

國立臺灣大學工學院機械工程學研究所

碩士論文

Graduate Institute of Mechanical Engineering

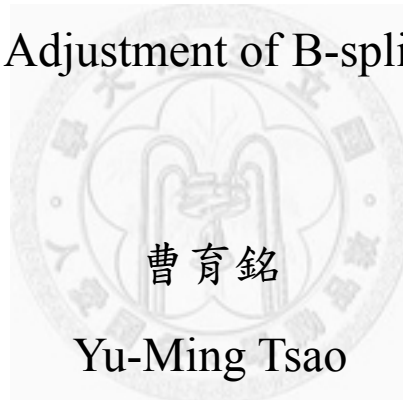
College of Engineering

National Taiwan University

Master thesis

B-spline 曲面搭接連續性調整

Continuity Adjustment of B-spline Surfaces



曹育銘

Yu-Ming Tsao

指導教授：尤春風 博士

Advisor: Chun-Fong You, Ph.D.

中華民國 99 年 7 月

July, 2010

誌謝

感謝尤春風教授兩年多的引領指導，讓學生在碩班期間確立研究學習方向，並朝該方向努力發展，真正的學習到如何發現問題、面對問題並解決問題，這應該也是個人在碩班期間，於學術學習上最大的收穫。另外，於程式撰寫、專業知識認知上，尤教授亦提供相當大的助益，讓個人得以順利完成這一份碩論研究。此外，並感謝口試委員莊勝雄教授與陳俊銘教授，對於本論文及研究的意見與指正。

感謝易龍學長於碩班兩年，在個人專業領域的協助與指引以及生活中的諸多照顧；感謝振揚、孜佑、正富學長以及亦蓮學姊於研究及生活中的照應；感謝同屆的昆育、友瑜、康豪，在課業、研究上的相互討論，協力前進；也感謝大堃、建成、順原、孟貞、又璇、淑婷學弟妹，在個人論文撰寫期間的同行與打氣。

最後感謝父母、哥哥、姊姊以及兩位弟弟，在個人求學生涯中的陪同參與與支持，讓自己不管走到哪，都有一個「家庭」為後盾，支柱著自己的前行，於精神上、生活上都提供了最大的依歸。

B-spline 曲面搭接連續性調整

摘要

隨著工業發展自動化、效率化之追求，電腦輔助設計已於工業界占據重要地位。因應產品之仿製作業需求，於電腦輔助設計中更衍生逆向工程作業項。由產品外形的點資料掃描，經過一連串分割、鋪面、曲面調整等演算，於電腦中重建產品 CAD 模型，進一步遞送分析及製程規劃。

本研究著力於逆向工程領域中的曲面連續性調整作業。針對鋪面輸出之曲面搭接間隙，進行修正調整，求取曲面與曲面的銜接平順性。研究探討上，以 B-spline 參數曲面為調整目標，藉由對 B-spline 曲面基底資訊探討，並引入數值方法，對曲面搭接連續性進行最佳化調整作業，目標於最終輸出符合 G^1 、 G^2 連續性之曲面資料。

關鍵字：逆向工程、連續性、B-spline 曲面、數值方法、最佳化連續性調整、 G^1 連續、 G^2 連續。

Continuity Adjustment of B-spline Surface

Yu-Ming Tsao

Abstract

With the pursuit of automatic and efficiently industrial development, computer aided design has been played an important role in the industry. In response to the requirements of the work of imitation, reverse engineering is generated. Measuring the shape of products and a series of calculation including segmentation, surface reconstruction and surface adjustment are the steps of the reverse engineering process. Finally, we can reconstruct and analyze the CAD model of products and plan the product's manufacture procedure.

This research focus on continuity adjustment of surfaces in reverse engineering. In order to reach the smoothness of adjacent surfaces, the output of surface reconstruction has been adjusted and modified. This research implements the optimal continuity adjustment of surfaces by using the numerical methods and discussing the basic information of B-spline surfaces which are the main adjust target of the research. The final goal is to export surfaces, that fit G^1 and G^2 continuity.

Keywords: reverse engineering; continuity; B-spline surface;
numerical methods; Optimal continuity adjustment;
 G^1 continuity; G^2 continuity.

目錄

誌謝	i
摘要	ii
Abstract.....	iii
目錄	iv
圖目錄	vii
表目錄	x
第一章 導論	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究動機	4
1.3 文獻回顧	6
1.3.1 NURBS 基礎資料	6
1.3.2 曲面搭接連續性資料	8
1.3.3 最佳化調整資料	9
1.4 研究內容	10
1.5 論文架構	12
第二章 B-spline 曲面搭接邊界連續條件	13
2.1 B-spline 曲面數學模型	13
2.2 位置連續(G^0 continuity)	18
2.3 切平面連續(G^1 continuity)	20
2.4 曲率連續(G^2 continuity)	25
第三章 數值方法	31
3.1 數值方法介紹	32
3.1.1 牛頓法(Newton method).....	33
3.1.2 最速下降法(steepest descent method).....	35
3.1.3 粒子群優化(particle swarm optimization, PSO)演算法	38
3.2 數值方法於曲面搭接連續性調整之銜接應用	40

3.3 案例探討曲面搭接連續性調整	42
3.3.1 雙曲面搭接	43
3.3.2 等同邊界參數四曲面田字形搭接	46
第四章 曲面搭接連續性調整實作	49
4.1 曲面資料	49
4.1.1 曲面資料建構-雙曲面搭接案例	50
4.1.2 曲面資料建構-四曲面搭接案例	53
4.1.3 曲面資料應用-調控指令接收	54
4.1.4 曲面資料應用-誤差資訊擷取	55
4.2 調整實作前處理	60
4.3 調整實作	62
4.3.1 雙曲面搭接調整	63
4.3.2 四曲面田字形搭接調整	65
4.3.3 序列曲面搭接調整	67
第五章 實例驗證與討論	69
5.1 數值方法實作討論	69
5.2 搭接連續性調整驗證	74
5.2.1 序列曲面搭接	75
5.2.2 四曲面田字形搭接	79
5.2.3 剪切曲面搭接	83
5.3 結果討論	86
5.3.1 實作成果討論	86
5.3.2 目標函數選用探討	88
第六章 結論與未來展望	90
6.1 研究成果與結論	90
6.2 未來展望	92
參考文獻	94
附錄 A 數學化描述 B-spline 曲面搭接連續關係式	97
A.1 G^1 連續關係式	98
A.2 G^2 連續關係式	99

附錄 B 曲面搭接連續性調整實作之參數銜接程序	103
B.1 解析求解	107
B.2 數值求解	109
作者簡歷	110



圖目錄

圖 1.1 逆向工程作業流程	2
圖 1.2 汽車鈹件模具業之鈹件生產流程	3
圖 1.3 批次處理鋪面、連續性調整作業流程	5
圖 2.1 單一補綴資料	14
圖 2.2 控制點調整單一造型曲面示意	14
圖 2.3 曲面搭接邊界關係示意	15
圖 2.4 雙曲面搭接關係示意	16
圖 2.5 雙曲面搭接邊界曲率誤差示意	17
圖 2.6 G^0 誤差示意	18
圖 2.7 位置連續與邊界控制點關係示意圖	19
圖 2.8 切平面示意圖	21
圖 2.9 雙曲面搭接 G^1 連續關係示意	21
圖 2.10 曲面搭接邊界微分項示意	23
圖 2.11 等同邊界參數搭接關係 G^1 連續相關控制點	23
圖 2.12 控制點共線調整切平面連續	24
圖 2.13 非等同邊界參數搭接曲面	25
圖 2.14 曲率基底示意	25
圖 2.15 等同邊界參數搭接關係 G^2 連續相關控制點	28
圖 3.1 數值求解流程	31
圖 3.2 數學函數呈現數值求解流程	32
圖 3.3 牛頓法求取方程式解步進示意	33
圖 3.4 牛頓法演算流程	34
圖 3.5 數值調整 G^1 連續目標函數項、變數項設定示意	35
圖 3.6 最速下降法搜尋極值示意	36
圖 3.7 最速下降法演算流程圖	37
圖 3.8 二維空間 PSO 演算粒子步進示意圖	38
圖 3.9 粒子演算法流程圖	39
圖 3.10 曲面資料存取架構	41

圖 3.11 曲面資料於數值演算過程中傳遞示意	42
圖 3.12 雙案例曲面搭接關係	42
圖 3.13 雙曲面搭接關係	43
圖 3.14 剪切曲面搭接邊界連續性調整-調整曲面選擇	44
圖 3.15 雙曲面搭接連續性調整項次示意	45
圖 3.16 各級連續性調變順序	46
圖 3.17 等同邊界參數四曲面田字形搭接	46
圖 3.18 田字形搭接連續性調整示意	47
圖 4.1 曲面連續性調整步驟	49
圖 4.2 曲面資料探討架構	50
圖 4.3 雙曲面搭接曲面資料建構流程	50
圖 4.4 調整曲面邊界示意	51
圖 4.5 搭接邊界分例探討	52
圖 4.6 四曲面田字形搭接曲面資料建構流程	53
圖 4.7 衝突點判別圖示	54
圖 4.8 曲面搭接誤差顯示與邊線細切密度關係	56
圖 4.9 雙曲面邊界點標定示意	56
圖 4.10 雙曲面搭接邊界資料對應示意	57
圖 4.11 剪切邊界前處理示意	60
圖 4.12 零散邊線前處理示意	61
圖 4.13 曲面搭接連續性調整實作分例	62
圖 4.14 雙曲面搭接連續性調整實作對話框	63
圖 4.15 雙曲面搭接連續性調整實作	64
圖 4.16 四曲面田字形搭接連續性調整實作對話框	65
圖 4.17 四曲面田字形搭接連續性調整實作	66
圖 4.18 序列曲面搭接連續性調整實作對話框	67
圖 4.19 序列曲面搭接連續性調整實作	68
圖 5.1 數值方法評比測試案例	70
圖 5.2 調整驗證曲面資料	74
圖 5.3 實例驗證呈現架構	74

圖 5.4 序列曲面搭接調整輸入資料	75
圖 5.5 CATIA 呈現序列曲面調整前 G^1 連續誤差	75
圖 5.6 CATIA 呈現序列曲面調整前 G^2 連續誤差	76
圖 5.7 CATIA 呈現序列曲面調整後 G^1 連續誤差	76
圖 5.8 CATIA 呈現序列曲面調整後 G^2 連續誤差	76
圖 5.9 Imageware 邊界連續性誤差資訊檢測對話框	77
圖 5.10 Imageware 呈現序列曲面搭接連續性調整前後資料點誤差	78
圖 5.11 四曲面調整輸入資料	79
圖 5.12 CATIA 呈現四曲面調整前 G^1 連續誤差	79
圖 5.13 CATIA 呈現四曲面調整前 G^2 連續誤差	80
圖 5.14 CATIA 呈現四曲面調整後 G^1 連續誤差	80
圖 5.15 CATIA 呈現四曲面調整後 G^2 連續誤差	81
圖 5.16 Imageware 呈現四曲面連續性調整前後資料點誤差	81
圖 5.17 剪切曲面調整輸入資料	83
圖 5.18 CATIA 呈現剪切曲面調整前 G^1 連續誤差	83
圖 5.19 CATIA 呈現剪切曲面調整前 G^2 連續誤差	83
圖 5.20 CATIA 呈現剪切曲面調整後 G^1 連續誤差	84
圖 5.21 CATIA 呈現剪切曲面調整後 G^2 連續誤差	84
圖 5.22 Imageware 呈現剪切曲面搭接連續性調整前後資料點誤差	85
圖 A.1 剪切曲面搭接控制點分佈關係	97
圖 A.2 剪切曲面搭接邊界點參數示意	97
圖 A.3 曲面搭接邊界微分向量合成示意	98
圖 B.1 控制點分佈示意	103
圖 B.2 曲面參數方向、一階微分項示意	103
圖 B.3 調整控制點判別	107

表目錄

表 1.1 開發平台	11
表 2.1 各級搭接邊界連續條件統整表格	30
表 3.1 田字形搭接各步驟調整曲面規劃	48
表 4.1 調整曲面於相異搭接邊之分例討論	52
表 4.2 變數資料傳遞陣列規劃	55
表 5.1 測試案例一-原始資料	71
表 5.2 測試案例一-連續性調整結果比較	71
表 5.3 測試案例二-原始資料	72
表 5.4 測試案例二-連續性調整結果比較	72
表 5.5 序列曲面調整前後誤差呈現	78
表 5.6 四曲面調整前後結果呈現	82
表 5.7 剪切曲面調整前後結果呈現	85



第一章 導論

1.1 研究背景

逆向工程之應用，常見於復刻版或各式副廠用品之製作上，小如球鞋，大至車輛鈑件皆可見逆向工程之實作應用。於實務上，逆向工程之仿製作業，大多無法取得產品的原始設計圖，而是經由委託廠提供模型或原廠零件的購買，取得仿製目標模型。

早期的仿製作業，利用立體雕刻機，依靠磨銑床作業製作一比一等比例模具，再進行產品量產。此作法為類比式作業，並無法進行尺寸變更等相關設計變更作業，且於模具設計上仰賴傳統工業技藝，全賴作業經驗評估設計良劣。現今新式的作業流程，企圖以數位化之作業取代傳統經驗法則之操作，利用非接觸式光學掃描量測系統 (advanced topometric sensor, ATOS) 進行模型外形資訊量測，取得模型外形之點群資料。該數位資料經過處理，產生 CAD 曲面資料，並向下傳遞，藉由 CAE 分析規劃，利用較科學的方式評估、設計模具。

概略的逆向工程流程如下列，並於圖 1.1 以流程圖方式呈現：

- (1) 取得樣品模型。
- (2) 3D 輪廓掃描得到模型輪廓點資料。
- (3) 點資料經處理鋪設得曲面資料。
- (4) 曲面修飾、檢測至符合原始模型輪廓資訊。
- (5) 模具設計製作。
- (6) 產品生產。

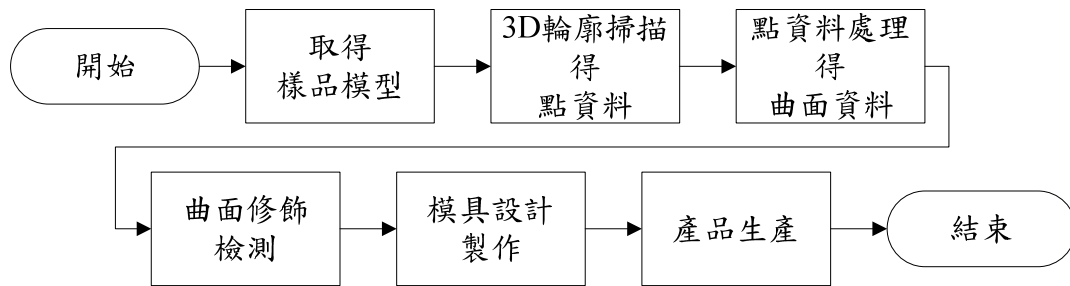


圖 1.1 逆向工程作業流程

根據經濟部工業局及相關工業雜誌資料[26]，2005 年台灣汽車零組件產值為新台幣 2,198.4 億元，而鈑件結構市場產值即占約新台幣 576 億元，且台灣汽車零件外銷市場中，屬碰撞維修零件部分已於國際市場占有一席之地。台灣廠商藉由於模具開發上的技術優勢，於車輛售後維修(after market, AM)碰撞市場在全球的市占率將近八成。

逆向作業鈑件生產過程中，最大的競爭力就在於如何能以最快的速度投入市場，供給零件至車輛的 AM 市場。而台灣業者於製造生產的時程掌握上有較佳的控制能力，該部分的時程精簡較難著墨，因此於前端設計規劃時程的精簡、縮短乃成為重要課題。

汽車鈑件模具業之鈑件生產流程如下，並於圖 1.2 以流程圖呈現：

- (1) 購買原廠(original equipment manufacturer, OEM)汽車鈑件。
- (2) 挑選品質佳之鈑件進行輪廓資料掃描。
- (3) 由掃描輪廓點資料鋪設為曲面資料，並進行曲面搭接、誤差調整至通過誤差檢測。
- (4) 進行模具設計之工法流程規劃。
- (5) 依各工法對應曲面資料建構模面，並進行 CAE 分析。
- (6) 製作模具。
- (7) 生產線之鈑件量產作業。

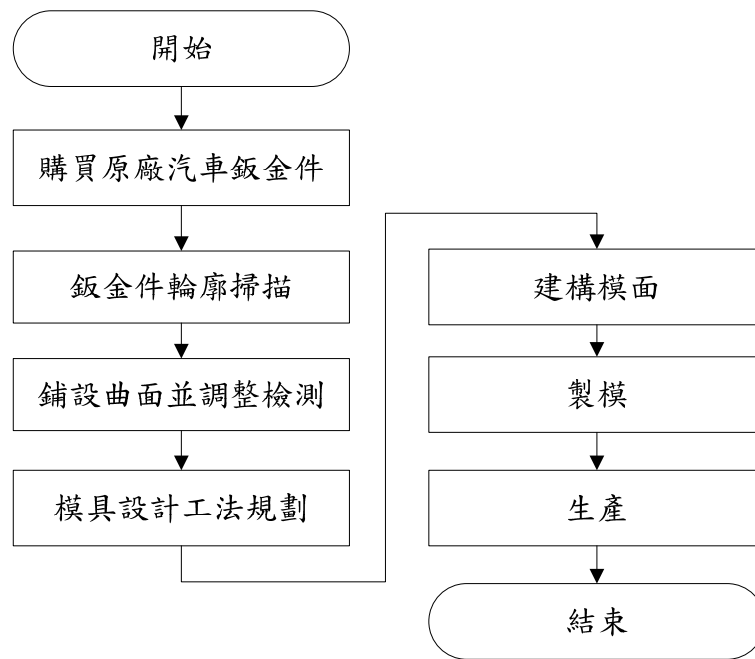


圖 1.2 汽車鈹金件模具業之鈹金件生產流程

於前端模具設計、規劃過程中，最為費時的部分即在於點資料的鋪面及調整上。經過數位掃描，得到鈹金件輪廓點資料，須經鋪面、連續性及誤差調整之動作，輸出符合規格之曲面資料，方得以往下傳遞。而曲面之輸出目標，在於鋪設出符合搭接連續性且與原始雲點資料比對下誤差值小於一定數值之曲面，參照相關業界之準則，統整檢測標的如下列：

(1) 點資料誤差

比對原始雲點資料與鋪設曲面資料之距離誤差。誤差距離須小於 0.3mm。

(2) 曲面搭接邊界連續性

雙片曲面搭接之連續性要求標的，求取誤差於特定範圍內。依訴求層級不同可分為 G^0 (位置)連續、 G^1 (切平面)連續、 G^2 (曲率)連續。

其中 G^0 連續條件為距離誤差落於 0.001mm 內； G^1 連續條件為切平面角度誤差小於 0.05deg； G^2 連續條件為曲率誤差小於 1%。上列標的亦為業界曲面調整所追求之目標。一般稱達到 G^2 連續條件之曲面為 A 級面；達到 G^1 連續條件曲面為 B 級面。除此客觀標準外，另須考量一項較為直觀標的：光影反應。

(3) 光影反應

藉由 CAD 軟體之應用，附加材質至曲面資料上，由工程人員觀察曲面之光影反應平順性，作為另一參考、調整依據。該部分調整上，一般皆須依賴工程人員實作經驗，依照個人思維進行調整，且調整上較屬藝術美感上之追求，有賴實作經驗方得完善。

於輸出曲面皆通過檢測後，以此鈹件曲面為後續模具規劃之依據，接續進行模具設計、製作，進而生產鈹件。

1.2 研究動機

汽車鈹件的模具規劃設計流程中，模型資料之數位化前處理過程占據極大時程比重。汽車鈹件經由掃描得到眾多雲點資料，藉由針對雲點資料特徵標定，進行點資料分群動作，分別由各群點資料鋪設為曲面。由此流程可得知單一片鈹件，因其外形特徵之變異，可能分割為數十至數百塊曲面，須於曲面鋪設完成後，進行搭接連續性之調整。然而各鈹件中曲面與曲面之相關性乃環環相扣，於任意曲面之變動皆有可能影響到其相鄰曲面之搭接連續性，因此該連續性調整作業流程須不斷往返進行，藉由重覆性微調作業不斷壓低連續性誤差，至多數接隙皆落入誤差範圍內。

現前車輛鈹件曲面鋪設、調整流程中，操作人員須對鈹件特性有一定程度了解，且在軟體操作上要有相當的經驗。然而該流程之作業仍相當費時，以汽車外鈹為例，其作業時程須 5-7 天；內鈹則須 12-15 天，其時間消耗主要在於眾多往返操作之作業及數量龐大之資料處理。由程式設計角度觀之，可發現在曲面資料處理過程中，有眾多重複性高、依循特定法則之作業項，試圖藉由程式整合，統整原本手動操作流程至程式作業中，利用電腦擅長處理重複性資訊之特性，取代人工的費時處理，目標務求鈹件曲面處理時程的精簡，有效達到前處理時程的縮短。

當前的曲面鋪設調整方式，由操作人員取得雲點資料，對雲點資料進行分群並逐一鋪設為曲面資料，於單一曲面鋪設完成後，隨即與前端鋪設好之曲面進行連續性比對及點資料誤差比對，其流程可視為 Z 型演進，往返於點資料鋪面、連續性與點誤差調整以及檢測三動作之間，逐步驟作業至整塊鈹件曲面鋪設完成。

於自動化流程設計中，考量規劃線性之作業流程，以批次處理方式處理龐大資料項。於分群後之雲點資料全數鋪設成曲面，再針對曲面資料進行連續性調整，最後進行檢測。流程如圖 1.3 所示。

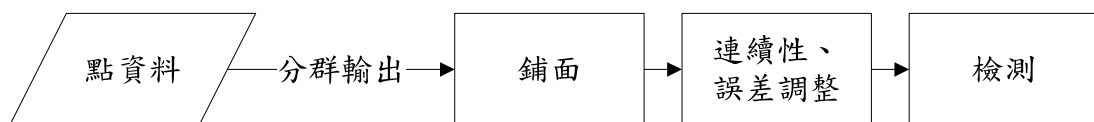


圖 1.3 批次處理鋪面、連續性調整作業流程

本研究乃針對曲面搭接連續性調整部分進行探討，目標在於得以接收批次輸入鈹件曲面資料，並進行搭接連續性調整，最終輸出符合搭接連續性之曲面資料。

由搭接連續性調整衍生相關作業，包含雙片搭接調整、特殊搭接案例(四曲面田字形搭接)調整、剪切曲面搭接調整等。藉由程式規劃設計，達成自動化調整作業。

就汽車鈹件而言，單一鈹件之連續性調整，內鈹須調整達到 B 級面需求，即符合 G^0 、 G^1 連續條件；外鈹須達到 A 級面需求，即符合 G^0 、 G^1 、 G^2 連續條件。於連續性相關檢測通過後，方可往下傳遞進行後續工法排程、模具規劃作業。且調整好之鈹件曲面，即為接續製模之模面依據，因此曲面資料前處理不僅關係著車輛鈹件生產時效，亦影響鈹件製作品質，由此可見該流程之重要性。

1.3 文獻回顧

1.3.1 NURBS 基礎資料

NURBS[17]為非均勻有理 B-spline(non-uniform rational B-spline)縮寫。於現今電腦 3D 繪圖領域中，NURBS 幾何資料呈現模型已占據重要地位。其重要性源於 NURBS 於資料呈現上的準確性、調控性佳、簡潔明確的關係式以及可用少量資訊呈現複雜幾何外形等優點。也因如此 NURBS 亦成為電腦輔助幾何設計(computer aided geometric design, CAGD)領域中，設計規劃之重要工具。其發展推演，最初為 Bézier 曲線之成形，後續漸整合擴充至較為完整的 NURBS 模型。

Bézier 曲線於 1962 年，由法國雷諾(Renault)汽車公司工程師 Pierre Bézier 發表。Bézier 提出 Bézier 幾何建構模型，並應用於汽車主體設計上。Bézier 模型異於多項式幾何建構模型，利用數值方式建構 3D 幾何資料，添增設計者於外形設計調控的便捷性，漸發展成工藝設計領域之重要工具。

B-spline 資料於 1946 年由 Isaac Jacob Schoenberg 提出。其建立之曲線近似模型，最初應用於統計資料的平順化上，然而直至 1974 年 Gordon 與 Riesenfeld 於探討研究 Bézier 模型間，衍生至 B-spline，進而發現該資料之眾多便利性及強大，B-spline 之幾何建構模型始大力發展並引用至電腦輔助設計領域。相較於 Bézier 模型 B-spline 有較高的局部調控性，不致因為設計外形大幅變異，迫使切分曲面，造成搭接處理問題，且 B-spline 模型有一套較為通用的演算標準，針對升降階、插入節點等問題進行處理運算，於衍伸應用上有較高的便利性。

儘管 B-spline 模型於設計造型曲線、曲面有著極佳的效力，然而於二次曲線、曲面資料之模擬應用上，卻無法精確的呈現該造型，而有設計誤差之問題。為解決相關二次函式的模擬問題，隨後發展出非均勻有理 B-spline 模型，其涵括 Bézier、B-spline 資料項，得以充分呈現各式幾何資訊，並被國際標準化組織定義為工業產品形狀表示之標準方法。

Piegl and Tiller[17]統整 NURBS 相關資料，由底層幾何資訊起始，對 Bézier、B-spline、NURBS 等進行概括性的統整說明，並說明於實作層面上如何呈現相關幾何資訊。衍生部分亦針對常見幾何形體，整理建構方法，於 NURBS 幾何資訊上提供充分的認知空間。

Faux and Pratt[8]提供計算幾何相關演算概念，從基礎的空間幾何概念，至曲線、曲面幾何形體設計，並衍生處理造型搭接問題等。另外亦說明幾何形體的微分關係，對應於切線、切平面、曲率等相關幾何資訊關係式。

1.3.2 曲面搭接連續性資料

Kahmann[14]針對相接曲面切平面及曲率關係，推演 Bézier 曲面邊界平滑銜接條件，即切平面、曲率連續式。以曲面函數資料為基礎，推導於特定交界點上，欲達到連續條件，雙曲面函數式微分關係，其關係式資料包含曲面雙參數方向函數微分式及向量量值平衡係數項。當銜接邊界上各點皆符合推演之關係式，即可視為達到特定連續性之曲面銜接平滑化動作。

Du 與 Schmitt[7]由 Bézier 曲面函數推演，建構 G^1 連續基礎關係式，並訂定平衡係數決定法則，引入張量積式，導得於雙曲面搭接 G^1 連續性下，控制點之分配關係。後續進階探討 N 片曲面 ($N > 2$) 共用中心點環狀搭接下， G^1 連續性調整之控制點規劃法則。

Ye 等人[21]探討雙片 Bézier 曲面搭接的邊界連續性條件。在預設共同搭接邊界下，藉由 Bézier 曲面張量積式微分關係求取推演，並加入適當的調控係數，規劃邊界連續條件之數學模型。該數學模型包含調控係數及曲面控制點兩大調控項。於文中並推演調控係數之求取法則，進而求取平衡條件下之控制點。最後針對 G^1 、 G^2 連續性調整實作。

Hu 與 Sun[10]由 B-spline 參數曲面及曲線關係，推演剪切曲面之搭接連續性調整演算法。藉由 B-spline 張量積式之推演，導得剪切曲面搭接 G^0 、 G^1 連續性演算式，並實例調整呈現搭接連續性調整結果。

陳見宜[24]針對 B-spline 曲面搭接關係，由基礎連續性平衡關係式起始，歸納平衡係數的求取法則，進而調控連續性關係。於雙片搭接調整中可有效的調降搭接邊界誤差至 G^2 連續條件。

1.3.3 最佳化調整資料

Moreton 與 Séquin[16]以最佳化方法進行曲面造型設計規劃。由點資料鋪面延伸至後續連續性調整，藉由最小能量之規劃求取，取得曲面鋪設調整之適當結果。

Alhanaty 與 Bercovier[1]探討曲線及曲面對點資料的貼合關係，藉由最佳化方法的引用，定義出目標函數並進行數值解求取。相較於傳統資料貼合方法，於數值解可得到相異的造型效果。

Ueng 等人[20]應用最佳化演算法，進行曲線貼合運算。藉由訂立不同目標案例，即不同的目標函數，求取與輸入資料點相符之曲線方程式。視目標之狀態，得到貼合資料點或平順、延伸預測性之曲線。

由上列整合相關文獻資料，經比對評估，在曲面搭接連續性調整上，本研究採用最佳化方法進行調整，試突破解析求解的相關限制，以新的求解概念，適應至幾何問題處理上。運算上以數值方法為工具，並整合各級連續性條件為求解目標，進行最佳化調整。

1.4 研究內容

本研究針對 B-spline 參數曲面進行搭接邊界的連續性調整。首先對調整目標項：B-spline 曲面，進行概略性介紹，於問題討論上建立初步著力點。接續討論曲面搭接連續性關係，以雙參數方向(u 、 v 方向)曲面為基礎，統整曲面搭接 G^1 、 G^2 連續關係式。為銜接數值方法之演算，並由曲面搭接關係中規劃調整控制點(變數項)及調整目標(目標函數)，初步完成前端資料之統整。

問題求解上，以數值方法為求解工具，進行最佳化求解。針對選用數值演算方法進行概略介紹，並詳述實作層面上，曲面資料與演算法之銜接關係，最終遞送資料進行實作調整。針對調整輸出資料項進行討論，比較各式調整設定之輸出結果，進行結論歸納。於實作討論上，規劃三搭接案例進行調整實作：

(1) 序列曲面搭接

呈現一般非剪切曲面搭接狀況之調整結果及效果。

(2) 四曲面田字形搭接

顯示於曲面調整衝突點之處理方式，並細列調整流程及調整周邊限制。

(3) 剪切曲面搭接

特殊搭接案例之調整。異於非剪切曲面搭接狀況，添增調整設定限制條件。

於整體研究過程中，以調整曲面搭接連續性為目標，運用數值方法步進運算，於相異演算方法中會得到不同的收斂效果。本研究亦針對不同的數值演算法運用提出說明，解述如何將訂定目標套用至既有數值演算法中，並進行適應性調整，於最終選擇可得到最佳演算結果之演算方法為實作項目。

本研究演算開發，以 JAVA 程式語言為發展工具，並於 Eclipse 開發平台上進行開發實作。整體架構以尤春風博士所開發之 Spring Solid System[22]為演算核心，並於 SpringSolidCAD[23]之曲面設計模組上，擴充曲面搭接連續性調整功能。Spring Solid System 為純 Java 撰寫，可供跨平台運用之 CAD 核心，該系統符合 STEP AP203/214[12][13]規範，得以支援自行開發之 Spring Solid Part、STEP AP203/214。

資料傳遞方面，以 STEP 檔案格式為基底，藉由 Spring Solid System 核心解讀規劃演算，最終輸出 STEP 檔案，傳輸至相關軟體進行驗證。

因於 JAVA 運作之需求，本程式須於可支援 Java Runtime 與 Java 3D Runtime 之作業系統上運行。本研究使用之開發平台如下：

表 1.1 開發平台

硬體部分	Intel® Core™2 Duo CPU 2.8GHz, 4GB of RAM
作業系統	Microsoft Windows XP Professional Version 2002 SP3
開發環境	Java 2.0 Platform SE 6.0, Spring Solid System, SpringSolidCAD.
開發平台	Eclipse SDK 32bit Version 3.4.0

1.5 論文架構

本論文分為六個章節，各章節呈現內容大致如下：

第一章 導論

說明整體研究背景，並細分研究背景、研究動機、文獻回顧、研究內容、論文架構子細目。

第二章 B-spline 曲面搭接邊界連續條件

說明本研究的主體目標：搭接連續性。由 B-spline 參數曲面數學模型介紹為起始，接續分別導引說明 G^0 連續、 G^1 連續、 G^2 連續為調整目標下，如何匯整條件式。

第三章 數值方法

針對所引用之數值方法進行說明，並對曲面搭接連續性調整及數值方法作相關銜接處理。

第四章 曲面搭接連續性調整實作

實際引入數值方法，分別探討曲面資料的實例建構、實作前處理及調整實作。

第五章 實例驗證與討論

進行實作輸出，並以相關流通軟體進行驗證比對。

第六章 結論與未來展望

總結，並細列可延伸發展方向。

第二章 B-spline 曲面搭接邊界連續條件

NURBS 曲面資料可視為較大範疇之幾何模型，於本研究應用上添增許多非必要考量項，運用上將其資料範圍縮減至非均勻非有理 (non-uniform, non-rational) B-spline 曲面，以下簡稱 B-spline 曲面。利用 B-spline 曲面之數學關係式進一步探討雙片曲面於搭接邊界之幾何關係。

2.1 B-spline 曲面數學模型

利用張量積方式 (tensor-product-form) 呈現一組 B-spline 曲面之參數方程式：

$$\bar{Q}(u, v) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{C}_{i,j} \cdot N_{k,i}(u) \cdot N_{l,j}(v) \quad (2.1)$$

B-spline 曲面利用兩個維度參數 (u 、 v)，定義包含四稜邊之四邊形幾何外形曲面資料，稱此一完整四稜邊曲面為單位補綴 (patch)。於方程式中包含階數 (order)、控制點 (control point)、節點 (knot) 以及演算基礎 Cox-deBoor[4] 演算法四大要項。其中 $\bar{C}_{i,j}$ 代表參數曲面控制點資料； $N_{k,i}(u)$ 及 $N_{l,j}(v)$ 分別為 u 、 v 方向基底函數 (basic functions, blending functions)； k 及 l 為雙參數方向之階數； m 、 n 為雙參數方向各控制點數量。圖 2.1 為簡易單一補綴資料，包含控制點及曲面彩現資料。

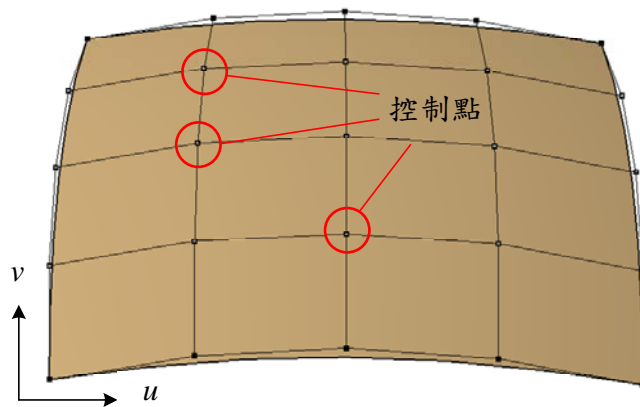


圖 2.1 單一補綴資料

於應用層面探討 B-spline 參數曲面張量積關係式項次，可分為控制點及基底函數兩大部分。控制點為曲面造型主要調控項，可藉由控制點的調控，設計造型曲面；基底函數包含階數、節點及 Cox-deBoor 遞迴演算式。於基底函數中可藉由階數、節點之調控，改變曲面調控特性，如控制點數量等，由此可發現控制點與基底函數亦有一定相對應關聯性。本研究連續性調整探討，即針對雙片補綴資料著手，對應曲面張量積式，推演規劃控制點調控目標，以控制點調控為連續性調整之實作方法。圖 2.2 呈現控制點變動前後，對應曲面造型之關係。

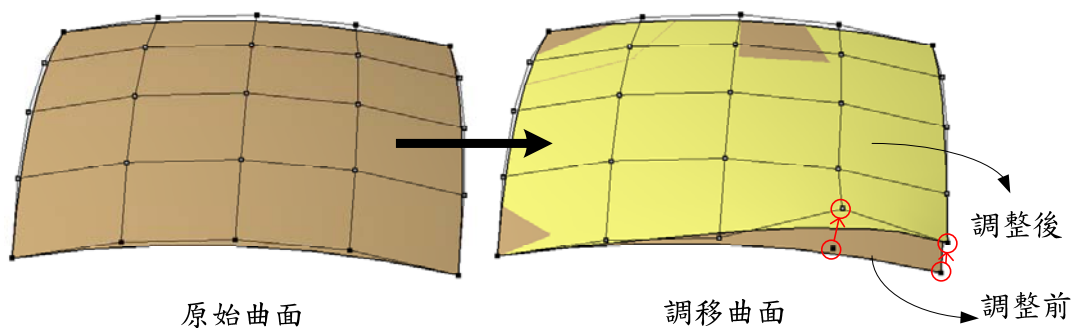


圖 2.2 控制點調整單一造型曲面示意

除控制點對於 B-spline 曲面的調控影響性外，基底函數各參數項次亦對連續性調整實作規劃有重要影響。以雙片曲面搭接為例，當雙曲面於搭接邊界階數、節點資料相等時，於此稱為等同邊界參數。如圖 2.3(a)，可以發現雙邊控制點會有相互銜接現象。在搭接連續性目標的追求下，可藉由曲面基底函數的微分關係，直接導得雙曲面控制點之應對關係。然於搭接邊界階數或節點任一資料不等之狀況，稱非等同邊界參數，如圖 2.3(b)。連續性調整則須往覆於偵測邊界連續性關係及控制點調控之間，無法以通式形式解得控制點對應式。兩者實作上有著極大差異。

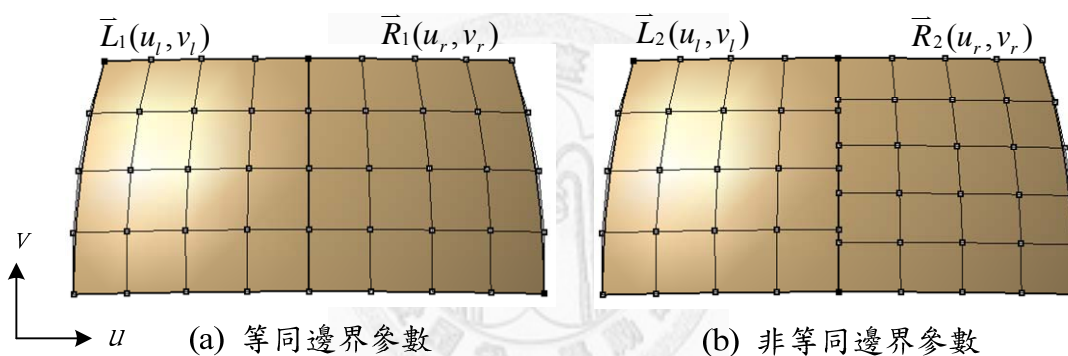


圖 2.3 曲面搭接邊界關係示意

圖 2.3 所示，(a)為搭接邊界等同參數關係，於控制點排列上建構相互映對次序，其可視為穩定參數案例，在連續性調整上可直接導得控制點對應關係；(b)將右曲面進行升階動作、節點關係維持不變，得到左曲面階數 4、右曲面階數 5，而雙曲面維持相同節點之參數關係。

如圖 2.3(b)顯示，左面有 5 排控制點、右面 6 排控制點，於搭接邊界之控制點對應，變為交錯排列。此案例則無法直接推導連續性條件下控制點對應關係，須借助其他數值方法進行最佳化求解。

於雙片 B-spline 曲面搭接基礎下，搭接關係可分為等同邊界參數及非等同邊界參數兩大案例。搭接連續性條件之探討，除說明各級連續性條件，並規劃於等同邊界參數下，邊線微分參數之消減，列出簡化之搭接連續關係式。於非等同邊界參數案例，則另行規劃搭接連續關係式。於第三章引入數值方法，以曲面搭接連續關係式為目標，進行控制點調整。

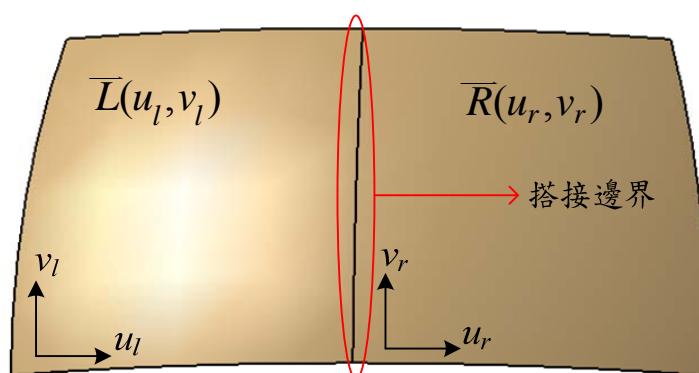


圖 2.4 雙曲面搭接關係示意

在雙片曲面搭接邊界等同參數之預設條件下，以張量積形式呈現雙片 B-spline 曲面。如圖 2.4 所示搭接方式，於 u 方向參數並無特別限制； v 方向參數則限定左右兩面階數、節點值須相互映對，即相等。整體限制條件上，因於 B-spline 參數系統中，階數 k 之參數方向具有 $k-2$ 階連續性，即 C^{k-2} 連續。本研究目標欲導得 G^2 連續關係，因此於各參數方向階數設定至少為 4，於運算推演才得以取得需求數值。

$$\bar{L}(u_L, v_L) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^r \bar{B}_{i,j} \cdot M_{k,i}(u_L) \cdot M_{l,j}(v_L) \quad (2.2)$$

$$\bar{R}(u_R, v_R) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^t \bar{C}_{i,j} \cdot N_{m,i}(u_R) \cdot N_{n,j}(v_R) \quad (2.3)$$

式(2.2)與式(2.3)分別為左右兩曲面之張量積呈現式，於搭接邊界參數限制下， v 參數方向節點及階數相等。由階數相等可得 $l=n$ ；節點及階數相等可衍伸得到控制點數量相等，即 $r=t$ 。代入上列兩條件，曲面張量積式進一步簡化 v 方向參數：

$$\bar{L}(u_L, v) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^r \bar{B}_{i,j} \cdot M_{k,i}(u_L) \cdot M_{l,j}(v) \quad (2.4)$$

$$\bar{R}(u_R, v) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r \bar{C}_{i,j} \cdot N_{m,i}(u_R) \cdot M_{l,j}(v) \quad (2.5)$$

為求關係式推演之一致性，於曲面各參數方向皆進行正規化作業，使參數域皆落於 $[0,1]$ 區間內，即 $u_L \in [0,1]$ 、 $u_R \in [0,1]$ 、 $v \in [0,1]$ ，隨後再進行各等級搭接連續性關係推演。

於搭接邊界連續性關係探討上，數值條列僅能針對邊界單一定點搭接關係分析，如圖 2.5 為軟體針對雙曲面之搭接邊界曲率關係分析結果。其分析方式為對邊界點逐點偵測並取雙邊差值，得到對應之分佈圖。在調整目標定義上，即需求取邊界各點搭接誤差落入標定連續性誤差內。

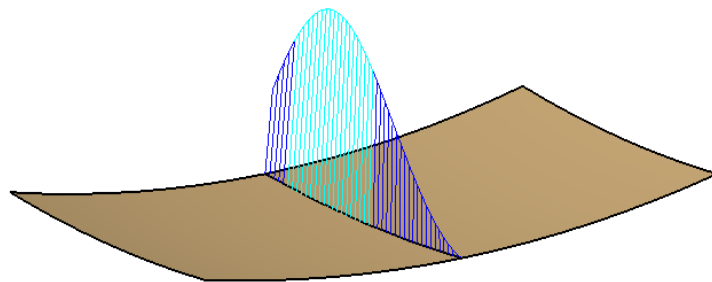


圖 2.5 雙曲面搭接邊界曲率誤差示意

2.2 位置連續(G⁰ continuity)

位置連續之基本關係為雙曲面於搭接邊界共用相同曲線。於數值上界定，以 0.001mm 誤差值為區分標的，即定義雙曲面於邊界點之距離誤差需小於 0.001mm，始達成位置連續。圖 2.6 顯示雙曲面搭接產生距離誤差之狀況。

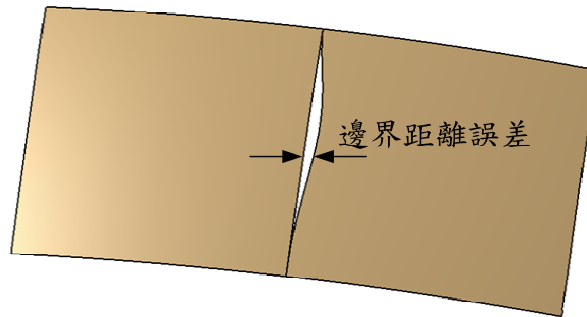


圖 2.6 G⁰ 誤差示意

圖 2.4 之搭接基礎下，推演等同邊界參數案例， $\bar{L}(u_L, v)$ 、 $\bar{R}(u_R, v)$ 雙片曲面搭接 G⁰ 連續關係，於搭接邊界共用同一曲線條件下，可得下式：

$$\bar{L}(1, v) = \bar{R}(0, v) \quad (2.6)$$

另行求取雙邊張量積式：

$$\bar{L}(1, v) = \sum_{j=1}^r \bar{B}_{q,j} \cdot M_{l,j}(v) \quad (2.7)$$

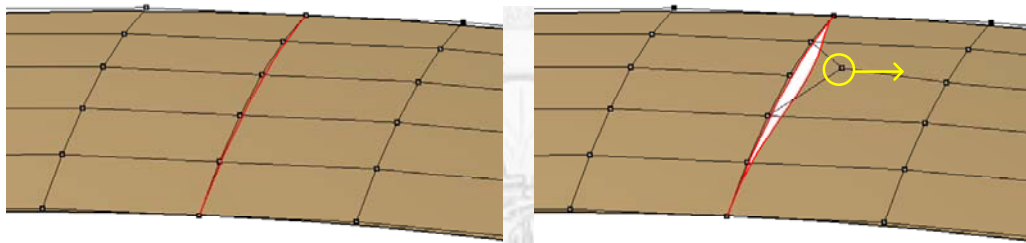
$$\bar{R}(0, v) = \sum_{j=1}^r \bar{C}_{0,j} \cdot M_{l,j}(v) \quad (2.8)$$

進一步整理兩式相等條件可得：

$$\sum_{j=1}^r \bar{B}_{q,j} \cdot M_{l,j}(v) = \sum_{j=1}^r \bar{C}_{0,j} \cdot M_{l,j}(v) \quad (2.9)$$

$$\bar{B}_{q,j} = \bar{C}_{0,j}, j=1,2,\dots,r \quad (2.10)$$

G^0 連續條件下，於搭接邊界上雙曲面控制點應相互對應、相等。在搭接邊界參數相同之前提下， G^0 連續調整引用該特性，設定控制點相等即可達成。



(a) 雙曲面邊界控制點重合

(b) 雙曲面調移單一邊界控制點

圖 2.7 位置連續與邊界控制點關係示意圖

圖 2.7 所示，(a)呈現當搭接邊界控制點相對應時，雙曲面達到 G^0 連續條件；(b)針對右面調控單一控制點，造成邊界分離現象，失去連續條件。

於雙曲面非等同參數條件下，調整方式須針對邊界控制點進行微幅調控，並逐點檢測距離誤差至誤差值落於需求標的之內。本研究並未考量此案例調整，因其調整上較難界定雙邊對應之參照點，且於鋪面之輸出結果，一般皆已達到位置連續之條件，若有需求，會於前處理階段，以相關軟體進行 G^0 連續調整。

2.3 切平面連續(G^1 continuity)

G^1 連續於曲線與曲線搭接關係中詮釋為切線連續；然於曲面與曲面搭接關係中則稱之為切平面連續。本研究乃針對曲面資料調整討論，因此於文中皆以曲面為基礎，稱 G^1 連續為切平面連續。

於車輛鈹件逆向工程作業中，各部鈹件為平衡於成本及品質等考量，皆會訂定不同調整需求標的，作為資料輸出前的檢驗要項。由最基礎的連續性條件探討起， G^0 連續性為所有鈹件皆須達到的基本條件； G^1 連續性為內鈹件之調整目標； G^2 連續性則為外鈹件之調整目標。各部鈹件因工藝需求差異而訂出不同準則，由此可得知 G^1 連續性為一過度項，於內鈹件須調整至 G^1 連續性始可輸出；外鈹件則至少須調整至 G^1 連續性，並繼續 G^2 連續性之調整。

在切平面連續目標追求下，首先定義曲面切平面。以本文使用之 B-spline 曲面為基礎，單片曲面具有 u 、 v 兩維度空間域。試於曲面 $\bar{Q}(u,v)$ 上尋求任一特定點 $\bar{Q}(a,b)$ ，即 $u=a$ 、 $v=b$ 。針對該點分別對曲面 u 方向及 v 方向進行一次微分，得到 $\bar{Q}_u(a,b)$ 、 $\bar{Q}_v(a,b)$ 兩參數方向切線值。取兩切線向量之外積可得到該曲面上定點切平面法向量，記作 \bar{N}_{ab} ，其中 $\bar{N}_{ab} = \bar{Q}_u(a,b) \times \bar{Q}_v(a,b)$ 。由單一定點及單一法向量即可定義空間座標中唯一平面，即所求切平面，由圖 2.8 呈現於曲面上求取之切平面關係。

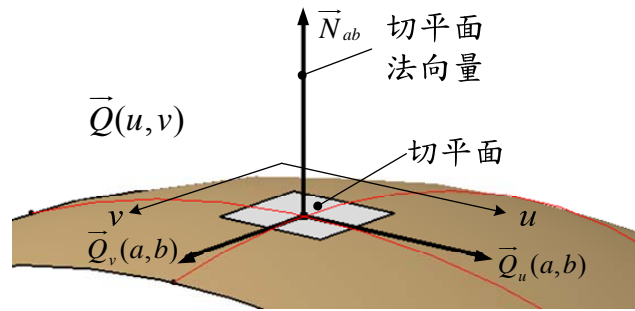


圖 2.8 切平面示意圖

曲面搭接 G^1 連續性之調整，初步工作項為定義邊界點，藉由邊界點資料項對應雙曲面參數座標並求取微分關係，計算各曲面切平面，由切平面對應關係判斷校調方向，進而調整。因此於調整設定上， G^0 連續性可視為 G^1 連續性調整之先決條件。

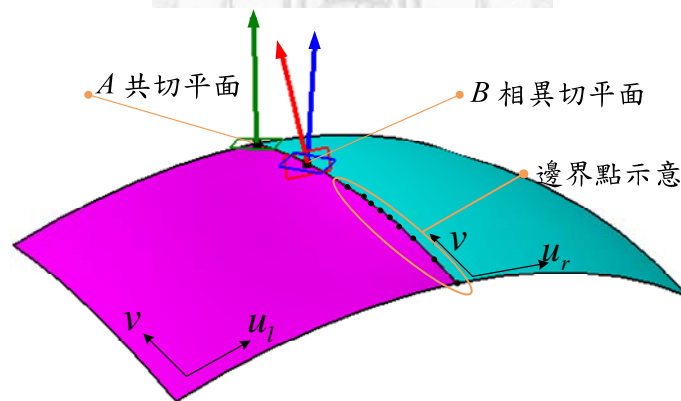


圖 2.9 雙曲面搭接 G^1 連續關係示意

如圖 2.9 所示，針對一對搭接曲面，擷取邊界點資料並判斷各搭接點 G^1 連續性。圖中 A 點為達到 G^1 連續之邊界點，由雙曲面求取之切平面為共同平面；B 點未達 G^1 連續，於雙邊求取之切平面相異，即切平面法向量方向相異。因此可以藉由邊界點幾何資訊的探求，規劃 G^1 連續性調整目標式。

於搭接邊界等同參數下，針對雙曲面邊界 $\bar{L}(1, \nu)$ 、 $\bar{R}(0, \nu)$ 進行 G^1 連續調整之控制點調控規劃。由共用切平面關係，可得：

$$\bar{L}_u(1, \nu) \times \bar{L}_\nu(1, \nu) = \alpha(\nu) \cdot \bar{R}_u(0, \nu) \times \bar{R}_\nu(0, \nu) \quad (2.11)$$

$\bar{L}_u(1, \nu)$ 、 $\bar{L}_\nu(1, \nu)$ 分別為左面邊線 $\bar{L}(1, \nu)$ 沿 u_l 、 ν 參數方向一次微分；
 $\bar{R}_u(0, \nu)$ 、 $\bar{R}_\nu(0, \nu)$ 分別為右面邊線 $\bar{R}(0, \nu)$ 沿 u_r 、 ν 參數方向一次微分。因搭接邊界等同參數且符合 G^0 連續之先決條件，可得雙曲面邊界於 ν 方向一次微分值應等同，即 $\bar{L}_\nu(1, \nu) = \bar{R}_\nu(0, \nu)$ 。原外積關係式可減化為三向量共平面條件式：

$$\det(\bar{R}_u(0, \nu), \bar{L}_u(1, \nu), \bar{L}_\nu(1, \nu)) = 0 \quad (2.12)$$

或加入向量量值調控係數，改寫式(2.12)至下式：

$$\bar{R}_u(0, \nu) = \beta(\nu) \cdot \bar{L}_u(1, \nu) + \gamma(\nu) \cdot \bar{L}_\nu(1, \nu) \quad (2.13)$$

式(2.12)及式(2.13)沿用 Kahmann[14]於 Bézier 曲面搭接案例中相關推演，並於本研究推廣至 B-spline 參數曲面搭接關係。 $\det(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ 為對 \bar{A} 、 \bar{B} 、 \bar{C} 三向量求取行列式值，該數值可對應於三向量圍築之六面體體積，設定為零即可呈現三向量共平面關係； $\beta(\nu)$ 、 $\gamma(\nu)$ 為向量量值調控係數。微分項向量關係示意圖如圖 2.10，衍生求取雙曲面張量積式微分項，並導入 G^1 連續平衡式：

$$\bar{R}_u(0, v) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r \bar{C}_{i,j} \cdot N'_{m,i}(0) \cdot M_{l,j}(v) \quad (2.14)$$

$$\bar{L}_u(1, v) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^r \bar{B}_{i,j} \cdot M'_{k,i}(1) \cdot M_{l,j}(v) \quad (2.15)$$

$$\bar{L}_v(1, v) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^r \bar{B}_{i,j} \cdot M_{k,i}(1) \cdot M'_{l,j}(v) \quad (2.16)$$

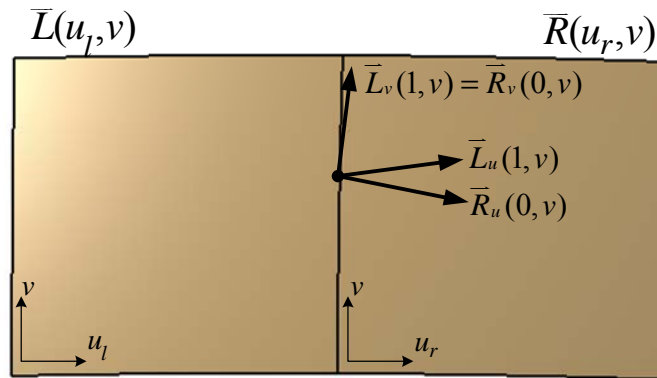


圖 2.10 曲面搭接邊界微分項示意

由 Cox-deBoor 遞迴演算法，針對基底函數微分項推演，探討於式 (2.13) 相關影響之控制點。可以得到對 G^1 連續有影響性之曲面控制點為搭接邊界一排控制點及雙曲面由搭接邊界向外推算一排控制點。於當前 G^1 調整相關作業，多針對邊界往外推演一排控制點調控，避免邊界排對 G^0 連續之影響。相關示意如圖 2.11 所示。

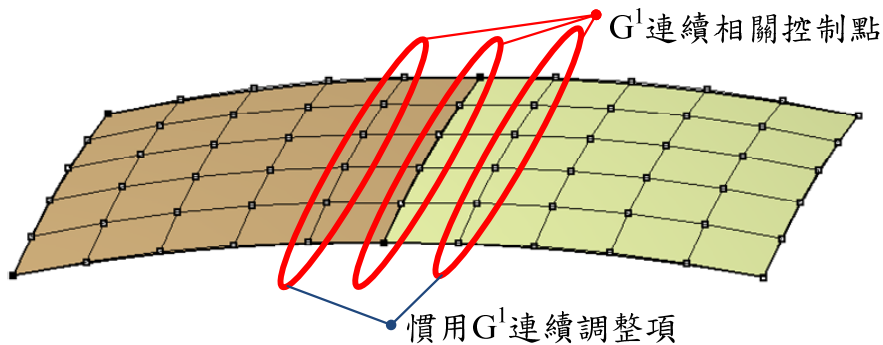


圖 2.11 等同邊界參數搭接關係 G^1 連續相關控制點

在等同邊界參數條件下，試引用切平面連續之基底原理：雙邊切平面共面。以較為簡潔方式推導 G^1 連續關係。由式(2.13)，進一步固定 $\bar{L}_v(1, v)$ 項次，即設定 $\beta(v)=0$ ，得到式(2.17)。於圖 2.10 邊界向量示意上，可發現 $\bar{L}_u(1, v)$ 、 $\bar{R}_u(0, v)$ 若共線，亦可達到三向量共平面條件。實際調控上，如圖 2.12 設定雙曲面對應控制點共線，即可達到搭接 G^1 連續性。其可視為 G^1 連續調整方法選項之一，於操作上便捷，然而相對應的犧牲些許調控自由度，並添增誤差項。

$$\bar{R}_u(0, v) = \gamma(v) \cdot \bar{L}_u(1, v) \quad (2.17)$$

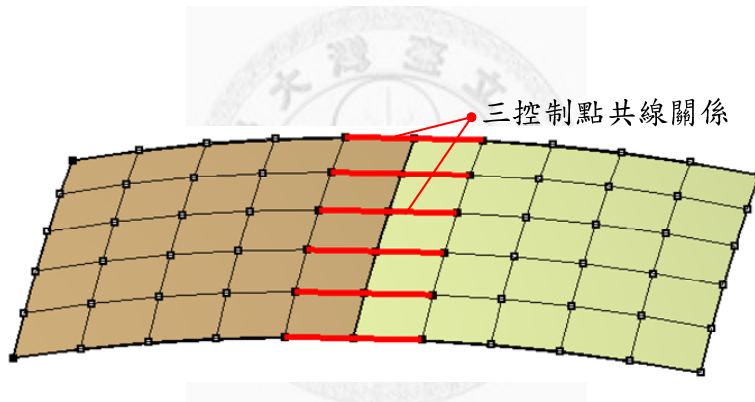


圖 2.12 控制點共線調整切平面連續

於非等同邊界參數案例，如圖 2.13，曲面微分項並不如等同邊界相互對應分配，於運算上無法進行參數消減動作。衍生式(2.12)關係，並添增對剪切曲面的考量，依附錄 A.1 G^1 關係式推演，得下式：

$$\det(p \cdot \bar{R}_u(0, v) + q \cdot \bar{R}_v(0, v), \bar{L}_u(1, v), \bar{L}_v(1, v)) = 0 \quad (2.18)$$

其中 p 、 q 為向量取值參數，為確保全面考量到各向量權重。將式(2.18)引至數值方法，於 4.1.4 小節引為目標函數，其可針對較廣義的

曲面搭接關係進行 G^1 連續調整。

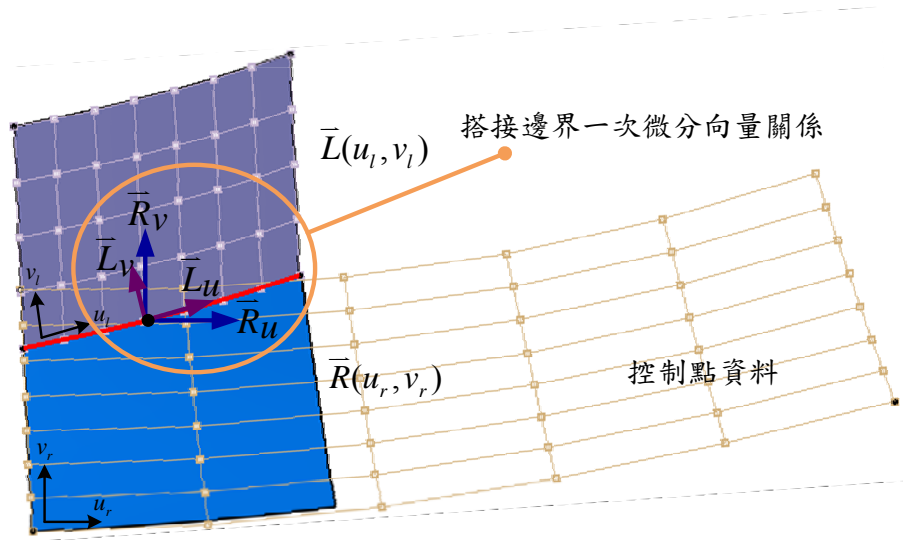


圖 2.13 非等同邊界參數搭接曲面

2.4 曲率連續(G^2 continuity)

由曲面對參數方向一次微分可求得切平面關係，即 G^1 狀態；若以一次微分及二次微分項次為基底，則可導得曲率關係，即 G^2 狀態。於曲面搭接曲率連續性調整關係式中，以 G^0 連續、 G^1 連續為基底條件，針對 G^2 連續條件統整並條列出平衡關係式，後續調整控制點，目標至符合平衡關係式，即為達到 G^2 連續條件。

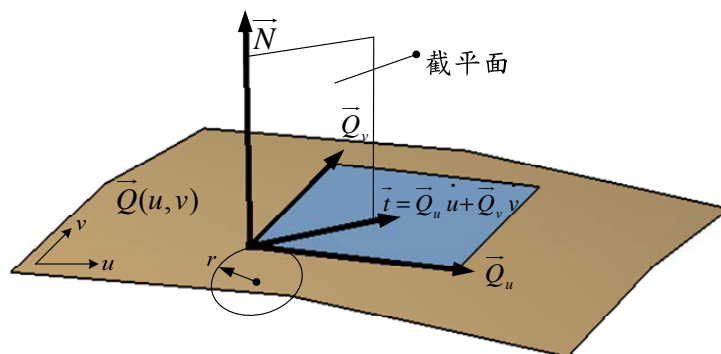


圖 2.14 曲率基底示意

於幾何上定義，曲率為曲線上特定點之截圓半徑倒數，如圖 2.14 曲率關係示意。因此於曲率值求解過程中，須先針對曲面資料求取定點切平面法向量 \bar{N} 及以定點座標為出發點，求取切平面上方向向量 \bar{t} 。方向向量為利用雙參數方向之一次微分關係求得於切平面上特定方向 $\bar{t} = \bar{Q}_u \dot{u} + \bar{Q}_v \dot{v}$ ，以此為基礎下可得法曲率(normal curvature)關係式：

$$\kappa = \frac{g_{11} \dot{u}^2 + 2g_{12} \dot{u} \dot{v} + g_{22} \dot{v}^2}{e_{11} \dot{u}^2 + 2e_{12} \dot{u} \dot{v} + e_{22} \dot{v}^2} \quad (2.19)$$

式(2.19)之各項參數，如下所示：

$$\begin{aligned} e_{11} &= \bar{Q}_u \cdot \bar{Q}_u & e_{12} &= \bar{Q}_u \cdot \bar{Q}_v & e_{22} &= \bar{Q}_v \cdot \bar{Q}_v \\ g_{11} &= \bar{Q}_{uu} \cdot \bar{N} & g_{12} &= \bar{Q}_{uv} \cdot \bar{N} = \bar{Q}_{vu} \cdot \bar{N} & g_{22} &= \bar{Q}_{vv} \cdot \bar{N} \end{aligned}$$

關係式中 \bar{Q}_{uu} 為參數曲面對 u 方向進行二次微分； \bar{Q}_{uv} 為參數曲面對 u 方向、 v 方向各進行一次微分； \bar{Q}_{vv} 為參數曲面對 v 方向進行二次微分； \dot{u} 及 \dot{v} 分別為對 u 、 v 方向的取值比重，為決定取值截面之重要參數。

於曲面上固定點，隨平面向量 \bar{t} 取值相異可得不同截平面，相對應曲率值亦相異。取其中絕對最大曲率及絕對最小曲率，稱之為主曲率(principal curvature)，記作 κ_1 、 κ_2 。由主曲率延伸求取高斯曲率(Gaussian curvature) K 、平均曲率(mean curvature) H 分別如下所示：

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 \quad (2.20)$$

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) \quad (2.21)$$

由法曲率關係，衍生推演曲率連續關係式。於 Kahmann 所述，在雙片曲面搭接案例中，規劃搭接雙邊等同切平面法向量，即達 G^1 連續條件，如式(2.22)；並由等同邊界參數得式(2.23)。

$$\bar{R}_u(0, v) = \beta(v) \cdot \bar{L}_u(1, v) + \gamma(v) \cdot \bar{L}_v(1, v) \quad (2.22)$$

$$\bar{R}_v(0, v) = \bar{L}_v(1, v) \quad (2.23)$$

設定雙曲面有共同漸進方向(法曲率值為零之方向)，即曲率連續條件，並銜接式(2.22)、式(2.23)。由比較係數方式，可求得 G^2 連續關係式，式(2.24)。因其推演過程藉由搭銜關係對邊界參數消減，該式於非剪切曲面搭接關係中才得以引用。於附錄 A.2 中，針對該項 G^2 關係詳述推演概念。

$$\det \begin{pmatrix} \bar{L}_u(1, v), \bar{L}_v(1, v), \bar{R}_{uu}(0, v) - \beta(v)^2 \bar{L}_{uu}(1, v) \\ -2\beta(v)\gamma(v)\bar{L}_{uv}(1, v) - \gamma(v)^2 \bar{L}_{vv}(1, v) \end{pmatrix} = 0 \quad (2.24)$$

或加入向量量值調控係數呈現：

$$\begin{aligned} \bar{R}_{uu}(0, v) &= \beta(v)^2 \cdot \bar{L}_{uu}(1, v) + 2\beta(v)\gamma(v) \cdot \bar{L}_{uv}(1, v) + \gamma(v)^2 \cdot \bar{L}_{vv}(1, v) \\ &+ s(v) \cdot \bar{L}_u(1, v) + t(v) \cdot \bar{L}_v(1, v) \end{aligned} \quad (2.25)$$

其中 $\beta(v)$ 、 $\gamma(v)$ 、 $s(v)$ 、 $t(v)$ 分別為向量量值調控係數。

各微分項張量積式如下列所示：

$$\bar{R}_{uu}(0, v) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r \bar{C}_{i,j} \cdot N_{m,i}^n(0) \cdot M_{l,j}(v) \quad (2.26)$$

$$\bar{L}_{uu}(1, v) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^r \bar{B}_{i,j} \cdot M_{k,i}^n(1) \cdot M_{l,j}(v) \quad (2.27)$$

$$\bar{L}_{uv}(1, v) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^r \bar{B}_{i,j} \cdot M'_{k,i}(1) \cdot M_{l,j}(v) \quad (2.28)$$

$$\bar{L}_{vv}(1, v) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^r \bar{B}_{i,j} \cdot M_{k,i}^n(1) \cdot M_{l,j}^n(v) \quad (2.29)$$

藉由張量積式引入 G^2 連續性平衡式，由 Cox-deBoor 遞迴演算展開基底函數，得到曲面控制點對應搭接 G^2 連續性之相關性。由圖 2.15，以搭接邊界為起點，向雙邊推演兩排控制點，皆為 G^2 連續相關控制項。於調整上，多針對於邊界外推第二排為 G^2 連續調整項，避免於 G^2 連續調整過程中對 G^0 、 G^1 連續產生衝突性影響。

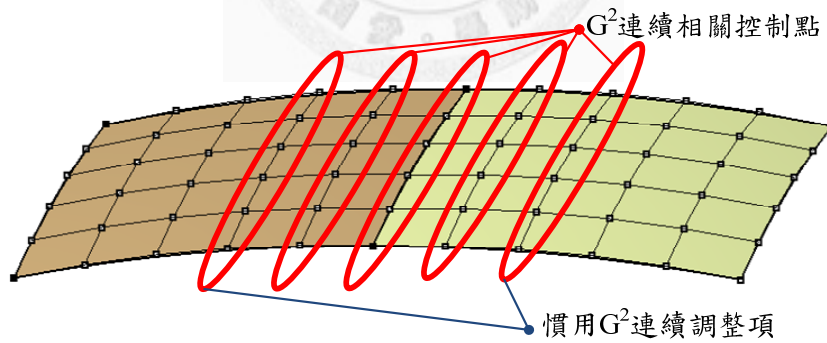


圖 2.15 等同邊界參數搭接關係 G^2 連續相關控制點

Kahmann 亦提及，當設定 $\gamma(v) = s(v) = t(v) = 0$ 可得到較為簡潔 G^2 連續關係式，得以較為簡單之雙邊對應關係調整至搭接邊界 G^2 連續性，然而亦會降低調控自由度及增加曲面誤差。因此僅視為 G^2 調整可行選項之一，式(2.30)呈現關係式。

$$\bar{R}_{uu}(0, \nu) = \beta(\nu)^2 \cdot \bar{L}_{uu}(1, \nu) \quad (2.30)$$

於非等同邊界參數案例，搭接邊界並無對應銜接關係，未能引用式(2.25)等平衡條件式。於 G^2 連續條件上，針對廣義搭接狀況重新定義連續性條件。亦假定已達 G^1 連續條件，針對一次微分項，重新統整關係。於附錄 A.2 中詳述 G^2 連續關係式建構流程。

$$\bar{R}_u(0, \nu) = A_1(\nu) \cdot \bar{L}_u(1, \nu) + B_1(\nu) \cdot \bar{L}_v(1, \nu) \quad (2.31)$$

$$\bar{R}_v(0, \nu) = A_2(\nu) \cdot \bar{L}_u(1, \nu) + B_2(\nu) \cdot \bar{L}_v(1, \nu) \quad (2.32)$$

A_1 、 A_2 、 B_1 、 B_2 為向量量值調控係數。設定搭接雙邊有相同漸進方向，並納入式(2.31)及式(2.32)，以比較係數方式得到 G^2 連續條件式，式(2.33)、式(2.34)、式(2.35)三式。

$$\det \left(\begin{array}{c} \bar{L}_u(1, \nu), \bar{L}_v(1, \nu), \bar{R}_{uu}(0, \nu) - A_1(\nu)^2 \bar{L}_{uu}(1, \nu) \\ -2A_1(\nu)B_1(\nu)\bar{L}_{uv}(1, \nu) - B_1(\nu)^2 \bar{L}_{vv}(1, \nu) \end{array} \right) = 0 \quad (2.33)$$

$$\det \left(\begin{array}{c} \bar{L}_u(1, \nu), \bar{L}_v(1, \nu), \bar{R}_{uv}(0, \nu) \\ -A_1(\nu)A_2(\nu)\bar{L}_{uu}(1, \nu) - A_1(\nu)B_2(\nu)\bar{L}_{uv}(1, \nu) \\ -A_2(\nu)B_1(\nu)\bar{L}_{uv}(1, \nu) - B_1(\nu)B_2(\nu)\bar{L}_{vv}(1, \nu) \end{array} \right) = 0 \quad (2.34)$$

$$\det \left(\begin{array}{c} \bar{L}_u(1, \nu), \bar{L}_v(1, \nu), \bar{R}_{vv}(0, \nu) - A_2(\nu)^2 \bar{L}_{vv}(1, \nu) \\ -2A_2(\nu)B_2(\nu)\bar{L}_{uv}(1, \nu) - B_2(\nu)^2 \bar{L}_{vv}(1, \nu) \end{array} \right) = 0 \quad (2.35)$$

接續運算上，以式(2.33)、式(2.34)以及式(2.35)為目標函數，並設定控制點為調整項，利用數值方法進行調整校正之演算。延伸 G^2 調整功能至各式曲面搭接案例。

利用式(2.13)、式(2.25)兩平衡關係式以求解方式求取控制點適當分配，進行 G^1 、 G^2 連續性調整。Ye 等人[21]、陳見宜[24]及蔡耀震[25]等，於此皆有所著墨。多數調整方式為先求解向量量值調控係數，後續進行控制點之求取，達到連續性調整目標。然其調整上對於雙邊曲面參數多有限制，較難適應至各參數類型曲面資料。

於本研究為求連續性調整之適應性，並未引用式(2.13)、式(2.25)兩關係式。而在程式規劃上，採用式(2.18)為 G^1 調整目標函數；式(2.33)、式(2.34)及式(2.35)設為 G^2 調整目標函數，進行適應性的連續性調整。

以表 2.1 對各級連續性條件作統整列表。

表 2.1 各級搭接邊界連續條件統整表格

連續性	界定標的	臨界值	圖示	備註
G^0	座標點間距	0.001mm		共點
G^1	切平面法向量	0.05deg		共切平面
G^2	高斯曲率	1.0%		曲率分佈

第三章 數值方法

數值分析為數學理論的一大分支，早期計算機尚未普及的年代，數值分析的理論概念就不斷有學者提出，且多為由數學函數的概念進行推演，導得解析解(analytical solution)之外的近似解：數值解(numerical solution)。然而困於數值方法的遞迴運算，於工程應用上較難務實應用。直至現今計算機普及，利用程式撰寫處理遞迴運算已為常事，數值方法衍生至科學問題的應用可說是大放異彩。

數值運算求解的概念，於求解問題之目標下，利用逼近運算的方式求取適當符合目標之近似數值。首先輸入問題及初始解(初始條件)，經過運算，判斷所屬問題解與問題的相符程度(誤差項)，如不符合條件下，更新問題解，進入下一次判斷運算。於此遞迴求解，直至問題解與問題符合，終止運算，流程如圖 3.1 所示。其運算的技術層面，主要在於判斷求解不符合後，更新數值的方法。利用不同的數值方法進行問題解的搜尋、更新，可得到全然不同的演算效果。

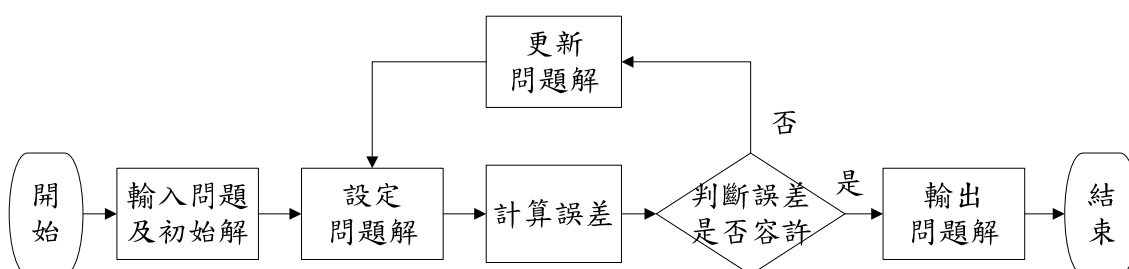


圖 3.1 數值求解流程

利用數學方式呈現數值求解流程如下：

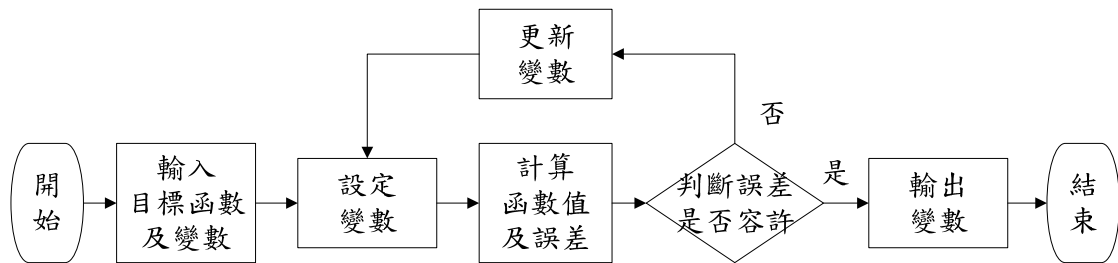


圖 3.2 數學函數呈現數值求解流程

本研究探討曲面搭接邊界的連續性關係，搭接邊界的連續性即訂為數值方法中的目標函數項；於調整手段方面，利用控制點的調控達到目標，因此控制點即為變數項。其中於目標函數方面，因其定義範圍為完整的邊界，於函數呈現上顯的些許複雜。

在雙曲面搭接邊界參數等同案例中，可利用參數的消減，達到簡化目標函數的效果，並於簡化後的函數求取解析解，即適當的控制點分配位置，進而調整，達到連續性調整改善效果。然於邊界參數相異案例下，邊界參數對應關係難以歸納統整，因此於解析解求取有極大的難度。於此借助數值方法的求解能力，適當的訂定目標函數，並選擇步進方法，進行數值調控。以下小節，分別針對各數值方法概念及衍生應用連續性調整進行說明。

3.1 數值方法介紹

於眾多數值求解方法中，本研究選擇數種，引至曲面搭接連續性探討，經實作調整比較後，擇一作為最終數值求解工具，並延伸應用至特殊搭接案例。

3.1.1 牛頓法(Newton method)

牛頓法 [2][5][9][18] 又稱為牛頓 - 瑞福森法 (Newton-Raphson method)，其為利用連續函數導數，推演變數步進關係，逼近求取函數根之數值方法。以函數 $f(x)$ 為例，由方程式 $f(x)=0$ 解之求取為目標，套用牛頓法之基本關係如式(3.1)：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (3.1)$$

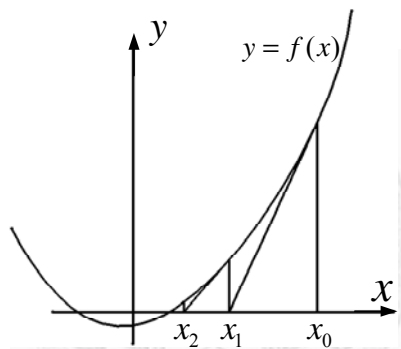


圖 3.3 牛頓法求取方程式解步進示意

單一變數方程式利用牛頓法定點疊代求取近似根，示意圖如圖 3.3。以 x_0 為初始值，由斜率方向推演至 x_1 、 x_2 等，漸逼近方程式解。於此概念下衍生至多變函數聯立方程組疊代求解，可得下列關係：

$$\text{目標函數：} \begin{cases} F_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ F_2(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ \vdots \\ F_n(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{cases}$$

$$\text{變數：} \bar{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$\text{關係式：} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\bar{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial F_1(\bar{X})}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial F_1(\bar{X})}{\partial X_n} \\ \frac{\partial F_2(\bar{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial F_2(\bar{X})}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial F_2(\bar{X})}{\partial X_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(\bar{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial F_n(\bar{X})}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial F_n(\bar{X})}{\partial X_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ \vdots \\ dX_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_1(\bar{X}) \\ F_2(\bar{X}) \\ \vdots \\ F_n(\bar{X}) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

關係式簡化式： $J(\bar{X})dX = -F(\bar{X})$

求取解： $d\bar{X} = (dX_1, dX_2, \dots, dX_n)$

$J(\bar{X})$ 又稱為 Jacobian 矩陣，為一由函數偏微分關係，依固定規律排列之矩陣； dX 、 $F(\bar{X})$ 分別為欲求取步進量及目標函數建構之矩陣。

由式(3.2)求得變數項的調幅量值 $d\bar{X}$ ，藉由 $\bar{X}_{i+1} = \bar{X}_i + d\bar{X}$ 步進運算更新變數，並進一步檢測與目標函數相符性。檢測方面可藉由 $|d\bar{X}|$ 或目標函數數值變化趨勢判斷整體運算收斂性。於收斂之趨勢下，計算之步進量值 $|d\bar{X}|$ 漸趨減小；目標函數數值亦會向零收斂，反之亦可判斷發散案例。以流程圖型式呈現牛頓法基本演算流程如圖 3.4 所示。

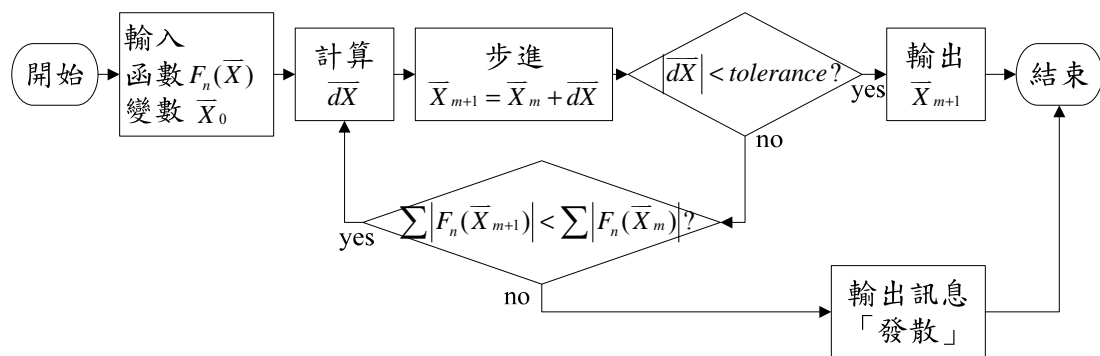


圖 3.4 牛頓法演算流程

套用至曲面搭接連續性調整，首要作業即為設定目標函數及變數項。於牛頓法演算中，方程式數量與變數數量等同下，可得較為穩定之結果，因此先針對固定數量項次變數項探求。以 G^1 連續調整為例，如圖 3.5 所示，設定由邊界向雙曲面各推演一排控制點為調整項，即變數項 X_n 。固定變數項次後，加總變數總量 n ，於搭接邊界選取等同數量之目標點。目標點之雙邊連續性誤差即為目標函數 $F_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ，目標為調整至雙邊誤差為零，即 $F_n(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$ 。於此設定下，即可符合牛頓法演算之相關條件，並以原始控制點為初始值，步入牛頓法演算，進行控制點求取、更新。

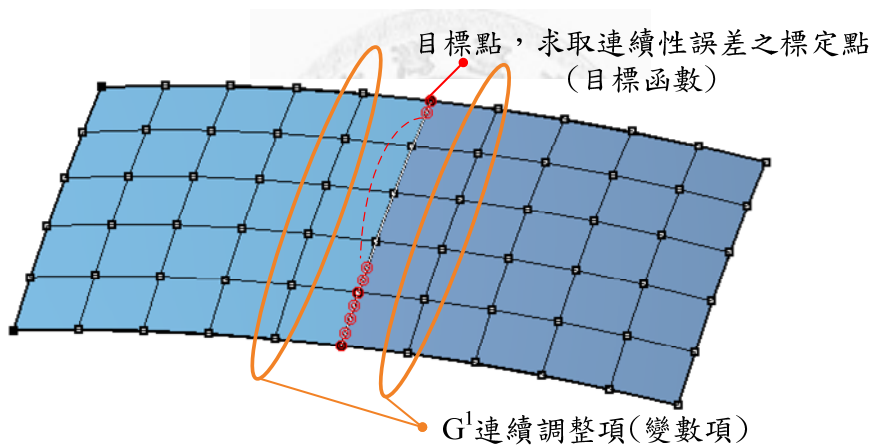


圖 3.5 數值調整 G^1 連續目標函數項、變數項設定示意

3.1.2 最速下降法(steepest descent method)

最速下降法[2][6]又稱為梯度下降法，其概念為利用函數梯度特性，進行極值搜尋。圖 3.6 為一搜尋步進範例，圈線部分為函數等高線；箭頭為各定點之梯度反方向，由此方法逐步搜尋，最終可達該函數極值(最小值)部位，即圖面中心位置。

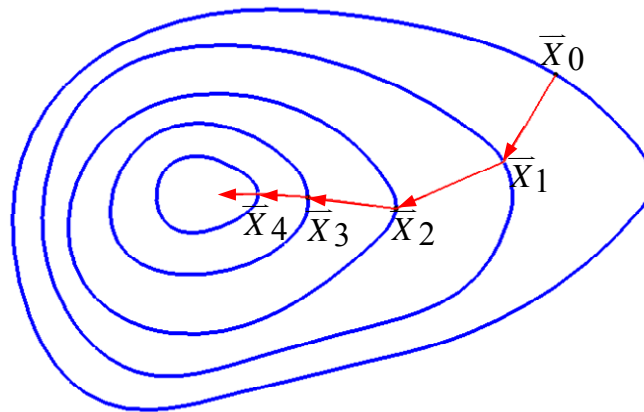


圖 3.6 最速下降法搜尋極值示意

以數學式呈現最速下降法關係式如下列：

目標函數： $G(X_1, X_2, \dots, X_n)$

變數： $\bar{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$

$$\text{關係式： } \nabla G(\bar{X}) = \left(\frac{\partial G(\bar{X})}{\partial X_1}, \frac{\partial G(\bar{X})}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial G(\bar{X})}{\partial X_n} \right) \quad (3.3)$$

式(3.3)由偏微分關係求得函數 $G(\bar{X})$ 於定點梯度 $\nabla G(\bar{X})$ ，其中 $-\nabla G(\bar{X})$ 即為步進搜尋方向。設定適當步進幅度 α 後，以關係式 $\bar{X}_{i+1} = \bar{X}_i - \alpha \nabla G(\bar{X})$ 進行變數更新，並代入目標函數檢測數值。若函數非遞減狀態，取消變數更新，並重新計算梯度，更新搜尋方向。往返搜尋步進，直至函數值趨於穩定，結束搜尋。圖 3.7 為一簡易最速下降法演算流程：

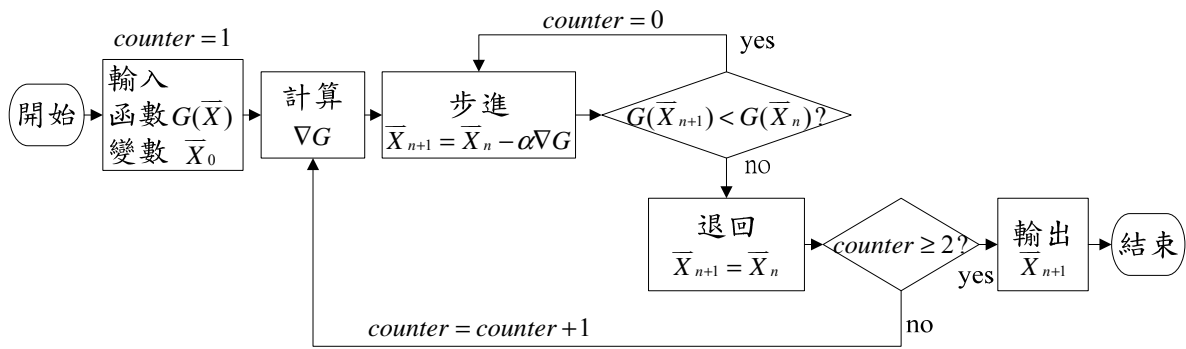


圖 3.7 最速下降法演算流程圖

由圖 3.6 最速下降法步進示意，可推估該演算法包含雙層迴圈架構，分別為外層梯度更新及內層微幅步進。於梯度(步進方向)計算後，進入內層迴圈，以微幅調整及函數值檢測，遞迴判斷並標定下一梯度計算點，進入下一階段步進。依此往返計算至函數趨於穩定。

整體演算流程藉由 *counter* 記數設計，識別終止條件。當梯度更新後，後續判斷若未進行步進演算，即新搜尋方向無收斂特性，設定 *counter* 未歸零，則變數無更新且 *counter* 持續累計，視該狀況點為極值狀態，即函數其一最小值所在位置，於此終止迴圈並輸出最終變數值。

將最速下降法極值搜尋流程引用至曲面搭接連續性調整。沿用於牛頓法中變數設定，以調整控制點為變數項 \bar{X} ；目標函數方面，於搭接邊界選取適量目標點，各目標點之搭接連續性誤差為目標函數子項 $F_k(\bar{X})$ ，藉由各目標函數子項進行平方和加總得到整體目標函數 $G(\bar{X})$ ，如式(3.4)，經演算得到梯度 $\nabla G(\bar{X})$ 即為控制點後續調整的參照方向。

$$G(\bar{X}) = \sum_{i=1}^k (F_i(\bar{X}))^2 \quad (3.4)$$

相關參數設定完成後，以原始控制點為初始參數，套用至最速下降法步進演算。於演算過程中即時更新變數項(曲面控制點)並求取新的函數值(連續性誤差)，遞迴演算至程式終止，最終輸出調整後曲面的控制點資訊並進行連續性檢測核對。

3.1.3 粒子群優化(particle swarm optimization, PSO)演算法

粒子群優化演算法[15][19]簡稱粒子演算法或 PSO 演算法，其為最佳化演算領域中較為新穎的演算概念，於西元 1995 年由 Kennedy 與 Eberhart[15]所發表。該理論藉由生物群體特性之觀察模擬，推演出一套數值演算方法，以生物群體行動覓食之隨從特性，對應至變數尋求最佳解之步進，並歸納模擬關係式。

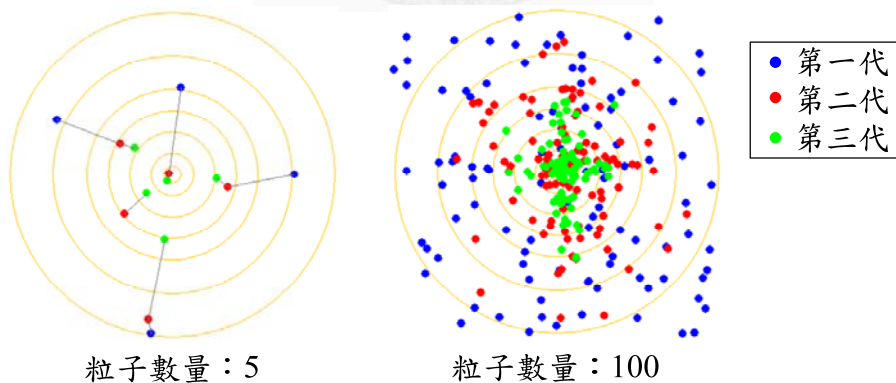


圖 3.8 二維空間 PSO 演算粒子步進示意圖

PSO 演算法使用較為直接的方式呈現，可以視為將一團粒子隨機拋撒至參數域中。對於各粒子進行函數計算並追蹤，藉由各粒子的函

數值參照比對，推估各粒子步進方向並更新。遞迴處理演進粒子，最終至收斂處即為所求。圖 3.8 為一簡易粒子演進示意，呈現 5 個粒子及 100 個粒子隨機灑入參數域(第一代)，並進行兩次演進(第二、三代)，最終皆可收斂至中心函數極值部位。

式(3.5)為 PSO 演算法之基礎關係式：

$$\begin{aligned} \bar{V}_{i+1} &= \bar{V}_i \\ &+ c_1 \times rand() \times (\overline{pbest}_i - \bar{X}_i) \\ &+ c_2 \times rand() \times (\overline{gbest} - \bar{X}_i) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\bar{X}_{i+1} = \bar{X}_i + \bar{V}_i$$

\bar{X}_i 為變數項； \bar{V}_i 為演進方向； \overline{pbest}_i 為整體演算流程個別粒子記錄之最佳位置； \overline{gbest} 為所有粒子於整體演算過程中最佳位置； c_1 、 c_2 分別為個體最佳及全域最佳之權重調控參數； $rand()$ 為 0 到 1 之間的隨機變數。其中整體向量維度由函數變數數量決定，其演進機制主要藉由演算過程中最佳參數記錄，推演得到適當步進方向。

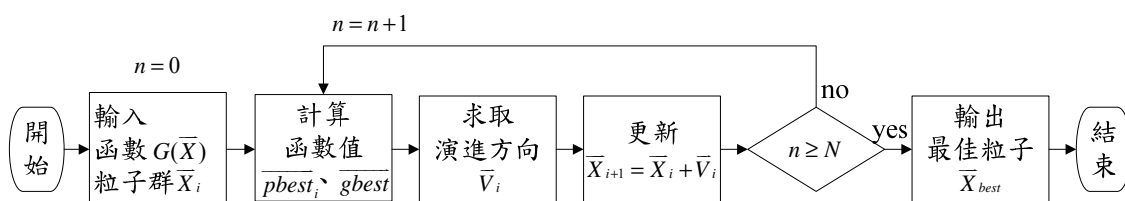


圖 3.9 粒子演算法流程圖

整體流程規劃一計數器 n 做為判別終止條件，每一輪變數更新，求取新的最佳值，計數器 n 累計一次。當 n 達到設定上限 N ，即輸出並終止運算，或可稱 n 為演進世代數。於特定函數型式會對應特定粒子數及演進世代數，若作適當設定，於求解上可兼顧精確性及求解效率。

引用至曲面搭接連續性調整，調整控制點設為變數項，並將所有調整點定義為單一個多維度向量形式；搭接邊界連續性誤差則設為目標函數。步入粒子演算法計算，產生大量變數向量進行演進，最終篩選對應函數值最佳之變數向量，即為調整目標。

於多變數函數下，PSO 演算法之粒子由一維參數轉為多維度參數，於運算上除需建構大量粒子外，尚須針對各粒子的多維參數進行處理。當粒子維度提升，為求有充分粒子可進行比對演進，於粒子數量上也需隨同提升。某程度上，消耗運算效能，卻也確保能找到恰當的解，此特性亦為 PSO 演算上較為不利之特性。

3.2 數值方法於曲面搭接連續性調整之銜接應用

曲面搭接連續性調整，於一般常見文獻多以求取解析解方式，進行求解調整。本研究以數值方法求取數值解，於其中最大的銜接點即在於曲面資料容器的建構。藉由自訂資料結構的設立，銜接曲面資料及數值方法，使得數值法得以應用於相關幾何調整上。以圖示方式呈現曲面資料如圖 3.10，並於實作上稱其為 **SurfaceDATA**。

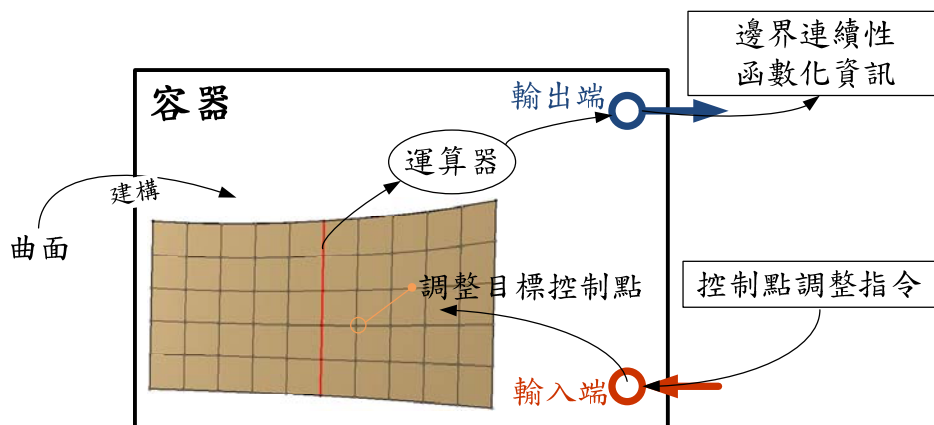


圖 3.10 曲面資料存取架構

SurfaceDATA 藉由曲面資料輸入，建構基本資料項。因應於曲面搭接連續性調整需取得曲面搭接邊界連續性誤差資訊，作為數值方法中目標函數項次。並且需有控制點參數的輸入端，作為變數項更新銜接點，因此於整體資料架構中建構資料傳輸端點：

輸入端：傳入控制點調整指令。

輸出端：讀取邊界連續性誤差資訊。

相關連續性誤差計算、控制點設定等指令皆規劃至 SurfaceDATA 內部運算。於後續運算上，只要替換外部數值方法，即可進行演算上更新。附錄 B 統整應用解析求解以及數值求解，對曲面搭接連續性進行調整實作之相關參數銜接程序。

圖 3.11 為曲面資料在數值演算過程中資料傳遞示意圖，於變數設定步驟中，皆將資料項傳輸至曲面資料內部，隨後擷取更新後之曲面誤差，遞迴演算更新，最終輸出項即為曲面最終更新資料。

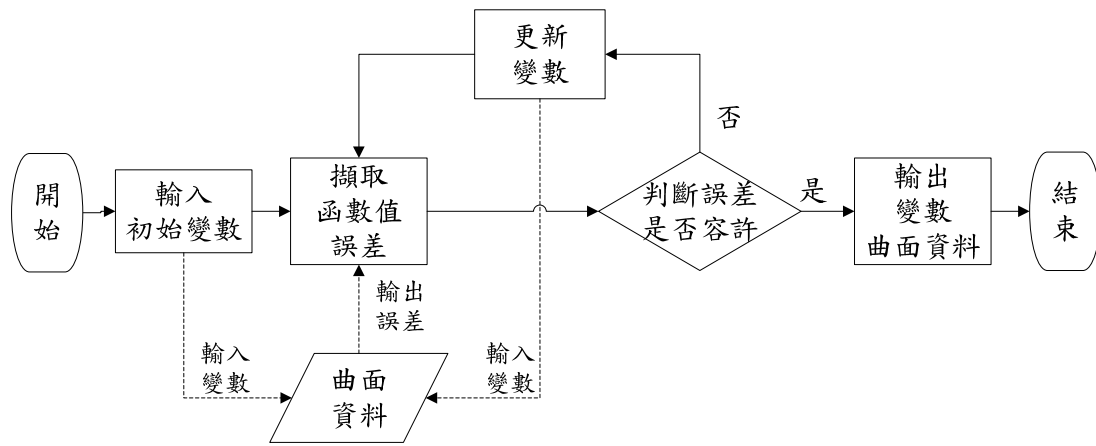


圖 3.11 曲面資料於數值演算過程中傳遞示意

後續調整部分，針對特定曲面搭接案例，整理一貫作業的搭接調整流程。如剪切曲面、田字形搭接曲面等。其資料項亦如同上列 SurfaceDATA 建構，並於內部演算上添增搭接邊界關係判斷等資料項，便於數值運算資料擷取應用。

3.3 案例探討曲面搭接連續性調整

曲面搭接連續性調整隨曲面銜接關係相異，可歸納出不同的資料擷取及調整設定方法。以雙曲面搭接為起始，說明其目標函數及變數設定，延伸處理邊界等同參數下四曲面田字形搭接關係調整設定。於後續曲面資料建構上，鋪設基礎周邊訊息。圖 3.12 呈現雙案例。

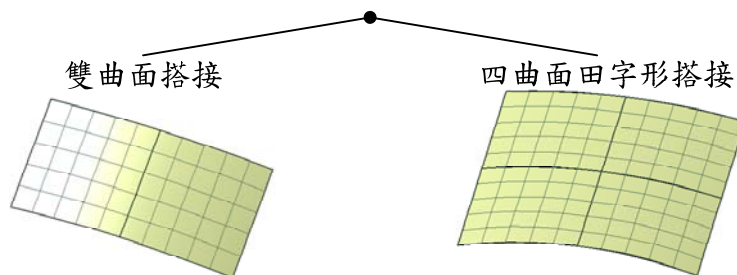


圖 3.12 雙案例曲面搭接關係

3.3.1 雙曲面搭接

雙曲面搭接連續性調整是為連續性調整最基礎之案例，於相關學科領域亦有眾多搭接連續性調整法則可依循，並導得解析解。於本研究引入數值解亦以基礎案例為出發點，異於解析求取流程，進行數值解之求取探討。以圖 3.13 為基礎，雙曲面搭接案例中，可再區分為(a)等同邊界參數搭接案例以及(b)剪切曲面搭接案例。針對雙案例分別進行說明並規劃各級連續性調整變數項及目標函數設定，試歸納統整可同時符合兩種搭接案例之設置方式。

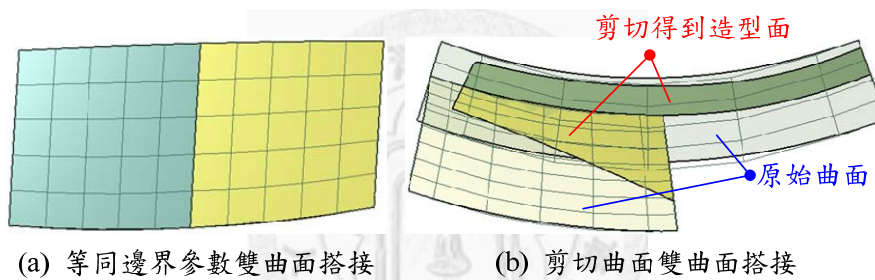


圖 3.13 雙曲面搭接關係

等同邊界參數搭接案例為一般正向建構中常見的曲面搭接狀況。如圖 3.13(a)所示，雙曲面控制點調變對邊界連續性影響幾乎為對稱關係，因此於參考曲面、調整曲面的決定上無需特意區辨，甚至亦可兩曲面同作為調整曲面。然而為求變數項精簡及對剪切曲面條件的適應，以單面調整為基準。於實作上選擇單邊為參考曲面，於調整過程中皆不變動該曲面；另一面訂為調整曲面，進行控制點變動調整，求取搭接連續性。

剪切曲面搭接狀況如圖 3.13(b)所示，雙曲面皆由大面剪切建構而成，並拼接為共同造型面，常見於逆向工程作業中，如車輛鈹件。因

鈹件造型面的變異、分割差異，常須對基底 B-spline 曲面進行切分，以得到需求造型，而此切分動作即得到剪切曲面，類似剪切案例於車輛鈹件中亦占多數，於調整處理上有一定的重要性。於連續性調整設定上限定剪切曲面為參考曲面；非剪切曲面為調整曲面。於下列說明剪切曲面搭接調整相關限制。

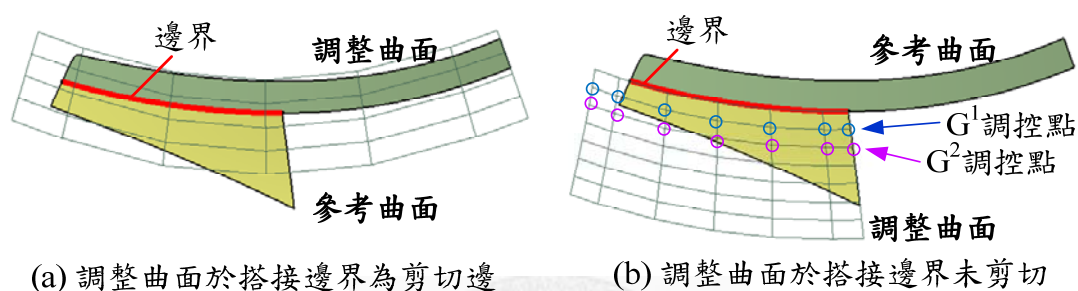


圖 3.14 剪切曲面搭接邊界連續性調整-調整曲面選擇

圖 3.14 顯示剪切曲面搭接關係兩種參考、調整曲面配置方式，兩者區辨以搭接邊界為基準，視調整曲面配合方式進行分類。(a)調整曲面以剪切邊界搭於搭接邊上，於此設定下，無法於調整曲面上選擇適當的 G^1 、 G^2 調控點，各控制點調變，皆有可能對邊界造成誤差；(b)則設定調整曲面搭接邊為非剪切邊界，在調控控制點的選擇上，藉由搭接邊界內推控制點排數，可明確定義 G^1 、 G^2 調控點，且 G^1 調控點不影響 G^0 連續、 G^2 調控點不影響 G^0 、 G^1 連續，於連續性調控上可順利進行 G^1 、 G^2 漸進調整。

由此歸納雙曲面搭接調整之限制條件，或稱預設條件：

- (1) 於輸入曲面資料至少有一曲面，以非剪切邊搭於搭接邊界上。
- (2) 選定符合條件(1)之曲面為調整曲面。

整體調整流程上由 G^0 連續條件規劃起始，於搭接邊界參數相同之下如前章節推演，於搭接邊界控制點重合即達到 G^0 連續性，於此並不探討 G^0 關係。延伸 G^1 、 G^2 連續性調整，以搭接邊界切平面法向量誤差訂為 G^1 調整目標函數；搭接邊界高斯曲率誤差或由 Kahmann[14]推演函數衍生項訂為 G^2 調整目標函數。於調整曲面定義搭接邊界控制點為第零排控制點，向外推演第一排控制點為 G^1 調整變數項、第二排控制點為 G^2 調整變數項。依此準則完成目標函數及變數之設定。然於控制點方面，皆須考量其三維度數值，即單一控制點相當於三變數項次，於實作調整中須恰當考量此變數。以圖 3.15 呈現各級連續性設定變數項次，即調整控制點。

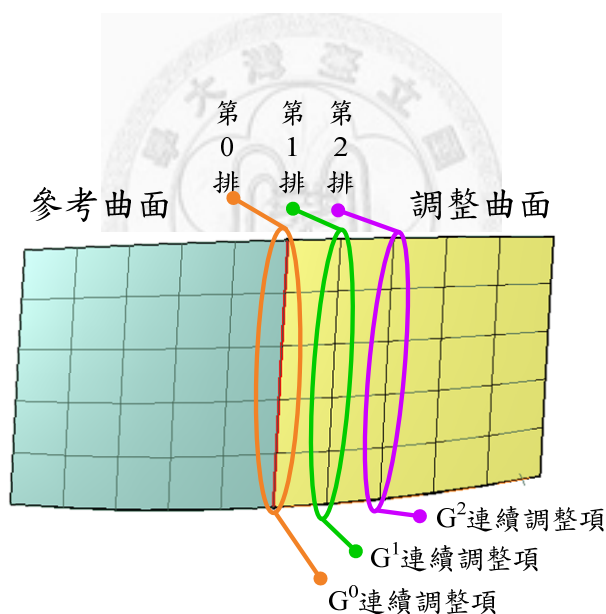


圖 3.15 雙曲面搭接連續性調整項次示意

於各級連續性調整變數項選擇依據，一方面須具有搭接連續性調整影響性；另一方面須適應各級連續性調整的演進，以 G^0 、 G^1 、 G^2 順序，遞進調變。以 G^2 連續調整目標為例，為達 G^2 連續性，前置作業須分別調得 G^0 、 G^1 連續，進而調整 G^2 關係。依此順序下，於後端調整者，不得對前項連續性造成破壞，最終才得以輸出符合條件之搭接

曲面。各級連續性調控點之選擇，亦以此依據，進行相關設定。圖 3.16 為各級連續性調變操作順序示意。

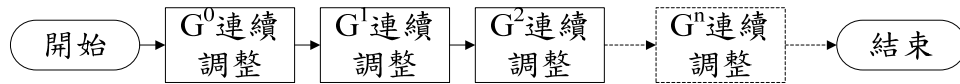


圖 3.16 各級連續性調變順序

3.3.2 等同邊界參數四曲面田字形搭接

於車輛鈹件案例中，除雙曲面單一組搭接案例外，亦常見多曲面搭接且彼此調整會有衝突現象之情形，四曲面田字形搭接即為一典型案例，如圖 3.17 所示。本研究針對該搭接狀況，於數值調整基礎上探討其調整流程規劃，試克服搭接衝突現象，調降連續性誤差。

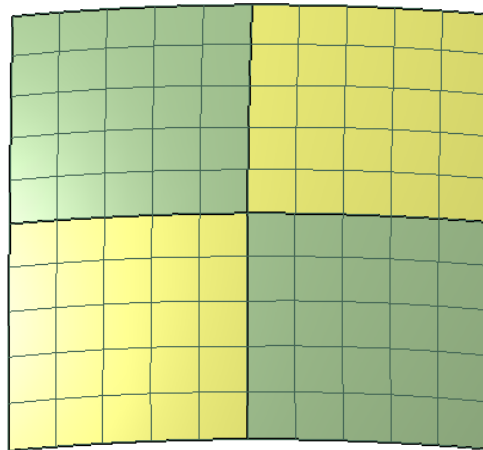


圖 3.17 等同邊界參數四曲面田字形搭接

以雙曲面搭接調整方法為基礎，在四曲面搭接案例中，亦以雙曲面調整為實作基底。初始設定上，依特定旋轉方向給定曲面代號，規劃以循環演進方式，分別進行雙曲面調整，於單一循環中達到四邊界校調。於調整過程中，亦即時顧量衝突狀況，並給予適當應對。異於

雙曲面調整之變數項設定，在該案例下，考量設定單一組曲面雙曲面皆為調整邊，此設定下，可有效達到平均分攤各控制點調幅，避免於特定調整過程中，因控制點移幅過大，造成後續調整之發散現象。

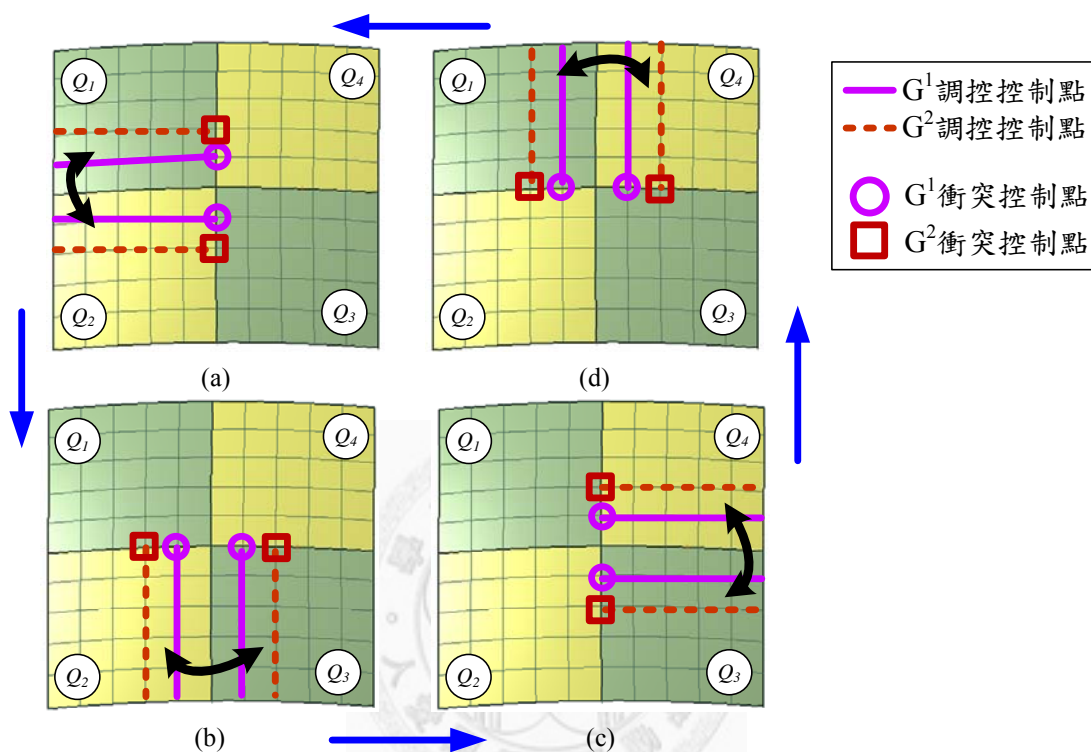


圖 3.18 田字形搭接連續性調整示意

於圖 3.18 所示，(a)為以 Q_1 、 Q_2 為調整曲面之基底條件下，數值求解雙邊控制點，目標達到 Q_1 、 Q_2 搭接邊界 G^1 及 G^2 連續性，此動作亦同於雙曲面搭接調整。然於此四曲面搭接案例中，調整下將產生衝突控制點之分歧狀況，如圖所示衝突控制點。(a)調整過程中，對 Q_1 、 Q_2 控制點進行調變，於衝突點位置即造成與 Q_4 、 Q_3 邊界控制點分歧，進而產生 Q_1 - Q_4 及 Q_2 - Q_3 搭接邊上的 G^0 連續誤差。為克服相關衝突問題，於實作上設定各衝突控制點在對應雙邊上共用該控制點。即對任意衝突控制點調整，相當於調變其對應之雙邊曲面。

依圖 3.18(a)至(d)流程，進行四曲面搭接連續性調整，依循四步驟進行數輪迴調整。於過程中，搭接誤差逐次壓低，控制點調變產生的衝突現象亦漸趨減緩，因此可藉由多次的調整操作，有效調降整體搭接誤差狀況。

以表 3.1 呈現連續性調整各步驟調整曲面。因於各步驟調整過程中，曲面間皆有衝突控制點的連帶關係，在曲面資料建構上異於雙曲面案例，設定以四片曲面為基礎單位，並於曲面資料內部建構相關曲面定義、邊界判別等提供數值調整擷取資料之窗口，於 4.1.2 小節詳細介紹其判別設定。

表 3.1 田字形搭接各步驟調整曲面規劃

步驟	a	b	c	d
調整曲面	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1

第四章 曲面搭接連續性調整實作

於前列章節，對於曲面搭接問題及相關求解工具皆已介紹。本章統整前述資訊，於曲面搭接連續性調整進行實作探討，實際依據整體連續性調整步驟討論曲面調整細節。圖 4.1 呈現曲面連續性調整步驟，本章由此向下規劃曲面資料、調整實作前處理以及調整實作三小節進行討論。

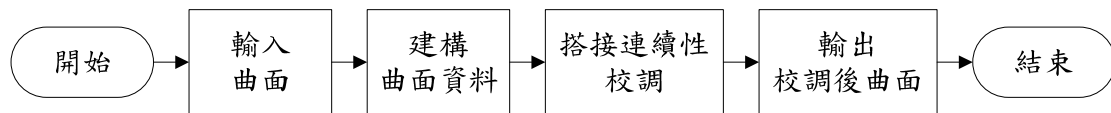


圖 4.1 曲面連續性調整步驟

4.1 曲面資料

為因應數值方法的連續性調整，如 3.2 節所述，於本研究中建構曲面資料(SurfaceDATA)資料項，以整合相關曲面資訊，提供周邊資訊擷取、設定為主要目標。在曲面建構範例上，區分為雙曲面搭接及四曲面田字形搭接兩大資料建構主體。因應調整特性相似，將雙曲面等同邊界參數搭接及剪切曲面搭接歸納為同一例。於曲面資料建構成形後，後續應用資訊之擷取，經由內部運算器轉譯，得到所須誤差資訊。

將曲面資料向下區分為前置建構及後續應用兩個討論項，進行探討。建構方面探討相異案例曲面資料建構之前置處理作業；應用方面針對誤差資訊擷取之內部運算及控制點調控指令，進行討論。以樹狀圖呈現曲面資料討論架構，如圖 4.2 所示。

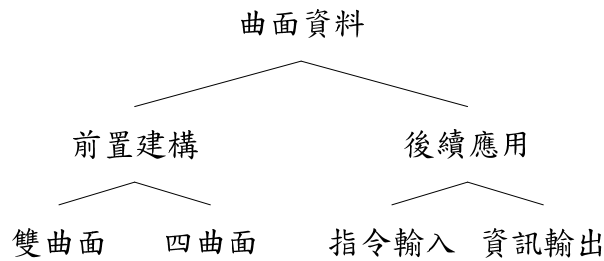


圖 4.2 曲面資料探討架構

4.1.1 曲面資料建構-雙曲面搭接案例

雙曲面搭接邊界調整中，於實作上選定單邊為參考曲面、單邊為調整曲面，此為基本的調整設定方式。在資料建構上亦以單邊參考、單邊調整為基底，建構相關資訊。

圖 4.3 以流程圖型式呈現曲面資料建構流程，並應對顯示曲面實體資訊傳遞、建構。由手動選擇參考曲面、調整曲面後，輸入曲面至建構流程，隨後進行目標函數、變數項的判斷，取得連續性調整應用基礎資訊，於此亦大致完成曲面資料建構。最終資料擷取，經由內部運算器一致性處理，取得需求邊界誤差資訊。

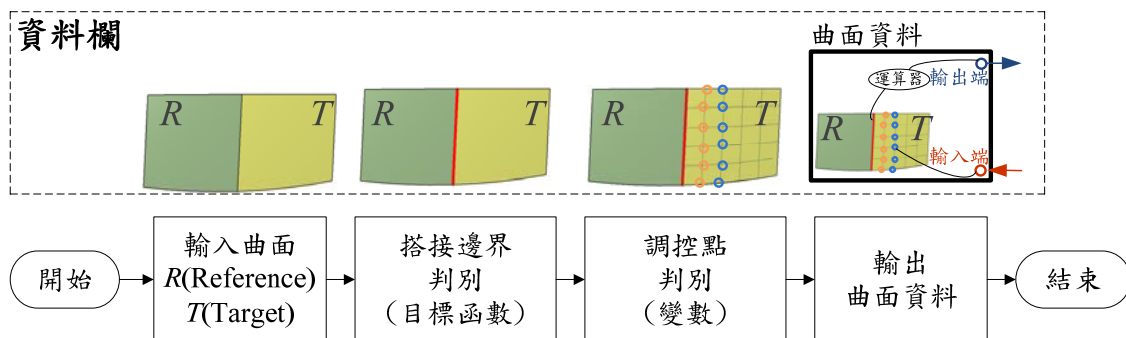


圖 4.3 雙曲面搭接曲面資料建構流程

曲面資料之輸入，為配合適用於剪切曲面，於建構資料層面給予些微限制。調整曲面之選擇，限定於搭接邊上之稜邊(edge)不得為剪切邊，使其可以恰當地求取調整控制點；參考曲面方面，因其只供擷取幾何資訊，於選擇上無須給定額外限制條件。

曲面搭接邊界判斷上，由輸入曲面資料擷取稜邊資訊，判別所有稜邊與曲面的銜接關係。當得到特定稜邊與雙片曲面相接，即可判別該稜邊為搭接邊界，並將其邊界資訊轉換為實體幾何資料，以 B-spline 曲線呈現。

誤差資訊之取得，藉由邊界曲線投影至雙曲面得到對應點資料，於雙邊對應點資料之幾何資訊比對，進而取得搭接誤差訊息，於此並無須額外進行雙曲面對應關係判斷。然於調控點判別上，藉由調整曲面與搭接邊界對應，區分四例討論，即四邊形補綴之四邊。

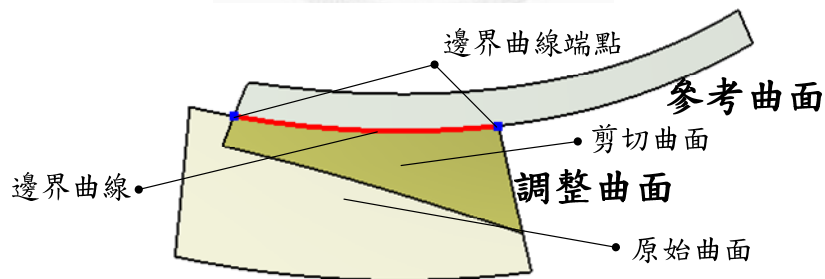


圖 4.4 調整曲面邊界示意

圖 4.4 為擷取邊界曲線之搭接狀況。以調整曲面為主體，對應邊界曲線，並取得邊界曲線之端點。後續得以利用邊界曲線端點於調整曲面的位置關係，判別搭接邊界屬於調整曲面四邊界中何者，於下列討論。

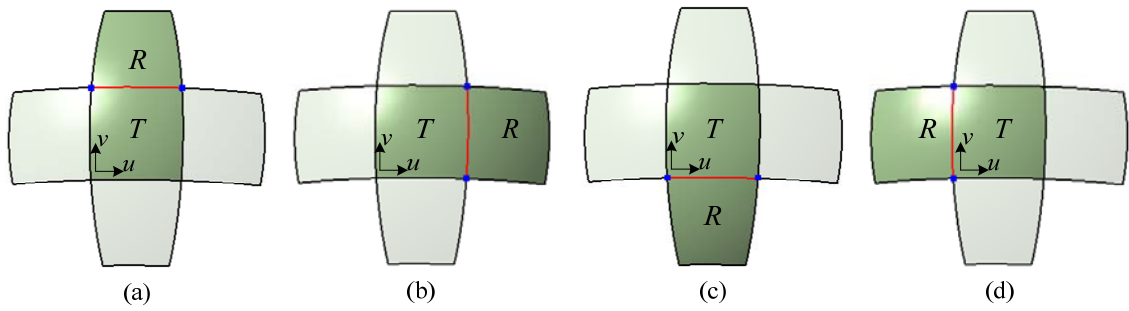


圖 4.5 搭接邊界分例探討

圖 4.5 以調整曲面為中心，分別討論參考曲面搭於四邊案例，利用搭接邊線端點特性，可明確區分四例搭接狀況。實作上即以此為依據，由邊線判別，進而得到調整控制點。因初始限定調整曲面之搭接邊為非剪切邊界，各調控點可於搭接邊界為起點推演求取，調整曲面搭接邊界向外推一排、兩排控制點，即分別為 G^1 、 G^2 調控點。表 4.1 條列即依照圖 4.5 分別列出相異搭接狀況下，邊界端點特性及控制點參數。

表 4.1 調整曲面於相異搭接邊之分例討論

案例	a	b	c	d
搭接邊線	$v = 1.0$	$u = 1.0$	$v = 0.0$	$u = 0.0$
端點特性				
G^1 調控點	$i \in [0, Nu-1]$ $j = Nv - 2$	$i = Nu - 2$ $j \in [0, Nv-1]$	$i \in [0, Nu-1]$ $j = 1$	$i = 1$ $j \in [0, Nv-1]$
G^2 調控點	$i \in [0, Nu-1]$ $j = Nv - 3$	$i = Nu - 3$ $j \in [0, Nv-1]$	$i \in [0, Nu-1]$ $j = 2$	$i = 2$ $j \in [0, Nv-1]$

*以 $\bar{C}_{i,j}$ 表示控制點， $i \in [0, Nu-1]$ 、 $j \in [0, Nv-1]$ 分別為 u 、 v 方向參數。

於曲面資料建構上，取得搭接邊界資訊，亦完成各級連續性調整控制點配置，此即完成雙曲面搭接案例之前置資料建構。

4.1.2 曲面資料建構-四曲面搭接案例

四曲面田字形搭接案例，其資料建構主體流程如同雙曲面搭接，然於相關判別上添增曲面項次及中心點辨識。圖 4.6 呈現建構流程及資料演進。於曲面輸入端，依固定循環次序輸入調整曲面，由此即可確認相互對應之搭接關係： Q_1-Q_2 、 Q_2-Q_3 、 Q_3-Q_4 、 Q_4-Q_1 ，四個搭接組。接續進行邊界、調控點判別，並輸出資料項。

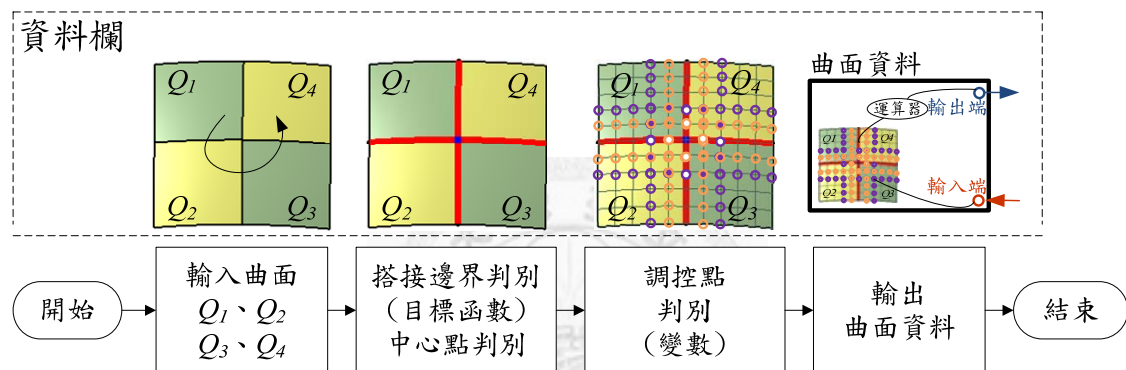


圖 4.6 四曲面田字形搭接曲面資料建構流程

搭接邊界判別上，依雙曲面邊界判別法則尋求四個搭接組之搭接邊界，並取得搭接邊幾何曲線資料。其後於搭接邊線上，任取兩曲線，進行端點比對，取得共點資訊者即為搭接中心點。中心點之取得，便於後續衝突點之判斷。

調控點之判別，亦依照雙曲面搭接案例，針對各調整曲面邊界分別探討，求取各級連續性調控點。異於雙曲面案例，四曲面搭接中設定搭接雙邊皆為調整曲面。衝突控制點判別，利用中心點投影至各曲面，取得中心點於各搭接面的 u 、 v 參數值，此即達到衝突點標定效用。下列說明之。

利用調控點及中心點參數對應關係，得以判別衝突點座落邊界。以表 4.1 案例(a)為例，引用至四曲面搭接 Q_1-Q_2 關係，於圖 4.7 呈現，針對其一調整曲面衝突點進行判別。搭接邊界於 Q_2 曲面參數為 $v=1.0$ ，以下曲面座標參數皆針對 Q_2 曲面。當求得中心點參數為 $(u,v)=(1.0,1.0)$ ，可得知衝突點應坐落於 $u=1.0$ 邊上，由此可得 $\bar{C}_{Nu-1,Nv-2}$ 、 $\bar{C}_{Nu-1,Nv-3}$ 分別為 G^1 、 G^2 衝突點。於此推演其餘三曲面，即可完成四曲面資料建構。

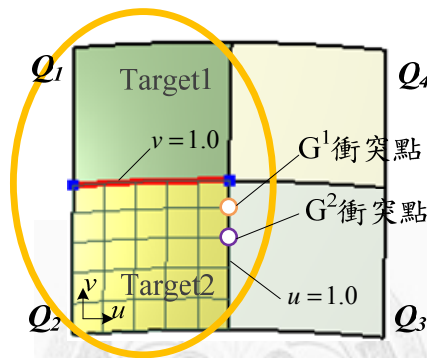


圖 4.7 衝突點判別圖示

4.1.3 曲面資料應用-調控指令接收

曲面控制點為三維空間中座標參數，利用向量形式，呈現其空間維度。以 $\bar{C}_{i,j}$ 表示曲面控制點。 $i \in [0, Nu-1] \wedge i \in \mathbb{N}$ 、 $j \in [0, Nv-1] \wedge j \in \mathbb{N}$ 。 i 、 j 分別代表 u 、 v 參數方向； Nu 、 Nv 表示 u 、 v 方向控制點數量。

因於數值方法演算中，單一變數項調變，設定以純量形式調整。於控制點，將其由向量形式拆解為座標式，取得純量數據。

$$\bar{C}_{i,j} = (a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}) \quad (4.1)$$

如式(4.1)所示，數值方法調控變數項設定，即選定調整控制點之三維參數 $a_{i,j}$ 、 $b_{i,j}$ 、 $c_{i,j}$ ，各為獨立選項，於數值演算中分別演進。

在曲面資料中，調控指令之接收，設計一判斷器，針對**曲面**、**曲面控制點**以及**控制點三維度**進行判別，使輸入變數得以指定到正確位置。於變數資料傳遞上，即以一陣列欄位進行指令傳送。以表 4.2 呈現欄位規劃，分別建構 S 、 i 、 j 、 C 整數參數項，作為判別閥。

表 4.2 變數資料傳遞陣列規劃

欄位	1	2	3	4
資料項	曲面判別	曲面控制點判別	控制點三維度判別	變數值
資料代號	S	i, j	C	X

4.1.4 曲面資料應用-誤差資訊擷取

曲面資料建構部分，其作業僅止於曲面置入及邊界、調控點判別，於誤差資訊之擷取，尚未進行處理。試於曲面資料內部建構一運算器，轉換邊界資訊為誤差訊息，此小節即針對運算器之設計進行探討。

曲面搭接誤差資訊，於特性上為單一座標點訊息，在曲面搭接邊界上，視邊線切分刻度大小，可得到相異誤差訊息密度，如圖 4.8 所示。於邊界曲線切分密度高時，可得到較細緻的誤差顯示，反之較為粗略。運算器之設計亦以單一定點誤差訊息擷取為基礎，視後續運算需求再調整擷取訊息數量。

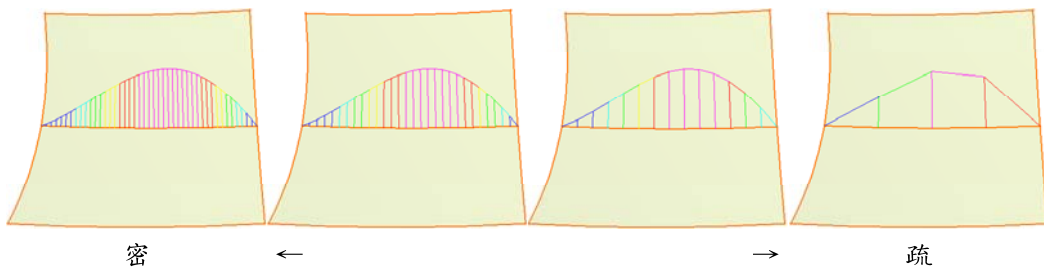


圖 4.8 曲面搭接誤差顯示與邊線細切密度關係

以雙片搭接曲面、正規化之獨立參數搭接邊線及邊線上特定參數值，三參數項為運算器輸入端，經資料對應處理得到需求誤差項。於搭接邊線部分，為求後續切分、定點標定的便利性，皆對曲線資料以正規化作業處理，使其參數域收限至固定範圍 $v \in [0.0, 1.0]$ 。於此即可明確標定 $v=0.0$ 、 $v=1.0$ 分別為邊線兩端點，以及藉由特定參數 v 之輸入，可得需求標定點。

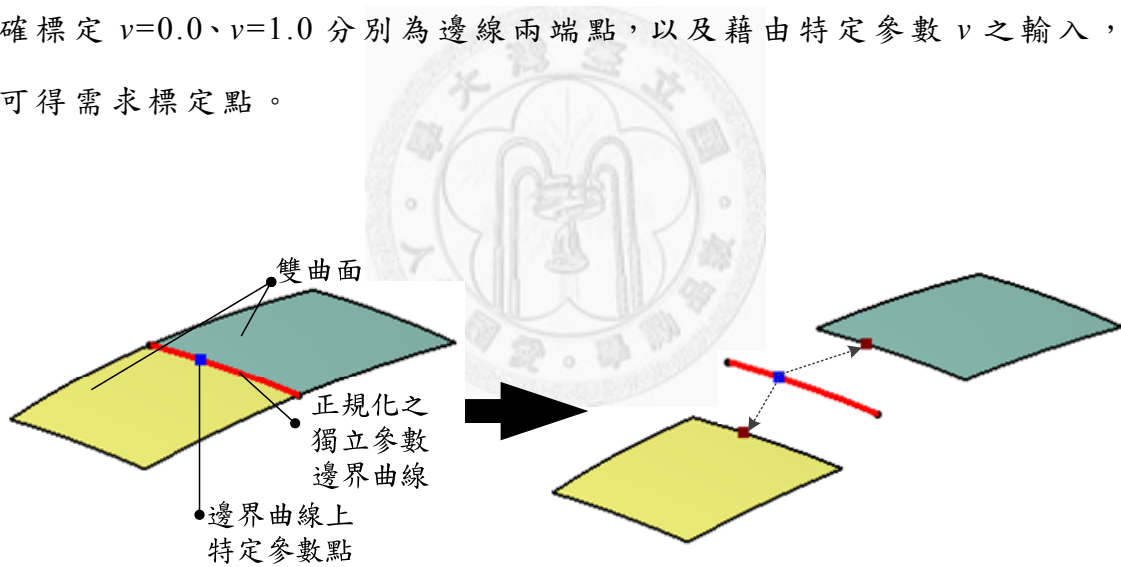


圖 4.9 雙曲面邊界點標定示意

圖 4.9 所示，利用輸入曲線參數值，於邊界曲線上訂出標定點。將標定點投影至雙曲面上，得到雙邊對應點資料。藉由比對雙曲面於定點上的幾何資訊誤差，即可得到所需誤差訊息。

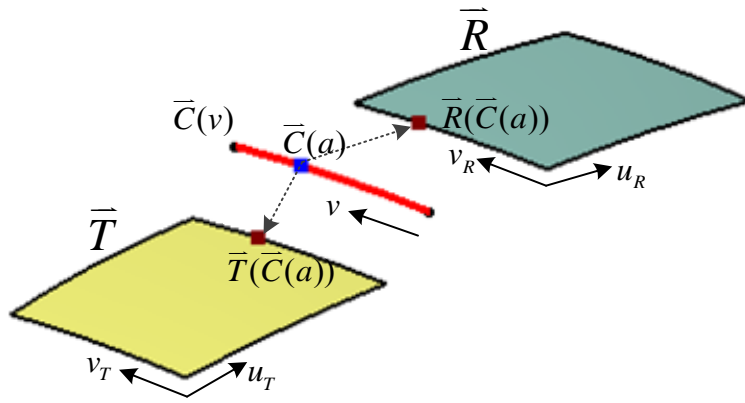


圖 4.10 雙曲面搭接邊界資料對應示意

圖 4.10 將 \bar{R} 、 \bar{T} 視為 \bar{C} 之函數，以向量形式呈現雙曲面於邊線 \bar{C} 處特定參數下 ($v=a$)，對應之資料點 $\bar{R}(\bar{C}(a))$ 、 $\bar{T}(\bar{C}(a))$ 。利用資料點訊息，進一步求取 G^0 、 G^1 、 G^2 誤差函數。

簡化表示式，將資料點以 \bar{P}_R 、 \bar{P}_T 取代：

$$\bar{P}_R(v) = \bar{R}(\bar{C}(v)) \quad (4.2)$$

$$\bar{P}_T(v) = \bar{T}(\bar{C}(v)) \quad (4.3)$$

以 \bar{N}_R 、 \bar{N}_T 表示於資料點上對應雙曲面切平面法向量：

$$\bar{N}_R(v) = \text{Normalize}(\bar{R}_u(\bar{C}(v)) \times \bar{R}_v(\bar{C}(v))) \quad (4.4)$$

$$\bar{N}_T(v) = \text{Normalize}(\bar{T}_u(\bar{C}(v)) \times \bar{T}_v(\bar{C}(v))) \quad (4.5)$$

$Curvature_R$ 、 $Curvature_T$ 表示資料點於雙曲面參數座標上高斯曲率：

$$Curvature_R(v) = Curvature(\bar{R}(\bar{C}(v))) \quad (4.6)$$

$$Curvature_T(v) = Curvature(\bar{T}(\bar{C}(v))) \quad (4.7)$$

$\bar{R}_u(\bar{C}(v))$ 、 $\bar{R}_v(\bar{C}(v))$ 、 $\bar{T}_u(\bar{C}(v))$ 、 $\bar{T}_v(\bar{C}(v))$ 分別為雙參數曲面對 u 、 v 方向之微分值； $Normalize(\bar{V})$ 呈現對輸入向量 \bar{V} 進行正規化運算；藉由 $Curvature(\bar{Q})$ 表示於曲面資料點 \bar{Q} 上高斯曲率擷取之作業，詳細運算式如式(2.19)、式(2.20)。

由資料點、切平面及高斯曲率訊息，遞演求取誤差關係式，分別以 $Func_{G^0}$ 、 $Func_{G^1}$ 、 $Func_{G^2}$ 表示 G^0 、 G^1 、 G^2 搭接誤差。 G^0 誤差為資料點距離誤差； G^1 誤差為正規化之切平面法向量距離差，同於切平面法向量角度差，得以判別 G^1 誤差； G^2 誤差為曲率差值除以平均曲率並取絕對值，以百分比型式呈現 G^2 誤差資訊：

$$Func_{G^0}(v) = Distance(\bar{P}_R(v), \bar{P}_T(v)) \quad (4.8)$$

$$Func_{G^1}(v) = Distance(\bar{N}_R(v), \bar{N}_T(v)) \quad (4.9)$$

$$Func_{G^2}(v) = \left| \frac{(Curvature_R(v) - Curvature_T(v))}{\left(\frac{Curvature_R(v) + Curvature_T(v)}{2} \right)} \right| \quad (4.10)$$

藉由 $Distance(\bar{A}, \bar{B})$ 表示雙向量 \bar{A} 、 \bar{B} 間距。

於此得到以邊界曲線參數 v 為函數參數之搭接誤差訊息函數，其搭接誤差之運算可推演至任意雙曲面銜接關係。此外，藉由 Kahmann[14] 推演之關係式，重整 G^1 、 G^2 連續關係。可得到對應效果較佳之 G^1 、 G^2 連續調整目標函數，亦整理該函數項列為調整選擇之項次。

引用式(2.18)及式(2.33)、式(2.34)、式(2.35)，並進一步考量非等同邊界參數案例。分列 G^1 、 G^2 搭接調整目標函數。

$$Func_{G^1}(v) = \left| \det \left(p\bar{R}_u + q\bar{R}_v, \bar{T}_u, \bar{T}_v \right) \right| \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} Func_{G^2}(v) = & \left| \det \left(\bar{T}_u, \bar{T}_v, \bar{R}_{uu} - A_1^2 \bar{T}_{uu} - 2A_1 B_1 \bar{T}_{uv} - B_1^2 \bar{T}_{vv} \right) \right| \\ & + \left| \det \left(\bar{T}_u, \bar{T}_v, \bar{R}_{uv} - A_1 A_2 \bar{T}_{uu} - A_1 B_2 \bar{T}_{uv} - A_2 B_1 \bar{T}_{uv} - B_1 B_2 \bar{T}_{vv} \right) \right| \\ & + \left| \det \left(\bar{T}_u, \bar{T}_v, \bar{R}_{vv} - A_2^2 \bar{T}_{uu} - 2A_2 B_2 \bar{T}_{uv} - B_2^2 \bar{T}_{vv} \right) \right| \end{aligned} \quad (4.12)$$

於實作上以式(4.11)為目標函數，先針對 G^1 連續性調整。 p 、 q 為向量量值平衡係數，直接設定為 $p=q=0.5$ 。於 G^1 連續調整完成後，再由式(4.13)、式(4.14)擷取向量三維度參數，任取兩參數以聯立式計算 G^2 係數，於各邊界點上獨立求解係數 $A_1(v)$ 、 $A_2(v)$ 、 $B_1(v)$ 、 $B_2(v)$ 。接續以式(4.12)為目標函數，進行 G^2 連續調整。

$$\bar{R}_u = A_1(v) \cdot \bar{T}_u + B_1(v) \cdot \bar{T}_v \quad (4.13)$$

$$\bar{R}_v = A_2(v) \cdot \bar{T}_u + B_2(v) \cdot \bar{T}_v \quad (4.14)$$

除於連續性調整過程上可選擇相異數值方法，在目標函數之選擇上，亦可視搭接案例之適應性，挑選適當目標函數，進行數值求解。

4.2 調整實作前處理

為確保輸入資料項得以順利引至規劃程式中，於搭接連續性調整前端加入預設條件。於前處理步驟，即以滿足輸入資料預設條件為目標，針對可能例外狀況，歸納排除問題之方法。將例外狀況分為兩例，並說明前置處理方法：

(1) 搭接雙邊於搭接邊界皆為剪切邊

於雙曲面搭接案例中，為求能順利求取各級連續性之調控點，前端限制上，以輸入資料單邊邊界為未剪切邊為限。當輸入曲面資料未符合條件，於實作上利用 CATIA[3]或 Imageware[11]進行初步調整，使其至少一端曲面，參數資料貼合至邊界上，達到單邊未剪切需求。圖 4.11 起始資料雙邊邊界皆為剪切邊。藉由 CATIA 軟體 Free Style 模組下處理，將特定一端邊界調為非剪切邊，達到連續性調整處理之先決條件。

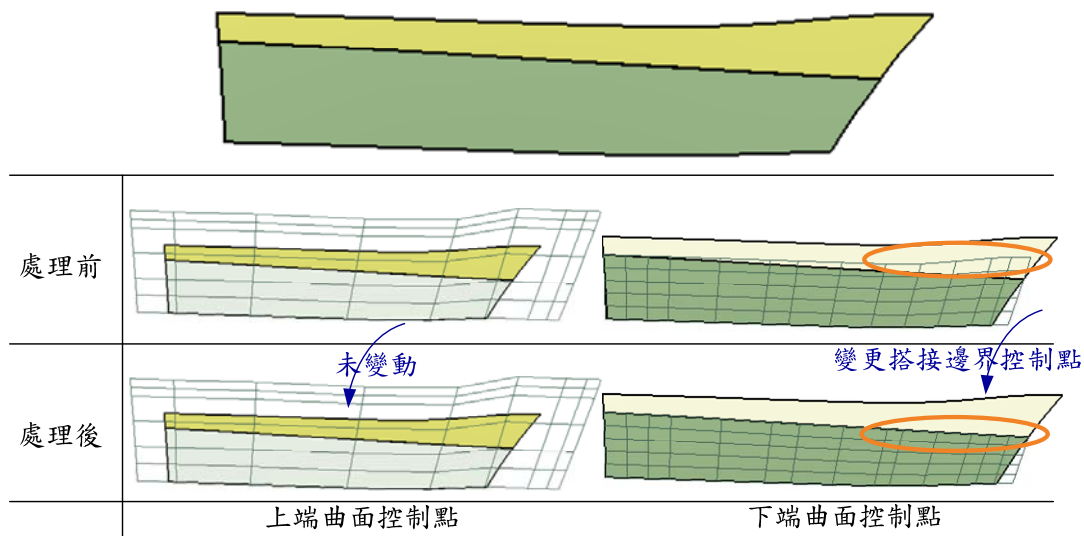


圖 4.11 剪切邊界前處理示意

(2) 曲面邊界為零散資料

曲面邊界資訊之判別，由邊線擷取並投影邊線點資料至雙邊曲面，計算對應點之誤差而得。若搭接邊線為零散稜邊資料，於尋求特定點誤差項難以標定，且難以均勻切分邊界資訊。利用 SpringSolidCAD 建構之 Product DATA Quality 功能，進行前置處理，使邊界達完整狀況。圖 4.12 呈現邊線斷裂及邊線完整差異，亦為處理前、處理後示意圖。

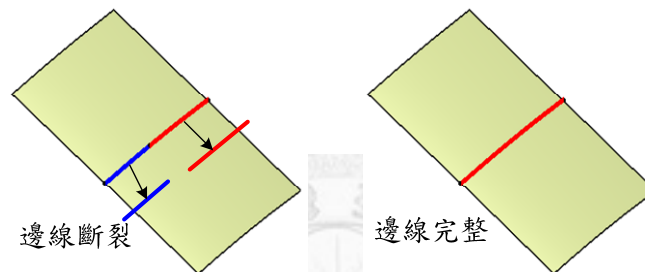


圖 4.12 零散邊線前處理示意

(3) 輸入曲面未達 G^0 連續

本研究主體針對 G^1 、 G^2 連續討論，未深入探討 G^0 連續關係。於未達 G^0 連續之曲面上，利用 CATIA 或 Imageware 進行初步調整，使曲面搭接關係符合 G^0 連續，亦便於後續邊線擷取作業。

4.3 調整實作

本研究在曲面搭接連續性調整實作上，建構之實作內容，皆以數值方法為調整演算工具，未針對等同邊界參數案例進行解析解求取。因此於案例僅區分雙曲面搭接調整、四曲面田字形搭接調整以及序列曲面搭接調整三大實作項。圖 4.13 顯示三大案例及其對應實作對話框。

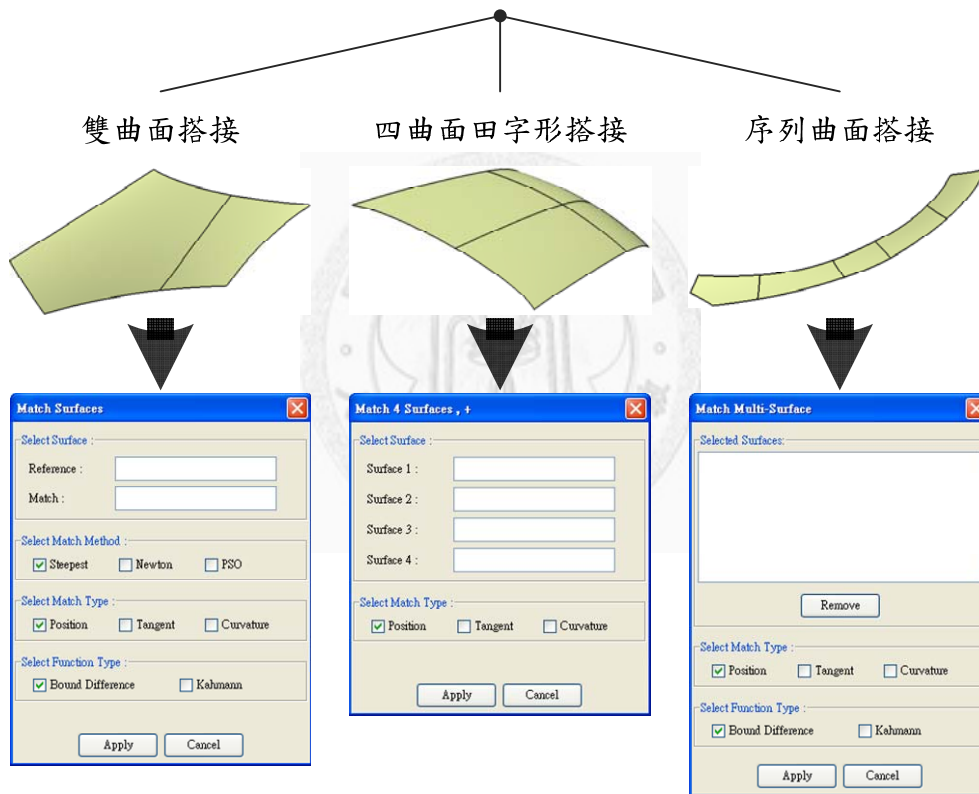


圖 4.13 曲面搭接連續性調整實作分例

於以下小節，針對三大案例實作對話框建構、周邊限制以及相關實作細節進行說明。

4.3.1 雙曲面搭接調整

圖 4.14 呈現雙曲面搭接調整實作之對話框。於調整實作上，依照對話框所示選擇流程，選取曲面以及適當操作參數，完成選擇後，遞送調整，並輸出調整後曲面資料。



圖 4.14 雙曲面搭接連續性調整實作對話框

步驟一：選擇曲面資料

於介面中點選曲面，或於樹狀圖中選取曲面對應項，進行曲面選擇。【Reference】端輸入參考曲面；【Match】端輸入調整曲面。調整曲面限定於搭接邊界為非剪切邊。

步驟二：選擇數值方法

提供【Steepest】(最速下降法)、【Newton】(牛頓法)、【PSO】(粒子群優化演算法)，三種數值方法。擇一作為調整工具。

步驟三：選擇調整等級

視調整目標需求，選擇【Tangent】(G^1 連續)、【Curvature】(G^2 連續)調整。

步驟四：選擇目標函數

分列兩項。第一項【Bound Difference】直接取用搭接邊界資訊誤差，透過式(4.9)、式(4.10)擷取誤差資訊；第二項【Kahmann】引用Kahmann推演延伸資料，以式(4.11)、式(4.12)為目標函數。

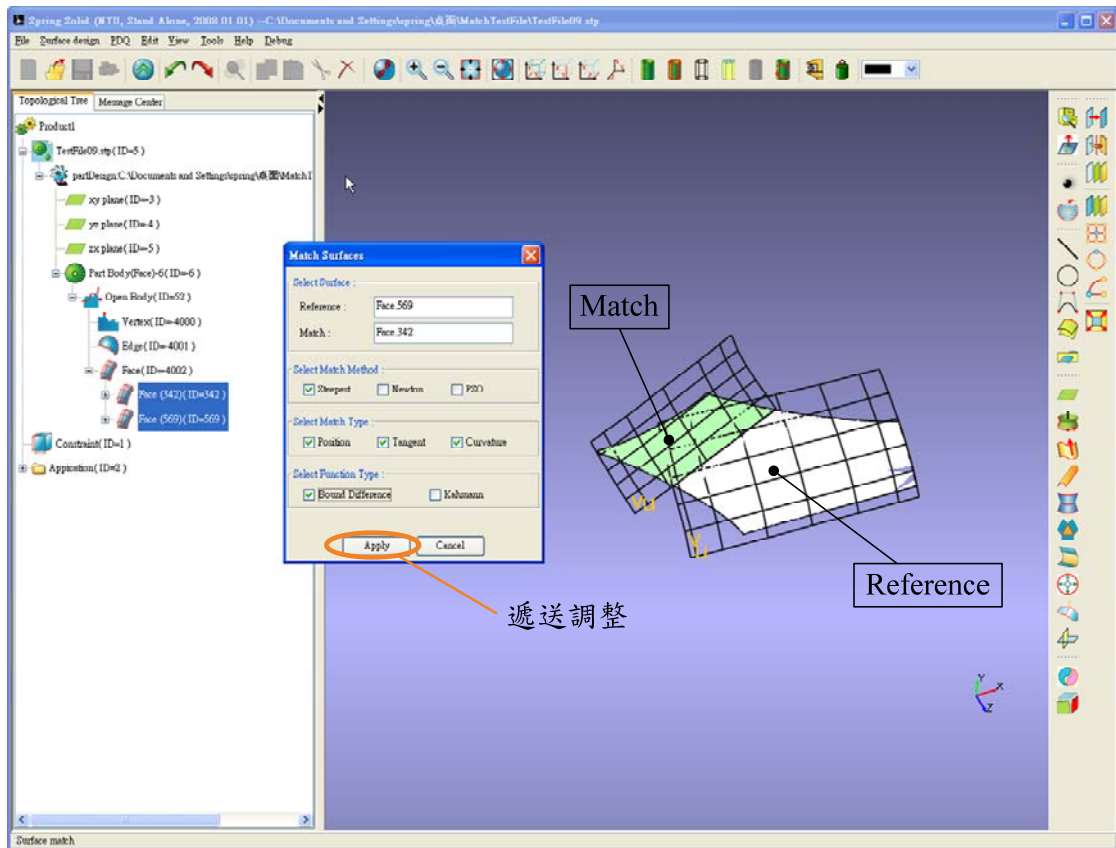


圖 4.15 雙曲面搭接連續性調整實作

圖 4.15 顯示雙曲面搭接調整整體實作狀況，已對雙曲面進行選擇。數值方法選用【Steepest】；連續性調整等級至【Curvature】；目標函數選用【Bound Difference】。後續操作步驟五：遞送調整，完成調整。

4.3.2 四曲面田字形搭接調整

四曲面田字形搭接調整部分。數值方法方面，直接選用整體調整效果較佳之最速下降法；目標函數方面，因該案例限制搭接邊界等同參數，必也幅合雙邊搭接邊界為非剪切邊狀況，故直接選用【Kahmann】項為目標函數。實作上僅餘曲面及調整等級供選擇。如圖 4.16 所示。



圖 4.16 四曲面田字形搭接連續性調整實作對話框

步驟一：選擇曲面資料

限定四曲面以田字形關係搭接，且於搭接邊界必為等同參數狀況，依照特定旋轉方向，分別選取四曲面。

步驟二：選擇調整等級

視調整目標選擇連續性調整等級。

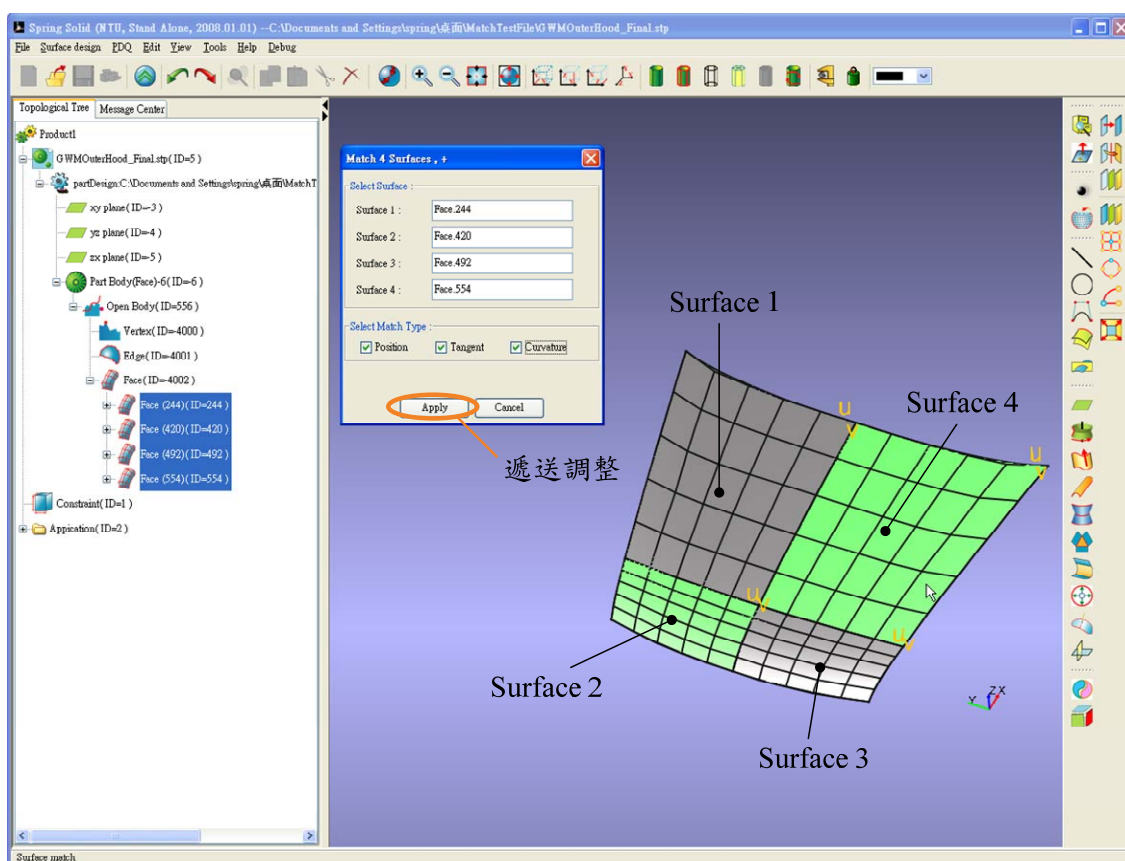


圖 4.17 四曲面田字形搭接連續性調整實作

圖 4.17 顯示四曲面田字形搭接調整實作狀況，依特定循環方向完成曲面資料之選取，並於調整級數選擇【Curvature】之調整。操作步驟三：遞送調整，完成連續性調整作業。

4.3.3 序列曲面搭接調整

類似於四曲面搭接狀況，數值方法方面，選擇最速下降法作為連續性調整工具；目標函數方面因尚有搭接邊界對應關係的不確定性，因此亦提供相異目標函數之選擇適應。實作對話框如圖 4.18 所示。



圖 4.18 序列曲面搭接連續性調整實作對話框

步驟一：選擇曲面資料

依照曲面銜接順序，進行資料項之選取。調整案例僅限於未有衝突狀況之曲面資料組。

步驟二：選擇調整等級

視調整目標選擇連續性調整等級。

步驟三：選擇目標函數

建構【Bound Difference】、【Kahmann】兩目標函數設計項供選擇，
建構內容如雙曲面搭接調整實作所述。

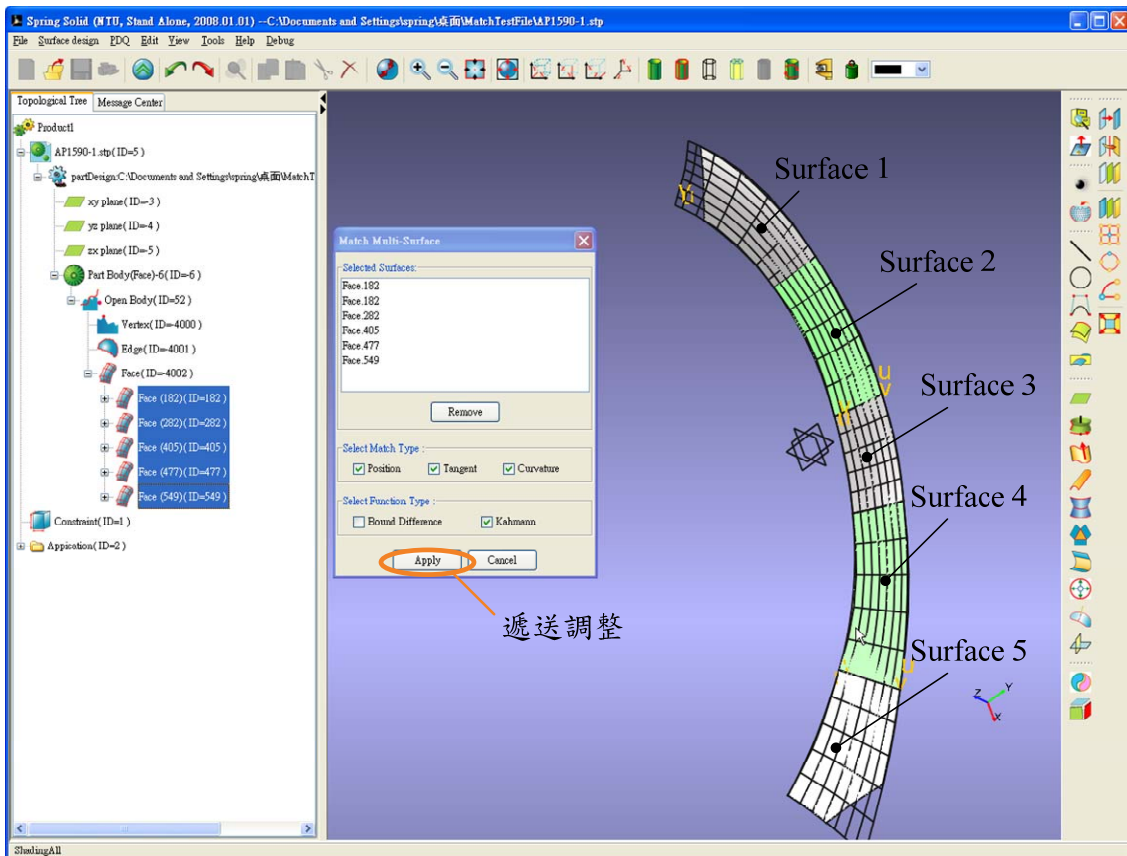


圖 4.19 序列曲面搭接連續性調整實作

於圖 4.19 顯示序列搭接調整實作狀況，已依照曲面搭接順序，完成曲面資料之選取。調整級數選擇【Curvature】；目標函數選用【Kahmann】，操作步驟四：遞送調整，即可完成連續性調整作業。

第五章 實例驗證與討論

本章節針對 B-spline 曲面搭接連續性調整進行實例探討，以數值方法為輔助工具，調整曲面，目標調整搭接關係至符合 A 級面。並於資料輸出後，利用逆向工程領域通用之軟體進行驗證討論。

於驗證上選用軟體 Imageware[11]及 CATIA[3]作為效果檢閱工具。Imageware 為當前全球重要的電腦輔助逆向工程及自由造型曲面設計軟體，具有強大的逆向工程資料處理能力及自由曲面建構能力。於汽機車工業、航太工業、製鞋工業等領域中，皆廣泛的應用其能力。於逆向工程作業上，亦為普為業界所認同；CATIA 為強大的電腦輔助設計軟體，整合機械設計、外形造型設計、模具設計等全方面的產品設計能力，於傳統汽車、航太、造船等產業上皆廣泛應用其功能。

驗證討論架構，於 5.1 節先針對數值方法的選用進行實作討論，並於其輸出結果評比，選用較佳之調整方法，實作於後續調整。5.2 節呈現各式搭接案例調整結果，於 5.3 節進行整體的搭接調整討論。

5.1 數值方法實作討論

於數值方法之選擇運用上，由 3.1 節所介紹三種演算方法進行實作。以雙片曲面等同邊界參數搭接為基礎，設計兩測試案例，分別由三方方法進行調整實作，並輸出結果於 Imageware 中呈現。試於調整結果評比討論選用之數值方法於搭接邊界連續性調整之效能良窳。

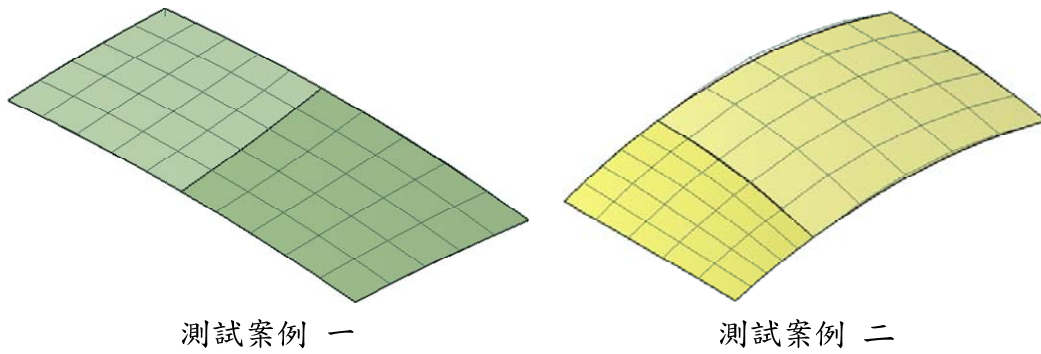


圖 5.1 數值方法評比測試案例

由圖 5.1 呈現測試案例。兩案例於搭接 G^0 連續狀態皆已達連續，即位置誤差小於 0.001mm ； G^1 誤差方面，測試案例一最大誤差值為 0.275deg ；測試案例二最大誤差值為 0.736deg ； G^2 誤差方面，測試案例一最大誤差值為 14.01% ；測試案例二最大誤差值為 25.76% 。

試以雙曲面測試案例 G^1 、 G^2 連續性調整效能及效果為依據，目標達到 G^1 誤差小於 0.05deg ； G^2 誤差小於 1.0% 。其中針對調整收斂性、調整穩定性及調整耗時三者為各數值方法評比依據，選擇適用調整方法，並衍生應用於特殊案例。在目標函數的選擇上，為求檢視標的一致性，此部份統一選用【Bound Difference】為目標函數項。以表格形式呈現測試案例連續性調整結果，表 5.1、表 5.3 呈現雙案例原始資訊，並明定參考曲面、調整曲面；表 5.2、表 5.4 分別列出相異調整方法之調整結果。

表 5.1 測試案例一-原始資料

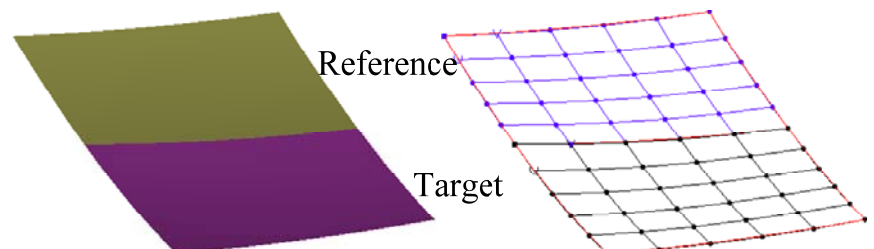
原始資料		
	G ¹ 誤差 : Max 0.275 deg	G ² 誤差 : Max 14.01 %

表 5.2 測試案例一-連續性調整結果比較

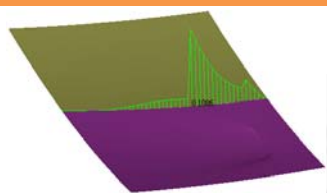
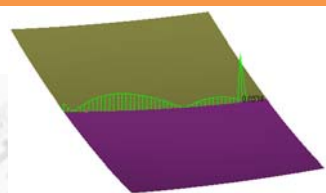
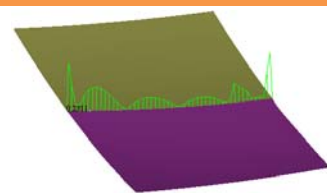
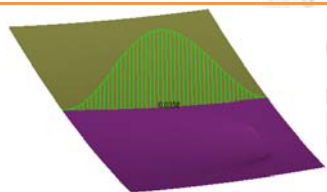
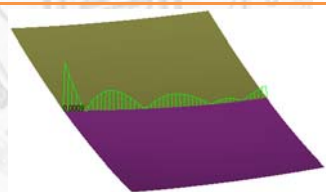
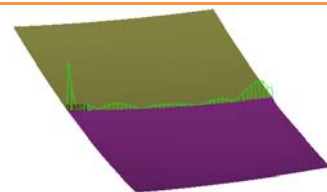
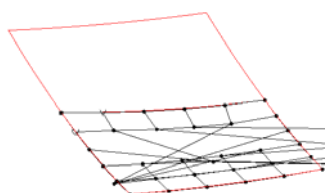
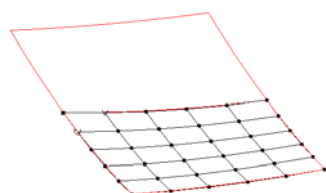
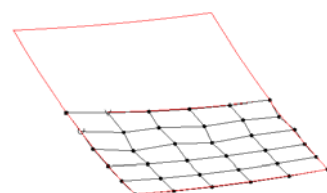
	牛頓法	最速下降法	粒子群優化演算法
G ¹ 誤差			
	Max: 0.109 deg	Max: 0.057 deg	Max: 0.231 deg
G ² 誤差			
	Max: 3.58 %	Max: 0.09 %	Max: 95.51 %
控制點分佈			
調整時間	0.11 s	10.19 s	57.91 s

表 5.3 測試案例二-原始資料

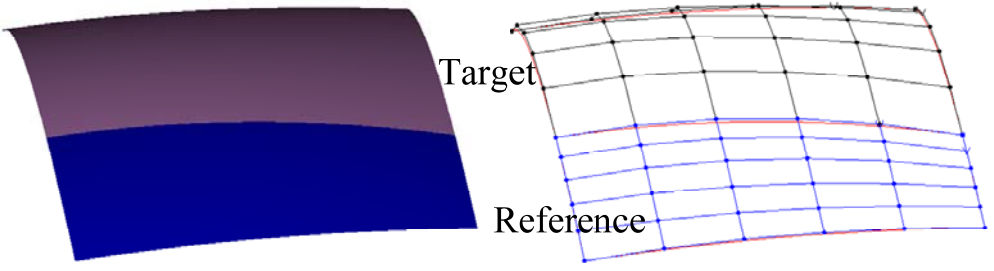
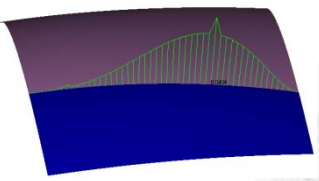
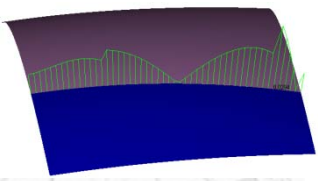
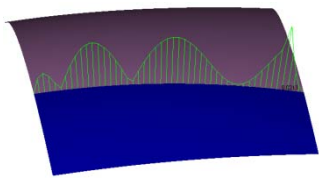
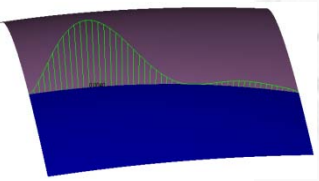
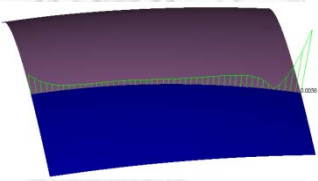
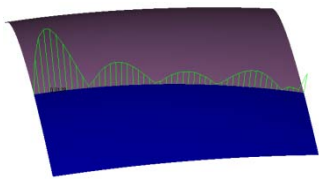
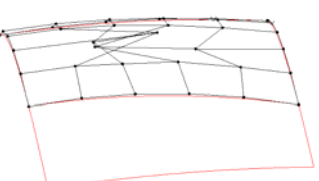
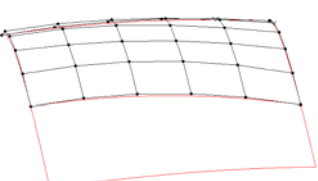
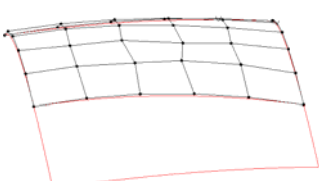
原始資料		
	G^1 誤差 : Max 0.736 deg	G^2 誤差 : Max 25.76 %

表 5.4 測試案例二-連續性調整結果比較

	牛頓法	最速下降法	粒子群優化演算法
G^1 誤差	 Max: 0.040 deg	 Max: 0.029 deg	 Max: 0.021 deg
G^2 誤差	 Max: 0.40 %	 Max: 0.58 %	 Max: 1.38 %
控制點分佈			
調整時間	0.16 s	4.20 s	60.47 s

由表 5.2、表 5.4 之連續性調整結果呈現，可觀察三種數值方法之調整特性，並於下列進行區分、比較：

(1) 牛頓法

案例一 G^1 調整因部分尖點因素，使得最大誤差值無法落入目標區間內； G^2 調整於整體邊界上，尚有調降空間。案例二方面， G^1 、 G^2 調整皆達到目標區間。然於調整後控制點分佈觀察， G^2 調整之控制點分佈卻呈現發散現象，此狀況極可能造成曲面的扭曲，亦呈現該調整的不穩定性。初步排除該方法的選用。

(2) 最速下降法

為三數值法中較為穩定者。調整結果上，僅案例一之 G^1 調整，因部分尖點未達調整目標，且調整後之控制點分配並未偏離原控制點位置甚劇，呈現極佳的穩定性。缺點為運算時間之消耗，且隨控制點數量增加亦會增加運算時間。

(3) 粒子群優化演算法

因於演算內部具亂數變因，每次調整皆會得到不同結果，於調整上極不穩定。在雙案例之結果觀察，僅案例二之 G^1 調整達到目標，且控制點分佈相較於最速下降法，仍稍顯凌亂。於時間消耗上，則更為耗時。該法則尚可取用之處，在於調整後控制點分佈不致發散，且因亂數變因，亦有可能得到極佳之連續性調整結果。

經上列比較，實作上為顧及輸出資料可用性，選用最為穩定之最速下降法為連續性調整主體，其餘兩者為輔，視調整狀況再引入使用。並進一步衍生調整剪切案例、四曲面田字形搭接案例。

5.2 搭接連續性調整驗證

在最終結果呈現部分，針對序列曲面、四曲面田字形搭接以及剪切曲面，三大項連續性調整案例進行調整並輸出結果，利用 CATIA 及 Imageware 軟體作相關檢測。輸入資料項如圖 5.2 所示。

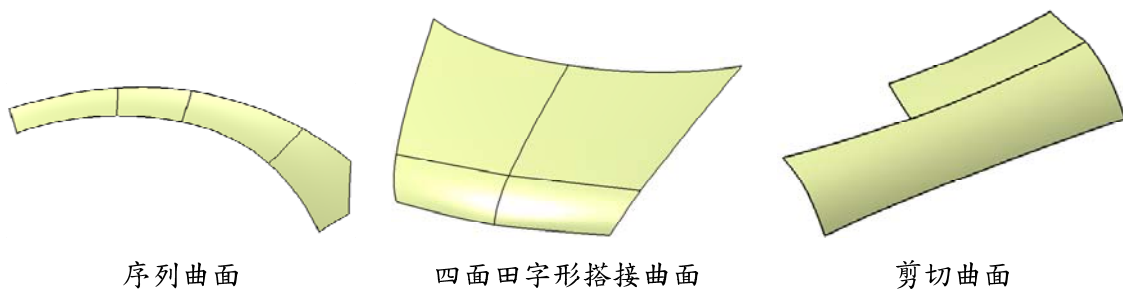


圖 5.2 調整驗證曲面資料

首先由 CATIA 概略呈現連續性調整前後邊界連續性誤差狀態。後續輸至 Imageware 實際進行誤差資訊量測，並比對調整前後曲面資料偏移量，最終於表格中統整相關曲面資訊。三項實例驗證呈現，皆依此內容條列顯示，如圖 5.3 架構。

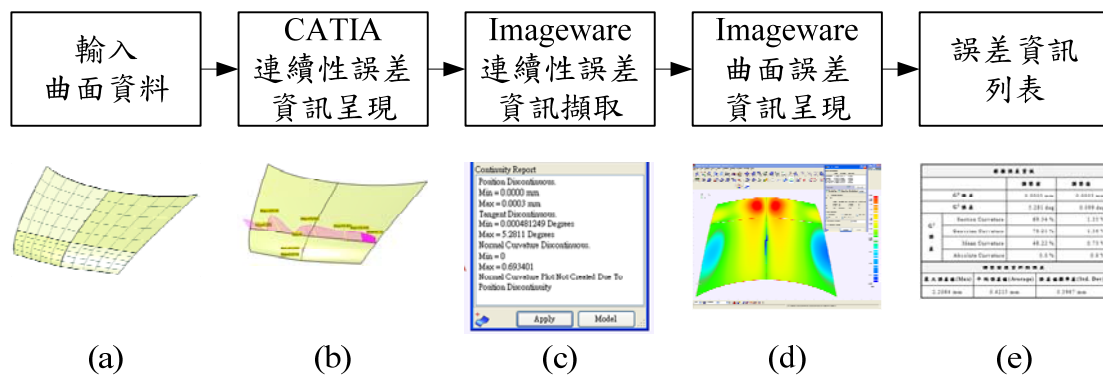


圖 5.3 實例驗證呈現架構

5.2.1 序列曲面搭接

圖 5.4 為序列曲面搭接調整之測試檔案，由 4 片補綴資料構築而成。搭接連續性問題，即針對 3 銜接邊界進行探討。實作上選用【Kahmann】項為目標函數，試求較佳之調整效果。

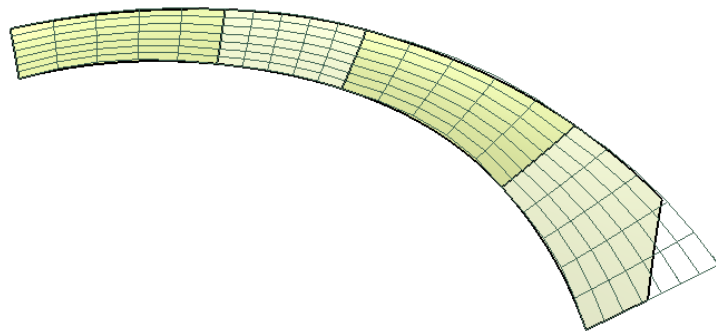


圖 5.4 序列曲面搭接調整輸入資料

圖 5.5、圖 5.6 顯示序列曲面資料原始搭接狀況。G¹ 誤差最大值為 0.31deg，僅於其一邊界已達 G¹ 連續；G² 誤差最大值為 52.84%。皆須進行連續性調整。

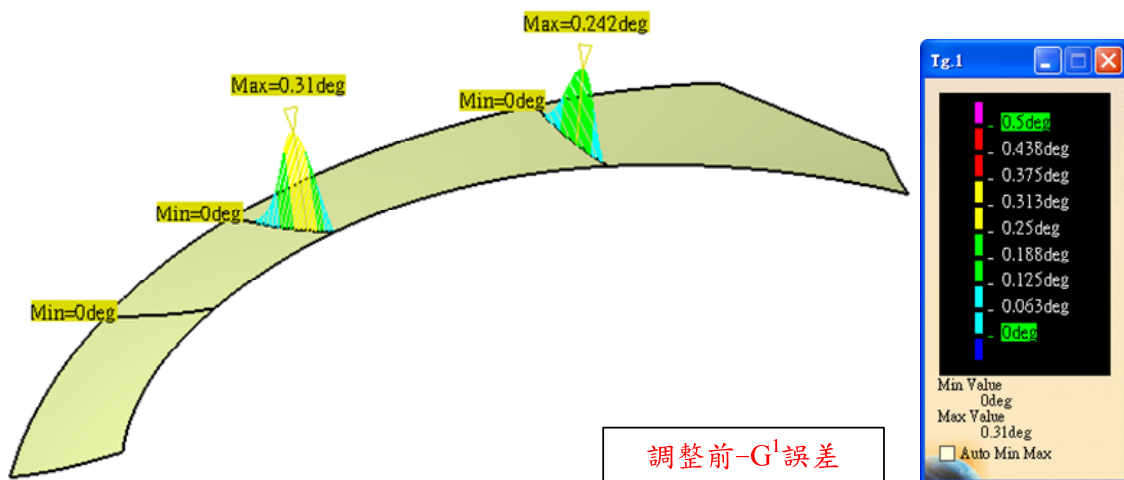


圖 5.5 CATIA 呈現序列曲面調整前 G¹ 連續誤差

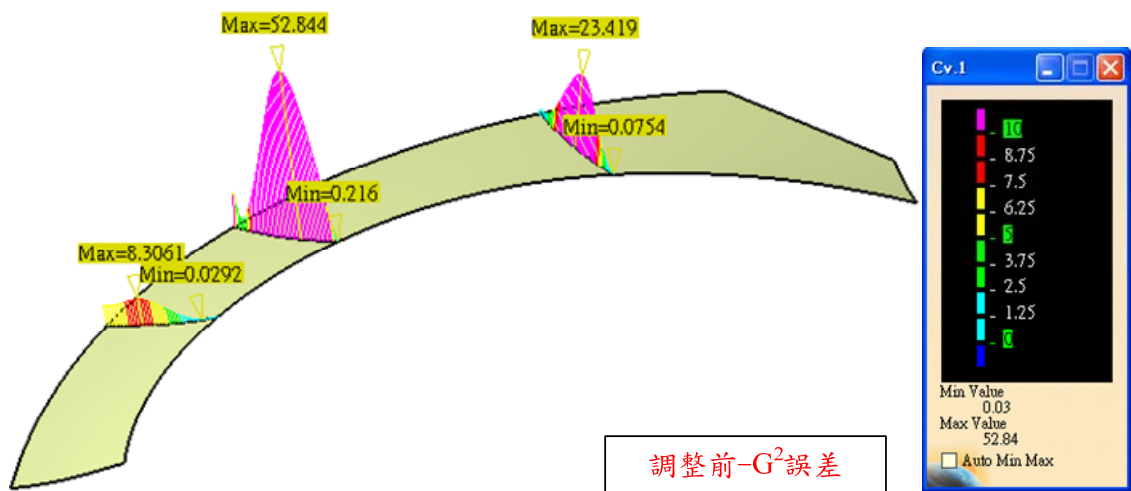


圖 5.6 CATIA 呈現序列曲面調整前 G² 連續誤差

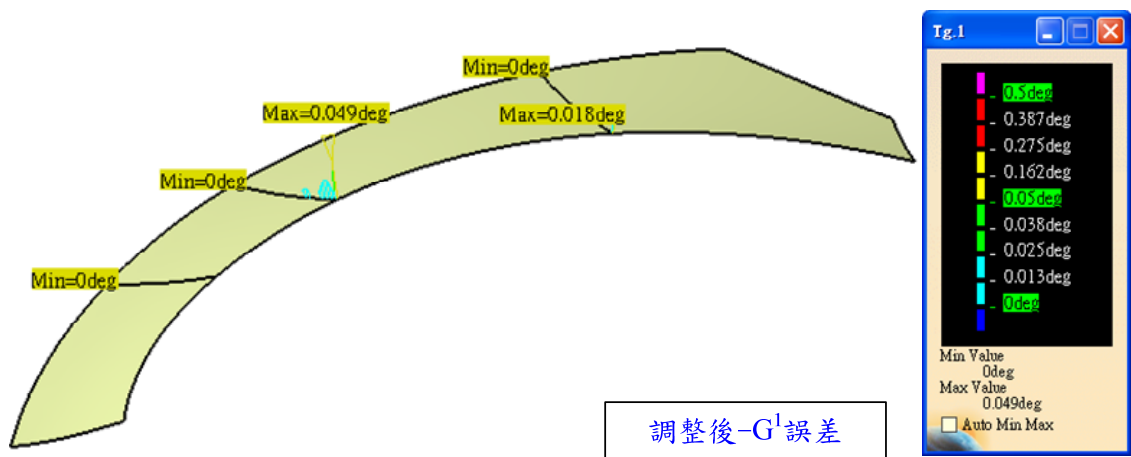


圖 5.7 CATIA 呈現序列曲面調整後 G¹ 連續誤差

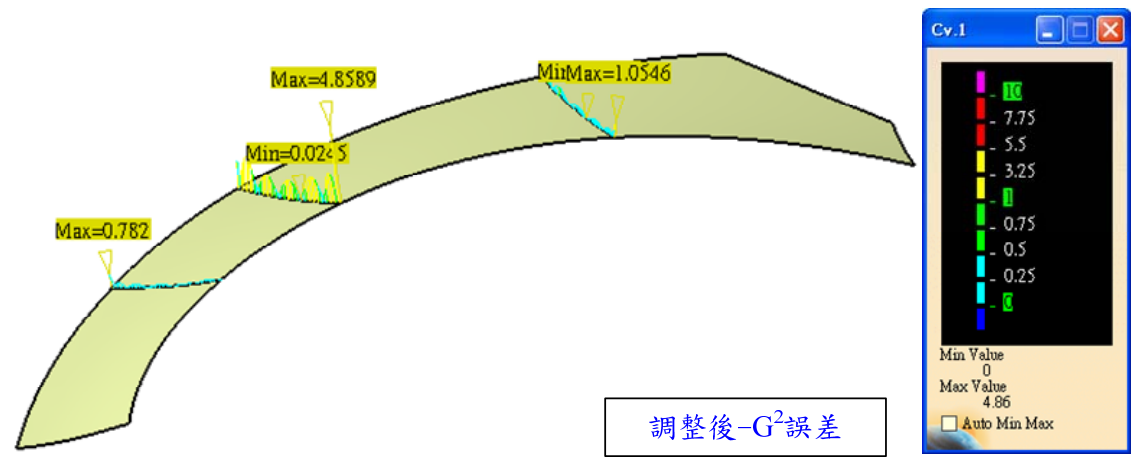


圖 5.8 CATIA 呈現序列曲面調整後 G² 連續誤差

圖 5.7、圖 5.8 針對 G^1 、 G^2 搭接連續性進行調整，並將結果使用 CATIA 呈現。 G^1 誤差最大值降至 0.049deg； G^2 誤差最大值降至 4.86%，三個邊界皆已達到 G^1 連續， G^2 誤差僅餘部分邊界尖點未能調降。後續並利用 Imageware 進行全面性的檢測。



圖 5.9 Imageware 邊界連續性誤差資訊檢測對話框

圖 5.9、圖 5.10 為利用 Imageware 進行調整後誤差值檢測。圖 5.9 為搭接誤差檢視功能，提供【Position】、【Tangent Plane】、【Section Curvature】、【Gaussian Curvature】、【Mean Curvature】、【Absolute Curvature】六項邊界誤差標的供選擇，於此可以擷取紀錄邊界誤差資訊；圖 5.10 為曲面間距檢測功能，呈現曲面控制點調控後，曲面資料點的偏移誤差。於曲面偏離誤差限制上，距離誤差需小於 0.3mm，確保符合原始造型。

表 5.5 表列由 Imageware 連續性演算功能及誤差檢測功能取得之相關誤差資訊，針對調整前後數值進行比對及呈現。

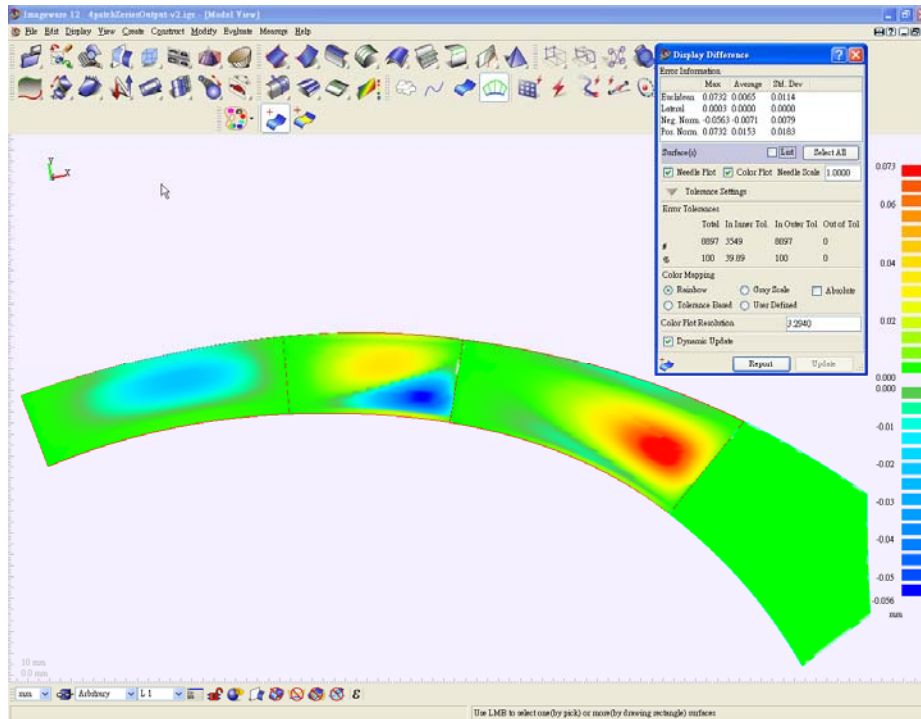


圖 5.10 Imageware 呈現序列曲面搭接連續性調整前後資料點誤差

表 5.5 序列曲面調整前後誤差呈現

搭接誤差資訊			
	調整前	調整後	
G^0 誤差	0.0008 mm	0.0008 mm	
G^1 誤差	0.310 deg	0.049 deg	
G^2 誤差	Section Curvature	41.81 %	4.74 %
	Gaussian Curvature	88.25 %	66.87 %
	Mean Curvature	83.61 %	37.95 %
	Absolute Curvature	0.0 %	0.0 %
調整前後資料點誤差			
最大誤差值(Max)	平均誤差值(Average)	誤差值標準差(Std. Dev)	
0.0732 mm	0.0065 mm	0.0114 mm	
調整時間	97.81 s		

此案例於 G^1 誤差方面，確實調整至容許誤差內， G^2 誤差由圖 5.8 所示，整體上皆落入許可區間內(小於 1.0%)，僅部分尖點未能調整至需求標的，表列各項誤差極值亦因部分尖點造成呈現不佳。點資料誤差方面，則皆符合 0.3mm 最大值限制。

5.2.2 四曲面田字形搭接

圖 5.11 為四曲面田字形搭接之輸入資料項，以下簡稱為四曲面案例。前端限制上，於搭接邊界皆須符合邊界參數銜接關係，即等同邊界參數。

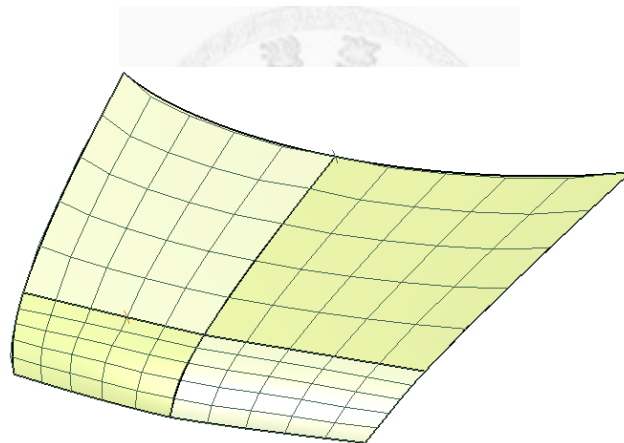


圖 5.11 四曲面調整輸入資料

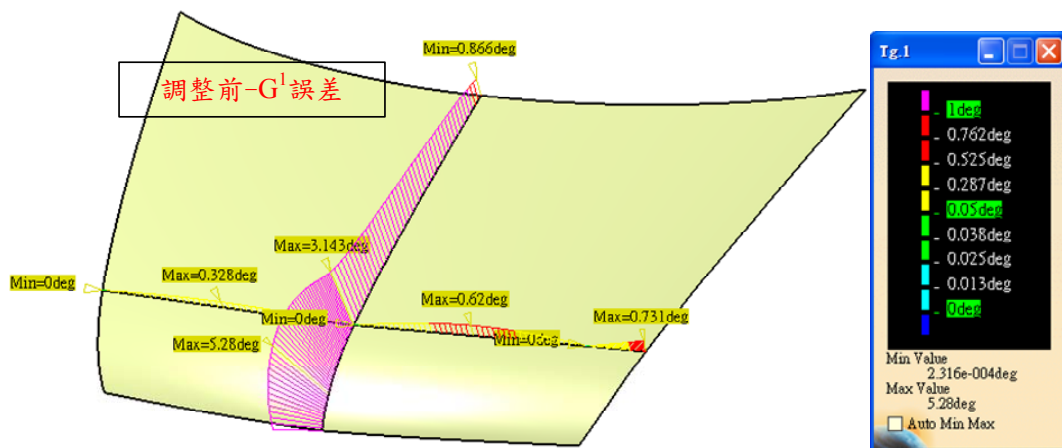


圖 5.12 CATIA 呈現四曲面調整前 G^1 連續誤差

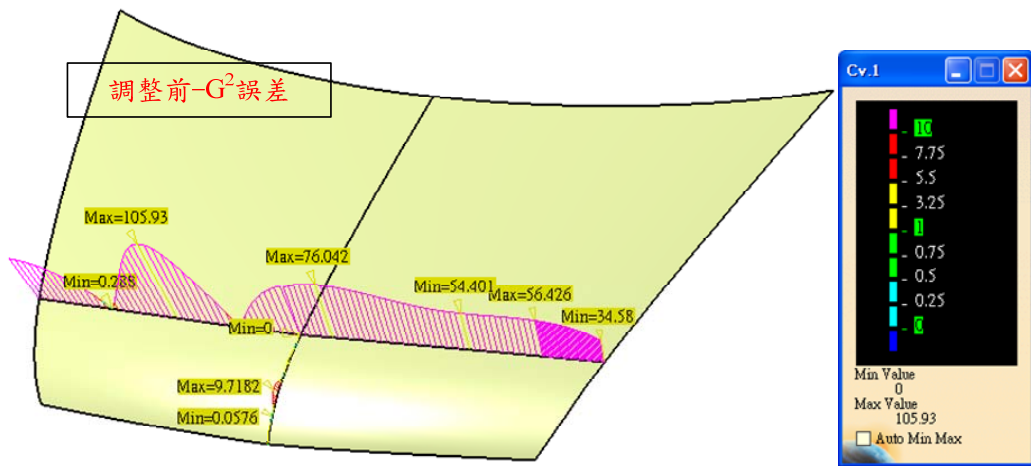


圖 5.13 CATIA 呈現四曲面調整前 G^2 連續誤差

圖 5.12、圖 5.13 以 CATIA 呈現曲面於連續性調整前之誤差狀況， G^1 誤差最大值為 5.28deg； G^2 誤差最大值為 105.93%。調整上，針對 G^1 、 G^2 連續性進行循環性調整。

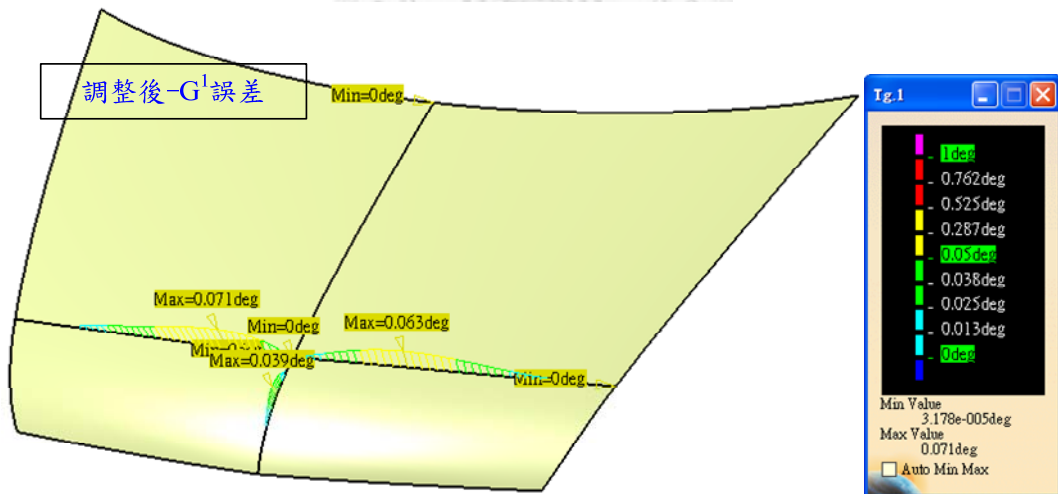


圖 5.14 CATIA 呈現四曲面調整後 G^1 連續誤差

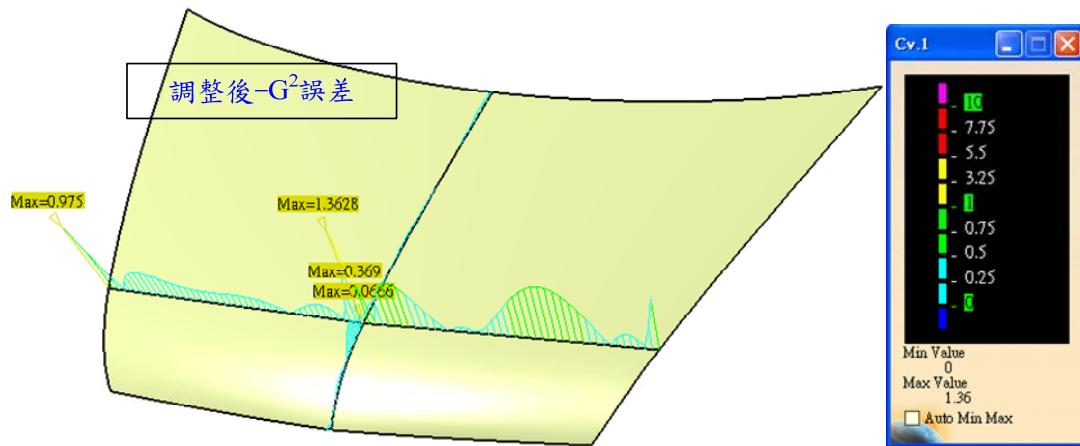


圖 5.15 CATIA 呈現四曲面調整後 G^2 連續誤差

圖 5.14、圖 5.15 呈現經調整後的結果， G^1 誤差最大值為 0.071deg、 G^2 誤差最大值為 1.36%。大部分邊界區域皆已落入容許範圍內。接續以 Imageware 進行檢測，於圖 5.16 顯示曲面連續性調整前後，曲面之變異誤差。並於表 5.6 統整由 Imageware 擷取相關誤差資訊。

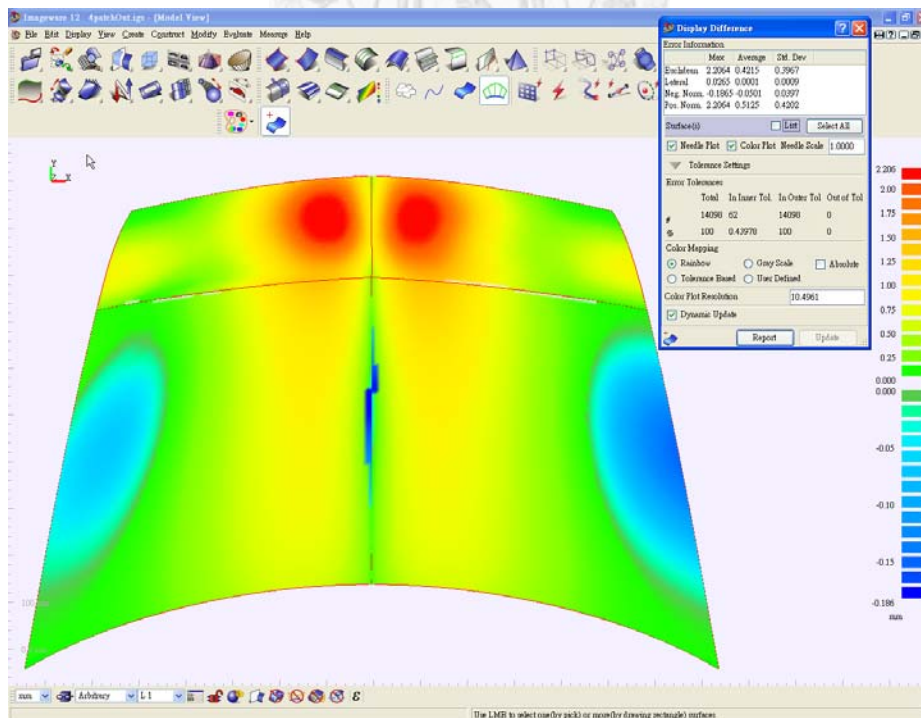


圖 5.16 Imageware 呈現四曲面連續性調整前後資料點誤差

表 5.6 四曲面調整前後結果呈現

搭接誤差資訊			
		調整前	調整後
G⁰ 誤差		0.0003 mm	0.0003 mm
G¹ 誤差		5.281 deg	0.099 deg
G² 誤 差	Section Curvature	69.34 %	1.35 %
	Gaussian Curvature	78.21 %	1.36 %
	Mean Curvature	48.22 %	0.73 %
	Absolute Curvature	0.0 %	0.0 %
調整前後資料點誤差			
最大誤差值(Max)	平均誤差值(Average)	誤差值標準差(Std. Dev)	
2.2064 mm	0.4215 mm	0.3967 mm	
調整時間		991.39 s	

由表 5.6 資訊觀察調整後 G¹ 誤差最大值為 0.099deg；G² 誤差僅於部分邊界尖點超過 1.0%之限制，於 G¹、G² 連續皆接近需求標的。然於調整前後之曲面誤差上，最大距離誤差達 2.2064mm，未符合偏移限制條件。

5.2.3 剪切曲面搭接

剪切曲面連續性調整之呈現，以搭接邊界一側剪切、一側非剪切
案例為實例驗證資料，如圖 5.17 所示。調整上僅以非剪切曲面為調整
曲面。

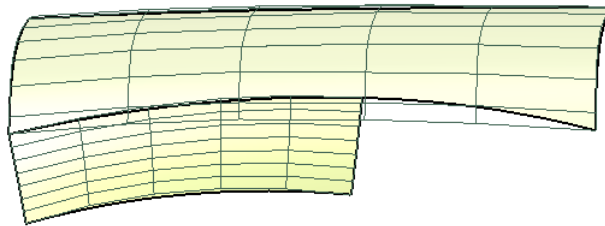


圖 5.17 剪切曲面調整輸入資料

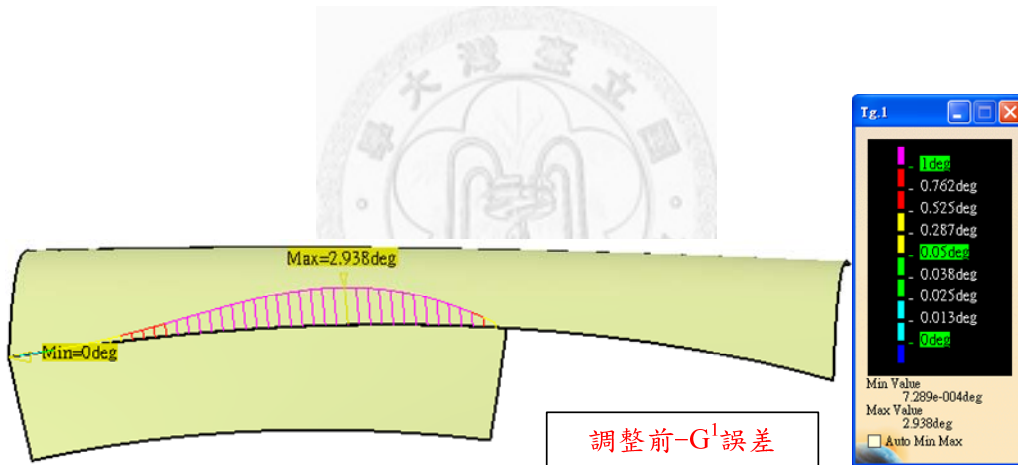


圖 5.18 CATIA 呈現剪切曲面調整前 G¹ 連續誤差

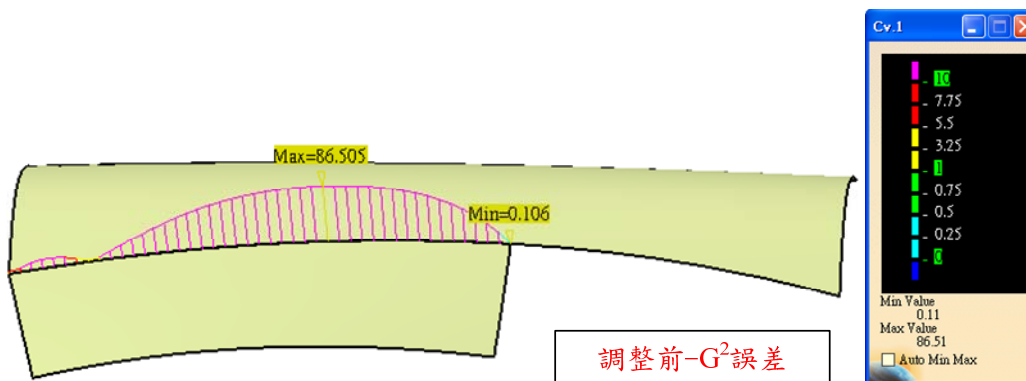


圖 5.19 CATIA 呈現剪切曲面調整前 G² 連續誤差

圖 5.18、圖 5.19 以 CATIA 呈現調整前之 G^1 、 G^2 誤差項。 G^1 誤差最大值為 2.938deg； G^2 誤差最大值為 86.51%。

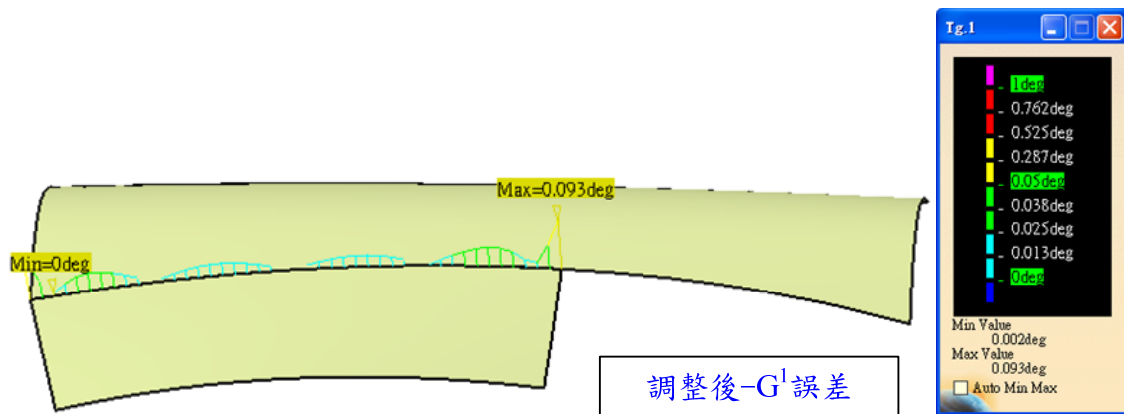


圖 5.20 CATIA 呈現剪切曲面調整後 G^1 連續誤差

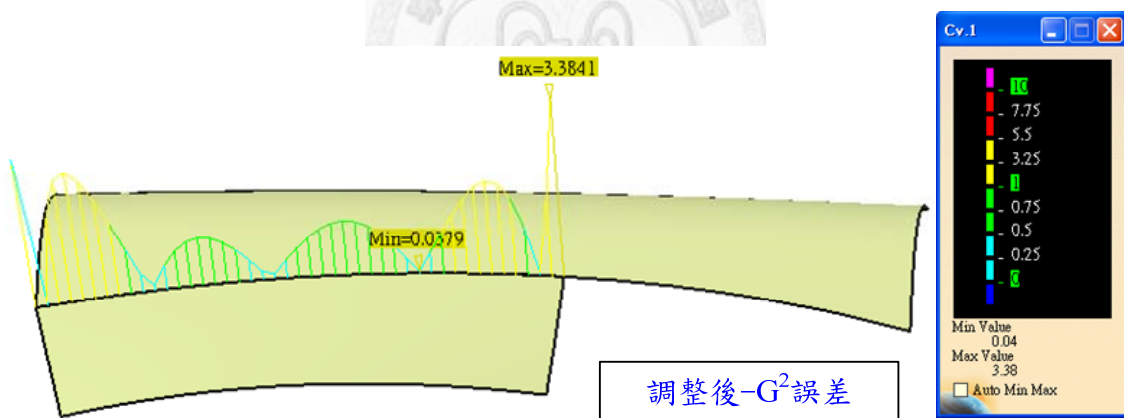


圖 5.21 CATIA 呈現剪切曲面調整後 G^2 連續誤差

經連續性調整後，於圖 5.20、圖 5.21 呈現調整後之誤差狀況。 G^1 誤差最大值為 0.093deg； G^2 誤差最大值為 3.38%。圖 5.22 為利用 Imageware 進行調整前後曲面誤差比對。並於表 5.7 統整相關誤差資訊。

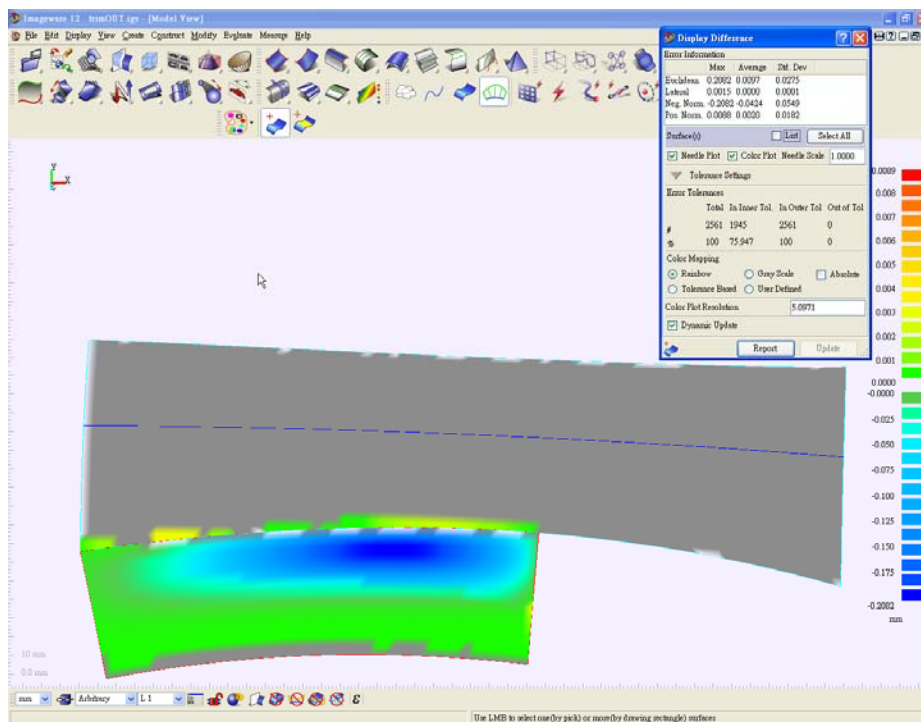


圖 5.22 Imageware 呈現剪切曲面搭接連續性調整前後資料點誤差

表 5.7 剪切曲面調整前後結果呈現

搭接誤差資訊			
	調整前	調整後	
G^0 誤差	0.0026 mm	0.0026mm	
G^1 誤差	2.939 deg	0.093 deg	
G^2 誤差	Section Curvature	60.39 %	3.33%
	Gaussian Curvature	78.60 %	65.22 %
	Mean Curvature	59.68 %	3.21 %
	Absolute Curvature	0.0 %	0.0 %
調整前後資料點誤差			
最大誤差值(Max)	平均誤差值(Average)	誤差值標準差(Std. Dev)	
0.2082 mm	0.0097 mm	0.0275 mm	
調整時間	46.11 s		

表 5.7 所示，於剪切曲面連續性調整部分， G^1 誤差及 G^2 各項標的誤差皆有達調降效用，但誤差最大值皆未達到容許範圍。僅於曲面偏移部份，確實落於容許範圍內。

5.3 結果討論

數值方法之連續性調整評比，於 5.1 節已進行相關探討，並於最終選用最速下降法為搭接連續性調整主體。本節並不再針對演算方法進行討論，僅對各式搭接案例調整結果作結果討論，以及針對目標函數的選用分析探討。

5.3.1 實作成果討論

於 5.2 節呈現各式搭接案例之連續性調整結果。整體上，各案例皆已達到調降誤差效用，本節亦分項探討各調整成效。

(1) 序列曲面搭接

序列曲面搭接調整，視為針對雙曲面搭接連續性調整結果呈現。四曲面序列搭接，即為對三搭接邊界進行連續性校調。於結果呈現上， G^1 誤差最大值由 0.31deg 調降至 0.049deg； G^2 誤差最大值由 52.84% 調降至 4.86%，已確實調整達到 G^1 連續性， G^2 連續方面則於兩搭接邊界達到。於圖形呈現上，邊界誤差最大值皆為部分尖點狀況，並非整體誤差均值的攀高，整體趨勢上呈現不錯的調整成果，但仍有尖點的調降突破空間。

(2) 四曲面田字形搭接

四曲面田字形搭接案例調整，著重點為衝突控制點之應對。於前列介紹，該案例中任意兩曲面之調整，皆會造成其他兩曲面的間隙現象，即 G^0 誤差。本研究將衝突控制點應對至單一控制點，並循環式多輪迴調整，試克服衝突狀況。於結果呈現， G^1 誤差最大值由 5.28deg 調降至 0.071deg； G^2 誤差最大值由 105.93% 調至 1.36%，雙誤差標的皆有明顯的調降幅度。 G^1 誤差已調降極低，但因衝突狀況，未能全達到需求目標； G^2 誤差除部分尖點外，幾乎皆已達到 1.0% 以下之需求標的。在曲面資料點誤差上，因搭接連續性追求，而有偏離原貌之現象，偏移最大達 2.2064 mm，尚可進行延伸探討改善。整體連續性調整效果佳，但資料偏移及調整時間消耗尚待突破。

(3) 剪切曲面搭接

剪切曲面搭接連續性調整，試突破搭接邊界為剪切邊之案例調整。本研究探討即突破剪切邊之連續性調整難處，將可調整曲面範疇延伸至允許單面剪切之搭接狀況，實例驗證呈現即為一例。調整結果 G^1 誤差最大值由 2.938deg 調降至 0.093deg； G^2 誤差由 86.51% 調至 3.38%，雙標的最大值皆未達到需求目標，然由 CATIA 呈現誤差圖示觀其誤差狀況，可發現極值部分皆由部分尖點造成，整體結果呈現符合需求標的。在相異曲率標的上，高斯曲率未有明顯調降趨勢，一方面高斯曲率非目標函數對應項次；一方面由部分尖點拉高誤差，造成該曲率項次未能顯著調降。剪切案例調整上，亦得到不錯的誤差值調降效果。

5.3.2 目標函數選用探討

於 4.1.4 小節中，統整兩種曲面搭接連續性調整目標函數項次。一者直接擷取雙邊邊界資訊，並計算差值作為函數項，於式(4.9)、式(4.10)呈現；另一者引用 Kahmann[14]推演資訊，由雙邊邊界之微分向量式，建構 G^1 、 G^2 連續條件式，如式(4.11)、式(4.12)所示。兩者分別作為連續性調整之目標函數，並於調整結果上呈現不同效應，於下列即分別針對兩目標函數特性討論：

(1) 邊界資訊誤差項

直接擷取曲面邊界幾何資訊，並以雙邊資訊差值作為函數項，在應用上並無周邊限制，得以適應於任何曲面搭接狀況。 G^1 連續目標函數方面，規劃雙邊切平面法向量差值為目標函數，即目標求取法向量重合。此部分連續性調整實作皆可達到需求效果； G^2 連續目標函數方面，以高斯曲率為標的，擷取雙邊邊界高斯曲率值，並計算相對差值作為目標函數項。此部分因為高斯曲率函數域甚大，含括整個實數域，實作上常有收斂性判斷的問題，或於最終輸出尚不符合需求之結果。相較於 Kahmann 由曲面微分向量式推演函數項，此結果較為不穩定。

(2) Kahmann 推演項

其關係式之推演，由曲面搭接邊界對雙參數方向微分式建構而成。 G^1 連續目標函數之建構同於(1)之構築概念，目標求取邊界對應切平面法向量等同，即共切平面； G^2 連續目標函數延伸 G^1 連續關係式，並設定雙曲面有相同的漸進方向，以此為目標，建構 G^2 連續目標函數。由此可得目標函數皆以曲面周邊向量資訊建構而成，

函數域所包含的數值空間較有限，於收斂判別上得以建立較為明確的標的項。 G^1 連續性調整上大致都有不錯結果，可順利收斂至需求標的； G^2 連續因條件式假定 G^1 連續已確實達到，若 G^1 連續尚有些微誤差，將造成 G^2 連續收斂不佳現象。經衍生推演，本函數項亦得用於剪切曲面搭接案例，整體實作調整上，效果優於(1)之目標函數項。



第六章 結論與未來展望

本研究針對曲面補綴銜接之連續性問題進行探討，以求取曲面搭接的平順性為研究目標，因應逆向工程作業於不同區塊之需求，訂定相異追求標的。實作上引入數值方法，以數值解之求取為搭接連續性目標之追求手段，試於相關運算後，取得銜接平順之曲面資料。於相關調整建構完成並確立後，得以推廣運用至逆向工程領域，添增於前置設計階段作業選擇性。

6.1 研究成果與結論

實作上以 B-spline 曲面為基底資料項。由 STEP AP 203/214CAD 資料檔中取得 B-spline 曲面資訊。以 B-spline 曲面控制點為調整項，由曲面各參數方向微分式，歸納目標函數項次。於數值方法中演進求解，最終輸出連續性調整完成曲面資料。使用者於操作上，僅須選擇欲調整曲面並遞送調整，即可完成作業。本研究之主要特點如下列：

(1) 引用數值方法

將曲面搭接連續性調整問題，以數值求解為手段，進行實作調整。建構相關銜接資料項，含括變數設定、目標函數擷取之連接窗口，得以彈性的變更調整方法，進行多方實作比較。

(2) 實作相異數值方法於曲面搭接連續性調整問題之應用並評比

以非剪切曲面連續性調整為基礎，對各項數值調整方法進行評比，並於最終選擇最速下降法為實作主體。

(3) 歸納曲面各級搭接連續性關係式

以建構數值方法目標函數為目標，統整連續性調整平衡關係式。包含直接以邊界誤差資訊差值為標的之平衡式，以及衍生 Kahmann 建構式，並拓展至各式搭接案例皆通用之平衡關係式。

(4) 實作對非均勻非有理 B-spline 參數曲面搭接連續性調整

於 SpringSolidCAD 中擴充曲面搭接連續性調整功能，以符合 STEP AP203/214 CAD 檔案格式曲面資料為輸入端，擷取相關曲面資訊，並建構彈性化操作介面，得於介面中選擇欲調整曲面組，遞送資料進行相關資訊的自動判斷演算，最終輸出連續性調整完成曲面資料。

(5) 規劃序列搭接曲面之連續性調整

由非剪切曲面雙曲面搭接連續性調整為基底，延伸處理序列式銜接之曲面組，可批次處理串接曲面，於單次操作中達到多曲面之連續性調整。並於多數案例順利調整至符合 A 級面需求。

(6) 提出曲面連續性調整衝突現象之解決方案

以循環求解的方式處理連續性調整之衝突現象，並有效調整連續性關係至 A 級面需求。實作上以四曲面田字形搭接為基底，建構相鄰曲面對應關係，於調整過程中即時對應調整衝突現象，漸進式調降誤差至需求範圍內。

(7) 建構剪切曲面連續性調整方案

可處理單面為剪切邊界之曲面搭接關係，於誤差值上有明顯調降趨勢，並在部分案例中順利達到 A 級面需求。

6.2 未來展望

於本研究相關呈現外，曲面搭接連續性調整問題上，仍有相當的空間，得依本研究調整方法進行連續性調整作業的改善。以下進行說明：

(1) 調整時間的縮減

數值方法具備得以解決各式疑難工程問題的特性，但因其利用搜尋逼近的方式尋求適當解，在運算時間上會有一定程度的消耗。於本研究探討問題之數值求解，相較於解析解求取，可得到較為廣域的相關問題處理，但須消耗較多的運算時間。於進階處理上，可針對選用之數值方法進行探討。更新數值法演算流程或尋求更切合連續性調整之演算方法進行調整評比。試求調整時間上得以更為精簡。

(2) 確立調整結果輸出穩定性

在非剪切曲面調整中，大部分案例皆可順利調整達到 A 級面需求，僅部分案例於誤差上仍存在局部尖點，無法於同一實作系統中克服。現前處理方式以手動作業方式進行調整，或個別的微調演算流程，如調整步進刻度等，以求搭接邊界各部位確實符合 A 級面需求。延伸探討上，得於系統實作上再歸納相關判別，對無法取得 A 級面調整結果之搭接曲面進行探討，尋求未能收斂之相關原因，並予以解決，確保所有非剪切案例皆可調整達到 A 級面需求。

(3) 深入探討剪切曲面之連續性調整

本研究實作中，於剪切曲面之調整，可達調降搭接連續性誤差效應，但僅部分案例可確實達到 A 級面之調整需求，未達需求之曲面多餘留部分尖點難以調降誤差。鑒於此一瓶頸，於此剪切案例得以延伸探討，針對目標函數或演算流程進行改良，試求較佳之調整效果。

(4) 曲面資料批次處理

曲面搭接連續性調整延伸性探討。以汽車鈹件為例，可針對批次輸入之鈹件外形資料進行歸納及連續性調整排程，對調整衝突點部分進行判別，於調整過程中予以適當應對，達到批次輸入曲面資料之連續性自動化調整實作。於此將得以更為精簡相關作業之調整時程。



參考文獻

- [1] Alhanaty M, and Bercovier M. 2001. Curve and surface fitting and design by optimal control methods. *Computer-Aided Design* 33(2): 167-182.
- [2] Avriel M. 1976. *Nonlinear Programming: Analysis and Methods*. Prentice-Hall.
- [3] CATIA. <http://www.3ds.com/>
- [4] De Boor C. 1972. On calculating with B-splines. *Journal of Approximation Theory* 6(1): 50-62.
- [5] Dembo RS, Eisenstat SC, and Steihaug T. 1982. Inexact Newton methods. *SIAM Journal Numerical Analysis* 19(2): 400-408.
- [6] Drummond LM Graña, and Svaiter BF. 2005. A steepest descent method for vector optimization. *Journal of Computational Applied Mathematics* 175(2): 395-414.
- [7] Du WH, and Schmitt FJM. 1990. On the G^1 continuity of piecewise Bézier surfaces: a review with new results. *Computer-Aided Design* 22(9): 556-573.
- [8] Faux ID, and Pratt MJ. 1979. *Computational Geometry for Design and Manufacture*. Rainbow-Bridge Book Co. Etd.
- [9] Hartley HO. 1961. The modified Gauss-Newton method for the fitting of nonlinear regression functions by least squares. *Technometrics* 3(2): 269-280.

- [10] Hu YP, and Sun TC. 1997. Moving a B-spline surface to a curve– a trimmed surface matching algorithm. *Computer-Aided Design* 29(6): 449-455.
- [11] Imageware. <http://www.iwsinc.com/>
- [12] ISO 10303-203. 1994. Product data representation and exchange part203: Application protocol: Configuration controlled design.
- [13] ISO 10303-214. 1994. Product data representation and exchange part214: Application protocol: Core data for automotive mechanical design process.
- [14] Kahmann J. 1983. Continuity of curvature between adjacent Bézier patches. In “*Surfaces in Computer Aided Geometric Design*”, Barnhill RE, and Boehm W, 65-75.
- [15] Kennedy J, and Eberhart R. 1995. Particle swarm optimization. *proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*, IV, 1942-1948.
- [16] Moreton HP, and Séquin CH. 1992. Functional optimization for fair surface design. *Proceedings of the 19th annual conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, 167-176.
- [17] Piegl L, and Tiller W. 1997. *The NURBS book*. 2nd ed. Springer.
- [18] Qi L, and Sun J. 1993. A nonsmooth version of Newton’s method. *Mathematical Programming* 58(3): 353-367.
- [19] Schwaab M, Biscaia EC, Monteiro JL, and Pinto JC. 2008. Nonlinear parameter estimation through particle swarm optimization. *Chemical Engineering Science* 63(6): 1542-1552.

- [20] Ueng WD, Lai JY, and Tsai YC. 2007. Unconstrained and constrained curve fitting for reverse engineering. *The International Journal Advanced Manufacturing Technology* 33(11-12): 1189-1203.
- [21] Ye X, Liang Y, and Nowacki H. 1996. Geometric continuity between adjacent Bézier patches and their construction. *Computer Aided Geometric Design* 13(6): 521-548.
- [22] 尤春風，Spring Solid System 實體模型系統，國立台灣大學實體模型系統實驗室。
- [23] 尤春風，SpringSolidCAD 電腦輔助設計系統，國立台灣大學實體模型系統實驗室。
- [24] 陳見宜，2008，B-spline 曲面 G^2 連續性之自動調整，國立台灣大學機械工程學研究所碩士論文。
- [25] 蔡耀震，2009，逆向工程之曲面連續性理論與曲面模型自動化重建技術發展，國立中央大學機械工程研究所博士論文。
- [26] 薛乃綺，2006，從鈹金結構市場看汽車售後零件產業之發展，機械工業雜誌 280: 72-80。

附錄 A 數學化描述 B-spline 曲面搭接連續關係式

Kahmann[14]針對 Bézier 曲面搭接關係推演銜接平順關係式，其關係式得以衍生應用至 B-spline 曲面搭接關係，但僅限應用於非剪切曲面搭接。本研究乃以 Kahmann 推演方式為基礎，將 B-spline 曲面搭接連續關係式推廣至剪切曲面搭接，如圖 A.1 顯示剪切曲面搭接關係及其控制點分佈。

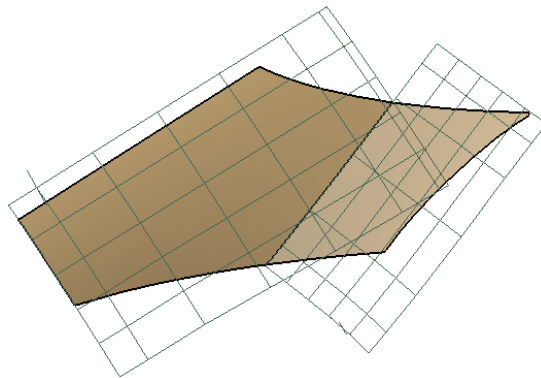


圖 A.1 剪切曲面搭接控制點分佈關係

圖 A.2 分別顯示雙曲面雙邊參數方向，及邊界點一次微分關係。連續性關係式推演即以此為基礎，推導 G^1 、 G^2 連續關係式。

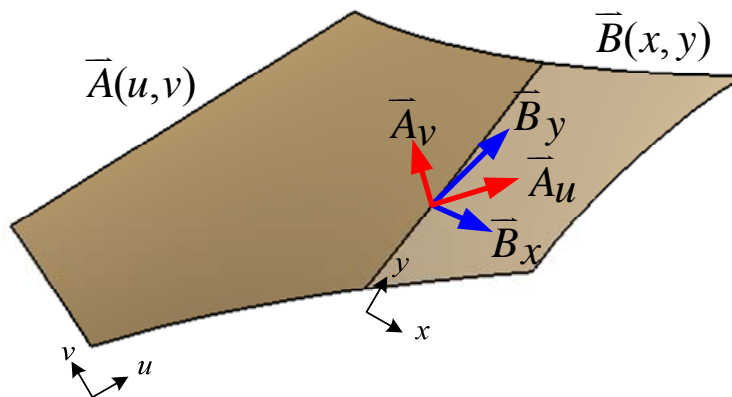


圖 A.2 剪切曲面搭接邊界點參數示意

定義 $\bar{A}(u, v)$ 、 $\bar{B}(x, y)$ 分別為 B-spline 參數曲面，雙曲面銜接關係如圖 A.2 所示。以 \bar{A} 、 \bar{B} 代表雙曲面於邊界上對應之點資料； \bar{A}_u 下標 u 表示 \bar{A} 對 u 參數方向一次微分； \bar{A}_{uv} 下標 uv 表示 \bar{A} 對 u 參數方向一次微分及對 v 參數方向一次微分。相關符號標定關係，皆依循此規則。

A.1 G^1 連續關係式

G^1 連續關係為搭接邊界切平面共面，即切平面法向量共方向。衍生該條件可得 \bar{A}_u 、 \bar{A}_v 、 \bar{B}_x 、 \bar{B}_y 四向量共平面即可達到 G^1 連續。任意三向量行列式值，可對應得到三向量圍成六面體體積。設定三向量行列式值為零，即張圍體積為零，亦得到三向量共平面關係。為求利用向量行列式值關係推演連續性條件，將 \bar{A}_u 、 \bar{A}_v 合為單一向量 \bar{T} ：

$$\bar{T} = p\bar{A}_u + q\bar{A}_v \quad (\text{A.1})$$

p 、 q 為純量參數，求取 \bar{T} 於雙參數方向適當取量。以圖 A.3 呈現 \bar{T} 之合成關係。

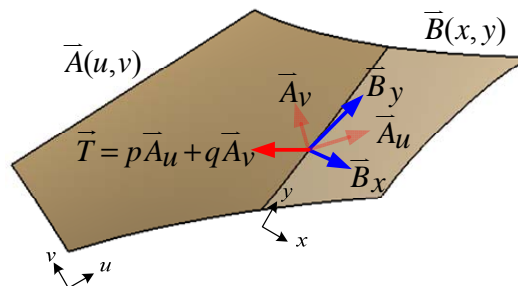


圖 A.3 曲面搭接邊界微分向量合成示意

由上列關係，得以 $\det(\bar{T}, \bar{B}_x, \bar{B}_y) = 0$ 表示 G^1 連續關係，並將 \bar{T} 代入關係式可得：

$$\det(p\bar{A}_u + q\bar{A}_v, \bar{B}_x, \bar{B}_y) = 0 \quad (\text{A.2})$$

式(A.2)即為 G^1 連續關係式。

A.2 G^2 連續關係式

G^2 連續為曲率連續，於式(A.3)呈現法曲率關係式：

$$\kappa = \frac{g_{11} \overset{\cdot}{u} + 2g_{12} \overset{\cdot}{u}\overset{\cdot}{v} + g_{22} \overset{\cdot}{v}}{e_{11} \overset{\cdot}{u} + 2e_{12} \overset{\cdot}{u}\overset{\cdot}{v} + e_{22} \overset{\cdot}{v}} \quad (\text{A.3})$$

法曲率各項參數如下列：

$$\begin{aligned} e_{11} &= \bar{Q}_u \cdot \bar{Q}_u & e_{12} &= \bar{Q}_u \cdot \bar{Q}_v & e_{22} &= \bar{Q}_v \cdot \bar{Q}_v \\ g_{11} &= \bar{Q}_{uu} \cdot \bar{N} & g_{12} &= \bar{Q}_{uv} \cdot \bar{N} = \bar{Q}_{vu} \cdot \bar{N} & g_{22} &= \bar{Q}_{vv} \cdot \bar{N} \end{aligned}$$

\bar{N} 為曲面切平面法向量； $\overset{\cdot}{u}$ 及 $\overset{\cdot}{v}$ 分別為 u 、 v 方向取值比重。法曲率值為零時的方向稱為漸進方向(asymptotic directions)，由式(A.4)表示：

$$g_{11} \overset{\cdot}{u} + 2g_{12} \overset{\cdot}{u}\overset{\cdot}{v} + g_{22} \overset{\cdot}{v} = 0 \quad (\text{A.4})$$

曲面搭接邊界上， G^2 連續關係可定義為雙曲面於邊界對應點上，有相同切平面法向量及相同漸進方向。藉由漸進方向上，曲面微分項關係的求取，衍生推導 G^2 連續關係式。針對雙曲面 $\bar{A}(u, v)$ 、 $\bar{B}(x, y)$ 列出漸進方向求取式：

$$g_{11}^A \dot{u}^2 + 2g_{12}^A \dot{u}\dot{v} + g_{22}^A \dot{v}^2 = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$g_{11}^B \dot{x}^2 + 2g_{12}^B \dot{x}\dot{y} + g_{22}^B \dot{y}^2 = 0 \quad (\text{A.6})$$

曲面搭接雙邊對應點上，有相同漸進方向關係式，如式(A.7)：

$$\bar{t} = \bar{A}_u \dot{u} + \bar{A}_v \dot{v} = \bar{B}_x \dot{x} + \bar{B}_y \dot{y} \quad (\text{A.7})$$

在預設雙邊皆已達到 G^1 連續條件下，將 \bar{B}_x 、 \bar{B}_y 之微分關係以 \bar{A}_u 、 \bar{A}_v 呈現：

$$\bar{B}_x = \alpha_1 \bar{A}_u + \beta_1 \bar{A}_v \quad (\text{A.8})$$

$$\bar{B}_y = \alpha_2 \bar{A}_u + \beta_2 \bar{A}_v \quad (\text{A.9})$$

將式(A.8)、式(A.9)代入式(A.7)可得：

$$\begin{aligned} \bar{A}_u \dot{u} + \bar{A}_v \dot{v} &= (\alpha_1 \bar{A}_u + \beta_1 \bar{A}_v) \dot{x} + (\alpha_2 \bar{A}_u + \beta_2 \bar{A}_v) \dot{y} \\ \Rightarrow \dot{u} \bar{A}_u + \dot{v} \bar{A}_v &= \left(\alpha_1 \dot{x} + \alpha_2 \dot{y} \right) \bar{A}_u + \left(\beta_1 \dot{x} + \beta_2 \dot{y} \right) \bar{A}_v \end{aligned}$$

由比較係數得：

$$\dot{u} = \alpha_1 \dot{x} + \alpha_2 \dot{y} \quad (\text{A.10})$$

$$\dot{v} = \beta_1 \dot{x} + \beta_2 \dot{y} \quad (\text{A.11})$$

將式(A.10)、式(A.11)關係代入式(A.5)，得同為 \dot{x} 、 \dot{y} 參數關係式：

$$g_{11}^A (\alpha_1 \dot{x} + \alpha_2 \dot{y})^2 + 2g_{12}^A (\alpha_1 \dot{x} + \alpha_2 \dot{y}) (\beta_1 \dot{x} + \beta_2 \dot{y}) + g_{22}^A (\beta_1 \dot{x} + \beta_2 \dot{y})^2 = 0 \quad (\text{A.12})$$

將 g_{11} 、 g_{12} 、 g_{22} 關係代入式(A.12)、式(A.6)，可得：

$$\begin{aligned} & \bar{N} (\alpha_1^2 \bar{A}_{uu} + 2\alpha_1 \beta_1 \bar{A}_{uv} + \beta_1^2 \bar{A}_{vv}) \dot{x}^2 \\ & + \bar{N} (2\alpha_1 \alpha_2 \bar{A}_{uu} + 2(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \bar{A}_{uv} + 2\beta_1 \beta_2 \bar{A}_{vv}) \dot{x} \dot{y} \\ & + \bar{N} (\alpha_2^2 \bar{A}_{uu} + 2\alpha_2 \beta_2 \bar{A}_{uv} + \beta_2^2 \bar{A}_{vv}) \dot{y}^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\bar{N} \bar{B}_{xx} \dot{x}^2 + 2\bar{N} \bar{B}_{xy} \dot{x} \dot{y} + \bar{N} \bar{B}_{yy} \dot{y}^2 = 0 \quad (\text{A.14})$$

因預設條件為 G^1 連續，兩式有共同切平面法向量 \bar{N} ：

$$\bar{N} = \bar{A}_u \times \bar{A}_v = \bar{B}_x \times \bar{B}_y \quad (\text{A.15})$$

式(A.13)、式(A.14)呈現即為 G^2 連續關係式。整理其關係至可接續應用，由式(A.14)減去式(A.13)可得：

$$\begin{aligned} & \bar{N} \left[\bar{B}_{xx} - (\alpha_1^2 \bar{A}_{uu} + 2\alpha_1 \beta_1 \bar{A}_{uv} + \beta_1^2 \bar{A}_{vv}) \right] \dot{x}^2 \\ & + \bar{N} \left[2\bar{B}_{xy} - (2\alpha_1 \alpha_2 \bar{A}_{uu} + 2(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \bar{A}_{uv} + 2\beta_1 \beta_2 \bar{A}_{vv}) \right] \dot{x} \dot{y} \\ & + \bar{N} \left[\bar{B}_{yy} - (\alpha_2^2 \bar{A}_{uu} + 2\alpha_2 \beta_2 \bar{A}_{uv} + \beta_2^2 \bar{A}_{vv}) \right] \dot{y}^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

由比較係數，設定 \dot{x}^2 、 $\dot{x} \dot{y}$ 、 \dot{y}^2 三項係數皆為零，得下列關係：

$$\bar{N} \left[\bar{B}_{xx} - (\alpha_1^2 \bar{A}_{uu} + 2\alpha_1 \beta_1 \bar{A}_{uv} + \beta_1^2 \bar{A}_{vv}) \right] = 0 \quad (\text{A.17})$$

$$\bar{N} \left[2\bar{B}_{xy} - (2\alpha_1 \alpha_2 \bar{A}_{uu} + 2(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \bar{A}_{uv} + 2\beta_1 \beta_2 \bar{A}_{vv}) \right] = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$\bar{N} \left[\bar{B}_{yy} - (\alpha_2^2 \bar{A}_{uu} + 2\alpha_2 \beta_2 \bar{A}_{uv} + \beta_2^2 \bar{A}_{vv}) \right] = 0 \quad (\text{A.19})$$

引入式(A.15)切平面法向量關係 $\bar{N} = \bar{A}_u \times \bar{A}_v$ ，並以行列式值之求取方式改寫式(A.17)、式(A.18)、式(A.19)三式：

$$\det(\bar{A}_u, \bar{A}_v, \bar{B}_{xx} - (\alpha_1^2 \bar{A}_{uu} + 2\alpha_1 \beta_1 \bar{A}_{uv} + \beta_1^2 \bar{A}_{vv})) = 0 \quad (\text{A.20})$$

$$\det(\bar{A}_u, \bar{A}_v, 2\bar{B}_{xy} - (2\alpha_1 \alpha_2 \bar{A}_{uu} + 2(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \bar{A}_{uv} + 2\beta_1 \beta_2 \bar{A}_{vv})) = 0 \quad (\text{A.21})$$

$$\det(\bar{A}_u, \bar{A}_v, \bar{B}_{yy} - (\alpha_2^2 \bar{A}_{uu} + 2\alpha_2 \beta_2 \bar{A}_{uv} + \beta_2^2 \bar{A}_{vv})) = 0 \quad (\text{A.22})$$

式(A.20)、式(A.21)及式(A.22)三式，即為最終輸出應用之 G^2 連續關係式。

附錄 B 曲面搭接連續性調整實作之參數銜接程序

以雙曲面搭接關係為基礎，限定至少一曲面於搭接邊界為非剪切邊界。選定搭接邊界為非剪切邊界者為調整曲面；另一曲面為參考曲面。圖 B.1 顯示雙曲面搭接關係中雙邊控制點分佈關係。

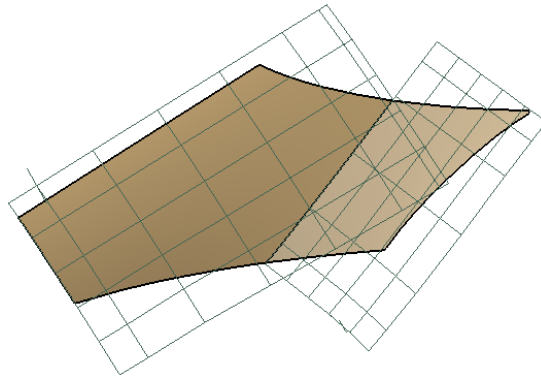


圖 B.1 控制點分佈示意

選定搭接邊界為非剪切邊者為調整曲面(Target)，以 $\bar{T}(x,y)$ 表示；另一曲面即為參考曲面(Reference)，以 $\bar{R}(u,v)$ 呈現。如圖 B.2 所示。

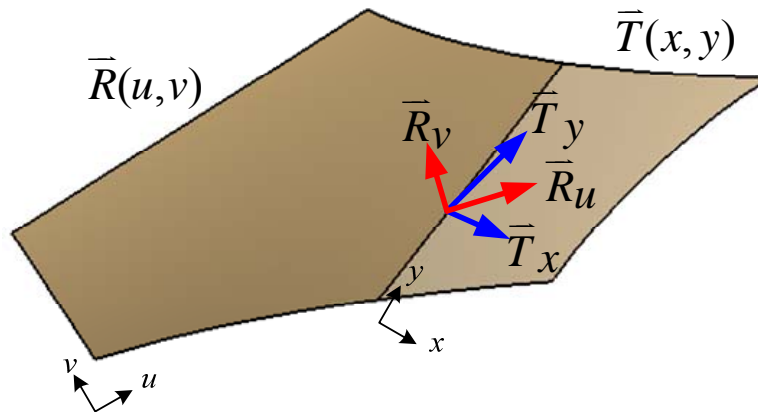


圖 B.2 曲面參數方向、一階微分項示意

對雙曲面 $\bar{R}(u, v)$ 、 $\bar{T}(x, y)$ 分別以張量積式呈現：

$$\bar{R}(u, v) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^r \bar{B}_{i,j} \cdot M_{k,i}(u) \cdot M_{l,j}(v) \quad (\text{B.1})$$

$$\bar{T}(x, y) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^t \bar{C}_{i,j} \cdot N_{m,i}(u) \cdot N_{n,j}(v) \quad (\text{B.2})$$

參考曲面 $\bar{R}(u, v)$ 為雙參數方向 u 、 v 之 B-spline 曲面， u 方向控制點數量 q ； v 方向控制點數量 r 。 u 方向階數 (order) k ； v 方向階數 l 。於參考曲面無需調整控制點，因此對其控制點數量不必特別標記。

調整曲面 $\bar{T}(x, y)$ 為雙參數方向 x 、 y 之 B-spline 曲面， x 方向控制點數量 s ； y 方向控制點數量 t 。 x 方向階數 m ； y 方向階數 n 。後續控制點調整以調整曲面為基礎，其控制點數量為調整上重要資訊，並需辨識搭階變界，進而確認調整控制點。

曲面之微分項關係，以曲面 $\bar{R}(u, v)$ 為例。 \bar{R}_u 、 \bar{R}_v 分別為曲面 \bar{R} 對 u 、 v 方向進行一次微分之呈現式； \bar{R}_{uu} 、 \bar{R}_{vv} 分別為曲面 \bar{R} 對 u 、 v 方向進行二次微分之呈現式； \bar{R}_{uv} 為曲面 \bar{R} 對 u 、 v 方向各進行一次微分呈現式。

於 G^1 、 G^2 連續調整需求上，對參考曲面 $\bar{R}(u, v)$ 求取 \bar{R}_u 、 \bar{R}_v 、 \bar{R}_{uu} 、 \bar{R}_{uv} 及 \bar{R}_{vv} ，5 微分項；對調整曲面 $\bar{T}(x, y)$ 求取 \bar{T}_x 、 \bar{T}_y 、 \bar{T}_{xx} 、 \bar{T}_{xy} 以及 \bar{T}_{yy} ，5 微分項次。

由雙曲面微分關係得到 G^1 連續關係式：

$$\det(p\bar{T}_u + q\bar{T}_v, \bar{R}_x, \bar{R}_y) = 0 \quad (\text{B.3})$$

p 、 q 為曲面一次微分項權重參數，為確保確實顧量各切線方向。實作上可直接設定為 $p=q=0.5$ ，均勻考量雙微分方向權重，或由搭接邊界之剪切斜度設定 p 、 q 數值。

G^2 連續關係式：

$$\det(\bar{R}_u, \bar{R}_v, \bar{T}_{xx} - (\alpha_1^2 \bar{R}_{uu} + 2\alpha_1 \beta_1 \bar{R}_{uv} + \beta_1^2 \bar{R}_{vv})) = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$\det(\bar{R}_u, \bar{R}_v, 2\bar{T}_{xy} - (2\alpha_1 \alpha_2 \bar{R}_{uu} + 2(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \bar{R}_{uv} + 2\beta_1 \beta_2 \bar{R}_{vv})) = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\det(\bar{R}_u, \bar{R}_v, \bar{T}_{yy} - (\alpha_2^2 \bar{R}_{uu} + 2\alpha_2 \beta_2 \bar{R}_{uv} + \beta_2^2 \bar{R}_{vv})) = 0 \quad (\text{B.6})$$

整合式(B.4)、式(B.5)、式(B.6)，取得單一 G^2 連續關係式：

$$\begin{aligned} & \det(\bar{R}_u, \bar{R}_v, \bar{T}_{xx} - (\alpha_1^2 \bar{R}_{uu} + 2\alpha_1 \beta_1 \bar{R}_{uv} + \beta_1^2 \bar{R}_{vv})) \\ & + \det(\bar{R}_u, \bar{R}_v, 2\bar{T}_{xy} - (2\alpha_1 \alpha_2 \bar{R}_{uu} + 2(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \bar{R}_{uv} + 2\beta_1 \beta_2 \bar{R}_{vv})) \\ & + \det(\bar{R}_u, \bar{R}_v, \bar{T}_{yy} - (\alpha_2^2 \bar{R}_{uu} + 2\alpha_2 \beta_2 \bar{R}_{uv} + \beta_2^2 \bar{R}_{vv})) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

α_1 、 α_2 、 β_1 、 β_2 四常數參數之求取，藉由 G^2 連續關係式之前端設定條件：式(B.8)、式(B.9)，取得。由此亦可得到 G^1 連續為 G^2 連續調整之先決條件，若初始未達 G^1 連續，於式(B.8)、式(B.9)必造成誤差。

$$\bar{B}_x = \alpha_1 \bar{A}_u + \beta_1 \bar{A}_v \quad (\text{B.8})$$

$$\bar{B}_y = \alpha_2 \bar{A}_u + \beta_2 \bar{A}_v \quad (\text{B.9})$$

式(B.8)、式(B.9)之係數求取，分別拆解各式三維度數值，個別可得三個關係式。以式(B.8)為例，可得下列關係：

$$\begin{cases} \bar{B}_x(x) = \alpha_1 \bar{A}_u(x) + \beta_1 \bar{A}_v(x) \\ \bar{B}_x(y) = \alpha_1 \bar{A}_u(y) + \beta_1 \bar{A}_v(y) \\ \bar{B}_x(z) = \alpha_1 \bar{A}_u(z) + \beta_1 \bar{A}_v(z) \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

任取兩式，即為二元一次聯立方程組，進行 α_1 、 β_1 之數值求取。



B.1 解析求解

以解析解形式求取適當控制點分佈，目標符合搭接邊界銜接連續性。流程如下列：

(1) 判別調整控制點

G^1 連續調整為由邊界外推一排控制點； G^2 連續調整為由邊界外推兩排控制點。如圖 B.3 所示。

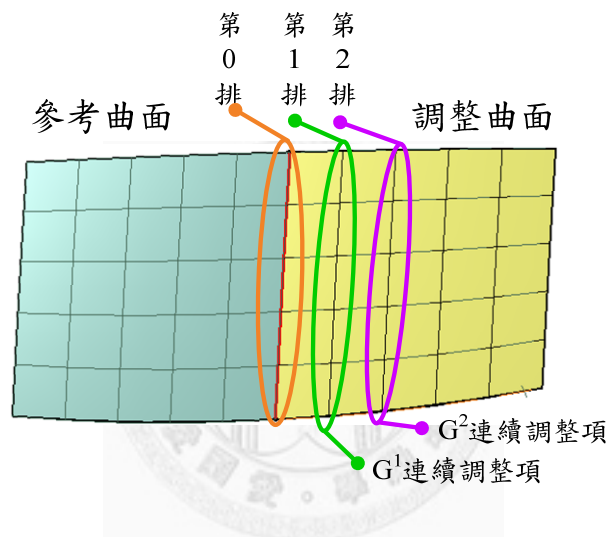


圖 B.3 調整控制點判別

(2) 設定變數數量

由單排控點數量乘上三空間維度。本案例調整曲面單排控制點數為 t ，變數量即為 $3t$ 。

(3) 於搭接邊界劃分數量為 t 之標定點，對各標定點求取對應雙曲面之參數值。 G^1 連續調整引入式(B.3)； G^2 連續調整引入式(B.7)，分別可得到 t 個方程式。而目標求取 $3t$ 個方程式，以求計算 $3t$ 個變數。

(4) 添增控制點調整限制條件：限定控制點於法線方向移動。

以兩面式呈現法線方向之直線，個別控制點添增法線方向限制，即兩平面方程式之限制條件。由此可得到 $2t$ 個方程式。

平面方程式求取法則如下列：

設定通過點 (x_0, y_0, z_0) 、法向量 (a, b, c) 為已知，可得三維空間中直線方程式：

$$\frac{(x-x_0)}{a} = \frac{(y-y_0)}{b} = \frac{(z-z_0)}{c} \quad (\text{B.11})$$

由式(B.11)取得兩平面方程式：

$$(b+c)x - ay - az = bx_0 + cx_0 - ay_0 - az_0 \quad (\text{B.12})$$

$$cx + cy - (a+b)z = cx_0 + cy_0 - az_0 - bz_0 \quad (\text{B.13})$$

$3t$ 個方程式、 $3t$ 個變數，進行聯立求解，取得解析解即為控制點調整目標位置。

B.2 數值求解

利用數值方法進行數值解之求取，並以取得之解作為連續性調整目標。於數值方法中關注要項為變數項、目標函數以及變數初始值設定。

(1) 變數項

同解析求解之設定， G^1 連續調整為由邊界外推一排控制點； G^2 連續調整為由邊界外推兩排控制點。如圖 B.3 所示。

(2) 目標函數

延伸 G^1 連續關係：式 (B.3)； G^2 連續關係：式 (B.4)、式 (B.5) 以及式 (B.6)，取得調整目標函數：

$$Func_{G^1}(v) = \sum \left| \det \left(p\bar{R}_u + q\bar{R}_v, \bar{T}_u, \bar{T}_v \right) \right| \quad (B.14)$$

$$\begin{aligned} & Func_{G^2}(v) \\ &= \sum \left(\left| \det \left(\bar{T}_u, \bar{T}_v, \bar{R}_{uu} - A_1^2 \bar{T}_{uu} - 2A_1 B_1 \bar{T}_{uv} - B_1^2 \bar{T}_{vv} \right) \right| \right. \\ &+ \left| \det \left(\bar{T}_u, \bar{T}_v, \bar{R}_{uv} - A_1 A_2 \bar{T}_{uu} - A_1 B_2 \bar{T}_{uv} - A_2 B_1 \bar{T}_{uv} - B_1 B_2 \bar{T}_{vv} \right) \right| \\ &+ \left. \left| \det \left(\bar{T}_u, \bar{T}_v, \bar{R}_{vv} - A_2^2 \bar{T}_{vv} - 2A_2 B_2 \bar{T}_{uv} - B_2^2 \bar{T}_{vv} \right) \right| \right) \end{aligned} \quad (B.15)$$

兩目標函數分別為對邊界酌量取點，進形函數加總之函數式。

(3) 變數初始值設定

以原始控制點位置，定為變數初始數值。

作者簡歷

姓名： 曹育銘

生日： 民國 75 年 8 月 11 日

學歷： 碩士 國立台灣大學機械工程學研究所 2008~2010
學士 國立交通大學機械工程學系 2004~2008
高中 國立嘉義高級中學 2001~2004
國中 嘉義縣立大吉國民中學 1998~2001
國小 嘉義縣立大崎國民小學 1992~1998

住址： 嘉義縣民雄鄉東湖村東勢湖 30 號

電話： (05)2269585

e-mail： tonyest2002@yahoo.com.tw
tony00013@gmail.com

