

國立臺灣大學電機資訊學院電信工程學研究所

碩士論文

Graduate Institute of Communication Engineering
College of Electrical Engineering and Computer Science

National Taiwan University

Master Thesis

偏移正交-正交相位鍵移調變訊號之研究

Research on Offset Quadrature-Quadrature

Phase Shift Keying Signal



林毅穎

Yi-Ying Lin

指導教授：鐘嘉德 博士

Advisor: Char-Dir Chung, Ph.D.

中華民國 99 年 6 月

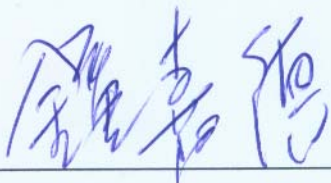
June, 2010

國立臺灣大學碩士學位論文
口試委員會審定書

偏移正交-正交相位鍵移調變訊號之研究
Research on Offset Quadrature-Quadrature
Phase Shift Keying Signal

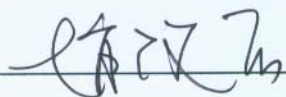
本論文係林毅穎君 (R97942043) 在國立臺灣大學電信工程研究所完成之碩士學位論文，於民國 99 年 6 月 23 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：



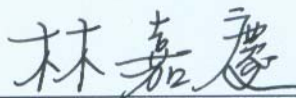
(簽名)

(指導教授)

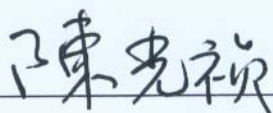








系主任、所長



(簽名)

誌謝

能完成這篇論文，我要特別感謝我的指導教授鍾嘉德老師，從一開始要確定論文的方向及之後在研究中有遇到任何問題，老師都不遺餘力的指導，給予建議，讓我能夠順利的如期完成論文，同時要感謝各位口試委員們，能夠給予寶貴的意見，讓我的論文更加完整。

我要感謝我的家人，無論遇到什麼困難家總是最好的避風港，因為在你們的照顧之下，讓我無後顧之憂，能夠全力專心於課業。也要感謝 BL518 實驗室的每一位成員，啟華、維昌、宗威、維崙、豫傑、浩銘、如傑、啟翔學長，在這兩年裡課業中有任何問題，學長們總是毫無保留的傾囊相授，以及一起畢業的優秀夥伴們，因為互相的學習與提醒，讓我更加成長，感謝你們對我的支持與鼓勵，謝謝大家。願將完成此論文的喜悅與榮耀與大家共同分享。



偏移正交-正交相位鍵移調變訊號之研究

研究生：林毅穎

指導教授：鐘嘉德 博士

國立台灣大學電信工程學研究所碩士班

中文摘要

本篇論文提出一對較為平滑 (smoother) 且相互正交的資料成形脈波 (data shaping pulse)，使偏移正交-正交相位鍵移調變 (offset quadrature-quadrature phase shift keying, OQ²PSK) 訊號具備頻譜旁波 (spectral sidelobe) 快速衰減的特性，能達到比 Saha 和 Chung 的正交-正交相位鍵移調變更高的頻譜緊密度與頻譜效率 (spectral efficiency)，且可確保頻譜旁波以 $f^{-2(N+M)-2}$ 以上的速度在衰減，其中 N 和 M 為與訊號的資料成形脈波有關。在論文中將與 Saha 及 Chung 的系統就頻帶外功率比例 (fractional out-of-band power) 與峰值對平均功率比 (peak-to-average power ratio, PAPR) 來互相比較。

同時我們在論文中探討偏移正交-正交相位鍵移調變訊號在通過加成性白高斯雜訊 (additive white Gaussian noise, AWGN) 通道及多重路徑雷力衰減 (multipath Rayleigh fading) 通道下之效能分析。在多重路徑雷力衰減通道下中，偏移正交-正交相位鍵移調變訊號將會引起碼際戶擾 (inter-symbol interference, ISI) 及相互碼際戶擾 (cross-symbol interference, CSI) 而影響系統效能，這些效應的大小與訊號的資料成形脈波有關，在論文最後將與 Chung 的系統比較位元錯誤率 (bit error probability)。

關鍵字：

資料成形脈波、偏移正交-正交相位鍵移調變、正交-正交相位鍵移調變、頻譜效率、碼際戶擾、相互碼際戶擾

Research on Offset Quadrature-Quadrature Phase Shift Keying Signal

Student: Yi-Ying Lin Advisor: Dr. Char-Dir Chung

Abstract

In this thesis, we propose a much smoother data shaping pulse pairs for offset quadrature-quadrature phase shift keying. Thus, offset quadrature-quadrature phase shift keying provides higher spectral compactness and spectral efficiency than CL-Q²PSK and SB-Q²PSK. Because offset quadrature-quadrature phase shift keying meets the fast sidelobe-decaying constraint, it ensures the power spectral sidelobe decaying asymptotically with $f^{-2(N+M)-2}$ as $f \rightarrow \infty$. We compare the fractional out-of-band power and peak-to-average power ratio with SB-Q²PSK and CL-Q²PSK in the thesis.

Meanwhile, the error performance over additive white Gaussian noise channel and multipath Rayleigh fading channel will be analyzed in this thesis. In the multipath fading channel, the error performance of offset quadrature-quadrature phase shift keying will be influenced by inter-symbol interference and cross-symbol interference related to the data shaping pulse. We will compare the error performance with CL-Q²PSK in the end.

Keywords:

data shaping pulse, offset quadrature-quadrature phase shift keying, quadrature-quadrature phase shift keying, spectral efficiency, inter-symbol interference, cross-symbol interference

本文目錄

口試委員會審定書	i
誌謝	ii
中文摘要	iii
Abstract.....	iv
本文目錄	v
圖目錄	vii
表目錄	ix
第一章 緒論.....	1
第二章 正交-正交相位鍵移訊號	4
第一節 SB-Q ² PSK 調變訊號之訊號模型	4
第二節 CL-Q ² PSK 調變訊號之訊號模型	7
第三節 正交-正交相位鍵移訊號的資料成形脈波設計	11
第三章 偏移正交-正交相位鍵移調變訊號	14
第一節 偏移正交-正交相位鍵移調變訊號之訊號模型	14
第二節 資料成形脈波設計與旁波快速衰減特性.....	20
第三節 頻帶外功率比例與峰值對平均功率比分析.....	27
第四章 偏移正交-正交相位鍵移調變訊號之效能分析	36
第一節 偏移正交-正交相位鍵移調變系統架構與解調	36
第二節 訊號通過加成性白高斯雜訊通道之錯誤率分析.....	39
第三節 多重路徑雷力衰減通道模型.....	41
第四節 訊號通過多重路徑雷力衰減通道下的效能分析.....	45
第五章 結論.....	56
參考文獻	57

附錄	59
----------	----



圖目錄

圖 2.1：SB-Q ² PSK 訊號中互相正交的資料成形脈波 $p_1(t)$ 和 $p_2(t)$	5
圖 2.2：CL-Q ² PSK 訊號在波形階數 $N=4$ 時的資料成形脈波 $p_1(t)$ 和 $p_2(t)$	8
圖 2.3：SB-Q ² PSK 和 CL-Q ² PSK 訊號的功率頻譜密度	9
圖 2.4：不同調變訊號間頻帶外功率比例比較	10
圖 3.1：偏移正交-正交相位鍵移訊號的傳送端低通等效架構圖	15
圖 3.2：偏移正交-正交相位鍵移訊號在不同的 N 和 M 時的功率頻譜密度	23
圖 3.3：偏移正交-正交相位鍵移訊號、SB-Q ² PSK 和 CL-Q ² PSK 訊號的功率頻譜密度比較	24
圖 3.4：偏移正交-正交相位鍵移在 $N=1, M=3$ 時的資料成形脈波 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$	26
圖 3.5：偏移正交-正交相位鍵移訊號在不同的 N 和 M 時的頻帶外功率比例	28
圖 3.6：不同訊號間的頻帶外功率比例比較	29
圖 3.7：不同訊號間的頻帶外功率比例比較	30
圖 3.8：在相同 $N+M$ 下，不同的 M 所對應的功率頻譜密度支配項係數	32
圖 3.9：偏移正交-正交相位鍵移訊號的互補累積分佈函數比較	34
圖 3.10：不同訊號間的互補累積分佈函數比較	35
圖 4.1：偏移正交-正交相位鍵移調變訊號的等效低通系統架構圖	38
圖 4.2：多重路徑衰減通道示意圖	41
圖 4.3：多重路徑衰減通道的型態示意圖	43
圖 4.4：transmission 1：在 $(d_0, d_1)/T = (0, 1/4)$ 的多重路徑雷力衰減通道下	49
圖 4.5：transmission 2：在 $(d_0, d_1)/T = (0, 1/4)$ 的多重路徑雷力衰減通道下	50
圖 4.6：在 $(d_0, d_1)/T = (0, 1/4)$ 的多重路徑雷力衰減通道下，平均位元錯誤率對 E_b/N_0	51
圖 4.7：transmission 1：在 $(d_0, d_1, d_2)/T = (0, 1/4, 1/3)$ 的多重路徑雷力衰減通道下，位元錯誤率對 E_b/N_0	52
圖 4.8：transmission 2：在 $(d_0, d_1, d_2)/T = (0, 1/4, 1/3)$ 的多重路徑雷力衰減通道下，	

位元錯誤率對 E_b/N_0	53
圖 4. 9：在 $(d_0, d_1, d_2)/T = (0, 1/4, 1/3)$ 的多重路徑雷力衰減通道下，平均位元錯誤率對 E_b/N_0	54
圖 4. 10：在 $(d_0, d_1)/T = (0, 1/4)$ 的多重路徑雷力衰減通道下，CL-Q ² PSK 訊號與 OQ ² PSK 訊號的平均位元錯誤率對 E_b/N_0 比較.....	55



表目錄

表 3.1：不同訊號間功率頻譜密度支配項的係數及旁波衰減速率	30
表 4.1：在 $(d_0, d_1)/T = (0, 1/4)$ 的多重路徑雷力衰減通道下的平均干擾	50
表 4.2：在 $(d_0, d_1, d_2)/T = (0, 1/4, 1/3)$ 的多重路徑雷力衰減通道下的平均干擾	53



第一章 緒論

頻譜效率 (spectral efficiency) 的定義為資料傳輸率 (data transmission rate) 對通道頻寬 (channel bandwidth) 的比值，具較高的頻譜效率之調變方法 (spectrally efficient modulation scheme)，意指在固定的頻寬下有較高的傳輸資料量，更具體來說，有較高頻譜效率之調變方式就是能有效率的利用訊號空間維度 (signal space dimensions) 的調變方式，更有效率的來使用可用的訊號維度來增加傳輸的資料量，就具有較高的頻譜效率。

頻譜效率主要受兩個因素影響：第一，用來載送訊號的資料成形脈波 (data shaping pulse)；第二，對訊號空間維度的使用情況，例如：因為使用餘弦波 (cosinusoidal pulse) 作為資料成形脈波，使最小頻鍵移 (minimum shift keying, MSK) 調變比四位元相位鍵移 (quadrature phase shift keying, QPSK) 調變有較高的頻譜效率；而因為較有效率的利用訊號空間維度，所以四位元相位鍵移調變比二位元相位鍵移 (binary phase shift keying, BPSK) 調變有較高的頻譜效率。

為了達到更高的頻譜效率，在[1]中由 Saha 和 Birdsall 首先提出一種新的調變方式稱為正交-正交相位鍵移調變 (quadrature-quadrature phase shift keying, Q^2 PSK) 訊號，在此篇論文中我們稱此調變訊號為 SB- Q^2 PSK，此調變訊號是由兩個互相獨立的四位元相位鍵移訊號，分別乘上相互正交的資料成形脈波，並載在相同的載波頻率上，所構成一個訊號空間維度為四的一種調變訊號，所建構出的四維訊號空間中，有兩個維度來自於四位元相位鍵移訊號中的正交成份 (quadrature component) 和同相成份 (in-phase component)，另外兩個則來自於彼此正交的資料成形脈波，所以使得它比四位元相位鍵移訊號有較高的頻譜效率，也就是說在幾乎相同的頻寬和符元區間 (symbol duration) 的乘積下，它的資料傳輸率是四位元相位鍵移的兩倍。

雖然這兩個互相獨立的四位元相位鍵移訊號彼此重疊在一起，但因為分別乘上的資料成形脈波彼此正交的特性，使得在理想的加成性白高斯雜訊 (additive white Gaussian noise, AWGN) 通道下具有和傳統四位元相位鍵移訊號一樣的位元錯誤率，但是正交-正交相位鍵移調變訊號的振幅不再是固定的，使得在通過非線

性放大器時，系統效能較差，然而在論文[1]中有提到可以利用一個簡單的編碼方式，讓 SB-Q²PSK 訊號能保持固定振幅的特性，但同時卻也損失了一些資訊傳輸率 (information transmission rate)，造成頻譜效率下降。

正交-正交相位鍵移訊號是一種有較佳頻譜效率的調變方式，之後陸續有許多文獻分別就各種不同的議題去做更進一步的探討，其中包含訊號的同步[1, 8, 9]；在有限頻寬通道[1, 3, 4]、非線性衛星通道[5, 6]、訊號經過通道編碼[6, 7]和差分同調通道下[7, 10]的效能分析；其中在[2]中，藉由設計調變訊號中的資料成形脈波，作者 Chung 提出一種新的正交-正交相位鍵移的訊號形式，在此篇論文中我們稱此調變訊號為 CL-Q²PSK，而此訊號形式跟傳統正交-正交相位鍵移訊號相比有較密集的頻譜 (higher spectral compactness)，所以使得它的頻譜效率更高。根據論文[11]中提到，當我們考慮差分正交-正交相位鍵移訊號 (differential quadrature-quadrature phase shift keying, DQ²PSK) 時，利用[2]中所提的資料成形脈波，比利用傳統正交-正交相位鍵移中的脈波，有較好的頻譜效率，而且當我們考慮訊號通過多重路徑衰減通道時，CL-DQ²PSK 也具有較佳的位元錯誤率。

為了得到更高的頻譜效率，我們在這篇論文中新提出一種適用於正交-正交相位鍵移訊號中的資料成形脈波，並且讓此訊號中的正交成份和同相成份有一個一半符元時間 (symbol time) 的延遲，利用此時間延遲來降低訊號的峰值對平均功率比 (peak-to-average power ratio, PAPR)，藉由如此的訊號設計，提出了一種新的正交-正交相位鍵移調變訊號，在論文中把它稱為偏移正交-正交相位鍵移 (offset quadrature-quadrature phase shift keying, OQ²PSK) 調變訊號。在論文中將就我們所提出的偏移正交-正交相位鍵移訊號針對頻帶外功率比例 (fractional out-of-band power) 以及峰值對平均功率比來和 SB-Q²PSK 還有 CL-Q²PSK 來互相比較，之後會就偏移正交-正交相位鍵移調變訊號在理想的加成性白高斯雜訊通道下，還有通過多重路徑雷力衰減通道 (multipath Rayleigh fading channel) 的情形下去分析錯誤率，偏移正交-正交相位鍵移調變訊號在多重路徑衰減通道的影響下會造成碼際戶擾 (inter-symbol interference, ISI) 和相互碼際戶擾 (cross-symbol interference, CSI) 進而影響系統的效能也在這篇論文中一併討論。

這篇論文的架構如下：第一章為緒論；第二章將介紹正交-正交相位鍵移訊號的訊號數學模型，並去比較 SB-Q²PSK 和 CL-Q²PSK 他們的資料成形脈波和頻譜

上的特性；第三章將介紹我們所提出的偏移正交-正交相位鍵移調變訊號，針對所提出的訊號模型以及頻譜上的特性去做一些分析和討論，並與 SB-Q²PSK 和 CL-Q²PSK 訊號相互比較；第四章將探討偏移正交-正交相位鍵移調變訊號在經過加成性白高斯雜訊通道和多重路徑雷力衰減通道下的位元錯誤率；第五章為結論。

符號定義：

在這篇論文中我們所使用的數學符號定義如下， \mathbb{N} 表示所有的非負整數所形成的集合； \mathbb{Z}^+ 表示所有的正整數所形成的集合； $K \in \mathbb{N}$, \mathbb{Z}_K 表示一個 $\{0, 1, 2, \dots, K-1\}$ 所形成的有限集合，且 $\mathbb{Z}_0 \triangleq \emptyset$ 。



第二章 正交-正交相位鍵移訊號

正交-正交相位鍵移 (quadrature-quadrature phase shift keying) 訊號是由兩個相互獨立的四位元相位鍵移 (quadrature phase shift keying, QPSK) 訊號分別乘上一個相互正交的資料成形脈波 (data shaping pulse) 所形成的一個擁有四個維度的調變訊號，這種調變訊號擁有較高的頻譜效率 (spectral efficiency)，而依據不同的資料成形脈波設計，可以使得訊號達到更高的頻譜效率[1]。

在 SB-Q²PSK 訊號中兩個相互正交的資料成形脈波分別為一個半週期的正弦 (sine) 和餘弦波 (cosine)，其中正弦波在時間 $t = -0.5T$ 和 $t = 0.5T$ 是不連續的，而這訊號不連續的特性也使得 SB-Q²PSK 訊號在頻譜上的衰減速度較為緩慢；而在 CL-Q²PSK 訊號中使用一個較平緩 (smoother) 的資料成形脈波，讓訊號在時間 $t = -0.5T$ 和 $t = 0.5T$ 時值都為零，確保訊號的相位是連續的，使得訊號的頻譜衰減速度較快，相對的頻譜較為密集以達到更高的頻譜效率[2]。以下在第二章中我們就要來探討 SB-Q²PSK 調變和 CL-Q²PSK 調變的訊號模型以及其頻譜上的特性。

第一節 SB-Q²PSK 調變訊號之訊號模型

正交-正交相位鍵移 (quadrature-quadrature phase shift keying) 訊號是由兩個相互獨立的四位元相位鍵移訊號所組合而成，它的等效低通訊號可以表示成

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(j\theta_{1,k}) p_1(t - kT) + \exp(j\theta_{2,k}) p_2(t - kT) \quad (2.1)$$

其中 T 為符元時間 (symbol time)， $\theta_{1,k}$ 和 $\theta_{2,k}$ 為在時間 $t \in \{-0.5T + kT, 0.5T + kT\}$ 的相位調變 (phase modulation) 訊號， $p_1(t)$ 和 $p_2(t)$ 分別為在 SB-或 CL-Q²PSK 訊號中互相正交的資料成形脈波 (data shaping pulse)。傳送端的資訊序列 (information sequence) $\mathbf{I}_i = \{I_{i,k}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ ，其中每一個資訊序列的元素，都包含兩個位元資訊，也就是說 $I_{i,k} \in \{0, 1, \dots, 3\}$ ，經過調變後變為相位 $\theta_{i,k}$ ，其中 $i \in \{1, 2\}$ 。由 (2.1) 可看出

正交-正交相位鍵移訊號分布於一個四維的訊號空間（signal space dimensions），跟四位元相位鍵移（quadrature phase shift keying）訊號相比，在相同的訊號頻寬和訊號區間的乘積下，它多了另外兩個維度，所以跟四位元相位鍵移訊號比起來正交-正交相位鍵移訊號擁有較佳的頻譜效率（spectral efficiency）。

在 SB-Q²PSK 訊號中的互相正交的資料成形脈波 $p_1(t)$ 和 $p_2(t)$ ，分別為兩個只有一半最小週期的正弦和餘弦波，分別可以表示為

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{\pi}{T}t\right)u(t) \\ p_2(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)u(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中 $u(t)=1$ 在時間 $t \in [-0.5T, 0.5T]$ ，其他時間則 $u(t)=0$ 。因為 $p_1(t)$ 和 $p_2(t)$ 必須滿足正交的特性，所以我們可以得到

$$\int_{-0.5T}^{0.5T} p_1(t) p_2(t) dt = 0 \quad (2.3)$$

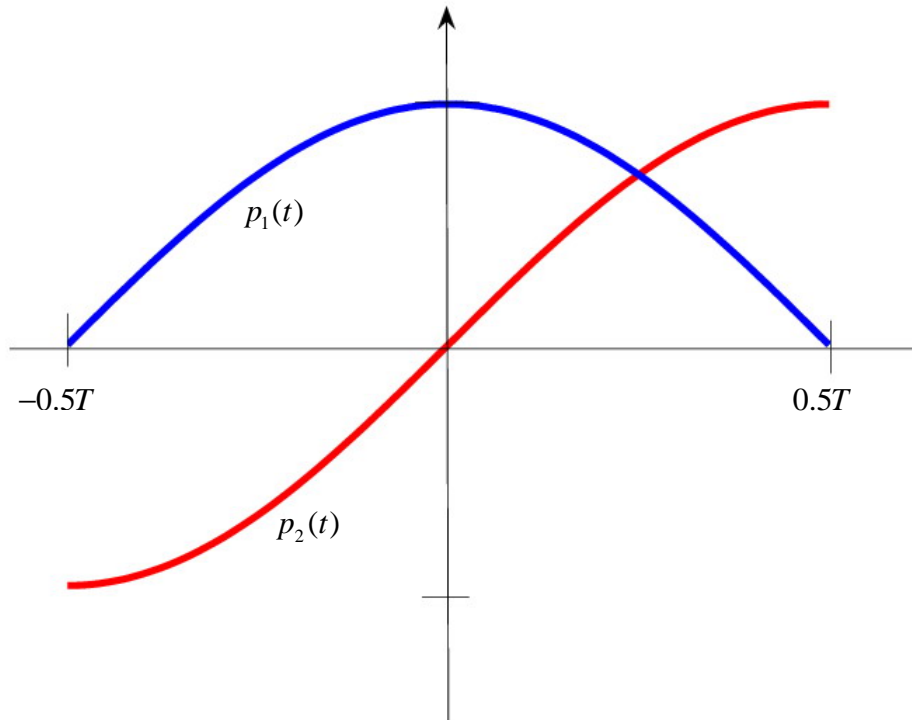


圖 2.1：SB-Q²PSK 訊號中互相正交的資料成形脈波 $p_1(t)$ 和 $p_2(t)$

$p_1(t)$ 和 $p_2(t)$ 這兩個資料成形脈波如圖 2.1 所示，由圖我們可以發現 $p_1(t)$ 在

符元時間的兩端也就是 $t = -0.5T$ 和 $t = 0.5T$ 時值都為零，但是 $p_2(t)$ 在 $t = -0.5T$ 和 $t = 0.5T$ 時值都不為零，造成訊號不連續，而這不連續的特性嚴重地降低了訊號 $s(t)$ 在功率頻譜密度（power spectrum density, PSD）中頻譜的衰減速度。

訊號 $s(t)$ 的功率頻譜密度，用 $S(f)$ 來表示，可以表示成

$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{1}{2} \left(|P_1(f)|^2 + |P_2(f)|^2 \right) \\ &= 4T(1 + 4f^2T^2) \left[\frac{\cos(\pi Tf)}{\pi(1 - 4T^2f^2)} \right]^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

其中 $P_1(f)$ 和 $P_2(f)$ 分別為 $p_1(t)$ 和 $p_2(t)$ 經過傅立葉轉換（Fourier transform）所得的結果，可以表示成

$$P_1(f) = 4\sqrt{\frac{T}{2}} \frac{\cos(\pi Tf)}{\pi(1 - 4T^2f^2)} \quad (2.5)$$

$$P_2(f) = -j8\sqrt{\frac{T}{2}} \frac{fT \cos(\pi Tf)}{\pi(1 - 4T^2f^2)} \quad (2.6)$$

藉由觀察（2.4）式可以發現當 f 趨近於無窮大時， $S(f)$ 將以漸進於 f^{-2} 的速度在衰減，而原因為在（2.6）式中分子的 f 降低了 $P_2(f)$ 的衰減速度，同時也影響到了 $S(f)$ 的頻譜衰減率。在下一節中，我們將看到 CL-Q²PSK 訊號就是藉由設計 $p_1(t)$ 和 $p_2(t)$ 來改善訊號不連續的問題，而使得訊號有較密集的功率頻譜密度。

第二節 CL-Q²PSK 調變訊號之訊號模型

在 CL-Q²PSK 訊號中的資料成形脈波 (data shaping pulse) [2]分別為

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \sqrt{2}\alpha \sum_{n=0}^N C_n^N \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) u(t) \\ p_2(t) &= \sqrt{2}\beta \sum_{n=1}^N C_n^N \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) u(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

其中 $N \in \mathbb{Z}^+$ 為波形階數 (pulse order), $C_n^N \triangleq \frac{n!}{n!(N-n)!}$, $u(t)$ 的定義與在 (2.2)

式中相同, $\alpha = [T(C_N^{2N} + 1)]^{-1/2}$ 和 $\beta = [T(C_N^{2N} - 1)]^{-1/2}$ 用來讓每個資料成形脈波的能量正規化為一。由 (2.7) 式我們可以發現, 對於每一個資料成形脈波在符元時間 (symbol time) 的兩端其值都等於零, 也就是 $p_i(\pm T/2) = 0$, 且更進一步發現經過第 $(N-1)$ 次的微分後在符元時間的端點其值仍然等於零, $p_1(t)$ 經過第 k 次微分後在 $t = \pm T/2$ 的值可以被表示為

$$p_1^{(k)}\left(\pm \frac{T}{2}\right) = \begin{cases} \pm a_k \sum_{n=1}^N C_n^N n^k \sin(n\pi), & \text{當 } k \text{ 為奇數} \\ a_k \sum_{n=1}^N C_n^N n^k (-1)^n, & \text{當 } k \text{ 為偶數} \end{cases} \quad (2.8)$$

其中 a_k 為常數在此可忽略, 很明顯的可以看出在 (2.8) 中 $p_1^{(k)}\left(\pm \frac{T}{2}\right) = 0$ 當 $k \in \{1, 2, \dots, N-1\}$; 而 $p_2(t)$ 也有相同的特性, 因此 $p_i(t)$ 和 $p_i^{(k)}(t)$ 在 $i \in \{1, 2\}$ 且 $k \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ 時訊號都為連續, 其中 $p_i^{(k)}(t)$ 表示 $p_i(t)$ 的第 k 次微分。圖 2.2 中為資料成形脈波 $p_1(t)$ 和 $p_2(t)$ 在波形階數 $N = 4$ 時的情況。

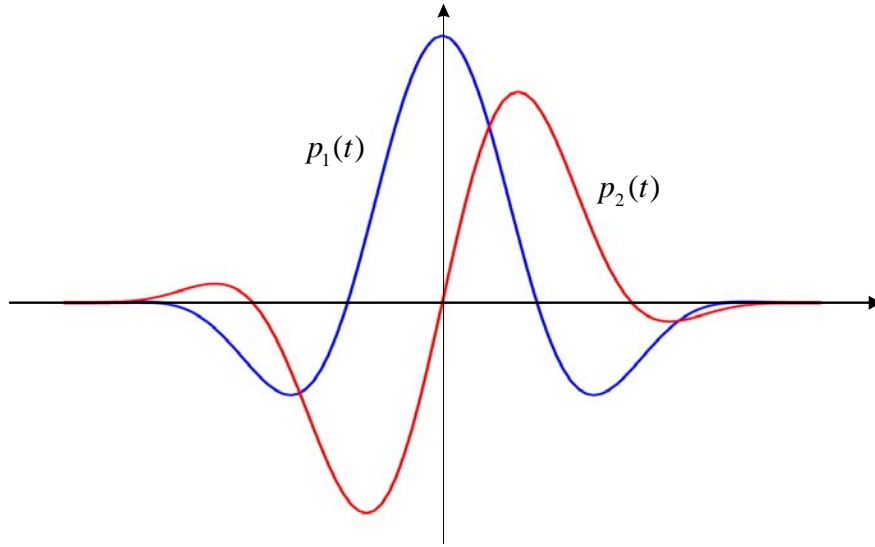


圖 2.2：CL-Q²PSK 訊號在波形階數 $N=4$ 時的資料成形脈波 $p_1(t)$ 和 $p_2(t)$

CL-Q²PSK 的功率頻譜密度 (power spectrum density, PSD)，可以表示成

$$\begin{aligned}
 S(f) &= \frac{1}{2} \left(|P_1(f)|^2 + |P_2(f)|^2 \right) \\
 &= \frac{\sin^2(\pi f T)}{\pi^2 f^2} \left\{ \alpha^2 \left| \sum_{n=0}^N C_n^N (-1)^n \left(1 - \frac{n^2}{f^2 T^2} \right)^{-1} \right|^2 \right. \\
 &\quad \left. + \beta^2 \left| \frac{1}{f T} \sum_{n=1}^N n C_n^N (-1)^n \left(1 - \frac{n^2}{f^2 T^2} \right)^{-1} \right|^2 \right\} \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

其中 $P_1(f)$ 和 $P_2(f)$ 分別為在 (2.7) 式中的 $p_1(t)$ 和 $p_2(t)$ 經過傅立葉轉換 (Fourier transform) 所得的結果。利用幾何級數[12, equation 1.112.1]展開 (2.9) 式並利用[12, equation 0.154.3]可推得

$$\begin{aligned}
 S(f) &= \frac{\sin^2(\pi f T)}{\pi^2 f^2} \left\{ \alpha^2 \left| \sum_{n=0}^N C_n^N \left\{ (-1)^n \left[\sum_{l=(N-1)/2}^{\infty} \left(\frac{n}{f T} \right)^{2l} \right] \right\} \right|^2 \right. \\
 &\quad \left. + \beta^2 \left| \sum_{n=1}^N C_n^N \left\{ (-1)^n \left[\sum_{l=(N-2)/2}^{\infty} \left(\frac{n}{f T} \right)^{2l+1} \right] \right\} \right|^2 \right\} \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

由 (2.10) 式可知當 $f \rightarrow \infty$ ， $S(f)$ 將以漸進於 f^{-2N-2} 的速度在衰減，故可知在

CL-Q²PSK 訊號中的波形階數 N 與頻譜的衰減速度有關。圖 2.3 中為 SB-Q²PSK 和 CL-Q²PSK 訊號的功率頻譜密度，由圖可以發現當波形階數 N 變大時 CL-Q²PSK 訊號頻譜的旁波 (sidelobe) 衰減的速度也跟著變快，但同時主波 (mainlobe) 的寬度也隨之增大，相較之下，SB-Q²PSK 訊號有較小的主波寬度，但其旁波衰減的速度比較慢。

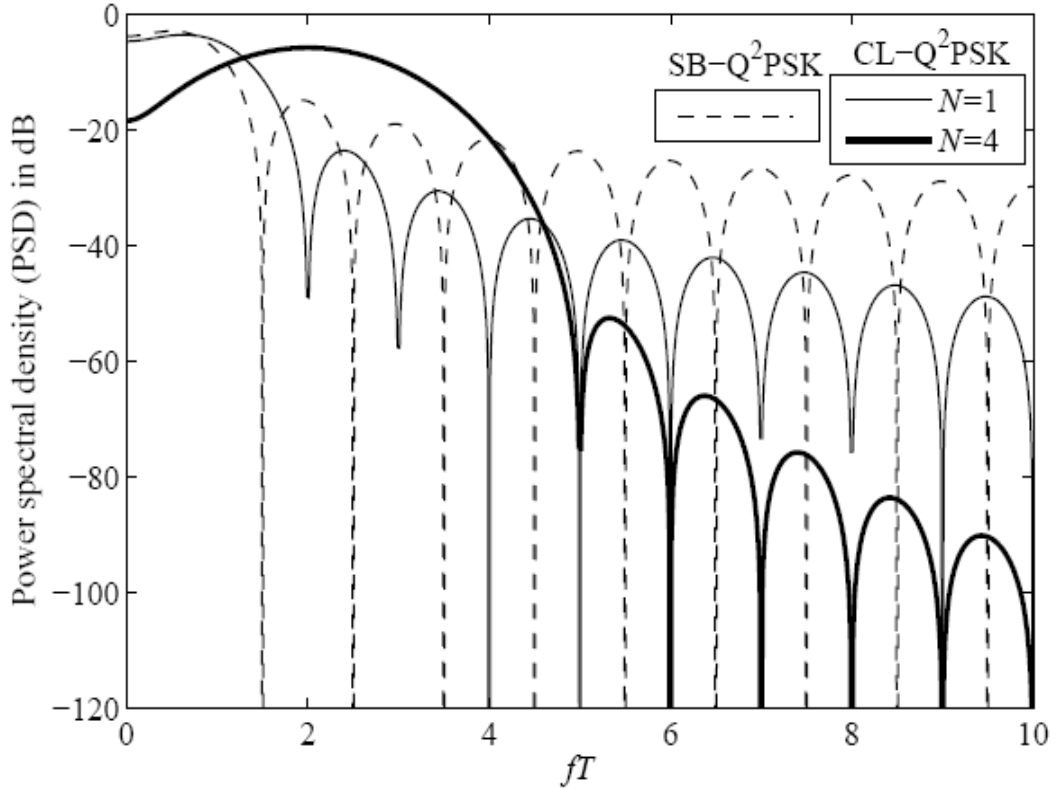


圖 2.3：SB-Q²PSK 和 CL-Q²PSK 訊號的功率頻譜密度

頻帶外功率比例：

在這篇論文中，我們將利用頻帶外功率比例 (fractional out-of-band power) 來描述不同調變訊號間頻譜的緊密程度 (spectral compactness)，頻帶外功率比例其定義為，在給定的頻寬範圍 $[-B/2, B/2]$ 外所佔的功率與訊號總功率的一個比值，可以被表示為

$$\eta = 1 - \frac{\int_{-0.5B}^{0.5B} S(f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} S(f) df} \quad (2.11)$$

我們針對每一個已正規化的頻寬（normalized bandwidth） BT_b 去計算出一個 η ，其中 T_b 為一個位元時間（bit time），所以可以讓我們在相同的資料傳輸率（data transmission rate）下去比較不同訊號間的頻譜效率，而根據我們定義的 η ，可知在給定 η 下，所對應的 BT_b 越小，訊號就有越高的頻譜效率。在圖 2.4 中我們將去比較最小頻鍵移（minimum shift keying, MSK）訊號、SB-Q²PSK 訊號和 $N=1$ 時的 CL-Q²PSK 訊號間頻帶外功率比例，由圖我們可以發現當 $BT_b=4$ 時，

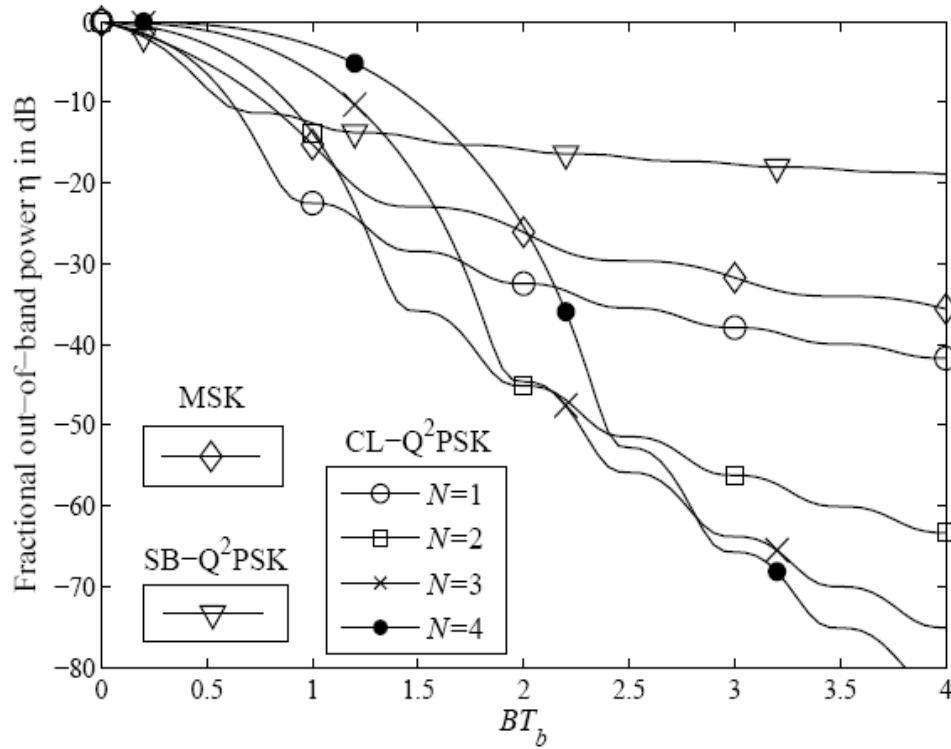


圖 2.4：不同調變訊號間頻帶外功率比例比較

SB-Q²PSK、最小頻鍵移和 CL-Q²PSK 訊號分別下降-19dB、-36dB 和-42dB，且 CL-Q²PSK 訊號在 N 越大時 η 下降越快，這結果跟在圖 2.3 中的功率頻譜密度所得到的結果相符，隨著 N 變大 CL-Q²PSK 的頻譜也越緊密，且無論在 N 為多少的情況下 CL-Q²PSK 訊號的頻譜緊密程度都比最小頻鍵移訊號和 SB-Q²PSK 訊號要高，故和 SB-Q²PSK 訊號相比雖有相同的資料傳送率，但 CL-Q²PSK 訊號的頻譜較為密集，所以我們說它的頻譜效率比 SB-Q²PSK 訊號要高。

第三節 正交-正交相位鍵移訊號的資料成形脈波設計

在[2]中所探討的 CL-Q²PSK 訊號是假設在當兩個所載的四位元相位鍵移 (quadrature phase shift keying, QPSK) 訊號彼此為獨立的情形下，推導出當 $f \rightarrow \infty$ 大時，訊號的功率頻譜密度 (power spectrum density, PSD) 會以 f^{-2N-2} 的速率做衰減，而在此節中我們假設正交-正交相位鍵移 (quadrature-quadrature phase shift keying) 訊號中所載的輸入資料並沒有任何統計上的限制，也就是在 (2.1) 式中的傳送端的資訊序列 \mathbf{I}_i 可以有任何統計上的特性 (any arbitrary statistics)，在此情況下我們去設計正交-正交相位鍵移訊號的資料成形脈波 (data shaping pulse)，並去探討它在頻譜上的衰減特性。

首先我們考慮在第 k 個符元時間 (symbol time) 的正交-正交相位鍵移訊號，可以表示為

$$s^{(k)}(t) = \exp(j\theta_{1,k})p_1(t) + \exp(j\theta_{2,k})p_2(t) \quad (2.12)$$

其中 $\exp(j\theta_{1,k})$ 和 $\exp(j\theta_{2,k})$ 為在時間 $t \in \{-0.5T + kT, 0.5T + kT\}$ 時的四位元相位鍵移訊號，他們彼此間可以存在任何統計特性，在此我們假設正交-正交相位鍵移訊號的兩個相互正交的資料成形脈波分別為

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \sum_{n=0}^N a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)u(t) \\ p_2(t) &= \sum_{m=1}^M b_m \sin\left(\frac{2m\pi}{T}t\right)u(t) \end{aligned} \quad (2.13)$$

其中 $p_1(t)$ 由 $N+1$ 個餘弦波分別乘上各自的係數 a_n 所累加而成， $p_2(t)$ 由 M 個正弦波分別乘上各自的係數 b_m 所累加而成的波形。

訊號 $s^{(k)}(t)$ 的低通等效功率頻譜密度為可表示為[14]

$$S(f) = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\rho^2}{2RT} E \left\{ \left| \sum_{k=-R}^{R-1} F\{s^{(k)}(t)\} \exp(-j2\pi kTf) \right|^2 \right\} \quad (2.14)$$

其中 F 為對時間 t 做傅立葉轉換 (Fourier transform)， E 為在時間區間 $-T/2 \leq t < T/2$ 內取期望值， ρ 為跟訊號振幅有關的常數。接下來對 (2.14) 式中

的 $F\{s^{(k)}(t)\}$ 可以利用在[13]中的部分積分方法，展開成一無窮級數，可以表示為

$$\begin{aligned} F\{s^{(k)}(t)\} &= \int_{-T/2}^{T/2} \left\{ \exp(j\theta_{1,k}) p_1(t) + \exp(j\theta_{2,k}) p_2(t) \right\} \exp(-j2\pi ft) dt \\ &= - \sum_{\beta=0}^{\infty} (-j2\pi f)^{-\beta-1} \frac{d^{(\beta)} \left[\exp(j\theta_{1,k}) p_1(t) + \exp(j\theta_{2,k}) p_2(t) \right]}{dt^{(\beta)}} \exp(-j2\pi ft) \Big|_{t=-T/2}^{T/2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

其中對 $\exp(j\theta_{1,k}) p_1(t) + \exp(j\theta_{2,k}) p_2(t)$ 微分的部份可以進一步的推導如下

$$\left. \frac{d^{(\beta)} p_1(t)}{dt^{(\beta)}} \right|_{t=\pm T/2} = \begin{cases} \left(\frac{2\pi}{T} (-1)^{\frac{1}{2}} \right)^{\beta} \sum_{n=0}^N a_n (-1)^n n^{\beta} & , \text{當 } \beta \text{ 為偶數} \\ 0 & , \text{其他 } \beta \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\left. \frac{d^{(\beta)} p_2(t)}{dt^{(\beta)}} \right|_{t=\pm T/2} = \begin{cases} \left(-\frac{2\pi}{T} \right)^{\beta} \sum_{m=1}^M b_m (-1)^m m^{\beta} & , \text{當 } \beta \text{ 為奇數} \\ 0 & , \text{其他 } \beta \end{cases} \quad (2.17)$$

由上述推導可知，在沒有任何限制下 $\exp(j\theta_{1,k})$ 和 $\exp(j\theta_{2,k})$ 前的係數並不一定等於零，除非 a_n 和 b_m 有經過設計，否則 (2.14) 式中的 $S(f)$ 隨著 $f \rightarrow \infty$ ，將會以漸進於 f^{-2} 的速度逐漸衰減，而當我們適當的給定 a_n 和 b_m 時， $S(f)$ 將會以 f^{-2J-2} 的速度來衰減，其中 J 為事先給定一個正整數。

以下我們將討論當 a_n 和 b_m 滿足旁波快速衰減條件 (fast sidelobe-decaying constraint) 1 時， $S(f)$ 將以較快的速度衰減，為了簡化符號我們先假設

$$\chi_k^1 = \sum_{n=0}^N a_n (-1)^n n^k, \quad \chi_k^2 = \sum_{m=1}^M b_m (-1)^m m^k.$$

旁波快速衰減條件 1：

在給定一個 $J \in \mathbb{Z}^+$ 的情況下， $\chi_k^1 = 0$ ， $\chi_k^2 = 0$ 當 $k \in \mathbb{Z}_J$ 且 $\chi_J^1 \neq 0$ ， $\chi_J^2 \neq 0$ 。

若能找到一組滿足旁波快速衰減條件 1 的 a_n 和 b_m ，則 (2.15) 式中的

$$\left. \frac{d^{(\beta)} \left[\exp(j\theta_{1,k}) p_1(t) + \exp(j\theta_{2,k}) p_2(t) \right]}{dt^{(\beta)}} \right|_{t=-T/2}^{T/2} = 0 \text{ 當 } \beta \in \mathbb{Z}_J, \text{ 故 (2.15) 式中}$$

$\exp(j\theta_{1,k})$ 和 $\exp(j\theta_{2,k})$ 前的係數將從 $\beta = J$ 才開始有值，所以我們可以得到，當 $f \rightarrow \infty$ 時， $S(f)$ 將會以 f^{-2J-2} 的速度來衰減。

在論文中我們找到這樣一組 a_n 和 b_m 確實能符合旁波快速衰減條件 1，這一組係數即為 $a_n = C_n^N$ 和 $b_m = C_m^N$ ，其中 $n, m \in \mathbb{Z}_{N+1}$ ，且此時的 $N = J$ ，利用這一組係數能使得 $S(f)$ 以 f^{-2N-2} 的速度來衰減，而這個結果能簡單的利用[12, equation 0.154.3]中的恒等式來加以證明。將推出的係數代回 (2.13) 式，可得

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \sum_{n=0}^N C_n^N \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) u(t) \\ p_2(t) &= \sum_{n=1}^N C_n^N \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) u(t) \end{aligned} \quad (2.18)$$

經過正規化後可以發現其結果和 CL-Q²PSK 訊號所得到的結果一樣。

所以經由此節的推導我們可以得知，CL-Q²PSK 訊號中頻譜旁波快速衰減的特性，和所載的兩個四位元相位鍵移訊號的統計特性無關。



第三章 偏移正交-正交相位鍵移調變訊號

經由前面兩章的討論，我們已知道正交-正交相位鍵移調變（quadrature-quadrature phase shift keying, Q²PSK）訊號是一種有較佳頻譜效率（spectral efficiency）的一種調變方式，在第二章中我們也提到，可以進一步藉由設計較為平滑（smoother）的資料成形脈波（data shaping pulse）來提高頻譜的緊密程度（spectral compactness），故可達到更高的頻譜效率，例如 CL-Q²PSK 訊號，而在論文的第三章中我們提出一種新的調變訊號，偏移正交-正交相位鍵移調變訊號（offset quadrature-quadrature phase shift keying, OQ²PSK），藉由頻譜的推導，我們設計出一個更為平滑的資料成形脈波，能達到比 CL-Q²PSK 訊號更高的頻譜緊密程度，同時也達到降低峰值對平均功率比（peak-to-average power ratio, PAPR）的目的。

第一節 偏移正交-正交相位鍵移調變訊號之訊號模型

偏移正交-正交相位鍵移（offset quadrature-quadrature phase shift keying, OQ²PSK）訊號是由兩個相互獨立的偏移四位元相位鍵移（offset quadrature phase shift keying, OQPSK）訊號分別乘上兩個相互正交的資料成形脈波（data shaping pulse）所組合而成，它仍然為一個具四個維度的一種調變訊號，而它的等效低通訊號可以表示成

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[I_{1,2k} h_1(t-kT) - jI_{1,2k+1} h_1\left(t-kT - \frac{T}{2}\right) \right] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[I_{2,2k} h_2(t-kT) - jI_{2,2k+1} h_2\left(t-kT - \frac{T}{2}\right) \right] \quad (3.1)$$

其中 T 為符元時間（symbol time），現在新的資料成形脈波分別為 $h_1(t)$ 及 $h_2(t)$ ， $\mathbf{I}_1 = \{I_{1,k}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 和 $\mathbf{I}_2 = \{I_{2,k}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 為分別載在 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 上相互獨立的傳送端資訊序列（information sequence），其中 $I_{1,k}$ ， $I_{2,k} \in \{-1, +1\}$ ，其傳送端的低通等效系統架

構如圖 3.1 所示。

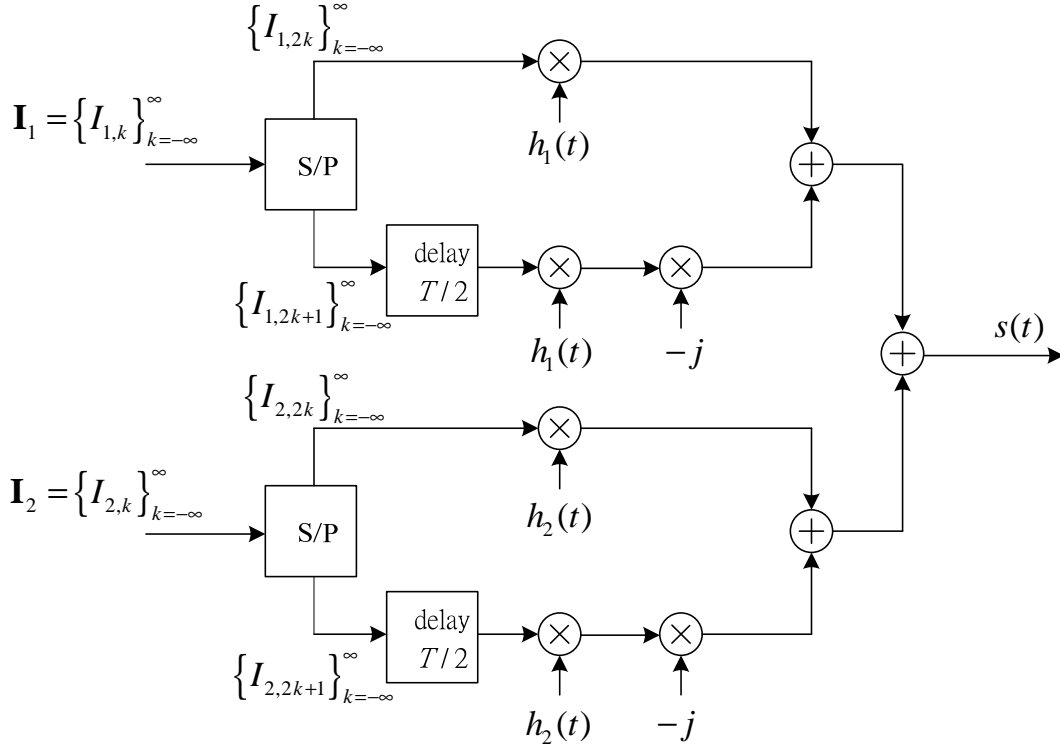


圖 3.1：偏移正交-正交相位鍵移訊號的傳送端低通等效架構圖

在 (3.1) 式中的資料成形脈波分別設計為 $h_1(t) = \alpha g(t) p_1(t)$ 和 $h_2(t) = \beta g(t) p_2(t)$ ，其中 α 和 β 用來使訊號 $s(t)$ 的能量正規化為一，可以分別表示為，

$$\alpha = \left\{ \frac{T}{4} \left[\frac{T}{8} \sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{m_1} \sum_{m_2} C_{n_1}^N C_{n_2}^N C_{m_1}^M C_{m_2}^M \right]^{-1} \right\}^{1/2}$$

其中 $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{N+1}, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_{M+1}$ ，且 $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \Psi$

$$\Psi \in \left\{ \begin{array}{l} m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = 0 \text{ or } m_1 - m_2 + n_1 + n_2 = 0 \text{ or } m_1 + m_2 - n_1 + n_2 = 0 \text{ or } \\ m_1 + m_2 + n_1 - n_2 = 0 \text{ or } m_1 - m_2 - n_1 + n_2 = 0 \text{ or } m_1 - m_2 + n_1 - n_2 = 0 \text{ or } \\ m_1 + m_2 - n_1 - n_2 = 0 \text{ or } m_1 - m_2 - n_1 - n_2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\beta = \left\{ \frac{T}{4} \left[\frac{T}{8} \sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{m_1} \sum_{m_2} C_{n_1}^N C_{n_2}^N C_{m_1}^M C_{m_2}^M - \frac{T}{8} \sum_{n_3} \sum_{n_4} \sum_{m_3} \sum_{m_4} C_{n_3}^N C_{n_4}^N C_{m_3}^M C_{m_4}^M \right]^{-1} \right\}^{1/2}$$

其中 $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{Z}_{N+1}, m_1, m_2, m_3, m_4 \in \mathbb{Z}_{M+1}$, 且 $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \Omega, n_3, n_4, m_3, m_4 \in \Gamma$

$$\Omega \in \begin{cases} m_1 + m_2 + n_1 - n_2 = 0 \text{ or } m_1 + m_2 - n_1 + n_2 = 0 \text{ or } \\ m_1 - m_2 + n_1 - n_2 = 0 \text{ or } m_1 - m_2 - n_1 + n_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Gamma \in \begin{cases} m_3 + m_4 + n_3 + n_4 = 0 \text{ or } m_3 - m_4 + n_3 + n_4 = 0 \text{ or } \\ m_3 + m_4 - n_3 - n_4 = 0 \text{ or } m_3 - m_4 - n_3 - n_4 = 0 \end{cases}$$

；而 $p_1(t)$ 和 $p_2(t)$ 我們利用在 CL-Q²PSK 中的資料成形脈波，根據前面的 (2.7)

式分別可以表示為

$$p_1(t) = \sum_{n=0}^N C_n^N \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) u(t)$$

$$p_2(t) = \sum_{n=1}^N C_n^N \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) u(t)$$
(3.2)

，其中 N 為 $p_1(t)$ 和 $p_2(t)$ 的波形階數且 $N \in \mathbb{Z}^+$ ；最後我們假設 $g(t)$ 為 $M+1$ 個餘弦波分別乘上係數 a_m 所累加而成，可表示為

$$g(t) = \sum_{m=0}^M a_m \cos\left(\frac{2m\pi}{T}t\right)$$
(3.3)

，其中 M 為 $g(t)$ 的波形階數且 $M \in \mathbb{N}$ ， a_m 為我們所要去設計的波形係數。同傳統正交-正交相位鍵移訊號，我們所新設計的兩個資料成形脈波 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 仍然滿足相互正交的特性，也就是

$$\int_{-0.5T}^{0.5T} h_1(t) h_2(t) dt = 0$$
(3.4)

所以我們所設計的 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 確實能被拿來當作資料成形脈波，(3.4) 式可以被簡單的證明，見附錄 (A)，所以無論 a_m 為何，我們新設計的偏移正交-正交相位鍵移訊號在接收端能夠被正確的解調回原來的資訊序列，我們將在下一章中詳細說明偏移正交-正交相位鍵移訊號的接收端設計及其系統效能，接下來我們將接著探討偏移正交-正交相位鍵移訊號的功率頻譜密度 (power spectrum density, PSD)。

偏移正交-正交相位鍵移訊號的功率頻譜密度：

偏移正交-正交相位鍵移訊號的功率頻譜密度 (power spectrum density, PSD) 可以被寫為[14]

$$S(f) = F \left\{ \left\langle R(t, \tau) \right\rangle \right\} \quad (3.5)$$

其中 F 為對時間 t 做傅立葉轉換 (Fourier transform)， R 為訊號 $s(t)$ 的自相關函數 (autocorrelation function)， $\langle R(t, \tau) \rangle$ 為對 t 取 $R(t, \tau)$ 的時間平均 (time average)。

將訊號 $s(t)$ 代入 (3.5) 式中可推得

$$\begin{aligned} S(f) = F \left\{ \left\langle \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E \left\{ \left[I_{1,2k} h_1(t-kT) - j I_{1,2k+1} h_1 \left(t-kT - \frac{T}{2} \right) \right] \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left[I_{2,2k} h_2(t-kT) - j I_{2,2k+1} h_2 \left(t-kT - \frac{T}{2} \right) \right] \right\} \right. \right. \\ \left. \left. \left\{ \left[I_{1,2l} h_1(t+\tau-lT) + j I_{1,2l+1} h_1 \left(t+\tau-lT - \frac{T}{2} \right) \right] \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left[I_{2,2l} h_2(t+\tau-lT) + j I_{2,2l+1} h_2 \left(t+\tau-lT - \frac{T}{2} \right) \right] \right\} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

因為輸入的資訊序列， $\mathbf{I}_1 = \{I_{1,k}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 和 $\mathbf{I}_2 = \{I_{2,k}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 彼此為獨立同分佈 (independent and identically-distributed)，所以經由化簡後可以得到

$$\begin{aligned} S(f) &= F \left\{ \left\langle \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E \left\{ \left[I_{1,2k} h_1(t-kT) \times I_{1,2l} h_1(t+\tau-kT) \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + I_{1,2k+1} h_1 \left(t-kT - \frac{T}{2} \right) \times I_{1,2l+1} h_1 \left(t+\tau-lT - \frac{T}{2} \right) \right] \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left[I_{2,2k} h_2(t-kT) \times I_{2,2l} h_2(t+\tau-lT) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + I_{2,2k+1} h_2 \left(t-kT - \frac{T}{2} \right) \times I_{2,2l+1} h_2 \left(t+\tau-lT - \frac{T}{2} \right) \right] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

接下來我們僅考慮 (3.7) 式中的第一項，可以推得[14]

$$\begin{aligned} &F \left\{ \left\langle \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E \left\{ I_{1,2k} h_1(t-kT) \times I_{1,2l} h_1(t+\tau-kT) \right\} \right\} \right\} \\ &= \frac{1}{T} |H_1(f)|^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

，其中 $H_1(f)$ 為 $h_1(t)$ 對時間 t 做傅立葉轉換，可以表示為

$$H_1(f) = \alpha^2 \int_{-0.5T}^{0.5T} \left[\sum_{m=0}^M a_m \cos\left(\frac{2m\pi t}{T}\right) \right] \left[\sum_{n=0}^N C_n^N \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \right] e^{-j2\pi ft} dt \quad (3.9)$$

接著將 (3.9) 式代入 (3.8) 式中可以推得

$$\begin{aligned} & F \left\{ \left\langle \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E \{ I_{1,2k} h_1(t-kT) \times I_{1,2l} h_1(t+\tau-kT) \} \right\rangle \right\} \\ &= \frac{1}{4T} \frac{\sin^2(\pi fT)}{\pi^2 f^2} \left| \alpha^2 \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M a_m C_n^N \left\{ (-1)^{n+m} \left[1 - \left(\frac{n+m}{fT} \right)^2 \right]^{-1} + (-1)^{n-m} \left[1 - \left(\frac{n-m}{fT} \right)^2 \right]^{-1} \right\} \right|^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

接著處理 (3.7) 式中的第三項，利用 (3.8) ~ (3.10) 式的方法可以推得，

$$\begin{aligned} & F \left\{ \left\langle \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E \{ I_{2,2k} h_2(t-kT) \times I_{2,2l} h_2(t+\tau-lT) \} \right\rangle \right\} \\ &= \frac{1}{4T} \frac{\sin^2(\pi fT)}{\pi^2 f^2} \left| \beta^2 \frac{1}{fT} \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^M a_m C_n^N \left\{ (n+m)(-1)^{n+m} \left[1 - \left(\frac{n+m}{fT} \right)^2 \right]^{-1} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (n-m)(-1)^{n-m} \left[1 - \left(\frac{n-m}{fT} \right)^2 \right]^{-1} \right\} \right|^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

同樣的 (3.7) 式中的第二項，利用同樣的方法可以得到，

$$\begin{aligned} & F \left\{ \left\langle \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E \left\{ I_{1,2k+1} h_1\left(t-kT-\frac{T}{2}\right) \times I_{1,2l+1} h_1\left(t+\tau-lT-\frac{T}{2}\right) \right\} \right\rangle \right\} \\ &= F \left\{ \left\langle \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E \{ I_{1,2k} h_1(t-kT) \times I_{1,2l} h_1(t+\tau-kT) \} \right\rangle \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

從 (3.12) 式中得到結果發現，訊號的正交成份 (quadrature component) 和同相成份 (in-phase component) 有 $T/2$ 的時間延遲，並不影響其頻譜的結果；同理，(3.7) 式中的第四項，經過推導所得到的結果和沒有時間延遲的第三項所得的結果相同，最後由 (3.10) ~ (3.12) 可以得到偏移正交-正交相位鍵移訊號的功率頻譜密度為

$$\begin{aligned}
S(f) &= \frac{2}{T} \left[|H_1(f)|^2 + |H_2(f)|^2 \right] \\
&= \frac{1}{2T} \frac{\sin^2(\pi f T)}{\pi^2 f^2} \left\{ \alpha^2 \left| \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M a_m C_n^N \left\{ (-1)^{n+m} \left[1 - \left(\frac{n+m}{fT} \right)^2 \right]^{-1} \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + (-1)^{n-m} \left[1 - \left(\frac{n-m}{fT} \right)^2 \right]^{-1} \right\} \right|^2 + \beta^2 \left| \frac{1}{fT} \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^M a_m C_n^N \left\{ (n+m)(-1)^{n+m} \left[1 - \left(\frac{n+m}{fT} \right)^2 \right]^{-1} \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + (n-m)(-1)^{n-m} \left[1 - \left(\frac{n-m}{fT} \right)^2 \right]^{-1} \right\} \right|^2 \right\}
\end{aligned} \tag{3.13}$$



第二節 資料成形脈波設計與旁波快速衰減特性

上一節的最後我們推導出偏移正交-正交相位鍵移 (offset quadrature-quadrature phase shift keying, OQ²PSK) 訊號的功率頻譜密度 (power spectrum density, PSD)，接著在這一節中，我們要從功率頻譜密度去探討其頻譜旁波 (sidelobe) 衰減的特性與設計資料成形脈波 (data shaping pulse) 以達到旁波快速衰減的目的。

當 $|fT| > N + M$ ，我們可以將 (3.13) 式中的 $\left[1 - \left(\frac{n+m}{fT}\right)^2\right]^{-1}$ 和 $\left[1 - \left(\frac{n-m}{fT}\right)^2\right]^{-1}$

利用幾何級數[12, equation 1.112.1]展開，可以表示成

$$S(f) = \frac{1}{2T} \frac{\sin^2(\pi fT)}{\pi^2 f^2} \left\{ \alpha^2 \left| \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M a_m C_n^N \left\{ (-1)^{n+m} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(n+m)^{2l} + (n-m)^{2l}}{(fT)^{2l}} \right] \right\} \right|^2 \right. \\ \left. + \beta^2 \left| \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^M a_m C_n^N \left\{ (-1)^{n+m} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(n+m)^{2l+1} + (n-m)^{2l+1}}{(fT)^{2l+1}} \right] \right\} \right|^2 \right\} \quad (3.14)$$

在 (3.14) 式中，可以由兩個絕對值來分為兩部份，其中第一個絕對值內的 n 從零開始，且中括號裡的項目都為偶數次方，而第二個絕對值內的 n 則從一開始，且中括號裡的項目都為奇數次方，利用在參考資料[12, equation 0.154.3]中的恒等式

$$\sum_{n=0}^N (-1)^n C_n^N (n+x)^p = 0, p \in \mathbb{Z}_N, x \text{ 為任意數} \quad (3.15)$$

可以推得

$$\sum_{m=0}^M \left\{ a_m (-1)^m \left[\sum_{n=0}^N (-1)^n C_n^N \left[(n+m)^p + (n-m)^p \right] \right] \right\} = 0, p \in \mathbb{Z}_N \quad (3.16)$$

$$\sum_{m=0}^M \left\{ a_m (-1)^m \left[\sum_{n=1}^N (-1)^n C_n^N \left[(n+m)^p + (n-m)^p \right] \right] \right\} = 0, p = 2m+1 \text{ and } m \in \mathbb{Z}_{\lfloor N/2 \rfloor} \quad (3.17)$$

在 (3.16) 式中，無論 p 為奇數或偶數只要 $p \in \mathbb{Z}_N$ 就會成立，將結果代入 (3.14) 式中的第一個絕對值內，將會使得在 $(fT)^{-2\ell}$ 前的係數，也就是

$$\sum_{m=0}^M \left\{ a_m (-1)^m \left[\sum_{n=0}^N (-1)^n C_n^N \left[(n+m)^{2\ell} + (n-m)^{2\ell} \right] \right] \right\}, \text{ 只要是 } 2\ell \text{ 小於 } N, \text{ 其係數就會}$$

等於零；而在(3.17)式中的 p 必須為奇數，且滿足 $p = 2m+1$ ， $m \in \mathbb{Z}_{\lfloor N/2 \rfloor}$ ，則(3.17)式才會成立，我們將此結果代入到(3.14)式中的第二個絕對值內，這將會使得在 $(fT)^{-2\ell+1}$ 前的係數 $\sum_{m=0}^M \left\{ a_m (-1)^m \left[\sum_{n=1}^N (-1)^n C_n^N \left[(n+m)^{2\ell+1} + (n-m)^{2\ell+1} \right] \right] \right\}$ ，只要是 $2\ell+1$ 小於 N ，其係數就會等於零，綜合上述所討論，我們可以進一步將(3.14)式表示成

$$S(f) = \frac{1}{2T} \frac{\sin^2(\pi fT)}{\pi^2 f^2} \left\{ \alpha^2 \left| \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M a_m C_n^N \left\{ (-1)^{n+m} \left[\sum_{\ell=\lceil (N-1)/2 \rceil}^{\infty} \frac{(n+m)^{2\ell} + (n-m)^{2\ell}}{(fT)^{2\ell}} \right] \right\} \right| \right|^2 + \beta^2 \left| \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^M a_m C_n^N \left\{ (-1)^{n+m} \left[\sum_{\ell=\lceil (N-2)/2 \rceil}^{\infty} \frac{(n+m)^{2\ell+1} + (n-m)^{2\ell+1}}{(fT)^{2\ell+1}} \right] \right\} \right| \right|^2 \right\} \quad (3.18)$$

(3.18) 的表示方法類似在 CL-Q²PSK 的 (2.10)，所以可以知道，在沒有給予特定 a_m 的情況下，當 $f \rightarrow \infty$ 時， $S(f)$ 將至少會以漸進於 f^{-2N-2} 的速度衰減，而在此篇論文中，我們希望藉由去設計 a_m ，讓 a_m 在滿足某些限制條件下以得到更快的衰減速度。

在設計 a_m 之前，我們首先假設 $\Delta_k(\underline{\mathbf{a}})$ 為

$$\Delta_k(\underline{\mathbf{a}}) = \sum_{m=0}^M a_m \left\{ (-1)^m \left[\sum_{n=0}^N (-1)^n C_n^N \left[(n+m)^k + (n-m)^k \right] \right] \right\} \quad (3.19)$$

其中 $\underline{\mathbf{a}} = [a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_M]$ 為一個 $1 \times (M+1)$ 的列向量，向量裡的每一個元素 a_m ， $m \in \mathbb{Z}_{M+1}$ 分別為脈波 $g(t)$ 中每個餘弦波前的係數。同時我們發現

$$\begin{aligned} \Delta_k(\underline{\mathbf{a}}) &= \sum_{m=0}^M a_m \left\{ (-1)^m \left[\sum_{n=0}^N (-1)^n C_n^N \left[(n+m)^k + (n-m)^k \right] \right] \right\} \\ &= \sum_{m=0}^M a_m \left\{ (-1)^m \left[\sum_{n=1}^N (-1)^n C_n^N \left[(n+m)^k + (n-m)^k \right] \right] \right\}, \text{ 當 } k \text{ 為奇數} \end{aligned} \quad (3.20)$$

雖然在(3.18)式中的兩個絕對值內，第一個的 n 從零開始，而第二個的 n 從一開始，但剛好第二個絕對值裡中括號內的項目，其次方數 $2\ell+1$ 都為奇數，所以雖然它的 n 從一開始，但利用(3.20)式所得到的結果，依然可以只用 $\Delta_k(\underline{\mathbf{a}})$ 來代入(3.18)式中化簡，可以進一步將 $S(f)$ 化簡為

$$S(f) = \frac{1}{2T} \frac{\sin^2(\pi fT)}{\pi^2 f^2} \left\{ \alpha^2 \left[\sum_{\ell=\lceil (N-1)/2 \rceil}^{\infty} \frac{\Delta_{2\ell}(\mathbf{a})}{(fT)^{2\ell}} \right]^2 + \beta^2 \left[\sum_{\ell=\lceil (N-2)/2 \rceil}^{\infty} \frac{\Delta_{2\ell+1}(\mathbf{a})}{(fT)^{2\ell+1}} \right]^2 \right\} \quad (3.21)$$

為了要設計 \mathbf{a} 以達到 $S(f)$ 快速衰減的目的，我們提出旁波快速衰減條件 2，假設能找到 \mathbf{a} 滿足下列的旁波快速衰減條件 2，將使得偏移正交-正交相位鍵移訊號的功率頻譜密度能達到比 f^{-2N-2} 更快的衰減速度。

旁波快速衰減條件 (fast sidelobe-decaying constraint) 2：

在給定 $K > N$ ， $K \in \mathbb{Z}^+$ 的情況下， $\Delta_k(\mathbf{a}) = 0$ 當 $k \in \mathbb{Z}_K$ 且 $\Delta_K(\mathbf{a}) \neq 0$ ，其中我們稱 K 為係數 \mathbf{a} 的旁波衰減階數 (sidelobe-decaying order)

，假設在給定一個正整數 K 的情況下，係數 \mathbf{a} 能滿足此旁波快速衰減條件 2，那 (3.21) 式中，絕對值裡 fT 的次方數將從 K 開始，也就表示說當 $f \rightarrow \infty$ 時， $S(f)$ 就會以漸進於 f^{-2K-2} 的速度衰減，其中 $K > N$ ，故 $S(f)$ 將以更快的速度衰減。

根據前面所提的旁波快速衰減條件 2，我們定義波形階數 (pulse order) 為 M 的脈波 $g(t)$ 中，每個餘弦波前的係數 a_m 所形成的向量 $\mathbf{a} = [a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_M]$ 為

$$a_m = C_m^M, m \in \mathbb{Z}_{M+1} \text{ 且 } M \in \mathbb{N} \quad (3.22)$$

(3.22) 式中我們所提出用來當作脈波 $g(t)$ 中的係數所構成的向量 \mathbf{a} 確實能符合旁波快速衰減條件 2，且此時的旁波衰減階數 $K = N + M$ ，也就是說當 $f \rightarrow \infty$ 時， $S(f)$ 將會以漸進於 $f^{-2(N+M)-2}$ 的速度衰減。在論文中我們有去證明所提出的係數 \mathbf{a} 確實能符合旁波快速衰減條件 2，且此時的旁波衰減階數 $K = N + M$ ，即要證明

$$\Delta_k(\mathbf{a}) = 0 \text{ 當 } k \in \mathbb{Z}_{N+M} \text{ 且 } \Delta_{N+M}(\mathbf{a}) \neq 0 \quad (3.23)$$

詳細證明過程附於附錄 (B) 中。

值得注意的是，當脈波 $g(t)$ 的波形階數 M 為奇數時，可以進一步得到

$$\Delta_k(\mathbf{a}) = 0 \text{ 當 } k \in \mathbb{Z}_{N+M+1} \text{ 且 } \Delta_{N+M+1}(\mathbf{a}) \neq 0 \quad (3.24)$$

故此時的旁波衰減階數 $K = N + M + 1$ ，也就是說當 $f \rightarrow \infty$ 時， $S(f)$ 會以漸進於 $f^{-2(N+M)-4}$ 的速度衰減，能夠達到更快的旁波衰減速度，達到更高的頻譜效率。因為 (3.23) 式成立，所以欲證明 (3.24) 式我們只需證明下列式子即可

$$\Delta_{N+M}(\mathbf{a}) = \sum_{m=0}^M C_m^M \left\{ (-1)^m [\alpha_M(m) + \beta_M(m)] \right\} = 0 \quad (3.25)$$

而詳細的證明過程附於論文的附錄（C）中。

經由上面的討論，我們能得到一個結論，在論文中我們所設計用於偏移正交-正交相位鍵移調變訊號上的資料成形脈波，將使得在 $f \rightarrow \infty$ 時， $S(f)$ 的衰減速度為

$$\begin{cases} f^{-2(N+M)-2}, & \text{當 } M \text{ 為偶數} \\ f^{-2(N+M)-4}, & \text{當 } M \text{ 為奇數} \end{cases} \quad (3.26)$$

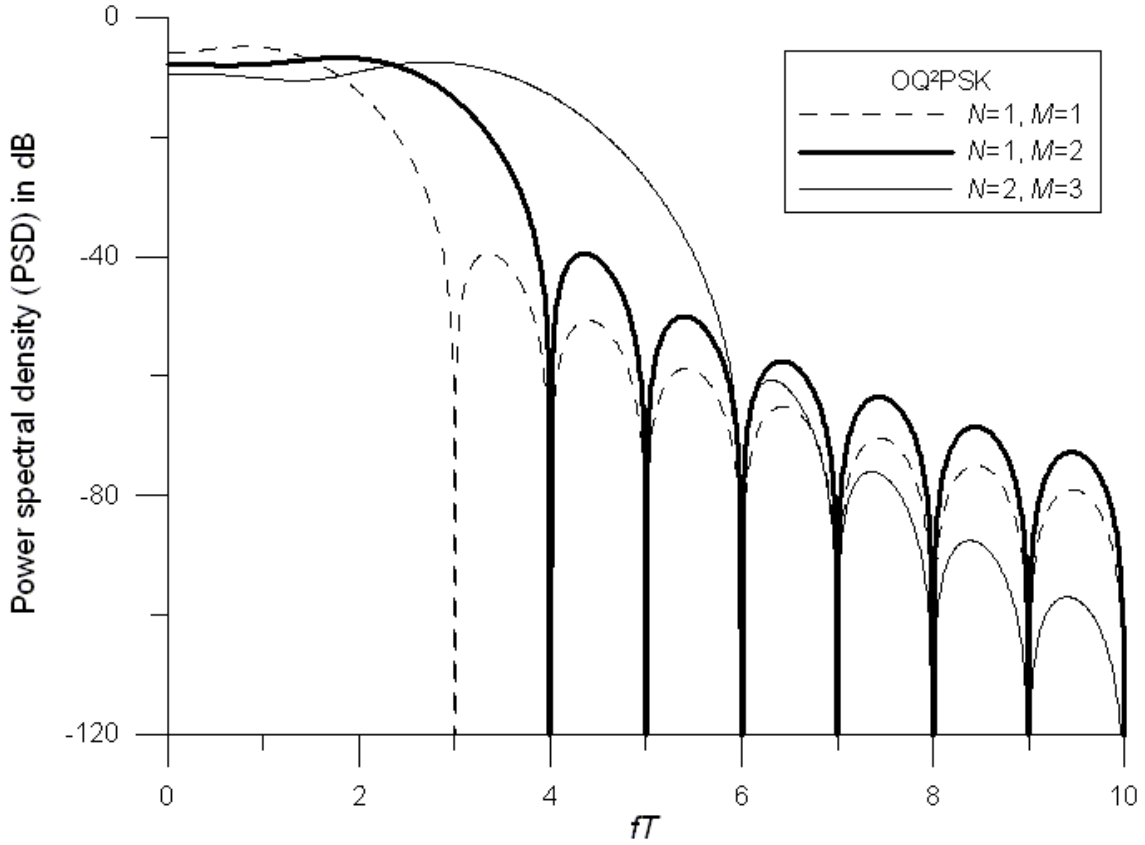


圖 3.2：偏移正交-正交相位鍵移訊號在不同的 N 和 M 時的功率頻譜密度

在圖 3.2 中為偏移正交-正交相位鍵移訊號在不同的 N 和 M 時的功率頻譜密度比較，圖中三條線分別為 $N=1, M=1$ 、 $N=1, M=2$ 和 $N=2, M=3$ ，其功率頻譜密度衰減的速度依照（3.26）式可得分別為 f^{-8} 、 f^{-8} 和 f^{-14} ，所以 $N=1, M=1$ 這條曲線在 f 比較大時它的旁波衰減趨勢和 $N=1, M=2$ 幾乎是相同的，而 $N=2, M=3$ 這條曲

線的旁波衰減速度最快，但同時我們也看到，當 $N+M$ 越大時雖然可以使得旁波的衰減速度變快，但同時頻譜的主波（mainlobe）寬度也跟著變大。在圖 3.3 中分別為 $N=1, M=1$ 和 $N=2, M=2$ 時的偏移正交-正交相位鍵移訊號、SB-Q²PSK 訊號和 $N=3$ 時的 CL-Q²PSK 訊號的功率頻譜密度比較，其功率頻譜密度衰減的速度依序為 f^{-8} 、 f^{-10} 、 f^{-2} 和 f^{-8} ，所以由圖中我們可以看到 $N=1, M=1$ 時的偏移正交-正交相位鍵移訊號與 $N=3$ 的 CL-Q²PSK 訊號有一樣的旁波衰減速度，但前者的主波寬度較小，也就是說偏移正交-正交相位鍵移訊號可以以較小的主波寬度，達到與 CL-Q²PSK 訊號一樣的旁波衰減速度。在下一節中我們將以頻帶外功率比例（fractional out-of-band power）為指標來說明偏移正交-正交相位鍵移訊號的頻譜特性與說明 N 和 M 要如何選取，以達到最佳的頻譜效率。

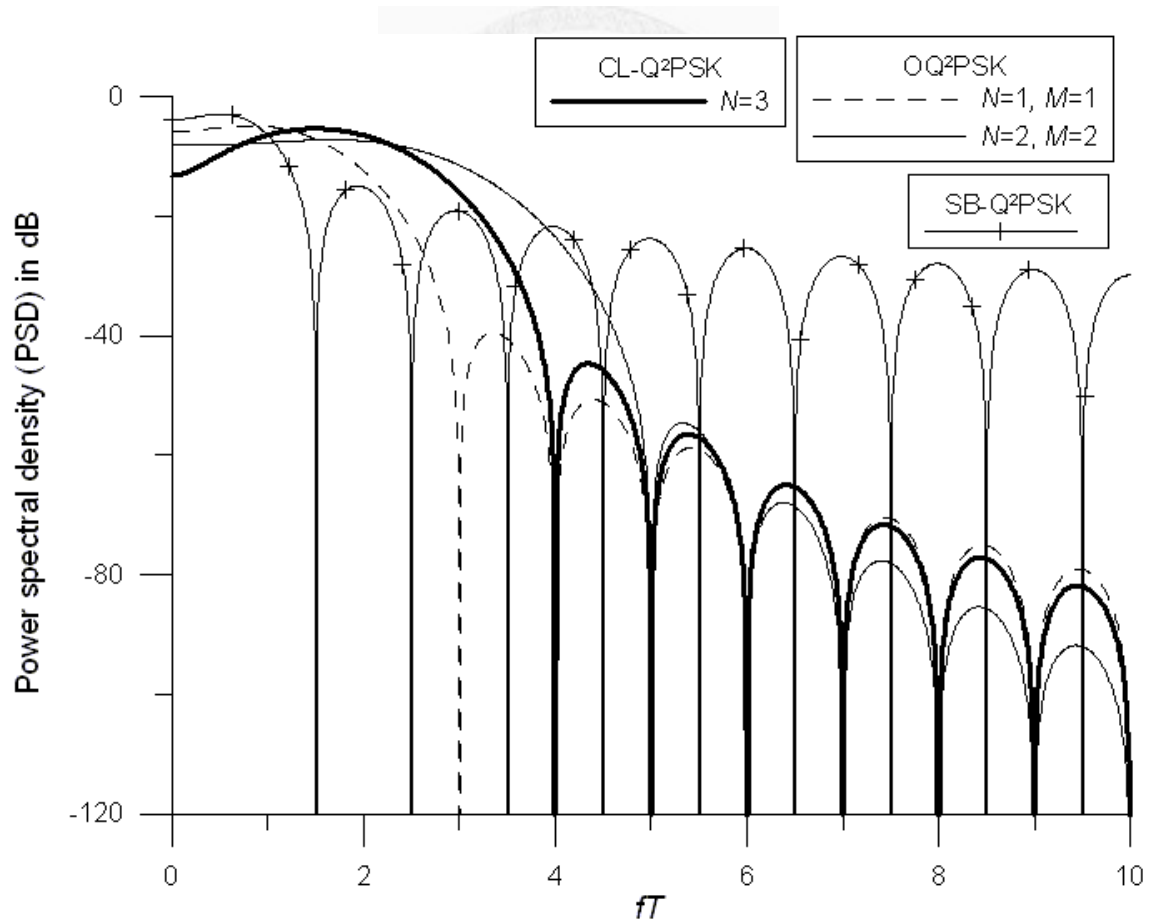


圖 3.3：偏移正交-正交相位鍵移訊號、SB-Q²PSK 和 CL-Q²PSK 訊號的功率頻譜密度比較

接下來，看到論文中我們所設計用於偏移正交-正交相位鍵移調變訊號上的資料成形脈波 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 分別為

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \alpha \left[\sum_{m=0}^M C_m^M \cos\left(\frac{2m\pi}{T}t\right) \right] \left[\sum_{n=0}^N C_n^N \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) u(t) \right] \\ h_2(t) &= \beta \left[\sum_{m=0}^M C_m^M \cos\left(\frac{2m\pi}{T}t\right) \right] \left[\sum_{n=1}^N C_n^N \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) u(t) \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

可以發現， $h_i(t = \pm T/2) = 0$ ，也就是在一個符元時間 (symbol time) 的兩端， $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 的值都為零，確保訊號在不同符元間相位是連續的，如圖 3.4 為偏移正交-正交相位鍵移訊號在 $N=1$ ， $M=3$ 時的 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 。更進一步發現經過第 $N+M-1$ 次的微分後，在符元時間的端點其值等於零，且當 M 為奇數時，則經過第 $N+M$ 次的微分後，在符元時間的端點其值仍然等於零， $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 經過第 k 次微分後在 $t = \pm T/2$ 的值可以分別被表示為

$$\begin{aligned} h_1^{(k)}\left(\pm \frac{T}{2}\right) &= \begin{cases} 0 & \text{當 } k \text{ 為奇數} \\ q_k \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N C_m^M C_n^N \left[(n+m)^k (-1)^{n+m} + (n-m)^k (-1)^{n-m} \right] & \text{當 } k \text{ 為偶數} \end{cases} \\ h_2^{(k)}\left(\pm \frac{T}{2}\right) &= \begin{cases} 0 & \text{當 } k \text{ 為奇數} \\ q_k \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N C_m^M C_n^N \left[(n+m)^k (-1)^{n+m} + (n-m)^k (-1)^{n-m} \right] & \text{當 } k \text{ 為偶數} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.28)$$

其中 q_k 為常數在此可忽略，利用 (3.23) 和 (3.24) 所得的結果，可以看出在 (3.28)

式中 $h_1^{(k)}\left(\pm \frac{T}{2}\right) = 0$ 且 $h_2^{(k)}\left(\pm \frac{T}{2}\right) = 0$ 當 $k \in \{1, 2, \dots, K-1\}$ ，其中，當 M 為偶數時，

$K = N+M$ ，而當 M 為奇數時， $K = N+M+1$ ；因此 $h_i(t)$ 和 $h_i^{(k)}(t)$ 在 $i \in \{1, 2\}$ 且

$k \in \{1, 2, \dots, K-1\}$ 時訊號都為連續，其中 $h_i^{(k)}(t)$ 表示 $h_i(t)$ 的第 k 次微分，這個結果

表示我們所設計的資料成形脈波比 CL-Q²PSK 訊號的更為平滑，也呼應了偏移正交-正交相位鍵移訊號在頻譜上更為密集的特性。

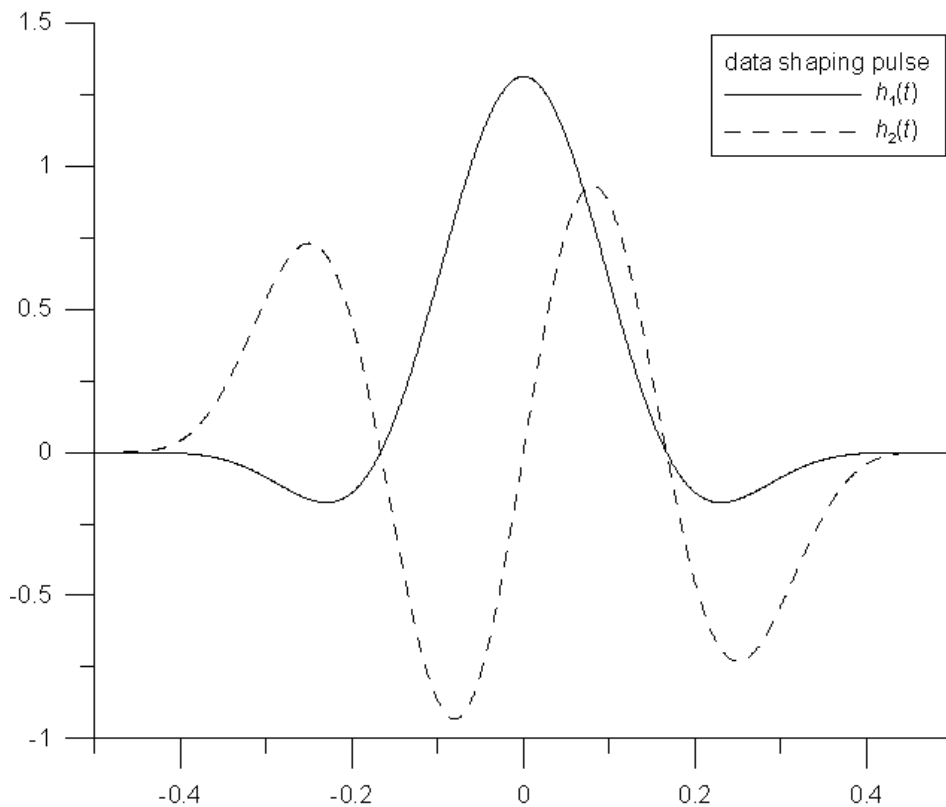


圖 3.4：偏移正交-正交相位鍵移在 $N=1, M=3$ 時的資料成形脈波 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$

而我們也注意到，當 $M=0$ 時，資料成形脈波 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 可化簡為

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \sum_{n=0}^N C_n^N \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)u(t) \\ h_2(t) &= \sum_{n=1}^N C_n^N \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)u(t) \end{aligned} \quad (3.29)$$

，其結果與 CL-Q²PSK 的資料成形脈波 $p_1(t)$ 和 $p_2(t)$ 相同，所以 CL-Q²PSK 的資料成形脈波可視為 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 中的特例，當 $M=0$ 時，偏移正交-正交相位鍵移訊號可以化簡為偏移 CL-Q²PSK 訊號。

第三節 頻帶外功率比例與峰值對平均功率比分析

頻帶外功率比例：

在前面第二章的 (2.11) 式中，曾經定義過頻帶外功率比例 (fractional out-of-band power)，並利用頻帶外功率比例來描述不同訊號間頻譜的緊密程度與頻譜效率 (spectral efficiency)，在這一節中，我們將利用頻帶外功率比例來比較偏移正交-正交相位鍵移 (offset quadrature-quadrature phase shift keying, OQ²PSK)、最小頻鍵移 (minimum shift keying, MSK) 訊號、SB-Q²PSK 與 CL-Q²PSK 訊號的頻譜效率。

在圖 3.5 中為偏移正交-正交相位鍵移訊號在不同的 N 和 M 時的頻帶外功率比例，由圖可以看出在不同的 N 和 M 情況下，其頻帶外功率比例中，旁波 (sidelobe) 的衰減趨勢和我們在 (3.26) 式中所推出的結論相同，即當波形階數 $N=1, M=1$ 、 $N=1, M=2$ 時旁波衰減速度為 f^{-8} ；而 $N=2, M=1$ 、 $N=2, M=2$ 時旁波衰減速度為 f^{-10} ；而 $N=3, M=1$ 、 $N=3, M=2$ 、 $N=1, M=3$ 時旁波衰減速度為 f^{-12} ；而 $N=4, M=1$ 時旁波衰減速度為 f^{-14} 。同時隨著 $N+M$ 越大，其所對應的頻譜主波 (mainlobe) 寬度也隨之增大，這是因為 $N+M$ 越大時代表構成資料成形脈波 (data shaping pulse) 的弦波頻率也越高，造成主波寬度越大，例如： $N=2, M=1$ 的主波寬度一定會大於 $N=1, M=1$ 的主波寬度，而 $N=2, M=2$ 的主波寬度一定會大於 $N=2, M=1$ 的主波寬度。

接著圖 3.6 為不同調變訊號頻帶外功率比例的比較，由圖我們可以得知，相較於最小頻鍵移與 SB-Q²PSK 訊號，CL-Q²PSK 與偏移正交-正交相位鍵移訊號可以藉由不同 N 和 M 的選擇 (在 CL-Q²PSK 中 $M=0$)，來達到較高的頻譜效率，更進一步來比較 CL-Q²PSK 和偏移正交-正交相位鍵移訊號我們發現，偏移正交-正交相位鍵移訊號可以以較小的主波寬度，來達到和 CL-Q²PSK 相同的頻譜旁波衰減速度，如圖 3.6 中 $N=3$ 的 CL-Q²PSK 和 $N=1, M=1$ 的偏移正交-正交相位鍵移訊號有一樣的旁波衰減速度 f^{-8} ，但因為 CL-Q²PSK 訊號的 $N+M=3$ 大於偏移正交-正交相位鍵移訊號的 $N+M=2$ ，所以偏移正交-正交相位鍵移訊號的主波寬度會小於 CL-Q²PSK 訊號的，同理 $N=4$ 的 CL-Q²PSK 訊號和 $N=2, M=1$ 以及 $N=5$ 的

CL-Q²PSK 和 $N=3$ ， $M=1$ 也有相同的結果，所以偏移正交-正交相位鍵移訊號的頻譜效率高於 CL-Q²PSK 訊號。

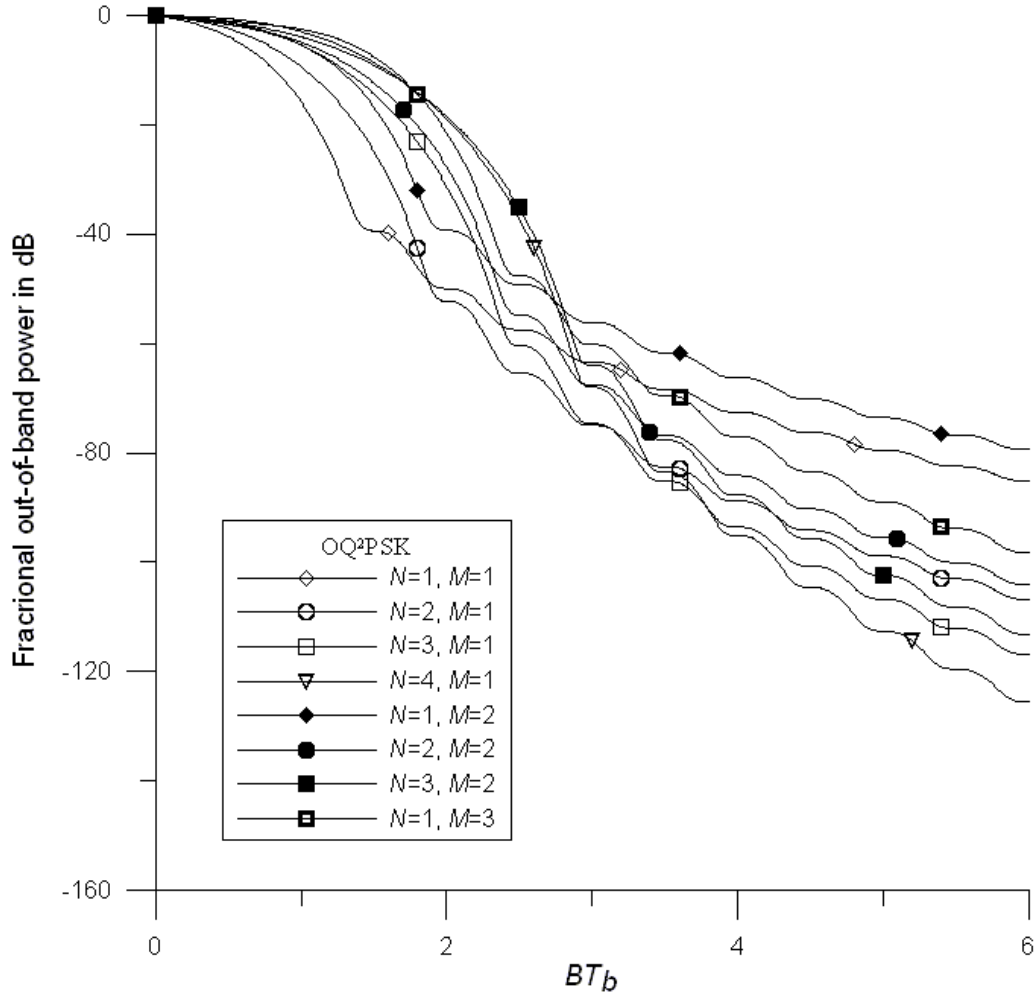


圖 3.5：偏移正交-正交相位鍵移訊號在不同的 N 和 M 時的頻帶外功率比例

當兩個訊號的旁波衰減速率都一樣時，我們可以利用功率頻譜密度支配項 (dominant term) 的係數更進一步來檢視當 f 很大時頻譜旁波的行為，功率頻譜密度的支配項，以 $S_D(f)$ 來表示為

$$S_D(f) \triangleq S(f)|_{fT \gg 1} \approx \frac{1}{2T} \frac{\sin^2(\pi fT)}{\pi^2 f^2} \left[\lambda^2 \left| \frac{\Delta_K(\mathbf{a})}{(fT)^K} \right|^2 \right] \quad (3.30)$$

其中當旁波衰減階數 (sidelobe-decaying order) K 為奇數時 $\lambda = \beta$ ，而當 K 為偶數

時 $\lambda = \alpha$ ，如我們所預期的， $S_D(f)$ 的衰減速度仍然為 f^{-2K-2} ，若當兩個訊號的旁波衰減速率都一樣，此時 $S_D(f)$ 的係數為 $\frac{\lambda^2}{2T\pi^2} \left| \frac{\Delta_K(\underline{a})}{T^K} \right|^2$ ，此係數越小時，他的旁波衰減速度就越快，這是因為在傳送訊號的功率都正規化為一的情況下， $S_D(f)$ 的係數越小就表示在 $S(f)$ 中，其他衰減速度較快的項（ f 的次方數小於 $-K$ 的項）所佔的功率越高，導致其衰減速度較快，所以我們可以利用 $S_D(f)$ 的係數來更進一步比較 $S(f)$ 的旁波衰減速度。

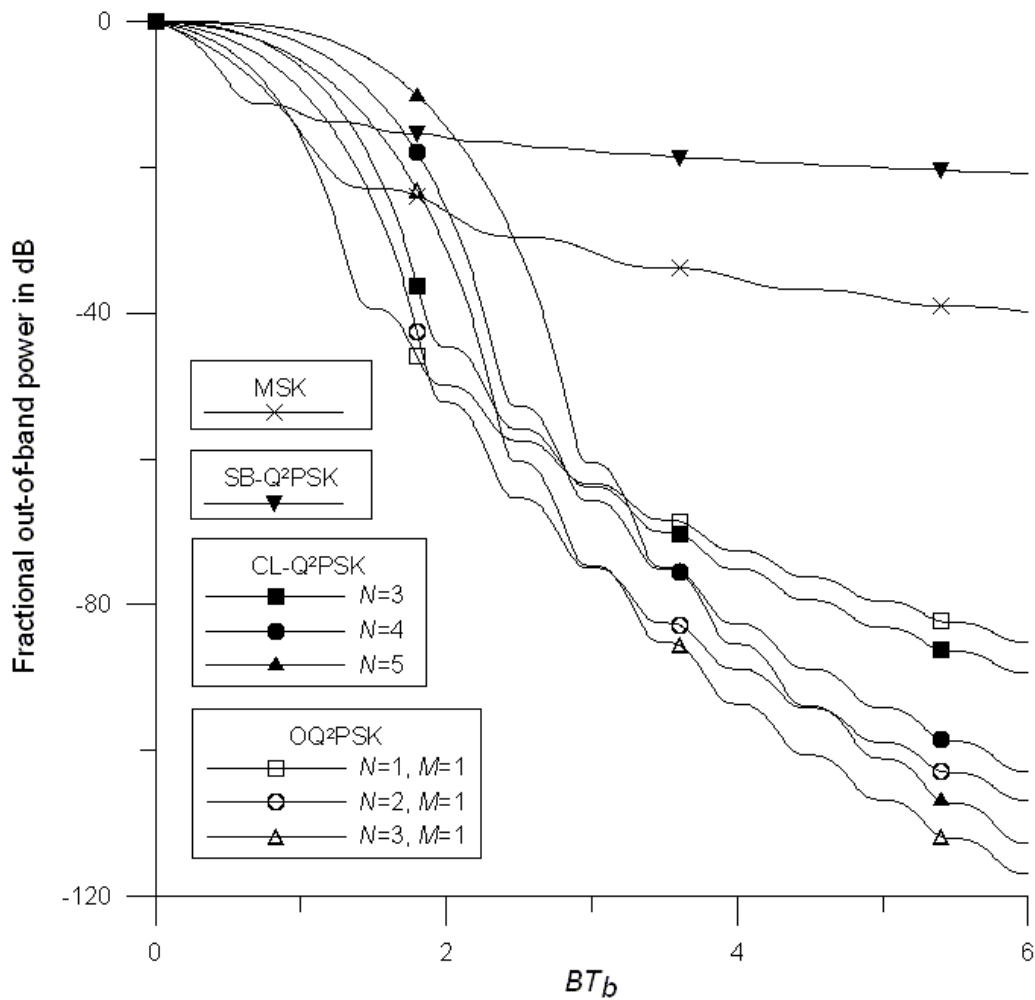


圖 3.6：不同訊號間的頻帶外功率比例比較

在圖 3.7 中， $N=3$ 時 CL-Q²PSK 訊號頻譜的旁波衰減速度和 $N=1$ ， $M=1$ 的偏移正交-正交相位鍵移訊號相同都為 f^{-8} ，而另外三條偏移正交-正交相位鍵移訊

號的曲線也都有一樣的旁波衰減速度，為了更進一步比較旁波衰減速度，在表 3.1 中，我們列出了他們所對應的功率頻譜密度支配項的係數及旁波衰減速率，

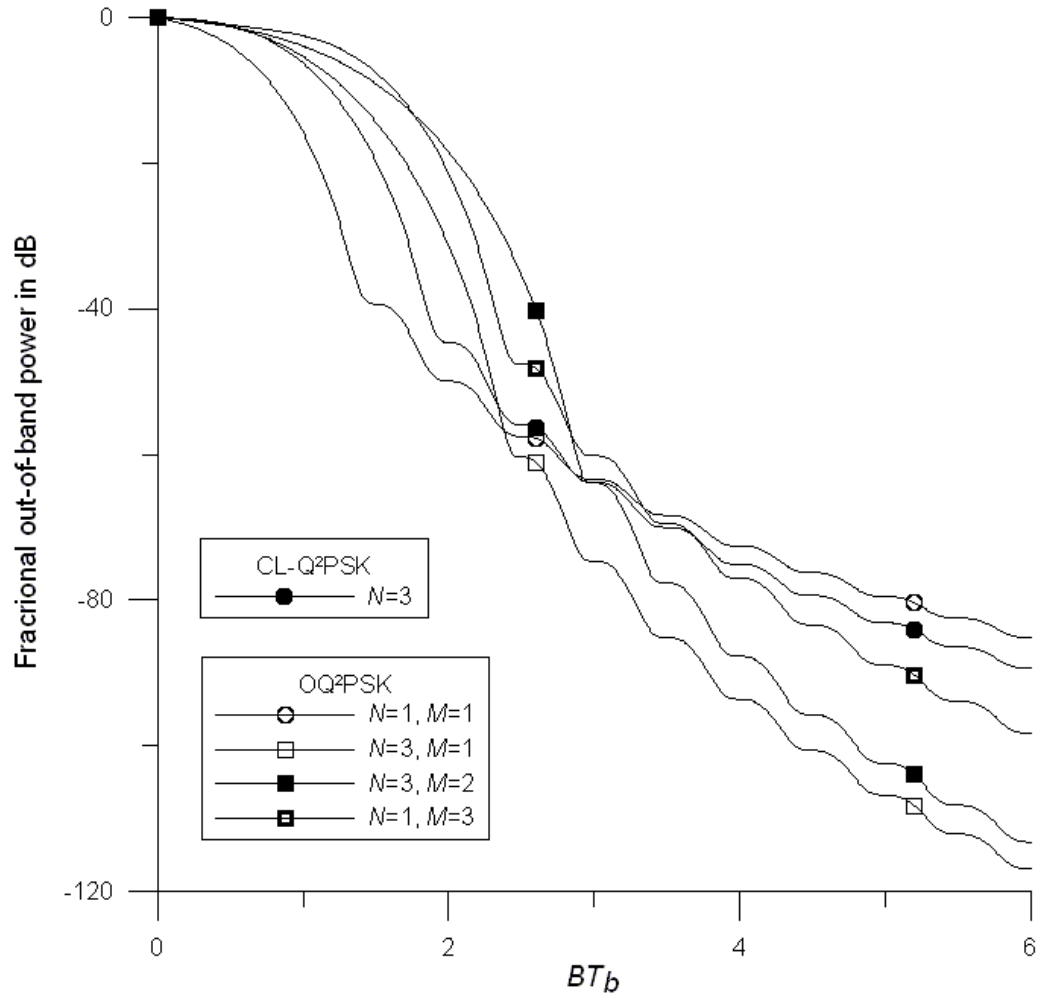


圖 3.7：不同訊號間的頻帶外功率比例比較

CL-Q ² PSK $N=3$	OQ ² PSK $N=1, M=1$	OQ ² PSK $N=3, M=1$	OQ ² PSK $N=3, M=2$	OQ ² PSK $N=1, M=3$
0.1920	0.7295	7.0484	13.1740	875.4150
f^{-8}	f^{-8}	f^{-12}	f^{-12}	f^{-12}

表 3.1：不同訊號間功率頻譜密度支配項的係數及旁波衰減速率

根據表 3.1， $N=3$ 時 CL-Q²PSK 與 $N=1, M=1$ 的偏移正交-正交相位鍵移訊號在 $f \rightarrow \infty$ 時有相同的旁波衰減速度，但 CL-Q²PSK 的功率頻譜密度支配項的係數較

小，所以在 f 較大時他的衰減速度比偏移正交-正交相位鍵移訊號要快，同理，另外三個偏移正交-正交相位鍵移訊號的衰減速度都為 f^{-12} ，但在 $N=3, M=1$ 時係數最小，而 $N=1, M=3$ 係數最大，所以在 f 較大時 $N=3, M=1$ 的衰減速度最快而 $N=1, M=3$ 最慢。

經由上面種種的討論後，希望能建立一個準則，讓我們在使用一樣多的正弦波與餘弦波個數去組合出資料成形脈波，也就是在固定 $N+M$ 的情況下，去選取適當的 M 和 N ，讓偏移正交-正交相位鍵移訊號能夠達到最佳的頻譜效率。經由模擬發現，若 $N+M < 20$ 且 M 為奇數，則偏移正交-正交相位鍵移訊號在同樣的 $N+M$ 的情況下， M 越小時，他所對應的 $S_D(f)$ 的係數也會越小，圖 3.8 為在不同的 $N+M$ 時分別所對應的功率頻譜密度支配項係數，如圖所示在固定的 $N+M$ 下， M 越小所對應的係數也會越小。所以我們可以得知在 $N+M < 20$ 時，固定的 $N+M$ 下，首先選擇 M 為奇數，這將會使得頻譜的旁波衰減速度較快，可達到 $f^{-2(N+M)-4}$ 的衰減，接著所選擇的 M 要越小越好，以確保他所對應的 $S_D(f)$ 係數較小，也就是選擇 $M=1$ 可以使訊號達到最高的頻譜效率。而此現象可以由前面圖 3.5 來加以驗證，圖中無論當 $N+M$ 固定為 3、4 或 5 時，選擇 $M=1$ 時的偏移正交-正交相位鍵移訊號都能夠達到最佳的頻譜效率。

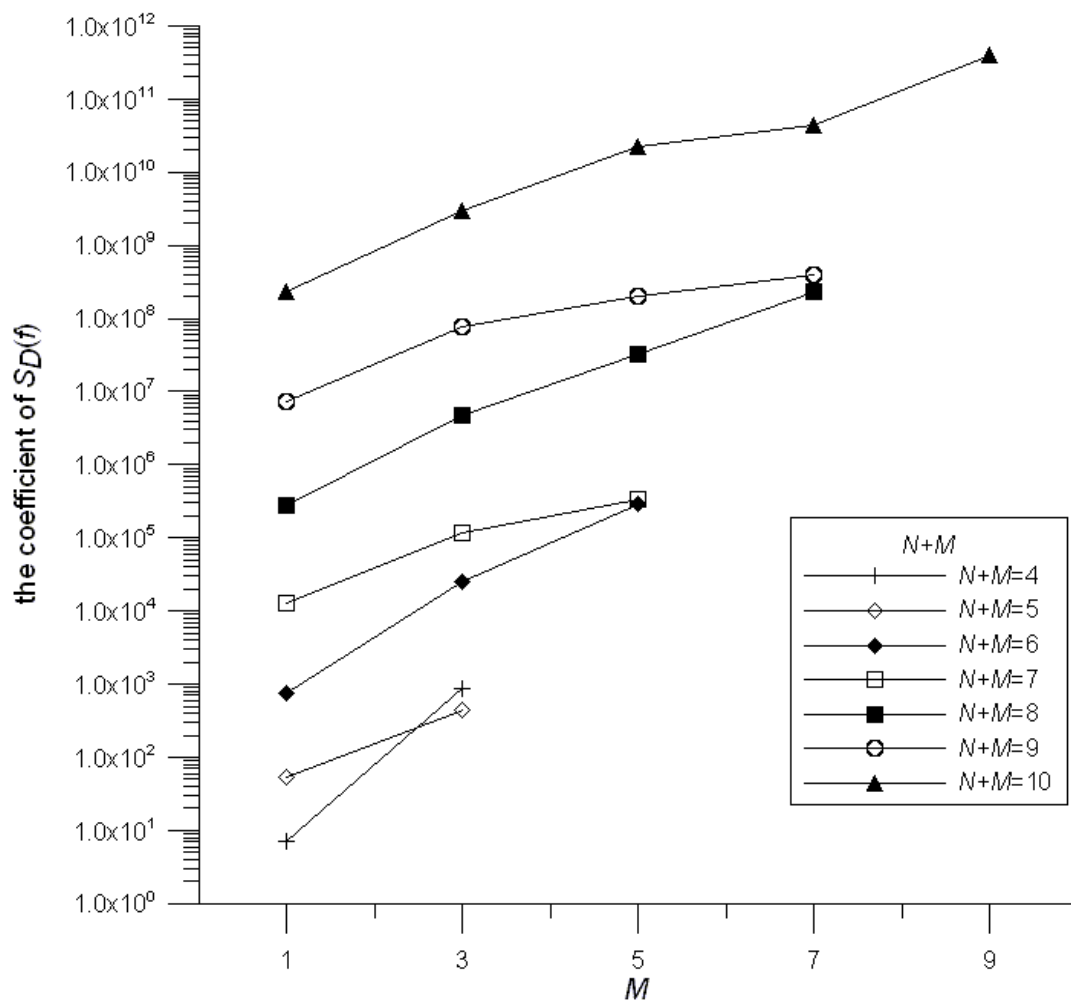


圖 3.8：在相同 $N+M$ 下，不同的 M 所對應的功率頻譜密度支配項係數

峰值對平均功率比：

在討論完偏移正交-正交相位鍵移訊號的頻譜特性後，接下來我們看到訊號的峰值對平均功率比（peak-to-average power ratio, PAPR），所謂的峰值對平均功率比即

$$\text{PAPR}[s(t)] = \frac{\max_{-0.5T \leq t \leq 0.5T} [s(t)^2]}{P_{av}} \quad (3.31)$$

其中 P_{av} 為訊號的平均功率，在通訊系統的傳送端中，會有一功率放大器將欲傳送出去的訊號功率放大，而為了使得訊號經由放大後不失真，一般都會讓輸入訊號操作於功率放大器的線性區域，此時若訊號的峰值對平均功率比越大，將造成功率放大器必須擁有較大動態範圍的線性區域，那將會造成功率放大器的設計成本增加，所以我們希望峰值對平均功率比越小越好，而我們常用互補累積分佈函數

(Complementary Cumulative Distribution Function, CCDF), 來描述峰值對平均功率比的特性。

前面我們有提到過正交-正交相位鍵移訊號他雖然有較佳的頻譜效率，但他卻犧牲了訊號振幅固定的特性，使得峰值對平均功率比變大，所以在論文中所提的偏移正交-正交相位鍵移訊號，我們刻意讓此訊號中的正交成份 (quadrature component) 和同相成份 (in-phase component) 有一個一半符元時間 (symbol time) 的延遲，藉由此時間延遲讓各弦波間的峰值不會都重疊在一起，使訊號的偏移正交-正交相位鍵移訊號的峰值較小，在此們每間隔一個一半符元時間來計算訊號的峰值對平均功率比，在圖 3.8 中的實線部分為在不同的 N 和 M 時的偏移正交-正交相位鍵移訊號的互補累積分佈函數；而虛線部分則為在相對應的 N 與 M 下，此時訊號的正交成份和同相成份並沒有相差一個一半符元時間延遲，由圖中我們可以看出，在相同的 N 與 M 下，實線部分的峰值對平均功率比都比虛線部分的峰值對平均功率比要小，所以我們可以得知藉由使訊號的正交成份和同相成份有一個時間偏移確實可以降低訊號的峰值對平均功率比。接著在圖 3.9 中為 SB- Q^2 PSK 訊號、CL- Q^2 PSK 訊號、和偏移正交-正交相位鍵移訊號的互補累積分佈函數比較圖，由圖我們可以看出 SB- Q^2 PSK 訊號的峰值對平均功率比最小，但若在相同的旁波衰減速度下，就先前所討論的我們選擇頻譜效率最高的偏移正交-正交相位鍵移訊號，也就是選擇 $M=1$ ，則他的峰值對平均功率比會比 CL- Q^2 PSK 訊號要小，例如： $N=3$ 時的 CL- Q^2 PSK 與 $N=1, M=1$ 的偏移正交-正交相位鍵移訊號的旁波衰減速度都為 f^{-8} ，但偏移正交-正交相位鍵移訊號的峰值對平均功率比較小。

所以由這一章的討論我們發現，偏移正交-正交相位鍵移訊號能達到比 CL- Q^2 PSK 訊號要高的頻譜效率以及較小的峰值對平均功率比。

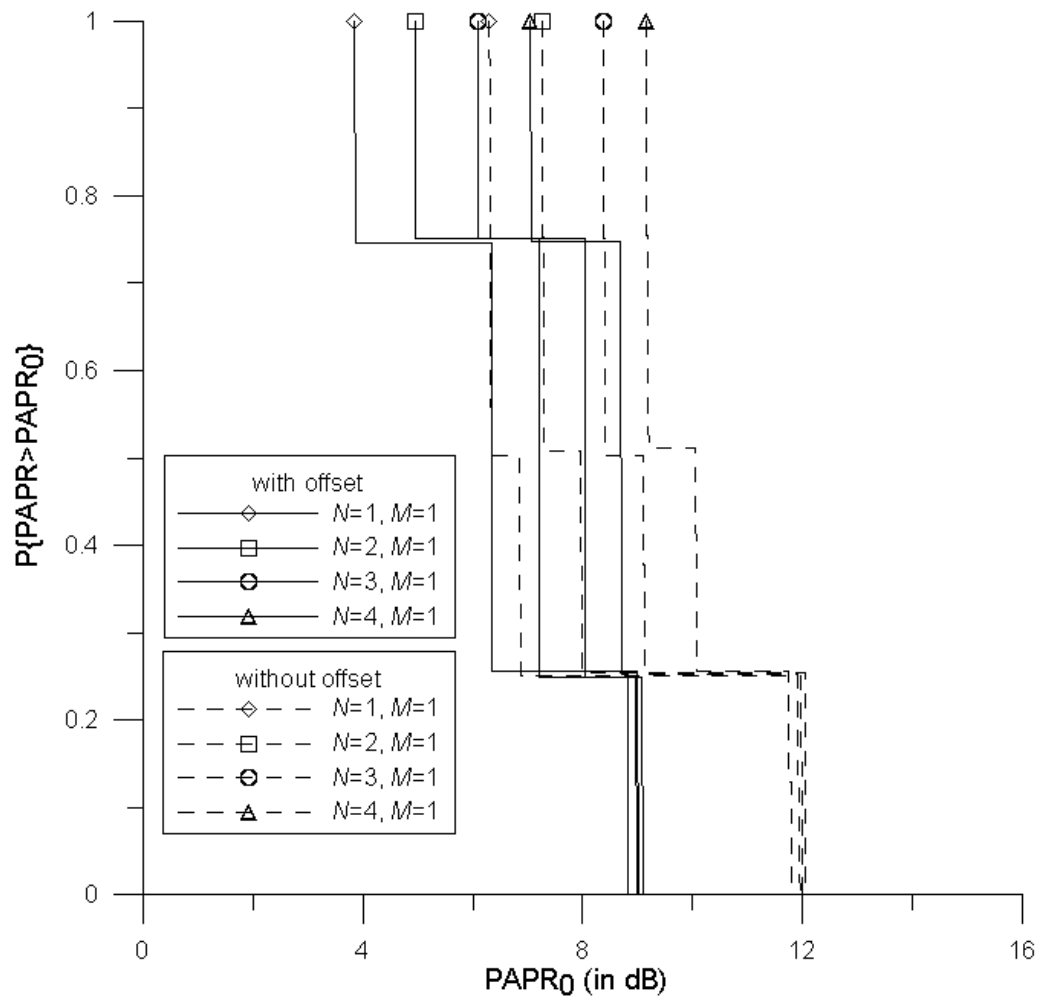


圖 3.9：偏移正交-正交相位鍵移訊號的互補累積分佈函數比較

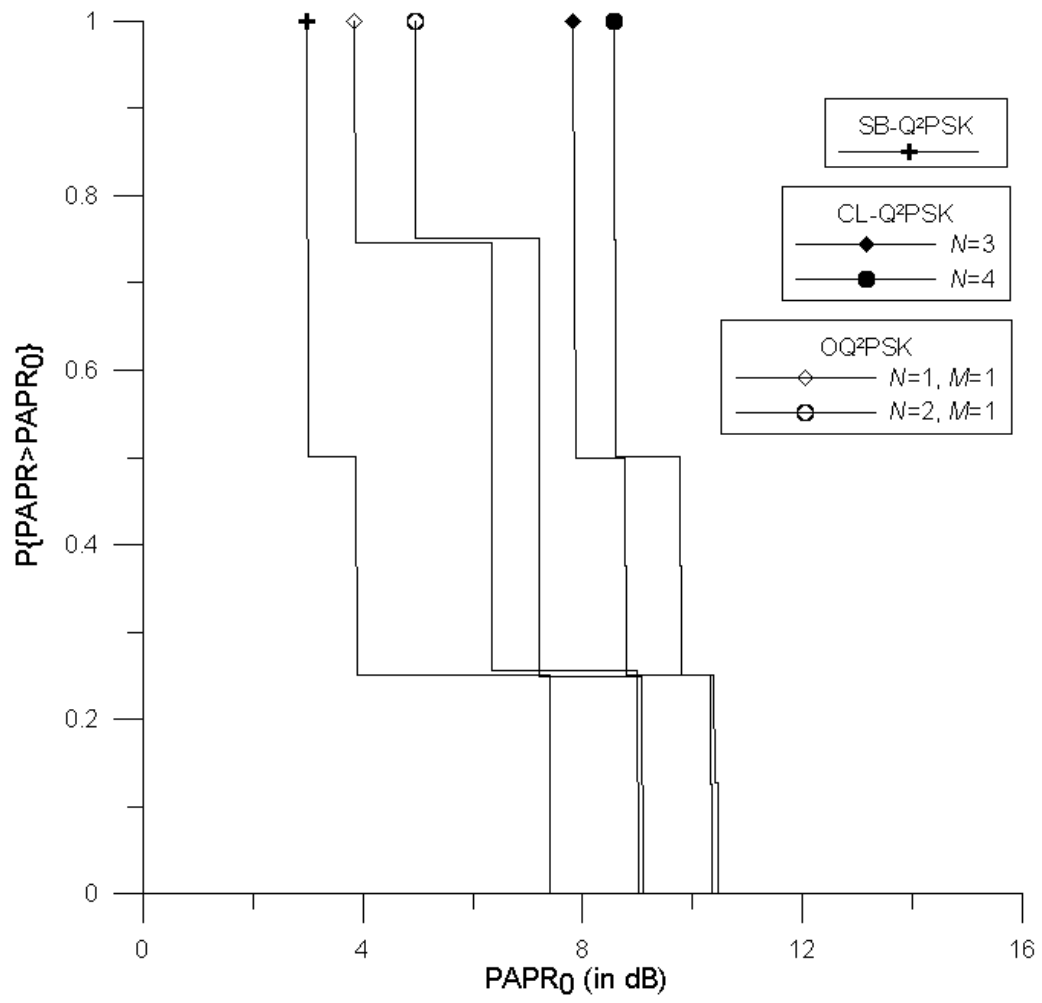


圖 3.10：不同訊號間的互補累積分佈函數比較

第四章 偏移正交-正交相位鍵移調變訊號之效能分析

在介紹完偏移正交-正交相位鍵移（offset quadrature-quadrature phase shift keying, OQ²PSK）訊號的數學模型與頻譜的特性後，我們得知偏移正交-正交相位鍵移訊號是一種高頻譜效率（spectral efficiency）的調變訊號，接著在本章中將探討訊號經過加成性白高斯雜訊（additive white Gaussian noise, AWGN）通道與多重路徑雷力衰減通道（multipath Rayleigh fading channel）下之效能分析，在多重路徑下傳輸，必須考慮到碼際戶擾（inter-symbol interference, ISI）和相互碼際戶擾（cross-symbol interference, CSI）對系統效能的影響，我們將考慮這兩種不同的干擾對系統效能所造成的影響。

第一節 偏移正交-正交相位鍵移調變系統架構與解調

偏移正交-正交相位鍵移調變（offset quadrature-quadrature phase shift keying, OQ²PSK）訊號的等效低通系統架構如圖 4.1 所示，傳送訊號是由兩個相互獨立的偏移四位元相位鍵移（offset QPSK）訊號分別乘上兩個相互正交的資料成形脈波（data shaping pulse）所組合而成，而它的等效低通訊號可以表示成

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[I_{1,2k} h_1(t-kT) - j I_{1,2k+1} h_1\left(t-kT - \frac{T}{2}\right) \right] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[I_{2,2k} h_2(t-kT) - j I_{2,2k+1} h_2\left(t-kT - \frac{T}{2}\right) \right] \quad (4.1)$$

其中 T 為符元時間（symbol time）， $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 為兩個互相正交的資料成形脈波， $\mathbf{I}_1 = \{I_{1,k}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 和 $\mathbf{I}_2 = \{I_{2,k}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 為分別載在 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 上相互獨立的傳送端的資訊序列（information sequence），其中 $I_{1,k}$ ， $I_{2,k} \in \{-1, +1\}$ 。

在加成性白高斯雜訊（additive white Gaussian noise, AWGN）通道下的通道響應 $h(t) = \delta(t)$ ，所以訊號在經過通道後的接收訊號可以表示為

$$r(t) = \sqrt{P}s(t) + n(t) \quad (4.2)$$

其中 P 為訊號的平均功率， $n(t)$ 為複數、期望值等於零且單邊功率頻譜密度（one-sided power spectral density）為 N_0 的白高斯雜訊。

在理想的加成性白高斯雜訊通道下，訊號的實部和虛部不會互相干擾，所以在接收端，我們可以將實部和虛部分開來解調，並且可以用 $\phi_1(t)$ 和 $\phi_2(t)$ 這兩個訊號當成基底來將訊號的實部和虛部展開，這兩個基底分別為

$$\phi_1(t) = h_1(t), \phi_2(t) = h_2(t) \quad (4.3)$$

而 $\phi_1(t)$ 和 $\phi_2(t)$ 會滿足以下特性

$$\int_{-T/2}^{T/2} \phi_m(t) \phi_n(t) dt = \frac{T}{4} \delta_{n,m}, \text{ 其中 } \delta_{n,n} = 1 \text{ 且 } \delta_{n,m} = 0 \text{ 當 } n \neq m \quad (4.4)$$

所以可以將（4.1）式中訊號的實部和虛部分別用（4.3）式這兩個基底來展開可以得到

$$\begin{aligned} s(t) = & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[I_{1,2k} \phi_1(t-kT) - j I_{1,2k+1} \phi_1\left(t-kT-\frac{T}{2}\right) \right] \\ & + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[I_{2,2k} \phi_2(t-kT) - j I_{2,2k+1} \phi_2\left(t-kT-\frac{T}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

根據訊號的特性以及（4.4）式，我們可以來設計接收端，假設在時間和相位上完美同步的情況下，首先接收訊號先經過 $\text{Re}\{\}$ 和 $\text{Im}\{\}$ 將訊號的實部和虛部分開，之後再分別經過相關器（correlator），利用（4.4）式的特性就可以將原本的資訊序列解調回來，完成訊號的解調，如圖 4.1 所示。

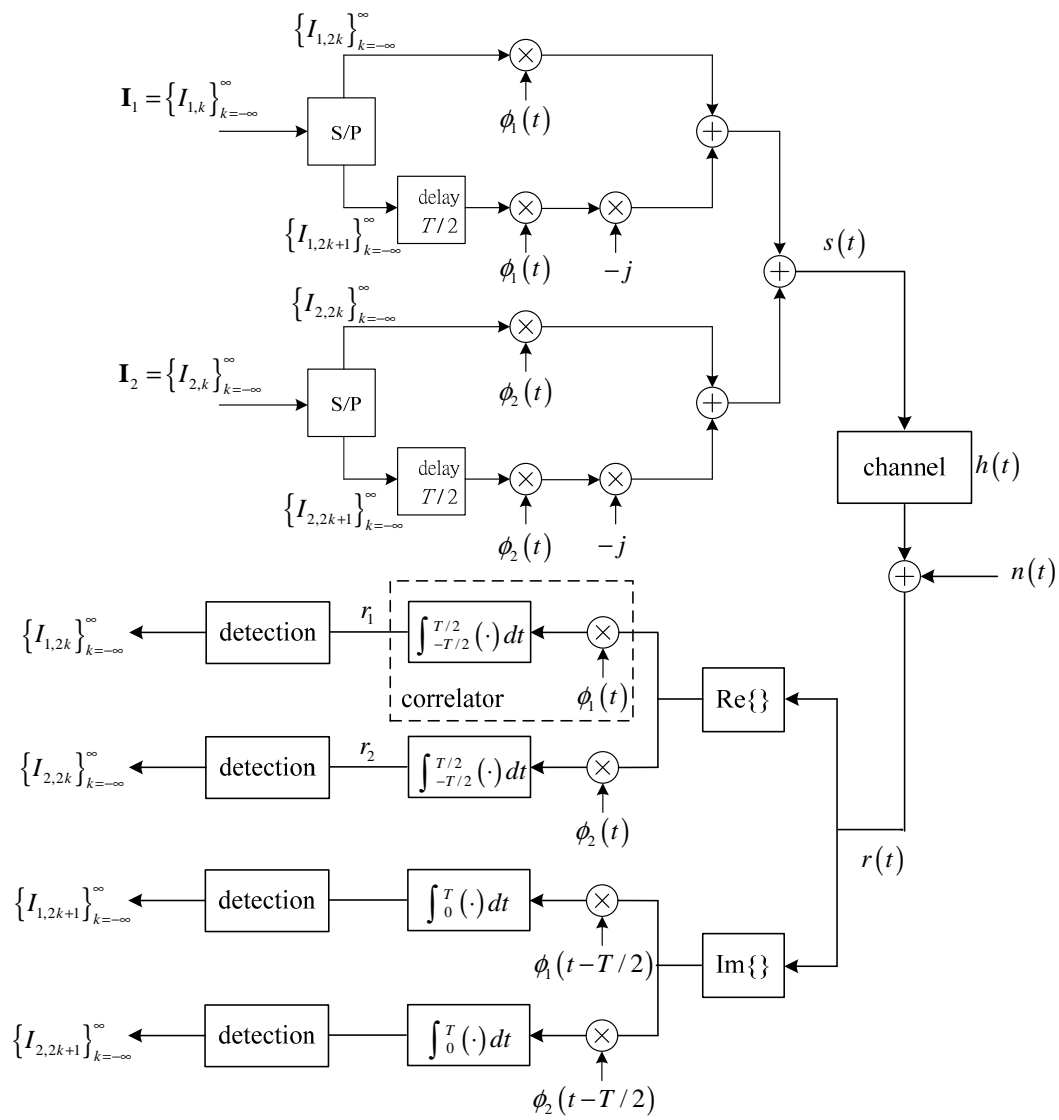


圖 4.1：偏移正交-正交相位鍵移調變訊號的等效低通系統架構圖

第二節 訊號通過加成性白高斯雜訊通道之錯誤率分析

在上一節中我們已討論了如何在接收端對訊號做解調，但受到雜訊影響會造成訊號解調錯誤，在這一節中，我們將去分析偏移正交-正交相位鍵移調變訊號在加成性白高斯雜訊（additive white Gaussian noise, AWGN）通道下的位元錯誤率。

如圖 4.1 所示，因為訊號的實部和虛部有一個一半符元時間（symbol time）的偏移，所以我們將接收訊號的實部和虛部分開解調，在這裡我們僅就訊號的實數部份去分析它的位元錯誤率，假定在第 k 個時間區間時， $I_{i,2k} = -1$ 時為假設（hypothesis） H_1 ，而 $I_{i,2k} = 1$ 時為假設（hypothesis） H_0 ，其中 $i \in \{1, 2\}$ 分別為載在 $h_1(t)$ 與 $h_2(t)$ 上的資訊位元。

為解調出 $I_{i,2k}$ ，接收端在收到訊號 $r(t)$ 後，先經過 $\text{Re}\{\}$ 取出訊號的實數部份，接著經過相關器（correlator）後得到訊號 r_i ，訊號 r_i 可以被表示為

$$r_i = \frac{T\sqrt{P}}{4} I_{i,2k} + \int_{-T/2+kT}^{T/2+kT} \text{Re}\{n(t)\} \phi_i(t) dt \quad (4.6)$$

由（4.6）式可以看成一個二元的訊號受到高斯雜訊影響，而此高斯雜訊的期望值

為零，變異數（variance）為 $\text{var} \left[\int_{-T/2+kT}^{T/2+kT} \text{Re}\{n(t)\} \phi_i(t) dt \right] = \sigma_i^2 = TN_0/8$ ，所以 r_i 也為

一個高斯隨機變數，為達到最低位元錯誤率，我們根據最大可能決定原則（maximum likelihood decision rule），可以得到

$$r_i \begin{matrix} H_0 \\ > \\ < \\ H_1 \end{matrix} 0 \quad (4.8)$$

由（4.8）式，可以推出 $I_{i,2k}$ 的位元錯誤率 P_b 為

$$\begin{aligned}
P_b &= \frac{1}{2} \left[P_r(r_i < 0 | H_0) + P_r(r_i > 0 | H_1) \right] \\
&= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp \left[-\frac{(r_i - T\sqrt{P}/4)^2}{2\sigma_i^2} \right] dr_i \\
&= Q \left(\frac{T\sqrt{P}}{4\sigma_i} \right) = Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

最後我們發現由（4.9）式所推導出的位元錯誤率與傳統的四位元相位鍵移（quadrature phase shift keying, QPSK）調變有一樣的結果，所以不管是 SB-Q²PSK 訊號、CL-Q²PSK 訊號，亦或偏移正交-正交相位鍵移調變訊號在加成性白高斯雜訊通道下的位元錯誤率都與傳統的四位元相位鍵移相同。



第三節 多重路徑雷力衰減通道模型

在這一節中，我們先介紹一下常見的多重路徑衰減通道（multipath fading channel）模型，與在此篇論文中我們所使用的通道模型。

傳統的加成性白高斯雜訊（additive white Gaussian noise, AWGN）只能對應到較為理想的通道模型，也就是整體的傳輸過程只有考慮加入高斯白雜訊的影響，但在現實的狀況之中，如圖 4.2 所示，信號從傳送端發出的時候，會遭遇到建築物或是其他障礙物的屏蔽而造成反射、折射，由於信號的傳送程序具有時間性，經過反射、折射後到達接收端所經過的路徑較長，也因此會對之後時間點到達的信號造成干涉，此一通道效應稱之為多重路徑衰減通道，我們不能忽略這樣的效應對通訊品質造成的衝擊，故現今的無線通訊之通道環境皆採用多重路徑衰減通道來做探討。

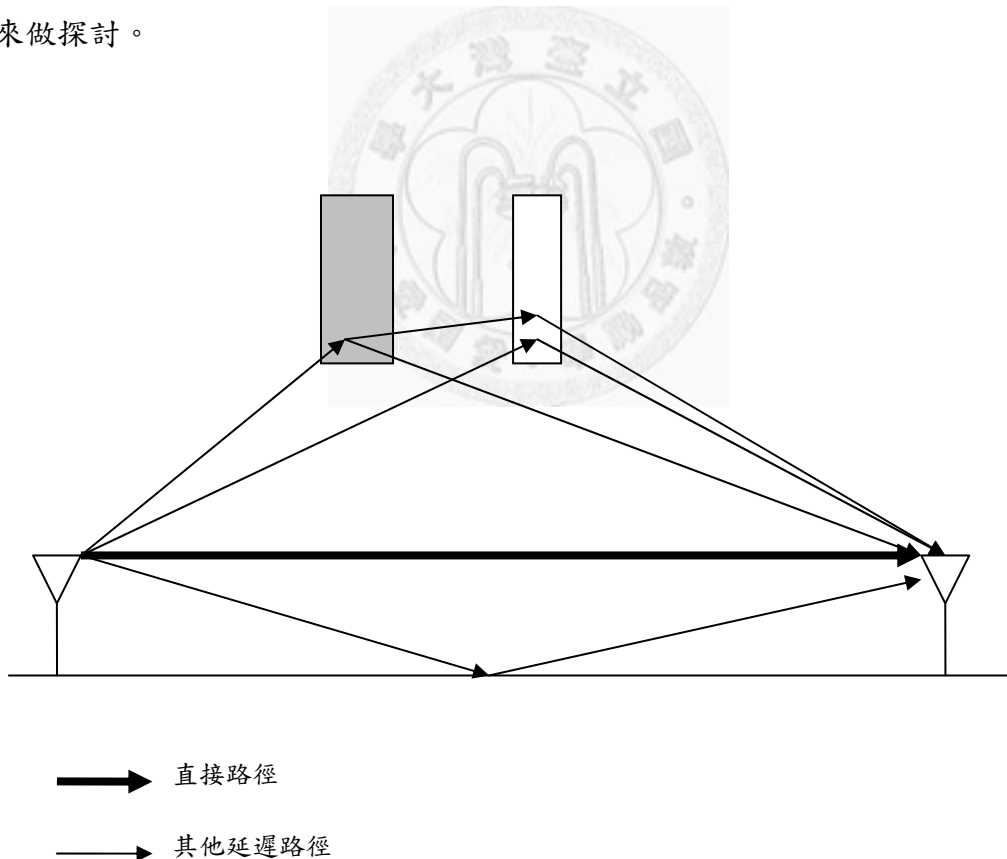


圖 4.2：多重路徑衰減通道示意圖

根據前面的敘述得知，無論是在室內或是室外的環境下，無線訊號在傳輸的過程之中很容易受到週遭的干擾：在室內較短距離的傳輸情況下，牆壁、家俱或各種屋內的擺設物品都會對訊號造成反射、折射的效果；另一方面，系統於室外使用時，在較為長距離的傳輸過程，也很容易有高樓大廈或天然障礙物會造成信號的破壞，如此一來，接收端會同時收到直接路徑與前一個至多個時間點因反射、折射而延遲的傳送信號所合成之相互干擾的合併信號，這增加了之後要解調的困難度，也提高了錯誤率的發生。除了以上的部份，如果在傳輸的過程中，傳送端與接收端有相對運動的話，訊號會在頻率上有所偏移，我們稱之為都卜勒效應（Doppler effect），而且在自然環境的限制之下，訊號本身的強度就會隨著傳遞距離的增加而逐漸減弱，上述的所有因素是我們在設計無線通訊系統時皆必須考慮到的問題，否則會大大地削弱通訊的正確性與完整性。

根據文獻[14]，無線通道大致可分為四個種類，而分類的依據是採用幾個參數來定義，分別是同調時間（Coherence Time, T_c ）、同調頻寬（Coherence Bandwidth, f_c ）、都卜勒延展（Doppler Spread, f_d ）與最大之延遲擴散（Maximum Delay Spread, τ_{\max} ）。同調時間通常定義為：在時域上兩個不同時間相同頻率的訊號要維持一個已經決定的相關係數所允許之時間差；而同調頻寬則定義為：在頻域上兩個不同頻率相同時間的訊號維持在一已決定的相關係數所允許的頻率差，而都卜勒延展與延遲最大之延展則分別與同調時間跟同調頻寬成一倒數關係，亦即：

$$T_c \approx \frac{1}{f_d} \quad (4.10)$$

$$f_c \approx \frac{1}{\tau_{\max}} \quad (4.11)$$

參考圖 4.3，利用上述的參數定義與傳輸訊號之符元時間（Symbol Time, T_s ）還有其頻寬 B_s 的關係，多重路徑衰減通道的四個型態分別為：

1. 快速衰減通道（fast fading channel）：通道在時間上的變化迅速，訊號在一個符元時間中遭受不同的衰減變化，因此稱為快速衰減通道，條件為 $T_s > T_c$ 。
2. 慢速衰減通道（slow fading channel）：相較於快速衰減通道，因為變化較為緩慢，訊號在一個符元時間會遭受相同的衰減效應，故稱之為慢速衰減通

道，條件為 $T_s < T_c$ 。

3. 平坦衰減通道 (flat fading channel)：從頻率的角度來看，傳送的訊號每個成分均遭受相同的衰減或偏移，因此稱為平坦衰減通道，成立的條件為 $B_s < f_c$ 。
4. 頻率選擇性衰減通道 (frequency selective fading channel)：相對於平坦衰減道，訊號的每個頻率成分會遭受到不同的衰減或是偏移，稱之為頻率選擇性衰減通道，條件為 $B_s > f_c$ 。

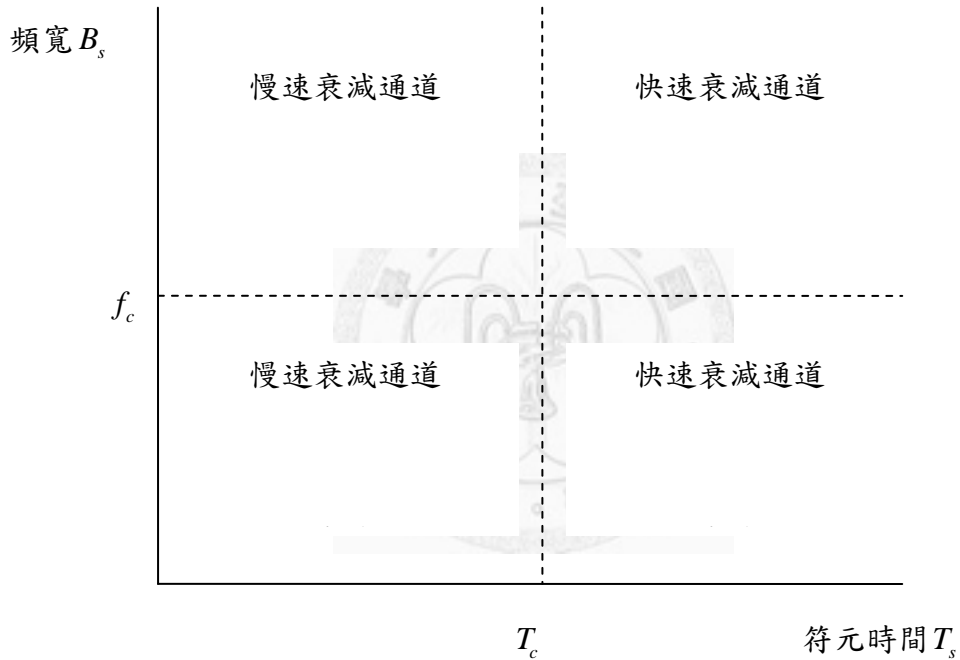


圖 4.3：多重路徑衰減通道的型態示意圖

在此論文中，我們假設通道為慢速衰減通道，也就在一個符元時間 (symbol time) 內，路徑增益固定不變，因此就可以將通道視為是一個非時變的系統 (Time-Invariant System)。此時多重路徑干擾將是影響系統效能的重要因素，因此在此假設下，通道響應 $h(t)$ 可表示成

$$h(t) = \sum_{l=0}^{L-1} h_l \delta(t - d_l) \quad (4.12)$$

其中 L 是多重路徑的數目， h_l 是第 l 條路徑的增益， d_l 是每條路徑的相對延遲時間。我們假設第一條路徑 h_0 的相位可以被完美的估測出來，並假定在不同路徑延遲下的增益大小和相位彼此都為不相關的（uncorrelated），故對不同的散射路徑而言為非相關性散射（uncorrelated scattering），同時我們也將路徑增益的大小作正規化，即 $\sum_{l=0}^{L-1} \sigma_l^2 = 1$ ，其中 $\sigma_l^2 = E\{h_l^2\}$ 。而通道的功率延遲概觀（power delay profile）給定為

$$\sigma_l^2 = \exp(-10d_l) / \sum_{j=0}^{L-1} \exp(-10d_j) \quad (4.13)$$

為了簡化我們的分析，我們假設通道路徑的最大延遲時間為 $0 < d_{L-1} < T/2$ ，則多重路徑所造成的干擾只會跟鄰近的下一個符元有關。在下一節的效能分析中我們假設通道響應 $h(t)$ 中的每一條路徑，其增益 h_l 都為期望值等於零的高斯隨機變數，則此時通道為多重路徑雷力衰減通道（multipath Rayleigh fading channel）。



第四節 訊號通過多重路徑雷力衰減通道下的效能分析

偏移正交-正交相位鍵移（offset quadrature-quadrature phase shift keying, OQ²PSK）訊號在多重路徑雷力衰減通道（multipath Rayleigh fading channel）下，因為不同的路徑經由不同的延遲時間到達，在解調時會受到其他符元時間的訊號干擾，造成系統效能下降。

而正交-正交相位鍵移訊號是由兩個彼此正交的資料成形脈波（data shaping pulse）所構成，我們在第二節中曾經討論過在加成性白高斯雜訊通道下，可以利用此正交的特性，分別將載在這兩個資料成形脈波上的資訊位元分開不會互相干擾，但在多重路徑衰減通道下，這兩個互相正交的資料成形脈波會因為通道的原因造成時間上不同步而產生相互干擾，而這干擾可以分為兩種類型，第一種為碼際戶擾（inter-symbol interference, ISI），為在其他符元時間（symbol time）的同一個資料成形脈波所造成的干擾；而第二種稱為相互碼際戶擾（cross-symbol interference, CSI），為在其他符元時間的不同資料成形脈波所造成的干擾。

因為偏移正交-正交相位鍵移訊號中的兩個資料成形脈波有不同的頻寬，所以由不同的資料成形脈波所送的資訊序列（information sequence）在多重路徑衰減通道下會遭受到不同程度的碼際戶擾與相互碼際戶擾，而造成不同的位元錯誤機率，在論文[11]中，CL-DQ²PSK 訊號在不同的波形階數（pulse order）時會造成系統效能不同，所以我們在這節中將分析偏移正交-正交相位鍵移訊號在不同波形階數的情形下，受到碼際戶擾與相互碼際戶擾影響的效能結果並與 CL-Q²PSK 訊號比較。

系統架構如同圖 4.1 所示，傳送訊號如（4.5）式所示，而為了簡化分析在這裡我們考慮第 $k=0$ 個符元時間，訊號經過通道後接收端收到的訊號 $r(t)$ 在假設第一條路徑 h_0 的相位可以被完美的估測出來的情況下，可以表示成

$$\begin{aligned} r(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{P} s(t-\tau) h(\tau) d\tau + n(t) \\ &= \sqrt{P} s(t) |h_0| + \sqrt{P} \sum_{l=1}^{L-1} s(t-d_l) h_l + n(t) \end{aligned} \quad (4.14)$$

其中 P 為訊號的平均功率， $n(t)$ 為複數、期望值等於零且單邊功率頻譜密度

(one-sided power spectral density) 為 N_0 的白高斯雜訊，並且與通道的路徑增益互相獨立。接著如同前面第二節，因為訊號的實部和虛部有一個一半符元時間的偏移，所以我們將接收訊號的實部和虛部分開解調，在這裡我們僅就訊號的實數部份去分析它的位元錯誤率，訊號經過 $\text{Re}\{\}$ 後再經過相關器 (correlator)，可以表示成

$$\begin{aligned} r_i &= \int_{-T/2}^{T/2} r_{\text{real}}(t) \phi_i(t) dt \\ &= \sqrt{PT} |h_0| \frac{I_{i,0}}{4} + \psi_i + \int_{-T/2+kT}^{T/2+kT} \text{Re}\{n(t)\} \phi_i(t) dt \\ &= s_i + \psi_i + n_i, \quad i \in \{1, 2\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

當 $i=1$ 時表示欲解調 $I_{1,0}$ ，此資訊位元利用資料成形脈波 $h_1(t)$ 傳輸，我們把它稱為 transmission 1，反之當 $i=2$ 時表示欲解調 $I_{2,0}$ ，此資訊位元利用資料成形脈波 $h_2(t)$ 傳輸，我們把它稱為 transmission 2，因為我們假設 $0 < d_{L-1} < T/2$ ，所以 $r_{\text{real}}(t)$ 僅跟 $\Phi = (I_{1,-2}, I_{1,-1}, I_{1,0}, I_{1,1}, I_{2,-2}, I_{2,-1}, I_{2,0}, I_{2,1})$ 有關，且可以表示成

$$\begin{aligned} r_{\text{real}}(t) &= \text{Re}\{s(t)\} \\ &= \sqrt{P} |h_0| [I_{1,0} \phi_1(t) + I_{2,0} \phi_2(t)] + \sqrt{P} \sum_{l=1}^{L-1} \{ [I_{1,-2} \phi_1(t+T-d_l) + I_{1,0} \phi_1(t-d_l) \\ &\quad + I_{2,-2} \phi_2(t+T-d_l) + I_{2,0} \phi_2(t-d_l)] h_{l,\text{real}} + [I_{1,-1} \phi_1(t+T/2-d_l) \\ &\quad + I_{1,1} \phi_1(t-T/2-d_l) + I_{2,-1} \phi_2(t+T/2-d_l) + I_{2,1} \phi_2(t-T/2-d_l)] h_{l,\text{im}} \} \end{aligned} \quad (4.16)$$

其中 $h_{l,\text{real}}$ 與 $h_{l,\text{im}}$ 分別表示路徑增益 h_l 的實數部分和虛數部分。而 ψ_i 為多重路徑所造成的干擾可以表示成

$$\psi_i = \sqrt{P} [\text{ISI}_i + \text{ICI}_i] \quad (4.17)$$

其中 ISI_i 為碼際戶擾、 ICI_i 為相互碼際戶擾分別可以被表示成

若 $i=1$ 則

$$\begin{aligned}
\text{ISI}_1 &= \sqrt{P} \sum_{l=1}^{L-1} \left\{ \left[I_{1,-2} p_{11}(d_l - T) + I_{1,0} p_{11}(d_l) \right] h_{l,real} \right. \\
&\quad \left. + \left[I_{1,-1} p_{11}(d_l - T/2) + I_{1,1} p_{11}(d_l + T/2) \right] h_{l,im} \right\} \\
\text{ICI}_1 &= \sqrt{P} \sum_{l=1}^{L-1} \left\{ \left[I_{2,-2} p_{21}(d_l - T) + I_{2,0} p_{21}(d_l) \right] h_{l,real} \right. \\
&\quad \left. + \left[I_{2,-1} p_{21}(d_l - T/2) + I_{2,1} p_{21}(d_l + T/2) \right] h_{l,im} \right\}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

若 $i = 2$ 則

$$\begin{aligned}
\text{ISI}_2 &= \sqrt{P} \sum_{l=1}^{L-1} \left\{ \left[I_{2,-2} p_{22}(d_l - T) + I_{2,0} p_{22}(d_l) \right] h_{l,real} \right. \\
&\quad \left. + \left[I_{2,-1} p_{22}(d_l - T/2) + I_{2,1} p_{22}(d_l + T/2) \right] h_{l,im} \right\} \\
\text{ICI}_2 &= \sqrt{P} \sum_{l=1}^{L-1} \left\{ \left[I_{1,-2} p_{12}(d_l - T) + I_{1,0} p_{12}(d_l) \right] h_{l,real} \right. \\
&\quad \left. + \left[I_{1,-1} p_{12}(d_l - T/2) + I_{1,1} p_{12}(d_l + T/2) \right] h_{l,im} \right\}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

其中 $p_{ji}(d_l) = \int_{-T/2}^{T/2} \phi_j(t - d_l) \phi_i(t) dt$, $i, j \in \{1, 2\}$ 。由 (4.18) 和 (4.19) 式可以知道

transmission 1 和 transmission 2 分別會受到不同程度的碼際戶擾與相互碼際戶擾，造成不同的效能影響。因為 $h_{l,real}$ 與 $h_{l,im}$ 分別為高斯隨機變數，在此我們將 ψ_i 視為一期望值為零的高斯隨機變數，而且僅跟 $\Phi = (I_{1,-2}, I_{1,-1}, I_{1,0}, I_{1,1}, I_{2,-2}, I_{2,-1}, I_{2,0}, I_{2,1})$ 有關，其中 Φ 總共有 $U = 2^8$ 種不同的情形，為了方便表示每一種不同的 Φ ，我們先定義

$$\mathbf{x}_u = (I_{u,1}, I_{u,2}, I_{u,3}, I_{u,4}, I_{u,5}, I_{u,6}, I_{u,7}, I_{u,8}) \tag{4.20}$$

其中 $I_{u,i} \in \{-1, +1\}$ 且 $u \in \{1, 2, \dots, U\}$ 。所以在給定 $\Phi = \mathbf{x}_u$ 的情況下可以求出 ψ_i 的變異數 (variance) 為

$$\text{Var}[\psi_i | \Phi = \mathbf{x}_u] = PD_u \tag{4.21}$$

其中

$$\begin{aligned}
D_u &= \sum_{l=1}^{L-1} \frac{\sigma_l^2}{2} \left\{ \left[I_{u,1} p_{1i}(d_l - T) + I_{u,3} p_{1i}(d_l) + I_{u,5} p_{2i}(d_l - T) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + I_{u,7} p_{2i}(d_l) \right]^2 + \left[I_{u,2} p_{1i}(d_l - T/2) + I_{u,4} p_{1i}(d_l + T/2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + I_{u,6} p_{2i}(d_l - T/2) + I_{u,8} p_{2i}(d_l + T/2) \right]^2 \right\}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

最後在 (4.15) 式中的 n_i 為一個期望值為零，變異數為 $TN_0/8$ 的高斯隨機變數，所以我們可以得知訊號 r_i 為一個高斯隨機變數，根據最大可能決定原則 (maximum likelihood decision rule) 可以推得

$$r_i \begin{matrix} H_0 \\ > \\ < \\ H_1 \end{matrix} 0 \quad (4.23)$$

利用 (4.23) 式所推導出的決定原則 (decision rule) 我們可以推出偏移正交-正交相位鍵移訊號的位元錯誤率為

$$\begin{aligned} P_b &= \frac{1}{U} \sum_{u=1}^U \int_0^\infty \left[\frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 P_r(\hat{I}_{i,0} \neq I_{i,0} | H_k, \gamma_u, \Phi = \mathbf{x}_u) \right] p(\gamma_u) d\gamma_u \\ &= \frac{1}{U} \sum_{u=1}^U \int_0^\infty Q(\sqrt{2\gamma_u}) p(\gamma_u) d\gamma_u \\ &= \frac{1}{U} \sum_{u=1}^U \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_u}{1 + \bar{\gamma}_u}} \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

其中 $\gamma_u = \frac{|h_0|^2}{1 + 32D_u} \frac{E_b}{N_0}$, $\bar{\gamma}_u = \frac{\sigma_0^2}{1 + 32D_u} \frac{E_b}{N_0}$ 。

偏移正交-正交相位鍵移訊號在多重路徑衰減通道下主要受到 ISI 以及 ICI 也就是碼際戶擾與相互碼際戶擾的影響，所以 (4.24) 式中訊號的位元錯誤率的大小主要受限於 ISI 和 ICI 的功率大小，在 (4.18) 和 (4.19) 式中分別為在 transmission 1 和 transmission 2 時的 ISI 和 ICI，因為 ISI 與 ICI 僅與資料位元 $\Phi = (I_{1,-2}, I_{1,-1}, I_{1,0}, I_{1,1}, I_{2,-2}, I_{2,-1}, I_{2,0}, I_{2,1})$ 有關，且 Φ 中的每一個位元彼此都是獨立的，所以我們可以定義平均干擾 (average interference, AI) 為

$$\begin{aligned} AI_i &= \sum_{l=1}^{L-1} \frac{\sigma_l^2}{2} \left[p_{li}^2(d_l - T) + p_{li}^2(d_l) + p_{2i}^2(d_l - T) + p_{2i}^2(d_l) \right. \\ &\quad \left. + p_{li}^2(d_l - T/2) + p_{li}^2(d_l + T/2) + p_{2i}^2(d_l - T/2) + p_{2i}^2(d_l + T/2) \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

其中 $i \in \{1, 2\}$ 。利用平均干擾我們可以用來作為系統效能好壞的指標，在 transmission i 的情況下， $(AI_i)^{-1}$ 越大，則能達到越低的位元錯誤率。

圖 4.4 為當 $L=2$ 且 $(d_0, d_1)/T = (0, 1/4)$ ，在 transmission 1 時位元錯誤率對不同

E_b/N_0 所得到的結果，其中在圖 4.4 中打叉的點為我們經由模擬後所得到的結果，可以看到模擬結果與分析結果非常接近；相同的在圖 4.5 中為當 $L=2$ 且 $(d_0, d_1)/T=(0, 1/4)$ ，在 transmission 2 時位元錯誤率對不同 E_b/N_0 所得到的結果。其位元錯誤率結果可以對照表 4.1 中我們所定義的平均干擾，可以看出在 transmission 1 的情況下，偏移正交-正交相位鍵移訊號在 $N=3, M=2$ 時 AI 最小，所以有最佳的位元錯誤率，在其他不同的 N 與 M 下也都有符合 AI 越小，錯誤率越低的情況；在 transmission 2 時， $N=3, M=3$ 時 AI 最小，有最佳的位元錯誤率。圖 4.6 為在上述通道下的平均位元錯誤率對不同 E_b/N_0 時所得到的結果，所謂的平均位元錯誤率即對 transmission 1 和 transmission 2 所得到的位元錯誤率取平均。

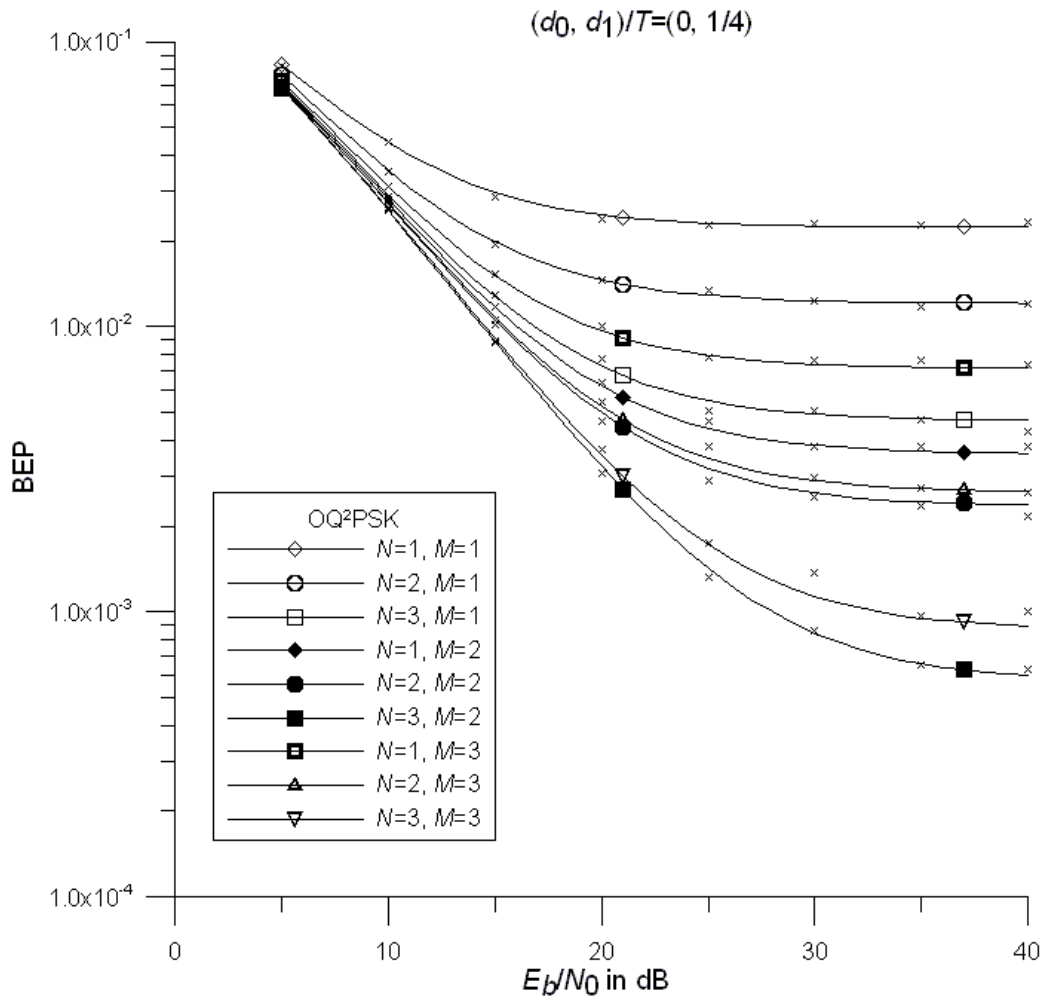


圖 4.4：transmission 1：在 $(d_0, d_1)/T=(0, 1/4)$ 的多重路徑雷力衰減通道下，位元錯誤率對 E_b/N_0

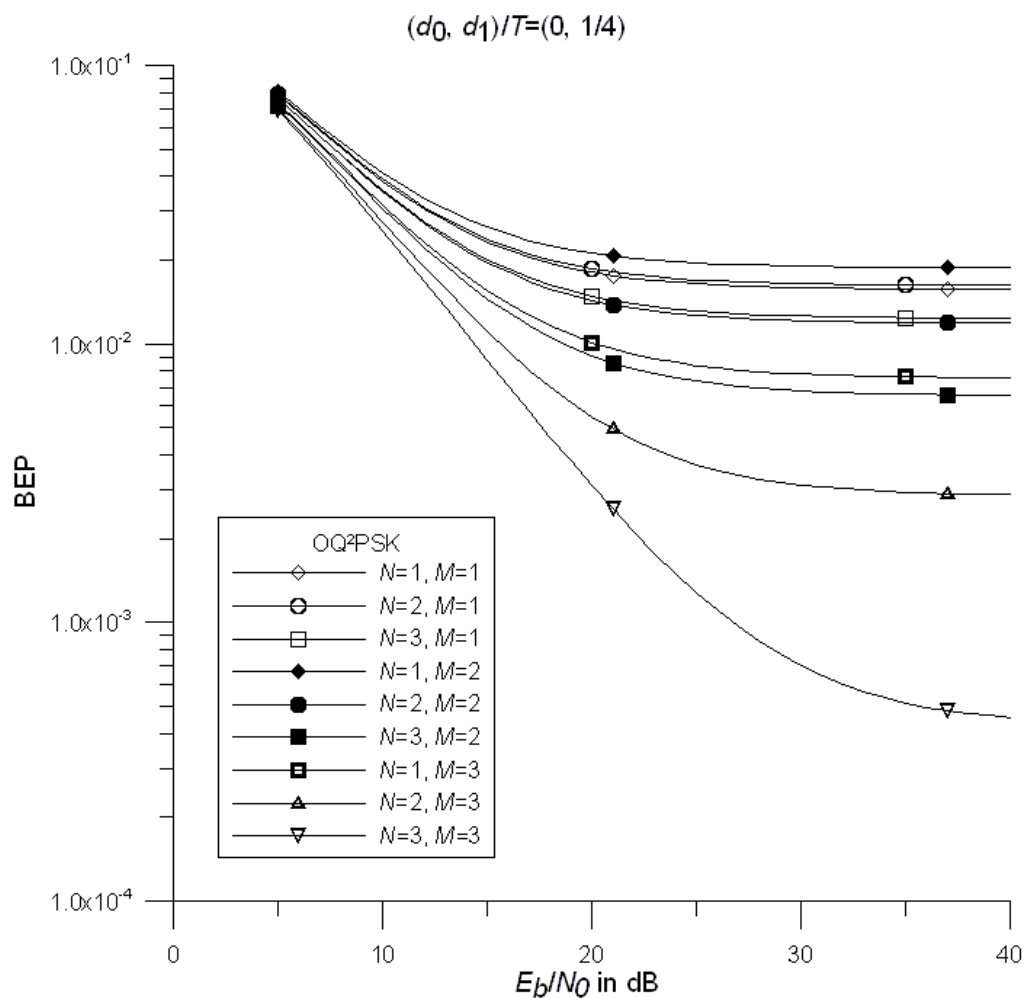


圖 4.5：transmission 2：在 $(d_0, d_1)/T = (0, 1/4)$ 的多重路徑雷力衰減通道下，位元錯誤率對 E_b/N_0

$(\times 10^{-4})$	$N=1,$ $M=1$	$N=2,$ $M=1$	$N=3,$ $M=1$	$N=1,$ $M=2$	$N=2,$ $M=2$	$N=3,$ $M=2$	$N=1,$ $M=3$	$N=2,$ $M=3$	$N=3,$ $M=3$
Transmission 1	29	15	5.51	4.19	2.73	0.66	8.47	3.05	1.00
Transmission 2	19	20	15	24	14	7.72	9.08	3.33	0.5

表 4.1：在 $(d_0, d_1)/T = (0, 1/4)$ 的多重路徑雷力衰減通道下的平均干擾

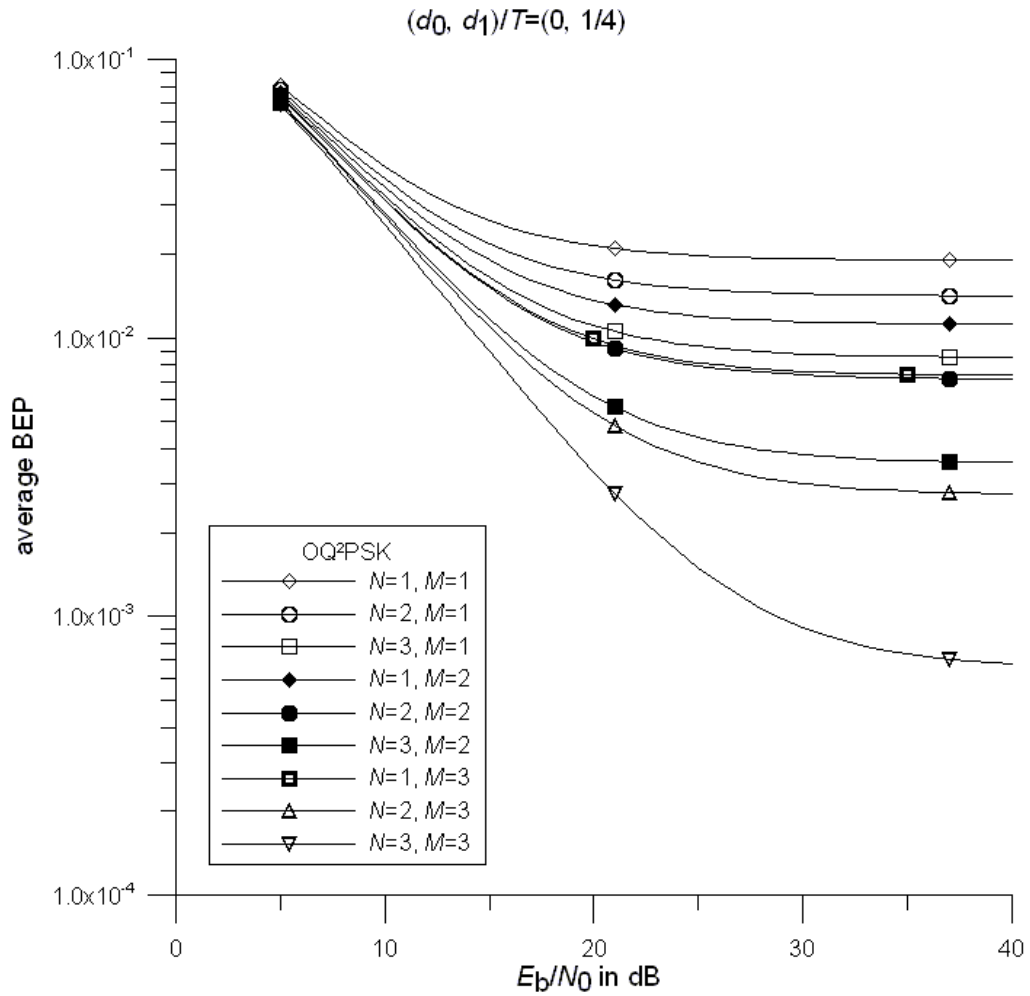


圖 4.6：在 $(d_0, d_1)/T = (0, 1/4)$ 的多重路徑雷力衰減通道下，平均位元錯誤率對 E_b/N_0

接著在圖 4.7 到圖 4.8 分別為 transmission 1、transmission 2 在 $L=3$ 且 $(d_0, d_1, d_2)/T = (0, 1/4, 1/3)$ 的多重路徑雷力衰減通道下的位元錯誤率對 E_b/N_0 的結果，在表 4.2 中為在此通道下的平均干擾，仍然可以看到當 AI 越小則錯誤率越低，而圖 4.9 為平均位元錯誤率，跟圖 4.6 的結果比較起來，因為受到越多延遲路徑的影響，所以整體的系統效能變差。

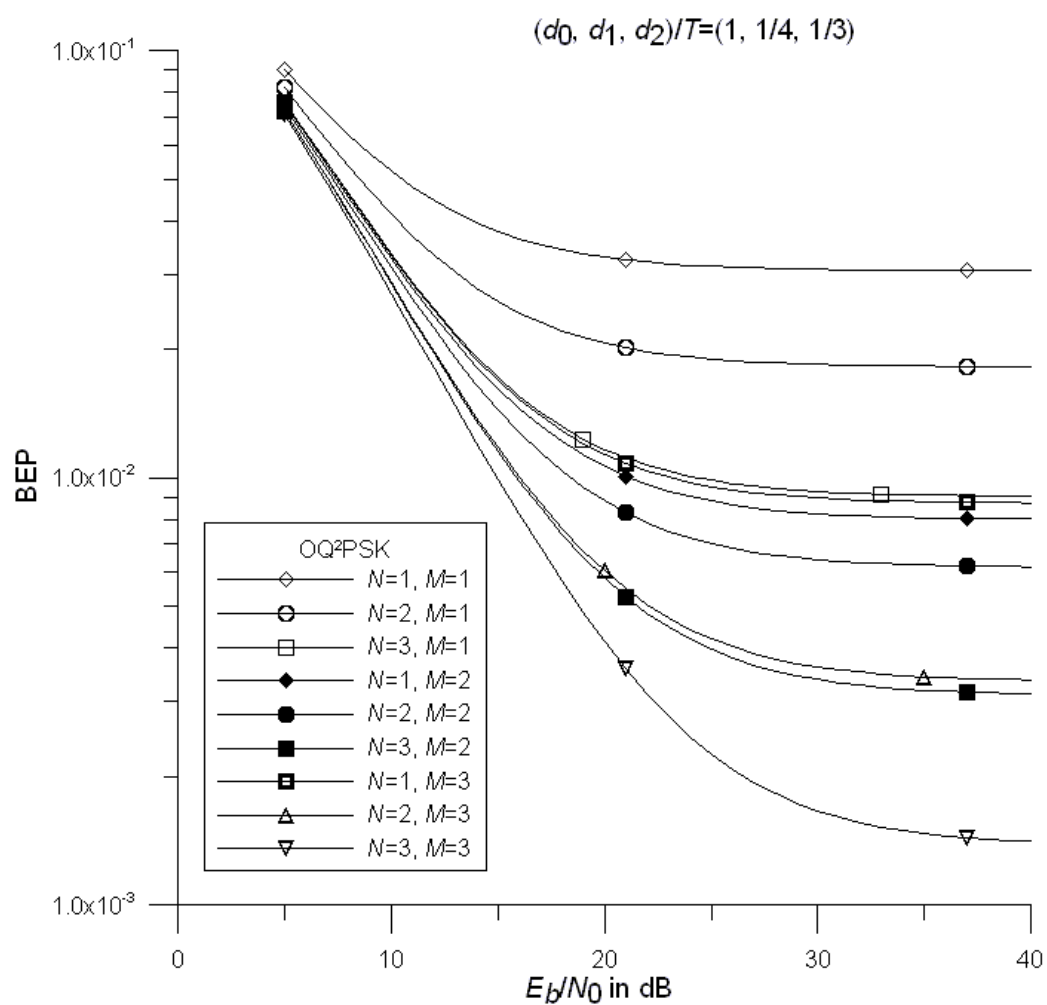


圖 4.7：transmission 1：在 $(d_0, d_1, d_2)/T = (0, 1/4, 1/3)$ 的多重路徑雷力衰減通道下，位元錯誤率對 E_b/N_0

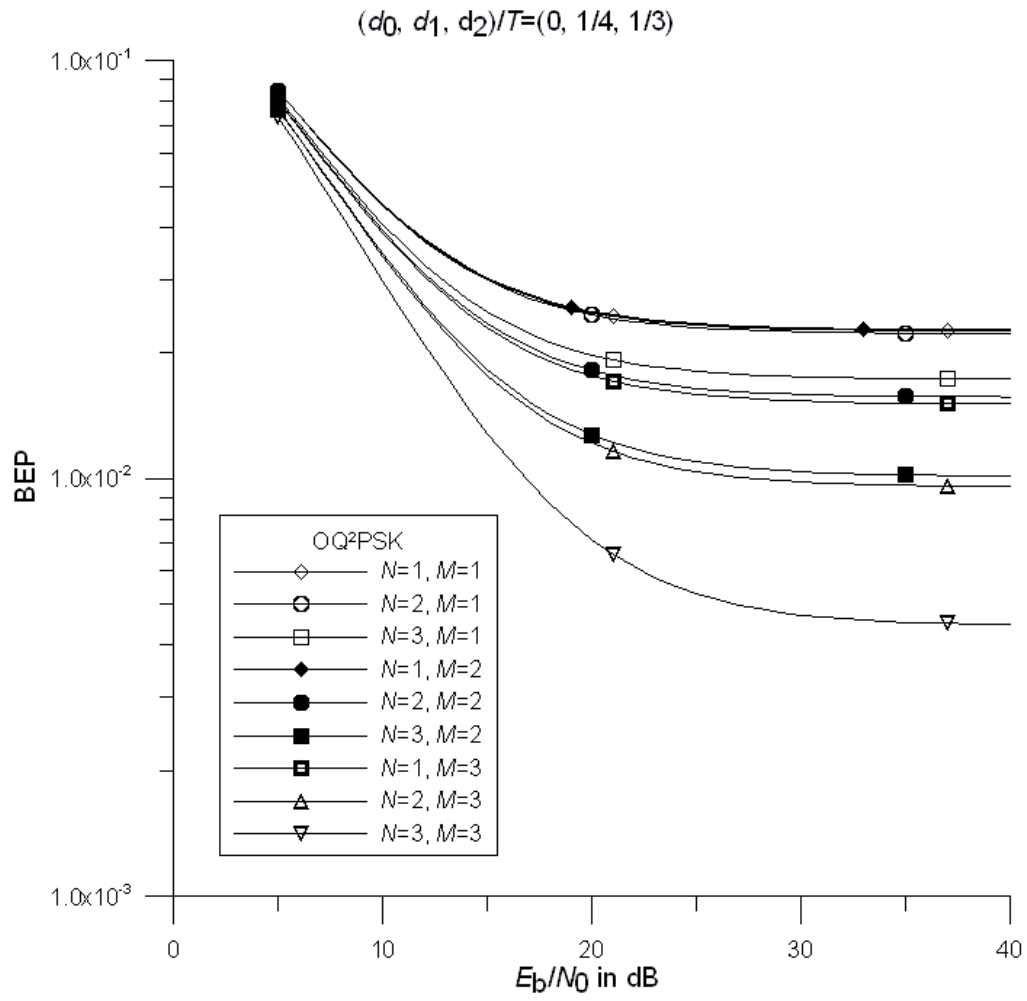


圖 4. 8：transmission 2：在 $(d_0, d_1, d_2)/T = (0, 1/4, 1/3)$ 的多重路徑雷力衰減通道下，位元錯誤率對 E_b/N_0

$(\times 10^{-4})$	$N=1, M=1$	$N=2, M=1$	$N=3, M=1$	$N=1, M=2$	$N=2, M=2$	$N=3, M=2$	$N=1, M=3$	$N=2, M=3$	$N=3, M=3$
Transmission 1	39	22	10.4	9.32	7.09	3.5	10.1	3.76	1.55
Transmission 2	28	27	21	29	19	12	18	11	5.04

表 4. 2：在 $(d_0, d_1, d_2)/T = (0, 1/4, 1/3)$ 的多重路徑雷力衰減通道下的平均干擾

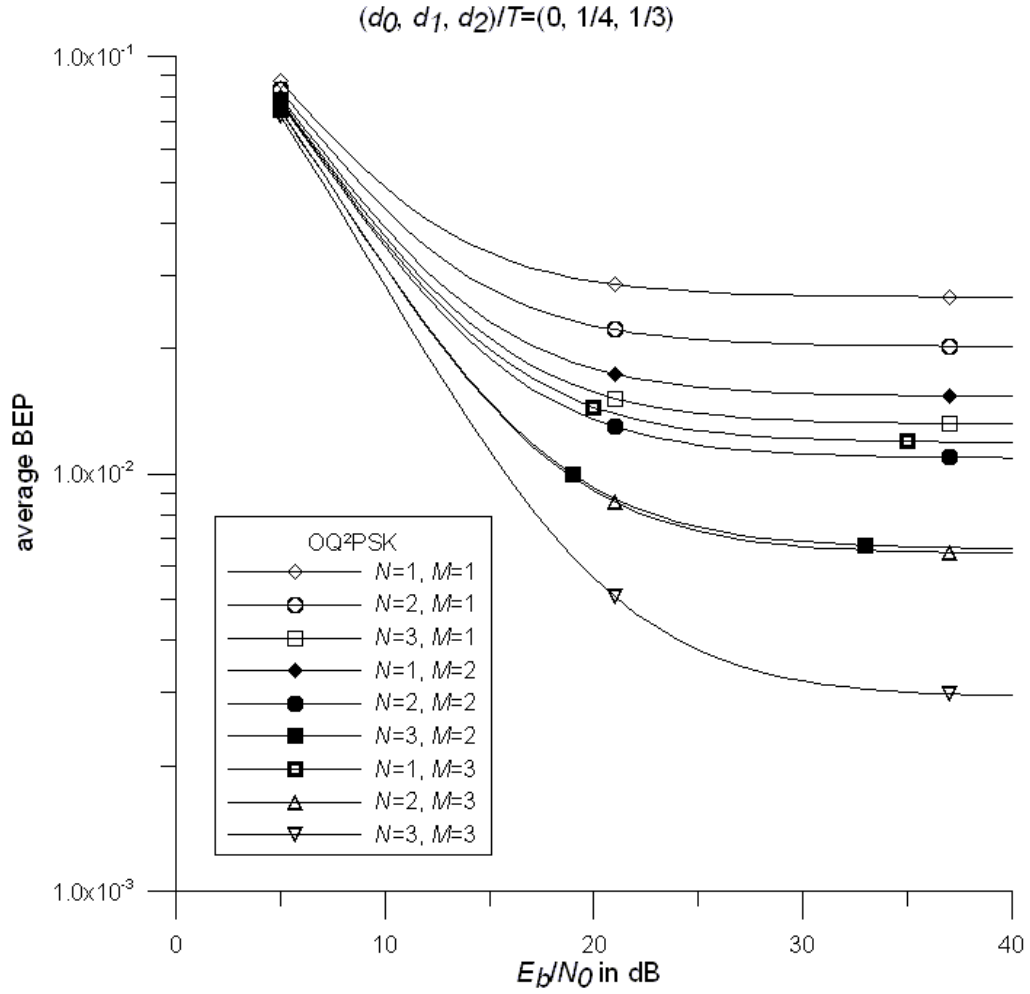


圖 4.9：在 $(d_0, d_1, d_2)/T = (0, 1/4, 1/3)$ 的多重路徑雷力衰減通道下，平均位元錯誤率對 E_b/N_0

接著我們來比較 CL-Q²PSK 訊號與 OQ²PSK 訊號的平均位元錯誤率，在圖 4.10 中為 $(d_0, d_1)/T = (0, 1/4)$ 的多重路徑雷力衰減通道下，CL-Q²PSK 訊號與 OQ²PSK 訊號的平均位元錯誤率對 E_b/N_0 比較圖，圖中在相同的頻譜旁波衰減速度為 f^{-8} 的情況下， $N=3$ 的 CL-Q²PSK 訊號與 $N=1, M=2$ 的 OQ²PSK 訊號有幾乎一樣的平均位元錯誤率；而在頻譜旁波衰減速度都為 f^{-10} 的情況下， $N=2, M=2$ 的 OQ²PSK 訊號可以達到比 $N=4$ 的 CL-Q²PSK 訊號還要低的平均位元錯誤率；同樣在頻譜旁波衰減速度都為 f^{-12} 的情況下， $N=3, M=2$ 的 OQ²PSK 訊號可以達到比 $N=5$ 的 CL-Q²PSK 訊號還要低的平均位元錯誤率。在相同頻譜旁波衰減速度下，偏移正交-正交相位鍵移訊號可以藉由選擇不同的 N, M 來達到比 CL-Q²PSK 訊號要低的平均位元錯誤

率，這時候就要在訊號頻譜效率與錯誤率間，來選擇最合適的 N 與 M 。

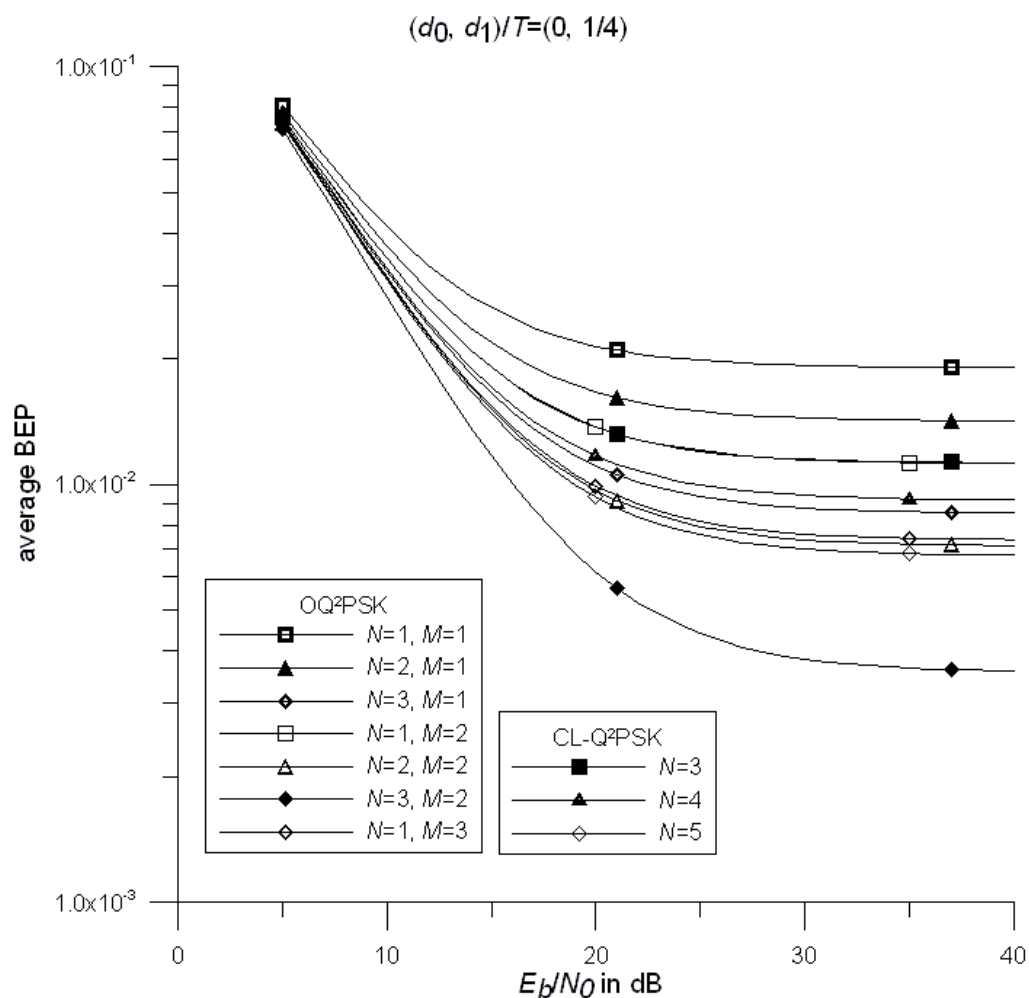


圖 4. 10：在 $(d_0, d_1)/T = (0, 1/4)$ 的多重路徑雷力衰減通道下，CL-Q²PSK 訊號與 OQ²PSK 訊號的平均位元錯誤率對 E_b/N_0 比較

第五章 結論

在本篇論文中，我們提出了一種新的調變方法，偏移正交-正交相位鍵移(offset quadrature-quadrature phase shift keying, OQ²PSK)，藉由設計一組更為平滑(smooth)且正交的資料成形脈波(data shaping pulse)使得訊號頻譜的旁波(sidelobe)在 $f \rightarrow \infty$ 時可以達到 $f^{-2(N+M)-2}$ 以上的衰減速度，且在波形階數(pulse order) M 為奇數時，將會加快旁波的衰減而達到 $f^{-2(N+M)-4}$ 的速度。在和 CL-Q²PSK 相比較時，我們發現偏移正交-正交相位鍵移可以以較小的主波(mainlobe)寬度達到與 CL-Q²PSK 相同的旁波衰減速度，也就是說偏移正交-正交相位鍵移有較高的頻譜效率(spectral efficiency)。在第三章中我們有討論到，在相同的 $N+M$ 且 $N+M < 20$ 的情況下，欲達到最高的頻譜效率，首先要選擇 M 為奇數，且 M 越小時頻譜越密集，頻譜效率越高。經由模擬我們發現藉由讓此訊號中的正交成份(quadrature component)和同相成份(in-phase component)有一個一半符元時間(symbol time)的延遲，則在相同的衰減速度下，偏移正交-正交相位鍵移的峰值對平均功率比(peak-to-average power ratio, PAPR)將會比 CL-Q²PSK 還要小。

在加成性白高斯雜訊(addictive white Gaussian noise, AWGN)通道下，偏移正交-正交相位鍵移的位元錯誤率與傳統的四位元相位鍵移(quadrature-quadrature phase shift keying, Q²PSK)相同。而在多重路徑雷力衰減(multipath Rayleigh fading)通道下，偏移正交-正交相位鍵移的位元錯誤率將隨著波形階數 N 與 M 的不同，而造成不同大小的碼際戶擾(inter-symbol interference, ISI)和相互碼際戶擾(cross-symbol interference, CSI)影響，進而影響效能的好壞，而我們藉由定義平均干擾(average interference, AI)來作為判斷系統效能好壞的指標。最後比較與 CL-Q²PSK 在多重路徑雷力衰減通道下的位元錯誤率時我們發現在相同的頻譜旁波衰減速度下，偏移正交-正交相位鍵移可以藉由選取適當的 N 與 M ，達到較低的位元錯誤率。

在相同的 $N+M$ 下，選擇 $M=1$ ，可以達到最佳的頻譜效率，但在多重路徑雷力衰減通道下，此訊號可能有較高的位元錯誤率，所以必須在頻譜效率與位元錯誤率間有所取捨，選擇最適當的 N 與 M 。

參考文獻

- [1] D. Saha and T. G. Birdsall, "Quadrature-quadrature phase-shift keying," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 37, pp. 437-448, May 1989.
- [2] C. D. Chung and W. L. Lin, "Spectrally efficient full-response Q^2 PSK signals," *IEE Electron. Lett.*, vol. 41, p.p. 1231 – 1233, Oct. 2005.
- [3] S. Feiz and S. S. Soliman, "Maximum-likelihood receiver for four-dimensional signaling schemes corrupted by ISI," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 40, pp. 265–277, Feb. 1992.
- [4] I. Korn and L. Wei, " Q^2 PSK in the satellite mobile channel with ISI and ICI," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. VT-43, pp. 69-78, Feb. 1994.
- [5] M. Visintin, E. Biglieri, and V. Castellani, "Four-dimensional signaling for bandlimited channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 42, pp. 403–409, Feb./Mar./Apr. 1994.
- [6] V. Acha and R.A. Carrasco, "Trellis coded Q^2 PSK signals. Part 1: AWGN and non-linear satellite channels," *IEE Proc. Commun.*, vol. 141, pp. 151–158, Jun. 1994.
- [7] D. Saha, "Channel coding with quadrature-quadrature phase-shift-keying (Q^2 PSK) signal," *IEEE Trans. Commun.*, vol 38, pp. 409–417, Apr. 1999.
- [8] R.D. Gaudenzi and M. Luise, "Synchronization of quadrature-quadrature phase-shift keying signals," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 40, pp. 1532–1539, Sep. 1992.
- [9] S. Fleisher and S. Qu, "Quadrature frequency/phase modulation," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 43, pp. 1513–1524, Feb./Mar./Apr. 1995.
- [10] C. D. Chung, "Coherent and differentially coherent detections of orthogonally

multiplexed orthogonal phase-modulated signals,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 51, pp. 428–440, Mar. 2003.

[11] 陳柏宇, 2006, 《正交-正交相位鍵移調變信號之進階研究》, 國立台灣大學電機資訊學院電信工程學研究所碩士論文。

[12] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, 5th ed. New York: Academic Press, 1994.

[13] T. J. Baker, “Asymptotic behavior of digital FM spectra,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-22, pp. 1585-1594, Oct. 1974.

[14] J. G. Proakis, *Digital Communications*, 4th ed. New York: McGraw-Hill, 2000.



附錄

(A)

證明偏移正交-正交相位鍵移（offset quadrature-quadrature phase shift keying, OQ²PSK）的兩個資料成形脈波（data shaping pulse） $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 仍然滿足相互正交的特性，也就是

$$\int_{-0.5T}^{0.5T} h_1(t) h_2(t) dt = 0 \quad (\text{A.1})$$

證明：

將 $h_1(t) = g(t) p_1(t)$ ， $h_2(t) = g(t) p_2(t)$ 代入（A.1）式中，可得

$$\begin{aligned} & \int_{-0.5T}^{0.5T} [g(t) p_1(t)] [g(t) p_2(t)] dt \\ &= \int_{-0.5T}^{0.5T} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{m_1=0}^M \sum_{n_1=0}^N a_{m_1} C_{n_1}^N \left[\cos\left(\frac{2(m_1+n_1)\pi t}{T}\right) + \cos\left(\frac{2(m_1-n_1)\pi t}{T}\right) \right] \right. \\ & \quad \left. \times \frac{1}{2} \sum_{m_2=0}^M \sum_{n_2=1}^N a_{m_2} C_{n_2}^N \left[\sin\left(\frac{2(m_2+n_2)\pi t}{T}\right) - \sin\left(\frac{2(m_2-n_2)\pi t}{T}\right) \right] \right\} dt \\ &= \frac{1}{8} \sum_{m_1=0}^M \sum_{m_2=0}^M \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=1}^N a_{m_1} a_{m_2} C_{n_1}^N C_{n_2}^N \int_{-0.5T}^{0.5T} \left\{ \sin\left(\frac{2(m_1+n_1+m_2+n_2)\pi t}{T}\right) \right. \\ & \quad - \sin\left(\frac{2(m_1+n_1-m_2-n_2)\pi t}{T}\right) - \sin\left(\frac{2(m_1+n_1+m_2-n_2)\pi t}{T}\right) \\ & \quad + \sin\left(\frac{2(m_1+n_1-m_2+n_2)\pi t}{T}\right) + \sin\left(\frac{2(m_1-n_1+m_2+n_2)\pi t}{T}\right) \\ & \quad - \sin\left(\frac{2(m_1-n_1-m_2-n_2)\pi t}{T}\right) - \sin\left(\frac{2(m_1-n_1+m_2-n_2)\pi t}{T}\right) \\ & \quad \left. + \sin\left(\frac{2(m_1-n_1-m_2+n_2)\pi t}{T}\right) \right\} dt \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

由（A.2）式中的第一項積分可以推得

$$\begin{aligned} & \int_{-0.5T}^{0.5T} \sin\left(\frac{2(m_1+n_1+m_2+n_2)\pi t}{T}\right) dt \\ &= -\cos((m_1+n_1+m_2+n_2)\pi) + \cos((m_1+n_1+m_2+n_2)\pi) \quad (\text{A.3}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

同理可得其他積分項也都為零，所以無論係數 a_m 為何 $\int_{-0.5T}^{0.5T} h_1(t) h_2(t) dt = 0$ 必成立。

(B)

以下我們將證明在論文中所提出的係數 $\underline{\mathbf{a}}$ 能符合旁波快速衰減條件 (fast sidelobe-decaying constraint) 2，且此時的旁波衰減階數 (sidelobe-decaying order) 為 $K = N + M$ ，即須證明

$$\Delta_k(\underline{\mathbf{a}}) = 0 \text{ 當 } k \in \mathbb{Z}_{N+M} \text{ 且 } \Delta_{N+M}(\underline{\mathbf{a}}) \neq 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\text{其中 } \Delta_k(\underline{\mathbf{a}}) = \sum_{m=0}^M a_m \left\{ (-1)^m \left[\sum_{n=0}^N (-1)^n C_n^N \left[(n+m)^k + (n-m)^k \right] \right] \right\}.$$

證明：

我們定義波形階數 (pulse order) 為 M 的脈波 $g(t)$ 中，每個餘弦波前的係數 a_m 所形成的向量 $\underline{\mathbf{a}} = [a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_M]$ 為

$$a_m = C_m^M, m \in \mathbb{Z}_{M+1} \text{ 且 } M \in \mathbb{N} \quad (\text{B.2})$$

將 (B.2) 式代入 (B.1) 中，則此時的 $\Delta_k(\underline{\mathbf{a}})$ 可以表示成

$$\Delta_k(\underline{\mathbf{a}}) = \sum_{m=0}^M C_m^M \left\{ (-1)^m \left[\sum_{n=0}^N (-1)^n C_n^N \left[(n+m)^k + (n-m)^k \right] \right] \right\} \quad (\text{B.3})$$

由前面 (3.18) 式可以知道，無論 $\underline{\mathbf{a}}$ 為何， $\Delta_k(\underline{\mathbf{a}}) = 0$ ，當 $k \in \mathbb{Z}_N$ ，而當 $k \geq N$ 時 $\Delta_k(\underline{\mathbf{a}}) \neq 0$ ，也就是在 (B.3) 式中，我們只需要考慮 $k \in \mathbb{Z}_{N+M} - \mathbb{Z}_N$ 時 $\Delta_k(\underline{\mathbf{a}})$ 是否會等於零，也就是只要證明

$$\Delta_{N+j}(\underline{\mathbf{a}}) = \sum_{m=0}^M C_m^M \left\{ (-1)^m \left[\sum_{n=0}^N (-1)^n C_n^N \left[(n+m)^{N+j} + (n-m)^{N+j} \right] \right] \right\} = 0, j \in \mathbb{Z}_M \quad (\text{B.4})$$

接下來我們再假設下列兩個變數 $\alpha_j(m)$ 及 $\beta_j(m)$ 以方便證明，

$$\begin{aligned} \alpha_j(m) &= (-1)^m \left[\sum_{n=0}^N (-1)^n C_n^N (n+m)^{N+j} \right] \\ \beta_j(m) &= (-1)^m \left[\sum_{n=0}^N (-1)^n C_n^N (n-m)^{N+j} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

由 (B.5) 式，我們可以將 (B.4) 寫成

$$\Delta_{N+j}(\mathbf{a}) = \sum_{m=0}^M C_m^M \left\{ (-1)^m [\alpha_j(m) + \beta_j(m)] \right\} = 0, j \in \mathbb{Z}_M \quad (\text{B.6})$$

而 (B.6) 式欲成立，即下列 (B.7) 和 (B.8) 兩式需同時成立，

$$\sum_{m=0}^M C_m^M \left[(-1)^m \alpha_j(m) \right] = 0, j \in \mathbb{Z}_M \quad (\text{B.7})$$

$$\sum_{m=0}^M C_m^M \left[(-1)^m \beta_j(m) \right] = 0, j \in \mathbb{Z}_M \quad (\text{B.8})$$

首先我們先證明 (B.7) 式，

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^M C_m^M \left[(-1)^m \alpha_j(m) \right] \\ &= \sum_{m=0}^M C_m^M (-1)^m \left[\sum_{n=0}^N (-1)^n C_n^N (n+m)^{N+j} \right] \end{aligned}$$

接著利用二項式定理將 $(n+m)^{N+j}$ 展開可得

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N (-1)^{n+m} C_m^M C_n^N \sum_{l=0}^{N+j} C_l^{N+j} n^l m^{N+j-l} \\ &= \sum_{m=0}^M (-1)^m C_m^M \sum_{l=0}^{N+j} C_l^{N+j} m^{N+j-l} \left[\sum_{n=0}^N (-1)^n C_n^N n^l \right] \end{aligned}$$

接著利用 [12, equation 0.154.3] 中的恒等式，所以 $\sum_{n=0}^N (-1)^n C_n^N n^l = 0, l \in \mathbb{Z}_N$ ，可以得到

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^M (-1)^m C_m^M \sum_{l=N}^{N+j} C_l^{N+j} m^{N+j-l} \left[\sum_{n=0}^N (-1)^n C_n^N n^l \right] \\ &= \sum_{n=0}^N (-1)^n C_n^N \sum_{l=N}^{N+j} n^l C_l^{N+j} \left[\sum_{m=0}^M (-1)^m C_m^M m^{N+j-l} \right] \end{aligned}$$

最後因為 $j \in \mathbb{Z}_M$ ，所以 $0 \leq N+j-l \leq M-1$ ，在一次利用 [12, equation 0.154.3] 中的

恒等式，可得 $\sum_{m=0}^M (-1)^m C_m^M m^{N+j-l} = 0$ ，故 $\sum_{m=0}^M C_m^M \left[(-1)^m \alpha_j(m) \right] = 0, j \in \mathbb{Z}_M$ 得證。同

理 (B.8) 式也可以利用相同的方法證明，所以我們所提出的係數 \mathbf{a} 確實能符合旁波快速衰減條件 2，且旁波衰減階數 $K = N + M$ ，使 $S(f)$ 以 $f^{-2(N+M)-2}$ 的速度衰減。

(C)

證明當波形階數 M 為奇數時，則下列式子會成立

$$\Delta_{N+M}(\mathbf{a}) = \sum_{m=0}^M C_m^M \left\{ (-1)^m [\alpha_M(m) + \beta_M(m)] \right\} = 0 \quad (\text{C.1})$$

其中 $\Delta_k(\mathbf{a}) = \sum_{m=0}^M C_m^M \left\{ (-1)^m \left[\sum_{n=0}^N (-1)^n C_n^N [(n+m)^k + (n-m)^k] \right] \right\}$ ，且

$$\alpha_M(m) = (-1)^m \left[\sum_{n=0}^N (-1)^n C_n^N (n+m)^{N+M} \right]$$

$$\beta_M(m) = (-1)^m \left[\sum_{n=0}^N (-1)^n C_n^N (n-m)^{N+M} \right]$$

證明：

首先利用二項式定理將 $\beta_M(m)$ 中的 $(n-m)^{N+M}$ 展開

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^M C_m^M (-1)^m \beta_M(m) &= \sum_{m=0}^M C_m^M (-1)^m \sum_{n=0}^N (-1)^n C_n^N \sum_{j=0}^{N+M} C_j^{N+M} n^j m^{N+M-j} (-1)^{N+M-j} \\ &= \sum_{m=0}^M (-1)^m C_m^M \sum_{j=0}^{N+M} (-1)^{N+M-j} C_j^{N+M} m^{N+M-j} \left[\sum_{n=0}^N (-1)^n C_n^N n^j \right] \end{aligned}$$

接著利用[12, equation 0.154.3]中的恒等式， $\sum_{n=0}^N (-1)^n C_n^N n^j = 0$ 當 $j \in \mathbb{Z}_N$ ，可以得到

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^M (-1)^m C_m^M \sum_{j=N}^{N+M} (-1)^{N+M-j} C_j^{N+M} m^{N+M-j} \left[\sum_{n=0}^N (-1)^n C_n^N n^j \right] \\ &= \sum_{n=0}^N (-1)^n C_n^N \sum_{j=N}^{N+M} (-1)^{N+M-j} n^j C_j^{N+M} \left[\sum_{m=0}^M (-1)^m C_m^M m^{N+M-j} \right] \end{aligned}$$

最後，因為 $0 \leq N+M-j \leq N+M$ ，在一次利用[12, equation 0.154.3]中的恒等式，

可以推得

$$\sum_{m=0}^M C_m^M (-1)^m \beta_M(m) = (-1)^M \sum_{n=0}^N (-1)^n C_n^N n^N C_N^{N+M} \left[\sum_{m=0}^M (-1)^m C_m^M m^M \right] \quad (\text{C.2})$$

同理，我們可以得到

$$\sum_{m=0}^M C_m^M (-1)^m \alpha_M(m) = \sum_{n=0}^N (-1)^n \binom{N}{n} n^N \binom{N+M}{N} \left[\sum_{m=0}^M (-1)^m \binom{M}{m} m^M \right] \quad (\text{C.3})$$

從 (C.2) 式和 (C.3) 式，我們可以得到

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^M C_m^M (-1)^m \alpha_M(m) = \sum_{m=0}^M C_m^M (-1)^m \beta_M(m), & \text{如果 } M \text{ 為偶數} \\ \sum_{m=0}^M C_m^M (-1)^m \alpha_M(m) = -\sum_{m=0}^M C_m^M (-1)^m \beta_M(m), & \text{如果 } M \text{ 為奇數} \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

由 (C.4) 式可得到，當 M 為奇數時，將使得 (C.1) 式確實會成立。

