

國立臺灣大學工學院應用力學研究所

碩士論文

Graduate Institute of Applied Mechanics

College of Engineering

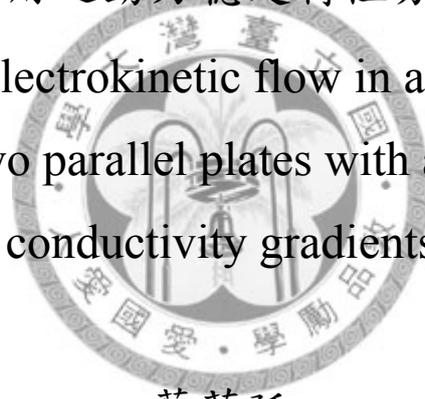
National Taiwan University

Master Thesis

流體在平行板間受導電梯度與水平電場

作用之動力穩定特性分析

Instability of electrokinetic flow in a thin fluid layer  
between two parallel plates with an electrical  
conductivity gradients



蔡英廷

CAI, YING-TING

指導教授：陳發林 博士

Advisor : Falin Chen, Ph.D.

中華民國 98 年 6 月

June, 2009

## 致 謝

首先感謝的是指導老師陳發林教授，老師在校務百忙中亦能抽空指導學生論文，並時常關心學生的論文進度與研究情緒。是否有其他外務耽誤到論文進度或有其他生活上的困難，常讓學生對於老師貼心的問候銘感五內。大同大學的張敏興教授，亦在每週關心學生論文進度，並給予學生鼓勵，激勵學生對研究的熱情，使學生進度掌握得宜，口試順利結束，且亦建議論文修改事項，使學生更明瞭論文缺漏與不足處，甚感念老師用心處。亦非常感謝羅安成博士，有學長的幫助，使學生的理論推導與程式的撰寫十分順利。遇到不懂的問題，學長總是殷殷期盼學弟能自我學習，幫助學生能得到更多學習的機會，使學生更能深入了解己身所不足處。且學長亦關心學生須注意論文撰寫與引用須小心，以免有抄襲的問題發生。在在都非常感謝學長的教誨，非常謝謝。

博一的張森圳學長，更是良師益友，藉由跟學長的討論中，釐清學習的漏洞，與未竟周全處，非常謝謝學長的抽空指導。而上屆的高鳴壕、郭至益、任博川學長，陪伴學生苦悶的碩一生活，並給予心靈的支助，時時幫學生打氣，非常謝謝。碩二的陳嘉倫、林佳慧、施經緯同學，感謝你們，陪我度過這兩年的碩班生活，增添平日生活的趣味。碩一的陳冠宏、陳立言、蔡之緯學弟，感謝你們豐富了我碩二的生活，使我每天能以愉快的心情從事研究。實驗室的王姐、小藍、呂大哥，謝謝你們的鼓勵，使實驗室的氣氛很融洽，謝謝你們。大學國樂社的朋友，志瑋、開平、立中、東憲、賀婷、孟瑩、康康、球球、珮如、信如、冠伶、祥和，謝謝你們的陪伴與邀約，讓我的碩士生活不再無聊，謝謝。還有千緞也謝謝你對我的體貼與體諒，一直陪在我身邊，幫我加油。最後，謝謝蔡明輝先生與陳美玉女士，感謝您讓我有個安心的學習後盾，謝謝你們。

# 目 錄

目錄.....	I
圖目錄.....	IV
表目錄.....	VII
中文摘要.....	VIII
英文摘要.....	X
符號說明.....	XII
	
第一章 緒論.....	1
1.1 研究背景.....	1
1.2 文獻回顧.....	2
1.3 研究動機與目的.....	4
1.4 研究方法.....	5
第二章 理論模式.....	7
2.1 模型建立與假設.....	7
2.2 統御方程式.....	8
2.3 邊界條件.....	10
2.4 基態解.....	12
2.5 系統無因次化.....	14

2.6 線性微擾化.....	19
2.7 正規模態展開.....	20
2.8 忽略 EDL 效應.....	24
第三章 數值分析方法.....	28
3.1 謝比雪夫配置方法.....	28
3.2 應用謝比雪夫配置方法.....	30
3.3 QZ 演算法.....	31
3.4 問題與討論.....	31
第四章 計算結果.....	33
4.1 概論.....	33
4.2 忽略邊界 EDL 效應.....	33
4.2.1 改變導電梯度的影響.....	33
4.2.2 改變電施密特數的影響.....	35
4.2.3 縱向模態.....	36
4.3 考慮邊界 EDL 效應.....	38
4.3.1 改變導電梯度的影響.....	38
4.3.2 改變電施密特數的影響.....	39
4.3.3 改變 $n$ 的影響.....	40
4.3.4 改變 $Q$ 的影響.....	40



4.3.5 改變 $\psi$ 的影響.....	41
4.3.6 縱向模態.....	42
4.4 綜合討論.....	43
第五章 結論與展望.....	64
參考文獻.....	67



## 圖 目 錄

圖 2.1	模型示意圖.....	7
圖 2.2	EDL 示意圖.....	11
圖 2.3	忽略 EDL 效應模型示意圖.....	24
圖 4.1	橫縱向模態示意圖(a)平面；(b)立體。.....	47
圖 4.2	當忽略 EDL，固定 $Sc_e = 500$ 的情形下，觀察 $H=1,3,10,100$ 其(a)中性曲線；(b)波數與虛部成長率的關係。.....	48
圖 4.3	當忽略 EDL，固定 $Sc_e = 500$ 的情形下，在不同導電梯度的臨界流場形態(a) $H=1, (k_c, Ra_{ec})=(2.5, 7474.3)$ ；(b) $H=10, (k_c, Ra_{ec})=(2.1, 335.9)$ ；(c) $H=100, (k_c, Ra_{ec})=(2.3, 199.9)$ 。.....	49
圖 4.4	當忽略 EDL，討論其 $Sc_e \geq 100$ 情況下，觀察 $H=1$ 其(a)中性曲線；(b)波數與虛部成長率的關係。.....	50
圖 4.5	當忽略 EDL，討論其 $Sc_e \geq 100$ 情況下，觀察 $H=10$ 其(a)中性曲線；(b)波數與虛部成長率的關係。.....	51
圖 4.6	當忽略 EDL， $Sc_e = 500$ 、 $k = 2.1$ 的情形下，觀察(a) $H=10,50,100$ 時，angle 與 $Ra_e$ 的中性曲線；(b) $H=10, Ra_e = 10^7$ 時，angle 與 $s_r$ 的關係。.....	52
圖 4.7	當考慮 EDL，固定 $Sc_e = 500$ 、 $Q=1$ 、 $n=-0.333$ 、 $\psi=1$ 的情形下，觀察 $H=1,10,20,50,100$ 其(a)中性曲線；(b)波數與虛部成長率的關係。.....	53
圖 4.8	考慮 EDL 效應，固定 $Sc_e = 500$ 、 $Q=1$ 、 $n=-0.333$ 、 $\psi=1$ 的情形下，不同導電度的臨界流場形態。(a) $H=1, (k_c, Ra_{ec})=(2.5, 5252.5)$ ；(b) $H=10, (k_c, Ra_{ec})=(2.1, 339.9)$ ；	

	(c) $H=100, (k_c, Ra_{ec})=(2.3, 203.1)$ 。.....	54
圖 4.9	當考慮 EDL，固定 $H=10$ 、 $Q=1$ 、 $n=-0.333$ 、 $\psi=1$ 的情形下，觀察 $Sc_e \geq 100$ 時，其(a)中性曲線變化；(b)波數與虛部成長率的關係。.....	55
圖 4.10	當考慮 EDL，固定 $H=10$ 、 $Q=1$ 、 $n=-0.333$ 、 $\psi=1$ 的情形下，觀察 $n=-0.25, -0.333, -0.5, -1$ 的(a)中性曲線變化；(b)波數與虛部成長率的關係。.....	56
圖 4.11	當考慮 EDL，固定 $H=10$ 、 $n=-0.333$ 、 $Sc_e=500$ 、 $\psi=1$ 的情形下，觀察 $Q=1, 10, 100, 10^3$ 時，其(a)中性曲線變化；(b)波數與虛部成長率的關係。.....	57
圖 4.12	則塔電位效應圖。當固定 $H=10$ 、 $n=-0.333$ 、 $Sc_e=500$ 、 $Q=1$ 的情形下，觀察 $\psi=0.1, 1, 10$ 的(a)中性曲線；(b)波數與虛部成長率變化。.....	58
圖 4.13	則塔電位效應圖。當固定 $H=10$ 、 $n=-0.333$ 、 $Sc_e=500$ 、 $Q=1$ 的情形下，觀察 $\psi=10, 100, 10^3, 10^4$ 與忽略 EDL 效應的(a)中性曲線；(b)波數與虛部成長率變化比較。..	59
圖 4.14	則塔電位影響圖。固定 $H=10$ 、 $Sc_e=500$ 、 $n=-0.333$ 、 $Q=1$ 的情形下，考慮 $\psi=0.1, 1, 10$ 的臨界流場形態。(a) $\psi=0.1, (k_c, Ra_{ec})=(2.2, 599.8)$ ；(b) $\psi=1, (k_c, Ra_{ec})=(2.1, 339.9)$ ；(c) $\psi=10, (k_c, Ra_{ec})=(2.1, 336.1)$ ；.....	60
圖 4.15	當考慮 EDL 效應， $Sc_e=500$ 、 $k=2.1$ 、 $n=-0.333$ 、 $Q=1$ 、 $\psi=1$ 的情形下，觀察(a) $H=10, 50, 100$ 時，angle 與 $Ra_e$ 的中性曲線；(b) $H=10, Ra_e=10^7$ 時，angle 與 $s_r$ 的關係圖。.....	61
圖 4.16	固定 $Sc_e=500$ 、 $Q=1$ 、 $n=-0.333$ 的情形下，觀察 $\psi=0.1,$	

1,10及忽略 EDL 效應時，其(a)H 與  $Ra_{ec}$  的變化；(b)H  
與  $k_c$  的變化。..... 62

圖 4.17 固定  $Sc_e = 500$ ,  $Q = 1$ ,  $n = -0.333$  的情形下，觀察  $\psi = 0.1$ ,  
1,10及忽略 EDL 效應時，其(a)H 與  $Ra_{ec}$  的變化；(b)H 與  
 $k_c$  的變化。..... 63



## 表 目 錄

表 2.1 特徵尺度表.....	15
表 4.1 物理系數表.....	46



# 流體在平行板間受導電梯度與水平電場

## 作用之動力穩定特性分析

研究生：蔡英廷

指導教授：陳發林

國立台灣大學應用力學研究所

### 摘要

在微流體裝置(microfluidic device)中，以電力取代壓力來驅動流體是最有效的方式。電流體力學(electrohydrodynamics, EHD)整合了電學與流體力學，產生了相當豐富有趣的新現象。特別是當流體內部具有導電度梯度(conductivity gradient)存在時，通電的結果導致自由電荷的堆積，進而引發不穩定對流現象的發生。這種不穩定現象最常被應用至微流體的混合器上，因此是目前微機電技術中相當重要的研究課題之一。本論文主要是在利用線性穩定性分析方法探討具有導電梯度分佈的電滲流場(electroosmotic flow, EOF)之穩定性特性。理論模型則假設在填滿稀薄二元電解液(dilute binary electrolyte solution)的兩無限平板間，通入一水平方向的電場，電雙層(electric double layer, EDL)內的流體受電場作用而產生邊界滑移速度，進而推動流體運動。由於流場內部存在導電梯度，使得自由電荷與電力呈現不均勻的分佈。當外加電場持續增加超過某一臨界值時，流場便會開始變得不穩定。為了瞭解此滑移速度在此系統中所扮演的角色，我們分別計算有EDL及無EDL兩個情況。研究結果發現，在低導電度梯度時，EDL所產生邊界滑移速度的確增強了此流體系統的不穩定作用。然而在高導電梯

度時，在EDL中的則塔電位(zeta potential)增強時，似乎對系統有更穩定的影響。本研究藉由大量數值結果的呈現，嘗試解釋其中重要的物理機制，成果將有助於電流體穩定現象的進一步了解。

關鍵辭:電滲透流，穩定性分析，水平電場，導電梯度，則塔電位

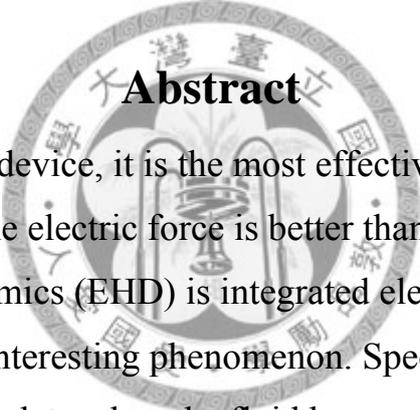


# **Instability of electrokinetic flow in a thin fluid layer between two parallel plates with an electrical conductivity gradients**

Advisee: CAI, YING-TING

Advisor : Falin Chen, Ph.D.

Graduate Institute of Applied Mechanics College of Engineering  
National Taiwan University



## **Abstract**

In the microfluidic device, it is the most effective way that the fluid is driven by the electric force is better than pressure. The electrohydrodynamics (EHD) is integrated electricity and the fluid mechanics have the interesting phenomenon. Specially the DC causes the free charge to accumulate when the fluid has conductivity gradient, then occurs unstable convection phenomenon. This kind of stabilization is most often applied to the micromixer. In the present the Micro Electro Mechanical Systems (MEMS) technology is quite important research subjects. This paper mainly considers electroosmotic flow (EOF) of the conductivity gradient distribution to use the linear stability analysis method. The model use dilute binary electrolyte solution between two infinite plates passes over a horizontal electric field. The electric field makes the electric double layer (EDL) in fluid to produce the boundary slip velocity then impetus fluid motion. As a result of the flow field has electric conduction gradient inside to cause the free charge and the electric force are the

non-uniform distribution. When the applied electric field continues to increase the critical value then the flow will become unstable. In order to understand that this slip velocity which acts in this system, we calculate separately to have EDL and no two situations. we discover when low conductivity gradient , EDL had the boundary slip velocity indeed to strengthen system unstable. However, at high conductivity gradient when EDL of zeta potential is stronger that system is more stable. This paper use massive value result to explain the important physical mechanism, the achievement will be helpful to the electrohydrodynamic stability a little understanding.

Keywords: electroosmotic flow, stability analysis, horizontal electric field, conductivity gradient, zeta potential



## 參數說明

### 英文字母

$C$	導電離子濃度(concentration of ions)	$\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$
$D$	$d/dz$ ，微分運算子	—
$d$	兩平板間距離(depth of two plates)	$\text{m}$
$E_0$	初始外加電場(imposed electric field)	$\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$
$\mathbf{E}$	電場向量(electric field vector)	$\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$
$\mathbf{f}_e$	電物體力(electric body force)	$\text{N}$
$F$	法拉第常數(Faraday constant)	$\text{C} \cdot \text{mol}^{-1}$
$H$	$\Delta\sigma/\sigma_0$ ，無因次導電梯度(dimensionless conductivity gradients)	—
$\mathbf{J}_f$	$\sigma\mathbf{E} + \mathbf{v}\rho_f$ ，電流密度(electric current density vector)	$\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$
$k_{eff}$	離子有效擴散係數(effective diffusivity)	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
$\mathbf{k}$	$z$ 方向單位向量	—
$k$	無因次波數(dimensionless wave number)	—
$n$	則塔電位(zeta potential)修正指數	—
$\mathbf{n}$	法線單位向量(normal vector)	—
$P$	壓力(pressure)	$\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$
$Q$	$\sigma_0/\sigma_r$ ，無因次底板導電度	—
$Ra_e$	$\varepsilon E_0^2 d^2 / \mu k_{eff}$ ，電瑞利數(electric Rayleigh number)	—
$Re$	$U_{ev} d / \nu$ ，雷諾數(Reynolds number)	—
$R_v$	$\psi Ra_e^{1/2}$ ，無因次電滲速度(dimensionless electroosmotic velocity)	—
$s$	擾動波成長率(growth rate)	—
$Sc_e$	$\nu / k_{eff}$ ，電施密特數(electric Schmidt number)	—

$t$	時間(time)	s
$\mathbf{t}$	切線向量(tangential vector)	—
$u$	$x$ 方向流體速度	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
$U_{ev}$	$\varepsilon E_0^2 d / \mu$ ，電黏滯速度(electroviscous velocity)	
$v$	$y$ 方向流體速度	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
$\mathbf{v}$	流體速度向量(velocity vector)	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
$w$	$z$ 方向流體速度	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
$Z$	原子價數(valence number)	—

### 希臘字母

$\varepsilon$	介電係數(permittivity)	$\text{C} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$
$\xi$	則塔電位(zeta potential)	V
$\theta$	角度(angle)	—
$L_D$	德拜長度(Debye length)	m
$\mu$	動力黏滯係數(dynamic viscosity)	$\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$
$\nu$	運動黏滯係數(kinematic viscosity)	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
$\omega$	離子遷移率(mobility)	$\text{mol} \cdot \text{s} \cdot \text{kg}$
$\rho$	密度(density)	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
$\rho_f$	自由電荷密度(charge density)	$\text{C} \cdot \text{m}^{-3}$
$\sigma$	導電度(conductivity)	$\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$
$\tau$	$\sigma_0 d^2 / \varepsilon \nu$ ，黏滯鬆弛時間(viscous relaxation time)	—
	與電荷鬆弛時間(charge relaxation time)比值	—
$\varphi$	無因次電位(dimensionless potential)	—
$\psi$	$-(\mu k_{eff} / \varepsilon)^{1/2} / \xi_r$	—

## 上標

- 基態解
- \* 無因次化
- ' 微擾動量
- ^ 微擾動量之  $z$  方向分量

## 下標

- $o$  位於下平板
- $d$  位於上平板
- $r$  參考值
- $x$   $x$  方向分量
- $y$   $y$  方向分量
- $z$   $z$  方向分量



# 第一章 緒論

## 1.1 研究背景

電流體力學(Electrohydrodynamics)是一門整合流體力學與靜電學的跨領域學科。而電流體的穩定性分析，近來受到微機電技術的需求，如生物反應晶片或化工過程之微型化技術，凡舉化學分析、生醫系統、微幫浦、注射器、成分分離器、混合器等等，其應用層面相當廣泛。由於微機電製程的進步，現更可將多樣系統整合於單一晶片上，即「System on a Chip」，得以降低製造成本，並縮小系統的整體尺寸，以提升可攜度[1]。亦由於尺寸的縮小，許多在維度較大的系統中被忽略的效應則有更重要的影響，包括電磁場效應、熱傳遞、流道平滑度...等等。

在微流體裝置的應用上，主要有微混合器與微分離器兩種。首先，在微流體混合器中，由於流場之雷諾數通常都相當低，流體多以層流方式流動，致使流體之間的混合通常僅能藉分子擴散來達成。增進微流體混合器效率所採用的方式一般可分為被動式與主動式兩種：被動式混合係以在流道中設置擋塊，或改變流道幾何形狀等方式促使流體混合，此種方法在混合器製造後即無法變動，於使用上較缺乏彈性。而主動式混合係以加入電力、磁力、熱力...等作用力，或是利用旋轉、震動等運動作為增進混合的機制。但需要廣泛的研究成果來加以應用，且其中牽涉較高深學理，需要專才解決。目前以電力來引發流體不穩定來製造對流與混合[2,3]為其主要發展技術且以電力控制亦有較容易操控的優點。

除了微流體混合器的研究外，另一個重要應用是在所謂的『等電

位點聚焦電泳(isoelectric focusing, IEF)』技術。該技術源於生物技術領域，主要被利用來分離蛋白質或高分子混合物之未知成份。在等電位點聚焦電泳實驗操作中，若增加兩電極板間的電位差，通常可以加速蛋白質分離的速度；但另一方面，電位差的增加亦會使得電泳力越大而超越黏滯力的束縛，導致流體不穩定流動。此時乘載蛋白質的電極緩衝液亦產生擾動，緩衝液黏性下降，分子自由擴散加劇，進而降低 PH 值分佈導致分離失效。因此，電壓施加的強弱，有其極限存在。一般而言對於生物反應晶片來說，希望設計能增加系統的不穩定性混合，來加速反應；但對於電泳分離技術而言，卻希望能提升系統的穩定機制。故依據需求來設計流體的穩定性。

在微流體系統中，以驅動方式來說，主要有以下兩種方式：壓力驅動與電動力驅動。在微流道中以壓力梯度驅動流體是相當沒有效率的方式。且微流道的結構強度不高，無法承受太大的壓力梯度。因此，電場驅動，是較合適的選擇。在微流體分析系統中，受處理的流體常為可解離的溶液，或是具導電性的流體，若將流道的壁面設計成電極板，便可藉由外加電場的方式驅動流體[4]。

## 1.2 文獻回顧

由前節提到，在生物晶片的研發上，為了加速物種混合效率，我們希望能趨向設計系統產生不穩定；對 IEF 則希望提升系統的穩定機制。為了清楚了解這些物理機制的成因與其耦合作用，已有學者們先後提出各種理論模型來分析與預測。

在 1965 年 Taylor & McEwan[5]研究在兩層不相容的液體界面做過穩定性分析，1967 年 Melcher & Firebaugh [6] 率先研究弱導電的液

體在加入溫度梯度後所引起的導電梯度變化對穩定性的影響。

1970 年 Michael & O'Neill[7]研究一通入垂直方向的電場，並在兩個導電流體中隔著一層非導電體平板的穩定性分析。以上的研究在在都顯示，在沒有接觸面間的張力影響下，靜止的流體也會產生擾動現象。Hoburg & Melcher [8] 與 Hoburg [9] 分別在 1976 年及 1977 年則考慮兩個彼此可互相混合的液體介面存在一線性的導電性梯度 (conductivity gradient) 分佈，並探討在分別受到切平面方向以及垂直方向之電場作用下的穩定性行為。

Rhodes[10]在 1989 年也將兩可互融的流線噴流做分析，說明在沒有受接觸面間張力的阻力下，原本圓柱狀的噴流會變成帶狀。Melcher & Taylor[11]也做了許多加入電力驅動相關的研究。Baygents & Baldessari[12]和 Hoburg & Melcher[13]有提到當電場與導電梯度相互作用時，靜電荷也可在流體內部作用，而不僅限於表面上。

而 Baygents & Baldessari[12]，在假設不流動的流場，加入導電梯度的變化，此導電梯度為離子濃度擴散造成。當黏滯力的反應時間遠比電解液受電場作用的反應時間大，其導電度的統御方程式可以簡化幾乎近似於擴散方程式。此項觀念亦可由 Melcher[14]所提的觀念相通。而此項相較於 Hoburg & Melcher[15]有所不同。因在 Hoburg & Melcher[15]的研究中所分析為共向性(colinear)的流場及導電梯度，雖然其導電梯度一樣也是離子濃度擴散造成，但不同的是其導電梯度在穩定性分析推導過程中會被消除。其消除的原因為當  $k_{eff}/\nu \ll 1$  時，流體擴散所需的時間比黏滯力的反應時間長。

雖然  $k_{eff}/\nu \ll 1$ ，但對影響流體的運動還是有其重要性，當電流體

運動時，其離子的擴散效應會使得離子濃度均勻，衰減導電梯度的產生，進而穩定流體。因為當離子的擴散效應減小，也就代表因離子擴散所產生的導電梯度也減小。而當導電梯度減小，也就代表電場所能對流體的作用力也減小，因此也就間接造成流體穩定。

再討論，如果擴散效應大於電泳效應，則流體將停止流動。因為電場無法造成導電梯度讓帶電離子漂移。且流體的黏滯力在此扮演穩定流體的功用，阻礙流體運動。假如  $k_{eff}/\nu$  假設趨於零，也就代表忽略擴散效應的影響，等於只有討論外加電場對流體做穩定性分析。

在 Lin[16]文中討論在微流道中施加兩層均勻的電解液，上層導電度較高，下層的導電度較低，其導電梯度僅存在於介面中。當施予外加的水平電場時發現，所施予的電場越高，則其介面擾動的程度越大。若固定電場，也發現當兩層的導電度差異越大，其擾動也越劇烈。此一現象常用於，微流道的快速混合機制。

典型的微流道尺度大約在 10 microns 或更大，而杜拜長度(Debye lengths)大約在 10nm 等級，尺度相差 1000 倍。因此，將電雙層(electric double layer, EDL)在邊界的效應考慮為邊界滑動條件，其滑動速度與局部電場和黏滯力有其比例關係。而 Santiago[17]其物理模型中說明如何考慮邊界 EDL 效應，將 EDL 的電滲速度效應，考慮為邊界的滑動速度效應而滑動邊界考慮在 EDL 擴散層末端。Chen[18]更進一步將 EDL 中的電滲速度，其則塔電位(zeta potential)的部分，考慮與導電度的影響關係。

### 1.3 研究動機與目的

可從實驗了解在厚長比甚小的微流道中施加與流動方向垂直的導電梯度時，發現當施予流動方向的電場時，流體會隨著所施加的電場大小產生顯著不穩定的擾動現象，且電場越大其不穩定現象越明顯亦越快。當考慮導電梯度越高時，亦有相同的現象。因此，常將此現象用於微混合(micromixer)裝置上。另外也發現若流道厚度尺度很小時，反而會有使流體趨向穩定的現象。因此要如何控制厚度尺度才能達到最有效的混合效率亦是許多學者研究的方向。

而由 Lin[16]的模型中，討論在微流道中考慮邊界 EDL 效應下，兩層相異導電度的電解液予以水平電場作用，分析此系統的混合機制。並說明當外加電場越大，則混合機制越明顯。

此系統考慮在常溫下，忽略溫度作用，討論其流體穩定性分析；而其中較少討論其縱向模態的變化，且其所討論的導電梯度為在各層中為均勻僅在交界面產生梯度變化。因此，本研究的重點放在將系統考慮為平行板系統，並藉由給予上下板離子濃度經由擴散作用而產生線性的導電梯度變化下。分別討論其橫向模態與縱向模態的線性穩定性分析。

在本研究的物理模型，亦將討論以下狀況的線性穩定性分析：(1). 考慮 EDL 在邊界的影響。(2). 考慮當 EDL 尺度遠小於板高，忽略 EDL 邊界效應的影響。

## 1.4 研究方法

本研究之物理模型可簡述為：兩具導電度差之平行板間充滿導電溶液在常溫下，通入一平行於平板的均勻水平電場。考慮邊界上的電雙層(electric double layer, EDL)影響，在本研究中 EDL 的影響主要考

慮在邊界上電滲流所造成的滑動速度，即電滲速度(electroosmotic velocity)所造成的邊界滑動[18]。

在本研究中，主要考慮則塔電位(zeta potential)、電場對電滲速度的作用。在則塔電位中，依據 Lin[16]考慮導電度對則塔電位有修正關係。所以當給予上下板不同導電度時，將會引發不同的則塔電位，進而在邊界上產生不同的電滲速度。而邊界導電度的給予，可以根據 Melcher[14]，當電荷鬆弛時間(charge relaxation time) $\ll$ 黏滯擴散時間(viscous diffusion time)時，可將電解質濃度直接線性正比於導電度分佈。因此當給予上下板離子濃度，亦即給予邊界導電度。

本研究所使用的統御方程式除了連續方程式與動量方程式之外，還使用電荷守恆方程式，考慮電場、導電度與自由電荷之間的關係，導電度控制方程式。線性穩定性分析的流程，除了先確定物理模型，使用的假設與統御方程式。之後由上述統御方程式內的各未知數配合邊界條件解出基態解，再根據基態解選擇適合的特徵尺度將統御方程式與基態解及邊界條件無因次化。利用微擾法對無因次化的方程式進行線性穩定性分析，並以正規模態展開。運用數值分析方法求得未知數，找出線性穩定性的中性曲線。

在數值方法中，本研究使用謝比雪夫配置方法，配合邊界條件，求得在各種參數的組合下，要使流場發生不穩定現象所需的臨界波數及臨界電場強度。

## 第二章 理論模式

### 2.1 模型建立與假設

本文所探討的模型如圖 2.1 所示。考慮兩平行電極板間充滿導電性液體，及邊界上產生電雙層(EDL)效應。在本文 EDL 的效應主要討論在邊界上產生電滲速度(electroosmotic velocity)即對系統產生邊界滑動的影響。在忽略溫度效應的系統下，於兩平板邊界上施予相異的離子濃度，則系統會因擴散作用，產生導電梯度效應。在此情況下，加入均勻水平電場的作用時，分析其流場穩定性。

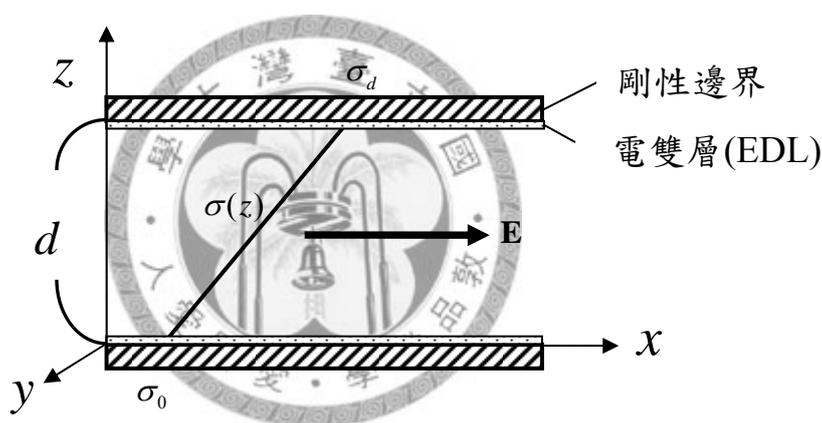


圖 2.1 模型示意圖

本問題會使用一些合理的假設。(1)在  $x$  及  $y$  方向為無限延伸平板，則基態速度僅為與  $z$  軸有關的  $x$  向速度  $u(z)$ ；(2)流體為不可壓縮，表忽略流體密度在時間與空間的變化；(3)考慮等溫的稀薄電解溶液，表系統所使用的電解液大部分為水所組成，且忽略溫度效應對系統的變化，如電場作用後所產生的焦耳熱(joule heating)對流體的影響亦予忽略；(4)流體為線性材料，介電係數、黏滯係數、離子有效擴

散係數視為常數；(5)忽略介電泳效應、電伸縮效應及黏滯消耗等假設來簡化問題。

## 2.2 統御方程式

根據模型的簡化假設與參考相關文獻後，本研究所使用的統御方程式共有下列 4 條：

### 1. 連續方程式

在不可壓縮的狀態下，可由質量守恆關係將方程式簡化為下式。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \dots\dots\dots(2-1)$$

其中， $\mathbf{v}$  含有三個方向的速度項  $\mathbf{v} = (u, v, w)$ 。

### 2. 動量方程式

為慣性力、壓力、黏滯力、物體力(body force)的平衡方程式。因系統忽略重力、磁力等物體力(body force)，且帶電離子受到電場作用的影響產生轉移而造成離子間的碰撞。因此，Navier-Stokes equations 可修正成下式：

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}_e \dots\dots\dots(2-2)$$

其中， $\mathbf{f}_e$  為電物體力(electric body force)，在下式中，右式第二項介電泳力與第三項電伸縮因介電係數假設為常數而消去，故只考慮第一項的庫倫力。

$$\mathbf{f}_e = \rho_f \mathbf{E} + \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 \nabla \epsilon + \frac{1}{2} \nabla \left[ |\mathbf{E}|^2 \rho \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right) \right] \dots\dots\dots(2-3)$$

因此可以簡化動量方程式為

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho_f \mathbf{E} \dots\dots\dots(2-4)$$

### 3. 電荷守恆方程式

而由 Gauss' law 的電荷守恆得知

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_f = 0 \dots\dots\dots(2-5)$$

在電阻性物質中，(2-5)式的電流密度  $\mathbf{J}_f$  可以(2-6)式表示為導電度  $\sigma$  與電場作用產生的歐姆電流及電荷移動造成的電流

$$\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{v} \rho_f \dots\dots\dots(2-6)$$

將(2-6)式帶入(2-5)式，並考慮連續方程式即可化簡成下式:

$$\frac{D\rho_f}{Dt} = -\nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) \dots\dots\dots(2-7)$$

### 4. 質傳方程式

因本研究的工作流體為離子流體，流體的導電性與離子濃度有關係，而其導電性會隨不同位置與時間改變。導電度的變化與區域性的帶電粒子密度有相當大的影響。

由 Melcher[14]可知，當  $\frac{\varepsilon}{\sigma_0} \ll \frac{d}{\omega E_0} \ll \frac{d^2}{\nu}$ 。在此前提下才可獲得近乎擴散方程式關係的導電度的控制方程式:

$$\frac{D\sigma}{Dt} = K_{eff} \nabla^2 \sigma \dots\dots\dots(2-8)$$

其中， $K_{eff}$  為由布朗運動影響所產生的離子有效擴散係數； $\frac{\varepsilon}{\sigma_0}$  為電荷反應時間(charge relaxation time)； $\frac{d}{\omega E_0}$  為粒子遷移所需時間 (particle migration time)； $\frac{d^2}{\nu}$  為黏滯擴散所需時間(viscous diffusion

time)。即堆積電荷的反應時間要比帶電離子受電場作用的漂移時間要短。而帶電離子受電場作用的漂移時間也要比黏滯力作用在流體粒子的反應時間短。此時才可假設質傳方程式如(2-8)所示。

## 2.3 邊界條件

### 1. 導電度

當給予離子濃度可由關係式獲得導電度[16]。

$$\sigma = \omega Z^2 F^2 C \dots\dots\dots(2-9)$$

其中， $Z$ 為離子的原子價(valence number)； $F$ 為法拉第常數(Faraday constant)，一莫耳電子所帶的電荷； $C$ 為離子的莫耳濃度(concentration)； $\omega$ 為離子遷移率(mobility)。

因此給予上板濃度  $C_0$ ，下板濃度  $C_d$ ，即給予邊界導電度。

$$\begin{cases} \sigma(0) = \sigma_0 \\ \sigma(d) = \sigma_d \end{cases} \dots\dots\dots(2-10)$$

### 2. 電場

在電場的邊界條件中，考慮電場不可穿透條件

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = 0 \dots\dots\dots(2-11)$$

EDL 即電雙層(electric double layer)為緊密層(stern layer)與擴散層(diffuse layer)的簡稱。由圖 2.2 將 EDL 放大來看，緊密層因距離帶電邊界最近，對離子的吸引力最強，產生密不可分的不動層。超過緊密層之後，即是擴散層。在擴散層中因帶電粒子逐漸吸附中和而使其

吸引力減弱，使帶電粒子可脫離束縛移動。距離緊密層越遠越易脫離。

而緊密層與擴散層中間的界面為剪力面(shear plane)。在擴散層末端因電性中和的作用，趨於電中性，故在擴散層末端的電勢能趨於電中性。而擴散層末端與剪力面的電勢能差即為則塔電位(zeta potential)；擴散層的厚度亦稱為德拜長度(Debye length)。

系統考慮的邊界即位於擴散層末端的邊界  $\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=L_D} \approx 0$ 。

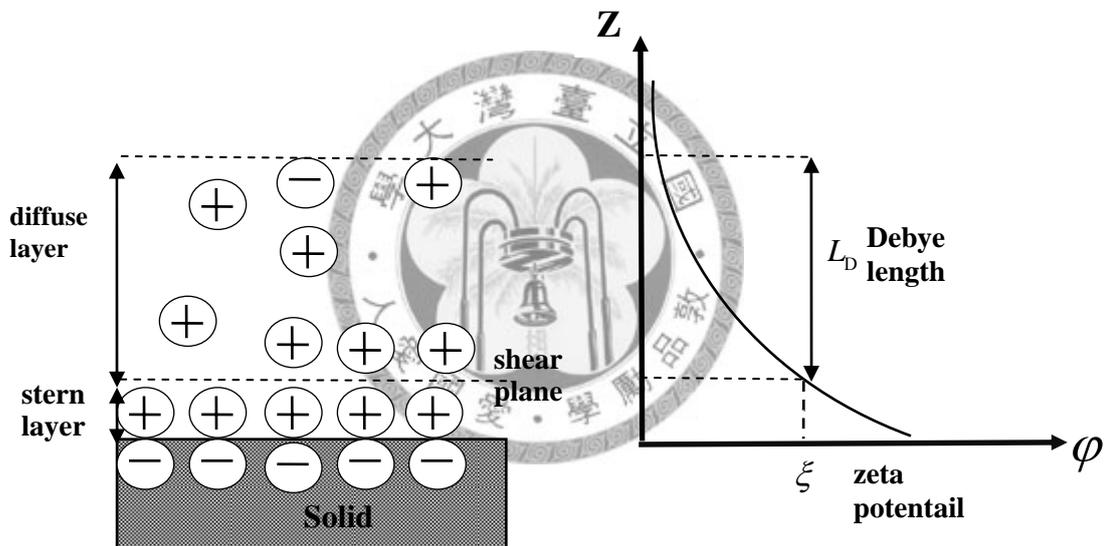


圖 2.2 EDL 示意圖

### 3. 速度

考慮邊界不可穿透的條件。可知法線方向速度為

$$w = 0 \dots\dots\dots(2-12)$$

而切線方向的速度中，在邊界上產生電滲速度(electroosmotic velocity)。在此使用 Helmholtz-Smoluchowski formulation 來計算電滲速度。

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{t} = \frac{-\varepsilon \xi}{\mu} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} \dots\dots\dots(2-13)$$

其中，(2-13)式中的則塔電位  $\xi$ ，考慮局部離子濃度的影響(即導電度的影響)並作  $(-n)$  次方修正[16]，即下式所示：

$$\frac{\xi}{\xi_r} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_r}\right)^{-n} \dots\dots\dots(2-14)$$

而考慮外加水平電場的作用，我們令電場為

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_x - \nabla \varphi \dots\dots\dots(2-15)$$

上式代表，在  $x$  方向施加外加電場 ( $E_0$ ) 與系統內部反映電場 ( $-\nabla \varphi$ ) 的疊加關係。將(2-14)式帶入(2-13)式可獲得邊界切線速度為：

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{t} = \frac{-\varepsilon \xi_r}{\mu} \left(\frac{\sigma}{\sigma_r}\right)^{-n} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} \dots\dots\dots(2-16)$$

## 2.4 基態解

可由上述所說明的假設、統御方程式、邊界條件中，求出變數的解，即為此模型的基態解。此為系統在穩態且忽略時間成長，亦不考慮擾動變化時的狀態。以下在變數上標加上[-]代表基態解。

計算基態解時，所使用的合理假設如下：

(1) 定常(steady state)，即  $\frac{\partial(\quad)}{\partial t} = 0$  .....(2-17)

(2) 導電度無  $x$  方向的變化，即  $\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x} = 0$  .....(2-18)

(3) 電荷密度無  $x$  方向變化，即  $\frac{\partial \bar{\rho}_f}{\partial x} = 0$  .....(2-19)

(4) 完全發展流

(5) 因為  $x$ - $y$  無限延伸的平行板，故令  $\bar{\mathbf{v}} = [u(z), 0, 0]$  .....(2-20)

依據 2.1 節、2.2 節、2.3 節，所列出的假設、統御方程式及邊界條件。求出系統中各未知變數的基態解。

### 1. 導電度

當給予上下板不同離子濃度時，因考慮黏滯擴散時間 $\gg$ 電荷鬆弛時間。故電場對離子濃度的變化相當快，使得由離子濃度擴散所形成的導電梯度為幾近線性變化。

$$\bar{\sigma} = \frac{\Delta\sigma}{d} z + \sigma_0 \dots\dots\dots(2-21)$$

### 2. 電場

由電場不可穿透的邊界條件(2-11)帶入電荷守衡方程式(2-7)可知，電位基態解 $\phi$ 為常數，則基態電場僅為外加電場 $E_0$ 。

$$\bar{\mathbf{E}} = E_0 \mathbf{e}_x \dots\dots\dots(2-22)$$

### 3. 自由電荷密度

在(2-22)式中得知，基態電場僅為外加電場 $E_0$ ，系統內部並無反應電位 $\phi$ ，由高斯方程式可知，將電場取散度即可得到自由電荷密度。代表自由電荷密度在基態電場為電中性的狀態，系統內部並無電泳力的發生。

$$\bar{\rho}_f = 0 \dots\dots\dots(2-23)$$

### 4. 壓力

將上述(2-22)、(2-23)電場及電荷密度的基態解代入(2-4)式動量方程式中，可解出本系統的基態壓力均為等壓，但在此設為零。即本系統並不給予外加壓力驅動流體，或不考慮壓力對基態流場的影響。

$$\bar{P} = 0 \dots\dots\dots(2-24)$$

### 5. 速度

將邊界速度條件(2-12)式、(2-16)式帶入動量方程式(2-4)式中，並將上述電場、自由電荷密度及壓力的基態解(2-22)式、(2-23)式、(2-24)式同時帶入動量方程式(2-4)中即可求出基態流場。我們已可由(2-23)可知基態的電荷密度為電中性。外加電場並無法對系統產生電泳力的作用。因此系統的基態流場是由邊界的滑動速度所造成的流場，近似庫第流(Couette flow)因邊界移動所造成流場。不同的是，在本系統的邊界滑動速度，為因導電度差異所造成邊界有不同的電滲速度，使上下板因有不同的滑動速度來驅動流場。亦因系統無電泳力的作用，使得流場為線性變化。

$$\bar{u} = \bar{u}(0) + z \left[ \frac{\bar{u}(d) - \bar{u}(0)}{d} - \frac{\epsilon E_0 \xi_r}{\mu \sigma_r} \left[ \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_r} \right)^{-n} + \frac{\left( \frac{\sigma_d}{\sigma_r} \right)^{-n} - \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_r} \right)^{-n}}{d} z \right] \right] \dots\dots\dots(2-25)$$

### 2.5 系統無因次化

我們通常會將統御方程式、邊界條件、基態解等方程式無因次化。即去除單位絕對大小的影響，僅考慮階數(order)的大小以便合理的看出變數的變化。

在本節，我們由 2.4 節解出的基態解選出系統的各個特徵量，將變數上標加上\*來代表無因次變數。

表 2.1 特徵尺度表

特徵尺度	說明	符號
長度	兩板間高度	$d$
速度	電黏滯速度	$U_{ev}$
時間	—	$\frac{d}{U_{ev}}$
電位	—	$E_0 d$
導電度	兩板的導電度梯度	$\Delta\sigma$
壓力	—	$\mu \frac{U_{ev}}{d}$
自由電荷密度	考慮導電度梯度的尺度	$\frac{\epsilon E_0 \Delta\sigma}{d \sigma_0}$

其中，採用平行板高作為長度尺度。由 Hoburg & Melcher[15]及 Lin[16]，速度特徵尺度選用電黏滯速度  $U_{ev}$ 。

$$U_{ev} = \frac{\epsilon E_0^2 d}{\mu} \dots\dots\dots(2-26)$$

此電黏滯速度為當電荷受電場作用移動時，在下游會累積電荷。造成一反電位的產生，阻礙流體的流動，(2-26)式為考慮黏滯力與電力平衡所求出。而自由電荷密度的特徵尺度採用高斯定理，對電場取散度並考慮導電梯度的比例影響。

下列各式為無因次化的變數關係：

$$\mathbf{E}^* = \frac{\mathbf{E}}{E_0} \dots\dots\dots(2-27)$$

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{d} \dots\dots\dots(2-28)$$

$$\sigma^* = \frac{\sigma - \sigma_0}{\Delta\sigma} \dots\dots\dots(2-29)$$

$$t^* = \frac{t}{\frac{d}{U_{ev}}} \dots\dots\dots(2-30)$$

$$\rho_f^* = \frac{\rho_f}{\frac{\epsilon E_0 \Delta\sigma}{d \sigma_0}} \dots\dots\dots(2-31)$$

由高斯定理， $\rho_f = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E})$  .....(2-32)

把(2-32)帶入(2-31)中，將電荷密度化為電位的關係式：

$$\rho_f^* = \frac{\sigma_0}{\Delta\sigma} \nabla^* \cdot \mathbf{E}^* = -\frac{\sigma_0}{\Delta\sigma} \nabla^{*2} \phi^* \dots\dots\dots(2-33)$$

$$p^* = \frac{p}{\mu \frac{U_{ev}}{d}} \dots\dots\dots(2-34)$$

$$\mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{v}}{U_{ev}} \dots\dots\dots(2-35)$$

將 2.4 節(2-21)~(2-25)的基態解依(2-27)~(2-35)的關係式無因次化成下列各式：

$$\bar{\sigma}^* = z^* \dots\dots\dots(2-36)$$

$$\bar{\mathbf{E}}^* = \mathbf{e}_x \dots\dots\dots(2-37)$$

$$\bar{\rho}_f^* = 0 \dots\dots\dots(2-38)$$

$$\bar{p}^* = 0 \dots\dots\dots(2-39)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}^* &= -\frac{\xi_r}{E_0 d} \left\{ \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_r} \right)^{-n} + \left[ \left( \frac{\sigma_d}{\sigma_r} \right)^{-n} - \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_r} \right)^{-n} \right] z^* \right\} \\ &= \frac{1}{R_v} \left\{ Q^{-n} + \left[ (Q(H+1))^{-n} - Q^{-n} \right] z^* \right\} \dots\dots\dots(2-40) \end{aligned}$$

其中， $R_v$  為無因次電滲速度與電黏滯速度比； $Q$  為無因次底板導電度； $H$  為無因次導電度差。

$$R_v = \frac{U_{ev}}{U_{eo}} = \frac{E_0 d}{-\xi_r} \dots\dots\dots(2-41)$$

$$Q = \frac{\sigma_0}{\sigma_r} \dots\dots\dots(2-42)$$

$$H = \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} \dots\dots\dots(2-43)$$

將 2.2 節(2-1)、(2-4)、(2-7)、(2-8)式的統御方程式依(2-27)~(2-35)式的關係式無因次化成下列各式。(2-44)式為連續方程式，(2-45)式為動量方程式無因次化。

$$\nabla^* \cdot \mathbf{v}^* = 0 \dots\dots\dots(2-44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* &= \frac{1}{\text{Re}} (-\nabla^* p^* + \nabla^{*2} \mathbf{v}^* + \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} \rho_f^* \mathbf{E}^*) \\ &= \frac{1}{\text{Re}} (-\nabla^* p^* + \nabla^{*2} \mathbf{v}^* + (\nabla^{*2} \varphi^*)(-\mathbf{e}_x + \nabla^* \varphi^*)) \end{aligned} \dots\dots(2-45)$$

其中， $\text{Re}$  為雷諾數(Reynolds number)，為黏滯力與慣性力的比值。

$$\text{Re} = \frac{U_{ev} d}{\nu} = \frac{\varepsilon E_0^2 d^2}{\mu \nu} \dots\dots\dots(2-46)$$

由下列關係式，將電場(2-15)式與自由電荷密度(2-33)式以電勢能函數取代，並代入電荷守衡控制方程式(2-7)式。

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt^*} (\nabla^{*2} \varphi^*) &= -\frac{\sigma_0 d}{\varepsilon U_{ev}} \left[ \left( \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} \nabla^* \sigma^* \cdot \nabla^* (-\mathbf{e}_x + \nabla^* \varphi^*) \right) + \left( 1 + \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} \sigma^* \right) \nabla^{*2} (-\mathbf{e}_x + \nabla^* \varphi^*) \right] \\ &= -\frac{\tau}{\text{Re}} \left[ (H \nabla^* \sigma^* \cdot (-\mathbf{e}_x + \nabla^* \varphi^*)) + (1 + H \sigma^*) \nabla^{*2} \varphi^* \right] \dots\dots\dots(2-47) \end{aligned}$$

其中， $\tau = \tau_{viscous} / \tau_{charge} = \sigma_0 d^2 / \varepsilon \nu$  為電荷反應時間與黏滯擴散反應時間比。而  $\tau_{viscous} = d^2 / \nu$ ， $\tau_{charge} = \varepsilon / \sigma_0$ ，分別為 2.2 節所述的黏滯反應時

間與電荷鬆弛時間。當  $\sigma_0 \approx 10^{-4} \text{ S/m}$  ,  $d \approx 10^{-3} \text{ m}$  ,  $\varepsilon \approx 10^{-9} \text{ C/m} \cdot \text{V}$  ,  $\nu \approx 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  , 則  $\tau \approx 10^5 \sim 10^6$  。表示(2-47)中，左式電荷密度隨時間的變化項可近乎可以忽略其影響。

而質傳方程式亦可無因次化如下式所示：

$$\begin{aligned} \frac{D\sigma^*}{Dt^*} &= \frac{1}{Sc_e Re} \nabla^{*2} \sigma^* \\ &= \frac{1}{Ra_e} \nabla^{*2} \sigma^* \end{aligned} \dots\dots\dots(2-48)$$

其中， $Sc_e$  為電施密特數(electric Schmidt number)，為擴散係數與粘滯係數的比值，在本研究為代表離子擴散的效應。 $Ra_e$  為電瑞利數(electric Rayleigh number)，在本研究為代表電場的效應。

$$Sc_e = \frac{\nu}{k_{eff}} \dots\dots\dots(2-49)$$

$$Ra_e = \frac{U_{ev} d}{k_{eff}} = \frac{\varepsilon E_0^2 d^2}{\mu k_{eff}} \dots\dots\dots(2-50)$$

本文亦將 2.3 節(2-10)、(2-11)、(2-12)、(2-16)式的邊界條件依(2-27)式~(2-35)式的關係式無因次化成下列各式：

$$\begin{aligned} \sigma^*(0) &= 0 \\ \sigma^*(1) &= 1 \end{aligned} \dots\dots\dots(2-51)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi^*}{\partial z^*} \right|_{z^*=0,1} = 0 \dots\dots\dots(2-52)$$

$$w^* \Big|_{z=0,1} = 0 \dots\dots\dots(2-53)$$

$$\left[ \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{t} \right] \Big|_{z^*=0,1} = \frac{1}{R_v} \left( \frac{\sigma^*}{\sigma_r} \right)^{-n} \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{t} \Big|_{z^*=0,1} \dots\dots\dots(2-54)$$

最後可以由  $Ra_e$  &  $R_v$  的關係得到一無因次參數  $\psi$  。

$$R_v = -\frac{1}{\xi_r} \left( \frac{\mu k_{eff}}{\varepsilon} Ra_e \right)^{\frac{1}{2}} = \psi Ra_e^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(2-55)$$

其中， $\psi$  參數在此系統代表 EDL 效應的大小，當  $\psi$  越小代表  $\xi_r$  越大，EDL 效應越明顯；反之則 EDL 效應不明顯。

$$\psi = -\frac{1}{\xi_r} \left( \frac{\mu k_{eff}}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(2-56)$$

將(2-55)式的關係帶入(2-25)後得到:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{R_v} \left\{ Q^{-n} + \left[ (Q(H+1))^{-n} - Q^{-n} \right] z \right\} \\ &= \frac{1}{\psi Ra_e^{\frac{1}{2}}} \left\{ Q^{-n} + \left[ (Q(H+1))^{-n} - Q^{-n} \right] z \right\} \end{aligned} \dots\dots\dots(2-57)$$

## 2.6 線性微擾化

為了瞭解基態流場的穩定特性，將 2.4 節中的基態解加上微小擾動量(infinitesimal disturbance)帶回統御方程式與邊界條件，並忽略微擾量的乘積項即高階項，可得線性擾動方程式(linear perturbation equation)。且在此後章節皆省去上標(\*)來代表無因次參數，上標(')代表微擾量。並設定如下變數:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{v}}(z) + \mathbf{v}'(\mathbf{x}, t) \dots\dots\dots(2-58) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \bar{\sigma}(z) + \sigma'(\mathbf{x}, t) \dots\dots\dots(2-59) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \bar{\varphi}(z) + \varphi'(\mathbf{x}, t) \dots\dots\dots(2-60) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \bar{P}(z) + P'(\mathbf{x}, t) \dots\dots\dots(2-61) \end{array} \right.$$

將上述擾動變數，帶入無因次化統御方程式(2-44)、(2-45)、(2-47)

式及(2-48)式。採用線性分析，忽略高階項，即可得到下列擾動方程式：

$$\nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \dots\dots\dots(2-62)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{v}')}{\partial t} + \bar{u}(z) \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} + \frac{d\bar{u}(z)}{dz} w' \mathbf{e}_x \\ = \frac{1}{\text{Re}} \left[ -\nabla p' + \nabla^2 \mathbf{v}' + \frac{d^2 \bar{\varphi}(z)}{dz^2} \nabla \varphi' - \nabla^2 \varphi' \mathbf{e}_x + \frac{d\bar{\varphi}(z)}{dz} \nabla^2 \varphi' \mathbf{e}_z \right] \dots\dots\dots(2-63) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \varphi') + \bar{u}(z) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \varphi') + \frac{d^3 \bar{\varphi}(z)}{dz^3} w' \\ = -\frac{\tau}{\text{Re}} \left[ \text{H} \left( -\frac{\partial \sigma'}{\partial x} + \frac{d\bar{\sigma}(z)}{dz} \frac{d\varphi'}{dz} + \frac{d\sigma'}{dz} \frac{d\bar{\varphi}(z)}{dz} + \frac{d^2 \bar{\varphi}(z)}{dz^2} \sigma' \right) + (1 + \text{H}\bar{\sigma}(z)) \nabla^2 \varphi' \right] \dots\dots\dots(2-64) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial t} + \bar{u}(z) \frac{\partial \sigma'}{\partial x} + w' \frac{d\bar{\sigma}(z)}{dz} = \frac{1}{\text{Ra}_e} \nabla^2 \sigma' \dots\dots\dots(2-65)$$

將動量方程式(2-63)取散度，並使用(2-62)連續方程式來獲得一組新方程式以簡化問題：

$$\begin{aligned} \bar{u}(z) \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial z} \right) + 2 \frac{d\bar{u}(z)}{dz} \frac{\partial w'}{\partial x} \\ = \frac{1}{\text{Re}} \left[ -\nabla^2 p' + 2 \frac{d^2 \bar{\varphi}(z)}{dz^2} \nabla^2 \varphi' + \frac{d^3 \bar{\varphi}(z)}{dz^3} \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \varphi' + \frac{d\bar{\varphi}(z)}{dz} \nabla^2 \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right] \dots\dots\dots(2-66) \end{aligned}$$

## 2.7 正規模態展開

將擾動量對時間做拉普拉斯轉換(Laplace Transform)，對水平方向做複利葉轉換(Fourier Transform)，即可把上述的偏微分方程式化為常微分方程式求解。即將擾動量以下列形式展開：

$$[u'(\mathbf{x}, t), v'(\mathbf{x}, t), w'(\mathbf{x}, t)] = [\hat{u}(z), \hat{v}(z), \hat{w}(z)] e^{ik_x x + ik_y y + st} \dots\dots\dots(2-67)$$

$$\sigma'(\mathbf{x}, t) = \hat{\sigma}(z) e^{ik_x x + ik_y y + st} \dots\dots\dots(2-68)$$

$$\varphi'(\mathbf{x}, t) = \hat{\varphi}(z) e^{ik_x x + ik_y y + st} \dots\dots\dots(2-69)$$

$$p'(\mathbf{x}, t) = \hat{p}(z) e^{ik_x x + ik_y y + st} \dots\dots\dots(2-70)$$

其中， $s = s_r + s_i$  為複數， $s_r$  為擾動量的成長率(growth rate)， $s_i$  為霍夫分歧(Hopf bifurcation)振盪頻率，其絕對值大小的物理意義可看成是波速。 $k_x$ 、 $k_y$  為擾動量沿  $x$  與  $y$  方向的波數。當  $s_r > 0$  代表擾動量將隨時間增大使系統狀態越來越偏離基態，則稱系統基態為不穩定；反之若  $s_r < 0$ ，擾動量將隨時間衰減，系統返回基態稱之為穩定；若  $s_r = 0$ ，則稱之為中性穩定(neutral stable)。並將上述擾動變數帶入方程式(2-63)~(2-66)可得下列各式。

其中，(2-63)動量方程式其三個方向分量可由正規模態展開整理分別為下列各式。

其  $x$  方向的動量方程式為：

$$s\hat{u}(z) + ik_x \bar{u}(z)\hat{u}(z) + \frac{d\bar{u}(z)}{dz} \hat{w}(z) = \frac{1}{\text{Re}} \left[ -ik_x \hat{p}(z) + (D^2 - \alpha^2)\hat{u}(z) + ik_x \frac{d^2 \bar{\varphi}(z)}{dz^2} \hat{\varphi}(z) - (D^2 - \alpha^2)\hat{\varphi}(z) \right] \dots\dots\dots(2-71)$$

其  $y$  方向的動量方程式為：

$$s\hat{v}(z) + ik_x \bar{u}(z)\hat{v}(z) = \frac{1}{\text{Re}} \left[ -ik_y \hat{p}(z) + (D^2 - \alpha^2)\hat{v}(z) + ik_y \frac{d^2 \bar{\varphi}(z)}{dz^2} \hat{\varphi}(z) \right] \dots\dots\dots(2-72)$$

其  $z$  方向的動量方程式為：

$$s\hat{w}(z) + ik_x \bar{u}(z)\hat{w}(z) = \frac{1}{\text{Re}} \left[ -D\hat{p}(z) + (D^2 - \alpha^2)\hat{w}(z) + \frac{d^2 \bar{\varphi}(z)}{dz^2} D\hat{\varphi}(z) + \frac{d\bar{\varphi}(z)}{dz} (D^2 - \alpha^2)\hat{\varphi}(z) \right] \dots\dots\dots(2-73)$$

且亦由(2-64)電荷守衡方程式可由正規模態展開整理為下列

(2-74)式為:

$$\left[ s + ik_x \bar{u}(z) + \frac{\tau}{\text{Re}} (1 + H\bar{\sigma}(z)) \right] (D^2 - \alpha^2) \hat{\phi}(z) + \frac{\tau}{\text{Re}} H \frac{d\bar{\sigma}(z)}{dz} D\hat{\phi}(z) + \frac{\tau}{\text{Re}} H \frac{d\bar{\varphi}(z)}{dz} D\hat{\sigma}(z) + \left( -ik_x \frac{\tau}{\text{Re}} H + \frac{\tau}{\text{Re}} H \frac{d^2\bar{\varphi}(z)}{dz^2} \right) \hat{\sigma}(z) + \frac{d^3\bar{\varphi}(z)}{dz^3} \hat{w}(z) = 0 \quad \dots(2-74)$$

而(2-65)質傳方程式可由正規模態展開整理為下列(2-75)式為:

$$-\frac{1}{\text{Ra}_e} (D^2 - \alpha^2) \hat{\sigma}(z) + \left[ s + ik_x \bar{u}(z) \right] \hat{\sigma}(z) + \frac{d\bar{\sigma}(z)}{dz} \hat{w}(z) = 0 \quad \dots(2-75)$$

最後，(2-66)亦可由正規模態展開整理為下列(2-76)式為:

$$\begin{aligned} & \bar{u}(z) \left( -k_x^2 \hat{u}(z) - k_x k_y \hat{v}(z) + ik_x D\hat{w}(z) \right) + 2ik_x \frac{d\bar{u}(z)}{dz} \hat{w}(z) \\ &= \frac{1}{\text{Re}} \left[ -(D^2 - \alpha^2) \hat{p}(z) + 2 \frac{d^2\bar{\varphi}(z)}{dz^2} (D^2 - \alpha^2) \hat{\phi}(z) + \frac{d^3\bar{\varphi}(z)}{dz^3} D\hat{\phi}(z) - ik_x (D^2 - \alpha^2) \hat{\phi}(z) + \frac{d\bar{\varphi}(z)}{dz} (D^2 - \alpha^2) D\hat{\phi}(z) \right] \end{aligned} \quad \dots(2-76)$$

為簡化方程式，將無因次化基態解(2-36)式~(2-40)式及下列(2-77)~(2-80)各式帶入(2-71)式~(2-76)式。

$$\left\{ \begin{aligned} & \alpha^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad \dots(2-77) \\ & G(z) = Hz + 1 \quad \dots(2-78) \\ & \text{Re} = \frac{\text{Ra}_e}{\text{Sc}_e} \quad \dots(2-79) \\ & \bar{u} = \frac{1}{\psi \text{Ra}_e^{\frac{1}{2}}} \left\{ (Q)^{-n} + [Q(H+1)]^{-n} - (Q)^{-n} \right\} z \quad \dots(2-80) \end{aligned} \right.$$

可化簡方程式如下:

(2-71)式  $x$  方向的動量方程式可化簡整理為(2-81)式所示:

$$s\hat{u}(z) = -ik_x \bar{u}(z) \hat{u}(z) - \frac{d\bar{u}(z)}{dz} \hat{w}(z) + \frac{\text{Sc}_e}{\text{Ra}_e} \left[ -ik_x \hat{p}(z) + (D^2 - \alpha^2) \hat{u}(z) - (D^2 - \alpha^2) \hat{\phi}(z) \right] \dots(2-81)$$

(2-72)式  $y$  方向的動量方程式可化簡整理為(2-82)式所示:

$$s\hat{v}(z) = -ik_x \bar{u}(z)\hat{v}(z) + \frac{Sc_e}{Ra_e} \left[ -ik_y \hat{p}(z) + (D^2 - \alpha^2)\hat{v}(z) \right] \dots\dots\dots(2-82)$$

(2-73)式  $z$  方向的動量方程式可化簡整理為(2-83)式所示:

$$s\hat{w}(z) = -ik_x \bar{u}(z)\hat{w}(z) + \frac{Sc_e}{Ra_e} \left[ -D\hat{p}(z) + (D^2 - \alpha^2)\hat{w}(z) \right] \dots\dots\dots(2-83)$$

(2-74)式電荷守衡方程式亦可化簡整理為(2-84)式所示:

$$s \frac{Ra_e}{\tau Sc_e} (D^2 - \alpha^2)\hat{\phi}(z) = - \left( ik_x \frac{Ra_e}{\tau Sc_e} \bar{u}(z) + G(z) \right) (D^2 - \alpha^2)\hat{\phi}(z) - HD\hat{\phi}(z) + ik_x H\hat{\sigma}(z) \dots\dots(2-84)$$

(2-75)式質傳方程式亦可化簡整理為(2-85)式所示:

$$s\hat{\sigma}(z) = \frac{1}{Ra_e} (D^2 - \alpha^2)\hat{\sigma}(z) - ik_x \bar{u}(z)\hat{\sigma}(z) - \hat{w}(z) \dots\dots\dots(2-85)$$

(2-76)式亦可化簡整理為(2-86)式所示:

$$\bar{u}(z) \left( k_x^2 \hat{u}(z) + k_x k_y \hat{v}(z) - ik_x D\hat{w}(z) \right) - 2ik_x \frac{d\bar{u}(z)}{dz} \hat{w}(z) + \frac{Sc_e}{Ra_e} \left[ -(D^2 - \alpha^2)\hat{p}(z) - ik_x (D^2 - \alpha^2)\hat{\phi}(z) \right] = 0 \dots\dots\dots(2-86)$$

依據 2.6 節線性微擾化及 2.7 節正規模態展開的流程，亦可將邊界條件(2-51)~(2-54)化簡整理為下列各式。其中(2-92)壓力梯度的邊界條件為由(2-83)式，動量方程式的  $z$  方向分量求得。因統御方程式應在系統全域都滿足，因此在邊界條件亦應滿足統御方程式。故考慮(2-83)式  $z$  方向分量的動量方程式時，因邊界上的  $z$  向速度由不可穿透的條件為零即  $\hat{w}(z)|_{z=0,1} = 0$ ，將此帶入(2-83)式即可得知壓力梯度的邊界條件如(2-92)式所示。

$$\hat{\sigma}(z)|_{z=0,1} = 0 \dots\dots\dots(2-87)$$

$$\frac{d\hat{\phi}(z)}{dz}\Big|_{z=0,1} = 0 \dots\dots\dots(2-88)$$

$$\hat{w}(z)\Big|_{z=0,1} = 0 \dots\dots\dots(2-89)$$

$$\hat{u}(z) = -ik_x \bar{u}(z) \hat{\phi}(z)\Big|_{z=0,1} \dots\dots\dots(2-90)$$

$$\hat{v}(z) = -ik_y \bar{u}(z) \hat{\phi}(z)\Big|_{z=0,1} \dots\dots\dots(2-91)$$

$$D\hat{p}(z)\Big|_{z=0,1} = D^2\hat{w}(z)\Big|_{z=0,1} \dots\dots\dots(2-92)$$

最後，由方程式(2-81)~(2-86)式及邊界條件(2-87)~(2-92)式，可形成如下特徵值問題。

$$F(s, k, H, Sc_e, Ra_e, Q, n, \psi) = 0 \dots\dots\dots(2-93)$$

### 2.8 忽略 EDL 效應

當我們考慮 EDL 尺度  $\ll$  板高時，則可忽略 EDL 在邊界的效應。亦即忽略邊界的滑動速度，並以下圖示意：

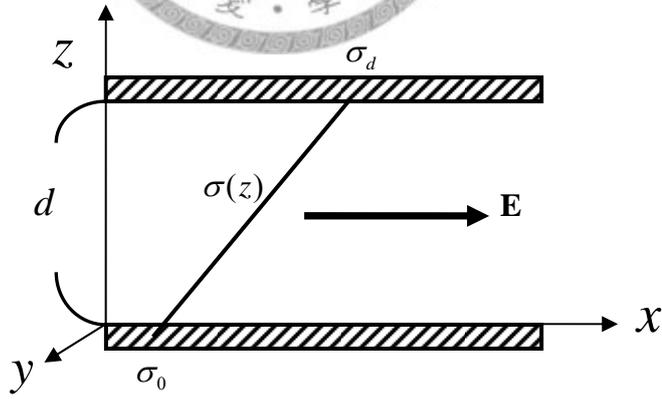


圖 2.3 忽略 EDL 效應模型示意圖

當忽略 EDL 效應時，其效果展現在邊界條件上的切向速度，因無電滲的滑動速度影響。使得此時，邊界切向速度為零。在此條件下

其穩定性分析的特徵值問題可簡化為如下各式。

在邊界條件上可簡化為下列各式:

在導電度方面

$$\begin{aligned}\sigma(0) &= \sigma_0 \\ \sigma(d) &= \sigma_d \dots\dots\dots(2-94)\end{aligned}$$

在電場方面

$$\nabla \varphi \cdot \mathbf{n} = 0 \dots\dots\dots(2-95)$$

在速度方面

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \dots\dots\dots(2-96)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{t} = 0 \dots\dots\dots(2-97)$$

其中，與考慮 EDL 時較不同的為邊界上的切線速度(2-97)式。因忽略 EDL 的效應，則塔電位(zeta potential)為零。邊界上無滑動速度。依據之前的推導流程，我們重新推導無 EDL 作用的無因次基態解及無因次統御方程式。



### 無因次化基態解

由 2.4 節基態解及 2.5 節無因次化流程所述，亦可求得無因次基態解如下:

$$\bar{\sigma} = z \dots\dots\dots(2-98)$$

$$\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{e}_x \dots\dots\dots(2-99)$$

$$\bar{\rho}_f = 0 \dots\dots\dots(2-100)$$

$$\bar{p} = 0 \dots\dots\dots(2-101)$$

$$\bar{\mathbf{v}} = 0 \dots\dots\dots(2-102)$$

其中，因邊界條件改變為無滑動，且系統為電中性，流場不受電泳力作用故基態解的速度為零。

### 正規模態展開

根據 2.5 節中的無因次化、2.6 節中的線性微擾化及 2.7 節中的正規模態展開的推導流程，即可求得忽略 EDL 時的線性穩定性分析的統御方程式及邊界條件。在此直接取正規模態展開的形式：

$x$  方向的動量方程式為(2-103)式所示：

$$s\hat{u}(z) = \frac{Sc_e}{Ra_e} \left[ -ik_x \hat{p}(z) + (D^2 - \alpha^2)\hat{u}(z) - (D^2 - \alpha^2)\hat{\phi}(z) \right] \dots\dots\dots(2-103)$$

$y$  方向的動量方程式為(2-104)式所示：

$$s\hat{v}(z) = \frac{Sc_e}{Ra_e} \left[ -ik_y \hat{p}(z) + (D^2 - \alpha^2)\hat{v}(z) \right] \dots\dots\dots(2-104)$$

$z$  方向的動量方程式為(2-105)式所示：

$$s\hat{w}(z) = \frac{Sc_e}{Ra_e} \left[ -D\hat{p}(z) + (D^2 - \alpha^2)\hat{w}(z) \right] \dots\dots\dots(2-105)$$

電荷守衡方程式因忽略 EDL 效應影響，因此基態流場  $\bar{u}(z) = 0$ 。

$$s \frac{Ra_e}{\tau Sc_e} (D^2 - \alpha^2)\hat{\phi}(z) = -G(z)(D^2 - \alpha^2)\hat{\phi}(z) - HD\hat{\phi}(z) + ik_x H\hat{\sigma}(z) \dots\dots\dots(2-106)$$

質傳方程式亦如以(2-107)式所示為：

$$s\hat{\sigma}(z) = \frac{1}{Ra_e} (D^2 - \alpha^2)\hat{\sigma}(z) - \hat{w}(z) \dots\dots\dots(2-107)$$

考慮忽略 EDL 效應，基態流場為零的影響。故由連續方程式與動量方程式取散度後可整理簡化下式為(2-108)式所示：

$$(D^2 - \alpha^2)\hat{p}(z) + ik_x(D^2 - \alpha^2)\hat{\phi}(z) = 0 \dots\dots\dots(2-108)$$

其中，邊界條件的切線速度為零，即無電滲速度的產生。此為與考慮 EDL 邊界不同處。邊界條件可整理如下(2-109)~(2-114)所式為：

$$\hat{\sigma}(z)|_{z=0,1} = 0 \dots\dots\dots(2-109)$$

$$\frac{d\hat{\phi}(z)}{dz}|_{z=0,1} = 0 \dots\dots\dots(2-110)$$

$$\hat{w}(z)|_{z=0,1} = 0 \dots\dots\dots(2-111)$$

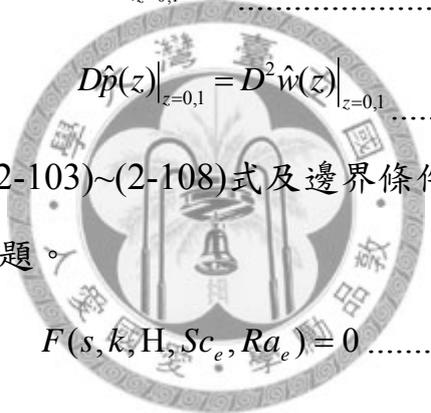
$$\hat{u}(z)|_{z=0,1} = 0 \dots\dots\dots(2-112)$$

$$\hat{v}(z)|_{z=0,1} = 0 \dots\dots\dots(2-113)$$

$$D\hat{p}(z)|_{z=0,1} = D^2\hat{w}(z)|_{z=0,1} \dots\dots\dots(2-114)$$

最後，由方程式(2-103)~(2-108)式及邊界條件(2-109)~(2-114)式，可形成如下特徵值問題。

$$F(s, k, H, Sc_e, Ra_e) = 0 \dots\dots\dots(2-115)$$



### 第三章 數值分析方法

#### 3.1 謝比雪夫配置方法(Chebyshev Collocation Method)

一般以多項式趨近一函數的方法，通常是泰勒級數取有限項。但在大多數的情況下，這並不是好方法。因泰勒級數展開式只在接近展開點來表示函數時，其誤差較小。但當使用較遠的點時，其誤差增加很快(與冪次成比例)。且通常很難控制要選取哪個區間來趨近問題，因此泰勒級數並不適合。一般以區間中央的精確度來分散端點的誤差為較好的方式。在此引進謝比雪夫多項式(Chebyshev polynomial)來近似待求問題。

本研究所使用的數值分析方法為謝比雪夫配置方法(Chebyshev Collocation Method)，即以配置方法(Collocation Method)來取點，並以謝比雪夫多項式(Chebyshev polynomial)來近似代求解，結合兩者以求解 PDE 邊界值問題。亦即，在所選取的配置點處，以謝比雪夫多項式來近似未知曲線的在同配置點處的值，在配置點處其值與未知解相同。因此當所選取得點越多，理論上越能趨近代求解。當然，取點越多，計算的效率越慢。

而謝比雪夫多項式(Chebyshev polynomial)為在(-1,1)區間上採用權函數  $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$  導出，對  $x \in [-1,1]$ ，定義

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} \theta) \quad n = 0 \dots N \dots\dots\dots(3-1)$$

並引進變換變數

$$\theta = \cos^{-1}(\cos x) \dots\dots\dots(3-2)$$

則(3-1)式變成

$$T_n(x) = \cos(n\theta) \quad \theta \in [0, \pi] \dots\dots\dots(3-3)$$

此方法為頻譜分析方法(Spectral method)的一種，即是將函數  $f(x)$  展開成相互正交的基底函數  $T_n(x)$ ，並以係數  $a_n$  來決定函數在各相互正交基底的影響大小，亦即將基底函數當成「座標」來看，係數  $a_n$  為座標的「分量大小」。即以  $\infty$  維的座標來表示函數，如下所示：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x) \dots\dots\dots(3-4)$$

若從物理意義來說， $a_n$  亦可看成是波的振幅大小。而謝比雪夫多項式(Chebyshev polynomial)亦稱為傅利葉級數，差別在基底函數不再僅限於以三角函數為基底。而以(3-5)式~(3-7)式為函數基底：

$$T_0(x) = \cos(0 \cdot \cos^{-1} x) = 1 \dots\dots\dots(3-5)$$

$$T_1(x) = \cos(1 \cdot \cos^{-1} x) = x \dots\dots\dots(3-6)$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \dots\dots\dots(3-7)$$

因此，若能將  $a_n$  求出，則將所有波線性疊加起來便可獲得近似原函數；而求出  $a_n$  所使用的方法便是配置方法(Collocation Method)，為令其在配置點上謝比雪夫多項式的近似值與待求值需相等。

理論上  $n \rightarrow \infty$  是最能近似待求問題，但需解出這些未定係數這相對需要  $n \rightarrow \infty$  個條件解出。因此我們勢必要用有限的個數  $N$  去近似它，但若  $N$  取得太大，則運算時間長，效率變低。

需特別注意的是，Chebyshev Collocation Method 必須將區間設定

在 $[-1,1]$ 之間。我們將配置點及基底函數帶入方程式中，便可解出微分方程的邊界值問題。

### 3.2 應用謝比雪夫配置方法

#### 變換區間

為能使用 Chebyshev Collocation Method，第一步為將原區間轉換成 $[-1,1]$ 之間。因此，將原區間 $z = [0,1] \rightarrow \eta = [-1,1]$ 得到 $z = 1/2(\eta+1)$ 的關係式。在微分項中，依據工程數學的微分鏈鎖律(chain rule)，變數變換後會造成微分項的修正，如 $\frac{d}{dz} \rightarrow 2\frac{d}{d\eta}$ 及 $\frac{d^2}{dz^2} \rightarrow 4\frac{d^2}{d\eta^2}$ 。

#### 級數展開

因為頻譜分析方法(Spectral method)，故亦將變數轉換為以 Chebyshev 為基底函數的級數形式。如下列所示：

$$(1) \hat{\phi}(\eta) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(\eta) \dots\dots\dots(3-8)$$

$$(2) \hat{\sigma}(\eta) = \sum_{n=0}^N a_{N+1+n} T_n(\eta) \dots\dots\dots(3-9)$$

$$(3) \hat{p}(\eta) = \sum_{n=0}^N a_{2N+2+n} T_n(\eta) \dots\dots\dots(3-10)$$

$$(4) \hat{u}(\eta) = \sum_{n=0}^N a_{3N+3+n} T_n(\eta) \dots\dots\dots(3-11)$$

$$(5) \hat{v}(\eta) = \sum_{n=0}^N a_{4N+4+n} T_n(\eta) \dots\dots\dots(3-12)$$

$$(6) w(\eta) = \sum_{n=0}^N a_{5N+5+n} T_n(\eta) \dots\dots\dots(3-13)$$

統御方程式及邊界條件亦須轉換成 Chebyshev 級數形式，由(3-8)~(3-13)關係式代入統御方程式(2-81)式~(2-86)式及邊界條件

(2-87)式~(2-92)式。

最後將統御方程式與邊界條件轉成 Chebyshev Collocation Method 的級數表示式。以 matlab 軟體將統御方程式及邊界條件寫成矩陣表示式，其中  $a_n$  係數為矩陣變數。並以 QZ 演算法，計算矩陣的特徵值。

### 3.3 QZ 演算法(QZ algorithm)

將方程式轉成矩陣， $\mathbf{AX}=\mathbf{sBX}$  求解時，會發現有許多元素為零，在運算特徵值時可能會有許多無效解，故利用 QZ algorithm 簡化矩陣式為兩個上三角矩陣  $Q*\mathbf{A}*Z=\mathbf{AA}$ ， $Q*\mathbf{B}*Z=\mathbf{BB}$ ，之後再將其帶入程式中能較快獲得特徵值。



### 3.4 問題與討論

撰寫程式中較為困難的部分，都是在反覆的檢查除錯(debug)與測試。當我們將原待解的方程式寫成矩陣後，根據 Matlab 的 QZ 矩陣轉換求解特徵值時。因謝比雪夫配置方法的 N 項數影響數值結果的運算效率相當大，一般在一定的 N 項數以上後，其數值的結果變化便在誤差範圍內。因此在程式測試中 N 項數的測試亦為關鍵，必須先執行 N 項數的測試，理論上提高 N 項數，越能趨近解答，但高 N 項數極易造成運算困難，尤其當我們改變參數求解方程式的特徵值解時，常因參數的改變造成收斂的困難。因此在求解中性曲線(Neutral Curves)前，必須先執行特徵值曲線即成長率曲線圖，視其大小與趨勢是否符合常理變化，在臨界波數是否出現極值成長率且其無因次參

數與波數的曲線是否成駝峰變化，或呈負成長。也須視其尺度大小是否合理，一般成長率是不會大於 100 以上，因為成長率是隨時間成指數的成長，並不會有流體有如此快的變化。因此在程式中，特徵值的過濾也相當重要，當我們取成長率最大值來繪出中性曲線時，常會出現虛根。須將其過濾，為保險起見可將特徵值範圍取至(50~-5000)之內。但在計算尺度更大的範圍時，更將其範圍縮小至(1~-5000)，來避免 100 以上的虛根。否則單靠數值計算的項數  $N$  來當收斂標準時，常會造成程式運算困難。本文的未知數有 6 項，總階數為 12 階。程式所運算得矩陣為  $(6 * N + 6 \times 6 * N + 6)$  的矩陣運算，若非必要，不要輕易調高  $N$  的項數。而應盡量以過濾特徵值的範圍來解決發散問題。

另外，視其所需來調設中性曲線的判斷標準也是提升效率的方法，如我們常根據問題需要，繪出參數變化與中性曲線極值如  $(H - Ra_{ec})$ ，導電梯度變化與  $Ra_e$  的極值時，我們只須看中性曲線的最低點  $Ra_{ec}$  時，我們可調整成長率  $s$  的收斂條件來加速運算，都是運算值得注意的小地方。

## 第四章 計算結果

### 4.1 概論

在本章節中，將討論以下兩種情形。1. 考慮邊界 EDL 的效應。  
2. 當板高尺度 $\gg$ EDL，忽略邊界 EDL 效應。其中，並分別討論兩種模態，(1) 橫向模態；(2) 縱向模態在此我們定義：

$$\begin{aligned}k_x &= k \cos\theta \\k_y &= k \sin\theta\end{aligned}\dots\dots\dots(4-1)$$

當 $\theta=0$ ，為橫向模態，其 $k_x=k$ 及 $k_y=0$ ；當 $\theta=\pi/2$ ，為縱向模態，其 $k_x=0$ 及 $k_y=k$ 。並以圖 4.1 說明兩模態的關係。而表 4.1 為本系統使用的物理係數參數，使用假設為有介電係數及黏滯係數的氯化鉀(KCl)稀薄電解液[16]。



### 4.2 忽略邊界 EDL 效應

忽略邊界 EDL 效應最主要的影響在邊界因 EDL 效應造成的電滲滑動速度將消失(因則塔電位的影響已很微小)，使邊界變成無滑動的邊界。而原本因 EDL 效應產生的滑動邊界所造成的基態流場，也因忽略 EDL 效應的影響而消失。使系統為「靜止」的基態流場，亦因忽略 EDL 效應，故與電滲速度相關的無因次參數 $Q$ 、 $\psi$ 及 $n$ 可不考慮。

#### 4.2.1 改變導電梯度的影響

導電度為局部電荷密度所造成，因此當導電梯度增加，代表局部

電荷密度增大。若加入電場作用力，將使得電荷密度與電場作用力分布不均，將加速不穩定的現象產生。以圖 4.2 說明，當固定  $Sc_e=500$  時，觀察導電梯度  $H$  增加時，其中性曲線變化發現，當導電梯度越高的確會造成系統較不穩定，其所需的無因次參數臨界  $Ra_c^e$  不需提高即可抵抗黏滯力的作用而產生不穩定機制。

值得一提的，此系統有兩個模態在控制。一個為固定模態 (stationary mode)，另一個為震盪模態 (oscillatory mode)。會產生這兩個模態的原因為系統並無基態流場。當此節討論忽略 EDL 效應時，就代表系統無法由邊界獲得滑動速度，使系統的基態速度是從靜止開始。當慢慢施加電場時，會有「固定模態 (stationary mode)」與「震盪模態 (oscillatory mode)」的發生。震盪模態代表，電場力與黏滯力兩個不穩定與穩定的力量在互相拉扯，互相抵抗控制系統的現象，兩者的作用力在此時相當，電場的驅動力在此時仍無法脫離黏滯力的束縛的狀態。而固定模態 (stationary mode) 代表不穩定驅動力電場的影響力低於黏滯力的作用，此時電場力並無能力與粘滯力對抗；或電場力的影響已超過黏滯力的作用，並無與粘滯力拉扯的震盪 (oscillatory) 現象。由圖 4.2(b) 中亦可發現當導電度增加時，其虛部成長率為零的區間增大，即固定模態 (stationary mode) 的發生越明顯，代表電場力已能輕易抵抗黏滯力的作用來控制系統的穩定性。

另外，除了低導電度 ( $H=1$ )，因導電度太小，電場力作用不明顯，系統並無固定模態 (stationary mode) 的情況外，其餘導電梯度的情形均為固定模態 (stationary mode) 控制。代表當  $H>1$  的導電梯度強度已能幫助電場力輕易克服黏滯力產生不穩定的現象。

圖 4.16(a)則整理了,其導電梯度 $H$ 與臨界 $Ra_{ec}$ 的變化。由圖 4.16(a)觀察得到,當導電度增加電場對系統的作用力使系統更不穩定。而當 $H>200$ 時發現,電場力已遠大於黏滯力作用,再增加導電梯度對系統穩定性分析將無影響。

另外,圖 4.3 則繪出導電梯度為 $H=1,H=10,H=100$ 的臨界流場。可知,除了低導電梯度( $H=1$ )系統的對流包為左右交互震盪(oscillatory)的現象,代表低導電梯度,使得電場作用力亦小,電場力一直與黏滯力相抗衡,無法輕易脫離黏滯力的束縛使系統不穩定。在高導電梯度( $H>10$ ),可觀察系統對流包為相當直角的矩形,對流包相當穩定。因電場力已增強輕易抵抗黏滯力的束縛,使系統為電場力遠大於黏滯力作用的固定模態(stationary mode)狀態。

#### 4.2.2 改變電施密特數(electric Schmidt number)的影響

無因次參數,電施密特數( $Sc_e$ )由其定義看, $Sc_e = \nu / k_{eff}$ 為黏滯力與離子擴散係數的比例關係。其物理意義在此系統討論的是擴散係數的影響,若是固定擴散係數將 $Sc_e$ 看成是黏滯性影響則難以看到全貌,因黏滯係數在各控制方程式都有影響,因此通常將 $Sc_e$ 看成是擴散的影響因素。而當 $Sc_e$ 越小代表擴散機制最明顯,反之亦是。

由 Melcher[14]可知,導電梯度的產生為離子經擴散作用的所造成。當離子經擴散作用所形成的導電梯度,因離子的擴散效應增大,使得離子經擴散作用所形成的導電梯度被擴散機制給予以衰減。使得導電梯度減小,電場力的作用亦減弱而造成系統較穩定。

觀察圖 4.5 發現，在圖 4.5(b)導電度較高( $H=10$ )的情況，發覺即使在  $Sc_e=100$ ，擴散效應增強的情況下，並無法造成系統更穩定，其臨界  $Ra_c$  並無變化，其不穩定的影響並不明顯。

但若考慮低導電度的情況，如圖 4.4(a)， $H=1$  的情況發現，改變  $Sc_e$  對系統的穩定性有明顯的影響，但其結果並不如前述所述，擴散效應增強會使系統穩定的物理現象。反而當  $Sc_e$  越小，擴散效應越大的情況下，系統更不穩定了。因為此時，系統的狀況為低導電度的情況，原先導電度的效應本來就很小，即使不加入擴散效應的影響。系統本來就很穩定了，而擴散效應在此時並不是扮演穩定角色，而是使系統不穩定的機制。因系統的擴散效應增加時，將加快導電梯度的產生使電場力的影響增強，造成系統不穩定的現象。

最後，由圖 4.4(a)及圖 4.5(a)可歸納出，當在低導電度( $H=1$ )， $Sc_e$  其擴散效應在系統扮演不穩定的機制，因系統離子擴散效應增加，即代表經離子擴散效應所造成的導電梯度將加速產生，使得低導電度的穩定系統，因擴散效應增加，而加快導電梯度的形成，進而使電場的作用增強以造成系統不穩定現象發生。

而在高導電度( $H=10$ )的情況，系統的擴散效應並不足以影響系統穩定的現象發生，因此時導電梯度夠大，電場力夠強，擴散機制並無法與之抗衡產生明顯的作用。

### 4.2.3 縱向模態

在縱向模態方面，即當  $\theta=\pi/2$  時，所作的數值運算。無論怎麼

更改變數，收斂條件或運算邏輯皆無法算出 $\theta=\pi/2$ 的穩定性分析的中性曲線。於是，由 $\theta=0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, \dots$ 每 $10^\circ$ 求出其中性曲線，而答案也可呼之欲出了。觀察圖 4.6(a)發現。當把角度增加時，其中性曲線的無因次參數也開始提高，尤其又以 $80^\circ$ 以上成長最劇烈，而 $89.8^\circ$ 即無因次尺度在 $10^8$ ，若考慮 $90^\circ$ 其無因次參數 $Ra_e$ 將在 $10^9$ 以上或更高。與橫向模態的 $10^3$ 尺度比相距甚遠。在此可以說當越接近縱向模態時，其系統無因次參數 $Ra_e$ 越趨於無窮大，系統幾乎不會發生不穩定的情況。就算橫向模態已相當不穩定時，也很難對縱向模態有所影響。

依圖 4.6(b)更可發現當固定 $H=10$ 、 $Sc_e=500$ 、 $k=2.1$ 、 $Ra_e=10^7$ 的情況下，其角度變化與成長率的關係。發現當角度為 $\theta=0^\circ$ 時，其橫向模態時，成長是最劇烈的。而在越接近 $\theta=90^\circ$ 時，其成長率趨於零甚至到負數去。表示在當越趨於縱向模態，越穩定。縱向模態在 $Ra_e=10^7$ 以下必為穩定狀態。由圖 4.2 及圖 4.4 可知，若改變無因次參數，導電梯度 $H$ 及電施密特數 $Sc_e$ 其效應亦無法造成縱向模態的發生，其影響程度有限。

在此可以下結論，在縱向模態的中性曲線尺度遠大於橫向模態尺度，在正常的狀況下，絕無縱向模態的發生。

而會造成此結果，以物理來看，因為系統的驅動力電場，只加在 $x$ 軸的橫向方向，故橫向模態最容易發生，成長率也最大。但本系統並無其他機制使系統不穩定驅動力電場力作用在縱向 $y$ 方向上，也無浮力、溫度、壓力等作用力能將橫向不穩定擾動的影響擴及在縱向上。

因此，正常狀態下無論在橫向  $x$  軸的水平電場加到多大，皆無法影響到縱向模態。除非超過  $Ra_e = 10^9$ ，換算成電場為  $E_0 = 3.4 \times 10^6 \text{ V/m}$  的話，才有可能會發生縱向不穩定的模態。

最後，基於上述理由，我們不考慮縱向模態的穩定性分析。

### 4.3 考慮邊界 EDL 的效應

#### 4.3.1 改變導電梯度的影響

由前節 4.2.1 所述，當導電梯度增加，將增強電場對系統不穩定的作用力。由圖 4.7 所示，固定  $Sc_e = 500$ 、 $Q = 1$ 、 $n = -0.333$ 、 $\psi = 1$  時，改變導電梯度為  $H = 1$ 、 $10$ 、 $20$ 、 $50$ 、 $100$  的變化時當增加導電梯度的影響，的確使得系統更不穩定。在此  $Ra_e$  即代表造成不穩定所需的電場力。相較於前小節忽略 EDL 的情況中，在此情形並無發現兩模態。那是因為當考慮 EDL 的邊界滑動條件時，系統在一輸入外加電場產生邊界的滑動速度(即電滲速度)，進而使系統一開始就有基態流場。因此，避免一開始由靜止開始時到產生不穩定擾動階段的「固定模態(stationary mode)」與「震盪模態(oscillatory mode)」，因此時基態流場其動能將增強系統抵抗流體對黏滯力的束縛。

當提高導電梯度時，發生不穩定所需的  $Ra_e^c$  會下降。此時電場代表所造成的擾動的因素，而黏滯力代表穩定因素，當上下板的導電度差異大時，則系統受電場作用的力量也越強，也造成邊界的電滲速度影響加大，其擾動機制也增加以抵抗黏滯力的穩定作用的力量，因此所需的  $Ra_e$  即電場強度會減少。在圖 4.7(b) 中更可觀察，當導電梯度

增高時，其虛部成長率增高趨勢。而虛部成長率所代表的物理意義即為頻率的變化，相對亦代表波速(velocity)的成長。因此當提高導電梯度變化時，發現波速成長越大，不穩定度越高，因此所需的臨界電場也越小。

而圖 4.16(a)中，我們觀察當提高導電梯度  $H$ ，其臨界  $Ra_c^e$  的變化。結果發現，當導電梯度上升，電場力的影響加大，的確會造成系統的不穩定發生。數據說明當  $H > 5$  時，其不穩定的影響已不再明顯。

### 4.3.2 改變電施密特數(electric Schmidt number)的影響

由 4.2.2 節所述，電施密特數( $Sc_e$ )其物理意義可看成是擴散係數的影響。而在高導電梯度時， $Sc_e$  減小代表離子擴散效應增加。而擴散效應增加，使得由離子擴散所造成的導電梯度因擴散加快而變得均勻進而使導電梯度變小。電場力作用亦因此減小，使系統較穩定。

而低導電梯度時，擴散效應因加速離子擴散，使得原本就很穩定的低導電梯度系統，更易形成導電梯度。進而使得電場力作用增大，系統較不穩定。即在高導電梯度時，擴散效應代表穩定的機制；而低導電梯度，擴散效應代表不穩定的機制。

原本在圖 4.5，忽略 EDL 效應的高導電梯度系統中，其擴散效應並無法對系統產生穩定作用。而觀察圖 4.9 發現，在考慮 EDL 效應的系統，當  $Sc_e = 100$ ，即擴散效應較強的狀況下，其擴散效應扮演穩定的角色，使得系統穩定度提高。在  $Sc_e > 100$ ，擴散機制並不足影響流體使其穩定，其臨界  $Ra_c^e$  並無變化，其不穩定的影響並不明顯。

而自然界中，並無法找到  $Sc_c < 100$  的流體。故可說明在此系統下  $Sc_c$  對系統穩定性無法發揮作用。

### 4.3.3 改變 $n$ 的影響

$n$  在本研究為邊界電滲速度則塔電位(zeta potential)與導電度關係的影響因子，當  $n$  越大則導電度影響則塔電位越高，受則塔電位影響的電滲速度也會越快，造成系統不穩定的影響也會越大。而使用  $n = -0.5$ ，為假設在表面電荷密度為常數時為的理論值。而當考慮邊界為矽硼酸玻璃(borosilicate)表面，則所實驗出的  $n = -0.333$  [1]。本文以此實驗值  $n = -0.333$  為系統的參考值。並代入此值與系統做出比較，觀察圖 4.10，改變此參數並無太大影響。

### 4.3.4 改變 $Q$ 的影響

為完整定義電滲速度的無因次參數，特別令  $Q = \sigma_0 / \sigma_r$  來代表底板的無因次導電度。依據之前的觀念我們知道，當導電梯度越大則系統越不穩定。因此，當我們提高底板導電度，但無因次導電梯度  $\Delta\sigma / \sigma_0$  保持不變。則頂板的導電度亦增大，相對也造成上下板導電度差變大，系統也較不穩定。觀察圖 4.11 也可發現計算的結果，改變此參數並無太大變化。代表改變底板導電度並不會造成系統的穩定性分析，因導電梯度固定時，上板導電度也會呈相對比例的成長。因此造成系統  $Ra_c^c$  極值並不會改變。

### 4.3.5 改變 $\psi$ 的影響

$\psi$  此無因次參數，由其定義來  $R_v = -1/\xi_r \cdot (\mu k_{eff} / \varepsilon)^{1/2} Ra_e^{1/2}$   
 $= \psi Ra_e^{1/2}$ 。其中， $R_v$  代表無因次電滲速度，即系統邊界滑動速度。  
而  $\psi$  在本系統，代表則塔電位的效應。也可看成有無 EDL 效應的影響。  
當  $\psi$  減小代表 EDL 效應明顯；反之，則代表可忽略 EDL 效應的作用。  
因此，若控制  $\psi$  即代表控制系統是否考慮 EDL 效應的作用當減小  
 $\psi$ 。其結果應趨近考慮 EDL 效應的影響。若增大  $\psi$ ，其結果應趨近忽  
略 EDL 效應的作用。

由圖 4.12 及圖 4.13，繪出  $\psi$  其(a)中性曲線變化；(b)虛部成長  
率與波數的關係曲線。說明，當  $\psi > 10$  其結果已相當趨近忽略 EDL  
效應的結果。並可由 4.12(a) 觀察，當  $\psi = 0.1, H=10$  的高導電梯度系統  
反而對系統有穩定的作用。理論上，當提高則塔電位效應，應會造成  
電滲速度加快，使系統不穩定才對。但圖 4.12(a) 卻反而變穩定。其  
原因為，當把則塔電位效應增大至某一程度時，其則塔電位在邊界對  
電荷的吸引力加大的原故，反而會使 EDL 的厚度加大。電解質內的自  
由電荷都被吸附在邊界上，使系統電泳力下降。且 EDL 厚度亦增加，  
使系統不穩定性降低。若討論  $\psi = 0.1, H=1$  的低導電梯度系統，由圖  
4.16(a) 所示，系統將變得比較不穩定。代表當低導電梯度系統，其  
電力作用較小時，則塔電位將扮演使邊界電滲速度滑動加快的角色。  
因電力較低時，系統由則塔電位及黏滯力所控制。此時  $\psi$  越小代表黏  
滯力越小，則塔電位越大，使邊界得滑動速度也越快，加大系統不穩  
定作用。

而圖 4.13 更說明，當  $\psi > 10$  其中性曲線與忽略 EDL 效應的比較，

幾乎重合。代表當其 $\psi > 10$ 則塔電位影響已相當小，系統趨於忽略 EDL 效應的作用。

觀察 4.14， $\psi$  所影響的臨界流場變化。說明當 $\psi = 0.1$ 其則塔電位影響明顯時，其對流包成震盪的變化。代表系統的則塔電位吸附離子所造成的穩定機制與外加電場的不穩定機制相互抗衡，所產生的震盪現象。而當 $\psi > 0.1$ ，其對流包有趨於固定的現象發生。此為則塔效應減弱，電場的趨動力對系統更易造成不穩定的作用有關。

由圖 4.17 更可進一步說明，在低導電梯度系統( $H=1$ )的情形下。EDL 效應越強，即 $\psi$ 越小時。系統會有不穩定的情形出現，印證前述所說，在此情形，因電場強度很小，故則塔電位的影響將增大。此時則塔電位扮演不穩定的角色。當邊界則塔電位增大時，將使得邊界的電滲速度加快，增加系統基態流場的動能進而抵抗黏滯力的穩定力，產生不穩定的作用。而當在高導電梯度系統( $H>10$ )時，將有相反的情形出現。當 EDL 效應增強時，系統將更穩定了。因此時電場的不穩定驅動力已遠大於邊界 EDL 的不穩定效應，系統已不需要邊界上則塔電位所產生的基態速度，其所造成系統的不穩定動能。此時邊界的則塔電位將扮演穩定的角色，將流體內的離子吸附在邊界上，使得流體內因帶電離子減少，而減少電泳力的作用。且邊界 EDL 的厚度亦增加，如同邊界層般，加強流體的黏滯力作用，使系統穩定。

#### 4.3.6 縱向模態

同理，依據 4.2.3 節的理由說明。無論如何控制參數變化，其縱向模態的中性曲線尺度都遠大於橫向模態。但我們還是試著觀察，在考慮 EDL 的物理模型，是否還會有相同結果。我們觀察圖 4.15(a)，

無論如何控制  $H$ 、 $Q$ 、 $n$ 、 $\psi$  及  $Sc_e$ ，皆發現在角度超過  $80^\circ$  後，無因次參數  $Ra_e$  的變化依然很陡峭，且尺度也遠大於橫向模態，與 4.2.3 節有相同的結果。再觀察圖 4.15(b)，角度與成長率的關係圖，仍然可以發現在角度  $0^\circ$  的橫向模態其成長率最高，依角度上升其成長率遞減，到  $90^\circ$  時期成長率為負成長。故在  $Ra_e = 10^8$  的尺度下，縱向模態不存在或趨於  $\infty$ 。系統幾乎不會發生不穩定的情況。就算橫向模態已相當不穩定時，也很難對縱向模態有所影響。

會造成此結果，以物理來看，因為系統的驅動力電場，只加在  $x$  軸的橫向方向，故橫向模態最容易發生，成長率也最大。但本系統並無其他機制使不穩定驅動力水平電場作用在縱向  $y$  方向上，也無浮力、溫度、壓力等作用力能將橫向不穩定擾動的影響擴及在縱向上。因此，正常狀態下無論在橫向  $x$  軸的水平電場加到多大，皆無法影響到縱向模態。

最後，基於上述理由，本文不考慮縱向模態的穩定性分析。在此可以下結論，無論是否考慮 EDL 效應，在正常的狀況下，絕無縱向模態的發生。

#### 4.4 綜合討論

在 4.3 節的討論可知，當我們控制  $Q$ 、 $n$  這兩個無因次參數時，並無法對系統的流體穩定性產生影響，只有短波有些微變化。

而  $Sc_e$  對穩定性的影響。 $Sc_e$  這個無因次參數，由定義來看可以當成是離子擴散效應的影響。即當  $Sc_e$  大則擴散係數越低，離子擴散效

應越小。考慮 EDL 效應時， $Sc_e$  對流體穩定性的影響。發現在高導電度時，當  $Sc_e$  越小時，流體有越穩定的趨勢，電場須施加較大才能造成流體不穩定。我們以物理的現象來說，當  $Sc_e$  越小，代表離子的擴散效應越強，當離子因擴散所形成的導電梯度因為擴散效應強到與黏滯力的影響差不多時，好不容易靠離子擴散形成的導電梯度，很快得被擴散的機制消除了。導致導電梯度的效果消失，使得系統缺乏導電梯度的影響使電場驅動力減弱而趨於穩定。由數據結果來看，當  $Sc_e > 100$  時， $Sc_e$  對系統的不穩定效果影響已不明顯。但若考慮在低導電梯度的情況下，卻有相反的結果。因在低導電梯度的情況中，原本靠離子擴散所形成的導電梯度，因離子濃度低，擴散作用變得很慢才能形成導電梯度。因此當  $Sc_e$  越小即擴散效應越大時，可加速離子擴散效應以形成導電梯度。故在低導電梯度時，離子擴散效應為使系統不穩定的機制。

接著討論導電度的影響。由圖 4.16 可觀察到，無論是否考慮 EDL 效應，當我們把導電度的影響加大，則相對也是代表將電場力對流體的影響加大。由結果可以觀察到，導電度越大則流體越不穩定。

在低導電梯度( $H < 5$ )時，忽略 EDL 效應較考慮 EDL 效應的穩定。其原因為，當考慮 EDL 效應後，連帶系統也產生了滑動邊界，進而產生基態速度。其基態流場的動能將增加對黏滯力束縛的抵抗。相較於忽略 EDL 的情況因邊界不滑動了，因此基態的流場為靜止。當然會造成在低導電度時，忽略 EDL 效應的情形較考慮 EDL 的情形穩定。而由圖 4.16(a) 中發現，當  $H > 3$  之後，即導電梯度所影響的電場驅動

力已夠大。有無 EDL 效應所產生的基態流場，其動能是否能對系統的穩定性造成影響，已無太大區別。因導電梯度所反映的電場強度已足夠抵抗黏滯力的作用產生不穩定。

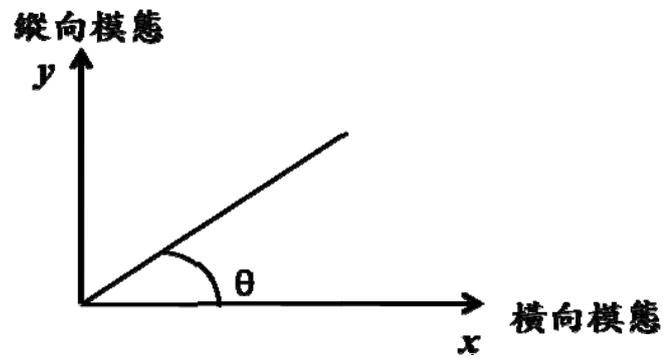
再看  $\psi$ ，即則塔電位的影響。可由圖 4.12(a) 觀察到，此參數亦為 EDL 效應的影響指標。當則塔電位效應越大，亦代表 EDL 效應越大。理論來說，當則塔電位越強，代表電滲速度越快，其基態流場亦越大，系統應越趨於不穩定。但從結果觀察，當  $\psi = 0.1$  則塔電位強到一個程度，系統卻反而變穩定。可能原因為，當則塔電位效應強到一個程度時，反而會抓住電解液中的電荷，使系統受電場產生的電泳力減小，反而使系統穩定。另一方面，因則塔電位效應增強，其所形成的 EDL 厚度亦越高，且 EDL 中的不動層(stern layer)增厚，如同邊界層般，在邊界上增加流體的黏滯力，進而增加系統的穩定性。

最後，在縱向模態中，無論是否考慮 EDL 效應，縱向模態皆不會發生。

表 4.1 物理係數表。下表所列為假設有介電係數及黏滯係數的氯化鉀(KCl)稀薄電解液 [16]

符號	說明	數值
$\varepsilon$	介電係數	$10^{-9} \text{ C/V} \cdot \text{m}$
$\mu$	黏滯係數	$10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$
$\rho$	水溶液密度	$10^3 \text{ kg/m}^3$
$\omega$	離子遷移率	$8.2 \times 10^{-13} \text{ mol} \cdot \text{s/kg}$
F	法拉第常數	$9.65 \times 10^4 \text{ C/mol}$
$d$	板高	$10^{-3} \text{ m}$
$\sigma_r$	參考導電度	$10^{-4} \text{ S/m}$

(a)



(b)

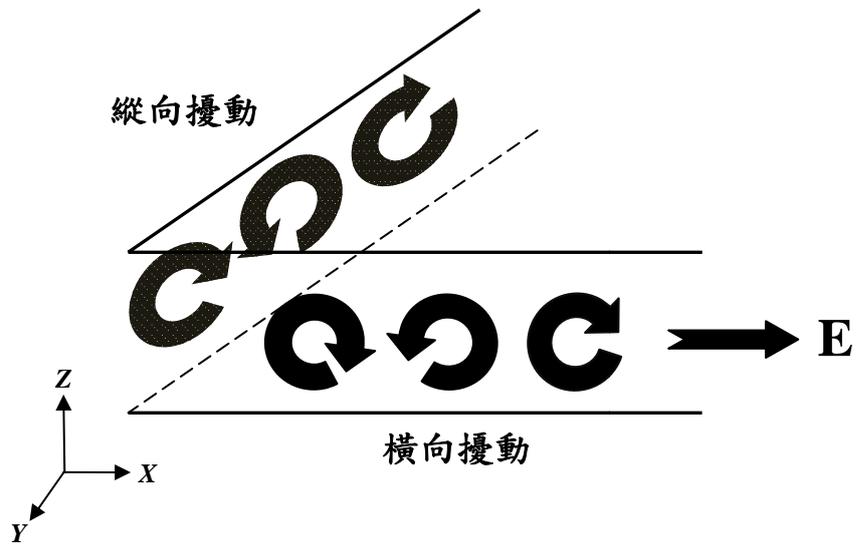


圖 4.1 橫縱向模態示意圖。(a)平面圖；(b)立體圖。

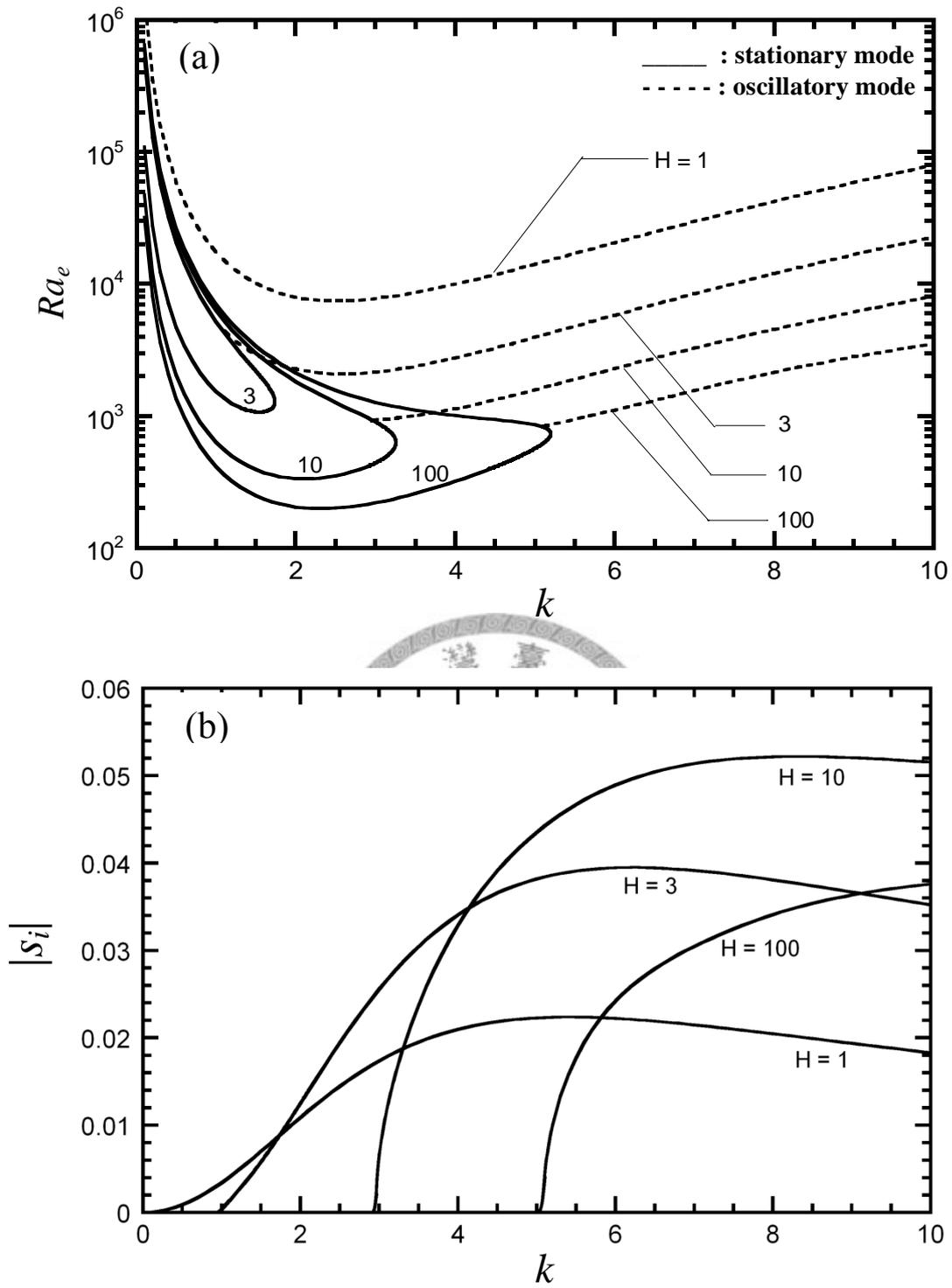


圖 4.2 當忽略 EDL，固定  $Sc_e = 500$  的情形下，觀察  $H=1,3,10,100$  其(a) 中性曲線；(b)波數與虛部成長率的關係。

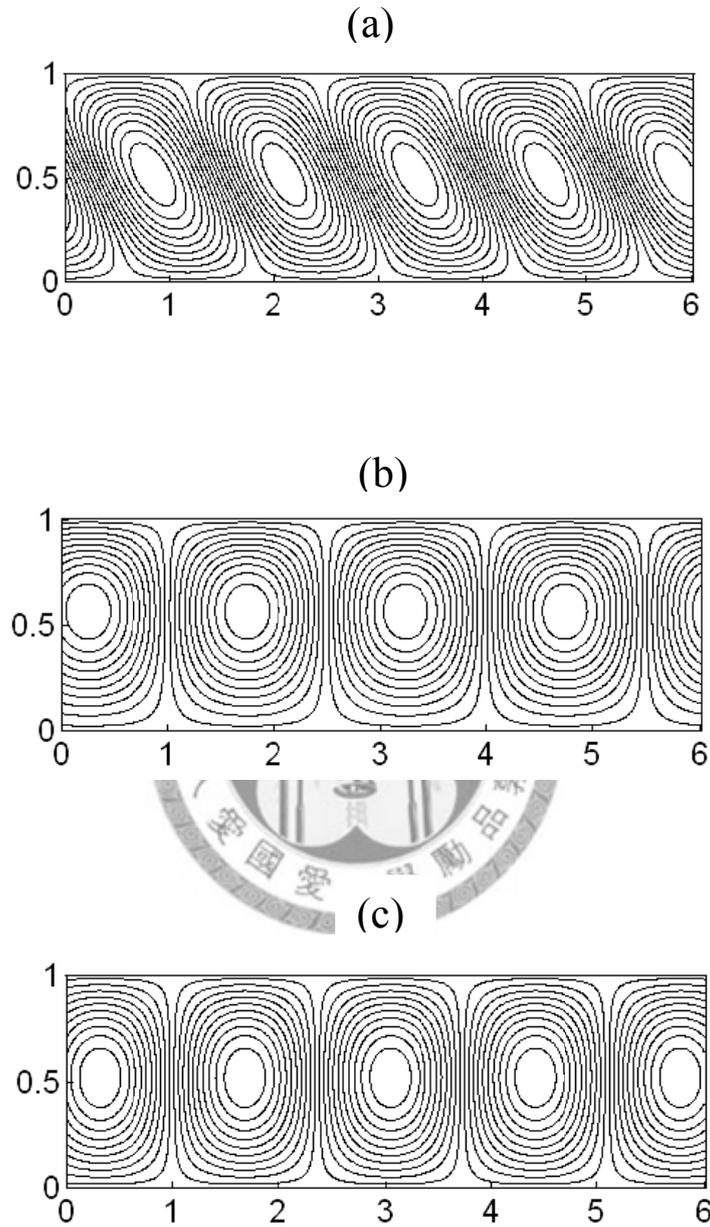


圖 4.3 當忽略 EDL，固定  $Sc_e = 500$  的情形下，在不同導電梯度的臨界流場形態。(a)  $H=1, (k_c, Ra_{ec})=(2.5, 7474.3)$ ；(b)  $H=10, (k_c, Ra_{ec})=(2.1, 335.9)$ ；(c)  $H=100, (k_c, Ra_{ec})=(2.3, 199.9)$ 。

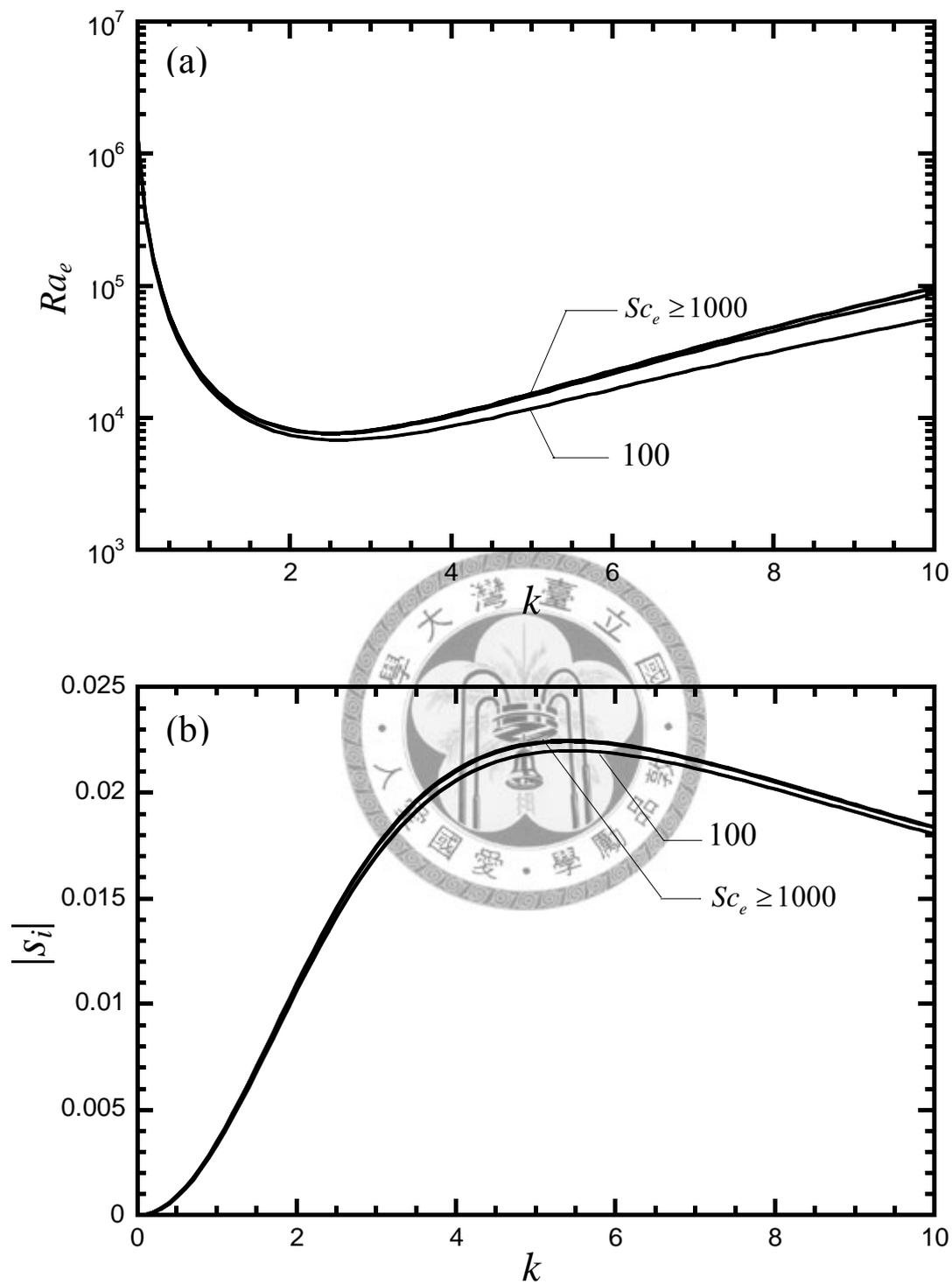


圖 4.4 當忽略 EDL，討論其  $Sc_e \geq 100$  情況下，觀察  $H=1$  其(a)中性曲線；(b)波數與虛部成長率的關係。

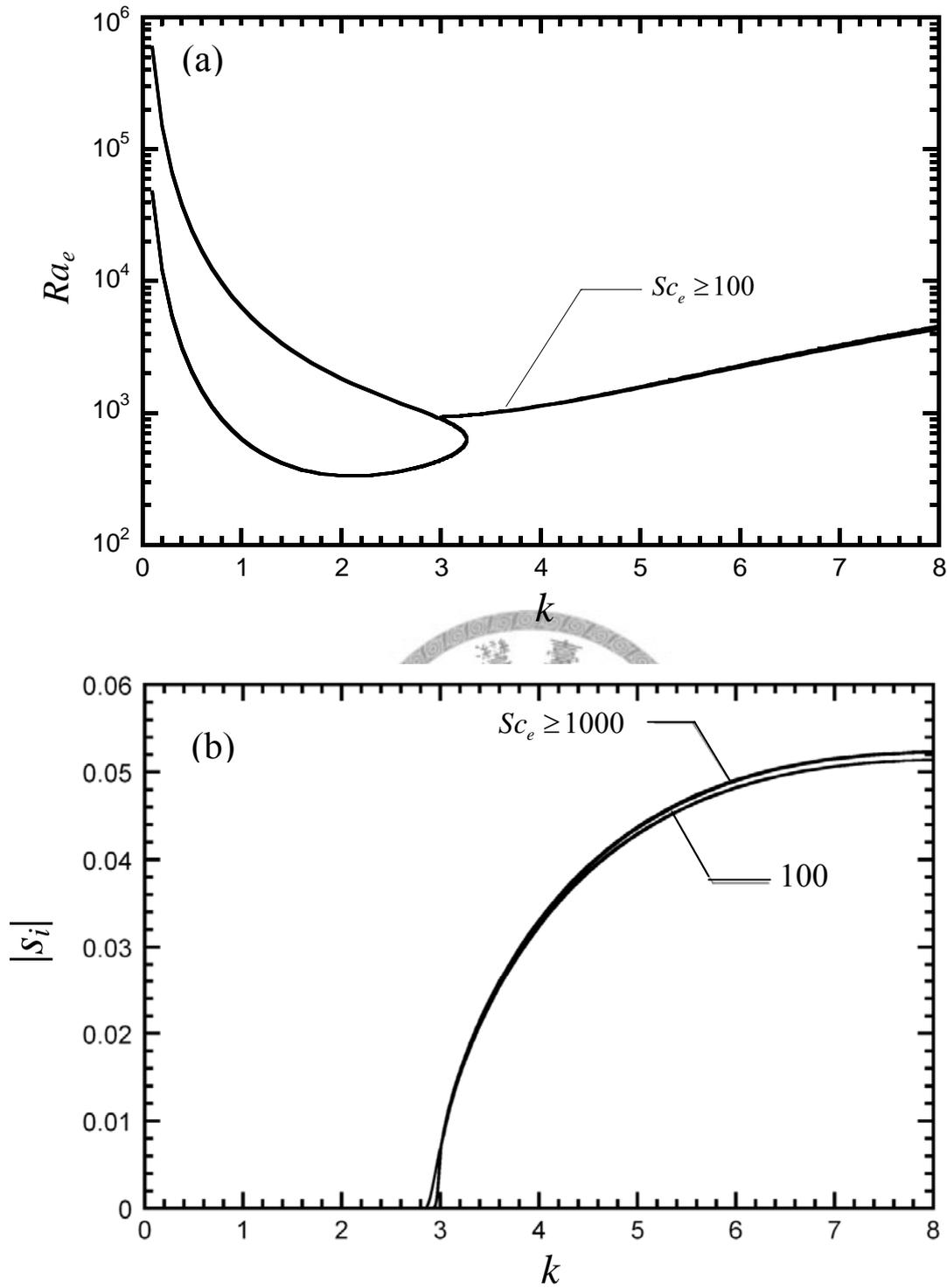


圖 4.5 當忽略 EDL，討論其  $Sc_e \geq 100$  情況下，觀察  $H=10$  其(a)中性曲線；(b)波數與虛部成長率的關係。

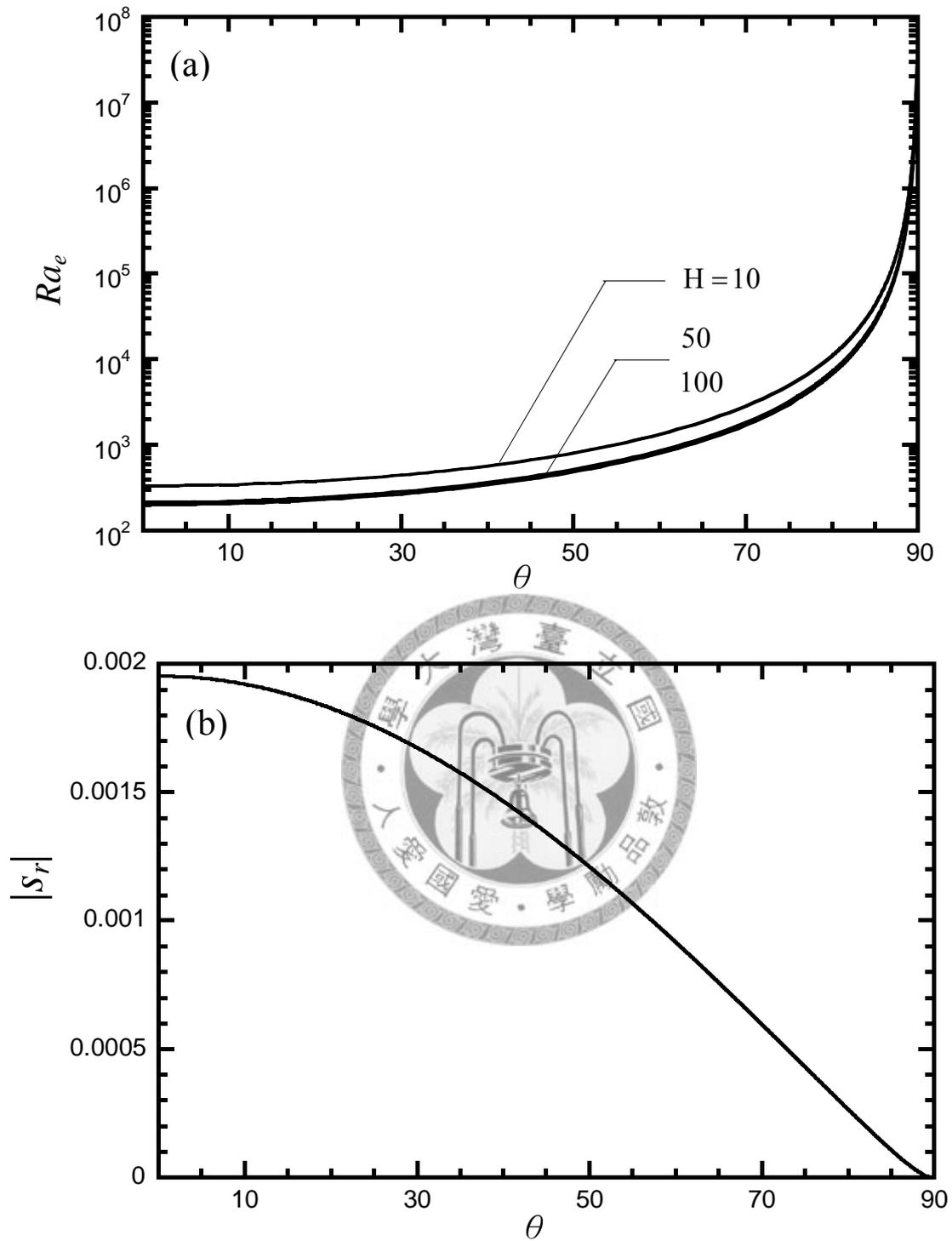


圖 4.6 當忽略 EDL,  $Sc_e = 500$ 、 $k = 2.1$  的情形下, 觀察(a) $H=10, 50, 100$  時, angle 與  $Ra_e$  的中性曲線; (b) $H=10$ ,  $Ra_e = 10^7$  時, angle 與  $s_r$  的關係。

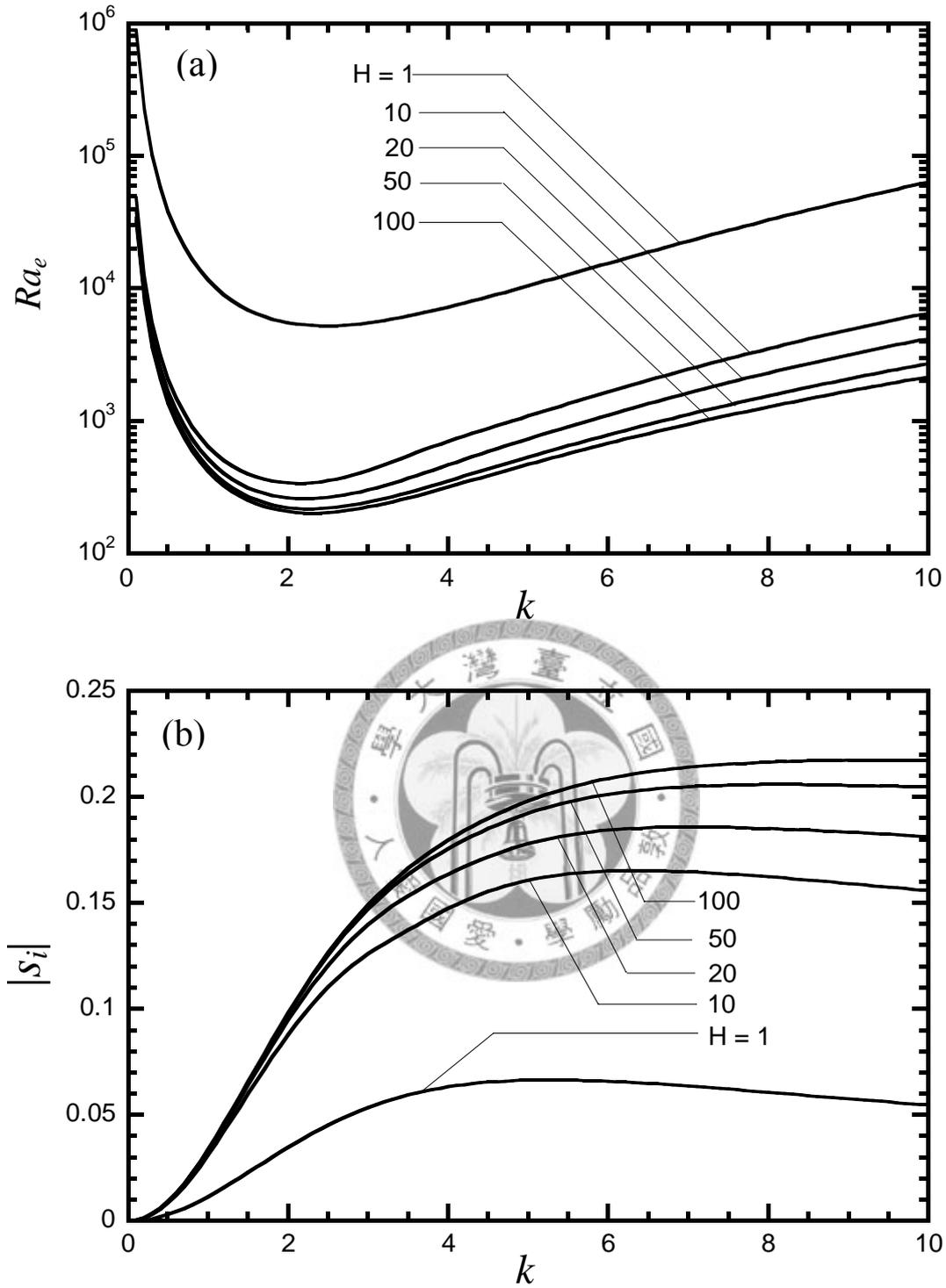


圖 4.7 當考慮 EDL，固定  $Sc_e = 500$ 、 $Q = 1$ 、 $n = -0.333$ 、 $\psi = 1$  的情形下，觀察  $H=1, 10, 20, 50, 100$  其(a)中性曲線；(b)波數與虛部成長率的關係。

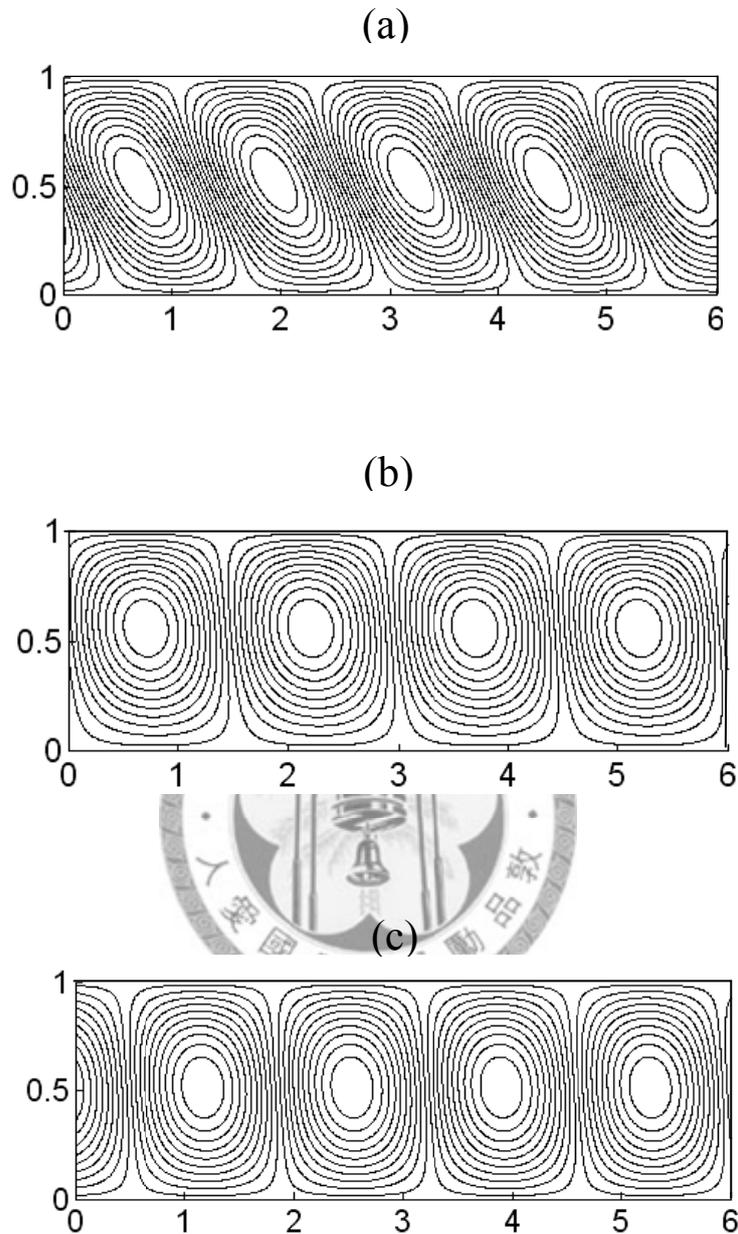


圖 4.8 考慮 EDL 效應，固定  $Sc_e = 500$ 、 $Q = 1$ 、 $n = -0.333$ 、 $\psi = 1$  的情形下，不同導電度的臨界流場形態。(a)  $H = 1$ ,  $(k_c, Ra_{ec}) = (2.5, 5252.5)$ ；(b)  $H = 10$ ,  $(k_c, Ra_{ec}) = (2.1, 339.9)$ ；(c)  $H = 100$ ,  $(k_c, Ra_{ec}) = (2.3, 203.1)$ 。

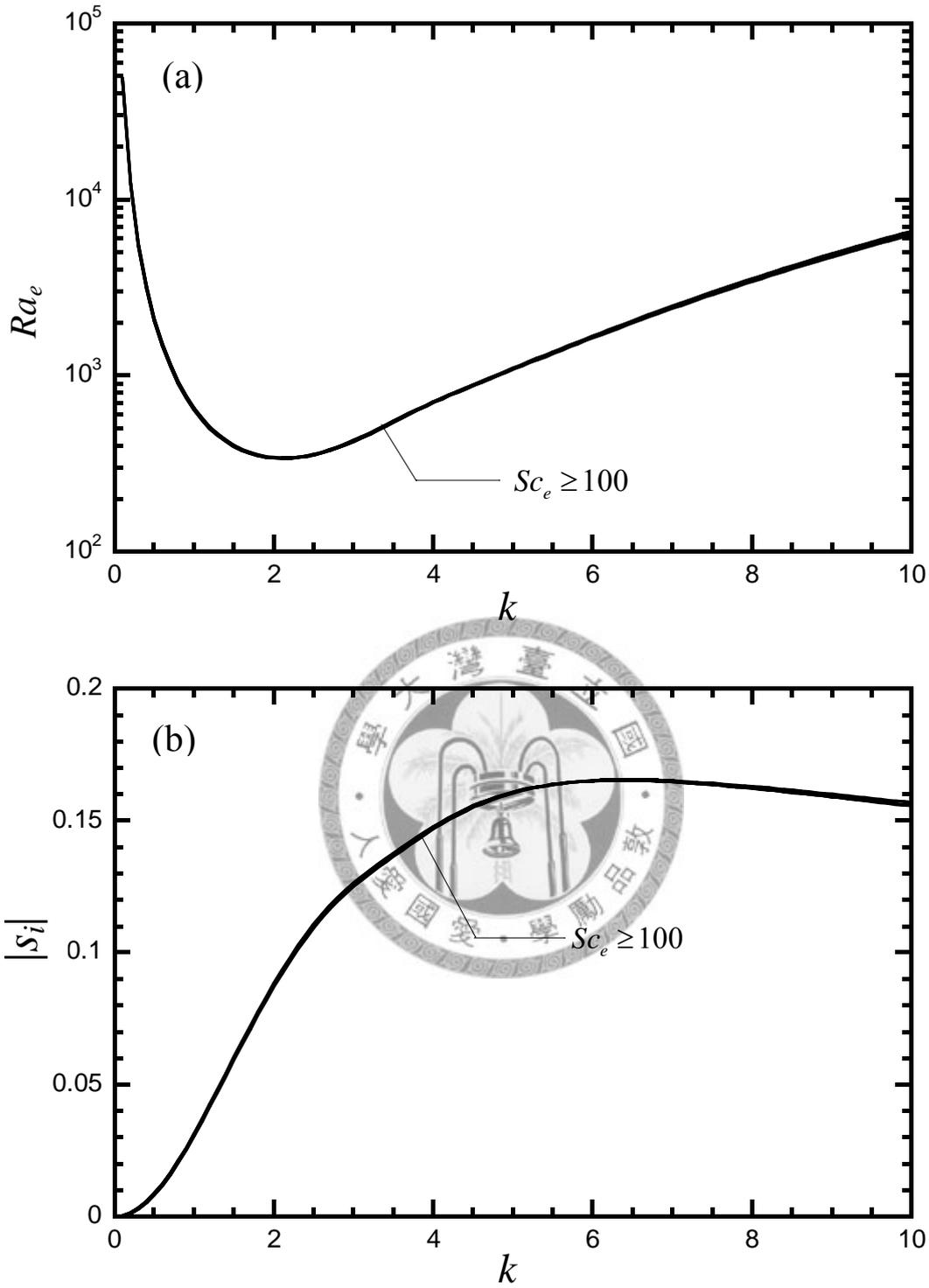


圖 4.9 當考慮 EDL，固定  $H=10$ 、 $Q=1$ 、 $n=-0.333$ 、 $\psi=1$  的情形下，觀察  $Sc_e \geq 100$  時，其(a)中性曲線變化；(b)波數與虛部成長率的關係。

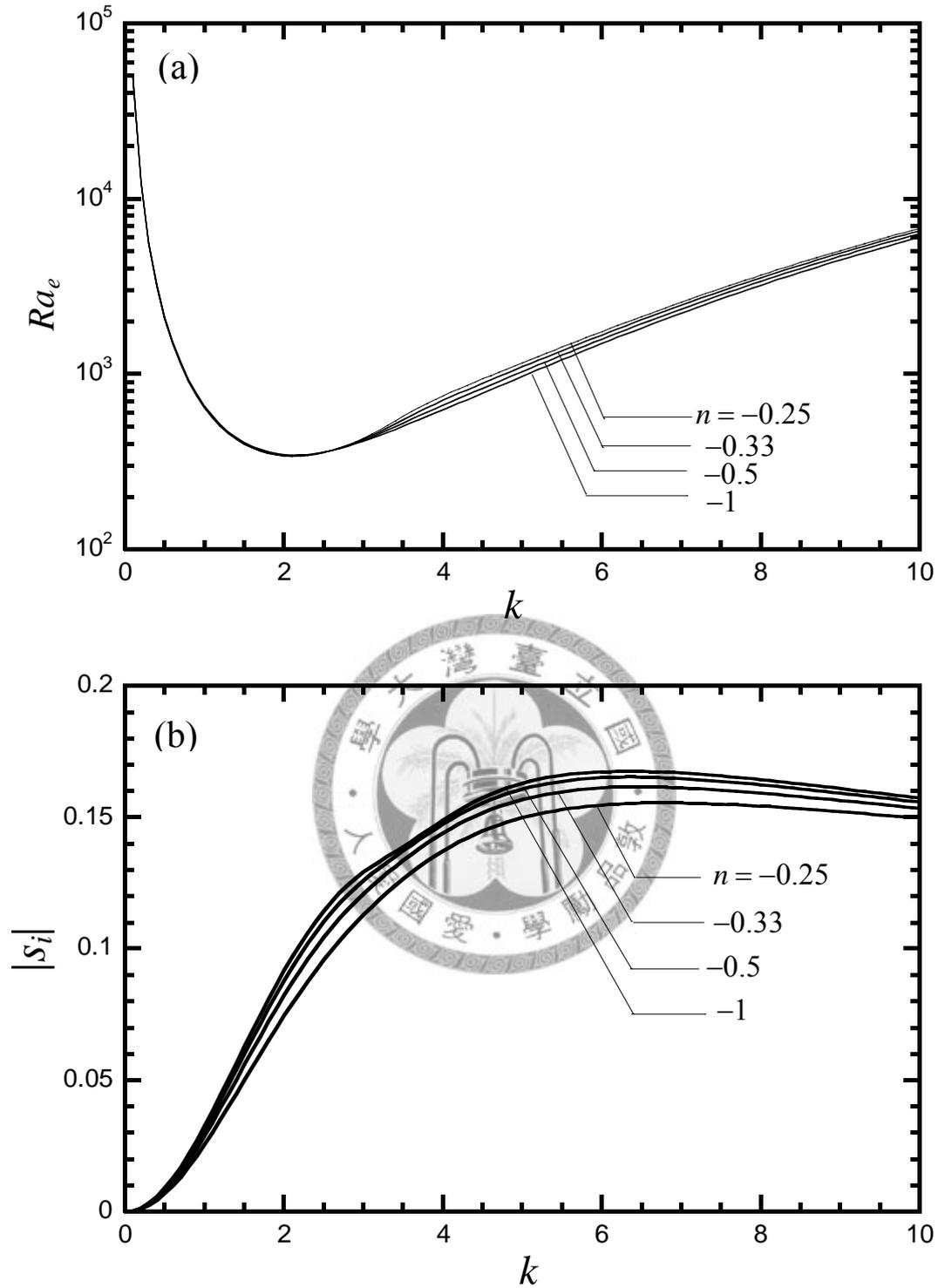


圖 4.10 當考慮 EDL，固定  $H=10$ 、 $Q=1$ 、 $n=-0.333$ 、 $\psi=1$  的情形下，觀察  $n = -0.25, -0.333, -0.5, -1$  的 (a) 中性曲線變化；(b) 波數與虛部成長率的關係。

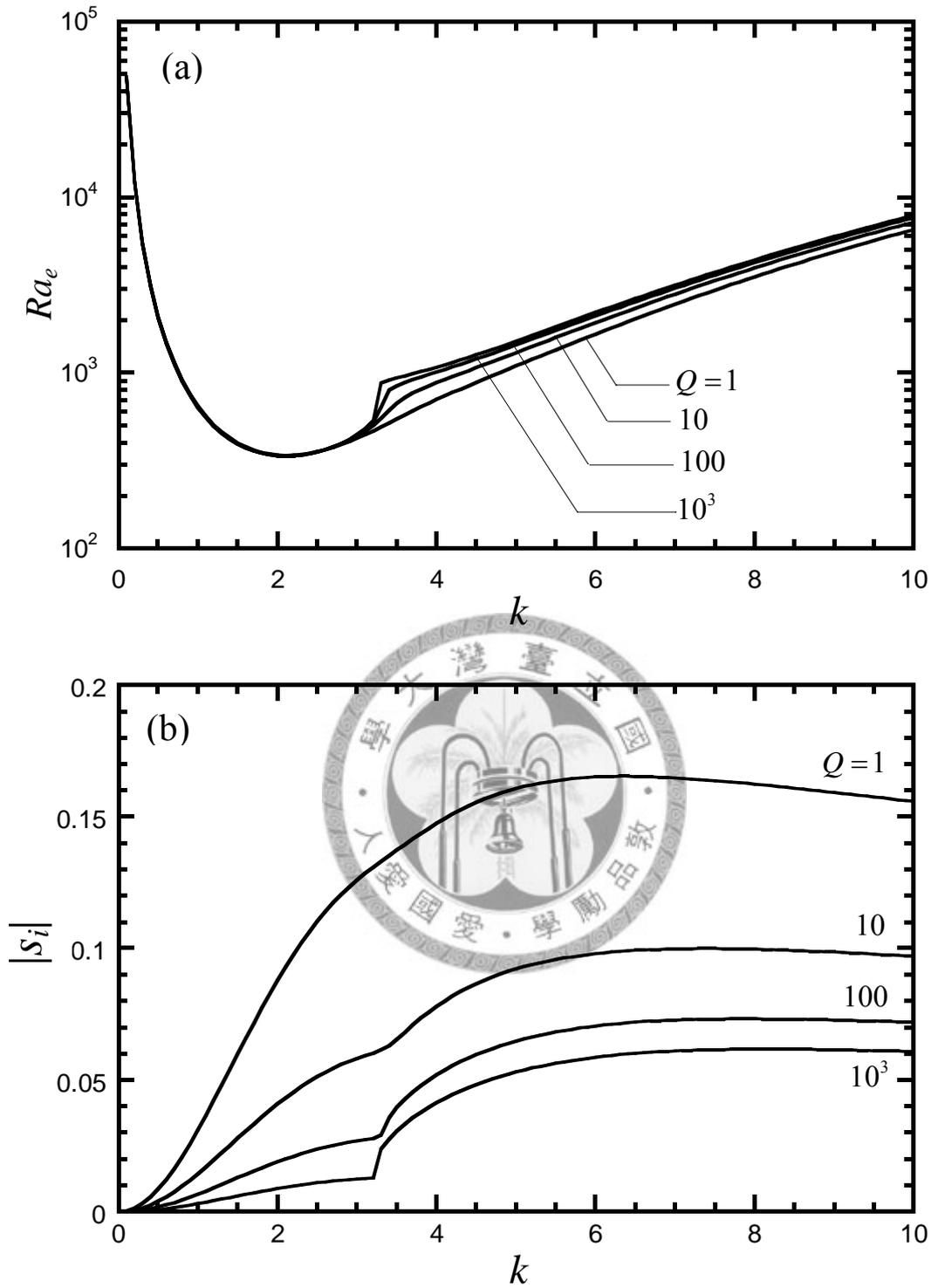


圖 4.11 當考慮 EDL，固定  $H=10$ 、 $n=-0.333$ 、 $Sc_e=500$ 、 $\psi=1$  的情形下，觀察  $Q=1,10,100,10^3$  時，其(a)中性曲線變化；(b) 波數與虛部成長率的關係。

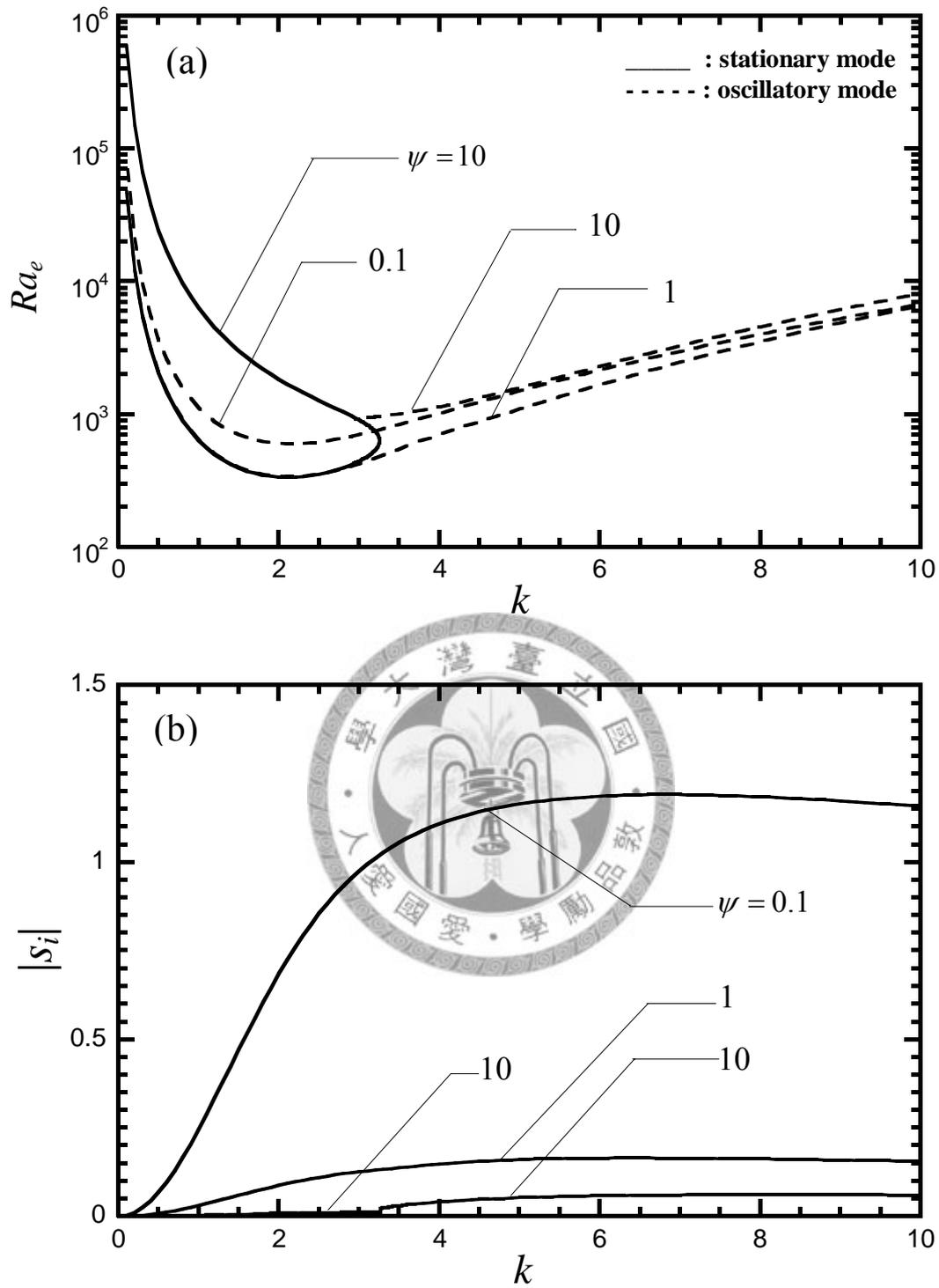


圖 4.12 則塔電位影響圖。當固定  $H=10$ 、 $n=-0.333$ 、 $Sc_e=500$ 、 $Q=1$  的情形下，觀察  $\psi=0.1, 1, 10$  的(a)中性曲線；(b)波數與虛部成長率變化。

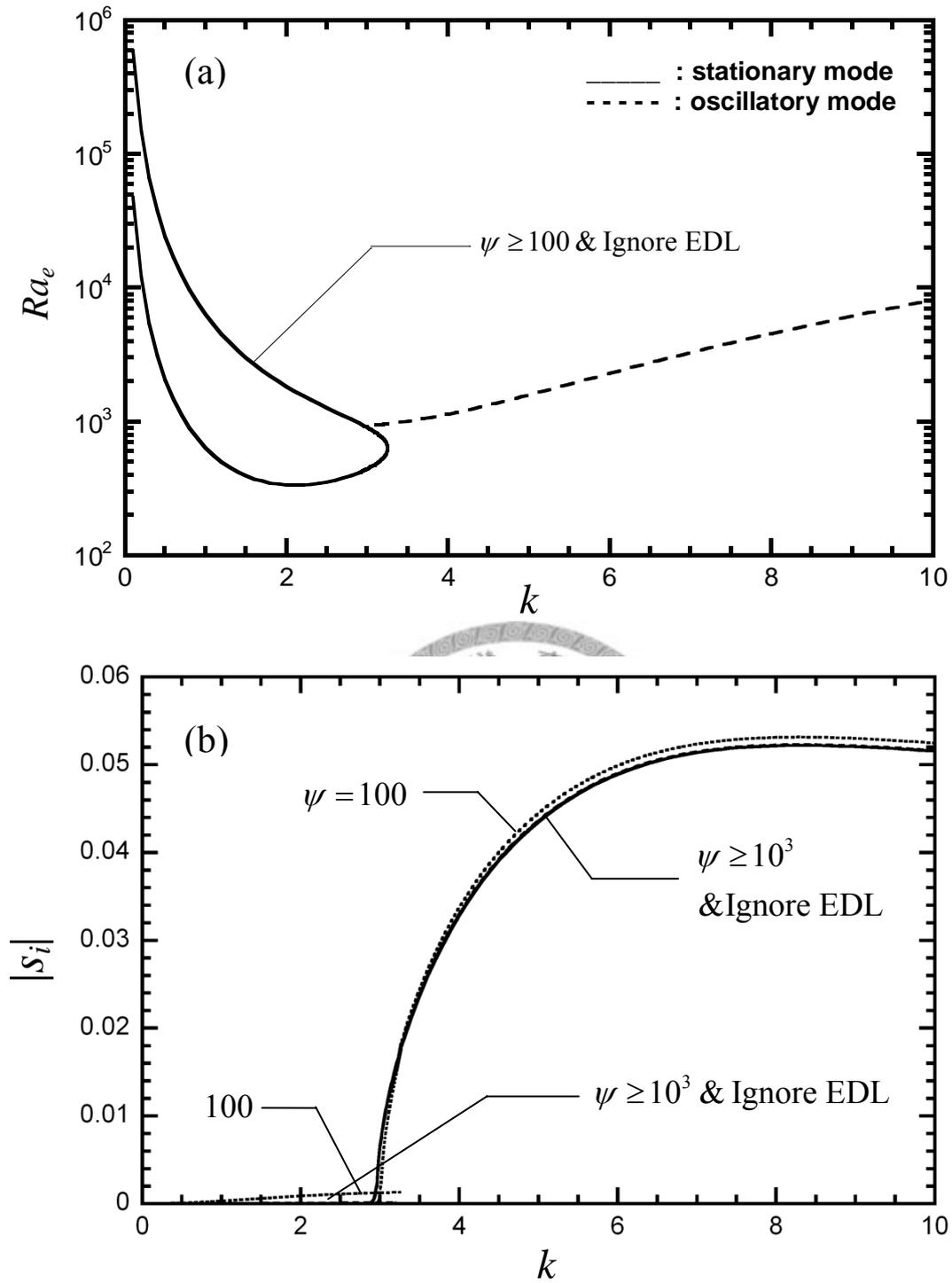


圖 4.13 則塔電位影響圖。當固定  $H=10$ 、 $n=-0.333$ 、 $Sc_e=500$ 、 $Q=1$

的情形下，觀察  $\psi \geq 100$  與忽略 EDL 效應的(a)

中性曲線；(b)波數與虛部成長率變化比較。

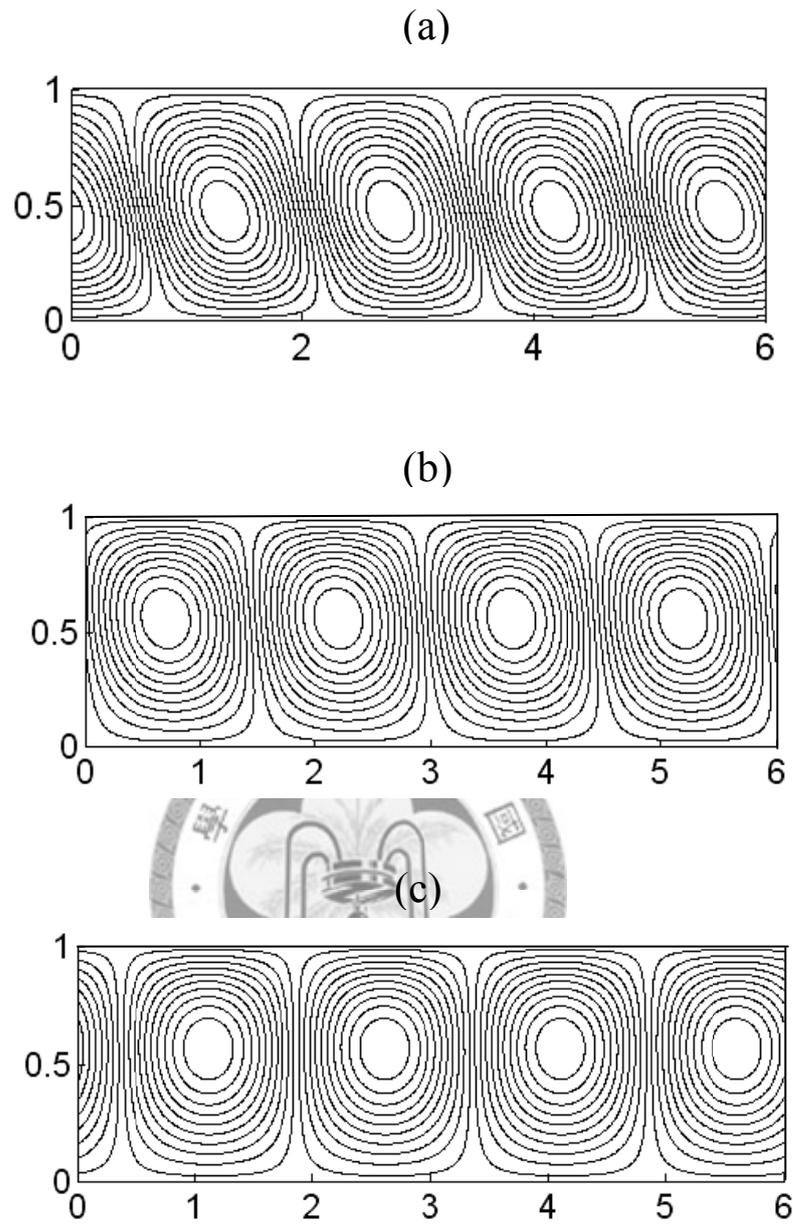


圖 4.14 則塔電位影響圖。固定  $H=10$ 、 $Sc_e=500$ 、 $n=-0.333$ 、 $Q=1$  的情形下，考慮  $\psi=0.1, 1, 10$  的臨界流場形態。(a)  $\psi=0.1$ ,  $(k_c, Ra_{ec})=(2.2, 599.8)$ ；(b)  $\psi=1$ ,  $(k_c, Ra_{ec})=(2.1, 339.9)$ ；(c)  $\psi=10$ ,  $(k_c, Ra_{ec})=(2.1, 336.1)$ ；

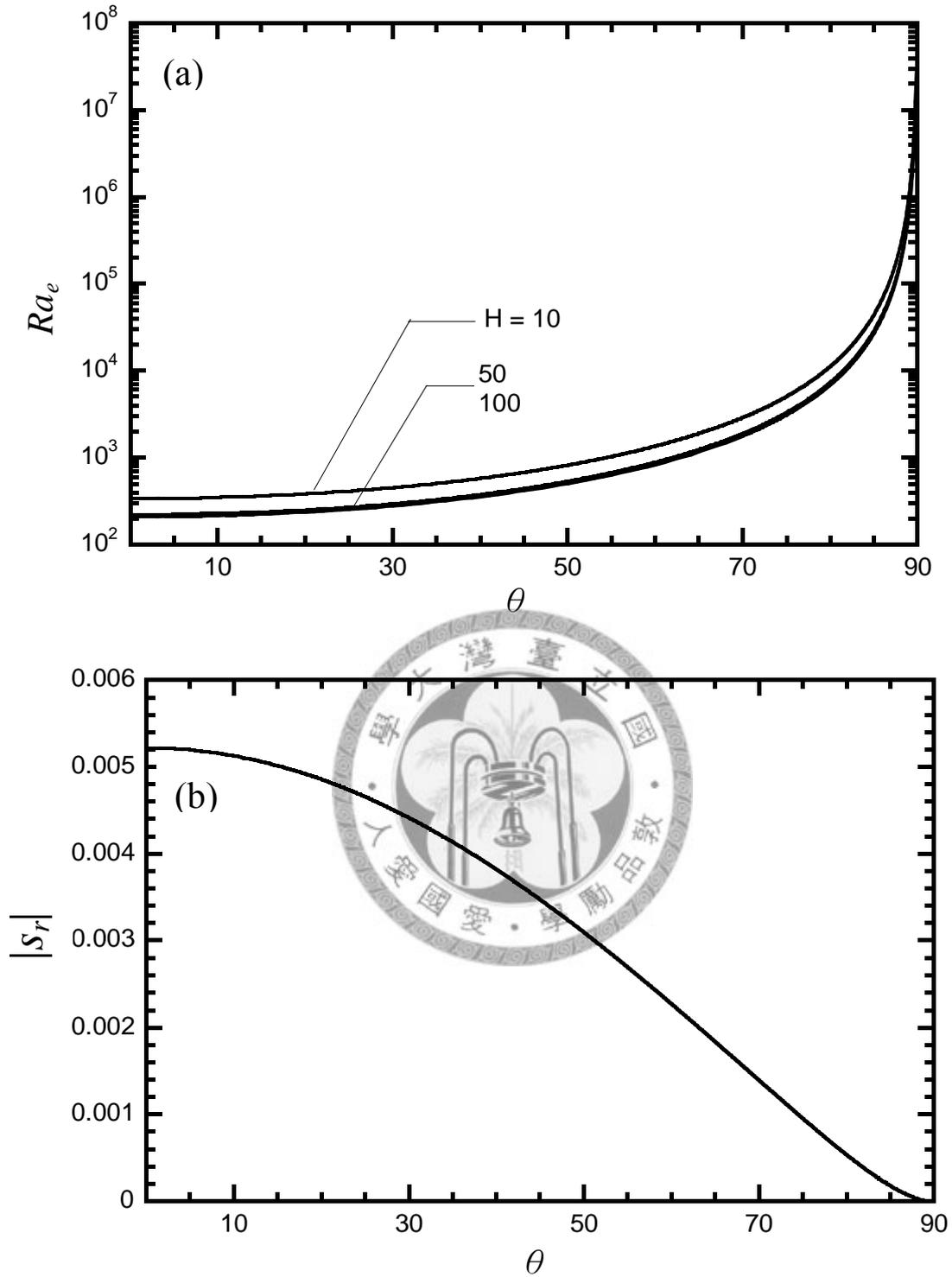


圖 4.15 當考慮 EDL 效應， $Sc_e = 500$ 、 $k = 2.1$ 、 $n = -0.333$ 、 $Q = 1$ 、 $\psi = 1$  的情形下，觀察(a)  $H=10, 50, 100$  時，angle 與  $Ra_e$  的中性曲線；(b)  $H=10, Ra_e = 10^7$  時，angle 與  $s_r$  的關係圖。

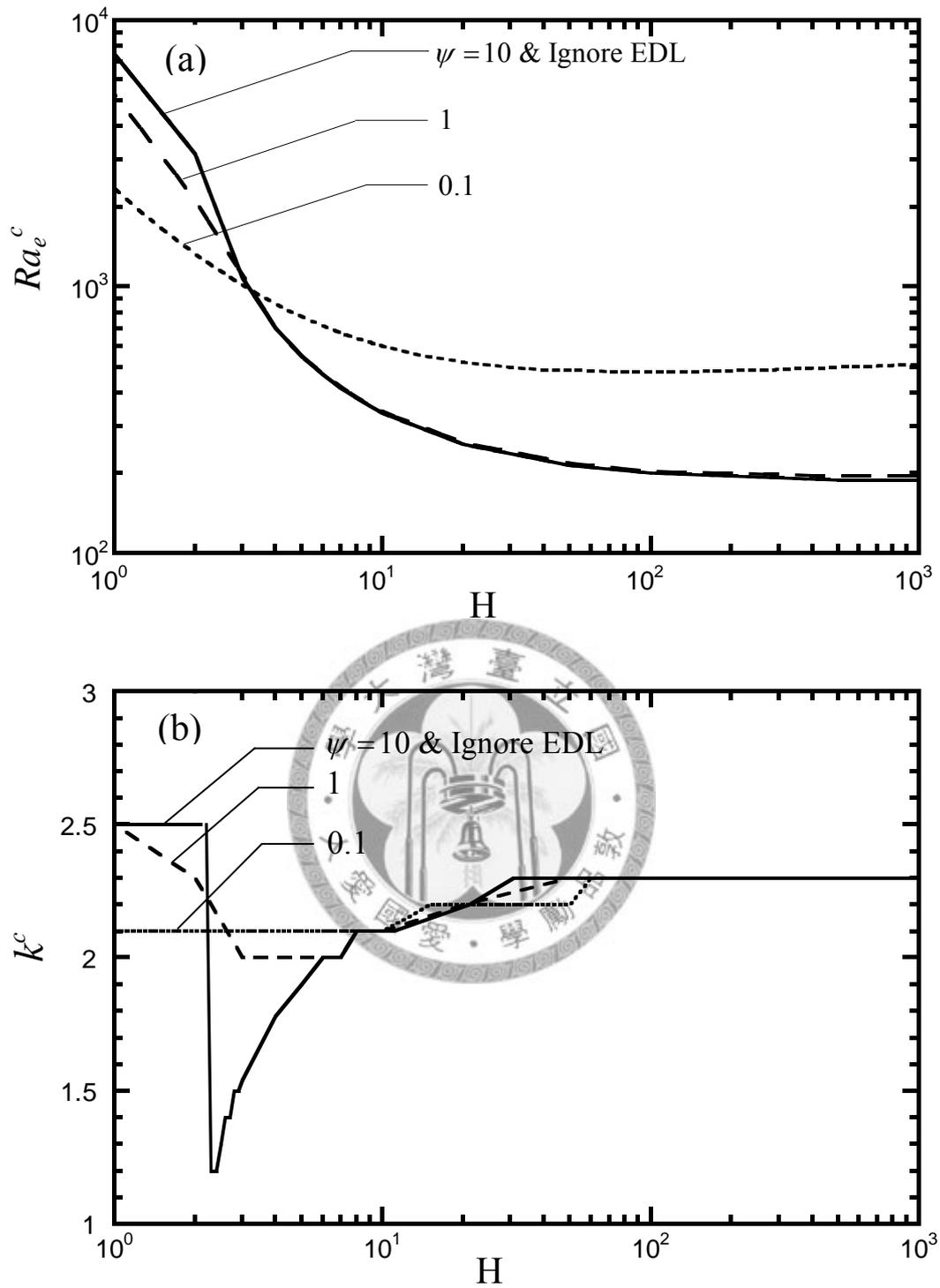


圖 4.16 固定  $Sc_e = 500$ ,  $Q = 1$ ,  $n = -0.333$  的情形下，觀察  $\psi = 0.1, 1, 10$  及忽略 EDL 效應時，其(a) $H$  與  $Ra_e^c$  的變化；(b) $H$  與  $k_c$  的變化。

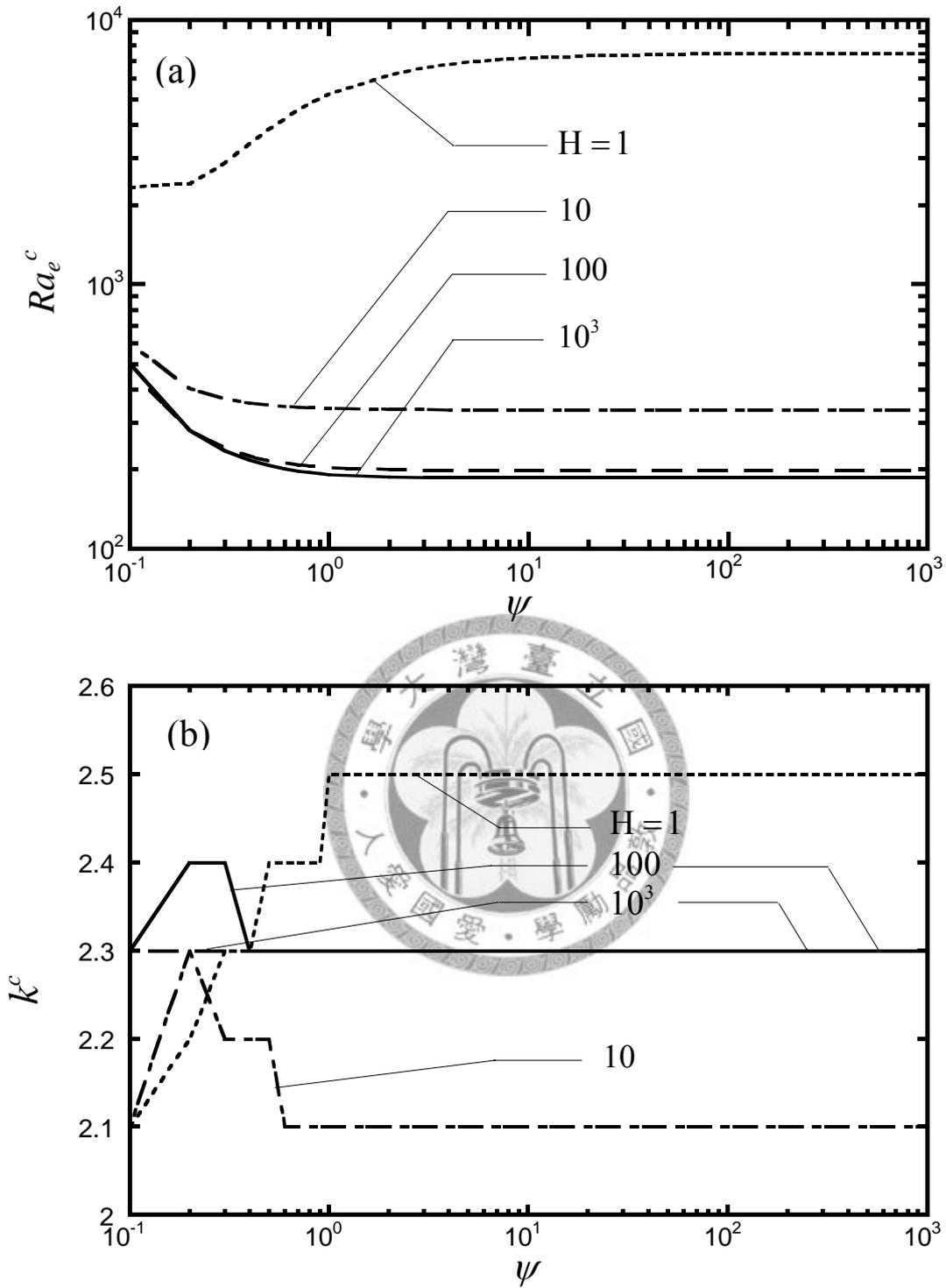


圖 4.17 固定  $Sc_e=500$ ,  $Q=1$ ,  $n=-0.333$  的情形下，觀察  $H=1, 10, 100, 10^3$  時，其(a)  $\psi$  與  $Ra_{ec}$  的變化；(b)  $\psi$  與  $k_c^c$  的變化。

## 第五章 結論與展望

從實驗了解，在厚長比甚小的微流道中，考慮與流動方向垂直的導電梯度，並施加流動方向的電場時，流體會隨著所施加的電場大小產生顯著不穩定的擾動現象。而亦有許多學者嘗試建立物理模型，分析其中的物理機制。其中 Lin[16]的模型中，討論兩導電度均勻的電解液，考慮介面上的導電梯度，施加流動方向的電場作用，並考慮邊界 EDL 效應下，分析此系統的不穩定機制。並研究流體最有效率混合時的最佳電場及討論其二維、三維的變化。

而其中較少討論其縱向模態的變化，且其所討論的導電梯度僅在交界面產生梯度變化。因此，在本研究的系統中，考慮平行板充滿單層導電溶液，給予上下板不同的離子濃度依據其擴散作用產生導電梯度，並通入流動方向電場，分析其線性穩定性分析。並分別討論兩個物理模型，(1)考慮 EDL 的影響，(2)忽略 EDL 的影響。在此我們得到一些結論：

首先在(1)因考慮邊界滑動的因素，使系統產生一個基態速度，也由於這個基態速度使系統並沒有靜態模態(stationary mode)及震盪模態(oscillation mode)的發生，且(1)效應中的基態速度其動能亦可增加抵抗黏滯力。使得流場較(2)的情形更易不穩定，但此現象當導電梯度  $H > 5$  之後，因導電梯度所造成的電場力已足以抵抗黏滯力的束縛，造成系統不穩定現象，故  $H > 5$  有無 EDL 效應已無明顯差別。

在流體性質  $Sc_e$  (electric Schmidt number) 方面，其  $Sc_e$  對穩定性的影響。 $Sc_e$  在本研究代表離子擴散效應的影響。當  $Sc_e$  越小代表離子擴散效應越大。(1)效應時， $Sc_e$  對流體穩定性的影響。發現在高導電度

時，當  $Sc_e$  越小時，流體有越穩定的趨勢，電場須施加較大才能造成流體不穩定。以物理的現象來說，當  $Sc_e$  越小，代表離子的擴散效應越強，當離子因擴散所形成的導電梯度因為擴散效應強到與黏滯力的影響差不多時，好不容易靠離子擴散形成的導電梯度，很快得被擴散的機制消除了。導致導電梯度的效果消失，使得系統缺乏導電梯度的影響使電場驅動力減弱而趨於穩定。當  $Sc_e > 100$  時， $Sc_e$  對系統的不穩定效果影響已不明顯。但若考慮在低導電梯度的情況下，卻有相反的結果。因在低導電梯度的情況中，因離子濃度低，擴散作用較慢，因而較穩定。而當擴散效應越大時，可加速離子擴散效應以形成導電梯度。故在低導電梯度時，離子擴散效應為使系統不穩定的機制。

在(1)中定義  $\psi = -\left(\mu k_{eff} / \varepsilon\right)^{1/2} / \xi_r$  為流體性質的穩定機制與局部離子濃度(導電度)的不穩定機制比值，即則塔電位的影響。此參數亦為 EDL 效應的影響指標。當  $\psi$  越小代表則塔電位效應越大，亦代表(1)效應越大。理論來說，在高導電梯度狀態時，當則塔電位越強，代表電滲速度越快，其基態流場亦越大，系統應越趨於不穩定。但從結果觀察，當  $\psi = 0.1$  則塔電位強到一個程度，系統卻反而變穩定。原因為，當則塔電位效應強到一個程度時，反而會抓住電解液中的電荷，使系統受電場產生的電泳力減小，EDL 厚度增厚，如同流體的邊界層效應般，反而使系統穩定。另一方面，當在低導電梯度系統中，因電場力的影響減小，EDL 的效應將變得重要。在此情況中，則塔電位將扮演不穩定的角色，使得邊界的滑動速度加大，增加基態流場的不穩定動能，以抵抗黏滯力的穩定作用。

而(1)中當考慮  $Q$  (底板的無因次導電度)及  $n$  (則塔電位中導電度

的修正權數(power index))兩無因次參數時，皆無明顯的變化。代表此兩項參數並非造成不穩定的主要影響。

在縱向模態中，無論是否考慮 EDL 效應，縱向模態皆不會發生。此為因電場驅動力在橫向。且並無其他機制如溫度、壓力、電磁力、浮力...等，使橫向不穩定能影響至縱向上，因此橫向模態一定比縱向模態不穩定，系統一定由橫向模態控制。

最後，本文提出一些今後在設計高導電梯度的微混合器晶片(on-chip)時的方向，在一般常溫稀薄電解液可忽略其流體性質的影響亦可完全忽略縱向模態對穩定性的作用。

而在本研究中並無考慮三維的理論分析及電場與黏滯力作用下焦耳熱對流體的穩定性影響，此為未來可投入的研究方向。



## 參考文獻

- [1] A. Manz & N. Graber, "Miniaturized total chemical analysis systems",  
Sens. Actuators B. **1** ( 1990 ) 244-248.
- [2] F. Li & O. Ozen "Linear stability of a two-fluid interface for  
electrohydrodynamic mixing in a channel", J. Fluid Mech. **583**  
( 2007 ) 347-377.
- [3] D. A. Boy & B. D. Storey, "Electrohydrodynamic instabilities in  
microchannels with time periodic forcing", Phys. Rev. E. **76** ( 2007 )  
26-304.
- [4] S. Tardu, "Interfacial Electrokinetic Effect on the Microchannel Flow  
Linear Stability", Transactions of The ASME. **126** ( 2004 ) 10-13.
- [5] G. I. Taylor & A. D. McEwan, "The stability of a horizontal fluid  
interface in a vertical electric field", J. Fluid Mech. **22** ( 1965 ) 1-15.
- [6] J. R. Melcher & M. S. Firebaugh, "Traveling-wave bulk  
electroconvection induced across a temperature gradient", Phys. Fluids.  
**10** ( 1967 ) 1178-1185.
- [7] D. H. Michael & M. E. O'Neill, "Electrohydrodynamic instability in  
plane layers of fluid", J. Fluid Mech. **41** ( 1970 ) 571-580.

- [8] J. F. Hoburg & J. R. Melcher, "Internal electrohydrodynamic instability and mixing of fluids with orthogonal field and conductivity gradients", J. Fluid Mech. **73** ( 1976 ) 333-351.
- [9] J. F. Hoburg, "Internal electrohydrodynamic instability of liquids with collinear field and conductivity gradients", J. Fluid Mech. **84** ( 1977 ) 291-303.
- [10] P. H. Rhodes & R. S. Snyder, "Electrohydrodynamic distortion of sample streams in continuous flow electrophoresis", J. Colloid Interface Sci. **129** ( 1989 ) 78-90.
- [11] J. R. Melcher & G. I. Taylor, "Electrohydrodynamics: a review of the role of interfacial shear stresses", Annu. Rev. Fluid Mech. **1** ( 1969 ) 111-146.
- [12] J. C. Baygents & F. Baldessari, "Electrohydrodynamic instability in a thin fluid layer with an electrical conductivity gradient", Phys. Fluids. **10** ( 1998 ) 301-311.
- [13] J. F. Hoburg & J. R. Melcher, "Internal electrohydrodynamic instability and mixing of fluids with orthogonal field and conductivity gradients", J. Fluid Mech. **73** ( 1976 ) 333-351.

- [14] J. R. Melcher, "Continuum Electromechanics", MIT Press ( 1981 )
- [15] J. F. Hoburg & J. R. Melcher, "Electrohydrodynamic mixing and instability induced by collinear fields and conductivity gradients ", Phys.Fluids. **20** ( 1977 ) 903-911.
- [16] H. Lin & B. D. Storey, "Instability of electrokinetic microchannel flows with conductivity gradients", Phys. Fluids. **16** (2004) 1922-1935.
- [17] J. G. Santiago, "Electroosmotic flows in microchannels with finite inertial and pressure forces", Anal. Chem. **73** ( 2001 ) 2353-2365.
- [18] C. H. Chen, "Convective and absolute electrokinetic instability with conductivity gradients", J. Fluid Mech. **524** (2005) 263-303.

