合關節間隙之機械手臂的動態模型

本論文考量關節間隙對機械手臂之影響，將關節間隙加入 DELTA 型平行五連桿機械手臂模型中並建立考量手臂負重與自身質量之影響的動態模型。

2. 提出以軌跡誤差推估關節間隙量值的方法

本論文透過動態模型取得一系列不同關節間隙與不同實驗路徑的軌跡誤差曲線，藉此觀察並量化關節間隙與軌跡誤差曲線間的特徵，分別為斜率、截距與震幅。使用高斯程序回歸建立特徵於關節間隙與軌跡誤差曲線之關係式。當取得機械手臂運行時的軌跡誤差並量化特徵後，即可透過關係式推估出關節間隙之大小。

3. 比較機械手臂間於工作空間中的性能高低

透過推估關節間隙的方法推估機械手臂的間隙大小，再以動態模型計算此間隙大小

之機械手臂於工作空間中的誤差，藉此判斷機械手臂於工作空間中的性能高低。

4. 以最佳化方法提升機械手臂於工作空間中的性能

本研究使用最佳化方法在機械手臂的工作空間中設計出最佳目標路徑，使手臂運在工作空間中的誤差減少進而提高準度。

6.2 研究建議與未來研究方向

本論文旨在提出一套透過機械手臂運行之軌跡推估關節間隙並以最佳化目標路徑的方法提升機械手臂準度，因此選用較不複雜的 DELTA 型平行五連桿機械手臂作為研究對象，但現實中機械手臂存在著變形、公差等其他不確定因素，故以下提供可改善之模型與未來研究方向：

1. 動態模型驗證

目前尚未完成動態模型之驗證，未來可以 ADAMS[®] 進行驗證。不過當 ADAMS[®] 模擬手臂運行不同實驗路徑時都需重新設定每個物件間的結合關係與位置，若要以 ADAMS[®] 重現本研究之結果需花費大量的時間，因此建議以一條實驗路徑進行驗證即可。

2. 探討不同路徑下關節間隙所造成的震動

由於存在關節間隙會使整體機械手臂產生震動而影響機械手臂的表現，因此找出震動較小的路徑來提高手臂穩定度是值得探討的議題。

3. 桿件變形及公差之探討

在本論文的動態模型中，將存在關節間隙之關節的受力視為外力，透過此外力可以建立出各桿件變形的模型，再結合桿件長度的公差模型及可建立出考量關節間隙、桿件變形與公差之動態模型，可用以分析各種不確定因素對精度之影響，再以本論文提出的方法推估各不確定因素之量值，進而規劃誤差較小的路徑。

4. 關節磨耗之探討

關節內部存在關節間隙會導致轉動時產生動摩擦力，關節內因而產生磨耗使間隙變大。在本論文的關節間隙模型中考量了關節內部的摩擦力，因此可加入磨耗模型用以分析長時間下機械手臂的精準度變化。



5. 建立機械手臂之可靠度規範

目前對於機械手臂可靠度之規範尚未有足夠的描述，若需比較任意機械手臂間何者較為優良、可靠往往無從下手。因此透過關節磨耗之模型可以建立機械手臂精度與時間之關係，可藉此定義出機械手臂之可靠度規範。

6. 建立滿足長時間下之高精準度、高可靠度之加工策略

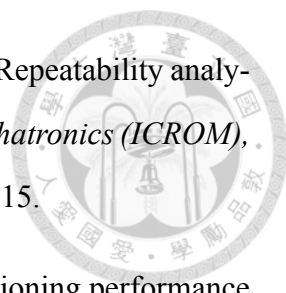
整合不確定因素模型與可靠度模型後，可嘗試建立機械手臂在長時間下高精準度、高可靠度之加工策略，使機械手臂經過長時間運行後仍能保持一定的精準度。

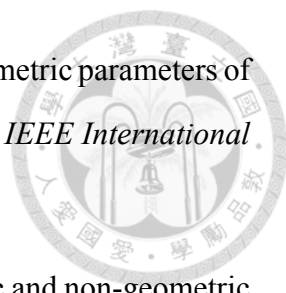




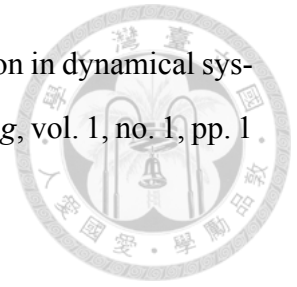
參考文獻

- [1] J. Wallén, “The history of the industrial robot,” Tech. Rep. 2853, Linköping University, Automatic Control, 2008.
- [2] C. Smith, Y. Karayiannidis, L. Nalpantidis, X. Gratal, P. Qi, D. V. Dimarogonas, and D. Kragic, “Dual arm manipulation - A survey,” *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 60, no. 10, pp. 1340–1353, 2012.
- [3] Y. C. Hsueh, “Impacts of tolerance and stiffness on the accuracy of manipulators with payload,” Master’s thesis, National Cheng Kung University, 2012.
- [4] M. C. Lai, “Multiobjective optimal path planning for robot manipulators with joint clearance,” Master’s thesis, National Cheng Kung University, 2014.
- [5] G. Duelen and K. Schröer, “Robot calibration—method and results,” *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 8, no. 4, pp. 223 – 231, 1991.
- [6] S. Mukras, N. H. Kim, N. A. Mauntler, T. L. Schmitz, and W. G. Sawyer, “Analysis of planar multibody systems with revolute joint wear,” *Wear*, vol. 268, no. 5–6, pp. 643 – 652, 2010.
- [7] M. Hagele, “Robots conquer the world [turning point],” *IEEE Robotics Automation Magazine*, vol. 23, pp. 120–118, March 2016.
- [8] ISO 9283, *Manipulating industrial robots – Performance criteria and related test methods*. International Standards Organization, 1998.

- 
- [9] A. Mousavi, A. Akbarzadeh, M. Shariatee, and S. Alimardani, "Repeatability analysis of a scara robot with planetary gearbox," in *Robotics and Mechatronics (ICROM), 2015 3rd RSI International Conference on*, pp. 640–644, Oct 2015.
- [10] M. Slamani, A. Nubiola, and I. Bonev, "Assessment of the positioning performance of an industrial robot," *Industrial Robot: An International Journal*, vol. 39, no. 1, pp. 57–68, 2012.
- [11] K. L. Ting, J. Zhu, and D. Watkins, "The effects of joint clearance on position and orientation deviation of linkages and manipulators," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 35, no. 3, pp. 391–401, 2000.
- [12] C. R. Tischler and A. E. Samuel, "Prediction of the slop in general spatial linkages," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 18, no. 8, pp. 845–858, 1999.
- [13] O. Altuzarra, J. Aginaga, A. Hernandez, and I. Zabalza, "Workspace analysis of positioning discontinuities due to clearances in parallel manipulators," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 46, no. 5, pp. 577–592, 2011.
- [14] J. Aginaga, O. Altuzarra, E. Macho, and X. Iriarte, "Assessing Position Error Due to Clearances and Deformations of Links in Parallel Manipulators," *Journal of Mechanical Design*, vol. 135, no. 4, p. 41006, 2013.
- [15] Y. Zhao and Z. F. Bai, "Dynamics analysis of space robot manipulator with joint clearance," *Acta Astronautica*, vol. 68, no. 7–8, pp. 1147 – 1155, 2011.
- [16] X. Zhang, X. Zhang, and Z. Chen, "Dynamic analysis of a 3-RRR parallel mechanism with multiple clearance joints," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 78, pp. 105–115, 2014.
- [17] L. X. Xu and Y. G. Li, "Investigation of joint clearance effects on the dynamic performance of a planar 2-DOF pick-and-place parallel manipulator," *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 30, no. 1, pp. 62–73, 2014.

- 
- [18] J. Caenen and J. Angue, “Identification of geometric and nongeometric parameters of robots,” in *Robotics and Automation, 1990. Proceedings., 1990 IEEE International Conference on*, pp. 1032–1037 vol.2, May 1990.
- [19] J. H. Jang, S. H. Kim, and Y. K. Kwak, “Calibration of geometric and non-geometric errors of an industrial robot,” *Robotica*, vol. 19, pp. 311–321, 5 2001.
- [20] K. L. Conrad, P. S. Shiakolas, and T. Yih, “Robotic calibration issues: Accuracy, repeatability and calibration,” in *Proceedings of the 8th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED2000), Rio, Patras, Greece, 2000*.
- [21] Z. S. Roth, B. Mooring, and B. Ravani, “An overview of robot calibration,” *Robotics and Automation, IEEE Journal of*, vol. 3, pp. 377–385, October 1987.
- [22] J. DENAVIT, “A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices.,” *Trans. of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, vol. 22, pp. 215–221, 1955.
- [23] B. Karan and M. Vukobratovic, “Calibration and accuracy of manipulation robot model—an overview,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 29, no. 3, pp. 479 – 500, 1994.
- [24] A. Y. Elatta, P. G. Li, L. Z. Fan, D. Yu, and F. Luo, “An overview of robot calibration,” *Information Technology*, vol. 3, pp. 74–78, 2004.
- [25] C. K. Chou, W. T. Yang, and P. C. Lin, “Dual-arm object manipulation by a hybrid controller with kalman-filter-based inputs fusion,” in *Automatic Control Conference (CACS), 2014 CACS International*, pp. 308–313, Nov 2014.
- [26] H. Lankarani and P. Nikravesh, “A contact force model with hysteresis damping for impact analysis of multibody systems,” *Journal of Mechanical Design*, vol. 112, pp. 369–375, 1990.
- [27] G. T. Rooney and P. Deravi, “Coulomb friction in mechanism sliding joints,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 17, no. 3, pp. 207 – 211, 1982.

- [28] J. Baumgarte, “Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 1, no. 1, pp. 1 – 16, 1972.





作者簡歷

個人資料

姓名： 李冠霖 Kuan-Lin Li

生日： 1991 年 12 月 16 日

電子郵件： likl@solab.me.ntu.edu.tw

學歷

碩士 國立臺灣大學 機械工程研究所

2014.07–2016.07

學士 國立成功大學 機械工程學系

2010.09–2014.06