

國立臺灣大學工學院機械工程學研究所

碩士論文

Department of Mechanical Engineering

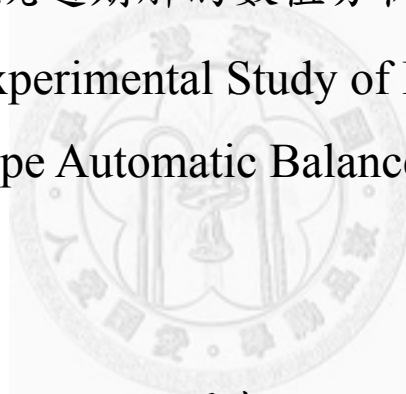
College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis

滾珠平衡系統週期解的數值分析和實驗驗證

Numerical and Experimental Study of Periodic Solutions
of Ball-Type Automatic Balancer Systems



田孟軒

Tien, Meng-Hsuan

指導教授：盧中仁 博士

Advisor: Lu, Chung-Jen, Ph.D.

中華民國 100 年 7 月

July, 2011

國立臺灣大學碩士學位論文
口試委員會審定書

滾珠平衡系統週期解的數值分析和實驗驗證
Numerical and Experimental Study of Periodic Solutions of
Ball-Type Automatic Balancer Systems

本論文係田孟軒君 (R98522520) 在國立臺灣大學機械工程學系
完成之碩士學位論文，於民國 100 年 6 月 29 日承下列考試委員審查
通過及口試及格，特此證明

口試委員：

李中仁

(簽名)

蘇春煒 (指導教授)

莊嘉揚

系主任

張所鏗

(簽名)

誌謝

時光匆匆流逝，推甄上研究所時的興奮與徬徨，轉眼間已是兩年前的事。回憶當初，在激烈的教授爭奪戰中，很幸運能夠遇到我的指導教授-盧中仁老師，謝謝老師給了我一個這麼有趣的題目使我能在理論及實驗操作中體會研究的樂趣，並在陷入困境時引領我走向正確的研究方向。此外，謝謝您的支持使我能夠追逐學業之外的夢想。

謝謝家人們從小到大的照顧，尤其是爸爸媽媽的苦心栽培，即使高中時浪費了大量補習費仍舊支持我做任何想做的事。在完成論文的過程中，感謝蘇春熿老師提供黏度計讓實驗結果能完整展示；謝謝洪師傅的幫助使得實驗機台能順利工作；謝謝明正學長在百忙之中傳授我實驗的觀念及技巧；謝謝蘇春熿老師及莊嘉揚老師於口試時的指導與建議，使本篇論文更加完整；最後感謝轉子機台這一年來的配合，您沒有罷工是我上輩子修來的福氣。很慶幸認識 403 實驗室的大家，感謝家瑋、明叡、書豪、弘基學長在生活上的照顧及課業上的指導；謝謝同時進入實驗室的戰友們：頌庭、耀億、紹育、以翔(以及後來加入的唯中)，有你們陪伴使我在完成課業及研究的過程不會孤單；謝謝實驗室的所有學弟：徐穎、名哲、智文、昇佑、佑承，你們帶來的歡笑為實驗室生活增添許多樂趣。台北的生活轉眼即逝，謝謝孟婷的陪伴使我平淡的生活增添了許多不同，妳的單純讓我了解很多事情其實很簡單；很慶幸能擁有坤鐘和銘軒兩位好友，我永遠不會忘記和你們一起在新店生活的日子，從高中至今的緣分我會永遠珍惜。

完成碩士論文代表學生生涯將暫時畫上休止符，期盼自己在未來的日子中能不斷充實、了解自我，以正面的態度面對所有挑戰。最後，期盼我的家人們永遠健康快樂，希望沒有辜負爺爺在天上對我的期待。

滾珠平衡系統週期解的數值分析和實驗驗證

摘要

滾珠型自動平衡機構在適當的工作條件下，可因應不同的偏心率，自動調整滾珠的平衡位置而大幅降低偏心振動，因此廣泛的應用於轉子系統上。然而，當轉速高於系統自然頻率時，滾珠有時無法定位於完全平衡位置上，而是繞著碟片作週期性的旋轉或是來回振盪運動，此時系統伴隨有劇烈的振動量。由於旋轉週期解無法由現有的數值方法直接求得，本文使用新發展的 Modified Incremental Harmonic Balance 法探討各種形式的週期解，求取週期解在 $\Omega-\eta$ 平面上的存在區域及其穩定性，並分析各參數的影響，最後進行實驗驗證。

關鍵字：自動平衡裝置、轉子、週期解



Numerical and Experimental Study of Periodic Solutions of Ball-Type Automatic Balancer Systems

Abstract

Under proper working conditions, a ball-type automatic balancer can adjust the positions of its balls according to the imbalance of the rotor and significantly reduces the rotational vibrations. As a consequence, ball-type automatic balancers are widely applied to rotor systems. However, when the rotational speed is above the natural frequency of the system, the balls may not settle to the perfect balancing positions but keep circulating or oscillating around the disk and result in large vibrations. Moreover the rotary periodic motions can't be determined by the existing numerical methods used for the detection of periodic solutions. In this study, we employed the modified incremental harmonic balance method to analyze all kind of periodic motions, obtain the existence regions in the η - Ω plane and determine the corresponding stability. Then a comprehensive parametric study was performed and the results were verified experimentally.

Keywords: automatic balancer, rotor, periodic solutions.

目 錄

| | |
|--------------|-----|
| 口試委員審定書..... | I |
| 誌謝..... | II |
| 中文摘要..... | III |
| 英文摘要..... | IV |
| 目錄..... | V |
| 圖目錄..... | VII |
| 表目錄..... | XI |

| | |
|--|----|
| 第一章 緒論..... | 1 |
| 1-1 研究動機..... | 1 |
| 1-2 文獻回顧..... | 2 |
| 第二章 研究方法..... | 5 |
| 2-1 理論模型及運動方程式..... | 6 |
| 2-1-1 二維碟片理論模型..... | 7 |
| 2-1-2 運動方程式..... | 7 |
| 2-2 Modified Incremental Harmonic Balance method..... | 10 |
| 2-3 週期解穩定性分析..... | 18 |
| 第三章 數值結果及參數分析..... | 20 |
| 3-1 單滾珠平衡系統..... | 20 |
| 3-2 Modified Incremental Harmonic Balance method 驗證..... | 21 |
| 3-3 旋轉週期解..... | 33 |
| 3-3-1 制振比的影響..... | 33 |
| 3-3-2 支承阻尼的影響..... | 36 |

| | |
|--------------------------|----|
| 3-3-3 軌道阻尼的影響..... | 39 |
| 3-4 其它形式週期解..... | 42 |
| 第四章 實驗驗證..... | 45 |
| 4-1 實驗設備與機台設計..... | 45 |
| 4-1-1 實驗設備..... | 45 |
| 4-1-2 機台設計..... | 48 |
| 4-2 實驗流程..... | 49 |
| 4-3 單滾珠平衡系統..... | 52 |
| 4-4 雙滾珠平衡系統..... | 55 |
| 4-4-1 制振能力驗證..... | 55 |
| 4-4-2 旋轉週期解之振形及頻率比較..... | 56 |
| 4-4-3 制振比對旋轉週期解的影響..... | 60 |
| 4-4-4 雙穩態現象分析..... | 63 |
| 4-4-5 制振比對旋轉週期解的影響..... | 66 |
| 4-4-6 支承阻尼對旋轉週期解的影響..... | 67 |
| 4-4-7 其它形式週期解..... | 71 |
| 第五章 結論..... | 78 |
| 參考文獻..... | 79 |

圖 目 錄

| | | |
|--------|---------------------------------------|----|
| 圖 2-1 | 滾珠型自動平衡機構示意圖..... | 6 |
| 圖 2-2 | 滾珠型自動平衡機構 2-D 理論模型..... | 8 |
| 圖 3-1a | x 時間歷程圖(旋轉週期解)..... | 22 |
| 圖 3-1b | y 時間歷程圖(旋轉週期解)..... | 22 |
| 圖 3-1c | β_1 時間歷程圖(旋轉週期解)..... | 23 |
| 圖 3-1d | β_2 時間歷程圖(旋轉週期解)..... | 23 |
| 圖 3-1e | $x-y$ 平面軌跡圖(旋轉週期解)..... | 24 |
| 圖 3-2a | x 時間歷程圖(來回振盪週期解)..... | 24 |
| 圖 3-2b | y 時間歷程圖(來回振盪週期解)..... | 25 |
| 圖 3-2c | β_1 時間歷程圖(來回振盪週期解)..... | 25 |
| 圖 3-2d | β_2 時間歷程圖(來回振盪週期解)..... | 26 |
| 圖 3-2e | $x-y$ 平面軌跡圖(來回振盪週期解)..... | 26 |
| 圖 3-3a | x 時間歷程圖(一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解)..... | 27 |
| 圖 3-3b | y 時間歷程圖(一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解)..... | 27 |
| 圖 3-3c | β_1 時間歷程圖(一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解)..... | 28 |
| 圖 3-3d | β_2 時間歷程圖(一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解)..... | 28 |
| 圖 3-3e | $x-y$ 平面軌跡圖(一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解)..... | 29 |
| 圖 3-4a | y 時間歷程圖(旋轉週期解, $N=3$)..... | 30 |
| 圖 3-4b | $x-y$ 平面軌跡圖(旋轉週期解, $N=3$)..... | 31 |
| 圖 3-5a | y 時間歷程圖(旋轉週期解, $N=4$)..... | 31 |
| 圖 3-5b | $x-y$ 平面軌跡圖(旋轉週期解, $N=4$)..... | 32 |

| | | |
|--------|---|----|
| 圖 3-6 | $\Omega-\eta$ 旋轉週期解分佈圖 ($\mu = 0.2, \zeta = 0.05, \zeta_B = 0.1, \delta = 50$)..... | 35 |
| 圖 3-7 | 週期解基頻走勢圖 ($\mu = 0.2, \zeta = 0.05, \zeta_B = 0.1, \delta = 50$)..... | 35 |
| 圖 3-8 | $\Omega-\eta$ 旋轉週期解分佈圖 ($\mu = 0.2, \zeta = 0.02, \zeta_B = 0.1, \delta = 50$)..... | 37 |
| 圖 3-9 | $\Omega-\eta$ 旋轉週期解分佈圖 ($\mu = 0.2, \zeta = 0.1, \zeta_B = 0.1, \delta = 50$)..... | 38 |
| 圖 3-10 | 不同 ζ 下的基頻走勢圖 ($\mu = 0.2, \zeta_B = 0.1, \delta = 50$)..... | 38 |
| 圖 3-11 | $\Omega-\eta$ 旋轉週期解分佈圖 ($\mu = 0.2, \zeta = 0.05, \zeta_B = 0.05, \delta = 50$)..... | 40 |
| 圖 3-12 | $\Omega-\eta$ 旋轉週期解分佈圖 ($\mu = 0.2, \zeta = 0.05, \zeta_B = 0.2, \delta = 50$)..... | 41 |
| 圖 3-13 | 不同 ζ_B 下的基頻走勢圖 ($\mu = 0.2, \zeta = 0.05, \delta = 50$)..... | 41 |
| 圖 3-14 | $\Omega-\eta$ 週期解分佈圖 ($\mu = 0.2, \zeta = 0.02, \zeta_B = 0.1, \delta = 50$)..... | 43 |
| 圖 3-15 | $\Omega-\eta$ 週期解分佈圖 ($\mu = 0.2, \zeta = 0.05, \zeta_B = 0.1, \delta = 50$)..... | 43 |
| 圖 3-16 | $\Omega-\eta$ 週期解分佈圖 ($\mu = 0.2, \zeta = 0.1, \zeta_B = 0.1, \delta = 50$)..... | 44 |

| | | |
|--------|--|----|
| 圖 4-1 | 實驗設備..... | 45 |
| 圖 4-2 | 實驗機台..... | 46 |
| 圖 4-3 | 訊號擷取設備..... | 46 |
| 圖 4-4 | 系統功率譜圖..... | 49 |
| 圖 4-5 | 系統振幅隨轉速增加的歷時圖..... | 50 |
| 圖 4-6 | 實驗流程圖..... | 51 |
| 圖 4-7 | 單滾珠系統在不同制振比下的振動量比較(平衡解)..... | 54 |
| 圖 4-8 | 單滾珠系統在不同制振比下的振動量比較(旋轉週期解)..... | 54 |
| 圖 4-9 | 雙滾珠系統的振動量比較..... | 55 |
| 圖 4-10 | 旋轉週期解之振形圖(實驗)..... | 56 |
| 圖 4-11 | 旋轉週期解之頻譜圖(實驗,轉速為 800 rpm)..... | 57 |
| 圖 4-12 | 旋轉週期解之頻譜圖(MIHB) ($\mu = 0.2, \zeta = 0.02, \zeta_B = 0.1, \Omega = 1.3, \eta = 0.7, \omega = 0.32$)..... | 59 |
| 圖 4-13 | 主要振動頻率比較..... | 59 |
| 圖 4-14 | 軌道阻尼對旋轉週期解的影響..... | 62 |
| 圖 4-15 | $\beta_1 - \beta_2$ 平面吸引區域 ($\mu = 0.2, \zeta = 0.05, \zeta_B = 0.05, \delta = 50, \Omega = 1.2, \eta = 0.7$)..... | 63 |
| 圖 4-16 | $\beta_1 - \beta_2$ 平面吸引區域 ($\mu = 0.2, \zeta = 0.05, \zeta_B = 0.05, \delta = 50, \Omega = 1.35, \eta = 0.7$)..... | 64 |
| 圖 4-17 | 無擾動及有擾動下之實驗路徑比較..... | 65 |
| 圖 4-18 | 制振比對旋轉週期解的影響..... | 67 |
| 圖 4-19 | 濾波後之振形..... | 68 |
| 圖 4-20 | 振形峰值之自然對數圖及 δ 計算..... | 68 |
| 圖 4-21 | 橡膠墊黏貼方式..... | 69 |

| | | |
|--------|---|----|
| 圖 4-22 | 支承阻尼對旋轉週期解的影響..... | 71 |
| 圖 4-23 | 來回振盪週期解之振形圖(實驗, 轉速為 555 rpm) | 73 |
| 圖 4-24 | 來回振盪週期解之頻譜圖(實驗, 轉速為 555 rpm) | 73 |
| 圖 4-25 | 一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解之振形圖 (實驗, 轉速為 560 rpm) | 74 |
| 圖 4-26 | 一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解之頻譜圖 (實驗, 轉速為 560 rpm) | 74 |
| 圖 4-27 | 來回振盪週期解之頻譜圖(MIHB) $(\mu = 0.2, \zeta = 0.1, \zeta_B = 0.1, \Omega = 1.1, \eta = 1.3, \omega = 0.09)$ | 75 |
| 圖 4-28 | 一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解之頻譜圖(MIHB) $(\mu = 0.2, \zeta = 0.1, \zeta_B = 0.1, \Omega = 1.3, \eta = 0.7, \omega = 0.30)$ | 75 |



表 目 錄

| | | |
|-------|--------------------------|----|
| 表 3-1 | Monodromy 矩陣的特徵值..... | 32 |
| 表 4-1 | 實驗裝置規格..... | 47 |
| 表 4-2 | 實驗類型..... | 52 |
| 表 4-3 | 油品規格表..... | 60 |
| 表 4-4 | 油品混合比例及黏滯係數..... | 61 |
| 表 4-5 | 不同黏貼方式所對應的自然頻率及支承阻尼..... | 70 |
| 表 4-6 | 不同形式週期解的振動量比較..... | 76 |
| 表 4-7 | 各種形式週期解的傅利葉頻譜..... | 77 |



第一章 緒論

1-1 研究動機

自從 1980 年代光碟機產品上市以來，這種高密度的光學儲存技術便蓬勃發展並普遍融入大眾的生活當中。由於光碟具有儲存密度高、容量大、便於攜帶等優點，光碟片已成為現今最受歡迎的資訊儲存媒體之一。在碟片大小不變的情況下，提高儲存密度是加大光碟儲存容量最直接的方式，因此光碟片的單位面積軌數不斷增加，軌距也隨之縮短。以目前市面上的產品而言，CD 所使用的軌道軌距約為 $1.6\ \mu\text{m}$ ，DVD 的軌道軌距約為 $0.74\ \mu\text{m}$ ，而儲存容量更大的藍光光碟 (Blu-ray Disc) 其軌距僅約 $0.32\ \mu\text{m}$ 。由於軌距縮小，光碟機讀取的精密度就更形重要。雷射光束的循軌誤差 (Tracking Error) 和聚焦精度誤差 (Focusing Error) 都必須控制在極小的範圍內，才能確保資料讀取的正确性或燒錄動作的穩定性。光碟片可能因製造時的公差或表面覆蓋染料不均而具有偏心率。此偏心率會在馬達運轉時因動態不平衡而產生振動。馬達轉速愈高，振動量愈大。此振動量會經由馬達的軸承傳遞至光碟機各部位，使光學讀寫頭的定位偏移，造成循軌和聚焦誤差加大，影響讀寫動作的穩定性，甚至破壞光碟機各部位機構而影響使用壽命。因此，在軌距逐漸減小以及馬達轉速不斷提高的發展趨勢下，如何抑制此種動態不平衡所引發的機構振動成為光碟機發展的重要課題之一。

目前應用於減低光碟機振動的技術有：鋼索懸掛式減振機構 (Wire Suspension System)：利用鋼索連接被動吸振器與機芯，得到極低的變異量與穩定的避震效果；集振器減振機構 (Vibration Absorber System)：利用傳導共振的原理，將機芯上的振動，導引到內部獨立的集振器，並配以適當的避震器；懸浮承載減振機構 FDS (Floating Damper Suspension)：將小機芯與承載系統相結合，並盡量使用金屬元件以增加質量，依照牛頓第二運動定律 $F = ma$ ，加速度 (即

振動)與質量成反比,以得到較低的機芯與外殼振動;雙懸浮式懸掛減振機構DFS(Double Floating Suspension):機芯、承載系統、外殼皆用避震橡皮連接,以降低振動的傳導。上述的方法,基本上是將振動量加以吸收隔絕,然而較佳的想法是將振動來源消除。自動平衡系統(Automatic Balancer System)是一個有效消除振動來源的方法,而其中滾珠型自動平衡系統(Automatic Ball Balancer)在目前較為廣泛使用,也有詳盡的分析。

然而綜觀之前關於滾珠型自動平衡系統的研究,大都集中在討論系統在平衡位置的局部(local)動態特性,至於完整的全域分析則較為缺乏。如果滾珠平衡系統在任何轉速下都只有一個穩定的平衡解,不存在其它吸引子(attractor),則局部的穩定性便可以保證系統在任意的起始狀態下皆會收斂至唯一的穩定平衡解,此時不需要全域分析。然而黃仕軒[1]利用實驗驗證滾珠平衡系統時,發現轉速超過系統自然頻率時,有時會出現不同於理論平衡位置的現象;而洪嘉興[2]的數值分析發現在某些特定的參數環境下,系統有可能同時存在穩定的平衡解與週期解,因此在某些起始狀態下系統將收斂至週期解而非預期的完全平衡位置;Green[3]也注意到除了平衡解與週期解有共存的可能外,滾珠型自動平衡系統對於滾珠起始位置相當敏感。因此為了確認滾珠型平衡系統的可靠性,完整的全域(global)分析是必要的。本文主要探討滾珠平衡機構的週期解和各參數間的關係,並進行實驗加以驗證。

1-2 文獻回顧

滾珠型自動平衡裝置是常用的抑制光碟機偏心振動的裝置之一,這類裝置包含可在軌道上自由移動的數個滾珠。在適當工作條件下,滾珠會定位於特定位置,並完全抵消碟片的偏心量。這個特定的位置稱為完全平衡位置。關於完全平衡位置的特性,已有相當完善的研究。Alexander [4]對自動平衡裝置進行了理論分析,

但並沒有說明系統的運作原理。Cade [5]指出了自動平衡裝置運作的必要條件。Majewski [6]分析滾珠所受的滾動阻力，滾珠運行軌道之偏心，以及外界振動的影響。近年來，Lee [7]和 Lee and Van Moorhem [8]進行了理論及實驗的分析，結果顯示，當自動平衡裝置的工作轉速在整個系統的自然頻率以上時，能有效的平衡原有的不平衡量；當轉速在自然頻率以下，則系統會因滾珠的位置而增加不平衡量，加劇振動的發生。Rajalingham 等人[9]探討滾珠自動平衡裝置在手持工具上的應用並分析其效能。Silin 等人[10]提出多軌道的設計，可避免滾珠的碰撞。Chung [11]利用極座標系分析平衡位置的穩定性。Hwang 等人[12]分析雙軌道自動平衡系統的動態特性。Kang 等人[13]分析雙滾珠自動平衡系統，考慮滾珠所受的滾動阻力，軌道偏心等效應，並利用多重尺度法尋求穩態時滾珠的位置。Huang 等人[14]分析自動平衡系統中滾珠所受的摩擦阻力，軌道偏心，滾珠尺寸大小等因素的效應。Chao 等人[15]探討摩擦力對系統的影響。Lu[16]利用解析法判別單滾珠自動平衡機構之穩定性。Lu 和 Hung[17]討論滾珠數目對完全平衡位置穩定性的影響。Kim 等人[18]建構 3D 模型，分析其動態特性。Chao 等人[19]考慮扭轉模態對系統穩定性的影響。Green 等人[3]對系統做 bifurcation analysis，Lu 等人[20]由解析和實驗探討系統的穩定性。

除了平衡位置外，研究顯示[1-3]，在某些特定的參數環境下，系統可能同時存在穩定的平衡解與週期解。然而對於週期解的特性迄今尚無完整的分析。

週期解對非線性動態系統的特性扮演重要的角色，因此持續有各種分析方法提出。其中，微擾法適用於弱非線性系統；Harmonic Balance 法可推廣到強非線性系統，但高階項的計算繁瑣。此外，因為電腦功能日益強大，有許多的數值方法可用於求週期解，例如：有限差分法、Poincare map methods、shooting techniques、collocation methods 等。關於這些方法的介紹請見 Nayfeh [21]。然而這些方法並無法直接應用於滾珠型自動平衡機構。在分析滾珠型自動平衡機構時，多選用滾珠相對於偏心質量的角度做為廣義坐標，當滾珠相對於碟片持續旋轉運動時，即

使其它重要的物理量都成週期性的變化，這個角度本身持續增加，並不是週期函數。為了方便起見，將這樣的運動稱之為旋轉週期運動。現存的分析方法無法直接求解旋轉週期運動。為此 Lu 和 Lin [22]推廣了 Lau 和 Cheung[23]發展的 Incremental Harmonic Balance method，使之可求解旋轉週期解。

本文將使用此 Modified Incremental Harmonic Balance method（以下簡稱 MIHB 法）作為尋找週期解的工具。第二章介紹 MIHB 法的操作流程及判別穩定性的方法；第三章驗證求解的可靠性，計算週期解在參數空間中的存在區域並分析參數變化的影響；第四章進行實驗加以驗證；第五章結論。



第二章 研究方法

週期解的研究在各式動態系統中皆為重要課題，為了分析旋轉週期運動，Lu 和 Lin 推導出 Modified Incremental Harmonic Balance method(MIHB)作為尋找週期解的工具，並以數值積分(NI)驗證 MIHB 法求解之可靠性以及判斷週期解的穩定性[22]。MIHB 法的計算流程如下：

- (1) 假設週期解為起始猜值(u_0)及修正項(Δu)之組合，代入微分方程式展開並線性化。
- (2) 將 u_0 及 Δu 展開為廣義傅立葉級數，並利用 Galerkin 法求解 Δu 的傅立葉係數。
- (3) 更新起始猜值，令 $u_0 = u_0 + \Delta u$ ，回到步驟(1)直到 Δu 收斂為止。

本文將使用 MIHB 法尋找系統之週期解。

在穩定性的探討中，NI 雖然可作為判斷穩定性的工具，但如何選取積分時間以確保得到穩態的行為則沒有可依循的規範。對於具有週期性係數的微分方程式，使用 Floquet 理論作為判斷週期解穩定性的工具為一較佳的方式[21]。相對於 NI 存在積分時間長度的不確定性，Floquet 理論可透過計算 Monodromy 矩陣之特徵值而判斷週期解的穩定性。應用 Floquet 理論判別穩定性的流程如下：

- (1) 將週期解(\hat{u})加上一微小擾動(ξ)，代入微分方程式展開並線性化。
- (2) 使用 NI 對線性微分方程式積分一個週期，求取 Monodromy 矩陣。
- (3) 計算 Monodromy 矩陣之特徵值並判別穩定性。

本章將描述雙滾珠平衡系統之運動方程式，以及如何使用 MIHB 法尋找週期解並利用 Floquet 理論判斷解的穩定性。此外，本章將推導系統的特徵多項式並利用 Routh-Hurwitz Criterion 判別完全平衡解的穩定性[24]。

2-1 理論模型及運動方程式

圖 2-1 為滾珠型自動平衡機構之示意圖，當碟片上存在一偏心質量使得系統質心偏離幾何中心時，理想情形下，位於軌道中的滾珠會停留於此偏心質量的對邊以平衡此偏心量，此時滾珠在旋轉座標系中為靜止的狀態，稱之為平衡解 (Equilibrium Solution)；但在某些參數條件下，滾珠無法如預期般停留於平衡位置上，而是沿著軌道作週期性運動，進入週期解 (Periodic Solution) 的運動形式。對雙滾珠平衡系統而言，週期解依其運動狀態可分為三種形式：分別是兩顆滾珠作旋轉運動 (Rotation) 的旋轉週期解 (R-R)；兩顆滾珠作來回振盪運動 (Oscillation) 的來回振盪週期解 (O-O)；以及一滾珠旋轉一滾珠來回振盪的週期解 (R-O)。注意上述的運動方式是使用旋轉座標系描述，換言之為相對於碟片的運動。

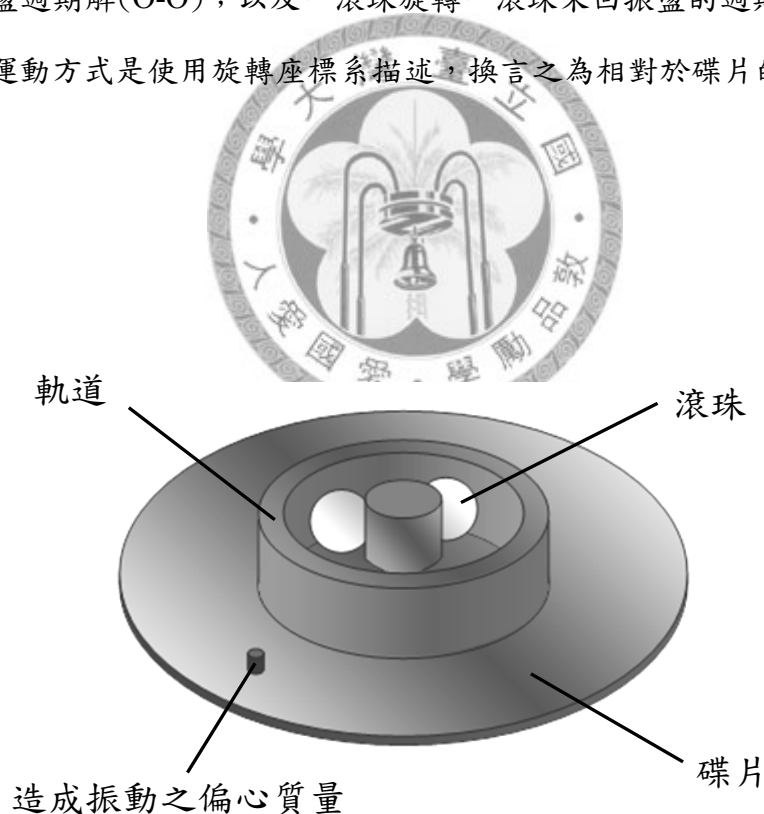


圖 2-1 滾珠型自動平衡機構示意圖

2-1-1 二維碟片理論模型

圖 2-2 為系統之理論模型，設定系統為二維的振動問題，只考慮碟片水平方向之振動而忽略馬達軸向之振動。 O 點為系統靜止時，碟片形心的位置， OXY 為固定座標系， Oxy 為以馬達轉速(ω)旋轉的旋轉座標系。碟片形心 C 相對於旋轉座標系的位置為 (x, y) ，當系統靜止或完全平衡時， C 點將和 O 點重合。 G 點為碟片質心，線段 \overline{CG} 長度為偏心距 e ， \overline{CG} 和 x 軸平行，碟片質量為 m_d ，因此系統的固有偏心量為 $m_d \cdot e$ 。質量為 m_{bi} 的滾珠可於半徑為 δ 的軌道上移動，忽略摩擦及暫態時的碰撞效應，滾珠移動時受到阻尼係數為 c_b 的阻尼力。令 β_i 表示滾珠和 \overline{CG} 間的夾角。整體機構以具有等效彈簧 k 以及等效阻尼 c 之支承支撐於固定座標系 OXY 中。主軸馬達及基座的等效質量為 M_r ，系統總質量為 $M = M_r + m_d + \sum_{i=1}^n m_{bi}$ 。



2-1-2 運動方程式

根據上述理論模型並以 Lagrange's equations 所推導出系統的運動方程式如下：

$$M\ddot{x} - 2M\omega\dot{y} + c\dot{x} + (k - M\omega^2)x - c\omega y - \delta \sum_i m_{bi} \left[\ddot{\beta}_i \sin \beta_i + (\dot{\beta}_i + \omega)^2 \cos \beta_i \right] = m_d e \omega^2 \quad (2.1a)$$

$$M\ddot{y} + 2M\omega\dot{x} + c\dot{y} + (k - M\omega^2)y - c\omega x + \delta \sum_i m_{bi} \left[\ddot{\beta}_i \cos \beta_i - (\dot{\beta}_i + \omega)^2 \sin \beta_i \right] = 0 \quad (2.1b)$$

$$m_{bi}\delta^2\ddot{\beta}_i + c_b\delta^2\dot{\beta}_i + m_{bi}\delta\left[\ddot{y}\cos\beta_i + 2\omega\dot{y}\sin\beta_i - \omega^2y\cos\beta_i\right] - \left(\ddot{x}\sin\beta_i - 2\omega\dot{x}\cos\beta_i - \omega^2x\sin\beta_i\right) = 0 \quad (2.1c)$$

根據以上運動方程式，進一步定義無因次化參數：

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{e} & y^* &= \frac{y}{e} & \delta^* &= \frac{\delta}{e} & \omega_n &= \sqrt{\frac{k}{M}} & \Omega &= \frac{\omega}{\omega_n} \\ \mu &= \frac{m_d}{M} & \eta_i &= \frac{m_{bi}\delta}{m_d e} & \zeta &= \frac{c}{2M\omega_n} & \zeta_{Bi} &= \frac{c_b}{2m_{bi}\omega_n} & t^* &= \omega_n t \end{aligned} \quad (2.2)$$

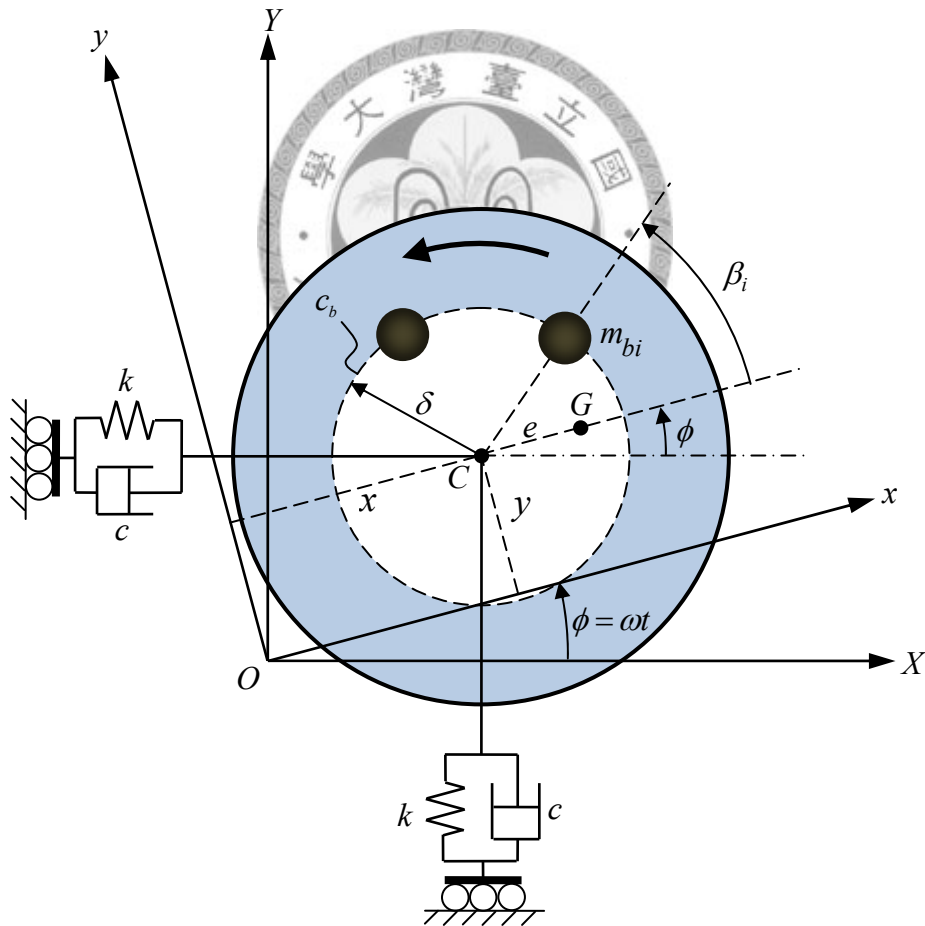


圖 2-2 滾珠型自動平衡機構 2-D 理論模型

將式(2.2)代入式(2.1)後將*去除，可得無因次化運動方程式，本文的研究著重於雙滾珠平衡系統($i=1,2$)，進一步將運動方程式整理成矩陣形式如下：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(x, y, \beta_1, \dot{\beta}_1, \beta_2, \dot{\beta}_2, \eta, \Omega) = \mathbf{0} \quad (2.3a)$$

其中

$$\mathbf{q} = [x \quad y \quad \beta_1 \quad \beta_2]^T \quad (2.3b)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\mu\eta\sin\beta_1 & -\mu\eta\sin\beta_2 \\ 0 & 1 & \mu\eta\cos\beta_1 & \mu\eta\cos\beta_2 \\ -\mu\eta\sin\beta_1 & \mu\eta\cos\beta_1 & \mu\eta\delta & 0 \\ -\mu\eta\sin\beta_2 & \mu\eta\cos\beta_2 & 0 & \mu\eta\delta \end{bmatrix} \quad (2.3c)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2\zeta & -2\Omega & -2\mu\eta\Omega\cos\beta_1 & -2\mu\eta\Omega\cos\beta_2 \\ 2\Omega & 2\zeta & -2\mu\eta\Omega\sin\beta_1 & -2\mu\eta\Omega\sin\beta_2 \\ 2\mu\eta\Omega\cos\beta_1 & 2\mu\eta\Omega\sin\beta_1 & 2\zeta_B\mu\eta\delta & 0 \\ 2\mu\eta\Omega\cos\beta_2 & 2\mu\eta\Omega\sin\beta_2 & 0 & 2\zeta_B\mu\eta\delta \end{bmatrix} \quad (2.3d)$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} (1-\Omega^2)x - 2\zeta\Omega y - \mu\eta\Omega^2\cos\beta_1 - \mu\eta\Omega^2\cos\beta_2 - \mu\Omega^2 - \mu\eta\dot{\beta}_1^2\cos\beta_1 - \mu\eta\dot{\beta}_2^2\cos\beta_2 \\ 2\zeta\Omega x + (1-\Omega^2)y - \mu\eta\Omega^2\sin\beta_1 - \mu\eta\Omega^2\sin\beta_2 - \mu\eta\dot{\beta}_1^2\sin\beta_1 - \mu\eta\dot{\beta}_2^2\sin\beta_2 \\ \mu\eta x\Omega^2\sin\beta_1 - \mu\eta x\Omega^2\cos\beta_1 \\ \mu\eta x\Omega^2\sin\beta_2 - \mu\eta x\Omega^2\cos\beta_2 \end{bmatrix} \quad (2.3e)$$

注意此運動方程式為自主(autonomous)方程式。

2-2 Modified Incremental Harmonic Balance method

以下描述利用 MIHB 法分析雙滾珠平衡系統週期解的步驟。假設週期解的基頻為 ω ，週期為 $T = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)$ ，定義無因次時間變數 $\tau = \omega t$ ，將式(2.3)改寫為：

$$\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{q}'' + \omega \mathbf{C} \mathbf{q}' + \mathbf{f}(x, y, \beta_1, \beta_1', \beta_2, \beta_2', \eta, \Omega) = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

其中 $(\)' = \frac{d(\)}{d\tau}$ ，表示該變數對 τ 的微分。接著依下列步驟求週期解：

(1) 線性化運動方程式

假設系統在轉速 $\Omega = \Omega_0$ 時具有基頻為 ω_0 的週期解 x_0 、 y_0 、 β_{10} 、 β_{20} 。當轉速有微小變化 $\Delta\Omega$ 時，對應之修正項為 $\Delta\omega$ 、 Δx 、 Δy 、 $\Delta\beta_1$ 、 $\Delta\beta_2$ ，接著將 $\Omega = \Omega_0 + \Delta\Omega$ ， $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ ， $x = x_0 + \Delta x$ ， $y = y_0 + \Delta y$ ， $\beta_1 = \beta_{10} + \Delta\beta_1$ ， $\beta_2 = \beta_{20} + \Delta\beta_2$ 代入式(2.4)展開，忽略所有 Δ 的高次項，得到線性化方程式：

$$\omega_0^2 \mathbf{M}_0 \Delta \mathbf{q}'' + \omega_0 \mathbf{C}_0 \Delta \mathbf{q}' + \mathbf{K}_0 \Delta \mathbf{q} + \mathbf{p} \Delta \omega + \mathbf{g} \Delta \Omega + \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (2.5a)$$

其中

$$\Delta \mathbf{q} = [\Delta x \quad \Delta y \quad \Delta\beta_1 \quad \Delta\beta_2]^T \quad (2.5b)$$

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\mu\eta \sin \beta_{10} & -\mu\eta \sin \beta_{20} \\ 0 & 1 & \mu\eta \cos \beta_{10} & \mu\eta \cos \beta_{20} \\ -\mu\eta \sin \beta_{10} & \mu\eta \cos \beta_{10} & \mu\eta\delta & 0 \\ -\mu\eta \sin \beta_{20} & \mu\eta \cos \beta_{20} & 0 & \mu\eta\delta \end{bmatrix} \quad (2.5c)$$

$$\mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} 2\zeta & -2\Omega & -2\mu\eta(\Omega + \omega_0\beta'_{10}) \cos \beta_{10} & -2\mu\eta(\Omega + \omega_0\beta'_{20}) \cos \beta_{20} \\ 2\Omega & 2\zeta & -2\mu\eta(\Omega + \omega_0\beta'_{10}) \sin \beta_{10} & -2\mu\eta(\Omega + \omega_0\beta'_{20}) \sin \beta_{20} \\ 2\mu\eta\Omega \cos \beta_{10} & 2\mu\eta\Omega \sin \beta_{10} & 2\zeta_B \mu\eta\delta & 0 \\ 2\mu\eta\Omega \cos \beta_{20} & 2\mu\eta\Omega \sin \beta_{20} & 0 & 2\zeta_B \mu\eta\delta \end{bmatrix} \quad (2.5d)$$

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} 1-\Omega^2 & -2\zeta\Omega & k_{13} & k_{14} \\ 2\zeta\Omega & 1-\Omega^2 & k_{23} & k_{24} \\ \mu\eta\Omega^2 \sin \beta_{10} & -\mu\eta\Omega^2 \cos \beta_{10} & k_{33} & 0 \\ \mu\eta\Omega^2 \sin \beta_{20} & -\mu\eta\Omega^2 \cos \beta_{20} & 0 & k_{44} \end{bmatrix} \quad (2.5e)$$

其中

$$k_{13} = -\omega_0^2 \mu\eta\beta_{10}'' \cos \beta_{10} + (2\omega_0 \mu\eta\Omega\beta_{10}' + \mu\eta\Omega^2 + \omega_0^2 \mu\eta\beta_{10}'^2) \sin \beta_{10}$$

$$k_{23} = (-2\omega_0 \mu\eta\Omega\beta_{10}' - \mu\eta\Omega^2 - \omega_0^2 \mu\eta\beta_{10}'^2) \cos \beta_{10} - \omega_0^2 \mu\eta\beta_{10}'' \sin \beta_{10}$$

$$k_{33} = (-\omega_0^2 \mu\eta x_0'' + 2\omega_0 \mu\eta\Omega y_0' + \mu\eta\Omega^2 x_0) \cos \beta_{10} - (\omega_0^2 \mu\eta y_0'' + 2\omega_0 \mu\eta\Omega x_0' - \mu\eta\Omega^2 y_0) \sin \beta_{10}$$

$$k_{14} = -\omega_0^2 \mu\eta\beta_{20}'' \cos \beta_{20} + (2\omega_0 \mu\eta\Omega\beta_{20}' + \mu\eta\Omega^2 + \omega_0^2 \mu\eta\beta_{20}'^2) \sin \beta_{20}$$

$$k_{24} = (-2\omega_0 \mu\eta\Omega\beta_{20}' - \mu\eta\Omega^2 - \omega_0^2 \mu\eta\beta_{20}'^2) \cos \beta_{20} - \omega_0^2 \mu\eta\beta_{20}'' \sin \beta_{20}$$

$$k_{44} = (-\omega_0^2 \mu\eta x_0'' + 2\omega_0 \mu\eta\Omega y_0' + \mu\eta\Omega^2 x_0) \cos \beta_{20} - (\omega_0^2 \mu\eta y_0'' + 2\omega_0 \mu\eta\Omega x_0' - \mu\eta\Omega^2 y_0) \sin \beta_{20} \quad (2.5f)$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \left[(\omega_0 x_0'' + \zeta x_0' - \Omega y_0') + \sum_{i=1}^2 (-\omega_0 \mu\eta\beta_{i0}'' \sin \beta_{i0} - \mu\eta\Omega\beta_{i0}' \cos \beta_{i0} - \omega_0 \mu\eta\beta_{i0}'^2 \cos \beta_{i0}) \right] \\ 2 \left[(\omega_0 y_0'' + \Omega x_0' + \zeta y_0') + \sum_{i=1}^2 (\omega_0 \mu\eta\beta_{i0}'' \cos \beta_{i0} - \mu\eta\Omega\beta_{i0}' \sin \beta_{i0} - \omega_0 \mu\eta\beta_{i0}'^2 \sin \beta_{i0}) \right] \\ 2\mu\eta \left[(-\omega_0 x_0'' + \Omega y_0') \sin \beta_{10} + (\omega_0 y_0'' + \Omega x_0') \cos \beta_{10} + \omega_0 \delta\beta_{10}'' + \zeta_B \delta\beta_{10}' \right] \\ 2\mu\eta \left[(-\omega_0 x_0'' + \Omega y_0') \sin \beta_{20} + (\omega_0 y_0'' + \Omega x_0') \cos \beta_{20} + \omega_0 \delta\beta_{20}'' + \zeta_B \delta\beta_{20}' \right] \end{bmatrix} \quad (2.5g)$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} -2 \left[\omega_0 y_0' + \Omega_0 x_0 + \zeta y_0 + \mu\Omega_0 + \sum_{i=1}^2 (\omega_0 \mu\eta\beta_{i0}' \cos \beta_{i0} + \mu\eta\Omega_0 \cos \beta_{i0}) \right] \\ 2 \left[\omega_0 x_0' + \zeta x_0 - \Omega_0 y_0 - \sum_{i=1}^2 (\omega_0 \mu\eta\beta_{i0}' \sin \beta_{i0} + \mu\eta\Omega_0 \sin \beta_{i0}) \right] \\ 2 \left[(\mu\eta\omega_0 x_0' - \mu\eta y_0 \Omega_0) \cos \beta_{10} + (\mu\eta\omega_0 y_0' + \mu\eta x_0 \Omega_0) \sin \beta_{10} \right] \\ 2 \left[(\mu\eta\omega_0 x_0' - \mu\eta y_0 \Omega_0) \cos \beta_{20} + (\mu\eta\omega_0 y_0' + \mu\eta x_0 \Omega_0) \sin \beta_{20} \right] \end{bmatrix} \quad (2.5h)$$

$$\mathbf{r} = \omega_0^2 \mathbf{M}_0 \mathbf{q}_0'' + \omega_0 \bar{\mathbf{C}}_0 \mathbf{q}_0' + \mathbf{f}(x_0, y_0, \beta_{10}, \beta_{10}', \beta_{20}, \beta_{20}', \eta, \Omega_0) \quad (2.5i)$$

其中

$$\bar{C}_0 = \begin{bmatrix} 2\zeta & -2\Omega & -2\mu\eta\Omega \cos \beta_{10} & -2\mu\eta\Omega \cos \beta_{20} \\ 2\Omega & 2\zeta & -2\mu\eta\Omega \sin \beta_{10} & -2\mu\eta\Omega \sin \beta_{20} \\ 2\mu\eta\Omega \cos \beta_{10} & 2\mu\eta\Omega \sin \beta_{10} & 2\zeta_B \mu\eta\delta & 0 \\ 2\mu\eta\Omega \cos \beta_{20} & 2\mu\eta\Omega \sin \beta_{20} & 0 & 2\zeta_B \mu\eta\delta \end{bmatrix} \quad (2.5j)$$

(2) Galerkin 法：

雙滾珠平衡系統週期解的形式分為三種，無論滾珠以何種形式運動， x_0 、 y_0

皆為來回振盪的週期性函數，可表為傅利葉級數如下：

$$x_0 = a_{x0} + \sum_{m=1,2,3,\dots}^N (a_{xm} \cos m\tau + b_{xm} \sin m\tau) \quad (2.6a)$$

$$y_0 = a_{y0} + \sum_{m=1,2,3,\dots}^N (a_{ym} \cos m\tau + b_{ym} \sin m\tau) \quad (2.6b)$$

x_0 及 y_0 的修正項可表示為：

$$\Delta x = \Delta a_{x0} + \sum_{m=1,2,3,\dots}^N (\Delta a_{xm} \cos m\tau + \Delta b_{xm} \sin m\tau) \quad (2.6c)$$

$$\Delta y = \Delta a_{y0} + \sum_{m=1,2,3,\dots}^N (\Delta a_{ym} \cos m\tau + \Delta b_{ym} \sin m\tau) \quad (2.6d)$$

β_{i0} 以及其修正項則根據週期解的形式以及相位條件的設定而有不同的表示方式，

分別討論如下：

(a) 旋轉週期解

β_{10} 及 β_{20} 相對於碟片順時鐘旋轉，為單調函數，可表為廣義傅利葉級數。

需要搭配適當的相位條件才能唯一決定週期解，本文選擇令 β_{10} 的起始值為 0 作

為相位條件。因此，將 β_{10} 及 β_{20} 表示為：

$$\beta_{10} = -\tau + \sum_{m=1,2,3,\dots}^N [a_{\beta 1m} (\cos m\tau - 1) + b_{\beta 1m} \sin m\tau] \quad (2.7a)$$

$$\beta_{20} = a_{\beta 20} - \tau + \sum_{m=1,2,3,\dots}^N (a_{\beta 2m} \cos m\tau + b_{\beta 2m} \sin m\tau) \quad (2.7b)$$

β_{10} 及 β_{20} 的修正項可表示為：

$$\Delta\beta_1 = \sum_{m=1,2,3\dots}^N \left[\Delta a_{\beta 1m} (\cos m\tau - 1) + \Delta b_{\beta 1m} \sin m\tau \right] \quad (2.7c)$$

$$\Delta\beta_2 = \Delta a_{\beta 20} + \sum_{m=1,2,3\dots}^N \left(\Delta a_{\beta 2m} \cos m\tau + \Delta b_{\beta 2m} \sin m\tau \right) \quad (2.7d)$$

(b) 來回振盪週期解

當滾珠來回振盪時，不保證滾珠振盪的範圍包含 0 點，因此不適合套用式 (2.7)。考慮將常數項以外的某一項傅利葉係數令為 0，刪除對應的修正項係數，這相當於重設座標變數時間的原點，並不影響方程式的解。本文設定 b_{x1} 及 Δb_{x1} 為 0，將 x_0 及 Δx 重新表示如下：

$$x_0 = a_{x0} + \sum_{m=2,3\dots}^N \left(a_{xm} \cos m\tau + b_{xm} \sin m\tau \right) \quad (2.8a)$$

$$\Delta x = \Delta a_{x0} + \sum_{m=2,3\dots}^N \left(\Delta a_{xm} \cos m\tau + \Delta b_{xm} \sin m\tau \right) \quad (2.8b)$$

兩顆滾珠皆作來回振盪運動，可表為傅利葉級數如下：

$$\beta_{10} = a_{\beta 10} + \sum_{m=1,2,3\dots}^N \left(a_{\beta 1m} \cos m\tau + b_{\beta 1m} \sin m\tau \right) \quad (2.8c)$$

$$\beta_{20} = a_{\beta 20} + \sum_{m=1,2,3\dots}^N \left(a_{\beta 2m} \cos m\tau + b_{\beta 2m} \sin m\tau \right) \quad (2.8d)$$

β_{10} 及 β_{20} 的修正項可表示為：

$$\Delta\beta_1 = \Delta a_{\beta 10} + \sum_{m=1,2,3\dots}^N \left(\Delta a_{\beta 1m} \cos m\tau + \Delta b_{\beta 1m} \sin m\tau \right) \quad (2.8e)$$

$$\Delta\beta_2 = \Delta a_{\beta 20} + \sum_{m=1,2,3\dots}^N \left(\Delta a_{\beta 2m} \cos m\tau + \Delta b_{\beta 2m} \sin m\tau \right) \quad (2.8f)$$

(c) 一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解

假設滾珠 1 作旋轉運動，滾珠 2 作來回振盪運動。 β_{10} 的起始值可為任意值，本文選擇 β_{10} 的起始值為 0 作為相位條件。因此， β_{10} 及 β_{20} 可分別表示為：

$$\beta_{10} = -\tau + \sum_{m=1,2,3\dots}^N \left[a_{\beta 1m} (\cos m\tau - 1) + b_{\beta 1m} \sin m\tau \right] \quad (2.9a)$$

$$\beta_{20} = a_{\beta 20} + \sum_{m=1,2,3\dots}^N \left(a_{\beta 2m} \cos m\tau + b_{\beta 2m} \sin m\tau \right) \quad (2.9b)$$

β_{10} 及 β_{20} 的修正項可表示為：

$$\Delta\beta_1 = \sum_{m=1,2,3\dots}^N \left[\Delta a_{\beta 1m} (\cos m\tau - 1) + \Delta b_{\beta 1m} \sin m\tau \right] \quad (2.9c)$$

$$\Delta\beta_2 = \Delta a_{\beta 20} + \sum_{m=1,2,3\dots}^N \left(\Delta a_{\beta 2m} \cos m\tau + \Delta b_{\beta 2m} \sin m\tau \right) \quad (2.9d)$$

依滾珠的運動形式選擇適當的傅利葉級數代回式(2.5)，應用 Galerkin 法得到一組由傅利葉係數、 $\Delta\omega$ 及 $\Delta\Omega$ 組成的線性方程式，其形式為：

$$\mathbf{C}\Delta\mathbf{a} = \mathbf{R} + \mathbf{P}\Delta\omega + \mathbf{G}\Delta\Omega \quad (2.10)$$

其中控制變數 $\Delta\Omega$ 為已知，振動頻率 ω 隨系統參數不同而變化，因此 $\Delta\omega$ 為未知。

求解 $\Delta\mathbf{a}$ 及 $\Delta\omega$ 後，更新各起始猜值直到 $\Delta\mathbf{a}$ 及 $\Delta\omega$ 滿足收斂條件。



2-3 週期解穩定性分析

本節將敘述利用 Floquet 理論判別週期解穩定性的步驟，步驟如下[21]：

(1) 線性化運動方程式

假設由 MIHB 法求出的週期解 \hat{x} 、 \hat{y} 、 $\hat{\beta}_1$ 、 $\hat{\beta}_2$ 分別具有微小的擾動 ξ_x 、 ξ_y 、 $\xi_{\beta 1}$ 、 $\xi_{\beta 2}$ ，將 $x = \hat{x} + \xi_x$ 、 $y = \hat{y} + \xi_y$ 、 $\beta_1 = \hat{\beta}_1 + \xi_{\beta 1}$ 、 $\beta_2 = \hat{\beta}_2 + \xi_{\beta 2}$ 代入式(2.3)展開，忽略高階項得到一組線性方程式：

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\xi} + \hat{\mathbf{C}}\dot{\xi} + \hat{\mathbf{K}}\xi = \mathbf{0} \quad (2.11a)$$

其中

$$\xi = [\xi_x \quad \xi_y \quad \xi_{\beta 1} \quad \xi_{\beta 2}]^T \quad (2.11b)$$

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\mu\eta \sin \hat{\beta}_1 & -\mu\eta \sin \hat{\beta}_2 \\ 0 & 1 & \mu\eta \cos \hat{\beta}_1 & \mu\eta \cos \hat{\beta}_2 \\ -\mu\eta \sin \hat{\beta}_1 & \mu\eta \cos \hat{\beta}_1 & \mu\eta\delta & 0 \\ -\mu\eta \sin \hat{\beta}_2 & \mu\eta \cos \hat{\beta}_2 & 0 & \mu\eta\delta \end{bmatrix} \quad (2.11c)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 2\zeta & -2\Omega & -2\mu\eta(\Omega + \dot{\hat{\beta}}_1) \cos \hat{\beta}_1 & -2\mu\eta(\Omega + \dot{\hat{\beta}}_2) \cos \hat{\beta}_2 \\ 2\Omega & 2\zeta & -2\mu\eta(\Omega + \dot{\hat{\beta}}_1) \sin \hat{\beta}_1 & -2\mu\eta(\Omega + \dot{\hat{\beta}}_2) \sin \hat{\beta}_2 \\ 2\mu\eta\Omega \cos \hat{\beta}_1 & 2\mu\eta\Omega \sin \hat{\beta}_1 & 2\zeta_B \mu\eta\delta & 0 \\ 2\mu\eta\Omega \cos \hat{\beta}_2 & 2\mu\eta\Omega \sin \hat{\beta}_2 & 0 & 2\zeta_B \mu\eta\delta \end{bmatrix} \quad (2.11d)$$

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 1 - \Omega^2 & -2\zeta\Omega & \hat{k}_{13} & \hat{k}_{14} \\ 2\zeta\Omega & 1 - \Omega^2 & \hat{k}_{23} & \hat{k}_{24} \\ \mu\eta\Omega^2 \sin \hat{\beta}_1 & -\mu\eta\Omega^2 \cos \hat{\beta}_1 & \hat{k}_{33} & 0 \\ \mu\eta\Omega^2 \sin \hat{\beta}_2 & -\mu\eta\Omega^2 \cos \hat{\beta}_2 & 0 & \hat{k}_{44} \end{bmatrix} \quad (2.11e)$$

其中

$$\begin{aligned}
\hat{k}_{13} &= -\mu\eta\ddot{\beta}_1 \cos \hat{\beta}_1 + \left(2\mu\eta\Omega\dot{\beta}_1 + \mu\eta\Omega^2 + \mu\eta\dot{\beta}_1^2\right) \sin \hat{\beta}_1 \\
\hat{k}_{23} &= \left(-2\mu\eta\Omega\dot{\beta}_1 - \mu\eta\Omega^2 - \mu\eta\dot{\beta}_1^2\right) \cos \hat{\beta}_1 - \mu\eta\ddot{\beta}_1 \sin \hat{\beta}_1 \\
\hat{k}_{33} &= \left(-\mu\eta\ddot{x} + 2\mu\eta\Omega\dot{y} + \mu\eta\Omega^2\hat{x}\right) \cos \hat{\beta}_1 - \left(\mu\eta\ddot{y} + 2\mu\eta\Omega\dot{x} - \mu\eta\Omega^2\hat{y}\right) \sin \hat{\beta}_1 \\
\hat{k}_{14} &= -\mu\eta\ddot{\beta}_2 \cos \hat{\beta}_2 + \left(2\mu\eta\Omega\dot{\beta}_2 + \mu\eta\Omega^2 + \mu\eta\dot{\beta}_2^2\right) \sin \hat{\beta}_2 \\
\hat{k}_{24} &= \left(-2\mu\eta\Omega\dot{\beta}_2 - \mu\eta\Omega^2 - \mu\eta\dot{\beta}_2^2\right) \cos \hat{\beta}_2 - \mu\eta\ddot{\beta}_2 \sin \hat{\beta}_2 \\
\hat{k}_{44} &= \left(-\mu\eta\ddot{x} + 2\mu\eta\Omega\dot{y} + \mu\eta\Omega^2\hat{x}\right) \cos \hat{\beta}_2 - \left(\mu\eta\ddot{y} + 2\mu\eta\Omega\dot{x} - \mu\eta\Omega^2\hat{y}\right) \sin \hat{\beta}_2 \quad (2.11f)
\end{aligned}$$

(2) 改寫為一階微分方程式

由 (2.11) 得到：

$$\ddot{\xi} = \mathbf{a} \quad (2.12a)$$

其中

$$\mathbf{a} = -\hat{\mathbf{M}}^{-1}\hat{\mathbf{C}}\dot{\xi} - \hat{\mathbf{M}}^{-1}\hat{\mathbf{K}}\xi = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4]^T \quad (2.12b)$$

接著將式 (2.12) 改寫為一階微分方程式的形式：

$$\dot{\xi} = \mathbf{b}(\xi) \quad (2.13a)$$

其中

$$\xi = [\xi_x \quad \dot{\xi}_x \quad \xi_y \quad \dot{\xi}_y \quad \xi_{\beta 1} \quad \dot{\xi}_{\beta 1} \quad \xi_{\beta 2} \quad \dot{\xi}_{\beta 2}]^T \quad (2.13b)$$

$$\mathbf{b}(\xi) = [\dot{\xi}_x \quad a_1 \quad \dot{\xi}_y \quad a_2 \quad \dot{\xi}_{\beta 1} \quad a_3 \quad \dot{\xi}_{\beta 2} \quad a_4]^T \quad (2.13c)$$

(3) 求解 Monodromy matrix

式 (2.13) 具有 8 組線性獨立的解 ξ_i ($i=1,2,\dots,8$)，其 Fundamental 矩陣可寫成以下形式：

$$\Xi = [\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3 \ \xi_4 \ \xi_5 \ \xi_6 \ \xi_7 \ \xi_8] \quad (2.14)$$

由於微分方程式的係數為週期性函數，週期為 T ，因此 Fundamental 矩陣滿足以下關係：

$$\Xi(t+T) = \Xi(t)\Phi \quad (2.15)$$

其中 Φ 為 Monodromy 矩陣。假設 $\Xi(0) = \mathbf{I}$ (\mathbf{I} 為 8×8 單位矩陣)，令 $t=0$ 代入式 (2.15)，可得到下列關係式：

$$\Phi = \Xi(T) \quad (2.16)$$

實際操作時，選擇 $\Xi(0) = \mathbf{I}$ 作為初始條件，對式 (2.13) 進行數值積分，積分時間為週期 T ，根據式 (2.16) 的關係，計算出的 Fundamental 矩陣即為 Φ ；利用 Φ 的特徵值 λ_i ($i=1,2,\dots,8$) 判別週期解的穩定性， λ_i 具有以下特性：

- (i) 存在一個絕對值為 1 的特徵值。
- (ii) 若其餘特徵值之絕對值皆小於或等於 1，週期解為穩定。
- (iii) 若其餘特徵值中，存在一個或數個特徵值之絕對值大於 1，週期解為不穩定。

注意特性 (i) 可用來檢驗所得週期解的精確性。如果所得週期解不夠精確，Monodromy 矩陣可能不存在一個絕對值為 1 的特徵值。

2-4 平衡解穩定性分析

平衡位置的穩定性可由運動方程式在平衡位置上線性化後的特徵值來決定。假設雙滾珠平衡系統的平衡解為 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)$ ，Lu 等人[20]推導出在完全平衡的情況下 $\bar{x} = 0$ 、 $\bar{y} = 0$ ，滾珠的平衡位置為 $\bar{\beta}_1 = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2\eta}\right)$ 、 $\bar{\beta}_2 = -\bar{\beta}_1$ ，將完全平衡解加上微小擾動代入式(2.3)線性化後可得到系統特徵方程式如下：

$$\bar{a}_0 s^8 + \bar{a}_1 s^7 + \bar{a}_2 s^6 + \bar{a}_3 s^5 + \bar{a}_4 s^4 + \bar{a}_5 s^3 + \bar{a}_6 s^2 + \bar{a}_7 s^1 + \bar{a}_8 = 0 \quad (2.17a)$$

其中

$$\bar{a}_0 = 1 \quad (2.17b)$$

$$\bar{a}_1 = \left[8\delta(\delta - \eta\mu)(\zeta + \zeta_B) \right] / \left\{ 2\delta^2 - 4\delta\eta\mu + (\eta\mu)^2 - (\eta\mu)^2 \cos[2(\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2)] \right\} \quad (2.17c)$$

$$\bar{a}_2 = \left\{ 4 \left[\Omega^2 - \delta \left\{ \eta\mu(1 - 3\Omega^2 + 4\zeta\zeta_B) + \delta \left[-1 + \Omega^2 - 2(\zeta^2 + 4\zeta\zeta_B + \zeta_B^2) \right] \right\} \right] \right\} / \left\{ 2\delta^2 - 4\delta\eta\mu + (\eta\mu)^2 - (\eta\mu)^2 \cos[2(\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2)] \right\} \quad (2.17d)$$

$$\bar{a}_3 = \left\{ 8\delta \left[\left[\delta + (\delta + 2\eta\mu)\Omega^2 \right] \zeta + \left[(2\delta - \eta\mu)(1 + \Omega^2) + 4\delta\zeta^2 \right] \zeta_B + 4\delta\zeta\zeta_B^2 \right] \right\} / \left\{ 2\delta^2 - 4\delta\eta\mu + (\eta\mu)^2 - (\eta\mu)^2 \cos[2(\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2)] \right\} \quad (2.17e)$$

$$\bar{a}_4 = \left\{ 2 \left\{ 3\eta^2 \mu^2 \Omega^4 + 2\delta\eta\mu\Omega^2 (6 + \Omega^2 + 8\zeta\zeta_B) + \delta^2 \left[1 + \Omega^4 + 2\Omega^2 (-1 + 2\zeta^2 + 8\zeta\zeta_B + 4\zeta_B^2) + 8\zeta_B [\zeta_B + 2\zeta(1 + \zeta\zeta_B)] \right] \right\} - 3\eta^2 \mu^2 \Omega^4 \cos[2(\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2)] \right\} / \left\{ 2\delta^2 - 4\delta\eta\mu + (\eta\mu)^2 - (\eta\mu)^2 \cos[2(\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2)] \right\} \quad (2.17f)$$

$$\bar{a}_5 = \left\{ 8\delta \left\{ \eta\mu\Omega^2 \left[6\zeta_B + \Omega^2 (3\zeta + \zeta_B) \right] + \delta\zeta_B \left[1 + \Omega^4 + 4\zeta\zeta_B + \Omega^2 \left[-2 + 4\zeta(\zeta + \zeta_B) \right] \right] \right\} \right\} / \left\{ 2\delta^2 - 4\delta\eta\mu + (\eta\mu)^2 - (\eta\mu)^2 \cos[2(\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2)] \right\} \quad (2.17g)$$

$$\bar{a}_6 = \left\{ 4 \left\{ \eta^2 \mu^2 \Omega^6 + 2\delta^2 \left[(-1 + \Omega^2)^2 + 4\Omega^2 \zeta^2 \right] \zeta_B^2 + \delta \eta \mu \Omega^4 (-1 + \Omega^2 + 12\zeta \zeta_B) - \right. \right. \\ \left. \left. - \eta^2 \mu^2 \Omega^6 \cos \left[2(\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2) \right] \right\} \right\} / \left\{ 2\delta^2 - 4\delta \eta \mu + (\eta \mu)^2 - (\eta \mu)^2 \cos \left[2(\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2) \right] \right\} \quad (2.17h)$$

$$\bar{a}_7 = \left[8\delta \eta \mu \Omega^4 (-1 + \Omega^2) \zeta_B \right] / \left\{ 2\delta^2 - 4\delta \eta \mu + (\eta \mu)^2 - (\eta \mu)^2 \cos \left[2(\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2) \right] \right\} \quad (2.17i)$$

$$\bar{a}_8 = \left[2\eta^2 \mu^2 \Omega^8 \sin^2 (\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2) \right] / \left\{ 2\delta^2 - 4\delta \eta \mu + (\eta \mu)^2 - (\eta \mu)^2 \cos \left[2(\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2) \right] \right\} \quad (2.17j)$$


依據 Routh-Hurwitz Criterion，使用特徵方程式的係數建立 Routh 陣列，若 Routh 陣列中第一行元素皆同號時，系統為穩定；反之則為不穩定。



第三章 數值結果及參數分析

本文於第二章說明利用 MIHB 法分析週期解的方法。相對於 NI，MIHB 法具有能找出穩定及不穩定週期解的優點。此外，可經由迭代的程序得到參數微小變化後的新解，因此適用於分析週期解隨參數變化的情形。本章將驗證 MIHB 法求解的正確性；應用 MIHB 法求得週期解在參數平面上的分佈區域，並利用 Floquet 理論判別週期解的穩定性。由於本文著重於雙滾珠系統的討論，因此僅於 3-1 節中針對單滾珠系統作簡單的介紹，而 3-2 節至 3-4 節皆為雙滾珠系統的分析。其中 3-2 節驗證 MIHB 法應用於雙滾珠系統的正確性；3-3 節針對旋轉期解進行參數分析；3-4 節探討其它形式的週期解。

3-1 單滾珠平衡系統



本節首先簡單描述單滾珠平衡系統。當滾珠位於偏心質量對邊的平衡位置時，可部分地抵銷系統的偏心量，但單一滾珠無法因應偏心量大小而自動調整系統需要的制振量。換言之，若是滾珠提供的制振量和偏心量不相同時系統將無法完全平衡。洪嘉興[2]討論過因為初始條件的不同，系統可能收斂至穩定平衡解或週期解，其中週期解存在旋轉週期解及來回振盪週期解兩種形式，而旋轉週期解為實驗上較容易觀察到的運動形式。MIHB 法可針對此兩種形式週期解求解，詳細過程請參見[22]。本文將於 4-3 節進行實驗驗證單滾珠系統的制振能力以及旋轉週期解對系統的影響。

3-2 Modified Incremental Harmonic Balance method 驗證

利用 MIHB 法計算時，求解的精確程度取決於傅利葉級數的項數以及收斂容許誤差的大小。若選擇項數較高的級數或者較小的容許誤差所花費的計算時間也隨之增加。考慮以上因素，除了另外說明外，本章求解時選擇項數 $N=3$ ，收斂條件為 $\frac{|\Delta q_i|}{|q_{0i}|} \leq 0.01$ 。隨著系統參數不同，存在不同形式的週期解。雙滾珠系統的運動形態分為三種，以下選擇不同的參數分別求解不同形式的週期解，為了驗證所得的結果，將 MIHB 法計算的週期解和 NI 比較：

(1) $\mu = 0.2$ ， $\zeta = 0.05$ ， $\zeta_B = 0.05$ ， $\delta = 50$ ， $\Omega = 1.2$ ， $\eta = 1.0$

此參數下存在一組旋轉週期解，結果如圖 3-1。

(2) $\mu = 0.2$ ， $\zeta = 0.1$ ， $\zeta_B = 0.1$ ， $\delta = 50$ ， $\Omega = 1.1$ ， $\eta = 1.0$

此參數下存在一組來回振盪週期解，結果如圖 3-2。

(3) $\mu = 0.2$ ， $\zeta = 0.02$ ， $\zeta_B = 0.1$ ， $\delta = 50$ ， $\Omega = 1.3$ ， $\eta = 0.8$

此參數下存在一組一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解，結果如圖 3-3。

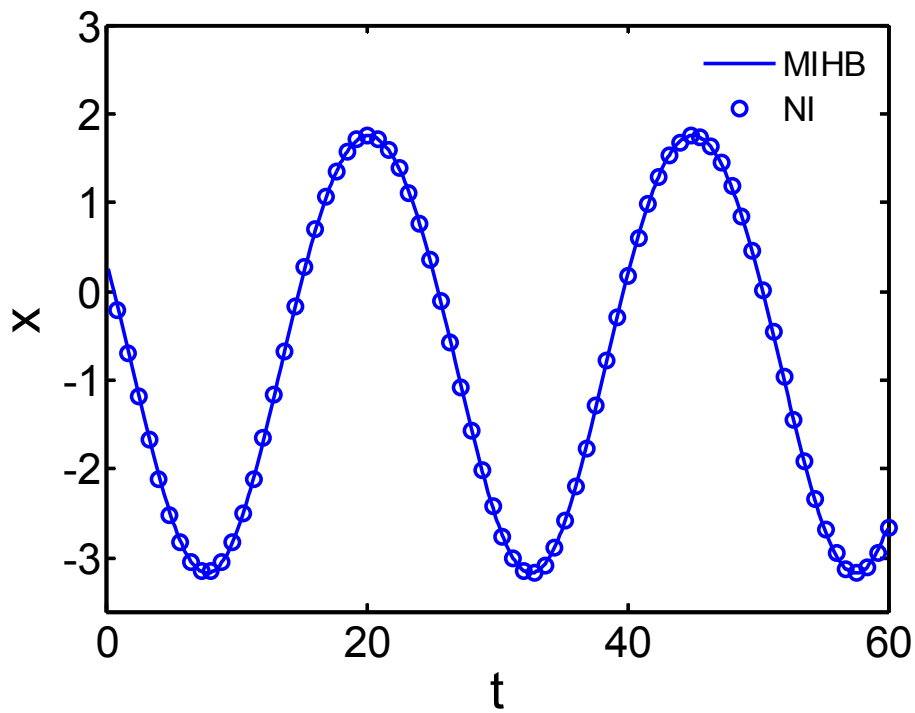


圖 3-1a x 時間歷程圖(旋轉週期解)

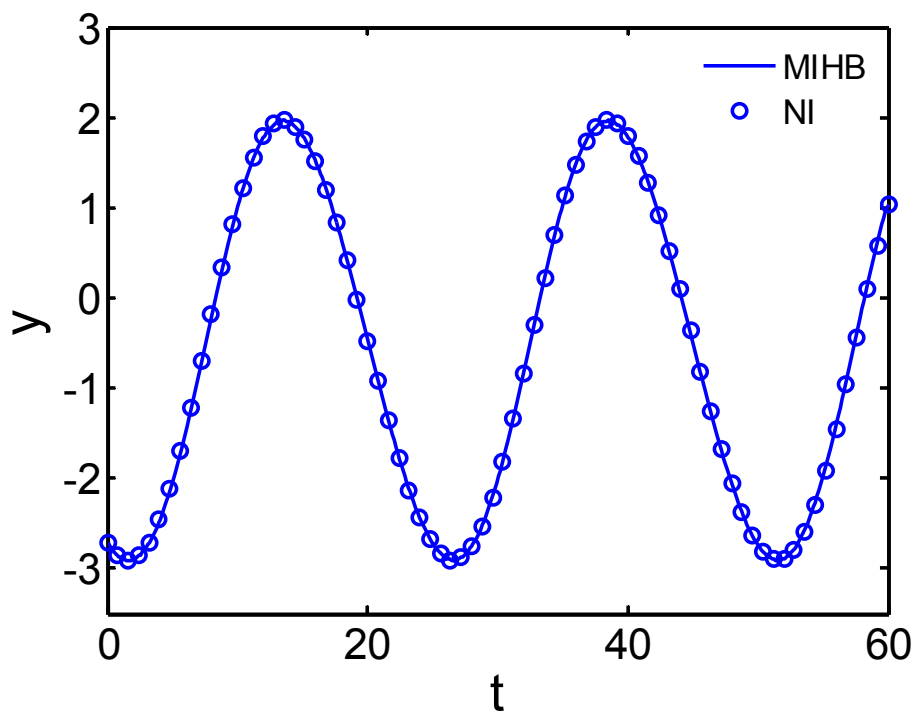


圖 3-1b y 時間歷程圖(旋轉週期解)

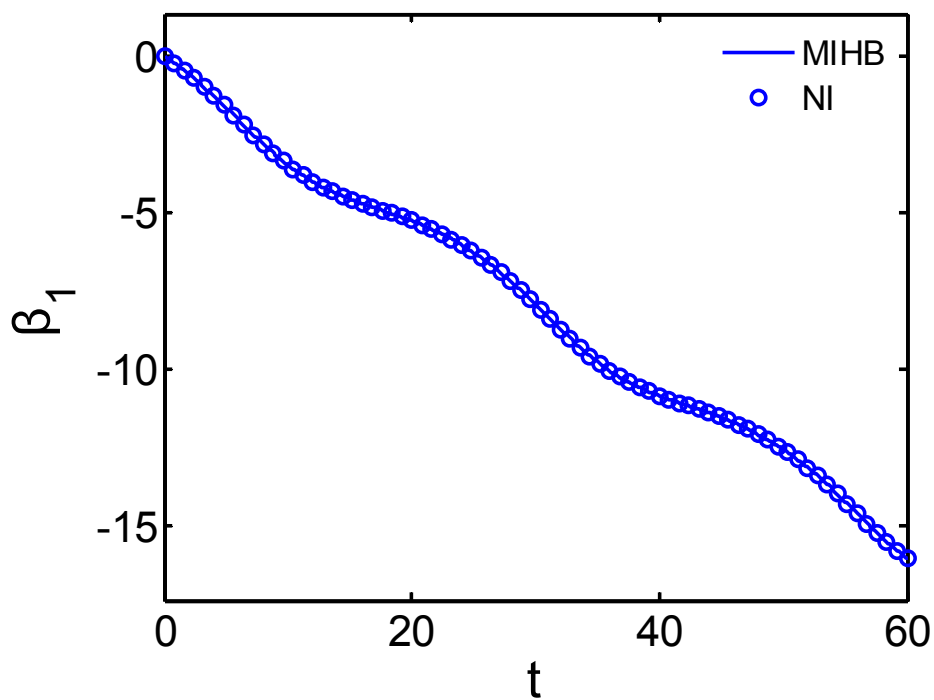


圖 3-1c β_1 時間歷程圖(旋轉週期解)

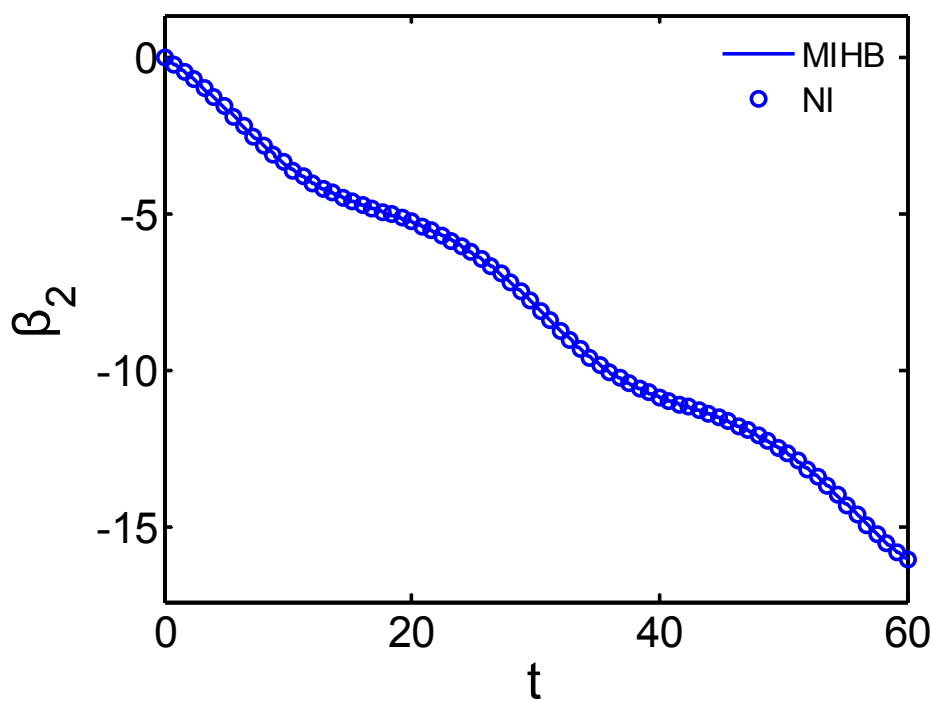


圖 3-1d β_2 時間歷程圖(旋轉週期解)

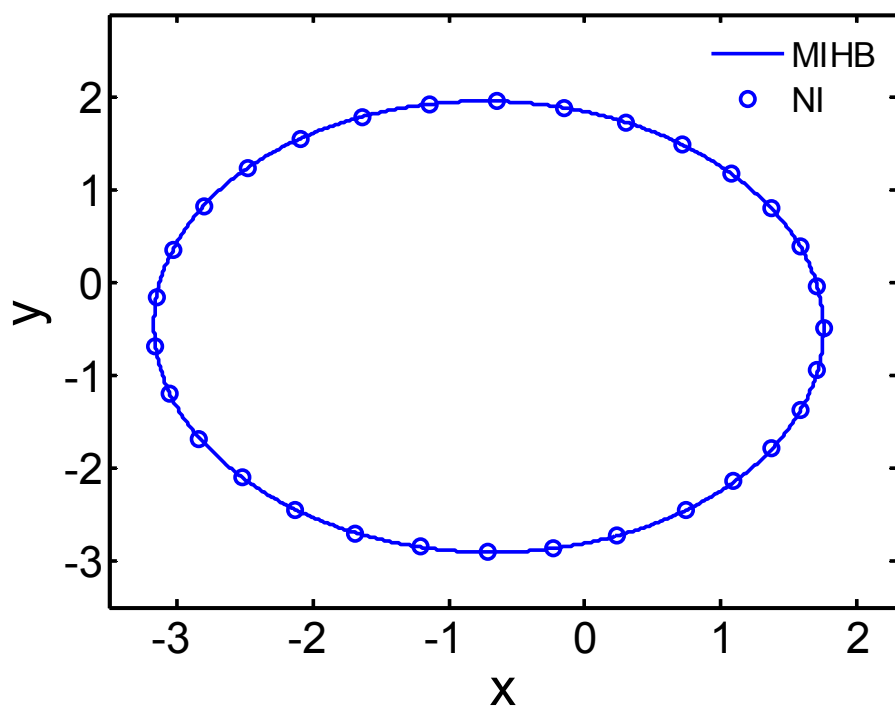


圖 3-1e $x-y$ 平面軌跡圖(旋轉週期解)

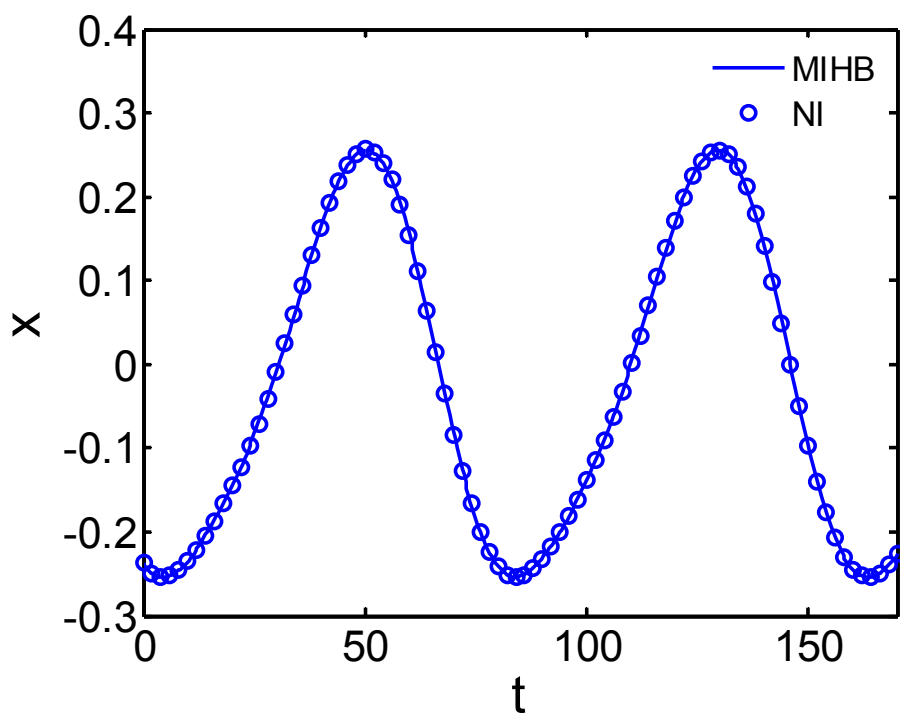


圖 3-2a x 時間歷程圖(來回振盪週期解)

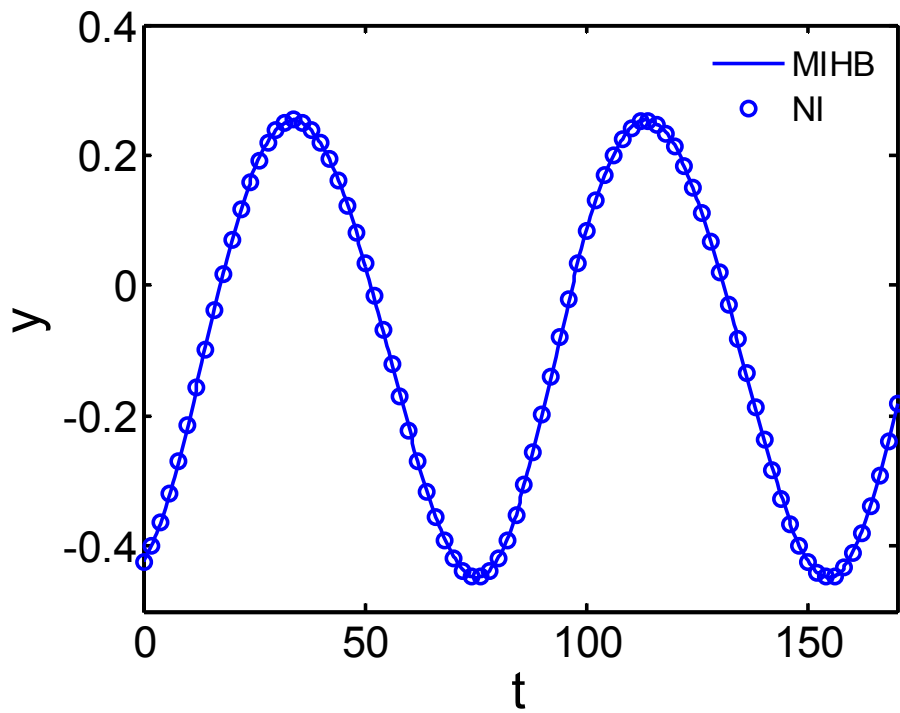


圖 3-2b y 時間歷程圖(來回振盪週期解)

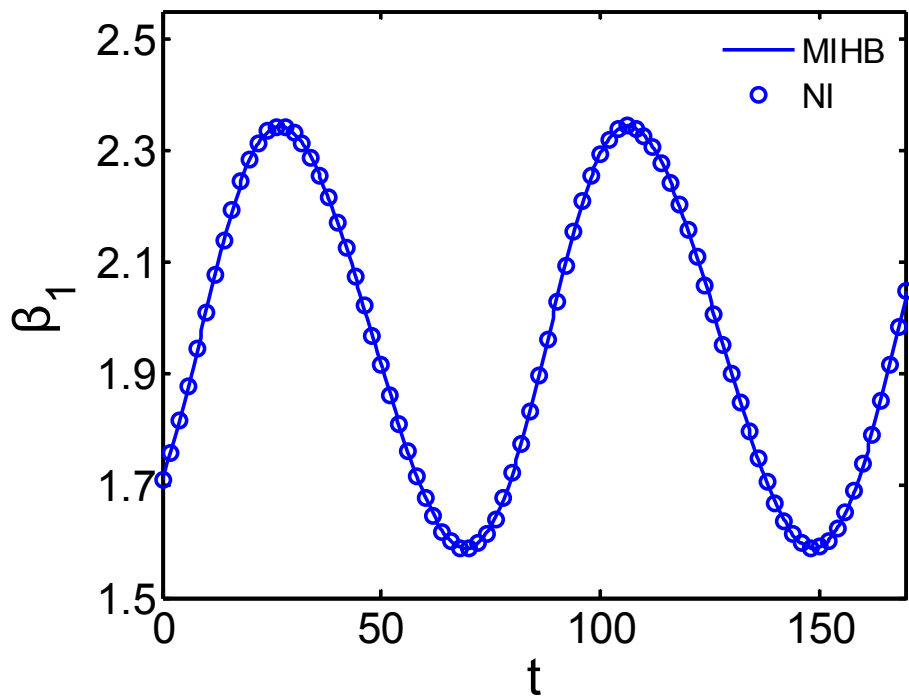


圖 3-2c β_1 時間歷程圖(來回振盪週期解)

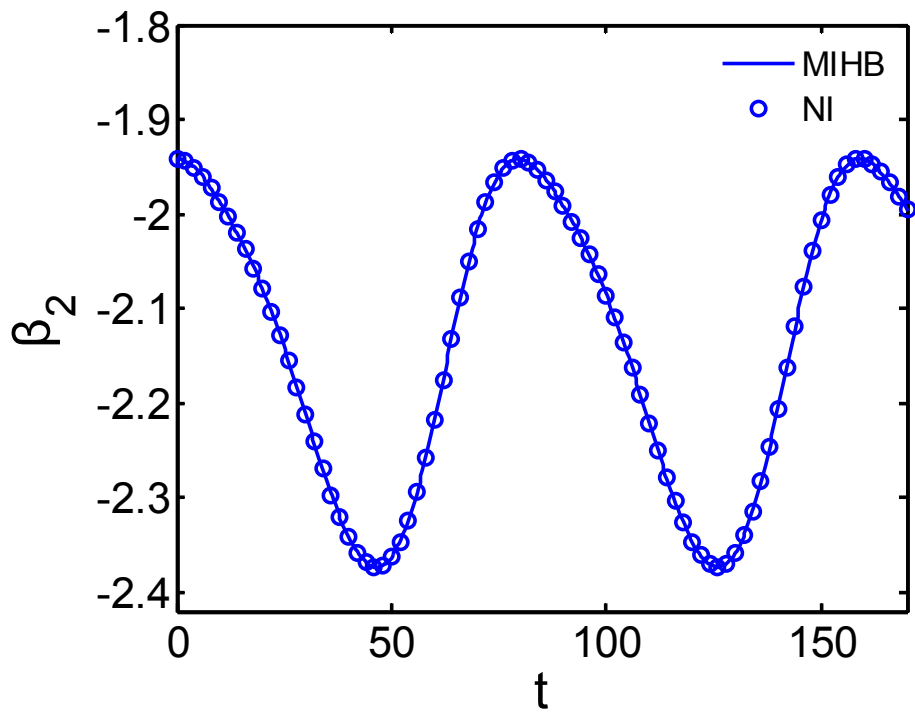


圖 3-2d β_2 時間歷程圖(來回振盪週期解)

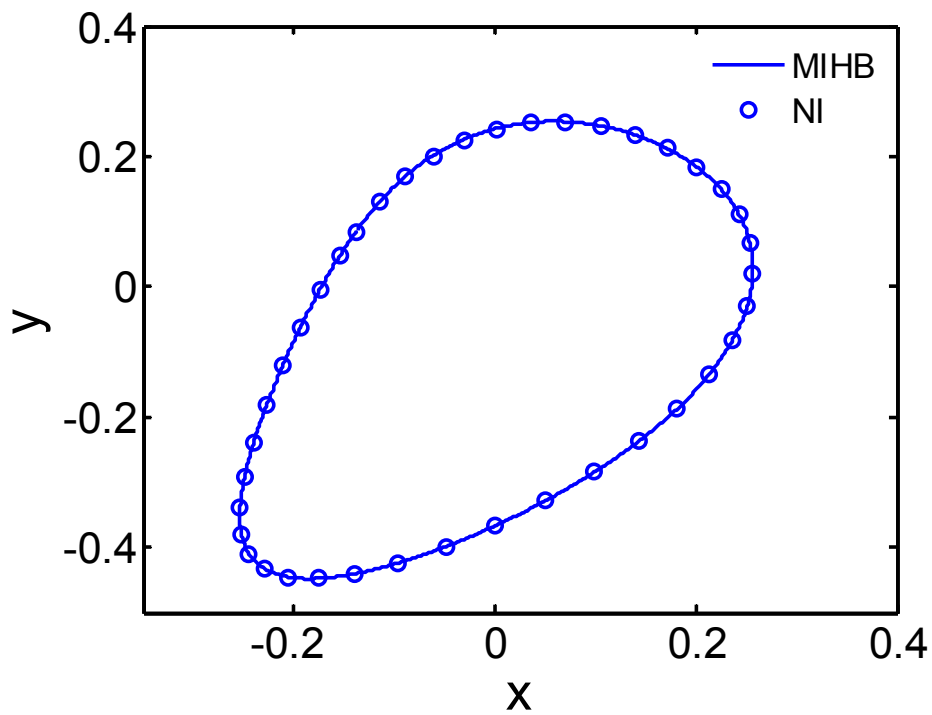


圖 3-2e $x-y$ 平面軌跡圖(來回振盪週期解)

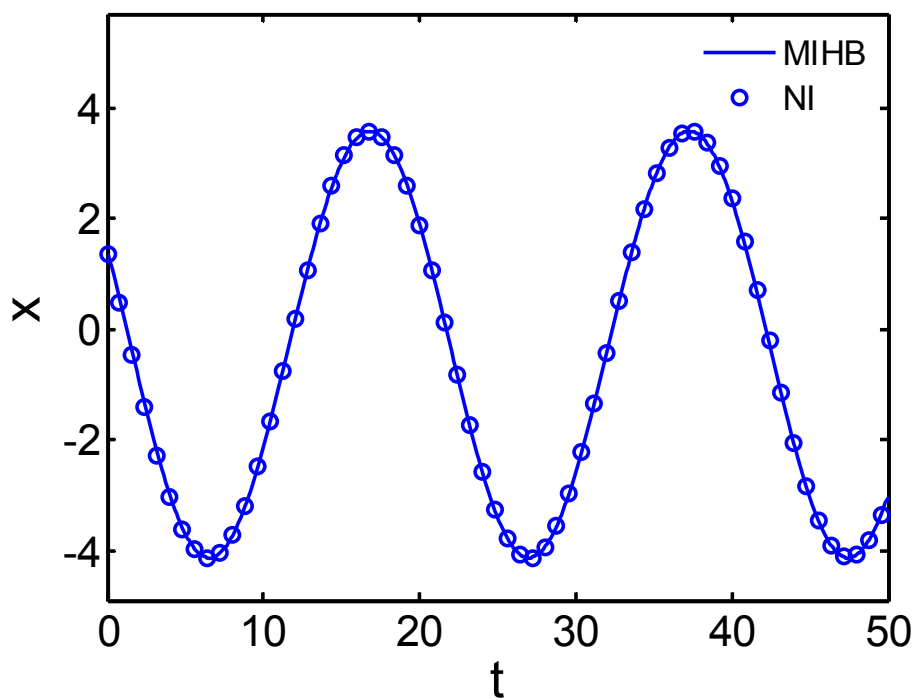


圖 3-3a x 時間歷程圖(一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解)

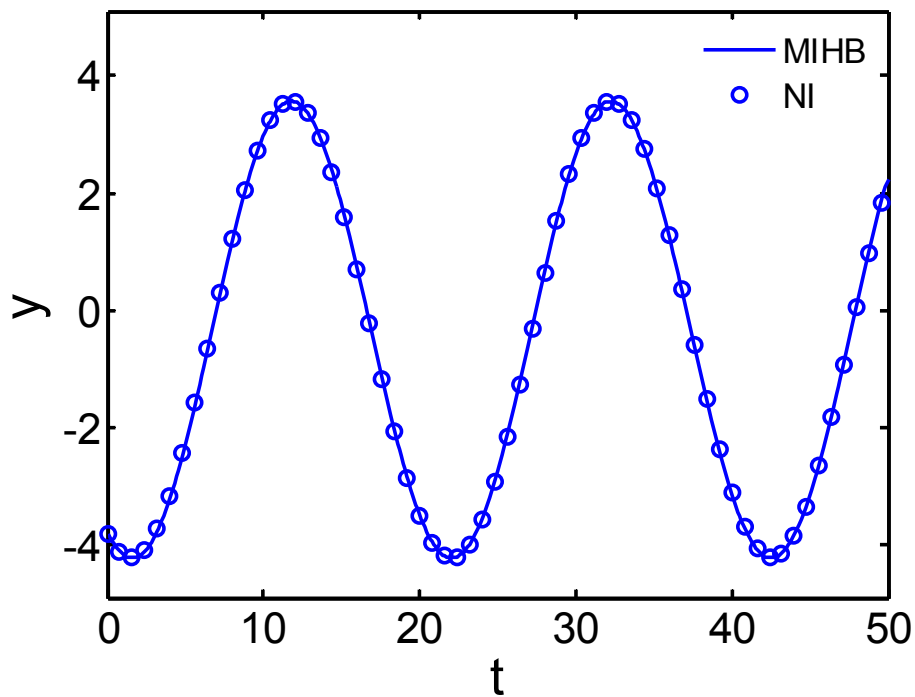


圖 3-3b y 時間歷程圖(一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解)

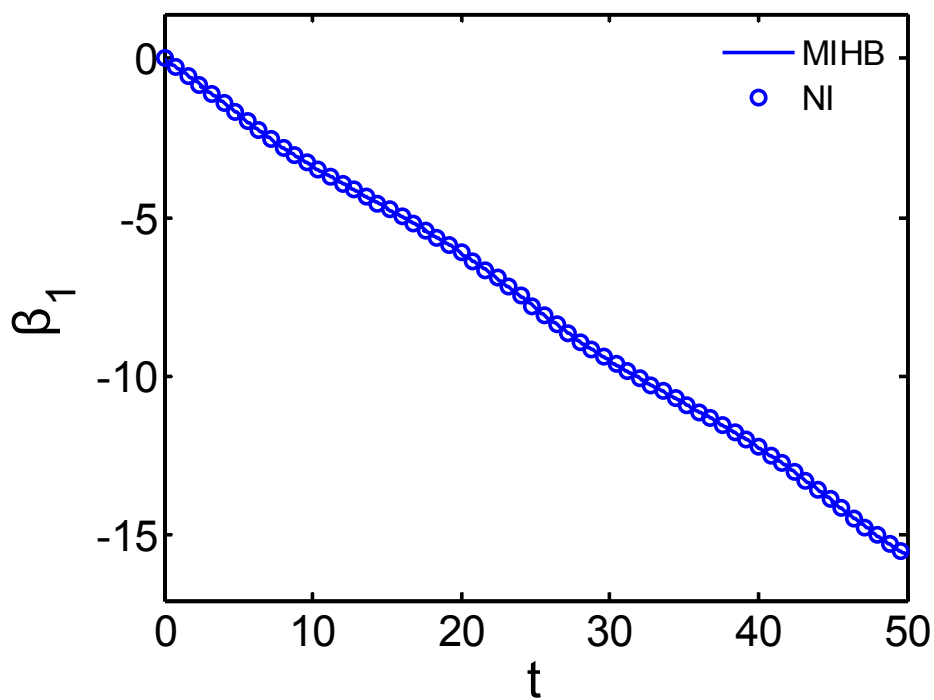


圖 3-3c β_1 時間歷程圖(一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解)

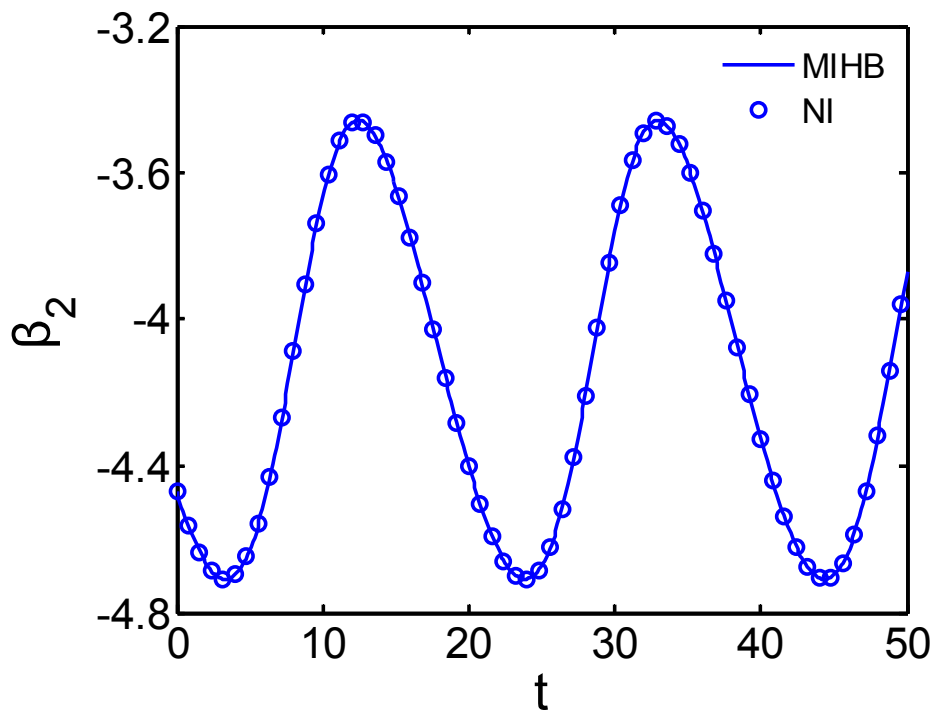


圖 3-3d β_2 時間歷程圖(一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解)

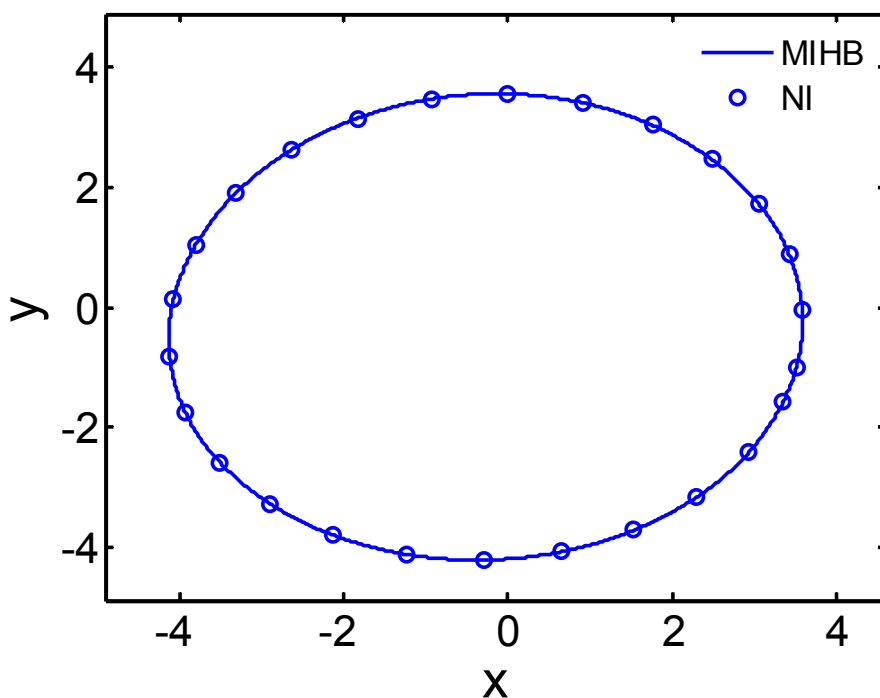


圖 3-3e $x-y$ 平面軌跡圖(一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解)

注意圖 3-1c 及圖 3-1d，當運動形式為旋轉週期解時， β_1 及 β_2 的路徑幾乎相同，表示兩顆滾珠合併在一起作旋轉運動。觀察以上結果，在大部分的參數條件下，選擇傅利葉項數 $N=3$ 皆可如上圖得到準確的週期解，此時對應的 Monodromy 矩陣存在一絕對值為 1 的特徵值。然而在某些情況下，計算結果會存在較大的誤差。例如，當參數為 $\mu = 0.2$ ， $\zeta = 0.05$ ， $\zeta_B = 0.05$ ， $\delta = 50$ ， $\Omega = 1.0$ ， $\eta = 0.7$ 時，將旋轉週期解的 y 及 $x-y$ 平面軌跡計算結果和 NI 比較如圖 3-4。可以看出此時 MHIB 法得到的週期解和 NI 的結果有較大的差異。在相同的參數條件下，提高傅利葉項數至 $N=4$ ，由於計算時間大幅增加，將收斂條件改為 $\frac{|\Delta q_i|}{|q_{0i}|} \leq 0.05$ ，計算結果如圖 3-5。由圖形可知，增加項數可增加求解的準確程度。

比較不同參數條件以及傅利葉項數時，各個週期解所對應 Monodromy 矩陣的特徵值(表 3-1)。觀察參數條件(1)，在此參數條件下項數 $N=3$ 足以求出準確的週

期解，因此 Monodromy 矩陣存在一個絕對值為 1 的特徵值，而其它特徵值的絕對值皆小於 1，此時可輕易判別此解為穩定週期解。觀察參數條件(2)，此週期解存在較明顯的誤差，此時無法得到絕對值為 1 的特徵值，最接近的特徵值為 1.1808。接著比較參數條件(2)及(3)的結果，提高傅利葉項數至 $N=4$ 使得特徵值 1.1808 改變為 1.0379，可大幅降低特徵值的誤差。以上結果顯示，當所得的週期解具有良好的精確性時，會存在一個絕對值為 1 的特徵值，此時可由 Monodromy 矩陣特徵值的比較判別該解之穩定性。相反的，所得週期解不夠精確時，特徵值的計算將產生偏差。此時需提高傅利葉級數的項數以確保週期解的精確性。

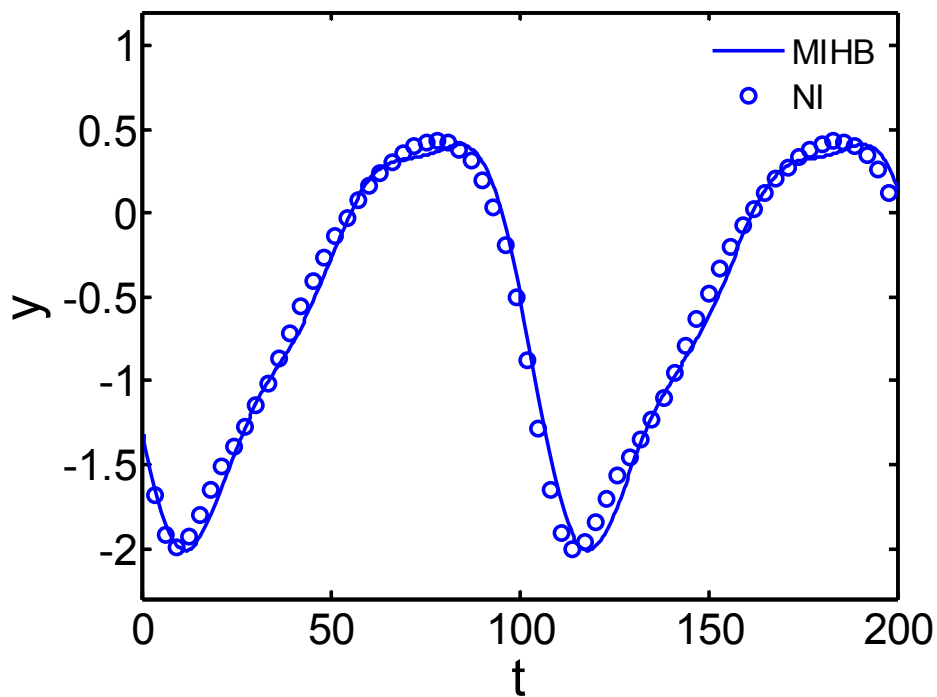


圖 3-4a y 時間歷程圖(旋轉週期解， $N=3$)

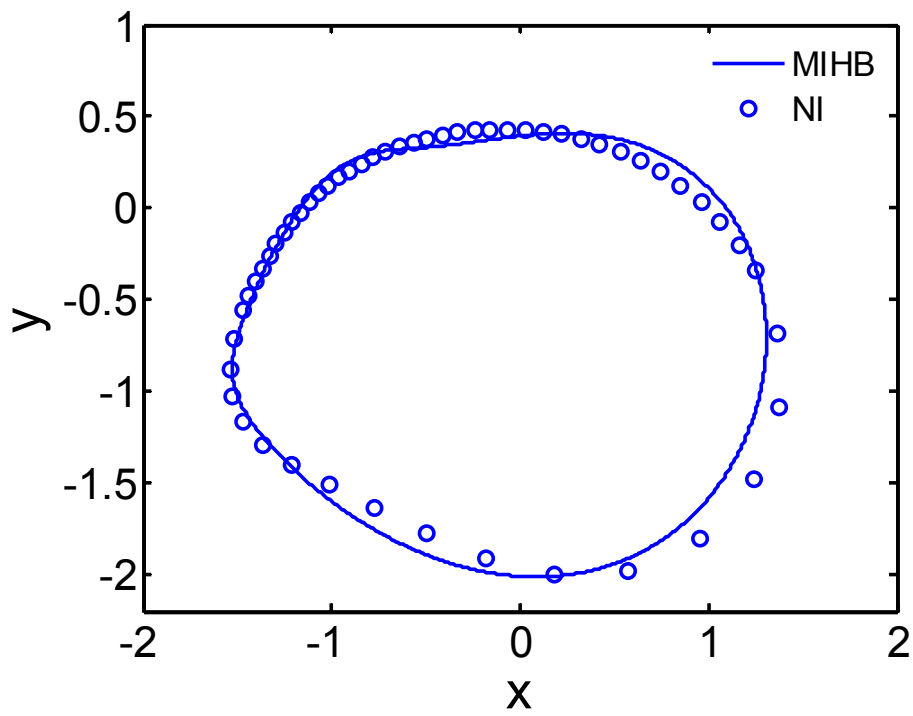


圖 3-4b $x-y$ 平面軌跡圖(旋轉週期解, $N=3$)

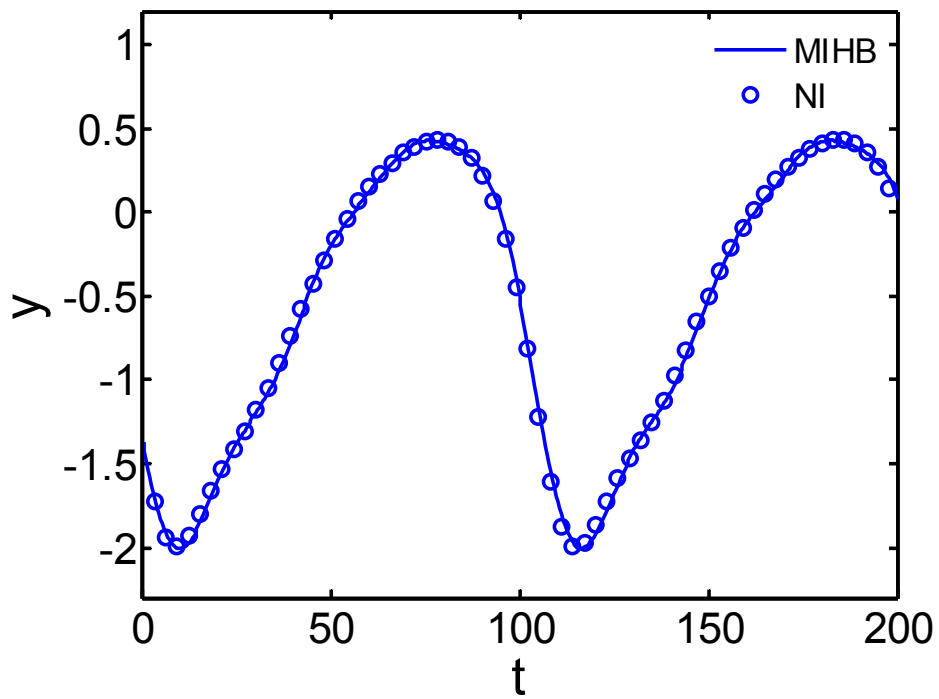


圖 3-5a y 時間歷程圖(旋轉週期解, $N=4$)

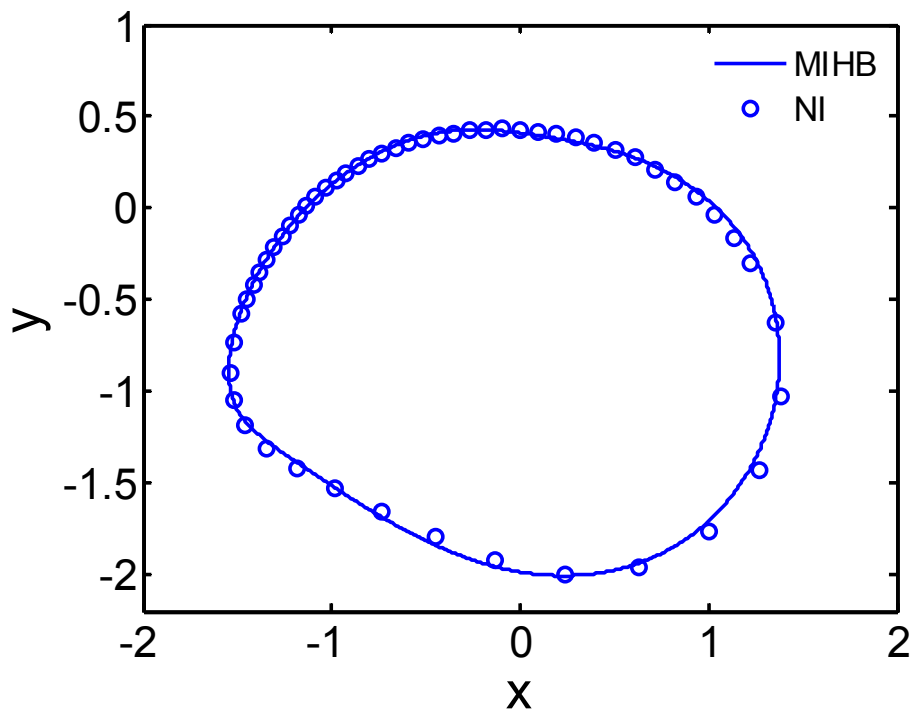


圖 3-5b $x-y$ 平面軌跡圖(旋轉週期解, $N=4$)

表 3-1 Monodromy 矩陣的特徵值

| 參 數 | 特徵值(取絕對值) |
|--|---|
| (1) $\mu = 0.2$, $\zeta = 0.05$, $\zeta_B = 0.05$, $\delta = 50$, $\Omega = 1.2$, $\eta = 1.0$, $N = 3$ | 1.0000、0.8641、0.2859、0.2859、 0.2346、0.2346、0.1185、0.0951 |
| (2) $\mu = 0.2$, $\zeta = 0.05$, $\zeta_B = 0.05$, $\delta = 50$, $\Omega = 1.0$, $\eta = 0.7$, $N = 3$ | 1.1808、0.0453、0.0048、0.0048、 0.0021、0.0021、0.0001、0.0005 |
| (3) $\mu = 0.2$, $\zeta = 0.05$, $\zeta_B = 0.05$, $\delta = 50$, $\Omega = 1.0$, $\eta = 0.7$, $N = 4$ | 1.0379、0.0449、0.0048、0.0048、 0.0020、0.0020、0.0001、0.0005 |

3-3 旋轉週期解

在各種形式的週期解當中，旋轉週期解的分佈區域最為廣泛，且最容易於實驗中觀察，本節之目的在尋找雙滾珠系統在 $\Omega-\eta$ 平面上存在旋轉週期解的區域。首先在參數平面上建立網格，在每個格點代表的參數條件下分析週期解。在逐點掃描的過程中，原則上使用前一格點上已知的週期解當作新格點上週期解的起始猜值。為了避免過大的參數改變使得週期解之間有劇烈變化，造成 MIHB 計算時發散，格點的間距應盡量縮小，以下除非特別說明，格點間距為 0.1。某些情況下，亦可使用 NI 作為選擇初猜值的輔助工具。以下除非特別說明，選擇傅利

葉項數 $N=3$ ，收斂條件為 $\frac{|\Delta q_i|}{|q_{0i}|} \leq 0.01$ 。若符合收斂條件，使用 Floquet 理論判別該解的穩定性，將結果標示於 $\Omega-\eta$ 平面圖上(穩定旋轉週期解標示為■，不穩定旋轉週期解標示為□)。此外，為了進一步了解週期解和平衡解穩定區域的關係，使用 Routh-Hurwitz Criterion 判別完全平衡解的穩定性，以灰色區域標示其穩定區域。

由於旋轉週期解較常出現，本節除了尋找旋轉週期解在 $\Omega-\eta$ 平面的分佈區域外，亦針對部分參數進行探討，分別討論制振比(η)、支承阻尼(ζ)及軌道阻尼(ζ_B)對旋轉週期解存在區域及特性的影響。

3-3-1 制振比的影響

本節探討 η 變化對於分佈區域造成的影響；為了便於和實驗結果比較，在參數選擇上盡量和實驗裝置接近。參數分析時，討論的範圍包含實驗時的系統參數。雙滾珠系統必須在轉速高於系統自然頻率以及 $\eta \geq 0.5$ 的情況下才可完全發揮制

振效果，在格點掃描時，選擇 $1.0 \leq \Omega \leq 2.0$ ， $0.4 \leq \eta \leq 1.5$ 作為 $\Omega-\eta$ 平面的範圍，並設定其他參數為 $\mu = 0.2$ ， $\zeta = 0.05$ ， $\zeta_B = 0.1$ ， $\delta = 50$ ，結果如圖 3-6；旋轉週期解的頻率走勢如圖 3-7。觀察圖 3-6，旋轉週期解存在於 $\eta \geq 0.5$ 的區域，當 $\eta = 0.5$ ，系統在 $\Omega = 1.1$ 時存在此週期解；當 $\eta = 1.5$ 時，此週期解的分佈區域擴大為 $1.0 \leq \Omega \leq 1.6$ 。由此可知，穩定旋轉週期解的分佈區域有隨 η 增加而增加並且擴大至較高轉速的趨勢。此外，在特定的 η 下，在較高的轉速之下存在不穩定旋轉週期解，如 $\eta = 1.0$ 、 $\eta = 1.5$ 。這個現象暗示，穩定旋轉週期解存在的區域外可能存在一條由不穩定旋轉週期解所構成的邊界，將穩定旋轉週期解的邊界包覆在內，然而格點間距為 0.1 時無法將此邊界完整表示於圖上。為了驗證此想法，本節在邊界附近縮小格點間距，在符號 \square 中加入 $+$ 以標示出位於格點外的不穩定旋轉週期解。由結果(圖 3-6)可知，各個 η 下均可搜尋到不穩定旋轉週期解，將穩定旋轉週期解的邊界包覆在內。此外，在部分參數下，系統同時存在穩定旋轉週期解及穩定完全平衡解。接著觀察週期解基頻走勢(圖 3-7)：當 η 提高時，旋轉週期解的基頻 ω 會略為增加；當 Ω 提高時， ω 則顯著增加。

由本節的結果可知，穩定旋轉週期解存在的範圍會隨 η 增加而擴大，因此較大的滾珠質量或者軌道半徑雖然能夠提供較佳的制振能力 ($m_{bi} \cdot \delta$)，可以平衡較大的系統偏心量 ($m_d \cdot e$)，但同時會增加旋轉週期解所影響的轉速區間。在系統設計時應對碟片的偏心質量做有效的評估，適當的控制 η 避免平衡機構於高轉速時進入旋轉週期解而產生劇烈的振動。

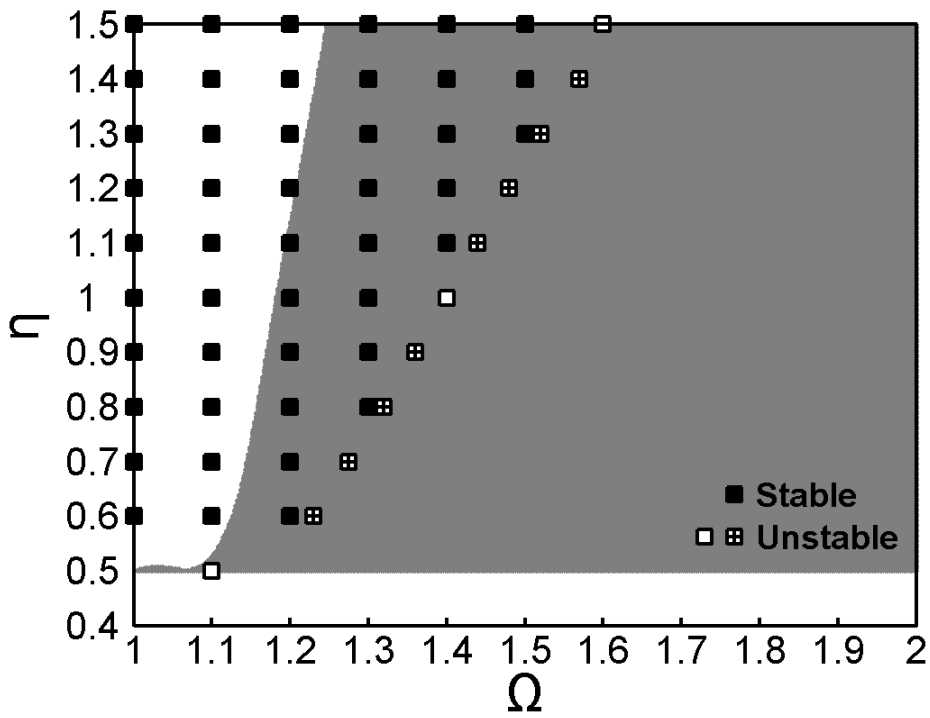


圖 3-6 Ω - η 旋轉週期解分佈圖

($\mu = 0.2$, $\zeta = 0.05$, $\zeta_B = 0.1$, $\delta = 50$)

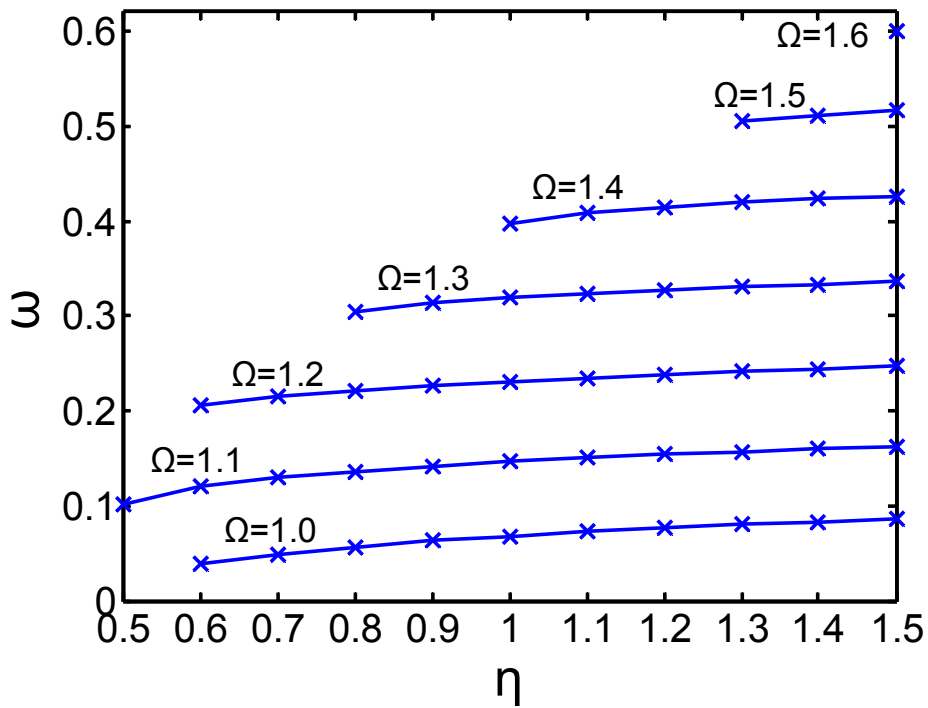


圖 3-7 週期解基頻走勢圖

($\mu = 0.2$, $\zeta = 0.05$, $\zeta_B = 0.1$, $\delta = 50$)

3-3-2 支承阻尼的影響

承續 3-3-1 節的參數設定($\mu = 0.2$, $\zeta = 0.05$, $\zeta_B = 0.1$, $\delta = 50$)，但另外考慮 ζ 為 0.02 及 0.1 的情形，將旋轉週期解存在區域標示於 $1.0 \leq \Omega \leq 2.0$ 及 $0.4 \leq \eta \leq 1.5$ 的 $\Omega - \eta$ 平面上，結果如圖 3-8、圖 3-9。比較圖 3-6、圖 3-8 及圖 3-9，發覺 $\zeta = 0.02$ 時旋轉週期解所涵蓋的轉速區間最為廣泛；當 $\eta = 1.5$ 時其包含的轉速區間延伸至 $\Omega \geq 2.0$ 以上，無法在圖上完整表示。其次為 $\zeta = 0.05$ ，此時旋轉週期解存在的轉速區間為 $1.0 \leq \Omega \leq 1.6$ ；而 $\zeta = 0.1$ 時旋轉週期解僅存在於 $1.0 \leq \Omega \leq 1.3$ ，影響的轉速範圍最小。觀察縱向的分佈區域， $\zeta = 0.02$ 時週期解存在於 $\eta \geq 0.4$ 的區域，但其邊界已低於 $\eta = 0.4$ ，超出圖示範圍； $\zeta = 0.05$ 時週期解存在於 $\eta \geq 0.5$ ； $\zeta = 0.1$ 時週期解存在於 $\eta \geq 0.6$ 。總結可得 $\zeta = 0.02$ 時旋轉週期解的分佈區域最為廣泛， $\zeta = 0.05$ 次之，而 $\zeta = 0.1$ 的分佈範圍最小。觀察 η 提高時週期解的邊界變化：當 $\zeta = 0.1$ 時，在 $0.4 \leq \eta \leq 1.5$ 的範圍內，週期解的邊界由 $\Omega = 1.0$ 提高至 $\Omega = 1.3$ ；當 $\zeta = 0.02$ 時，在同樣的範圍內邊界由 $\Omega = 1.3$ 提高至 $\Omega \geq 2.0$ ，因此當 ζ 較小時，旋轉週期解存在的轉速區間隨 η 增加而擴大的趨勢更加明顯。觀察穩定與不穩定旋轉週期解，發現大部分的旋轉週期解皆為穩定，此一現象並未因 ζ 改變而有所不同。接著觀察週期解基頻 ω 和 ζ 的關係(圖 3-10)。當 $\zeta = 0.1$ 時，旋轉週期解僅存在於 $\Omega \leq 1.3$ 的區域，因此圖中只比較 $\Omega = 1.0$ 、1.1 及 1.2 三種情形，其結果分別用實線、中心線及虛線標示；同時為了比較方便，另外以符號 \triangle 、 \times 及 \square 分別標示 $\zeta = 0.02$ 、0.05 及 0.1 的結果。觀察圖 3-10，在相同的 Ω 之下，旋轉週期解的基頻 ω 隨著 η 的增加而略增，但隨著 ζ 的增加則沒有一定的趨勢。

總結 ζ 對旋轉週期解造成的影響如下：(1) 旋轉週期解的分佈區域隨 ζ 增加而減小，其邊界會隨 ζ 增加而降低至較低的轉速。(2) ζ 較大時，旋轉週期解的分佈區域隨 η 增加而擴大的趨勢較不明顯。(3) 不穩定旋轉週期解大致發生在此週

期解存在區域的邊界。(4)穩定旋轉週期解及穩定完全平衡解的共存區域隨 ζ 減小而擴大。(5)旋轉週期解的基頻 ω 並未隨 ζ 變化而有一定的趨勢。

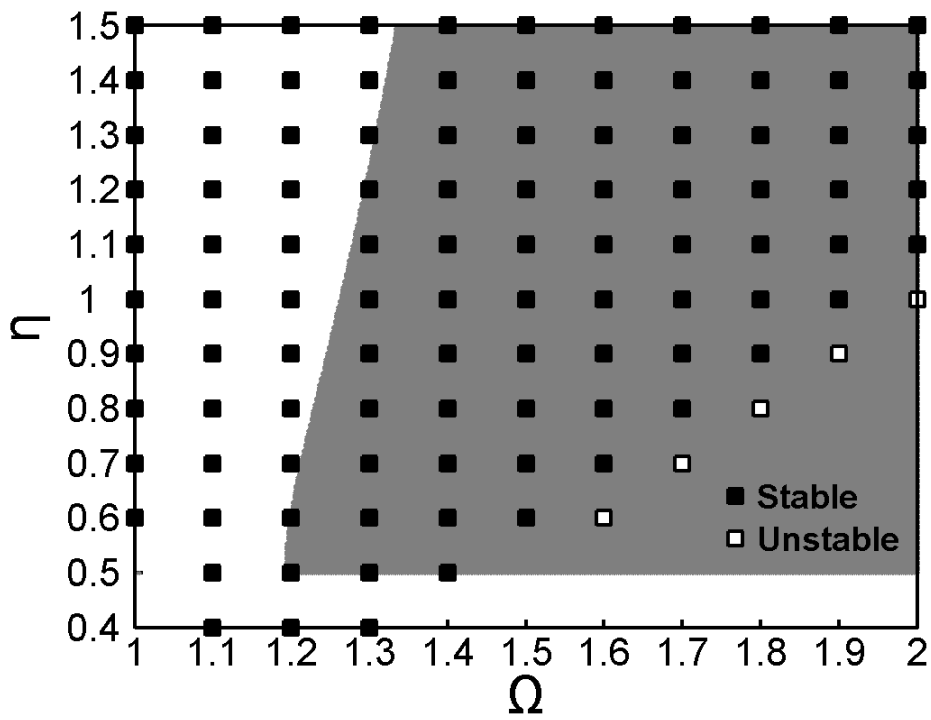


圖 3-8 $\Omega-\eta$ 旋轉週期解分佈圖

($\mu = 0.2$, $\zeta = 0.02$, $\zeta_B = 0.1$, $\delta = 50$)

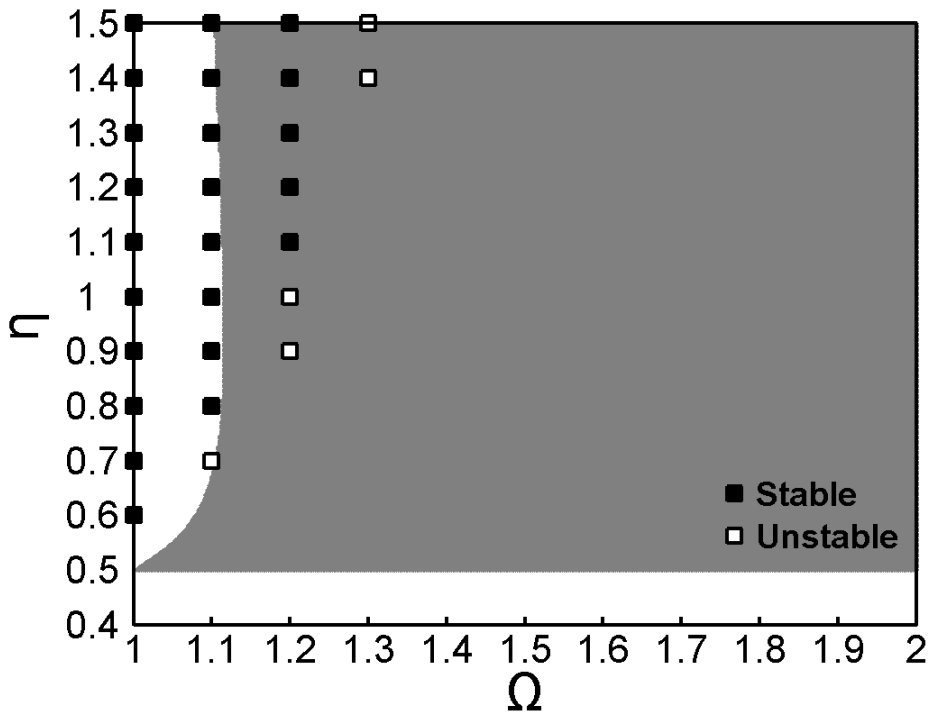


圖 3-9 Ω - η 旋轉週期解分佈圖

($\mu = 0.2$, $\zeta = 0.1$, $\zeta_B = 0.1$, $\delta = 50$)

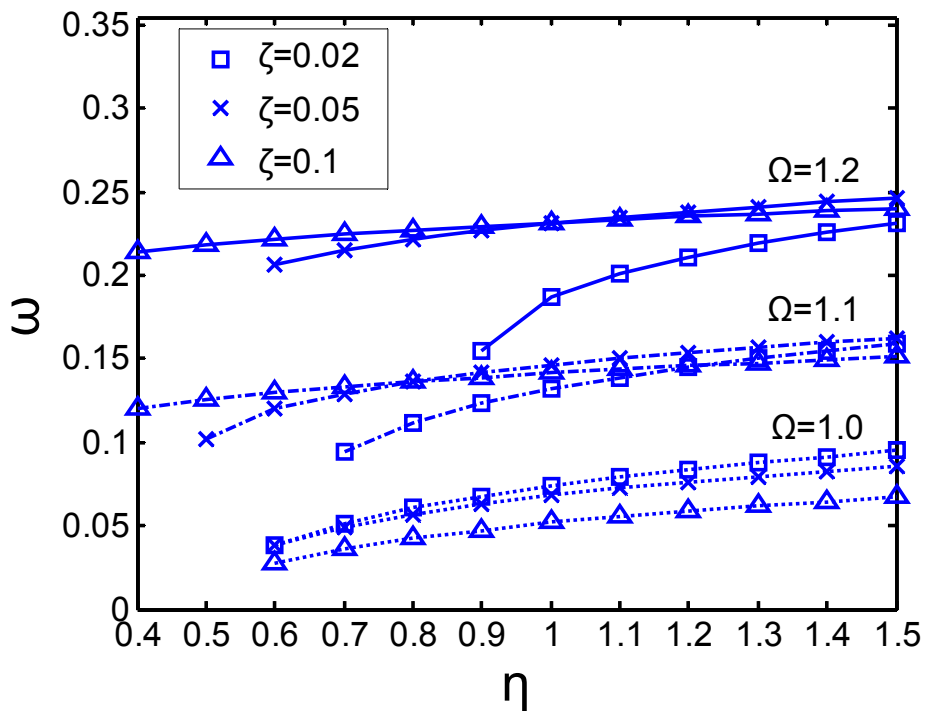


圖 3-10 不同 ζ 下的基頻走勢圖

($\mu = 0.2$, $\zeta_B = 0.1$, $\delta = 50$)

3-3-3 軌道阻尼的影響

承續 3-3-1 節的參數設定 ($\mu = 0.2$, $\zeta = 0.05$, $\zeta_B = 0.1$, $\delta = 50$)，另外考慮 ζ_B 為 0.05 及 0.2 的情形，將旋轉週期解的分佈區域標示於 $1.0 \leq \Omega \leq 2.0$ 及 $0.4 \leq \eta \leq 1.5$ 的 $\Omega - \eta$ 平面上，結果如圖 3-11、圖 3-12。比較圖 3-6、圖 3-11 及圖 3-12， $\zeta_B = 0.05$ 時週期解所涵蓋的轉速區間最為廣泛，當 $\eta = 1.5$ 時其包含的轉速區間延伸至 $\Omega \geq 2.0$ 以上，無法在圖上完整表示；其次為 $\zeta_B = 0.1$ ，存在的轉速區間為 $1.0 \leq \Omega \leq 1.6$ ；而 $\zeta_B = 0.2$ 時僅存在於 $1.0 \leq \Omega \leq 1.3$ ，影響的轉速範圍最小。觀察縱向的分佈區域， $\zeta_B = 0.05$ 時旋轉週期解存在於 $\eta \geq 0.4$ 的區域，但其邊界已低於 $\eta = 0.4$ ，超出圖示範圍； $\zeta_B = 0.1$ 時存在於 $\eta \geq 0.5$ ； $\zeta_B = 0.2$ 時存在於 $\eta \geq 0.6$ 。接著觀察週期解基頻 ω 和 ζ_B 的關係(圖 3-13)。當 $\zeta_B = 0.2$ 時，旋轉週期解僅存在於 $\Omega \leq 1.3$ 的區域，因此圖中只比較 $\Omega = 1.0$ 、1.1 及 1.2 三種情形，其結果分別用實線、中心線及虛線標示；同時為了比較方便，另外以符號 \triangle 、 \times 及 \square 分別標示 $\zeta_B = 0.05$ 、0.1 及 0.2 的結果。觀察結果，在相同的 Ω 之下，旋轉週期解的基頻 ω 隨著 η 的增加而略增，且具有隨著 ζ_B 的增加而降低的趨勢。

總結 ζ_B 對旋轉週期解造成的影響如下：(1) 旋轉週期解的分佈區域會隨 ζ_B 增加而減小，其邊界會隨 ζ_B 增加而降低至較低的轉速。(2) ζ_B 較大時，旋轉週期解的分佈區域隨 η 增加而擴大的趨勢較不明顯。(3) 不穩定旋轉週期解大致發生在此週期解存在區域的邊界。(4) 穩定旋轉週期解及穩定完全平衡解的共存區域隨 ζ_B 減小而擴大。(5) 旋轉週期解的基頻 ω 隨 ζ_B 增加而減小。其中除了特性(5)之外， ζ_B 對旋轉週期解造成的影響大致和 ζ 相同。較為不同的是，當 $\zeta_B = 0.05$ 時，在較高

的轉速下僅在 $(\Omega, \eta)=(1.8, 1.0)$ 存在不穩定旋轉週期解，可能原因為不穩定週期解在 ζ_B 較小時存在區域較少，穩定旋轉週期解的邊界和旋轉週期解的邊界更為接近或者幾乎重合。此外，當 $\zeta_B=0.05$ 時，在 $\Omega=1.2$ ， $0.4 \leq \eta \leq 0.8$ 的區域存在的旋轉週期解，經 Floquet 理論判別為不穩定；利用 NI 進行積分，發現在此區域存在另一組可能的穩定週期解，此週期解為兩顆滾珠分開作旋轉運動，而本文無法找到正確的初猜值使 MIHB 法收斂。

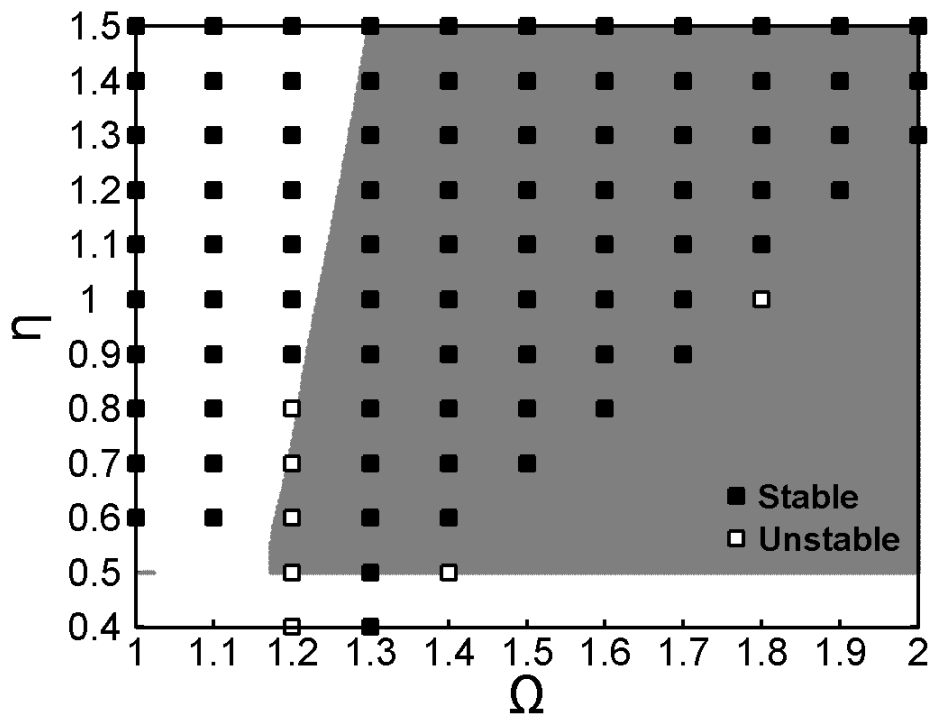


圖 3-11 $\Omega-\eta$ 旋轉週期解分佈圖

$(\mu = 0.2, \zeta = 0.05, \zeta_B = 0.05, \delta = 50)$

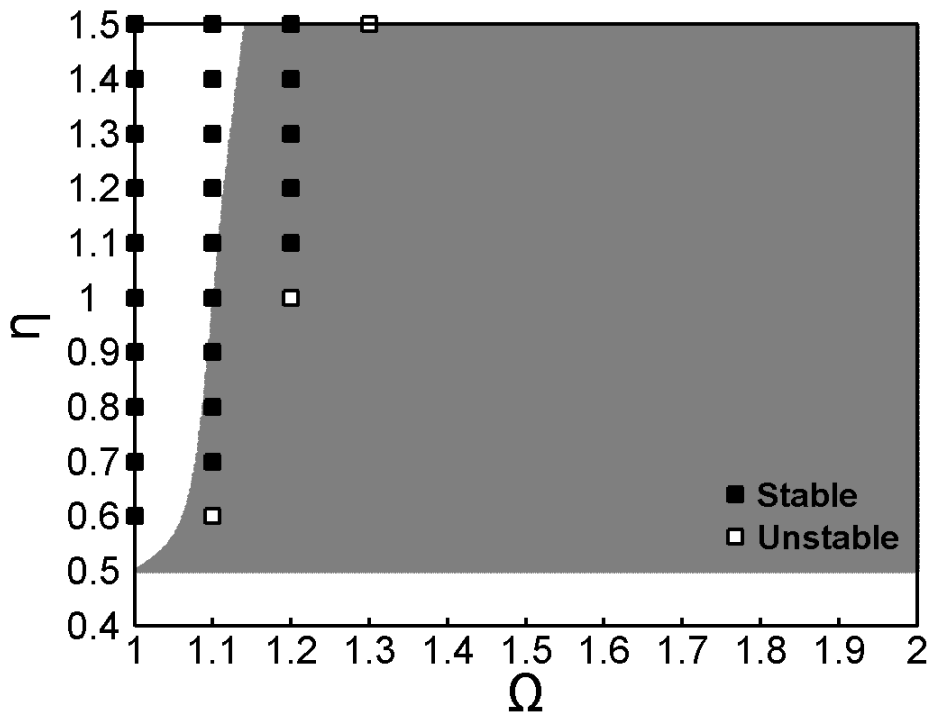


圖 3-12 $\Omega-\eta$ 旋轉週期解分佈圖

($\mu=0.2$, $\zeta=0.05$, $\zeta_B=0.2$, $\delta=50$)

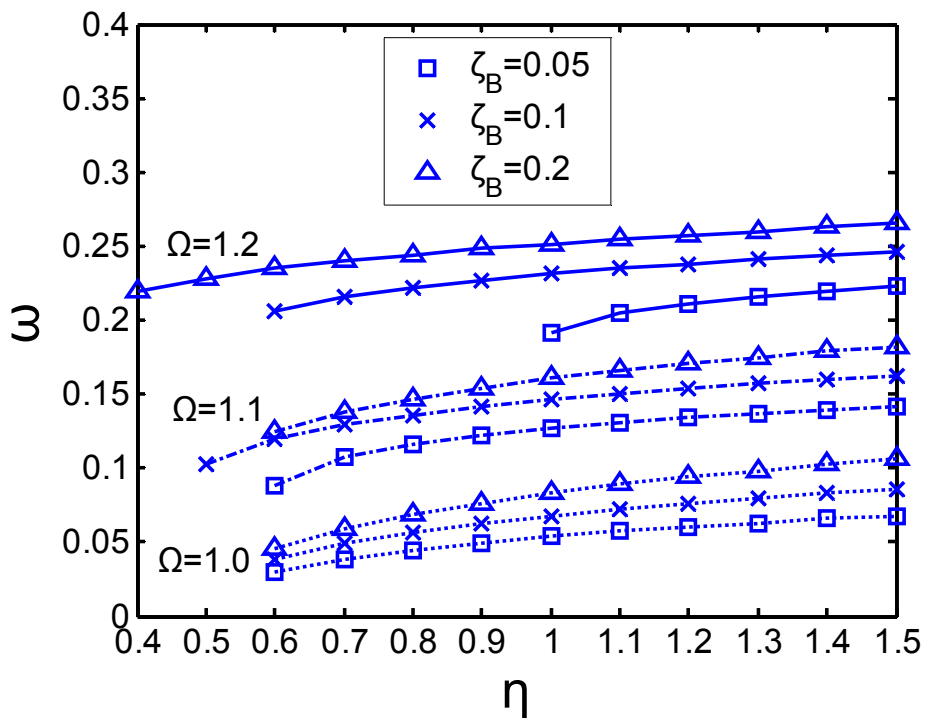


圖 3-13 不同 ζ_B 下的基頻走勢圖

($\mu=0.2$, $\zeta=0.05$, $\delta=50$)

3-4 其它形式週期解

除了旋轉週期解之外，雙滾珠平衡系統還存在來回振盪週期解以及一滾珠旋轉一滾珠來回振盪兩種週期解的形式。使用和 3-3 節相同的方法，利用 MIHB 法計算此兩種形式的週期解並判別穩定性，將結果標示於 $\Omega-\eta$ 平面圖上。當 $\mu = 0.2$ ， $\zeta_B = 0.1$ ， $\delta = 50$ 時， ζ 為 0.02、0.05 及 0.1 的結果分別如圖 3-14、圖 3-15 及圖 3-16。當 $\zeta = 0.02$ 時，可以在 $1.2 \leq \Omega \leq 1.4$ 、 $0.6 \leq \eta \leq 0.9$ 的範圍內觀察到來回振盪週期解及一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解，且所有週期解為穩定；當 $\zeta = 0.05$ 時，一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解存在於 $\Omega = 1.2$ 、 $0.8 \leq \eta \leq 1.0$ 的範圍內；當 $\zeta = 0.1$ 時，來回振盪週期解存在於 $\Omega = 1.1$ 、 $0.7 \leq \eta \leq 1.3$ 的範圍內。觀察圖 3-14 及圖 3-15，一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解大致存在於完全平衡解的穩定區域內，且接近平衡解穩定性的邊界，此外，當 ζ 增加至 $\zeta = 0.1$ 時(圖 3-15)，已無法於圖上觀察到此解。觀察圖 3-16，在 $\Omega = 1.1$ 時可搜尋到大量的來回振盪週期解，換言之，此解可能廣泛分佈於不穩定完全平衡解區域中穩定性的邊界附近，但本文所使用格點掃描的格點密度無法將其每個參數下皆清楚地標示於圖形中。

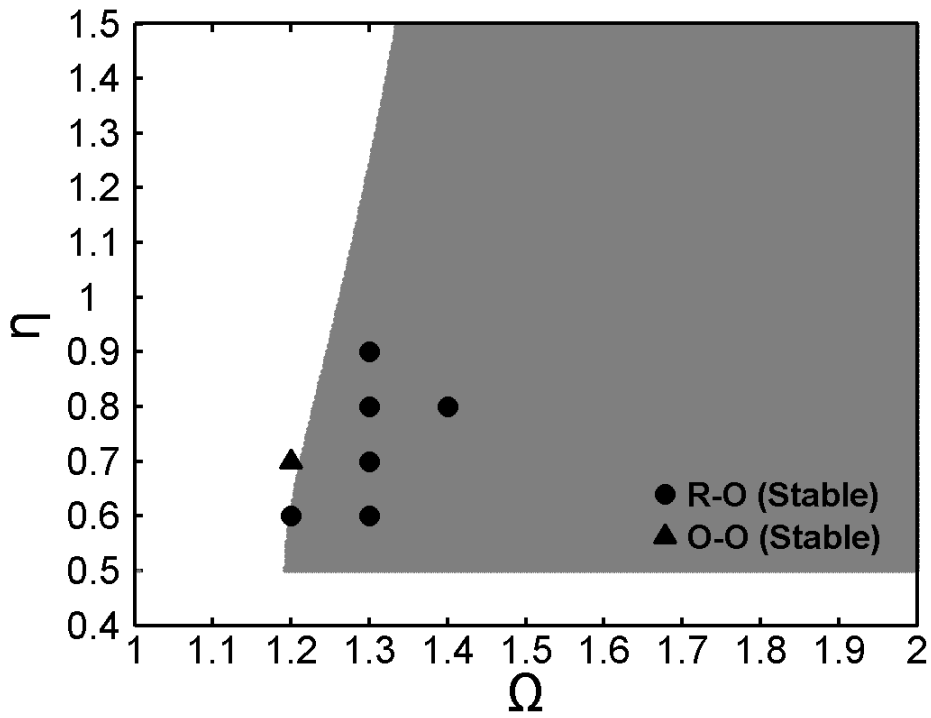


圖 3-14 Ω - η 週期解分佈圖

($\mu = 0.2$, $\zeta = 0.02$, $\zeta_B = 0.1$, $\delta = 50$)

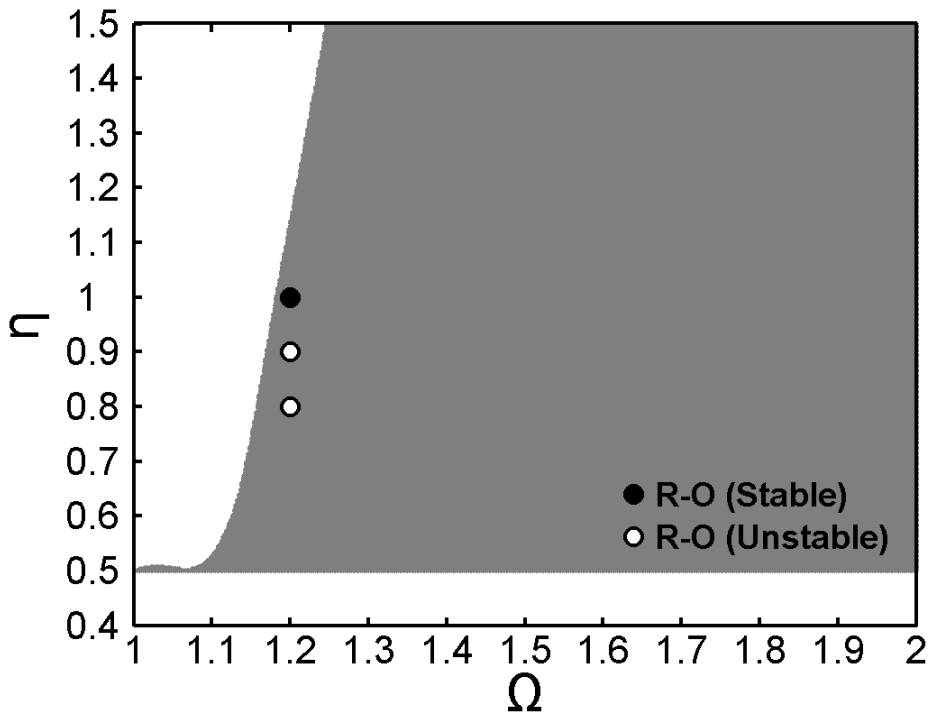


圖 3-15 Ω - η 週期解分佈圖

($\mu = 0.2$, $\zeta = 0.05$, $\zeta_B = 0.1$, $\delta = 50$)

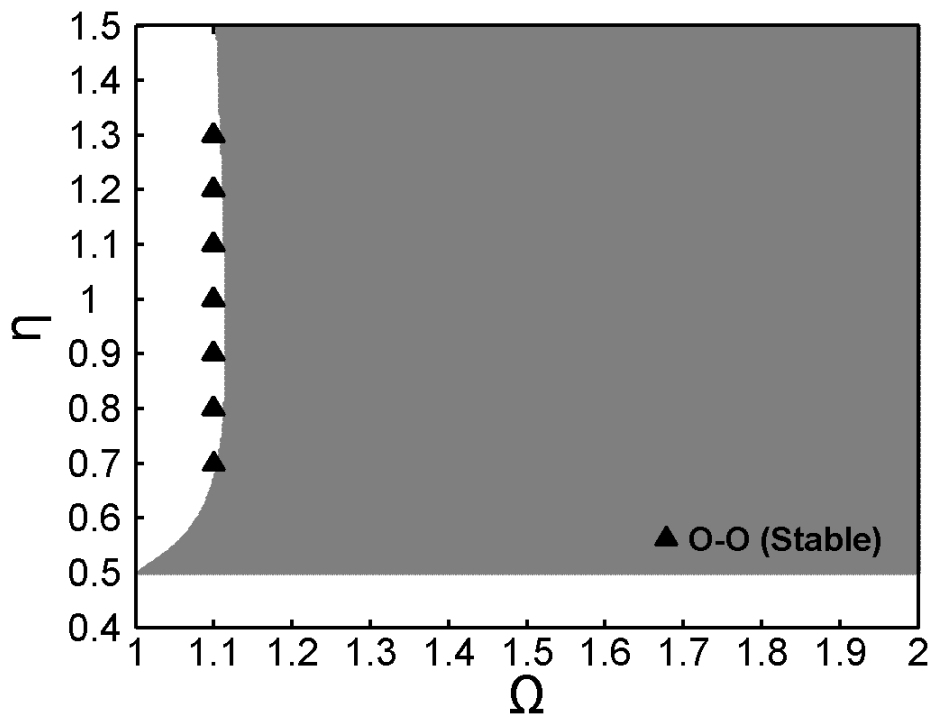
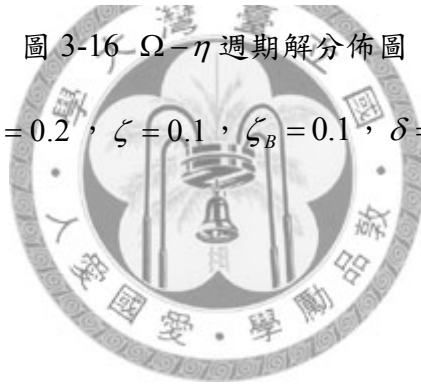


圖 3-16 $\Omega-\eta$ 週期解分佈圖

($\mu = 0.2$, $\zeta = 0.1$, $\zeta_B = 0.1$, $\delta = 50$)



第四章 實驗驗證

本文於第三章中對於單滾珠平衡系統作簡單的描述，且針對雙滾珠平衡系統進行詳細的探討及參數分析，本章將進行實驗驗證各個理論結果。4-1 節介紹實驗設備以及機台設計；4-2 節說明實驗流程；4-3 節為單滾珠平衡系統的實驗驗證；4-4 節為雙滾珠平衡系統的實驗驗證。

4-1 實驗設備與機台設計

4-1-1 實驗設備

實驗設備主要架構分為馬達驅動設備、碟片實驗機台以及訊號擷取設備等部分，如圖 4-1、圖 4-2 及圖 4-3，各裝置規格列於表 4-1。

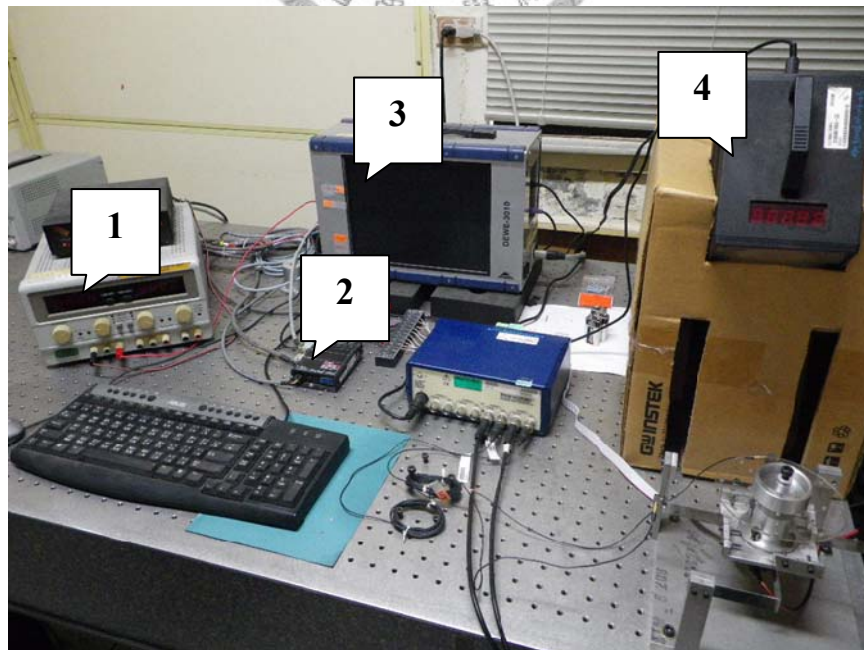


圖 4-1 實驗設備

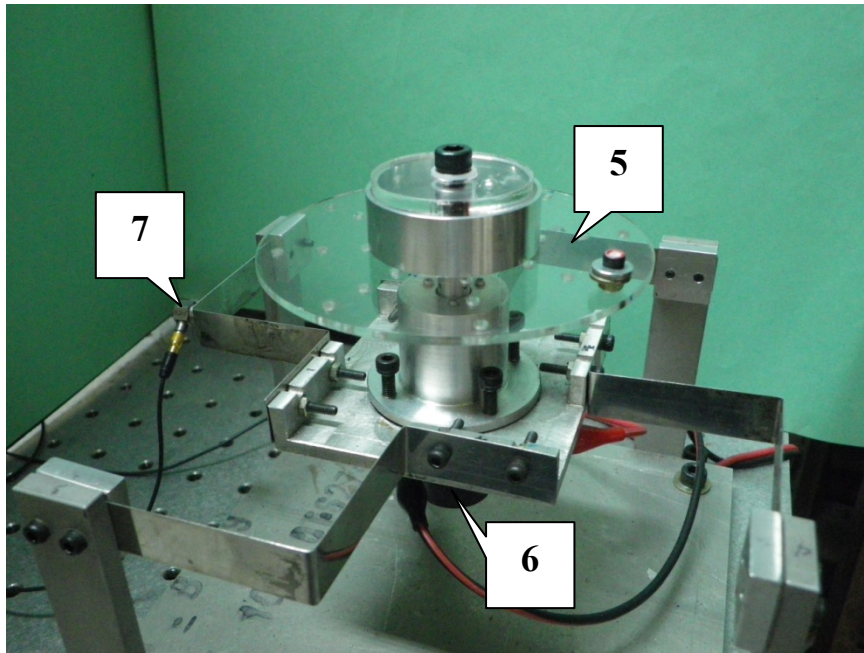


圖 4-2 實驗機台

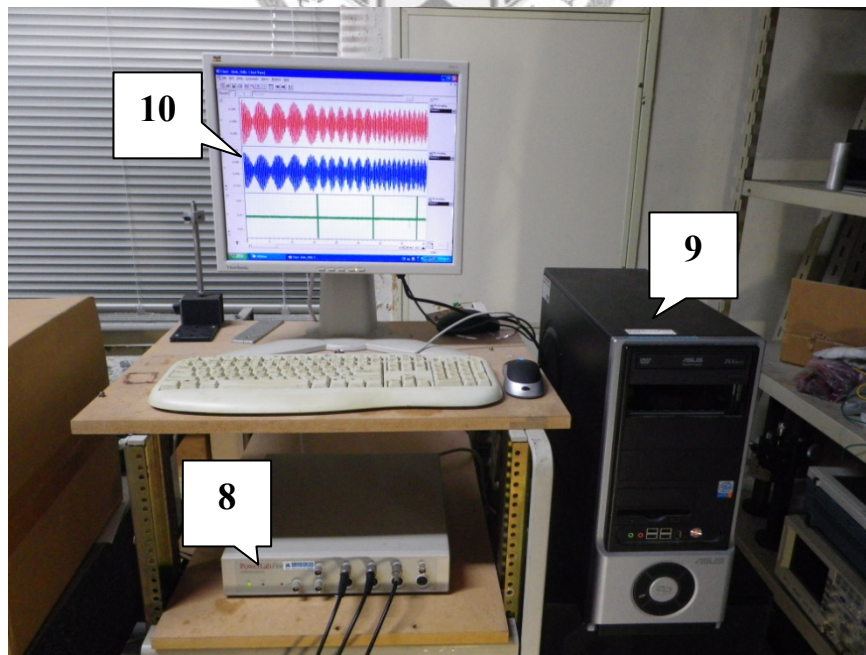


圖 4-3 訊號擷取設備

表 4-1 實驗裝置規格

| 編號 | 設備名稱 | 型號 |
|----|----------|------------------------|
| 1 | 電源供應器 | GW GPC-3030D |
| 2 | 馬達控制器 | EPOS 24/5 275512 |
| 3 | 馬達轉速控制軟體 | EPOS UserInterface |
| 4 | 同步閃頻儀 | POKAI PK-DS-170 |
| 5 | 碟片實驗機台 | ----- |
| 6 | 伺服馬達 | Maxon 250247 263349 |
| 7 | 加速規 | PCB M352C15 |
| 8 | 訊號擷取器 | ADInstruments Powerlab |
| 9 | SCSI 介面卡 | Tekram DC-315U |
| 10 | 訊號擷取軟體 | Powerlab Chart5 |

碟片實驗機台以四片 L 型簧片固定於承座上，以伺服馬達驅動，透過編碼器將馬達轉速資料傳輸至馬達控制器，利用馬達轉速控制軟體監測及控制轉速。在碟片上鑽有不同偏心距的螺孔，可用以調節偏心質量鎖固之位置。碟片上端配置有滾珠平衡裝置，由數顆滾珠及剛性軌道組成。實驗進行時，使用同步閃頻儀觀測滾珠的運動情形，並透過加速規及訊號擷取設備記錄機台的振動大小。

4-1-2 機台設計

在機台設計上，系統的質量 M 及 L 型簧片的等效彈性模數 k 將決定自然頻率的大小。為了避免碟片的動態不平衡量超過馬達額定輸出扭矩的負荷範圍，設定最高操作轉速為 2400 rpm；由於滾珠平衡裝置必須在轉速高於自然頻率的情況下才可發揮效用，設定自然頻率不超過 600 rpm，使最高操作轉速為系統自然頻率的四倍。將 L 型簧片視為懸臂樑可得彈性係數 $k = \frac{17Ebh^3}{8l^3}$ [20]。使用寬 $b = 14$ mm、厚 $h = 0.3$ mm 及長 $l = 50$ mm 的不鏽鋼片作為簧片材料，其彈性模數為 193 Gpa，而系統質量為 362.1 g，經過計算，系統的自然頻率為 559 rpm。實際量測系統的自然頻率，為了避免滾珠和軌道壁面碰撞對量測訊號造成影響，且考慮滾珠質量遠低於系統質量，在實際量測自然頻率時將滾珠自軌道中移除。量測得系統的功率譜圖如圖 4-4，顯示第一自然頻率為 513 rpm、第二自然頻率為 1508 rpm。其中第一自然頻率較預期的數值低，可能原因為不鏽鋼片的彈性模數較低，且裁切時的誤差使得簧片的尺寸和設計稍有不同。由於裝配時的限制，簧片支承、碟片以及滾珠軌道無法如理論模型假設的位於同一水平面，導致在較高轉速時系統有劇烈的面外振動，因此進一步設定最高轉速為 1000 rpm，避免碟片偏心率及滾珠的運動在馬達主軸方向上產生過大的力以確保系統維持二維的運動形式。此外，因為實驗用碟片以及軌道本身亦存在微小的偏心質量，實驗開始前需先行平衡校正，使系統盡可能處於完全平衡的狀態。

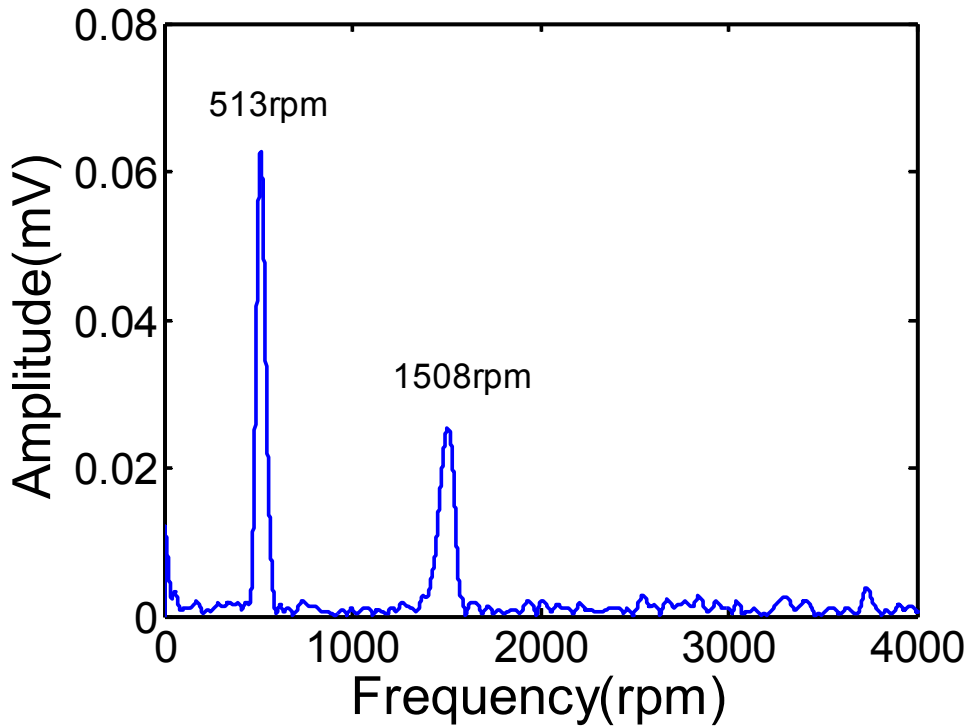


圖 4-4 系統功率譜圖



4-2 實驗流程

首先觀察系統隨轉速變化的情形。使用兩個加速規分別黏貼於 X 及 Y 方向的 L 型簧片支承上，將量得訊號取平方和後開根號作為系統振動量的量測指標 (Amplitude)。將馬達由靜止開始以固定加速度增加轉速，記錄振幅隨時間變化的情形，圖 4-5 為一典型的結果。在轉速達到系統自然頻率之前，滾珠將停留於平衡位置上，此時的平衡位置和偏心率位於碟片平面上同側，滾珠無法抑制振動；當轉速大於自然頻率後，滾珠開始以旋轉週期解的形式運動，此時系統振動量將大幅增加；持續增加轉速，在適當的軌道阻尼和支承阻尼條件下，滾珠將於一定的轉速(臨界轉速)下進入平衡位置，此時滾珠得以發揮制振的效果。於軌道中加入油品可增加軌道阻尼，在 L 型簧片上黏貼橡膠墊則可提高支承阻尼，有關軌道阻尼和支承阻尼的討論請參見 4-4-3 節及 4-4-6 節。以下若無特別說明則表示

實驗時並未使用任何油品及橡膠墊。

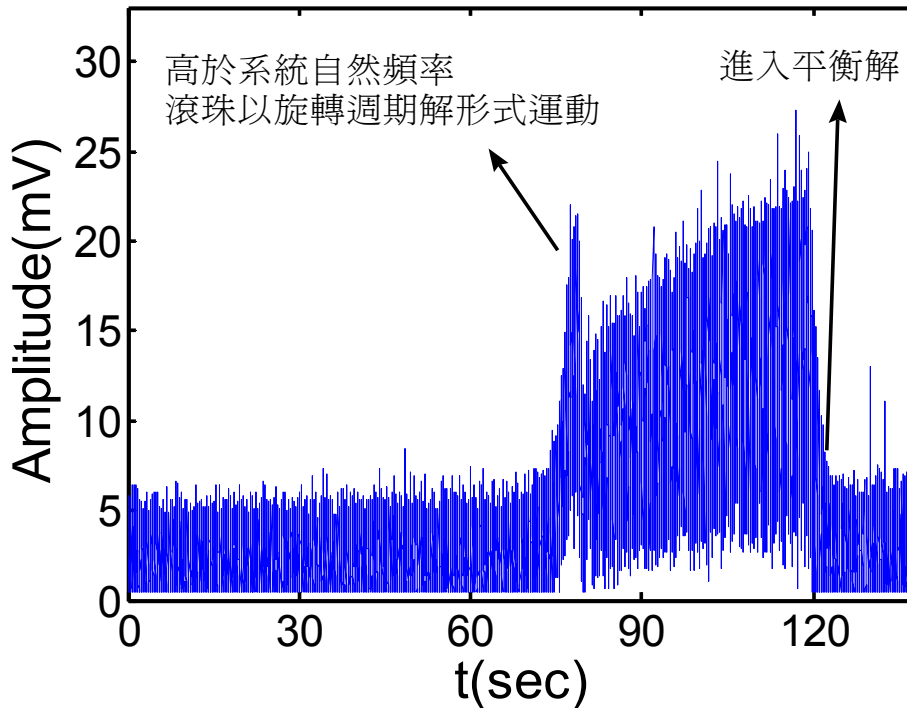


圖 4-5 系統振幅隨轉速增加的歷時圖

由於滾珠平衡系統必須在轉速高於自然頻率時才可發揮效用，且唯有當轉速等於或高於自然頻率時方能於實驗上觀察到旋轉週期解，因此實驗進行時，以系統的自然頻率(513 rpm)作為起始轉速，此時系統會以旋轉週期解的形式運動；隨後開始以固定的間距逐步增加轉速(轉速增加的方式因各實驗有所不同，各節有詳細說明)，記錄每個轉速下的振動訊號。在轉速增加的過程中，若系統進入平衡解，則以相同的間距降低轉速，此時滾珠會停留在平衡位置上，記錄各轉速下平衡解的振動訊號；當轉速接近自然頻率時，系統將回到旋轉週期解的運動形式，此時完成實驗流程，圖 4-6 為一典型的結果。由於設定最高操作轉速為 1000 rpm，若系統到達此轉速時仍維持旋轉週期解的運動形式，則以雙手輔助緊壓簧片，此時滾珠將回到平衡位置上。此外，當轉速改變時給予訊號擷取器類似脈衝的訊號以便記錄時能確切掌握轉速改變的時間。

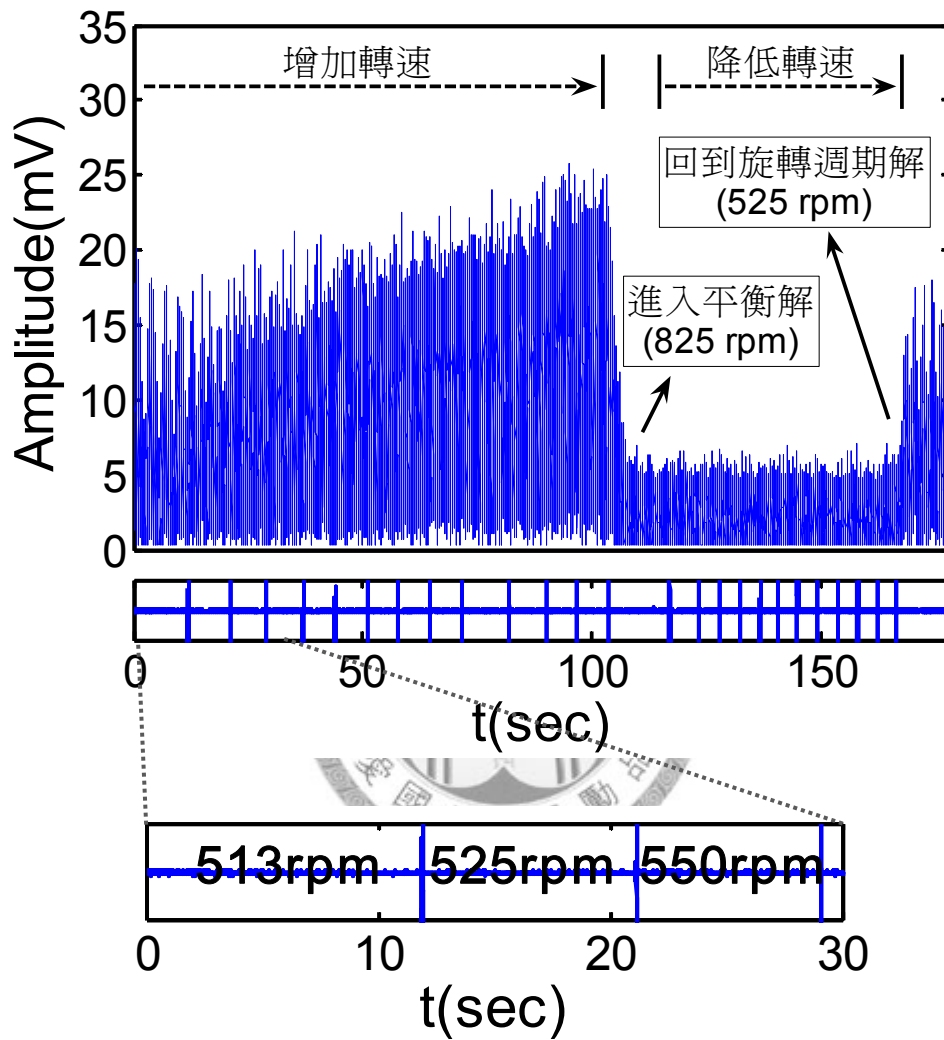


圖 4-6 實驗流程圖

4-3 單滾珠平衡系統

雙滾珠平衡系統之優點在於可因應不同偏心率大小而自動調整兩滾珠間夾角以達到完全制振的效果。為驗證雙滾珠和單滾珠平衡系統之差異，本節首先探討單滾珠平衡系統的制振能力並觀察旋轉週期解對系統造成的振動量大小。為了這個目的，本實驗將比較系統在無滾珠(等同無平衡裝置)以及配備不同制振比的單滾珠裝置時的振動量大小。在滾珠的選用上，分別使用質量為 4.09 g(半徑為 5 mm)、2.05 g(半徑為 4 mm)及 1.05 g(半徑為 3 mm)三種不同大小的鋼珠，其質心繞行軌道半徑分別為 15 mm、16 mm 及 17 mm；在偏心率為 36 mm 的螺孔中鎖上總質量為 0.92 g 的螺栓及墊片作為偏心率質量，綜合上述的滾珠類型以及偏心率質量，將實驗類型依偏心率質量及制振比分類列於表 4-2。

表 4-2 實驗類型

| 偏 心 質 量 類 型 | | |
|---|-------------------------------|-------------------------------------|
| 無偏心率質量(No imbalance, $m_d e = 0$) | | |
| 有偏心率質量 ($m_d e = 33.12 \text{ g} \cdot \text{mm}$) | 無滾珠(No balancer, $\eta = 0$) | |
| | 有滾珠 | $m_b = 1.05 \text{ g}, \eta = 0.54$ |
| | | $m_b = 2.05 \text{ g}, \eta = 0.99$ |
| | | $m_b = 4.09 \text{ g}, \eta = 1.85$ |

本實驗以 513 rpm 為起始轉速，記錄振動量後增加轉速至 525 rpm，隨後以 25 rpm 為間隔逐步加速，加速至 1000 rpm 後完成實驗流程，記錄各轉速下的振動訊號並計算其平均值，可繪出轉速和振動量的關係圖。按照上述的實驗流程，

在裝配 $m_d e = 33.12 \text{ g} \cdot \text{mm}$ 的偏心質量下，對不同制振比進行實驗，分別記錄系統在平衡解以及旋轉週期解時的振動量，結果如圖 4-7 及圖 4-8。注意在無附加偏心質量且無滾珠的情況下(No imbalance, $m_d e = 0$)系統存在大小約為 2mV 的微小振動量，可將此振動量視為完全平衡的基準電壓。此外，在部分區域若無標示振動量表示在該轉速下無法觀察到穩定的解。觀察平衡解的實驗結果(圖 4-7)，系統在無滾珠(No balancer, $\eta = 0$)的情況下具有最大的振動量。在裝配單滾珠的情況下系統振動量的大小依序為 $\eta = 1.85$ 、 $\eta = 0.54$ 及 $\eta = 0.99$ ；當 $\eta = 1.85$ 時滾珠雖能完全抵銷碟片的偏心質量，但過重的滾珠額外提供了大小為 $28.15 \text{ g} \cdot \text{mm}$ 的偏心量造成系統振動；而 $\eta = 0.54$ 時滾珠的制振量不足，碟片仍殘餘 $15.24 \text{ g} \cdot \text{mm}$ 的偏心量；當 $\eta = 0.99$ 時滾珠所提供的制振量幾乎等同於碟片的偏心量，此時量測到的訊號非常接近完全平衡時的基準電壓。觀察旋轉週期解的實驗結果(圖 4-8)，在裝配滾珠時，振動量相較於無滾珠時皆大幅增加。振動量由大至小依序為 $\eta = 1.85$ 、 $\eta = 0.99$ 及 $\eta = 0.54$ 。當系統進入旋轉週期解時滾珠的旋轉提供了額外的振動能量，而振動的大小取決於滾珠的質量。觀察實驗結果，單滾珠系統雖具有制振能力，但唯有在制振量和偏心質量相同時才可達到完全制振的效果，在實際應用上由於轉子的偏心質量無法事先預測，單一滾珠不具備自動調整制振量的功能，唯有雙滾珠或多滾珠系統才可在不同偏心質量的情況下皆具有完全制振的效果。此外，旋轉週期解的發生將導致系統產生額外的振動，且振動量大於無裝配滾珠的情況，此時滾珠不但不具備制振效果，反而使系統的振動更加劇烈，因此旋轉週期解的發生為滾珠平衡系統所亟欲避免的現象。

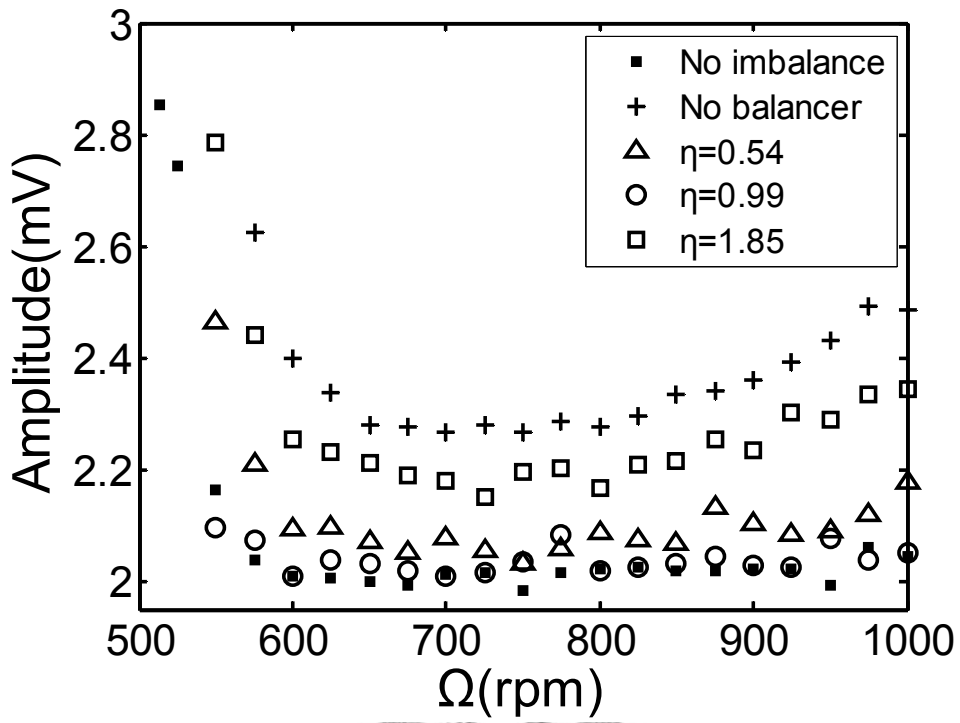


圖 4-7 單滾珠系統在不同制振比下的振動量比較(平衡解)

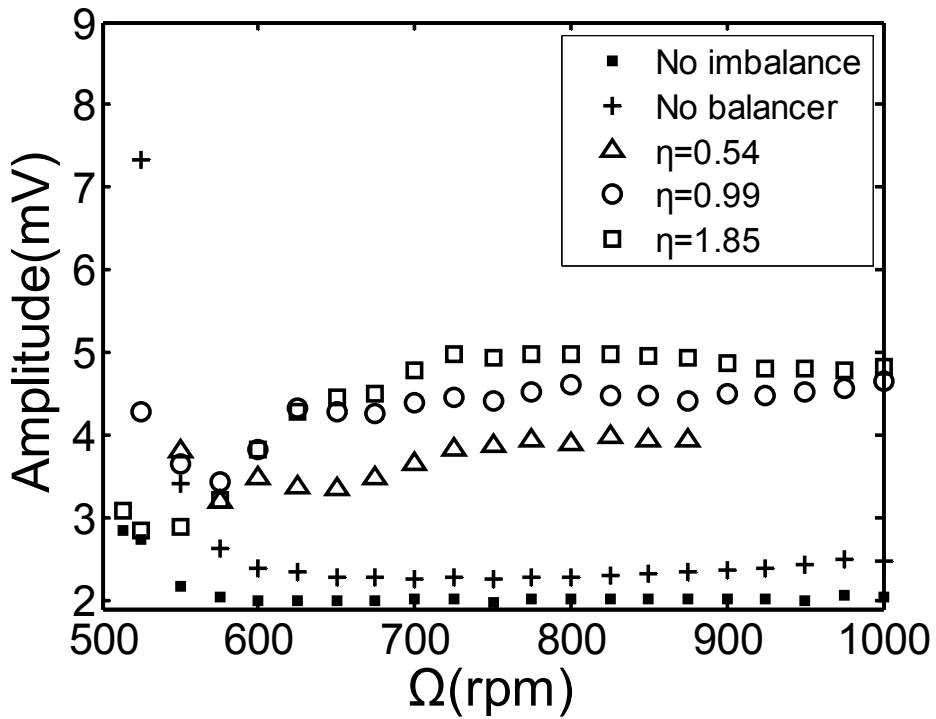


圖 4-8 單滾珠系統在不同制振比下的振動量比較(旋轉週期解)

4-4 雙滾珠平衡系統

4-4-1 制振能力驗證

選擇質量 2.05 g、半徑 4 mm 的滾珠，在偏心距為 36 mm 的螺孔中鎖上總質量為 1.38 g 的螺栓及墊片作為偏心質量($\eta=0.66$)，實驗流程及轉速的控制和 4-3 節相同，記錄滾珠於完全平衡解(Perfect balance)以及旋轉週期解(R-R)時的振動量並和無偏心質量(No imbalance)及無滾珠(No balancer)的情形比較(無偏心質量時沒有裝配滾珠)，結果如圖 4-9。由於雙滾珠系統可因應不同的偏心質量調整滾珠間的夾角，當系統進入完全平衡解時可達到完全制振的效果，因此各轉速下的振幅幾乎和無偏心質量時重合；當滾珠狀態為旋轉週期解時則大幅增加系統的振動量，此現象和單滾珠系統相同。

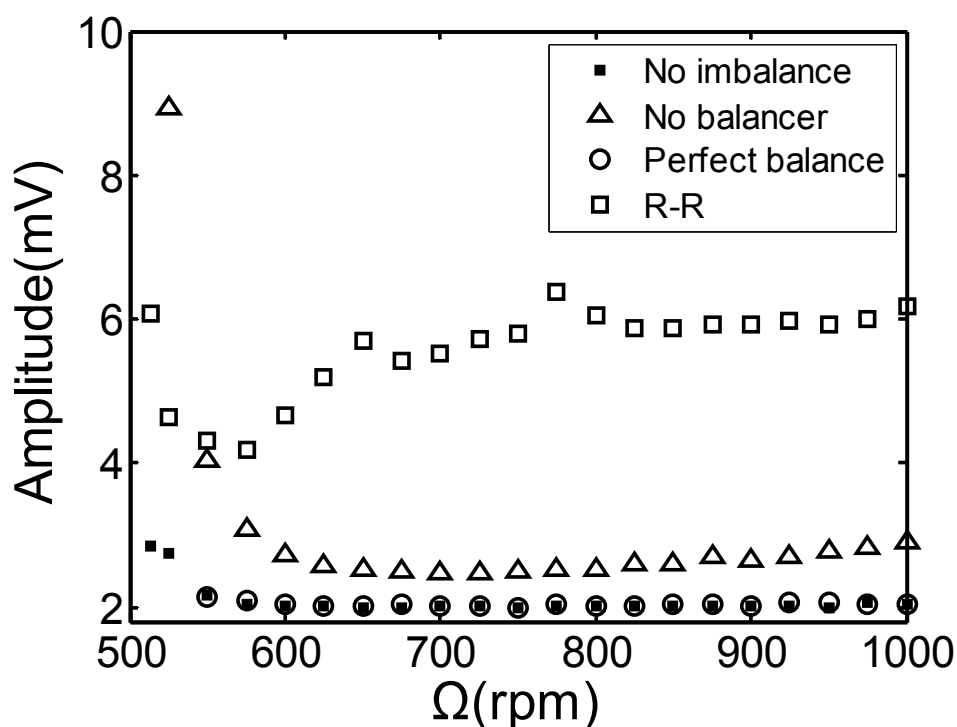


圖 4-9 雙滾珠系統的振動量比較

4-4-2 旋轉週期解之振形及頻率比較

承接 4-3-1 節所使用的滾珠及偏心質量設定($\eta=0.66$)，設定轉速為 800 rpm 分別記錄 X 及 Y 方向在旋轉週期解時的振動訊號，為了避免高頻雜訊的影響以記錄較佳的波形，使用低通濾波器將 50 Hz(3000 rpm)以上的高頻訊號濾除並計算 Amplitude，結果如圖 4-10；對此訊號作頻譜分析結果如圖 4-11。由頻譜圖上可觀察到數個較明顯的峰值，其中一峰值的頻率為 800 rpm(和馬達轉速相同)，此振動可能為碟片的偏心質量隨系統旋轉所引起；振幅最大的峰值頻率為 498 rpm，透過同步閃頻儀的觀察，此頻率和滾珠旋轉轉速相同，因此當系統狀態為旋轉週期解時，滾珠的旋轉是造成系統振動的主要因素；此外，當頻率為 996 rpm 及 1102rpm 時存在兩個較小的峰值。

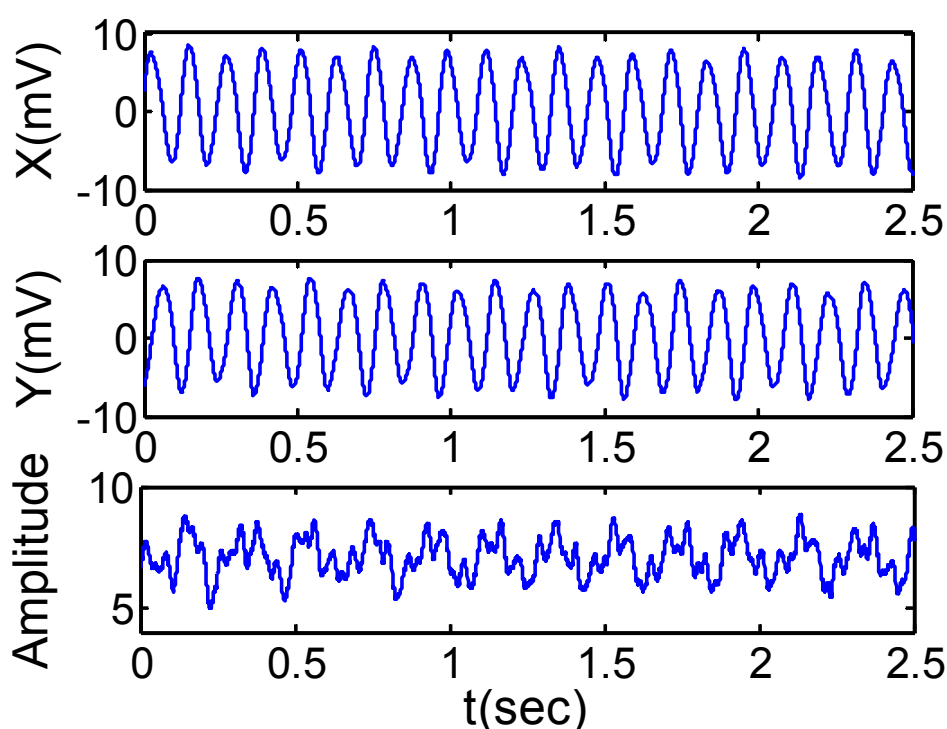


圖 4-10 旋轉週期解之振形圖(實驗)

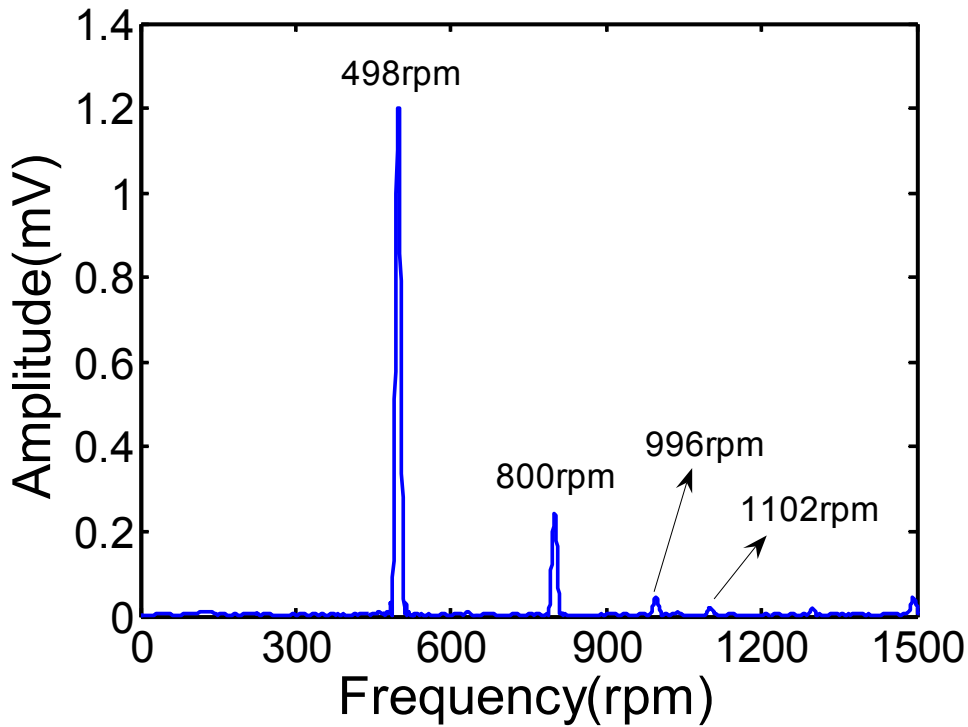


圖 4-11 旋轉週期解之頻譜圖(實驗，轉速為 800 rpm)

為了驗證實驗結果以及進一步了解峰值的意義，將 MIHB 法計算出的旋轉週期解作頻譜分析並和實驗結果比較。由於系統的運動方程式使用旋轉座標系推導並經過無因次化計算，首先需將碟片形心位置 x 及 y 依下列步驟處理以得到相對於固定座標下有因次的物理量：

- (1) 將 $\tau = \omega t^*$ 及 $t^* = \omega_n t$ 代入 x 及 y ，其中 $\omega_n = 2\pi f_n$ 。
- (2) 將形心位置改以固定座標系表示為 $X = x \cos(\Omega \omega_n t) - y \sin(\Omega \omega_n t)$ 及 $Y = x \sin(\Omega \omega_n t) + y \cos(\Omega \omega_n t)$ 。
- (3) 將 X 及 Y 作二階微分以方便和加速規量測的訊號比較，使用 \ddot{X} 及 \ddot{Y} 產生離散資料點並作頻譜分析。

令 f_n 代表系統的自然頻率，經由上述步驟轉換後，滾珠相對於碟片旋轉的基頻可表為 $\bar{\omega} = \omega f_n$ ，碟片相對於固定座標的轉速為 $\bar{\Omega} = \Omega f_n$ 。為了便於描述各峰

值的意義，定義頻率比(Frequency ratio)為頻率和系統自然頻率(f_n)的比值，接著按照上述步驟繪出週期解於固定座標系中的頻譜圖。例如，當參數為 $\mu = 0.2$ ， $\zeta = 0.02$ ， $\zeta_B = 0.1$ ， $\Omega = 1.3$ ， $\eta = 0.7$ 時，其旋轉週期解的頻譜如圖 4-12。觀察圖形，在頻率比為 0.98 及 1.30 時存在峰值。其中 1.30 為系統轉速 Ω ，0.98 為振幅最大的振動頻率，而兩個峰值相差 0.32，正好和週期解的基頻 ω 相同。此一現象暗示，當系統形心相對於旋轉座標系以頻率 $\bar{\omega}$ 來回振盪時，將會在頻譜圖上產生頻率為 $\bar{\Omega}$ 及 $\bar{\Omega} - \bar{\omega}$ 的峰值；觀察實驗結果(圖 4-11)， $\bar{\Omega} - \bar{\omega}$ 及 $\bar{\Omega}$ 及所對應的頻率分別為 498 rpm 及 800 rpm，此週期解的基頻為 $\bar{\omega} = 302 \text{ rpm} = 5.03 \text{ Hz}$ 。此外，實驗結果(圖 4-11)所出現 1102 rpm 的峰值頻率恰好為 $\bar{\Omega} + \bar{\omega}$ ；996 rpm 則為滾珠旋轉的 2 倍頻。綜合數值及實驗的結果，滾珠的旋轉頻率為 $\bar{\Omega} - \bar{\omega}$ ，且其對應的峰值振幅最大，因此當滾珠作旋轉運動時，此頻率為系統的主要振動頻率。接著進行實驗記錄不同轉速下的主要振動頻率 $\bar{\Omega} - \bar{\omega}$ 並和數值結果比較。選擇 MIHB 法在參數 $\mu = 0.2$ ， $\zeta = 0.05$ ， $\zeta_B = 0.05$ ， $\delta = 50$ ， $\eta = 1.3$ 時的計算結果，依照上述計算方式，由滾珠旋轉所引起的主要振動頻率為 $(\Omega - \omega) \cdot f_n$ 。為了和實驗結果比較，在計算上選擇自然頻率為 $f_n = 513 \text{ rpm}$ 。進行實驗時，在偏心距為 36 mm 的螺孔中鎖上總質量為 0.70g 的螺栓及墊片作為偏心質量($\eta = 1.30$)，使制振比和 MIHB 法所使用的數值相同。接著以 25 rpm 為間隔記錄各轉速下的主要振動頻率，和 MIHB 法計算結果比較如圖 4-13。由 MIHB 法計算出的頻率大致分佈於 460 rpm 至 510 rpm 此範圍內；而實驗量測所得的頻率則座落於 490 rpm 至 500 rpm 此範圍內。兩組頻率皆靠近且略低於系統的自然頻率，最大誤差約為 6%。探討兩者分佈趨勢，MIHB 法的計算結果顯示振動頻率隨轉速提高而略為增加；而實驗結果的分佈較為平均，頻率增加的趨勢較不明顯。

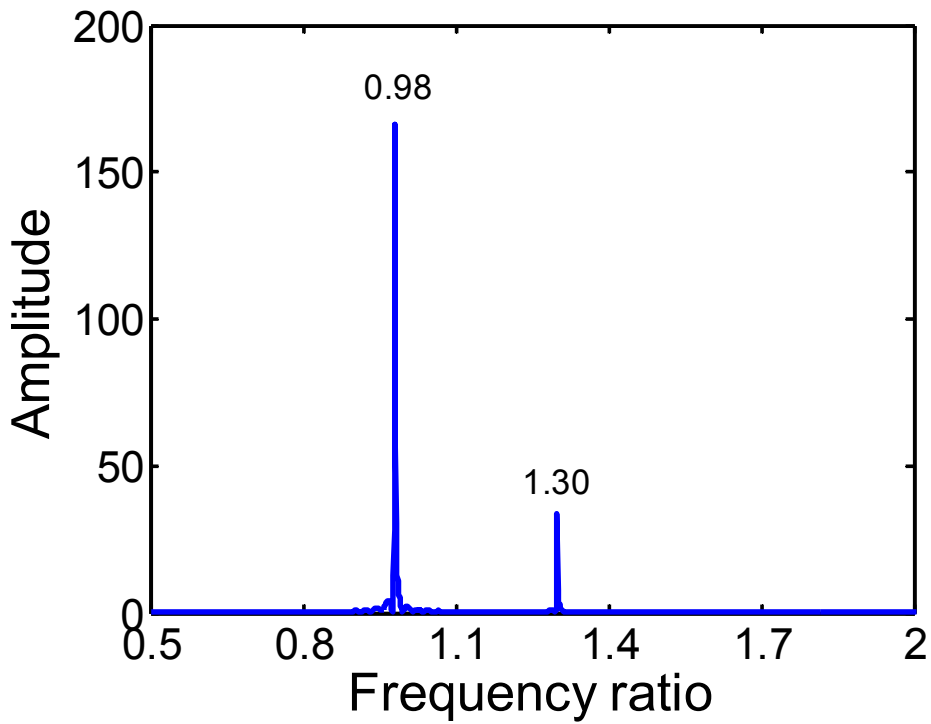


圖 4-12 旋轉週期解之頻譜圖 (MIHB)

($\mu = 0.2$, $\zeta = 0.02$, $\zeta_B = 0.1$, $\Omega = 1.3$, $\eta = 0.7$, $\omega = 0.32$)

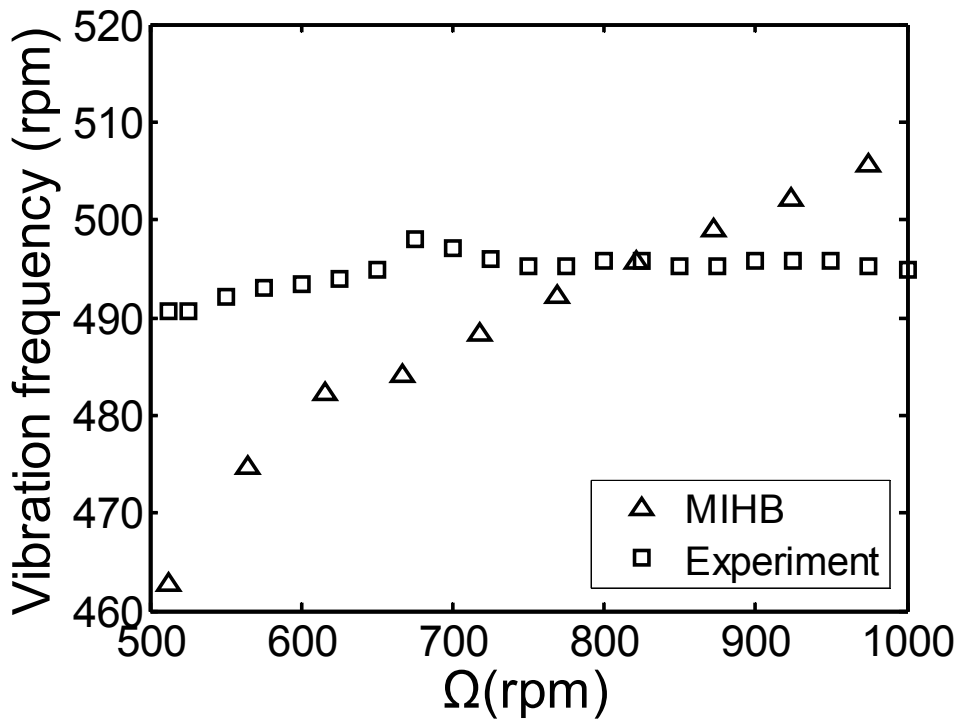


圖 4-13 主要振動頻率比較

4-4-3 軌道阻尼對旋轉週期解的影響

為了驗證軌道阻尼對於旋轉週期解所分佈轉速區間的影響，本節將說明改變軌道阻尼的方式並分析實驗結果。

當滾珠於軌道中移動時受到空氣阻力的影響，但空氣造成的阻尼力太小，因此實驗時在滾珠軌道中加入不同黏滯係數的油品以改變滾珠所受的阻尼力，當油品的黏滯係數較大時系統的軌道阻尼也將隨之增加。本文所使用的油品列於表 4-3，注意表中所列黏度規格是油品在 40°C 的運動黏滯係數 ν (Kinematic Viscosity)。根據油類互溶的原理，當兩種不同黏度的油品混合時，所調製出的油料其黏滯係數將介於兩者之間。本文依不同比例混合油品 A、B 及 C 並使用 Brookfield DV-II 型黏度計量測其黏滯係數，此儀器利用轉子於流體中旋轉所受的扭力計算動力黏滯係數 μ (Dynamic Viscosity)，其中動力黏滯係數和運動黏滯係數的關係為 $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ 。本文所使用油品的混合比例及黏滯係數皆列於表 4-4。本實驗使用油品(1)、油品(2)及油品(3)，黏滯係數 μ 分別為 26.3 cP、36.9 cP 及 76.0 cP。將其灌滿於軌道中並分別進行實驗。

表 4-3 油品規格表

| 油品編號 | 油 品 名 稱 | 黏度規格(40°C) (1 cSt=10 ⁻⁶ m ² ·s ⁻¹) |
|------|---|---|
| A | WD-40 | 3.8 cSt |
| B | CPC Automatic Transmission Fluid DEXRON-III | 35.2 cSt |
| C | TEC Synthetic Technology SAE15W-50 | 128.0 cSt |

表 4-4 油品混合比例及黏滯係數

| 溫度：16°C | | |
|---------|-------------------|---|
| 油品編號 | 混合比例 (依體積比例表示) | 黏滯係數(μ) (1 cP=10 ⁻³ Pa·s) |
| (1) | 25%A-75%B | 26.3 cP |
| (2) | 10%A-90%B | 36.9 cP |
| (3) | 100%B | 76.0 cP |
| 溫度：27°C | | |
| 油品編號 | 混合比例 (依體積比例表示) | 黏滯係數(μ) (1 cP=10 ⁻³ Pa·s) |
| (4) | 40%A-60%B | 12.3 cP |
| (5) | 25%A-75%B | 19.2 cP |
| (6) | 10%A-90%B | 30.8 cP |
| (7) | 100%B | 50.1 cP |
| (8) | 80%B-20%C | 144.3 cP |
| (9) | 100%C | 232.8 cP |

實驗時選擇質量 2.05 g、半徑 4 mm 的滾珠，並在偏心距為 36 mm 的螺孔中鎖上總質量為 1.38 g 的螺栓及墊片作為偏心質量，制振比為 $\eta = 0.66$ 。設定自然頻率 513 rpm 為起始轉速，此時系統將自動進入旋轉週期解的運動形態，記錄振動量後調整至 525 rpm 並以 25 rpm 為間隔逐步增加轉速；達到臨界轉速時，滾珠的運動形式會由旋轉週期解轉變為完全平衡解(以箭號標註)，此時以 25 rpm

為間隔逐步降低轉速，直到滾珠回到旋轉週期解(以箭號標註)始完成實驗流程，記錄各轉速下的振動量，結果如圖 4-14。當 $\mu = 76.0$ cP 時穩定旋轉週期解的分佈區域為[513 rpm, 675 rpm]； $\mu = 36.9$ cP 的分佈區域為[513 rpm, 800 rpm]；而 $\mu = 26.3$ cP 的分佈區域為[513 rpm, 950 rpm]，穩定旋轉週期解的分佈範圍隨軌道阻尼減小有增大的趨勢，且影響至較高轉速，此實驗驗證 3-3-3 節對軌道阻尼的分析。因此若欲縮小旋轉週期解影響的轉速區間，提高軌道阻尼為一可行方式。

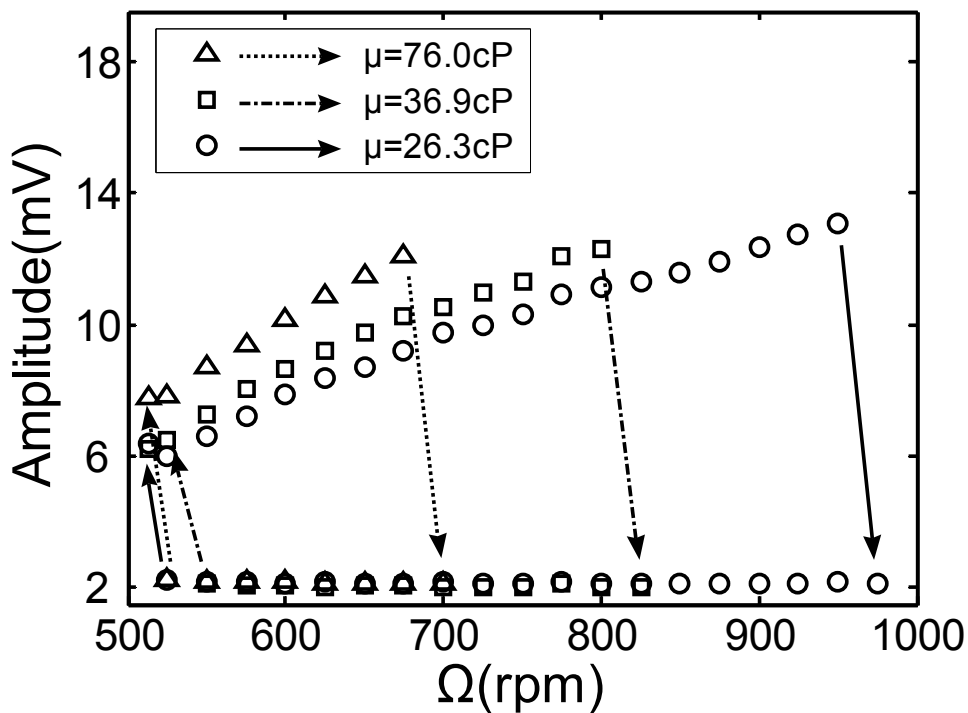


圖 4-14 軌道阻尼對旋轉週期解的影響

4-4-4 雙穩態現象分析

由本文對於各參數的探討以及實驗結果來看，在部分的轉速下，穩定的旋轉週期解及完全平衡解可能同時存在，為了進一步了解此特性，我們分析這兩個穩定解的吸引區域(domain of attraction)。考慮 $\Omega = 1.2$ 及 $\Omega = 1.35$ 時兩個吸引子在 $\beta_1 - \beta_2$ 平面的吸引區域，結果如圖 4-15 及圖 4-16。此處假設其餘初始條件皆為相對於地面為靜止，亦即 $x = \dot{x} = y = \dot{y} = 0$ ；另一方面，由於使用旋轉座標系， $\dot{\beta}_1$ 及 $\dot{\beta}_2$ 應設為 $-\Omega$ 。以數值積分 1000 秒，若系統收斂至旋轉週期解在吸引區域圖上標示為黑點，若收斂至完全平衡解，則以白點標示。

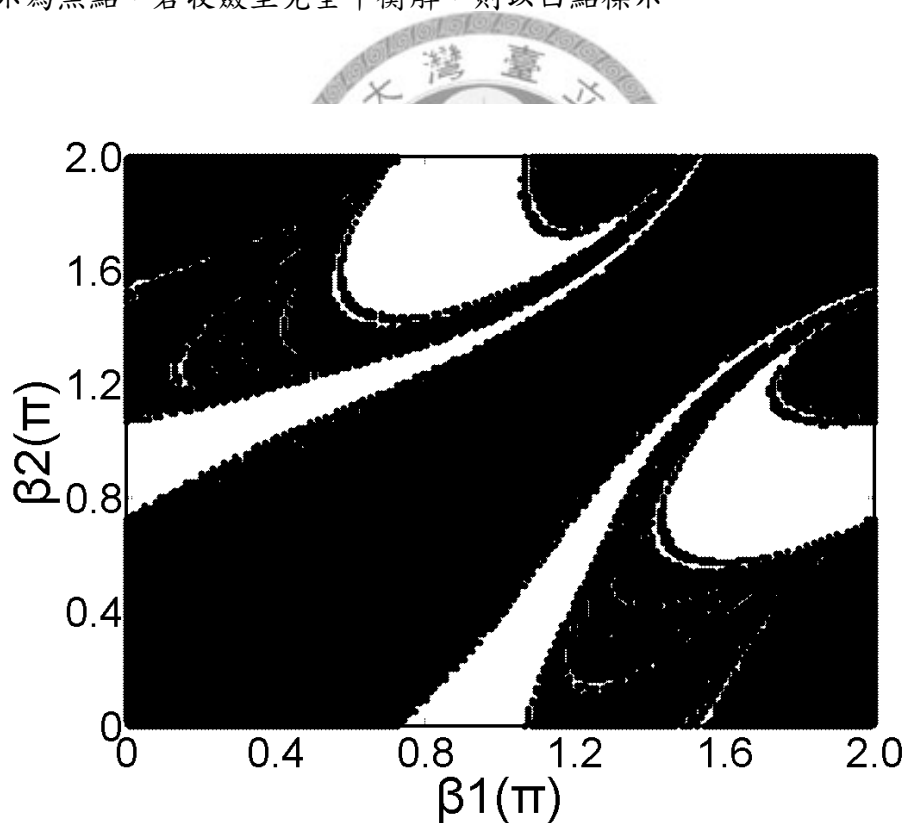


圖 4-15 $\beta_1 - \beta_2$ 平面吸引區域

($\mu = 0.2$, $\zeta = 0.05$, $\zeta_B = 0.05$, $\delta = 50$, $\Omega = 1.2$, $\eta = 0.7$)

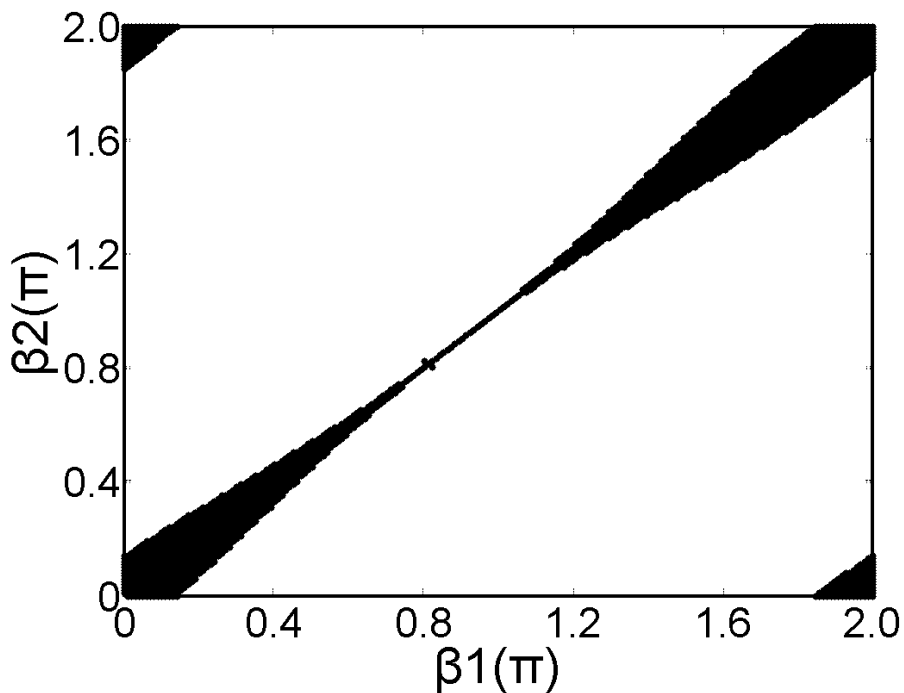


圖 4-16 $\beta_1 - \beta_2$ 平面吸引區域

($\mu = 0.2$, $\zeta = 0.05$, $\zeta_B = 0.05$, $\delta = 50$, $\Omega = 1.35$, $\eta = 0.7$)

觀察結果，當 $\Omega = 1.2$ 時 $\beta_1 - \beta_2$ 平面大部分的區域收斂至旋轉週期解，而 $\Omega = 1.35$ 時黑色區域大幅減少，僅分佈於 $\beta_1 = \beta_2$ 周圍，此時大部分的區域收斂至完全平衡解。換言之，當轉速較低時，無論滾珠的起始位置為何，系統有較高的機會以旋轉週期解的形式運動；轉速較高時，唯有兩顆滾珠靠攏或接近時系統才有機會進入旋轉週期解的運動形態。接著進行實驗驗證此現象，選擇質量 2.05 g、半徑 4 mm 的滾珠，在偏心距為 36 mm 的螺孔中鎖上總質量為 1.38 g 的螺栓及墊片作為偏心質量，制振比為 $\eta = 0.66$ 。依照 4-4-3 節的實驗結果，若在軌道中加入油品增加軌道阻尼，可降低旋轉週期解穩定的轉速區間。因此，為了避免實驗操作於過高的轉速，於軌道中加入油品(2)，此油品的黏滯係數為 36.9 cP。依照 4-4-3 節敘述的方式增加轉速，在設定的轉速下輕輕敲擊簧片支承，給予系統

小擾動以改變滾珠位置迫使其張開一小角度，若系統仍以旋轉週期解運動則繼續增加轉速，若滾珠改變運動形態為完全平衡解則以虛線箭號標示，將實驗結果和無擾動時的路徑繪於圖 4-17。在轉速仍未接近臨界轉速(800 rpm)前，滾珠經過短時間的分離後仍會合併在一起繼續以旋轉週期解的型式運動；當轉速增加至 775 rpm 時，滾珠分開後將不再靠攏，系統改變為完全平衡解的運動形態。轉速較高時，旋轉週期解於 $\beta_1 - \beta_2$ 平面的吸引區域較小，此時增加兩滾珠間的夾角能使滾珠回到平衡位置上。

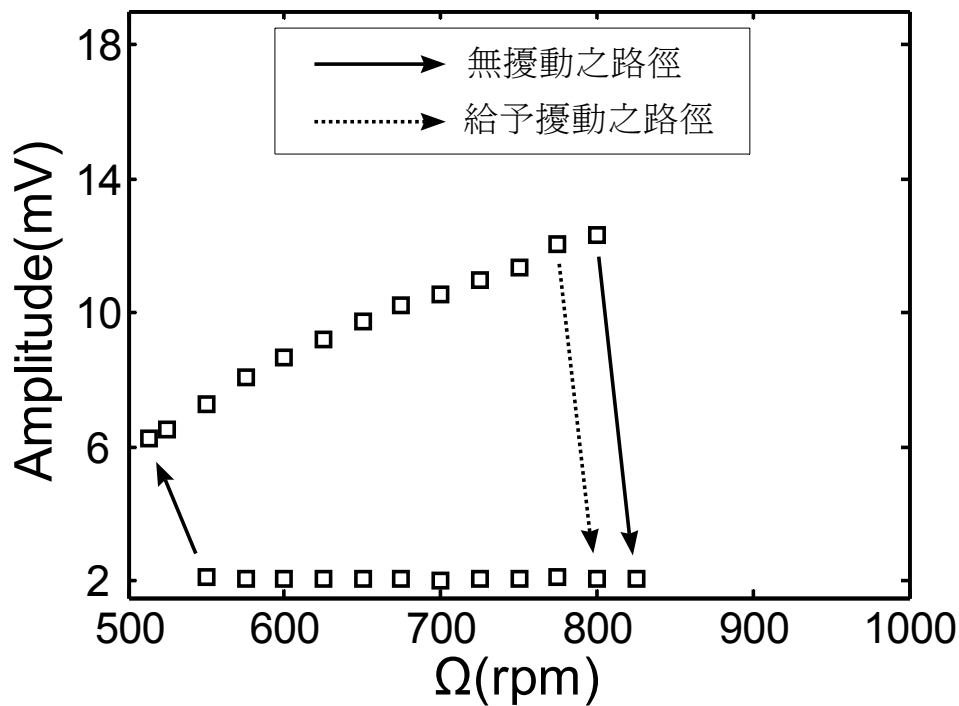


圖 4-17 無擾動及有擾動下之實驗路徑比較

4-4-5 制振比對旋轉週期解的影響

本實驗選擇質量 4.05 g、半徑 5 mm 的滾珠，在偏心距為 48 mm 的螺孔中分別鎖上總質量為 2.52 g、1.99 g 及 0.87 g 的螺栓及墊片作為偏心質量，對應的制振比分別為 $\eta=0.51$ 、0.64 及 1.47；為了便於觀察實驗現象，避免旋轉週期解分佈的轉速區間高於最高操作轉速(1000 rpm)，實驗時於軌道中加入油品(8)，此油品的黏滯係數為 144.3 cP。為了清楚表現出不同制振比下滾珠進入完全平衡解的轉速差異，本實驗改以 850 rpm 為起始轉速(此時系統為旋轉週期解)，以 5 rpm 為間隔逐步增加轉速，當滾珠進入平衡位置時以箭號標示並以相同間隔逐步降低轉速，結果如圖 4-18。當制振比 $\eta=0.51$ 時，系統於 880 rpm 進入完全平衡解；制振比 $\eta=0.64$ 時，系統於 895 rpm 進入完全平衡解；制振比 $\eta=1.47$ 時，系統於 900 rpm 進入完全平衡解。觀察實驗結果，穩定旋轉週期解分佈的轉速區間具有隨制振比提高而增加的趨勢，和 3-3-1 節的討論相同。當制振比由 $\eta=0.51$ 增加至 $\eta=0.64$ 時，臨界轉速增加 15 rpm；當制振比由 $\eta=0.64$ 增加至 $\eta=1.47$ 時，臨界轉速僅增加 5 rpm，探討可能原因，本實驗使用減小偏心質量的方式增加制振比，而碟片本身可能存在微小的偏心量難以完全校正，當外加偏心質量較小時，碟片本身的不平衡量較難忽略，可能造成制振比在計算上的誤差。

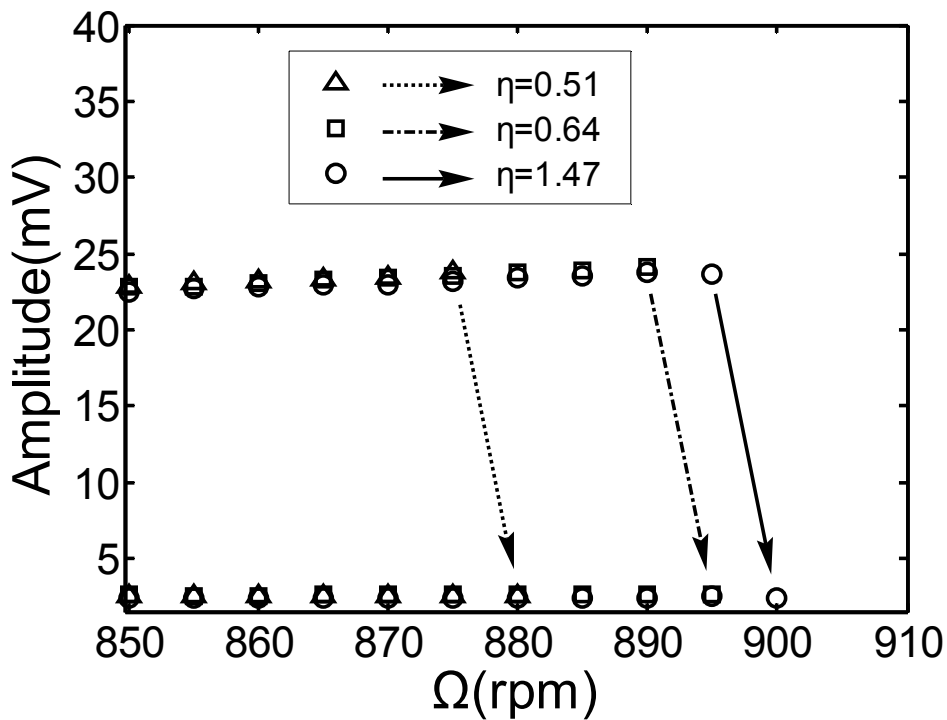


圖 4-18 制振比對旋轉週期解的影響

4-4-6 支承阻尼對旋轉週期解的影響

本節討論支承阻尼對旋轉週期解的影響。由量測 logarithmic decrement (δ) 以計算系統支承阻尼的大小。給予系統一起始位移，記錄其振動訊號如圖 4-19(此處 $X(t)$ 為加速度訊號)，記錄時為了避免高頻雜訊的影響使用低通濾波器將 50 Hz (3000 rpm) 以上的高頻訊號濾除。為了降低計算上的誤差，取出前五個週期的峰值計算其自然對數，在 $i - \ln(x_i)$ 平面上使用最小平方法以直線擬合(其中 i 為波峰數， x_i 為第 i 個波峰的峰值)，計算該直線的斜率為 $-\delta$ ，如圖 4-20，而支承阻

$$\text{尼 } \zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}。$$

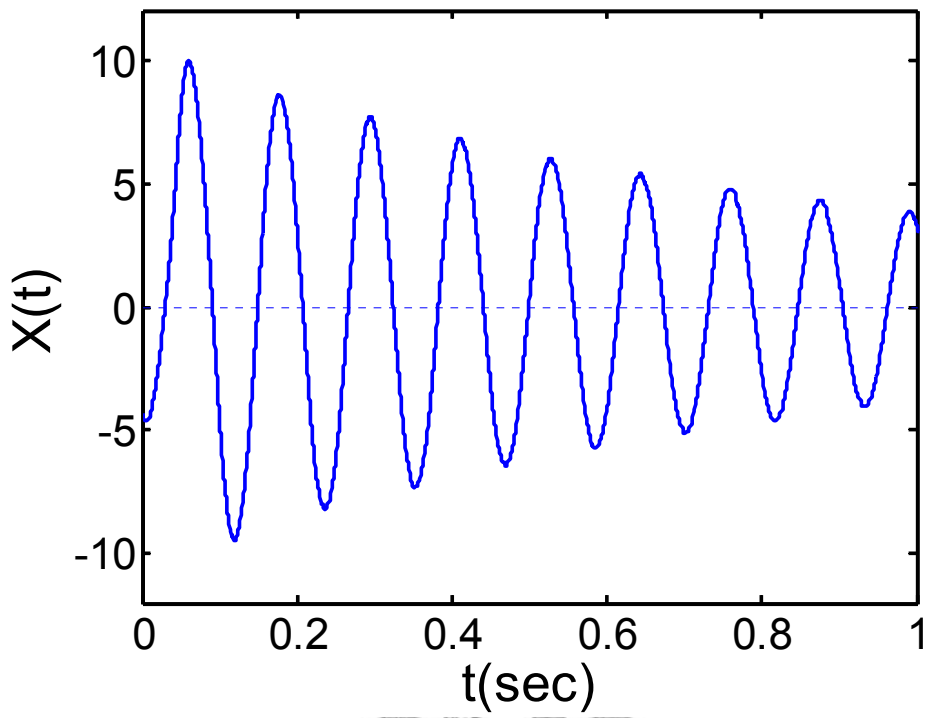


圖 4-19 濾波後之振形

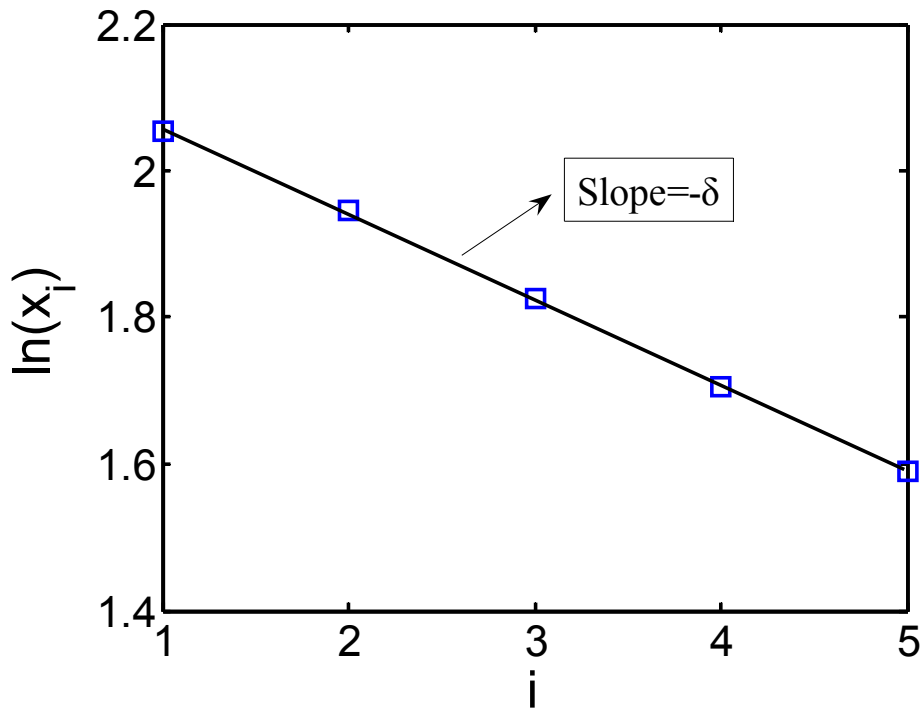


圖 4-20 振形峰值之自然對數圖及 δ 計算

由於系統架設環境的限制，較難改變 L 型簧片週遭流體的阻尼效應(暴露於空氣中)，本實驗使用橡膠墊黏貼於 L 型簧片兩側上不同位置，黏貼方式如圖 4-21。由於橡膠相對於不鏽鋼為較軟的材質，可使支承阻尼稍微增加，而伴隨的效應為自然頻率會隨之提高，量測三種黏貼方式的自然頻率及阻尼並列於表 4-5。

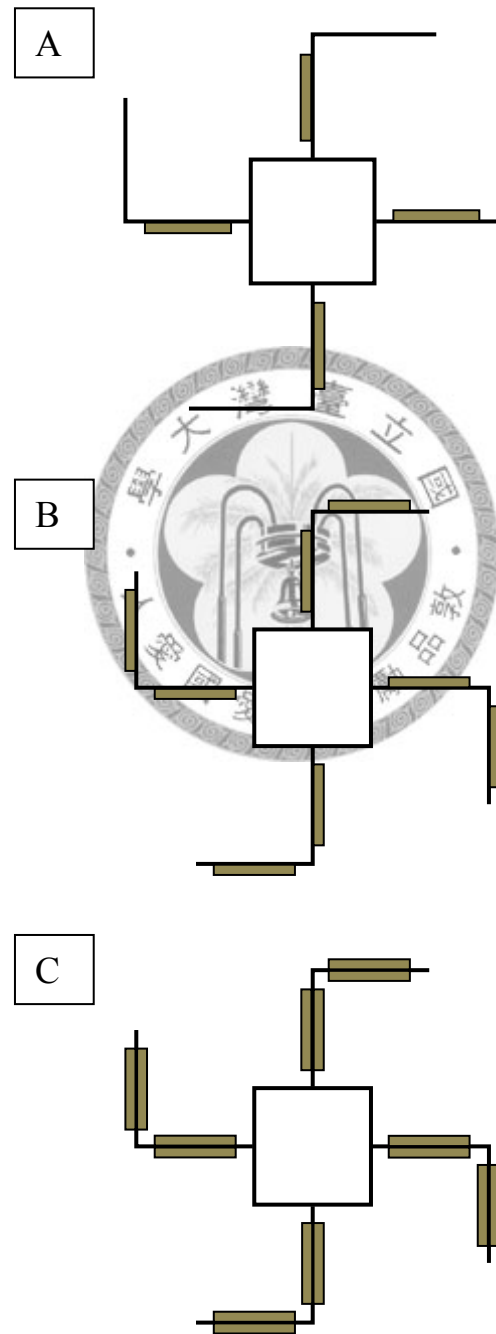


圖 4-21 橡膠墊黏貼方式

表 4-5 不同黏貼方式所對應的自然頻率及支承阻尼

| 黏貼方式 | 自然頻率(f_n) | 支承阻尼(ζ) |
|------|---------------|-----------------|
| A | 521rpm | 0.020 |
| B | 543rpm | 0.030 |
| C | 557rpm | 0.039 |

選擇質量 2.05 g、半徑 4 mm 的滾珠，在偏心距為 36 mm 的螺孔中鎖上總質量為 1.38 g 的螺栓及墊片作為偏心質量，制振比為 $\eta=0.66$ 。為了避免實驗操作於過高的轉速，於軌道中加入油品(4)，此油品的黏滯係數為 12.3 cP。由於黏貼橡膠墊會使自然頻率改變，實驗時改以無因次轉速 Ω (將馬達轉速除以自然頻率) 記錄以便於比較結果。選擇自然頻率作為起始轉速(系統運動形態為旋轉週期解)，以 0.5Ω 為間隔逐步增加轉速，當滾珠進入平衡位置以箭號標示，並以 0.5Ω 為間隔逐步降低轉速至系統自然頻率或是系統回到旋轉週期解的運動形式為止，如此完成實驗流程。若無以箭號標註則表示轉速達到最高操作轉速時(1000 rpm) 滾珠仍以旋轉週期解的形式運動，結果如圖 4-22。觀察結果，當 $\zeta=0.039$ 時穩定旋轉週期解的分佈區域為 [1, 1.4]； $\zeta=0.030$ 時分佈區域增加為 [1, 1.5]；而 $\zeta=0.020$ 時滾珠無法在 1000 rpm 以下進入平衡位置，分佈範圍高於最高操作轉速。因此，穩定旋轉週期解所分佈的轉速區間具有隨軌道阻尼減小而增加的趨勢，和 3-3-2 節討論結果相同。

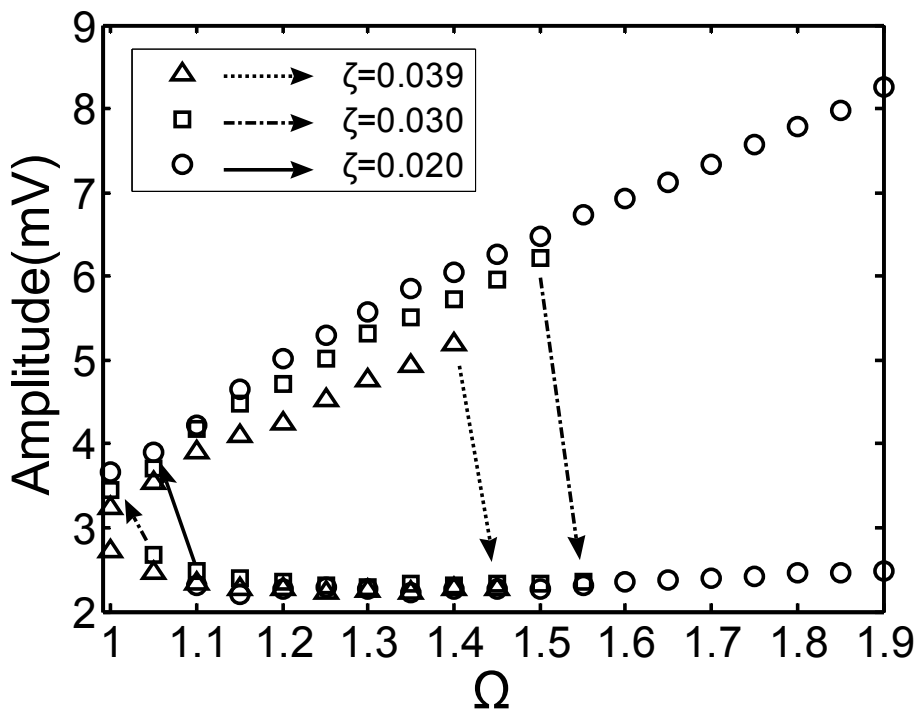


圖 4-22 支承阻尼對旋轉週期解的影響



4-4-7 其它形式週期解

在各種形式的週期解當中，旋轉週期解的分佈範圍最廣泛並且最容易於實驗上觀察，來回振盪週期解以及一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解則需在特定參數條件下才能觀察到。經由 3-4 節的分析，此兩種形式的週期解大致存在於穩定及不穩定完全平衡解的邊界附近。本實驗於軌道中加入油品(7)，此油品的黏滯係數為 50.1 cP，並以表 4-5 中 B 的方式黏貼橡膠墊，其支承阻尼 ζ 為 0.03。當轉速為 555 rpm 及 560 rpm 時可觀察到滾珠分別以兩滾珠來回振盪以及一滾珠旋轉一滾珠來回振盪的形式運動，記錄來回振盪週期解的振形圖及頻譜圖如圖 4-23 及圖 4-24；記錄一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解的振形圖及頻譜圖如圖 4-25 及圖 4-26。以下分別對兩種週期解進行探討：

(a) 來回振盪週期解

來回振盪週期解的頻譜圖(圖 4-24)上存在數個峰值,其中 555 rpm 為馬達轉速而 532 rpm 的振幅最大,各個頻率間相差約 24 rpm。為了進一步驗證實驗結果以及了解各峰值的意義,選擇 MIHB 法在參數為 $\mu = 0.2$, $\zeta = 0.1$, $\zeta_B = 0.1$, $\Omega = 1.1$, $\eta = 1.3$ 所計算出的來回振盪週期解,使用 4-4-2 節中敘述的處理步驟繪出固定座標系下的頻譜圖,結果如圖 4-27。圖 4-27 上存在數個峰值,其中頻率比 1.1 為系統轉速,其它峰值分別發生在頻率比為 $\Omega \pm \omega$ 及 $\Omega \pm 2\omega$ 之處,其中以 $\Omega - \omega$ 的振幅最大。比較數值和實驗結果:週期解的基頻 $\bar{\omega}$ 約為 24 rpm,而 $\Omega \pm \omega$ 所對應的峰值分別為 532 rpm 及 579 rpm; $\Omega \pm 2\omega$ 所對應的峰值分別為 507 rpm 及 602 rpm。此外,實驗結果可在頻率為 627 rpm 之處觀察到額外的峰值,該值為 $\Omega + 3\omega$ 。



(b) 一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解

一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解的頻譜圖(圖 4-26)上存在數個峰值,其中 560 rpm 為系統轉速而 521 rpm 的振幅最大,各個頻率間相差 39 rpm。為了進一步驗證實驗結果以及了解各峰值的意義,選擇 MIHB 法在參數為 $\mu = 0.2$, $\zeta = 0.1$, $\zeta_B = 0.1$, $\Omega = 1.3$, $\eta = 0.7$ 所計算出的一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解,繪出固定座標系下的頻譜圖如圖 4-28。圖 4-28 上存在數個峰值,其中頻率比 1.3 為系統轉速,其它峰值分別發生在頻率比為 $\Omega \pm \omega$ 及 $\Omega + 2\omega$ 之處,其中以 $\Omega - \omega$ 的振幅最大。比較數值和實驗結果:週期解的基頻 $\bar{\omega}$ 為 39 rpm,而 $\Omega \pm \omega$ 所對應的峰值分別為 521 rpm 及 599 rpm; $\Omega + 2\omega$ 所對應的峰值為 638 rpm。此外,實驗結果可在頻率為 482 rpm 之處觀察到額外的峰值,該值為 $\Omega - 2\omega$ 。

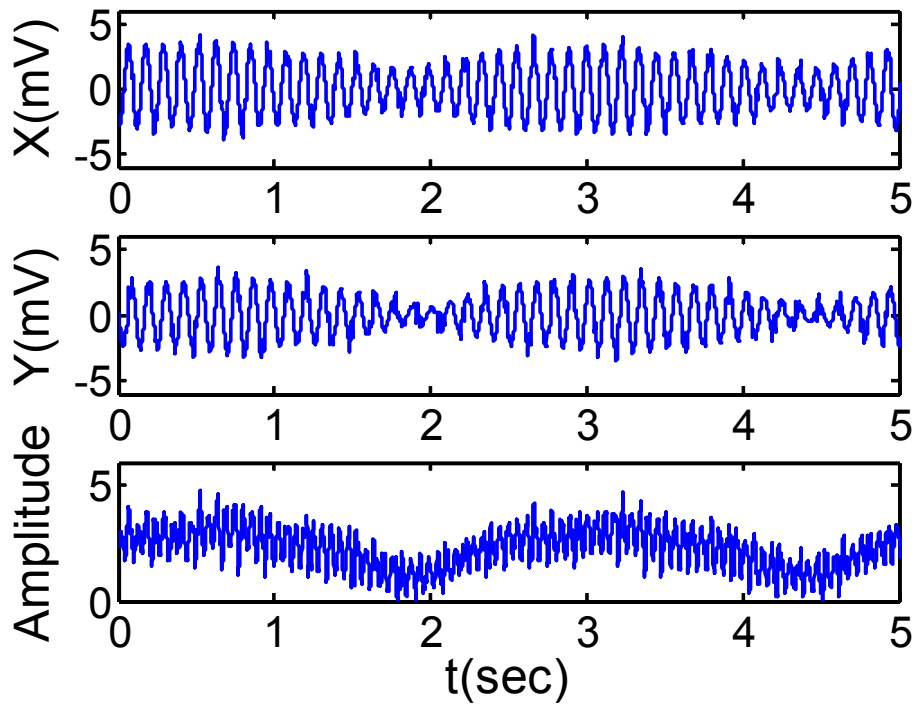


圖 4-23 來回振盪週期解之振形圖(實驗，轉速為 555 rpm)

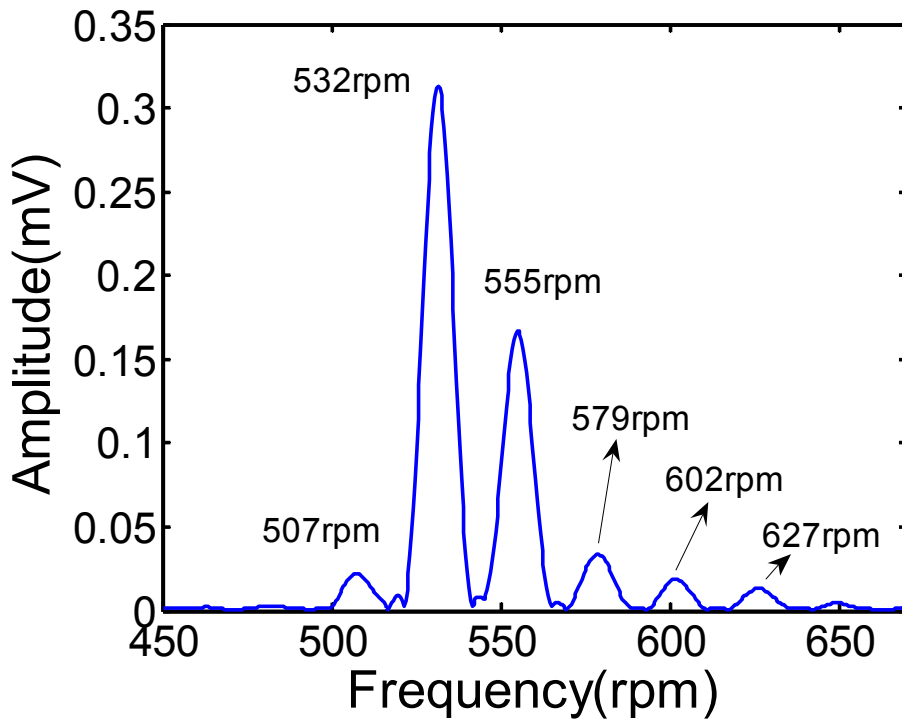


圖 4-24 來回振盪週期解之頻譜圖(實驗，轉速為 555 rpm)

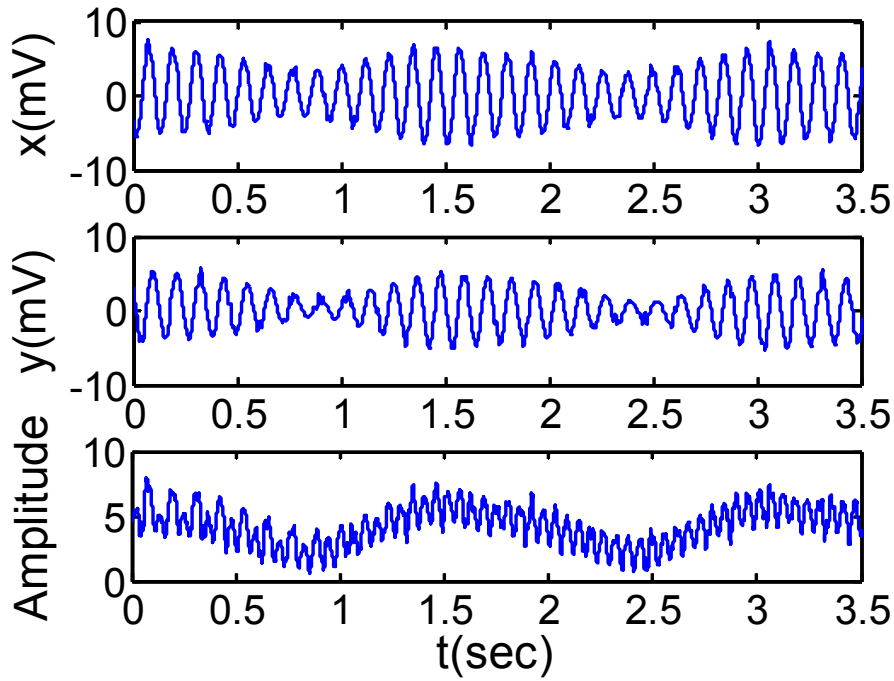


圖 4-25 一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解之振形圖(實驗，轉速為 560 rpm)

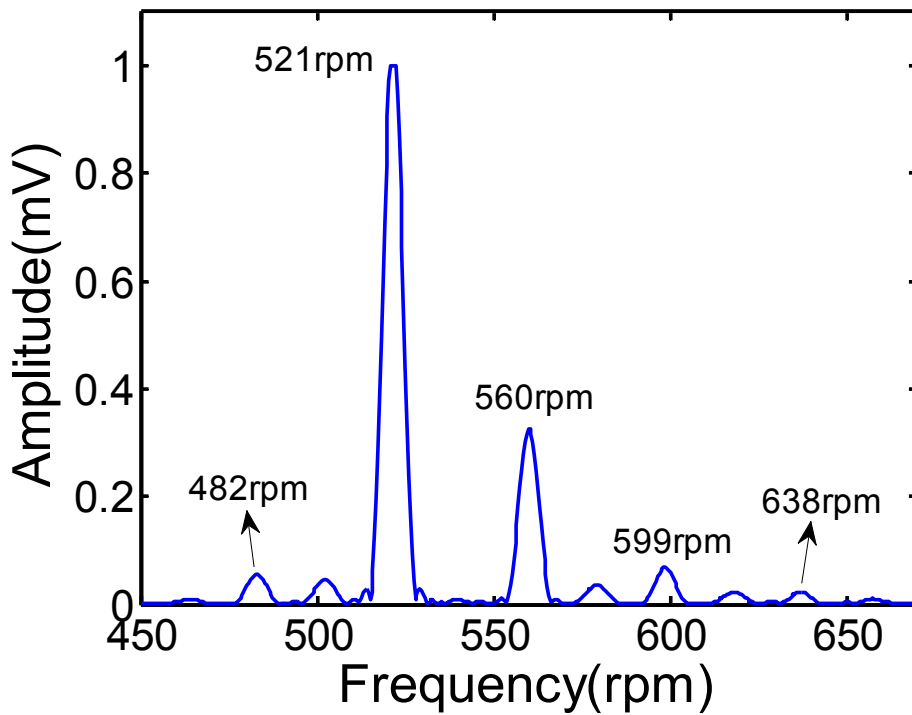


圖 4-26 一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解之頻譜圖(實驗，轉速為 560 rpm)

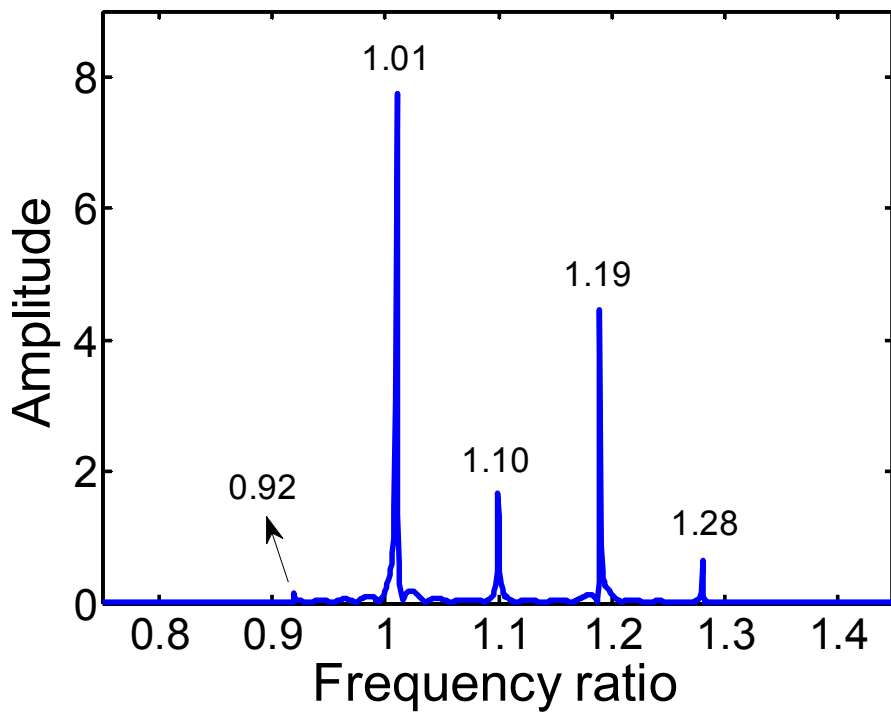


圖 4-27 來回振盪週期解之頻譜圖(MIHB)

($\mu=0.2$, $\zeta=0.1$, $\zeta_B=0.1$, $\Omega=1.1$, $\eta=1.3$, $\omega=0.09$)

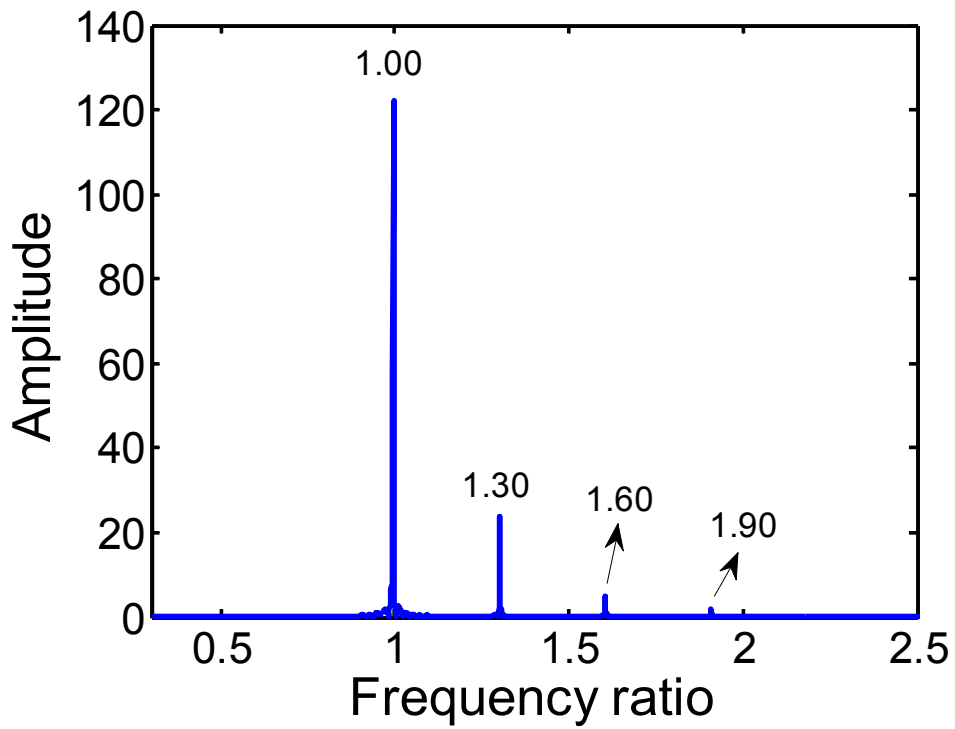


圖 4-28 一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解之頻譜圖(MIHB)

($\mu=0.2$, $\zeta=0.1$, $\zeta_B=0.1$, $\Omega=1.3$, $\eta=0.7$, $\omega=0.30$)

歸納三種形式週期解的頻譜圖(圖 4-12、圖 4-12、圖 4-24、圖 4-26、圖 4-27、圖 4-28)大致具有以下特性：(1)各峰值的頻率間隔為週期解的基頻 $\bar{\omega}$ 。(2)在各個峰值當中，以頻率 $\bar{\Omega}-\bar{\omega}$ 的振幅最大。當一滾珠或者兩滾珠作旋轉週期運動時，此峰值振幅和其它峰值振幅的差距將加大。(3)當滾珠作來回振盪運動時，有機會觀察到較多頻率為 $\bar{\Omega}\pm 2\bar{\omega}$ 或是 $\bar{\Omega}\pm 3\bar{\omega}$ 的峰值。

接著計算來回振盪週期解以及一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解的平均振動量，並且在相同轉速下和旋轉週期解的平均振幅比較，結果如表 4-6。在轉速為 555 rpm 時來回振盪週期解的振動量為 2.32mV，旋轉週期解的振動量為 4.98 mV；在轉速為 560 rpm 時一滾珠旋轉一滾珠來回振盪的振動量為 4.98 mV，旋轉週期解的振動量為 5.13 mV。因此，來回振盪週期解雖然會對系統產生振動，但其振動量較小，當滾珠具有旋轉的運動形式時系統振動量將大幅增加。

表 4-6 不同形式週期解的振動量比較

| 轉 速 | 週 期 解 形 式 及 平 均 振 動 量 | |
|---------|-----------------------|---------|
| | 555 rpm | 來回振盪週期解 |
| 2.32 mV | | 4.98 mV |
| 560 rpm | 一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解 | 旋轉週期解 |
| | 4.16 mV | 5.13 mV |

最後比較不同形式週期解形心座標的傅利葉頻譜於表 4-7：

表 4-7 各種形式週期解的傅利葉頻譜

| 旋轉週期解(R-R) | | | | |
|--|---------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $(\mu = 0.2, \zeta = 0.02, \zeta_B = 0.1, \Omega = 1.3, \eta = 0.7)$ | | | | |
| | $ a_0 $ | $\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ | $\sqrt{a_2^2 + b_2^2}$ | $\sqrt{a_3^2 + b_3^2}$ |
| x | 0.5064 | 4.8416 | 0.0251 | 0.0004 |
| y | 0.1138 | 4.8383 | 0.0252 | 0.0004 |
| 來回振盪週期解(O-O) | | | | |
| $(\mu = 0.2, \zeta = 0.1, \zeta_B = 0.1, \Omega = 1.1, \eta = 1.3)$ | | | | |
| | $ a_0 $ | $\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ | $\sqrt{a_2^2 + b_2^2}$ | $\sqrt{a_3^2 + b_3^2}$ |
| x | 0.0069 | 0.1685 | 0.0147 | 0.0003 |
| y | 0.0466 | 0.2754 | 0.0068 | 0.0004 |
| 一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解(R-O) | | | | |
| $(\mu = 0.2, \zeta = 0.1, \zeta_B = 0.1, \Omega = 1.3, \eta = 0.7)$ | | | | |
| | $ a_0 $ | $\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ | $\sqrt{a_2^2 + b_2^2}$ | $\sqrt{a_3^2 + b_3^2}$ |
| x | 0.2533 | 3.5455 | 0.0127 | 0.0025 |
| y | 0.2707 | 3.6167 | 0.0196 | 0.0024 |

第五章 結論

影響滾珠平衡系統能否發揮制振功能的主要因素有兩點，一為平衡解的穩定性，另外則是週期解對系統的影響範圍。本文主要探討週期解的現象以及各參數對旋轉週期解的影響。

本文首先驗證 MIHB 法求解雙滾珠平衡系統週期解的正確性，並探討求解精確程度對 Floquet 理論的影響：若求得的週期解不夠精確，將影響所得的 Monodromy 矩陣的特徵值的正確性。在格點掃描的過程中，選擇的格點密度愈高將使計算時間大幅增加，因此如何選擇適當的格點密度為操作者必須面臨的問題。第三章使用格點掃描的方式搜尋雙滾珠系統各種形式週期解在 $\Omega-\eta$ 平面的存在區域，並分析各參數對旋轉週期解存在區域的影響。第四章進行實驗驗證單滾珠和雙滾珠系統的制振能力，接著找出雙滾珠系統各種形式的週期解，並驗證各參數對旋轉週期解存在區域的影響。總結可得到以下幾點結論：

- (1) 來回振盪週期解大致存在於不穩定完全平衡解區域內，且非常接近平衡解的穩定性邊界。
- (2) 一滾珠旋轉一滾珠來回振盪週期解大致存在於穩定完全平衡解區域內，且接近平衡解的穩定性邊界。
- (3) 旋轉週期解為影響範圍最廣泛的週期解，且和穩定完全平衡解同時存在於部分的轉速區間。此一現象表示，完全平衡解的穩定性並非是滾珠能否發揮制振效果的唯一因素，尚需考慮穩定旋轉週期解存在的吸引區域。旋轉週期解在 $\beta_1-\beta_2$ 平面中的吸引區域會隨 Ω 提高而減少。根據第三章及第四章的分析，降低 η 、增加 ζ 及 ζ_B 能夠減少此週期解在 $\Omega-\eta$ 平面上的存在區域，使影響的轉速區間降低至較低轉速。

參考文獻

- [1] 黃仕軒, 2005, “懸吊機構對滾珠自動平衡裝置之影響,” 台灣大學碩士論文
- [2] 洪嘉興, 2006, “多滾珠自動平衡系統之動態特性,” 台灣大學碩士論文
- [3] K.Green, A. R. Champneys, and N. J. Lieven, 2006, “Bifurcation analysis of an automatic dynamic balancing mechanism for eccentric rotors,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol 291, pp.861-881.
- [4] J. D. Alwxander, 1964, “An automatic dynamic balancer,” *Proceedings for the Second Southeastern Conference*, Vol. 2, pp. 415-426.
- [5] J. W. Cade, 1965, “Self-compensating balancing in rotating mechanism,” *Design News*, pp. 234-239.
- [6] T. Majewski, 1988, “Position errors occurrence in self balancers used on rigid rotors of rotating machinery,” *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 23, pp. 71-77.
- [7] J. Lee, 1995, “An analytical study of self-compensating dynamic balancer with damping fluid and ball,” *Shock and Vibration*, Vol. 2, pp. 59-67.
- [8] J. Lee and W. K. Van Moorhen, 1996, “Analytical and experimental analysis of a self-compensating dynamic balancer in a rotating mechanism,” *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 118, pp. 468-475.
- [9] C. Rajalingham and S. Rakheja, 1998, “Whirl suppression in hand-held power tool rotors using guided rolling balancers,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol.217, pp. 453-466.
- [10] R. Silin, V. Royzman, A. Malygin, I. Borko, and R. Tholovsky, 1999, “The research into automatic balancing processing of rotors with vertical axis of rotation,” *Tenth World Congress on the Theory of Machine and Mechanisms*,

Oulu, Finland, June 20-24, pp. 1734-1739.

- [11] J. Chung and D. S. Ro, 1999, "Dynamic analysis of an automatic dynamic balancer for rotating mechanisms," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 228, pp. 1035-1056.
- [12] C. Hwang and J. Chung, 1999, "Dynamic analysis of an automatic ball balancer with double races," *JSME International Journal*, Vol. 42, No.2, pp. 265-272.
- [13] J.-R. Kang, C.-P. Chao, C.-L. Huang, and C.-K. Sung, 2001, "The dynamics of a ball-type balancer system equipped with a pair of free-moving balancing masses," *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 123, pp. 456-465.
- [14] W.-Y. Huang, C.-P. Chao, J.-R. Kang, and C.-K. Sung, 2002, "The application of ball-type balancers for radial vibration reduction of high-speed optic disk drives," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 250, pp. 415-430.
- [15] C.-P. Chao, C.-K. Sung, and H.-C. Leu, 2005, "Effects of Rolling Friction of the Balancing Balls on the Automatic Ball Balancer for Optical Disk Drives," *ASME Journal of Tribology*, Vol. 127, pp. 845-856.
- [16] C.-J. Lu, 2006, "Stability Analysis of a Single-Ball Automatic Balancer," *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, **128**, No. 1, pp. 122-125. (NSC -93-2212-E-002-066)
- [17] C.-J. Lu and C.H. Hung, 2008, "Stability Analysis of a Three-Ball Automatic Balancer," *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, **130**, pp. 051008-1 - 051008-7 (NSC94-2212-E-002-033)
- [18] W. Kim, D.-J. Lee, and J. Chung, 2005, "Three-dimensional modeling and dynamic analysis of an automatic ball balancer in an optical disk drive," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 285, pp. 547-569.
- [19] C.-P. Chao, C.-K. Sung, and C.-C. Wang, 2005, "Dynamic Analysis of the Optical Disk Drives Equipped with an Automatic Ball Balancer with

Consideration of Torsional Motions,” *ASME Journal of Applied Mechanics*,
Vol.172, pp. 826-842.

[20] C.-J. Lu, M.-C. Wang, and S.-H. Huang, 2009, “Analytical Study of the Stability
of a Two-Ball Automatic Balancer,” *Mechanical System and Signal Processing*,
23(3), pp. 884-896. (NSC96-2221-E-002-216)

[21] A. H. Nayfeh and B. Balachandran, 1995, *Applied nonlinear dynamics :
analytical, computational, and experimental methods*, New York : Wiley-
Interscience.

[22] C.-J. Lu and Y.-M. Lin, 2010, “A Modified Incremental Harmonic Balance
Method for Rotary Periodic Motions,” *Nonlinear Dynamics* (in press).

[23] S. L. Lau, and S. W. Yuen, 1993, “Solution Diagram of Non-Linear Dynamic
Systems by the IHB method,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 167(2), pp.
303-316.

[24] Ogata, K., 1970, *Modern Control Engineering*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey,
U.S.A.

