國立臺灣大學社會科學院經濟學研究所

碩士論文

Department of Economics

College of Social Science

National Taiwan University

Master Thesis

企業多角化程度的衡量──以赫氏指標為例

Measuring firms' technology diversification: An example from Herfindahl-Hirschman Index

崔永序

Yung-Hsu Tsui

指導教授：鄭秀玲 博士

Advisor: Show-ling Jang, Ph.D.

中華民國 100 年 6 月

June 2011

誌謝

論文寫作絕非一人之功。師長的教誨、家人的支持、朋友同學間的互相啟發，皆為完成論文不可或缺的重要因素。謹誌謝辭於此。寥寥數句，無法盡吐對他們的無限感謝。

感謝鄭秀玲老師兩年來化雨春風，悉心指導，在學術的大道上，她為我點亮了明燈；感謝陳慧如老師砥礪鞭策，循循善誘，透過大量辯證與反思，她讓我瞭解了學術的嚴謹；感謝翁明宏老師啟迪有方，誨我諄諄，關鍵處的重點提示，讓論文邏輯更為完整。

子棣兄細心的校訂與寶貴的建議,使文章增色不少;翊臻同學庶務上的協助,讓文章的寫作與修正更為順利。同學間的相互啟發，好友間的歡聲笑語，都是支持我完成這篇文章的動力。

父母的支持讓我求學過程一帆風順，無後顧之憂。一路走來，我未曾少令父母擔心，然而他們仍不憚劬勞，全心全意的育我教我。我等今者，云何報得父母深恩？那又豈是幾句謝辭能說明的呢？

一切一切，皆為道不盡的感謝。謹將這篇文章，獻給所有值得感謝的人。

中文摘要

Hall (2005)與 Chen, et al. (2010)發現利用赫氏指標 (Herfindahl-Hirschman Index, HHI)衡量技術規模較小企業的技術集中度時，容易產生偏誤。本文透過討論赫氏指標的演進，討論為何赫氏指標在衡量技術規模較小的企業時容易發生偏誤，並且設計出衡量此一偏誤的方法。透過 Qualcomm 和 Mediatek 兩家企業的實際資料，本文能夠利用預先設定的誤差標準，最小赫氏指標誤差距與最小赫氏指標誤差率，判斷能否以赫氏指標衡量該企業的技術集中度。利用本文發展出的轉換後赫氏指標(Herfindahl-Hirschman Transformed Index, HHT)，我們能夠較為準確的衡量技術規模較小企業的技術集中度，以解決赫氏指標在衡量這些企業技術集中度時，會有大量誤差的問題。

關鍵字：技術多角化、技術專業化、技術集中度、赫氏指標、轉換後赫氏指標

Abstract

Hall (2005) and Chen, et al. (2010) have discovered that it is easily getting a bias result when using Herfindahl-Hirschman Index (HHI) to measure the technology concentration of small-patent-scale firms. In order to understand how serious the bias is, we established a method to calculate the bias. We have shown that we could distinguish the technology portfolio of firms, whether it is able to be unbiasedly measured by HHI or not, through two new indicators we developed, HHI-error distance and HHI-error ratio, by adapting the real patent data from two semiconductors companies, Qualcomm and Mediatek. Furthermore, we have constructed a new index, Herfindahl-Hirschman Transformed Index (HHT) to measure the technology portfolios of small-patent-scale firms. We have shown that HHT could unbiasedly measure the technology concentration of small-patent-scale firms.

Keywords: technology diversification, technology specialization, technology concentration, Herfindahl-Hirschman Index, Herfindahl-Hirschman Transformed Index

目錄

誌謝 i
中文摘要 1
Abstract 2
表目錄 5
圖目錄 6
第一章　前言 7
第二章　赫氏指標 10
2.1.　赫式指標與產業集中度 10
2.2.　赫式指標與技術集中度 12
2.3.　集中度指標與赫氏指標 13
2.4.　赫氏指標的修正 15
2.5.　總專利數 M 的影響 18
第三章　赫氏指標的誤差 20
3.1.　赫氏指標的上界 20
3.2.　赫氏指標的下界 23
3.3.　赫氏指標誤差距 25
3.4.　最大誤差距比例 27
3.5.　赫氏指標誤差率 29
3.6.　最大誤差率比例 30
第四章　赫氏指標誤差距 d 和赫氏指標誤差率 s 的實際應用 33
4.1.　資料來源和計算方法 33
4.2.　實證結果比較 34
4.3.　最大誤差距比例與最大誤差率比例的應用 36
4.4.　小結 38

第五章　赫氏指標的調整與應用 39
5.1.　轉換後赫氏指標(HHT) 39
5.2.　HHT 的實際應用 41
5.3.　HHT 與 Adjusted Generality Index 44
第六章　結論 45
參考資料 47
附錄 51
附錄一　(HHI^U 和 HHI^L 的證明) 51
附錄二　(HHI^U 和 HHI^L 的計算) 53
附錄三　(赫氏指標誤差距及赫氏指標誤差率對 M 的差分) 53
附錄四　(r_d 與 r_s 的下界) 54

表目錄

表 1：赫氏指標在技術集中度及市場集中度各變數代表意義的異同................22
表 2 Qualomm 的 1988-2007 的 HHI、M、N 及 d、s 值......................................34
表 3 Mediatek 的 1988-2007 的 HHI、M、N 及 d、s 值......................................34
表 4 Qualcomm 1988-2007 的 M 值、N 值、rd 值、Md 值與 rs 值與 Ms 值......36
表 5 Mediatek 1988-2007 的 M 值、N 值、rd 值、Md 值與 rs 值與 Ms 值 37

圖目錄

圖 1、Qualcomm 於 1988-2007 之 HHI 與 HHT 的比較圖....................................42
圖 2、Mediatek 於 1999-2007 之 HHI 與 HHT 的比較圖 42

第一章　前言

研究發展是企業維持競爭力的重要手段。透過適當的資源配置，企業能透過研發策略獲取相當的利潤、市佔率、知名度等企業目標。由於研究發展需要投入龐大的資源，過去學者認為唯有大型企業才有能力進行研發創新。然而越來越多的文獻發現，企業是否進行研發活動和企業的規模大小並無顯著關聯 (Malerba, et al., 1997)。但由於企業本身規模的差異，企業的研發行為會因為其技術規模大小而有所不同 (Chen, et al., 2010)。創新活動不再是大型企業的專利。隨著商業行為分工日益精細，同一產業之中可能同時存在規模迥異的大小企業。瞭解這些企業之間如何進行互動，如何擬定創新策略是十分重要的。若能夠對這些規模不同的企業的創新策略，有更進一步的分析與理解，那將有助於我們更為了解整個商業社會的演變及發展。

在分析企業的研發行為時，學者通常利用企業的技術集中度作為描繪企業研發策略的指標。藉由衡量企業的專利申請、研發投入等相關資訊，我們可以描繪出企業的研發型態。過去文獻引用產業集中度指標，如赫氏指標 (Watanabe, et al., 2004; Hall, et al., 2005; Garcia-Vega, 2006; Chen, et al., 2009; Jaffe, 1986);熵數指標 (Jacquemin, et al., 1979)等，計算企業的技術集中度。學者利用這些技術集中度指標，捕捉企業技術多角化(technology diversification)或是技術專業化(technology specialization)等研發策略。

過去的研究之中，學者並未依照企業技術規模選擇不同的技術集中度指標。然而，這種一視同仁的做法，在分析企業的研發策略時會產生問題。Hall (2005) 發現以赫氏指標為基礎(HHI-based)的 Generality Index 衡量技術領域數量較小的企業時，會低估這些企業的技術集中度；Chen, et al. (2010) 則指出在以赫氏指標

衡量企業技術集中度時，企業專利數量的多寡會影響企業的技術集中度。這些文獻說明了，若直接沿用大型企業的技術集中度指標，衡量專利數量或技術領域數量較少的中小企業，是有可能產生誤差的。

但過去文獻並未對這些問題有更為全面的研究。可能原因有二：過去學者多針對大型企業的研發策略做研究，因此並未出現衡量中小企業研發策略的需求；二者，過去商業環境和現今的商業環境有所不同，產業中大型企業與中小企業並存的情況未若今日普遍 (Malerba, et al., 1997)。然而，時至今日，這些過去被忽視的議題，如今則顯得益發重要。

如何以大型企業技術集中度指標衡量中小企業的技術集中度會產生多大的誤差？技術規模到達多少的標準時可以大型企業技術集中度衡量？該如何準確的衡量中小企業的技術集中度？若忽視這些問題，會使得學者無法準確運用技術集中度，進而動搖研究成果的精確性。這些問題皆為亟需解決的。

為了回答這些問題，本文將以赫氏指標為例，探究專利數量、技術領域數量與誤差之間的關係。我們引用 Jang, et al. (2010)的文章，將專利總數的影響納入赫氏指標之中。透過本文的討論，我們希望達到三個目標：(1)了解誤用大型技術規模企業的技術集中度指標衡量中小技術規模技術集中度時，誤差到底有多大；(2) 在甚麼情況下，赫氏指標可以較為準確的計算企業的技術集中度；(3) 在赫氏指標產生嚴重偏誤時，何種指標可以替代赫氏指標。我們希望透過本文的討論，能夠對這些疑問有更進一步的釐清與理解。

本文內容安排如下：第二章為文獻回顧，將介紹赫氏指標的沿革以及常用的數種集中度指標，並針對過去學者對赫氏指標所做的調整做簡單的回顧。第三章將透過計算納入專利總數影響後的赫氏指標之上下界，發展出衡量赫氏指標誤差的方法；在同一章我們更將利用數學推導，瞭解在何種技術規模下，我們可以較

為準確的使用赫氏指標。第四章將以 Qualcomm 與 Mediatek 兩家企業的專利資料，將第三章所發展出的衡量誤差方法，以及赫氏指標適用標準做實際的檢視與應用。第五章，我們將介紹轉換後赫氏指標(Herfindahl-Hirschman Transformed Index, HHT)，我們認為這一指標能夠準確衡量中小技術規模企業的技術集中度。第六章則是結論。

第二章　赫氏指標

2.1.　赫式指標與產業集中度

赫氏指標命名自經濟學家 Herfindahl (1950)和 Hirschman (1945)。自 1980 年以降，赫氏指標被經濟學家廣泛的應用在衡量廠商的產業集中度。美國聯邦反托拉斯當局，如司法部(U.S. Department of Justice) 及聯邦貿易委員會 (the Federal Trade Commission) ，曾對赫氏指標所隱含的市場競爭程度做出一系列的量表[1]，作為判定企業是否有違反托拉斯法的事前審查標準。

儘管赫氏指標擁有許多良好的性質，諸如全域性、計算容易等 (Stigler, 1983)，但是使用上，仍然缺乏為何可以用它來衡量產業集中度的理論基礎。Cowling et al. (1976) 與 Clarke et al. (1982) 透過建構寡占模型，發現赫氏指標可被視為市場的價格－成本邊際 (Price-Cost Margin)，因此計算產業的赫式指標值，相當於衡量產業的價格－成本邊際。若成本越高，廠商市佔率越小，赫氏指標值越低，產業就較為不集中；若成本越低，廠商市佔率越大，赫氏指標值就越高，產業就較為集中。

這些文獻提供了經濟學者在使用赫氏指標時的良好基礎，但同時也給予赫氏指標使用上的限制：其一，赫氏指標係衡量產業的價格－成本邊際，因此使用時必須假設廠商皆面對相同的市場需求；其二 ，該模型假定廠商皆以固定規模報酬進行生產，市佔率差異僅來自於廠商邊際成本之間的差異；再者，模型係假設廠商之間皆為競爭關係，因此不存在勾結、壟斷等策略行為。因為這些假設造成

[1] U.S. Department of Justice (1997)，Chapter 1.14：HHI 值小於 0.10 爲不集中；HHI 值介於 0.10 和 0.18 爲中度集中；HH 值大於 0.18 爲高度集中。

的限制，學者理論上無法使用赫氏指標進行跨產業的比較；廠商若生產若具有規模報酬的性質時，理論上赫氏指標也未必能夠準確的衡量該產業的集中度。更重要的是，經濟學家往往使用產業集中度的大小，作為衡量該產業廠商之間競爭程度的依據。倘若赫氏指標本身的理論基礎係建立在廠商競爭的假設上，赫氏指標所代表的產業集中度，是否能作為產業競爭程度的依據，則是具有爭議的 (Kwoka, et al., 1986)。

儘管赫氏指標在理論上具有若干瑕疵，時至今日，它仍然為學者廣泛的應用在衡量各種市場的產業集中度，如：Forcarelli, et al. (2003) 以 HHI 來衡量銀行產業合併前後的市場集中程度變化；Mayer, et al. (2003) 以 HHI 衡量航空服務業的集中程度並探討其對誤點率的影響 ；Thoenig, et al. (2003) 在討論全球化議題時，亦以 HHI 為產業集中程度的指標。

2.2. 赫式指標與技術集中度

Jaffe (1986)率先將赫氏指標應用在企業的技術議題上。他利用赫氏指標的平方根作為衡量企業技術外溢效果的近似指標。而後，Jaffe (1988)、Trajtenberg, et al. (1997)、Hall, et al. (2001)、Hu, et al. (2003)、Jaffe, et al. (2001)等學者更將赫氏指標沿用至衡量企業的技術集中度，用來探討企業技術集中度對生產力、技術外溢效果等重要經濟變數的影響。

管理學者更進一步的將赫氏指標應用企業技術管理的議題上。Watanabe, et al. (2004) 將赫氏指標應用在討論企業技術多角化 (technology diversification) 的議題上。他們透過赫氏指標捕捉企業技術策略，用來探討企業技術的外溢效果和銷售額與企業技術策略的關係。Garcia-Vega (2006)藉由與赫氏指標相關的Generality Index，捕捉企業技術專業化(technology specialization)程度，用來討論技術專業化與技術創新之間的關聯。Chen, et al. (2009) 則利用赫氏指標捕捉大藥廠專利申請的技術表現，討論企業的專利申請行為和其市值之間的關係。Chen, et al. (2010) 則利用赫氏指標捕捉企業的多角化程度，並探討技術規模 (patent scale) 和技術廣度 (patent scope) 之間的關係。

儘管赫氏指標被廣泛地用來衡量技術集中度，然而某些學者發現使用赫氏指標衡量企業技術集中度時，仍然會存在一些問題。Hall, et al. (2001) 發現赫氏指標在衡量技術集中度時會產生偏誤。在企業技術領域數小的時候，赫氏指標會低估企業的技術集中度。Hall (2005)進一步的證明以赫氏指標計算專利資料 (patent data) 或是專利引證資料 (patent citation data)，統計上會產生偏誤。Chen, et al. (2010) 則發現企業技術規模小的時候，利用赫氏指標計算企業技術集中度可能會低估企業的技術集中度，從而影響研究者對企業多角化程度的判斷。

2.3. 集中度指標與赫氏指標

在更深入討論赫氏指標之前，如果能將赫氏指標與其他集中度指標作簡單的比較，則能對赫氏指標的優缺點，有更完整的了解與認識。一般而言，集中度指標(Concentration Index，簡稱 CI)具有下列的函數形式：

$$\mathrm{CI} = \sum_{i=1}^{n} W_i s_i \,, \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{n}, \dots, \mathrm{N} \tag{2.1}$$

其中，W_i 為技術領域 i 的權重；s_i 為技術領域 i 的權數，$s_i \leqq 1$。

集中比率指標 (Concentration Ratio Index, 簡稱 CR)在計算產業結構集中度時，通常取前四大(n = 4)或是前八大(n=8)的廠商，並賦予這些廠商相同的權重 1。然而，利用這種指標計算技術集中度時，會因為不能涵蓋所有的技術領域，使得所計算出來的技術集中度有所偏誤，也因此，文獻中較少利用集中比率指標計算企業的技術集中度。

熵數指標 (Entropy, 簡稱 E)，係以-log(s_i)作為每一個技術領域 i 的權重，並將所有的技術領域(n = N)的權數權重的乘積加總。這一指標對於某些技術領域數量較小的企業的集中度變動較為敏感 (Jacquemin, et al., 1979)，更有學者利用其函數特性，將其進行分解用以解釋不同的集中效果：如 Shanon Entropy (Straathof, 2007)及 Theil Entropy (Nissan, et al., 2005)。

赫氏指標 (Herfindahl-Hirschman Index, 簡稱 HHI)，係以本身的權數 s_i 作為該技術領域 i 的權重，並將所有的技術領域(n = N)的權數權重的乘積加總。這一指標對於權數較大的技術領域的變動較為敏感 (Rhoades, 1995)，對於權數較小的技術領域的變動則較為不敏感 (Meilak, 2008)。赫氏指標的這一性質，應用在討論產業集中度時，會排除小廠商對產業集中度的干擾，從而避免得出市場結構

有劇烈波動的結論 (Stigler, 1983)；然而，這一性質運用在衡量企業技術集中度時，則可能會不夠準確 (Jang, et al., 2011)。儘管赫氏指標在衡量集中度時的變動敏感程度，會因為討論目標不同而各有優劣，但是就數值本身的意義，則難有直觀的理解方式。一方面是因為赫氏指標係為序數 (ordinal) 指標，本身的大小並不具特別意義 (Agiobeneobo, 2000)；二者，其計算方式為市佔率平方的加總，而非市佔率大小，數值高低也較難有直觀的意義 (Vuko, 2010)。

許多文獻指出，赫氏指標與許多其他的集中度指標皆高度相關。Bikker and Haaf (2002) 發現赫式指標(HHI)和集中比率指標(CR)高度相關；Meilak (2008)以赫式指標衡量貿易集中度時，發現赫式指標與其他集中度指標，如集中比率指標(CR)、商數指標(E)等指標有一致的結果；Nissan and Caveny (2005)在計算產品集中度時，發現以赫式指標(HHI)計算的結果與集中比率指標(CR)與商數指標(E)計算的結果並無顯著的差異。造成這一結果很重要的因素之一，是因為這些指標皆擁有類似的函數形式 (Meilak, 2008)。

2.4. 赫氏指標的修正

赫氏指標(HHI)定義如下：

$$\mathrm{HHI} \equiv \sum_{i=1}^{N} s_i^2 \,, \mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{N} \tag{2.2}$$

其中，s_i 為技術領域 i 中專利數量佔總專利數量的比率，定義為$s_i = \frac{M_i}{M}$，M 為總專利數，M_i 為技術領域 i 中專利數量，$\Sigma M_i = M$。N 定義為技術領域數。

透過上節對赫氏指標的討論，我們發現赫氏指標在應用上有其優缺點。過去學者曾經試圖利用一些方式修正赫氏指標。他們希冀透過簡單的修正，能夠更為精確的應用赫氏指標。

2.4.1. 標準化赫氏指標

標準化赫式指標(Normalized Herfindahl-Hirschman Index)，係利用標準化的概念，將赫式指標的上下界自原本的[1/N, 1]修正至[0, 1]之間。透過內插法，分子為 HHI 減去其下界(1/N)，分母為 HHI 的上界(1)減去其下界(1/N)。

標準化赫氏指標($\mathrm{HHI}^{\mathrm{normalized}}$) 定義如下：

$$\mathrm{HHI}^{normalized} = \frac{HHI - \frac{1}{N}}{1 - \frac{1}{N}} = \frac{N \times HHI - 1}{N - 1} \tag{2.3}$$

2.4.2. HHA

Agiobenio (2000)認為赫氏指標係為一序數 (ordinal) 指標而非一基數

(cardinal) 指標，其序數性質會令單一赫氏指標值不具任何意義。因此，HHI 只能比較集中度高低，卻不能說明集中度的絕對大小。Agiobenio (2000)取赫氏指標之平方根，定義為 Herfindahl-Hirschman-Agiobenio Index (簡稱 HHA 指標)：

$$\mathrm{HHA} = \sqrt{HHI} \tag{2.4}$$

他認為此種修正方式能讓我們能更好的理解赫式指標。過去學者衡量貿易集中度時，亦有使用過類似的函數形式對赫式指標進行調整 (Hirschman, 1964; Hirschman, 1945)。

2.4.3. Generality Index

Trajtenberg et al. (1997) 和 Hall et al. (2005) 定義 Generality Index (簡稱 G 指標) 如下：

$$\mathrm{G} = 1 - HHI \tag{2.5}$$

這些學者認為，在衡量技術集中度時，G 指標比赫氏指標更容易理解。因為技術領域數越多，代表企業越多角化。以 G 指標衡量時，技術領域數越多，G 指標越高；以赫氏指標衡量時，技術領域數越多，赫氏指標則下降。這種處理方式將使新指標仍然介於 0 和 1 之間。因此，他們認為以 G 指標衡量技術集中度時，在解讀上會比赫氏指標來的更為清楚。

2.4.4. Adjusted Generality Index

Hall (2005)認為在使用專利資料或是專利引證資料時，對於某些技術領域數

較少的企業，會低估其技術集中度。因此，Hall (2005)建議使用 Adjusted Generality Index (簡稱 Adj G 指標)，修正其技術集中度。Adjusted Generality Index 定義為：

$$\text{Adj G} = \frac{N}{N-1}(1 - HHI) \tag{2.6}$$

使用 Adj G 指標時，技術領域數越多，調整的幅度就越少；技術領域數越少，調整的幅度就越多。然而，這一指標並無法將其值域限定在 0 和 1 之間。舉例而言，在 N = 4，HHI = 0.2 時，Adj G 則為 1.0667。

2.5. 總專利數 M 的影響

透過上節的介紹，學者在對赫氏指標做修正時，多以對赫氏指標的整體(如 HHA)或是對 N(如 G 與 Adj G)進行修正。學者過去多使用赫氏指標衡量產業集中度，多重在市場內廠商數量與廠商市佔率之間的大小比較，因此多以廠商數量(N)多寡作為修正重點。即便之後應用到衡量企業技術集中度，所討論的企業也皆為具有相當技術規模的大型企業，此時學者多將注意力放在企業技術領域數量(N)。然而，時至今日，中小企業興起，利用赫氏指標衡量技術領域數時若單著重於企業技術領域數，而忽略了企業本身的技術規模，則有可能產生另外一種偏誤。

一般而言，在相同產業中，中小企業的技術規模會少於大型企業的技術規模。這一現象最明顯的證據就是中小企業的專利總量通常會少於大型企業的專利總量。然而，以專利資料或是專利引證資料衡量企業技術集中度時，我們會發現企業的技術領域數會受限於企業的技術規模 (Chen, et al., 2010)。因此，技術規模小的企業，其技術領域數量是受限的[2]。此時，若以赫氏指標衡量其技術集中度，則難以呈現企業的真正技術策略 (Jang, et al., 2011)。

若能將專利總量納入技術集中度的衡量，則可將企業的技術規模的影響納入企業技術集中度的考慮。如此即可將技術規模的影響同時納入考慮，在具有足夠大的專利數量後，我們即可認定企業的技術領域數的選擇是沒有受到限制的。Jang et. al (2010)即曾經將總專利數(M)的影響納入赫氏指標的計算。然而，納入了總專利數的影響後，赫氏指標的計算卻產生了新的問題。最主要的問題在於納入了總專利數影響後的赫氏指標，其上下界並不齊一。舉例而言，某甲、某乙參加考試皆得到 80 分，然而某甲參加的考試評分標準為[40, 90]，某乙參加的考試

[2] 就數學上來說，技術領域數不會大於專利總數 $M \ge N$。舉例而言，若一企業擁有三個不同領域的技術，則表示該企業必然擁有至少三個以上的專利。

評分標準為[0, 100]，儘管某甲某乙最後成績相同，這一結果並不表示某甲與某乙的考試表現一樣出色。赫氏指標納入總專利數影響後，其上下界會隨著總專利數的大小而變動。此時，赫氏指標就不能準確的跨企業進行技術集中度的比較。

為了解決上述問題，下一章，我們將透過數學推導，先了解以赫氏指標衡量總專利數小的企業會有多大的誤差。在第五章，我們將介紹一個簡單的線性修正方式，以協助我們能夠以赫氏指標衡量總專利數小的企業的技術集中度。

第三章　赫氏指標的誤差

總專利數(M)的多寡會影響技術領域數(N)的數量。總專利數(M)少的時候，技術領域數(N)的數量會被限制，此時，會陷入 Hall (2005)所闡述的技術領域數(N)少的情形，使得企業的技術集中度被低估。只有在總專利數(M)夠多的情況下，企業才有機會擁有足夠多的技術領域數(N)，此時方能準確的以赫氏指標計算企業的集中度。

3.1. 赫氏指標的上界

赫氏指標的上衔可以下式表示：

$$\max_{\{M_i\}_{i=1,\ldots,N}} HHI \tag{3.1}$$

其中，$\Sigma M_i = M$，$M \geq N > 1$。

在衡量技術集中度時，赫氏指標(HHI)多以專利資料計算企業的技術集中度。由於專利資料為間斷資料，為了簡化討論，我們僅討論間斷資料的情形。假設對每一個技術領域 i，該領域專利數 M_i 必大於或等於 1。給定技術領域數(N)的數量為 N，赫氏指標在專利數數列{Mi}分配如下時，會達到最大[3]：

僅一個技術領域擁有(M-N+1)項的專利，而其他(N-1)個技術領域各擁有 1 項專利。

標示符合此一條件的數列{Mi}為$\{Mi\}^U$，將$\{Mi\}^U$帶入赫氏指標 HHI 之中，

[3] 關於此一命題之證明請見附錄一

標示為 HHI^U。此時，HHI 達到最大：

$$\mathrm{HHI}^U \equiv HHI(\{M_i\}^U|N) \tag{3.2}$$

這表示在給定技術領域數 N 的情況下，若一家企業的赫氏指標達到最大，代表有一個技術領域 i，其專利數量佔總專利數量的比率 s_i 為(M-N+1)/M，且在其他的技術領域之中，其專利數量佔總專利數量的比率 s_j，$i\neq j$，皆為 1/M。

透過計算，可以得到 HHI^U 的值如下：

$$\mathrm{HHI}^U = 1\times\left(\frac{M-N+1}{M}\right)^2 + (N-1)\left(\frac{1}{M}\right)^2 \tag{3.3}$$

經過化簡(3.3)式(過程請參考附錄二)，我們得到下式：

$$\mathrm{HHI}^U = \frac{(2M-N)+(M-N)^2}{M^2} \tag{3.4}$$

(3.4)式為赫氏指標(HHI)的上界。

在獲得足夠多筆專利數時(亦即總專利數(M)趨近於無限大時)，此時赫氏指標的上界 HHI^U 會成為：

$$\lim_{M\to\infty} \mathrm{HHI}^U = 1 \tag{3.5}$$

儘管技術領域數(N)同樣有機會趨近於無限大，然而在本文之中，我們假定技術領域數(N)為常數。根據(3.2)式，我們係以 N 為條件下對 HHI 作分析，因此 N 為我們的控制變數；另一方面，根據實際的企業專利資料，企業專利總量與其技術領域數也鮮少呈現線性關係，因此M與N同時趨近無限大的情形較為少見。

因此，總專利數(M)趨近於無限大時，假定技術領域數(N)不變，尚稱合理。

相對於赫氏指標在計算產業集中度時的廠商數目，該項目在計算技術集中度時代表的則是企業的技術領域數。而相對於赫氏指標計算產業集中度時的各廠商的市場產值，該項目在計算技術集中度時，則是代表一個技術領域指中所擁有的所有專利。這二者之對照表簡列如下：

表 1：赫氏指標在技術集中度及市場集中度各變數代表意義的異同

赫氏指標 **HHI**	技術集中度	市場集中度
i	技術領域別	廠商別
M	總專利數量	市場總產量
s_i	在領域 i 中的專利數佔該企業總專利數的比率	廠商 i 的市場產量佔市場總產量的比率

(3.5)式所計算出的上界會與一般應用在衡量產業集中度的赫氏指標的的上界相同。

3.2. 赫氏指標的下界

赫氏指標的下界可表示為：

$$\min_{\{M_i\}_{i=1,\dots,N}} HHI \tag{3.6}$$

其中，$\Sigma M_i = M$，$M \geq N > 1$。

假設對每一個技術領域 i，該領域專利數 M_i 必大於或等於 1，在給定技術領域數(N)的情況下，赫氏指標在專利數數列{Mi}分配如下時，會達到最小：

每一技術領域 i 的專利數量 M_i 皆平均分配。

定義符合此一條件的{Mi}為$\{Mi\}^L$。將$\{Mi\}^L$帶入赫氏指標 HHI 之中，標示為 HHI^L。此時，HHI 達到最小：

$$\mathrm{HHI}^L \equiv HHI(\{M_i\}^L|N) \tag{3.7}$$

由於專利資料的間斷特性，N 不一定能夠整除 M。因此，我們不能排除 N 不整除 M 的情形。定義正整數 γ 為 M 除以 N 的餘數：

$$\gamma \equiv \mathrm{M} - \alpha\mathrm{N} \tag{3.8}$$

此時，γ 界於[0,N)，其中，α 為令上式成立的最大正整數。

將$\{Mi\}^L$帶入 HHI，則我們可以將 HHI^L 改寫成下式：

$$\mathrm{HHI}^L = (N-\gamma)\times\frac{\left(\frac{M-\gamma}{N}\right)^2}{M^2} + \gamma\times\frac{\left(\frac{M-\gamma}{N}+1\right)^2}{M^2} \tag{3.9}$$

這一個式子表示，在(N-γ)個技術領域擁有(M-γ)/N 個專利，γ 個技術領域擁有(M+N-γ)/N 個專利時，HHI 會達到最小值[4]。經過化簡(附錄二)，(3.9)式可化簡成下式：

$$\mathrm{HHI}^{L} = \frac{M^2 + \gamma N - \gamma^2}{M^2 N} \tag{3.10}$$

在餘數 γ 為 0 時，$\mathrm{HHI}^{\mathrm{L}}$ 會變成 1/N。此時，赫式指標下界 $\mathrm{HHI}^{\mathrm{L}}$ 不受 M 的影響。

在總專利數(M)趨近於無限大時，$\mathrm{HHI}^{\mathrm{L}}$ 等於：

$$\lim_{M\to\infty} \mathrm{HHI}^{L} = \frac{1}{N} \tag{3.11}$$

這一結果和餘數 γ 為零時是相等的。

[4] 關於此一命題之證明，請見附錄一。

3.3. 赫氏指標誤差距

為了瞭解總專利數(M)的大小對赫氏指標有多少影響，我們利用上節推導出來的赫氏指標上界，$\mathrm{HHI}^{\mathrm{U}}$，與理想中的赫氏指標上界進行比較。[5]

利用赫式指標計算產業集中度時，並不存在上下界不齊一的問題。由於總產值(M)和廠商家數(N)之間並沒有關聯，因此，計算赫式指標時無需考慮 M 的影響。然而，將赫式指標應用在計算以專利資料為基礎的技術集中度時，M 與 N 之間則產生聯繫。在 M 小的時候，N 是被限制住的，因為技術領域數 N 必小於總專利數 M。此時，若忽略 M 的影響，則有可能錯估企業的技術集中度(Jang et al., 2011)。唯有在總專利數 M 足夠大的時候，技術領域數 N 的選擇才不會受限，此時所衡量的技術集中度方能正確的呈現一家企業的技術策略。

數學上來說，若一家企業的實際赫式指標值上界($\mathrm{HHI}^{\mathrm{U}}$)與理想狀態下的赫式指標值上界($\lim_{\mathrm{M}\to\infty}\mathrm{HHI}^{\mathrm{U}}$)相合，則可認定以赫式指標衡量該企業的技術集中度是沒有偏誤的。

定義赫氏指標誤差距 d 為$\lim_{\mathrm{M}\to\infty}\mathrm{HHI}^{\mathrm{U}}$與 $\mathrm{HHI}^{\mathrm{U}}$ 之間的差距：

$$\mathrm{d} \equiv \lim_{M\to\infty}\mathrm{HHI}^{U} - \mathrm{HHI}^{U} \tag{3.12}$$

$$\mathrm{d} = \frac{(2M-N)(N-1)}{M^2} \tag{3.13}$$

由於 $M \geq N > 1$，因此 $1 > d > 0$。在 M 趨近於無限大時，d 趨近於 0：$\lim_{M\to\infty} d = 0$。

[5] 赫氏指標下界不會受到總專利數 M 的影響而改變大小，因此在比較實際赫氏指標值和極限時的赫氏指標值，爲了簡化起見，省略下界的討論。

赫氏指標誤差距 d 對 M 做一階差分(附錄三)，發現$\frac{\Delta d}{\Delta M} < 0$。這說明了總專利數(M)越多，則赫氏指標誤差距 d 會越小。

3.4. 最大誤差距比例

在給定我們能夠容忍的赫氏指標誤差距(d)，定義為 d^*，我們可反推最小專利總數(M^d)。如此一來，我們就能判斷一家企業的專利組合(portfolio)適不適合以赫氏指標來衡量其技術集中度。

在給定最小赫氏指標誤差距 d^*,實際的赫氏指標誤差距 d 應不大於最小赫氏指標誤差距 d^*：

$$d^* \geq d = \frac{(2M-N)(N-1)}{M^2} \tag{3.14}$$

為了讓最後的結果有意義，我們假設 d^*小於 1，亦即我們必須設定一個誤差小於 1 的數值($d^*<1$)。令 $M = r_d N$，其中 r_d 為 M、N 比。最小 r_d^*應大於 1，因為專利總數 M 應不小於技術領域數 N。將 r_d 帶入上式，我們可以得到下式：

$$d^* \geq \frac{(2r_d-1)(N-1)}{{r_d}^2 N} \tag{3.15}$$

對上式移項，我們可以得到下式：

$$\frac{Nd^*}{(N-1)}{r_d}^2 - 2r_d + 1 \geq 0 \tag{3.16}$$

重新整理上式，我們可得到下式：

$$\left(r_d - \frac{(N-1)}{Nd^*}\right)^2 \geq \left(\frac{N(1-d^*)-1}{Nd^*}\right)\left(\frac{N-1}{Nd^*}\right) \tag{3.17}$$

對上式不等號左右兩側同時開平方，我們可以求解如下：

$$r_d \geq \frac{(N-1)+\sqrt{(N(1-d^*)-1)(N-1)}}{Nd^*} \;\cup$$

$$r_d \leq \frac{(N-1) - \sqrt{(N(1-\mathrm{d}^*)-1)(N-1)}}{N\mathrm{d}^*} \quad (3.18)$$

根據假設，r_d^*必大於 1，然而上式 r_d之下界，並不符合此一標準(附錄四)，因此，我們可以得到最小 r_d^*為：

$$r_d^* = \frac{(N-1) + \sqrt{(N(1-\mathrm{d}^*)-1)(N-1)}}{N\mathrm{d}^*} \quad (3.19)$$

(3.19)式的結果假定最小赫氏指標誤差距 d^*必介於(0, 1)之間。最小赫氏指標誤差距 d^*越小，則 r_d^*越大[6]。值得注意的是，d^*的設定並無法直接告訴我們企業的專利數(M)應該為多少，而是告訴我們企業專利數(M)與企業的技術領域數(N)之間的倍數應該為多少。

[6] $\frac{\partial r_d^*}{\partial \mathrm{d}^*} < 0, \text{for } \mathrm{d}^* \in (0,1)$

3.5. 赫氏指標誤差率

利用與上節赫氏指標誤差距類似的概念，我們將赫氏指標的下界，HHI^{L}，同樣的納入考慮。利用其與在極值時的赫氏指標上下界做比較，我們可以得出一個比率，赫氏指標誤差率 s。定義赫氏指標誤差率 s 如下：

$$\mathrm{s} \equiv 1 - \mathrm{r} \tag{3.20}$$

其中，r 相當於實際赫氏指標上下界之距離與在極限時赫氏指標上下界之距離的比值，定義如下：

$$\mathrm{r} \equiv \frac{\mathrm{HHI}^{U} - \mathrm{HHI}^{L}}{\lim\limits_{M\to\infty}(\mathrm{HHI}^{U} - \mathrm{HHI}^{L})} \tag{3.21}$$

$$\mathrm{r} = \frac{(M-N)^2}{M^2} - \frac{\gamma\,(N-\gamma)}{M^2(N-1)} \tag{3.22}$$

帶入前式所計算出來的數值，並加以整理，我們可以得到赫氏指標誤差率 s 如下：

$$\mathrm{s} = \frac{(2M-N)N}{M^2} + \frac{\gamma\,(N-\gamma)}{M^2(N-1)} \tag{3.23}$$

為了令(3.23)式不會因為分母為零而沒有定義，因此，M 將限制大於 N，而並非如赫氏指標誤差距一樣為大於等於 N。由於 M > N > 1，因此 1 > s > 0。在 M 趨近於無限大時，s 趨近於 0：$\lim_{M\to\infty} s = 0$。我們將誤差率 s 對 M 做一階差分(附錄三)，發現$\frac{\Delta \mathrm{s}}{\Delta \mathrm{M}} < 0$。這說明了總專利數(M)越多，則赫氏指標誤差率 s 會越小。

3.6. 最大誤差率比例

給定我們能夠接受的最小赫氏指標誤差率 s^*，我們可推算專利總數(M)與技術領域數(N)的最小比率為何。

給定最小赫氏指標誤差率 s*，實際赫氏指標誤差率 s 應不大於最小赫氏指標誤差率 s^*：

$$s^* \geq s = \frac{(2M-N)N}{M^2} + \frac{\gamma\,(N-\gamma)}{M^2(N-1)} \tag{3.24}$$

由於$\frac{\gamma\,(N-\gamma)}{M^2(N-1)}$恆不為負，在餘數 γ 為零時，$s^* \geq \frac{(2M-N)N}{M^2}$；在餘數 γ 不為零時，則回歸到(3.24)式。在專利總數(M)小的時候，$\frac{\gamma\,(N-\gamma)}{M^2(N-1)}$這一項會對誤差率比例有重要的影響。為了顧及到餘數 γ 可能造成的誤差，(3.24)式右側應考慮$\frac{\gamma\,(N-\gamma)}{M^2(N-1)}$可能造成的最大影響。在計算出$\frac{\gamma\,(N-\gamma)}{M^2(N-1)}$可能造成的最大影響[7]後，我們可將(3.24)式改寫如下：

$$s^* \geq \frac{(2M-N)N}{M^2} + \frac{(\frac{N}{2})^2}{M^2(N-1)} \tag{3.25}$$

為了瞭解專利總數(M)和技術領域數(N)之間的關係，我們透過和 3.4 節類似的方法，求出其最適比率。令 $M = r_sN$，其中 r_s 為 M、N 的比例。由於專利總數 M 必不小於技術領域數 N，因此最小的 r_s^*必大於 1。將 r_s 帶入上式，我們可以得到下式：

[7] $\max_\gamma \frac{\gamma\,(N-\gamma)}{M^2(N-1)}$, for all $\gamma \in [0, N)$，在 γ =N/2 時，$\frac{\gamma\,(N-\gamma)}{M^2(N-1)}$有極大值$\frac{(\frac{N}{2})^2}{M^2(N-1)}$。

$$s^* \geq \frac{(2r_s - 1)}{{r_s}^2} + \frac{1}{4(N-1)r_s^2} \tag{3.26}$$

對上式移項，我們可以得到下式：

$$4(N-1)s^*{r_s}^2 - 8(\mathrm{N}-1)r_s + 4(N-1) - 1 \geq 0 \tag{3.27}$$

重新整理(3.27)式，我們得到下式：

$$\left(r_s - \frac{1}{s^*}\right)^2 \geq \frac{1 + 4(N-1)\left(\frac{1}{s^*} - 1\right)}{4(N-1)s^*} \tag{3.28}$$

對(3.28)式開平方，我們得到 r_s 的範圍如下：

$$r_s \geq \frac{1}{s^*} + \sqrt{\frac{1 + 4(N-1)\left(\frac{1}{s^*} - 1\right)}{4(N-1)s^*}} \cup$$

$$r_s \leq \frac{1}{s^*} - \sqrt{\frac{1 + 4(N-1)\left(\frac{1}{s^*} - 1\right)}{4(N-1)s^*}} \tag{3.29}$$

根據前文對 r_s^* 的假設，r_s^* 必大於 1，因此 r_s 的下界並不符合此一標準(附錄四)。因此，我們可以知道最大誤差率比例 r_s^* 為：

$$r_s^* = \frac{1}{s^*} + \sqrt{\frac{1 + 4(N-1)\left(\frac{1}{s^*} - 1\right)}{4(N-1)s^*}} \tag{3.30}$$

最小赫氏指標誤差率 s^* 必介於(0 1]之間。最小誤差率 d^* 越小，則 r_s^* 越大[8]。

[8] $\frac{\partial r_s^*}{\partial s^*} < 0, \text{for } d^* \in (0,1]$

s^*的設定同樣的無法直接告訴我們企業的專利數(M)應該為多少，而是告訴我們企業專利數(M)與企業的技術領域數(N)之間的倍數應該為多少。

第四章　赫氏指標誤差距 d 和赫氏指標誤差率 s 的實際應用

本章我們將利用 Qualcomm 和 Mediatek 兩家科技公司的歷年的專利資料，分別衡量其誤差距 d 與誤差率 s。

4.1. 資料來源和計算方法

我們透過連穎科技公司(Learning Tech Company)所研發出來的 Patentguider 軟體，蒐集了 Qualcomm 自 1986 年至 2010 年以及 Mediatek 自 1997 年至 2010 年，在美國專利商標局(USPTO)所申請的專利資料。

我們計算每一家公司於特定年份下的技術集中度。由於專利技術具有技術累積及技術折舊兩種特性，在參考以往文獻 (Hall, et al., 2005)後，我們將過去兩年的專利一併納入計算。舉例而言，1999 年 Qualcomm 的技術集中度即採用了 1997、1998 及 1999 三年的專利數資料計算而成。

專利所屬年份係以專利的申請日做為界定標準；而專利技術領域的分類，係以四位數國際專利分類標準(IPC)進行分類。

由於專利資料會有截斷(Truncation)的特性，為了避免截斷資料所帶來的誤差，我們僅採用至 2007 年的資料。

4.2. 實證結果比較

表 2 及表 3 分別為 Qualcomm 及 Mediatek 各年份的 HHI 值、M 值、N 值、其赫氏指標誤差距 d 值與赫氏指標誤差率 s 值。

表 2 Qualomm 的 1988-2007 的 HHI、M、N 及 d、s 値

Year	HHI	M	N	d	s
1988	0.1837	7	6	0.8163	1.0000
1989	0.157	11	9	0.8595	0.9814
1990	0.1235	18	13	0.8519	0.9331
1991	0.1777	22	11	0.6818	0.7500
1992	0.1479	26	15	0.7663	0.8257
1993	0.1312	40	18	0.6588	0.6996
1994	0.1721	88	23	0.4347	0.4549
1995	0.1581	157	24	0.2706	0.2826
1996	0.1616	258	30	0.2117	0.2191
1997	0.0948	336	34	0.1865	0.1922
1998	0.1203	444	37	0.1554	0.1597
1999	0.1243	608	40	0.1241	0.1273
2000	0.1296	693	44	0.1202	0.1230
2001	0.1415	904	50	0.1054	0.1076
2002	0.1504	994	46	0.0884	0.0904
2003	0.1664	1084	51	0.0901	0.0919
2004	0.1298	986	47	0.0911	0.0931
2005	0.1041	898	51	0.1082	0.1104
2006	0.0851	837	56	0.1270	0.1293
2007	0.0775	649	56	0.1622	0.1652

表 3 Mediatek 的 1988-2007 的 HHI、M、N 及 d、s 値

Year	HHI	M	N	d	s
1999	0.3333	6	3	0.5	0.7500
2000	0.5918	7	3	0.449	0.6939
2001	0.308	17	7	0.5606	0.6609
2002	0.1616	76	15	0.3321	0.3560
2003	0.1356	165	23	0.2481	0.2595

2004	0.1319	291	35	0.2196	0.2262
2005	0.116	362	39	0.1986	0.2039
2006	0.1032	388	43	0.2045	0.2094
2007	0.0887	327	39	0.2186	0.2244

從表 2 和表 3 我們可以發現兩家企業的赫氏指標誤差距及赫氏指標誤差率，都會隨著總專利數(M)的增加而下降。在企業總專利數(M)小的時候，都有極高的赫氏指標誤差距或是赫氏指標誤差率，隨著企業專利總數的增加，赫氏指標誤差距或是赫氏指標誤差率都明顯地下降。

根據(3.13)式和(3.23)式，造成這一結果的主要原因，是因為企業總專利數(M)小的時候，M 值和 N 值十分相近。在 M 小的時候，分子和分母相近，因此誤差就會較大；而隨著 M 增加，分母以平方倍的速度上升，此時誤差值就會明顯的往下降。

直覺上，企業專利總數小的時候，代表企業技術規模較小，因此企業在選擇是否要拓展技術領域時時受到限制的。此時以赫氏指標衡量企業的技術集中度時，無法分辨企業是因為受限於技術規模而選擇如此的技術廣度(patent scope)或是企業一開始就打定選擇如此的技術廣度。因此，此時採用赫氏指標衡量企業的技術集中度，得到誤差較大。隨著企業技術規模的增加，我們能夠辨明企業的真正選擇，使用赫氏指標衡量企業技術集中度，誤差就會下降。

這一結果說明了使用赫氏指標計算企業技術集中度時，對擁有較少的總專利數(M)的企業，容易發生較高的誤差。這一結果和 Chen et al. (2010), Jang et al. (2010), Jang et al. (2011)所做的猜測是相同的。

4.3. 最大誤差距比例與最大誤差率比例的應用

透過上節的計算，我們發現無論是 Qualcomm 或 Mediatek，其赫氏指標誤差距和赫氏指標誤差率大致上在(0.15~0.2)時，會趨於穩定。有鑑於此，本文將設定最小赫氏指標誤差距和最小赫氏指標誤差率為 0.2[9]。在此一標準下，我們可觀察企業的最大誤差距比例 r_d 和最大誤差率比例 r_s，以及最小誤差距專利總數 M_d* 和最小誤差率專利總數 M_s*，分別為何。

表 4 Qualcomm 1988-2007 的 M 值、N 值、rd 值、Md 值與 rs 值與 Ms 值

Year	M	N	r_d	M_d	r_s	M_s
1988	7	6	7.7991	47	9.5000	57
1989	11	9	8.3571	75	9.4896	85
1990	18	13	8.7003	113	9.4838	123
1991	22	11	8.5599	94	9.4861	104
1992	26	15	8.8032	132	9.4821	142
1993	40	18	8.9147	160	9.4803	171
1994	88	23	9.0359	208	9.4785	218
1995	157	24	9.0541	217	9.4782	227
1996	258	30	9.1377	274	9.4770	284
1997	336	34	9.1771	312	9.4764	322
1998	444	37	9.2010	340	9.4760	351
1999	608	40	9.2213	369	9.4757	379
2000	693	44	9.2441	407	9.4754	417
2001	904	50	9.2715	464	9.4750	474
2002	994	46	9.2541	426	9.4752	436
2003	1084	51	9.2754	473	9.4749	483
2004	986	47	9.2587	435	9.4752	445
2005	898	51	9.2754	473	9.4749	483
2006	837	56	9.2930	520	9.4747	531
2007	649	56	9.2930	520	9.4747	531

[9] 這一標準(0.2)可能會因爲企業性質不同而有所影響。本文僅以此一標準做爲示範，並不表示此一標準爲一通用標準。找尋更爲穩定可靠的赫氏指標誤差標準超出本文討論範圍。特此附註。

表 5 Mediatek 1988-2007 的 M 值、N 值、rd 值、Md 值與 rs 值與 Ms 值

Year	M	N	r_d	M_d	r_s	M_s
1999	6	3	6.1222	18	9.5415	29
2000	7	3	6.1222	18	9.5415	29
2001	17	7	8.0383	56	9.4954	66
2002	76	15	8.8032	132	9.4821	142
2003	165	23	9.0359	208	9.4785	218
2004	291	35	9.1855	321	9.4762	332
2005	362	39	9.2149	359	9.4758	370
2006	388	43	9.2388	397	9.4755	407
2007	327	39	9.2149	359	9.4758	370

在表 4、表 5 之中，斜體的年份表示實際的專利總數(M)小於最小誤差距專利總數(M_d)或最小誤差率專利總數(M_s)的年份。在以最小赫氏指標誤差距(d^*)為 0.2 及最小赫氏指標誤差率(s^*)為 0.2 為前提下，Qualcomm 在 1996 年之後，專利總數(M)方達到最小誤差距專利總數(M_d)或最小誤差率專利總數(M_s)所設定的標準；而 Mediatek 則是在 2004 年之後，其實際專利總數(M)方才接近標準。

4.4. 小結

透過上述的實際資料的計算，我們發現，兩家企業在總專利數少的時候，都有極高的赫氏指標誤差距或是赫氏指標誤差率。這說明了使用赫氏指標衡量少專利數的企業時，是會產生誤差。這一結果和 Chen et al. (2010), Jang et al. (2010), Jang et al. (2011)所做的猜測大致相同。亦即使用赫氏指標在衡量專利總數量較少的企業時，較容易出現偏誤。

根據實際資料的結果，倘若我們使用赫氏指標時，在 0.2 的最小赫氏指標誤差距(d^*)或在 0.2 的最小赫氏指標誤差率(s^*)的設定下進行計算，總專利數(M)約為技術領域數(N)的 8~10 倍。對許多新興企業而言，在發展初期，由於專利數量較少，這一個條件將較難滿足。此時使用赫氏指標計算這些企業的技術集中度時，則容易發生誤差。

有鑑於此，我們將在下一章介紹調整赫氏指標的方法。透過調整後的赫氏指標計算，對於擁有專利數量較少的企業，也能夠有效的降低其誤差。

第五章　赫氏指標的調整與應用

透過第三章第一節和第二節的討論，我們知道赫氏指標的上下界會隨著專利總數(M)的大小而改變。這表示專利總數(M)不同的赫氏指標是不能共同比較的。舉例而言，A 指標界於[10, 100]之間，B 指標界於[50, 200]之間。如果以 A 指標衡量甲公司技術集中度為 50；以 B 指標衡量乙公司技術集中度為 60。我們單以 50、60 的結果進行比較兩公司何者技術集中度較高，是沒有意義的。因為這兩家公司並不是以相同的指標同時進行衡量，因此即使 60 > 50，我們很難說乙公司的技術集中度必高於甲公司。為了解決赫氏指標的這項問題，我們將在本章發展出一個新指標，轉換後赫氏指標(Herfindahl-Hirschman Transformed Index，HHT)。透過這一指標，我們相信能夠解決赫氏指標在企業技術規模小時，衡量誤差大的問題。

5.1.轉換後赫氏指標(HHT)

如前言所述，赫氏指標同樣面對值域不同而不能比較的問題。由於赫氏指標值域隨著專利總數(M)的大小而改變，這表示不同專利總數(M)下的赫氏指標實際上是不同的指標。(M,N)=(10, 3)的赫氏指標的值域為[0.34 0.66]；(M,N)=(20, 3)的赫氏指標值域為[0.335, 0.815]。儘管在專利總數(M)大時，赫氏指標的上下界會分別收斂到[1, 1/N]，然而為了讓赫氏指標在專利總數(M)小的時候也能衡量企業的技術集中度，我們需要對赫氏指標做轉換。透過這一轉換，我們希望能夠解決專利總數(M)對赫氏指標造成的誤差。

定義轉換後赫氏指標為(Herfindahl-Hirschman Transformed Index, 簡稱 HHT)如下：

$$\mathrm{HHT} \equiv \frac{HHI - \mathrm{HHI}^L}{\mathrm{HHI}^U - \mathrm{HHI}^L} \tag{5.1}$$

(5.1)式係計算將赫氏指標(HHI)在上下界中的相對位置。儘管不同的專利總數(M)下，赫氏指標的值域會隨著專利總數(M)的大小改變，但是透過這一轉換，我們即不再比較企業間的赫氏指標的絕對數值，而是相對數值。經過化簡，我們可將(5.1)式改寫如下式：

$$\mathrm{HHT} = \frac{M^2 N}{(M-N)^2(N-1) - \gamma N + \gamma^2}\mathrm{HHI} - \frac{M^2 + \gamma N - \gamma^2}{(M-N)^2(N-1) - \gamma N + \gamma^2} \tag{5.2}$$

其中，γ為 M 除以 N 後的餘數，$\gamma \in [0, \mathrm{N})$。[10]

由於 HHT 旨在處理專利總數(M)較少時，以 HHI 衡量企業技術集中度時可能造成的誤差。在專利總數(M)較少時，餘數γ的影響仍然十分重要，因此不可輕易忽略。

[10] 爲了避免因爲分母小於零造成無法定義 HHI 的情形，HHT 使用上有一個限制，即 M 必須符合 $\mathrm{M} > N + \sqrt{\gamma \frac{N-\gamma}{N-1}}$的條件，即 M 大約要爲 N 的 1.5 倍時，HHT 才能良好的運作。

5.2. HHT 的實際應用

我們利用第三章發展出來的概念，定義 HHT 之誤差距與誤差率如下：

$$\mathrm{d^{HHT}} \equiv \lim_{\mathrm{M}\to\infty} \mathrm{HHT^U} - \mathrm{HHT^U} \tag{5.3}$$

$$\mathrm{s^{HHT}} \equiv 1 - \frac{\mathrm{HHT^U} - \mathrm{HHT^L}}{\lim_{\mathrm{M}\to\infty}(\mathrm{HHT^U} - \mathrm{HHT^L})} \tag{5.4}$$

根據(5.2)式，我們知道 HHT 與 HHI 係為一線型關係，由於$\frac{\mathrm{M^2N}}{(\mathrm{M-N})^2(\mathrm{N}-1)-\gamma\mathrm{N}+\gamma^2}$恆正，因此下式會成立：

$$\mathrm{HHT^U} = \frac{\mathrm{M^2N}}{(\mathrm{M-N})^2(\mathrm{N}-1) - \gamma\mathrm{N} + \gamma^2}\mathrm{HHI^U} - \frac{\mathrm{M^2} + \gamma\mathrm{N} - \gamma^2}{(\mathrm{M-N})^2(\mathrm{N}-1) - \gamma\mathrm{N} + \gamma^2} \tag{5.5}$$

$$\mathrm{HHT^L} = \frac{\mathrm{M^2N}}{(\mathrm{M-N})^2(\mathrm{N}-1) - \gamma\mathrm{N} + \gamma^2}\mathrm{HHI^L} - \frac{\mathrm{M^2} + \gamma\mathrm{N} - \gamma^2}{(\mathrm{M-N})^2(\mathrm{N}-1) - \gamma\mathrm{N} + \gamma^2} \tag{5.6}$$

將(3.4)式和(3.10)式分別帶入上述二式，我們可以得到 $\mathrm{HHT^U}$ 和 $\mathrm{HHT^L}$ 如下：

$$\mathrm{HHT^U} = 1 \tag{5.7}$$

$$\mathrm{HHT^L} = 0 \tag{5.8}$$

利用(5.5)、(5.6)二式，我們可以求出極限狀態下的 HHT 的上下界分別為：

$$\lim_{\mathrm{M}\to\infty} \mathrm{HHT^U} = 1 \tag{5.9}$$

$$\lim_{\mathrm{M}\to\infty} \mathrm{HHT^L} = 0 \tag{5.10}$$

因此，$\mathrm{d^{HHT}}$ 和 $\mathrm{s^{HHT}}$ 皆為 0。這說明了 HHT 比 HHI 在以誤差距或是誤差率衡

量時，都有比較少的偏誤。透過下圖，我們可以看出以 HHI 和 HHT 衡量 Qualcomm 和 Mediatek 兩家公司的差異。

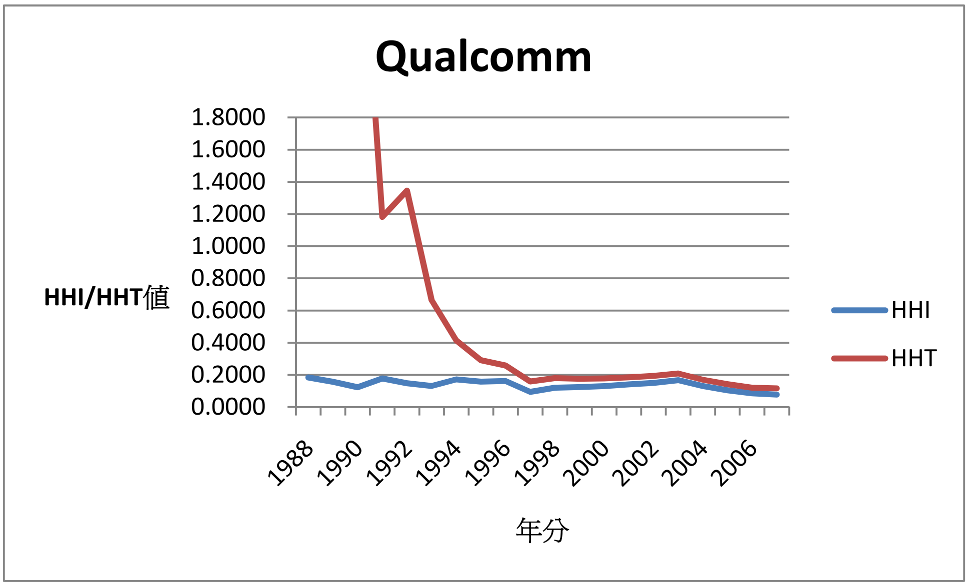

圖 1、Qualcomm 於 1988-2007 之 HHI 與 HHT 的比較圖

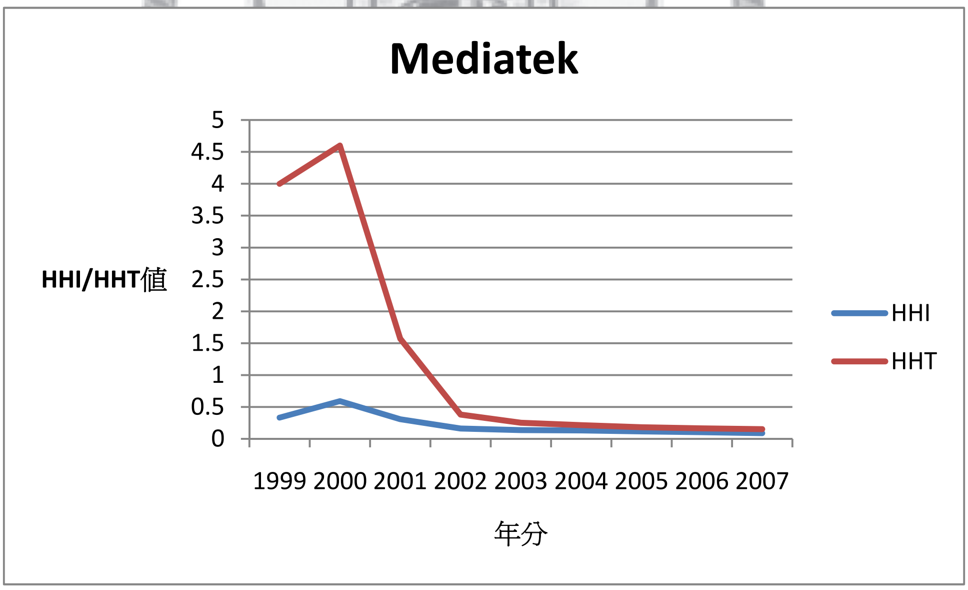

圖 2、Mediatek 於 1999-2007 之 HHI 與 HHT 的比較圖

HHT 給予專利總數較少的專利組合較高的集中數值。從 Qualcomm 早期如 1990 年時的專利組合以及 Mediatek 在 2002 年之前的專利組合，由於企業於該年分專利總數較少，其技術集中度較高。比起以 HHI 衡量該企業之技術集中度，

企業在專利總數少與專利總數多時，皆有類似的集中數值，HHT 所顯示的差異，在反應企業的研發策略時，可能更為精準。[11]

[11] 在 M 小的時候，HHT 不一定界於[0,1]。其上界可能大於 1。隨著 M 的增加，HHT 會收斂到[0,1]之間。這一特性說明了圖 1、圖 2 在兩家企業總專利數 M 小的時候爲何有大於 1 的 HHT 值。

5.3. HHT 與 Adjusted Generality Index

Hall (2005)在討論赫氏指標可能造成的誤差時，並未將專利總數(M)的影響考慮進去。本節將證明，Hall (2005)所發展出的 Adjusted Generality Index 係為 HHT 在極限狀態下($\lim_{M\to\infty} HHT$)的線性轉換。因此$\lim_{M\to\infty} HHT$擁有 Hall(2005)所宣稱的良好的不偏性質。

$$\lim_{M\to\infty} \mathrm{HHT} = \frac{N}{(N-1)}\mathrm{HHI} - \frac{1}{(N-1)} \tag{5.11}$$

根據(2.6)式，我們發現 Adjusted Generality Index 會等於$1 - \lim_{M\to\infty} HHT$。

$$Adj\ G = 1 - \lim_{M\to\infty} HHT \tag{5.12}$$

根據(5.11)式的結果，我們證明了 Hall (2005)所發展出來的 Adjusted Generality Index 係為 HHT 的一個特例。應用上，Adj G 與$\lim_{M\to\infty} HHT$在計算企業集中度時，方向是相反的：以 Adjusted Generality Index 係衡量企業技術的離散程度，企業技術越分散，則 Adjusted Generality Index 所顯示的數值就越高；$\lim_{M\to\infty} HHT$則計算企業技術的集中程度，企業技術越集中，則$\lim_{M\to\infty} HHT$的數值就越高。儘管二者概念類似，但是方向相反。

第六章　結論

隨著產業結構的改變，技術的研究發展不再是大型企業的專利。小型企業的研發行為在某些產業中益發重要 (Jang, et al., 2011)。如何準確的衡量這些中小型企業的技術集中度，是學者在研究廠商行為時重要的議題。若以過去衡量大型企業為主的技術集中度指標，衡量中小型企業的技術集中度時，就有可能會產生偏誤 (Hall, 2005; Chen, et al., 2010)。

本文以赫氏指標為例，討論專利總數(M)的大小將如何造成赫氏指標在計算企業技術集中度時的偏誤。我們發現赫氏指標的上下界均會隨著專利總數(M)的大小而改變，因此，以赫氏指標衡量企業技術集中度時，不能將不同專利總數(M)的企業一同衡量，否則可能會造成偏誤。

為了釐清偏誤的大小，我們定義了兩種偏誤的衡量方法：赫氏指標誤差距(d)與赫氏指標誤差率(s)。以 Qualcomm 和 Mediatek 兩家科技公司的實際資料，我們發現，在專利總數(M)小的情況下，兩家企業都有較高的赫氏指標誤差距及赫氏指標誤差率。隨著專利總數(M)的增加，赫氏指標誤差距和赫氏指標誤差率才會逐漸下降。這說明了若在專利總數(M)小的情況下使用赫氏指標衡量企業技術集中度，則有可能會產生嚴重的偏誤。

而後，我們更透過定義最小赫氏指標誤差距以及最小赫氏指標誤差率，以求得專利總數(M)和技術領域數(N)之間在何種比例下，方能較為準確的以赫氏指標衡量企業的技術集中度。透過 Qualcomm 和 Mediatek 兩家公司的實際資料，我們發現在要求最小赫氏指標誤差距或最小赫氏指標誤差率在 20%之下，則專利總數(M)大致上要是技術領域數(N)的 8~10 倍，才能較為準確的以赫氏指標衡量企

業的技術集中度。

最後，我們發展出了一個新的指標，轉換赫氏指標(Herfindahl-Hirschman Transformed Index，HHT)，可以解決赫氏指標在企業的專利總數(M)少的時候，上下界不齊一而不能以赫氏指標互相比較的問題。我們發現，在專利總數(M)趨近於無限大時，HHT 和 Hall (2005)所發展出的 Adjusted Generality Index 具有線性關係。這也說明了$\lim_{M\to\infty} HHT$和 Adjusted Generality Index 具有相同的不偏性質。

本文解決了以赫氏指標在衡量技術集中度時,技術集中度發生偏誤的問題。但是在本文討論的過程中，亦產生了許多新的疑問。到底在誤差要多小，赫氏指標才能良好的運作？赫氏指標在衡量產業集中度時會不會面對和其衡量技術集中度時相同的問題？HHT 能否應用到計算市場的產業集中度？其他的技術集中度指標是否也有相同的問題？這些新產生的問題同樣令人好奇。我們希望之後的研究，能夠對這些新產生的疑問亦有更為完整的解答，也希望透過技術集中度的討論，能對企業的創新行為有進一步的理解與啟發。

參考資料

Agiobeneobo, TJ. 2000. Market Structure, Concentration Indices and Welfare Cost. *Working Paper.* 2000.

Bikker, Jacob and Haaf, Katharina. 2002. Competition, concentration and their relationship: An empirical analysis of the banking industry. *Journal of Banking & Finance.* 2002, Vol. 26, pp. 2191–2214.

Breschi, Stefano, Lissoni, Francesco and Malerba, Franco. 2003. Knowledge-relatedness in firm technological diversification. *Research Policy.* 1 2003, Vol. 32, 1, pp. 3269–3287.

Chen, Jennifer H, Jang, Show-ling and Wen, Sonya H. 2010. Measuring technological diversification: identifying the effects of patent scale and patent scope. *Scientometrics.* 2010, Vol. 84, 1, pp. 265-275.

Chen, Yu-Shan and Chang, Ke-Chiun. 2009. Using neural network to analyze the influence of the patent performance upon the market value of the US pharmaceutical companies. *Scientometrics.* 2009, Vol. 80, 3, pp. 639–657.

Clarke, Roger and Davies, Stephen W. 1982. Market Structure and Price-Cost Margins. *Economica.* New Series, 8 1982, Vol. 49, 195, pp. 277-287.

Cowling, Keith and Waterson, Michael. 1976. Price-Cost Margins and Market Structure. *Economica.* New Series, 8 1976, Vol. 43, 171, pp. 267-274.

Forcarelli, Dario and Panetta, Fabio. 2003. Are Mergers Beneficial to Consumers? Evidence from the Market for Bank Deposits. *The American Economic Review.* 9 2003, Vol. 93, 4, pp. 1152-1172.

Garcia-Vega, Maria. 2006. Does technological diversification promote innovation? An empirical analysis for European firms. *Reasearch Policy.* 3 2006, Vol. 35, 2, pp. 230-246.

Hall, Bronwyn . 2005. A Note on the Bias in Herfindahl-type Measures Based on Count Data. University of California at Berkeley : NBER, 2005.

Hall, Bronwyn, Jaffe, Adam and Trajtenberg, Manuel. 2005. Market Value and Patent Citations. *RAND Journal of Economics.* 2005, Vol. 36, 1, pp. 16-38.

—. 2001. The NBER patent citations data file: lessons, insights and methodological tools. *National Bureau of Economic Research Working Paper.* 2001, 8498.

Herfindahl, Orris C. 1950. Concentration in the US Steel lnduslry. *Unpublished PhD dissertation.* 1950.

Hirschman, Albert. 1945. *National Power and the Structure of Foreign Trade.* Berkeley : University of California Press, 1945.

—. 1964. The Paternity of an Index. *The American Economic Review.* 9 1964, Vol. 54, 5, p. 761.

Hu, Albert and Jaffe, Adam. 2003. Patent citations and international knowledge flow: the cases of Korea and Taiwan. *International Journal of Industrial Organization.* 2003, Vol. 21, pp. 849-880.

Jacquemin, Alexis and Berry, Charles. 1979. Entropy Measure of Diversification and Corporate Growth. *The Journal of Industrial Economics.* 6 1979, Vol. 27, 4, pp. 359-369.

Jaffe, Adam and Lerner, Josh. 2001. Reinventing Public R&D: Patent Policy and the Commercialization of National Laboratory. *The RAND Journal of Economics.* 2001, Vol. 32, 1, pp. 167-198.

Jaffe, Adam. 1988. Demand and Supply Influences in R & D Intensity and Productivity Growth. *The Review of Economics and Statistics.* 8 1988, Vol. 70, 3, pp. 431-437.

—. 1986. Technological opportunity and spillovers of R&D: evidence from firms' patents, profits and market value. *The American Economic Review.* 1986, Vol. 76, 5, pp. 984-1001.

Jang, Show-ling, Chen, Jennifer H. and Tsui, Yung-hsu. 2011. A new index measuring technology diversification. *Working Paper.* 2011.

—. 2010. The decomposition of HHI. *Conference Paper.* The Development and Research Development Conference, Taipei, 2010.

Kwoka, John Jr and Ravenscraft, David. 1986. Cooperation v. Rivalry: Price-Cost Margins by Line of Business. *Economica.* New Series, 8 1986, Vol. 53, 211, pp. 351-363.

Malerba, Franco, Orsenlgo, Luigi and Peretto, Pietro. 1997. Persistence of innovative activities, sectoral patterns of innovation and international technological specialization. *International Journal of Industrial Organization.* 10 1997, Vol. 15, 6, pp. 801-826.

Mayer, Chirstopher and Sinai, Todd. 2003. Network Effects, Congestion Externalities, and Air Traffic Delays: Or Why Not All Delays Are Evil. *The American Economic Review.* 9 2003, Vol. 93, 4, pp. 1194-1251.

Meilak, Chris. 2008. Measuring export concentration: The implication for small states. *Bank of Valletta Review.* 2008, 37, pp. 35-48.

Miller, Douglas. 2006. Technology diversity, related diversification, and firm performance. *Strategic Management Journal.* 7 2006, Vol. 27, 7, pp. 601-619.

Nissan, Edward and Caveny, Jennifer. 2005. Aggregate Concentration in Corporate America: The Case of the Fortune 500. *The international journal of applied economics.* 3 2005, Vol. 2, 1, pp. 132-152.

Rhoades, Stephen. 1995. Market share inequality, the HHI, and other measures of the firm-composition of a market. *Review of Industrial Organization.* 1995, Vol. 10, 6, pp. 657-674.

Stigler, George. 1983. *The Organization of Industry.* Chicago and London : University of Chicago Press, 1983. pp. 33-34. 0-226-77432-5.

Straathof, Sebastiaan. 2007. Shannon's entropy as an index of product variety. *Economics Letters.* 2 2007, Vol. 97, 2, pp. 297-303.

Thoenig, Mathias and Verdier, Thierry. 2003. A Theory of Defensive Skill-Biased Innovation and Globalization. *The American Economic Review.* 6 2003, Vol. 93, 3, pp. 709-728.

Trajtenberg, Manuel, Henderson, Rebecca and Jaffe, Adam. 1997. University Versus Corporate Patents: A Window On The Basicness Of Invention. *Economics of Innovation and New Technology.* 1997, Vol. 5, 1.

U.S. Department of Justice and The Federal Trade Commission. 1997. Horizontal Merger Guidelines. [Online] 4 8, 1997. http://www.justice.gov/atr/public/guidelines/hmg.htm.

Vuko, Tina. 2010. Audit Market Structure: The Case of Croatian Listed Companies. *The Business Review.* 2010, Vol. 15, 2, pp. 266-271.

Watanabe, Chihiro, Matsumoto, Chihiro and Hur, Jae-Yong. 2004. Technological diversification and assimilation of spillover technology: Canon's scenario for sustainable growth. *Technological Forecasting & Social Change.* 11 2004, Vol. 71, 9, pp. 941-959.

附錄

附錄一 *(HHI^U 和 HHI^L 的證明)*

- **HHI^U 的證明**

令$HHI^U = \omega_1 A^2 + (1-\omega_1)B^2$，其中，$0 \le \omega_1 \le 1$，$A = \left(\frac{M-N+1}{M}\right) > B = \left(\frac{1}{M}\right)$。再令$HHI^* = \varphi_1 A^2 + \varphi_2 B^2 + (1-\varphi_1-\varphi_2)C^2$，其中，$0 \le \varphi_1$，$\varphi_2 \le 1$。

由於 C 必介於 A，B 之間，因此，可將 C 改寫成 A，B 之線性組合。令$C = \varepsilon A + (1-\varepsilon)B$，$0 \le \varepsilon \le 1$。改寫 HHI*爲：

$$HHI^* = \varphi_1 A^2 + \varphi_2 B^2 + (1-\varphi_1-\varphi_2)[\varepsilon A + (1-\varepsilon)B]^2 \quad (A1.1)$$

由於各比例相加之後必等於 1，因此$\omega_1 A + (1-\omega_1)B = \varphi_1 A + \varphi_2 B + (1-\varphi_1-\varphi_2)C$。將$C = \varepsilon A + (1-\varepsilon)B$ 代入 C，移項之後，可得到$[\varphi_1(1-\varepsilon) + \varepsilon(1-\varphi_2) - \omega_1]A + [\varepsilon\varphi_2 + (1-\varepsilon)(1-\varphi_1) - (1-\omega_1)]B = 0$。因爲 A、B 恆正，因此

$$\omega_1 = \varphi_1(1-\varepsilon) + \varepsilon(1-\varphi_2) \quad (A1.2)$$

$$(1-\omega_1) = \varepsilon\varphi_2 + (1-\varepsilon)(1-\varphi_1) \quad (A1.3)$$

若{Mi}^{U}無法令 HHI 達到最大，這表示必然存在一個數列{Mi}*，其所計算出來的 HHI 值，令爲 HHI*，必大於 HHI^U， $HHI^* > HHI^U$。

因此，$\varphi_1 A^2 + \varphi_2 B^2 + (1-\varphi_1-\varphi_2)C^2 > \omega_1 A^2 + (1-\omega_1)B^2$。將(A1.2)，(A1.3)代入整理，可以得到下式：

$$-\varepsilon(1-\varepsilon)(1-\varphi_1-\varphi_2)(A-B)^2>0 \qquad (A1.4)$$

因爲$0\leq\varepsilon\leq1$，$0\leq\varphi_1$，$\varphi_2\leq1$，故(A1.4)必不成立。故$HHI^*\leq HHI^U$。故HHI^U爲最大。

- **HHI^L 的證明**

令$HHI^L=\sigma_1D^2+(1-\sigma_1)E^2$，其中，$0\leq\sigma_1\leq1$，$D=\frac{\left(\frac{M-\gamma}{N}+1\right)^2}{M^2}\geq E=\frac{\left(\frac{M-\gamma}{N}\right)^2}{M^2}$。再令$HHI`=\tau_1D^2+\tau_2E^2+(1-\tau_1-\tau_2)F^2$，其中，$0\leq\tau_1$，$\tau_2\leq1$。由於F必不介於D、E之間，因此，分別討論F大於D與F小於E之情形。令$F=\delta D$，其中，$\delta>1$。代入 HHI`，可得到下式：

$$HHI`=[\tau_1+(1-\tau_1-\tau_2)\delta]D^2+\tau_2E^2 \qquad (A1.5)$$

由於各比例相加之後必等於 1，因此$\sigma_1D+(1-\sigma_1)E=\tau_1D+\tau_2E+(1-\tau_1-\tau_2)F$。將$F=\delta D$ 代入 F，移項之後，可得到$[\sigma_1-\tau_1+(1-\tau_1-$ τ2δ] D+1−σ1−τ2 E。因爲 D、E 恆正，因此

$$\sigma_1=\tau_1+(1-\tau_1-\tau_2)\delta \qquad (A1.6)$$

$$(1-\sigma_1)=\tau_2 \qquad (A1.7)$$

若$\{Mi\}^L$無法令 HHI 達到最小，這表示必然存在一個數列{Mi}`，其所計算出來的 HHI 值，令爲 HHI`，必小於 HHI^L，$HHI`<HHI^L$。

因此，$\sigma_1D^2+(1-\sigma_1)E^2>[\tau_1+(1-\tau_1-\tau_2)\delta]D^2+\tau_2E^2$。然而，根據(A1.6)、(A1.7)式，不等式無法成立。因此，F 必不得大於 D。

令$F=\vartheta E$，其中，$0<\vartheta<1$，同理可證，F 必不得小於 E。

由於資料的間斷性質，F 亦無法介於 D、E 之間。因此，並不存在一個數列{Mi}`，使得$HHI`<HHI^L$。故$HHI^L$爲最小。

附錄二　(HHI^U 和 HHI^L 的計算)

- **HHI$^{\mathbf{U}}$ 的計算**

根據(3.3)式，HHI^U 如下：

$$\mathrm{HHI}^U = 1 \times \left(\frac{M-N+1}{M}\right)^2 + (N-1)\left(\frac{1}{M}\right)^2 \tag{3.3}$$

因此，HHI^U 可展開如下：

$$\mathrm{HHI}^U = \frac{(M-N+1)^2 + N - 1}{M^2} \tag{A2.1}$$

$$\mathrm{HHI}^U = \frac{M^2 + N^2 + 1 - 2MN - 2N + 2M + N - 1}{M^2} \tag{A2.2}$$

$$\mathrm{HHI}^U = \frac{M^2 + N^2 - 2MN - N + 2M}{M^2} \tag{A2.3}$$

對(A2.3)式進行整理，我們可以得到(3.4)式。

- **HHI$^{\mathbf{L}}$ 的計算**

根據(3.9)式，HHI^L 如下：

$$\mathrm{HHI}^L = (N-\gamma) \times \frac{\left(\frac{M-\gamma}{N}\right)^2}{M^2} + \gamma \times \frac{\left(\frac{M-\gamma}{N}+1\right)^2}{M^2} \tag{3.9}$$

因此 HHI^L 可展開如下：

$$\mathrm{HHI}^L = \frac{(N-\gamma)(M^2+\gamma^2-2M\gamma) + \gamma(M^2+\gamma^2+N^2-2M\gamma-2N\gamma+2MN)}{M^2N^2} \tag{A2.4}$$

$$\mathrm{HHI}^L = \frac{M^2N + \gamma^2N + \gamma N^2 - 2N\gamma^2}{M^2N^2} \tag{A2.5}$$

分子分母同 N，則得到(3.10)式。

附錄三　(赫氏指標誤差距及赫氏指標誤差率對 M 的差分)

- 赫氏指標誤差距對 **M** 的差分

根據(3.13)式，赫氏指標誤差距定義如下：

$$d = \frac{(2M-N)(N-1)}{M^2} \tag{3.13}$$

將赫氏指標誤差距 d 對 M 取差分，意即我們發現 d 和 M 呈現反向關係：

$$\frac{\Delta d}{\Delta M} \approx -2(N-1)\frac{(M-N)}{M^3} < 0 \tag{A3.1}$$

這說明了 M 越大，d 越小。

● 赫氏指標誤差率對 **M** 的差分

根據(3.23)式，赫氏指標誤差率定義如下：

$$s = \frac{(2M-N)N}{M^2} + \frac{\gamma\,(N-\gamma)}{M^2(N-1)} \tag{3.23}$$

將赫氏指標誤差率 s 對 M 取差分，我們發現 s 和 M 呈現反向關係：

$$\frac{\Delta s}{\Delta M} \approx -2\left(\frac{N(M-N) + \frac{\gamma(N-\gamma)}{(N-1)}}{M^3}\right) < 0 \tag{A3.2}$$

這說明了 M 越大，s 越小。

附錄四　(r_d 與 r_s 的下界)

● $\mathbf{r_d}$的下界

根據(3.17)式，我們得知 r_d 的範圍必定在(3.18)式的範圍之中。

$$r_d \geq \frac{(N-1) + \sqrt{(N(1-d^*)-1)(N-1)}}{Nd^*} \;\cup$$

$$r_d \leq \frac{(N-1) - \sqrt{(N(1-d^*)-1)(N-1)}}{Nd^*} \tag{3.18}$$

然而，根據定義，r_d 須大於 1，因此我們需要檢驗 r_d 的下界是否符合這一條件。

假設 r_d 的下界大於 1，則下式必成立：

$$1 < r_d \leq \frac{(N-1) - \sqrt{(N(1-d^*)-1)(N-1)}}{Nd^*} \tag{A4.1}$$

經過移項，我們得到下式：

$$\mathrm{N}(1-\ d^{*})-1>\ \sqrt{(\mathrm{N}(1-\ d^{*})-1)(N-1)} \qquad (A4.2)$$

令$\theta=\mathrm{N}(1-\ d^{*})-1$，$\theta^{0}=\mathrm{N}-1$。由於$d^{*}>0$，故$\theta^{0}>\ \theta>0$。

這表示$\sqrt{\theta\times\theta^{0}}>\theta$。這和(A4.2)式不符，因此我們知道(A4.1)式不成立。這說明了 r_d 的範圍爲：

$$r_d\geq\frac{(N-1)+\sqrt{(N(1-\ \mathrm{d}^{*})-1)(N-1)}}{N\mathrm{d}^{*}} \qquad (A4.3)$$

● $\mathbf{r_s}$的下界

根據(3.28)式，我們得知 r_s 的範圍必定在(3.18)式的範圍之中。

$$r_s\geq\frac{1}{s^{*}}+\sqrt{\frac{1+4(N-1)\left(\frac{1}{s^{*}}-1\right)}{4(N-1)s^{*}}}\cup$$

$$r_s\leq\frac{1}{s^{*}}-\sqrt{\frac{1+4(N-1)\left(\frac{1}{s^{*}}-1\right)}{4(N-1)s^{*}}} \qquad (3.29)$$

然而，根據定義，r_s 須大於 1，因此我們需要檢驗 r_s 的下界是否符合這一條件。

假設 r_s 的下界大於 1，則下式必成立：

$$1<\ r_s\leq\frac{1}{s^{*}}-\sqrt{\frac{1+4(N-1)\left(\frac{1}{s^{*}}-1\right)}{4(N-1)s^{*}}} \qquad (A4.4)$$

經過移項，我們得到下式：

$$\sqrt{4(N-1)(1-\ s^{*})^{2}}>\ \sqrt{4(N-1)(1-\ s^{*})+\ s^{*}} \qquad (A4.5)$$

同時對(A4.5)式左右兩側平方，我們得到下式：

$$4(N-1)(1-\ s^{*})^{2}>\ 4(N-1)(1-\ s^{*})+\ s^{*} \qquad (A4.6)$$

經過移項，我們得到：

$$-4(N-1)(1-\ s^{*})s^{*}>\ s^{*} \qquad (A4.6)$$

由於 $1 \geq s^* > 0$ 且 $N > 1$，這表示(A4.6)式不成立。因此，r_s的範圍為：

$$r_s \geq \frac{1}{s^*} + \sqrt{\frac{1 + 4(N-1)\left(\frac{1}{s^*} - 1\right)}{4(N-1)s^*}} \qquad (A4.7)$$