國立臺灣大學工學院工業工程學研究所

碩士論文

Graduate Institute of Industrial Engineering
College of Engineering
National Taiwan University

Master Thesis

製造商之季節性商品最適價格折扣與產能擴充策略

Optimal Pricing and Capacity Strategies for Seasonal Products in a Supply Chain

呂明倫

Lu, Ming-Lun

指導教授：黃奎隆 博士

共同指導教授：郭佳瑋 博士

Advisors：Huang, Kwei-Long, Ph.D.

Kuo, Chia-Wei, Ph.D.

中華民國 一百 年 七 月

July, 2011

國立臺灣大學碩士學位論文
口試委員會審定書

論文中文題目：製造商之季節性商品最適價格折扣與產能擴充策略

論文英文題目：Optimal Pricing and Capacity Strategies for Seasonal Products in a Supply Chain

本論文係呂明倫（R98546031）在國立臺灣大學工業工程學研究所完成之碩士學位論文，於民國 100 年 7 月 7 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

黃奎隆 ____________
（指導教授）

郭佳瑋 ____________
（共同指導教授）

吳政鴻 ____________

余峻瑜 ____________

系主任、所長：陳正剛 ____________

誌謝

終於畢業了，經過兩年的淬煉人生已有所不同，一開始懵懵懂懂的進入台大工工所發現周遭的同學們實力堅強,遂而激勵荒唐了四年的我以追上他們為目標。我的指導教授黃奎隆從碩一開始便讓我參與他與共同指導教授郭佳瑋的研究，從中我不但熟悉了寫論文所需的 Matlab 軟體，也加強了獨立解決問題的能力，這些訓練是我在大學時所缺乏的，如今我可以明顯感受到自己的成長，在此必須由衷的感謝老師的用心。

進入了碩二,黃老師與郭老師每個禮拜不停歇的 meeting 讓懶惰的我能保持進度，最後準時畢業。其中，黃老師更是每個禮拜從國青到遙遠的管院來 meeting，就為了我的研究論文能順利完成，老師的認真讓我發自內心的感激，真的很謝謝老師。郭老師也是固定每個星期緊盯我的進度，甚至更嚴格的要求，讓我有一段時間需要咖啡的陪伴，雖然如此，要是沒有郭老師的要求我的論文應該會被口試委員釘得滿頭包，所以還是很感激郭老師的。最後，很感謝兩位指導我的老師在口試的時候出手援助，像是浩瀚沙漠裡的一杯水，讓站在台上的我能延續生命力支撐下去。

到了感激父母的部分，我老爸知道我課業繁忙從不施與我任何壓力，還說讀個三年也沒關係，他會一直支持我的，這句話我有放在心上了，感謝老爸不善言詞的表達父親對兒子的愛。再來是我的老媽，兩年來都是媽媽打電話來關心我的狀況，還很貼心的多匯一點錢讓我能跟朋友們出去散心玩樂，就怕我一個人在台北孤單寂寞，非常感謝老媽! 還有我那三八的姐姐跟妹妹,三不五時的陪我在網路上聊天，讓我覺得大家就在我身旁一樣，我想說”我愛我的家人。”

最後，感謝我曾麻煩過的同學們，因為你們夠強，所以才會找你們幫忙。也希望一起喝酒聊天的朋友們未來繼續保持連絡，友誼長存。

2011.07.23

摘要

市面上充斥著形形色色的產品，有一類產品具顯著的銷售季節循環稱為季節性商品。季節性產品隨處可見，共同點就是在某個時間裡的銷售量會特別多而形成一個周期性的波動，因此季節性商品可歸類出以下兩大特性：(1)商品需求的波動性大，(2)生命週期短，上下游經常採用一次性買斷的交易模式。

由於以上的特性，零售商面臨了訂購量的問題，若向製造商訂購過多的產品一旦需求達不到預期則會發生虧損,因此為了減少倉管的人事費用以及存貨成本，並且蒐集市場更精確的資訊,而將訂貨時點訂的離銷售旺季越近越好。如此一來，會發生製造商商供貨不及使得零售商無法及時滿足消費者的需求而產生缺貨成本的情形發生。反觀製造商，在淡季因為沒有訂單而讓產能閒置，到了旺季再生產會有當季產能不足而造成缺貨的風險，使其利潤無法達到最佳；倘若製造商在淡季就生產該數量的產品則本身要承擔倉管及存貨成本費用，由此可知上下游之間的利潤彼此是有衝突的。

因此，本文是以製造商的立場在一般決策下比較導入折扣合約設計與增加產能兩個策略在何種情況下增進利潤的表現較佳，提供在不同參數環境下最佳的選擇策略。首先利用 Stackelberg 的模型建構製造商與零售商的決策行為，接著建立折扣合約模型與產能擴充模型探討三者對製造商利潤的影響。

製造商在淡季提供折扣合約的目的是為了降低因存貨成本造成的利潤損失以及降低產品的單位生產成本，因為價格折扣能誘使零售商在淡季將部分貨品提前取走並且訂定更多的產品。另一個策略為製造商於銷售旺季進行產能擴充，但必須支付擴充的成本，雖然如此，製造商能避免淡季生產的存貨成本負擔也可因為擴充產能後的大量生產而享有規模經濟所帶來的利益。

關鍵字：季節性商品、Stackelberg 模型、折扣合約、產能擴充

Abstract

A product whose demand takes place only in a specific period of a year is called “seasonal product.” Due to demand uncertainty and the short life, a retailer faces a problem of determining the timing and the quantity of orders. In order to collect more information, retailers prefer to place orders closed to the peak season so that they can avoid the holding cost and therefore minimize demand forecast error. In this case, a manufacturer cannot produce enough products in the peak season due to capacity constraint. However, if the manufacturer prepares production in advance, stocking inventory will become a burden. Therefore, the manufacturer will attempt to circumvent this problem with a more efficient method.

In this research, the manufacturer provides two ways to improve this problem; one is to design a discount contract, and the other is to expand capacity in the peak season. Under a discount contract, the manufacturer will offer a sale discount for every unit of the products sold in the off-peak season to induce retailers to make an early procurement. Capacity expansion in the peak season is a direct method to satisfy demand and also create economies of scale for the manufacturer. Here, we use the concept of Stackelberg game to construct our model under which a manufacturer faces a retailer to determine the optimal production strategy of a seasonal product by comparing the above two methods.

Keywords：seasonal products, Stackelberg game, discount contract, capacity expansion

目錄

圖目錄

第一章　　緒論

1.1　研究動機

市面上充斥著形形色色的產品，其中有一類產品具有顯著的銷售季節循環稱為季節性商品。該類產品有季節性的需求，而這季節循環的週期不只侷限於一季，亦可一個月、一個禮拜或是一天。這類產品如：秋冬季節的羽絨棉被、春夏季節的冷氣機，或是特別節日送禮的代表性產品，例如父親節電動刮鬍刀、母親節康乃馨花等銷量都比平常日來的多。舉冷氣機為例，瑞智(Rechi)為國內最大空調壓縮機製造公司，每一年度三月至八月的營收超過全年的六成，由此可知春、夏為此公司主要獲利季節，如圖 1.1 為去年 99 年度瑞智精密公司各月的營收狀況。

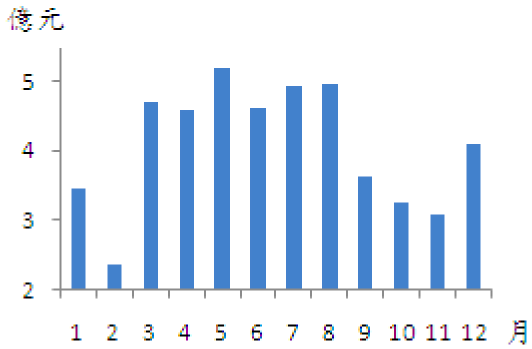


圖 1.1 瑞智 99 年度月營業收入

(參考資料：http://www.rechi.com)

這些季節性的產品隨處可見，共同點就是在某個時間區段的銷售量會特別多而形成一個周期性的波動，季節性商品可歸類出以下兩大特性(Chen & Xu, 2001)：

- 商品需求的波動性大：

  在某一特定季節或是某一期間，消費者對該產品的需求特別顯著而造成產品的需求量呈現大幅波動的不穩定現象。

- 生命週期短，上下游經常採用一次性買斷的交易模式：

  由於某些產品的生命週期短，隨著時間產品的價值銳減(perishable)，製造商在自利動機下將產品以一次賣斷的方式避免庫存所造成利潤的損失。最明顯的例子為成衣業，春夏秋冬各有季節性的服飾，零售商以一次買斷的模式進貨，

然而一旦面臨換季的時候，零售商就必須將買斷的衣服清倉拍賣降低損失。

季節性商品周期性波動的需求特性對零售商與製造商皆有負面的影響，市場上零售商的店面以及架位空間有限，且需要管理與盤點存貨等作業，所以零售商為了減少倉管的人事費用以及產品的存貨成本，並且蒐集市場更精確的資訊，訂貨時間點通常接近銷售旺季，如此一來會有供應商來不及供貨使得零售商無法及時滿足消費者的需求而產生缺貨成本的情形發生。對零售商而言，缺貨成本除了銷售損失(lost sales)的機會成本外，還包括了消費者對此商家不好的觀感，即商譽受損；反觀製造商，在淡季因為沒有訂單而讓產能閒置，到了旺季再生產會有當季產能不足而造成缺貨的風險；倘若製造商在淡季便進行生產，則需承擔商品的倉管及存貨成本費用，由此可知上下游之間的利潤彼此是有衝突的。

供應鏈發展至今市場因應此問題已有常見的兩個解決方法，第一個是製造商利用折扣誘因機制，第二個為製造商擴充旺季的產能。價格折扣主要目的是吸引買方提高購物意願，無論是零售商對市場消費者亦或上游廠商對下游零售商，皆可見賣方利用價格折扣增進自身利潤。對製造商而言，利用價格折扣可使零售商提前取貨以減輕存貨成本負擔。舉一實例，格力為中國一家世界品牌的空調製造商，由於空調銷售的季節性強，且產品的體積大，難以大量庫存，而在旺季即使加班也來不及生產，於是管理者推出淡季返利策略，只要經銷商愈早提貨，格力給予經銷商的利潤就愈多。此策略成功的紓解旺季供貨的壓力，達成上下游廠商雙贏的局面。這種提前銷售而給予的折扣稱為季節性折扣，主要是鼓勵買方於旺季之前取貨，使廠商有助於減輕在淡季的庫存、加速產品的流通、提早回收資金，避免因季節性需求的變化所帶來的市場風險。然而製造商提出的折扣要有足夠的誘因才能使下游廠商提前取貨，包括製造商提供的折扣必須大於零售商的持有成本，因此當零售商存貨成本很高時，則製造商需負擔的折扣成本也較高。由此可知，當製造商的折扣成本超過自身的存貨成本時，便不會採用折扣機制。

除了提供零售商價格折扣的方法外，製造商也可使用擴充產能的方式來提升獲利。製造商可利用淡、旺季產能的調整減緩季節性需求波動所帶來的影響。製造商可於淡季生產少量的產品，將主要生產量集中於旺季，若旺季無法應付市場總需求量可藉由產能擴充的方式增加生產量。而產能擴充不侷限於機器設備的建置，亦可為人力的調配、外包、設施的安排等增加產能的方法。例如 ZARA 為世

界時尚服裝的製造商之一，有別於同業在提早備貨，ZARA 選擇在銷售旺季利用外包的方式增加生產量,如此一來可避開存貨成本的壓力也可快速反應市場變化。製造商可依以下擴充產能的方法調整產品供給 (Chopra & Meindl, 2004)：

- 經由人力調配的彈性工時：

  許多工廠於旺季訂單滿載時會要求員工增加工作時數，利用加班工作可以製造更多的產品以符合需求以及變異性。有部分公司則會使用兼職的人力，使產能更具有彈性。

- 使用季節性人力：

  公司在需求旺季使用暫時性的人力去增加產能以配合需求。例如日本豐田汽車廠定期使用季節性的工人使供給與需求能配合。

- 使用外包：

  公司將旺季的部分生產外包出去，利用外包的方式能夠建立相當彈性且使生產維持相當穩定的方法。而外包商常能藉著將許多製造商的產能變動量集合在一起生產，以取得較低價格的彈性。

- 使用並行設施－專用與彈性設施：

  專用的設施能以有效率的方式在涵蓋時間內相當穩定的製造出一定量的產品。彈性的設施可以製造各種類的產品，且生產量具有較大調整彈性。

製造商擴充旺季的產能不但能滿足零售商的訂購量，還可藉由大量的生產降低作業成本、原物料成本等獲得規模經濟所帶來的效益。製造商擴充產能需支付產能擴充成本，當此成本很高時，製造商擴充產能反而不利，因此製造商是否採取產能擴充策略會依據效益與成本的抵換關係來決定。

面對季節性商品需求波動下製造商可藉由折扣合約或產能擴充策略來提升自身利潤，然而市場上製造商與零售商長、短期合作關係的不同會影響製造商採取策略時的批發價。若雙方有長期的合作關係，製造商採取策略時會依照原批發價下實行，例如製造商欲利用價格折扣使零售商提前取貨，可在原買賣契約下簽訂一折扣附約，而這種固定批發價格下的策略，本研究稱為靜態價格策略。若雙方為短期合作的關係或重新簽訂一新約，製造商採取策略時可制定一新的批發價，

例如製造商同時決定批發價與提供零售商的價格折扣，簽訂一新的買賣契約，這種變動批發價格下的策略，本研究稱為動態價格策略。本文將分成兩部分探討靜態價格與動態價格下製造商採用策略的影響。

1.2 研究範圍與架構

本研究將探討一製造商面對一零售商的兩階層供應鏈，銷售的產品為季節性商品，零售商面對的為一完全競爭市場，所以商品的定價由市場決定，零售商只能向單一廠商決定訂購量，在此不考慮訂貨的前置時間與補貨。製造商有一既定產能進行生產，不考慮產能的閒置與保養成本，只考慮產品的單位生產成本與存貨成本，故製造商在有限產能下考慮生產與存貨成本決定批發價格以最大化其利潤。

舉一現實社會中實際的案例 (林則孟，2005)，銷售家居生活雜貨為主的商家如生活工場，店內產品不乏出現季節風格的商品，強調顏色與各式主題等流行趨勢，然而商品的功能性與競爭對手如無印良品、IKEA 與 HOLA 的商品相同，所以同種類商品的價格水平差距不大，因此零售商在市場上並無太強的定價能力；而生活工場的特定商品有其主要合作的製造商，由於生產的產品需印上生活工場的商標，因此採用一次性買斷模式，而製造商的決策為考慮產能與生產成本制定批發價格，簽訂對自身有利的買賣契約。

市場上零售商面臨的消費者需求是不確定的，因此在決定訂購量時除了考慮商品在市場上的售價以及製造商訂定的批發價，還需考量到產品過剩與缺貨產生的成本，然而在這些考量下零售商所決定的訂購量會直接影響製造商的利潤，因此製造商也必須將零售商的訂購行為納入考量以制定最佳的批發價。這是一個相互影響的機制，故本文站在製造商的立場在這個機制下運用 Stackelberg 模型建構製造商的決策行為，本研究稱此模式為一般決策模型，而此模型將為本文的基準模型。

季節性商品有週期銷售量特別突出的特性，使得旺季與淡季有明顯的區別，由於產能限制上游廠商如果不想在旺季發生缺貨的情形勢必要在淡季時提前生產，但在淡季生產的產品會有存貨成本的負擔，因此製造商有誘因提出更有彈性的機

制與策略提升自身的利潤空間。本研究將分別比較靜態與動態價格下製造商導入折扣合約設計與旺季增加產能兩個策略在何種情況下獲利較佳，以提供製造商在不同參數環境下最佳的選擇策略。

本研究模型建構流程可以總結如下：

1. 建立一般決策模型：製造商在有限產能下考慮生產與存貨成本訂定一批發價最大化自身利潤，而零售商根據市場的需求分配以及批發價決定自身利潤最佳的訂購量。
2. 分別於靜態與動態價格下建構折扣合約模型與產能擴充模型：
   - 建構折扣合約模型：延伸一般決策模型，製造商在淡季每單位產品提供一價格折扣吸引零售商提早在銷售季節前取貨，此一目的除了轉嫁製造商的存貨成本外，若價格折扣高於零售商持有成本亦能誘使零售商訂定更多的商品。
   - 建構產能擴充模型：延伸一般決策模型，製造商可利用在旺季擴充產能的方式避免因在淡季生產而產生存貨成本的負擔，但製造商須衡量擴充產能的成本後再決定是否採取此策略。
3. 求解與數值分析：進行模型求解並以一特定的需求分配函數進行數值分析，比較三個模型之間最適決策。
4. 管理意涵：提供管理者在不同的參數環境下，依自身利潤最大的目標選擇最適的生產策略。

1.3 論文架構

本文可分成以下五個章節探討：

第一章　緒論：闡述研究動機、目的與架構。

第二章　文獻回顧：本研究相關議題的文獻探討，分別為季節性商品、賽局理論、供應合約以及產能決策等文獻。

第三章　模型建立：利用 Stackelberg 的模型建構製造商與零售商的一般決策行為，

接著分成靜態價格與動態價格下兩個部分個別建立折扣合約模型與產能擴充模型探討三者對製造商利潤的影響。

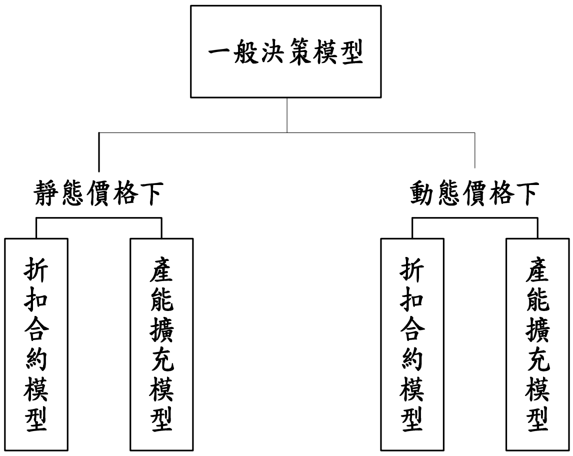


圖 1.2 模型關係圖

第四章　模型求解與假設分析：將市場需求假設服從均勻分配，依照第三章模型的步驟分析，進行歸納整理、解釋管理意涵以及數值分析。

第五章　結論與未來展望：根據模型與數值分析的結果做統整性的結論，並且討論未來可延伸的方向。

第二章　　文獻探討

本文研究建立在季節性商品中，探討製造商面對一零售商如何在有限產能下制定一最適批發價，並且運用折扣合約機制或產能擴充策略增進自身利潤，相關文獻將於本章節進行探討，分別為 2.1 季節性商品，2.2 賽局理論，2.3 供應鏈合約以及 2.4 產能，2.5 為本章小結。

2.1 季節性商品(Seasonal Goods)

季節性商品循環性需求與易腐(perishable)的特性引起學者的興趣而加入研究行列，如早期的研究 Chang & Fyffe (1971)認為季節性商品未銷售出的存貨會大幅降低賣方的利潤，所以建立一個預測的模型，依照實際銷售量的經驗對期初的需求預測誤差進行修改。需求的預測方法在供應鏈的研究裡佔了非常重要的角色，能準確的預測需求不只大大提升廠商的利潤更讓整個供應鏈運作起來更有效率。常見的預測方法有定性法(Qualitative)、時間序列法(Time Series)、因果關係法(Casual)以及模擬法(Simulation)。

除了追求季節性商品需求準確地預測外，廠商會盡量降低所面對的風險，如 Voros (1999)探討廠商生產季節性商品的風險影響，經由市場不確定性需求的學習效果(learnig effect)將風險的成本降到最低。而下游廠商的行為也是為了避免風險所造成的損失，如 Chen & Xu (2001)研究因季節性商品需求不確定的特性，零售商訂購的時間點越晚越好以蒐集足夠的資訊來減低對此商品需求預測的誤差，然而對製造商而言越晚接受到訂單則會增加生產成本。除此之外，零售商在面對顧客端時也會使用方法來提升獲利並降低商譽損失的風險，如 Bykadorov et al. (2002)模型裡探討廠商銷售季節性商品時，在維持一定商譽水準情況下最小化廣告與促銷的成本費用。

季節性商品在市場上的售價往往影響著零售商最終的剩餘存貨量，該如何訂定最適價格也是值得研究的課題。Smith & Achabal (1998)認為零售商在期末訂定的清倉價格與存貨管理政策對利潤影響重大，錯誤的定價將會流失潛在的收益而過多的存貨也會造成零售商的成本負擔。Bitran & Mondschein (1997)提到零售商販賣

季節性商品通常向供應商一次性買斷，因此市面上隨處可見零售商為了減少庫存的壓力在銷售季節隨著時間流逝逐步調降商品價格。

由於季節性商品隨著時間消逝而價格下跌已成為常態，消費者累積這些經驗延遲消費以得到較低的價格，因此 Aviv & Pazgal (2008)研究市場中存在策略性消費者(Strategic Customer)情形下運用賽局理論的概念討論零售商的最適定價策略，意即將消費者延遲消費的行為納入考量，決定自身利潤最大的訂價。而本研究則是採用 Stackelberg 模型將零售商利潤最大的反應函數納入自身考量，再決定一最適批發價格，相關文獻將於下一個小節深入介紹。

2.2 賽局理論(Game Theory)

賽局理論被廣泛運用於政治學、經濟學、法學以及企業管理等，各領域將此理論視為一種分析工具以數學模型探討決策者之間的衝突與策略。賽局理論運用在市場上有幾個競爭模式，如寡佔市場中非合作賽局的數量競爭模式(Cournot, 1838)，該模式假設市場上只有兩家廠商並生產相同產品，這兩家廠商皆假設對手不會改變生產量下決定自身利潤最大化的產品數量，此模型為一同時賽局。另一個競爭模式為 Bertrand (1883)提出的價格競爭模型，廠商在認為對手不會改變產品價格下決定自身利潤最大化的產品價格，亦為同時賽局。最後一個競爭模式為 Stackelberg (1952)提出的競爭模型，市場上存在著市佔率較高或是定價能力較強的廠商以及另一市佔率較低或是較無定價能力的廠商。定價能力強的廠商為市場上的領導者(Leader)，另一個較無定價能力的廠商為市場上的追隨者(Follower)。領導者在考慮追隨者的反應之下而先做出決策，而追隨者會依照領導者的決策來決定自身的最佳的策略。由於本研究假設一製造商面對一零售商，製造商必須先決定一批發價格後，零售商再依此價格決定訂購量，因此製造商為市場領導者，零售商為追隨者，故本文將採用 Stackelberg 模式建構在兩期的模型上，探究製造商最適的決策行為。

供應鏈的決策方式也運用許多賽局理論的概念，如 Choi (1991)於兩階層的垂直供應鏈假設有兩家競爭的製造商與一家零售商，此零售商同時販賣兩競爭廠商的產品，如圖 2.1 所示，兩家製造商需個別決定批發價 w_1 、 w_2 ，零售商需決定兩

家產品的市場價格 p_1、p_2。Choi 依此建構三個不同情境的非合作賽局，分別為製造商 Stackelberg 賽局、零售商 Stackelberg 賽局以及垂直 Nash 賽局。如同上述，製造商 Stackelberg 賽局即為製造商是市場上的領導者，擁有較強的議價能力與先動者優勢。反之，零售商 Stackelberg 賽局即為零售商為市場上的領導者。垂直 Nash 賽局是指上下游廠商議價能力相當，透過同時做決策制定批發價與市場價格，為一同時賽局。

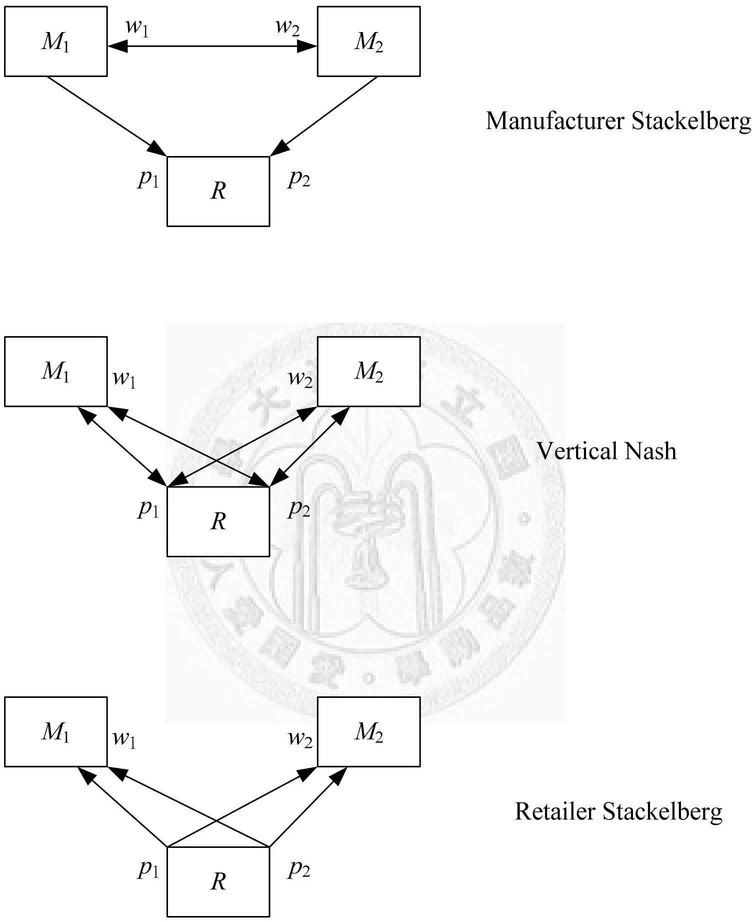


圖 2.1 賽局示意圖 Choi(1991)

本文將以一製造商面對一零售商的 Stackelberg 賽局架構求解來決定最適批發價後進行分析，Tian & Xu (2007)探究的模型就是此架構，並且認為供應鏈成員本質上皆以最大化個別利益做決策，其內容考慮單期的供應商獨佔模型，一供應商只賣一種商品給一零售商，而零售商面對的是一隨機的需求市場，並假設供應商為領導者，將零售商得知批發價後的反應納入自身的考量，進而決定最適批發價，零售商再決定符合自身利潤最大的訂購量。

普遍的認知供應鏈上下游成員必須彼此合作以整個鏈利潤最大為目標訂定最適價格，然而 Cachon (2001)探討二階層的供應鏈卻有不同的結果，一供應商面對多個零售商的存貨競爭，彼此的目標為最小化存貨持有成本與補貨懲罰成本，因此供應商有誘因維持適當供貨水準以滿足顧客需求與自身利益，在此的競爭解為一奈許均衡(Nash Equilibrium)，而在一些情境設定下該研究發現競爭不一定就會造成供應鏈的無效率。

2.3 供應鏈合約(Supply Chain Contract)

供應鏈合約為一買方與賣方的交易契約，由於雙方各自做利潤最大的決策，因此供應鏈存有潛在的利潤損失，故可透過合約機制的設定降低雙方的風險以及不確定性因素等來提升彼此利潤。近期來供應鏈合約越來越受重視，藉由合約來提高供應鏈效率與利潤為現在研究的主流。供應鏈裡可使用的合約有很多種，Lariviere & Porteus (1999)討論報童問題(Newsvendor Problem)，製造商如何制定一批發價合約能使利潤最大，批發價如何受市場規模以及變異的影響等為主要研究核心。Bresnahan & Reiss (1985)則討論市場為確定型的線性需求，一獨佔製造商面對一經銷商，經銷商的邊際收益如何影響製造商的定價與利潤，並舉一美國汽車大廠為例將訂價模型進行驗證。

Cachon (2002)整合了一些供應鏈合約，在報童問題中提出製造商可訂定一些折扣契約給零售商以達到增加訂貨量與利潤的目的。這些契約包括了:

1. 買回式契約(Buyback Contract)：

   供應商在銷售季節前依批發價將商品賣給零售商，於銷售季節結束時將零售商未銷售完的商品依特定價格(小於批發價)買回。此合約能分擔零售商的存貨風險，因而提高向供應商訂購的數量。(Emmons & Gilbert, 1998)

2. 收益分享契約(Revenue Sharing Contract)：

   此合約的制定為零售商除了付給向供應商購買產品的金額外，還必須分享自身一部分的收益。因此零售商能得到較低的批發價，訂購的數量也會增加。(Dana & Spier, 2001)

3. 銷售回扣契約(Sales Rebate Contract)：

供應商設定一門檻值，當零售商的訂購量超過此門檻值，超過的每單位數量將得到供應商給予的回扣。此回扣能直接誘使零售商增加訂購量的動機。(Taylor, 2002)

4. 數量彈性契約(Quantity Flexibility Contract)：

供應商提供某一數量內的退貨全額退款。與買回契約不同的是，買回契約是提供所有退貨的部分退款。(Tsay & Lovejoy, 1999)

許多研究探討不同的情境下提出合適的供應鏈合約並且加以改良，如 Padmanabhan & Png (1997)探討市場裡一個製造商不允許退貨與允許全額退貨的機制於兩家競爭的零售商，比較是否會增加其利潤。因為文中的假設為零售商必須先跟製造商訂貨後再賣給消費者，故零售商在可退貨的機制下會訂比較多的貨，此時兩個競爭零售商會賣較多的產品給消費者,則製造商會因此機制而獲利更多。Tsay (1999)利用數量彈性契約(Quantity Flexibility Contract)，即買方承諾會買一定比例的產品且賣方也承諾會提供一定比例的商品，讓需求不確定的成本降低促使雙方達到系統最適。Cachon (1999)提到製造商藉由補貼零售商存貨持有成本會比競爭狀況下彼此獲得到更多的利潤且製造商能降低本身的庫存。此外還有 Giannoccaro & Pontrandolfo (2004)用收益分享契約(Revenue Sharing Contract)於三階層的供應鏈上，藉由契約上的參數設定可使大家改善其自身利潤以及讓整個供應鏈更有效率。Cachon & Lariviere (2005)研究一供應商提供收益分享契約於多個零售商，透過協調可達到獲利互享。

Viswanathan & Wang (2003)探討價格敏感的確定性需求市場裡一供應商對一零售商提供數量折扣後的影響。首先，在無提供任何折扣下可求得製造商最適的批發價格，接著，製造商依此批發價格提供一數量折扣並求出最適的價格折扣。本研究靜態價格下的策略與此文獻相同，皆探討製造商在原均衡市場的批發價格下採取策略後的影響。Marvel & Peck (1995)探討在不確定性需求市場裡製造商對零售商採用退貨政策(Return Policy)的影響。本研究動態價格下的折扣合約與此文獻相似，製造商需同時決定一批發價格與最適的回扣價格，零售商再依此做出訂購量的決策。

以上文獻證明了在不同的情況下這些合約的確是有助於改善目前的狀態，也讓這些合約型式廣泛的被討論與應用，提升供應鏈的整體效率。

2.4 產能(Capacity)

所謂產能為特定時間內所能提供最大的產出，故產能為產出的上限，而且產能為生產成本的主要因素之一，因此適當的產能規劃能有效地控制成本並且提升生產效率，若無妥善的規劃產能可能因產能不足而產生高加班支出、外包支出與接單不及等；或是因產能過剩而閒置物料、人員與設備折舊問題等。以下為產能規劃管理的基礎概念 (Chase, 2006)：

1. 降低成本與提升利潤
2. 提升顧客服務水準
3. 降低存貨投資水準
4. 降低生產速率改變率
5. 降低人力水準改變率
6. 提升機器設備使用水準

建置產能的多寡往往是獲利的關鍵，透過合約的制定可幫助上下游廠商降低不確定性而提升獲利水準，如 Mathur & Shah (2008)設定供應商尚未得到製造商的訂單時必須先建置設備預備產能，等到製造商得知市場需求後再向供應商下訂單，因此需求若高過供應商提供的產能時，製造商就會面臨缺貨產生缺貨成本，所以製造商設法提出一個合約使得期望利潤最大。第一階段製造商訂定一個雙向懲罰合約與目標產能，第二階段供應商接受後開始建置產能設備(可高於或低於目標產能)，第三階段製造商獲得市場需求資訊後便向供應商訂貨，第四階段供應商滿足其訂單。若供應商建置的產能低於目標產能且無法滿足訂單則需補償給製造商缺額單位的懲罰金，若製造商的訂單達不到供應商提供的目標產能則需補償不足部分的懲罰金。相對的，若供應商建置的產能能夠滿足高於目標產能的訂單則製造商會給予超額單位的獎金。結果發現在有懲罰金與獎金的合約下，一開始訂定的目標產能會影響下一步供應商的產能建置，亦即製造商若不提供訂單不足的懲罰

金則無法單就提高目標產能來影響供應商的建置產能。本文的研究與此篇文獻有類似之處，皆有考慮產能問題。

除了上述的合約與產能結合的策略外，許多學者也有觀察到季節性商品與產能的問題，如 Bradley & Arntzen (1999)在面對確定的季節性需求下，同時決定最適產能與存貨水準。產能的決定會影響未來的存貨水準以及未來對市場的應變，所以整體的考量與規劃是不可或缺的。Metters (1997)在面對隨機的季節性需求且每一期的資源有限下，使用啟發式演算決定每一期的生產量來最小化生產成本、存貨成本以及缺貨的損失。Metters (1998)對於如何有效的生產季節性商品提出了五個通則：

1. 最小化過多承諾的風險
2. 提早生產持有成本較低的產品
3. 不論季節，生產較便宜的商品
4. 事先生產需求較確定的產品
5. 當計畫失敗，生產容易賺錢的商品

Aviv & Federgruen (2001)在有限的產能下面對季節性需求的波動，有探討到投資產能與服務水準(Service Level)的抵換關係，可知產能的投資會因販售商品的不同而有所調整。

2.5 文獻探討小結

本文的研究內容觸及了季節性商品特性、賽局理論的決策模式、供應鏈合約以及產能決策，以上文獻提及的觀念與方法提供了本文的理論基礎。以下將比較本研究與主要相關文獻的異同。

本研究同 Tian & Xu (2007)皆假設製造商為市場的領導者，零售商為追隨者，且站在製造商的立場最大化自身利潤，利用 Stackelberg 模型進行求解以得到最適批發價格，相異的地方為本文討論兩期的生產且製造商有產能的限制。本研究模型的基本架構相似於 Cachon (2002)均建立在報童問題的模式上，然而不同的是本研究在製造商生產方面則多考慮了規模經濟的特性。在供應鏈合約方面，本研究

採用 Taylor (2002)的銷售折扣概念運用在兩期的模型，製造商於淡季對零售商給予一價格折扣，藉由此誘因增進自身利潤。靜態價格下的折扣合約相似於 Viswanathan & Wang (2003)皆探討製造商在原均衡市場的批發價格下採取策略後的影響；動態價格下的折扣合約相似於 Marvel & Peck (1995)，製造商需同時決定一批發價格與最適的回扣價格，並探討對自身利潤的影響。本文與 Mathur & Shah (2008)皆探討合約制定與產能決策對製造商的影響，不同於該文獻將兩者一併考慮，本文分開探討個別策略對製造商利潤的表現後，選擇較佳的生產決策。

綜合上述，本文將探討製造商在兩期的生產期間最大化自身利潤下，面對產能限制時如何利用折扣合約或產能擴充策略提升獲利，並深入了解製造商採取策略後對本身與零售商雙方決策的影響。

第三章　　模型建構

本章節將探討季節性商品下製造商如何在有限產能內藉由提供折扣合約或產能擴充策略來提升獲利。首先，3.1 小節將介紹製造商不採取任何策略下的生產決策，即一般決策模型，而此模型為本文的基準模型(benchmark model)；3.2 與 3.3 小節分別建構靜態、動態價格下的折扣合約與產能擴充模型，製造商可利用(1)折扣合約轉嫁淡季存貨成本並誘使零售商增加訂購量，或是(2)於旺季增加產能以規避淡季生產所需負擔的存貨成本且享有大量生產的規模經濟效益；最後 3.4 小節為本章小結。

製造商在既定的產能下考量生產成本與存貨成本決定一批發價，零售商面對不確定性的市場需求下根據批發價並考慮因買氣旺盛造成的缺貨與買氣不足產生的滯銷決定一訂購量；當市場需求強烈時，有限的產能迫使製造商必須在淡季進行生產備貨，而淡季生產的商品則需負擔存貨管理成本，使得製造商的獲利受到限制，因此製造商有誘因採取策略增進自身的利潤空間，又製造商與零售商會因長期合作與短期合作關係的不同而影響製造商採取策略時批發價的制定，故內文分成兩個獨立小節探討製造商與零售商在靜態與動態價格下採用折扣合約與產能擴充策略的影響。

本研究假設供應鏈存在一個製造商面對一個零售商，製造商的單位生產成本為$\tilde{c}$，批發價為$\tilde{w}$。零售商面對的為一報童問題，意即在需求不確定的市場考量進貨成本$\tilde{w}$與市場價格$\tilde{p}$來決定訂購量q，再於銷售季節販賣該商品。市場需求服從一機率密度函數f，F為可微分且嚴格遞增的累積機率密度函數，μ為此機率密度函數的均數，R為需求分配函數的上限。銷售季節發生前，零售商並不知道市場實際的需求量D，所以零售商訂購的量有可能低於或高於實際需求。在此引用 Cachon (2002)文獻推導單期的利潤函數，令$S(q)$為零售商訂購q單位產品的期望銷售量：

$$S(q) = q(1-F(q)) + \int_0^q xf(x)dx$$
$$= q - \int_0^q F(x)dx$$

倘若零售商的訂貨量大於市場實際需求($q > D$)則會有存貨剩餘，令$\tilde{I}(q)$為期望剩餘存貨：

$$\begin{aligned}\tilde{I}(q) &= \int_0^q (q-x) f(x)dx \\ &= q - S(q)\end{aligned}$$

而於銷售季節結束處理存貨剩餘後能得到殘值$\tilde{v}$，$\tilde{v} < \tilde{c}$。反之，若訂貨量小於市場實際需求($q < D$)則會喪失部分利潤，令$\tilde{L}(q)$為期望缺貨量：

$$\begin{aligned}\tilde{L}(q) &= \int_q^\infty (q-x) f(x)dx \\ &= \mu - S(q)\end{aligned}$$

缺貨會有銷售損失的機會成本外還會使商譽受損。令$\tilde{\beta}$為發生缺貨時的成本，$\tilde{w}q$為零售商支付給製造商的款項。零售商的利潤函數可表達成：

$$\begin{aligned}\widetilde{\pi_r}(q) &= \tilde{p}S(q) + \tilde{v}\tilde{I}(q) - \tilde{\beta}\tilde{L}(q) - \tilde{w}q \\ &= (\tilde{p} - \tilde{v} + \tilde{\beta})S(q) - \tilde{w}q + \tilde{v} - \tilde{\beta}\mu\end{aligned}$$

製造商利潤函數可表達成：

$$\widetilde{\pi_s}(q) = \tilde{w}q - \tilde{c}q$$

在不影響上下游廠商的決策前提下，將變數做調整簡化數學式以利分析。定義零售商調整後的利潤為$\pi_r(q) = \widetilde{\pi_r}(q) + \tilde{\beta}\mu$，調整後的市場價格為$p = \tilde{p} - \tilde{v} + \tilde{\beta}$，以及調整後的批發價$w = \tilde{w} - \tilde{v}$，調整後的生產成本為：

$$c = \tilde{c} - \tilde{v} \tag{3-1}$$

此時可得到簡化後利潤函數：

$$\pi_r(q) = pS(q) - wq$$

$$\pi_s(q) = wq - cq$$

之後章節模型的形式將採用調整過後的利潤函數。

得到簡化後的利潤函數後，接下來將探討製造商生產季節性商品的基本假設與決策行為並利用此利潤函數延伸至兩期的討論。製造商一旦開啟生產線便有成

本發生，對於製造商而言在產能範圍內生產愈多產品可壓低原物料成本、分攤營運成本與保養成本等。有別於大部分供應鏈的文獻(Cachon (1999)、Cachon (2001)、Taylor (2002))將單位生產成本設定為常數，在此為了表達單位生產成本因規模生產而下降的特性，令 y 為製造商的生產量，假設式(3-1)為一隨著生產量上升而下降的負斜率線性函數：

$$c(y) = a - by \tag{3-2}$$

參數 a 可視為一般文獻中的邊際成本，參數 b 為產量相對單位成本的敏感係數。此一線性函數的假設不僅能表達生產的規模經濟，也包含了一般文獻邊際生產成本為常數的假設(當 $b = 0$)，使其應用更為廣泛。在此不考慮因大規模生產而衍生的管理困難、行政效率下降等規模不經濟的情形。

假設市場只有兩期銷售季節分別為淡季與旺季，而 K 為製造商的單期產能，製造商分兩個期間生產，第一個期間為淡季生產，第二個期間為旺季生產，由式(3-2)分別令 $c_1(y)$ 為第一期的單位生產成本、$c_2(y)$ 為第二期的單位生產成本。另外，假設以下參數：

$$2K < R < \frac{a}{2b} \tag{3-3}$$

$2K < R$ 的假設是指製造商兩期的產能不會超過市場需求的上界，此假設即是本文研究的目的，即在有限的產能限制下製造商以自身利潤最大化做出生產決策；$R < \frac{a}{2b}$ 的假設是確保製造商的生產量在市場需求上界 R 以內不會有隨著產量增加而總生產成本下降的不合理情況(即 $\frac{\partial c(y)y}{\partial y} > 0$)，以符合模型的正確性。

製造商的決策變數為訂定一個批發價 w 使得自身利潤達到最大，假設市場資訊完全透明，製造商與零售商能輕易取得對方資訊且取得資訊成本極低，意即雙方都知道彼此的成本結構、參數等，因此製造商能預測零售商的訂購行為決定一最適批發價。製造商在既定產能下依據生產量進行兩期的生產配置，此時製造商有兩個決策變數 Q_1 與 Q_2，令 Q_1 為第一期淡季製造商分配的生產量，Q_2 為第二期旺季製造商分配的生產量，且 Q_1 與 Q_2 皆不大於單期產能 K，而製造商兩期的總生產

量為零售商的訂購量，意即$q=Q_1+Q_2$。由於淡季時的銷售量遠不及於旺季的銷售量，所以在此設定淡季不會有交易，所有消費者的需求皆在旺季發生，且交易時不考慮運輸成本與前置時間以簡化模型的複雜度。

製造商於淡季生產的產品需存放至旺季銷售前，因此需負擔存貨成本，令m為製造商第一期生產量的單位存貨成本，而旺季生產的產品會直接交貨給零售商，故令第二期生產的產品無存貨成本。當零售商的訂購量小於一期的產能($q \le K$)時，製造商會直接選擇在第二期生產以避免存貨成本的負擔，即$Q_1=0, Q_2=q$，此時製造商的生產成本為：

$$c_2(q)=a-bq$$

當零售商的訂購量大於單期產能($q>K$)時，製造商必須在第一期生產避免銷售季節的供貨不足，然而淡季生產的產品須等到銷售時點才交貨，為了減少存貨成本負擔會先將第二期產能填滿，剩餘的產品再由第一期生產，即$Q_1=q-K, Q_2=K$，此時製造商的兩期生產成本分別為：

$$c_1(q-K)=a-b(q-K)$$

$$c_2(K)=a-bK$$

介紹完製造商的基本假設與生產決策，接著討論零售商的基本假設與決策行為。假設產品在市場上為完全競爭，則產品的價格p為市場所決定的，零售商並無決定價格能力，因此零售商的決策變數只有訂購量。零售商依製造商所提供的批發價w決定一最適訂購量，又零售商與製造商皆有利可圖的情況下，參數彼此關係：

$$0 \le \max\{c_1(y), c_2(y)\} \le w \le p \quad \forall y \tag{3-4}$$

綜合以上，本研究將以製造商的角度切入探討季節性商品下如何藉由折扣合約或產能擴充策略提高獲利水準。

折扣合約

製造商提供的合約為一折扣合約，令r為單位折扣，即零售商在第一期提取的每一單位產品可獲得製造商提供的折扣(r可小於 0，意即多取的每一單位需花費較

高的價格)，此一折扣目的為轉嫁製造商於第一期生產的存貨成本且誘使零售商增加訂貨量以提高製造商的獲利。令h為零售商的單位存貨成本，在此折扣合約下，h將影響此機制成效的關鍵因子，若零售商的存貨成本過高，製造商須提供的折扣會越高，則製造商能增加獲利的空間有限，因此製造商提供此合約時須考量零售商的存貨成本。

產能擴充

若不採取折扣合約，另一個提升製造商利潤的策略為擴充製造商旺季產能。製造商可於旺季擴充額外的產能以減少在第一期生產需負擔的存貨管理成本，且於第二期生產可享有大批量生產所帶來的規模經濟效益。令Δk為製造商產能擴充量，製造商基於自利動機下擴充後的總產能並不會超過市場需求上界，即$\Delta k \le R-2K$。在此不考慮產能擴充的前置作業與建置的固定成本(不影響製造商的生產量決策)，只考慮產能擴充的單位成本，令g為擴充產能的單位成本，在此策略底下，g將扮演影響製造商利潤的關鍵因子，製造商將考量利弊得失後決定是否於第二期進行產能擴充。

以下為模型的參數設定：

R： 需求分配函數的上界

$f(x)$： 需求機率密度函數

$F(x)$： 需求累積機率密度函數

q： 零售商的訂購量

$S(q)$： 零售商訂購q單位產品的期望銷售量

w： 製造商制定的批發價

K： 製造商的單期產能

p： 市場價格(外生變數)

y： 製造商的生產量

Q_1： 製造商第一期的生產量

Q_2： 製造商第二期的生產量

$c_1(y)$： 製造商第一期的單位生產成本

$c_2(y)$： 製造商第二期的單位生產成本

h： 零售商的單位存貨成本

m： 製造商的單位存貨成本

r： 製造商提供給零售商的單位產品折扣

g： 製造商擴充產能的單位成本

Δk： 製造商產能擴充量

3.1 一般決策模型

一般決策模型為製造商不採取任何策略下，製造商與零售商各自追求利益最大做出決策。製造商考量自身有限的產能K、生產成本$(c_1(y), c_2(y))$以及存貨成本m等因素訂定一批發價w，當訂定批發價時已經將零售商的決策考量在內，因此製造商能預測零售商將會訂購的量q，遂依據此訂購量決定兩期生產量分配，到了旺季零售商再根據批發價向製造商簽定買賣契約。圖 3.1 為製造商與零售商在一般決策模型下的交易時點決策圖。

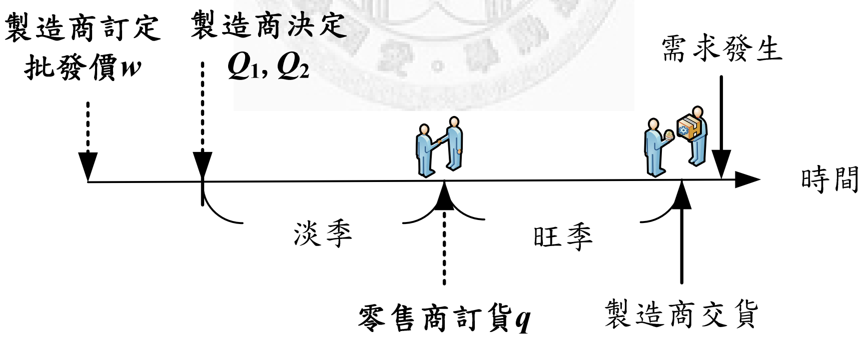


圖 3.1 交易時點決策圖

由於市場的需求、商品價格等因素會使零售商的訂購量有所不同，以下將分成(一)訂購量小於單期產能($0 \le q \le K$)與(二)訂購量介於單期與兩期產能($K < q \le 2K$)的情形討論：

(一) $0 \le q \le K$

第一種情形為零售商訂購量小於製造商的單期產能。因為訂購量並未超過單期產能($q \le K$)，為了節省存貨成本製造商會選擇在第二期生產全部的商品。意即

$$Q_1 = 0 \ , \ Q_2 = q$$

因為製造商於第二期進行生產，故生產成本只在旺季發生：

$$c_2(q) = a - bq$$

令 $\pi_r^1(q)$ 為零售商的利潤函數，$\pi_s^1(q)$ 為製造商的利潤函數：

$$\pi_r^1(q) \ = \ pS(q) - wq \tag{3-5}$$

$$\pi_s^1(q) \ = \ (w - c_2(q))q \tag{3-6}$$

零售商利潤函數的 $pS(q)$ 為來自市場銷售商品的期望收入，wq 為向製造商訂購產品的支出;製造商的利潤函數為生產 q 單位產品的獲利,因為生產只在第二期發生,因此第一期將不會有生產成本與存貨成本。

(二) $K < q \le 2K$

第二種情形為零售商訂購量介於製造商的單期產能與兩期產能之間($K < q \le 2K$)。因為訂購量超過單期產能，為了節省存貨成本製造商會先將第二期產能填滿後，不足量的產品才由第一期生產，意即

$$Q_1 = q - K \ , \ Q_2 = K$$

而製造商對應的成本函數如下：

$$c_1(q-K) = a - b(q-K)$$

$$c_2(K) = a - bK$$

令 $\pi_r^2(q)$ 為零售商的利潤函數，$\pi_s^2(q)$ 為製造商的利潤函數：

$$\pi_r^2(q) \ = \ pS(q) - wq \tag{3-7}$$

$$\pi_s^2(q) \ = \ (w - c_2(K))K + (w - m - c_1(q-K))(q-K) \tag{3-8}$$

在此零售商的利潤函數同式(3-5)；製造商利潤函數的 $(w - c_2(K))K$ 為第二期生產

K 單位產品的獲利，$(w-m-c_1(q-K))(q-K)$ 為第一期的獲利，第一期的成本除了生產成本外還包括因提前生產而需負擔的存貨成本m。在此先令 w^{**} 為求解後製造商決定的批發價。

3.2 靜態價格下折扣合約與產能擴充模型

一般決策模型下訂購量超過單期產能時，製造商需在淡季開始備貨而產生存貨成本負擔，有限的產能會使製造商利潤受到壓縮，所以製造商有誘因採取策略提升獲利空間。

市場上存在著長期合作的上下游廠商,彼此維持著一定的利潤方能繼續合作，因為長期合作的關係，根據經驗下游零售商清楚知道訂購數量所對應的批發價，且製造商為了穩定彼此合作關係並不會隨意更改定價，因此製造商欲採取策略提升自身利潤且不傷及零售商利益就必須在不變動批發價格下實行，如格力在一既定批發價格下給予經銷商的季節性折扣。接下來的兩個小節將分別介紹折扣合約模型以及產能擴充模型，兩模型的批發價採用一般決策模型下的批發價格，製造商根據靜態的批發價來決定最適生產策略。

靜態價格下折扣合約模型

在一般決策模型下，製造商依據現有產能訂定自身利潤最大化的批發價，零售商根據此批發價決定最適訂購量，製造商再依據訂購量決定最適生產量分配。然而銷售季節只在第二期(旺季)發生，零售商在自利動機下只會在旺季進貨，故(1)當訂購量超過單期產能時，製造商在第一期生產的商品必須囤積至第二期，由於在第一期生產的產品在第二期才會交貨給零售商，因此必須承擔囤積貨物的存貨成本而造成利潤的損失,故製造商有誘因改變現行狀況減少庫存成本的壓力；又(2)製造商具有生產成本遞減的特性，誘使零售商提高訂購量可降低平均單位成本，享受規模經濟帶來的益處。基於以上兩點理由，製造商提供一折扣合約誘使零售商訂定更多的產品並且在第一期將部分貨品取走，而零售商在第一期取走的商品亦有存貨成本h。由於折扣合約是市場常用的合約之一，所以本文將討論製造商提

供此折扣合約的影響。圖 3.2 為製造商與零售商在提供折扣下的交易模型時點決策圖。

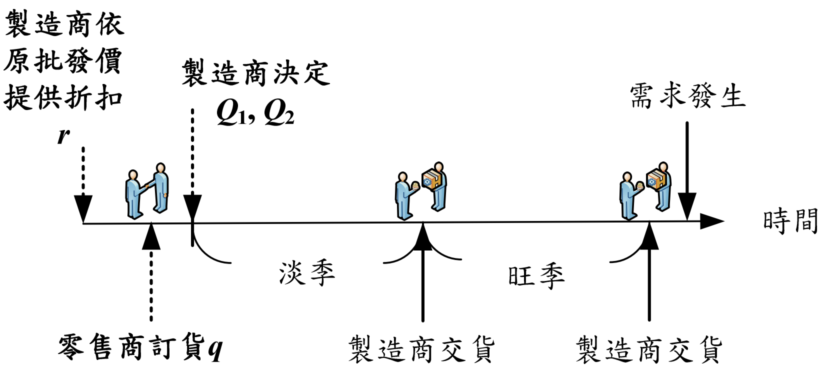


圖 3.2 折扣合約下交易時點決策圖

然而訂購量未超過單期產能 K 時，製造商於第二期便能滿足需求量而不會有囤積產品的存貨管理成本發生，因此製造商並無誘因提出折扣合約，此時製造商的最適生產決策為一般決策模型(一)的情形($0 \le q \le K$)。當一般決策模型下的訂購量超過單期產能時，製造商根據以上敘述的兩點理由提出價格折扣合約，在此模型下，製造商想要提早讓零售商進貨會依照原批發價格 w^{**} 給予一個折扣誘使零售商提前取貨。

製造商提供一價格折扣 r 後，零售商可於此折扣誘因下重新決定自身利益最大的訂購量。製造商對零售商在第一期提取的每單位產品提供一個折扣 r，但基於折扣成本考量製造商會先將第二期產能填滿，剩餘的產品再由零售商於第一期取走，意即零售商最多只能獲得 $q-K$ 單位的折扣，

$$Q_1 = q - K \quad , \quad Q_2 = K$$

在此模型下批發價為已知，所以製造商的決策變數則為 r，意即製造商決定一最適折扣使零售商決定新的訂購量。而新的訂購量介於單期與兩期產能($K < q \le 2K$)之間，故製造商的成本函數如下：

$$c_1(q-K) = a - b(q-K)$$

$$c_2(K) = a - bK$$

以下為折扣合約下的利潤函數，令$\pi_{r,I}^{f}(q)$為零售商的利潤函數，$\pi_{s,I}^{f}(q)$為製造商的利潤函數：

$$\pi_{r,I}^{f}(q) = pS(q) - w^{**}q + (r-h)(q-K) \tag{3-9}$$

$$\pi_{s,I}^{f}(q) = (w^{**} - c_2(K))K + (w^{**} - r - c_1(q-K))(q-K) \tag{3-10}$$

零售商利潤函數$(r-h)(q-K)$為製造商給予零售商於第一期取貨的折扣r，因為提前在第一期取貨，所以還必須扣除存貨成本h；製造商利潤函數的$(w^{**} - r - c_1(q-K))(q-K)$為第一期生產的獲利，而成本則包括生產成本和給予零售商的折扣成本。

靜態價格下產能擴充模型

本模型設定製造商可於生產季節進行產能擴充並且無擴充量的限制(在自利動機下製造商擴充後的總產能並不會超過市場需求上界R，故$\Delta k \le R-2K$)，然而製造商若在第一期(淡季)擴充產能，生產的產品必須囤積到第二期，因此製造商為了規避存貨管理成本會於第二期(旺季)才進行產能擴充。產能擴充不一定是指擴建廠房設備，也可以是增加員工工作時數或是外包給其他廠商等提高生產量的方式。

當訂購量未超過單期產能($q \le K$)時，製造商於第二期便能滿足需求量，因此無誘因增加產能，所以製造商將不會採取產能擴充策略，此時製造商的最適生產決策為一般決策模型(一)的情形($0 \le q \le K$)。當一般決策模型下的訂購量超過單期產能($q > K$)時，製造商則採用批發價w^{**}，待零售商決定訂購量後，製造商視其訂購量決定最適生產量配置。Δk為製造商在第二期的產能擴充量，擴充產能必須支付擴充成本，雖然如此，製造商也能因為擴充產能後的大量生產而享有規模經濟所帶來的利益，故製造商考量利弊得失後做出最適決策。圖 3.3 為製造商與零售商在產能擴充下的交易模型時點決策圖。

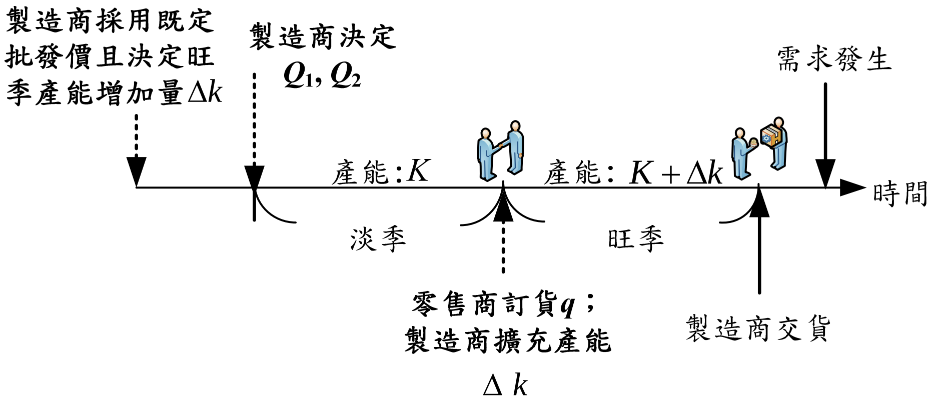


圖 3.3 產能擴充下交易時點決策圖

當訂購量超過單期產能($q > K$)時，製造商會選擇在第二期增加產能Δk，而增加每單位產能的成本為g，故增加產能的總成本$g\Delta k$。製造商在第一期產能不變下，藉由調整第二期產能Δk重新決定兩期個別的生產量以達到自身利潤最大化。又Δk的範圍如下：

$$0 \le \Delta k \le q - K$$

為了規避存貨成本造成的負擔，製造商會選擇完全利用第二期產能，不足量的產品再由第一期生產，意即

$$Q_1 = q - K - \Delta k \text{ ， } Q_2 = K + \Delta k$$

製造商兩期成本函數如下：

$$c_1(q - K - \Delta k) = a - b(q - K - \Delta k)$$

$$c_2(K + \Delta k) = a - b(K + \Delta k)$$

以下為零售商與製造商的利潤函數，令$\pi_{r,II}^{f}(q)$為零售商的利潤函數，$\pi_{s,II}^{f}(q)$為製造商的利潤函數：

$$\pi_{r,II}^{f}(q) \ = \ pS(q) - w^{**}q \tag{3-11}$$

$$\begin{aligned} \pi_{s,II}^{f}(q) \ = \ & (w^{**} - c_2(K + \Delta k))(K + \Delta k) \\ & + (w^{**} - m - c_1(q - K - \Delta k))(q - K - \Delta k) - g\Delta k \end{aligned} \tag{3-12}$$

零售商利潤函數為一般決策模型下的利潤。製造商利潤函數的第一項為第二期增

加產能後的生產利潤，第二項為第一期的生產利潤，由於第一期生產的產品須存放到銷售季節，因此有存貨管理成本m，最後一項則為擴充產能所需支付的成本。

3.3 動態價格下折扣合約與產能擴充模型

市場上零售商與製造商若為短期合作關係，如一個年度，製造商在採取策略時可變動批發價格，因此雙方協議簽訂買賣契約前，製造商會將欲採取的策略納入考量制定一批發價使自身利潤最大。

有別於 3.2 小節採用一般模型下的批發價，本小節將個別介紹製造商動態價格下的折扣合約模型以及產能擴充模型。折扣合約模型製造商需同時決定批發價以及提供的折扣；產能擴充模型製造商需同時決定批發價與產能擴充量。

動態價格下折扣合約模型

製造商提供折扣合約的動機同 3.2 小節靜態價格下折扣合約模型的敘述，主要差異是在此製造商可靈活調整批發價，因此製造商除了訂定折扣外還必須同時制定批發價，故製造商有兩個決策變數。

零售商訂購量小於單期產能($q \le K$)時，製造商的最適生產決策同一般決策模型(一)的情形($0 \le q \le K$)。當訂購量大於單期產能時($q > K$)，製造商對零售商在第一期提取的每單位產品提供一個折扣r，零售商在第一期提取的貨可享有製造商提供的單位折扣，第二期提取的貨則沒有折扣。在此模型下批發價為未知，製造商的批發價會與折扣價格一起考慮，所以製造商的決策變數則為w與r，意即製造商決定一最適批發價與折扣使後，零售商決定一訂購量。製造商基於存貨成本考量會先將第二期產能填滿，剩餘的產品再由零售商於第一期取走，意即兩期的生產量為：

$$Q_1 = q - K \;\; , \;\; Q_2 = K$$

由於零售商訂購量介於單期與兩期產能($K < q \le 2K$)之間，故製造商的成本函數如下：

$$c_1(q-K)=a-b(q-K)$$

$$c_2(K)=a-bK$$

以下分別為零售商與製造商的利潤函數，令 $\pi_{r,I}^{v}(q)$ 為零售商的利潤函數，$\pi_{s,I}^{v}(q)$ 為製造商的利潤函數：

$$\pi_{r,I}^{v}(q) \;=\; pS(q)-wq+(r-h)(q-K) \tag{3-13}$$

$$\pi_{s,I}^{v}(q) \;=\; (w-c_2(K))K+(w-r-c_1(q-K))(q-K) \tag{3-14}$$

零售商與製造商的利潤函數同式(3-9)與式(3-10)，差別為在此的批發價並非採用一般決策模型的價格。

動態價格下產能擴充模型

此模型設定同 3.2 小節靜態價格下產能擴充模型的敘述，製造商可於生產季節進行產能擴充，但必須支付擴充的成本。在此不同的是製造商須一併決定批發價與產能擴充量，因此製造商同時有兩個決策變數。

當零售商訂購量小於單期產能($q \le K$)時，製造商的最適生產決策為一般決策模型(一)的情形($0 \le q \le K$)，然而當訂購量超過單期產能時($q > K$)，製造商可選擇在第二期增加產能 Δk，而增加每單位產能的成本為 g，故增加產能的總成本 $g\Delta k$ 。製造商在第一期產能不變下，藉由調整第二期產能 Δk 重新決定兩期個別的生產量以達到自身利潤最大化。又 Δk 的範圍如下：

$$0 \le \Delta k \le q-K$$

為了規避存貨成本造成的負擔，製造商會選擇將第二期產能利用完剩餘的產品再由第一期生產，意即

$$Q_1 = q-K-\Delta k \;\;,\;\; Q_2 = K+\Delta k$$

製造商的成本函數如下：

$$c_1(q-K-\Delta k)=a-b(q-K-\Delta k)$$

$$c_2(K+\Delta k)=a-b(K+\Delta k)$$

以下為零售商與製造商的利潤函數，令 $\pi_{r,II}^{v}(q)$ 為零售商的利潤函數，$\pi_{s,II}^{v}(q)$ 為製造商的利潤函數：

$$\pi_{r,II}^{v}(q) = pS(q) - wq \tag{3-15}$$

$$\begin{aligned}\pi_{s,II}^{v}(q) = &(w - c_2(K+\Delta k))(K+\Delta k) \\ &+ (w - m - c_1(q-K-\Delta k))(q-K-\Delta k) - g\Delta k\end{aligned} \tag{3-16}$$

零售商與製造商的利潤函數同式(3-11)與式(3-12)，唯有在此的批發價非採用一般決策模型的價格。

3.4 本章小結

本章節一開始延伸 Cachon (2002)文獻的單期模型套用至一般決策模型季節性商品兩期的生產決策，製造商在無任何策略下僅考量自身利潤最大的定價，為一基準模型；接著討論兩種模式下的策略，第一種模式為製造商採用一般決策模型的批發價提供折扣或產能擴充兩個策略，第二種模式為製造商新制定一批發價後提供折扣或產能擴充兩個策略。第一種模式常見於市場上，製造商為了增進自身利潤會以零售商原本進貨定價給予一折扣或是藉由調整生產配置達到目的，可視為事後的策略。第二種模式為製造商已先考量了提供折扣或擴充產能策略後零售商的反應再進行定價，可視為事前的策略。

本研究的供應鏈合約使用價格折扣合約，主要的理由是銷售的產品為季節性商品，市場上製造商常利用價格折扣吸引零售商提前取貨，但製造商提供的折扣只限於淡季提取的商品而非全部，如此一來，製造商可將旺季產能填滿後剩餘的再由淡季生產，有效地控制折扣成本而達到提升利潤的目的。

下一個章節將針對個別的模型利用 Stackelberg 模式求解，求出製造商最適的生產決策，並且舉一特定分配進行數學模型的分析加以歸納整理。

第四章　　模型求解與分析

本章前三小節將針對第三章的模型進行運算求得一通式解，考慮通式解的所有可能性並歸納整理製造商的最適生產決策，4.1 小節為一般決策模型、4.2 小節為靜態價格下折扣合約與產能擴充模型、4.3 小節為動態價格下折扣合約與產能擴充模型。在 4.4 小節將舉均勻分配函數為例求得解析解，並且分析與探討製造商存貨成本 m、零售商存貨成本 h 與產能擴充成本 g 如何影響模型的表現。

4.1　一般決策模型求解

製造商不採取任何策略下，根據零售商的訂購量分成(一) $0 \le q \le K$ 與(二) $K < q \le 2K$ 討論最適生產決策。

(一) $0 \le q \le K$

當訂購量小於單期產能時，由式(3-5)與(3-6)可知零售商與製造商利潤函數分別如下：

$$\pi_r^1(q) = pS(q) - wq$$

$$\pi_s^1(q) = (w - c_2(q))q$$

利用逆向歸納法(backward induction)求解，先對零售商利潤函數的訂購量作一階微分求得零售商的反應函數。由 $\frac{\partial \pi_r^1(q)}{\partial q} = 0$ 可得反應函數：

$$w = p\overline{F}(q) \tag{4-1}$$

由於 F 為一連續且嚴格遞增函數，故可找到一個 w 正好對應一個 q，且 $\frac{\partial^2 \pi_r^1(q)}{\partial q^2} = -pf(q) < 0$，表示零售商依據製造商訂定的批發價決定自身利潤最大的訂購量 q。將式(4-1)代入製造商的利潤函數 $\pi_s^1(q)$：

$$\pi_s^1(q) = (p\overline{F}(q) - c_2(q))q \tag{4-2}$$

經由式(4-2)對 q 作一階微分並令其為零：

$$\frac{\partial \pi_s^1(q)}{\partial q} = -pf(q)q + p\overline{F}(q) - (a-2bq) = 0$$

可得到一對應製造商利潤函數極值的訂購量q^*，因此製造商藉由控制批發價$w(q^*)$使零售商訂購q^*的量：

$$\begin{aligned} q^* &= \arg\max_{q \le K} \pi_r^1(q, w(q)) \\ &= \frac{p\overline{F}(q^*) - a}{pf(q^*) - 2b} \end{aligned} \tag{4-3}$$

由式(4-2)對q作二階微分：

$$\frac{\partial^2 \pi_s^1(q)}{\partial q^2} = [-2pf(q) - pf^{'}(q)q] + 2b \tag{4-4}$$

式(4-4)並非恆負或恆正，故q^*不一定是唯一解，須視需求分配函數而定，而代入需求分配函數後不同的訂購量可能會出現正或負，故討論q^*可能有多組解，而部分的解可能在單期產能$(q \le K)$內或大於單期產能$(q > K)$。將所有的解以集合形式表示並且由小到大排序：

$$q^* = \{q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*\}$$

以下定義$\hat{q}^*$為所有正解中最小值的解，$\tilde{q}^*$為介於 0 至K的q^*中製造商利潤最大的解：

$$\hat{q}^* = \min_{\substack{q_i^* \in q^* \\ q_i^* > 0}} q_i^*$$

$$\tilde{q}^* = \arg\max_{\substack{q_i^* \in q^* \\ 0 < q_i^* < K}} \pi_s^1(q_i^*)$$

製造商在有限產能下根據不同情形做出最佳的生產決策，在此令q_s^*為製造商決定的生產量。當q在單期產能範圍$(0 \le q \le K)$內，式(4-4)有以下三種可能情形：(a)恆負、(b)恆正、(c)同時存在正與負

(a) 當訂購量在單期產能$(0 \le q \le K)$內製造商利潤函數對q的二階微分恆為負，表

示為一凹函數，即

$$\frac{\partial^2 \pi_s^1(q)}{\partial q^2} = [-2pf(q) - pf^{'}(q)q] + 2b < 0$$

又訂購量下界($q = 0^+$)代入 $\frac{\partial \pi_s^1(q)}{\partial q}$ 恆為正：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_s^1(q)}{\partial q} &= -pf(q)q + p\overline{F}(q) - (a - 2bq) \\ &= p - a > 0\end{aligned} \tag{4-5}$$

可知邊界值 $q = 0$ 非製造商利潤最佳的解，故討論 $\hat{q}^*$ 與 $q = K$ 的解。若 $\hat{q}^*$ 位於區間內 $(0 \le q \le K)$ 則選之，否則製造商選擇生產至 K：

$$q_s^* = \min\{\hat{q}^*, K\}$$

以上討論製造商的生產量決策如同圖 4.1 圖 4.1 所示：

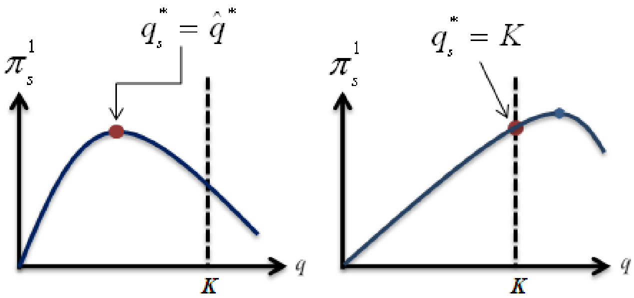


圖 4.1 製造商生產量決策(a)

(b) 當訂購量在單期產能 $(0 \le q \le K)$ 內製造商利潤函數對 q 的二階微分恆為正，表示為一凸函數，即

$$\frac{\partial \pi_s^1(q)}{\partial q} = -pf(q)q + p\overline{F}(q) - (a - 2bq) > 0$$

又由式(4-5)可知訂購量下界($q = 0^+$)代入 $\frac{\partial \pi_s^1(q)}{\partial q}$ 為正，故可知 $q = K$ 為製造商利潤最大的邊界解：

$$q_s^* = K$$

以上討論製造商的生產量決策如同圖 4.2 所示：

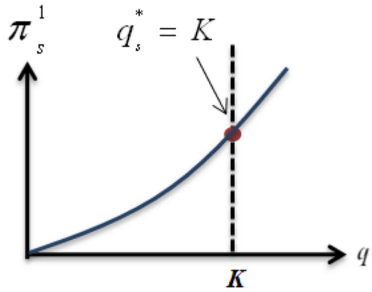


圖 4.2 製造商生產量決策(b)

(c)　當訂購量在單期產能$(0 \le q \le K)$內製造商利潤函數對q的二階微分同時存在正與負，製造商需比較區間內利潤最大的解與$q = K$的邊界解：

$$q_s^* = \begin{cases} \tilde{q}^*, & \text{if } \pi_s^1(\tilde{q}^*) \ge \pi_s^1(K) \\ K, & \text{otherwise} \end{cases}$$

以上討論製造商的生產量決策如同圖 4.3 所示：

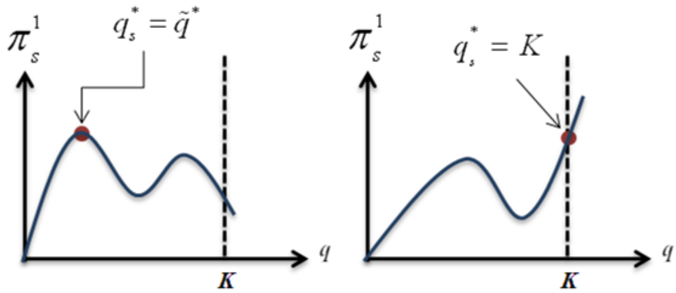


圖 4.3 製造商生產量決策(c)

製造商在不同情況根據q_s^*決定w使自身利潤最大化，批發價$w^* = p\overline{F}(q_s^*)$。製造商與零售商的利潤函數如下：

$$\begin{aligned} \pi_r^1(q_s^*) &= pS(q_s^*) - w^* q_s^* \\ \pi_s^1(q_s^*) &= (w^* - c_2(q_s^*))q_s^* \end{aligned} \tag{4-6}$$

(二)　$K < q \le 2K$

當訂購量介於單期與兩期產能時，由式(3-7)與(3-8)可知零售商與製造商利潤

函數分別如下：

$$\pi_r^2(q) \ = \ pS(q) - wq$$

$$\pi_s^2(q) \ = \ (w - c_2(K))K + (w - c_1(q-K))(q-K) - m(q-K)$$

利用逆向歸納法先對零售商利潤函數的訂購量作一階微分求得零售商的反應函數，由 $\frac{\partial \pi_r^2(q)}{\partial q} = 0$ 可得反應函數：

$$w = p\overline{F}(q) \tag{4-7}$$

由於 F 為一連續且嚴格遞增函數，故可找到一個 w 正好對應一個 q，且 $\frac{\partial^2 \pi_r^2(q)}{\partial q^2} = -pf(q) < 0$，表示零售商依據製造商訂定的批發價決定自身利潤最大的訂購量 q。將式(4-7)帶入製造商的利潤函數 $\pi_s^2(q)$：

$$\pi_s^2(q) \ = \ (p\overline{F}(q) - c_2(K))K + (p\overline{F}(q) - c_1(q-K))(q-K) - m(q-K) \tag{4-8}$$

經由對式(4-8)的 q 作一階微分並令其為零：

$$\frac{\partial \pi_s^2(q)}{\partial q} = -pf(q)q + p\overline{F}(q) - (a + m - 2b(q-K)) = 0$$

可得到一對應製造商利潤函數極值的訂購量 q^{**}，因此製造商藉由控制批發價 $w(q^{**})$ 使零售商訂購 q^{**} 的量：

$$\begin{aligned} q^{**} &= \arg\max_{K<q\le 2K} \pi_r^2(q, w(q)) \\ &= \frac{p\overline{F}(q^{**}) - (a + 2bK + m)}{pf(q^{**}) - 2b} \end{aligned} \tag{4-9}$$

由於 $\frac{\partial^2 \pi_s^2(q)}{\partial q^2} = [-2pf(q) - pf^{'}(q)q] + 2b$ 同式(4-4)並非恆負或恆正，故 q^{**} 不一定是唯一解，須視需求分配函數而定，而代入需求分配函數後不同的訂購量可能會出現正或負，故討論 q^{**} 可能有多組解，而部分的解可能落在單期產能 $(q \le K)$ 內、介於兩期產能內 $(K < q \le 2K)$ 或大於兩期產能 $(q > 2K)$。將所有的解以集合形式表示並且由小到大排序：

$$q^{**} = \left\{q_1^{**}, q_2^{**}, ..., q_n^{**}\right\}$$

以下定義$\hat{q}^{**}$為大於K的所有解中最小值的解，$\tilde{q}^{**}$為介於K至$2K$的q^{**}中製造商利潤最大的解：

$$\hat{q}^{**} = \min_{\substack{q_i^{**} \in q^{**} \\ q_i^{**} > K}} q_i^{**}$$

$$\tilde{q}^{**} = \arg \max_{\substack{q_i^{**} \in q^{**} \\ K < q_i^{**} < 2K}} \pi_s^2(q_i^{**})$$

製造商考量產能限制以及不同情形下的解做出最佳的生產決策使自身利潤最大化，在此令q_s^{**}為製造商決定的生產量。當q在產能範圍($K < q \le 2K$)內，同樣地討論式(4-4)三種可能情形：(a)恆負、(b)恆正、(c)同時存在正與負

(a) 當訂購量在產能範圍($K < q \le 2K$)內製造商利潤函數對q的二階微分恆為負，表示為一凹函數，即

$$\frac{\partial^2 \pi_s^2(q)}{\partial q^2} = [-2pf(q) - pf^{'}(q)q] + 2b < 0$$

1. 若訂購量下界($q = K^+$)代入$\frac{\partial \pi_s^2(q)}{\partial q}$為正：

$$\frac{\partial \pi_s^2(q)}{\partial q} = -pf(q)q + p\overline{F}(q) - (a + m - 2b(q-K)) > 0$$

則邊界值$q = K$非製造商利潤最大的解，故只討論$q = \hat{q}^{**}$與$q = 2K$的解。若$\hat{q}^{**}$位於區間內($K < q \le 2K$)則選之，否則製造商選擇生產至$2K$：

$$q_s^{**} = \min\{\hat{q}^{**}, 2K\}$$

2. 若訂購量下界($q = K^+$)代入$\frac{\partial \pi_s^2(q)}{\partial q}$為負：

$$\frac{\partial \pi_s^2(q)}{\partial q} = -pf(q)q + p\overline{F}(q) - (a + m - 2b(q-K)) < 0$$

可知$q=K$為製造商利潤最佳的解：

$$q_s^{**}=K$$

(b) 當訂購量在產能範圍$(K<q\le 2K)$內製造商利潤函數對q的二階微分恆為正，表示為一凸函數，即

$$\frac{\partial^2\pi_s^2(q)}{\partial q^2}=[-2pf(q)-pf^{'}(q)q]+2b>0$$

1. 若訂購量下界($q=K^+$)代入$\frac{\partial\pi_s^2(q)}{\partial q}$為正：

$$\frac{\partial\pi_s^2(q)}{\partial q}=-pf(q)q+p\overline{F}(q)-(a+m-2b(q-K))>0$$

則區域內的利潤函數為一遞增函數，可知邊界值$q=2K$為製造商利潤最佳的解：

$$q_s^{**}=2K$$

2. 若訂購量下界($q=K^+$)代入$\frac{\partial\pi_s^2(q)}{\partial q}$為負：

$$\frac{\partial\pi_s^2(q)}{\partial q}=-pf(q)q+p\overline{F}(q)-(a+m-2b(q-K))<0$$

只需比較區域內兩邊界值：

$$q_s^{**}=\begin{cases}K, & \text{if } \pi_s^2(K)>\pi_s^2(2K)\\ 2K, & \text{otherwise}\end{cases}$$

(c) 當訂購量在產能範圍$(K<q\le 2K)$內製造商利潤函數對q的二階微分同時存在正與負，製造商需比較區間內利潤最大的解與兩個邊界解：

$$q_s^{**}=\begin{cases}K, & \text{if } \pi_s^2(K)>\pi_s^2(\tilde{q}^{**}) \text{ and } \pi_s^2(K)>\pi_s^2(2K)\\ \tilde{q}^{**}, & \text{if } \pi_s^2(\tilde{q}^{**})>\pi_s^2(K) \text{ and } \pi_s^2(\tilde{q}^{**})>\pi_s^2(2K)\\ 2K, & \text{if } \pi_s^2(2K)>\pi_s^2(\tilde{q}^{**}) \text{ and } \pi_s^2(2K)>\pi_s^2(K)\end{cases}$$

製造商根據以上q_s^{**}決定w使利潤最大化，批發價$w^{**}=p\overline{F}(q_s^{**})$。製造商與零售商的利潤函數如下：

$$\pi_r^2(q_s^{**}) \;=\; pS(q_s^{**})-w^{**}q_s^{**}$$

$$\pi_s^2(q_s^{**}) \;=\; (w^{**}-c_2(K))K+(w^{**}-c_1(q_s^{**}-K))(q_s^{**}-K)-m(q_s^{**}-K) \quad (4\text{-}10)$$

4.2 靜態價格下折扣合約與產能擴充模型求解

以下將分成靜態價格下折扣合約模型與產能擴充模型進行求解，並且整理製造商在不同情形下的最適生產決策。

靜態價格下折扣合約模型求解

當訂購量大於單期產能時，製造商提供的折扣合約採用一般決策模型(二)情形下的批發價w^{**}，由式(3-9)與(3-10)可知零售商與製造商利潤函數分別如下：

$$\pi_{r,I}^f(q) \;=\; pS(q)-w^{**}q+(r-h)(q-K)$$

$$\pi_{s,I}^f(q) \;=\; (w^{**}-c_2(K))K+(w^{**}-r-c_1(q-K))(q-K)$$

對零售商利潤函數的訂購量作一階微分求得零售商的反應函數，由$\frac{\partial \pi_{r,I}^f(q)}{\partial q}=0$ 可得反應函數：

$$r=w^{**}+h-p\overline{F}(q) \quad (4\text{-}11)$$

由於F為一連續且嚴格遞增函數，故可找到一個r正好對應一個q，且$\frac{\partial^2 \pi_{r,I}^f(q)}{\partial q^2}=-pf(q)<0$，表示零售商依據製造商提供的折扣決定自身利潤最大的訂購量q。將式(4-11)代入製造商的利潤函數$\pi_{s,I}^f(q)$：

$$\pi_{s,I}^f(q)=(w^{**}-c_2(K))K+(p\overline{F}(q)-h-c_1(q-K))(q-K) \quad (4\text{-}12)$$

經由對式(4-12)作一階微分並令其為零：

$$\frac{\partial \pi_{s,I}^{f}(q)}{\partial q} = (-pf(q)+2b)(q-K)+p\overline{F}(q)-(a+h)=0$$

可得到一對應製造商利潤函數極值的訂購量 q_I^f，因此製造商藉由控制折扣 $r(q_I^f)$ 使零售商訂購 q_I^f 的量：

$$\begin{aligned} q_I^f &= \arg\max_{K<q\le 2K} \pi_{r,I}^{f}(q,r) \\ &= \frac{p\overline{F}(q_I^f)-(a+h)}{pf(q_I^f)-2b}+K \end{aligned} \tag{4-13}$$

由式(4-12)對 q 作二階微分：

$$\frac{\partial^2 \pi_{s,I}^{f}(q)}{\partial q^2} = [-2pf(q)-pf^{'}(q)(q-K)]+2b \tag{4-14}$$

式(4-14)並非恆負或恆正，故 q_I^f 不一定是唯一解，須視需求分配函數而定，而代入需求分配函數後不同的訂購量可能會出現正或負，故討論 q_I^f 可能有多組解，而部分的解可能落在單期產能 $(q \le K)$ 內、介於兩期產能內 $(K<q\le 2K)$ 或大於兩期產能 $(q>2K)$。將所有的解以集合形式表示並且由小到大排序：

$$q_I^f = \left\{q_{I,1}^f, q_{I,2}^f, \ldots, q_{I,n}^f\right\}$$

以下定義 $\hat{q}_I^f$ 為大於 K 的所有解中最小值的解，$\tilde{q}_I^f$ 為介於 K 至 $2K$ 的 q_I^f 中製造商利潤最大的解：

$$\hat{q}_I^f = \min_{\substack{q_{I,i}^f \in q_I^f \\ q_{I,i}^f > K}} q_{I,i}^f$$

$$\tilde{q}_I^f = \arg\max_{\substack{q_{I,i}^f \in q_I^f \\ K<q_{I,i}^f<2K}} \pi_{s,I}^{f}(q_{I,i}^f)$$

製造商考量產能限制以及不同情形下的解做出最佳的生產決策使利潤最大化，在此令 $q_{s,I}^f$ 為製造商決定的生產量。當 q 在產能範圍($K<q\le 2K$)內，同樣地討論式(4-14)三種可能情形：(a)恆負、(b)恆正、(c)同時存在正與負

(a) 當訂購量在產能範圍 $(K < q \le 2K)$ 內製造商利潤函數對 q 的二階微分恆為負，表示為一凹函數，即：

$$\frac{\partial^2 \pi_{s,I}^f(q)}{\partial q^2} = [-2pf(q) - pf^{'}(q)(q-K)] + 2b < 0$$

1. 若訂購量下界($q = K^+$)代入 $\frac{\partial \pi_{s,I}^f(q)}{\partial q}$ 為正：

$$\frac{\partial \pi_{s,I}^f(q)}{\partial q} = (-pf(q) + 2b)(q-K) + p\overline{F}(q) - (a+h) > 0$$

則邊界值 $q = K$ 非製造商利潤最大的解，故只討論 $q = \hat{q}_I^f$ 與 $q = 2K$ 的解。若 $\hat{q}_I^f$ 位於區間內 $(K < q \le 2K)$ 則選之，否則製造商選擇生產至 $2K$ ：

$$q_{s,I}^f = \min\{\hat{q}_I^f, 2K\}$$

2. 若訂購量下界($q = K^+$)代入 $\frac{\partial \pi_{s,I}^f(q)}{\partial q}$ 為負：

$$\frac{\partial \pi_{s,I}^f(q)}{\partial q} = (-pf(q) + 2b)(q-K) + p\overline{F}(q) - (a+h) < 0$$

可知 $q = K$ 為製造商利潤最佳的解：

$$q_{s,I}^f = K$$

(b) 當訂購量在產能範圍 $(K < q \le 2K)$ 內製造商利潤函數對 q 的二階微分恆為正，表示為一凸函數：

$$\frac{\partial^2 \pi_{s,I}^f(q)}{\partial q^2} = [-2pf(q) - pf^{'}(q)(q-K)] + 2b > 0$$

1. 若訂購量下界($q = K^+$)代入 $\frac{\partial \pi_{s,I}^f(q)}{\partial q}$ 為正：

$$\frac{\partial \pi_{s,I}^f(q)}{\partial q} = (-pf(q) + 2b)(q-K) + p\overline{F}(q) - (a+h) > 0$$

則區域內的利潤函數為一遞增函數，可知邊界值 $q = 2K$ 為製造商利潤最佳的

解：

$$q_{s,I}^{f}=2K$$

2. 若訂購量下界($q=K^{+}$)代入$\dfrac{\partial\pi_{s,I}^{f}(q)}{\partial q}$為負：

$$\frac{\partial\pi_{s,I}^{f}(q)}{\partial q}=(-pf(q)+2b)(q-K)+p\overline{F}(q)-(a+h)<0$$

只需比較區域內兩邊界值：

$$q_{s,I}^{f}=\begin{cases}K, & \text{if } \pi_{s,I}^{f}(K)>\pi_{s,I}^{f}(2K)\\ 2K, & \text{otherwise}\end{cases}$$

(c) 當訂購量在產能範圍$(K<q\leq 2K)$內製造商利潤函數對q的二階微分同時存在正與負，製造商需比較區間內利潤最大的解與兩個邊界解：

$$q_{s,I}^{f}=\begin{cases}K, & \text{if } \pi_{s,I}^{f}(K)>\pi_{s,I}^{f}(\tilde{q}_{I}^{f}) \text{ and } \pi_{s,I}^{f}(K)>\pi_{s,I}^{f}(2K)\\ \tilde{q}_{I}^{f}, & \text{if } \pi_{s,I}^{f}(\tilde{q}_{I}^{f})>\pi_{s,I}^{f}(K) \text{ and } \pi_{s,I}^{f}(\tilde{q}_{I}^{f})>\pi_{s,I}^{f}(2K)\\ 2K, & \text{if } \pi_{s,I}^{f}(2K)>\pi_{s,I}^{f}(\tilde{q}_{I}^{f}) \text{ and } \pi_{s,I}^{f}(2K)>\pi_{s,I}^{f}(K)\end{cases}$$

製造商根據以上$q_{s,I}^{f}$決定r使利潤最大化，令r^{f}為製造商提供的最適折扣：

$$r^{f}=w^{**}-p\overline{F}(q_{s,I}^{f})+h \tag{4-15}$$

零售商與製造商的利潤函數如下：

$$\pi_{r,I}^{f}(q_{s,I}^{f}) = pS(q_{s,I}^{f})-w^{**}q_{s,I}^{f}+(r^{f}-h)(q_{s,I}^{f}-K)$$

$$\pi_{s,I}^{f}(q_{s,I}^{f}) = (w^{**}-c_{2}(K))K+(w^{**}-r^{f}-c_{1}(q_{s,I}^{f}-K))(q_{s,I}^{f}-K) \tag{4-16}$$

靜態價格下產能擴充模型求解

當訂購量大於單期產能$(q>K)$時，製造商採用一般決策模型(二)情形下的批發價w^{**}並於第二期進行產能擴充，由式(3-11)與(3-12)可知零售商與製造商利潤函數分別如下：

$$\pi^f_{r,II}(q) \;=\; pS(q) - w^{**}q$$

$$\begin{aligned}\pi^f_{s,II}(q) \;=\; & (w^{**} - c_2(K+\Delta k))(K+\Delta k) \\ & + (w^{**} - m - c_1(q-K-\Delta k))(q-K-\Delta k) - g\Delta k\end{aligned}$$

對零售商利潤函數的訂購量作一階微分求得零售商的反應函數，由 $\dfrac{\partial \pi^f_{r,II}(q)}{\partial q} = 0$ 可得反應函數：

$$w^{**} = p\overline{F}(q) \tag{4-17}$$

由式(4-17)可知採用一般決策模型的批發價下，零售商的最適訂購量 $q^f_{s,II}$ 也同時決定，且等於一般決策模型的訂購量，意即

$$q^f_{s,II} = q^{**}_s \tag{4-18}$$

由此可知，產能擴充模型與一般決策模型的差別為生產量配置的不同，意即可藉由增加第二期產能將原本第一期生產的部分產品移往該其生產。將 $q^f_{s,II}$ 代回式(3-12)可得製造商利潤函數如下：

$$\begin{aligned}\pi^f_{s,II}(q^f_{s,II}) \;=\; & (w^{**} - c_2(K+\Delta k))(K+\Delta k) + \\ & (w^{**} - m - c_1(q^f_{s,II}-K-\Delta k))(q^f_{s,II}-K-\Delta k) - g\Delta k\end{aligned} \tag{4-19}$$

式(4-19)只有一個決策變數，製造商需決定最適的產能擴充量 Δk 來重新配置兩期生產量使自身利潤最大。經由式(4-19)對 Δk 作一階微分並令其為零可得到一極值：

$$\frac{\partial \pi^f_{s,II}(\Delta k)}{\partial \Delta k} = 4b\Delta k - 2b(q^f_{s,II} - K) + m - g = 0$$

然而二階微分 $\dfrac{\partial^2 \pi^f_{s,II}(\Delta k)}{\partial \Delta k^2} = 4b > 0$，表示製造商利潤為一凹口向上的函數，所以製造商利潤最大的解必定落在兩側的邊界值，即：

$$\Delta k = 0 \;\text{ or }\; \Delta k = q^f_{s,II} - K$$

以下分別討論：(i) $\Delta k = 0$ 與 (ii) $\Delta k = q^f_{s,II} - K$ 時，製造商的利潤函數：

(i) 當 $\Delta k = 0$ 時

在此情形下表示製造商不打算擴充產能，因此等同於一般決策模型。

$$\pi_s^2(q_s^{**}) \;=\; (w^{**}-c_2(K))K+(w^{**}-m-c_1(q_s^{**}-K))(q_s^{**}-K) \tag{4-20}$$

(ii) 當 $\Delta k = q_{s,II}^f - K$ 時

在此情形下，表示製造商一旦擴充產能必將第二期擴充至生產所有商品，而第一期不進行任何生產，製造商利潤如下：

$$\begin{aligned}\pi_{s,II}^f(q_{s,II}^f) \;&=\; (w^{**}-c_2(q_{s,II}^f))q_{s,II}^f - g(q_{s,II}^f - K)\\ &=\; (w^{**}-c_2(q_s^{**}))q_s^{**} - g(q_s^{**}-K)\end{aligned} \tag{4-21}$$

將式(4-20)減式(4-21)得：

$$\pi_s^2(q_s^{**}) - \pi_{s,II}^f(q_{s,II}^f) = (g-2bK-m)(q_s^{**}-K) \tag{4-22}$$

由於兩模型訂購量的決策範圍 $K \le q_s^{**} \le 2K$ ，因此 $(q_s^{**}-K) \ge 0$ 。由式(4-22)可知，當 $q_s^{**} = K$ 時，兩模型的利潤相等；當 $q_s^{**} > K$ 時，製造商藉由式 $(g-2bK-m)$ 可判斷一般決策模型與產能擴充模型的利潤何者較佳，如下命題：

命題 1. *在靜態價格下，製造商利潤於一般決策模型與產能擴充模型的比較。*

(a) 當 $g-2bK > m$ ，製造商於一般決策模型的利潤大於產能擴充模型，表示製造商將不會擴充產能。

(b) 當 $g-2bK < m$ ，製造商於產能擴充模型的利潤大於一般決策模型，表示製造商會選擇擴充產能。

g 代表增加產能的單位成本，b 為每多生產一單位使成本下降的幅度，其中 $2bK$ 為第二期增加產能後因規模經濟獲得的好處，所以當此擴充產能的邊際成本 $g-2bK$ 小於第一期生產的存貨成本 m 時，製造商有誘因擴充第二期產能並將全部產品移往該期生產。相反地，當增加產能的邊際成本大於第一期生產的存貨成本，製造商則寧願在第一期生產而不願花費更多的成本增加第二期的產能。當 $b=0$ 時，可視為本模型的極端例子，表示當生產成本無規模經濟時，製造商是否於第二期增加產能純粹考量增加產能的單位成本 g 與第一期的存貨成本 m 的大小。

4.3 動態價格下折扣合約與產能擴充模型求解

以下將分成動態價格下折扣合約模型與產能擴充模型進行求解，並且整理製造商在不同情形下的最適生產決策。

動態價格下折扣合約模型求解

當訂購量大於單期產能，製造商提供一折扣合約，在此製造商需同時決定批發價與最適折扣，由式(3-13)與(3-14)可知零售商與製造商利潤函數分別如下：

$$\pi_{r,I}^{v}(q) = pS(q) - wq + (r-h)(q-K)$$

$$\pi_{s,I}^{v}(q) = (w-c_2(K))K + (w-r-c_1(q-K))(q-K)$$

由 $\dfrac{\partial \pi_{r,I}^{v}(q)}{\partial q} = 0$ 可得零售商反應函數：

$$\begin{aligned} q &= F^{-1}(w,r) \\ &= F^{-1}\left(\frac{p-w+r-h}{p}\right) \end{aligned} \tag{4-23}$$

式(4-23)表示零售商的訂購量為批發價 w 與折扣 r 的函數，又 F 為一連續且嚴格遞增函數且 $\dfrac{\partial^2 \pi_{r,I}^{v}(q)}{\partial q^2} = -pf(q) < 0$ ，故可找到一組 (w,r) 正好對應一個零售商利潤最大的 q 。將式(4-23)的反應函數代入製造商的利潤函數 $\pi_{s,I}^{v}(q)$ ：

$$\pi_{s,I}^{v}(q) = (w-c_2(K))K + (w-r-c_1(F^{-1}(w,r)-K))(F^{-1}(w,r)-K) \tag{4-24}$$

式(4-24)中，製造商有兩個決策變數 w 與 r ，解雙變數函數需分別對兩變數偏微分解聯立求極值：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_{s,I}^{v}(w,r)}{\partial w} &= K + \left[1 + b\left(F^{-1}(w,r)\right)'\left(\frac{-1}{p}\right)\right](F^{-1}(w,r)-K) \\ &+ \left[w-r-a+b(F^{-1}(w,r)-K)\right]\left(F^{-1}(w,r)\right)'\left(\frac{-1}{p}\right) = 0 \end{aligned} \tag{4-25}$$

$$\frac{\partial \pi_{s,I}^{v}(w,r)}{\partial r}=\left[-1+b\left(F^{-1}(w,r)\right)^{'}(\frac{1}{p})\right](F^{-1}(w,r)-K)$$
$$+\left[w-r-a+b(F^{-1}(w,r)-K)\right]\left(F^{-1}(w,r)\right)^{'}(\frac{1}{p})=0 \tag{4-26}$$

由式(4-25)與式(4-26)解聯立並無法得到 w 與 r 的值，表示在區域範圍內並無最大或最小值，故使製造商利潤最大的值必落在邊界值上，由 $p \geq w \geq r$ 可知製造商會將批發價訂為 p，令 w_I^v 為最適批發價：

$$w_I^v = p \tag{4-27}$$

得到最適批發價後，接著製造商需決定最適折扣，將式(4-27)代回式(4-23)可得反應函數：

$$\begin{aligned} r &= p - p\overline{F}(q) + h \\ &= pF(q) + h \end{aligned} \tag{4-28}$$

將式(4-27)與式(4-28)重新代回式(3-14)可得：

$$\pi_{s,I}^{v}(q) = (p - c_2(K))K + (p\overline{F}(q) - h - c_1(q-K))(q-K) \tag{4-29}$$

式(4-29)與式(4-12)的利潤函數大抵相同，唯一的差別為式(4-12)第二期的批發價為 w^{**}，式(4-29)第二期的批發價為 p。經由對式(4-29)作一階微分並令其為零：

$$\frac{\partial \pi_{s,I}^{v}(q)}{\partial q} = (-pf(q)+2b)(q-K) + p\overline{F}(q) - (a+h) = 0$$

可得到一對應製造商利潤函數極值的訂購量 q_I^v，而製造商會藉由控制批發價 p 與折扣 $r(q_I^v)$ 使零售商訂購 q_I^v 的量：

$$\begin{aligned} q_I^v = q_I^f &= \arg\max_{K<q\leq 2K} \pi_{r,I}^{f}(q,r) \\ &= \frac{p\overline{F}(q_I^f)-(a+h)}{pf(q_I^f)-2b} + K \end{aligned} \tag{4-30}$$

由於 $q_I^v = q_I^f$ 且製造商利潤函數對 q 的一階、二階微分與靜態價格下折扣合約相同，因此製造商的最佳生產決策 $q_{s,I}^v$ 與 $q_{s,I}^f$ 亦相同，

$$q_{s,I}^{v} = q_{s,I}^{f} \tag{4-31}$$

製造商根據以上$q_{s,I}^{v}$決定r使利潤最大化，令r^{v}為製造商最適折扣：

$$r^{v} = pF(q_{s,I}^{v}) + h \tag{4-32}$$

零售商與製造商的利潤函數如下：

$$\begin{aligned}\pi_{r,I}^{v}(q_{s,I}^{v}) &= pS(q_{s,I}^{v}) - pq_{s,I}^{v} + (r^{v} - h)(q_{s,I}^{v} - K) \\ &= p(S(q_{s,I}^{v}) - q_{s,I}^{v}) + (r^{v} - h)(q_{s,I}^{v} - K)\end{aligned}$$

$$\pi_{s,I}^{v}(q_{s,I}^{v}) = (p - c_2(K))K + (p - r^{v} - c_1(q_{s,I}^{v} - K))(q_{s,I}^{v} - K) \tag{4-33}$$

靜、動態價格下折扣合約模型比較：

製造商於靜、動態價格下折扣合約的批發價並不相同，然而生產決策卻一樣，因此以下將比較兩模型的差異與優劣。式(4-15)與式(4-32)分別為靜態與動態價格下合約的折扣：

$$r^{f} = w^{**} - p\overline{F}(q_{s,I}^{f}) + h$$

$$\begin{aligned}r^{v} &= pF(q_{s,I}^{v}) + h \\ &= p - p\overline{F}(q_{s,I}^{f}) + h\end{aligned} \tag{4-34}$$

由於$p \geq w^{**}$且由式(4-30)得$q_{s,I}^{f} = q_{s,I}^{v}$，經比較兩式可發現動態價格下合約的最適折扣大於靜態價格下合約的最適折扣。

將式(4-15)與式(4-32)個別代入式(4-16)與式(4-33)，可得靜態與動態價格下折扣合約模型製造商利潤的函數：

$$\pi_{s,I}^{f}(q_{s,I}^{f}) = (w^{**} - c_2(K))K + (p\overline{F}(q_{s,I}^{f}) - h - c_1(q_{s,I}^{f} - K))(q_{s,I}^{f} - K) \tag{4-35}$$

$$\pi_{s,I}^{v}(q_{s,I}^{v}) = (p - c_2(K))K + (p\overline{F}(q_{s,I}^{v}) - h - c_1(q_{s,I}^{v} - K))(q_{s,I}^{v} - K) \tag{4-36}$$

由式(4-35)與(4-36)可知製造商利潤淡季的獲利(第二項)皆相同，唯一的差別為第二期的獲利，又$p \geq w^{**}$，可推論動態價格下折扣合約製造商利潤表現較佳。

命題 2. *動態價格下折扣合約的製造商利潤與最適折扣大於靜態價格下的折扣合*

約。

由於靜態價格下折扣合約的批發價格無法變動，製造商依據此價格給予零售商一折扣優惠吸引零售商於淡季提前取貨，因此製造商藉由轉嫁存貨成本m增加第一期的獲利，但第二期的利潤維持不變；動態價格下的折扣合約製造商可同時調整定價與折扣，因此製造商可訂定一較高的批發價格但也必須提供較高的折扣以達到吸引零售商淡季取貨的目的。研究發現動態價格下$p-r^v$與靜態價格下$w^{**}-r^f$的差額相同，表示兩者在第一期的誘因效果相同且製造商在第一期的獲利亦相同，然而前者的批發價較後者高，所以第二期的獲利比較好，故製造商在動態價格下折扣合約的利潤會大於靜態價格下折扣合約的利潤。

動態價格下產能擴充模型求解

當訂購量大於單期產能時，製造商在第二期採取產能擴充策略，同時決定批發價與最適產能擴充量。由式(3-15)與式(3-16)可知零售商與製造商利潤函數分別如下：

$$\pi^v_{r,II}(q) = pS(q) - wq$$

$$\begin{aligned}\pi^v_{s,II}(q) &= (w-c_2(K+\Delta k))(K+\Delta k) \\ &\quad +(w-m-c_1(q-K-\Delta k))(q-K-\Delta k)-g\Delta k\end{aligned}$$

先對零售商利潤函數的訂購量作一階微分求得零售商的反應函數，由$\dfrac{\partial \pi^v_{r,II}(q)}{\partial q}=0$可得反應函數：

$$w = p\overline{F}(q) \tag{4-37}$$

由於F為一連續且嚴格遞增函數，故可找到一個w正好對應一個q，且$\dfrac{\partial^2 \pi^v_{r,II}(q)}{\partial q^2}<0$，表示零售商依據製造商訂定的批發價決定自身利潤最大的訂購量q。將式(4-37)的反應函數代入製造商的利潤函數$\pi^v_{s,II}(q)$：

$$\begin{aligned}\pi^v_{s,II}(q) &= (p\overline{F}(q)-c_2(K+\Delta k))(K+\Delta k)+ \\ &\quad (p\overline{F}(q)-m-c_1(q-K-\Delta k))(q-K-\Delta k)-g\Delta k\end{aligned} \tag{4-38}$$

式(4-38)有兩個決策變數q與Δk，解雙變數函數需分別對兩變數偏微分解聯立求極值：

$$\frac{\partial \pi_{s,II}^{v}(q,\Delta k)}{\partial q} = -pf(q)q + p\overline{F}(q) + 2b(q-K-\Delta k) - (a+m) = 0 \qquad (4\text{-}39)$$

$$\frac{\partial \pi_{s,II}^{v}(q,\Delta k)}{\partial \Delta k} = 4b(K+\Delta k) - 2bq - g + m = 0 \qquad (4\text{-}40)$$

由式(4-39)與式(4-40)可解得一組$(q,\Delta k)$的解，然而$\frac{\partial^2 \pi_{s,II}^{v}(q,\Delta k)}{\partial \Delta k^2} = 4b$ >0，由此可知Δk對應$\pi_{s,II}^{v}(q,\Delta k)$的圖形為一凹口向上的函數，故製造商利潤最佳的解必落在Δk的邊界上，即

$$\Delta k = 0 \ \text{ or } \ \Delta k = q - K$$

以下分別討論：(i) $\Delta k = 0$ 與 (ii) $\Delta k = q-K$ 時，製造商的利潤與零售商的最適訂購量：

(i) 當$\Delta k = 0$時

在此情形下表示製造商不打算擴充產能，因此等同於一般決策模型下的($K < q \le 2K$)決策。

$$\pi_s^2(q_s^{**}) = (w^{**} - c_2(K))K + (w^{**} - m - c_1(q_s^{**} - K))(q_s^{**} - K)$$

(ii) 當$\Delta k = q-K$時

在此情形下，表示將第二期產能擴充至能生產所有商品，製造商利潤如下：

$$\pi_{s,II}^{v}(q) = (w - c_2(q))q - g(q-K) \qquad (4\text{-}41)$$

將式(4-37)反應函數代入式(4-41)：

$$\pi_{s,II}^{v}(q) = (p\overline{F}(q) - c_2(q))q - g(q-K) \qquad (4\text{-}42)$$

經由式(4-42)對q作一階微分並令其為零：

$$\frac{\partial \pi_{s,II}^{v}(q)}{\partial q} = -pf(q)q + p\overline{F}(q) - (a+g-2bq) = 0$$

可得到一對應製造商利潤函數極值的訂購量q_{II}^{v}，因此製造商藉由控制批發價$w(q_{II}^{v})$使零售商訂購q_{II}^{v}的量：

$$
\begin{aligned}
q_{II}^{v} &= \arg\max_{q>K} \pi_{r,II}^{v}(q, w(q)) \\
&= \frac{p\overline{F}(q_{II}^{v})-(a+g)}{pf(q_{II}^{v})-2b}
\end{aligned}
\tag{4-43}
$$

由於$\dfrac{\partial^2 \pi_{s,II}^{v}(q)}{\partial q^2}=[-2pf(q)-pf^{'}(q)q]+2b$同式(4-14)並非恆負或恆正，故$q_{II}^{v}$不一定是唯一解，須視需求分配函數而定，而代入需求分配函數後不同的訂購量可能會出現正或負，故討論q_{II}^{v}可能有多組解，而部分的解可能在單期產能$(q \le K)$內或大於單期產能$(q > K)$。又q_{II}^{v}不侷限於總生產量$2K$的限制，最多可生產至需求分配函數的上限R。將所有的解以集合形式表示並且由小到大排序：

$$q_{II}^{v}=\left\{q_{II,1}^{v}, q_{II,2}^{v}, \ldots, q_{II,n}^{v}\right\}$$

以下定義$\tilde{q}_{II}^{v}$為q_{II}^{v}中介於K與需求分配函數上界R製造商利潤最大的解：

$$\tilde{q}_{II}^{v}=\arg\max_{\substack{q_{II,i}^{v} \in q_{II}^{v} \\ K<q_{II,i}^{v}<R}} \pi_{s,II}^{v}(q_{II,i}^{v})$$

製造商考量產能限制以及不同情形下的解做出最佳的生產決策使自身利潤最大化，在此令$q_{s,II}^{v}$為製造商決定的生產量。當q大於單期產能($q > K$)，同樣地討論式(4-4)三種可能情形：(a)恆負、(b)恆正、(c)同時存在正與負

(a) 當訂購量大於單期產能($q > K$)製造商利潤函數對q的二階微分恆為負，表示為一凹函數，即

$$\frac{\partial^2 \pi_{s,II}^{v}(q)}{\partial q^2}=[-2pf(q)-pf^{'}(q)q]+2b<0$$

1. 若訂購量下界($q=K^{+}$)代入$\dfrac{\partial \pi_{s,II}^{v}(q)}{\partial q}$為正：

$$\frac{\partial \pi_{s,II}^{v}(q)}{\partial q} = -pf(q)q + p\overline{F}(q) - (a+g-2bq) > 0$$

則邊界值 $q = K$ 非製造商利潤最大的解，又訂購量不會超過市場需求上界，故製造商最適生產量：

$$q_{s,II}^{v} = \tilde{q}_{II}^{v}$$

2. 若訂購量下界($q = K^{+}$)代入 $\frac{\partial \pi_{s,II}^{v}(q)}{\partial q}$ 為負：

$$\frac{\partial \pi_{s,II}^{v}(q)}{\partial q} = -pf(q)q + p\overline{F}(q) - (a+g-2bq) < 0$$

則 $q = K$ 為製造商利潤最佳的解：

$$q_{s,II}^{v} = K$$

(b) 當訂購量大於單期產能($q > K$)製造商利潤函數對 q 的二階微分恆為正，表示為一凸函數，即

$$\frac{\partial^{2} \pi_{s,II}^{v}(q)}{\partial q^{2}} = [-2pf(q) - pf^{'}(q)q] + 2b > 0$$

1. 若訂購量下界($q = K^{+}$)代入 $\frac{\partial \pi_{s,II}^{v}(q)}{\partial q}$ 為正：

$$\frac{\partial \pi_{s,II}^{v}(q)}{\partial q} = -pf(q)q + p\overline{F}(q) - (a+g-2bq) > 0$$

則區域內的利潤函數為一遞增函數，可知邊界值 $q = R$ 為製造商利潤最佳的解：

$$q_{s,II}^{v} = R$$

2. 若訂購量下界($q = K^{+}$)代入 $\frac{\partial \pi_{s,II}^{v}(q)}{\partial q}$ 為負：

$$\frac{\partial \pi_{s,II}^{v}(q)}{\partial q} = -pf(q)q + p\overline{F}(q) - (a+g-2bq) < 0$$

只需比較區域內兩邊界值：

$$q_{s,II}^{v}=\begin{cases}K, & \text{if } \pi_{s,II}^{v}(K)>\pi_{s,II}^{v}(R)\\ R, & \text{otherwise}\end{cases}$$

(c) 當訂購量大於單期產能($q>K$)製造商利潤函數對q的二階微分同時存在正與負，製造商需比較區間內利潤最大的解與兩個邊界解：

$$q_{s,II}^{v}=\begin{cases}K, & \text{if } \pi_{s,II}^{v}(K)>\pi_{s,II}^{v}(\tilde{q}_{II}^{v}) \text{ and } \pi_{s,II}^{v}(K)>\pi_{s,II}^{v}(R)\\ \tilde{q}_{II}^{v}, & \text{if } \pi_{s,II}^{v}(\tilde{q}_{II}^{v})>\pi_{s,II}^{v}(K) \text{ and } \pi_{s,II}^{v}(\tilde{q}_{II}^{v})>\pi_{s,II}^{v}(R)\\ R, & \text{if } \pi_{s,II}^{v}(R)>\pi_{s,II}^{v}(\tilde{q}_{II}^{v}) \text{ and } \pi_{s,II}^{v}(R)>\pi_{s,II}^{v}(K)\end{cases}$$

製造商根據以上$q_{s,II}^{v}$決定w使利潤最大化，批發價$w_{II}^{v}=p\overline{F}(q_{s,II}^{v})$。零售商與製造商利潤函數如下：

$$\begin{aligned}\pi_{r,II}^{v}(q_{s,II}^{v}) &= pS(q_{s,II}^{v})-w^{v}q_{s,II}^{v}\\ \pi_{s,II}^{v}(q_{s,II}^{v}) &= (w^{v}-c_2(q_{s,II}^{v}))q_{s,II}^{v}-g(q_{s,II}^{v}-K)\end{aligned} \tag{4-44}$$

4.4 假設分析

本小節之前討論了各個模型中製造商利潤函數在未知需求分配下的所有可能性，並統整出最佳的生產決策，因此無論市場實際需求分配為何，代入本文的研究皆可得到製造商生產的最適策略。

接下來將舉一特定需求分配做進一步的分析並利用得到的結果解釋參數間的影響。假設市場的需求函數服從一連續均勻分配，隨機變數$X\sim U(0,R)$：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{R}, & 0\le x\le R\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

在此令A表示一般決策($0\le q\le K$)的模型，B為一般決策($K<q\le 2K$)的模型，*SR*與*SC*分別為靜態價格下折扣合約與產能擴充模型，*DR*與*DC*分別為動態價格下折扣合約與產能擴充模型，以下小節將代入均勻分配求得各模型的解析解，並

進行分析。

由於 A 模型為 B 模型、折扣合約與產能擴充模型下訂購量小於單期產能($0 \le q \le K$)的情形，因此欲知模型之間的優劣可先從 B 模型、折扣合約與產能擴充模型進行比較，最佳的模型再與 A 模型相比。

4.4.1 一般決策模型

一般決策模型分為訂購量小於單期產能($0 \le q \le K$)的 A 模型與大於單期產能($K < q \le 2K$)的 B 模型兩種情形討論，主要差別於後者製造商需要於第一期進行生產，因此製造商利潤函數多了第一期生產的存貨成本。以下分別討論兩區間內的最適生產決策。

(一) A 模型 ($0 \le q \le K$)

當訂購量小於單期產能，根據式(4-6)製造商利潤函數如下：

$$\pi_s^1(q_s^*) = (w^* - c_2(q_s^*))q_s^*$$

以下將求出製造商最適生產量 q_s^*。將分配函數代入式(4-3)可得 q^*：

$$q^* = \frac{(p-a)R}{2(p-bR)}$$

將分配函數代入式(4-4)可得：

$$\frac{\partial^2 \pi_s^1(q)}{\partial q^2} = 2(b - \frac{p}{R})$$

經由式(3-3)與式(3-4)可推得 $b < \dfrac{p}{R}$，因此上式恆為負，表示製造商的利潤函數為一凹函數，故討論 4.1 小節 $0 \le q < K$ 的(a)情況。

$$q_s^* = \begin{cases} \dfrac{(p-a)R}{2(p-bR)}, & \text{if } (p-a)R - 2(p-bR)K < 0 \\ K, & \text{otherwise} \end{cases}$$

上式表示在不同條件下一般決策模型($0 \le q \le K$)的生產決策，製造商會依此決策來訂定最適的批發價格。

在此令參數 $d_0 = (p-a)R - 2(p-bR)K$ ：

命題 3. *當 $d_0 \ge 0$ 成立時，製造商最適生產量將超過單期產能，此時 A 模型的表現最差。*

此條件成立表示單期產能內製造商的邊際收益恆大於邊際成本，製造商會持續生產，因此最適生產量會大於單期產能。由 d_0 的數學式可發現當單期產能 K 愈小，愈易符合 $d_0 \ge 0$ 。

當 $d_0 \ge 0$ 成立時，製造商只需比較一般決策($K < q \le 2K$)、折扣合約以及產能擴充三個模型下的生產決策，選定一最佳策略模型；若 $d_0 \ge 0$ 不成立，表示在單期產能內有一最佳解，此時製造商從三個模型中選出的最佳策略模型需與 A 模型再進行比較，利潤較佳的才是製造商最終採用的生產模型。

(二) *B* 模型($K < q \le 2K$)：

當訂購量介於單期與兩期產能之間，根據式(4-10)製造商利潤函數如下：

$$\pi_s^2(q_s^{**}) \;=\; (w^{**} - c_2(K))K + (w^{**} - c_1(q_s^{**} - K))(q_s^{**} - K) - m(q_s^{**} - K)$$

以下將求出製造商最適生產量 q_s^{**}。將分配函數代入式(4-9)可得 q^{**}：

$$q^{**} = \frac{(p-a-m-2bK)R}{2(p-bR)}$$

由於製造商利潤函數對 q 的二階微分同 A 模型，因此利潤函數為一凹函數，在此討論 4.1 小節 $K < q \le 2K$ 的(a)情況。

$$q_s^{**} = \begin{cases} K, & \text{if } (p-a-m)R - 2pK \le 0 \\ \dfrac{(p-a-m-2bK)R}{2(p-bR)}, & \text{if } 0 \le \dfrac{(p-a-m)R - 2pK}{2(p-bR)K} \le 1 \\ 2K, & \text{otherwise} \end{cases}$$

上式表示在不同條件下一般決策模型($K < q \le 2K$)的生產決策，製造商會依此決策來訂定最適的批發價格。

4.4.2 靜態價格下折扣合約與產能擴充模型

在靜態價格下，製造商採用折扣合約或產能擴充策略需依既定批發價實行，以下將分別對 *SR* 與 *SC* 兩模型求得解析解。

(一) *SR* 模型：

當訂購量大於單期產能，製造商提供折扣合約，根據式(4-16)製造商利潤函數：

$$\pi^f_{s,I}(q^f_{s,I}) = (w^{**} - c_2(K))K + (w^{**} - r^f - c_1(q^f_{s,I} - K))(q^f_{s,I} - K)$$

以下將求出製造商最適生產量 $q^f_{s,I}$。將分配函數代入式(4-13)可得 q^f_I：

$$q^f_I = \frac{(p-a-h)R + (p-2bR)K}{2(p-bR)}$$

分配函數代入式(4-14)可得：

$$\frac{\partial^2 \pi^f_{s,I}(q)}{\partial q^2} = 2(b - \frac{p}{R})$$

代入後的式子同 *A* 模型，同樣地製造商的利潤函數為一凹函數，故討論本章 4.2 小節靜態價格下折扣合約的(a)情況。

$$q^f_{s,I} = \begin{cases} K, & \text{if } (p-a-h)R - pK \le 0 \\ \dfrac{(p-a-h)R + (p-2bR)K}{2(p-bR)}, & \text{if } 0 \le \dfrac{(p-a-h)R - pK}{2(p-bR)K} \le 1 \\ 2K, & \text{otherwise} \end{cases}$$

上式表示在不同條件下折扣合約模型的生產決策，製造商會依此決策決定最適的價格折扣。

(二)　*SC* 模型：($\Delta k = q - K$)

當訂購量大於單期產能時，製造商在第二期進行產能擴充，根據式(4-21)製造商利潤函數：

$$\begin{aligned}\pi_{s,II}^{f}(q_{s,II}^{f}) &= (w^{**} - c_2(q_{s,II}^{f}))q_{s,II}^{f} - g(q_{s,II}^{f} - K) \\ &= (w^{**} - c_2(q_s^{**}))q_s^{**} - g(q_s^{**} - K)\end{aligned}$$

由於製造商利潤函數對 q 的二階微分同 A 模型，所以製造商的利潤函數為一凹函數，又 $q_{s,II}^{f} = q_s^{**}$ ，故條件式同本章 4.1 小節(a)情況。

$$q_{s,II}^{f} = q_s^{**} = \begin{cases} K, & \text{if } (p-a-m)R - 2pK \le 0 \\ \dfrac{(p-a-m-2bK)R}{2(p-bR)}, & \text{if } 0 \le \dfrac{(p-a-m)R-2pK}{2(p-bR)K} \le 1 \\ 2K, & \text{otherwise} \end{cases}$$

上式表示在不同條件下產能擴充模型的生產決策，製造商會依此決策決定最適產能擴充量。

以上的探討為靜態價格下製造商於不同條件各個模型的最適生產決策。在此先比較 B、SR 以及 SC 三個模型，將三個模型的最適生產決策個別代回製造商利潤函數，經由比較與分析後可得到製造商在不同環境參數下的最適模型，先令參數：

$$d_1 = (p-a) - pK/R \text{ ，} d_2 = (p-a) - 2pK/R \text{ ，} d_3 = (p-a+2bK) - 4pK/R$$

以下命題為靜態價格下製造商比較 B、SR 以及 SC 三個模型後的最適決策。

命題 4. *靜態價格下(a)、(b)任一成立，製造商將選擇一般決策模型(B)：*

(a) $h \ge d_1$ *且* $m < g - 2bK$

(b) $h \le d_3$ *且* $m < \min\{h, g-2bK\}$

若(a)的第一個式子成立時，表示 h 很大時，製造商於第一期需提供較多的折扣才能成功誘使零售商提前取貨，然而提供的價格折扣已經使製造商利潤低於不提供折扣時，因此，在此條件下製造商最適生產量為單期產能 K ，以避免在第一期

進行生產而支付高額的折扣成本。又第二個式子同時成立，表示製造商擴充產能的邊際成本大於第一期的存貨成本m，所以製造商寧可在第一期生產而不採取任何策略，因此B模型為三者之中製造商利潤最佳的。

若(b)成立時，表示製造商與零售商的存貨成本皆很小，且在第一期生產的邊際收益恆大於邊際成本，故B與SR模型下製造商皆生產至最大產量$2K$，由式(4-15)可知此時折扣合約模型最適的折扣為$r=h$，原因為製造商已生產滿載的量，並不需要提高折扣來吸引零售商增加訂購量，僅需使用最低的成本誘使零售商提前取貨即可。而對製造商而言，不提供折扣下須負擔mK的存貨成本，若提供折扣則必須支付hK的折扣成本，因此製造商需視m與h的大小選擇是否提供折扣合約，第二個式子即表示製造商的存貨成本小於零售商的存貨成本與擴充產能的邊際成本，故製造商並不會提供折扣合約與進行產能擴充，所以製造商會選擇不採取任何策略的B模型。

由命題 4 可知，製造商存貨成本愈小對B模型相對有利；相反地，m愈大則B模型愈不利。同樣地可推知當零售商存貨成本h愈小，折扣合約模型表現愈好，如下命題。

命題 5. *靜態價格下(a)、(b)任一成立，製造商將選擇折扣合約模型(SR)：*

(a) $m \ge d_2$

(b) $m \le d_3$ *且* $h < m < g - 2bK$

(a)或(b)成立 SR 模型對製造商最有利。(a)的條件式表示製造商第一期生產的商品須負擔昂貴的存貨成本，且此成本大於供貨的邊際利潤，因此製造商只會於第二期生產至單期產能K，並不會在第一期進行生產。由於產能擴充模型最適生產量同一般決策模型亦生產至K，所以製造商無須擴充產能。又製造商提供折扣後的最佳訂購量必定不小於K，由此可知折扣合約模型為三者中利潤最佳。

(b)成立表示零售商的存貨成本很小，且小於製造商的存貨成本與擴充產能的邊際成本。因為h很小，製造商可藉由提供折扣讓零售商提前於第一期取貨以轉嫁較高的存貨成本，獲得較佳的利潤。又擴充產能的成本高於提供折扣的成本，因此製造商會選擇折扣合約模型。

同樣地，由命題4與命題5可知m與h愈大，對*B*與*SR*模型相對不利，所以當產能擴充的邊際成本較小時，可推知製造商會傾向選擇*SC*模型，如下命題。

命題 6. *靜態價格下(a)、(b)任一成立，製造商將選擇產能擴充模型(SC)：*

(a) $h \geq d_1$ *且* $g - 2bK < m$

(b) $g - 2bK < m < h < d_3$

(a)或(b)成立 *SC* 模型對製造商最有利。同樣地，(a)表示零售商的存貨成本很高，製造商需付出的折扣成本很大，所以製造商並不會採取提供折扣合約。又擴充產能的邊際成本小於製造商的存貨成本，製造商在第二期擴充產能生產所有商品比在第一期生產有利，故製造商的最佳選擇為產能擴充模型。

(b)表示零售商存貨成本、製造商存貨成本以及擴充產能成本皆很小，且製造商在第一期生產的邊際收益恆大於邊際成本，因此三個模型下製造商皆會生產至$2K$，又製造商擴充產能的邊際成本最小，故製造商於第二期進行產能擴充最有利。

由以上命題可指引管理者在不同的參數環境下選擇最適的決策，其中條件式$h \geq d_1$與$m \geq d_2$若同時成立，表示製造商與零售商的存貨管理成本很大，製造商在第一期生產需負擔龐大的庫存成本，欲使零售商提前取貨需提供高額的折扣，因此製造商並不會於第一期生產，亦不會提供折扣合約。此時於三個模型製造商最適的生產量皆為K，故對製造商而言利潤皆相同。

接下來4.4.3小節將求得動態價格下*DR*、*DC*模型的解析解，並探討分析之。

4.4.3 動態價格下折扣合約與產能擴充模型

在動態價格下，製造商採用折扣合約或產能擴充策略依新制訂的批發價實行，以下將分別對*DR*與*DC*兩模型求得解析解。

(一) *DR* 模型：

動態價格下製造商需同時決定批發價與價格折扣，根據式(4-33)可知製造商利潤函數：

$$\pi_{s,I}^{v}(q_{s,I}^{v}) \ = \ (p-c_2(K))K+(p-r^v-c_1(q_{s,I}^{v}))(q_{s,I}^{v}-K)$$

以下將求出製造商最適生產量$q_{s,I}^{v}$。由式(4-30)可知q_I^v：

$$q_I^v = q_I^f = \frac{(p-a-h)R+(p-2bR)K}{2(p-bR)}$$

由式(4-31)可知$q_{s,I}^{v}=q_{s,I}^{f}$，所以條件式亦相同：

$$q_{s,I}^{v}=q_{s,I}^{f}=\begin{cases} K, & \text{if } (p-a-h)R-pK\le 0 \\ \dfrac{(p-a-h)R+(p-2bR)K}{2(p-bR)}, & \text{if } 0\le \dfrac{(p-a-h)R-pK}{2(p-bR)K}\le 1 \\ 2K, & \text{otherwise} \end{cases}$$

上式表示在不同條件下製造商於折扣合約模型生產量的決策，製造商依此決策決定最適的批發價格與折扣。

(二) *DC* 模型：($\Delta k = q-K$)

動態價格下製造商需同時決定批發價格與旺季的產能擴充量，根據式(4-44)製造商利潤函數：

$$\pi_{s,II}^{v}(q_{s,II}^{v}) \ = \ (w^v-c_2(q_{s,II}^{v}))q_{s,II}^{v}-g(q_{s,II}^{v}-K)$$

以下將求出製造商最適生產量$q_{s,II}^{v}$。將分配函數代入式(4-43)可得q_{II}^{v}：

$$q_{II}^{v}=\frac{(p-a-g)R}{2(p-bR)}$$

由於製造商利潤函數對q的二階微分同A模型，因此製造商的利潤函數為一凹函數，故討論本文 4.3 小節動態價格下產能擴充模型的(a)情況。

$$q_{s,II}^{v}=\begin{cases} K, & \text{if } (p-a-g)R-2(p-bR)K\le 0 \\ \dfrac{(p-a-g)R}{2(p-bR)}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

上式表示在不同條件下製造商產能擴充模型的生產決策，製造商依此決策決定最適的批發價格與產能擴充量。

在此比較 *B*、*DR* 以及 *DC* 三個模型，將三個模型的最適生產決策個別代回製造商利潤函數，經由比較與分析後可得到製造商在不同環境參數下的最適模型。

命題 7. *動態價格下，當*$\min\{m, g-2bK\} \geq d_2$ *，製造商選擇折扣合約模型。*

當此條件成立時，表示(1)製造商的存貨成本過高以及(2)產能擴充後的利益不及付出的成本，因此製造商將不會於第一期生產與擴充產能，所以一般決策模型($K < q \leq 2K$)與產能擴充模型的最適生產量為 K。由於折扣合約模型在第二期的批發價為 p，製造商只生產至 K 時利潤也比其他兩個模型好，而製造商提供折扣後的最適產量大於 K 表示利潤都會比生產 K 佳，故在此條件下折扣合約模型最佳。

當 $\min\{m, g-2bK\} \geq d_2$ 一旦成立，意味著 $m \geq d_2$ 亦成立，由命題 5 與命題 7 可知，無論靜、動態價格下製造商皆選擇提供折扣合約，故可歸納於命題 8。

命題 8. *當*$\min\{m, g-2bK\} \geq d_2$ *，靜態與動態價格下折扣合約模型最佳。*

以上命題 4 至命題 8 皆只在訂購量大於單期產能($q > K$)的情形下相互比較，而製造商最適生產決策有可能落在 $0 \leq q \leq K$ 的區間，必須再與 *A* 模型進行比較，但製造商需將各個模型不同情形下的最適生產量與 *A* 模型進行比較，經過整理後條件式過多且複雜，因此本研究藉由數值分析進一步幫助製造商洞悉不同環境下該採取何種生產模型。

4.5 數值分析

市場上製造商在既定的產能下決定一批發價，藉由批發價控制零售商的訂購量，本文提出的兩個策略試圖增進製造商的利潤，然而訂購量大於單期產能($q > K$)時，三個模型各自有主要的參數(一般決策模型(*B*)--*m*，折扣合約模型--*h*，產能擴

充模型--g)影響模型的表現，由前一個小節歸納的命題已得知任一個參數過大將使對應的模型表現變差，接下來的 4.5.1 小節與 4.5.2 小節將利用數值分析探討不同的單期產能下包含 A 模型製造商傾向的最終生產決策。4.5.3 小節主要探討 $q > K$ 時，製造商採取的策略對於供應鏈效率的影響。

4.5.1 靜態價格下製造商最適生產模型

製造商面對零售商在靜態價格下依據自身產能限制考慮採取策略的成本後，選擇對自身最有利的模型進行生產。藉由圖 4.4 探究不同單期產能下參數 m、h、g 對製造商 A、B、SR、SC 模型決策的影響。

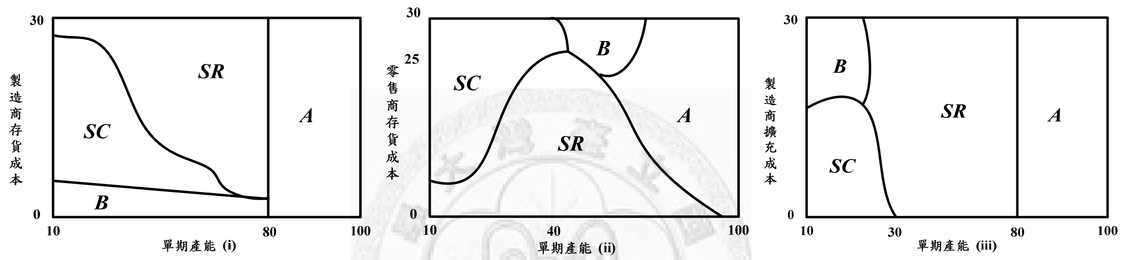


圖 4.4 參數 m、h、g 分別對製造商決策之影響(R=200, p=60, a=20, b=0.01)：i.(h, g)=(15,5), ii.(m, g)=(15,5), iii.(m, h)=(15,15)為各圖的固定參數

圖 4.4 的(i)可觀察出當 $K < 80$ 且製造商存貨成本很低時，第一期產品的存貨成本並不會造成製造商太大的負荷，因此製造商會選擇 B 模型。相對的，製造商存貨成本愈大，製造商會依序傾向選擇產能擴充模型與折扣合約模型。

由圖(ii)也可看出當零售商存貨成本愈小，製造商會選擇提供折扣合約，然而在圖中也可發現即便零售商存貨成本較高，製造商仍然選擇折扣合約，例如在 $K = 40$ 附近，即使零售商存貨成本愈來愈高(h 未超過 25)，依然是折扣合約表現較佳。這是由於在單期產能非極端時，製造商提供折扣會誘使零售商增加訂購量而降低製造商在第一期的單位生產成本，因此藉由第一期的規模經濟效益可彌補零售商的高存貨成本，所以製造商即便支付較高的價格折扣亦能增進獲利空間。

圖(iii)可明顯的看出當單期產能 K 與產能擴充成本 g 很小時，製造商在第二期進行產能擴充，利用大量生產降低單位成本來提高獲利，因此製造商會選擇 SC 模型，然而由圖中可發現當 $30 < K < 80$ 時，即使 g 很小但 SR 模型仍表現較好，這是

因為 *SC* 模型裡製造商只是將生產量移往第二期集中生產，而 *SR* 模型則有折扣的誘因，所以會比 *SC* 模型有更多的訂購量，故製造商總收益會比較高。

由三個圖皆可發現當產能夠大時，製造商會選擇 *A* 模型，因為單期產能 K 很大時，表示製造商於第二期便能滿足訂購量，製造商無須於第一期生產、提供折扣以及擴充產能，因此最適訂購量會落在單期產能內($q \le K$)，故 *A* 模型表現最好。

綜合比較三個圖型後可得到靜態價格下製造商最適生產模型趨勢，當其他參數不變下且 m、h、g 差異不大時：

- 單期產能愈小，製造商愈趨向選擇產能擴充模型。
- 單期產能非極端時，製造商愈趨向選擇折扣合約模型。
- 單期產能愈大時，製造商愈趨向選擇 *A* 模型。

4.5.2 動態價格下製造商最適生產模型

在動態價格下，製造商無論採取折扣合約或是產能擴充策略的批發價為同時決定，以下將探討在不同的單期產能下參數變動對應 *A*、*B*、*DR* 以及 *DC* 模型決策。

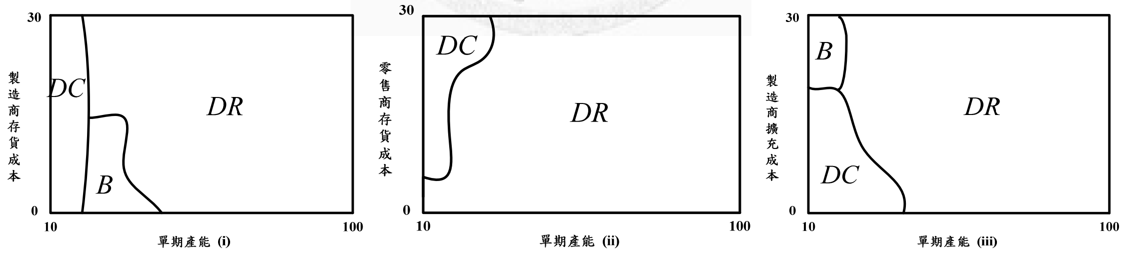


圖 4.5 參數 m、h、g 分別對製造商決策之影響(R=200, p=60, a=20, b=0.01)：

i.(h, g)=(25,15), ii.(m, g)=(15,15), iii.(m, h)=(15,25)為各圖的固定參數

由圖 4.5 的(i)、(ii)、(iii)中可知當單期產能極小時，製造商傾向選擇產能擴充模型。原因是相較於 *B* 與 *DR* 模型，動態價格下的產能擴充模型並無生產量 $2K$ 的限制，因此當單期產能極小時零售商訂購量超過 $2K$，製造商可藉由產能擴充生產至利潤最大的產量。由三個圖亦可發現單期產能非極小時，製造商皆採取折扣合約模型。折扣合約模型批發價為市場價格 p，當單期產能 K 愈大時，第二期的收

益會愈高，且製造商愈不需要於第一期提供折扣，此時製造商愈能獨享整個供應鏈的利益，因此利潤會比不提供折扣以及擴充產能兩個策略高。動態價格下，有別於圖 4.4 產能很大時 *A* 模型最佳，在此為折扣模型最好。綜合以上，可得動態價格下製造商最適生產模型趨勢，當其他參數不變下且 m、h、g 差異不大時：

- 單期產能愈小，製造商愈趨向選擇產能擴充模型。
- 單期產能愈大，製造商愈趨向選擇折扣合約模型。

另外，在此特別探討動態價格下參數 b 對 *B*、*DR* 與 *DC* 三個模型的影響。直覺地，當產量相對單位成本敏感係數 b 愈大表示製造商生產愈多商品單位生產成本愈低，製造商利潤越高，由圖 4.6 即可看出此趨勢。圖 4.6 為製造商在不同的係數 b 下三個模型的利潤。

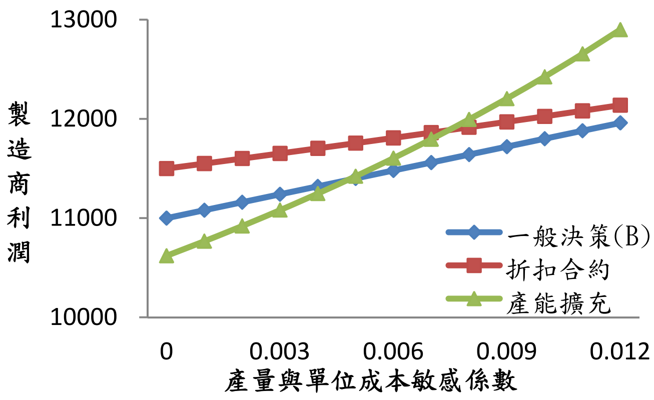


圖 4.6 敏感係數 b 對製造商利潤影響(R=2000, K=200, p=100, a=40, m=15, h=25, g=20)

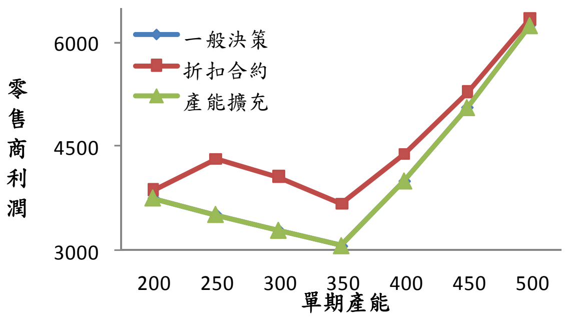
由圖中可發現其他參數不變下，當 b 愈大產能擴充模型的利潤上升最快(斜率最大)。此現象是由於 b 上升會吸引製造商增加生產量以享有更多規模經濟所帶來的益處，又相較於其他兩個模型有 $2K$ 生產量的上限，產能擴充模型能生產至最大利潤的產量且將全部的生產移往第二期，因此製造商具有較強的成本優勢，故利潤上升的較快。由圖可知當 $b=0$ 時，擴充產能並無規模經濟效益，若產能擴充成本 g 相對較高，產能擴充模型表現會較差；然而當 $b>0.0075$ 時，製造商可因高規模經濟效益而賺得較高的利潤，故產能擴充模型表現會較佳。

4.5.3 靜態與動態價格下供應鏈效率

由命題 1 可知當 $d_0 \geq 0$ 成立時，製造商勢必會生產大於單期產能的量，此時製造商在一般決策模型($K < q \leq 2K$)下藉由提供折扣合約或是擴充產能提高獲利，而零售商主要關心製造商採取的策略對自身利潤的影響，本小節將探究製造商採取策略後對供應鏈效率的影響。

靜態價格下製造商採取策略後利潤的比較：

圖 4.7 為不同單期產能下 *B*、*SR*、*SC* 模型對零售商(左)與製造商(右)利潤的影響。由左圖可發現 *B*、*SC* 模型下零售商的利潤相同，*SR* 模型利潤較高。因為 *SC* 模型下製造商擴充產能只是將 *B* 模型的訂購量重新做生產配置，對零售商並無影響；而 *SR* 模型在任何產能下零售商的利潤皆比 *B* 模型好，顯示折扣合約對零售商是有利的，因此零售商會接受製造商提供的折扣合約。



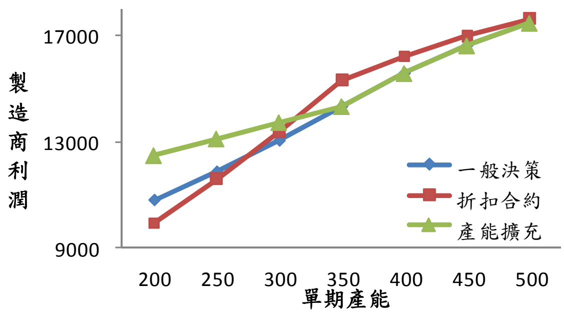


圖 4.7 單期產能(K)對零售商(左)與製造商(右)利潤影響(R=2000, p=100, a=45, b=0.01, m=20, h=25, g=15)

圖 4.7 的右圖中可看出單期產能 $K < 300$ 時，製造商採用產能擴充策略利潤比一般決策模型好且零售商的利潤不會變差，而 $K > 300$ 時則採用折扣合約策略，可使雙方利潤皆上升。由此可知，無論製造商採取何種策略，彼此的利潤不會有衝突，因此在靜態價格下製造商採取 *SR* 或 *SC* 模型皆有助於提高供應鏈的效率。

- 靜態價格下，製造商採取折扣合約或產能擴充策略能提升自身利潤，則必提高供應鏈效率。

動態價格下製造商採取策略後利潤的比較：

圖 4.8 為不同單期產能下 *B*、*DR*、*DC* 模型對零售商(左)與製造商(右)利潤的影

響。由左圖可發現 $K < 500$ 時，三個模型下零售商的利潤皆不相同，製造商採取產能擴充策略會使自身與零售商利潤變佳，而折扣合約策略下零售商完全沒有利潤甚至為負。

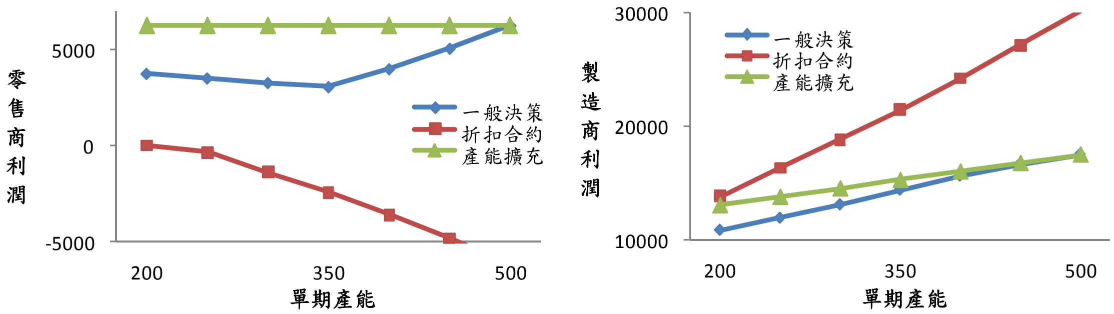


圖 4.8 單期產能(K)對製造商利潤影響(R=2000, p=100, a=45, b=0.01, m=20, h=25, g=15)

因為折扣合約下製造商制定的批發價即為市場的價格，所以零售商的收益來源為第一期獲得的折扣，又市場需求為一隨機變數，零售商的訂購量不一定為銷售量，所以訂購量大於市場實際需求便會出現虧損，當虧損大於折扣時零售商利潤即產生淨損失。

右圖可知 *DR* 模型下製造商利潤表現最好，所以製造商傾向提供價格折扣，然而對零售商而言利潤表現最差，因此零售商將不會接受折扣合約，由此可知彼此利益產生衝突，故不會達成協議。而在此參數環境下，*DC* 模型使雙方利潤變佳，故製造商應採取產能擴充策略。然而在不同的環境參數下，各個模型表現不一，根據數值分析結果，若產能擴充模型使製造商利潤變佳，製造商將選擇該模型，同時零售商利潤也會上升。

- 動態價格下，製造商的最佳生產模型若為採取產能擴充策略則零售商利潤亦變佳，可提升供應鏈效率而形成雙贏的局面。

第五章　　結論與建議

本文研究主旨為製造商在有限產能下如何運用策略生產季節性商品來提升自身利潤。首先探討一般決策模型，即製造商不採取任何策略下決定一最適批發價，零售商再根據此批發價決定訂購量，又訂購量分成小於單期產能與介於單期與兩期產能兩個模型討論。訂購量介於單期與兩期產能時，製造商必須於第一期進行生產，若第一期生產的存貨成本過高則會侵蝕製造商利潤，因此本文提出折扣合約與產能擴充策略，經比較製造商利潤後選出一生產模型，接著再與訂購量小於單期產能模型進行比較決定最終採用的生產模型。

折扣合約下，製造商在淡季給予一價格折扣吸引零售商提前取貨與增加訂購量，製造商可因此轉嫁存貨成本且壓低生產成本；產能擴充下，製造商在旺季增加產能，將第一期的生產量移轉至第二期，此舉不但能省下淡季生產需負擔的存貨成本且可藉由大規模的生產降低生產成本，故製造商無論採用折扣合約或產能擴充策略皆可達到相同目的。

市場上製造商與零售商有長期或短期合作關係的不同，因此本研究又區分為靜態與動態價格下探討製造商的生產決策。

5.1　研究結論與建議

在訂購量超過單期產能的情況下，製造商可藉由提供折扣合約與產能擴充策略，選出對自身最有利的生產模型，本文前後分別探討了製造商與零售商在靜態與動態價格下採取策略後的影響。靜態價格下，製造商需依照原批發價施行策略；動態價格下，製造商則將批發價與欲採取的策略一併考慮。

靜態價格下製造商生產策略建議：

(一) 以下三點為最適訂購量大於既定的單期產能時製造商生產策略的小結：

- 當零售商存貨成本很大時，製造商需提供的較高的折扣，因此不傾向提

供折扣合約，故製造商比較自身存貨成本與產能擴充的邊際成本後，前者較小則選擇一般決策模型，後者較小則選擇產能擴充模型。

- 當製造商存貨成本、零售商存貨成本以及產能擴充邊際成本皆很小時，此時只需比較三者的大小，若製造商存貨成本最小則選擇一般決策模型，零售商存貨成本最小則選擇折扣合約模型，產能擴充邊際成本最小則選擇產能擴充模型。
- 當製造商存貨成本很大時，製造商應選擇折扣合約模型，將存貨成本轉嫁於零售商。

(二) 經由本文的數值分析可發現，當其他參數不變下且製造商存貨成本、零售商存貨成本、製造商產能擴充成本差異不大時，不同的單期產能製造商傾向的最終生產模型亦不同：

- 單期產能愈小，製造商愈趨向選擇產能擴充模型。
- 單期產能非極端時，製造商愈趨向選擇折扣合約模型。
- 單期產能愈大時，製造商愈趨向選擇訂購量小於單期產能的一般決策模型。

(三) 當製造商最適生產模型為提供折扣合約或產能擴充策略時，對供應鏈產生的影響：

- 靜態價格下，製造商無論採取折扣合約或產能擴充策略能提升自身利潤，則供應鏈效率必增加。折扣合約使零售商與製造商雙方利潤增加；產能擴充策略使製造商利潤上升，零售商利潤則不受影響。

動態價格下製造商生產策略建議：

(一) 以下為最適訂購量大於既定的單期產能時製造商生產策略的小結：

- 當製造商存貨成本與產能擴充的邊際成本很大時，製造商會選擇折扣合

約模型，將存貨成本轉嫁於零售商。

(二) 以下為其他參數不變下且製造商存貨成本、零售商存貨成本、製造商產能擴充成本差異不大時，不同的單期產能製造商傾向最終的生產模型：

- 單期產能愈小，製造商愈趨向選擇產能擴充模型。
- 單期產能愈大，製造商愈趨向選擇折扣合約模型。

(三) 當製造商最適生產模型為產能擴充策略時，對供應鏈產生的影響：

- 動態價格下，製造商最適生產若為產能擴充策略則零售商利潤亦變佳，可提升供應鏈效率而形成雙贏的局面。

5.2 研究限制與未來研究

1. 本研究中假設許多參數為固定，如製造商與零售商的存貨成本、價格折扣、產能擴充成本等不隨生產量有所改變，然而實際情況可能會有隨產量遞增或遞減的特性，故未來研究可加入此特性探討。例如零售商的倉儲空間有限，隨著囤貨的增加單位存貨成本會上升，對製造商而言原本提供折扣合約增加訂購量的優勢反而會變成折扣成本的負擔，也許不會出現圖 4.4(ii)零售商存貨成本高但折扣合約仍然較好的情形。

2. 由於本研究為了表達生產具有規模經濟的特性且便於模型的分析，因此將單位生產成本設定為一線性函數，然而此設定也間接限制了部分參數的範圍，如單期產能、需求分配函數的上界，且規模經濟會隨著產量增加而有規模報酬遞減的現象，因此未來研究可將單位生產成本設定為指數分配等平滑曲線，更貼近現實。當生產成本函數變更為具有規模報酬遞減特性的指數分配，仍然適用於本文的模型，但由於指數分配在運算上較為複雜，可能較難得到如本文中簡潔的命題，因此需要利用數值分

析作為主要的探討與整理。

3. 本文假設市場為公開資訊，因此製造商清楚知道零售商的反應函數，然而現實生活中廠商會將公司資訊列為商業機密，所以製造商在生產製造會面臨預估不準確的風險，故未來研究可將資訊不對稱問題納入考慮。若考慮資訊不對稱的問題可將零售商的反應函數結合一個不確定性因子，例如將不確定性因子設定為服從一分配函數，此時製造商面臨的問題相似於零售商面臨不確定性市場需考慮生產過剩以及缺貨的成本。若將此問題納入本文研究，預期製造商與零售商利潤皆會下降，使供應鏈效率變差，而困難的地方為比較製造商利潤大小時過多的參數可能難以透過數學運算簡化條件式，需倚賴數值分析的歸納。

4. 由於本文設定零售商只能向一家製造商訂購產品，且製造商具有較強的議價能力，所以製造商有主動的優勢，然而市場上生產季節性商品不會只有一間廠商，零售商不一定受制於某個製造商，因此對於批發價亦有議價空間，故未來研究可將製造商與零售商彼此的議價能力加入探討，預期結果為製造商批發價與利潤皆會下降，而零售商的訂購量與利潤則會上升。又本文設定零售商面對的一完全競爭市場，零售商無定價能力，故市場價格為固定的參數，然而社會中可因商品差異化與品牌忠誠度使零售商具有定價能力，且季節性商品常有隨著時間而價值流逝的特性，因此未來研究可將動態定價加入零售商的決策。

參考文獻

[1] 林則孟 (2005)。生活工場之協同商務個案。興采實業之協同研發設計商務。2005 協同商務管理論文及案例研討會，台北市。

[2] 馬雲亭 (2010)。回扣契約設計對季節性商品在訂貨策略上之影響。國立台灣大學商學研究所碩士論文，台北市。

[3] Aviv, Y., & Federgruen, A. (2001). Capacitated multi-item inventory systems with random and seasonally fluctuating demands: Implications for postponement strategies. *Management Science, 47*(4), 512-531.

[4] Aviv, Y., & Pazgal, A. (2008). Optimal pricing of seasonal products in the presence of forward-looking consumers. *M&Som-Manufacturing & Service Operations Management, 10*(3), 339-359.

[5] Bitran, G. R., & Mondschein, S. V. (1997). Periodic pricing of seasonal products in retailing. *Management Science, 43*(1), 64-79.

[6] Bradley, J. R., & Arntzen, B. C. (1999). The simultaneous planning of production, capacity, and inventory in seasonal demand environments. *Operations Research, 47*(6), 795-806.

[7] Bresnahan, T. F., & Reiss, P. C. (1985). Dealer and Manufacturer Margins. *Rand Journal of Economics, 16*(2), 253-268.

[8] Bykadorov, I., Ellero, A., & Moretti, E. (2002). Minimization of communication expenditure for seasonal products. *Rairo-Operations Research, 36*(2), 109-127.

[9] Cachon, G. P. (2001). Stock wars: Inventory competition in a two-echelon supply chain with multiple retailers. *Operations Research, 49*(5), 658-674.

[10] Cachon, G. P. (2002). Supply Chain Coordination with Contracts. In S. Graves & T. Kok (Eds.), *Handbooks in Operations Research and Management Science: Supply Chain Management*. North-Holland.

[11] Cachon, G. P., & Lariviere, M. A. (2005). Supply chain coordination with revenue-sharing contracts: Strengths and limitations. *Management Science, 51*(1), 30-44.

[12] Cachon, G. P., & Zipkin, P. H. (1999). Competitive and cooperative inventory policies in a two-stage supply chain. *Management Science, 45*(7), 936-953.

[13] Chang, S. H., & Fyffe, D. E. (1971). Estimation of Forecast Errors for Seasonal-Style-Goods Sales. *Management Science Series B-Application, 18*(2), B89-B96.

[14] Chase, R. P. (2006). *Operations Management for Competitive Advantage with Global Cases 11/e*. McGraw-Hill.

[15] Chen, J., & Xu, L. J. (2001). Coordination of the supply chain of seasonal products. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics Part a-Systems and Humans, 31*(6), 524-532.

[16] Choi, S. C. (1991). Price-Competition in a Channel Structure with a Common Retailer. *Marketing Science, 10*(4), 271-296.

[17] Chopra, S., & Meindl, P. (2004). *Supply Chain Management.* Prentice Hall.

[18] Cournot, A. (1838). *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*. (N. T. Bacon, Trans.). New York：Kelley. (Original work published 1960)

[19] Dana, J. D., & Spier, K. E. (2001). Revenue sharing and vertical control in the video rental industry. *Journal of Industrial Economics, 49*(3), 223-245.

[20] Emmons, H., & Gilbert, S. M. (1998). Note. The role of returns policies in pricing and inventory decisions for catalogue goods. *Management Science, 44*(2), 276-283.

[21] Giannoccaro, I., & Pontrandolfo, P. (2004). Supply chain coordination by revenue sharing contracts. *International Journal of Production Economics, 89*(2), 131-139.

[22] Lariviere, M., & Porteus, E. (1999). *Selling to the Newsvendor* (Research Paper

1569). Retrieved from University of Stanford.

[23] Marvel, H. P., & Peck, J. (1995). Demand Uncertainty and Returns Policies. *International Economic Review, 36*(3), 691-714.

[24] Mathur, P. P., & Shah, J. (2008). Supply chain contracts with capacity investment decision: Two-way penalties for coordination. *International Journal of Production Economics, 114*(1), 56-70.

[25] Metters, R. (1997). Production planning with stochastic seasonal demand and capacitated production. *IIE Transactions, 29*(11), 1017-1029.

[26] Metters, R. (1998). General rules for production planning with seasonal demand. *International Journal of Production Research, 36*(5), 1387-1399.

[27] Padmanabhan, V., & Png, I. P. L. (1997). Manufacturer's returns policies and retail competition. *Marketing Science, 16*(1), 81-94.

[28] Smith, S. A., & Achabal, D. D. (1998). Clearance pricing and inventory policies for retail chains. *Management Science, 44*(3), 285-300.

[29] Tian, Z., & Xu, C. (2007). *Study on supplier pricing model on stackelberg game*. Proceedings of the National Nature Science Foundation 70302014.

[30] Tsay, A. A. (1999). The quantity flexibility contract and supplier-customer incentives. *Management Science, 45*(10), 1339-1358.

[31] Tsay, A. A., & W. S. Lovejoy. (1999). Quantity-flexibility contracts and supply chain performance. *Manufacturing and Service Operations Management, 1*(2).

[32] Taylor, T. A. (2002). Supply chain coordination under channel rebates with sales effort effects. *Management Science, 48*(8), 992-1007.

[33] Viswanathan, S., & Wang, Q. N. (2003). Discount pricing decisions in distribution channels with price-sensitive demand. *European Journal of Operational Research, 149*(3), 571-587.

[34] Von Stackelberg, H. (1952). *The Theory of the Market Economy*. London：William Hodge.

[35] Voros, J. (1999). On the risk-based aggregate planning for seasonal products. *International Journal of Production Economics, 59*(1-3), 195-201.