國立臺灣大學工學院土木工程學系

碩士論文

Department of Civil Engineering
College of Engineering
National Taiwan University
Master Thesis

異向性彈性力學之複變通解初探

The preliminary study for complex-valued general solution of anisotropic elasticity

黃裕堂

Yu-Tang Huang

指導教授：洪宏基 教授

Advisor: Prof. Hong-Ki Hong

中華民國 99 年 7 月

July 2010

國立臺灣大學碩士學位論文
口試委員會審定書

異向性彈性力學之複變通解初探

The preliminary study for complex-valued general solution of anisotropic elasticity

本論文係黃裕堂君（學號 R97521245）在國立臺灣大學土木工程學系碩士班完成之碩士學位論文，於民國 99 年 7 月 13 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明。

口試委員：

洪宏基 洪宏基

（指導教授）

郭茂坤 郭茂坤

馬劍清 馬劍清

系主任、所長： 呂良正 呂良正

致謝

在研究所兩年的期間內, 跟著洪宏基老師學習如何研究學術, 真的使我獲益良多, 不論是在思考問題的深度及廣度, 都在老師的教誨下得到了許多的成長。還有劉立偉學長在我研究遇到困難時, 常常對我伸出援手, 使得我能夠突破研究上的困難。接著也相當感謝郭建呈、高哲偉及何松柏, 在苦悶的研究生活中能夠陪我度過一些歡樂的時光。最後感謝我的父母, 感謝他們能夠給予我這樣的環境與健康的身體, 使得我能專心在研究的問題上。

中文摘要

本文中, 對於二維靜態異向性彈性問題, 提出利用座標轉換的觀點, 只要取得適當的座標轉換, 使得通解能明顯的顯現出來, 並且不只一種座標轉換能使通解顯現出來, 而有三種座標轉換能使通解顯現出來, 每一種座標轉換可以得到一組共軛向量場, 因此二維異向性彈性力學統御方程式之通解, 經由此方法可得到通解型式爲三組共軛向量相加, 此結果與 Stroh 方法所求得結果相同, 此外在推導過程中可以發現, 兩個方法所需求解之二次特徵值問題相同, 但此方法受到二維問題之限制。

對於靜態異向性彈性問題, 本文又提出了另一個方法, 對於四階模數張量作兩次特徵值問題, 並且在第二次特徵值問題中會發現正交性, 利用此正交性即可挑選出適當的通解型式。此方法之優點在於不再受到維度之限制, 因此對於動態異向性彈性問題或是電磁彈異向性彈性問題, 只要將其統御方程式改寫, 即可對其改寫後的四階模數張量先進行奇異值分解, 之後再進行一次特徵值問題, 同樣可以發現正交性, 並利用其正交性即可挑選出適當的通解型式。

關鍵字: 異向性彈性力學、電磁彈異向性彈性力學、克氏分析、複變分析、四元數分析、Stroh 方法、二次特徵值問題

Abstract

For the two dimentional problem of static anisotropic elasticity, we use a viewpoint of coordinate transformation. As long as we take appropriate coordinate transformation. The general solution will be appear, and not only a coordinate transformation can let general solution appear. In generality, there exist three coordinate transformation which can let general solution appear. Each coordinae transformation get a pair conjugate vector field. Therefore, the general solution of the anisotropic elastic governing equation will be summation of three pair conjugate vector feild. And then we compare above result and Stroh formalism. It is the same. Besides, we can prove the quadratic eigenvalue problem of two method. it is the same. But the method is restricted by two dimentional problem.

For the static anisotropic elastic problem, we propose other method. We do twice eigenvalue problem for the fourth order tensor of elastic modulus. And then we can find the orthogonal property in second eigenvalue problem. According to the orthogonal property, we can choose appropriate the form of general solution. The advantage of second method is not restricted by two dimentional problem. For the problem of dynamic anisotropic elasticity or static anisotropic magneto-electro-elasticity, we only rewrite the governing equation. And then, we do singular value decomposition for new fourth order tensor. And then, we do eigenvalue decomposition again. The orthogonal property will be appear. Therefore, we can choose appropriate the form of general solution of dynamic anisotropic elasticity or static anisotropic magneto-electro-elasticity according to the orthogonal property.

Keyword:anisotropic elasticity,anisotropic magneto-electro-elasticity,clifford analysis,complex analysis,quaternion analysis,Stroh formalism,quadratic eigenvalue problem

目錄

第 1 章 導論

1.1 文獻回顧

在異向性彈性力學中, 組成律 (constitutive law) 根據異向性強弱程度, 最複雜的情況下, 會有二十一個材料常數。幾種有系統的解題方法, 往往限制應力與位移只與三維空間座標其中二維相關, 即只解二維問題。例如 Muskhelishvili [1, 2, 3]針對二維等向性彈力問題, 推導出了雙調和方程式 (biharmonic equation) , 並經過推廣可根據根據邊界條件選擇適當之 Airy 應力函數之雙調和函數 (biharmonic function) 即可求解出應力分布。Stroh[7, 8]提出可以解出二維異向性彈性之統御方程式之通解, 其中位移向量爲三對共軛複變向量場, 每個複變向量場方向處處相一致, 但其大小與函數 $f(x_1+px_2)$ 相關。特別需要注意的是, 該解題方法利用了複變分析, 不論是最複雜的異向性材料或是最簡單的等向性材料, 其解均必須利用到複變分析。Lekhntitskii[5, 6]提出滿足力平衡方程式之應力函數, 並推導出協調條件可以被分解爲六個一階微分算子。Stevenson 利用複變、應力平衡及變位諧和條件, 提出複變勢函數, 並且可運用複變勢函數直接描述位移函數。Ting[4]等人利用應力函數, 將 Stroh 方法改寫爲六維特徵值問題, 洪[18]等人利用克氏代數分析了二維彈力問題。至於三維異向性彈力問題, 目前也有許多成果, 例如 Wu[10]利用 Radon 轉換, 使得 Stroh 方法能推廣至三維異向性彈力問題。Piltner[11, 12, 13]利用複變函數描述三維彈力問題。Barber,Ting[14]提供部分異向性彈力問題之通解型式, 並且此通解型式可利用 Stroh 方法求解, 使得 Stroh 方法能夠推廣至三維問題。

1.2 研究動機與目的

根據文獻回顧可以發現, 由於廣義異向性彈性力學之統御方程式解題困難, 導致目前爲止主要之解題貢獻在於二維問題, 即將三維問題簡化至二維問題, 再以二維問題來求解。因此如何直接求解三維彈力問題, 就變成一相當具有挑戰性的問題。在文獻中很容易注意到在解二維異向性彈性問題時, 複變分析的地位不可或缺 ,並且在二維問題中, 通解之型式通常爲全純函數 (holomorphic function) 及反全純函數 (anti-holomorphic funciotn) 。此外在複變分析中全純函數既滿足 Navier-Cauchy 方程式又是調和函數, 具有相當良好之性質。故此主要目的便是如何將異向性彈性之統御方程式推導爲含有 Laplace 方程式之型式, 如此一來即可簡單利用滿足Laplace 方程式之通解, 即可得到一組全純函數 (holomorphic function) 及反全純函數 (anti-holomorphic funciotn) , 並試圖將其推廣至三維問題。一但突破在維度上之限制, 如此一來在不論是三維靜態電磁異向性彈性問題或是動態異向性彈性問題, 均能獲得突破。

第 2 章 數學基礎

在此先簡介一些在本文中所需的數學基礎, 一開始先簡單介紹標準特徵值問題 (standard eigenvalue problem) 、廣義特徵值問題 (generalized eigenvalue problem) 及二次特徵值問題 (quadratic eigenvalue problem) 。接著再簡介 Stroh 方法及其與二次特徵值問題 (quadratic eigenvalue problem) 之關係。最後簡介各種克氏代數 (Clifford algebra) 及克式分析 (Clifford analysis) 與 Laplace 算子之間的關係。

2.1 特徵分解

在二階張量中, 特徵值與特徵向量是非常重要的性質, 其爲一任意二階張量均含有其特定的特徵值與特徵向量, 並且與座標無關。也就是對於同一二階張量進行不同的座標轉換, 其特徵值不變而其特徵向量雖然分量不同, 但其方向仍然相同。並且此結果一方面也落實了張量之特質, 不同的座標描述出來的張量形式雖然不同, 但是不影響張量之本質。

首先考慮 $\sum_j A_{ij}x_j = y_i$, 倘若 x_j 與 y_i 方向相同, 彼此只相差一比例關係, 此方向即可稱作該系統的特徵方向, 因此特徵值問題可直接寫爲:

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j = \xi x_i$$

$$\sum_{j=1}^{n}(A_{ij} - \xi\delta_{ij})x_j = 0 \tag{1}$$

其中 A_{ij} 爲二階張量,x_j 爲向量, ξ 爲純量, $(i = 1, 2, ..., n)$

由於 $x_j = 0$ 爲平庸解 (trivial solution) , 所以需要的是 $x_j \neq 0$, 接著求解特徵多項式 (Characteristic polynomial) 即可得到特徵值。

$$P(\xi) = \det[A_{ij} - \xi\delta_{ij}] = 0$$

其中 $P(\xi)$ 爲特徵多項式。

求得特徵值後, 在代入(1) 式, 由於 $\det[A_{ij} - \xi\delta_{ij}] = 0$, 相應不同特徵值會得到不同之特徵向量, 當然求解特徵值與特徵向量時會有同根或特徵向量不足等的問題。但以上問題並非本文討論範疇, 故在本文就不詳加描述, 僅列下本文所需之特性。

特性 1. 實對稱矩陣其特徵值問題必存在足夠的特徵向量。

特性 2. 實對稱矩陣其特徵值必爲實數並且其特徵向量彼此之間必定正交。

以上所討論的特徵值問題, 在文獻[9]中, 被稱爲標準特徵值問題 (standard eigenvalue problem) , 爲廣義特徵值問題 (generalized eigenvalue problem) 之特例。而廣義特徵值問題描述如下。

$$\sum_{j=1}^{n}(A_{ij} - \xi B_{ij})x_j = 0$$

其中 A_{ij}, B_{ij} 爲二階張量, ξ 爲特徵值, x_j 爲特徵向量, $(i = 1, 2, .., n)$, 此外還有另一種更廣義之特徵值問題爲二次特徵值問題 (quadratic eigenvalue problem)。

$$\sum_{j=1}^{n}(A_{ij} - \xi B_{ij} - \xi^2 C_{ij})x_j = 0$$

其中 A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} 爲二階張量, ξ 爲特徵值, x_j , $(i = 1, 2, .., n)$ 爲特徵向量, 其解法與標準特徵值問題 (standard eigenvalue problem) 無異, 故在本文就不詳加描述。

2.1.1 譜分解

考慮一實數二階張量 A_{ij} $(i, j = 1, 2, ..., n)$, 而其必存在一組特徵值及一正交張量 Q_{ir} $(i, r = 1, 2, ..., n)$, 可將 A_{ij} 表達爲:

$$A_{ij} = \sum_{r,s=1}^{n} Q_{ir}\Lambda_{rs}Q_{js} \tag{2}$$

其中Λ_{rs} 爲對角方陣, 其對角線上均爲特徵值。

此外式(2), 還有另一型式的表達方法,

$$A_{ij} = \sum_{r=1}^{n} \xi_r Q_{ir}Q_{jr}$$

其中 ξ_r 爲不同之特徵值, Q_{ir} 爲二階正交張量。

2.1.2 奇異值分解

考慮一實數二階張量 A_{ij} $(i = 1,2,...,n)$ $(j = 1,2,...,n)$，而其必存在一組特徵值、一正交張量 U_{il} $(i,l = 1,2,...,m)$ 及另一正交張量 V_{jk} $(j,k = 1,2,...,n)$, 可將 A_{ij} 表達爲:

$$A_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} U_{il} S_{lk} V_{jk} \tag{3}$$

其中 S_{lk} 爲對角陣, 其對角線上均爲特徵值, 並且其特徵值均爲正實數。

同樣的, 式(3) 還有另一型式的表達方法,

$$A_{ij} = \sum_{r=1}^{p} \xi_r U_{ir} V_{jr}$$

其中 ξ_r 爲不同之特徵值, U_{ir}, V_{jr} 均爲正交張量, $p = \min[n,m]$。

2.2 Stroh 方法

結合彈性力學組成律 $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}$ 、平衡條件 $\sigma_{ij,j} + \rho b_j = 0$ 與機動諧和條件 $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ ，則可得到以位移表示之統御方程式。在等向性 (isotropic) 材料中 $C_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}$ 即爲著名之納維柯西方程式 (Navier-Cauchy equations)。此外在本文中不使用愛因斯坦求和約定 (Einstein summation convention) 的符號法則。

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} C_{ijkl}\epsilon_{kl} \rightarrow \sum_{j,k,l=1}^{3} C_{ijkl} u_{k,lj} = 0 \tag{4}$$

其中 σ_{ij} 代表應力張量 C_{ijkl} 代表彈性勁度張量 ϵ_{kl} 代表應變張量, u_k 代表位移, 逗號表示微分。

根據應力張量的對稱性與超彈性 (hyperelasticity) 的假設, 可知 C_{ijkl} 具有以下之對稱性及正定性質,

$$C_{ijkl} = C_{klij} \tag{5}$$

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \tag{6}$$

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{3} C_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} \geq 0, \tag{7}$$

其中式 (5) 表示應力張量對稱導致之對稱性 ,式 (6) 表示超彈性導致之對稱性, 並且根據熱力學可知能量恆大於等於零, 因此式 (7) 表示超彈性所需滿足之正定條件。此外, $C_{ijkl} = C_{klij}$ 也稱為主對稱, $C_{ijkl} = C_{jikl}$ 也稱為次對稱, 並且利用主、次對稱可以直接得到另一個次對稱之性質。

在文獻[4, 7, 8]中, 對於二維彈力問題, 先簡化位移場 $u_k(x_1, x_2, x_3)$ $(k = 1, 2, 3)$ 使其只與 x_1, x_2 相關, 即為 $u_k(x_1, x_2)$ $(k = 1, 2, 3)$ 。並且由於維度已縮減為二維, 所以 $j, l = 1, 2$, 因此將式 (4) 之 j, l 展開相加, 可表達為:

$$\sum_{k=1}^{3}\{C_{i1k1}\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + (C_{i1k2} + C_{i2k1})\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + C_{i2k2}\frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}\}u_k = 0 \tag{8}$$

其中 $(i = 1, 2, 3)$。

並且根據文獻[4],Stroh 提出通解之自變數 x_1, x_2 應為一線性組合關係 $(x_1 + px_2)$, 因此令 u_k 為以下型式:

$$u_k = a_k f(z), \quad (k = 1, 2, 3) \tag{9}$$

其中 $z = x_1 + px_2$, $f(z)$ 為一可解析函數 (analytic function) , a_k $(k = 1, 2, 3)$ 為純量常數。將式(9) 直接帶入式 (8), 可得

$$\sum_{k=1}^{3}\{C_{i1k1} + p(C_{i1k2} + C_{i2k1}) + p^2 C_{i2k2}\}a_k \frac{\partial^2}{\partial z^2}f(z) = 0,$$

故可知上式之解有 $a_k \frac{\partial^2}{\partial z^2}f(z) = 0$ 及 $a_k \frac{\partial^2}{\partial z^2}f(z) \neq 0$, 其中 $a_k \frac{\partial^2}{\partial z^2}f(z) = 0$ 為平庸解 (trivial solution), 此外由於 $a_k \frac{\partial^2}{\partial z^2}f(z) \neq 0$ 因此消去 $\frac{\partial^2}{\partial z^2}f(z)$ 後, 上式可變為二次特徵值問題 (quadratic eigenvalue problem)。

$$\sum_{k=1}^{3}(C_{i1k1} + p(C_{i1k2} + C_{i2k1}) + p^2 C_{i2k2})a_k = 0 \tag{10}$$

$$\sum_{j,k,l=1}^{3} C_{ijkl}(\delta_{j1} + p\delta_{j2})(\delta_{l1} + p\delta_{l2})a_k = 0 \tag{11}$$

其中 δ_{ij} 為克羅內克函數 (Kronecker delta)。

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{12}$$

由於滿足超彈性之假設, 因此式(9) 必須滿足式 (7)。

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,k=1}^{3}\sum_{j,l=1}^{2} C_{ijkl}u_{i,j}u_{k,l} \\
&=\sum_{i,k=1}^{3}\sum_{j,l=1}^{2} C_{ijkl}(\delta_{j1}+p\delta_{j2})a_i(\delta_{l1}+p\delta_{l2})a_k \geq 0
\end{aligned} \tag{13}$$

但比較式 (11) 後會發現, 若 $p \in \mathbb{R}$ 會導致能量爲零, 故 $p \in \mathbb{C}$ 。

由於 C_{ijkl} 均爲實數, 因此求解二次特徵值問題之特徵多項式 (characteristic polynomial) 必爲六次實係數多項式, 並且根據上述結果 $p \in \mathbb{C}$, 可以確定式(10) 所求出來的六個特徵值 p 及其相對應之特徵向量 a_k 均爲複數, 並且是三組共軛複數根:

$$a_k^{(\alpha)} = \bar{a}_k^{(\alpha+3)} \qquad p^{(\alpha)} = \bar{p}^{(\alpha+3)} \qquad (k=1,2,3)$$

其中 $p^{(\alpha)}$ 爲由 (10) 式所求出之不同 p , $a_k^{(\alpha)}$ 爲由 (10) 式所求出之不同 a_k。

由 $p^{(\alpha)}$ 及 $a_k^{(\alpha)}$ 其相對應的共軛關係, 倘若所有的 $p^{(\alpha)}$ 均不相同, 則通解的型式可以表達成:

$$\begin{aligned}
u_k &= \sum_{\alpha=1}^{3}\{a_k^{(\alpha)} f^{(\alpha)}(z^{(\alpha)}) + \bar{a}_k^{(\alpha)} \bar{f}^{(\alpha)}(\bar{z}^{(\alpha)})\} \\
&= 2\mathrm{Re}[\sum_{\alpha=1}^{3} a_k^{(\alpha)} f^{(\alpha)}(z^{(\alpha)})]
\end{aligned}$$

其中 Re[ ] 表示取實數部分, $z^{(\alpha)}$ 爲 $x_1 + p^{(\alpha)}x_2$, $f^{(\alpha)}(z^{(\alpha)})$ 爲相對應 $z^{(\alpha)}$ 之複變函數, $\overline{f}^{(\alpha)}(z^{(\alpha)})$ 爲相對應 $f^{(\alpha)}(z^{(\alpha)})$ 之共軛複變函數。此外 $f^{(\alpha)}(z^{(\alpha)})$ 還可表示爲 $f^{(\alpha)}(z^{(\alpha)}) = f_R^{(\alpha)}(x_1,x_2)+if_I^{(\alpha)}(x_1,x_2)$, 其中 $f_R^{(\alpha)}(x_1,x_2), f_I^{(\alpha)}(x_1,x_2)$ 爲實數函數, 並且滿足 Cauchy-Riemann 條件。

2.3 複變、四元數及克氏分析

複變分析被視作重要的解題方法, 在彈力、流體力學中, 運用複變代數的解題方法已爲相當重要之方法, 但其缺點是常常受制於二維之限制。而本文在此, 將藉由超複變分析或稱克式分析, 將試圖推廣此優點至高維, 並運用在三維異向性彈性力學之中, 以下爲各代數之簡介。

2.3.1 複變代數及複變分析

一任意複數 a 均可表達爲:

$$a = a_2 + ia_1 \in \mathbb{C}, \qquad a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

其中 a_2 爲複數之實數部分, a_1 爲複數中虛數部分, $i = \sqrt{-1}$ 爲虛數單位。任意複數 a 均有相對應的共軛 (conjugate) 複數 $\bar{a}$。

$$\overline{a} = a_2 - ia_1 \in \mathbb{C}$$

其中, 共軛具有以下之性質:

$$\bar{i} = -i$$

$$\overline{uv} = \bar{u}\bar{v} = \bar{v}\bar{u}, \quad u, v \in \mathbb{C}$$

一任意複變函數且其自變數爲 2 維實數 ($x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$) 之複數函數, 均可表達爲以下之形式, 在此 Ω 表示領域 (domain)。

$$f(x) = f_2(x) + if_1(x) \tag{14}$$

其中 $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (i = 1, 2)$; $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$

在以上的討論基礎下, 複數的微分算子 (complex differential operator) 可以表達爲以下之型式:

$$D_{\mathbb{C}} = \frac{\partial}{\partial x_2} + i\frac{\partial}{\partial x_1} \tag{15}$$

此即著名的 Cauchy-Riemann 算子, 而其共軛 (conjugate) 形式爲:

$$\overline{D}_{\mathbb{C}} = \frac{\partial}{\partial x_2} - i\frac{\partial}{\partial x_1} \tag{16}$$

且可以證明出以上算子相當於 $2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ 及 $2\frac{\partial}{\partial z}$。

根據式(15) 及式 (16), 可以表達出複數微分算子 (complex differential operator) 與 2 維 Laplace 算子 之間的關係:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} =: \triangle_2 = D_{\mathbb{C}}\overline{D}_{\mathbb{C}} = \overline{D}_{\mathbb{C}}D_{\mathbb{C}}$$

其中 $\triangle_2$ 爲 2 維 Laplace 算子。

倘若 $f(x) = f_2(x) + if_1(x)$ 滿足 $D_{\mathbb{C}}f(x) = 0$, 則 $f(x)$ 滿足著名的 Cauchy-Riemann 條件。

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$$

$f(x) = f_2(x) + if_1(x)$ 爲全純函數 (holomorphic function), 在複變分析中全純函數即爲可解析函數 (analytic function) , 此外若 $f(x)$ 滿足 $\overline{D}_{\mathbb{C}}f(x) = 0$, 則 $f(x)$ 爲反全純函數 (anti-holomorphic function)。

接著討論 $f(x)$ 滿足 2 維 Laplace 算子, 則其通解可以描述爲:

$$f(x) = f(z) + f(\overline{z})$$

其中 $z = x_1 + ix_2$, $\overline{z} = x_1 - ix_2$, $f(x)$ 爲調和函數 (harmonic function) , $f(z)$ 爲全純函數 (holomorphic function), $f(\overline{z})$ 爲反全純函數 (anti-holomorphic function)。

2.3.2 四元數代數及四元數分析

一任意四元數 a 均可表達爲:

$$a = a_4 + e_1a_1 + e_2a_2 + e_3a_3 \in \mathbb{H}, \quad a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R} \tag{17}$$

其中 $e_ke_l + e_le_k = -2\delta_{kl},\ (k, l = 1, 2, 3)$ 且 $e_1e_2 = e_3$, $e_2e_3 = e_1$, $e_3e_1 = e_2$ 。文獻上常見, e_1, e_2, e_3 記成 i, j, k , 而 a_4 記成 a_0 。任意四元數 a 均有相對應的共軛 (conjugate) 四元數 $\overline{a}$

$$\overline{a} = a_4 - e_1a_1 - e_2a_2 - e_3a_3 \in \mathbb{H} \tag{18}$$

其中, 共軛 (conjugate) 帶有以下之性質:

$$\bar{e}_k = -e_k, \quad k = 1, 2, 3$$
$$\overline{uv} = \bar{u}\bar{v}, \quad u, v \in \mathbb{H} \tag{19}$$

一任意四元數函數且其自變數爲 4 維實數 $(x \in \Omega \subset \mathbb{R}^4)$ 之, 均可表達爲以下之形式:

$$f(x) = f_4(x) + e_1f_1(x) + e_2f_2(x) + e_3f_3(x)$$

其中 $f_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ (i = 1, 2, 3, 4)$, $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{H}$。

在以上的討論基礎下, 四元數的微分算子 (quaternion differential operator) 可以表達爲以下之型式:

$$D_{\mathbb{H}} = \frac{\partial}{\partial x_4} + e_1\frac{\partial}{\partial x_1} + e_2\frac{\partial}{\partial x_2} + e_3\frac{\partial}{\partial x_3} \tag{20}$$

此算子即爲 Fueter operator, 而其共軛 (conjugate) 形式:

$$\overline{D}_{\mathbb{H}} = \frac{\partial}{\partial x_4} - e_1\frac{\partial}{\partial x_1} - e_2\frac{\partial}{\partial x_2} - e_3\frac{\partial}{\partial x_3} \tag{21}$$

根據式 (20) 及式 (21), 可以表達出四元數微分算子與 4 維 Laplace 算子 (Laplace operator) 及達朗貝爾算子 (d'Alembert operator) 之間的關係。

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} =: \triangle_4 = D_{\mathbb{H}}\overline{D}_{\mathbb{H}} = \overline{D}_{\mathbb{H}}D_{\mathbb{H}}$$

$$\Box = D_{\mathbb{H}}D_{\mathbb{H}}$$

其中 $\triangle_4$ 爲四維 Laplace 算子 , $\Box$ 爲達朗貝爾算子 (d'Alembert operator)。

倘若 $f(x) = f_4(x) + e_1f_1(x) + e_2f_2(x) + e_3f_3(x)$ 滿足 $D_{\mathbb{H}}f(x) = 0$, 則 $f(x)$ 滿足 Fueter 條件。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_4}{\partial x_4} - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_3} &= 0\\
\frac{\partial f_1}{\partial x_4} + \frac{\partial f_4}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} &= 0\\
\frac{\partial f_2}{\partial x_4} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f_4}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} &= 0\\
\frac{\partial f_3}{\partial x_4} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_4}{\partial x_3} &= 0
\end{aligned}$$

$f(x) = f_4(x) + e_1f_1(x) + e_2f_2(x) + e_3f_3(x)$ 爲四元數全純函數 ($\mathbb{H}$-holomorphic function), 此外若 $f(x)$ 滿足 $\overline{D}_{\mathbb{H}}f = 0$, 則稱 $f(x)$ 爲四元數反全純函數 ($\mathbb{H}$-antiholomorphic function), 此外由於滿足 $D_{\mathbb{H}}f(x) = 0$ 及 $\overline{D}_{\mathbb{H}}f(x) = 0$ 必滿足四維 Laplace 方程式, 因此四元數全純函數及四元數反全純函數均爲調和函數。

2.3.3 複數四元數

倘若式(17) 中 a_1, a_2, a_3 及 a_4 爲複數, 此代數系統則稱作複數四元數代數 $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, 其與三維克利夫代數(Clifford algebra) $\mathcal{C}\ell_3$ 同構 (isomorphic)。

2.3.4 純四元數及 Moisil-Teodorescu 算子

若式(17) 中 $a_4 = 0$, 即去掉其中純量的部分且自變數定義爲 ($x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$) , 則四元數則變成純四元數 (pure quaternion)。則其微分算子 (differential operator) 爲:

$$\nabla_{\mathbb{H}} = e_1\frac{\partial}{\partial x_1} + e_2\frac{\partial}{\partial x_2} + e_3\frac{\partial}{\partial x_3} \tag{22}$$

此即爲 Moisil-Teodorescu 算子 , 而其共軛 (conjugate) 型式爲:

$$\overline{\nabla}_{\mathbb{H}} = -e_1\frac{\partial}{\partial x_1} - e_2\frac{\partial}{\partial x_2} - e_3\frac{\partial}{\partial x_3} = -\nabla_{\mathbb{H}} \tag{23}$$

根據式 (22) 及式 (23), 可以表達出純四元數微分算子 (pure quaternion differential operator) 與 3 維 Laplace 算子 $\triangle_3$ 之間的關係。

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} =: \triangle_3 = \nabla_{\mathbb{H}}\overline{\nabla}_{\mathbb{H}} = \overline{\nabla}_{\mathbb{H}}\nabla_{\mathbb{H}} = -\nabla_{\mathbb{H}}\nabla_{\mathbb{H}}$$

其中 $\triangle_3$ 爲 3 維 Laplace 算子。

倘若 $f(x) = e_1f_1(x) + e_2f_2(x) + e_3f_3(x)$ 滿足 $\nabla_{\mathbb{H}}f(x) = 0$, 則 $f(x)$ 滿足 Moisil-Teodorescu 條件。

$$0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0 \tag{24}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1} + 0 - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0 \tag{25}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} + 0 - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0 \tag{26}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_3} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + 0 = 0 \tag{27}$$

$f(x) = e_1f_1(x) + e_2f_2(x) + e_3f_3(x)$ 稱爲單基因函數 (monogenic function), 由於此函數必滿足 3 維 Laplace 算子, 故又稱作調和函數。

根據文獻[15], 我們可知滿足 3 維 Laplace 算子, 其解表示爲:

$$f = f_1 + xf_2$$

其中 f_1, f_2 爲單基因函數 (monogenic function), $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$。

此外純四元數若應用於三維空間則式(24) 可被解釋散度爲零即爲 $\mathrm{div} f = 0$, 而式 (25)、式 (26) 及式 (27) 則可被解釋爲在 x_2, x_3 平面、x_1, x_3 平面及 x_1, x_2 平面上旋度爲零, 簡而言之式 (24)、式 (25)、式 (26) 及式 (27) 描述了此向量場 $f(x)$ 具有不可壓縮及不可旋轉之性質。

2.3.5 簡化四元數及 Riesz 算子

簡化四元數的集合爲四元數代數的子空間, 標記爲 $\mathbb{H}^r$, 接著定義其領域 (domain) 也縮減爲三維 ($x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$) , 則四元數則變成簡化四元數 (reduced quaternion)。在此 Ω 表示領域 (domain)。

一任意簡化四元數 a 均可表達爲:

$$a = a_3 + e_1 a_1 + e_2 a_2 \in \mathbb{H}^r, \qquad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$

其中 $e_k e_l + e_l e_k = -2\delta_{kl}, \quad (k, l = 1, 2)$。

一任意自變數爲三維實數 ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$) 之簡化四元數函數 $f(x) : \Omega \subset \mathbb{H}^r$, 均可表達爲以下之形式:

$$f(x) = f_3(x) + e_1 f_1(x) + e_2 f_2(x)$$

其中 $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ (i = 1, 2, 3)$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}^r$。

在以上的討論基礎下, 簡化四元數的微分算子 (reduced quaternion differential operator) 可以表達爲以下之型式:

$$D_{\mathbb{H}^r} = \frac{\partial}{\partial x_3} + e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \tag{28}$$

此即 Riesz 算子 , 而其共軛 (conjugate) 形式:

$$\overline{D}_{\mathbb{H}^r} = \frac{\partial}{\partial x_3} - e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \tag{29}$$

根據式(28) 及式 (29), 可以表達出簡化四元數微分算子 (reduced quaternion differential operator) 與 3 維 Laplace 算子 之間的關係。

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} =: \triangle_3 = D_{\mathbb{H}^r} \overline{D}_{\mathbb{H}^r} = \overline{D}_{\mathbb{H}^r} D_{\mathbb{H}^r}$$

其中 $\triangle_3$ 爲 3 維 Laplace 算子。

倘若 $f(x)=f_3(x)+e_1f_1(x)+e_2f_2(x)$ 滿足 $D_{\mathbb{H}^r}f(x)=0$, 則 $f(x)$ 滿足 Riesz 條件。

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_3}-\frac{\partial f_1}{\partial x_1}-\frac{\partial f_2}{\partial x_2}=0$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+0=0$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2}+0+\frac{\partial f_2}{\partial x_3}=0$$
$$0+\frac{\partial f_3}{\partial x_3}-\frac{\partial f_2}{\partial x_1}=0$$

$f(x)=f_3(x)+e_1f_1(x)+e_2f_2(x)$ 稱爲單基因方程式 (monogenic function) , 由於函數必滿足 3 維 Laplace 算子, 因此也稱爲調和函數, 但反之不然。

2.3.6 克氏代數及克式分析

考慮一 n 維歐幾里德空間 $\mathbb{R}^n$ 及其一組正交單位化之基底向量 $e_1,e_2,...,e_n$, 而基底向量之乘法規則定義爲:

$$e_ke_l+e_le_k=2\delta_{kl},\qquad k.l=1,2,...,n$$

接著定義其共軛 (conjugate) 型式:

$$\overline{uv}=\bar{u}\bar{v},\quad u,v\in\mathcal{C}\ell_n$$

$$\bar{e}_k=-e_k,\quad k=1,2,...,n \tag{30}$$

根據上述的基底向量, 可以建構出克氏代數的基底 $\{e_\alpha\}$:

$$e_\alpha=e_{\alpha_1}e_{\alpha_2}...e_{\alpha_k},\qquad \alpha_1<\alpha_2<...<\alpha_k,\quad \alpha\in 1,2,...,n$$

除此之外仍須定義純量基底 $e_\varnothing=e_0=:1$ 最後所有克利夫代數均可以上述基底 $\{e_\alpha\}$, $(\alpha=0,1,2,...,n)$ 表示之。此時再討論若係數均爲實數, 則此時克利夫代數 $\mathcal{C}\ell_n$ 稱爲實數克氏代數 $\mathcal{C}\ell_n(\mathbb{R})$ 可表達爲:

$$a=\sum_\alpha e_\alpha a_\alpha$$

其中 $a_\alpha\in\mathbb{R}$, 而 a 則爲克氏數 (Clifford number), 同樣的若係數擴大爲複數, 則爲複數克式代數 $\mathcal{C}\ell_n(\mathbb{C})$ 可同樣表達爲

$$a=\sum_\alpha e_\alpha a_\alpha$$

其中 $a_\alpha\in\mathbb{C}$。

一任意實數克氏函數, 且其自變數爲 ($x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$) , 可以表達爲:

$$f(x) = \sum_{\alpha} e_\alpha f_\alpha(x)$$

其中 $f(x)$ 爲實數克氏函數, 且 $f_\alpha(x)$ 爲實數函數。

現在考慮二維歐幾里得空間, 並令 e_1 及 e_2 爲正交基底向量, 而其乘法規則爲:

$$e_1^2 = e_2^2 = 1, \quad e_1 e_2 = -e_2 e_1$$

故二維克利夫代數之基底 $\{e_\alpha\}$ 可以構築爲:

$$\{e_\alpha\} = e_0, e_1, e_2, e_1 e_2$$

在此零級向量 (0-vector) e_0 表示純量基底即爲 1 , 一級向量 (1-vector) e_1, e_2 表示二維歐幾里得空間中一組正交基底向量, 二級向量 (2-vector) $e_1 e_2$ 表示由 e_1 及 e_2 所構築出的二爲平面空間基底雙向量 (bivector) , 之後將以 e_{12} 表示之。

至此, 一任意二維實數克氏數 (Clifford number) 均可以表達爲:

$$\begin{aligned} a &= a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_{12} \\ &= a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_{12} \end{aligned}$$

其中 $a \in \mathcal{C}\ell_2(\mathbb{R})$, 且 $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$。

根據上述的基底向量, 可以定義出一階微分算子:

$$\nabla =: \sum_{i=1}^{n} e_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

此算子稱做迪拉克算子 (Dirac operator) , 根據基底向量的乘法規則, n 維度 Laplace 算子可以表達爲:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} =: \triangle = \nabla \nabla = \nabla^2$$

其中 $\triangle$ 爲 n 維 Laplace 算子。

2.3.7 克氏代數 $\mathcal{C}\ell_{0,n-1}$ 及 $\mathcal{C}\ell_{0,n-1}$ 之克式分析

考慮一 n 維反歐幾里得空間 ((n-1)-dimensional anti-Euclidean space) $\mathbb{R}^{0,n-1}$ 及其一組正交單位化之基底向量 $e_1, e_2, ..., e_{n-1}$, 而基底向量之乘法規則爲:

$$e_k e_l + e_l e_k = -2\delta_{kl}, \quad k, l = 1, 2, ..., n-1$$

而其共軛型式可定義爲:

$$\overline{uv} = \bar{u}\bar{v}, u, v \in \mathcal{C}\ell_{0,n-1}$$

$$\bar{e}_k = -e_k, \quad k = 1, 2, ..., n-1$$

由此可以構築出一組克式代數之基底 $\{e_\alpha\}$, 如下:

$$e_\alpha = e_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k} = e_{\alpha_1} e_{\alpha_2} ... e_{\alpha_k}, \quad \alpha_1 < \alpha_2 < ...\alpha_k$$

其中 $\alpha_i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, 此外仍須在定義純量基底 $e_\varnothing = e_0 =: 1$, 指此一任意實數克氏代數 $\mathcal{C}\ell_{0,n-1}(\mathbb{R})$ 均可表達爲:

$$a = \sum_\alpha e_\alpha a_\alpha$$

其中 $a_\alpha \in \mathbb{R}$。同樣的, 一任意複數克氏代數 $\mathcal{C}\ell_{0,n-1}(\mathbb{C})$ 均可表達爲:

$$a = \sum_\alpha e_\alpha a_\alpha$$

其中 $a_\alpha \in \mathbb{C}$。

一任意實數克氏函數 $\mathcal{C}\ell_{0,n-1}(\mathbb{R})$, 且其自變數爲 $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^{0,n-1}$, 可以表達爲:

$$f(x) = \sum_\alpha e_\alpha f_\alpha(x)$$

根據上述之正交單位化基底向量及純量基底, 可以定義出一階微分算子, 可表達爲:

$$D =: \frac{\partial}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{n-1} e_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

此算子稱做 Cauchy-Riemann 算子, 至此 n 維 Laplace 算子可以以此算子表示之。

$$\triangle = D\overline{D} = \overline{D}D$$

其中 $\triangle$ 爲 n維 Laplace 算子, $\overline{D} =: \frac{\partial}{\partial x_n} - \sum_{i=1}^{n-1} e_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ 爲柯西-黎曼算子 D 之共軛。

2.3.8 克氏代數 $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ 及在 $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ 之克氏分析

考慮一 n 維反歐幾里得空間 (n-dimensional anti-Euclidean space) $\mathbb{R}^{0,n}$ 及其一組正交單位化之基底向量 $e_1, e_2, ..., e_n$, 而基底向量之乘法規則爲:

$$e_k e_l + e_l e_k = -2\delta_{kl}, \quad k, l = 1, 2, ..., n$$

而其共軛型式可定義爲:

$$\overline{uv} = \bar{u}\bar{v}, u, v \in \mathcal{C}\ell_{0,n}$$

$$\bar{e}_k = -e_k, \quad k = 1, 2, ..., n$$

由此可以構築出一組克利夫代數之基底 $\{e_\alpha\}$, 如下:

$$e_\alpha = e_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k} = e_{\alpha_1}e_{\alpha_2}...e_{\alpha_k}, \quad \alpha_1 < \alpha_2 < ...\alpha_k$$

其中 $\alpha_i \in \{1, 2, ..., n\}$, 此外仍須在定義一純量基底 $e_\varnothing = e_0 =: 1$ 。至此, 一任意實數克氏代數 $\mathcal{C}\ell_{0,n}(\mathbb{R})$ 均可表達爲:

$$a = \sum_\alpha e_\alpha a_\alpha$$

其中 $a_\alpha \in \mathbb{R}$。同樣的, 一任意複數克利夫代數 $\mathcal{C}\ell_{0,n}(\mathbb{C})$ 均可表達爲:

$$a = \sum_\alpha e_\alpha a_\alpha$$

其中 $a_\alpha \in \mathbb{C}$。

一任意實數克氏函數 $\mathcal{C}\ell_{0,n}(\mathbb{R})$, 其自變數爲 $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^{0,n}$, 可以表達爲:

$$f(x) = \sum_\alpha e_\alpha f_\alpha(x)$$

根據上述之正交單位化基底向量, 可以定義出迪拉克算子 (Dirac operator) , 可表達爲:

$$\nabla =: \sum_{i=1}^{n} e_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

至此, n 維 Laplace 算子可以迪拉克算子 (Dirac operator) 表示之:

$$\triangle = \nabla\overline{\nabla} = \overline{\nabla}\nabla = -\nabla^2$$

其中 $\triangle$ 爲維度 Laplace 算子, $\overline{\nabla} =: -\sum_{i=1}^{n} e_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ 爲迪拉克算子 ∇ 之共軛。

第 3 章 異向性材料之分析

3.1 不同觀點下的 Stroh 方法

3.1.1 由座標轉換看 Stroh 方法

在文獻[4]中, 提出了加入應力函數的解法, 並且通解之型式也與 Stroh 相同。本小節將從座標轉換的觀點, 提出另一種獲得 2 維異向性彈性問題通解的方法。

首先, 選取一非奇異矩陣 L_{ij} 進行座標轉換。

$$x_i = \sum_j L_{ij} y_j$$

$$u_k = \sum_p L_{kp} v_p$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = P_{nj} \frac{\partial}{\partial y_n}$$

根據上述, 對式(8) 進行座標轉換。

$$\sum_{i,k,p=1}^{3} \sum_{n,j,q,l=1}^{2} C_{ijkl} P_{mi} P_{nj} L_{kp} P_{ql} \frac{\partial^2}{\partial y_n \partial y_q} v_p = 0 \tag{31}$$

其中

$$\sum_{i=1}^{3} P_{mi} L_{ij} = \delta_{mj} \tag{32}$$

此時注意式(31) $n, q = 1, 1$ 及 $n, q = 2, 2$, 將 j, l 展開相加後, 可推導爲

$(n, q = 1, 1)$

$$\sum_{i,k,p=1}^{3} P_{mi} (C_{i1k1} + \frac{P_{12}}{P_{11}} (C_{i1k2} + C_{i2k1}) + (\frac{P_{12}}{P_{11}})^2 C_{i2k2}) L_{kp} \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_1} v_p \tag{33}$$

$(n, q = 2, 2)$

$$\sum_{i,k,p=1}^{3} P_{mi} (C_{i1k1} + \frac{P_{22}}{P_{21}} (C_{i1k2} + C_{i2k1}) + (\frac{P_{22}}{P_{21}})^2 C_{i2k2}) L_{kp} \frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_2} v_p \tag{34}$$

將式 (33) 及式 (34) 視作二次特徵值問題, 取其行列式值 (determinant) 爲零, 並根據式 (32) 之特性, 其推導過程如下:

$(n,q = 1,1)$

$$\sum_{i,k=1}^{3}\{\det[P_{mi}(C_{i1k1} + \frac{P_{12}}{P_{11}}(C_{i1k2} + C_{i2k1}) + (\frac{P_{12}}{P_{11}})^2 C_{i2k2})L_{kp}]\} = 0$$

$$\det[P_{mi}]\sum_{i,k=1}^{3}\{\det[(C_{i1k1} + \frac{P_{12}}{P_{11}}(C_{i1k2} + C_{i2k1}) + (\frac{P_{12}}{P_{11}})^2 C_{i2k2})]\}\det[L_{kp}] = 0$$

$$\therefore \det[(C_{i1k1} + \frac{P_{12}}{P_{11}}(C_{i1k2} + C_{i2k1}) + (\frac{P_{12}}{P_{11}})^2 C_{i2k2})] = 0 \tag{35}$$

$(n,q = 2,2)$

$$\sum_{i,k=1}^{3}\{\det[P_{mi}(C_{i1k1} + \frac{P_{22}}{P_{21}}(C_{i1k2} + C_{i2k1}) + (\frac{P_{22}}{P_{21}})^2 C_{i2k2})L_{kp}]\} = 0$$

$$\det[P_{mi}]\sum_{i,k=1}^{3}\{\det[(C_{i1k1} + \frac{P_{22}}{P_{21}}(C_{i1k2} + C_{i2k1}) + (\frac{P_{22}}{P_{21}})^2 C_{i2k2})]\}\det[L_{kp}] = 0$$

$$\therefore \det[(C_{i1k1} + \frac{P_{22}}{P_{21}}(C_{i1k2} + C_{i2k1}) + (\frac{P_{22}}{P_{21}})^2 C_{i2k2})] = 0 \tag{36}$$

此時比較式 (35)、式 (36) 與式 (10),

$$\det[(C_{i1k1} + \frac{P_{12}}{P_{11}}(C_{i1k2} + C_{i2k1}) + (\frac{P_{12}}{P_{11}})^2 C_{i2k2})] = 0$$
$$\det[(C_{i1k1} + \frac{P_{22}}{P_{21}}(C_{i1k2} + C_{i2k1}) + (\frac{P_{22}}{P_{21}})^2 C_{i2k2})] = 0$$
$$\det[C_{i1k1} + p(C_{i1k2} + C_{i2k1}) + p^2 C_{i2k2}] = 0$$

其中可注意到 $\frac{P_{12}}{P_{11}}$ 及 $\frac{P_{22}}{P_{21}}$ 相當於 p , 與因此可知依此方法所求之通解必與 Stroh 方法相同。

由於求解式(35) 及式 (36) 即爲求解六次多項式, 並且根據式 (13) 及其討論, 可知此六次多項式其根爲三組共軛複數根, 並且我們選擇 $\frac{P_{12}}{P_{11}}$ 與 $\frac{P_{22}}{P_{21}}$ 相互共軛,

$$\frac{P_{12}}{P_{11}}^{(\alpha)} = \frac{\overline{P}_{12}}{\overline{P}_{11}}^{(\alpha+3)}, \alpha = 1,2,3$$
$$\frac{P_{22}}{P_{21}}^{(\alpha)} = \frac{\overline{P}_{12}}{\overline{P}_{11}}^{(\alpha)}, \alpha = 1,2,3$$
$$\frac{P_{22}}{P_{21}}^{(\alpha)} = \frac{\overline{P}_{22}}{\overline{P}_{21}}^{(\alpha+3)}, \alpha = 1,2,3$$

則式 (33) 及式 (34) 互相共軛, 其相對應之特徵向量也相互共軛 ,並且式 (33)=0及式 (34)=0,

$$(C_{i1k1} + \frac{P_{12}}{P_{11}}(C_{i1k2} + C_{i2k1}) + (\frac{P_{12}}{P_{11}})^2 C_{i2k2})a_k = 0 \tag{37}$$

$$(C_{i1k1} + \frac{P_{22}}{P_{21}}(C_{i1k2} + C_{i2k1}) + (\frac{P_{22}}{P_{21}})^2 C_{i2k2})\overline{a}_k = 0 \tag{38}$$

其中 a_k 爲特徵向量, 此外選擇 $\frac{P_{12}}{P_{11}}$ 與 $\frac{P_{22}}{P_{21}}$ 相互共軛, 還可確保 L_{ij} 爲非奇異矩陣。至此, 選擇其中一組共軛之特徵值與特徵向量及與其共軛之特徵值與特徵向量, 可以選定一組 P_{nj} , 即選定了將座標轉至特徵方向的座標轉換矩陣。因此根據式 (35) 式 (36) 可知通解應具有特徵向量之特性, 即通解型式爲: $u_p = a_p f(y_1, y_2) + \overline{a}_p g(y_1, y_2)$, 接著代入式 (31) 中, 並利用式 (37) 與式 (38), 可得以下之結果:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,k,p=1}^{3}\sum_{j,l=1}^{2}\{(C_{ijkl}P_{mi}P_{1j}L_{kp}P_{2l} + C_{ijkl}P_{mi}P_{2j}L_{kp}P_{1l})\frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_1} + \\
&\qquad C_{ijkl}P_{mi}P_{2j}L_{kp}P_{2l}\frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_2}\}a_p f(y_1, y_2) + \\
&\sum_{i,k,p=1}^{3}\sum_{j,l=1}^{2}\{C_{ijkl}P_{mi}P_{1j}L_{kp}P_{1l}\frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_1} + (C_{ijkl}P_{mi}P_{1j}L_{kp}P_{2l} + \\
&\qquad C_{ijkl}P_{mi}P_{2j}L_{kp}P_{1l})\frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_1}\}\overline{a}_p g(y_1, y_2) = 0
\end{aligned}$$

其中可以很簡單的注意到當 $f(y_1, y_2) = f(y_1)$ 及 $g(y_1, y_2) = g(y_2)$, 上式即可滿足。此外 y_1 與 y_2 互爲共軛。

由此已經得到了其中一組通解, 再選定其他組特徵值與特徵向量, 及與其共軛之特徵值與特徵向量 ,可以得到其他組通解, 將所有的通解疊加起來, 即爲完整之通解。

$$u_p = \sum_{\alpha=1}^{3} a_p^{(\alpha)} f^{(\alpha)}(y_1^{(\alpha)}) + \overline{a}_p^{(\alpha)} g^{(\alpha)}(y_2^{(\alpha)})$$

其中 $a_p^{(\alpha)}$ 爲不同之 a_p , $f^{(\alpha)}(y_1^{(\alpha)})$ 爲不同之 $f(y_1)$, $g^{(\alpha)}(y_1^{(\alpha)})$ 爲不同之 $g(y_1)$, $\overline{(\ )}$ 爲取其共軛型式。此外 $f^{(\alpha)}(y_1^{(\alpha)})$ 與 $g^{(\alpha)}(y_1^{(\alpha)})$ 互爲共軛。

在上述的解釋之中可以發現其實一直在使用複數代數來求解此一微分方程式, 以下將利用克利夫代數來表達如何求解此一微分方程式。

3.1.2 由克氏代數 $\mathcal{C}\ell_{0,1}$ 分析 **Stroh** 方法

根據前文, 在一組正交單位化之基底向量之下, 克氏代數 $\mathcal{C}\ell_{0,1}$ 所構築之基底向量 $\{e_\alpha\}$ 爲

$$\{e_\alpha\} = \{e_0, e_1\},$$

其中 e_0 爲純量基底, e_1 爲一級向量 (1-vector)。

若將 Stroh 方法解法之代數系統換成基底爲 e_0 與 e_1 之克利夫代數 $\mathcal{C}\ell_{0,1}$, 完全與複數代數相同, 只需將虛數單位 i 改寫爲 e_1 即可將式 (10) 改寫爲,

$$\sum_{k=1}^{3}\{C_{i1k1} + (p_1 + p_2 e_1)(C_{i1k2} + C_{i2k1}) + (p_1 + p_2 e_1)^2 C_{i2k2}\} a_k f'' = 0,$$

其中 $i = 1, 2, 3$, 也同樣去求二次特徵值問題, 可以得到與特 Stroh 方法相同的通解。

3.1.3 由二維克氏代數 $\mathcal{C}\ell_{0,2}$ 分析 **Stroh** 方法

根據前述文章可知, 在一組正交單位化之基底向量之下, 二維克氏代數 $\mathcal{C}\ell_{0,2}$ 所構築之基底向量 $\{e_\alpha\}$ 爲

$$\{e_\alpha\} = \{e_0, e_1, e_2, e_{12}\},$$

其中 e_0 爲純量基底, e_1 及 e_2 爲一級向量 (1-vector) ; e_{12} 爲二級向量 (2-vector) 或稱雙向量 (bivector)。

除此之外, 倘若只選用 e_0 與 e_{12} 爲基底, 仍然爲具有封閉性之代數系統, 並且此代數系統與複數之代數系統同構 (isomorphic) 。順帶一提, 在 n 維克氏代數系統中, 最高級的基底向量, 稱爲僞純量 (pseudoscalar), 具有以下之特性,

$$e_{12}e_{12} = e_1e_2e_1e_2 = -e_1e_1e_2e_2 = -1.$$

在 2 維克利夫代數 $\mathcal{C}\ell_{0,2}$ 需要重新定義微分性質,

$$x_1 \to z = a x_1 + b x_2,$$

$$x_2 \to \hat{z} = \hat{a} x_1 + \hat{b} x_2,$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \hat{a} \\ b & \hat{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \end{bmatrix},$$

其中

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2, \qquad \hat{a} = a_1 e_1 - a_2 e_2, \qquad \begin{bmatrix} a & \hat{a} \\ b & \hat{b} \end{bmatrix} = P_{nj},$$

代入 P_{nj} 至式 (31),

$$\begin{aligned}
\sum_{i,k,p=1}^{3} P_{mi}\{ & (a^2 C_{i1k1} + ab C_{i1k2} + ba C_{i2k1} + b^2 C_{i2k2}) \frac{\partial^2}{\partial z \partial \hat{z}} + \\
& (a\hat{a} C_{i1k1} + a\hat{b} C_{i1k2} + b\hat{a} C_{i2k1} + b\hat{b} C_{i2k2}) \frac{\partial^2}{\partial \hat{z} \partial z} + \\
& (\hat{a}a C_{i1k1} + \hat{a}b C_{i1k2} + \hat{b}a C_{i2k1} + \hat{b}b C_{i2k2}) \frac{\partial^2}{\partial z \partial \hat{z}} + \\
& (\hat{a}\hat{a} C_{i1k1} + \hat{a}\hat{b} C_{i1k2} + \hat{b}\hat{a} C_{i2k1} + \hat{b}\hat{b} C_{i2k2}) \frac{\partial^2}{\partial \hat{z} \partial \hat{z}} \} L_{kp} v_p = 0, \qquad (39)
\end{aligned}$$

其中 $m = 1, 2, 3$。

其中獨立的變數其實只有一個, 是故可以先要求

$$a = 1e_1, \quad b = b_1 e_1 + b_2 e_2,$$

將上述要求代入式 (39) 中,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,k,p=1}^{3} P_{mi}\{ & (-C_{i1k1} + (-b_1 + b_2 e_{12}) C_{i1k2} + (-b_1 + b_2 e_{21}) C_{i2k1} + (-b_1^2 - b_2^2) C_{i2k2}) \frac{\partial^2}{\partial z \partial \hat{z}} + \\
& (-C_{i1k1} + (-b_1 + b_2 e_{12}) C_{i1k2} + (-b_1 - b_2 e_{21}) C_{i2k1} + (-b_1^2 + b_2^2 + (2b_1 b_2) e_{12}) C_{i2k2}) \frac{\partial^2}{\partial \hat{z} \partial z} + \\
& (-C_{i1k1} + (-b_1 - b_2 e_{12}) C_{i1k2} + (-b_1 + b_2 e_{21}) C_{i2k1} + (-b_1^2 + b_2^2 - (2b_1 b_2) e_{12}) C_{i2k2}) \frac{\partial^2}{\partial z \partial \hat{z}} + \\
& -C_{i1k1} + (-b_1 - b_2 e_{12}) C_{i1k2} + (-b_1 - b_2 e_{21}) C_{i2k1} + (-b_1^2 - b_2^2) C_{i2k2}) \frac{\partial^2}{\partial \hat{z} \partial \hat{z}} \} L_{kp} u_p = 0,
\end{aligned}$$

其中 $m = 1, 2, 3$。

觀察上式中第二項及第三項,

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,k,p} P_{mi} (-C_{i1k1} + (-b_1 + b_2 e_{12}) C_{i1k2} + (-b_1 - b_2 e_{21}) C_{i2k1} \\
& \qquad + (-b_1^2 + b_2^2 + (2b_1 b_2) e_{12}) C_{i2k2}) \frac{\partial^2}{\partial \hat{z} \partial z} L_{kp} v_p, \\
& \sum_{i,k,p} P_{mi} (-C_{i1k1} + (-b_1 - b_2 e_{12}) C_{i1k2} + (-b_1 + b_2 e_{21}) C_{i2k1} \\
& \qquad + (-b_1^2 + b_2^2 - (2b_1 b_2) e_{12}) C_{i2k2}) \frac{\partial^2}{\partial z \partial \hat{z}} L_{kp} v_p,
\end{aligned}$$

會發現上述二式也具有共軛之性質, 也可以視作在 2 維克氏代數 $\mathcal{C}\ell_{2,0}$ 下, 為一組相互共軛的二次特徵值問題, 首先比較第三項與與式 (10) 之關係,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{3} P_{mi}\{-C_{i1k1} + (-b_1 - b_2 e_{12})C_{i1k2} + (-b_1 + b_2 e_{21})C_{i2k1} \\
&\qquad + (-b_1^2 + b_2^2 - (2b_1 b_2)e_{12})C_{i2k2}\}L_{kp}v_p \\
= -&\sum_{k=1}^{3} P_{mi}\{C_{i1k1} + (b_1 + b_2 e_{12})C_{i1k2} + (b_1 + b_2 e_{12})C_{i2k1} \\
&\qquad + (b_1^2 - b_2^2 + (2b_1 b_2)e_{12})C_{i2k2}\}L_{kp}v_p \\
= -&\sum_{k=1}^{3} P_{mi}\{C_{i1k1} + p' C_{i1k2} + p' C_{i2k1} + p'^2 C_{i2k2}\}L_{kp}v_p \qquad (40)
\end{aligned}$$

其中 $i = 1, 2, 3$, $p'^2 = p'p'$, $p' = (b_1 + b_2 e_{12})$, 由於基底為 e_0, e_{12} 之代數系統與複數代數系統同構, 所以式 (10) 之 p 與式 (40) 之 p' 相同。接著比較第二項與式 (10) 之關係,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{3} P_{mi}\{-C_{i1k1} + (-b_1 + b_2 e_{12})C_{i1k2} + (-b_1 - b_2 e_{21})C_{i2k1} \\
&\qquad + (-b_1^2 + b_2^2 + (2b_1 b_2)e_{12})C_{i2k2}\}L_{kp}v_p \\
= -&\sum_{k=1}^{3} P_{mi}\{C_{i1k1} + (b_1 - b_2 e_{12})C_{i1k2} + (b_1 - b_2 e_{12})C_{i2k1} \\
&\qquad + (b_1^2 - b_2^2 - (2b_1 b_2)e_{12})C_{i2k2}\}L_{kp}v_p \\
= -&\sum_{k=1}^{3} P_{mi}\{C_{i1k1} + p'' C_{i1k2} + p' C_{i2k1} + p''^2 C_{i2k2}\}L_{kp}v_p \qquad (41)
\end{aligned}$$

其中 $i = 1, 2, 3$, $p''^2 = p''p''$, $p'' = (b_1 - b_2 e_{12})$, 由於基底為 e_0, e_{12} 之代數系統與複數代數系統同構, 所以式 (10) 之 p 與式 (41) 之 p'' 相同。

此外若將 Stroh 方法解法之代數系統換成基底為 e_0 與 e_{12} 之二維克利夫代數 $\mathcal{C}\ell_{0,2}$ 表示, 只需將虛數單位 i 改寫為 e_{12} , 即可以將式 (10) 改寫成以下之型式:

$$\{C_{i1k1} + (p_1 + p_2 e_{12})(C_{i1k2} + C_{i2k1}) + (p_1 + p_2 e_{12})^2 C_{i2k2}\}a_k f'' = 0$$

3.1.4 由二維克氏代數 $\mathcal{C}\ell_{2,0}$ 分析 Stroh 方法

根據前文, 在一組正交單位化之基底向量之下, 二維克氏代數 $\mathcal{C}\ell_{2,0}$ 所構築之基底向量 $\{e_\alpha\}$ 為

$$\{e_\alpha\} = \{e_0, e_1, e_2, e_{12}\},$$

其中 e_0 爲純量基底, e_1 與 e_2 爲一級向量 (1-vector) , e_{12} 爲二級向量 (2-vector) 或稱雙向量 (bivector)。

除此之外, 倘若只選用 e_0 及 e_{12} 爲基底, 仍然爲一具有封閉性之代數系統, 並且此代數系統與複數之代數系統同構。其中 e_{12} 稱爲僞純量 (pseudoscalar), 具有以下之特性,

$$e_{12}e_{12} = e_1e_2e_1e_2 = -e_1e_1e_2e_2 = -1$$

在二維克氏代數 $\mathcal{C}\ell_{2,0}$ 需要重新定義微分性質,

$$x_1 \to z = ax_1 + bx_2,$$

$$x_2 \to \hat{z} = \hat{a}x_1 + \hat{b}x_2,$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \hat{a} \\ b & \hat{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \end{bmatrix},$$

其中

$$a = a_1e_1 + a_2e_2, \qquad \hat{a} = a_1e_1 - a_2e_2, \qquad \begin{bmatrix} a & \hat{a} \\ b & \hat{b} \end{bmatrix} = P_{nj}.$$

代入 P_{nj} 至式 (31),

$$\begin{aligned}\sum_{i,k,p=1}^{3} P_{mi}\{(a^2C_{i1k1} + abC_{i1k2} + baC_{i2k1} + b^2C_{i2k2})\frac{\partial^2}{\partial z\partial\hat{z}} + \\ (a\hat{a}C_{i1k1} + a\hat{b}C_{i1k2} + b\hat{a}C_{i2k1} + b\hat{b}C_{i2k2})\frac{\partial^2}{\partial\hat{z}\partial z} + \\ (\hat{a}aC_{i1k1} + \hat{a}bC_{i1k2} + \hat{b}aC_{i2k1} + \hat{b}bC_{i2k2})\frac{\partial^2}{\partial z\partial\hat{z}} + \\ (\hat{a}\hat{a}C_{i1k1} + \hat{a}\hat{b}C_{i1k2} + \hat{b}\hat{a}C_{i2k1} + \hat{b}\hat{b}C_{i2k2})\frac{\partial^2}{\partial\hat{z}\partial\hat{z}}\}L_{kp}v_p = 0\end{aligned} \tag{42}$$

其中 $m = 1, 2, 3$, 獨立的變數其實只有一個, 是故可以先要求:

$$a = 1e_1, \quad b = b_1e_1 + b_2e_2$$

將上述要求代入 (42) 式中,

$$\sum_{i,k,p=1}^{3} P_{mi}\{(C_{i1k1} + (b_1 + b_2 e_{12})C_{i1k2} + (b_1 + b_2 e_{21})C_{i2k1} + (b_1^2 + b_2^2)C_{i2k2})\frac{\partial^2}{\partial z \partial \hat{z}} +$$

$$(C_{i1k1} + (b_1 + b_2 e_{12})C_{i1k2} + (b_1 - b_2 e_{21})C_{i2k1} + (b_1^2 - b_2^2 + (2b_1 b_2)e_{12})C_{i2k2})\frac{\partial^2}{\partial \hat{z} \partial z} +$$

$$(C_{i1k1} + (b_1 - b_2 e_{12})C_{i1k2} + (b_1 + b_2 e_{21})C_{i2k1} + (b_1^2 - b_2^2 - (2b_1 b_2)e_{12})C_{i2k2})\frac{\partial^2}{\partial z \partial \hat{z}} +$$

$$C_{i1k1} + (b_1 - b_2 e_{12})C_{i1k2} + (b_1 - b_2 e_{21})C_{i2k1} + (b_1^2 + b_2^2)C_{i2k2})\frac{\partial^2}{\partial \hat{z} \partial \hat{z}}\} L_{kp} v_p = 0.$$

觀察上式中

$$\sum_{i,k,p=1}^{3} P_{mi}(C_{i1k1} + (b_1 + b_2 e_{12})C_{i1k2} + (b_1 - b_2 e_{21})C_{i2k1}$$

$$+(b_1^2 - b_2^2 + (2b_1 b_2)e_{12})C_{i2k2})\frac{\partial^2}{\partial \hat{z} \partial z} L_{kp} v_p,$$

$$\sum_{i,k,p=1}^{3} P_{mi}(C_{i1k1} + (b_1 + b_2 e_{12})C_{i1k2} + (b_1 - b_2 e_{21})C_{i2k1}$$

$$+(b_1^2 - b_2^2 + (2b_1 b_2)e_{12})C_{i2k2})\frac{\partial^2}{\partial \hat{z} \partial z} L_{kp} v_p,$$

會發現上述二式也具有共軛之性質, 也可以視作在 2 維克氏代數 $\mathcal{C}\ell_{2,0}$ 下, 爲一組相互共軛的二次特徵値問題, 再者很容易可以注意到上述二式整理後與式 (10) 完全相同。

$$\sum_{i,k,p=1}^{3} P_{mi}(C_{i1k1} + (b_1 + b_2 e_{12})C_{i1k2} + (b_1 + b_2 e_{12})C_{i2k1}$$

$$+ (b_1^2 - b_2^2 + (2b_1 b_2)e_{12})C_{i2k2})L_{kp} v_p$$

$$\sum_{i,k,p=1}^{3} P_{mi}(C_{i1k1} + (b_1 - b_2 e_{12})C_{i1k2} + (b_1 - b_2 e_{12})C_{i2k1}$$

$$+ (b_1^2 - b_2^2 - (2b_1 b_2)e_{12})C_{i2k2})L_{kp} v_p$$

$$= \sum_{i,k,p=1}^{3} P_{mi}(C_{i1k1} + pC_{i1k2} + pC_{i2k1} + p^2 C_{i2k2})L_{kp} v_p \tag{43}$$

其中 $p^2 = pp$, $p = (b_1 + b_2 e_{12})$

由上述的結果, 所以 (10) 式之 p 完全與 (43) 式之 p, 完全相同。

若將 Stroh 方法之代數系統換成基底爲 e_0 與 e_{12} 之二維克氏代數 $\mathcal{C}\ell_{2,0}$ ，可以將式 (10) 改寫成以下之型式:

$$\sum_{k=1}^{3}\{C_{i1k1}+(p_1+p_2e_{12})(C_{i1k2}+C_{i2k1})+(p_1+p_2e_{12})^2C_{i2k2}\}a_kf''=0$$

其中 $i=1,2,3$。

3.2 靜態異向性線彈性材料之通解

靜態異向性彈性力學中的統御方程式在無徵體力 (body force) 的情形下, 可寫成

$$\sum_{j,k,l}C_{ijkl}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_l}u_k=0, \tag{44}$$

其中四階模數張量 C_{ijkl} 的特徵值問題定義如下

$$\sum_{j,l}C_{ijkl}w_{jl}^{[\alpha]}=\xi^{[\alpha]}w_{ik}^{[\alpha]} \tag{45}$$

其中 $\xi^{[\alpha]}$ 爲第 α 個特徵值, $w_{ik}^{[\alpha]}$ 爲相對應之特徵二階張量, 當借用矩陣 (二階張量) 特徵值問題求解式 (45), 會發現因 C_{ijkl} 具有對稱性 $C_{ijkl}=C_{klij}$, 故 $\xi^{[\alpha]}$ 必爲實數, $w_{ik}^{[\alpha]}$ 爲正交單位化 (orthonormal) 之基底, 即

$$\sum_{i,k}w_{ik}^{[\alpha]}w_{ik}^{[\beta]}=\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}1 & 若\ \ \alpha=\beta\\ 0 & 若\ \ \alpha\neq\beta\end{cases}$$

而將 C_{ijkl} 改寫爲譜分解 (spectral decomposition) 之型式, 並代入式 (44), 可得

$$\sum_{\alpha,j,k,l}\xi^{[\alpha]}w_{ik}^{[\alpha]}w_{jl}^{[\alpha]}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_l}u_k=0$$

此外, 此處還須注意二次型 (quadratic form) 的特性。

$$\because\ \ w_{jl}^{[\alpha]}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_l}=w_{lj}^{[\alpha]}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_l}$$
$$\therefore\ \ (w_{jl}^{[\alpha]}-w_{lj}^{[\alpha]})\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_l}=0$$

根據以上之特性, 可以發現在二次型中, 反對稱部分會自動相消, 即

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j,l} w_{jl}^{[\alpha]} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \\
=&\sum_{j,l} \{\frac{1}{2}(w_{jl}^{[\alpha]} + w_{lj}^{[\alpha]}) + \frac{1}{2}(w_{jl}^{[\alpha]} - w_{lj}^{[\alpha]})\} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \\
=&\sum_{j,l} \frac{1}{2}(w_{jl}^{[\alpha]} + w_{lj}^{[\alpha]}) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \\
=&\sum_{j,l} \widetilde{w}_{jl}^{[\alpha]} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l},
\end{aligned}
$$

其中 $\widetilde{w}_{jl}^{[\alpha]} = \frac{1}{2}(w_{jl}^{[\alpha]} + w_{lj}^{[\alpha]})$。

可以再利用 C_{ijkl} 之主對稱性, 可以注意到 $w_{ik}^{[\alpha]}$ 只留下其對稱部分,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j,k,l} C_{ijkl} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} u_k \\
=&\sum_{j,k,l} \frac{1}{2}(C_{ijkl} + C_{klij}) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} u_k \\
=&\frac{1}{2} \sum_{\alpha,j,k,l} \xi^{[\alpha]} \frac{\partial}{\partial x_j} w_{jl}^{[\alpha]} \frac{\partial}{\partial x_l} w_{ik}^{[\alpha]} u_k + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,j,k,l} \xi^{[\alpha]} \frac{\partial}{\partial x_j} w_{lj}^{[\alpha]} \frac{\partial}{\partial x_l} w_{ki}^{[\alpha]} u_k \\
=&\sum_{\alpha,j,k,l} \xi^{[\alpha]} \frac{\partial}{\partial x_j} \widetilde{w}_{jl}^{[\alpha]} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{1}{2}(w_{ik}^{[\alpha]} + w_{ki}^{[\alpha]}) u_k \\
=&\sum_{\alpha,j,k,l} \xi^{[\alpha]} \frac{\partial}{\partial x_j} \widetilde{w}_{jl}^{[\alpha]} \frac{\partial}{\partial x_l} \widetilde{w}_{ik}^{[\alpha]} u_k,
\end{aligned}
$$

其中 $\widetilde{w}_{ik}^{[\alpha]} = \frac{1}{2}(w_{ik}^{[\alpha]} + w_{ki}^{[\alpha]})$。

根據上述的結果, 再次對 $\widetilde{w}_{jl}^{[\alpha]}$ 進行第二次特徵值問題,

$$
\widetilde{w}_{jl}^{[\alpha]} = \sum_r Q_{jr}^{[\alpha]} D_r^{[\alpha]} Q_{lr}^{[\alpha]},
$$

其中 $D_r^{[\alpha]}$ 爲第 α 個特徵值且均爲實數, $Q_{jr}^{[\alpha]}$ 爲相對應的正交矩陣。

由於 $Q_{jr}^{[\alpha]}$ 是由不同 $\widetilde{w}_{jl}^{[\alpha]}$ 分解出來, 當 α 不同時, $Q_{jr}^{[\alpha]}$ 分別處於在不同特徵張量上, 又不同的特徵張量彼此互相獨立, 是故

$$
\sum_r Q_{rj}^{[\alpha]} Q_{rl}^{[\beta]} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{jl},
$$

根據上述的結果, 我們發現材料體內部除了有關超彈性之對稱性所展開的第一層正交性, 又再發現了根據特徵張量之正交性所展開的第二層正交性, 根據兩層正交性可推導出另一正交性質,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j} \widetilde{w}_{ij}^{[\alpha]} \widetilde{w}_{jk}^{[\beta]} \\
&= \sum_{m,j,r} Q_{im}^{[\alpha]} D_{m}^{[\alpha]} Q_{jm}^{[\alpha]} Q_{jr}^{[\beta]} D_{r}^{[\beta]} Q_{kr}^{[\beta]} \\
&= \sum_{m,j,r} Q_{im}^{[\alpha]} D_{m}^{[\alpha]} \delta_{\alpha\beta} \delta_{rm} D_{r}^{[\beta]} Q_{kr}^{[\beta]} \\
&= \begin{cases} \sum\limits_{m} Q_{im}^{[\beta]} D_{m}^{[\beta]} D_{m}^{[\beta]} Q_{km}^{[\beta]} & \text{若} \;\; \alpha = \beta \\ 0 & \text{若} \;\; \alpha \neq \beta \end{cases},
\end{aligned} \tag{46}
$$

此外實對稱矩陣特徵值問題不只能夠展現出正交的性質, 還能夠進行開根號的動作,

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{w}_{jl}^{[\alpha]} \\
&= \sum_{r} Q_{jr}^{[\alpha]} D_{r}^{[\alpha]} Q_{lr}^{[\alpha]} \\
&= \sum_{r} Q_{jr}^{[\alpha]} \sqrt{D}_{r}^{[\alpha]} \sqrt{D}_{r}^{[\alpha]} Q_{lr}^{[\alpha]} \\
&= \sum_{r} \sqrt{\widetilde{w}}_{jr}^{[\alpha]} \sqrt{\widetilde{w}}_{lr}^{[\alpha]},
\end{aligned} \tag{47}
$$

其中 $\sum\limits_{r} \sqrt{D}_{r}^{[\alpha]} \sqrt{D}_{r}^{[\alpha]} = D_{r}^{[\alpha]}$, $\sqrt{\widetilde{w}}_{jr}^{[\alpha]} = \sum\limits_{r} Q_{jr}^{[\alpha]} \sqrt{D}_{r}^{[\alpha]}$。

至此, 可以注意到若通解具有以下之型式, 則可以充分利用對稱性的性質求得通解,

$$
u_k = \sum_{m} \widetilde{w}_{km}^{[\beta]} u_{m}^{[\beta]}
$$

代入式 (44), 且利用式 (46) 及式 (47) 之性質,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j,k,l,m} C_{ijkl} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \widetilde{w}_{km}^{[\beta]} u_m^{[\beta]} \\
=& \sum_{\alpha,j,k,l,m} \xi^{[\alpha]} \frac{\partial}{\partial x_j} \widetilde{w}_{jl}^{[\alpha]} \frac{\partial}{\partial x_l} \widetilde{w}_{ik}^{[\alpha]} \widetilde{w}_{km}^{[\beta]} u_m^{[\beta]} \\
=& \sum_{\alpha,j,l,m,r} \xi^{[\alpha]} \frac{\partial}{\partial x_j} \widetilde{w}_{jl}^{[\alpha]} \frac{\partial}{\partial x_l} Q_{ir}^{[\beta]} D_r^{[\beta]} D_r^{[\beta]} Q_{mr}^{[\beta]} \delta_{\alpha\beta} u_m^{[\beta]} \\
=& \sum_{j,l,m,r} \xi^{[\beta]} \frac{\partial}{\partial x_j} \widetilde{w}_{jl}^{[\beta]} \frac{\partial}{\partial x_l} Q_{ir}^{[\beta]} D_r^{[\beta]} D_r^{[\beta]} Q_{mr}^{[\beta]} u_m^{[\beta]} \\
=& \sum_{j,l,m,r,p} \xi^{[\beta]} \frac{\partial}{\partial x_j} \sqrt{\widetilde{w}}_{jp}^{[\beta]} \sqrt{\widetilde{w}}_{lp}^{[\beta]} \frac{\partial}{\partial x_l} Q_{ir}^{[\beta]} D_r^{[\beta]} D_r^{[\beta]} Q_{mr}^{[\beta]} u_m^{[\beta]} \\
=& \sum_{j,m,r} \xi^{[\beta]} \frac{\partial}{\partial y_j^{[\beta]}} \frac{\partial}{\partial y_j^{[\beta]}} Q_{ir}^{[\beta]} D_r^{[\beta]} D_r^{[\beta]} Q_{mr}^{[\beta]} u_m^{[\beta]} \\
=& \sum_{m,r} \xi^{[\beta]} \triangle^{[\beta]} Q_{ir}^{[\beta]} D_r^{[\beta]} D_r^{[\beta]} Q_{mr}^{[\beta]} u_m^{[\beta]} \\
=& 0,
\end{aligned}
$$

其中 $\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \sqrt{\widetilde{w}}_{jp}^{[\alpha]} = \frac{\partial}{\partial y_j^{[\alpha]}}$, $\triangle^{[\beta]}$ 爲第 β 個 Laplace 算子。

由於 $\triangle^{[\beta]} u_i^{[\beta]} = 0$, 可以根據前文所述之複數代數及純四元數代數, 列出符合 Laplace 算子之通解, 並將所有滿足該型式之通解相加, 即爲通解。以下列舉二維等向性材料及三維等向性材料爲例。

3.2.1 二維等向性線彈性通解

根據式(45), 首先要對 C_{ijkl} 進行第一次特徵值問題,

$$
\sum_{j,l=1}^{2} C_{ijkl} w_{jl}^{[\alpha]} = \xi^{[\alpha]} w_{ik}^{[\alpha]},
$$

將上式代入等向性材料的材料係數, 可得

$$
\begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \mu & 0 & 0 \\ \mu & \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & \mu & \lambda \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} w_{11}^{[\alpha]} \\ w_{22}^{[\alpha]} \\ w_{12}^{[\alpha]} \\ w_{21}^{[\alpha]} \end{bmatrix}
= \xi^{[\alpha]}
\begin{bmatrix} w_{11}^{[\alpha]} \\ w_{22}^{[\alpha]} \\ w_{12}^{[\alpha]} \\ w_{21}^{[\alpha]} \end{bmatrix},
$$

根據上式可求得 $\xi^{[\alpha]}$ 及相對應的 $w_{ik}^{[\alpha]}$。

$$\xi^{[1]} = \lambda + \mu \qquad w_{ik}^{[1]} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xi^{[2]} = \lambda + \mu \qquad w_{ik}^{[2]} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\xi^{[3]} = \lambda + 3\mu \qquad w_{ik}^{[3]} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\xi^{[4]} = \lambda - \mu \qquad w_{ik}^{[4]} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

將上述之特徵值問題以譜分解 (spectral decomposition) 表示並代入式 (44),

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha=1}^{4} \xi^{[\alpha]} (\frac{\partial}{\partial x_j} w_{jl}^{[\alpha]} \frac{\partial}{\partial x_l}) w_{ik}^{[\alpha]} u_k \\
=&(\lambda+\mu)\left\{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \\
&(\lambda+\mu)\left\{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \\
&(\lambda+3\mu)\left\{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \\
&(\lambda-\mu)\left\{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

根據上式, 可以發現 $w_{ik}^{[4]}$ 為反對稱矩陣, 因此根據二次型之特性,

$$\sum_{i,k=1}^{2} w_{ik}^{[4]} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} = 0$$

根據式 (47) 再進行第二次特徵値問題, 其中 $\alpha = 4$ 由於二次型之特性, 故爲零。

$(\alpha = 1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$(\alpha = 2)$

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(\alpha = 3)$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(\alpha = 4)$

(none)

利用矩陣開根號之性質可將各個 $\frac{\partial}{\partial X_j} w_{jl}^{[\alpha]} \frac{\partial}{\partial X_l}$ 轉變為相對應的 Laplace 算子。

$(\alpha=1)$

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt[4]{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt[4]{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}}\frac{i}{\sqrt[4]{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{i}{\sqrt[4]{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}}\frac{i}{\sqrt[4]{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{i}{\sqrt[4]{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1^{[1]}} & \frac{\partial}{\partial y_2^{[1]}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1^{[1]}} \\ \frac{\partial}{\partial y_2^{[1]}} \end{bmatrix} \\
&= \triangle^{[1]}
\end{aligned}$$

$(\alpha=2)$

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt[4]{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt[4]{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & \frac{\partial}{\partial X_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt[4]{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt[4]{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1^{[2]}} & \frac{\partial}{\partial y_2^{[2]}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1^{[2]}} \\ \frac{\partial}{\partial y_2^{[2]}} \end{bmatrix} \\
&= \triangle^{[2]}
\end{aligned}$$

$(\alpha=3)$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt[4]{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt[4]{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt[4]{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt[4]{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1^{[3]}} & \frac{\partial}{\partial y_2^{[3]}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1^{[3]}} \\ \frac{\partial}{\partial y_2^{[3]}} \end{bmatrix}$$

$$=\triangle^{[3]}$$

$(\alpha=4)$

(none)

並根據前文複變分析, 可知滿足上述 $\triangle^{[\alpha]} f_p^{[\alpha]} = 0$, $(\alpha = 1, 2, 3)$ 之 Laplace 方程式之 $f_p^{[\alpha]}$ 爲

$(\alpha=1)$

$$f_p^{[1]} = \begin{bmatrix} F_1^{[1]}(\sqrt[4]{2} i x_2) + F_2^{[1]}(-\sqrt[4]{2} i x_1) \\ G_1^{[1]}(\sqrt[4]{2} i x_2) + G_2^{[1]}(-\sqrt[4]{2} i x_1) \end{bmatrix}$$

$(\alpha=2)$

$$f_p^{[2]} = \begin{bmatrix} F_1^{[2]}(\frac{i}{\sqrt[4]{2}} x_1 + \frac{i}{\sqrt[4]{2}} x_2) + F_2^{[2]}(\frac{i}{\sqrt[4]{2}} x_1 - \frac{i}{\sqrt[4]{2}} x_2) \\ G_1^{[2]}(\frac{i}{\sqrt[4]{2}} x_1 + \frac{i}{\sqrt[4]{2}} x_2) + G_2^{[2]}(\frac{i}{\sqrt[4]{2}} x_1 - \frac{i}{\sqrt[4]{2}} x_2) \end{bmatrix}$$

$(\alpha=3)$

$$f_p^{[3]} = \begin{bmatrix} F_1^{[3]}(\frac{1}{\sqrt[4]{2}} x_1 + \frac{i}{\sqrt[4]{2}} x_2) + F_2^{[3]}(\frac{1}{\sqrt[4]{2}} x_1 - \frac{i}{\sqrt[4]{2}} x_2) \\ G_1^{[3]}(\frac{1}{\sqrt[4]{2}} x_1 + \frac{i}{\sqrt[4]{2}} x_2) + G_2^{[3]}(\frac{1}{\sqrt[4]{2}} x_1 - \frac{i}{\sqrt[4]{2}} x_2) \end{bmatrix}$$

$(\alpha=4)$

none

其中 $F_1^{[\alpha]}$,$F_2^{[\alpha]}$,$G_1^{[\alpha]}$ 及$G_2^{[\alpha]}$ 均滿足 $\triangle^{[\alpha]} f_p^{[\alpha]} = 0$, $(\alpha = 1, 2, 3)$。

由於通解型式爲 $u_k = \sum\limits_{\beta,m} w_{km}^{[\beta]} u_m^{[\beta]}$ 並且根據上述之計算結果, 可知:

$$
\begin{aligned}
u_q^{[\beta]} &= \sum_\beta \begin{bmatrix} \widetilde{w}_{11}^{[\beta]} & \widetilde{w}_{12}^{[\beta]} \\ \widetilde{w}_{21}^{[\beta]} & \widetilde{w}_{22}^{[\beta]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^{[\beta]}(y_1^{[\beta]}) + F_2^{[\beta]}(y_2^{[\beta]}) \\ G_1^{[\beta]}(y_1^{[\beta]}) + G_2^{[\beta]}(y_2^{[\beta]}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^{[1]}(\sqrt[4]{2} i x_2) + F_2^{[1]}(-\sqrt[4]{2} i x_1) \\ G_1^{[1]}(\sqrt[4]{2} i x_2) + G_2^{[1]}(-\sqrt[4]{2} i x_1) \end{bmatrix} + \\
&\quad \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^{[2]}(\frac{i}{\sqrt[4]{2}} x_1 + \frac{i}{\sqrt[4]{2}} x_2) + F_2^{[2]}(\frac{i}{\sqrt[4]{2}} x_1 - \frac{i}{\sqrt[4]{2}} x_2) \\ G_1^{[2]}(\frac{i}{\sqrt[4]{2}} x_1 + \frac{i}{\sqrt[4]{2}} x_2) + G_2^{[2]}(\frac{i}{\sqrt[4]{2}} x_1 - \frac{i}{\sqrt[4]{2}} x_2) \end{bmatrix} + \\
&\quad \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^{[3]}(\frac{1}{\sqrt[4]{2}} x_1 + \frac{i}{\sqrt[4]{2}} x_2) + F_2^{[3]}(\frac{1}{\sqrt[4]{2}} x_1 - \frac{i}{\sqrt[4]{2}} x_2) \\ G_1^{[3]}(\frac{1}{\sqrt[4]{2}} x_1 + \frac{i}{\sqrt[4]{2}} x_2) + G_2^{[3]}(\frac{1}{\sqrt[4]{2}} x_1 - \frac{i}{\sqrt[4]{2}} x_2) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

3.2.2 三維等向性線彈性通解

根據式(45) 可知, 首先要對 C_{ijkl} 進行第一層特徵値問題。

$$\sum_{j,l=1}^{3} C_{ijkl} w_{jl}^{[\alpha]} = \xi^{[\alpha]} w_{ik}^{[\alpha]}$$

將上式代入等向性材料的材料係數。

$$
\begin{bmatrix}
\lambda+2\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mu & \lambda+2\mu & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mu & \mu & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & \lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & \lambda
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} w_{11}^{[\alpha]} \\ w_{22}^{[\alpha]} \\ w_{33}^{[\alpha]} \\ w_{12}^{[\alpha]} \\ w_{21}^{[\alpha]} \\ w_{23}^{[\alpha]} \\ w_{32}^{[\alpha]} \\ w_{13}^{[\alpha]} \\ w_{31}^{[\alpha]} \end{bmatrix}
= \xi^{[\alpha]}
\begin{bmatrix} w_{11}^{[\alpha]} \\ w_{22}^{[\alpha]} \\ w_{33}^{[\alpha]} \\ w_{12}^{[\alpha]} \\ w_{21}^{[\alpha]} \\ w_{23}^{[\alpha]} \\ w_{32}^{[\alpha]} \\ w_{13}^{[\alpha]} \\ w_{31}^{[\alpha]} \end{bmatrix}
$$

根據上式可求得 $\xi^{[\alpha]}$ 及相對應的 $w_{ik}^{[\alpha]}$。

$$\xi^{[1]} = \lambda + \mu \qquad w_{ik}^{[1]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xi^{[2]} = \lambda + \mu \qquad w_{ik}^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xi^{[3]} = \lambda + \mu \qquad w_{ik}^{[3]} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xi^{[4]} = \lambda + \mu \qquad w_{ik}^{[4]} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\xi^{[5]} = \lambda + \mu \qquad w_{ik}^{[5]} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xi^{[6]} = \lambda + 4\mu \qquad w_{ik}^{[6]} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\xi^{[7]} = \lambda - \mu \qquad w_{ik}^{[7]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xi^{[8]} = \lambda - \mu \qquad\qquad w_{ik}^{[8]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xi^{[9]} = \lambda - \mu \qquad\qquad w_{ik}^{[9]} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

將上述知特徵值問題表達爲譜分解 (spectral decomposition) , 並代入式 (44),

$$\sum_{\alpha=1}^{9} \xi^{[\alpha]} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} w_{jl}^{[\alpha]} \frac{\partial}{\partial x_l}\right) w_{ik}^{[\alpha]} u_k = 0$$

$$(\lambda+\mu)\left\{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}\right\} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} +$$

$$(\lambda+\mu)\left\{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}\right\} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} +$$

$$(\lambda+\mu)\left\{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} \\ \frac{\partial}{\partial X_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}\right\} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} +$$

$$(\lambda+\mu)\left\{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}\right\} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} +$$

$$(\lambda+\mu)\left\{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}\right\} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} +$$

$$(\lambda+4\mu)\left\{\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_3}\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}+$$

$$(\lambda-\mu)\left\{\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_3}\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}+$$

$$(\lambda-\mu)\left\{\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_3}\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}+$$

$$(\lambda-\mu)\left\{\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_3}\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

根據上式可以發現 $w_{jl}^{[7]}, w_{jl}^{[8]}, w_{jl}^{[9]}$ 爲反對稱矩陣, 因此根據二次型之特性。

$$w_{jl}^{[7]}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_3}\end{bmatrix}=0$$

$$w_{jl}^{[8]}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_3}\end{bmatrix}=0$$

$$w_{jl}^{[9]}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_3}\end{bmatrix}=0$$

根據前文再進行第二次特徵值問題, 其中 $\alpha = 7, 8, 9$ 由於二次型之特性, 均爲零。

$(\alpha = 1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$(\alpha = 2)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(\alpha = 3)$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(\alpha = 4)$

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(\alpha = 5)$

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(\alpha = 6)$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(\alpha = 7)$

none

$(\alpha = 8)$

none

$(\alpha = 9)$

none

此時發現有特徵值爲零的現象, 這是由於各自獨立的對稱面並爲三維空間而崩塌至二維空間, 因此才會出現特徵值爲零的現象, 因此需要先將已崩塌的第三維刪掉。

$(\alpha = 1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$(\alpha = 2)$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$(\alpha = 3)$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$(\alpha = 4)$

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(\alpha = 5)$

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(\alpha = 6)$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(\alpha = 7)$

none

$(\alpha = 8)$

none

$(\alpha = 9)$

none

利用矩陣開根號之性質, 可將各個 $\frac{\partial}{\partial x_j} w_{jl}^{[\alpha]} \frac{\partial}{\partial x_l}$ 轉變爲相對應的 Laplace 算子。

$(\alpha = 1)$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt[4]{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt[4]{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1^{[1]}} \\ \frac{\partial}{\partial y_3^{[1]}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1^{[1]}} \\ \frac{\partial}{\partial y_3^{[1]}} \end{bmatrix} = \triangle^{[1]}$$

$(\alpha = 2)$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt[4]{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt[4]{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_2^{[2]}} \\ \frac{\partial}{\partial y_3^{[2]}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_2^{[2]}} \\ \frac{\partial}{\partial y_3^{[2]}} \end{bmatrix} = \triangle^{[2]}$$

$(\alpha = 3)$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt[4]{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt[4]{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1^{[3]}} \\ \frac{\partial}{\partial y_2^{[3]}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1^{[3]}} \\ \frac{\partial}{\partial y_2^{[3]}} \end{bmatrix} = \triangle^{[3]}$$

$(\alpha = 4)$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt[4]{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt[4]{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1^{[4]}} \\ \frac{\partial}{\partial y_3^{[4]}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1^{[4]}} \\ \frac{\partial}{\partial y_3^{[4]}} \end{bmatrix} = \triangle^{[4]}$$

$(\alpha = 5)$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt[4]{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt[4]{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1^{[5]}} \\ \frac{\partial}{\partial y_2^{[5]}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1^{[5]}} \\ \frac{\partial}{\partial y_2^{[5]}} \end{bmatrix} = \triangle^{[5]}$$

$(\alpha = 6)$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt[4]{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt[4]{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt[4]{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt[4]{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1^{[6]}} \\ \frac{\partial}{\partial y_2^{[6]}} \\ \frac{\partial}{\partial y_3^{[6]}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1^{[6]}} \\ \frac{\partial}{\partial y_2^{[6]}} \\ \frac{\partial}{\partial y_3^{[6]}} \end{bmatrix}$$

$$= \triangle^{[6]}$$

$(\alpha = 7)$

none

$(\alpha = 8)$

none

$(\alpha = 9)$

none

根據上述 Laplce 算子, 利用複變及純四元數可得通解爲:

$$\begin{aligned} u_k =& \widetilde{w}_{km}^{[\beta]} u_m^{[\beta]} \\ =& \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^{[1]}(\sqrt[4]{2} i x_3) + F_2^{[1]}(-\sqrt[4]{2} i x_1) \\ 0 \\ H_1^{[1]}(\sqrt[4]{2} i x_3) + H_2^{[1]}(-\sqrt[4]{2} i x_1) \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ G_1^{[2]}(\sqrt[4]{2} i x_3) + G_2^{[2]}(-\sqrt[4]{2} i x_2) \\ H_1^{[2]}(\sqrt[4]{2} i x_3) + H_2^{[2]}(-\sqrt[4]{2} i x_2) \end{bmatrix} + \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^{[3]}(\sqrt[4]{2}ix_2) + F_2^{[3]}(-\sqrt[4]{2}ix_1) \\ G_1^{[3]}(\sqrt[4]{2}ix_2) + G_2^{[3]}(-\sqrt[4]{2}ix_1) \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^{[4]}(\frac{i}{\sqrt[4]{2}}x_1 + \frac{i}{\sqrt[4]{2}}x_3) + F_2^{[4]}(\frac{i}{\sqrt[4]{2}}x_1 - \frac{i}{\sqrt[4]{2}}x_3) \\ 0 \\ H_1^{[4]}(\frac{i}{\sqrt[4]{2}}x_1 + \frac{i}{\sqrt[4]{2}}x_3) + H_2^{[4]}(\frac{i}{\sqrt[4]{2}}x_1 - \frac{i}{\sqrt[4]{2}}x_3) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^{[5]}(\frac{i}{\sqrt[4]{2}}x_1 + \frac{i}{\sqrt[4]{2}}x_2) + F_2^{[5]}(\frac{i}{\sqrt[4]{2}}x_1 - \frac{i}{\sqrt[4]{2}}x_2) \\ G_1^{[5]}(\frac{i}{\sqrt[4]{2}}x_1 + \frac{i}{\sqrt[4]{2}}x_2) + G_2^{[5]}(\frac{i}{\sqrt[4]{2}}x_1 - \frac{i}{\sqrt[4]{2}}x_2) \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^{[6]}(Z) + ZF_2^{[6]}(Z) \\ G_1^{[6]}(Z) + ZG_2^{[6]}(Z) \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中 $Z = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, $F_1^{[1]}, F_2^{[1]}, H_1^{[1]}, H_2^{[1]}$ 滿足 $\triangle^{[1]}u_m^{[1]} = 0$, $G_1^{[2]}, G_2^{[2]}, H_1^{[2]}, H_2^{[2]}$ 滿足 $\triangle^{[2]}u_m^{[2]} = 0$, $F_1^{[3]}, F_2^{[3]}, G_1^{[3]}, G_2^{[3]}$ 滿足 $\triangle^{[3]}u_m^{[3]} = 0$, $F_1^{[4]}, F_2^{[4]}, H_1^{[4]}, H_2^{[4]}$ 滿足 $\triangle^{[4]}u_m^{[4]} = 0$, $F_1^{[5]}, F_2^{[5]}, G_1^{[5]}, G_2^{[5]}$ 滿足 $\triangle^{[5]}u_m^{[5]} = 0$, $F_1^{[6]}(Z) + ZF_2^{[6]}(Z), G_1^{[6]}(Z) + ZG_2^{[6]}(Z)$ 滿足 $\triangle^{[6]}u_m^{[6]} = 0$ 。

3.3 動態異向性線彈性材料之通解

動態異向性彈性力學中的統御方程式在無徵體力 (body force) 有慣性力的情形下,可寫爲

$$\sum_{j,k,l} C_{ijkl}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l}u_k = m\ddot{u}_i \tag{48}$$

並可進一步將統御方程式改寫爲

$$\begin{aligned} &\sum_{j,k,l}\{C_{ijkl}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} - m\delta_{ik}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\}u_k = 0 \\ &\sum_{j,k,l}\{C_{ijkl}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} - C_{i(n+1)k(n+1)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\}u_k = 0 \\ &\sum_{j',k,l'}\{F_{ij'kl'}\frac{\partial^2}{\partial x'_{j'}\partial x'_{l'}}\}u_k = 0 \end{aligned}$$

其中 i,j,k,l 表示正常維度的標記 (index) , j',l' 表示維度被擴充之後之標記 (index) , $x'_{j'}$ 爲 x_1,x_2,x_3,t。

$$F_{ij'kl'} = \begin{cases} C_{ijkl} & \text{若 } i,j,k,l,j',l' = 1,2,3 \\ -m\delta_{ik} & \text{若 } i,k = 1,2,3 \text{ 且 } j',l' = 4 \\ 0 & \text{其他情形} \end{cases}$$

根據上述結果及超彈性之性質, 可知 $F_{ij'kl'}$ 具有對稱性 $F_{ij'kl'} = F_{kl'ij'}$ 由於選擇將 ik 及 $j'l'$ 定爲一組進行分解, 但根據上述之結果, 會發現指標 (index) ik 及 $j'l'$ 之數量不相同, 於是將 $F_{ij'kl'}$ 之奇異值分解 (singlar value decomposition) 定義如下,

$$\sum_{ik} F_{ij'kl'} V_{ik}^{[\alpha]} = U_{j'l'}^{[\alpha]} S^{[\alpha]}$$

其中 $S^{[\alpha]}$ 爲第 α 個特徵值, $U_{j'l'}^{[\alpha]}, V_{ik}^{[\alpha]}$ 均爲相對應的左特徵張量與右特徵張量, 並且根據奇異值分解 (singlar value decomposition) 之性質可知 $U_{j'l'}^{[\alpha]}, V_{ik}^{[\alpha]}$ 均爲正交單位化 (orthogonal)。

$$\sum_{j'l'} U_{j'l'}^{[\alpha]} U_{j'l'}^{[\beta]} = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{若 } \alpha = \beta \\ 0 & \text{若 } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

$$\sum_{ik} V_{ik}^{[\alpha]} V_{ik}^{[\beta]} = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{若 } \alpha = \beta \\ 0 & \text{若 } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

將 $F_{ij'kl'}$ 改寫爲另一型式, 並代入 (48) 式。

$$\sum_{\alpha,j',k,l'} \xi^{[\alpha]} U_{j'l'}^{[\alpha]} V_{ik}^{[\alpha]} \frac{\partial^2}{\partial x'_{j'} \partial x'_{l'}} u_k = 0$$

此外, 此處還有二次型 (quadratic form) 的特性。

$$\begin{aligned} &\sum_{j'l'} U_{j'l'}^{[\alpha]} \frac{\partial^2}{\partial x'_{j'} \partial x'_{l'}} \\ =&\sum_{j'l'} \{\frac{1}{2}(U_{j'l'}^{[\alpha]} + U_{l'j'}^{[\alpha]}) + \frac{1}{2}(U_{j'l'}^{[\alpha]} - U_{l'j'}^{[\alpha]})\} \frac{\partial^2}{\partial x'_{j'} \partial x'_{l'}} \\ =&\sum_{j'l'} \frac{1}{2}(U_{j'l'}^{[\alpha]} + U_{l'j'}^{[\alpha]}) \frac{\partial^2}{\partial x'_{j'} \partial x'_{l'}} \\ =&\sum_{j'l'} \widetilde{U}_{j'l'}^{[\alpha]} \frac{\partial^2}{\partial x'_{j'} \partial x'_{l'}} \end{aligned}$$

其中 $\widetilde{U}_{j'l'}^{[\alpha]} = \frac{1}{2}(U_{j'l'}^{[\alpha]} + U_{l'j'}^{[\alpha]})$。

可以再利用 $F_{ij'kl'}$ 之對稱性可以使得 $V_{ik}^{[\alpha]}$ 只留下其對稱部分。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j',k,l'} F_{ij'kl'} \frac{\partial^2}{\partial x'_{j'} \partial x'_{l'}} u_k \\
=&\sum_{j',k,l'} \frac{1}{2}(F_{ij'kl'} + F_{kl'ij'}) \frac{\partial^2}{\partial x'_{j'} \partial x'_{l'}} u_k \\
=&\frac{1}{2} \sum_{\alpha,j',k,l'} \xi^{[\alpha]} \frac{\partial}{\partial x'_{j'}} U_{j'l'}^{[\alpha]} \frac{\partial}{\partial x'_{l'}} V_{ik}^{[\alpha]} u_k + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,j',k,l'} \xi^{[\alpha]} \frac{\partial}{\partial x'_{j'}} U_{l'j'}^{[\alpha]} \frac{\partial}{\partial x'_{l'}} V_{ki}^{[\alpha]} u_k \\
=&\sum_{\alpha,j',k,l'} \xi^{[\alpha]} \frac{\partial}{\partial x'_{j'}} \widetilde{U}_{j'l'}^{[\alpha]} \frac{\partial}{\partial x'_{l'}} \frac{1}{2}(V_{ik}^{[\alpha]} + V_{ki}^{[\alpha]}) u_k \\
=&\sum_{\alpha,j',k,l'} \xi^{[\alpha]} \frac{\partial}{\partial x'_{j'}} \widetilde{U}_{j'l'}^{[\alpha]} \frac{\partial}{\partial x'_{l'}} \widetilde{V}_{ik}^{[\alpha]} u_k
\end{aligned}
$$

其中 $\widetilde{V}_{j'l'}^{[\alpha]} = \frac{1}{2}(V_{j'l'}^{[\alpha]} + V_{l'j'}^{[\alpha]})$。

根據上述的結果, 再次對 $\widetilde{V}_{ik}^{[\alpha]}, \widetilde{U}_{j'l'}^{[\alpha]}$ 進行一次特徵值問題, 此外由於此爲實對稱矩陣, 因此特徵值均爲實數, 特徵向量均單位正交。

$$
\begin{aligned}
\widetilde{V}_{ik}^{[\alpha]} &= \sum_m Q_{im}^{[\alpha]} D_m^{[\alpha]} Q_{km}^{[\alpha]} \\
\widetilde{U}_{j'l'}^{[\alpha]} &= \sum_r T_{j'r}^{[\alpha]} \Lambda_r^{[\alpha]} T_{l'r}^{[\alpha]}
\end{aligned}
$$

其中 $D_m^{[\alpha]}, \Lambda_r^{[\alpha]}$ 爲第 α 個特徵值, $Q_{im}^{[\alpha]}, T_{j'r}^{[\alpha]}$ 爲相對應的正交矩陣。

由於 $Q_{km}^{[\alpha]}$ 是由不同 $\widetilde{V}_{ik}^{[\alpha]}$ 分解出來。當 α 不同時, $Q_{km}^{[\alpha]}$ 分別處於在不同特徵張量上, 又不同的特徵張量彼此互相獨立, 是故:

$$
\sum_k Q_{kn}^{[\alpha]} Q_{km}^{[\beta]} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{mn}
$$

在此, 發現材料體內部除了有關超彈性之對稱性所展開的第一層對稱性, 根據上述的結果, 又再發現了根據特徵張量之對稱性的第二層對稱性, 根據兩層對稱性推導出另一正交性

質。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j} \widetilde{V}_{ij}^{[\alpha]} \widetilde{V}_{jk}^{[\beta]} \\
=& \sum_{j,m,n} Q_{im}^{[\alpha]} D_{m}^{[\alpha]} Q_{jm}^{[\alpha]} Q_{jn}^{[\beta]} D_{n}^{[\beta]} Q_{kn}^{[\beta]} \\
=& \sum_{m,n} Q_{im}^{[\alpha]} D_{m}^{[\alpha]} \delta_{\alpha\beta} \delta_{mn} D_{n}^{[\beta]} Q_{kn}^{[\beta]} \\
=& \begin{cases} \sum_{m} Q_{im}^{[\beta]} D_{m}^{[\beta]} D_{m}^{[\beta]} Q_{km}^{[\beta]} & \text{若} \quad \alpha = \beta \\ 0 & \text{若} \quad \alpha \neq \beta \end{cases}
\end{aligned} \tag{49}
$$

此外, 再對 $\widetilde{U}_{j'l'}^{[\alpha]}$ 進行開根號之動作。

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{U}_{j'l'}^{[\alpha]} \\
=& \sum_{r} T_{j'r}^{[\alpha]} \Lambda_{r}^{[\alpha]} T_{l'r}^{[\alpha]} \\
=& \sum_{r} T_{j'r}^{[\alpha]} \sqrt{\Lambda}_{r}^{[\alpha]} \sqrt{\Lambda}_{r}^{[\alpha]} T_{l'r}^{[\alpha]} \\
=& \sqrt{\widetilde{U}}_{j's}^{[\alpha]} \sqrt{\widetilde{U}}_{l's}^{[\alpha]}
\end{aligned} \tag{50}
$$

其中 $\sum_{r} \sqrt{\Lambda}_{r}^{[\alpha]} \sqrt{\Lambda}_{r}^{[\alpha]} = \Lambda_{r}^{[\alpha]}$, $\sqrt{\widetilde{U}}_{j's}^{[\alpha]} = \sum_{r} T_{j'r}^{[\alpha]} \sqrt{\Lambda}_{r}^{[\alpha]}$。

至此, 可以注意到若通解具有以下之型式, 則可以充分利用對稱性的性質求得通解。

$$
u_k = \widetilde{V}_{km}^{[\beta]} u_{m}^{[\beta]}
$$

代入式 (48), 且利用式 (49) 及式 (50) 之性質,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j',k,l',m} F_{ij'kl'} \frac{\partial^2}{\partial x'_{j'} \partial x'_{l'}} \widetilde{V}^{[\beta]}_{km} u^{[\beta]}_m \\
=& \sum_{\alpha,j',k,l',m} \xi^{[\alpha]} \frac{\partial}{\partial x'_{j'}} \widetilde{U}^{[\alpha]}_{j'l'} \frac{\partial}{\partial x'_{l'}} \widetilde{V}^{[\alpha]}_{ik} \widetilde{V}^{[\beta]}_{km} u^{[\beta]}_m \\
=& \sum_{\alpha,j',l',m,r} \xi^{[\alpha]} \frac{\partial}{\partial x'_{j'}} \widetilde{U}^{[\alpha]}_{j'l'} \frac{\partial}{\partial x'_{l'}} Q^{[\beta]}_{ir} D^{[\beta]}_r D^{[\beta]}_r Q^{[\beta]}_{mr} \delta_{\alpha\beta} u^{[\beta]}_m \\
=& \sum_{j',l',m,r} \xi^{[\beta]} \frac{\partial}{\partial x'_{j'}} \widetilde{U}^{[\beta]}_{j'l'} \frac{\partial}{\partial x'_{l'}} Q^{[\beta]}_{ir} D^{[\beta]}_r D^{[\beta]}_r Q^{[\beta]}_{mr} u^{[\beta]}_m \\
=& \sum_{j',l',m,r,p} \xi^{[\beta]} \frac{\partial}{\partial x'_{j'}} \sqrt{\widetilde{U}}^{[\beta]}_{j'p} \sqrt{\widetilde{U}}^{[\beta]}_{l'p} \frac{\partial}{\partial x'_{l'}} Q^{[\beta]}_{ir} D^{[\beta]}_r D^{[\beta]}_r Q^{[\beta]}_{mr} u^{[\beta]}_m \\
=& \sum_{j',m,r} \xi^{[\beta]} \frac{\partial}{\partial y^{[\beta]}_{j'}} \frac{\partial}{\partial y^{[\beta]}_{j'}} Q^{[\beta]}_{ir} D^{[\beta]}_r D^{[\beta]}_r Q^{[\beta]}_{mr} u^{[\beta]}_m \\
=& \sum_{m,r} \xi^{[\beta]} \triangle^{[\beta]} Q^{[\beta]}_{ir} D^{[\beta]}_r D^{[\beta]}_r Q^{[\beta]}_{mr} u^{[\beta]}_m \\
=& 0
\end{aligned}
$$

其中 $\sum_{j'} \frac{\partial}{\partial x'_{j'}} \sqrt{\widetilde{U}}^{[\alpha]}_{j'p} = \frac{\partial}{\partial y^{[\alpha]}_{j'}}$, $\triangle^{[\beta]}$ 爲第 β 個 Laplace 算子。由於 $\triangle^{[\beta]} u^{[\beta]}_m = 0$, 並根據克氏代數, 列出符合 Laplace 算子之通解, 並將所有滿足該型式之通解相加, 即爲通解。

3.4 異向性電磁彈性材料之通解

根據文獻[16][17], 異向性電磁彈性力學 (electromagnetoelasticity) 中的組成律, 爲以下之型式:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} - e_{kij}E_k - q_{kij}H_k \tag{51}$$

$$D_i = e_{ikl}\epsilon_{kl} + \kappa_{ik}E_k + \lambda_{ki}H_k \tag{52}$$

$$B_i = q_{ikl}\epsilon_{kl} + \lambda_{ik}E_k + \Gamma_{ik}H_k \tag{53}$$

其中 D_i 爲電子位移 (electric displacement), E_i 爲電場強度 (electric field strength), B_i 爲磁流密度 (magnetic flux density), H_i 爲磁場強度 (electric field strength), C_{ijkl} 爲彈性常數 (elasticity constants), e_{kij} 爲壓電常數 (piezoelectric constants), q_{kij} 爲壓磁常數 (piezomagnetic constants), κ_{ik} 爲介電常數 (dielectric constants), λ_{ik} 爲電磁耦合常數 (electromagnetic coupling constants), Γ_{ik} 爲磁導率常數 (magnetic permeability constants), 並且以上之材料常數具有以下之性質。

$$C_{ijkl}=C_{klij}=C_{jikl}=C_{ijlk},\quad e_{kij}=e_{kji},\quad q_{kij}=q_{kji}$$
$$\kappa_{ik}=\kappa_{ki},\quad \lambda_{ik}=\lambda_{ki},\quad \Gamma_{ik}=\Gamma_{ki}$$

並且根據位移與應變之關係、彈力靜力問題、無徹體力 (bady force) 及在電磁靜力 (static) 問題下之馬克斯威爾方程式, 可知

$$\epsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}),\quad \sigma_{ij,j}=0,\quad B_{i,i}=0,\quad D_{i,i}=0,\quad E_i=-\phi_{,i},\quad H_i=-\varphi_{,i}$$

將上述關係代入式(51) 式 (52) 式 (53), 可改寫爲

$$\sigma_{ij,j}=C_{ijkl}u_{k,lj}+e_{lij}\phi_{,lj}+q_{lij}\varphi_{,lj}=0$$
$$D_{i,i}=e_{jkl}u_{k,lj}-\kappa_{jl}\phi_{,lj}-\lambda_{lj}\varphi_{,lj}=0$$
$$B_{i,i}=q_{jkl}u_{k,lj}-\lambda_{jl}\phi_{,lj}-\Gamma_{jl}\varphi_{,lj}=0$$

至此可以將異向性電磁彈性力學中的統御方程式表達爲

$$L_{i'jk'l}u_{k',lj}=0 \tag{54}$$

其中

$$L_{i'jk'l}=\begin{cases} E_{ijkl} & i',j,k',l=1,2,3 \\ e_{kij} & k'=4,\quad i',j,l=1,2,3 \\ q_{lij} & k'=5,\quad i',j,l=1,2,3 \\ e_{jkl} & i'=4,\quad j,k',l=1,2,3 \\ -\kappa_{jl} & i'=4,k'=4,\quad j,l=1,2,3 \\ -\lambda_{lj} & i'=4,k'=5,\quad j,l=1,2,3 \\ q_{jkl} & i'=5,\quad j,k',l=1,2,3 \\ -\lambda_{jl} & i'=5,k'=4,\quad j,l=1,2,3 \\ -\Gamma_{jl} & i'=5,k'=4,\quad j,l=1,2,3 \end{cases}$$

其中 i,j,k,l 表示正常維度的標記 (index) , i',k'表示維度被擴充之後的標記 (index)。

根據上述結果及超彈性之性質, 可知 $L_{ij'kl'}$ 具有對稱性 $L_{i'jk'l} = L_{k'li'j}$, 由於選擇將 $i'k'$ 及 jl 定爲一組進行分解, 但根據上述之結果, 會發現於 $i'k'$ 及 jl 數量不相同, 於是 $L_{i'jk'l}$ 之奇異值分解 (singlar value decomposition) 定義爲

$$L_{i'jk'l}V_{i'k'}^{[\alpha]} = U_{jl}^{[\alpha]}S^{[\alpha]}$$

其中 $S^{[\alpha]}$ 爲第 α 個特徵值, $V_{i'k'}^{[\alpha]}, U_{jl}^{[\alpha]}$ 分別爲相對應的右特徵張量與左特徵張量。

將 $L_{i'jk'l}$ 改寫另一型式, 並代入 (54) 式,

$$\sum_{\alpha,j,k',l} \xi^{[\alpha]}U_{jl}^{[\alpha]}V_{i'k'}^{[\alpha]}\frac{\partial^2}{\partial x'_{j'}\partial x'_{l'}}\mu_{k'} = \mathbf{0}$$

並且根據奇異值分解 (singlar value decomposition) 之性質可知左特徵張量與右特徵張量均爲正交單位化 (orthogonal),

$$\sum_{jl} U_{jl}^{[\alpha]}U_{jl}^{[\beta]} = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & 若 \ \alpha = \beta \\ 0 & 若 \ \alpha \neq \beta \end{cases}$$

$$\sum_{i',k'} V_{i'k'}^{[\alpha]}V_{i'k'}^{[\beta]} = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & 若 \ \alpha = \beta \\ 0 & 若 \ \alpha \neq \beta \end{cases}$$

此外, 此處還有二次型 (quadratic form) 的特性,

$$\begin{aligned}
&\sum_{jl} U_{jl}^{[\alpha]}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \\
&= \sum_{jl}\{\frac{1}{2}(U_{jl}^{[\alpha]} + U_{lj}^{[\alpha]}) + \frac{1}{2}(U_{jl}^{[\alpha]} - U_{lj}^{[\alpha]})\}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \\
&= \sum_{jl}\frac{1}{2}(U_{jl}^{[\alpha]} + U_{lj}^{[\alpha]})\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \\
&= \sum_{jl}\widetilde{U}_{jl}^{[\alpha]}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l}
\end{aligned}$$

其中 $\widetilde{U}_{jl}^{[\alpha]} = \frac{1}{2}(U_{jl}^{[\alpha]} + U_{lj}^{[\alpha]})$。

可以再利用 $L_{i'jk'l}$ 之主對稱性, 可以使得 $V^{[\alpha]}_{i'k'}$ 只留下其對稱部分。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j,k',l} L_{i'jk'l}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l}\mu_{k'} \\
=&\sum_{j,k',l} \frac{1}{2}(L_{i'jk'l}+L_{k'li'j})\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l}\mu_{k'} \\
=&\frac{1}{2}\sum_{\alpha,j,k',l}\xi^{[\alpha]}\frac{\partial}{\partial x_j}U^{[\alpha]}_{jl}\frac{\partial}{\partial x_l}V^{[\alpha]}_{i'k'}\mu_{k'}+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,j,k',l}\xi^{[\alpha]}\frac{\partial}{\partial x_j}U^{[\alpha]}_{lj}\frac{\partial}{\partial x_l}V^{[\alpha]}_{k'i'}\mu_{k'} \\
=&\sum_{\alpha,j,k',l}\xi^{[\alpha]}\frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{U}^{[\alpha]}_{jl}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{1}{2}(V^{[\alpha]}_{i'k'}+V^{[\alpha]}_{k'i'})\mu_{k'} \\
=&\sum_{\alpha,j,k',l}\xi^{[\alpha]}\frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{U}^{\alpha]}_{jl}\frac{\partial}{\partial x_l}\widetilde{V}^{[\alpha]}_{i'k'}\mu_{k'}
\end{aligned}
$$

根據上述的結果, 再次對 $\widetilde{V}^{[\alpha]}_{i'k'}, \widetilde{U}^{\alpha]}_{jl}$ 進行一次特徵值問題, 此外由於此爲實對稱矩陣, 因此特徵值均爲爲實數, 特徵向量均單位正交。

$$\widetilde{V}^{[\alpha]}_{i'k'} = \sum_m Q^{[\alpha]}_{i'm} D^{[\alpha]}_m Q^{[\alpha]}_{k'm}$$

$$\widetilde{U}^{\alpha]}_{jl} = \sum_m T^{[\alpha]}_{jr} \Lambda^{[\alpha]}_r T^{[\alpha]}_{lr}$$

其中 $D^{[\alpha]}_m, \Lambda^{[\alpha]}_r$ 爲第 α 個特徵值, $Q^{[\alpha]}_{i'm}, T^{[\alpha]}_{jp}$ 爲相對應的正交矩陣。

由於 $Q^{[\alpha]}_{k'n}$ 是由不同 $\widetilde{V}^{[\alpha]}_{i'k'}$ 分解出來。當 α 不同時, $Q^{[\alpha]}_{k'n}$ 分別處於在不同特徵張量上, 又不同的特徵張量彼此互相獨立, 是故

$$\sum_{k'} Q^{[\alpha]}_{k'n} Q^{[\beta]}_{k'm} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{mn} \tag{55}$$

在此發現材料體內部除了有關超彈性 (hyperelasticity) 之對稱性所展開的第一層對稱性, 根據上述的結果, 又再發現了根據特徵張量之對稱性的第二層對稱性, 根據兩層對稱性推

導出另一正交性質。

$$
\begin{aligned}
&\sum_j \widetilde{V}^{[\alpha]}_{i'j}\widetilde{V}^{[\beta]}_{jk'} \\
&= \sum_{j,m,n} Q^{[\alpha]}_{i'm}D^{[\alpha]}_{m}Q^{[\alpha]}_{jm}Q^{[\beta]}_{jn}D^{[\beta]}_{n}Q^{[\beta]}_{k'n} \\
&= \sum_{m,n} Q^{[\alpha]}_{i'm}D^{[\alpha]}_{m}\delta_{\alpha\beta}\delta_{mn}D^{[\beta]}_{n}Q^{[\beta]}_{k'n} \\
&= \begin{cases} \sum\limits_m Q^{[\beta]}_{i'm}D^{[\beta]}_{m}D^{[\beta]}_{m}Q^{[\beta]}_{k'm} & 若 \ \ \alpha = \beta \\ 0 & 若 \ \ \alpha \neq \beta \end{cases}
\end{aligned} \tag{56}
$$

此外, 再對 $\widetilde{U}^{[\alpha]}_{jl}$ 進行開根號之動作。

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{U}^{[\alpha]}_{jl} \\
&= \sum_r T^{[\alpha]}_{jr}\Lambda^{[\alpha]}_{r}T^{[\alpha]}_{lr} \\
&= \sum_r T^{[\alpha]}_{jr}\sqrt{\Lambda}^{[\alpha]}_{r}\sqrt{\Lambda}^{[\alpha]}_{r}T^{[\alpha]}_{lr} \\
&= \sum_r \sqrt{\widetilde{U}}^{[\alpha]}_{jr}\sqrt{\widetilde{U}}^{[\alpha]}_{lr}
\end{aligned} \tag{57}
$$

其中 $\sum\limits_r \sqrt{\Lambda}^{[\alpha]}_{r}\sqrt{\Lambda}^{[\alpha]}_{r} = \Lambda^{[\alpha]}_{r}$, $\sqrt{\widetilde{U}}^{[\alpha]}_{jr} = \sum_r T^{[\alpha]}_{jr}\sqrt{\Lambda}^{[\alpha]}_{r}$。

至此可以注意到若通解具有以下之型式, 則可以充分利用對稱性的性質求得通解。

$$
\mu_{k'} = \sum_m \widetilde{V}^{[\beta]}_{k'm}\mu^{[\beta]}_{m} \tag{58}
$$

代入式 (54), 且利用式 (56) 及式 (57) 之性質

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j,k',l,m} L_{i'jk'l}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l}\widetilde{V}^{[\beta]}_{k'm}\mu^{[\beta]}_m \\
=&\sum_{\alpha,j,k',l,m}\xi^{[\alpha]}\frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{U}^{[\alpha]}_{jl}\frac{\partial}{\partial x_l}\widetilde{V}^{[\alpha]}_{i'k'}\widetilde{V}^{[\beta]}_{k'm}\mu^{[\beta]}_m \\
=&\sum_{\alpha,j,l,m,r}\xi^{[\alpha]}\frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{U}^{[\alpha]}_{jl}\frac{\partial}{\partial x_l}Q^{[\beta]}_{i'r}D^{[\beta]}_r D^{[\beta]}_r Q^{[\beta]}_{mr}\delta_{\alpha\beta}\mu^{[\beta]}_m \\
=&\sum_{j,l,m,r}\xi^{[\beta]}\frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{U}^{[\beta]}_{jl}\frac{\partial}{\partial x_l}Q^{[\beta]}_{i'r}D^{[\beta]}_r D^{[\beta]}_r Q^{[\beta]}_{mr}\mu^{[\beta]}_m \\
=&\sum_{j,l,m,r,p}\xi^{[\beta]}\frac{\partial}{\partial x_j}\sqrt{\widetilde{U}}^{[\beta]}_{jp}\sqrt{\widetilde{U}}^{[\beta]}_{lp}\frac{\partial}{\partial x_l}Q^{[\beta]}_{i'r}D^{[\beta]}_r D^{[\beta]}_r Q^{[\beta]}_{mr}\mu^{[\beta]}_m \\
=&\sum_{j,m,r}\xi^{[\beta]}\frac{\partial}{\partial y^{[\beta]}_j}\frac{\partial}{\partial y^{[\beta]}_j}Q^{[\beta]}_{i'r}D^{[\beta]}_r D^{[\beta]}_r Q^{[\beta]}_{mr}\mu^{[\beta]}_m \\
=&\sum_{m,r}\xi^{[\beta]}\triangle^{[\beta]}Q^{[\beta]}_{i'r}D^{[\beta]}_r D^{[\beta]}_r Q^{[\beta]}_{mr}\mu^{[\beta]}_m \\
=&0
\end{aligned}
$$

其中 $\frac{\partial}{\partial x_j}\sqrt{\widetilde{U}}^{[\alpha]}_{jp} = \frac{\partial}{\partial y^{[\alpha]}_j}$, $\triangle^{[\beta]}$ 爲第 β 個 Laplace 算子, 由於 $\triangle^{[\beta]}u^{[\beta]}_m = 0$, 並根據克氏代數, 列出符合 Laplace 算子之通解, 並將所有滿足該型式之通解相加, 即爲通解。

第 4 章 各層異向性材料分析

由前述的計算過程可知, 對於三維靜態異向性彈性問題之特徵值問題會有九個特徵張量, 每個特徵張量均能得到一項滿足統御方程式的解, 最後將九項滿足統御方程式的解相加, 即爲統御方程式之通解。但根據對稱面的增加或異向性的減弱, 特徵張量會出現反對稱二階張量, 對於求解通解時, 反對稱二階張量會由於二次型之特性自動消失, 因此通解會少掉相對應反對稱部分的解, 簡而言之就是通解項數會隨著對稱面的增加或是異向性的減弱而減少, 不過最多減少三個。此外對稱性的增加, 也對導致特徵張量的重複, 對稱面增加越多特徵張量的重複就越多, 並且重複的特徵張量都與材料係數無關, 此下將對於各層異向性進行分析。

Triclinic 材料 (21個獨立之材料常數, 無對稱面) 其特徵張量爲

$$\begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}$$

其中 x 代表與材料係數相關的常數

Monoclinic 材料 (13個獨立之材料常數, 對稱面爲 $\theta = 0$) 其特徵張量爲

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & x & x \\ x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & x & x \\ x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & x & x \\ x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & x & x \\ x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}$$

其中 θ 爲對稱面在 x_1, x_2 平面上與 x_1 所夾之角度

Trigonal 材料 (6個獨立之材料常數, 對稱面爲 $\theta = 0$ 及 $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$) 其特徵張量爲

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & x & x \\ x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & x & x \\ x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & x \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & x \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Orthotropic 材料 (9個獨立之材料常數, 對稱面爲 $\theta=0$ 、$\theta=\frac{\pi}{2}$ 及 $\psi=\frac{\pi}{2}$) 其特徵張量爲

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tetragonal 材料 (6個獨立之材料常數, 對稱面爲 $\theta=0$ 、$\theta=\pm\frac{\pi}{4}$ 、$\theta=\frac{\pi}{2}$ 及 $\psi=\frac{\pi}{2}$) 其特徵張量爲

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transversely isotropic 材料 (5個獨立之材料常數, 對稱面爲 $x_3=0$ 及任何包含 x_3 軸的平面, 及對稱軸爲x_3 軸) 其特徵張量爲

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cubic 材料 (3個獨立之材料常數, 對稱面之法向量爲 x_1, x_2, x_3 軸及所有與 x_1, x_2, x_3 軸相夾 $\frac{\pi}{4}$ 之方向) 其特徵張量爲

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Isotropic 材料 (任意方向均爲對稱面之法向) 其特徵張量爲

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

我們會發現根據對稱面增加或是異向性的減弱, 相同的部分會越來越多, 並且只要其中一部分一出現, 則比該異向更弱的之材料也必包含該部分, 也就是說隨著異向性的減弱, 不同異向性材料之通解型式就會越來越相像。

第 5 章 結論

在本文中介紹了兩種方法, 第一種方法已座標轉換之觀念, 清楚的表現了在二維問題中, 其通解在各分量間應具有一比例關係, 也就是說具有特徵向量之性質。並且可在推導中發現與 Stroh 方法其實殊途同歸。同時在超複變代數中運用超複變分析二維異向性材料之統御方程式 ,可以得到類似的結果。但此方法之缺點在仍然受制於二維問題, 當維度提高時, 會出現求解的問題

第二種方法, 則是發現了在材料中藏有兩正交性的特性, 利用兩次特徵值問題將兩層正交正分解出來, 在假設適當的通解型式, 即可得到通解。此方法之優點在於不受維度

限制, 故此可將問題擴大至動態異向性彈性問題或電磁異向性彈性問題, 均可用類似的手法求解。

參考文獻

[1] Muskhelishvili, N.I., Some Basic Problem of the Mathematical Theory of Elasticity, Noordhooff, Groningen, the Netherlands, 1953.

[2] Muskhelishvili, N.I., Einige Grundaufgaben zur mathematischen Elastizitätstheotir, Carl Hanser Verlag, München, Germany, 1971.

[3] Muskhelishvili, N.I., Singular Integral Equations, Dover, New York, 1953/1990.

[4] Ting T.C.T, Anisotropic Elasticity: Theory and Applications, Oxford, 1996.

[5] Lekhnitskii S.G., Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic body, olden-Day, 1963.

[6] Lekhnitskii S.G., Anisotropic Plates, Gorden and Breach Science Publishers, 1968.

[7] Stroh A.N., Dislocatios and cracks in anisotropic elasticity, Philos. Mag, Vol. 3, pp. 625-646, 1958.

[8] Stroh A.N., Steady-state problems in anisotropic elasticity, j. Math. Phys., Vol. 41, pp. 77-103, 1962.

[9] Tisseur F., Meerbergen K., The Quadratic Eigenvalue Problem, SIAM Review, Vol. 43, No. 2, pp. 235-286, 2001.

[10] Wu K.-C., Generalization of the Stroh Formalism to 3-Dimensional Anisotropic Elasticity, Journal of Elasticity, Vol. 51, No. 3, pp. 213-225, 1998.

[11] Piltner R., The use of complex valued functions for the solution of three-dimensional elasticity problems, Journal of Elasticity, Vol. 18, No. 3, pp. 191-225, 1986.

[12] Piltner R., The Application of a Complex 3-Dimensional Elasticity Solution Representation for the Analysis of a Thick Retangular Plate, Acta Mechanica, Vol. 75, No. 1, pp. 77-91, 1988.

[13] Piltner R., The representation of three-dimensional elastic displacement fields with the aid of complex valued function, Journal of Elasticity, Vol. 22, No. 1, pp. 45-55, 1989.

[14] Ting T.C.T., Barber J.R., Three-dimensional solution for general anisotropy, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 55, No. 9, pp. 1993-2006, 2007.

[15] Malonek H.R., Ren G., Almansi-type theorems in Clifford analysis, Mathematical Methods in the Applied Sciences, Vol. 25, No. 16-18, pp. 1541-1552, 2002.

[16] Bhangele R.K., Ganesan N., Static analysis of simply supported functionally graded and layered magneto-electro-elastic plates, International journal of solids and structures, Vol. 43, No. 10, pp. 3230-3253, 2006.

[17] Huang J.H., Kuo W.S., The analysis of piezoelectric/piezomagnetic composite materials containing ellipsoidal inclusions, Journal of Applied Physics, Vol. 81, No. 3, pp. 1378-1386, 1997.

[18] 洪宏基, 劉立偉, 林冠甫, 彈塑力問題超複變分析與實驗研究成果報告, 行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告, NSC 95-2221-E-002-316-MY2, 2008.

簡 歷

姓名：黃裕堂

籍貫：台灣省高雄市

出生：75 年 02 月 04 日

學歷：高雄縣立青年國中

高雄市立瑞祥高級中學

國立中興大學土木工程學系大學部

國立台灣大學土木工程研究所結構工程組