

國立臺灣大學工學院土木工程學系

碩士論文

Department of Civil Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master's Thesis

HHT 於桁架非線性動力分析之應用

Application of HHT Techniques to Nonlinear Dynamic

Analysis of Trusses



Chen, Chun-Teh

指導教授：楊永斌 教授

Advisor: Yang, Y. B.

中華民國 98 年 6 月

June, 2009

誌 謝

本文得以順利完成，首先感謝恩師 楊永斌教授三年來悉心的指導與嚴謹的要求。恩師的研究精神及處世之道，給予筆者極深的影響。不論是在學業或待人處世上，均可見到恩師謹慎細心、充份準備的一面，以及「天行健，君子以自強不息」的實踐典範。此外，亦感謝恩師給予機會與空間，使筆者於研究期間尚能參加教育部公費留學考試，並順利考取，在此謹致上由衷之感謝。

論文口試期間，承蒙 郭世榮教授、 陳俊杉教授，以及 宋裕祺教授詳加指正，並提供寶貴意見，使本文更臻完備，特此致謝。

在學期間，教育部的獎助學金、國科會的計劃津貼，以及中興工程顧問社的獎學金，使筆者生活無虞，而能全心全意投入學術領域。此外，中華民國斐陶斐學會授予榮譽會員，肯定筆者在學業上的努力，在此一併致謝。

感謝 呂良正教授、 田堯彰教授，以及 羅俊雄教授的教導與關懷。尤其是 呂良正教授在研究及生涯規劃上給予諸多建議，使筆者受益良多。此外，必須感謝 呂良正教授提供當任高等結構學與有限元素法助教的機會，使筆者得以減輕在台北生活沉重的經濟負擔，在此謹致十二萬分的謝意。

感謝學長演聲、俊鏡、凱淳、詩渤、明典，學姐祖榕、韻如在研究及生活上的支持與幫助。特別是凱淳學長在研究期間的教導與指正，幫助筆者順利度過研究難關，特此致謝。此外，同窗好友辰儒、東霖、柏潔、容慈，以及結構組諸多同學在課業上的切磋琢磨，使筆者深刻地感受到友誼的可貴，謝謝你們。

感謝父母家人辛勞的栽培與無微不至的關懷，提供筆者衣食無缺的環境，以及最好的教育機會，並在筆者埋首於論文研究之際，給予最大的支持與包容，這是筆者背後最大的動力來源。願他們永遠健康、快樂。

最後，謹以本文獻給所有關愛我的人。

摘要

傅立葉轉換(Fourier Transformation)之應用有諸多限制條件，無法完全適用於非線性系統。為了能分析非穩態(non-stationary)或非線性過程(nonlinear processes)之訊號，本文採用具有較高適用性之希爾伯特-黃轉換(Hilbert-Huang Transform - HHT)作為分析工具之一。

希爾伯特-黃轉換主要包含兩部分之處裡流程：(1)經驗模態分離法(Empirical Mode Decomposition - EMD)：可將訊號分離成數個內建模態函數(Intrinsic Mode Function - IMF)，而每個 IMF 皆具有良好的希爾伯特轉換特性。(2)希爾伯特轉換(Hilbert Transform)：可得到訊號之即時頻率與即時振幅，若繪製成能量-頻率-時間分佈圖，則稱為希爾伯特頻譜(Hilbert Spectrum)。

本文以雙桿桁架系統作為測試模型，考慮幾何非線性效應，利用有限元素法配合 *Newmark* β 法進行數值分析，並提供對應之達芬方程式參數。本文嘗試由頻率的角度，研究非線性系統之動力行為，比較 FFT 與 HHT 分析結果之差別，並針對振動頻率的變化、週期倍增以及混沌現象等，進行較為系統的探討。

Abstract

In the Fourier analysis, the fundamental assumption of linear and stationary process is required for the data. Applying the Fourier analysis to those data generated from nonlinear systems may cause misunderstanding of the physical phenomena hidden in the data. On the other hand, the Hilbert-Huang transform (HHT) is considered more suitable for analyzing nonlinear and non-stationary data.

HHT includes two major parts: (1) empirical mode decomposition (EMD): a sifting process by which the data can be decomposed into a collection of intrinsic mode functions (IMF) that admit well-behaved Hilbert transforms; (2) Hilbert transform: a type of transform by which the instantaneous frequency and amplitude can be calculated for any instant. The energy distribution being plotted in a 3-D energy-frequency-time space is designated as the Hilbert spectrum.

A two-member truss system with the effect of geometric nonlinearity considered is taken as the example in this study. The dynamic response of such a system is numerically analyzed by the finite element method along with the *Newmark* β method, with the corresponding parameters in the Duffing equation given in each case. By comparing the results obtained from both the FFT and HHT analyses in frequency domain, the dynamic behavior of the nonlinear system is systematically studied, especially with respect to the variation in frequency caused by the geometric nonlinearity, period-doubling, chaos phenomenon, and so on.

目 錄

誌 謝	I
摘 要	II
英文摘要.....	III

第一章 導論

1.1 研究動機與目的	1
1.2 研究範圍	2

第二章 結構非線性增量理論

2.1 非線性推演法簡介	3
2.2 參考狀態說明	3
2.3 虛功方程式推導	4
2.4 更新式 Lagrange 推演法	5
2.5 剛體運動法則	8
2.6 結論	8



第三章 有限元素增量分析

3.1 有限元素增量平衡方程式推導	11
3.1.1 二維桁架元素之勁度矩陣	11
3.1.2 二維桁架元素之質量矩陣	16
3.1.3 二維桁架元素之阻尼矩陣	17
3.2 二維桁架元素之剛體測試	17
3.3 廣義位移控制法	18
3.4 有限元素非線性靜力分析流程	22
3.4.1 預測階段與校正階段	22
3.4.2 增量 - 迭代分析流程	23
3.5 有限元素非線性動力分析流程	25
3.5.1 預測階段與校正階段	26
3.5.2 增量 - 迭代分析流程	28
3.6 結論	30

第四章 希爾伯特 - 黃轉換之基本理論

4.1 前言	32
4.2 希爾伯特轉換	32
4.3 經驗模態分離法	34

4.4 曲率篩選法	35
-----------------	----

第五章 桁架系統動力分析

5.1 前言	43
--------------	----

5.2 雙桿桁架系統介紹	43
--------------------	----

5.3 分析結果說明	45
------------------	----

5.3.1 無阻尼之自由振動系統	45
------------------------	----

5.3.2 含阻尼之自由振動系統	48
------------------------	----

5.3.3 含阻尼之強迫振動系統	49
------------------------	----

第六章 結論與未來展望

6.1 結論	82
--------------	----

6.2 未來展望	83
----------------	----

參考文獻	84
------------	----



圖 目 錄

圖 2.1 三維空間中之物體運動	10
圖 2.2 受初始載重之桿件:(a)剛體旋轉前;(b)剛體旋轉後	10
圖 3.1 二維桁架元素	31
圖 3.2 受初始力之桁架元素:(a)剛體旋轉前;(b)剛體旋轉後	31
圖 4.1 即時頻率之物理意義解釋圖	38
圖 4.2(a) $X_1(t)$ 之位移歷時圖	39
圖 4.2(b) $X_1(t)$ 經 EMD 所得之 IMF 的	39
圖 4.3(a) $X_2(t)$ 之位移歷時圖	40
圖 4.3(b) $X_2(t)$ 經 EMD 所得之 IMF 的	41
圖 4.3(c) $X_2(t)$ 之即時頻率	41
圖 4.3(d) $X_2(t)$ 經改良式 EMD 所得之 IMF 的	42
圖 5.1 雙桿桁架系統	53
圖 5.2 溜滑球系統	53
圖 5.3 雙桿桁架系統之荷重 - 變形曲線	54
圖 5.4(a) 例題(1)之位移歷時圖	54
圖 5.4(b) 例題(1)之相位圖	55

圖 5.4(c) 例題(1)之 FFT 頻譜圖	55
圖 5.4(d) 例題(1)經 EMD 所得之 IMF	56
圖 5.4(e) 例題(1)之即時頻率比較圖	56
圖 5.5(a) 例題(2)之位移歷時圖	57
圖 5.5(b) 例題(2)之相位圖	57
圖 5.5(c) 例題(2)之 FFT 頻譜圖	58
圖 5.5(d) 例題(2)經 EMD 所得之 IMF	58
圖 5.5(e) 例題(2)之即時頻率比較圖	59
圖 5.6(a) 例題(3)之位移歷時圖	59
圖 5.6(b) 例題(3)之相位圖	60
圖 5.6(c) 例題(3)之 FFT 頻譜圖	60
圖 5.6(d) 例題(3)經 EMD 所得之 IMF	61
圖 5.6(e) 例題(3)之即時頻率比較圖	61
圖 5.7(a) 例題(4)之位移歷時圖	62
圖 5.7(b) 例題(4)之相位圖	62
圖 5.7(c) 例題(4)之 FFT 頻譜圖	63
圖 5.7(d) 例題(4)經 EMD 所得之 IMFs	63
圖 5.7(e) 例題(4)之即時頻率比較圖	64
圖 5.8(a) 例題(5)之位移歷時圖	65

圖 5.8(b) 例題(5)之相位圖	65
圖 5.8(c) 例題(5)之龐加萊圖	66
圖 5.8(d) 例題(5)之 FFT 頻譜圖	66
圖 5.8(e) 例題(5)經 EMD 所得之 IMFs	67
圖 5.8(f) 例題(5)之即時頻率	68
圖 5.9(a) 例題(6)之位移歷時圖	68
圖 5.9(b) 例題(6)之相位圖	69
圖 5.9(c) 例題(6)之龐加萊圖	69
圖 5.9(d) 例題(6)之 FFT 頻譜圖	70
圖 5.9(e) 例題(6)經 EMD 所得之 IMF	70
圖 5.9(f) 例題(6)之即時頻率(1)	71
圖 5.9(g) 例題(6)經改良式 EMD 所得之 IMFs	71
圖 5.9(h) 例題(6)之即時頻率(2)	72
圖 5.10(a) 例題(7)之位移歷時圖	73
圖 5.10(b) 例題(7)之相位圖	73
圖 5.10(c) 例題(7)之龐加萊圖	74
圖 5.10(d) 例題(7)之 FFT 頻譜圖	74
圖 5.10(e) 例題(7)經 EMD 所得之 IMFs	75
圖 5.10(f) 例題(7)之即時頻率(1)	76

圖 5.10(g) 例題(7)經改良式 EMD 所得之 IMFs	76
圖 5.10(h) 例題(7)之即時頻率(2)	77
圖 5.11(a) 例題(8)之位移歷時圖	78
圖 5.11(b) 例題(8)之相位圖	78
圖 5.11(c) 例題(8)之龐加萊圖	79
圖 5.11(d) 例題(8)之 FFT 頻譜圖	79
圖 5.11(e) 例題(8)經 EMD 所得之 IMFs	80



第一章 導論

1.1 研究動機與目的

過去數十年來，關於非線性問題的研究不勝枚舉，但對工程師而言，非線性結構之力學特性複雜，應用的普遍性仍不高，多僅止於學術研究範疇。現代採用高強度材料之結構物，其桿件斷面積減少，易產生大變位行為，若採用傳統之線性分析法，所得到之計算結果，則與實際情況有所出入，無法滿足現代工程規範與分析需求。因此，在設計上，為了達到經濟、安全之目的，工程師必須依賴可靠之非線性分析法，才能正確地評估結構之承載力及動力反應。本文所考慮之非線性效應為幾何非線性，乃結構受力後因幾何形狀改變，所引進的非線性效應，與線性分析不同之處，在於必須將平衡狀態建立在變形後的位置。

前人在研究結構非線性問題時，皆著重於結構極限荷載(Critical Load)求取或其後挫屈(Post-buckling)行為的探討，而針對結構非線性動力特性的研究，特別是由非線性效應所導致結構振動頻率變化的現象，則顯得相對匱乏。另一方面，研究非線性動力問題，無可避免地，除了規則行為外，尚有類似隨機(random-like)的行為出現，稱之為混沌(chaos)。

混沌相關的研究於二十世紀末大量地出現，其中 Figenbaum(1978,1979)求得 Feigenbaum 常數，代表非線性系統發生週期倍增時，其參數間的關係；Novak 和 Frehlich(1982)針對達芬方程式(Duffing equation)，由規則行為轉變到混沌的過程進行研究；而 Holmes 和 Moon(1983)則對於不同的非線性系統，所出現的奇異吸子和混沌現象提出解釋。然而，大部分關於混沌的研究，多著重於建立混沌現象之預測準則，卻忽略了非線性系統在頻率域上的特性。

傅立葉轉換(Fourier Transformation)之應用有諸多限制條件，無法完全適用於

非線性系統。為了能分析非穩態(non-stationary)或非線性過程(nonlinear processes)之訊號，本文採用具有較高適用性之希爾伯特 - 黃轉換(Hilbert-Huang Transform - HHT)作為分析工具之一。

希爾伯特 - 黃轉換主要包含兩部分之處裡流程：(1)經驗模態分離法(Empirical Mode Decomposition - EMD)：可將訊號分離成數個內建模態函數(Intrinsic Mode Function - IMF)，而每個 IMF 皆具有良好的希爾伯特轉換特性。(2)希爾伯特轉換(Hilbert Transform)：可得到訊號之即時頻率與即時振幅，若繪製成能量 - 頻率 - 時間分佈圖，則稱為希爾伯特頻譜(Hilbert Spectrum)。

本文以雙桿桁架系統作為測試模型，考慮幾何非線性效應，利用有限元素法配合 *Newmark* β 法進行數值分析，並提供對應之達芬方程式參數。本文嘗試由頻率的角度，研究非線性系統之動力行為，比較 FFT 與 HHT 分析結果之差別，並針對振動頻率的變化、週期倍增以及混沌現象等，進行較為系統的探討。

1.2 研究範圍

基於以上所言，本文各章節安排如下：

第二章為結構非線性增量理論：介紹剛體運動法則之原理及應用，並利用更新式 Lagrange 推演法，配合虛功原理，推導出線性化增量平衡方程式，此方程式可用來建立有限元素勁度矩陣。

第三章為有限元素增量分析：建立桁架之有限元素勁度矩陣，並介紹非線性靜力與動力分析流程，其中靜力分析採用廣義位移控制法作為增量 - 迭代之準則；動力分析則採用 *Newmark* β 法進行時間歷時分析。

第四章為希爾伯特 - 黃轉換之基本理論：首先說明傅立葉轉換與希爾伯特轉換之限制，並介紹 EMD 之處理流程。最後本文針對 EMD 之篩選過程進行改良，並對 EMD 改良前後之分離結果進行比較。

第五章為桁架系統動力分析：利用一典型之雙桿桁架系統，配合前人所研究之達芬方程式，進行非線性動力分析，並對分析結果進行說明與探討。

第六章為結論與未來展望。

第二章 結構非線性增量理論

2.1 非線性推演法簡介

連體力學中主要有兩種方法用來描述連續體的運動行為，分別是 Euler 推演法 (Eulerian Formulation) 與 Lagrange 推演法 (Lagrangian Formulation)。其中 Euler 推演法是以空間座標系 (spatial coordinates) 為參考座標，而 Lagrange 推演法則是以材料座標系 (material coordinates) 為參考座標。以結構分析而言，吾人關心的是物體在受力過程中，其變形的歷史資料，因此 Lagrange 推演法特別適用在固體力學，而 Euler 推演法則被廣泛地應用在流體力學上。本文的研究範疇屬於固體力學領域，因此採用 Lagrange 推演法為推導工具。



2.2 參考狀態說明

如圖 2.1 所示，物體在受力後的運動過程可用三種狀態來描述：初始未變形狀態 C_0 、前階段已知變形狀態 C_1 、現階段未知變形狀態 C_2 。由不同參考狀態所建立的平衡方程式各不相同，因此 Lagrange 推演法可再進一步區分為兩種類型：全量式 Lagrange 推演法 (Total Lagrangian Formulation - TL) 與更新式 Lagrange 推演法 (Updated Lagrangian Formulation - UL)。其中全量式 Lagrange 推演法是以 C_0 狀態為參考狀態，而更新式 Lagrange 推演法則是以 C_1 狀態為基準。

在推導過程中， C_1 狀態的所有狀態變數皆為已知，若物體由 C_1 狀態受到一微小外力增量而運動到 C_2 狀態，則 C_2 狀態的所有狀態變數可用增量理論來決定。其中物體由 C_1 狀態到 C_2 狀態的運動過程，稱為增量步態 (incremental step)。此一增量步態通常假設成微小 (small)，以達到精確度的要求，而 C_0 狀態到 C_1 狀態的變形量

則可由上述之計算程序累加得到，自然不受微小的限制。

2.3 虛功方程式推導

物體在 C_2 狀態下，其內部任意點之應力必須滿足平衡方程式，採用直角座標系統可表示成：

$$\frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial^2 x_j} + {}^2 f_i = 0 \quad (2.3.1)$$

其中 ${}^2 \tau_{ij}$ 為 Cauchy 應力張量， ${}^2 f_i$ 為 C_2 狀態下單位體積之微體力分量。

物體在力平衡狀態下，其表面積 S 可區分為兩部分：已知表面曳引力 S_r (自然邊界條件) 與已知位移條件 S_u (幾何邊界條件)。

進一步，物體在 C_2 狀態下之自然邊界條件可表示成：

$${}^2 \tau_{ij} n_j = {}^2 t_i \quad \text{on} \quad {}^2 S_r \quad (2.3.2)$$

其中 ${}^2 t_i$ 為已知單位面積上之曳引力，而 n_j 為 ${}^2 S_r$ 之方向餘弦。

另一方面，物體在 C_2 狀態下之幾何邊界條件可表示成：

$$\delta u_i = 0 \quad \text{on} \quad {}^2 S_u \quad (2.3.3)$$

接下來，假設物體在受到虛位移 δu_i 的過程中，其受力狀態保持不變，則表面曳引力 ${}^2 t_i$ 與微體力 ${}^2 f_i$ 所作的外虛功 ${}^2 R$ 可表示成：

$${}^2 R = \int_{{}^2 S} {}^2 t_i \delta u_i \, dS + \int_{{}^2 V} {}^2 f_i \delta u_i \, dV \quad (2.3.4)$$

由(2.3.2)式，可將上式改寫成：

$${}^2 R = \int_{{}^2 S} {}^2 \tau_{ij} n_j \delta u_i \, dS + \int_{{}^2 V} {}^2 f_i \delta u_i \, dV \quad (2.3.5)$$

由散度定理(Divergence Theorem)，可將上式之第一個積分項轉換成體積分，並與第二個積分項合併，表示如下：

$${}^2R = \int_{{}^2V} \left[{}^2\tau_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial^2 x_j} + \delta u_i \left(\frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial^2 x_j} + {}^2f_i \right) \right] {}^2dV \quad (2.3.6)$$

由(2.3.1)式之平衡條件，可將上式中小括弧項消除，即：

$${}^2R = \int_{{}^2V} {}^2\tau_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial^2 x_j} {}^2dV \quad (2.3.7)$$

進一步，將虛位移 δu_i 的導數項拆解成應變 $\delta_2 e_{ij}$ 與旋轉 $\delta_2 \omega_{ij}$ 兩部分：

$$\frac{\partial \delta u_i}{\partial^2 x_j} = \delta_2 e_{ij} + \delta_2 \omega_{ij} \quad (2.3.8)$$

其中

$$\delta_2 e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial^2 x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial^2 x_i} \right) \quad (2.3.9)$$

$$\delta_2 \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial^2 x_j} - \frac{\partial \delta u_j}{\partial^2 x_i} \right) \quad (2.3.10)$$

由於 ${}^2\tau_{ij}$ 具有對稱性， $\delta_2 \omega_{ij}$ 具有反對稱性，可將(2.3.7)式改寫成：

$${}^2R = \int_{{}^2V} {}^2\tau_{ij} \delta_2 e_{ij} {}^2dV \quad (2.3.11)$$

最後，物體在 C_2 狀態下之虛功方程式可表示如下：

$$\int_{{}^2V} {}^2\tau_{ij} \delta_2 e_{ij} {}^2dV = \int_{{}^2S} {}^2t_i \delta u_i {}^2dS + \int_{{}^2V} {}^2f_i \delta u_i {}^2dV \quad (2.3.12)$$

2.4 更新式 Lagrange 推演法

物體在 C_2 狀態下，Cauchy 應力張量 ${}^2\tau_{ij}$ 與更新式 Kirchhoff 應力張量 ${}^2S_{ij}$ 有以下關係：

下關係：

$${}^2S_{ij} = \frac{{}^1\rho}{2} \frac{\partial^1 x_i}{\partial^2 x_p} \frac{\partial^1 x_j}{\partial^2 x_q} {}^2\tau_{pq} \quad (2.4.1)$$

$${}^2\tau_{ij} = \frac{{}^2\rho}{1} \frac{\partial^1 x_i}{\partial^2 x_p} \frac{\partial^1 x_j}{\partial^2 x_q} {}^2S_{pq} \quad (2.4.2)$$

其中 ${}^i\rho$ 為物體在 C_i 狀態下之質量密度。

微量虛應變張量 $\delta_2 e_{ij}$ 與 Green-Lagrange 虛應變張量 $\delta_1 \varepsilon_{ij}$ 有以下關係：

$$\delta_1 \varepsilon_{ij} = \frac{\partial^2 x_p}{\partial^1 x_i} \frac{\partial^2 x_q}{\partial^1 x_j} \delta_2 e_{pq} \quad (2.4.3)$$

$$\delta_2 e_{ij} = \frac{\partial^1 x_p}{\partial^2 x_i} \frac{\partial^1 x_q}{\partial^2 x_j} \delta_1 \varepsilon_{pq} \quad (2.4.4)$$

根據質量守恆定律，可知 ${}^1\rho^1 dV = {}^2\rho^2 dV$ ，於是下式成立：

$$\int_{{}^2V} {}^2\tau_{ij} \delta_2 e_{ij} {}^2 dV = \int_{{}^1V} {}^2S_{ij} \delta_1 \varepsilon_{ij} {}^1 dV \quad (2.4.5)$$

以 C_1 為參考狀態，表面曳引力 2t_i 與微體力 2f_i 所作的虛功有以下關係：

$$\int_{{}^2S} {}^2t_i \delta u_i {}^2 dS = \int_{{}^1S} {}^2t_i \delta u_i {}^1 dS \quad (2.4.6)$$

$$\int_{{}^2V} {}^2f_i \delta u_i {}^2 dV = \int_{{}^1V} {}^2f_i \delta u_i {}^1 dV \quad (2.4.7)$$

由(2.4.5)、(2.4.6)、(2.4.7)式，可將(2.3.12)式之參考狀態由 C_2 轉換到 C_1 ：

$$\int_{{}^1V} {}^2S_{ij} \delta_1 \varepsilon_{ij} {}^1 dV = \int_{{}^1S} {}^2t_i \delta u_i {}^1 dS + \int_{{}^1V} {}^2f_i \delta u_i {}^1 dV \quad (2.4.8)$$

將上式等號右側之外虛功項定義為 2R ，即：

$${}^2R = \int_{{}^1S} {}^2t_i \delta u_i {}^1 dS + \int_{{}^1V} {}^2f_i \delta u_i {}^1 dV \quad (2.4.9)$$

進一步，虛應變增量 $\delta_1 \varepsilon_{ij}$ 可拆解成線性 $\delta_1 e_{ij}$ 與非線性 $\delta_1 \eta_{ij}$ 兩部分：

$$\delta_1 \varepsilon_{ij} = \delta_1 e_{ij} + \delta_1 \eta_{ij} \quad (2.4.10)$$

其中

$$\delta_1 e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial^1 x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial^1 x_i} \right) \quad (2.4.11)$$

$$\delta_1 \eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_k}{\partial^1 x_i} \frac{\partial u_k}{\partial^1 x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial^1 x_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial^1 x_j} \right) \quad (2.4.12)$$

另一方面，更新式 Kirchhoff 應力張量 ${}^2S_{ij}$ 可拆解如下：

$${}^2S_{ij} = {}^1\tau_{ij} + {}^1S_{ij} \quad (2.4.13)$$

將(2.4.9)、(2.4.10)、(2.4.13)式代入(2.4.8)式，可得到：

$$\int_V {}^1S_{ij} \delta_1 \varepsilon_{ij} dV + \int_V {}^1\tau_{ij} \delta_1 e_{ij} dV + \int_V {}^1\tau_{ij} \delta_1 \eta_{ij} dV = {}^2R \quad (2.4.14)$$

定義外虛功 1R 為：

$${}^1R = \int_V {}^1\tau_{ij} \delta_1 e_{ij} dV \quad (2.4.15)$$

將上式代入(2.4.14)式，並將 1R 移至等號右側，可得到：

$$\int_V {}^1S_{ij} \delta_1 \varepsilon_{ij} dV + \int_V {}^1\tau_{ij} \delta_1 \eta_{ij} dV = {}^2R - {}^1R \quad (2.4.16)$$

以更新式 Lagrange 推演法而言，其組成律關係式可用更新式 Kirchhoff 應力增量張量 ${}^1S_{ij}$ 與 Green-Lagrange 應變增量張量 ${}^1\varepsilon_{ij}$ 表示成：

$${}^1S_{ij} = {}^1C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.4.17)$$

利用上式，可將(2.4.16)式改寫成：

$$\int_V {}^1C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \delta_1 \varepsilon_{ij} dV + \int_V {}^1\tau_{ij} \delta_1 \eta_{ij} dV = {}^2R - {}^1R \quad (2.4.18)$$

上式為非線性方程式，無法直接求解，但可透過以下線性化假設得到近似解：

$${}^1S_{ij} \cong {}^1C_{ijkl} e_{kl} \quad (2.4.19)$$

$$\delta_1 \varepsilon_{ij} \cong \delta_1 e_{ij} \quad (2.4.20)$$

最後，可將(2.4.18)式近似如下：

$$\int_V {}^1C_{ijkl} e_{kl} \delta_1 e_{ij} dV + \int_V {}^1\tau_{ij} \delta_1 \eta_{ij} dV = {}^2R - {}^1R \quad (2.4.21)$$

上式即為以 C_1 狀態為參考基底，描述物體由 C_1 狀態運動到 C_2 狀態之線性化增量平衡方程式。

2.5 剛體運動法則

幾何非線性問題，以有限元素的角度，通常伴隨著大量的剛體運動。另一方面，在增量 - 迭代分析的過程中，元素在每個增量步開始前已產生變形，並受到一組平衡的節點力作用。因此，元素能否正確模擬剛體運動，特別是受到初始平衡力作用的剛體運動行為，便是檢驗其品質好壞的關鍵。

Yang 和 Chiou(1987)所提出的非線性元素剛體測試可簡述如下:如圖 2.2 所示，考慮一位於地球表面且頂端受外力 P 作用的桿件。在平衡的狀態下，桿件底部必有一大小相等的反作用力 P 存在，如圖 2.2(a)所示，此時的受力情形可視為桿件之 C_1 狀態。現假設地球剛體旋轉了一角度 θ_r ，桿件亦因此運動到 C_2 狀態，如圖 2.2(b)所示。由圖中可看出，在 C_2 狀態下，外力 P 的大小維持不變，但作用線則隨地球運動而旋轉，整體而言，桿件在 C_2 狀態下仍維持平衡。

同理，採用有限元素進行結構非線性分析，必須能模擬上述的剛體運動行為。換言之，元素在進行剛體運動時，其初始平衡力必須能隨剛體運動平移或旋轉，且大小保持不變，如此方可於剛體運動後，維持整個元素的平衡，這便是有限元素剛體測試的含義。此一測試可視為線性有限元素 Patch Test 之廣義版，在 Patch Test 中，有限元素並未受到起始力或初始應力作用，該測試要求一群(patch)有限元素受到剛體運動時，不應產生節點應力或節點力，很明白的，這是 Yang 和 Chiou 剛體運動測試的一個特例。

2.6 結論

本章從更新式 Lagrange 推演法出發，藉由虛功原裡，推導出(2.4.21)式之線性化增量平衡方程式。此平衡方程式將於第三章用來建立有限元素勁度矩陣，藉由不同的元素位移場假設(形狀函數)，會得到對應的元素勁度矩陣，其中包含了彈性勁度矩陣與幾何勁度矩陣，可用來分析各類的非線性問題。然而，無論由哪種方

法得到的元素勁度矩陣，皆必須通過 2.5 節所介紹的剛體測試。必須要強調的，若非線性元素違背剛體運動法則，其品質無法令人信賴；唯有通過剛體測試，才能確保在增量－迭代分析的過程中，分析結果會收斂至正確的方向。



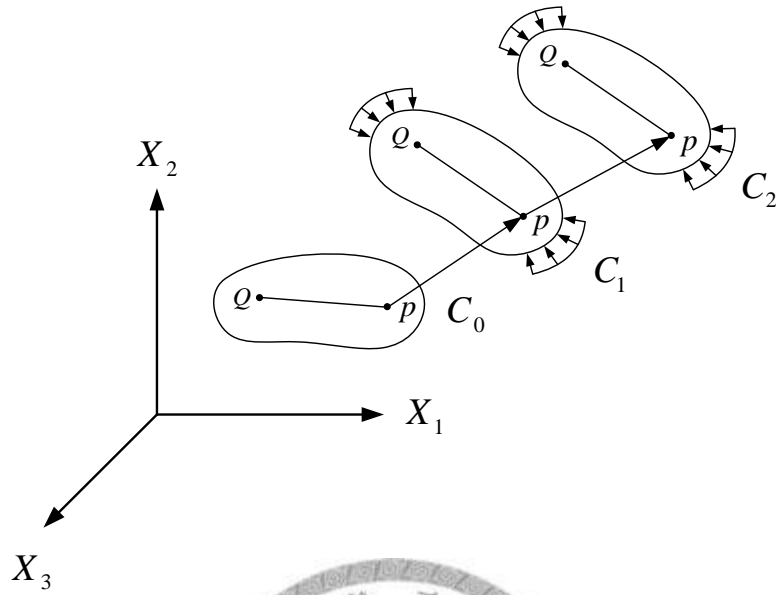


圖 2.1 三維空間中之物體運動

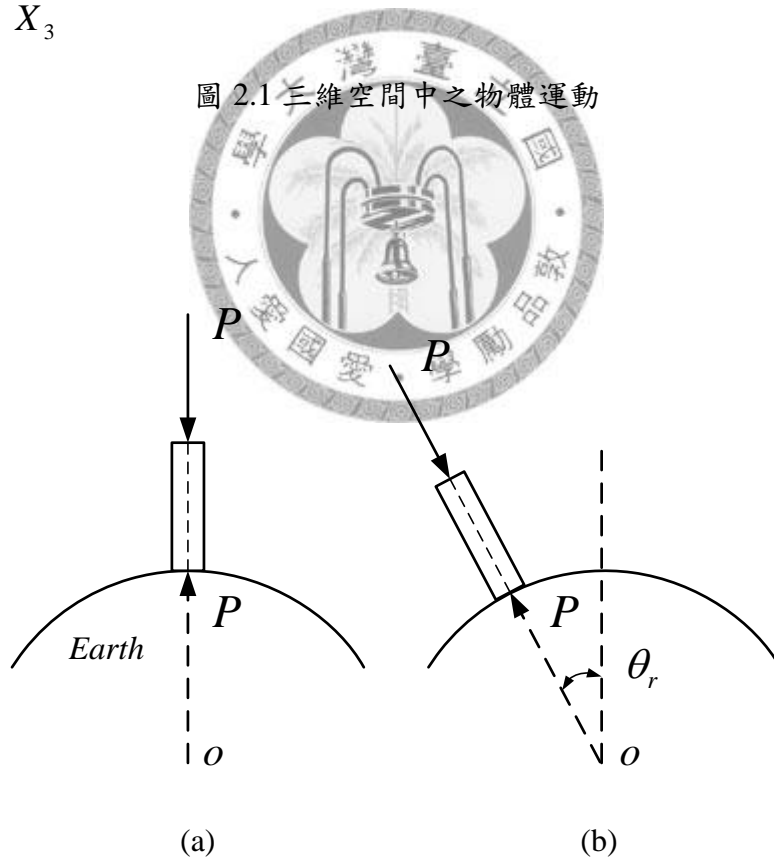


圖 2.2 受初始載重之桿件：(a)剛體旋轉前；(b)剛體旋轉後

第三章 有限元素增量分析

3.1 有限元素增量平衡方程式推導

一個連續體具有無限多個自由度，為了分析該物體之受力行爲，必須求解相關之邊界值問題，其中包含了微分方程式與邊界條件。雖然在理論上可得到解析解，但由於推導與求解過程的困難，實際上可以解決的問題並不多。有限元素分析主要目的在於將結構離散化或理想化，將原本具有複雜載重與邊界條件之連續體近似成有限自由度的數學模型，可避免直接求解法所無法克服的困難。

3.1.1 二維桁架元素之勁度矩陣

由第二章所推導的線性化增量平衡方程式，可用來建立有限元素勁度矩陣：

$$\int_V {}^1C_{ijkl} e_{kl} \delta_1 e_{ij} dV + \int_V {}^1\tau_{ij} \delta_1 \eta_{ij} dV = {}^2R - {}^1R \quad (3.1.1)$$

上式之物理量皆參考於 C_1 狀態，其中第一個積分項為彈性應變 ${}_1e_{ij}$ 所產生的應變能，第二個積分項為初始應力 ${}^1\tau_{ij}$ 所造成的勢能，而 2R 、 1R 分別為外力於 C_2 狀態與 C_1 狀態所作的外虛功。

以桁架元素而言，增量平衡方程式僅須考慮軸向應變 ${}_1e_{xx}$ 與軸向應力 ${}^1\tau_{xx}$ ，並定義材料之彈性模數為 E ，可將(3.1.1)式改寫成：

$$\int_V E {}_1e_{xx} \delta_1 e_{xx} dV + \int_V {}^1\tau_{xx} \delta_1 \eta_{xx} dV = {}^2R - {}^1R \quad (3.1.2)$$

其中

$${}_1e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.1.3)$$

$${}_1\eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.1.4)$$

圖 3.1 為一長度 L 之二維桁架元素，兩端的節點各以 a 、 b 表示之。在此吾人以 $u(x)$ 、 $v(x)$ 分別表示其軸向與側向位移場。一般而言， $u(x)$ 、 $v(x)$ 可由線性內插函數表示成：

$$u(x) = u_a \left(1 - \frac{x}{L} \right) + u_b \frac{x}{L} \quad (3.1.5a)$$

$$v(x) = v_a \left(1 - \frac{x}{L} \right) + v_b \frac{x}{L} \quad (3.1.5b)$$

然而，上述之位移場表示法不易區分剛體運動與自然變形，將造成在推導過程中物理意義不明確，於是改寫成：

$$u(x) = u_r(x) + u_n(x) \quad (3.1.6a)$$

$$v(x) = v_r(x) + v_n(x) \quad (3.1.6b)$$

其中 $u_r(x)$ 、 $v_r(x)$ 為元素之剛體運動場，而 $u_n(x)$ 則為元素之自然變形場。以二維桁架元素而言，可表示成：

$$u_r(x) = a \quad (3.1.7a)$$

$$u_n(x) = bx \quad (3.1.7b)$$

$$v_r(x) = c + dx \quad (3.1.7c)$$

其中 a 、 b 、 c 、 d 為元素之廣義自由度。

推導元素之彈性勁度矩陣(elastic stiffness matrix)，僅與自然變形場有關，因為剛體運動場不產生任何應變能。將(3.1.7b)式之自然變形場代入(3.1.3)式，可得到：

$${}_1e_{xx} = b \quad (3.1.8)$$

將上式代入(3.1.1)式之第一個積分項，可得到：

$$E^1 A^1 L b \delta b = \{ \delta b \}^T \left[\bar{k}_e \right] \{ b \} \quad (3.1.9)$$

其中 $\left[\bar{k}_e \right]$ 為對應廣義自由度 $\{ b \}$ 之彈性勁度矩陣：

$$\left[\bar{k}_e \right] = \left[E^1 A^1 L \right] \quad (3.1.10)$$

廣義自由度 $\{b\}$ 與元素之軸向節點自由度 u_a 、 u_b 之位移轉換矩陣 $[T]_1$ 可表示成：

$$\{b\} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix} \quad (3.1.11)$$

$$[T]_1 = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.12)$$

由同餘轉換 $[k_e] = [T]_1^T [\bar{k}_e] [T]_1$ ，可得到對應元素軸向自由度 $\{u\} (= \{u_a \ u_b\}^T)$ 之彈性勁度矩陣：

$$[k_e] = \frac{E^1 A}{^1 L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.13)$$

此處 u_a 、 u_b 代表元素之軸向自由度。

另外，利用自然變形場亦可推導元素之內在幾何勁度矩陣(internal geometric stiffness matrix)。首先，定義初始軸力 $^1 F_x$ 與初始應力 $^1 \tau_{xx}$ 之關係為：

$$^1 F_x = \int_{^1 A} ^1 \tau_{xx} \ ^1 dA \quad (3.1.14)$$

將(3.1.7b)式之自然變形場代入(3.1.4)式，可得到：

$$^1 \eta_{xx} = \frac{1}{2} b^2 \quad (3.1.15)$$

將上式代入(3.1.1)式之第二個積分項，可得到：

$$\int_V ^1 \tau_{xx} b \delta b \ ^1 dV = \{\delta b\}^T [\bar{k}_g]_{in} \{b\} \quad (3.1.16)$$

利用(3.1.14)式，可將(3.1.16)式改寫成：

$$^1 F_x \ ^1 L b \delta b = \{\delta b\}^T [\bar{k}_g]_{in} \{b\} \quad (3.1.17)$$

其中 $[\bar{k}_g]_{in}$ 為對應廣義自由度 $\{b\}$ 之內在幾何勁度矩陣：

$$[\bar{k}_g]_{in} = [^1 F_x \ ^1 L] \quad (3.1.18)$$

由同餘轉換 $[k_g]_{in} = [T]_1^T [\bar{k}_g]_{in} [T]_1$ ，可得到對應軸向自由度 $\{u\} (= \{u_a \ u_b\}^T)$ 之內在幾何勁度矩陣：

$$\left[k_g \right]_{in} = \frac{{}^1F_x}{{}^1L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.19)$$

最後，利用剛體運動場推導元素之外在幾何勁度矩陣(external geometric stiffness matrix)。將(3.1.7a)式、(3.1.7c)式之剛體運動場代入(3.1.4)式，可得到：

$${}^1\eta_{xx} = \frac{1}{2}d^2 \quad (3.1.20)$$

將上式代入(3.1.1)式之第二個積分項，可得到：

$$\int_V {}^1\tau_{xx} d\delta d^1 dV = \{\delta d\}^T \left[\bar{k}_g \right]_{ext} \{d\} \quad (3.1.21)$$

利用(3.1.14)式，可將(3.1.21)式改寫成：

$${}^1F_x {}^1L d\delta d = \{\delta d\}^T \left[\bar{k}_g \right]_{ext} \{d\} \quad (3.1.22)$$

其中 $\left[\bar{k}_g \right]_{ext}$ 為對應廣義自由度 $\{d\}$ 之外在幾何勁度矩陣：

$$\left[\bar{k}_g \right]_{ext} = \left[{}^1F_x {}^1L \right] \quad (3.1.23)$$

廣義自由度 $\{d\}$ 與元素節點之側向自由度 $\{v\}$ ($= \{v_a \ v_b\}^T$) 之位移轉換矩陣 $[T]_2$ 可表示成：

$$\{d\} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_a \\ v_b \end{Bmatrix} \quad (3.1.24)$$

$$[T]_2 = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.25)$$

此處 v_a 、 v_b 代表元素節點之側向位移。由同餘轉換 $\left[k_g \right]_{ext} = [T]_2^T \left[\bar{k}_g \right]_{ext} [T]_2$ ，可得

到對應側向自由度 $\{v\}$ 之外在幾何勁度矩陣：

$$\left[k_g \right]_{ext} = \frac{{}^1F_x}{{}^1L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.26)$$

將(3.1.13)式之彈性勁度矩陣、(3.1.19)式之內在幾何勁度矩陣以及(3.1.26)式之外在幾何勁度矩陣，改寫成對應元素節點自由度 $\{U\}$ ($= \{u_a \ v_a \ u_b \ v_b\}^T$) 之形式：

$$[k_e] = \frac{E^1 A}{^1 L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.27)$$

$$[k_g]_{in} = \frac{^1 F_x}{^1 L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.28)$$

$$[k_g]_{ext} = \frac{^1 F_x}{^1 L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.29)$$

接下來，考慮外虛功項，由(2.4.9)、(2.4.15)式，可將外虛功 ${}^2 R$ 、 ${}^1 R$ 表示成：

$${}^1 R = \{\delta u\}^T \{{}^1 f\} \quad (3.1.30a)$$

$${}^2 R = \{\delta u\}^T \{{}^2 f\} \quad (3.1.30b)$$

其中 $\{{}^1 f\}$ 為 C_1 狀態作用於元素之初始力， $\{{}^2 f\}$ 為 C_2 狀態作用於元素之節點力。考

慮虛位移 $\{\delta u\}$ 之任意性，可將元素之增量平衡方程式表示成：

$$[k_e]\{U\} + [k_g]_{in}\{U\} + [k_g]_{ext}\{U\} + \{{}^1 f\} = \{{}^2 f\} \quad (3.1.31)$$

由上述之推導可清楚明白，內在幾何勁度矩陣為元素因自然變形所產生的幾何效應，而外在幾何勁度矩陣則為元素因剛體運動所產生的幾何效應。一般而言，大部分的幾何非線性問題，其幾何效應皆來自於剛體運動，自然變形相較之下可忽略不計。因此，若在預測階段忽略內在幾何勁度矩陣，僅會影響迭代的次數，不至於導致數值發散或改變最終的分析結果。

必須要強調的，忽略內在幾何勁度矩陣，即自然變型所產生的幾何效應，可避免複雜的數學推導，此項優勢在高階元素上更為顯著；另一方面，高階元素之外在幾何勁度矩陣可由簡單元素之外在幾何勁度矩陣組合而成，此方面之研究已由林詩渤碩士論文(2005)、Yang, Lin 和 Chen(2006)提出。

3.1.2 二維桁架元素之質量矩陣

動力增量平衡方程式之推導，若不考慮阻尼效應，僅須將慣性力項加入(3.1.1)式之線性化增量平衡方程式即可得到：

$$\int_{V} {}^1\rho_1 \ddot{u} \delta_1 u^1 dV + \int_{V} {}^1C_{ijkl} e_{kl} \delta_1 e_{ij}^1 dV + \int_{V} {}^1\tau_{ij} \delta_1 \eta_{ij}^1 dV = {}^2R - {}^1R \quad (3.1.32)$$

其中第一個積分項為慣性力所作的虛功， ${}^i\rho$ 為物體在 C_i 狀態下之質量密度， \ddot{u} 為物體之加速度。將(3.1.5a)與(3.1.5b)代入(3.1.32)之第一個積分項，可得到：

$$\int_{V} {}^1\rho_1 \ddot{u} \delta_1 u^1 dV = \{\delta u\}^T [m] \{\ddot{u}\} \quad (3.1.33)$$

其中 $[m]$ 為元素之諧和質量矩陣(consistent mass matrix)：

$$[m] = \frac{{}^1\rho^1 A^1 L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.1.34a)$$

另外，若採用堆積質量矩陣(lumped mass matrix)，則元素之質量矩陣可表示成：

$$[m] = \frac{{}^1\rho^1 A^1 L}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.34b)$$

根據質量守恆定律，可知 ${}^i\rho^i A^i L = {}^j\rho^j A^j L$ ，即元素之質量矩陣不隨增量-迭代分析的過程而改變。

3.1.3 二維桁架元素之阻尼矩陣

本文採用雷利阻尼(Rayleigh Damping)來模擬結構之阻尼效應。結構之阻尼矩陣 $[C]$ 可表示成質量矩陣 $[M]$ 與彈性勁度矩陣 $[K_e]$ 之線性組合：

$$[C] = [C_e] + [C_i] \quad (3.1.34)$$

$$[C_e] = \alpha_1 [M] \quad (3.1.35a)$$

$$[C_i] = \alpha_2 [K_e] \quad (3.1.35b)$$

其中

$[C_e]$ ：為外阻尼矩陣(external damping matrix)

$[C_i]$ ：為內阻尼矩陣(internal damping matrix)

α_1 ：為外阻尼因子(external damping factor)

α_2 ：為內阻尼因子(internal damping factor)



3.2 二維桁架元素之剛體測試

圖 3.2(a)為一長度 L 之二維桁架元素，本節定義位移向量 $\{u\}$ 為：

$$\{u\}^T = \{u_a \quad v_a \quad u_b\} \quad (3.2.1)$$

其中元素之彈性勁度矩陣 $[k_e]$ 、內在幾何勁度矩陣 $[k_g]_{in}$ 以及外在幾何勁度矩陣

$[k_g]_{ext}$ 分別如(3.1.27)、(3.1.28)以及(3.1.29)式所示。假設此元素受到初始力作用，

根據平衡條件，在 C_1 狀態下作用於元素之初始力 $\{^1f\}$ 為：

$$\{^1f\}^T = \{-F_{xb} \quad 0 \quad F_{xb} \quad 0\} \quad (3.2.2)$$

假設此元素受到一微小剛體旋轉角 θ_r 作用，使元素從 C_1 狀態運動到 C_2 狀態。

此剛體旋轉角 θ_r 可由位移向量 $\{u\}_r$ 表示成：

$$\{u\}_r^T = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad L\theta_r\} \quad (3.2.3)$$

接下來，檢核(3.1.31)式之增量平衡方程式是否能正確模擬剛體運動效應。首先，

彈性勁度矩陣 $[k_e]$ 在剛體旋轉過程中所產生的彈性力為零：

$$[k_e]\{u\}_r = \{0\} \quad (3.2.4)$$

另外，內在幾何勁度矩陣 $[k_g]_{in}$ 在剛體旋轉過程中不會引致任何作用力：

$$[k_g]_{in}\{u\}_r = \{0\} \quad (3.2.5)$$

以上結果必然成立，由於彈性勁度矩陣、內在幾何勁度矩陣僅與自然變形有關，

在剛體運動之下自然不會產生任何作用力。因此，僅有外在幾何勁度矩陣 $[k_g]_{ext}$ 會

在剛體旋轉的過程中產生一組不平衡力：

$$[k_g]_{ext}\{u\}_r = \{0 \quad -{}^1F_{xb}\theta_r \quad 0 \quad {}^1F_{xb}\theta_r\} \quad (3.2.6)$$

檢核由(3.1.31)式之增量平衡方程式所得到的節點力 $\{{}^2f\}$ 是否滿足剛體法則：

$$\{{}^2f\}^T = \{-{}^1F_{xb} \quad -{}^1F_{xb}\theta_r \quad {}^1F_{xb} \quad {}^1\theta\}_x \quad (3.2.7)$$

如圖 3.2(b)所示，作用於桁架元素之初始力 $\{{}^1f\}$ 已旋轉了 θ_r 角度，與上述之剛

體旋轉角相同，且初始力之大小保持不變，代表此元素通過了剛體測試之檢驗。

事實上，這結果並不意外，由於在推導元素勁度矩陣時，考慮了(3.1.7c)式之剛體位移場，所得到的增量平衡方程式，在小旋轉角之下將會滿足剛體法則。

3.3 廣義位移控制法

本文採用廣義位移控制法(Generalized Displacement Control Method – GDC)作為增量 - 迭代分析之準則。此法為 Yang 和 Shieh (1990)所提出，簡述如下：

結構於第 i 個增量步、第 j 次迭代之預測平衡方程式可表示成：

$$[K_{j-1}^i] \{\Delta U_j^i\} = \{P_j^i\} - \{F_{j-1}^i\} \quad (3.3.1)$$

其中 $[K_{j-1}^i]$ 為結構之切線勁度矩陣， $\{\Delta U_j^i\}$ 為結構之位移增量， $\{P_j^i\}$ 為結構之外力載重，而 $\{F_{j-1}^i\}$ 為結構之節點內力。

上式之起始條件為：

$$[K_0^i] = [K_l^{i-1}] \quad \{F_0^i\} = \{F_l^{i-1}\} \quad \{U_0^i\} = \{U_l^{i-1}\} \quad (3.3.2)$$

其中下標 l 代表該增量步之最後一次迭代。另外，外力載重 $\{P_j^i\}$ 可分解如下：

$$\{P_j^i\} = \{P_{j-1}^i\} + \lambda_j^i \{\hat{P}\} \quad (3.3.3)$$

其中 λ_j^i 為載重增量因子， $\{\hat{P}\}$ 為參考載重向量。由(3.3.1)式所求得之結構位移增量 $\{\Delta U_j^i\}$ ，可累加得到結構之總位移 $\{U_j^i\}$ ：

$$\{U_j^i\} = \{U_{j-1}^i\} + \{\Delta U_j^i\} \quad (3.3.4)$$

外力載重 $\{P_{j-1}^i\}$ 與節點內力 $\{F_{j-1}^i\}$ 之差值稱為不平衡力，以 $\{R_{j-1}^i\}$ 表示：

$$\{R_{j-1}^i\} = \{P_{j-1}^i\} - \{F_{j-1}^i\} \quad (3.3.5)$$

由上式，可將(3.3.1)式改寫成：

$$[K_{j-1}^i] \{\Delta U_j^i\} = \lambda_j^i \{\hat{P}\} + \{R_{j-1}^i\} \quad (3.3.6)$$

根據 Batoz 和 Dhatt(1979)，可將上式依參考載重與不平衡力分別表示成：

$$[K_{j-1}^i] \{\Delta \hat{U}_j^i\} = \{\hat{P}\} \quad (3.3.7)$$

$$[K_{j-1}^i] \{\Delta \bar{U}_j^i\} = \{R_{j-1}^i\} \quad (3.3.8)$$

另外，利用疊加的方式可得到每一次迭代之位移增量：

$$\{\Delta U_j^i\} = \lambda_j^i \{\Delta \hat{U}_j^i\} + \{\Delta \bar{U}_j^i\} \quad (3.3.9)$$

其中載重增量因子 λ_j^i 可由束制方程式決定；根據 $N+1$ 維非線性數值分析理論，可將束制方程式表示成：

$$H_j = \{C\}^T \{\Delta U_j^i\} + k\lambda_j^i \quad (3.3.10)$$

將(3.3.9)式代入上式，可將載重增量因子 λ_j^i 表示成：

$$\lambda_j^i = \frac{1}{\{C\}^T \{\Delta \hat{U}_j^i\} + k} \left(H_j - \{C\}^T \{\Delta \bar{U}_j^i\} \right) \quad (3.3.11)$$

其中 k 為束制參數(constraint parameter)， $\{C\}$ 為束制向量(constraint vector)， H_j 為增量參數(constant parameter)。

非線性解法的效率與可靠之關鍵，在於上述參數之選定。所謂效率是指增量步幅之大小必須能隨結構勁度改變而調整；所謂可靠是指解法本身必須能通過極限點與反跳點等行為之考驗。在整個載重歷程中，唯有載重增量因子 λ_j^i 與位移增量 $\{\Delta U_j^i\}$ 均保持有限值，才能確保數值的穩定。

基於上述之考量，Yang 和 Shieh (1990) 提出令 $k=0$ ， $\{C\} = \lambda_1^i \{\Delta \hat{U}_1^{i-1}\}$ ，於是可將(3.3.11)式改寫成：

$$\lambda_j^i = \frac{H_j - \lambda_1^i \{\Delta \hat{U}_1^{i-1}\}^T \{\Delta \bar{U}_j^i\}}{\lambda_1^i \{\Delta \hat{U}_1^{i-1}\}^T \{\Delta \hat{U}_j^i\}} \quad (3.3.12)$$

其中 $\{\Delta \hat{U}_1^{i-1}\}$ 為第 $i-1$ 個增量步中第一次迭代之位移增量。另外，當 $j=1$ 時，不平衡力 $\{R_0^i\}$ 必定為零，其所對應的位移增量 $\{\Delta \bar{U}_1^i\}$ 亦為零；當 $j \geq 2$ 時，令 H_j 為零，

於是可將(3.3.12)式改寫成：

當 $j=1$ 時：

$$\lambda_1^i = \pm \sqrt{\frac{H_1}{\{\Delta \hat{U}_1^{i-1}\}^T \{\Delta \hat{U}_1^i\}}} \quad (3.3.13)$$

當 $j \geq 2$ 時：

$$\lambda_j^i = -\frac{\{\Delta\hat{U}_1^{i-1}\}^T \{\Delta\bar{U}_j^i\}}{\{\Delta\hat{U}_1^{i-1}\}^T \{\Delta\hat{U}_j^i\}} \quad (3.3.14)$$

另外，當 $i=1$ 時，令 $\{\Delta\hat{U}_1^0\} = \{\Delta\hat{U}_1^1\}$ ，代入(3.3.13)式，可得到：

$$H_1 = (\lambda_1^1)^2 \{\Delta\hat{U}_1^1\}^T \{\Delta\hat{U}_1^1\} \quad (3.3.15)$$

將上式再代入(3.3.13)式，可得到：

$$\lambda_1^i = \pm \lambda_1^1 \sqrt{\frac{\{\Delta\hat{U}_1^1\}^T \{\Delta\hat{U}_1^1\}}{\{\Delta\hat{U}_1^{i-1}\}^T \{\Delta\hat{U}_1^i\}}} \quad (3.3.16)$$

根據上式，定義廣義位移參數(Generalized Stiffness Parameter - GSP)為：

$$GSP = \frac{\{\Delta\hat{U}_1^1\}^T \{\Delta\hat{U}_1^1\}}{\{\Delta\hat{U}_1^{i-1}\}^T \{\Delta\hat{U}_1^i\}} \quad (3.3.17)$$

最後，將上式代入(3.3.16)式，可得到：

$$\lambda_1^i = \pm \lambda_1^1 |GSP|^{\frac{1}{2}} \quad (3.3.18)$$

其中 λ_1^1 為第一個增量步中第一次迭代之載重增量因子，又稱為起始載重增量因

子，此參數為預先給定值，其大小將影響增量步數的多寡。

大部分的增量 - 迭代分析方法皆有些許不完善，相較於其他方法，廣義位移控制法具有下列優點：

1. GSP 可反應結構勁度之變化，調整增量步幅的大小。
2. 根據 GSP 值之正負，可作為加載或卸載的指標。
3. 基於上述兩點之特性，可使載重增量因子 λ_j^i 與位移增量 $\{\Delta U_j^i\}$ 在接近極限點或反跳點處均保持有限值，避免產生數值發散現象。

3.4 有限元素非線性靜力分析流程

在使用增量 - 迭代形式之非線性分析過程中，主要包含了三個階段，分別為預測階段(predicator)、校正階段(corrector)、以及不平衡力之檢核階段。其中預測階段是根據載重增量求解位移增量，校正階段是根據位移增量計算元素內力，最後檢核元素內力總合與外加载重是否平衡；若不平衡，其差值稱為不平衡力，必須代回第一階段繼續迭代。藉由多次的迭代，不平衡力將逐漸收斂至可忽略，此時記錄此增量步之平衡位置，進入下一個增量步分析。

3.4.1 預測階段與校正階段

根據 Yang 和 Leu(1990)、呂良正碩士論文(1991)，預測矩陣之精確與否，僅會影響迭代的次數，而正確的元素內力計算，才是非線性分析之關鍵。由於自然變形所產生的幾何效應非常有限，在預測階段，本文忽略元素之內在幾何勁度矩陣，僅使用彈性勁度矩陣與外在幾何勁度矩陣進行預測。

由(3.1.31)式之增量平衡方程式，忽略內在幾何勁度矩陣，則預測式可表示成：

$$[k_e]\{u\} + [k_g]_{ext}\{u\} + \{^1f\} = \{^2f\} \quad (3.4.1)$$

一般而言，元素之內力校正式可近似如下：

$$\{^2f\} = [k_e]\{u\} + \{^1f\} \quad (3.4.2)$$

上式之內力計算公式在非線性靜力分析中，可提供理想的精確度，特別是在增量步幅較小的情況；然而，在非線性動力分析中，其增量步數是靜力分析的數百倍甚至數千倍。由每一個增量步所造成的誤差，會在分析的過程中不斷累積，即使是如桁架這類簡單元素，其動力分析結果依然令人沮喪。

為了能精確地計算桁架元素之內力，本文採用 TL 法之解析解。根據 Yang 和 Leu(1990)、呂良正碩士論文(1991)，桁架元素之軸力 2F_x 可表示成：

$${}^2F_x = E^0 A^2 L \frac{{}^2L^2 - {}^0L^2}{2^0 L^3} \quad (3.4.3)$$

其中 iL 為桁架元素在 C_i 狀態下之桿件長度。由上式所得到的元素內力，將用來檢核與外加载重是否平衡，並決定不平衡力之大小，以及是否繼續迭代。

3.4.2 增量 - 迭代分析流程

本節採用 3.3 節所介紹的廣義位移控制法，說明有限元素增量 - 迭代之非線性靜力分析流程：

1. 輸入分析所需資料，包含節點座標、元素資料、邊界條件、載重狀況、斷面性質及材料性質等。
2. 選擇適當之起始載重增量因子 λ_1^1 。
3. 對任一增量步 i ，當迭代次數 $j=1$ 時：

- a. 計算初始總體切線勁度矩陣：

$$[K_t]_0^i = [K_e]_0^i + [K_g]_0^i \quad (3.4.4)$$

其中 $[K_e]$ 為結構之彈性勁度矩陣， $[K_g]$ 為外在幾何勁度矩陣。

- b. 求解線性化增量平衡方程式：

$$[K_t]_0^i \{\Delta \hat{U}_1^i\} = \{\hat{P}\} \quad (3.4.5)$$

- c. 計算廣義勁度參數(GSP)：

當 $i=1$ 時

$$GSP = 1 \quad (3.4.6a)$$

當 $i \geq 2$ 時

$$GSP = \frac{\{\Delta \hat{U}_1^1\}^T \{\Delta \hat{U}_1^1\}}{\{\Delta \hat{U}_1^{i-1}\}^T \{\Delta \hat{U}_1^i\}} \quad (3.4.6b)$$

- d. 當 $i \geq 2$ 時，計算載重增量因子 λ_1^i ：

$$\lambda_1^i = \lambda_1^1 |GSP|^{\frac{1}{2}} \quad (3.4.7)$$

e. 根據 GSP 值之正負判斷加載或卸載：

若 GSP 值為負，將 λ_1^i 乘 -1 以改變加載之方向。

f. 計算總載重 $\{P_1^i\}$ 、位移增量 $\{\Delta U_1^i\}$ 及總位移 $\{U_1^i\}$ ：

$$\{P_1^i\} = \{P_1^{i-1}\} + \lambda_1^i \{\hat{P}\} \quad (3.4.8)$$

$$\{\Delta U_1^i\} = \lambda_1^i \{\Delta \hat{U}_1^i\} \quad (3.4.9)$$

$$\{U_1^i\} = \{\Delta U_1^{i-1}\} + \{\Delta U_1^i\} \quad (3.4.10)$$

g. 利用位移增量 $\{\Delta U_1^i\}$ 更新節點座標。

h. 由(3.4.3)式計算各元素內力 $\{f_1^i\}$ ，並組合成結構內力 $\{F_1^i\}$ 。

i. 計算不平衡力 $\{R_1^i\}$ ：

$$\{R_1^i\} = \{P_1^i\} - \{F_1^i\} \quad (3.4.11)$$

4. 對任一增量步 i ，當迭代次數 $j \geq 2$ 時：

a. 更新總體切線勁度矩陣：

$$[K_t]_{j-1}^i = [K_e]_{j-1}^i + [K_g]_{j-1}^i \quad (3.4.12)$$

b. 求解線性化增量平衡方程式：

$$[K_t]_{j-1}^i \{\Delta \hat{U}_j^i\} = \{\hat{P}\} \quad (3.4.13)$$

$$[K_t]_{j-1}^i \{\Delta \bar{U}_j^i\} = \{R_{j-1}^i\} \quad (3.4.14)$$

c. 計算載重增量因子 λ_j^i ：

$$\lambda_j^i = - \frac{\{\Delta \hat{U}_1^{i-1}\}^T \{\Delta \bar{U}_j^i\}}{\{\Delta \hat{U}_1^{i-1}\}^T \{\Delta \hat{U}_j^i\}} \quad (3.4.15)$$

d. 計算總載重 $\{P_j^i\}$ 、位移增量 $\{\Delta U_j^i\}$ 及總位移 $\{U_j^i\}$ ：

$$\{P_j^i\} = \{P_{j-1}^i\} + \lambda_j^i \{\hat{P}\} \quad (3.4.16)$$

$$\{\Delta U_j^i\} = \lambda_j^i \{\Delta \hat{U}_j^i\} + \{\Delta \bar{U}_j^i\} \quad (3.4.17)$$

$$\{U_j^i\} = \{\Delta U_{j-1}^i\} + \{\Delta U_j^i\} \quad (3.4.18)$$

e. 利用位移增量 $\{\Delta U_j^i\}$ 更新節點座標。

f. 由(3.4.3)式計算各元素內力 $\{f_j^i\}$ ，並組合成結構內力 $\{F_j^i\}$ 。

g. 計算不平衡力 $\{R_j^i\}$ ：

$$\{R_j^i\} = \{P_j^i\} - \{F_j^i\} \quad (3.4.19)$$

5. 判斷迭代結果是否收斂：

根據不平衡力 $\{R_j^i\}$ 、位移增量 $\{\Delta U_j^i\}$ 之模長(norm)與收斂標準比較，若達到收斂標準，則進入下一個增量步分析；反之，重複步驟 4 至收斂為止。

6. 判斷是否停止分析：

若總載重 $\{P_j^i\}$ 超過預設之最大載重，或總位移 $\{U_j^i\}$ 超過預設之最大位移，則停止分析；反之，回到步驟 3 進入下一個增量步分析。

3.5 有限元素非線性動力分析流程

本文採用 *Newmark* β 法(1959)進行時間歷時分析，此法屬於隱式(implicit)之直接積分法(direct integration method)，所謂隱式是指該法之平衡式建立在未知狀態下，所謂直接則是相對於振態疊加法而言。

Newmark β 法根據加速度形式假設的差異，主要可區分為兩種形式：平均加速度法(average acceleration method)與線性加速度法(linear acceleration method)；本文採用平均加速度法，此法所得到的分析結果雖不如線性加速度法精確，但具有

無條件穩定(unconditionally stable)的優點，且不因數值誤差而造成振幅衰減。

3.5.1 預測階段與校正階段

動力平衡方程式在時間為 t_j 時可表示成：

$$[M]\{\ddot{U}_j\} + [C]\{\dot{U}_j\} + \{F_j\} = \{P_j\} \quad (3.5.1)$$

其中

$\{\ddot{U}_j\}$ ：為結構之加速度總量

$\{\dot{U}_j\}$ ：為結構之速度總量

$\{F_j\}$ ：為結構之桿件內力

$\{P_j\}$ ：為結構之外力載重

將上式改寫成增量形式：

$$[M]\{\Delta\ddot{U}_j\} + [C]\{\Delta\dot{U}_j\} + [K_r]\{\Delta U_j\} = \{\Delta P_j\} \quad (3.5.2)$$

其中

$\{\Delta\ddot{U}_j\}$ ：為結構之加速度增量 $(= \{\ddot{U}_{j+1}\} - \{\ddot{U}_j\})$

$\{\Delta\dot{U}_j\}$ ：為結構之速度增量 $(= \{\dot{U}_{j+1}\} - \{\dot{U}_j\})$

$\{\Delta U_j\}$ ：為結構之位移增量 $(= \{U_{j+1}\} - \{U_j\})$

$\{\Delta P_j\}$ ：為結構之外力載重增量 $(= \{P_{j+1}\} - \{P_j\})$

平均加速度法乃假設結構之加速度在時間增量 Δt 內為定值，其值為該時間增量起始點加速度 $\{\ddot{U}_j\}$ 與終點加速度 $\{\ddot{U}_{j+1}\}$ 之平均值，於是時間為 t_{j+1} 時結構之速度

總量 $\{\dot{U}_{j+1}\}$ 與位移總量 $\{U_{j+1}\}$ 可表示成：

$$\{\dot{U}_{j+1}\} = \{\dot{U}_j\} + \frac{1}{2}(\{\ddot{U}_j\} + \{\ddot{U}_{j+1}\})\Delta t \quad (3.5.3)$$

$$\{U_{j+1}\} = \{U_j\} + \{\dot{U}_j\}\Delta t + \frac{1}{4}(\{\ddot{U}_j\} + \{\ddot{U}_{j+1}\})(\Delta t)^2 \quad (3.5.4)$$

將以上二式分別移項整理可得：

$$\{\Delta\dot{U}_j\} = \{\ddot{U}_j\}\Delta t + \frac{1}{2}\{\Delta\ddot{U}_j\}\Delta t \quad (3.5.5)$$

$$\{\Delta U_j\} = \{\dot{U}_j\}\Delta t + \frac{1}{2}\{\ddot{U}_j\}(\Delta t)^2 + \frac{1}{4}\{\Delta\ddot{U}_j\}(\Delta t)^2 \quad (3.5.6)$$

由(3.5.6)式可解得：

$$\{\Delta\ddot{U}_j\} = \frac{4}{(\Delta t)^2}\{\Delta U_j\} - \frac{4}{\Delta t}\{\dot{U}_j\} - 2\{\ddot{U}_j\} \quad (3.5.7)$$

將上式代入(3.5.5)式可得：

$$\{\Delta\dot{U}_j\} = \frac{2}{\Delta t}\{\Delta U_j\} - 2\{\dot{U}_j\} \quad (3.5.8)$$

將(3.5.7)、(3.5.8)式代入(3.5.2)式可得：

$$\left(\frac{4}{(\Delta t)^2}[M] + \frac{2}{\Delta t}[C] + [K] \right) \{\Delta U_j\} = \{\Delta P_j\} + [M] \left(\frac{4}{\Delta t}\{\dot{U}_j\} + 2\{\ddot{U}_j\} \right) + 2[C]\{\dot{U}_j\} \quad (3.5.9)$$

上式即為非線性動力分析之預測式。假設時間為 t_j 時結構之位移總量 $\{U_j\}$ 、速度總量 $\{\dot{U}_j\}$ 及加速度總量 $\{\ddot{U}_j\}$ 為已知，則上式可求解結構之位移增量 $\{\Delta U_j\}$ 。將結構之位移增量 $\{\Delta U_j\}$ 代回(3.5.7)、(3.5.8)式，可得到結構之速度增量 $\{\Delta\dot{U}_j\}$ 與加速度增量 $\{\Delta\ddot{U}_j\}$ 。最後，可累加得到時間為 t_{j+1} 時結構之位移總量 $\{U_{j+1}\}$ 、速度總量 $\{\dot{U}_{j+1}\}$ 及加速度總量 $\{\ddot{U}_{j+1}\}$ 。

在校正階段，桁架元素之內力計算方式與上一節相同，採用(3.4.3)式之 TL 法之解析解，於是時間為 t_{j+1} 時動力平衡方程式可表示成：

$$[M]\{\ddot{U}_{j+1}\} + [C]\{\dot{U}_{j+1}\} + \{F_{j+1}\} = \{\bar{P}_{j+1}\} \quad (3.5.10)$$

上式即為非線性動力分析之校正式。一般而言，由於線性化緣故， $\{\bar{P}_{j+1}\}$ 與結構外力載重 $\{P_{j+1}\}$ 並不相等，其差值為不平衡力。

3.5.2 增量 - 迭代分析流程

在此採用 3.5 節所介紹的 *Newmark* β 法，說明有限元素增量 - 迭代之非線性動力分析流程：

1. 輸入分析所需資料，包含節點座標、元素資料、邊界條件、載重狀況、斷面性質、材料性質、阻尼參數等。
2. 當時間為 t_j ，迭代次數 $i=1$ 時：

- a. 計算初始總體切線勁度矩陣：

$$[K_i]_j^0 = [K_e]_j^0 + [K_g]_j^0 \quad (3.5.11)$$

其中 $[K_e]$ 為結構之彈性勁度矩陣， $[K_g]$ 為外在幾何勁度矩陣。

- b. 求解(3.5.9)式之線性化增量平衡方程式，得到結構之位移增量 $\{\Delta U_j\}$ 。

- c. 計算結構之速度增量 $\{\Delta \dot{U}_j\}$ 與加速度增量 $\{\Delta \ddot{U}_j\}$ ：

$$\{\Delta \ddot{U}_j\} = \frac{4}{(\Delta t)^2} \{\Delta U_j\} - \frac{4}{\Delta t} \{\dot{U}_j\} - 2\{\ddot{U}_j\} \quad (3.5.12)$$

$$\{\Delta \dot{U}_j\} = \frac{2}{\Delta t} \{\Delta U_j\} - 2\{\dot{U}_j\} \quad (3.5.13)$$

- d. 計算結構之位移總量 $\{U_{j+1}\}$ 、速度總量 $\{\dot{U}_{j+1}\}$ 及加速度總量 $\{\ddot{U}_{j+1}\}$ ：

$$\{U_{j+1}\} = \{U_j\} + \{\Delta U_j\} \quad (3.5.14)$$

$$\{\dot{U}_{j+1}\} = \{\dot{U}_j\} + \{\Delta \dot{U}_j\} \quad (3.5.15)$$

$$\{\ddot{U}_{j+1}\} = \{\ddot{U}_j\} + \{\Delta \ddot{U}_j\} \quad (3.5.16)$$

e. 計算不平衡力 $\{R_j\}$:

$$\{R_j\} = \{P_{j+1}\} - [M]\{\ddot{U}_{j+1}\} - [C]\{\dot{U}_{j+1}\} - \{F_{j+1}\} \quad (3.5.17)$$

3. 當時間為 t_j , 迭代次數 $i \geq 2$ 時 :

a. 更新總體切線勁度矩陣 :

$$[K_t]_j^{i-1} = [K_e]_j^{i-1} + [K_g]_j^{i-1} \quad (3.5.18)$$

b. 求解線性化增量平衡方程式 , 得到位移增量修正量 $\{\Delta\Delta U_j^i\}$:

$$\left(\frac{4}{(\Delta t)^2} [M] + \frac{2}{\Delta t} [C] + [K_t] \right) \{\Delta\Delta U_j^i\} = \{R_j\} \quad (3.5.19)$$

c. 計算結構之速度增量修正量 $\{\Delta\Delta \dot{U}_j^i\}$ 與加速度增量修正量 $\{\Delta\Delta \ddot{U}_j^i\}$:

$$\{\Delta\Delta \dot{U}_j^i\} = \frac{2}{\Delta t} \{\Delta\Delta U_j^i\} \quad (3.5.20)$$

$$\{\Delta\Delta \ddot{U}_j^i\} = \frac{4}{(\Delta t)^2} \{\Delta\Delta U_j^i\} \quad (3.5.21)$$

d. 更新結構之位移總量 $\{U_{j+1}^{i+1}\}$, 速度總量 $\{\dot{U}_{j+1}^{i+1}\}$ 及加速度總量 $\{\ddot{U}_{j+1}^{i+1}\}$:

$$\{U_{j+1}^{i+1}\} = \{U_{j+1}^i\} + \{\Delta\Delta U_j^i\} \quad (3.5.22)$$

$$\{\dot{U}_{j+1}^{i+1}\} = \{\dot{U}_{j+1}^i\} + \{\Delta\Delta \dot{U}_j^i\} \quad (3.5.23)$$

$$\{\ddot{U}_{j+1}^{i+1}\} = \{\ddot{U}_{j+1}^i\} + \{\Delta\Delta \ddot{U}_j^i\} \quad (3.5.24)$$

e. 計算不平衡力 $\{R_j\}$:

$$\{R_j\} = \{P_{j+1}\} - [M]\{\ddot{U}_{j+1}^{i+1}\} - [C]\{\dot{U}_{j+1}^{i+1}\} - \{F_{j+1}^{i+1}\} \quad (3.5.25)$$

4. 判斷迭代結果是否收斂 :

根據不平衡力 $\{R_j\}$ 、位移修正增量 $\{\Delta\Delta U_j^i\}$ 之模長與收斂標準比較 , 若達到收斂標準 , 則進入下一個時間增量分析 ; 反之 , 重複步驟 3 至收斂為止。

7. 判斷是否停止分析：

若時間 t_j 超過預設分析時間 t_{\max} ，則停止分析；反之，回到步驟2進入下一個時間增量分析。

3.6 結論

本章介紹了結構之非線性靜力與動力分析流程，其中靜力分析有助於了解結構之基本力學特性，且可用於動力分析中初始位移加載的階段。另外，研究非線性動力問題，特別是混沌行為，對分析結果之精確度有較高的要求。本文採用 TL 法之解析解計算桁架元素內力，可減少誤差累積，幫助掌握結構真實的反應。



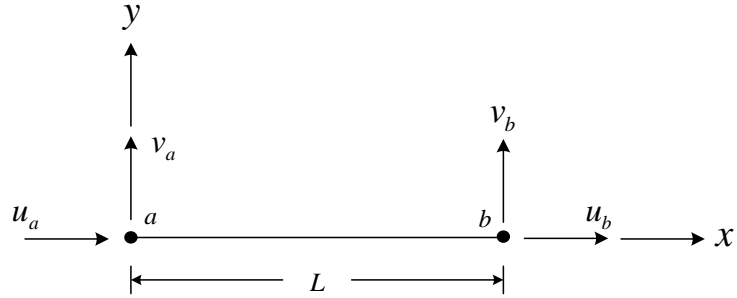


圖 3.1 二維桁架元素

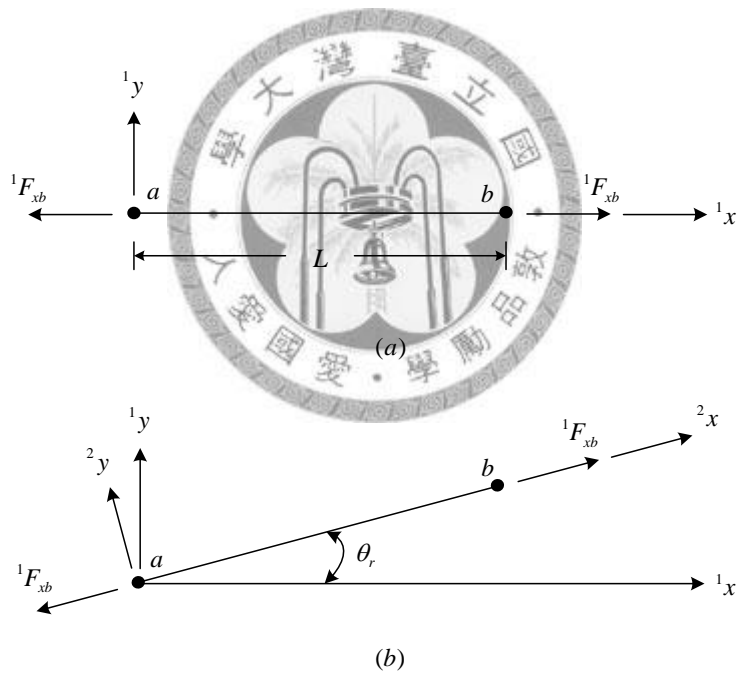


圖 3.2 受初始力之桁架元素：(a)剛體旋轉前；(b)剛體旋轉後

第四章 希爾伯特 - 黃轉換之基本理論

4.1 前言

訊號分析無論在理論研究或實際應用上皆是一項不可或缺的工具，其中傅立葉轉換(Fourier Transformation)乃建立在傅立葉分析(Fourier Analysis)下之產物，為一種有效且簡便之分析方法，長期主宰訊號分析領域。藉由傅立葉轉換可將訊號資料由時間域轉換至頻率域，進而得到能量 - 頻率分佈圖，稱為能量頻譜(energy spectrum)。結構工程方面，透過傅立葉轉換分析結構之振動訊號，可得其主要振態之頻率，除了可進行系統識別(system identification)外，進一步還可評估結構物之受損情形。然而，傅立葉轉換在使用上有諸多限制條件，包含了訊號必須是穩態(stationary)且線性過程(linear processes)，否則分析結果將失去物理意義。

在自然界量測到的訊號經常是非穩態(non-stationary)或非線性過程(nonlinear processes)，因此傅立葉轉換之應用必須謹慎小心。由於傅立葉轉換乃利用正弦與餘弦函數對訊號作線性展開，若訊號本身在物理上不適合拆解成正弦與餘弦函數之疊加，則使用傅立葉轉換將會在能量頻譜上產生額外的調和函數分量(harmonic components)，此函數分量沒有物理意義，僅是在數學上必須存在，這將導致能量散佈到較大的頻寬，造成判讀上的錯誤。另一方面，傅立葉轉換乃提供訊號在整體上的能量 - 頻率分佈資訊，無法反應訊號之時變特徵，即振幅與頻率隨時間變化之情形，對於有這類特性的訊號，必須要尋求其他分析方法。

4.2 希爾伯特轉換

相對於傅立葉轉換，希爾伯特轉換(Hilbert Transform)可分析訊號之時變特徵，以下簡單介紹之。對於任意的時間函數 $X(t)$ ，其希爾伯特轉換公式為：

$$Y(t) = \frac{1}{\pi} pV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\tau)}{t-\tau} d\tau \quad (4.2.1)$$

其中 p 為柯西主值(Cauchy Principal Value)。根據上述定義，可將 $X(t)$ 與 $Y(t)$ 組合成複數時間函數 $Z(t)$ ：

$$Z(t) = X(t) + iY(t) = a(t)e^{i\theta(t)} \quad (4.2.2)$$

其中

$$a(t) = [X^2(t) + Y^2(t)]^{\frac{1}{2}} \quad (4.2.3)$$

$$\theta(t) = \tan^{-1} \frac{Y(t)}{X(t)} \quad (4.2.4)$$

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (4.2.5)$$

希爾伯特轉換乃時間函數 $X(t)$ 與 $1/t$ 之迴旋積分(convolution)，其中 $\theta(t)$ 為 $X(t)$ 之相位角， $\omega(t)$ 為 $X(t)$ 之即時頻率，可反應訊號之時變特徵。然而，在希爾伯特轉換中，對於即時頻率之計算方式仍存在諸多爭議。

根據(4.2.5)式之即時頻率定義，可發現任何訊號在同一個時間點上，僅會對應一個即時頻率，但自然界的訊號經常是多分量訊號(multi-component signal)，換言之，訊號在同一個時間點上會存在多個相異頻率。例如多自由度之結構系統，其振動訊號可視為由多個振態所組成，亦同時存在多個振動頻率。不難想像，對於有這類特性的訊號，若使用希爾伯特轉換將得到不合理之分析結果。

由上述可知，並非所有訊號皆適合進行希爾伯特轉換，為了使即時頻率之計算更具有物理意義，必須對時間函數 $X(t)$ 加上限制條件，因此 Cohen *et al.* (1995) 提出單一分量函數(mono-component function)之概念。若訊號在任何時間點上，僅對應一個即時頻率，則可稱為單一分量函數，由(4.2.5)式所得到之即時頻率便可反應訊號之特性。然而，Cohen 沒有明確說明如何判斷訊號是否為單一分量函數；另一方面，對於多分量訊號如何進行希爾伯特轉換依然無解決的辦法。

希爾伯特轉換之限制除了多分量訊號外，在某些情況下必須要求訊號之局部均值(local mean)為零，以下舉例說明之：首先考慮一組擁有固定頻率之時間函數

$X_1(t) = \sin(t)$ ，將此函數進行希爾伯特轉換，可得到 $Z_1(t) = \sin(t) + i\cos(t)$ 。此函數的圖形在複數平面上是以座標原點 a 為圓心之單位圓，其相位角為 θ_1 ，如圖 4.1(a) 所示。若以橫軸為時間 t ，縱軸為相位角 $\theta(t)$ ，可得到一斜率為定值之線段，如圖 4.1(b) 之 a 線段。根據即時頻率定義，可發現此函數之即時頻率為定值，如圖 4.1(c) 之 a 線段，符合原訊號之特性。

接下來，將時間函數 $X_1(t)$ 加上一固定常數值 α ，即令 $X_2(t) = \alpha + \sin(t)$ ，其中 $0 < \alpha < 1$ ，同樣將此函數進行希爾伯特轉換，可得到 $Z_2(t) = \alpha + \sin(t) + i\cos(t)$ 。此函數的圖形在複數平面上是以 b 點為圓心之偏心圓，其相位角為 θ_2 ，如圖 4.1(a) 所示。由於偏心圓之特性，此函數之相位角並非隨時間進行線性遞增，而是呈現振盪的行為，如圖 4.1(b) 之 b 曲線。根據即時頻率定義，可發現此函數之即時頻率並非定值，如圖 4.1(c) 之 b 曲線，與原訊號之特性不符。

最後，同樣令 $X_3(t) = \alpha + \sin(t)$ ，其中 $\alpha > 1$ 。此函數的圖形在複數平面上是以 c 點為圓心之偏心圓，如圖 4.1(a) 所示。與上一個例子相較，不僅函數之相位角呈現振盪的行為，如圖 4.1(b) 之 c 曲線，甚至出現即時頻率為負值的情形，如圖 4.1(c) 之 c 曲線，此分析結果與原訊號之特性完全違背。

4.3 經驗模態分離法

基於上述希爾伯特轉換之限制，Huang *et al.* (1998) 提出內建模態函數 (Intrinsic Mode Functions - IMF) 之概念，任何訊號滿足以下條件可稱為內建模態函數：

1. 在整體訊號資料中，其極值 (extrema) 數目與跨零點 (zero-crossings) 數目必須相等或最多相差一個。
2. 在任何時間點上，由局部極大值 (local maxima) 與局部極小值 (local minima) 所定義之平均值包絡線 (mean value envelope) 應為零。

定義 IMF 是為了能滿足希爾伯特轉換之限制，使分析結果可符合原訊號之特性。然而，大部分的訊號皆不滿足 IMF 之定義，因此 Huang *et al.* (1998) 提出經驗

模態分離法(Empirical Mode Decomposition – EMD)，藉由 EMD 可將原訊號分離成有限個 IMFs，而每個 IMF 皆具有良好的希爾伯特轉換特性。接下來，將 IMFs 當作原訊號之展開基底，對每個 IMF 進行希爾伯特轉換，上述之分析流程稱為希爾伯特 – 黃轉換(Hilbert-Huang Transform – HHT)，可得到訊號之即時頻率與即時振幅，若繪製成能量 – 頻率 – 時間分佈圖，則稱為希爾伯特頻譜(Hilbert Spectrum)。

以下簡述 EMD 之處理流程：

1. 識別出訊號之局部極大值與局部極小值，並利用立方弧線(cubic spline line)連成上部包絡線(upper envelope)與下部包絡線(lower envelope)，將這兩條包絡線之平均值定義為平均值包絡線，以 m_1 表示。
2. 將原訊號 $X(t)$ 減去平均值包絡線 m_1 ，可得到訊號 h_1 ，即 $X(t) - m_1 = h_1$ ，完成第一次篩選動作。
3. 將訊號 h_1 帶回步驟一，進行第二次篩選動作，可得到 $h_1 - m_{11} = h_{11}$ 。
4. 重複步驟一至三，直到 h_{1k} 之局部平均值為零，其中 $h_{1(k-1)} - m_{1k} = h_{1k}$ ，並定義 h_{1k} 為第一組 IMF，即令 $c_1 = h_{1k}$ ，完成第一次篩選過程。
5. 將第一組 IMF 從原訊號 $X(t)$ 分離，可得到殘餘值 r_1 ，即 $X(t) - c_1 = r_1$ 。
6. 將殘餘值當作新的訊號，重複上述之篩選過程，可將原訊號 $X(t)$ 分離成 n 個 IMFs 以及殘餘值 r_n ，即 $X(t) = \sum_{j=1}^n c_j + r_n$ 。

另一方面，EMD 之分離程序並非無止境，一般而言，有下列兩種準則：

1. 當殘餘值之振幅大小相對於原訊號可忽略，則停止分離程序。
2. 當殘餘值為單調函數(monotonic function)，即無法從殘餘值再分離出具有 IMF 特性之訊號，則停止分離程序。

4.4 曲率篩選法

EMD 發展至今，為非穩態與非線性過程之訊號分析開啟了一扇大門，然而在實際應用上仍存在諸多問題。例如由 EMD 所分離出的 IMF，在某些情況下會包含

明顯不同頻率的訊號，這種現象通常可分為兩種類型：第一類是高頻訊號夾雜在低頻訊號中，且高頻訊號有間歇性(intermittency)之特性，導致 EMD 分離失敗，稱為模態重疊(mode mixing)；另一類是高頻訊號相對於低頻訊號太過微弱，無法在整體訊號中產生局部極值，導致 EMD 分離失敗，稱為隱藏尺度(hidden scales)。

欲解決上述之問題，Huang *et al.* (1999)提出間歇性測試法(intermittency test)以及曲率篩選法(curvature-based sifting)等 EMD 改良法，此兩種方法可單獨使用或混合使用，視訊號之特性而定。本文在使用 EMD 過程中，遭遇到的困難屬於第二類，而所採用的 EMD 改良法，在概念上與 Huang 提出的曲率篩選法相同，僅是在計算過程略有差異，以下舉例說明之：

第一個例子，考慮一組包含兩相異頻率之時間函數 $X_1(t) = 0.5\sin(t) + \sin(2t)$ ，其位移歷時圖如圖 4.2(a)所示。接下來，使用 EMD 分離時間函數 $X_1(t)$ ，可得到兩組 IMFs，即 c_1 與 c_2 ，其他 IMFs 之振幅大小相較於 $X_1(t)$ 可忽略，如圖 4.2(b)所示。由圖中可發現， c_1 為 $X_1(t)$ 之高頻訊號 $\sin(2t)$ ，而 c_2 為 $X_1(t)$ 之低頻訊號 $0.5\sin(t)$ ，明顯的，EMD 已成功分離了 $X_1(t)$ 之高頻與低頻訊號。

第二個例子，考慮時間函數 $X_2(t) = 0.5\sin(t) + 0.25\sin(2t)$ ，與第一個例子 $X_1(t)$ 相較， $X_2(t)$ 之高頻訊號振幅僅為低頻訊號的一半，其位移歷時圖如圖 4.3(a)所示。同樣使用 EMD 分離此時間函數 $X_2(t)$ ，僅可得到一組 IMF，即 c_1 ，如圖 4.3(b)所示。進一步，將 c_1 進行希爾伯特轉換，結果如圖 4.3(c)所示，其即時頻率已看不出 $X_2(t)$ 包含高頻與低頻訊號之內涵。

在第二個例子中，EMD 分離失敗的原因，在於高頻訊號太過微弱，造成高頻訊號隱藏在低頻訊號內，無法在時間函數 $X_2(t)$ 中產生局部極值，而 EMD 是以訊號之局部極值當作篩選依據，自然無法將高頻訊號分離出來。Huang *et al.* (1999) 所提出的曲率篩選法，其精神是利用微分的方式放大高頻訊號。換言之，欲分析時間函數 $X(t)$ ，則必須先計算 $X(t)$ 之曲率 $Y(t)$ ：

$$Y(t) = \frac{\ddot{X}}{(1 + \dot{X}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.4.1)$$

接下來，識別出 $Y(t)$ 之局部極值，當作篩選原訊號 $X(t)$ 之依據，由於微分的緣故，原本隱藏在低頻訊號中的微弱高頻訊號便有機會被分離出來。必須要說明的，微分僅是放大高頻訊號的一種手段，至於要微分幾次則需考慮原訊號之特性。理論上，微分越多次越能將這類包含隱藏尺度之訊號分離出來，但在實際應用上，由量測得到之訊號皆含有雜訊，而這些不規則且通常為高頻的雜訊，亦會隨著微分的過程中被放大，最後可能導致 EMD 分離失敗。Huang *et al.* (2003) 建議先以傳統 EMD 處理，若分析結果不符合預期，再嘗試曲率篩選法或更高階的微分法。

為了展示微分法之優點，同樣考慮時間函數 $X_2(t) = 0.5\sin(t) + 0.25\sin(2t)$ ，本文不計算 $X_2(t)$ 之曲率，而是直接對 $X_2(t)$ 微分兩次並乘上負號：

$$Y(t) = -\ddot{X} \quad (4.4.2)$$

由上式可得到 $Y_2(t) = 0.5\sin(t) + \sin(2t)$ ，等同於第一個例子 $X_1(t)$ 。接下來，識別出 $Y_2(t)$ 之局部極值位置，尋找對應的 $X_2(t)$ 資料點，取代原本 $X_2(t)$ 之局部極值點。進一步，利用這些資料點建立上下包絡線，當作篩選依據，後續之處理流程與傳統 EMD 相同，其分析結果如圖 4.3(d) 所示。由圖中可發現，經改良後的 EMD 已成功分離了 $X_2(t)$ 之高頻訊號 $0.25\sin(2t)$ 與低頻訊號 $0.5\sin(t)$ 。

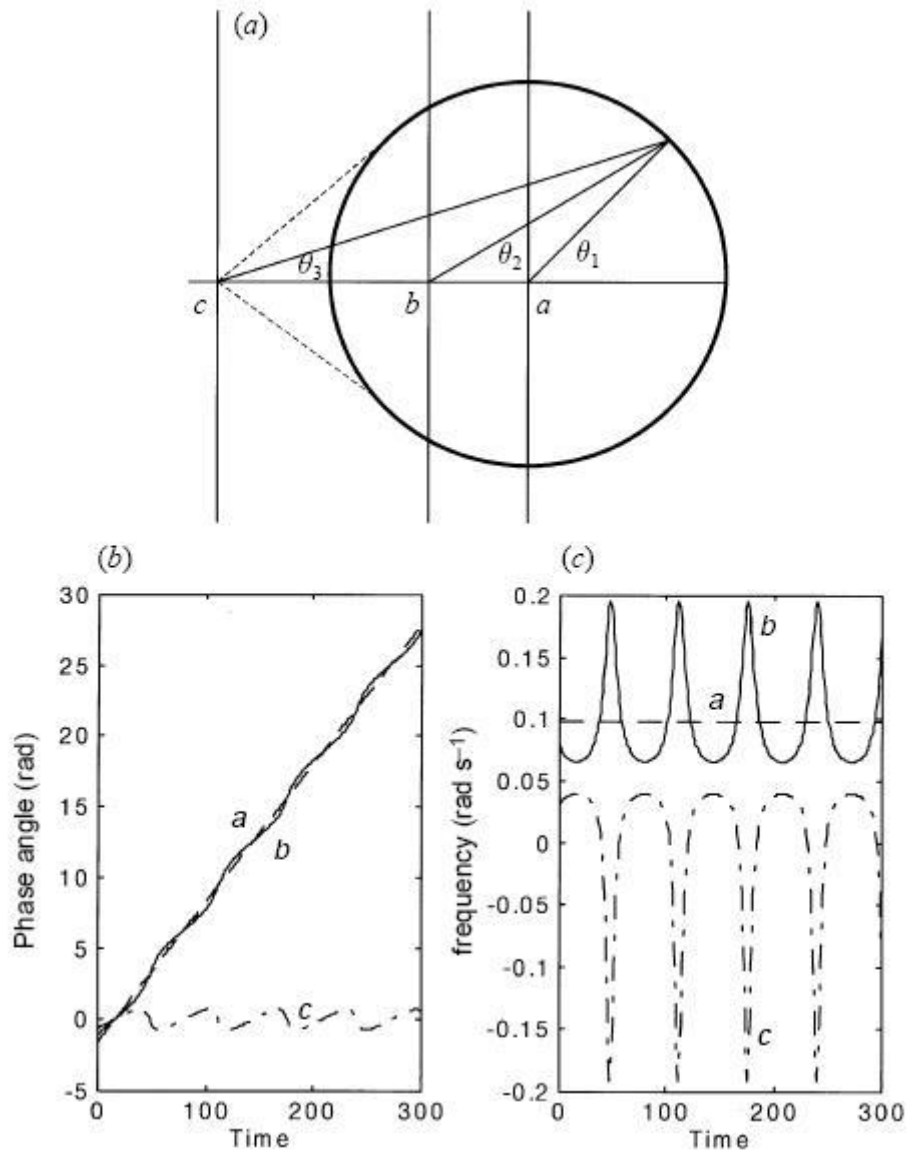


圖 4.1 即時頻率之物理意義解釋圖(取自 Huang *et al.* 1998)

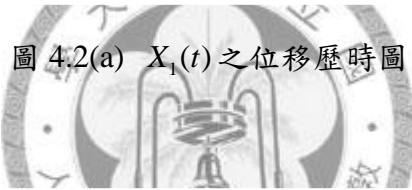
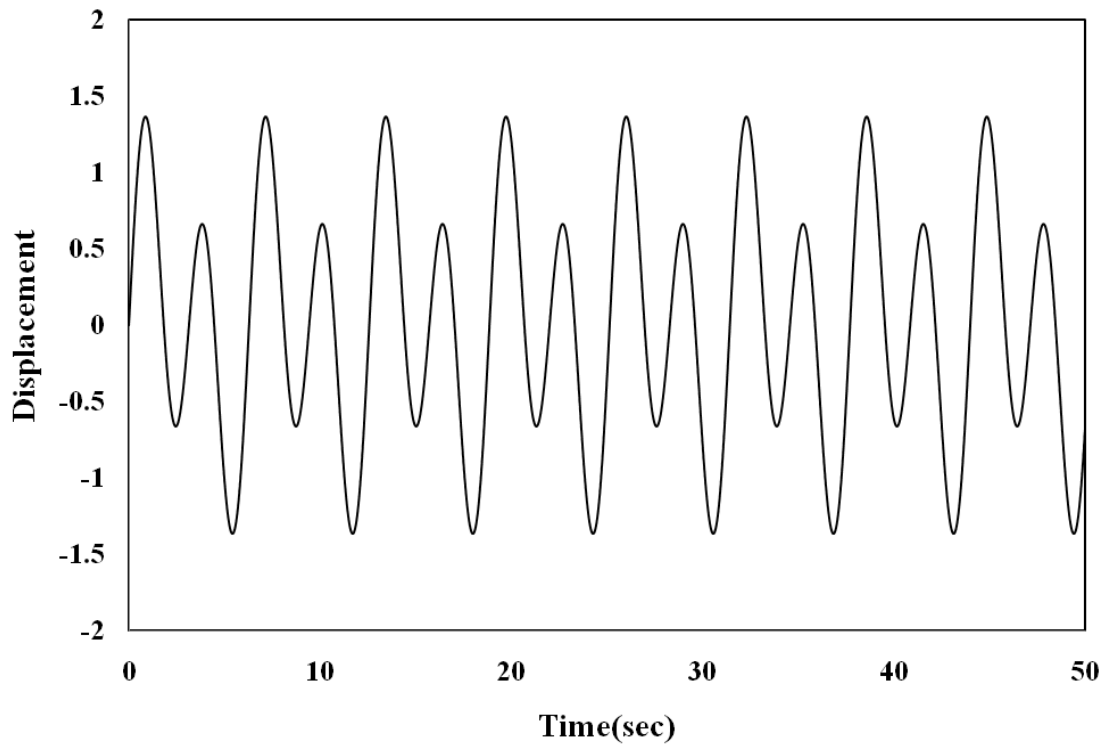
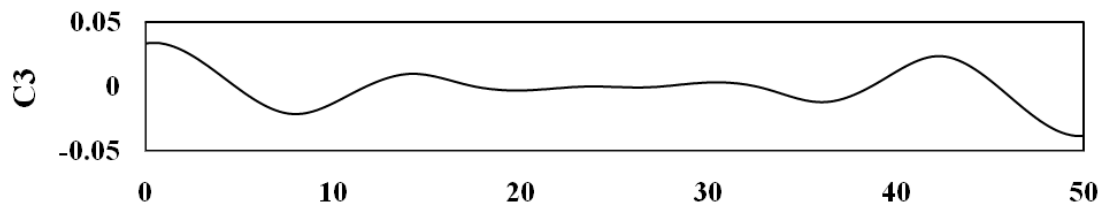
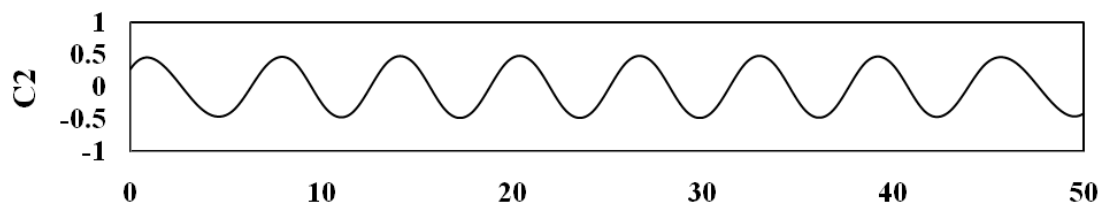
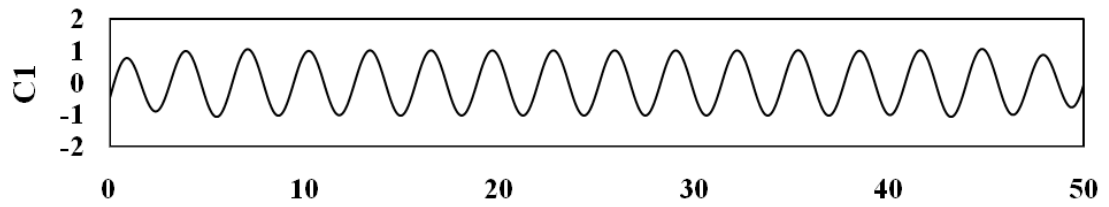


圖 4.2(a) $X_1(t)$ 之位移歷時圖



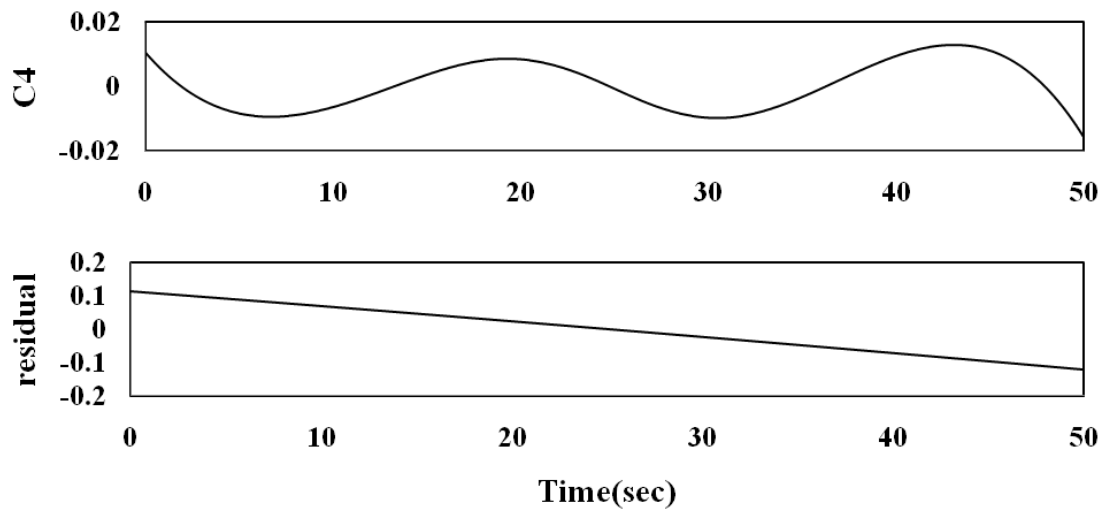


圖 4.2(b) $X_1(t)$ 經 EMD 所得之 IMFs

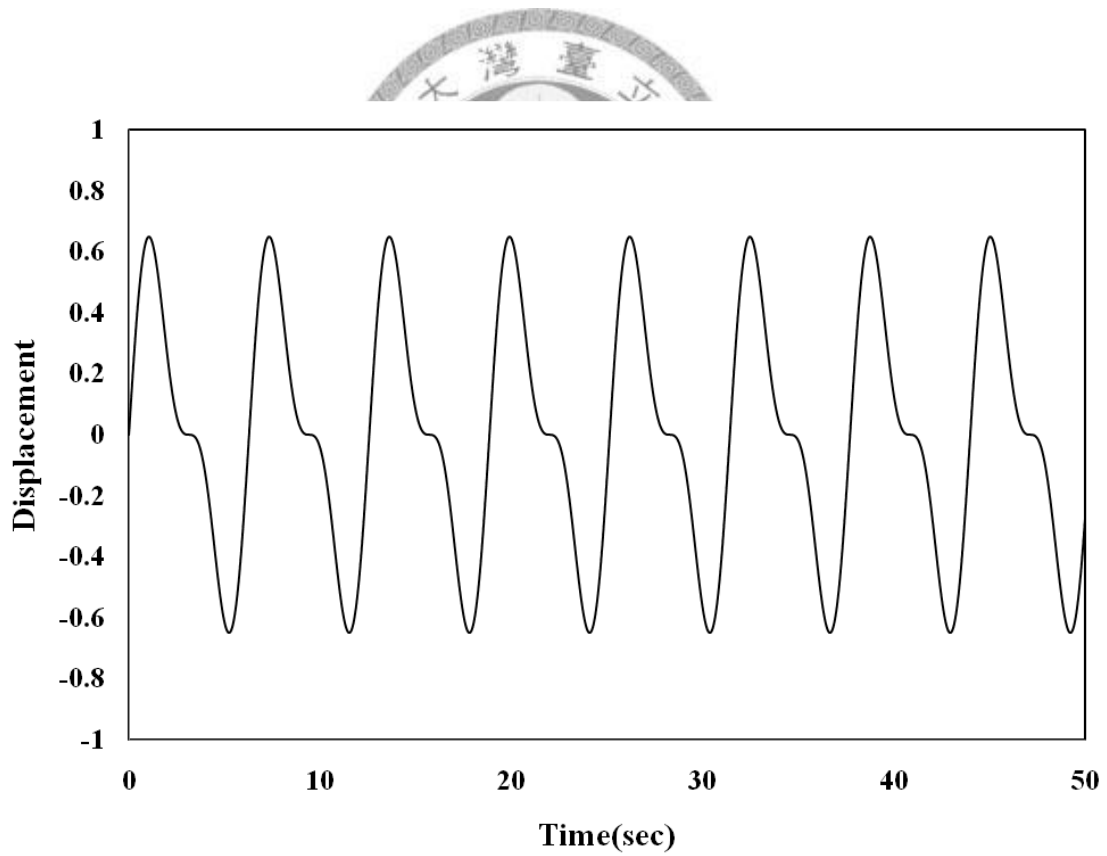


圖 4.3(a) $X_2(t)$ 之位移歷時圖

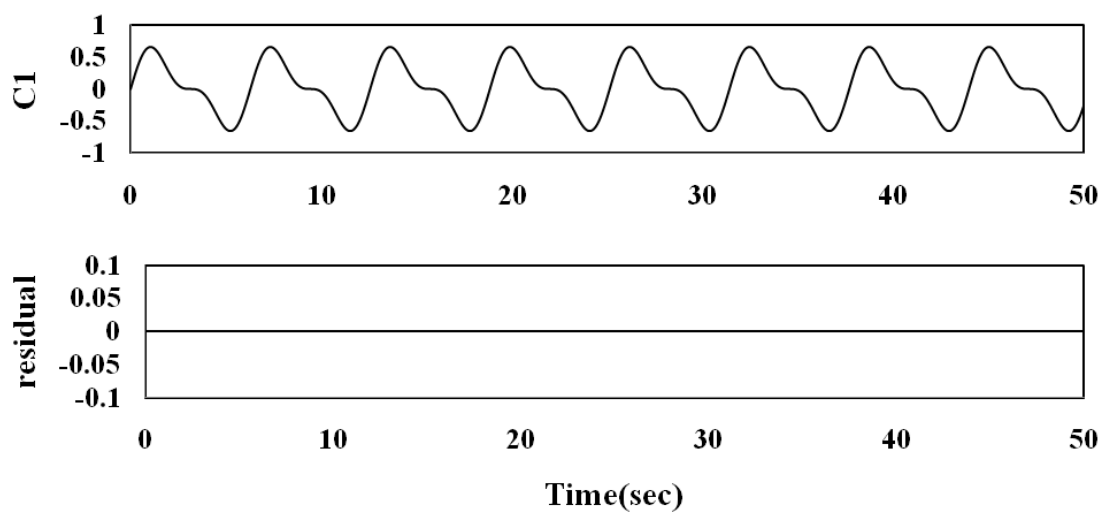


圖 4.3(b) $X_2(t)$ 經 EMD 所得之 IMFs

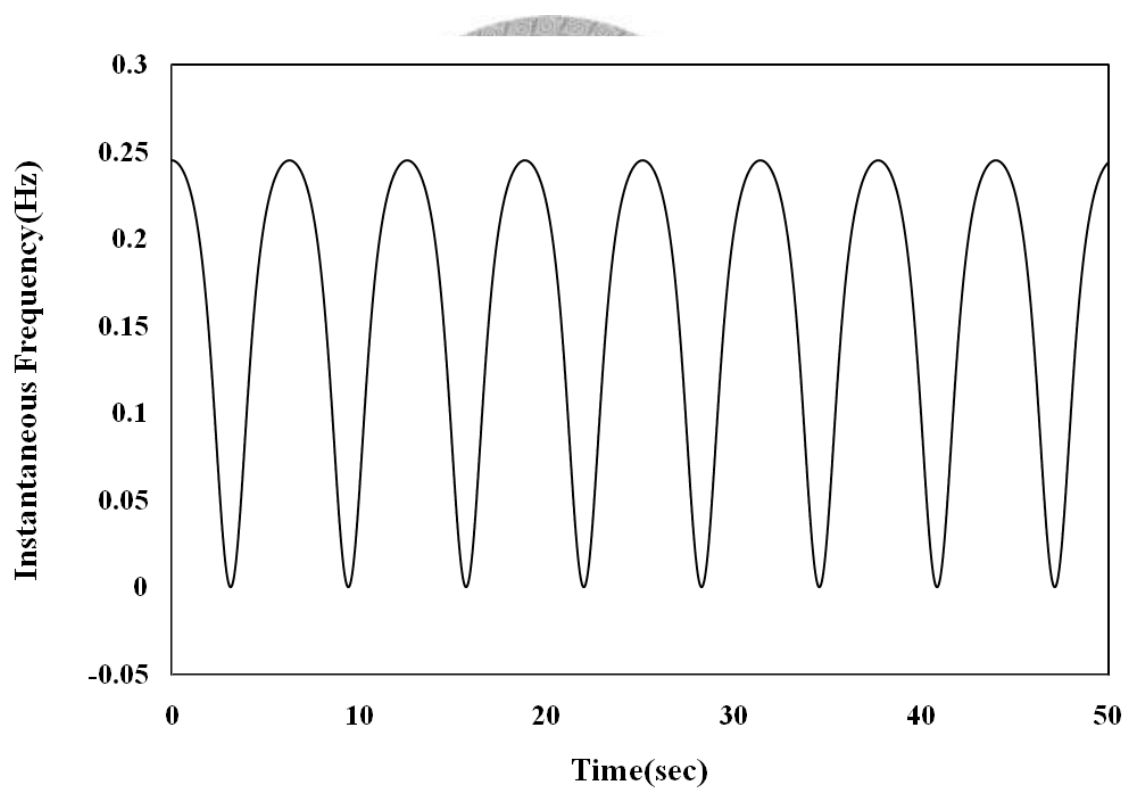


圖 4.3(c) $X_2(t)$ 之 c_1 即時頻率

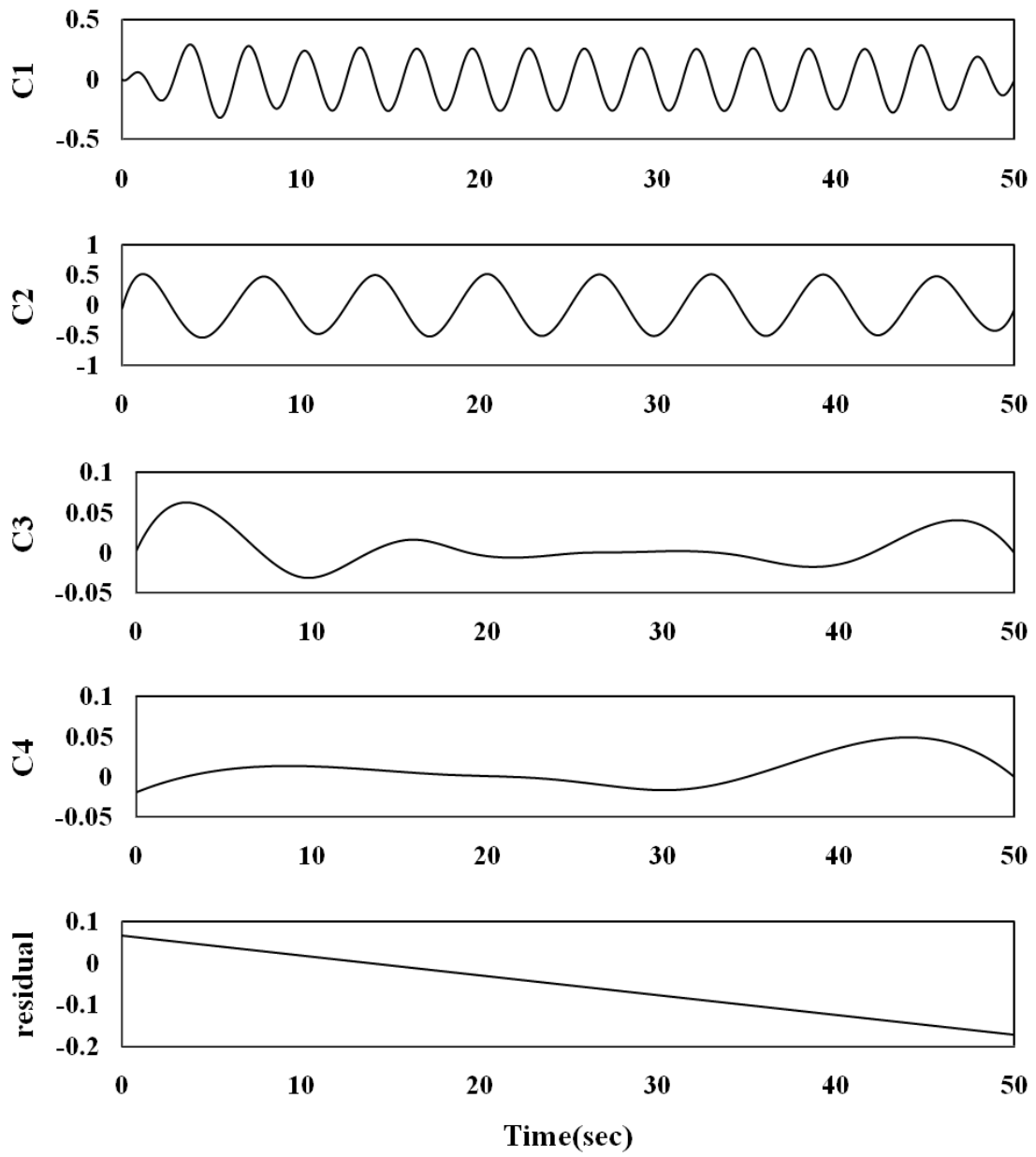


圖 4.3(d) $X_2(t)$ 經改良式 EMD 所得之 IMFs

第五章 桁架系統動力分析

5.1 前言

本章利用雙桿桁架系統，在考慮幾何非線性效應下，分析其動力行為以及觀察是否有混沌現象的存在，並利用 FFT 與 HHT 分析其動力反應，試圖由頻率的角度解釋非線性動力行為之物理意義。

本文採用桁架系統的主要原因為：

1. 桁架系統構造簡單，不須考慮其他效應，容易掌握其物理意義。
2. 雙桿桁架系統在考慮幾何非線性效應下，為一典型之非線性動力系統，其分析結果可與前人之研究進行驗證。
3. 桁架系統為結構之基本元素，了解其基本力學特性可延伸應用於其他較複雜之結構系統。



5.2 雙桿桁架系統介紹

如圖 5.1 所示，考慮由二根相同的桁架桿件(truss member)組成之平面桁架系統，其中桿件長度為 l ，高度為 h ，截面積為 A ，密度為 ρ ，楊氏模數(Young's modulus)為 E ，系統垂直方向(Y)之阻尼為 C_y 。由於系統之幾何形狀為左右對稱，假設僅受垂直方向(Y)之正弦外力 F_y 作用，且桿件在受力過程中皆保持彈性，則可將系統簡化成僅有垂直方向(Y)自由度，其控制方程式可表示為：

$$\ddot{Y} + \gamma \dot{Y} + k(Y^2 - 1) = \sin \omega t \quad (5.2.1)$$

其中

$$Y = \frac{\mathbf{Y}}{h} \quad (5.2.2)$$

$$\gamma = \frac{C_y}{\rho A l} \quad (5.2.3)$$

$$k = \frac{E h^2}{\rho l^4} \quad (5.2.4)$$

$$f = \frac{F_y}{\rho A l k} \quad (5.2.5)$$

詳細推導過程請參考吳演聲(1994)與 Yang 和 Wu(1997)。類似(5.2.1)式之方程式稱為達芬方程式(Duffing equation)，通常用來表示曲線結構承受一側向集中荷重之運動方程式，如上述之雙桿桁架系統、挫屈樑(Moon 和 Homles, 1998)及其他類似結構(Moon, 1987)等。

達芬方程式共有三個靜力平衡狀態： $Y=1, 0, -1$ 。其中 $Y=1, -1$ 為穩定平衡，而 $Y=0$ 則為不穩定平衡。以能量觀點而言，稱為雙井勢能問題(two-well potential problem)，即系統擁有兩個勢能井(potential well)($Y=1, -1$)與一個勢能丘(potential hill)($Y=0$)，可由圖 5.2 所示之溜滑球系統加以說明：圖中的小球乃表示雙桿桁架系統之中間節點，沿曲面作自由運動，而曲面可以是光滑(表示系統無阻尼)或粗糙的(表示系統含阻尼)。小球落下前之初始位置越高，則具有越大的初始位能，因此雙桿桁架系統之自由運動行為可由此溜滑球系統模擬之。

在雙井勢能問題中，勢能井的能量最低，若系統含阻尼且無外力持續作功，則系統在運動過程中，能量會不斷地減少，系統便會往能量最低的地方移動。換言之，在勢能井附近的軌跡會逐漸收斂至勢能井；相反地，在勢能丘附近的軌跡則會遠離勢能丘，因此勢能井稱為吸子(attractor)，而勢能丘則稱為斥子(repellor)，上述特性與雙桿桁架系統之動力行為有密切關係。

必須要說明的，本文在進行分析時不使用上述之達芬方程式，而採用第三章所介紹之有限元素法，相較於達芬方程式僅能模擬特定之非線性問題，有限元素法的應用更為廣泛。以雙桿桁架系統而言，理論上使用達芬方程式或有限元素法，所得到之分析結果應相同。本文雖採用有限元素法進行分析，但所有例題皆提供對應的達芬方程式參數，除了可與前人利用達芬方程式所得到之研究成果進行比

較外，另一方面，由達芬方程式之簡化參數更容易掌握系統之力學行為。

5.3 分析結果說明

本文研究之雙桿桁架系統，如圖 5.1 所示，其中 $l=25.02$ ， $h=1$ 。首先使用第三章所介紹之有限元素法與 Yang 和 Shieh(1990)所提出之廣義位移控制法，進行非線性靜力分析，結果如圖 5.3 所示。由圖中可清楚看到系統之三個平衡狀態，分別位於 $y=0, -1, -2$ ，對應的達芬方程式參數則為 $Y=1, 0, -1$ 。

以下使用有限元素法進行參數分析，其中質量矩陣部分，為了配合達芬方程式，採用堆積質量矩陣進行計算。分析所使用的參數以達芬方程式參數表示有：(1) 阻尼參數 γ ，(2) 彈性參數 k ，(3) 振幅參數 f ，(4) 外力頻率 ω ，(5) 初始位移 $Y(0)$ ，(6) 初始速度 $\dot{Y}(0)$ 。上述參數與有限元素法參數之轉換關係請參考(5.2.2)至(5.2.5)式，此轉換關係並非一對一。

5.3.1 無阻尼之自由振動系統

本節研究的自由振動問題，乃假設初始速度為零，系統的勢能僅來自初始位移所提供之位能。分析程序可分為兩階段，首先為靜力加載階段，利用廣義位移控制法將系統加載至預定的初始位移，其特點在於能通過極限點與反跳點等行為之考驗。接下來，進入動力分析階段，將在加載過程中的外力釋放，系統即進入自由振動狀態。

(1) $\gamma=0$ ， $k=0.5$ ， $Y(0)=0.95$ ， $\dot{Y}(0)=0$ 。

有限元素法之參數可設定為 $E=20000$ ksi， $\rho=0.1020731$ kip-sec²/in⁴。

系統原幾何形狀為 $Y(0)=1$ ， $Y(0)=0.95$ 表示初始位移為 0.05(向下)。

分析結果如圖 5.4(a)、(b)所示，其中(a)為位移歷時圖，(b)為相位圖。由位移歷時圖可發現，系統在 $y=0(Y=1)$ 附近作小振幅之週期運動，其中週期為 6.283 sec(頻率為 0.159 Hz)。由於系統之振幅很小，幾何非線性效應可忽略不

計，其振動訊號可近似為餘弦波。

另一方面，觀察(5.2.1)式之達芬方程式，其彈性力項為 $kY(Y^2-1)$ ，將此項對 Y 微分可得到 $K=k(3Y^2-1)$ ，其中 K 可視為系統之廣義勁度。代入相關參數 $\gamma=0$ ， $k=0.5$ ， $Y=1$ ，可得到 $K=1$ 。因此系統在 $y=0(Y=1)$ 附近之運動方程式，可由達芬方程式簡化為 $\ddot{Y}+Y=f\sin\omega t$ 。由此式可得到系統之自然頻率為 $\omega_n=1(0.159\text{ Hz})$ ，即自然週期為 2π ，與有限元素法分析結果相符。

將位移歷時資料進行FFT，結果如圖 5.4(c)所示，由圖中可發現僅有一個峰值，落在0.159 Hz處。若使用EMD分離此訊號，僅可得到一組IMF，即 c_1 ，如圖 5.4(d)所示。進一步，將 c_1 與原訊號進行希爾伯特轉換，結果如圖 5.4(e)所示，兩者之即時頻率雖略有不同，但皆在0.159 Hz附近輕微振盪，其中的差異將於下一個例子中進行說明。

(2) $\gamma=0$ ， $k=0.5$ ， $Y(0)=0.1$ ， $\dot{Y}(0)=0$ 。

有限元素法之參數可設定為 $E=20000\text{ ksi}$ ， $\rho=0.1020731\text{ kip}\cdot\text{sec}^2/\text{in}^4$ 。

系統原幾何形狀為 $Y(0)=1$ ， $Y(0)=0.1$ 表示初始位移為0.9(向下)。

分析結果如圖 5.5(a)、(b)所示，其中(a)為位移歷時圖，(b)為相位圖。由位移歷時圖可發現，系統在 $y=-0.9\sim 0.4(Y=0.1\sim 1.4)$ 之間作週期運動，其中週期為11.3 sec(頻率為0.088 Hz)，受到系統之幾何非線性效應影響，其振動訊號已非標準餘弦波。

將位移歷時資料進行FFT，結果如圖 5.5(c)所示，由圖中可發現頻率最低的峰值落在0.088 Hz處，稱為基本頻率 f_0 。此訊號並非標準餘弦波，因此以 f_0 為基準，在頻率為 nf_0 處可能會出現額外的高頻分量，以此訊號而言，分別是在0.176 Hz($n=2$)、0.264 Hz($n=3$)、0.352 Hz($n=4$)。以上為無物理意義之高頻分量(ultra-harmonic)，僅是為了滿足FFT在數學上的需求。若使用EMD分離此訊號，僅可得到一組IMF，即 c_1 ，如圖 5.5(d)所示。將 c_1 與原訊號進行希爾伯特轉換，結果如圖 5.5(e)所示，兩者之即時頻率有明顯差異，原因在於

兩者之參考零軸不同。

在第四章曾以 $X(t) = \alpha + \sin(t)$ 為例子，說明參考零軸對即時頻率計算的影響。其中 $\sin(t)$ 為有意義之訊號，而 α 則可視為因觀測位置不同所造成的差異，為了使即時頻率更具有物理意義，必須將 α 從原訊號 $X(t)$ 中分離出來。EMD 在分離訊號的過程中，強制平均值包絡線必須為零，以此例而言，恰巧達到分離 α 的效果。然而，必須要注意的，並非所有的訊號皆是如此。

觀察圖 5.5(d)，可發現殘餘值 r 約為 -0.245 ，原因在於此訊號之局部極大值與局部極小值並非對 $y=0$ ($Y=1$) 對稱，EMD 藉由強制平均值包絡線為零，調整參考零軸位置至 $y=-0.245$ ($Y=0.755$) 處。以同一組訊號而言，其參考零軸不同將影響即時頻率之計算，因此參考零軸的選擇必須謹慎小心。本文認為此系統之運動行為乃繞著吸子 $y=0$ ($Y=1$) 作週期運動，以吸子所在位置，當作參考零軸來觀察此訊號，包含計算其即時頻率，將更具有物理意義。換言之，以此訊號而言，其即時頻率之計算，由原訊號直接進行希爾伯特轉換會比經 EMD 處理的結果更為合理。

(3) $\gamma=0$ ， $k=0.5$ ， $Y(0)=1.45$ ， $\dot{Y}(0)=0$ 。

有限元素法之參數可設定為 $E=20000$ ksi， $\rho=0.1020731$ kip-sec²/in⁴。

系統原幾何形狀為 $Y(0)=1$ ， $Y(0)=1.45$ 表示初始位移為 0.45(向上)。

分析結果如圖 5.6(a)、(b)所示，其中(a)為位移歷時圖，(b)為相位圖。由位移歷時圖可發現，系統在 $y=-2.45 \sim 0.45$ ($Y=-1.45 \sim 1.45$) 之間作週期運動，其中週期為 15.8 sec (頻率為 0.063 Hz)。同樣地，受到系統之幾何非線性效應影響，其振動訊號已與餘弦波大相徑異。

將位移歷時資料進行 FFT，結果如圖 5.6(c)所示，由圖中可發現基本頻率 f_0 落在 0.063 Hz 處，且在 0.189 Hz (nf_0 , $n=3$) 處有一高頻分量。若使用 EMD 分離此訊號，僅可得到一組 IMF，即 c_1 ，如圖 5.6(d)所示。將 c_1 與原訊號進行希爾伯特轉換，結果如圖 5.6(e)所示，兩者之即時頻率差異十分顯著。

觀察圖 5.6(d)，可發現殘餘值 r 為 -1 ，即 EMD 將 c_1 之參考零軸位置移至 $y = -1 (Y = 0)$ 處。此系統之運動行為乃繞著吸子 $y = 0 (Y = 1)$ 與 $y = -2 (Y = -1)$ 作週期運動，其運動範圍跨越兩個吸子，本文認為以任一吸子當作觀察點皆不客觀。另一方面，此運動行為乃以斥子為中心，進行對稱之週期運動，因此本文建議以斥子所在位置，即 $y = -1 (Y = 0)$ 處為參考零軸位置，計算其即時頻率，將更具有物理意義。換言之，以此訊號而言，其即時頻率之計算，經 EMD 處理的結果會比原訊號直接進行希爾伯特轉換更有物理意義。

5.3.2 含阻尼之自由振動系統

本節研究自由振動問題，並且採用雷利阻尼來模擬結構之阻尼效應。

(4) $\gamma = 0.168$ ， $k = 0.5$ ， $Y(0) = 0.1$ ， $\dot{Y}(0) = 0$ 。

有限元素法之參數可設定為 $E = 20000 \text{ ksi}$ ， $\rho = 0.1020731 \text{ kip} \cdot \text{sec}^2 / \text{in}^4$ ， $\alpha_1 = 0.168$ 。本例題為例題(2)加上阻尼效應。

分析結果如圖 5.7(a)、(b)所示，其中(a)為位移歷時圖，(b)為相位圖。由位移歷時圖可發現，因阻尼效應的影響，其振幅大小隨著時間遞減，逐漸收斂至零。由相位圖可看出，系統繞著吸子 $y = 0 (Y = 1)$ 運動，最終能量耗盡並靜止於吸子中。將位移歷時資料進行 FFT，結果如圖 5.7(c)所示，由於此訊號為系統之暫態反應，非週期訊號，其 FFT 頻譜圖沒有物理意義。

若使用 EMD 分離此訊號，可得到三組 IMFs，即 c_1 、 c_2 、 c_3 ，如圖 5.7(d)所示。觀察 c_2 與 c_3 可發現這兩組 IMFs 非有意義之訊號，因此不予考慮。將 c_1 與原訊號進行希爾伯特轉換，結果如圖 5.7(e)所示。同樣地，兩者之即時頻率因參考零軸不同而有差異。然而，隨著時間增加，兩者之即時頻率逐漸接近，最終收斂至 0.159 Hz ，即系統在 $y = 0 (Y = 1)$ 附近之自然頻率。與例題(2)的結論相同，以此訊號而言，其即時頻率之計算，由原訊號直接進行希爾伯特轉換會比經 EMD 處理的結果更為合理。

5.3.3 含阻尼之強迫振動系統

本節研究強迫振動問題，同樣採用雷利阻尼來模擬結構之阻尼效應。由於非線性系統受到外力作用，其反應甚為複雜，有時會出現週期倍增以及混沌現象，而位移歷時圖與相位圖卻難以描述整個系統之運動行為，因此在本節的分析中，使用了龐加萊圖(Poincare plot)作為輔助，除了提供另一種觀察系統反應的方式外，亦可彌補位移歷時圖與相位圖在研究混沌現象時的不足。

龐加萊圖為龐加萊(Poincare)在 1899 年首先使用，其精神是將連續的相位軌跡轉變成離散的龐加萊映像(Poincare map)，其中龐加萊平面(Poincare plane)的取法有無限多種，不同的取法會得到相異的龐加萊圖，但僅有一種或少數幾種取法，能將系統之運動行為完全且有意義的呈現出來。以強迫振動系統而言，無論為線性或非線性系統，無論是週期運動或混沌行為，其反應必與外力之週期 T 有密切關係，因此每隔時間 T 取一次龐加萊映像，可得到最有意義之龐加萊圖。

(5) $\gamma = 0.168$ ， $k = 0.5$ ， $Y(0) = 0$ ， $\dot{Y}(0) = 0$ ， $f = 0.2$ ， $\omega = 1.7$ 。

有限元素法之參數可設定為 $E = 20000 \text{ ksi}$ ， $\rho = 0.1020731 \text{ kip} \cdot \text{sec}^2 / \text{in}^4$ ，

$\alpha_1 = 0.168$ ， $F_y = 0.5108$ 。

分析結果如圖 5.8(a)、(b)、(c)所示，其中(a)為位移歷時圖，(b)為相位圖(忽略暫態反應)，(c)為龐加萊圖(忽略暫態反應)。由位移歷時圖可發現，系統之穩態反應為週期運動，週期為 3.7 sec(頻率為 0.27 Hz)，等同於外力週期。相位圖中的封閉曲線表示此反應確實為週期運動，而龐加萊圖中僅存在一點，則表示此反應之週期等同於外力週期。

將位移歷時資料進行 FFT，結果如圖 5.8(d)所示，由圖中可發現僅有一個峰值，且落在 0.27 Hz 處，等同於外力頻率。若使用 EMD 分離此訊號，可得到兩組 IMFs，即 c_1 與 c_2 ，如圖 5.8(e)所示，其中 c_2 可視為系統之暫態反應，在計算即時頻率時可忽略。將 c_1 進行希爾伯特轉換，結果如圖 5.8(f)所示，其即時頻率在 0.27 Hz 處附近輕微振盪。

(6) $\gamma = 0.168$, $k = 0.5$, $Y(0) = 0$, $\dot{Y}(0) = 0$, $f = 0.31$, $\omega = 1.7$ 。

有限元素法之參數可設定為 $E = 20000$ ksi , $\rho = 0.1020731$ kip-sec²/in⁴ ,

$\alpha_1 = 0.168$, $F_y = 0.7917$ 。

分析結果如圖 5.9(a)、(b) 、(c)所示，其中(a)為位移歷時圖，(b)為相位圖(忽略暫態反應)，(c)為龐加萊圖(忽略暫態反應)。隨著外力增加，由位移歷時圖可發現，系統之穩態反應仍為週期運動，但週期增加為 7.4 sec(頻率為 0.135 Hz)。相位圖中的封閉曲線表示此反應確實為週期運動，而龐加萊圖中存在兩點，則表示此反應之週期等同於外力週期的兩倍。在混論理論中，這種現象稱為週期倍增，此反應稱為週期 2 行為。

將位移歷時資料進行 FFT，結果如圖 5.9(d)所示，由圖中可發現有三個峰值存在，分別落在 0.135 Hz、0.27 Hz、0.405 Hz 處。其中 0.27 Hz 為外力頻率，可視為基本頻率 f_0 ，0.135 Hz ($f_0/m, m=2$) 為 f_0 之次頻率(sub-harmonic)，而 0.405 Hz ($nf_0/m, n=3, m=2$) 為次頻率之高頻分量。

若使用 EMD 分離此訊號，僅可得到一組 IMF，即 c_1 ，如圖 5.9(e)所示。將 c_1 進行希爾伯特轉換，結果如圖 5.9(f)所示，其即時頻率在 0.03 ~ 0.21 Hz 之間振盪。此分析結果看不到外力頻率 0.27 Hz 的貢獻，原因在於 EMD 沒有將外力頻率所造成之高頻訊號分離出來，詳細原因請參考第四章。接下來，使用第四章所介紹之改良式 EMD 分離此訊號，可得到兩組 IMFs，即 c_1 與 c_2 ，如圖 5.9(g)所示。將 c_1 與 c_2 進行希爾伯特轉換，結果如圖 5.9(h)所示，其中 c_1 之即時頻率在 0.27 Hz 附近振盪，而 c_2 之即時頻率則趨近 0.135 Hz，本文認為此分析結果較有物理意義。

(7) $\gamma = 0.168$, $k = 0.5$, $Y(0) = 0$, $\dot{Y}(0) = 0$, $f = 0.345$, $\omega = 1.7$ 。

有限元素法之參數可設定為 $E = 20000$ ksi , $\rho = 0.1020731$ kip-sec²/in⁴ ,

$\alpha_1 = 0.168$, $F_y = 0.8811$ 。

分析結果如圖 5.10(a)、(b) 、(c)所示，其中(a)為位移歷時圖，(b)為相位圖

(忽略暫態反應)，(c)為龐加萊圖(忽略暫態反應)。隨著外力增加，系統反應週期持續倍增，已由週期 2 行為轉變為週期 4 行為，其中週期為 14.8 sec (頻率為 0.0675 Hz)。相位圖中的封閉曲線表示此反應確實為週期運動，而龐加萊圖中存在四點，則表示此反應之週期等同於外力週期的四倍。

將位移歷時資料進行 FFT，結果如圖 5.10(d)所示，由圖中可發現有五個峰值存在，分別落在 0.0675 Hz、0.135 Hz、0.2025 Hz、0.27 Hz、0.405 Hz 處。其中 0.27 Hz 為外力頻率，可視為基本頻率 f_0 ，0.0675 Hz ($f_0/m, m=4$)、0.135 Hz ($f_0/m, m=2$) 為 f_0 之次頻率，而 0.2025 Hz ($nf_0/m, n=3, m=4$)、0.405 Hz ($nf_0/m, n=3, m=2$) 則為次頻率之高頻分量。

若使用 EMD 分離此訊號，可得到三組 IMFs，即 c_1 、 c_2 、 c_3 ，如圖 5.10(e) 所示，其中 c_3 類似系統之暫態反應，在計算即時頻率時可忽略之。將 c_1 與 c_2 進行希爾伯特轉換，結果如圖 5.10(f) 所示，其中 c_1 之即時頻率在 0.04 ~ 0.22 Hz 之間振盪， c_2 之即時頻率趨近 0.0675 Hz。同樣地，此分析結果看不到外力頻率 0.27 Hz 的貢獻。接下來，使用改良式 EMD 分離此訊號，可得到三組 IMFs，即 c_1 、 c_2 、 c_3 ，如圖 5.10(g) 所示。將這三組 IMFs 進行希爾伯特轉換，結果如圖 5.10(h) 所示，其中 c_1 之即時頻率在 0.27 Hz 附近振盪，而 c_2 與 c_3 之即時頻率則分別趨近 0.135 Hz 與 0.0675 Hz，本文認為此分析結果較有物理意義。

(8) $\gamma=0.168$ ， $k=0.5$ ， $Y(0)=0$ ， $\dot{Y}(0)=0$ ， $f=0.5$ ， $\omega=1.7$ 。

有限元素法之參數可設定為 $E=20000$ ksi， $\rho=0.1020731$ kip-sec²/in⁴，

$\alpha_1=0.168$ ， $F_y=1.2769$ 。

分析結果如圖 5.11(a)、(b)、(c) 所示，其中 (a) 為位移歷時圖，(b) 為相位圖，(c) 為龐加萊圖。由位移歷時圖、相位圖可確定此反應非週期運動，而由龐加萊圖中出現奇異吸子的現象，可得知系統此時進入混沌行為。奇異吸子具備了自我相似的碎形結構，說明了混沌行為隱藏高度的規則性。

將位移歷時資料進行 FFT，結果如圖 5.11(d) 所示，由圖中可發現有一個明

顯的峰值存在，落在 0.27 Hz 處，代表外力的頻率，說明了即使系統進入混沌行為，外力頻率依然在系統的反應中扮演重要角色。在外力頻率 0.27 Hz 之左側，則佈滿了連續的低頻分量，表示此反應之週期為無限大，同時也說明了混沌行為無法以有限個正弦與餘弦函數模擬之。

若使用 EMD 分離此訊號，可得到八組 IMFs，即 $c_1 \sim c_8$ ，如圖 5.11(e)所示。然而，將混沌行為分解成由數個訊號分量所組成，本文認為沒有明顯的物理意義存在，已超出了 EMD 能處理的範疇。



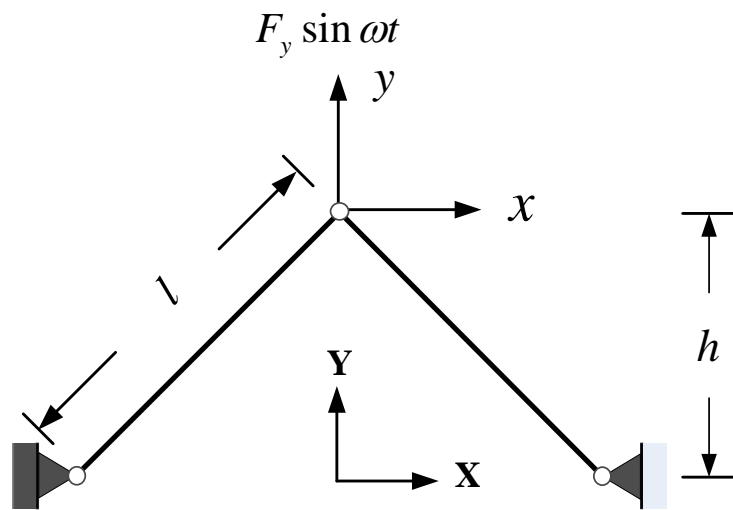


圖 5.1 雙桿桁架系統

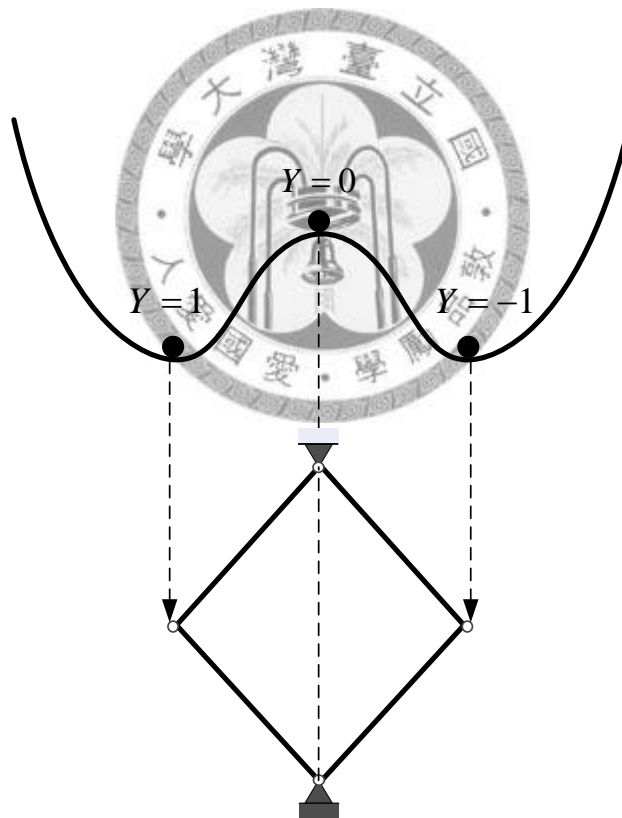


圖 5.2 溜滑球系統

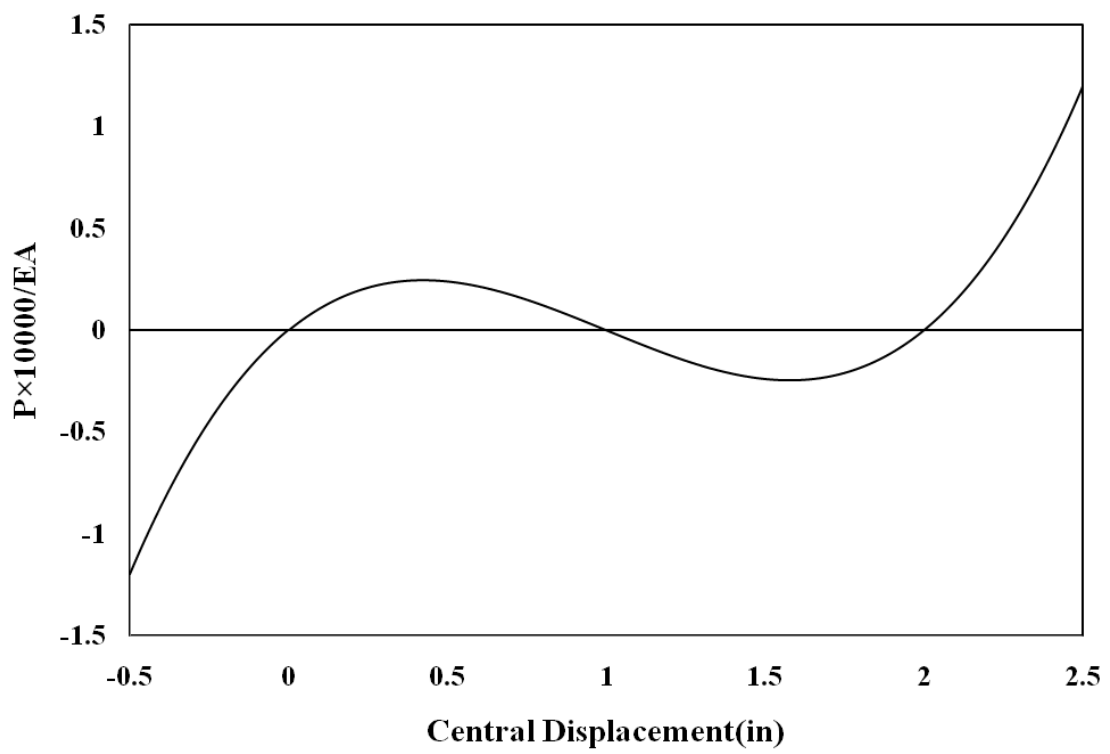


圖 5.3 雙桿桁架系統之荷重 - 變形曲線

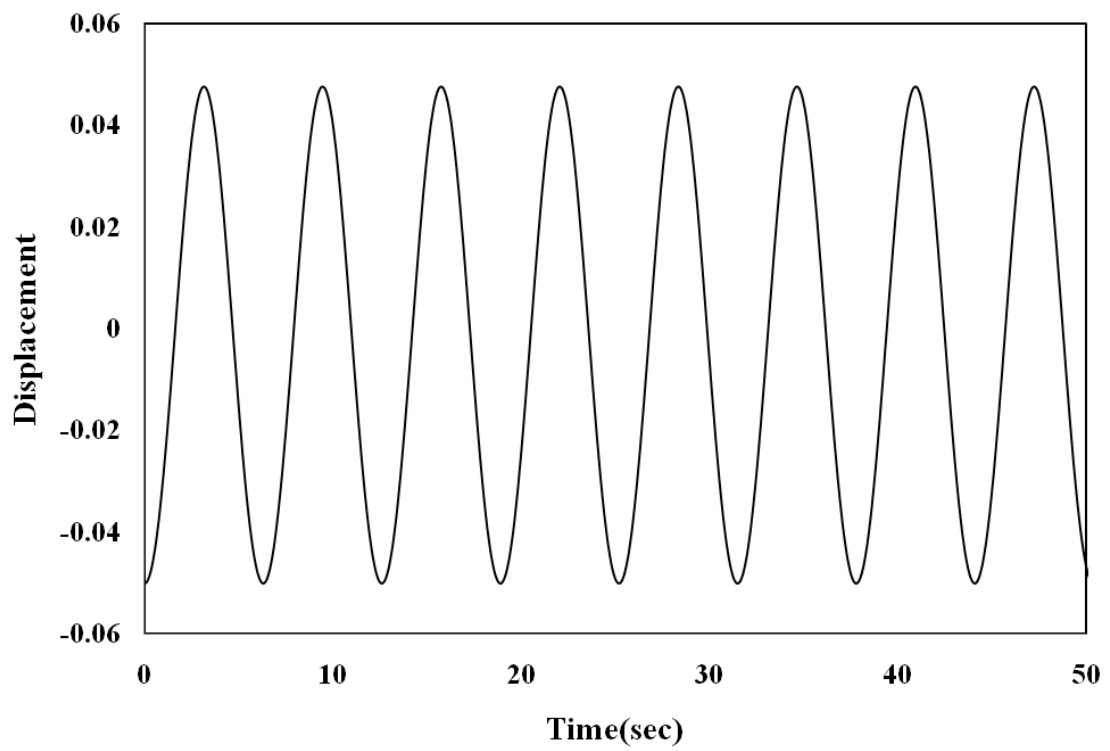


圖 5.4(a) 例題(1)之位移歷時圖

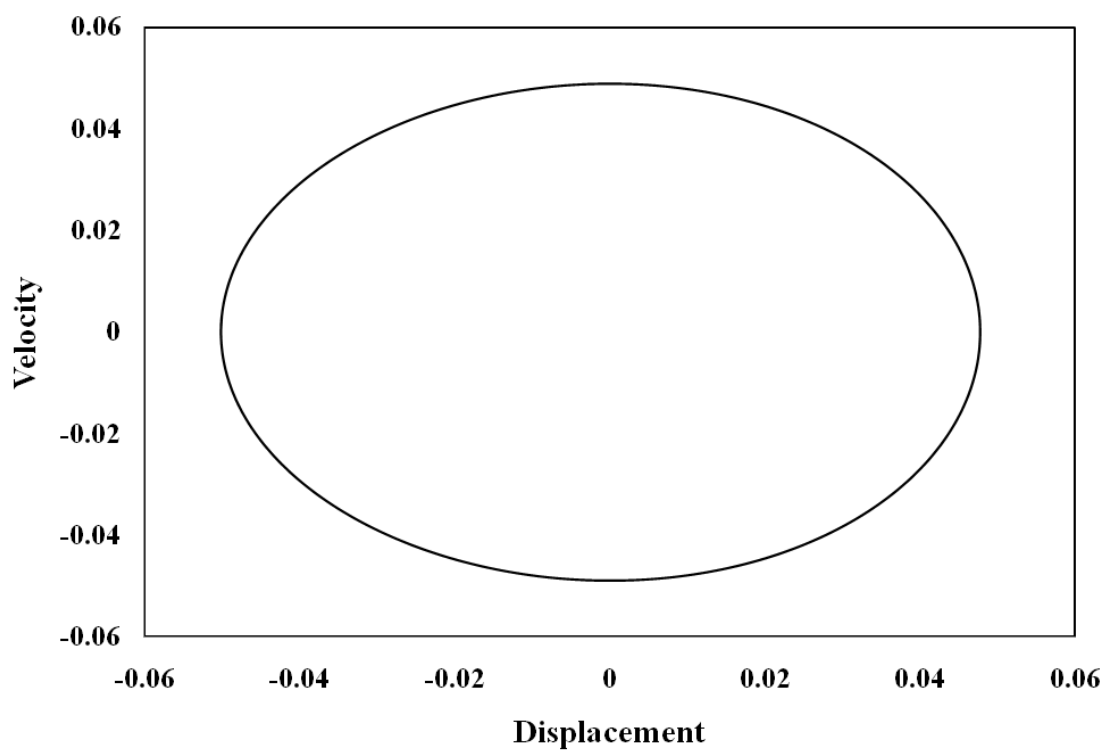


圖 5.4(b) 例題(1)之相位圖

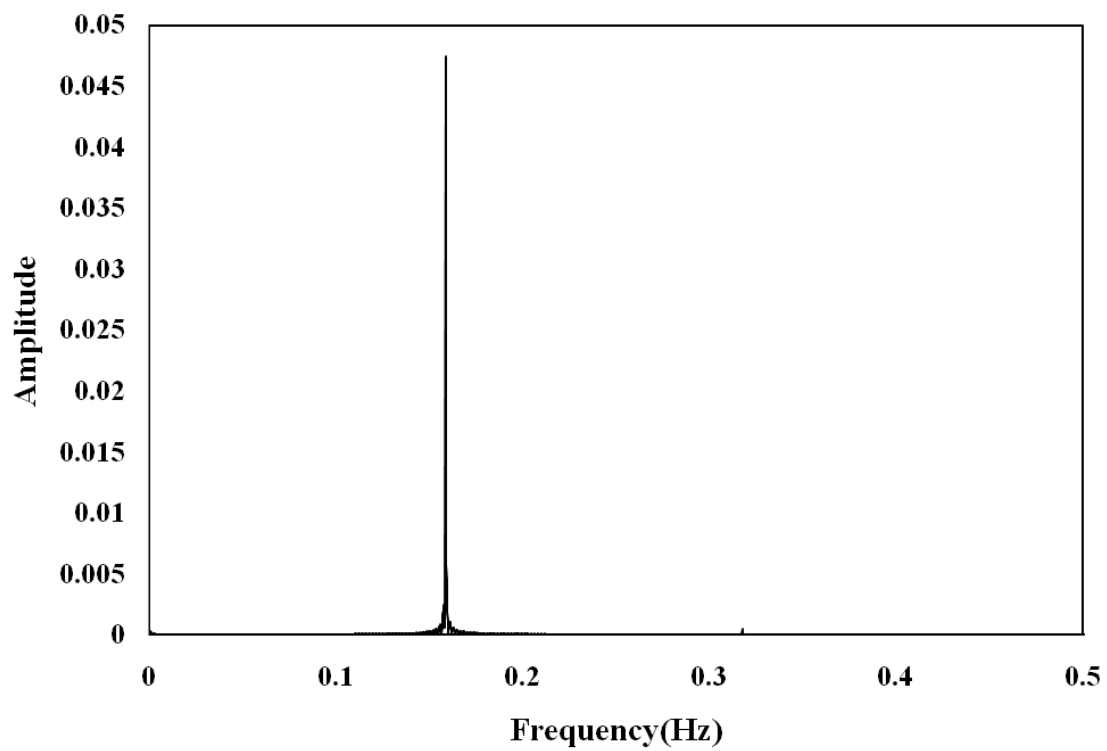


圖 5.4(c) 例題(1)之 FFT 頻譜圖

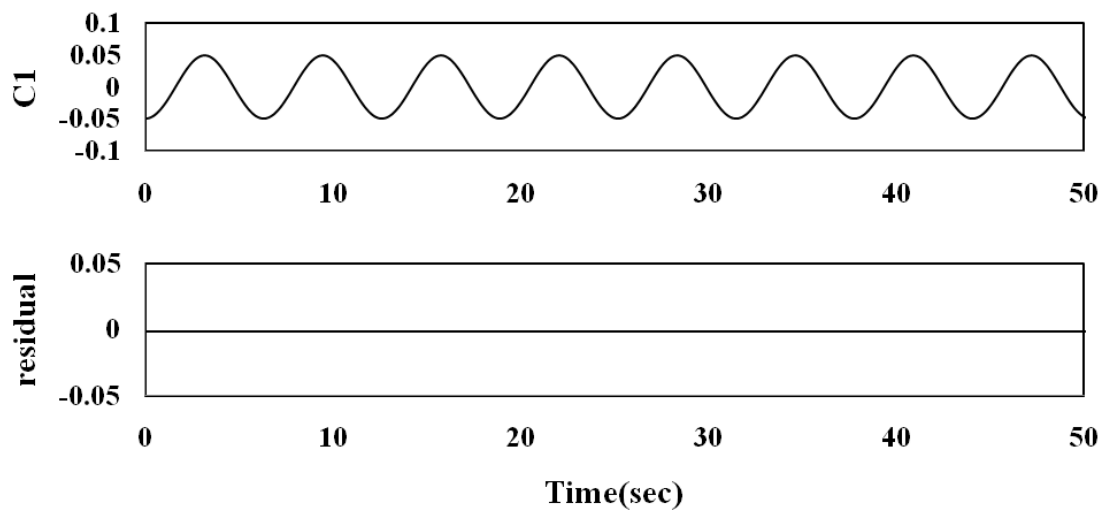


圖 5.4(d) 例題(1)經 EMD 所得之 IMF

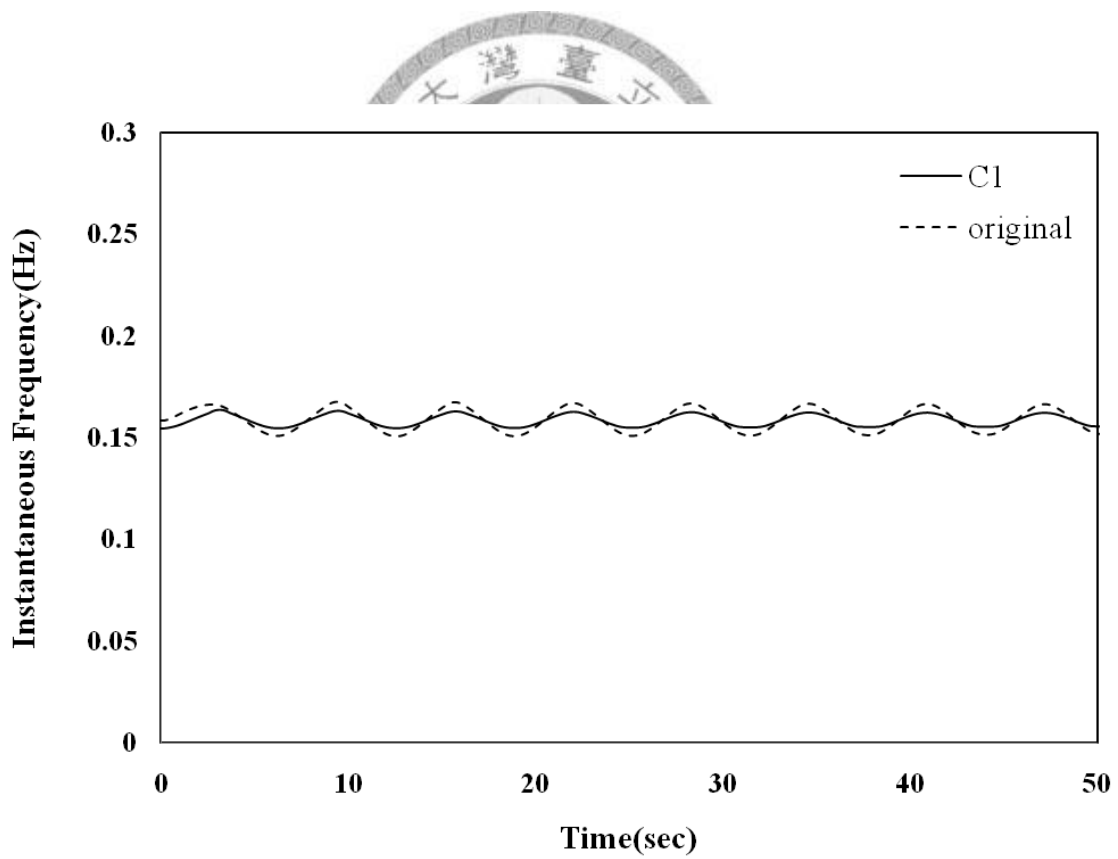


圖 5.4(e) 例題(1)之即時頻率比較圖

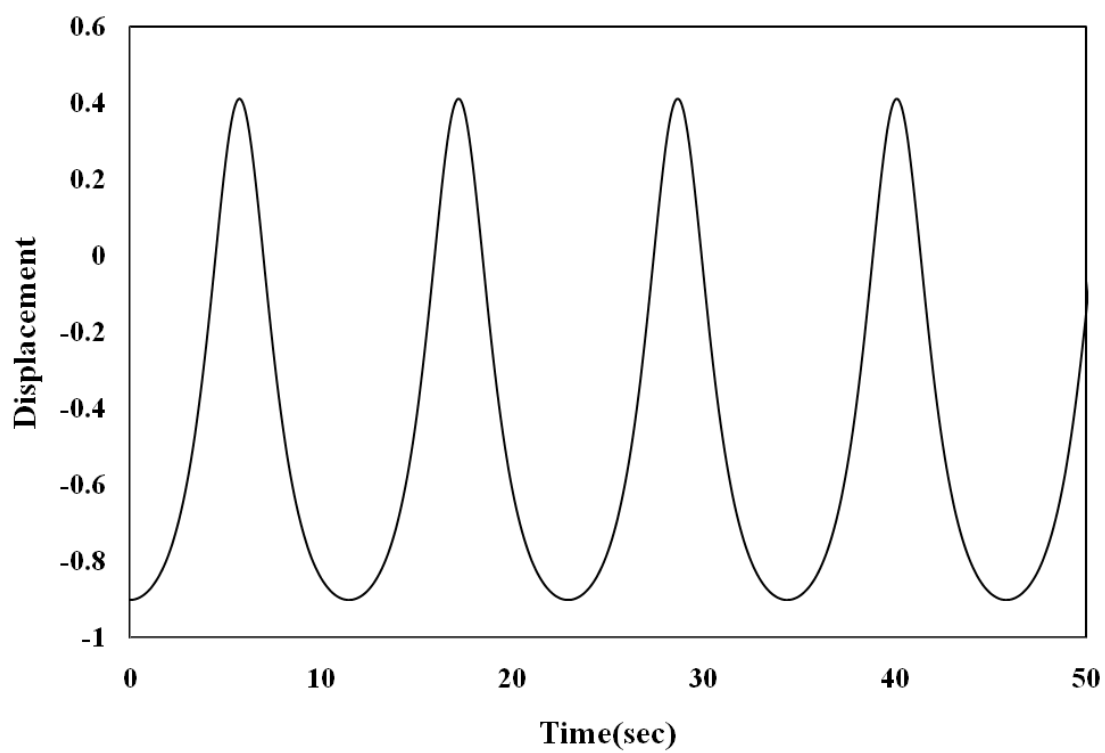


圖 5.5(a) 例題(2)之位移歷時圖

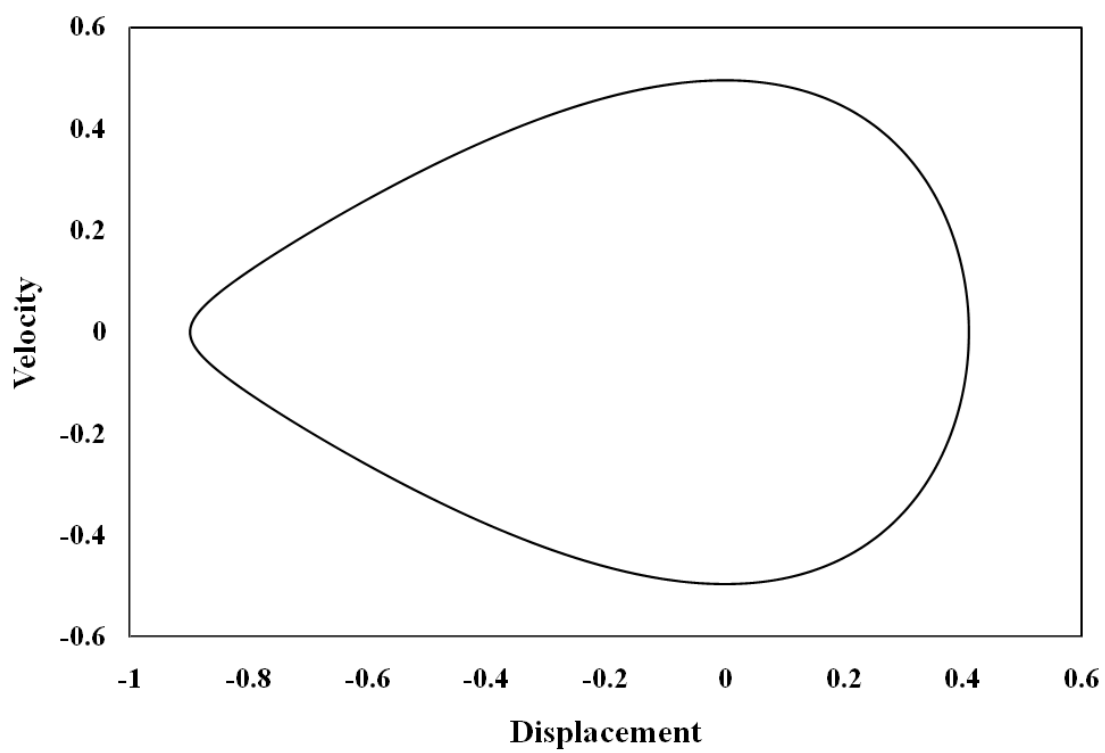


圖 5.5(b) 例題(2)之相位圖

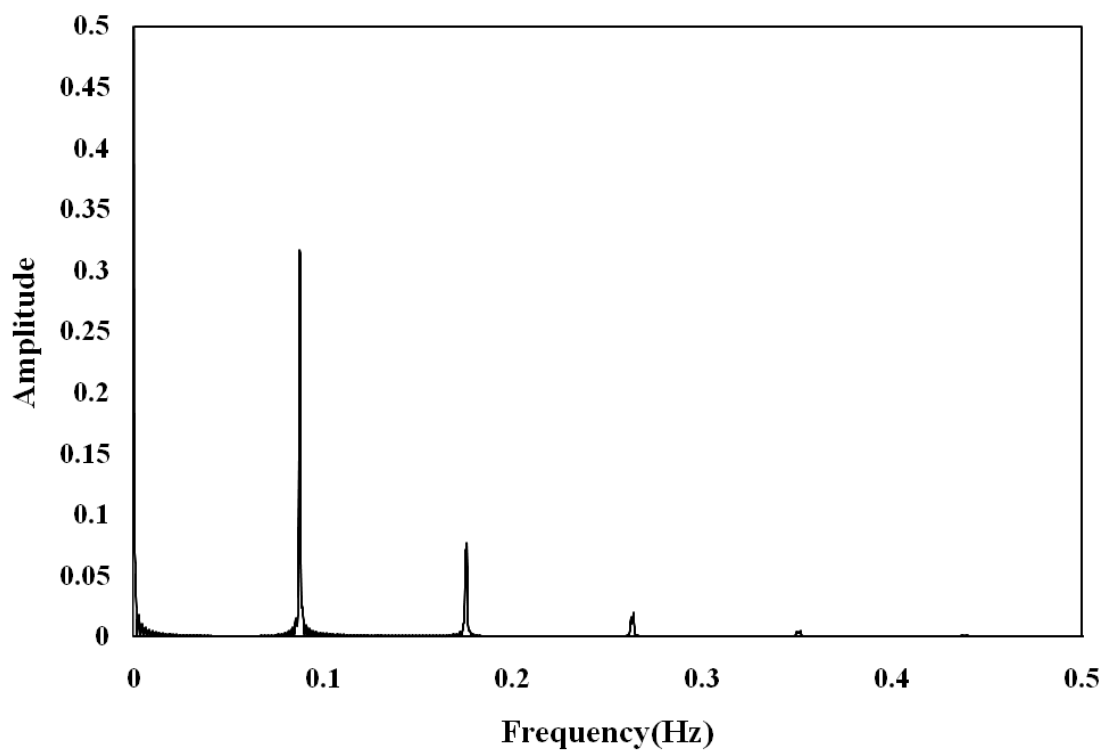


圖 5.5(c) 例題(2)之 FFT 頻譜圖

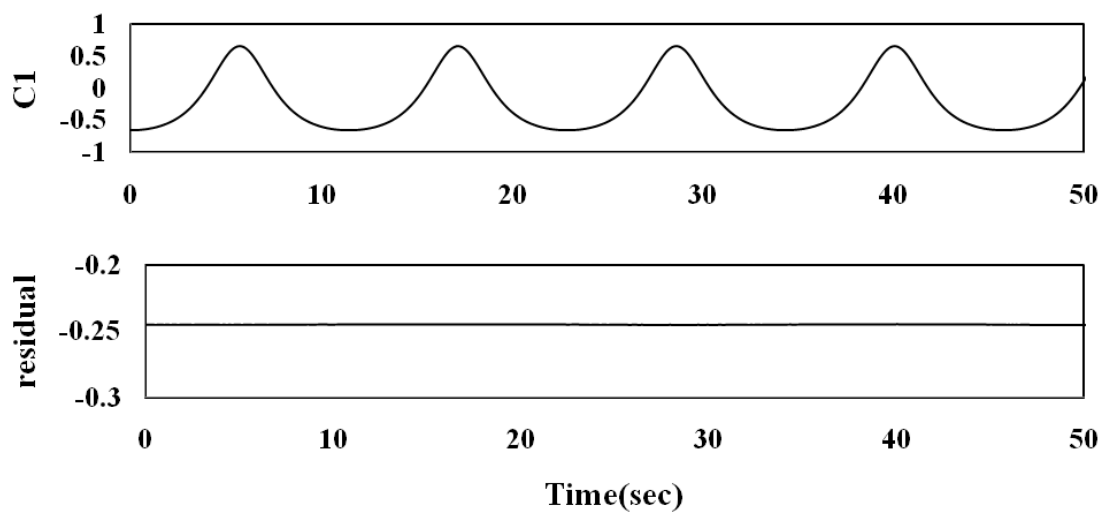


圖 5.5(d) 例題(2)經 EMD 所得之 IMF

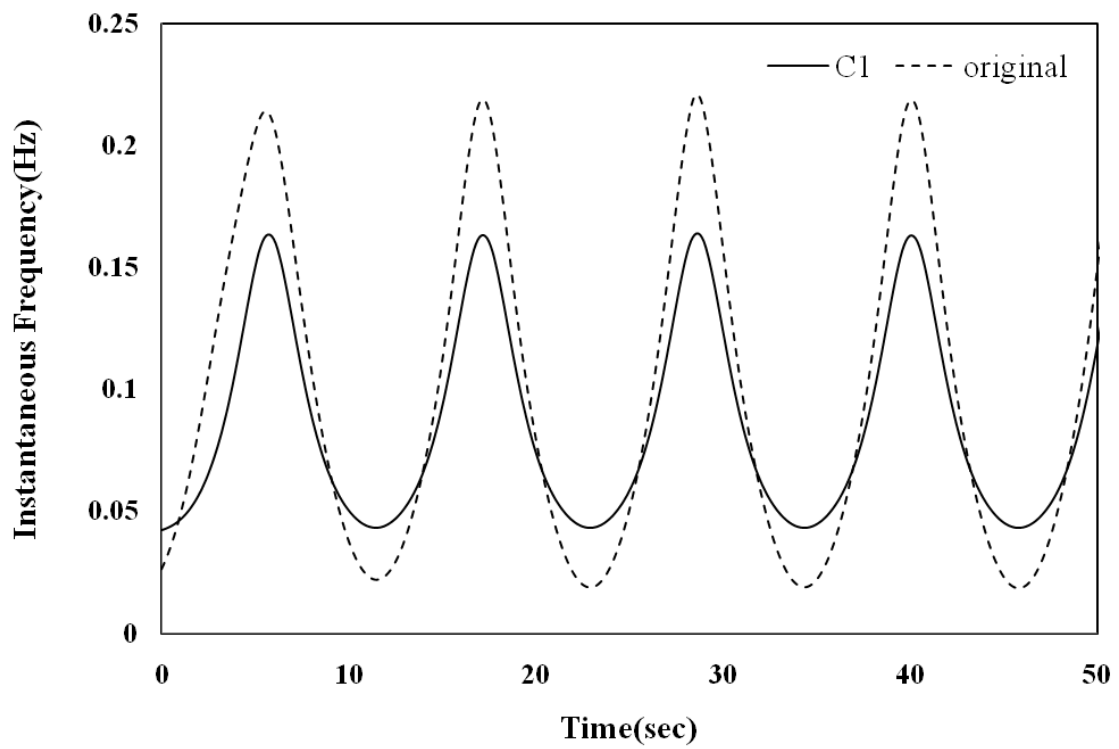


圖 5.5(e) 例題(2)之即時頻率比較圖

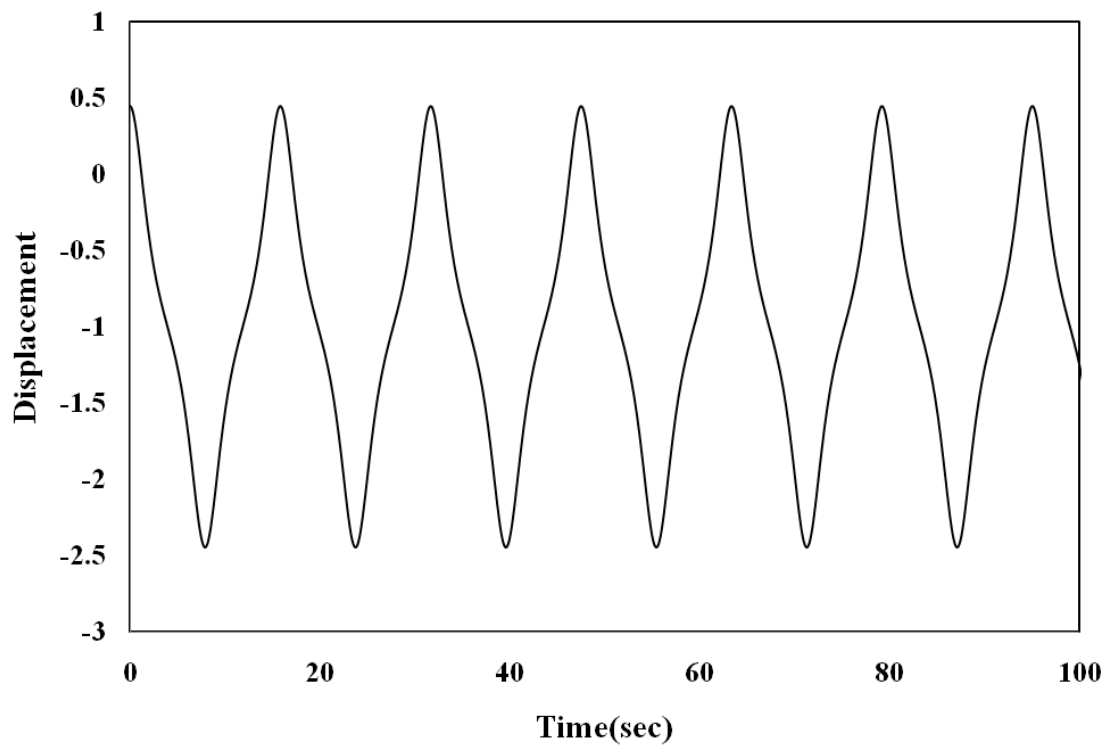


圖 5.6(a) 例題(3)之位移歷時圖

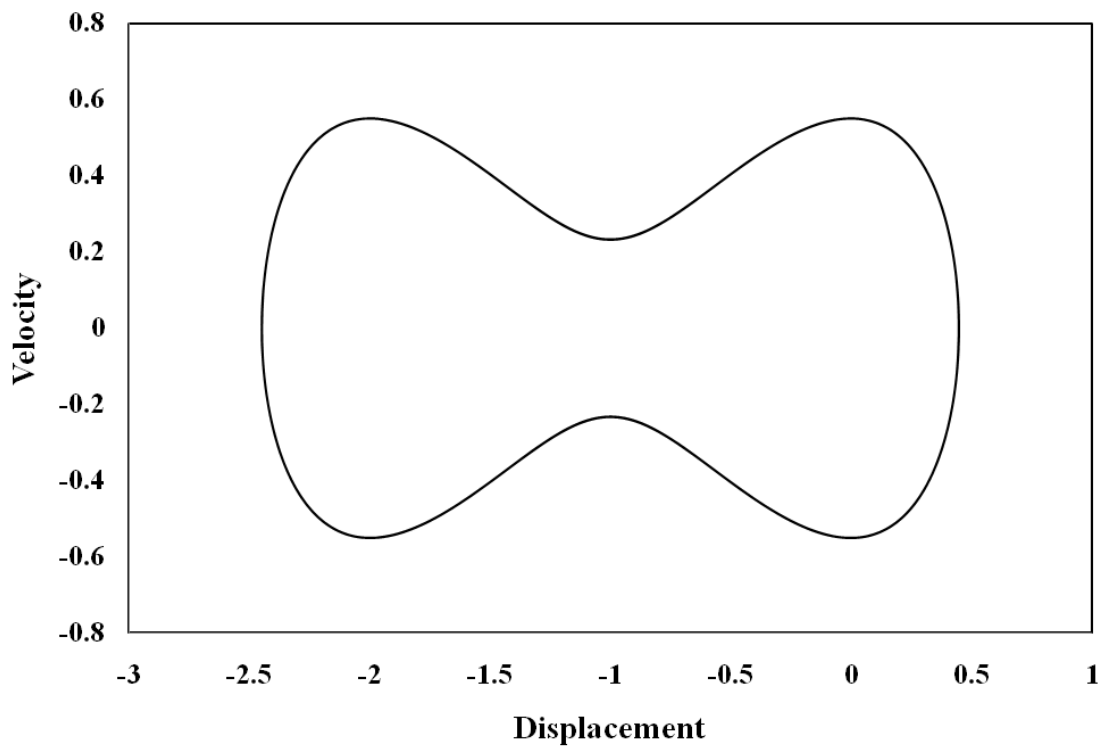


圖 5.6(b) 例題(3)之相位圖

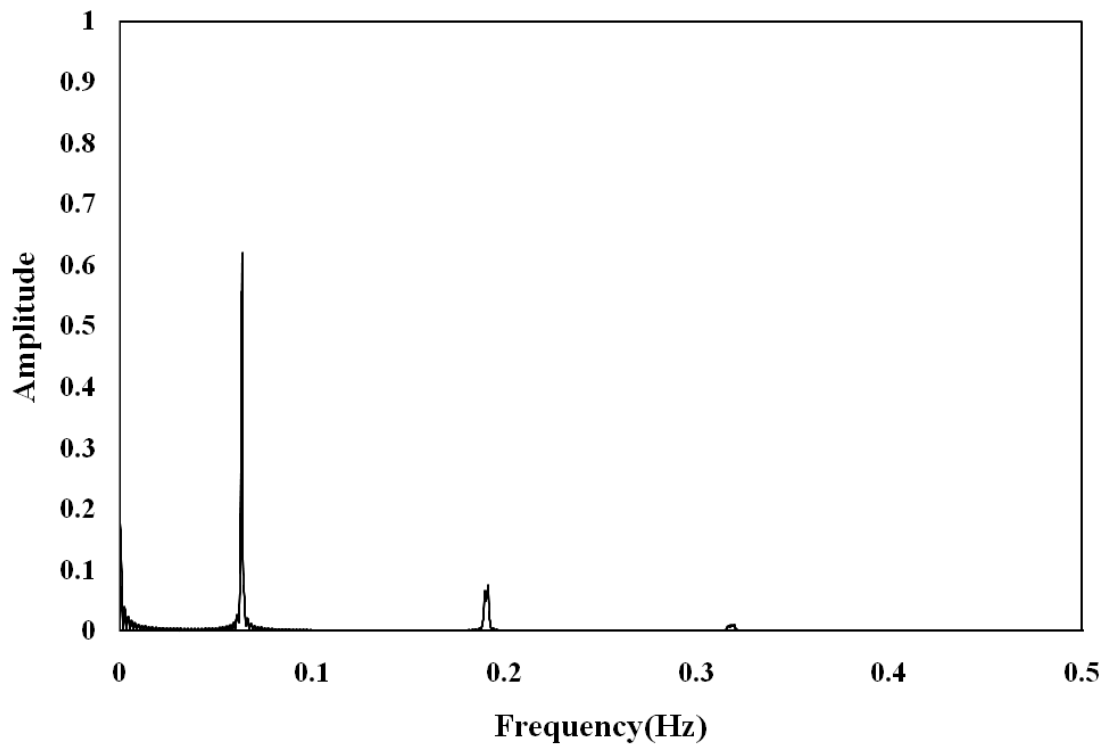


圖 5.6(c) 例題(3)之 FFT 頻譜圖

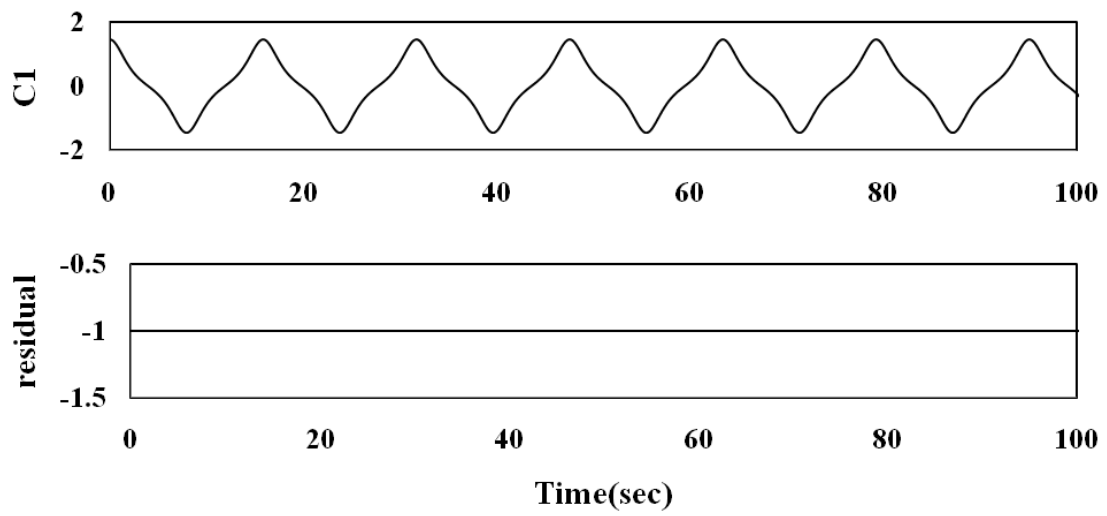


圖 5.6(d) 例題(3)經 EMD 所得之 IMF

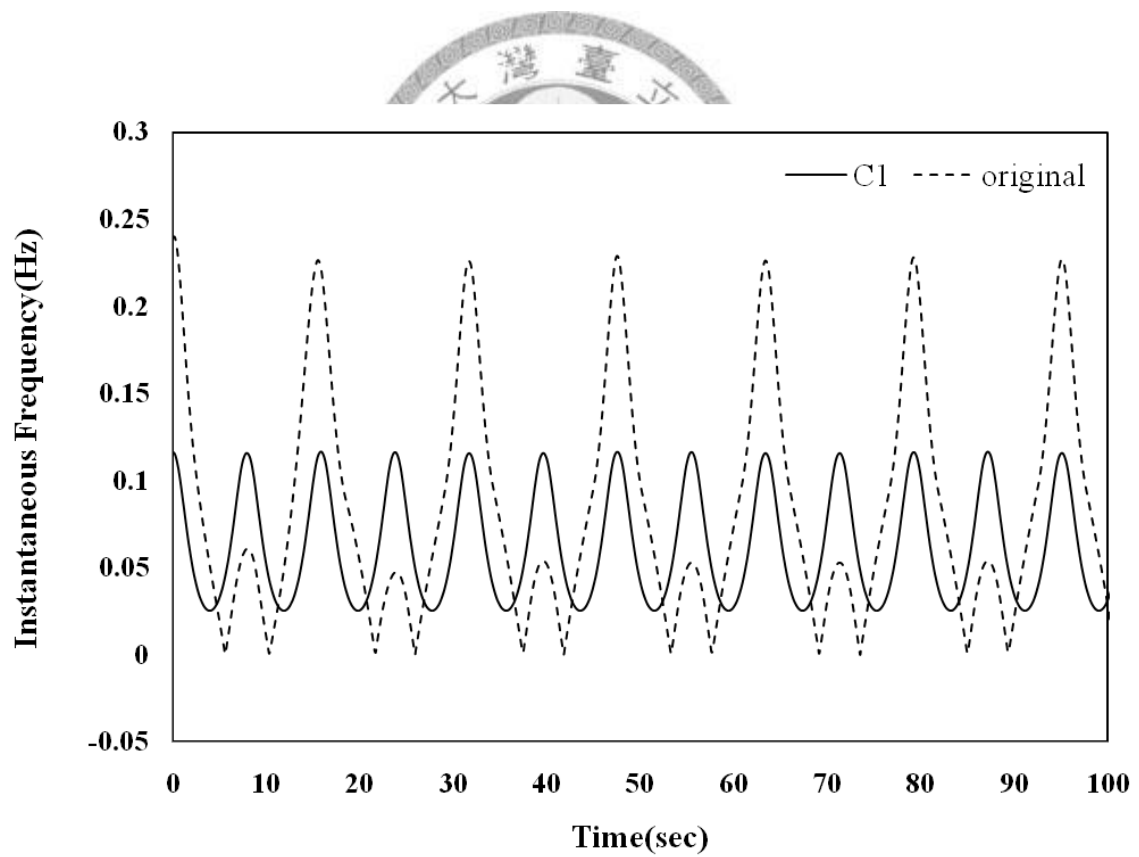


圖 5.6(e) 例題(3)之即時頻率比較圖

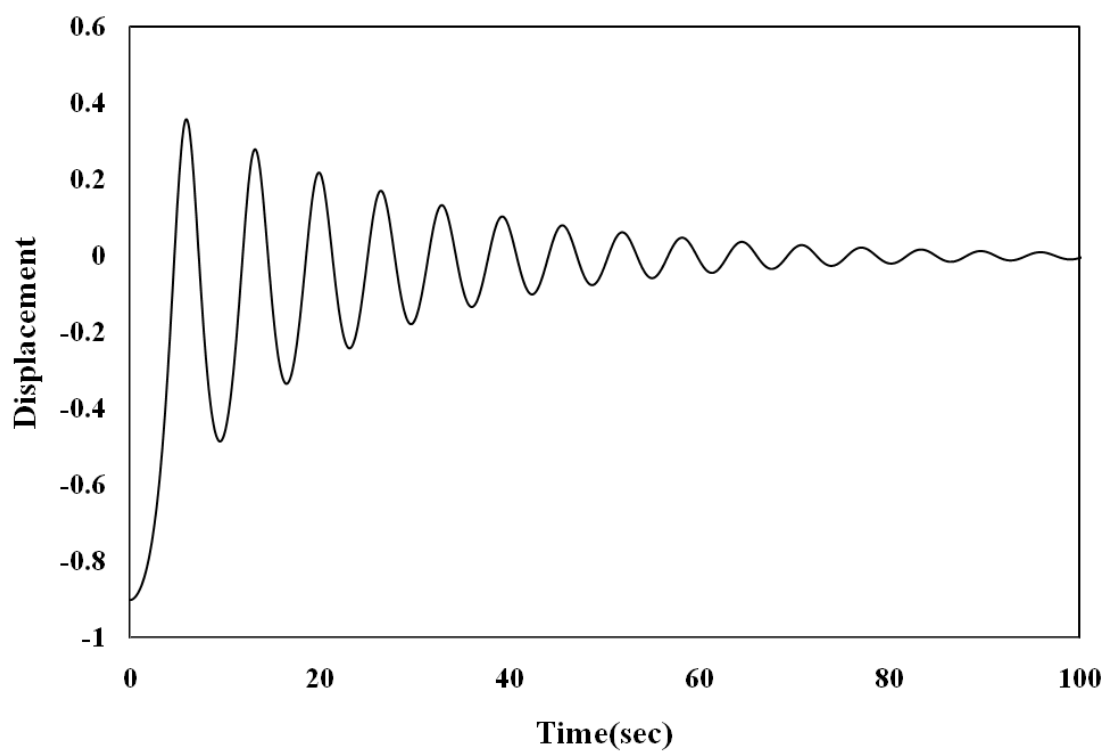


圖 5.7(a) 例題(4)之位移歷時圖

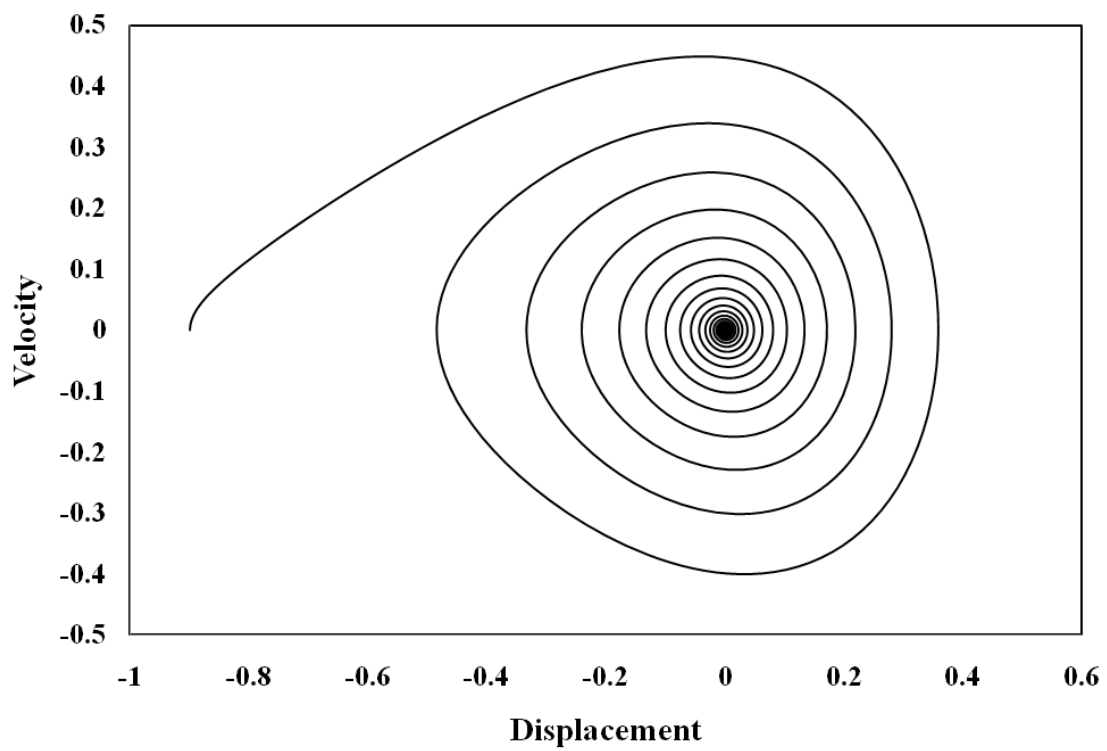


圖 5.7(b) 例題(4)之相位圖

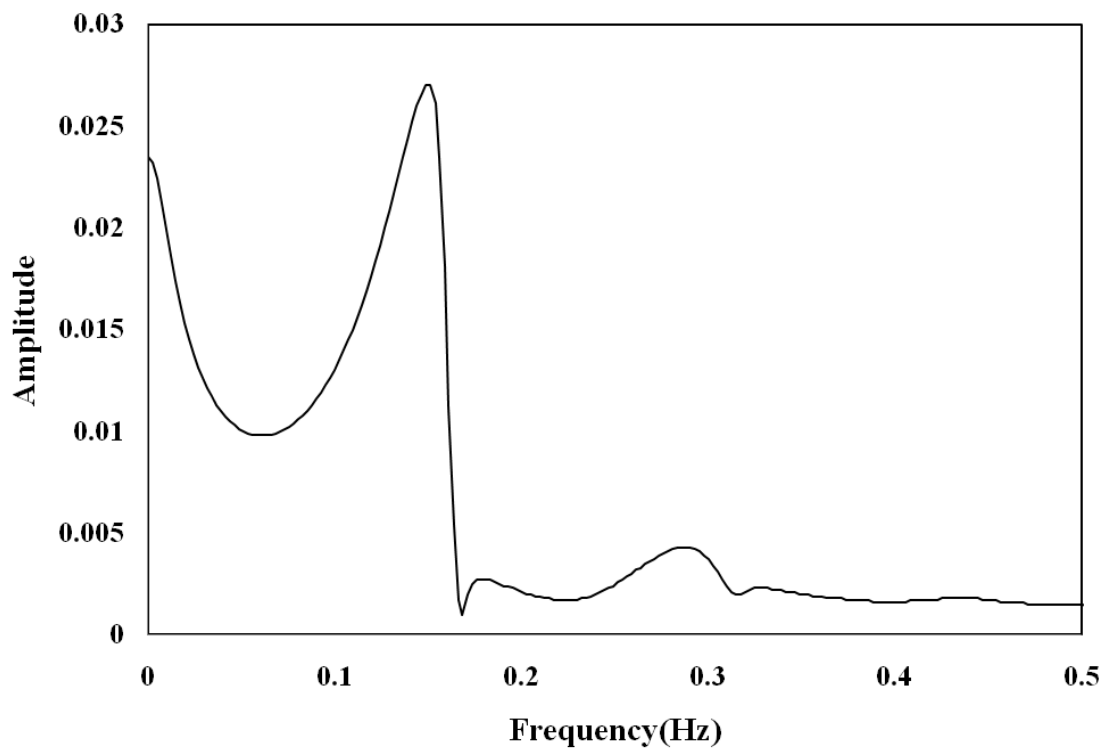
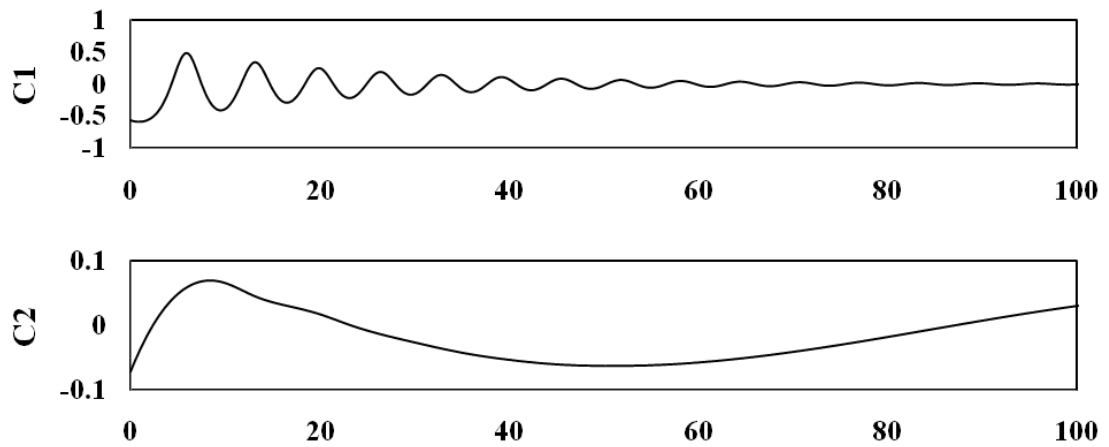


圖 5.7(c) 例題(4)之 FFT 頻譜圖



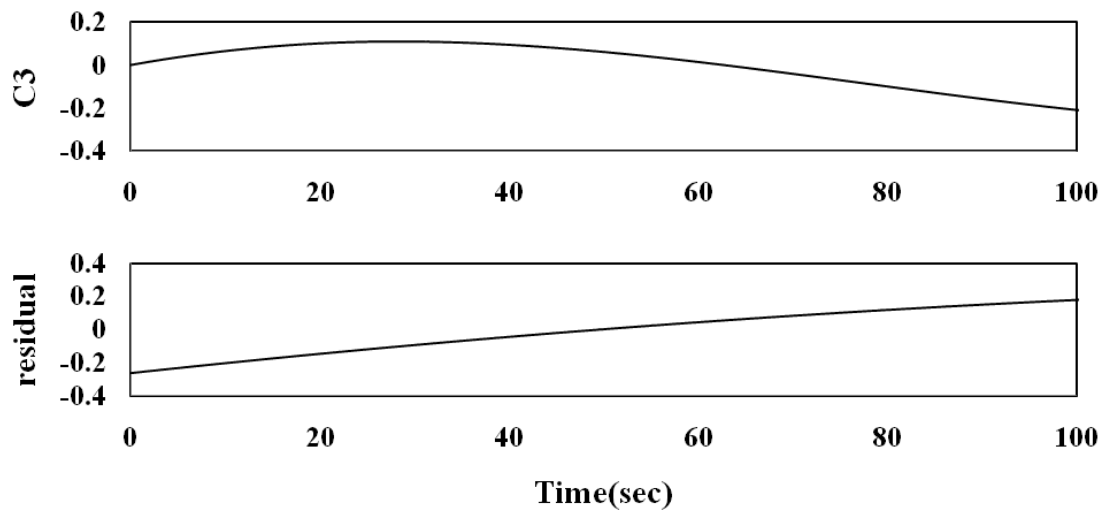


圖 5.7(d) 例題(4)經 EMD 所得之 IMFs

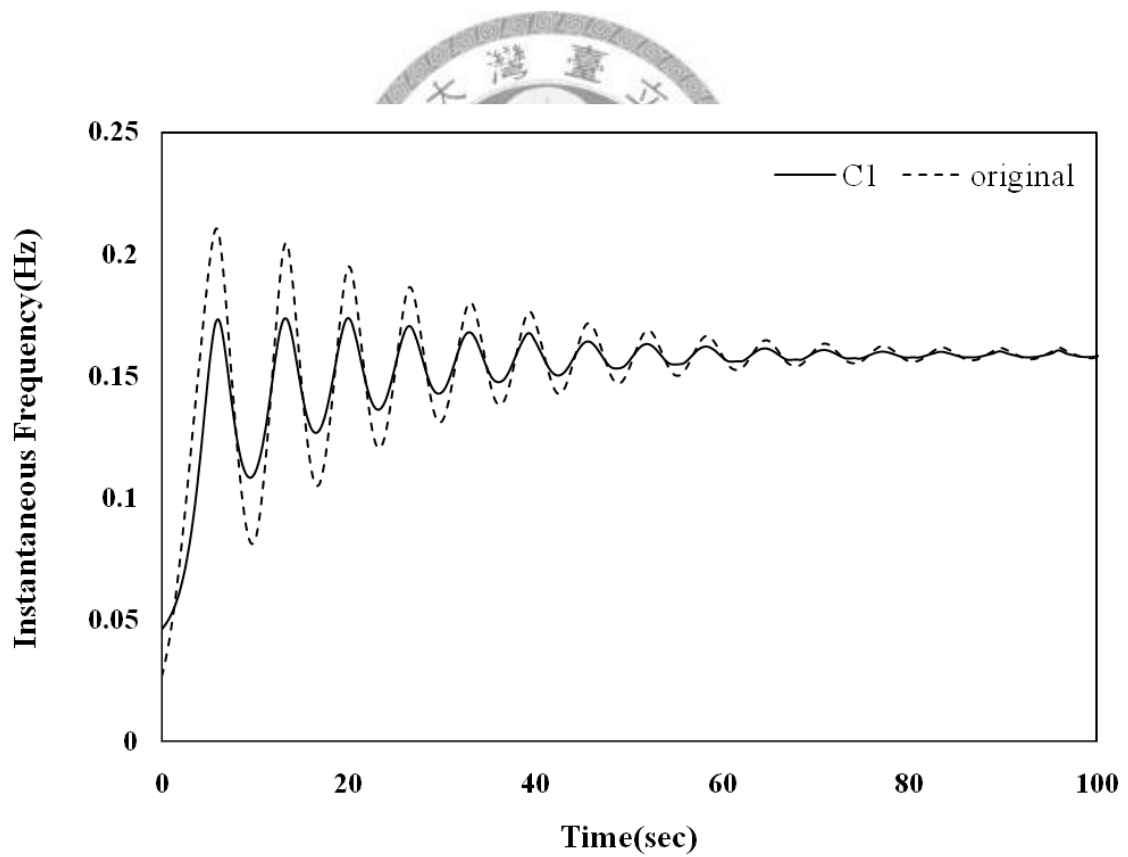


圖 5.7(e) 例題(4)之即時頻率比較圖

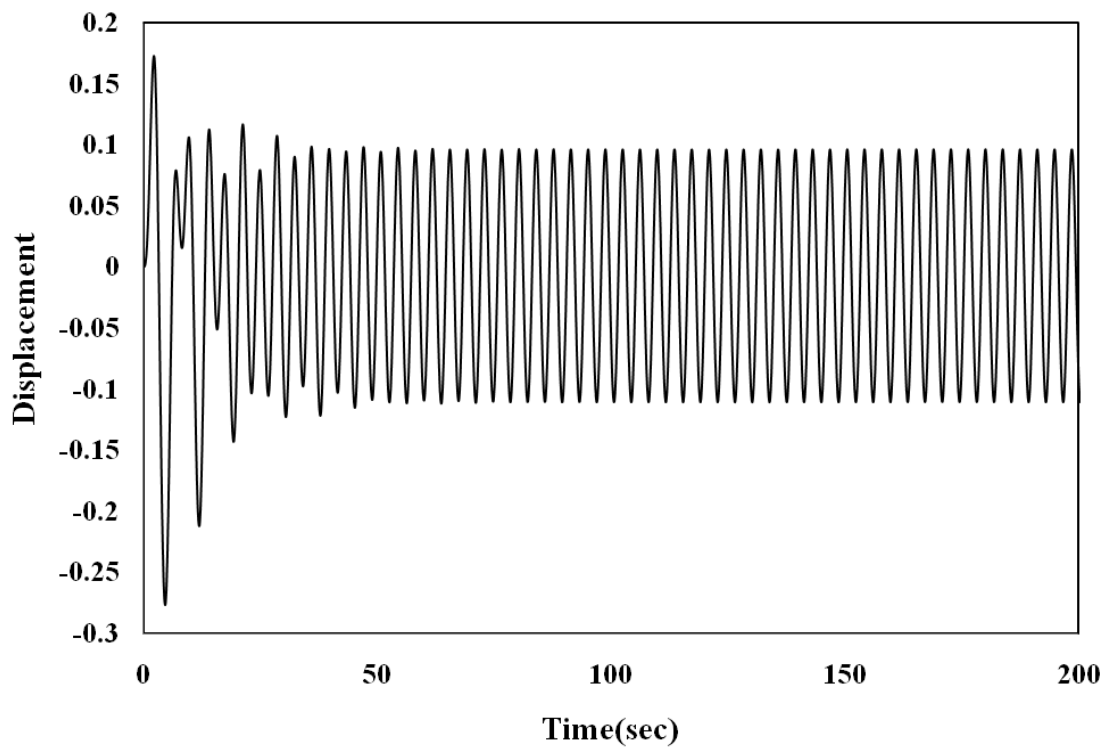


圖 5.8(a) 例題(5)之位移歷時圖

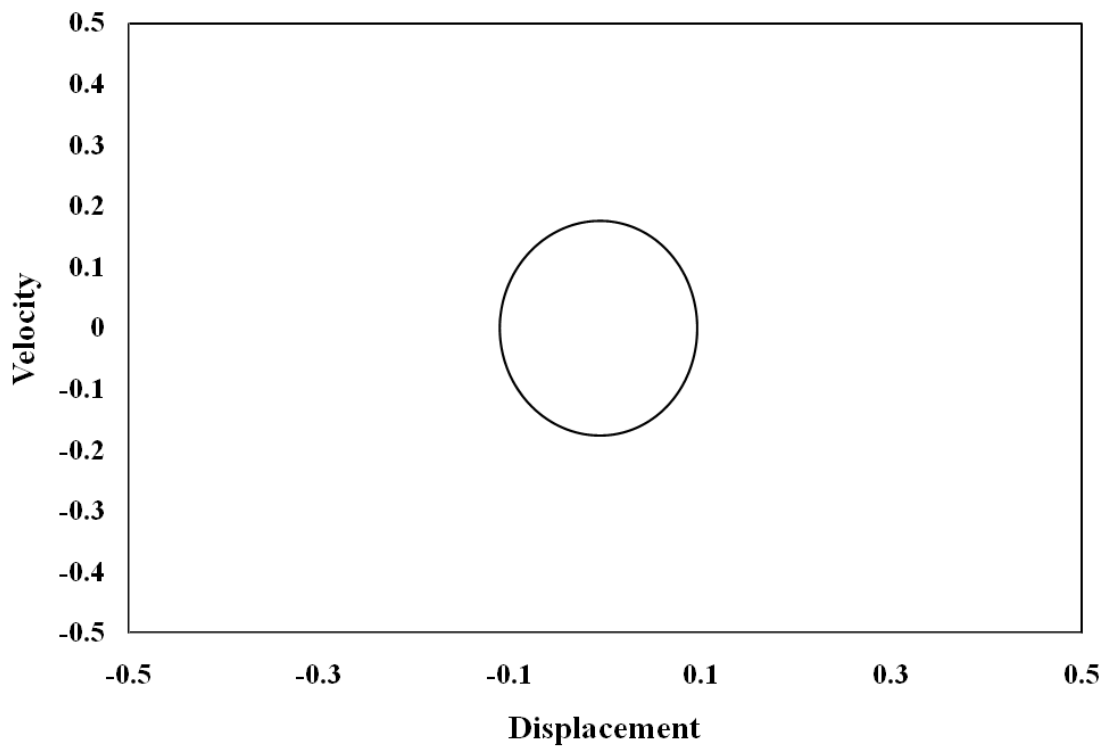


圖 5.8(b) 例題(5)之相位圖

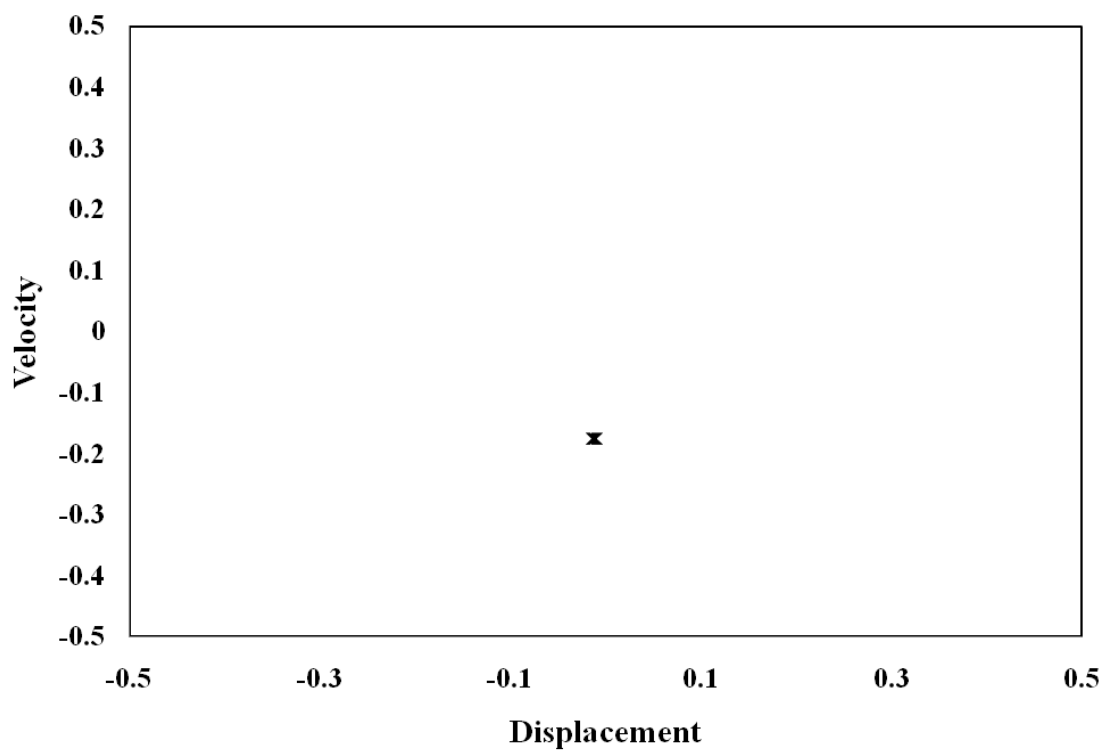


圖 5.8(c) 例題(5)之龐加萊圖

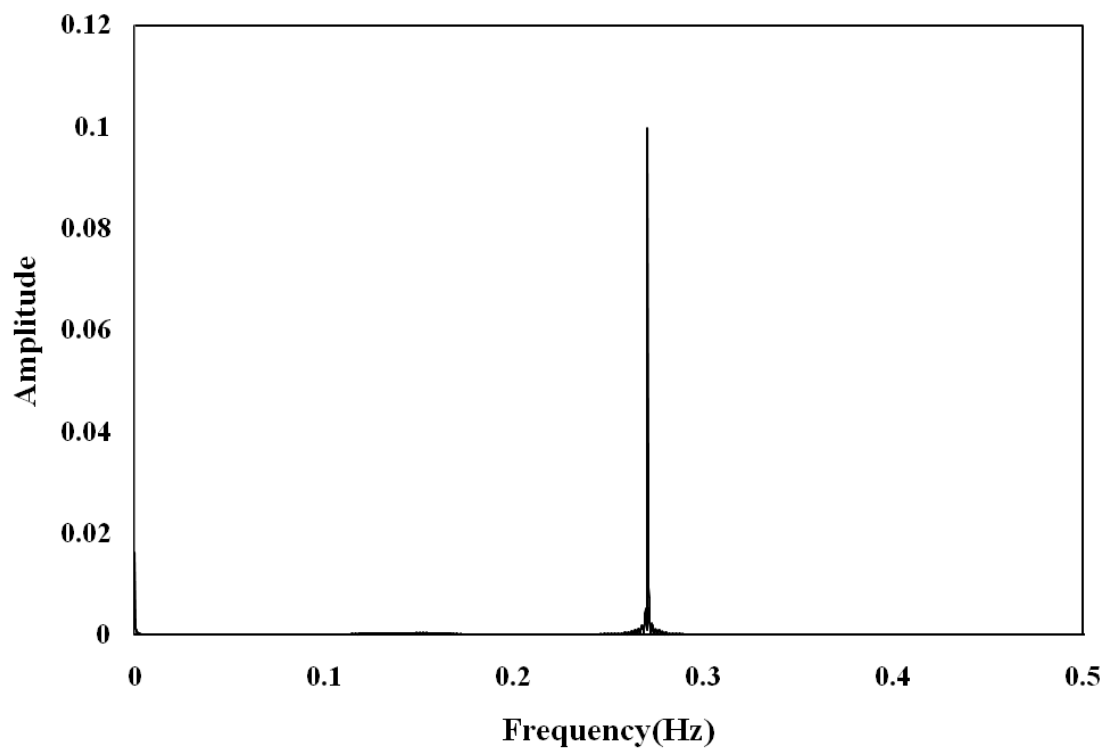


圖 5.8(d) 例題(5)之 FFT 頻譜圖

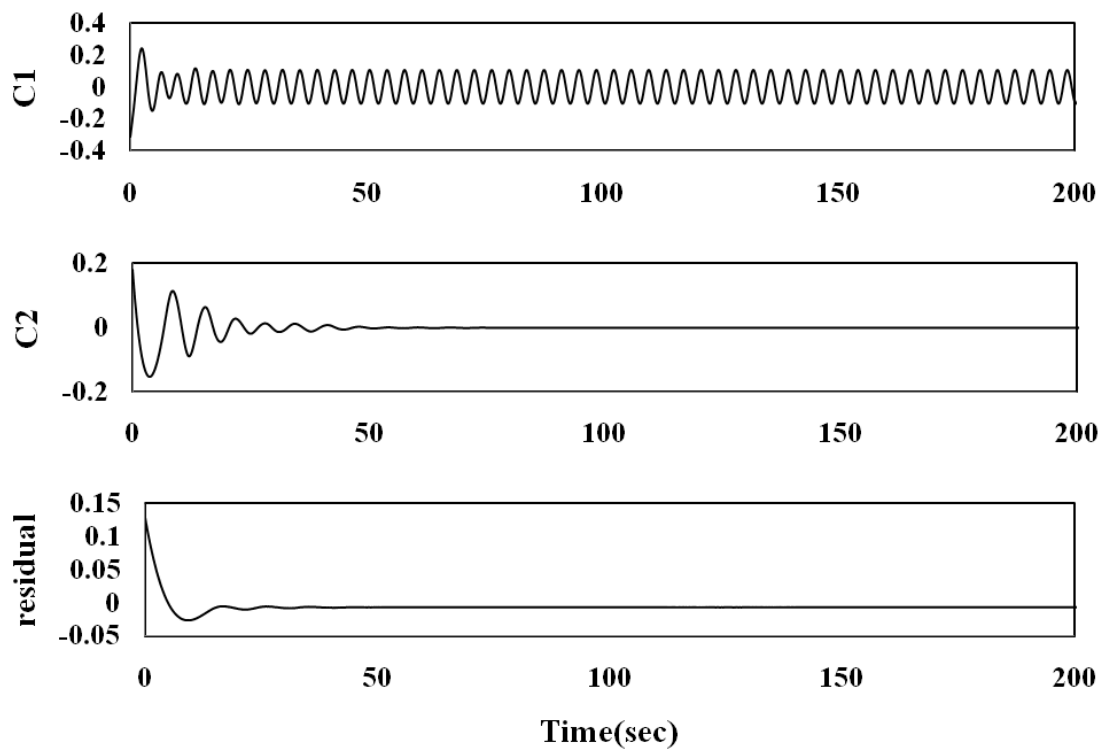


圖 5.8(e) 例題(5)經 EMD 所得之 IMFs



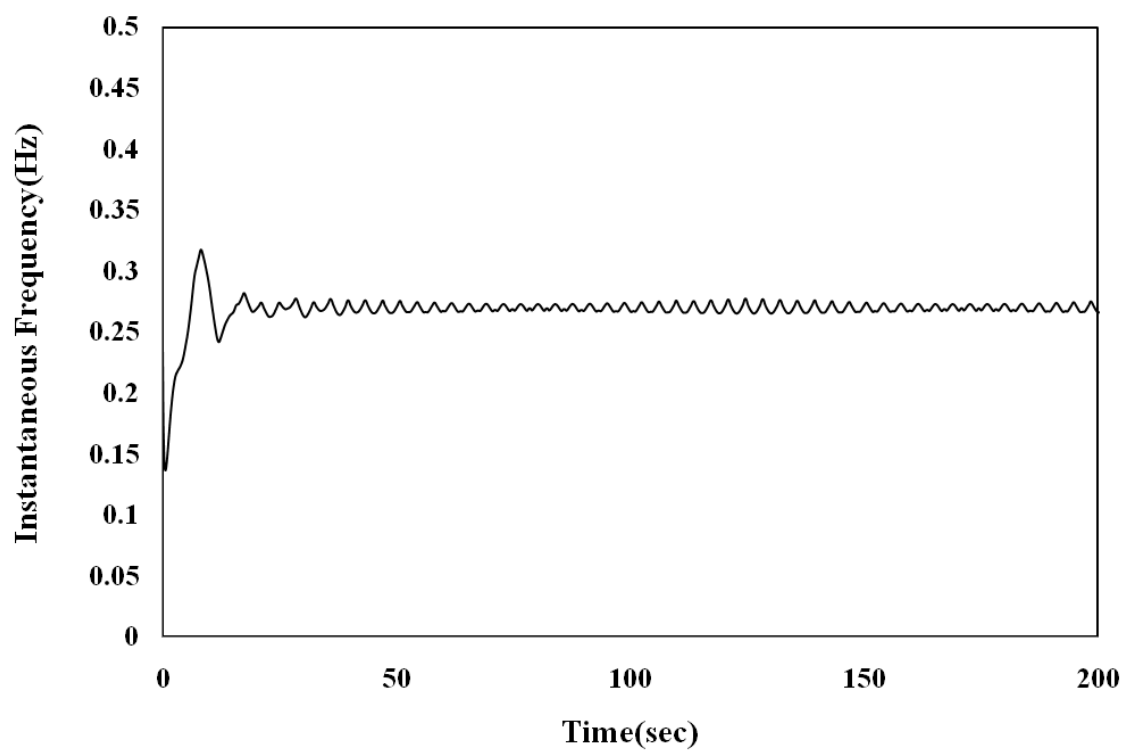


圖 5.8(f) 例題(5)之即時頻率

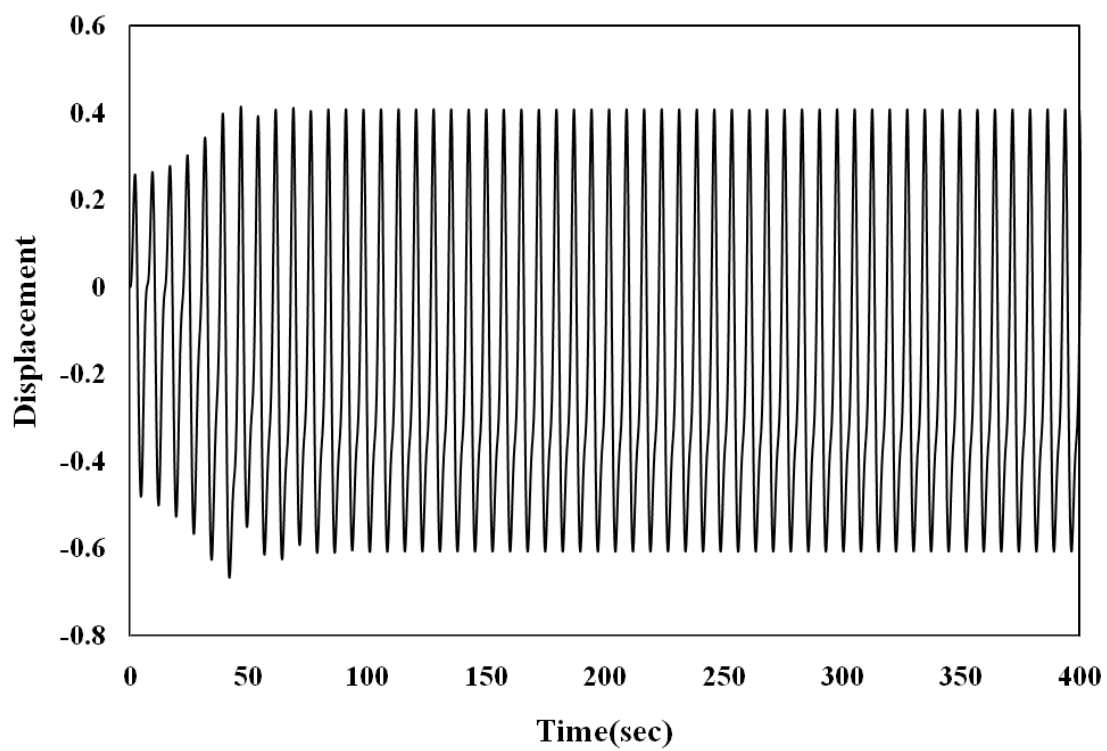


圖 5.9(a) 例題(6)之位移歷時圖

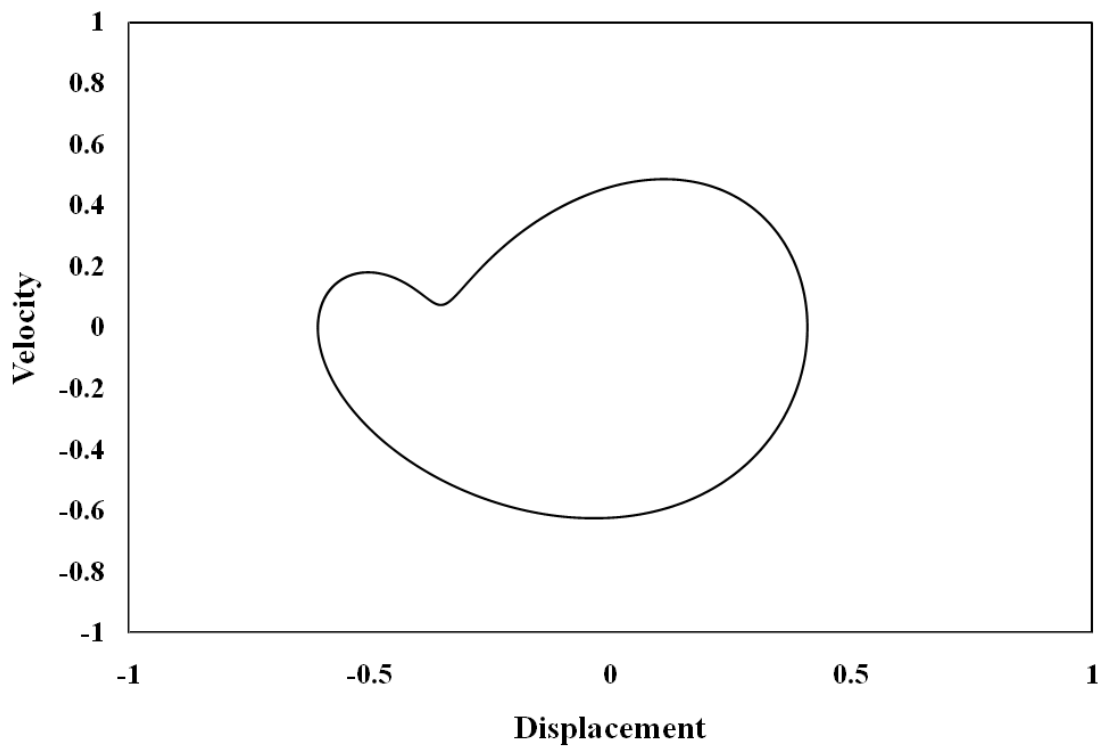


圖 5.9(b) 例題(6)之相位圖

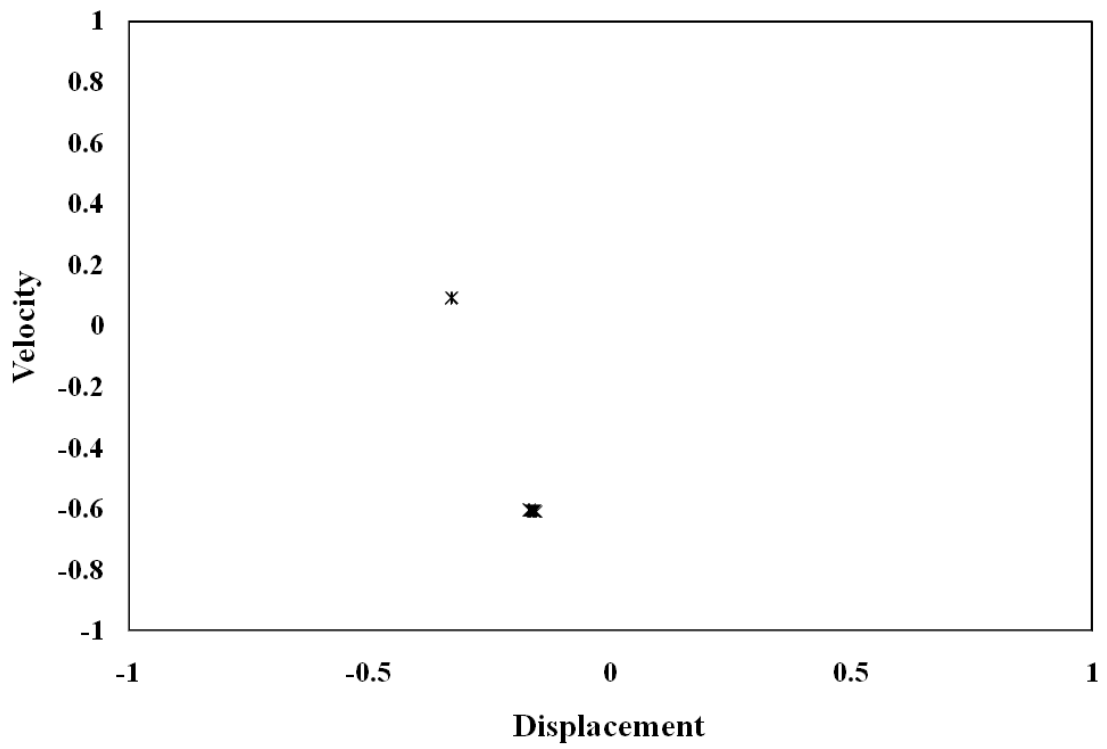


圖 5.9(c) 例題(6)之龐加萊圖

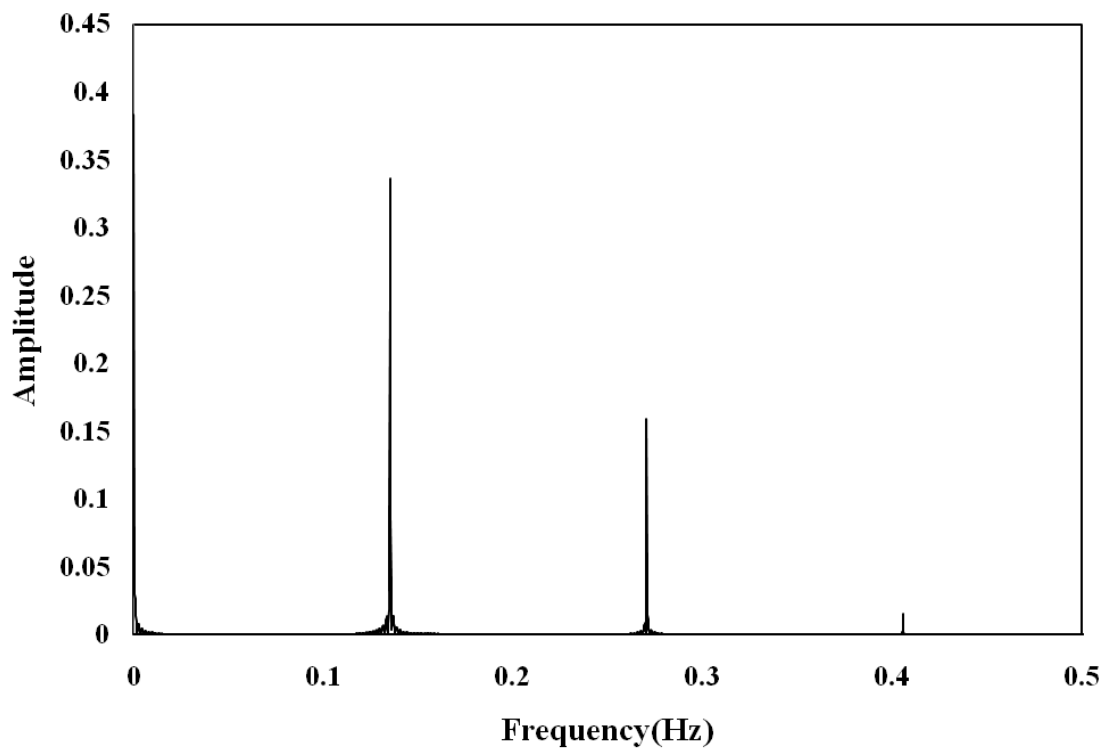


圖 5.9(d) 例題(6)之 FFT 頻譜圖

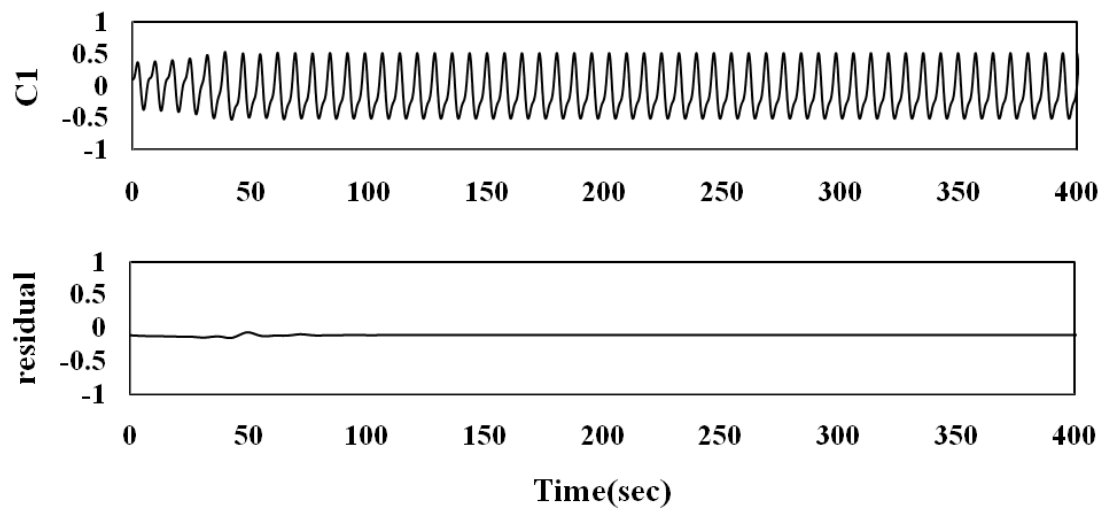


圖 5.9(e) 例題(6)經 EMD 所得之 IMF

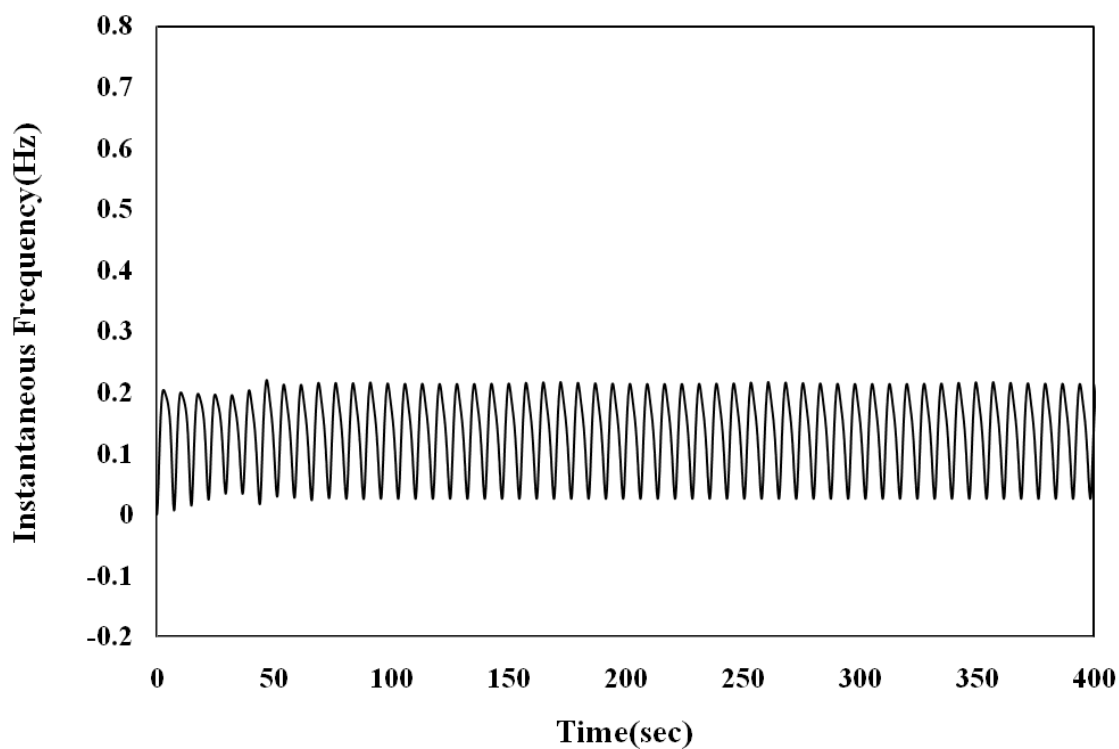
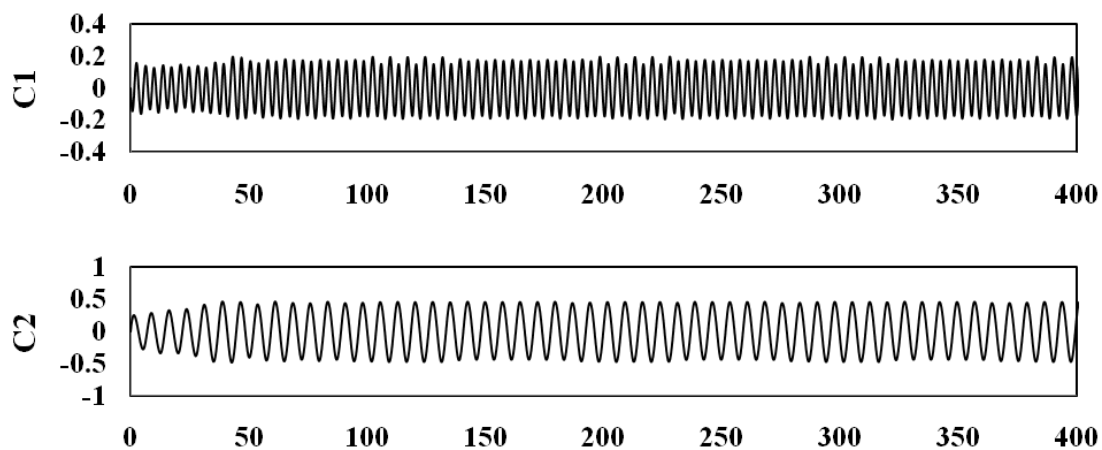


圖 5.9(f) 例題(6)之即時頻率(1)



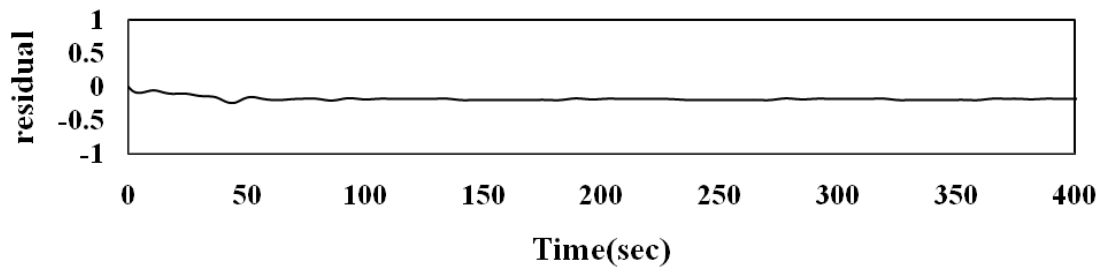


圖 5.9(g) 例題(6)經改良式 EMD 所得之 IMFs

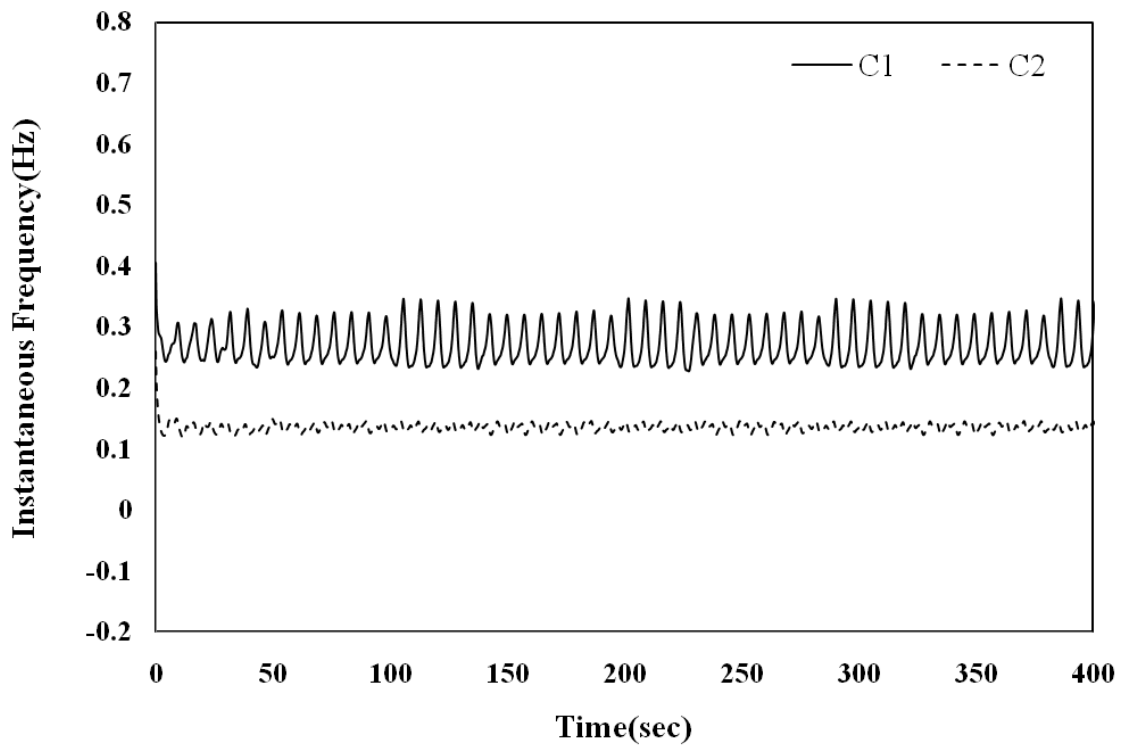


圖 5.9(h) 例題(6)之即時頻率(2)

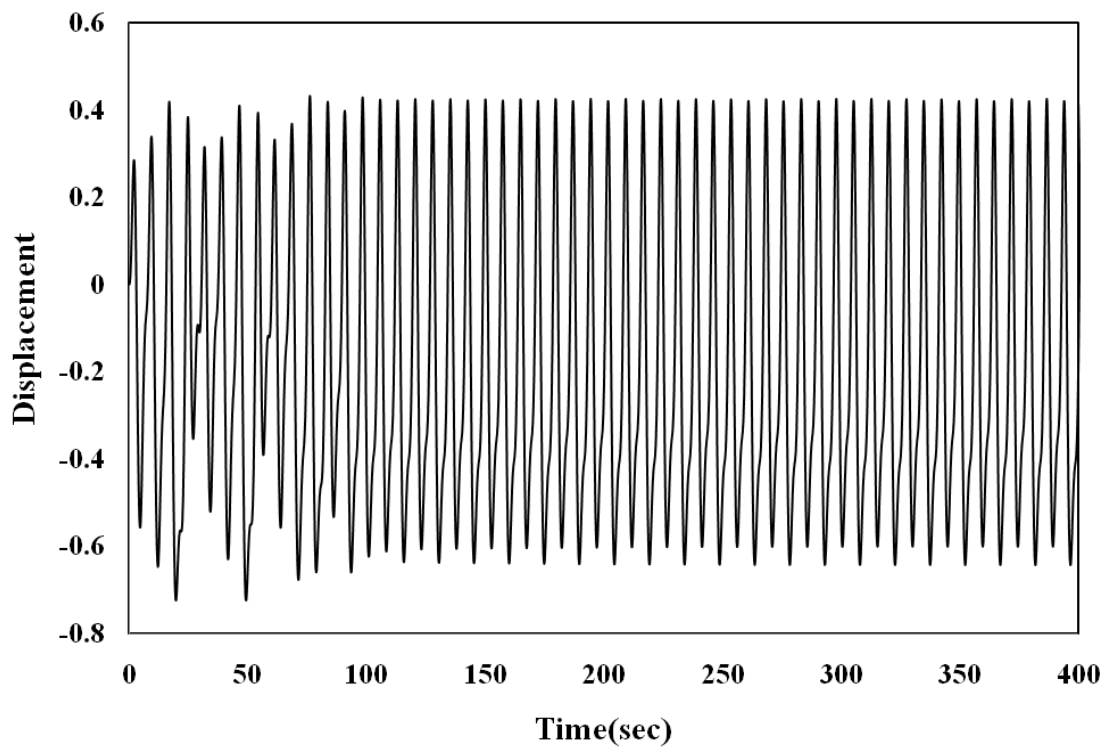


圖 5.10(a) 例題(7)之位移歷時圖

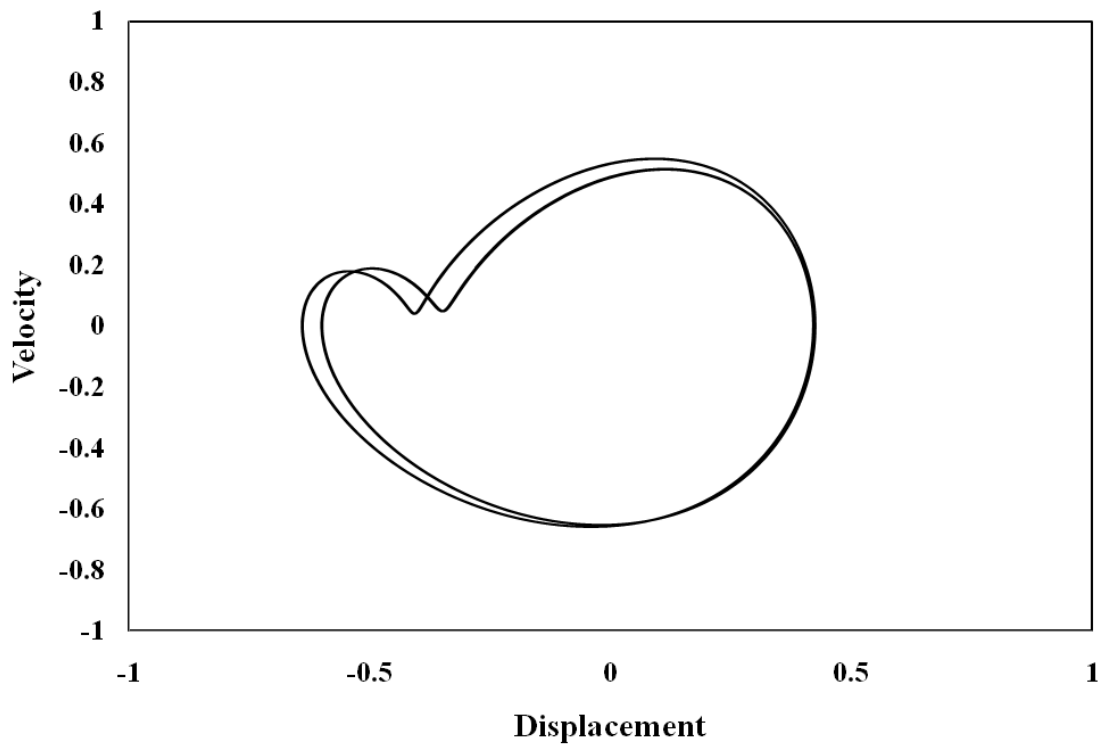


圖 5.10(b) 例題(7)之相位圖

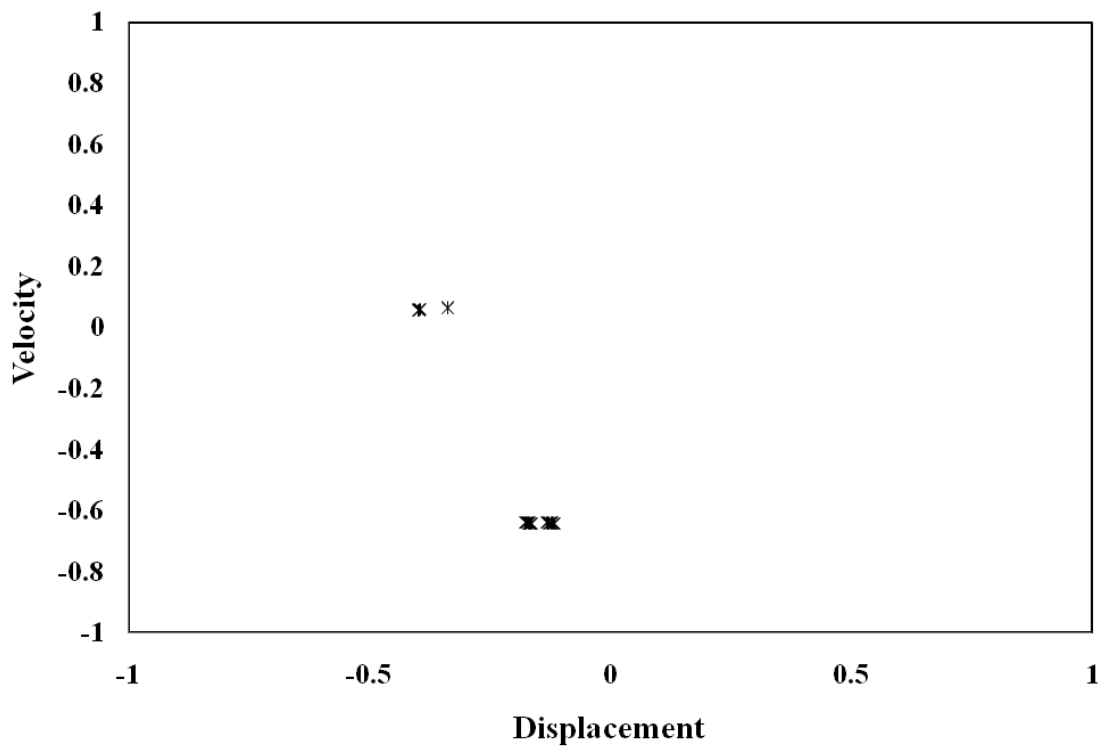


圖 5.10(c) 例題(7)之龐加萊圖

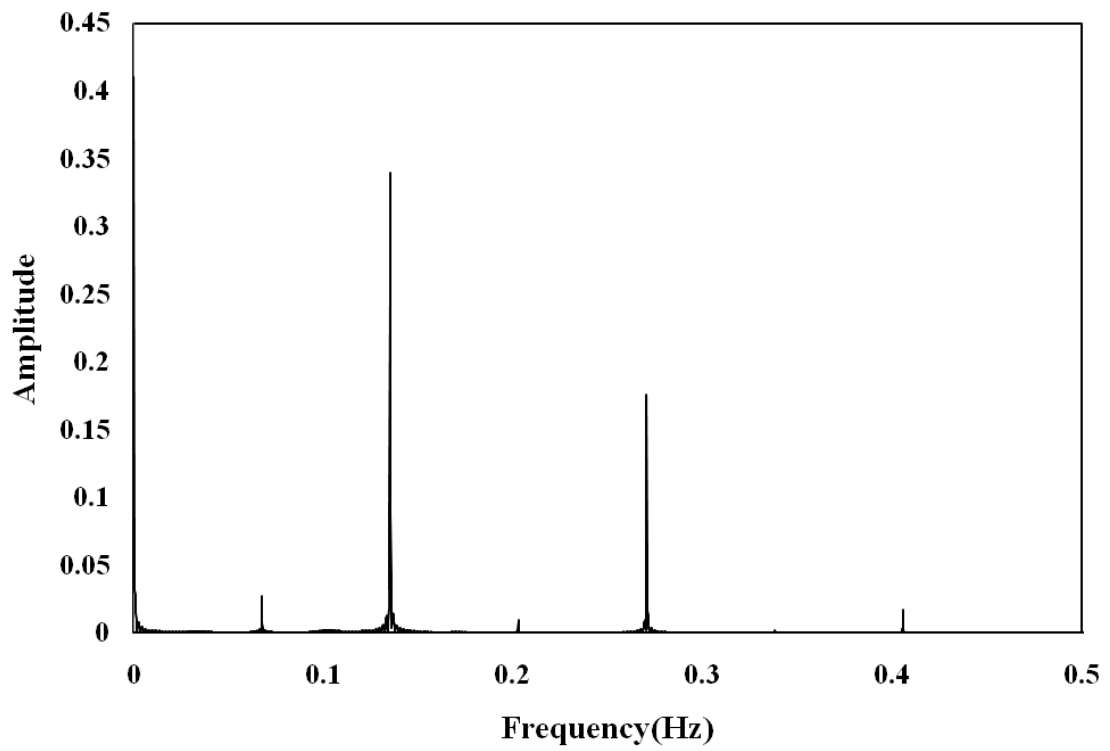


圖 5.10(d) 例題(7)之 FFT 頻譜圖

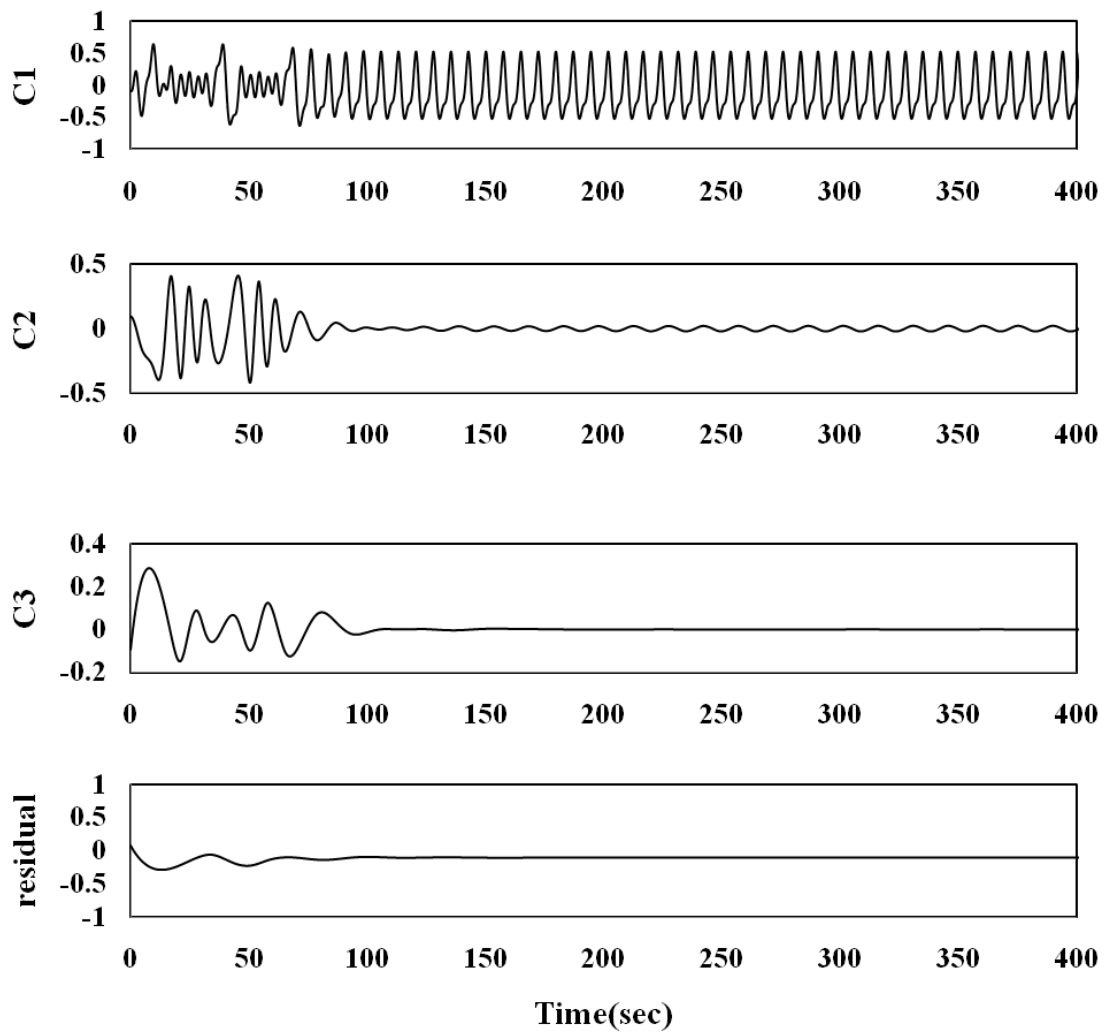


圖 5.10(e) 例題(7)經 EMD 處理所得之 IMFs

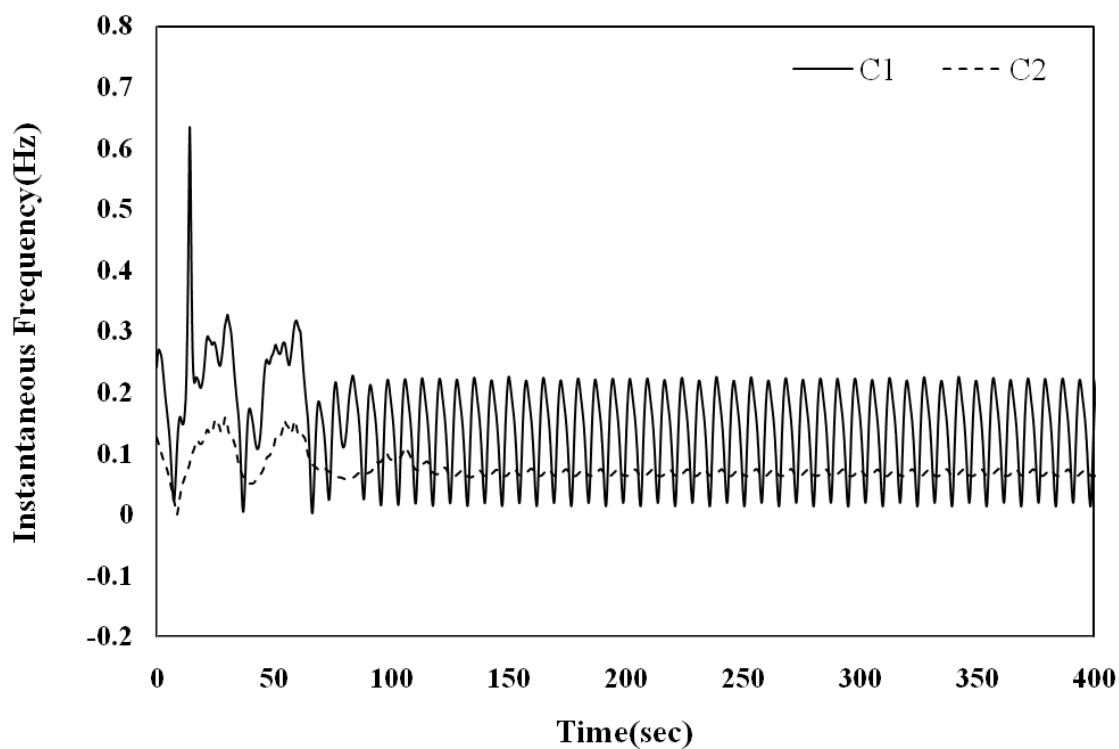
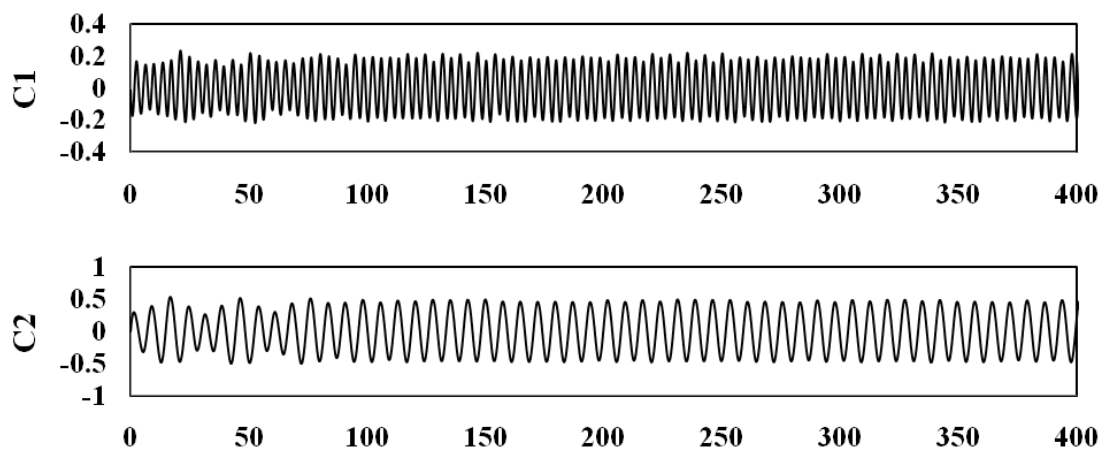


圖 5.10(f) 例題(7)之即時頻率(1)



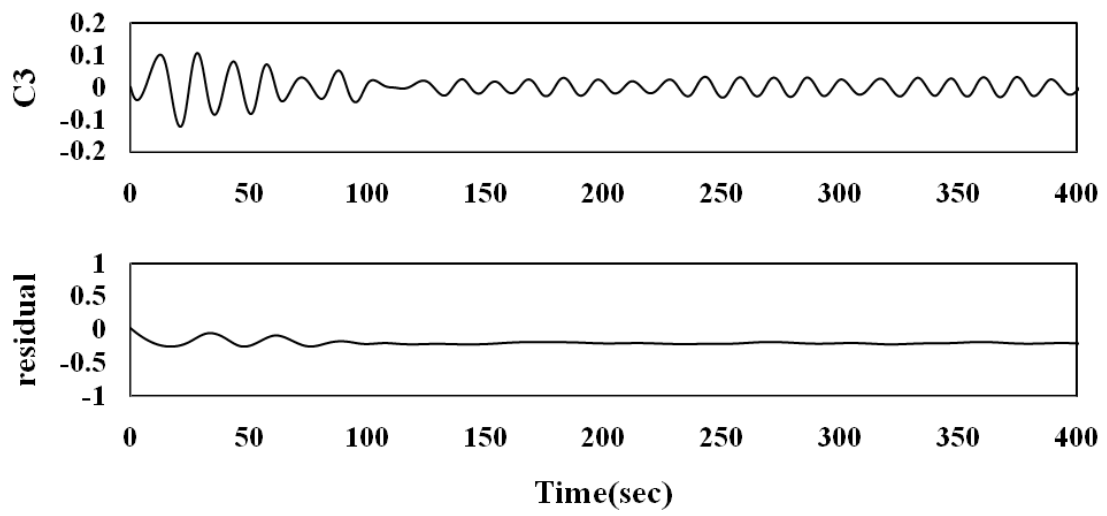


圖 5.10(g) 例題(7)經改良式 EMD 所得之 IMFs

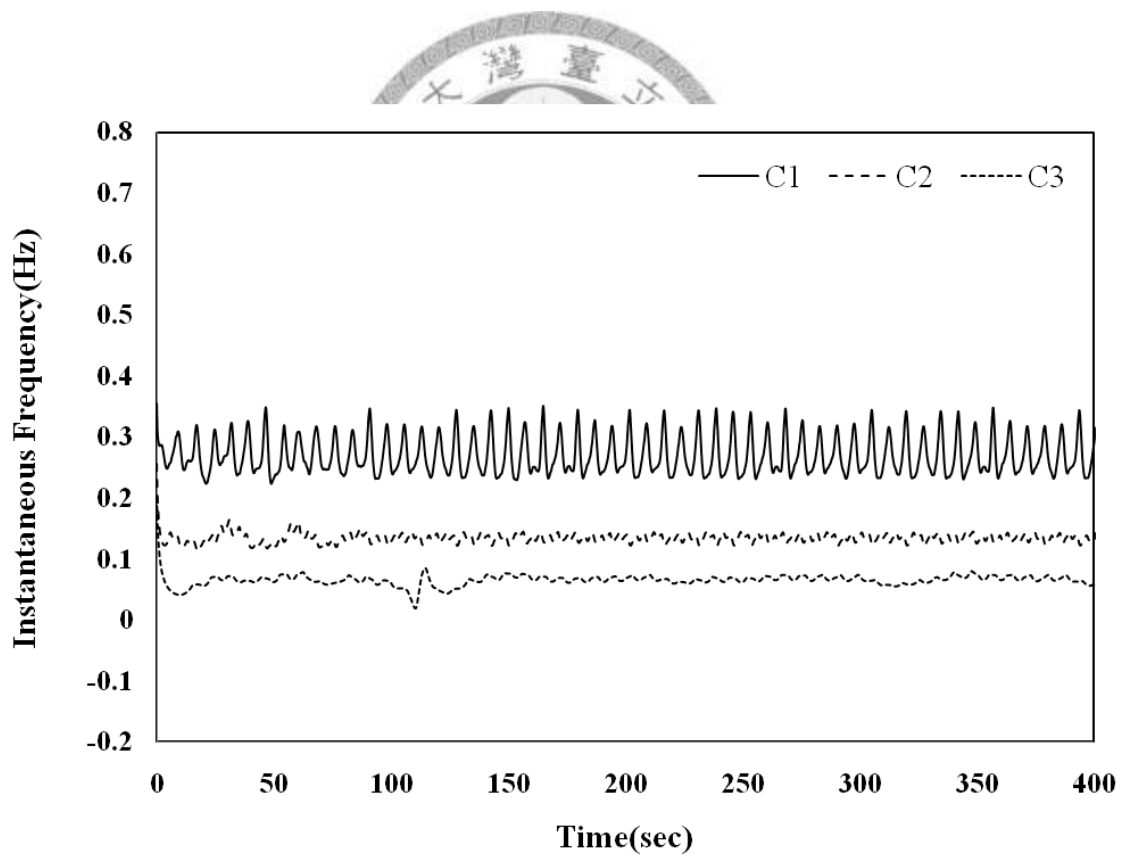


圖 5.10(h) 例題(7)之即時頻率(2)

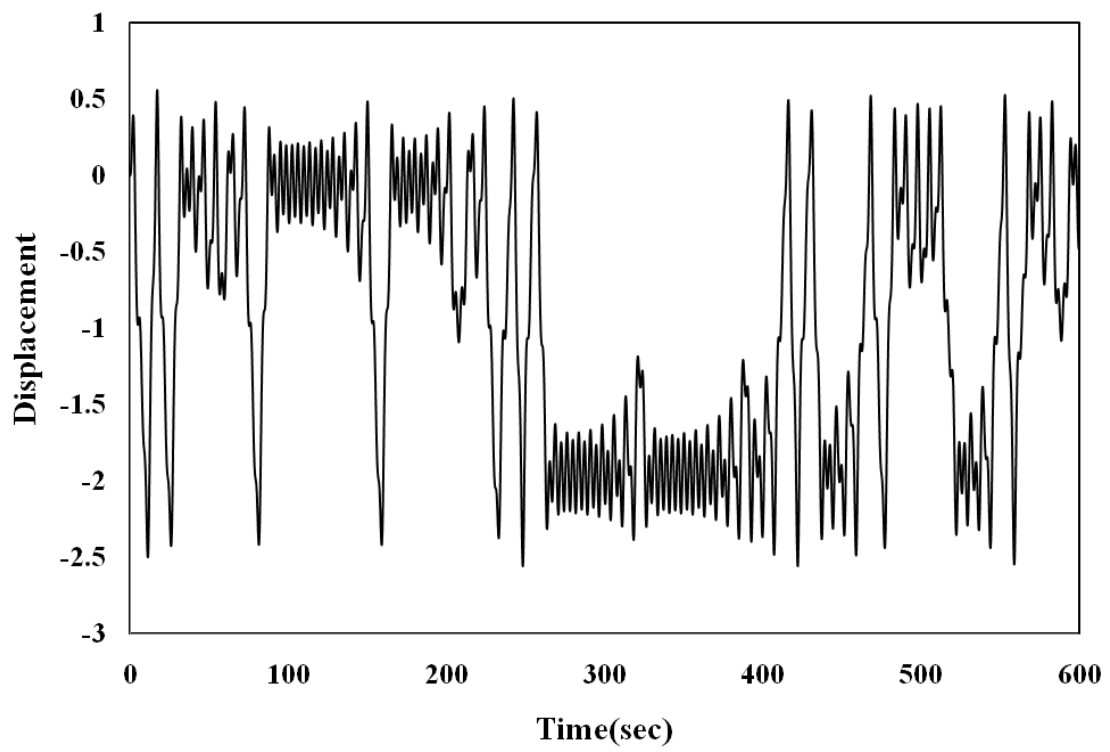


圖 5.11(a) 例題(8)之位移歷時圖

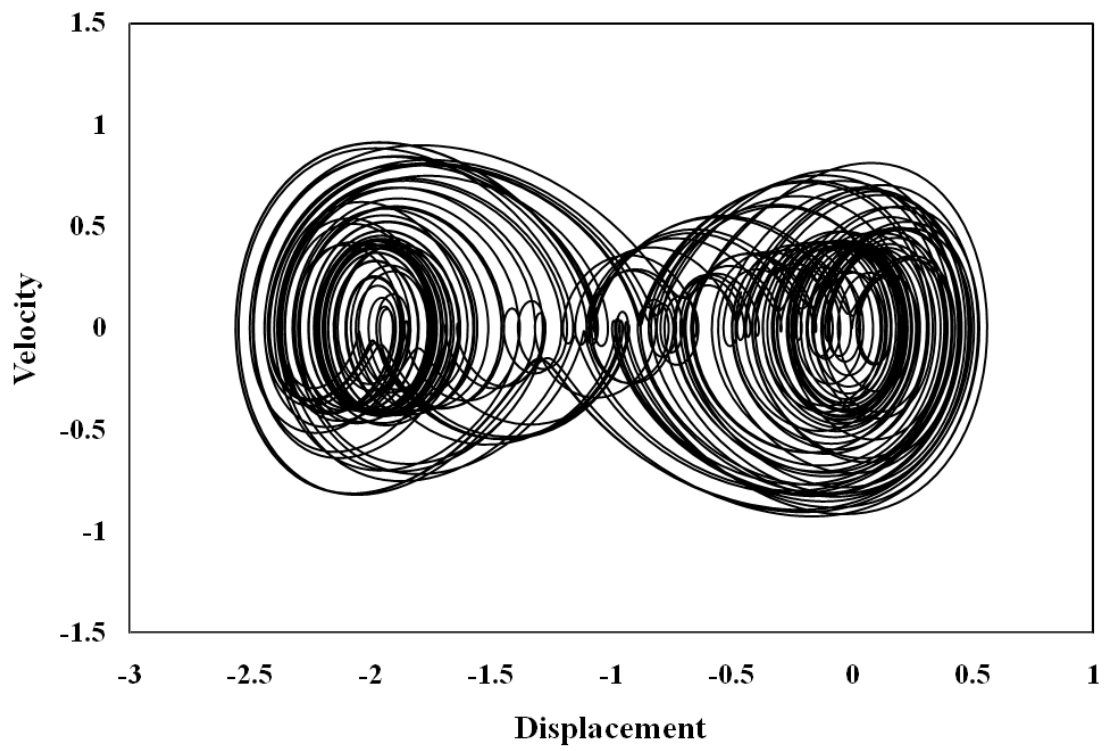


圖 5.11(b) 例題(8)之相位圖

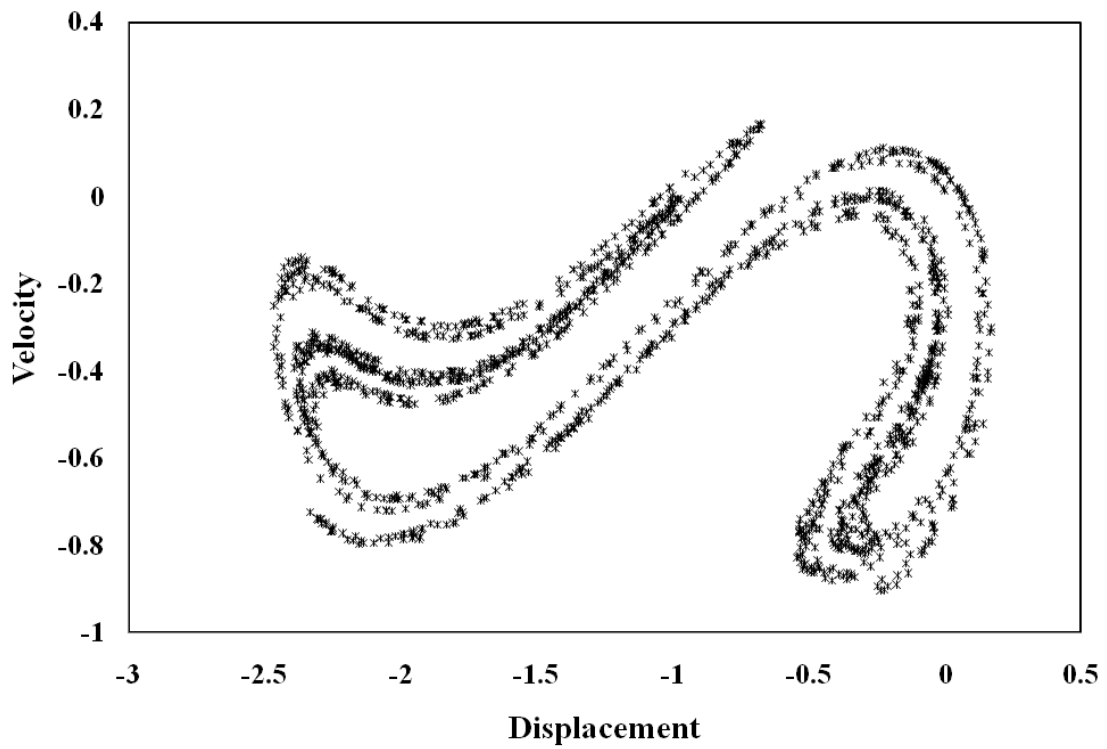


圖 5.11(c) 例題(8)之龐加萊圖

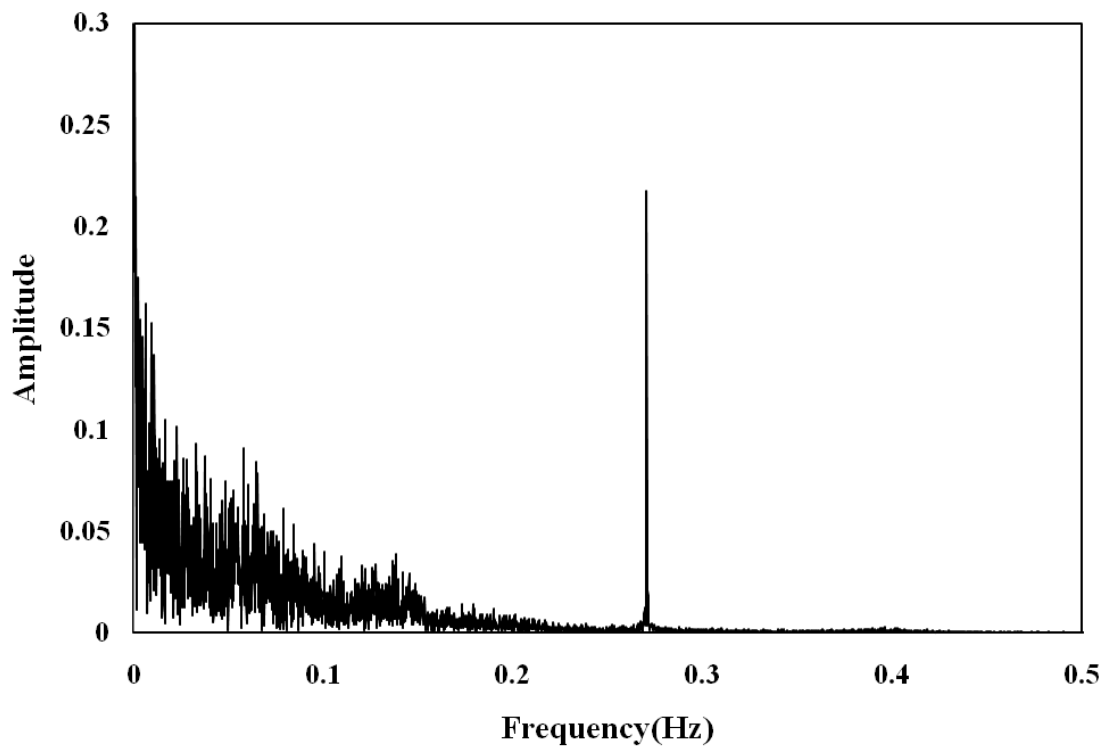
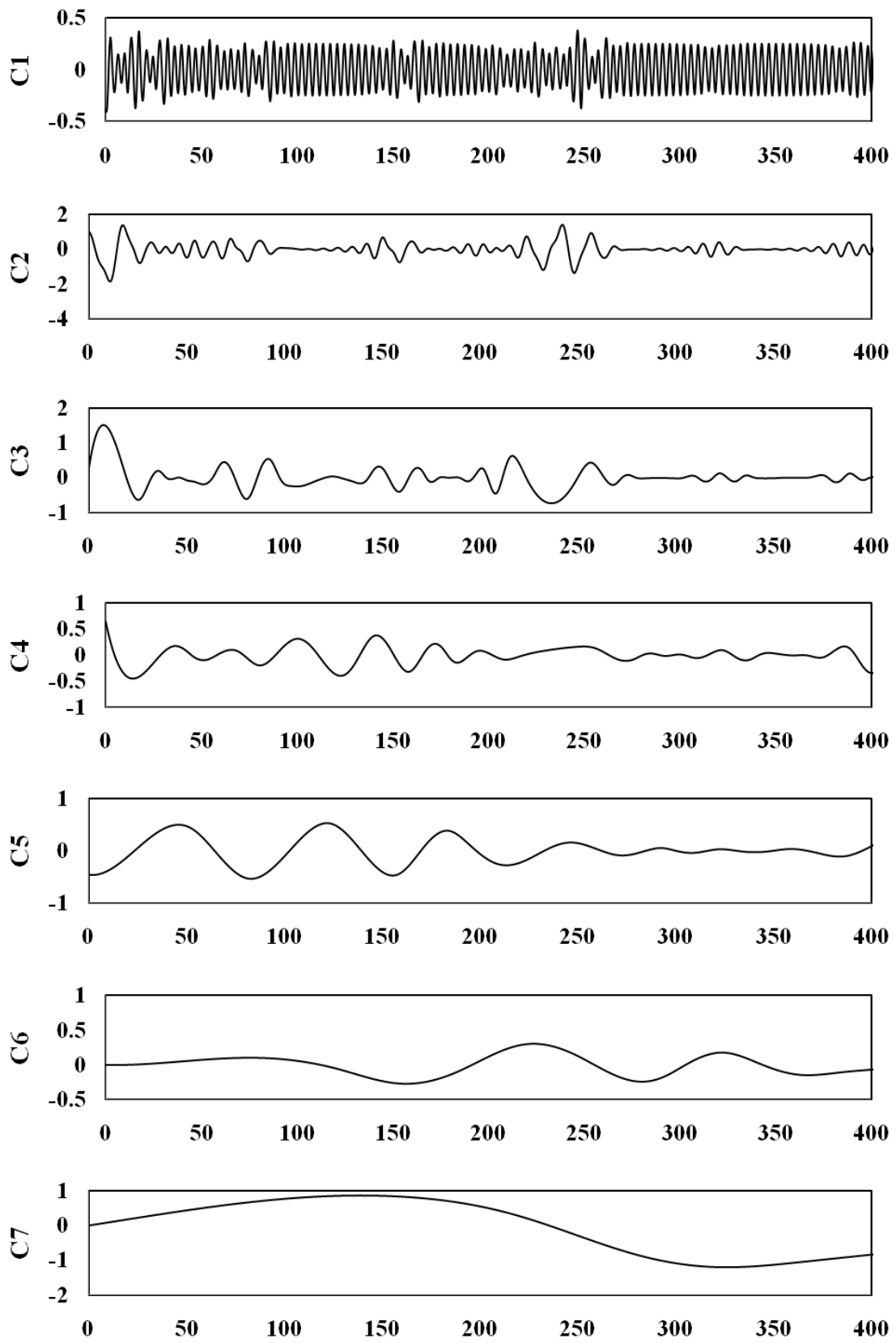


圖 5.11(d) 例題(8)之 FFT 頻譜圖



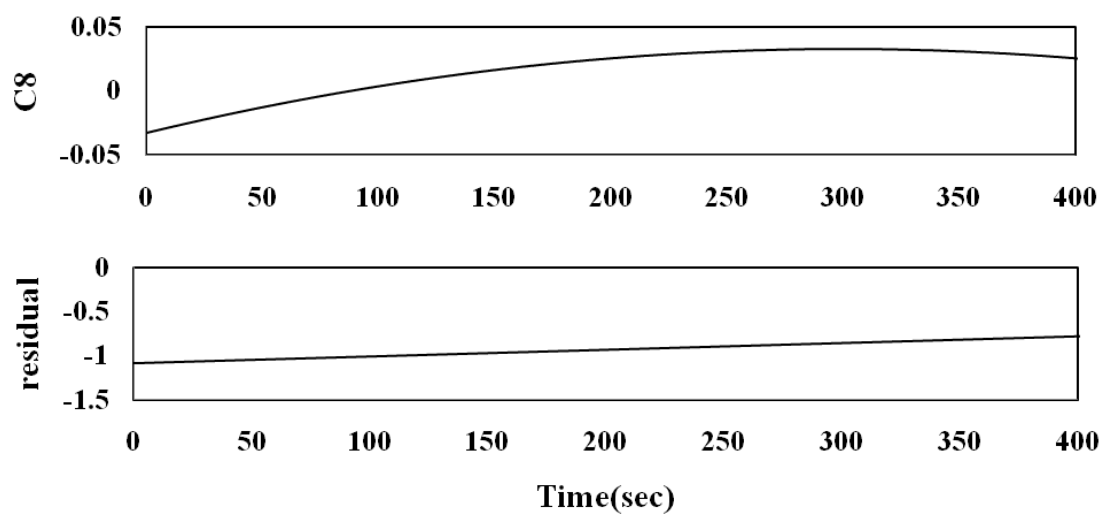


圖 5.11(e) 例題(8)經 EMD 所得之 IMFs



第六章 結論與未來展望

6.1 結論

綜合前面各章有關於結構非線性動力的理論推導與計算研究，本文之結論可歸納如下：

1. 雙桿桁架系統可由達芬方程式或有限元素法模擬之，兩者於參數間存在轉換關係。配合可靠之預測子與正確之校正子，利用有限元素法，同樣可模擬非線性系統之週期倍增與混沌現象。
2. 雙桿桁架系統除了規則行為外，亦會出現混沌現象，且由週期行為轉變成混沌行為的過程中，會出現週期倍增現象。
3. 若訊號本身非由正弦與餘弦波所組成，則使用傅立葉轉換將會在能量頻譜上產生額外的高頻分量，導致能量的發散；對於非週期性訊號，若使用傅立葉轉換，將得到無物理意義之分析結果；傅立葉轉換僅能提供訊號在整體上的能量-頻率分佈資訊，無法反應非線性系統其頻率隨時間改變之內涵。
4. 對於同一訊號而言，由不同觀測點所計算出的即時頻率並不相同，而 EMD 在分離訊號的過程中，強迫平均值包絡線必須為零，不一定合理。
5. EMD 利用訊號之局部極大值與極小值進行分離程序，在某些條件下會失敗，而採用微分概念之 EMD 改良法，可幫助分離出微弱的高頻訊號。
6. 當非線性系統發生週期倍增現象時，會以外力頻率 f_0 為基準，在 $f_0/2n$ 處出現新的低頻分量，導致系統之週期倍增。當週期倍增現象持續發生，系統之週期將趨近無限大，即發生混沌現象。混沌行為具有奇異吸子的存在，在表面上與隨機行為類似，但其背後卻隱藏高度的規則性。
7. 無論系統處於週期或混沌行為，外力頻率皆在系統的反應中扮演重要角色。

6.2 未來展望

1. 本文雖已成功得到非線性系統之即時頻率，但仍未說明即時頻率在工程應用上的重要性，有待進一步的研究。
2. 本文雖嘗試以頻率的角度解釋週期倍增與混沌現象，但仍無法完全將混沌現象的本質呈現出來，且缺乏具體的證明，需要再進一步探討。
3. 本文由系統之位移歷時反應計算其即時頻率，屬於間接計算法，或許可由能量的觀點直接得到系統之即時頻率，兩者之間可互相驗證。
4. 利用本文之雙桿桁架系統一維分析模式，可再進行二維分析，亦可分析如星狀桁架(star dome)等典型桁架系統，研究其非線性動力行為與混沌現象。
5. 利用 HHT 分析簡單之雙桿桁架系統，即出現諸多問題，或許可針對 HHT 進行有系統的改良，使其能符合結構工程師之需求。



參考文獻

- Asfar, K. R., and Masoud, K. K. (1992), "On the period-doubling bifurcations in the Duffing's oscillator with negative linear stiffness," *Journal of Vibration and Acoustics*, ASME, Vol. 114, 489-494.
- Bathe K. J. (1996), "*Finite Element Procedures*," Prentice-Hall.
- Batoz, J. L. and Dhatt, G. (1979), "Incremental displacement algorithms for nonlinear problems," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 14, 1262-1266.
- Berg, P., Pomeau, Y., and Vidal, C. (1984), "*Order within chaos*," John Wiley & Sons, New York. N.Y.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E. and Witt, R. J. (2002), "*Concepts and Applications of Finite Element Analysis*," John Wiley & Sons, New York. N.Y.
- Dowell, E. H., and Pezeshki, C. (1986), "On the understanding of chaos in Duffing's equation including a comparison with experiment," *J. Appl. Mech.*, ASME, Vol. 53, 5-9.
- Dowell, E. H., and Pezeshki, C. (1988), "On necessary and sufficient conditions for chaos to occur in Duffing's equation: an heuristic approach," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 121(2), 195-200.
- Holmes, P. J., and Moon, F. C. (1983), "*Strange attractors and chaos in nonlinear mechanics*," *J. Appl. Mech.*, ASME, Vol. 50, 1021-1032.
- Huang, N. E. *et al.* (1998), "The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis," *Proceedings of the Royal Society of London*, A454, 903-995.
- Huang, N. E. *et al.* (1999), "A new view of nonlinear water waves: the Hilbert spectrum," *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 31, 417-457.

- Huang, N. E. *et al.* (2003), "A confidence limit for the empirical mode decomposition and Hilbert spectral analysis," *Proceedings of the Royal Society of London*, A459, 2317-2345.
- Leu, L. J. and Yang, Y. B. (1990), "Effects of rigid body and stretching on nonlinear analysis of trusses," *J. Struct. Eng.*, ASCE Vol. 116(10), 2582-2598.
- Moon, F. C. (1980), "Experiments on chaotic motions of a forced nonlinear oscillator: strange attractors," *J. Appl. Mech.*, ASME, Vol. 47, 639-644.
- Moon, F. C. (1987), "*Chaotic vibration*," John Wiley & Sons, New York. N.Y.
- Novak, S., and Frehlich, R. G. (1982). "Transition to chaos in the Duffing oscillator," *Physical Review A*, The American Physical Society, Vol. 26, 3660-3663.
- Pecknold, D. A., Ghaboussi, J., and Healey, T. J. (1985), "Snap-through and bifurcation in a simple structure," *J. Eng. Mech.*, ASCE, Vol. 111(7), 909-922.
- Tongue, B. H. (1987), "Characteristics of numerical simulations of chaotic system," *J. Appl. Mech.*, ASME, Vol. 54, 695-699.
- Yang, Y. B. and McGuire, W. (1986a), "Stiffness matrix for geometric nonlinear analysis," *J. Struct. Eng.*, ASCE, Vol. 112(4), 853-877.
- Yang, Y. B. and McGuire, W. (1986b), "Joint rotation and geometric nonlinear analysis," *J. Struct. Eng.*, ASCE, Vol. 112(4), 879-905.
- Yang, Y. B. and Chiou, H. T. (1987), "Rigid body motion test for nonlinear analysis with beam elements," *J. Eng. Mech.*, ASCE, Vol. 113(9), 1404-1419.
- Yang, Y. B. and Shieh, M. S. (1990), "Solution method for nonlinear problems with multiple critical points," *AIAA J.*, Vol. 28(12), 2110-2116.
- Yang, Y. B. and Leu, L. J. (1990), "Postbuckling analysis of trusses with various Lagrangian formulations," *AIAA J.*, Vol. 28(5), 946-948.
- Yang, Y. B. and Leu, L. J. (1991a), "Constitutive laws and force recovery procedures in nonlinear analysis of trusses," *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 92, 121-131.

- Yang, Y. B. and Leu, L. J. (1991b), "Force recovery procedures in nonlinear analysis," *Comp. & Struct.*, Vol. 41(6), 1255-1261.
- Yang, Y. B., and Kuo, S. R. (1991a), "Out-of plane buckling of angled frames," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 33(1), 55-67.
- Yang, Y. B., and Kuo, S. R. (1991b), "Consistent frame buckling analysis by finite element method," *J. Struct. Eng. Mech.*, ASCE Vol. 117(4), 1053-1069.
- Yang, Y. B., and Kuo, S. R. (1992), "Frame buckling analysis with full consideration of joint compatibilities," *J. Eng. Mech.*, ASCE Vol. 118(5), 871-889.
- Yang, Y. B., and Kuo, S. R. (1994), "*Theory and Analysis of Nonlinear Framed Structures*," Prentice-Hall, Singapore.
- Yang, Y. B., Kuo, S. R. and Wu, Y. S. (2002), "Incrementally small-deformation theory for nonlinear analysis of structural frames," *Eng. Struct.*, Vol. 24, 783-798.
- Yang, Y. B., Lin, S. P., and Chen, C. S. (2006), "Rigid body concept for geometric nonlinear analysis of 3D frames, plates and shells based on the updated Lagrangian formulation," *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 196, 1178-1192.
- Yang, Y. B., Lin, S. P., and Wang, C. M. (2007), "Rigid element approach for deriving the geometric stiffness of curved beams for use in buckling analysis," *J. Struct. Eng.*, ASCE, Vol. 133(12), 1762-1771.
- Yang, Y. B., Lin, S. P., and Leu, L. J. (2007), "Solution strategy and rigid element for nonlinear analysis of elastically structures based on updated Lagrangian formulation," *Eng. Struct.* Vol. 29, 1189-1200.
- 呂良正 (民國七十八年), 「桁架及構架之非線性理論」, 國立台灣大學土木研究所碩士論文, 楊永斌教授指導。
- 郭世榮 (民國八十年), 「空間構架的靜力及動力穩定理論」, 國立台灣大學土木研究所博士論文, 楊永斌教授指導。
- 楊健泰 (民國八十二年), 「桁架非線性分析」, 國立台灣大學土木研究所碩士論文, 楊永斌教授指導。

吳演聲 (民國八十三年),「桁架之非線性動力及混沌現象」,國立台灣大學土木工程研究所碩士論文,楊永斌教授指導。

楊順欽 (民國八十五年),「構架非線性簡易有限元素分析方法」,國立台灣大學土木工程研究所博士論文,楊永斌教授指導。

劉國瑞 (民國九十三年),「桁架系統之非線性動力及混沌現象與機制」,國立台灣大學土木工程研究所碩士論文,楊永斌教授指導。

林詩渤 (民國九十四年),「簡易非線性三角板元素」,國立台灣大學土木工程研究所碩士論文,楊永斌教授指導。

彭星璋 (民國九十四年),「HHT 於線性與非線性動力系統識別之應用」,國立台灣大學土木工程研究所碩士論文,呂良正教授指導。

