

國立台灣大學理學院地質科學研究所

碩士論文

Department of Geosciences

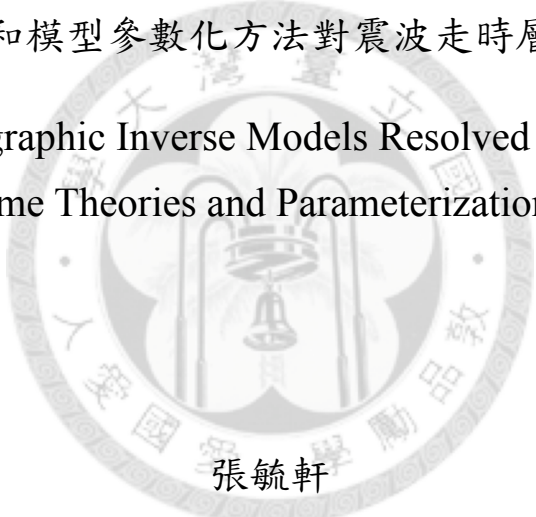
College of Science

National Taiwan University

Master Thesis

探討波傳理論和模型參數化方法對震波走時層析成像的影響

Evaluation of Tomographic Inverse Models Resolved from Various Travel-time Theories and Parameterizations

The seal of National Taiwan University is a circular emblem. It features a central bell (the University Bell) flanked by two vertical torches. The entire emblem is encircled by the university's name in Chinese characters: "國立台灣大學" at the top and "勵學敦行" at the bottom.

張毓軒

Chang, Yu-Hsuan

指導教授：洪淑蕙 博士

喬凌雲 博士

Advisor: Shu-Huei Hung, Ph.D.

Ling-Yun Chiao, Ph.D.

中華民國 九十八 年 七 月

July 2009

國立臺灣大學碩士學位論文
口試委員會審定書

探討波傳理論和模型參數化方法對震波走時層析成像
的影響

Evaluation of Tomographic Inverse Models Resolved from
Various Travel-time Theories and Parameterizations

本論文係張毓軒君 (R96224210) 在國立臺灣大學地質科學系、
所完成之碩士學位論文，於民國 98 年 07 月 22 日承下列考試委員審
查通過及口試及格，特此證明

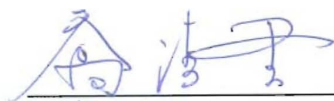
口試委員：

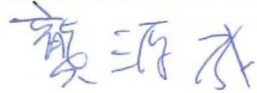


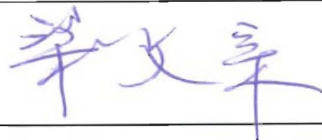
(簽名)

(指導教授)









摘要

透過地震震波層析成像，地球物理學家得以利用不同的走時理論、參數化與正則化方法以求得高解析度的地球內部構造。在近年來的研究中，走時理論上除了利用傳統無限高頻的波線理論之外，也引進了有限頻寬的香蕉甜甜圈理論作為探測地函非均質速度構造的工具。另一方面，在模型參數化方法的改進上，相較於使用一般格點參數化再加上先驗的正則化處理，如尋找儘量平滑的模型，多重尺度參數化的特性是在逆推的過程中儘量由資料本身對模型參數約束的能力來決定模型在空間上解析尺度的變化，因此求得的模型解同時具備各種不同尺度而非一味追求平滑的構造。

本研究利用高斯隨機介質類比真實地球模型，並以均質模型類比無側向速度變化的一維地球速度參考模型；再以平行化虛擬頻譜數值方法（parallel pseudo-spectral method）解波動方程式，計算波場在三維介質中傳遞的過程和波形，然後將在非均質介質中所求得的合成波形與其對應的均質介質合成波形做交叉比對（cross-correlation）測量出真實的走時殘差，再利用奇異值分解（singular value decomposition, SVD）對真實走時殘差建立的數據進行逆推以求得原本的速度構造。

在逆推的方法上，過去由於受限於格拉姆矩陣（Gram matrix）過於巨大，通常無法直接求出反格拉姆矩陣，因此本研究利用 PROPACK 直接對格拉姆矩陣做奇異值分解，可求出模型解析度矩陣（model resolution matrix）與模型共變異數矩陣（model covariance matrix），用以評估在不同走時理論、參數化與正則化之下逆推結果在空間中的解析能力。

分析結果發現：在相同的模型分散程度（model spread）下，使用多重尺度參數化進行逆推所得到的結果其模型共變異（model covariance）比使用一般參數化還要來的低；在正則化方式上，使用阻尼（damping）的方式其模型共變異數比使用閾值（truncation）低，而模型共變異數低的意義為其結果不容易受到觀測資料誤差的影響。最後再以模型離差（model misfit）為基準，在相同的資料擬合程度（variance reduction）下，使用有限頻寬理論進行逆推所得到的結果比使用波線理論更為接近真實的模型。

關鍵字：多重尺度參數化、奇異值分解、離散小波理論、有限頻寬理論、解析度矩陣。

Abstract

Whether different forward theories and parameterization methods employed in seismic tomographic imaging lead to the improvement of the resulting Earth structures has been a focus of attention in the seismological community. Recent advance in tomographic theory has gone beyond classical ray theory and incorporated the 3-D sensitivity kernels of frequency-dependent travel-time data into probing the mantle velocity heterogeneity with unprecedented resolution. On the other hand, the idea of multi-scale parameterization has been introduced to deal with naturally uneven data distribution and spatially-varying model resolution for the tomographic inverse problems. The multi-resolution model automatically built through the wavelet decomposition and synthesis results in the non-stationary spatial resolution and data-adaptive resolvable scales. Because the Gram matrix of Frechét derivatives that relates observed data to seismic velocity variations is usually too large to be practically inverted by singular value decomposition (SVD), the iterative LSQR algorithm is instead employed in the inversion which inhibits the direct calculation of resolution matrix to assess the model performance. With the increasing computing power, we are now able to calculate the SVD of the Gram matrix more efficiently using the parallel PROPACK solver. In this study, we compute the ground-truth psudospectral seismograms in random media with certain heterogeneity strengths and scale lengths. The finite-frequency travel-time residuals measured from waveform cross correlation are then used to invert for the implanted random structure based on different forward theory and model parameterization. For each inversion approach, the tradeoff between model covariance and model spread is utilized to determine the optimal solution, showing that the multi-scale model yields a much lower model covariance and remains better spectral resolution for longer-wavelength velocity structures than the simple grid one. The spreadness and geometry of the resulting resolution matrices reveal that both the 3-D finite-frequency kernel and multi-scale parameterization tend to broaden and smooth the structures having less smearing toward the non-crossing ray directions. Moreover, the comparison of the misfits between the resolved and initial random model among all the optimal solutions indicates that the models obtained with finite-frequency theory have better fits to the true model because wavefront healing effect is properly taken into account in modeling cross-correlation travel-time residuals.

Keyword: seismic travel-time tomography, finite-frequency theory, multi-scale parameterization, wavelet transform, singular value decomposition, resolution matrix.

目錄

口試委員審定書	i
摘要	ii
Abstract	iii
目錄	iv
圖目錄	vi
表目錄	vii
第一章 緒論	1
第二章 研究方法	4
2.1 速度模型	6
2.2 測站震源分布	8
2.3 真實走時異常	9
2.4 逆推問題 (Inverse problem)	11
2.4.1 逆推	11
2.4.2 PROPACK	13
2.5 走時理論	16
2.5.1 線性化波線理論 (LRT)	16
2.5.2 香蕉甜甜圈理論 (BKT)	17
2.6 參數化 (Parameterization)	20
2.7 正則化 (Regularization)	21
第三章 結果	23
3.1 模型最佳合理解	23
3.2 高斯隨機模型 (Gaussian random model) — I	26
3.2.1 走時理論：LRT v.s. BKT	27

3.2.2 正則化手段：Damping v.s. Truncation.....	27
3.2.3 參數化方式：Simple grid v.s. Multi-scale.....	27
3.3 高斯隨機模型（Gaussian random model）— II.....	38
第四章 討論.....	49
4.1 消長曲線圖.....	49
4.2 模型離差.....	50
4.3 解析度矩陣.....	50
4.3.1 模型解析能力.....	50
4.3.2 點擴散函數.....	53
第五章 結論.....	60
參考文獻.....	61



圖目錄

圖2-1	速度模型	7
圖2-2	震源與測站分布	8
圖2-3	數值模擬的波形圖	10
圖2-4	高斯隨機誤差	10
圖2-5	震源、測站與散射點示意圖	16
圖2-6	波線理論與香蕉甜甜圈理論描述波前形狀隨推進距離變化的示意圖	19
圖2-7	有限頻寬理論的敏感度算核	19
圖2-8	奇異值分布圖	22
圖2-9	阻尼與閾值	22
圖3-1	擬合程度與模型範數消長曲線圖—高斯隨機模型 - I	25
圖3-2	模型共變異數對資料擬合程度消長曲線圖—高斯隨機模型 - I	25
圖3-3	模型共變異數對模型分散程度消長曲線圖—高斯隨機模型 - I	26
圖3-4	高斯隨機模型逆推結果 - I	29-36
圖3-5	模型離差對資料擬合度消長曲線圖—高斯隨機模型 - I	37
圖3-6	模型共變異數對模型分散程度消長曲線圖—高斯隨機模型- II	39
圖3-7	高斯隨機模型逆推結果 - II	40-47
圖3-8	模型離差對資料擬合度消長曲線圖—高斯隨機模型 - II	48
圖4-1	在一般格點參數化和線性波線理論逆推架構下所求得的解析度矩陣—SLRT	51
圖4-2	解析度矩陣—SBKT	52
圖4-3	解析度矩陣—MLRT	52
圖4-4	解析度矩陣—MBKT	53
圖4-5	以單邊震源—測站走時資料 (Test - I) , 一般格點參數化和線性走時理論 (SLRT) 逆推方式所求得的點擴散函數	55
圖4-6	點擴散函數在空間中的分布—SBKT	55

圖4-7	點擴散函數在空間中的分布—SLRT—Truncation.....	56
圖4-8	點擴散函數在空間中的分布—MLRT	56
圖4-9	點擴散函數在空間中的分布—MBKT.....	57
圖4-10	以雙邊震源—測站走時資料（Test - II），一般格點參數化和線性走時理論（SLRT）逆推方式所求得的點擴散函數.....	57
圖4-11	點擴散函數在空間中的分布—SBKT.....	58
圖4-12	點擴散函數在空間中的分布—MBKT.....	58
圖4-13	模型共變異數矩陣的點擴散函數在空間中分布—SLRT.....	59
圖4-14	模型共變異數矩陣的點擴散函數在空間中分布—MLRT.....	59

表目錄

表3-1	高斯隨機模型逆推參數 - I.....	24
表3-2	高斯隨機模型逆推參數 - II.....	37

第一章 緒論

類似於醫學中的電腦斷層掃描 (CT, computed tomography)，地震震波層析成像 (seismic tomography) 是了解地球深部三維震波速度構造或是非彈性震波能量衰減程度的有力工具。自從 1889 年 Von Rebeur-Paschwitz [1889] 接收到第一個遠震訊號以來，地球物理學家最常利用地震波的走時 (travel-time) 逆推地球深部的速度構造。然而，所有的地震層析成像逆推都會遭遇到模型解非唯一性 (non-uniqueness) 的問題，其造成原因包括震波記錄資料本身的有限頻寬特性、量測誤差、震源—測站位置分布造成資料採樣不均以及對連續的速度構造進行離散參數化等 [Romanowicz, 2003]。本研究將針對不同的解釋有限頻寬震波走時資料的正演理論和離散參數化 (parameterization) 與正則化 (regularization) 方式對規範震波層析成像速度模型的影響進行探討。

Romanowicz [2003] 將走時層析成像分為兩大類：第一類是利用 ISC (International Seismic Center) 資料庫中數以百萬計的 P 波走時，採用網格 (block) 或格點 (grid) 參數化的方式，以區域性的基底函數 (local basis-function) 對連續的三維速度模型參數展開，主要著重模型在空間的解析度 [e.g., Obayashi and Fukao, 1997; Bijwaard et al., 1998; Boschi and Dziewonski, 2000; Kárason and van der Hilst, 2001]；第二類為利用 S 波與表面波的走時或波形資料，並以全球性的基底函數 (global basis-function)，例如球諧函數 (spherical harmonics) 作為參數化的依據，主要強調模型在頻譜域的解析能力 [e.g., Ritsema et al., 1999; Mègnin and Romanowicz, 2000; Gu et al., 2001]。

為了平衡空間域及頻譜域的解析能力，且波線在模型空間中的分布通常非常不均勻，因此引入多重尺度參數化 (multi-scale parameterization)。之前的某些研究中認為在波線密度較高區域模型可被解析的尺度較小，因此在這些地方加密格點以期能增加模型在空間中的解析能力 [e.g., Vesnaver, 1996; Bijwaard et al., 1998; Zhang and Thurber, 2005]，但前述的方式帶有強烈先驗 (a priori) 的主觀認定波線密集之處的解析度必較高，而且實際上也有可能因為眾多方向類似的波線造成看似密集卻無高解析能力的問題發生。另外，他們稱此類以不同大小或尺度的格點作為參數化的方法為多重尺度參數化，但實際在每個模型格點上，其解析長

度依然只有一種尺度，因此不能稱為多重尺度。而真正的多重尺度參數化則是利用小波理論對模型進行參數化 [e.g., Madych, 1999; Chiao and Kuo, 2001; Chiao and Liang, 2003; Zhou, 2003]，用意在於透過不同尺度的小波基底函數對模型參數拆解展開，在逆推過程中直接由資料本身對模型的規範能力及適應性（data-adaptive）求出對應的展開係數，再透過小波的轉換合成求出具空間變異性（spatially-varying）的多重尺度模型，而非事先決定模型可解析的尺度和平滑程度。

其次，在建構走時異常與速度模型之間的關連性時，不同的走時理論將會造成相當不同的結果 [Yang and Hung, 2005]。截至目前為止，利用體波得到的震波層析成像大致上可以分為下列兩種走時理論：（1）波線理論（ray theory），包括線性化的波線理論（Linearized ray theory，LRT）和廣義的波線理論（General ray theory，GRT）。（2）有限頻寬理論，又稱香蕉—甜甜圈理論（Banana-doughnut theory or Born-Fréchet kernel theory，BKT）。波線理論假設地震波是無限高頻（或無限頻寬），即震波的到時與波形只受到無限窄的波路徑，即波線（ray）上的速度構造所影響，波徑以外區域的速度變化則對震波走時的異常沒有任何貢獻。但實際上地震波的頻率並不是無限高頻的，越大的斷層破裂面積越容易產生低頻的波，且隨著傳播距離的增加，高頻的波會衰減的越快。因此單用「無限高頻」的波線理論觀點來看待地震波並不能有效的描述其性質，必須以「有限頻寬」的概念取代之。有限頻寬理論即考慮地震波在非均質地球構造中傳遞時波前復原等有限頻寬的散射效應，其量測的走時異常主要是受到類似香蕉幾何形狀、環繞在波線四周的三維速度構造所決定，其影響的寬度範圍和震波本身的波長及波傳距離有關。

前人研究中所爭論的重點在於不同的走時理論與參數化方式是否對逆推求得的速度模型有所差異，哪一種方法所得到的速度構造比較可信。較常用來評估逆推的模型是否可靠是透過棋盤測驗（checkerboard test）[Soldati and Boschi, 2005; Zhou et al., 2005; Sekiguchi, 2006]，自行設計一個速度異常快慢相間的棋盤狀的構造，透過實際觀測資料提供的震源—測站組合所合成的走時資料以及相同的逆推手段，探究是否能回復初始設定的棋盤狀構造；或是利用峰值測試（spike synthetic test）[Gök et al., 2003]，採用類似於棋盤測驗的步驟，將欲測試的某一模型參數設定有速度異常，其餘的為零，來作為合成走時異常資料的依據，再

由此資料進行逆推，分析解出的模型為該峰值往外擴散的程度。這兩種方法都只是間接的顯示出模型在空間中的解析能力，各有其缺點在；棋盤測驗只證明了這組震源—測站資料可能解特定固定波長尺度的構造，但並不能代表其他形狀的構造也能解的出來，而另一項峰值測試則是無法對每一個模型參數做測試，因為耗時過多並不實際。本研究利用以往在實際震波層析成像問題較少使用的奇異值分解（Singular value decomposition）來處理逆推問題，奇異值分解可直接計算模型的解析度矩陣（resolution matrix），用來作為指示每一模型參數在空間中可被解析分辨的程度。由於奇異值分解在數值計算上十分耗時且佔記憶體空間，跟以往常用的最小平方正交分解法（LSQR algorithm）[Paige and Saunders, 1982] 相比會差上數百甚至數千倍的時間，因此在過去並沒有多少層析成像的研究使用奇異值分解作為逆推模型的工具。但最小平方正交分解法並沒有辦法「直接」評估模型的解析能力，因此在逆推問題中使用奇異值分解是有其必要性。隨著電腦計算能力的增長，目前已經可以在可接受的時間下利用 PROPACK [Larsen, 2005] 來進行平行化的奇異值分解並計算模型的解析度矩陣 [Zhang and Thurber, 2007]。

本研究中的正演部份大致依循 Baig et al. [2003]、Yang and Hung [2005] 及楊欣穎 [2005] 的架構，以高斯隨機介質類比真實的地球模型，均質模型類比無側向速度變化的一維地球速度參考模型，之後以平行化虛擬頻譜數值方法（parallel pseudo-spectral method）解三維的波動方程式，計算波場在均質和非均質介質中傳遞的過程和波形，然後將在非均質介質中所求得的合成波形與其對應的均質介質合成波形做交叉比對（cross-correlation）測量出真實的走時殘差（travel-time residual），再利用奇異值分解對真實走時殘差建立的數據進行逆推以求得原本的速度構造，最後比較在不同走時理論、參數化與正則化之下的逆推結果。

第二章 研究方法

地球物理最主要的問題之一在於了解未知的地球構造，而藉由地震波在地球內部傳遞的波場特徵得知地球彈性速度構造、非彈性衰減程度，進而推求溫度、化學組成等性質。但因為地球構造是連續且自由度無限，而地震波的觀測資料則受限於震源—測站位置分佈及震波資料本身有限的頻寬和測量時受背景雜訊影響等問題，使得在進行逆推的過程中，會遇到如何選擇參數化（parameterization）與正則化（regularization）的方法，以期從非唯一解當中求得模型的最佳合理解。而在進行逆推問題之前，如何選擇正確的波動理論描述模型和理論觀測資料的關係，也會影響到逆推的結果。為了探討不同的波傳理論、參數化以及正則化方法對逆推模型結果的影響，本研究將先使用數值模擬（numerical modeling）的方法計算震波在均質與三維非均質的介質中傳遞的理論合成波形，藉此測量出真實的震波走時異常後，再用逆推求得原本的三維速度構造。在比較不同方法所解出來的模型時，主要是針對其模型共變數矩陣（model covariance matrix）、模型解析度矩陣（model resolution matrix）與模型分散程度（model spread）等參數作為討論的指標。

自 1889 年紀錄到第一個遠震訊號以來，地震學家透過測量各種不同傳波路徑的波相到時，逐步建立地球內部層狀速度結構。從 1940 年由 Jeffreys 和 Bullen 等人所提出的 JB model，到近年來的 IASP91 model [Kennett and Engdahl, 1991] 或是 AK135 model [Kennett et al., 1995]，基本上確立了地球在深度方向上的一維速度，各家所做出來的模型基本上差異不大。然而，同一波相在相同的震央距之下，實際觀測的到時（ T_{obs} ）和一維速度模型所預測的理論到時（ T_{1D} ）兩者之間的殘差（ $\delta T = T_{\text{obs}} - T_{1D}$, travel-time residual）隨著波相在地球內部傳遞的區域不同而有明顯差異，即反映地球內部存在側向的速度變化，目前震波層析成像（seismic tomography）的研究工作即是利用這些觀測的震波走時殘差變化來回推地球內部複雜的三維速度構造。

在本研究以均質模型代表無側向速度變化的一維地球速度參考模型，非均質模型則類比有側向速度變化的真實地球。而非均質模型則是採用高斯隨機介質（Gaussian random media）[Sato and Fehler, 1997; Klimeš, 2002]。之後以平行化虛擬頻譜數值方法（parallel

pseudo-spectral method, [Hung and Forsyth, 1998]) 解波動方程式，計算波場在三維介質中傳遞的過程和波形，然後再將在非均質介質所求得的合成波與對應的均質介質波形做交叉比對 (cross-correlation) 以測量出真實的走時殘差，最後利用「平行化的奇異值分解」的 PROPACK 程式對真實走時殘差建立的數據進行逆推以求得原本的速度構造，並比較在不同走時理論、參數化與正則化之下的逆推結果。以下分別介紹速度模型的建立、真實走時殘差 (ground-truth travel-time residual) 和理論走時殘差 (theoretical travel-time residual)、奇異值分解 (singular value decomposition) 的原理，以及參數化與正則化的方法。



2.1 速度模型

本研究採用的三維速度模型為 $5740 \times 5740 \times 5120 \text{ km}^3$ 大小的長方體，水平方向有 288 個格點；深度方向則有 257 個格點，水平方向為等間隔 20 km，而深度方向因在波形數值模擬時為正確考慮自由地表面（free-surface）的邊界條件，所以使用切比雪夫多項式（Chebyshev polynomials）[Tessmer et al., 1992] 的不等間隔格點。為降低數值波形模擬計算的耗時，以簡化的聲波（acoustic wave）模擬代替彈性介質中傳遞的地震波，因此只需要考慮模型的體積壓縮係數（Bulk Modulus）與密度來決定介質的波傳速度與物理性質。密度不論在均質或非均質模型中皆設定為 1000 kg/m^3 ，均質模型的速度 c_0 設定為 8 km/s ，非均質模型則是在均質模型上加上一隨空間變化函數的速度擾動量，即

$$c(\mathbf{x}) = c_0 + \delta c(\mathbf{x}) = c_0 \left(1 + \frac{\delta c(\mathbf{x})}{c_0} \right), \quad (2.1.1)$$

其中 $\delta c(\mathbf{x})$ 是模型在三度空間中速度變化的函數，而 $\delta c(\mathbf{x})/c_0$ 稱為速度擾動量（velocity perturbation）。我們假設模型的平均值為零，也就是說

$$\langle \delta c(\mathbf{x}) \rangle = 0, \quad (2.1.2)$$

$\langle \rangle$ 符號代表取括弧物理量的算術平均數。接下來我們討論介質中相異兩點 $\mathbf{x}$ 與 $\mathbf{x}'$ 的速度擾動相關函數（autocorrelation function，ACF），其定義為

$$R(r) = \left\langle \frac{\delta c(\mathbf{x})}{c_0} \frac{\delta c(\mathbf{x}')}{c_0} \right\rangle, \quad (2.1.3)$$

其中 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ 為兩點之間的距離。我們可將模型的標準差， ε （standard deviation），寫為

$$\varepsilon \equiv \sqrt{\frac{\langle (\delta c(\mathbf{x}) - \langle \delta c(\mathbf{x}) \rangle)^2 \rangle}{c_0^2}} = \sqrt{\frac{\delta c^2(\mathbf{x})}{c_0^2}} = \sqrt{R(0)}, \quad (2.1.4)$$

而標準差可視為模型速度變化的強度。而一般多使用不同的函數描述隨機的速度模型，如高斯函數（Gaussian）、指數函數（exponential）、Von Kármán 函數。本研究所用的是滿足「高斯分佈」的隨機速度模型，即

$$R(r) = \varepsilon^2 e^{-r^2/a^2}, \quad (2.1.5)$$

其中 a 為相關距離（correlation distance）或稱非均質尺度（heterogeneity scale length）。藉由調整 a 或是 ε ，可得到不同的速度模型。本研究依照 Yang and Hung [2005] 的結論， a 選擇 LRT 與 BKT（見第一章）所預測走時開始有所差異的 $0.5D$ （其中 $D \equiv a/\sqrt{\lambda L}$ ， $\lambda = 200\text{km}$ ， $L \geq 3000\text{km}$ ，因此非均質尺度至少要小於 1.9λ ，本研究中選取 1.5λ ），而 ε 則為 2%（如圖2-1）。

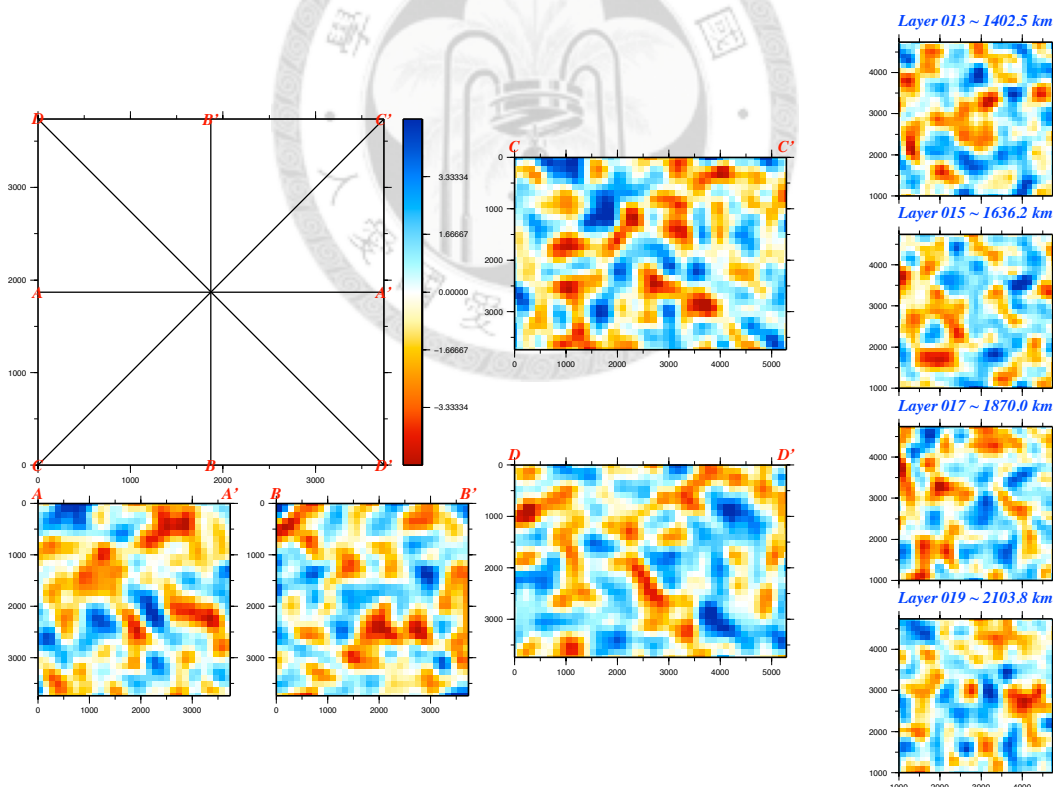


圖2-1 高斯隨機模型。其非均質尺度 (a) 為 1.5λ ，標準差 (ε)

則為 2%，其中 $\lambda = 200\text{km}$ 。左側四圖為在不同剖面上的速度構造，右側四圖是在不同深度上的速度構造。

2.2 測站震源分布

產生合成地震波的 25 個爆破震源 (explosive source) 放置在離邊界 1000 km ($x = 1000$ km) 的地方，沿著 yz 平面分布。(如圖2-2)，而我們的震源體積變化率 $m(t) = dV(t)/dt$ 為高斯函數，

$$m(t) = e^{-2\pi^2(t/\tau-1/2)^2} \quad (2.2.1)$$

其中 τ 為主要週期 (dominant period)，本研究設定為 25 秒。

在模型另一側 ($x = 4740$ km) 擺上以正方矩陣分布的測站，沿 y 與 z 方向上每邊各 63 個，共有 3969 個測站。

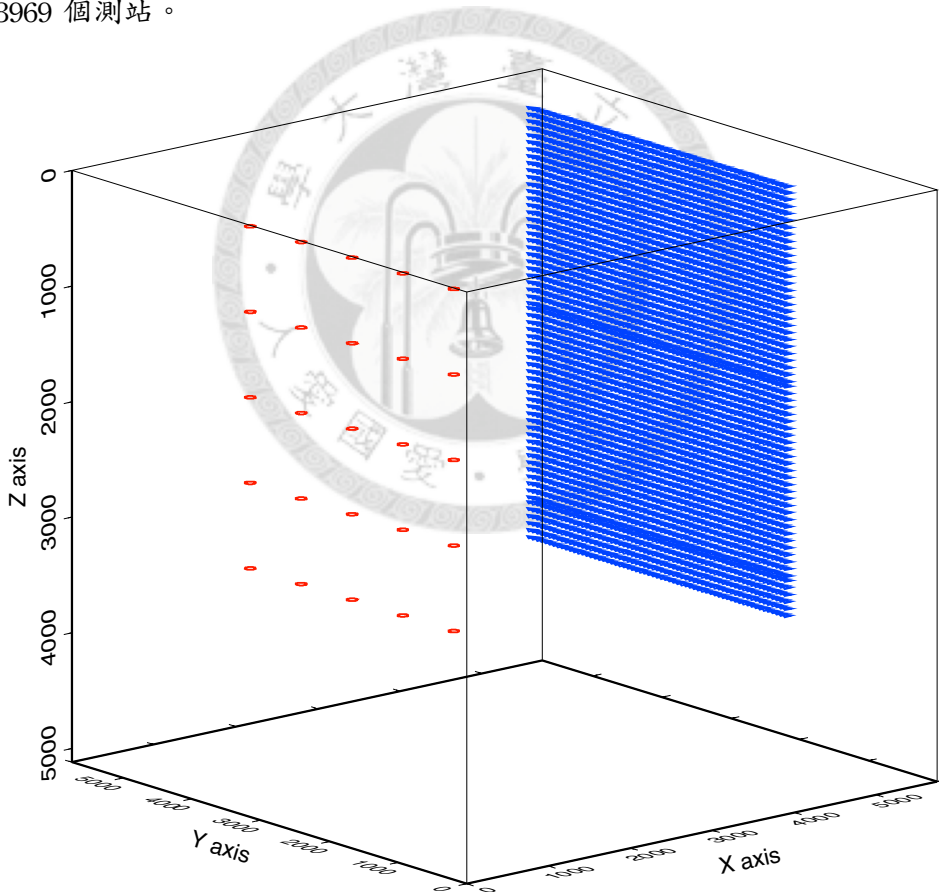


圖2-2 震源與測站分布。震源以紅色點表示，測站以藍色點表示。震源與測站皆放在離邊界 (yz 平面) 1000 km 的地方，以避免波形模擬時為降低邊界假反射訊號所設定能量吸收緩衝區層的影響。

2.3 真實走時異常

考慮以點震源所引起的聲波振動在三維空間且地表設為自由表面（free-surface）邊界的介質中的傳遞情形，滿足物理波動方程式 [Hung et al., 2000]，

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= -\rho^{-1} \nabla p \\ \partial_t p(\mathbf{x}, t) &= -\rho(c_0 + \delta c(\mathbf{x}))^2 [\nabla \cdot \mathbf{u} - m(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{s})]\end{aligned}\quad (2.3.1)$$

其中 $\mathbf{u}$ 為質點振動速度； p 為壓力（pressure）； $\mathbf{x}$ 為空間中任一位置向量； $\mathbf{s}$ 為震源位置； ρ 為密度； $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{s})$ 為 Dirac delta function，只有當 $\mathbf{x} = \mathbf{s}$ 時， $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}) = 1$ ； $m(t)$ 為震源時間函數，同（2.2.1）式。由於在非均質介質中，波動方程式並無解析解，因此使用 Hung and Forsyth [1998] 所發展的平行化虛擬頻譜數值方法（parallel pseudo-spectral method），以數值方法求 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 與 $p(\mathbf{x}, t)$ 的解。

計算出各虛擬測站的合成波形之後，取壓縮波到達位置 $\mathbf{x}$ 的理論到時 t 附近的 25 秒時間窗（time window, $t - 10s \leq t \leq t + 15s$ ），利用波形交叉比對（waveform cross-correlation），將時間序列 $p_0(\mathbf{x}, t)$ （均質介質下的波形）沿著時間軸平移 τ 之後所得的時間序列 $p_0(\mathbf{x}, t - \tau)$ 與 $p(\mathbf{x}, t)$ （非均質介質下的波形）作用，求得其相關係數（correlation coefficient），

$$CC(\delta\tau) = \frac{\int_{t_1}^{t_2} p_0(\mathbf{x}, t - \tau) p(\mathbf{x}, t) dt}{\left(\int_{t_1}^{t_2} p_0^2(\mathbf{x}, t - \tau) dt\right)^{1/2} \left(\int_{t_1}^{t_2} p^2(\mathbf{x}, t) dt\right)^{1/2}} \quad (2.3.2)$$

相關係數最大值所對應的 τ （圖 2-3），即為真實走時殘差， δT （ground truth time residual），也就是 $\left. \frac{\delta CC(\tau)}{\delta \tau} \right|_{\tau=\delta T} = 0$ 。在此參考楊欣穎 [2005] 所得到的結論，使用在均質和非

均質介質中得到的波形相似度相關係數大於 0.9 的資料作為以下逆推分析的走時資料，並且

考慮在真實情況中走時資料有觀測誤差，因此利用高斯隨機亂數產生器（Gaussian random number generator）添加誤差在走時殘差上（圖2-4）。

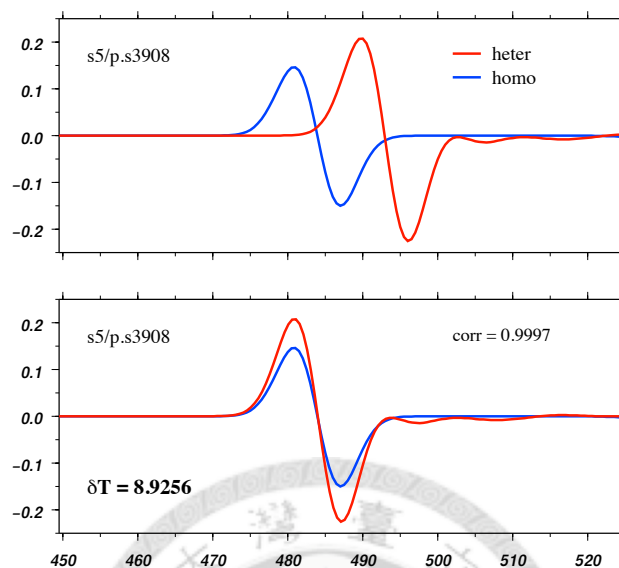


圖2-3 數值模擬的波形圖。紅色和藍色分別代表波在非均質與均質介質中傳遞所得到的波形。真實走時殘差（ δT ）與模型相關係數（corr）如圖所示，上圖為原本的波形，下圖為將非均質介質下波形平移 δT 之後的情形。

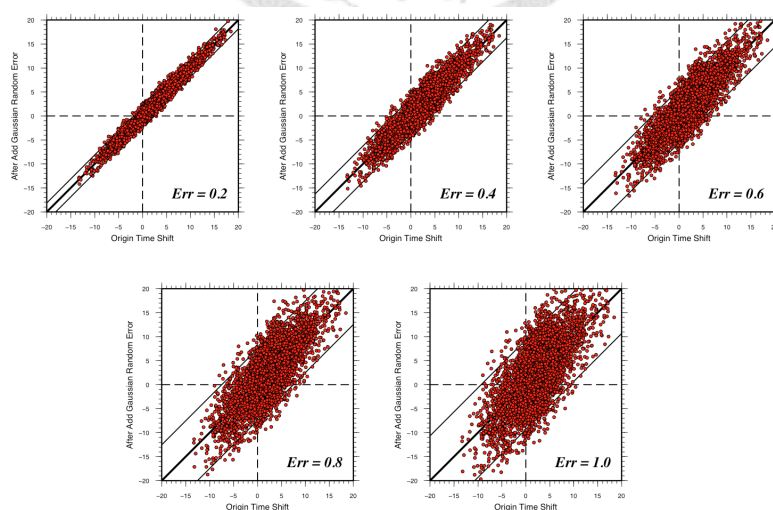


圖2-4 高斯隨機誤差。利用真實走時殘差的標準差為標準，添加 0.2 ~ 1.0 個標準差的高斯隨機亂數於原本的殘差上。

2.4 逆推問題 (Inverse problem)

2.4.1 逆推

通常地球物理逆推問題 (Geophysical inverse problem) 是嘗試在有限的觀測資料架構之下建立連續的地球物理參數模型，例如震波層析成像 (seismic travel-time tomography)，以有限的走時殘差觀測資料來回推連續的地球內部速度構造。針對這樣連續的逆推問題，可將速度模型與觀測走時的關係 (data rule) 寫成 [Chiao and Kuo, 2001; Chiao and Liang, 2003]，

$$d_i = \int_{\oplus} g_i(\mathbf{x}) \mathbf{m}(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} + e_i, \quad (2.4.1)$$

d_i 為第 i 個觀測到的走時殘差資料，而其誤差以 e_i 表示。 $\mathbf{m}(\mathbf{x})$ 為地球的三維連續速度構造， $g_i(\mathbf{x})$ 為第 i 個觀測資料對速度模型的一階偏微導數 (Fréchet derivative)，亦即將連續的速度構造函數映射到離散的觀測走時資料的敏感度算核 (sensitivity kernel)。但由於在實際的逆推問題中，地球內部速度構造受震源測站分布限制，部份區域常發生很少、甚至完全沒有震波通過的情形，走時資料對這些模型參數完全沒有任何的約束力，因此造成逆推問題的非唯一 (non-unique) 解，於是模型解可拆解成兩部份，

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \mathbf{m}_p(\mathbf{x}) + \mathbf{m}_\perp(\mathbf{x}), \text{ 而 } d_i = \int_{\oplus} g_i(\mathbf{x}) \mathbf{m}_\perp(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = 0 \quad (2.4.2)$$

其中以 m_p 為受資料約束的模型參數解，而 $m_\perp$ 則為模型參數中與觀測資料無關的解，也就是無論 $m_\perp$ 以任何值加入， $\mathbf{m}$ 依然還是符合觀測資料。在之後的討論中，我們會以正則化 (regularization) 來處理非唯一解的問題。而 (2.4.1) 式經過離散參數化後，改寫為

$$d_i = \sum_{j=1}^M G_{ij} m_j \quad (2.4.3)$$

或簡化的矩陣形式

$$\mathbf{d} = \mathbf{G} \mathbf{m}, \quad (2.4.4)$$

其中 $\mathbf{d}$ 為由 N 個觀測走時資料組成的向量，即 $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_N)^T$ ； $\mathbf{m}$ 為 M 個模型參數所組成的向量，即 $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_M)^T$ 。而維度為 $N \times M$ 的格拉姆矩陣 $\mathbf{G}$ 每一個元素

G_{ij} 代表第 i 個觀測資料 d_i 對第 j 個模型參數 m_j 的一階偏微導數。對格拉姆矩陣進行奇異值分解 (Singular Value Decomposition) 得到下式，

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T, \quad (2.4.4)$$

其中 $\mathbf{\Lambda}$ 為 $N \times M$ 的對角線矩陣，由 $\mathbf{G}$ 的所有的奇異值 (singular value) 所組成； $\mathbf{U}$ 為 $N \times N$ 的西矩陣 (unitary matrix)，其中每一行向量 (column vector) 為在資料空間 (data space) 的一組西基底 (unitary basis)，且符合 $\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$ 關係，同樣的， $\mathbf{V}$ 為 $M \times M$ 的西矩陣，其中每一行向量組成模型空間 (model space) 的西基底，符合 $\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}$ ； $\mathbf{V}^T$ 則為 $\mathbf{V}$ 的轉置矩陣。利用 $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{V}$ 的性質，可求出 $\mathbf{G}$ 的反矩陣為

$$\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{U}^T, \quad (2.4.5)$$

透過奇異值分解得出的 $\mathbf{G}^{-1}$ ，可求出一般的格點參數化下的估計模型， $\hat{\mathbf{m}}$ ，為

$$\hat{\mathbf{m}} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{d}, \quad (2.4.6)$$

但由於之前提到的逆推解非唯一性問題，經過奇異值分解之後，那些沒有被採樣到的模型參數所對應的奇異值為零，稱之為零空間 (null space)，也就是在逆推過程中這些模型參數解對資料沒有任何影響。因此將 (2.4.4) 式改寫如下

$$\mathbf{G} = (\mathbf{U}_p, \mathbf{U}_0) \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_p^T \\ \mathbf{V}_0^T \end{pmatrix}, \quad (2.4.7)$$

其中 $\mathbf{U}_0$ 、 $\mathbf{V}_0$ 分別是資料空間與模型空間的零空間。在此將零空間去除的格拉姆矩陣的反矩陣表示為 $\mathbf{G}_g^{-1}$ (generalized inverse operator)。

$$\mathbf{G}_g^{-1} = \mathbf{V}_p\mathbf{\Lambda}_p^{-1}\mathbf{U}_p^T, \quad (2.4.8)$$

而估計的模型解 $\hat{\mathbf{m}}_p$ 則等於

$$\hat{\mathbf{m}}_p = \mathbf{G}_g^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{V}_p\mathbf{\Lambda}_p^{-1}\mathbf{U}_p^T\mathbf{d}. \quad (2.4.9)$$

評估所計算出的估計模型解析真實的地球模型（ $\mathbf{m}$ ）的能力，則可透過解析度矩陣

$\mathbf{R}$ （resolution matrix）的計算，由（2.4.9）式推出

$$\hat{\mathbf{m}}_p = \mathbf{R}\mathbf{m} = \mathbf{G}_g^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{G}_g^{-1}\mathbf{G}\mathbf{m} \quad (2.4.10)$$

評估解析度矩陣在空間中分布的情形，可透過模型分散程度（model spread），其定義為

$$\text{model spread} = \|\mathbf{R} - \mathbf{I}\|^2 \quad (2.4.11)$$

但是要解出整個解析度矩陣相當費時，因此本研究僅計算解析度矩陣的對角線項作為模型分散程度的值。

而評估資料誤差會映射多少到模型誤差的共變異矩陣（covariance matrix） $\mathbf{C}_m$ 則是，

$$\mathbf{C}_m = \langle \Delta \mathbf{m}_p \Delta \mathbf{m}_p^T \rangle = \langle \mathbf{G}_g^{-1} \Delta \mathbf{d} \Delta \mathbf{d}^T (\mathbf{G}_g^{-1})^T \rangle = \mathbf{G}_g^{-1} \langle \Delta \mathbf{d} \Delta \mathbf{d}^T \rangle (\mathbf{G}_g^{-1})^T = \mathbf{G}_g^{-1} \mathbf{C}_d (\mathbf{G}_g^{-1})^T \quad (2.4.12)$$

其中 $\Delta \mathbf{d}$ 為資料誤差， $\Delta \mathbf{m}_p$ 為資料誤差映射到模型的誤差。一般如果假設資料彼此互相獨立

（independent），則資料之間的關係為

$$\mathbf{C}_d = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_N^2 \end{pmatrix}, \quad (2.4.13)$$

σ_i^2 代表 d_i 的變異數。

2.4.2 PROPACK

PROPACK 是 Larsen [2005] 所發展的針對「巨大且鬆散的矩陣」透過 Lanczos bidiagonalization 與再正則化（partial reorthogonalization）來準確且有效率的估計奇異值（singular value）與奇異值向量（singular vector）的平行化軟體套件。以下簡介 PROPACK 的運作原理。

首先，對維度為 $M \times N$ 的矩陣 $\mathbf{A}$ 、向量 $\mathbf{u}_j \in \mathbb{R}^m$ 與 $\mathbf{v}_j \in \mathbb{R}^n$ 及純量 α_j 與 β_j ，可以經由 k 次的 Lanczos bidiagonalization 疊代計算後得到 [Paige and Saunders, 1982]，如下所示

1. 給定一個起始向量 $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^m$ ，令 $\beta_1 = \|\mathbf{p}_0\|_2$ 、 $\mathbf{u}_1 = \mathbf{p}_0 / \beta_1$ 及 $\mathbf{v}_0 = 0$ 。
2. 從 $j = 1$ 到 k ：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_j &= \mathbf{A}^T \mathbf{u}_j - \beta_j \mathbf{v}_{j-1} \\
 \alpha_j &= \|\mathbf{r}_j\|_2 \\
 \mathbf{v}_j &= \mathbf{r}_j / \alpha_j \\
 \mathbf{p}_j &= \mathbf{A} \mathbf{v}_j - \alpha_j \mathbf{u}_j \\
 \beta_{j+1} &= \|\mathbf{p}_j\|_2 \\
 \mathbf{u}_{j+1} &= \mathbf{p}_j / \beta_{j+1}
 \end{aligned} \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (2.4.14)$$

其中， $\mathbf{u}_j$ 與 $\mathbf{v}_j$ 被稱為 Lanczos 向量 (Lanczos vector)，並滿足以下的關係式

$$\begin{aligned}
 \alpha_j \mathbf{v}_j &= \mathbf{A}^T \mathbf{u}_j - \beta_j \mathbf{v}_{j-1}, \\
 \beta_{j+1} \mathbf{u}_{j+1} &= \mathbf{A} \mathbf{v}_j - \alpha_j \mathbf{u}_j
 \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

並改寫為緊密的矩陣形式，

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \mathbf{V}_k &= \mathbf{U}_{k+1} \mathbf{B}_k, \\
 \mathbf{A}^T \mathbf{U}_{k+1} &= \mathbf{V}_k \mathbf{B}_k^T + \alpha_{k+1} \mathbf{v}_{k+1} \mathbf{e}_{k+1}^T
 \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

其中 $\mathbf{U}_{k+1} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k+1})$ 、 $\mathbf{V}_k = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ 、 $\mathbf{e}_i$ 為單位矩陣 (unit matrix) 的第 i 行 (column)，而 $\mathbf{B}_k$ 為 lower bidiagonal matrix，如下

$$\mathbf{B}_k = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & & \\ & \beta_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha_k \\ & & & \beta_{k+1} \end{pmatrix} \quad (2.4.17)$$

在確切算術解的情況下，Lanczos 向量是正交的，因此 $\mathbf{V}$ 、 $\mathbf{U}$ 有以下性質存在，

$$\mathbf{U}_{k+1}^T \mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{I}_{k+1}, \text{ 及 } \mathbf{V}_k^T \mathbf{V}_k = \mathbf{I}_k, \quad (2.4.18)$$

其中， $\mathbf{I}_k$ 為 $k \times k$ 的單位矩陣。

由於已經存在十分有效率的對 lower bidiagonal matrix 進行 SVD 的演算法，因此接著對 $\mathbf{B}_k$ 做 SVD 分解得到 $\mathbf{B}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{D}_k \mathbf{Q}_k^T$ ，如此一來 2.4.16 式改寫為

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_{k+1} \mathbf{B}_k \mathbf{V}_k^T = (\mathbf{U}_{k+1} \mathbf{P}_k) \mathbf{D}_k (\mathbf{Q}_k^T \mathbf{V}_k^T) = \tilde{\mathbf{U}}_k \mathbf{D}_k \tilde{\mathbf{V}}_k^T \quad (2.4.19)$$

其中對角線矩陣 $\mathbf{D}_k$ 稱為矩陣 $\mathbf{A}$ 的 Ritz value，而 $\tilde{\mathbf{U}}_k = \mathbf{U}_{k+1} \mathbf{P}_k$ 與 $\tilde{\mathbf{V}}_k = \mathbf{V}_k \mathbf{Q}_k$ 稱為 Ritz vector。若 Ritz value 與 Ritz vector 十分接近真實的奇異值與奇異值向量，則 2.4.19 式稱為矩陣 $\mathbf{A}$ 的 truncated SVD。

但是在電腦計算是有限精確度 (finite-precision) 的情況下，Ritz vector 將會很快的失去其正交性 (orthogonality)，所以 Ritz value 會出現錯誤的多重數值現象，稱為 *doppelgänger* singular values [Larsen, 2005]。因此在之前的研究中在 Lanczos bidiagonalization 的過程中套用「再」正則化 (reorthogonalization) 的方法 [e.g., Yao et al., 1999]，但透過 Gram-Schmidt 演算法進行「完全」再正則化 (full reorthogonalization) 則會消耗許多的時間 [Simon, 1984]，因此在 PROPACK 中利用「部份」再正則化 (partial reorthogonalization) 方法節省計算時間 [Larsen, 2005]。最後，利用 PROPACK 計算 $M \times N$ 的矩陣 $\mathbf{A}$ 的前 k 個奇異值與奇異值向量，其所需的記憶體大小將以 $O(M \times k + N \times k + k^2)$ 的倍率增加。

2.5 走時理論

2.5.1 線性化波線理論 (LRT)

波線理論 (ray theory) 是假設地震波為無限高頻之訊號，因此在地球內部傳遞時，其波前在經過速度異常區段後不會有任何復原 (wavefront healing)，波會「記住」它所走過的任何構造 (圖2-6)，亦即震波的到時與波形只受到無限窄的波線 (ray) 上速度構造所影響，波線以外區域的速度變化則對震波走時的異常沒有任何貢獻。根據費馬定理 (Fermat's principle)，波所走的路徑為兩點之間時間最短的路徑，例如在均質的介質中波線為直線，而在地球一維的平均速度模型中，波線的軌跡則侷限在震源和測站間的大圓深度剖面上，若當側向速度變化存在時，波線會產生彎折 (ray bending)，偏離大圓剖面，因路徑偏折所造成的走時異常與速度擾動 (δc) 的二階變化 (δc^2) 有關，因此在 δc 很小時的線性近似之下可忽略不計；然而當速度異常夠強時，則必需真正考慮波線在三維速度構造中的彎折路徑。因此，波線理論在地震層析成像中被分為兩種方法：一為考慮波線在三維速度構造中的彎折路徑的一般化波線理論 (generalize ray theory, GRT) [Zhao and Hasegawa, 1993; Bijwaard and Spakman, 2000]；另一為忽略波線受三維速度構造影響，僅使用初始的一維模型之下波線路徑作為架構走時殘差和三維速度變化關係的依據，稱之為線性化波線理論 (linearize ray theory, LRT) [Grand et al., 1997; Kárason and van der Hilst, 2001]。本研究使用的參考模型沒有在三維方向有任何的速度變化，速度的擾動量以符合線性近似的假設，並在逆推過程中沒有使用疊代 (iteration)，因此使用 LRT。LRT 假設速度異常的強度遠小於參考速度模型 ($\delta c \ll c_0$)，因此走時異常 δT_{LR} 與波線路徑的關係式可表列如下

$$\delta T_{LR} = - \int_s^r \frac{\delta c}{c_0^2} dl, \quad (2.5.1)$$

2.5.2 香蕉甜甜圈理論 (BKT)

實際上地震波並非如波線理論所假定的為無限高頻的波，當斷層的破裂面積越大時越容易產生低頻的波，而且隨著傳播距離的增加，高頻的波受到地球非彈性的性質呈現衰減的程度較低頻的波更快。且波在低頻時，其繞射、散射所造成的波前復原 (wavefront healing) (圖2-6) 現象就越明顯，也就是說波在傳遞一段距離之後會「忘記」之前所感應的構造。因此單用「無限高頻」的波線理論觀點來看待地震波並不能有效的描述其性質，必須以「有限頻寬」的概念取代之。這類考慮有限頻寬的理論統稱為散射理論 (scattering theory)。在這個觀點下，震波對速度敏感的部份並不侷限在波線路徑上，在波徑周圍的速度異常也會影響有限頻寬的走時。Muller et al. [1979] 是在頻率—波數域下建構模型與資料間關係的先驅者，而真正較完整的應用在非均質速度模型及採樣點不均的情況，要等到 Woodward [1992] 才將此概念引入至地球物理的領域。由於無限頻寬的波線理論忽略了震波頻率對速度構造的不同解析能力，故 Woodward [1992] 分別比較了 Born 與 Rytov 兩種不同線性化的近似手段，改寫新的震波頻率與空間中速度構造的關係，並比較其敏感度算核 (sensitivity kernel, 或稱之為震波對速度構造的敏感範圍) 與波線理論算核的差別。真正有系統利用單一散射 (single-scattering) 理論以及 Born 線性近似的條件引導有限頻寬的概念算出三維速度異常和震波走時的關係是 Marquering et al. [1999] 和 Dahlen et al. [2000]，其中前者用表面波耦合疊加 (surface-wave mode-coupling summation) 建立震波受非均質速度構造產生散射的波場；後者則利用體波合成的方式，直接有效率的計算因散射波干擾所造成的有限頻寬走時對三維速度構造的敏感度算核。根據有限頻寬理論，波徑上的速度異常對由交叉對比所量得的有限頻率走時殘差完全沒有任何貢獻，相應的敏感度最大的區域則是在波徑周圍的區域，其寬度與震波波長和傳遞距離有關，相當於所謂第一夫瑞奈帶 (first fresnel zone, $\sim \sqrt{\lambda L}$ ， λ 為波長， L 為傳遞距離)。從切震源到測站的大圓面路徑深度剖面來看，敏感度算核的形狀像香蕉；而垂直大圓面的敏感度則如同甜甜圈般，其圓心是空心的，因此有限頻寬理論又被暱稱為「香蕉—甜甜圈理論」[Marquering et al., 1999]。(如圖2-7)

總而言之，描述觀測震波走時異常 δt 和三維地球速度模型的關係可寫成

$$\delta T = \iiint_{\oplus} K_c(\mathbf{x}, \omega) \left(\frac{\delta c(\mathbf{x})}{c_0} \right) d^3 \mathbf{x} , \quad (2.5.2)$$

而敏感度算核
$$K_c(\mathbf{x}, \omega) = \frac{-1}{2\pi c_0^2} \left(\frac{L}{L' L''} \right) \frac{\int_0^\infty |p_0(\omega)|^2 \omega^3 \sin(\omega \Delta T) d\omega}{\int_0^\infty |p_0(\omega)|^2 \omega^2 d\omega} ,$$

$$\Delta T = T' + T'' - T$$

其中 T' 、 T'' 和 T 分別代表震源到散射點、散射點到測站以及震源到測站之間波徑的走時； L' 、 L'' 和 L 則為其對應的波徑長度； ω 代表波的頻率（圖2-5）。

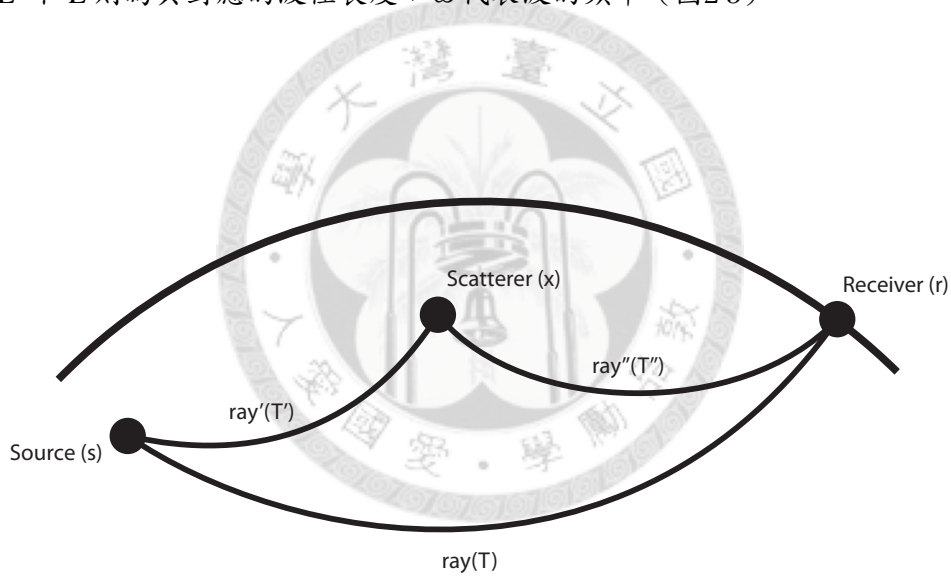
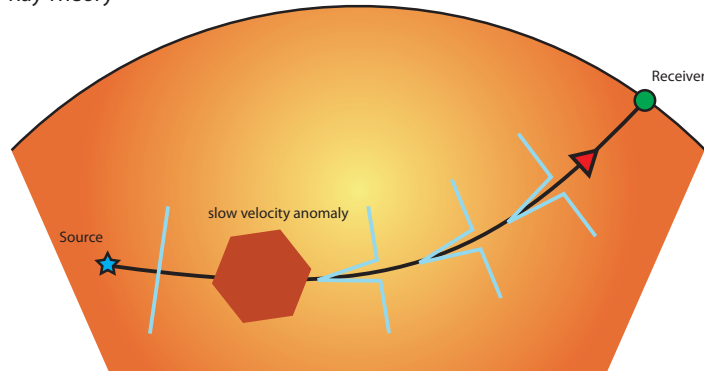


圖2-5 震源（s）、測站（r）與散射點（x）示意圖。Born 近似考慮空間中所有由震源到散射點的波徑（ ray' ）以及散射點到測站的波徑（ ray'' ）的散射波場與直達波（ ray ）在不同頻率的能量彼此相互干涉之後對觀測走時的影響； T' 、 T'' 與 T 分別代表震源到散射點、散射點到測站之間以及震源到測站波徑的走時。

Ray Theory



Finite-Frequency Theory

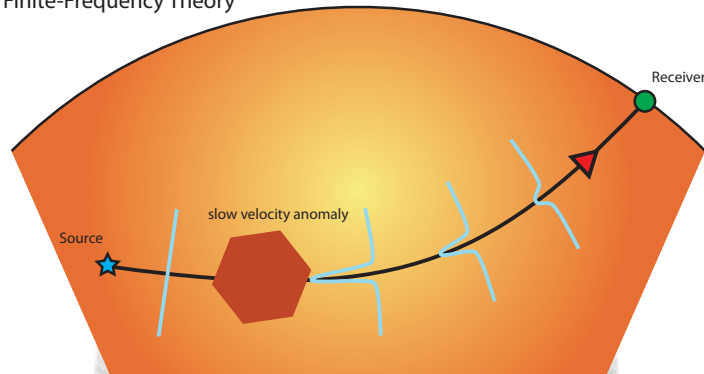


圖2-6 (上)波線理論與(下)香蕉-甜甜圈理論描述波前形狀隨推進距離變化的示意圖。香蕉-甜甜圈理論有波前復原(wavefront healing)的現象。

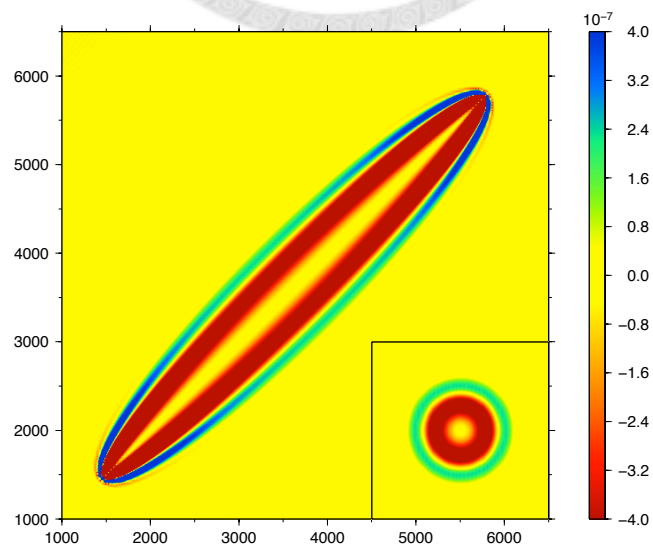


圖2-7 有限頻寬理論的敏感度算核。在震源—測站連線上的速度構造對走時沒有任何的貢獻(黃色部份為零)。

2.6 參數化 (Parameterization)

由於震源—測站分布不均造成波線在地球內部有些區域較密而有些區域較為疏鬆，若使用一般格點參數化法 (simple-grid parameterization)，在波線較密之處可能會犧牲解析較短波長、小尺度的速度構造變化，而在較疏之處則產生不被走時資料約束的假構造。因此我們利用小波轉換 (wavelet transform) 對模型進行多重尺度參數化 (multi-scale parameterization) [Chiao and Kuo, 2001; Chiao and Liang, 2003]。速度模型在空間的變化透過小波轉換拆解成不同尺度以進行逆推，由觀測資料自行決定空間中何處的解析度較高，而不帶有任何的人為的先驗在裡面。

在此，以 $\mathbf{m}'$ 代表經由小波轉換所參數化的模型，與原本的一般格點參數化模型 $\mathbf{m}$ 之間的關係可透過轉換算子 $\mathbf{W}$ (transforming operator) 表示成

$$\mathbf{m}' = \mathbf{W}\mathbf{m} \quad (2.6.1)$$

引入 $\mathbf{W}$ 的反轉換算子 (inverse operator)， $\mathbf{W}^{-1}$ ，可將 (2.4.3) 改寫成對多重尺度參數化的模型和資料的物理律，

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{m} = \mathbf{G}'\mathbf{m}', \quad (2.6.2)$$

而多重尺度之下的解析度矩陣 $\mathbf{R}'$ ，也可用類似的方式導出

$$\mathbf{R} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{R}'\mathbf{W}, \quad (2.6.3)$$

同樣的，在多重尺度之下的模型共變數矩陣 $\mathbf{C}_m'$ ，則變成

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}_m'(\mathbf{W}^{-1})^T, \quad (2.6.4)$$

將在多重尺度有限參數化所計算出來的解析度矩陣和模型共變數矩陣轉換成原本在一般格點參數法下的型態，就可以比較兩參數化方式之間的優劣或異同之處。

2.7 正則化 (Regularization)

之前所提到的震源—測站分布不均會造成非唯一解的問題，也就是說格拉姆矩陣 (Gram matrix) 經過奇異值分解後，隨著模型在空間中採樣程度的好壞，奇異值也會有所變化 (圖2-8)，而沒有被採樣到的地方，其奇異值就為零。然而從式 (2.4.9) 中可看出逆推出的模型參數和奇異值倒數成正相關，因此資料中有任何測量誤差時，映射到模型參數的誤差會受到這些不受資料約束很小或零的奇異值無限放大。因此我們需要透過正則化的手段去壓抑那些較小的奇異值。

一般有兩種不同的手段來壓抑奇異值比較小的模型參數：

- (1) 阻尼 (Damping)：在逆推過程中將奇異值上加上一阻尼值 θ (damping factor)，以壓抑那些過小奇異值的倒數，如圖2-9a所示。而經過添加阻尼之後的模型、解析度矩陣與模型共變異矩陣變為

$$\hat{\mathbf{m}}_p = \mathbf{V}_p \left(\frac{\Lambda_p}{\Lambda_p^2 + \theta^2 \mathbf{I}} \right) \mathbf{U}_p^T \mathbf{d}, \quad (2.7.1)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{G}_g^{-1} \mathbf{G} = \mathbf{V}_p \left(\frac{\Lambda_p^2}{\Lambda_p^2 + \theta^2 \mathbf{I}} \right) \mathbf{V}_p^T, \quad (2.7.2)$$

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{G}_g^{-1} \langle \Delta \mathbf{d} \Delta \mathbf{d}^T \rangle (\mathbf{G}_g^{-1})^T = \langle \Delta \mathbf{d} \Delta \mathbf{d}^T \rangle \mathbf{V}_p \frac{\Lambda_p^2}{(\Lambda_p^2 + \theta^2 \mathbf{I})^2} \mathbf{V}_p^T. \quad (2.7.3)$$

- (2) 閾值 (Truncation)：設定奇異值的一個門檻值，將過小的奇異值刪去。而模型、解析度矩陣與模型共變異矩陣一樣由 (2.4.9) 式求出，只是將低於門檻值的奇異值和對應的 $\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{U}$ ，全部視為零空間 (null space)，如圖2-9b所示。

最後，利用模型共變異數與模型分散程度 (model spread) 之間的消長曲線 (trade-off curve) 以決定模型的「最佳合理解」。

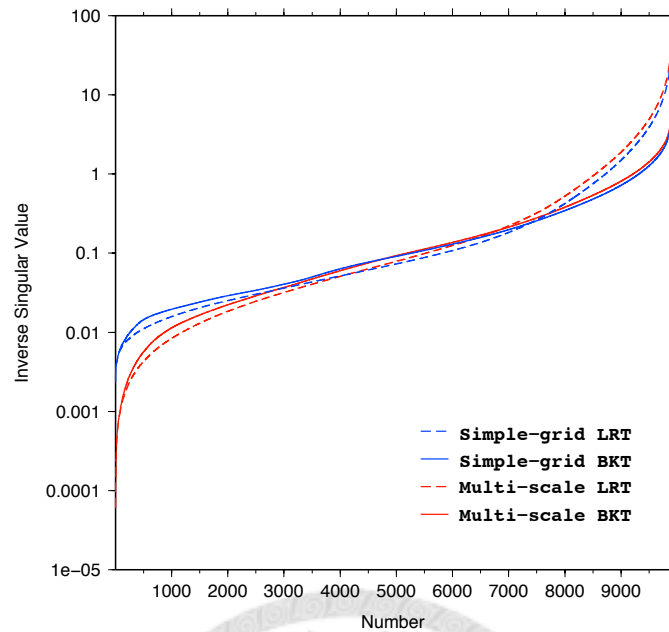


圖2-8 奇異值分布圖。本圖顯示了在不同參數化方法與不同走時理論之下的奇異值倒數。

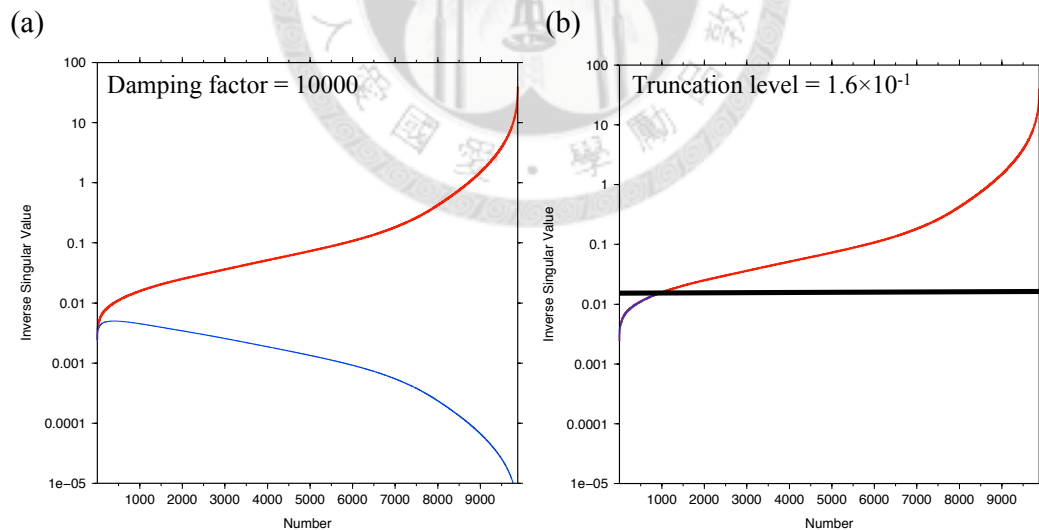


圖2-9 阻尼與閾值。紅色與藍色線分別表示原本的與做過正則化後的奇異值倒數曲線。(a)圖顯示加上一阻尼值後，整條奇異值倒數曲線隨著奇異值的大小而改變，奇異值越小的地方壓抑的越明顯。(b)圖則是不改變奇異值的曲線，而是加上一門檻值，低於門檻值則捨去不用。

第三章 結果

依照第二章所描述的方法，建立速度構造後再藉由數值方法解波動方程式，得到「真實」地震波波形，進而量測其走時殘差作為進行速度模型逆推的資料。之後再分別比較由不同走時理論、參數化與正則化方法所求得各種逆推參數和速度模型的差異。

3.1 模型最佳合理解

承續 2.7 節，當模型以不同阻尼值或是閾值逆推時，其呈現出來的結果會有相當的差異存在。因此為了以公正客觀的方式選取我們所需要的模型最佳合理解，我們需要一些統計學上的數值輔助。

其一為資料擬合程度（variance reduction, v.r.），表示模型解釋觀測資料的能力，其定義為

$$\text{v.r.} = \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{d}_i - d_i)^2}{\sum_{i=1}^N d_i^2} \right] \times 100\% \quad (3.1.1)$$

其中 $\hat{d}_i$ 為解得的模型所預測的走時殘差； d_i 為所觀測到的走時殘差。

其二為模型分散程度（model spread, m.s.），表示模型在空間中的解析能力，其定義為

$$\text{m.s.} = \|\mathbf{R} - \mathbf{I}\|^2 \quad (3.1.2)$$

也就是解析度矩陣（resolution matrix, $\mathbf{R}$ ）減去單位矩陣（identity matrix, $\mathbf{I}$ ）之後每一元素平方的總和。

其三為模型共變異數，用來表示觀測資料誤差導致模型誤差的程度，即

$$\text{model cov} = \sum_{i=1}^M (\mathbf{C}_m)_{ii} \quad (3.1.3)$$

其中 $\mathbf{C}_m$ 為模型共變異矩陣（2.4.12式）。

其四為模型範數（model norm）或長度，本研究採用「L₂ norm」的定義，也就是所有模型參數的幾何平均數。即

$$\text{model norm} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M m_i^2} = \|m_i\|_{L_2} \quad (3.1.4)$$

在震波層析成像中的眾多可能解之中如何選取「最佳合理解」，通常是透過上述幾種統計參數之間的消長關係（trade-off relation）來決定。本研究因已可求得解析度矩陣，所以可直接比較模型共變異數對模型分散程度作圖的消長曲線（trade-off curve），為了不偏頗過於強調模型的解析度而增加模型的變異度，或是反之為了降低模型誤差而犧牲模型的解析度，通常以選取L型曲線中曲率最大的地方，即「折衷點」附近的結果作為最佳解，如圖3-1所示。另外，亦嘗試比較模型共變異度或是模型範數與資料擬合程度的消長關係（圖3-2和3-3）。由模型共變異數與模型分散程度之間的關係（圖3-1）可知，當模型分散程度越大，就代表解出的每個空間點上的速度模型受到較大周遭區域的速度構造所污染，也就是說觀測資料的採樣分布對模型參數規範所具備的解析能力下降，但相對地解出的模型其共變異數或誤差也下降，這是因為每點位置的速度構造由較大周遭區域資料採樣平均之後的結果，較不易受到觀測資料的錯誤所影響；反之亦然。從資料擬合程度對模型共變異數的消長情形（圖3-2）可知，資料擬合程度越高，即模型越能夠解釋所觀測到的資料，則實際觀測資料無可避免的雜訊或是人為測量錯誤所造成的誤差將勢必造成很大的模型共變異度和誤差，降低模型的可信度；同時亦使得模型範數即速度異常的強度不合理的增大（圖3-3）。反之若是使模型誤差和範數降低，一方面雖抑制了資料誤差對模型所產生的干擾，但也同時使得模型所預測的資料和實際觀測資料的擬合程度降低。總而言之，以模型共變異數對模型分散程度的消長情況下，就是在盡可能提昇模型解析度且讓資料誤差影響模型降到最小；或是以資料擬合程度對模型範數的消長情形來說，就是在不失去資料擬合程度的情況下，盡可能的讓模型範數越小。

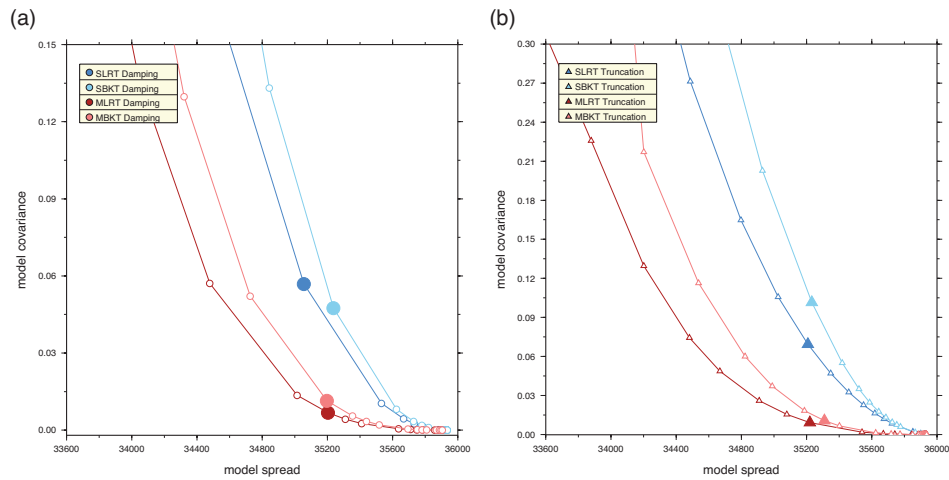


圖3-1 模型共變異數對模型分散程度消長曲線圖—高斯隨機模型- I。

圓圈與三角形分別為使用阻尼值與閾值的正則化方法。藍色系與紅色系圖示分別為使用一般格點參數化與多重尺度參數化方法。淺色系與深色系分別為使用香蕉—甜甜圈與線性化波線理論。本圖為高斯隨機模型的真實走時差加上一個標準差的高斯隨機亂數之下的結果，而較大的點為所選取的最佳合理解。

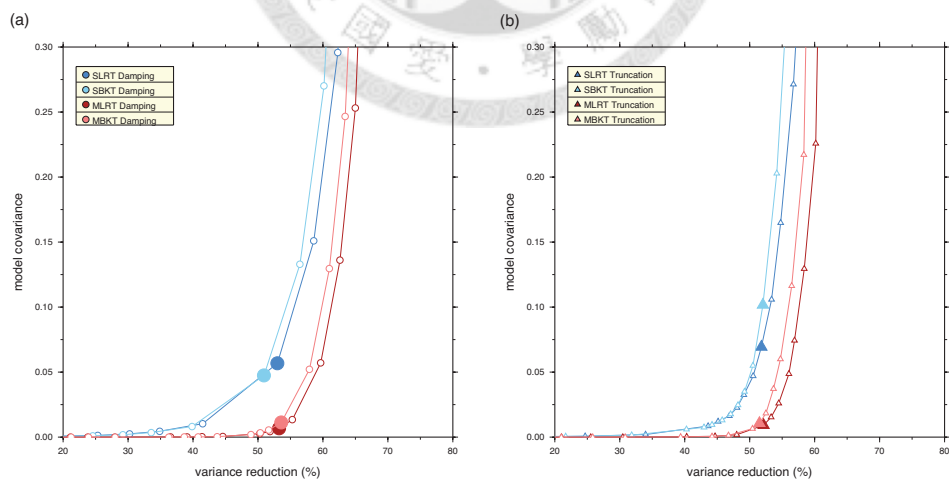


圖3-2 模型共變異數對資料擬合程度消長曲線圖—高斯隨機模型- I。

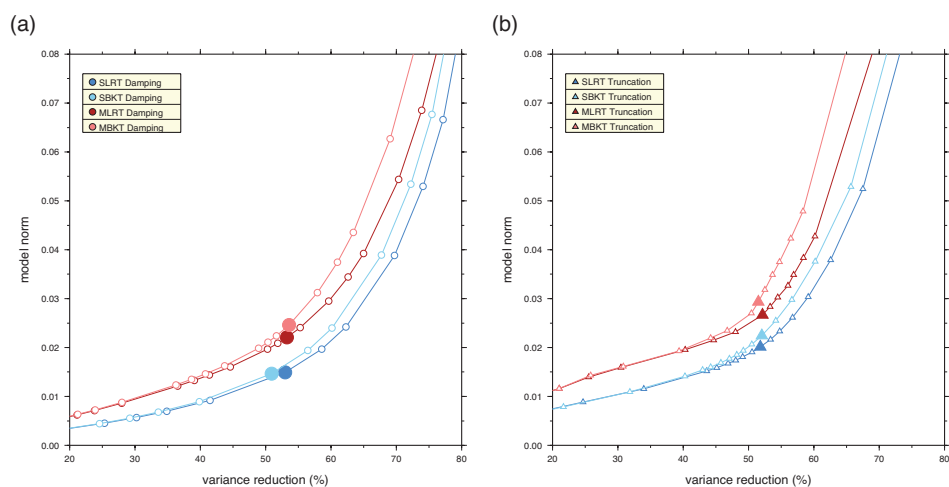


圖3-3 資料擬合程度與模型範數消長曲線圖—高斯隨機模型-I。較大的點為所選取的最佳合理解，大致在擬合程度為 55% 左右。

3.2 高斯隨機模型（Gaussian random model）— I

根據圖3-1選取位於「折衷點」附近的模型作為最佳合理解，而選取出的解與其正則化方法所使用的參數如表3-1所示。以下將對走時理論（3.2.1節）、正則化手段（3.2.2節）以及參數化方法（3.2.3節）對逆推結果的影響分別闡述。

表3-1 高斯隨機模型逆推參數 - I。

參數化與走時理論	代號	閾值	圖	阻尼值	圖
一般參數化—線性波線理論	SLRT	1.8×10^{-1}	圖3-4a	10000	圖3-4c
一般參數化—香蕉甜甜圈理論	SBKT	1.4×10^{-1}	圖3-4b	10000	圖3-4d
多重尺度參數化—線性波線理論	MLRT	1.0×10^{-2}	圖3-4e	50000	圖3-4g
多重尺度參數化—香蕉甜甜圈理論	MBKT	8.4×10^{-3}	圖3-4f	30000	圖3-4h

3.2.1 走時理論：LRT v.s. BKT

首先比較不同走時理論在使用相同的參數化和正則化手段逆推所得到的結果的差異，以一般參數化使用閾值正則化為例（圖3-4a與3-4b），由於 LRT 與 BKT 的敏感度算核在空間中打開寬度與分布方式不同，因此兩者的解析度矩陣與模型共變異數矩陣在空間上的分布也有所不同。在圖3-4a中，LRT 的解析度矩陣與模型共變異數矩陣明顯受到波線的幾何分布影響而十分的粗糙；但在圖3-4b中，由於 BKT 的三維敏感度算核並非集中在無限窄的波線上，而是圍繞在波徑周圍的空間，其採樣的展距寬度顯然較LRT的敏感度算核要寬，所以即使波線不交錯，BKT 的算核仍有可能彼此重疊，因此在空間中的分布較為均勻，受到波線分布的影響不大，因此其解析度矩陣與模型共變異數矩陣較不受到波線分布的影響，是以較平均的方式散佈在空間中，而解出的速度構造沿重覆波線方向延展，即x方向的情形亦相對較不嚴重（參見圖3-4a和3-4b在水平第13和15層的構造）。

3.2.2 正則化手段：Damping v.s. Truncation

接著比較不同正則化手段間的差異。在前面的2.7節中有提到不同正則化方法如何對模型產生影響：由於添加阻尼會壓抑整條奇異值曲線，在壓抑模型欠缺約束的地方卻同時連其他正常的地方也受到影響，因此反映在所解出的模型上有類似平滑化（smoothness）效果，由於同時壓低了較大奇異值的比重，通常反映長波長的構造，因此也稍微降低了速度異常的強度；而若利用閾值則是僅去掉那些較小的奇異值，並不會改變整條曲線，因此在逆推的過程中可以保留較小尺度的構造。比較圖3-4a和3-4c，閾值所得到的模型比起阻尼，在相同的資料擬合程度之下，其速度構造有較大的振幅與較小尺度的構造。此外，閾值所計算出的模型解析度與模型共變異數皆比利用阻尼的情況還要來的大。

3.2.3 參數化方式：Simple grid v.s. Multi-scale

最後比較不同參數化方法之下的差異。以在相同的波線走時理論和閾值正則化的逆推架構之下，比較圖3-4a與3-4e的結果。如同之前所述，利用小波理論進行多重尺度參數化可保留速度模型內大尺度構造在頻譜域的解析度，即長波長速度異常的振幅強度，同時可在波線

交錯密集處解析相對短波長的速度變化，因此速度構造較為連續不似一般格點參數化的成像殘破。從比較圖3-4e和3-4f中可看出，不論利用何種走時理論，多重尺度參數化所計算出來的結果在速度模型中皆比一般格點參數化包含了更多長波長的構造以及振幅明顯變大。另外，由於一般格點參數化的模型共變異數與模型解析度在計算上只差在奇異值的大小（2.7.2與2.7.3式），因此兩者之間的在空間中分布的趨勢幾乎相同，如圖3-4a-d所示。但是在多重尺度參數化的情況中，模型共變異數矩陣兩側皆以模型做同樣基底的小波轉換，而模型解析度矩陣則是一邊對模型做同樣基底的小波轉換，而另一邊則與格拉姆矩陣做同樣基底的小波轉換，兩邊使用不同的小波基底。因此兩者之間的趨勢會有所不同（圖3-4e-h）；且在模型共變數矩陣中，由於從小波域（wavelet domain）轉回至空間域（spatial domain）時，空間域中的每一個模型參數皆被不同波長尺度的模型共變異數所疊加，因此轉回至空間域後的模型共變異數反而會比一般格點參數化的還要大，但這並不影響在小波域中利用消長曲線圖選取模型「最佳合理解」的結果。

另一方面在高斯隨機速度模型之下，利用不同的走時理論和參數正則化方法所解的構造與原本模型之間的差異較不易直接作定性的比較，因此以計算模型離差（model misfit）作為定量比較模型逆推解 $\hat{\mathbf{m}}$ 與真實設定模型 $\mathbf{m}^{truth}$ 之間的差異，藉以評估各種逆推手段的優劣勢，其定義如下，

$$\text{model misfit} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\hat{m}_i - m_i^{truth})^2} \quad (3.2.1)$$

即兩者之間差的均方根（root mean square）。從模型離差與資料擬合程度所做的變化曲線圖（圖3-5），在由3-1節描述的消長曲線所決定的最佳合理解附近，其資料擬合程度約 50-55% 之間，所有各種採用不同逆推方式組合的結果，其對應的模型離差都位在曲線的局部最小值（local minimum）。不論使用何種參數化方法或正則化方法，BKT 所計算出的結果都最為符合原本的隨機模型；此外利用阻尼所得到的模型皆比使用閾值所得到的模型更為接近原本的模型。

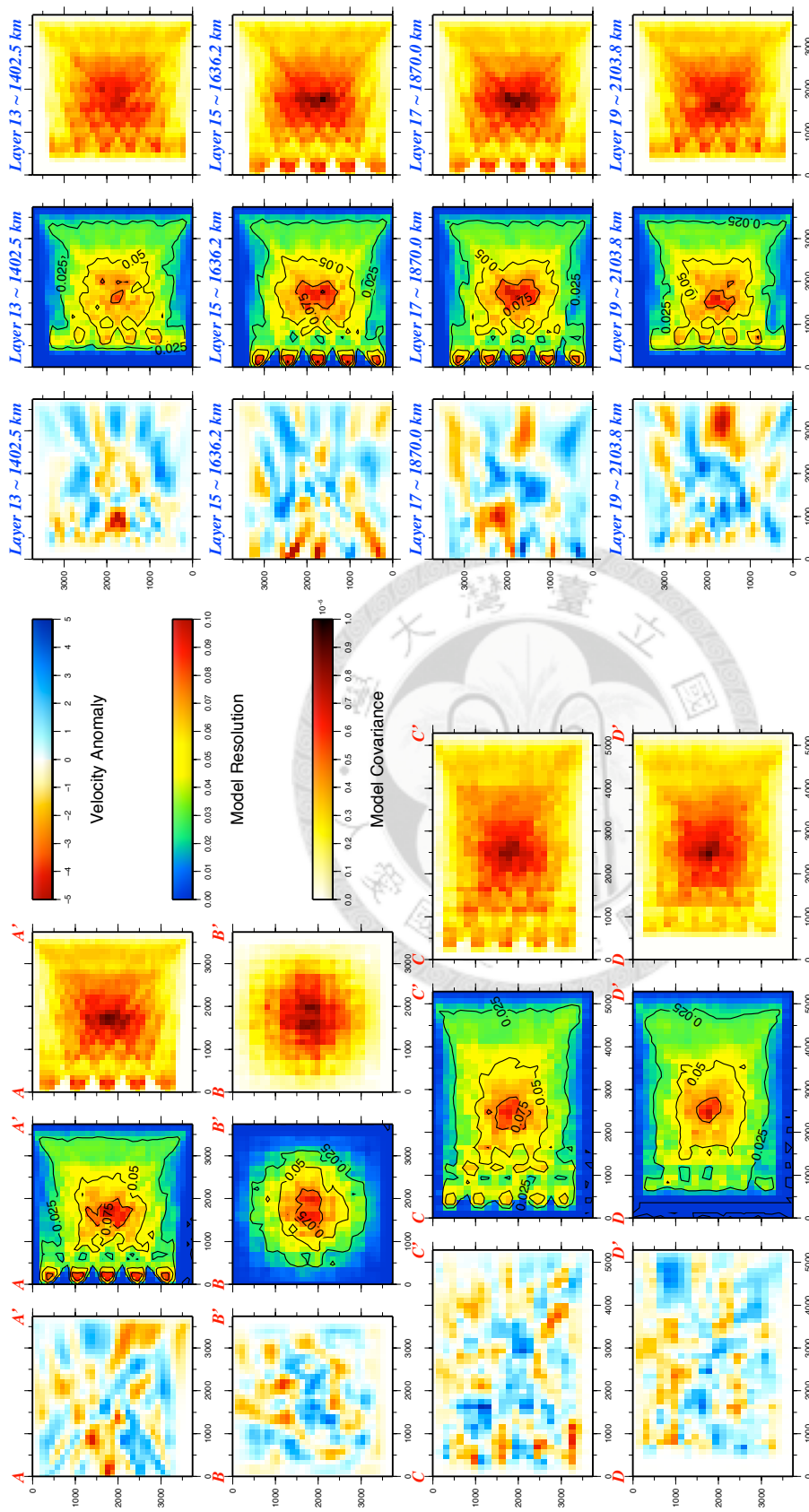


圖 3-4a 高斯隨機模型逆推結果—SLRT—Truncation。左側四圖隨著圖例顏色的不同，分

別為在不同縱剖面上的速度構造、模型解析度與模型共變異數，此處的縱剖面與

圖 2-1 同；右側四圖則是在不同深度上。

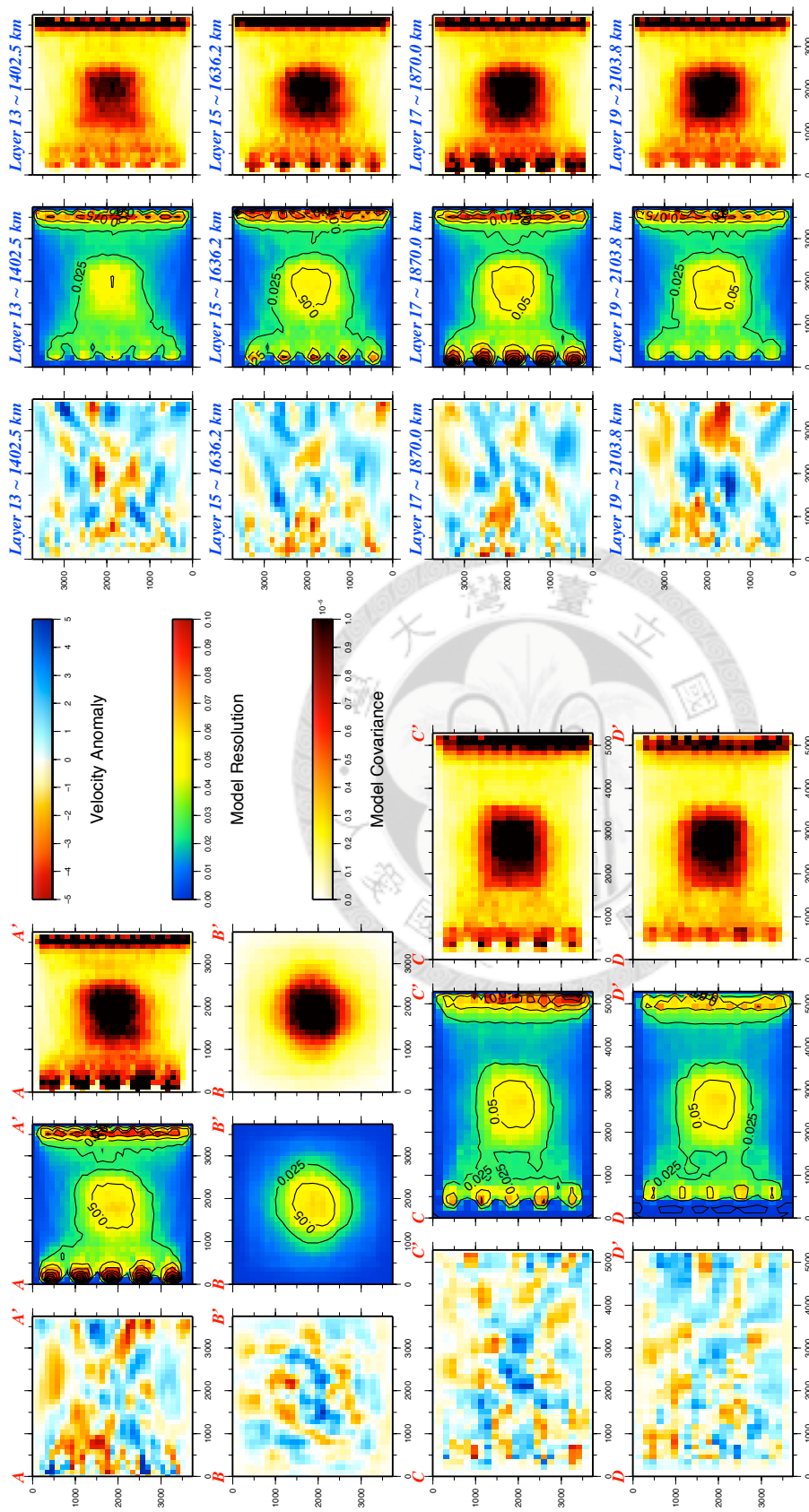


圖 3-4b 高斯隨機模型逆推結果—SBKT—Truncation。

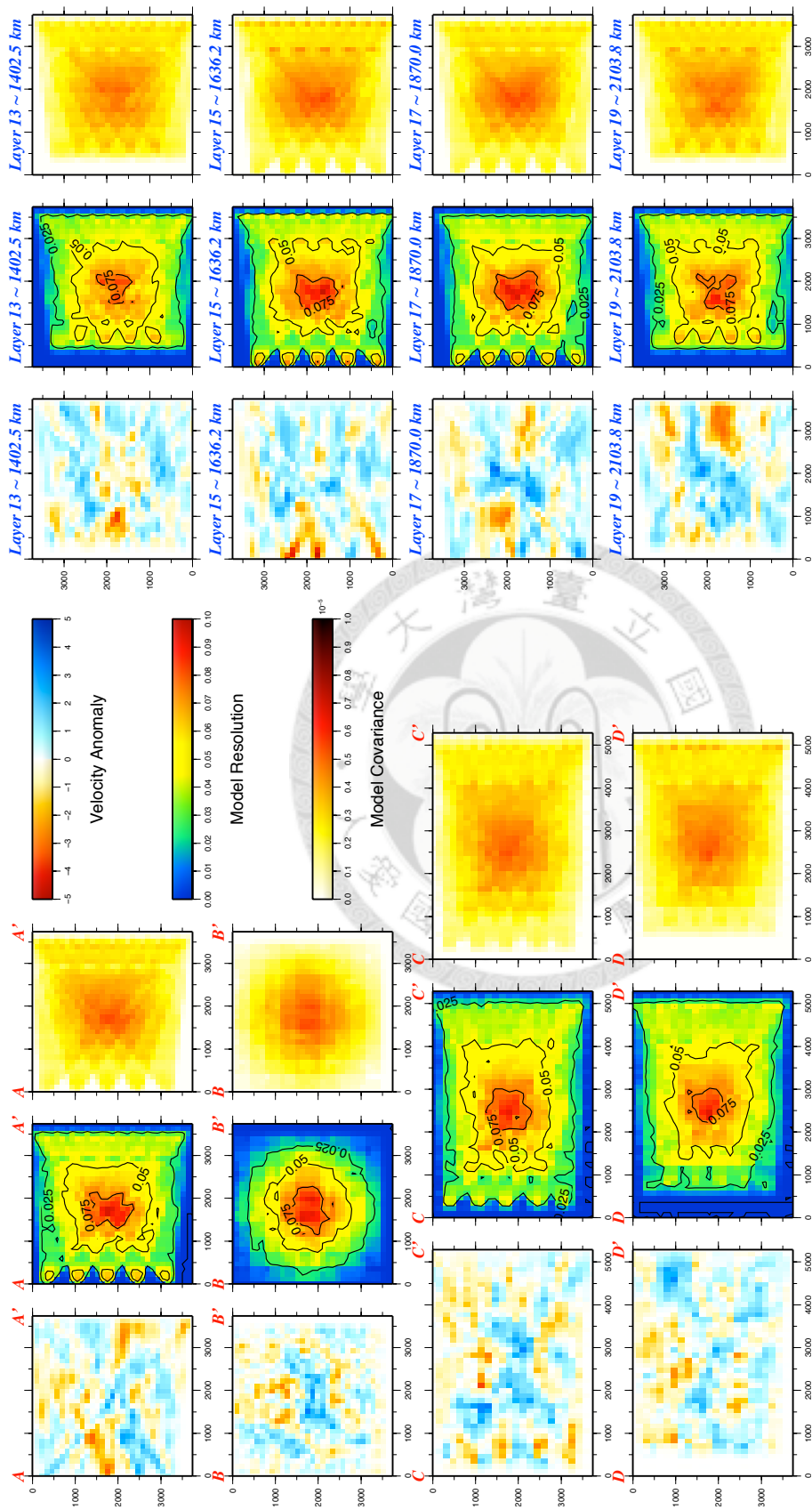


圖 3-4c 高斯隨機模型逆推結果—SLRT—Damping。

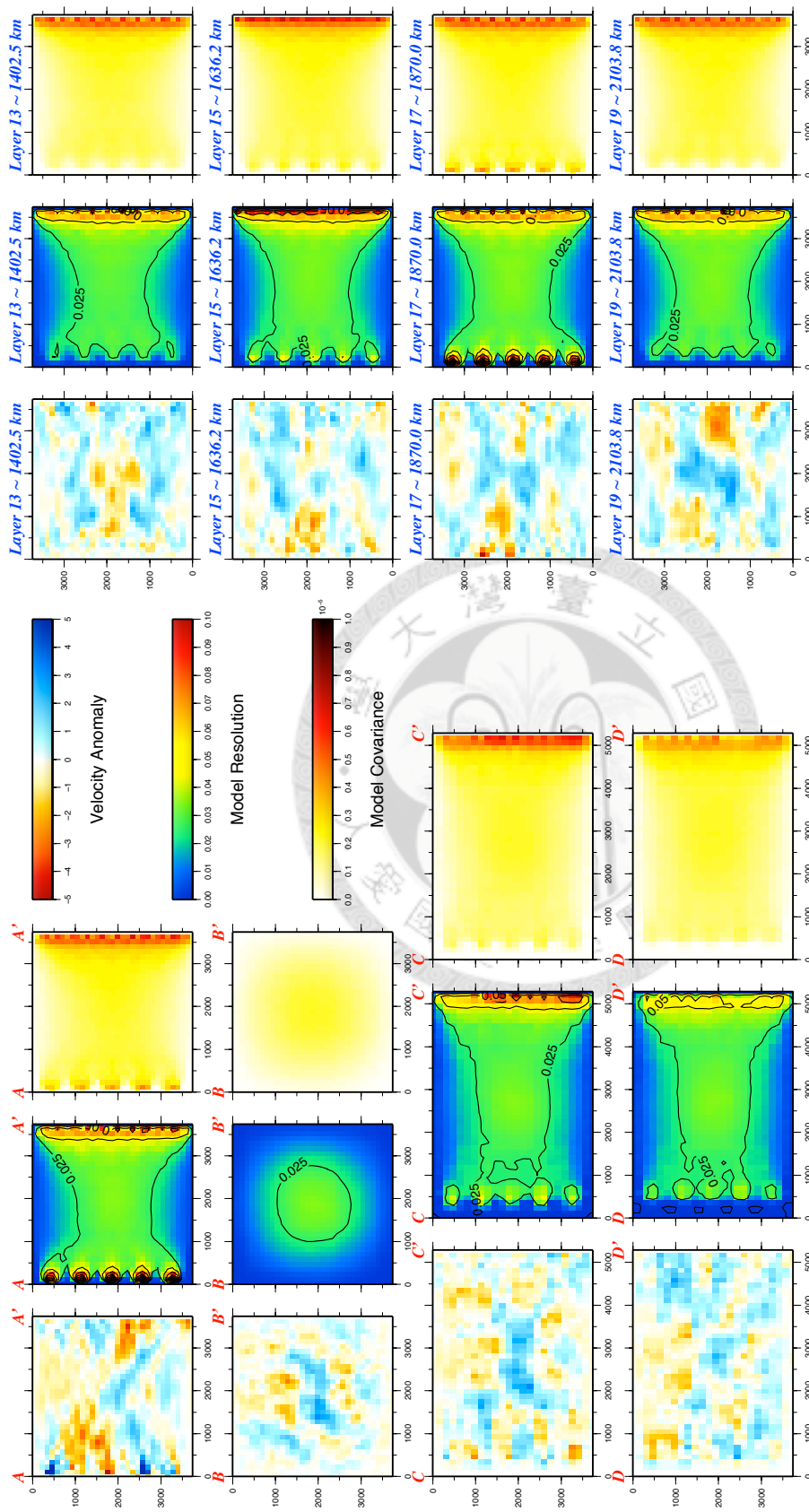


圖 3-4d 高斯隨機模型逆推結果—SBKT—Damping。

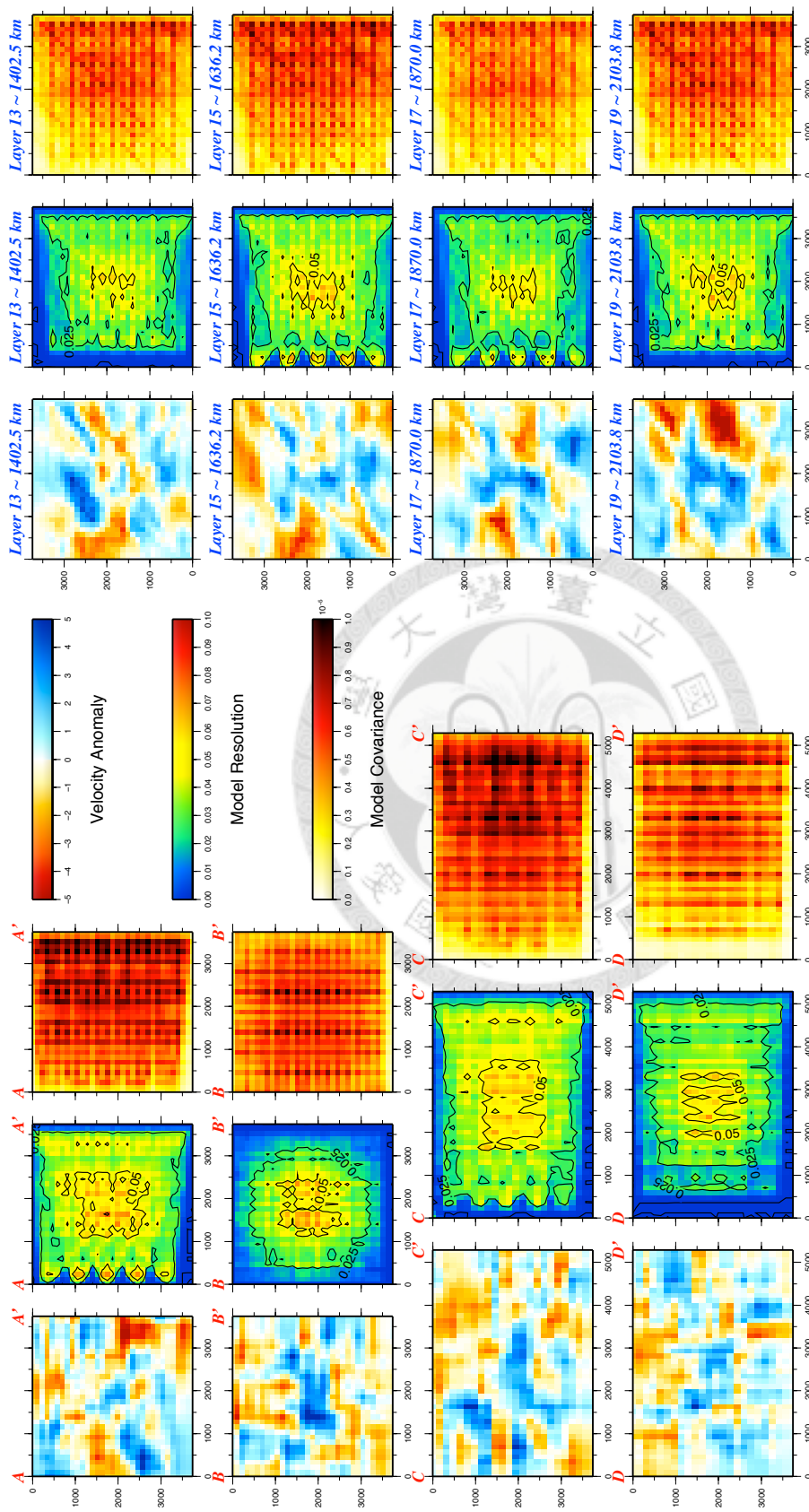


圖 3-4e 高斯隨機模型逆推結果—MLRT—Truncation。

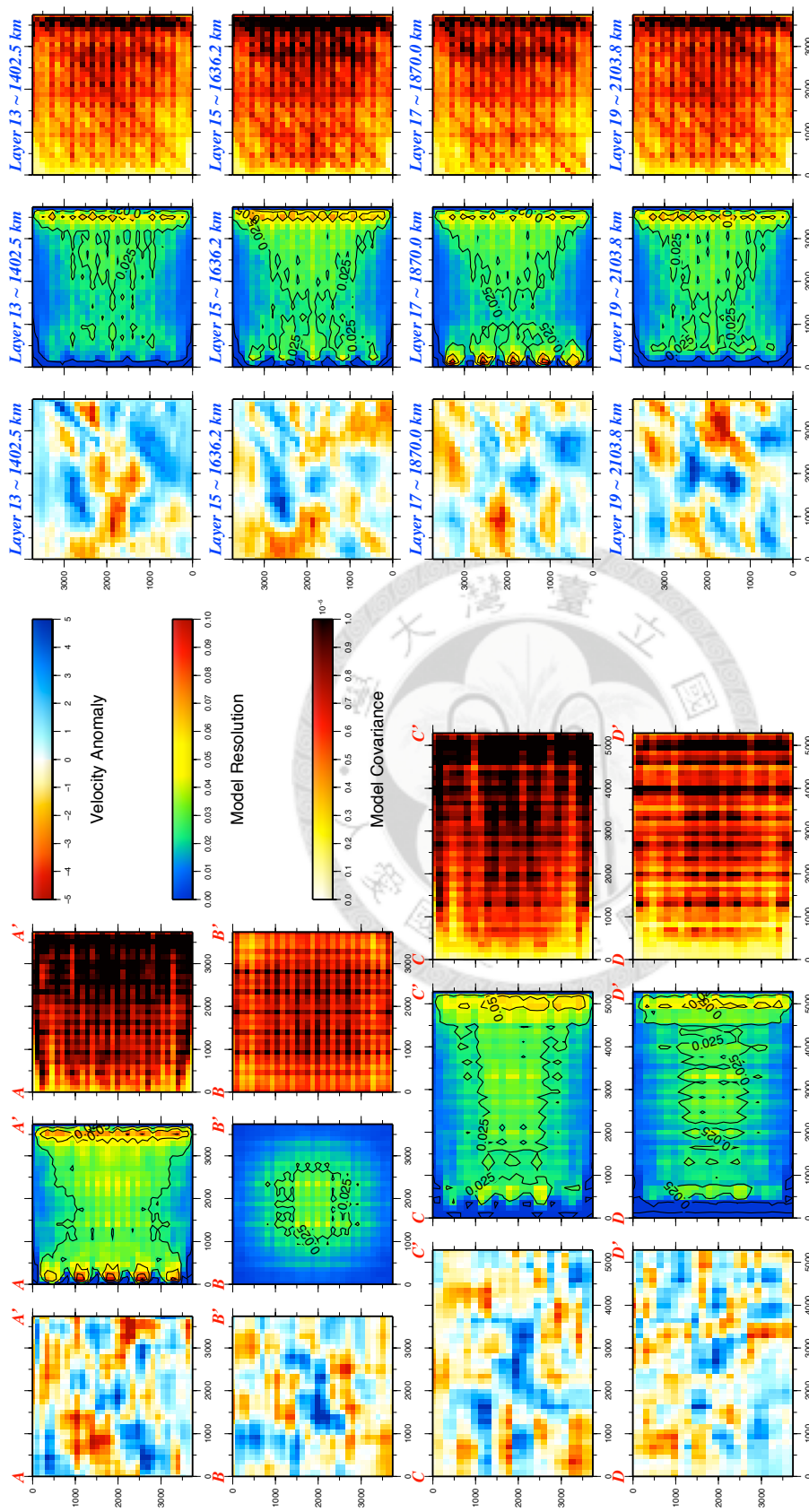


圖 3-4f 高斯隨機模型逆推結果—MBKT—Truncation。

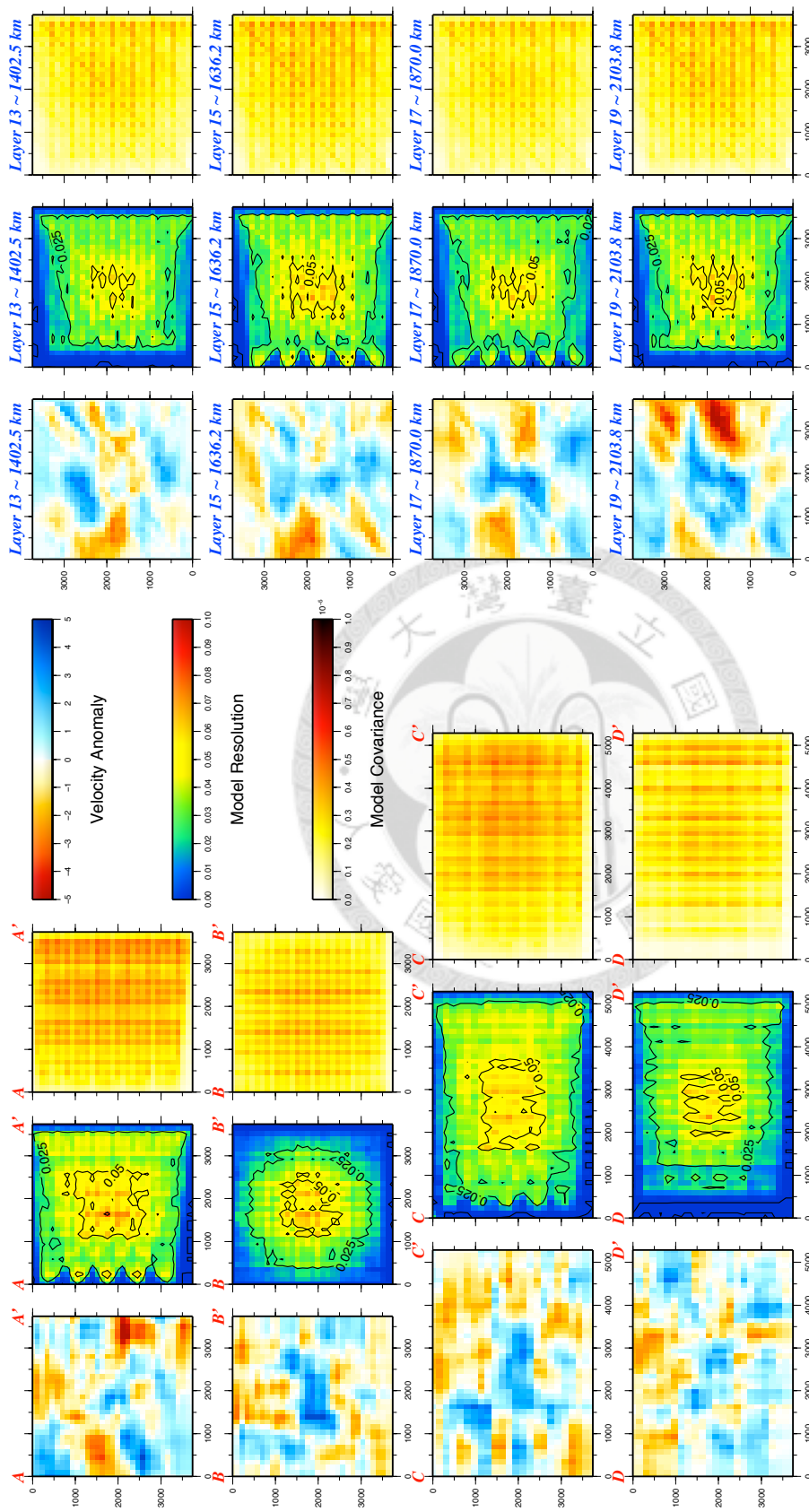


圖 3-4g 高斯隨機模型逆推結果—MLRT—Damping。

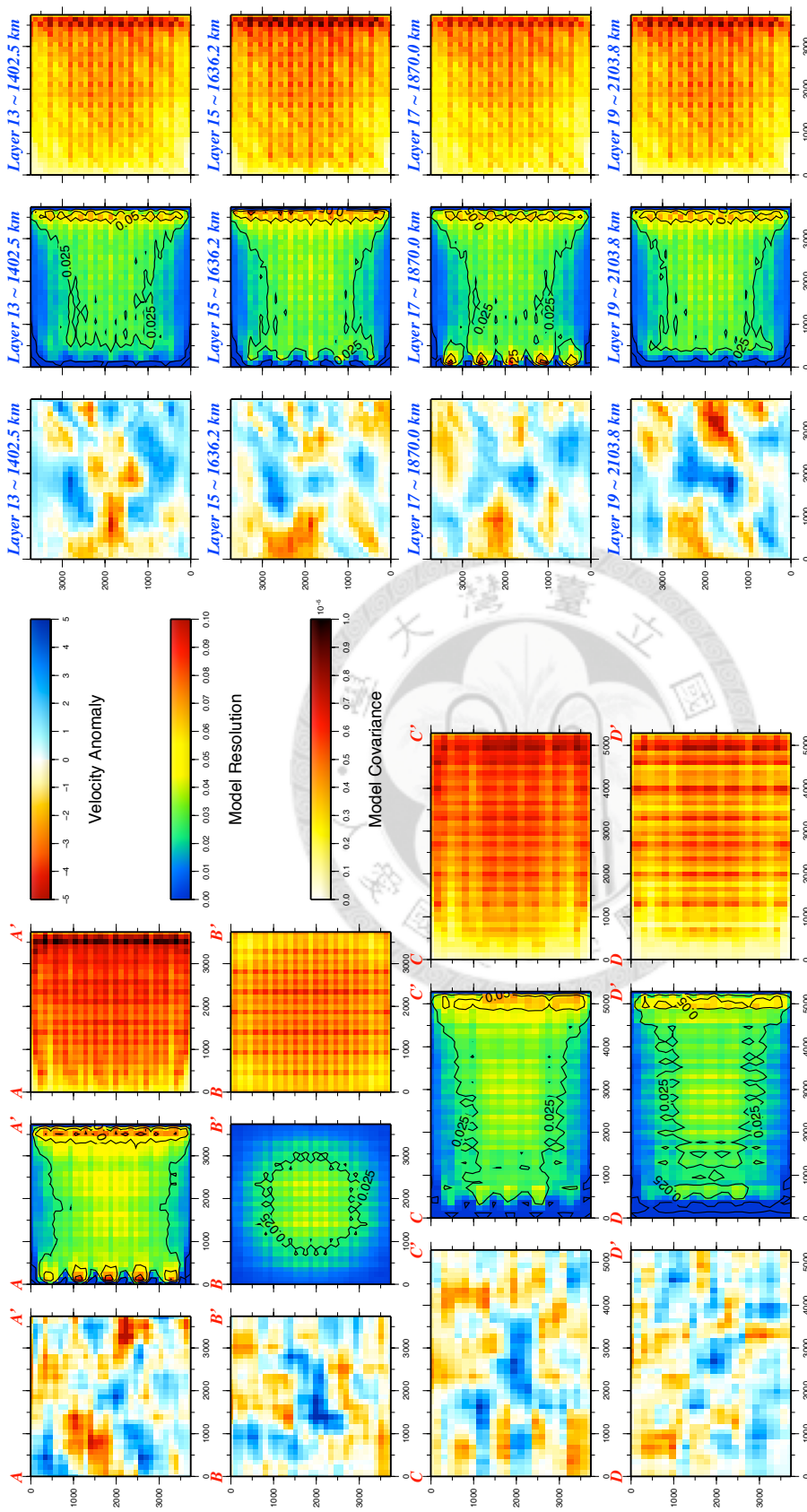


圖 3-4h 高斯隨機模型逆推結果—MBKT—Damping。

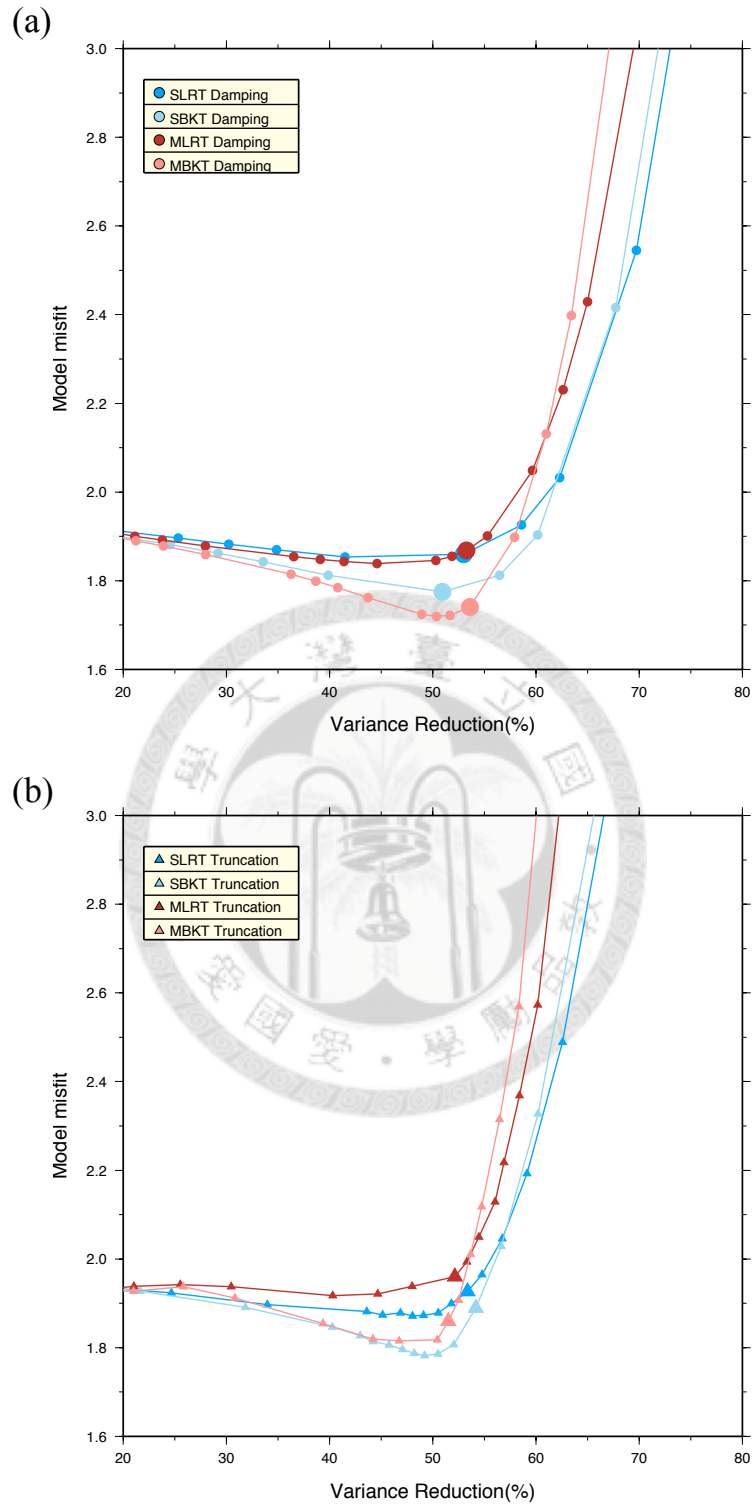


圖3-5 模型離差對資料擬合度變化曲線圖—高斯隨機模型 - I。

3.3 高斯隨機模型 (Gaussian random model) — II

由於3.2節中的測試是將測站與震源擺放在速度模型的相對兩側，因此波線走的方向主要也是沿著這個方向前進，這樣所造成的結果為模型在沿著波線方向所解出來的速度構造並不是很理想，但在垂直於波線方向則是相對良好。造成這樣的原因是不論波線理論或是香蕉甜甜圈理論，在波線前進的方向上並沒有辦法決定速度異常的構造在波線的何處。因此在解地震震波層析成像時，需要波線有所交叉才能夠解出構造在波線或是甜甜圈的哪一個位置上。因此本研究另外做了一項測試：加上另一組震源與測站，擺在與原本那組呈 90 度角的位置上，但也對增加後的觀測資料做篩檢，以保持與3.2節中的測試在觀測資料上有相近的數量，測試的主要目的為在相同的資料量之下，僅改變測站與震源之間的幾何關係，是否能提昇其解析能力。同樣的，本測試也是透過模型共變異數與模型分散程度的消長曲線圖來決定最佳合理解的位置（圖3-6），而選取的逆推參數列於表3-2。

比較圖3-6與3-1，改變測站—震源的幾何型態後，在相同的模型共變異數的情況下，模型分散程度在所有的方向上皆有下降的趨勢，但並不明顯。而將所解出來的速度模型、模型解析度與模型共變異數繪製在圖3-7a~h，可以觀察到解出來的速度模型已經沒有像圖3-4a~h那樣在震源—測站方向上有延伸現象，代表波線適當的交叉可以將速度異常解在正確的位置上。圖3-8是模型離差對資料擬合度作圖，與之前的測試比較，其模型離差明顯的較小，也就是說解出來的模型較前面的測試更為接近原本的速度模型。之後在4.2節討論不同震源—測站幾何型態下的解析度矩陣將會如何變化。

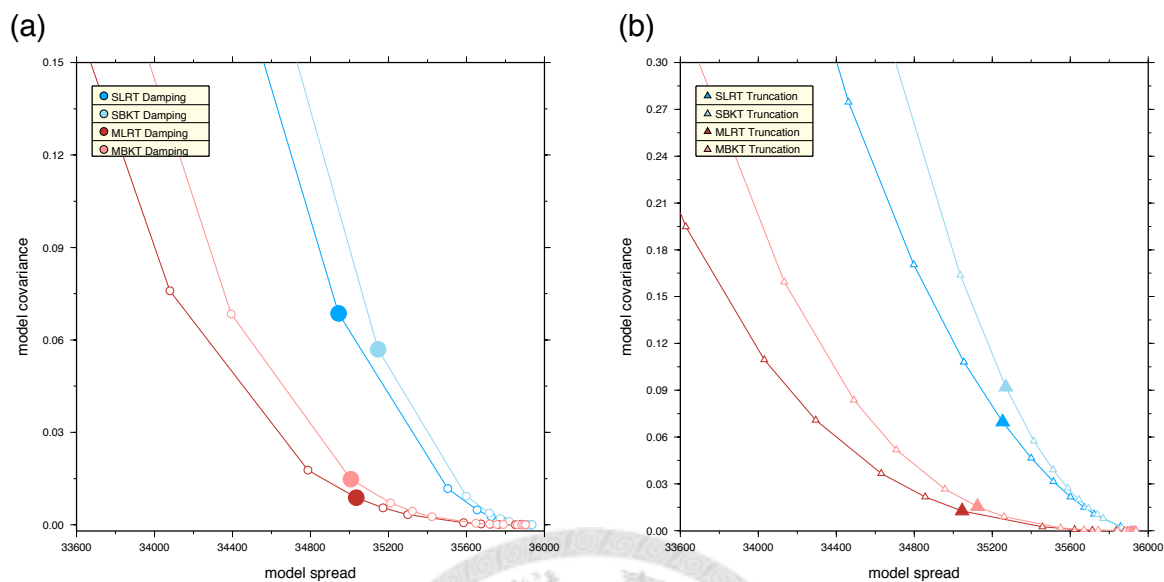


圖3-6 模型共變異數對模型分散程度消長曲線圖—高斯隨機模型-

II。

表3-2 高斯隨機模型逆推參數 - II。

參數化與走時理論	代號	閾值	圖	阻尼值	圖
一般參數化—線性波線理論	SLRT	2.0×10^{-1}	圖3-7a	10000	圖3-7c
一般參數化—香蕉甜甜圈理論	SBKT	1.6×10^{-1}	圖3-7b	10000	圖3-7d
多重尺度參數化—線性波線理論	MLRT	1.0×10^{-2}	圖3-7e	50000	圖3-7g
多重尺度參數化—香蕉甜甜圈理論	MBKT	8.4×10^{-3}	圖3-7f	30000	圖3-7h

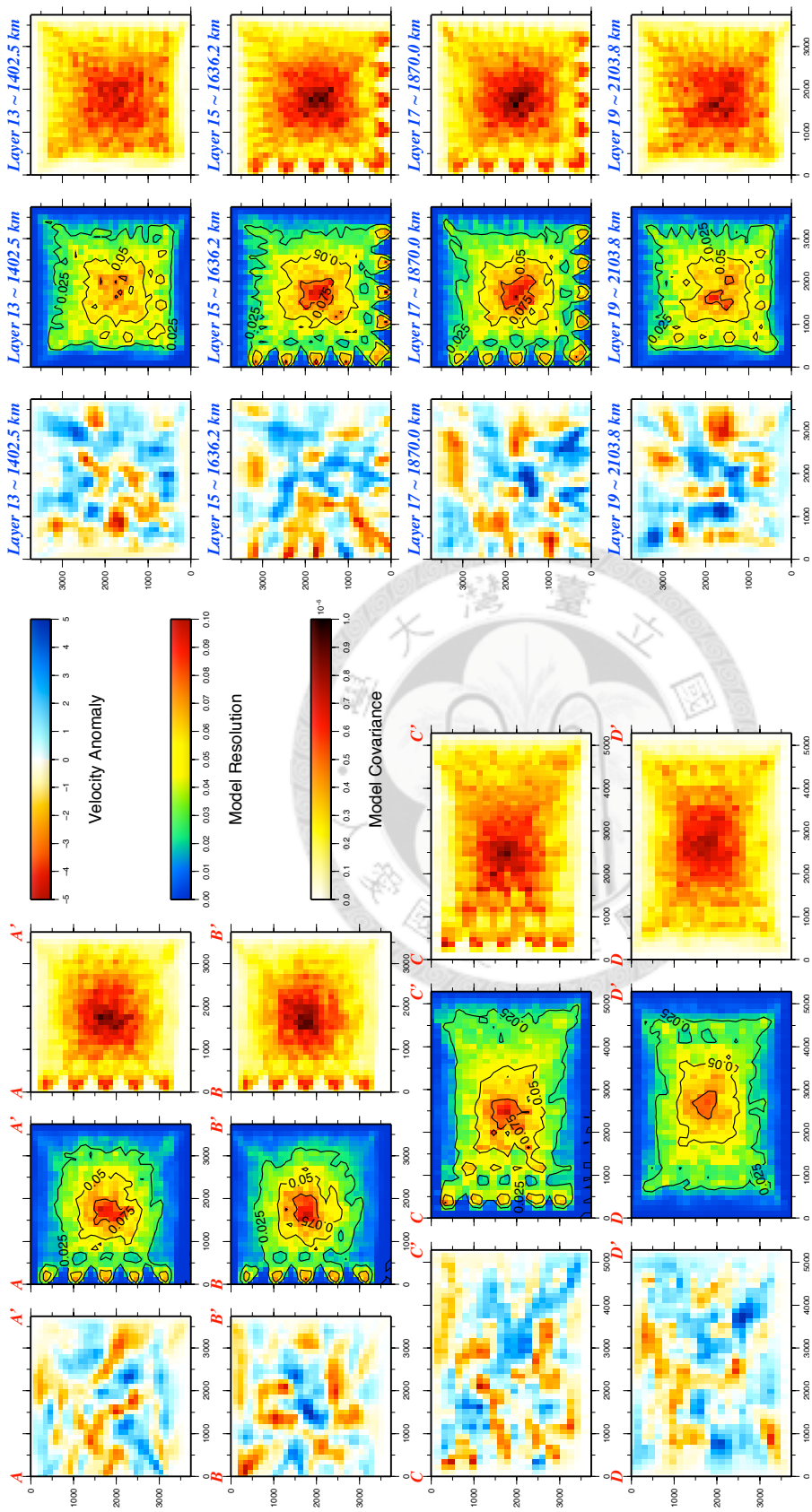


圖3-7a 高斯隨機模型逆推結果—SLRT—Truncation。左側四圖隨著顏色圖例的不同，分

別為在不同剖面上的速度構造、模型解析度與模型共變異數；右側四圖則是在不

同深度上。

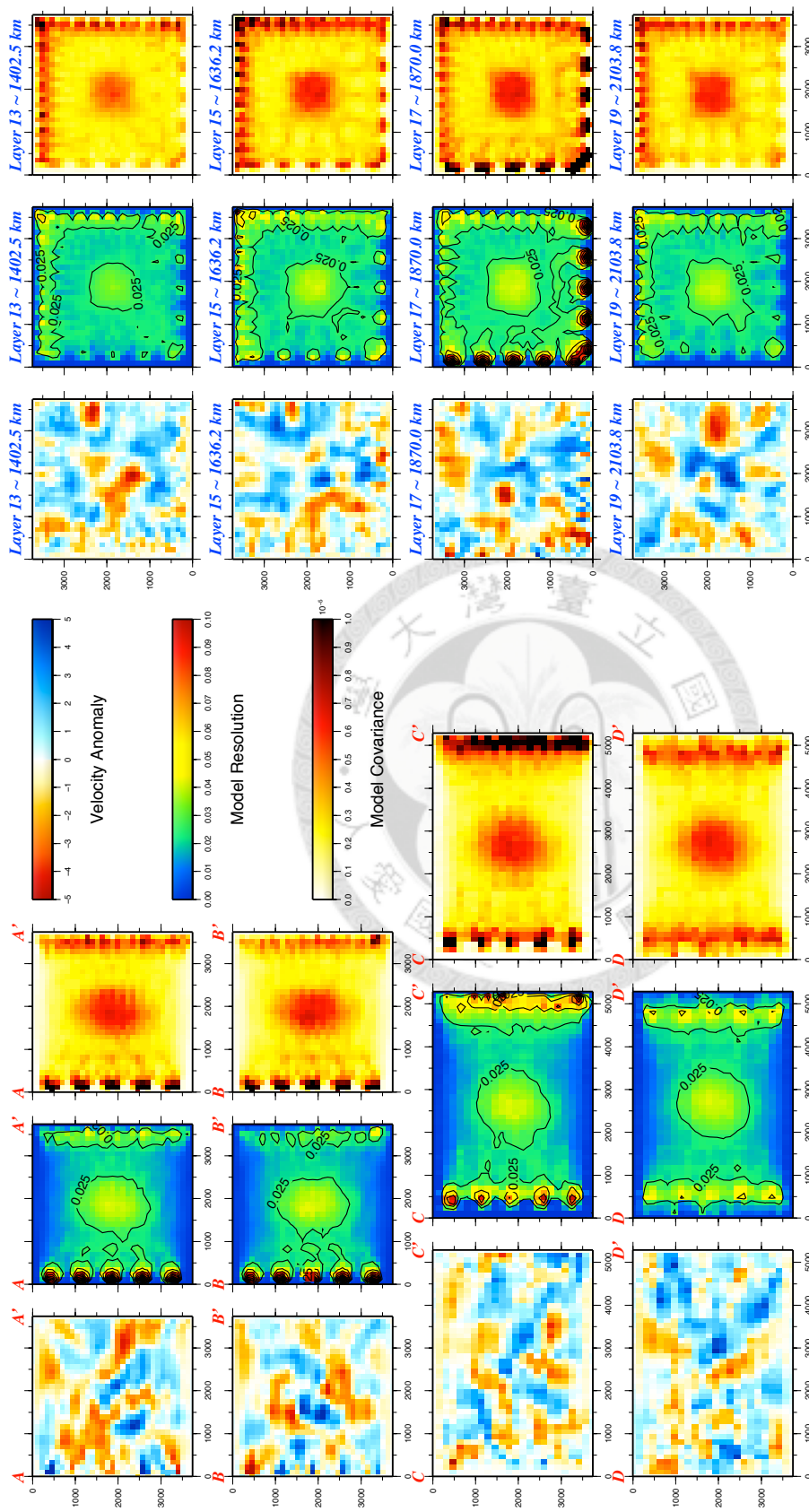


圖 3-7b 高斯隨機模型逆推結果—SBKT—Truncation。

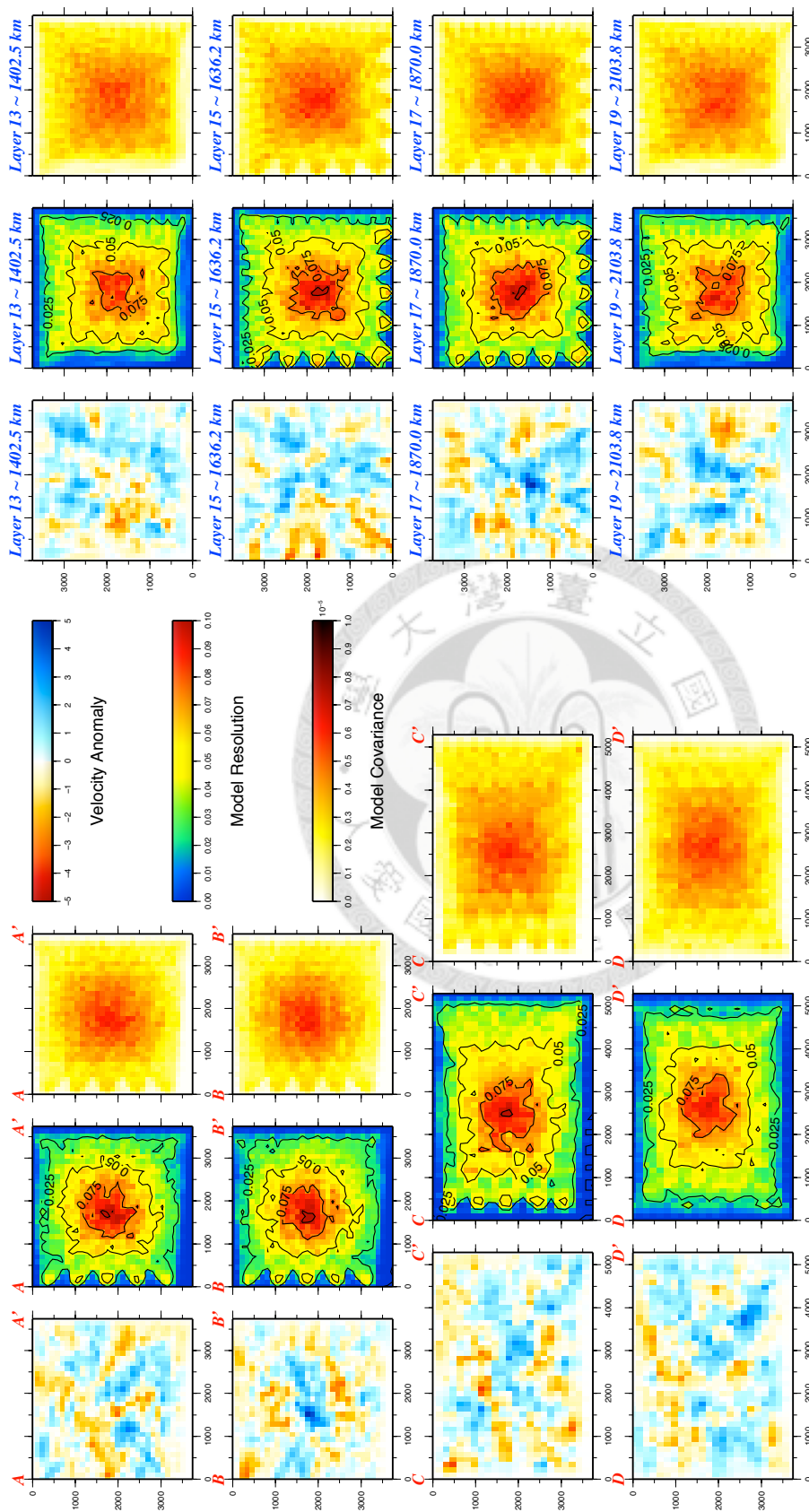


圖 3-7c 高斯隨機模型逆推結果—SLRT—Damping。

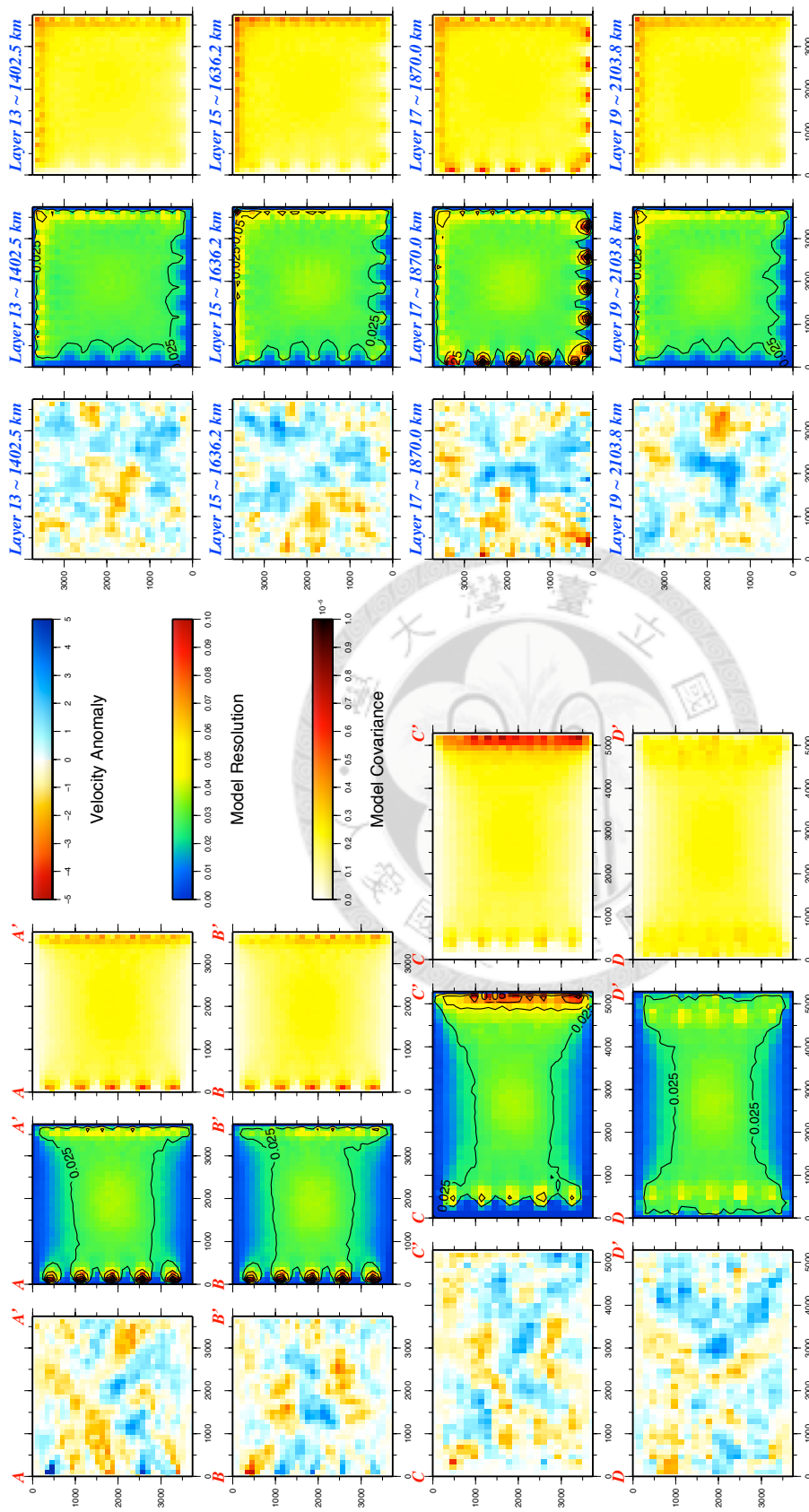


圖 3-7d 高斯隨機模型逆推結果—SBKT—Damping。

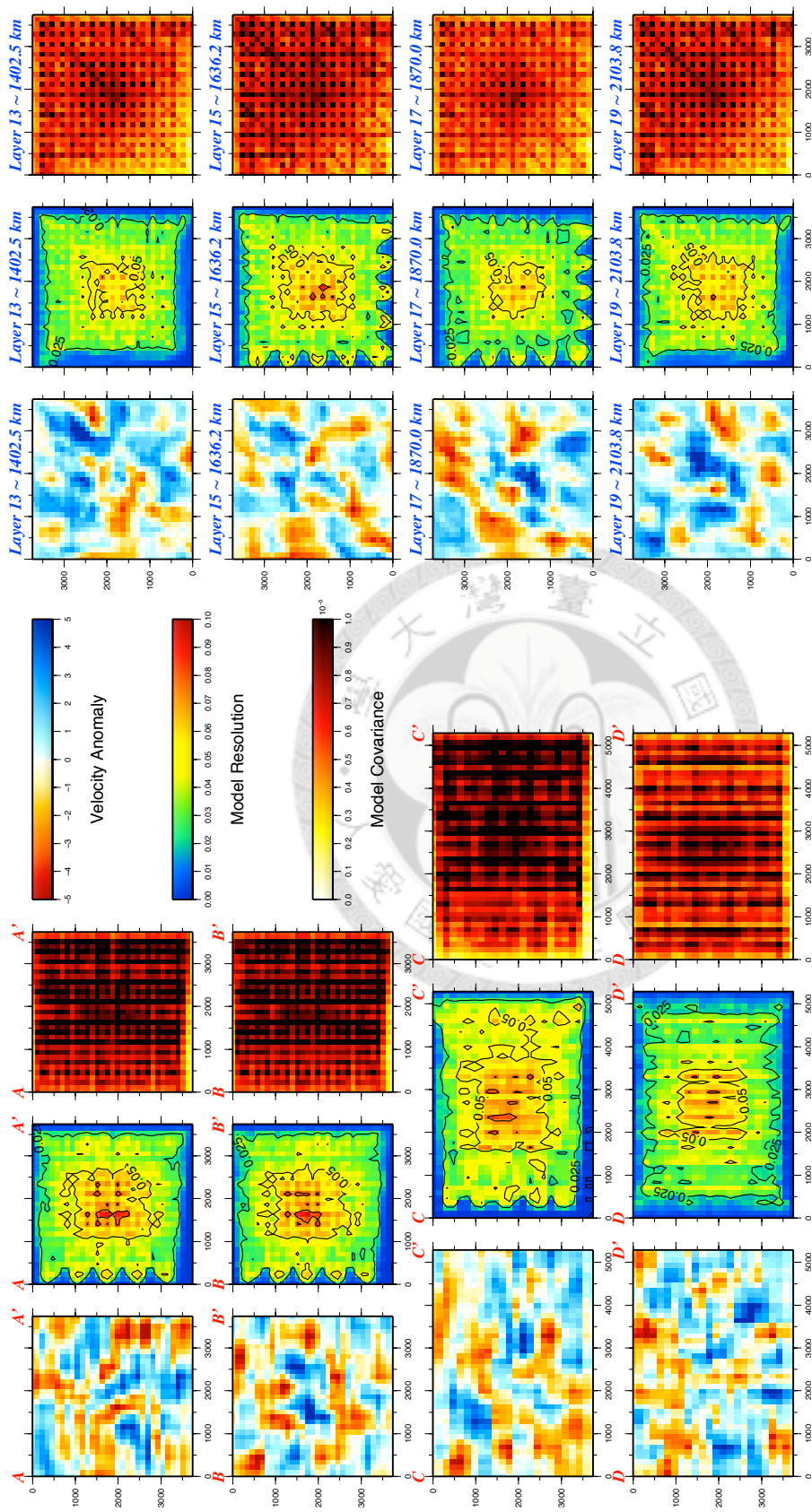


圖 3-7e 高斯隨機模型逆推結果—MLRT—Truncation。

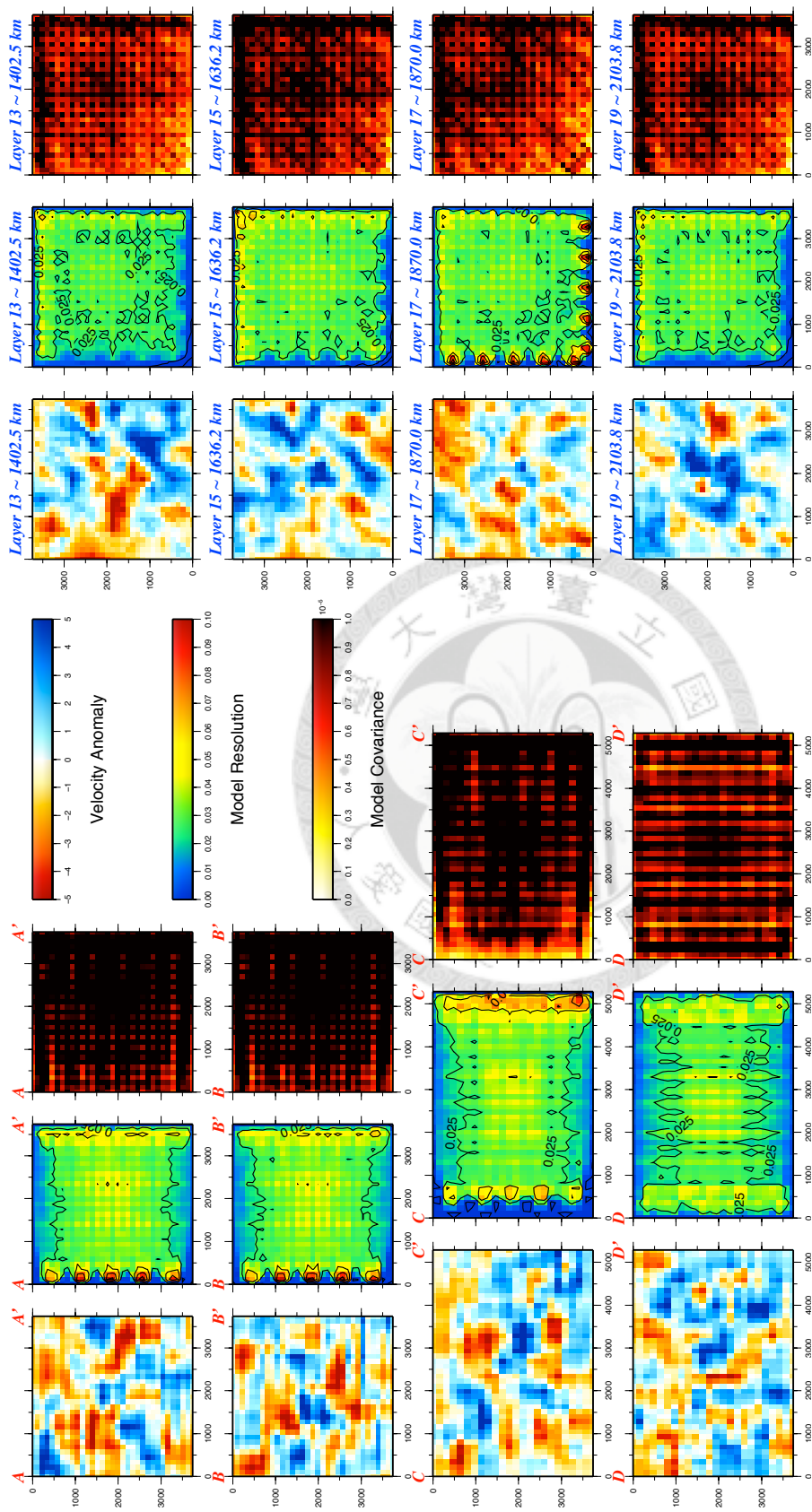


圖 3-7f 高斯隨機模型逆推結果—MBKT—Truncation。

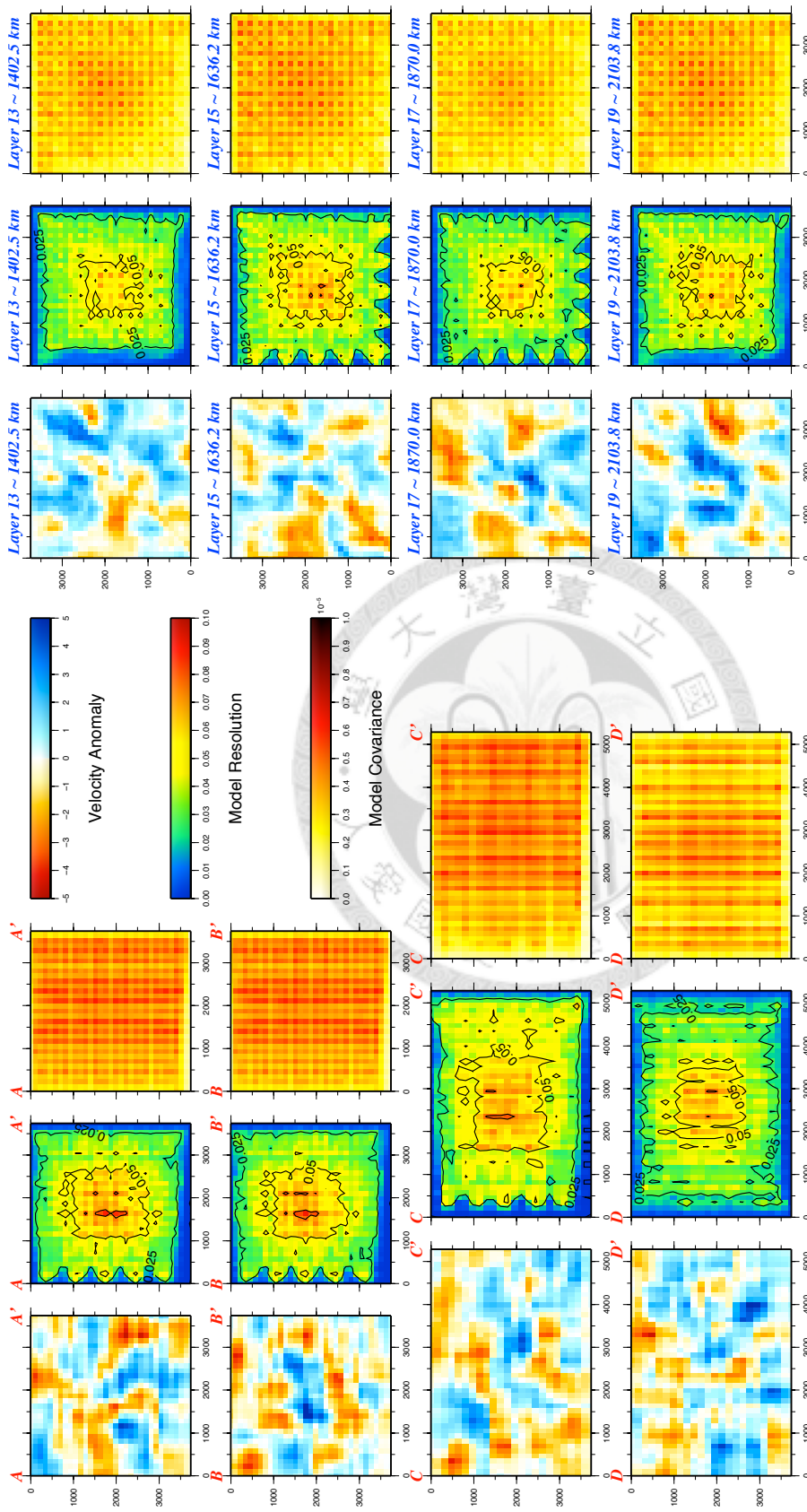


圖 3-7g 高斯隨機模型逆推結果—MLRT—Damping。

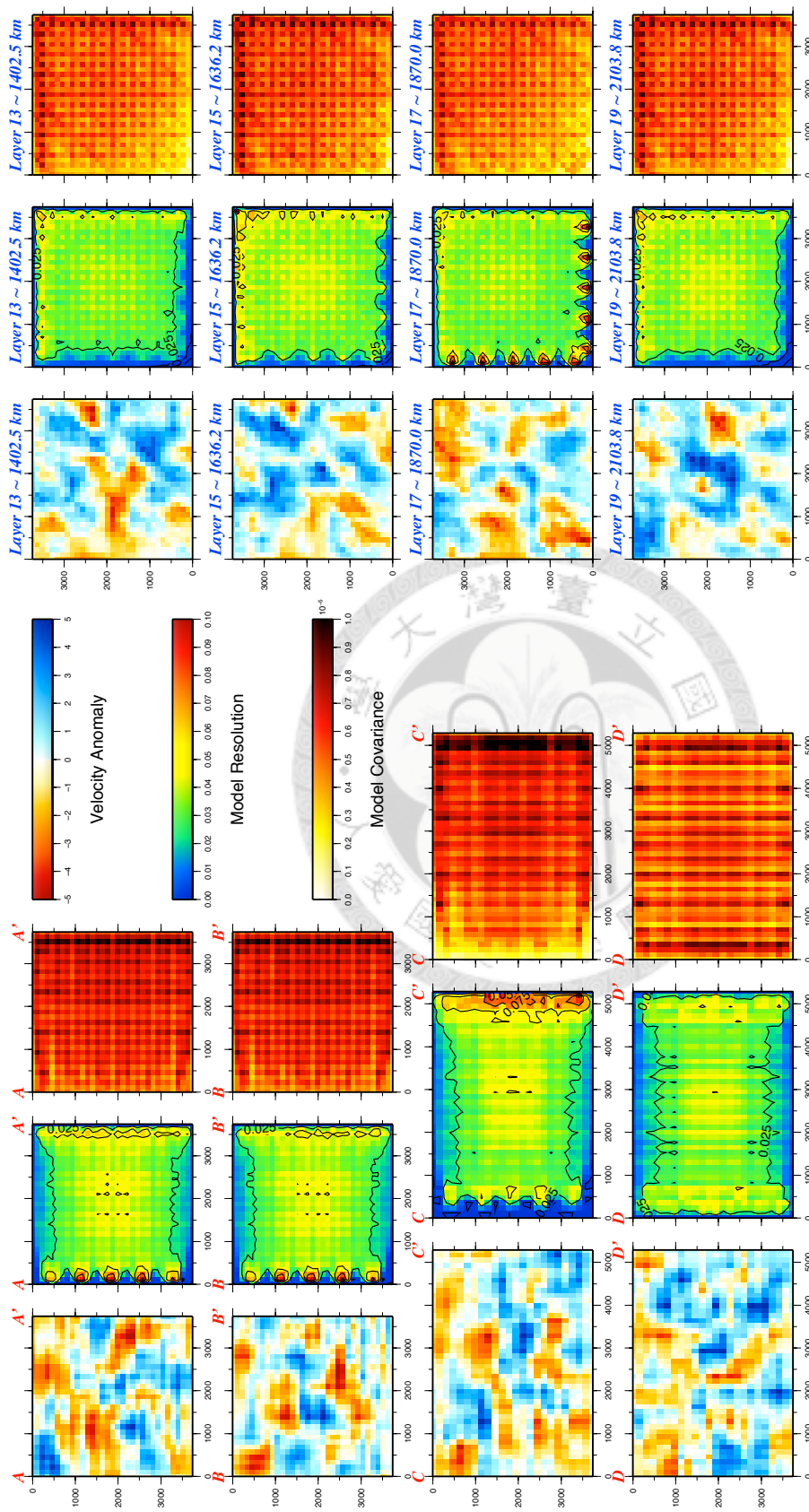


圖 3-7h 高斯隨機模型逆推結果—MBKT—Damping。

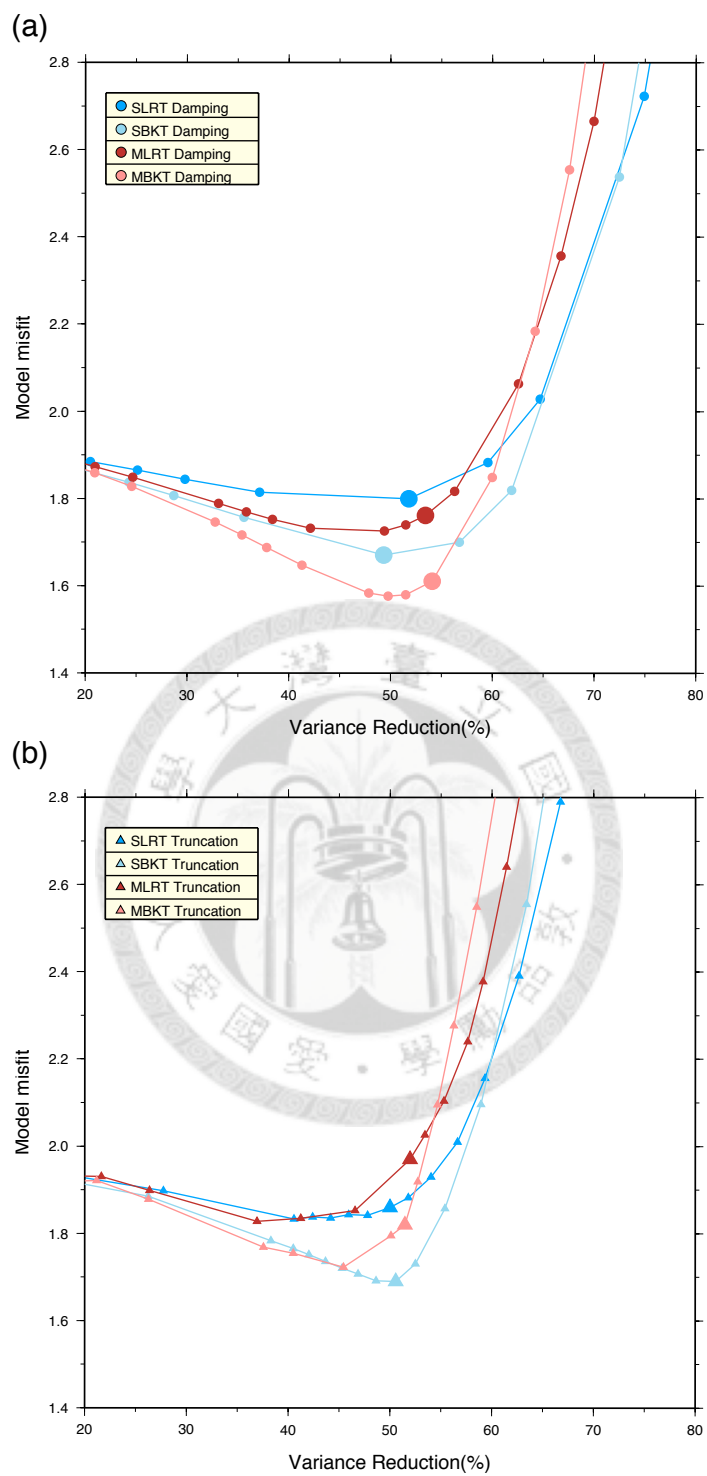


圖3-8 模型離差對資料擬合度變化曲線圖—高斯隨機模型 - II。

第四章 討論

4.1 消長曲線圖

以下將針對第三章所描述各種消長關係探討走時理論、參數化和正則化對所造成逆推模型的差異。

- (1) 模型共變異數對模型分散程度的消長曲線圖（圖3-1）。圖3-1(a)為使用阻尼（damping）所得到的結果，可以看出多重尺度參數化的模型共變異數一直低於一般格點參數化的結果，而模型共變異數越低表示越不會將觀測資料的誤差反映至逆推模型上，也就是說在使用阻尼作正則化時，多重尺度參數化所得到的結果將比一般格點參數化可靠；在使用閾值（truncation）之下其結果也是相同的（圖3-1(b)）。就阻尼與閾值之間的比較，閾值所計算出的模型共變異數比起阻尼，在相同的模型分散度（model spread）之下大了一些。因為閾值捨去了大部分的奇異值，也就是說捨去了大部分的模型解析能力，因此造成更容易受到資料誤差的影響。
- (2) 模型擬合程度對模型共變異數與模型範數（model norm）的消長曲線（trade-off curve）。由圖3-2模型擬合程度對模型共變異數的消長關係可知，若為了持續增加模型擬合的程度，滿足有誤差的觀測資料，則模型共變異數勢必會跟著快速上升，其變化趨勢在不同參數化、正則化方法與走時理論之下皆相當一致。另外，在以往透過 LSQR 方式所得到震波層析成像，因無法直接計算模型分散程度與模型共變異數，通常利用模型範數對模型擬合程度的作消長曲線（圖3-3）決定最佳解。首先，由圖3-3可看出不同正則化手段之間的差異，不論何種走時理論或參數化方法，利用閾值所計算出的解其模型範數皆比阻尼大，這是因為加入阻尼效果除了大量壓制小的奇異值，連帶較大奇異值部分也被壓低（見圖2-9a），因此解出的模型可能低估了長波長構造的強度，而使得模型速度異常總體平均的振幅會比利用閾值正則化的解要小。其次比較不同參數化方法之間的差異，不論使用何種正則化或走時理論，多重尺度參數化所計算出的模型範數皆比一般格點參數化還要來的大。這是因為多重尺度參數化可以保留較大尺度的構造，造成整個模型都帶有長波長的變化，因此模型範數會比一般格點參數化大。最後討論不同走時理論

之間的差異，當模型擬合度較高時，有限頻寬理論解出的模型範數比線性波線理論來得大，因為這是因為三維香蕉-甜甜圈敏感度算核（sensitivity kernel）的幾何特性能適當的考慮到有限頻寬走時殘差受到波前復原影響，隨傳波距離增加逐漸變小的效應，而波線理論則完全忽略，因此低估了速度異常的強度，造成有限頻寬走時理論所求得模型構造具較大的振幅。此種消長曲線關係僅能在相似的資料擬合程度前提之下，比較不同逆推方法所決定最佳合理解之間的特性，無法獲得其他的資訊，如模型解析能力等，透過本研究模型解析度矩陣的計算，可以直接探討在不同逆推架構之下模型分散程度與模型共變異數的消長情形，用來取代選取最佳合理解的方式。

4.2 模型離差

由圖3-5中模型離差（model misfit）對資料擬合程度（variance reduction）的變化曲線發現，在模型擬合程度約 50-55% 時，所有不同逆推方法求得的解其模型離差都出現局部最小值（local minimum）。而不論使用何種參數化方法或正則化方法，香蕉—甜甜圈理論所計算出來的結果都最符合初始的隨機模型；此外利用阻尼法所得到的模型皆比使用閾值法所得到的模型更為接近原始的模型。最後，參數化方式選擇多重尺度參數化、走時理論使用香蕉—甜甜圈理論和正則化方法利用阻尼法所得到的模型最為符合原本真實的模型。

4.3 解析度矩陣

4.3.1 模型解析能力

為了得知模型在空間中的解析能力以及可能誤差，需要利用解析度矩陣（resolution matrix）與模型共變異數矩陣（model covariance matrix）在空間中的分布。解析度矩陣的每一列代表在對角線上所對應的真實模型參數，因參數正則化的過程中造成原本脈衝式（delta function）的解析度在空間中展開散佈的模式，並可大致了解透過擴散的解析度「視窗」所得的模型參數解的分辨率，即受其它模型參數干擾的情形。

在不同的走時理論之下，BKT 的每個列散佈在空間中的程度明顯比 LRT 要廣，這與其敏感度算核和波線交叉方式有關（如圖4-1(a)與4-2(a)）；而在不同的參數化方法下，多重尺度參數化散開個程度明顯比一般參數化還要廣，因為多重尺度參數化之下的模型其每個元素

都包含了不同波長尺度的構造，因此解析度矩陣會散佈至整個空間中（圖4-1(a)與4-3(a)）；而在不同的正則化方法之下，閾值所解出的解析度矩陣值的大小明顯比阻尼還要大（圖4-1(a)與4-1(b)）。

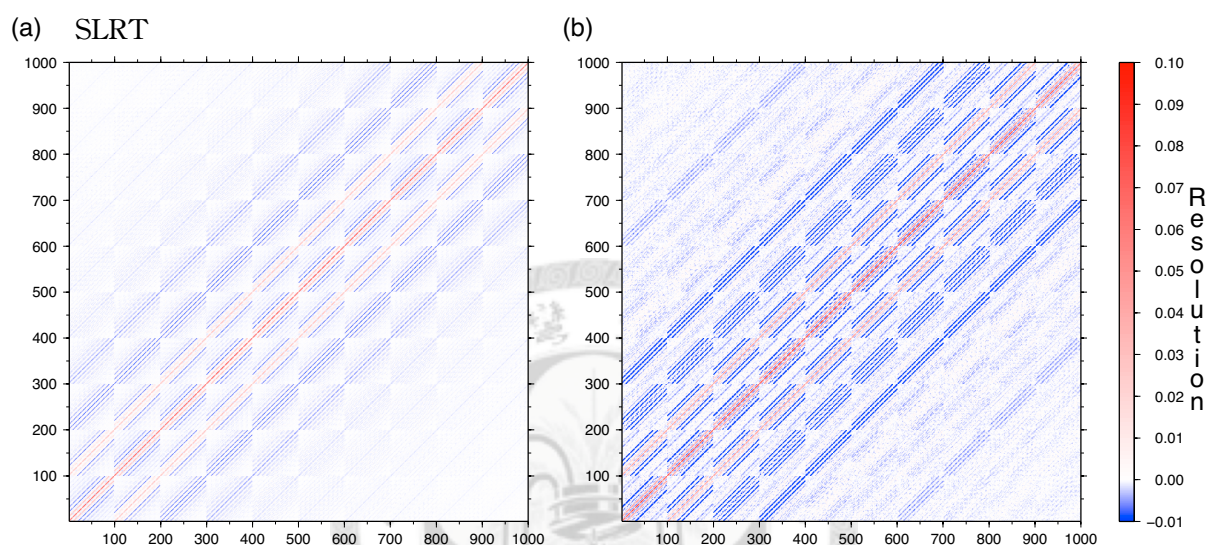


圖4-1 在一般格點參數化和線性波線理論逆推架構下所求得的解析度矩陣。圖(a)和圖(b)分別為利用阻尼和閾值正則化手段所得到的解析度矩陣。橫軸與縱軸數字代表其模型參數的編碼，在此取逆推模型格點中央部位的 $10 \times 10 \times 10$ 的方塊，共1000個格點。由於在逆推之前必須先將三維空間中的模型參數根據 x, y, z 三方向順序逐一編碼以排列進一維的逆推模型向量。因此在空間中相鄰的點在編碼後將會分布在相距很遠的號碼上，這是解析度矩陣看起來會有數條平行於對角線的構造存在的原因。

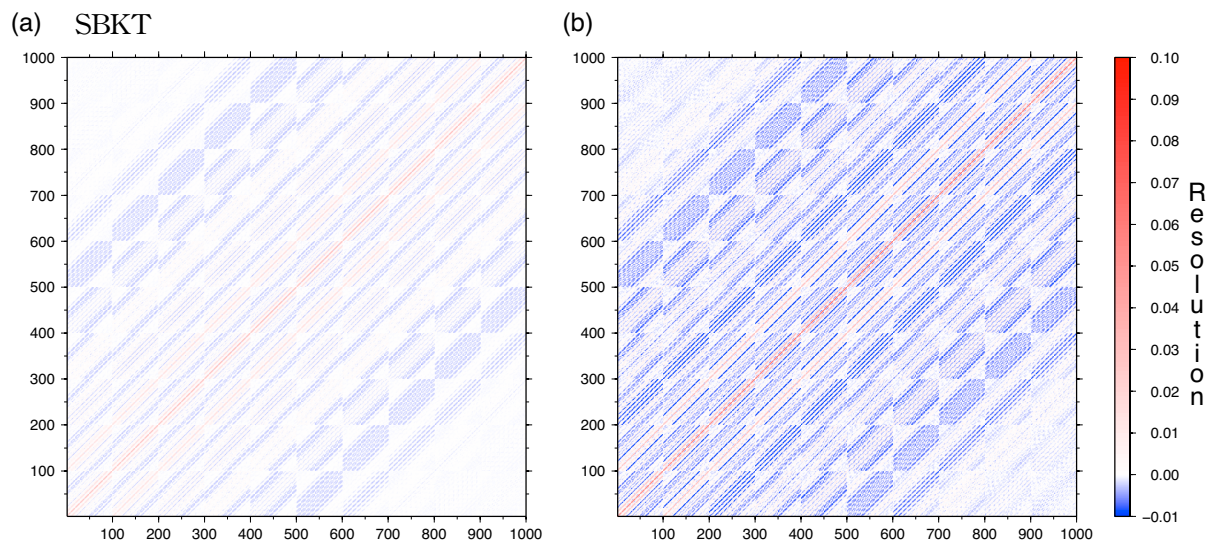


圖4-2 解析度矩陣。如圖4-1所示，僅走時理論以有限頻寬理論（BKT）取代。

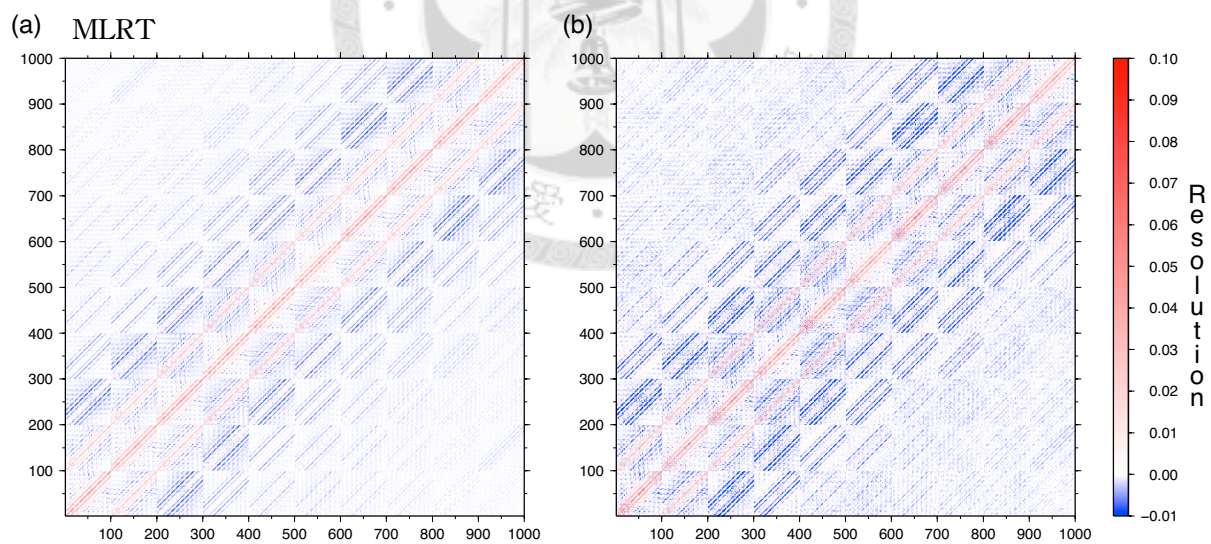


圖4-3 解析度矩陣。如圖4-1所示，僅參數化方式以多重尺度（multi-scale）參數化取代。

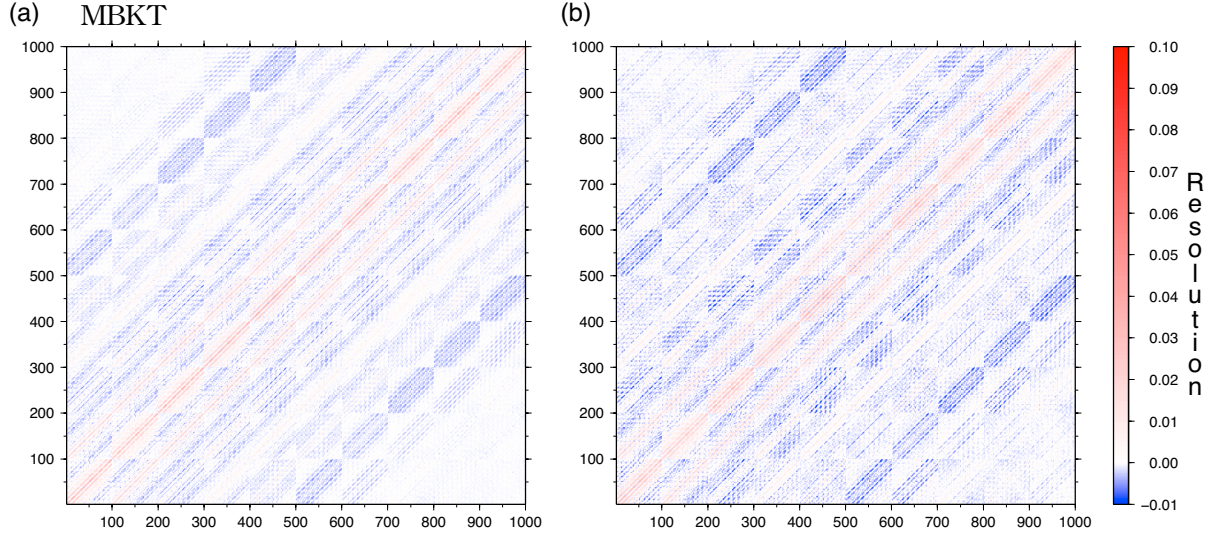


圖4-4 解析度矩陣。如圖4-1所示，但走時理論和參數化方法分別以有限頻寬和多重尺度參數化取代。

4.3.2 點擴散函數

從3.2節與3.3節中的測試可以得知，當改變震源—測站之間的幾何關係時，即使觀測資料沒有增加且模型解析度也沒有明顯上升或更低時，但所解出來的速度模型卻更符合原本的隨機模型。這是因為解析度矩陣的形狀扮演了相當重要的角色，從2.4.10式可以得知解析度矩陣是所估計的模型與原始模型之間關聯性，可以將2.4.10式表示如下：

$$\begin{bmatrix} \hat{m}_1 \\ \vdots \\ \hat{m}_i \\ \vdots \\ \hat{m}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & \cdots & R_{1j} & \cdots & R_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ R_{i1} & \cdots & R_{ij} & \cdots & R_{iM} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{M1} & \cdots & R_{Mj} & \cdots & R_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_i \\ \vdots \\ m_M \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

在此稱解析度矩陣的每一行（column）為點擴散函數（point spread function, PSF），其意義為真實模型中的每一個元素透過 PSF 這個「視窗」，反映在所有估計模型參數上的形貌。因此即使解析度矩陣對角線上的值相等，但是只要 PSF 長得不一樣（圖4-5），所解出來的模型也會隨著不同。以下對不同的走時理論、正則化手段、參數化方法以及測站擺放方式對 PSF 的影響分別討論。

- (1) 在不同的走時理論之下（圖4-5與4-6），可觀察到 BKT 的 PSF 相較於 LRT 在空間中的分布較為平滑，LRT 可以明顯的看出有 X-交叉形狀波線的痕跡在上面，而 BKT 並沒有呈現如此的分布模式。
- (2) 在不同的正則化手段下（圖4-5與4-7），利用閾值的 PSF 振幅較大並且增加許多的小尺度構造。換句話說就是閾值的 PSF 較為粗糙。
- (3) 多重尺度參數化的模型，其 PSF 的型態顯然與參數化所選取小波格點切割的方式有關（圖4-8和4-9），在水平橫剖面上（圖4-8a和4-9a）可看出 PSF 沿 45° 方向沿伸的情形。在垂直縱剖面上則顯然沿深度方向的解析度變得很差，尤其是使用波線理論的時候（比較圖4-8和4-12）；如同3.2.3節所述，多重尺度參數化方法所計算出來模型解析度矩陣與模型共變異數矩陣其模式並不相同，因此雖然沿深度方向的解析度較差，但模型共變異數則顯示資料的誤差影響水平方向的構造較大，而不是深度方向上（比較圖4-8和4-14）。另外，若使用波線理論，即使使用多重尺度參數化方式仍可看出 PSF 沿著 X-型的波線方向散出（圖4-8a），但此情形在使用香蕉—甜甜圈理論時較不明顯。
- (4) 最後在不同震源—測站的分布方式下，圖4-5和4-6為測站與震源僅分布在左右兩側之下的 PSF，可以看到 PSF 在水平橫剖面上往左右兩側延伸出去樣子，無論是波線或香蕉—甜甜圈理論；而圖4-10和4-11為測站與震源分布左右及上下兩側皆有的情況，較圖4-5和4-6而言更為接近一正圓，代表往四面八方均勻擴散。

因此不論是透過解析度矩陣的對角線項或是模型分散程度作為評估模型在空間中的解析能力是不足夠的，必須引進解析長度（resolution length）以真正全面的評估解析能力，但目前並沒有一個有效的方法去計算在三維空間中的解析長度，這點有待往後的研究詳加探討。

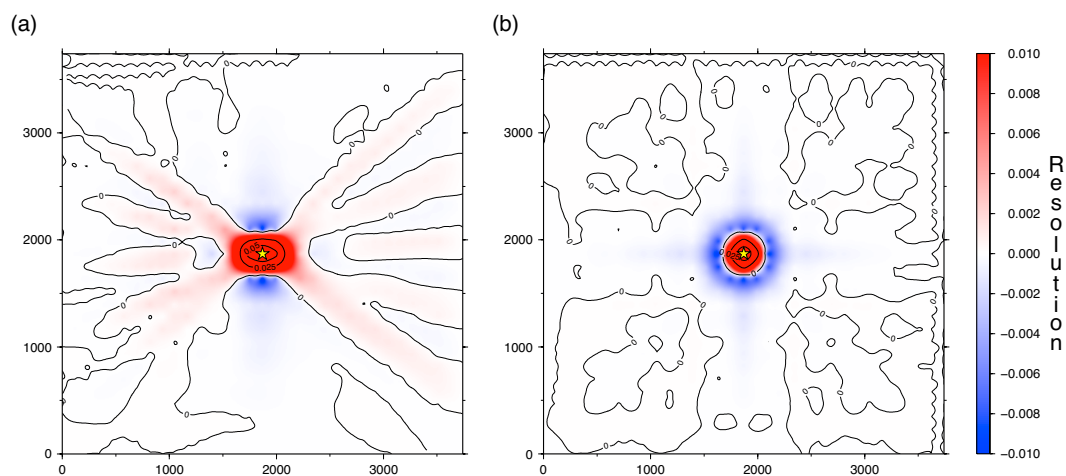


圖4-5 以單邊震源—測站走時資料 (Test - I)，一般格點參數化和線性走時理論 (SLRT) 逆推方式所求得的點擴散函數 (PSF)。
圖中的中點 (星號) 代表在三維模型空間的中心位置，分別描繪通過該點的(a)水平橫剖面 and 垂直縱剖面(b)上 PSF 分布的情形。

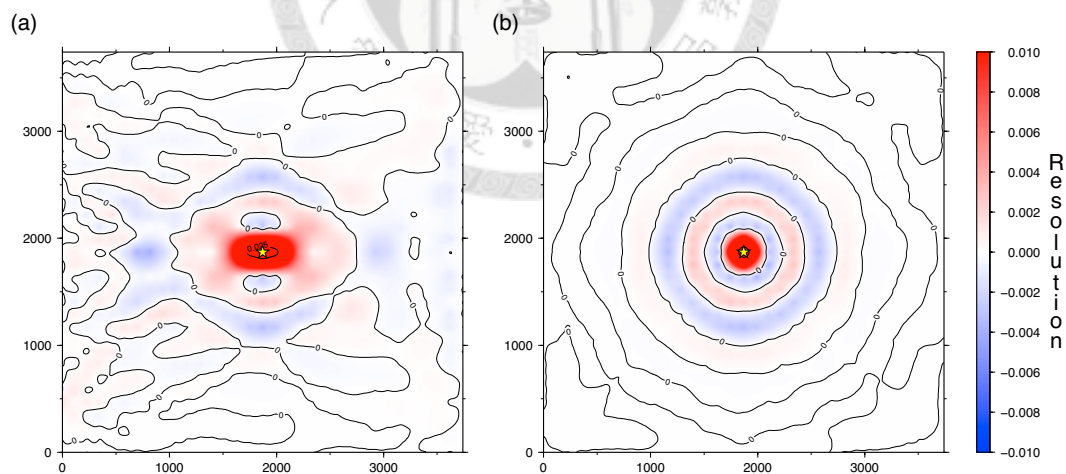


圖4-6 點擴散函數在空間中的分布。如圖4-5所示，僅走時理論以有限頻寬理論 (SBKT) 取代。

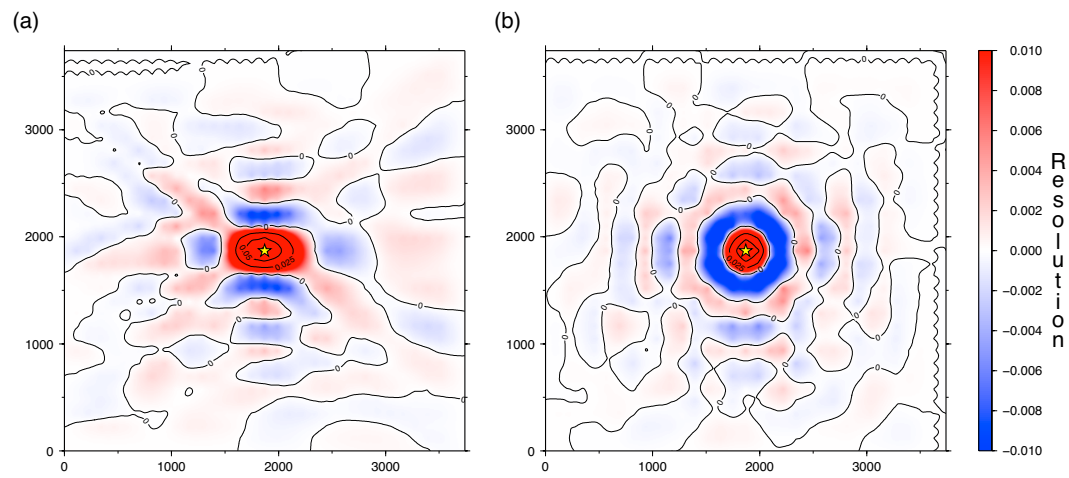


圖4-7 點擴散函數在空間中的分布。如圖4-5所示，僅正則化手段以
閾值（truncation）取代。

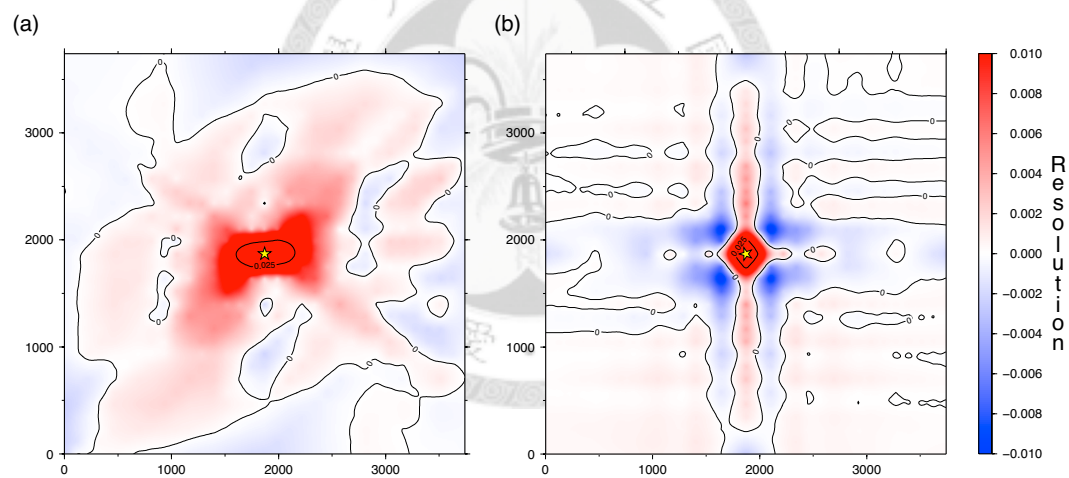


圖4-8 點擴散函數在空間中的分布。如圖4-5所示，僅參數化方式以
多重尺度參數化（MLRT）取代。

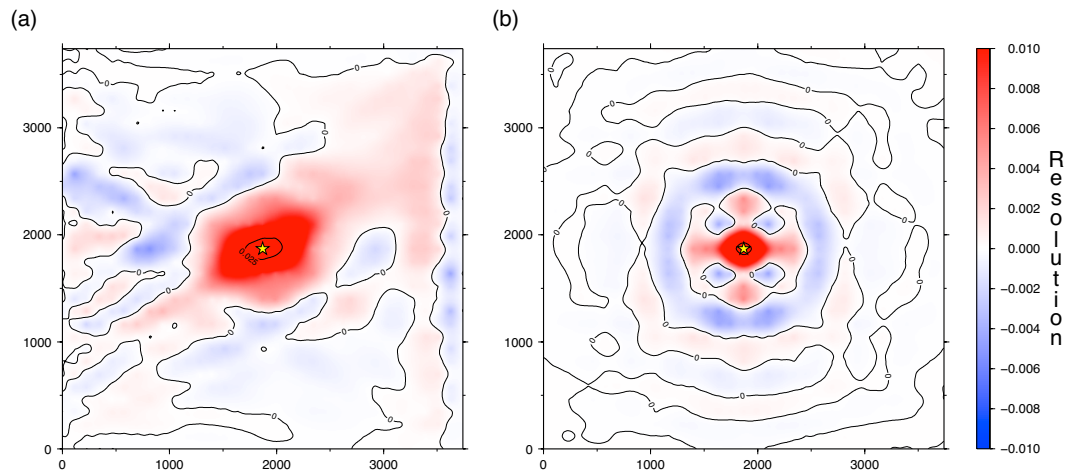


圖4-9 點擴散函數在空間中的分布。如圖4-5所示，但走時理論和參數化方法分別以有限頻寬和多重尺度參數化（MBKT）取代。

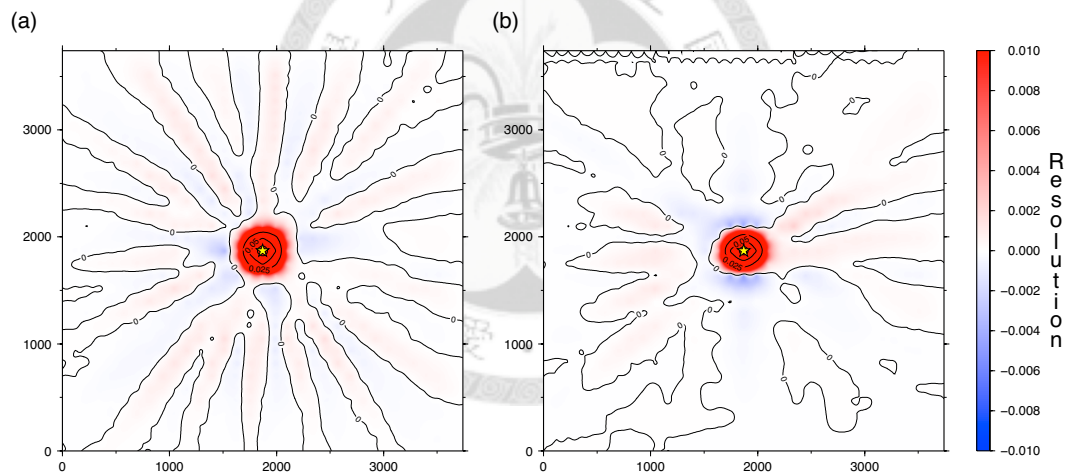


圖4-10 以雙邊震源—測站走時資料（Test - II），一般格點參數化和線性走時理論（SLRT）逆推方式所求得的點擴散函數。

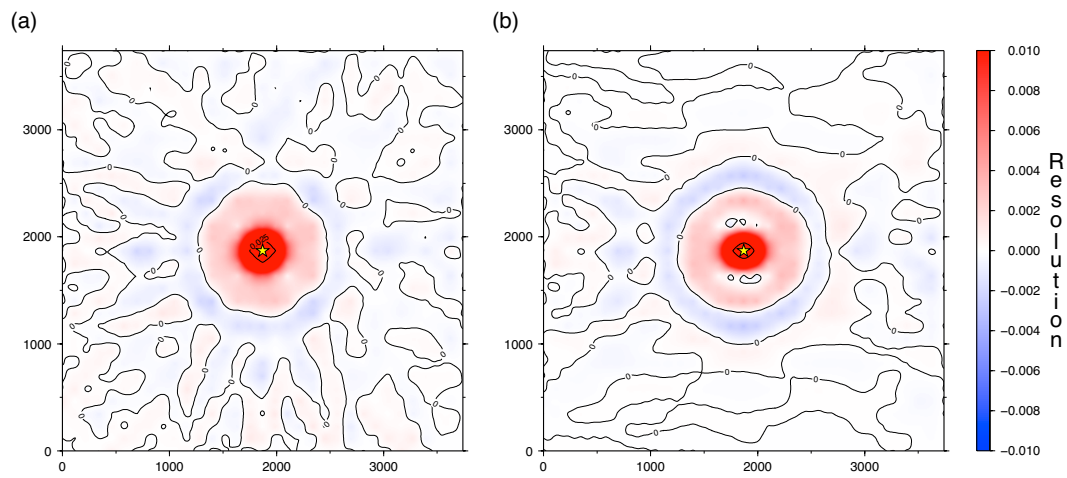


圖4-11 點擴散函數在空間中的分布。如圖4-10所示，僅走時理論以有限頻寬理論（SBKT）取代。

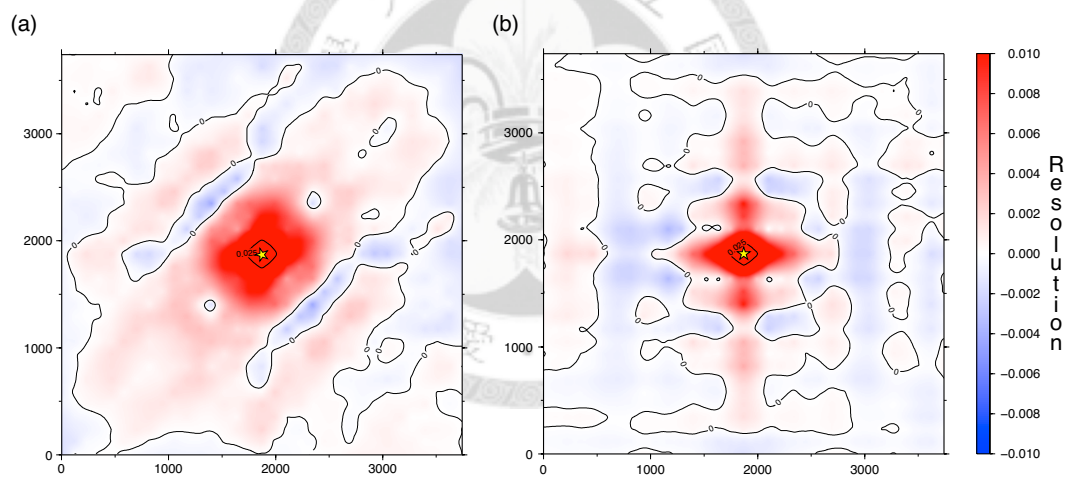


圖4-12 點擴散函數在空間中的分布。如圖4-10所示，但走時理論和參數化方法分別以有限頻寬和多重尺度參數化（MBKT）取代。

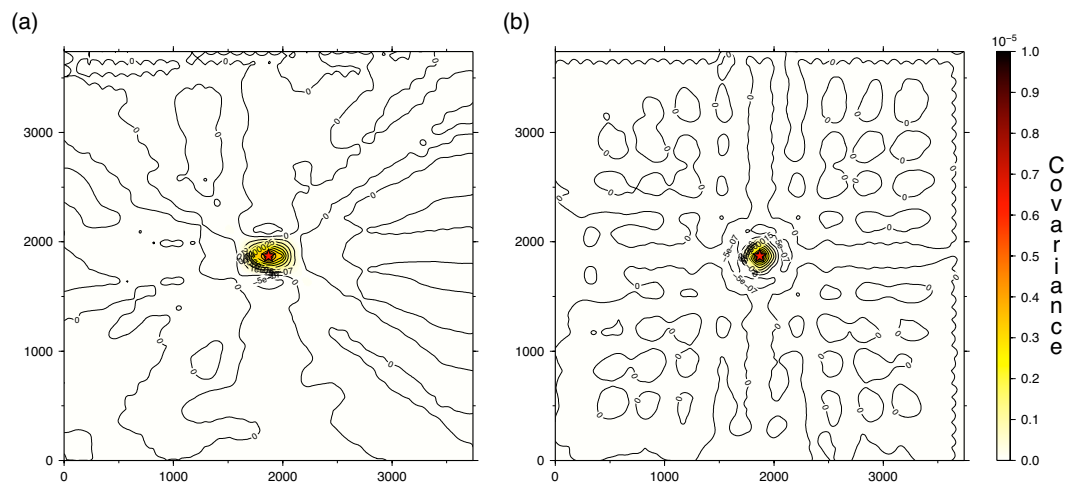


圖4-13 模型共變異數矩陣的點擴散函數在空間中分布。為圖4-5的模型共變異數矩陣。

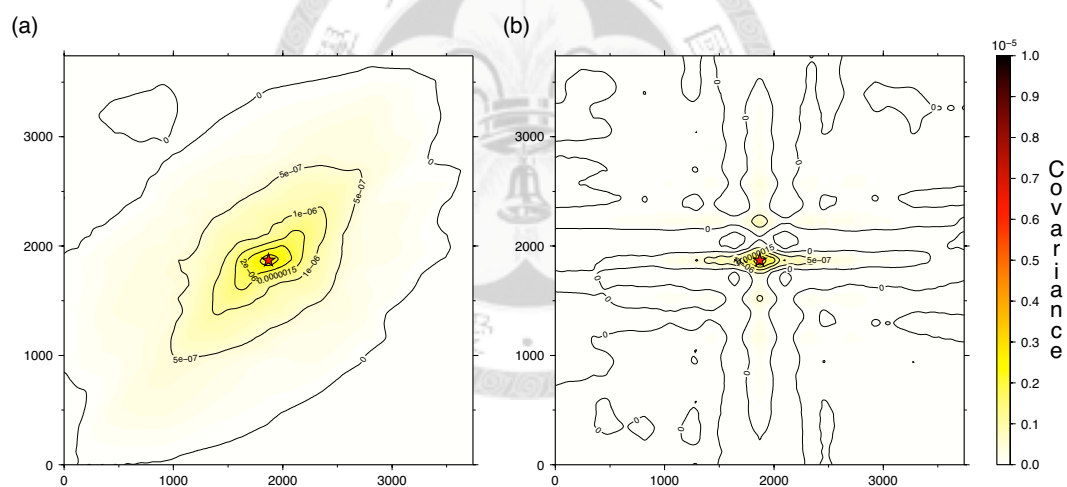


圖4-14 模型共變異數矩陣的點擴散函數在空間中分布。為圖4-8的模型共變異數矩陣。

第五章 結論

本研究比較不同走時理論：線性波線理論（LRT）和香蕉甜甜圈理論（BKT）、不同參數化方法：一般格點參數化（simple-grid parameterization）和多重尺度參數化（multi-scale parameterization）與不同正則化手段：阻尼（damping）和閾值（truncation）對震波層析成像結果的影響。以有限頻寬的波在三維高斯隨機模型中傳遞，透過波形交叉比對（cross-correlation）所得的走時殘差，加入高斯隨機的測量誤差，作為速構造逆推的觀測資料，藉由奇異值分解（singular value decomposition）計算各種逆推的統計參數，包含模型解析度矩陣、模型共變異數矩陣…等，以及求得模型最佳合理解。綜觀本研究，其結論如下：

- (1) 以模型共變異數作為基準，使用阻尼進行逆推所得到的結果比使用閾值更不容易受到觀測資料誤差所影響。
- (2) 以模型離差而作為基準，使用 BKT 進行逆推所得到的結果比使用 LRT 更為接近真實的模型。
- (3) 以模型分散程度（model spread）和解析度能力（PSF）來看，以多重尺度和香蕉—甜甜圈理論較不受震源—測站間的幾何分布所控制。

因此使用參數化方式選擇多重尺度參數化、走時理論選擇香蕉甜甜圈理論和正則化方法選擇阻尼時所得到的模型最為符合原本真實的模型。

本研究所測試非均質尺度與非均質強度的高斯隨機模型，符合在有限頻寬波前復原效應對走時殘差有明顯的影響，因此證實當速度構造的尺度比有限頻寬走時的敏感度寬度更小時，香蕉—甜甜圈理論是比波線理論用來建構走時資料和速度異常關係更正確的選擇。

本研究主要顯示了奇異值分解的特性可以更客觀挑選模型的「最佳合理解」及評估模型在空間中的解析能力，在往後的研究中將可以運用在真實的地球模型中。

參考文獻

- Baig, A. M., F. A. Dahlen, and S.-H. Hung (2003), Traveltimes of waves in three-dimensional random media, *Geophysical Journal International*, **153**(2), 467-482.
- Bijwaard, H., W. Spakman, and E. R. Engdahl (1998), Closing the gap between regional and global travel time tomography, *J. Geophys. Res.*, **103**, 30055-30078.
- Bijwaard, H., and W. Spakman (2000), Non-linear global P-wave tomography by iterated linearized inversion, *Geophysical Journal International*, **141**(1), 71-82.
- Boschi, L., and A. M. Dziewonski (2000), Whole Earth tomography from delay times of P, PcP, and PKP phases: Lateral heterogeneities in the outer core or radial anisotropy in the mantle?, *J. Geophys. Res.*, **105**, 13675-13696.
- Chiao, L.-Y., and B.-Y. Kuo (2001), Multiscale seismic tomography, *Geophysical Journal International*, **145**, 517-527.
- Chiao, L.-Y., and W.-T. Liang (2003), Multiresolution parameterization for geophysical inverse problems, *Geophysics*, **68**(1), 199-209.
- Dahlen, F. A., S.-H. Hung, and G. Nolet (2000), Fréchet kernels for finite-frequency traveltimes -- I. Theory, *Geophysical Journal International*, **141**(1), 157-174.
- Gök, R., E. Sandvol, N. Türkelli, D. Seber, and M. Barazangi (2003), Sn attenuation in the Anatolian and Iranian plateau and surrounding regions, *Geophys. Res. Lett.*, **30**(24), 8402-8405.
- Grand, S. P., R. D. van der Hilst, and S. Widiyantoro (1997), Global seismic tomography; a snapshot of convection in the Earth, *GSA Today*, **7**, 1-7.
- Gu, Y. J., A. M. Dziewonski, W. Su, and G. Ekström (2001), Models of the mantle shear velocity and discontinuities in the pattern of lateral heterogeneities, *J. Geophys. Res.*, **106**, 11169-11199.
- Hung, S.-H., and D. W. Forsyth (1998), Modelling anisotropic wave propagation in oceanic inhomogeneous structures using the parallel multidomain pseudo-spectral method, *Geophysical Journal International*, **133**(3), 726-740.
- Hung, S.-H., F. A. Dahlen, and G. Nolet (2000), Fréchet kernels for finite-frequency traveltimes -- II. Examples, *Geophysical Journal International*, **141**(1), 175-203.

- Kárason, H., and R. D. van der Hilst (2001), Tomographic imaging of the lowermost mantle with differential times of refracted and diffracted core phases (PKP, P diff), *J. Geophys. Res.*, **106**.
- Kennett, B. L. N., and E. R. Engdahl (1991), Traveltimes for global earthquake location and phase identification, *Geophysical Journal International*, **105**(2), 429-465.
- Kennett, B. L. N., E. R. Engdahl, and R. Buland (1995), Constraints on seismic velocities in the Earth from traveltimes, *Geophysical Journal International*, **122**(1), 108-124.
- Klimeš, L. (2002), Correlation Functions of Random Media, *Pure and Applied Geophysics*, **159**(7), 1811-1831.
- Larsen, R. M. (2005), PROPACK: A software package for the symmetric eigenvalue problem and singular value problems on Lanczos and Lanczos bidiagonalization with partial reorthogonalization, edited, SCCM, Stanford University.
- Madych, W. R. (1999), Tomography, Approximate Reconstruction, and Continuous Wavelet Transforms, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **7**(1), 54-100.
- Marquering, H., F. A. Dahlen, and G. Nolet (1999), Three-dimensional sensitivity kernels for finite-frequency traveltimes: the banana-doughnut paradox, *Geophysical Journal International*, **137**(3), 805-815.
- Mègnin, C., and B. Romanowicz (2000), The three-dimensional shear velocity structure of the mantle from the inversion of body, surface and higher-mode waveforms, *Geophysical Journal International*, **143**(3), 709-728.
- Mueller, R. K., M. Kaveh, and G. Wade (1979), Reconstructive tomography and applications to ultrasonics, *Proceedings of the IEEE*, **67**(4), 567-587.
- Obayashi, M., and Y. Fukao (1997), P and PcP travel time tomography for the core-mantle boundary, *J. Geophys. Res.*, **102**, 17825-17841.
- Paige, C. C., and M. A. Saunders (1982), LSQR: An Algorithm for Sparse Linear Equations and Sparse Least Squares, *ACM Trans. Math. Softw.*, **8**(1), 43-71.
- Ritsema, J., H. J. v. Heijst, and J. H. Woodhouse (1999), Complex Shear Wave Velocity Structure Imaged Beneath Africa and Iceland, *Science*, **286**(5446), 1925-1928.
- Romanowicz, B. (2003), GLOBAL MANTLE TOMOGRAPHY: Progress Status in the Past 10 Years, *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, **31**(1), 303-328.
- Sato, H., and M. C. Fehler (1997), Seismic wave propagation and scattering in the heterogeneous earth, Springer, New York.

- Sekiguchi, S. (2006), Hierarchical traveltimes tomography, *Geophysical Journal International*, **166**(3), 1105-1124.
- Simon, H. D. (1984), The Lanczos Algorithm With Partial Reorthogonalization, *Mathematics of Computation*, **42**(165), 115-142.
- Soldati, G., and L. Boschi (2005), The resolution of whole Earth seismic tomographic models, *Geophysical Journal International*, **161**(1), 143-153.
- Tessmer, E., D. Kessler, D. Kosloff, and A. Behle (1992), Multi-domain Chebyshev-Fourier method for the solution of the equations of motion of dynamic elasticity, *Journal of Computational Physics*, **100**(2), 355-363.
- Vesnaver, A. L. (1996), Irregular grids in seismic tomography and minimum-time ray tracing, *Geophysical Journal International*, **126**(1), 147-165.
- Von Rebeur-Paschwitz, E. (1889), The Earthquake of Tokio, April 18, 1889, *Nature*, **40**, 294-295.
- Woodward, M. J. (1992), Wave-equation tomography, *Geophysics*, **57**(1), 15-26.
- Yang, H.-Y., and S.-H. Hung (2005), Validation of ray and wave theoretical travel times in heterogeneous random media, *Geophys. Res. Lett.*, **32**.
- Yao, Z. S., R. G. Roberts, and A. Tryggvason (1999), Calculating resolution and covariance matrices for seismic tomography with the LSQR method, *Geophysical Journal International*, **138**(3), 886-894.
- Zhang, H., and C. Thurber (2005), Adaptive mesh seismic tomography based on tetrahedral and Voronoi diagrams: Application to Parkfield, California, *J. Geophys. Res.*, **110**.
- Zhang, H., and C. H. Thurber (2007), Estimating the model resolution matrix for large seismic tomography problems based on Lanczos bidiagonalization with partial reorthogonalization, *Geophysical Journal International*, **170**(1), 337-345.
- Zhao, D., and A. Hasegawa (1993), P Wave Tomographic Imaging of the Crust and Upper Mantle Beneath the Japan Islands, *J. Geophys. Res.*, **98**.
- Zhou, H.-w. (2003), Multiscale traveltimes tomography, *Geophysics*, **68**(5), 1639-1649.
- Zhou, Y., F. A. Dahlen, G. Nolet, and G. Laske (2005), Finite-frequency effects in global surface-wave tomography, *Geophysical Journal International*, **163**(3), 1087-1111.
- 楊欣穎 (2005), 模擬波與波線走時 - 有限頻寬與波線層析成像的極限, 碩士論文, 國立臺灣大學地質科學研究所.