

國立臺灣大學電機資訊學院資訊網路多媒體研究所

碩士論文

Graduate Institute of Networking and Multimedia

College of Electrical Engineering & Computer Science

National Taiwan University

Master Thesis

時變參數下之障礙選擇權評價

Pricing Barrier Options

with Time-Varying Parameters



鄒志鴻

Chih-Hung Chou

指導教授：呂育道 博士

Advisor: Yuh-Dauh Lyuu, Ph.D.

中華民國 99 年 7 月

July 2010

國立臺灣大學碩士學位論文

口試委員會審定書

時變參數下之障礙選擇權評價

Pricing Barrier Options

with Time-Varying Parameters

本論文係鄒志鴻君 (R97944012) 在國立臺灣大學資訊工程學系完成之碩士學位論文，於民國 99 年 7 月 28 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

(指導教授)

系主任 _____

誌謝

研究所的兩年生活充滿了不確定性與挑戰，和其他的研究生一樣，有一大部分的時間是在茫茫學海與程式碼間載沉載浮，希望有朝一日能釣到一篇期刊或一個線性時間的演算法。

若一個平凡人做事和選擇所需要的計算複雜度是 $O(n^2)$ ，而像我這樣較為駑鈍的研究生，計算複雜度就會呈現指數成長。在研究所的這段期間，我衷心地感謝呂育道老師非常有耐心並且不厭其煩的指導，讓我從無到有進入了金融計算的領域，學習了許多做研究應有的正確態度與方法。老師在金融計算領域與各方面的廣博學識讓我深感佩服，使我受其灌溉而成長。於是到最後，我終於能完成一個計算複雜度為 $O(n^2)$ 的研究題目並取得學位。

其次我要感謝實驗室的成員與許多朋友：釗茹學姐、芸瑋學姐、俊英學長、經略學長就像小老師一樣，總在我研究與實作遭遇困難適時伸出援手。怡嘉、佳婷、韋誌、琮勛、文洪、國華是一同奮鬥的好同學，從他們身上我學習到許多優點，感受到實驗室的歡樂與溫暖，也讓生活變得更加有趣。

最後要感謝我的家人和女朋友羽軒，一直以來都非常地支持與關心我。未來我將會更加努力，才不枉費這段時間的學習與歷練。

摘要

障礙選擇權是一種路徑相依的衍生性金融產品，其價格決定於資產價格是否碰觸到給定的障礙 H 。一般而言，在許多評價樹模型中，分配誤差與非線性誤差會導致評價結果無法平滑收斂。本論文進一步探討障礙 $H(t)$ 與資產年化波動率 $\sigma(t)$ 為時變的函數，以符合實際的市場條件。然而這會導致在傳統的評價樹模型中遭遇困難。首先，隨時間變動的障礙 $H(t)$ 會造成障礙沒有落在評價樹的節點上，而使非線性誤差更大。而隨時間波動的資產年化波動率 $\sigma(t)$ 會使評價樹每一期的分支無法接合，並使計算複雜度呈指數成長。

Amin (1991) 提出的二元樹模型可允許標的物資產年化波動率為隨時間變動的函數，並能以 $O(n^2)$ 的計算複雜度評價陽春選擇權。Dai and Lyuu (2008, 2010) 所提出的 bino-trinomial tree 模型可藉由調整評價樹的結構，大幅降低非線性誤差並快速而精確地評價多種金融產品。

在本篇論文中，我們延伸應用了 Dai and Lyuu (2008, 2010) 提出的 bino-trinomial tree 模型與 Amin (1991) 的模型，用來評價時變波動率與非線性障礙邊界下的選擇權價格。我們以蒙地卡羅模擬驗證了我們評價模型的正確性：在計算複雜度 $O(n^2)$ 下做出精確的評價。同時，數值結果顯示計算出的選擇權價格能夠快速與平滑地收斂，而不會產生巨幅震盪。

關鍵字： 障礙選擇權 (barrier option)、時變波動率 (time-varying volatility)、非線性障礙 (non-linear barrier)、樹模型 (tree model)、非線性誤差 (nonlinearity error)

ABSTRACT

Barrier options are path-dependent options whose payoff depends on whether the underlying asset's price reaches or exceeds a given barrier H . In many numerical methods, the distribution error and the nonlinearity error together make the pricing results converge slowly or even oscillate significantly. This thesis incorporates the time-varying barrier $H(t)$ and volatility $\sigma(t)$ into the pricing model to reflect the markets better. However, it would be more difficult to price a barrier option accurately by traditional tree models. First, that the nodes in the tree cannot be made to coincide with the time-varying barrier $H(t)$ will magnify the nonlinearity error. Furthermore, working with a time-varying volatility $\sigma(t)$ that is consistent with the market would make the tree model uncombined and grow exponentially, unless deliberate efforts are given to modify the traditional tree models.

Amin (1991) proposed a binomial tree model to price vanilla options under time-varying volatility. Its time complexity is $O(n^2)$. Dai and Lyuu (2008, 2010) developed the bino-trinomial tree model (BTT) which reduces the nonlinearity error sharply by adjusting its structure for pricing a wide range of derivatives accurately and efficiently.

In this thesis, we extend Dai and Lyuu's BTT model (2008, 2010) by combining the method in Amin (1991) to compute accurate estimates of single-barrier option price with a time-varying volatility and an exponential barrier. The proposed pricing model is verified with Monte Carlo simulation, and it achieves accurate results with $O(n^2)$ time. Furthermore, the prices converge smoothly and quickly.

Keywords: barrier option, time-varying volatility, non-linear barrier, tree model, nonlinearity error

目錄

口試委員會審定書	i
誌謝	ii
摘要	iii
ABSTRACT	iv
圖目錄	vi
表目錄	vii
第一章 導論	1
1.1 障礙選擇權	1
1.2 論文架構	4
第二章 背景知識	5
2.1 二元樹評價模型與估計誤差	5
2.2 BTT 評價模型	7
2.3 時變波動率下 Black-Scholes Formula 的封閉解	9
2.4 時變波動率下的樹狀評價模型	10
第三章 時變參數下之障礙選擇權評價模型	15
3.1 符號與樹狀評價模型的定義	15
3.2 單一障礙選擇權樹狀評價模型之建構	16
3.3 非線性障礙邊界下障礙選擇權樹狀評價模型之建構	22
第四章 數值結果	27
4.1 時變波動率下單一障礙選擇權評價結果	27
4.2 時變波動率與非線性障礙邊界下障礙選擇權評價結果	29
第五章 總結	30
附錄	31
參考文獻	32

圖目錄

圖一：使用 AMM 評價陽春選擇權	3
圖二：CRR 二元樹模型（切割期數 $n=2$ ）	5
圖三：CRR 二元樹中每一期選擇權價格的計算	6
圖四：向下生效型障礙選擇權的非線性誤差	7
圖五：使用 BTT 模型評價單一障礙選擇權	8
圖六：以 Amin (1991) 二元樹評價模型計算時變波動率下歐式陽春選擇權價格（預 期切割期數 $n=4$ ，實際建構期數 $M=4$ ）	14
圖七：以 BTT 模型評價時變波動率下的障礙選擇權	18
圖八：以 BTT 模型評價時變波動率下向下終止型買權	22
圖九：以 TT 模型評價時變波動率與非線性障礙邊界下的障礙選擇權	24
圖十：不同切割期數下使用 Amin (1991) 二元樹評價向下終止型買權 （ $S_0=95, X=100, r=0.1, \sigma(t)=0.3-0.1 \cdot t, L=90$ ）	28
圖十一：不同切割期數下使用 BTT 評價向下終止型買權（ $S_0=95, X=100, r=0.1,$ $\sigma(t)=0.3-0.1 \cdot t, L=90$ ）	28
圖十二：不同切割期數下使用 TT 評價時變參數下向下終止型買權 （ $S_0=95, X=100, r=0.1, \sigma(t)=0.3-0.1 \cdot t, L(t)=L_0 e^{-0.01t}, L_0=90$ ）	29

表目錄

表一：單一障礙選擇權的種類與其收益函數 (payoff)	1
表二：時變波動率下 BTT 評價模型中每一期的時間長度與年化波動率 (令預期切割期數 $n=6$)	21
表三：使用 BTT、Amin (1991) 二元樹與蒙地卡羅模擬評價時變波動率下障礙選擇權的數值結果	27
表四：使用 TT 評價時變參數下障礙選擇權與蒙地卡羅模擬的數值結果	29



第一章 導論

1.1 障礙選擇權

障礙選擇權 (barrier options) 是在標的物資產價格上 (下) 方設有障礙 (barriers)，當標的物價格觸碰到障礙 H ，則合約便失效 (knock-out) 或者生效 (knock-in)。由於它具有較一般選擇權更為便宜與高獲利的特性，又不失一般選擇權的避險功能，使它成為當今市場上非常熱門的金融工具。

根據障礙選擇權其標的物資產價格是否碰觸到障礙的情形，可將障礙選擇權分為下列八種：

	買權	賣權
向下終止型 (down-and-out) $H < S_0$	$\begin{cases} 0 & \text{if } H \geq \min_{0 \leq t \leq T} S_t \\ \max(S_T - X, 0) & \text{if } H < \min_{0 \leq t \leq T} S_t \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & \text{if } H \geq \min_{0 \leq t \leq T} S_t \\ \max(X - S_T, 0) & \text{if } H < \min_{0 \leq t \leq T} S_t \end{cases}$
向下生效型 (down-and-in) $H < S_0$	$\begin{cases} 0 & \text{if } H < \min_{0 \leq t \leq T} S_t \\ \max(S_T - X, 0) & \text{if } H \geq \min_{0 \leq t \leq T} S_t \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & \text{if } H < \min_{0 \leq t \leq T} S_t \\ \max(X - S_T, 0) & \text{if } H \geq \min_{0 \leq t \leq T} S_t \end{cases}$
向上終止型 (up-and-out) $H > S_0$	$\begin{cases} \max(S_T - X, 0) & \text{if } H > \max_{0 \leq t \leq T} S_t \\ 0 & \text{if } H \leq \max_{0 \leq t \leq T} S_t \end{cases}$	$\begin{cases} \max(X - S_T, 0) & \text{if } H > \max_{0 \leq t \leq T} S_t \\ 0 & \text{if } H \leq \max_{0 \leq t \leq T} S_t \end{cases}$
向上生效型 (up-and-in) $H > S_0$	$\begin{cases} \max(S_T - X, 0) & \text{if } H \leq \max_{0 \leq t \leq T} S_t \\ 0 & \text{if } H > \max_{0 \leq t \leq T} S_t \end{cases}$	$\begin{cases} \max(X - S_T, 0) & \text{if } H \leq \max_{0 \leq t \leq T} S_t \\ 0 & \text{if } H > \max_{0 \leq t \leq T} S_t \end{cases}$

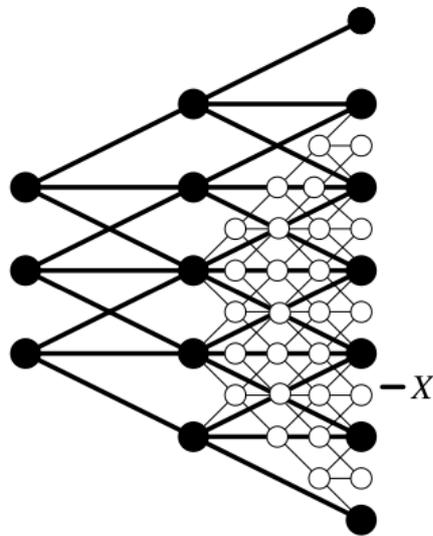
表一、單一障礙選擇權的種類與其收益函數 (payoff)。

除此之外，雙障礙選擇權為單一障礙選擇權常見的延伸，其特性為具有兩個障礙價格，一旦標的物的價格觸碰其中的一個障礙 H (L) 則合約便生效 (失效)。本篇論文將探討另一種單一障礙選擇權的延伸，將障礙價格 H 定為一個隨時間變動的指數函數，亦即 $H(t) = H_0 e^{\delta t}$ 。

在過去障礙選擇權評價模型，Merton (1973) 首先使用 Black-Scholes 方程式推導出障礙選擇權的封閉解，其後 Boyle and Lau (1994) 利用 Cox, Ross and Rubinstein (1979) (此後簡稱為 CRR) 提出的二元樹模型來計算美式障礙選擇權的價格。然而 CRR 模型若應用在障礙選擇權上卻可能出現嚴重的誤差；隨著切割期數 n 的增加，計算出的選擇權價格將大幅振盪並且收斂緩慢[3]。會造成此種誤差的原因在於評價的過程中，障礙價格沒有落於評價樹的節點上。為了解決評價誤差的問題，他們提出一個簡單的方法找出正確的切割期數 n 來做評價，使得障礙的價格恰好落在評價樹的節點上，如此便能使評價誤差降到最小並得到精確的結果。

Ritchken (1995) 提出的三元樹評價模型可用來評價多種的障礙選擇權，例如：障礙價格為隨時間變動的指數函數，或者有多個障礙價格的障礙選擇權。此時 Boyle and Lau (1994) 的評價模式便不適用。Ritchken (1995) 提出的三元樹評價模型，主要是透過一個自訂的參數 λ ($\lambda \geq 1$) 來調整每一期價格變動的幅度與機率 (transition probability)，使得障礙價格恰好能落於評價樹的節點上，如此便能對上述障礙選擇權作出精確的評價。Ritchken (1995) 並指出在一般的選擇權評價下，當選擇的參數 λ 能使標的物價格持平 (horizontal move) 的機率接近 $1/3$ 時會有極快的收斂速度，並且在此條件下，其計算速度比使用兩倍切割期數 n 的二元樹評價模型還要更快[20]。不過當標的物資產價格非常靠近障礙價格時，三元樹評價模型會需要極大的切割期數 n 才能得到合理的參數 λ ，如此不但會使計算變得極為費時，而且結果也會收斂極慢，這便是所謂的 barrier-too-close 問題[13]。

Figlewski and Gao (1999) 根據三元樹的評價模型發展出了適應性網格模型 (adaptive mesh model, 以下簡稱 AMM) 可解決 barrier-too-close 的問題。對於障礙選擇權的評價，AMM 主要是先建構一個切割期數較長的三元樹模型，以降低評價的計算資料量，然後再針對靠近障礙價格的節點建構更為細部的評價網格，如此便能同時兼顧計算效率與精確度 (如圖一)。



圖一、使用 AMM 評價陽春選擇權。首先建構一個切割期數間隔較長的網格（粗線與黑色節點），再從原有的節點建構出較細部的網格（細線與白色節點）。

Dai and Lyuu (2008, 2010) 結合了 CRR 模型與三元樹的架構，提出了 bino-trinomial tree (以下簡稱 BTT) 模型，比起 AMM 與 Ritchken 的三元樹模型，BTT 能夠更加快速、更有彈性地得到精確的結果，並且也能解決 barrier-too-close 的問題。我們將在稍後於本篇論文詳細地介紹 BTT 模型並做更進一步的延伸應用。

在以上介紹的幾種評價方法幾乎都假設評價模型中的參數如年化波動率與障礙價格 H 為常數；但我們知道，實際上這些評價模型中的參數在交易市場中都是會隨著時間變動的。在過往的文獻中，隨機波動率 (stochastic volatility) 與時變波動率 (deterministic volatility) 分別被考慮進不同的評價模型。以隨機波動率的評價模型而言，分別由 Hull and White (1987)、Dupire (1992)、Heston (1993) 等提出。而時變波動率則在 Amin (1991)、Derman and Kani (1994)、Li (2000) 等被提出。其中 Amin (1991) 使用了有限差分的數值方法將 CRR 模型延伸而成為一個允許每一期時間長度不固定的二元樹評價模型，以用來評價時變波動率下的歐式和美式陽春選擇權。此外，Amin (1991) 雖然未提到這個二元樹評價模型是否能用來計算一般障礙選擇權的價格，但用他的二元樹評價模型用來評價固定障礙選擇權，對於某些切割期數 n ，障礙價格 H 會非常靠近二元樹的某一層節點，而使計算出的價格僅有些微的誤差，所以原則上，Amin (1991) 的二元樹應該也能用來計算固定障礙價格 H 的障礙選擇權價格。但是如同許多二元樹評價模型在評價障礙選擇權會遭遇的問題，Amin (1991) 的二元樹評價模型在計算障礙選擇

權價格時，除非障礙價格 H 非常靠近二元樹的某一層節點，否則會有價格劇烈震盪與收斂緩慢的問題。並且，二元樹評價模型的自由度也不足以用來評計算障礙價格 $H(t)$ 隨著時間變動的選擇權價格。這些數據將會在第四章加以呈現並加以說明。

在本篇論文中，我們以 Amin (1991) 有限差分的數值方法為基礎，提出了一個障礙選擇權的評價模型，在這個模型中我們假設資產年化波動率 $\sigma(t)$ 為隨時間變動的函數，以符合較為實際的市場條件。我們使用了 Dai and Lyuu (2008, 2010) 提出的 BTT 評價模型，以改進計算結果會大幅震盪與收斂緩慢的問題。此外，我們更進一步將 BTT 模型延伸使其足以計算障礙價格 $H(t)$ 為隨時間變動的函數的障礙選擇權價格。

最後，我們使用蒙地卡羅模擬驗證評價模型的正確性。與 Amin (1991) 的評價模型相比，實驗結果顯示我們提出的模型能夠精確並更加快速地評價時變波動率下的障礙選擇權，而且隨著切割期數的增加，計算出的選擇權價格能夠平滑並快速地收斂。

1.2 論文架構

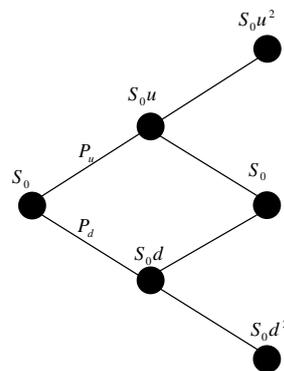
本篇論文的架構如下：我們會在第二章介紹 Amin (1991) 提出時變波動率下陽春選擇權的評價模型。第三章是第二章的延伸，我們會介紹與使用 Dai and Lyuu (2008, 2010) 所提出的 BTT 模型來評價時變波動率下的單一障礙障礙選擇權。其次，我們會將 Dai and Lyuu (2008, 2010) 所提出的 BTT 模型作一延伸應用，探討障礙價格為隨時間變動的指數函數的選擇權評價方法。第四章會呈現我們的評價結果與使用蒙地卡羅模擬做驗證的實驗數據，最後在第五章作一總結。

第二章 背景知識

2.1 二元樹評價模型與估計誤差

2.1.1 CRR 二元樹評價模型

Cox, Ross and Rubinstein (1979) 發展出的二元樹評價模型已在金融計算的領域被使用多時。由於二元樹評價模型相當易於瞭解與使用，並且對於某些選擇權的價格如美式選擇權，我們無法使用如 Black-Scholes 這類方程式直接求出封閉解，因此許多文獻便基於 CRR 模型發展出更多的延伸與應用以評價出各式的選擇權價格。我們在此簡單地介紹 CRR 模型，如圖二所示。



圖二、CRR 二元樹模型（切割期數 $n=2$ ）。

令標的物資產初始的價格為 S_0 ，則每一期價格上漲與下跌的幅度分為：

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$
$$d = 1/u = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

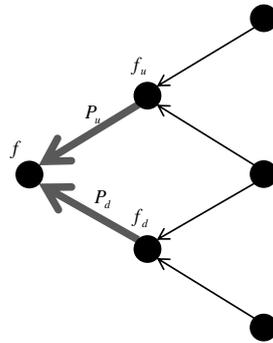
其中 σ 為年化波動率而 Δt 為評價樹中每一期的時間長度。

在風險中立評價的模型下，我們可以得到每一期上漲 (P_u) 與下跌 (P_d) 的機率分別為：

$$P_u = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$
$$P_d = 1 - P_u$$

其中 r 為無風險利率。以歐式買權為例：其在履約日的價值為：

$\max(S_T - X, 0)$ 。若我們將這個值代入 CRR 模型最後一期每一個節點中，則我們可以透過 $f = P_u f_u + P_d f_d$ ，從最後一期往前推演，以求出 CRR 模型中選擇權評價模型中的每個節點的值，最後便能得出這個選擇權的價格（如圖三）。



圖三、CRR 二元樹中每一期選擇權價格的計算。

2.1.2 分配誤差與非線性誤差

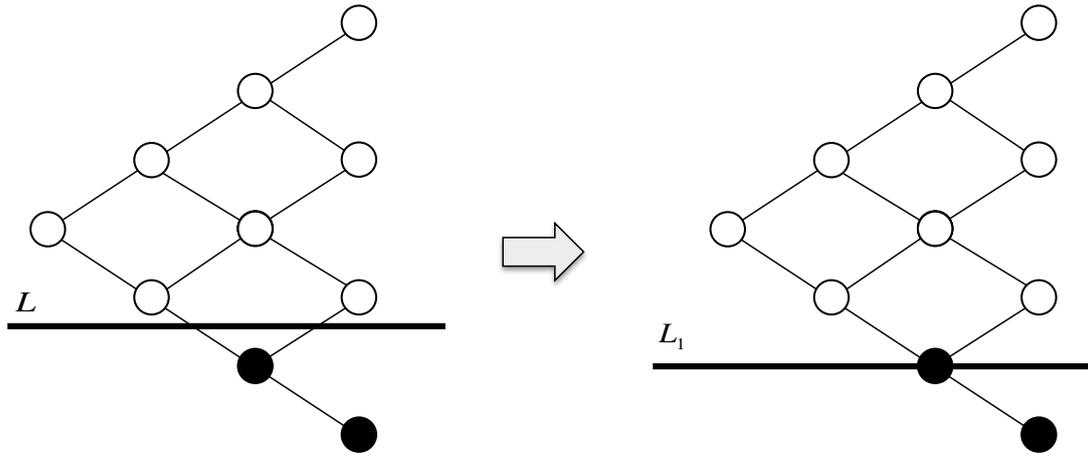
由於樹狀評價模型是以離散與有限的切割期數來逼近對數常態分配的標的物資產價格模型，所以使用樹狀模型會導致一定程度的估計誤差（approximation error）。Figlewski and Gao (1999) 指出，這些估計誤差根據來源可分為兩類：分配誤差（distribution error）與非線性誤差（non-linearity error）。

A. 分配誤差：

造成分配誤差的原因是將標的物資產價格的連續性分佈，改以樹狀評價模型中離散而有限的節點來表示，如此誤差會隨著切割期數越少（節點個數越少）而增加。反之，若切割期數越多，則估計會越準確並減少分配誤差。

B. 非線性誤差：

在樹狀評價模型中，節點的價格可視為其在價格空間中的機率分佈，各個節點乘上其機率為一線性組合，其加總最後便能得到選擇權的價格（期望值）。然而當選擇權的收益函數呈現高度的非線性，使用節點與機率的線性組合便可能導致嚴重的誤差。以一個障礙價格為 $L(L < S_0)$ 的向下終止型障礙選擇權為例（如圖四），當障礙價格沒有碰到節點時，在障礙以下的節點的價格為零（以黑色表示），然而這樣的計算出的選擇權價格卻會和障礙價格為 L_1 時相同，顯然並不合理。於是當障礙價格介於兩層節點之間而沒有通過節點時，便會產生非線性誤差。



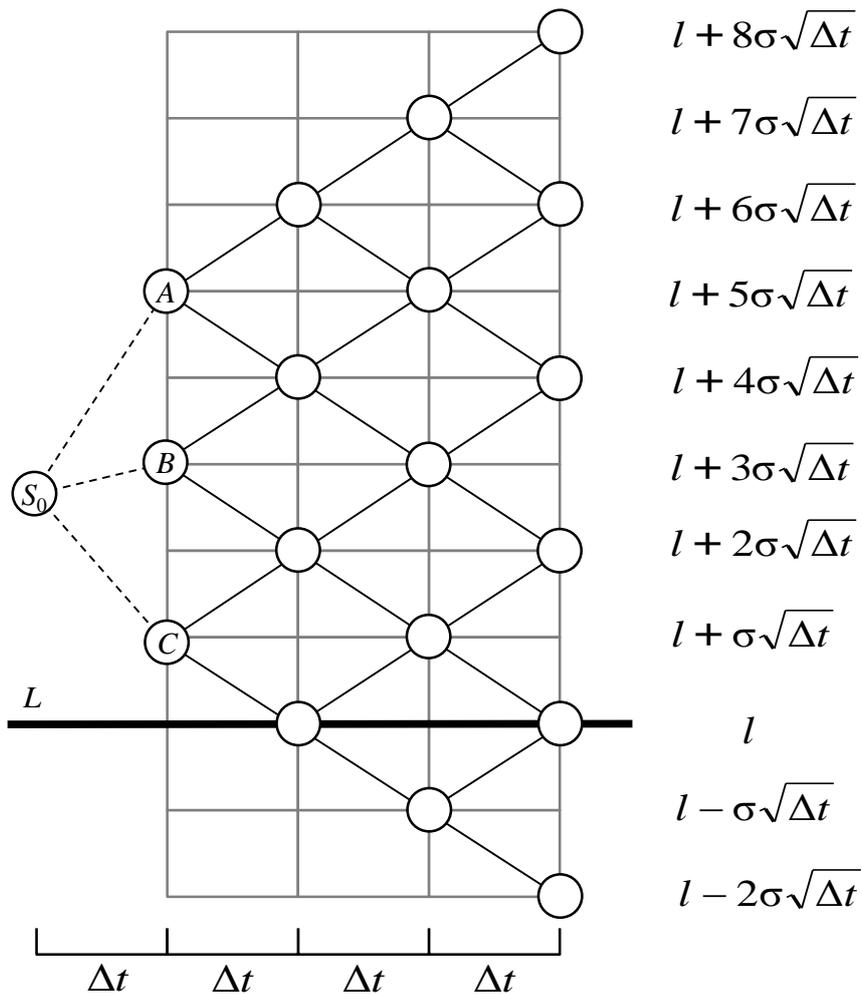
圖四、向下生效型障礙選擇權的非線性誤差。

Ritchken (1995) 的三元樹評價模型、Figlewski and Gao (1999) 的 AMM 和 Dai and Lyuu (2008, 2010) 的 BTT 模型，均能透過調整評價樹的結構使障礙價格恰好通過節點，以減少非線性誤差。其中，BTT 模型在評價上不但能達到平滑與快速的收斂，並兼具易於實作的優點，我們將在下一節介紹 BTT 的評價模型。在第三章中，我們會對 BTT 作進一步的延伸應用以精確地評價時變參數下的障礙選擇權。

2.2 BTT 評價模型

Dai and Lyuu (2008, 2010) 提出的 BTT 模型，主要是結合三元樹的自由度與二元樹的簡便性以達到精確和快速的選擇權價格。以下我們以評價單一障礙選擇權為例子來說明。

首先，我們令評價樹中第一期的分支為一個三元樹模型，其餘的部分均為二元樹模型。其次，根據前一節的定義，我們可以得到二元樹中每一層節點之間的寬度為 $\sigma\sqrt{\Delta t}$ ，並且令障礙價格 L 通過二元樹的某一層節點以降低評價結果的非線性誤差。



圖五、使用 BTT 模型評價單一障礙選擇權。標的物資產初始價格為 S_0 ，右方的標示為節點的對數價格，左方 L 與粗線標示為障礙價格。

如圖五所示，在 BTT 評價模型中二元樹的部分，我們可以看到其每期資產價格上漲 (P_u) 與下跌 (P_d) 的機率和 CRR 模型並無二致，也就是：

$$P_u = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

$$P_d = 1 - P_u$$

而標的物資產的價格上漲 (u) 與下跌 (d) 的幅度分別為：

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = 1/u = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

由於二元樹的自由度不足以讓障礙價格正好通過節點，所以我們需要透過節

點 S_0 與三元樹的調整以得出二元樹的初始節點，也就是節點 A、B、C 的合理位置。

在第一期的三元樹中，由資產價格呈對數常態分佈的性質，我們可以得到評價樹中下一期的所有節點的對數價格平均 (μ) 與變異數 (Var) 為：

$$\begin{aligned}\mu &= (r - \sigma^2/2)\Delta t \\ \text{Var} &= \sigma^2\Delta t\end{aligned}$$

由於在之後的二元樹每一期相鄰的節點其對數價格的差距均為 $2\sigma\sqrt{\Delta t}$ ，這使得在區間 $[\mu - \sigma\sqrt{\Delta t}, \mu + \sigma\sqrt{\Delta t}]$ 必存在唯一的節點落於之間，且這個節點距離障礙價格 L 為 $\sigma\sqrt{\Delta t}$ 的整數倍，我們就取這個節點為 B。如圖五所示，B 點的對數價格為 $\hat{\mu} = l + 3\sigma\sqrt{\Delta t}$ 。

令 A、C 節點的對數價格為 $\hat{\mu} + 2\sigma\sqrt{\Delta t}$ 和 $\hat{\mu} - 2\sigma\sqrt{\Delta t}$ ，並定義 α 、 β 、 γ 為 A、B、C 的對數價格減去其平均，亦即：

$$\begin{aligned}\beta &= \hat{\mu} - \mu \\ \alpha &= \hat{\mu} + 2\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu = \beta + 2\sigma\sqrt{\Delta t} \\ \gamma &= \hat{\mu} - 2\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu = \beta - 2\sigma\sqrt{\Delta t}\end{aligned}$$

最後，我們能夠得到下面的式子以求出第一期中三元樹的機率 P_u 、 P_m 、 P_d ：

$$\begin{aligned}P_u\alpha + P_m\beta + P_d\gamma &= 0 \\ P_u\alpha^2 + P_m\beta^2 + P_d\gamma^2 &= \text{Var} \\ P_u + P_m + P_d &= 1\end{aligned}$$

假設 V_Y 表示在節點 Y 時的選擇權價值，則在 S_0 的選擇權價值就可以由下式求得其值：

$$V_{S_0} = e^{-r\Delta t}(P_u V_A + P_m V_B + P_d V_C)$$

2.3 時變波動率下 Black-Scholes Formula 的封閉解

在 Black-Scholes 最初的假設條件中，我們假設標的物資產價格為一幾何布朗運動，並且呈現對數常態分佈[2]。此外，無風險利率 r 與標的物資產價格的年化波動率 σ 亦假設為一個常數，則我們可以得到式錯誤! 找不到參照來源。(2.1)：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_t \quad (2.1)$$

考慮在年化波動率為隨時間變動的函數 $\sigma(t)$ 的條件下，我們可以將式 (2.1) 改寫為如下形式得到式 (2.2)：

$$dS = \mu S dt + \sigma(t) S dW_t \quad (2.2)$$

根據一般選擇權評價模型中的變數定義，其中：

T ：選擇權從開始（即時間點 $t=0$ ）到履約日（ $t=T$ ）期間的時間長度

S ：標的物資產的價格

X ：選擇權的履約價格

σ ：標的物資產價格的年化波動率。

r ：年化無風險利率

W_t ：為標準的隨機程序（Wiener process）

根據以上式子，透過解出 Black-Scholes 偏微分方程式與買權賣權等價理論（put-call parity）公式，我們可以解出買權（ C ）與賣權（ P ）的價格如式 (2.3) ~ (2.4) [16]：

$$C = S e^{-qT} N(x) - X e^{-rT} N(x - \bar{\sigma} \sqrt{T}) \quad (2.3)$$

$$P = X e^{-rT} N(-x + \bar{\sigma} \sqrt{T}) - S e^{-qT} N(-x) \quad (2.4)$$

其中

$$x = \frac{\ln(S/X) + r - q + \bar{\sigma}^2 / 2}{\bar{\sigma} \sqrt{T}}, \quad \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{\int_0^T \sigma^2(t) dt}{T}}$$

2.4 時變波動率下的樹狀評價模型

雖然在年化波動率為隨時間變動的函數 $\sigma(t)$ 的條件下可使用 Black-Scholes 方程式求得封閉解，然而這個評價模型卻不適用於出美式選擇權和其它路徑相依選擇權的評價。在此情形下，使用樹狀評價模型來計算出美式和一些路徑相依選擇權的價格便是一個有效率且簡單的方法。

考慮在年化波動率為隨時間變動的函數 $\sigma(t)$ 的條件下，描述標的物資產價格連

續性的幾何布朗運動改寫成一有限差分的形式如下式 (2.5)：

$$\ln \left[\frac{S(n\Delta t)}{S((n-1)\Delta t)} \right] = \left(r - q - \frac{\sigma_t^2}{2} \right) \Delta t + \sigma_t \sqrt{\Delta t} \tilde{X}((n-1)\Delta t) \quad (2.5)$$

其中 \tilde{X} 為獨立同分佈 (independent and identically distributed) 的伯努利隨機變數 (Bernoulli random variable)，其值為 1 或 -1。

然而若使用式 (2.5) 直接建構二元樹評價模型，會使得每一期的分支不接合而讓標的物資產價格的節點數目呈現指數增加，如此計算的複雜度為 $O(2^n)$ ，要做出有效率的評價將變得不可能。為了解決此項問題，Amin (1991) 提出在年化波動率為隨時間變動的函數 $\sigma(t)$ 的條件下，為了消除波動率對於時間的相依性，可將 CRR 二元樹評價模型中每一期的時間長度與年化波動率同時改為一個隨著期數 $i (1 \leq i \leq n)$ 而變動的函數。亦即，可將式 (2.5) 改寫如下式 (2.6)：

$$\ln \left[\frac{S_i}{S_{i-1}} \right] = \left(r - q - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) \Delta t_i + \sigma_i \sqrt{\Delta t_i} \tilde{X}(i) \quad (2.6)$$

其中 \tilde{X} 為獨立同分佈的伯努利隨機變數，其值為 1 或 -1。

根據上式 (2.6) 的定義，Amin (1991) 進一步指出藉由透過調整 CRR 二元樹中每一期的時間長度以抵銷波動率隨時間變化的影響，如此便能使每一期的二元樹接合。亦即，令第 i 期時間長度為 $\Delta t_i (1 \leq i \leq n)$ ，使得第 i 期內的年化波動率 σ_i 與 Δt_i 的平方根相乘為一個常數：

$$\sigma_i \sqrt{\Delta t_i} = \bar{\sigma} \sqrt{\Delta t} \quad (2.7)$$

其中， σ_i 可視為第 i 期內年化波動率函數的方均根 (root mean square) 並且需和 Δt_i 同時計算以得出，而計算所使用的數值方法我們將會在稍後作說明， $\bar{\sigma}$ 為平均的年化波動率 $\bar{\sigma} = \sqrt{\int_0^T \sigma^2(t) dt / T}$ ， Δt 為每期的平均時間長度，即 $\Delta t = T/n$ 。

然而要進行此種轉換，Amin (1991) 指出波動率的時間函數 $\sigma(t)$ ，需符合一個有限的邊界 (finite bound) 如下所示[1]：

$$\frac{\sup_t \sigma^2(t)}{\inf_t \sigma^2(t)} \leq K$$

其中， K 為一個有限的邊界，如此才能保證離散時間函數下的式 (2.6) 能收斂 (converge) 至連續時間函數下的式 (2.2)。此外，這項條件亦使用於本論文所提出評價模型中時變波動率 $\sigma(t)$ 的條件。

由於使用離散的時間長度來趨近連續性的價格波動，將導致建構出的二元樹模型其總時間長度並不一定會恰好等於履約日 T 。在這種情形下，會發生最後一期節點的位置極不穩定，有可能位在時間點 $t=T$ 之前、或者落於之後的地方。為了解決這個問題，Amin (1991) 提出在預期切割期數為 n 的條件下，我們實際上會建構出一個 M 期的二元樹評價模型，並且令 $M = \inf\{k : \sum_{i=1}^k \Delta t_i \geq T\}$ 。根據式 (2.7) 所述我們可以得到：

$$\sigma_i \sqrt{\Delta t_i} = \sqrt{\frac{\int_0^T \sigma^2(t) dt}{T}} \times \sqrt{\frac{T}{n}} = \sqrt{\frac{\int_0^T \sigma^2(t) dt}{n}} \quad (1 \leq i \leq M) \quad (2.8)$$

從式 (2.8) 中可以看出，由於 Amin (1991) 的二元樹模型令每一期的波動率 $\sigma_i \sqrt{\Delta t_i}$ 等於年化波動率函數 $\sigma(t)$ 的方均根並等分給 n 期： $\sqrt{\int_0^T \sigma^2(t) dt / n}$ ，如此當切割期數 n 趨近於無限大時，我們應能得到每一期的波動率都會趨近於 $\sqrt{\int_0^T \sigma^2(t) dt / n}$ ，使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} M - n = 0$ ，如此方能使得評價模型的計算結果能夠收斂。Amin (1991) 於他的實驗數據中亦證明了此項性質[1]。

因為有了建構期數為 $M = \inf\{k : \sum_{i=1}^k \Delta t_i \geq T\}$ 的這項條件，會使得建構出來的二元樹在第 M 期（最後一期）的節點會超過或等於時間軸 $t=T$ 的位置。亦即：

$$\sum_{i=1}^M \Delta t_i = \sum_{i=1}^M \frac{\int_0^T \sigma^2(t) dt}{T \times \sigma_i^2} \times \frac{T}{n} \geq T$$

接下來，我們介紹如何解出每一期的時間長度 Δt_i 與波動率 σ_i 的方法。首先，定義 τ_i （定 $\tau_0 = 0$ ）為二元樹前 i 期總共經過的時間，因此有 $\Delta t_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ 。則在第 i 期藉由對波動率函數平方的定積分：如式 (2.8) 我們能夠得到：

$$\sigma_i^2 \Delta t_i = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \sigma^2(t) dt = \bar{\sigma}^2 \Delta t$$

由於 $\sigma(t)$ 為已知，我們能夠使用例如牛頓法 (Newton-Raphson method) 等數值方法[18]，得到每一個 τ_i ，進而求得第 i 期的時間長度 $\Delta t_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ ，然後求得年化波動率 σ_i 。

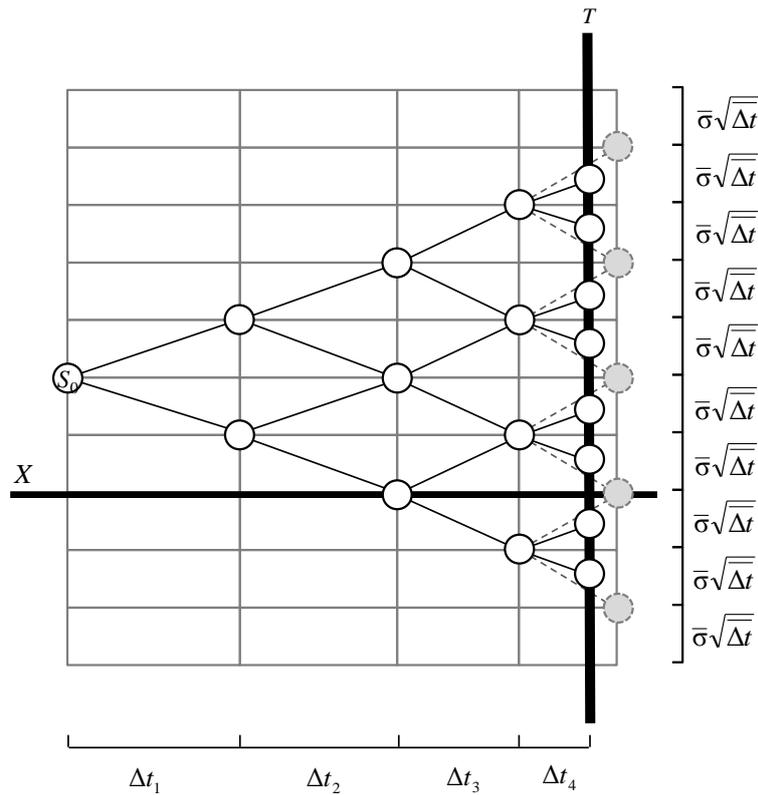
值得注意的是，Amin (1991) 指出在當年化波動率為一個線性的時間函數 $\sigma(t)$ 時， M 通常會等於 n 並且 $\sum_{i=1}^M \Delta t_i$ 與 T 僅有非常微小的誤差或相等[1]。但是第 M 期的合約可能已經超過履約日，但顯然在計算選擇權價格時，我們只能對在時間軸 $[0, T]$ 之間的節點做計算。如圖六所示，灰色節點為模型推導出的第 M 期（最後一期）節點位置，但如同 Amin (1991) 二元樹評價模型所定義的條件： $M = \inf k: \sum_{i=1}^k \Delta t_i \geq T$ ，會使得這些灰色節點超過履約日 T ，故在計算價格的時候必須被省去不計，而改使用位於履約日 T 的白色節點來進行向前推演 (backward reduction) 以求出選擇權的價格，我們將在第三章詳述這個部分。

最後，在 Amin (1991) 的二元樹評價模型中，我們能看出每一期資產價格上漲 (u) 和下跌 (d) 的幅度會是個固定的常數，使得每一期的價格節點接合，也就是：

$$u = e^{\sigma_i \sqrt{\Delta t_i}} = e^{\bar{\sigma} \sqrt{\Delta t}}$$

$$d = 1/u = e^{-\bar{\sigma} \sqrt{\Delta t}}$$

而唯一會隨著時間改變的參數，只有每一期貼現率 (discount rate) $R_i = e^{-r \Delta t_i}$ 和機率 $p_i = \frac{e^{(r-q) \Delta t_i} - d}{u - d}$ 。圖六為一個使用 Amin (1991) 的二元樹評價模型 (預期切割期數 $n = 4$)，計算時變波動率下歐式陽春選擇權價格的例子，實際上，這個方法也適用於美式陽春選擇權的評價[1]。



圖六、以 Amin (1991) 的二元樹評價模型計算時變波動率下歐式陽春選擇權價格 (預期切割期數 $n=4$, 實際建構期數 $M=4$)。圖例中的 $\sigma(t)$ 為一隨時間遞增的函數, 因此可看出每期資產價格上漲與下跌的幅度逐漸增加。使用黑色實線連接的白色節點因為時間介於 $[0, T]$, 為評價時需要被計算的部分。由於 Amin (1991) 提出在預期切割期數為 n 的條件下應建構出一個 M 期的二元樹評價模型並且令 $M = \inf\{k : \sum_{i=1}^k \Delta t_i \geq T\}$ 。所以我們可得到灰色虛線連接的灰色節點為 Amin(1991) 二元樹評價模型的第 M 期 (最後一期) 節點, 其雖然會接合但卻因為超過履約日 T 而不列入計算。

第三章 時變參數下之障礙選擇權評價模型

3.1 符號與樹狀評價模型的定義

在本節中我們會定義本篇論文中評價模型的符號，並且也給予評價模型中用到的條件清楚定義：

T ：選擇權從開始（即時間點 $t=0$ ）到履約日（ $t=T$ ）期間的時間長度

S_i ：標的物資產在樹狀評價模型中第 i 期的價格（ $0 \leq i \leq n$ ）。

X ：選擇權的履約價格

$\sigma(t)$ ：標的物資產價格的年化波動率，為一個隨時間變動的函數。

r ：年化無風險利率

q ：股息收益率

L ：障礙選擇權的障礙價格。

n ：二元樹評價模型的預期切割期數。

$\bar{\sigma}$ ：標的物資產價格平均的年化波動率，也就是 $\bar{\sigma} = \sqrt{\int_0^T \sigma^2(t) dt / T}$

$\bar{\Delta t}$ ：樹狀模型的每一期時間的平均長度，也就是 $\bar{\Delta t} = T / n$ 。

我們使用 Amin (1991) 提出的評價模型來計算時變波動率下單一障礙選擇權的價格，並將資產價格的幾何布朗運動改寫為如下的差分形式：

$$\ln \left[\frac{S_i}{S_{i-1}} \right] = \left(r - q - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) \Delta t + \sigma_i \sqrt{\Delta t} \tilde{X}(i) \quad (3.1)$$

其中 \tilde{X} 為獨立同分佈的伯努利隨機變數，其值為 1 或 -1。

考慮一個障礙價格為 L 的單一障礙選擇權。為了方便我們以 $L < S_0$ 的向下終止型買權為例，則其到期日的收益函數與標的物資產價格 S_i 的關係為：

$$\text{payoff} = \begin{cases} 0 & \text{if } L \geq \min_{0 \leq t \leq T} S_t \\ \max(S_T - X, 0) & \text{if } L < \min_{0 \leq t \leq T} S_t \end{cases} \quad (3.2)$$

然後，我們會使用如第 2.4 節中圖六所示的 CRR 二元樹評價模型。可以得到

每一期標的物資產價格的機率為： $p_i = \frac{e^{(r-q)\Delta t_i} - d}{u - d}$ 。而標的物資產價格上漲（ u ）

與下跌（ d ）的幅度分別為： $u = e^{\sigma_i \sqrt{\Delta t_i}} = e^{\bar{\sigma} \sqrt{\Delta t}}$ 和 $d = 1/u = e^{-\bar{\sigma} \sqrt{\Delta t}}$ ($1 \leq i \leq n$)。

3.2 單一障礙選擇權樹狀評價模型之建構

在這一節中，我們將根據前一節的定義，依下列兩個重點來介紹如何建構出一個預期切割期數為 n 的 BTT 評價模型：(1) 每一期時間長度 Δt_i 與年化波動率 σ_i 的取法。(2) 第一期的三元樹建構與機率的計算。

3.2.1 每一期時間長度與年化波動率的取法

在年化波動率隨時間變動的情形下要讓樹狀模型接合，我們使用上一節所定義的幾何布朗運動模型並令每一期的資產價格波動為一常數：

$\sigma_i \sqrt{\Delta t_i} = \bar{\sigma} \sqrt{\Delta t}$ ($1 \leq i \leq n$)。這項性質使得二元樹中每期節點間的距離均為 $2\bar{\sigma} \sqrt{\Delta t}$ ，並且在二元樹中每一期的分支都能夠接合，所以不會影響我們建構 BTT 模型。以下我們將說明如何從時間 $t=0$ 開始解出每一期的時間長度和波動率。

首先，令第 i 期的時間長度為 Δt_i ，令某一期的方均根當作該期的年化波動率，亦

即 $\sigma_i = \sqrt{\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_{i-1} + \Delta t_i} \sigma^2(s) ds / \Delta t_i}$ ，並且需和 Δt_i 同時計算以得出。然後，定義

$\tau_i = \sum_{k=1}^i \Delta t_k$ ($\tau_0 = 0$) 為前 i 期總共經過的時間，因此 $\Delta t_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ 。則在第 i 期中，

藉由對波動率函數平方的定積分，我們能夠得到 $\sigma_i^2 \Delta t_i = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \sigma^2(t) dt = \bar{\sigma}^2 \Delta t$ 。由於

$\sigma(t)$ 為已知，我們便能夠使用牛頓法等數值方法，得到每一個 τ_i ，進而求得每一期的時間長度 $\Delta t_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ 和年化波動率 σ_i 。以下，我們使用如附錄 A 所示的

pseudo-code 來描述如何解出每一期的時間長度 Δt_i 與年化波動率 σ_i

如第 2.4 節中所描述的，由於樹狀模型使用離散的時間長度來趨近連續性的價格波動，所以實際上在建樹的過程中，有可能發生前 n 期總時間長度 $\tau_n = \sum_{i=1}^n \Delta t_i$ 不

會恰好等於履約日 T 的情形。在這種情形下最後一期的節點位置將會變得很不穩定，其可能會位於履約日 T 之前、或者之後的地方。為了解決此項問題，Amin(1991)

定義應建構一個期數為 M 的二元樹並且使得 $\tau_M = \sum_{i=1}^M \Delta t_i \geq T$ ，於是第 M 期（最後一期）的節點便保證會落於履約日 T 或之後的位置。這時我們可分為兩種情形來討論第 M 期的節點價格：首先，若第 M 期的節點正好落在履約日 T ，也就是

$\tau_M = \sum_{i=1}^M \Delta t_i = T$ ，則我們可以直接計算並使用第 M 期的節點價格。然而，若第 M

期的節點落在履約日 T 之後，也就是 $\tau_M = \sum_{i=1}^M \Delta t_i > T$ ，顯然將這些超過履約日的

節點納入計算是不正確的。所以為了得到位於履約日 T 的節點，我們會將二元樹先建構到第 $M-1$ 期，再令最後一期的時間長度為 $\Delta t_M = T - \tau_{M-1}$ ，而得到最後一期的

年化波動率為 $\sigma_M = \sqrt{\int_{\tau_{M-1}}^T \sigma^2(t) dt}$ （見附錄 A 的 pseudo-code）。結合以上兩種情形，

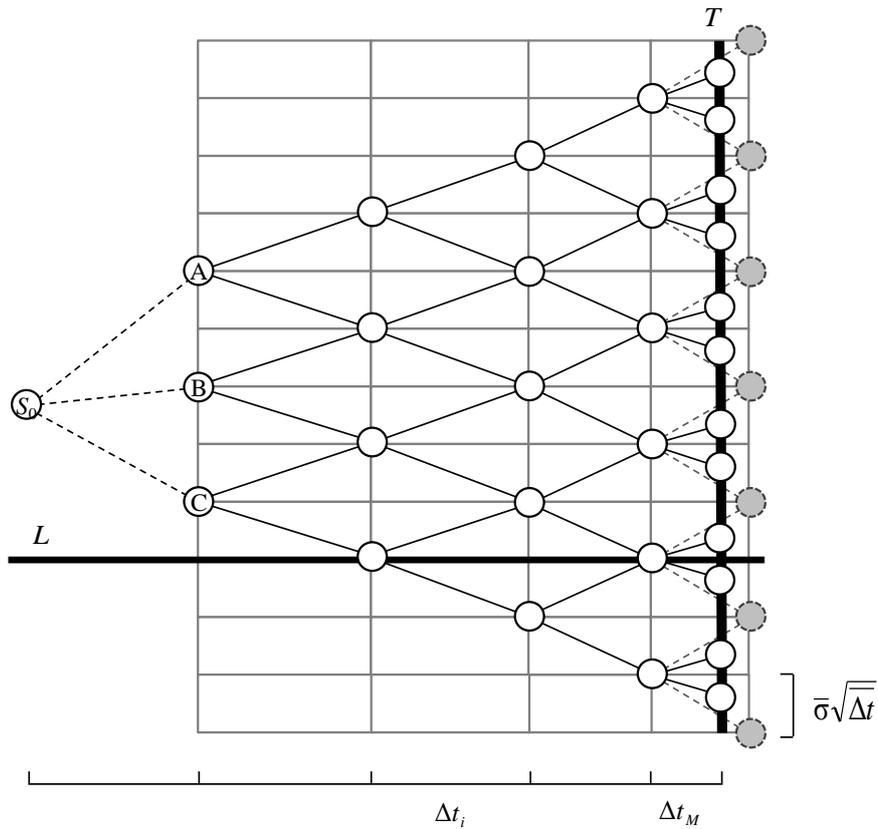
以買權為例，我們能得出位於履約日 T 第 j 個節點的價值為：

$$\begin{cases} \max(S_B u^{M-1-\lfloor j/2 \rfloor} \times e^{\sigma_M \sqrt{\Delta t_M}} - X, 0), & \text{if } j \bmod 2 = 0 \\ \max(S_B u^{M-1-\lfloor j/2 \rfloor} \times e^{-\sigma_M \sqrt{\Delta t_M}} - X, 0), & \text{if } j \bmod 2 = 1 \end{cases} \quad (3.3)$$

其中 $0 \leq j \leq 2(M+1)$ ，而 S_B 為 B 點的資產價格。

值得一提的是，在當年化波動率為一個線性的函數 $\sigma(t)$ （linear function）時，

M 通常會等於 n 並且 $\tau_M = \sum_{i=1}^M \Delta t_i$ ，與 T 僅有非常微小的誤差或相等[1]。



圖七、以 BTT 模型評價時變波動率下的障礙選擇權。圖例中的 $\sigma(t)$ 為一隨時間遞增的函數，因此可看出每期資產價格上漲與下跌的幅度逐漸增加。使用黑色實線連接的白色節點因為時間介於 $[0, T]$ ，為評價時需要被計算的部分。灰色虛線連接的灰色節點為評價模型建構出的最後一期節點，雖然會接合但卻因為超過履約日 T 而不予計算。

3.2.2 第一期的三元樹建構與機率計算

使用附錄 A 的 pseudo-code，我們已經能夠計算出每一期的時間長度與年化波動率，現在我們將介紹如何計算第一期的三元樹中三個分支的節點價格。首先，由對數常態分佈的性質我們可以得到下一期節點的對數價格平均 (μ_i) 與變異數 (Var) 應為：

$$\begin{aligned}\mu_i &= (r - \sigma_i^2 / 2) \Delta t_i \\ \text{Var} &= \sigma_i^2 \Delta t_i = \bar{\sigma}^2 \Delta t\end{aligned}$$

根據 Amin (1991) 提出的二元樹評價模型，每期相鄰的節點其距離必須為固定的 $2\bar{\sigma}\sqrt{\Delta t}$ ，如此評價樹才會接合。因此在區間 $\left[\mu_i - \bar{\sigma}\sqrt{\Delta t}, \mu_i + \bar{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right)$ 當中，必存在唯一的節點落於之間，且這個節點距離障礙價格 L 為 $\bar{\sigma}\sqrt{\Delta t}$ 的整數倍，我們就取這個節點為 B。如圖七所示，B 點的對數價格為 $\hat{\mu} = l + 3\bar{\sigma}\sqrt{\Delta t}$ 。

令 A、C 節點的對數價格為 $\hat{\mu} + 2\bar{\sigma}\sqrt{\Delta t}$ 和 $\hat{\mu} - 2\bar{\sigma}\sqrt{\Delta t}$ ，並定義 α 、 β 、 γ 為 A、B、C 的對數價格減去其平均，亦即：

$$\begin{aligned}\beta &= \hat{\mu} - \mu \\ \alpha &= \hat{\mu} + 2\bar{\sigma}\sqrt{\Delta t} + \mu = \beta + 2\bar{\sigma}\sqrt{\Delta t} \\ \gamma &= \hat{\mu} - 2\bar{\sigma}\sqrt{\Delta t} - \mu = \beta - 2\bar{\sigma}\sqrt{\Delta t}\end{aligned}$$

其中 $\alpha > \beta > \gamma$ ，且 $\alpha > 0$ ， $\gamma < 0$ 。然後，我們能得到下面的三個式子以求出第一期中三元樹的機率 P_u 、 P_m 、 P_d ：

$$P_u\alpha + P_m\beta + P_d\gamma = 0 \quad (3.4)$$

$$P_u\alpha^2 + P_m\beta^2 + P_d\gamma^2 = \text{Var} \quad (3.5)$$

$$P_u + P_m + P_d = 1 \quad (3.6)$$

第 (3.4) 與 (3.5) 式分別是由資產價格對數常態分配性質的期望值與平方的期望值而得來的，第 (3.6) 式則是因為每期機率總和為 1。在解出 P_u 、 P_m 、 P_d 之後我們就可以計算出選擇權的價格。假設 V_Y 表示在節點 Y 時的選擇權價值，則在節點 S_0 的選擇權價值就可以由下式求得其值：

$$V_{S_0} = e^{-r\Delta t} (P_u V_A + P_m V_B + P_d V_C)$$

以下，我們使用克拉瑪公式 (Cramer's rule) 將 (3.4)、(3.5)、(3.6) 式聯立求解，便能簡單地證明上述三元樹解出的機率 P_u 、 P_m 、 P_d 都能落於 $[0, 1)$ 的區間。

令

$$\det = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)$$

由於 $\alpha > \beta > \gamma$ ，可知 $\det < 0$ 。令

$$\det_u = \begin{vmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ \text{Var} & \beta^2 & \gamma^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\beta\gamma + \text{Var})(\gamma - \beta)$$

由於 $\alpha > \beta > \gamma$ ，可得 $(\gamma - \beta) < 0$ 。又因為 $\beta\gamma + \text{Var} = \beta^2 - 2\bar{\sigma}\sqrt{\Delta t} + \bar{\sigma}^2\Delta t = (\beta - \bar{\sigma}\sqrt{\Delta t})^2 \geq 0$ ，於是可知 $\det_u \leq 0$ 。令

$$\det_m = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ \alpha^2 & \text{Var} & \gamma^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha\gamma + \text{Var})(\alpha - \gamma)$$

已知 $\alpha > \beta > \gamma$ ，我們可以得到 $(\alpha - \gamma) > 0$ 。又因為 $\alpha\gamma + \text{Var} = \beta^2 - 2\bar{\sigma}^2\Delta t \leq 0$ ，可知 $\det_m \leq 0$ 。令

$$\det_d = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \text{Var} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha\beta + \text{Var})(\beta - \alpha)$$

由於 $\alpha > \beta > \gamma$ 可得 $(\beta - \alpha) < 0$ ，又因為 $\alpha\beta + \text{Var} = \beta^2 + 2\bar{\sigma}\sqrt{\Delta t} + \bar{\sigma}^2\Delta t = (\beta + \bar{\sigma}\sqrt{\Delta t})^2 \geq 0$ ，可知 $\det_d \leq 0$ 。經由上述推導，我們可以得 $P_u \geq 0, P_m \geq 0, P_d \geq 0$ 。又因為 $P_u + P_m + P_d = 1$ ，所以得證： $0 \leq P_u, P_m, P_d < 1$ [6][9]。

3.2.3 樹狀模型建構實例

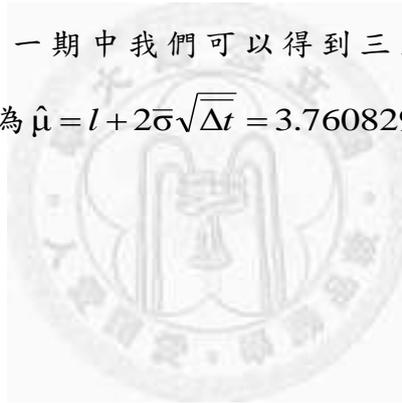
在這裡我們舉一個例子來說明樹狀模型的建構方法。假設目前標的物資產價格 S_0 為 40，一個向下終止型的買權履約價 X 為 40，障礙價格 L 為 35，無風險利率 r 為 10%，距離履約日 T 還有 1 年。時變波動率為 $\sigma(t) = 0.3 - 0.1 \cdot t$ 。

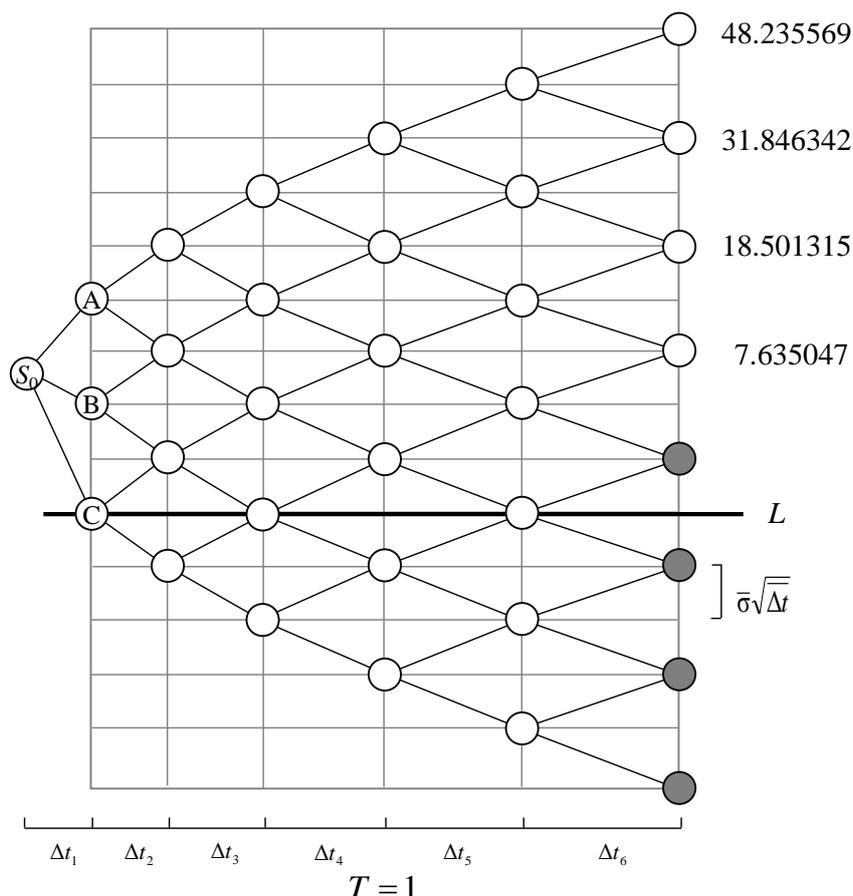
於是，我們可以得到其標的物資產價格平均的變異數為 $\bar{\sigma} = \sqrt{\int_0^T \sigma^2(t) dt} = 0.251$ 。若令預期切割期數 $n = 6$ ，則二元樹每一期中相鄰節點的距離為 $2\bar{\sigma}\sqrt{\Delta t}$ ，而每一期的年化波動率與時間長度如表二所示：

期數 (i)	時間長度 (Δt_i)	年化波動率 (σ_i)
1	0.122194	0.293911
2	0.133558	0.281129
3	0.148002	0.267059
4	0.167126	0.251315
5	0.193964	0.233281
6	0.235156	0.211867

表二、時變波動率下 BTT 評價模型中每一期的時間長度與年化波動率（令預期切割期數 $n=6$ ）。

如圖八所示，在第一期中我們可以得到三元樹的節點 B 的價格為 42.98402，其對數價格為 $\hat{\mu} = l + 2\bar{\sigma}\sqrt{\Delta t} = 3.760829$ ，而節點 A 與 C 的價格分別為 52.789278 和 35。





圖八、以 BTT 模型評價時變波動率下向下終止型買權（灰色為價外節點）。在所舉的例子當中由於波動率為一隨時間變動的線性函數 $\sigma(t) = 0.3 - 0.1 \cdot t$ ，如同 Amin (1991) 裡提到的，此時建構出的總時間長度僅會和履約日 T 有微小的誤差或相等(亦即 $\sum_{i=1}^M \Delta t_i = T$)。在本例中因為波動率為時間的線性函數，使最後一期的節點正好接合於 $t = T$ 上。

3.3 非線性障礙邊界下障礙選擇權樹狀評價模型之建構

在這一節中我們考慮障礙價格為一個隨著時間變動的指數函數[4][20]，即 $L(t) = L_0 e^{\delta t}$ 的情形。如同在第 2.1.2 小節所敘述的，這會使得障礙價格很難落於樹狀模型的節點之上，造成大幅的非線性誤差，做出正確評價將會變得更加困難。為了解決此一問題，本節我們將對 BTT 作一延伸，以建構出一個適合的樹狀模型。

雖然，二元樹評價模型的自由度不足以調整以適應隨時間變動的障礙價格，然而在 BTT 的模型中，第一期三元樹可自由調整節點的性質在每一期實則都能適

用。首先，由對數常態分佈的性質我們可以得到第 i 期節點的對數價格平均 (μ_i) 與變異數 (Var) 應為：

$$\begin{aligned}\mu_i &= (r - \sigma_i^2 / 2) \Delta t_i \\ \text{Var} &= \sigma_i^2 \Delta t_i = \bar{\sigma}^2 \Delta t\end{aligned}$$

因此，對於第 $i-1$ 期中的每一個節點，在下一期的區間 $[\mu_i - \bar{\sigma}\sqrt{\Delta t}, \mu_i + \bar{\sigma}\sqrt{\Delta t})$ 中必存在唯一的節點落於之間，且這個節點距離障礙價格 L 為 $\bar{\sigma}\sqrt{\Delta t}$ 的整數倍。

所以，若將 BTT 改為一個三元樹 (trinomial tree, 以下簡稱 TT) 評價模型，並且在每一期的模型建構都沿用原先 BTT 第一期中調整節點的方法，如此我們便能確保每一期的節點都能讓障礙價格通過[7][8]。

根據第 3.1 節的定義，我們將依下列三個重點來介紹如何建構出一個預期切割期數為 n 的 TT 評價模型：(1) 每一期時間長度 Δt_i 與年化波動率 σ_i 的取法。(2) 每一期三元樹的建構。(3) 每一期的機率計算。

3.3.1 每一期時間長度與年化波動率的取法

每一期時間長度 Δt_i 與年化波動率 σ_i 的取法和在第 3.2 節中評價單一固定障礙選擇權所使用的演算法並無二致，於是我們能夠沿用附錄 A 所描述的 pseudo-code 以找出每一期的時間長度 Δt_i 與年化波動率 σ_i 。

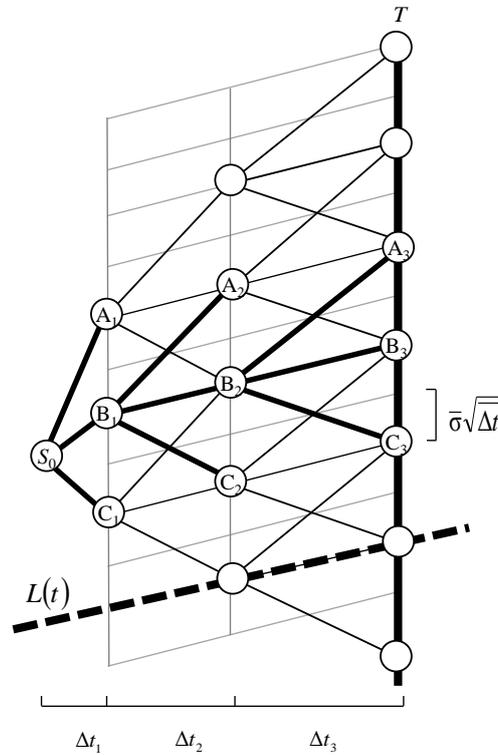
3.3.2 每一期三元樹的建構

接下來，我們將介紹如何建構三元樹每一期的節點。首先，由對數常態分佈的性質我們可以得到第 i 期節點的對數價格平均 (μ_i) 與變異數 (Var) 應為：

$$\begin{aligned}\mu_i &= (r - \sigma_i^2 / 2) \Delta t_i \\ \text{Var} &= \sigma_i^2 \Delta t_i = \bar{\sigma}^2 \Delta t\end{aligned}$$

根據 BTT 的定義，每期相鄰節點間的距離必須為 $2\bar{\sigma}\sqrt{\Delta t}$ ，因此對於第 $i-1$ 期中的每一個節點，在下一期的區間 $[\mu_i - \bar{\sigma}\sqrt{\Delta t}, \mu_i + \bar{\sigma}\sqrt{\Delta t})$ 中必存在唯一的節點落於

之間，且這個節點距離障礙價格 L 為 $\bar{\sigma}\sqrt{\Delta t}$ 的整數倍（如圖九所示），我們就取這個節點為 B_i ，令 A_i 與 C_i 節點的對數價格為 $\hat{\mu} + 2\bar{\sigma}\sqrt{\Delta t}$ 和 $\hat{\mu} - 2\bar{\sigma}\sqrt{\Delta t}$ 。和 BTT 模型不同的是，現在每一期的每個節點我們都要找出三元樹的 A_i 、 B_i 、 C_i 三個節點。



圖九、以 TT 模型評價時變波動率與非線性障礙邊界下的障礙選擇權。

由於從 $t=0$ 開始，同一期相鄰節點之間的時間間隔均為 $\bar{\sigma}\sqrt{\Delta t}$ ，所以實際上在建構樹狀模型時，我們只需要從 S_0 出發，並沿著一條路徑，在每一期僅對一個節點找出 A_i 、 B_i 、 C_i 三個節點，然後再往上（或往下）以 $2\bar{\sigma}\sqrt{\Delta t}$ 為間隔得到所有其它的節點。如圖九所示， $t=0$ 時從資產價格 S_0 出發，我們可藉由重複尋找三元樹中 B_i 節點的方法找到一個集合： $\{B_i | 1 \leq i \leq n\} = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ ，其中 B_i 屬於第 i 期的節點，並且 B_i 需要藉由前一期的 B_{i-1} 與第 i 期的資產對數價格平均（ μ_i ）與變異數（ Var ）求得。需注意的是：第一期的 B_1 求法有點不同，其需要參考的是初始資產價格 S_0 與第一期的對數價格平均（ μ_1 ）與變異數（ Var ）來求得。

首先，已知第 i 期的資產對數價格平均（ μ_i ）與變異數（ Var ）為：

$$\mu_i = (r - \sigma_i^2 / 2) \Delta t_i$$

$$\text{Var} = \sigma_i^2 \Delta t_i = \bar{\sigma}^2 \Delta t$$

則在第 i 期的 $\left[\mu_i - \sigma\sqrt{\Delta t}, \mu_i + \sigma\sqrt{\Delta t} \right)$ 中必存在唯一的節點落於之間，且這個節點距離障礙價格 $L(t)$ 為 $\sigma\sqrt{\Delta t}$ 的整數倍。因此，在已知 B_{i-1} 的情形下，我們可以藉由下列兩式的聯立，解出 B_i 的節點位置：

$$\ln(B_{i-1}) + \mu_i - \sqrt{\text{Var}} \leq \ln(B_i) < \ln(B_{i-1}) + \mu_i + \sqrt{\text{Var}} \quad (3.7)$$

$$B_i = \ln(L(\tau_i)) + k \times \sigma\sqrt{\Delta t} \quad (3.8)$$

其中 τ_i 為第 i 期經過的時間總長度， k 為距離障礙以 $\sigma\sqrt{\Delta t}$ 為間隔的數目。

然後，在三元樹中在第 i 期裡共會有 $2i+1$ 個節點，於是我們能從這個點的集合 $\{B_i \mid 0 \leq i \leq n\}$ ($B_0 = S_0$) 裡取出點 B_i ，往上、往下以 $2\sigma\sqrt{\Delta t}$ 為間隔各取 i 個節點，就能找到該期中所有的節點。如此重複從 $i=1$ 到 $i=n$ ，我們就能得到一個完整的 TT 模型。

3.3.3 每一期的機率計算

根據第 3.3.2 小節的定義，對於第 $i-1$ 期的任一節點，會有上漲 (u)、持平 (m)、下跌 (d) 並對應到第 i 期中的 A_i 、 B_i 、 C_i 三個節點。於是我們可以決定其機率為 P_{u_i} 、 P_{m_i} 、 P_{d_i} ，並定義 α 、 β 、 γ 為 A_i 、 B_i 、 C_i 的對數價格減去其平均，亦即：

$$\beta = \hat{\mu} - \mu_i$$

$$\alpha = \hat{\mu} + 2\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu = \beta + 2\sigma\sqrt{\Delta t}$$

$$\gamma = \hat{\mu} - 2\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu = \beta - 2\sigma\sqrt{\Delta t}$$

其中 $\alpha > \beta > \gamma$ ，且 $\alpha > 0$ ， $\gamma < 0$ 。然後，我們能得到下面的三個式子以求出第 i 期的機率 P_{u_i} 、 P_{m_i} 、 P_{d_i} ：

$$P_{u_i} \alpha + P_{m_i} \beta + P_{d_i} \gamma = 0 \quad (3.9)$$

$$P_{u_i} \alpha^2 + P_{m_i} \beta^2 + P_{d_i} \gamma^2 = \text{Var} \quad (3.10)$$

$$P_{u_i} + P_{m_i} + P_{d_i} = 1 \quad (3.11)$$

第 (3.9) 與 (3.10) 式分別是由資產價格對數常態分配性質的期望值與平方的期望值而得來的，第 (3.11) 式則是因為每期機率總和為 1。在解出 P_{u_i} 、 P_{m_i} 、 P_{d_i} 之後我們就可以藉由從 $t=T$ 向前推演以計算出選擇權的價格。假設 $V(i, j)$ 表示在第 i 期的第 j 個節點的價格，則在前一期節點價格就可以由下式求得：

$$V(i, j) = e^{-r\Delta t} (P_{u_i} V(i+1, j-1) + P_{m_i} V(i+1, j) + P_{d_i} V(i+1, j+1))$$

最後，同第 3.2.2 小節使用 BTT 評價時變波動率下單一障礙選擇權，對於第一期三元樹的機率證明，再利用克拉瑪公式求解，我們可以簡單地證明上述三元樹解出的機率 P_{u_i} 、 P_{m_i} 、 P_{d_i} 都能落於 $[0, 1)$ 的區間。



第四章 數值結果

4.1 時變波動率下單一障礙選擇權評價結果

在第三章我們已將樹狀模型的建構方法做了清楚的說明，這一節我們將展示使用我們所提出的樹狀模型所評價出的數值結果。另外，在本節中我們也實作了 Amin (1991) 的二元樹評價模型與 BTT 進行比較。

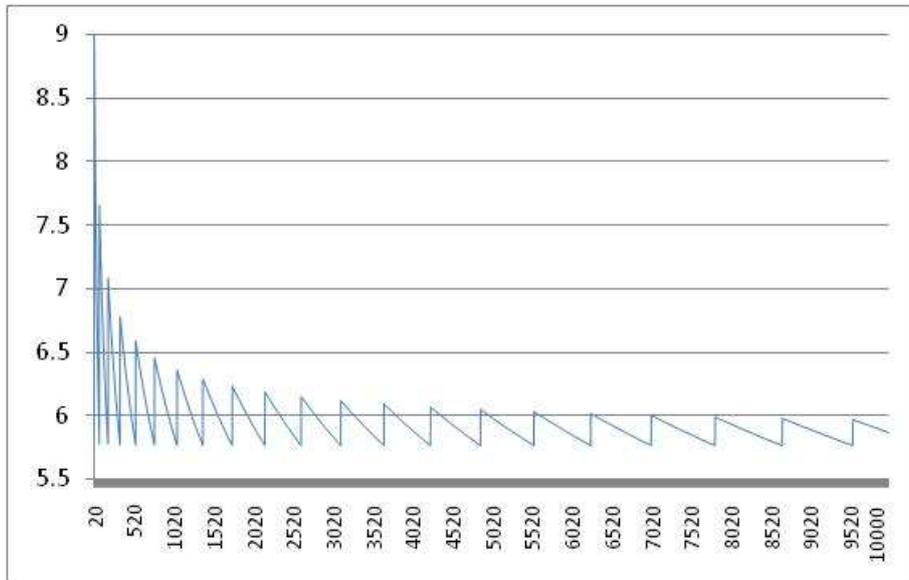
假定標的物資產價格 S_0 為 95，履約價 X 為 100，距到期日 T 為 1 年，無風險利率 r 為 10%，標的物價格的年化波動率為一給定的時間函數 $\sigma(t) = 0.3 - 0.1 \cdot t$ ，障礙價格 L 的向下終止型買權。

首先，為了驗證評價模型的正確性，我們以蒙地卡羅模擬，切割期數為 $n=10000$ ，重複了 1000000 次的計算得出的幾項結果為如表三所示：

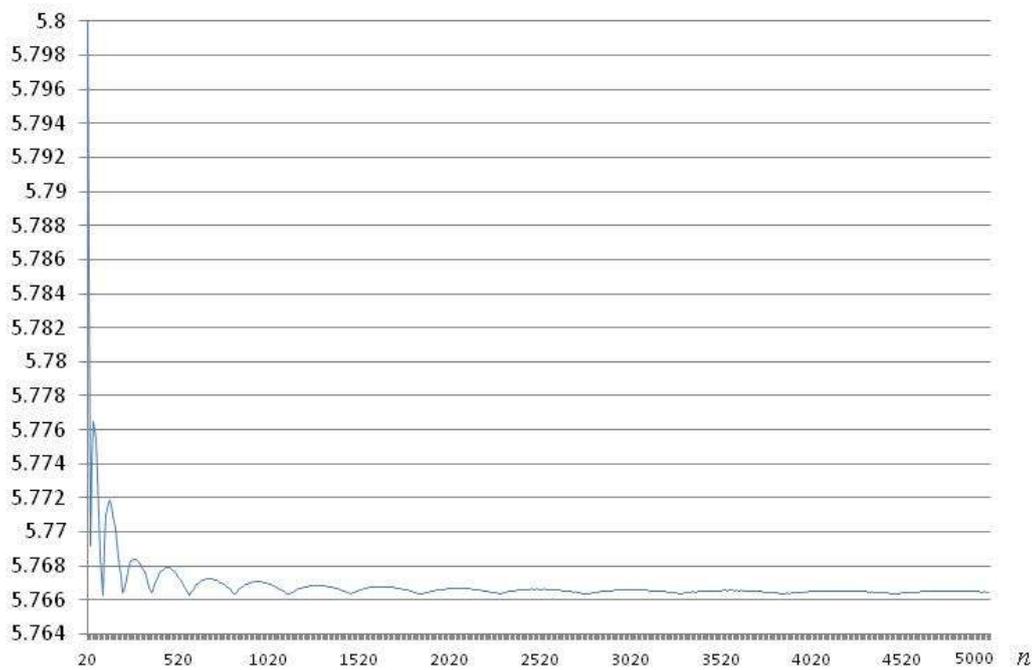
L	Amin (1991) 二元樹			BTT			蒙地卡羅
	$n=20$	$n=200$	$n=1000$	$n=20$	$n=200$	$n=1000$	
90	5.975311	7.030060	5.897990	5.800227	5.769407	5.766667	5.776381
85	9.279442	9.658393	9.159996	9.146793	9.152111	9.152458	9.162376
80	11.510493	10.924505	10.870922	10.915498	10.821982	10.818914	10.858213

表三、使用 BTT、Amin (1991) 二元樹與蒙地卡羅模擬評價時變波動率下障礙選擇權的數值結果。

如圖十及圖十一所示，使用二元樹與 BTT 的模型評價結果均能得到接近蒙地卡羅的結果。我們可以看到隨著切割期數 n 逐漸增大，使用 BTT 的評價結果將逐漸平滑收斂，然而，二元樹的數值結果卻在 5.76 到 8.79 之間大幅震盪且收斂緩慢。



圖十、不同切割期數下使用 Amin (1991) 二元樹評價向下終止型買權
 $(S_0 = 95, X = 100, r = 0.1, \sigma(t) = 0.3 - 0.1 \cdot t, L = 90)$ 。



圖十一、不同切割期數下使用 BTT 評價向下終止型買權 $(S_0 = 95, X = 100, r = 0.1,$
 $\sigma(t) = 0.3 - 0.1 \cdot t, L = 90)$ 。

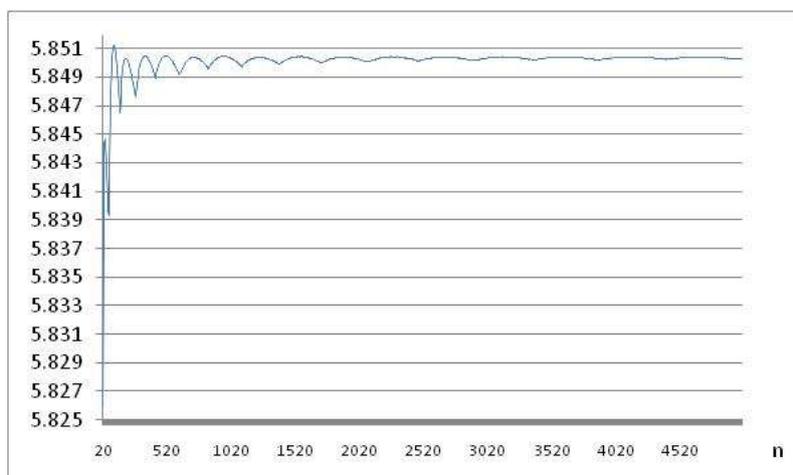
4.2 時變波動率與非線性障礙邊界下障礙選擇權評價結果

接下來更進一步，考慮障礙價格為隨時間變動的指數函數 $L(t)$ 的選擇權價格。假定標的物資產價格 S_0 為 95，履約價 X 為 100，距到期日 T 為 1 年，無風險利率 r 為 10%，標的物價格的年化波動率為一給定的時間函數 $\sigma(t) = 0.3 - 0.1 \cdot t$ ，障礙價格為 $L(t) = L_0 e^{\delta t}$ 的向下終止型買權。並且，為了驗證評價模型的正確性，我們以蒙地卡羅模擬，切割期數為 $n = 100,000$ ，重複了 1,000,000 次的計算得出的幾項結果為如表四所示：

L_0	TT ($\delta = -0.01$)			蒙地卡羅	TT ($\delta = -0.02$)			蒙地卡羅
	$n = 20$	$n = 200$	$n = 1000$		$n = 20$	$n = 200$	$n = 1000$	
90	5.825965	5.850318	5.850423	5.879809	5.922610	5.930120	5.932288	5.945108
85	9.226901	9.218647	9.226390	9.242605	9.278673	9.300448	9.298877	9.301018
80	10.794931	10.857370	10.855757	10.862395	10.890424	10.892152	10.894681	10.912147

表四、使用 TT 評價時變參數下障礙選擇權與蒙地卡羅模擬的數值結果。

如圖十二所示，使用 TT 模型的評價能得到非常接近蒙地卡羅模擬的結果。並且隨著切割期數 n 逐漸增大，評價結果將會平滑收斂。



圖十二、不同切割期數下使用 TT 評價時變參數下向下終止型買權

($S_0 = 95, X = 100, r = 0.1, \sigma(t) = 0.3 - 0.1 \cdot t, L(t) = L_0 e^{-0.01t}, L_0 = 90$)。

第五章 總結

在這篇論文中我們使用 Dai and Lyuu (2008, 2010) 所提出的 BTT 模型評價在時變波動率下的單一障礙選擇權，並說明了樹狀評價模型的建構方法。使用蒙地卡羅模擬的結果證明了 Amin (1991) 的二元樹評價模型能夠使用於時變波動率下的單一障礙選擇權評價，然而，雖然使用 BTT 模型和 Amin (1991) 二元樹模型的計算複雜度均為 $O(n^2)$ ，使用 Amin (1991) 二元樹模型時，數值結果會劇烈震盪而收斂緩慢，反之若使用 BTT 模型，卻能夠大幅降低非線性誤差，使我們能夠更加精確與快速地得到結果。

其次，我們同時假設資產年化波動率 $\sigma(t)$ 與障礙價格 $H(t)$ 為兩個隨時間變動的函數，以符合較為實際的市場條件。然而 Amin (1991) 二元樹評價模型的自由度不適用於此種條件的障礙選擇權評價。於是我們更進一步將 BTT 模型做了延伸應用，說明並建構了一個計算複雜度為 $O(n^2)$ 的三元樹評價模型 (TT) 以計算當障礙價格為隨著時間變動的指數函數 $H(t)$ 的選擇權價格。這個三元樹評價模型整合了 Amin (1991) 二元樹評價模型與 BTT 的評價模型，使我們能夠找到評價樹每一期的適當時間長度、年化波動率與節點的位置，讓障礙能夠恰好通過節點。最後，使用蒙地卡羅模擬證明了我們提出的三元樹評價模型 (TT) 能精確地得到選擇權的價格，並且評價結果能夠快速與平滑地收斂，而不會有劇烈震盪的問題。

附錄

附錄A 計算每一期的年化波動率 σ_i 與時間長度 Δt_i 的 pseudo-code

說明：陣列 t[i] 所存的為每期的時間長度 Δt_i ，陣列 v[i] 所存的為每期的年化波動率

σ_i ，而變數 tau 記錄目前已經過的時間。

```
Input: n,  $\sigma(t)$ , T
real: t[1..n], v[1..n], tau, // 每期的時間長度、年化波動率
integer: i
tau = 0; // 經過的時間長度
 $\bar{\sigma} = \sqrt{\int_0^T \sigma^2(t) dt / T}$ ;
 $\bar{\Delta t} = T / n$ ;
for i = 1 to n {
    解  $\int_{\tau}^{\tau+t[i]} \sigma^2(s) ds = \bar{\sigma}^2 \bar{\Delta t}$  得到 t[i];
    v[i] = sqrt( $\bar{\sigma}^2 \bar{\Delta t} / t[i]$ );
    if(tau + t[i] >= T) {
        t[i] = T - tau; // 計算二元樹中最後一期的時間長度
        v[i] = sqrt( $\bar{\sigma}^2 \bar{\Delta t} / t[i]$ ); // 計算二元樹中最後一期的年化波動率
        break;
    }
    else
        tau += t[i];
}
return t[];
```

參考文獻

- [1] Amin, Kaushik I. “On the Computation of Continuous Time Option Pricing Using Discrete Approximations.” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26, No. 4 (December 1991), 477–495.
- [2] Black, Fischer and Myron Scholes. “The Pricing of Options and Corporate Liabilities.” *Journal of Political Economy*, 81, No. 3 (May–June 1973), 637–654.
- [3] Boyle, Phelim and Sok Hoon Lau. “Bumping Up against the Barrier with the Binomial Method.” *The Journal of Derivatives*, 1, No.4 (Summer 1994), 6–14.
- [4] Costabile, M. “Extending the Cox-Ross-Rubinstein Algorithm for Pricing Options with an Exponential Boundary.” In *Proceedings of Algorithm Conference on Scientific Computing*, Vysoke Tatry, Podbanske, 2002, pp. 23–32.
- [5] Cox, John C., Stephen A. Ross, and Mark Rubinstein. “Option Pricing: A Simplified Approach.” *Journal of Financial Economics*, 7, No. 3 (September 1979), 229–263.
- [6] Dai, Tian-Shyr and Yuh-Dauh Lyuu. “The Bino-trinomial Tree: A Simple Model for Efficient and Accurate Option Pricing.” In *Proceedings of FMA European Conference*, Prague, Czech Republic, June 4–6, 2008.
- [7] Dai, Tian-Shyr, Yuh-Dauh Lyuu, and Chuan-Ju Wang. “A Novel Tree Model for Evaluating Credit Risk Based on Enhanced Structural Model.” In *Proceedings of the 44th Euro Working Group on Financial Modelling Meeting (EWGFM)*, Costa Rica, May 3–6, 2009.
- [8] Dai, Tian-Shyr, Chuan-Ju Wang, and Yuh-Dauh Lyuu. “A Novel Tree Model for Evaluating Corporate Debts with Complex Liability Structures and Debt Covenants.” In *Proceedings of the Asian Finance Association 2010 Conference*, Hong Kong, June 29–July 2, 2010.
- [9] Dai, Tian-Shyr and Yuh-Dauh Lyuu. “The Bino-Trinomial Tree: A Simple Model for Efficient and Accurate Option Pricing.” *Journal of Derivatives*, 17, No. 4 (Summer 2010), 7–24.
- [10] Derman, E., I. Kani, Deniz Ergener, and Indrajit Bardhan. “Enhanced Numerical Methods for Options with Barriers.” *Financial Analysts Journal*, 51, No. 6 (November–December 1995), 65–74.

- [11] Derman, E., I. Kani, and N. Chriss. "Implied Trinomial Trees of the Volatility Smile." *The Journal of Derivatives*, 3, No. 4 (Summer 1996), 7–22.
- [12] Dupire, Bruno. "Pricing with a Smile." *Risk*, 7, No. 1 (January 1994), 18–20.
- [13] Figlewski, Stephen and Bin Gao. "The Adaptive Mesh Model: A New Approach to Efficient Option Pricing." *Journal of Financial Economics*, Vol. 53 (1999), 313–351.
- [14] Heston, Steven L. "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatilities with Applications to Bond and Currency Options." *The Review of Financial Studies*, 6, No. 2 (1993), 327–343.
- [15] Hull, John C. and Alan White. "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities." *The Journal of Finance*, 42, No. 2 (June 1987), 281–300.
- [16] Hull, John C. *Options, Futures & Other Derivatives*. 5th ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall,, 2003.
- [17] Li, Yanmin. "A New Algorithm for Constructing Implied Binomial Trees: Does the Implied Model Fit Any Volatility Smile?" *Journal of Financial Engineering*, Vol. 4 (2000), 69–95.
- [18] Lyuu, Yuh-Dauh. *Financial Engineering and Computation*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.
- [19] Merton, R.C. "Theory of Rational Option Pricing." *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, No. 1 (Spring 1973), 141–183.
- [20] Ritchken, Peter. "On Pricing Barrier Options." *The Journal of Derivatives*, 3, No. 2 (Winter 1995), 19–28.