國立臺灣大學財務金融所碩士論文

Department of Finance

指導老師：呂育道教授

Advisor：Dr. Yuh-Dauh Lyuu

Chambers 及 Lu可轉債評價模型之實證研究

An Empirical Study of Chambers and Lu’s Convertible Bond Pricing Model

研究生：林昆慶

Advisee：Kun-Ching Lin

中華民國98年6月

June, 2009

側邊

國立臺灣大學
財務金融所

碩(博)士論文

Chambers及 Lu可轉債評價模型之實證研究

林昆慶 撰

98
6

誌謝

這篇論文能完成，首先要感謝我的指導教授呂育道教授，我延遲了這麼久才開始撰寫畢業論文，他仍然願意在百忙之中指導我，並對我的論文提出意見，也要感謝金國興教授先前的指導，給了我很大的幫助。

接著要感謝我的父母，無論他們是否贊成我想做的事情，但最後總是會在背後支持著我。

完成了這篇論文，算是解決了心中的一顆大石頭，接下來便可以往我的下個階段前進，也希望自己能達成心中的期望。

摘要

可轉換債券是一種持有者有權利以特定轉換比例轉換為該公司股票的債券，其性質類似一般的債券加上一個選擇權，但評價時由於可轉換債券其轉換權利多為美式，且通常會加上可買回及可賣回之條款，因此無法直接將兩者分開來評價。

2007 年 Chambers 和 Lu 提出用二元樹模型評價可轉換債券的方法，他們的模型包含股價和利率的因子，並進一步考慮兩者之間的相關係數。本論文的目的便是以台灣可轉換債券市場的資料對該模型進行實證研究，並和其他模型比較其評價結果。

Abstract

Convertible bonds are bonds issued by a company where the holders have the option to exchange the bonds for the company's stock by certain conversion ratio. It is like a bond plus an option. However, we cannot simply value convertible bonds by vanilla option formulas because convertible bonds are almost always callable.

Chambers and Lu proposed a method pricing convertible bonds using binomial tree model in 2007. Their model was a two-factor model where the stock price and the interest rate were the two factors. In addition, they added default risk and included risky interest rates in their model. The purpose of my thesis is to compare the results of their model with the empirical data of Taiwan's convertible bonds market and other model.

目　錄

圖表目次

第一章　可轉換債券評價模型

1-1 可轉換債券簡介

可轉換債券是一種持有者有權利以特定轉換比例轉換為該公司股票的債券，其性質類似一個普通的債券加上一認購權證。我們以「鴻海一」做為例子說明，該可轉債於民國九十五年十一月十日發行，持有人自發行後一個月至到期日前十日或債券收回日前五個營業日止有權以特定轉換價格將票面金額轉換為鴻海股票，轉換價格會隨著鴻海股本增減或除息進行調整，若持有人未進行轉換，則該可轉債等同於一般零息債券。此外於發行後一個月至到期前四十日止，若鴻海股價連續三十個營業日超過當時轉換價格達百分之五十或該可轉債流通在外餘額低於原發行總額之百分之十時，鴻海有權按票面金額以現金收回債券，此即公司之買回權。而持有人自該可轉債發行後第三年亦有權於該日以票面金額將所持有債券賣回給鴻海，此則為持有人之賣回權。

由以上可知，當鴻海股價 S_t 高於轉換價格 K_t 時，持有人可藉由將該可轉債票面金額 F 依轉換價格轉換為 $\frac{F}{K_t}$ 股鴻海股票以賺取 $\frac{F}{K_t}(S_t - K_t)$ 之差價，其損益和執行價格為 K_t 之認購權證相同，但由於持有人執行轉換權力時，其債權亦隨之提前到期，轉換之股權也會稀釋股東權益，因此我們無法將其視為一零息債券加上一美式認購權證

之組合，更何況還有可買回及可賣回條款。

1-2 二元樹可轉債評價模型

1998 年 Tsiveriotis 和 Fernandes 提出了一個用二元樹模型評價可轉債的方法。在此我們用一個兩期的二元樹模型來說明，假定期初股價為 16 元，二元樹參數為$u=2$、$d=\frac{1}{2}$、無風險折現率為$\frac{19}{20}$、該公司之有風險折現率為$\frac{9}{10}$，而可轉債為一票面 100 元之零息債券，轉換價訂為 20 元，債券存續期間皆可進行轉換。

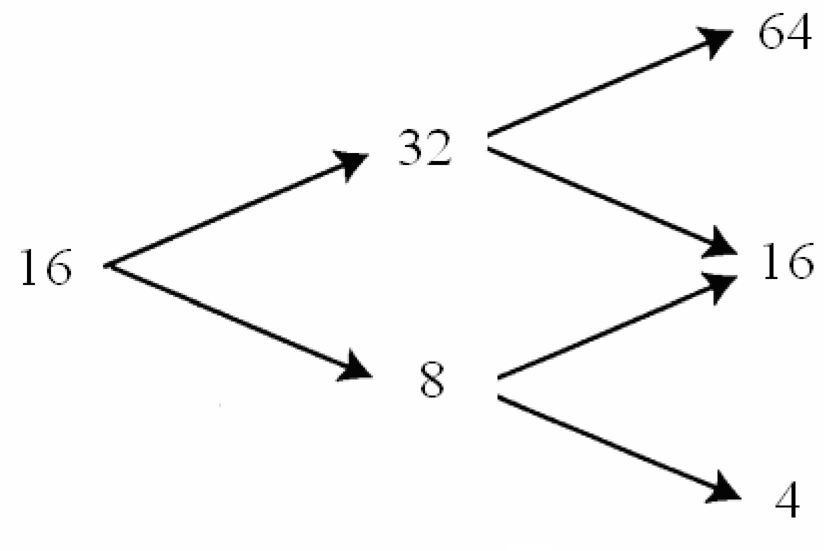


圖 1.1

如圖所示，在最後一期若股價為 64 元（高於轉換價格)，則持有者可將債券轉換為股票後並在市場上賣出獲得$\left(\frac{100}{20}\right)*64=320$ 元，此時持有者擁有的資產等同於股票，債券的部分則為 0。反之若股價為 4 元(低於轉換價格)，因持有者不會做轉換，此時他擁有的資產便等同債券，

股票的部分則為 0。接著我們分別將期末每一個結點的股票成份和債券成份分別以無風險利率及該公司的風險利率折現回期初，即可獲得期初可轉債的價值。

1-3 Chambers 及 Lu 可轉債評價模型

2007 年 Chambers 和 Lu 提出另一種評價可轉債的二元樹模型，他們的模型是包含股價和無風險利率兩種因子的二元樹，說明如下：

利率部分使用 Black-Derman-Toy 模型，此處用三期的二元樹作為例子，如下圖：

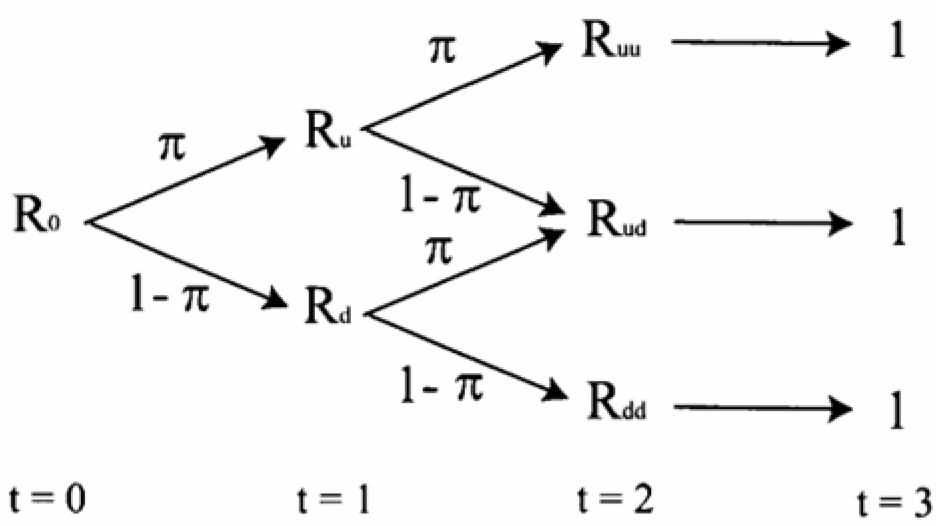


圖 1.2

R_0 為 $t=0\sim1$ 這段期間的利率，R_u 及 R_d 則為 $t=1\sim2$ 這段期間兩種可能的利率，依此類推。假定模型中利率的波動度為 σ_r，則 $R_u = R_d e^{2\sigma_r\sqrt{\Delta t}}$ 、$R_{uu} = R_{ud} e^{2\sigma_r\sqrt{\Delta t}} = R_{dd}{}^{4\sigma_r\sqrt{\Delta t}}$ ，進一步假設 $\pi = \frac{1}{2}$，利用一年期、二年期及三

年期的零息債券價格即可求出 R_0 、 R_u 、 R_d 、 R_{uu} 、 R_{ud} 及 R_{dd} 。

股價的部分我們仍然使用 CRR 模型：

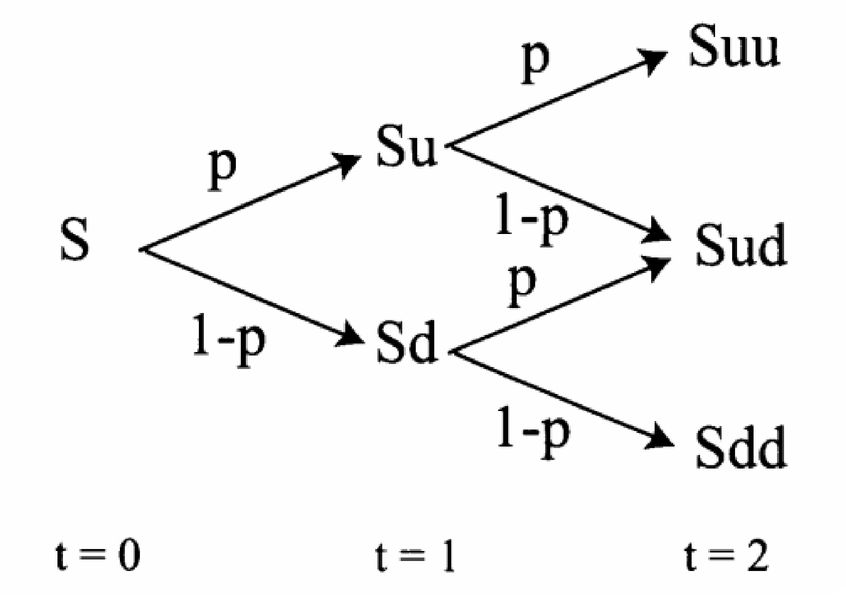


圖 1.3

其中 $u = e^{\sigma_S \sqrt{\Delta t}}$ 、 $d = \frac{1}{u}$ 、 $p = \frac{e^{r_f \Delta t} - d}{u - d}$ ， r_f 為該期對應的無風險利率。考慮到公司有可能破產，因此我們將利率模型略做修改，假設公司每一期都有一定的機率會破產：

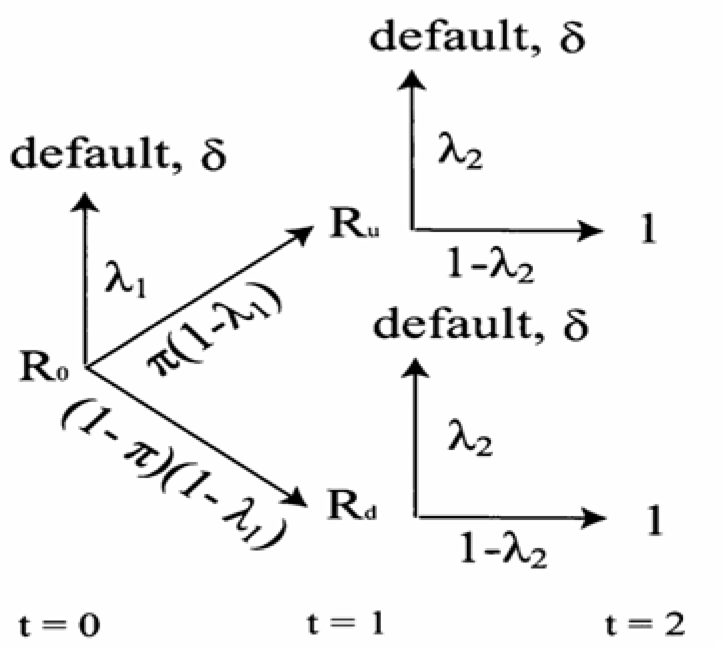


圖 1.4

其中λ_i為$t=i-1\sim i$期間公司破產的機率，δ為 recovery rate。若該公司 $t=0\sim1$之 1 年期公司債利率為R_0^*，由下式我們可以求出λ_1：$e^{-R_0^*}=[1(1-\lambda_1)+\delta\lambda_1]e^{-R_0}$，利用相同的原理及 2 年期公司債利率$R_1^*$可以求得$\lambda_2$，因此我們最後的樹狀圖如下圖：

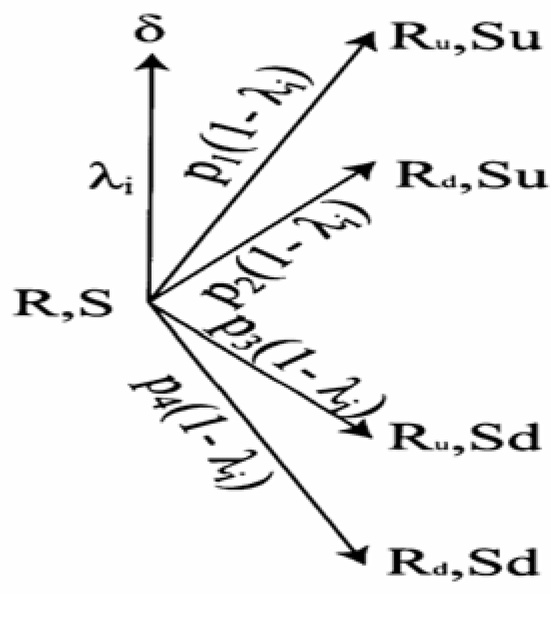


圖 1.5

每一個狀態至下一期有 5 個可能的狀態，假定股價和利率對數值之間相關係數為 ρ，可求出公司不會破產時每一條路徑其機率如下表：

R\S	Su	Sd	Marginal for R
R_u	$p_1=\frac{1}{2}(\tilde{p}+\sqrt{\tilde{p}(1-\tilde{p})}\rho)$	$P_3=\frac{1}{2}(1-\tilde{p}-\sqrt{\tilde{p}(1-\tilde{p})}\rho)$	$\frac{1}{2}=\pi$
R_d	$p_2=\frac{1}{2}(\tilde{p}-\sqrt{\tilde{p}(1-\tilde{p})}\rho)$	$P_4=\frac{1}{2}(1-\tilde{p}+\sqrt{\tilde{p}(1-\tilde{p})}\rho)$	$\frac{1}{2}=1-\pi$
Marginal for S	$\tilde{p}$	$1-\tilde{p}$	1

表 1-1

將最後一期的股價與轉換價比較後我們可得最後每個狀態可轉債的價值，再將它們折現回期初即可求得期初可轉債的理論價值。

1-4 現金股利模型

大部分的公司每一年會配發現金股息或股票股息，從而股價在除權息日當天會做調整，而可轉債條款中也會註明要如何處理這樣的狀況。如果股價做了調整，轉換價格沒有做相對應的調整時，會影響到可轉債的價值，因此我們的股價模型也必須針對這種情形做修正。1977 年 Roll 提出了一種現金股利模型，假設公司每年會配發 D 元的現金股利，換言之股價在除息日會減少 D 元，若股價二元樹模型共有 $i=0\sim n$ 期，每一期間隔為 Δt，除息日對應的期數為 $a_1,a_2,\Lambda,a_j,\Lambda,a_m$ 期，期初股價為 S_0，我們用 $S_0-\sum_{j=1}^{m}De^{-ra_j\Delta t}$ 做為期初股價建構這個二元樹，然後再將每個結點的股價加上未來所有現金股利的折現值，即用 $S_{i,k}+\sum_{a_j>i}De^{-r(a_j-i)\Delta t}$ 取代第 i 期之第 k 個結點的原本的股價 $S_{i,k}$，便得到我

們要的股價二元樹。此二元樹期初股價和原本的期初股價是一樣的，股價在$a_1, a_2, \Lambda, a_j, \Lambda, a_m$期時會減少$D$元，如此便符合我們的需求。

1-5 現金股利階梯樹模型

前一節所提到的現金股利模型假設股價減掉現金股利的折現值後為對數常態分布，這個方法的缺點在於我們用假設的股價波動度來模擬扣除了現金股利後的股價路徑，再將現金股利加回去以得到我們想要的二元樹模型，但因為現金股利是固定值，因此我們得到的二元樹其波動度會低於一開始假設的股價波動度，而造成誤差。為了得到較正確的模型，戴天時提出了另一種現金股利階梯樹模型。

我們以一個兩期的二元樹模型做為例子，期初股價為S，$t=1$時會配發現金股利D，表示股價會減少D元，無風險利率為r_f，股價波動度為σ。$t=1$時兩個節點的股價在除息前分別為Su及Sd，其中$u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$，$d=\frac{1}{u}$，而除息後股價分別會變成$S_x = Su - D$及$S_y = Sd - D$。接著先用$t=1$時可能的最高股價$Su-D$產生$t=2$時可能的最高股價$S' = (Su-D)u$，因此$t=2$時可能的股價為$S'$、$S'u^{-2}$、$S'u^{-4}$、…等。和一般的二元樹模型相同，$t=1$中股價$S_x$下一個狀態可能是$S'$及$S'u^{-2}$，其中$S'$的機率為$p=\frac{e^{r_f\Delta t}-d}{u-d}$。接著為了找出股價$S_y$的機率路徑，我們先定$\mu=\left(r_f-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t$，於$t=2$時可能的股價中找到$S''$，使得

$S_y e^{\mu-\sigma\sqrt{\Delta t}} \le S'' < S_y e^{\mu+\sigma\sqrt{\Delta t}}$，設 $S''u^2$ 、 S'' 及 $S''u^{-2}$ 為 S_y 在 $t=2$ 時可能的股價路徑，其機率分別為 P_y^u 、 P_y^m 及 P_y^d ，在風險中立的狀況下，它們必須符合下面的方程式：

$$\begin{cases} P_y^u\alpha + P_y^m\beta + P_y^d\gamma = 0 \\ P_y^u\alpha^2 + P_y^m\beta^2 + P_y^d\gamma^2 = \sigma^2 \\ P_y^u + P_y^m + P_y^d = 1 \end{cases}$$

其中 $\beta = \ln\frac{S''}{S_y} - \mu$ 、 $\alpha = \beta + 2\sigma\sqrt{\Delta t}$ 、 $\gamma = \beta - 2\sigma\sqrt{\Delta t}$ 。在更多期的狀況下，我們可以用相同的方法對配發現金股利的期數做處理，便可得到股價的階梯樹模型。

第二章　Chambers 及 Lu 可轉債評價模型特性

2-1 無買回條款之可轉債特性

假設我們有一個可轉債，轉換價格為 100 元，現股價格為 S 元，波動度為 35%，距到期日 t 年，每年會配發現金股利 D 元，最後一次配發現金股利日距到期日為 0.4 年，股價和利率其對數相關係數 $\rho = -0.5$，recovery rate=0.32。我們以 Chambers 及 Lu 模型做為可轉債評價模型，並用 1-5 節提到的階梯樹模型來處理現金股利：

首先假定距到期日有 0.5 年，該公司其風險利率為 8%，而無風險利率為 3%，我們可得可轉債價格、delta 及 gamma 如圖 2.1、2.2 及 2.3：

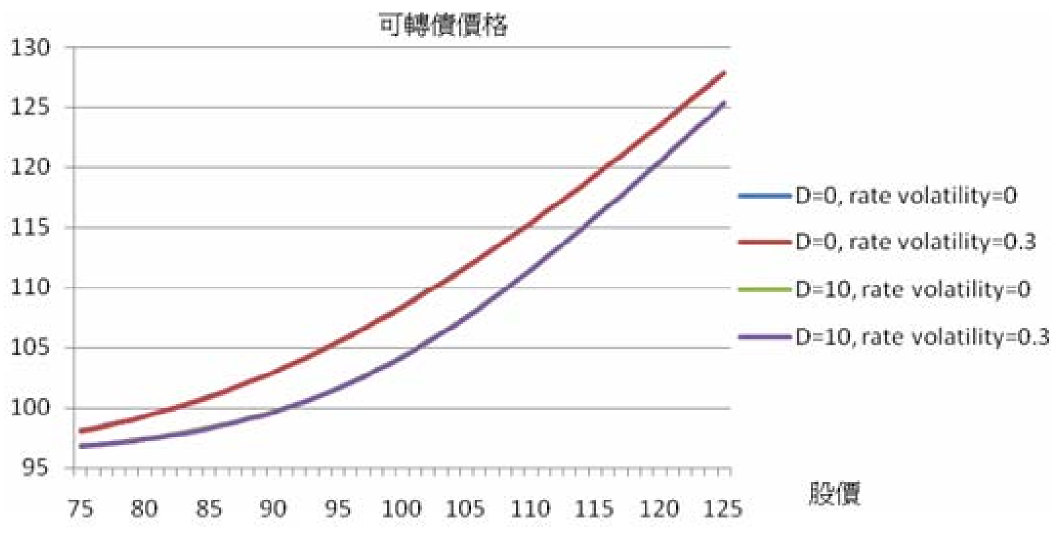


圖 2.1

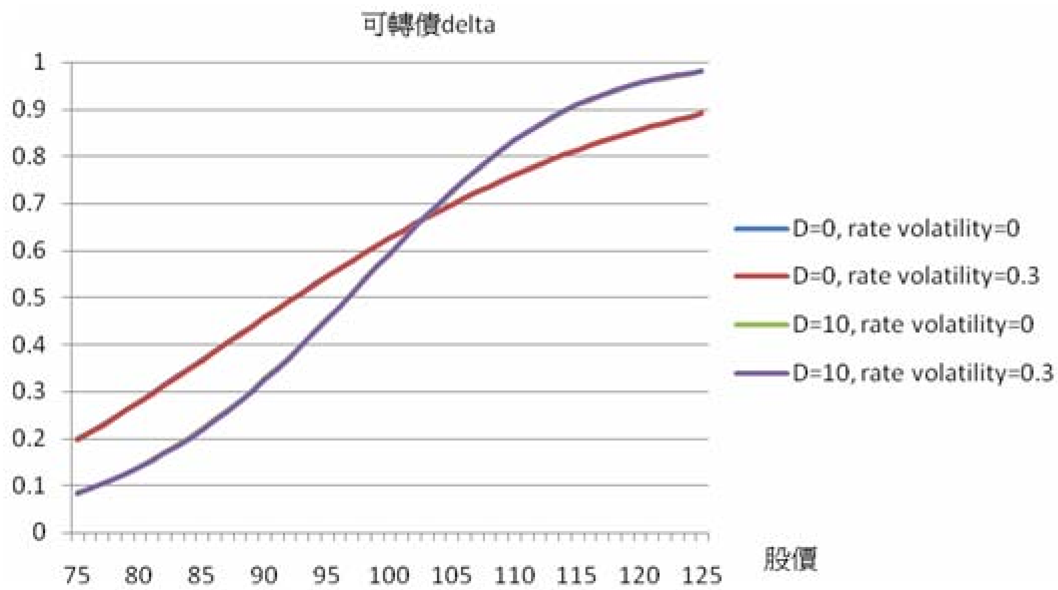


圖 2.2

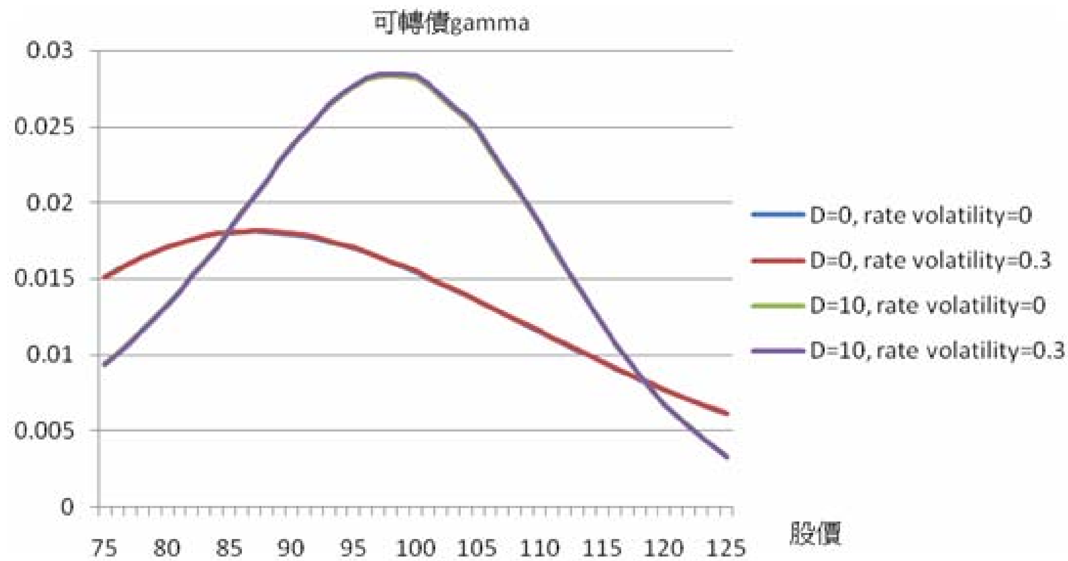
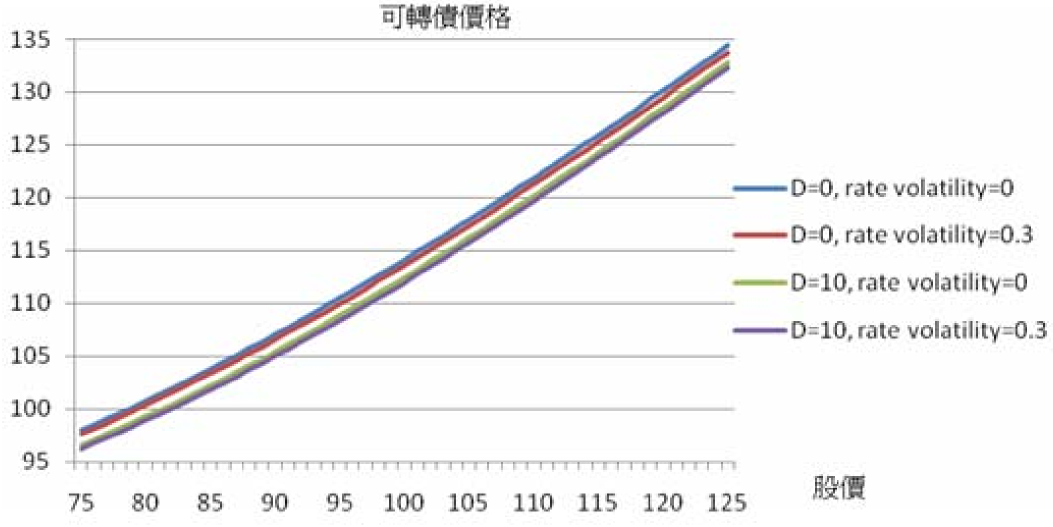


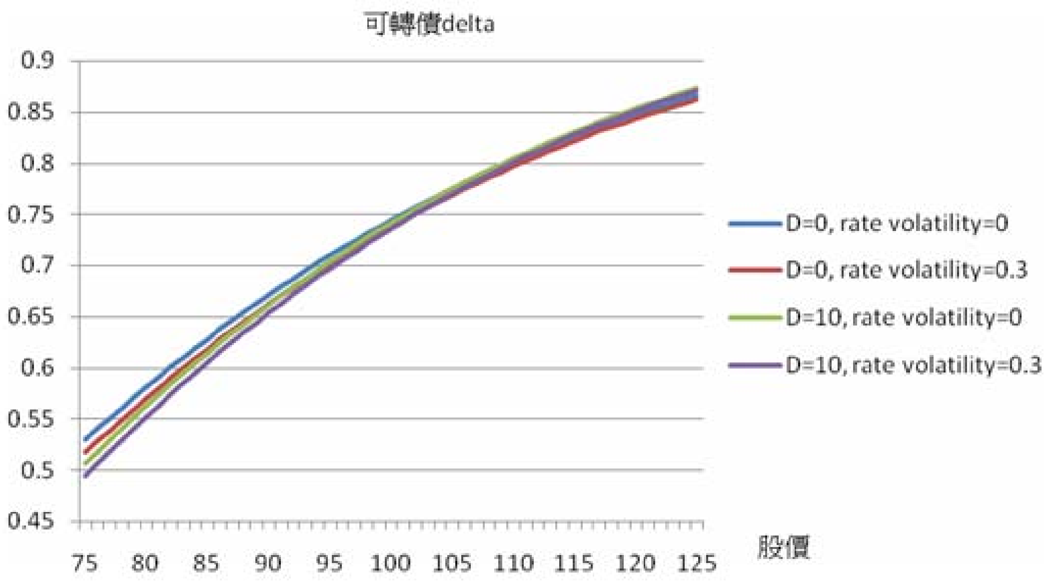
圖 2.3

當距到期日尚有 2 年，風險利率及無風險利率仍為 8%及 3%時，結果如圖 2.4、2.5 及 2.6：



可轉債價格
135
130
125
120
115
110
105
100
95
75 80 85 90 95 100 105 110 115 120 125
股價
D=0, rate volatility=0
D=0, rate volatility=0.3
D=10, rate volatility=0
D=10, rate volatility=0.3

圖 2.4



可轉債delta
0.9
0.85
0.8
0.75
0.7
0.65
0.6
0.55
0.5
0.45
75 80 85 90 95 100 105 110 115 120 125
股價
D=0, rate volatility=0
D=0, rate volatility=0.3
D=10, rate volatility=0
D=10, rate volatility=0.3

圖 2.5

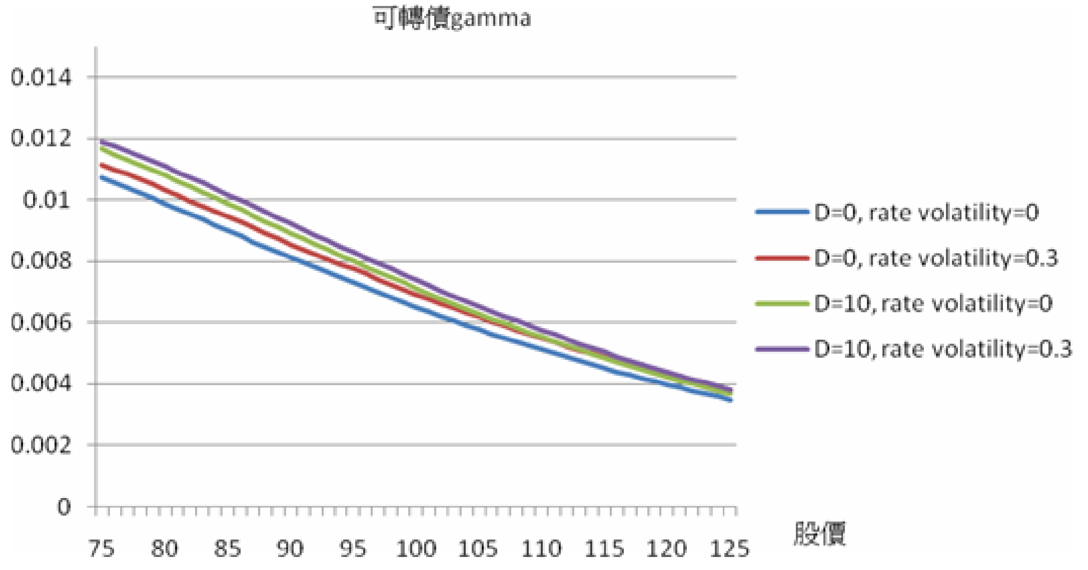


圖 2.6

由結果可知距到期日較近時，利率模型對可轉債價格影響不大，若配發現金股利而轉換價格未做調整，會使可轉債的價格降低，其 delta 和 gamma 也會較接近天期更短的選擇權特性。反之距到期日較遠時，利率波動較大的情形下，可轉債的價格會較低，gamma 則會較大，delta 則在股價低於轉換價格時較低，若股價明顯高於轉換價格時反而 delta 會較高，不過其實都沒有很顯著的差異。現金股利對價格仍然有相同的影響，但程度顯然不如短天期的狀況。此外，越價外的可轉債受利率的影響越大，這是由於越價外的可轉債會越接近債券。

接著我們模擬利率期限結構的情形，假定該公司借貸利率其風險貼水固定為 5%，當利率期限結構如圖 2.7：

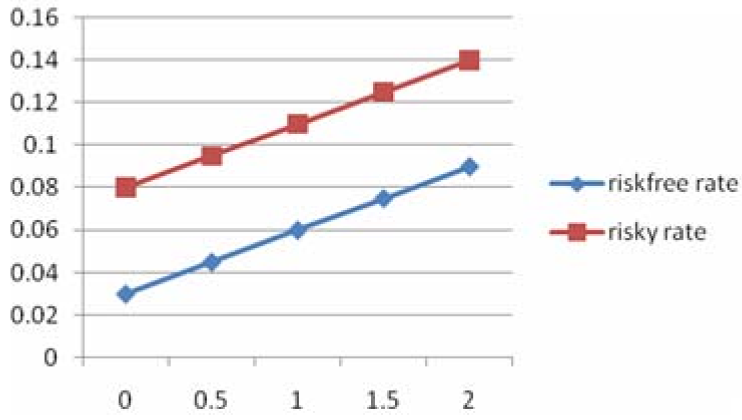


圖 2.7

結果如圖 2.8、2.9 及 2.10：

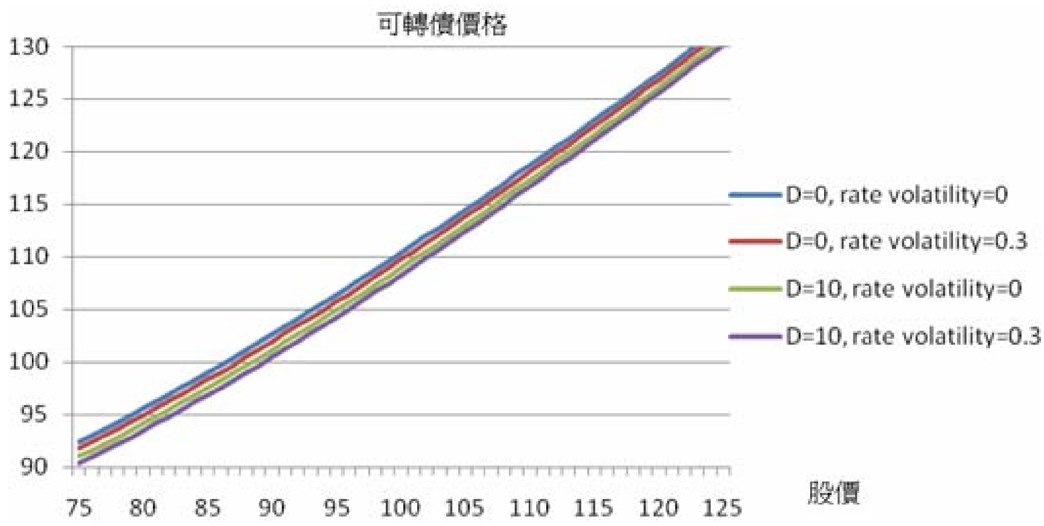


圖 2.8

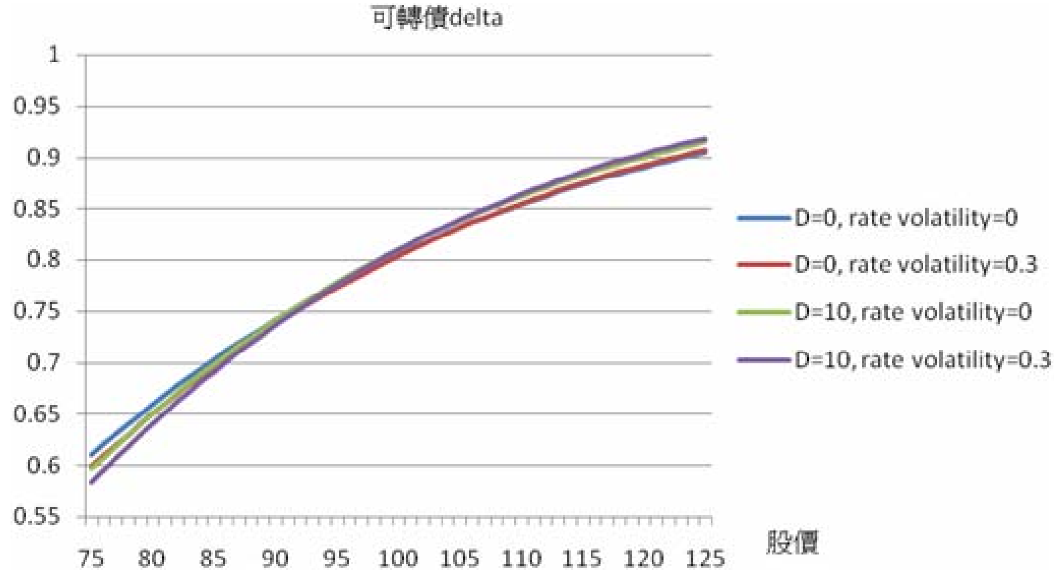


圖 2.9

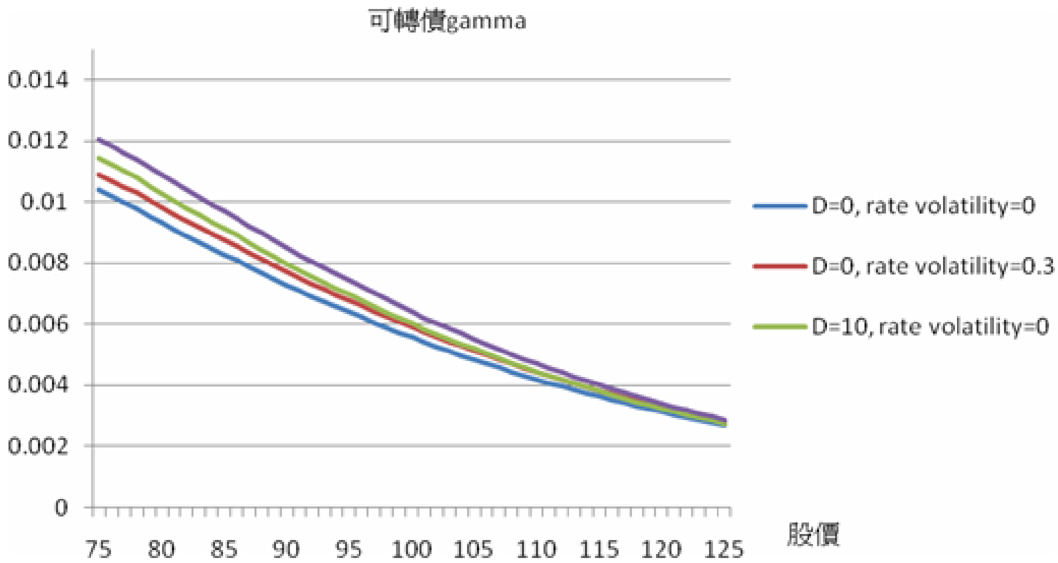


圖 2.10

反之若利率期限結構如圖 2.11 時：

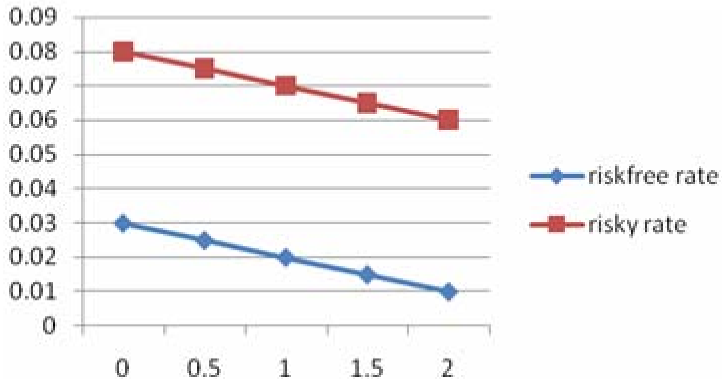


圖 2.11

我們得到的結果如圖 2.12、2.13 及 2.14：

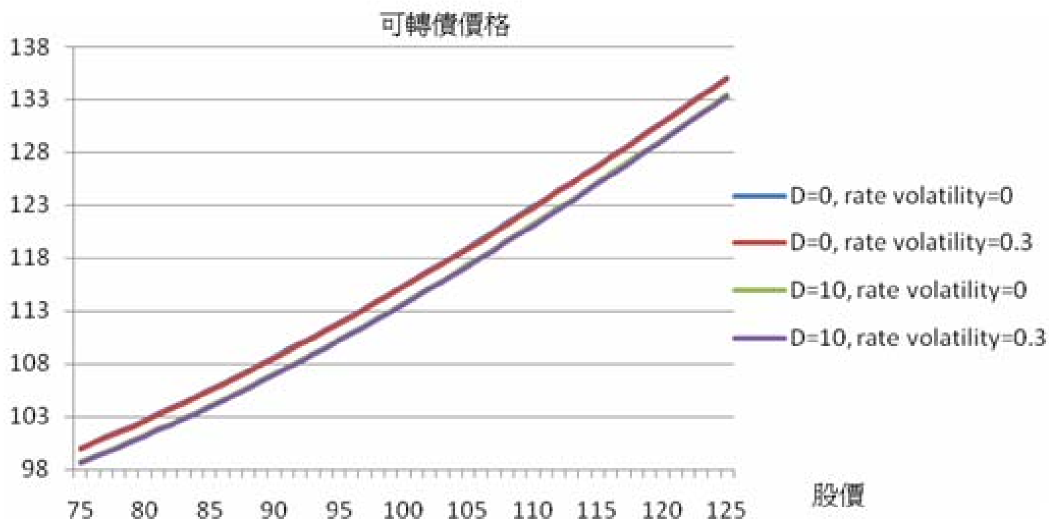


圖 2.12

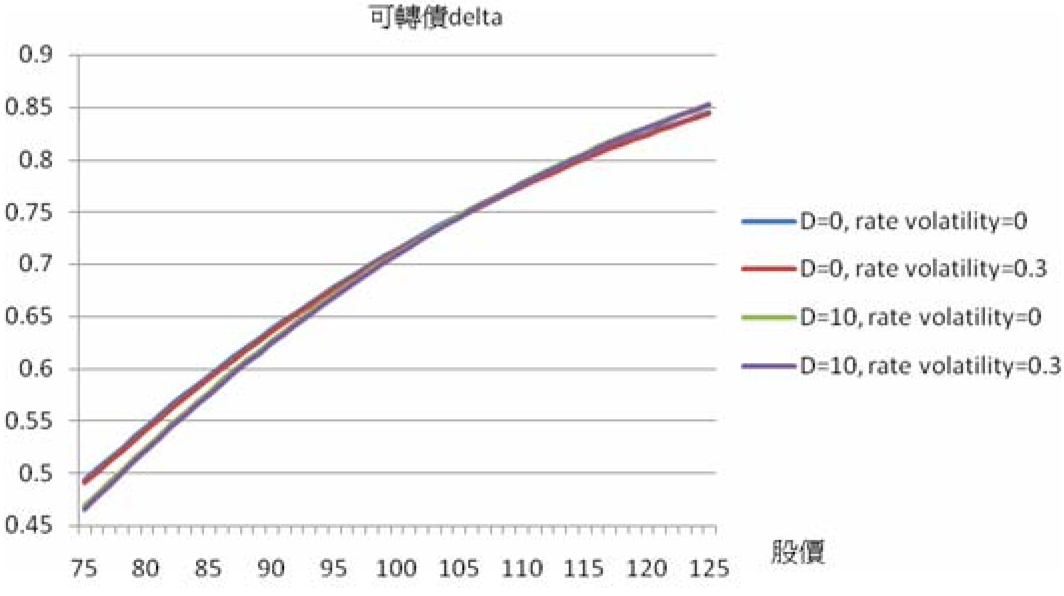


圖 2.13

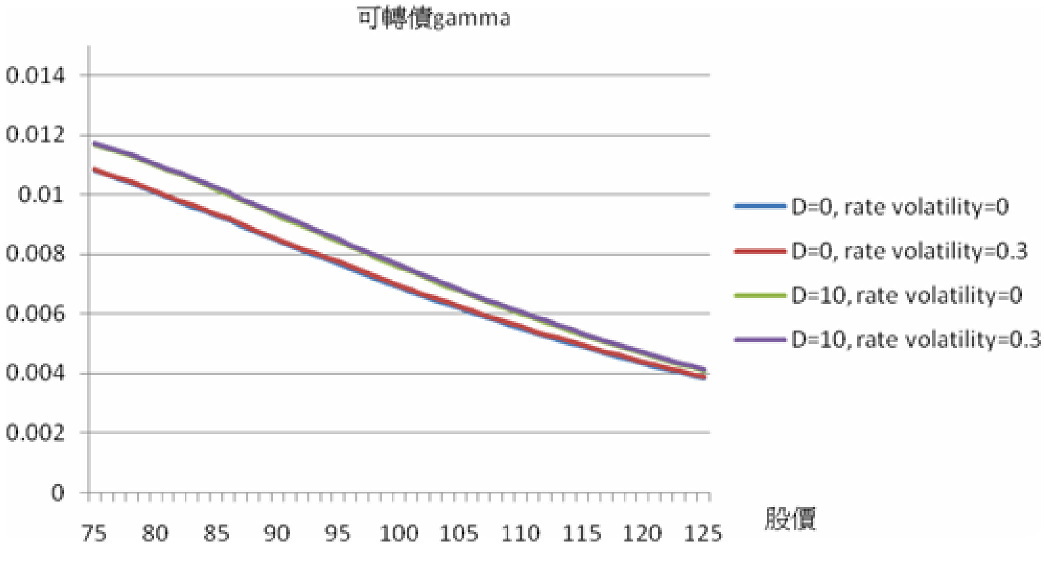


圖 2.14

顯然當利率有向上趨勢時，利率的波動度對可轉債的影響會增加，這是因為利率較高時，利率的波動度影響較為明顯。

2-2 具買回條款之可轉債特性

許多可轉債都會加上買回條款，我們考慮一種常見的條款，當股價連續數個交易日大於某特定股價時，公司可以特定價格買回可轉債，此特定價格較投資人將可轉債轉換為股票之市價為低，因此等同於強迫投資人將可轉債轉換為股票。在這一節我們仍延用上一節的參數，但對可轉債加上若股價連續 30 個交易日大於 150 元時公司可以面額買回可轉債之條款，並延續 2-1 節的探討。

假定距到期日有 2 年，該公司其風險利率為 8%，而無風險利率為 3%，我們可得可轉債價格、delta 及 gamma 如圖 2.15、2.16 及 2.17：

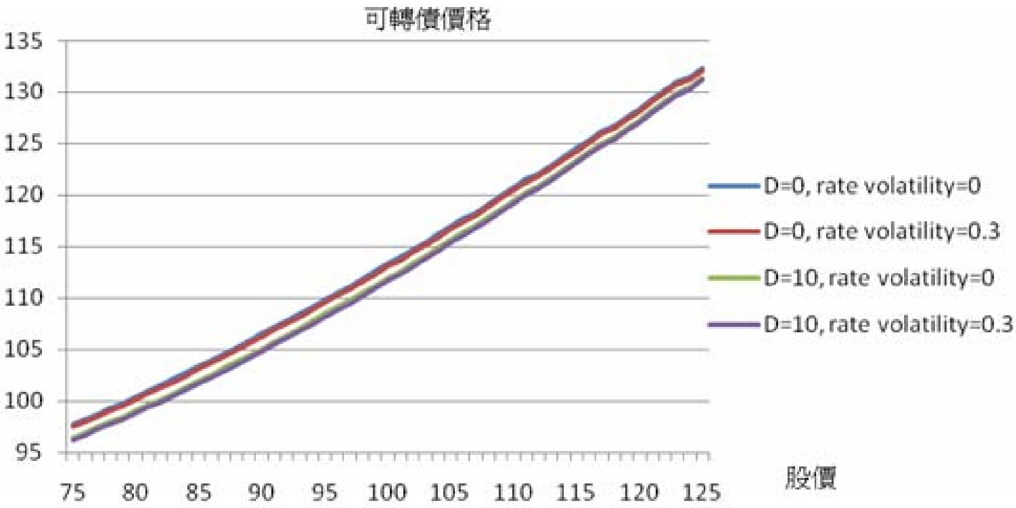


圖 2.15

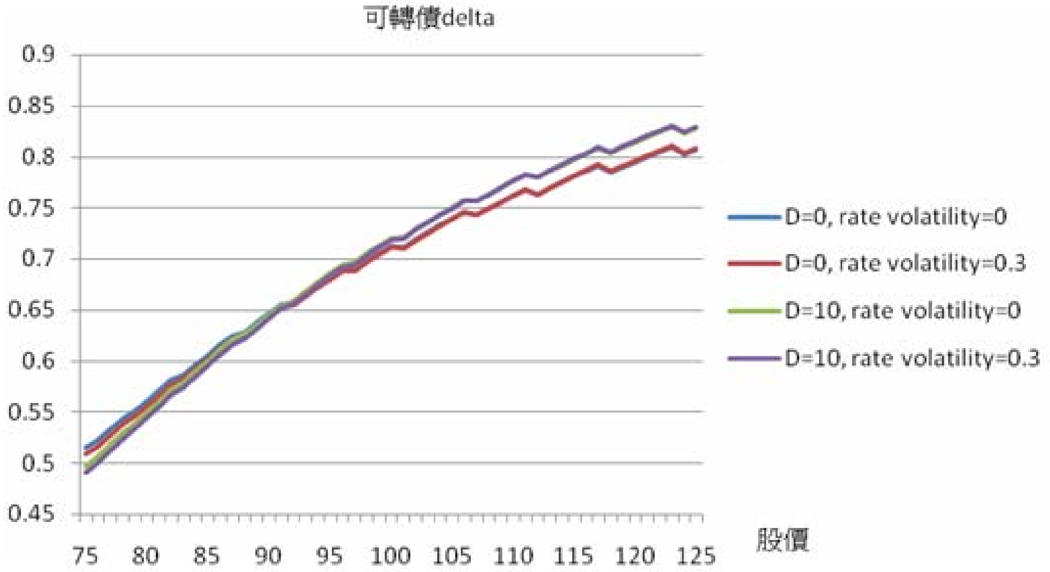


圖 2.16

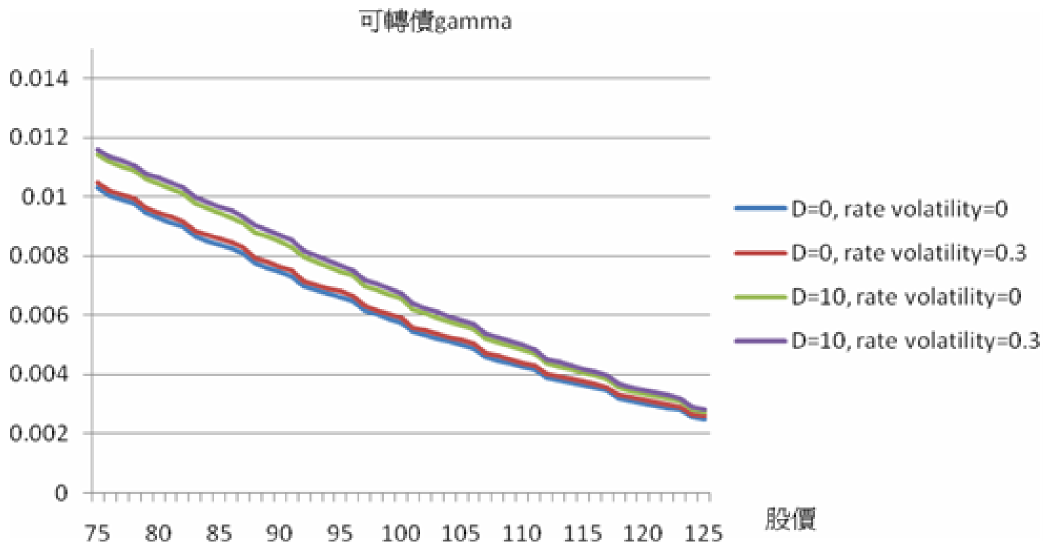


圖 2.17

由結果可知，當加上可買回條款後，利率波動度對可轉債的影響明顯減小，這是因為公司執行買回權利時會強迫投資人將可轉債轉換為股票，使得期初可轉債的債券成分減少，故受利率的影響自然會減少，因此若可買回的條件越容易達成，可轉債受利率的影響就會越小。此

外圖中可以看到部分的鋸齒，這是可買回價格未落在股價二元樹的結點上所造成的。假定可買回價格為$S_{callable}$，期初股價為S_0，若要讓可買回價格落在結點上我們必須調整二元樹期數n使得$\frac{S_{callable}}{S_0 e^{\sqrt{\sigma\frac{T}{n}}}}$為整數，且每一個除息日股價扣除掉現金股利後仍有相對應的結點其股價為$S_{callable}$，但由於我們能調整的僅有期數n一個參數，因此無法滿足所有的條件，換言之在這個模型中我們無法讓可買回價格完全落在二元樹的結點上。

若將可轉債進一步加上可賣回條款，亦即投資人在特定時點有權將可轉債以面額賣還給公司，這顯然會使得可轉債的天期看起來似乎比較短，從上一節的討論中我們已經知道，此時受利率波動度的影響也會變小，這是因為債券的存續期間(duration)較短。

第三章　Chambers 及 Lu 可轉債評價模型實證研究

3-1 Chambers 及 Lu 可轉債評價模型實證研究

可轉債由於流動性不佳，其價格通常有低估的傾向，也就是說其隱含波動率通常較相對應股票合理的波動度要低，因此我們主要比較 Chambers 及 Lu 模型和其他可轉債模型的差別。我們挑選成交量較大的可轉債，以 Chambers 和 Lu 提出的模型、Tsiveriotis 和 Fernandes 之模型分別計算可轉債之理論價值，並和當時可轉債之市價做比較，以驗證 Chambers 及 Lu 模型其效果。

由於當股票價格和可轉債轉換價格相差過遠時，可轉債其選擇權的特性會較不明顯，因此我們首先以 2007 年 8 月底至 11 月初鴻海一可轉債的資料做模擬，那時候可轉債的價外程度始終維持於 2 成以內。我們以當時公債殖利率及股價可得 rate volatility 為 0.086、股價一年期的波動率約為 34%、利率和股價的相關係數約為 -0.357，該公司之風險性利率則參考其信評評等對應之公司債利率。現金股利部分，鴻海一可轉債規定若配發之現金股利未超過現股市價之 1.5%，則轉換價格不做調整，換言之這時候我們必須在我們的模型中加進現金股利，在此我們簡單假設未來除息時每年會配發 1.5 元的現金股利。我們的結果如圖 3.1 及圖 3.2：

圖 3.1

圖 3.2

我們也用 2009 年 3 月底至 5 月底這段時間元富一可轉債其資料做計算，其股價一年期歷史波動率約為 56%，模擬結果如圖 3.3 及 3.4：

圖 3.3

圖 3.4

由圖可知無論是 Chambers 及 Lu 的模型，或是 Tsiveriotis 及 Fernandes 的模型，其評價結果皆相當接近，這是因為 Chambers 及 Lu 的模型主要是在利率模型上做了一些修正，但這對評價的結果影響相當有限，再加上我國利率波動度偏低，使得影響又變得更小所致。此外，

我們得到的理論價格皆明顯高於市價，股價越接近轉換價格會差別會越明顯，這是因為我國可轉債市場流動性相當差，可轉價價格必然偏低以反應流動性風險，當股價上漲時，由於買進可轉債並不像現貨能輕易獲利了結，可轉債上漲幅度便會時常低於其合理漲幅，致使股價較高時，可轉債市價與理論價值的差距通常會較大。

第四章　結論

Chambers 及 Lu 的可轉債評價模型考慮了利率隨機變動的特性以及公司破產的可能性，從我們的模擬結果可知越價外且距到期日越遠的可轉債，該模型評價結果相較於 Tsiveriotis 及 Fernandes 的模型其差異會越顯著，這是因為價外的可轉債會比較接近債券，自然受利率影響較大，而離到期日越遠表示其 duration 越大，亦對利率的變化較為敏感。當利率波動度越大時，可轉債的理論價格和 delta 會越低，而 gamma 會越大，但其實差異並沒有非常明顯。

由於我國利率波動度經常維持在相當低的水準，因此 Chambers 及 Lu 的模型評價結果和 Tsiveriotis 及 Fernandes 的模型其結果相當接近，幾乎可說沒什麼不同。得到的理論價格都明顯高於市價，這是因為可轉債市場的流動性風險所致，當股價越高時，理論價格和市價的差異會越明顯，這是因為此時可轉債較接近股票，但由於流動性明顯不如現股，導致難以反應其理論價值。

參考文獻

[1] Donald R. Chambers and Qin Lu, "A Tree Model for Pricing Convertible Bonds with Equity, Interest Rate, and Default Risk." *Journal of Derivatives*, 14, 4, Summer 2007, 25–46.

[2] Tian-Shyr Dai and Yuh-Dauh Lyuu, "Pricing Discrete Dividend-Paying Stock Options with the Stair Tree." *Taiwan Banking and Finance Quarterly*, 5, No. 4, December 2004, 1-17.

[3] Tian-Shyr Dai, "Efficient Option Pricing on Stocks Paying Known or Path-Dependent Dividends with the Stair Tree." *Quantitative Finance*, forthcoming.

[4] Black, F., E. Derman, and W. Toy, "A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options." *Financial Analysts Journal*, January/Febuary 1990, 33-39.

[5] John C. Hull, "Options, Futures, and Other Derivatives." Fifth Editions.

[6] K. Tsiveriotis and C. Fernandes, "Valuing Convertible Bonds with Credit Risk." *Journal of Fixed Income*, 8, No. 2, September 1998, 95–102.