

國立臺灣大學電機資訊學院資訊工程學系

碩士論文

Department of Computer Science and Information Engineering

College of Electrical Engineering and Computer Science

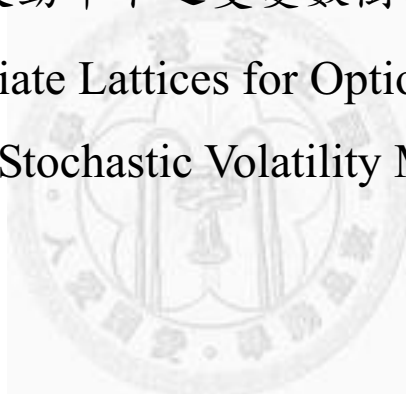
National Taiwan University

Master Thesis

在隨機波動率下之雙變數樹評價模型

On Bivariate Lattices for Option Pricing

under Stochastic Volatility Models



黃佳婷

Chia-Ting Huang

指導教授：呂育道 博士

Advisor: Yuh-Dauh Lyuu, Ph.D.

中華民國 99 年 7 月

July 2010

# 國立臺灣大學碩士學位論文

## 口試委員會審定書

在隨機波動率下之雙變數樹評價模型

On Bivariate Lattices for Option Pricing  
under Stochastic Volatility Models

本論文係黃佳婷君 (R97922073) 在國立臺灣大學資訊工程學系完成之碩士學位論文，於民國 99 年 7 月 5 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明



口試委員：

\_\_\_\_\_

(指導教授)

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

系主任 \_\_\_\_\_

# 致 謝

首先感謝我的指導教授呂育道博士，沒有您的諄諄教誨，本篇論文無法順利完成，接下來感謝實驗室的學長姐們，在我遇到困難時，提供解決之道，最後感謝我的家人及同學們，陪伴我兩年，一起奮鬥兩年，再次由衷地感謝大家的協助，讓我能順利完成此學位。



# 摘要

Hilliard 和 Schwartz (1996) 提出一個雙變數二元樹模型，其模型可以在隨機波動率下評價選擇權，並允許股價與波動率有相關性。本論文旨在探討 Hilliard 和 Schwartz (1996) 的雙變數二元樹模型演算法之缺點，以及提供一個部分修正方案。論文針對在 Hilliard 和 Schwartz (1996) 模型中會發生錯誤機率的股價二元樹，改用平均數追蹤法建構的三元樹，而波動率還是維持二元樹，稱此架構為雙變數 2/3-元樹模型，最後用此模型去評價選擇權。

關鍵字：隨機波動率，雙變數 2/3-元樹模型



# Abstract

The bivariate binomial framework of Hilliard and Schwartz (1996) allows non-zero correlation between the stochastic volatility and the underlying process. It can also be used to value American options. This thesis points out the problems with their bivariate binomial model. It also provides a partial solution to deal with those problems.

When pricing options with the Hilliard-Schwartz model, it is easy to demonstrate that incorrect probabilities will occur in some situations. We use the mean-tracking method to construct trinomial trees instead of binomial trees for one dimension. Nevertheless, the stochastic volatility dimension still adopts the binomial tree as Hilliard and Schwartz (1996). The framework will be called the bivariate bino-trinomial model, and it is used to evaluate options.

Keywords: stochastic volatility, bivariate bino-trinomial model

# 目 錄

口試委員會審定書 .....	i
致 謝 .....	ii
摘 要 .....	iii
Abstract.....	iv
圖目錄 .....	vi
表目錄 .....	vii
第一章 緒論 .....	1
1.1 研究目的與動機 .....	1
1.2 論文架構 .....	2
第二章 Hilliard 和 Schwartz (1996) 的雙變數二元樹模型 .....	3
2.1 隨機波動率模型假設 .....	3
2.2 建構雙變數二元樹 .....	3
2.3 跳動幅度和聯合機率 .....	5
2.4 Hilliard 和 Schwartz (1996) 演算法的問題 .....	7
第三章 雙變數 2/3-元樹模型 .....	9
3.1 隨機波動率模型假設與轉換 .....	9
3.2 平均數追蹤法 (mean-tracking method) .....	9
3.3 跳動幅度和聯合機率 .....	16
第四章 數值資料與分析 .....	19
第五章 結論與展望 .....	25
附 錄 .....	26
參考文獻 .....	36

# 圖目錄

圖一：A、B 和 C 點的選法四之一。 .....	10
圖二：A、B 和 C 點的選法一。 .....	13
圖三：A、B 和 C 點的選法二。 .....	14
圖四：A、B 和 C 點的選法三。 .....	15
圖五：A、B 和 C 點的選法四之二。 .....	16



## 表目錄

表一：當 $\beta$ 值落入此範圍時，A 點和 C 點的選法。.....	12
表二：在隨機波動率接近不變下，評價歐式賣權，並與 Black-Scholes 的解作比較。 .....	20
表三：在隨機波動率的影響下，評價歐式賣權。.....	21
表四：在隨機波動率的影響下，評價歐式賣權，並與 Hilliard 和 Schwartz (1996) 論文的表 2 數據作比較。.....	22
表五：在隨機波動率的影響下，評價歐式賣權，並與 Hilliard 和 Schwartz (1996) 論文的表 4 數據作比較。.....	24
附錄表一：在 A 和 C 點的各種選擇組合下， $\beta$ 的合法範圍。.....	33
附錄表二：當 B 點的選擇有限制時， $\beta$ 的合法範圍。.....	34



# 第一章 緒論

## 1.1 研究目的與動機

在選擇權評價中，「微笑」波動率 (volatility smile) 是很頻繁的現象。但在 Black-Scholes (1973) 所發展出的一套選擇權評價模式中，波動率是一常數，不會隨著時間變動。雖然 Black-Scholes 公式可用來評價股價指數選擇權，但是在市場波動率非常數的情況下會有偏差，這也是造成「微笑」波動率的原因之一。

在隨機波動率下評價選擇權的學者有 Scott(1987, 1991)、Hull 和 White(1987) 以及 Wiggins (1987)，這些學者皆是以 Black-Scholes 模型為基礎，再加上隨機波動率去做調整，且只能在波動率和標的物為零相關的情形下做評價。Heston (1993) 提出一評價歐式選擇權的封閉解公式 (closed-form solutions)，且允許波動率與資產有相關性。

Hilliard 和 Schwartz (1996) 提出雙變數樹評價模型，除了波動率與股價可以有相關係數外，並可以評價美式選擇權。他們利用可接合的二元樹，和透過簡單計算即可求得的 4 個聯合機率，得到一近似值。

雖然 Hilliard 和 Schwartz (1996) 提出一有效的雙變數樹評價模型，但是根據他們的演算法來實作模型，卻無法複製其數據。在實作他們提出的模型過程中，發現在其論文表 2 的參數設定下，選擇權價格會有約差 0.1%；但在他們論文表 4 的參數設定下，卻無法得到數據，探究其原因在於股價動態的機率會有負值，故無法計算出聯合機率，這個重要議題會在第二章第四節有更詳細的說明。

本研究在探討 Hilliard 和 Schwartz (1996) 演算法的缺點，以及提供一個部分修正方案，也就是針對會發生錯誤機率的股價二元樹，改用 Lyuu 和 Wu (2005) 提出的平均數追蹤方法論 (mean-tracking method) 建構三元樹，而波動率還是維持二元樹，稱此架構為雙變數 2/3-元樹模型。當建構好雙變數 2/3-元樹模型後，同樣地，可透過簡單的計算求出 6 個聯合機率，再利用逆向歸納法 (backward induction) 評價選擇權。

## 1.2 論文架構

本論文共分成四章，各章節內容摘要如下：

第一章為緒論，介紹相關文獻以及說明研究的目的與動機。

第二章共分為四節以介紹 Hilliard 和 Schwartz (1996) 的雙變數二元樹模型，此亦為本論文模型建立之基礎架構。第一節為模型假設說明，對 Hilliard and Schwartz (1996) 雙變數二元樹模型的隨機波動率模型假設做描述，第二節為以此章第一節的模型假設，做隨機過程轉換以及建構雙變數二元樹，第三節描述雙變數二元樹的跳動幅度及如何計算聯合機率，最後一節闡述 Hilliard 和 Schwartz (1996) 演算法之缺點。

第三章共分成三節以說明雙變數 2/3-元樹模型的建立。第一節敘述雙變數 2/3-元樹模型中，隨機波動率模型的假設以及隨機過程的轉換，第二節介紹平均數追蹤法，然後如何用此方法建構雙變數 2/3-元樹模型，最後一節描述雙變數 2/3-元樹的跳動幅度和聯合機率的計算。

第四章為數值資料與分析，本章針對前一章所介紹之模型其數據結果進行分析與討論。

第五章為結論與展望，討論本研究的結果與未來可進行的方向。

## 第二章 Hilliard 和 Schwartz (1996) 的雙變數二元樹模型

### 2.1 隨機波動率模型假設

假設在風險中立下，股價 ( $S$ ) 的隨機過程為：

$$dS = m_s dt + \sigma_s(S, V) dZ_s \quad (2.1.1)$$

而股價之波動率的平方 ( $V$ ) 的隨機過程為：

$$dV = m_v dt + bV dZ_v \quad (2.1.2)$$

其中，股價和其波動率的相關係數為  $\text{Corr}(dZ_s, dZ_v) = \rho$ ， $b$  為一常數，並假設  $\sigma_s(S, V) \equiv f(S)h(V)$ ，一般為  $S^\theta * V^a$  的形式， $\theta$  和  $a$  為常數，其它的設定，舉例來說， $m_s = S(r - d)$ ， $r$  代表利率， $d$  為股利發放率，而  $V$  可以是迴歸均數 (mean-reverting) 模型或是對數常態分配。

### 2.2 建構雙變數二元樹

本節介紹如何使用 Hilliard and Schwartz (1996) 的演算法建構雙變數二元樹。一開始要將兩個隨機過程轉換成單位波動率，其目的在於，常數波動率的隨機過程可使二元樹接合，接合的二元樹可以提高效率，減少計算量，否則二元樹可能會成指數型成長。

接下來介紹轉換過程。股價之波動率的平方  $V$  只需經過一次轉換，由  $V$  轉成隨機過程  $Y$ ，而股價  $S$  則必須經過兩階段轉換，先轉成隨機過程  $H$ ，再轉成隨機過

程  $Q$ 。第一階段轉換目的在  $dS$  會受到  $S$  和  $V$  這兩個變數的影響，所以轉成隨機過程  $H$ ，讓  $dH$  只會受到  $H$  這個變數的影響，但因為  $H$  並不具有常數的波動率，因此尚須第二階段的轉換，最後，當  $S$  和  $V$  都轉換完，即可在  $Y \times Q$  空間上建構雙變數二元樹。

首先，將股價之波動率的平方  $V$  作轉換，其轉換公式如下：

$$Y = \frac{\ln(V)}{b} \quad (2.2.1)$$

透過伊藤公式可以得到單位波動率的隨機過程  $Y$  (附錄 A 導出隨機過程  $Y$ )：

$$\begin{aligned} dY &= \left( \frac{m_v}{bV} - \frac{b}{2} \right) dt + dZ_v \\ &= m_y dt + dZ_v \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

其中  $m_y$  表示  $Y$  的漂移項 (drift term)， $dZ_v$  項的係數為常數 1，所以用  $Y$  建的二元樹將可以接合。

因為隨機過程  $S$  含有  $S$  和  $V$  這兩個變數，所以必須經過兩階段轉換，第一階段將隨機過程  $S$  轉換至隨機過程  $H$ ，轉換過程如下 (附錄 B 導出隨機過程  $H$ )：

$$H = H(S, V) = h^{-1}(V) \int^S \frac{dS}{f(S)} \quad (2.2.3)$$

$$\begin{aligned} dH &= H_S dS + H_V dV + \frac{1}{2} (H_{SS} dS^2 + 2H_{SV} dSdV + H_{VV} dV^2) \\ &= m_h dt + H_S f(S) h(V) dZ_s + H_V bV dZ_v \\ &= m_h dt + \sigma_h dZ_h \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

其中  $H_S$ 、 $H_V$ 、 $H_{SS}$ 、 $H_{SV}$ 、 $H_{VV}$  和  $f_s$  的下標表示偏微分，

$$m_h = \frac{m_s}{\sigma_s(S, V)} - \frac{m_v aH}{V} - \frac{1}{2} f_s V^a + \frac{1}{2} aH(1+a)b^2 - ab\rho \quad (2.2.5)$$

$$\sigma_h = \sqrt{1 - 2ab\rho H + a^2 b^2 H^2} \quad (2.2.6)$$

第二階段將隨機過程  $H$  轉換至隨機過程  $Q$ ，此轉換是利用 Nelson 和 Ramaswamy (1990) 的方法，轉換過程如下 (附錄 C 導出隨機過程  $Q$ )：

$$Q = \int^H \sigma_h^{-1}(x) dx = (ab)^{-1} \ln(abH - \rho + \sigma_h) \quad (2.2.7)$$

和

$$dQ = m_q dt + dZ_h \quad (2.2.8)$$

其中，

$$m_q = \frac{m_h}{\sigma_h} + \frac{ab\rho - a^2b^2H}{2\sigma_h} \quad (2.2.9)$$

轉換後，隨機過程  $Y$  和  $Q$  都具有單位波動率，所以現在可以開始在  $Y \times Q$  空間上建構會接合的雙變數二元樹，其時間複雜度為  $O(n^3)$ ，其中  $n$  表示所切的期數。

而從隨機過程  $Y$  和  $Q$  轉回隨機過程  $V$  和  $S$  的反轉換公式如下：

$$V = \exp(Yb) \quad (2.2.10)$$

$$H = (2ab)^{-1} [2\rho - (1 - \rho^2) \exp(-abQ) + \exp(abQ)] \quad (2.2.11)$$

$$S = \begin{cases} [V^a(1-\theta)H]^{1-\theta^{-1}}, & \theta \neq 1 \\ S_0 \exp(V^a H) & , \theta = 1 \end{cases} \quad (2.2.12)$$

根據以上的轉換過程，轉換後，隨機過程  $Y$  和  $Q$  之相關係數為（附錄 D 導出  $Y$  和  $Q$  之相關係數）：

$$\begin{aligned} \rho' &\equiv \text{Corr}(dQ, dY) = \text{Corr}(dZ_h, dZ_v) \\ &= \frac{\rho - abH}{\sigma_h} \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

## 2.3 跳動幅度和聯合機率

因為隨機過程  $Y$  和  $Q$  都具有單位波動率，所以在個別的二元樹下，其跳動幅度為：

$$Y_1^\pm = Y_0 \pm \sqrt{\Delta t} \quad (2.3.1)$$

$$Q_1^\pm = Q_0 \pm \sqrt{\Delta t} \quad (2.3.2)$$

其中  $\Delta t$  代表一期的時間大小，下標代表時間點，0 表示現在，1 代表下一期，而上標表示跳動方向。隨機過程  $Y$  和  $Q$  的上漲機率分別如下：

$$p = \frac{1 + m_y \sqrt{\Delta t}}{2} \quad (2.3.3)$$

$$q = \frac{1 + m_q \sqrt{\Delta t}}{2} \quad (2.3.4)$$

定義聯合機率為：

$$\begin{aligned} P_{uu} &= \text{prob}(Q_1^+, Y_1^+) \\ P_{ud} &= \text{prob}(Q_1^+, Y_1^-) \\ P_{du} &= \text{prob}(Q_1^-, Y_1^+) \\ P_{dd} &= \text{prob}(Q_1^-, Y_1^-) \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

若  $dZ_h$  和  $dZ_v$  獨立，則聯合機率可以相乘求出，如下：

$$\begin{aligned} P_{uu} &= qp \\ P_{ud} &= q(1-p) \\ P_{du} &= (1-q)p \\ P_{dd} &= (1-q)(1-p) \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

但現在  $dZ_h$  和  $dZ_v$  並非獨立，必須尋找限制式以計算聯合機率，其限制式如下：

$$q = P_{ud} + P_{uu} \quad (2.3.7)$$

$$1 - p = P_{ud} + P_{dd} \quad (2.3.8)$$

$$1 = P_{ud} + P_{uu} + P_{dd} + P_{du} \quad (2.3.9)$$

$$E(\Delta Y \Delta Q) = \Delta t (-P_{ud} + P_{uu} + P_{dd} - P_{du}) \quad (2.3.10)$$

方程式 (2.3.7) 和方程式 (2.3.8) 須符合邊際機率，而方程式 (2.3.9) 符合機率總和為 1，加上方程式 (2.3.10)，其符合在  $dZ_h$  和  $dZ_v$  的相關係數，在方程式 (2.3.10)

中，

$$\begin{aligned}
E(\Delta Y \Delta Q) &= \text{Cov}(\Delta Y, \Delta Q) + E(\Delta Y)E(\Delta Q) \\
&= \text{Corr}(dQ, dY) \sqrt{\text{Var}(\Delta Y)} \sqrt{\text{Var}(\Delta Q)} + E(\Delta Y)E(\Delta Q) \quad (2.3.11) \\
&= \text{Corr}(dQ, dY) 4\Delta t \sqrt{p(1-p)q(1-q)} + \Delta t(2p-1)(2q-1)
\end{aligned}$$

因為有四個聯合機率，意即四個未知數，同時也有四條限制式，其線性聯立方程解如下：

$$\begin{aligned}
P_{uu} &= qp + \text{Corr}(dQ, dY)\kappa \\
P_{ud} &= q(1-p) - \text{Corr}(dQ, dY)\kappa \\
P_{du} &= (1-q)p - \text{Corr}(dQ, dY)\kappa \\
P_{dd} &= (1-q)(1-p) + \text{Corr}(dQ, dY)\kappa
\end{aligned} \quad (2.3.12)$$

其中  $\kappa = \sqrt{p(1-p)q(1-q)}$ 。

## 2.4 Hilliard 和 Schwartz (1996) 演算法的問題

當  $Q$  的上漲機率  $q$  為負數時，方程式 (2.3.12) 中的變數  $\kappa$  無法算出，也就無法得到聯合機率，在 Hilliard and Schwartz (1996) 論文的表 4，根據其參數設定， $\theta=1$ ， $a=1/2$ ， $b=1$ ， $S$  和  $V$  的相關係數  $\rho = -0.5, -0.25, 0, 0.25, 0.5$ ，切成 100 期，利率為 5%，到期時間為 2 年，股價的波動率為 20%，履約價為 100，將以上這些參數帶入方程式 (2.1.1) 和 (2.1.2)，其模型簡化如下：

$$\begin{aligned}
dS &= rSdt + S\sqrt{V}dZ_s \\
dV &= bVdZ_v
\end{aligned} \quad (2.4.1)$$

用上述的模型去建構雙變數二元樹，發現無法複製論文上的數據，探究其原因在於隨機過程  $Q$  的上漲機率  $q$  在方程式 (2.3.4) 算出的值可為負數，但因為機率必須介於 0 到 1 之間，因此在方程式 (2.3.4) 中的  $m_q$  應該要有限制範圍。我們將方程式 (2.2.5) 和 (2.2.6) 帶入方程式 (2.2.9)，整理得到  $m_q$  如下：

$$m_q = \frac{\frac{r}{\sqrt{V}} - \frac{\sqrt{V}}{2} + \frac{Hb^2}{8} - \frac{b\rho}{4}}{\sqrt{1 - b\rho H + \frac{1}{4}b^2H^2}} \quad (2.4.2)$$

其中

$$H = b^{-1} \left[ 2\rho - (1 - \rho^2) \exp\left(-\frac{1}{2}bQ\right) + \exp\left(\frac{1}{2}bQ\right) \right] \quad (2.4.3)$$

因為  $V$  和  $H$  沒有上下限，故  $m_q$  的值也沒有限制，所以機率  $q$  無法保證一定介於 0 到 1 之間，也就是說，在某些情況下，機率  $q$  會是負值，下一章將會對此問題修正 Hilliard and Schwartz (1996) 的演算法，即將隨機過程  $Q$  的建構方式從二元樹改成為平均數追蹤法建構的三元樹。





## 第三章 雙變數 2/3-元樹模型

### 3.1 隨機波動率模型假設與轉換

在雙變數 2/3-元樹模型裡，其隨機波動率模型假設與第二章第一節相同，即方程式 (2.1.1) 和方程式 (2.1.2)，而轉換過程也等同第二章第二節所介紹的轉換方式。

### 3.2 平均數追蹤法 (mean-tracking method)

平均數追蹤法最初由 Lyuu 和 Wu (2005) 提出，其核心觀念為用三元樹把平均數包住，並符合其變異數。在 Dai 和 Lyuu (2010) 論文中，建構其模型時也是利用平均數追蹤法。以下介紹 Dai 和 Lyuu (2010) 如何利用平均數追蹤法建構三元樹，並加以擴充其適用範圍。

假設隨機過程  $Q$  如下：

$$dQ = m_q dt + \sigma dZ_h \quad (3.2.1)$$

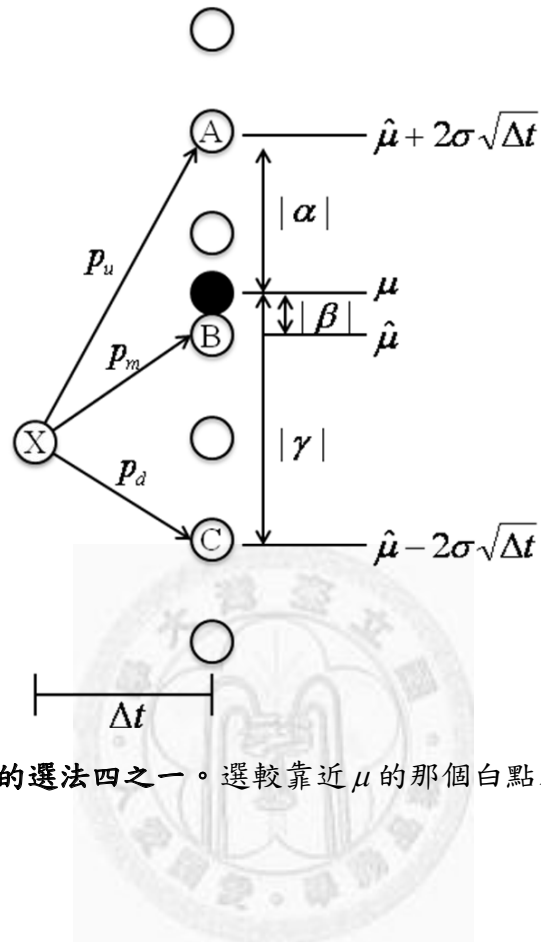
我們使用平均數追蹤法來建構三元樹  $Q$ ，以圖一來做說明，假設目前標的物價格在  $X$  這個點上，其價格為  $Q_0$ ，在  $\Delta t$  時後，其平均數與變異數如下：

$$\mu \equiv Q_0 + m_q \Delta t \quad (3.2.2)$$

$$\text{Var} \equiv \sigma^2 \Delta t \quad (3.2.3)$$

由  $X$  點算出的平均數為  $\mu$  (圖一上黑點)，在下一期的眾多白點裡，挑選出 3 個白點把平均數包住，每兩個白點的距離為  $\sigma\sqrt{\Delta t}$ ，依照  $\mu$  的位置先決定 B 點，B 點的

選擇可以是最靠近  $\mu$  的白點，此為 Dai 和 Lyuu (2010) 的選擇方式，之後會再介紹其他種選擇方式。



圖一：A、B 和 C 點的選法四之一。選較靠近  $\mu$  的那個白點為 B 點，A 點和 C 點各上下跳動  $2\sigma\sqrt{\Delta t}$ 。

當 B 點決定好後，就可以決定 A 和 C 點，A 點可以為 B 點往上  $2\sigma\sqrt{\Delta t}$  的距離，即向上跳動 2 個白點，C 點可以為 B 點往下  $2\sigma\sqrt{\Delta t}$  的距離，即向下跳動 2 個白點，此為 Dai 和 Lyuu (2010) 的選擇方式。但往上或下的跳動白點數並不一定都要是 2，之後會詳加說明。在 A 點 (C 點) 向上 (下) 跳動 2 個白點的選擇下，定義 B 點、A 點和 C 點與  $\mu$  的距離各為：

$$\begin{aligned}
\beta &\equiv \hat{\mu} - \mu \\
\alpha &\equiv \hat{\mu} + 2\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu = \beta + 2\sigma\sqrt{\Delta t} \\
\gamma &\equiv \hat{\mu} - 2\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu = \beta - 2\sigma\sqrt{\Delta t}
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

事實上，若 B 點為最靠近  $\mu$  的白點，則  $-\frac{\sigma\sqrt{\Delta t}}{2} \leq \beta \leq \frac{\sigma\sqrt{\Delta t}}{2}$ 。

令 X 點到 A、B 和 C 點的機率各為  $p_u$ 、 $p_m$  和  $p_d$ ，必須符合平均數、變異數及機率總和為 1 這三個限制式，三個變數有三個限制式，故可以求出  $p_u$ 、 $p_m$  和  $p_d$ ，其限制式如下：

$$p_u\alpha + p_m\beta + p_d\gamma = 0 \tag{3.2.5}$$

$$p_u\alpha^2 + p_m\beta^2 + p_d\gamma^2 = \text{Var} \tag{3.2.6}$$

$$p_u + p_m + p_d = 1 \tag{3.2.7}$$

再利用克拉馬公式 (Cramer's rule) 得到：

$$\begin{aligned}
p_u &= \frac{(\beta\gamma + \text{Var})}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)} \\
p_m &= -\frac{(\alpha\gamma + \text{Var})}{(\beta - \alpha)(\gamma - \beta)} \\
p_d &= \frac{(\alpha\beta + \text{Var})}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}
\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

之前有提到 A、B 和 C 點可以有其他的選法，B 點不一定要是最靠近  $\mu$  的白點，事實上，B 點有兩種選擇， $\mu$  會落在兩個白點之間，可選較近的白點為 B 點或是較遠的白點為 B 點，故  $-\sigma\sqrt{\Delta t} \leq \beta \leq \sigma\sqrt{\Delta t}$ 。而 A 點 (C 點) 不一定要向上 (下) 跳動 2 個白點，表一呈現當  $\beta$  的值若入表中的範圍時，A 點和 C 點的四種選法，在此表中， $i$  表示 A 點為 B 點向上跳動  $i$  個白點， $j$  表示 C 點為 B 點向下跳動  $j$  個白點。(證明請參考附錄 E)。

$\beta \backslash \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$	1	2
1	$\beta = 0$	$-\sigma\sqrt{\Delta t} \leq \beta \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}$
2	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\sigma\sqrt{\Delta t} \leq \beta \leq \sigma\sqrt{\Delta t}$	$-\sigma\sqrt{\Delta t} \leq \beta \leq \sigma\sqrt{\Delta t}$

表一：當  $\beta$  值落入此範圍時，A 點和 C 點的選法。 $i$  表示 A 點為 B 點向上跳動  $i$  個白點， $j$  表示 C 點為 B 點向下跳動  $j$  個白點，兩個白點的距離為  $\sigma\sqrt{\Delta t}$ ，而  $\beta$  表示 B 點到平均數  $\mu$  的距離。

以下將分別介紹表一中，A 點和 C 點的四種選法：

選法一：當  $i=1$  且  $j=1$

如圖二， $\beta=0$  表示  $\mu$  會剛好落在白點上，此點即是 B 點，而 A 點和 C 點可以各向上下跳動 1 個白點，因此，B 點、A 點和 C 點與  $\mu$  的距離各為：

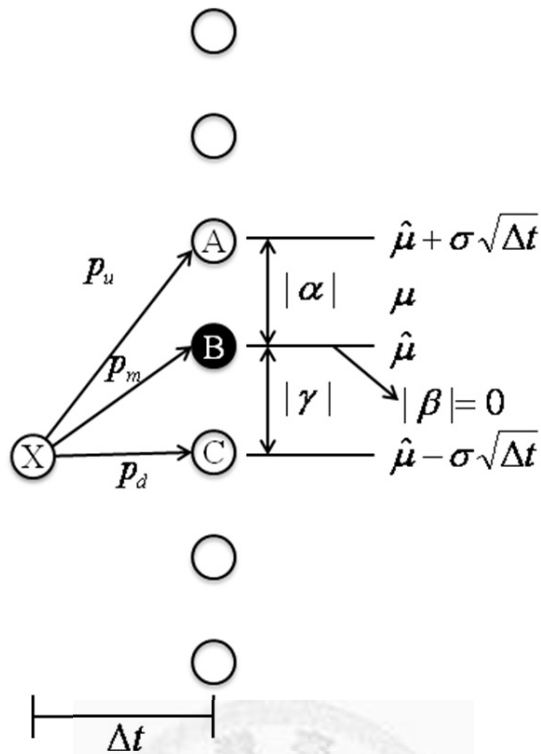
$$\begin{aligned}
 \beta &\equiv \hat{\mu} - \mu = 0 \\
 \alpha &\equiv \hat{\mu} + \sigma\sqrt{\Delta t} - \mu = \beta + \sigma\sqrt{\Delta t} \\
 \gamma &\equiv \hat{\mu} - \sigma\sqrt{\Delta t} - \mu = \beta - \sigma\sqrt{\Delta t}
 \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

各機率  $p_u$ 、 $p_m$  和  $p_d$  的解等同方程式 (3.2.8)，將方程式 (3.2.9) 帶入方程式 (3.2.8)

可得到

$$\begin{aligned}
 p_u &= \frac{1}{2} \\
 p_m &= 0 \\
 p_d &= -\frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

因為  $p_m$  等於 0，表示從三元樹退化成二元樹。



圖二：A、B 和 C 點的選法一。 $\mu$  會落在白點上，此點即為 B 點，A 點和 C 點各上下跳動  $\sigma\sqrt{\Delta t}$ 。

選法二：當  $i=2$  且  $j=1$

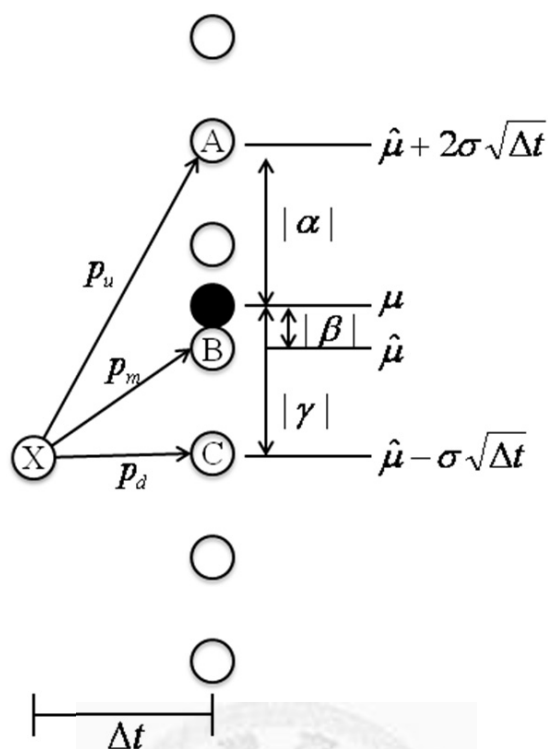
當  $\mu$  可能不落在白點上時，適用選法二到選法四。若  $\beta$  的值落在

$\left[-\sigma\sqrt{\Delta t}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}\right]$  區間，則適用此選法，如圖三，當  $\mu$  落在兩個白點之間，

B 點必須是離  $\mu$  較近的那個白點，而 A 點向上跳動 2 個白點，C 點向下跳動 1 個白點，因此，B 點、A 點和 C 點與  $\mu$  的距離各為：

$$\begin{aligned}
 \beta &\equiv \hat{\mu} - \mu \\
 \alpha &\equiv \hat{\mu} + 2\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu = \beta + 2\sigma\sqrt{\Delta t} \\
 \gamma &\equiv \hat{\mu} - \sigma\sqrt{\Delta t} - \mu = \beta - \sigma\sqrt{\Delta t}
 \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

各機率  $p_u$ 、 $p_m$  和  $p_d$  的解等同方程式 (3.2.8)。



圖三：A、B 和 C 點的選法二。選離  $\mu$  較近的那個白點為 B 點，A 點向上跳動  $2\sigma\sqrt{\Delta t}$ ，C 點向下跳動  $\sigma\sqrt{\Delta t}$ 。

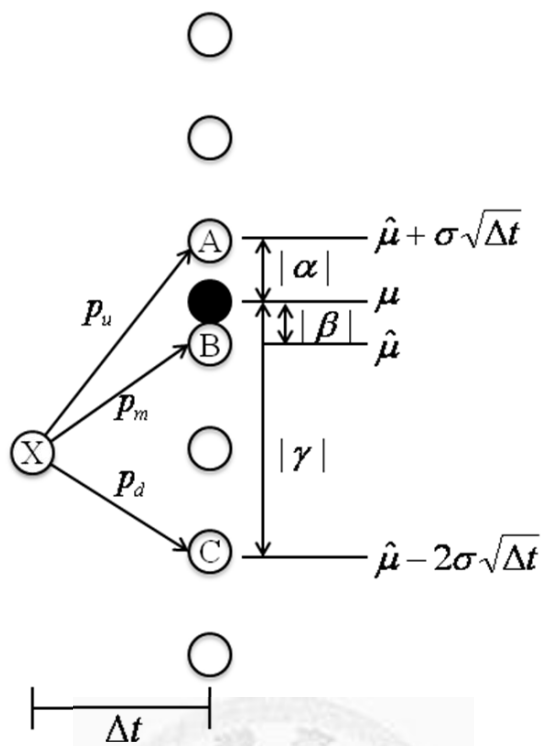
選法三：當  $i=1$  且  $j=2$

若  $\beta$  的值落在  $\left[ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}, \sigma\sqrt{\Delta t} \right]$  區間，則適用此選法，如圖四，當  $\mu$  落在

兩個白點之間，B 點必須是離  $\mu$  較近的那個白點，而 A 點向上跳動 1 個白點，C 點向下跳動 2 個白點，因此，B 點、A 點和 C 點與  $\mu$  的距離各為：

$$\begin{aligned}
 \beta &\equiv \hat{\mu} - \mu \\
 \alpha &\equiv \hat{\mu} + \sigma\sqrt{\Delta t} - \mu = \beta + \sigma\sqrt{\Delta t} \\
 \gamma &\equiv \hat{\mu} - 2\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu = \beta - 2\sigma\sqrt{\Delta t}
 \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

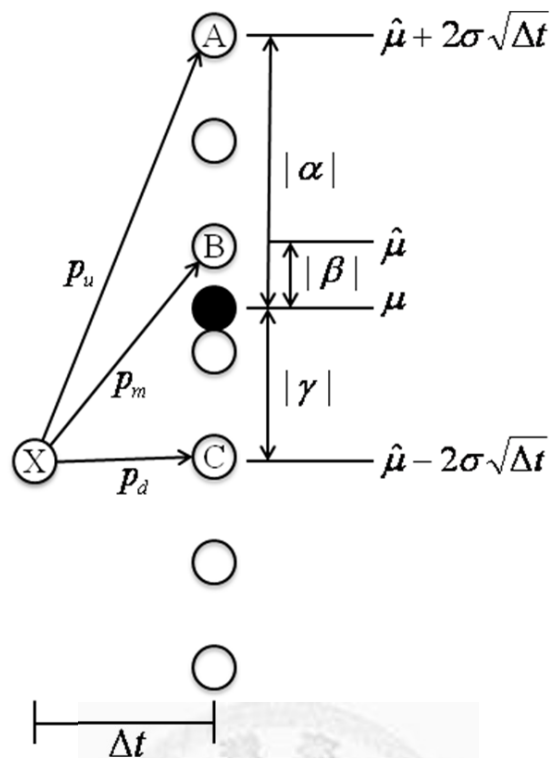
各機率  $p_u$ 、 $p_m$  和  $p_d$  的解等同方程式 (3.2.8)。



圖四：A、B 和 C 點的選法三。選離  $\mu$  較近的那個白點為 B 點，A 點向上跳動  $\sigma\sqrt{\Delta t}$ ，C 點向下跳動  $2\sigma\sqrt{\Delta t}$ 。

選法四：當  $i=2$  且  $j=2$

若  $\beta$  的值落在  $[\sigma\sqrt{\Delta t}, \sigma\sqrt{\Delta t}]$  區間，則適用此選法，此選法又可分為兩種，第一種為 B 點是離  $\mu$  較近的那個白點，如圖一，另一種為 B 點是離  $\mu$  較遠的那個白點，如圖五，不論哪一種 A 點向上跳動 2 個白點，C 點向下跳動 2 個白點，因此，B 點、A 點和 C 點與  $\mu$  的距離  $\beta$ 、 $\alpha$  和  $\gamma$  等同方程式 (3.2.4)，各機率  $p_u$ 、 $p_m$  和  $p_d$  的解等同方程式 (3.2.8)。



圖五：A、B 和 C 點的選法四之二。選離  $\mu$  較遠的那個白點為 B 點，A 點和 C 點各上下跳動  $2\sigma\sqrt{\Delta t}$ 。

### 3.3 跳動幅度和聯合機率

隨機過程  $Y$  一樣用二元樹建構，而隨機過程  $Q$  改用平均數追蹤法建構的三元樹。隨機過程  $Y$  在二元樹下，其跳動幅度為：

$$Y_1^\pm = Y_0 \pm \sqrt{\Delta t} \quad (3.3.1)$$

隨機過程  $Q$  在二元樹下，其跳動幅度為：

$$\begin{aligned} Q_1^u &= Q_0 + \alpha \\ Q_1^m &= Q_0 + \beta \\ Q_1^d &= Q_0 + \gamma \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

隨機過程  $Y$  上漲的機率如下：



$$p = \frac{1 + m_y \sqrt{\Delta t}}{2} \quad (3.3.3)$$

隨機過程  $Q$  的三個機率如下：

$$\begin{aligned} P_u &= \frac{(\beta\gamma + \Delta t)}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)} \\ P_m &= -\frac{(\alpha\gamma + \Delta t)}{(\beta - \alpha)(\gamma - \beta)} \\ P_d &= \frac{(\alpha\beta + \Delta t)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

定義聯合機率為：

$$\begin{aligned} P_{ud} &= \text{prob}(Q_1^u, Y_1^-) \\ P_{uu} &= \text{prob}(Q_1^u, Y_1^+) \\ P_{md} &= \text{prob}(Q_1^m, Y_1^-) \\ P_{mu} &= \text{prob}(Q_1^m, Y_1^+) \\ P_{dd} &= \text{prob}(Q_1^d, Y_1^-) \\ P_{du} &= \text{prob}(Q_1^d, Y_1^+) \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

因為  $dZ_h$  和  $dZ_v$  不一定獨立，所以必須尋找限制式以計算聯合機率，其限制式如下：

$$p = P_{uu} + P_{mu} + P_{du} \quad (3.3.6)$$

$$p_u = P_{uu} + P_{ud} \quad (3.3.7)$$

$$p_m = P_{mu} + P_{md} \quad (3.3.8)$$

$$p_d = P_{du} + P_{dd} \quad (3.3.9)$$

$$E(\Delta Y \Delta Q') = \sqrt{\Delta t} \alpha P_{uu} - \sqrt{\Delta t} \alpha P_{ud} + \sqrt{\Delta t} \beta P_{mu} - \sqrt{\Delta t} \beta P_{md} + \sqrt{\Delta t} \gamma P_{du} - \sqrt{\Delta t} \gamma P_{dd} \quad (3.3.10)$$

$$E(\Delta Y \Delta Q'^2) = \sqrt{\Delta t} \alpha^2 P_{uu} - \sqrt{\Delta t} \alpha^2 P_{ud} + \sqrt{\Delta t} \beta^2 P_{mu} - \sqrt{\Delta t} \beta^2 P_{md} + \sqrt{\Delta t} \gamma^2 P_{du} - \sqrt{\Delta t} \gamma^2 P_{dd} \quad (3.3.11)$$

其中  $\Delta Q' = \Delta Q - E(\Delta Q)$ ，方程式 (3.3.6) – (3.3.9) 符合各自的邊際機率，機率總和為 1 的這個條件會產生線性相依，故省略，因此，除了加上方程式 (3.3.10) 符合其相關係數外，另需要再加上一條限制式 (3.3.11)，方程式 (3.3.11) 是從許多動差 (moment) 中尋找與方程式 (3.3.6) – (3.3.10) 線性獨立的限制式，根據實驗結果， $E(\Delta Y \Delta Q'^2)$  會有較好的穩定性。(在方程式 (3.3.10) 和方程式 (3.3.11))

中的  $E(\Delta Y \Delta Q')$  和  $E(\Delta Y \Delta Q'^2)$  其推導可參考附錄 F。

根據方程式 (3.3.6) – (3.3.11) 可以推導出聯合機率：

$$\begin{aligned}
 P_{ud} &= \frac{-B + \alpha^2 p_u - \beta\gamma(2p - p_u - 1) - (\beta + \gamma)(\alpha p_u - A)}{2(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} \\
 P_{uu} &= P_u - P_{ud} \\
 P_{md} &= -\frac{-B + \beta^2 p_m - \alpha\gamma(2p - p_m - 1) - (\alpha + \gamma)(\beta p_m - A)}{2(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)} \\
 P_{mu} &= P_m - P_{md} \\
 P_{dd} &= \frac{-B + \gamma^2 p_d - \beta\alpha(2p - p_d - 1) - (\beta + \alpha)(\gamma p_d - A)}{2(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)} \\
 P_{du} &= P_d - P_{dd}
 \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

其中  $A = \frac{E(\Delta Y \Delta Q')}{\sqrt{\Delta t}}$  及  $B = \frac{E(\Delta Y \Delta Q'^2)}{\sqrt{\Delta t}}$ 。



## 第四章 數值資料與分析

本節利用雙變數 2/3-元樹模型去評價歐式賣權，利用 Hull 和 White (1987) 的模型假設：

$$\begin{aligned}dS &= rSdt + S\sqrt{V}dZ_s \\dV &= bVdZ_v\end{aligned}$$

其參數設定為  $m_s = rS$ 、 $\sigma_s(S, V) = f(S)h(V) = S\sqrt{V}$ 、 $m_v = 0$ 、 $\theta = 1$  和  $a = 0.5$ ，評價數據結果如表二到表五。

表二呈現在隨機波動率接近不變下，評價歐式賣權，並與 Black-Scholes 的解作比較。在表中設定  $b = 0.00001$  讓隨機波動率接近不變，設定  $S$  和  $V$  的相關係數  $\rho = 0$ ，切成 100 期，利率為 5%，到期時間為 0.5 年，股價的起始波動率為 15%，履約價為 100，觀察表中數據，本文模型與 Black-Scholes 公式算出來的解約差 0.1%，和 Monte Carlo 模擬的結果約差 1%，表示本文模型在隨機波動率趨近於不變以及股價和波動率無相關時，可以正確的評價。

$S/X$ $X=100$	Black-Scholes	本文模型	Monte Carlo $N=10,000,000$
0.80	17.6433	17.6421	17.6471
0.84	13.8764	13.8735	13.8777
0.88	10.3975	10.3886	10.3980
0.92	7.3651	7.3584	7.3662
0.96	4.9035	4.8982	4.9044
1.00	3.0581	3.0481	3.0577
1.04	1.7845	1.7851	1.7846
1.08	0.9749	0.9807	0.9753
1.12	0.4998	0.5023	0.5002
1.16	0.2411	0.2369	0.2403
1.20	0.1098	0.1102	0.1098

表二：在隨機波動率接近不變下，評價歐式賣權，並與 Black-Scholes 的解作比較。以 Hull 和 White (1987) 的模型為基礎，將起始參數設定  $b=0.00001$ ， $S$  和  $V$  的相關係數  $\rho=0$ ，切成 100 期，利率為 5%，到期時間為 0.5 年，股價的起始波動率為 15%，履約價為 100。

表三在隨機波動率的影響下，評價歐式賣權。在表中設定  $b=0.004$  讓隨機波動率不固定，設定  $S$  和  $V$  的相關係數  $\rho=0$ ，切成 20 期，利率為 5%，到期時間為 0.1 年，股價的起始波動率為 15%，履約價為 100，觀察表中數據，本文模型與 Monte Carlo 模擬的結果約差 1%。

$S/X$ $X=100$	本文模型	Monte Carlo $N=10,000,000$
080	19.5013	19.5008
0.84	15.5013	15.5010
0.88	11.5054	11.5086
0.92	7.5855	7.5941
0.96	4.0917	4.1047
1.00	1.6253	1.6485
1.04	0.4559	0.4567
1.08	0.0852	0.0838
1.12	0.0088	0.0103
1.16	0.0004	0.0009
1.20	0.0000	0.0000

表三：在隨機波動率的影響下，評價歐式賣權。以 Hull 和 White (1987) 的模型為基礎，將起始參數設定  $b=0.004$ ， $S$  和  $V$  的相關係數  $\rho=0$ ，切成 20 期，利率為 5%，到期時間為 0.1 年，股價的起始波動率為 15%，履約價為 100。

表四呈現在隨機波動率的影響下，評價歐式賣權，並與 Hilliard 和 Schwartz (1996) 論文的表 2 數據作比較。在表中設定  $b=0.25$  讓隨機波動率不固定，設定  $S$  和  $V$  的相關係數  $\rho=0$ ，切成 270 期，利率為 5%，到期時間為 0.5 年，股價的起始波動率為 15%，履約價為 100。表中第二欄到第四欄的值為 Hilliard 和 Schwartz (1996) 論文上的數據，而表中第五欄為我們實作 Hilliard 和 Schwartz (1996) 雙變數二元樹模型得到的數據，第六欄為本文模型跑出的數據，第七欄為 Monte Carlo 模擬出的數據，觀察表中數據，實作 Hilliard 和 Schwartz (1996) 的數據與其論文的數據約差 0.1%，而本文模型與 Hilliard 和 Schwartz (1996) 論文上的數據以及 Monte Carlo 模擬出的數據，相差都約 0.1%，但是在本文模型中，會有負的聯合機率發生，而 Hilliard 和 Schwartz (1996) 的演算法則不會。

$S/X$ $X=100$	Black- Scholes	Hull 和 White (1987)	Hilliard 和 Schwartz (1996)	實作 Hilliard 和 Schwartz (1996)	本文模型	Monte Carlo $N=1,000,000$
0.80	17.6433	17.645	17.646	17.6446	17.6446*	17.6462
0.84	13.8764	13.878	13.878	13.8772	13.8772*	13.8772
0.88	10.3975	10.397	10.397	10.3965	10.3966*	10.3975
0.92	7.3651	7.362	7.361	7.3618	7.3620*	7.3614
0.96	4.9035	4.898	4.898	4.8986	4.8988*	4.8969
1.00	3.0581	3.053	3.054	3.0492	3.0494*	3.0519
1.04	1.7845	1.782	1.782	1.7818	1.7820*	1.7814
1.08	0.9749	0.975	0.975	0.9752	0.9753*	0.9734
1.12	0.4998	0.501	0.501	0.5016	0.5017*	0.5000
1.16	0.2411	0.244	0.243	0.2434	0.2435*	0.2439
1.20	0.1098	0.112	0.112	0.1120	0.1120*	0.1115

表四：在隨機波動率的影響下，評價歐式賣權，並與 Hilliard 和 Schwartz (1996) 論文的表 2 數據作比較。以 Hull 和 White (1987) 的模型為基礎，將起始參數設定  $b=0.25$ ， $S$  和  $V$  的相關係數  $\rho=0$ ，切成 270 期，利率為 5%，到期時間為 0.5 年，股價的起始波動率為 15%，履約價為 100。表中有\*的數據表示在評價計算中有負機率發生。

表五呈現在隨機波動率且有較長的到期時間下，評價歐式賣權，並與 Hilliard 和 Schwartz (1996) 論文的表 4 數據作比較。在表中設定  $b=1$  讓隨機波動率不固定，設定  $S$  和  $V$  的相關係數  $\rho=-0.5, -0.25, 0, 0.25, 0.5$  及  $0.5$ ，切成 100 期，利率為 5%，到期時間為 2 年，股價的起始波動率為 20%，履約價為 100。當我們實作 Hilliard 和 Schwartz (1996) 雙變數二元樹模型時，發現無法得出其數據，原因在於隨機過程  $Q$  的上漲機率會有負值，造成合法的聯合機率無法求出，例如在相關係數  $\rho=0$  下，第 99 期的某個點其  $(Y, Q)$  值為  $(10.7818, -6.92965)$ ，帶入方程式 (2.2.10) 及方程式 (2.2.11) 去做轉換，得到  $(V, H)$  值為  $(48138.5, -31.9395)$ ，將此數值帶到方程式 (2.2.9) 可得到  $m_q = -7.35497$ ，有了  $m_q$  就可以利用方程式

(2.3.4) 得到機率  $q = -0.0200747$ ，此機率小於 0，故無法得到合法的聯合機率，因此無法評價。觀察此表的數據，本文模型與 Hilliard 和 Schwartz (1996) 論文上的數據結果約差 5%，但是本文模型仍會有負的聯合機率發生。



$S/X$ $X=100$	Black-Scholes		$\rho = -0.5$		$\rho = -0.25$	
			Hilliard 和 Schwartz (1996)	本文模型	Hilliard 和 Schwartz (1996)	本文模型
0.80	15.716		14.267*	14.2632*	14.735*	14.7390*
0.85	12.848		11.465*	11.4632*	11.816*	11.8213*
0.90	10.393		9.217*	9.21812*	9.424*	9.4321*
0.95	8.325		7.451*	7.4552*	7.512*	7.5277*
1.00	6.611		6.073*	6.0530*	6.014*	6.0040*
1.05	5.208		4.999*	5.0064*	4.849*	4.8679*
1.10	4.074		4.159*	4.1619*	3.945*	3.9604*
1.15	3.167		3.495*	3.4976*	3.240*	3.2561*
1.20	2.449		2.965*	2.9682*	2.689*	2.7036*
$S/X$ $X=100$	$\rho = 0$		$\rho = 0.25$		$\rho = 0.5$	
	Hilliard 和 Schwartz (1996)	本文模型	Hilliard 和 Schwartz (1996)	本文模型	Hilliard 和 Schwartz (1996)	本文模型
0.80	15.145*	15.1578*	15.499*	15.5186*	15.796*	15.8231*
0.85	12.110*	12.1301*	12.351*	12.3823*	12.538*	12.5767*
0.90	9.581*	9.5971*	9.683*	9.7051*	9.721*	9.7496*
0.95	7.518*	7.5446*	7.464*	7.4981*	7.338*	7.3757*
1.00	5.890*	5.8915*	5.694*	5.7048*	5.409*	5.4262*
1.05	4.626*	4.6579*	4.319*	4.3627*	3.905*	3.9583*
1.10	3.655*	3.6855*	3.274*	3.3181*	2.775*	2.8335*
1.15	2.910*	2.9409*	2.492*	2.5342*	1.961*	2.0160*
1.20	2.340*	2.3688*	1.912*	1.9507*	1.385*	1.4342*

表五：在隨機波動率的影響下，評價歐式賣權，並與 Hilliard 和 Schwartz (1996) 論文的表 4 數據作比較。以 Hull 和 White (1987) 的模型為基礎，將起始參數設定  $b=1$ ， $S$  和  $V$  的相關係數  $\rho = -0.5, -0.25, 0, 0.25, 0.5$ ，切成 100 期，利率為 5%，到期時間為 2 年，股價的起始波動率為 20%，履約價為 100。表中有\*的數據表示在評價計算中有負機率發生。



## 第五章 結論與展望

1. 本論文指出 Hilliard 和 Schwartz (1996) 雙變數二元樹模型的演算法有問題之處，其問題為在某些情況下，邊際機率會有負值，以至無法評價。
2. 本論文提出一個可以部分解決 Hilliard 和 Schwartz (1996) 問題的方案，即利用平均數追蹤法去把會發生錯誤機率的二元樹改成建構三元樹，但是在期數過多，轉換後的相關係數大於一個值時，雙變數 2/3-元樹模型將會出現負數的聯合機率，此問題仍待更深入的探討。



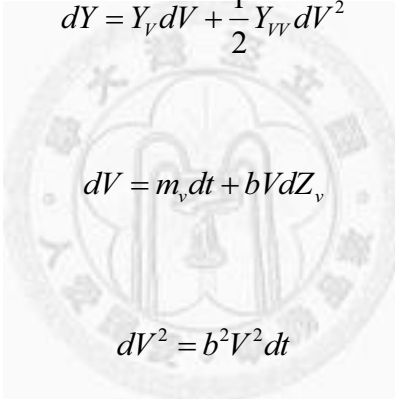
# 附錄

## 附錄A 導出隨機過程 $Y$

隨機過程  $V$  經過以下轉換函式，轉成隨機過程  $Y$ ：

$$Y = \frac{\ln(V)}{b}$$

利用伊藤公式，故


$$dY = Y_V dV + \frac{1}{2} Y_{VV} dV^2$$

因為

$$dV = m_v dt + bV dZ_v$$

我們可以得到

$$dV^2 = b^2 V^2 dt$$

所以

$$\begin{aligned} dY &= \frac{1}{bV} (m_v dt + bV dZ_v) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{bV^2} \right) (b^2 V^2 dt) \\ &= \left( \frac{m_v}{bV} - \frac{b}{2} \right) dt + dZ_v \end{aligned}$$

## 附錄B 導出隨機過程 $H$

隨機過程  $S$  經過以下轉換函式，轉成隨機過程  $H$ ：

$$H = H(S, V) = h^{-1}(V) \int \frac{dS}{f(S)}$$

其中  $h(V) = V^a$ ，令  $f(S) = f$ ，以下為在伊藤公式中要用到的偏微分項：

$$H_S = \frac{1}{fV^a}$$

$$H_{SS} = -\frac{f_S}{f^2V^a}$$

$$H_V = -\frac{aH}{V}$$

$$H_{VV} = \frac{aH(1+a)}{V^2}$$

$$H_{SV} = -\frac{a}{fV^{a+1}}$$

所以

$$\begin{aligned} dH &= H_S dS + H_V dV + \frac{1}{2} (H_{SS} dS^2 + 2H_{SV} dS dV + H_{VV} dV^2) \\ &= H_S (m_s dt + f(S)h(V)dZ_s) + H_V (m_v dt + bV dZ_v) \\ &\quad + \frac{1}{2} (H_{SS} f^2 V^{2a} dt + 2H_{SV} b f V^{a+1} \rho dt + H_{VV} b^2 V^2 dt) \\ &= m_h dt + dZ_s - abH dZ_v \\ &= m_h dt + \sigma_h dZ_h \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} m_h &= H_S m_s + H_V m_v + \frac{1}{2} (H_{SS} f^2 V^{2a} + 2H_{SV} b f V^{a+1} \rho + H_{VV} b^2 V^2) \\ &= \frac{m_s}{fV^a} - \frac{m_v aH}{V} - \frac{1}{2} f_S V^a - ab\rho + \frac{1}{2} aH(1+a)b^2 \end{aligned}$$

因為

$$\begin{aligned}dZ_s &\sim N(0,1) \\dZ_v &\sim N(0,1) \\ \text{Corr}(dZ_s, dZ_v) &= \rho\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}dZ_s - abHdZ_v = \sigma_h dZ_h &\sim N\left(0, \begin{bmatrix} 1 & -abH \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -abH \end{bmatrix}\right) = N(0, \sigma_h^2) \\ \sigma_h &= \sqrt{1 - 2ab\rho H + a^2 b^2 H^2}\end{aligned}$$



## 附錄C 導出隨機過程 $Q$

隨機過程  $H$  經過以下轉換函式，轉成隨機過程  $Q$ ：

$$Q = \int^H \sigma_h^{-1}(x) dx = (ab)^{-1} \ln(abH - \rho + \sigma_h)$$

其中  $\sigma_h = \sqrt{1 - 2ab\rho H + a^2 b^2 H^2}$ ，以下為在伊藤公式中要用到的偏微分項：

$$\begin{aligned} (\sigma_h)_h &= \frac{-2ab\rho + 2a^2 b^2 H}{2\sqrt{1 - 2ab\rho H + a^2 b^2 H^2}} = \frac{-ab\rho + a^2 b^2 H}{\sigma_h} \\ Q_h &= (ab)^{-1} \frac{ab + (\sigma_h)_h}{abH - \rho + \sigma_h} = \frac{1}{\sigma_h} \\ Q_{hh} &= \left( \frac{1}{\sigma_h} \right)_h = -\frac{(\sigma_h)_h}{\sigma_h^2} = \frac{ab\rho - a^2 b^2 H}{\sigma_h^3} \end{aligned}$$

因為

$$dH = m_h dt + \sigma_h dZ_h$$

所以

$$\begin{aligned} dQ &= Q_h dH + \frac{1}{2} Q_{hh} dH^2 \\ &= \frac{1}{\sigma_h} (m_h dt + \sigma_h dZ_h) + \frac{1}{2} \frac{ab\rho - a^2 b^2 H}{\sigma_h^3} (\sigma_h^2 dt) \\ &= \left( \frac{m_h}{\sigma_h} + \frac{ab\rho - a^2 b^2 H}{2\sigma_h} \right) dt + dZ_h \end{aligned}$$

所以

$$m_q = \frac{m_h}{\sigma_h} + \frac{ab\rho - a^2 b^2 H}{2\sigma_h}$$

## 附錄D 導出 $Y$ 和 $Q$ 之相關係數

因為

$$\begin{aligned}dZ_s &\sim N(0,1) \\dZ_v &\sim N(0,1) \\ \text{Corr}(dZ_s, dZ_v) &= \rho\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dZ_s - abHdZ_v &= \sigma_h dZ_h \sim N(0, \sigma_h^2) \\ \sigma_h &= \sqrt{1 - 2ab\rho H + a^2 b^2 H^2}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}dZ_h &= \frac{dZ_s - abHdZ_v}{\sigma_h} \\ \text{Corr}(dZ_h, dZ_v) &= \text{Corr}\left(\frac{dZ_s - abHdZ_v}{\sigma_h}, dZ_v\right) \\ &= \text{Corr}(dZ_s - abHdZ_v, dZ_v) \\ &= \frac{\text{Cov}(dZ_s - abHdZ_v, dZ_v)}{\sigma_h} \\ &= \frac{\text{Cov}(dZ_s, dZ_v) + \text{Cov}(-abHdZ_v, dZ_v)}{\sigma_h} \\ &= \frac{\rho - abH}{\sigma_h}\end{aligned}$$

## 附錄E 導出 A 點、B 點和 C 點的選法

A 點、B 點和 C 點到  $\mu$  的距離各為  $\alpha$ 、 $\beta$  和  $\gamma$ ，用  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  和  $\text{Var}$  算出的機率如下：

$$p_u = \frac{(\beta\gamma + \text{Var})}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)}$$

$$p_m = -\frac{(\alpha\gamma + \text{Var})}{(\beta - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

$$p_d = \frac{(\alpha\beta + \text{Var})}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

因為  $p_u + p_m + p_d = 1$  及  $\alpha > \beta > \gamma$ ，故只須證明  $p_u$ 、 $p_m$  和  $p_d$  的分母皆大於等 0，即證明

$$\beta\gamma + \text{Var} \geq 0 \quad (\text{E.1})$$

$$\alpha\gamma + \text{Var} \leq 0 \quad (\text{E.2})$$

$$\alpha\beta + \text{Var} \geq 0 \quad (\text{E.3})$$

就可確保這 3 個機率會落於  $[0, 1]$ ，假設：

$$\alpha = \beta + i\sigma\sqrt{\Delta t} \quad (\text{E.4})$$

$$\gamma = \beta - j\sigma\sqrt{\Delta t} \quad (\text{E.5})$$

$$\text{Var} = \sigma^2\Delta t \quad (\text{E.6})$$

其中  $i$  和  $j$  屬於正整數，將方程式 (E.4)、(E.5) 和 (E.6) 各假設帶入 (E.1)、(E.2) 和 (E.3)：

$$\beta^2 - j\sigma\sqrt{\Delta t}\beta + \sigma^2\Delta t \geq 0 \quad (\text{E.7})$$

$$\beta^2 + (i - j)\sigma\sqrt{\Delta t}\beta + (1 - ij)\sigma^2\Delta t \leq 0 \quad (\text{E.8})$$

$$\beta^2 - i\sigma\sqrt{\Delta t}\beta + \sigma^2\Delta t \geq 0 \quad (\text{E.9})$$

首先，先看方程式 (E.7)：

當  $j = 1, 2$  時，則判別式  $\geq 0$ ，故任意實數  $\beta$  都可滿足方程式 (E.7)。

當  $j > 2$  時，則判別式  $< 0$ ，故  $\beta \leq \frac{j - \sqrt{j^2 - 4}}{2} \sigma \sqrt{\Delta t}$  或  $\beta \geq \frac{j + \sqrt{j^2 - 4}}{2} \sigma \sqrt{\Delta t}$  可滿足方程式 (E.7)。

同理，從方程式 (E.9) 得到：

當  $i = 1, 2$  時，則判別式  $\geq 0$ ，故任意實數  $\beta$  都可滿足方程式 (E.9)。

當  $i > 2$  時，則判別式  $< 0$ ，故  $\beta \leq \frac{i - \sqrt{i^2 - 4}}{2} \sigma \sqrt{\Delta t}$  或  $\beta \geq \frac{i + \sqrt{i^2 - 4}}{2} \sigma \sqrt{\Delta t}$  可滿足方程式 (E.9)。

接下來看方程式 (E.8)，此不等式要小於等於 0，其先決條件為判別式必須大於等於 0，故

$$\left( (i - j) \sigma \sqrt{\Delta t} \right)^2 - 4(1 - ij) \sigma^2 \Delta t \geq 0$$

所以

$$i + j \geq 2$$

當  $i + j \geq 2$  時， $\frac{j - i - \sqrt{(i + j)^2 - 4}}{2} \sigma \sqrt{\Delta t} \leq \beta \leq \frac{j - i + \sqrt{(i + j)^2 - 4}}{2} \sigma \sqrt{\Delta t}$  可滿足方程式

(E.8)。

附錄表一呈現當  $i$  和  $j$  在各種值下，滿足方程式 (E.7)、(E.8) 和 (E.9) 時，各  $\beta$  範圍取交集後的範圍。若 B 點的選擇是當  $\mu$  落在兩白點間，選擇較近的白點或是較遠的白點，則  $-\sigma \sqrt{\Delta t} \leq \beta \leq \sigma \sqrt{\Delta t}$ ，將此範圍再跟附錄表一中  $\beta$  的範圍取交集後，新的  $\beta$  範圍即為附錄表二。



$\frac{\beta}{j}$	1	2	$i > 2$
1	$\beta = 0$	$-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\sigma\sqrt{\Delta t} \leq \beta \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}$	$\frac{1-i-\sqrt{(1+i)^2-4}}{2}\sigma\sqrt{\Delta t} \leq \beta \leq \frac{i-\sqrt{j^2-4}}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}$
2	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\sigma\sqrt{\Delta t} \leq \beta \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}$	$-\sqrt{3}\sigma\sqrt{\Delta t} \leq \beta \leq \sqrt{3}\sigma\sqrt{\Delta t}$	$\frac{2-i-\sqrt{(2+i)^2-4}}{2}\sigma\sqrt{\Delta t} \leq \beta \leq \frac{i-\sqrt{j^2-4}}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}$
$j > 2$	$\frac{j-1-\sqrt{(j+1)^2-4}}{2}\sigma\sqrt{\Delta t} \leq \beta \leq \frac{j-\sqrt{j^2-4}}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}$ 或 $\frac{j+\sqrt{j^2-4}}{2}\sigma\sqrt{\Delta t} \leq \beta \leq \frac{j-1+\sqrt{(j+1)^2-4}}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}$	$\frac{j-2-\sqrt{(j+2)^2-4}}{2}\sigma\sqrt{\Delta t} \leq \beta \leq \frac{j-\sqrt{j^2-4}}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}$ 或 $\frac{j+\sqrt{j^2-4}}{2}\sigma\sqrt{\Delta t} \leq \beta \leq \frac{j-2+\sqrt{(j+2)^2-4}}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}$	$i > j$ $\frac{j-i-\sqrt{(j+i)^2-4}}{2}\sigma\sqrt{\Delta t} \leq \beta \leq \frac{j-\sqrt{j^2-4}}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}$ $j \geq i$ $\frac{j-i-\sqrt{(j+i)^2-4}}{2}\sigma\sqrt{\Delta t} \leq \beta \leq \frac{i-\sqrt{j^2-4}}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}$ 或 $\frac{j+\sqrt{j^2-4}}{2}\sigma\sqrt{\Delta t} \leq \beta \leq \frac{j-i+\sqrt{(j+i)^2-4}}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}$

**附錄表一：在 A 和 C 點各種選擇組合下， $\beta$  的合法範圍。**  $i$  表示 A 點為 B 點向上跳動  $i$  個白點， $j$  表示 C 點為 B 點向下跳動  $j$  個白點，兩個白點的距離為  $\sigma\sqrt{\Delta t}$ ，而  $\beta$  表示 B 點到平均數  $\mu$  的距離。當  $i$  和  $j$  在各種值下，滿足方程式 (E.7)、(E.8) 和 (E.9) 時，各  $\beta$  範圍交集後的範圍。

$\begin{array}{c} z/i \\ \diagdown \\ j \end{array}$	1	2	$i > 2$
1	$\beta = 0$	$-\sigma\sqrt{\Delta t} \leq \beta \leq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \sigma\sqrt{\Delta t}$	$-\sigma\sqrt{\Delta t} \leq \beta \leq \frac{i - \sqrt{i^2 - 4}}{2} \sigma\sqrt{\Delta t}$
2	$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \sigma\sqrt{\Delta t} \leq \beta \leq \sigma\sqrt{\Delta t}$	$-\sigma\sqrt{\Delta t} \leq \beta \leq \sigma\sqrt{\Delta t}$	$-\sigma\sqrt{\Delta t} \leq \beta \leq \frac{i - \sqrt{i^2 - 4}}{2} \sigma\sqrt{\Delta t}$
$j > 2$	$\frac{j - 1 - \sqrt{(j+1)^2 - 4}}{2} \sigma\sqrt{\Delta t} \leq \beta \leq \frac{j - \sqrt{j^2 - 4}}{2} \sigma\sqrt{\Delta t}$	$-\sigma\sqrt{\Delta t} \leq \beta \leq \frac{j - \sqrt{j^2 - 4}}{2} \sigma\sqrt{\Delta t}$	$i > j$ $j \geq i$
			$-\sigma\sqrt{\Delta t} \leq \beta \leq \frac{j - \sqrt{j^2 - 4}}{2} \sigma\sqrt{\Delta t}$

**附錄表二：當 B 點的選擇有限制時， $\beta$  的合法範圍。**  $i$  表示 A 點為 B 點向上跳動  $i$  個白點， $j$  表示 C 點為 B 點向下跳動  $j$  個白點，兩個白點的距離為  $\sigma\sqrt{\Delta t}$ ，而  $\beta$  表示 B 點到平均數  $\mu$  的距離。若 B 點的選擇是當  $\mu$  落在兩白點間，選擇較近的白點或是較遠的白點，則  $-\sigma\sqrt{\Delta t} \leq \beta \leq \sigma\sqrt{\Delta t}$ ，將此範圍再跟附錄表一中  $\beta$  的範圍取交集後之新的  $\beta$  範圍。

附錄F 導出  $E(\Delta Y \Delta Q')$  和  $E(\Delta Y \Delta Q'^2)$

因為

$$\begin{aligned} E(\Delta Y) &= p\sqrt{\Delta t} + (1-p)(-\sqrt{\Delta t}) = \sqrt{\Delta t}(2p-1) = m_y \Delta t \\ \text{Var}(\Delta Y) &= E(\Delta Y^2) - E(\Delta Y)^2 = [p\Delta t + (1-p)\Delta t] - [\sqrt{\Delta t}(2p-1)]^2 \\ &= \Delta t - \Delta t(4p^2 - 4p + 1) = -\Delta t(4p^2 - 4p) = 4p\Delta t(1-p) \\ E(\Delta Q') &= p_u \alpha + p_m \beta + p_d \gamma = 0 \\ \text{Var}(\Delta Q') &= p_u \alpha^2 + p_m \beta^2 + p_d \gamma^2 = \sigma_q^2 \Delta t = \Delta t \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} E(\Delta Y \Delta Q') &= \text{Cov}(\Delta Y, \Delta Q') + E(\Delta Y)E(\Delta Q') = \text{Corr}(\Delta Y, \Delta Q') \sqrt{\text{Var}(\Delta Y)} \sqrt{\text{Var}(\Delta Q')} \\ &= \text{Corr}(\Delta Y, \Delta Q) \sqrt{4p\Delta t(1-p)} \sqrt{\Delta t} \\ &= \rho' \sqrt{4p\Delta t(1-p)} \sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{\Delta Y}{\sqrt{\text{Var}(\Delta Y)}} \sim N\left(\frac{m_y \Delta t}{\sqrt{\text{Var}(\Delta Y)}}, 1\right) \\ Z_2 &= \frac{\Delta Q'}{\sqrt{\text{Var}(\Delta Q')}} \sim N(0, 1) \end{aligned}$$

則

$$\begin{aligned} \text{Corr}(Z_1, Z_2) &= \text{Corr}(dQ', dY) = \text{Corr}(dQ, dY) = \rho' \\ E(Z_1 Z_2^2) &= \frac{m_y \Delta t}{\sqrt{\text{Var}(\Delta Y)}} \end{aligned}$$

故

$$E(\Delta Y \Delta Q'^2) = E(Z_1 Z_2^2) \sqrt{\text{Var}(\Delta Y)} \sqrt{\text{Var}(\Delta Q')^2} = m_y \Delta t^2$$

## 參考文獻

- [1] Yung-Chi Chu. *Option Pricing with Stochastic Volatility*. MBA thesis, NTU, 2006.
- [2] Tian-Shyr Dai and Yuh-Dauh Lyuu. The Bino-Trinomial Tree: A Simple Model for Efficient and Accurate Option Pricing. *Journal of Derivatives*, Vol. 17 (2010), 7–24.
- [3] S. Heston. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *The Review of Financial Studies*, 6, No. 2 (1993), 327–343.
- [4] J. Hilliard and A. Schwartz. Binomial Option Pricing under Stochastic Volatility and Correlated State Variables. *Journal of Derivatives*, Fall 1996, 23–39.
- [5] J. Hull and A. White. The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatility. *Journal of Finance*, 42, No. 2 (June 1987), 281–300.
- [6] H. Johnson and D. Shanno. Option Pricing when the Variance is Changing. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, No. 2 (June 1987), 143–151.
- [7] Yuh-Dauh Lyuu. *Financial Engineering and Computation*. Cambridge University, UK, 2002.
- [8] Yuh-Dauh Lyuu and Chi-Ning Wu. On Accurate and Provably Efficient GARCH Option Pricing Algorithms. *Quantitative Finance*, 5, No. 2 (April 2005), 181–198.
- [9] D. B. Nelson and K. Ramaswamy. Simple Binomial Processes as Diffusion Approximations in Financial Models. *Review of Financial Studies*, Vol. 3 (1990), 393–430.