

國立臺灣大學理學院大氣科學研究所

碩士論文

Department of Atmospheric Science

College of Science

National Taiwan University

Master thesis

中尺度數值模式顯式與隱式的計算方法之比較

A comparison of an explicit forward-backward integration
scheme and implicit schemes in mesocale models

江琇瑛

Jiang, Siou-Ying

指導教授：許武榮 博士、吳清吉 博士

Advisor: Hsu Wu-Ron, Ph.D. and Wu Ching-Chi, Ph.D.

中華民國 97 年 6 月

June, 2008

致謝

在這兩年研究的過程中，感謝我的指導教授許武榮老師和吳清吉老師細心的教導，不論是生活及課業上，在我有問題時，總是不厭其煩地指引我最正確的方向，詳細地為我說明和講解，使我的研究學習裨益良多，對於論文的完成也更有自信，在此由衷感謝。另外還要感謝口試委員柯文雄、楊明仁和劉清煌老師的指導，在論文上給我的指正及許多寶貴的意見，使論文架構更加充實與完備。

謝謝邊界層氣象研究室的學長姐：銘恩學長在實驗程式修改的指導，使研究上給予我很大幫助，盈宇學姐在我忙於論文時，提供許多研究室的資源。感謝研究所的同學：心怡、苡珊、郁潔、文明、阿姿、崇旗、新淦、偉庭和蕙蘋，在學術上的討論、言不及義的閒扯、趕作業的革命情感，你/妳們的陪伴讓兩年的研究生生活變得絢麗多彩。在學校生活中，也感謝禹明學長在研究上的協助與經驗分享。當然，還要感謝從高中、大學到研究所，一直陪伴我的婉晴，雖然現在已不同校、不同領域，但仍陪伴我一起出去散心、談天，那些都是我最能放鬆的時光。

最後感謝我的家人，雖然他們總是說不懂我在忙些什麼，但他們仍不斷鼓勵與關懷我，並給予我最無憂慮的生活，讓我更能專注心於課業研究中，順利地完成論文，願以此與家人共享。

這兩年的學習過程，感謝許多人的幫助與指引，讓我在學術知識與個人發展上都獲得許多充實與成長，為我的學生生涯畫下完美句點。

摘要

對於較大水平尺度的中尺度運動 (如: meso α 尺度) 而言, 數值模擬所用的垂直網格距離遠較水平網格距離為小。在全壓縮 (fully compressible) 的數值模式中, 如使用顯式的積分方法, 會受到 CFL 條件的限制, 使得積分時間步長因高解析度的垂直網格架構而變得很小, 需耗費大量計算資源。因此採用隱式積分方式不受網格大小所控制的優勢, 套用在垂直方向, 增加垂直方向的解析度, 且不失計算上的效率, 而水平方向仍用計算簡單的顯式積分方法, 使模式在計算過程中不會太複雜。

不過垂直隱式方法 (垂直方向使用隱式, 水平方向使用顯式) 並不能解決所有穩定度的問題。由 Ikawa 作加入地形效應的穩定度分析, 得知地形坡度愈大, 垂直隱式方法易不穩定, 指出在比較陡峭的地形環境下, 會有限制存在。只是此結論只分析某一網格距離情形下的結果, 並且無仔細地用數值模式探討。

本研究為了進階探討不同水平與垂直的網格距離比值, 對於不同坡度的影響程度, 首先使用 Ikawa 所提出與地形有關聯的垂直座標, 套用至顯式 (forward-backward) 和垂直隱式兩種時間積分格式, 作線性穩定度分析。結果得出, 在固定垂直網格距離為 300 m 時, 當水平網格愈大, 地形坡度愈陡峭愈不穩定, 使時間步長不能有效率地增大; 但當水平網格與垂直網格距離相近時, 其穩定度並無任何變化, 顯示出比較小的水平網距不受地形坡度干擾。

不過, 對於線性穩定度分析而言, 得到穩定結果並不一定能保證對非線性數值方程之計算方法是穩定的。因此本研究進一步利用台大-普渡 (NTU-Purdue) 非靜力可壓縮模式模擬不同個案, 驗證、分析不同水平方向與垂直方向的網格距離比值對於不同坡度時, 顯式與垂直隱式這兩種數值計算方法的穩定性與效率。由

山岳波實驗結果中呈現坡度愈陡時，垂直隱式方法計算效率比垂直與水平方向都採用顯式積分方法的計算效率來得差，且為不穩定，尤其在水平網距愈接近垂直網距情形下，更為顯著。此與線性穩定度分析的穩定結果並不一致。



Abstract

With the advent of the recent computer technology, fully compressible and nonhydrostatic numerical models are more and more populous in studying mesoscale atmospheric circulations. There are many choices of time integration schemes for formulating mesoscale models. Ikawa categorized three major types of algorithms as HI-VI (implicit), HE-VI (horizontally explicit and vertically implicit), and HE-VE (explicit) methods according to how prognostic variables are solved in horizontal and vertical directions.

HE-VI methods are generally used due to the efficiency in treating high-frequency waves and the simplicity of the explicit algorithm in horizontal directions. However, previous studies found that the method can be unstable in steep-terrain situations, and the problem can be avoided with the use of a more time consuming HE-VE method. The purpose of this study is to compare the two types of integration schemes in terms of stability and efficiency through both linear stability analyses and model simulations.

In this study, we have shown that comparisons through linear stability analyses and model simulations are consistent that a typical HE-VI method indeed leads to instability in steep-terrain situations and also in cases with smaller aspect ratio of grid boxes. The problem cannot be solved with a simple reduction of time step alone. The HE-VE method use in the NTU/Purdue Nonhydrostatic Model, however, always produces stable results for all gravity-wave, linear and nonlinear mountain wave cases.

Key words: linear stability analysis, integration scheme, nonhydrostatic model

目錄

口試委員會審定書.....	i
致謝.....	ii
中文摘要.....	iii
英文摘要.....	v
目錄.....	vi
表目錄.....	ix
圖目錄.....	x
第一章 前言.....	1
1-1 研究背景.....	1
1-2 研究目的.....	5
第二章 線性穩定度分析.....	6
2-1 方程組架構.....	6
2-2 有限空間差分格式.....	9
2-3 平流差分格式.....	10
2-4 有限時間差分格式.....	10
2-4-1 顯式積分方法.....	10
2-4-2 垂直隱式積分方法.....	12
2-5 分析設定.....	13
2-6 2D 線性穩定度分析結果.....	14
2-6-1 無地形($\Delta G = \Delta H = 0$)之結果.....	15
2-6-2 有地形效應之結果.....	16
2-7 討論.....	20

第三章 數值模式	21
3-1 座標設定.....	21
3-2 預報及診斷方程.....	21
3-3 網格架構.....	23
3-4 有限差分法.....	24
3-4-1 平流階段.....	24
3-4-2 高頻波動階段.....	25
3-4-3 擴散階段.....	25
3-5 邊界條件.....	25
第四章 二維數值模擬與結果	28
4-1 重力波實驗.....	29
4-1-1 實驗設計與初始條件.....	29
4-1-2 無地形的模擬結果.....	30
4-1-3 有加入地形的模擬結果.....	31
4-2 線性山岳波實驗.....	32
4-2-1 實驗設計與初始條件.....	32
4-2-2 半山寬 10 km 的模擬結果.....	32
4-2-3 半山寬 1 km 的模擬結果.....	34
4.3 非線性山岳波實驗.....	35
4-3-1 實驗設計與初始條件.....	35
4-3-2 半山寬 10 km 的模擬結果.....	35
4-3-3 半山寬 5 km 的模擬結果.....	37
4-3-4 不同坡度之比較.....	38
第五章 三維數值模擬與結果	41
5-1 重力波實驗.....	41

5-1-1 實驗設計與初始條件.....	41
5-1-2 模擬結果.....	41
5-2 非靜力山岳波實驗.....	43
5-2-1 實驗設計與初始條件.....	43
5-2-2 模擬結果.....	43
第六章 結論.....	45
參考文獻.....	48
附表圖.....	50



表錄

表 1-1 非靜力可壓縮之差分數值模式的分類

表 4-1 本研究所有二維模式模擬個案之共同設定。

表 4-2 實驗設定之符號代碼說明。

表 4-3 在重力波實驗中，初始熱胞條件設計。

表 4-4 在無地形環境之重力波實驗中，顯式和垂直隱式方法可取用的最大時間步長，單位：秒。

表 4-5 有放置一地形為 H500_A10 個案環境之重力波實驗中，顯式和垂直隱式方法可取用的最大時間步長，單位：秒。



圖錄

圖 1-1 HE-VI 之放大因子 $|\lambda|$ 分佈圖。環境設定為聲波波速 340 m s^{-1} 、大氣穩定度 0.01 s^{-1} 的情形下，分析水平網距 1200 m 、垂直網距 200 m 使用時間步長為 3 秒 的結果。其中討論的放大因子是選取 $2 \sim 20$ 個網距波長之最大值。水平座標 β 為垂直隱式使用的權重，其中 β 取 0 表為梯型法 (trapezoidal) 差分格式； β 取 1 表為向後 (backward) 差分格式。垂直座標 ΔG 為地形坡度， ΔG 愈大表地形愈陡峭。(a)、無加入平流場的結果。在穩定區(S) $|\lambda| < 1.00009$ ；而不穩定區(U) $|\lambda| > 1.8$ 。圖中最小等值線值為 1.1 ，間距為 0.1 ；(b)、有加入平流均勻場 $U = 4 \text{ m s}^{-1}$ 的結果。在準穩定區(Q) 其 $1.01 < |\lambda| < 1.1$ ；而不穩定區(U) $|\lambda| > 1.8$ 。最小等值線值為 1.1 ，間距為 0.1 ；(c)、同(b)圖，但有額外做 Asselin's time filter 之時間平滑方法的結果，令 $\nu = 0.2$ 。在準穩定區(Q) 其 $1.002 < |\lambda| < 1.003$ ；而不穩定(U) $|\lambda| > 1.008$ 。最小等值線值為 1.003 ，間距為 0.001 。(摘自 Ikawa, 1988)

圖 1-2 時間分離法 (time splitting) 之示意圖。其中， Δt 為平流場的時間步長， $\Delta \tau$ 為高頻波動 (如聲波) 的時間步長，而 $m = \Delta t / \Delta \tau$ 為平流場時步與高頻波動時步之比值。(摘自 Ikawa, 1988)

圖 2-1 ξ 座標對高度的分佈圖。

圖 2-2 網格結構圖。

圖 2-3 不同水平網距 (Δx)，時間步長 (Δt) 與不同波長中最大之放大因子絕對值 ($|\lambda_{max}|$) 的曲線關係圖。(a)、顯式積分方法 HE-VE；(b)、垂直隱式積分方法 HE-VI。

圖 2-4 顯式積分 (HE-VE)，水平網距 (Δx) 為 300 公尺 時，波長與放大因子絕對值 ($|\lambda|$) 的關係圖。(a)、時間步長 0.6 秒 ；(b)、時間步長 0.7 秒 ；

(c)、時間步長 1 秒。其中 x 和 y 座標分別代表水平與垂直網距的倍數。

圖 2-5 同圖 2-4，但為顯式積分 (HE-VE)，水平網距 (Δx) 為 3000 公尺的結果。(a)、時間步長 0.9 秒；(b)、時間步長 1 秒。

圖 2-6 同圖 2-4，但為垂直隱式積分 (HE-VI)，水平網距 (Δx) 為 300 公尺的結果。(a)、時間步長 0.9 秒；(b)、時間步長 1 秒；(c)、時間步長 1.1 秒。

圖 2-7 同圖 2-4，但為垂直隱式積分 (HE-VI)，水平網距 (Δx) 為 3000 公尺的結果。(a)、時間步長 9 秒；(b)、時間步長 10 秒。

圖 2-8 顯式積分 (HE-VE)，水平網距 (Δx) 為 3000 m 時，時間步長 (Δt) 與不同波長中最大之放大因子絕對值 ($|\lambda_{max}|$) 的曲線關係圖。(a)為固定地形高度為 2000 m，不同坡度 (ΔG) 的結果，其中 ΔG 愈大表坡度愈陡峭；(b)為固定地形坡度 ΔG 為 0.3，不同山高的結果。

圖 2-9 同圖 2-8，但為水平網距 (Δx) 1500 m 的結果。

圖 2-10 同圖 2-8，但為水平網距 (Δx) 300 m 的結果。

圖 2-11 垂直隱式積分 (HE-VI)，水平網距 (Δx) 為 3000 m 時，時間步長 (Δt) 與不同波長中最大之放大因子絕對值 ($|\lambda_{max}|$) 的曲線關係圖。(a)為固定地形高度為 2000 m，不同坡度 (ΔG) 的結果，其中 ΔG 愈大表坡度愈陡峭；(b)為固定地形坡度 ΔG 為 0.3，不同山高的結果。

圖 2-12 同圖 2-11，但為水平網距 (Δx) 1500 m 的結果。

圖 2-13 同圖 2-11，但為水平網距 (Δx) 300 m 的結果。

圖 2-14 顯式積分 (HE-VE)，水平網距 (Δx) 3000 公尺，固定地形高度為 2000 公尺時，對於不同坡度 (ΔG)，波長與放大因子絕對值 ($|\lambda|$) 的關係圖。(a)、時間步長 0.8 秒；(b)、時間步長 0.9 秒。其中 ΔG 愈大表坡度愈陡峭，而 x 和 y 座標分別代表水平與垂直網距的倍數。

圖 2-15 顯式積分 (HE-VE)，水平網距 (Δx) 3000 公尺，固定地形坡度 ΔG

為 0.3 時，對於不同山高 (h_{\max})，波長與放大因子絕對值 ($|\lambda|$) 的關係圖。(a)、時間步長 0.8 秒；(b)、時間步長 0.9 秒。其中 x 和 y 座標分別代表水平與垂直網距的倍數。

圖 2-16 同圖 2-14，但為垂直隱式積分 (HE-VI)，水平網距 (Δx) 3000 公尺，時間步長 9 秒的結果。

圖 2-17 垂直隱式積分 (HE-VI)，水平網距 (Δx) 3000 公尺，在地形高度為 2000 公尺、坡度 ΔG 為 0.3 時，波長與放大因子絕對值 ($|\lambda|$) 的關係圖。(a)、時間步長 7.5 秒；(b)、時間步長 8.5 秒。其中 x 和 y 座標分別代表水平與垂直網距的倍數。

圖 2-18 同圖 2-15，但為垂直隱式積分 (HE-VI)，水平網距 (Δx) 3000 公尺的結果，(a)、時間步長 7.5 秒；(b)、時間步長 8.5 秒。

圖 2-19 同圖 2-14，但為顯式積分 (HE-VE)，水平網距 (Δx) 300 公尺的結果，(a)、時間步長 0.6 秒；(b)、時間步長 0.7 秒。

圖 2-20 同圖 2-15，但為顯式積分 (HE-VE)，水平網距 (Δx) 300 公尺的結果，(a)、時間步長 0.6 秒；(b)、時間步長 0.7 秒。

圖 2-21 同圖 2-14，但為垂直隱式積分 (HE-VI)，水平網距 (Δx) 300 公尺的結果，(a)、時間步長 0.9 秒；(b)、時間步長 1 秒。

圖 2-22 同圖 2-15，但為垂直隱式積分 (HE-VI)，水平網距 (Δx) 300 公尺的結果，(a)、時間步長 0.9 秒；(b)、時間步長 1 秒。

圖 3-1 三維台大-普渡非靜力可壓縮模式的網格交錯配置示意圖。

圖 3-2 台大-普渡非靜力模式的時間分離法示意圖。其中 Δt 、 Δt_a 、 Δt_b 分別為高頻波動階段、平流階段和擴散階段的時間步長。上圖顯示之分離比例為 $\Delta t : \Delta t_a : \Delta t_b = 1 : 4 : 8$ 。

圖 4-1 重力波實驗中，H0_DX3000 個案之初始位溫擾動 θ' 分佈圖。初始擾動之中心在 $x=0$ ，高度 4.5 km 的位置上。

- 圖 4-2 同圖 4-1，但為 DX300 個案之位溫擾動 θ' 分佈圖。
- 圖 4-3 重力波實驗中，H0_DX3000 個案積分 3 小時後之位溫擾動 θ' 分佈圖。初始擾動之中心在 $x=0$ 之位置上。(a)為顯式積分方法結果；(b)為垂直隱式積分方法結果。
- 圖 4-4 同圖 4-3，但為 DX300 個案之位溫擾動 θ' 分佈圖。
- 圖 4-5 重力波實驗中，各網距依最大時間步長（表 4-4），顯式及垂直隱式時間積分法模擬 3 小時所需計算時間之比較。
- 圖 4-6 重力波實驗中，H500_A10_DX3000 個案積分 3 小時後之位溫擾動 θ' 分佈圖。初始擾動中心在 $x=-15$ km 的位置上。(a)為顯式積分方法結果；(b)為垂直隱式積分方法結果。
- 圖 4-7 同圖 4-6，但為 DX300 個案之位溫擾動 θ' 分佈圖。
- 圖 4-8 重力波實驗中，H500_A5_DX300 個案積分 3 小時後之位溫擾動 θ' 分佈圖。初始擾動中心在 $x=-15$ km 的位置上。(a)為顯式積分方法結果；(b)為垂直隱式積分方法結果。
- 圖 4-9 線性山岳波實驗中，H10_A10_DX3000 個案積分 3 小時後之垂直速度 w 分佈圖。地形中心在 $x=0$ 的位置上。(a)為顯式積分方法結果；(b)為垂直隱式積分方法結果。
- 圖 4-10 同 4-9，但為 DX1500 個案之垂直速度 w 分佈圖。
- 圖 4-11 線性山岳波實驗中，H10_A10_DX300 個案積分 2 小時後之垂直速度 w 分佈圖。地形中心在 $x=0$ 的位置上。(a)為顯式積分方法結果；(b)為垂直隱式積分方法中取時間步長 0.86 秒的結果。(c)為垂直隱式積分方法中取時間步長 0.61 秒的結果。
- 圖 4-12 H0_DX300 個案之重力波實驗與 H10_A10_DX300 個案之線性山岳波實驗模擬 2 小時所花費計算時間之比較。在重力波實驗中，顯式與垂直隱式方法取用之時間步長分別為 0.61 秒及 0.86 秒；在線性山岳波實驗中，

顯式和垂直隱式方法取用之時間步長皆為 0.61 秒。

圖 4-13 線性山岳波實驗中，H10_A1_DX300 個案積分 1 小時後之垂直速度 w 分佈圖。地形中心在 $x=0$ 的位置上。(a)為顯式積分方法結果；(b)為垂直隱式積分方法中取時間步長 0.86 秒的結果。(c)為垂直隱式積分方法中取時間步長 0.61 秒的結果。

圖 4-14 同圖 4-13，但為使用 H10_A1_DX300 個案積分 1 小時後之水平速度 $u' = u - \bar{U}$ (10 m/s) 分佈圖。

圖 4-15 非線性山岳波實驗中，H500_A10_DX3000 個案積分 3 小時後之垂直速度 w 分佈圖。地形中心在 $x=0$ 的位置上。(a)為顯式積分方法結果；(b)為垂直隱式積分方法中取時間步長 8.8 秒的結果。(c)為垂直隱式積分方法中取時間步長 3 秒的結果。

圖 4-16 非線性山岳波實驗中，H500_A10_DX1500 個案積分 3 小時後之垂直速度 w 分佈圖。地形中心在 $x=0$ 的位置上。(a)為顯式積分方法結果；(b)為垂直隱式積分方法中取時間步長 4.3 秒積分 2 小時後的結果。(c)為垂直隱式積分方法中取時間步長 0.84 秒的結果。

圖 4-17 H10_A10_DX3000 個案與 H500_A10_DX3000 個案模擬 3 小時計算時間之比較。在線性山岳實驗中，顯式與垂直隱式方法取用之時間步長分別為 0.86 秒及 8.8 秒；在非線性山岳波實驗中，顯式和垂直隱式方法取用之時間步長分別為 0.85 秒及 3 秒。

圖 4-18 同圖 4-17，但為 DX1500 個案模擬 3 小時計算時間之比較。在線性山岳波實驗中，顯式與垂直隱式方法取用之時間步長分別為 0.85 秒及 4.3 秒；在非線性山岳波實驗中，顯式和垂直隱式方法取用之時間步長皆為 0.84 秒。

圖 4-19 非線性山岳波實驗中，H500_A10_DX300 個案之垂直速度 w 分佈圖。地形中心在 $x=0$ 的位置上。(a)為顯式方法積分 2 小時後的結果；(b)為垂

直隱式方法積分 1 小時 30 分後的結果；(c) 為垂直隱式方法積分 2 小時後的結果。

圖 4-20 非線性山岳波實驗中，H500_A5_DX1500 個案積分 3 小時後之垂直速度 w 分佈圖。地形中心在 $x=0$ 的位置上。(a)為顯式積分方法結果；(b)為垂直隱式積分方法中取時間步長 0.84 秒的結果。(c)為垂直隱式積分方法中取時間步長 0.1 秒的結果。

圖 4-21 非線性山岳波實驗中，H500_A5_DX1500 個案模擬 3 小時計算時間之比較。

圖 4-22 非線性山岳波實驗中，H500_A5_DX300 個案之垂直速度 w 分佈圖。地形中心在 $x=0$ 的位置上。(a)為顯式方法積分 2 小時後的結果；(b)為垂直隱式方法積分 1 小時 30 分後的結果。

圖 4-23 DX1500 個案中，顯式方法及垂直隱式方法之時間步長皆取 0.84 秒模擬 3 小時後，此兩計算方法垂直速度場之差異 ($w(\text{HE-VI}) - w(\text{HE-VE})$) 的分佈圖。地形中心在 $x=0$ 的位置上，黑色等值線之值為 0。其中 h_{\max} 為山頂高度， a 為半山寬 (山頂高度一半處的水平半徑)。(a)為 H500_A10 個案的結果；(b)為 H500_A5 個案的結果。

圖 4-24 同圖 4-23，但為水平風場之差異 ($u(\text{HE-VI}) - u(\text{HE-VE})$) 的分佈圖。

圖 4-25 同圖 4-23，但為氣壓擾動場之差異 ($p'(\text{HE-VI}) - p'(\text{HE-VE})$) 的分佈圖。

圖 4-26 DX300 個案中，顯式方法及垂直隱式方法之時間步長皆取 0.61 秒模擬 1 小時 30 分後，此兩計算方法垂直速度場之差異 ($w(\text{HE-VI}) - w(\text{HE-VE})$) 的分佈圖。地形中心在 $x=0$ 的位置上，黑色等值線之值為 0。其中 h_{\max} 為山頂高度， a 為半山寬 (山頂高度一半處的水平半徑)。(a)為 H500_A10 個案的結果；(b)為 H500_A5 個案的結果。

圖 4-27 同圖 4-26，但為水平風場之差異 ($u(\text{HE-VI}) - u(\text{HE-VE})$) 的分佈圖。

圖 4-28 同圖 4-26，但為氣壓擾動場之差異 ($p'(\text{HE-VI}) - p'(\text{HE-VE})$) 的分佈圖。

- 圖 5-1** 重力波實驗中，H0_DX3000 個案積分 3 小時後之位溫擾動 (θ') x - z 剖面圖，為 $y=0$ 的結果。初始擾動之中心在 $x=0$ 之位置上。(a)為顯式積分方法結果；(b)為垂直隱式積分方法結果。
- 圖 5-2** 重力波實驗中，H0_DX3000 個案積分 3 小時後之水平分佈圖，高度為 4500 m。初始擾動之中心在 $x=0$ 及 $y=0$ 之位置上。(a)、垂直速度場；(b)、位溫擾動場；(c)、 u 分量水平風場；(d)、 v 分量水平風場。
- 圖 5-3** 同圖 5-2，但為垂直隱式積分方法的結果。
- 圖 5-4** 同圖 5-1，但為 DX300 個案之位溫擾動 (θ') x - z 剖面圖。
- 圖 5-5** 重力波實驗中，顯式及垂直隱式時間積分法模擬 3 小時所需的計算時間之比較。
- 圖 5-6** 非靜力線性山岳波實驗中，H10_A1_DX300 個案積分 1 小時後之垂直速度 x - z 剖面圖。地形中心在 $x=0$ 的位置上。(a)為顯式積分方法結果；(b)為垂直隱式積分方法結果。
- 圖 5-7** 同圖 5-6，但為高度 1200 m 之水平分佈圖。
- 圖 5-8** 非靜力線性山岳波實驗中，顯式及垂直隱式時間積分方法模擬 1 小時所需計算時間之比較。

第一章 前言

1-1 研究背景

在一般大氣環境下，垂直方向天氣因素的變化比水平方向變化來的高，例如密度與溫度在空間上的分佈均是如此，如果希望使數值模式能精確地解析到垂直方向大氣變化，必然需要使用較高解析度的垂直網格架構。

由數值模式在時間積分的方法上分為顯式 (explicit) 及隱式 (implicit) 兩種差分方法。顯式時間積分方法必需滿足 CFL 限制條件 (Courant – Friedrichs – Lewy criterion) 才可使數值解達到穩定收斂 (Mesinger and Arakawa, 1976)，此表示在固定某波速的情形下，時間步長 (time step) 將受到網格距離的影響。網格距離愈小則能使用之時間步長亦愈小；是故，對於一高解析垂直網格結構採用顯式方法時，在模式計算上將消耗相當多的時間。所以一般採用隱式時間積分方法，應用到模式方程組裡。隱式方法雖需額外計算矩陣解，但由於時間步長可不受網格大小所控制，可增加計算效率；但如將隱式方法同時使用在水平及垂直方向上，則所要計算的矩陣型式會非常地複雜，此不但程式編寫困難，且需龐大的記憶體空間，尤其是考慮地形因素時，使用 σ 座標所產生水平與垂直方向的交錯項目 (cross terms) 或稱為轉換座標修正項目 (correction terms) 是非常複雜的 (Chen and Sun, 2001)。此種在水平與垂直方向都使用隱式計算方法的數值模式在 Ikawa (1988) 文章的分類上稱為 HI-VI 模式，例如：Tapp and White (1976)、Carpenter (1979)、Chen and Sun (2001) (詳見表 1-1)。

因此一般中尺度數值模式，例如：MM5、WRF、RSM (詳見表 1-1)，只將隱式方法套用在高解析的垂直網格架構上，水平方向仍用計算簡單的顯式格式，此

方法在 Ikawa (1988) 數值模式的分類上是屬於 HE-VI 模式。Greel et al. (1993) 也提出將方程組應用垂直隱式方法時，使時間步長與垂直網格距離無關聯，只受水平網格距離限制，此不但可使垂直網距取小值而增加垂直方向的解析度，對於減少模式計算時間之優勢也是很重要的。但是 HE-VI 數值方法並不能解決所有穩定度的問題。Ikawa (1988)和 Steppeler (1995)指出在比較陡峭的地形環境下，使用垂直隱式方法將會有些限制存在。

對於 Ikawa (1988) 加入地形效應的線性穩定度分析中，他採用跟隨地形的垂直座標，應用到二維方程組裡，其垂直座標為：

$$\xi = \frac{H(z - z_s)}{H - z_s} \quad (1.1)$$

其中， H 為模式層頂的高度

z_s 為地形的高度

z 為高度

由 (1.1)式作座標轉換後，將得到與地形坡度及地形高度有關聯的方程。然後使用 von Neumann 方法作穩定度分析，設：

$$\phi_{j,k}^n = \Psi \lambda^n e^{i(lj\Delta x + mk\Delta \xi)} \quad (1.2)$$

其中， ϕ 為任意的預報場， l 及 m 分別為水平和垂直的波數， Δx 及 $\Delta \xi$ 分別為水平和垂直網格距離， λ 為放大因子。由 (1.2)式之放大因子分析穩定與否，其條件 (Mesinger and Arakawa, 1976) 為：

$$|\lambda| \leq \exp[O(\Delta t)] = 1 + O(\Delta t) \quad (1.3)$$

在 (1.3)式中說明 von Neumann 穩定條件即使數值解波動大小 (magnitude) 隨 Δt 些微增加，仍算是穩定的。其後，在求解放大因子的過程中，對於某些參數設定為固定值，以便將放大因子與參數之間的關係式簡單化，直接探討所要了解的問題。因此 Ikawa 設定聲波波速為 340 m s^{-1} 、大氣穩定度為 0.01 s^{-1} 的情形下，主要分析水

平網距1200 m、垂直網距200 m使用時間步長為3秒時，放大因子與地形坡度 (ΔG) 和 β 垂直隱式權重的關係 (圖1-1)。圖1-1中所顯示的 $|\lambda|$ 值，已是對於所解析的所有波長中之最大值，即只要圖中所示 $|\lambda|$ 值滿足穩定度條件，該數值方法 (參數的選擇) 對於所有可解析波動都是穩定的。

首先說明圖 1-1 (a)為無加入環境平流場的情形，由此圖了解垂直方向使用梯形法 ($\beta=0$) 的隱式積分格式，在 ΔG 比較小時， $|\lambda|$ 值小於1.00009，為穩定解；但當 ΔG 值愈大，表地形坡度愈大時，放大因子 $|\lambda|$ 值呈現快速增加的現象，已不滿足(1.3)式，為不穩定的結果；因此，坡度愈大時，時間步長取用3秒已使數值解為不穩定。然而 Ikawa 對於方程組的平流項，設定時間積分使用跳蛙法之顯式格式、空間差分項使用中差法，並同時採用時間分離法 (time splitting)，即平流項採用較大的時間步長，高頻波動 (如聲波) 採用較小的時間步長之技巧 (圖 1-2)，一起應用至穩定度分析中。圖 1-1 (b)為有加入平流的結果，其平均風場設為 $\bar{U} = 4 \text{ m s}^{-1}$ ，而平流項之時間步長設為12秒，為高頻波動之四倍。由此圖看出放大因子對於地形坡度的趨勢結果與圖(a)一樣，坡度愈陡峭易不穩定，並無明顯的不同；在地形坡度 (ΔG) 比較小的部分，雖 $|\lambda|$ 值和圖(a)不同，值些微增加，但由 $|\lambda|$ 變化趨勢來看，仍為滿足穩定條件。

對於地形所產生的不穩定分析，Ikawa 另外加入取用 Asselin's time filter 設定，此設定為：

$$\phi^{*n} = \phi^n + \nu(\phi^{n+m} + 2\phi^n + \phi^{*n-m}) \quad (1.4)$$

(1.4)式表示預報場將取平流項前後的時間階段做平均，而 ν 為所需平滑的程度，此設定即為做時間均滑的處理，利用此過程將不穩定消除，如 MM5 模式中，就利用時間均滑過程，進一步將跳蛙法格式所產生的計算模 (computational mode) 處理掉，不過這將使模式的精確度降低、計算過程變得複雜，且需額外的記憶體空間

儲存時間平滑時所用的預報場。圖 1-1 (c) 是有加入平流場的環境下，每一平流項的 time step 再加入 Asselin's time filter 時間平滑處理的結果。由此圖得知，雖然整個部分的 $|\lambda|$ 值皆變小些，但在地形坡度大的部分所得的 $|\lambda|$ 值仍不能和地形平緩的部分之值一致，對於地形坡度的趨勢結果也與圖(a)一樣，當地形坡度增加時其 $|\lambda|$ 值明顯增加，不滿足穩定條件。因此，由 Ikawa (1988) 對加入地形效應的線性穩定度分析結論出，即使在計算過程中加入時間均滑處理的複雜過程，對於比較陡峭的地形仍得到不穩定的結果，因此垂直向使用梯型法的隱式時間積分方法對於陡峭地形易不穩定。

Steppeler (1995) 進而提出在 σ 座標的垂直隱式格式中，針對地形坡度定義一 CFL 條件為：

$$\alpha \frac{dt \cdot c_s}{dz} \leq \eta \quad (1.5)$$

其中， $\alpha = \partial z / \partial x|_{\sigma}$ 為地形坡度、 c_s 為波速、 dz 為垂直網距及 dt 為時間步長，而 η 可為任意常數值。由 (1.5) 式了解在 dz 和 c_s 固定情形下，地勢愈陡峭時 (α 愈大)，表示模式能使用的時間步長愈小，將使非靜力模式的計算效率變得很低。

然而，由 Ikawa (1988) 線性穩定度提出地形對 HE-VI 積分方法的限制，也包含另一因素將影響 HE-VI 模式。當地形坡度愈大時，表示垂直方向預報場之數量級愈接近水平方向預報場之數量級。如由此些情形存在時，將影響 HE-VI 模式穩定性的結果，基於以上所述之原因，Hsu and Sun (2001) 發展 NTU/Purdue 非靜力數值模式，在垂直與水平方向都使用顯式計算方法 (HE-VE)，此計算方法無論對於中小尺度運動或地形陡峭情形都可得到穩定的數值解。

1.2 研究目的

雖然 Ikawa (1988) 的文章告訴我們垂直方向使用梯型法之隱式格式，在地形坡度增加時易不穩定，但他並未明確地使用數值模式仔細探討說明，而且只討論某一網格情形下的情形。因此，本研究取用 Ikawa (1988) 之垂直座標，進行線性分析用在顯式及垂直隱式時間積分方法之方程組架構，進一步探討水平網距與垂直網距在不同的比例下，顯式及垂直隱式此兩者結果有何不同。

此外，從線性穩定度分析得到穩定結果，並不一定能保證對非線性數值方程之計算方法是穩定的。為了探討線性穩定度分析為穩定的結果是否正確，本研究進一步使用台大-普渡 (NTU-Purdue) 非靜力可壓縮模式模擬山岳波等個案，作為驗證，並分析不同水平方向與垂直方向的網格距離比值對於不同坡度時，顯式與垂直隱式這兩種數值計算方法的效率以及穩定性。

本研究首先以二維模式模擬不同個案，並作分析；然後再進一步使用有加入垂直隱式方法之三維模式模擬，探討其能量可往三個方向傳遞的情形下，對於顯式與垂直隱式時間積分模式的效率是否一樣。本文第二章將說明計算線性穩定度分析的過程與結果；第三章為說明模式的數值方法；第四章首先先說明個案之設計，而後分析二維模式的結果；第五章為三維模式的結果，並與二維的做比較；第六章為結論。

第二章 線性穩定度分析

2-1 方程組架構

本研究使用台大-普渡 (NTU-Purdue) 非靜力可壓縮模式的方程組 (Hsu and Sun, 2001) 作線性穩定度分析。在不考慮水氣效應、忽略擴散項、科氏力作用的情形下，二維動量方程、質量連續方程及熱力方程分別如下：

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -u \frac{\partial \theta}{\partial x} - w \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] = -u \frac{\partial \rho}{\partial x} - w \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} = -u \frac{\partial w}{\partial x} - w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\rho - \rho_0}{\rho} g \quad (2.4)$$

其中， θ 為位溫、 ρ 為密度、 p' 為氣壓擾動、 u 為水平速度場及 w 為垂直速度場。然而氣壓擾動 p' 以下面的診斷式表示：

$$p' = \left(\frac{R_d}{R_d / c_p} \rho \theta \right)^{c_p / c_v} - p_0(z) \quad (2.5)$$

其中 p_0 與 ρ_0 分別為參考態壓力與密度，不隨時間改變。

為了深入了解地形坡度效應對方程組穩定度之影響，垂直座標系統主要參考 Ikawa (1988) 提及的 ξ 座標，表示式如下：

$$\xi = \frac{H(z - z_s)}{H - z_s} \quad (2.6)$$

其中， H ：模式層頂的高度

z_s ：地形高度

z : 高度

對於 ξ 座標與高度的分佈情形，如圖 2-1 所示，在圖中呈現出 ξ 座標與眾多模式採用的 σ 座標相同，只是 ξ 座標的值是隨高度增加，且位置不隨時間改變。經由垂直 z 座標轉換為 ξ 座標，任意預報場 ϕ 對水平及垂直之輻散項將寫為：

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{\xi} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_z \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)_x \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \quad (2.8)$$

其中

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)_x = \frac{1}{1 - \frac{z_s}{H}} \equiv 1 + \Delta H \quad (2.9)$$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_z = \frac{1}{1 + \Delta H} \left(\frac{\xi}{H} - 1 \right) \frac{\partial z_s}{\partial x} \equiv \Delta G \quad (2.10)$$

在(2.9)及(2.10)式中，分別與地形高度和地形坡度有關聯 (Ikawa, 1988)。

之後，對(2.1)式~(2.4)式做垂直座標轉換，並將轉換後的方程做線性化，此線性化過程參考 Hsu and Sun (2001)。其中設定平均風場 \bar{U} 無水平、垂直變化，為一固定值； ρ_0 和 θ_0 只為高度 z 的函數。因此，得方程為：

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + \bar{U} \left(\frac{\partial \theta'}{\partial x} \right)_{\xi} + \bar{U} \Delta G \frac{\partial \theta'}{\partial \xi} + w' \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)_{\xi} + \Delta G \frac{\partial u'}{\partial \xi} + (1 + \Delta H) \frac{\partial w'}{\partial \xi} \right] + \bar{U} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial x} \right)_{\xi} + \bar{U} \Delta G \frac{\partial \rho'}{\partial \xi} + w' \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \left[\left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)_{\xi} + \Delta G \frac{\partial p'}{\partial \xi} \right] + \bar{U} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)_{\xi} + \bar{U} \Delta G \frac{\partial u'}{\partial \xi} = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}(1 + \Delta H) \frac{\partial p'}{\partial \xi} + \bar{U} \left(\frac{\partial w'}{\partial x} \right)_\xi + \bar{U} \Delta G \frac{\partial w'}{\partial \xi} + \frac{\rho'}{\rho} g = 0 \quad (2.14)$$

$$\rho' = \frac{p'}{c^2} - \frac{\rho_0}{\theta_0} \theta' \quad (2.15)$$

其中， $c^2 = (c_p / c_v) R_d T$ 。

將(2.15)式代入(2.12)式及(2.14)式，使 p' 取代 ρ' ，得方程分別為：

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)_\xi + \Delta G \frac{\partial u'}{\partial \xi} + (1 + \Delta H) \frac{\partial w'}{\partial \xi} \right] + \frac{\bar{U}}{c^2} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)_\xi + \frac{\bar{U}}{c^2} \Delta G \frac{\partial p'}{\partial \xi} \\ + w' \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{\rho_0}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}(1 + \Delta H) \frac{\partial p'}{\partial \xi} + \bar{U} \left(\frac{\partial w'}{\partial x} \right)_\xi + \bar{U} \Delta G \frac{\partial w'}{\partial \xi} + \frac{g}{c^2} p' - g \frac{\theta'}{\theta_0} = 0 \quad (2.17)$$

之後，把(2.11)、(2.13)、(2.16)及(2.17)式裡的參數做些改變，另定義 $\hat{u} = \sqrt{\rho_0} u'$ 、

$\hat{w} = \sqrt{\rho_0} w'$ 、 $\hat{p} = (1/\sqrt{\rho_0}) p'$ 及 $\hat{\theta} = (\sqrt{\rho_0}/\theta_0) \theta'$ ，方程式將變為如下：

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} + \bar{U} \left(\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x} \right)_\xi + \bar{U} \Delta G \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \xi} + \hat{w} S_0 = 0 \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right)_\xi + \Delta G \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} + (1 + \Delta H) \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} + \frac{\bar{U}}{c^2} \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \right)_\xi + \frac{\bar{U}}{c^2} \Delta G \frac{\partial \hat{p}}{\partial \xi} + \hat{w} (R_0 + S_0) = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \right)_\xi + \Delta G \frac{\partial \hat{p}}{\partial \xi} + \bar{U} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right)_\xi + \bar{U} \Delta G \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial t} + (1 + \Delta H) \frac{\partial \hat{p}}{\partial \xi} + \bar{U} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \right)_\xi + \bar{U} \Delta G \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} + \frac{g}{c^2} \hat{p} - g \hat{\theta} = 0 \quad (2.21)$$

其中

$$S_0 \equiv \frac{1}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z}, \quad R_0 \equiv \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z}$$

並且由靜力平衡式可推出：

$$R_0 + S_0 = \frac{g}{c^2} \quad (2.22)$$

本研究依(2.18)式~(2.22)式，為與地形坡度有關聯的方程式做穩定度分析。

2-2 有限空間差分格式

在穩定度分析中，採用與台大-普度模式相同的交錯網格，如圖 2-2 所示。各預報場分配位置為， u 場設定與 p, θ 場在同一高度不同位置上；而 w 場則設定與 p, θ 場同一位置但不同高度上，此種網格配置對方程式中幅散場及垂直速度場的計算較為有利。



以(2.19)式為例，說明此方程式中水平、垂直輻散項的空間中差分表示式為何。

在方程式中， \hat{u} 場水平輻散項與 \hat{w} 場垂直輻散項分別為：

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \rightarrow \frac{\hat{u}_{j+1/2, k} - \hat{u}_{j-1/2, k}}{\Delta x} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \rightarrow \frac{\hat{w}_{j, k+1/2} - \hat{w}_{j, k-1/2}}{\Delta \xi} \quad (2.24)$$

然而，因 \hat{u} 場與 $\hat{p}, \hat{\theta}$ 場並不在同一位置上，所以(2.19)式中的 \hat{u} 場垂直輻散項不能以(2.24)式的方法表式之，需先將不同位置上的 \hat{u} 場平均內插致 $\hat{p}, \hat{\theta}$ 場的位置上 (詳圖 2-2 中 $\bar{\hat{u}}^x$ 的位置)，才可繼續計算，其表示式為：

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} \Rightarrow \frac{\partial \bar{\hat{u}}^x}{\partial \xi} \rightarrow \frac{\bar{\hat{u}}_{j, k+1}^x - \bar{\hat{u}}_{j, k-1}^x}{2\Delta \xi} = \frac{\frac{1}{2}(\hat{u}_{j+1/2, k+1} + \hat{u}_{j-1/2, k+1}) - \frac{1}{2}(\hat{u}_{j+1/2, k-1} + \hat{u}_{j-1/2, k-1})}{2\Delta \xi} \quad (2.25)$$

同理，(2.19)式中 \hat{w} 場並非與 $\hat{p}, \hat{\theta}$ 場同一高度上，在取 \hat{w} 場值時不可直接選用 (j, k)

點上，需將 \hat{w} 場平均內插致 $\hat{p}, \hat{\theta}$ 場的高度上，表示式如下：

$$\hat{w} \rightarrow \overline{\hat{w}}_{j,k}^{\xi} = \frac{1}{2} \left(\hat{w}_{j,k+\frac{1}{2}} + \hat{w}_{j,k-\frac{1}{2}} \right) \quad (2.26)$$

在(2.18)、(2.20)及(2.21)方程，需用同樣地思考方式得出對應的空間差分之表示式。

2-3 平流差分格式

在穩定度分析中，方程組的平流項其有限空間差分格式採用 Crowley (1968) 所提出的 Crowley 2nd order 方法做穩定度分析。對於此差分方法，以一維參數 ψ 平流方程說明

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad , \quad \psi = \psi(x, t)$$

首先，以時間做 Taylor 級數展開，得方程為

$$\psi_j^{n+1} = \psi_j^n + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_j^n \Delta t + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right)_j^n \frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3)$$

其中，

$$\psi_j^n = \psi(j\Delta x, n\Delta t)$$

之後得到方程中的時間導數項用中心差分法來近似並省去高階項，得到

$$\psi_j^{n+1} = \psi_j^n + u\Delta t \frac{\psi_{j+1}^n - \psi_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{(u\Delta t)^2}{2} \frac{\psi_{j+1}^n - 2\psi_j^n + \psi_{j-1}^n}{\Delta x} \quad (2.27)$$

以(2.27)式方法套用到(2.18) ~ (2.21)式中的平流項。在本研究中並沒有與 Ikawa (1988) 一樣使用時間分離法致穩定度分析裡。

2-4 有限時間差分格式

2-4-1 顯式積分方法

此方法在 Ikawa (1988) 數值模式的分類上是屬於 HE-VE (Horizontal Explicit - Vertical Explicit) 模式。本模式之顯式格式中採用 forward-backward 時間差分方法，以此格式套用致(2.18)~(2.21)方程式組中，表示如下：

$$\frac{\hat{\theta}^{n+1} - \hat{\theta}^n}{\Delta t} + \Delta \hat{\theta}_{adv}^n + \hat{w}^n S_0 = 0 \quad (2.28)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\hat{p}^{n+1} - \hat{p}^n}{\Delta t} + \frac{1}{c^2} \Delta \hat{p}_{adv}^n + \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right)_{\xi}^n + \Delta G \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} \right)^n + (1 + \Delta H) \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \right)^n + \hat{w}^n (R_0 + S_0) = 0 \quad (2.29)$$

$$\frac{\hat{u}^{n+1} - \hat{u}^n}{\Delta t} + \Delta \hat{u}_{adv}^n + \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \right)_{\xi}^{n+1} + \Delta G \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial \xi} \right)^{n+1} = 0 \quad (2.30)$$

$$\frac{\hat{w}^{n+1} - \hat{w}^n}{\Delta t} + \Delta \hat{w}_{adv}^n + (1 + \Delta H) \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial \xi} \right)^{n+1} + \frac{g}{c^2} \hat{p}^{n+1} - g \hat{\theta}^{n+1} = 0 \quad (2.31)$$

其中方程式之上標 n 為此時刻所知的已知值，而上標 $n+1$ 則為所要求取下一時刻之未知值， Δt 為時間步長。

在方程組中，溫度方程、連續方程使用 forward 顯式差分格式，動量方程則使用 backward 隱式差分格式，而方程中的平流項則都使用 forward 顯式方式。雖然(2.30)和(2.31)方程形式上為隱式時間格式，不過在(2.28)式及(2.29)式中已先解出 \hat{p}^{n+1} 和 $\hat{\theta}^{n+1}$ ，為已知值，此可直接求取(2.30)式和(2.31)式中的 \hat{u}^{n+1} 及 \hat{w}^{n+1} ，實質上是顯式時間格式。

Forward-backward 時間有限差分方法為兩時間層格式，在每次計算時只需要兩個時間的資料，此避免了跳蛙法會產生的計算模 (computational mode)，所以可去除此許多因為數值計算造成的誤差。

2-4-2 垂直隱式積分方法

此格式為垂直方向採用隱式方法，水平方向仍使用計算簡單的顯式方法，在 Ikawa (1988) 數值模式的分類上是屬於 HE-VI (Horizontal Explicit - Vertical Implicit) 模式。以此格式套用致(2.18)~(2.21)方程式組中，表示如下：

$$\frac{\hat{\theta}^{n+1} - \hat{\theta}^n}{\Delta t} + \Delta \hat{\theta}_{adv}^n + \hat{w}^n S_0 = 0 \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\hat{p}^{n+1} - \hat{p}^n}{\Delta t} + \frac{1}{c^2} \Delta \hat{p}_{adv}^n + \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right)_{\xi}^n + \Delta G \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} \right)^n + \hat{w}^n (R_0 + S_0) \\ + \alpha(1 + \Delta H) \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \right)^{n+1} + (1 - \alpha)(1 + \Delta H) \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \right)^n = 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\frac{\hat{u}^{n+1} - \hat{u}^n}{\Delta t} + \Delta \hat{u}_{adv}^n + \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \right)_{\xi}^{n+1} + \Delta G \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial \xi} \right)^{n+1} = 0 \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{w}^{n+1} - \hat{w}^n}{\Delta t} + \Delta \hat{w}_{adv}^n + \alpha(1 + \Delta H) \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial \xi} \right)^{n+1} + \alpha \frac{g}{c^2} \hat{p}^{n+1} \\ + (1 - \alpha)(1 + \Delta H) \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial \xi} \right)^n + (1 - \alpha) \frac{g}{c^2} \hat{p}^n - g \hat{\theta}^n = 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

其中， α 表隱式之權重，當 α 取 1 時為使用 backward 隱式積分格式； α 取 0.5 時為使用 trapezoidal 隱式積分格式。此權重設定與 Ikawa (1988) 不一樣。

在(2.33)式和(2.35)式中，將得知 \hat{w}^{n+1} 及 \hat{p}^{n+1} 的值必需同時求出解。將此兩式配合圖 2-2 之交錯網格系統，將會得到一組 tri-diagonal 的矩陣型式，需運算此矩陣後才可得 \hat{w}^{n+1} 及 \hat{p}^{n+1} 場。由於求解時要運算矩陣，因此每計算一次所花費的時間將比顯式積分方法來的多，不過它可放大時間步長，以彌補因需計算矩陣所花費時間的缺失。

2-5 分析設定

線性穩定度分析以 von Neumann 方法探討，其設定

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{p} \\ \hat{u} \\ \hat{w} \end{bmatrix} (j\Delta x, k\Delta z, n\Delta t) = \begin{bmatrix} \Theta \\ P \\ U \\ W \end{bmatrix} \lambda^n e^{i(lj\Delta x + mk\Delta z)} \quad (2.36)$$

其中， l 與 m 分別為水平、垂直方向的波數； λ 為放大因子，以 λ 值判定穩定度結果為何。von Neumann 方法的穩定性必要條件為：

$$|\lambda| \leq \exp[O(\Delta t)] = 1 + O(\Delta t) \quad (2.37)$$

如果要使數值格式為穩定的，則放大因子必順滿足(2.37)式。然而從(2.37)式表現出 von Neumann 條件即使數值解波動大小隨 Δt 些微增加，仍算是穩定的，因此所得的放大因子可些微大於 1。

將(2.37)式代入(2.23) ~ (2.26)式之空間差分型式，此些差分式改寫為

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow i \frac{X}{\Delta x} = i \frac{2 \sin(l\Delta x/2)}{\Delta x} \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \rightarrow i \frac{Z}{\Delta \xi} = i \frac{2 \sin(m\Delta \xi/2)}{\Delta \xi} \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial^{-x}}{\partial x} \rightarrow i \frac{T}{\Delta \xi} = i \frac{\cos(l\Delta x/2) \cdot \sin(m\Delta \xi)}{\Delta \xi} \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial^{-\xi}}{\partial \xi} \rightarrow M = \cos(m\Delta \xi/2) \quad (2.41)$$

而平流項則化為

$$\begin{aligned} Adv = & i\bar{U}\Delta t \frac{\sin(l\Delta x)}{\Delta x} + (\bar{U}\Delta t)^2 \frac{1 - \cos(l\Delta x)}{\Delta x^2} \\ & + i\bar{U}\Delta G\Delta t \frac{\sin(m\Delta \xi)}{\Delta \xi} + (\bar{U}\Delta G\Delta t)^2 \frac{1 - \cos(m\Delta \xi)}{\Delta \xi^2} \end{aligned} \quad (2.42)$$

將(2.38)式~(2.42)式之格式套用到顯式和垂直隱式積分方法，將得到一組與 λ 有關之 4×4 階的矩陣型式。下述矩陣以垂直隱式格式說明

$$\begin{bmatrix} (\lambda-1)+Adv & 0 & 0 & S_0M\Delta t \\ 0 & \frac{1}{c^2}[(\lambda-1)+Adv] & i\left(\frac{X}{\Delta x} + \Delta G \frac{T}{\Delta \xi}\right)\Delta t & i(1-\alpha+\alpha\lambda)\tilde{H} \frac{Z}{\Delta \xi} \Delta t \\ 0 & i\lambda\left(\frac{X}{\Delta x} + \Delta G \frac{T}{\Delta \xi}\right)\Delta t & (\lambda-1)+Adv & 0 \\ -gM\Delta t & i(1-\alpha+\alpha\lambda)\tilde{H} \frac{Z}{\Delta \xi} \Delta t & 0 & (\lambda-1)+Adv \\ & + (1-\alpha+\alpha\lambda)\frac{g}{c^2}M\Delta t & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta \\ P \\ U \\ W \end{bmatrix} = 0 \quad (2.43)$$

其中 $\tilde{H} = 1 + \Delta H$ ，由(2.43)式將得到一 λ 四次方多項式，而後取用 MATLAB 套裝軟體求出放大因子之值。

在(2.43)式中運算 λ 值時，固定 $c = 330 \text{ m s}^{-1}$ 、重力加速度 $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ 、靜力穩度度 $gS_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ ，而隱式權重 $\alpha = 0.6$ ，並設定垂直向為高解析度網距 $\Delta \xi = 300 \text{ m}$ 。因此， λ 值只與時間步長(Δt)、水平網距(Δx)、地形高度(ΔH)、地形坡度(ΔG)及波數(l, m)有關聯

$$\lambda = \lambda(\Delta t, \Delta x, \Delta H, \Delta G, l, m) \quad (2.44)$$

由(2.44)式之關係式分別探討對穩定度的影響。

2-6 2D 線性穩定度分析結果

對於穩定度分析結果，首先展示時間步長 (Δt) 與最大之放大因子絕對值 ($|\lambda_{max}|$) 的曲線圖 (圖 2-3 及圖 2-8 ~圖 2-13)，了解不同水平網距、地形坡度和地

形高度時，可取用的最大時間步長為多少；而後再探討穩定度，分析穩定和不穩定之時間步長裡，放大因子絕對值 ($|\lambda|$) 與波長的分佈圖 (圖 2-4 ~圖 2-7 及圖 2-14 ~圖 2-22)，以了解那部分的波長容易不穩定，或是對於不同坡度其分佈有何異同。

2-6-1 無地形 ($\Delta G = \Delta H = 0$) 之結果

為了了解地形對穩定度的影響，首先先介紹沒有地形時，不同水平網距對顯式及垂直隱式的結果，以便與有地形的結果作比較。

圖 2-3 為不同水平網距 (Δx)，其時間步長 (Δt) 與不同波長中最大之放大因子絕對值 ($|\lambda_{max}|$) 的曲線圖。由圖 2-3 (a) 顯式積分方法的結果可知，在水平網距為 300 m 時，最大時間步長為 0.6 秒；水平網距為 3000 m 時，最大時間步長只增加至 0.9 秒，水平網距增加時，時間步長並無明顯增大。此說明由於受到高解析垂直網距 300 m 的影響，即使水平網距增加，但仍需用很小的時間步長才可使數值解為穩定的結果。相對地，由圖 2-3 (b) 垂直隱式積分方法的結果得到，在水平網距為 300 m 時，最大時間步長為 0.9 秒；不過水平網距為 3000 m 時，最大時間步長可增大到 9.5 秒。此說明了將隱式套用致高解析垂直網格上，此使時間步長不受垂直網距的影響，所以當水平網距增加時，可使用較大的時間步長以減少計算上的時間。

圖 2-4 與圖 2-5 分別為水平網距 300 m 和 3000 m，顯式積分 (HE-VE) 之波長與放大因子絕對值 ($|\lambda|$) 的關係圖。在圖 2-4 (a) 時間步長 $\Delta t = 0.6$ 秒及圖 2-5 (a) 時間步長 $\Delta t = 0.9$ 秒裡，雖然所運算出的 $|\lambda|$ 值不等於 1，不過由圖 2-3 放大因子隨時間步長的曲線圖，判定此兩時步滿足(2.37)式，屬於穩定的結果。至於為不穩

定結果的時間步長中，先探討水平網距 300 m (圖 2-4 b、c) 的情形，當時步為 0.7 秒時，由圖得知在水平波長和垂直波長都為 2 倍的網距時 (為 600 m)，所得的 $|\lambda|$ 值為 2.3，這表現出此短波已不滿足 CFL 條件。當時間步長增加致 1 秒時，更明顯看出只要水平或垂直裡其中有一方向不滿足 CFL 條件之短波，即使另一方向的長波為大於 10 倍的網距，仍為不穩定；相同地，水平網距為 3000 m (圖 2-5 b) 時，因垂直網距仍為 300 m，當時間步長為 1 秒時，即使水平網距比垂直網距大 10 倍，但垂直向短波的部分已不滿足 CFL 條件，使結果為不穩定。

圖 2-6 與圖 2-7 分別為水平網距 300 m 和 3000 m，垂直隱式積分 (HE-VI) 之波長與放大因子絕對值 ($|\lambda|$) 的關係圖。在圖 2-6 (a) 時間步長 $\Delta t = 0.9$ 秒及圖 2-7 (a) 時間步長 $\Delta t = 9$ 秒，屬於穩定的結果，然而固定某一水平波長，最大 $|\lambda|$ 值在垂直波長為 20 倍網距的部分；反之，比較小的垂直波長，大約小於 6 倍網距，所得 $|\lambda|$ 值幾乎約為 1 或小於 1 值，分佈情形與顯式積分格式相反。至於屬於不穩定的時間步長裡 (圖 2-6 b、c 和圖 2-7 b)，主要不穩定區在水平短波 (2 倍網距) 的部份，而時步因不受垂直網距影響，在垂直短波並無不穩定的現象；由此些圖了解，當水平波長愈短、垂直波長愈長，主要為一垂直扁長條狀的波型時，將出現不穩定。

2-6-2 有地形效應之結果

此小節分析地形對穩定度的影響，主要分為兩方面探討，首先為固定地形高度，在不同坡度的結果；其次為固定地形坡度，在不同山高的情形。此對這兩結果，以了解地形坡度、地形高度對顯式及垂直隱式積分方法之穩定度的影響。

圖 2-8 至 2-10 分別為水平網距 3000 m、1500m 及 300m，顯式積分方法中相

同山高 (2000 m) 不同坡度和相同坡度($\Delta G = 0.3$) 不同山高之時間步長與最大之放大因子絕對值 ($|\lambda_{max}|$) 的曲線圖。在圖中 ΔG 表地形坡度， ΔG 愈大其地形坡度愈陡峭。從圖 2-8 (a) ~ 圖 2-10 (a) 得知，對於顯式格式，地形坡度對穩定度結果無影響，不過由各圖(a)中所看到從無地形 ($\Delta G = 0$) 至有地形坡度的穩定度曲線變化，是因為地形高度 2000 m 所致，並非地形坡度。因為從圖 2-8 (b) ~ 圖 2-10 (b) 在同坡度的情況下，地形高度愈高時，結果呈現不穩定；雖然最大時間步長需減少，但變化值不多，大約只相差 0.1 ~ 0.2 秒。

圖 2-11 至 2-13 分別為水平網距 3000 m、1500 m 及 300 m，垂直隱式積分方法中相同山高 (2000 m) 不同坡度和相同坡度($\Delta G = 0.3$) 不同山高之時間步長與最大之放大因子絕對值 ($|\lambda_{max}|$) 的曲線圖。首先了解水平網距 3000 公尺的結果，由圖 2-11 得知，在山高為 2000 m 的情況下，坡度 (ΔG) 增加時，能使用的最大時間步長需減少，且隨著坡度增大其減少的值也增多；至於地形高度的影響則呈現出山愈高時，反而較穩定，使時間步長增加些，此與不同坡度的結果相反。另外從圖 2-11 (b) 中可看到，由無地形至有地形高度的時間步長減少現象，是由於地形坡度所造成的，並非地形高度。

從圖 2-12 (a) 得知，在水平網距為 1500 m 時，當地形坡度增加，雖然能使用的最大時間步長將減少，但減少的量值已不會與水平網距 3000 m (圖 2-11 a) 的情況一樣，此變化的幅度變小；對於不同地形高度的結果也是 (圖 2-12 b)，呈現出此與穩定度值近乎無影響。由圖 2-13 得出水平網距為 300 m 時，地形坡度、地形高度對穩定度值沒有影響。從圖 2-11 至 2-13 呈現水平網距愈小時，地形對穩定度的影響愈小或幾乎無影響，比較大的水平網距其影響較明顯。

雖然由時間步長與最大之放大因子絕對值 ($|\lambda_{max}|$) 的曲線圖中，得出之曲線

的分佈一致，但是對於不同波長的結構，放大因子 ($|\lambda|$) 的分佈型態是否仍為相同，本研究將進一步討論水平網距 3000 m 及 300 m，其穩定和不穩定之時間步長的波長與放大因子絕對值 ($|\lambda|$) 的關係，也進一步了解地形是否影響高解析水平網格距離。

首先分析網距為 3000 m 的情形。圖 2-14 為顯式積分方法在相同山高 (2000 m) 不同坡度的結果，由圖(a) 時間步長 0.8 秒，都為穩定的時步，呈現坡度增加時，在垂直短波 (約為 3 倍垂直網距的部分)，其 $|\lambda|$ 值有些微增加，但不致於為不穩定；由圖(b) 時間步長 0.9 秒，都為不穩定的時步，當坡度增加時，不穩定之波長的部分並無改變，只有穩定之波長的部分其 $|\lambda|$ 值有些微增加。圖 2-15 為顯式積分在相同坡度 ($\Delta G=0.3$) 不同山高的結果，由圖(a) 時間步長 0.8 秒，呈現山高為 2000 m 時為穩定的型態，然而當山高增加為 3000 m 和 4000 m 時，在垂直短波約為 2 倍網距已引發出不穩定；圖(b) 時間步長 0.9 秒中也有想同的情形，其地形高度增加時不穩定之波長的範圍也隨之擴大，但在穩定之波長中其 $|\lambda|$ 值並無像圖 2-14 一樣，有增加的趨勢。因此，由這兩圖更明顯了解，顯式積分方法只對地形高度的差異而時間步長才有所不同。

圖 2-16 為垂直隱式積分方法在相同山高 (2000 m) 不同坡度的結果，在時間步長 9 秒，得知地形坡度愈陡時，在圖 2-7 (a) 中的 $|\lambda|$ 值只在 20 倍網距的垂直波長最大，但在圖 2-16 中顯示較大之 $|\lambda|$ 值可延伸至垂直波長約 6 倍網距範圍，然而當坡度為 $\Delta G=0.3$ 時，不只在圖 2-7 (b) 中的垂直向長波為不穩定，而且在垂直波長約 8 倍垂直網距、水平波長約 4 倍網距的部分也將引發不穩定。此現象以坡度 $\Delta G=0.3$ ，由圖 2-11 中選取時間步長 7.5 秒和 8.5 秒的結果，並與圖 2-7 做比較，當波動不穩定時，主要在垂直短波的部分先引發，然後才為垂直長波的部分。圖 2-18 為垂直隱式積分方法在相同坡度 ($\Delta G=0.3$) 不同山高的結果，當地形高度增

加時，不穩定波長的範圍將隨之減少，與圖 2-16 結果相反。

進一步分析水平網距 300 m 的情形。圖 2-19 及 2-20 分別為顯式積分方法在相同山高 (2000 m) 不同坡度和相同坡度 ($\Delta G = 0.3$) 不同山高的結果。此與水平網距 3000 m 一樣 (圖 2-14 及 2-15)，在不同坡度狀態下 (圖 2-19) 其不穩定之短波範圍並無改變；雖然而在不同高度的情形時 (圖 2-20) 雖也呈現出不穩定之短波有擴大的現象，但主要以 x 方向波長增加為多。

圖 2-21 及 2-22 分別為垂直隱式積分方法在相同山高 (2000 m) 不同坡度與相同坡度 ($\Delta G = 0.3$) 不同山高的結果。在圖 2-21 的條件下，雖然圖 2-13 (a) 的結果呈現出與坡度無關聯，但從波長之分佈圖得知當地形坡度增加時，圖(b) 在時間步長 1 秒中，不穩定波長之範圍是有擴大的情形，而且在穩定型態下，其時間步長為 0.9 秒 (圖 2-21 a) 也使 $|\lambda|$ 值趨向垂直短波增加，此結果雖然與圖 2-13 (a) 有些不同，但變化程度不像水平網距 3000 m 時那樣顯著。而在圖 2-22 中，就呈現出與圖 2-13 (b) 結果一樣其，地形高度對穩定度值無影響，此圖的 $|\lambda|$ 值對波長的分佈，在高度增加時並無明顯改變。此兩圖能輔助圖 2-13 的結果，其水平網距愈小時，地形對穩定度幾乎無影響。

2-7 討論

在沒有地形時， ζ 座標即為垂直高度 z 座標，由分析結果得知，對於一高解析的垂直網格距離，與垂直網距相差很大的水平網距時，使用垂直隱式方法時，能增大時間步長，不需用太小的時步，就能滿足 CFL 條件。不過，有地形時，當地形坡度愈陡峭，較粗的水平網距就不能使用比較大值的時間步長；相對地，與垂直網距相當的水平網格距離，雖它可使用的時間步長不大，但不受地形坡度的影

響，仍可使用在無地形情況下之時步滿足 CFL 條件。

當分析結果不能滿足線性穩定，差分格式一定不可能是穩定的；但如果得到穩定結果，不一定能保證非線性數值方程之計算是穩定的。因此，對於：「較細的水平網格不受地形坡度影響」，此線性穩定度分析出來的結論不一定是正確。因此本文將進一步利用非線性模式模擬作驗證、比較，並分析非線性效應對於兩數值計算方法之穩定度是否與線性穩定度結果一致。



第三章 模式的數值方法

3-1 座標設定

本研究中使用由許榮武博士與商文義博士所共同發展的台大-普渡非靜力可壓縮模式（NTU-Purdue nonhydrostatic Model；Hsu and Sun 2001），其垂直坐標是採用跟隨地形的 σ 座標：

$$\sigma = \frac{p_0(z) - p_0(z_{top})}{p_0(z_{surface}) - p_0(z_{top})} = \frac{p_0(z) - p_0(z_{top})}{p^*} \quad (3.1)$$

其中 p_0 是參考大氣的壓力，僅為高度之函數。雖然是由壓力計算出來的，但因為此壓力為參考態壓力，不隨時間而變，所以嚴格來說此垂直座標是一種 $\sigma-z$ 座標。

3-2 預報及診斷方程

模式中的預報量分別是風速（ u, v, w ）、密度（ ρ ）、相當位溫（ θ_e ）及總體水含量（ q_w ），其預報方程以三維表式如下：

動量方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p'}{\partial x} + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)_z \frac{\partial p'}{\partial \sigma} \right] = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - \sigma \frac{\partial u}{\partial \sigma} + fv - bw + D_u \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p'}{\partial y} + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)_z \frac{\partial p'}{\partial \sigma} \right] = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - \sigma \frac{\partial v}{\partial \sigma} - fu + D_v \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial p'}{\partial \sigma} = -u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - \sigma \frac{\partial w}{\partial \sigma} - \frac{\rho - \rho_0}{\rho} + bu + D_w \quad (3.4)$$

在二維方程中，為 (3.2)式 ~ (3.4)式不考慮 y 方向的變化，不過 v 風場的動量方程仍有加入數值計算裡，只是 v 風場隨時間的局部變化只與平流場和科氏力有關。其中，科氏參數為 $f = 2\Omega \sin \phi$ 、 $b = 2\Omega \cos \phi$ ， D 則是次網格擴散作用項。對於氣壓擾動場 p' ，如果是在乾大氣的情形，則以下面的診斷式來計算：

$$p' = \left(\frac{R_d}{p_{00}^{R_d/c_p}} \rho \theta \right)^{c_p/c_v} - p_0(z) \quad (3.5)$$

而濕大氣則是以下式關係，用牛頓法 (Newton's method) 求解：

$$p' = \text{function of } (\rho, \theta_e, q_w)$$

連續方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)_z \frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)_z \frac{\partial v}{\partial \sigma} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right] = -u \frac{\partial \rho}{\partial x} - v \frac{\partial \rho}{\partial y} - \dot{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \quad (3.6)$$

(3.6)式方法表示為密度場是以平流項及輻散項分開之方法求取，在二維模式中是採用此方式。不過在三維模式裡，有選用另一程方式做計算

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)_z \frac{\partial \rho u}{\partial \sigma} \right] + \left[\frac{\partial \rho v}{\partial y} + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)_z \frac{\partial \rho v}{\partial \sigma} \right] + \left[\frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right] = 0 \quad (3.7)$$

此 (3.7)式是以通量型式之方法求解密度值，但為了對應二維模式的架構，則採用 (3.6)式的方法做數值模擬。之後由連續方程診斷得到的氣壓擾動場，用以計算動量方程中的氣壓梯度力。

熱力與水量保守方程：

$$\frac{\partial \theta_e}{\partial t} = -u \frac{\partial \theta_e}{\partial x} - v \frac{\partial \theta_e}{\partial y} - \dot{\sigma} \frac{\partial \theta_e}{\partial \sigma} + D_{\theta_e} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial q_w}{\partial t} = -u \frac{\partial q_w}{\partial x} - v \frac{\partial q_w}{\partial y} - \dot{\sigma} \frac{\partial q_w}{\partial \sigma} + D_{q_w} \quad (3.9)$$

其中

$$\text{相當位溫： } \theta_e = \theta + \left(\frac{\theta}{T}\right) \frac{L_v}{c_p} q_v$$

$$\text{總體水含量： } q_w = q_v + q_l$$

q_v 及 q_l 分別是代表水氣和液態水的混合比。

$$\sigma \text{ 的時間變化率： } \dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} w + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_z u + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_z v$$

亂流動能方程：

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i \bar{E}) - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + \frac{g}{\theta_0} \overline{w' \theta'_v} - \frac{\partial}{\partial x_i} [\overline{u'_i (e' + p'/\rho_0)}] - \varepsilon \quad (3.10)$$

其中， i 和 j 代表單位向量， ε 為亂流動能的消耗項。

3-3 網格架構

模式網格架構採用適合於大氣層化作用比地轉效應還重要時的 Arakawa C 交錯網格 (staggered grid)。所有的熱力變數 (θ_e 、 q_w 、 ρ) 均在相同網格點上，但和水平風場 (u 、 v) 交錯於同一水平面，而垂直風場 (w) 和亂流動能 (TKE) 則除了在最底層外，其餘均與熱力變數及水平風場交錯於同一垂直方向，這種配置對輻合場與垂直速度場的精確計算較為有利，詳見圖 3-1。然而，在三維模式中， u 和 v 在水平上是交錯配置的，不過此模式的二維版本中，對於不考慮的 v 場則設定和 u 場在同一位置上，為圖 2-2 之配置。

模式的網格間距在各方向均可採用伸展網格 (stretched grid)。伸展方式以垂直方向說明：近地表處某高度內使用較高解析度，靠近上邊界某高度內使用較低解

析度，而它們之間的範圍使垂直網格距離平滑地改變。即若垂直座標第 1 至 k_1 點格距為 Δz_1 ，第 k_2 點至底部格距為 Δz_2 ，其中 $\Delta z_2 > \Delta z_1$ ，則 k_1 至 k_2 之間第 k 點的格距定義為：

$$\Delta z(k) = \Delta z_1 + (\Delta z_2 - \Delta z_1) \frac{\tanh\left(2a \frac{k_2 - k}{k_2 - k_1} - a\right) - \tanh(-a)}{\tanh(a) - \tanh(-a)} \quad (3.11)$$

其中 a 為給定常數，可以改變格距變化和和緩程度。在水平方向的延展方式與垂直方向相同，差別僅在於水平積分域的兩側邊界可採用延展網格，垂直積分域只有上邊界才可使用延展網格。

3-4 有限差分法

模式在處理重力波和聲波時，會由於計算方式的特性而有所差異，當我們計算聲波運動時，因需要有很短的時間間距來處理聲波問題，但相對於其它較緩慢的運動，若均以最小的時步來做計算，則會大幅增加計算時間，降低模式的計算效率，因此為了節省計算時間，且避免對模式中物理過程運作有太大的影響，可選取採用時間分離法 (time-splitting technique; Gadd 1978)，將時間積分以其個別的時間尺度分成三個階段 (如圖 3-2)：

3-4-1 平流階段

(3.2)式至(3.10)式中的平流項以向前差 (forward) 方式積分，計算時距為 Δt_a 。

由平流項改變預報變數為：

$$\Delta \psi_{adv} = \Delta t_a \left(-u \frac{\partial \psi}{\partial x} - v \frac{\partial \psi}{\partial y} - \sigma \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \right) \quad (3.12)$$

ψ 可以是任何預報變數。平流項造成的預報量變化被儲存起來，在高頻波動階段再分為幾段累加。在三維模式中，平流格式有 Crowley (1968) 二階方法、Sun (1993) 四階方法及半拉格朗日法，不過在二維版本裡無半拉格朗日法。本研究為了統一，與線性穩定度設定一致，無採用時間分離法，即 $\Delta t : \Delta t_a = 1 : 1$ ，而水平與垂直平流計算均採用 Crowley (1968) 二階格式，致於此方法已在第 2-3 章節說明。

3-4-2 高頻率波階段

這個階段主要是處理方程式產生的高頻率運動（聲波），它們是以最小計算時間步長 Δt 積分。格式為 forward-backward 方式之顯式積分及垂直隱式積分方法，對於此兩方法細節已在第 2-4 章說明。



3-4-3 擴散階段

(3.2) ~ (3.4) 式及 (3.8) 和 (3.9) 式中擴散項的時間差分在水平方向使用前差法，垂直方向使用隱式法；空間差分均使用中差法。亂流參數化格式依 Deardorff (1980)，使用渦流係數關係來計算半守恆量的通量，並假設次網格渦流係數與平均次網格亂流動能 (\bar{E}) 成正比，其預報方程為 (3.10) 式，為 1.5 階封閉格式。

3-5 邊界條件

積分域的水平方向側邊界可以使用開放性或週期性邊界條件，在上邊界則設為開放性邊界條件，但為避免聲波或重力波反射，可設定一吸收層，其阻尼係數在吸收層內由頂端向內部線性減少至 0。致於地表可設定為無摩擦 (free-slip) 或無

流動下邊界條件。無流動下邊界條件僅設定風速為 0，而無摩擦下邊界條件為：

$$\dot{\sigma} = u \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)_z + v \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)_z + w \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0, \quad \text{at } \sigma = 1 \quad (3.13)$$

這表示下邊界的動量方程彼此想關。因為在地表的垂直氣壓梯度 $\frac{\partial p'}{\partial \sigma}$ 無法以中差法求得，僅能以單向差分計算，所以動量方程 (3.2) 式至 (3.4) 式的氣壓梯度力項在下邊界會有很大誤差。為解決此無摩擦下邊界條件的問題，模式在下邊界使用修正過的水平動量方程，而下邊界的垂直速度則以 (3.13) 式診斷得到。

動量方程在高頻波動階段計算的項目為：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p'}{\partial x} + \sigma_x \frac{\partial p'}{\partial \sigma} \right] \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p'}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial p'}{\partial \sigma} \right] \\ \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\sigma_z}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial \sigma} - \frac{\rho'}{\rho} g \\ \dot{\sigma} = \sigma_x u + \sigma_y v + \sigma_z w = 0 \end{cases}$$

其中， $\sigma_x = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)_z$ 、 $\sigma_y = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)_z$ 及 $\sigma_z = \frac{\partial \sigma}{\partial z}$ ，將第三式分別與第一、二式合併以

消去 $\frac{\partial p'}{\partial \sigma}$ 項，再將第四式診斷的 w 代入

$$\text{得到} \begin{cases} (\sigma_x^2 + \sigma_z^2) \frac{\partial u}{\partial t} + \sigma_x \sigma_y \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\sigma_z^2}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \sigma_x \sigma_z \frac{\rho'}{\rho} g \\ (\sigma_y^2 + \sigma_z^2) \frac{\partial v}{\partial t} + \sigma_x \sigma_y \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\sigma_z^2}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \sigma_y \sigma_z \frac{\rho'}{\rho} g \end{cases}$$

如此，可解得使用無摩擦下邊界條件時在地表的水平動量方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\sigma_y^2 + \sigma_z^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} \right) + \frac{\sigma_x \sigma_z}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2} \left(\frac{\rho'}{\rho} g \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\sigma_x^2 + \sigma_z^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} \right) + \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{\sigma_y \sigma_z}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2} \left(\frac{\rho'}{\rho} g \right)$$

這兩式看起來很複雜，但事實上氣壓梯力計算僅牽涉到水平差分，可使用較精確的中差法，且各項係數均為常數，可在模式初始化時即儲存於記憶體中。



第四章 二維數值模擬與結果

為了單純探討顯式與垂直隱式兩種數值積分方法之差異，以二維數值模式進行重力波與山岳波兩項實驗，對於每項實驗均比較顯式 (VE) 與垂直隱式 (VI) 兩方法的模擬結果，除了在垂直方向積分方法不同之外，其他所有的設定完全相同。為了方便解釋兩方法的差異性和簡化問題，本研究完全未考慮物理參數化過程 (如雲物理、輻射與地表摩擦)，亦未考慮科氏力與擴散過程。初始背景場假設初始位溫隨高度線性增加，令大氣靜力穩定度 N^2 (Brunt-Väisälä frequency) 為一固定值 (10^{-4} s^{-2})。

兩側邊界及上邊界均採用開放性的邊界條件，而網格設定則令水平及垂直方向皆使用均勻網格。在水平方向上，網格距離則依實驗所需，主要分別取 300 m、1500 m 及 3000 m。然而網格數取 1000 點，使用大範圍積分域是避免側邊界可能帶來的影響。在垂直方向上，網格距離固定為 300 m，共有 60 個網格點，故模式垂直範圍約 18 公里，為了防止重力波反射影響模擬結果，故在上方 30 層 (約 9 公里至 18 公里處) 設為吸收層，以牛頓阻尼(Newtonian damping) 方式回復至初始條件。

模擬時間積分中，平流項之時間步長與計算高頻波的時間步長一樣，即未使用時間分離 (time-splitting) 技巧。至於為了更清楚地比較顯式與垂直隱式兩種數值積分方法的結果，積分過程中完全不加入任何的空間數值勻滑 (smooth) 處理，精確地了解此兩方法之準確性與穩定性。各模擬個案之共同設定列於表 4-1。最後，關於垂直隱式方法其垂直方向所使用的隱式權重，設為一固定值 $\alpha = 0.6$ ，此選取的權重比梯型法 ($\alpha = 0.5$) 之隱式積分方法多 10%。

對於地形的設定，採用單一鐘形山岳，其高度為：

$$h(x) = h_{\max} \left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4-1)$$

其中， h_{\max} 為山頂高度， a 為半山寬（山頂高度一半處的水平半徑）。地形中心皆放置在模式積分域之中央，即水平網格數第 500 點之處。實驗中地形高度與半山寬之設計，將在實驗設計之節章中述說。然而，往後為了簡便說明，對於水平網距及地形個案之設定皆以表 4-2 代碼表示之。

4-1 重力波實驗

4-1-1 實驗設計與初始條件

本實驗中是設定在無均勻風場的環境情形下，給予一正的位溫擾動（單一熱胞），熱胞所產生的浮力使空氣上升，以致在穩定的環境下引發重力波。對於此實驗，將分別探討無地形及有地形之模擬。首先陳述無地形的結果，之後分析放置地形結果，地形為高度 500 m，半山寬分別為 10 km 和 5 km 兩種情形。

初始熱胞放置位置說明如下：熱胞垂直中心離地面高度 4500 m，而其水平中心在無地形時，位於積分域中央；有地形時，則放置在地形中心位置之左方 15 km 處。至於初始熱胞的水平及垂直半徑，皆設為網格距離之 7 倍。因此，垂直方向上因解析度為 300 m 其半徑固定為 2.1 km，而水平方向半徑則依水平網距大小而不同，假設水平網距為 3000 m 初始熱胞水平半徑為 21 km；水平網距為 300 m 時初始熱胞水平半徑與垂直方向一樣，為 2.1 km，這些熱胞之形狀、結構不相同，以無地形之環境設定圖示，分佈情形分別示於圖 4-1 及圖 4-2，初始熱胞之設定亦同時列於表 4-3。

4-1-2 無地形的模擬結果

圖 4-3 及圖 4-4 分別為水平網距 3000 m 及 300 m 個案積分 3 小時後位溫擾動的結果，由此可看出重力波由原始熱胞中的位置向外傳送，並且呈現出對稱的結構。至於在圖中高度 9 公里以上之處擾動量較弱，是由於人工給予上方吸收層之因素所造成。在 H0_DX3000 個案中（圖 4-3），由於初始熱胞之水平尺度較 H0_DX300 個案（圖 4-4）為大，長波較為顯著，然而我們熟知內重力波具頻散 (dispersive) 性質，長波速度較短波為快，因此長波與短波很快就區隔開來。圖 4-3 顯示出非常平滑的波動結構，雖然得到 a 與 b 兩子圖所使用的數值方法不同，但模擬結果幾乎完全相同，且都是穩定的；至於圖 4-4，初始熱胞水平較小時，引發重力波之尺度也較小，但比較 a 與 b 兩子圖方法所得之結果仍是一致的。由此可見在此個案中兩數值方法都能得到正確的結果。

由使用不同水平網距的個案結果中，得出顯式與垂直隱式可使用之最大時間步長示於表 4-4。在顯式格式中，使用 DX3000 個案時，因受到垂直網距的影響，此時間步長只能為 0.86 秒（圖 4-3 a），這與使用 DX1500 個案之時間步長的差異非常小，雖說水平網格距離增大 1 倍，但能取用的時間步長只增加 0.01 秒，因此從表 4-4 顯式方法之結果呈現出水平網距愈大時，愈明顯看出時間步長受到限制，需用較細的時步做模擬。然而，在垂直隱式格式中，因垂直解析度與 CFL 條件限制無關聯，對於使用 DX3000 個案之時間步長可增致 8.8 秒而且仍得出穩定的結果（圖 4-3 b），其 DX3000 個案與 DX1500 個案之時間步長相差 2 倍多，明顯表現出水平網距愈大可有效率地增大時間步長之優勢；不過對於 DX300 個案，因水平方向仍會受 CFL 條件限制，其時間步長只能取致 0.86 秒（圖 4-4 b），與顯式方法的時間步長 0.61 秒（圖 4-4 a）相差不大。

各網距依表 4-4 所示的時間步長，比較它們模擬所花費的計算時間，示於圖 4-5。由此圖得出各網距個案之垂直隱式皆比顯式所花費的時間為少，呈現出垂直隱式方法之效率性，尤其是 DX3000 個案中，垂直隱式方法所消耗的時間為顯式方法之九分之一。至於 DX300 個案中，雖然兩者計算時間差異不大，無明顯地增加時間效率，但隱式模擬的結果與顯式相當一致，皆為穩定的狀態。

4-1-3 有加入地形的模擬結果

圖 4-6 及圖 4-7 為模式中加入一地形，為山高 500 m、半山寬 10 km 的環境下，分別為使用水平網距 3000 m 及 300 m 積分 3 小時後的結果。由此兩圖中得知雖重力波向外傳送時，其結構在地形周圍呈現些微的不對稱（以 DX3000 個案較明顯），但模擬的結果與無地形的情形一致，其垂直隱式和顯式的模擬結果幾乎相同。本研究以圖 4-7 的 DX300 個案，進一步探討加入的地形變得比較陡時的情形，因此設定半山寬減至 5 km，其結果示於圖 4-8。由圖 4-8 看出即使阻礙的地形變為比較陡峭時，對於重力波傳送的模擬結果與圖 4-7 相似，並無明顯的差異，垂直隱式使用最大之時步時結果仍為穩定。

不過，由於受到地形高度 500 m 影響，DX3000 個案及 DX1500 個案之顯式方法其最大時步需減至 0.85 秒及 0.84 秒，雖說與無地形個案之時間步長（表 4-4）只差 0.01 秒，但只要不滿足 CFL 條件限制，模擬結果將會不穩定。對於垂直隱式方法模擬中，此時間步長仍可用無地形環境下之最大時步而得到穩定的結果。由 H500_A10 個案得出各水平網距其顯式與垂直隱式可使用之最大時步長如表 4-5 所示。

從圖 4-6 至圖 4-8 中了解在模擬重力波傳送的實驗時，因只給予一開始的正位

溫擾動，其易造成不穩定之短波的部分可能已先消散，所以結果皆表現出垂式隱式方法優於顯式。是故，本研究進一步以山岳波實驗作測試，其風速場遇到地形持續激發擾動場的情形下，對於顯式及垂直隱式的結果是否有不一樣的情形。在山岳波實驗中所取用的最大時間步長和重力波個案中的一致（表 4-4 及表 4-5），以了解在山岳波模擬時，是否可使用此最大時間步長得到穩定的結果。

4-2 線性山岳波實驗

4-2-1 實驗設計與初始條件

本實驗採用單一鐘形山岳地形，其高度如(4-1)式所示。地形中心位於積分域中央，環境風場設定為均勻風速 10 m s^{-1} 。為了先分析線性山岳波的結果，在本章個案皆使用 10 m 高的地形，以濾除非線性效應，避免增加模擬結果之複雜性。

當地形寬度遠大於浮揚作用的波長時，垂直加速度項目相對於浮力項而言較不重要，此時的山岳波型態，屬於 Queney (1948) 所定義的 hydrostatic regime；然而當地形寬度變窄時，山岳波之垂直速度的數量值將相當於水平速度，靜力近似假設不再適用，此非靜力效應變為較明顯，為 nonhydrostatic regime。Gill (1982) 以山的水平尺度區分波動型態，當半山寬 $a > \bar{U}/N$ 時，為靜力波動範籌；當 $a \sim \bar{U}/N$ 時，為非靜力波動範籌； \bar{U} 為環境風速及 N 為靜力穩定度。本實驗之半山寬分別取 10 km 及 1 km，以了解山岳波為靜力型態和非靜力型態時，兩數值方法模擬的結果差異。

4-2-2 半山寬 10 km 的模擬結果

圖 4-9 及圖 4-10 為半山寬 10 公里，分別使用水平網距 3000 m 及 1500 m 的垂

直速度分佈。兩圖都完整地表現出氣流經地形時，在山後所激發的山岳波之現象，模擬之垂直波長與理論值 $2\pi\bar{U}/N$ 的 6.28 km 一致。波動的結構是垂直疊加並無隨高度往下游發展的情形，此種山岳波型式與 Gill (1982) 分析討論中之靜力山岳波相似。至於垂直穩式方法積分 DX3000 個案和 DX1500 個案時，分別皆可使用表 4-4 中之最大時間步長 8.8 秒 (圖 4-9 b) 及 4.3 秒 (圖 4-10 b)，其得到的模擬結果與顯式幾乎一致且為穩定的。此兩個案的垂直隱式之效率仍優於顯式方法。

圖 4-11 為使用水平網距 300 m 的結果，圖(a)為顯式方法的結果，顯示出和 DX3000 個案與 DX1500 個案中的山岳波現象一致，不過 DX300 個案之垂直隱式方法，使用表 4-4 中最大時間步長 0.86 秒時 (圖 4-11 b)，在山後 60 至 70 公里處，模擬結果呈現出不穩定的波動，而使數值解不正確，此情形不論積分域 (domain) 大小為何，皆是如此。然而，將時間步長減少至 0.61 秒時 (與顯式方法之時間步長一樣)，得到垂直隱式的模擬結果為穩定的形態，並與顯式結果相當一致 (圖 4-11 a 及 c)。

雖然垂直隱式使用的時間步長與顯式一樣，但垂直隱式方法在計算過程時，需運算矩陣才可進一步求出解 (此在第二章已有說明)，所以使得模式每積分計算一次時，所花費的計算時間會比顯式方法多一些，變為垂直隱式需花費的時間比較多。由圖 4-12 其花費計算時間之比較，看出使用 H10_A10_DX300 個案之線性山岳波實驗中垂直隱式方法多出的計算時間 (大約 150 秒)，比重力波實驗中垂直隱式少支出的計算時間 (大約 100 秒) 為多，因此，使用較高解析度之水平網距 300 m 模擬線性山岳波實驗效率不佳，因為垂直隱式花費的計算時間變得比顯式方法多，其時間效率性反而變差，對於隱式運算花費時間比顯式少的優勢已不適用。

4-2-3 半山寬 1 km 的模擬結果

此實驗以 300 m 的網距作模擬分析，主要為了解析到山岳波的架構，故需用較細的水平解析度，其次用此網距探討非靜力山岳波的結果。由圖 4-13 (a)及圖 4-14 (a) 為顯式方法的模擬結果，由圖可看出山後引發之山岳波的垂直速度和水平速度的數量值一樣，即氣流通過鐘形山的時間尺度相當於山岳波往垂直方向傳遞的時間尺度，表現出為非靜力波動。由於地形水平尺度小，山岳波的結構是隨高度往下游發展，並非如靜力山岳波為垂直疊加。然而，因給予的初始風場為均勻的，所以在剛開始積分時，氣流過山迅速引發衝擊 (shock)，其中包含了聲波與重力波的調整過程，由於圖 4-14 (a)僅是第 1 小時的結果，仍可見到對應於此初始衝擊的殘留擾動隨平均風移動至 $x = 36$ km 處，而這微弱擾動之後即迅速完全消散。雖圖中所顯示的是積分 1 小時後的結果，但山岳波已完整發展，此垂直波長與理論值 6.28 km 非常接近。

圖 4-13 (b)及圖 4-14 (b)為垂直隱式方法，使用表 4-4 中最大時間步長 0.86 秒的模擬結果，由圖中可明顯看出在地形周圍呈現非常不穩定之擾動，嚴重地擾亂山岳波的結構。在此，也進一步將時間步長改用與顯式方法相同的時間步長 (0.61 秒) 作模擬，示於圖 4-13 (c)及圖 4-14 (c)，只是，模擬結果卻無法跟 A10_DX300 個案一樣是穩定的型態，在山周圍也顯現出不穩定波動，使得模式結果不正確。

以水平網距 300 m 分別模擬半山寬 10 km 及 1 km 的山岳波型態，在 10 km 時，地形水平尺度較大，其山岳波之垂直速度比水平速度小許多，為靜力波動型態；然而當半山寬變為 1 km 時，因水平尺度變小、地形坡度變大，氣流遇地形所激發山岳波將變強些，並且使山岳波之垂直速度與水平速度相當，為非靜力波動型態。對於顯式積分方法而言，儘管因地形尺度變小而使山岳波結構有所不

同，但此兩個案模擬出的結果皆依然完整呈現山岳波結構；反之，對於垂直隱式方法，因地形尺度變小造成山岳波之水平風速與垂直風速相當，這使 A1_DX300 個案中用已沒有效率的時間步長 (0.61 秒) 模擬時，得出的結果仍為不穩定。

4-3 非線性山岳波實驗

4-3-1 實驗設計與初始條件

本實驗採用單一鐘形山岳地形，地形高度也如(4-1)式所示，地形中心位於積分域中央；環境風場設定為均勻風速場 ($\bar{U} = 10 \text{ m s}^{-1}$)。隨著地形增高，所激發的山岳波強度越強，此時非線性效應已不可忽略。山岳波會因為非線性作用而改變波動結構，甚至出現不穩定的對流、水躍 (hydraulic jump) 現象。Smolarkiewicz and Rotunno (1989) 發現當 Froude number 小於 0.5 之後，氣流沒有足夠能量越過地形，開始往地形兩側作繞山運動，甚至在山背風處形成回流；過山後的氣流，使非線性平流傳送到背風處將引發很強的向下運動，此強大的下沉運動把高層的空氣往下帶進而造成低層位溫可能大於上層位溫的情形，導致大氣變得不穩定，然而底層因繞山運動形成的渦旋將使下游的質量集中，由這兩項機制形成很強的上升運動，此強上升運動就稱為水躍現象。

為了進一步分析非線性所帶來的影響，因此本節實驗的地形高度皆設定為 500 m。至於半山寬的設定則分別取 10 km 及 5 km，以了解地形尺度變小、坡度變陡峭時，對非線性山岳波會有何影響。

4-3-2 半山寬為 10 km 的模擬結果

圖 4-15 為山高 500 m、半山寬 10 km，使用水平網距 3000 m (H500_A10

_DX3000 個案) 的垂直速度分佈。由圖(a)之顯式方法模擬的結果可看出氣流經地形所激發的山岳波，因地形高度增高、坡度變陡，垂直速度最大值可達到 0.6 m s^{-1} ，與線性山岳波實驗最大垂直速度值 (0.01 m s^{-1}) 相比，山岳波強度明顯變強許多，波動基本型態也略為改變，使得非線性效應不可忽視。在此環境下，垂直隱式方法採用表 4.5 中最大時間步長 8.8 秒模擬時，結果呈現明顯錯誤的訊息，尤其在地形上方周圍的部分 (圖 4-15 b)，此與 H10_A10 個案之線性山岳波實驗的結果 (圖 4-9) 不同。不過，當時間步長減至 3 秒時，其結果 (圖 4-15 c) 與顯式 (圖 4-35 a) 結果相似，但近地表處產生些微擾動。

水平網距為 1500 m 的模擬結果示於圖 4-16。此個案也顯示垂直隱式方法，使用表 4-5 最大時間步長 4.3 秒時會得到不穩定的結果；由模擬第 2 小時結果可明顯看出地形周圍之不穩定擾動，使得山岳波結構有問題 (圖 4-16 b)；然而，將時間步長減小至與顯式的時步一樣時 (為 0.84 秒)，模擬的結果依然在山岳波結構裡呈現不穩定的擾動 (圖 4-16 c)，與 DX3000 個案不同。

比較 DX3000 和 DX1500 個案，線性與非線性實驗模擬計算所花費的時間，示於 4-17 及圖 4-18。在 DX3000 個案裡，雖然垂直隱式模擬計算非線性山岳波實驗之時間，比線性山岳波實驗大約多出 2 倍；雖然花費時間變得比較多，效率性已不再很高，但仍比顯式積分少一半的時間，而且模擬的結果可與顯式方法大致相同。不過，在 DX1500 個案中，就不如 DX3000 個案；由圖 4-18 可看出線性與非線性山岳波實驗，其顯式與垂直隱式計算時間上有明顯差異，在非線性山岳波實驗中，使用和顯式一樣的時間步長時，對垂直隱式方法而言是無效率。只是用此很細且無效率的時間步長模擬時，得到的結果依然為不穩定，表示水平網距已不適用 1500 m 模擬。

由 H10_A10_DX300 個案的線性山岳波實驗，已得知垂直隱式之時間步長選用與顯式一樣時，其兩者計算方法的結果才可大致相同。因此，本章節非線性山岳波實驗中，DX300 個案所取用的時間步長直接設定為 0.61 秒，其結果如圖 4-19。由圖 4-19 (a)可知顯式積分方法的模擬結果，依然與 DX3000 個案和 DX1500 個案之顯式結果一致，呈現穩定的型態；至於在山後 $x = 60 \text{ km}$ 處可看到擾動現象，是因初始均勻氣流過山迅速引發衝擊所造成。由於圖中僅是第 2 小時的結果，並且水平網格細，較能解析到初始衝擊的殘留擾動，所以這擾動現象仍可在圖中顯示出，不過這殘留擾動之後即迅速完全消散。然而，對於垂直隱式方法而言，在模擬第 1 小時半 (圖 4-19 b) 時，山岳波的結構裡有不穩定波動產生，到了第 2 小時 (圖 4-19 c)，模擬結果呈現強烈的不穩定，而且為模式已快無法積分下去的形態，此計算模擬中所得到的不穩定擾動情形比 DX1500 個案更加明顯。

從 DX3000 個案到 DX300 個案的結果分析可知，用比較高解析度的水平網格距離，即水平網距愈接近垂直網距時，對於垂直隱式積分模擬愈容易呈現不穩定的結果。此非線性山岳波的實驗不能和重力波實驗一樣，垂直隱式方法所花費的時間比顯式方法少，並且兩者計算模擬結果幾乎相同，為穩定的結果。

4-3-3 半山寬為 5 km 的模擬結果

本節所討論的兩個案為 H500_A5_DX1500 與 H500_A5_DX300 個案，分別示於圖 4-20 及圖 4-22，並與前一節比較。實驗設定山高保持一樣，但半山寬減為 5 公里，因此地形坡度增加了一倍。

比較圖 4-20 (a)與 4-16 (a)，當坡度增加時，山岳波的強度也倍增，最大垂直速度由前一節的 0.6 m s^{-1} 增加至 1.2 m s^{-1} ，山岳波的水平幅度也因地形變狹窄而減

小。此時，山岳波漸脫離線性結構，近地表之最大下降運動中心已由圖 4-16 (a)離地一公里高，變為圖 4-20 (a)的中心貼近地表，並且 6 ~ 9 公里高處的下陷運動區也分裂成兩個中心。然而非線性效果愈明顯，似乎垂直隱式計算方法的表現也愈差，比較圖 4-20 (b)與 4-16 (b)，垂直隱式方法使用同樣的積分時步 (0.86 秒) 所得的結果，顯示坡度較大時，雜訊十分明顯。這現象即使時間步長減小為 0.1 秒做模擬，如圖 4-20 (c) 所示，此不穩定擾動依然存在著。圖 4-21 顯示出圖 4-20 裡的 3 個實驗所花費的計算時間，由此圖看出，垂直隱式之時間步長使用 0.1 秒時，所需運算的時間比時步 0.84 秒之時間足足多了六千多秒，表現出它是個非常沒有效率的時步，只是，垂直隱式方法使用如此沒有效率的時間步長，但模擬出來的結果仍不能將非線性不穩定擾動消除，因此對於此個案而言垂直隱式積分方法無法模擬。



圖 4-22 為水平網距 300 m 的結果。圖中顯式方法的結果與 DX1500 個案一樣，是穩定的型態，而且由於水平網距的解析度變高，呈現出的山岳波結構更完善。然而，用垂直穩式方法時，模擬致 1 小時半已引發非常明顯的不穩定擾動，使模式無法計算。

4-3-4 不同坡度之比較

對於半山寬 10 km 及 5 km 的比較，本章節進一步展示顯式和垂直隱式模擬結果相減，得到兩者計算方法的差異分佈，探討垂直隱式方法所造成的不穩定擾動，隨著地形坡度增加時的影響程度。

圖 4-23 ~ 4-25 為 DX1500 個案，顯式與垂直隱式積分之時間步長皆取 0.84 秒，模擬 3 小時後兩者計算方法結果所呈現的差異。先由垂直速度場分佈情形了解，

在 H500_A10 個案 (圖 4-23 a)，水平位置由地形中心至 $x = -15$ 公里範圍，高 5、6 公里處，顯示此差異分佈變化最大，其值大約為 $-0.2 \sim 0.2 \text{ (m s}^{-1}\text{)}$ 之間，看出由垂直隱式積分所造成的不穩定波動；然而在 $x = 0$ 的位置 (即地形中心) 上方周圍，也可看出一個一個由值為 0 的黑色等值線圍成小圈型，雖然所呈現的數量級較小，大約界在 $-0.05 \sim 0.05 \text{ (m s}^{-1}\text{)}$ 之間，不過仍表現出不穩定的型態。致於 H500_A5 個案中 (圖 4-23 b)，此與 H500_A10 個案一樣在地形周圍的部分都可看出不穩定擾動，但此個案更明顯由圖中看出差異，在 $x = 0$ 處上方，差異值可達 $\pm 0.5 \text{ m s}^{-1}$ ，在 $x = -15$ 公里、高 6 公里周圍，差異值也可至 $\pm 0.8 \text{ m s}^{-1}$ 以上，比 H500_A10 個案的結果多 4 倍，強烈地呈現出垂直隱式運算時所帶來的誤差。

由 H500_A10 個案之水平風場情形了解 (圖 4-24 a)，在 $x = -15$ 公里，高度大約 5 公里的範圍，可看出不穩定已產生，不過和 H500_A5 個案 (圖 4-24 b) 相比，誤差值就顯得比較小，且變化比較不明顯；然而在 $x = 0$ 處上方周圍，H500_A5 個案也明顯看出不穩定擾動存在。圖 4-25 為氣壓擾動場的情形，由此兩子圖也表示出 H500_A5 個案 (圖 4-25 b) 顯示的誤差比 H500_A10 個案 (圖 4-25 a) 顯著，主要在地形周圍及高 3~6 公里的部分，此結果表示計算氣壓梯度力時會有問題，使垂直隱式積分已無法運算。由上述各參數場皆表現出當地形坡度增加時易不穩定。

圖 4-26~4-28 為 DX300 個案，顯式與垂直隱式積分之時間步長皆取 0.61 秒，兩者計算方法結果所呈現的差異。由圖 4-22 得知 H500_A5_DX300 個案中垂直隱式模擬 1 小時 30 分後已明顯看出不穩定擾動，因此 H500_A10 個案也統一探討模擬 1 小時 30 分後的情形。從圖 4-26~4-28 得知，在半山寬 10 公里的環境下，垂直速度場 (圖 4-26 a)、水平風場 (圖 4-27 a) 和氣壓擾動場 (圖 4-28 a) 的結果，由黑色等值線分佈的情形了解，在高度 3~6 公里， $x = -15$ 公里和 $x = 15$ 公里處皆可看到不穩定已產生，只是不穩定擾動引發出的誤差值不大，尤其是氣壓擾動場

的部分，只能些微看出；不過，對於半山寬 5 公里的環境下，當垂直隱式模擬至 1 小時半時，由圖 4-26 (b)和圖 4-27 (b)得知非線性不穩定已明顯地表現在模式結果中，不穩定型態比 DX1500 個案更為嚴重。並且由圖 4-28 (b)裡，垂直隱式方法模擬出的氣壓擾動場結果也反應出運算得到的氣壓梯度力有問題，使模式已不能計算。雖由圖 4-19 (c)顯示出 H500_A10_DX300 個案模擬至 2 小時後，結果顯然為不正確的結果；但對於 H500_A5_DX300 個案而言，在 1 小時 30 分時已呈現模式無法積分運算。此個案也皆表現出地形坡度增加時易不穩定，並且更為顯著。

從上述這些討論可知，當半山寬水平尺度變小，即地形坡度增加時，採用垂直隱式方法將會引發不穩定，尤其是使用比較高解析度的水平網格時最容易產生不正確的結果；對於高解析度的網距，它能使用的時間步長已不大而模擬的結果又呈現不穩定，完全表現出垂直隱式方法處於劣勢。不過，對於 forward-backward 顯式積分方法，當坡度增加時，不論水平網距為何，模擬出來的結果仍為穩定的型態。

第五章 三維數值模擬與結果

在三維數值模式中，是需考慮三個方向的變化作計算，此運算架構與只探討兩方向變化的二維模式不同。因此本章節實驗依二維數值模擬中截取無地形情形下的重力波和半山寬 1 公里的線性山岳波兩項數值實驗，進階了解三維模式中顯式 (VE) 與垂直隱式 (VI) 兩方法的模擬結果，分析兩者計算方法之差異性是否不同。本實驗除了水平網格設定不同之外，其它的環境設定皆與二維模式中表 4-1 一致。在網格設定上， y 方向解析度設定與 x 方向的解析度一致，即 $\Delta x = \Delta y$ ，而網格數各為 360 點，為了避免聲波和重力波的反射，水平方向上採用延伸式網格 (stretched grids) 的設計，在 x 和 y 方向邊界皆取 20 個網格點作為延展網格。然而，往後為了簡便說明，對於個案之設定皆以表 4-2 表示之。

5-1 重力波實驗

5-1-1 實驗設計與初始條件

本實驗中之設定與二維重力波實驗一樣，設定在無均勻風場及無地形的環境下，給予一正的位溫擾動（單一熱胞）作模擬。對於初始熱胞位置，水平中心放置在積分域中央，垂直中心設離地高度 4500 m。至於初始熱胞水平及垂直半徑皆設為網格距離之 7 倍，因此水平網距為 3000 m 的位溫擾動場屬一圓盤形結構，而水平網距為 300 m 的位溫擾動場則為正圓形。

5-1-2 模擬結果

圖 5-1 為使用水平網距 3000 m，取熱胞中心之擾動位溫的 x - z 截面分佈圖，由圖 5-1 與圖 4-3 相互比較，可看出 DX3000 個案在二維模式裡，長波相對較為顯著，

因此分離的情形也比較明顯；但對於三維模式裡，重力波的範圍就不像圖 4-3。圖 5-2 及圖 5-3 為顯式及垂直隱式方法使用水平網距 3000 m 積分 3 小時後之水平分佈圖，由垂直速度場（圖 a）和位溫擾動場（圖 b）可看出重力波由原始熱胞中的位置往四周傳送，明顯表現出在三維模式中能量可往三個方向傳遞，並且 x 方向和 y 方向傳送的距離一致，依然呈現對稱的結構，而 u 、 v 風場分佈情形（圖 c 及 d）則是呈現完整的反對稱結構。雖然此兩圖所使用的數值方法不同，但模擬結果幾乎一致且皆為穩定。然而，圖 5-4 為使用水平網距 300 m 的結果，雖然此個案引發重力波的尺度較小，但比較 a 和 b 兩圖不同方法所得的結果仍然幾乎相同。對於此實驗中顯式和垂直隱式方法都能得到正確的結果。

由於 CFL 條件多加入 y 方向的網格距離限制，因此所使用的時間步長需比二維模式中的值小才可得穩定解。在顯式格式中，DX3000 個案和 DX300 個案使用的時間步長分別 0.8 秒和 0.5 秒；在垂直隱式格式中，使用的時間步長則分別為 6 秒和 0.6 秒。由此數值顯示，對於 x 和 y 方向皆用較高的解析度時，顯式和垂直隱式之時間步長幾乎無差異，例如以 DX300 個案來說，兩者計算方法只差 0.1 秒。

由於在三維模式裡所積分的範圍變得比二維模式增加許多，所以計算時間差異的數量級跟二維模式有些不同，因此進一步了解依各上述所陳敘的時間步長比較它們模擬所花費的計算時間，示於圖 4-5。由此圖得知，在 DX3000 個案中，顯式方法大約使用 106 分鐘，垂直隱式只需 17 分，兩者計算方法其時間上有明顯的差異，至於 DX300 個案，顯式方法大約使用 170 分鐘，垂直隱式需要 155 分鐘，兩方法花費時間只相差 15 分。雖然 DX3000 個案之垂直隱式的最大時間步長比二維模式中少 2 秒，但依然明顯表現出垂直隱式的效率性很高；然而在 DX300 個案，雖時間步長只差 0.1 秒，不過垂直隱式之計算時間仍可較少。由圖 5-5 得出 DX3000 個案和 DX300 個案之垂直隱式皆比顯式所花費的時間少，皆呈現垂直隱式方法的

效率性，並且模擬結果與顯式相當一致，為穩定的狀態。

此三維模擬情形與二維模擬相同，結果皆表現出垂直隱式方法優於顯式，並且對於時間上的差異更為顯著。由三維數值模擬結果，可看出能量是往三個方向傳送，不過這對於一風速場遇到地形而持續激發的山岳波實驗，顯式及垂直隱式的模擬結果是否有不同的情形，此在下章節討論之。

5-2 非靜力線性山岳波實驗

5-2-1 實驗設計與初始條件

本實驗地形採用單一鐘形山岳，地形高度為

$$h(x) = h_{\max} \left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

其中， h_{\max} 為山頂高度， a 為半山寬（山頂高度一半處的水平半徑）。地形中心位於積分域中央；環境風場設定為均勻風速場 ($\bar{U} = 10 \text{ m s}^{-1}$)。本研究山高依然設定為 10 m，以濾除非線性效應，避免增加模擬結果的複雜性。至於半山寬的設定則根據 Gill (1982) 的分類，選取 $a \sim \bar{U}/N = 1 \text{ km}$ 屬於非靜力波動的範疇，了解當水平和垂直方向數量級相當時，能量可往三維方向傳遞的情形下，顯式和垂直隱式方法的結果是否與二維模擬不同。

5-2-2 模擬結果

此實驗依然以 300 m 的網格距離作模擬分析，了解使用較高的水平解析度模擬非靜力線性山岳波的結果。圖 5-6 為垂直速度的 x - z 截面分佈情形，由此圖與圖 4-13 二維模擬結果互相比較，得出顯式積分結果仍為穩定型態，山岳波的結構隨

高度往下游發展，只是在三維模式裡，氣流經地形引發出的山岳波將往三個方向傳送，因此三維模式模擬出的山岳波結構，波動振幅不如二維模式結果深。反之，對於垂直隱式來說，使用和顯式方法一樣的時間步長作模擬時，結果仍模擬出不穩定擾動在地形周圍引發出來，進而使模式積分錯誤。圖 5-7 為高度 1200 m 之垂直速度水平分佈情形，圖(a)之顯式方法結果看出山岳波能量往外傳送的現象；相反地，垂直隱式產生的不穩定擾動，皆停駐在地形山前和山後的部分，不穩定擾動無往外傳送，進一步破壞山岳波的結構。

由圖 5-8 顯示出垂直隱式使用與顯式相同的時間步長 0.5 秒時，因垂直隱式需運算矩陣，使花費的時間比顯式積分方法多，並且積分域範圍變大，使兩計算方法之差值比二維模式顯著。因此垂直隱式積分 1 小時需花用更多的時間積分，並且得出的模擬結果仍為不穩定。由此實驗顯示，在三維模擬的架構下，更表現出水平用比較小的網格距離時，不但在時間上沒有效率而且易引發不穩定擾動，使模式無法模擬運算。



第六章 結論

在本研究中，首先作顯式和垂直隱式格式的線性穩定度分析，探討不同水平網格距離與垂直網格距離比值，在不同地形坡度情形下，對兩者計算方法穩定度的影響。分析結果顯示，各網距比之顯式積分格式結果都呈現穩定度與地形坡度無關，不因地形坡度增加而改變穩定度情形。可是，對於垂直隱式積分方法而言，當水平網格距離和垂直網格相差愈大時，地形坡度愈陡峭愈不穩定；反之，當水平網格距離接近垂直網格時，地形反而不影響穩定度值。不過，在線性穩定度分析中，得到穩定結果並不一定能保證對非線性數值方程之計算方法是穩定的。因此本研究進一步透過數值模式，模擬重力波實驗和線性、非線性山岳波實驗作驗證，並分析不同水平與垂直方向的網格距離比值，對於不同坡度時，顯式與垂直隱式這兩種數值計算方法的穩定性與效率。

重力波實驗結果顯示，垂直隱式方法使用不同水平網距模擬時，計算所花費的時間皆比顯式方法少，並且兩者計算方法模擬的結果幾乎一致，為穩定的結果，完整呈現重力波由初始位置向外傳送，此表現出垂直隱式方法優於顯式。不過，因實驗中只給予一開始的初始擾動場，波動振幅將逐漸減小，易造成不穩定短波的部分早已消散，所以此實驗不容易看出數值方程計算時造成的誤差。

本研究進一步分析，氣流遇到地形持續激發擾動場的山岳波實驗。在線性山岳波實驗中，地形高度只設為 10 m，此引發出的擾動並不強，非線性平流項幾乎無作用，其避免增加模式結果之複雜性，以明確了解不同坡度引發不同類型的波動，顯式和垂直隱式兩者計算方法的差異。H10_A10 個案地形水平尺度較大，波動的結構呈現垂直疊加現象，其中 DX3000 個案和 DX1500 個案模擬結果仍保有垂直隱式方法之優勢；不過，使用 DX300 個案時，必需將原本最大時間步長 0.86 秒

減小至與顯式方法一樣之時間步長 0.61 秒，才可得到與顯式相似的穩定解，但此時垂直隱式花費的計算時間需比顯式多，已呈現出無效率。當地形半山寬減為 1 km 時 (H10_A1 個案)，因地形水平尺度小，山岳波的結構是隨高度往下游發展並非垂直疊加的現象，此時氣流通過鐘形山的時間尺度相當於山岳波往垂直方向傳遞的時間尺度，表現出為非靜力波動。由 H10_A1_DX300 個案的垂直隱式積分結果明顯看出，時間步長使用 0.61 秒時仍引發不穩定擾動的現象，此個案呈現無效率且不穩定。雖然線性山岳波實驗的非線性項很小，但對於各 DX300 個案而言，明顯地影響數值解的穩定性，尤其當地形尺度變小，地形坡度增加所造成山岳波之垂直風速與水平風速相近時，垂直隱式結果愈不穩定，使模式結果不正確。

隨著地形增高，所激發的山岳波強度越強，此時非線性效應已不可忽略。在非線性山岳波實驗中，H500_A10 個案垂直速度可達到 0.6 m s^{-1} ，與線性山岳波實驗之最大垂直速度 0.01 m s^{-1} 相比，強度明顯增加許多，波動基本型態也略為改變。在此環境下，顯式積分方法依然呈現穩定的數值解，不過垂直隱式方法因非線性效應，容易使模式積分產生不穩定擾動，如 H500_A10_DX1500 個案，此水平網距原本在線性山岳波實驗 (H10_A10_DX1500 個案) 為穩定且效率優於顯式；但在此非線性山岳波實驗中，使用和顯式一樣的時間步長 0.84 秒，不但無效率且仍為不穩定。然而，進一步作 H500_A5 個案，因地形半山寬減為 5 km，地形坡度增加一倍，使得最大垂直速度由 H500_A10 個案的 0.6 m s^{-1} 增加至 1.2 m s^{-1} ，非線性平流項等非線性作用將使山岳波逐漸脫離線性結構，所以 H500_A5_DX1500 個案所產生的不穩定雜訊比 H500_A10_DX1500 更為明顯，並且此雜訊現象即使時間步長減至 0.1 秒作模擬，不穩定擾動依然存在。

本實驗也進一步以三維數值模式，模擬重力波實驗和線性山岳波實驗，分析能量可往三維方向傳遞的情形下，顯式和垂直隱式的結果。首先為重力波實驗，

此實驗的垂直隱式方法依然優於顯式積分方法，並由垂直速度、位溫擾動的水平分佈圖看出，重力波由原始熱胞中心的位置往四周傳送，明顯表現出在三維模式中能量可往三個方向傳遞。不過，在前面已陳述此實驗不容易看出數值方程計算時造成的誤差。因此，選取地形半山寬 1 km 的線性穩定度實驗，了解當水平和垂直方向數量級相當時，並且能量可往三維方向傳遞的情形下，垂直隱式方法模擬結果是否可與顯式相似。結果得出，垂直隱式產生的不穩定擾動，依然停駐在地形山前和山後的部分，不穩定擾動無往外傳送，進一步破壞山岳波的結構，此與二維的情形一樣。

雖然由線性穩定度分析，得知水平網格距離愈接近垂直網格時，地形坡度大小不影響穩定度，不過此結果對非線性數值方程不一定是正確的結論，由上述的山岳波實驗就明顯得知，非線性作用強烈影響垂直隱式積分的穩定性，尤其是水平和垂直網距愈接近時，不穩定擾動更為顯著，進一步使模式不能持續運算，此與線性穩定度分析結果完全不同。然而，對於顯式積分而言，雖然使用的時間步長值不大，但對中小尺度運動或地形陡峭情形都可得到穩定的數值解，進而使得 forward-backward 顯式方法的效率比垂直隱式高。

參考文獻

- Carpenter, K. M. 1979.: An experimental forecast using a non-hydrostatic mesoscale model. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* **105**, 629-655.
- Crowley, W. P., 1968: Numerical advection experiments. *Mon. Wea. Rev.*, **96**, 1–11.
- Dudhia J., 1993: A nonhydrostatic version of the Penn state—NCAR mesoscale model: validation tests and simulation of an Atlantic cyclone and cold front. *Mon. Wea. Rev.*, **121**, 1493-1513.
- Durrán, D. R. and J. B. Klemp, 1983: A compressible model for the simulation of moist mountain waves. *Mon. Wea. Rev.*, **111**, 2341–2361.
- Gadd, A. J., 1978a: A numerical advection scheme with small phase speed errors. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **104**, 583-594.
- , 1978b: A split explicit integration scheme for numerical weather prediction. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **104**, 569-582.
- Gill, A., 1982: *Atmosphere-Ocean Dynamics*. Academic Press, 662 pp.
- Hsu, W. R., and W. Y. Sun, 2001: A time-split, forward-backward numerical model for solving a nonhydrostatic and compressible system of equations. *Tellus*, **53A**, 279-299.
- Ikawa M., 1988: Comparison of some schemes for nonhydrostatic models with orography. *J. Meteo. Soc. Japan.*, **66**, 753-776.
- Mesinger, F., and A. Arakawa, 1976: *Numerical Methods Used in Atmospheric Models*, Vol.1. GARP Publications Series No. 17, World Meteorological Organization, Geneva, 64pp.
- Ogura, Y. and N. A. Phillips, 1962: Scale analysis of deep and shallow convection in the atmosphere. *J. Atmos. Sci.* **19**, 173-179.

- Queney, P., 1948: The problem of airflow over mountains: A summary of theoretical studies. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **29**, 16-26.
- Scorer, R. S., 1949: Theory of waves in the lee of mountains. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **75**, 41-56.
- Sheppard, P. A., 1956: Airflow over mountains. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **82**, 528-529.
- Smith, R. B., 1980: Linear theory of stratified hydrostatic flow past an isolated mountain. *Tellus*, **32**, 348-364.
- Smolarkiewicz, P. K., Rasmussen, R. M., and Clark, T. L., 1988: On the dynamics of Hawaiian cloud band: Island Forcing. *J. Atmos. Sci.*, **45**, 1897-1905.
- Smolarkiewicz, P. K., and R. Rotunno., 1989: Low froude number flow past three-dimensional obstacles. Part I: baroclinically generated Lee Vortices. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 1154-1164.
- Steppler J., 1995: Comments on "A nonhydrostatic version of the Penn state—NCAR mesoscale model: validation tests and simulation of an Atlantic cyclone and cold front." *Mon. Wea. Rev.*, **123**, 2572-2575.
- Sun, W. Y., 1993: Numerical experiments for advection equation. *J. Comput. Phys.*, **108**, 264-271.
- , and W. R. Hsu, 2005: The effects of surface friction on downslope wind and mountain waves. *TAO*, **16**, 393-418.
- Tapp, M. C. and P. W. White, 1976: A non-hydrostatic mesoscale model. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **102**, 277-296.

表 1-1 非靜力可壓縮之差分數值模式的分類。

Nonhydrostatic Compressible models	Fully implicit (HI-VI)	Tapp and White (1976) Carpenter (1979) Chen and Sun (2001)
	Implicit in vertical direction (HE-VI)	Durran and Klemp (1983) Dudhia (1993) RSM, MM5, WRF
	Explicit (HE-VE)	Hsu and Sun (2001) Sun and Hsu (2005)



表 4-1 本研究所有二維模式模擬個案之共同設定。

物理過程	未考慮雲物理、輻射與地表摩擦
動力過程	未考慮科氏力與擴散過程
初始背景大氣	N^2 為定值 (10^{-4} s^{-2})
x, z 方向網距點數	分別為 1000, 60
垂直網格距離	300 m
側邊界條件	開放式
上邊界條件	設定 30 層吸收層
下邊界條件	無摩擦
數值方法	未使用時間分離法 及空間勻滑處理

表 4-2 實驗設定之符號代碼說明。

	地形高度符號代碼		
	H0	H10	H500
說明	無地形	地形最大高度 10 m	地形最大高度 500 m

	地形半山寬符號代碼		
	A1	A5	A10
說明	半山寬 1 km	半山寬 5 km	半山寬 10 km

	水平網格距離符號代碼		
	DX300	DX1500	DX3000
說明	$\Delta x = 300$ m	$\Delta x = 1500$ m	$\Delta x = 3000$ m

	數值積分方法符號代碼	
	VE	VI
說明	顯式	垂直隱式

表 4-3 在重力波實驗中，初始熱胞條件設計。

環境風速 (\bar{U})	無均勻風場		
垂直中心位置	4.5 km 處		
熱胞水平中心位置	H0 個案	積分域中央	
	H500 個案	地形中央之左方 15 公里處	
熱胞垂直半徑	2.1 km		
熱胞水平半徑	DX300 個案	DX1500 個案	DX3000 個案
	2.1 km	10.5 km	21 km

表 4-4 在無地形環境之重力波實驗中，顯式和垂直隱式方法可取用的最大時間步長，單位：秒。

	水平網距		
	DX3000	DX1500	DX300
VE	0.86	0.85	0.61
VI	8.8	4.3	0.86

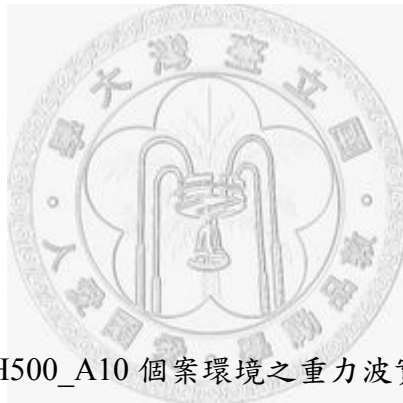


表 4-5 有放置一地形為 H500_A10 個案環境之重力波實驗中，顯式和垂直隱式方法可取用的最大時間步長，單位：秒。

	水平網距		
	DX3000	DX1500	DX300
VE	0.85	0.84	0.61
VI	8.8	4.3	0.86

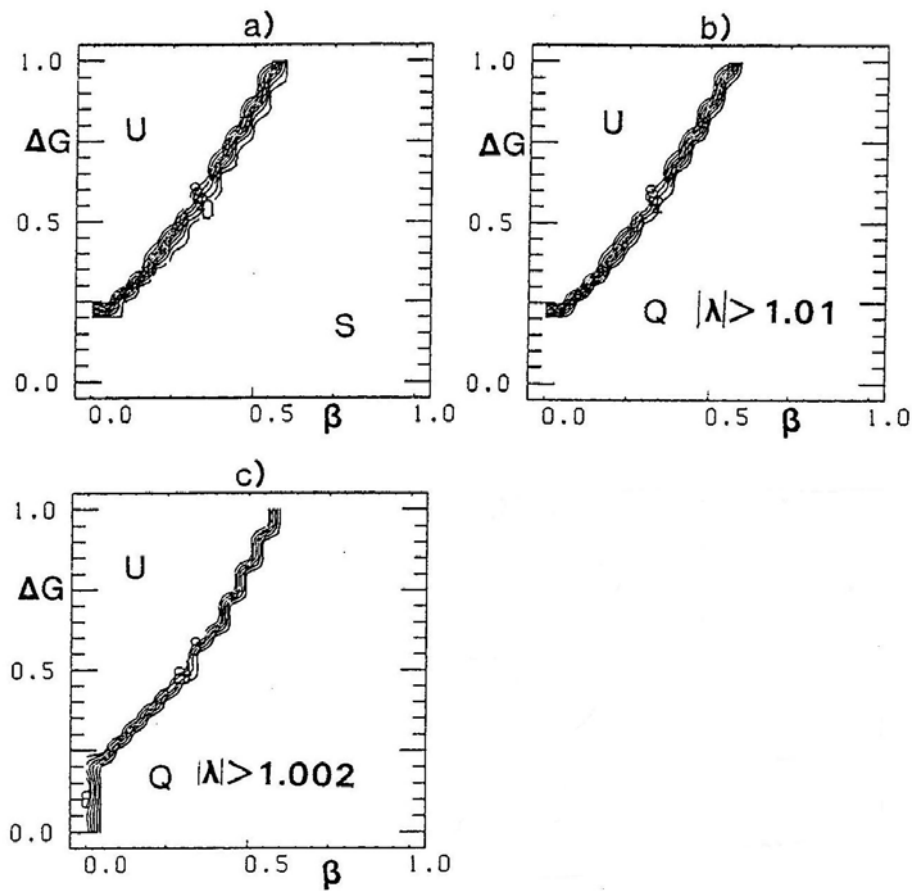


圖 1-1 HE-VI 之放大因子 $|\lambda|$ 分佈圖。環境設定為聲波波速 340 m s^{-1} 、大氣穩定度 0.01 s^{-1} 的情形下，分析水平網距 1200 m 、垂直網距 200 m 使用時間步長為 3 s 時的結果。其中討論的放大因子是選取 $2 \sim 20$ 個網距波長之最大值。水平座標 β 為垂直隱式使用的權重，其中 β 取 0 表為梯型法 (trapezoidal) 差分格式； β 取 1 表為向後 (backward) 差分格式。垂直座標 ΔG 為地形坡度， ΔG 愈大表地形愈陡峭。(a)、無加入平流場的結果。在穩定區(S) $|\lambda| < 1.00009$ ；而不穩定區(U) $|\lambda| > 1.8$ 。圖中最小等值線值為 1.1 ，間距為 0.1 ；(b)、有加入平流均勻場 $U = 4 \text{ m s}^{-1}$ 的結果。在準穩定區(Q) 其 $1.01 < |\lambda| < 1.1$ ；而不穩定區(U) $|\lambda| > 1.8$ 。最小等值線值為 1.1 ，間距為 0.1 ；(c)、同(b)圖，但有額外做 Asselin's time filter 之時間平滑方法的結果，令 $\nu = 0.2$ 。在準穩定區(Q) 其 $1.002 < |\lambda| < 1.003$ ；而不穩定(U) $|\lambda| > 1.008$ 。最小等值線值為 1.003 ，間距為 0.001 。(摘自 Ikawa, 1988)

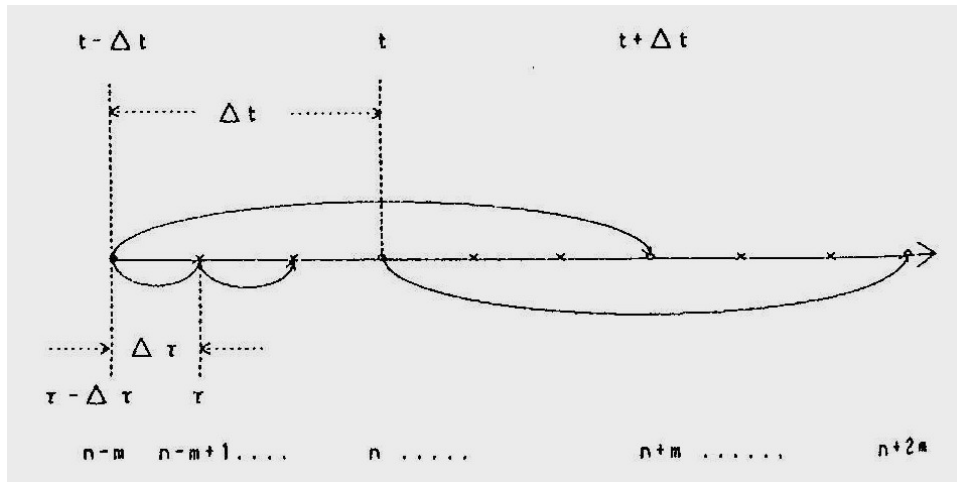


圖 1-2 時間分離法 (time splitting) 之示意圖。其中, Δt 為平流場的時間步長, $\Delta \tau$ 為高頻波動 (如聲波) 的時間步長, 而 $m = \Delta t / \Delta \tau$ 為平流場時步與高頻波動時步之比值。(摘自 Ikawa, 1988)

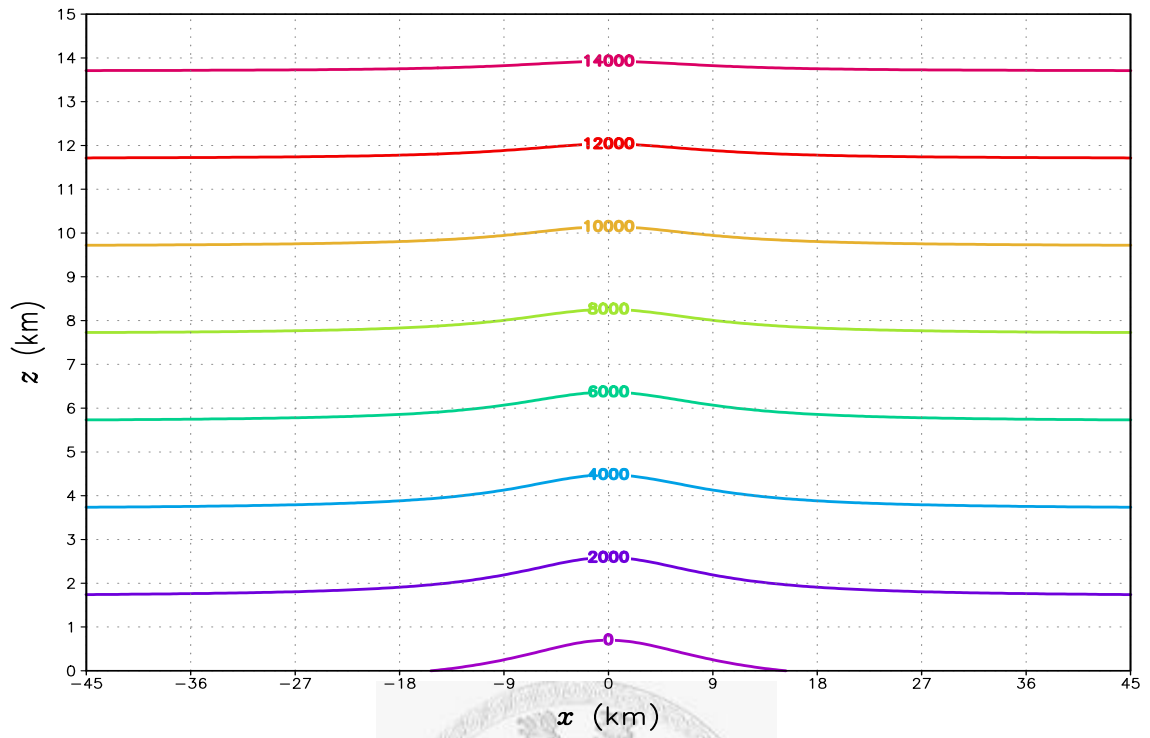


圖 2-1 ξ 座標對高度的分佈圖。

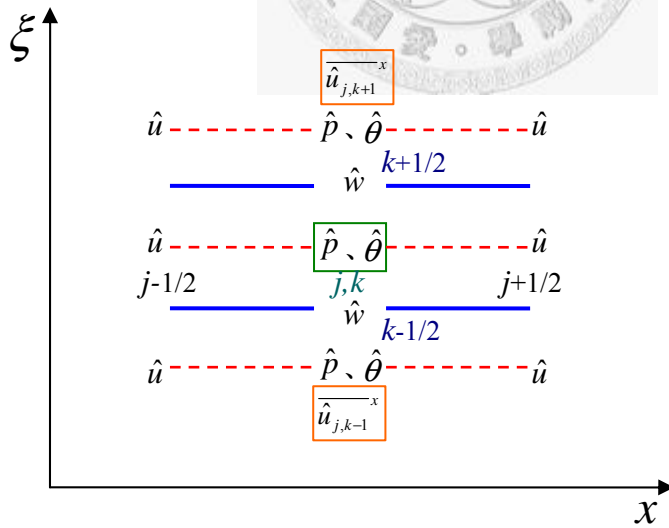


圖 2-2 網格結構圖。

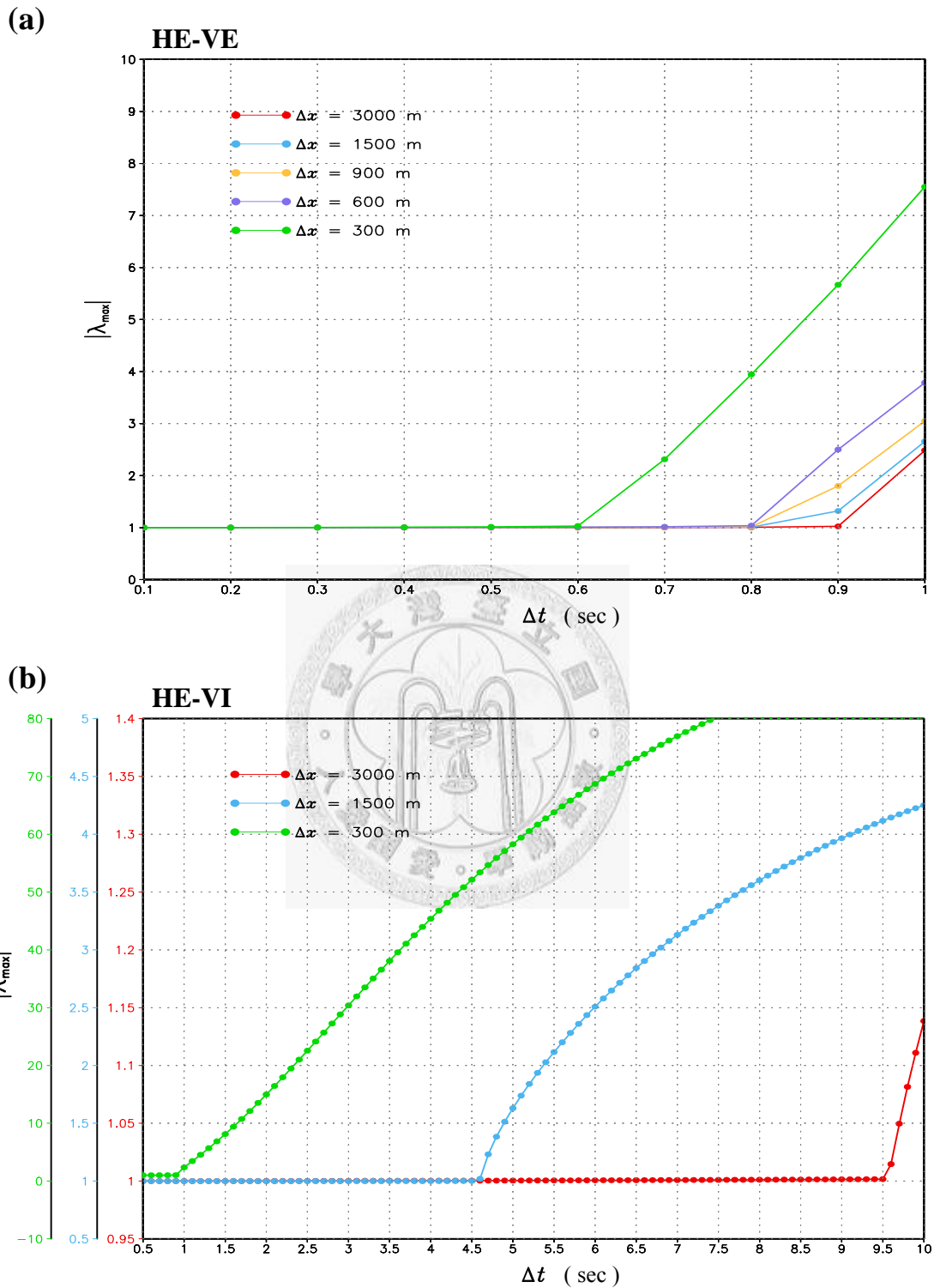


圖 2-3 不同水平網距 (Δx)，時間步長 (Δt) 與不同波長中最大之放大因子絕對值 ($|\lambda_{max}|$) 的曲線關係圖。(a)、顯式積分方法 HE-VE；(b)、垂直隱式積分方法 HE-VI。

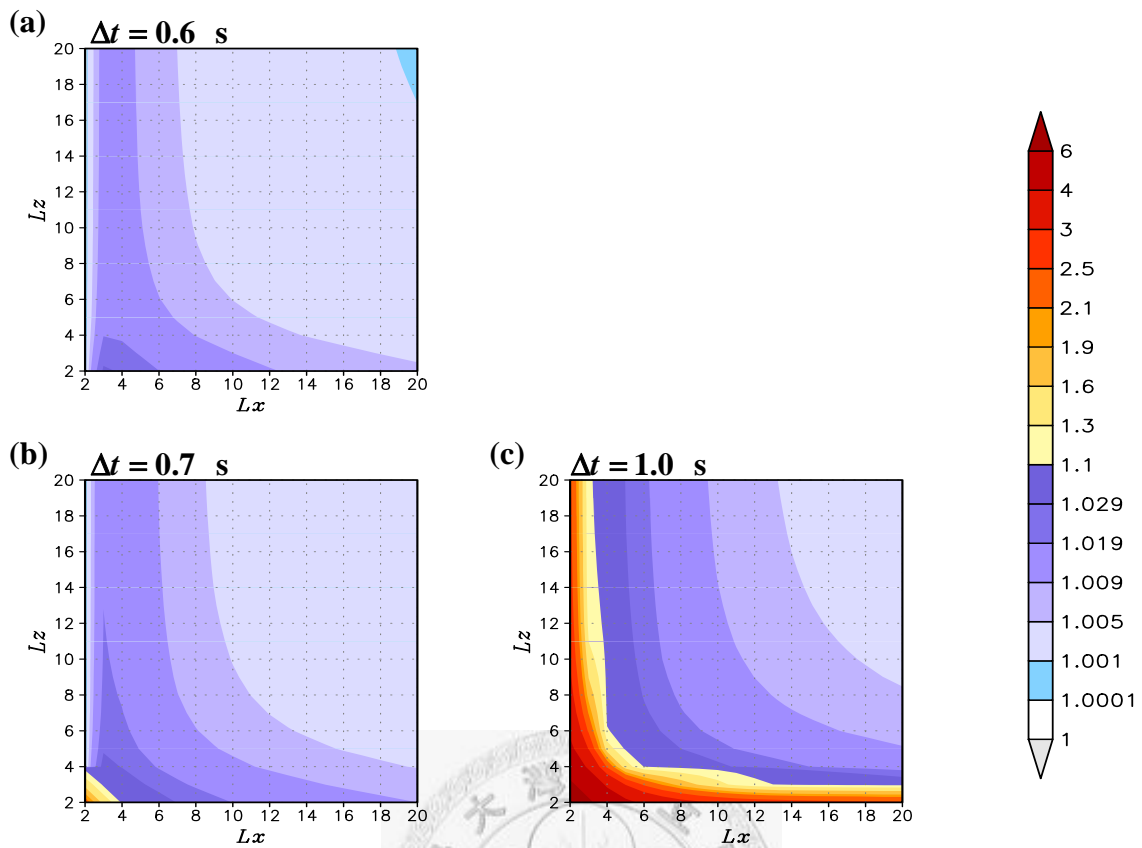


圖 2-4 顯式積分 (HE-VE)，水平網距 (Δx) 為 300 公尺時，波長與放大因子絕對值 ($|\lambda|$) 的關係圖。(a)、時間步長 0.6 秒；(b)、時間步長 0.7 秒；(c)、時間步長 1 秒。其中 x 和 y 座標分別代表水平與垂直網距的倍數。

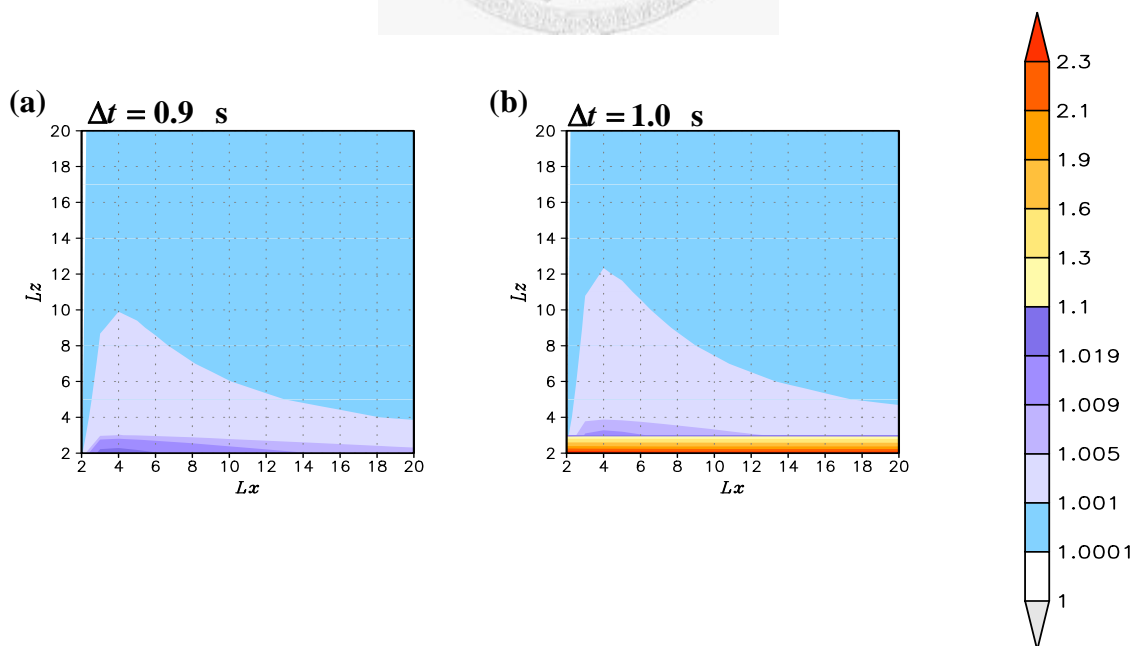


圖 2-5 同圖 2-4，但為顯式積分 (HE-VE)，水平網距 (Δx) 為 3000 公尺的結果。(a)、時間步長 0.9 秒；(b)、時間步長 1 秒。

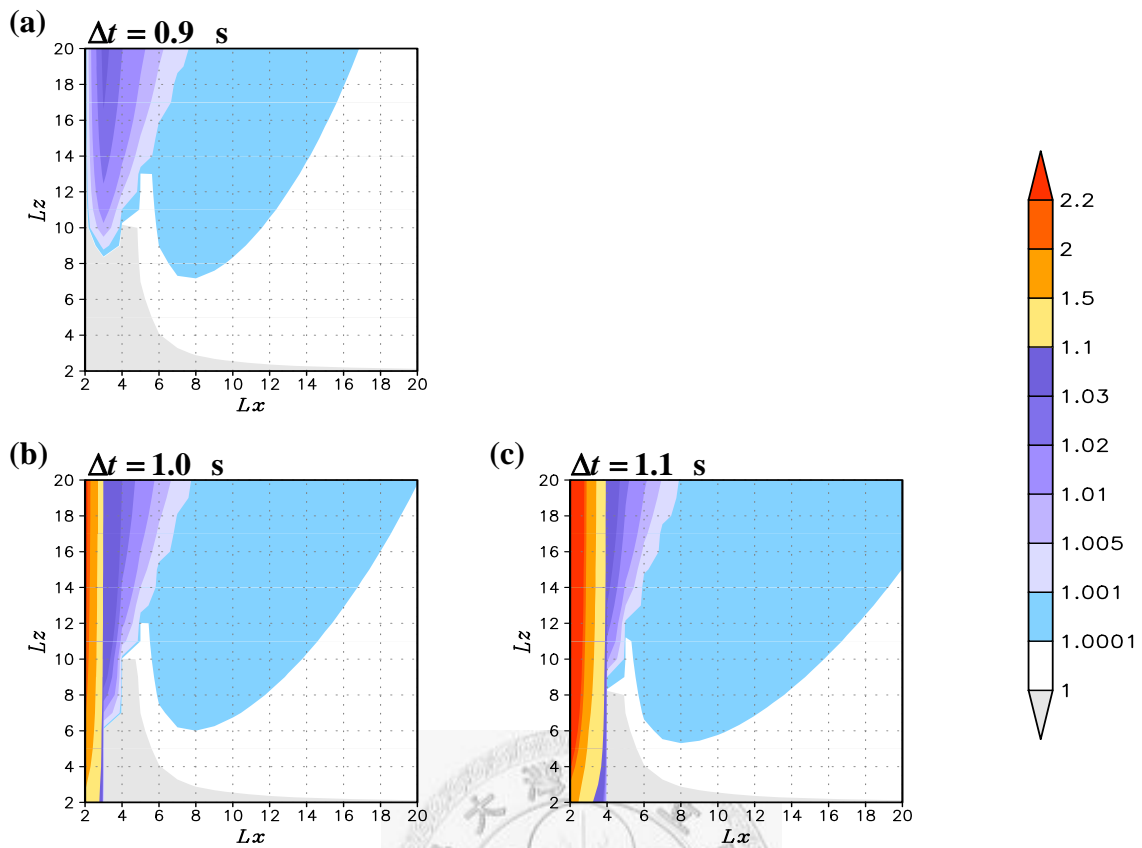


圖 2-6 同圖 2-4，但為垂直隱式積分 (HE-VI)，水平網距 (Δx) 為 300 公尺的結果。(a)、時間步長 0.9 秒；(b)、時間步長 1 秒；(c)、時間步長 1.1 秒。

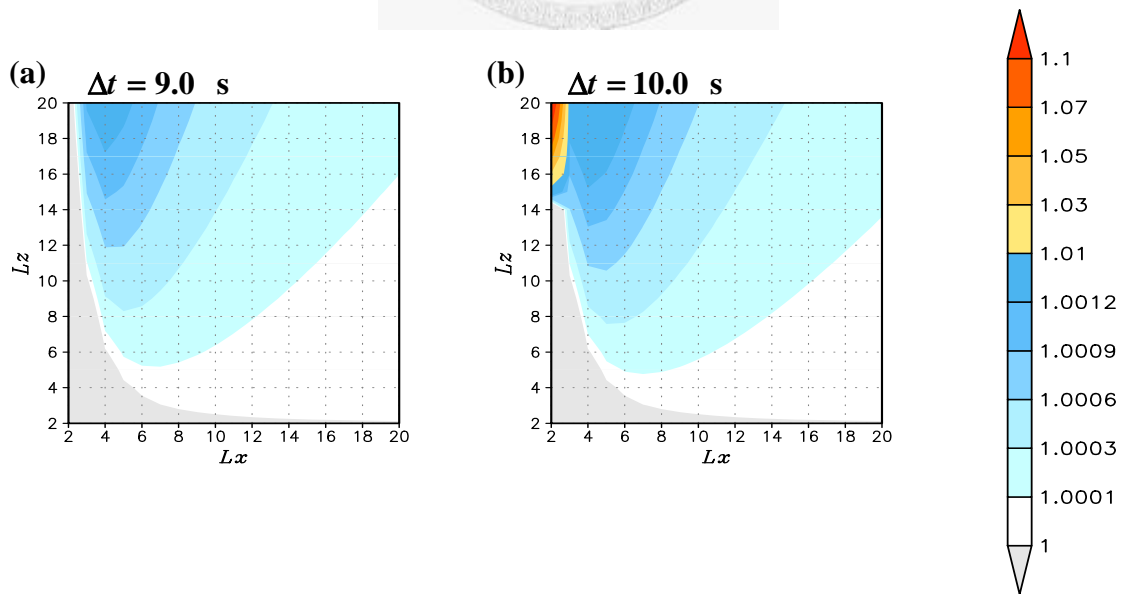


圖 2-7 同圖 2-4，但為垂直隱式積分 (HE-VI)，水平網距 (Δx) 為 3000 公尺的結果。(a)、時間步長 9 秒；(b)、時間步長 10 秒。

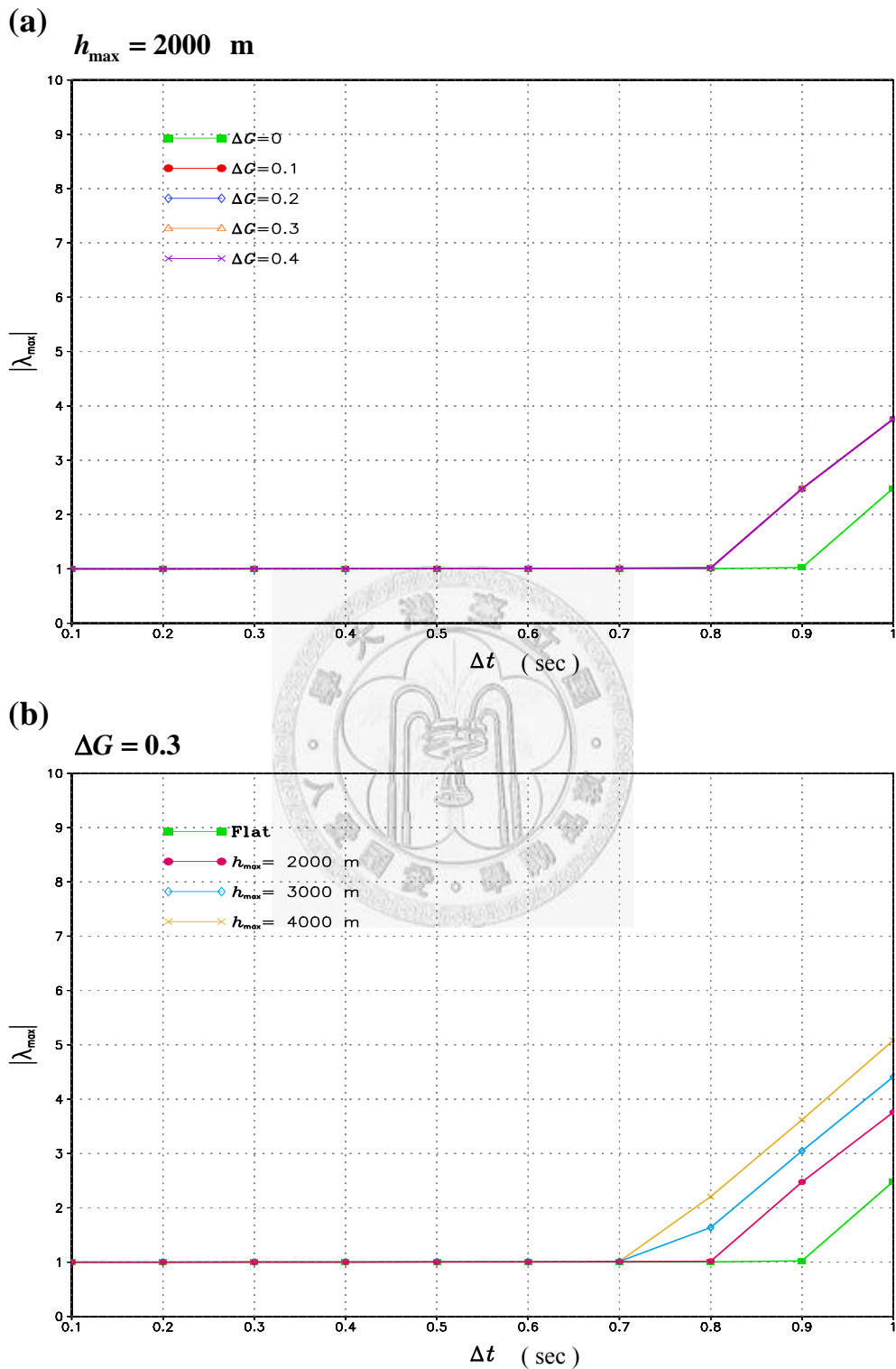


圖 2-8 顯式積分 (HE-VE)，水平網距 (Δx) 為 3000 m 時，時間步長 (Δt) 與不同波長中最大之放大因子絕對值 ($|\lambda_{\max}|$) 的曲線關係圖。(a)為固定地形高度為 2000 m，不同坡度 (ΔG) 的結果，其中 ΔG 愈大表坡度愈陡峭；(b)為固定地形坡度 ΔG 為 0.3，不同山高的結果。

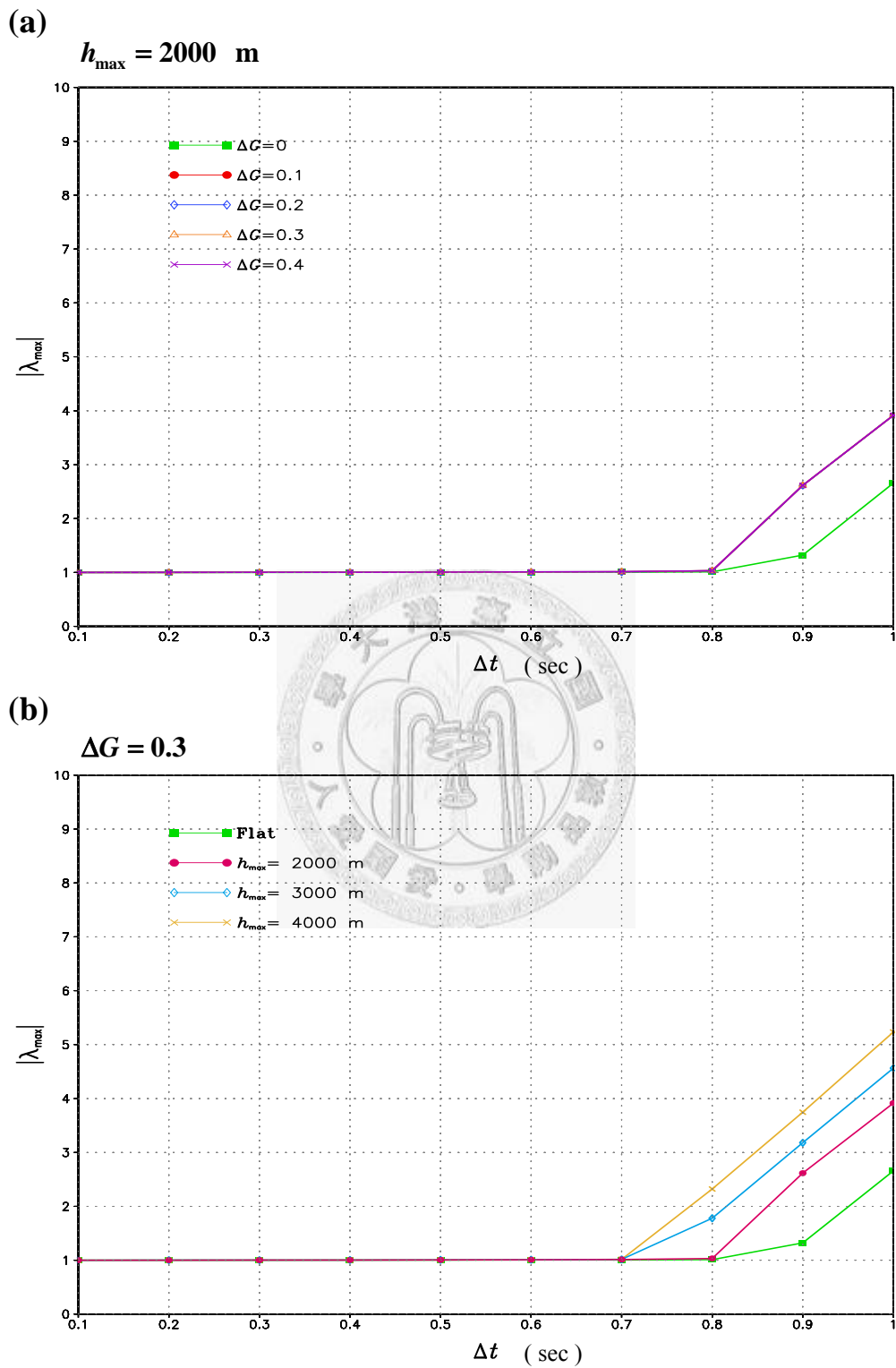


圖 2-9 同圖 2-8，但為水平網距 (Δx) 1500 m 的結果。

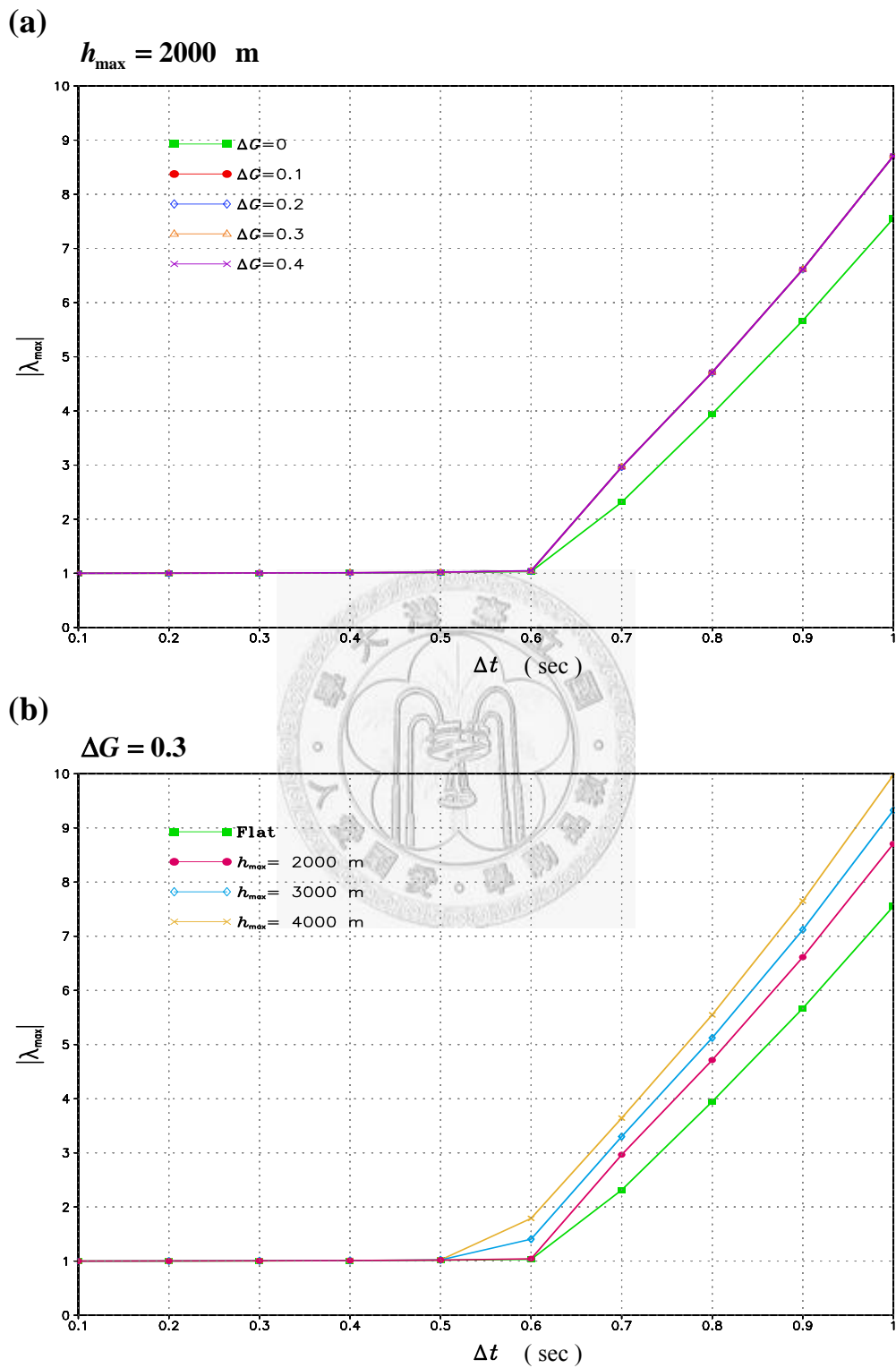


圖 2-10 同圖 2-8，但為水平網距 (Δx) 300 m 的結果。

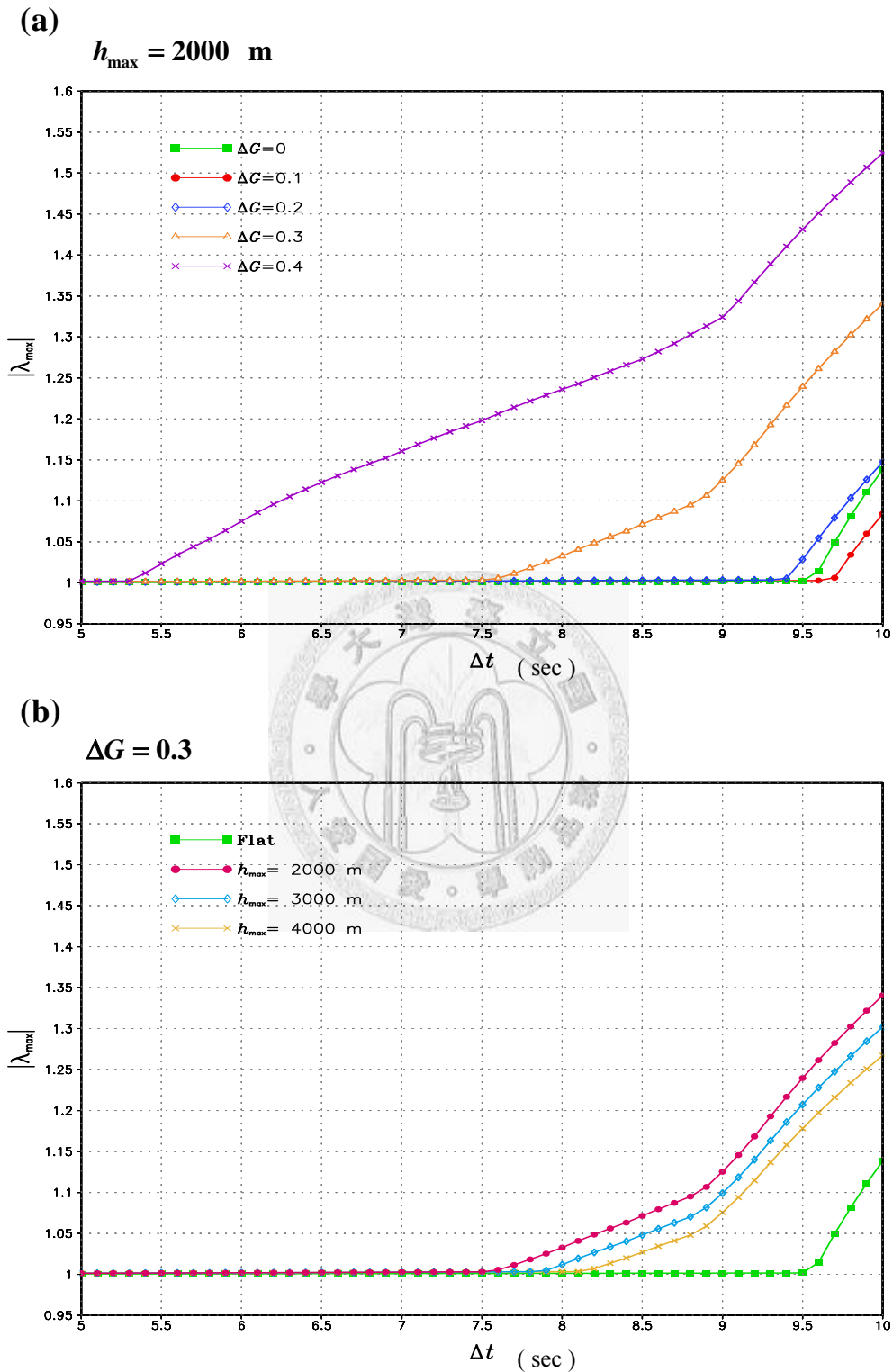


圖 2-11 垂直隱式積分 (HE-VI)，水平網距 (Δx) 為 3000 m 時，時間步長 (Δt) 與不同波長中最大之放大因子絕對值 ($|\lambda_{\max}|$) 的曲線關係圖。(a)為固定地形高度為 2000 m，不同坡度 (ΔG) 的結果，其中 ΔG 愈大表坡度愈陡峭；(b)為固定地形坡度 ΔG 為 0.3，不同山高的結果。

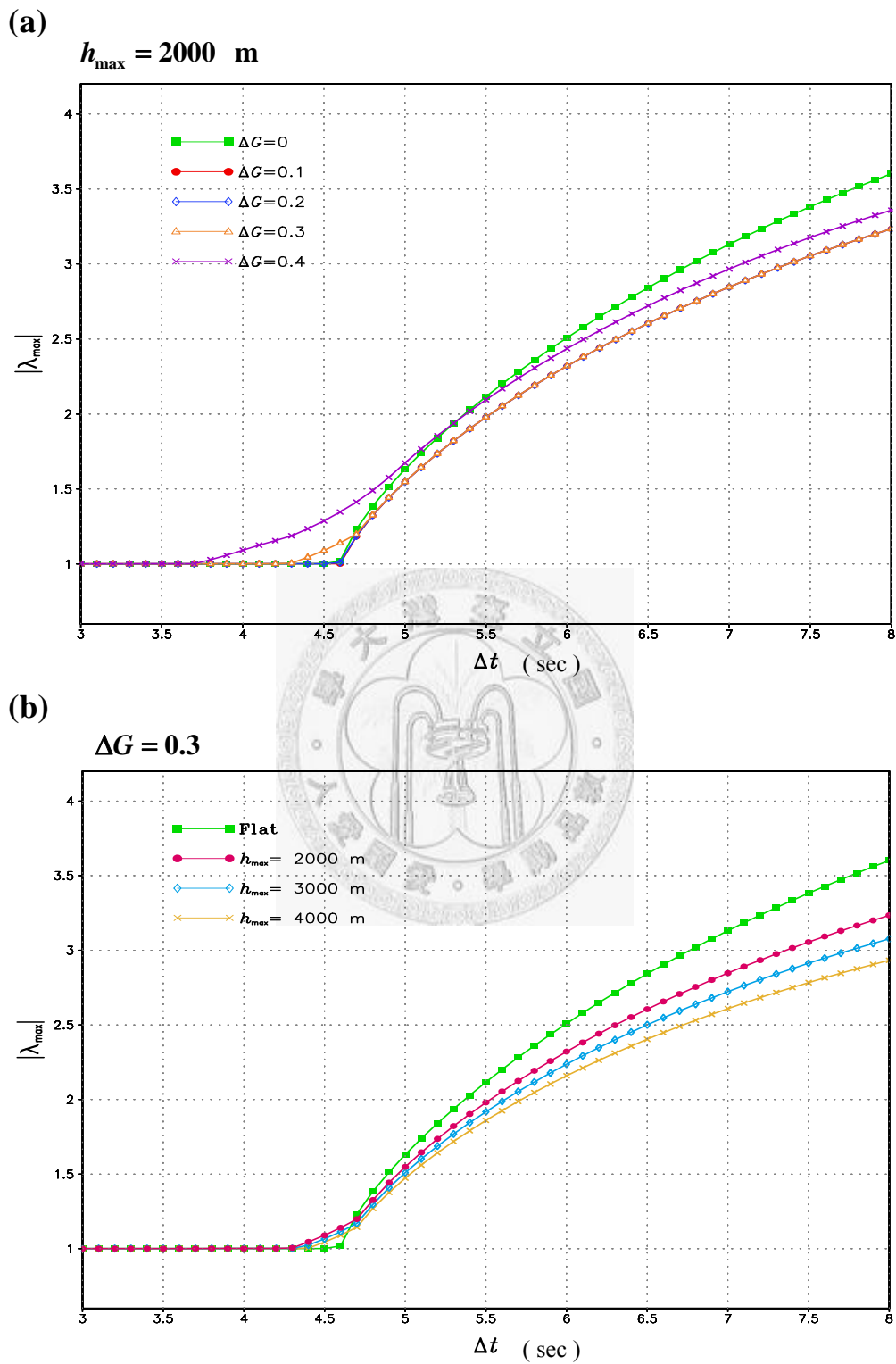


圖 2-12 同圖 2-11，但為水平網距 (Δx) 1500 m 的結果。

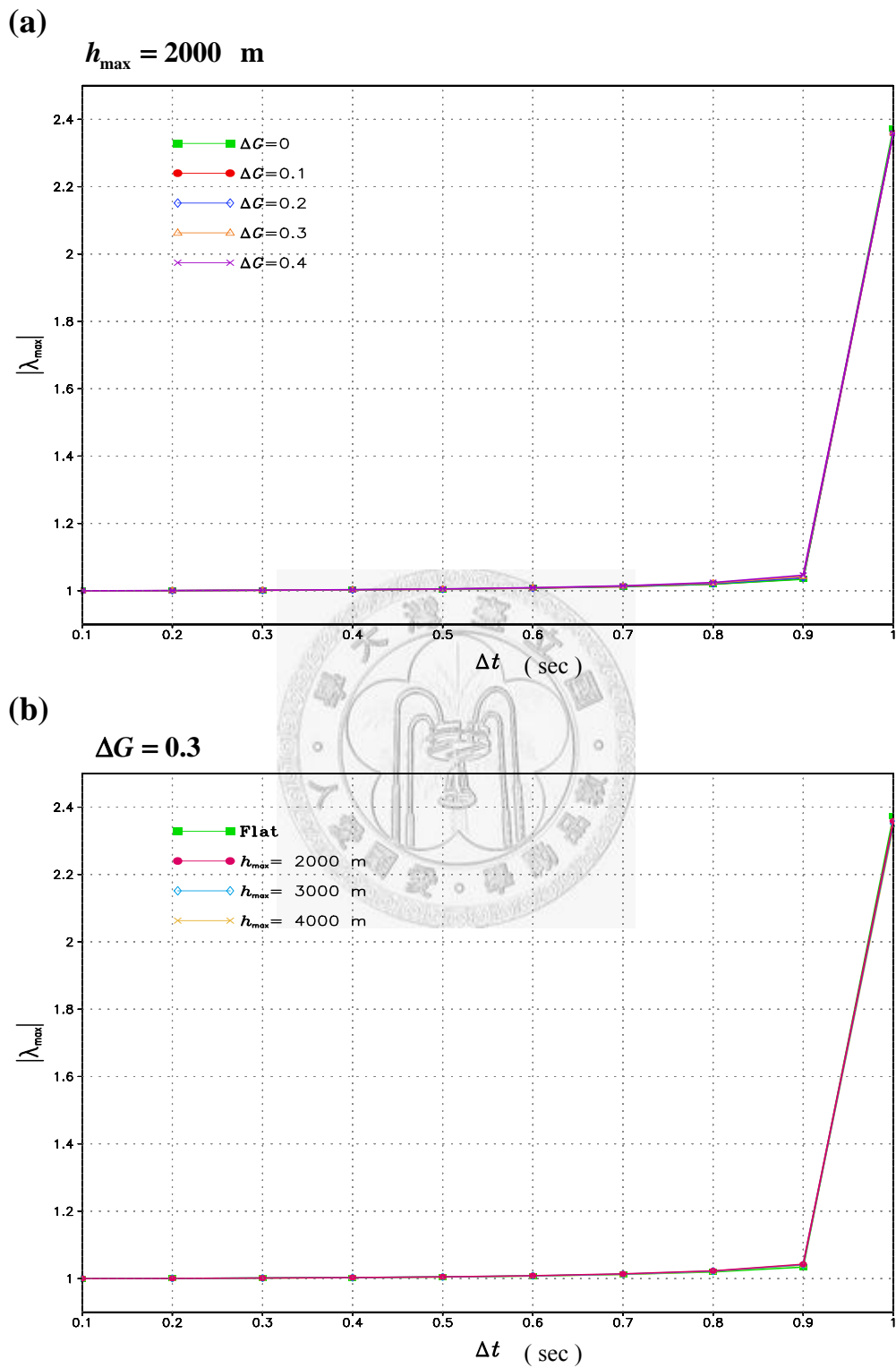


圖 2-13 同圖 2-11，但為水平網距 (Δx) 300 m 的結果。

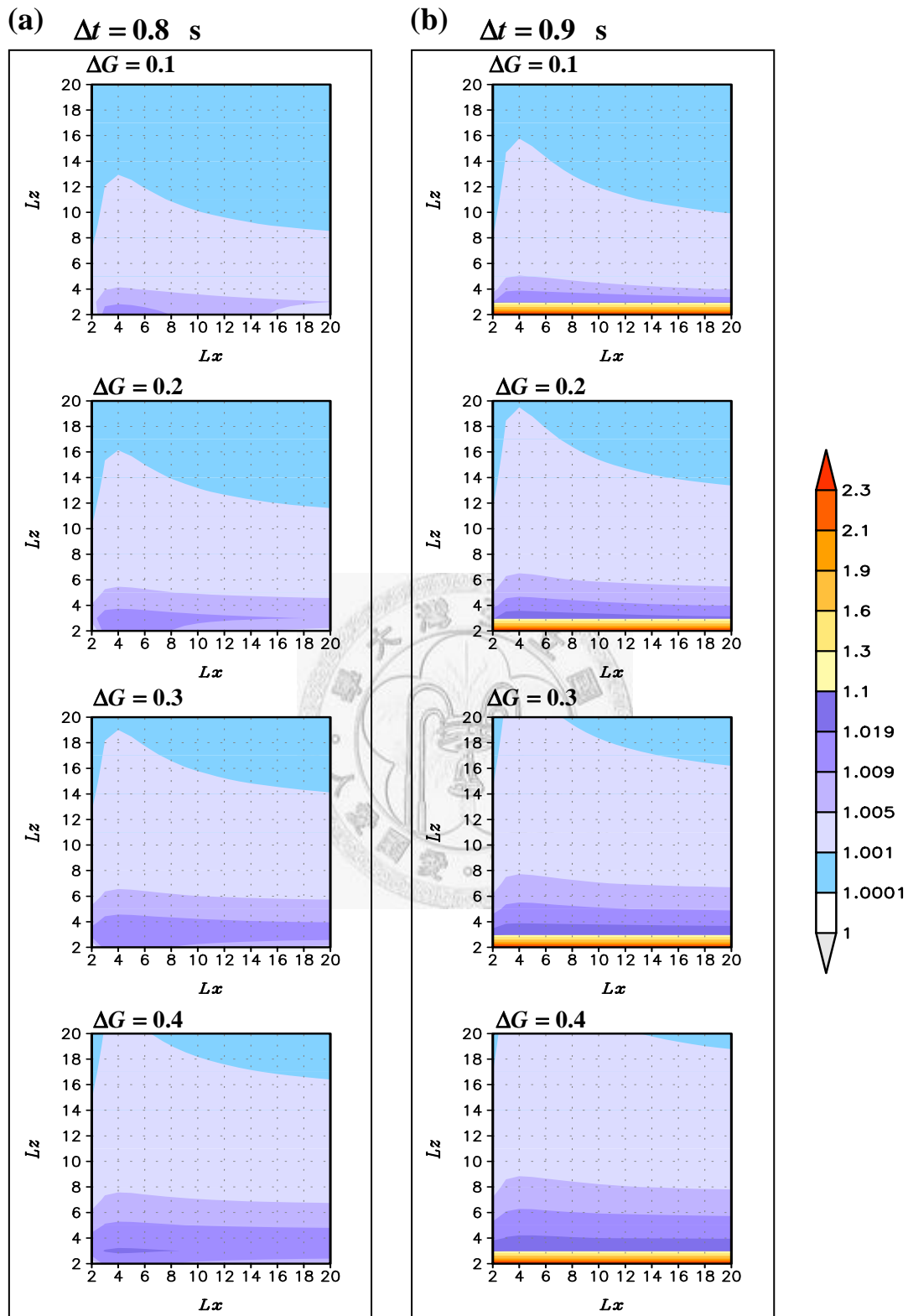


圖 2-14 顯式積分 (HE-VE)，水平網距 (Δx) 3000 公尺，固定地形高度為 2000 公尺時，對於不同坡度 (ΔG)，波長與放大因子絕對值 ($|\lambda|$) 的關係圖。(a)、時間步長 0.8 秒；(b)、時間步長 0.9 秒。其中 ΔG 愈大表坡度愈陡峭，而 x 和 y 座標分別代表水平與垂直網距的倍數。

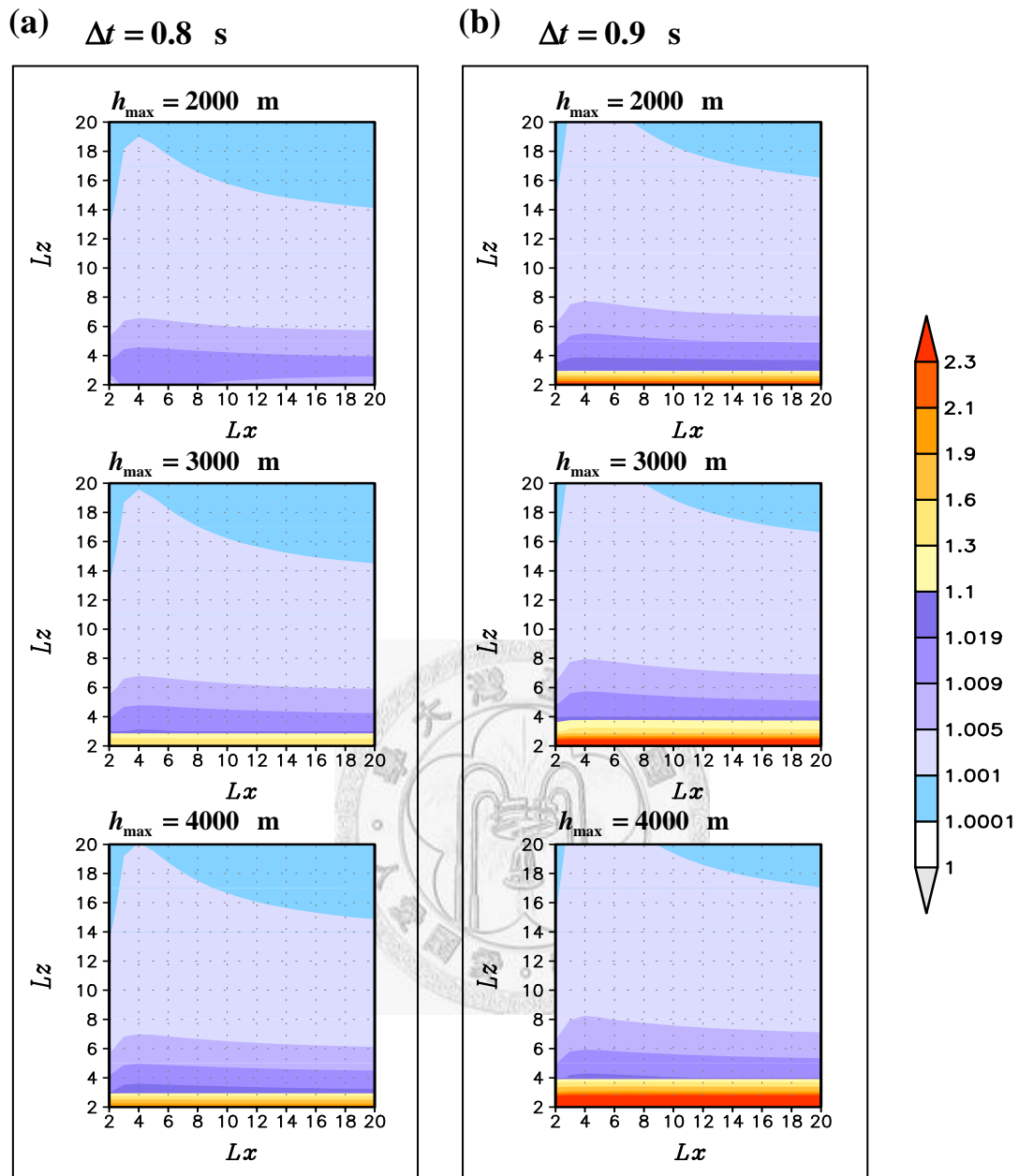


圖 2-15 顯式積分 (HE-VE)，水平網距 (Δx) 3000 公尺，固定地形坡度 ΔG 為 0.3 時，對於不同山高 (h_{\max})，波長與放大因子絕對值 ($|\lambda|$) 的關係圖。(a)、時間步長 0.8 秒；(b)、時間步長 0.9 秒。其中 x 和 y 座標分別代表水平與垂直網距的倍數。

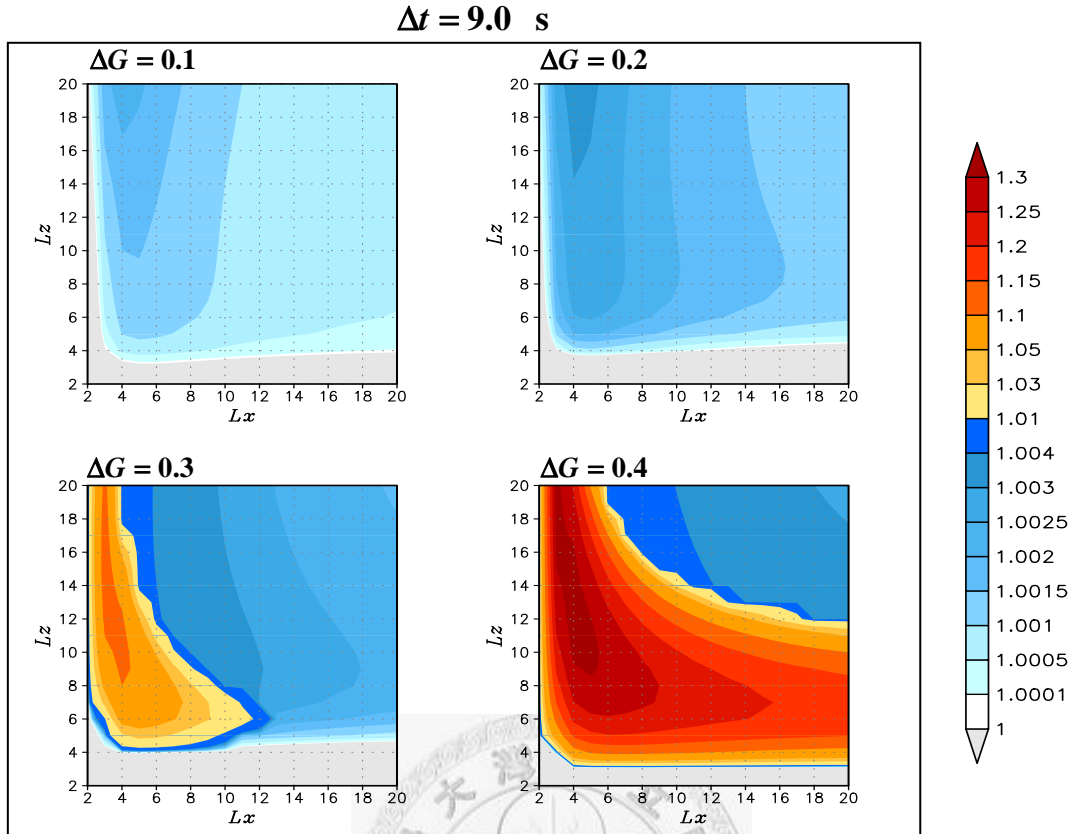


圖 2-16 同圖 2-14，但為垂直隱式積分 (HE-VI)，水平網距 (Δx) 3000 公尺，時間步長 9 秒的結果。

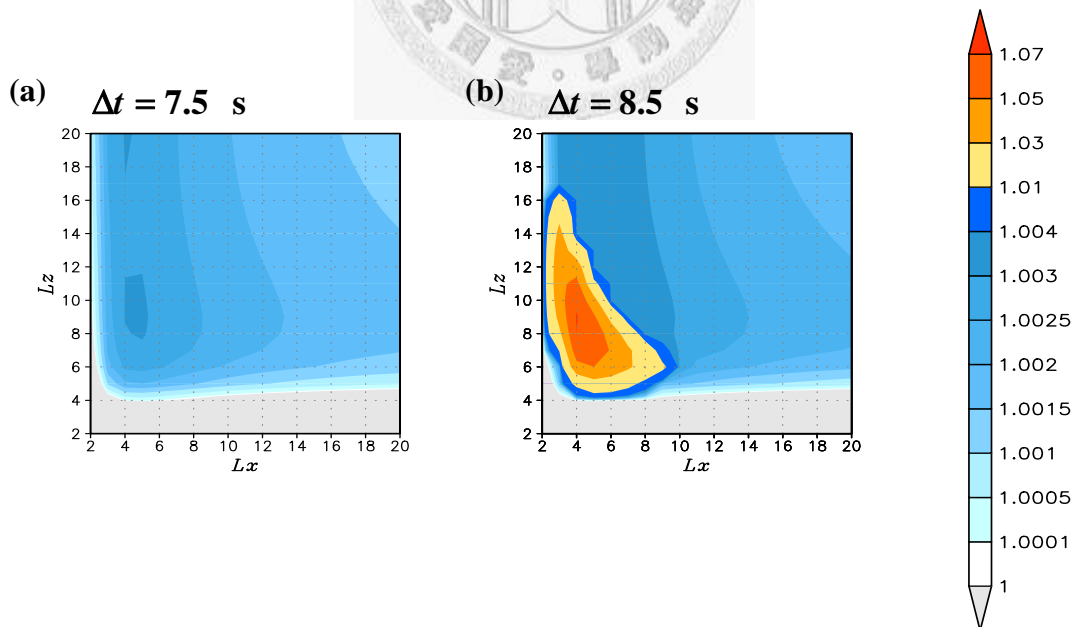


圖 2-17 垂直隱式積分 (HE-VI)，水平網距 (Δx) 3000 公尺，在地形高度為 2000 公尺、坡度 ΔG 為 0.3 時，波長與放大因子絕對值 ($|\lambda|$) 的關係圖。(a)、時間步長 7.5 秒；(b)、時間步長 8.5 秒。其中 x 和 y 座標分別代表水平與垂直網距的倍數。

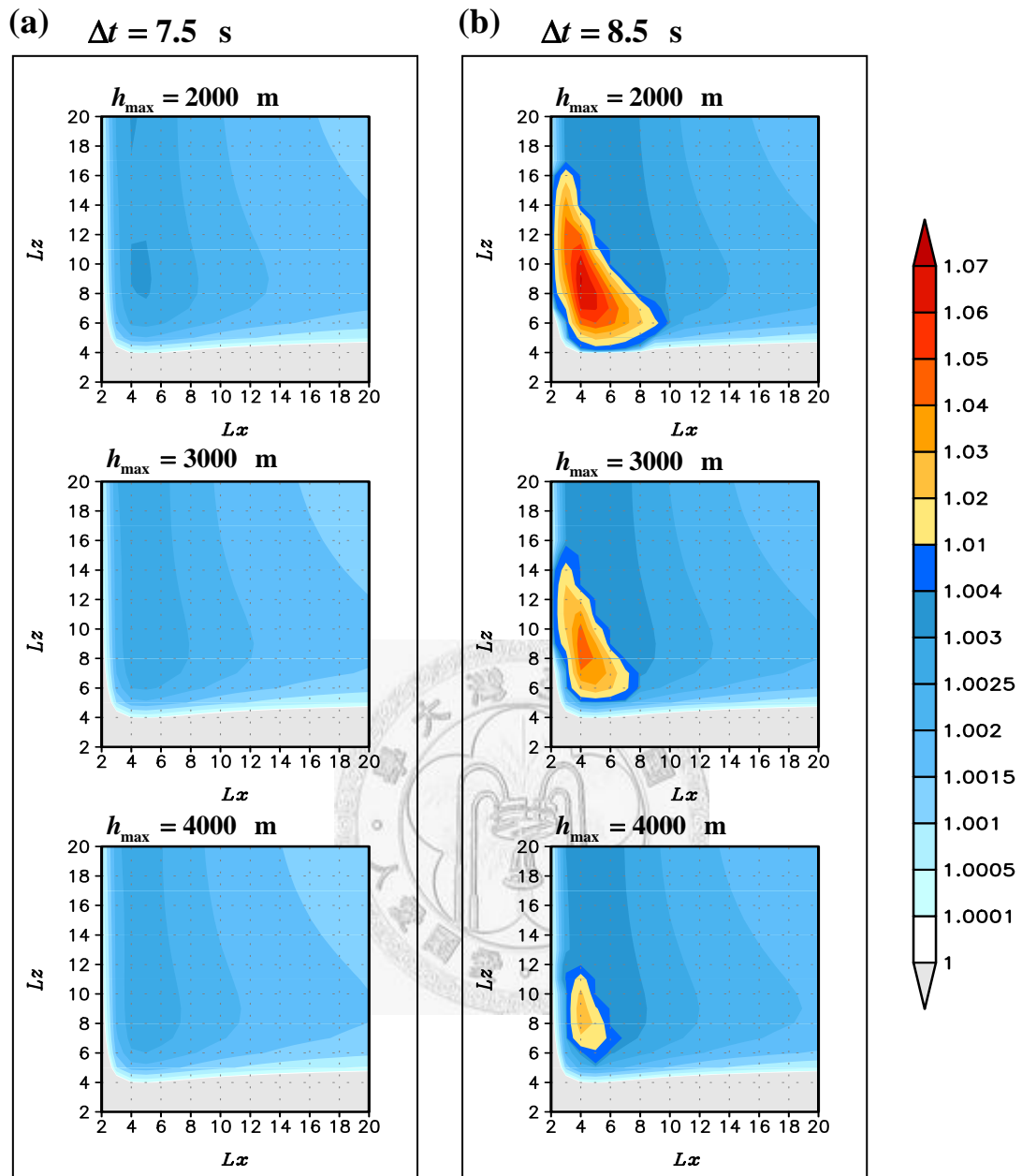


圖 2-18 同圖 2-15，但為垂直隱式積分 (HE-VI)，水平網距 (Δx) 3000 公尺的結果，(a)、時間步長 7.5 秒；(b)、時間步長 8.5 秒。

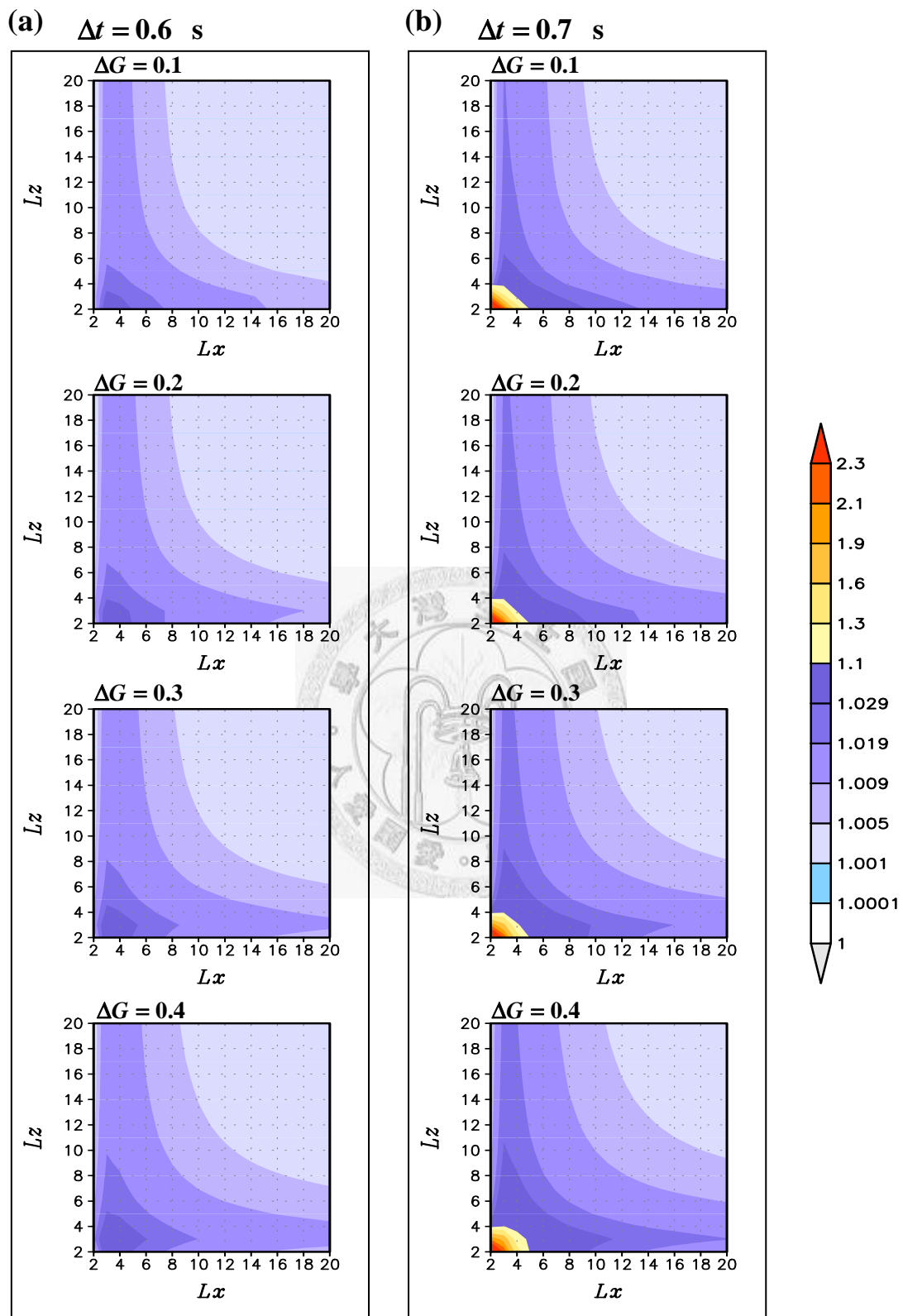


圖 2-19 同圖 2-14，但為顯式積分 (HE-VE)，水平網距 (Δx) 300 公尺的結果，
 (a)、時間步長 0.6 秒；(b)、時間步長 0.7 秒。

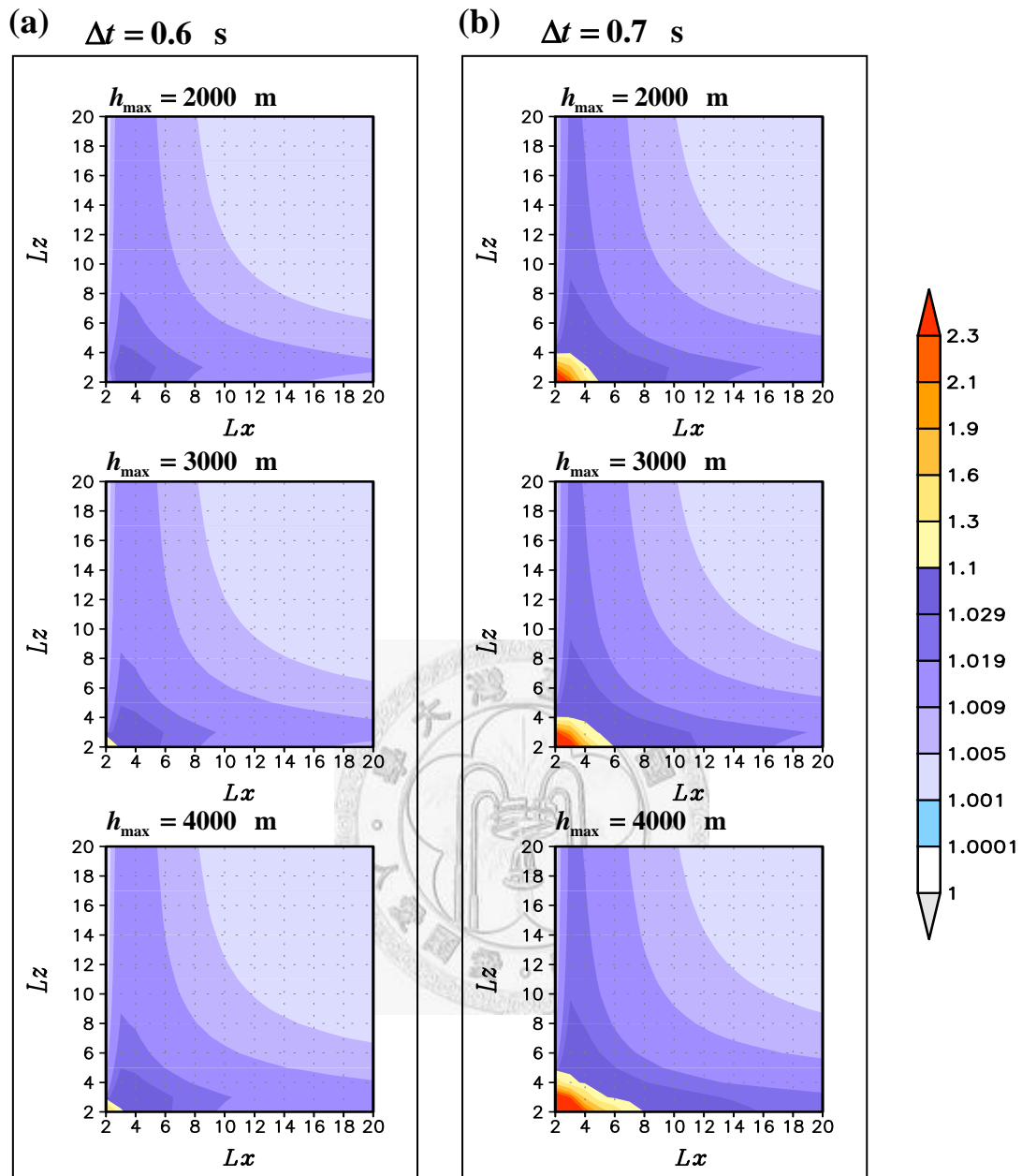


圖 2-20 同圖 2-15，但為顯式積分 (HE-VE)，水平網距 (Δx) 300 公尺的結果，
(a)、時間步長 0.6 秒；(b)、時間步長 0.7 秒。

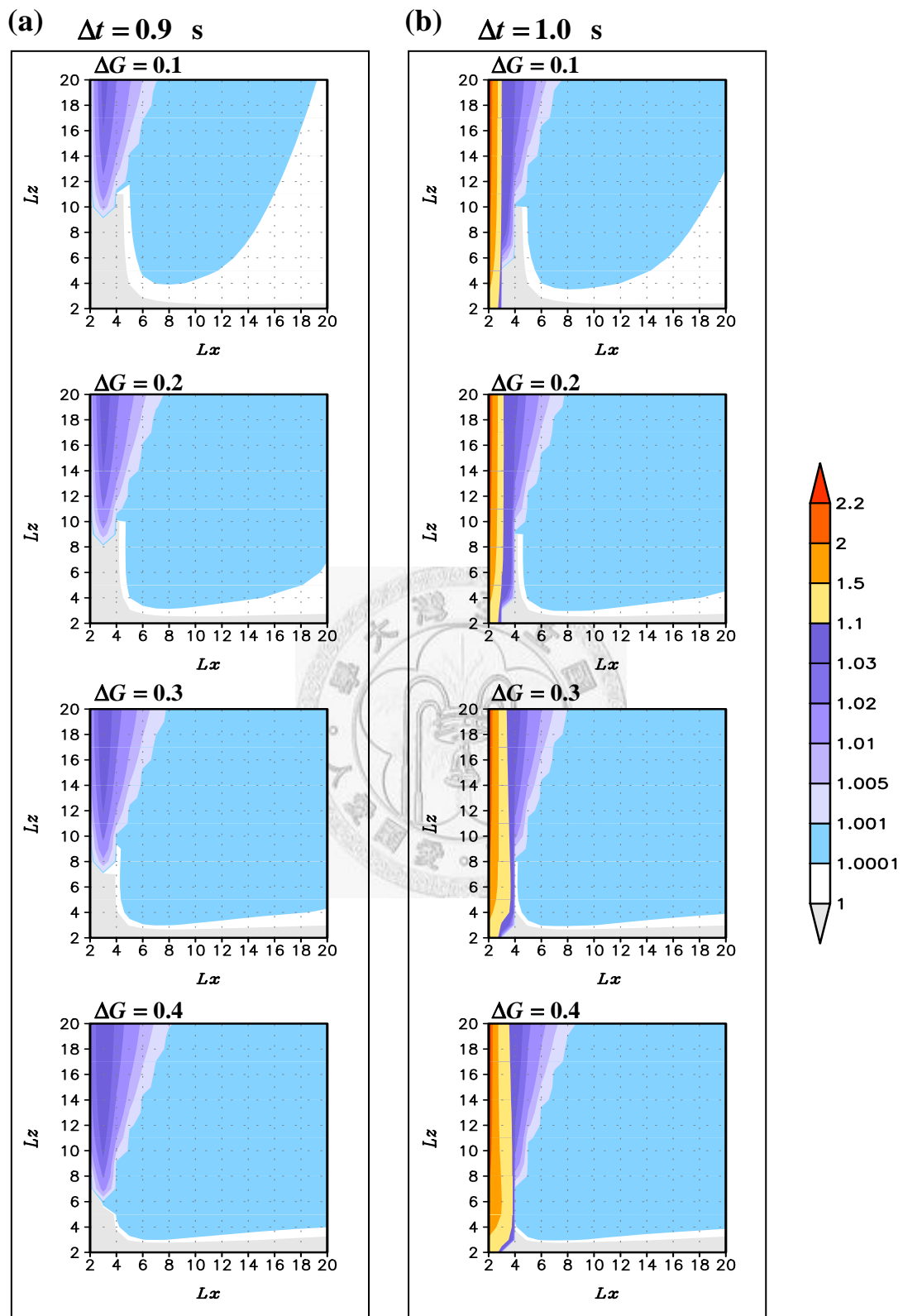


圖 2-21 同圖 2-14，但為垂直隱式積分 (HE-VI)，水平網距 (Δx) 300 公尺的結果，(a)、時間步長 0.9 秒；(b)、時間步長 1 秒。

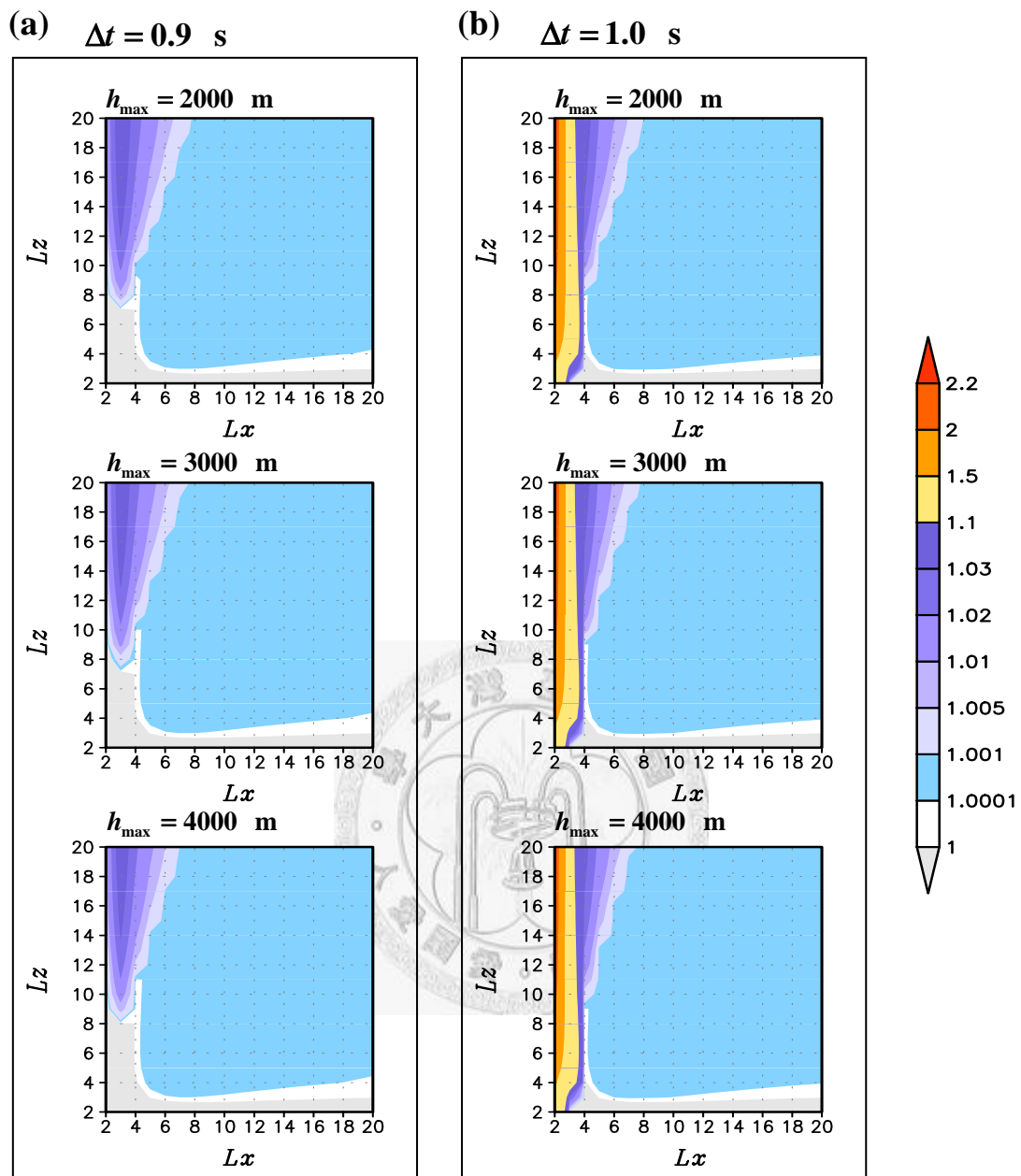


圖 2-22 同圖 2-15，但為垂直隱式積分 (HE-VI)，水平網距 (Δx) 300 公尺的結果，(a)、時間步長 0.9 秒；(b)、時間步長 1 秒。

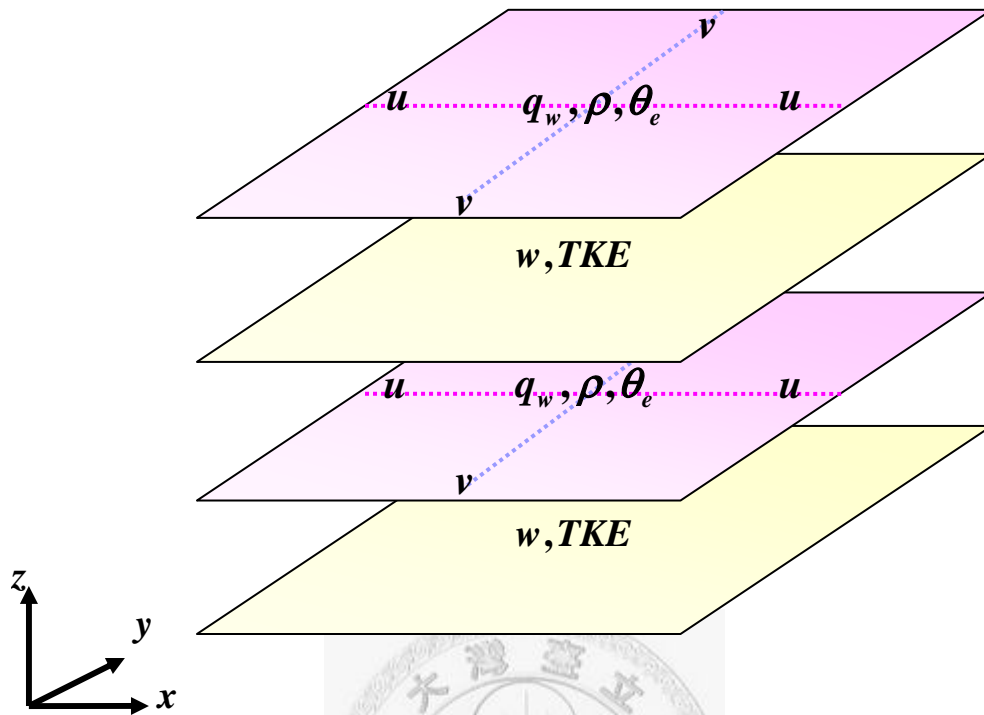


圖 3-1 三維台大-普渡非靜力可壓縮模式的網格交錯配置示意圖。

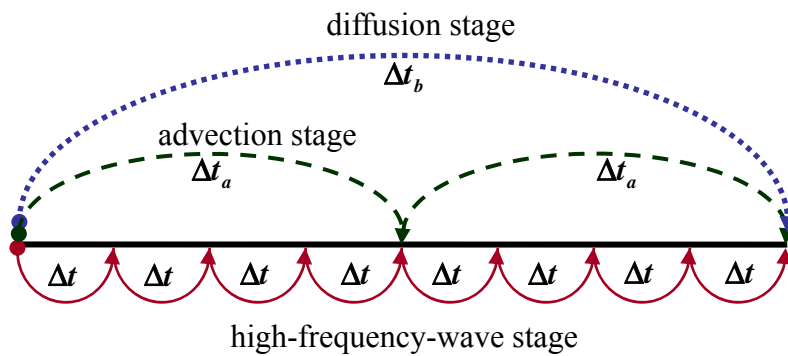


圖 3-2 台大-普渡非靜力模式的時間分離法示意圖。其中 Δt 、 Δt_a 、 Δt_b 分別為高頻波動階段、平流階段和擴散階段的時間步長。上圖顯示之分離比例為 $\Delta t : \Delta t_a : \Delta t_b = 1 : 4 : 8$ 。

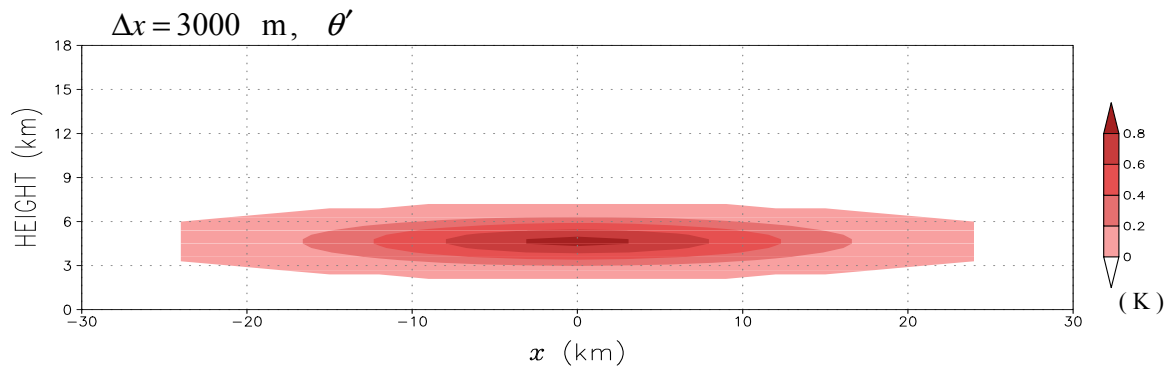


圖 4-1 重力波實驗中，H0_DX3000 個案之初始位溫擾動 θ' 分佈圖。初始擾動之中心在 $x=0$ ，高度 4.5 km 的位置上。

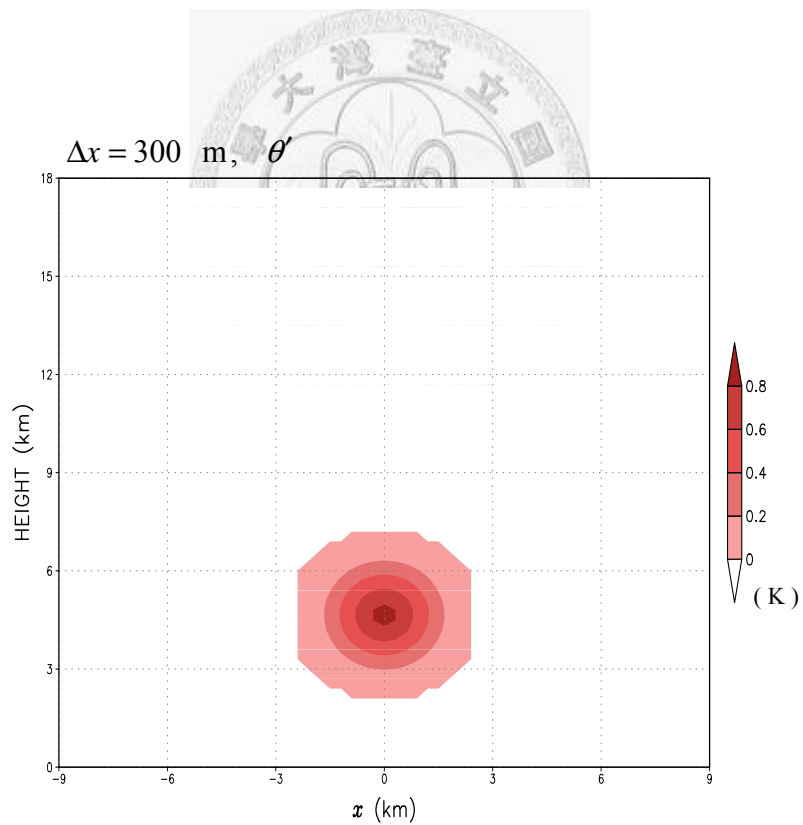


圖 4-2 同圖 4-1，但為 DX300 個案之位溫擾動 θ' 分佈圖。

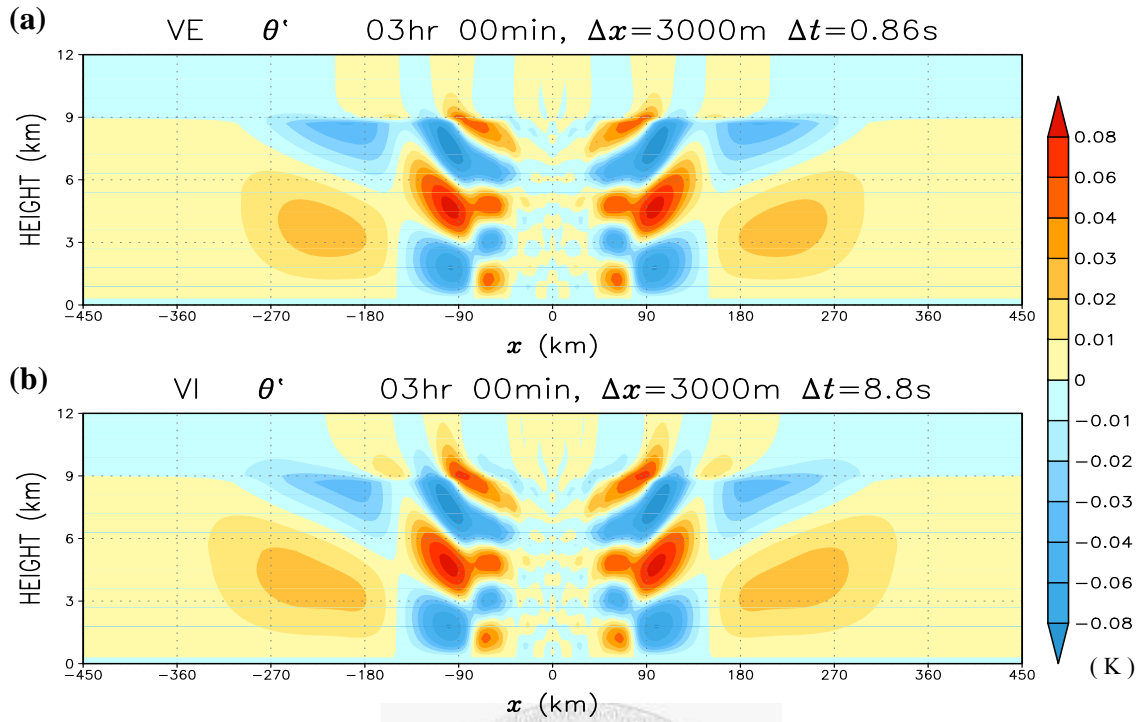


圖 4-3 重力波實驗中，H0_DX3000 個案積分 3 小時後之位溫擾動 θ' 分佈圖。初始擾動之中心在 $x=0$ 之位置上。(a)為顯式積分方法結果；(b)為垂直隱式積分方法結果。

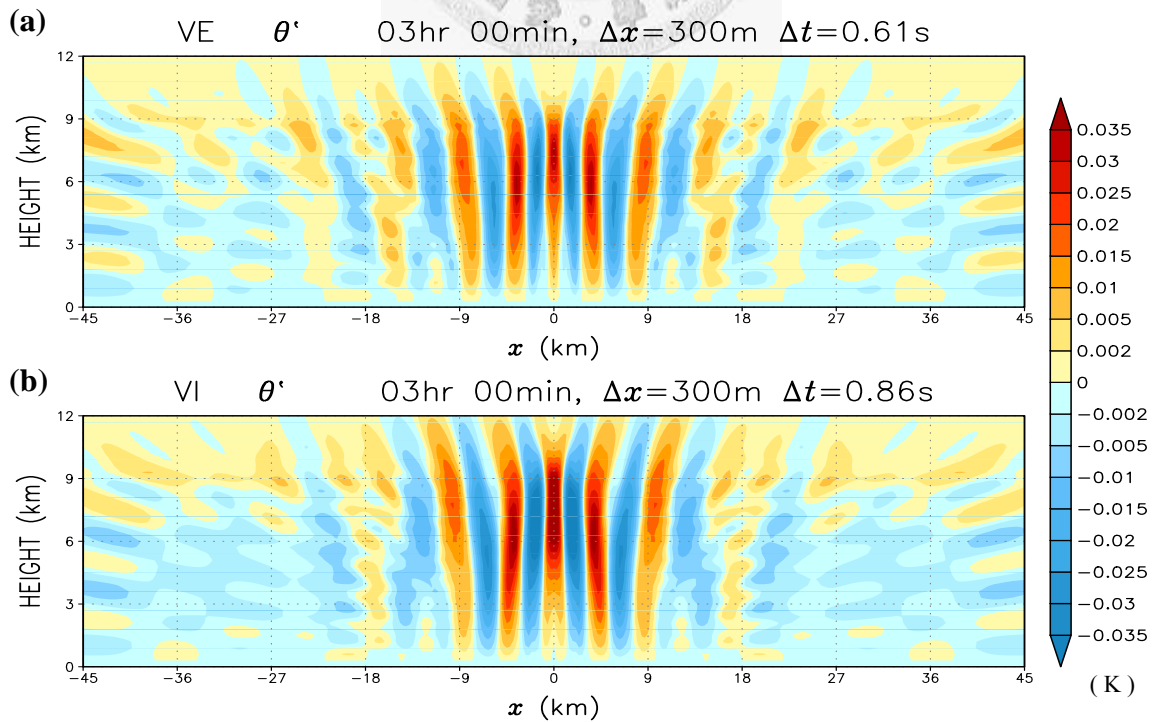


圖 4-4 同圖 4-3，但為 DX300 個案之位溫擾動 θ' 分佈圖。

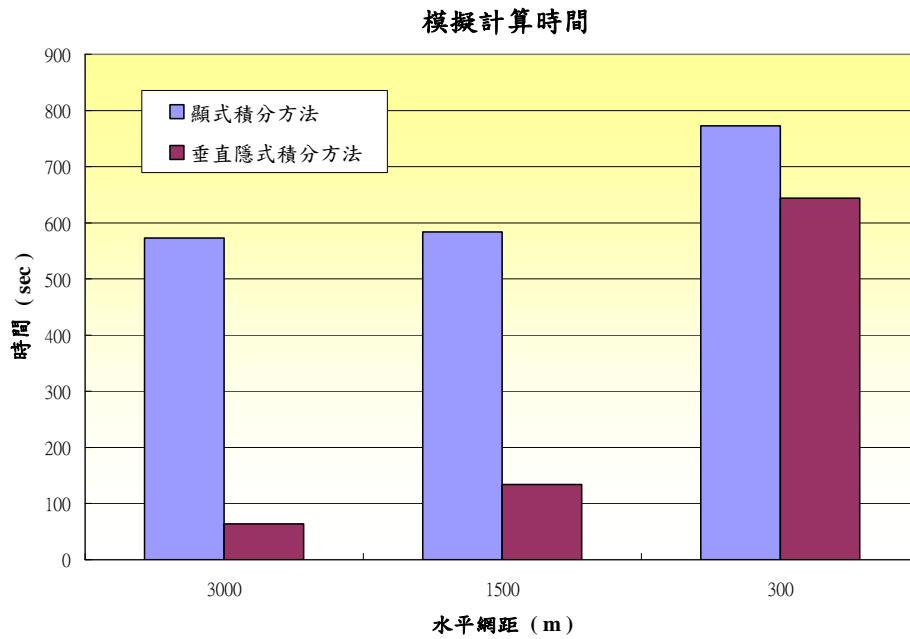


圖 4-5 重力波實驗中，各網距依最大時間步長（表 4-4），顯式及垂直隱式時間積分法模擬 3 小時所需計算時間之比較。

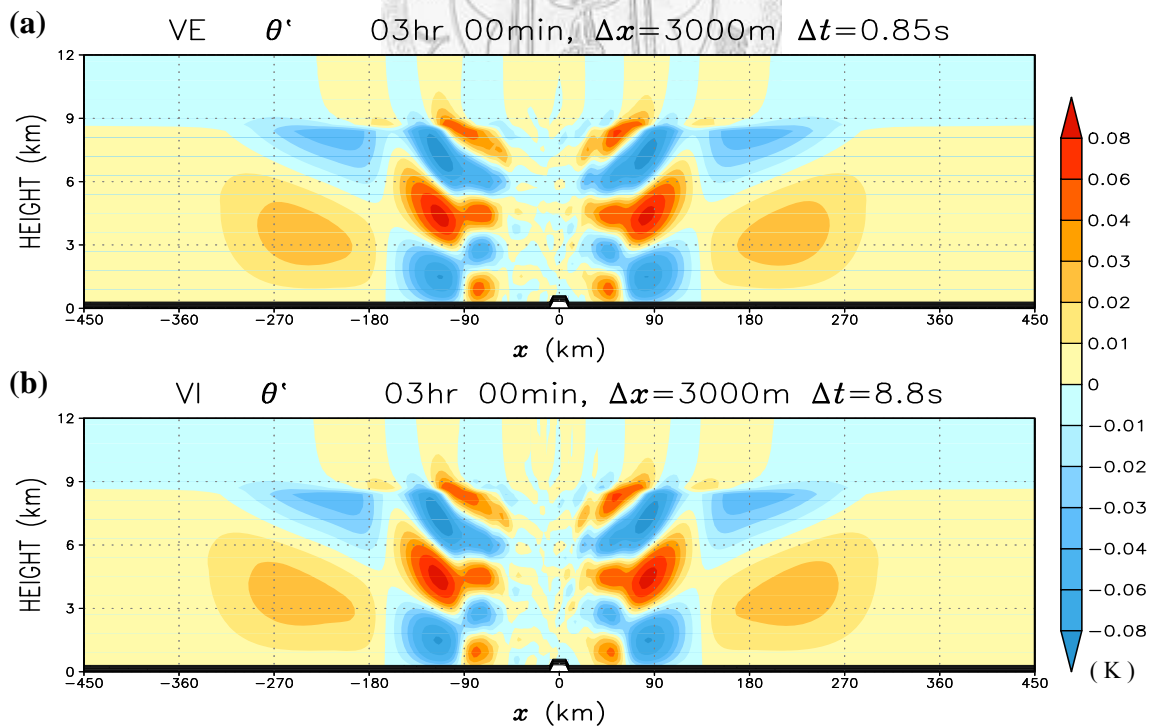


圖 4-6 重力波實驗中，H500_A10_DX3000 個案積分 3 小時後之位溫擾動 θ' 分佈圖。初始擾動中心在 $x=-15\text{ km}$ 的位置上。(a)為顯式積分方法結果；(b)為垂直隱式積分方法結果。

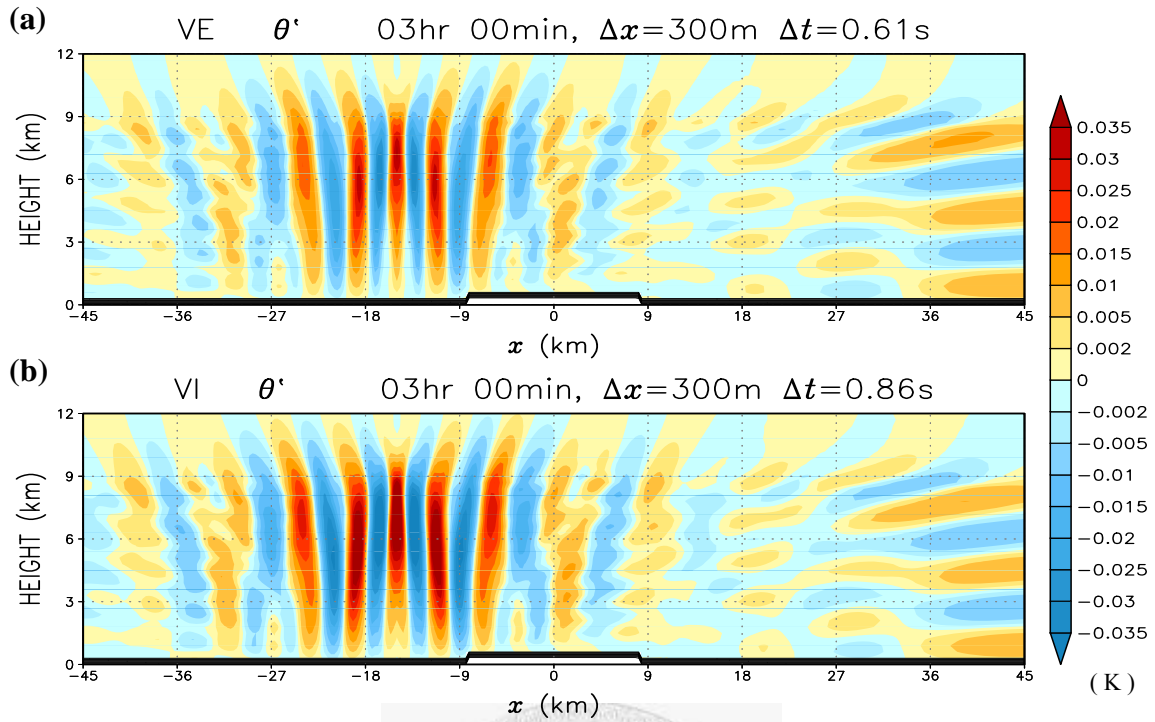


圖 4-7 同圖 4-6，但為 DX300 個案之位溫擾動 θ' 分佈圖。

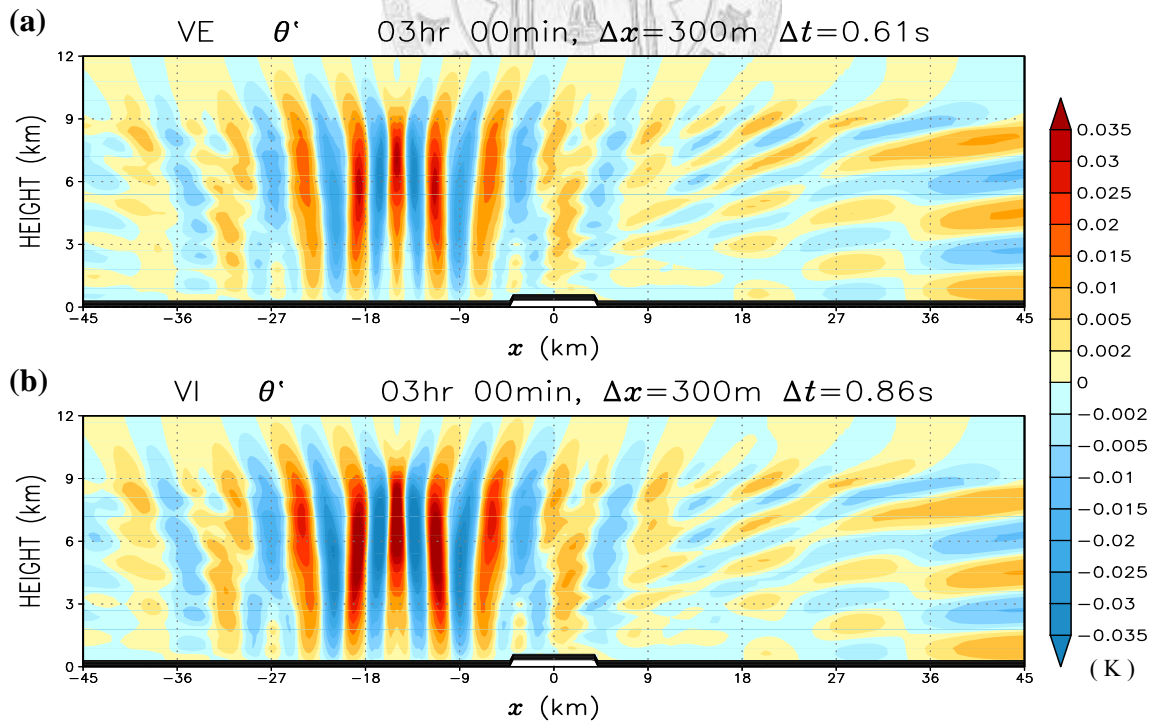


圖 4-8 重力波實驗中，H500_A5_DX300 個案積分 3 小時後之位溫擾動 θ' 分佈圖。初始擾動中心在 $x = -15$ km 的位置上。(a)為顯式積分方法結果；(b)為垂直隱式積分方法結果。

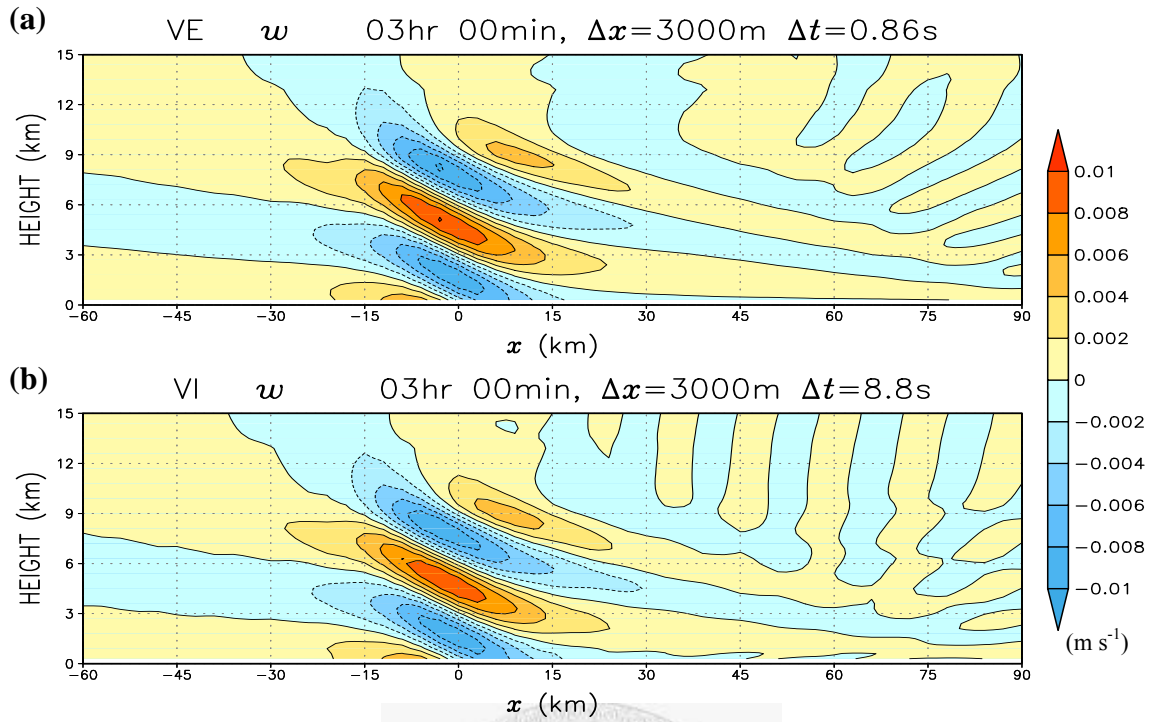


圖 4-9 線性山岳波實驗中，H10_A10_DX3000 個案積分 3 小時後之垂直速度 w 分佈圖。地形中心在 $x=0$ 的位置上。(a)為顯式積分方法結果；(b)為垂直隱式積分方法結果。

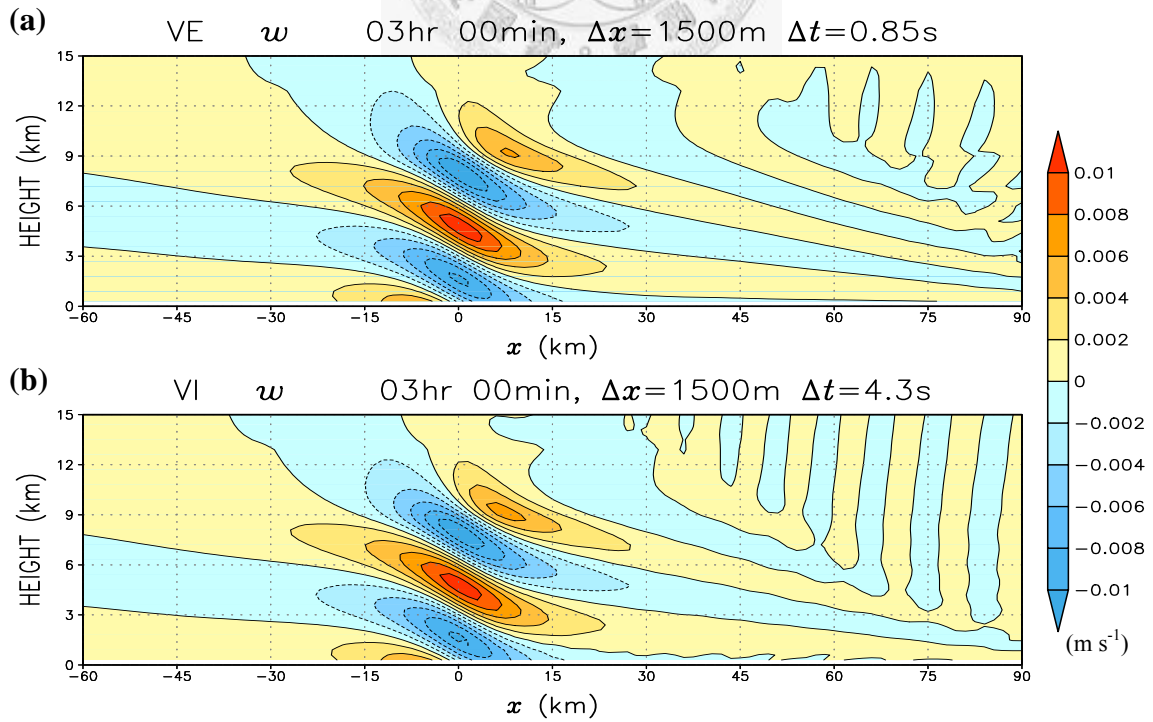


圖 4-10 同 4-9，但為 DX1500 個案之垂直速度 w 分佈圖。

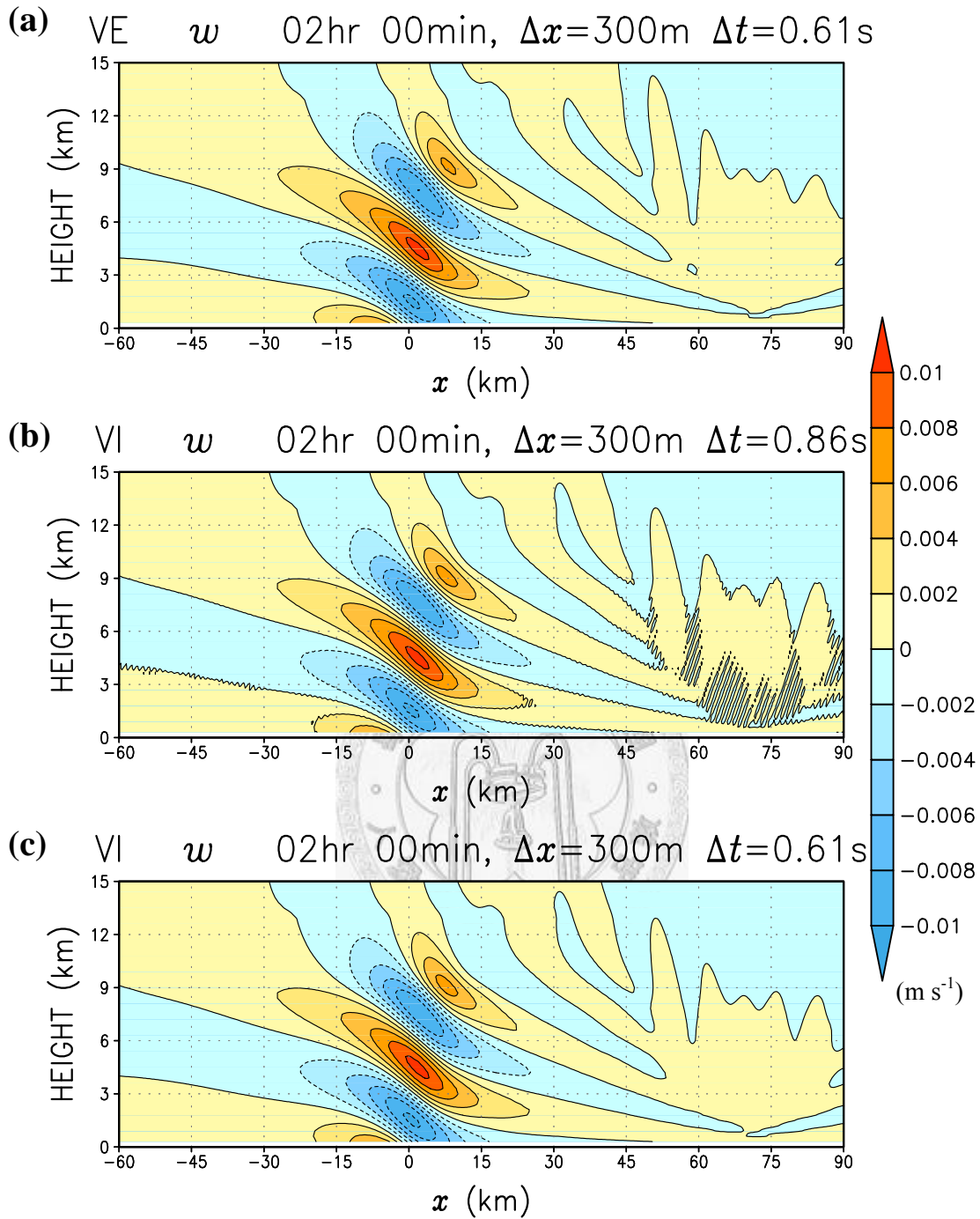


圖 4-11 線性山岳波實驗中，H10_A10_DX300 個案積分 2 小時後之垂直速度 w 分佈圖。地形中心在 $x = 0$ 的位置上。(a)為顯式積分方法結果；(b)為垂直隱式積分方法中取時間步長 0.86 秒的結果。(c)為垂直隱式積分方法中取時間步長 0.61 秒的結果。

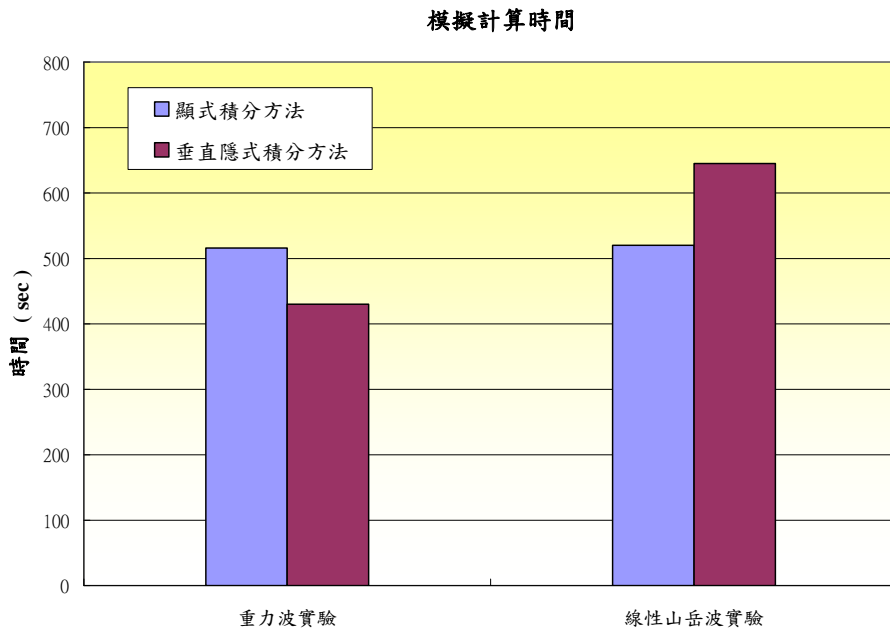


圖 4-12 H0_DX300 個案之重力波實驗與 H10_A10_DX300 個案之線性山岳波實驗模擬 2 小時所花費計算時間之比較。在重力波實驗中，顯式與垂直隱式方法取用之時間步長分別為 0.61 秒及 0.86 秒；在線性山岳波實驗中，顯式和垂直隱式方法取用之時間步長皆為 0.61 秒。

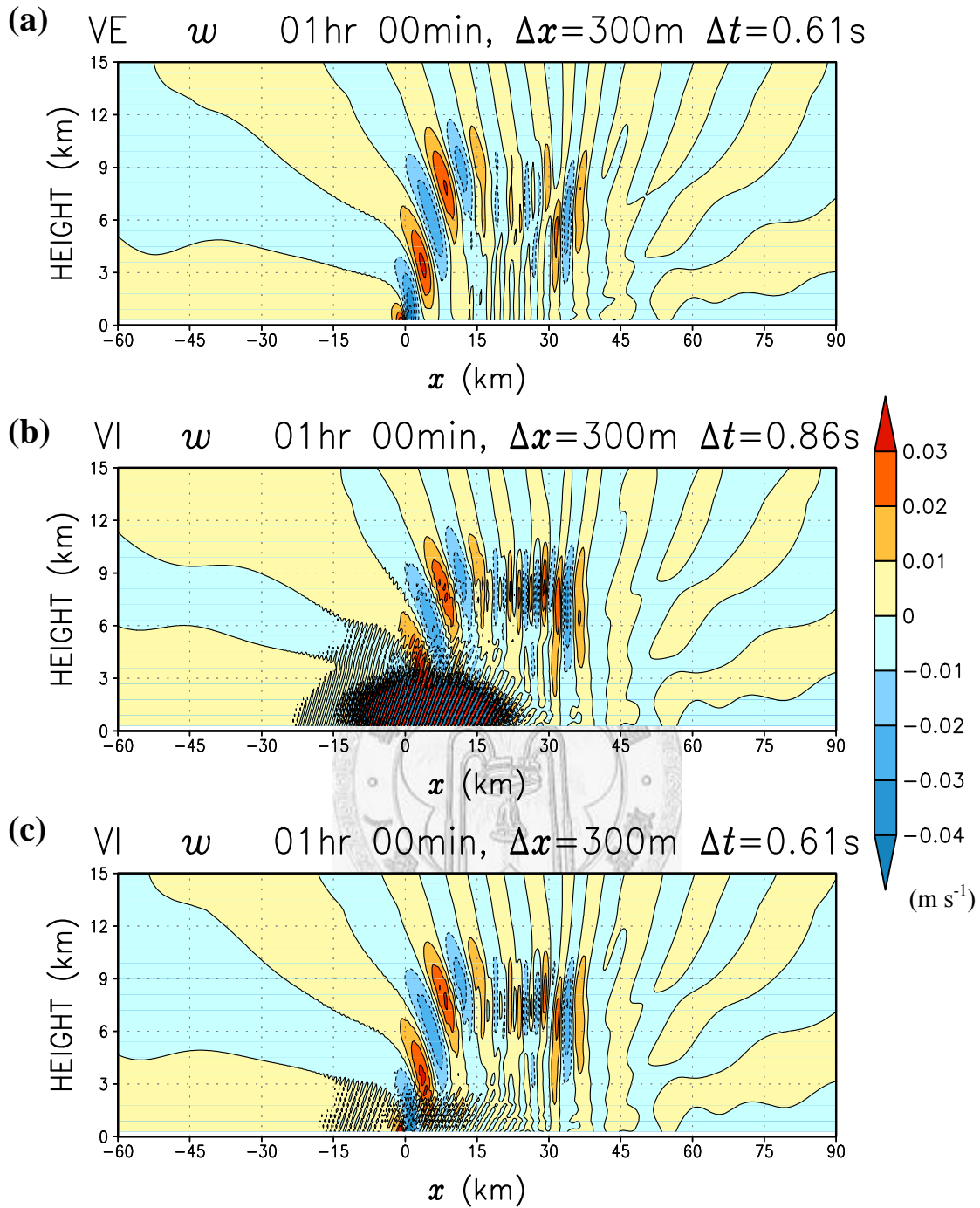


圖 4-13 線性山岳波實驗中，H10_A1_DX300 個案積分 1 小時後之垂直速度 w 分佈圖。地形中心在 $x=0$ 的位置上。(a)為顯式積分方法結果；(b)為垂直隱式積分方法中取時間步長 0.86 秒的結果。(c)為垂直隱式積分方法中取時間步長 0.61 秒的結果。

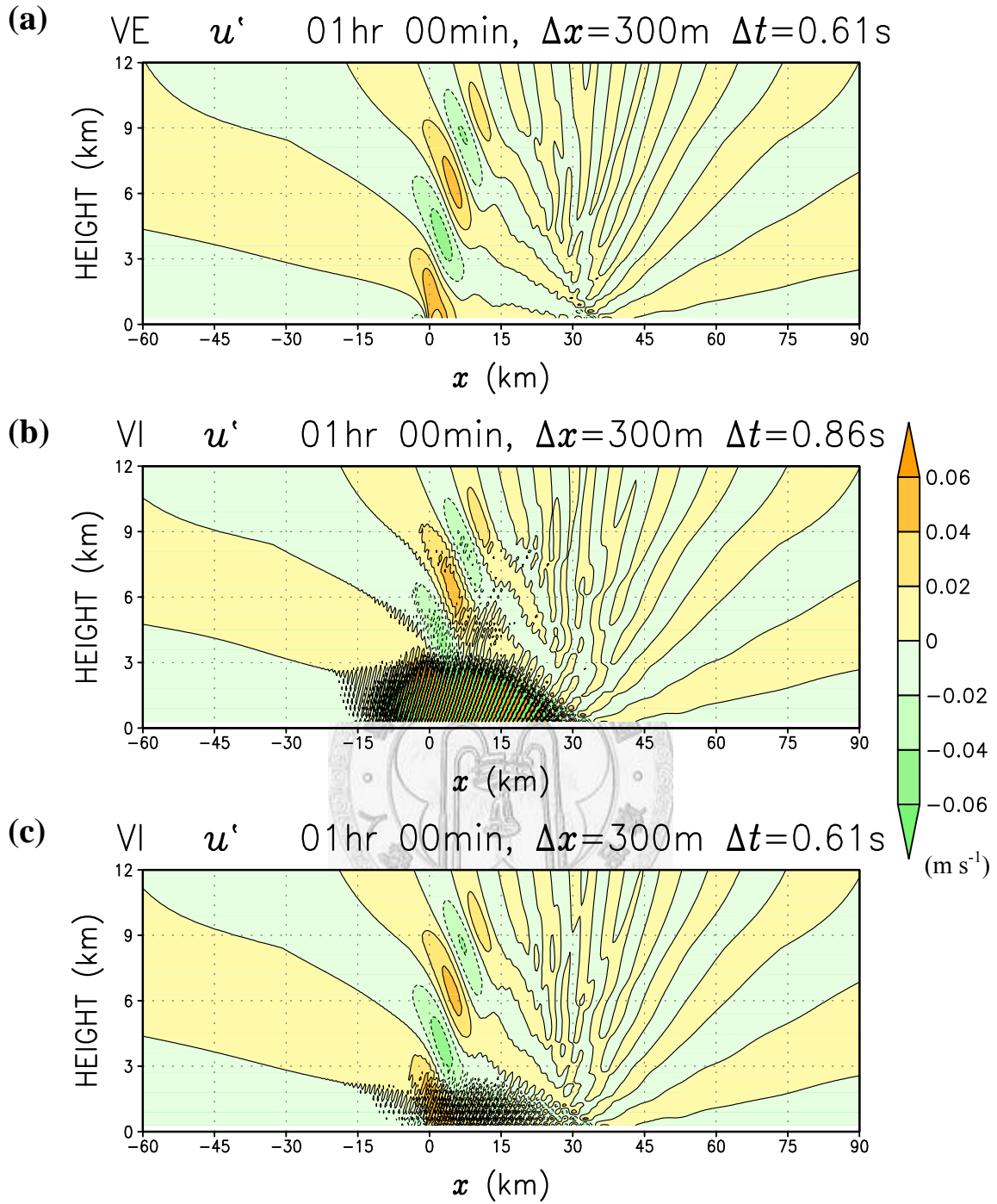


圖 4-14 同圖 4-13，但為使用 H10_A1_DX300 個案積分 1 小時後之水平速度 $u' = u - \bar{U}$ (10 m/s) 分佈圖。

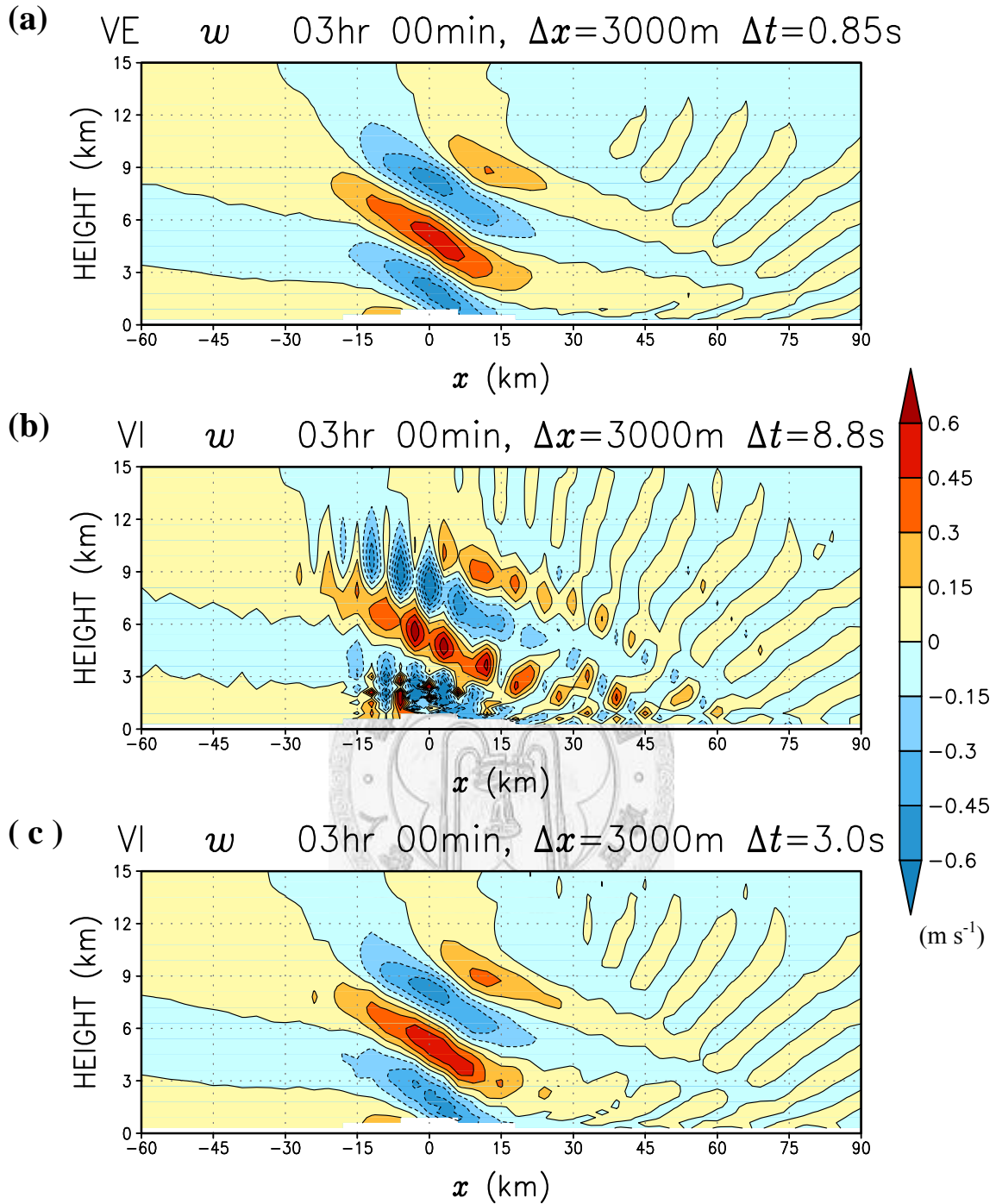


圖 4-15 非線性山岳波實驗中，H500_A10_DX3000 個案積分 3 小時後之垂直速度 w 分佈圖。地形中心在 $x = 0$ 的位置上。(a)為顯式積分方法結果；(b)為垂直隱式積分方法中取時間步長 8.8 秒的結果。(c)為垂直隱式積分方法中取時間步長 3 秒的結果。

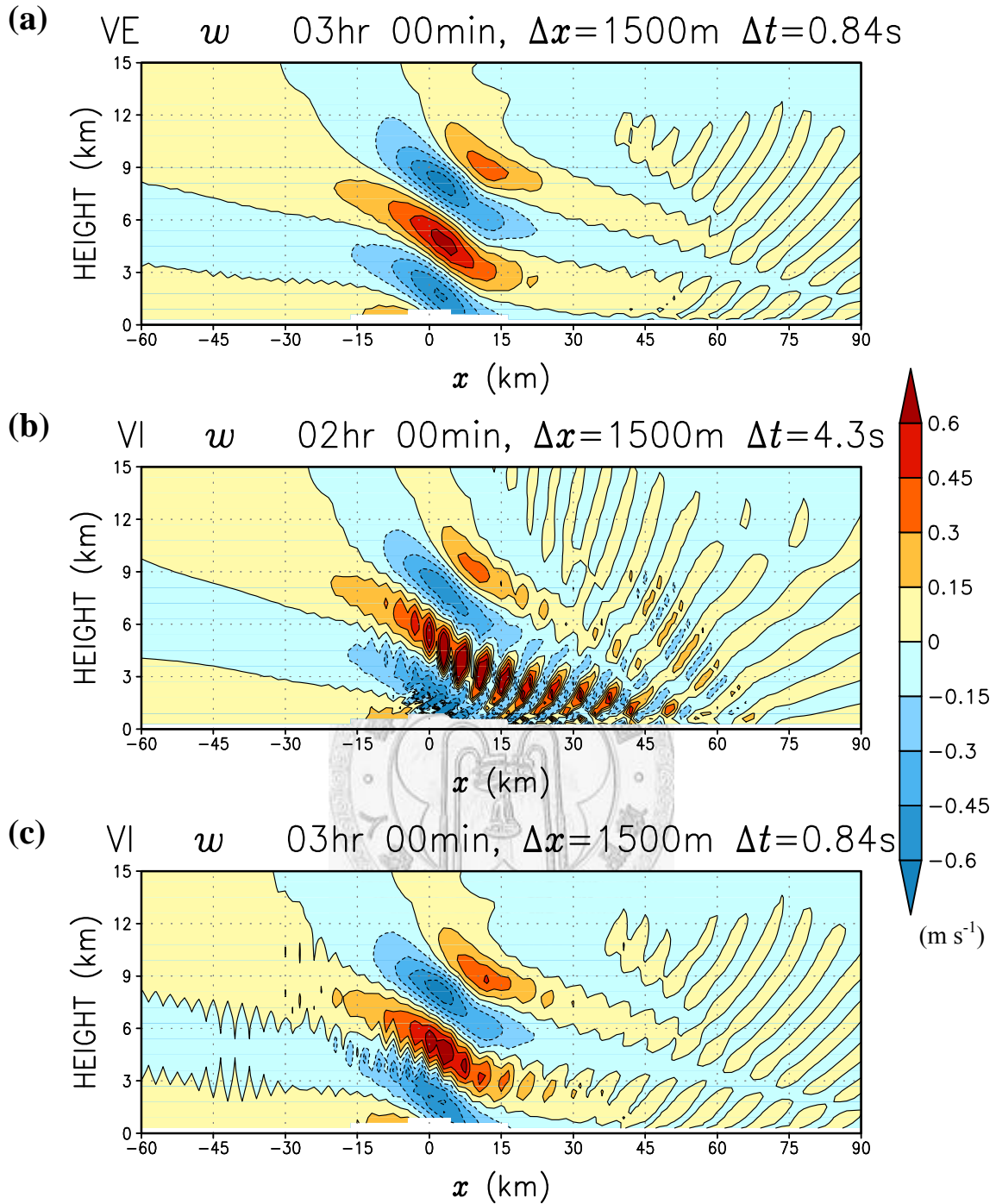


圖 4-16 非線性山岳波實驗中，H500_A10_DX1500 個案積分 3 小時後之垂直速度 w 分佈圖。地形中心在 $x = 0$ 的位置上。(a)為顯式積分方法結果；(b)為垂直隱式積分方法中取時間步長 4.3 秒積分 2 小時後的結果。(c)為垂直隱式積分方法中取時間步長 0.84 秒的結果。

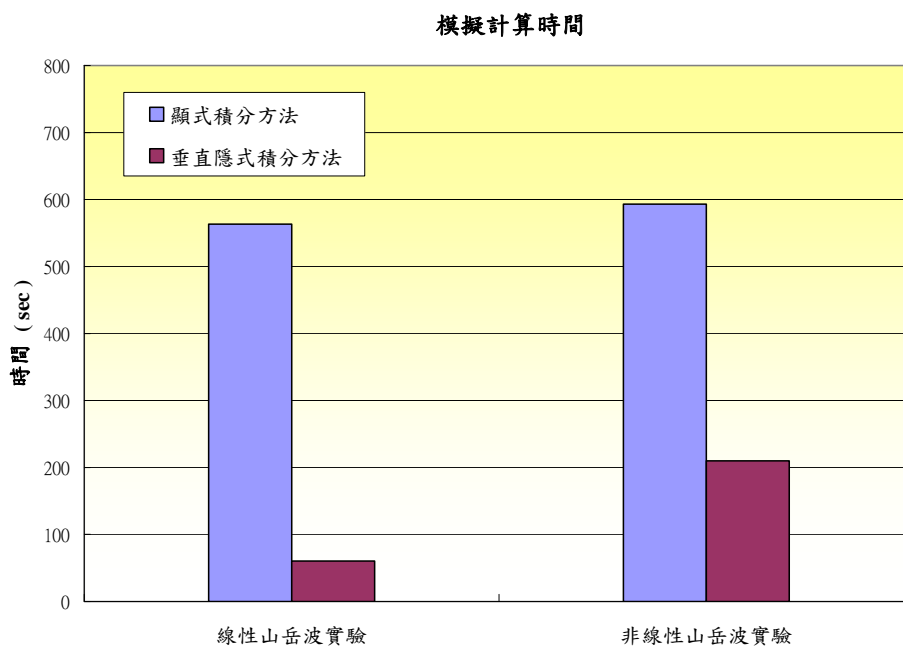


圖 4-17 H10_A10_DX3000 個案與 H500_A10_DX3000 個案模擬 3 小時計算時間之比較。在線性山岳實驗中，顯式與垂直隱式方法取用之時間步長分別為 0.86 秒及 8.8 秒；在非線性山岳波實驗中，顯式和垂直隱式方法取用之時間步長分別為 0.85 秒及 3 秒。

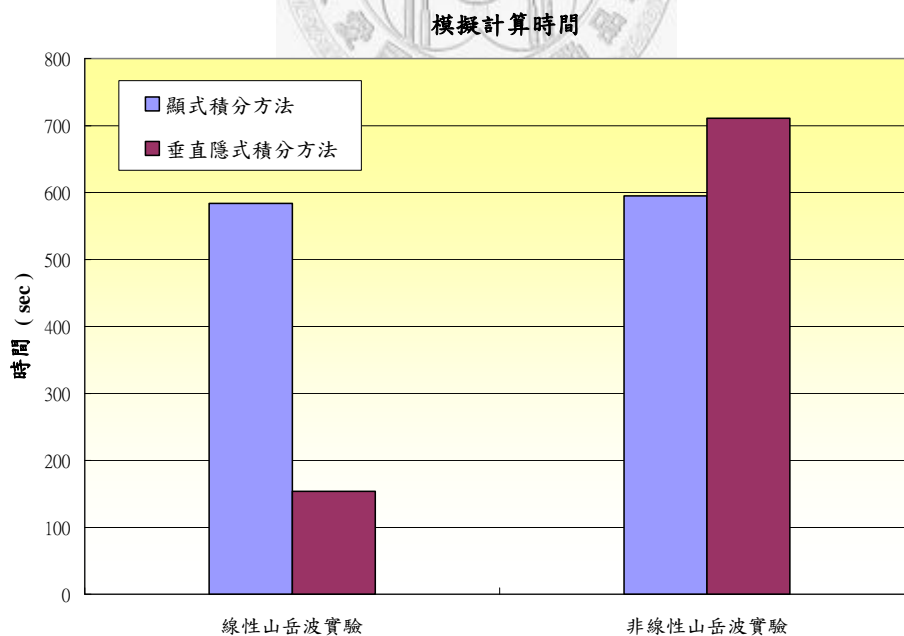


圖 4-18 同圖 4-17，但為 DX1500 個案模擬 3 小時計算時間之比較。在線性山岳波實驗中，顯式與垂直隱式方法取用之時間步長分別為 0.85 秒及 4.3 秒；在非線性山岳波實驗中，顯式和垂直隱式方法取用之時間步長皆為 0.84 秒。

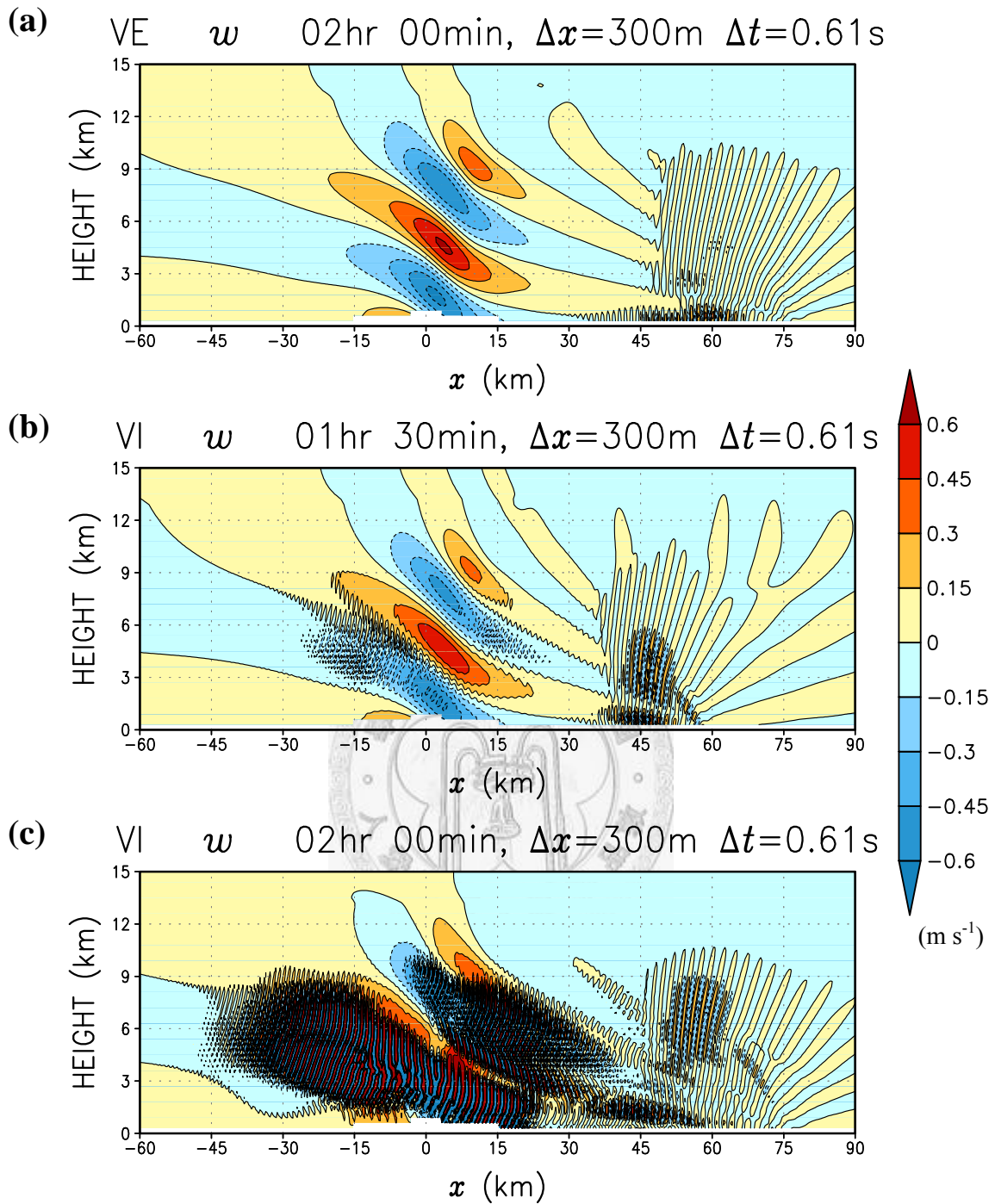


圖 4-19 非線性山岳波實驗中，H500_A10_DX300 個案之垂直速度 w 分佈圖。地形中心在 $x = 0$ 的位置上。(a)為顯式方法積分 2 小時後的結果；(b)為垂直隱式方法積分 1 小時 30 分後的結果；(c) 為垂直隱式方法積分 2 小時後的結果。

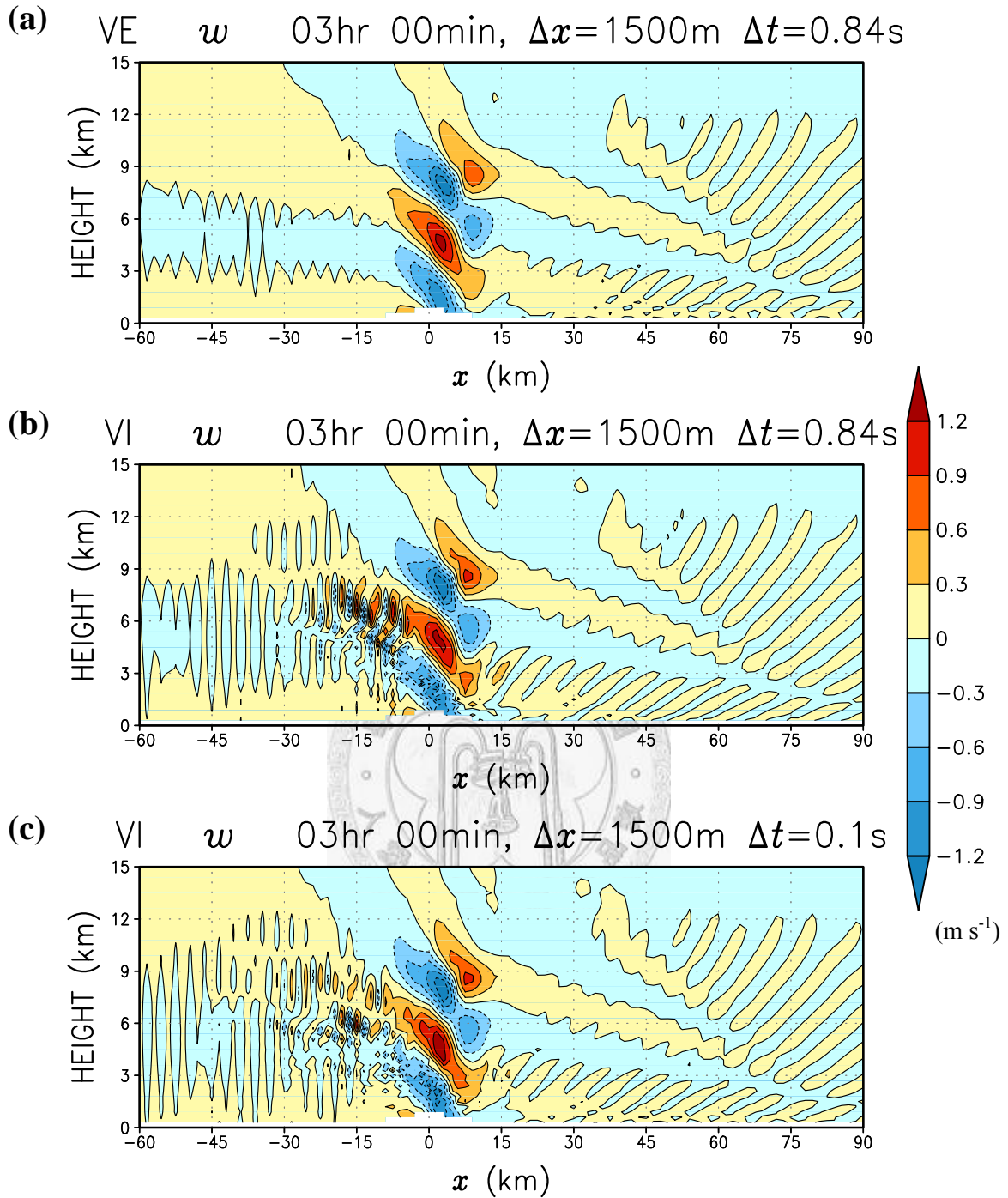


圖 4-20 非線性山岳波實驗中，H500_A5_DX1500 個案積分 3 小時後之垂直速度 w 分佈圖。地形中心在 $x = 0$ 的位置上。(a)為顯式積分方法結果；(b)為垂直隱式積分方法中取時間步長 0.84 秒的結果。(c)為垂直隱式積分方法中取時間步長 0.1 秒的結果。

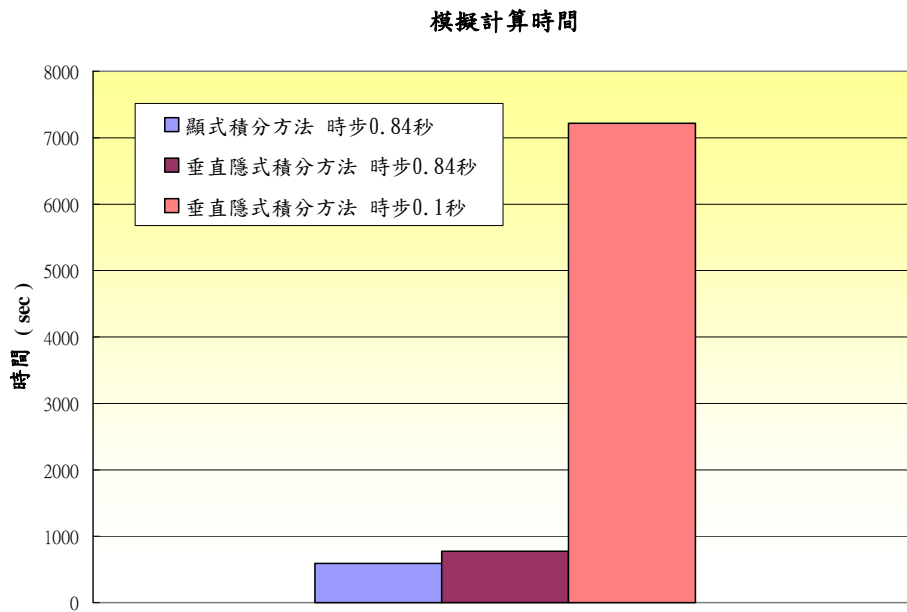


圖 4-21 非線性山岳波實驗中，H500_A5_DX1500 個案模擬 3 小時計算時間之比較。



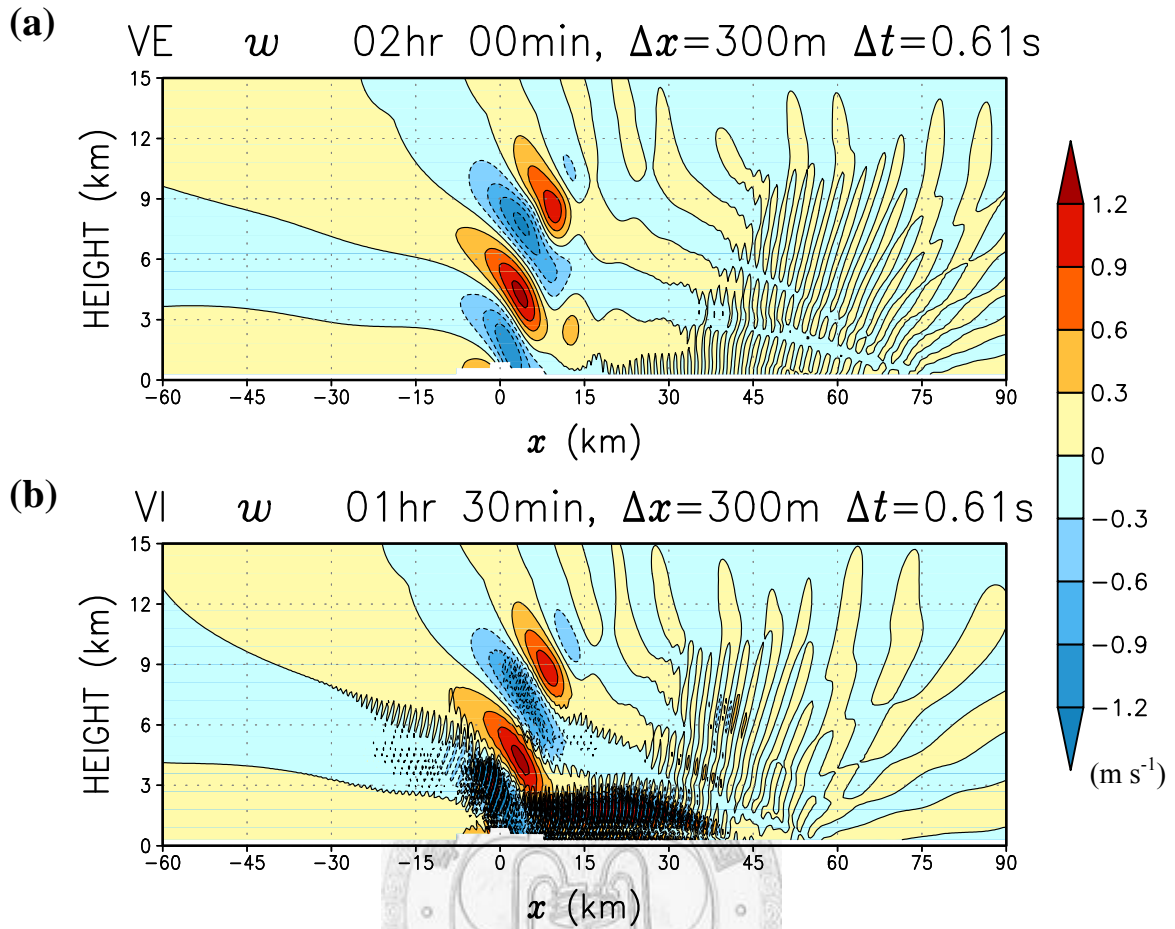


圖 4-22 非線性山岳波實驗中，H500_A5_DX300 個案之垂直速度 w 分佈圖。地形中心在 $x = 0$ 的位置上。(a)為顯式方法積分 2 小時後的結果；(b)為垂直隱式方法積分 1 小時 30 分後的結果。

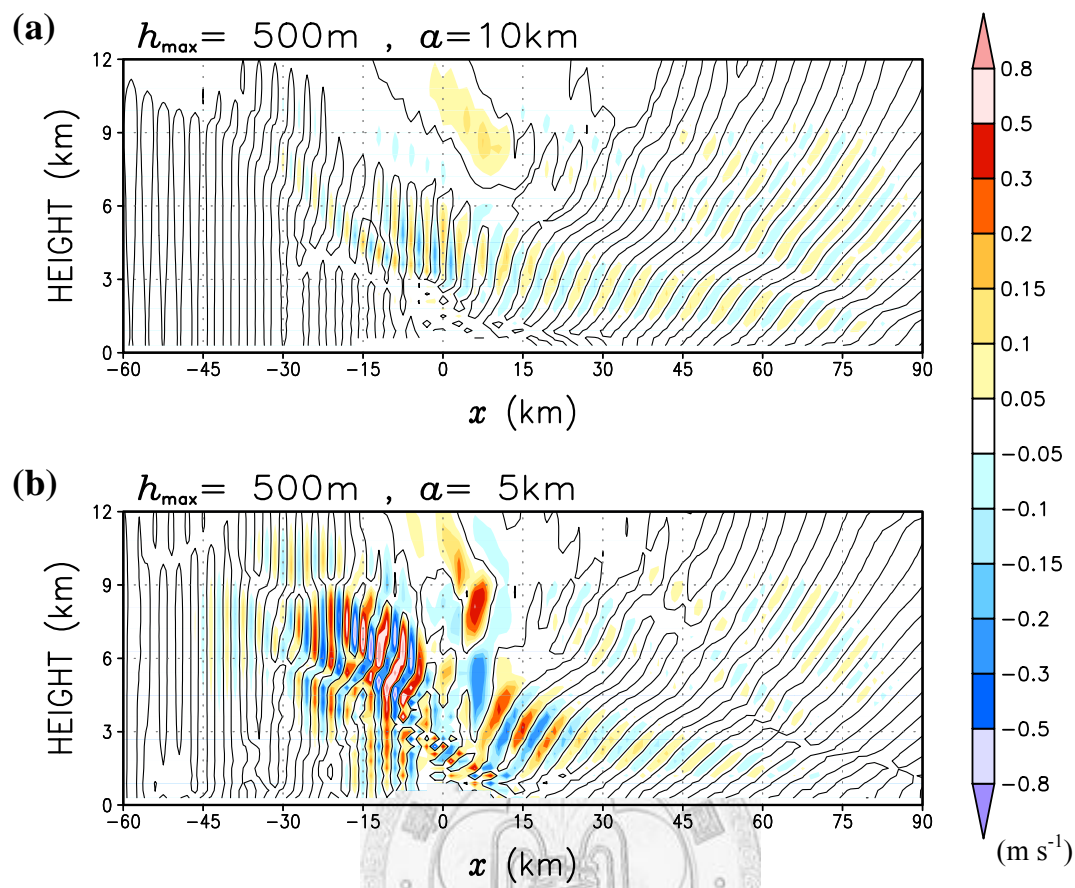


圖 4-23 DX1500 個案中，顯式方法及垂直隱式方法之時間步長皆取 0.84 秒模擬 3 小時後，此兩計算方法垂直速度場之差異 ($w(\text{HE-VI}) - w(\text{HE-VE})$) 的分佈圖。地形中心在 $x=0$ 的位置上，黑色等值線之值為 0。其中 h_{\max} 為山頂高度， a 為半山寬 (山頂高度一半處的水平半徑)。(a) 為 H500_A10 個案的結果；(b) 為 H500_A5 個案的結果。

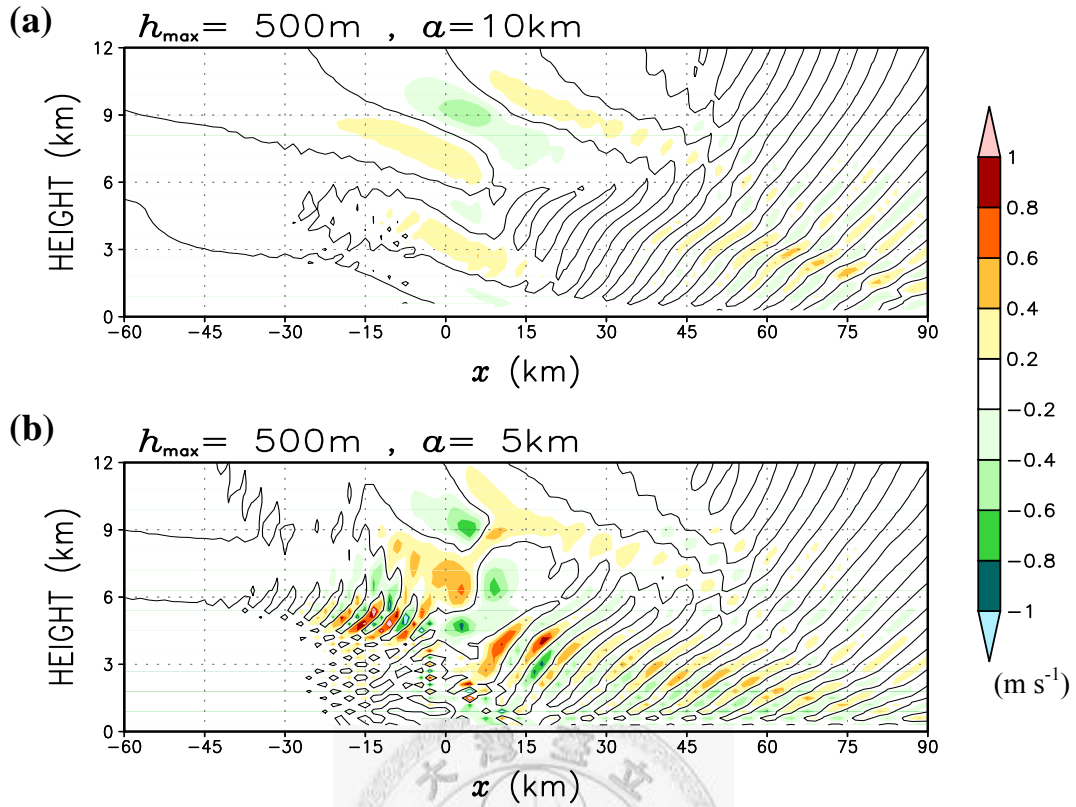


圖 4-24 同圖 4-23，但為水平風場之差異 ($u(\text{HE-VI}) - u(\text{HE-VE})$) 的分佈圖。

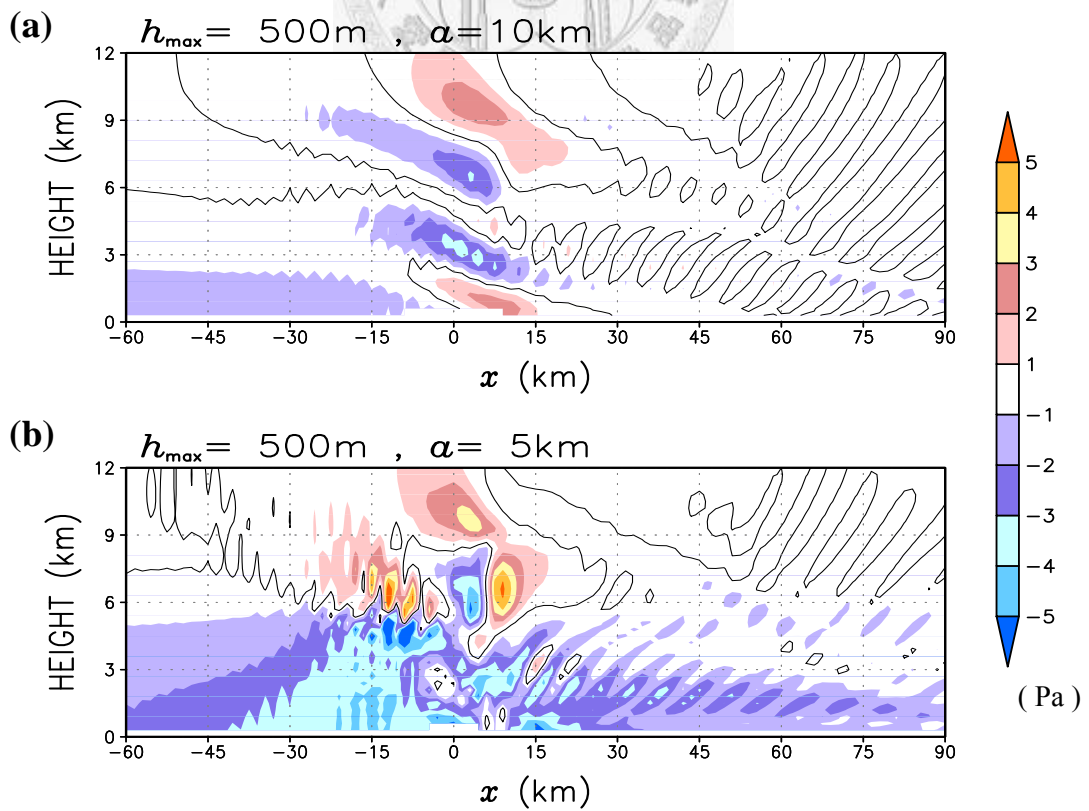


圖 4-25 同圖 4-23，但為氣壓擾動場之差異 ($p'(\text{HE-VI}) - p'(\text{HE-VE})$) 的分佈圖。

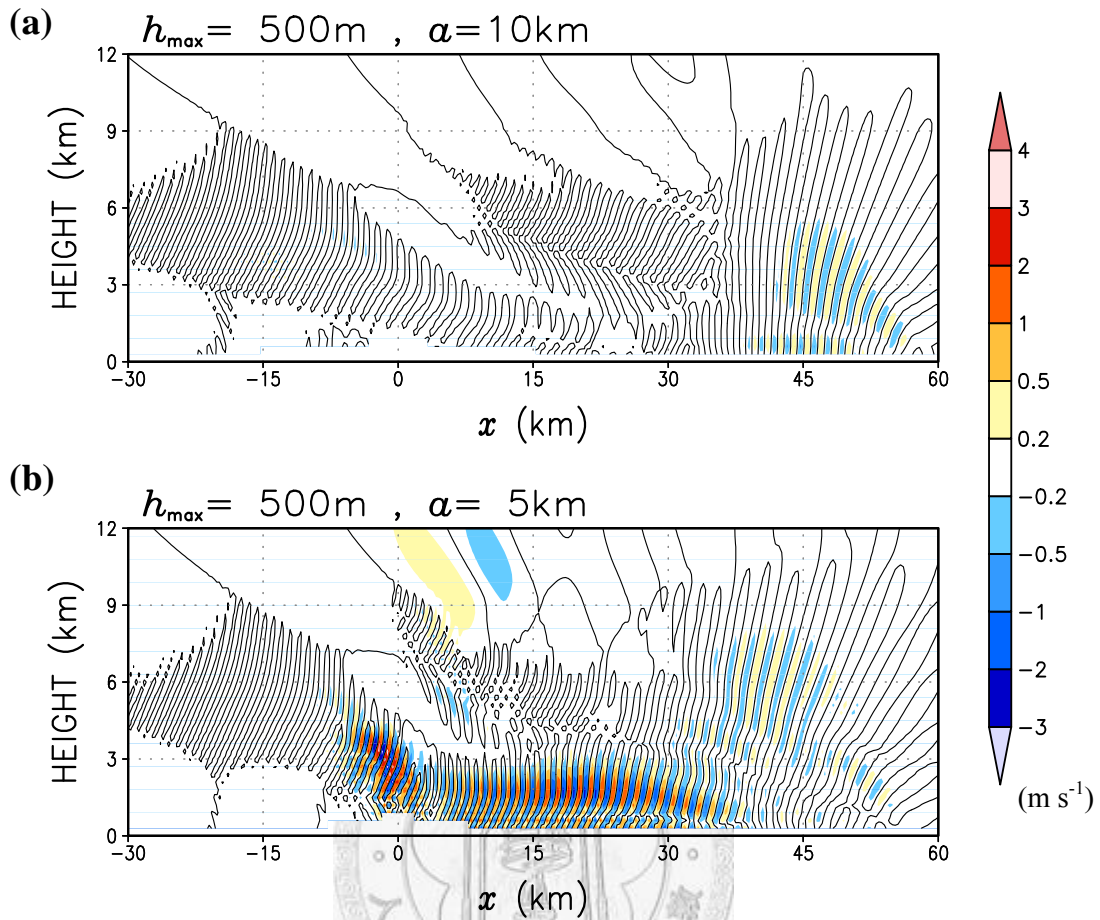


圖 4-26 DX300 個案中，顯式方法及垂直隱式方法之時間步長皆取 0.61 秒模擬 1 小時 30 分後，此兩計算方法垂直速度場之差異 ($w(\text{HE-VI}) - w(\text{HE-VE})$) 的分佈圖。地形中心在 $x=0$ 的位置上，黑色等值線之值為 0。其中 h_{\max} 為山頂高度， a 為半山寬 (山頂高度一半處的水平半徑)。(a) 為 H500_A10 個案的結果；(b) 為 H500_A5 個案的結果。

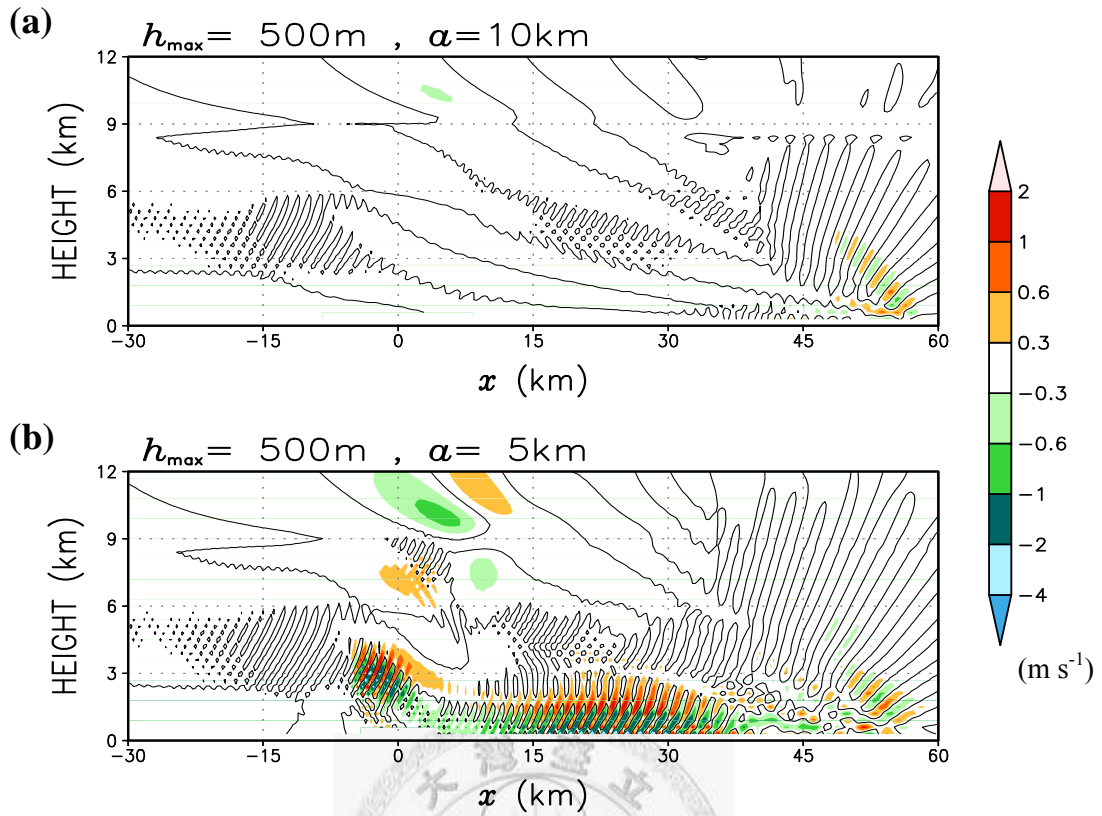


圖 4-27 同圖 4-26，但為水平風場之差異 ($u(\text{HE-VI}) - u(\text{HE-VE})$) 的分佈圖。

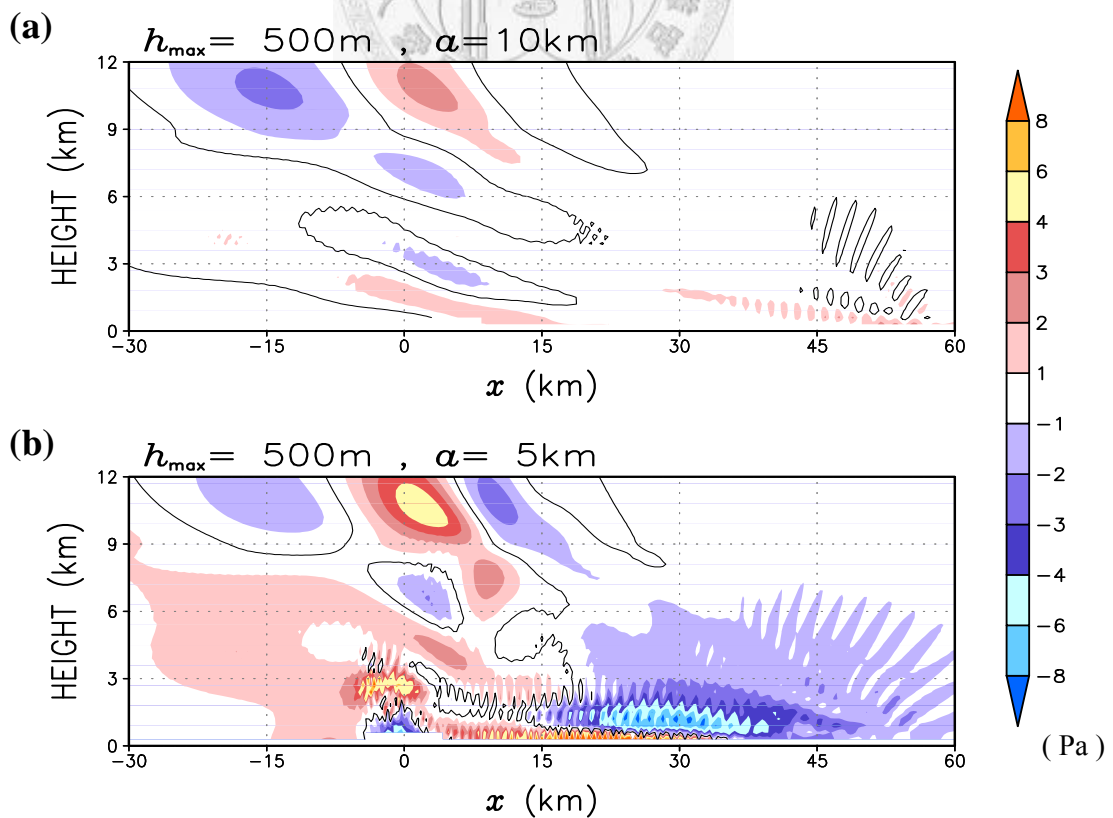


圖 4-28 同圖 4-26，但為氣壓擾動場之差異 ($p'(\text{HE-VI}) - p'(\text{HE-VE})$) 的分佈圖。

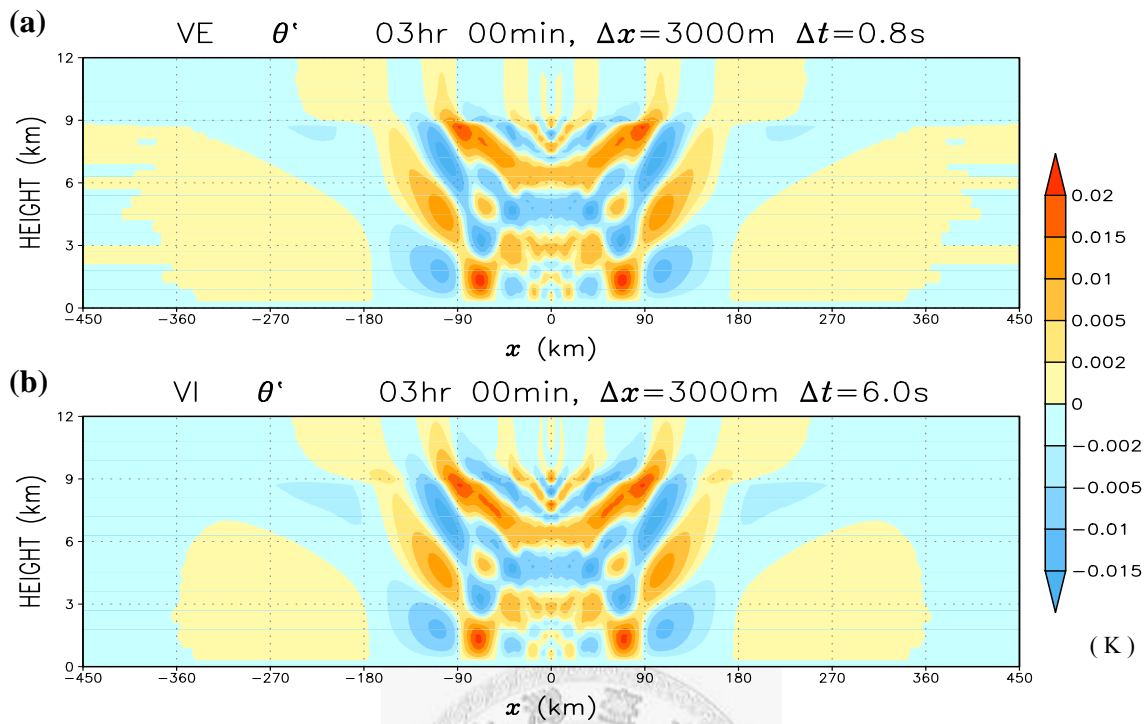


圖 5-1 重力波實驗中，H0_DX3000 個案積分 3 小時後之位溫擾動 (θ') x - z 剖面圖，為 $y = 0$ 的結果。初始擾動之中心在 $x = 0$ 之位置上。(a)為顯式積分方法結果；(b)為垂直隱式積分方法結果。

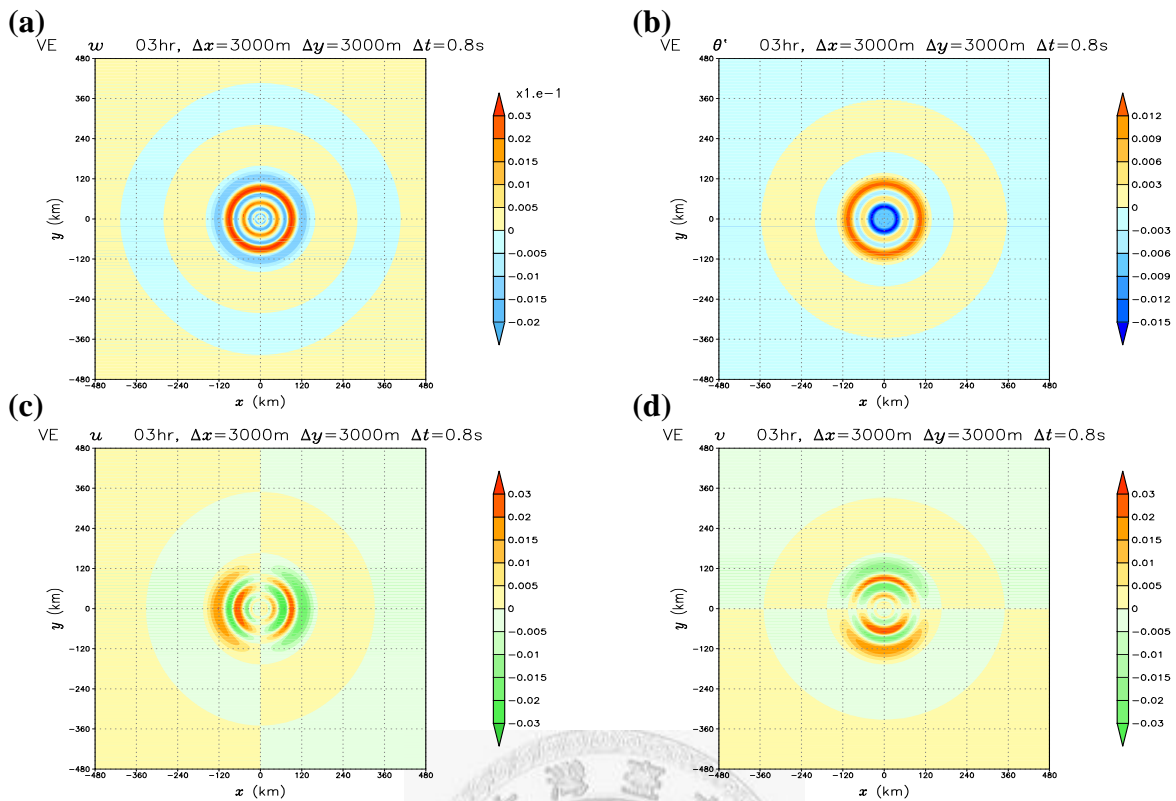


圖 5-2 重力波實驗中，H0_DX3000 個案積分 3 小時後之水平分佈圖，高度為 4500 m。初始擾動之中心在 $x=0$ 及 $y=0$ 之位置上。(a)、垂直速度場；(b)、位溫擾動場；(c)、 u 分量水平風場；(d)、 v 分量水平風場。

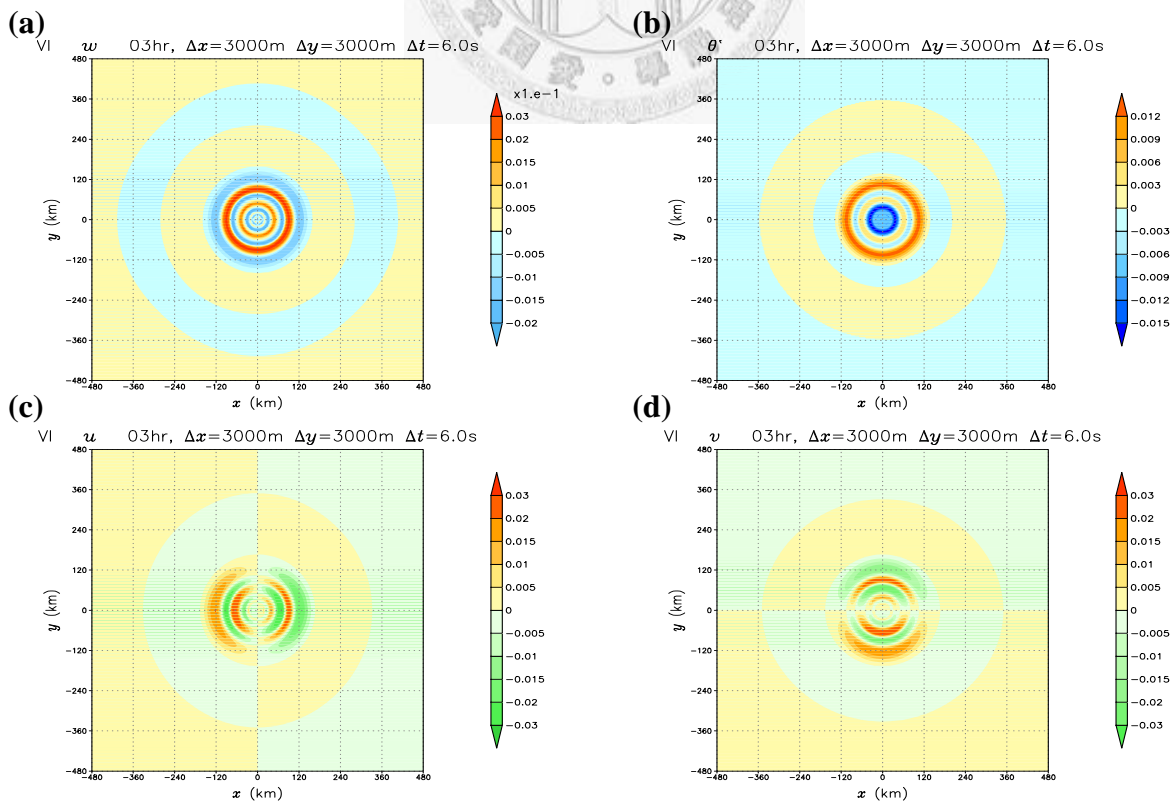


圖 5-3 同圖 5-2，但為垂直隱式積分方法的結果。

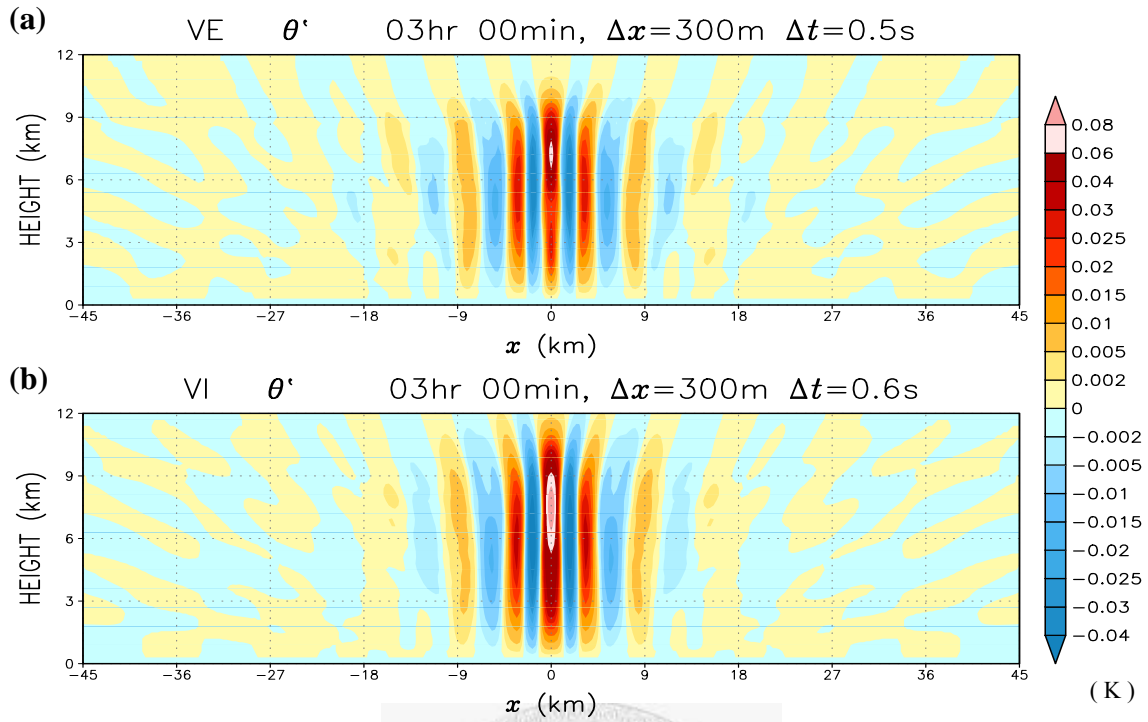


圖 5-4 同圖 5-1，但為 DX300 個案之位溫擾動 (θ') x - z 剖面圖。

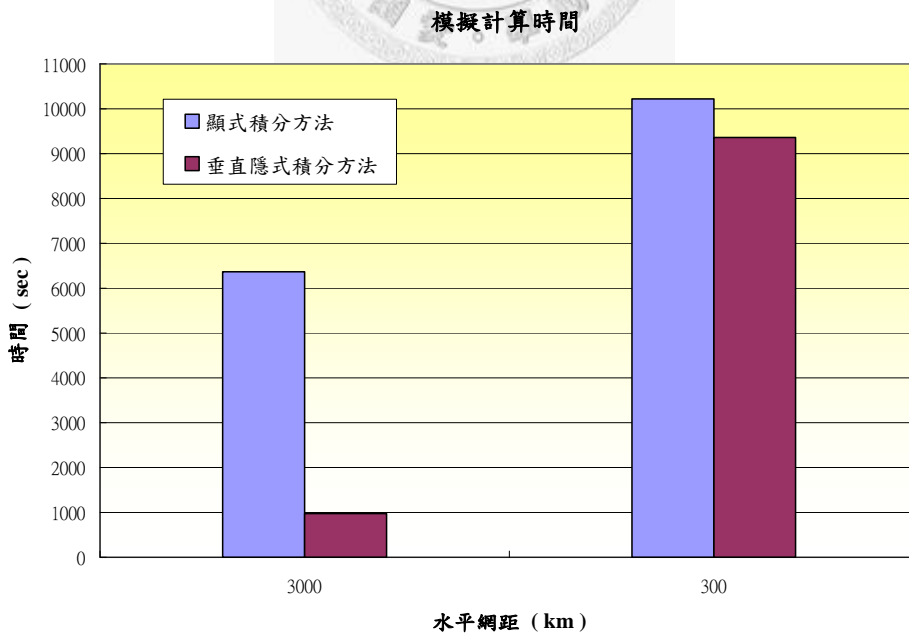


圖 5-5 重力波實驗中，顯式及垂直隱式時間積分法模擬 3 小時所需的計算時間之比較。

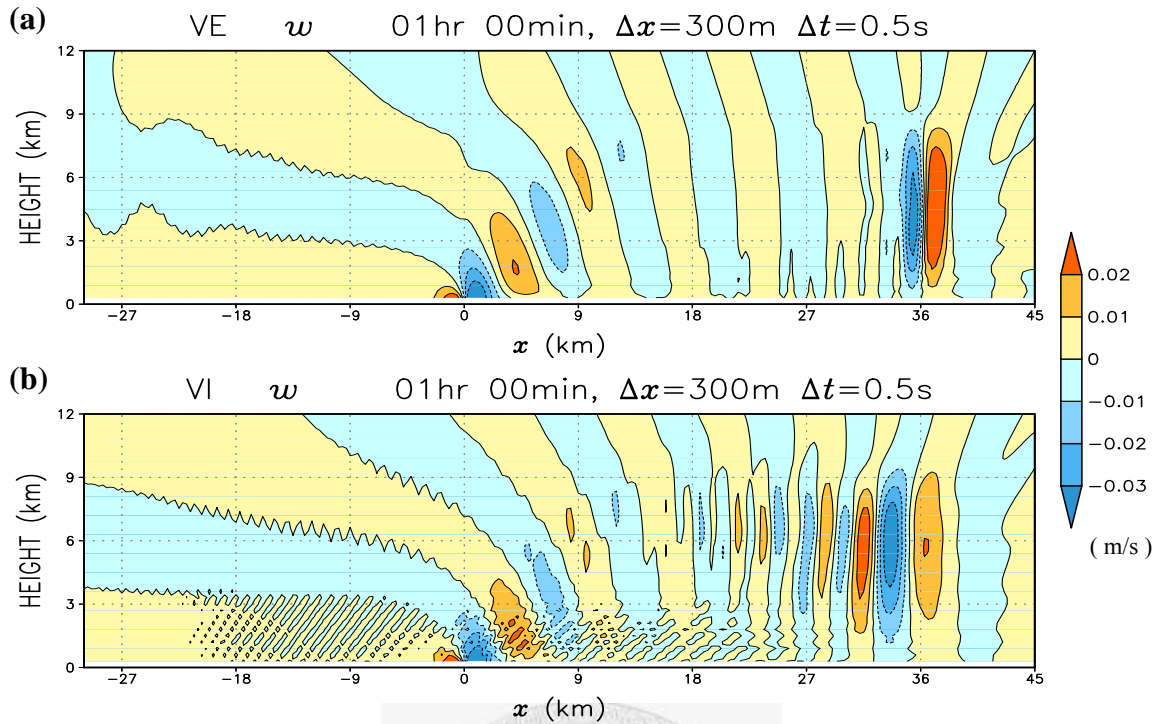


圖 5-6 非靜力線性山岳波實驗中，H10_A1_DX300 個案積分 1 小時後之垂直速度 x - z 剖面圖。地形中心在 $x = 0$ 的位置上。(a)為顯式積分方法結果；(b)為垂直隱式積分方法結果。

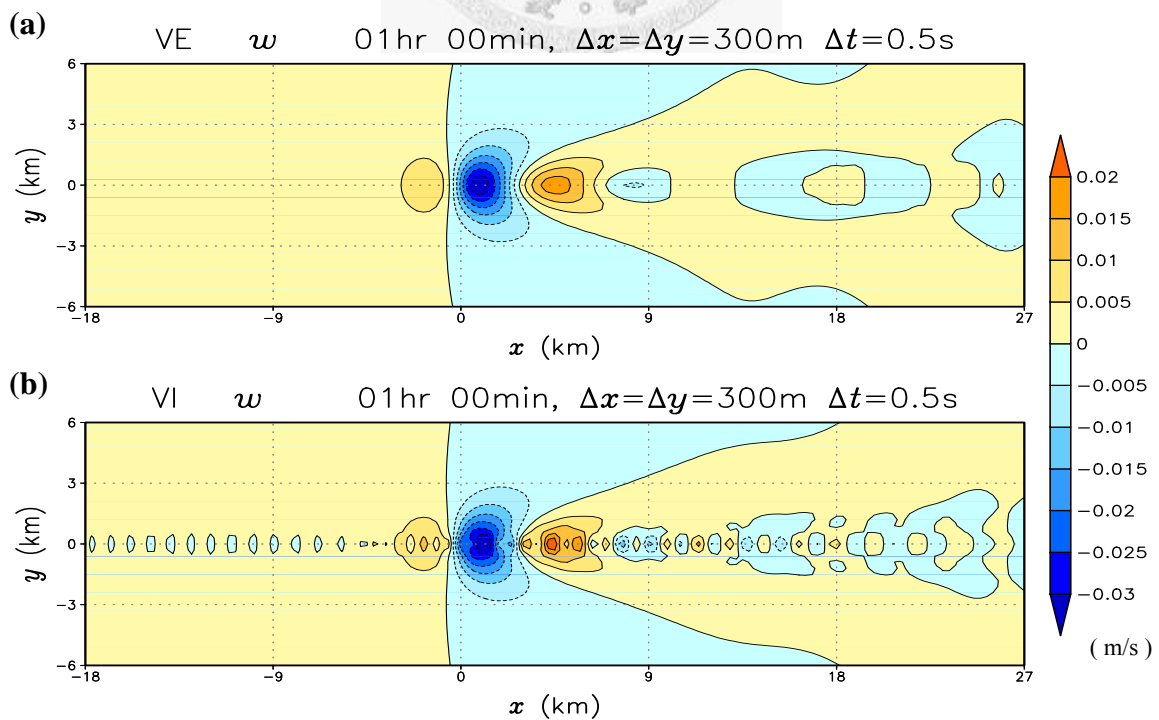
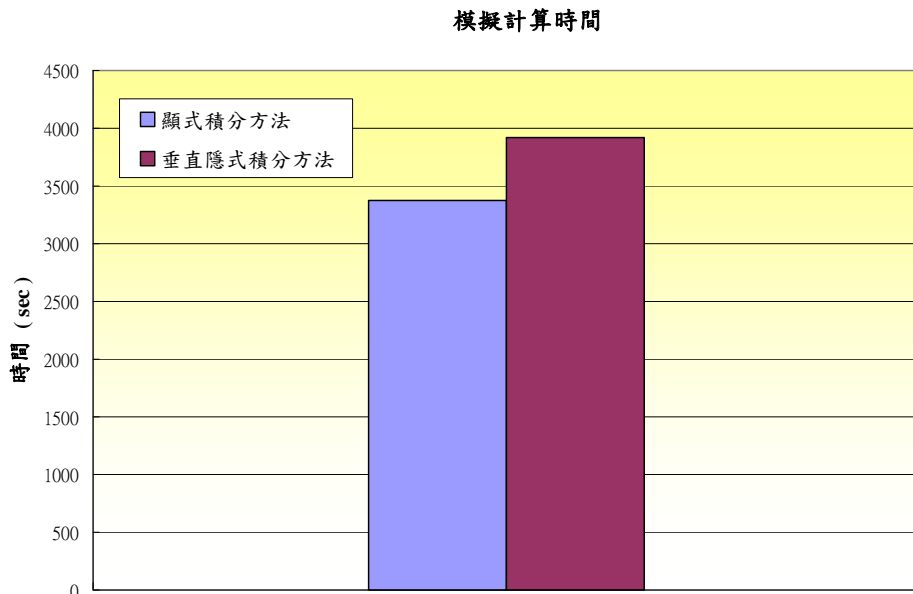


圖 5-7 同圖 5-6，但為高度 1200 m 之水平分佈圖。



三維非靜力線性山岳波實驗

圖 5-8 非靜力線性山岳波實驗中，顯式及垂直隱式時間積分方法模擬 1 小時所需計算時間之比較。

