



國立臺灣大學工學院機械工程學研究所

碩士論文

Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis

無網格法探討跑道形薄膜複合壓電板之聲振特性

Vibroacoustic of Racetrack Diaphragm Compounded with
Piezoelectric Plates Using Meshless Method

陳奕安

Yi-An Chen

指導教授：黃育熙 博士

Advisor: Yu-Hsi Huang, Ph.D.

中華民國 112 年 7 月

July, 2023

國立臺灣大學碩士學位論文

口試委員會審定書

MASTER'S THESIS ACCEPTANCE CERTIFICATE
NATIONAL TAIWAN UNIVERSITY

(論文中文題目) (Chinese title of Master's thesis)

無網格法探討跑道形薄膜複合壓電板之聲振特性

(論文英文題目) (English title of Master's thesis)

Vibroacoustic of Racetrack Diaphragm Compounded with Piezoelectric
Plates Using Meshless Method

本論文係 陳永年 (姓名) R1052528 (學號) 在國立臺灣大學
機械工程 (系/所/學位學程) 完成之碩士學位論文，於民國 112 年
7 月 4 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明。

The undersigned, appointed by the Department / Institute of _____
on _____ (date) _____ (month) _____ (year) have examined a Master's thesis entitled above presented
by _____ (name) _____ (student ID) candidate and hereby certify
that it is worthy of acceptance.

口試委員 Oral examination committee:

黃育熙 廖長誼 陳重德
(指導教授 Advisor)

系主任/所長 Director: 林泮群

致謝

碩士班的生活一轉眼就過去了，最終也順利地完成口試，即將要畢業邁入人生下個階段。這兩年內首要感謝的就是黃育熙老師不厭其煩地教導，縱使我的研究成果仍有進步的空間，老師仍給予我鼓勵與方向，幫助我順利完成研究。

這邊還要特別感謝陳重德老師和廖展誼老師擔任我的口試委員，給予我非常多建議，讓我知道自己的不足，而有前進的方向。陳重德老師是我在成功大學機械系時就認識的老師，從老師開設的「動力學」、「機械畫」與「有限元素導論」這三門課中我學習到非常多專業知識，當初播下的種子也在碩士班這兩年萌芽，對我產生莫大的幫助。感謝廖展誼老師從之前的實驗室聯合 meeting 就有針對我的報告給予寶貴的意見，也讓我從中學學習到非常多。

還要感謝實驗室的夥伴們這兩年的相伴。非常感謝建佑學長在研究中提供了我相當多的幫助，在學長的幫助下我才能順利度過各種大大小小的難關；還有上一屆的御宸、浩安、秀宜、國勛，從初入台大研究所就給予我非常多關懷，不只專業領域，也在人生方向上給了我很多的提點，其中特別感謝御宸學長在聲學領域技術的傳承，他雖然平常看似瘋癲，卻都能在我遇到問題時給我指點迷津；還有同屆的振猿、揚開、家雋、明杰，感謝大家的互相提攜，雖然我很少跟大家一起吃飯，但感情還是非常好，希望以後有空還能到咆嘯深淵一起走走；最後就是學弟們，柏宇、景順、淳期、紘廷、以信，大家都非常優秀，每個都有成為博士生的潛力，相信大家可以在自己的領域闖出一片天，把實驗力學實驗室的精神發揚到世界。還要謝謝從大學就認識的好朋友余鎧，借我論文比對系統的帳號，讓我可以無後顧之憂地把論文丟上去審查。

最後感謝我的父母給予我的支持，給我累了可以回去的溫暖的家。還要感謝我的女朋友思穎，在我因為研究跟論文的事感到煩躁的時候，總是耐心地相伴，讓我能夠非常有動力面對接踵而來的挑戰。這兩年之間還受到過非常多人的幫助，才得以完成這篇論文、順利畢業，真的非常感謝！

中文摘要

本論文探討壓電薄板複合薄膜作為新型揚聲器的振動和聲學特性。研究方法包括理論解析、無網格特雷夫茨數值法、有限元素法和實驗量測，並進行相互對應和比較。首先對外圈固定邊界的單連通與雙連通薄膜進行振動分析，並進行張力反算；接著因壓電薄板懸吊於薄膜上形成類似自由邊界的效應，因此對壓電薄板採用自由邊界的振動理論解析；最終將壓電薄板複合薄膜形成一體結構，探討串聯型雙層壓電薄板複合跑道形薄膜元件的振動和聲學特性。

為了分析聲學元件的面外振動特性，實驗量測技術使用了全域式的電子斑點干涉術(Electronic Speckle Pattern Interferometry, ESPI)和雷射都卜勒振動儀(Laser Doppler Vibrometer, LDV)，並進行了人工耳(Artificial Ear)實驗以測量封閉音場的聲學特性。數種實驗量測技術也進行聲振特性的相互比較討論，且由於封閉音場也進行了有限元素法和人工耳實驗的對應，驗證有限元素模擬的有效性。

由以上研究內容掌握壓電複合薄板的聲振特性後，考慮到實驗設計製作與量測所需的時間和成本，本研究採用數值方法結合元件參數最佳化，通過調整壓電薄板和薄膜的尺寸參數，探討每個參數對振動和聲學特性的影響，將音壓頻率響應曲線最佳化，預期希望設計具有人耳感受良好聲學表現的跑道形揚聲器。故本論文結合理論解析、數值分析和實驗量測，並通過對壓電薄板複合薄膜的聲學元件，嘗試進行最佳化設計，為新型揚聲器的聲音品質和聲場增益特性，提供一可嘗試使用的設計方法。

關鍵字：疊加法、特雷夫茨法、壓電平板、薄膜、無網格法、聲學元件、聲固耦合分析、人工耳、跑道形揚聲器

ABSTRACT



The research studied the vibration and acoustic characteristics of membranes compounded with piezoelectric thin plates as acoustic actuators. The research involves theoretical analysis, Trefftz's meshless method, finite element method (FEM), and experimental measurements to verify with the analyzed results. Vibration analysis is conducted for single- and double-connected membranes with rim-fixed boundary conditions, and membrane tension is determined through inverse calculations. Theoretical analysis is also performed for the vibration of piezoelectric thin plates under free boundary conditions. The vibroacoustic characteristics of composite double-layered piezoelectric thin plates with racetrack diaphragm are also studied.

Out-of-plane vibration characteristics of the acoustic components are determined by using Electronic Speckle Pattern Interferometry (ESPI) and Laser Doppler Vibrometer (LDV). Acoustic measurements in enclosed sound fields are conducted using an artificial ear. The results in finite element method is validated with the results from experimental measurements obtained from the artificial ear due to the enclosed sound fields.

Avoiding time-consuming and cost involved in prototype, this study utilizes commercial finite element software combined with parameter optimization to optimize the sound pressure level, for achieving optimal design for high acoustic performance speakers. By optimizing the acoustic components of membranes compounded with piezoelectric thin plates, an effective approaching for sound quality and acoustic field of racetrack speakers with enhancement is developed in the thesis.

Keywords: superposition method, Trefftz method, piezoelectric plate, membrane, meshless method, acoustic component, vibroacoustic, artificial ear, racetrack speaker

目錄

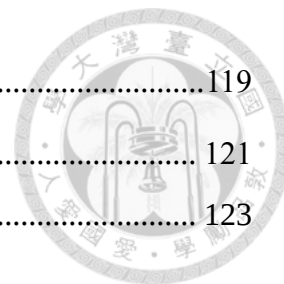


論文口試委員審定書	I
致謝	II
中文摘要	1
ABSTRACT	2
目錄	3
圖目錄	7
表目錄	10
第一章 緒論	11
1.1 研究動機	11
1.2 文獻回顧	12
1.3 論文內容簡介	20
第二章 實驗原理與架設	23
2.1 雷射都卜勒測振儀	23
2.2 電子斑點干涉術	26
2.3 人工耳量測	34
2.4 聲學元件設計與製作流程	36
2.4.1 聲學元件製作方式	36
2.4.2 聲學元件的設計	40
第三章 基本理論與方法	45
3.1 壓電薄板理論	45
3.1.1 力學假設	47
3.1.2 電學假設	48
3.1.3 壓電薄板統御方程式	49
3.2 無網格法	50
3.2.1 基本解法	52
3.2.2 特雷夫茨法(Trefftz Method)	53

3.2.3 基本解法與特雷夫茨法比較.....	55
第四章 薄膜振動特性分析	57
4.1 薄膜統御方程式	57
4.2 矩形薄膜之自由振動分析	57
4.2.1 矩形薄膜之自由振動理論解析	58
4.2.2 矩形薄膜之自由振動特雷夫茨法	59
4.2.3 矩形薄膜之自由振動有限元素法	60
4.2.4 試片規格	62
4.2.5 矩形薄膜之理論解析與數值分析之比較	62
4.3 環形薄膜之自由振動分析	65
4.3.1 環形薄膜之自由振動理論解析	65
4.3.2 環形薄膜之自由振動特雷夫茨法	67
4.3.3 環形薄膜之自由振動有限元素法	69
4.3.4 試片規格	70
4.3.5 環形薄膜之理論解析與數值分析之比較	70
4.4 跑道形環薄膜之自由振動分析	73
4.4.1 跑道形環薄膜之自由振動特雷夫茨法	73
4.4.2 跑道形環薄膜之自由振動有限元素數值分析	76
4.4.3 試片規格	76
4.4.4 跑道形環薄膜特雷夫茨法與有限元素之比較	76
4.5 薄膜之張力分析	79
4.5.1 繃膜張力與共振頻率量測	80
4.5.2 跑道形薄膜張力之有限元素法	80
4.5.3 試片規格	81
4.5.4 跑道形薄膜張力與第一共振頻之相關性比較	81
第五章 壓電矩形薄板振動特性分析	84
5.1 自由邊界下之疊加法	84

5.2 串聯型雙層壓電矩形板面外振動理論與數值分析之比較	85
5.2.1 試片規格	86
5.2.2 有限元素數值分析	86
5.2.3 壓電矩形板於自由邊界面外振動理論解析與數值分析之比較	87
第六章 串聯型雙層壓電矩形薄板複合薄膜振動分析	90
6.1 壓電薄板複合薄膜剛體假設下之振動分析	90
6.1.1 壓電圓盤複合薄膜理論解析	91
6.1.2 壓電矩形薄板複合薄膜特雷夫茨法	91
6.1.3 壓電矩形薄板複合薄膜有限元素數值分析	94
6.1.4 試片規格	95
6.1.5 壓電薄板複合跑道形薄膜剛體假設下之振動理論解析與數值 分析之比較	96
6.2 壓電薄板複合薄膜壓電薄板主導模態之振動分析	101
6.2.1 壓電薄板複合薄膜疊加法結合特雷夫茨法	101
6.2.2 壓電薄板複合薄膜有限元素數值分析	103
6.2.3 試片規格	103
6.2.4 壓電薄板複合跑道形薄膜壓電薄板主導模態振動理論解析與 數值分析之比較	103
第七章 聲學元件聲學特性分析、實驗量測與最佳化	107
7.1 封閉音場之聲學特性分析	107
7.1.1 封閉音場之有限元素分析	108
7.1.2 多孔彈性波理論	110
7.1.3 封閉音場實驗量測與數值分析之比較	110
7.1.4 壓電矩形薄板複合跑道形薄膜聲學元件(B)之最佳化	111
7.1.5 最佳化壓電矩形薄板複合跑道形薄膜聲學元件(B)之聲學特性	117
第八章 結論與未來展望	119

8.1 結論	119
8.2 未來展望	121
參考文獻	123



圖目錄



圖 2-1	LDV-OFV505	24
圖 2-2	聲光調製器結構示意圖	25
圖 2-3	LDV 內部光路結構	25
圖 2-4	ESPI 水平面外架設圖	31
圖 2-5	ESPI 垂直面外架設圖	32
圖 2-6	ESPI 水平面外架設-薄膜受揚聲器激振	33
圖 2-7	ESPI 水平面外架設-複合聲學元件	33
圖 2-8	人工耳(GRAS 43AG-9 Hi-Res Ear Simulator)	34
圖 2-9	多功能聲音校準器(G.R.A.S. 42AG)	35
圖 2-10	人工耳實際量測圖	35
圖 2-11	聲學元件製作流程圖	36
圖 2-12	繃膜治具-上下蓋組合併	37
圖 2-13	繃膜治具-底座、頂件組合併	38
圖 2-14	繃膜高度差示意圖	38
圖 2-15	AB 接著型導電銀膠	39
圖 2-16	導電銀膠	39
圖 2-17	跑道形之結構、尺寸示意圖	40
圖 2-18	串聯型雙層壓電圓環複合圓形薄膜之聲學元件(A)結構示意圖	41
圖 2-19	串聯型雙層壓電圓環複合圓形薄膜之聲學元件(A)成品	42
圖 2-20	最佳化壓電矩形薄板複合跑道形薄膜之聲學元件(B)結構示意圖	43
圖 2-21	最佳化串聯型雙層壓電矩形薄板複合跑道形薄膜之聲學元件(B)成品 ...	44
圖 3-1	串聯型雙層壓電陶瓷搭配串聯型電路連接	50
圖 3-2	(a)元素法局部單元形函數 (b)無網格法全局座標近似函數	51
圖 3-3	(a)有限元素法 (b)無網格法	51

圖 3-4	基本解法求解流程圖.....	53
圖 3-5	特雷夫茨法求解流程圖.....	55
圖 3-6	基本解法假根示意圖.....	56
圖 3-7	特雷夫茨法邊界佈點示意圖.....	56
圖 4-1	矩形薄膜示意圖.....	58
圖 4-2	矩形薄膜邊界節點設置示意圖.....	60
圖 4-3	薄膜有限元素模擬設定.....	61
圖 4-4	環形薄膜結構及尺寸.....	65
圖 4-5	環形薄膜邊界佈點示意圖.....	69
圖 4-6	環形薄膜有限元素網格設定.....	69
圖 4-7	跑道形環薄膜結構、尺寸示意圖.....	73
圖 4-8	第一類貝索函數.....	75
圖 4-9	第二類貝索函數.....	75
圖 4-10	跑道形環薄膜有限元素設定.....	76
圖 4-11	活塞模態示意圖.....	79
圖 4-12	薄膜張力有限元素模擬設定.....	81
圖 4-13	繃膜高度 6mm 之 LDV 量測結果.....	82
圖 4-14	繃膜高度 7mm 之 LDV 量測結果.....	82
圖 4-15	繃膜高度 8mm 之 LDV 量測結果.....	82
圖 5-1	自由邊界疊加法分解圖.....	85
圖 5-2	極化方向設定.....	86
圖 6-1	剛體壓電複合薄膜示意圖.....	91
圖 6-2	壓電薄板複合薄膜正交方向意圖.....	93
圖 6-3	壓電複合薄膜模型示意圖.....	94
圖 6-4	壓電複合薄膜耦合面設定圖.....	94

圖 6-5	壓電薄板複合薄膜之壓電主導振動流程圖.....	102
圖 7-1	有限元素模擬人工耳模型示意圖.....	108
圖 7-2	有限元素模擬人工耳各部件標示圖.....	108
圖 7-3	耳道、耳鼓等效電路模型圖.....	109
圖 7-4	人工耳模型網格分佈圖.....	109
圖 7-5	多孔材料示意圖.....	110
圖 7-6	封閉音場實驗量測與數值分析圖.....	111
圖 7-7	最佳化標準示意圖.....	112
圖 7-8	有限元素模擬參數掃描設定.....	112
圖 7-9	最佳化壓電矩形薄板複合跑道形薄膜之模擬聲壓曲線圖.....	116
圖 7-10	最佳化聲學元件之實驗、模擬聲壓曲線圖.....	117
圖 7-11	最佳化聲學元件之 LDV 單點量測共振頻.....	118
圖 7-12	最佳化聲學元件之人工耳聲壓曲線與 ESPI 模態量測圖.....	118

表目錄



表 2-1	人工耳麥克風規格表	35
表 2-2	雙層壓電圓環複合圓形薄膜之聲學元件(A)相關參數	42
表 2-3	最佳化雙層壓電矩形薄板複合跑道形薄膜之聲學元件(B)相關參數	44
表 4-1	靜電薄膜材料參數	62
表 4-2	矩形薄膜固定邊界理論及數值法對照表(a)	63
表 4-3	矩形薄膜固定邊界理論及數值法對照表(b)	64
表 4-4	PVC 薄膜材料參數	70
表 4-5	環形薄膜固定邊界理論及數值法對照表(a)	71
表 4-6	環形薄膜固定邊界理論及數值法對照表(b)	72
表 4-7	跑道形環薄膜固定邊界理論及數值法對照表(a)	77
表 4-8	跑道形環薄膜固定邊界理論及數值法對照表(b)	78
表 4-9	薄膜基頻量測與反算張力結果	83
表 5-1	薄板自由邊界理論與有限元素模擬對照表(a)	88
表 5-2	薄板自由邊界理論與有限元素模擬對照表(b)	89
表 6-1	PSI-5A4E 壓電材料參數表	95
表 6-2	壓電圓盤複合薄膜之活塞及薄膜主導模態對照表(a)	97
表 6-3	壓電圓盤複合薄膜之活塞及薄膜主導模態對照表(b)	98
表 6-4	壓電矩形薄板複合跑道形薄膜之活塞及薄膜主導模態對照表(a)	99
表 6-5	壓電矩形薄板複合跑道形薄膜之活塞及薄膜主導模態對照表(b)	100
表 6-6	壓電矩形薄板複合跑道形薄膜之壓電主導模態比較表(a)	105
表 6-7	壓電矩形薄板複合跑道形薄膜之壓電主導模態比較表(b)	106
表 7-1	跑道形薄膜尺寸參數掃描結果	114
表 7-2	跑道形薄膜 W_m 參數掃描結果	115
表 7-3	矩形壓電尺寸參數掃描結果	115

第一章 緒論



1.1 研究動機

近年來，民眾對於小型揚聲器的需求日益增加，各界也紛紛致力於輕薄型揚聲器的研發，尤其在 3C 產品的使用上更是廣泛，如電腦、智慧型手機和藍芽耳機等。隨著網際網路發達與此類技術不斷地進步，音樂、影片等娛樂已經成為人們生活中不可或缺的一部分。隨著揚聲器生產技術的發展，至今已經是人人都擁有耳機，可見其重要性。

耳機的原理是透過將電訊號轉換為聲壓，其聲學元件的構造對聲音的表現有著舉足輕重的地位。根據作動原理的不同，常見的耳機可以大致區分為二類：動圈式耳機和靜電式耳機。動圈式耳機是最被廣泛使用的耳機類型，透過電流經過線圈產生磁場與元件中心之永久磁鐵產生作動，從而引發振動並將聲音傳遞到空氣中。其擁有更深沉、更飽滿的低頻表現，但受限於必須要有磁鐵，大體積為一個難以突破的問題。靜電式耳機是透過將振膜置於由兩極板組成的靜電場中，以聲音訊號使靜電場產生變化，驅動振膜振動並發出聲音。這種耳機具有高靈敏度、低失真的優點，但由於需要額外配備專用放大器，導致耳機的價格昂貴、攜帶不便，減低了消費者使用的慾望。

本研究將壓電材料作為致動元件並複合薄膜，結合了理論解析、無網格特雷夫茨法和有限元素模擬，對聲學元件的振動進行分析。利用有限元素法進行聲學上的模擬並搭配實驗量測以相互對應，並結合最佳化設計，找出具有最佳聲音表現的尺寸參數。我們以製作輕薄、便攜的壓電式揚聲器為目標，設計出低、中、高頻均衡、高響度和高音質的耳機聲學元件。這也符合現今電子元件輕薄化發展的趨勢。



1.2 文獻回顧

在我們的日常生活中，聲音和振動無處不在。當物體振動時，它會帶動周圍介質的運動，而介質中的粒子相互碰撞，從而產生聲波振動，這些振動通過介質傳遞到我們的耳膜或感測元件，我們才能感知到聲音。因此，聲音和振動的特性對於耳機、音響等產品至關重要，它們之間緊密相連。只有從振動的角度出發，我們才能更全面地理解並從根本上改善聲學問題。

Kim[1]等人在 2011 年進行了壓電薄膜型揚聲器與聲學相關的研究，為了讓揚聲器能夠於低頻範圍有優秀的聲音表現，他們除了考量幾何效應會如何影響到揚聲器的效能，同時也將目光放在改變壓電薄膜揚聲器的尺寸函數上，藉此評估揚聲器的聲學效能。基於此研究背景，本研究也選擇了和其相同的，「壓電薄板複合薄膜」聲學元件。「薄板」和「薄膜」同屬連體系統振動(vibrations of continuous systems)的討論範圍。薄膜(membrane)是二維的系統，其振動特性是四階偏微分系統，可以由一維的弦(string)推廣而得；而二維的薄板(thin plate)則是由一維的樑(beam)推廣來的，其振動特性是二階偏微分系統，兩者的振動特性存在顯著差異。1948 年，Morse[2]於著作中使用振動學分析了薄板及薄膜的振動：薄板振動時恢復力(restoring force)來自於薄板本身較高的剛性；和薄板不同，薄膜本身剛性較低，振動時則需要透過外加的張力(tension)方能達到平衡。本文將透過理論解析、無網格數值方法、有限元素數值方法以及實驗的量測，討論壓電薄板、單連通薄膜、雙連通薄膜以及壓電薄膜之複合結構其振動特性與聲學特性之間的關係。同時，這些方法也相互驗證了其可行性和準確性。

近年來隨著相關軟、硬體的進步，人們對壓電材料的掌握愈來愈高，也有很多不同的壓電元件被開發出來。而壓電材料的起源是 Pierre 和 Jacques[3]兄弟從天然水晶之中發現了壓電效應，當時是 1880 年。壓電材料能夠在精密工業和檢測儀器設備中得到廣泛應用，必須要歸功於其優秀的機電轉換效率，以及壓電效應的機電轉換和諧振特性。包含超音波雷達感測器、壓力傳感器、為遺傳感器、加速計及超



音波馬達等，都是常見使用壓電材料的產品。以下將針對壓電材料的機械特性相關文獻進行介紹。Cady[4] 在 1946 年把壓電晶體應用於振盪器，並以此為主題發表了一份相關的書籍，是這個領域的先驅之一。而 Mason [5]則是在 1950 年透過模擬的方式，將壓電晶體的振動特性等效成電路。Tiersten [6]於 1969 年透過電彈方程式跟變分法推導壓電平板振動特性之本構方程式，並以此為基礎，提出了完整的線性壓電理論。1972 年，Jaffe [7]發表了對壓電陶瓷的綜合性著作，其中介紹了壓電陶瓷的製備、物理性質、機械特性和應用等方面的知識。它提供了對壓電材料基礎概念的詳細解釋。而在 1972 年，Mindlin [8]同樣也是以變分法推導了石英壓電平板的二維本構方程式。接著在 1987 年的 IEEE Standard [9]中，不只是詳細規範了壓電材料常數的共振法量測方法，另外，還完整歸納了壓電材料的四種本構方程式（d-form、e-form、g-form 和 h-form）。Rogacheva [10]在 1994 年提出了平面應力和應變相關問題的假設，除此之外，並針對不同極化方向的壓電平板與薄殼的振動問題進行了探討。

以下將分析圓盤及圓板的平板振動問題，它們因為形狀簡單而對稱，在理論及實驗中都相當常見且處理難度較低。Chang [11] 在 2000 年對壓電陶瓷圓環進行了振動分析，其中包含了靜態位移、共振頻率和反共振頻率以及動態機電耦合係數，並以此歸納出了電彈理論，同時他也透過數值計算對幾何變數會如何影響壓電圓環的振動產生影響。於 2003 年，林育志 [12]研究了壓電陶瓷複合層板和壓電雙晶片之振動特性，值得一提的是，其在研究中使用 AF-ESPI（全場電子繪影法）結合 LDV（激光多點振動測速儀）量測技術和阻抗分析，並得到和有限元素分析相同的結果。何祥瑋[13] 在 2004 年則是對單層壓電圓盤和圓環在不同邊界條件下的振動特性進行分析，其中主要使用了薄板理論，並與有限元素法的結果相互比較。Huang[14]在 2005 年針對對稱形式的壓電雙晶複合等向性材料的振動特性進行了解析。在這項研究中，同樣採用了薄板理論，並將其結果與有限元素法的分析結果和實驗量測進行了比較。黃育熙[15] 在 2009 年分析了壓電陶瓷雙晶片在不同電極



連接配置下的振動行為，並探討了其在三維空間中的振動模式和頻率響應，其中使用到了 ESPI、LDV 和阻抗分析結合有限元素法，並與理論解析和有限元素法進行相互驗證。許松逸[16]也在 2017 年於文獻中探討了壓電陶瓷圓盤和圓環在不同結構和邊界條件下的振動特性，並對單層、雙層堆疊和雙層堆疊複合等向性材料的壓電陶瓷圓盤和圓環進行了分析，並研究了它們的振動行為，同時使用實驗和理論方法相互驗證，設計了並聯型雙層壓電圓環複合等向性材料的尺寸參數，以研究其在自由邊界條件下的三維耦合特性。

從上個世紀前，學者就已開始針對矩形平板的振動進行研究。Leissa[17] 把邊界條件複雜的振動問題，透過在數學上簡化的方式，使用雙向梁函數作為基底函數來進行薄板面外位移場的近似解求解，這一套方法的優點是其具有相當簡易的分析流程。通過構建基底函數的組合，可以以近似的方式表示薄板在面外的位移場，這種方法可以用於分析薄板的振動行為或力學特性，並且可以提供薄板在不同邊界條件下的位移場近似解。Gorman[18]則是利用疊加法來解析單邊固定和全自由等向性薄板的振動問題，通過將簡單邊界條件下的解進行疊加，可以得到複雜邊界條件下的近似解。Kim[19]等人於 1990 年探討了矩形板於不同情況下的彎曲振動行為，其中包含受到集中質量和點、線彈簧支撐等條件。2009 年，吳亦莊[22] 探討了壓電平板的面外振動特性，分析壓電平板的振動模態和頻率響應，並提出相關的理論模型和分析方法。研究中使用了疊加法將壓電陶瓷矩形薄板的材料參數以等效剛性的方式代入等向性矩形平板的計算，求得壓電矩形平板在全自由和懸臂板情況下的面外位移級數解，並使用有限元素法驗證了理論計算結果的準確性。2012 年，Huang 和 Ma[23] 針對壓電殼結構的耦合振動特性進行了實驗測量和有限元素分析。2019 年，王惠儀[24] 將樑函數應用於壓電平板的分析，以評估其在撓性邊界條件下的振動特性，研究著重於矩形壓電平板的自由和強迫振動，並分析了撓性邊界對振動行為的影響。2021 年，陳新承[25] 將疊加法應用於壓電陶瓷雙

晶片的分析，以研究其在彈簧邊界下的振動特性，此外還利用錐形彈簧的非線性特性，調節壓電試片的共振頻率，使其能夠適應環境的激振頻率。

Laura、Rossit 和 Malfa[26] 在 1998 年提出了圓形環狀複合薄膜的橫向振動的解析解，他們使用數學方法推導出這些複合薄膜的振動方程式，並獲得了其精確解。2001 年，Jabareen 和 Eisenberger[27]計算圓形和圓環薄膜的振動頻率的確切解，主要利用動態剛性矩陣（dynamic stiffness matrix）來計算，其中也呈現了薄膜的模態振形，他同時也把模態區分為對稱（axisymmetric）和非對稱（antisymmetric）。2007 年，Rao[28]在其著作書籍中詳細介紹了連續系統的振動理論，其中提供了深入的理論知識和數學方法，用於分析和解決連續系統（包括薄膜）的振動問題。

薄膜的統御方程式能以波動方程式的二維形式表示，也稱為亥姆霍茲方程（Helmholtz equation）。本研究選擇使用之無網格法其最初的想法可以追溯到平滑粒子流體力學（Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH）方法[29]，SPH 方法已廣泛應用於各個領域，包括固體力學和流體力學模擬。過去的文獻中不乏許多討論了基於域（domain-based）的無網格方法如：element-free Galerkin methods [30] 介紹了 Element Free Galerkin, (EFG)、一種無網格的數值方法，用於求解偏微分方程。EFG 方法將傳統有限元離散化方法替換為一組插值函數，可以更靈活地處理複雜的幾何形狀和大變形問題；domain-based methods[31] 介紹了重建核粒子法（Reproducing Kernel Particle Method, RKPM），為一種無網格的數值方法，RKPM 利用重建核函數進行離散化，可以處理不規則邊界和大變形問題。也有許多基於邊界的文獻，例如：boundary node method[32] 介紹了邊界節點法（Boundary Node Method, BNM），BNM 將問題轉化為邊界積分方程式，並利用節點在邊界上的分佈進行求解；meshless local Petrov-Galerkin approach [33] 介紹了一種新的無網格方法：Meshless Local Petrov-Galerkin, MLPG，該方法使用點擴散函數進行離散化，對複雜的幾何形狀和大變形問題進行求解；RBF approach[34] 介紹了一種用於求解線性擴散方程的無網格方法，利用插值函數進行離散化，適用於計算複雜外形及



大變形問題；以及 boundary knot method(BKM)[35] 介紹了無網格邊界粒子法 (Meshfree Boundary Particle Method)，用於求解亥姆霍茲問題，利用節點在邊界上的分佈進行離散化，可以處理複雜的幾何形狀和大變形問題。1964 年 Kupradze[36]提出了無網格法中的基本解法，一種基於徑向基函數、用於推導數學物理中極限問題的近似解，該方法使用邊界積分方程進行求解。在 2001 年，Karageorghis [37] 介紹了如何計算亥姆霍茲方程特徵值，說明如何以基本解法將問題轉化為特徵值問題並進行求解。Chen[38]於 2004 年求解多連通膜的特徵解，他將問題轉化為特徵值問題，並利用基本解法 (Method of Fundamental Solutions) 進行解析。而在 2006 年，Tsai [39] 利用基本解法 (Method of Fundamental Solutions) 分析帶有或不帶有內部孔洞的薄膜振動，他將問題轉化為特徵值問題進行求解。

特雷夫茨法是一種無網格法，用於近似求解偏微分方程的問題。在 1926 年，Treffitz[40]提出了一種稱為「近似特徵值問題」的方法，該方法利用特雷夫茨基底函數來逼近偏微分方程的解。這篇文獻奠定了特雷夫茨法的基礎，為後續研究提供了重要的啟示。而在 1984 年，Brebbia、Telles 和 Wrobel[41]對邊界元素法的基本理論和技術進行了深入的介紹，並提供了大量的工程應用實例。在該書中，特雷夫茨法被視為邊界元素法的一個重要分支，提供了特雷夫茨法在工程領域的應用背景和實用價值。

以下介紹一些薄膜結構在聲學元件中的相關研究文獻。1987 年，Streng [42] 介紹了如何計算自由空間中振動的圓形拉伸薄膜的張力，作者提出了相關的計算方法，並探討了薄膜的振動特性及其對聲壓曲線的影響。2006 年，Mellow 和 Kärkkäinen[42]探討了在自由空間和無限障板中圓形薄膜的聲場特性，研究中使用數值模擬方法，分析了薄膜的振動模式及其對聲壓場的影響，並與理論解析進行驗證，同時找到解析解，消除數值積分和最小平方方法的誤差，提高計算速度和準確度。2016 年，Huang 和 Chiang [44]製作了兩組推拉式靜電揚聲器並對其進行研究，它們是由具有導電層的圓形和環形薄膜所構成，研究中利用雷射光學系統和傳統聲

學測量方法對這些揚聲器進行了比較並發現，兩種測量方法在包含振動模態和聲輻射特性兩個層面，都呈現高度的一致性。上述文獻對於理解薄膜揚聲器的振動特性、頻率響應和聲輻射特性提供了重要的洞察和解析解，並有助於改進薄膜揚聲器的設計和性能。

電子斑點干涉術 (Electronic Speckle Pattern Interferometry, ESPI) 是一種非接觸式光學干涉技術，用於測量物體表面形變或振動。它具有非接觸、高靈敏度、寬頻範圍和高速測量等優點，本研究將其應用於量測聲學元件之共振頻率及模態振形。ESPI 技術源於全相術 (Holography)，一種在 1948 年由 Dennis Gabor 提出用於記錄物體三維資訊的量測技術，其利用光干涉記錄物體形態和光場分布，並通過干涉圖案分析並獲得物體振動信息，在當時由於技術上的不足，沒有理想的同調性光源而限制了其發展。直到 1962 年，Leith 和 Upatnieks [45] 隨著雷射的發明，它們將其應用到全相術中並從中有了大幅度的進展。1971 年，Butters 和 Leendertz [46] 在工程計量學中引入了 ESPI 技術的應用，對工業測量領域產生了重大影響。隨後，Hogmoen 和 Lokberg[47] 提出了在電子斑點干涉術中使用光相位調制技術 (Reference Beam Modulation)，進一步提升了測量的精確度和靈敏度。1982 年，Wykes 等人[48] 探討了在靜態和動態表面位移測量中使用 ESPI 的應用，開拓了該技術在實際應用中的可能性。1996 年，Wang et al. [49] 探討了一種稱為時間平均電子斑點干涉術 (time-averaged electronic speckle pattern interferometry) 的方法用於振動量測，這種方法利用雷射照射物體表面產生的斑點干涉圖像進行振動分析。他們使用了一個時間穩定的高速攝影系統來捕捉振動物體的干涉圖像序列，通過對這些干涉圖像進行時間平均處理，可以消除由於振動引起的干涉圖像的不穩定性，同時還使用了數學算法來提取出振動物體的相位變化，進而獲得其振動頻率和振幅等信息。1998 年，馬劍清和黃吉宏[50] 以 AF-ESPI 和有限元素法 (FEM) 對了多種壓電平板及三維壓電材料的振動特性進行分析，對該領域的研究做出了貢獻。黃育熙和馬劍清[51] 於 2003 年將 AF-ESPI 結合 LDV (Laser Doppler Vibrometer)

探討了壓電石英晶體平板結構的動態特性，包括頻率響應、模態分析和振動模態的形狀等。而在本研究中主要將使用的是 AF-ESPI 技術。

雷射都卜勒振動儀 (Laser Doppler Vibrometer, LDV) 是一種用於測量物體振動的儀器，它利用光的都卜勒效應進行測量。LDV 使用一束激光照到目標物體表面，並檢測由目標物表面反射回來的光的頻率變化，當目標物體發生振動時，反射光的頻率也會因都卜勒效應而改變。透過分析頻率變化，LDV 可以計算出目標物體的振動速度和位移，其優點包括非接觸測量、高精度、快速測量速度、對微小振動的敏感性等。在 2006 年，Ma et al. [52] 在單層壓電陶瓷薄板和交錯層壓電複合材料薄板的共振特性進行的實驗和數值研究。使用了共振頻率分析和振動測試來測量薄板的共振頻率，並基於有限元素法對薄板的振動特性進行了模擬和分析，同時以 LDV 技術驗證結果。

本論文主要討論壓電薄板複合薄膜之聲學元件，為了達到良好的聽覺感受，對其振動性質和頻率響應進行分析。因為兩者的剛性相差極大，故壓電薄板相對於薄膜可以視為不產生形變的剛體。Wang[54] 在 2003 年研究了複合在自由剛性圓盤上的環狀薄膜的振動特性，假設薄膜會因本身有足夠的張力而讓圓盤的重量引起薄膜產生微小變形，讓兩者之間產生非耦合的特性，並通過分析薄膜的振動問題，推導出了其共振頻率和振動模式。在 2006 年，Pinto [55] 對複合在中央自由剛性圓盤上的環狀薄膜進行了分析和實驗研究，透過假設圓盤之質量相對於薄膜非常大，假設了圓環的內、外固定的邊界條件，通過並透過和實驗的驗證，評估了薄膜的振動特性和固有頻率。2013 年，Kim 等人[56] 研究了彈性質量對超薄壓電微聲學致動器頻率響應特性的影響。通過理論分析、數值計算以及實驗量測，探討了彈性質量參數對致動器的共振頻率和頻率響應的影響。2016 年，林揚中、莊沅隴和黃育熙 [57] 研究了雙層串聯型壓電圓盤複合薄膜在近場聲學元件中的應用，其中設定壓電圓盤為類自由邊界。通過理論模型建立和數值模擬，分析了薄膜的耦合聲場特性。陳冠宇[59] 於 2019 年研究了雙層壓電圓盤複合 PVC 薄膜及雙層壓電圓環複合靜電



薄膜於在近場聲學元件中的開發，也假設樹種複合元件的邊界條件並進行討論。研究中進行了理論解析、數值計算和實驗量測，並使用有限元素法及實驗量測技術進行薄膜張力反算以及進行聲學元件的聲場分析。2021 年，張哲睿[60] 探討了壓電圓環複合薄膜在聲學元件中的設計和開發。研究中通過有限元素數值模擬和實驗分析，評估了薄膜的聲學性能和振動特性。並透過 LDV 單點量測元件之位移並用雷利積分公式分析共振模態對頻率響應的貢獻。2022 年，黃御宸[66]引入了無網格法來進行固定邊界薄膜的振動分析，將其結果和有限元素法進行相互對應，同時使用田口法將發聲單體進行尺寸的最佳化，研發出在人耳聽感上表現相當優良的耳機。2023 年，江信遠和黃育熙[67]使用光學量測方法發現橢圓形薄膜揚聲器之只需非常小的長短軸比，就能夠比正圓形振膜有更加平滑的聲壓級曲線，長短軸比介於 1~1.5 之間都是未來值得研究的範圍。這些研究成果可為新型揚聲器的聲音品質和聲場增益特性帶來突破，以開發具有優質聲音的產品。



1.3 論文內容簡介

本論文之主要研究之方向為探討壓電平板複合薄膜的聲學振動特性，以壓電陶瓷作為單體主要致動能量來源，搭配使用薄膜可以讓單體發出來的聲音在聽覺上有更好的表現。本研究主要以理論解析、有限元素法及無網格法進行振動分析，相互驗證計算結果的準確性。使用薄板理論簡化壓電陶瓷試片的振動問題，並透過疊加法將壓電薄板複雜的邊界條件拆解成多塊結構分別計算後再行疊加，以計算其面外振動的特徵頻率跟相對應的模態振形。另外，為提升單體於聲學上的表現，使用無網格特雷夫茨法進行跑道形薄膜的解析，計算其共振頻率及對應的模態振形，再以類似自由的邊界條件計算壓電薄板複合於薄膜的振動特性。本研究主要使用封閉音場模擬人工耳來進行聲學分析，期望透過使用有限元素法及實際量測，模擬人耳配戴耳罩式耳機的實際情形，分析單體於密閉腔體中的聲學表現。最後在設定最佳化標準後，對聲學元件以達到標準為目標進行最佳化分析，期望藉由分析得到各參數的最佳選擇，並設計出聲音表現優秀的揚聲器。以下為本論文各個章節的。

第一章主要介紹本研究的研究動機及研究背景，簡述過往對於薄膜、壓電、複合元件、無網格數值方法以及研究中使用到的實驗量測技術的相關文獻，並本文各章節之內容及重點做簡單的說明。

第二章為本研究所使用到的實驗及量測技術說明，簡介其基本運作原理。本研究使用了雷射都卜勒測振儀（LDV）進行振動量，LDV 能夠測量試片單點面外的動態位移，並透過掃頻方的式量測待測物體的速度頻譜；另外，本研究還使用了雷射電子斑點干涉術（ESPI）量測物體於共振頻率下的模態振形；此外，本研究為了模擬人耳實際聆聽的感受，使用了具有耳殼的人工耳進行聲壓曲線的量測，在耳機和頰板形成的封閉空間中，聲學元件在低頻部分的表現會有所變化。最後，還介紹了所探討的聲學元件，其中也包含了製作方式和流程，並提供了聲學元件詳細資訊。這些元件的特性將對聲音品質和聲學性能的研究和開發提供重要的參考。

第三章會針對本研究所使用的基本理論與研究方法做介紹。主要使用無網格法針對薄膜及複合元件進行分析，其優勢為不需將模型切成複雜的網格，只需透過在邊界上設置節點就能進行計算，因此能夠適用於較為複雜的幾何形狀，本論文以無網格法的特雷夫茨法作為求解亥姆霍茲方程式的方法。

第四章會用幾種不同的方法來解析薄膜的自由振動並進行相互驗證。先對單、雙連通的薄膜以無網格特雷夫茨法、有限元素模擬進行分析，並和文獻中的結果進行對比，比較各種方法計算出來之共振頻率及模態振形。接著討論外型較為複雜的跑道形環薄膜，因此使用特雷夫茨法及有限元素法進行分析，同樣是對共振頻率及對應的模態振形進行比較與討論。最後對單連通薄膜的共振頻率進行量測後，以有限元素模擬軟體進行其張力反算，以利後續實驗及模擬實的參數設定。

第五章則是以有限元素模擬分析自由邊界下壓電矩形薄板的振動，並和文獻中以疊加法計算所得到之共振頻率與模態振形進行比較。

第六章會結合第四、五章的內容，對壓電薄板複合薄膜的複合元件進行振動分析，壓電薄板部分以類自由邊界進行計算，並可以根據模態振形分成三種來進行討論：活塞模態及薄膜主導模態是將視壓電為不會變形的剛體、壓電主導模態則是因為薄膜和壓電薄板的剛性相差極大而忽略掉薄膜對壓電的影響。活塞模態及薄膜主導模態主要以特雷夫茨法結合剛體假設進行推導，並和有限元素分析之結果進行比較；壓電主導模態則是結合疊加法及特雷夫茨法，分析壓電矩形薄板複合薄膜的振動，並就計算出之共振頻率及模態振形和有限元素分析之結果進行比較。

第七章會介紹本研究是如何對聲學元件做最佳化及量測。以有限元素模擬軟體建立封閉音場的模型，透過將人耳的阻抗等效成電聲學模型的方式求取模型的聲壓頻率響應曲線，可以有效減少計算的時間以及建立模型的複雜度。透過設立最佳化標準：活塞模態共振頻率、聲壓曲線平滑以及聲壓高低落差，並選擇元件參數進行調整的方式，以參數掃描的方式進行參數最佳化，期望能滿足初始設立之目標。

將參數最佳化後之元件實作，進行人工耳、LDV 及 ESPI 量測，並和有限元素分析之結果進行相互比較。

第八章則為本篇論文的總結，會分析本研究最佳化設計的聲學元件，並就值得改進的部分提出未來的研究方向，如針對實驗方法或是理論解析的部分加以討論。

第二章 實驗原理與架設



本章會就本研究中使用到的實驗儀器、技術以及架設的方式做介紹。首先介紹雷射都卜勒測振儀 (Laser Doppler Vibrometer, LDV)，利用都卜勒效應，對欲進行量測的試片或元件以掃頻法進行單點的量測，並透過快速傅立葉轉換 (Fast Fourier Transform, FFT) 把量測到的資料的時域轉換成頻域，藉此能夠得到待測物之面外振動頻率響應，頻響曲線圖中的峰值即可理解為物體之共振頻率。接著介紹電子斑點干涉術 (Electronic Speckle Pattern Interferometry, ESPI)，為一種非接觸式的光學技術，主要是利用光學原理來量測元件的全域模態振形，本研究多將其用於量測試片之面外方向振動特性。最後是人工耳量測 (Artificial Ear)，人工耳為有仿真人工耳廓的聲壓量測儀器，且因為有跟人耳相似的阻抗，能夠將人耳感受到的聲音數據化，本研究主要將其用於量測聲學元件成品。

2.1 雷射都卜勒測振儀

雷射都卜勒測振儀 (Laser Doppler Vibrometer, LDV) 乃一種能精準量測的非接觸式光學系統，主要的原理如其名，是運用都卜勒效應 (Doppler effect) 的原理。當雷射光波與物體表面接觸，且該物體處於運動狀態時，入、反射光波會有頻率上的，而根據都卜勒效應我們知道物體移動之速率和頻率的變化率成正比。雷射都卜勒測振儀在單點位移與速度的量測上是相當精準的。

如圖 2-1 所示，本研究採用 Polytec 公司生產的 OFV-505 型號 LDV，原理為透過聲光調製器 (Acousto-Optic Modulator, AOM) 系統亦可稱為布拉格盒 (Bragg Cell) 來進行實驗量測。該系統基於聲光效應之原理，即聲波在晶體材料中傳播時，聲波引起的晶體折射率變化進一步影響光的行為。如圖 2-2 所示，晶體材料的兩端分別連接著轉換器及減振器，其中轉換器產生在晶體材料中傳播之聲波，聲波在到達材料之另一端後，會碰到減振器並被其吸收。當需要調整光波之繞射角度時，只需通過調整聲波的頻率即可。



聲光轉換器之聲波頻率為 f_a ， V_a 則為聲波於材料中傳遞的波速，我們便可以透過下列公式得到晶體材料之折射率變化的週期：

$$T = \frac{V_a}{f_a} \quad (2-1)$$

入射光於晶體中之波長會變成：

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad (2-2)$$

其中 λ_0 為入射光初始之波長， n 則為該晶體材料之折射率。由於入射角通常為小角度，因此可以設 $\sin \theta_B = \theta_B$ ，接著以布拉格繞射公式可以得到：

$$\theta_B = \frac{\lambda}{2T} = \lambda \frac{f_a}{2V_a} \quad (2-3)$$

圖 2-3 為 LDV 內部的光路結構，從中可以看到，分光鏡把雷射光一分為二，分別是經過布拉格盒的頻率調整後傳遞到檢測器（Detector），以及傳遞到待測試片（Sample）上。根據都卜勒效應，當待測物在振動時，入射與反射的雷射光也會因此有著不同的頻率，透過檢測器量測反射光和入射光的頻率差異，便可以藉此計算出待測物之振動速度。



圖 2-1 LDV-OFV505

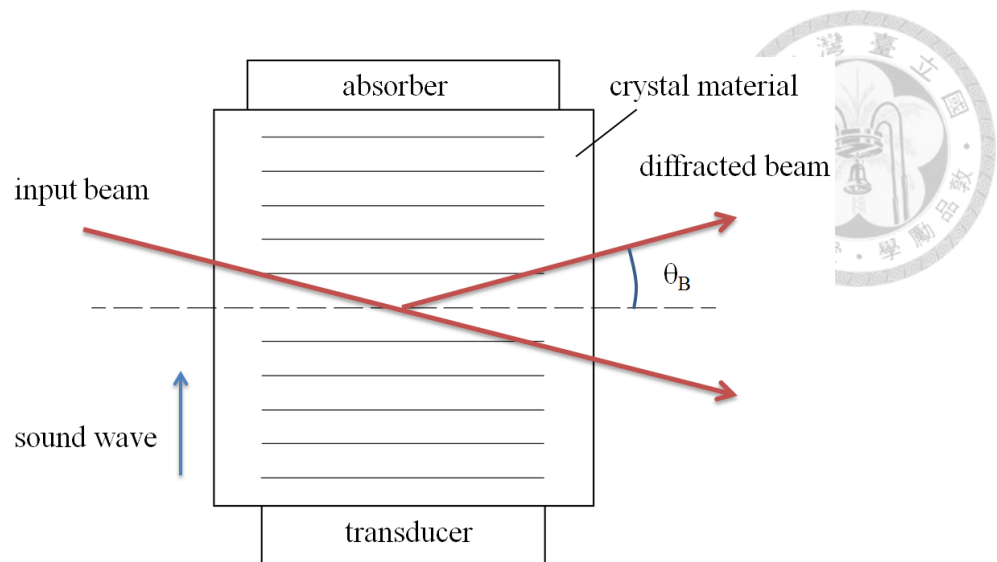


圖 2-2 聲光調製器結構示意圖

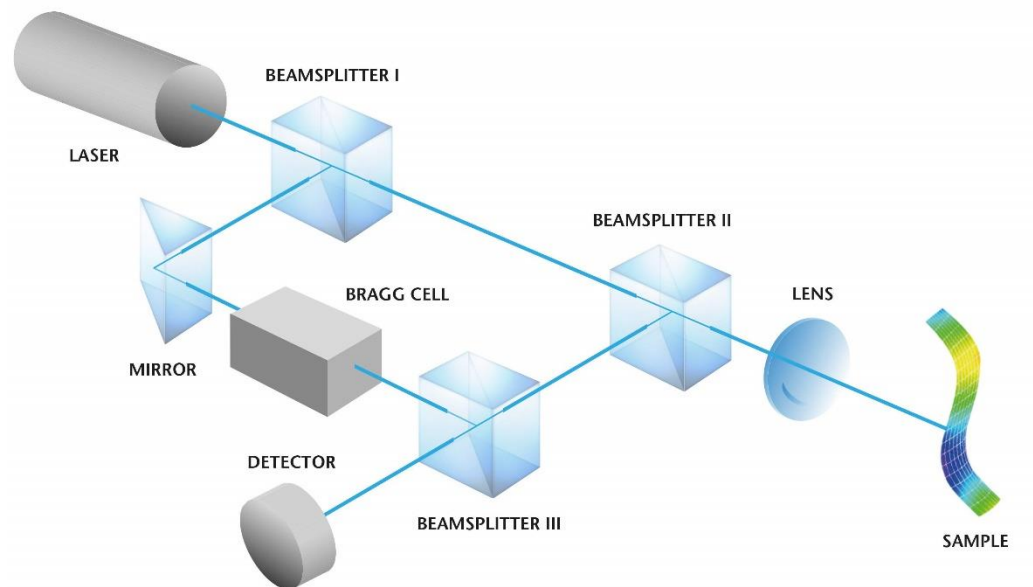


圖 2-3 LDV 內部光路結構



2.2 電子斑點干涉術

電子斑點干涉術 (Electronic Speckle Pattern Interferometry, ESPI) 是一種量測技術，其最初是源自於全像術 (Holography) 演變而來，能夠把低空間頻率 (Low Spatial Frequency) 下物體表面靜態和動態變形的全場成像圖形，它是透過影像感測元件 (Charge-Coupled Device, CCD) 以及電子處理技術來達成的。當待測物表面有形變的狀況產生時，照射到其表面以及參考平面的兩道同調性光源，兩道光的光點產生微小的位移，進而產生干涉條紋。通過測量兩道光的光程差變化，可以即時獲得待測物的位移資訊，相較於全像術有更加快速的優勢。ESPI 具有非接觸、全域和即時的特點，並且只需簡單的設置和校正即可進行實驗。它能夠捕捉到次微米級的位移變化，並以光波長作為精確度的基準。本研究使用的為同調性較佳的氦氖雷射作為光源，確保測量的準確性和可靠性。

ESPI 常使用是均時法 (Time-Averaging Method) 來量測振動中的物體，均時法是在 CCD 的曝光時間內紀錄物體振動時的影像，從振動中的物體上拍攝到的干涉條紋都能夠以零階貝索函數 (zero-order Bessel Function) 的方式來表示。我們可以通過拍攝到干涉影像的亮暗紋判斷其位移，其中位移為零的區域有最高的亮度，稱為節線區；而等位移線的部分，則會是以亮暗相間的條紋呈現，故我們可以從中判斷物體之振動位移是怎麼分布的。當我們使用 ESPI 進行三為變形的量測時，透過下列兩種不同的架設方式可以分別對不同的振動進行量測：測量待測物與待測物表面的垂直位移我們稱為面外架設、量待測物與待測物表面的平行位移則為面內架設，將兩種不同的結果結合，得到的就會是物體完整的三維振動變形。

本研究以聲振為主要研究方向，並著重於面外振動量測。因此，本部分將進行詳細的理論介紹，並描述面外振動量測系統的架設和量測方法。如下圖 2-4、圖 2-5，在量測物體的面外振動時，我們可以把架設方式分為水平式和垂直式兩種。在系統架設中，紅線代表雷射光的光路。首先，雷射光束通過空間濾波器 (Spatial Filter) 進行濾波，然後通過擴束鏡擴大光束的尺寸。接著利用分光元件將光束分成兩道，

其中一道光束射向待測物表面，在待測物的表面上形成散射光；另一道光束則是會射向參考平面(Reference Plane)，形成光斑式的參考光(Speckled Reference Beam)。這道參考光經過與 CCD 相機同軸的分光元件反射，以避免鏡面反射光造成光暈，藉此讓拍攝到的影像更清楚。其中射向參考平面的參考光束會和投影於待測物的光束同軸，然後在 CCD 相機的感光平面上聚焦並產生訊號，而這些訊號在經過電腦的運算及處理後即可呈現出干涉條紋的影像，我們也能從中得知物體振動的相關資訊。如圖 2-6、圖 2-7 所示，ESPI 的面外振動量測系統分別會被應用於以喇叭激振的薄膜及自行發聲的複合式聲學元件（如壓電複合薄膜聲學元件）。

接下來對 ESPI 的基本量測原理[61]進行說明。

首先假設待測物靜止時成像平面(Image Plane)上任一點之光強度：

$$I_1 = I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} \cos \phi_O \quad (2-4)$$

I_O 為物光強度、 I_R 為參考光強度，而 ϕ_O 則是兩光間的相位差。而當振動開始，假設 $\Delta\phi$ 為該點散射物光相位角差變化量，若待測物之振幅表示為 A 、物光與垂直於物體表面方向之間的夾角為 θ_0 ，而物體振動之角頻率為 ω ，則此相位差可表示為：

$$\phi_O = \frac{2\pi}{\lambda} (1 + \cos \theta_0) A \cos \omega t = \Gamma A \cos \omega t \quad (2-5)$$

令 $\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda} (1 + \cos \theta_0)$ 代表系統的靈敏度向量，其會受到系統架設狀況的影響，大小取決於 θ_0 （架設角度），當架設角度愈接近 0 時系統靈敏度會愈大，而上式中 λ 為雷射光波長。

當物體處於振動狀態時，CCD 在取像時間內不斷累積該物體在不同時刻的振動影像。均時法的概念是將這些影像進行累加，然後對時間進行平均，以得到平均化的振動影像。因此，CCD 影像所擷取的光強度 I_2 可以視為取像時間週期內的平均值：

$$I_2 = I_O + I_R + \frac{2}{\tau} \sqrt{I_O I_R} \int_0^\tau \cos(\phi_O + \Gamma A \cos \omega t) dt \quad (2-6)$$

簡化後可得到：

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \cos(\phi_O + \Gamma A \cos \omega t) dt &= \text{Re} \left[\int_0^\tau \exp(i\phi_O + i\Gamma A \cos \omega t) dt \right] \\ &= \text{Re} \left[e^{i\phi_O} \int_0^\tau \exp(i\Gamma A \cos \omega t) dt \right] \\ &= \text{Re} \left[e^{i\phi_O} \int_0^\tau \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(\Gamma A) e^{in(\frac{\pi}{2} - \omega t)} dt \right] \\ &= \text{Re} \left[e^{i\phi_O} \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(\Gamma A) e^{in(\frac{\pi}{2} - \omega t)} \frac{e^{-in\omega\tau} - 1}{-in\omega} \right] \end{aligned} \quad (2-7)$$

若 CCD 擷取影像時間 $\tau = \frac{2k\pi}{\omega}$ 或 $\tau \gg \frac{2k\pi}{\omega}$ ，除非 $n=0$ ，否則其值為 0，故可將

簡化式子改寫：

$$\int_0^\tau \cos(\phi_O + \Gamma A \cos \omega t) dt = \tau J_0(\Gamma A) \cos \phi_O \quad (2-8)$$

因此，光強度 I_2 為：

$$I_2 = I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} (\cos \phi_O) J_0(\Gamma A) \quad (2-9)$$

式中 $J_0(\Gamma A)$ 是為零階第一類貝索函數(Bessel Function)，其中包含了振幅 A ，

但因(2-9)中的物光光強 I_O 與參考光強 I_R 為直流項、相對較大，導致改變振幅對結果影響有限。透過使用微動裝置以調整參考光的光行程能有效解決此問題，將原本(2-8)的 $\cos \phi_O$ 變成 $\cos(\phi_O + \pi)$ ，接著透過使用影像加減法將 I_1 、 I_2 相減，藉此抵銷掉直流向的影響，讓調節項 $J_0(\Gamma A)$ 的特徵能夠更加明顯，然而，這種方法需要非常精確地控制光程，器材成本也因此較高。為了改善設備成本和實驗的複雜性，振動變動電子斑點干涉術(Amplitude-Fluctuation Electronic Speckle Pattern Interferometry, AF-ESPI) [49]於 1996 年被提出，該方法把兩張有適當變化的振動影像相減，藉此得到穩態的全場位移干涉圖形，降低了實驗成本及難度。

相較於 ESPI，AF-ESPI 的面外光學架設方式是把具有適當變化之影像進行影像的相減處理，假設試片振動時，第一張影像的振動振幅光強為：

$$I_1 = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left\{ I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} \cos \left[\phi_O + \frac{2\pi}{\lambda} (1 + \cos \theta_0) A \cos \omega t \right] \right\} dt \quad (2-10)$$

令靈敏度 $\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda} (1 + \cos \theta_0)$ ，參照影像相減法推導，則(2-9)式的光強度 I_1 ：

$$I_1 = I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} (\cos \phi_O) J_0(\Gamma A) \quad (2-11)$$

在待測物振動中取得第二張影像時，相較於之前擷取的影像，振幅產生微小的變化。我們可以將第二張影像的光強度表示為：

$$I_2 = \frac{1}{\tau} \left\{ \int_0^\tau I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} \cos [\phi_O + \Gamma(A + \Delta A) \cos \omega t] dt \right\} \quad (2-12)$$

其中

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \cos [\phi_O + \Gamma(A + \Delta A) \cos \omega t] dt \\ &= \text{Re} \left\{ e^{i\phi_O} \int_0^\tau \exp[i\Gamma(A + \Delta A) \cos \omega t] dt \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ e^{i\phi_O} \int_0^\tau \exp(i\Gamma A \cos \omega t) \exp(i\Gamma \Delta A \cos \omega t) dt \right\} \end{aligned} \quad (2-13)$$

對 $\exp[i\Gamma \Delta A \cos \omega t]$ 進行泰勒展開，假設忽略三次以上之高次項，並將其代入進行積分，便可以得到：

$$\int_0^\tau \cos [\phi_O + \Gamma(A + \Delta A) \cos \omega t] dt = \tau \left[1 - \frac{1}{4} \Gamma^2 (\Delta A)^2 \right] J_0(\Gamma A) \quad (2-14)$$

而(2-11)式中的第二張影像光強度則可改寫為：

$$I_2 = I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} (\cos \phi_O) \left[1 - \frac{1}{4} \Gamma^2 (\Delta A)^2 \right] J_0(\Gamma A) \quad (2-15)$$

將第二張影像與第一張影像相減消去直流項，即(2-13)減去(2-10)式，並經整流後顯示在螢幕上，相減後的影像光強度為：

$$I = 2\sqrt{I_O I_R} \left| \frac{1}{4} \Gamma^2 (\Delta A)^2 J_0(\Gamma A) \cos \phi_O \right| = \frac{\sqrt{I_O I_R}}{2} \left| \Gamma^2 (\Delta A)^2 J_0(\Gamma A) \cos \phi_O \right| \quad (2-16)$$

根據式(2-15)，我們得知振幅由函數 $|J_0(\Gamma A)|$ 控制。利用零階貝索函數的特性，當振幅 $A=0$ 時， $|J_0(\Gamma A)|$ 有最大值。在實驗中，這對應著量測物體振動時位移為零的節線就是影像中最亮的區域。



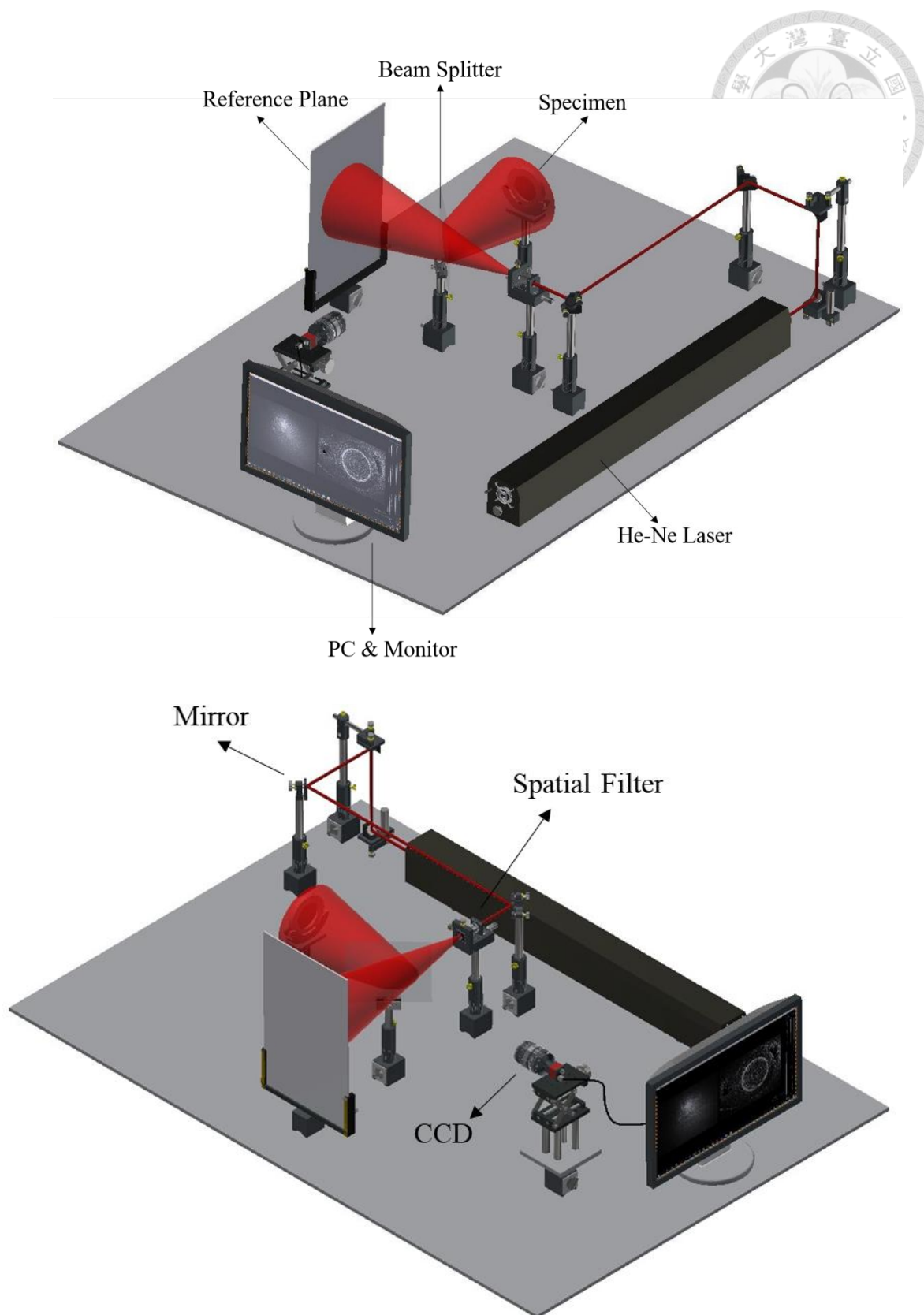


圖 2-4 ESPI 水平面外架設圖

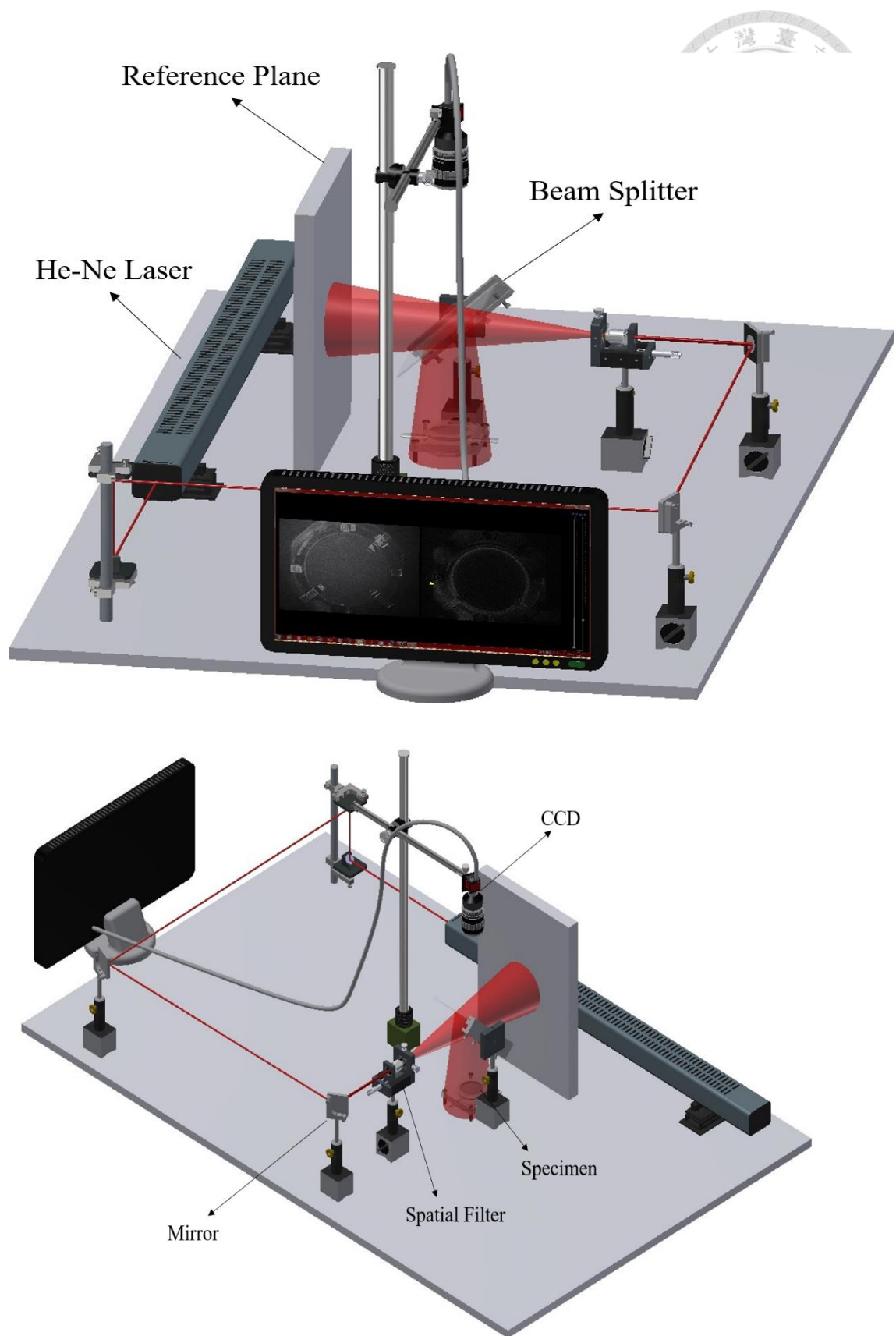


圖 2-5 ESPI 垂直面外架設圖

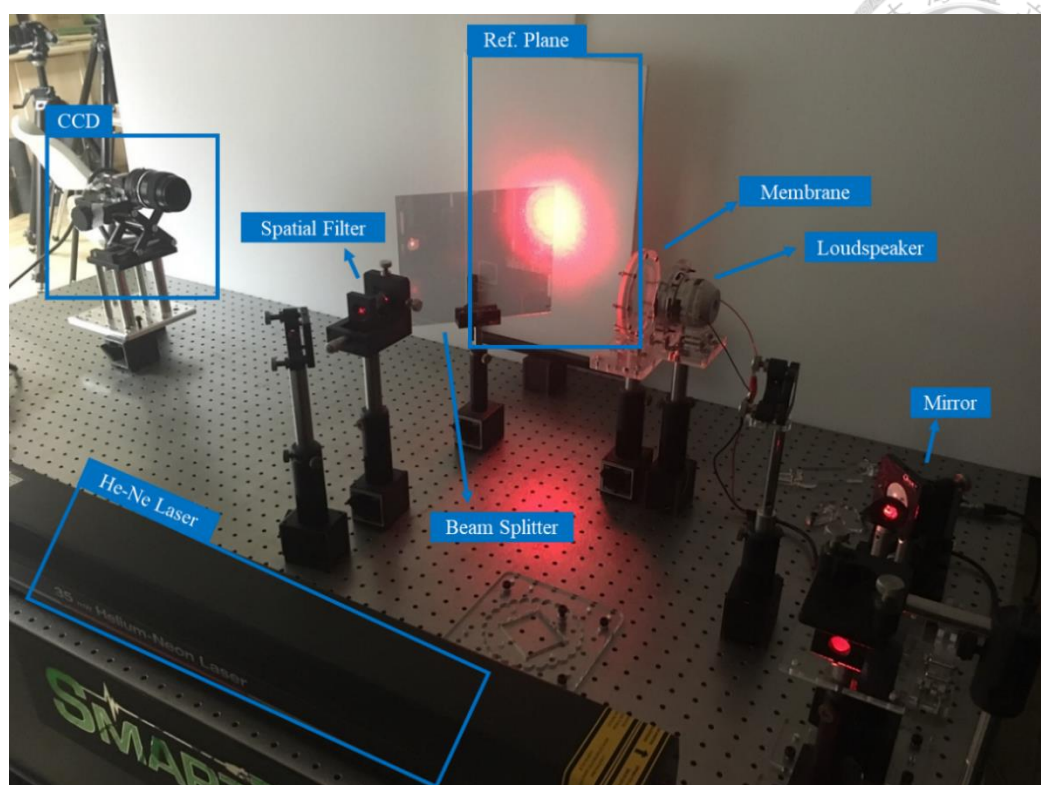


圖 2-6 ESPI 水平面外架設-薄膜受揚聲器激振

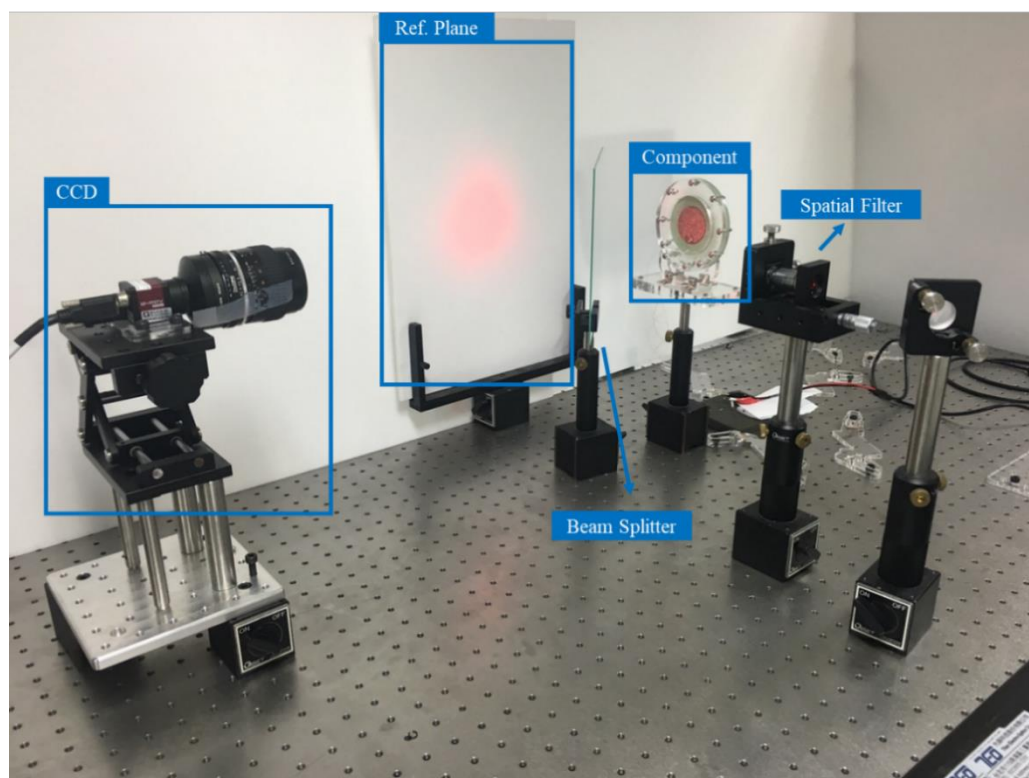


圖 2-7 ESPI 水平面外架設-複合聲學元件



2.3 人工耳量測

人工耳 (Artificial Ear) 是一種用於測試耳機性能的設備，主要用於模擬人耳的聽覺感受，以評估耳機在頻率響應、失真和洩漏等方面的表現。在本研究中，使用了一款名為 GRAS 43AG-9 Hi-Res Ear Simulator 的人工耳模型，如

圖 2-8，詳細規格見表 2-1。這個模型符合國際電工委員會 (IEC) 制定的標準 IEC60318-4，並且被廣泛用於耳機測試中。人工耳的結構主要包括下方的麥克風和上方的仿真右耳模型及夾具。下方的麥克風模擬了真實人耳的鼓膜，以捕捉耳機輸出的聲音信號。而上方的仿真右耳模型和夾具則用於模擬佩戴耳罩式耳機時的真實情況，以提高測試的真實性。為了確保測量的準確性，研究中使用了聲音校準器 (G.R.A.S. 42AG Multifunction Sound Calibrator, Class 1)，如

圖 2-9，進行麥克風的校準。通過設定 94dB(SPL) 的聲壓和 1kHz(Frequency) 的訊號，確保麥克風能夠準確量測。測試過程中將裝有耳墊的聲學元件罩住右人體耳廓並放置在頰板上，以形成一個封閉的音場空間。如圖 2-10 的人工耳實際架設所示，將電訊號輸入耳機量測量耳機的頻率響應、失真和其他聲學參數。



圖 2-8 人工耳(GRAS 43AG-9 Hi-Res Ear Simulator)

表 2-1 人工耳麥克風規格表

GRAS 43AG-9 Hi-Res Ear Simulator	
Sensitivity	1.6(mv/Pa)
Dynamic range lower limit	44(dB)
Dynamic range upper limit	169(dB)
Frequency range	100-50000(Hz)



圖 2-9 多功能聲音校準器(G.R.A.S. 42AG)

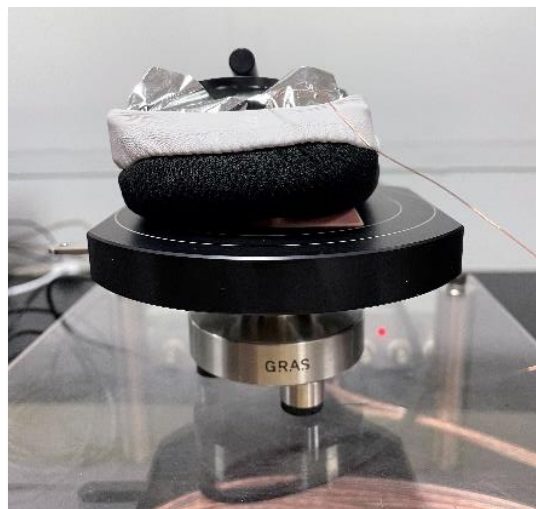


圖 2-10 人工耳實際量測圖



2.4 聲學元件設計與製作流程

本研究選擇了壓電陶瓷作為聲音驅動元件。透過逆壓電效應，我們能夠利用交流電訊號激發壓電材料產生機械振動，並將其轉化為空氣中的聲音。為了達到更出色的聲音效果，我們還採用了複合薄膜材料，將壓電振動傳遞至薄膜，使聲音更加響亮且平衡。我們將這項創新技術應用於耳罩式耳機，並通過設計不同形狀和尺寸的聲學元件，追求達到最佳的聲音效果，同時實現耳機的輕量化和輕薄化。

2.4.1 聲學元件製作方式

本節將介紹如何製作聲學元件，並分為兩部分進行說明：首先介紹繃膜的製程及治具原理與使用方法，接著對壓電和薄膜之間的黏貼方式及使用到的膠材做簡述與介紹。聲學元件製作的流程如圖 2-11 所示。

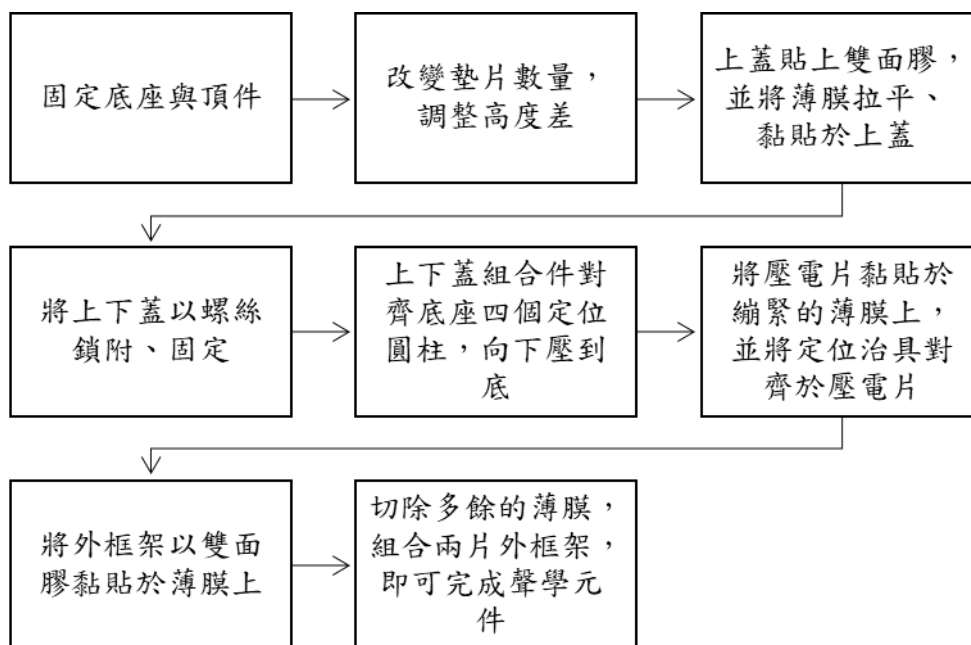


圖 2-11 聲學元件製作流程圖

(1) 繃膜製程

本研究為了繃製出具有均勻張力的薄膜，設計了由底座、頂件、墊片、上蓋與下蓋所組成之繃模治具，如

圖 2-12、圖 2-13 所示。設計的概念是利用治具之間的高度差異，調整薄膜下壓的位移，便可以藉此改變繃模時薄膜內部產生的張力。在開始繃製薄膜前，需先將底座與頂件固定好並透過改變底座上墊片的數量，調整至適當高度。首先在上蓋均勻貼上雙面膠，並將薄膜拉平鋪於上蓋上，再用螺絲將上下蓋鎖緊後，將上下蓋組套件對準底座的四個定位圓柱，並順著圓柱往下壓到底。在將上下蓋組套件下壓至碰到底座的底部後，中心頂件的高度會和上下蓋夾緊的薄膜有些微高度差，如圖 2-14，進而讓上下蓋下壓時能在薄膜內部產生張力。



圖 2-12 繃膜治具-上下蓋組套件

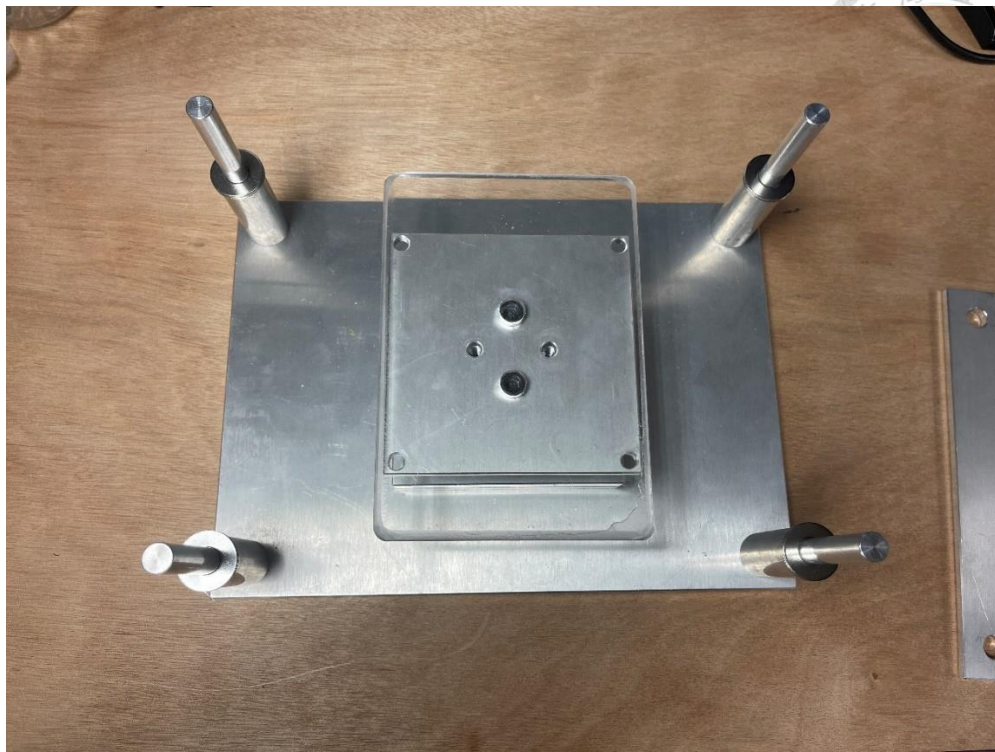


圖 2-13 繃膜治具-底座、頂件組合併

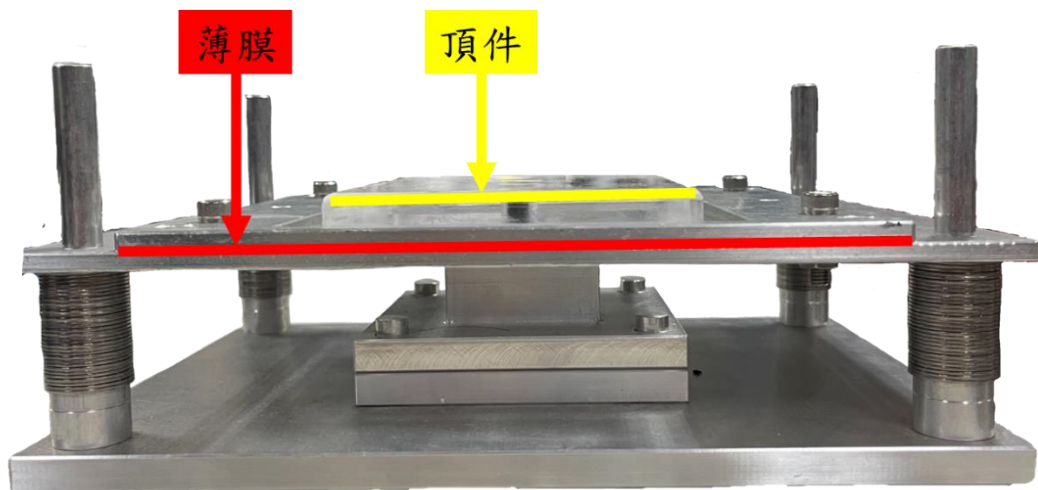


圖 2-14 繃膜高度差示意圖

(2) 黏貼方式

本研究使用的薄膜為單邊鍍上導電層的靜電薄膜，為了可以順利給予串聯型雙層壓電片電位差，在壓電片和薄膜黏貼側選擇以具導電功能之銀膠輔助雙面膠做黏貼。而銅線分別和靜電薄膜及壓電片的連接，則是透過導電 AB 膠來黏

貼。而導電 AB 膠之產品型號 OP-928，如圖 2-15，將 A 膠與 B 膠等量均勻混和後，酌量塗抹於欲黏貼之物體上，黏貼後須靜置一天方能完全固定並順利導電。導電銀膠之產品型號 MS-5000，如圖 2-16 所示，自然固化無須額外加熱。得到具有張力的薄膜後，將壓電片外側黏上雙面膠，並於內側塗上導電銀膠，將其黏貼在繃緊、具張力的薄膜上，黏貼後放上定位的治具，最後把貼上雙面膠的壓克力外框架套在定位治具的外側，切除多餘的薄膜後，把另一片壓克力外框架組合後便可以得到聲學元件之完成品。



圖 2-15 AB 接著型導電銀膠

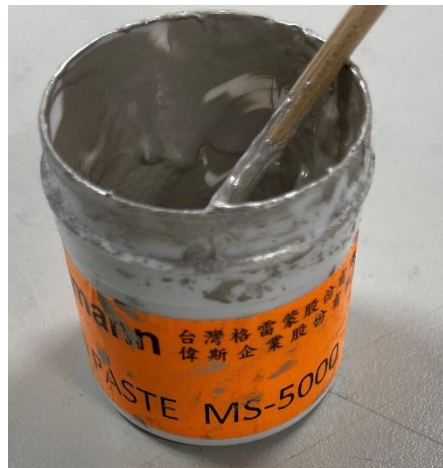


圖 2-16 導電銀膠



2.4.2 聲學元件的設計

本研究透過閱讀文獻提出聲學元件外型對聲音表現的假設：以圓形壓電片作為致動源之發聲單體容易產生模態集中的狀況，而環形壓電片又會有面積過小、致動力不足的狀況。黃御宸[66]採用矩形壓電片複合矩形薄膜製作發聲單體成功改善上述問題，但是矩形薄膜的四個角在聲學上可能導致聲波的散射和反射，影響聲場的均勻性和清晰度，也可能引起聲場的非線性效應，產生失真和不自然的音質。因此，為了在聲學上達到更加優秀的表現，本研究選擇將矩形薄膜替換為形狀類似但不存在尖角的跑道形薄膜，如圖 2-17 所示。為了後續最佳化的參數設定方便性，將跑道形定義為中間一個矩形加上左右兩邊各一個半圓形，因此只需要兩個參數：半圓半徑 R_m 、矩形寬度 W_m ，便可以完整描述跑道形薄膜的外型。

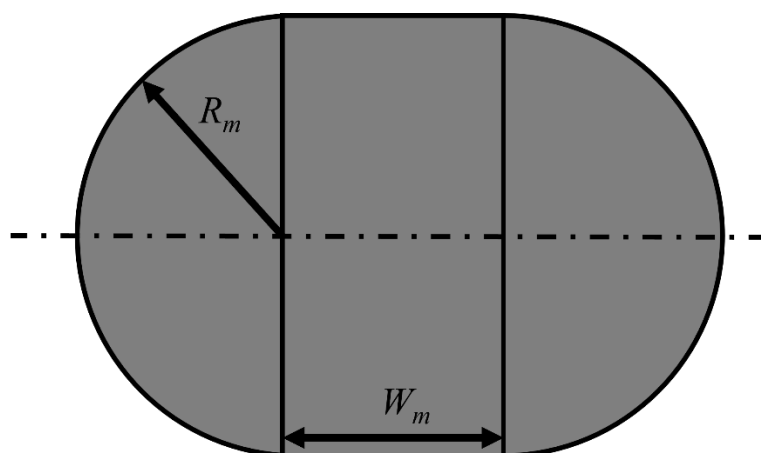


圖 2-17 跑道形之結構、尺寸示意圖

(1) 串聯型雙層壓電圓環複合圓形薄膜之複合聲學元件(A)

為了驗證特雷夫茨法於壓電薄板複合固定邊界薄膜之聲學元件能夠適用，本研究將以特雷夫茨法重新計算文獻中之元件，串聯型雙層壓電圓環複合圓形薄膜之複合聲學元件，並將兩者結果進行對應，以佐證此方法於壓電薄板複合薄膜聲學元件之分析為可行；同時也以此模型過去於文獻中做的人工耳實驗量測數據，和本文將於 7.1.3 介紹之，把人耳等效為電聲學模型之人工耳有限元素模擬進行對應，

同樣是為了佐證新的模擬方式可行。張哲睿[60]製作了此以壓電圓環及圓形薄膜複合而成聲學元件，如圖 2-18。其中壓電圓環之材料為鈦鋇酸鉛（PZT），由 Piezo. System Inc. 客製化生產製造，雙層結構係由上下兩層極化方向相反的壓電片結合而成，而壓電圓環之外、內徑分別為 63.5mm 與 53.5mm，雙層壓電陶瓷總厚度為 0.381mm。而使用單面有濺鍍導電層的高分子聚合物薄膜和壓電片複合，薄膜厚度為 $9\mu\text{m}$ 、直徑為 70mm。詳細的材料參數見表 2-2。

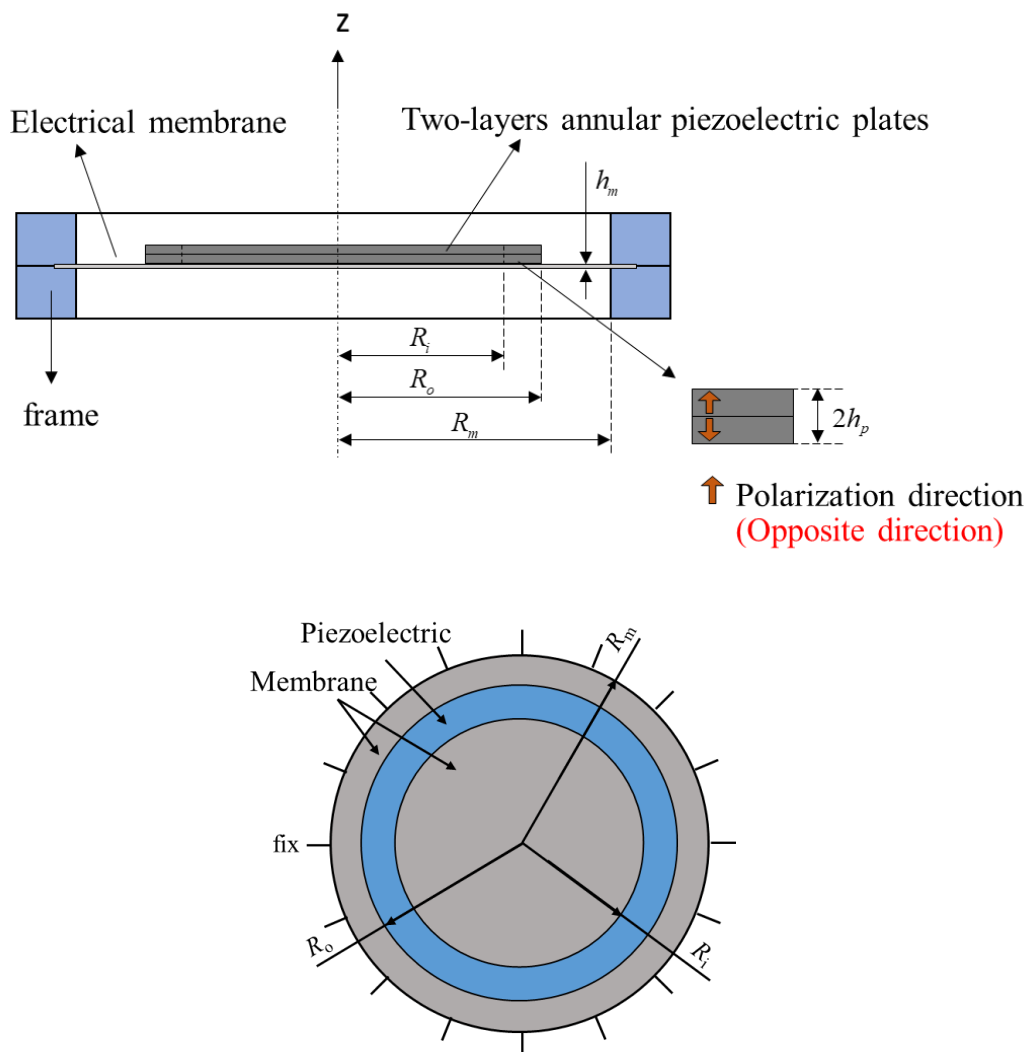


圖 2-18 串聯型雙層壓電圓環複合圓形薄膜之聲學元件(A)結構示意圖

表 2-2 雙層壓電圓環複合圓形薄膜之聲學元件(A)相關參數

Property		Values
For two-layered piezoelectric annular disk		
Outer radius(mm)	R_o	31.75
Inner radius(mm)	R_i	26.75
Thickness(mm)	$2h_p$	0.381
For membrane		
Radius(mm)	R_m	35
Thickness(mm)	h_m	0.009
Density (kg/ m ³)	ρ_m	1340
Tension (N / m)	T	14.4
Elastic Modulus (GPa)	E	2.012
Poisson's ratio	ν_m	0.3

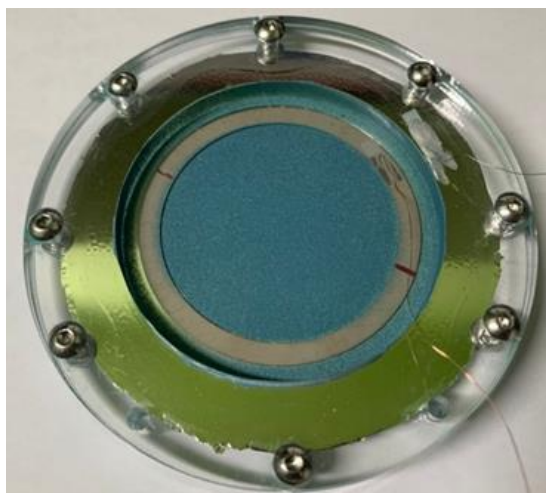


圖 2-19 串聯型雙層壓電圓環複合圓形薄膜之聲學元件(A)成品

(2) 最佳化串聯型雙層壓電矩形薄板複合跑道形薄膜之複合聲學元件(B)

接著介紹本研究新研發之聲學元件，由壓電矩形薄板複合跑道形薄膜組合而成，

圖 2-20 為此聲學元件之示意圖。透過設定目標的活塞模態頻率，使用 COMSOL 的人工耳有限元素模擬，對壓電片及薄膜進行尺寸的參數掃描，並考慮實作可行性得到最佳化尺寸參數，並根據 4.5 章節的結果，設定張力為 26.9N/m，並將其製作成發聲單體，如圖 2-20。此處使用之壓電材料和元件(A)同為串聯型之 PSI-5A4E，總厚度為 0.381，透過使用 CO₂ 雷射切割將壓電矩形薄板加工成長 10mm、寬 12.5mm 的矩形試片。跑道形薄膜的材料也和前部分一樣為高分子聚合物靜電薄膜，厚度為 0.011mm，尺寸標示如圖 2-17 所示， $R_m=10\text{mm}$ 、 $W_m=5\text{mm}$ 。詳細材料參數見表 2-3。

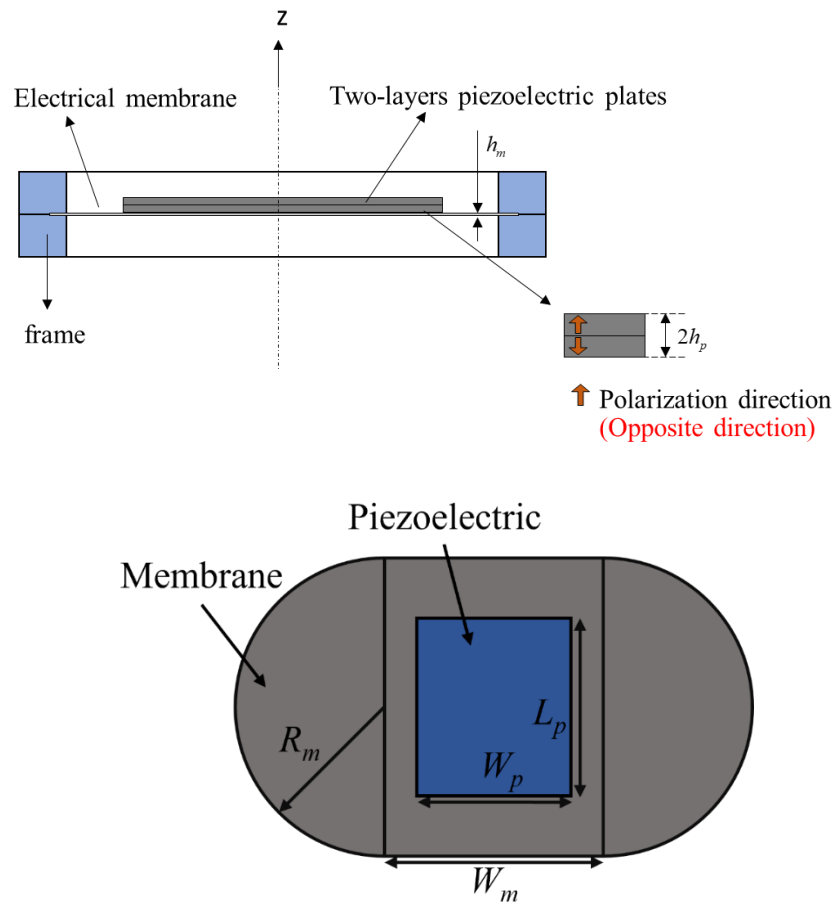


圖 2-20 最佳化壓電矩形薄板複合跑道形薄膜之聲學元件(B)結構示意圖

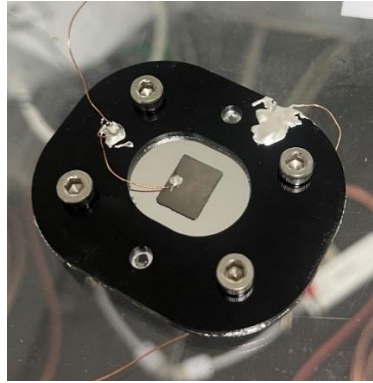


圖 2-21 最佳化串聯型雙層壓電矩形薄板複合跑道形薄膜之聲學元件(B)成品

表 2-3 最佳化雙層壓電矩形薄板複合跑道形薄膜之聲學元件(B)相關參數

Property		Values
For two-layered piezoelectric plate		
Length(mm)	L_p	10
Width(mm)	W_p	12.5
Thickness(mm)	$2h_p$	0.381
For membrane		
Radius(mm)	L_m	10
Width(mm)	W_m	5
Thickness(mm)	h_m	0.011
Density(kg/m ³)	ρ_m	1340
Tension(N/m)	T	26.9
Elastic Modulus(GPa)	E	2.012
Poisson's ratio	ν_m	0.3

第三章 基本理論與方法



本章節首先針對壓電薄板的基礎理論進行簡單的說明，以壓電理論為基礎，代入薄板假設以及電學假設，來求出壓電薄板的統御方程式。接著介紹並討論研究中使用到的無網格數值方法，並比較其中的基本解法和特雷夫茨法之間的優劣。

3.1 壓電薄板理論

壓電材料是一種特殊的材料，它能夠實現電能和機械能之間的互相轉換，正壓電效應為由形變產生電極化，而逆壓電效應則是由電能轉化為機械能的過程，本研究使用壓電陶瓷作為聲學元件的致動源。參考文獻[66]的內容，將壓電材料假設為線性材料，並考慮能量守恆以及熱力學第一定律後，可以得到：

$$\delta\tilde{U} = T_{ij}\delta S_{ij} + \tilde{E}_i\delta D_i \quad (3-1)$$

其中 $\tilde{U}$ 為壓電之能量密度(Energy Density for Piezoelectric Material)， T_{ij} 和 S_{ij} 為應力(Stress)及應變(Strain)，而 $\tilde{E}_i$ 和 D_i 則為電場(Electric Field)和電位移(Electric Displacement)。

電焓密度 $\tilde{H}$ (electric enthalpy) 為：

$$\tilde{H} = \tilde{U} - \tilde{E}_i D_i \quad (3-2)$$

將(3-1)、(3-2)整理並套入橫向等向材料(Transversely Isotropic)的特性後後可以得到壓電本構方程式：



$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

c_{pq}^E 為固定電場下的彈性常數，其中 $c_{66}^E = \frac{c_{11}^E - c_{12}^E}{2}$ ， e_{iq} 為壓電應力常數， ε_{ij}^S 為

固定應變下之介電常數。

本研究使用之壓電陶瓷為串聯型，即上下兩層的即化方向相反，下列兩組方程式分別代表以張量表示之上下層壓電本構方程式， (u) 、 (l) 分別為上下層壓電。

$$\begin{cases} T_{ij}^{(u)} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij}^{(u)} E_k^{(u)} \\ D_i^{(u)} = e_{ikl}^{(u)} S_{kl} + \varepsilon_{ij}^S E_j^{(u)} \end{cases} \quad (3-4)$$

$$\begin{cases} T_{ij}^{(l)} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij}^{(l)} E_k^{(l)} \\ D_i^{(l)} = e_{ikl}^{(l)} S_{kl} + \varepsilon_{ij}^S E_j^{(l)} \end{cases} \quad (3-5)$$



3.1.1 力學假設

根據文獻[66]，將壓電薄板套用柯西荷夫薄板理論（Kirchhoff plate theory）的假設，將三維的板視為二維中性面與厚度方向問題。將薄板假設代入到(3-3)之中並將其展開，可以分別得到上下層壓電於薄板假設下的壓電本構方程式，如下

上層壓電：

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1^{(u)} = \bar{c}_{11}^E (u_{1,1} - x_3 u_{3,11}) + \bar{c}_{12}^E (u_{2,2} - x_3 u_{3,22}) - \bar{e}_{31}^{(u)} E_3^{(u)} \\ T_2^{(u)} = \bar{c}_{12}^E (u_{1,1} - x_3 u_{3,11}) + \bar{c}_{11}^E (u_{2,2} - x_3 u_{3,22}) - \bar{e}_{31}^{(u)} E_3^{(u)} \\ T_4^{(u)} = e_{15}^{(u)} \tilde{E}_1^{(u)} \\ T_5^{(u)} = e_{15}^{(u)} \tilde{E}_2^{(u)} \\ T_6^{(u)} = c_{66}^E (u_{1,2} - u_{2,1} - 2x_3 u_{3,12}) \\ D_1^{(u)} = \varepsilon_{11}^S \tilde{E}_1^{(u)} \\ D_2^{(u)} = \varepsilon_{11}^S \tilde{E}_2^{(u)} \\ D_3^{(u)} = \bar{e}_{31}^{(u)} (u_{1,1} - x_3 u_{3,11}) + \bar{e}_{31}^{(u)} (u_{2,2} - x_3 u_{3,22}) + \varepsilon_{33}^S E_3^{(u)} \end{array} \right. \quad (3-6)$$

下層壓電：

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1^{(l)} = \bar{c}_{11}^E (u_{1,1} - x_3 u_{3,11}) + \bar{c}_{12}^E (u_{2,2} - x_3 u_{3,22}) - \bar{e}_{31}^{(l)} E_3^{(l)} \\ T_2^{(l)} = \bar{c}_{12}^E (u_{1,1} - x_3 u_{3,11}) + \bar{c}_{11}^E (u_{2,2} - x_3 u_{3,22}) - \bar{e}_{31}^{(l)} E_3^{(l)} \\ T_4^{(l)} = e_{15}^{(l)} \tilde{E}_1^{(l)} \\ T_5^{(l)} = e_{15}^{(l)} \tilde{E}_2^{(l)} \\ T_6^{(l)} = c_{66}^E (u_{1,2} - u_{2,1} - 2x_3 u_{3,12}) \\ D_1^{(l)} = \varepsilon_{11}^S \tilde{E}_1^{(l)} \\ D_2^{(l)} = \varepsilon_{11}^S \tilde{E}_2^{(l)} \\ D_3^{(l)} = \bar{e}_{31}^{(l)} (u_{1,1} - x_3 u_{3,11}) + \bar{e}_{31}^{(l)} (u_{2,2} - x_3 u_{3,22}) + \varepsilon_{33}^S E_3^{(l)} \end{array} \right. \quad (3-7)$$



3.1.2 電學假設

本節同樣根據文獻[66]的內容，將 3.1.1 節的結果代入電學假設：

- I. 由於壓電材料為介電材料，假設壓電材料內部無自由電荷
- II. 薄板總厚度遠小於長度與寬度，主要極化方向為 x_3 方向
- III. 假設上下層電位函數在厚度方向呈二次方變化

將以上和套用薄板假設的壓電材料支應力場以位移場和電壓表示，上下層分別如下

上層壓電：

$$T_1^{(u)} = \bar{c}_{11}^E u_{1,1} + \bar{c}_{12}^E u_{2,2} + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{2\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p)(u_{3,11} + u_{3,22}) + \frac{\bar{e}_{31}^{(u)}}{h_p} V_p^{(u)} - x_3 \left[\left(\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,11} + \left(\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,22} \right] \quad (3-8)$$

$$T_2^{(u)} = \bar{c}_{12}^E u_{1,1} + \bar{c}_{11}^E u_{2,2} + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{2\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p)(u_{3,11} + u_{3,22}) + \frac{\bar{e}_{31}^{(u)}}{h_p} V_p^{(u)} - x_3 \left[\left(\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,11} + \left(\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,22} \right] \quad (3-9)$$

$$T_6^{(u)} = c_{66}(u_{1,2} + u_{2,1} - 2x_3 u_{3,12}) \quad (3-10)$$

下層壓電：

$$T_1^{(l)} = \bar{c}_{11}^E u_{1,1} + \bar{c}_{12}^E u_{2,2} + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{2\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p)(u_{3,11} + u_{3,22}) - \frac{\bar{e}_{31}^{(l)}}{h_p} V_p^{(l)} - x_3 \left[\left(\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,11} + \left(\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,22} \right] \quad (3-11)$$



$$T_2^{(l)} = \bar{c}_{12}^E u_{1,1} + \bar{c}_{11}^E u_{2,2} + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{2\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p)(u_{3,11} + u_{3,22}) - \frac{\bar{e}_{31}^{(l)}}{h_p} V_p^{(l)} - x_3 \left[\left(\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,11} + \left(\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,22} \right] \quad (3-12)$$

$$T_6^{(l)} = c_{66}(u_{1,2} + u_{2,1} - 2x_3 u_{3,12}) \quad (3-13)$$

3.1.3 壓電薄板統御方程式

參考文獻[66]對 3.1.2 得到的結果進行整理，可以分別得到上、下層壓電薄板之彎矩以位移場及電位差的表示式，將兩者相加則可得到壓電薄板的總彎矩：

$$M_{11}^{(eq)} = \frac{1}{2} (h_p^2) \left[\frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p)(u_{3,11} + u_{3,22}) + \frac{\bar{e}_{31}^{(u)} V_p^{(u)} - \bar{e}_{31}^{(l)} V_p^{(l)}}{h_p} \right] - \frac{2}{3} (h_p)^3 \left\{ \left[\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,11} + \left[\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,22} \right\} \quad (3-14)$$

$$M_{22}^{(eq)} = \frac{1}{2} (h_p^2) \left[\frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p)(u_{3,11} + u_{3,22}) + \frac{\bar{e}_{31}^{(u)} V_p^{(u)} - \bar{e}_{31}^{(l)} V_p^{(l)}}{h_p} \right] - \frac{2}{3} (h_p)^3 \left\{ \left[\bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,11} + \left[\bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,22} \right\} \quad (3-15)$$

$$M_{12}^{(eq)} = -\frac{4}{3} c_{66}^E (h_p)^3 u_{3,12} \quad (3-16)$$

本研究所使用之壓電陶瓷皆為串聯型雙層壓電陶瓷搭配串聯連接電路，因此可以知道式中的上下層壓電及化方向相反，詳細連接方式參考圖 3-1。

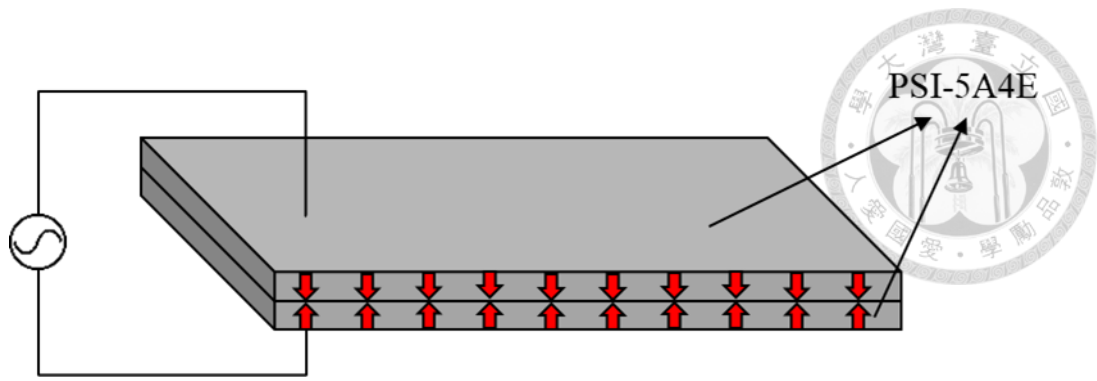


圖 3-1 串聯型雙層壓電陶瓷搭配串聯型電路連接

3.2 無網格法

無網格法（Meshless Methods）是一種數值計算方法，其主要特點是不需要事先建立網格，而是基於散點或節點的配置來進行計算。它藉由邊界條件得到邊界點之間的相互作用關係來進行求解，透過把邊界條件代入統御方程式並求出各點對域內的加權係數，再使用線性累加求解的方法。因此和有限元素法相比可以使用較快的速度得到更精細的結果。這使得無網格法適用於處理複雜幾何形狀和大變形問題，無需考慮網格生成的困難和數值擾動；其次，無網格法具有高自由度，節點數量可以根據問題的需求靈活調整，從而實現更高的計算精度；此外，無網格法還能自然地處理自由表面、斷裂和接觸等問題，具有較好的適應性。

傳統網格類的數值方法在計算過程中，需要將問題的連續函數表達式從單元自然座標系轉換為全局的笛卡爾座標系，這通常需要考慮單元之間的相互作用和邊界條件。相比之下，無網格法使用任意分佈的坐標點構建插值函數，這些坐標點可以是非結構化的，不受網格限制。這樣的優勢使得無網格法在模型構建時更具有連續性和完整性，並且可以更靈活地處理複雜的幾何形狀和大變形問題，如圖 3-2、圖 3-3 所示。常見的無網格法包括了核方法(Kernel Methods)、移動最小二乘法(Moving Least-Squares Approximation)和徑向基函數(Radial Basis Function, RBF)，本研究使用之無網格法中的特雷夫茨法為利用了徑向基函數作為插值函數的數值方法，本章後續會將此方法和黃御宸[66]於文獻中使用來計算薄膜振動，且同樣是基於 RBF 的基本解法進行比較。

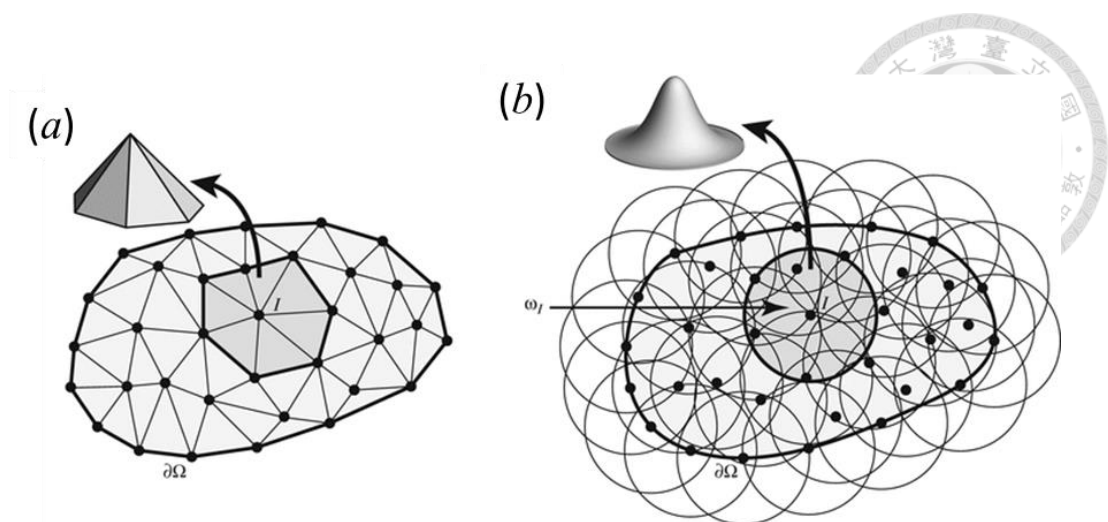


圖 3-2 (a)元素法局部單元形函數 (b)無網格法全局座標近似函數

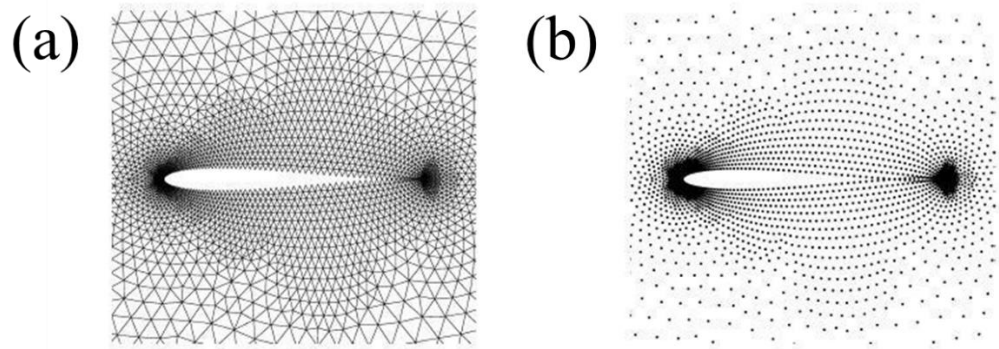


圖 3-3 (a)有限元素法 (b)無網格法



3.2.1 基本解法

基本解法 (Method of Fundamental Solutions, MFS) 是一種利用基本解作為基底函數的徑向基函數 (Radial Basis Function, RBF) 無網格法，用於解決偏微分方程相關問題。這種方法能夠將問題簡化一個維度，以避免處理多維情況帶來的困難。基本解法的求解過程中需要於真實物理邊界外設定虛擬邊界，以避免方法源點 (source) 的奇異性。而關於如何選擇虛擬邊界，具有較大的隨意性，因此仍存在一些爭議。然而，基本解法在解決無限域、薄壁結構、反算問題等方面擁有顯著的優勢。簡單介紹基本解法的求解過程，以亥姆霍茲方程式 (Helmholtz equation) 為例：

$$\nabla^2 u + k^2 u = f(x, y) \quad (3-17)$$

其中， $u(x)$ 是未知函數、 k 是波數、 $f(x, y)$ 為邊界條件。我們可以將未知函數表示為基本解的線性組合：

$$u(x) = \sum (a_i G(r_i)) \quad (3-18)$$

其中， $G(x_i)$ 是基本解， a_i 是待定係數， $r_i = |\bar{x} - \bar{s}|$ 是邊界點 $\bar{x}(x_i, y_i)$ (collocation points) 和虛擬源點 $s(s_i^x, s_i^y)$ (source points) 的距離。將 $u(x)$ 代入亥姆霍茲方程後會得到一系列代數方程。通過求解這些代數方程，我們可以得到待定係數的值，進而計算出亥姆霍茲方程的解。

圖 3-4 為使用基本解法進行計算的步驟。首先在確認欲求解的控制方程式後，便可以根據問題的性質和幾何形狀，選擇適當的基本解。假設未知函數可以表示為基本解的線性疊加形式，其中之待定係數需要求解。在計算區域外選擇虛擬源點的位置，並在邊界上配置邊界點。最後通過代入邊界條件以解這些代數方程，求解出待定係數的值，便可以計算出偏微分方程在區域內任意位置的數值解。

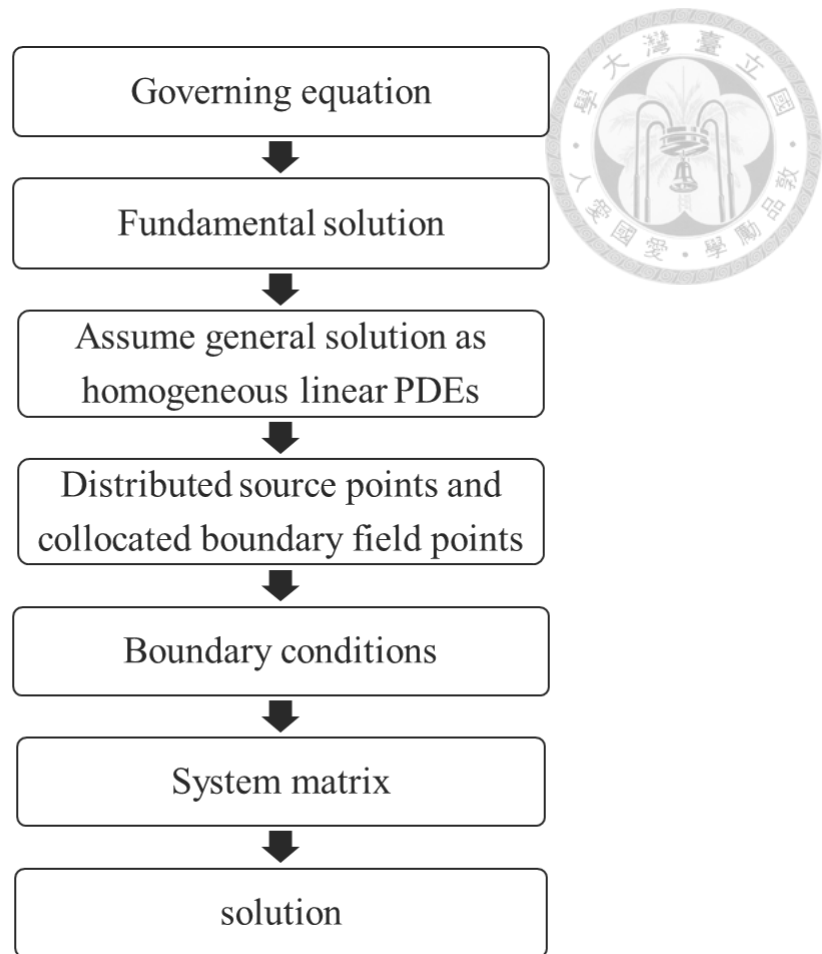


圖 3-4 基本解法求解流程圖

3.2.2 特雷夫茨法(Trefftz Method)

前節介紹了無網格的基本解法，在文獻中計算矩形、圓形系統的薄膜皆得到不錯的結果。但是，根據文獻[68]中的結果，在使用基本解法進行薄膜多連通域的求解的時候，因為其基本解為複數，在計算上會產生假根的問題，若要對這類的問題進行假根消除，會需要較為複雜的計算。且本研究的目標為研發出一套能夠針對跑道形薄膜振動進行計算的方法，基本解需要額外佈置邊界外源點的特性，也會一定程度地增加解析跑道形型薄膜振動的難度。故本研究引入同為無網格法的另一種數值解法——特雷夫茨法。

特雷夫茨法 (Trefftz Method) 是一種無網格法，用於近似求解偏微分方程的問題。該方法基於特殊的 T-complete 函數集合，這些函數被選擇為原始偏微分方程的解析解。T-complete 函數是特雷夫茨方法中使用的一組函數集合，它們能夠完全

滿足給定的微分方程。這些函數由特定的數學形式構成，可以含蓋所研究問題的整個定義域。通過將這些 T-complete 函數的線性組合作為解的候選項，我們可以在特雷夫茨方法中構建出合適的解空間，並進行問題的求解。

首先，我們選擇一組合適的 T-complete 函數集合，它們通常是一組解析函數，如正弦、餘弦和指數函數，且能夠滿足所求解偏微分方程的邊界條件。接著建立待解函數的近似表示形式，將待解函數表示為 T-complete 函數的線性組合，其中每個函數都乘以一個未知的係數。

因此，待解函數可近似表示為：

$$u(x, y) \approx \sum [C_i * \varphi_i(x, y)] \quad (3-19)$$

其中， $u(x, y)$ 代表待解函數， C_i 是待解函數的係數，而 $\varphi_i(x, y)$ 是 T-complete 函數集合中的函數，接著將這個近似表示帶入原始的偏微分方程，得到一個包含待解函數係數的代數方程，最後求解此代數方程，從而得到待解函數的係數。

特雷夫茨方法的作法如圖所示，在使用特雷夫茨方法解決物理問題時，我們首先需要確定問題的物理性質和邊界條件。然後，我們選擇 T-complete 函數作為基底函數，這些函數是滿足問題物理方程的特定函數集合。我們將待求解的函數表示為 T-complete 函數的線性組合，詳細的過程請參見第四章。

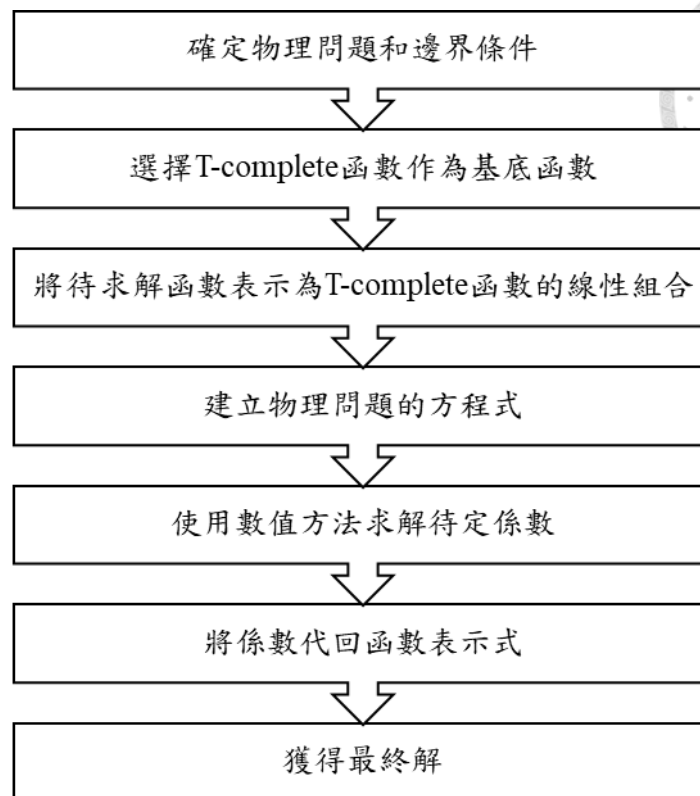


圖 3-5 特雷夫茨法求解流程圖

3.2.3 基本解法與特雷夫茨法比較

本章節會就無網格法中的兩種方法：特雷夫茨法 (Trefftz Method) 和文獻中所使用的基本解法 (Method of Fundamental Solutions, MFS) 進行比較。當討論固定邊界下的薄膜問題時，特雷夫茨法和基本解法都可以被考慮。

特雷夫茨法以 T-complete function 作為近似解的基礎，能夠精確地滿足固定邊界條件，特別是對於具有複雜邊界形狀的問題表現較好。基本解法則使用基本解函數作為近似解的基礎，並且通常在邊界上設置節點。這種方法相對來說更容易實現，尤其對於固定邊界條件較簡單且幾何形狀較規則的薄膜問題表現良好，而在處理具有尖點、孔洞或不連續性邊界的問題時可能會遇到困難，因為這些情況下基本解函數的適應性可能較差。綜合來看，特雷夫茨法在處理具有複雜邊界形狀的固定邊界薄膜問題時具有更高的精度和準確性。然而，基本解法則更適合處理邊界較簡單且幾何形狀較規則的問題。

基本解法在求解固定邊界薄膜振動問題時，因為通解中有虛數項的關係，在進行掃頻計算共振頻率時可能導致假根的產生，如圖 3-6 所示；相較之下，特雷夫茨法使用 T-complete 函數作為基底函數，其能夠根據問題的幾何形狀和邊界條件進行靈活調整，同時也能有效避免掉假根的問題。然而，若要順利求解矩陣之待定係數，邊界點的數量要和 T-complete function 的項數一樣，某種程度上限制了佈點上的彈性，也意味著在薄膜邊界的佈點方式上會比較需要討論。但是，特雷夫茨法不需要額外設置邊界源點，如圖 3-7 所示，只需要於邊界上佈點就能夠計算，對任意外型的薄膜求解是比使用基本解容易且有效的，因此本研究主要選擇以特雷夫茨法作為計算薄膜振動的方法。

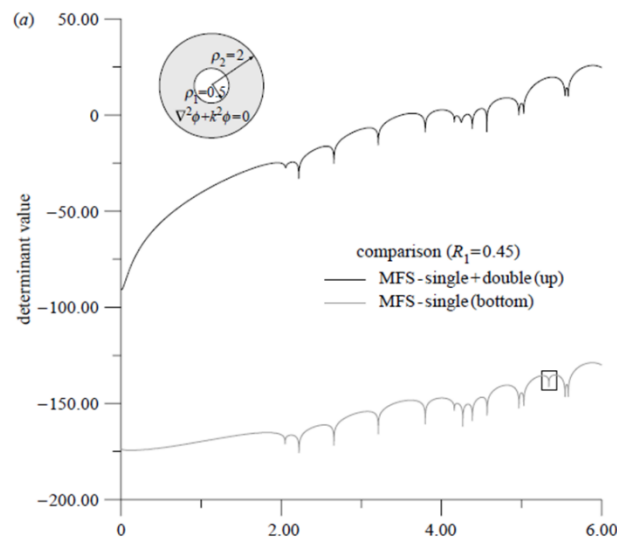


圖 3-6 基本解法假根示意圖

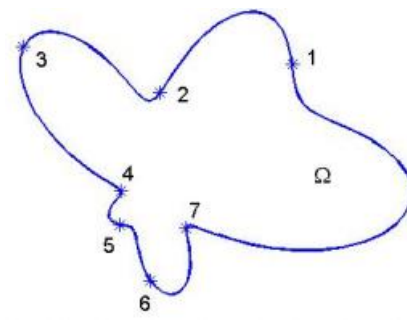


圖 3-7 特雷夫茨法邊界佈點示意圖

第四章 薄膜振動特性分析



由於薄膜本身的厚度非常薄，我們以二維座標假設對其進行分析，在未受力的狀況下，薄膜處於平衡狀態，並且沒有產生任何振動。由於推導跑道形環薄膜的解析解是相當困難且低泛用性的，所以利用無網格特雷夫茨法作為求解的工具。本章節會先介紹如何以理論解析及無網格特雷夫茨法薄膜進行振動分析，首先計算矩形實心薄膜及環形薄膜，並和有限元素模擬及文獻中的結果相互比較，驗證無網格法在計算單、雙連通薄膜自由振動的可行性；接著探討使用特雷夫茨法求解跑道形環膜的共振頻率及相對應之模態振形，並與有限元素法比較，以驗證方法之可行性。

4.1 薄膜統御方程式

膜是一種具有相對較小剛性的材料，其彈性特性主要由材料的柔軟性所決定。相較於厚實的結構材料，薄膜在面對外部力量時容易產生顯著的變形。根據文獻[66]，我們透過給薄膜均質、完全可撓、張力平均和斜率變化極小的四個假設，搭配牛頓第二運動定律，可以推導出薄膜的統御方程式：

$$\nabla^2 W(x, y, t) = \frac{1}{c_d^2} \frac{\partial^2 W(x, y, t)}{\partial t^2} \quad (4-1)$$

其中 W 為薄膜的面外振動位移， $c_d = \sqrt{\frac{T}{\rho h}}$ 為波速。

4.2 矩形薄膜之自由振動分析

本節將針對實心矩形薄膜進行振動分析，討論固定邊界的薄膜振動，最外圈的邊界位移為零。針對矩形薄膜使用笛卡爾座標系，長、寬分別為 a 、 b ，如圖 4-1 所示。根據 4.1 的結果，我們已知薄膜的統御方程式是以二階偏微分方程式的形式表示。本部分將使用有限元素法、無網格法分別計算薄膜的共振頻率及模態振型，並和文獻中的結果相互比較，以驗證特雷夫茨法於薄膜的振動分析為可行的數值方法。

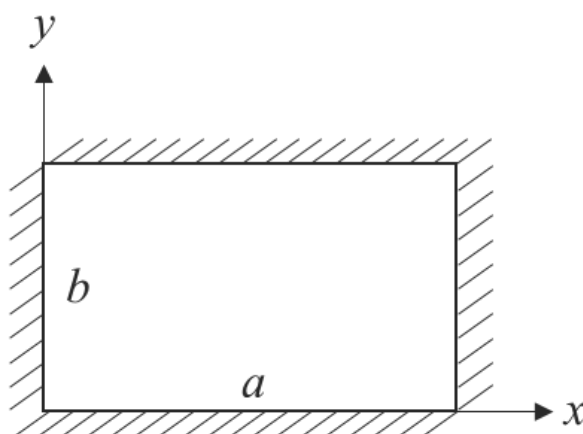


圖 4-1 矩形薄膜示意圖

4.2.1 矩形薄膜之自由振動理論解析

參考文獻[66]的內容，本節將對矩形薄膜的自由振動解析解進行推導。根據 4.1 推導之薄膜統御方程式，將其時間項消去後可以得到

$$\nabla^2 w + \frac{\omega^2}{c_d^2} w = 0 \quad (4-2)$$

再代入全固定之邊界條件：

$$\begin{cases} w(0, y) = 0 \\ w(a, y) = 0 \\ w(x, 0) = 0 \\ w(x, b) = 0 \end{cases} \quad (4-3)$$

可以得到：

$$\begin{aligned} A_1 \cos(\beta y) + A_2 \sin(\beta y) &= 0 \\ A_1 \cos(\alpha x) + A_3 \sin(\alpha x) &= 0 \end{aligned} \quad (4-4)$$

經過整理便可以得到矩形薄膜之特徵方程式：

$$w(m, n) = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4-5)$$

及特徵頻率：

$$\omega(m, n) = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad (4-6)$$

其中 $m, n=1, 2, 3, \dots$ ，兩者分別代表著模態的節線數和節圓數。



4.2.2 矩形薄膜之自由振動特雷夫茨法

本節介紹使用特雷夫茨法 (Trefftz Method) 求解薄膜之自由振動，以矩形薄膜為例，求解過程如 3.2.2 節，而已知薄膜振動方程式是為二維的亥姆霍茲方程式 (Helmholtz equation)：

$$\nabla^2 w(x, y) + k_d^2 w(x, y) = 0 \quad (x, y) \in \Omega \quad (4-7)$$

我們可以選擇適當的 T-complete function 並組成一組 T-complete set。以單連通固定邊界薄膜為例，二維的亥姆霍茲方程式的 T-complete set 為：

$$\{J_0(k_d r), J_m(k_d r) \cos(m\theta), J_m(k_d r) \sin(m\theta)\} \quad (4-8)$$

其中 $k_d = \omega / c_d$ ， r 為距離原點 $(0,0)$ 之極座標半徑， J_0 、 J_m 為 0 階及 m 階的第一類貝索函數，其中 m 代表 T-complete set 的展開項數。我們將待求解的函數表示為 T-complete set 之線性組合，即為：

$$w(x, y) = w(r, \theta) = a_0 J_0(k_d r) + \sum_{j=1}^m [a_j J_j(k_d r) \cos(j\theta) + b_j J_j(k_d r) \sin(j\theta)] \quad (4-9)$$

假設邊界條件為：

$$w(x, y) = f(x, y) \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (4-10)$$

為了讓求解待定係數的過程可以順利進行，邊界點的佈置數量就必須符合邊界點總數 $N = 2m + 1$ 的限制。我們先在邊界上取 N 個點便可以得到方陣。第 (x_1, y_1) 為例，透過代入邊界條件 $w = f(x_1, y_1)$ 我們可以得到：

$$f(x_1, y_1) = a_0 J_0(k_d r_1) + \sum_{j=1}^m [a_j J_j(k_d r_1) \cos(j\theta) + b_j J_j(k_d r_1) \sin(j\theta)] \quad (4-11)$$

將各點依序代入整理後可以得到：

$$[A]_{N \times N} \{a\}_{N \times 1} = \{f\}_{N \times 1} \quad (4-12)$$

求取固定邊界之薄膜振動位移，故邊界條件為：



$$f(r_i, \theta)|_{r_i=b(x,y)} = 0 \quad (4-13)$$

將(4-13)代回(4-12)，由於固定邊界位移為零的原因，此處求解的是特徵值問題，因此使用掃頻法來求解 $\det(A) = 0$ ，此特徵值問題的解即為薄膜之共振頻率，求特徵值解的同時也可以得到待定係數之矩陣 $\{a\}$ 。將此矩陣代回解的表示式(4-9)中，再將欲求位移之點的極座標 (r, θ) 代入便可以求得該點的位移。



圖 4-2 矩形薄膜邊界節點設置示意圖

4.2.3 矩形薄膜之自由振動有限元素法

本章節以 COMSOL Multiphysics 5.5 有限元素分析軟體進行薄膜的振動分析，在設定上選擇使用 3D、具有初始張力的薄膜物理量。COMSOL 在計算薄膜的振動具有優勢，其有內建的薄膜模組可供選用，能夠直接給予厚度及張力，並直接給予邊界條件。薄膜不會有無應力的狀態，剛性及穩定性便需要由薄膜曲面的曲率變化及其中預應力來提高，因此在最初的設定中我們就要給予初始的平面力，故此處並不會符合小變形的假設，而我們需要將 COMSOL 求解器中幾何非線性的選項勾選，方能得到正確的解。相關設定如圖 4-3 所示。

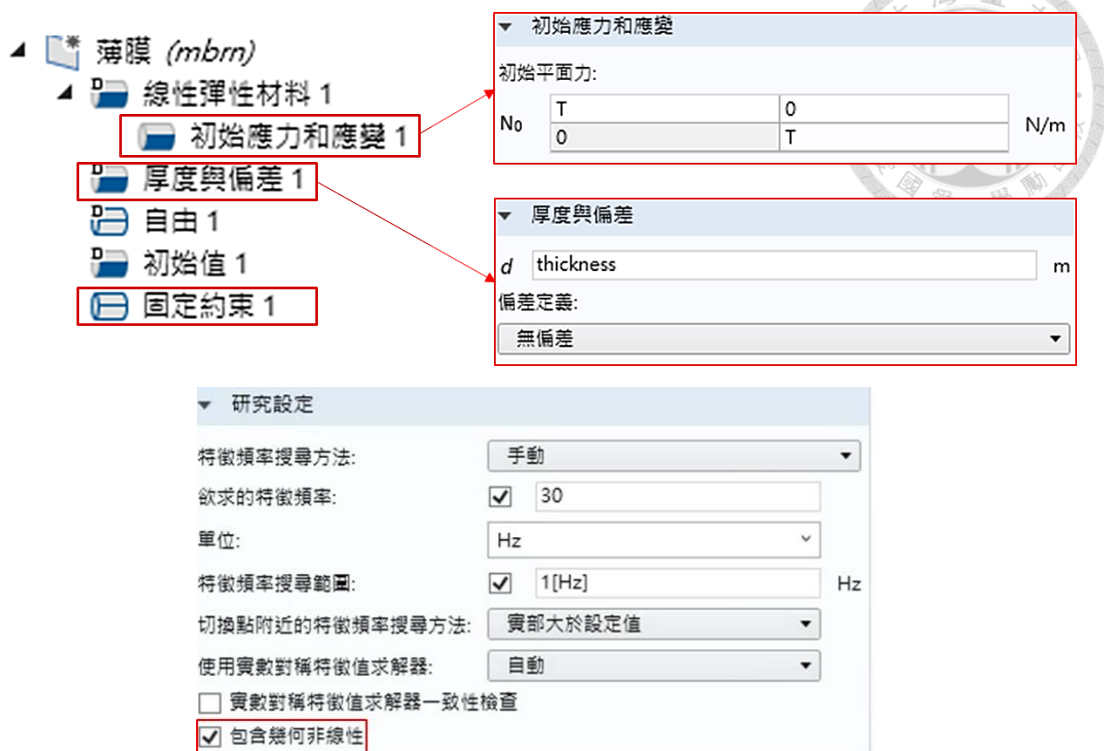


圖 4-3 薄膜有限元素模擬設定



4.2.4 試片規格

這邊選用的薄膜為有單層濺鍍金屬之高分子聚合物，單面能夠導電的特性方便後續與壓電片複合後連接電極的方便性。實心矩形薄膜之長、寬分別為 75mm、60mm，薄膜厚度為 9 μ m、張力則為 10N/m。靜電薄膜之材料參數參考陳冠宇[59]，如下表 4-1 所示。

表 4-1 靜電薄膜材料參數

Property		Values
Density (kg/m ³)	ρ	1340
Elastic Modulus (GPa)	E	2.012
Poisson's ratio	ν	0.3

4.2.5 矩形薄膜之理論解析與數值分析之比較

本節將 4.2.2 、4.2.3 兩小節中提到的特雷夫茨法和有限元素分析結果跟文獻中的理論進行相互比較，以薄膜的前八個共振頻率及對應之模態振形進行比較。如表所示，三種方法在模態及共振頻率上都有良好的對應性，由此可知三者有高度一致性。

表 4-2 矩形薄膜固定邊界理論及數值法對照表(a)

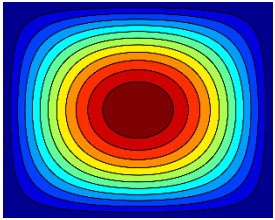
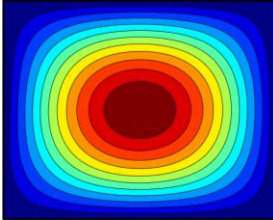
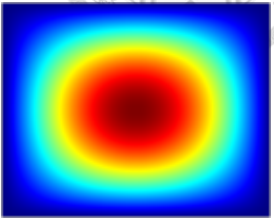
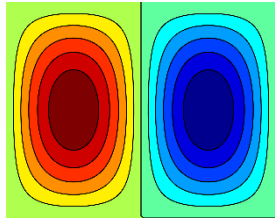
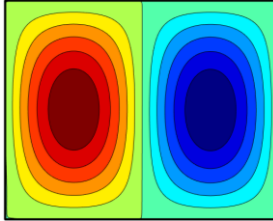
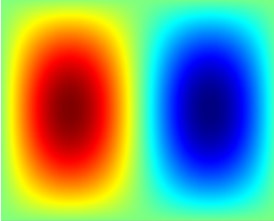
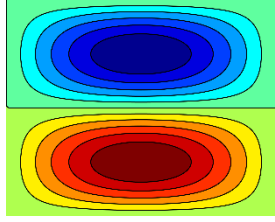
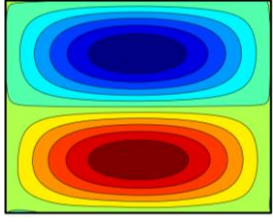
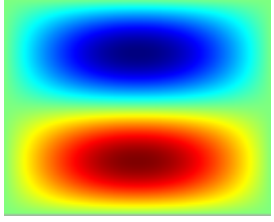
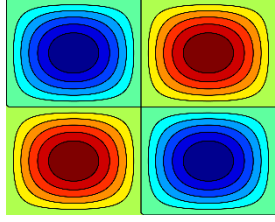
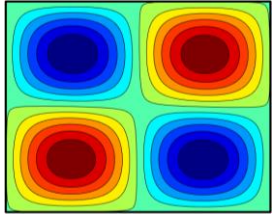
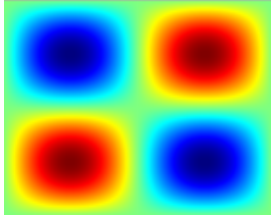
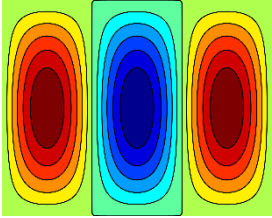
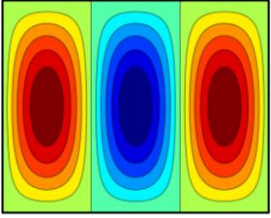
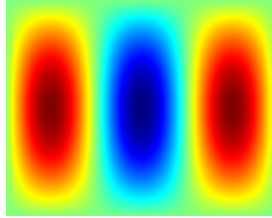
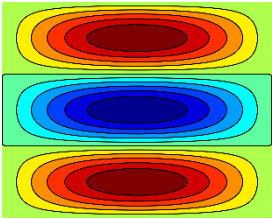
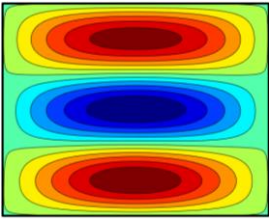
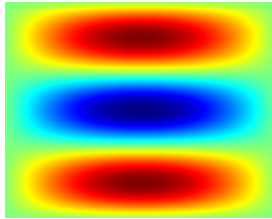
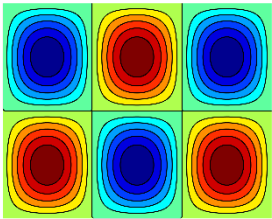
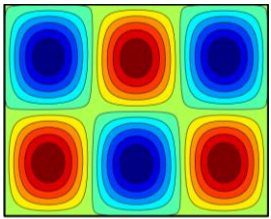
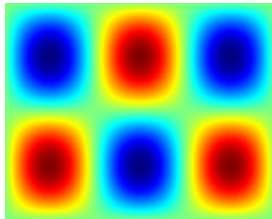
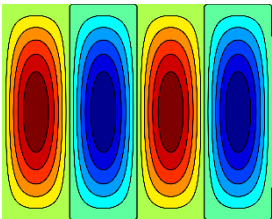
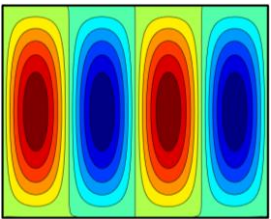
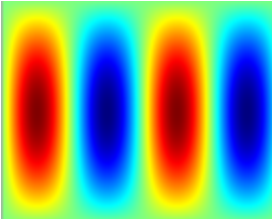
Mode		Theory	Trefftz(Error)	Comsol(Error)
1	Mode Shape			
	Freq (Hz)	307.3	307.3(0%)	307.3 (0%)
2	Mode Shape			
	Freq (Hz)	452.8	452.8(0%)	452.8(0%)
3	Mode Shape			
	Freq (Hz)	516.9	516.9(0%)	516.9(0%)
4	Mode Shape			
	Freq (Hz)	614.6	614.6(0%)	614.6(0%)

表 4-3 矩形薄膜固定邊界理論及數值法對照表(b)

Mode		Theory	Trefftz(Error)	Comsol(Error)
5	Mode Shape			
	Freq (Hz)	623.9	623.9(0%)	623.9 (0%)
6	Mode Shape			
	Freq (Hz)	745.0	745.0(0%)	745.0 (0%)
7	Mode Shape			
	Freq (Hz)	749.7	749.7(0%)	749.7(0%)
8	Mode Shape			
	Freq (Hz)	804.5	804.5(0%)	804.5 (0 %)



4.3 環形薄膜之自由振動分析

4.2 節中已針對矩形系統薄膜的振動進行不同方法的比較，本節將以圓形系統及非實心薄膜為主。我們假設薄膜為固定邊界，也就是內、外徑（ $r=a$ 、 $r=b$ ）處之為固定邊界，如表 4-4 所示，討論環形薄膜於透過無網格特雷夫茨法及有限元素分析進行求解時的對應性，並和文獻[59]中的理論解析結果進行比較，期望能以此驗證特雷夫茨法於計算非實心薄膜的例子中能夠被有效利用。

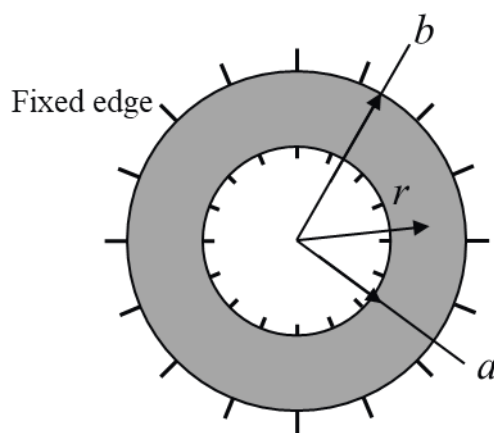


圖 4-4 環形薄膜結構及尺寸

4.3.1 環形薄膜之自由振動理論解析

本節將參考陳冠宇[59]於文獻中對固定邊界下之環形薄膜的自由振動理論解析，並做簡單的說明。

先將 4.1 節推導出之薄膜統御方程式轉換為圓柱座標的形式：

$$\frac{\partial^2 w(r, \theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r, \theta)}{\partial \theta^2} + k_d^2 w(r, \theta) = 0 \quad (4-14)$$

接著使用分離變數法對其求解，把 $w(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ 代入(4-14)式中可得：

$$\Theta(\theta) \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{\Theta(\theta)}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + \frac{R(r)}{r^2} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} + k_d^2 R(r) \Theta(\theta) = 0 \quad (4-15)$$

將(4-15)式中的 r 和 θ 分別整理到等號的兩側，並令此兩式同等於常數 n^2 ，即可得：

$$\frac{r^2}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{r}{R(r)} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + k_d^2 r^2 = -\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} = n^2 \quad (4-16)$$

再把上式各自列式，即可得下列方程組：

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + n^2 \Theta(\theta) = 0 \\ R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) + (k_d^2 - \frac{n^2}{r^2}) R(r) = 0 \end{cases} \quad (4-17)$$

分別對(4-17)中之兩式求解，並代回 $w(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$ ，即可求得環形薄膜於軸向振動位移通解為

$$w(r, \theta) = [EJ_n(k_d r) + FY_n(k_d r)] \cos(n\theta + \phi) \quad (4-18)$$

對於環形薄膜於內、外半徑皆為固定邊界、位移為零，故可列邊界條件：

$$w(r, \theta) \Big|_{r=r_{in}, r_{out}} = 0 \quad (4-19)$$

將(4-19)之邊界條件代回(4-18)之環形薄膜軸向振動位移通解，可得：

$$[EJ_n(k_d r_{in}) + FY_n(k_d r_{in})] \cos(n\theta) = 0 \quad (4-20)$$

$$[EJ_n(k_d r_{out}) + FY_n(k_d r_{out})] \cos(n\theta) = 0 \quad (4-21)$$

求解上二式待係數之非零解，其非係數項矩陣行列式值為零，可以求得下列特徵方程式：

$$J_n(k_d r_{in}) Y_n(k_d r_{out}) - J_n(k_d r_{out}) Y_n(k_d r_{in}) = 0 \quad (4-22)$$

其中薄膜之軸向振動共振頻為：

$$f = \frac{k_d r_{out}}{2\pi b} \sqrt{\frac{T}{h_m \rho_m}} \quad (4-23)$$



4.3.2 環形薄膜之自由振動特雷夫茨法

在使用無網格法求解中空邊界的問題時，我們通常將此類邊界稱為多連通問題，單孔的邊界問題稱為雙聯通問題。4.2.2 節中已推導出單連通矩形薄膜之特雷夫茨法之位移通解以及特徵方程式，能夠順利求解薄膜之共振頻率以及模態振形。

和單連通薄膜不同，在求解雙連通固定邊界薄膜時我們可以把其拆解為內邊界問題及外邊界問題，並將兩者的解進行線性累加。外邊界的解函數如(4-9)所示，為後續方便討論，將外邊界位移符號改寫為 w_1 ：

$$w_1(x, y) = w_1(r, \theta) = a_0 J_0(k_d r) + \sum_{j=1}^m [a_j J_j(k_d r) \cos(j\theta) + b_j J_j(k_d r) \sin(j\theta)] \quad (4-24)$$

而內邊界的解的 T-complete set 為：

$$\{Y_0(k_d r), Y_m(k_d r) \cos(m\theta), Y_m(k_d r) \sin(m\theta)\} \quad (4-25)$$

其中變數代表之涵義與 4.2.2 節相同，而 Y_0 、 Y_m 分別為 0 階、 m 階之第二類貝索函數。接著將內邊界之位移通解表示為 T-complete set 之線性累加：

$$w_2(x, y) = w_2(r, \theta) = c_0 Y_0(k_d r) + \sum_{j=1}^m [c_j Y_j(k_d r) \cos(j\theta) + d_j Y_j(k_d r) \sin(j\theta)] \quad (4-26)$$

再將(4-24)、(4-26)做線性累加，即可得到雙連通薄膜之位移通解：

$$\begin{aligned} w(x, y) &= w_1(x, y) + w_2(x, y) \\ &= a_0 J_0(k_d r) + \sum_{j_1=1}^{m_1} [a_{j_1} J_{j_1}(k_d r) \cos(j_1\theta) + b_{j_1} J_{j_1}(k_d r) \sin(j_1\theta)] \\ &\quad + c_0 Y_0(k_d r) + \sum_{j_2=1}^{m_2} [c_{j_2} Y_{j_2}(k_d r) \cos(j_2\theta) + d_{j_2} Y_{j_2}(k_d r) \sin(j_2\theta)] \end{aligned} \quad (4-27)$$

後續步驟和 4.2.2 節相同，惟須注意內、外邊界點之總數，須和對應之位移通解之項數相同，佈點方式如圖 4-5 所示。例如：若外邊界之位移通解之 $m_1=5$ 則解函數中外邊界通解的待定係數總數 $N_1 = 2*5+1=11$ ，故邊界點數也須為 11 點，方能求得所有的待定係數，內邊界同理。



固定邊界之邊界條件：

$$\begin{cases} w_1(x, y) = 0 \\ w_2(x, y) = 0 \end{cases} \quad (4-28)$$

將(4-28)之邊界條件代入(4-27)的通解中，可得：

$$\begin{aligned} [A_{11}]\{a_1\} + [A_{12}]\{a_2\} &= [0] \\ [A_{21}]\{a_1\} + [A_{22}]\{a_2\} &= [0] \end{aligned} \quad (4-29)$$

接著把矩陣合併：

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-30)$$

其中待定係數之矩陣：

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ a_{m_1} \\ b_{m_1} \\ c_0 \\ c_1 \\ d_1 \\ \vdots \\ c_{m_2} \\ d_{m_2} \end{Bmatrix} \quad (4-31)$$

由於內外邊界位移為零，此處和 4.2.2 節相同是特徵值問題，因此同樣使用掃頻法來求解薄膜之共振頻率及待定係數之矩陣 $\{a\}$ ，將待定係數矩陣以及欲求位移之點的極座標 (r, θ) 代回(4-27)之雙連通固定薄膜位移通解中，即可得到該點之位移。

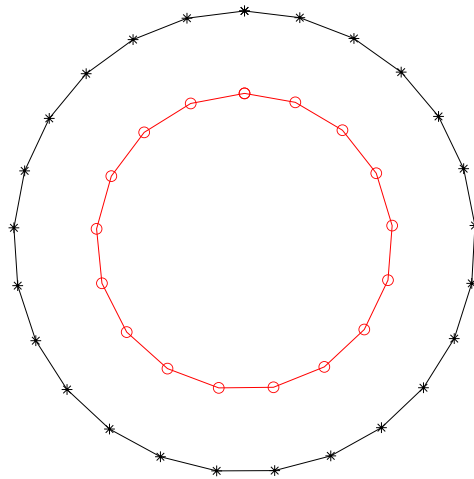


圖 4-5 環形薄膜邊界佈點示意圖

4.3.3 環形薄膜之自由振動有限元素法

使用有限元素法分析環形薄膜的方法和 4.2.3 節中矩形薄膜的部分大同小異，惟網格設定的部分有些許不同。為了避免最後產生的模態有非對稱的狀況出現，先將環形模沿著垂直及水平方向的中心分切成四塊，如

圖 4-6 所示。如此則能夠讓分析的結果更加接近真實情況，避免了因數值方法產生重複模態的狀況。

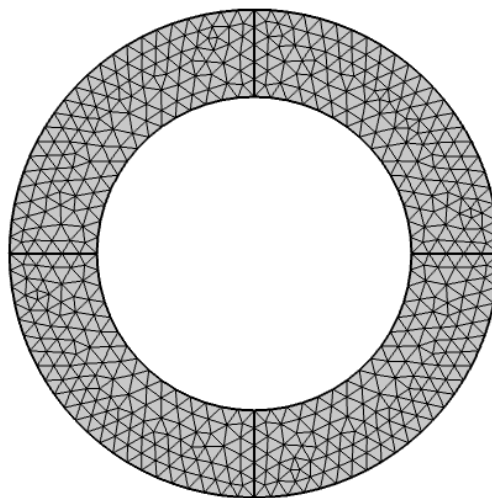


圖 4-6 環形薄膜有限元素網格設定



4.3.4 試片規格

環形薄膜使用 PVC，詳細的材料參數如下表 4-4 所示，內、外徑分別為 22.5mm、35mm、厚度 11 μ m、張力 3.546N/m。

表 4-4 PVC 薄膜材料參數

Property		Values
Density (kg/m ³)	ρ	1230
Elastic Modulus (GPa)	E	0.841
Poisson's ratio	ν	0.3

4.3.5 環形薄膜之理論解析與數值分析之比較

從 4.3 的結果中可以驗證理論解析、特雷夫茨法及有限元素數值分析於環形薄膜於固定邊界下的振動特性，以前八個模態的共振頻率及振形做相互比較。如表 4-5、表 4-6 所示，模態以 (m,n) 表示， m 代表著模態的節線數、 n 代表節圓數，三種方法的頻率值及模態振形都非常接近、誤差幾乎為零，這也再次說明了特雷夫茨法於薄膜振動分析的可行性。

表 4-5 環形薄膜固定邊界理論及數值法對照表(a)

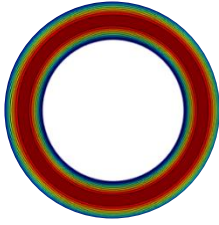
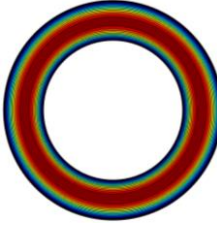
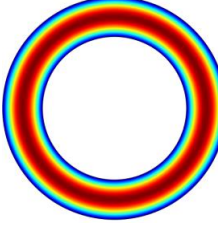
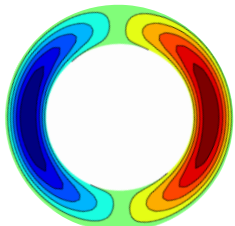
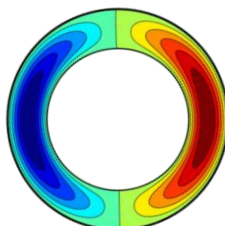
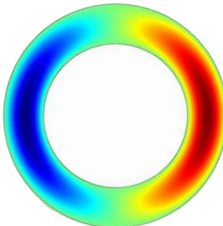
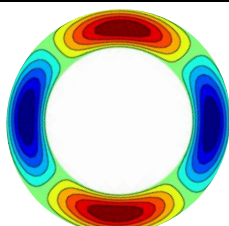
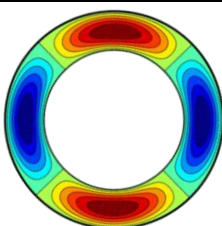
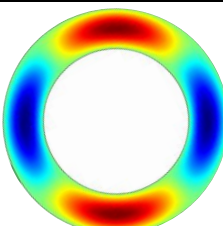
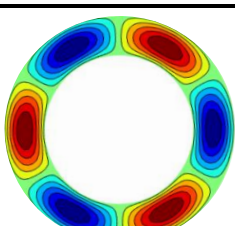
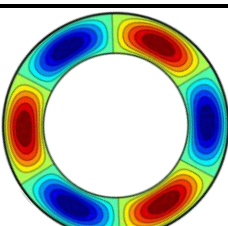
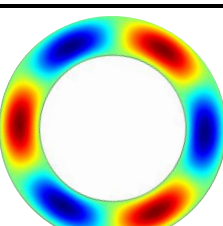
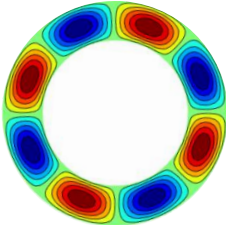
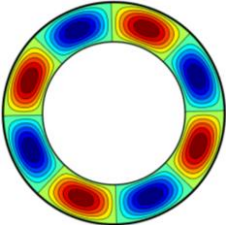
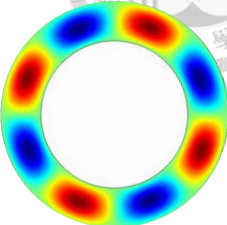
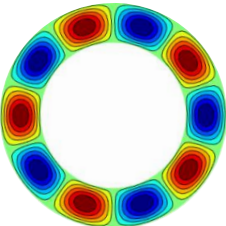
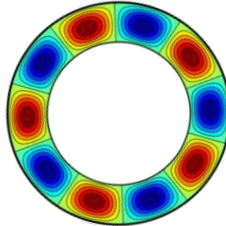
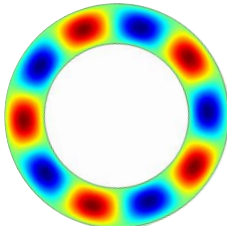
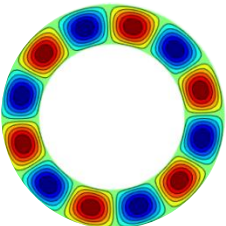
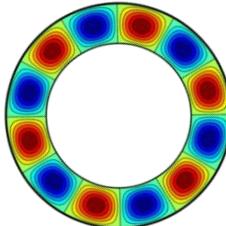
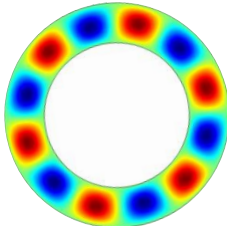
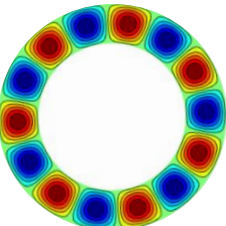
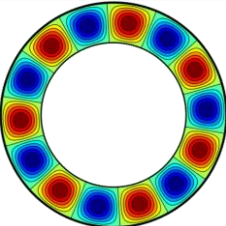
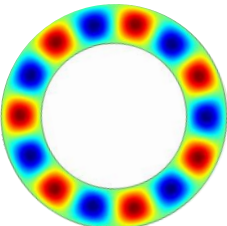
Mode		Theory	Trefftz(Error)	Comsol(Error)
1	Mode Shape (0,2)			
	Freq (Hz)	646.0	646.0(0%)	646.0(0%)
2	Mode Shape (1,2)			
	Freq (Hz)	652.3	652.3(0%)	652.3(0 %)
3	Mode Shape (2,2)			
	Freq (Hz)	670.8	670.8(0%)	670.9(0.01%)
4	Mode Shape (3,2)			
	Freq (Hz)	700.6	700.6(0%)	700.7(0.01%)

表 4-6 環形薄膜固定邊界理論及數值法對照表(b)

Mode		Theory	Trefftz(Error)	Comsol(Error)
5	Mode Shape (4,2)			
	Freq (Hz)	740.2	740.2(0%)	740.3(0.01%)
6	Mode Shape (5,2)			
	Freq (Hz)	788.1	788.1(0%)	788.2(0.02%)
7	Mode Shape (6,2)			
	Freq (Hz)	842.8	842.7(-0.01%)	842.9(0.01%)
8	Mode Shape (7,2)			
	Freq (Hz)	902.9	902.9(0%)	903.1(0.02%)



4.4 跑道形環薄膜之自由振動分析

本章節將對跑道形環膜進行振動分析，即將 4.3 之環形薄膜的內外邊界做形狀上的改變，如圖 4-7 所示，選擇外圈跑道形、內圈圓形的薄膜來做分析。因為跑道形薄膜振動之理論推導非常複雜，且不同的形狀適用性也相當差，而使用無網格法來分析跑道形薄膜的振動，只需要根據不同的形狀改變邊界上節點的設置，便可以進行振動分析，因此本章節將著重於特雷夫茨法的計算上，接著使用有限元素法計算並進行比較，以確保特雷夫茨法在跑道形薄膜的條件下，也能夠有效進行振動分析。

跑道形的定義如圖 2-17 所示，此形狀包含了左右兩邊的半圓（極座標系統）及中間的矩形（卡式座標系統）。

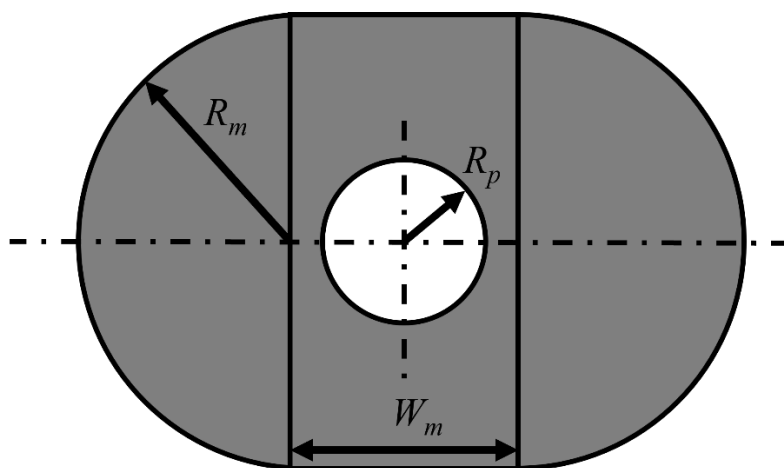


圖 4-7 跑道形環薄膜結構、尺寸示意圖

4.4.1 跑道形環薄膜之自由振動特雷夫茨法

4.2 、4.3 兩節中已經針對環形、矩形的薄膜進行固定邊界之無網格特雷夫茨法進行推導，也透過和理論解析及有限元素法的比較，驗證此方法在圓形系統及矩形系統中進行薄膜振動的分析上為有效的方法。而本節將使用特雷夫茨法對固定邊界環薄膜進行分析。

計算方式和 4.3.2 的作法相似，先對薄膜的內外邊界進行佈點（須滿足點數 $N = 2m + 1$ ），接著將節點座標 (r, θ) 以及邊界條件代入位移通解(4-27)並對其進行

求解，可以求得通解中待定係數之解，而得到的特徵值為特徵頻率，最後將頻率及薄膜域內點之極座標帶回通解中，即可求得各點的位移並得到模態陣形。

根據(4-27)可以發現，通解中包含了第一、二類貝索函數 $J_n(k_d x)$ 、 $Y_n(k_d x)$ ，

其中 $k_d = \omega / c_d$ 。由圖 4-9 可以發現，第二類貝索函數階數愈高、函數自變量愈小的時候，會有極值的狀況產生。這說明當頻率愈低、貝索函數之階數過高（點數目愈多）的時候，愈有可能因為函數值過大而造成計算上的困難。然而，若邊界點的數目過少，可能導致節點難以完整描述薄膜邊界的狀況，導致模態繪製上出現問題。另外，在進行掃頻的時候，也需合理縮小我們的頻率範圍，避免出現函數數值過大的狀況。

儘管特雷夫茨法對於跑道形薄膜的振動分析有著高適應性且計算不複雜的優勢，在實際使用時還需要透過經驗法則，妥善安排節點的布置數量、設定掃頻範圍。

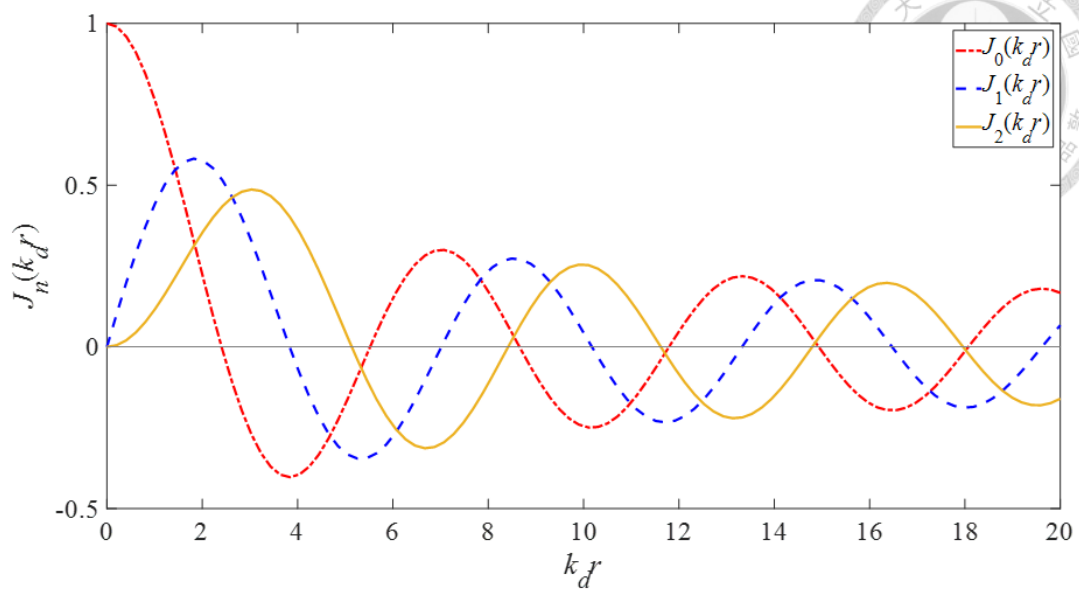


圖 4-8 第一類貝索函數

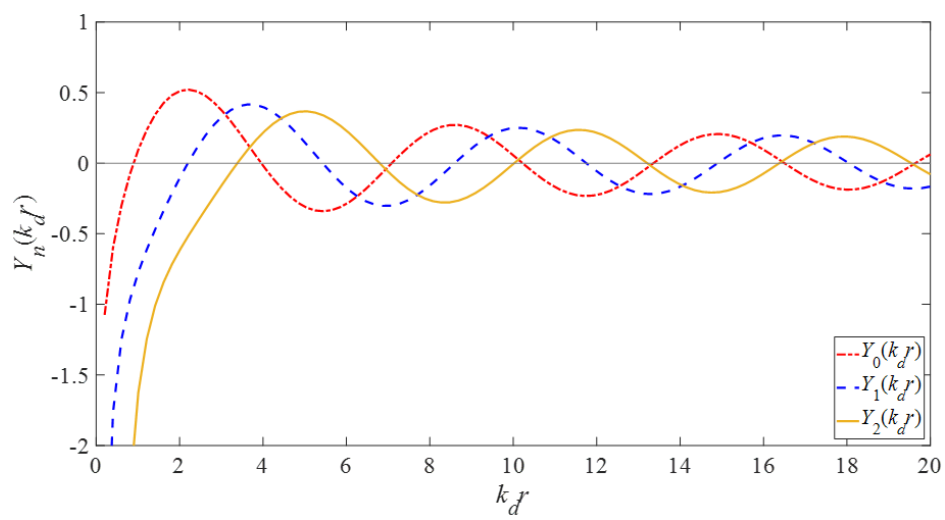


圖 4-9 第二類貝索函數



4.4.2 跑道形環薄膜之自由振動有限元素數值分析

使用有限元素數值分析的方法和 4.2.3 、4.3.3 兩節的做法大同小異，只須注意在設定跑道形薄膜的網格時，需針對不同的形狀選擇不同種類的網格。以外圈跑道形、內圈圓形為例，整個元件皆選擇使用三角形網格，如下圖 4-10 所示，原因是因為圖形的邊界有較多圓弧，若採用四邊形或是其他網格，可能造成元素分布不均勻的狀況。

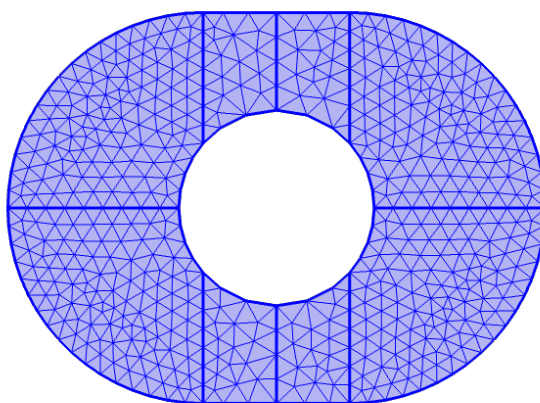


圖 4-10 跑道形環薄膜有限元素設定

4.4.3 試片規格

和 4.3.4 節相同，這邊選擇使用 PVC 薄膜，參數如表 4-4 所示。形狀為外圈跑道形、內圈圓形，尺寸如圖 4-7 所示，外圈左右兩邊半圓的半徑 $R_m = 20\text{mm}$ 、中間矩形的寬 $W_m = 15\text{mm}$ ，而內圈的圓孔半徑 $R_p = 10\text{mm}$ 。

4.4.4 跑道形環薄膜特雷夫茨法與有限元素之比較

如表 4-7、表 4-8 所示，使用無網格特雷夫茨法和有限元素數值法進行共振頻率及模態振形的計算。兩種方法有不錯的對應性，頻率的誤差都趨近於零，在模態振形上也有高度的一致性。由此可知，特雷夫茨法在計算跑道形雙連通薄膜上也可以有相當不錯的結果。

表 4-7 跑道形環薄膜固定邊界理論及數值法對照表(a)

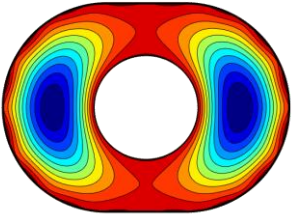
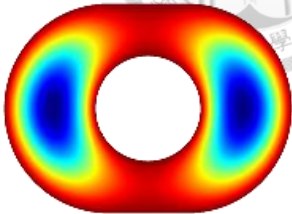
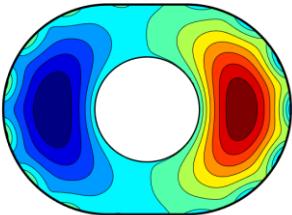
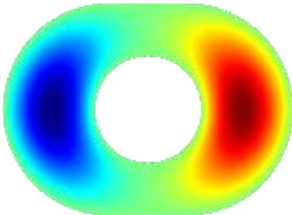
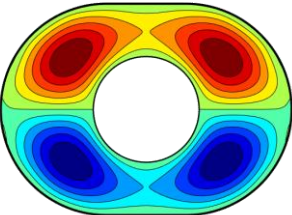
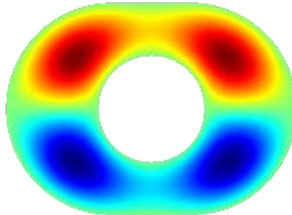
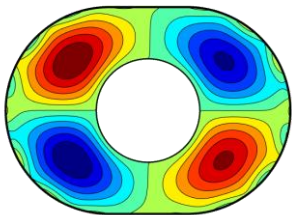
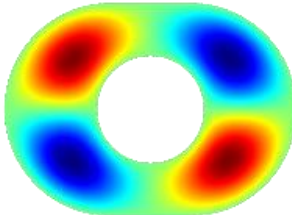
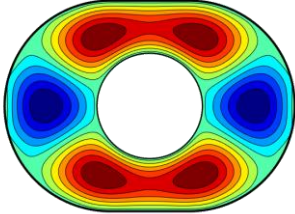
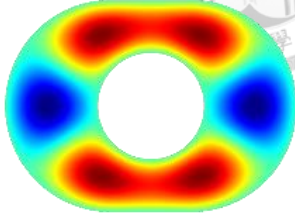
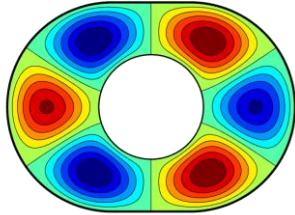
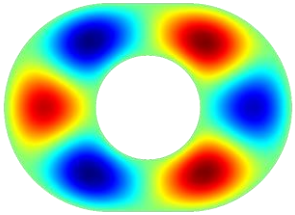
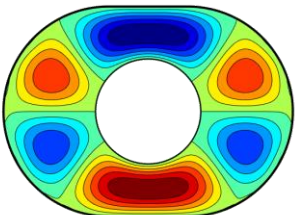
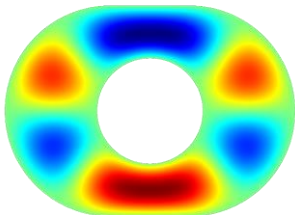
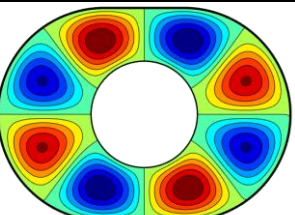
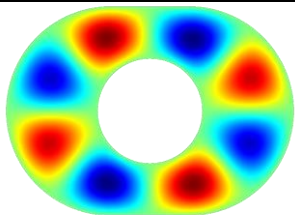
Mode		Trefftz	Comsol(Error)
1	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	515.2	515.2(0%)
2	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	516	516(0%)
3	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	624.8	624.8(0%)
4	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	630.6	630.6(0%)

表 4-8 跑道形環薄膜固定邊界理論及數值法對照表(b)

Mode		Trefftz	Comsol(Error)
5	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	717.6	717.7(0.01%)
6	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	740.2	740.2(0%)
7	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	795.3	795.4(0.01%)
8	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	848.3	848.3(0%)



4.5 薄膜之張力分析

因為欲應用於發聲單體，本研究主要討論固定邊界薄膜的振動，張力的變化會直接影響薄膜的彈性特性和振動模態，進而導致第一共振頻率的變化。第一共振頻率是指薄膜在自由振動狀態下的最低頻率，通常被認為是薄膜的固有頻率，振形則為活塞模態(圖 4-11)。

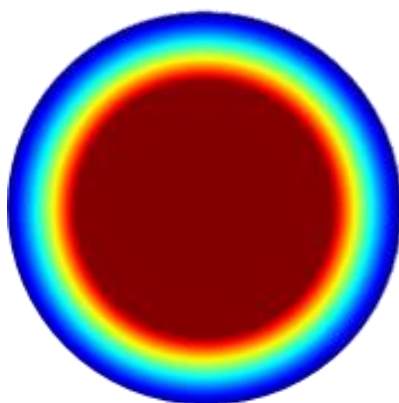


圖 4-11 活塞模態示意圖

活塞模態是指一個物體在振動時，其表面上的振動呈現類似活塞運動的模式，在聲學中是一種重要的振動模式，對聲場的形成和傳播具有顯著的影響。活塞模態在聲學中具有重要的影響。它可以產生均勻的壓力分佈、強烈的直射聲波和特定頻率的共振增強效應。這些特性使活塞模態成為設計和控制聲場的有用工具，並在音響應用中發揮重要作用。

而根據 7.1.5 將會提到的最佳化標準，活塞模態的共振頻率落在 100Hz~300Hz 之間為我們最重要的指標。然而，過去的文獻中透過改變尺寸來達到期望的共振頻率的效果並不如預期，且會導致元件製作的困難，因此本研究將張力列入改變的參數內進行討論。

共振頻率 f 是由張力 T 和線密度 μ 共同決定的

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (4-32)$$

由(4-32)我們可以發現當張力增加時，薄膜的第一共振頻率增加；當張力降低時，薄膜的第一共振頻率降低。因此，張力可以被視為控制薄膜第一共振頻率的一個重要參數。通過調整張力的大小，可以調節薄膜的共振行為和頻率響應。

4.5.1 繃膜張力與共振頻率量測

繃膜的詳細流程如 2.4.2 節所說明，本研究透過改變繃膜治具中墊片的數量，調整繃膜時的高度差，進而生產出不同張力的薄膜。在未放置任何墊片的情況下，繃膜的高度差為 10mm，而每片墊片的厚度為 1mm，因此每安裝一片墊片繃膜的高度差會減少 1mm，這意味著薄膜的變形量會愈小。

本研究希望製造出來的薄膜有較高的共振頻率，在其他條件不變的情況下，有愈大的張力愈容易符合我們的需求。考量彈性變形及塑性變形後，我們希望找到最接近薄膜降伏強度的位移量，便能得到薄膜最大的張力。

然而，受限於儀器設備的不足，本研究尚無法直接對薄膜的張力進行量測。因此使用雷射都卜勒測振儀透過掃頻方式，量測不同繃膜高度差的共振頻率，透過觀察共振頻率的高低，大致判斷張力的大小關係，並搭配使用有限元素法進行張力的反算，詳細內容參照 4.5.2。

4.5.2 跑道形薄膜張力之有限元素法

本節將 4.5.1 節量測到的共振頻率，透過有限元素數值方法反算薄膜的張力。由於 COMSOL 沒有辦法直接輸入共振頻率反算出張力的值，因此這邊從大範圍開始搜索，逐漸把範圍縮小、精度提高，最後找出最接近的薄膜張力。

因為實驗和模擬本身就存在著條件上的差異，沒有辦法達到完全相同的結果，因此我們選擇在聲學表現上我們比較著重的活塞模態頻率，作為主要張力反算的參考物理量。這邊使用 COMSOL 的參數功能，如圖 4-12 所示，將薄膜的平面力設定為未知數 T ，並在研究的部分使用參數掃描的功能，最後尋找和 LDV 量測到的共振頻最接近的資料，作為反算後得到的張力。

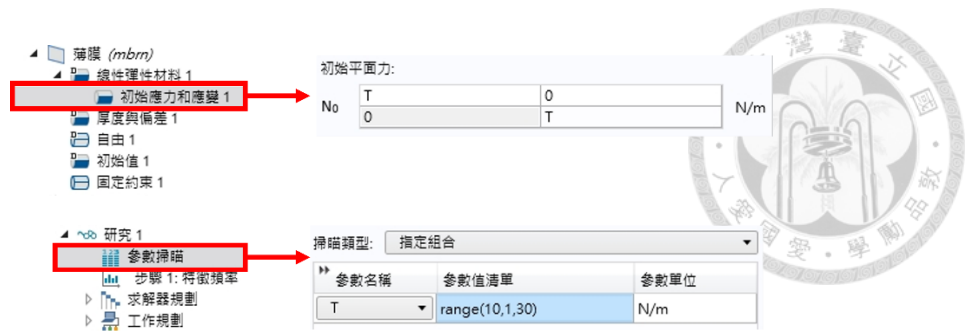


圖 4-12 薄膜張力有限元素模擬設定

4.5.3 試片規格

此處使用有單層濺鍍金屬之高分子聚合物薄膜，詳細參數如表 4-1 所示。薄膜的形狀選擇使用跑道形薄膜，參數參考圖 2-17，兩側半圓之半徑 $R_m = 10\text{mm}$ 、中間矩形寬 $W_m = 5\text{mm}$ 。

4.5.4 跑道形薄膜張力與第一共振頻之相關性比較

4.5.1 節中使用雷射都卜勒測振儀量測薄膜共振頻率，因為主要的參考指標為活塞模態之共振頻率，因此量測中心點即可。圖 4-13、圖 4-14、圖 4-15 為薄膜於三種不同繃模條件下量測所得之速度-頻率圖。接著以第一共振頻率為基準，對此模型作張力的參數掃描，掃描之結果如表 4-9 所示，可以找到分別與之對應的薄膜張力。

從中可以發現，繃膜高度差為 0.7mm 時的張力為 26.9N/m ，是三者之中最大的。這代表薄膜在超過這個範圍後即開始進入塑性變形的階段，除了沒辦法達到最大的張力，進而提升第一共振頻率，塑性變形對機械性質的影響也會不利於振動的分析。因此，本研究後續將會以此為基準進行實驗及數值方法的模擬。

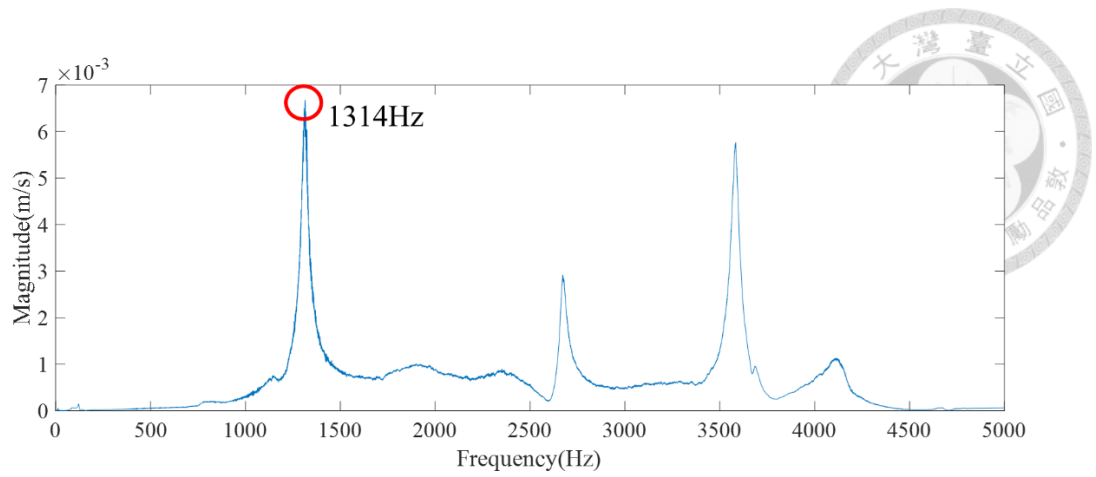


圖 4-13 繃膜高度 6mm 之 LDV 量測結果

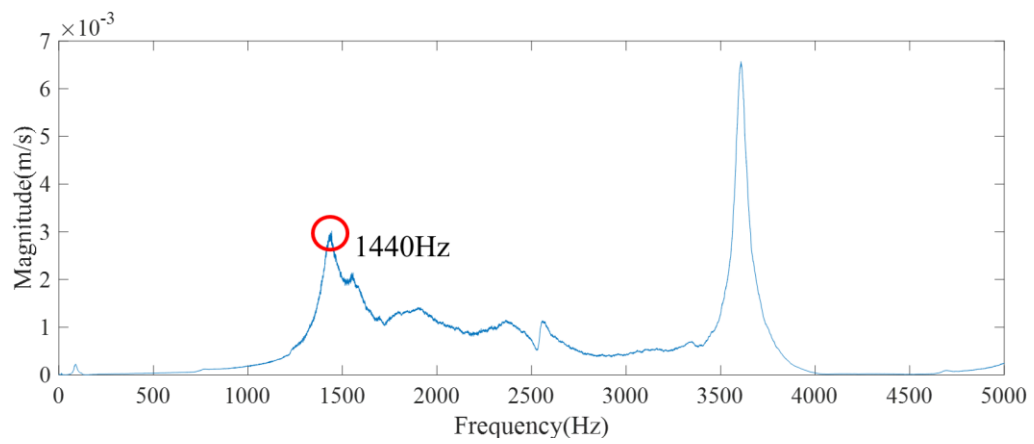


圖 4-14 繃膜高度 7mm 之 LDV 量測結果

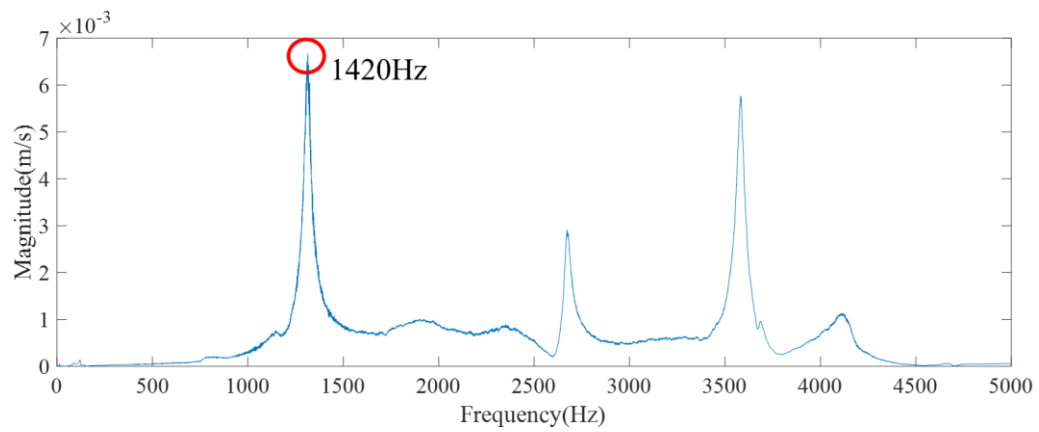


圖 4-15 繃膜高度 8mm 之 LDV 量測結果

表 4-9 薄膜基頻量測與反算張力結果

		第一共振頻(Hz)	薄膜張力(N/m)
繃膜高度差(mm)	6	1314	22.4
	7	1440	26.9
	8	1420	26.2

第五章 壓電矩形薄板振動特性分析

參考文獻[59]、[60]及[66]中分別討論圓形及矩形系統的聲學元件，而本文選擇壓電矩形薄板複合跑道形薄膜進行研究，因此本章節將透過有限元素模擬，針對自由邊界下的壓電矩形薄板進行振動分析，探討其面外振動特性。並且和文獻[66]中使用疊加法對自由邊界之壓電矩形薄板進行振動分析的結果進行比較，以驗證此模擬方法為可行。

5.1 自由邊界下之疊加法

本節根據文獻對自由邊界下之壓電矩形薄板的解析過程進行簡介，因為邊界條件較為複雜，故採用疊加法來進行運算。從中我們可以知道忽略外力作用項之平板面外自由振動統御方程式：

$$\bar{W}_{,1111} + 2\bar{W}_{,1122} + \bar{W}_{,2222} - \frac{\rho^{eq}h\omega^2}{D_{11}}\bar{W} = 0 \quad (5-1)$$

經過運算整理後可以得到

$$\left[\frac{\partial^4 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\phi^2 \partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 W(\xi, \eta)}{\phi^2 \partial \eta^4} \right] - \lambda^4 W(\xi, \eta) = 0 \quad (5-2)$$

$$\frac{M_{11}a}{D_{11}} = - \left[\frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\nu}{\phi^2} \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right] \quad (5-3)$$

$$\frac{M_{22}b^2}{aD_{11}} = - \left[\frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + \nu \phi^2 \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \right] \quad (5-4)$$

$$\frac{V_{11}a^2}{D_{11}} = - \left[\frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^3} + \frac{\nu^*}{\phi^2} \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta^2} \right] \quad (5-5)$$

$$\frac{V_{22}b^3}{D_{11}a} = - \left[\frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right] \quad (5-6)$$

其中 $\xi = \frac{x}{a}$ 、 $\eta = \frac{y}{b}$ 、 $\lambda^4 = \frac{\rho^{eq} h a^4 \omega^2}{D_{11}}$ 、 $\dots$ 、 $\phi = \frac{b}{a}$ 、 $\bar{W}(x, y) = aW(\xi, \eta)$ 。

將自由邊界之壓電薄板拆解成四個結構塊進行運算，如圖 5-1 所示。

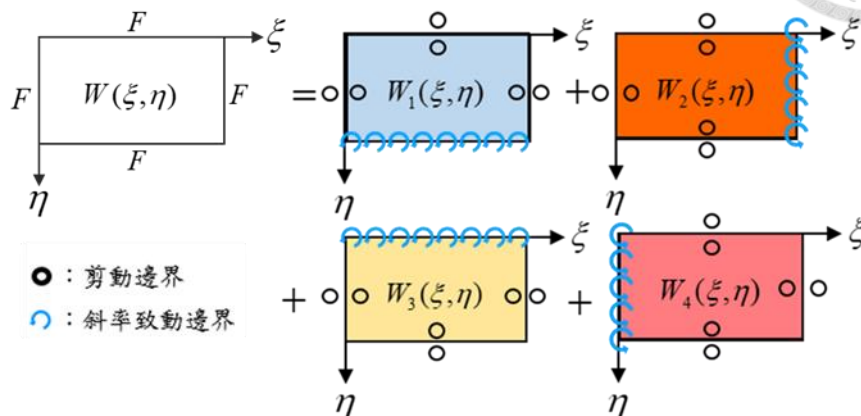


圖 5-1 自由邊界疊加法分解圖

將四塊結構塊的位移解相加並考慮各結構塊的邊界條件，經過運算整理後可以得到下列特徵矩陣：

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{1m} \\ E_{2n} \\ E_{3m} \\ E_{4n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

矩陣之具體內容可參照黃御宸[66]研究中之推導過程。由於(5-7)中的[A]會根據頻率而有不同的值，若要求取特徵向量[E]，則須對矩陣[A]求取特徵值，同時可以得到矩形薄板的共振頻率以及模態振形。

5.2 串聯型雙層壓電矩形板面外振動理論與數值分析之比較

本節將以有限元素模擬軟體和文獻中之內容進行對比，藉此佐證理論推導正確無誤。將透過對壓電矩形薄板進行振動分析，計算其共振頻率、模態振形，並將兩者的結果進行相互對應。



5.2.1 試片規格

模擬及理論計算之壓電薄板使用材料之詳細參數如表 3-1 所示，薄板板長為 63.5mm，寬為 31.88mm，由兩層極化方向相反之壓電陶瓷疊合而成，總厚度為 0.381mm。

5.2.2 有限元素數值分析

本研究選用 COMSOL 進行壓電矩形薄板的有限元素模擬，設定部分選擇固體力學、靜電模組之物理量，而在多重物理量的部分則須設定壓電薄板的範圍存在壓電效應，並對其進行特徵頻率的求解。

(1) 極化方向

本研究使用串聯型雙層壓電材料，即上下兩層壓電片之即化方向相反，軟體內預設的即化方向為+z 方向，因此須重新定義一相反方向之座標軸，令其 z 軸方向和預設之方向相反，詳細設定如圖 5-2 所示。

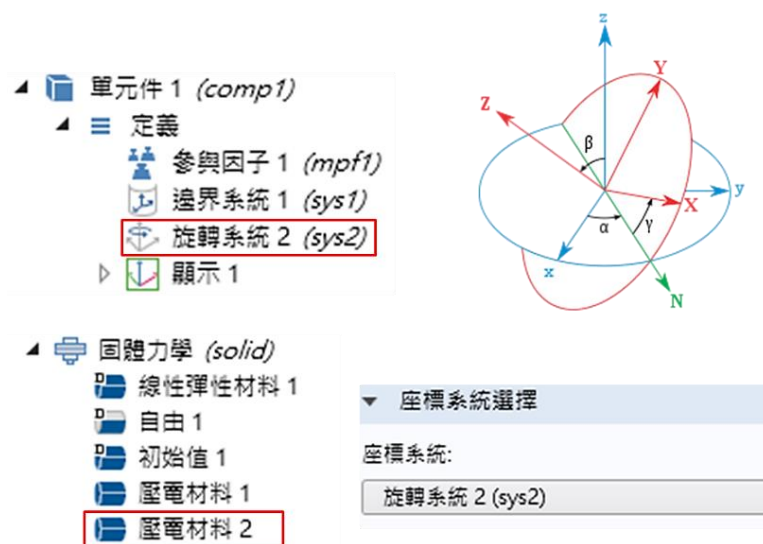


圖 5-2 極化方向設定

(2) 邊界條件設定

因為本處壓電薄板是自由邊界，其固體力學部分不須特別進行設定，靜電部分也因是開路形式，電位部分亦皆無須進行額外設定。

5.2.3 壓電矩形板於自由邊界面外振動理論解析與數值分析之比較

本節將[66]中以疊加法計算自由邊界條件下之壓電平板振動結果，和有限元素模擬的結果進行相互比較。比較結果如表 4-1、表 4-2 所示，從中我們可以發現兩種方法計算出來之共振頻率及模態振形都非常接近，頻率部分的誤差皆不超過 0.5%，根據此結果可以說明兩種方法的一致性。

表 5-1 薄板自由邊界理論與有限元素模擬對照表(a)

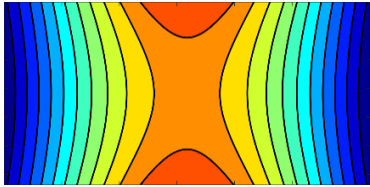
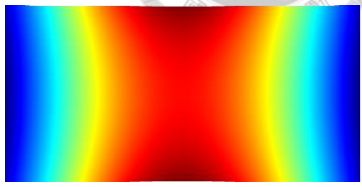
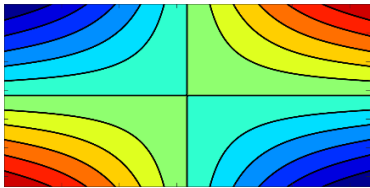
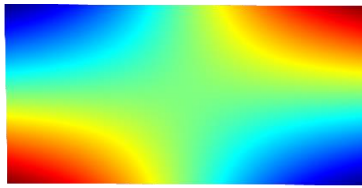
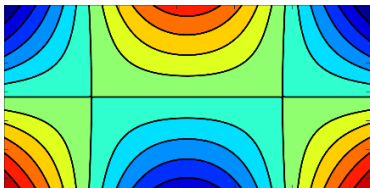
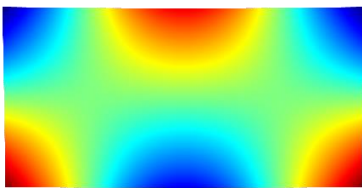
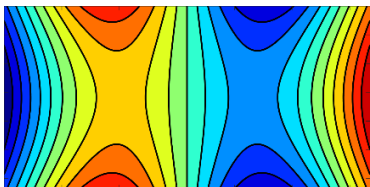
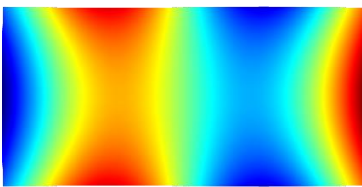
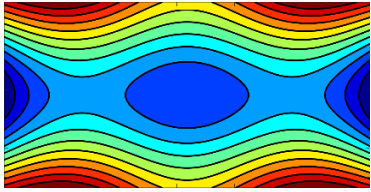
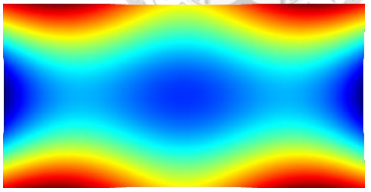
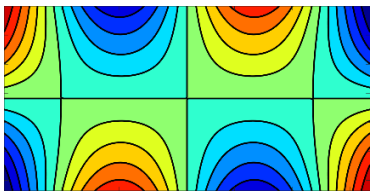
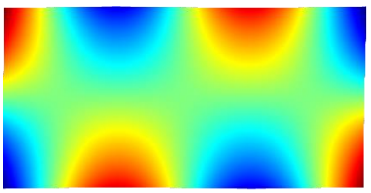
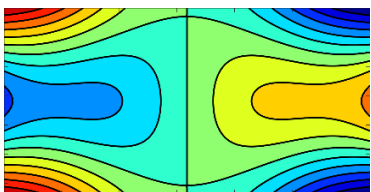
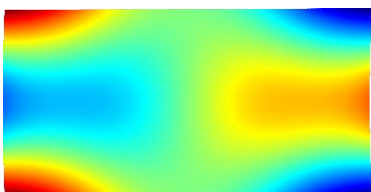
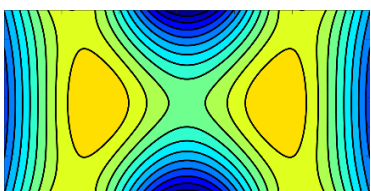
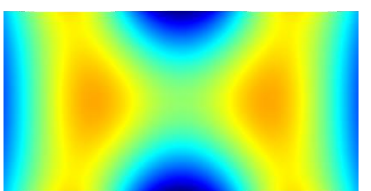
Mode		Theory	Comsol(Error)
1	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	311.45	311.34(-0.04%)
2	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	352.97	351.82(-0.33%)
3	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	795.85	792.8(-0.38%)
4	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	874.3	873.27(-0.12%)

表 5-2 薄板自由邊界理論與有限元素模擬對照表(b)

Mode		Theory	Comsol(Error)
5	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	1350.26	1348.8(-0.11%)
6	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	1421.2	1415.2(-0.42%)
7	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	1575.4	1571.7(-0.23%)
8	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	1815.89	1812(-0.21%)

第六章 串聯型雙層壓電矩形薄板複合薄膜振動分析

根據參考文獻[57]的內容，我們已知將壓電片複合薄膜元件之邊界條件根據模態振形的不同，將模態分成三種進行討論。第一種是活塞模態，其振動模式為整個壓電薄板為一個剛體帶動薄膜行往復運動；第二種為薄膜主導模態，其振形會類似於 4.3 、4.4 中介紹之固定邊界雙連通薄膜，主要為未和壓電複合部分的薄膜在進行振動；第三種為壓電主導模態，此種模態的發生頻率和壓電本身的共振頻率接近，是由壓電薄板帶動薄膜進行振動。根據文獻[59]中所提及，第一、二種模態皆可由將壓電視為剛體的假設下計算得到，因此本章將壓電及薄膜耦合後的模態分為兩個部分進行討論，先討論活塞模態及薄膜主導模態，再討論壓電主導模態。

6.1 壓電薄板複合薄膜剛體假設下之振動分析

此節主要的目的為對壓電薄板複合薄膜的活塞模態進行分析，因此在參考文獻[55]的基礎上，本部份假設壓電薄板為剛體，有著不可變形的特性，並將其複合於薄膜正中心進行分析。剛體的質量大小對薄膜的振動行為有很大程度的影響，由於我們假設薄膜的位移很小，壓電片的重力作用於薄膜連接壓電，即 $r=a$ 處之外方向的張力分量須達成力平衡，而薄膜於最外圈($r=b$)處之邊界條件為固定，即位移為零，如圖 6-1 所示。本節將首先參考文獻[60]中壓電圓盤複合薄膜之振動分析，使用無網格特雷夫茨法對文獻中的模型進行計算並和其結果進行比較，以驗證新方法之可行性。接著再對壓電矩形薄板複合跑道型薄膜的活塞模態及薄膜主導模態進行共振頻率與模態振形的計算，並和有限元素法進行比較。

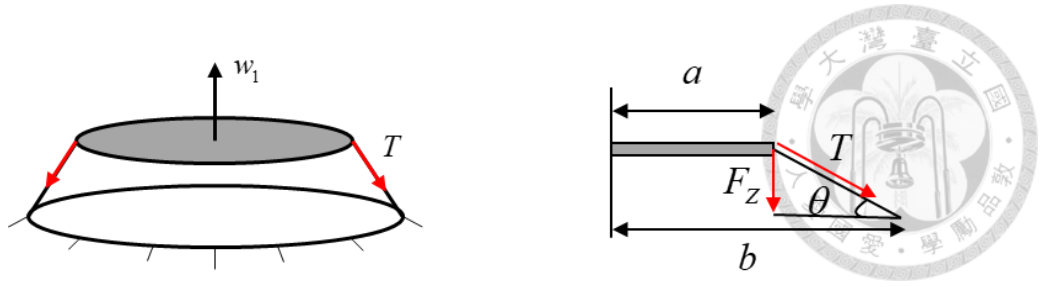


圖 6-1 剛體壓電複合薄膜示意圖

6.1.1 壓電圓盤複合薄膜理論解析

參考陳冠宇[59]針對壓電圓盤複合薄膜之聲學元件，針對元件之活塞模態及薄膜主導模態進行分析，首先假設壓電圓盤為剛體，剛體位移為 w_1 、薄膜位移為 w_2 ，而薄膜位移

$$w_2(r, \theta) = [EJ_n(k_d r) + FY_n(k_d r)] \cos(n\theta) \quad (6-1)$$

接著帶入邊界條件：薄膜外邊界位移為零、薄膜內邊界之張力和壓電圓盤之重力會達成力平衡，以及連續條件：壓電圓盤和薄膜交界處之位移及加速度連續。經過計算後可以得到特徵方程式：

$$\begin{aligned} & 2\pi a T k \left\{ Y_n(k_d b) \left[-J_{n+1}(k_d a) + \frac{n}{k a} J_n(k_d a) \right] - J_n(k_d b) \left[-Y_{n+1}(k_d a) + \frac{n}{k_d a} Y_n(k_d a) \right] \right\} \\ & = -\omega^2 M_p [Y_n(k_d b) J_n(k_d a) - J_n(k_d b) Y_n(k_d a)] \end{aligned} \quad (6-2)$$

對上式求解便可以得到活塞模態及薄膜主導模態之共振頻率及模態振形。

6.1.2 壓電矩形薄板複合薄膜特雷夫茨法

本節將以前節提到之剛體假設為基礎，說明如何使用特雷夫茨法計算壓電薄板複合薄膜活塞模態及薄膜主導模態模態振形及特徵頻率。

以下為剛體假設下元件之邊界條件及連續條件：

$$w(b, \theta) = 0 \quad (6-3)$$

$$w_1|_{r=a} = w_2|_{r=a} \quad (6-4)$$

$$\ddot{w}_1|_{r=a} = \ddot{w}_2|_{r=a} \quad (6-5)$$

根據固定邊界環形薄膜位移通解(4-27)、邊界條件(6-3)以及連續條件(6-4)、(6-5)，可以得到下二式：

$$w_2(r, \theta) = c_0 Y_0(k_d r) + \sum_{j=1}^m \left[c_j Y_j(k_d r) \cos(j\theta) + d_j Y_j(k_d r) \sin(j\theta) \right] \quad (6-6)$$

$$PT \frac{\partial w_2(r, \theta)}{\partial n} \bigg|_{r=a} = -\omega^2 M_p w_2(a, \theta) \quad (6-7)$$

其中 $P(perimeter)$ 為內邊界($r=a$ 處)之總周長，而 w_2 對正交方向(normal)之偏微分：

$$\frac{\partial w_2}{\partial n} = \frac{\partial w_2}{\partial x} n_x + \frac{\partial w_2}{\partial y} n_y \quad (6-8)$$

轉換為極座標形式：

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \quad (6-9)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial y} = \frac{\partial w_2}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} \quad (6-10)$$

將(6-9)、(6-10)代入(6-8)中可以得到：

$$\frac{\partial w_2}{\partial n} = \frac{\partial w_2}{\partial r} n_x \cos \theta + \frac{\partial w_2}{\partial r} n_y \sin \theta \quad (6-11)$$

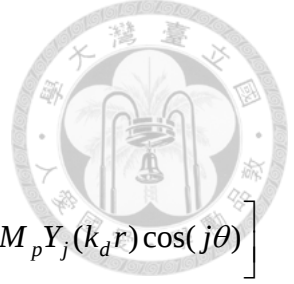
而根據內邊界形狀的不同會有不同的法向量 n_x 、 n_y ，圓形、矩形之法向量如圖 6-2 所示，圓形的法向量可表示為：

$$\begin{cases} n_x = \cos \theta \\ n_y = \sin \theta \end{cases} \quad (6-12)$$

而矩形之法向量則為：

$$n_x = \begin{cases} 1, x = a \\ -1, x = 0 \\ 0, \text{else} \end{cases} \quad (6-13)$$

$$n_y = \begin{cases} 1, y = b \\ -1, y = 0 \\ 0, \text{else} \end{cases} \quad (6-14)$$



將(6-6)、(6-11)代入(6-7)中整理後可得：

$$w_2(r, \theta) = c_0 \left[\omega^2 M_p Y_0(k_d r) - k P T Y_1(k_d r) (\cos \theta n_x + \sin \theta n_y) \right] \\ + \sum_{j=1}^m c_j \left[\frac{k}{2} (Y_{j-1}(k_d r) - Y_{j+1}(k_d r)) \cos(j\theta) (\cos \theta n_x + \sin \theta n_y) + \omega^2 M_p Y_j(k_d r) \cos(j\theta) \right] \\ + d_j \left[\frac{k}{2} (Y_{j-1}(k_d r) - Y_{j+1}(k_d r)) \sin(j\theta) (\cos \theta n_x + \sin \theta n_y) + \omega^2 M_p Y_j(k_d r) \sin(j\theta) \right] \quad (6-15)$$

並將(4-37)之 w_2 以(6-15)取代：

$$w(r, \theta) = w_1(r, \theta) + w_2(r, \theta) \\ = a_0 J_0(kr) + \sum_{j_1=1}^{m_1} [a_{j_1} J_{j_1}(kr) \cos(j_1\theta) + b_{j_1} J_{j_1}(kr) \sin(j_1\theta)] \\ + c_0 \left[\omega^2 M_p Y_0(kr) - k P T Y_1(kr) (\cos \theta n_x + \sin \theta n_y) \right] \\ + \sum_{j=1}^m c_j \left[\frac{k}{2} (Y_{j-1}(kr) - Y_{j+1}(kr)) \cos(j\theta) (\cos \theta n_x + \sin \theta n_y) + \omega^2 M_p Y_j(kr) \cos(j\theta) \right] \\ + d_j \left[\frac{k}{2} (Y_{j-1}(kr) - Y_{j+1}(kr)) \sin(j\theta) (\cos \theta n_x + \sin \theta n_y) + \omega^2 M_p Y_j(kr) \sin(j\theta) \right] = 0 \quad (6-16)$$

便可得到新的特徵矩陣以及待定係數矩陣。後續做法和 4.3.2 相同，對矩陣進行特徵值的求解即可得到特徵頻率及特徵向量，特徵向量為待定係數矩陣之解，把係數及域內點代回(6-18)中，即可求得模態振形。

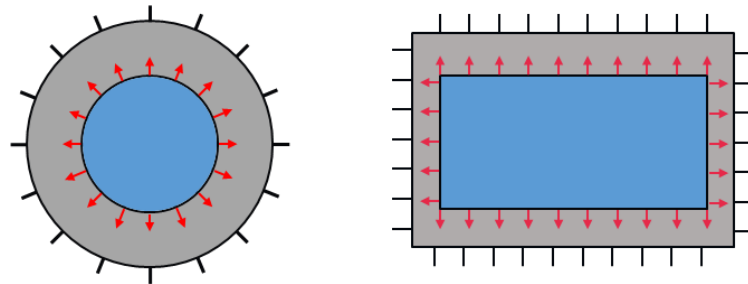


圖 6-2 壓電薄板複合薄膜正交方向意圖



6.1.3 壓電矩形薄板複合薄膜有限元素數值分析

本節使用有限元素模擬套裝軟體 COMSOL 進行數值分析，物理量選擇薄膜和壓電效應計算兩者複合的元件，其中的設置和 4.4.2 、5.2.2 節一樣，壓電複合薄膜的部分如圖 6-3 所示，我們繪製一壓電薄板黏貼於薄膜上的模型來進行模擬，兩者的黏貼面為壓電-薄膜結構連接的部分，如圖 6-4 所示，在軟體中需要設定此平面之多重物理量，方能順利進行分析。為呼應 6.1 節討論之主題，將有限元素模擬計算出之共振頻態進行篩選，主要會選擇活塞模態與薄膜主導模態來進行後續和其他方法的對應。

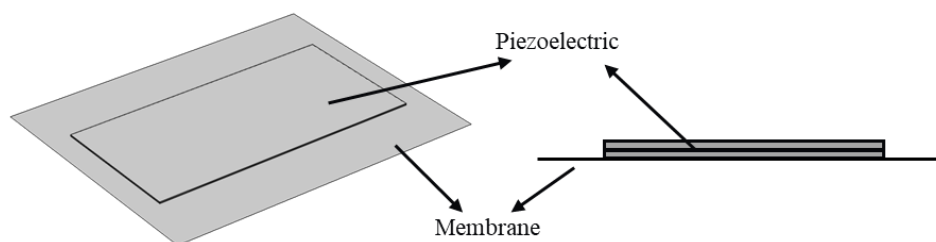


圖 6-3 壓電複合薄膜模型示意圖



圖 6-4 壓電複合薄膜耦合面設定圖



6.1.4 試片規格

此處之壓電材料皆選擇 PSI-5A4E 進行分析，表 6-1 錯誤! 找不到參照來源。
 為壓電材料之參數表，此處選用之壓電片是由兩片單層的以串聯方式黏貼，總厚度為 0.381mm。第一個模型為壓電圓盤複合圓形薄膜，薄膜部分使用高分子聚合物 PVC，厚度為 11 μ m，張力為 15.3N/m，可參考表 4-4 為其材料參數。尺寸部分，圓盤半徑為 22.5mm，薄膜半徑 35mm。第二個模型則為矩形壓電片複合跑道形，薄膜使用之材料和 4.2.4 相同為靜電薄膜，表 4-1 為其詳細材料參數，厚度為 11 μ m、張力為 15.3N/m。尺寸部份，壓電矩形薄板之長為 12.5mm、寬為 10mm，薄膜部分可參考圖 2-17， $W_m = 30\text{mm}$ 、 $R_m = 25\text{mm}$ 。

表 6-1 PSI-5A4E 壓電材料參數表

Material Property		Values
Mechanical		
Density (kg/ m ³)	ρ	7800
Elastic Modulus (N/ m ²)	s_{11}^E	1.515×10^{-11}
	s_{33}^E	1.923×10^{-11}
Poisson's ratio	ν	0.31
Dielectric		
Relative Dielectric Constants(@1kHz)	$\epsilon_{33}^T / \epsilon_0$	1800
	$\epsilon_{11}^T / \epsilon_0$	1800
Dielectric Constant in Vacuum (F/ m)	ϵ_0	8.854×10^{-12}
Piezoelectric		
Piezoelectric strain coefficient (m/ volt)	d_{33}	3.9×10^{-10}
	d_{31}	-1.9×10^{-10}
	d_{15}	$\sim 5.5 \times 10^{-10}$
Coupling Coefficients	k_{33}	0.72
	k_{31}	0.32
	k_{15}	~ 0.55



6.1.5 壓電薄板複合跑道形薄膜剛體假設下之振動理論解析與數值分析之比較

本節針對壓電薄板複合薄膜聲學元件之耦合模態進行分析，首先因為和薄膜的剛性相差極大，可以假設壓電平板為剛體，以理論解析、無網格特雷夫茨法以及有限元素模擬，對兩種模型的前八個共振頻率及模態振形進行求解。除了第一的活塞模態，剩餘七個模態的模態振形和 4.3.5、4.4.4 節的環形與跑道形環薄膜於固定邊界下的模態振形非常相似。

表 6-2、表 6-3 為第一個模型的結果比較，為壓電圓盤複合圓形薄膜，其中模態部分的編號以節線數 m 和節圓數 n 來表示，從中可以發現三種方法計算出來的共振頻率和模態振形的非常接近，誤差趨近於零，不僅驗證了剛體邊界假設的正確性，同時也說明了特雷夫茨法應用於分析壓電複合薄膜的非耦合模態上也是可行的。接著探討本章節的第二個模型：壓電矩形薄板複合跑道形薄膜，分析結果如表 6-4、表 6-5 所示。此模型由於薄膜外型的限制，只有針對無網格的特雷夫茨法和有限元素模擬兩種方法進行比較，而兩者在不不論是共振頻或是模態振形上都有不錯的對應性。在活塞模態的頻率誤差較大，但共振頻率若以差值比較僅差不到 2Hz。在以剛體假設計算活塞模態時，是類似將原件視為單自由度運動來做計算，而壓電圓盤複合圓形薄膜的模型為全對稱，故可以得到有限元素模擬較為接近的例子；矩形壓電薄板複合跑道形薄膜的元件則因有較複雜的形狀，可能導致計算出來的結果偏差較多。上述狀況說明無網格特雷夫茨法應用於分析壓電薄板複合薄膜的非耦合振動上是可行的。

表 6-2 壓電圓盤複合薄膜之活塞及薄膜主導模態對照表(a)

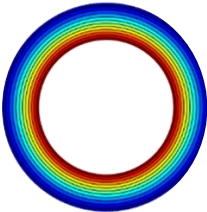
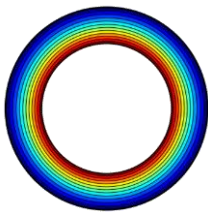
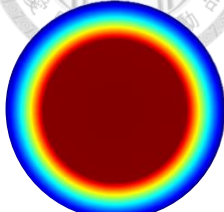
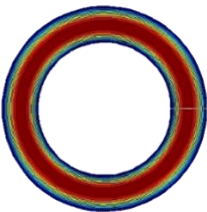
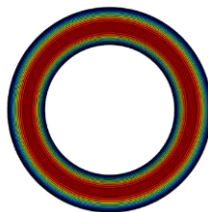
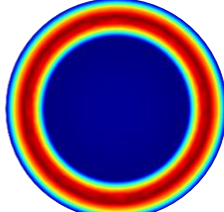
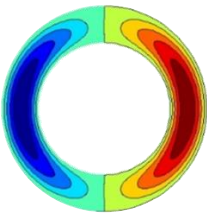
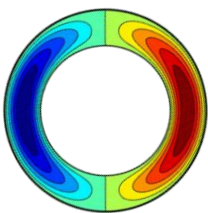
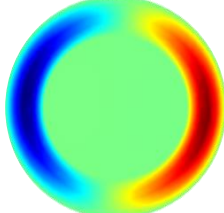
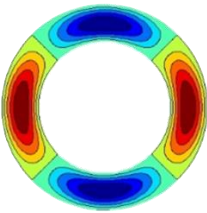
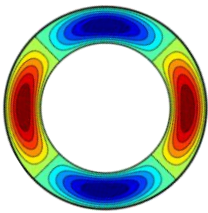
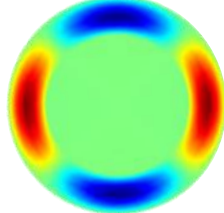
Mode		Theory	Trefftz(Error)	Comsol(Error)
1	Mode Shape (0,1)			
	Freq (Hz)	34	34 (0%)	34(0%)
2	Mode Shape (0,2)			
	Freq (Hz)	1342	1342(0%)	1346(0.31%)
3	Mode Shape (1,2)			
	Freq (Hz)	1355	1356(0.07%)	1356(0.07%)
4	Mode Shape (2,2)			
	Freq (Hz)	1393	1394(0%)	1395(0.17%)

表 6-3 壓電圓盤複合薄膜之活塞及薄膜主導模態對照表(b)

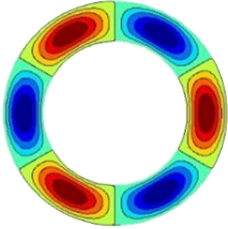
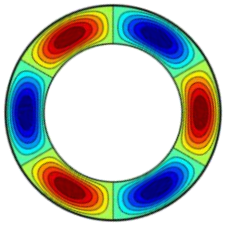
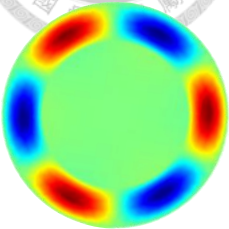
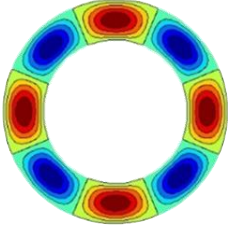
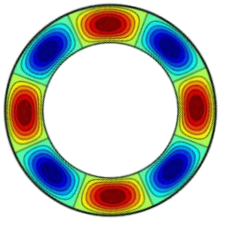
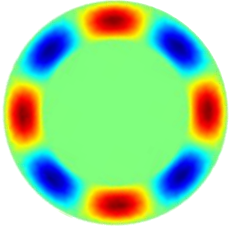
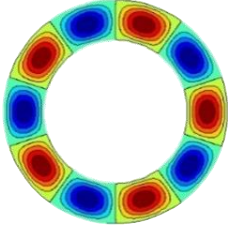
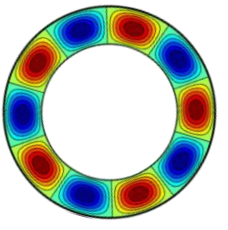
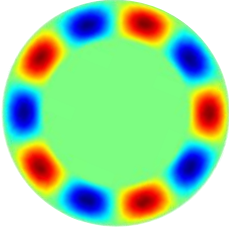
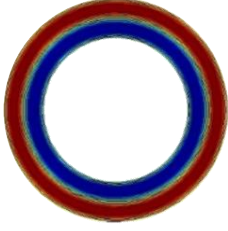
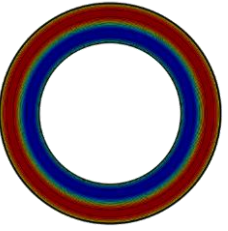
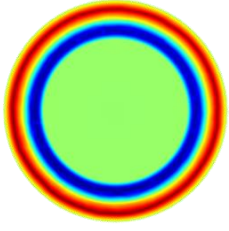
Mode		Theory	Trefftz(Error)	Comsol(Error)
5	Mode Shape (3,2)			
	Freq (Hz)	1455	1455(0%)	1465(0.69%)
6	Mode Shape (4,2)			
	Freq (Hz)	1538	1538(0%)	1537(-0.1%)
7	Mode Shape (5,2)			
	Freq (Hz)	1637	1637(0%)	1637(0%)
8	Mode Shape (0,3)			
	Freq (Hz)	2689	2689(0%)	2695(0.2%)

表 6-4 壓電矩形薄板複合跑道形薄膜之活塞及薄膜主導模態對照表(a)

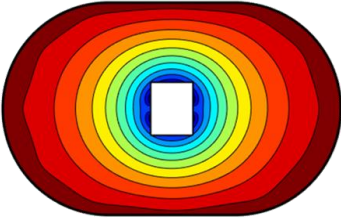
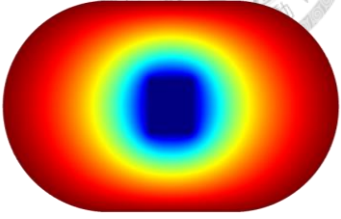
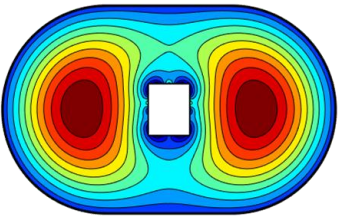
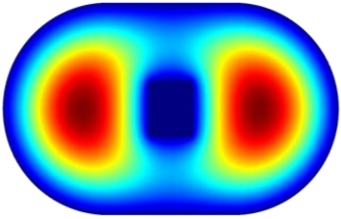
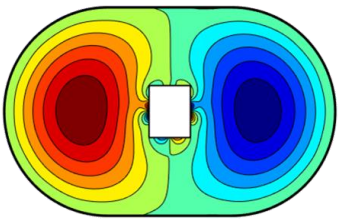
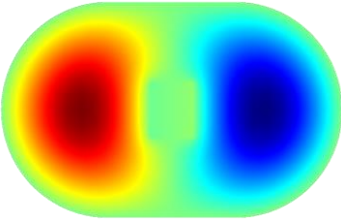
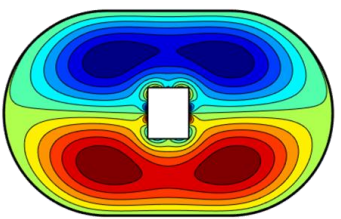
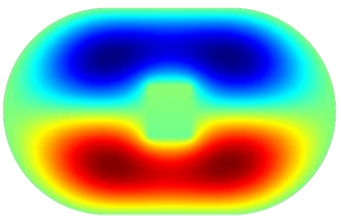
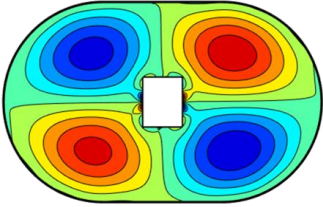
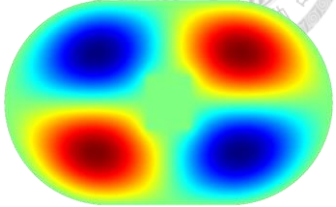
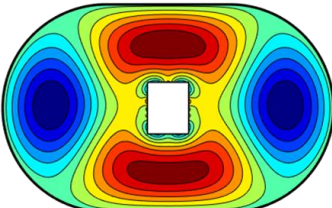
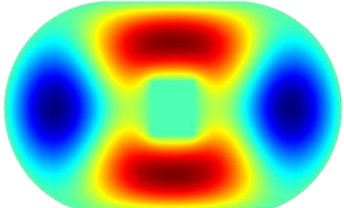
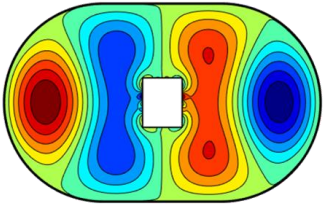
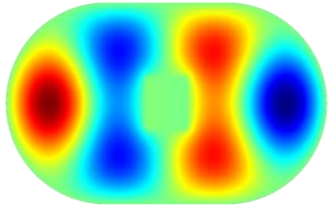
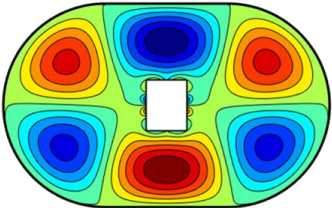
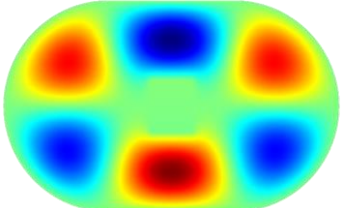
Mode		Trefftz	Comsol(Error)
1	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	66.9	65.0(-2.84%)
2	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	576.3	574.5(-0.31%)
3	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	587	587.2(0.03%)
4	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	781.6	777.4(-0.54%)

表 6-5 壓電矩形薄板複合跑道形薄膜之活塞及薄膜主導模態對照表(b)

Mode		Trefftz	Comsol(Error)
5	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	823.7	823.3(-0.05%)
6	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	895.1	887.1(-0.90%)
7	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	975.7	970.6(-0.52%)
8	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	1021.9	1021.9(0%)



6.2 壓電薄板複合薄膜壓電薄板主導模態之振動分析

本章節就壓電複合薄膜聲學元件的壓電主導模態進行討論。由於壓電材料和薄膜之間的剛性差異極大，且薄膜本身缺少抗彎矩的能力，因此在此類振動中，壓電振動會對薄膜產生影響，但薄膜對壓電薄板的影響則小到可以忽略，可將其視為單向耦合。假設壓電薄板複合薄膜之聲學元件，壓電薄板的部分具有類自由邊界且不受薄膜影響之前提進行推導，結合了壓電薄板理論的疊加法和雙連通薄膜的特雷夫茨法，推導出壓電薄板複合薄膜的壓電主導模態共振頻率和模態振形，並將結果和有限元素模擬數值方法做相互比較、對應。

6.2.1 壓電薄板複合薄膜疊加法結合特雷夫茨法

壓電主導模態的分析過程流程如圖 6-5 所示，本節將介紹如何使用無網格特雷夫茨法搭配疊加法，計算壓電薄板複合薄膜的振動問題。由於壓電是以類自由邊界的方式複合於薄膜，故此處將透過文獻[66]中介紹到的疊加法，計算自由邊界矩形薄板的振動，接著把矩形薄板邊界外圍的位移作為薄膜內圍的邊界條件，以此來得到待定係數的矩陣，接著對矩陣求解就能夠計算共振頻率及相對應的模態振形。

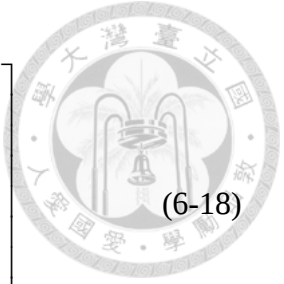
基於上述流程和文獻回顧，我們可以得出以下邊界條件：(1) 壓電薄板的彎矩為零、(2) 壓電薄板的剪力為零、(3) 壓電與薄膜連接處為位移連續條件、(4) 薄膜外圍為固定邊界，可表示為：

$$\begin{aligned} M|_{r=a} &= 0 \\ V|_{r=a} &= 0 \\ w_p|_{r=a} &= w_m|_{r=a} \\ w_m|_{r=b} &= 0 \end{aligned} \quad (6-17)$$

其中 M 為彎矩、 V 為剪力、 w_p 代表壓電的位移，而 w_m 則代表薄膜的位移。

以疊加法計算得到壓電矩形薄板於自由邊界下的面外振動的解，利用元件內邊界位移連續的條件及外邊界位移為零的邊界條件，代入薄膜位移通解(4-27)可得：

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} A_{11} & \cdots & A_{1N_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N_11} & \cdots & A_{N_1N_1} \end{matrix} & \begin{matrix} A_{11} & \cdots & A_{1N_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N_21} & \cdots & A_{N_2N_2} \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_{11} & \cdots & A_{1N_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N_11} & \cdots & A_{N_1N_1} \end{matrix} & \begin{matrix} A_{11} & \cdots & A_{1N_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N_21} & \cdots & A_{N_2N_2} \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^{(1)} \\ \vdots \\ a_{N_1}^{(1)} \\ a_1^{(2)} \\ \vdots \\ a_{N_2}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_{p_1} \\ \vdots \\ w_{p_{N_1}} \end{bmatrix} \quad (6-18)$$



其中黃色、淺藍色區域(上半區)所構成的等式為位移為零，而紅色、深藍色區域(下半區)所組合成的矩陣等式為位移連續。

將(6-18)化簡成簡單的矩陣形式：

$$[A][a] = [w] \quad (6-19)$$

移項後可得：

$$[a] = [A]^{-1}[w] \quad (6-20)$$

在求取向量 $[a]$ 後便可以繪製出薄膜的模態振形，再搭配透過疊加法計算得到之壓電薄板模態振形，兩者合併就可以繪製出整個元件的模態振形。

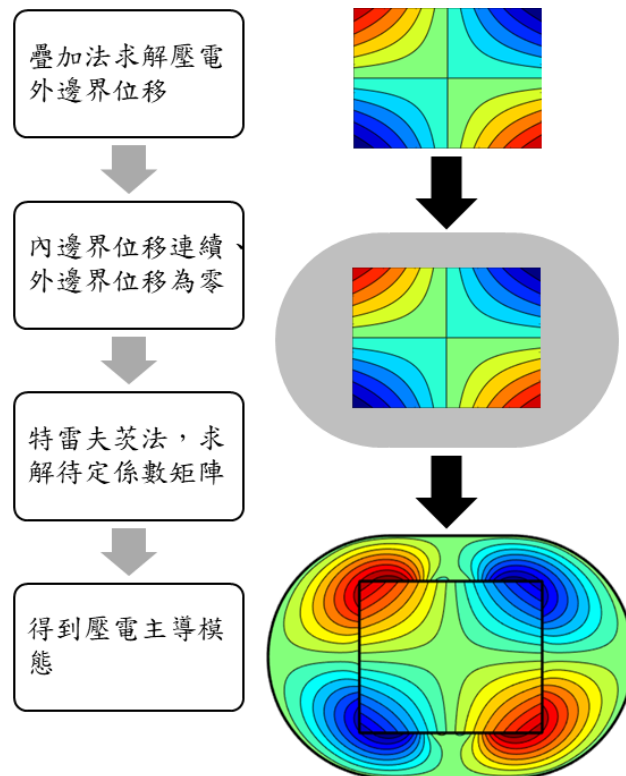


圖 6-5 壓電薄板複合薄膜之壓電主導振動流程圖



6.2.2 壓電薄板複合薄膜有限元素數值分析

本節與第 6.1.3 節的有限元素數值分析部分相同，使用 COMSOL 有限元素分析軟體。在物理量的設定上主要選擇薄膜以及壓電效應的部分進行操作，兩者的相關細節設定與第 4.3.2 節與第 5.3.3 節相同。如圖 6-3 所示，可以將壓電薄板置於薄膜的中心，以模擬實際將兩者組合的情況。而壓電與薄膜兩者共面的部分需要定義固體力學和薄膜的多重物理量，如圖 6-4 所示。本節將選擇以壓電薄板複合薄膜聲學元件的壓電主導模態（壓電薄板對薄膜的單向耦合）進行振動分析，探討共振頻率和模態振形，由於本章節探討壓電主導模態的計算方法，因此會把壓電薄板未產生變形之模態排除。

6.2.3 試片規格

壓電薄板為 PSI-5A4E(表 3-1)，總厚度共為 0.381mm。薄膜選用靜電薄膜，厚度為 11 μ m、張力為 15.3N/m，表 5-1 為其詳細參數，尺寸參考

圖 2-20， $W_m = 20\text{mm}$ 、 $R_m = 20\text{mm}$ 、 $W_p = 30\text{mm}$ 、 $L_p = 25\text{mm}$ 。

6.2.4 壓電薄板複合跑道形薄膜壓電薄板主導模態振動理論解析與數值分析之比較

本節比較壓電矩形薄板複合跑道形薄膜的聲學元件，於使用理論解析結合無網格特雷夫茨法和有限元素數值分析的振動特性，忽略薄膜對壓電薄板造成的影響，以前八個模態為主，比較兩者之間的共振頻率及模態振形差異。如表 6-6、表 6-7，對此二種方法進行比較，有限元素法是以三維建立模形進行計算，而無網格法則是使用二維平面來求解，雖然兩者之間略有差異，壓電薄板與薄膜之間黏貼的方法也不太一樣，不過共振頻率整體誤差不超過 1%，而模態振形也大致能夠相互對應。因為壓電跟薄膜兩者的機械性質相差極大，而使振動時的位移量有不小的差異，有可能因此而導致在繪製模態振形上無法完整顯現各自的特性。由於本研究在以特雷夫茨法分析壓電薄板複合薄膜的振動問題時，是將壓電薄板之共振頻率視



為整個元件的共振頻率計算，因此在振形的表現上可能因為特雷夫茨法和真實的模態共振頻率有誤差，而無法精準求出真實的模態振形。使用疊加法計算壓電薄板模態振形的佈點，和用特雷夫茨法計算薄膜振動時對邊界的佈點不相同，因此要將壓電薄板之邊界位移以線性內插的方式，作為薄膜內圈邊界點的邊界條件，故可能導致表中部分模態振形之壓電和薄膜之交界處有數值不連續之狀況，造成圖形中的等值線出現斷層。綜合以上結果得知，疊加法結合特雷夫茨法在分析壓電薄板複合薄膜之壓電主導振動上是可行的。

表 6-6 壓電矩形薄板複合跑道形薄膜之壓電主導模態比較表(a)

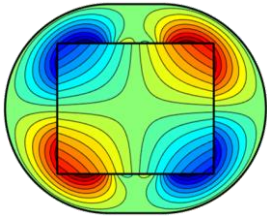
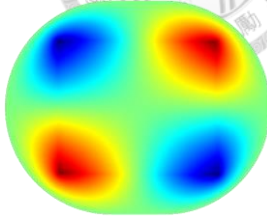
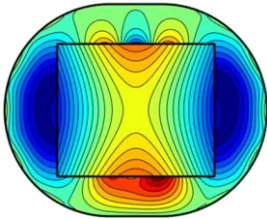
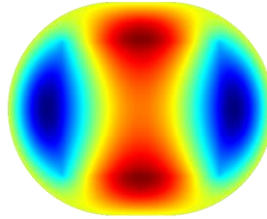
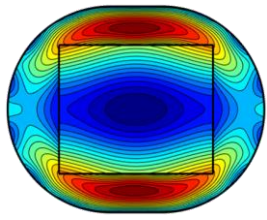
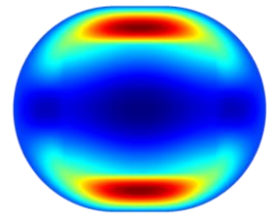
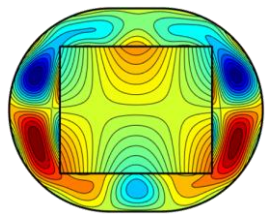
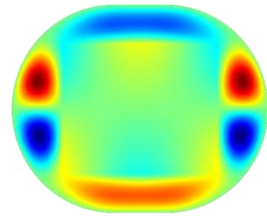
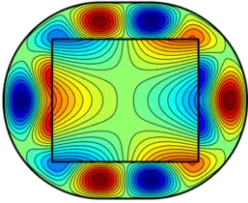
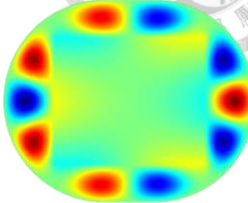
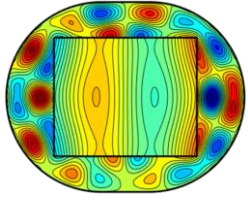
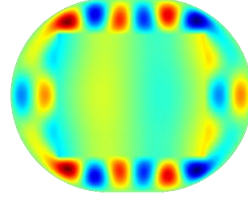
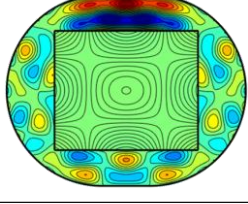
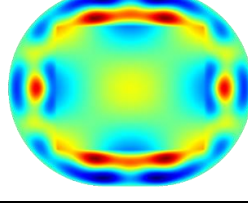
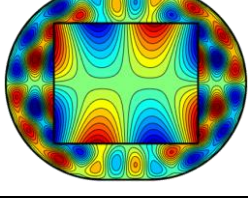
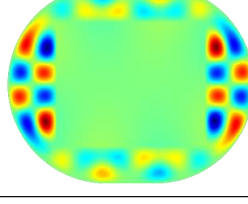
Mode		Trefftz	Comsol(Error)
1	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	957.8	959.2(0.15%)
2	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	1283.6	1287.2(0.28%)
3	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	2046.0	2039.1(-0.33%)
4	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	2365.1	2362.2(-0.12%)

表 6-7 壓電矩形薄板複合跑道形薄膜之壓電主導模態比較表(b)

Mode		Trefftz	Comsol(Error)
5	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	2702.0	2698.6(-0.13%)
6	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	3860.0	3855.1(-0.13%)
7	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	4665.6	4620.4((-0.97%))
8	Mode Shape		
	Frequency (Hz)	4683.7	4685.3(0.03%)

第七章 聲學元件聲學特性分析、實驗量測與最佳化

本章節會針對研究中使用到的聲學量測及模擬進行介紹，我們採用了人工耳 (Artificial ear) 實驗和有限元素法 (FEM) 模擬封閉音場的方法來對聲學元件。使用有限元素套裝軟體中內建的等效阻抗功能，將人耳殼、耳道對聲學量測產生的影響以電聲學的方式呈現，探討與實際人工耳量測結果的對應性，並搭配參數最佳化設計，求出聲音表現良好的尺寸參數，並製作出具有良好人耳感受的壓電薄板複合博模之聲學元件。

7.1 封閉音場之聲學特性分析

我們使用人工耳量測 (Artificial Ear) 將自製揚聲器對人耳的聽覺感受數據化，以便後續進行分析及比較。人工耳使用了跟耳鼓膜阻抗接近的麥克風進行量測，搭配使用接近人膚的材料裝置了與真實人耳形狀接近的結構，將人耳有可能對聲場產生的影響如反射、散射和吸收，盡可能模擬，使我們能夠以數據反映真實地聆聽狀況，同時我們也使用有限元素法 (FEM) 來進行封閉聲場的模擬，搭配將人耳的耳殼、耳道和耳鼓膜等效為電路模型及多孔彈性波的物理量來模擬耳罩的效應，然後計算鼓膜接收到的聲壓頻率響應曲線。最後，我們將有限元素法的模擬結果與人工耳實驗的結果進行比較，驗證其是否有良好的對應性。



7.1.1 封閉音場之有限元素分析

在有限元素模擬軟體 COMSOL 中選擇壓電效應、薄膜、聲壓和多孔彈性波的物理量來繪製模型及設定，並使用頻域的研究以利後續以掃頻方式模擬聲學元件於封閉音場下之聲壓響應曲線。本節主要會就有限元素軟體內的設定進行說明，其中包含幾何模型的建構、邊界條件的定義以及網格的設置。

(1) 幾何模型建構

如圖 7-1 所示為簡化人工耳耳殼構造模型，耳朵外包覆 $W_m=20\text{mm}$ 、 $R_m=20\text{mm}$ 、厚度 10mm 的橢圓形耳墊(參數參考圖 2-17)，使耳機與耳朵之間形成封閉音場，並將整個人耳等效成電路的形式，把阻抗定義在一個直徑為 6.5mm 的圓形平面，各個材料標示如圖 7-2 所示。

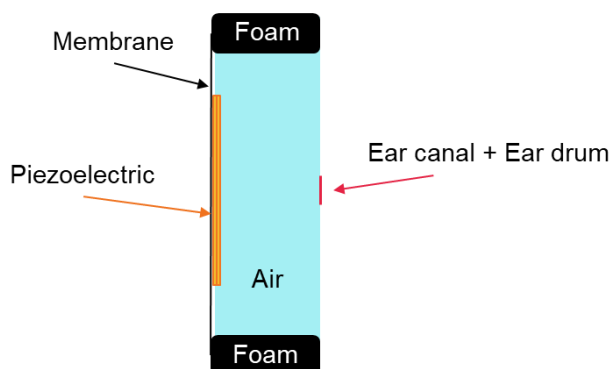


圖 7-1 有限元素模擬人工耳模型示意圖

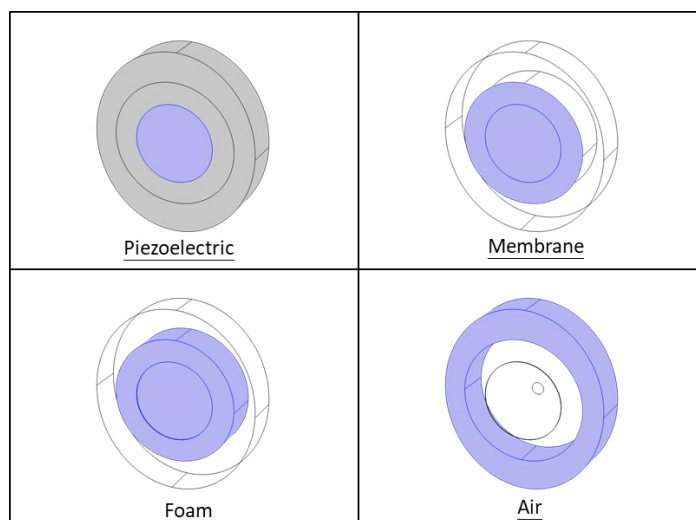


圖 7-2 有限元素模擬人工耳各部件標示圖



(2) 邊界條件定義

邊界條件的部分和前幾節大同小異，我們給予 $3V_{pp}$ 的電壓並設定薄膜的外緣為固定邊界，元件與聲場耦合的平面則需要設置聲學與結構的耦合邊界。我們將耳道視為一個管道，若從電聲學的角度來看，它相當於是一個電容元件，並且與耳鼓膜的阻抗並聯，如圖 7-3 所示。由於耳墊與耳朵在配戴耳機時緊密貼合，因此我們將耳墊的上下平面設定為固定約束，而與空氣接觸的其餘平面則被設定為聲學與多孔材料的耦合邊界。

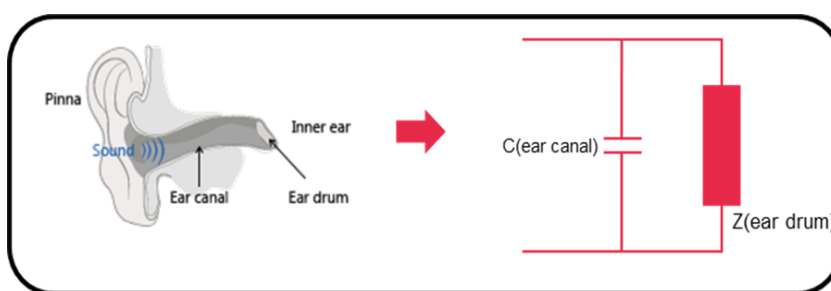


圖 7-3 耳道、耳鼓等效電路模型圖

(3) 網格設置

網格設置比較需要注意的部分為空氣的部分，為了能夠完整模擬聲場的特性，空氣部分的網格尺寸須小於聲波波長的 $1/5$ ，其他部分只需確保網格收斂性，圖 7-4。完成前述封閉音場的基本設定後，和前幾部分的設定相同，我們需要啟用薄膜的幾何非線性。接著我們設定頻率範圍為 20Hz 到 20kHz 的 $1/24$ 八音帶來模擬元件於封閉音場的表現，並選擇前面設定的人耳等效圓形平面作為觀測面，便能以掃頻的方式呈現聲壓頻率響應曲線。

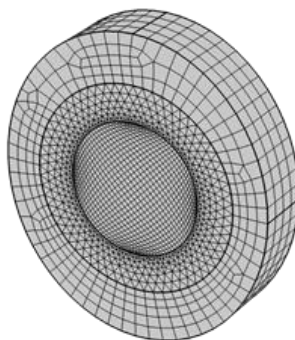


圖 7-4 人工耳模型網格分佈圖



7.1.2 多孔彈性波理論

在上一節中的介紹中，說明了本研究為模擬人耳配戴耳罩式耳機的聲學表現，將耳機的耳罩部分以多孔彈性波的物理量進行模擬，本小節將針對多孔彈性波的理論進行介紹。多孔材料是含有細小孔洞的固體結構，如圖 7-5 所示，耳罩式耳機的耳罩就是此種材料。多孔彈性波則為為多孔材料內的流、固體相互影響的現象，在充滿空氣的多孔材料中，熱損和黏損是格外重要的因素。因此，本研究採用 BIOT-ALLARD 模型，該模型同時考慮了此二種損失，此部分參考文獻[66]。

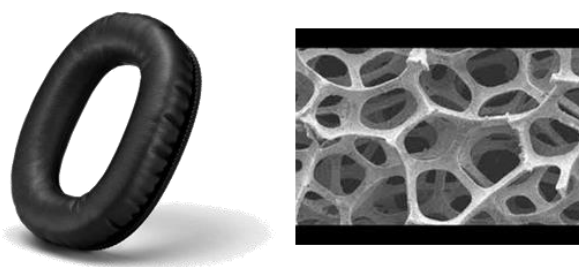


圖 7-5 多孔材料示意圖

7.1.3 封閉音場實驗量測與數值分析之比較

本節將人工耳實驗與有限元素法模擬的結果進行比較。在進行人工耳量測時，會透過夾具直接將聲學元件牢固地固定於頰板上，以模擬真實佩戴時的頭樑兩側夾持情形，接著使用麥克風測量相應的聲壓曲線。而於有限元素法模擬時將耳朵的各個部位以電聲學形式進行等效，相比於直接繪製整個人耳，這種模型的構建更加簡單和快速，能夠減少操作所需的時間成本。

如圖 7-6 所示為將 2.4.2 介紹之聲學元件(A)以實驗量測及人工耳模擬得比較圖。圖中黑色曲線為人工耳量測的結果，因為薄膜面積較大，在封閉壓力場作用下可以讓聲壓曲線於低頻部分更加平滑，圖中於高頻段部分有聲壓曲線較不穩定的狀況產生，推測是因為致動源為佔元件總面積較低的環形壓電，故反共振頻率發生時產生的波谷也因此更加明顯。而紅色曲線為有限元素模擬的結果，可以發現結果和實際量測到的數據有著相當接近的趨勢，也藉此驗證了將人耳以等效電路方

式模擬為可行的方式。在有限元素模擬中將整個人耳進行簡化，不僅省去了繪製人耳複雜且不規則外型所耗費的時間成本，模擬得到的數據也與人工耳量測有良好的一致性，因此後續也將使用此方法進行人工耳模擬。

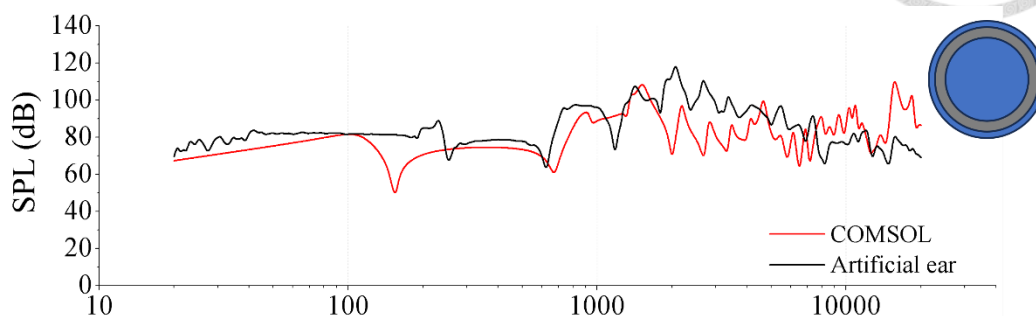


圖 7-6 封閉音場實驗量測與數值分析圖

7.1.4 壓電矩形薄板複合跑道形薄膜聲學元件(B)之最佳化

本節將針對壓電矩形薄板複合跑道形薄膜的發聲元件，進行尺寸上的選擇。黃御宸[66]在研究中使用簡化的人工耳模型進行有限元素法模擬取得良好的成效，因此本研究為了節省不必要的材料浪費及製作時間，選擇使用相同的方式，首先對矩形壓電片複合跑道形薄膜進行參數最佳化後，再以最佳化的參數著手製作。

首先會先決定最佳化的標準，並按照重要程度進行排序，作為後續參考的指標。如圖所示，本研究期望製作出具飽滿低頻的發聲單體，而人耳對低音的感受最佳範圍主要落在 100~300Hz 之間，故第一個最佳化的標準為，「活塞模態之共振頻率介於 100~300Hz 之間」。在確定基頻高低的前提之下，同時也希望整體的聲壓高低不要有過大的落差，期望 SPL 曲線愈平滑愈好，同時設定最高和最低的聲壓值之間也是相差愈少愈好，以不超過 60dB 為原則。

接著確定列入調整考量的參數，且為了節省時間，將參數分離進行比較，觀察各個參數和最佳化標準之間的關係，以縮小調整參數的範圍。參數部分主要可以分為壓電薄板尺寸、薄膜尺寸及薄膜張力。壓電薄板及薄膜的尺寸如

圖 2-20 所示，而張力的部分主要延續 4.5 節的介紹，選擇薄膜所能產生最大之張力時之參數條件，即繃膜高度差為 7mm、張力為 26.9N/m。

最後使用 7.1.1 節介紹之方式，以有限元素數值分析的方法進行最佳化，求出最符合初始設定標準之參數值。以簡化後之模型，搭配 COMSOL 內建的參數掃描功能，如圖 7-8 所示，計算不同參數下元件的第一共振頻，並選擇符合期待之參數。

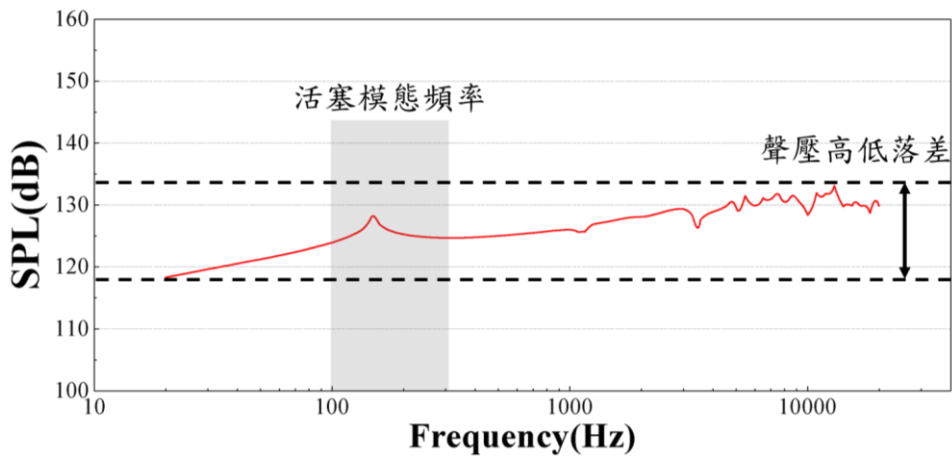


圖 7-7 最佳化標準示意圖



圖 7-8 有限元素模擬參數掃描設定

首先固定壓電矩形薄板之尺寸並對薄膜的尺寸進行參數掃描，期望能夠知道薄膜尺寸變化的幅度對活塞模態頻率的影響，如表 7-1 所示為矩形寬 $W_p = 20\text{mm}$ 、矩形長 $L_p = 15\text{mm}$ 之參數掃描結果，其中張力 $F = 15.3\text{N/m}$ 為參考黃御宸[66]所設定。從結果中可以發現共振頻率隨著尺寸變小逐漸升高，相當直觀。此處選擇固定

參數 $R_m = 10\text{mm}$ 並對 W_m 進行掃描，結果如表 7-2 所示，再固定 $W_m = 5\text{mm}$ 後對壓電的尺寸進行掃描，結果如表 7-3 所示。考量到壓電的尺寸若和薄膜過於接近，可能因為質量或面積過大，導致活塞模態產生的聲壓大小受到影響，因此折衷選擇 $W_p = 10\text{mm}$ 、 $L_p = 12.5\text{mm}$ 做為壓電矩形薄板的尺寸。

表 7-1 跑道形薄膜尺寸參數掃描結果

W_m (mm)	R_m (mm)	Frequency (Hz)	W_m (mm)	R_m (mm)	Frequency (Hz)
40	25	49.10	30	20	54.85
37.5	25	49.20	27.5	20	55.02
35	25	49.30	25	20	55.30
32.5	25	49.45	22.5	20	55.58
30	25	49.60	40	17.5	58.39
27.5	25	49.79	37.5	17.5	58.48
25	25	49.99	35	17.5	58.58
22.5	25	50.21	32.5	17.5	58.70
40	22.5	51.39	30	17.5	58.88
37.5	22.5	51.48	27.5	17.5	59.07
35	22.5	51.59	25	17.5	59.36
32.5	22.5	51.73	22.5	17.5	59.67
30	22.5	51.89	40	15	64.38
27.5	22.5	52.06	37.5	15	64.46
25	22.5	52.31	35	15	64.54
22.5	22.5	52.54	32.5	15	64.66
40	20	54.35	30	15	64.84
37.5	20	54.43	27.5	15	65.04
35	20	54.54	25	15	65.32
32.5	20	54.66	22.5	15	65.73



表 7-2 跑道形薄膜 W_m 參數掃描結果

W_m (mm)	Frequency(Hz)
17.5	95.76
15	96.74
12.5	89.64
10	95.24
7.5	101.26
5	109.81

表 7-3 矩形壓電尺寸參數掃描結果

W_p (mm)	L_p (mm)	Frequency(Hz)
12.5	10	109.30
15	10	109.81
12.5	12.5	110.65
10	10	111.93
15	12.5	112.46
10	12.5	112.50
17.5	10	114.28
17.5	12.5	119.92

過去文獻中面對張力的問題大多是固定住繃膜的相關條件，並透過量測薄膜共振頻率的方式反算張力，受限於量測的不易，並不會對張力進行調整。將發聲元件縮小可以有效提升共振頻率，也會導致聲壓不足及製作不易的問題，因此為了能夠有效改變活塞模態頻率，本研究從張力著手，根據 4.5 節的內容將薄膜所能承

受的最大張力，同樣透過量測共振頻後反算的方式進行求解，最後得到靜電薄膜的最大張力為 26.9N/m，以此張力重新計算此最佳化尺寸之聲學元件，其活塞模態共振頻為 149.21Hz。

將新計算到的薄膜張力和最佳化後的參數尺寸以 COMSOL 進行有限元素數值分析，如下圖 7-9 所示，曲線的第一個凸起位置和前面計算的活塞模態頻率 149.21Hz 可以相互對應，也能發現圖中 SPL 曲線整體的趨勢平滑，在高頻處才有較不穩定的狀況出現，聲壓高低的落差也是小於 20dB，符合最初設定的最佳化標準，因此後續將實際製作此元件並進行實際的量測與比較。

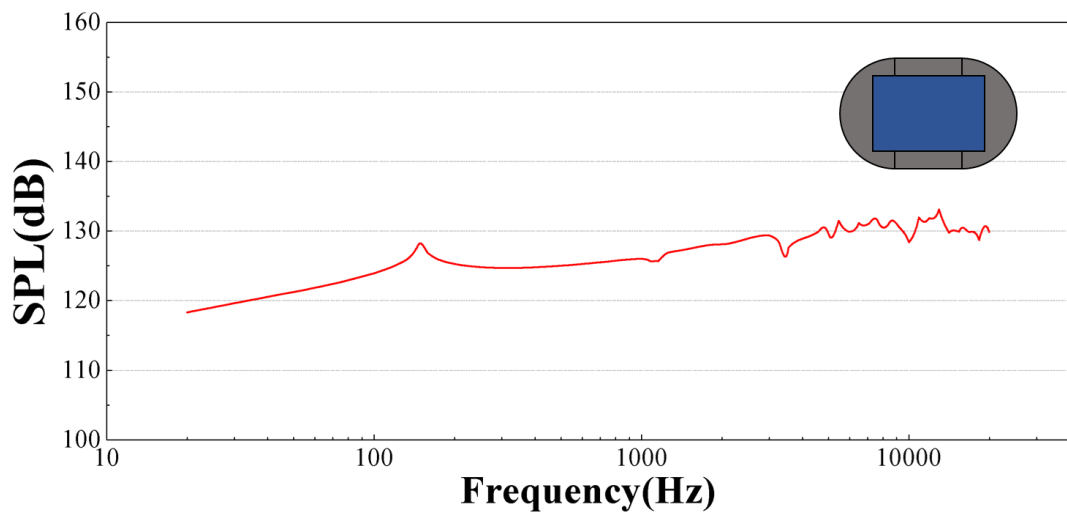


圖 7-9 最佳化壓電矩形薄板複合跑道形薄膜之模擬聲壓曲線圖

7.1.5 最佳化壓電矩形薄板複合跑道形薄膜聲學元件(B)之聲學特性

根據前節的結果，針對壓電矩形薄板複合跑道形薄膜的發聲元件做最佳化後，得到的最佳參數組合為 $W_m=5\text{mm}$ 、 $R_m=10\text{mm}$ 、 $W_p=10\text{mm}$ 、 $W_p=12.5\text{mm}$ 與張力 $F=26.9\text{N/m}$ 。其中薄膜採用靜電薄膜、厚度為 $11\mu\text{m}$ ，壓電片使用 PSI-5A4E、總厚度為 0.381mm ，詳細的規格參考 2.4.2 節之聲學元件(B)，圖 2-21 為聲學元件之完成品。

如

圖 7-10 所示，將聲學元件(B)進行人工耳量測，從中可以發現兩者在趨勢上還算接近，兩者的走勢都趨於平緩，曲線沒有特別向上或向下。由於人工耳的量測無法明顯判斷活塞模態的位置，因此將自製的聲學元件(B)透過雷射都卜勒測振儀進行共振頻率的量測，量測點為元件正中心。如圖 7-11 所示， 10000Hz 以下共量到兩個共振頻，如圖 7-12 所示，透過電子斑點干涉術量測元件的模態，在這兩個頻率都有量測到對應的模態振形，其中 248Hz 的為活塞模態。實際製作的元件活塞模態頻率較最佳化的結果 149.21Hz 提高了將近 100Hz ，量測到的 SPL 曲線在中低頻和模擬相比有較多起伏，兩者之間聲壓的落差也不小，推測和手工製作元件及量測環境相關，理想和實際狀態依然存在差別。

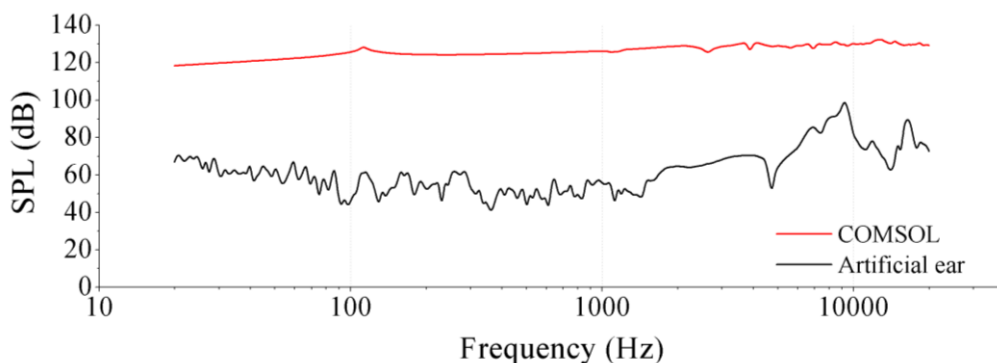


圖 7-10 最佳化聲學元件之實驗、模擬聲壓曲線圖

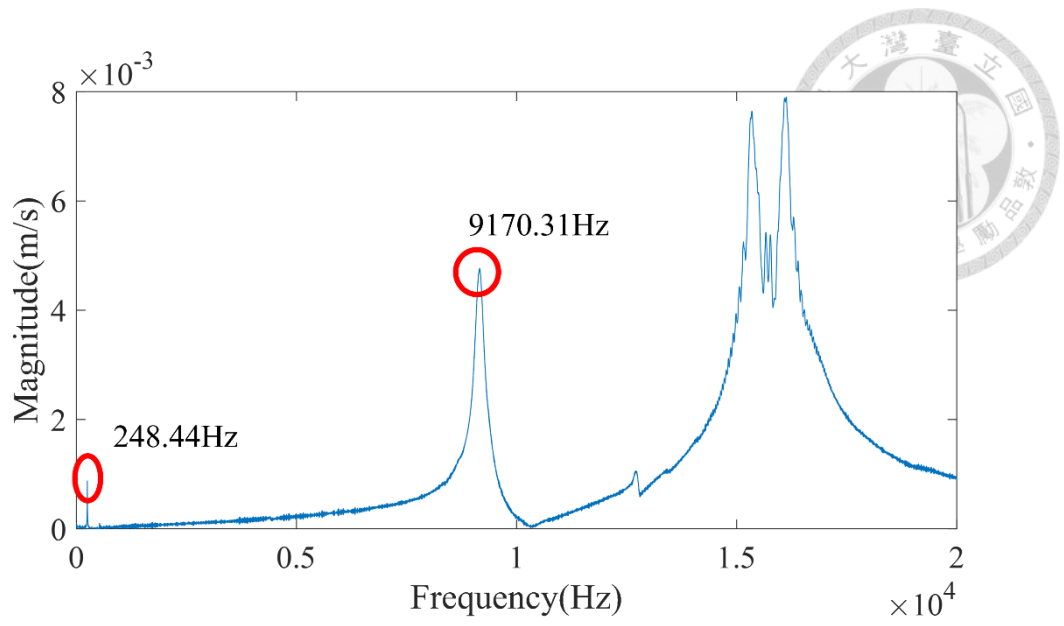


圖 7-11 最佳化聲學元件之 LDV 單點量測共振頻

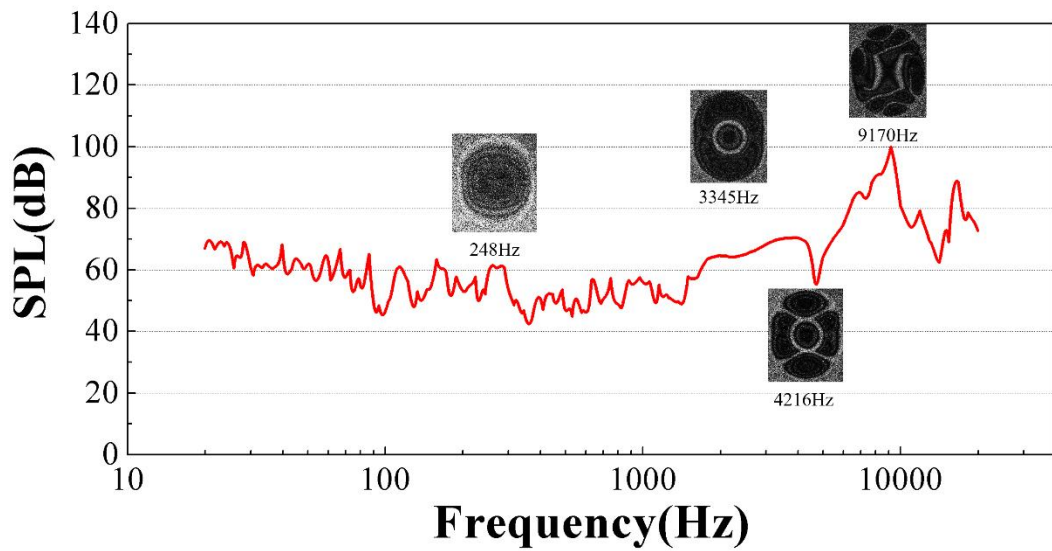


圖 7-12 最佳化聲學元件之人工耳聲壓曲線與 ESPI 模態量測圖

第八章 結論與未來展望



8.1 結論

本研究以壓電材料為核心致動源，複合於薄膜材料上，期望研發出良好的聲學元件。薄膜的外型為本論文主要著重的部分，由於解析解對跑道形薄膜較不適用，本論文期望開發出一套有別於有限元素法的方法，對壓電薄片複合跑道形薄膜之聲學元件進行振動分析，並和有線元素法進行相互對應。壓電材料的部分，使用疊加法分析矩形自由邊界的振動，計算其共振頻率以及相對應的模態振形。而薄膜使用無網格的特雷夫茨法，針對圓形、矩形、跑道形薄膜進行振動分析，並以實驗量測搭配有限元素模擬反算的方式對薄膜張力進行探討。接著針對壓電複合薄膜之發聲元件，將其振動的模態以模態振形為基準分為三個種類並進行討論。給元件設定期望達到的標準，並對其進行參數上的最佳化，透過找出並觀察各個參數對結果的影響，降低最佳化所需花費的時間成本，達到優化聲壓級曲線的效果，並製作出人耳聽感佳的耳機，本論文的內容能夠應用於壓電複合跑道形薄膜揚聲器之最佳化聲場增益特性之聲音品質的開發。以下將本研究的成果與結論整理。

1. 分析多種不同外形的薄膜振動模式，其中透過理論解析、無網格特雷夫茨法和有限元素模擬計算「圓形」、「環形」和「矩形」薄膜，以驗證特雷夫茨法的可行性，其結果甚至較被廣泛使用的有限元素法更接近理論解析。以無網格特雷夫茨法和有限元素法計算本研究核心的「跑道形環」薄膜，計算出來的共振頻率誤差都小於 0.01%，模態振形和有限元素法之間也同樣有良好的對應。故無網格特雷夫茨法在雙連通問題下的環形和跑道形環的薄膜都有良好的可行性，未來可用於各種不同外型薄膜之振動分析。
2. 透過改變繃膜的高度差，製作出變形量不同的三種薄膜，並以雷射都卜勒測振儀量測共振頻後使用有限元素模擬進行薄膜張力的反算，得到能夠製作出最大張力薄膜的繃膜條件。

- 
3. 以線性壓電理論、薄板理論假設，使用疊加法對自由邊界下的「雙層壓電矩形薄板」進行振動分析，結果發現疊加法計算出來的結果和有限元素法有著高度接近的結果，從模態振形幾乎分辨不出二者的差別，共振頻率的誤差也都小於 0.5%。
 4. 討論「壓電複合薄膜」於將壓電薄板視為剛體假設下結構振動特性，假設壓電薄板為剛體，並以無網格特雷夫茨法進行求解並得到振動結果。聲學中最重要的振形是基頻的活塞模態，因整個複合元件呈現活塞運動的形式，故能夠產生大的聲壓，且通常出現在較低的頻率範圍。根據本文，在壓電圓盤和壓電矩形薄板複合薄膜的活塞模態及薄膜主導模態分析中，模態振形與共振頻率都跟有限元素法有不錯的對應性。
 5. 針對「壓電複合薄膜」的壓電主導模態之結構振動特性，利用第四章無網格特雷夫茨法的跑道形環薄膜，搭配本文第五章疊加法計算的壓電面外共振頻率以及模態振形，可以有效計算壓電複合薄膜之壓電主導模態共振頻率與模態振形。其結果和有限元素法相比，也在共振頻率和模態振形上有不錯的對應性，共振頻率的誤差都不超過 1%。在壓電主導模態中能夠忽略薄膜對壓電造成的影響，推測是由於薄膜與壓電材料的剛性差距極大，此假設也透過特雷夫茨法的計算結果得到印證。
 6. 本研究期望開發出擁有良好聽覺感受的耳機，因此選擇人工耳量測及有限元素法模擬封閉聲場下的聲學表現。以有限元素法模擬，將人耳複雜的構造與外型以電聲學的方式等效成電路模型，有效降低模型建立的難度，在計算上也能大幅減少所需花費的時間，計算出來的結果也和實驗量測的結果有良好的對應性，能夠作為後續研究評估的標準之一，減少實際製作產品所需花費的成本。
 7. 本研究設定最佳化標準，並以此標準進行參數最佳化。使用有限元素法計算多個參數組合下的活塞模態頻率，排除實作上可能產生問題之參數組後選

出最佳的組合進行實作，成功開發出聲音表現良好的聲學元件，擁有非常小的體積，且在低頻表現不俗，聲壓高低的落差也在可以接受的範圍內。

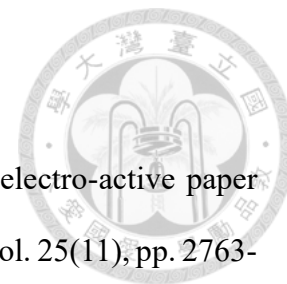
結合上述可以得到結論，和傳統大多只應用於單頻發聲的蜂鳴器不同，本研究將壓電材料複合於薄膜，並開發出新型的聲學元件，能夠應用於耳機、音響等揚聲器，以最佳化得到的參數進行實作並進行人工耳量測，說明本論文開發之壓電矩形薄板複合跑道形薄膜有良好的聲音表現。本研究開發之耳機和市面上常見之動圈式耳機相比，擁有輕、薄的優勢；而相較於靜電式耳機需要複雜的電路才能使用，本文開發之壓電式耳機有著精簡的設計，期望能夠在更完善其安全性與耐用性後，成為市面上耳機的新一種選擇。

8.2 未來展望

1. 使用無網格法對自由邊界壓電薄板進行振動分析，以利於後續改變壓電薄板的外型，除了可以和有限元素法相互比較，也可因突破外型上的限制，而在聲學上有更加優秀的表現。
2. 針對任意外形薄膜作更多嘗試，可以根據聲學特性選擇不同外形的薄膜，甚至是改變壓電片的形狀、數量，如橢圓形壓電片複合跑道形薄膜、圓形壓電片複合橢圓形薄膜、兩片矩形壓電片複合跑道形薄膜等，探討不同外型條件下之多連通薄膜對聲壓頻率響應曲線之影響。
3. 針對特雷夫茨法作改善，根據不同的近況設計邊界點的配置，解決節點數因須配合 T-complete function 之項數而受到限制造成的問題，甚至是找出更加適用於薄膜振動分析之 T-complete set。
4. 藉由定義薄膜表面的應變場和使用材料力學理論，計算出對應的應力場，並根據薄膜的幾何形狀和邊界條件，進一步求解薄膜內部的張力分佈，可以和本論文使用之有限元素模擬反算張力進行相互對應比較。

5. 完善特雷夫茨法計算壓電薄板複合跑道形薄膜，於活塞模態下的振動分析，以利後續使用活塞模態之頻率高低作為最佳化標準，並透過編寫程式以特雷夫茨法對壓電薄板複合跑道形薄膜之聲學元件進行參數掃描的最佳化。

參考文獻



- [1] J. Kim, G.Y. Yun, J.H. Kim, J. Lee, J.H. Kim, "Piezoelectric electro-active paper (EAPap) speaker.", *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 25(11), pp. 2763-2768, 2011.
- [2] P. M. Morse, "Acoustical Society of America, & American Institute of Physics.", *Vibration and Sound*, vol. 468, McGraw-Hill New York, 1948.
- [3] J. Curie, a. C. P., "Development by pressure of polar electricity in hemihedral crystals with inclined faces.", *Bull. soc. min. de France*, pp. 90-102, 1880.
- [4] W. G. Cady, "Piezoelectricity.", McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1946.
- [5] W. P. Mason, "Piezoelectric crystals and their applications to ultrasonics.", New York: Can Nostrand, 1950.
- [6] H. F. Tiersten, "Linear piezoelectric plate vibrations: elements of the linear theory of piezoelectricity and the vibrations piezoelectric plates.", Springer, 2013.
- [7] H. Jaffe, "Piezoelectric Ceramics.", 1971.
- [8] R. Mindlin, High frequency vibrations of piezoelectric crystal plates.", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 8(7), pp. 895-906, 1972.
- [9] IEEE Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control Society, in *ANSI/IEEE Std 176*, 1987.
- [10] N. N. Rogacheva, "The theory of piezoelectric shells and plates.", CRC press, 2020.
- [11] S. Chang, B. Du, J. Lin, "Electro-elastic modeling of annular piezoceramic actuating disk transducers.", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 10(5), pp. 410-421. 1999.
- [12] 林育志,「壓電元件於不同介質中的振動特性研究與實驗量測」,國立臺灣大學機械工程所碩士論文,2004。

- 
- [13] 何祥瑋,「壓電圓盤與壓電圓環共振特性的理論分析與實驗量測」,國立臺灣大學機械工程所碩士論文,2005。
- [14] C. H. Huang, “Free vibration analysis of the piezoceramic bimorph with theoretical and experimental investigation.”, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency control, vol. 52(8), pp. 1393-1403, 2005.
- [15] 黃育熙,「壓電陶瓷平板,薄殼,與雙晶片三維耦合動態特性之實驗量測,數值計算與理論解析」,國立臺灣大學機械工程所碩士論文,2009。
- [16] 許松逸,「多層壓電圓盤及圓環複合等向性材料三維振動特性之理論解析、數值分析與實驗量測」,國立臺灣科技大學機械工程所碩士論文,2018。
- [17] W. Leissa, “Vibration of plates, NASA SP-160.”, US Washington. A. W. Leissa, Sound and Vibration, vol. 56, pp. 313, 1978.
- [18] D. J. Gorman, “Free vibration analysis of the completely free rectangular plate by the method of superposition.”, Journal of Sound and Vibration, vol. 57(3), pp. 437-447, 1978.
- [19] C. S. Kim, P. G. Young, S. M. Dickinson, “On the flexural vibration of rectangular plates approached by using simple polynomials in the Rayleigh-Ritz method.”, Journal of Sound and Vibration, vol. 143(3), pp. 379-394, 1990.
- [20] D. J. Gorman, “A general solution for the free vibration of rectangular plates with arbitrarily distributed lateral and rotational elastic edge support.”, Journal of Sound and Vibration, vol. 174(4), pp. 451-459, 1994.
- [21] D. J. Gorman, “Vibration analysis of plates by the superposition method.”, 1999.
- [22] 吳亦莊,「理論解析與實驗量測壓電平板的面外振動及特性探討」,國立臺灣大學機械工程所碩士論文,2009。

[23] Y. H. Huang, C. C. Ma, “Experimental measurements and finite element analysis of the coupled vibrational characteristics of piezoelectric shells.”, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency control*, vol. 59(4), pp. 785-798, 2012.

[24] 王惠儀,「應用樑函數法於壓電平板撓性邊界之振動特性分析」,國立臺灣科技大學機械工程所碩士論文,2019。

[25] 陳新承,「可變剛性邊界應用於壓電平板理論之能量擷取系統」,國立臺灣大學機械工程所碩士論文,2021。

[26] P. Laura, C. Rossit, S. La Malfa, “Transverse vibrations of composite, circular annular membranes: exact solution.”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 216(1), pp. 190-193, 1998

[27] M. Jabareen, M. Eisenberger, “Free vibrations of non-homogeneous circular and annular membranes.”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 240(3), p. 409-429, 2001.

[28] S. S. Rao, “Vibration of continuous systems.”, New Jersey: Wiley, 2007.

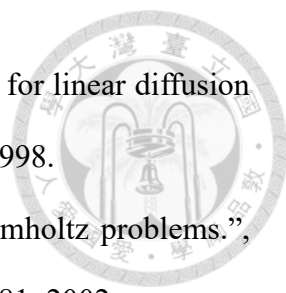
[29] R. A. Gingold, J. J. Maraghan, “Smoothed particle hydrodynamics: theory and applications to non-spherical stars.”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 181, pp. 375-389, 1977.

[30] T. Belystcho, Y. Lu, L. Gu, “Element free Galerkin methods.”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, pp. 229-256, 1994.

[31] W. K. Liu, S. Jun, Y. F. Zhang, “Reproducing kernel particle methods.”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 20, pp. 1081-1106, 1995.

[32] Y. X. Mukherjee, S. Mukherjee, “The boundary node method for potential problems.”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, pp. 797-815, 1997.

[33] S. N. Atluri, T. Zhu, “A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics.”, *Computational Mechanics*, vol. 22, pp.117-127, 1998.

- 
- [34] C. S. Chen, Y. F. Rashed, M. A. Golberg, “A mesh-free method for linear diffusion equations.”, *Numerical Heat Transfer, Part B*, vol. 33, pp. 469-486, 1998.
- [35] W. Chen, “Meshfree boundary particle method applied to Helmholtz problems.”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 26(7), pp. 557-581, 2002.
- [36] V. D. Kupradze, “A method for the approximate solution of limiting problems in mathematical physics.”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 4, pp. 199- 205, 1964.
- [37] A. Karageorghis, “The method of fundamental solutions for the calculation of the eigenvalues of the Helmholtz equation.”, *Applied Mathematics Letters*, vol. 14, pp. 837-842, 2001.
- [38] J. T. Chen, I. L. Chen, Y. T. Lee, “Eigensolutions of multiply connected membranes using the method of fundamental solutions.”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 29, pp. 166-174, 2004.
- [39] C. C. Tsai, et al., “The method of fundamental solutions for eigenproblems in domains with and without interior holes.”, *Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 462(2069), pp. 1443-1466, 2006.
- [40] E. Trefftz. “Ein gegenstück zum ritzschen verfahren.” In *Proceedings of the 2nd International Congress of Applied Mechanics*, pages 131-137, Zurich, 1926.
- [41] C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, L. C. Wrobel, “Boundary element techniques: Theory and applications in engineering.” Springer Science & Business Media, 1984.
- [42] J. Streng, “Calculation of the surface pressure on a vibrating circular stretched membrane in free space.”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 82(2), pp. 679-686, 1987.

[43] T. Mellow, L. Kärkkäinen, “On the sound field of a circular membrane in free space and an infinite baffle.”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 120(5), pp. 2460-247, 2006.

[44] Y. H. Huang, H. Y. Chiang, “Vibrational mode and sound radiation of electrostatic speakers using circular and annular diaphragms.”, *Journal of Sound and Vibration*, vol.371, pp. 210-226, 2016.

[45] E. N. Leith, J. Upatnieks, “Reconstructed wavefronts and communication theory.”, *JOSA*, vol. 52(10), pp. 1123-1130, 1962.

[46] J. Butters, J. Leendertz, “Speckle pattern and holographic techniques in engineering metrology.”, *Optics Laser Technology*, vol. 3(1), pp. 26-30, 1971.

[47] O. Lokberg, K. Hogmoen, “Use of modulated reference wave in electronic speckle pattern interferometry.”, *Journal of Physics E: Scientific Instruments*, vol. 9(10) pp. 847, 1976.

[48] C. Wykes, “Use of electronic speckle pattern interferometry (ESPI) in the measurement of static and dynamic surface displacements.”, *Optical Engineering*, 21(3), pp. 213400, 1982.

[49] W. C. Wang, C. H. Hwang, S. Y. Lin, “Vibration measurement by the time-averaged electronic speckle pattern interferometry methods.”, *Applied optics*, vol. 35(22), pp. 4502-4509. 1996.

[50] 黃吉宏,「應用電子斑點干涉術探討三維壓電材料」,國立台灣大學機械工程研究所博士論文,1998。

[51] 黃育熙,「壓電石英晶體之平板結構的動態特性研究」,國立台灣大學機械工程研究所博士論文,2013。

[52] C. C. Ma, et al., “Experimental and numerical investigations on resonant characteristics of a single-layer piezoceramic plate and a cross-ply piezolaminated

composite plate.”, The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 119(3), pp. 1476-1486, 2006.

[53] H. Y. Chiang, Y. H. Huang, “Experimental modeling and application of push-pull electrostatic speakers. The Journal of the Acoustical Society of America.”, vol. 146(4), pp. 2619-2631, 2019.

[54] C. Wang, “Vibration of an annular membrane attached to a free, rigid core. Journal of Sound Vibration.”, vol. 260(4), pp. 776-782, 2003.

[55] F. Pinto, “Analytical and experimental investigation on a vibrating annular membrane attached to a central free, rigid core. Journal of Sound and Vibration.”, 291(3-5), pp. 1278-1287, 2006.

[56] H. J. Kim, W. S. Yang, K. No, “Effects of an elastic mass on frequency response characteristics of an ultra-thin piezoelectric micro-acoustic actuator.”, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, vol. 60(8), pp. 1587-1594, 2013.

[57] 林揚中，莊沅隴，「雙層壓電圓盤複合薄膜研製近場聲學元件之耦合聲場的理論數值與實驗研究」，國立台灣科技大學機械工程實務專題報告，2016。

[58] 江信遠，「靜電和壓電揚聲器之圓形振膜振動與聲壓研究」，國立台灣科技大學機械工程研究所博士論文，2017。

[59] 陳冠宇，「薄膜複合壓電圓板開發近場聲學元件之理論解析、數值計算與實驗量測」，國立台灣科技大學機械工程系碩士學位論文，2019。

[60] 張哲睿，「壓電圓環複合薄膜於聲學元件之設計開發」，國立台灣大學機械工程研究所碩士論文，2021。

[61] 林憲楊，「應用電子斑點干涉術探討三維壓電材料體及含裂紋板的振動問題」，國立臺灣大學機械工程所博士論文，1998。

[62] R. P. Shimpi, H. G. Patel, “A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis.” International Journal of Sound and Vibration.”, vol. 394, pp. 545-574, 2017.

[63] 杜功煥，朱哲民，龔秀芬，声学基础 (上册). p. 3. 1981.

[64] W. M. Leach, "Introduction to electroacoustics and audio amplifier design.", Kendall/Hunt Publishing Company Dubuque, IA, 2003.

[65] N. Atalla, M. A. Hamdi, R. Panneton, "Enhanced Weak Integral Formulation for the Mixed (u,p) Poroelastic Equations.", J. Acoust. Soc. Am., vol. 109, pp 3065-3068, 2001.

[66] 黃御宸，「壓電薄板複合薄膜聲振研究之最佳化設計」，國立台灣大學機械工程研究所碩士論文，2022。

[67] H. Y. Chiang, Y. H. Huang, "Resonance Mode and Sound Pressure of a Push–Pull Electrostatic Speaker Based on Elliptical Diaphragm.", Journal of Vibration and Acoustics, vol. 145, 2023.

[68] C.C. Tsai, "The method of fundamental solutions for eigenproblems in domains with and without interior holes.", 2006.

