

國立臺灣大學理學院大氣科學研究所

碩士論文

Department of Atmospheric Sciences

College of Science

National Taiwan University

Master Thesis

颱風邊界層似震結構對於颱風眼牆演變的影響探討

The Influence of Typhoon Boundary Layer Shock-like Structures
on Evolutions of Typhoon Eyewalls

陳政友

Cheng-Yu Chen

指導教授：郭鴻基 博士、陳泰然 博士

Advisor: Hung-Chi Kuo, Ph.D., Tai-Jen Chen, Ph.D.

中華民國 105 年 7 月

July 2016



誌謝

首先要感謝郭鴻基老師兩年來的細心指導，讓我可以順利畢業。郭老師教導的物理觀念，總能讓我有深刻的理解，而且在這段期間內，我也學習到許多數值方法和動力的知識。另外，也要特別感謝兩位口試委員，對於本論文所提出的許多建議，感謝楊明仁老師的數值天氣預報課程，讓我在第一部分得數值研究中有紮實的理論基礎，感謝陳泰然老師的高等天氣學課程，讓我在第二部分動力的研究中，將上課所學的知識靈活運用在物理現象的解釋。

感謝動力與模擬研究室的各位，在我研究的過程中提出許多寶貴的意見，讓我在研究以及報告的能力上有許多進步。

最後，感謝我的家人，在研究所求學的期間，給我許多物質以及精神上的支持，讓我在遇到瓶頸時得到鼓勵，有繼續努力的動力。

陳政友

2016-08-16 動力與模擬研究室

中文摘要

颱風觀測中可以發現，邊界層的風場具有高梯度的似震結構特徵。Williams et al. (2013) 工作中以軸對稱單層邊界層模式中，具有 $u \frac{\partial u}{\partial r}$ 項而能夠掌握似震結構。

為了能夠更精確的模擬似震結構，我們研究 WENO5 (Weighted Essentially Non-Oscillatory)、CRWENO5 (Compact Reconstruction WENO5) 以及 CRWENO5-LD (CRWENO5-Low Dissipation)。並且與四階中差分法以及傅立葉波譜法做比較。我們也研究這些方法的收斂特性，以及二維理想流場中的物理量保守特性。

Williams et al. (2013) 在其邊界層模式中假設為軸對稱。然而，在觀測中可以發現，颱風邊界層內的似震結構也具有高度的不對稱性。為了探討颱風邊界層內的不對稱似震結構，我們將 Williams et al. (2013) 的邊界層模式改寫成卡式座標，並且耦合淺水模式。我們發現，單眼牆颱風較大的上升速度，發生在慣性穩定度較大的區域，這可能表示，單眼牆颱風邊界層內的似震結構，對於颱風的增強有重要的影響。

在雙眼牆實驗中，我們發現 moat 較小的雙眼牆結構，內眼牆上升速度較小，且 moat 的下降速度較強。由於此為乾模式，實驗結果顯示，邊界層內的似震結構也傾向於增強外眼牆，並減弱內眼牆。另外，在其他的實驗中，我們也發現雙眼牆颱風的核心渦旋的渦度結構，對於內、外眼牆上升速度的分布有重要的影響。

本研究結果顯示，除了邊界層內的熱力過程，動力過程所導致的似震結構，對颱風的強度與結構也有重要的影響。

關鍵字：WENO5、淺水模式、颱風邊界層、似震結構、雙眼牆

ABSTRACT

Observations of tropical cyclones reveal high-gradient shock-like structures in its boundary layer. Williams et al. (2013) proposed an axisymmetric slab boundary layer model with a $u \frac{\partial u}{\partial r}$ term which is capable of simulating such shock-like structures.

In order to simulate the shock structures most accurately, study the numerical shock capturing methods WENO5 (Weighted Essentially Non-Oscillatory fifth-order), CRWENO5 (Compact Reconstruction WENO5) and CRWENO5-LD (CRWENO5-Low Dissipation). We compare these methods with a fourth-order finite difference scheme and with the Fourier spectral method. We also study their convergence behavior and conservations of physical quantities in the two dimensional ideal flow field.

The boundary layer model of Williams et al. (2013) is formulated assuming axisymmetry. However, observational evidence suggests that the shock-like structures found in the boundary layers of real tropical cyclones can far from axisymmetric. Here, we transform the axisymmetric slab boundary layer model of Williams et al. (2013) to Cartesian coordinates and couple it with shallow water model in order to study asymmetric shock-like structures in the boundary layer of a tropical cyclone. We find that large updrafts occur in the region of large inertial instability of tropical cyclones with single eyewall. This may indicate that updrafts associated with shock-like structures play an important role in the intensification of tropical cyclones with a single eyewall.

In our experiments with concentric eyewall, we found weaker updrafts at the inner eyewall and stronger downward motion in the moat region for a smaller moat size. Since this study employs a dry model, the results indicate that shock-like structures in the boundary layer also tend to intensify the outer eyewall and weaken the inner eyewall. In the other experiment, we found that the vorticity structure inside the core vortex of a concentric eyewall structure significantly affects the vertical velocity distribution at the inner and outer eyewalls.

The results in this study indicate that not only thermodynamic processes but also shock-like structures associated with dynamical processes would significantly affect structures and intensity of tropical cyclones.

Key words : WENO5, shallow water model, tropical cyclone boundary layer, shock-like structure, concentric eyewall

目錄



口試委員會審定書	#
誌謝	i
中文摘要	ii
ABSTRACT	iii
目錄	iv
圖目錄	vi
表目錄	xiii
第 1 章 前言	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究目的與動機	2
第 2 章 數值方法	4
2.1 簡介	4
2.2 空間差分	5
2.2.1 WENO5	7
2.2.2 CRWENO5	10
2.2.3 CRWENO5-LD	11
2.3 時間差分	12
第 3 章 數值實驗	14
3.1 一維線性平流實驗	14
3.2 柏格斯方程式實驗	16
3.3 二維剛體旋轉平流實驗	17
第 4 章 模式與實驗設計	21
4.1 輻散正壓模式	21
4.2 單層邊界層模式結合輻散正壓模式	22
4.2.1 軸對稱單層邊界層模式	22
4.2.2 卡式座標單層邊界層模式	25
4.3 模式設定	27

4.4	模式測試與數值方法比較	28
4.5	實驗設計	30
4.5.1	橢圓形渦旋	30
4.5.2	雙眼牆實驗	30
4.5.3	三極渦旋	31
第 5 章	實驗結果.....	34
5.1	橢圓形渦旋	34
5.2	雙眼牆實驗	35
5.3	三極渦旋	36
第 6 章	總結.....	38
圖	42
表	88
參考文獻	93
附錄	96

圖目錄



- 圖 1：Hurricane Hugo 的風速剖面。觀測時間為 1989 年 9 月 15 日，紅線為飛機由
颱風的西南方高度約 434 公尺穿越眼牆所得的觀測資料，在穿越眼牆之後，
飛機高度上升到約 2682 公尺，由颱風的東北方穿越眼牆，藍線為穿越東北
方眼牆時所得的觀測資料。橫軸為中心距離(km)，縱軸為風速(m s^{-1})。上圖
實線的部分為切向風場 v ，虛線為徑向風場 u ，下圖為上升速度 w 。(摘自
Williams et al., 2013).....42
- 圖 2：Williams et al. (2013) 實驗中邊界層初始渦度場分布圖。橫軸為中心距離(km)，
縱軸為渦度值($\times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$)，C1、C3 以及 C5 分別代表實驗中 category 1、3 以
及 5 的渦度值。(摘自 Williams et al., 2013)43
- 圖 3：Williams et al. (2013) 實驗中 $t = 3 \text{ h}$ (模式時間第 3 個小時)的邊界層風場結
構。由上而下分別為徑向風速 $u(\text{m/s})$ 、切向風速 $v(\text{m/s})$ 、上升速度 $w(\text{m/s})$ 以
及渦度 $\zeta(10^{-3} \text{ s}^{-1})$ 。橫軸為中心距離(km)。藍色、綠色以及紅色虛線分別代
表邊界層中強度為 category 1、3 以及 5 的初始場。藍色、綠色以及紅色實
線代表邊界層達到近似穩態時的風場結構。(摘自 Williams et al., 2013)44
- 圖 4：渦旋強度為 category 3 所驅使的單層邊界層模式，在達到近似穩態(模式時
間第 3 小時)前的結果。四張圖由上而下分別為徑向風速 $u(\text{m/s})$ 、切向風速
 $v(\text{m/s})$ 、上升速度 $w(\text{m/s})$ 以及渦度 $\zeta(10^{-3} \text{ s}^{-1})$ ，橫軸為中心距離(km)。圖中
的黑色虛線表示邊界層模式中的初始場，而藍色、綠色、紅色以及黑色實線
代表模式時間 0.5、1.0、2.0 以及 3.0 小時的風場結構。從圖中可以看到在模
式時間 2-3 小時邊界層風場達到近似穩態，此時在距離中心約 13-15 公里處
形成似震結構，徑向風速差在兩公里的範圍內超過 20 m s^{-1} ，伴隨上升速度
超過 22 m s^{-1} ，在自由大氣的最大切向風速區內側(約距中心 16 公里處)，約
13-16 公里處產生超梯度風，而外側(大於 16 公里處)產生次梯度風。(摘自
Williams et al., 2013).....45
- 圖 5：Hurricane Gilbert 機載雷達回波觀測。觀測時間為 1988 年 9 月 12 日 1731
UTC，圖中的灰階為雷達回波強度(dBZ)，圖中為颱風東南象限雨帶的位置，
圖中垂直於此雨帶的直線為當時 19 架飛機穿越觀測的位置。(摘自 Williams

et al., 2013).....	46
圖 6：圖 5 中穿越東南象限雨帶，在高度約 720 公尺的飛機觀測，觀測路徑為圖 5 黑色直線，觀測時間為 1722:00 至 1731:10 UTC。上圖為徑向風速 $u(\text{m s}^{-1})$ ，中間圖為上升速度 $w(\text{m s}^{-1})$ ，橫軸為離颱風中心半徑(km)。下圖為 19 架飛機觀測所合成的徑向風速垂直剖面，橫軸為離雨帶的距離(km)，縱軸為高度(km)。圖中顯示在雨帶的中心(約 170 km 處)徑向風速梯度大(上圖)，並伴隨上升速度超過 4 m s^{-1} (中圖)，下圖顯示徑向風速梯度較大為邊界層的特徵。(摘自 Williams et al., 2013)	47
圖 7：Hurricane Frances 飛機觀測資料。觀測時間為 2004 年 8 月 30 日 1815 UTC 的。圖中的黑色實線為切向風速。橫軸的 0 表示颱風中心，橫軸為中心距離(km)，縱軸為風速(m s^{-1})。從圖中可以觀察到有三個似震結構。(摘自 Sitkowski et al., 2011)	48
圖 8：1996 年賀伯颱風的五分山雷達回波圖。上圖依照時間順序為由左而右，由上而下。觀測時間為 7 月 31 日 1507 LST 到 1733 LST。圖中的橢圓形長軸約 30 公里，而短軸約為 20 公里。(摘自 Kuo et al., 1999).....	49
圖 9：四個西太平洋雙眼牆颱風的微波衛星影像。色階為亮度溫度(Brightness temperature)。圖中的左圖和右圖時間間距大約為 12 個小時，而最大風速估計值在圖形上標。(摘自 Kuo et al., 2008).....	50
圖 10：(a)Hurricane Ivy 雷達回波觀測圖。觀測時間為 2004 年 9 月 12 日 1304-1324 UTC，觀測範圍為 $360 \text{ km} \times 360 \text{ km}$ ，此時颱風為雙眼牆結構。(b)Hendricks et al. (2010)中渦度場 ζ 的初始條件，畫圖範圍為 $200 \text{ km} \times 200 \text{ km}$ 。上圖色階為(dBZ)，下圖色階單位為($\times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$)。(摘自 Hendricks et al., 2010).....	51
圖 11：WENO5 重構格點資訊示意圖。其中左側為上游， $f_{j+1/2}$ 為重構的通量函數，使用的格點資訊從 $j-2$ 到 $j+2$ ， Δx 為格點間距。(摘自 Henrick et al., 2005)	52
圖 12：線性平流實驗中， L_2 誤差對應格點數函數圖。其中包括四階中差分法、WENO5、CRWENO5、CRWENO5-LD 和波譜法平流一周後 ($t = 2 \text{ s}$) 的結果。橫軸為格點數，以對數座標表示，縱軸為 L_2 誤差的指數。.....	53
圖 13：線性平流實驗中，(a)耗散誤差以及 (b)頻散誤差對應格點數函數圖。橫軸為格點數，以對數座標表示，縱軸為誤差的指數。其中包括四階中差分法、	

WENO5、CRWENO5 和 CRWENO5-LD 平流一周後 ($t=2\text{ s}$) 的結果。由於四階中差分法和波譜法的耗散誤差小於捨入誤差，所以沒有畫在圖 (a) 中。另外，波譜法的頻散誤差小於電腦計算的誤差，沒有畫在圖 (b) 中。.....	54
圖 14：柏格斯方程式實驗的結果。(a) $t=1\text{ s}$ (平滑函數)和 (b) $t=1.975\text{ s}$ (接近震波結構形成時間)。橫軸為數值計算的範圍，縱軸為函數 u 的值。其中包括解析解、WENO5、CRWENO5 和 CRWENO5-LD。.....	55
圖 15：柏格斯方程式實驗的結果。(a) $t=1\text{ s}$ (平滑函數)和 (b) $t=1.975\text{ s}$ (接近震波結構形成時間)。橫軸為數值計算的範圍，縱軸為函數 u 的值。其中包括解析解、四階中差分法和波譜法。.....	56
圖 16：柏格斯方程式實驗中， L_2 誤差對應格點數函數圖。橫軸為格點數，以對數座標表示，縱軸為 L_2 誤差的指數。(a) $t=1\text{ s}$ (平滑函數)和 (b) $t=1.975\text{ s}$ (接近震波結構形成時間)。其中包括四階中差分法、WENO5、CRWENO5、CRWENO5-LD 和波譜法。.....	57
圖 17：柏格斯方程式實驗中，(a)耗散誤差和 (b)頻散誤差對應格點數函數圖。橫軸為格點數，以對數座標表示，縱軸為誤差的指數。其中包括四階中差分法、WENO5、CRWENO5、CRWENO5-LD 和波譜法在 $t=1\text{ s}$ 時的結果(平滑函數)。其中圖 (a)的波譜法在低解析度下的耗散誤差已小於捨入誤差，所以只有畫到格點數為 32 的結果。.....	58
圖 18：同圖 17，唯時間 $t=1.975\text{ s}$ 。.....	59
圖 19：等角速度($\omega=1/(2)^{0.5}$)的剛體旋轉風場及高斯錐體的初始位置。黑色虛線同心圓為風場，等值線間距為 0.0625。黑色實線為高斯錐體，波形中心 $(x_0, y_0)=(-0.3, -0.3)$ ，等值線間距為 0.05。研究範圍 $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ ， $V_{\max}=1$ 。.....	60
圖 20：二維剛體旋轉平流實驗平流五圈後的結果。其中 (a)四階中差分法以及 (b)波譜法。圖中的等值線間距為 0.05。.....	61
圖 21：與圖 20 同，唯 (a)WENO5 以及 (b)CRWENO5。.....	62
圖 22：與圖 20 同，唯 CRWENO5-LD。.....	63
圖 23：二維剛體旋轉平流實驗中，高斯錐體平流五圈後 $y=0.3$ 的剖面。(a)WENO5、CRWENO5、CRWENO5-LD 以及波譜法。(b)四階中差分法。	

圖中黑色實線為解析解。.....	64
圖 24：與圖 23 同，唯 $x = 0.3$ 的剖面。.....	65
圖 25：Williams et al. (2013) 邊界層厚度的敏感度測試圖。比較強度 category 3 渦旋在 $t = 3$ h(模式時間 3 小時)的結果。由上而下分別為徑向風速 $u(\text{m/s})$ 、切向風速 $v(\text{m/s})$ 、邊界層上升速度 $w(\text{m/s})$ 以及渦度 $\zeta(10^{-3} \text{ s}^{-1})$ 。橫軸為中心距離(km)。黑色虛線為邊界層初始風場，由於上層自由大氣的風場不變，所以也可視為自由大氣的風場。紫色、藍色、綠色、紅色和棕色實線分別代表邊界層的厚度為 500、750、1000、1250 以及 1500 公尺的結果。根據連續方程式，邊界層的上升速度為 $w _{z=h} = -h(\partial u/\partial r)$ ，所以即使邊界層較薄 ($h=500$ m) 的內流較強，上升速度仍舊比厚度較厚 ($h=1500$ m) 還小。(摘自 Williams et al., 2013).....	66
圖 26：單層邊界層模式三種數值方法測試結果。強度為 category 3 的渦旋在模式時間第 3 小時的邊界層風場結構。圖中由上而下分別為徑向風 $u(\text{m s}^{-1})$ 、切向風 $v(\text{m s}^{-1})$ 、邊界層上升速度 $w(\text{m s}^{-1})$ 以及渦度 $\zeta(10^{-3} \text{ s}^{-1})$ 。橫軸為中心距離(km)。模式解析度為 500 m，而紅色實線為 WENO5，綠色實線為 CRWENO5，藍色實線為 CRWENO5-LD，黑色虛線為初始條件。.....	67
圖 27：強度 category 3 邊界層上升速度 $w(\text{m s}^{-1})$ 隨時間的演變圖，模式時間分別為 0、0.5、1、2 以及 3 小時。其中包括三種不同數值方法。(a)Williams et al. (2013) 採用加入擴散項的二階中差分法，解析度為 100m 的軸對稱邊界層模式，(b)WENO5 解析度為 500m 的卡氏座標邊界層模式以及 (c)加入 Lancozs filter 的波譜法，解析度為 390m 的卡式座標邊界層模式。橫軸為中心距離(km)，縱軸為風速(m s^{-1})。(上圖摘自 Williams et al., 2013，下圖摘自程, 2014).....	68
圖 28：WENO5 單層邊界層模式解析度測試結果。強度 category 3 的渦旋在模式時間第 3 小時的邊界層風場結構。(a)徑向風速 $u(\text{m s}^{-1})$ ，(b)切向風速 $v(\text{m s}^{-1})$ 。橫軸為中心距離(km)。黑色實線為解析度 250 m，紅色實線為解析度 500 m，綠色實線為解析度 750 m，藍色實線為解析度 1000 m，黑色虛線為初始條件。.....	69
圖 29：WENO5 單層邊界層模式解析度測試結果。強度為 category 3 的渦旋在模式	

- 時間第 3 小時的邊界層上升速度 $w(\text{m s}^{-1})$ 。橫軸為中心距離(km)。黑色實線為解析度 250 m，紅色實線為解析度 500 m，綠色實線為解析度 750 m，藍色實線為解析度 1000 m，黑色虛線為初始條件。 70
- 圖 30：五種不同數值方法對於 category 3 強度渦旋，第 3 個小時的上升速度結果。FD2 為二階中差分法，spectral method 為傅立葉波譜法。橫軸為解析度(m)，縱軸為上升速度(m s^{-1})。 71
- 圖 31：橢圓形渦旋實驗中，淺水模式的 (a)初始位渦場。第 4 個小時的(b)位渦場、(c)散度場以及 (d)邊界層模式的上升速度場。畫圖範圍為 $75 \text{ km} \times 75 \text{ km}$ ，位渦色階為($\times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$)，散度藍白色階為($\times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$)，上升速度色階為(m s^{-1})。 72
- 圖 32：橢圓形渦旋實驗中的切向風場。(a)淺水模式與 (b)淺水模式所驅動的邊界層模式第 4 小時的結果。(c)非輻散正壓模式與 (d)非輻散正壓模式所驅動的邊界層模式第 12 小時的結果。畫圖範圍為 $75 \text{ km} \times 75 \text{ km}$ ，灰階為風速(m s^{-1})。 73
- 圖 33：橢圓形渦旋實驗中，(a)東側長軸以及 (b)南側短軸第 4 個小時的風速剖面。橫軸為中心距離(km)，縱軸為風速(m s^{-1})。其中黑色實線為邊界層上升速度 w ，對應到右側的縱軸。黑色虛線為 0 值線。藍色實線為淺水模式的切向風速 v_s 、紅色實線為邊界層的切向風速 v_{sbl} ，以及綠色實線為邊界層中的徑向風速 u_{sbl} ，對應到左側的縱軸。 74
- 圖 34：Exp-S 實驗中，淺水模式的位渦以及邊界層模式的上升速度。(a)初始條件，(b1)、(b2)模式時間第 2 個小時的結果。畫圖範圍為 $200 \text{ km} \times 200 \text{ km}$ 。位渦色階為($\times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$)，上升速度色階為(m s^{-1})。 75
- 圖 35：Exp-S 實驗中，淺水模式的位渦以及邊界層模式的上升速度。(c1)、(c2) 模式時間第 6 個小時的結果，(d1)、(d2)模式時間第 12 個小時的結果。位渦畫圖範圍為 $200 \text{ km} \times 200 \text{ km}$ 。上升速度畫圖範圍為 $100 \text{ km} \times 100 \text{ km}$ ，而 (c2)、(d2)的範圍分別為 (c1)、(d1)的框線處。位渦色階為($\times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$)，上升速度色階為(m s^{-1})。 76
- 圖 36：Exp-L 實驗中，淺水模式的位渦以及邊界層模式的上升速度。(a)初始條件，(b1)、(b2)模式時間第 2 個小時的結果。畫圖範圍為 $200 \text{ km} \times 200 \text{ km}$ 。位渦

色階為($\times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$)，上升速度色階為(m s^{-1})。	77
圖 37: Exp-L 實驗中，淺水模式的位渦以及邊界層模式的上升速度。(c1)、(c2) 模式時間第 6 個小時的結果，(d1)、(d2) 模式時間第 12 個小時的結果。位渦畫圖範圍為 $200 \text{ km} \times 200 \text{ km}$ 。上升速度畫圖範圍為 $100 \text{ km} \times 100 \text{ km}$ ，而 (c2)、(d2) 的範圍分別為 (c1)、(d1) 的框線處。位渦色階為($\times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$)，上升速度色階為(m s^{-1})。	78
圖 38: Exp-VS 實驗中，淺水模式的位渦以及邊界層模式的上升速度。(a) 初始條件，(b1)、(b2) 模式時間第 2 個小時的結果。畫圖範圍為 $200 \text{ km} \times 200 \text{ km}$ 。位渦色階為($\times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$)，上升速度色階為(m s^{-1})。	79
圖 39: Exp-VS 實驗中，淺水模式的位渦以及邊界層模式的上升速度。(c1)、(c2) 模式時間第 6 個小時的結果，(d1)、(d2) 模式時間第 12 個小時的結果。位渦畫圖範圍為 $200 \text{ km} \times 200 \text{ km}$ 。上升速度畫圖範圍為 $100 \text{ km} \times 100 \text{ km}$ ，而 (c2)、(d2) 的範圍分別為 (c1)、(d1) 的框線處。位渦色階為($\times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$)，上升速度色階為(m s^{-1})。	80
圖 40: 三個雙眼牆實驗，以小而強的渦旋為中心，第 12 個小時的東西側風速剖面。其中 (a)Exp-S、(b)Exp-L 以及(c)Exp-VS。黑色實線為邊界層上升速度 w ，對應到右側的縱軸。黑色虛線為 0 值線。藍色實線為淺水模式的切向風 v_s ，紅色實線為邊界層的切向風 v_{sbl} ，綠色實線為邊界層的徑向風 u_{sbl} ，對應到左側的縱軸。橫軸為中心距離(km)，0 表示渦旋中心，正值表示渦旋東側，負值表示渦旋西側。縱軸為風速(m s^{-1})。	81
圖 41: (a)雙眼牆結構平均大小與標準差，對應於雙眼牆結構維持時間的統計圖。(b)雙眼牆颱風總數與比例，對應於雙眼牆結構維持時間的統計圖。黑色以及灰色表示西北太平洋以及大西洋的統計資料。橫軸為小時(h)，上圖縱軸為結構大小(km)，下圖縱軸為個數。 r_0 、 d_0 以及 w_0 分別代表核心渦旋半徑、moat 寬度以及外眼牆寬度。	82
圖 42: 三極渦旋實驗中，淺水模式的 (a)初始位渦場、(b)第 2 小時的位渦場、(c)第 2 小時的散度場。(d)邊界層模式的上升速度場。(a)-(c)畫圖範圍為 $150 \text{ km} \times 150 \text{ km}$ 。(d)畫圖範圍為 $100 \text{ km} \times 100 \text{ km}$ ，為圖 (b)框線處。位渦色階為($\times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$)，散度藍白色階為($\times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$)，上升速度色階為(m s^{-1})。	83

- 圖 43：三極渦旋實驗中，淺水模式的(a)位渦場、(b)散度場。(c)邊界層模式的上升速度場。模式時間為第 14 小時。圖 (a)、(b)畫圖範圍為 150 km×150 km。圖 (c)畫圖範圍為 100 km×100 km，為圖 (a)框線處。位渦色階為($\times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$)，散度藍白色階為($\times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$)，上升速度色階為(m s^{-1})。84
- 圖 44：三極渦旋實驗中，淺水模式的(a)位渦場、(b)散度場。(c)邊界層模式的上升速度場。模式時間為第 48 小時。圖 (a)、(b)畫圖範圍為 150 km×150 km。圖 (c)畫圖範圍為 100 km×100 km，為圖 (a)框線處。位渦色階為($\times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$)，散度藍白色階為($\times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$)，上升速度色階為(m s^{-1})。85
- 圖 45：三極渦旋對照實驗中，淺水模式的 (a)位渦場以及 (b)散度場。邊界層模式的 (c)上升速度場以及 (d)切向風場。模式時間為第 4 個小時。圖 (a)、(b)畫圖範圍為 150 km×150 km。圖 (c)、(d)畫圖範圍為 100 km×100 km，為圖 (a)框線處。位渦色階為($\times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$)，散度藍白色階為($\times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$)，上升速度色階為 (m s^{-1})，邊界層切向風速灰階為(m s^{-1})。86
- 圖 46：(a)三極渦旋實驗，第 14 小時中心橢圓渦旋長軸剖面，以及 (b)三極渦旋對照實驗，中心橢圓形渦旋第 4 個小時的長軸剖面。橫軸為中心的距離(km)，縱軸為風速(m s^{-1})。其中黑色實線為邊界層上升速度 w ，對應到右側的縱軸。黑色虛線為 0 值線。藍色實線為淺水模式中的切向風速 v_s 、紅色實線為邊界層中的切向風速 v_{sbl} ，以及綠色實線為邊界層中的徑向風速 u_{sbl} ，對應到左側的縱軸。87

表目錄



表 1：線性平流實驗中，不同格點數的 L_2 誤差和收斂速率(r_c)。數值方法為四階中 差分法 (FD4) 以及波譜法。	88
表 2：與表 1 同，唯數值方法為 WENO5、CRWENO5 和 CRWENO5-LD。	89
表 3：二維剛體旋轉流場實驗中，最大值保守 ($\psi_{\max}/\psi_{0\max}$)、最小值 (ψ_{\min})、質量 保守 ($\Sigma\psi_{\max}/\Sigma\psi_{0\max}$) 以及能量保守 [$\Sigma(\psi_{\max})^2/\Sigma(\psi_{0\max})^2$]。表中為高斯錐體旋 轉一圈以及五圈後的結果。數值方法為四階中差分法(FD4)、WENO5、 CRWENO5、CRWENO5-LD 以及波譜法的。	90
表 4：與表 3 同，唯性質為負值產生比例 ($\Sigma\psi_{\text{neg}}/\Sigma\psi$)、 L_2 誤差、耗散誤差以及頻 散誤差。	91
表 5：Williams et al. (2013) 中渦旋強度參照表。(摘自 Williams et al., 2013)	92

第1章 前言



1.1 研究背景

研究影響颱風強度與結構的因素，一直是理解颱風動力重要的議題。對於強度的了解可以幫助預報的改善，也有助於災害的評估。由於洋面上暖濕的空氣由颱風邊界層上升後，凝結釋放潛熱，提供颱風增強所需的能量，所以理解颱風邊界層內上升運動的動力機制，將有助於我們了解影響颱風強度以及結構的動力過程。

為了理解颱風的邊界層動力過程，前人在研究中發展了許多不同的邊界層模式。其中最簡單的做法是將邊界層內的風場作垂直平均，如 Ooyama (1969) 將軸對稱的邊界層模式結合中層氣旋層與高層的反氣旋層，探討海洋上的邊界層能量交換對於維持颱風積雲對流重要性。而 Shapiro (1983) 則利用一層非軸對稱的邊界層模式，探討移動中的颱風不對稱的對流分布。

在觀測中可以發現，邊界層內風場和自由大氣風場的結構不同。圖 1 為飛機穿越 Hurricane Hugo 颱風眼的風速觀測資料。紅線為離地高度約 400 公尺的風速，可以視為颱風邊界層的風場觀測，而藍線為高度約 2000 公尺處的風速，視為自由大氣風場。圖中可以看出，在自由大氣最大切向風半徑外側，邊界層切向風為次梯度風 (subgradient wind)，而在最大切向風半徑內側為超梯度風 (supergradient wind)。此外，在距離颱風中心 8 公里處，邊界層切向風速在 500 公尺的範圍內有急遽的變化，Williams et al. (2013) 中將此現象稱為似震結構 (shock-like structure)，在似震結構的內側，徑向風向外約 10 m s^{-1} ，而外側內流大小約 25 m s^{-1} ，此處的輻合伴隨著最大上升速度約 20 m s^{-1} 。

Williams et al. (2013) 使用了一層軸對稱的邊界層模式解釋颱風邊界層內由 $u \frac{\partial u}{\partial r}$ 項而形成的似震結構。在他們的實驗中，給定強度為 category 1、3 以及 5 的自由大氣渦度場，如圖 2 所示，並以此渦度場所反演的切向風場以及壓力場來驅動邊界層模式。圖 3 分別為三種不同強度的颱風所驅使的邊界層風場達到近似穩定態 ($t = 3 \text{ h}$) 的結果，可以發現強度越強的颱風，邊界層的似震結構距離中心越近，入流強度越大且伴隨的上升速度也越強。圖 4 為強度 category 3 在達到近似穩定態之前邊界層內風場隨時間的演變。最大切向風外側由於摩擦力使風速下降，導

致氣壓梯度力、科氏力和離心力不平衡而驅使空氣向內流動，但在最大切向風內側由於慣性穩定度大，空氣不易向內流動，於是在模式時間 0.5 小時距離中心 15 公里處形成似震結構，而似震結構隨著時間經過被向內平流至較內側，在模式時間 3 小時達到近似穩定態，在 13 公里處形成眼牆結構。

1.2 研究目的與動機

在 Williams et al. (2013) 的工作中，採用軸對稱的一層邊界層模式(以下簡稱單層邊界層模式)，可以合理的模擬出颱風邊界層的似震結構，他們認為邊界層內的似震結構是來自於邊界層的控制方程式中，含有柏格斯方程式 (Burgers equation) 的數學結構，由於此數學方程式的特性導致非線性平流而產生似震結構。

但實際上颱風邊界層內的似震結構並不是軸對稱的，例如圖 5、6 中 Hurricane Gilbert 的雨帶所伴隨的似震結構位置只在東南象限，無法以軸對稱解釋此現象。此外，在 Kuo et al. (2004) 的工作中指出，兩個渦旋的非軸對稱交互作用可能是雙眼牆形成的機制之一，由此可知邊界層內的非軸對稱動力過程，對於颱風結構和強度也扮演重要的角色。除了非對稱結構，颱風的觀測中也常可以發現不只一個似震結構(如圖 7)，表示邊界層的似震結構可以是不對稱且複雜的。

在 Williams et al. (2013) 的模式中採用軸對稱的假設，由此可知風速在空間上只有徑向的變化，空間中的計算只需要處理一個維度，而他們的模式中使用高解析度 ($\Delta x = 100 \text{ m}$) 二階中差並加入擴散項 (diffusion)，可得出合理的似震結構。但在二維模式中存在較複雜的似震結構，若採用高解析度的二階中差分法，計算量將變得非常大，且由前人的研究指出 (Jiang and Shu, 1996)，當數值計算涉及較複雜的似震結構時，加入擴散項的高解析度二階中差分是較沒有效率的作法。

由於近年來所發展的數值方法 WENO5 (Weighted Essentially Non-Oscillatory fifth order) 對於強梯度或是不連續的現象有非常成功的結果，在一些中小尺度的氣象模式紛紛採用此方法，如 WRF 模式在 2012 年所釋出的 3.4 版本，新增 WENO5 為平流計算的數值方法，適合討論流經複雜地形產生的擾流 (turbulence) 結構(如 Qiu et al. (2008) 以 WRF 中 WENO5 的平流計算模擬邊界層中的擾流結構)。此外，在 Baba and Takashima (2013) 的工作中使用 WENO5 探討雲解析模式中雲邊界的水場氣場的分布，他們的結果顯示 WENO5 較能夠維持雲邊界的水氣梯度強度，水

氣梯度的維持，可以避免模式對於雲邊界的水氣梯度掌握能力不足而導致的對流強度被低估的現象。由於 WENO5 在氣象模式中的運用日漸廣泛，為了深入理解此數值方法的特性，在本研究第一部分將探討對於計算複雜強梯度結構較有效率的 WENO5、CRWENO5 (Compact Reconstruction WENO5) 以及 CRWENO5-LD (CRWENO5-Low Dissipation)，並且比較氣象中常見的數值方法，包括四階中差分法以及傅立葉波譜法 (Fourier spectral method)。

本研究第二部分將使用淺水模式，並結合卡氏座標單層邊界層模式探討邊界層內的不對稱似震結構，而邊界層內採用 WENO5 計算複雜似震結構。我們將探討三個問題，第一，在橢圓形眼牆颱風的觀測中，常發現深對流發生在橢圓形的長軸端點處(如圖 8 賀伯颱風)，在 Kuo et al. (1999) 的工作中以渦旋羅士比波 (vortex Rossby wave) 的動力過程解釋橢圓形眼牆的旋轉時間，但其中缺乏邊界層模式，無法解釋深對流現象。本研究將延續 Kuo et al. (1999) 的工作，將淺水模式結合邊界層模式，藉此探討深對流的形成機制。第二，由觀測中可以發現颱風核心渦旋和周圍較弱的渦度帶交互作用後形成雙眼牆結構(圖 9)。從觀測的觀點出發，Kuo et al. (2008) 以正壓模式為架構設計了一系列的理想渦旋實驗，歸納了影響雙渦旋交互作用後形成雙眼牆的因素，而此研究中將進一步探討，雙渦旋交互作用中的邊界層似震結構。第三，在 Hendricks et al. (2010) 的工作中，根據 Hurricane Ivy (2004) 雷達回波觀測設計理想渦旋實驗(圖 10)，解釋慣性重力波對颱風強度的影響，而本研究進一步探討慣性重力波對於颱風邊界層上升速度分布的影響。

本研究總共分為六章，第一章敘述研究背景與動機，第二章介紹三種數值方法，包括 WENO5、CRWENO5 以及 CRWENO5-LD，而在第三章中將以此三種數值方法、四階中差分法以及傅立葉波譜法 (Fourier spectral method) 進行數值實驗，第四章介紹本研究中所使用的淺水模式與單層邊界層模式，第五章為實驗結果，第六章為總結。

第2章 數值方法



在邊界層模式中，由於柏格斯方程式 (Burgers equation) 的數學特性，導致解在非線性平流後產生似震結構。數值方法對於震波結構¹需要特殊的處理方式，本章將介紹三種近年來特別針對震波結構所發展的數值方法，包括 WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory)、CRWENO (Compact Reconstruction WENO) 以及 CRWENO-LD (CRWENO-Low Dissipation)，以及本研究中數值實驗所使用的時間差分法。

2.1 簡介

震波結構或是強梯度特徵，一直都是數值模擬中非常具有挑戰的問題。根據 Sergei K. Godunov 在 1954 年的工作中指出，線性數值方法中，在計算震波結構時不產生震盪的，最高階數為一階精確 (Godunov's order barrier theorem)。這表示要得到高於一階精確度，必須有別於傳統的數值方法。所謂線性數值方法是指，數值方法在計算方程式中的空間微分時，採用的是固定權重的計算。例如一階精確度有限差分法求一階導函數，是將網格點右側一點和中間一點的資訊分別乘上 1 和 -1，再除以格點大小，亦即：

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_j} = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.1)$$

所以求函數的微分值時，權重係數不會因為函數的特性而改變。這種求解近似值的方式，對於可以無限次微分的函數不會產生問題，但是當函數有零次不連續時，用以上的方法求解，就會在不連續處的附近產生不合乎函數特性的震盪。

有兩種常用的方法減少或消除數值計算中不連續解附近的震盪，其一是使用高階線性數值方法並加入擴散項。選擇適當的擴散，可以消除掉不連續解附近的震

¹ 由於 Burgers equation 的強梯度特徵會在空間中傳遞，具有波動的特性，所以稱為震波結構。而邊界層內的高梯度特徵不具有波動的性質，所以稱為似震結構。

盪，同時在平滑處保持高階精確度，但是擴散項強度的選擇常須視問題而定，且震波結構的強度會因為擴散項而減弱。其二是在不連續附近，限制內插函數的階數，例如，在不連續處將內插函數從原本的高階降階成一階，便能夠保持震波結構處的強度，但是在這種情況下，平滑處的極值也會因此而變成一階精確。

由 Harten et al. (1987) 所提出的 Essentially Non-Oscillatory (ENO) 方法，成功的保持數值平滑處的高階精確解，同時在不連續或震波結構附近不產生數值震盪。ENO 將原本傳統數值計算中固定的權重，改成隨著函數的平滑特性而改變的權重。然而，ENO 在計算函數平滑度的過程中使用了大量的判斷句，導致計算較沒有效率。為了改善此問題，Liu et al. (1994) 提出了 WENO (Weighted ENO)，將原本 ENO 中以判斷句計算函數平滑度的步驟以計算權重 (Weight) 代替，大幅縮短計算時間。而在此之後，Jiang and Shu (1996) 建立在 Liu et al. (1994) 的概念，提出了新的函數平滑度權重計算法，在計算時間沒有顯著增加的情況下，將 Liu et al. (1994) 在平滑處的數值精確度由四階提升到五階。

2.2 空間差分

廣義的一維守恆定律可以寫成：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

其中的 u 為保守量，而 f 為通量函數。將方程式在等間距的格點上半離散化可得常微分方程式：

$$\frac{du_j}{dt} + \frac{1}{\Delta x} \left[h\left(x_{j+\frac{1}{2}}, t\right) - h\left(x_{j-\frac{1}{2}}, t\right) \right] = 0 \quad (2.3)$$

下標 j 表示計算的網格點，而 $j + \frac{1}{2}$ 是網格點的中間，而 u_j 表示 $u(x_j)$ 。在此我們定義一個函數關係式：



$$f(x) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} h(\xi) d\xi \quad (2.4)$$

若我們可以將 $h(x_{j+\frac{1}{2}})$ 、 $h(x_{j-\frac{1}{2}})$ 以通量函數 $\hat{f}(x_{j+\frac{1}{2}})$ 、 $\hat{f}(x_{j-\frac{1}{2}})$ 近似到 k 階準確：

$$h(x_{j+\frac{1}{2}}) = \hat{f}(x_{j+\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^k) \quad (2.5)$$

那麼由 (2.4) 式對 x 微分可以看出：

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_j} = \frac{h_{j+\frac{1}{2}} - h_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = \frac{\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} + O(\Delta x^k) \quad (2.6)$$

所以最主要的過程就是由數值計算得出 k 階精確的通量函數 $\hat{f}(x_{j+\frac{1}{2}})$ ，此過程稱為重構 (reconstruction)。以下三節所介紹的數值方法以不同的計算方式得出數值通量函數 $\hat{f}(x_{j+\frac{1}{2}})$ 。在此有一點值得注意，由 (2.5) 得出的 (2.6) 由於分母多除以了 Δx ，理論誤差應為 $O(\Delta x^{k-1})$ ，但在實際計算中得出的通量常較為平滑，所以在 (2.5) 式會多出一階的準確度而變成 $O(\Delta x^{k+1})$ ，所以再除以 Δx 後所得出的精確度為 $O(\Delta x^k)$ 。

純量的雙曲線方程式包括了向右或向左傳遞的波，而數值計算的上游法必須在上游多出一個點，所以要把通量函數 $f(x)$ 拆成左側為上游，以及右側為上游的兩種通量。在本文中純量的雙曲線方程式的通量函數拆解方式為 Lax-Friedrichs splitting：

$$f^\pm(u) = \frac{1}{2}(f(u) \pm \alpha u) \quad (2.7)$$

其中的 $\alpha = \max \left| \frac{df}{du} \right|$ ，就是整個計算範圍中風場的最大值，將 (2.7) 式對 u 微分就可以得出：

$$\frac{df^+}{du} = \frac{1}{2} \left(\frac{df}{du} + \alpha \right) \quad (2.8)$$



$$\frac{df^-}{du} = \frac{1}{2} \left(\frac{df}{du} - \alpha \right)$$

代入 α 的定義就可以看出，以上定義的兩個通量為左側上游以及右側上游，符合我們計算的要求。在下面的數值實驗中，若風向隨著空間變化，通量函數都是使用上面的方式拆解成兩種通量函數，經過重構之後所得出的數值通量函數 \hat{f} 是兩者相加：

$$\hat{f} = \hat{f}^+ + \hat{f}^- \quad (2.9)$$

下面的三個小節將介紹 \hat{f}^+ 的重構方式，而 \hat{f}^- 的重構方式只須將所有的過程對稱於 $x_{j+\frac{1}{2}}$ 即可得出。

2.2.1 WENO5

近代所發展的 WENO5 (Weighted Essentially Non-Oscillatory fifth order) 方法，最重要的概念在於求取函數的近似值時，會根據函數的平滑特性而改變權重，使得近似值在函數平滑的區域有高階精確度，在不連續處附近不會產生不合乎函數特性的震盪。

圖 11 為 WENO5 重構格點資訊示意圖。其中 $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}$ 為重構的數值通量函數， Δx 為網格點間距，在空間中的離散格點為圖中的黑色點，而箭頭所指的格點是重構通量函數 $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}$ 時所需要使用到的格點資訊。從圖中首先可以觀察到，數值的通量函數 $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}$ 並不在格點上，而是在格點之間，最後得到的一階微分為相鄰的通量函數相減後，再除以網格間距，如 (2.6) 式最右側的形式。

WENO5 最主要概念就是重構通量函數 \hat{f} ，以下就以左側為上游重構通量函數 $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^+$ 說明其概念(為了符號簡潔，以下的 $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^+$ 以 $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}$ 表示)。圖 11 中從 $j-2$ 到 $j+2$ 為重構 $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}$ 所需要使用的格點資訊，不同於線性數值方法，WENO5 並不直接將所有的格點資訊乘上權重，而是先將所有的格點資訊分成三個候選組，第一組是 $j-2$ 、 $j-1$ 、 j ，第二組是 $j-1$ 、 j 、 $j+1$ ，第三組是 j 、 $j+1$ 、 $j+2$ ，根據 Jiang and Shu (1996) 的重構方式，先重構每一個候選組的通量函數如下：



$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{3}f_{j-2} - \frac{7}{6}f_{j-1} + \frac{11}{6}f_j \quad (2.10)$$

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^2 = -\frac{1}{6}f_{j-1} + \frac{5}{6}f_j + \frac{1}{3}f_{j+1} \quad (2.11)$$

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^3 = \frac{1}{3}f_j + \frac{5}{6}f_{j+1} - \frac{1}{6}f_{j+2} \quad (2.12)$$

接著再計算出不同候選組的平滑特性 β ：

$$\beta_1 = \frac{13}{12}(f_{j-2} - 2f_{j-1} + f_j)^2 + \frac{1}{4}(f_{j-2} - 4f_{j-1} + 3f_j)^2 \quad (2.13)$$

$$\beta_2 = \frac{13}{12}(f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1})^2 + \frac{1}{4}(f_{j-1} - f_{j+1})^2 \quad (2.14)$$

$$\beta_3 = \frac{13}{12}(f_j - 2f_{j+1} + f_{j+2})^2 + \frac{1}{4}(3f_j - 4f_{j+1} + f_{j+2})^2 \quad (2.15)$$

其中的 β_1 、 β_2 以及 β_3 分別為第一、第二以及第三候選組的平滑程度。在說明權重計算之前，我們先檢視這三個候選組的通量函數達到最高階精確度(五階)的權重。首先，若依照下面的數字 c_1 、 c_2 以及 c_3 乘上第一、第二以及第三個候選組的權重：

$$c_1 = \frac{1}{10}, c_2 = \frac{6}{10}, c_3 = \frac{3}{10} \quad (2.16)$$

將 c_1 、 c_2 以及 c_3 分別乘上 (2.10)、(2.11) 以及 (2.12) 後可以得到最後的通量函數：

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{30}f_{j-2} - \frac{13}{60}f_{j-1} + \frac{47}{60}f_j + \frac{27}{60}f_{j+1} - \frac{1}{20}f_{j+2} \quad (2.17)$$

代入 (2.6) 式最右側計算一階導數可得：

$$\frac{\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = \frac{-4f_{j-3} + 30f_{j-2} - 120f_{j-1} + 40f_j + 30f_{j+1} - 6f_{j+2}}{120\Delta x} + (\Delta x^5) \quad (2.18)$$

可以看出 (2.18) 式為一般的五階有限差分上游法。原則上 WENO5 就是把五階有限差分法的權重根據函數的特性重新計算，使得震波結構以外的數值解為五階有限差分法的權重，而在震波結構處不產生數值震盪。由以上的討論可以知道，最佳的組合就是將三個候選組乘上 c_1 、 c_2 、 c_3 。而 WENO5 對不同的函數平滑度，將調整成新的權重 ω_1 、 ω_2 、 ω_3 ：

$$\omega_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \quad (2.19)$$

$$\omega_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \quad (2.20)$$

$$\omega_3 = \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \quad (2.21)$$

其中的 ω_1 、 ω_2 以及 ω_3 就分別是每一個候選組最後的權重，而 α_1 、 α_2 、 α_3 為：

$$\alpha_1 = \frac{c_1}{(\beta_1 + \epsilon)^m} \quad (2.22)$$

$$\alpha_2 = \frac{c_2}{(\beta_2 + \epsilon)^m} \quad (2.23)$$

$$\alpha_3 = \frac{c_3}{(\beta_3 + \epsilon)^m} \quad (2.24)$$

本研究選擇 Jian and Shu (1996) 所建議的參數 $m = 2$ 以及 $\epsilon = 10^{-6}$ 。分母加上 ϵ 是為了避免當 β 小於電腦計算的捨入誤差時， β 變成 0 導致 α 無限大。由以上可以看出， α 是由最佳權重 c 再除以函數的平滑程度 β ，這個權重最後再依照 (2.19)、(2.20) 和 (2.21) 標準化 (normalize) 成最後的權重 ω_1 、 ω_2 、 ω_3 。由於函數不平滑時 β 會越大時，而得出的 α 將越小，最後的權重 ω 也會比較小，所以可以看出，不平滑的候選組權重較小。

上面的討論是由 Jian and Shu (1996) 所提出的權重計算方式，在後來的改進中，為了讓趨近五階的速度更快，以上面計算的權重 ω 再計算一次新的權重，如



下：

$$\alpha_i(\omega_i) = \frac{\omega_i(c_i + c_i^2 - 3c_i\omega_i + \omega_i^2)}{c_i^2 + \omega_i(1 - 2c_i)} \quad (2.25)$$

其中 $i = 1, 2, 3$ ，而計算出來新的 α_i 再依照 (2.19)、(2.20) 以及 (2.21) 得算出最後的權重。這個方法所計算出的權重，比前面計算的方法更快趨近五階，而且耗散較少，但是計算所花的時間較多。本研究在數值實驗中採用 (2.25) 式的權重計算方式，但在單層邊界層模式中，由於模式測試後顯示結果非常接近，所以採用 (2.22)、(2.23) 以及 (2.24) 式的權重計算方式。

2.2.2 CRWENO5

奠基在 WENO5 的概念，Ghosh and Baeder (2012) 提出 CRWENO5 (Compact Reconstruction WENO5)，將原本重構的通量函數求法改成：

$$\frac{2}{3}\hat{f}_{j-\frac{1}{2}}^1 + \frac{1}{3}\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{6}(f_{j-1} + 5f_j) \quad (2.26)$$

$$\frac{1}{3}\hat{f}_{j-\frac{1}{2}}^2 + \frac{2}{3}\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^2 = \frac{1}{6}(5f_j + f_{j+1}) \quad (2.27)$$

$$\frac{2}{3}\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^3 + \frac{1}{3}\hat{f}_{j+\frac{3}{2}}^3 = \frac{1}{6}(f_j + 5f_{j+1}) \quad (2.28)$$

計算平滑程度的方式和上面 WENO5 相同，是由 (2.13)、(2.14) 以及 (2.15) 決定，但要將最佳權重改成：

$$c_1 = \frac{2}{10}, c_2 = \frac{5}{10}, c_3 = \frac{3}{10} \quad (2.29)$$

再把最後的權重 ω_1 、 ω_2 以及 ω_3 分別乘上 (2.26)、(2.27) 以及 (2.28)，得出一組方程式：

$$\left(\frac{2}{3}\omega_1 + \frac{1}{3}\omega_2\right)\hat{f}_{j-\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{3}\omega_1 + \frac{2}{3}(\omega_2 + \omega_3)\right]\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\omega_3\hat{f}_{j+\frac{3}{2}} \quad (2.30)$$

$$= \frac{\omega_1}{6} f_{j-1} + \frac{5(\omega_1 + \omega_2) + \omega_3}{6} f_j + \frac{\omega_2 + 5\omega_3}{6} f_{j+1}$$



WENO5 的重構方法只有出現 $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}$ ，但在上面的重構過程中包括 $\hat{f}_{j-\frac{1}{2}}$ 、 $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}$ 和 $\hat{f}_{j+\frac{3}{2}}$ ，所以在全部計算完之後，還必須解一個週期性三對角線矩陣 (periodic tridiagonal matrix) 得出最後的通量函數。此方法所使用的格點資訊較 WENO5 少，且得出的 L_2 誤差也比 WENO5 小，但最後必須計算週期性三對角線矩陣所花費的時間較多，為其主要缺點。

2.2.3 CRWENO5-LD

在理論的計算中發現 CRWENO5 (CRWENO5-Low Dissipation) 對於短波有過度耗散的現象，所以在 Ghosh and Baeder (2012) 中又提出了另一種改進方法，通量函數重構方式和 CRWENO5 的類似，但在重構過程中多了一個候選組的資訊。前三個候選組分別是 (2.26)、(2.27) 以及 (2.28)，而多增加一個候選組的資訊如下：

$$\frac{1}{3} \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^4 + \frac{2}{3} \hat{f}_{j+\frac{3}{2}}^4 = \frac{1}{6} (5f_{j+1} + f_{j+2}) \quad (2.31)$$

最佳權重分別是：

$$c_1 = \frac{3}{20}, c_2 = \frac{9}{20}, c_3 = \frac{7}{20}, c_4 = \frac{1}{20} \quad (2.32)$$

前三個候選組的平滑程度 β 和 WENO5 的一樣，分別是 (2.13)、(2.14) 以及 (2.15)，而 β_4 為：

$$\begin{aligned} \beta_4 &= \frac{13}{12} (f_{j+1} - 2f_{j+2} + f_{j+3})^2 + \frac{1}{4} (-5f_{j+1} + 8f_{j+2} - 3f_{j+3})^2 \\ \beta_4 &= \max(\beta_3, \beta_4) \end{aligned} \quad (2.33)$$

由於 β_4 的資訊全部來自 $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}$ 下游，為了數值計算的穩定性，第四個候選組的平滑度 β_4 不能大於第三組 β_3 ，如此一來最後的權重 ω_4 才會小於等於 ω_3 ，才能確保上游候選組的權重較大。

把各個候選組最後的權重 ω 分別乘上各個候選組，可得：

$$\begin{aligned} & \frac{2\omega_1 + \omega_2}{3} \hat{f}_{j-\frac{1}{2}} + \frac{\omega_1 + 2(\omega_2 + \omega_3) + \omega_4}{3} \hat{f}_{j+\frac{1}{2}} + (\omega_3 + 2\omega_4) \hat{f}_{j+\frac{3}{2}} \\ &= \frac{\omega_1}{6} f_{j-1} + \frac{5(\omega_1 + \omega_2) + \omega_3}{6} f_j + \frac{\omega_2 + 5(\omega_3 + \omega_4)}{5} f_{j+1} + \frac{\omega_4}{6} f_{j+2} \end{aligned} \quad (2.34)$$

由於是週期性邊界條件，所以最後必須再解一個週期性三對角線矩陣。

2.3 時間差分

本節將介紹數值實驗所使用的時間差分法，包括 WENO5、CRWENO5 以及 CRWENO5-LD 所使用的 TVD-RK3 (Total Variation Diminishing Runge-Kutta third order)，四階中差分法和波譜法所使用的 RK4 (Runge-Kutta fourth order)。

求解時間差分的問題可以寫成以下型式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(u) \quad (2.35)$$

其中 $L(u)$ 是 $-\partial f / \partial x$ 的數值解近似解，由 2.2 節所介紹的方法求得。以 TVD-RK3 將時間離散化為：

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \Delta t L(u^n) \\ u^{(2)} &= \frac{3}{4} u^n + \frac{1}{4} u^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t L(u^{(1)}) \\ u^{n+1} &= \frac{1}{3} u^n + \frac{2}{3} u^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t L(u^{(2)}) \end{aligned} \quad (2.36)$$

其中 Δt 為時間積分的步長，上標表示不同時間的數值解。

一般的 RK4 則可以寫成：

$$u^{(1)} = u^n + \frac{\Delta t}{2} L(u^n) \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned}
 u^{(2)} &= u^n + \frac{\Delta t}{2} L(u^{(1)}) \\
 u^{(3)} &= u^n + \Delta t L(u^{(2)}) \\
 u^{n+1} &= u^n + \frac{\Delta t}{6} [L(u^n) + 2L(u^{(1)}) + 2L(u^{(2)}) + L(u^{(3)})]
 \end{aligned}$$



在這裡有一點需特別注意，上述所介紹的 WENO5、CRWENO5 以及 CRWNO5-LD 必須使用 TVD-RK3 才能保證數值解在不連續處是穩定不震盪。

第3章 數值實驗



本章將以五種數值方法進行數值實驗，除了上述三種方法，另外包括了四階中差分法以及傅立葉波譜法，以此作為和一般氣象模式常見數值方法的比較。針對三種不同的數學問題進行實驗，分別為一維線性平流、柏格斯方程式和二維剛體旋轉流場的平流。一維線性平流是測試數值誤差特性最簡單的方法，由於初始場是平滑的函數，而且可以簡單地得出解析解，所以將以此數學問題比較五種數值方法的收斂特性、頻散誤差和耗散誤差。另外，柏格斯方程式將用來探討數值方法對震波結構的掌握特性。最後，在二維剛體旋轉流場平流的架構下，將對於氣象模式重要中的物理特性，包括能量守恆、質量守恆、最大值衰減量、負質量的產生量等問題進行探討。四階中差分法和傅立葉波譜法的時間積分採用 RK4 法，WENO5、CRWENO5 以及 CRWENO5-LD 三種方法皆採用 TVD-RK3 時間積分。

3.1 一維線性平流實驗

一維線性平流的方程式為：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

若給定初始函數 $u(x, 0) = u_0(x)$ ，則不同時間的解析解可以寫成：

$$u(x, t) = u_0(x - t) \quad (3.2)$$

可以看出初始函數形狀不變，並且以速度 1 向右移動。

我們將計算 L_2 誤差以測試這五種數值方法的收斂速率， L_2 誤差的定義如下：

$$L_2 = \sqrt{\frac{\sum_i (\psi_i - \phi_i)^2}{N}} \quad (3.3)$$

其中 ψ_i 和 ϕ_i 分別為解析解和數值解， N 是總格點數。設定的計算範圍為 $[-1, 1]$

的週期性邊界條件，初始條件為：

$$u_0(x) = \sin\left(\pi x - \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right) \quad (3.4)$$



計算 $t = 2$ s 的結果，即為解平流一周之後的結果。表 1、2 為實驗的 L_2 誤差和收斂速率 (r_c)。格點數由 20 增加到 160，庫朗數 (Courant number) 由 0.1(格點數為 20)每次減少為前一次的 $2/(2^{5/3})$ 倍(由於空間是 5 階收斂，時間是 3 階收斂)，以確保時間積分的誤差遠小於空間計算的誤差。

由表 1 可以看出，由於初始條件是簡單平滑的函數，四階中差分法在相對較粗的解析度下，就可以接近 4 階收斂。波譜法在格點數 20 的情況下，空間誤差就已經小於電腦計算的捨入誤差，所以隨著格點數增加，誤差沒有明顯的變化。另外，從表 2 可以看到，WENO5 的收斂速率隨著解析度增加而增大，而 CRWENO5 和 CRWENO5-LD 則隨著解析度增加有變小的趨勢，表示這幾種數值方法計算權重時，趨近最佳權重的速度不一樣，但是這三種數值方法在更高的解析度時(格點數 160)，都是接近 5 階收斂，和理論的預測一致。另一方面，從圖 12 可以清楚看出，除了波譜法外， L_2 誤差都隨著格點數增加而減少，而 WENO5、CRWENO5 和 CRWENO5-LD 的收斂速度相近，主要的差異是 L_2 誤差的大小，而且三者的收斂速率都比四階中差分法快。圖 13 為以上幾種數值方法的頻散和耗散誤差，由於波譜法的耗散誤差、頻散誤差，以及四階中差分法的耗散誤差都比捨入誤差小，所以沒有畫在圖上。另外，頻散誤差和耗散誤差的計算公式在附錄中有較詳盡的說明和推導。我們可以看出，這幾種數值方法的頻散誤差和耗散誤差都隨著格點數增加而減少，但是主要的誤差都來自於頻散誤差，而且都比耗散誤差大了一到兩個數量級，表示頻散誤差是線性平流問題中誤差的主要來源。

由這個實驗的結果顯示，當一般的數值方法(四階中差分法以及波譜法)以合乎理論值的速度收斂時，WENO5、CRWENO5 以及 CRWENO5-LD 也能夠有相當接近理論收斂速度的結果，表示這三種方法應用在震波結構以外的問題，能夠保持高階精確度。



3.2 柏格斯方程式實驗

柏格斯方程式為：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.5)$$

若改成通量型式可得通量函數為 $f(u) = u^2/2$ 。此方程式是討論震波結構最簡單的模型，由於非線性平流作用，原本平滑的函數將形成震波結構，而解析解可以透過以下的公式經由疊代法算出：

$$u(x, t) = u_0[x - u(x, t)t] \quad (3.6)$$

其中 u_0 是初始條件。

本次實驗的計算範圍為 $[0,1]$ 的週期性邊界，初始條件為：

$$u_0(x) = \bar{u} + \frac{1}{2\pi t_s} \sin(2\pi x) \quad (3.7)$$

在這裡選擇 $t_s = 2$ 、 $\bar{u}=2$ 。由解析解的公式可知：

$$u(x, t) = \bar{u} + \frac{1}{2\pi t_s} \sin\{2\pi[x - (\bar{u} + u)t]\} \quad (3.8)$$

對 x 偏微分後可得：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\pi t_s} \cos\{2\pi[x - (\bar{u} + u)t]\} \times 2\pi \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x} t\right) \quad (3.9)$$

由於震波結構位於sin波形的正中間處，所以 $2\pi[x - (\bar{u} + u)t] = \pi$ ，代入之後整理可得：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1/t_s}{1 - t/t_s} \quad (3.10)$$

當 t 由 0 接近 t_s 時， $\frac{\partial u}{\partial x}$ 會趨近於負無限大，所以 t_s 是理論的震波結構形成的時間，形成位置則在波形的正中央。

由圖 14 可以看出，WENO5、CRWENO5 和 CRWENO5-LD 在 $t = 1$ s 時，由於解析解還是平滑的，數值解吻合解析解。當接近震波結構形成時 ($t = 1.975$ s)，只有在震波結構的附近有較大的誤差，其他平滑的區域則相當吻合解析解，值得注意的是，WENO5、CRWENO5 和 CRWENO5-LD 等三種數值方法在接近震波結構處，不會產生不合乎解析解的震盪。而圖 15 是四階中差分法和波譜法的解，在解還是平滑的狀況下 ($t = 1$ s)，只有四階中差分法的上游有誤差，波譜法對於此類的平滑問題則有非常吻合解析解的結果。但是當震波結構形成時 ($t = 1.975$ s)，波譜法和四階中差分法都出現不合乎物理現象的震盪，四階中差分法的誤差大部分在震波結構的上游處，下游處有一些小幅的震盪，而波譜法的誤差則散布在整個計算範圍。若進一步觀察圖 16 可以發現，在震波結構形成之前 ($t = 1$ s)，所有的數值方法隨著增加格點數，收斂速度都有增加的趨勢，這是因為柏格斯方程式造成解析解的梯度變大，所以每一種數值方法的解析能力必須在更高的解析度下才會趨近理論值。另外，這五種數值方法在接近震波結構形成時 ($t = 1.975$ s)， L_2 誤差的數量級都接近。WENO5、CRWENO5 和 CRWENO5-LD 的誤差主要是在震波結構附近，而四階中差分法和波譜法的誤差在計算範圍內都很大。最後，由圖 17、18 可知，不論解為平滑或接近震波結構形成的時間，最主要的誤差都是來自於頻散誤差，而且五種數值方法的結果都是如此，頻散誤差大約都比耗散誤差大了 1 到 2 個數量級以上，和線性平流所得出的結果相當類似。

在這個實驗中，可以明顯看出 WENO5、CRWENO5 以及 CRWENO5-LD 可以得出相當合理的震波結構，而且在震波結構的附近沒有震盪產生，雖然在震波結構處附近的誤差導致震波結構強度的低估，但是誤差並沒有散布在整個計算，在平滑處依然可以相當吻合解析解，表示這三種數值方法除了平滑處為高精確度，相較於傳統的線性數值方法，有較好的處理震波結構能力。

3.3 二維剛體旋轉平流實驗

在大氣的模式中，包括許多物理場量的平流。在這個實驗中，我們以高斯錐體 (Gaussian cone) 代表被平流的物理場量，而風場選擇二維剛體旋轉的流場

(solid body rotation) 進行探討。

二維剛體旋轉平流的方程式為：

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \omega y \frac{\partial \psi}{\partial x} + \omega x \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (3.11)$$

其中 ψ 是被平流的場量， ω 是剛體旋轉流場的角速度，在這裡我們參考柳和郭 (1995) 的設定，角速度為 $\omega = 1/\sqrt{2}$ (圖 19)，此為最簡單的非輻散多維風場，被廣泛使用於數值平流之計算研究。數值的計算範圍為 $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ 的雙週期性邊界，初始條件為二維高斯錐體：

$$\psi(x, y, t = 0) = e^{-25[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]} \quad (3.12)$$

其中 $(x_0, y_0) = (-0.3, -0.3)$ ，網格點數為 33×33 ，最大風速為 $|\vec{V}_{\max}| = 1$ ，庫朗數為 0.1， $\Delta t = 1/160$ ，繞一圈需 1422 次積分。

由於高斯錐體為一無限連續的函數，性質非常類似流體，所以探討高斯錐體繞一圈和五圈之後的極值衰減、最小質、質量保守、能量保守、負質量的產生、 L_2 誤差、耗散誤差以及頻散誤差。

圖 20、21 以及 22 為高斯錐體平流五圈之後的結果。可以明顯觀察到每一種數值方法在高斯錐體的外側都有雜紋，表示這五種數值方法不為正定義法。另外，準確度越高的數值方法雜紋結構越細小，例如波譜法對於平滑的問題有最好的平流結果，所以雜紋的大小較小。另外，四階中差分法在上游有明顯的誤差，且誤差值達-0.1。五種數值方法中，四階中差分法的誤差最大。由圖 23、24 的 x 以及 y 剖面可以看出，四階中差分法在上游處有最大的誤差(圖 24(b)中 y 大於 0 處)，而除了波譜法與解析解近乎相似，其他數值方法的最大值有衰減的現象，但整體上來說，WENO5、CRWENO5 以及 CRWENO5-LD 的相位和解析解的差距不大。

表 3、4 為五種數值方法的各種性質，平流一圈以及五圈之後的結果。 $\frac{\psi_{\max}}{\psi_{0\max}}$ 表示最大值的保守狀況，完美的平流則最大值保守為 1.0000。由於高斯錐體的函數特性相當平滑，波譜法對於此種現象的平流表現優異，平流五圈之後的最大值依然為 1.0000。其他四種數值方法的最大值隨著平流圈數增加而下降，其中 WENO5 下



降幅度最大，平流一圈的最大值降為原本的 0.9396，而五圈之後更下降至原本的 0.8347，下降的幅度超過四階中差分法，這是因為 Jiang and Shu (1996) 的權重計算在函數微分值接近 0 時會有較強耗散的結果。而 CRWENO5 以及 CRWENO5-LD 的最大值保守狀況較佳，平流五圈之後最大值依然可以保持在 0.94 以上。

ψ_{\min} 表示數值解的最小值。由於高斯錐體的函數值都大於 0，所以最小值不為負。表 3 中可以看到，五種數值方法都會產生負值 (ψ_{\min})，四階中差分法產生的最大負值，平流一圈後為其他四種數值方法的 100 倍，平流五圈之後則為 1000 倍。而其他四種數值方法所產生的最大負質量大約都在 10^{-4} 的數量級。

$\frac{\Sigma\psi}{\Sigma\psi_0}$ 表示質量保守，完美的平流質量保守為 1.0000。從表 3 中看到，平流一圈後，所有的數值方法幾乎都保持在 1.0000，但是平流五圈之後 WENO5、CRWENO5 以及 CRWENO5-LD 都多出了一些質量，為原本的 1.0002 倍。由 (2.7) 式可以看出，通量拆解是以最大的風速，將通量分別拆解成左側為上游以及右側為上游兩個通量，在過程中將通量 f 加上最大風速與函數值的乘積(即 αu 項)，可能是導致質量增加的原因。 $\frac{\Sigma\psi^2}{\Sigma\psi_0^2}$ 表示能量保守，完美的平流量值為 1.0000。表 3 中顯示 WENO5、CRWENO5 以及 CRWENO5-LD 能量減少，而四階中差分法和波譜法則沒有此現象，雖然能量減少是平滑函數平流問題的缺點，但能量的減少對於震波結構問題的穩定性非常關鍵，能量的減少有助於消除震波結構附近的數值震盪，使數值計算穩定。

$\frac{\Sigma\psi_{\text{neg}}}{\Sigma\psi_0}$ 為負質量的產生量。四階中差分法的負質量在平流五圈後，佔了總質量的 0.2217，其他四種方法產生的負質量遠小於總值量。表 4 中最後所列的三個性質，分別為 L_2 誤差、頻散誤差以及耗散誤差。由於 L_2 誤差可視為由頻散誤差以及耗散誤差的總和，所以比較數值方法的頻散和耗散誤差的相對大小，就可以了解數值誤差產生來源。表 4 中的四階中差分法和波譜法幾乎沒有耗散誤差，誤差幾乎都來自於頻散誤差，而 WENO5、CRWENO5 以及 CRWENO5-LD 的耗散誤差和頻散誤差的數量級接近，且耗散誤差比四階中差分法和波譜法大了許多。這可能來自於兩個原因，第一，WENO5、CRWENO5 以及 CRWENO5-LD 都為上游法，由數值理論可知，數值的上游法在計算時會耗散。第二，由於 WENO5、CRWENO5 以及 CRWENO5-LD 會重新計算權重，而權重的計算方式也會導致耗散，使得數值解的

耗散誤差遠較四階中差分法及波譜法大。

總結上面的觀察，我們發現波譜法對於平滑函數的線性平流問題的結果幾乎接近完美，而其他的數值方法在各個性質的表現上各有優劣。WENO5、CRWENO5 以及 CRWENO5-LD 對於平滑的函數平流問題，各種性質的表現接近有限差分法，但經過權重的重新計算後以及通量拆解，導致能量的耗散以及質量的增加。整體而言，對於計算的物理現象若沒有震波結構或是強梯度的特徵，則依照各種性質的特性，波譜法是最佳的選擇。若物理現象中包含震波結構或強梯度現象，同時也必須保持平滑區域的複雜結構時，WENO5、CRWENO5 以及 CRWENO5-LD 的解可以保證這些現象在平滑區域為高階精確度，且同時可以維持合理的震波結構，而各種數值特性則接近有限差分法。

第4章 模式與實驗設計



本章將介紹實驗中所使用的模式，包括輻散正壓模式 (divergent barotropic model)，以及推導 Williams et al. (2013) 的軸對稱單層邊界層模式，並且將軸對稱的單層邊界層模式改寫為卡氏座標，最後與 Williams et al. (2013) 中軸對稱的風場結果作比較。

4.1 輻散正壓模式

輻散正壓模式即為淺水模式。在實驗中使用單層的淺水模式代表自由大氣，在卡氏座標中展開可以得到：

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial u_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial u_s}{\partial y} - f v_s = -g \frac{\partial h_s}{\partial x} + v \nabla^2 u_s \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial v_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial y} + f u_s = -g \frac{\partial h_s}{\partial y} + v \nabla^2 v_s \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial h_s}{\partial t} + \frac{\partial (u_s h_s)}{\partial x} + \frac{\partial (v_s h_s)}{\partial y} = v \nabla^2 h_s \quad (4.3)$$

下標 s 表示淺水模式的變數，其中 u_s 是 x 方向的風速， v_s 是 y 方向的風速， h_s 是高度場， v 為擴散係數， f 是科氏參數。數值計算預報渦度和散度場，可以寫成：

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial [(f + \zeta) u_s]}{\partial x} + \frac{\partial [(f + \zeta) v_s]}{\partial y} = v \nabla^2 \zeta \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} - \frac{\partial [(f + \zeta) v_s]}{\partial x} + \frac{\partial [(f + \zeta) u_s]}{\partial y} + \nabla^2 \left[g h_s + \frac{1}{2} (u_s^2 + v_s^2) \right] = v \nabla^2 \delta \quad (4.5)$$

其中 $\zeta = \frac{\partial v_s}{\partial x} - \frac{\partial u_s}{\partial y}$ 是相對渦度，而 $\delta = \frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{\partial v_s}{\partial y}$ 是散度。(4.3)、(4.4) 和 (4.5) 為

數值計算的方程式。



4.2 單層邊界層模式結合輻散正壓模式

本節前半部分將推導 Williams et al. (2013) 中的軸對稱單層邊界層模式，此外，為了探討颱風邊界層的非軸對稱動力，本研究將軸對稱單層邊界層模式改寫成卡氏座標，而卡氏座標的方程式型式將在本節後半部介紹。

在單層邊界層的理论架構中有三個主要的假設，第一個是邊界層中的水平風場不隨高度變化，所以由自由大氣向下傳遞的動量會平均分配在邊界層中。第二個是邊界層的厚度不變，第三個是邊界層中的流體不可壓縮。由這三個假設中可以得出邊界層頂的上升速度為輻合的量值再乘上邊界層的厚度。

4.2.1 軸對稱單層邊界層模式

以下將推導 Williams et al. (2013) 軸對稱單層邊界層模式中的控制方程式。圓柱座標中的邊界層方程式以平流型式展開可以寫成：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} - w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{v^2}{r} + f_v - f_{v_g} + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_M \frac{\partial u}{\partial z} \right) + K_H \nabla^2 u \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} - w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{uv}{r} - f_u + f_{u_g} + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_M \frac{\partial v}{\partial z} \right) + K_H \nabla^2 v \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial(ru)}{r \partial r} + \frac{\partial v}{r \partial \phi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.8)$$

其中 u 為徑向風速， v 為切向風速， w 為上升速度， f_{u_g} 以及 f_{v_g} 分別代表切向以及徑向的氣壓梯度力， K_M 為渦流黏滯係數 (eddy viscosity coefficient)， K_H 為擴散係數 (diffusion coefficient)。(4.6)、(4.7) 中右側前三項為平流項，依次為曲率項、科氏力項、氣壓梯度力項、摩擦力項以及水平擴散項，而 (4.8) 為連續方程式。

將邊界層內風場垂直積分，而邊界條件令地表沒有上升速度 ($w|_{z=0} = 0$)，且邊界層頂水平風場不隨高度改變 ($\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$)，則 (4.6)、(4.7) 可以寫成：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_b}{\partial t} = & - \left(u \frac{\partial u}{\partial r} \right)_b - \left(\frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right)_b - [uw]|_{z=h} + \frac{v_b^2}{r} + fv_b - fv_g \\ & - K_M \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} + K_H \nabla^2 u_b \end{aligned} \quad (4.9)$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial v_b}{\partial t} = & - \left(u \frac{\partial v}{\partial r} \right)_b - \left(\frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} \right)_b - [vw]|_{z=h} - \frac{(uv)_b}{r} - fu_b + fu_g \\ & - K_M \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} + K_H \nabla^2 v_b \end{aligned} \quad (4.10)$$

其中 $O_b = \int_{z=0}^{z=h} O dz$ 為整層邊界層的積分，而 h 為邊界層厚度。(4.9)、(4.10) 為整層邊界層的動量方程式，其中兩項 $[uw]|_{z=h}$ 及 $[vw]|_{z=h}$ 為邊界層頂的動量通量，將動量通量拆成向上以及向下兩部分，亦即：

$$[uw]|_{z=h} = u_b w^+ + u_{z>h} w^- \quad (4.11)$$

$$[vw]|_{z=h} = v_b w^+ + v_{z>h} w^- \quad (4.12)$$

上面兩式右側第一項表示邊界層的動量向上傳遞到自由大氣，第二項表示上方的自由大氣傳遞到邊界層的動量通量，其中 w^+ 以及 w^- 的定義如下：

$$w^+ = \frac{1}{2}(w + |w|) \quad (4.13)$$

$$w^- = \frac{1}{2}(w - |w|) \quad (4.14)$$

由自由大氣處於梯度風平衡可知 u 的分量很小，所以省略了 $u_{z>h} w^-$ 後只剩下 (4.11) 的第一項，而 (4.12) 則不變。

考慮海氣交互作用，摩擦力項可以用 bulk drag law 參數化：

$$K_M \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = C_D |U| u \quad (4.15)$$



$$K_M \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} = C_D |U| v \quad (4.16)$$

其中 $U = 0.78(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$ 為離地高度 10 公尺的風速，而根據 Powell et al. (2003) 的觀測可知，一般而言離地高度 10 公尺的風速約為地表平均風速的 0.78 倍。

$$C_D = 10^{-3} \begin{cases} \frac{2.70}{U} + 0.142 + 0.0764U & , \text{if } U \leq 25 \text{ m s}^{-1} \\ 2.16 + 0.5406 \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{U - 25}{7.5} \right] \right\} & , \text{if } U \geq 25 \text{ m s}^{-1} \end{cases} \quad (4.17)$$

其中 $U \leq 25 \text{ m s}^{-1}$ 的部分是根據 Large et al. (1994) 的理論研究，在風速趨近於 0 的時候， C_D 必須趨近無限大，而 $U \geq 25 \text{ m s}^{-1}$ 則是根據 Powell et al. (2003) 以及 Donelan et al. (2004) 的研究，在風速大時 C_D 必須要在 2.5×10^{-3} 到 2.8×10^{-3} 之間。

利用梯度風平衡關係式：

$$fv_g = fv_{gr} + \frac{v_{gr}^2}{r} \quad (4.18)$$

其中 v_{gr} 為梯度風。將方程式除以邊界層厚度 h ，可以得到單層邊界層模式的控制方程式為：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} - w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{v^2}{r} + f(v - v_{gr}) - \frac{v_{gr}^2}{r} - C_D |U| \frac{u}{h} + K_H \nabla^2 u \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} - w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{uv}{r} - f(u - u_{gr}) - C_D |U| \frac{v}{h} + K_H \nabla^2 v \quad (4.20)$$

在圓對稱假設下 $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$ ，且可以進一步簡化 $\nabla^2 u$ 為：

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (4.21)$$



而 $\nabla^2 v$ 可以此類推。整理上面所述可以將方程式寫成：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & -u \frac{\partial u}{\partial r} + w^- \left(\frac{u}{h} \right) + \left(f + \frac{v + v_{gr}}{r} \right) (v - v_{gr}) \\ & - C_D U \frac{u}{h} + K_H \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial(ru)}{r \partial r} \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -w^- \left(\frac{v_{gr} - v}{h} \right) - \left(f + \frac{\partial(rv)}{r \partial r} \right) u - C_D U \frac{v}{h} + K_H \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial(rv)}{r \partial r} \right) \quad (4.23)$$

$$w = -h \frac{\partial(ru)}{r \partial r} \quad (4.24)$$

(4.22)、(4.23) 以及 (4.24) 式為 Williams et al. (2013) 軸對稱單層邊界層模式的控制方程式。在此有兩點須特別注意，第一，由於 Williams et al. (2013) 採用軸對稱模式，且假設自由大氣渦旋維梯度風平衡，所以變數以 u_{gr} 和 v_{gr} 表示，但在淺水模式中，由於風場並非處於梯度風平衡，所以在下面章節中的推導，並不會將淺水模式的風場以下標 gr 表示。第二，在 (4.22) 以及 (4.23) 中 w^- 的正負號和 Williams et al. (2013) 異號，這是由於 w^- 定義的方式不同，使得正負號相反。

4.2.2 卡式座標單層邊界層模式

為了探討非軸對稱的過程，我們將 Williams et al. (2013) 中的軸對稱單層邊界層模式，以平流形式在卡氏座標中展開：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w^- \left(\frac{u_s - u}{h} \right) + fv - g \frac{\partial h_s}{\partial x} - C_D U \frac{u}{h} + K_H \nabla^2 u \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w^- \left(\frac{v_s - v}{h} \right) - fu - g \frac{\partial h_s}{\partial y} - C_D U \frac{v}{h} + K_H \nabla^2 v \quad (4.26)$$



$$w = -h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (4.27)$$

其中 u 為 x 方向風速， v 為 y 方向風速， w 為上升速度。不同於 Williams et al. (2013) 的控制方程式，我們直接把氣壓梯度力項寫成 $g \frac{\partial h_s}{\partial x}$ ，以此和淺水模式中的壓力項連結。(4.25)、(4.26) 式中右側的前三項為平流項，其他依序為科式力項、氣壓梯度力項、摩擦力項以及水平擴散項。另外，有一點必須注意，在圓柱座標中因為軸對稱假設，(4.22)、(4.23) 式中沒有切向平流，但在 (4.25)、(4.26) 式中並沒有假設軸對稱，所以風速有 x 以及 y 方向的變化。

由於 Williams et al. (2013) 邊界層模式的計算採用二階中差分法，數值計算時會在似震結構附近產生不合乎物理現象的震盪，為了消除這些震盪，在他們的研究中加入了水平擴散項，也就是 (4.25)、(4.26) 式中的最後一項。在文章的最後也提到，加入水平擴散項是為了在數值計算中，得到合乎物理現象似震結構的其中一種方法，還有許多其他的方法可以達到這個目的，本研究使用的 WENO5 可以正確的模擬出似震結構，所以下面的方程式推導中不包含水平擴散項。

由於 WENO5 的計算格式為通量型式，所以 (4.25)、(4.26) 式改寫成通量型式為；

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial uv}{\partial y} + u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - w^- \left(\frac{u_s - u}{h} \right) + fv - g \frac{\partial h_s}{\partial x} - C_D U \frac{u}{h} \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial uv}{\partial x} - \frac{\partial v^2}{\partial y} + v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - w^- \left(\frac{v_s - v}{h} \right) - fu - g \frac{\partial h_s}{\partial y} - C_D U \frac{v}{h} \quad (4.29)$$

由(4.27)式可知 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{w}{h}$ ，並將 $w = w^+ + w^-$ 代入之後整理可得：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial uv}{\partial y} - w^+ \frac{u}{h} - w^- \frac{u_s}{h} + fv - g \frac{\partial h_s}{\partial x} - C_D U \frac{u}{h} \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial uv}{\partial x} - \frac{\partial v^2}{\partial y} - w^+ \frac{v}{h} - w^- \frac{v_s}{h} - fu - g \frac{\partial h_s}{\partial y} - C_D U \frac{v}{h} \quad (4.31)$$

數值計算以 (4.30)、(4.31) 以及 (4.27) 為控制方程式。

邊界層模式中的 u_s 以及 v_s 為淺水模式中的風場，而壓力場為 $g \frac{\partial h_s}{\partial x}$ 以及 $g \frac{\partial h_s}{\partial y}$ 。另外，在 kuo et al. 尚未發表的著作中，使用了和本研究相同的架構，但其中有兩個主要的差異，第一，自由大氣以非輻散正壓模式表示，而壓力場則根據非輻散正壓模式所計算出來的流函數，再透過非線性平衡方程式 (nonlinear balance equation) 得出：

$$\frac{1}{\rho} \nabla^2 p = f \nabla^2 \psi + 2 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \quad (4.32)$$

第二，以加入 Lancozs filter 後的波譜法計算為單層邊界層模式的數值方法。在橢圓形渦旋實驗中，我們將比較兩個不同模式的邊界層風場。

本研究以淺水模式代表自由大氣，探討理想模式所驅使的邊界層似震結構的動力過程。

4.3 模式設定

此研究設定在 f-plane 上，淺水模式和單層邊界層模式的設定相同，模式的計算範圍為 300 km × 300 km，網格點數為 512 × 512 點，淺水模式的空間微分以 Fourier pseudo-spectral method 計算，去鋸齒化 (dealiasing) 後為 342 × 342 點，而單層邊界層模式為 WENO5，邊界條件均為雙週期性邊界條件，淺水模式的時間積分為 Adam-Bashforth 3rd order，單層邊界層模式為 TVD-RK3，時間積分秒距為 1 秒，淺水模式內的擴散係數 ν 為 $6.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ，淺水模式的平均厚度為 4077 m，產生的重力波的波速為 200 m s^{-1} ，邊界層厚度為 1000 m，科氏參數 $f = 5.0 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ 。

Williams et al. (2013) 的工作中，針對邊界層厚度進行敏感度測試，圖 25 為其敏感度實驗結果，分別測試邊界層厚度為 500、750、1000、1250 以及 1500 公尺時

邊界層內的風場分布。結果顯示，當邊界層較厚時，產生的內流較小，而似震結構距離中心較遠，但所產生的上升速度較大。舉例來說，當邊界層的厚度為 1500 公尺，產生的內流約為 18 m s^{-1} ，似震結構在距離中心約 14 公里處，邊界層的上升速度約為 27 m s^{-1} ，而當邊界層厚度為 500 公尺時，雖然最大內流可以達到 30 m s^{-1} ，似震結構距離中心約 11 公里處，但從連續方程式得出的邊界層上升速度卻較小，約為 15 m s^{-1} 。雖然邊界層厚度會影響似震結構的位置、強度等，但我們認為固定邊界層的厚度仍然足以描述邊界層內似震結構的動力過程，所以為了簡化，在本研究中選用邊界層厚度為 1000 公尺。

4.4 模式測試與數值方法比較

在實驗開始之前，我們針對卡氏座標的單層邊界層模式進行測試，並且比較不同的數值方法對於邊界層似震結構的掌握能力，包括程維毅(2014)的碩士論文中使用加入 Lanzocs filter 的傅立葉波譜法，本研究中的 WENO5、CRWENO5、CRWENO5-LD 以及 Williams et al. (2013) 加入擴散項的高解析度二階中差分法。實驗的初始場沿用 Williams et al. (2013) 中的渦度強度，設定如下：

$$\zeta_{\text{gr}} = \begin{cases} \zeta_0 & , \text{if } r < r_1 \\ \zeta_0 S\left(\frac{r-r_1}{r_2-r_1}\right) + \zeta_1 S\left(\frac{r_2-r}{r_2-r_1}\right) & , \text{if } r_1 \leq r \leq r_2 \\ \zeta_1 & , \text{if } r > r_2 \\ \zeta_1 S\left(\frac{r-r_3}{r_4-r_3}\right) & , \text{if } r_3 \leq r \leq r_4 \\ 0 & , \text{if } r > r_4 \end{cases} \quad (4.3)$$

Williams et al. (2013) 中 category 1、3 和 5 的強度參數如表 5，渦度分布如圖 2。以強度 category 3 為標準測試四種的數值方法，參數設定分別為 $\zeta_0 = 5.0 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ， $\zeta_1 = 7.5 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ， $r_1 = 5.0 \times 10^3 \text{ m}$ ， $r_2 = 8.0 \times 10^3 \text{ m}$ ， $r_3 = 1.3 \times 10^4 \text{ m}$ ， $r_4 = 2.05 \times 10^4 \text{ m}$ 。

在 Williams et al. (2013) 的工作中是以軸對稱的假設進行計算，所以實際上是一維的計算，雖然在程維毅 (2014) 以及本研究中所使用的是二維卡氏座標，但自由大氣的渦旋同樣為軸對稱，經過計算後作軸對稱平均所得的邊界層風場結構應

該要相似，下面比較五種不同數值方法的邊界層模式所計算的邊界層上升速度。

由圖 26 的比較可以看出，對於強度 category 3 的渦旋，WENO5、CRWENO5 以及 CRWENO5-LD 在模式時間第 3 個小時的邊界層穩定態似震結構的位置和強度幾乎一致，代表這三種數值方法對於單層邊界層的似震結構掌握的能力相似，若比較圖 4 中渦旋強度 category 3 第 3 個小時邊界層風場的結果可以發現似震結構位置都在 14 公里處，但這三種數值方法的上升速度相較於圖 4 的 22 m s^{-1} 小，約為 17 m s^{-1} 。由於 WENO5、CRWENO5 以及 CRWENO5-LD 的邊界層風場的似震結構強度與位置幾乎相同，以下的討論以 WENO5 為主，且在第 5 章實驗所使用的邊界層模式的數值方法採用 WENO5。

圖 27 為 Williams et al. (2013) 加入擴散項的高解析度二階中差分法、WENO5 以及程維毅 (2014) 碩士論文中加入 Lancozs filter 的波譜法對於強度為 category 3 的渦旋，邊界層風場達到穩定態時的上升速度。由於切向風和徑向風的分布相當類似，在此主要討論上升速度的結果。二階中差分法的解析度為 100 m 且為軸對稱，所得出的上升速度極值為 22 m s^{-1} ，為三者中最大，而 WENO5 的最大上升速度為 17 m s^{-1} ，波譜法的最大上升速度為 12 m s^{-1} 。值得注意的是，WENO5 的解析度為二階中差分法的五分之一 ($\Delta x = 500 \text{ m}$)，且經過軸對稱平均後極值會變得較小，但最大上升速度的量值卻非常接近 100 m 解析度的二階中差分法，顯示 WENO5 對於似震結構的強度維持有相當優異的表現。反觀加入濾波的波譜法，儘管解析度較 WENO5 高，最大的上升速度卻只有 12 m s^{-1} 。

圖 28 為不同解析度的 WENO5 對於強度 category 3 的渦旋的邊界層穩定態的徑向風以及切向風分布，首先可以看到不同解析度的切向風和徑向風的似震結構位置、強度有些微改變，例如切向風最大值在解析度 1000 m 時為 60 m s^{-1} ，位置在 14 公里處，而解析度 250 m 時為 65 m s^{-1} ，位置在 13 公里處，風速差值僅 5 m s^{-1} ，而由上面的討論得知，切向風和徑向風場的結構隨著數值方法的不同沒有顯著的變化，最主要的差異是最大上升速度。由圖 29 中可以看到，邊界層上升速度最大值隨著解析度增加而顯著增加，位置則稍微向內側移動。當解析度為 1000 m 時，上升速度最大值為 10 m s^{-1} ，位置在 14 公里處，而當解析度增加到 250 m 時，最大上升速度可以達到 25 m s^{-1} ，增加幅度為 2.5 倍，此量值甚至超越解析度 100 m 的二階中差分法的 22 m s^{-1} ，位置則在 13 公里處，與二階中差

分的似震結構位置相同，表示 WENO5 對於似震結構的強度掌握能力相較於加入擴散的傳統數值方法有更好的結果。

圖 30 為五種不同數值方法對於渦旋 category 3，第 3 個小時的上升速度。我們可以發現，WENO5、CRWENO5 以及 CRWENO5-LD 在解析度 500m 的上升速度常接近，表示這三種方法在解析度一樣時，對於似震強度的維持有非常接近的結果。另外，比較二階中差分法、傅立葉波譜法與 WENO5 可知，WENO5 在較低解析度下，可以得出其他兩種方法在較高解析度下似震結構的強度，表示 WENO5 是較好的計算似震結構數值方法。

4.5 實驗設計

4.5.1 橢圓形渦旋

我們根據 Kuo et al. (1999) 所使用的橢圓渦旋初始場，以此模擬橢圓形颱風眼牆的結構。

我們可以定義一相對半徑：

$$r = \left[\left(\frac{x - x_0}{a} \right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.34)$$

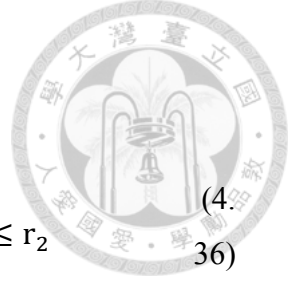
其中 a 、 b 分別代表橢圓形渦旋中的半長軸和半短軸的長度， (x_0, y_0) 為橢圓渦旋的中心，並令渦度隨半徑變化的趨勢類似 Rankine vortex：

$$p(r) = \begin{cases} 1 - \exp(-30/r) \exp(1/(r - 1)) & , \text{if } r \leq 1 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.35)$$

實驗中選取的參數為 $a = 3.0 \times 10^4 \text{ m}$ ， $b = 2.0 \times 10^4 \text{ m}$ ， $\zeta_0 = 3.0 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ 。

4.5.2 雙眼牆實驗

雙眼牆實驗中，考慮兩個大小不同的渦旋，其中較小的渦旋具有較大的渦度，較大的渦旋則渦度較小。我們分別設計三個不同的實驗，首先，實驗 Exp-VS 根據 Kuo et al. (2008)，將小而強的渦旋結構設計為具有渦裙 (vorticity skirt) 結構：



$$\zeta_{gr}(r) = \zeta_1 \begin{cases} 1 & , \text{if } r \leq r_1 \\ S\left(\frac{r-r_1}{r_2-r_1}\right) + 0.5(1-\alpha)\left(\frac{r_2}{R_1}\right)^{-\alpha-1} S\left(\frac{r_2-r}{r_2-r_1}\right) & , \text{if } r_1 \leq r \leq r_2 \\ 0.5(1-\alpha)\left(\frac{r}{R_1}\right)^{-\alpha-1} & , \text{if } r \geq r_2 \end{cases} \quad (4.36)$$

其中 $r_1 = 0.65R_1$, $r_2 = 0.81R_1$, 在 r_1 和 r_2 之間為渦度過渡帶，我們將使用 S 函數使得渦度帶連續：

$$S(x) = 1 - 3x^2 + 2x^3 \quad (4.37)$$

S 函數的特性為 x 在 0 到 1 之間連續，且一次微分值在邊界(0 和 1)也連續，使得模式在計算微分時不至於出現不合理的值。

另外，大而弱的 Rankine vortex 可以設計為：

$$\zeta_{gr}(r) = \zeta_2 \begin{cases} 1 & , \text{if } 0 \leq r \leq r_1 \\ S\left(\frac{r-r_1}{R_2-r_1}\right) & , \text{if } r_1 \leq r \leq R_2 \\ 0 & , \text{if } R_2 \leq r < \infty \end{cases} \quad (4.38)$$

其中 $r_1 = 0.65R_2$, 同樣 r 在 r_1 和 R_2 之間為渦度過渡帶。而實驗中所選取的參數為 $\zeta_1 = 2.1 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, $\zeta_2 = 3.0 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, $R_1 = 1.0 \times 10^4 \text{ m}$, $R_2 = 4.0 \times 10^4 \text{ m}$, $\alpha = 0.7$, 而兩渦度中心之間的距離 $d = 8.0 \times 10^4 \text{ m}$ 。

另外兩個實驗 Exp-L 以及 Exp-S，我們調整參數 $\alpha = 1$ ，使得兩個渦旋都為 Rankine vortex，而距離則分別為 $d = 6.0 \times 10^4 \text{ m}$ 以及 $d = 4.0 \times 10^4 \text{ m}$ 。

4.5.3 三極渦旋

Hendricks et al. (2010) 注意到雷達回波與低層渦度的相關性，設計初始渦度場為一個小而強的圓形渦旋，以及一個中心較弱、外環較強的橢圓渦旋(如圖 10(b))，我們根據文章所提供的初始渦度場分布圖，反推渦度場而設計下面的渦度場。

我們定義一個相對半徑 r_e ：



$$r_e = \left[\left(\frac{x - x_e}{a} \right)^2 + \left(\frac{y - y_e}{b} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.39)$$

其中 $a = 6.0 \times 10^4$ m, $b = 4.0 \times 10^4$ m, 橢圓中心為 $(x_e, y_e) = (0, 0)$ 。根據 r_e 的定義設計環形的橢圓形渦旋為：

$$\zeta_e = \begin{cases} \zeta_{in} \\ \zeta_{in} S \left(\frac{r_e - R_1}{R_2 - R_1} \right) + \zeta_{out} S \left(\frac{R_2 - r_e}{R_2 - R_1} \right) & , \text{if } R_1 \leq r_e \leq R_2 \\ \zeta_{out} \\ \zeta_{out} S \left(\frac{r_e - R_3}{R_4 - R_3} \right) & , \text{if } R_3 \leq r \end{cases} \quad (4.40)$$

其中 $R_1 = 0.67, R_2 = 0.8, R_3 = 0.87, R_4 = 1, \zeta_{in} = 4.5 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}, \zeta_{out} = 2.75 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, S 函數定義如 (4.37)。

另外，我們定義 r 為：

$$r = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (4.41)$$

其中 $x_0 = 2.3 \times 10^4$ m, $y_0 = 0$ m, 由 r 的定義我們設計小而強的渦旋為：

$$\zeta_{cir} = \begin{cases} \zeta_1 - \zeta_{in} \\ \zeta_1 S \left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \right) + \zeta_{in} S \left(\frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} \right) - \zeta_{in} & , \text{if } r_1 \leq r \leq r_2 \end{cases} \quad (4.42)$$

ζ_{cir} 表示為圓形的渦度場，其中的參數分別為 $r_1 = 1.2 \times 10^4$ m, $r_2 = 1.5 \times 10^4$ m, $\zeta_1 = 1.6 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, 上面的 S 函數的定義和 (4.37) 式相同, (4.42) 式中減去 ζ_{in} 是由於小而強的圓形渦旋放在橢圓形渦旋的內部，才需要減去橢圓渦旋內部的渦度 ζ_{in} 。最後，我們將此渦旋以外的區域設定為負值，此負值的大小剛好使得計算範圍內的平均環流為 0。

我們在此實驗中也設計一個強橢圓形渦旋，以此渦旋和 14 小時的三極渦旋作比較。定義相對半徑：

$$r_{es} = \left[\left(\frac{x - x_{es}}{a} \right)^2 + \left(\frac{y - y_{es}}{b} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.43)$$

其中的 $a = 1.8 \times 10^4 \text{ m}$ ， $b = 1.0 \times 10^4 \text{ m}$ ， $(x_{es}, y_{es}) = (0, 0)$ ，渦度場為：

$$\zeta_{es} = \begin{cases} \zeta_2 & , \text{if } 0 \leq r_{es} \leq r_a \\ \zeta_2 S \left(\frac{r_{es} - r_a}{r_b - r_a} \right) & , \text{if } r_a \leq r_{es} \leq r_b \\ 0 & , \text{if } r_b \leq r_{es} < \infty \end{cases} \quad (4.44)$$

其中 $\zeta_2 = 1.58 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ ， $r_a = 1$ ， $r_b = 1.21$ ， S 函數和 (4.37) 式的定義相同。

第5章 實驗結果



本章將討論淺水模式結合單層邊界層模式的實驗結果，分別為橢圓形渦旋、雙眼牆實驗以及三極渦旋，並討論邊界層內上升速度演變。

5.1 橢圓形渦旋

圖 31 為實驗中的位渦場、散度場以及邊界層上升速度。首先，由圖中可以觀察到第 4 小時上升速度呈現橢圓環形，與位渦梯度較大的區域一致，也就是橢圓形渦旋的邊界。我們以慣性穩定度理解此現象，慣性穩定度可以表示為：

$$I^2 = (f + \frac{2v}{r})(f + \zeta) \quad (5.1)$$

慣性穩定度可以幫助我們理解空氣徑向移動的難易程度，在慣性穩定度較大的區域，空氣徑向運動較困難。以此觀點來看，在最大切向風速半徑外側，邊界層的切向風速因摩擦力而減小，此時氣壓梯度力大於科氏力與離心力的總和，於是產生向中心流動的徑向風，在向內流動的過程中，遇到位渦變大的區域，慣性穩定度也變大，導致內流困難而產生輻合，並伴隨上升運動，所以上升速度分布呈現橢圓環形。

圖 32(a)、(b)分別為淺水模式以及邊界層切向風場，圖中顯示，淺水模式切向風場最大值在短軸端點，邊界層切風速最大值較淺水模式大，位置在淺水模式最大切向風速內側，並且往短軸端點的下游處延伸到長軸端點處。圖 32(c)、(d)則分別為非輻散正壓模式以及邊界層切向風場。非輻散正壓模式的切向風場分布與淺水模式的結果非常類似，而兩個模式的邊界層切向風場也有相似的分布。另外，由圖 31(c)散度分布可以發現，沒有慣性重力波產生，且輻散(合)區對應到正(負)渦度平流區，由以上推斷橢圓渦旋實驗的風場分布主要是渦旋羅士比波 (vortex Rossby wave) 動力。

若再進一步觀察，將發現橢圓形的長軸端點處上升速度較大，這可以由邊界層內切向風速的分布，以及中緯度噴流的動力類比來理解此現象。圖 32(b)為邊界層切向風速分布，在橢圓形渦旋短軸端點類比為噴流入區，長軸端點類比為噴流出區。

由切向風動量方程式可知：

$$\frac{Dv}{Dt} = -\left(\frac{v}{r} + f\right)u \quad (5.2)$$



噴流入區必須加速，由(5.2)式可知此區必須有內流，對應於圖 33(b)邊界層橢圓形渦旋短軸端點，最大切向風內側的內流(圖 33(b)13 公里處內側)，與此相反，在長軸端點最大切向風速內側有向外流動(圖 33(a)17 公里處內側)，所以長軸端點在似震結構處的徑向風速差較大，伴隨著較大的上升速度，短軸端點則與此相反，導致深對流發生在長軸端點處。

5.2 雙眼牆實驗

本節將探討雙眼牆實驗中的動力過程，以及其邊界層上升速度結構的演變。圖 34 到圖 37 為 Exp-S 以及 Exp-L 的實驗中，淺水模式的位渦以及邊界層的上升速度的結果。在兩個實驗中，小而強的渦旋將大而弱的渦旋拉伸，並以小而強的渦旋為中心進行軸對稱化。在 Exp-S 的實驗中，邊界層上升速度場在第 2 個小時形成兩個環狀(圖 34 (b2))，為雙眼牆結構，而 Exp-L 形成雙眼牆結構時間較晚，約在模式時間第 6 個小時(圖 37 (c2))。兩個實驗在第 12 個小時的位渦結構達到近似穩態，邊界層上升速度呈現雙眼牆結構，而 Exp-S 第 12 個小時的雙眼牆結構 moat 較小(圖 35 (d1)、(d2))，Exp-L 第 12 個小時的 moat 較大(圖 37 (d1)、(d2))。值得注意的是，比較圖 35 (d2)與圖 37 (d2)可以發現，moat 較大的雙眼牆結構，內眼牆上升速度較大，而 moat 較小的雙眼牆，內眼牆的上升速度較小，且 moat 的下降運動較強。

圖 38 以及圖 39 為實驗 Exp-VS 中，淺水模式的位渦以及邊界層的上升速度。小而強的渦旋將大而弱的渦旋拉伸，並且以小而強的渦旋為中心進行軸對稱化，此結果和前述的兩個實驗相似，在第 12 個小時的位渦結構達到近似穩態，邊界層的上升速度為雙眼牆結構。相較於前述的兩個實驗，Exp-VS 的中心渦旋具有渦裙結構，而內眼牆的上升速度明顯較小，表示中心渦旋的渦裙結構會影響內、外眼牆的上升速度強度。

圖 40 為三個雙眼牆實驗第 12 個小時的東西側風速剖面。可以發現相較於實

驗 Exp-L，實驗 Exp-S 的 moat 明顯較小，且內眼牆的上升速度也較小。從圖中也可以觀察到，在邊界層內的上升速度區，大致對應於邊界層切向風(圖中紅線)大於淺水模式切向風(圖中藍線)的區域。此外，實驗 Exp-VS 邊界層切向風大於淺水模式切向風的區域，比 Exp-S 以及 Exp-L 範圍大。

圖 41 為雙眼牆颱風的大小與總數比例的統計圖，從圖 41 (a)可以發現，雙眼牆結構維持較久的颱風，moat 也比較大。從我們的實驗中也可以看到，當 moat 較大時，內眼牆的上升速度較大，這可能使得內眼牆強度得以維持，導致雙眼牆結構可以維持得較久。另外，我們也發現，當中心渦旋具有渦裙結構，內眼牆的上升速度明顯較中心渦旋為 Rankine vortex 的上升速度小，表示中心渦旋的渦度結構，可能會影響內眼牆的上升速度。

由 Houze et al. (2007) 的結果顯示，當眼牆置換發生時，外眼牆開始內縮，此時 moat 的動力特徵類似颱風眼，有較強的下沉運動，而此下沉運動伴隨的增溫，使得內眼牆周圍的空氣浮力下降，導致對流減少，同時外眼牆也會阻斷邊界層中內眼牆的水氣供應，導致內眼牆減弱消失。值得注意的是，在我們的研究中發現，不考慮濕過程，淺水模式的渦旋所驅使的邊界層似震結構，對於 moat 較小的雙眼牆結構，moat 內也有較強的下沉速度，而且內眼牆的上升速度也較外眼牆小，這可能表示眼牆置換時，外眼牆變得較小，此時邊界層的似震結構，也傾向於增強外眼牆，並減弱內眼牆。

5.3 三極渦旋

本節將探討三極渦旋實驗中，邊界層的似震結構，以及淺水模式中慣性重力波對邊界層上升速度的影響。實驗依據位渦場的變化，大致分為三個階段，第一階段為 0 到 2 小時，此時，中心的圓形渦旋將外側的橢圓形渦旋拉伸變形，第 2 個小時在中心渦旋的東側 10 公里處，以及西側 10 公里處形成兩個長條狀的低渦度區(圖 42 (b) 中為兩個紫色長條狀)，中心圓形渦旋同時被拉伸成較為橢圓，而中心渦旋變成較橢圓後，由圖 42 (c) 散度場可以觀察到明顯的慣性重力波向外傳遞，此時的上升速度場在中心渦旋的周圍較大(圖 42(d))，並且由中心渦旋較長的兩端向外延伸，最大值約在 20 到 30 m s^{-1} 之間。

第二階段為 2 到 14 小時，在這段時間，中心的渦旋漸漸變成橢圓形，而位渦

場第 14 小時大致可以分為兩個結構，分別為圖 43(a) 中心橢圓形渦旋與短軸外側兩個紫色低位渦帶組成的內側結構，以及綠色位渦帶以外的外側結構，這兩個結構分別以不同的時間旋轉，而此位渦場結構到實驗結束大致都呈現此分布。在這個階段，散度場也有顯著的慣性重力波，上升速度分布主要圍繞在中心的橢圓形渦旋周圍，上升速度最大值在中心橢圓形渦旋的長軸端點處，量值超過 60 m s^{-1} ，並且有四條帶狀的上升速度區由長軸向外延伸。

第三個階段為 14 到 48 小時，在這段時間，位渦場的分布沒有太大的改變，散度場在第 48 小時的結果也可以發現，慣性重力波仍舊相當明顯(圖 44 (b))。上升速度場和第 14 小時的結果非常類似(比較圖 43 (c)、圖 44 (c))，也是以中心橢圓形渦旋周圍為主要上升區，其中主要的差異在於，上升速度的最大值下降至在 40 到 50 m s^{-1} 之間。

由於上升速度在第 14 個小時達到最大值，且淺水模式中的慣性重力波較強，我們根據此時三極渦旋的中心橢圓形渦度設計對照實驗。圖 45 為對照實驗第 4 個小時(達到近似穩態)的結果。圖中可以觀察到，上升速度極值在長軸端點，且邊界層的切向風速極值由短軸端點向下游延伸至長軸端點，與 5.1 節的實驗結果相似，唯獨此對照實驗中有較強的慣性重力波，由此可知，慣性重力波並不影響上升速度極值的分布。另外，對照實驗的上升速度分布呈現橢圓環狀，表示三極渦旋的四條帶狀上升速度區，是由於中心橢圓形渦旋和外側的渦度帶交互作用的結果，並且在圖 46 可以發現，此交互作用將使得上升速度最大值往外側移動，也就是慣性穩定度較小的區域。

第6章 總結



Hurricane Hugo (1989) 的飛機觀測中(圖 1)，邊界層的徑向風速在距離中心 8 公里處內側為 10 m s^{-1} 向外，而外側為內流約 20 m s^{-1} ，在 500 公尺內風速急遽的變化，Williams et al. (2013) 將此結構稱為似震結構 (shock-like structure)，而此徑向風速差伴隨著上升運動達 20 m s^{-1} ，為一般所認定的眼牆。在 Williams et al. (2013) 使用了軸對稱單層邊界層模式解釋此似震結構，他們認為似震結構的形成，是由於邊界層徑向風的控制方程式類似柏格斯方程式，此方程式的數學特性導致風場經過非線性平流後，風速梯度增加而形成似震結構。

然而從圖 5 與圖 6 Hurricane Gilbert 的雷達回波觀測與風速分布可以發現，伴隨著雨帶的似震結構並不是軸對稱的，而只位於颱風的東南象限，表示軸對稱無法完全解釋此動力結構。另外，在颱風觀測中也可以發現(如圖 7)，風場不只有一個似震結構，表示邊界層存在不對稱的複雜似震結構。

在 Williams et al. (2013) 的工作中採用軸對稱假設，以加入擴散項的高解析度二階中差分法得出合理的似震結構。然而由觀測發現，邊界層內存在非軸對稱且複雜的似震結構。由前人的研究顯示，對於複雜似震結構的計算，採用高解析度的二階中差分法較沒有效率。在本研究的第一部分，我們深入探討了近年來對於複雜似震結構相當成功的 WENO5，並且與 CRWENO5、CRWENO5-LD、四階中差分法以及波譜法比較。

對於一維線性平流的問題，我們測試了數值的收斂特性、頻散誤差以及耗散誤差。結果顯示，當解析度增加時，四階中差分法以四階的速度收斂，WENO5、CRWENO5 以及 CRWENO5-LD 以五階收斂。這表示 WENO5、CRWENO5 以及 CRWENO5-LD 經過權重新計算後，對於平滑函數的問題仍然能夠相當接近有限差分法的特性。另外，五種數值方法都顯示頻散誤差較耗散誤差大，而 WENO5、CRWENO5 以及 CRWENO5-LD 由於權重的重新計算，導致耗散誤差相較於四階中差分法以及波譜法大。

在柏格斯方程式實驗中，當函數還是平滑的時候 ($t = 1 \text{ s}$)，五種數值方法的誤差隨著解析度增加而收斂。但接近震波結構形成的時間 ($t = 1.975 \text{ s}$)，即便增加解析度，五種數值方法的誤差卻沒有顯著的下降。然而由數值解與解析解的比較

中，可以明顯觀察到，WENO5、CRWENO5 以及 CRWENO5-LD 的誤差都在震波結構附近，遠離震波結構的數值解和解析解吻合，表示計算時整體的結果不會受到震波結構的影響。然而四階中差分法和波譜法的誤差則散布在整個計算範圍。

剛體旋轉平流實驗中，WENO5、CRWENO5 以及 CRWENO5-LD 除了質量些微增加以及能量減少，其他性質都比四階中差分法優異，這可能是由於數值的收斂階數較高的緣故。整體來看，WENO5、CRWENO5 以及 CRWENO5-LD 對於普通平流問題的數值特性接近有限差分法。另外，在以上三個數值實驗中，所有的數值方法的頻散誤差都大於耗散誤差，這顯示平流問題中最主要的誤差是來自於頻散誤差。

許多氣象的中小尺度的物理現象由於觀測困難，研究的進展有賴於模式的發展，而正確的掌握物理現象成為模式發展的關鍵，在中小尺度的現象中，常伴隨類似不連續的結構或是強梯度特徵，例如擾流隨著時間會串跌 (cascade)，以及雲模式中水氣分布在雲的邊界有非常強的梯度等，都是模式發展所遭遇的挑戰。由本研究的數值實驗顯示，近年來所發展的 WENO5，對於一般的平流問題，數值特性接近高階精確度有限差分法，也能夠相當合理的掌握震波結構。雖然 WENO5 對於誤差的量值或各種物理保守特性，不如近年來所發展的 CRWENO5 以及 CRWENO5-LD，但應用於單層邊界層模式中，得出的結果卻非常相似(圖 26)，而且在 4.4 節的討論中可知，WENO5 的似震結構強度的維持，在較粗的解析度下，優於高解析度的二階中差分法。另外，由於 CRWENO5 以及 CRWENO5-LD 的計算複雜度較 WENO5 高，這可能顯示 WENO5 對於氣象的數值計算而言，已經是相當足夠且有效率的方法。

本研究的第二部分，以淺水模式結合單層邊界層模式探討颱風邊界層的動力。實驗包括橢圓形渦旋、雙眼牆實驗以及三極渦旋。在橢圓形渦旋實驗中，邊界層的上升速度極大值發生在橢圓形長軸端點，與實際觀測的結果相似。模式結果顯示，邊界層切向風極值由短軸端點處向下游延伸到長軸端點，以中緯度噴流類比，在短軸端點為噴流入區，當空氣流經此區會向中心加速，所以在短軸最大切向風內側依然有內流，相較於此，長軸端點為噴流出區，最大切向風內側為向外流動。由於長、短軸最大切向風半徑的外側內流速度接近，而長軸內側的風向外流動，造成徑向風速差較大，伴隨較強的上升運動。

三個雙眼牆實驗中，兩個渦旋交互作用後，會形成雙眼牆結構，並且在邊界層上升速度場驅使出相對應的同心圓結構，為雙眼牆的特徵，表示不對稱過程可能是雙眼牆形成的機制之一。

由 Houze et al. (2007) 的觀測結果顯示，當眼牆置換發生時，外眼牆開始內縮，此時 moat 的動力特徵與颱風眼較為相似，有較強的下降速度，且內眼牆的上升速度較小，同時外眼牆也會阻斷邊界層中內眼牆的水氣供應。值得注意的是，在我們的結果中發現，模式中不包括濕的過程，比較實驗 Exp-L 以及實驗 Exp-S 發現，moat 較小的雙眼牆結構，內眼牆的上升速度較小，且 moat 的下降速度較強，這點和 Houze et al. (2007) 的觀測中，眼牆置換時，內眼牆以及 moat 的上升速度結構相似，這可能表示，眼牆置換發生時，外眼牆變得較小，導致的邊界層似震結構，也傾向於增強外眼牆，並且減弱內眼牆。另一方面，從統計資料也可以發現(圖 41)，平均而言，雙眼牆結構維持較久的颱風有較大的 moat，我們的實驗也可以看到，moat 較大的雙眼牆結構，內眼牆的上升速度較大，這可能使得內眼牆得以繼續維持，而可以維持較長的雙眼牆結構。

另外，在 Exp-VS 實驗中，雙眼牆結構的核心渦旋具有渦群結構，此時邊界層中的內眼牆上升速度，明顯較 Exp-L 以及 Exp-S 內眼牆上升速度小，表示渦旋的渦度結構也會影響邊界層的上升速度分布，而此上升速度分布可能會進一步影響到渦旋強度，然而本實驗中上升速度不會回饋影響淺水模式的渦旋，此研究仍有待未來進一步的探討。

三極渦旋與對照實驗中的結果顯示，慣性重力波對於邊界層的上升速度分布影響並不大，主要因素是中心的橢圓形渦旋。而中心渦旋和外側的渦度帶交互作用，會使上升速度向外延伸出四個帶狀上升速度區。另外，由風速的剖面可以發現，三極渦旋外側的渦度帶會使似震結構向外移動，導致上升速度極大值往慣性穩定度較小的區域移動。

Schubert and Hack (1982) 以及 Hack and Schubert (1986) 的工作中探討理想的平衡渦旋模式中，能量由非絕熱加熱轉換為動能的效率，結果顯示當總加熱量固定時，加熱效率會隨慣性穩定度增加而上升，顯示加熱區域對於加熱效率扮演重要的角色。本研究的第二部分的實驗顯示，單眼牆颱風的上升速度分布區域在慣性穩定度較大的區域，這可能顯示了似震結構所導致的上升速度有助於單眼牆颱風的增

強。另外，中心渦旋和外側位渦帶交互作用後，會使上升速度極值往慣性穩定度小的區域移動，可能使增強的效率下降，這表示渦旋交互作用時，不僅要考慮位渦的結構，邊界層上升速度的分布也是影響颱風強度的重要因素。

本研究的模式不包括熱力的過程，以純粹動力的觀點，可以解釋邊界層內上升運動的機制，表示動力所導致的邊界層似震結構，可能對眼牆的演變扮演著重要角色。

圖

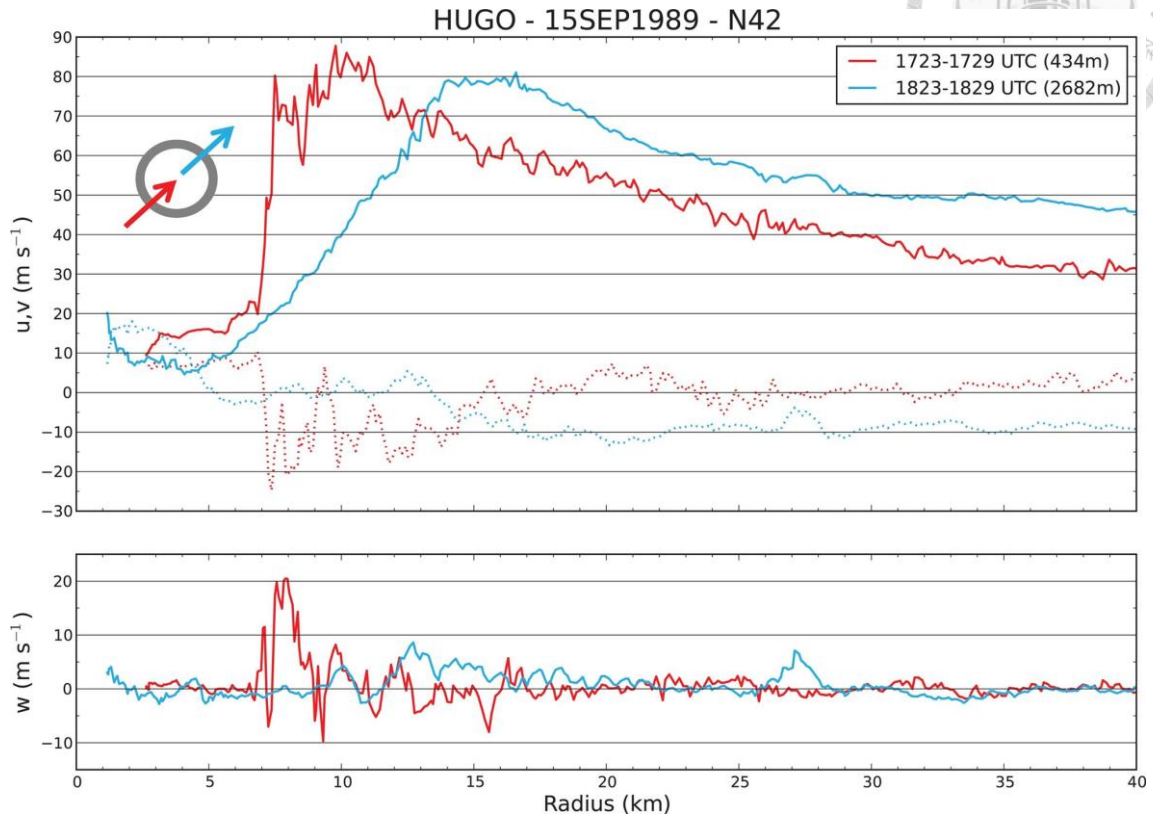


圖 1：Hurricane Hugo 的風速剖面。觀測時間為 1989 年 9 月 15 日，紅線為飛機由颱風的西南方高度約 434 公尺穿越眼牆所得的觀測資料，在穿越眼牆之後，飛機高度上升到約 2682 公尺，由颱風的東北方穿越眼牆，藍線為穿越東北方眼牆時所得的觀測資料。橫軸為中心距離(km)，縱軸為風速(m s^{-1})。上圖實線的部分為切向風場 v ，虛線為徑向風場 u ，下圖為上升速度 w 。(摘自 Williams et al., 2013)

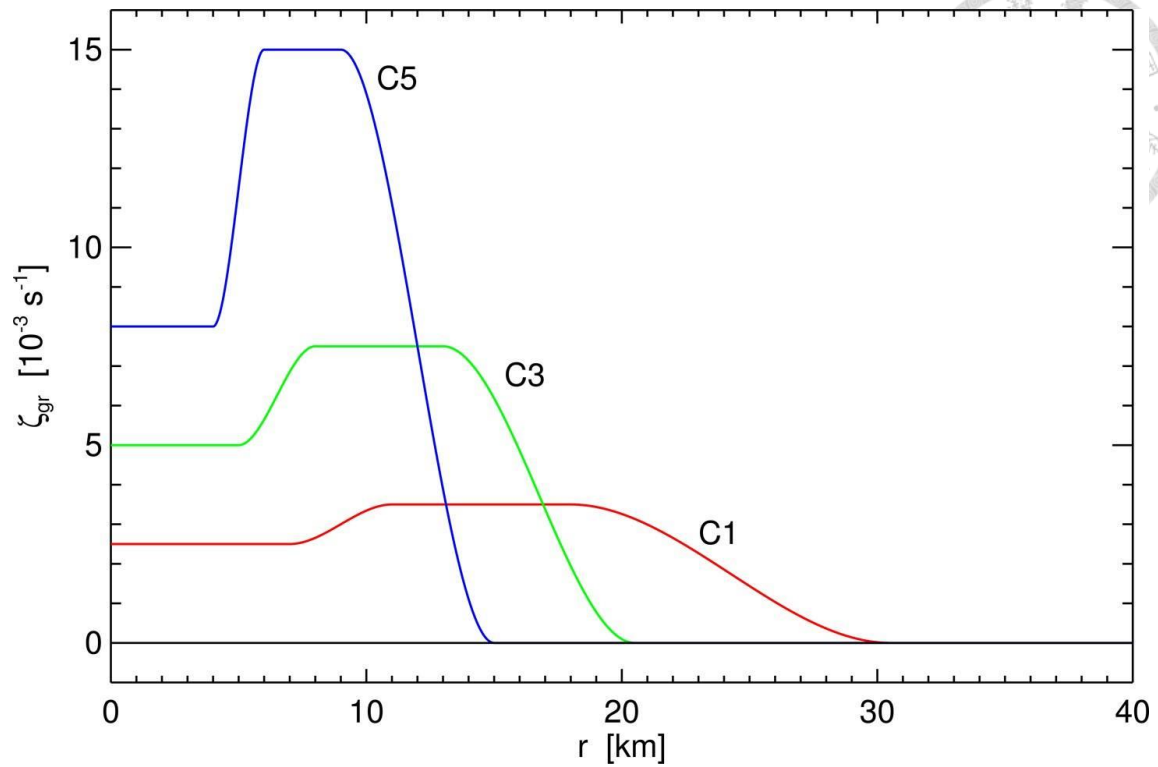


圖 2：Williams et al. (2013) 實驗中邊界層初始渦度場分布圖。橫軸為中心距離 (km)，縱軸為渦度值($\times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$)，C1、C3 以及 C5 分別代表實驗中 category 1、3 以及 5 的渦度值。(摘自 Williams et al., 2013)

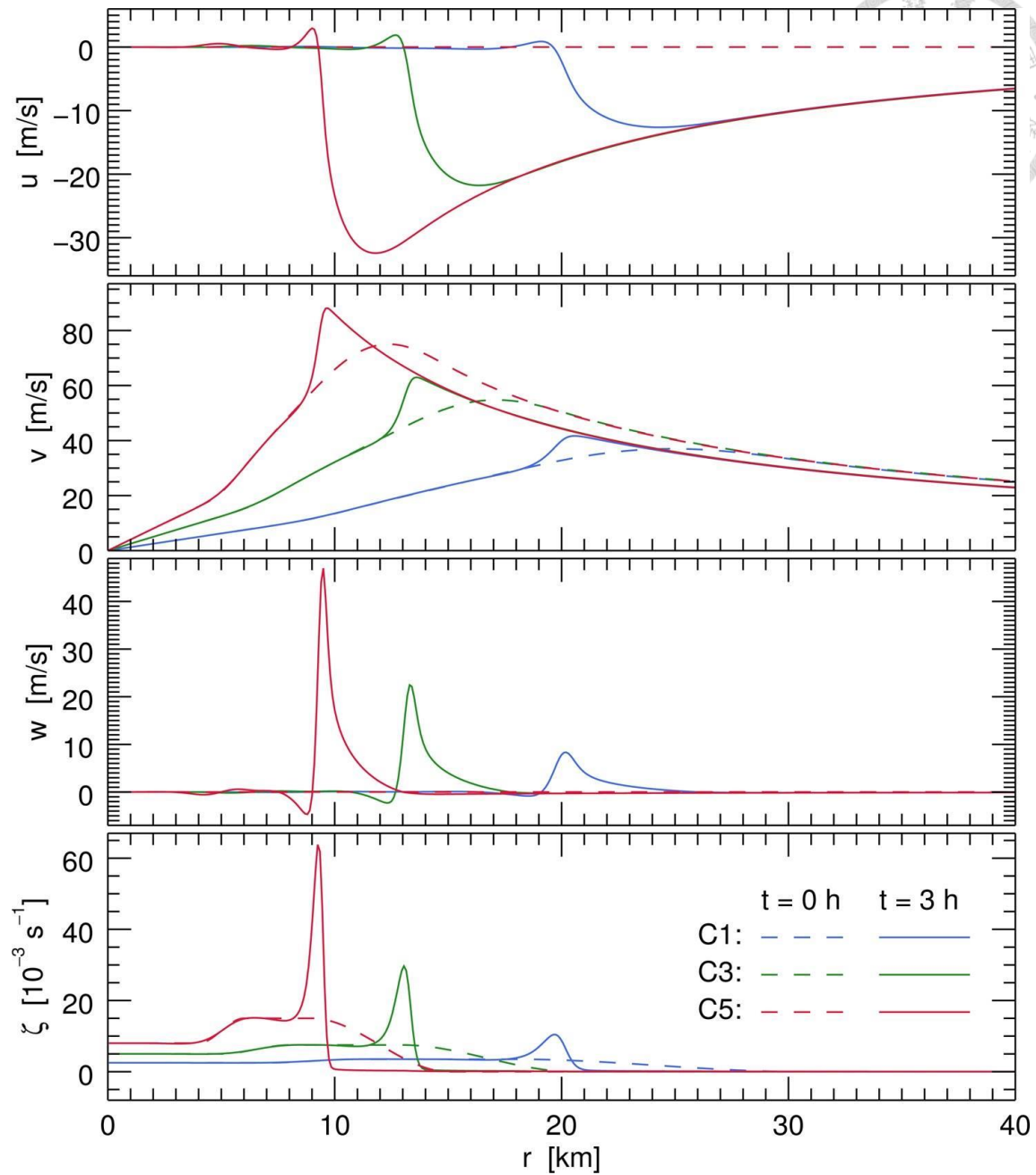


圖 3：Williams et al. (2013) 實驗中 $t=3\text{ h}$ (模式時間第 3 個小時) 的邊界層風場結構。由上而下分別為徑向風速 $u(\text{m/s})$ 、切向風速 $v(\text{m/s})$ 、上升速度 $w(\text{m/s})$ 以及渦度 $\zeta(10^{-3}\text{ s}^{-1})$ 。橫軸為中心距離(km)。藍色、綠色以及紅色虛線分別代表邊界層中強度為 category 1、3 以及 5 的初始場。藍色、綠色以及紅色實線代表邊界層達到近似穩態時的風場結構。(摘自 Williams et al., 2013)

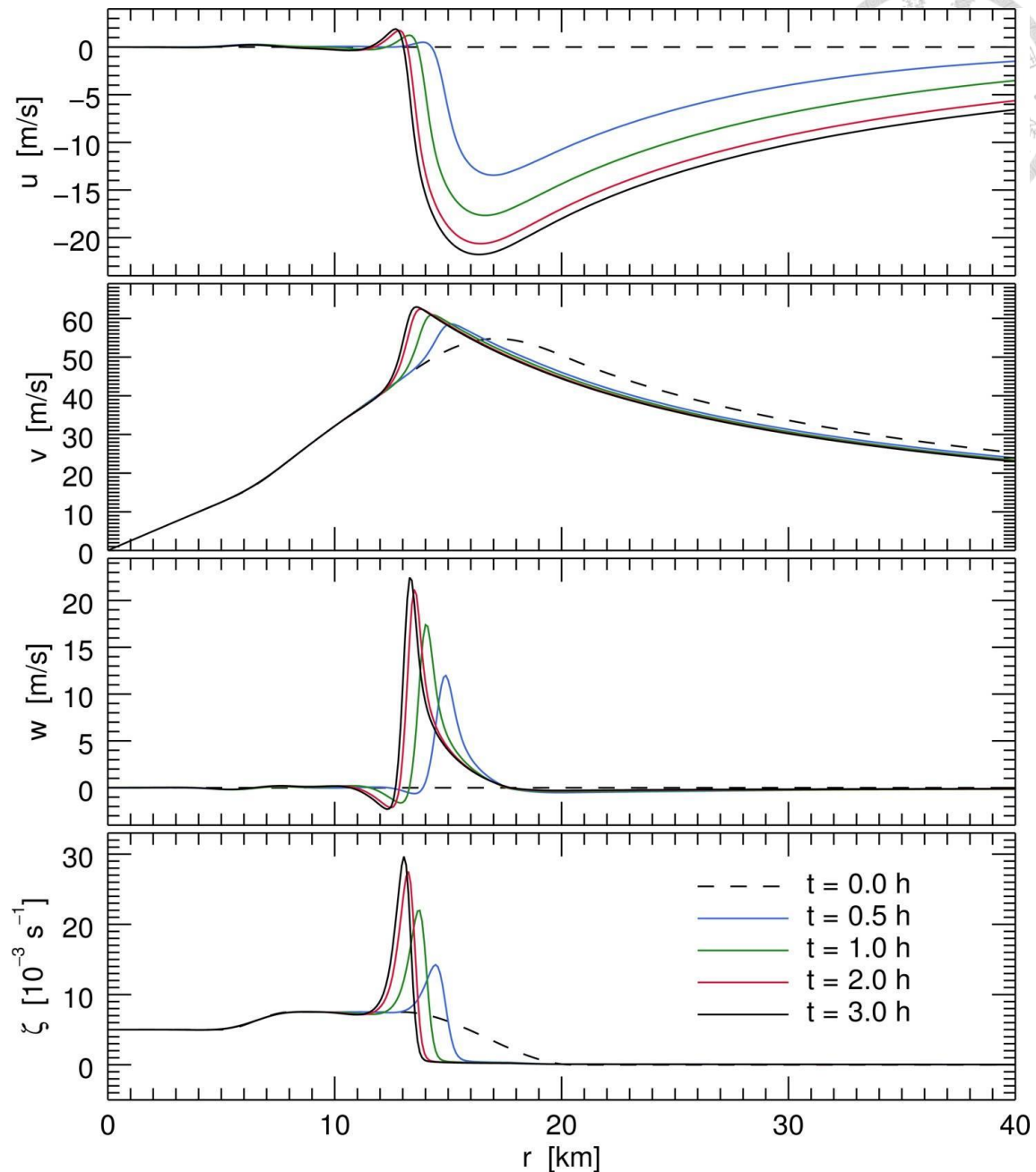


圖 4：渦旋強度為 category 3 所驅使的單層邊界層模式，在達到近似穩態(模式時間第 3 小時)前的結果。四張圖由上而下分別為徑向風速 $u(\text{m/s})$ 、切向風速 $v(\text{m/s})$ 、上升速度 $w(\text{m/s})$ 以及渦度 $\zeta(10^{-3} \text{ s}^{-1})$ ，橫軸為中心距離(km)。圖中的黑色虛線表示邊界層模式中的初始場，而藍色、綠色、紅色以及黑色實線代表模式時間 0.5、1.0、2.0 以及 3.0 小時的風場結構。從圖中可以看到在模式時間 2-3 小時邊界層風場達到近似穩態，此時在距離中心約 13-15 公里處形成似震結構，徑向風速差在兩公里的範圍內超過 20 m s^{-1} ，伴隨上升速度超過 22 m s^{-1} ，在自由大氣的最大切向風速區內側(約距中心 16 公里處)，約 13-16 公里處產生超梯度風，而外側(大於 16 公里處)產生次梯度風。(摘自 Williams et al., 2013)

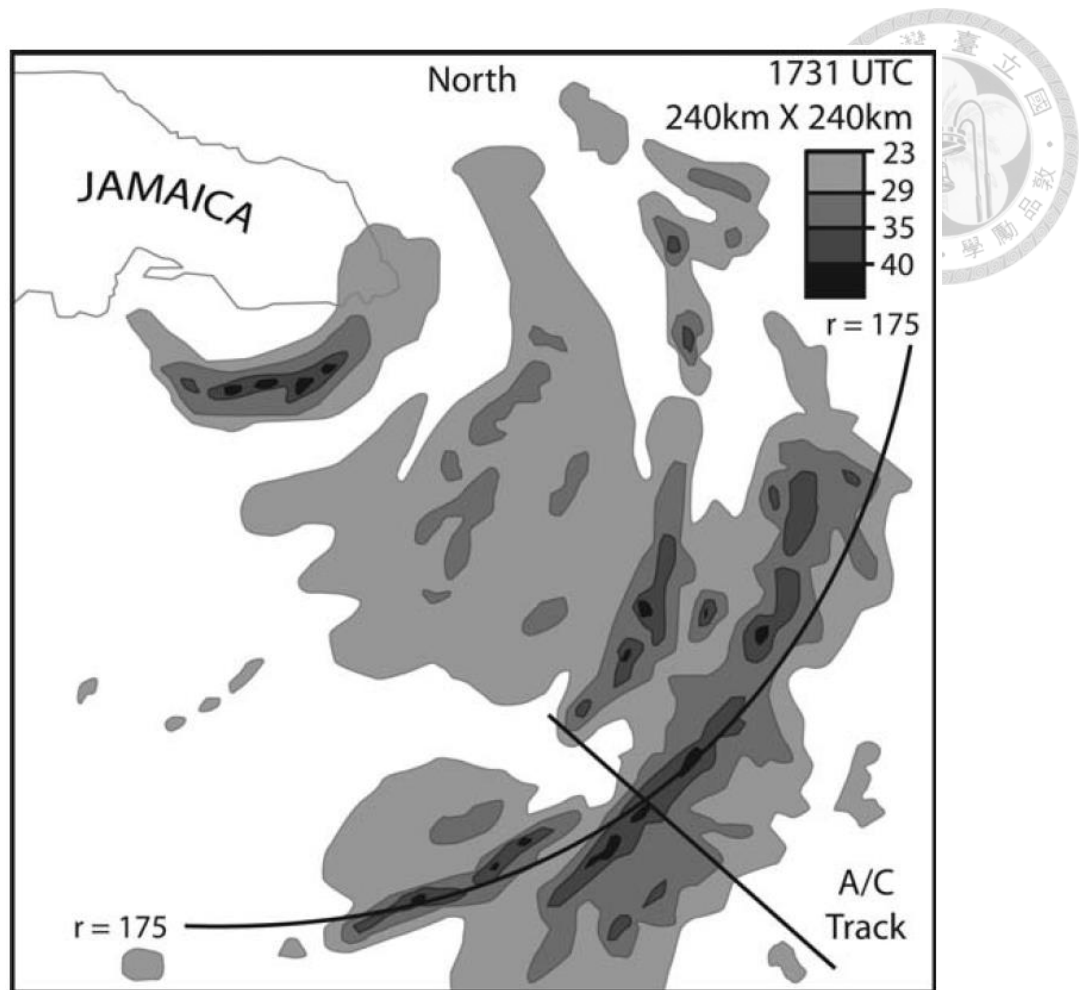


圖 5：Hurricane Gilbert 機載雷達回波觀測。觀測時間為 1988 年 9 月 12 日 1731 UTC，圖中的灰階為雷達回波強度(dBZ)，圖中為颱風東南象限雨帶的位置，圖中垂直於此雨帶的直線為當時 19 架飛機穿越觀測的位置。(摘自 Williams et al., 2013)

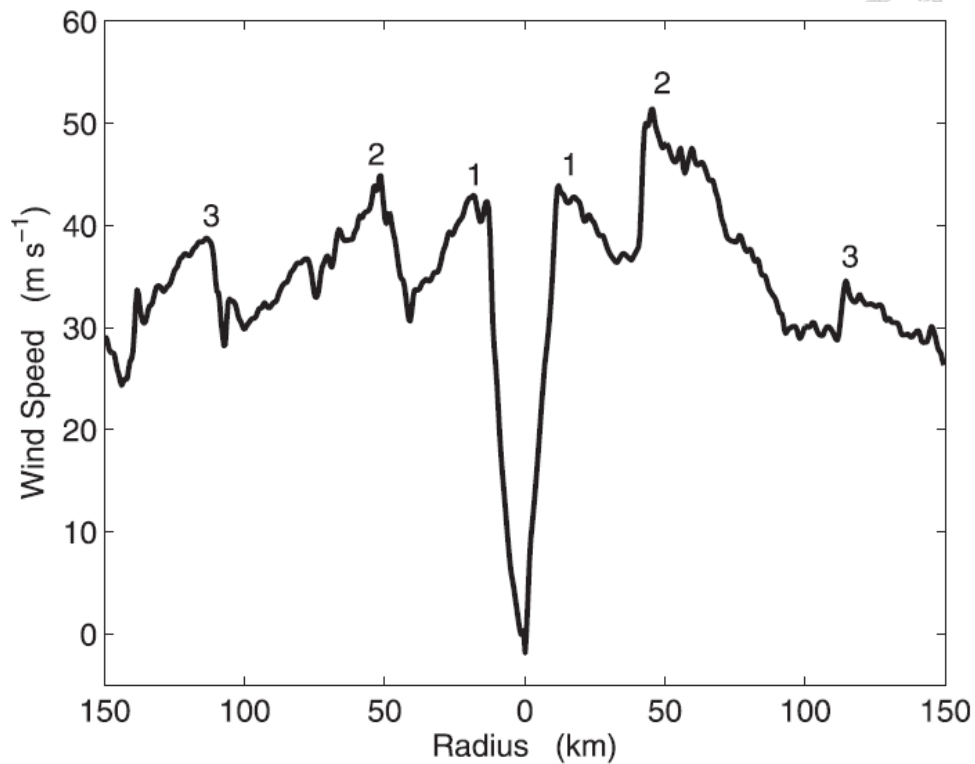


圖 7：Hurricane Frances 飛機觀測資料。觀測時間為 2004 年 8 月 30 日 1815 UTC 的。圖中的黑色實線為切向風速。橫軸的 0 表示颱風中心，橫軸為中心距離(km)，縱軸為風速(m s^{-1})。從圖中可以觀察到有三個似震結構。(摘自 Sitkowski et al., 2011)

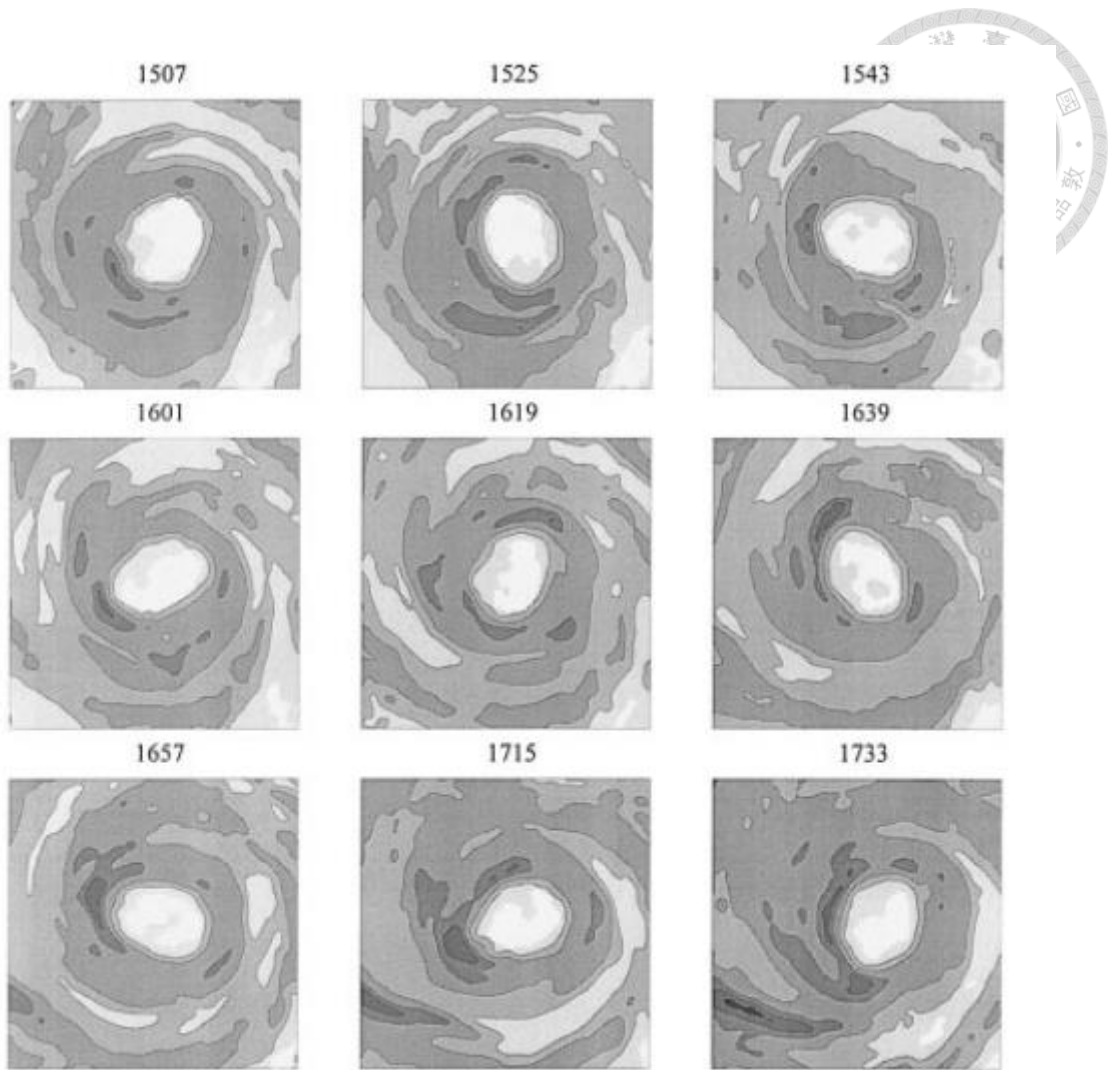


圖 8：1996 年賀伯颱風的五分山雷達回波圖。上圖依照時間順序為由左而右，由上而下。觀測時間為 7 月 31 日 1507 LST 到 1733 LST。圖中的橢圓形長軸約 30 公里，而短軸約為 20 公里。(摘自 Kuo et al., 1999)

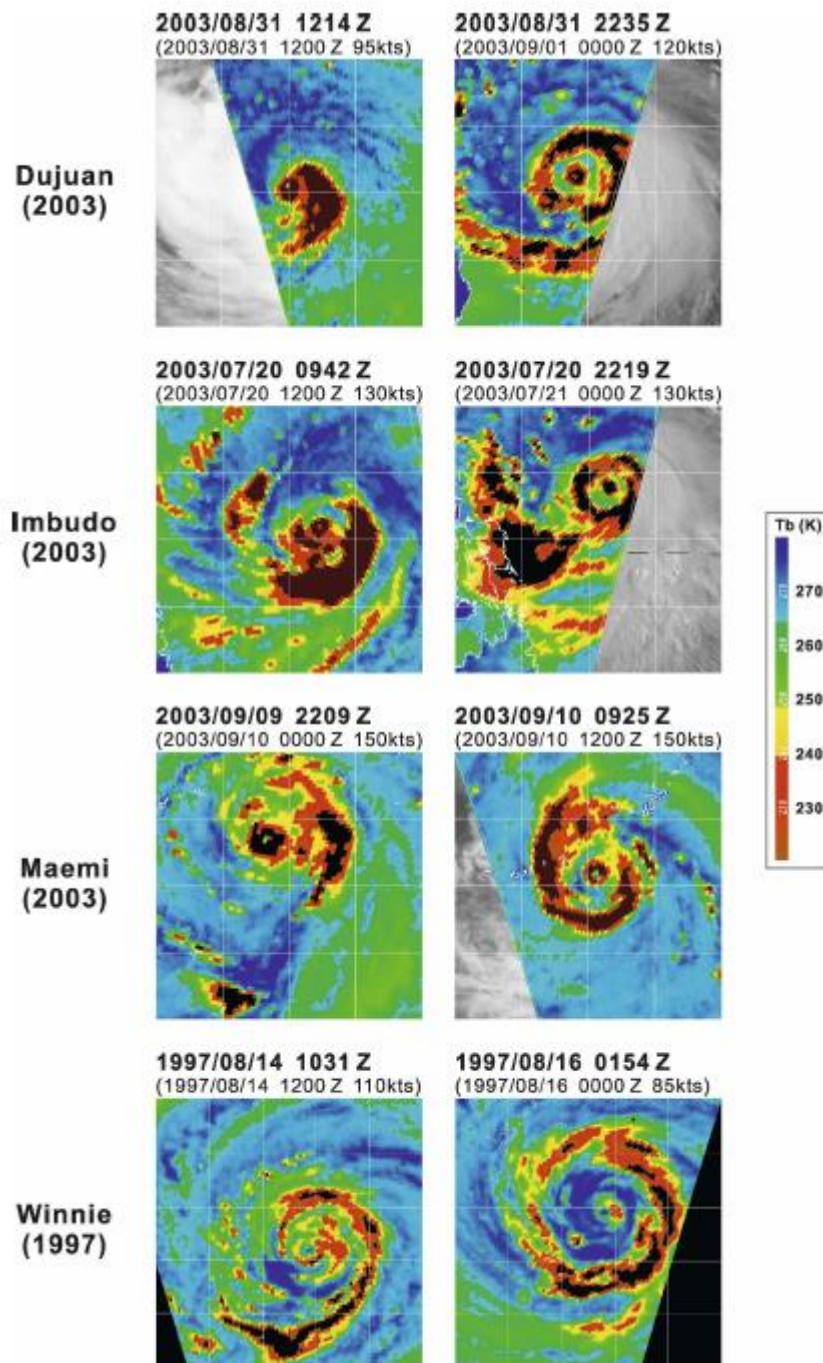


圖 9：四個西太平洋雙眼牆颱風的微波衛星影像。色階為亮度溫度(Brightness temperature)。圖中的左圖和右圖時間間距大約為 12 個小時，而最大風速估計值在圖形上標。(摘自 Kuo et al., 2008)

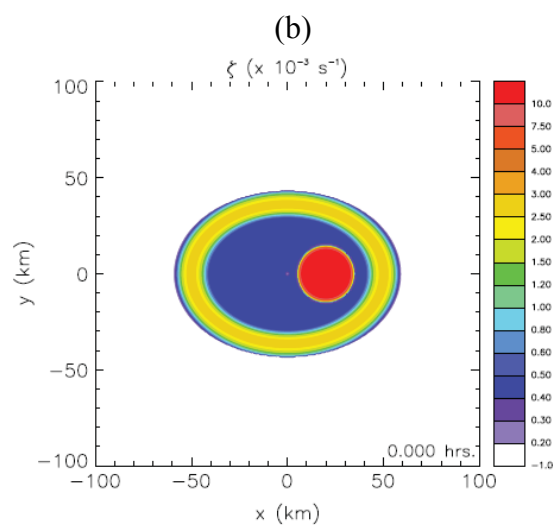
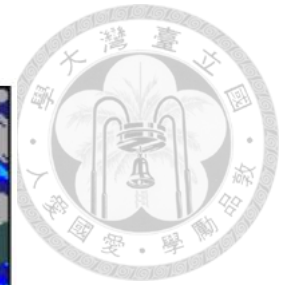
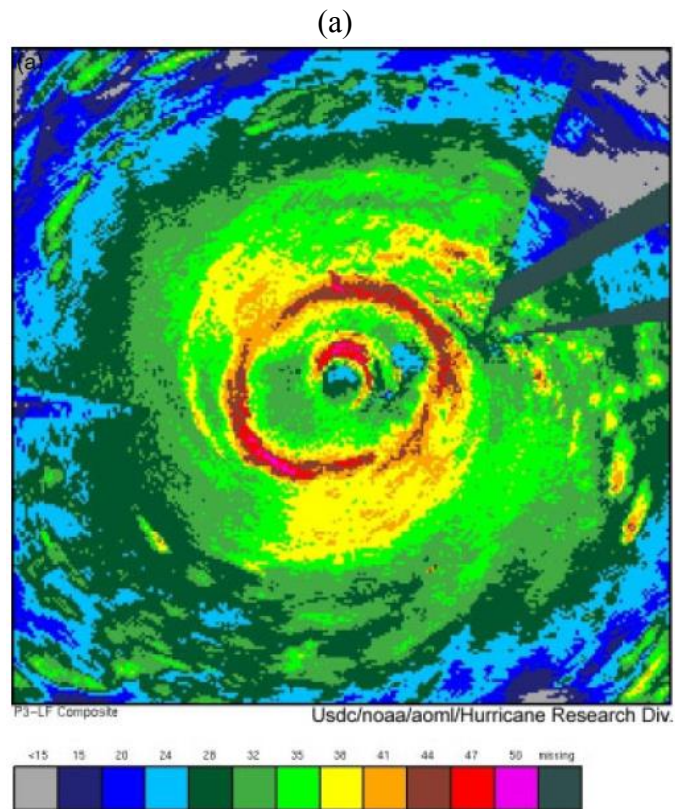


圖 10：(a)Hurricane Ivy 雷達回波觀測圖。觀測時間為 2004 年 9 月 12 日 1304-1324 UTC，觀測範圍為 360 km×360 km，此時颱風為雙眼牆結構。(b)Hendricks et al. (2010)中渦度場 ζ 的初始條件，畫圖範圍為 200 km×200 km。上圖色階為 (dBZ)，下圖色階單位為 $(\times 10^{-3} \text{ s}^{-1})$ 。(摘自 Hendricks et al., 2010)

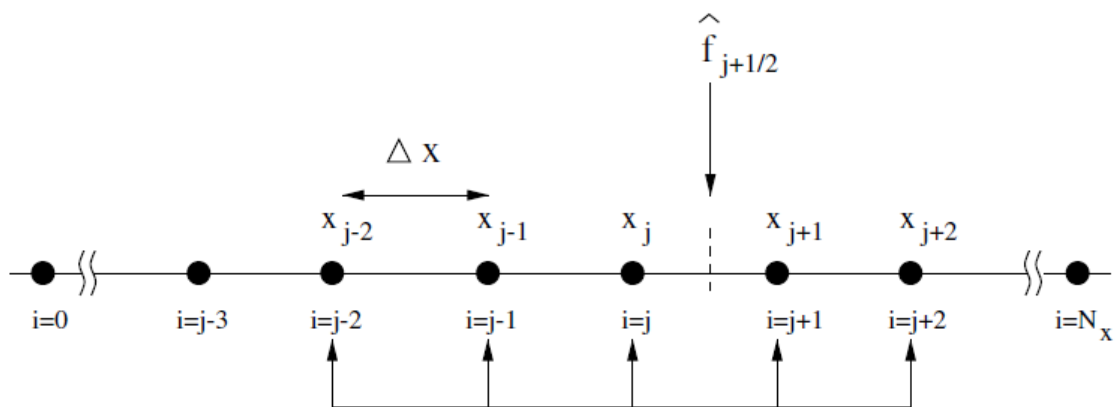


圖 11：WENO5 重構格點資訊示意圖。其中左側為上游， $\hat{f}_{j+1/2}$ 為重構的通量函數，使用的格點資訊從 $j-2$ 到 $j+2$ ， Δx 為格點間距。(摘自 Henrick et al., 2005)

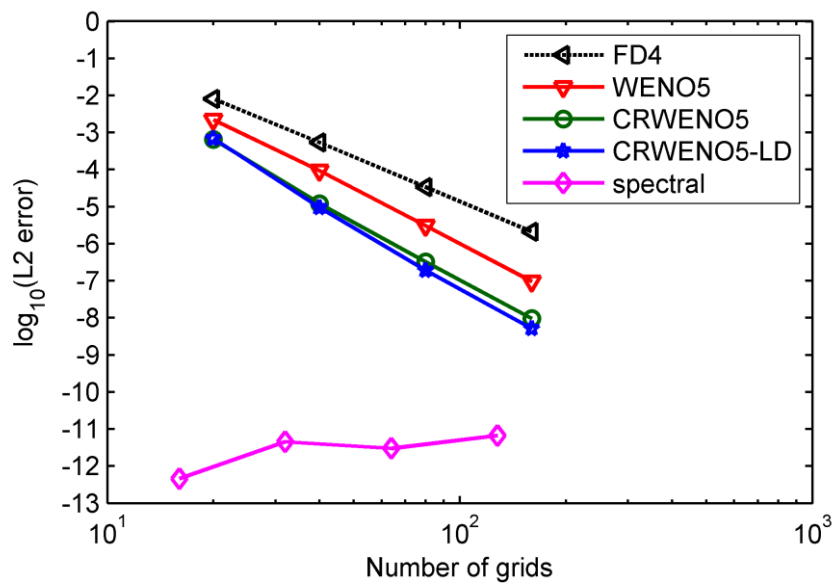
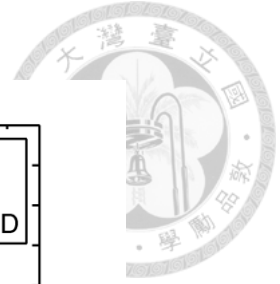
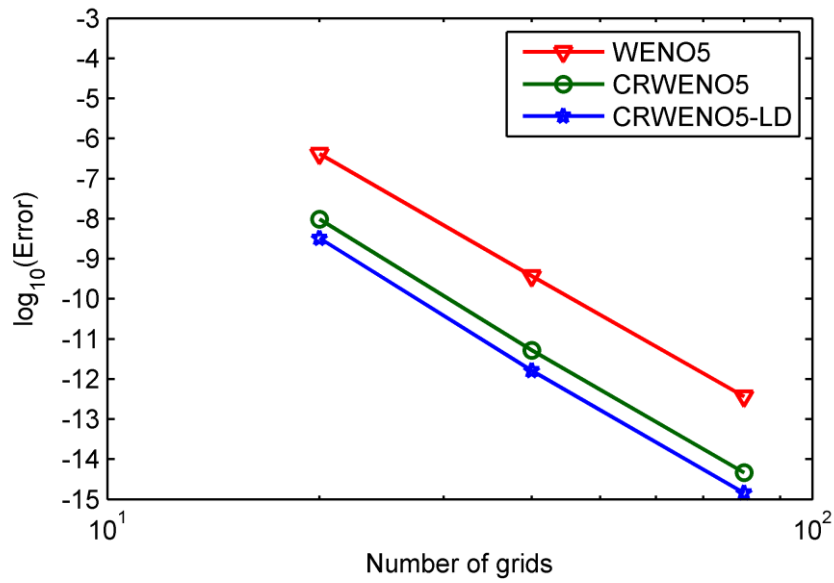


圖 12：線性平流實驗中， L_2 誤差對應格點數函數圖。其中包括四階中差分法、WENO5、CRWENO5、CRWENO5-LD 和波譜法平流一周後 ($t = 2$ s) 的結果。橫軸為格點數，以對數座標表示，縱軸為 L_2 誤差的指數。



(a) 耗散誤差



(b) 頻散誤差

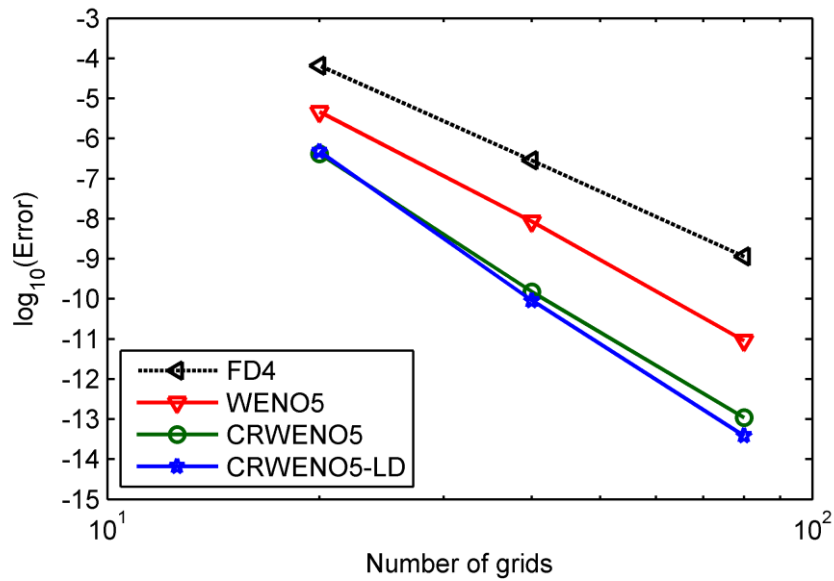


圖 13：線性平流實驗中，(a)耗散誤差以及 (b)頻散誤差對應格點數函數圖。橫軸為格點數，以對數座標表示，縱軸為誤差的指數。其中包括四階中差分法、WENO5、CRWENO5 和 CRWENO5-LD 平流一周後 ($t = 2$ s) 的結果。由於四階中差分法和波譜法的耗散誤差小於捨入誤差，所以沒有畫在圖 (a)中。另外，波譜法的頻散誤差小於電腦計算的誤差，沒有畫在圖 (b)中。

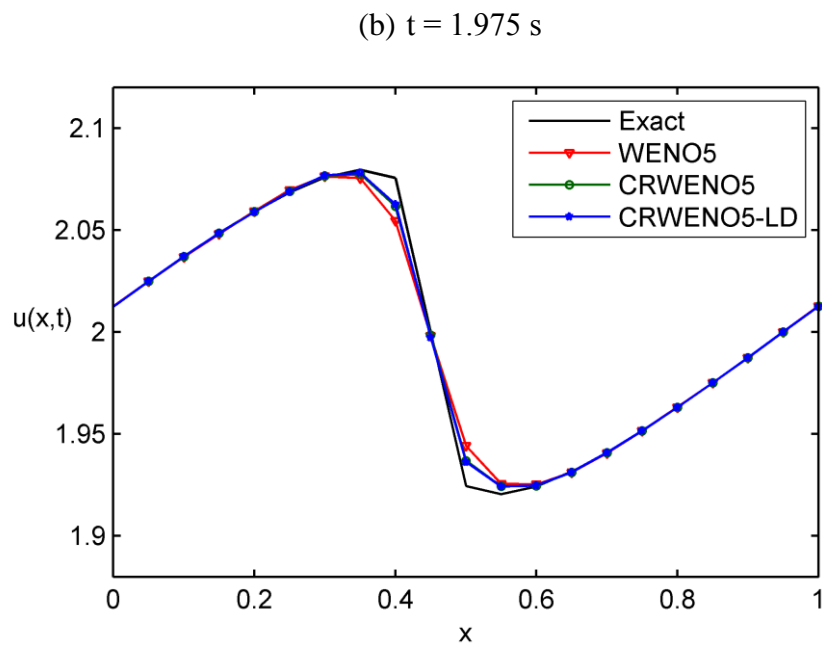
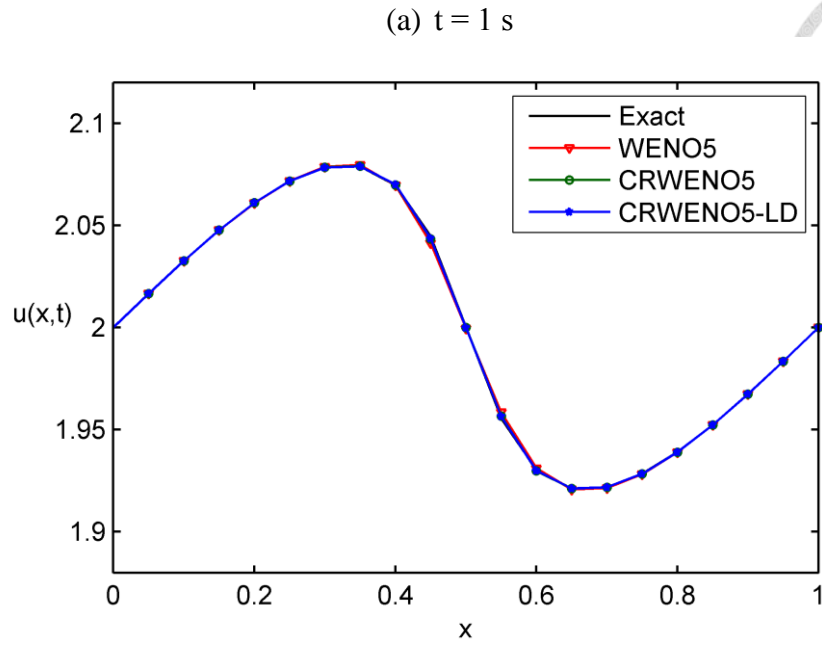
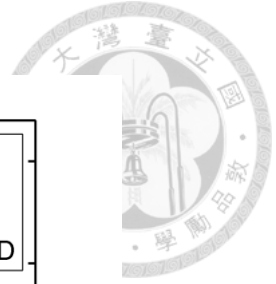


圖 14：柏格斯方程式實驗的結果。(a) $t = 1 \text{ s}$ (平滑函數)和 (b) $t = 1.975 \text{ s}$ (接近震波結構形成時間)。橫軸為數值計算的範圍，縱軸為函數 u 的值。其中包括解析解、WENO5、CRWENO5 和 CRWENO5-LD。

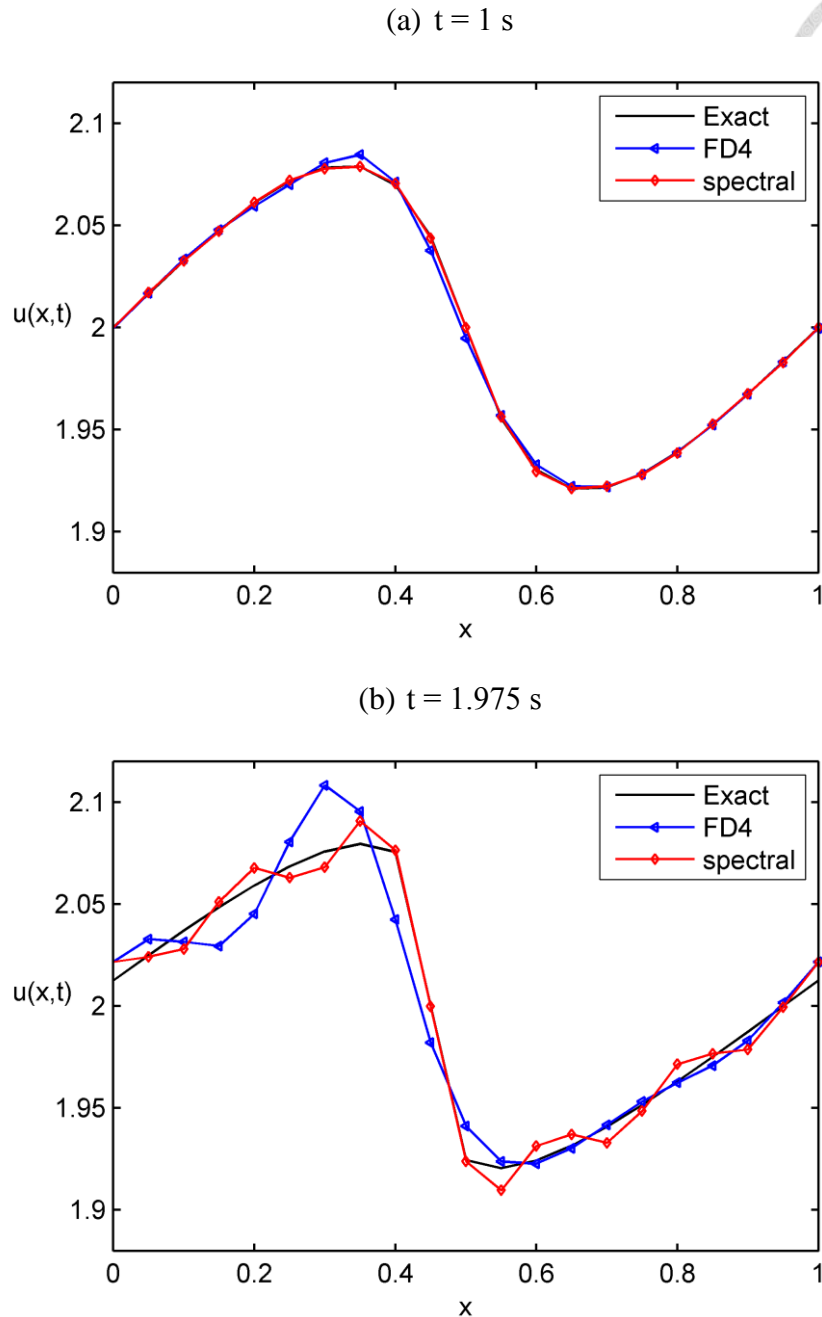
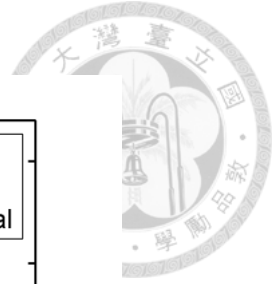


圖 15：柏格斯方程式實驗的結果。(a) $t = 1 \text{ s}$ (平滑函數)和 (b) $t = 1.975 \text{ s}$ (接近震波結構形成時間)。橫軸為數值計算的範圍，縱軸為函數 u 的值。其中包括解析解、四階中差分法和波譜法。

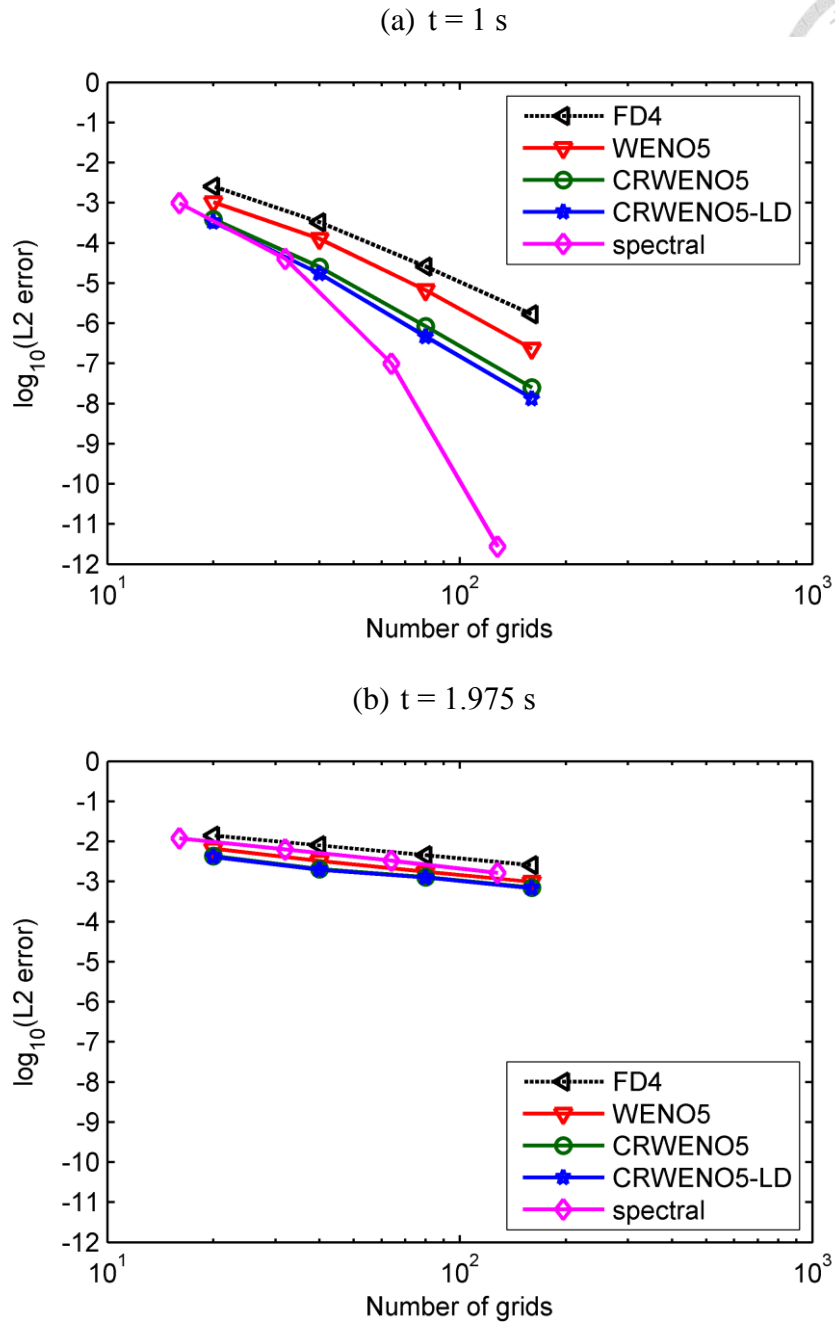
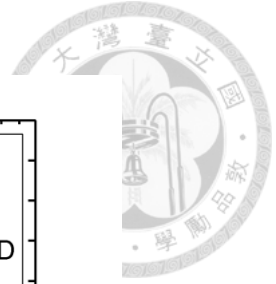
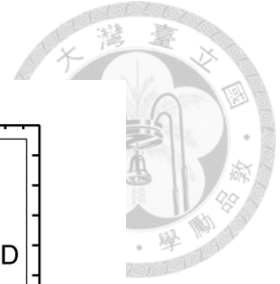
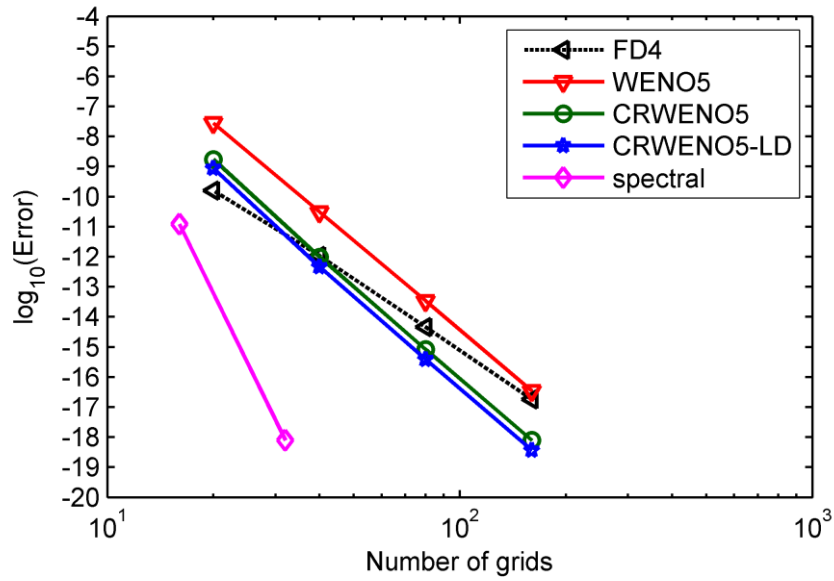


圖 16：柏格斯方程式實驗中， L_2 誤差對應格點數函數圖。橫軸為格點數，以對數座標表示，縱軸為 L_2 誤差的指數。(a) $t = 1 \text{ s}$ (平滑函數)和 (b) $t = 1.975 \text{ s}$ (接近震波結構形成時間)。其中包括四階中差分法、WENO5、CRWENO5、CRWENO5-LD 和波譜法。



(a) 耗散誤差 ($t = 1$ s)



(b) 頻散誤差 ($t = 1$ s)

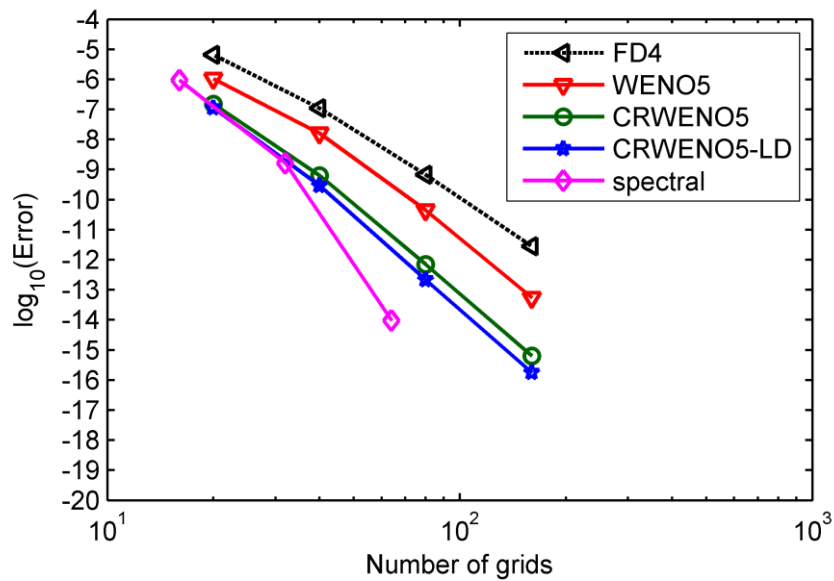
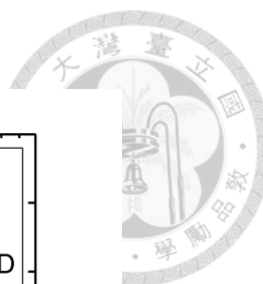
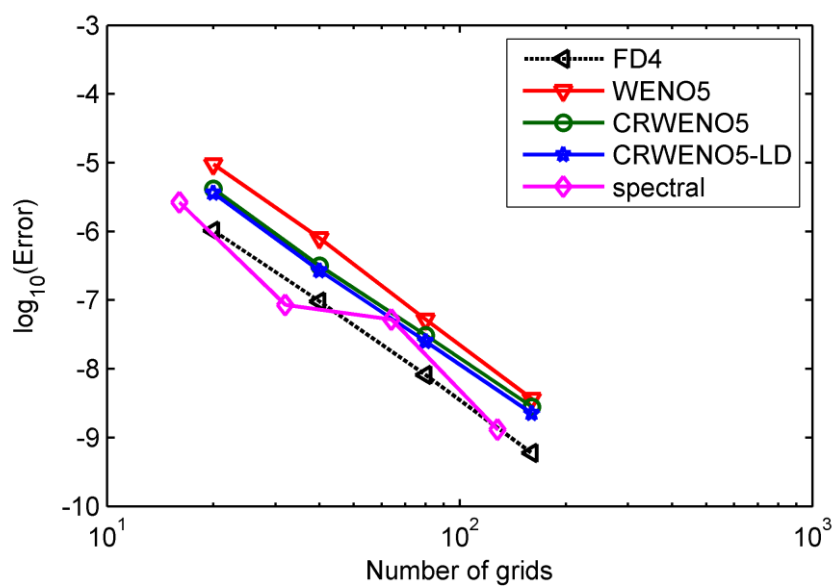


圖 17：柏格斯方程式實驗中，(a)耗散誤差和 (b)頻散誤差對應格點數函數圖。橫軸為格點數，以對數座標表示，縱軸為誤差的指數。其中包括四階中差分法、WENO5、CRWENO5、CRWENO5-LD 和波譜法在 $t = 1$ s 時的結果(平滑函數)。其中圖 (a)的波譜法在低解析度下的耗散誤差已小於捨入誤差，所以只有畫到格點數為 32 的結果。



(a) 耗散誤差 ($t = 1.975$ s)



(b) 頻散誤差 ($t = 1.975$ s)

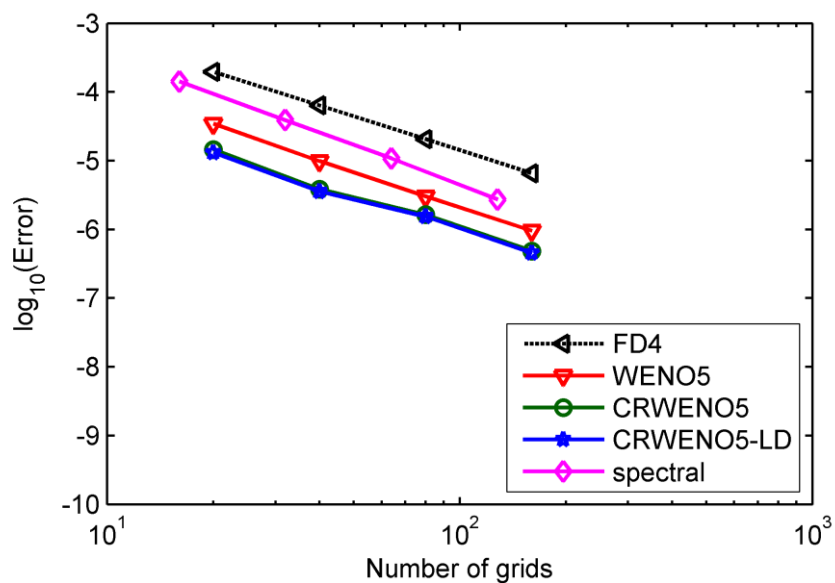


圖 18：同圖 17，唯時間 $t = 1.975$ s。

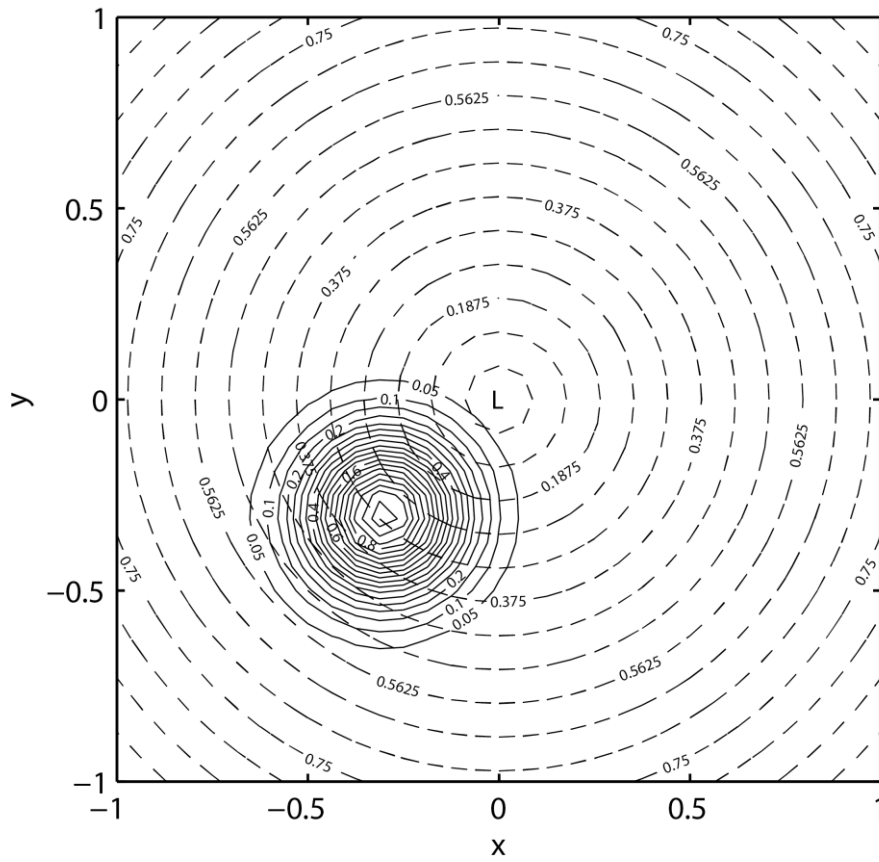


圖 19：等角速度($\omega=1/(2)^{0.5}$)的剛體旋轉風場及高斯錐體的初始位置。黑色虛線同心圓為風場，等值線間距為 0.0625。黑色實線為高斯錐體，波形中心 $(x_0, y_0)=(-0.3, -0.3)$ ，等值線間距為 0.05。研究範圍 $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ ， $|\vec{V}_{\max}| = 1$ 。

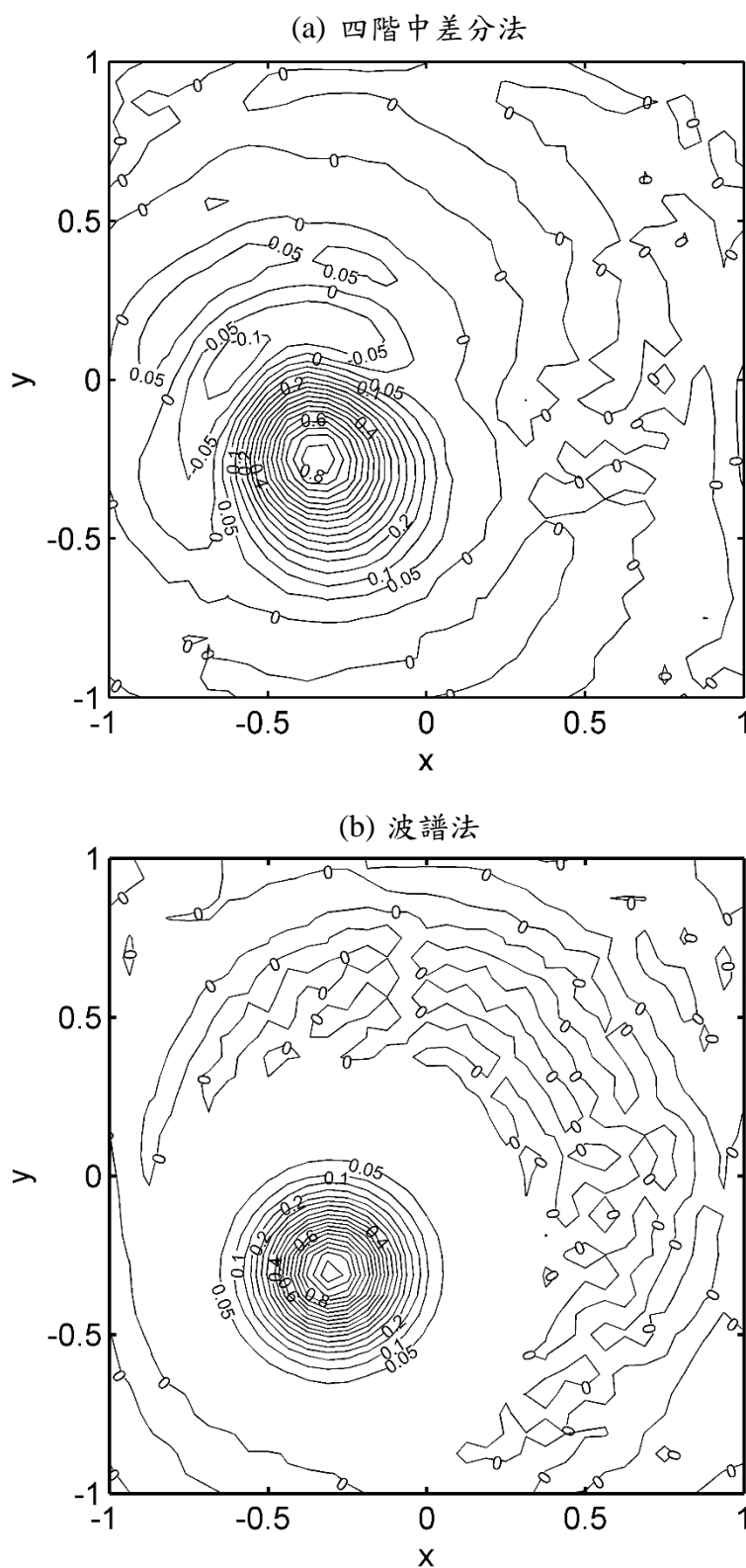
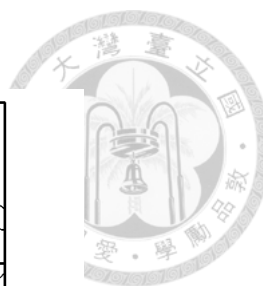


圖 20：二維剛體旋轉平流實驗平流五圈後的結果。其中 (a)四階中差分法以及 (b)波譜法。圖中的等值線間距為 0.05。

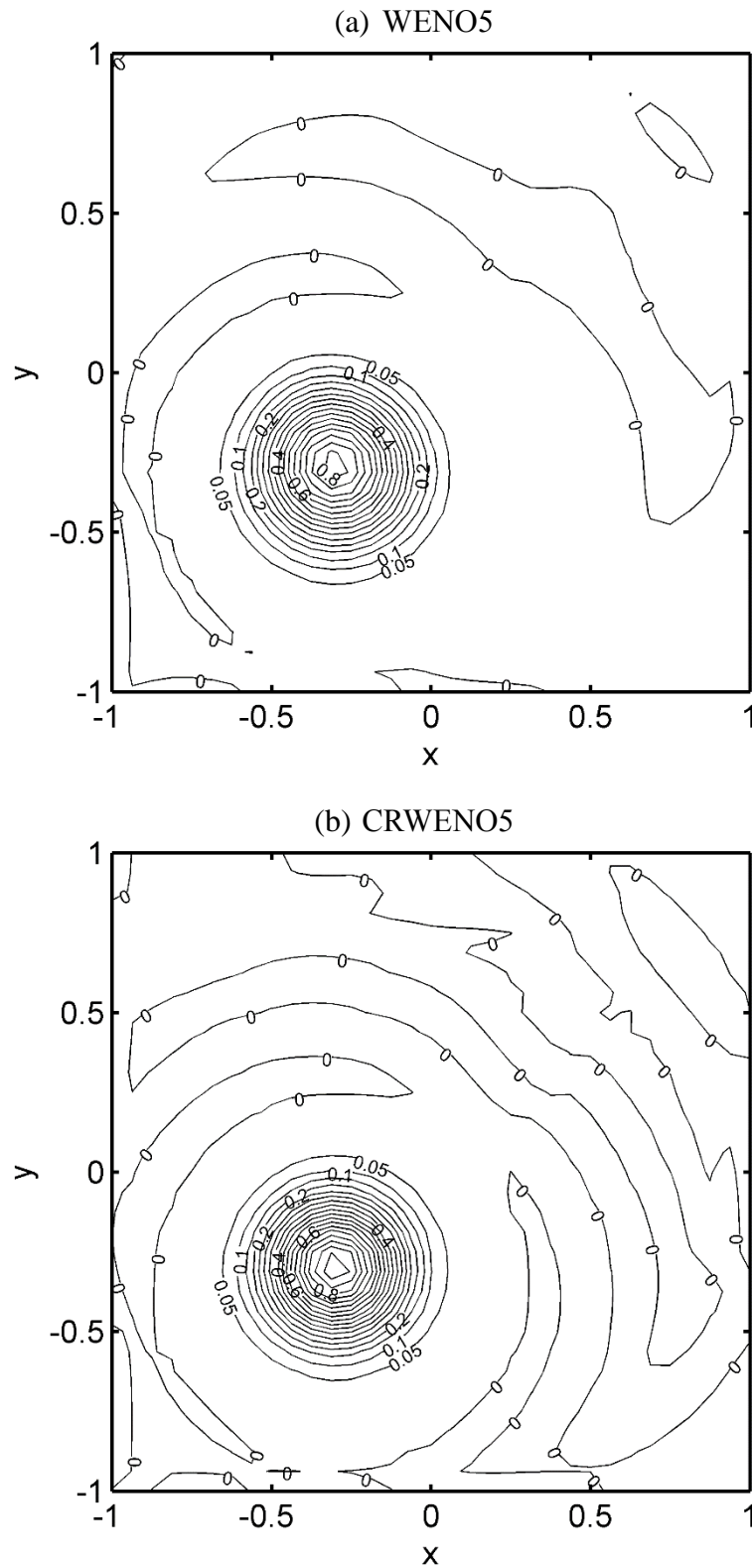


圖 21：與圖 20 同，唯 (a)WENO5 以及 (b)CRWENO5。

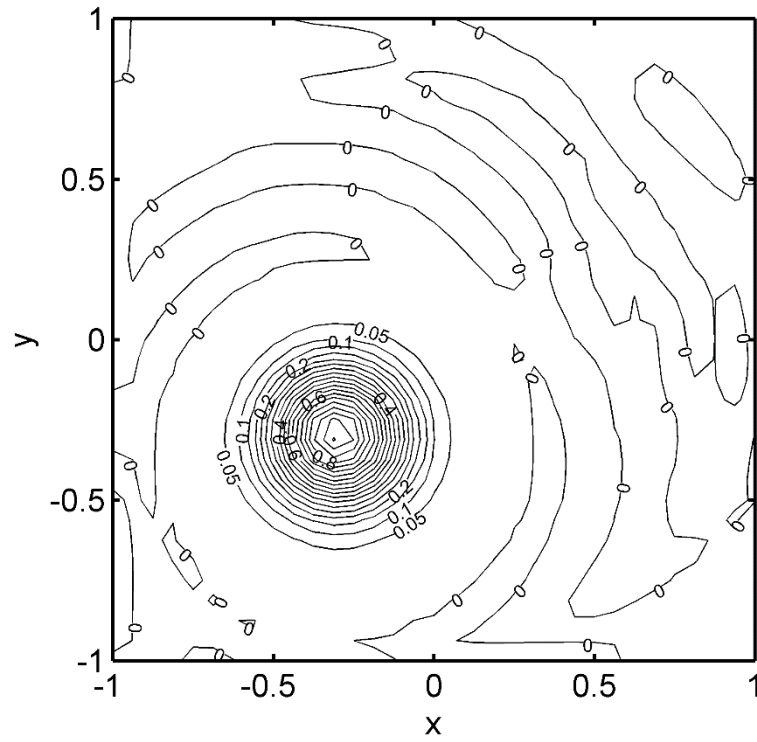


圖 22：與圖 20 同，唯 CRWENO5-LD。

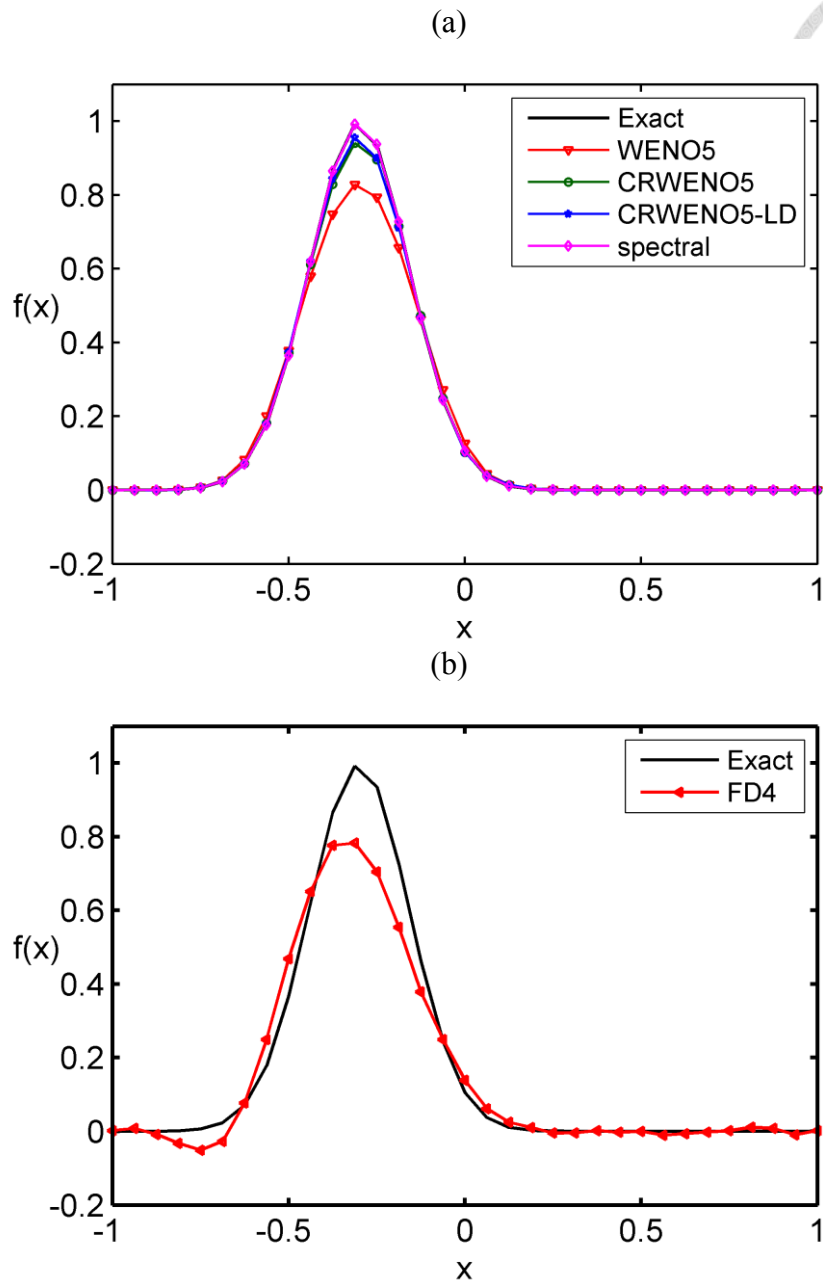


圖 23：二維剛體旋轉平流實驗中，高斯錐體平流五圈後 $y = 0.3$ 的剖面。
(a)WENO5、CRWENO5、CRWENO5-LD 以及波譜法。(b)四階中差分法。圖中
黑色實線為解析解。

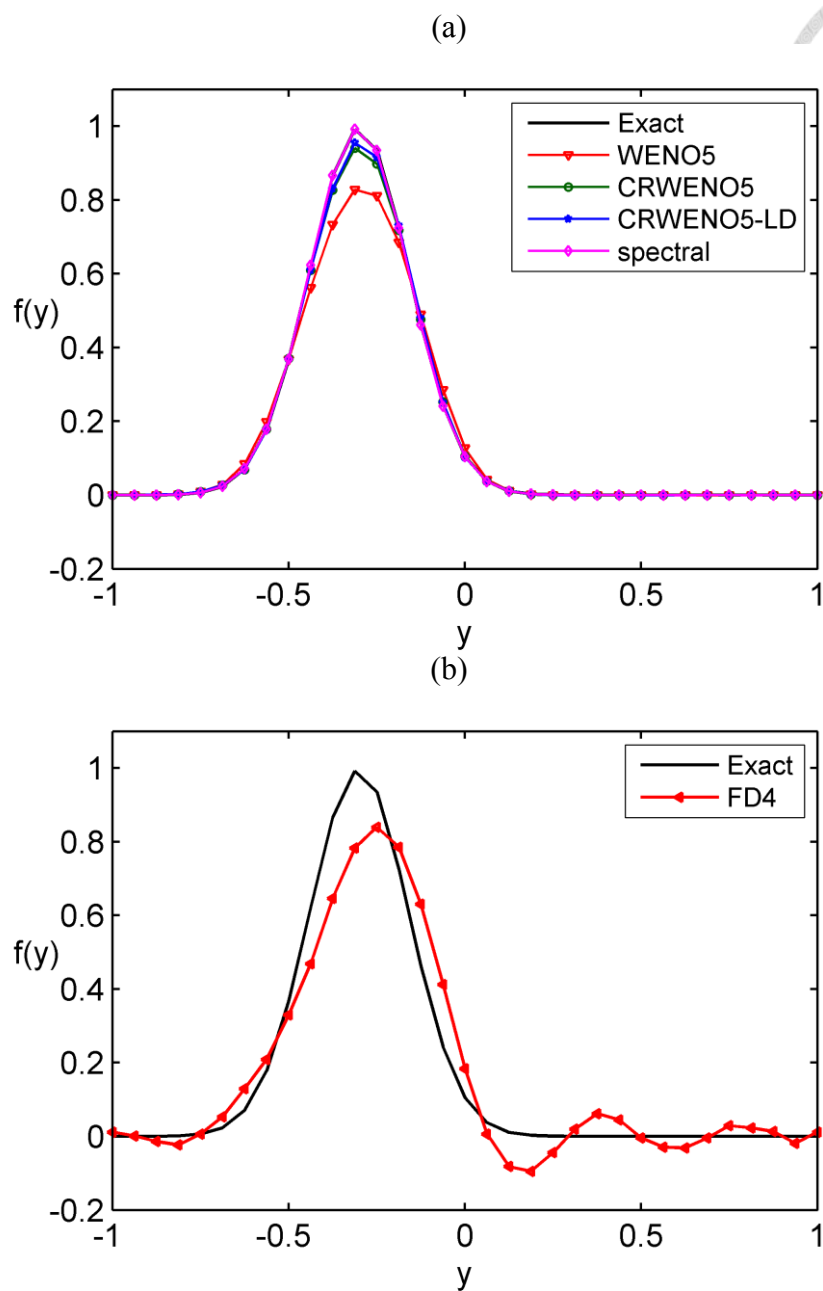
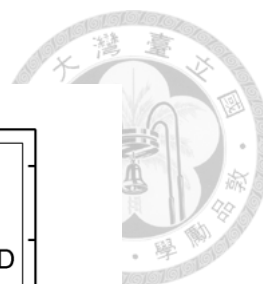


圖 24：與圖 23 同，唯 $x = 0.3$ 的剖面。

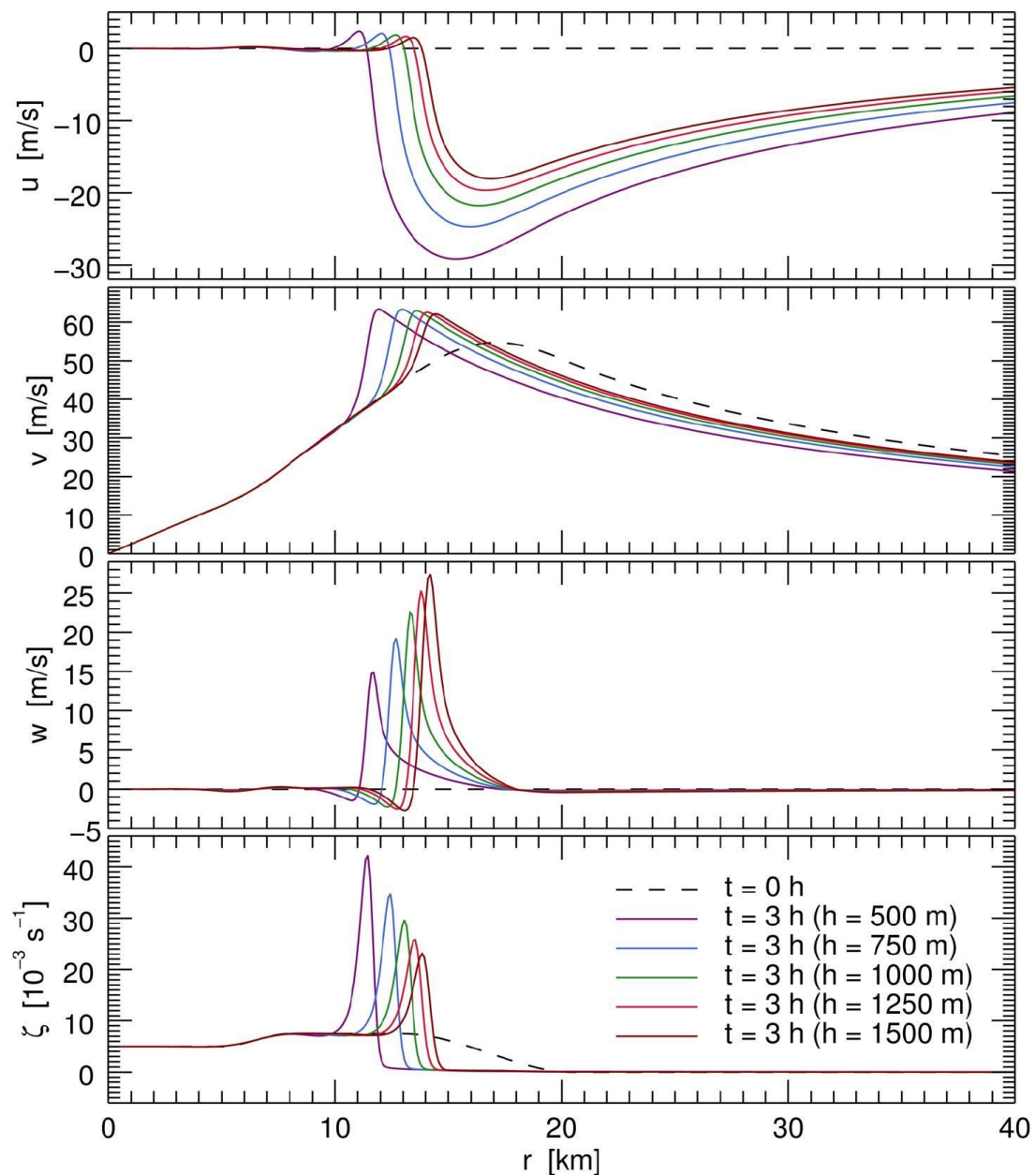


圖 25：Williams et al. (2013) 邊界層厚度的敏感度測試圖。比較強度 category 3 渦旋在 $t = 3$ h (模式時間 3 小時) 的結果。由上而下分別為徑向風速 u (m/s)、切向風速 v (m/s)、邊界層上升速度 w (m/s) 以及渦度 ζ (10^{-3} s^{-1})。橫軸為中心距離 (km)。黑色虛線為邊界層初始風場，由於上層自由大氣的風場不變，所以也可視為自由大氣的風場。紫色、藍色、綠色、紅色和棕色實線分別代表邊界層的厚度為 500、750、1000、1250 以及 1500 公尺的結果。根據連續方程式，邊界層的上升速度為 $w|_{z=h} = -h(\partial u / \partial r)$ ，所以即使邊界層較薄 ($h=500$ m) 的內流較強，上升速度仍舊比厚度較厚 ($h=1500$ m) 還小。(摘自 Williams et al., 2013)

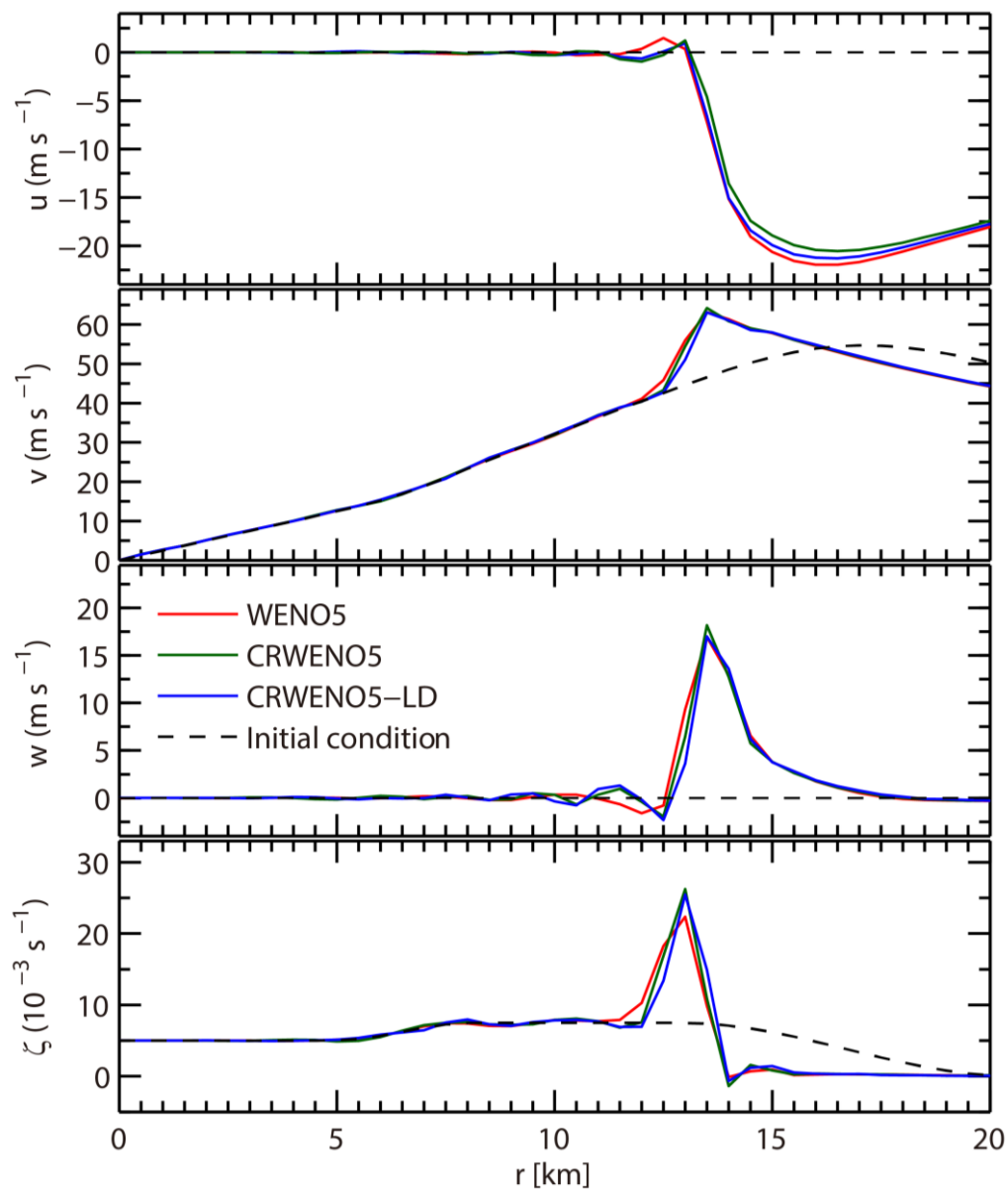
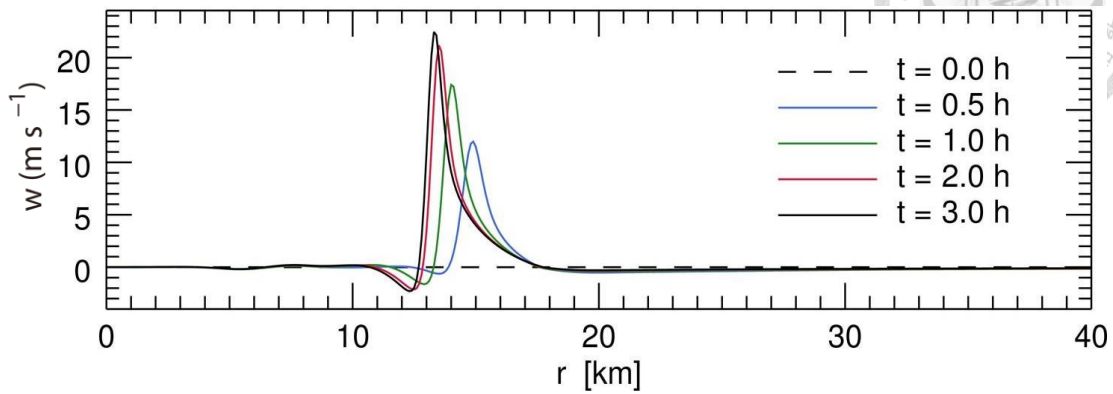
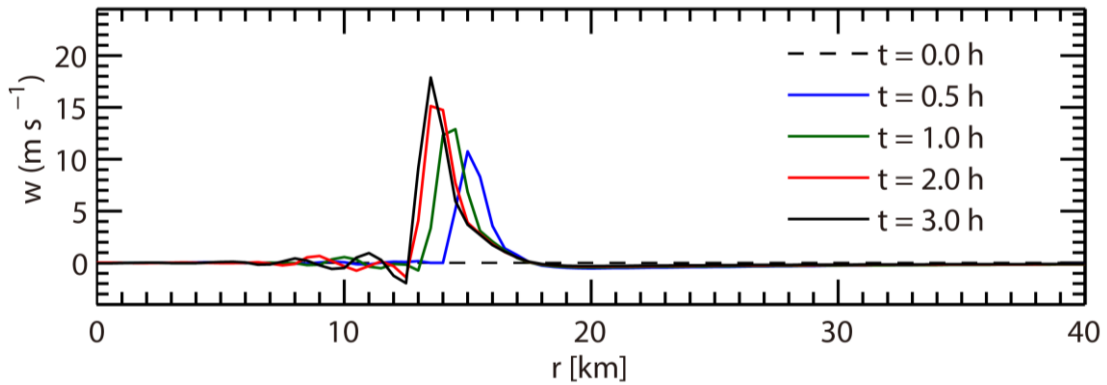


圖 26：單層邊界層模式三種數值方法測試結果。強度為 category 3 的渦旋在模式時間第 3 小時的邊界層風場結構。圖中由上而下分別為徑向風 $u(\text{m s}^{-1})$ 、切向風 $v(\text{m s}^{-1})$ 、邊界層上升速度 $w(\text{m s}^{-1})$ 以及渦度 $\zeta(10^{-3} \text{ s}^{-1})$ 。橫軸為中心距離 (km)。模式解析度為 500 m，而紅色實線為 WENO5，綠色實線為 CRWENO5，藍色實線為 CRWENO5-LD，黑色虛線為初始條件。

(a) 二階中差分法解析度 100 m



(b) WENO5 解析度 500 m



(c) 解析度 390 m 波譜法

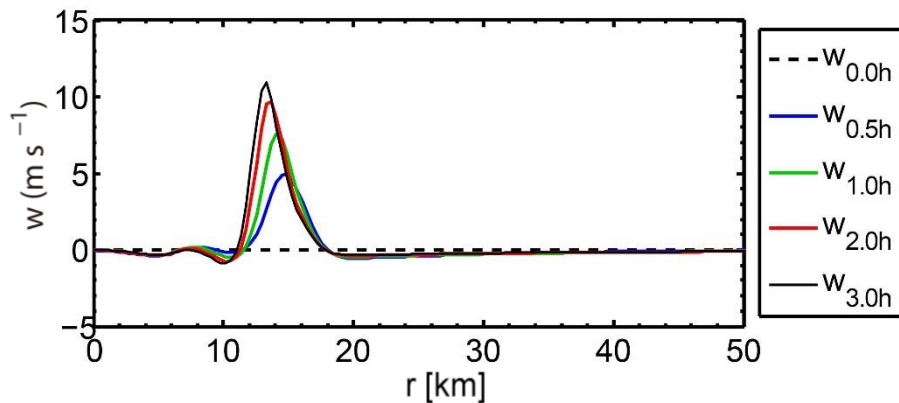
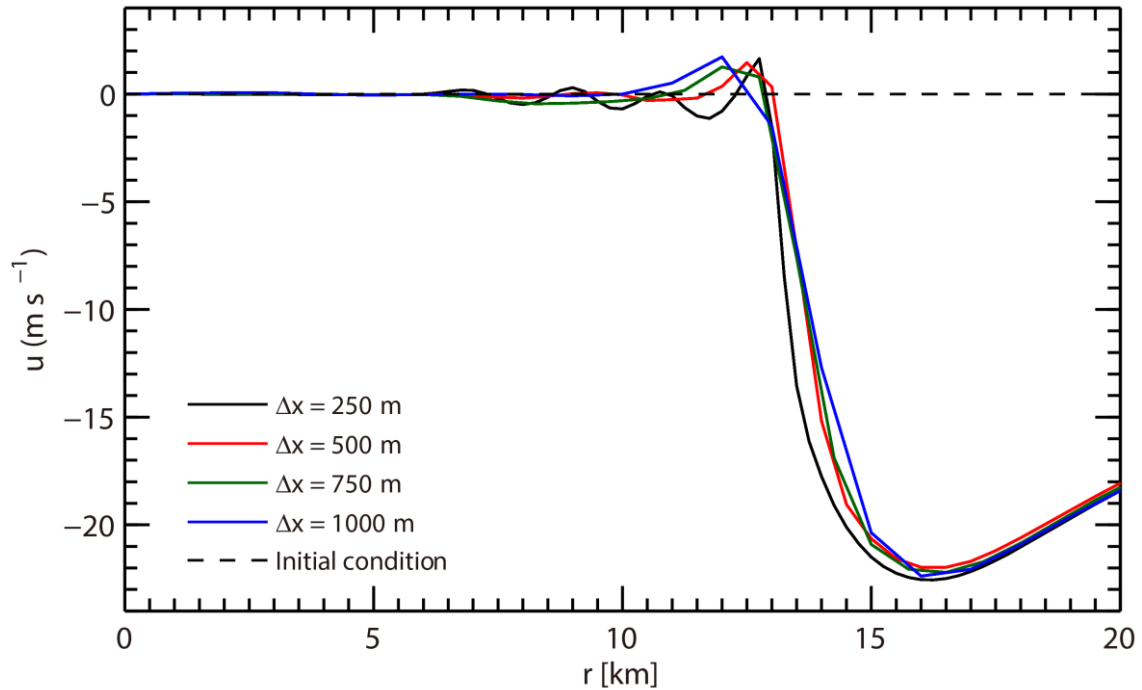


圖 27：強度 category 3 邊界層上升速度 $w(\text{m s}^{-1})$ 隨時間的演變圖，模式時間分別為 0、0.5、1、2 以及 3 小時。其中包括三種不同數值方法。(a)Williams et al. (2013) 採用加入擴散項的二階中差分法，解析度為 100m 的軸對稱邊界層模式，(b)WENO5 解析度為 500m 的卡氏座標邊界層模式以及 (c)加入 Lancozs filter 的波譜法，解析度為 390m 的卡式座標邊界層模式。橫軸為中心距離(km)，縱軸為風速(m s^{-1})。(上圖摘自 Williams et al., 2013，下圖摘自程, 2014)

(a) 徑向風速



(b) 切向風速

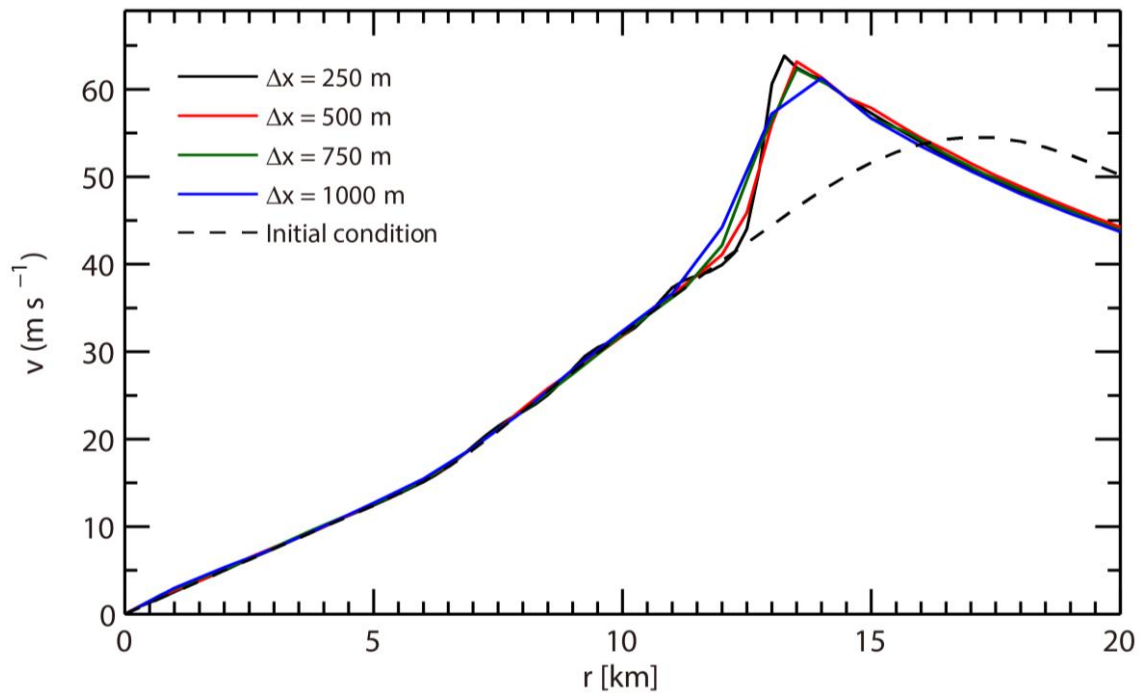


圖 28：WENO5 單層邊界層模式解析度測試結果。強度 category 3 的渦旋在模式時間第 3 小時的邊界層風場結構。(a)徑向風速 $u(\text{m s}^{-1})$ ，(b)切向風速 $v(\text{m s}^{-1})$ 。橫軸為中心距離(km)。黑色實線為解析度 250 m，紅色實線為解析度 500 m，綠色實線為解析度 750 m，藍色實線為解析度 1000 m，黑色虛線為初始條件。

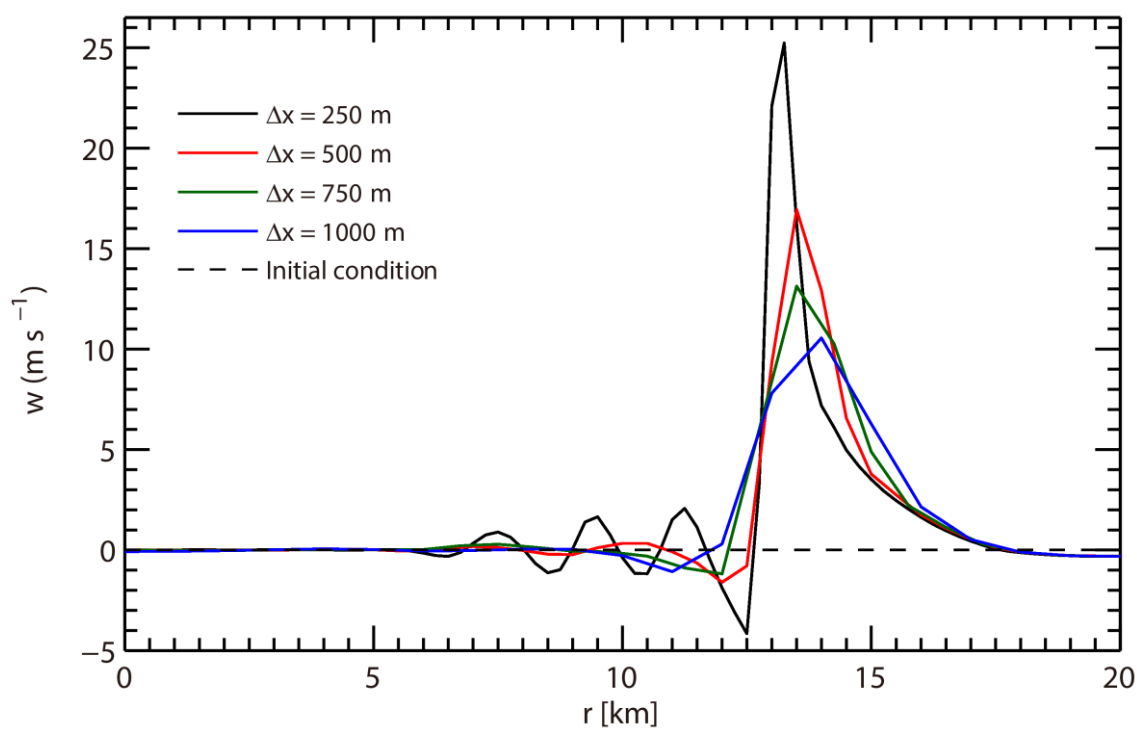


圖 29：WENO5 單層邊界層模式解析度測試結果。強度為 category 3 的渦旋在模式時間第 3 小時的邊界層上升速度 $w(\text{m s}^{-1})$ 。橫軸為中心距離(km)。黑色實線為解析度 250 m，紅色實線為解析度 500 m，綠色實線為解析度 750 m，藍色實線為解析度 1000 m，黑色虛線為初始條件。

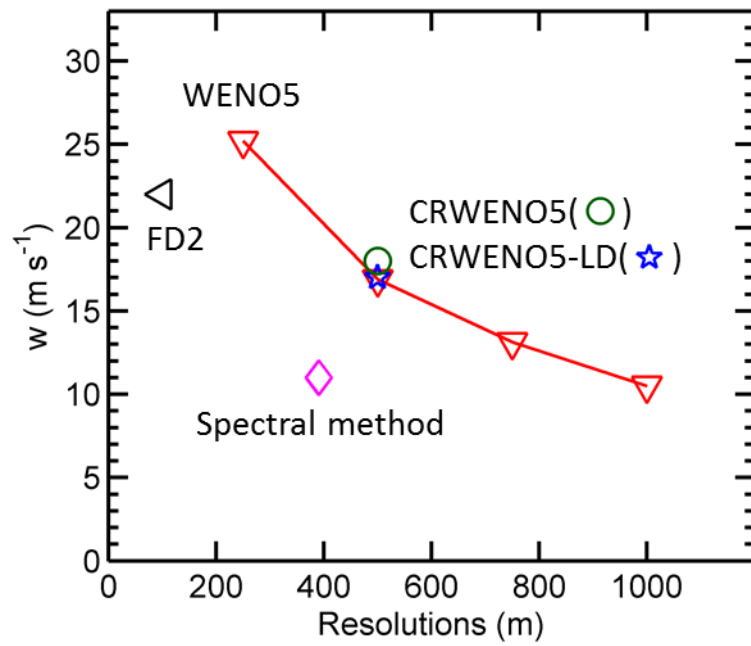


圖 30：五種不同數值方法對於 category 3 強度渦旋，第 3 個小時的上升速度結果。FD2 為二階中差分法，spectral method 為傅立葉波譜法。橫軸為解析度(m)，縱軸為上升速度(m s^{-1})。

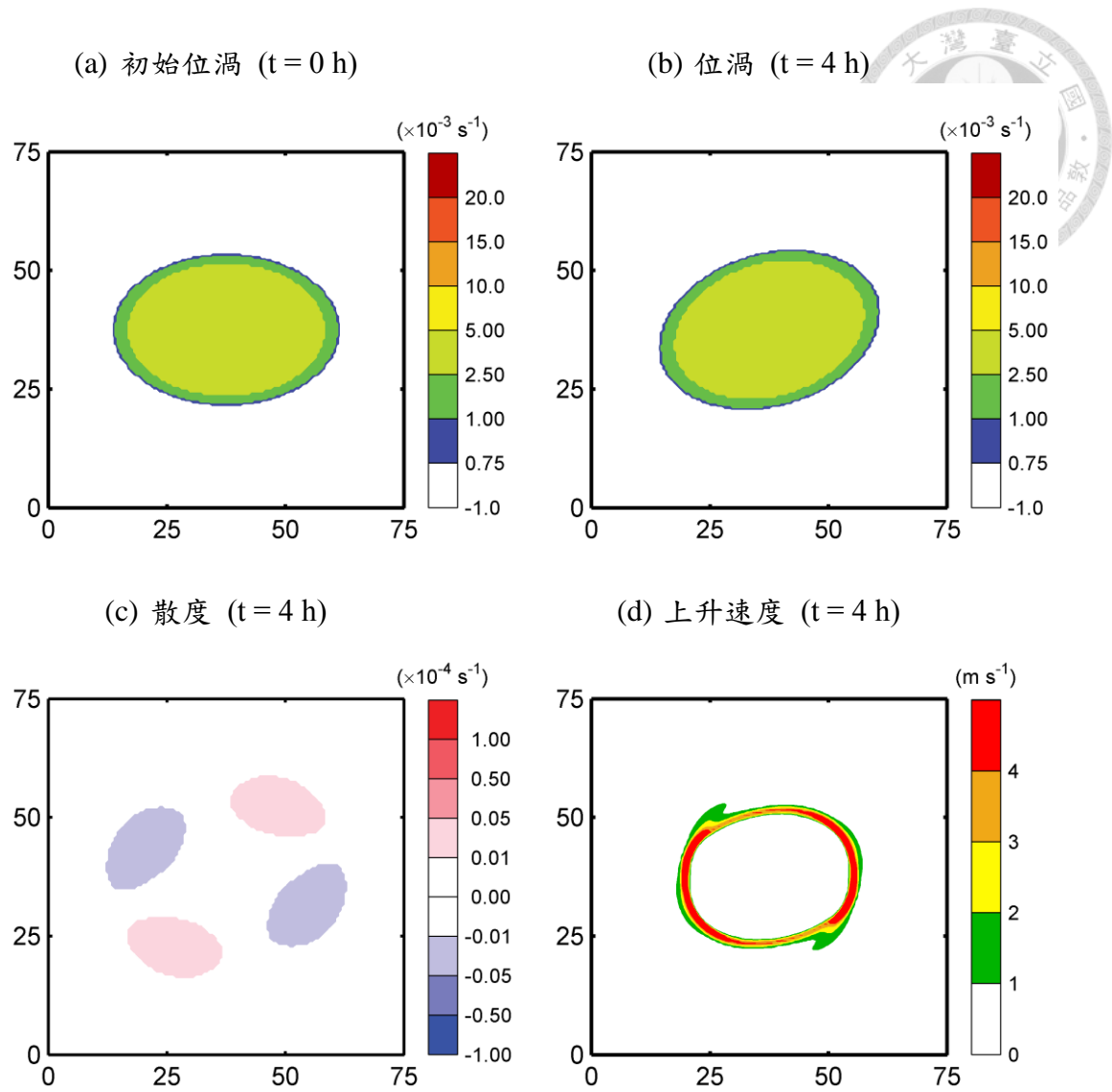


圖 31：橢圓形渦旋實驗中，淺水模式的 (a)初始位渦場。第 4 個小時的(b)位渦場、 (c)散度場以及 (d)邊界層模式的上升速度場。畫圖範圍為 $75 \text{ km} \times 75 \text{ km}$ ，位渦色階為 $(\times 10^{-3} \text{ s}^{-1})$ ，散度藍白色階為 $(\times 10^{-4} \text{ s}^{-1})$ ，上升速度色階為 (m s^{-1}) 。

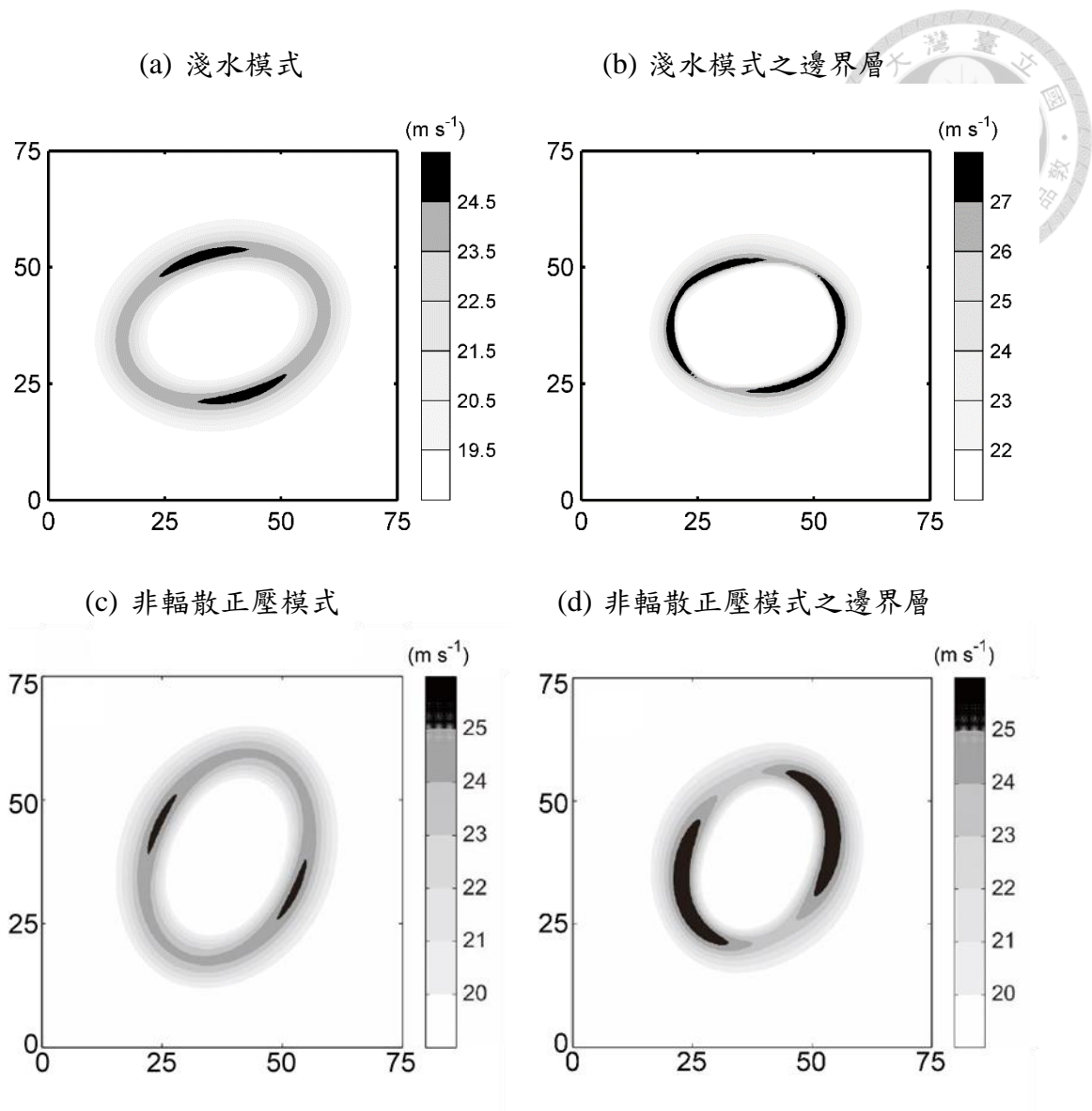


圖 32：橢圓形渦旋實驗中的切向風場。(a)淺水模式與 (b)淺水模式所驅動的邊界層模式第 4 小時的結果。(c)非輻散正壓模式與 (d)非輻散正壓模式所驅動的邊界層模式第 12 小時的結果。畫圖範圍為 $75 \text{ km} \times 75 \text{ km}$ ，灰階為風速(m s^{-1})。

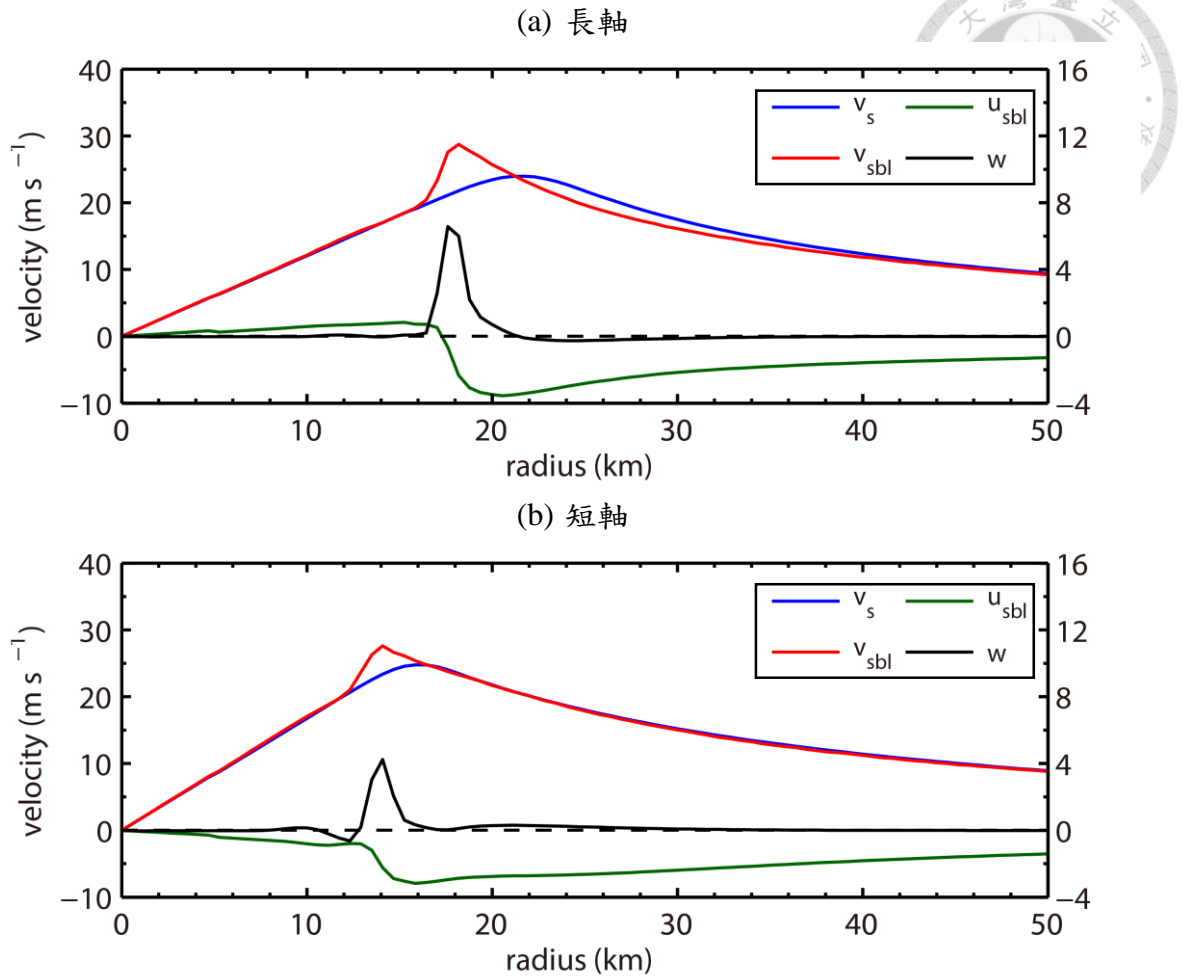


圖 33：橢圓形渦旋實驗中，(a)東側長軸以及 (b)南側短軸第 4 個小時的風速剖面。橫軸為中心距離(km)，縱軸為風速(m s^{-1})。其中黑色實線為邊界層上升速度 w ，對應到右側的縱軸。黑色虛線為 0 值線。藍色實線為淺水模式的切向風速 v_s 、紅色實線為邊界層的切向風速 v_{sbl} ，以及綠色實線為邊界層中的徑向風速 u_{sbl} ，對應到左側的縱軸。

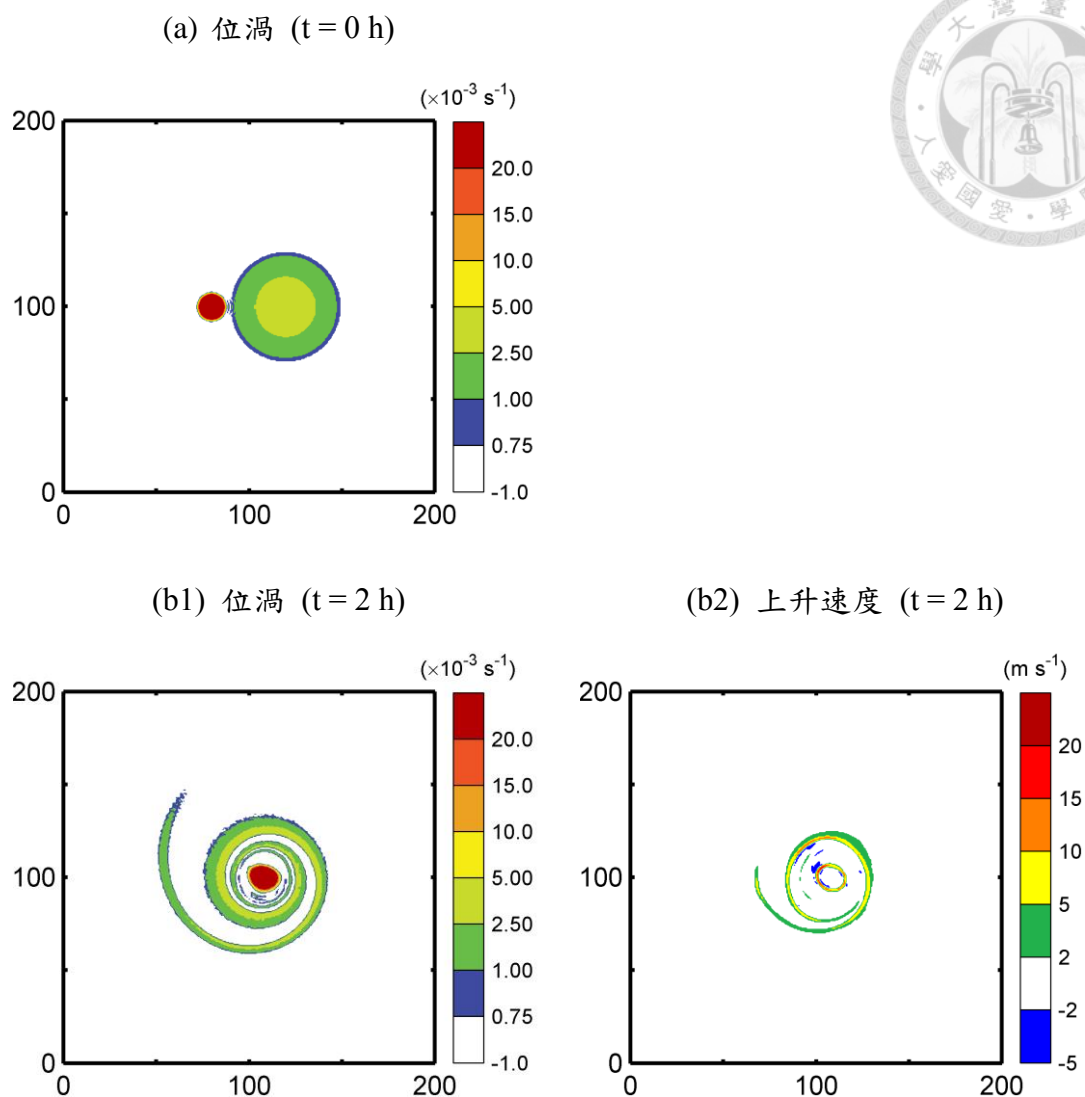


圖 34：Exp-S 實驗中，淺水模式的位渦以及邊界層模式的上升速度。(a)初始條件，(b1)、(b2)模式時間第 2 個小時的結果。畫圖範圍為 $200 \text{ km} \times 200 \text{ km}$ 。位渦色階為 $(\times 10^{-3} \text{ s}^{-1})$ ，上升速度色階為 (m s^{-1}) 。

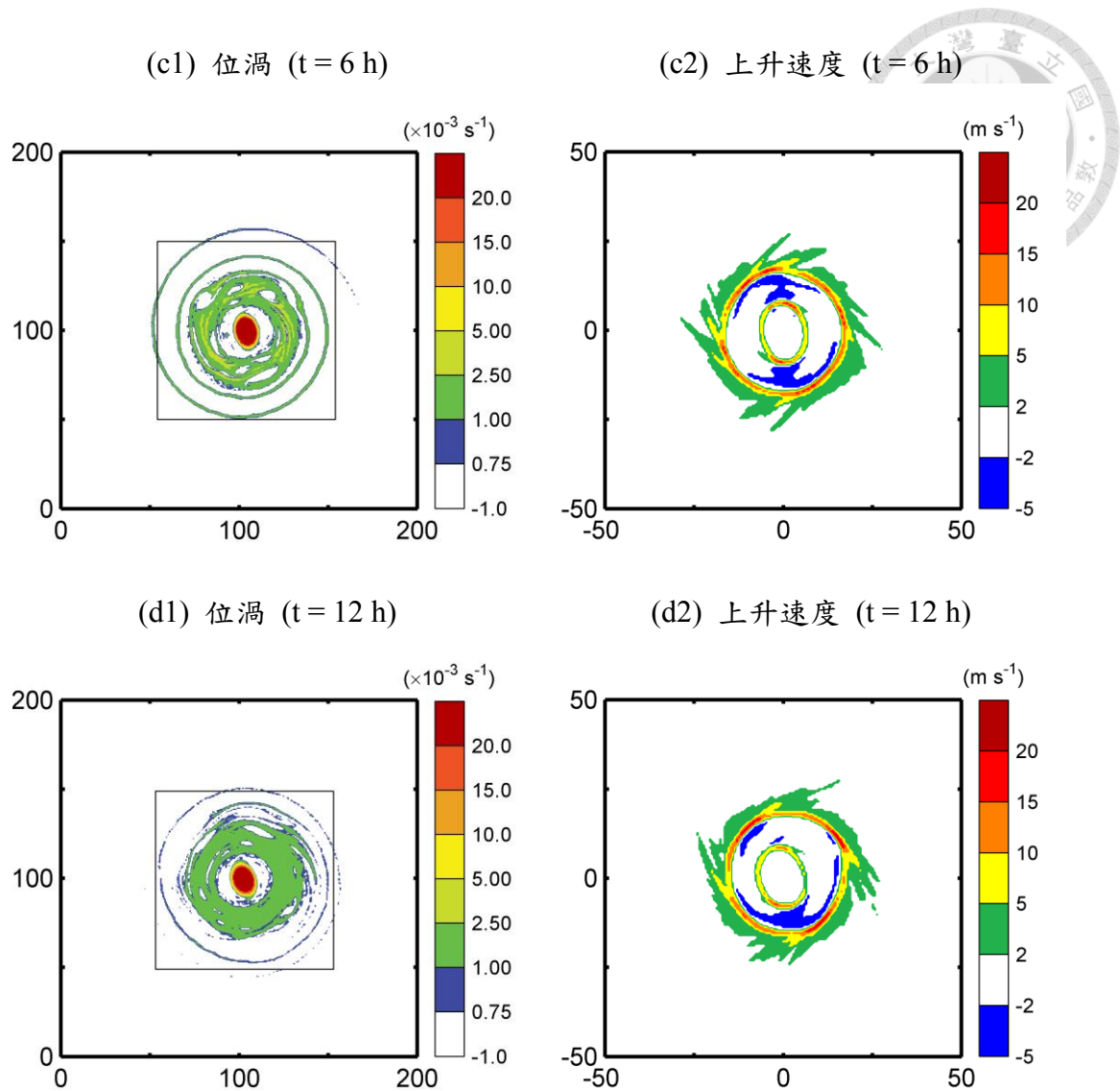


圖 35; Exp-S 實驗中，淺水模式的位渦以及邊界層模式的上升速度。(c1)、(c2) 模式時間第 6 個小時的結果，(d1)、(d2) 模式時間第 12 個小時的結果。位渦畫圖範圍為 $200 \text{ km} \times 200 \text{ km}$ 。上升速度畫圖範圍為 $100 \text{ km} \times 100 \text{ km}$ ，而 (c2)、(d2) 的範圍分別為 (c1)、(d1) 的框線處。位渦色階為 $(\times 10^{-3} \text{ s}^{-1})$ ，上升速度色階為 (m s^{-1}) 。

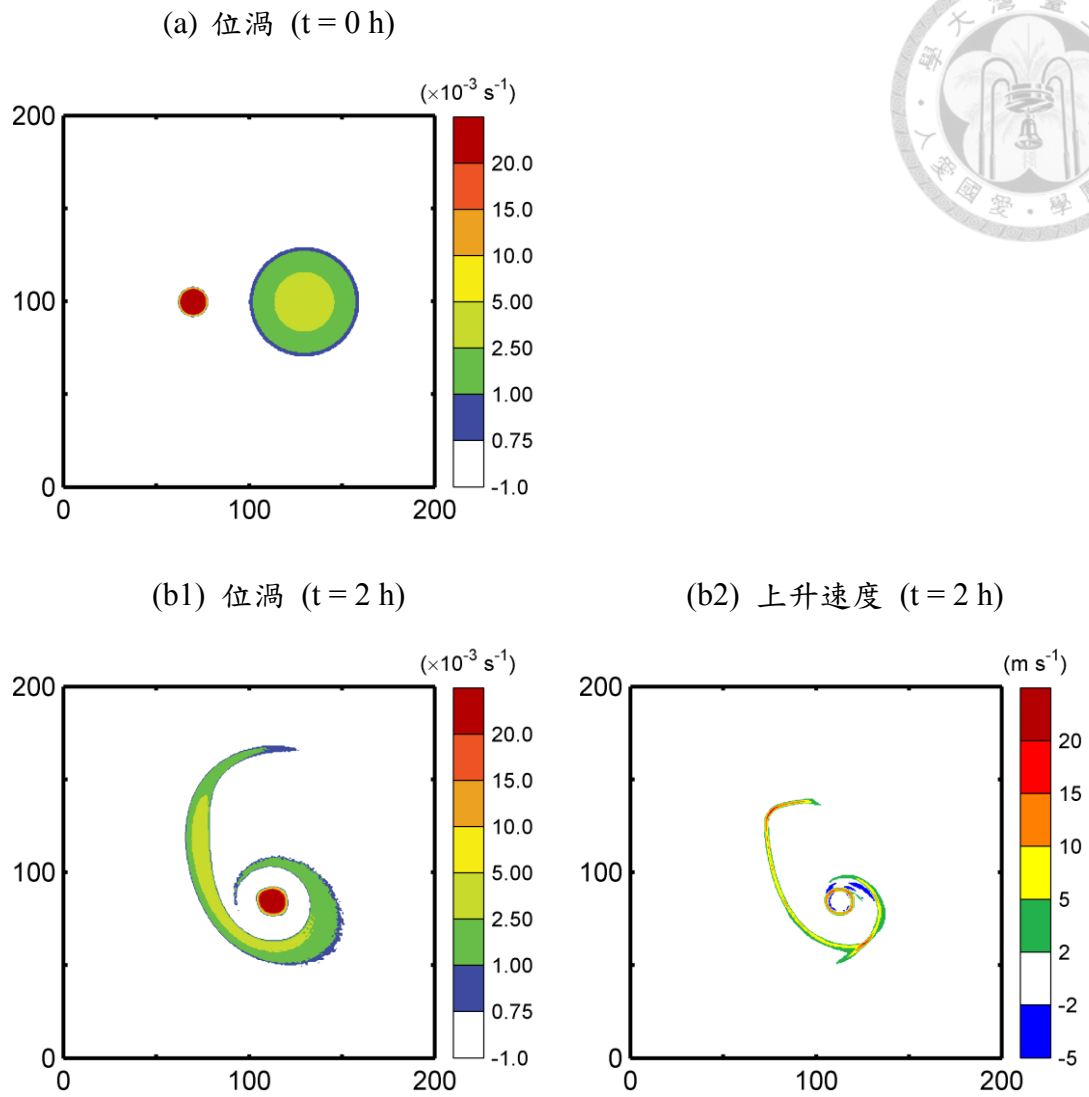


圖 36：Exp-L 實驗中，淺水模式的位渦以及邊界層模式的上升速度。(a)初始條件，(b1)、(b2)模式時間第 2 個小時的結果。畫圖範圍為 $200 \text{ km} \times 200 \text{ km}$ 。位渦色階為 $(\times 10^{-3} \text{ s}^{-1})$ ，上升速度色階為 (m s^{-1}) 。

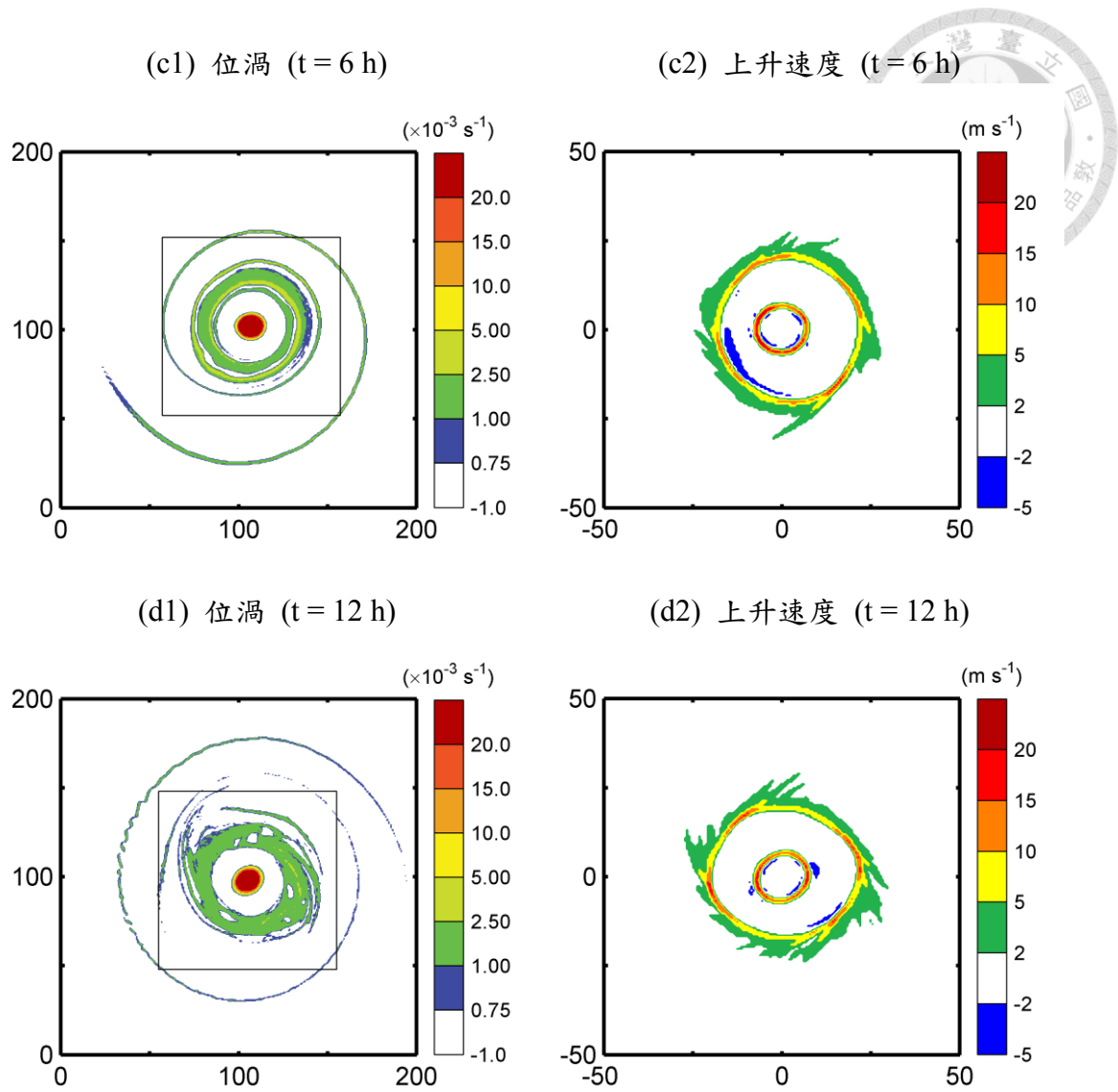


圖 37: Exp-L 實驗中，淺水模式的位渦以及邊界層模式的上升速度。(c1)、(c2) 模式時間第 6 個小時的結果，(d1)、(d2) 模式時間第 12 個小時的結果。位渦畫圖範圍為 $200 \text{ km} \times 200 \text{ km}$ 。上升速度畫圖範圍為 $100 \text{ km} \times 100 \text{ km}$ ，而 (c2)、(d2) 的範圍分別為 (c1)、(d1) 的框線處。位渦色階為 $(\times 10^{-3} \text{ s}^{-1})$ ，上升速度色階為 (m s^{-1}) 。

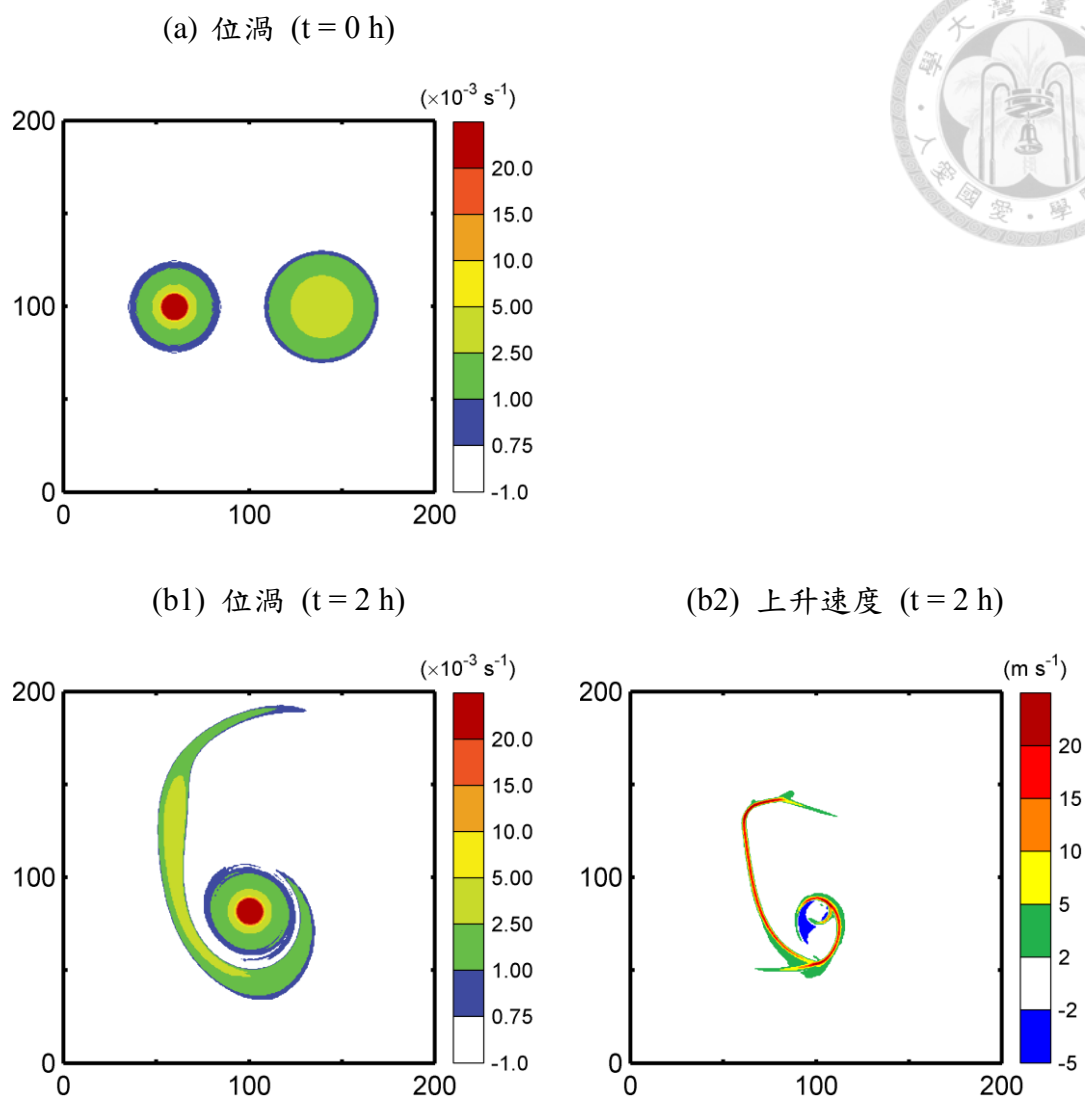


圖 38：Exp-VS 實驗中，淺水模式的位渦以及邊界層模式的上升速度。(a)初始條件，(b1)、(b2)模式時間第 2 個小時的結果。畫圖範圍為 200 km×200 km。位渦色階為($\times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$)，上升速度色階為(m s^{-1})。

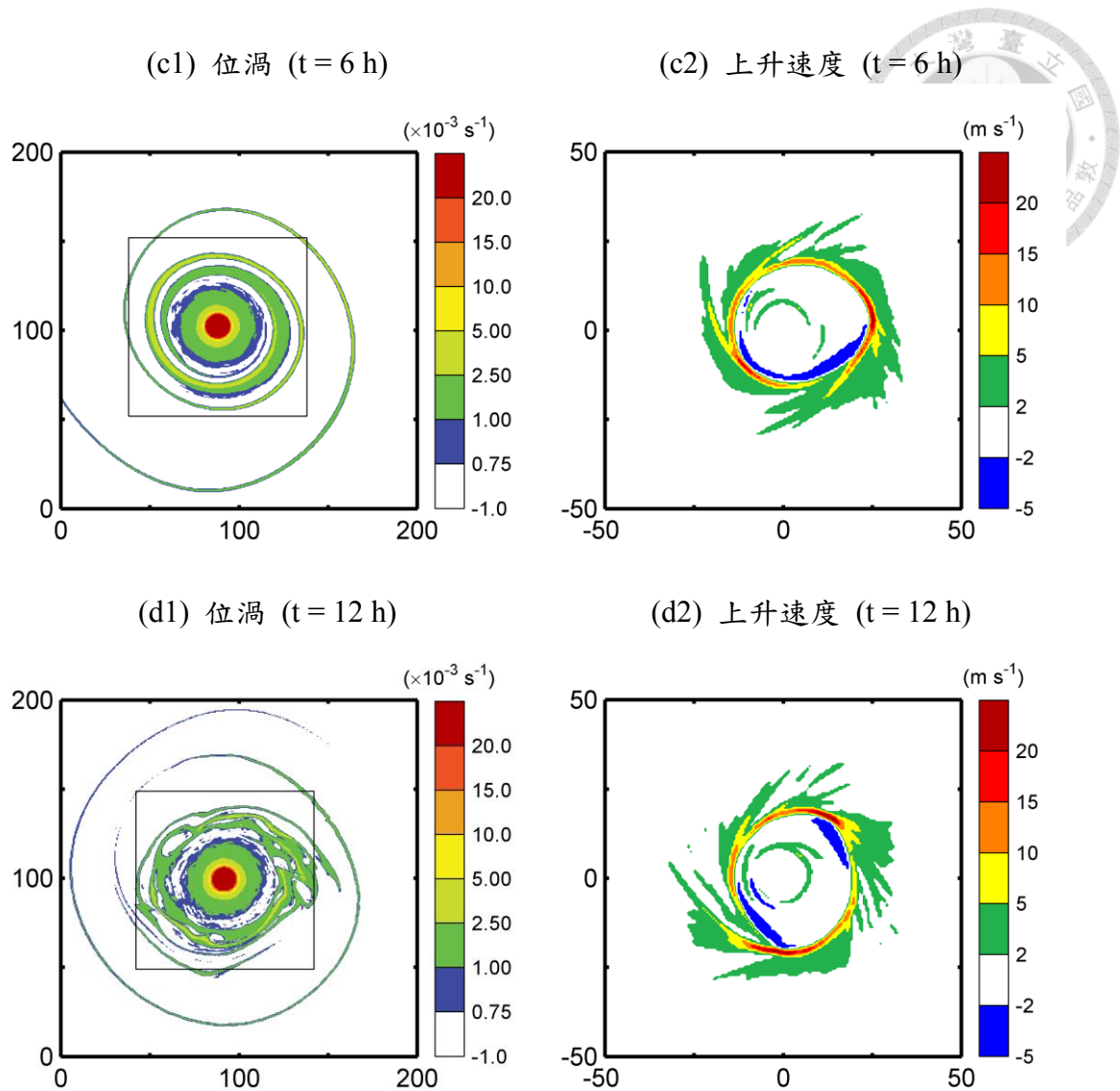


圖 39：Exp-VS 實驗中，淺水模式的位渦以及邊界層模式的上升速度。(c1)、(c2) 模式時間第 6 個小時的結果，(d1)、(d2) 模式時間第 12 個小時的結果。位渦畫圖範圍為 $200 \text{ km} \times 200 \text{ km}$ 。上升速度畫圖範圍為 $100 \text{ km} \times 100 \text{ km}$ ，而 (c2)、(d2) 的範圍分別為 (c1)、(d1) 的框線處。位渦色階為 $(\times 10^{-3} \text{ s}^{-1})$ ，上升速度色階為 (m s^{-1}) 。

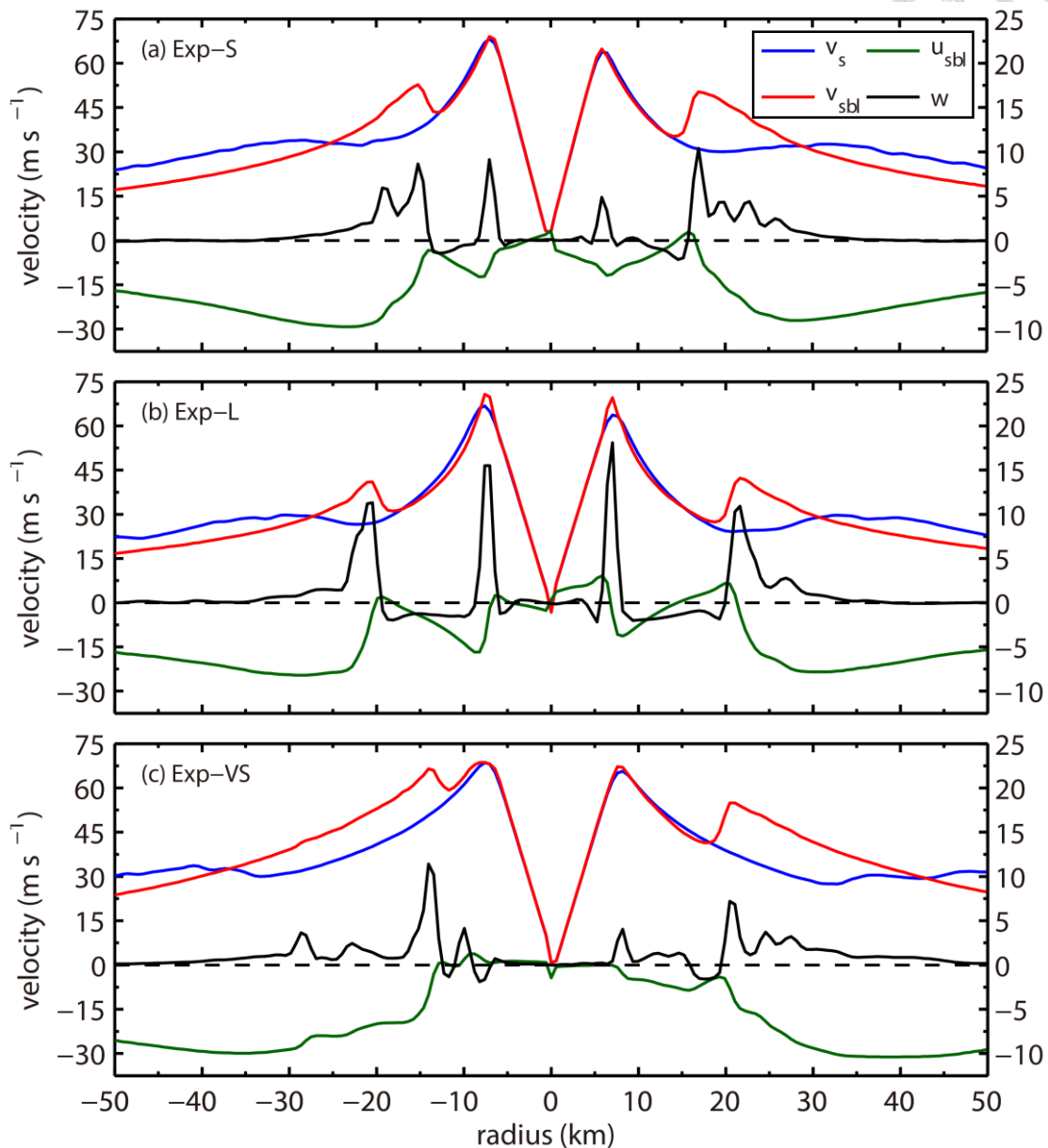


圖 40：三個雙眼牆實驗，以小而強的渦旋為中心，第 12 個小時的東西側風速剖面。其中 (a)Exp-S、(b)Exp-L 以及(c)Exp-VS。黑色實線為邊界層上升速度 w ，對應到右側的縱軸。黑色虛線為 0 值線。藍色實線為淺水模式的切向風 v_s ，紅色實線為邊界層的切向風 v_{sbl} ，綠色實線為邊界層的徑向風 u_{sbl} ，對應到左側的縱軸。橫軸為中心距離(km)，0 表示渦旋中心，正值表示渦旋東側，負值表示渦旋西側。縱軸為風速(m s^{-1})。

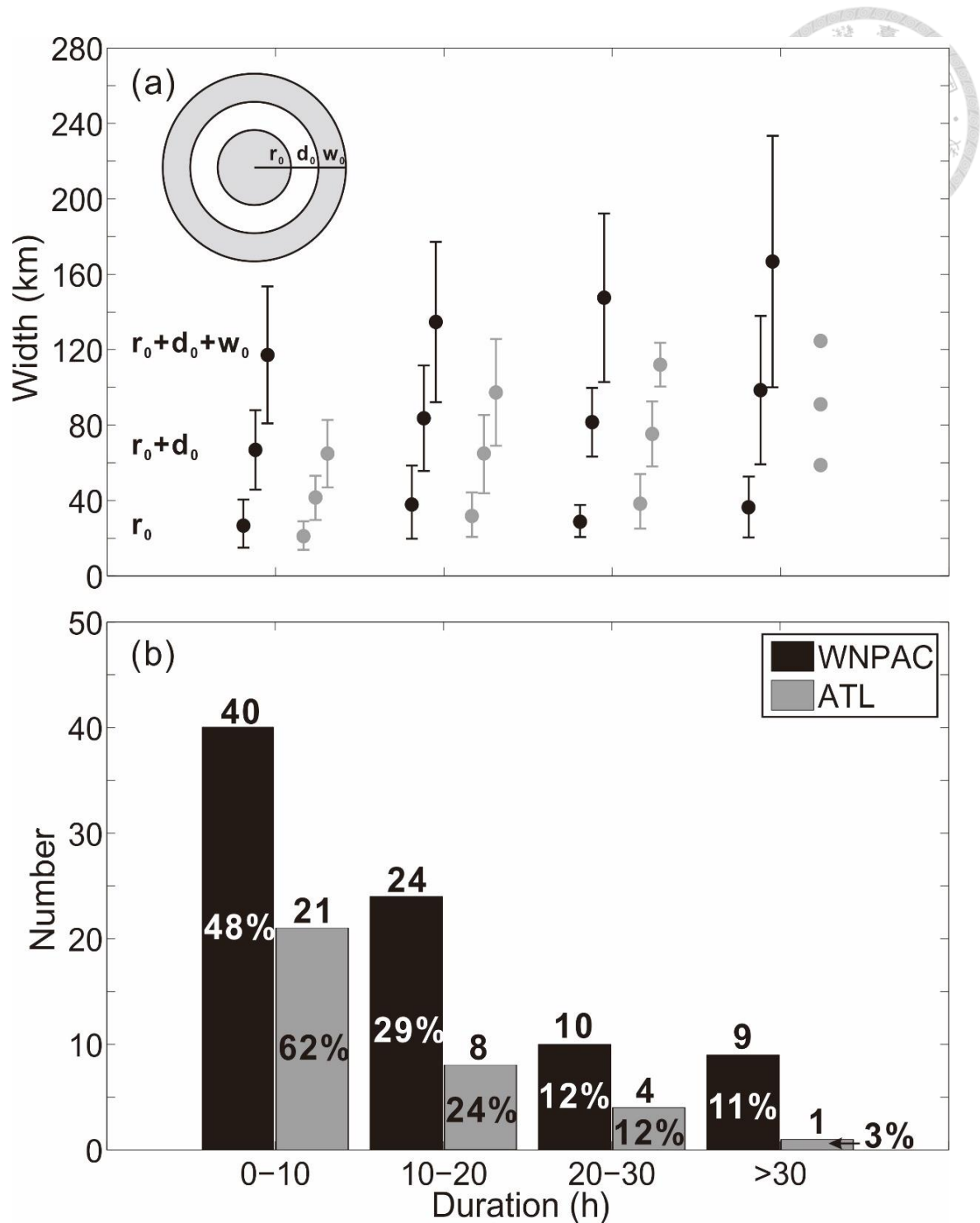


圖 41：(a)雙眼牆結構平均大小與標準差，對應於雙眼牆結構維持時間的統計圖。(b)雙眼牆颱風總數與比例，對應於雙眼牆結構維持時間的統計圖。黑色以及灰色表示西北太平洋以及大西洋的統計資料。橫軸為小時(h)，上圖縱軸為結構大小(km)，下圖縱軸為個數。 r_0 、 d_0 以及 w_0 分別代表核心渦旋半徑、moat 寬度以及外眼牆寬度。

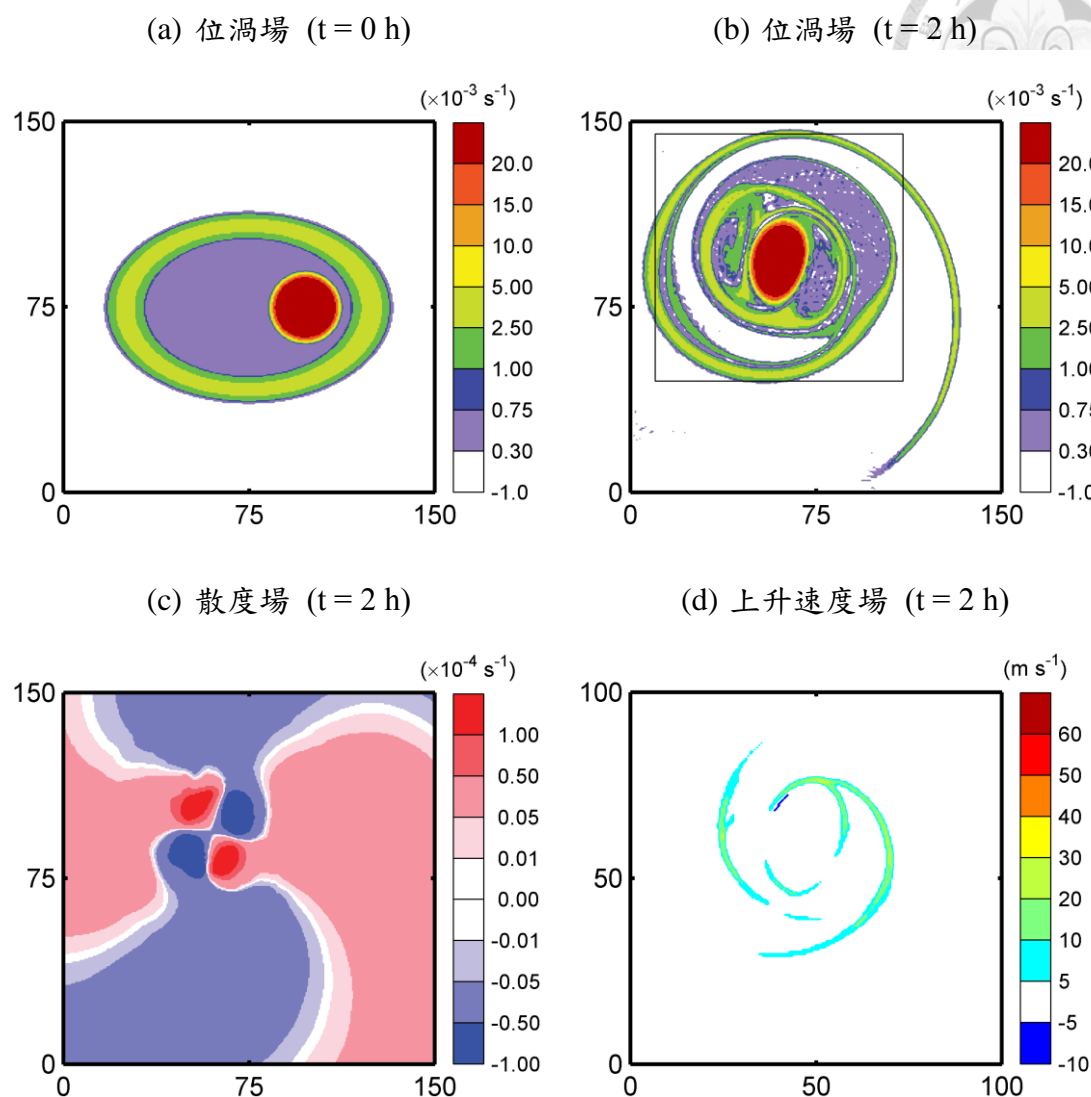


圖 42：三極渦旋實驗中，淺水模式的 (a)初始位渦場、(b)第 2 小時的位渦場、(c)第 2 小時的散度場。(d)邊界層模式的上升速度場。(a)-(c)畫圖範圍為 $150 \text{ km} \times 150 \text{ km}$ 。(d)畫圖範圍為 $100 \text{ km} \times 100 \text{ km}$ ，為圖 (b)框線處。位渦色階為 $(\times 10^{-3} \text{ s}^{-1})$ ，散度藍白色階為 $(\times 10^{-4} \text{ s}^{-1})$ ，上升速度色階為 (m s^{-1}) 。

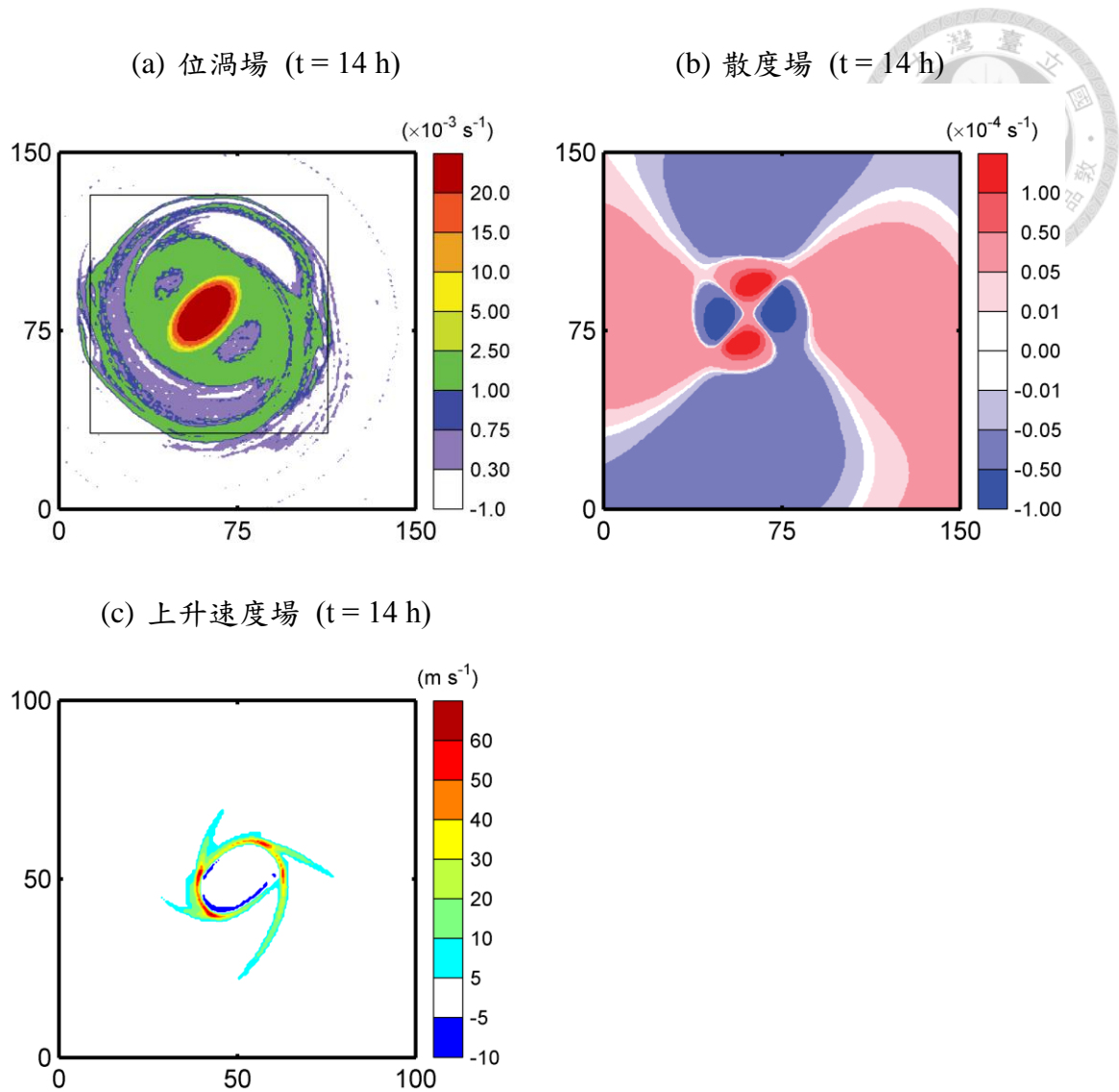


圖 43：三極渦旋實驗中，淺水模式的(a)位渦場、(b)散度場。(c)邊界層模式的上升速度場。模式時間為第 14 小時。圖 (a)、(b)畫圖範圍為 $150 \text{ km} \times 150 \text{ km}$ 。圖 (c)畫圖範圍為 $100 \text{ km} \times 100 \text{ km}$ ，為圖 (a)框線處。位渦色階為 $(\times 10^{-3} \text{ s}^{-1})$ ，散度藍白色階為 $(\times 10^{-4} \text{ s}^{-1})$ ，上升速度色階為 (m s^{-1}) 。

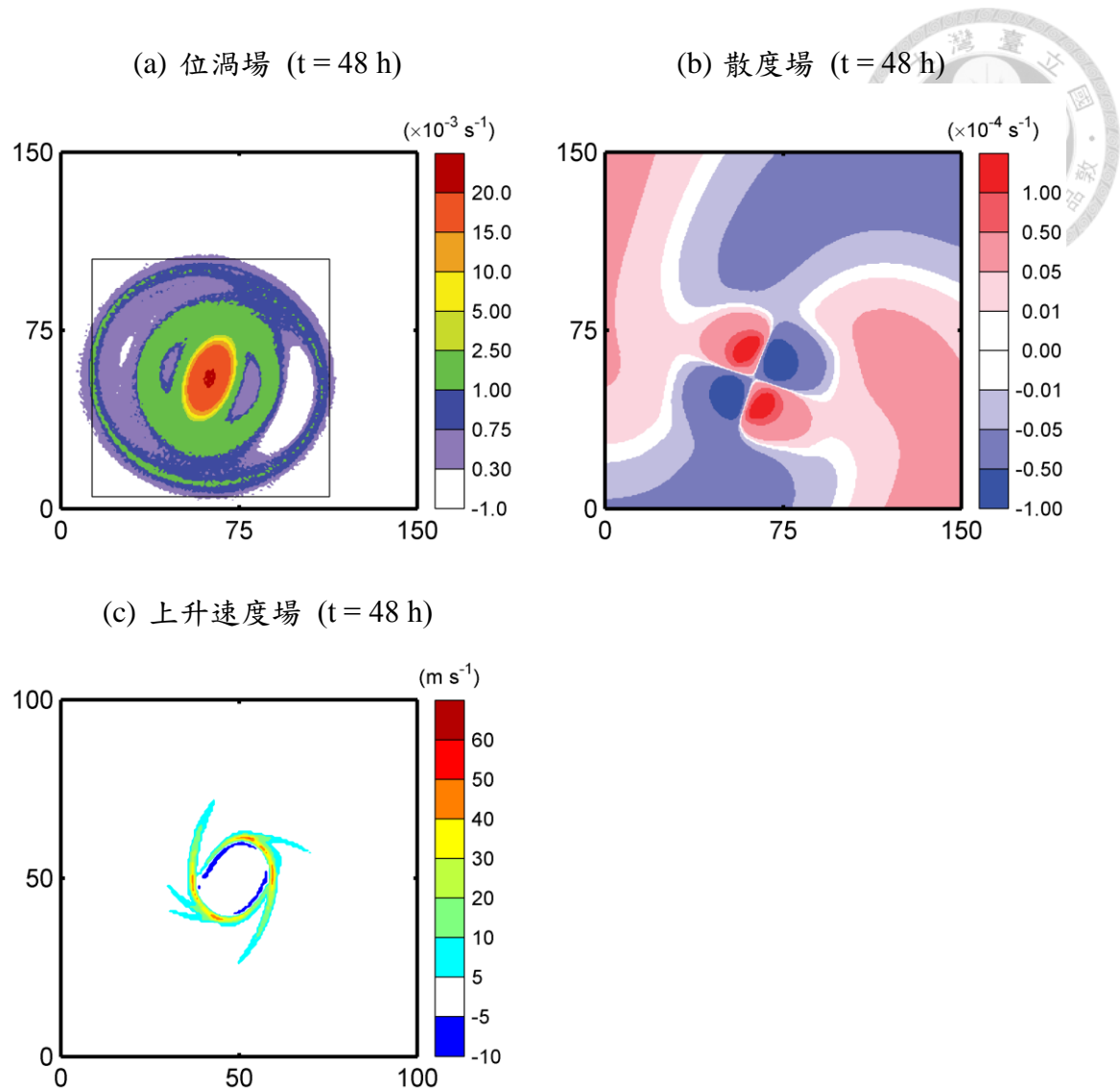


圖 44：三極渦旋實驗中，淺水模式的(a)位渦場、(b)散度場。(c)邊界層模式的上升速度場。模式時間為第 48 小時。圖 (a)、(b)畫圖範圍為 $150 \text{ km} \times 150 \text{ km}$ 。圖 (c)畫圖範圍為 $100 \text{ km} \times 100 \text{ km}$ ，為圖 (a)框線處。位渦色階為 $(\times 10^{-3} \text{ s}^{-1})$ ，散度藍白色階為 $(\times 10^{-4} \text{ s}^{-1})$ ，上升速度色階為 (m s^{-1}) 。

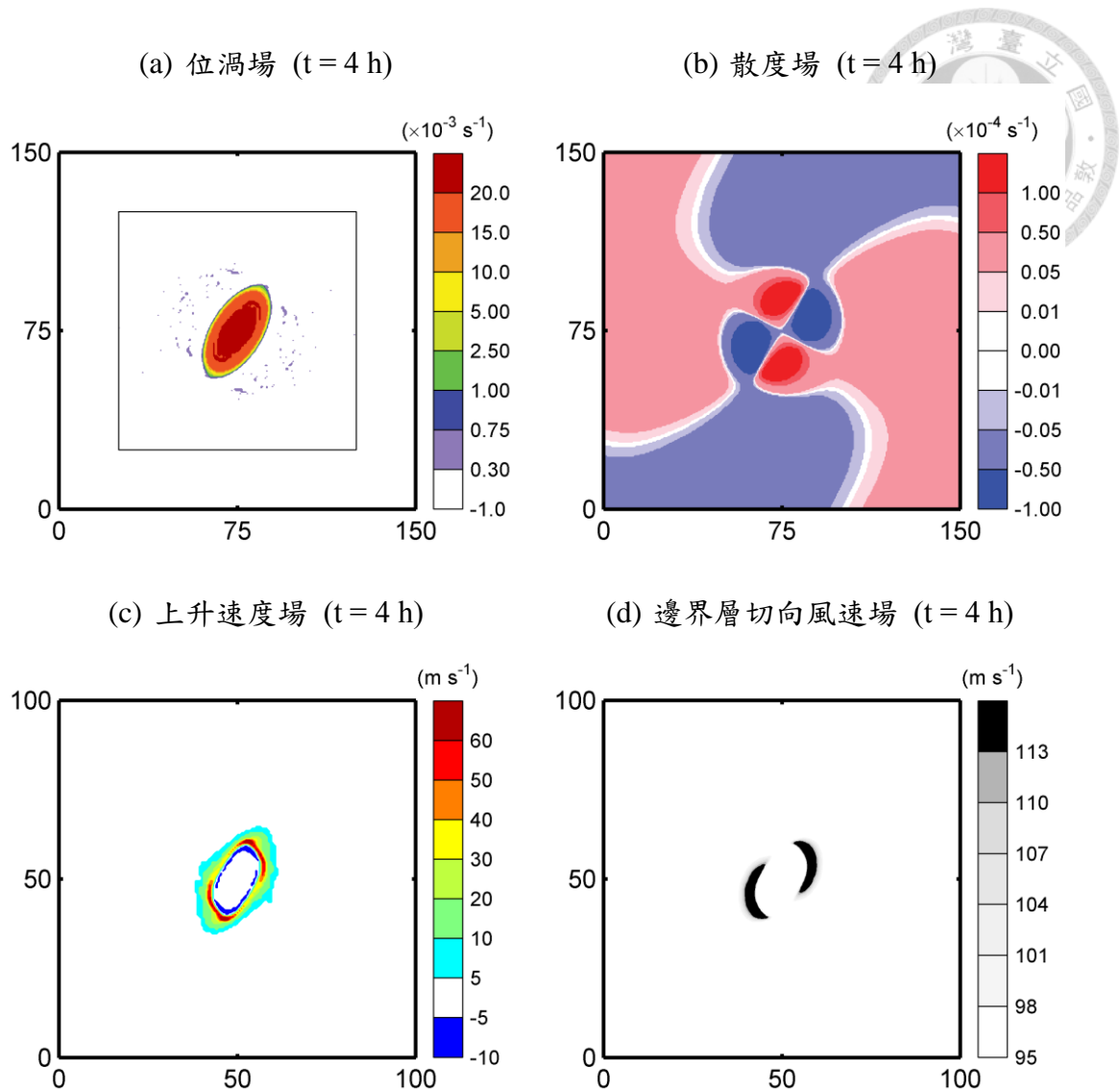


圖 45：三極渦旋對照實驗中，淺水模式的 (a)位渦場以及 (b)散度場。邊界層模式的 (c)上升速度場以及 (d)切向風場。模式時間為第 4 個小時。圖 (a)、(b) 畫圖範圍為 $150 \text{ km} \times 150 \text{ km}$ 。圖 (c)、(d) 畫圖範圍為 $100 \text{ km} \times 100 \text{ km}$ ，為圖 (a) 框線處。位渦色階為 $(\times 10^{-3} \text{ s}^{-1})$ ，散度藍白色階為 $(\times 10^{-4} \text{ s}^{-1})$ ，上升速度色階為 (m s^{-1}) ，邊界層切向風速灰階為 (m s^{-1}) 。

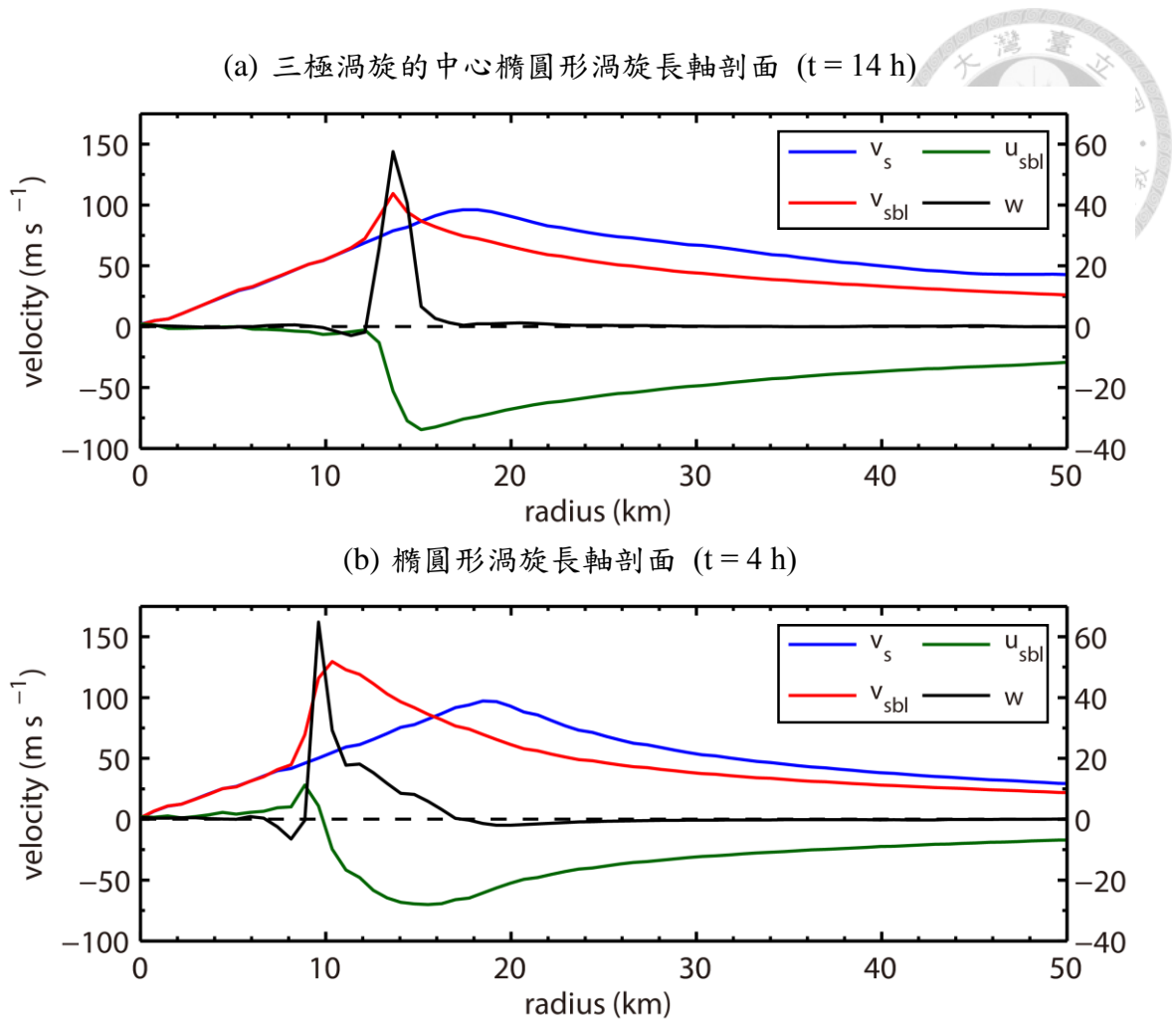
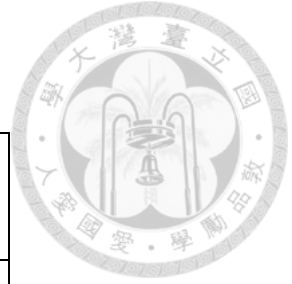


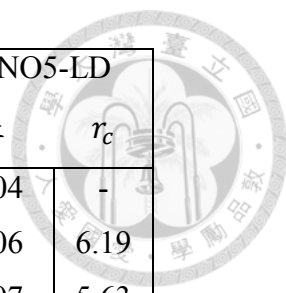
圖 46：(a)三極渦旋實驗，第 14 小時中心橢圓渦旋長軸剖面，以及 (b)三極渦旋對照實驗，中心橢圓形渦旋第 4 個小時的長軸剖面。橫軸為中心的距離(km)，縱軸為風速(m s^{-1})。其中黑色實線為邊界層上升速度 w ，對應到右側的縱軸。黑色虛線為 0 值線。藍色實線為淺水模式中的切向風速 v_s 、紅色實線為邊界層中的切向風速 v_{sbl} ，以及綠色實線為邊界層中的徑向風速 u_{sbl} ，對應到左側的縱軸。

表

N	FD4		波譜法	
	L_2 誤差	r_c	L_2 誤差	r_c
20	8.128e-03	-	4.592e-13	-
40	5.339e-04	3.92	4.525e-12	-3.3
80	3.376e-05	3.98	3.005e-12	0.59
160	2.116e-06	4.00	6.720e-12	-1.16

表 1：線性平流實驗中，不同格點數的 L_2 誤差和收斂速率(r_c)。數值方法為四階中差分法 (FD4) 以及波譜法。





N	WENO5		CRWENO5		CRWENO5-LD	
	L_2 誤差	r_c	L_2 誤差	r_c	L_2 誤差	r_c
20	2.250e-03	-	6.506e-04	-	6.919e-04	-
40	9.375e-05	4.55	1.214e-05	5.74	9.446e-06	6.19
80	3.055e-06	4.94	3.241e-07	5.23	1.909e-07	5.63
160	9.618e-08	4.99	9.699e-09	5.06	5.137e-09	5.22

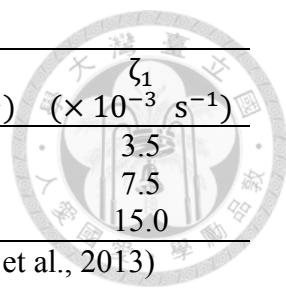
表 2：與表 1 同，唯數值方法為 WENO5、CRWENO5 和 CRWENO5-LD。

	$\frac{\psi_{max}}{\psi_{0max}}$	ψ_{min}	$\frac{\Sigma\psi}{\Sigma\psi_0}$	$\frac{\Sigma\psi^2}{\Sigma\psi_0^2}$
一圈				
FD4	0.9540	-1.85e-02	1.0000	1.0000
WENO5	0.9396	-2.03e-04	1.0000	0.9717
CRWENO5	0.9877	-1.83e-04	1.0000	0.9939
CRWENO5-LD	0.9952	-1.75e-04	1.0000	0.9960
波譜法	1.0000	-2.18e-05	1.0000	1.0000
五圈				
FD4	0.8464	-1.34e-01	1.0000	1.0000
WENO5	0.8347	-4.06e-04	1.0002	0.8861
CRWENO5	0.9483	-5.24e-04	1.0002	0.9713
CRWENO5-LD	0.9624	-3.64e-04	1.0002	0.9807
波譜法	1.0000	-1.10e-04	1.0000	1.0000

表 3：二維剛體旋轉流場實驗中，最大值保守 (ψ_{max}/ψ_{0max})、最小值 (ψ_{min})、質量保守 ($\Sigma\psi_{max}/\Sigma\psi_{0max}$) 以及能量保守 [$\Sigma(\psi_{max})^2/\Sigma(\psi_{0max})^2$]。表中為高斯錐體旋轉一圈以及五圈後的結果。數值方法為四階中差分法(FD4)、WENO5、CRWENO5、CRWENO5-LD 以及波譜法的。

	$\frac{\Sigma\psi_{neg}}{\Sigma\psi}$	L_2 誤差	耗散誤差	頻散誤差
一圈				
FD4	-1.22e-02	1.18e-02	2.30e-22	1.39e-04
WENO5	-1.65e-04	4.72e-03	3.41e-06	1.89e-05
CRWENO5	-1.31e-04	1.27e-03	1.56e-07	1.45e-06
CRWENO5-LD	-1.30e-04	1.07e-03	6.57e-08	1.07e-06
波譜法	-2.49e-05	8.49e-04	5.02e-19	7.21e-07
五圈				
FD4	-2.22e-01	3.92e-02	5.72e-21	1.53e-03
WENO5	-3.87e-04	1.37e-02	5.80e-05	1.31e-04
CRWENO5	-6.14e-04	3.81e-03	3.50e-06	1.10e-05
CRWENO5-LD	-4.28e-04	3.20e-03	1.59e-06	8.67e-06
波譜法	-2.25e-04	4.58e-04	5.78e-21	2.09e-07

表 4：與表 3 同，唯性質為負值產生比例 ($\Sigma\psi_{neg}/\Sigma\psi$)、 L_2 誤差、耗散誤差以及頻散誤差。



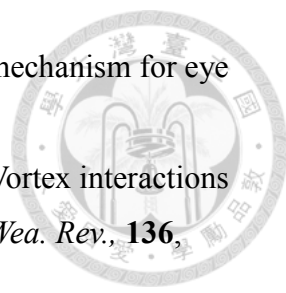
Case	r_1 (km)	r_2 (km)	r_3 (km)	r_4 (km)	ζ_0 ($\times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$)	ζ_1 ($\times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$)
C1	7	11	18	30.5	2.5	3.5
C3	5	8	13	20.5	5.0	7.5
C5	4	6	9	15	8.0	15.0


表 5：Williams et al. (2013) 中渦旋強度參照表。(摘自 Williams et al., 2013)

參考文獻



- [1] Baba, Y., and K. Takahashi, 2013 : Weighted essentially non-oscillatory scheme for cloud edge problem. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **139**, 1374–1388.
- [2] Donelan, M. A., B. K. Haus, N. Reul, W. J. Plant, M. Stiassnie, H. C., Graber, O. B. Brown, and E. S. Saltzman, 2004 : On the limiting aerodynamic roughness of the ocean in very strong winds. *Geophys. Res. Lett.*, **31**, L18306, doi:10.1029/2004GL019460.
- [3] Durran, D. R., 2010 : *Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Texts in Applied Mathematics, Vol. 32 2nd ed., Springer, 516 pp.
- [4] Ghosh, D. and J. D. Baeder, 2012 : Compact reconstruction schemes with weighted ENO limiting for hyperbolic conservation laws. *SIAM J. Sci. Comput.*, **34(3)**, A1678–A1706.
- [5] Hack, J. J., and W. H. Schubert, 1986 : Nonlinear response of atmospheric vortices to heating by organized cumulus convection. *J. Atmos. Sci.*, **43**, 1559–1573.
- [6] Harten, A., B. Engquist, S. Osher, and S. Chakravarthy, 1987 : Uniformly high order essentially non oscillatory schemes, III. *J. Comput. Phys.*, **71**, 231–303.
- [7] Hendricks, E. A., W. H. Schubert, S. R. Fulton, and B. D. McNoldy, 2010 : Spontaneous-adjustment emission of inertia-gravity waves by unsteady vortical motion in the hurricane core. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **136**: 537 – 548.
- [8] Henrick, A. K., T. D. Aslam, and J. M. Powers, 2005 : Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: Achieving optimal order near critical points. *J. Comput. Phys.*, **207**, 542–567.
- [9] Houze, R. A., S. S. Chen, B. F. Smull, W.-C. Lee, and M. M. Bell, 2007 : Hurricane intensity and eyewall replacement. *Science*, **315**, 1235–1239.
- [10] Jiang, G.-S., and C.-W. Shu, 1996 : Efficient implementation of weighted ENO schemes. *J. Comput. Phys.*, **126**, 202–228.
- [11] Kuo, H.-C., L.-Y. Lin, C.-P. Chang, and R. T. Williams, 2004 : The formation of concentric vorticity structures in typhoons. *J. Atmos. Sci.*, **61**, 2722–2734.
- [12] Kuo, H.-C., and R. T. Williams, 1990 : Semi-Lagrangian solutions to the inviscid Burgers equation. *Mon. Wea. Rev.*, **118**, 1278–1288.

- 
- [13] Kuo, H.-C., R. T. Williams, and J. H. Chen, 1999 : A possible mechanism for eye rotation of typhoon herb. *J. Atmos. Sci.*, **56**, 1659-1673.
 - [14] Kuo, H.-C., W. H. Schubert, C.-L. Tsai, and Y.-F. Kuo, 2008 : Vortex interactions and barotropic aspects of concentric eyewall formation. *Mon. Wea. Rev.*, **136**, 5183-5198.
 - [15] Large, W. G., J. C. McWilliams, and S. C. Doney, 1994 : Oceanic vertical mixing: A review and a model with a nonlocal boundary layer parameterization. *Rev. Geophys.*, **32(4)**, 363–403.
 - [16] Liu, X., S. Osher, and T. Chan, 1994 : Weighted essentially non-oscillatory schemes. *J. Comput. Phys.*, **115**, 200–212.
 - [17] Ooyama, K., 1969 : Numerical simulation of life cycle of tropical cyclones. *J. Atmos. Sci.*, **26**, 3-40.
 - [18] Powell, M. D., P. J. Vickery, and T. A. Reinhold, 2003 : Reduced drag coefficient for high wind speeds in tropical cyclones. *Nature*, **422**, 279-283.
 - [19] Qiu, J., Z.-L. Gu, Z.-S. Wang, 2008 : Numerical Study of the Response of an Atmospheric Surface Layer to a Spatially Nonuniform Plant Canopy. *Bound.-Layer Meteor.* **127**, 293–311.
 - [20] Shapiro, L. J., 1983 : The asymmetric boundary layer flow under a translating hurricane. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 1984–1998.
 - [21] Shu, C.-W., 1998 : Essentially Non-oscillatory and Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations*, A. Quarteroni, Ed., No.1697, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 325-432.
 - [22] Schubert, W. H., and J. J. Hack, 1982 : Inertial stability and tropical cyclone development. *J. Atmos. Sci.*, **39**, 1687-1697.
 - [23] Sitkowski, M., J. P. Kossin, and C. M. Rozoff, 2011 : Intensity and Structure Changes during Hurricane Eyewall Replacement Cycles. *Mon. Wea. Rev.*, **139**, 3829-3847.
 - [24] Takaca, L. L., 1985 : A two-step scheme for the advection equation with minimized dissipation and dispersion errors. *Mon. Wea. Rev.*, **113**, 1050-1065.
 - [25] Williams, G. J., R. K. Taft, B.D. McNoldy, and W. H. Schubert, 2013 : Shock-like structures in the tropical cyclone boundary layer. *J. Adv. Model. Earth Syst.*, **5**, 338-353.

- 
- [26] 柳再明，郭鴻基，1995：半拉格朗日法與正定義數值方法之比較。**大氣科學**，**23**，35-63。
- [27] 程維毅，2014：颱風邊界層震波狀結構探討。國立台灣大學大氣科學研究所碩士論文，85 頁。

附錄



在此將推導耗散誤差 (dissipative error) 以及頻散誤差 (dispersive error) 的公式。

我們可以將數值解的總誤差寫成：

$$E_{TOT} = \frac{1}{N} \sum_i (\psi_i - \phi_i)^2 \quad (a1)$$

其中 N 表示數值計算的總格點數， ψ_i 為格點上的解析解， ϕ_i 為格點上的數值解，有一點須特別注意，在此所介紹的總誤差為一般數值方法所討論的 L_2 誤差的平方。而 (a1) 又可以表示成：

$$E_{TOT} = \frac{1}{N} \sum_i [(\psi_i - \phi_i) - (\bar{\psi} - \bar{\phi})]^2 + (\bar{\psi} - \bar{\phi})^2 \quad (a2)$$

(a2) 右側第一項為 $(\psi - \phi)$ 的變異數 (variance)，為了以下符號簡潔，定義變異數為 $\sigma^2(\psi - \phi)$ ，而 $\bar{\psi} = \frac{1}{N} \sum_i \psi_i$ ， $\bar{\phi} = \frac{1}{N} \sum_i \phi_i$ 。將 (a2) 右側第一項以共變異數 (covariance) 表示：

$$E_{TOT} = \sigma^2(\psi) + \sigma^2(\phi) - 2\text{cov}(\psi, \phi) + (\bar{\psi} - \bar{\phi})^2 \quad (a3)$$

其中 $\text{cov}(\psi, \phi)$ 表示解析解 ψ 和數值解 ϕ 的共變異數，由於共變異數可以寫成相關係數和標準差的乘積，亦即：

$$\text{cov}(\psi, \phi) = \rho \sigma(\psi) \sigma(\phi) \quad (a4)$$

其中 ρ 為相關係數，而 $\sigma(\psi)$ 以及 $\sigma(\phi)$ 分別為 ψ 和 ϕ 的標準差。所以總誤差又可以寫成：

$$E_{TOT} = \sigma^2(\psi) + \sigma^2(\phi) - 2\rho \sigma(\psi) \sigma(\phi) + (\bar{\psi} - \bar{\phi})^2 \quad (a5)$$

經過重新整理之後，我們將 (a5) 寫成：

$$E_{TOT} = [\sigma(\psi) - \sigma(\phi)]^2 + (\bar{\psi} - \bar{\phi})^2 + 2(1 - \rho)\sigma(\psi)\sigma(\phi) \quad (a6)$$

由 (a6) 推斷當相關係數 $\rho = 1$ 時，數值解的誤差來自於耗散，所以可以定義耗散誤差 (dissipative error) 為：

$$E_{DISS} = [\sigma(\psi) - \sigma(\phi)]^2 + (\bar{\psi} - \bar{\phi})^2 \quad (a7)$$

當相關係數 $\rho \neq 1$ 時有額外的誤差產生，此誤差定義為頻散誤差 (dispersive error)：

$$E_{DISP} = 2(1 - \rho)\sigma(\psi)\sigma(\phi) \quad (a8)$$

由以上可知總誤差(或 L_2 誤差)來自於頻散以及耗散誤差。