

國立臺灣大學工學院土木工程學系

碩士論文

Department of Civil Engineering



College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis

塑流模式彈塑性材料受預應力及溫升之三次歪扭降伏
超面演化

The Evolution of Cubic Distortional Yield Hypersurfaces
in Materials of Flow Elastoplasticity under Prestress and at
Elevated Temperatures

侯凱閔

Kai-Min Hou

指導教授：洪宏基 終身特聘教授

Advisor: Prof. Hong-Ki Hong, Ph.D.

中華民國 112 年 8 月

August 2023



致謝

在進入台大研究所時，對於塑性力學的基礎知識非常的少，對未來的研究方向也非常迷茫；所幸，遇到了洪宏基老師，在個人會議中，非常努力地想幫助到我，有時也會提出一些值得反思的問題，使得我能夠往正確的道路上前進，因此我由衷地感謝洪老師這兩年來對我的幫忙與照顧。

在碩二時遇到了劉立偉老師，在我研究遇到了瓶頸時，會試圖幫助我得到解答，來使得我研究的路越發順暢，所以我也非常感謝劉老師對我的幫助。

在研究生涯中，謝謝丞日學長對我每一個基礎問題都很有耐心的教導，甚至於問了三、四次也未有不耐煩的情緒，使得我能夠打下基礎。同時也謝謝威發、Jimmy、獻禾、承霖、廷謙等等在同一個研究室的同學，使得我能夠開心的做研究。除了同一個研究室的人員，亦感謝其他研究室的同學文國、亦親、宇筌、瀚呈、恩哥、彥甫、灤先、威瀚、根爺、泓瑋等等同學，在研究生涯中充滿了歡樂的氣氛。

最後也非常感謝 MSV 的學弟們泊赫、振恩、景謬、振源對我的幫助，使得研究室不至於死氣沉沉。

感謝這一路上遇到的所有人，有些人帶來痛苦，有些人帶來歡樂，但終將會轉化為回憶，變成人生路上的風景。





摘要

一個應變控制的軸向-扭轉模型已經在 ASCE《工程力學雜誌》2022 年: J. Eng. Mech., 2022, 148(6): 04022027 中發表。該模型稍微調整以適用於應力控制實驗。

這篇論文旨在使用無速率依賴的彈塑性流動材料模型推導閉合正解並通過與 Phillips 和他的合作者在五十年前獲得的眾所周知的應力控制實驗數據進行擬合，以最佳化出重要的材料常數。該模型除了需要楊氏模量和剪切模量外，還需要 8 個材料常數。軸向-扭轉模型具有不斷演化的三次歪扭降伏超面，該超面與兩個 Mises 超球體相結合，此球體的特徵是在塑性相位中正交性 Poincare 群元素的內部對稱性。與應力空間中的每個 Mises 超球體相關聯的是一個混合指數型 Armstrong-Frederick 的正交性塑性流動規則，該規則結合了二次各向同性指數規則和走動學規則。

通過對該材料進行應變表面的軸向-扭向應力控制實驗，可以優化和擬合相應的唯一參數組合。然後，通過將該唯一參數集合和任何應力輸入閉合正解中，本文可以預測在任何施加的應力下該材料的應力狀態和塑性行為等重要信息。

溫度層面，本研究將利用閉合正解來擬合材料在預應力和溫度上產生的降伏面，並與 Phillips 的實驗數據進行比較，以驗證本文中所提出的模型的可行性。

關鍵字：閉合正解、塑流彈塑性材料模式、三次歪扭降伏超面、軸扭應力控制實驗、預應力溫升





Abstract

A strain-controlled axial-torsional model has been published in ASCE Journal of Engineering Mechanics 2022: J. Eng. Mech., 2022, 148(6): 04022027. The model is mildly adjusted to be suitable also for stress-controlled experiments.

This thesis aims to derive closed-form solutions using a rate-independent flow elasto-plastic material model and optimize important parameters through fitting with the well-known stressed-controlled experimental data of Phillips and his collaborators obtained five decades ago. The model needs a total of 8 material constants in addition to Young's modulus and shear modulus. The axial-torsional model features an evolving cubic distortional yield hypersurface, which is articulated with two Mises hyperspheres, characteristic of internal symmetry of two elements of the projective proper orthochronous Poincare group in the plastic phase. Associated with each Mises hypersphere in stress space is a normality plastic flow rule of mixed-exp-AF, referring to a combined isotropic-kinematic rule of hardening-softening, which combines the isotropic exponential rule of degree 2 and the

kinematic rule of Armstrong-Frederick.

By conducting yield surface axial-torsional stress-controlled experiments on the material, the corresponding unique parameter combination can be optimized and fitted. Then, by inputting this unique parameter set and any stress into the closed-form solution, this paper can predict important information such as the stress state and plastic behavior of the material under any applied stress.

Our investigation is executed at room and at elevated temperatures.

Keywords: closed-form solutions, flow elastoplastic material model, cubic distortional yield surface, axial-torsional stress-controlled experiments, elevated temperatures





目錄

	Page
致謝	i
摘要	iii
Abstract	v
目錄	vii
圖目錄	ix
表目錄	xi
符號列表	xiii
第一章 緒論	1
1.1 研究動機	1
1.2 文獻回顧與探討	2
1.3 研究內容與目的	4
第二章 極限狀態下的塑流彈塑性材料模式	7
2.1 常溫下的塑流彈塑性材料模式	7
2.1.1 降伏條件	10
2.1.2 推導流程圖	12
2.1.3 材料彈塑性判準	12
2.1.4 狀態轉移陣	15

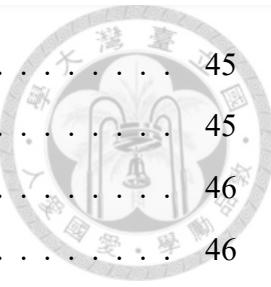


2.1.5 閉合正解	17
2.2 本章小結	19
第三章 零值狀態下的塑流彈塑性模式	21
3.1 常溫下的塑流彈塑性模式	21
3.1.1 材料彈塑性判準	22
3.1.2 狀態轉移陣	25
3.1.3 閉合正解	26
3.2 本章小結	28
第四章 擬合結果與討論	31
4.1 常溫下極限狀態	31
4.1.1 參數分析	31
4.1.2 演化結果	33
4.2 常溫下零值狀態	37
4.2.1 參數分析	37
4.2.2 演化結果	39
4.3 溫度變化下的零值狀態	49
4.3.1 參數分析	49
4.3.2 演化結果	53
4.4 本章小結	61
第五章 結果與未來展望	63
5.1 結論	63
5.2 未來展望	64
參考文獻	67



圖目錄

1.1	初始降伏面	5
1.2	接續降伏面	5
1.3	研究流程圖	6
2.1	大小圓與降伏面的幾何關係	10
2.2	降伏條件	11
2.3	推導閉合正解流程	13
2.4	Euclid	16
2.5	Minkowski	16
2.6	降伏面演化圖	19
3.1	充分且必要條件	24
3.2	降伏面軸扭演化圖	28
4.1	極限狀態的半徑參數圖	32
4.2	極限狀態下的半徑與等價塑性應變關係	32
4.3	極限狀態下軸向應力之初始降伏面	35
4.4	極限狀態下軸向應力之第一接續降伏面	35
4.5	極限狀態下軸向應力之第二接續降伏面	36
4.6	極限狀態下軸向應力之第三接續降伏面	36
4.7	極限狀態下軸向應力之第四接續降伏面	37
4.8	極限與零值狀態的第二接續降伏面比較	41
4.9	極限與零值狀態的第三接續降伏面比較	41
4.10	極限與零值狀態的第四接續降伏面比較	42
4.11	零值狀態下軸向應力之初始降伏面	44



4.12 零值狀態下軸向應力之第一接續降伏面	45
4.13 零值狀態下軸向應力之第二接續降伏面	45
4.14 零值狀態下軸向應力之第三接續降伏面	46
4.15 零值狀態下軸向應力之第四接續降伏面	46
4.16 零值狀態下軸向應力後扭向應力之初始降伏面	47
4.17 零值狀態下軸向應力後扭向應力之第一接續降伏面	47
4.18 零值狀態下軸向應力後扭向應力之路徑之第二接續降伏面	48
4.19 零值狀態下軸向應力後扭向應力之路徑之第三接續降伏面	48
4.20 楊氏模數	50
4.21 剪切模數	50
4.22 溫度與 k_p^l 的關係圖	51
4.23 溫度與 k_p^s 的關係圖	51
4.24 溫度與 η^l 的關係圖	51
4.25 溫度與 η^s 的關係圖	51
4.26 零值狀態且溫度變化下軸向應力之初始降伏面	57
4.27 零值狀態且溫度變化下軸向應力之第一接續降伏面	57
4.28 零值狀態且溫度變化下軸向應力之第二接續降伏面	58
4.29 零值狀態且溫度變化下軸向應力之第三接續降伏面	58
4.30 零值狀態且溫度變化下軸向應力之第四接續降伏面	59
4.31 零值狀態且溫度變化下軸扭向應力之第一接續降伏面	59
4.32 零值狀態且溫度變化下軸扭向應力之第二接續降伏面	60
4.33 零值狀態且溫度變化下軸扭向應力之第三接續降伏面	60



表目錄

4.1	極限狀態下的閉合正解參數	33
4.2	極限狀態下的大小圓數據	33
4.3	零值狀態下的閉合正解參數	39
4.4	零值狀態下的大小圓數據	39
4.5	零值狀態下，溫度為 151°F 的閉合正解參數	52
4.6	零值狀態下，溫度為 151°F 的大小圓數據	52
4.7	零值狀態下，溫度為 227°F 的閉合正解參數	52
4.8	零值狀態下，溫度為 227°F 的大小圓數據	52
4.9	零值狀態下，溫度為 267°F 的閉合正解參數	53
4.10	零值狀態下，溫度為 267°F 的大小圓數據	53





符號列表

E	楊氏模數
G	剪切模數
K	體積模數
tr	跡
$\dot{\Lambda}$	耗散功率
ϵ	應變張量
e	偏差應變張量
σ	應力張量
s	偏差應力張量
σ^l/σ^s	大圓應力張量/小圓應力張量
s^l/s^s	大圓偏差應力張量/小圓偏差應力張量
s_a^l/s_a^s	大圓偏差主動應力張量/小圓偏差主動應力張量



s_b^l/s_b^s

大圓偏差回應應力張量/小圓偏差回應應力張量

ϵ^l/ϵ^s

大圓應變張量/小圓應變張量

e^l/e^s

大圓偏差應變張量/小圓偏差應變張量

λ^l/λ^s

大圓的等價塑性應變率/小圓的等價塑性應變率

R_∞^l/R_∞^s

大圓的極限半徑/小圓的極限半徑

r^l/r^s

大圓的硬軟化因子/小圓的硬軟化因子

k_p^l/k_p^s

大圓的剪切模數/小圓的剪切模數

η^l/η^s

大圓的回復因子/小圓的回復因子



第一章 緒論

1.1 研究動機

在研究這個主題之前，對塑性區域的探討還不夠深入，大部分研究都集中在彈性區域的計算和性質觀察。然而，在實際應用中，建築、橋梁或其他基礎設施在受到外力作用後，基本上應保持彈性狀態，縱然進入了塑性狀態也應立即掌握其塑性行為。此外，所使用的材料在應力應變曲線上呈現非線性特性。因此，基於塑流彈塑性材料模式，通過輸入應力或應變來視覺化降伏面，能夠更快速、更準確地計算材料的應力狀態和等價塑性應變。

此外，本研究將以預應力作為輸入參數的一部分。原因有兩個方面，首先是預應變輸入已經有 [9] 推導出的閉合正解並且具有足夠的精度。第二個原因是現有文獻中大多將應力直接施加於試體上。因此，本研究提取了 [12] 關於應力輸入的實驗數據，以配合閉合正解，研究材料在受到預應力後的塑性行為。

除了以上所述，在文獻研究中還觀察到溫度對材料的影響非常顯著，因此本研究將溫度作為一個額外的控制因子納入考慮。事實上，隨著溫度的變化，材料會發生一定程度的軟化。為了觀察到溫度變化下材料所產生的對應變化，本研究將溫度納入考慮因素之中，這將提高閉合正解的實用性。

總之，為了探討外在因素對材料的影響，以及降伏面如何隨之演化，以更好



地掌握材料的塑性行為，本研究將應力和溫度納入考慮，並運用精度足夠、計算速度更快的閉合正解來推導基本理論，最後通過實驗數據來驗證本研究是否能夠更好地理解塑性行為的變化。這將有助於提高材料設計和結構分析的準確性和可靠性。

1.2 文獻回顧與探討

早期對材料在承受外力後的塑性行為變化進行探討，一般使用數值解逼近真實值，或者通過實驗給定應力或應變來觀察材料的塑性行為，如同 [12][13]。隨著對材料塑性行為的深入研究，開始嘗試使用精確解取代數值解，以提高精確度和計算速度，例如引用文獻 [6]、[5]、[4] 中提到的方法都得到了閉合正解。

在探討材料塑性行為的過程中，從完全彈塑性模型 [4] 逐漸推廣到雙線性模型 [5]，最終發展到塑流彈塑性材料模式 [9]。在這個過程中，降伏面的性質從僅具有移動的特點，也就是走動硬化的性質，逐漸演化為目前降伏面同時具有移動和半徑放大縮小的特性，即走動硬化 (kinematic hardening)、等向軟硬化 (isotropic softening and hardening) 等混合性質。而如何去賦予模型產生以上的性質便是重要的課題之一，而 [9] 中運用了 [3] 中的硬化規則概念，使模型具有了上述特性，從而更符合現實情況，這意味著該模型的實用性有相對程度的提高。除了以上所提到的特性，同時也考慮材料的應力應變關係，因應建築上所使用的材料大部分為非線性材料，所以在模型中也逐漸地增加難度，只為了能在工程有更好的應用。

而在探索材料塑性行為的閉合正解的基礎理論中，首要的問題是如何判斷材料在受到一定外力後的狀態。在此，[4] 提出了轉換開關的概念，該概念基於模型中的降伏條件，用於確定材料是否處於塑性狀態。隨後，通過模型中的定義方程式並且運用 [7] 提到的閂式時空概念，將非齊次座標轉成齊次座標，最後將閉合



正解推導而出。閉合正解的意義在於利用該解析解可以計算出所有時間點的應力狀態，只需要輸入應力值即可通過一個精確解的公式將所有時間點相連。這種方法節省了使用數值解逼近真實值所需的大量元素，同時保持了精度。透過閉合正解，研究者們能夠更深入地理解材料的塑性行為。這種方法的優勢在於，它提供了一種精確而高效的方式來描述和預測材料在受外力作用下的行為。同時，閉合正解還提供了更直觀的物理意義和解釋，有助於揭示材料塑性行為的本質。

閉合正解是基於理論推導而得出的公式，其中包含一定數量的未知參數。如[10]所指出，推導描述降伏面的公式後，需要通過最佳化方法來擬合這些參數。最佳化擬合有許多種方法可選擇，而其所使用的最佳化擬合方法則參考了[11]的方法。在[10]的概念中，針對每個連續的降伏面都有相對應的參數產生，這意味著當降伏面發生變化，例如扭曲或移動時，需要重新擬合參數。然而，閉合正解採用了類似概念，通過最佳化方法擬合一組參數，以連接所有降伏面，從而直接追蹤降伏面的演化情況。在擬合過程中，亦出現了像[2]中描述的方法，通過給定邊界條件並結合離散點來求解參數。

上述所說的離散點便來自於[13]，該研究使用了鋁 1100-0 材料，這是一種非線性材料。在這項實驗中，他們在給定的應力路徑下繪製了每個降伏面，以觀察降伏面的演化情況。同時此研究中也探測了不同溫度下，降伏面的歪扭情形，而本研究將會結合此實驗結果與[1]的理論以求找出任何溫度變化下的降伏面。

最後，以維度層面來探討此閉合正解的理論，可以觀察到[9]運用閉合正解將降伏面應用於二維平面，而[8]則將降伏面應用於三維結構。這表明閉合正解的理論在維度上並不受限，只需搭配足夠的實驗數據，通過最佳化擬合出關鍵參數，通過應力或者應變輸入，即可將降伏面視覺化。



1.3 研究內容與目的

本研究旨在運用模型的基本定義，即方程式，來描述受外力作用後非線性材料的行為，包括其軟硬化特性以及應力與應變之間的關係。我們的目標是提供精確的解析公式，以便更迅速地推導出行為演化的結果並保持高度的準確性。除了外力，我們也考慮了溫度等外在控制因素，這些因素對於塑性行為具有重要影響。因此，在本研究中，我們以降伏面的方式呈現塑性行為，透過觀察降伏面的演化情況，評估閉合正解能否真實地反映材料的特性。

在講述研究流程前，本研究先將降伏面的演化具象化，以便能更好理解，而圖1.1以及1.2皆代表著降伏面。根據圖1.1和1.2的降伏面示意圖，可以觀察到降伏面的演化。這些呈現的降伏面是在給定溫度和不同外力條件下得出的。了解降伏面的演化情況及其背後的意義具有重要意義。在實際情況中，當材料受到外力作用進入降伏狀態後，可能會出現一定程度的硬化過程，這意味著需要施加更大的外力才能使材料產生更多的塑性變形。因此，對於這類具有軟硬化特性的非線性材料，其降伏面呈現出歪扭的現象。這種歪扭現象可以從圖1.2中觀察到，其中圖1.1代表初始的降伏面，而圖1.2代表材料在持續受力後產生的連續降伏面，其中圖1.2表示材料的軟硬化現象，即前述提到的扭曲現象。這種現象是本研究的分析重點之一。

圖1.3則是講述本研究的流程圖，而每一步驟的背後概念以及涵義則會在各章詳細解釋。本研究的第一步將先定義基本模型的方程式，而這些方程式將會涵蓋非線性材料的力學行為，如應力應變之間的關係、塑流原理等等。再者，運用空間轉換和變數變換等方法，推導出本研究中的最大重點閉合正解，即是精確解。

隨後，我們進行最佳化擬合的步驟。這一步驟的目的在於處理帶有未知參數



的閉合正解，因此我們需要將閉合正解與實驗數據進行最佳化擬合，以獲得參數的具體值。在獲得參數後，我們可以將應力輸入到求得未知參數後的閉合正解中，進而計算出大小圓的中心和半徑等重要數據。

在獲得且最佳化閉合正解後，我們可以開始輸入應力。在輸入應力時，必須判斷材料是否發生降伏並進入塑性狀態。本研究的判斷依據是降伏條件，當充分且必要條件得到滿足時，表示材料已經發生降伏並進入塑性狀態；而當充分且必要條件尚未滿足時，則表示材料仍處於彈性狀態。在這種情況下，我們不能繼續使用閉合正解進行計算，而是需要繼續輸入更大或者增加其他方向上的應力，以使材料發生降伏。無法繼續使用閉合正解進行計算的原因在於在彈性狀態下，材料的初始降伏面不會發生變化，只有當外力觸及初始降伏面的邊界時，降伏面才會開始出現歪扭的現象。

當滿足充分且必要的條件後，我們可以將透過閉合正解所計算出的數值輸入到降伏條件中，進而繪製出降伏面。因此，在本研究中，我們將以應力路徑的方式輸入應力，並繪製相應的降伏面。我們將觀察在應力輸入變化的情況下，非線性材料的降伏面如何演化，同時也將探討溫度變化對非線性材料降伏面的影響。對於溫度這一控制因子，我們將在結果的章節中進行進一步的討論。

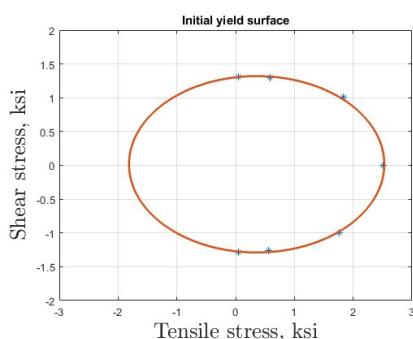


Figure 1.1: 初始降伏面

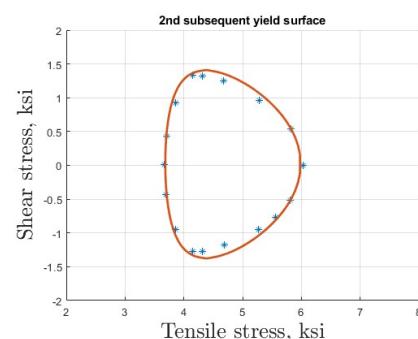


Figure 1.2: 接續降伏面

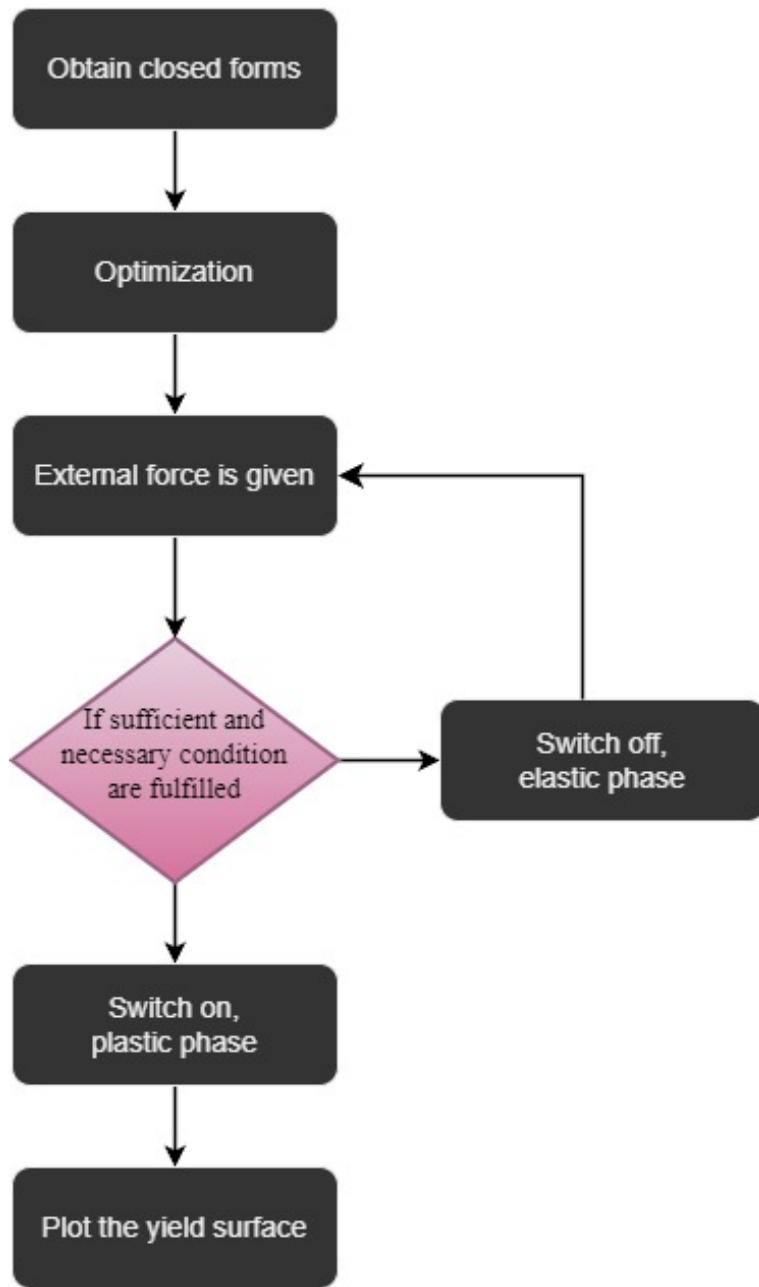


Figure 1.3: 研究流程圖



第二章 極限狀態下的塑流彈塑性材料 模式

2.1 常溫下的塑流彈塑性材料模式

以下將呈現本研究模型的基本定義方程式。在詳細解釋之前，本研究將先解釋方程式中使用的符號含義及本身的意義。

首先，將應力 σ 和應變 ϵ 分成偏差 s 和體積部分 e ，藉由偏差應力 s 和偏差應變 e 來觀察材料的塑流，即其受力後所產生的塑性行為。本研究使用張量系統，因此在體積應力和體積應變的部分會用跡 (trace) 來表示；同時體積應力和體積應變之間的關係式則用體積模數 K 來表示。

應力部分，本研究將應力的變化量量化為主動應力變化量 \dot{s}_a^α 和回應力變化量 \dot{s}_b^α 的組合。主動應力代表著大小圓的半徑，回應力則是大小圓的中心，在後續章節中將更詳細地討論大小圓的相關內容。藉由主動應力和回應力的變化，以及透過本研究的理論，最終能夠獲得材料在受力後的精確行為，即三次歪扭降伏面。

方程式中，亦考慮到能量問題，即材料在應力控制或應變控制下產生的能量耗散率 $\dot{\lambda}$ ，此能量因子納入本研究的考量範疇，在後續的充分且必要條件中將會進一步討論。



基本定義方程式：

$$\epsilon = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \epsilon \mathbf{1} + \mathbf{e}, \quad \sigma = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \sigma \mathbf{1} + \mathbf{s} \quad (2.1)$$

$$\operatorname{tr} \epsilon = \frac{1}{3K} \operatorname{tr} \sigma, \quad 3K = GE/(3G - E) \quad (2.2)$$

$$\epsilon = \epsilon^{e\alpha} + \epsilon^{p\alpha}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}^{e\alpha} + \mathbf{e}^{p\alpha} \quad (2.3)$$

$$\sigma = \sigma_a + \sigma_b \quad (2.4)$$

$$\dot{\sigma}^\alpha = \frac{R_\infty^\alpha}{R^\alpha} \dot{\sigma}_a^\alpha + \dot{\sigma}_b^\alpha + \frac{k_p^\alpha \dot{\lambda}^\alpha}{\eta^\alpha} (\sigma_b^\alpha - K \operatorname{tr} \epsilon \mathbf{1}) \quad (2.5)$$

$$\dot{\mathbf{s}}^\alpha = \frac{R_\infty^\alpha}{R^\alpha} \dot{\mathbf{s}}_a^\alpha + \dot{\mathbf{s}}_b^\alpha + \frac{k_p^\alpha \dot{\lambda}^\alpha}{\eta^\alpha} \mathbf{s}_b^\alpha \quad (2.6)$$

$$\sigma^\alpha = \mathbf{s}^\alpha + K \operatorname{tr} \epsilon \mathbf{1}, \quad \sigma_a^\alpha = \mathbf{s}_a^\alpha, \quad \sigma_b^\alpha = \mathbf{s}_b^\alpha + K \operatorname{tr} \epsilon \mathbf{1} \quad (2.7)$$

$$\dot{\mathbf{s}}_a^\alpha = 2G \dot{\mathbf{e}}^{e\alpha}, \quad R_\infty^\alpha \dot{e}^{p\alpha} = \mathbf{s}_a^\alpha \dot{\lambda}^\alpha \quad (2.8)$$

$$\dot{\mathbf{e}}^{p\alpha} = \frac{1}{k_p^\alpha} \dot{\mathbf{s}}_b^\alpha + \frac{\dot{\lambda}^\alpha}{\eta^\alpha} \mathbf{s}_b^\alpha, \quad \|\mathbf{s}_a^\alpha\| \dot{\lambda}^\alpha = R^\alpha(\lambda^\alpha) \dot{\lambda}^\alpha, \quad \Phi \dot{\Lambda} = \dot{\Lambda} \quad (2.9)$$

$$0 \leq \Phi = \Phi(\sigma_a) = \frac{\|\sigma_a^\alpha\|}{C} \leq 1 \quad (2.10)$$

$$\dot{\Lambda} = \left(\frac{1}{R_\infty^s} \|\mathbf{s}_a^s\|^2 + \frac{1}{2\eta^s} \|\mathbf{s}_b^s\|^2 \right) \dot{\lambda}^s + \left(\frac{1}{R_\infty^l} \|\mathbf{s}_a^l\|^2 + \frac{1}{2\eta^l} \|\mathbf{s}_b^l\|^2 \right) \dot{\lambda}^l \geq 0 \quad (2.11)$$

$$R^\alpha(\lambda^\alpha) = R_\infty^\alpha \sqrt{1 - r^\alpha \exp\left(\frac{-2\lambda^\alpha}{\lambda_u^\alpha}\right)} \quad (2.12)$$

在本章中，本研究將呈現在常溫下塑流彈塑性材料模式的極限狀態的定義方程式。同時，我們將運用這些定義方程式來推導閉合正解。此外，我們也將探討該模型的特性和適用材料。極限狀態的定義是當預應力施加時， R^α 會相對應地產生變化，而當等價塑性應變 λ^α 趨近無限大時， R^α 不再變化，我們將其定義為 R_∞^α 。將此概念應用於方程式和 (2.6)，即為本研究所定義的極限狀態下的塑流彈塑性材料模式，並且此章節模型的外在控制因子溫度仍維持在室溫並無變化。

模型中的方程式 (2.5)、(2.6) 也進行了一些修改。在 [9] 中，原本只使用了簡



單的主動應力和回應力來表示大小圓在外力下的應力狀態。然而，在研究過程中發現，這種單純的定義方程式無法求得應力輸入下的閉合正解。原因在於此方程式組無法從原本的非齊次座標轉換為齊次座標，從而在推導狀態轉移陣時出現了問題。因此，在這個研究中，我們轉變了思路，對初始的定義方程式進行了修改，即上述列出的方程式。修改後的方程式不再僅代表主動應力和回應力的組合，而是隨著大小圓半徑的變化，其應力狀態也會相應改變，並且在方程式中，回應力調整為更貼合塑性流動原理的形式取代。綜上所述，新的方程式在理論上更精確地計算大小圓的應力狀態，同時在實際應用中也能成功轉換為齊次座標，以求得閉合正解。

在探討定義方程式之前，我們有必要釐清方程式中上標 α 和下標 a、b 的涵義。首先，上標 α 表示降伏面擬合的基本理論。這個基本理論可以在圖2.1中觀察到，通過大小圓與降伏面之間的幾何關係，我們可以建立降伏面，這種幾何關係即為降伏條件。下標 a、b 分別表示大圓和小圓或降伏面的半徑和中心，也就是通過計算主動應力 s_a^α 和 s_b^α ，並獲得 s_a^α 的範數以及將 s_b^α 轉換為 σ_b^α ，我們可以得到大圓和小圓或降伏面的半徑和中心的數值。

在這項研究中，我們考慮了材料性質、硬軟化和能量耗散等多個方面。首先從方程式 (2.8) 中可以看到材料性質在我們的模型中扮演的角色，該方程式描述了應力和應變之間的關係。彈性段呈現線性，而塑性段則呈現非線性。這意味著我們的模型適用於完全彈塑性、雙線性或非線性材料。此外，觀察方程式 (2.12)，我們可以看到 R^α 和 λ^α 之間具有一定的相關性，這表示隨著塑性變形的增加，半徑會有相應的變化，此性質代表著本研究模型可以闡述降伏面的等向硬軟化 (isotropic hardening and softening)。上述中提到，下標 b 代表著大圓、小圓或者降伏面的中心，可從方程式 (2.9) 觀察到此中心是可以移動的，亦代表著本研究模型能夠闡述走動硬軟化 (kinematic hardening and softening) 的性質。

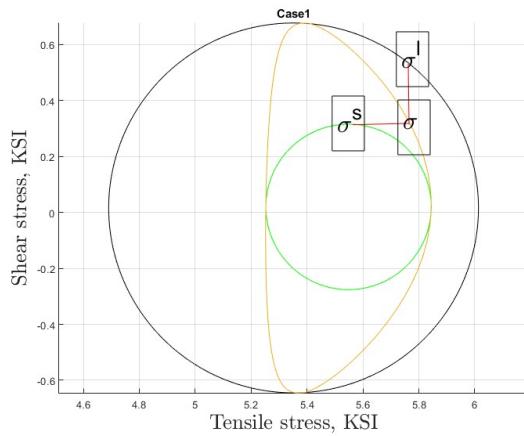


Figure 2.1: 大小圓與降伏面的幾何關係

2.1.1 降伏條件

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^l = \frac{\mathbf{s}_b^l + \frac{1}{3}tr\boldsymbol{\sigma}\mathbf{1}}{\|\mathbf{s}_b^l + \frac{1}{3}tr\boldsymbol{\sigma}\mathbf{1}\|} \quad (2.13)$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^s = \frac{\mathbf{s}_b^s + \frac{1}{3}tr\boldsymbol{\sigma}\mathbf{1} - [(\mathbf{s}_b^s + \frac{1}{3}tr\boldsymbol{\sigma}\mathbf{1}) : \hat{\boldsymbol{\sigma}}^l]\hat{\boldsymbol{\sigma}}^l}{\|\mathbf{s}_b^s + \frac{1}{3}tr\boldsymbol{\sigma}\mathbf{1} - [(\mathbf{s}_b^s + \frac{1}{3}tr\boldsymbol{\sigma}\mathbf{1}) : \hat{\boldsymbol{\sigma}}^l]\hat{\boldsymbol{\sigma}}^l\|} \quad (2.14)$$

$$\xi^l = (\mathbf{s}_a^l + \mathbf{s}_b^l + \frac{1}{3}tr\boldsymbol{\sigma}\mathbf{1}) : \hat{\boldsymbol{\sigma}}^l \quad (2.15)$$

$$\xi_b^s = (\mathbf{s}_b^s + \frac{1}{3}tr\boldsymbol{\sigma}\mathbf{1}) : \hat{\boldsymbol{\sigma}}^l \quad (2.16)$$

$$\xi_a = \xi^l - \xi_b^s \quad (2.17)$$

$$\xi^s = (\mathbf{s}_a^s + \mathbf{s}_b^s + \frac{1}{3}tr\boldsymbol{\sigma}\mathbf{1}) : \hat{\boldsymbol{\sigma}}^s \quad (2.18)$$

$$C = \sqrt{\xi_a^2 + (\xi^s)^2} \quad (2.19)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_b = \xi_b^s \hat{\boldsymbol{\sigma}}^l \quad (2.20)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_a = \xi_a \hat{\boldsymbol{\sigma}}^l + \xi^s \hat{\boldsymbol{\sigma}}^s \quad (2.21)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_a + \boldsymbol{\sigma}_b \quad (2.22)$$

在本節中，根據上述方程式展示了大小圓和降伏面之間的幾何關係，圖2.2則



是來自 [9]。

使用此降伏條件的前提為當材料已經降伏，方能夠使用。原因在於材料進入塑性態後，才能運用閉合正解計算大小圓的半徑以及中心。

首先，通過以大小圓的中心為基礎建立一個新的坐標系，橫軸從 σ 轉換為 $\hat{\sigma}^l$ ，縱軸從 τ 轉換為 $\hat{\sigma}^s$ 。這一步的目的是為了使用簡單的單位向量表示投影關係，能更清晰地描述大小圓與降伏面的幾何關係。

建立新的坐標系後，將閉合正解中大小圓的中心投影到坐標系上，利用上述投影量可以計算出降伏面上的回應力，也就是降伏面的中心。之後，便可以繪製大小圓，圖2.2中使用 σ^l 和 σ^s 表示大小圓上的任意點，這兩者具有特殊的意義，表示一條斜線通過降伏面的中心 σ_b 並且與大小圓相交於 σ^l 和 σ^s 。此外， σ^l 和 σ^s 與 σ 垂直相關。根據上述性質，可以繪製出在應力施加下相對應的降伏面。

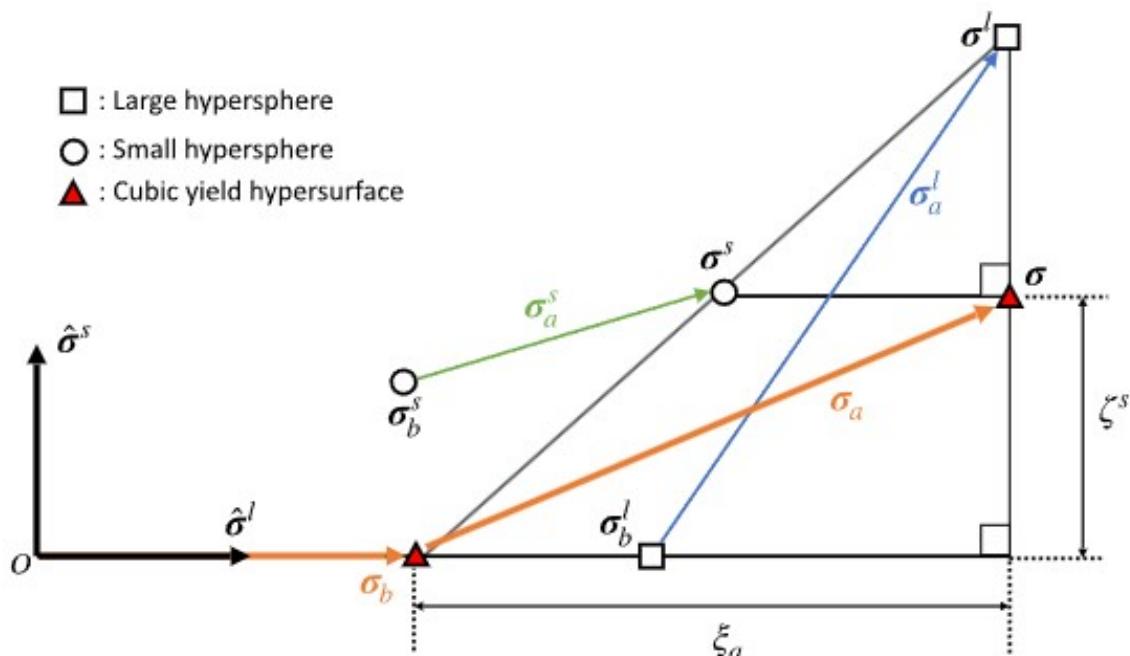


Figure 2.2: 降伏條件



2.1.2 推導流程圖

在本章中，本研究將展示如何從定義方程式出發，通過變數變換等方法獲得閉合正解的流程圖，詳見圖2.3。同時，本研究將會於下面的小節中詳細解釋每個步驟的意義和概念。

2.1.3 材料彈塑性判準

本節的目的在於判斷材料在受外力作用下是否進入降伏狀態。而本節所用的準則是根據材料受力後產生的塑性行為、應力狀態等重要因素的變化來判斷材料的彈塑性。我們將使用 λ 和 s_a^α 以及 $\dot{\lambda}$ ，而不僅僅是使用 E 、 G 等參數來進行判斷。這是因為在材料或結構體受到外力時，通常不僅僅受到單一維度的力，可能同時受到軸力、扭力、環向力等多種力的作用。因此，我們需要藉由觀察能量耗散 $\dot{\lambda}$ 、等價塑性應變 λ 和主動應力 s_a^α ，因為這三個參數指標皆同時考慮了多維度下的降伏條件，而非只有單一向的條件。舉例來說，當等價塑性應變不為 0、主動應力的大小等於大小圓的半徑以及能量開始耗散時，便可以明確確認材料已經進入降伏狀態，即塑性態，原因在於等價塑性應變已將各個維度上的塑性變形參考其中，所以可以藉此數值來去判斷材料是否降伏。以下便是如何推導 λ 以及其必要且充分條件又是如何。

首先，將方程式 (2.6)、(2.8) 以及 (2.9) 組合而成關鍵的關係方程式：

$$\dot{s}^\alpha = \frac{R_\infty^\alpha}{R^\alpha} \dot{s}_a^\alpha + \frac{k_p^\alpha \dot{\lambda}^\alpha}{R_\infty^\alpha} s_a^\alpha \quad (2.23)$$

接著，將新求得之方程式 (2.13) 乘以 $s_a^{\alpha T}$ 並且將 (2.9) 代入

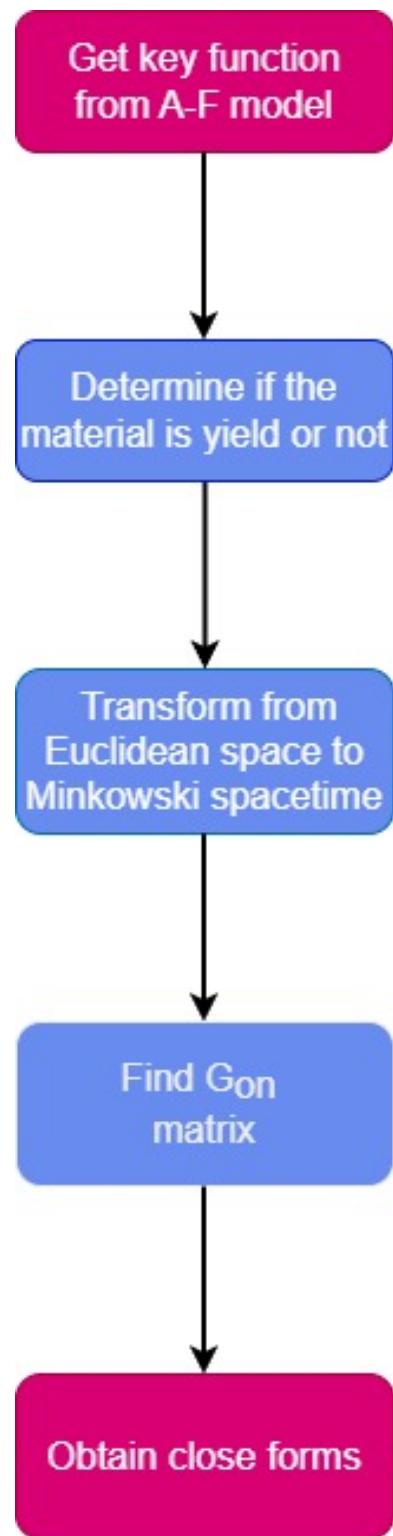


Figure 2.3: 推導閉合正解流程



$$\mathbf{s}_a^{\alpha T} \dot{\mathbf{s}}^\alpha = \frac{k_p^\alpha \dot{\lambda}^\alpha}{R_\infty^\alpha} (R^\alpha)^2 \quad (2.24)$$

最後，通過移項便能得到 $\dot{\lambda}^\alpha$ 的計算式

$$\dot{\lambda}^\alpha = \frac{\mathbf{s}_a^{\alpha T} \dot{\mathbf{s}}^\alpha R_\infty^\alpha}{k_p^\alpha (R^\alpha)^2} \quad (2.25)$$

在推導出等價塑性應變變化量的關係式之後，我們需要進一步思考何種情況下能夠分別應用於塑性狀態和彈性狀態，這涉及到本研究模型的基本定義方程式。主動應力的範數等於受外力作用下的大小圓半徑，初始降伏面則是判斷材料是否發生降伏的依據。當外力足夠大，使得主動應力的範數與初始降伏面的半徑相同，並且降伏條件等於 1 時，表示材料進入塑性狀態；反之，則為彈性狀態。這個條件是本研究中判斷材料降伏的充分且必要條件。

透過以上所推導出的關係式以及配合以下列出的充分且必要條件，我們能夠判斷材料在受外力作用後是否進入塑性狀態，同時也能計算等價塑性應變的變化量。當材料處於彈性狀態時，表示材料沒有發生塑性變形，因此等價塑性應變的變化量必然為零。

$$\begin{cases} \dot{\lambda}^\alpha = \frac{\mathbf{s}_a^{\alpha T} \dot{\mathbf{s}}^\alpha R_\infty^\alpha}{k_p^\alpha (R^\alpha)^2}, & if \quad \Phi(\sigma_a) = 1 , \quad \|\mathbf{s}_a^\alpha\| = R^\alpha \quad and \quad \dot{\Lambda} > 0, \\ \dot{\lambda}^\alpha = 0, & if \quad 0 \leq \Phi(\sigma_a) < 1 \quad or \quad \|\mathbf{s}_a^\alpha\| < R^\alpha. \end{cases} \quad (2.26)$$



2.1.4 狀態轉移陣

狀態轉移陣 \mathbf{G}_{on} 的意義在於該陣可用於根據前一時刻的應力狀態計算當前的應力狀態。然而，該陣僅適用於材料進入塑性狀態之後的情況。舉例來說，當施加外力導致材料發生降伏並達到特定應力狀態後，當施加更大的外力時，我們可以利用狀態轉移陣以及降伏狀態下的應力來計算當前的應力狀態。這個狀態轉移陣也是本研究中獲得所有時刻應力狀態的重要步驟之一。

首先，將歐幾里德空間 (Euclidean space) 轉換為閔考斯基時空 (Minkowski spacetime)。這個轉換的目的在於將原本的非齊次座標轉換為齊次座標，以實現將非線性關係轉換為線性關係的效果。進一步地，在投影方面，我們能夠使用簡單的對稱陣形式來表示轉換後的應力狀態，這對於獲得閉合正解具有重要意義。

並且當從歐幾里德空間 (Euclidean space) 轉換為閔考斯基時空 (Minkowski spacetime) 時，我們可以觀察到降伏面的縮放性質，如圖2.4轉換為2.5所示。每個平面都代表一個降伏面，在歐幾里德空間中，降伏面是不具有縮放性質的，就像圖2.4中的圓柱一樣，隨著 X_0^α 的增加，半徑並不改變。然而，當轉換至閔考斯基時空時，我們可以清楚地看到隨著 X_0^α 的變化，降伏面開始發生變化，如圖2.5所示。

以下是轉換成 Minkowski 的步驟。

將 (2.23) 整理成微分形式

$$\dot{s}^\alpha \exp\left(\frac{R^\alpha k_p^\alpha \lambda^\alpha}{(R_\infty^\alpha)^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{R_\infty^\alpha}{R^\alpha} \mathbf{s}_a^\alpha \exp\left(\frac{R^\alpha k_p^\alpha \lambda^\alpha}{(R_\infty^\alpha)^2}\right)\right) \quad (2.27)$$

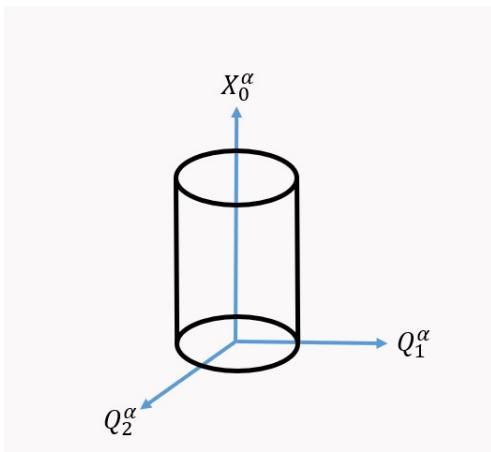


Figure 2.4: Euclid

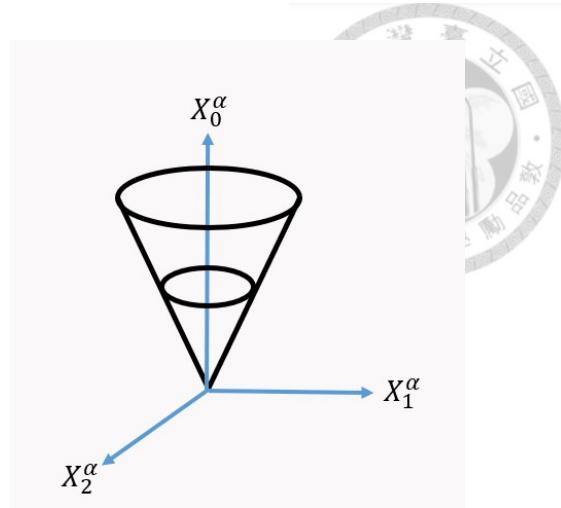


Figure 2.5: Minkowski

接者，將 (2.17) 乘以 $\mathbf{s}_a^{\alpha T}$

$$\dot{\mathbf{s}}^{\alpha T} \mathbf{s}_a^\alpha \exp\left(\frac{R^\alpha k_p^\alpha \lambda^\alpha}{(R_\infty^\alpha)^2}\right) = \frac{d}{dt} \left(\exp\left(\frac{R^\alpha k_p^\alpha \lambda^\alpha}{(R_\infty^\alpha)^2}\right) \right) R^\alpha R_\infty^\alpha \quad (2.28)$$

找出 $\dot{\lambda}^\alpha$ 之關係式後，利用方程式 (2.17)、(2.18) 通過變數變換定義閔考斯基空間 $SO_o(n, 1)$ 。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_s^\alpha \\ X_0^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{s}_a^\alpha}{R^\alpha(\lambda^\alpha)} X_0^\alpha \\ \exp\left(\frac{R^\alpha k_p^\alpha \lambda^\alpha}{(R_\infty^\alpha)^2}\right) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

運用方程式 (2.17)、(2.18) 尋找控制陣 \mathbf{A}

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}}_s^\alpha \\ \dot{X}_0^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{\mathbf{s}}^\alpha}{R_\infty^\alpha} \\ \frac{\dot{\mathbf{s}}^{\alpha T}}{R_\infty^\alpha} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s^\alpha \\ X_0^\alpha \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

最後透過 $X^\alpha(t) = \mathbf{G}_{on} X^\alpha(t_1)$ 以及方程式 (2.30) 將狀態轉移陣 \mathbf{G}_{on}^α 求出。



$$\mathbf{G}_{on}^\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \frac{(a^\alpha - 1)}{\|\dot{\mathbf{s}}^\alpha\|^2} \dot{\mathbf{s}}^\alpha \dot{\mathbf{s}}^{\alpha T} & b^\alpha \frac{\dot{\mathbf{s}}^\alpha}{\|\dot{\mathbf{s}}^\alpha\|} \\ b^\alpha \left(\frac{\dot{\mathbf{s}}^\alpha}{\|\dot{\mathbf{s}}^\alpha\|} \right)^T & a^\alpha \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

從上述推導出的 \mathbf{G}_{on}^α 中可看到 a^α 和 b^α ，其分別為 $a^\alpha = \cosh\left(\frac{(t-t_1)\|\mathbf{s}_a^\alpha\|}{R_\infty^\alpha}\right)$ 、 $b^\alpha = \sinh\left(\frac{(t-t_1)\|\mathbf{s}_a^\alpha\|}{R_\infty^\alpha}\right)$ 。

2.1.5 閉合正解

此小節中，將會透過前面小節所推得之 \mathbf{G}_{on}^α 以及配合充分且必要條件，得到主動應力、回應力、等價塑性應變等等的重要閉合正解。而已下列出的閉合正解是基於極限狀態下的定義方程式所推導出的。

首先是主動應力的閉合正解。

$$\mathbf{s}_a^\alpha(t) = \left[\frac{\frac{\mathbf{s}_a^\alpha(t_1)}{R^\alpha(\lambda^\alpha(t_1))} + \frac{(a^\alpha - 1)}{\|\dot{\mathbf{s}}^\alpha\|^2} \dot{\mathbf{s}}^\alpha \dot{\mathbf{s}}^{\alpha T} \frac{\mathbf{s}_a^\alpha(t_1)}{R^\alpha(\lambda^\alpha(t_1))} + b^\alpha \frac{\dot{\mathbf{s}}^\alpha}{\|\dot{\mathbf{s}}^\alpha\|}}{b^\alpha \left(\frac{\dot{\mathbf{s}}^\alpha}{\|\dot{\mathbf{s}}^\alpha\|} \right)^T \frac{\mathbf{s}_a^\alpha(t_1)}{R^\alpha(\lambda^\alpha(t_1))} + a^\alpha} \right] R^\alpha(\lambda^\alpha(t)) \quad (2.32)$$

接下來是回應力的閉合正解。

$$\mathbf{s}_b^\alpha(t) = \exp\left(\frac{k_p^\alpha}{\eta^\alpha} [\lambda^\alpha(t_1) - \lambda^\alpha(t)]\right) \mathbf{s}_b^\alpha(t_1) + \frac{\eta^\alpha}{R_\infty^\alpha} \left\{ \mathbf{s}_a^\alpha(t) - \exp\left(\frac{k_p^\alpha}{\eta^\alpha} [\lambda^\alpha(t_1) - \lambda^\alpha(t)]\right) \mathbf{s}_a^\alpha(t_1) \right\} \quad (2.33)$$

最後則是等價塑性應變的閉合正解。



$$\lambda^\alpha(t) = \frac{R^\alpha(\lambda^\alpha(t_1))}{R^\alpha(\lambda^\alpha(t))} \lambda^\alpha(t_1) + \frac{(R_\infty^\alpha)^2}{k_p^\alpha R^\alpha(\lambda^\alpha(t))} \ln[b^\alpha \left(\frac{\dot{\mathbf{s}}^\alpha}{\|\dot{\mathbf{s}}^\alpha\|} \right)^T \frac{\mathbf{s}_a^\alpha(t_1)}{R^\alpha(\lambda^\alpha(t_1))} + a^\alpha] \quad (2.34)$$

獲得上述所述的閉合正解後，需要結合實驗數據進行最佳化擬合，以獲取重要的參數。通過擬合得到的參數，我們可以將其應用於閉合正解，並根據所需的預應力值呈現相應的降伏面。在此過程中，我們強調的是使用單一組參數組合，因為這組參數可以涵蓋所有應力輸入下的材料受力狀況，而無需為每個應力情況分別進行參數擬合。

可看到圖2.6所示的降伏面演化圖，我們只使用擬合出的一組參數和一組本研究推導出的閉合正解配合上不同的應力將相對應的降伏面皆呈現於圖中。

然而，使用閉合正解的前提是材料已進入塑性狀態，即施加的預應力觸及初始降伏面或超過初始降伏面。而尚未接觸到初始降伏面前，應力狀態可單純地用楊氏模數或剪切模數來表示，也就是說可用應力應變曲線的彈性段來解釋即可。

從時間層面來看，閉合正解是一種以時間為因子的精確解，這意味著在時間的範疇內，主動應力、回應力或等價塑性應變的閉合正解都是具有連續性的，這也意味著我們可以利用這個精確解析公式計算每個外力施加下的材料產生應力值。

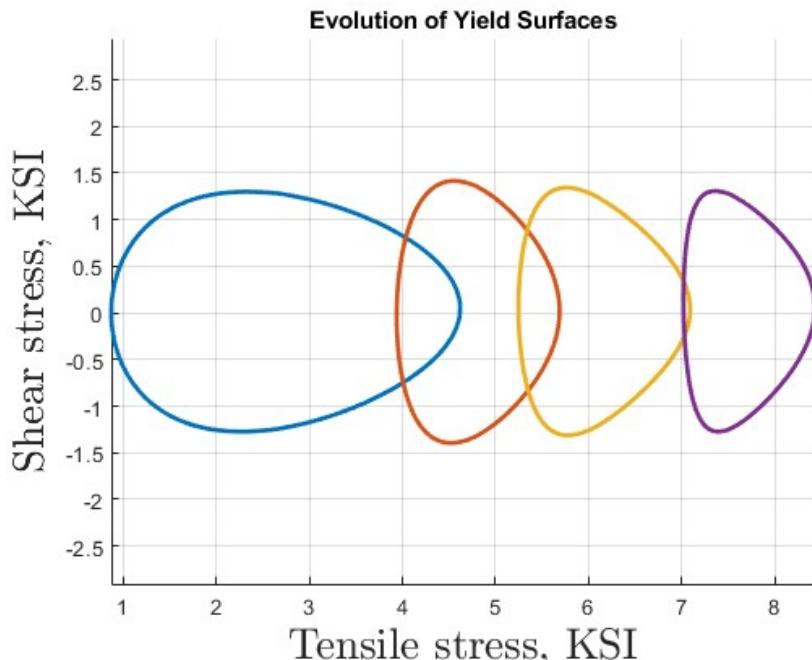


Figure 2.6: 降伏面演化圖

2.2 本章小結

本研究在此章節中建立了極限狀態下的塑流彈塑性材料模式，其中描述了非線性材料的塑流、等向硬軟化以及走動軟硬化等性質。本章節中也提到了降伏條件，即本研究呈現降伏面的基本理論，並透過閉合正解配合此降伏條件，以視覺化降伏面的方式來觀察降伏面的變化。

同時本章節中將如何推導閉合正解的過程建立為一套邏輯觀念，並轉換成推導流程圖，以使讀者更清楚瞭解閉合正解的推導概念。

在推導閉合正解的流程中，需先了解材料受力後的狀態，因為材料在彈性段時降伏面不會隨著應力產生變化，也就是降伏面不會有演化；但進入塑性態後，降伏面就會開始變化，因此需要先判斷材料的彈塑性。在判斷了材料的狀態後，繼續尋找此模型的 G_{on} ，即狀態轉移陣，這個狀態轉移陣可以計算材料在進入塑性態後，受到不同外力所產生的應力狀態，這意味著閉合正解本身具有時間連續

性的特性。最後，我們可以獲得極限狀態下的閉合正解。





第三章 零值狀態下的塑流彈塑性模式

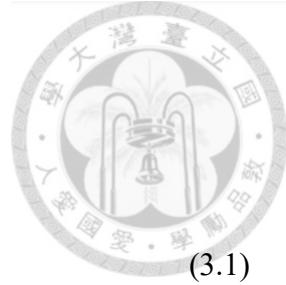
3.1 常溫下的塑流彈塑性模式

以下將呈現本研究模型的基本定義方程式。在推導出閉合正解之前，本研究同樣會先解釋方程式中使用的符號含義及本身的意義。

第二章中，本研究敘述過關於應力以及應變如何分成體積部分以及偏差部分；同時，應力分成主動應力以及回應力的方式和背後的原因。而主動應力和回應力分別代表的意義亦有闡述，在下列的方程式中也可以清楚地看到。

接著，在塑流公式中，將會看到材料因子 k_p^α 和 η^α ，其背後意義在於本研究將此塑流彈塑性模式化為彈簧以及阻尼的組合。在彈性段時，本研究以彈簧來表示，此時彈簧係數便是楊氏模數 E；在塑性段時，則將以彈簧以及阻尼來表示，此時彈簧係數便是 k_p^α ，阻尼則是 η^α 。上述所提到的此兩材料因子，其意義便控制著降伏面的中心位置，同樣地也控制中心位置移動的幅度。

在模式中，有了控制中心位置的方程式，自然也會有控制半徑的方程式，而本研究便是以 λ^α 來控制，此因子代表著材料的等價塑性應變，也就是材料的塑性行為；公式中除了此等價塑性應變，亦有 r^α 來控制大小圓的放大縮小，也就是控制材料的混合性質，此處於後續討論時將會詳細闡述。



基本定義方程式：

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{1} + \mathbf{e}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{1} + \mathbf{s} \quad (3.1)$$

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{3K} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}, \quad 3K = GE/(3G - E) \quad (3.2)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^{e\alpha} + \boldsymbol{\epsilon}^{p\alpha}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}^{e\alpha} + \mathbf{e}^{p\alpha} \quad (3.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_a + \boldsymbol{\sigma}_b \quad (3.4)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^\alpha = \frac{R^\alpha(0)}{R^\alpha} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_a^\alpha + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_b^\alpha + \frac{k_p^\alpha \dot{\lambda}^\alpha}{\eta^\alpha} (\boldsymbol{\sigma}_b^\alpha - K \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{1}) \quad (3.5)$$

$$\dot{\mathbf{s}}^\alpha = \frac{R^\alpha(0)}{R^\alpha} \dot{\mathbf{s}}_a^\alpha + \dot{\mathbf{s}}_b^\alpha + \frac{k_p^\alpha \dot{\lambda}^\alpha}{\eta^\alpha} \mathbf{s}_b^\alpha \quad (3.6)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\alpha = \mathbf{s}^\alpha + K \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{1}, \quad \boldsymbol{\sigma}_a^\alpha = \mathbf{s}_a^\alpha, \quad \boldsymbol{\sigma}_b^\alpha = \mathbf{s}_b^\alpha + K \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{1} \quad (3.7)$$

$$\dot{\mathbf{s}}_a^\alpha = 2G \dot{\mathbf{e}}^{e\alpha}, \quad R_\infty^\alpha \dot{e}^{p\alpha} = \mathbf{s}_a^\alpha \dot{\lambda}^\alpha \quad (3.8)$$

$$\dot{\mathbf{e}}^{p\alpha} = \frac{1}{k_p^\alpha} \dot{\mathbf{s}}_b^\alpha + \frac{\dot{\lambda}^\alpha}{\eta^\alpha} \mathbf{s}_b^\alpha, \quad \|\mathbf{s}_a^\alpha\| \dot{\lambda}^\alpha = R^\alpha(\lambda^\alpha) \dot{\lambda}^\alpha, \quad \Phi \dot{\Lambda} = \dot{\Lambda} \quad (3.9)$$

$$0 \leq \Phi = \Phi(\sigma_a) = \frac{\|\boldsymbol{\sigma}_a^\alpha\|}{C} \leq 1 \quad (3.10)$$

$$\dot{\Lambda} = \left(\frac{1}{R_\infty^s} \|\mathbf{s}_a^s\|^2 + \frac{1}{2\eta^s} \|\mathbf{s}_b^s\|^2 \right) \dot{\lambda}^s + \left(\frac{1}{R_\infty^l} \|\mathbf{s}_a^l\|^2 + \frac{1}{2\eta^l} \|\mathbf{s}_b^l\|^2 \right) \dot{\lambda}^l \geq 0 \quad (3.11)$$

$$R^\alpha(\lambda^\alpha) = R_\infty^\alpha \sqrt{1 - r^\alpha \exp\left(\frac{-2\lambda^\alpha}{\lambda_u^\alpha}\right)} \quad (3.12)$$

3.1.1 材料彈塑性判準

本節的目的在於運用材料受力後產生的相對應的塑性行為來判斷材料的彈性或塑性狀態，而我們使用的判斷依據是基於零值狀態下的基本定義方程式。這些方程式包括降伏條件和主動應力，它們被視為判斷彈性或塑性的充分且必要條件。不同於 2.1.2 節，本節的主要區別在於狀態的不同，這導致後續推導也會有所不同。以下是我們如何推導等價塑性應變變化量的計算式並找出其充分且必要條件。



件。

首先，將方程式 (3.6)、(3.8) 以及 (3.9) 組合成偏差應力的關鍵方程式

$$\dot{\mathbf{s}}^\alpha = \frac{R^\alpha(0)}{R^\alpha} \dot{\mathbf{s}}_a^\alpha + \frac{k_p^\alpha \dot{\lambda}^\alpha}{R_\infty^\alpha} \mathbf{s}_a^\alpha \quad (3.13)$$

接著，將新求得之方程式 (3.13) 乘以 $\mathbf{s}_a^{\alpha T}$ 並且將 (3.9) 代入

$$\mathbf{s}_a^{\alpha T} \dot{\mathbf{s}}^\alpha = \frac{k_p^\alpha \dot{\lambda}^\alpha}{R_\infty^\alpha} (R^\alpha)^2 \quad (3.14)$$

最後，通過移項便能得到 $\dot{\lambda}^\alpha$ 的計算式

$$\dot{\lambda}^\alpha = \frac{\mathbf{s}_a^{\alpha T} \dot{\mathbf{s}}^\alpha R_\infty^\alpha}{k_p^\alpha (R^\alpha)^2} \quad (3.15)$$

在應用等價塑性應變變化量的關係式 (3.15) 之前，我們需要確定其使用條件，也就是充分且必要條件。這是我們研究中的一個重要課題。本研究採用的方法是使用降伏條件 (3.9) 和方程式 (3.10)。當這兩個方程式滿足時，表示材料進入了塑性狀態，這意味著我們可以使用關係式 (3.15)；反之，如果其中一個方程式不滿足，我們直接將等價塑性應變變化量設為零，因為此時材料尚未降伏，意味著材料沒有發生塑性變形。

上述所提到的等價塑性應變變化量的關係式以及降伏條件的條件，可以組成類似於方程式組 (3.16) 的材料彈塑性判斷條件。當主動應力的範數 (norm) 小於相

對應大小圓的半徑時，表示沒有等價塑性應變，這意味著材料處於彈性狀態，如同圖3.1中紅色的線段沒有觸及圓的邊界；相反，當主動應力的範數 (norm) 等於相對應大小圓的半徑時，如同圖中藍色的線段與圓的半徑相等，這表示材料進入了塑性態。

$$\begin{cases} \dot{\lambda}^\alpha = \frac{\mathbf{s}_a^{\alpha T} \dot{\mathbf{s}}^\alpha R_\infty^\alpha}{k_p^\alpha (R^\alpha)^2}, & \text{if } \Phi(\sigma_a) = 1 \text{ and } \|\mathbf{s}_a^\alpha\| = R^\alpha, \\ \dot{\lambda}^\alpha = 0, & \text{if } 0 \leq \Phi(\sigma_a) < 1 \text{ or } \|\mathbf{s}_a^\alpha\| < R^\alpha. \end{cases} \quad (3.16)$$

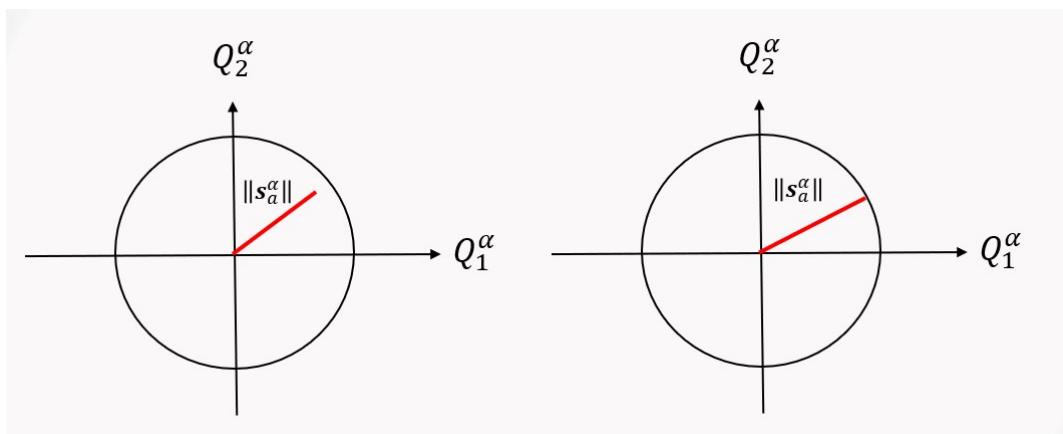


Figure 3.1: 充分且必要條件



3.1.2 狀態轉移陣

狀態轉移陣 \mathbf{G}_{on} 的意義在於該陣可用於根據前一時刻的應力狀態計算當前的應力狀態。然而，該陣僅適用於材料進入塑性狀態之後的情況。舉例來說，當施加外力導致材料發生降伏並達到特定應力狀態後，當施加更大的外力時，我們可以利用狀態轉移陣以及降伏狀態下的應力來計算當前的應力狀態。這個狀態轉移陣也是本研究中獲得所有時刻應力狀態的重要步驟之一。

首先，將歐幾里德空間 (Euclidean space) 轉換為閔考斯基時空 (Minkowski spacetime)。這個轉換的目的在於將原本的非齊次座標轉換為齊次座標，以實現將非線性關係轉換為線性關係的效果。進一步地，在投影方面，我們能夠使用簡單的對稱陣形式來表示轉換後的應力狀態，這對於獲得閉合正解具有重要意義。以下是轉換成 Minkowski 的步驟。

將 (3.13) 整理成微分形式

$$\dot{\mathbf{s}}^\alpha \exp\left(\frac{R^\alpha k_p^\alpha \lambda^\alpha}{R^\alpha(0) R_\infty^\alpha}\right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{R^\alpha(0)}{R^\alpha} \mathbf{s}_a^\alpha \exp\left(\frac{R^\alpha k_p^\alpha \lambda^\alpha}{R^\alpha(0) R_\infty^\alpha}\right) \right) \quad (3.17)$$

接者，將 (3.17) 乘以 $\mathbf{s}_a^{\alpha T}$

$$\dot{\mathbf{s}}^{\alpha T} \mathbf{s}_a^\alpha \exp\left(\frac{R^\alpha k_p^\alpha \lambda^\alpha}{R_\infty^\alpha R^\alpha(0)}\right) = \frac{d}{dt} \left(\exp\left(\frac{R^\alpha k_p^\alpha \lambda^\alpha}{R_\infty^\alpha R^\alpha(0)}\right) R^\alpha R^\alpha(0) \right) \quad (3.18)$$

找出 $\dot{\lambda}^\alpha$ 之關係式後，利用方程式 (3.17)、(3.18) 通過變數變換定義閔考斯基空間 $SO_o(n, 1)$ 。



$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_s^\alpha \\ X_0^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{s}_a^\alpha}{R^\alpha(\lambda^\alpha)} X_0^\alpha \\ \exp\left(\frac{R^\alpha k_p^\alpha \lambda^\alpha}{R_\infty^\alpha R^\alpha(0)}\right) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

運用方程式 (3.17)、(3.18) 尋找控制陣 \mathbf{A}

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}}_s^\alpha \\ \dot{X}_0^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{\mathbf{s}}^\alpha}{R^\alpha(0)} \\ \frac{\dot{\mathbf{s}}^{\alpha T}}{R^\alpha(0)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s^\alpha \\ X_0^\alpha \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

最後透過 $X^\alpha(t) = \mathbf{G}_{on} X^\alpha(t_1)$ 以及方程式 (3.20) 將狀態轉移陣 \mathbf{G}_{on}^α 求出。

$$\mathbf{G}_{on}^\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \frac{(a^\alpha - 1)}{\|\dot{\mathbf{s}}^\alpha\|^2} \dot{\mathbf{s}}^\alpha \dot{\mathbf{s}}^{\alpha T} & b^\alpha \frac{\dot{\mathbf{s}}^\alpha}{\|\dot{\mathbf{s}}^\alpha\|} \\ b^\alpha \left(\frac{\dot{\mathbf{s}}^\alpha}{\|\dot{\mathbf{s}}^\alpha\|}\right)^T & a^\alpha \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

從上述推導出的 \mathbf{G}_{on}^α 中可看到 a^α 和 b^α ，其分別為 $a^\alpha = \cosh\left(\frac{(t-t_1)\|\mathbf{s}_a^\alpha\|}{R^\alpha(0)}\right)$ 、 $b^\alpha = \sinh\left(\frac{(t-t_1)\|\mathbf{s}_a^\alpha\|}{R^\alpha(0)}\right)$ 。

3.1.3 閉合正解

在本節中，我們將使用前面節錄得到的 \mathbf{G}_{on}^α ，結合充分且必要條件，推導出主動應力、回應力和等價塑性應變等重要的閉合正解。以下列出的閉合正解是根據零值狀態下的定義方程式推導而來。首先是主動應力的閉合正解。



$$\mathbf{s}_a^\alpha(t) = \left[\frac{\frac{\mathbf{s}_a^\alpha(t_1)}{R^\alpha(\lambda^\alpha(t_1))} + \frac{(a^\alpha - 1)}{\|\dot{\mathbf{s}}^\alpha\|^2} \dot{\mathbf{s}}^\alpha \dot{\mathbf{s}}^{\alpha T} \frac{\mathbf{s}_a^\alpha(t_1)}{R^\alpha(\lambda^\alpha(t_1))} + b^\alpha \frac{\dot{\mathbf{s}}^\alpha}{\|\dot{\mathbf{s}}^\alpha\|}}{b^\alpha \left(\frac{\dot{\mathbf{s}}^\alpha}{\|\dot{\mathbf{s}}^\alpha\|} \right)^T \frac{\mathbf{s}_a^\alpha(t_1)}{R^\alpha(\lambda^\alpha(t_1))} + a^\alpha} \right] R^\alpha(\lambda^\alpha(t)) \quad (3.22)$$

接下來是回應力的閉合正解。

$$\mathbf{s}_b^\alpha(t) = \exp\left(\frac{k_p^\alpha}{\eta^\alpha} [\lambda^\alpha(t_1) - \lambda^\alpha(t)]\right) \mathbf{s}_b^\alpha(t_1) + \frac{\eta^\alpha}{R_\infty^\alpha} \left\{ \mathbf{s}_a^\alpha(t) - \exp\left(\frac{k_p^\alpha}{\eta^\alpha} [\lambda^\alpha(t_1) - \lambda^\alpha(t)]\right) \mathbf{s}_a^\alpha(t_1) \right\} \quad (3.23)$$

最後則是等價塑性應變的閉合正解。

$$\lambda^\alpha(t) = \frac{R^\alpha(\lambda^\alpha(t_1))}{R^\alpha(\lambda^\alpha(t))} \lambda^\alpha(t_1) + \frac{R_\infty^\alpha R^\alpha(0)}{k_p^\alpha R^\alpha(\lambda^\alpha(t))} \ln[b^\alpha \left(\frac{\dot{\mathbf{s}}^\alpha}{\|\dot{\mathbf{s}}^\alpha\|} \right)^T \frac{\mathbf{s}_a^\alpha(t_1)}{R^\alpha(\lambda^\alpha(t_1))} + a^\alpha] \quad (3.24)$$

此處所得的閉合正解是基於定義為零值狀態的基本方程式之上。儘管定義方程式組不同，但在最佳化擬合過程中所需要使用的實驗數據與極限狀態下所使用的相同。最終目的同樣是求得降伏面在受力後所產生的演化圖，如圖3.2。

將定義方程式組分為極限狀態和零值狀態的原因在於改變方程式(2.6)時，引入了以時間為因子的 R^α 邊界條件。 R^α 是時間的函數，因此在時間的層面上，必然存在零值狀態 $R^\alpha(0)$ 和極限狀態 R_∞^α 兩種邊界條件。在本研究的理論中，這兩種狀態都是合理的。因此，通過研究流程1.3，將兩種狀態下推導出的閉合正解與對應的降伏面進行可視化，以便更容易觀察哪種狀態下的降伏面與實驗數據更吻合，即哪種狀態下的材料塑性行為更符合實際情況。比對的結果將在第四章中呈現。

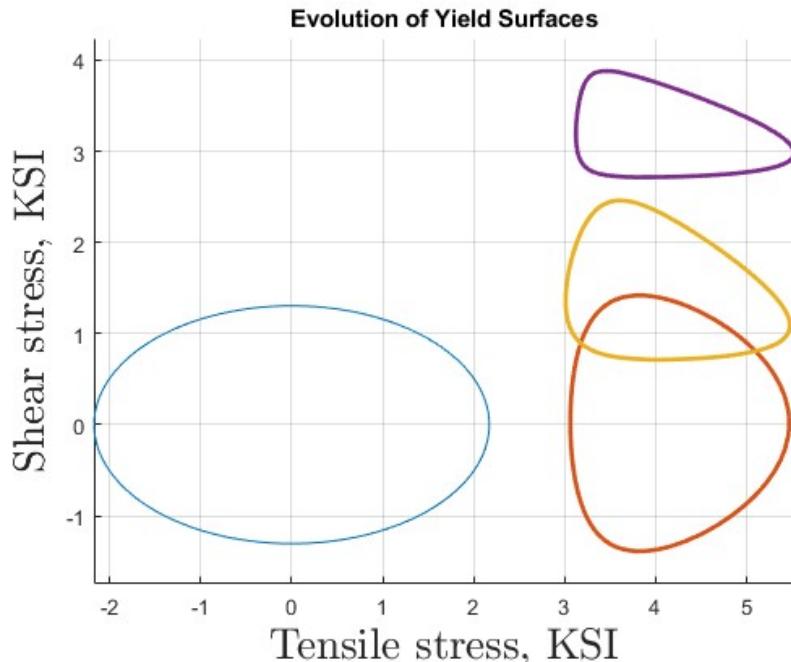


Figure 3.2: 降伏面軸扭演化圖

3.2 本章小結

本研究在此章節中從零值狀態的角度建立了塑流彈塑性材料模式，同時描述了非線性材料的塑流、等向硬軟化、凸性和包興格效應等性質。本章節中不會提及降伏條件，因為不同狀態下呈現降伏面的基本理論是相同的，唯一不同的是基本模型的變化而導致閉合正解的不同和最後最佳化擬合時擬合出的參數差異。

首先，在推導閉合正解之前需要使用方程式組 (3.16) 來判斷材料在受力後的狀態，即判斷材料是否進入塑性段。當材料在受到外力後仍處於彈性段時，降伏面只會是初始降伏面，不會產生任何接續降伏面；相反，當材料受外部應力作用進入塑性態後，降伏面會從初始降伏面演化為接續降伏面。同樣，在判斷了材料的狀態之後，接下來是推導出該模型的 \mathbf{G}_{on} ，即狀態轉移陣，此狀態轉移陣與極限狀態下的陣將會略有不同，原因在於基本模型的假設上不同。通過這個狀態轉移陣，可以得到零值狀態下模型在受力後的應力狀態和塑性行為等等。

利用前述推導出的狀態轉移陣，我們能夠進一步推導，以找到完整的閉合正解。最後，通過輸入應力可以呈現出降伏面。在閉合正解中，維度和應力輸入的選擇取決於所使用的最佳化擬合實驗數據。舉例而言，本研究將利用二維的軸向應力和扭向應力實驗數據，以擬合閉合正解中的未知參數。因此，閉合正解將是由軸向和扭轉應力構成的二維狀態。透過閉合正解所展現的降伏面也將由軸向和扭向的二維平面組成。





第四章 擬合結果與討論

4.1 常溫下極限狀態

在本節中，本研究討論了在外在環境溫度為 $70^{\circ}F$ (即 $21^{\circ}C$) 的情況下，根據給定的應力路徑，也就是施加于材料之上的應力，其降伏面的歪扭情況和特性展現。在這裡，極限狀態是指基於章節 (2) 中所定義的基本模型方程式之上而推導的閉合正解。透過這個閉合正解結合降伏條件，我們可以找到大小圓和降伏面的中心位置以及大小圓的半徑等等的重要數值。接下來的小節將展示通過最佳化擬合得到的參數和降伏面的可視化，並討論這些參數的背後意義以及圖形所呈現的特性。

4.1.1 參數分析

透過 2.1.5 中提出的極限狀態下的閉合正解，我們可以獲得材料的狀態，同時也能了解材料在外力作用下的塑性行為以及應力情況。然而，在進行最佳化擬合之前，閉合正解中存在著 10 個材料參數，這些參數如表4.1所示。因此，本研究通過最佳化擬合與實驗數據相結合，以獲得重要參數的擬合結果。我們使用了最佳化程式並且配合從 [12] 中提取所需的擬合數據值，最終得到了表4.1中的擬合結果。隨後，將這些重要參數和預應力輸入到閉合正解中，再利用本研究模型中的



定義方程式計算出不同尺寸圓的半徑和中心，結果如4.2。

得到大圓和小圓的半徑和中心，也就是 σ^l 、 σ^s 、 R^l 以及 R^s 等數據值，配合基本理論中提到的藉由大小圓以及降伏面上各個點的幾何關係，便能呈現出相對應的降伏面。

從表4.1中可以觀察到兩個參數，即 R_∞^l 和 R_∞^s ，它們分別控制了大小圓的最終半徑。具體而言，當材料受到接近斷裂的外力時，大小圓的半徑會逐漸趨近於極限值，而這些極限值分別為 R_∞^l 和 R_∞^s 。通過這些邊界條件，我們可以初步確定所得結果的正確性。從表4.2以及圖4.1中可以看出， R^l 和 R^s 並未超出 R_∞^l 和 R_∞^s 的範圍，同時也可以觀察到 R^l 和 R^s 隨著應力的施加縮小的速度逐漸趨緩，並且趨近於 R_∞^l 和 R_∞^s ，此現象同樣也說明了此邊界條件的重要性。

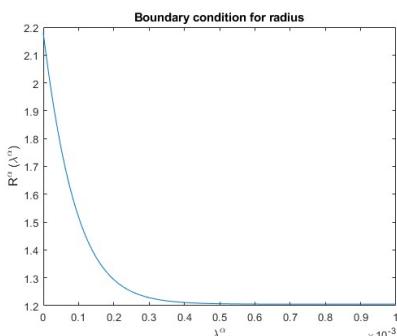


Figure 4.1: 極限狀態的半徑參數圖

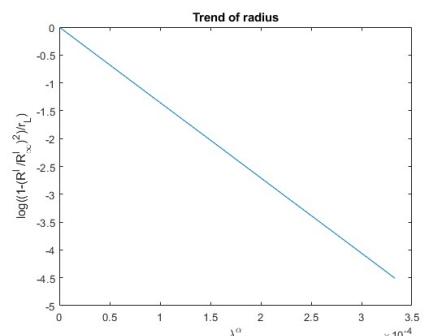


Figure 4.2: 極限狀態下的半徑與等價塑性應變關係

從表4.2可以觀察到隨著預應力的增加，不同尺寸圓的半徑逐漸縮小。這表明本研究模型可以模擬出等向硬軟化的特性。而控制硬軟化現象的參數是參數表中的 r_∞^l 和 r_∞^s 。當實驗結果即降伏面演化圖呈現縮小時，我們可以稱之為軟化現象。本研究的成果當然也會呈現出軟化現象，此時 r_∞^l 和 r_∞^s 將會小於 0。原因在於零值狀態下或極限狀態下的基本方程式已有定義，當預應力施加時，材料的等價塑性應變率只會增加，此時唯有 r^α 小於 0 才會使得大小圓的半徑縮小，從而讓降伏面亦有縮小的現象。而當實驗結果呈現硬化時，也就是降伏面隨著應力施加



而放大時，則上述的 r^α 參數會大於 0。當 r 參數等於 0 時，代表著大小圓的半徑不會變動，同樣地，降伏面也不會放大或縮小，這意味著材料表現出完全彈塑性的性質。因此，本研究模型不僅適用於完全彈塑性材料，也適用於硬軟化材料，並無限制。

表4.2中的 k_p^α 和 η^α 的邊界條件則是必定大於零，此同樣是擬合過程中可檢測結果正確性的重要因素。

E	R_∞^l	R_∞^s	r_∞^l	r_∞^s
10845	1.2053	0.3085	-2.2698	-24.4943
G	k_p^l	k_p^s	η^l	η^s
4077	52095	1559027	8.4434	57.1608

Table 4.1: 極限狀態下的閉合正解參數

Prestress	σ_b^l	σ_b^s	σ_b	R^l	R^s
(0.050,0)	(0.3578,0.0158)	(0.3578,0.0158)	(0.3578,0.0158)	2.1717	1.3048
(5.507,0)	(2.7563,0.0182)	(2.4035,0.0165)	(2.6383,0.0179)	1.8765	1.2884
(6.742,0)	(4.7817,0.0189)	(4.6969,0.0177)	(4.8155,0.0185)	1.4596	1.1469
(7.625,0)	(5.9148,0.0210)	(6.1685,0.0180)	(6.0595,0.0201)	1.2786	0.9155
(9.213,0)	(7.4982,0.0213)	(7.7389,0.0205)	(7.5068,0.0208)	1.2203	0.8733

Table 4.2: 極限狀態下的大小圓數據

4.1.2 演化結果

非線性材料在受力後產生的降伏面呈現歪扭 (distortion) 的現象，當然此現象不會出現在彈性階段，因為彈性階段皆是以初始降伏面作為依據，材料進入塑性後所產生的降伏面才會開始有此現象。歪扭 (distortion) 現象正是本研究需要探討的重點之一，並觀察其是否與實驗數據相符，以達到足夠的精確度。藉由表4.2中預應力的路徑，分別輸入至閉合正解，便可獲得圖4.3、圖4.4、圖4.5、圖4.6、圖4.7。



從以下的圖4.3、圖4.4、圖4.5、圖4.6、圖4.7中可以清楚地看到，隨著預應力的施加，觸碰到初始降伏面的邊緣時，降伏面的中心便會開始移動且其會開始出現歪扭現象。降伏面中心移動的幅度則取決於輸入的應力和材料的特性，這即是降伏面的走動硬軟化特性 (kinematic hardening and softening)；降伏面外觀上則會有放大縮小的特性，而此特性則是等向硬軟化特性 (isotropic hardening and softening)。

同時我們也可以從圖中觀察到降伏面的另一個特性，即歪扭 (distortion)。意思是在預應力施加的方向上，降伏面會呈現凸性的現象，意味著在此方向上材料能承受更多的力，但僅限於軸向力方向。若同時施加軸向扭轉應力，相對於純軸向力方向，材料將更快地達到降伏；而在另一端則相對平緩，表示無論是施加軸向力或軸向扭轉力，材料所需的降伏應力差異不大。以上的觀察皆基於圖4.3、圖4.4、圖4.5、圖4.6、圖4.7。整體而言，歪扭較凸之處會呈現在預應力施加的方向，平緩之處則會顯現於預應力施加的反方向。

本研究針對材料的塑性行為所呈現出的降伏面進行了性質上的討論，包括等向硬軟化、走動硬軟化以及凸性等。接著從精度層面來看，圖中在第二個接續降伏面之後開始產生較大的偏差。本研究認為誤差產生的原因主要有兩個。首先，實驗中對於降伏點的判斷存在一定的誤差容忍範圍。其次，在擷取實驗數據的過程中，也存在一定的偏差量。綜合上述因素來說，呈現降伏面的演化必然會有不可避免的誤差。因此，如何降低誤差成為本研究的一大重點。為了更好地符合材料在現實中的塑性行為，本研究在定義方程式中設立了兩種狀態。這樣做的目的是使擬合出的降伏面與數據點之間的誤差趨近於零。零值狀態下所繪製的降伏面將在後面的章節中呈現，並進行這兩種狀態的比較，以找出更精確的方程式。

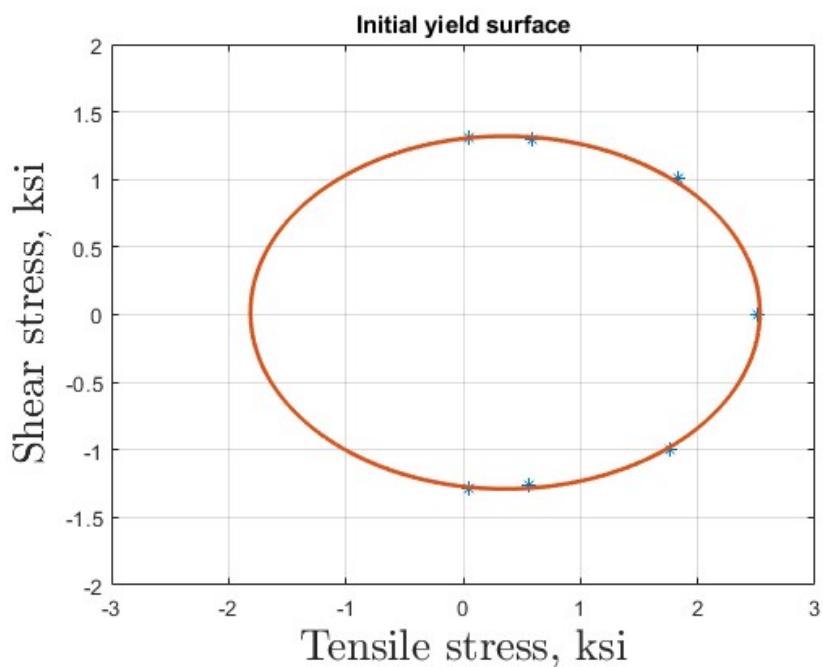


Figure 4.3: 極限狀態下軸向應力之初始降伏面

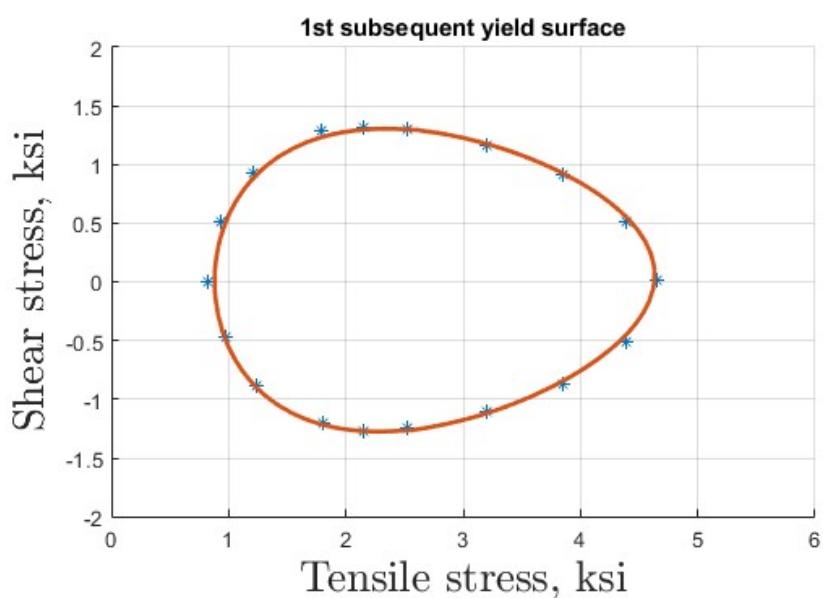


Figure 4.4: 極限狀態下軸向應力之第一接續降伏面

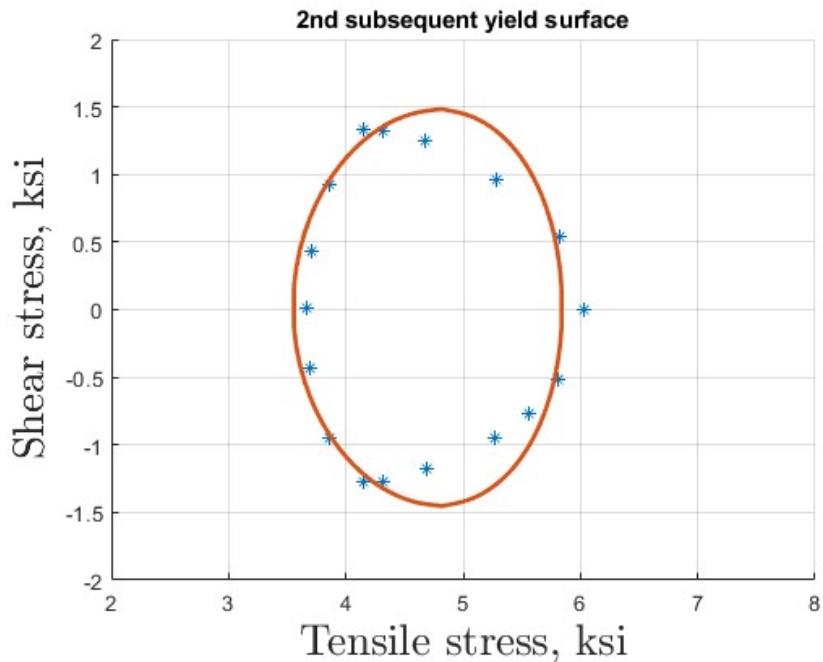


Figure 4.5: 極限狀態下軸向應力之第二接續降伏面

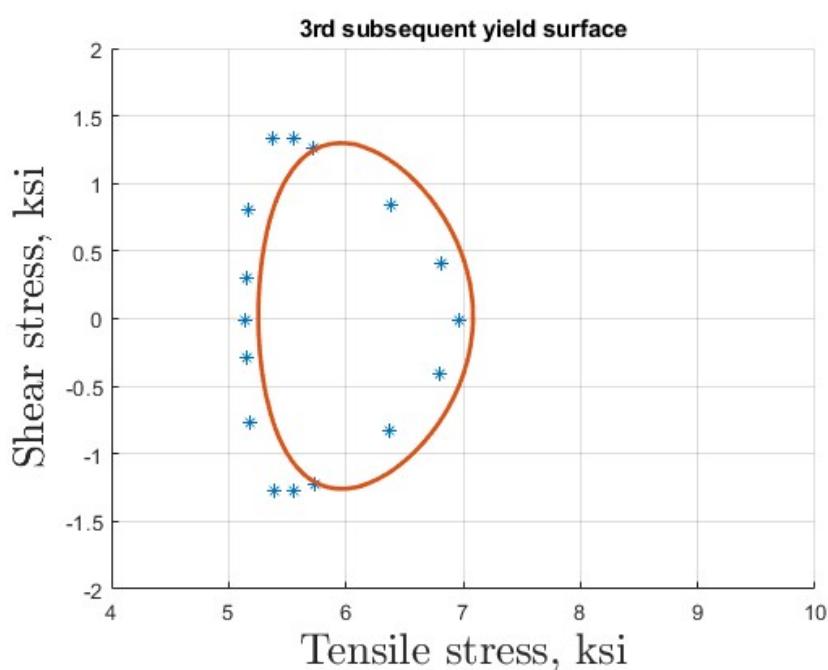


Figure 4.6: 極限狀態下軸向應力之第三接續降伏面

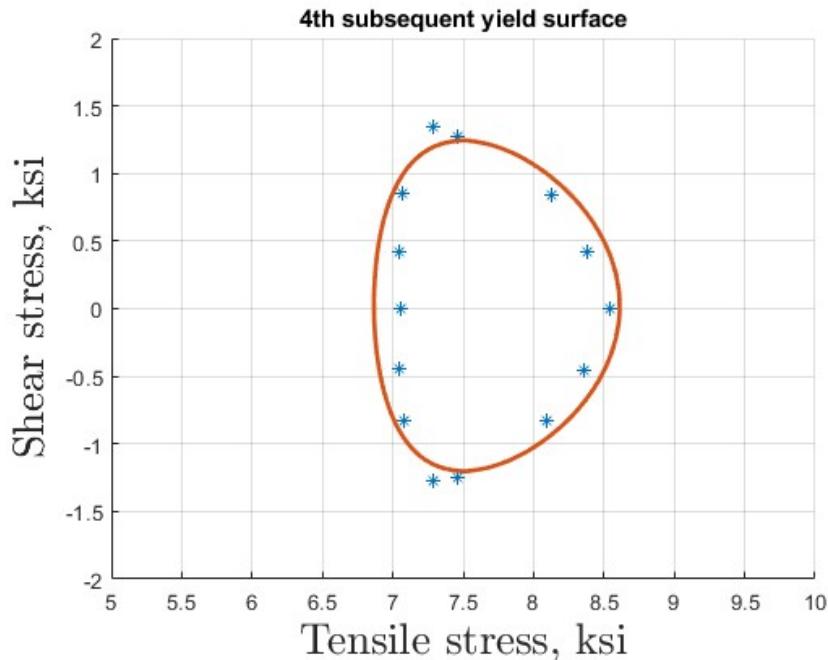


Figure 4.7: 極限狀態下軸向應力之第四接續降伏面

4.2 常溫下零值狀態

在本章節中，將討論降伏面的歪扭情形和特性，而其外在因素將與 4.1 節相同，例如應力路徑、溫度等。此處所提到的零值狀態指的是在第 3 章中定義的基本模型方程式。透過對該定義方程式進行推導和擬合，我們可以繪製出相對應的降伏面，從而觀察降伏面的演化，這些圖將在本小節中進行討論。

4.2.1 參數分析

在 3.1.3 中，我們推導出了零值狀態下的閉合正解，這使我們能夠了解材料在外力作用下所產生的行為，從而完全掌握塑性變形等重要數據，使得在設計建築或其他結構時能更快速且精確。

在本章節中，本研究將對通過最佳化擬合得到的零值狀態下的閉合正解參數進行分析。擬合得到的參數結果可以在表 4.3 中看到。將表 4.3 中的參數輸入閉合正



解中，接著輸入預應力以計算材料的應力狀態，其中預應力可以是軸向應力或扭向應力。在進行最佳化擬合時，只輸入這兩個方向的應力作為座標軸。同樣地，如果以環向應力和軸向應力作為最佳化擬合的依據，則只能輸入這兩種應力。當然，如果進行以軸向、扭向和環向應力為基礎的最佳化擬合，便可以輸入三種應力，從而得到三維的降伏超曲面。綜上所述，本研究推導出的閉合正解不受維度限制，而在本研究中將會著重於探討二維降伏面也就是以軸、扭向應力為座標軸的演化圖背後的意義以及合理性。

表4.3中的E和G值是沿用自表4.1，並未再進行擬合。這是因為本研究認為材料是同一種，基於此觀點，我們將定義方程式分為兩種狀態，並求得最終的降伏面演化圖。若E和G在不同狀態下各自進行擬合，將會受到更多外在因素的影響，對於精確性的比對將具有不確定性。因此，我們決定在零值狀態和極限狀態中都使用相同的E和G值。

首先觀察 R_{∞}^l 和 R_{∞}^s 兩個參數，它們分別代表大小圓的邊界條件中的半徑大小。當大小圓的半徑隨著預應力施加而膨脹時，其膨脹的極限不應超過 R_{∞}^l 和 R_{∞}^s ；而當大小圓的半徑隨著預應力施加而縮小時，其縮小的極限則為 R_{∞}^l 和 R_{∞}^s 。透過以上兩種情況，搭配表4.3和表4.4，我們可以觀察到當預應力逐漸增加時，大小圓的半徑會縮小，且縮小的程度逐漸減少，最終趨近於一個定值。這個定值並未超過 R_{∞}^l 和 R_{∞}^s ，這種情況下初步證明了最佳化擬合參數的合理性。

接著觀察表4.3中的 r^l 和 r^s 參數，它們分別代表大小圓的混合性質，可能包括走動-等向硬軟化或純走動硬化等性質之一。這些性質是本研究模型同時考慮的，但具體材料所具備的性質需透過最佳化擬合 r^l 和 r^s 來確定。從表4.3可以觀察到 r^l 和 r^s 均為負值，這表示材料具有走動-等向軟化的混合性質。此外，從表4.4中可以觀察到隨著應力的施加，大小圓的半徑 R^l 和 R^s 逐漸縮小，這進一步



驗證了最佳化擬合所得參數的合理性。

E	R_{∞}^l	R_{∞}^s	r_{∞}^l	r_{∞}^s
10845	0.7521	0.4177	-8.5995	-15.6683
G	k_p^l	k_p^s	η^l	η^s
4077	65268	559724	11.6377	26.4252

Table 4.3: 零值狀態下的閉合正解參數

Prestress	σ_b^l	σ_b^s	σ_b	R^l	R^s
(0.050,0)	(0.3578,0.0158)	(0.3578,0.0158)	(0.3578,0.0158)	2.1717	1.3048
(5.507,0)	(2.7259,0.0171)	(2.3952,0.0185)	(2.4123,0.0181)	1.8852	1.2459
(6.742,0)	(4.3669,0.0176)	(4.8355,0.0195)	(4.3879,0.0189)	1.3856	1.1520
(7.625,0)	(5.5952,0.0189)	(6.0085,0.0215)	(5.6095,0.0210)	1.3286	0.9233
(9.213,0)	(7.2277,0.0213)	(7.7264,0.0232)	(7.2864,0.0222)	1.2903	0.7754

Table 4.4: 零值狀態下的大小圓數據

4.2.2 演化結果

本節將探討非線性材料在純軸向應力施加、先施加軸向應力再施加扭向應力以及軸扭應力同時施加的情況下的塑性行為，即降伏面的歪扭 (distortion) 現象。圖4.11、圖4.12、圖4.13、圖4.14、圖4.15代表施加軸向應力於非線性材料上時降伏面的演化圖；圖4.11、圖4.17、圖4.18、圖4.19則代表先施加軸向應力使降伏面進入塑性狀態，再施加扭向應力使其沿著應力施加方向繼續演化的降伏面演化圖。先施加軸向應力再施加扭向應力的目的在於觀察本研究模型所推導的閉合正解是否能準確預測降伏面的演化情況。預測結果將與實驗數據進行比對以確定準確性。

接下來，我們將從圖4.11、圖4.12、圖4.13、圖4.14、圖4.15進一步探討材料的性質層面。觀察到當預應力只施加在軸向並且無增加任何扭向應力時，降伏面逐漸沿著軸向方向移動，並且第一個接續降伏面已呈現歪扭 (distortion) 現象，同



時可以注意到扭向應力的座標並無任何的增加。這證明了本研究模型中計算大小圓和降伏面中心的閉合正解具有高度精確性，同時能夠展現複雜的降伏面歪扭行為。綜上所述，透過降伏面演化圖，我們確認本研究模型能有效表現降伏面的硬軟化特性。在應力輸入後，降伏面能隨著預應力施加方向上的反方向移動或者在相同方向上移動。此外，在表4.4中，我們也觀察到隨著預應力施加，大小圓的半徑逐漸縮小，使得降伏面整體也呈現縮小的趨勢。這進一步確認了本研究模型推導出的閉合正解在計算大小圓的半徑方面具有足夠的正確性，意味著本研究模型能夠表達等向硬軟化性質 (isotropic hardening and softening)。綜上所述，本模型具備上述性質，而材料受力後降伏面的移動和縮放則取決於材料的特性，呈現出適應性的變化。

關於降伏面的性質，從圖4.12可以進一步觀察到，當預應力施加時，降伏面會呈現凸性 (convexity) 的特徵。這表示在應力施加方向上，降伏面會凸出形成凸點，而在反方向上則會變得平緩。舉例來說，在圖4.12中，當材料承受軸向應力時，降伏面會朝軸向方向凸起；而當材料受到扭向應力，如圖4.13所示，降伏面則會向扭向方向凸起。這些圖例清楚地顯示本研究模型也能夠擬合出這種特性，進一步證明閉合正解具有足夠的精確度。

接下來，從精度的角度來進行探討，本研究將直接比較極限狀態與模型預測之間的精度。從下圖4.8、4.9、4.10可以清楚觀察到，在精度比較方面，以零值狀態的擬合較為準確。這表示透過在零值狀態下推導的閉合正解能夠獲得較高的精度。因此，在本研究中，我們將選擇零值狀態下的閉合正解來呈現隨溫度變化的降伏面演化圖，相關結果將會在 4.3.2 章節中呈現。

在零值狀態與極限狀態的比較中，以零值狀態下的閉合正解所擬合出的降伏面更為精確。本研究認為這是基於狀態假設的原因，我們將以主動應力和回應力

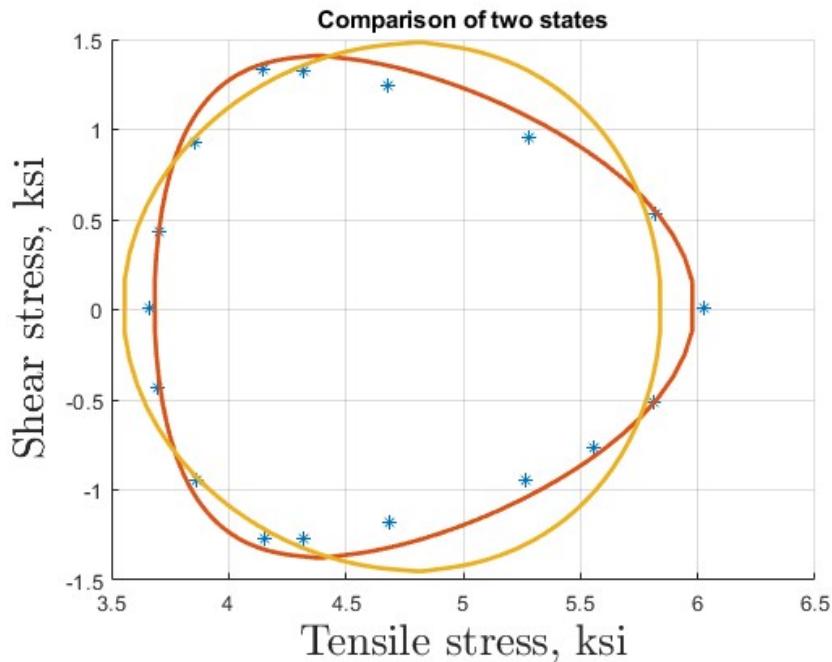


Figure 4.8: 極限與零值狀態的第二接續降伏面比較

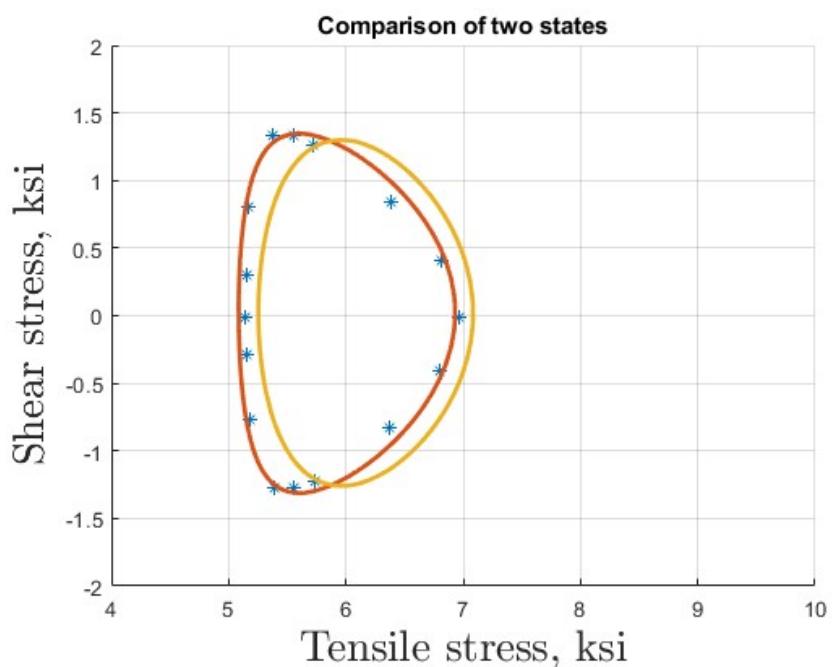


Figure 4.9: 極限與零值狀態的第三接續降伏面比較

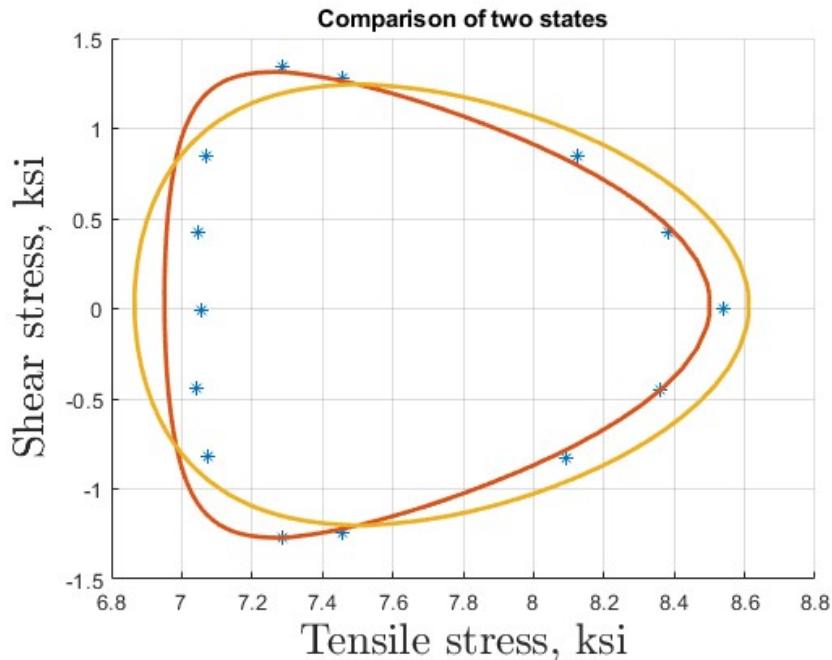


Figure 4.10: 極限與零值狀態的第四接續降伏面比較

兩個方面來分別討論零值狀態以及極限狀態。

首先，基於最初的基本模型定義方程式的假設，我們假設零值狀態下材料沒有受到任何會使其進入塑性狀態的外力，即沒有殘留應變。在這種情況下，當材料未受到應力時，定義方程式中控制主動應力的部分不受大小圓半徑的影響；而回應力則與材料的回復係數有關，當回復係數趨近於無限時，回應力部分不受剪切模數或等價塑性應變率等因素的影響。綜上所述，我們可以得出結論，本研究中的基本模型定義方程式4.1在特定情況下可以轉化為方程式4.2的形式，反之亦然，這證明了我們所推導出的公式是廣義的。在零值狀態下的廣義性公式在定義上表示材料尚未受到任何導致降伏的力，本研究認為這一定義更符合現實情況。

$$\dot{\mathbf{s}}^\alpha = \frac{R^\alpha(0)}{R^\alpha} \dot{\mathbf{s}}_a^\alpha + \dot{\mathbf{s}}_b^\alpha + \frac{k_p^\alpha \dot{\lambda}^\alpha}{\eta^\alpha} \mathbf{s}_b^\alpha \quad (4.1)$$

$$\dot{\mathbf{s}}^\alpha = \dot{\mathbf{s}}_a^\alpha + \dot{\mathbf{s}}_b^\alpha \quad (4.2)$$



接下來討論極限狀態，首先探討定義方程式中的主動應力部分。在極限狀態中關於主動應力部分的定義是指材料需要承受足夠的應力，使得大小圓的半徑趨近於 R_∞^α ，此時模型定義方程式中的主動應力不受大小圓半徑的影響；而回應力部分與零值狀態下的回應力相同，在材料的回復係數趨近於無限時，定義方程式將轉化為方程式4.4，這部分的概念與前述的零值狀態相一致。根據上述內容，我們認為極限狀態下的基本模型定義方程式在理論上是可以推導出閉合正解的。然而，從定義上來看，也就是必須施加外力使得大小圓的半徑趨近於 R_∞^α 的部分相較於零值狀態較不合理。因此，本研究選擇從零值狀態繼續推導並呈現降伏面的演化情況。

$$\dot{\mathbf{s}}^\alpha = \frac{R_\infty^\alpha}{R^\alpha} \dot{\mathbf{s}}_a^\alpha + \dot{\mathbf{s}}_b^\alpha + \frac{k_p^\alpha \dot{\lambda}^\alpha}{\eta^\alpha} \mathbf{s}_b^\alpha \quad (4.3)$$

$$\dot{\mathbf{s}}^\alpha = \dot{\mathbf{s}}_a^\alpha + \dot{\mathbf{s}}_b^\alpha \quad (4.4)$$

最後，我們將討論本研究模型中所推導出的閉合正解的應用。正如前文所述，我們比較了零值狀態和極限狀態下閉合正解所呈現的降伏面，發現前者更為精確且更貼近實際情況，因此選擇將零值狀態作為本研究模型的定義方程式狀態，以便後續呈現溫度變化下的降伏面演化圖。透過我們所推導出的閉合正解，可以快速繪製出任意降伏面。在本研究中，無論是軸向應力還是扭向應力或者軸扭向應力同時的輸入，都能呈現對應的降伏面。通過視覺化的降伏面，觀察者可以清晰地了解材料目前的降伏狀態和等價塑性應變率等，這對於掌握材料的塑性行為至關重要。我們的模型不僅可以快速獲得材料的狀態，避免了依賴實驗來評估材料狀態的需要，而且在精度上能夠提供一定的保證，以避免過大的偏差。因此，本研究的目標是推導出更優良的閉合正解，以實現更快速、更精確地繪製降伏面的

能力。

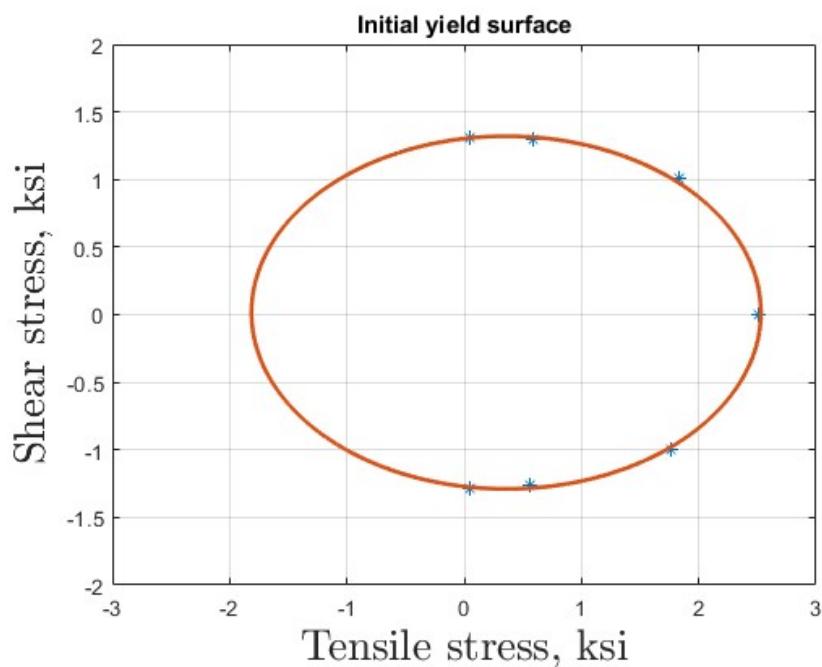
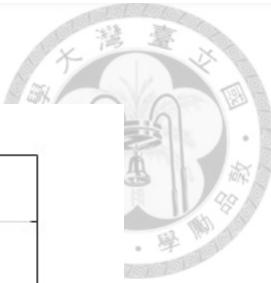


Figure 4.11: 零值狀態下軸向應力之初始降伏面

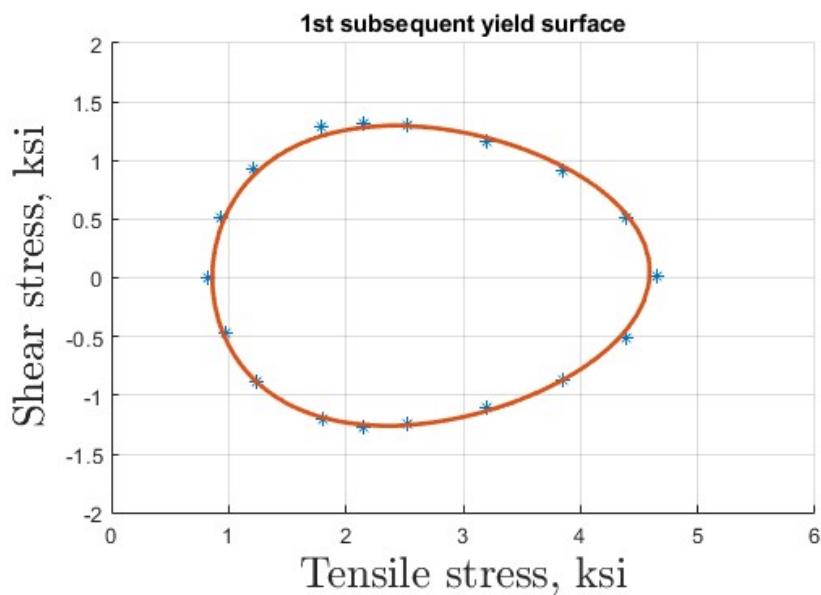


Figure 4.12: 零值狀態下軸向應力之第一接續降伏面

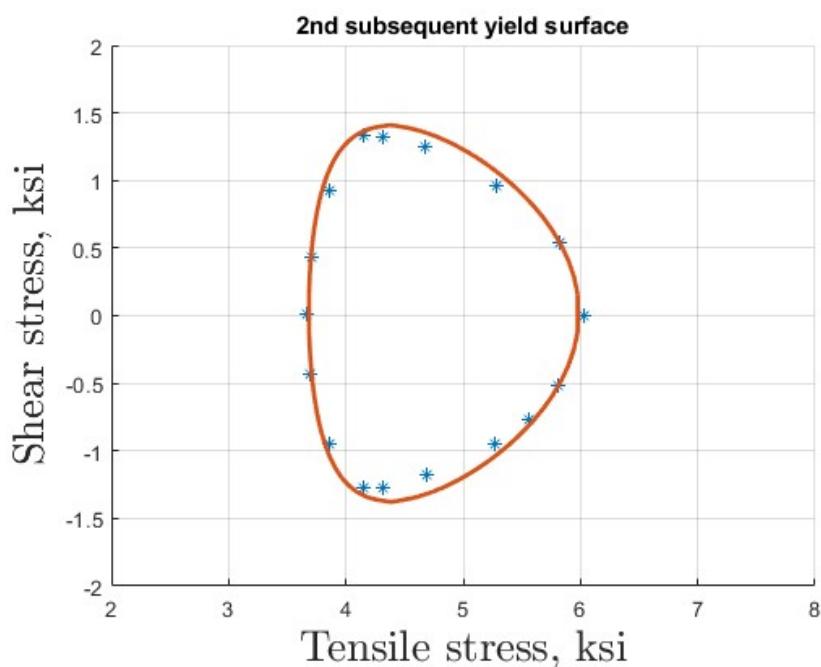


Figure 4.13: 零值狀態下軸向應力之第二接續降伏面

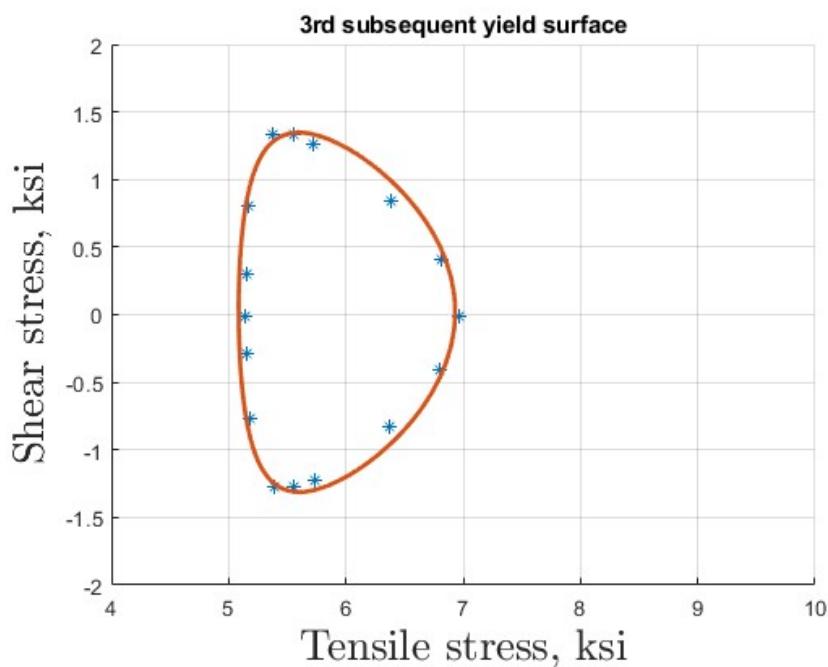


Figure 4.14: 零值狀態下軸向應力之第三接續降伏面

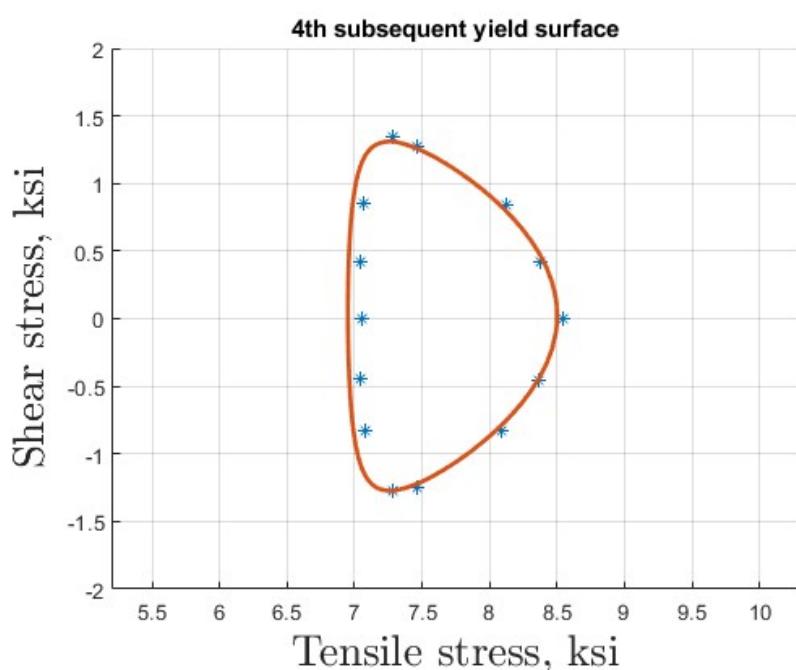


Figure 4.15: 零值狀態下軸向應力之第四接續降伏面

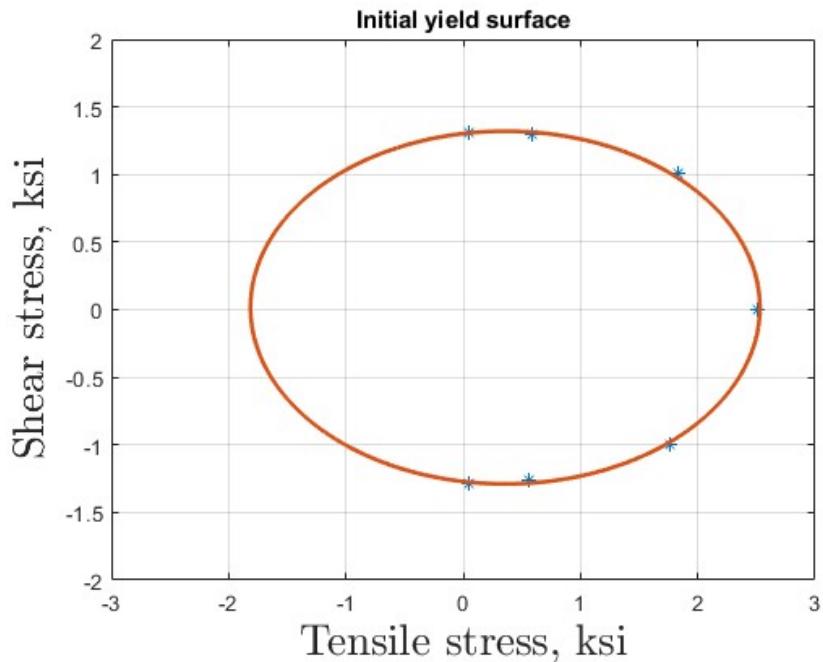


Figure 4.16: 零值狀態下軸向應力後扭向應力之初始降伏面

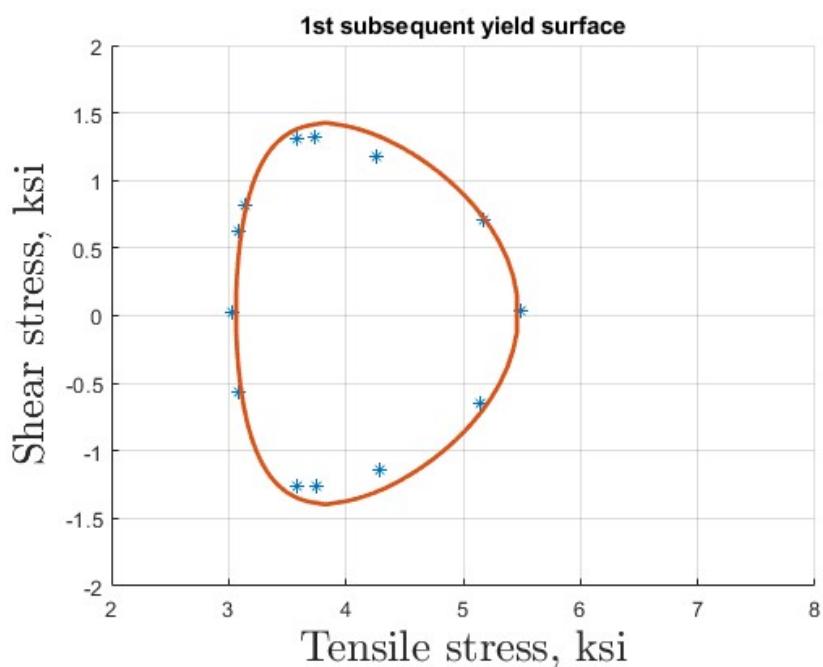


Figure 4.17: 零值狀態下軸向應力後扭向應力之第一接續降伏面

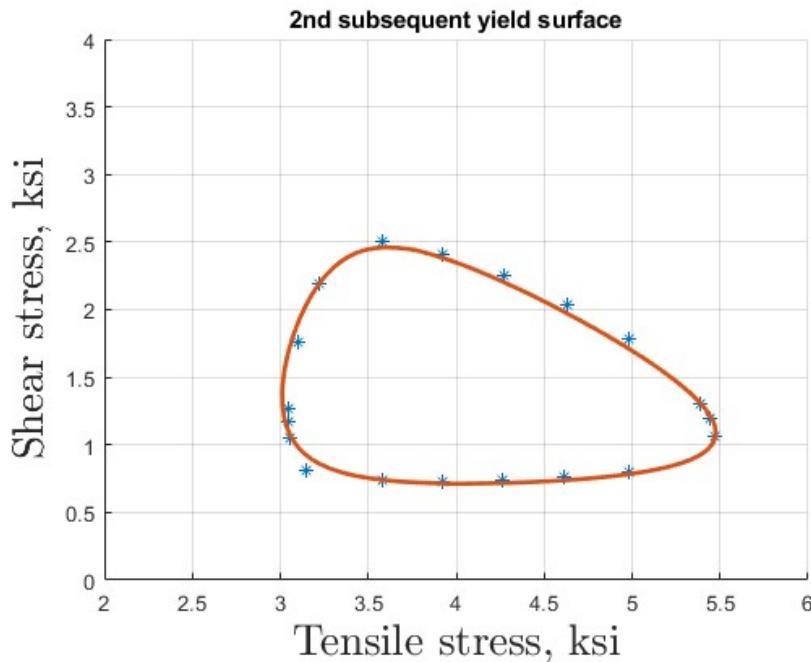


Figure 4.18: 零值狀態下軸向應力後扭向應力之路徑之第二接續降伏面

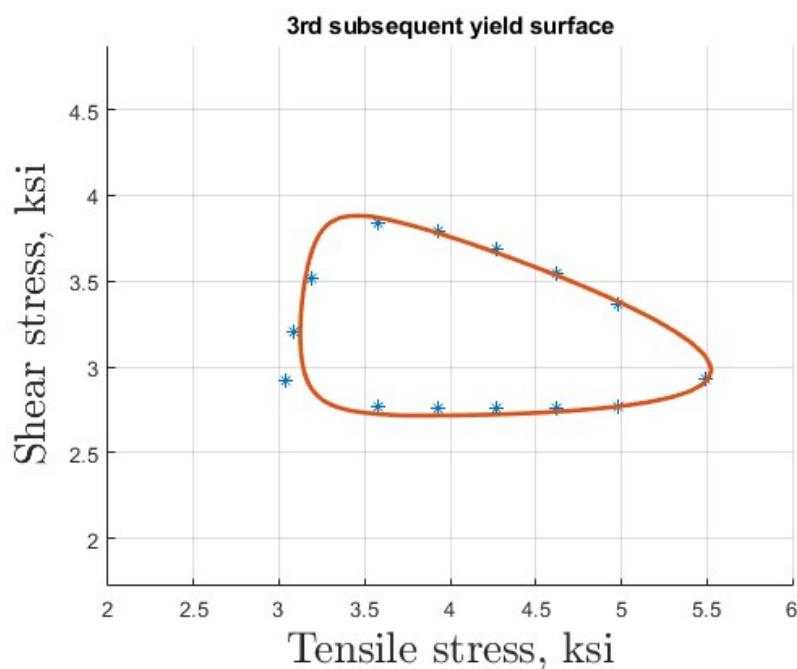


Figure 4.19: 零值狀態下軸向應力後扭向應力之路徑之第三接續降伏面



4.3 溫度變化下的零值狀態

在 4.1.2 以及 4.2.2 的降伏面演化圖中，可以觀察到兩者在與數據的貼合度上，基於零值狀態下得到的降伏面呈現較高的精度。因此，在本章節中，我們選擇基於零值狀態下的定義方程式來擬合不同溫度下的降伏面演化圖，並觀察結果是否具有一定的精度且能呈現降伏面的特性。這裡所提到的外在控制因素與 4.1 節相同，包括應力路徑和材料等，基本模型定義方程式則與 4.2 節相同。外在控制因素上唯一與前兩節不同的是溫度，在本研究中，在應力路徑的每個應力施加步驟中，我們同時改變溫度。溫度的變化範圍從 $70^{\circ}F$ 逐漸升高到 $151^{\circ}F$ 、 $227^{\circ}F$ 和 $267^{\circ}F$ 。

4.3.1 參數分析

本節將根據不同的溫度，呈現相應的數據表。當外部環境溫度為 $70^{\circ}F$ 時，相關參數見於表 4.3。隨著溫度逐漸升高至 $151^{\circ}F$ 、 $227^{\circ}F$ 甚至 $267^{\circ}F$ ，這些參數將發生相應的變化，詳細參數見於表 4.5、4.7 和 4.9。溫度作為一個外部控制因素的變化將導致楊氏模數、剪切模數和回復係數等參數的變化。因此，本研究將通過不同溫度下的實驗數據，擬合出相對應的降伏面，並觀察所呈現的降伏面演化圖與實驗數據的貼合程度，以驗證本研究模型所推導的閉合正解在計算材料塑性行為方面的精度是否足夠。

首先，我們將討論在升溫過程中鋁的楊氏模數和剪切模數的變化。圖 4.20、圖 4.21 參考自文獻 [14]，該圖顯示了隨著溫度升高，楊氏模數和剪切模數呈現近似線性的減小趨勢。在本研究中，我們選擇直接使用圖中的數值作為參考，而不是通過實驗數據來擬合這兩個參數。這是因為材料的楊氏模數和剪切模數通常具



有確定的值，所以我們選擇直接使用鋁 1100 的楊氏模數和剪切模數，以使用最少的參數獲得降伏面的演化圖。

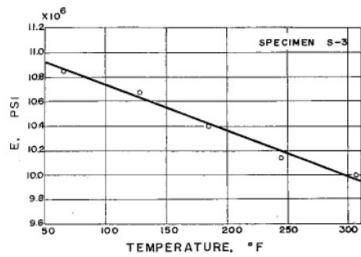


Figure 4.20: 楊氏模數

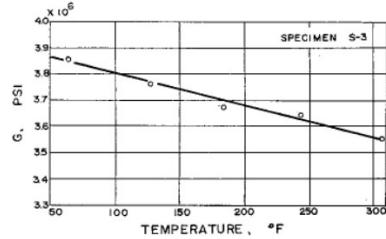


Figure 4.21: 剪切模數

接下來，我們進一步觀察表4.3、4.5、4.7和4.9中 R_{∞}^l 和 R_{∞}^s 的趨勢。根據觀察，隨著溫度升高， R_{∞}^l 和 R_{∞}^s 逐漸縮小，呈現接近零的趨勢，即降伏面逐漸縮小，最後消失。此外，根據文獻探討，當溫度升高到 305°F 時，降伏驗證實驗已無法檢測到材料的降伏面，這進一步驗證了我們的觀察結果，並確認了通過最佳化擬合得到的閉合正解參數的合理性。

我們也可以從另一個角度來確認這一點。隨著溫度的升高， R_{∞}^l 和 R_{∞}^s 的縮小使得相應的大小圓半徑 R^l 和 R^s 也呈現縮小的趨勢，從而使降伏面的大小縮小。這意味著材料承受的應力範圍在加熱後變得不如零值狀態下的材料。在現實中，當材料受到溫度升高的影響時，材料會出現軟化現象，其所能承受的容許應力也會逐漸下降。這與我們在參數變化中觀察到的趨勢一致，進一步證明了表中參數的合理性。

從表4.3、4.5、4.7和4.9中我們也可以觀察到 r_{∞}^l 和 r_{∞}^s 的變化，這兩個參數隨著溫度上升呈現下降的趨勢，逐漸趨近於負無窮，在本模型中這種現象表示材料的軟化現象更加明顯。與實際情況對比，當材料經受加熱時確實會出現軟化，從而降低材料所能承受的應力。因此，這進一步證明了在控制硬軟化因子方面的參數擬合結果是符合現實情況的。

接著，我們討論表4.3、4.5、4.7和4.9中 k_p^l 和 k_p^s 的變化，這兩個參數代表大小圓的剪切模數。可從圖4.22、4.23隨著溫度逐步增加，大小圓的剪切模數持續下降，這觀察結果與材料剪切模數在升溫後的變化趨勢相一致。因此，對於 k_p^l 和 k_p^s 的擬合結果具有一定的可靠性。

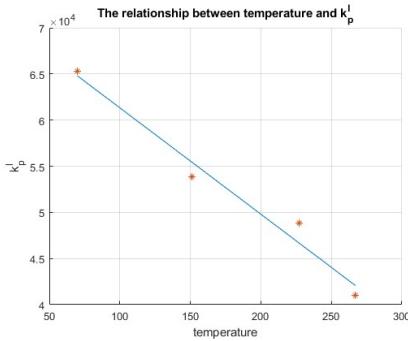


Figure 4.22: 溫度與 k_p^l 的關係圖

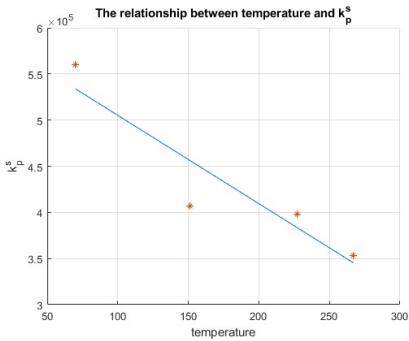


Figure 4.23: 溫度與 k_p^s 的關係圖

最後觀察到 η_p^l 和 η_p^s 兩參數，從圖4.24、4.25可以發現大小圓的恢復因子 η_p^l 和 η_p^s 隨著溫度上升呈現減少的趨勢。在實際情況中，材料的黏彈性恢復能力隨著外部環境的加溫逐漸降低，意味著在受到外力應力後，加溫後的材料無法完全回復到原本的形狀。換句話說，加溫後，材料所受到的外力造成的殘餘變形較多。綜上所述， η_p^l 和 η_p^s 的參數擬合結果符合實際情況。

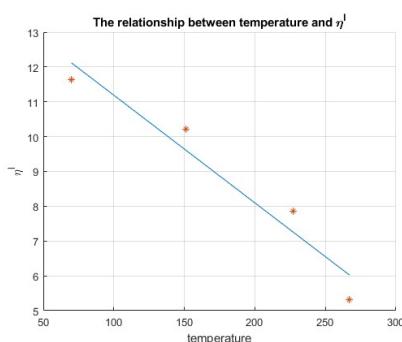


Figure 4.24: 溫度與 η_p^l 的關係圖

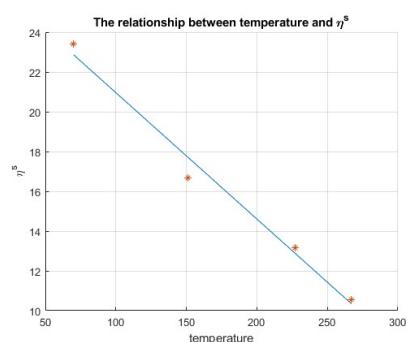


Figure 4.25: 溫度與 η_p^s 的關係圖

E	R_{∞}^l	R_{∞}^s	r_{∞}^l	r_{∞}^s
10526	0.5146	0.3503	-11.6802	-18.8306
G	k_p^l	k_p^s	η^l	η^s
3957	53885	407189	10.2215	16.6686

Table 4.5: 零值狀態下，溫度為 151°F 的閉合正解參數

Prestress	σ_b^l	σ_b^s	σ_b	R^l	R^s
(0.050,0)	(0.3578,0.0158)	(0.3578,0.0158)	(0.3578,0.0158)	1.7053	1.1417
(5.507,0)	(2.5224,0.0166)	(2.2247,0.0182)	(2.2458,0.0175)	1.5465	1.0497
(6.742,0)	(4.3078,0.0172)	(4.6121,0.0189)	(4.3145,0.0184)	1.1250	0.8752
(7.625,0)	(5.4262,0.0179)	(5.7945,0.0208)	(5.4511,0.0204)	1.1093	0.6598
(9.213,0)	(7.1682,0.0205)	(7.5594,0.0220)	(7.2202,0.0209)	1.0556	0.4908

Table 4.6: 零值狀態下，溫度為 151°F 的大小圓數據

E	R_{∞}^l	R_{∞}^s	r_{∞}^l	r_{∞}^s
10227	0.3615	0.2381	-17.9214	-27.5025
G	k_p^l	k_p^s	η^l	η^s
3844	48834	398506	7.8491	13.1810

Table 4.7: 零值狀態下，溫度為 227°F 的閉合正解參數

Prestress	σ_b^l	σ_b^s	σ_b	R^l	R^s
(0.050,0)	(0.3578,0.0158)	(0.3578,0.0158)	(0.3578,0.0158)	1.3494	0.9285
(5.507,0)	(2.3387,0.0164)	(2.1035,0.0178)	(2.1287,0.0173)	1.2065	0.8057
(6.742,0)	(4.2059,0.0169)	(4.4173,0.0182)	(4.2542,0.0180)	0.8856	0.6025
(7.625,0)	(5.3318,0.0175)	(5.6138,0.0196)	(5.3610,0.0191)	0.8550	0.4283
(9.213,0)	(7.1124,0.0192)	(7.4042,0.0216)	(7.1811,0.0203)	0.8153	0.2834

Table 4.8: 零值狀態下，溫度為 227°F 的大小圓數據

E	R_{∞}^l	R_{∞}^s	r_{∞}^l	r_{∞}^s
10069	0.2771	0.1535	-20.9339	-27.5025
G	k_p^l	k_p^s	η^l	η^s
3785	41003	353641	5.3040	10.5451

Table 4.9: 零值狀態下，溫度為 267°F 的閉合正解參數

Prestress	σ_b^l	σ_b^s	σ_b	R^l	R^s
(0.050,0)	(0.3578,0.0158)	(0.3578,0.0158)	(0.3578,0.0158)	0.9974	0.7224
(5.507,0)	(2.2017,0.0161)	(2.0455,0.0175)	(2.0663,0.0169)	0.9058	0.5867
(6.742,0)	(4.0053,0.0165)	(4.2469,0.0180)	(4.2105,0.0178)	0.7021	0.3588
(7.625,0)	(5.2819,0.0172)	(5.5485,0.0189)	(5.3199,0.0185)	0.6613	0.2958
(9.213,0)	(7.1034,0.0183)	(7.3554,0.0200)	(7.1756,0.0195)	0.6465	0.2056

Table 4.10: 零值狀態下，溫度為 267°F 的大小圓數據

4.3.2 演化結果

本章將討論由零值狀態下模型定義方程式所推導出的閉合正解，用於描述非線性材料的塑性行為。模型定義方程式考慮了外部應力控制因子和溫度控制因子的影響。我們將重點討論在這兩種控制因子下非線性材料所產生的塑性行為，即降伏面的演化圖。同時，我們將與實驗數據進行比對，以確保擬合出的結果具有一定的精度。

圖4.26、4.27、4.28、4.29、4.30則是呈現以零值狀態下的閉合正解所畫出的降伏面演化圖，代表了施加軸向應力的同時也改變了溫度。當施加一軸向應力時，溫度逐步從 70°F 升到 151°F 、 227°F 直至 267°F ，而每一個溫度皆會有相對應的降伏面。我們將藉由這些視覺化的降伏面圖觀察在溫度以及外力同時改變下非線性材料的行為。同時，我們也需要驗證閉合正解的正確性，並使用實驗數據進行驗證。

接著，我們將從圖4.26、4.27、4.28、4.29、4.30來討論本模型中定義方程式



賦予材料的特性。首先觀察到從初始降伏面所代表的橢圓形在受到外部應力後變形為第一接續降伏面中的非規則閉合圖形，即降伏面的歪扭 (distortion) 現象。同時需要注意的是，這種現象不僅發生在常溫下的材料，當溫度升高時，閉合正解所呈現的降伏面同樣會出現歪扭現象。這證實了本研究模型中的定義方程式在考慮溫度變化和應力施加的相互作用下，能夠以一定的精度呈現出降伏面，從而確保本研究模型在描述材料特性方面的可靠性。

降伏面的扭曲行為是一種相當複雜的材料塑性現象，其中涉及多種塑性特性，如走動硬軟化 (kinematic hardening and softening)。走動硬軟化特性在降伏面概念中以降伏面中心的移動方式呈現。從圖4.26轉變為圖4.27時，可以清楚地觀察到降伏面中心向著軸向應力施加的方向移動，這展示了運動硬化特性。此外，從圖4.27可以觀察到，當溫度升高時，降伏面中心會出現遠離軸向應力施加方向的現象，這代表了有動軟化特性。綜合以上所述，圖中確實展示了走動硬軟化特性，無論是外部應力施加還是材料溫度變化，這種特性都存在。這證明了本模型對於材料彈塑性特性的定義是合理的，而降伏面的移動幅度取決於實驗數據，也就是取決於材料本身的特性。

從實際角度來看，當外部軸向應力作用於材料時，材料在降伏後仍能夠承受更高的應力，而反向降伏所需的應力則明顯小於一開始使材料降伏所需的應力，這與我們在降伏面演化圖中觀察到的性質相符合。隨著材料本身溫度的變化，材料所能承受的應力會下降，這意味著相較於在常溫下，施加較少的應力即能產生更多的塑性變形。這一現象在降伏面演化圖中同樣可觀察到相同的性質。因此，這證實了現實材料特性與閉合正解所隱含的降伏面意義是相一致的，也確認了本研究的基本模型能夠描述材料的走動硬軟化 (kinematic hardening and softening) 行為。



上述討論了降伏面的變形行為是一種相當複雜的材料塑性現象，其中包括了等向硬軟化 (isotropic hardening and softening) 的性質。在降伏面的概念中，等向硬軟化性質會以降伏面的尺寸變化來表示。從圖4.26、4.27、4.28、4.29、4.30可以觀察到，隨著軸向應力的增加，降伏面也相應的發生變化。值得注意的是，在軸向應力施加過程中，降伏面會有縮小的現象，這是等向軟化性質的表現；在溫度變化方面，當溫度升高時，降伏面明顯呈現收縮的趨勢，這同樣體現了等向軟化性質。

從實際角度來看，當外部應力作用於材料時，材料在降伏之後能夠承受較高或較少的應力，這取決於材料本身的特性。假設材料本身的性質使其在降伏後能承受較少的應力，反向加載所需的應力也較少，這與本研究所繪製的降伏面演化圖中觀察到的性質相符，原因在於本研究中的降伏面演化圖所使用的實驗數據來自對材料進行的降伏面探測實驗。因此，這證實了現實材料特性與閉合正解所得的降伏面是相一致的，也確認了本研究的基本模型能夠描述材料的等向硬軟化 (isotropic hardening and softening) 特性。無論材料具有等向軟化或硬化性質，只需將該材料所獲得的降伏面探測數據輸入本研究模型中，並通過最佳化擬合即可找出相對應的降伏面。

接著，從降伏面的演化圖中可以觀察到，除了初始降伏面呈現橢圓形外，其他降伏面呈現不規則的封閉圖形，可以清楚地看出在軸向應力施加的方向上較為突出，而反向則較為平緩，這就是降伏面的凸性 (convexity)，而此性質可以視為走動硬軟化和等向硬軟化性質的混合。上述只提到了應力施加對非線性材料所產生的特性，而從圖4.27、4.28、4.29、4.30中可以觀察到，在材料受溫度控制因子影響時，降伏面依然保持這種凸性，這也符合理論中提到非線性材料所產生的降伏面是具有凸性的情況。非線性材料即使經過升溫，仍然保持其非線性特性，因此其塑性行為必然具有凸性的特點。從而可以確定本研究模型是在闡述降伏面凸



性質的部份是具有足夠的合理性的。

最後以精度層面來探討藉由閉合正解所呈現的降伏面。圖4.26、4.27、4.28、4.29、4.30中藍色的點即為實驗數據點，而溫度有 $70^{\circ}F$ 、 $151^{\circ}F$ 、 $227^{\circ}F$ 、 $267^{\circ}F$ ，不同的材料溫度將會產生不同的降伏面，而本研究將會通過閉合正解將其具象化，藉此來觀察精確度是否足夠。

首先從降伏面演化圖中可以觀察到，在施加軸向應力時，材料會生成連續的降伏面，此時擬合圖與實驗數據之間的差異開始呈現，但最終的連續降伏面與實驗數據的差異仍舊存在，證明會有誤差累積的情況，因此最佳化擬合所使用的數據非常重要。隨著溫度的變化，降伏面的整體尺寸開始縮小，而擬合圖與實驗數據之間的差異較不易觀察出來。根據上述觀察，當兩個控制因子相互影響時，整體與實驗數據之間的差異保持在合理範圍內。關於這種差異，本研究認為有兩個原因：一是在提取實驗數據時無法達到百分之百的精確度；二是即使可以完全地提取實驗數據，實驗本身在降伏點的判斷也存在一定的範圍，而非精確值，因此與實驗數據存在一定的差異是相對合理的。

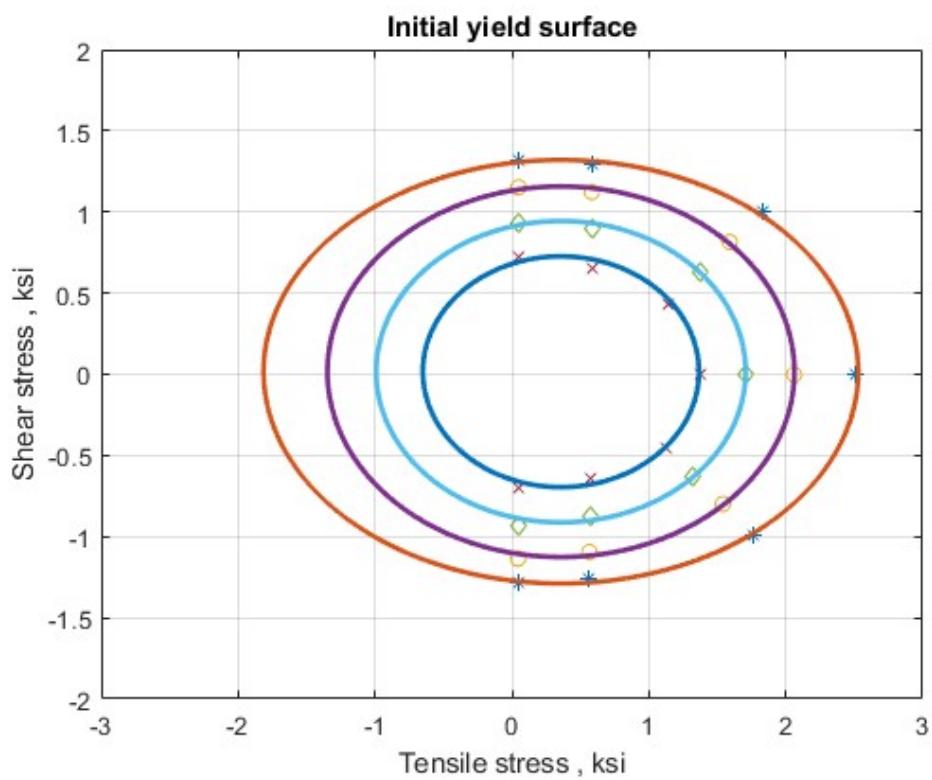


Figure 4.26: 零值狀態且溫度變化下軸向應力之初始降伏面

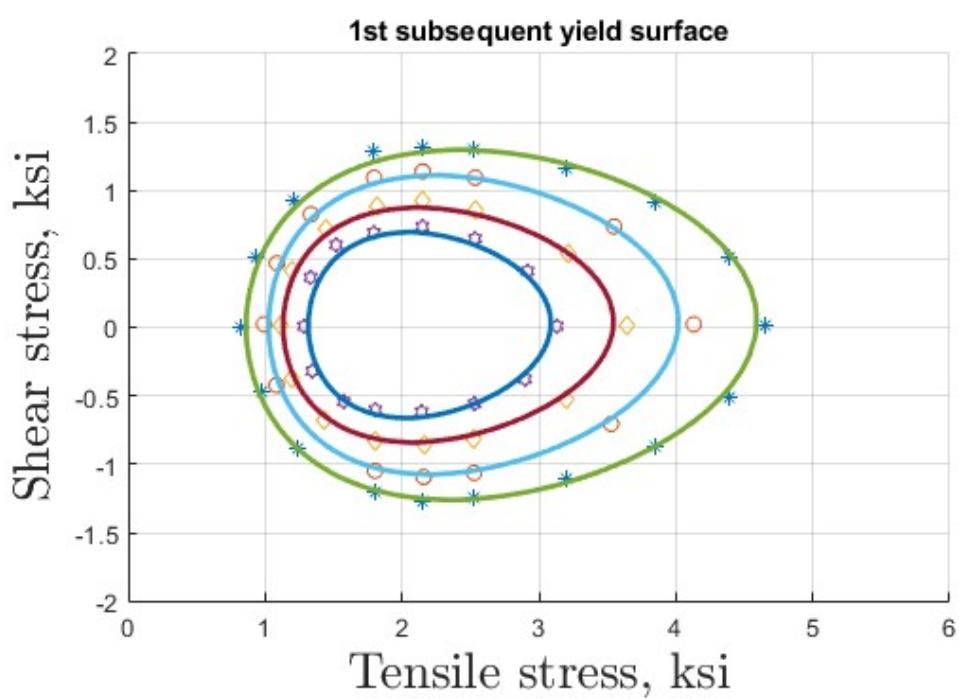


Figure 4.27: 零值狀態且溫度變化下軸向應力之第一接續降伏面

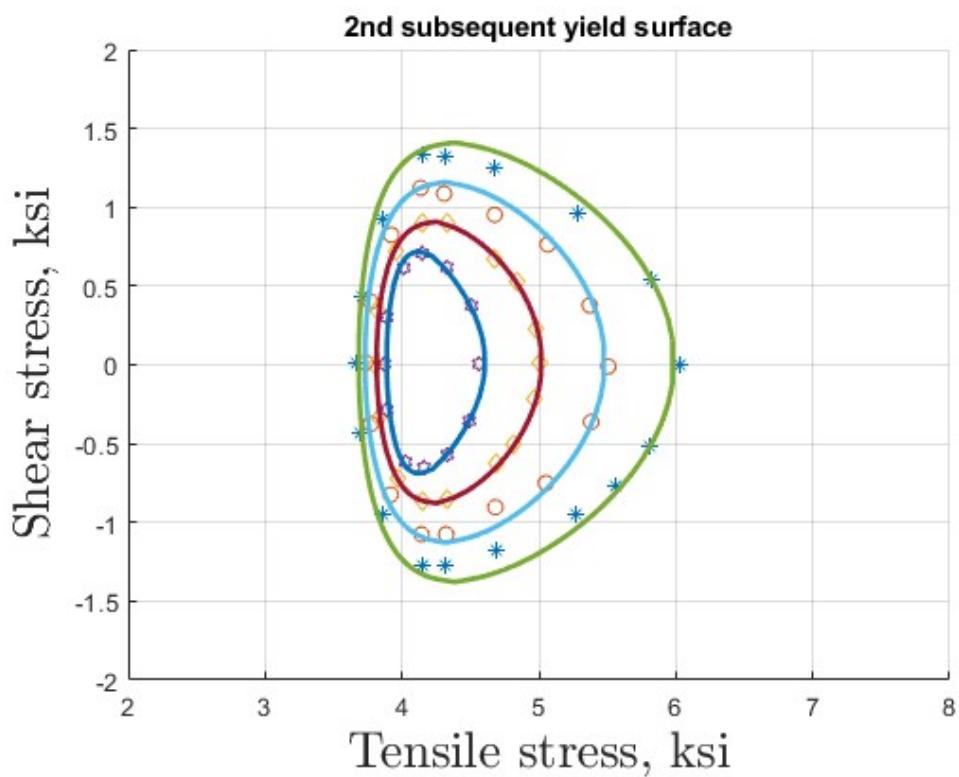


Figure 4.28: 零值狀態且溫度變化下軸向應力之第二接續降伏面

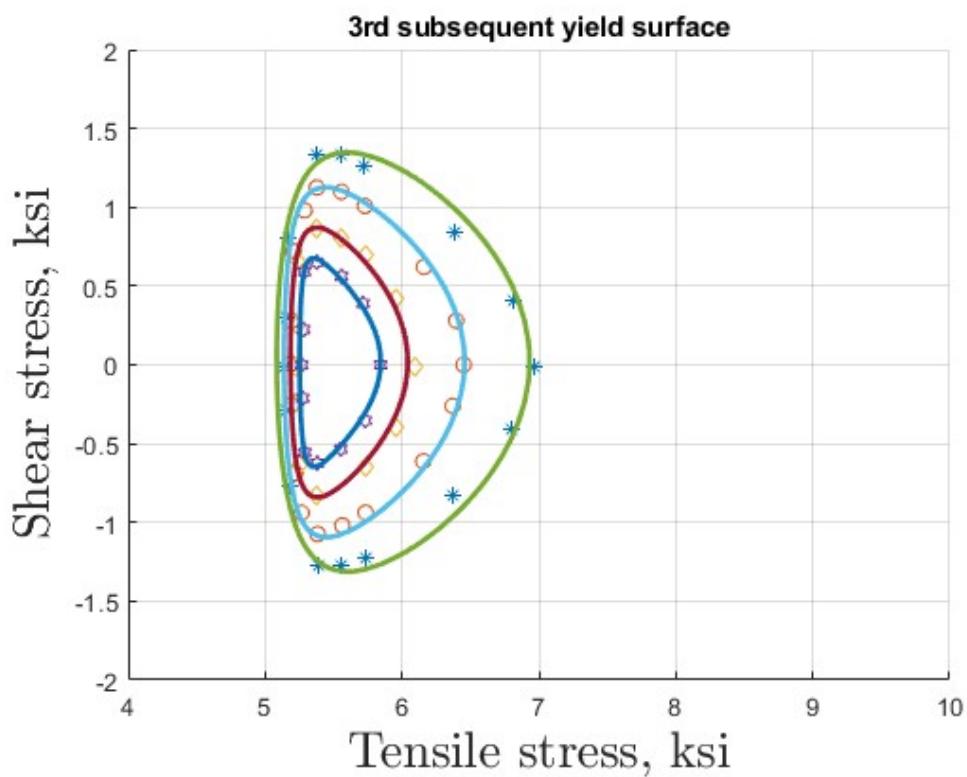


Figure 4.29: 零值狀態且溫度變化下軸向應力之第三接續降伏面

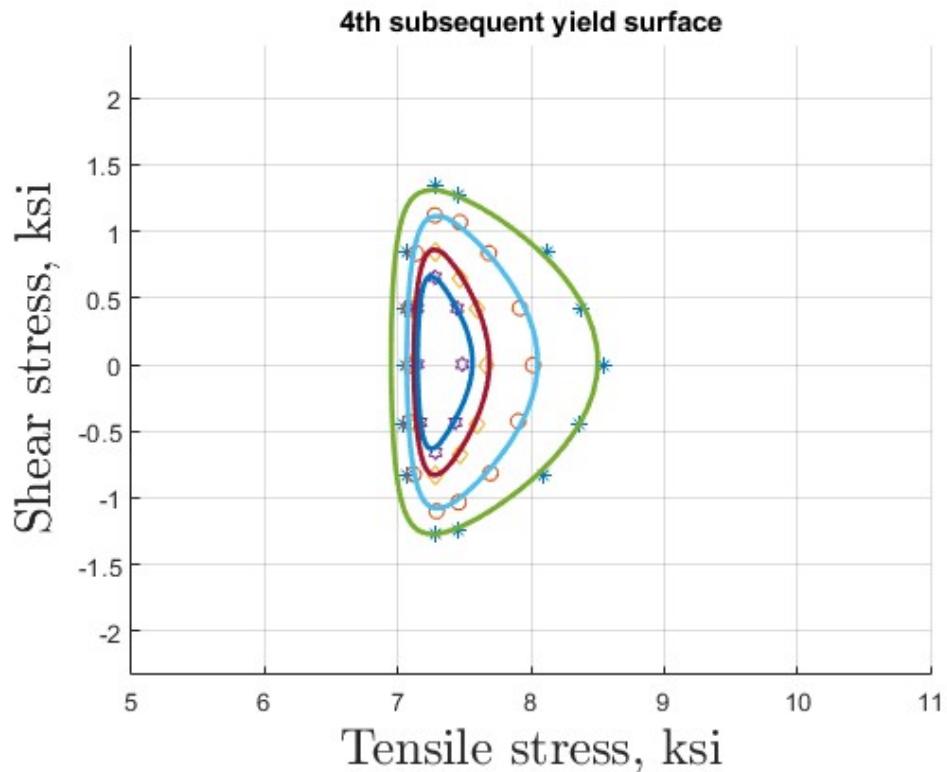


Figure 4.30: 零值狀態且溫度變化下軸向應力之第四接續降伏面

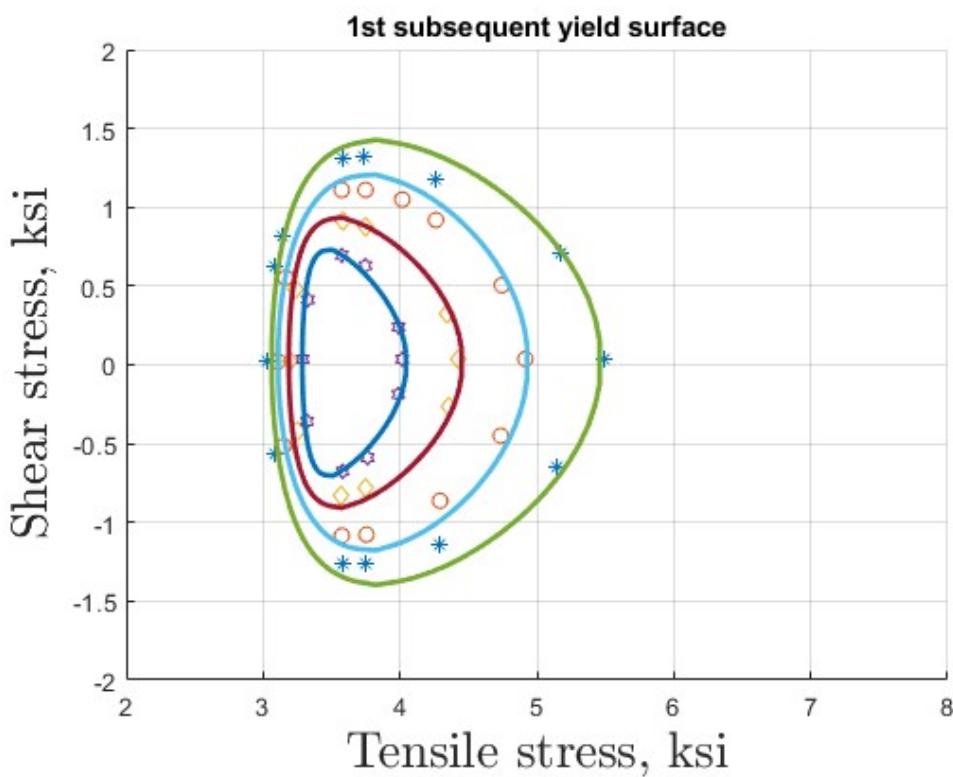


Figure 4.31: 零值狀態且溫度變化下軸扭向應力之第一接續降伏面

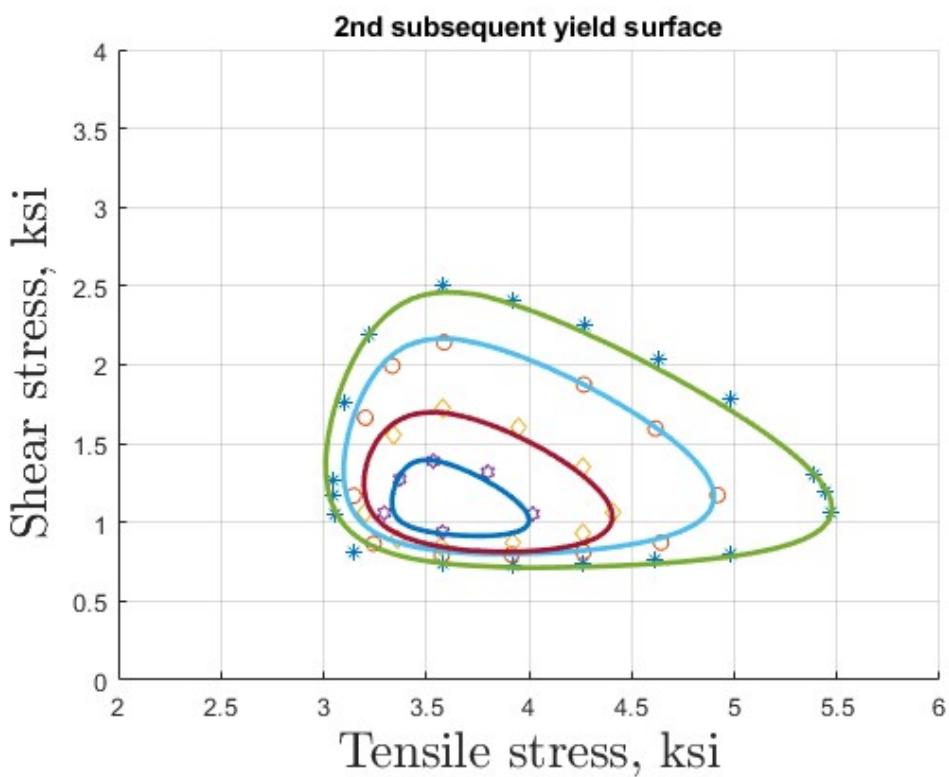


Figure 4.32: 零值狀態且溫度變化下軸扭向應力之第二接續降伏面

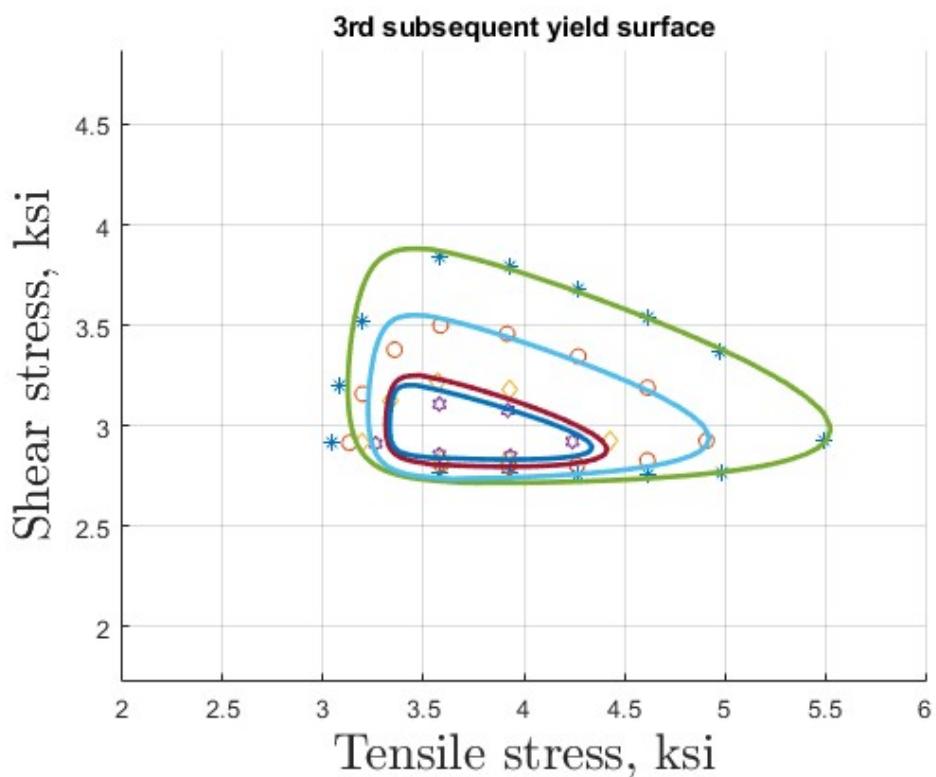


Figure 4.33: 零值狀態且溫度變化下軸扭向應力之第三接續降伏面



4.4 本章小結

在本研究的此章節中，分別呈現了根據極限狀態和零值狀態所擬合出的一組關鍵參數。透過擬合出的參數與輸入的預應力值，本研究能夠將對應的降伏面演化圖視覺化呈現。在分別擬合出這兩種狀態下的降伏面演化圖後，本研究對其進行了比較，從而判斷根據零值狀態推導出的正解所呈現的降伏面在實驗數據擬合方面更為準確。這一判斷也符合本研究的觀點，即材料本身並未受到應力的影響，或者更準確地說，在進行實驗之前材料並未受到能引起塑性變形的外力作用。這一事實與本研究中的零值狀態假設是相一致的。

上述所提及的零值狀態相較於極限狀態，在數據擬合方面更為精準。因此，本研究選擇了零值狀態來觀察在同時受到應力和溫度控制的情況下的變化。換言之，當閉合正解的控制因子從僅應力增加為包括溫度因子時，本研究對於降伏面的擬合是否仍能維持足夠的精度進行了探討。本章節還呈現了在同時受到溫度和預應力影響下的擬合結果，可以觀察到零值狀態在數據擬合方面具有一定的精確性。

本章節中呈現的降伏面演化圖顯示，不論是極限狀態或零值狀態，都能夠呈現出降伏面具有非線性材料特性，例如包興格效應、走動硬軟化和等向硬軟化等性質。這意味著本研究模型能夠準確描述非線性材料的性質，同時證明了本研究模型在擬合材料塑性行為方面的可行性。此外，從溫度的角度來看，降伏面的軟化效應非常明顯。這與現實中材料受熱時承受的應力下降的情況一致，進一步驗證了閉合正解在考慮溫度控制因子時能夠合理擬合降伏面的能力。





第五章 結果與未來展望

5.1 結論

本研究在前述章節中提供了不同狀態下的相應閉合正解描述。其中之一是零值狀態，表示材料在未受任何外部應力時，其控制大小圓半徑的主動應力部分不受其他參數影響；另一個是極限狀態，即材料需要受到足夠的外部應力使其大小圓半徑趨近於定值，此時主動應力的控制大小圓半徑不受其他參數影響。在定義上，零值狀態更符合現實情況，因為建築或其他工程中使用的材料大多沒有受到外力，精確點來說則是材料尚未受到造成其降伏的外力，這與我們所謂的零值狀態的定義相符。然而，我們仍需確定在零值狀態下推導出的閉合正解是否比極限狀態更精確，這就是為何需要有第四章的比較。

本研究通過最佳化擬合，分別對不同狀態下閉合正解所需的關鍵參數進行了擬合。通過將預應力路徑應用於這兩種狀態，本研究成功地視覺化展示了各自降伏面演化的路徑。觀察這兩個演化過程可得知，在擬合實驗數據的準確性方面，零值狀態下推導出的閉合正解具有較高的準確性。這一發現恰好符合我們最初的觀點，即零值狀態更貼合現實情況，尤其是當材料應用於工程中時。

上述討論了準確性層面，接下來探討非線性材料的特性。非線性材料本身具有軟化或硬化的特點，而本研究的目標是驗證本文提出的塑流彈塑性材料模式定



義方程是否能體現這種硬軟化性質。根據結果顯示，閉合正解以降伏面的方式有效展現了材料的硬軟化特性，包括等向硬軟化和移動硬軟化等。這些特性結合起來形成了非線性材料的塑性行為。透過觀察降伏面，我們能夠獲得材料當前的降伏狀態和等價塑性應變率等重要資訊，以便掌握在外部應力施加下材料的應力和應變狀態。當然，本研究模型也包含了完全彈塑性、雙線性等等的應力應變關係，當最佳化所擬合的實驗數據展現出上述所說的特性，本模型便能呈現出相對應的降伏面，也就是能夠掌握其塑性行為等等。

本研究所推導的閉合正解具有快速且精確地獲取降伏面狀況的優點，相對於數值解更能迅速且低誤差地了解材料目前的狀態。同時，閉合正解只需一組參數組合即可得到在任何應力下產生的降伏面，而不需要針對每個應力進行參數擬合，這也是本研究模型的一個重要特點。閉合正解的優點還體現在維度上。雖然本研究僅以平面來呈現材料的塑性行為，但公式中所用的符號是張量形式，即閉合正解是多維的公式。因此，通過閉合正解同樣可以求解三維空間的三次降伏超面，也就是掌握材料在三個不同方向上受到的應力與應變狀態。

最後，透過本研究，我們已確認所使用的模型在推導閉合正解方面是可行的。隨後，運用閉合正解結合通過最佳化擬合得出的唯一一組參數組合，一旦輸入應力路徑，我們就能獲得相對應的三次歪扭降伏超面演化圖。這種方法具有一定精確度且計算速度極快，這證明了閉合正解在速度和精確度方面優於數值解。因此，在工程設計中，我們可以透過閉合正解來掌握降伏面，也就是非線性材料在受力後的狀態，以確保材料是否符合需求。

5.2 未來展望

閉合正解所推導出的降伏面演變圖與實際降伏面演化圖的誤差比較。

此前所推導出的閉合正解建立於材料之上，而非桿件或結構上，期望未來能基於此篇推導出的閉合正解來推廣適用範圍。



本篇研究中，所用的是鋁 1100 的材質，期望未來能在獲得更多不同材料的實驗數據，來驗證此閉合正解的精度。

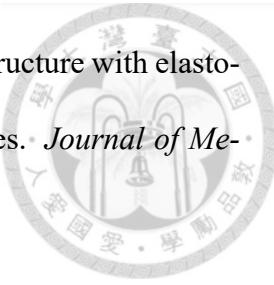
本篇中研究中提到了溫升下降伏面的演化狀況，觀察是否能藉由此研究中溫度與材料參數的相關性以及大小圓的變化情況，求得一個方程式來闡述上述狀況，使得可預測性增加。





參考文獻

- [1] B. A. Boley and J. H. Weiner. *Theory of Thermal Stresses*. Wiley, New York, 1960.
- [2] S. Ebbesen, P. Kiwitz, and L. Guzzella. A generic particle swarm optimization matlab function. In *2012 American Control Conference (ACC)*, 2012.
- [3] C. Frederick and P. Armstrong. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. *Materials at High Temperatures*, 24(1):1–26, 2007.
- [4] H.-K. Hong and C.-S. Liu. On behavior of perfect elastoplasticity under rectilinear paths. *International Journal of Solids and Structures*, 35(26):3539–3571, 1998.
- [5] H.-K. Hong and C.-S. Liu. Internal symmetry in bilinear elastoplasticity. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 34(2):279–288, 1999.
- [6] H.-K. Hong and C.-S. Liu. Internal symmetry in the constitutive model of perfect elastoplasticity. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 35(3):447–466, 2000.
- [7] H.-K. Hong and C.-S. Liu. Lorentz group on Minkowski spacetime for construction of the two basic principles of plasticity. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 36(4):679–686, 2001.



- [8] H.-K. Hong, L.-W. Liu, Y.-P. Shiao, and C.-J. Chang. Building structure with elasto-plastic bilinear model under multi-dimensional earthquake forces. *Journal of Mechanics*, 38:598–609, 2022.
- [9] H.-K. Hong, L.-W. Liu, Y.-P. Shiao, and S.-F. Yan. Yield surface evolution and elastoplastic model with cubic distortional yield surface. *Journal of Engineering Mechanics*, 148(6):04022027, 2022.
- [10] T. Kurtyka. Parameter identification of a distortional model of subsequent yield surfaces. *Archives of Mechanics*, 40(4):433–454, 1988.
- [11] J. A. Nelder and R. Mead. A simplex method for function minimization. *Comput. J.*, 7:308–313, 1965.
- [12] A. Phillips and J.-L. Tang. The effect of loading path on the yield surface at elevated temperatures. *International Journal of Solids and Structures*, 8(4):463–474, 1972.
- [13] A. Phillips, J.-L. Tang, and M. Ricciuti. Some new observations on yield surfaces. *Acta Mechanica*, 20:23–39, 1974.
- [14] A. Phillips, C. S. Liu, and J. W. Justusson. An experimental investigation of yield surfaces at elevated temperatures. *Acta Mechanica*, 14:119–146, 1972.