

國立臺灣大學社會科學院經濟學系



碩士論文

Department of Economics

College of Social Sciences

National Taiwan University

Master Thesis

探索當下偏誤對邊際消費傾向的影響：
結合流動性、非流動性資產與異質性個體模型

Exploring the Impact of Present Bias on the Marginal
Propensity to Consume: Under Two Assets Heterogeneous
Agent Model

施洵筌

Yu-Chuan Shih

指導教授：蘇軒立 博士

Advisor: Hsuan-Li Su, Ph.D.

中華民國 112 年 7 月

July, 2023

國立臺灣大學碩士學位論文

口試委員會審定書



探索當下偏誤對邊際消費傾向的影響：
結合流動性、非流動性資產與異質性個體模型

Exploring the Impact of Present Bias on the Marginal
Propensity to Consume: Under Two Assets
Heterogeneous Agent Model

本論文係施洵荃君 (R09323049) 在國立臺灣大學經濟學系完成之碩士學位論文，於民國 112 年 7 月 17 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員： 蘇軒立

(指導教授)

李宜辰 _____
鄭珉峯 _____



摘要

消費習慣會根據消費者的狀態而有所不同。除了受到持有資產與所得影響，本文進一步探討不同的行為偏好——當下偏誤。在兩資產的框架模型下，我們發現當下偏誤大幅提升了消費者的邊際消費傾向，但同時也使得消費者的持有資產下降。藉由混合一般指數型折現偏好與具有當下偏誤折現偏好兩種型態的消費者，經過校準後的模型僅需要 4% 的流動性與非流動性資產報酬差距，就可以同時符合許多總體經濟分布數據以及實證下平均 MPC 的合理範圍。與 [Kaplan and Violante \(2022\)](#) 的兩資產模型所需要的 8% 資產報酬差距相比，我們的模型所使用的資產報酬差更接近實證資料。

關鍵字：異質性個體、當下偏誤、邊際消費傾向、借貸限制、月光族



Abstract

Consumer behavior can be significantly influenced by the individual's financial state, including their asset holdings and income. This thesis ventures further into this dynamic, studying the interplay between these factors and behavioral preferences, particularly the effect of present bias. Under the framework of two-asset model, we find that present bias greatly enhances the marginal propensity to consume, but simultaneously leads to a reduction in their asset holdings. By combining consumers with exponential discounting preferences and those with present-bias discounting preferences, the calibrated model requires only a 4% gap between the returns on liquid and illiquid assets. This allows it to align with a range of macroeconomic distribution data and empirical average MPC within reasonable bounds. Compared to the 8% asset return gap required by the two-asset model in [Kaplan and Violante \(2022\)](#), the return differential used in our model is more closely aligned with empirical data.

Keywords: Heterogeneous agents, Instantaneous gratification, Marginal propensity to consume, Borrowing constraints, Hand-to-mouth



目錄

	Page
口試委員審定書	i
摘要	ii
Abstract	I
目錄	II
圖目錄	IV
表目錄	V
第一章 Introduction	1
第二章 Model	4
2.1 Preferences	5
2.2 Household Balance sheet	7
2.3 Utility and Value	9
第三章 Policy Function and Marginal Propensity to Consume	12
3.1 Policy Function	12
3.1.1 Overconsumption of Present Bias	13
3.1.2 Illiquidity asset demand: Irrelevance of β	14
3.2 Marginal Propensity to Consume	14



第四章	Numerical Method	16
第五章	Results	18
5.1	Calibration Strategy	18
5.2	Quantitatively Results	19
5.2.1	Analysis of Factors Influencing the Average Marginal Propensity to Consume	21
第六章	Conclusion	23
	參考文獻	24
	附錄 A — Computational method	27
A.1	Computation for the Main Model	27
A.1.1	Exponential Discount Preference Agent	27
A.1.2	IG Preference Agent	30
A.2	Computing MPC by Feymann-Kac Formula	30



圖目錄

2.1	Discount function $D(t)$ ：該圖繪製 IG 折現函數在 $\beta = 0.8$ 和 $\rho = 3\%$ 時的情形。可以看到在當下時點 ($t = 0$) 與未來 ($t > 0$) 的折現會產生不連續性。	6
5.1	MPC over Liquid Asset and Illiquid Asset	22
5.2	資產分布: 左圖為一般消費者與 IG 偏好消費者的流動性資產分布；右圖為非流動性資產的分布	22



表目錄

5.1 校準後參數總覽	20
5.2 量化結果與比較	21




第一章 Introduction

財政政策與貨幣政策一直以來都是總體經濟學所討論的一大主題。其中，邊際消費傾向 (marginal propensity to consume) 在政策的有效性中扮演舉足輕重的地位。邊際消費傾向，簡稱 MPC，是指消費者接收到一筆小額的意外之財時，一段時間內所造成的消費變動比例。在預估財政政策的實行成效時，MPC 的實際規模是決定政策實施是否符合經濟學家以及政府的預期時至關重要的因素。因此，總體經濟模型中是否能夠產生正確的 MPC 不應被任何總經決策者或關心總體經濟者給輕易忽視。在本文中我們試圖建構一個經濟模型能夠在校準一些重要資產分布指標 (諸如平均資產水準、月光族佔比) 的同時，亦能夠產生符合實證結果的 MPC 大小。

在總體經濟學過去的進展中，代表性消費者模型 (representative agent model) 僅能夠產生與無風險利率水準相當，微不足道的 MPC 效果。然而，在 MPC 的實證研究中，大量文獻指出僅考慮非耐久財的情況下，\$500 至 \$1,000 的暫時性收入衝擊所產生的平均季度 MPC 介於 15% 至 25% (Jappelli and Pistaferri (2010) 和 Havranek and Sokolova (2020) 的調查)，遠高於過去總體經濟學理論模型所產生的 MPC 效果。甚至，研究發現 MPC 擁有大量的異質性，這也使得我們在探討 MPC 議題時，不得不將消費者個體的異質性納入考量。

隨後，在異質性個體模型 (Heterogeneous agent model) 的問世 (Huggett (1993))



和Aiyagari (1994))、不同消費者行為的探討 (Laibson (2015) 和Gul and Pesendorfer (2001))、以及持有資產的異質性 (Kaplan et al., 2014)，使得更多的異質性特徵能夠被模型所捕捉；另一方面，計算方法的演進與突破 (Achdou et al., 2022) 使得我們得以透過數值方法去檢驗模型與實證 MPC 差距。最後，Kaplan and Violante (2022) 集近代總體理論在 MPC 議題上之大成。

Kaplan and Violante (2022) 比較諸如時間偏好、報酬率等異質性、特定消費者行為、以及不同資產結構下的模型，經由校準後所產生的平均 MPC 之異同。研究發現月光族 (hand-to-mouth) 的比例是產生龐大 MPC 的關鍵要素。然而，在大多數的模型設定之下，平均資產的校準與足夠的 MPC 水準存在權衡抵換關係，難以兩全。唯獨兩資產模型的設定可以避免這樣的抵換關係，但是必須在流動性與非流動性資產報酬率高達 8% 的情境下才得以達到實證研究中的 MPC 水準。相較之下，Jordà et al. (2019) 透過自 1950 年的美國數據，得出股市與房市的實質金融報酬率與政府公債的報酬率差距大約僅有 4%。

奠基於Kaplan and Violante (2022) 的結果，我們試圖透過不同消費行為的消費者以解決兩資產模型中資產報酬率過大的問題。因此，我們考量一群消費者具有當下偏誤的行為特性。當下偏誤是指消費者具有短視近利的行為特徵，亦即對於短期未來比長期未來擁有更大的折現率。動態不一致 (dynamically inconsistent) 偏好的研究自Strotz (1956)開始已經擁有長久的研究歷史。並且受到許多在實驗經濟與田野研究等實證結果所支持 (諸如：Ashraf et al. (2006)、Frederick et al. (2002))。然而，所有消費者都具有動態不一致的經濟體雖然能夠產生相較於指數型時間偏好消費者更大的 MPC，但是也會使得更多的消費者僅持有少量的資產。若是經由校準後，所產生的平均 MPC 效果並不一定會增加 (Kaplan and Violante, 2022)。因此，本篇研究嘗試同時考量這兩種不同時間偏好的消費者。透過少部分具有當下偏誤行為偏好的消費者以及兩資產模型的設定，在資產報酬率差距更小的情境

下，依然在能同時達到多項資產的校準目標以及足夠大的平均 MPC 效果。

本文的架構安排如下：第二章為模型設定，將概述不同的偏好、消費者收支帳以及效用和價值函數的設定。第三章比較兩種偏好的消費者的消費、儲蓄決策以及資產分布差異；並且介紹邊際消費傾向的數學定義。第四章為數值方法；理論模型的結果與總結分別位於第五章以及第六章。



第二章 Model

我們的模型採用連續型時間的兩資產 Aiyagari-Bewley-Huggett 模型。這樣的框架模型擁有二個特徵：首先，每個消費者都擁有異質性的收入 (Heterogeneous income)，也就是在每時間點上，每個消費者的收入都面臨異質性衝擊 (idiosyncratic shock)。並且我們假設該衝擊遵從有限狀態的卜瓦松過程 (Poisson process)。其次，我們假設市場是不完整的，因此消費者無法無限制地借貸，至多只能借貸至一個上限值。有別於完整市場，消費者在手上資金不足的情況下，將無法達成個人的最佳消費解。這一特徵使得消費者產生預防動機，會盡可能累積一定的資產，以防當未來的收入減少時，消費者無法滿足自身的最佳消費。有別於傳統的代表性個人 (representative agent) 模型，透過 Aiyagari-Bewley-Huggett 模型，我們可以在模型中求解出一個擁有不同資產分布的均衡解，並且透過產生一定比例的月光族 (hand-to-mouth)，藉此增加平均 MPC 以能夠更加貼近實證上的結果。

另一方面，與 [Campbell and Mankiw \(1991\)](#) 的 Spender-Saver 模型類似，我們假設模型中有兩類消費者：指數型折現偏好消費者與擁有當下偏誤特性的消費者，並且以 λ 代表指數型折現偏好消費者在經濟體中的佔比。在 [Kaplan and Violante \(2022\)](#) 中，指數型折現偏好消費者雖然可以在兩資產模型下符合實證的平均 MPC，但是必須讓兩種資產的報酬差距足夠大的情況才得以成立。另一方面，當下偏誤會使得消費者過度消費，因此產生更大的 MPC。然而，這同時也會使得消

費者持有較少的資產，使得僅以擁有當下偏誤的消費者來建構的模型無法同時符合資料中的平均資產水準以及 MPC 大小。因此，我們希望藉由混合指數型折現偏好消費者以及當下偏誤消費者的經濟體，使得經濟體以資料中的平均資產校準後，能夠在資產報酬率差距更小的情況下仍然達到與實證結果相當的平均 MPC。

在此章節，我們將介紹所使用的模型的偏好、家戶收支帳、效用、以及資產變化與分布的演進過程，以作為後續討論邊際消費傾向的基礎。我們的模型假設有一單位連續體的消費者，在無窮期連續型時間的經濟體中進行消費與儲蓄的決策。特別注意的是，我們只考慮部分均衡，藉此關注在使用的模型產生的邊際消費傾向的整體效果。

2.1 Preferences

連續時間下的當下偏誤時間偏好首先提出於 [Harris and Laibson \(2013\)](#) 中，並以立即滿足 (Instantaneously Gratification) 時間偏好作為與離散時間下的當下偏誤的區分。在後續章節中，我們將其簡稱為 IG 偏好。在離散時間下，文獻通常透過半雙曲 (quasi-hyperbolic) 時間偏好建構當下偏誤時間偏好： $1, \beta\delta, \beta\delta^2, \beta\delta^3, \dots$ 。相對地，IG 偏好即是將時間間隔趨近於 0，來建構連續時間下的當下偏誤折舊函數。給定現在時點 $t = 0$ 。IG 偏好的數學式如下所述：

$$D(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t = 0 \\ \beta e^{-\rho(t)} & \text{if } t > 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

在離散時間中的半雙曲時間偏好中， δ 為個人在每期的固定折現項；相對地，在連續時間中，由於 $\Delta t \rightarrow 0$ ，此固定折舊項在趨近於極限下將轉變為指數型折現 (exponential discount)，在此我們沿用文獻中習慣的變數 ρ 作記為折現的利率。相



同的是，在兩者時間方法下，我們都以 β 來代表當下偏誤的程度。我們將

$\beta = 0.8$ ， $\rho = 3\%$ 的範例表示於圖 2.1 中。

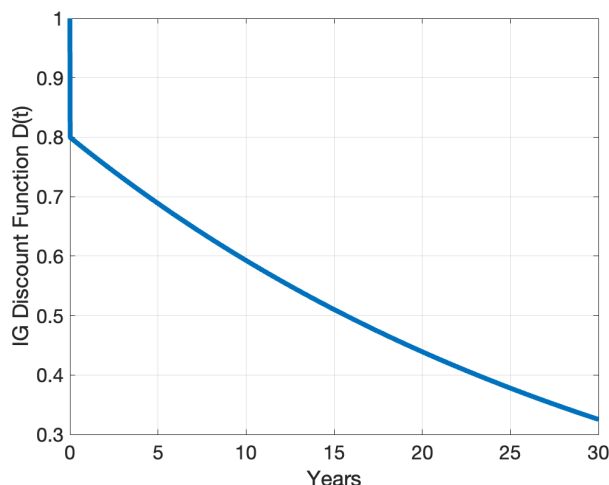



Figure 2.1: Discount function $D(t)$ ：該圖繪製 IG 折現函數在 $\beta = 0.8$ 和 $\rho = 3\%$ 時的情形。可以看到在當下時點 ($t = 0$) 與未來 ($t > 0$) 的折現會產生不連續性。

在後續推導價值函數的過程中，我們以一般的消費者指稱在連續時間中，擁有指數型折現偏好 (exponential discount preference) 的消費者。另一方面，在 [Harris and Laibson \(2013\)](#) 中，IG 偏好消費者可依消費者有無察覺到自己的當下偏誤的程度細分為三種型態：精明的 (sophisticated)、部分天真 (Partial naive) 以及天真 (Naive)。我們以 β^E 代表消費者察覺自身當下偏誤的程度，三種型態的消費者分別為 $\beta^E = \beta$ 、 $\beta^E \in (\beta, 1)$ 以及 $\beta^E = 1$ 。詳細來說，精明的消費者有察覺到自己當下偏誤的傾向，並且會完全猜中自己當下偏誤的程度；部分天真的消費者有察到自己的當下偏誤，但是會略微低估自己當下偏誤的程度；天真的消費者則完全沒有察覺到自己當下偏誤的行為，並且會以為自己是一般的消費者並且以此計算自己的消費、儲蓄決策 (然而，實際上他們會依自己 IG 偏好做出過度消費的行為)。由於 [Maxted \(2020\)](#) 指出三種型態的消費者在消費的差異大幅小於 IG 偏好與一般消費者的差異，故探討不同類型的當下偏誤對邊際消費傾向的影響並不大。因此，在本文中，我們將 IG 偏好的設定簡化，僅以天真型態代表 IG 偏好的消費者。



如同Laibson and Maxted (2023) 所述，IG 偏好並非是一種心理學的實際模型，而是一種趨近於極限下，數學上可追溯性呈現的折舊函數。在心理學實證結果上，當下偏誤的時長也遠遠長於「當下」至「未來」的一個極微小的時長 dt 。儘管如此，Laibson and Maxted (2023) 證明連續時間的 IG 偏好模型可以近似於給定心理學實證上合理的當下偏誤時長 (時間間隔大約一天至一週之間) 所產生的離散模型。此一發現因此提供了 IG 模型數值求解上的適當性。

2.2 Household Balance sheet

每個消費者都擁有異質性的收入 (Heterogeneous income)，也就是在每時間點上，每個消費者的收入都會面臨異質性衝擊 (idiosyncratic shock) 並遵從有限狀態的卜瓦松過程 (Poisson process)。我們將收入常規化為 1 以方便數值上的計算。

資產設定上，我們沿用Kaplan et al. (2018) 的設定，將資產區分為流動性資產 b 以及非流動性資產 a 。直觀下，流動性資產擁有高度的流動性，可提供日常的消費使用。相對地，非流動性資產無論在存入或提取做消費使用時，必須支付一筆交易成本。然而因為非流動性資產擁有相對較高的報酬率 $r^a > r^b$ ；因此，當流動性資產達到一定水準的時候，消費者會將流動性資產轉移成非流動性資產換取較高的報酬率來累積財富。在預算限制式中，相較於Kaplan and Violante (2022) 不允許消費者借貸，我們假設消費者可以借貸至一定的上限 \underline{b} ，但是借貸時 (當 $b < 0$) 必須支付昂貴的利息，因此我們假設借貸利率為原先的流動性利率額外加上一個借貸楔子 w^{cc} ，並且將借貸利率作記 $r^{borr} \equiv r^b + w^{cc}$ 。並且假設借貸利率高過所有資產的利率報酬 $r^{borr} > r^a > r^b$ 。

在經濟模型中，有兩種常用的方式來區別資產的流動性：其一是資產只能在特定時點下透過一筆固定的交易成本進行調整 (Kaplan et al. (2014))，我們模型則是



採用另一種方式：交易成本包含Rotemberg (1982) 的凸性項加上一個產生無行動區域 (Inaction region) 的線性項 (Kaplan et al., 2018)。

我們將兩種類型資產之間的移轉稱為儲蓄 (當 $d > 0$) 或提取 (當 $d < 0$)，無論是從流動性資產儲蓄至非流動性資產抑或從非流動性提取道流動性資產時，都必須支付一筆交易成本 χ 。方程式 (2.2) 為 χ 的函數式

$$\chi(d, a) = \underbrace{\chi_0 |d|}_{\text{Inaction Part}} + \underbrace{\frac{\chi_1}{2} \left(\frac{d}{a}\right)^2 a}_{\text{Convex Part}} \quad (2.2)$$

交易成本包含了兩個部分，各自代表了不同的意涵：右式第一項的線性部分在消費者的最適存款決策中會產生無行動區域。對於一些消費者來說，多存入或提取一新台幣的邊際收益小於交易的邊際成本 χ_0 。第二項的凸性部分 ($\chi_1 > 0$) 使得交易成本隨著儲蓄或提取的金額大小而增加，以確保消費者不會無窮地儲蓄 ($|d| < \infty$)，使得消費者的資產持有量不會出現跳點的問題。最後，可以發現到交易成本的設定是零階齊次函數，因此交易的邊際成本取決於交易的非流動資產比例 d/a ，而不是交易的規模。

方程式 (2.3)-(2.5) 可以看到兩種資產 a, b 的預算限制式。首先，我們可以看到 b 的流入項包含所得收入 y_t 以及流動性資產的利息 $r^b(b_t)b_t$ ；在流出項包含消費 c 以及轉移成本 $\chi(d_t, a_t)$ 。相對地， a 的預算限制式包含非流動性資產利息 $r^a a_t$ 以及儲蓄決策 d_t ，並且非流動性資產 a_t 在模型中不允許借貸。

$$\dot{b}_t = y_t + r^b(b_t)b_t - d_t - \chi(d_t, a_t) - c_t \quad (2.3)$$

$$\dot{a}_t = r^a a_t + d_t \quad (2.4)$$

$$b_t \geq \underline{b}, a_t \geq 0 \quad (2.5)$$



2.3 Utility and Value

我們假設每個消費者皆是 CRRA 效用：

$$u(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} & \text{if } \gamma > 1 \\ \log c & \text{if } \gamma = 1 \end{cases}$$

另一方面，由於當下偏誤將使得當下的折現與未來的折現函數不連續，因此 [Harris and Laibson \(2013\)](#) 中的 IG 偏好消費者，將價值函數區分為：當前價值函數 w_t (current-value function) 以及延續價值函數 v_t (continuation-value function)。首先，我們可以看到一般消費者 ($\beta = 1$) 的價值函數如下所示

$$v_t = \mathbb{E}\left[\int_t^\infty e^{-\rho(s-t)} u(c_s) ds\right], w_t = v_t$$

因為一般消費者的時間偏好在所有時間上是相同的，因此當前價值函數與延續價值函數相等。然而，IG 偏好的消費者由於動態不一致，其當前價值與延續價值並不相同。因為 IG 偏好會使消費在當下對所有未來的價值多了 $\beta \in (0, 1)$ 的折現。然而，在連續時間下，因為時間間隔趨近於 0，當下的效用對整體的價值影響亦趨近於 0，因此，IG 偏好消費者的當前折現即為延續價值的 β 倍。如方程式 (2.6) 所示

$$v_t = \mathbb{E}\left[\int_t^\infty e^{-\rho(s-t)} u(c_s) ds\right], w_t = \beta v_t \quad (2.6)$$

在求算消費者的決策與經濟體的均衡之前，我們必須先給定模型中消費者的 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程式以及整個經濟體的 Kolmogorov Forward (KF) 方程式。透過前者我們可以計算出消費者在每個時點下的決策函數；後者可以決定整體社會的資產分布，以及不同所得狀態的占比。透過上述兩個方程式，我們



便可以計算出經濟體在穩態分布 (stationary distribution) 下的均衡。首先，我們定義所有的狀態變數為一集合變數 $x = \{b, a, y\}$ ，消費者的 HJB 方程式如方程式 (2.7) 所示

$$\begin{aligned} \rho v(x) = & u(c(x)) + v_b(x) \underbrace{(y + r^b(b)b - d(x) - \chi(d(x), a) - c(x))}_{s^b} \\ & + v_a(x) \underbrace{(r^a a + d(x))}_{s^a} \\ & + \sum_{y' \neq y} \lambda^{y \rightarrow y'} (v(b, a, y') - v(b, a, y)) \end{aligned} \quad (2.7)$$

HJB 方程式中可以看到消費者價值函數的瞬時變化，右式第一項是當下的效用，第二項與第三項為延續價值分別對兩種資產的偏微分再乘上資產的瞬時變化量，最後一項為消費者收入狀態的轉換時，他們延續價值變動的期望值。我們將兩種資產的變化量簡化定義為 s^b 與 s^a 。另外，在最後一項中的 $\lambda^{y \rightarrow y'}$ 意指從原本的所得狀態 y 移至另一個所得狀態 y' 的到達機率 (arrival rate)。值得一提的是，由於 HJB 中決定的是消費者帶到未來的資產狀態所帶來的延續價值，因此一般消費者和 IG 偏好消費者的 HJB 方程式並無二致。然而，在求算出消費者的決策函數後，IG 偏好消費者的真實決策並非是他們透過 HJB 方程式所求得的數值，相對地經由換算後才會是 IG 偏好消費者的真實消費與儲蓄。這一設定也展現了當下偏誤的特質：消費者並沒有意識到自身過度消費的行為。在下一個章節，我們將看到如何求算出消費者的真實消費與儲蓄決策。

接著 KF 方程式如方程式 (2.8) 所示

$$0 = -\frac{d}{db} [s_j^b(b)g_j(b, a)] - \frac{d}{da} [s_j^a(a)g_j(b, a)] - \lambda_j g_j(b, a) + \lambda_{-j} g_{-j}(b, a) \quad (2.8)$$

KF 方程式表示中， g_j 為第 j 種所得狀態的消費者的機率密度函數。可以看到在給定的機率密度 $g_j(b, a)$ 中，離開的消費者包含在流動性資產與非流動性資產有變動

者以及所得狀態改變者。相對地，進入 $g_j(b, a)$ 的消費者為資產配置在該點上且所得狀態變為 j 的消費者。直觀下，在離開與進入在所有資產空間與所得狀態相等時，經濟體即達到穩態分佈。緊接著，我們將於下一章節討論消費者的決策函數與介紹邊際消費傾向，並探討 IG 偏好消費者與一般消費者在決策行為與邊際消費傾向上的差異。



第三章 Policy Function and Marginal Propensity to Consume

3.1 Policy Function

在這個章節我們將透過 HJB 方程式 (2.7) 求解消費者的一階條件。消費者的消費與儲蓄決策分別如方程式 (3.1) 與方程式 (3.2) 所示：

$$u'(c(x)) = \begin{cases} \beta v_b(x) & \text{if } b > \underline{b} \\ \max\{\beta v_b(x), u'(y + r(\underline{b})\underline{b})\} & \text{if } b = \underline{b} \end{cases} \quad (3.1)$$

$$d = \left(\frac{v_a}{v_b} - 1 + \chi_0\right)^- \frac{a}{\chi_1} + \left(\frac{v_a}{v_b} - 1 - \chi_0\right)^+ \frac{a}{\chi_1} \quad (3.2)$$

在方程式 (3.1) 中可以看到消費者的消費決策，當 $\beta = 1$ 時，即可還原為一般消費者的消費決策。在一般的情況下，當我們透過 HJB 方程式求解出決策函數後，消費者便會依著自己的決策去消費與儲蓄。然而，在 IG 偏好中，消費者在 HJB 方程式所得到的消費決策僅是他認知上自己會採取的行為。實際上，當下偏誤使得消費者的延續價值折現了 β 倍，因此，比起一般消費者，IG 偏好消費者在當期消費了更多 (即使他原先以為他的消費數量與相同狀態變數下的一般消費者一致)。數學計算上，由於 IG 偏好使得消費者的當下價值為延續價值的 β 倍，故在求算

一階條件時，延續價值也將乘以 β 倍。另外，當消費者的流動性資產受限時 $b = \underline{b}$ ，消費者將不一定將不一定達到其最適消費 $u'(c(x)) = \beta v_b(x)$ ；因此，消費者只能將手上的流動性資產花光以達到次佳 (second-best) 消費。另外，由於消費者進入負債之前，因為 $r^{borr} > r^a$ ，消費者會首先提取非流動性資產以滿足消費，故當消費者流動性受限時，意味者他們也花光了手上的非流動性資產，因此最適消費的邊界條件毋須加入 d 以及 χ 。在消費者的最適儲蓄決策中，我們可以發現方程式 (3.2) 並沒有 β ，是因為儲蓄的決策在於衡量要將 1 新台幣投資在流動性資產亦或是非流動性資產。然而，無論將 1 新台幣換做任何資產，對於 IG 偏好消費者而言，其延續價值都將乘以 β 倍。故儲蓄的決策並不會受到 β 的影響。

3.1.1 Overconsumption of Present Bias

我們以 c_{ig} 代表 IG 偏好消費者的消費； c_{exp} 代表一般消費者的消費。透過方程式 (3.1)，我們可以求得 IG 偏好的消費者與一般消費者間的消費可以方程式 (3.3) 表示

$$c_{ig}(x) = \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}} c_{exp}(x) \quad (3.3)$$

方程式 (3.3) 中，可以看到 IG 偏好消費者與一般消費者的消費函數相差 $(1/\beta)^{1/\gamma}$ 倍。直觀下，當下偏誤 β 的程度越嚴重，IG 偏好消費真實的消費與自己預期的消費差距越大；因此，過度消費的程度也越嚴重；相對的，風險趨避的程度越大 (γ 越大)，IG 偏好者也會因此更為保守，即使有當下偏誤的影響，所造成的過度消費的幅度也相對較小。

另外，我們也可以透過 HJB 方程式去推導消費的歐拉方程式 (Euler equation)，方程式 (3.4) 為 IG 偏好消費者的歐拉方程式。與一般消費者對比，在 $\gamma \geq 1$ 時，IG 偏好消費者的跨期替代彈性會比一般消費者多了 $\gamma(1 - \beta^{1/\gamma})\partial c/\partial b$ 倍。直觀下，

IG 偏好使得當下的折現上升，導致消費增加，自然也增強跨期替代彈性的作用。

$$\frac{\mathbb{E}_t[du'(c(x_t))]/dt}{u'(c(x_t))} = [\rho + \gamma(1 - \beta^{\frac{1}{\gamma}})\frac{\partial c(x_t)}{\partial b}] - r_t(b_t) \quad (3.4)$$



3.1.2 Illiquidity asset demand: Irrelevance of β

根據方程式 (3.2)，IG 偏好並不會影響消費者的儲蓄需求。直觀下，儲蓄的決策在於選擇長期放置在哪種資產以換取更高的財富，在這一論點上折現偏好的變化並不會影響到消費者的儲蓄決策；然而，這並不代表不影響消費者的資產持有。因為 IG 偏好使得消費者過度消費，同時減少了流動性資產的持有，進而間接影響非流動性資產的持有。在整體的分布上，IG 偏好產生的過度消費直接使得更多消費者持有少量的流動性資產；間接也造成非流動性資產長期下來產生差異。需要注意的是，IG 偏好並不一定使得更多消費者不願意持有非流動性資產 ($a = 0$)，因為在非流動性資產的報酬並不高時，不持有非流動性資產可能反而是消費者的最適決策；然而，可以確定的是 IG 偏好會使得消費者整體的流動性資產更少，也造成整體的非流動性資產的平均值下降。

3.2 Marginal Propensity to Consume

我們的主要目的是探討建構一個混合一般消費者與 IG 偏好消費者的理論模型，在比 [Kaplan and Violante \(2022\)](#) 所使用的 8% 報酬率差距還小的情況下，亦能夠產生接近實證的平均邊際消費傾向數值。在這一個段落，我們將介紹邊際消費傾向的定義以及計算方式。在文獻上，我們定義邊際消費傾向 MPC 為當消費者獲得一筆意外之財 x ，經過一段時間 τ 後，所帶來的消費增幅。在連續時間方法下，我們先定義 $C_{j,\tau}$ 為所得狀態 j 的消費者經過 τ 時間的消費累積；並且，我們

定義瞬時 $MPC_{j,\tau}$ 為其對流動性資產的偏微分，見方程式 (3.5)。

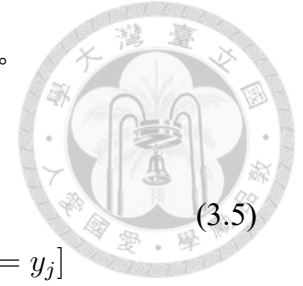
$$MPC_{j,\tau}(b, a) = \frac{\partial C_{j,\tau}(b, a)}{\partial b}, \text{ where} \quad (3.5)$$

$$C_{j,\tau}(b, a) = \mathbb{E}\left[\int_0^\tau c_j(b_t, a_t) dt \mid b_0 = b, a_0 = a, y_0 = y_j\right]$$

在求算一段時間的累積消費 $C_{j,\tau}$ 時，需要注意的是我們假設在這段時間內，消費者並不會改變他的所得狀態 j 。因此，當求得 $C_{j,\tau}$ 和 $MPC_{j,\tau}$ 之後，就可以進一步定義給定 x 的意外之財後的邊際消費傾向 $MPC_{j,\tau}^x$ 。經由方程式 (3.5) 我們可以立即獲得其計算公式，如方程式 (3.6) 所示

$$MPC_{j,\tau}^x(b, a) = \frac{C_{j,\tau}(b + x, a, y) - C_{j,\tau}(b, a, y)}{x} \quad (3.6)$$

以上 MPC 的數值計算方法，我們將放置在附錄 A.2。





第四章 Numerical Method

此章節我們將介紹所使用的模型以及 MPC 的計算方法。數值方法上，我們使用 [Achdou et al. \(2022\)](#) 所介紹的有限差分法。有限差分法被經常使用來解決如消費-儲蓄行為 (consumption-saving behavior) 的 HJB 方程式。根據 [Barles and Souganidis \(1991\)](#)，在使用有限差分法時，必須確保 HJB 方程式符合以下三個條件：(i) 單調性 (monotonicity)；(ii) 穩定性 (stability)；以及 (iii) 一致性 (consistency)；在一般消費者的計算中，HJB 方程式皆滿足上述條件；然而，IG 偏好的消費者並不一定符合單調性 ([Maxted, 2020](#))。所幸的是，即使無法直接計算，[Harris and Laibson \(2013\)](#) 指出若消費者的為 CRRA 效用函數，可以將 IG 偏好消費者的效用函數 $u(c)$ 經由正仿射變換 (positive affine transformation) 在數值上逼近 IG 偏好消費者的決策解 ([Maxted, 2020](#))。我們定義 $\hat{u}_+(\hat{c}) = \frac{\psi}{\beta}u(\frac{1}{\psi}\hat{c}) + \frac{\psi-1}{\beta}$ ，其中 $\psi = \frac{\gamma-(1-\beta)}{\gamma}$ ，經正仿射變換的效用 \hat{u} 為

$$\hat{u}(\hat{c}, x) = \begin{cases} \hat{u}_+(\hat{c}) & \text{if } b > \underline{b} \\ \hat{u}_+(\hat{c}) & \text{if } b = \underline{b} \text{ and } \hat{c} \leq \psi(y + r(\underline{b})\underline{b}) \\ -\infty & \text{if } b = \underline{b} \text{ and } \hat{c} \in (\psi(y + r(\underline{b})\underline{b}), y + r(\underline{b})\underline{b}) \\ u(\hat{c}) & \text{if } b = \underline{b} \text{ and } \hat{c} \geq y + r(\underline{b})\underline{b} \end{cases} \quad (4.1)$$

\hat{u} 為反向工程推算出來的效用函數，並不具備任何的經濟意義。在數值計算上，必須滿足一關鍵假設：借貸限制並不會受限 ($b > \underline{b}$)。由於 \hat{u} 消費者的折現函數並

沒有動態不一致的問題，故可以直接使用有限差分法。因此，藉由計算 \hat{u} 消費者的 HJB 方程式，我們可以還原 IG 偏好消費者的決策函數以及穩態分佈。我們將模型以及 MPC 數值方法的詳細步驟放置於附錄 A。





第五章 Results

5.1 Calibration Strategy

此一小節我們將介紹模型中各項參數所引用的資料以及參考來源。Table 5.1 中列表了所有模型中使用的參數值以及參考資料與來源。

收入過程：我們引用 [Laibson et al. \(2021\)](#) 的方法，將收入過程假設為卜瓦松過程 (Poisson process)，並將收入由低至高區分為三種狀態 $y_t \in \{y_L, y_M, y_H\}$ 以降低計算上的複雜度；另外，搭配存在借款楔子時，可以使得在 $b = 0$ 以及 $b = \underline{b}$ 附近附近可以產生一定的人數佔比 ([Achdou et al., 2022](#))，得以使較容易符合資料中的資產分佈。

在收入過程的校準上，我們遵從 [Guerrieri and Lorenzoni \(2017\)](#) 將季度的對數化收入假設為一階的自我回歸過程 (Auto Regression of degree 1 process)¹。再者，再將其轉化成連續型時間的奧恩斯坦-烏倫貝克過程 (Ornstein-Uhlenbeck process)，最後，透過有限差分法 (finite difference method) 轉化為三種狀態的卜瓦松過程。在模型中，我們平均收入正規化為 1，並對應 $-1, 0, 1$ 倍的標準差得出三種收入狀態 $y_t \in \{0.75, 0.98, 1.28\}$ ²。

¹透過 [Floden and Lindé \(2001\)](#) 和 [Guerrieri and Lorenzoni \(2017\)](#) 的資料經過校準後，此過程的持續項 (persistence) $\rho = 0.967$ ，變異數 $\sigma^2 = 0.017$

²經校準後，低收入的家戶佔比約為 31%、中等收入的家戶佔比約為 39%、以及高收入的家戶佔比約為 31%；三者的預期持續時間分別為 1.6 年、1 年、以及 1.6 年。



流動性與非流動性資產：該篇文章在資產的設定中，我們考慮流動性資產與非流動性資產的淨值。如同Kaplan et al. (2018) 透過 2004 年 Survey of Consumer Finances (SCF) 和 Flow of Funds (FoF) 的資料所做的分類，流動性資產定義為所有金融機構中的存款 (包括支票、儲蓄和貨幣市場帳戶)、政府債券和公司債券並扣除循環性消費者信貸；非流動性資產則定義為扣除抵押貸款後的不動產財富，扣除非循環性消費者信貸後的消費耐久品，再加上公司和非公司商業部門的權益。藉由Kaplan et al. (2018) 以上述資料得到的估計並將平均收入正規化後，總體的流動性資產的淨值約為 0.26 (\$2,700B)；非流動性資產的淨值約為 2.92 (\$36,000B)，總資產的淨值合計為 3.18 (\$38,700B)。

同時，我們採用與Kaplan et al. (2018) 相同的利率水準：非流動性資產利率 $r^a = 5.7\%$ 、流動性資產利率 $r^b = 2\%$ 、以及借貸利率 $r^{borr} = 8\%$ 。

時間偏好以及其他參數：在跨期替代彈性的選擇上，我們設定 $\gamma = 1$ ，最後給定上述外生校準的參數下，我們透過選擇時間偏好率 ρ 、調整成本 $\chi = \{\chi_0, \chi_1\}$ 、當下偏誤程度 β 以及一般消費者的佔比 Λ ，來達到以下三項校準目標：(1) 總資產的淨值 3.2；(2) Hand-to-mouth 的佔比總額 41%；(3) Wealthy hand-to-mouth 的佔比總額 27%。

5.2 Quantitatively Results

有別於部分文獻，我們所考慮的 MPC 是透過單次 \$5,000 的意外之財所產生的平均年度 MPC，而非相對常見的 \$500 所產生的平均季度 MPC。在Kaplan and Violante (2022) 中，有探討不同規模的意外之財產生的平均年度與季度 MPC，在與實證的 MPC 相當吻合的兩資產模型中，我們可以找到 \$5,000 的意外之財所產生的平均年度 MPC 為 33.9%，並以此當作我們所有比較的目標。表 4.2 展示不同

Table 5.1: 校準後參數總覽

參數描述		數值	校準目標或資料來源
時間偏好			
γ	跨期替代彈性	1	Kaplan and Violante (2022) 模型內校準
ρ	時間偏好率	5.5%	
β	當下偏誤程度	0.8	
利率與借貸限制			
r^a	非流動性資產利率	5.7%	Kaplan et al. (2018)
r^b	流動性資產利率	2%	Kaplan et al. (2018)
r^{borr}	借款利率	8% ^a	Kaplan et al. (2018)
\underline{b}	借貸上限 \$16,500	平均單季收入	
收入過程			
y_t	暫時性收入	{0.75, 0.98, 1.28}	Kaplan et al. (2018)
A^z	收入轉移矩陣	見內文	Kaplan et al. (2018)
調整成本			
χ_0	線性項	0.05	模型內校準
χ_1	凸性項	0.8	模型內校準
其他變數			
Λ	一般消費者佔比	0.7	

^aMaxted (2020) 指出在計算 IG 模型中的關鍵假設，必須使得家戶在恆定狀態時借貸上限不會產生束縛。故此，在計算上，我們使 \underline{b} 上的借貸利率大幅提高，以滿足假設

消費者與加總後的量化結果。在表 4.2 中，當一般消費者的佔比為七成、IG 偏好消費者佔比為三成的經濟體中，可以大致達到所有目標，僅有 Poor Hand-to-Mouth 為 22.1%，略高於目標資料 14%。至於主要的目標平均年度 MPC，可以看見模型所產生的平均年度 MPC 在利率差距不到 4% 的情況下，即可達到實證上的合理範圍。

另一方面，在一般消費者與 IG 偏好消費者的比較中，IG 偏好消費者比一般消費者的平均年度 MPC 高出 60% 以上。這樣的結果並不難想像，以資產分布的角度來看，IG 偏好消費者的 hand-to-mouth 高達 90%；因此，導致了 IG 偏好消費者相當高的平均的 MPC 水準（對比之下，一般消費者僅有 30%）。然而，比較特別

的是一般消費者的 poor hand-to-mouth 比例比 IG 偏好消費者高出許多。這樣的結果是由於我們的模型中，非流動性資產的報酬對比Kaplan and Violante (2022) 中少了足足 4%；因此，對於部分消費者而言，不持有非流動性資產反而是他們的最佳策略。相對地，由於 IG 偏好減少了消費者的預防動機，使得更多消費者持有少量的流動性資產，進一步使得消費者在尚未耗盡非流動性資產之前，就已經先耗盡流動性資產，成為 wealthy hand-to-mouth。

Table 5.2: 量化結果與比較

	Exponential	IG Preference	Aggregate	Data
平均邊際消費傾向 (年度)	32.9%	53.2%	39.0%	33.9%
平均資產	3.32	2.64	3.11	3.18
無產月光族佔比	28.58%	6.98%	22.1%	14%
有產月光族佔比	1.33%	85.56%	26.6%	27%

5.2.1 Analysis of Factors Influencing the Average Marginal Propensity to Consume

由於 IG 偏好使得消費者過度消費，因此，在任何資產狀態下，IG 偏好消費者都擁有較高的 MPC 水準。如圖 (5.1) 所示，消費者的 MPC 隨流動性資產增加而遞減，IG 消費者的 MPC 在流動性資產上的曲線大約為一般消費者 MPC 曲線的上移。當流動性資產大約增加至 1 時，MPC 就已經趨近於一個定值；另一方面，兩種消費者的 MPC 在非流動性資產上的變化稍微不同。一般消費者的 MPC 並不會因為非流動性資產的變化而改變太多；然而，在非流動性資產小於 4 時，IG 偏好消費者的 MPC 隨著非流動性資產會較為明顯的遞減。

在流動性資產分布上，一般消費者有一定比例的人持有負債，並且在大約 0.5 附近有一個峰值；相對地，幾乎所有的 IG 偏好消費者都持有負債。這一特徵與

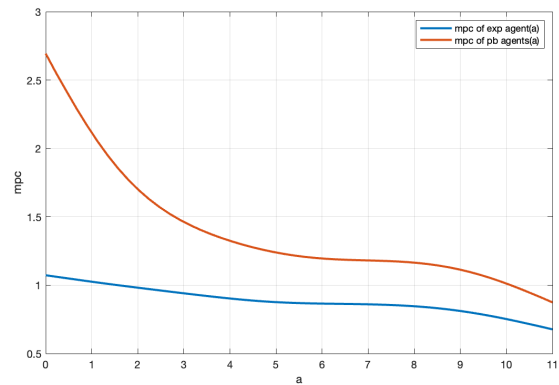
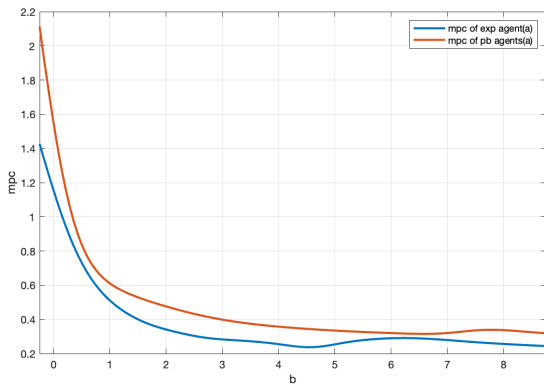


Figure 5.1: MPC over Liquid Asset and Illiquid Asset

IG 偏好對 MPC 的直接影響使得 IG 偏好消費者的平均 MPC 大幅高於一般消費者。然而，在非流動性資產上，一般消費者有將近 40% 的人不持有非流動性資產，其中 28% 的人為 hand-to-mouth。這一比例比 IG 偏好消費者高出許多。但是若觀察其分布，IG 偏好消費者的非流動性資產集中在 0 到 4 之間，一般消費者則集中在兩端：0 以及 9 的附近。就平均來說，一般消費者的平均非流動性資產依然高於 IG 偏好消費者。如表 5.2 所示，一般消費者的平均資產大約比 IG 偏好消費者高出 0.7。

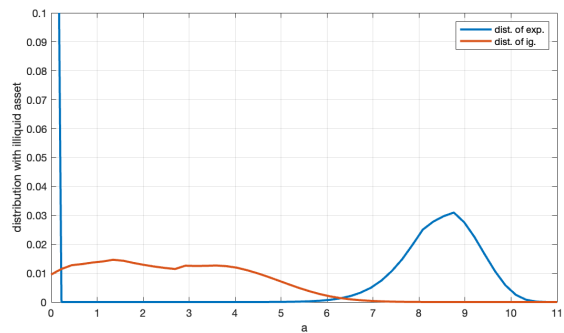
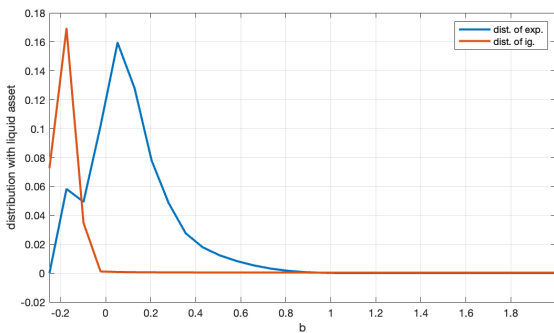


Figure 5.2: 資產分布: 左圖為一般消費者與 IG 偏好消費者的流動性資產分布；右圖為非流動性資產的分布



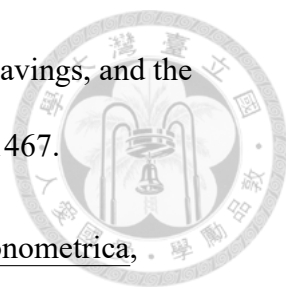
第六章 Conclusion

本文探討如何降低總體理論模型與實證的邊際消費傾向結果的差距。建立在Kaplan and Violante (2022) 的發現，我們嘗試在兩資產模型的設定下，透過考慮指數型折現消費者以及擁有當下偏誤時間偏好的消費者，發現僅需要在兩種資產的報酬率差距不到 4% 的情況下就可以建立一個經濟體同時符合重要的資產分佈比例以及平均 MPC 的目標水準，遠遠低於兩資產模型所需要的 8% 資產報酬率差距。藉由一小部分的當下偏誤消費者，我們可以大幅拉高平均 MPC 的程度；另一方面，指數型折現消費者雖然在低利差下平均 MPC 程度相對較小，但是可以擁有更高的資產水準。因此，結合兩種消費者的特徵，我們找到了一個比例，可以在資產分佈與平均 MPC 水準上同時符合實證資料的數值。



參考文獻

- Achdou, Y., Han, J., Lasry, J.-M., Lions, P.-L., and Moll, B. (2022). Income and wealth distribution in macroeconomics: A continuous-time approach. The review of economic studies, 89(1):45–86.
- Aiyagari, S. R. (1994). Uninsured idiosyncratic risk and aggregate saving. The Quarterly Journal of Economics, 109(3):659–684.
- Ashraf, N., Karlan, D., and Yin, W. (2006). Tying odysseus to the mast: Evidence from a commitment savings product in the philippines. The Quarterly Journal of Economics, 121(2):635–672.
- Barles, G. and Souganidis, P. E. (1991). Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations. Asymptotic analysis, 4(3):271–283.
- Campbell, J. Y. and Mankiw, N. G. (1991). The response of consumption to income: a cross-country investigation. European economic review, 35(4):723–756.
- Floden, M. and Lindé, J. (2001). Idiosyncratic risk in the united states and sweden: Is there a role for government insurance? Review of Economic dynamics, 4(2):406–437.
- Frederick, S., Loewenstein, G., and O’ donoghue, T. (2002). Time discounting and time preference: A critical review. Journal of economic literature, 40(2):351–401.

- 
- Guerrieri, V. and Lorenzoni, G. (2017). Credit crises, precautionary savings, and the liquidity trap. The Quarterly Journal of Economics, 132(3):1427–1467.
- Gul, F. and Pesendorfer, W. (2001). Temptation and self-control. Econometrica, 69(6):1403–1435.
- Harris, C. and Laibson, D. (2013). Instantaneous gratification. The Quarterly Journal of Economics, 128(1):205–248.
- Havranek, T. and Sokolova, A. (2020). Do consumers really follow a rule of thumb? three thousand estimates from 144 studies say “probably not” . Review of Economic Dynamics, 35:97–122.
- Huggett, M. (1993). The risk-free rate in heterogeneous-agent incomplete-insurance economies. Journal of economic Dynamics and Control, 17(5-6):953–969.
- Jappelli, T. and Pistaferri, L. (2010). The consumption response to income changes. Annu. Rev. Econ., 2(1):479–506.
- Jordà, Ò., Knoll, K., Kuvshinov, D., Schularick, M., and Taylor, A. M. (2019). The rate of return on everything, 1870–2015. The Quarterly Journal of Economics, 134(3):1225–1298.
- Kaplan, G., Moll, B., and Violante, G. L. (2018). Monetary policy according to hank. American Economic Review, 108(3):697–743.
- Kaplan, G. and Violante, G. L. (2022). The marginal propensity to consume in heterogeneous agent models. Annual Review of Economics, 14:747–775.
- Kaplan, G., Violante, G. L., and Weidner, J. (2014). The wealthy hand-to-mouth. Technical report, National Bureau of Economic Research.

Laibson, D. (2015). Why don't present-biased agents make commitments? American Economic Review, 105(5):267–272.



Laibson, D. and Maxted, P. (2023). The beta-delta-delta sweet spot. Technical report, National Bureau of Economic Research.

Laibson, D., Maxted, P., and Moll, B. (2021). Present bias amplifies the household balance-sheet channels of macroeconomic policy. Technical report, National Bureau of Economic Research.

Maxted, P. (2020). Present bias in consumption-saving models: A tractable continuous-time approach. Technical report, Mimeo.

Rotemberg, J. J. (1982). Sticky prices in the united states. Journal of political economy, 90(6):1187–1211.



附錄 A — Computational method

這一章節我們將介紹指數型折現偏好消費者、IG 偏好消費者的 HJB 方程式以及 KF 方程式的詳細計算步驟。最後，我們將介紹如何透過有限差分法計算 MPC。

A.1 Computation for the Main Model

A.1.1 Exponential Discount Preference Agent

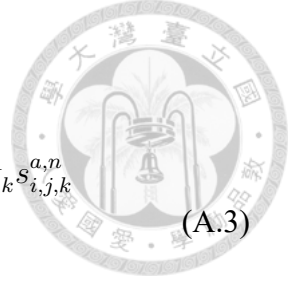
HJB 方程式的計算方法如下：

給定狀態函數的網格點 $b_i = 1, \dots, I$, $a_j, j = 1, \dots, J$ 以及 $y_k, k = 1, \dots, K$ ，以及價值函數 $V_{i,j,k} = V(b_i, a_j, y_k)$ 。接著將網格差分化為 $\Delta b_i^+ = b_{i+1} - b_i$ 和 $\Delta b_i^- = b_i - b_{i-1}$ ，以此類推。在有限差分法中，我們透過價值函數在任一引數向前 (Forward) 或向後 (Backward) 來迭代價值函數。因此，價值函數往正負方向的差分可以寫為

$$V_b(b_i, a_j, y_k) \approx V_{b,i,j,k}^F = \frac{V_{i+1,j,k} - V_{i,j,k}}{\Delta b_i^+} \quad (\text{A.1})$$

$$V_b(b_i, a_j, y_k) \approx V_{b,i,j,k}^B = \frac{V_{i,j,k} - V_{i-1,j,k}}{\Delta b_i^-} \quad (\text{A.2})$$

同理， V_a 的正負差分可由一樣的方式推得。接著，我們給定迭代變數



$n = 0, 1, 2, \dots$ ，並且我們將模型的 HJB 方程式 (2.7) 離散化

$$\frac{V_{i,j,k}^{n+1} - V_{i,j,k}^n}{\Delta} + \rho V_{i,j,k}^{n+1} = u(c_{i,j,k}^n) + V_{b,i,j,k}^{n+1} s_{i,j,k}^{b,n} + V_{a,i,j,k}^{n+1} s_{i,j,k}^{a,n} + \sum_{k' \neq k}^K \lambda_{k,k'} (V_{i,j,k'}^{n+1} - V_{i,j,k}^{n+1}) \quad (\text{A.3})$$

以及消費與儲蓄的一階條件

$$u'(c_{i,j,k}^n) = V_{b,i,j,k}^n \quad (\text{A.4})$$

$$V_{a,i,j,k}^n = V_{b,i,j,k}^n (1 + \chi d(d_{i,j,k}^n, a_j)) \quad (\text{A.5})$$

在迭代價值函數的過程中，首先給定初始的價值函數 $V_{i,j,k}^0$ 以及 Δ ，並且透過 upwind method 去選擇在每一個狀態變數下價值的變化方向。在消費變動的處理，我們可以利用 s^b 的線性特性，將流動性資產的變動寫成 $s_{i,j,k}^b = s_{i,j,k}^c + s_{i,j,k}^d$ ，其中

$$s_{i,j,k}^c = y_k + r^b(b_i)b_i - c_{i,j,k}^n$$

$$s_{i,j,k}^d = -d_{i,j,k}^n - \chi(d_{i,j,k}^n, a_j)$$

另一方面，在方程式 (A.5) 中可以看到，儲蓄的變動涉及 a 和 b 方向的變動。因此，我們定義 $d_{i,j,k}^{BB}$, $d_{i,j,k}^{FB}$, $d_{i,j,k}^{BF}$, $d_{i,j,k}^{FF}$ ，第一個上標代表 V_b 的變動；第二個上標代表 V_a 的變動。接著，我們以 V^b 的變動方向，定義

$$d_{i,j,k}^B = d_{i,j,k}^{BF} \mathbf{1}_{\{d_{i,j,k}^{BF} > 0\}} + d_{i,j,k}^{BB} \mathbf{1}_{\{d_{i,j,k}^{BB} < 0\}}$$

$$d_{i,j,k}^F = d_{i,j,k}^{FF} \mathbf{1}_{\{d_{i,j,k}^{FF} > 0\}} + d_{i,j,k}^{FB} \mathbf{1}_{\{d_{i,j,k}^{FB} < 0\}}$$

並將 $s_{i,j,k}^d$ 區分為 $s_{i,j,k}^{d,F} = -d_{i,j,k}^{B,n} - \chi(d_{i,j,k}^{B,n}, a_j)$ ， $s_{i,j,k}^{d,F}$ 同理。藉由上述步驟，我們將儲蓄還原為

$$d_{i,j,k} = d_{i,j,k}^B \mathbf{1}_{\{s_{i,j,k}^{d,B} < 0\}} + d_{i,j,k}^F \mathbf{1}_{\{s_{i,j,k}^{d,F} > 0\}}$$



最後，藉由 upwind 的有限差分法將方程式 (A.3) 改寫為

$$\begin{aligned}
\frac{V_{i,j,k}^{n+1} - V_{i,j,k}^n}{\Delta} + \rho V_{i,j,k}^{n+1} = & u(c_{i,j,k}^n) \\
& + V_{b,i,j,k}^{B,n+1}(s_{i,j,k}^{c,B})^- + V_{b,i,j,k}^{F,n+1}(s_{i,j,k}^{c,F})^+ \\
& + V_{b,i,j,k}^{B,n+1}(s_{i,j,k}^{d,B})^- + V_{b,i,j,k}^{F,n+1}(s_{i,j,k}^{d,F})^+ \\
& + V_{a,i,j,k}^{B,n+1}d_{i,j,k}^- + V_{a,i,j,k}^{F,n+1}(d_{i,j,k}^+ + r^a a_j) \\
& + \sum_{k' \neq k}^K \lambda_{k,k'} (V_{i,j,k'}^{n+1} - V_{i,j,k}^{n+1})
\end{aligned} \tag{A.6}$$

以上變數中 $(s_{i,j,k}^{c,B})^-$ 代表 $s_{i,j,k}^{c,B}$ 為負的情況，以此類推。

最後我們可以透過方程式 (A.7) 迭代 V^n, V^{n+1}, \dots

$$\frac{1}{\Delta} (V^{n+1} - V^n) + \rho V_{n+1} = u^n + (\mathbf{A}^n + \mathbf{\Lambda}) V^{n+1} \tag{A.7}$$

其中 V^n, V^{n+1} 和 u^n 為長度 $I \times J \times K$ 的向量； \mathbf{A}^n 和 $\mathbf{\Lambda}$ 為大小 $(I \times J \times K) \times (I \times J \times K)$ 的矩陣。我們可以在 [Achdou et al. \(2022\)](#) 看到 \mathbf{A}^n 的類似結構， $\mathbf{\Lambda}$ 則代表收入的隨機過程矩陣。最後， Δ 在計算過程中可以任意設置，當 Δ 越大時，收斂速度越快。另一方面，在 KF 方程式的計算中，[Achdou et al. \(2022\)](#) 證明藉由有限差分法計算消費-儲蓄模型時，計算 HJB 方程式的轉移矩陣 \mathbf{A}^T 恰好等於 KF 方程式中所需要的矩陣。給定 g 為模型的分佈，KF 方程式可以寫為

$$\mathbf{A}^T g = 0 \tag{A.8}$$

然而， \mathbf{A}^T 為不可逆矩陣。因此，在求算時，我們會固定其中任一點為任一值 (例如 $\mathbf{A}^T_{i,j,k} = 0.2$) 之後再進行反矩陣求得分佈 $g_{i,j,k}$ 。



A.1.2 IG Preference Agent

由於動態不一致導致 IG 偏好消費者的 HJB 方程式違反單調性的條件，因此無法直接使用有限差分法計算。然而，藉由反向工程我們可以計算 \hat{u} 消費者來進一步推得 IG 偏好消費者的均衡解。因此，藉由將一階條件改寫為方程式 (3.1)、(3.2) 以及 (4.1) 即可求得 IG 偏好消費者的 HJB 方程式的數值解。至於 KF 方程式的計算與一般消費者一致。

A.2 Computing MPC by Feymann-Kac Formula

在 MPC 的計算方法上我們先考慮方程式 (3.5) 中的條件預期累積消費 $C_{j,\tau}(b, a)$ ，並且給定初始累積消費 $C_{j,\tau}(b, a) = \Gamma_j(b, a, 0)$ 以及期末條件 $\Gamma_j(b, a, \tau) = 0$ ，其中 $\Gamma_j(b, a, t)$ 滿足下述偏微分方程系統組 (A.9)

$$0 = c_j(b, a) + \partial_b \Gamma_j(b, a, t) s_j^b(b) + \partial_a \Gamma_j(b, a, t) s_j^a(a) + \lambda_j (\Gamma_{-j}(b, a, t) - \Gamma_j(b, a, t)) + \partial_t \Gamma_j(b, a, t), \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{A.9})$$

on $(\underline{b}, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \tau)$, for all b, a

此一結果是 Feymann-Kac formula 的直接應用。此一公式可以將特定的拋物型偏微分方程解寫作隨機過程的條件期望值，藉此使微分方程得到的數值解轉化為隨機過程的模擬路徑。在數值方法上，方程式 (A.9) 滿足三項條件 (單調性、穩定性、一致性)，因此可以透過有限差分法直接計算。同時可以留意到，方程式 (A.9) 與 HJB 方程組 (2.7) 的結構相似，因此計算上給定時間變數 $\tau = 0, 1, \dots, t, \dots, \tau$ 並套用 HJB 方程式的矩陣 \mathbf{A} 即可算得累積消費 $C_{j,\tau}(b, a, y)$ 。分別計算累積消費 $C_{j,\tau}(b, a, y)$ 以及得到意外之財後的累積消費 $C_{j,\tau}(b + x, a, y)$ ，藉由方程式 (3.6) 即可得到 $MPC_{j,\tau}^x(b, a)$ 。