

國立臺灣大學工學院土木工程學系

碩士論文

Department of Civil Engineering College of Engineering

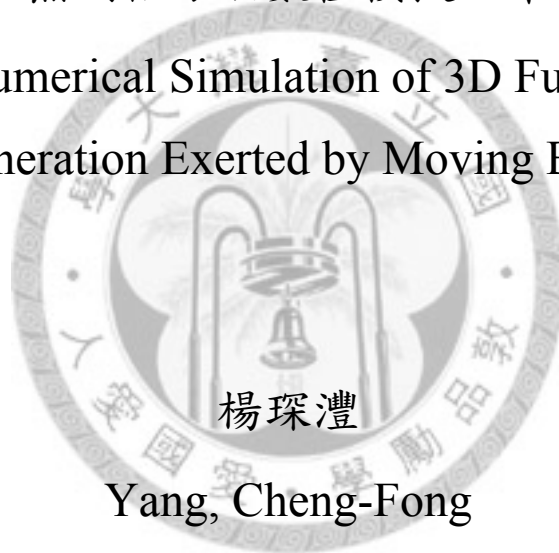
National Taiwan University

Master Thesis

以完全非線性無網格方法數值模擬三維邊界移動造波

Meshless Numerical Simulation of 3D Fully-nonlinear

Wave Generation Exerted by Moving Boundaries



楊琛澧

Yang, Cheng-Fong

指導教授：蔡丁貴 教授

Advisor: Tsay, Ting-Kuei

中華民國 98 年 7 月

July, 2009

國立臺灣大學碩士學位論文
口試委員會審定書

以完全非線性無網格方法數值模擬三維邊界移動造波

Meshless Numerical Simulation of 3D Fully-nonlinear

Wave Generation Exerted by Moving Boundaries

本論文係楊琛澧君 (R96521317) 在國立臺灣大學土木工程學系碩士班完成之碩士學位論文，於民國 98 年 7 月 3 日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

蔡丁貴

(簽名)

(指導教授)

楊德良

林乾崇

張國鎮

系主任

(簽名)

以完全非線性無網格方法數值模擬三維邊界移動造波

研究生：楊琛澧

指導教授：蔡丁貴

一、序論

油輪、儲油槽、水壩等存放或攔蓄龐大體積流體之大型結構物，一旦面臨到地震或風浪等外力，其振動自然頻率若是接近於所受外力之頻率時，由外界進入之能量不容易消散或傳出而不斷地在此媒介之內累積而導致共振，此時便會有結構物發生破壞的可能。此外，在各項重大災害之中，海嘯及其相關主題向來都是科學家們有高度興趣的研究領域。若單就海嘯之成因而言，海嘯多半是肇因於人為不可抗拒之自然因素，且絕大多數是引發於淺層海底地震。海嘯一旦發生，其規模之大與襲擊之快，往往造成當地居民反應不及，以致於對沿海居民與周遭環境造成嚴重破壞。

本文主旨係以無網格方法探討邊界移動之完全非線性造波數值模擬。先以水平方向不透水邊界進行簡諧運動以模擬自由振盪問題；接著以底床運動進行垂向造波，藉以探討其水面波之運動，包含其生成、傳遞及溯昇等於斜坡上的過程，嘗試瞭解海嘯運動之變化情形。

二、數學方法

本研究之控制方程式為拉普拉斯方程式 (Laplace equation)，如下列之方程式 (1)：

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1)$$

在設定初始條件時，是給定速度勢函數以及自由液面各自之初始狀態：

$$\phi(\bar{x}, 0) = f_1(t)|_{t=0} \quad (2)$$

$$\eta(\bar{x}, 0) = f_2(t)|_{t=0} \quad (3)$$

謝 誌

要寫這篇謝誌時，就表示在台大兩年的時間已到了尾端，這兩年發生過許許多多的事，都將成為我以後珍貴的經驗與回憶。由初到台北什麼都不會的碩一新生，到如今成為一個即將要離開學校的畢業生，這才驚覺很多事物總是在不知不覺中度過，一點一滴的累積，一絲一毫的成長，半點虛假不得。

這篇碩士論文的完成，是建立在許多我身邊的人所給予我的支持與鼓勵之上的。在我前方的，是求學路上替我指引與解惑的老師與學長，感謝蔡老師兩年來的提攜與研究上的指導，以及日常生活上的關懷；感謝楊老師修課期間的教誨與關心；感謝口試期間林老師以自身經驗與嚴謹的態度來增廣我的視野與充實這篇拙作的內容；感謝南靖學長、宜嶺學長與智文學長，由衷感謝南靖學長不厭其煩引導我在研究上的方向，帶我一步步地前進。

在我身旁的是水保同學、研究室同仁、水利組同窗與學弟妹，阿杜、小邱、正偉、菲比、少韡、中興水保同學、高中同學、承甫、趙伯、簡郁、楊門、卡門、黃門、徐門同學與不及列舉的好友伙伴。謝謝你們這些年帶來的歡樂、陪伴、出遊玩樂、討論作業、打球游泳…。我想，往後十年或二十年之後，我會懷念一同熬夜討論作業、程式與期末報告的日子，以及颱風天在研究室待命的夜晚，以及學弟們機車時的嘴臉。

而，在我身後支撐我的是我愛且愛我的家人，你們是我在台北繼續下去的動力，讓我在台北能衣食無缺地生活，回到家有心理上的休息。對了，還有家裡兩隻小貓，你們也是我回台中的原因之一。

當然，我要道謝的對象是說不完的，畢竟曾給予我幫助的人不勝計數，這是我必須記住的。同時，這篇謝誌也代表一個結束與另一個開始，而新的開始在此以這篇謝誌作為一個紀念。

摘要

本文主旨係以無網格方法探討邊界移動之完全非線性造波數值模擬。本無網格數值方法之建立是以三維線性基本解 (Fundamental solution) 求解拉普拉斯方程式 (Laplace equation) 以得到速度勢 (Velocity potential)，並以二維高斯幅狀基底函數計算自由液面梯度，再配合邊界條件便可求出自由液面高程；而時間域之處理，則是以二階中央插分法 (亦稱蛙跳法) 對時間離散所得到之顯式前進差分計算。

數值模擬方面，先以水平方向不透水邊界進行簡諧運動以模擬自由振盪問題 (Sloshing problem)，檢驗其質量守恆與波形，並與前人研究互相比較，探討線性與非線性模式之水面波。模擬結果顯示，本模式在模擬自由振盪問題與文獻上之資料相當地吻合，而且更可表現出其非線性之效應。接著，再以底床運動進行垂向造波，藉以探討其水面波之運動，包含其生成、傳遞及溯昇等於斜坡上的過程，嘗試瞭解海嘯運動之變化情形。

關鍵字：無網格數值方法、非線性水面波、基本解、高斯幅狀基底函數、自由振盪問題、海嘯

Abstract

The objective of this paper focuses on the application of meshless method to simulate fully nonlinear water wave generation exerted by moving boundaries. In order to construct this meshless numerical model, three dimensional fundamental solution of Laplace equation is chosen to solve velocity potential, and two dimensional Gaussian radial basis function is used to calculate gradient of free surface. The elevation of free surface can be solved by using the fully nonlinear free-surface boundary conditions. In addition, an explicit time marching technique is developed by utilizing the leap-frog second-order central difference scheme.

For numerical simulation, firstly, sloshing problem is proceeded with horizontal simple-harmonic motion boundary. Mass conservation and shape of wave are checked with other study to compare the differences between linear and nonlinear waves. It shows that, present numerical results agree very well with other research results. Furthermore, present results reveal more nonlinear characteristics. In the second case, nonlinear wave generation is simulated with a vertical moving bed boundary for purpose of figuring out tsunami wave motion, including processes of its generation, propagation, and transformation on a sloping bed.

Key words : Meshless numerical method, Nonlinear water wave, Fundamental solution, Gaussian radial basis function, Sloshing problem, Tsunami

目 錄

摘 要.....	I
Abstract.....	II
目 錄.....	III
圖 錄.....	V
表 錄.....	VII
第一章 序論.....	1
1.1 前言.....	1
1.2 研究動機.....	2
1.3 研究目的.....	3
1.4 文獻回顧.....	4
1.5 物理問題描述.....	4
第二章 數學方法.....	7
2.1 控制方程式.....	7
2.2 初始與邊界條件.....	8
2.2.1 初始條件.....	8
2.2.2 邊界條件.....	8
第三章 數值方法.....	11
3.1 傳統有網格數值方法與無網格數值方法簡介.....	11
3.2 無網格數值方法.....	12
3.2.1 幅狀基底函數.....	12
3.2.2 速度勢函數與其梯度之計算.....	13
3.2.3 自由液面梯度計算.....	14
3.2.4 二階中央差分法(蛙跳法).....	16
3.2.5 計算流程.....	16
3.3 驗證.....	18
3.3.1 自由振盪問題.....	18
3.3.2 底床垂直造波.....	24
第四章 數值模擬結果與討論.....	31
4.1 自由振盪.....	31
4.2 不同加速度.....	34
4.3 底床垂向造波於斜坡之溯昇.....	42
4.3.1 底床隆起造波溯昇於斜坡.....	44
4.3.2 底床下陷造波溯昇於斜坡.....	48
第五章 結論與建議.....	53
5.1 結論.....	53
5.2 建議.....	54
參考文獻.....	56

附錄一 垂向造波其他計算結果.....	58
附錄二 自由振盪其他計算結果.....	60
附錄三 不同加速度其他計算結果.....	62
附錄四 垂向造波溯昇於斜坡其他計算結果.....	69



圖 錄

圖 1.1 邊界水平運動示意圖.....	5
圖 1.2 邊界垂直運動示意圖 (隆起)	6
圖 1.3 邊界垂直運動示意圖 (下陷)	6
圖 3.1 高斯函數值.....	15
圖 3.2 數值模式流程圖.....	17
圖 3.3 自由振盪水槽三維示意圖.....	19
圖 3.4 自由振盪水槽側視圖.....	20
圖 3.5 自由振盪邊界布設俯視圖.....	20
圖 3.6 自由振盪邊界布設 AA' 截面圖	21
圖 3.7 自由振盪邊界布設 BB' 截面圖	21
圖 3.8 自由振盪質量守恆驗證.....	22
圖 3.9 自由振盪波形驗證.....	24
圖 3.10 垂向造波水槽三維示意圖.....	26
圖 3.11 垂向造波水槽側視圖.....	26
圖 3.12 垂向造波加速度歷線圖.....	27
圖 3.13 垂向造波速度歷線圖.....	27
圖 3.14 垂向造波位移歷線圖.....	27
圖 3.15 垂向造波邊界布設俯視圖.....	28
圖 3.16 垂向造波邊界布設 AA' 截面圖	28
圖 3.17 垂向造波邊界布設 BB' 截面圖	28
圖 3.18 垂向造波質量守恆檢驗.....	29
圖 3.19 垂向造波計算結果.....	30
圖 4.1 端點水位圖.....	33
圖 4.2 端點絕對值水位圖.....	33
圖 4.3 不同加速度之加速度歷線圖.....	36
圖 4.4 不同加速度之速度歷線圖.....	36
圖 4.5 不同加速度之位移歷線圖.....	37
圖 4.6 不同加速度之三維水槽示意圖.....	37
圖 4.7 不同加速度邊界布設俯視圖.....	38
圖 4.8 不同加速度邊界布設 AA' 截面圖	38
圖 4.9 不同加速度邊界布設 BB' 截面圖	38
圖 4.10 初始加速度 0.5g 逐時波形.....	40
圖 4.11 初始加速度 0.5g 之包絡線.....	41
圖 4.12 不同初始加速度之包絡線比較.....	41
圖 4.13 變水深斜坡水槽示意圖.....	43
圖 4.14 變水深斜坡水槽邊界布設俯視圖.....	43

圖 4.15 變水深斜坡水槽邊界布設 AA' 截面圖.....	44
圖 4.16 底床隆起溯昇逐時波形.....	47
圖 4.17 底床隆起溯昇包絡線.....	48
圖 4.18 底床下陷溯昇逐時波形.....	51
圖 4.19 底床下陷溯昇包絡線.....	52
圖 4.20 底床隆起與下陷包絡線之比較.....	52
附錄-圖. 1 $a_0 = +0.5g$ 之自由液面速度勢與流速.....	58
附錄-圖. 2 $a_0 = -0.5g$ 之自由液面速度勢與流速.....	59
附錄-圖. 3 自由振盪液面流速.....	60
附錄-圖. 4 自由振盪液面速度勢.....	61
附錄-圖. 5 $a_0 = 0.5g$ 之質量守恆檢驗.....	62
附錄-圖. 6 $a_0 = 1.0g$ 之質量守恆檢驗.....	62
附錄-圖. 7 $a_0 = 1.5g$ 之質量守恆檢驗.....	63
附錄-圖. 8 $a_0 = 2.0g$ 之質量守恆檢驗.....	63
附錄-圖. 9 $a_0 = 1.0g$ 之包絡線.....	64
附錄-圖. 10 $a_0 = 1.5g$ 之包絡線.....	64
附錄-圖. 11 $a_0 = 2.0g$ 之包絡線.....	64
附錄-圖. 12 $a_0 = 0.5g$ 自由液面速度勢與流速.....	65
附錄-圖. 13 $a_0 = 1.0g$ 自由液面速度勢與流速.....	66
附錄-圖. 14 $a_0 = 1.5g$ 自由液面速度勢與流速.....	67
附錄-圖. 15 $a_0 = 2.0g$ 自由液面速度勢與流速.....	68
附錄-圖. 16 底床隆起溯昇之質量守恆檢驗.....	69
附錄-圖. 17 底床下陷溯昇之質量守恆檢驗.....	69
附錄-圖. 18 底床隆起溯昇之自由液面速度勢與流速.....	70
附錄-圖. 19 底床下陷溯昇之自由液面速度勢與流速.....	71

表 錄

表 1.1 近期地震引發海嘯紀錄.....	3
表 4.1 不同加速度之設定.....	36
表 4.2 底床造波溯昇詳細參數設定.....	43



第一章 序論

1.1 前言

以往，至少在計算機仍不發達的年代裡，在研究水利問題時，無非是鑽研於理論之中或者是實際操作模型試驗；前者時常受限於簡單的幾何形狀及物理條件，而後者則可能必須投入一筆可觀之金錢。而兩者之差別僅止於方法選擇是否適當，只要能夠瞭解或有效分析物理現象之運作機制即可。也就是說，研究問題的方法本身並無好壞之分。

然而，在計算機普遍而發達的今天，研究問題的方法已不再侷限於理論解析或實驗分析，一旦可以正確掌握問題現象之控制方程式，許多無論尺度大小的問題亦可依賴數值計算解決，而且不再受到幾何形狀及過度簡化物理條件的限制，實為一種可靠的研究方法。

目前，各種演算法或數值模式發展之快與數量之多，足可供使用者或研究人員依照各自需求以選擇最適當的模式而解決問題。大致上，目前在進行科學計算或是解決工程問題時，多數所選擇的數值方法不外乎是已發展一段時間，並且穩定可靠的演算法，諸如有限差分法 (Finite difference method, FEM)、有限元素法 (Finite element method, FEM) 與邊界元素法 (Boundary element method, BEM) 等等，而且都能夠得到精確的計算結果。不過，前提是這些數值方法都必須先針對計算域進行一連串的前置作業，例如積分與網格轉換等等。

而近期發展的無網格數值方法 (Meshless numerical method)，其特點在於注重各計算點間之距離，取代了以往的元素觀念，相對於上述幾項計算方法則是免去了這些網格產生的前置作業。也就是說，在進行數值計算之前，其計算域中的布點相當自由，不再受到元素或網格點順序的限制，也因此能夠方便地處理不規則邊界之計算域建置。此外，此方法無須內插便可以容易地求得計算域中任意點之物理量與函數偏導數，進而避免因內插所產生之誤差。是故，無網格方法在數值

計算上具有其優勢與相當之潛力。

1.2 研究動機

專門運載原油或成品油的油輪，在海上航行時常因海浪或海風等因素造成船身受到外力而搖晃；儲油槽、水壩等存放或攔蓄龐大體積流體之大型結構物，一旦面臨到地震，其結構物所儲蓄之液體便受到外力而開始產生波浪。以上所陳述之例子，一旦其振動的自然頻率接近於所受外力之頻率時，便會開始產生共振之現象，也就是由外界進入之能量不容易消散或傳出而不斷地在此媒介之內累積，此時便會有結構物發生破壞的可能。

此外，在各項重大災害之中，海嘯及其相關主題向來都是科學家們有高度興趣的研究領域。若單就海嘯之成因而言，海嘯多半是肇因於人為不可抗拒之自然因素，且絕大多數是引發於淺層海底地震。海嘯一旦發生，其規模之大與襲擊之快，往往造成當地居民反應不及，以致於對沿海居民與周遭環境造成嚴重破壞。

海嘯是近岸地區、大自然深具破壞力的水面波動，近期地震引發的海嘯災害紀錄列於表 1.1，包含震央、芮氏規模與傷亡人數統計。

表 1.1 近期地震引發海嘯紀錄

時間(GMT)	震央	芮氏規模	受災地區	傷亡人數(人)
1992 年 9 月 2 日	北緯 11.742 度 西經 87.340 度	7.7	尼加拉瓜與哥斯大 黎加之沿海地區	116 以上
1998 年 7 月 17 日	南緯 2.96 度 東經 141.92 度	7.1	巴布新幾內亞	2183 以上
2001 年 6 月 23 日	南緯 16.26 度 西經 73.64 度	8.4	秘魯	75 罹難 2687 受傷
2003 年 5 月 21 日	北緯 36.93 度 東經 3.58 度	6.7	阿爾及利亞	2266 罹難 10261 受傷
2004 年 12 月 26 日	北緯 3.09 度 東經 94.26 度	9.3	東南亞、南亞、東非	229866 罹難 超過 15 萬人受傷
2006 年 7 月 17 日	南緯 9.295 度 東經 107.347 度	7.7	印尼	550 罹難 595 受傷

因此，而科學家們研究的最終目的便是發展出完整的方法或機制，以確保在海嘯發生或將要發生時，及時疏散民眾，將傷害降至最低。

1.3 研究目的

本研究以吳 (Wu, 2008) 發展之無網格方法進行數值計算，模擬由邊界運動所引發之非線性水面波。

藉著模擬邊界在水平方向之運動，可以探討容器之中盛裝了液體的自由振盪問題。如此便可藉由數值模擬結果，觀察流體受到外力而開始運動直到模擬結束之過程。於此期間，波形變化與表面流速皆有助於瞭解此類自由振盪問題。另外一方面，亦可證明本模式具有計算此類短波問題之能力。

而在邊界垂直方向運動方面，亦可數值模擬因底床變化所引發之非線性水面

波；並觀察底床以不同的加速度運動所產生之水面波，以及行經固定水深與斜坡之波浪變化，如波長、振幅與波速等等，藉以瞭解此造波機制所產生之水面波之生成、傳播與溯昇過程。

1.4 文獻回顧

在無網格數值計算方面，黃(Wong, 2003)以史托克斯方程式(Stokes equations)之基本解(Stokeslet)分別模擬內流場與外流場計算問題；胡(Hu, 2005)以基本解計算赫姆霍茲(Helmholtz equation)、擴散(Diffusion equation)與柏格斯方程式(Burgers' equation)。

無網格基本解於自由液面問題之應用方面，吳(Wu et al., 2005, 2008, and 2009)與楊(Young et al., 2009)以基本解方法配合高斯幅狀基底函數藉以數值模擬完全非線性水面波問題與不規則邊界速度勢問題。而 Chantasiriwan (2009)由微小振幅波理論出發而得到拉普拉斯控制方程式(Laplace equation)，並以基本解與線性邊界條件模擬流體的三維自由振盪問題(sloshing problems)。

無網格方法相較於其他數值方法，如有限元素或邊界元素法等等，可避開複雜的網格建置或奇異點積分等問題；此外，在建立計算域時，毋須使用密集的計算點便可以得到相當良好的計算結果。

在模擬海嘯方面亦有許多數值模擬之文獻，Wang 與 Liu 分別以 COMCOT 模式模擬發生於 2003 年 5 月 21 日之 Boumerdes-Zemmouri 海嘯(Wang and Liu, 2005)、2004 年 12 月 26 日之南亞大海嘯(Liu, 2005; Wang and Liu, 2006)，其計算之結果可以準確地模擬海嘯之相位與海嘯到達陸地之時間，唯其波高之計算結果低於實測值。

1.5 物理問題描述

本研究主要分為兩部分。首先，針對一個貯存流體之容器，受到各種可能原

因之外力而激發內部流體，進而開始產生運動之問題。在此設計一個頂部開放之水槽，其內有液體但並未完全盛滿。而外力來源則由邊界提供，此邊界條件係給定由時間為零開始啟動，持續地進行簡諧運動，如圖 1.1 所示。

第二個欲探討的主題是底床垂向變動的物理現象。可能引起海嘯之地震大多數皆為淺層之海底地震，而發生海底地震之自然原因多為海底斷層釋放出累積已久的能量。海底斷層包含了平移型、張裂型與聚合型斷層，其中能夠產生較大規模的地震，而且可能造成海嘯的多數屬於聚合型板塊所形成之逆斷層。簡單的示意圖呈現於圖 1.2，該圖除了表示實際物理現象之外，亦有簡化過後之底床隆起運動之表示圖；另有底床下陷之示意圖如圖 1.3，有機會造成此現象之原因則可能是海底地形之崩塌。此兩種不同之底床垂向運動模式也是本研究在設計案例時所沿用的物理運動行為。

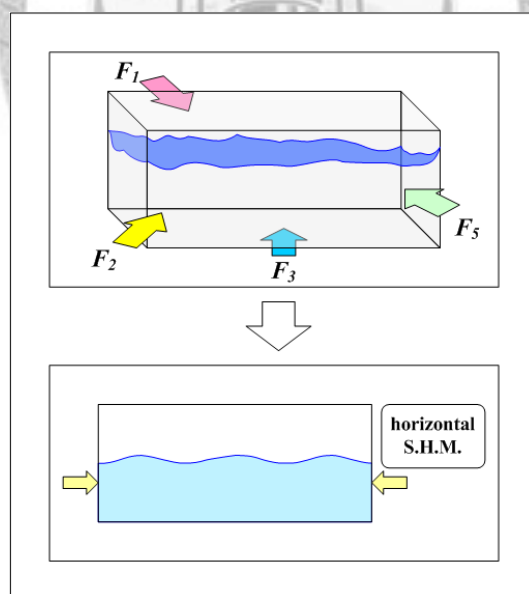


圖 1.1 邊界水平運動示意圖

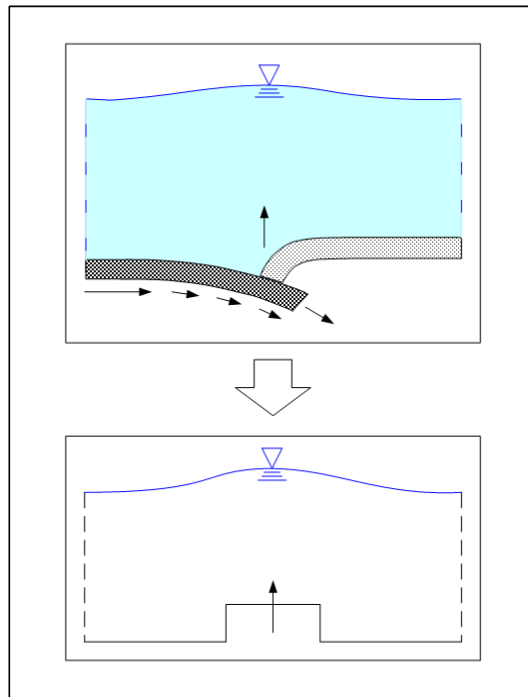


圖 1.2 邊界垂直運動示意圖（隆起）

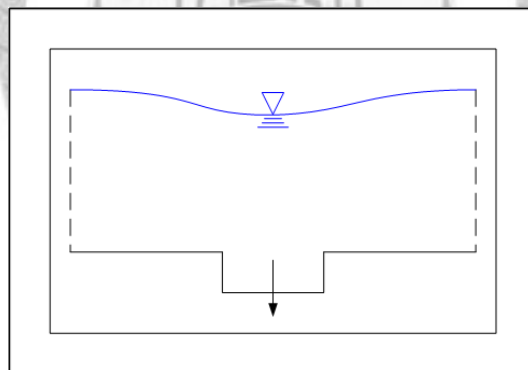


圖 1.3 邊界垂直運動示意圖（下陷）

第二章 數學方法

2.1 控制方程式

首先，由連續方程式與動量方程式出發：

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \vec{f} + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (2)$$

式中 ρ ：流體密度

$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ ：流速

P ：壓力

ν ：運動黏滯度 (Kinematic viscosity)

\vec{f} ：自體力 (body force)

$\nabla(\) = \frac{\partial(\)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(\)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial(\)}{\partial z}\vec{k}$ ：梯度運算子

$\nabla^2(\) = \frac{\partial^2(\)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\)}{\partial z^2}$ ：拉普拉斯運算子

$\frac{D(\)}{Dt} = \frac{\partial(\)}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)(\)$ ：全微分或物質導數 (material derivative)

考慮或模擬水面波問題時，在基本的質量守恆、無旋性流體與不可壓縮的均質流體假設之下，可得到流速之散度為零；再者，考慮到水面波問題的研究尺度相對於黏滯效應所影響的尺度，黏滯效應可忽略之。則上列兩式可改寫如下：

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{\nabla P}{\rho} - g\vec{k} \quad (4)$$

方程式 (4) 即為 Euler equation，針對此方程式取旋度便可得到如下之渦度方程式 (vorticity equation)：

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{V} + \frac{\nabla\rho \times \nabla P}{\rho^2} \quad (5)$$

式中 $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$

由無旋性流體之假設而可得到渦度之全微分等於零；其次，在均質流體假設之下，密度梯度與壓力梯度之外積為零。至此，再導入速度勢函數之定義而可得到如下所列之拉普拉斯方程式（Laplace equation）：

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (6)$$

式中 ϕ ：速度勢（velocity potential），滿足 $\nabla \phi = \vec{V}$

2.2 初始與邊界條件

2.2.1 初始條件

在設定初始條件時，是給定速度勢函數以及自由液面各自之初始狀態

$$\phi(\bar{x}, 0) = f_1(t) \Big|_{t=0} \quad (7.a)$$

$$\eta(\bar{x}, 0) = f_2(t) \Big|_{t=0} \quad (7.b)$$

倘若當時間為零時，自由液面是靜止之水平面，則上述兩條方程式（7.a）與（7.b）皆等於零。

2.2.2 邊界條件

無論是解析或是數值計算，在處理流體的邊界問題時，都需要使用正確的數學式以描述流體邊界之情形，方能夠解決物理問題。由於流體邊界可區分為自由液面邊界以及接觸到固體之不透水邊界，所以這兩種不同之邊界條件必須分開討論。

自由液面之定義為兩種不同流體之接觸面，但是一般而言，此邊界多係指與大氣接觸之邊界。而此邊界之所以存在是因為流體在該接觸面無任何質量進出，反之，便無法成為一個邊界。而為了能夠描述一個自由液面，先給定其高程，並指定為函數：

$$z = \eta(\bar{x}, t) \quad (8.a)$$

$$\Rightarrow F = z - \eta(\bar{x}, t) = 0 \quad (8.b)$$

式中 $\eta = \eta(\bar{x}, t) = \eta(x, y, t)$: 自由液面高程

對於液面之流體質點而言，其位置永遠隨著自由液面移動而且該邊界無質量穿透，因此其函數之全微分等於零：

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (9.a)$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial F}{\partial t} = u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = \vec{V} \cdot \nabla F = (\vec{V} \cdot \bar{n}) |\nabla F| \quad (9.b)$$

式中 $\bar{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$: 自由液面之法向量

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \bar{k} : \text{自由液面之梯度}$$

$$|\nabla F| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} : \text{自由液面梯度之絕對值}$$

接著將方程式 (8) 代入方程式 (9)：

$$\left(\frac{DF}{Dt} = 0 = -\frac{\partial \eta}{\partial t} - u \frac{\partial \eta}{\partial x} - v \frac{\partial \eta}{\partial y} + w \right) \Bigg|_{z=\eta(x,y,t)}$$

$$\left(w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \Bigg|_{z=\eta}$$

$$\Rightarrow w|_{z=\eta} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \Bigg|_{z=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (\nabla_h \phi)_{z=\eta} \cdot \nabla_h \eta \quad (10)$$

式中 $\nabla_h () = \frac{\partial ()}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial ()}{\partial y} \bar{j}$: 水平二維之梯度運算子

方程式 (10) 稱為運動邊界條件 (Kinematic free surface boundary condition, KFSBC)。

另外，若從動力上來看，自由液面可隨意變形以趨於力平衡，因此，為了能夠描述流體邊界上的動力條件，其數學式中必須要考慮可能的的外力來源。速度勢函數導入尤拉方程式 (Euler equation)，並提出梯度運算子則可得到如下所示之方程式 (11)：

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla\phi = \frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t} + \nabla\phi \cdot \nabla\phi = -\frac{\nabla P}{\rho} - g\bar{k}$$

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + gz + \frac{1}{2} (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) + \frac{P}{\rho} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} = -gz - \frac{1}{2} (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) + -\frac{P}{\rho} \text{Const}(t) \quad (11)$$

式中 $\text{Const}(t)$ ：積分常數

在此所考慮之自由液面為流體與大氣之接觸面，所以高程為 η ，而且邊界上之壓力為大氣壓力，可視為零。所以便可將方程式 (11) 整理為如下之方程式：

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=\eta} = -g\eta - \frac{1}{2} (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) \Big|_{z=\eta} + \text{Const}(t) \quad (12)$$

方程式 (12) 即為動力邊界條件 (Dynamic free surface boundary condition, DFSBC)，此邊界條件則是與力有關，式中之積分常數在初始靜止水面則為零。

而與固體接觸的不透水邊界，其邊界條件是用以描述固體與流體之間的運動情形。在大多數的情況下，固體邊界皆視為不透水之邊界，亦即流體與固體接觸面之間無質量通過。而這就意謂著，該類型邊界上的流體速度等於固體邊界之移動速度：

$$\nabla \phi_{\text{solid}_{-}bd} \cdot \vec{n} = \vec{V}_{\text{solid}_{-}bd} \cdot \vec{n} \quad (13)$$

式中 $\nabla \phi_{\text{solid}_{-}bd}$ ：與固體邊界接觸之速度勢函數

$\vec{V}_{\text{solid}_{-}bd}$ ：固體邊界移動速度

由方程式 (13) 可以看出，當固體邊界靜止不動時，則此式為零，也就代表該邊界之淨通量為零。

第三章 數值方法

3.1 傳統有網格數值方法與無網格數值方法簡介

在進行科學或工程方面的計算，尤其是解決水利問題時，時常會出現偏微分方程式 (partial differential equations, PDEs)，而偏微分方程式是針對點與鄰近各點之關係，所以要將其應用至大範圍之計算問題時，勢必會出現”離散”與”有限”之概念。因此，各種數值方法有其不同之方式將一個連續的計算區域分割為有限個元素之計算網格，例如有限差分法是利用正交網格，而有限元素法則使用多邊形元素所構成之網格。然而，在建立網格時，另一個層面的問題也隨之出現。

以有限差分法 (Finite difference scheme) 而言，其計算注重臨近網格點之相對位置，也因此必須使用正交網格。然而正交網格不容易處理不規則邊界，也因為如此而出現了許多網格轉換之相關研究，例如 Thompson(1974)與 Haussling(1981)陸續以拉普拉斯方程式 (Laplace equation) 配合卜易松方程式 (Poisson equation) 產生部分或完全正交之網格；王 (Wang, 2004) 應用邊界元素法於邊界符合保角網格系統。

而有限元素法 (Finite element scheme)，顧名思義是將計算域細分為各自相鄰之多邊形元素，以元素作為計算資料傳遞之媒介。此法可將誤差分散於各網格點之中，進而有效控制誤差之大小。但是在邊界大幅轉折之處則必須將網格部分加密，以便確切掌握該處物理量之劇烈變化。

以上所列舉之數值方法及其相關研究，皆需要花費許多研究時間與精神於網格之建立。而所謂之網格，無論是正交網格系統或是多邊形元素網格系統，重點在於眾多網格點的順序、相對應之位置或是其相鄰之順序。而計算所得到之資料皆存放於格點上，一旦所需資料之位置處於格點之間，便只能夠將網格局部加密而增加計算時間，或是使用內插而犧牲一部分的精準度。

相對與此，無網格數值方法則是注重於計算點與其他各點之關係，而此關係

則以距離表示之。一旦各點之間的關係建立完成，便可直接求解計算區域內任意位置之物理量甚至是函數之偏導數，如此一來便不必再經由內插而導致誤差的產生。另外，相對於複雜的網格，此數值方法在計算域內布點規則較為寬鬆，不但，可避開網格產建立所衍生之困難，亦有利於簡化撰寫程式的流程。

3.2 無網格數值方法

由於控制方程式為線性之拉普拉斯方程式 (Laplace equation)，故其速度勢之解必為線性函數，因此可應用線性疊加原理 (linear superposition principle)。基於這個觀念，本數值方法便假設各個速度勢都可以表示為一連串三維線性幅狀基底函數 (radial basis function) 之疊加。而每一個幅狀基底函數皆由該函數之中心點 (或稱為源點, source point) 與其他資料點 (或稱為場點, field point, or collocation point) 的直線距離所組成，並且各自對應一個權重係數。求得此權重係數之後，便可計算出同一時間步之速度勢梯度。

另外一方面，由於自由液面梯度為二維之運算，因此在處理此物理量時選用另一組二維線性高斯幅狀函數 (Gaussian radial basis function) 以計算自由液面之梯度與權重。

得到各時間步之速度勢之後，配合自由液面與速度勢之梯度，使用中央二階差分計算下一個時間步之自由液面，如此反覆循環便可不斷地往前推算水面波問題。

以下便以四個小節詳敘細部作法。

3.2.1 幅狀基底函數

由前述之假設，速度勢為一連串幅狀基底函數之疊加表示如下：

$$\phi^n(x, y, z) = \sum_j^N \alpha_j^n R_j^n(x, y, z) \quad (14)$$

式中 $()^n$ ：上標 n 代表某一時間步 n 之運算

N ：資料點或幅狀基底函數中心點之總數

α ：各幅狀基底函數所對應之權重係數

$R(x, y, z)$ ：幅狀基底函數

以三維之拉普拉斯運算子而言，滿足其運算子之線性基本解為：

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}} \quad (15)$$

是故，選用此基本解之幅狀基底函數即為下列所示：

$$R_{ij}^n(x, y, z) = \frac{1}{r_{ij}} ; r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \quad (16)$$

式中 $()_i$ ：下標 i 代表資料點之編號

$()_j$ ：下標 j 代表幅狀基底函數中心點之編號

因此，方程式 (14) 便可改寫為下列之矩陣型式：

$$\begin{bmatrix} R_{11} & & R_{1j} \\ & \ddots & \\ R_{i1} & & R_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^n \\ \vdots \\ \phi_i^n \end{bmatrix} \quad (17)$$

3.2.2 速度勢函數與其梯度之計算

承方程式 (14) ~ (17)，針對幅狀基底函數進行偏導數計算：

$$\begin{cases} R_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \\ R_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) \\ R_z = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \\ R_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) \end{cases} \quad (18)$$

接著再配合邊界條件便可計算該時間步之權重係數：

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r_{ij}} \\ \nabla \phi \cdot \vec{n}_{solid_bd} \end{bmatrix}_{i \times j}^n \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_j \end{bmatrix}_{j \times 1}^n = \begin{bmatrix} \phi^n \\ \vec{V}_{solid_bd} \cdot \vec{n} \end{bmatrix}_{i \times 1}^n \quad (19)$$

而求得權重係數 (α) 之後，便可得到速度勢梯度

$$\frac{\partial R_{ij}^n}{\partial \bar{x}} \alpha_j^n = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \phi_i^n \quad (20.a)$$

$$\begin{bmatrix} R_{\bar{x}11} & & R_{\bar{x}1j} \\ & \ddots & \\ R_{\bar{x}i1} & & R_{\bar{x}ij} \end{bmatrix}_{i \times j}^n \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_j \end{bmatrix}_{j \times 1}^n = \begin{bmatrix} \phi_{\bar{x}1} \\ \vdots \\ \phi_{\bar{x}j} \end{bmatrix}_{i \times 1}^n \quad (20.b)$$

式中 $(\)_{\partial \bar{x}}$ ：下標 $\partial \bar{x}$ 代表該函數對 \bar{x} 之偏導式

3.2.3 自由液面梯度計算

在方程式 (10) 之中會使用二維之梯度運算，因此在針對這個部分進行計算時，另外挑選高斯函數做為二維幅狀基底函數以求得自由液面之梯度。

$$g_l^n = \exp \left[-\frac{(x-x_l)^2 + (y-y_l)^2}{\sigma_l^2} \right]^n \quad (21)$$

式中 $(\)_l$ ：下標 1 代表自由液面資料點之編號

σ ：高斯函數之形狀參數

選定了二維函數之後，已知條件為自由液面高程，便可進行求解此時間步之權重：

$$\exp \left(-\frac{r_{lk}^2}{\sigma_k^2} \right)^n \beta_k^n = \eta_l^n \quad (22)$$

式中 $(\)_k$ ：下標 k 代表高斯函數中心點之編號

β ：與高斯函數對應之權重

而選擇高斯函數之原因在於，按照方程式 (22) 所建立之係數矩陣，唯有在主對角線附近之元素有值，其餘元素則接近零。如此一來，以高斯函數所建立的係數矩陣便近似於稀疏矩陣 (sparse matrix)，在求解反矩陣時，能有效縮短解矩陣之計算時間。

另外，此帶狀係數代表該對角線元素之資料點對於較鄰近之計算點具有較高之影響程度，也就是擁有較高之權重係數；反之，相對較遠的計算點受其影響較低，所以係數也就隨之降低而趨近於零。圖 3.1 為二維高斯函數值，X 與 Y 之範圍皆介於+10 與-10 之間，而 σ 則給定為 2。由圖可明顯看出，距離原點越近則有越高之函數值，反之則相反。而且，由於其基底為自然對數，所以隨著距離增加，其函數值將會更快地衰減而趨近於零。

如同速度勢梯度一般，求得高斯函數之二維偏導數之後便可求出數值計算域任意位置的自由液面梯度：

$$-2 \frac{(\bar{x}_l - \bar{x}_k)}{\sigma_k^2} \exp\left(-\frac{r_{lk}^2}{\sigma_k^2}\right) \beta_k = \eta_{\bar{x}_k}^n \quad (23)$$

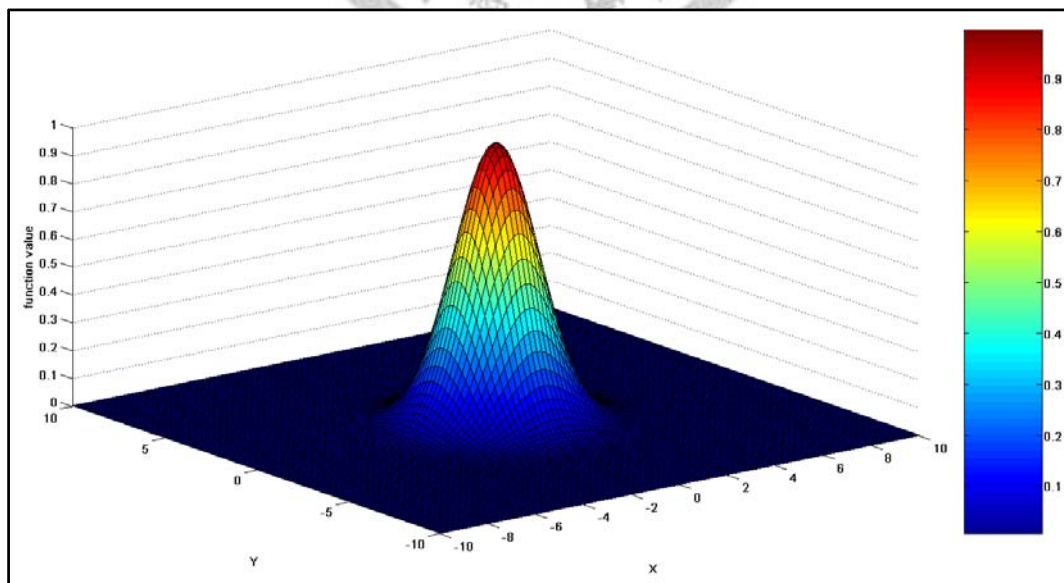


圖 3.1 高斯函數值

3.2.4 二階中央差分法(蛙跳法)

將方程式 (10) 對時間離散之後可得到：

$$\eta^n = \eta^{n-2} + 2\Delta t(\phi_z^{n-1} - \phi_x^{n-1}\eta_x^{n-1} - \phi_y^{n-1}\eta_y^{n-1}) \quad (24)$$

同樣地，將方程式 (12) 離散之後可得到：

$$\phi^n = \phi^{n-2} - 2\Delta t \left\{ \left(g\eta^{n-1} + \frac{1}{2} \left[(\phi_x^{n-1})^2 + (\phi_y^{n-1})^2 + (\phi_z^{n-1})^2 \right] \right) \right\} \quad (25)$$

3.2.5 計算流程

第一步：設定初始條件，包含速度勢與自由液面高程。

第二步：更新各邊界點與中心點位置。

第三步：以方程式 (24)、(25) 計算下一步之速度勢與自由液面。

第四步：以方程式 (16)、(18) 求出三維幅狀基底函數與其偏導數，再以方程式 (19) (19) 求解權重係數 α 。

第五步：按照方程式 (21) 計算高斯函數，接著以該時間步之自由液面為已知條件代入方程式 (22) 求出權重 β 。

至此，在同一個時間步裡，在數值計算域之內任意位置的速度勢、速度勢導數、自由液面與自由液面梯度可分別由方程式 (17)、(20)、(22) 與 (23) 進行求解。

第六步：重覆第二步至第五步直到目標時間為止。

整體計算流程如圖 3.2。

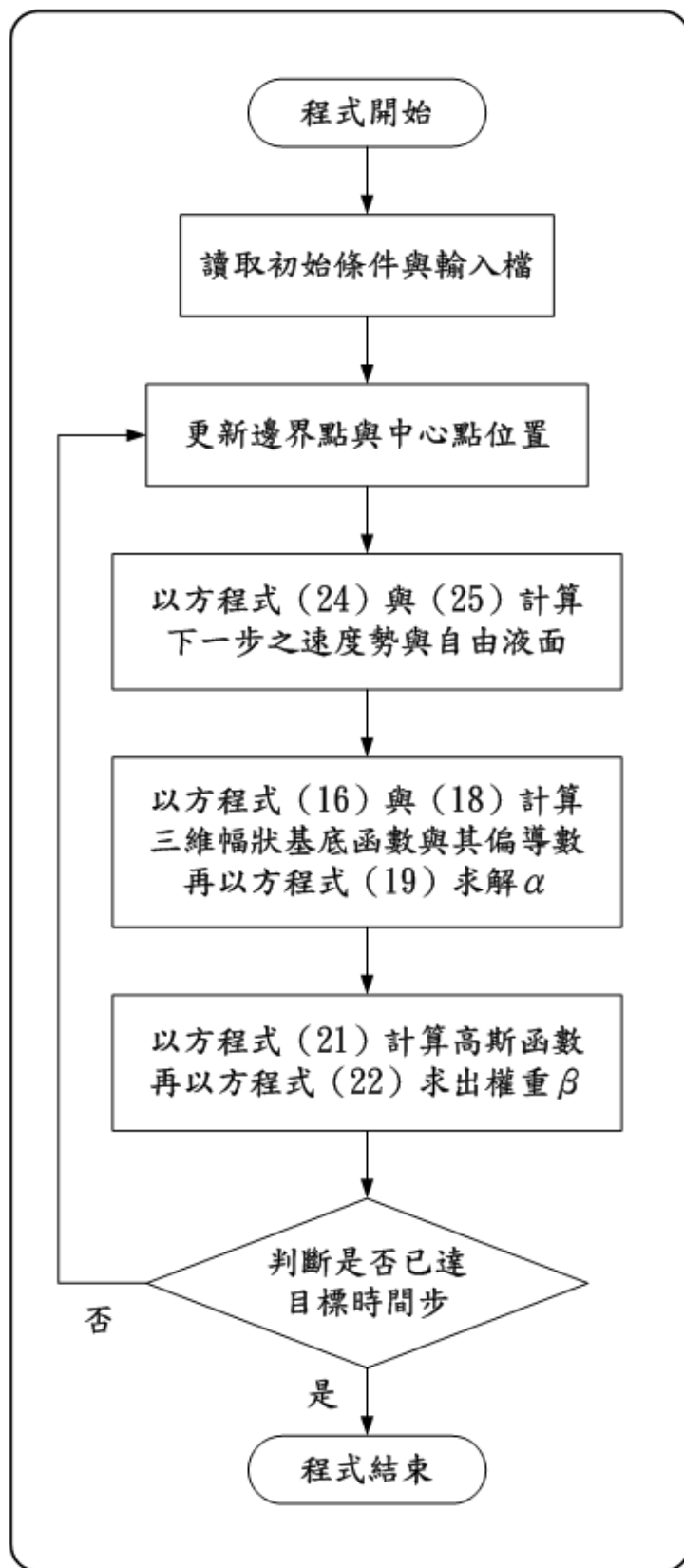


圖 3.2 數值模式流程圖

3.3 驗證

此節將引用先前所推導之結果，包含對於流體問題之各種假設，以及計算流程進行兩項計算案例作為驗證之用。

3.3.1 自由振盪問題

假設一個三維水槽盛裝些許液體而非完全裝滿，其容器之各接觸面皆為不透水邊界，長寬高分別為 0.9 m、0.4 m 與 0.9 m，而水深則是 0.6 m。而水平振動則是沿 x 軸方向進行簡諧運動，其運動機制描述如下：

$$\begin{cases} A(x,t) = d\omega^2 \sin(\omega t) \\ V(x,t) = -d\omega \cos(\omega t) \\ X(x,t) = -d \sin(\omega t) \end{cases} ; \text{for } t \geq 0 ; \text{for } x = \pm 0.45 \quad (26)$$

式中 $A(t)$ ：簡諧運動邊界之水平加速度， m/sec^2

$V(t)$ ：簡諧運動邊界之水平速度， m/sec

$X(t)$ ：簡諧運動邊界之水平位移， m

t ：時間，單位為 sec

d ：0.002 m，振幅

ω ：5.5 rad/s，角頻率

圖 3.3 為水槽之示意圖，而圖 3.4 則分別展現 x 軸與 y 軸兩個不同方向之側視圖。

在時間域之部分， $dt = 0.01 \text{ sec}$ ，模擬由靜止至 10 秒鐘；而空間域計算點之布設，包含不透水邊界點與自由液面邊界點，在參考文獻(Wu, 2008; Chantasiriwan, 2009)給予之建議與實際試驗之後，設定 $dx = dy = dz = 0.1(\text{m})$ ，而中心點則是與計算點相隔 1.3 倍之計算點間距，靠近邊界三列之內則提高為 2.0 倍間距；而高斯形狀參數則是統一使用 2.5 倍計算點間距。另外，在自由液面與固體邊界相交之四周，以及不透水邊界互相交接之處，為避免重疊布點，以上所提及之處皆各自向外平

移或向內縮移四分之一倍的計算點間距。計算域之建立如圖 3.5~圖 3.7 所示。

模擬結果分別以質量守恆與波形(Kita, et al., 2004)為驗證，Kita 在文獻中以 Trefftz 型式之邊界元素法，配合非線性邊界條件與拉普拉斯方程式數值模擬二維之自由振盪問題。質量守恆之檢驗是以模擬時間為橫軸，質量誤差為縱軸。其誤差之計算分為絕對誤差與相對誤差，計算方式如下，而計算結果如圖 3.8 所示：

$$\begin{cases} \text{absolute error} = \Delta V = V_i - V_0 \\ \text{relative error} = \Delta V / V_0 = (V_i - V_0) / V_0 \end{cases} \quad (27)$$

式中 V_i ：第 i 個時間步之體積，單位為 m^3

V_0 ：初始體積，單位為 m^3

至於波形之驗證是與 2004 年 Kita 的文獻相對照，其比較結果則呈現於圖 3.9，由此可以看出，其計算結果與 Kita 的資料相當吻合。而質量守恆的部分也有良好成果，不論是絕對誤差或是相對誤差都可有效地控制在 10^{-4} 的負 4 次方。

此外，在檢驗質量守恆的圖中，可以看出誤差是有週期性地振盪，此一現象會在 4.1 節另作詳細說明。

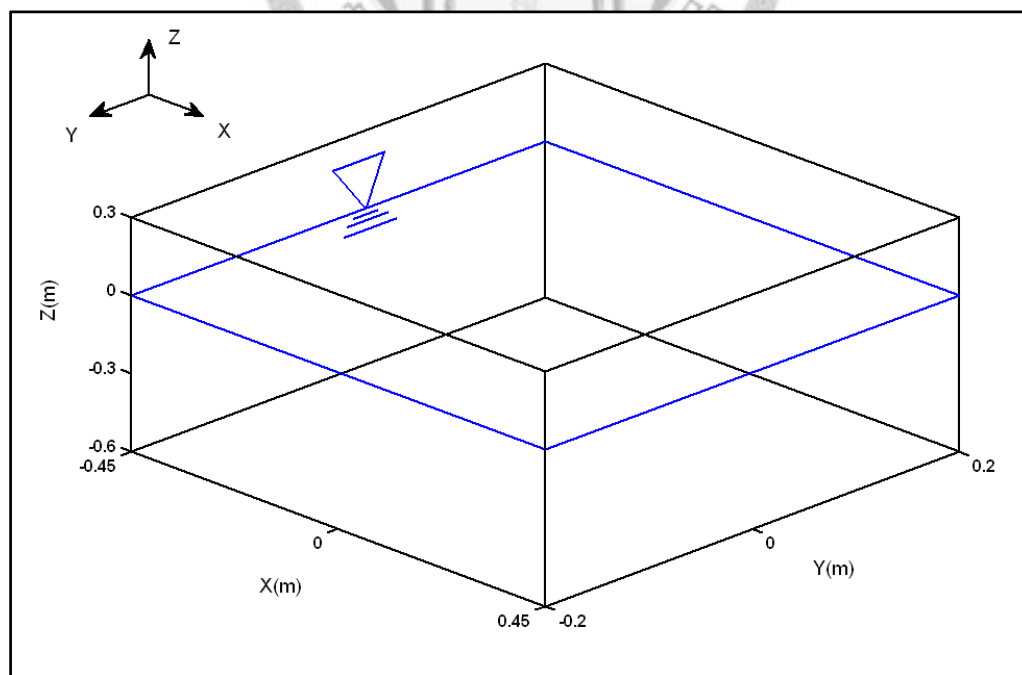


圖 3.3 自由振盪水槽三維示意圖

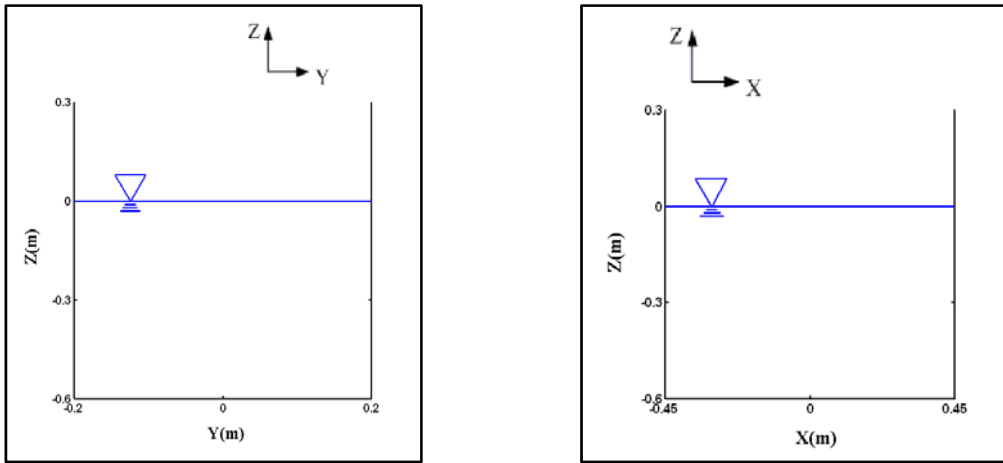


圖 3.4 自由振盪水槽側視圖

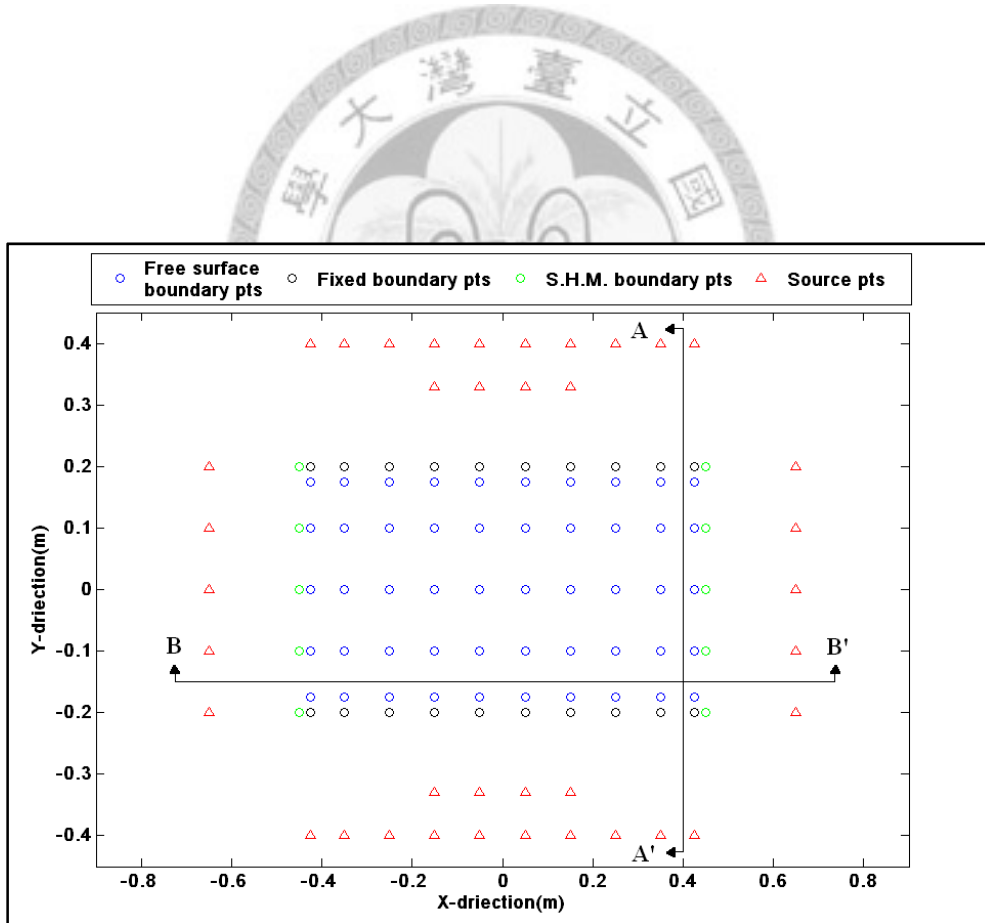


圖 3.5 自由振盪邊界布設俯視圖

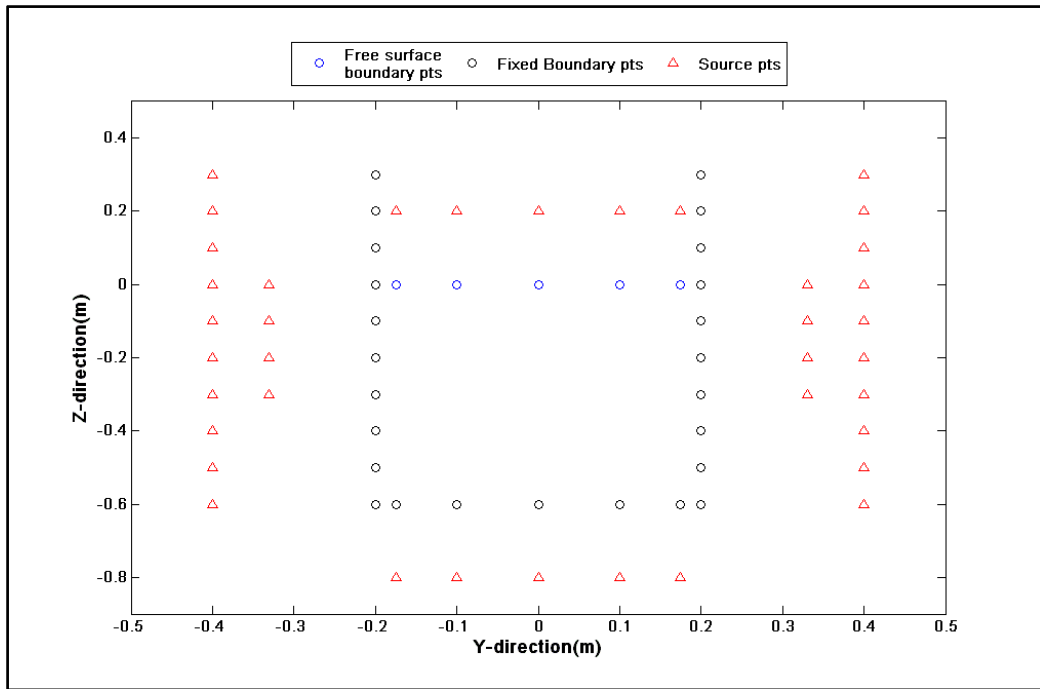


圖 3.6 自由振盪邊界布設 AA' 截面圖

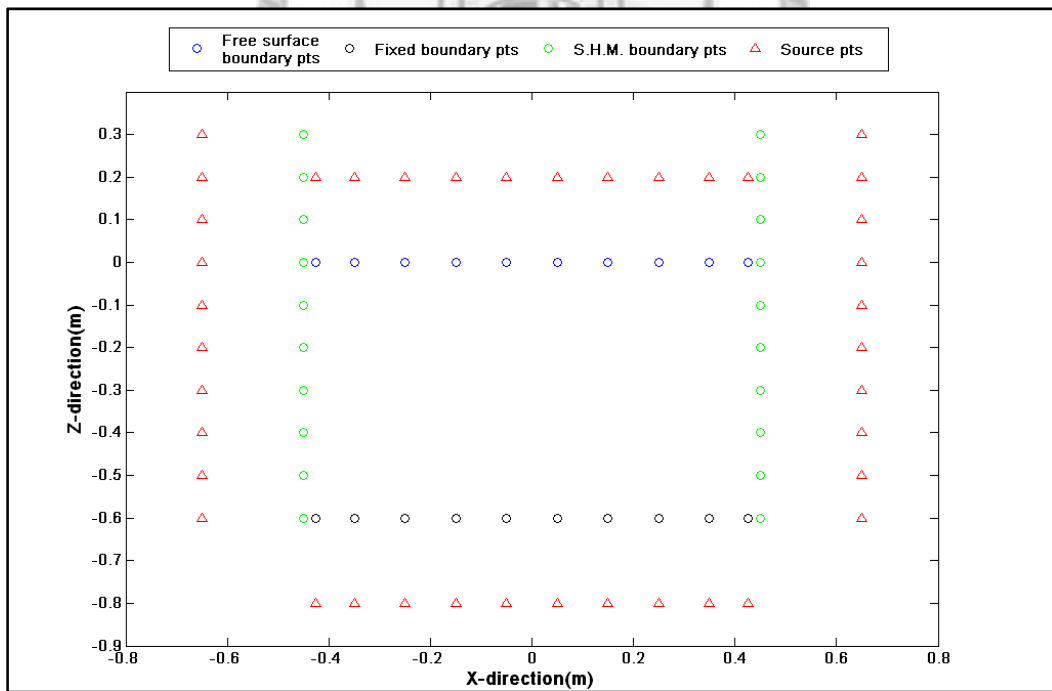


圖 3.7 自由振盪邊界布設 BB' 截面圖

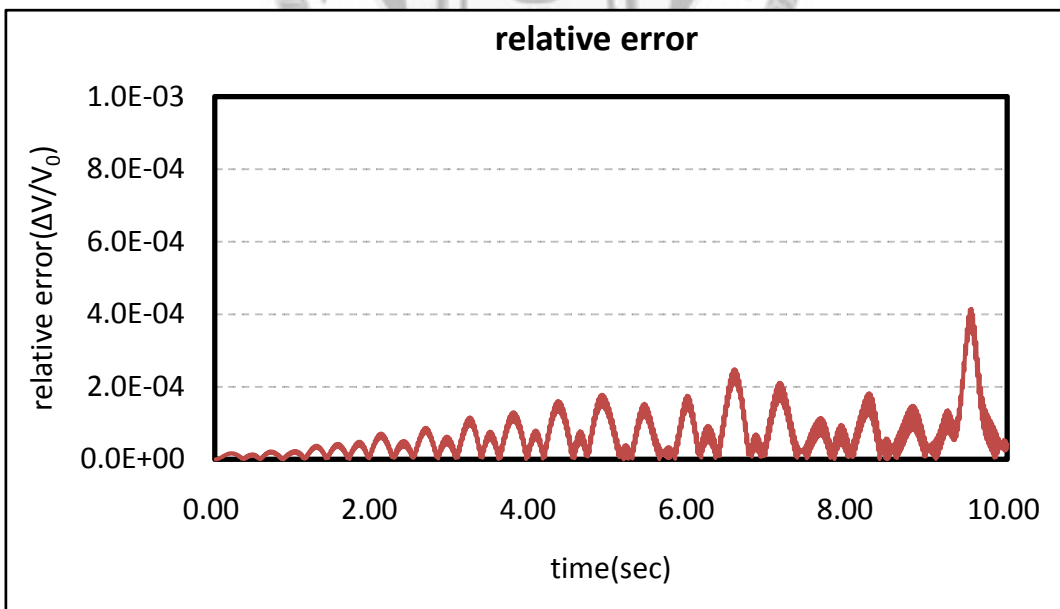
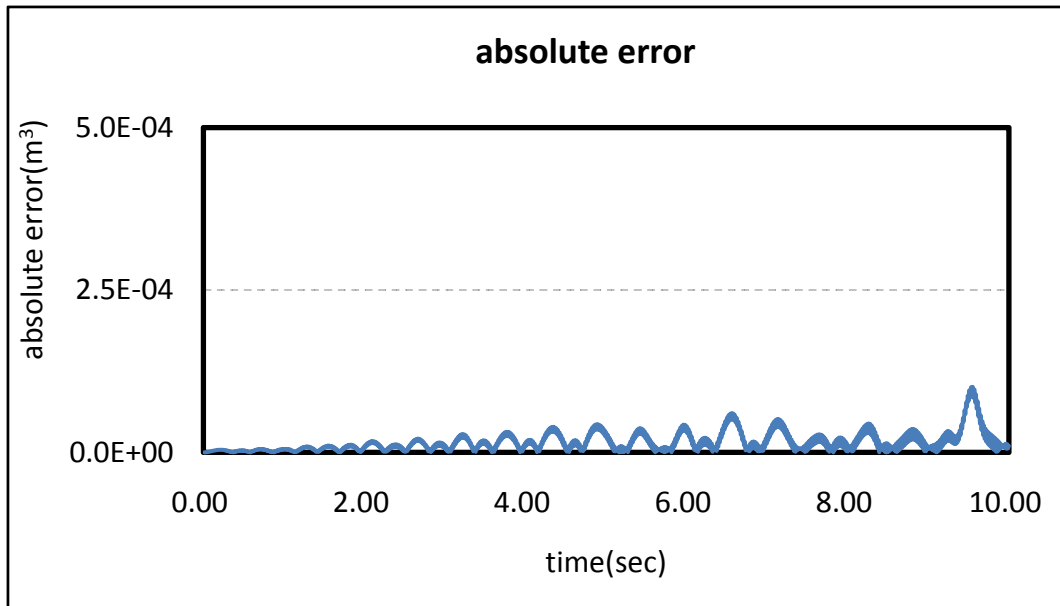
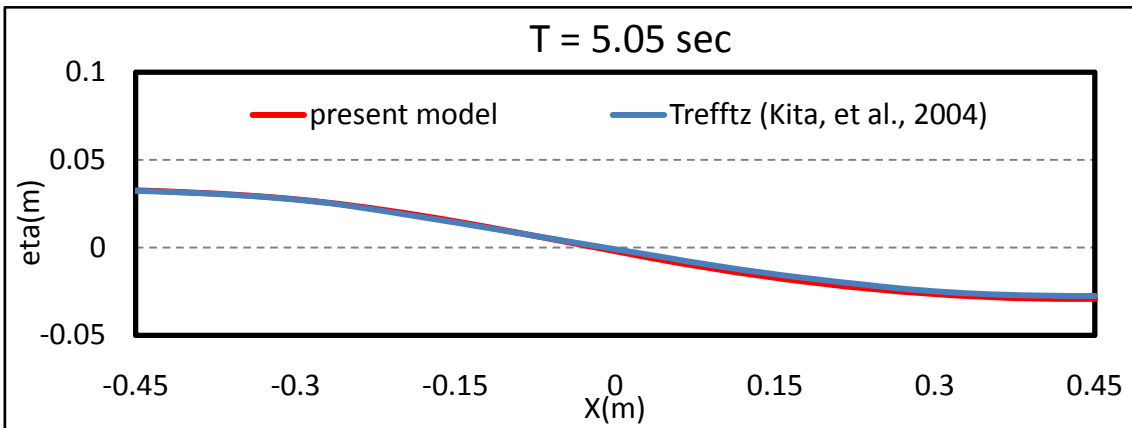
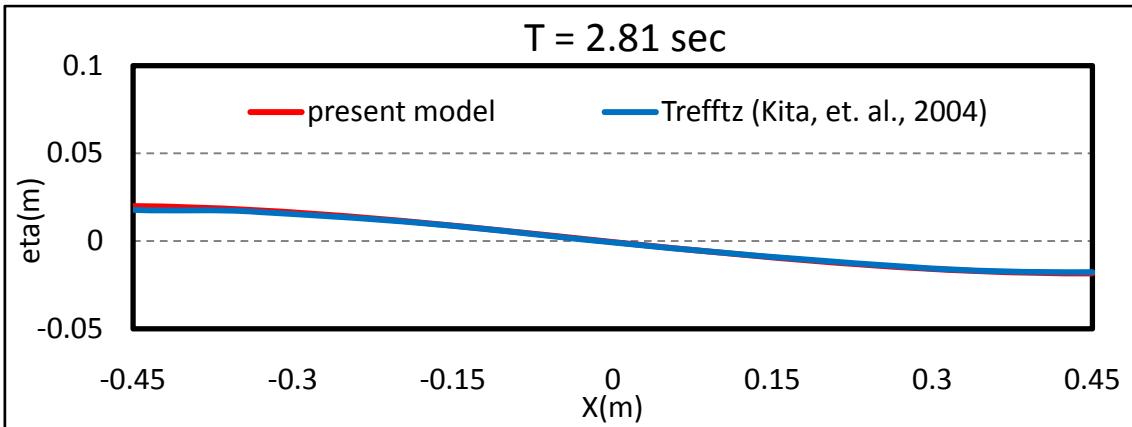
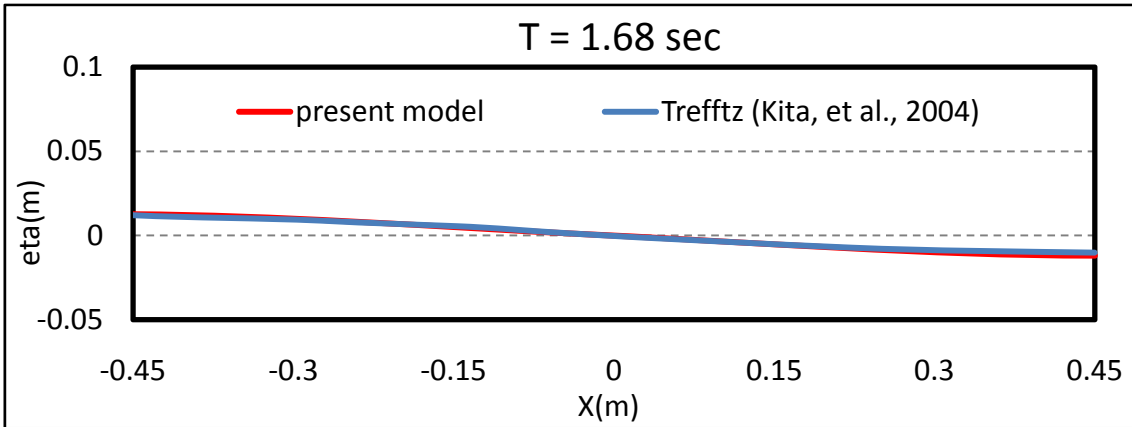


圖 3.8 自由振盪質量守恆驗證



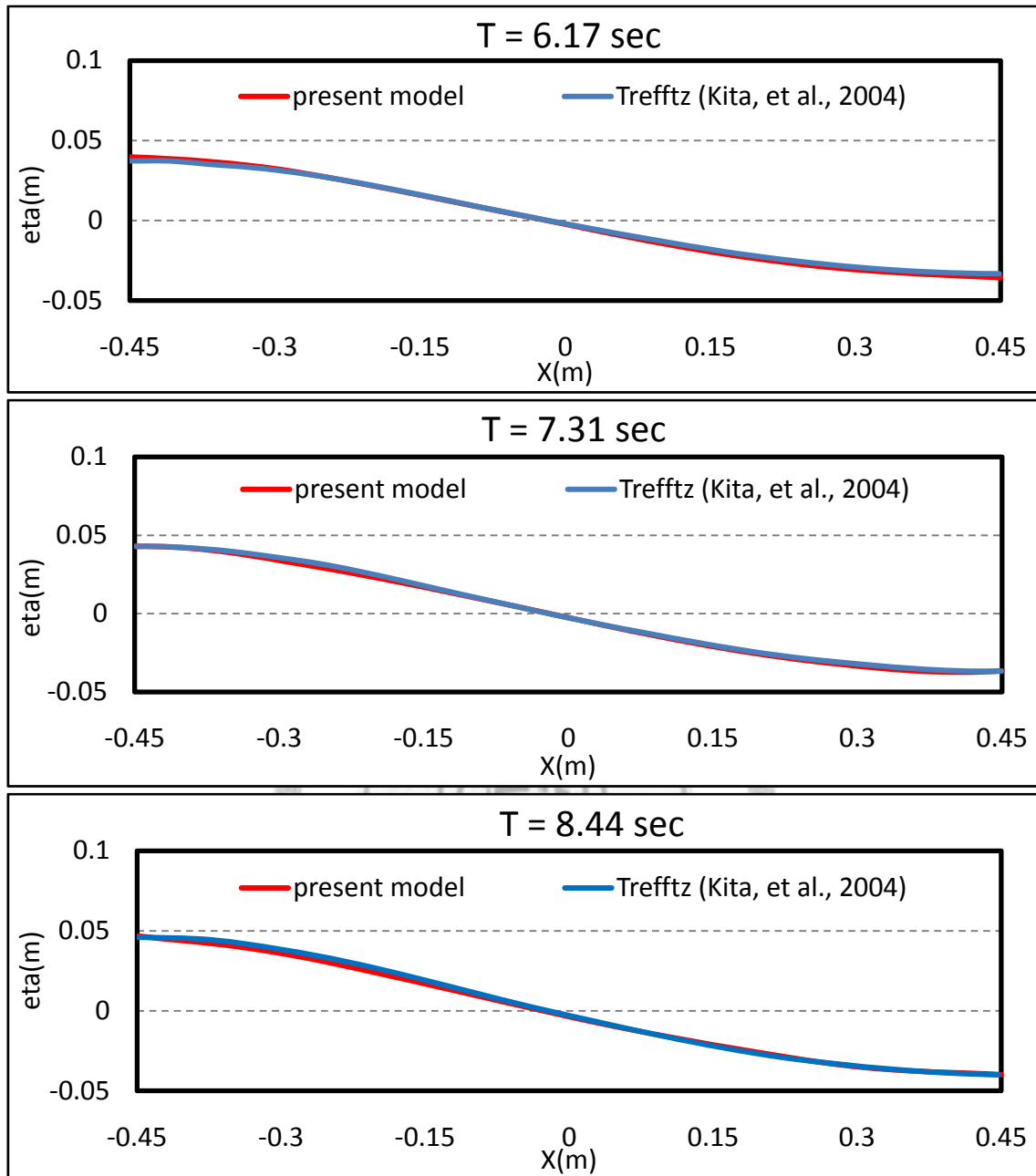


圖 3.9 自由振盪波形驗證

3.3.2 底床垂直造波

本節所呈現之計算結果分為兩部分，各別為底床隆起與底床下陷。而進行此數值計算之目的在於模擬簡化過後之海底地震，也就是底床均勻地垂向運動而產生水面。由於所蒐集之文獻並無類似之相關實驗或數值模擬，因此在此僅以質量守恆作為驗證。

本部分之數值模擬假設一個三維之正方形水槽，長寬高分別為 19.2 m、19.2 m 與 2 m，水深則為 1 m。如圖 3.10 與圖 3.11 所示，各邊界皆不透水，而造波邊界是一個半徑為 1.8 m 之圓形區域，位於水槽中央之底部位置，其運動機制如下所述：

$$\begin{cases} A(x, y, t) = a_0 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right); \text{for } 0 < t \leq 0.05 \text{ sec}; \text{for } x^2 + y^2 = 1.8 \\ A(t) = 0 \quad ; \text{for } t > 0.05 \text{ sec} \end{cases} \quad (28)$$

式中 $A(x, y, t)$ ：移動邊界之垂向加速度，單位為 m/sec^2

a_0 ：初始加速度， m/sec^2

t ：時間，單位為 sec

p ：週期，在此給定為 0.1 sec

而運動邊界之加速度、速度與位移紀錄則展示於圖 3.12～圖 3.14。而設計此運動機制之考量在於控制造波邊界起伏之距離為水深之千分之一倍左右。

至於計算域之建立，空間域布點設定 $dx = dy = 0.8 \text{ m}$ ， $dz = 0.67 \text{ m}$ 。中心點與計算點相隔 1.3 倍 dx ，靠近邊界三列之內提高為 2 倍 dx ；高斯形狀參數使用 2.5 倍 dx ，靠近邊界三列範圍內則改用 3 倍 dx 。而各邊界交接處則如同自由振盪案例之處理方式，各邊界之邊緣分別向外平移或向內縮移四分之一倍 dx 。在時間域之部分， $dt = 0.001 \text{ sec}$ ，模擬 3500 個時間步。計算域之建立如圖 3.15～圖 3.17 所示。

質量守恆之檢驗結果則呈現於圖 3.18，由圖可看出質量隨著時間並無太大之絕對誤差，相對誤差更是良好地控制在 10 的負 4 次方。而波形計算之結果展示於圖 3.19。由圖 3.19 可以看出一點，底床隆起者，其最外圈是波峰向外傳遞；反之，底床下陷則造成波谷在最外圈。另有自由液面速度勢與水面流速之成果，請見附錄二。

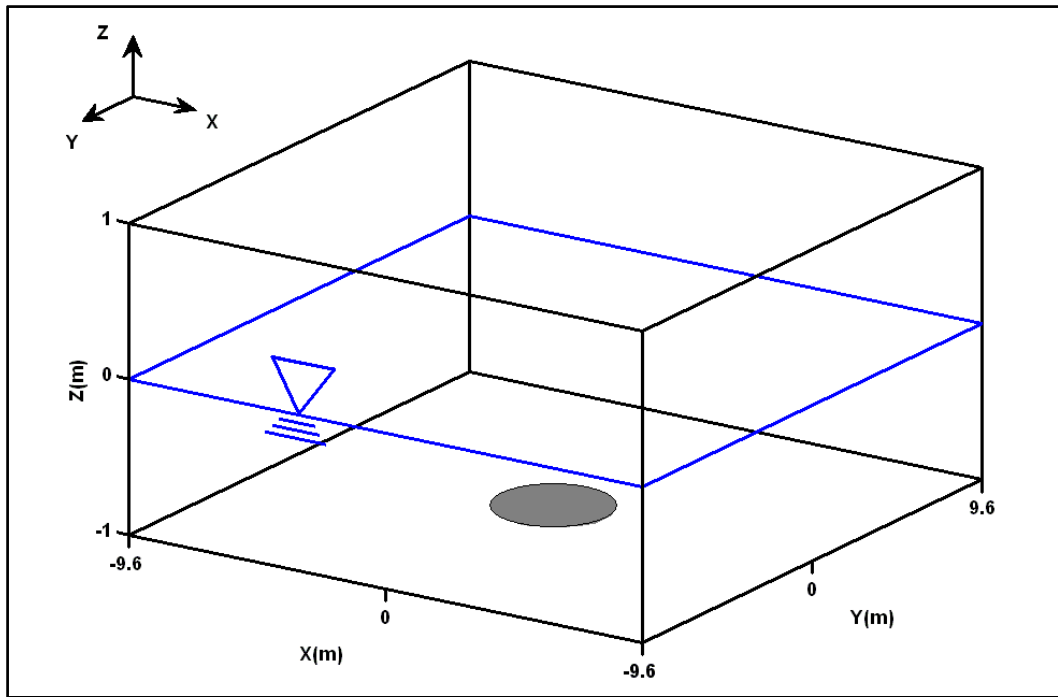


圖 3.10 垂向造波水槽三維示意圖

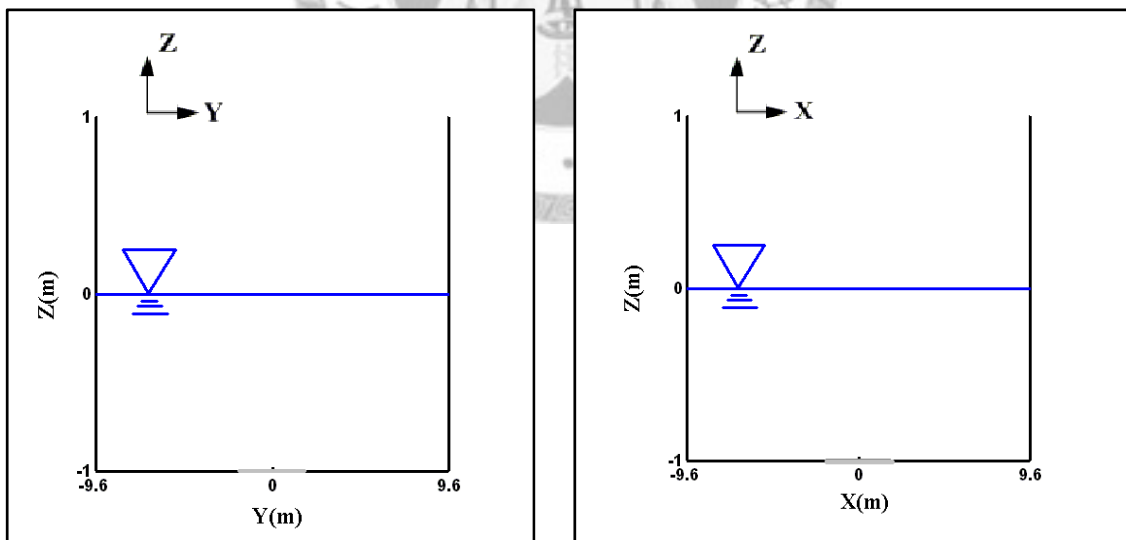


圖 3.11 垂向造波水槽側視圖

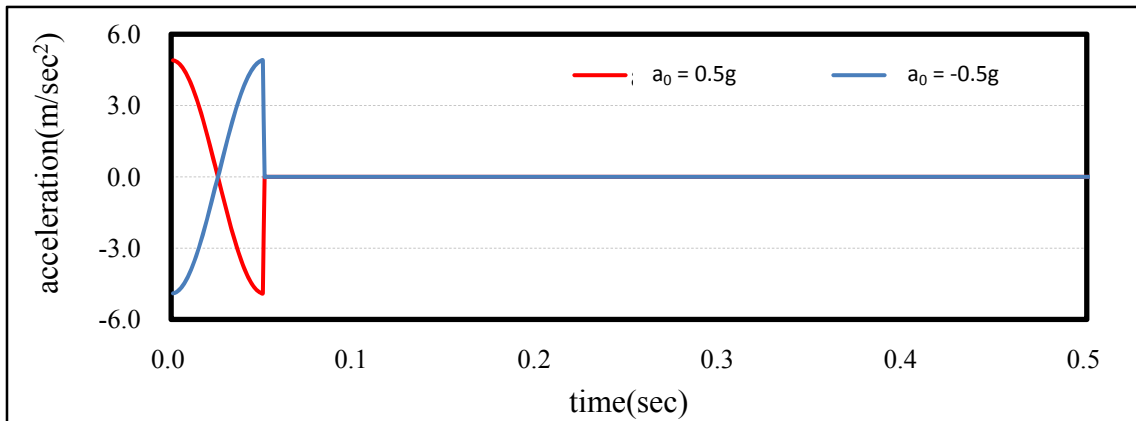


圖 3.12 垂向造波加速度歷線圖

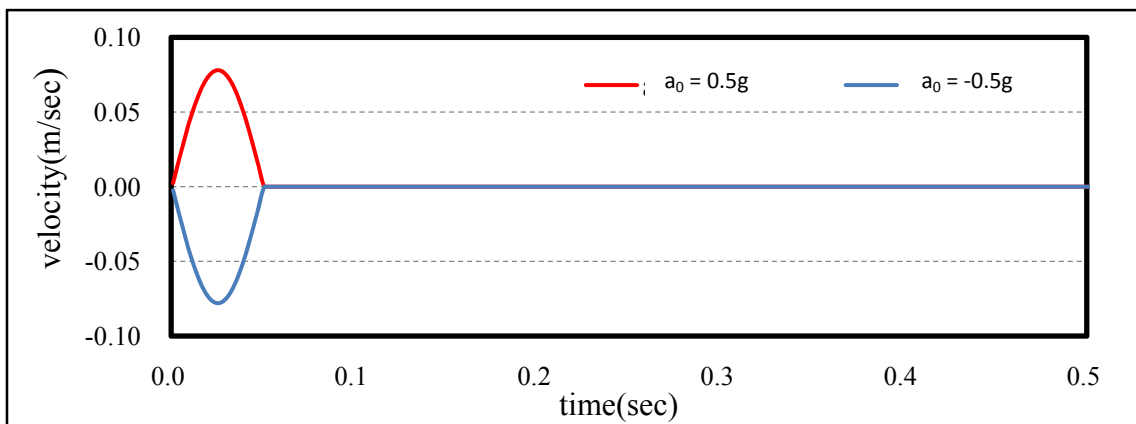


圖 3.13 垂向造波速度歷線圖

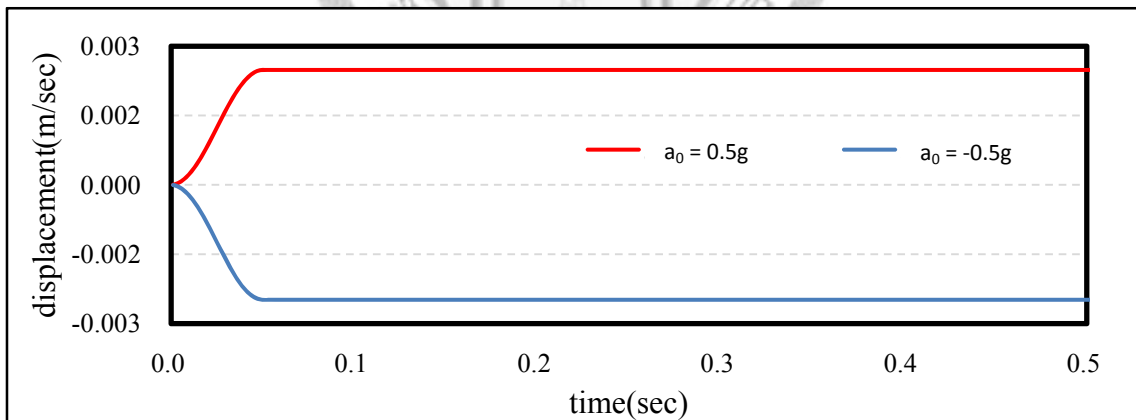


圖 3.14 垂向造波位移歷線圖

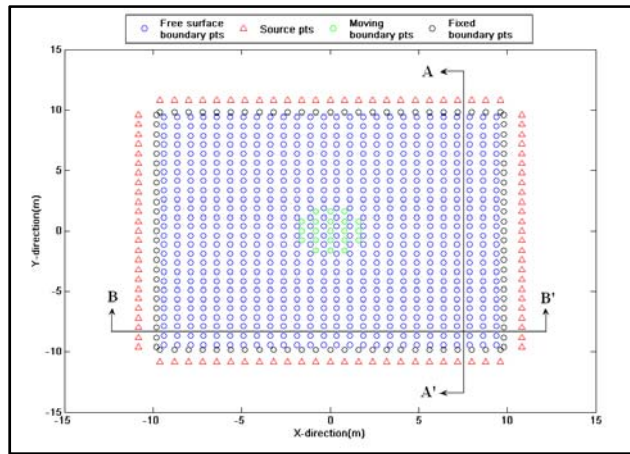


圖 3.15 垂向造波邊界布設俯視圖

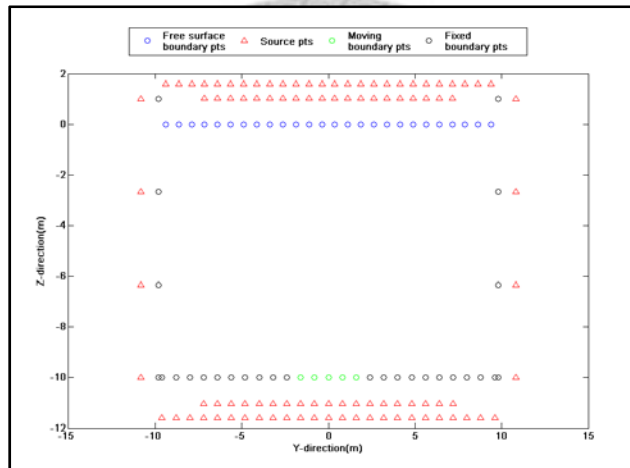


圖 3.16 垂向造波邊界布設 AA' 截面圖

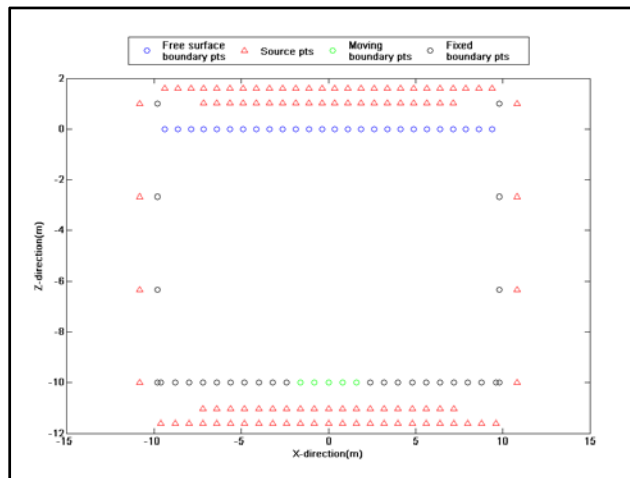


圖 3.17 垂向造波邊界布設 BB' 截面圖

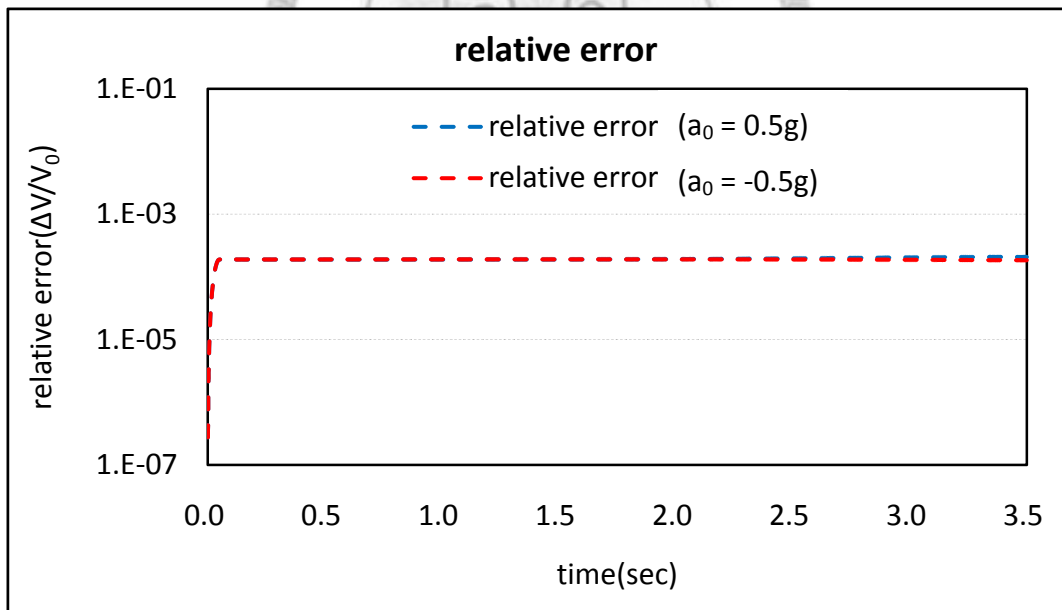
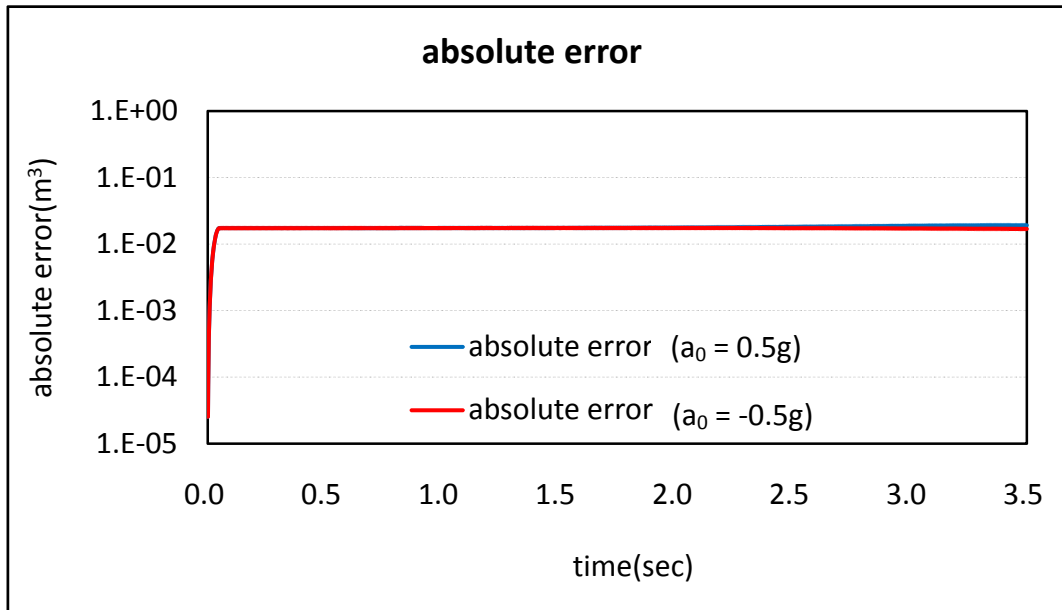


圖 3.18 垂向造波質量守恆檢驗

$a_0 = -0.5g$

$a_0 = +0.5g$

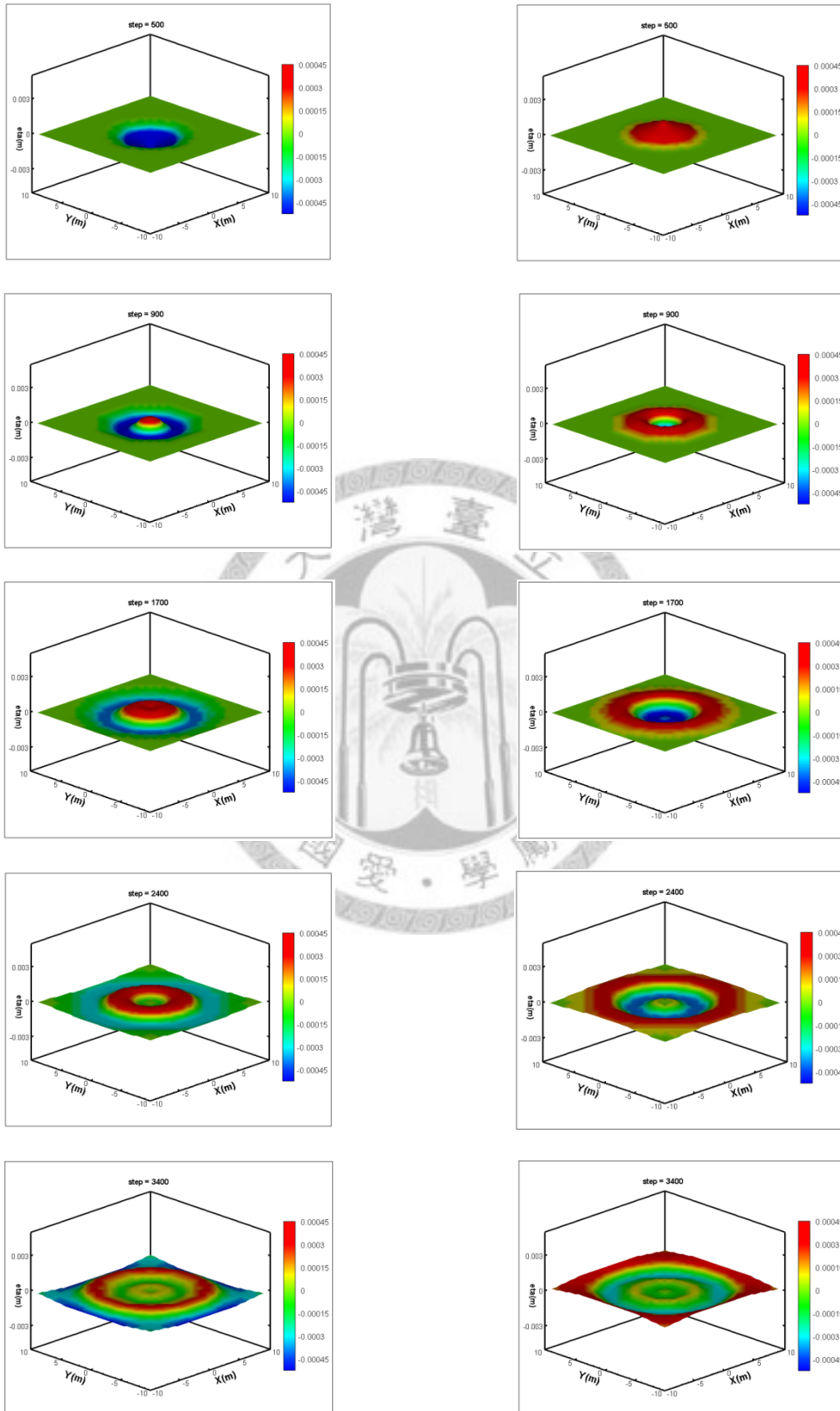


圖 3.19 垂向造波計算結果

第四章 數值模擬結果與討論

本章節會在基本假設(單層流體、無黏滯)的前提之下，以不同探討之方向，進行數個小尺度數值模擬邊界移動造波，並討論與定性分析其結果。

4.1 自由振盪

本小節所探討之案例為 3.3.1 節之延續，該節以不同時間之波形與質量守恆為驗證工具，而在此將繼續探討其他部分的模擬結果。

除了 3.3.1 節用以檢驗模式的模擬結果之外，圖 4.1 所示為自由液面在固定位置隨時間變化之曲線。紅線 (Left end) 代表自由液面在水槽沿著水平軸方向的最左端水位變化，而藍線 (Right end) 則是最右端；帶有三角形標記之綠色線則是引用自文獻(Kita, et al., 2004)之數據。由圖中可看出，在不考慮正與負的情況下，紅線在波峰與波谷處有些許高估的現象，而此現象亦出現於其後之圖 4.2。這是因為自由液面邊界的資料點，其分布範圍並未涵蓋液面與側壁接觸之交接線(計算區域之建立請詳見 3.3.1 節)。此舉之目的在於避免重複布點與解矩陣之病態情形(ill condition)。所以在計算這些灰色區域時，是輸入欲計算之座標位置，再利用方程式 (22) 計算不包含在自由液面邊界內之水位高程，雖然這導致了些微的差異，但是整體的趨勢仍然與文獻一致。再者，只要計算域內的資料點能夠確實掌握流體之水位高程，便可以確保此灰色區域有相當的可靠度。

而圖 4.2 則是將文獻(Kita, et al., 2004)與本模式在水槽左右兩端點之模擬結果一同取絕對值。此圖可以明顯地看出兩端水位高程並不一致，並且顯示出本模式之計算結果與 Kita 之資料皆具有這個兩端水位高程不相同的現象。這個結果代表整個自由液面之波形在縱向上並不是平滑而對稱的；從另一個角度來看，線性模式所計算出之自由液面在縱向上應當是對稱於物理邊界之幾何中心，所以水槽兩端之水位數值應該相同才是。是故，此一波形不對稱之現象是線性數值模式無法

突顯出的非線性效應，而且隨著時間增加，其兩端水位高程差距便越是顯著。

在瞭解圖 4.1 與圖 4.2 本模式計算結果與文獻 (Kita, et al., 2004) 資料差異之原因以後，便可以回頭說明在 3.3.1 節之中，圖 3.8 質量誤差呈現週期性振盪的現象。因為介於數值計算域與不透水邊界之間的自由液面會有高估或低估之現象，而這些液面高程會進一步導致質量計算的誤差，這也就是質量誤差呈現固定週期性的振盪緣由。再者，隨著液面擺盪幅度之增加，整體質量也會隨之產生相對應之增加或減少，這也解釋了為何質量誤差不但有週期振盪，同時也有逐時增加的現象。

接著，就數值計算方面之測試，由測試經驗中得知此自由振盪問題之計算點與中心點之布置方式與吳 (2008) 所建議之方式一致；惟有高斯形狀參數之適用範圍與文獻(吳，2008) 有所出入。吳 (2008) 在進行長波問題之數值模擬時，建議高斯形狀參數使用 1.0 倍~3.0 倍之格點間距；然而本短波計算之問題經由測試所得到之高斯形狀參數適用範圍是 2.5 倍~3.0 倍格點間距。另外，在計算權重係數 β 時，吳 (2008) 以鬆弛迭代法計算反矩陣。然而，本計算問題使用鬆弛迭代法容易造成發散，所以在此選擇高斯消去法以解決不穩定之問題。

針對自由振盪問題，另有自由液面之速度勢與流速計算結果列於附錄二。

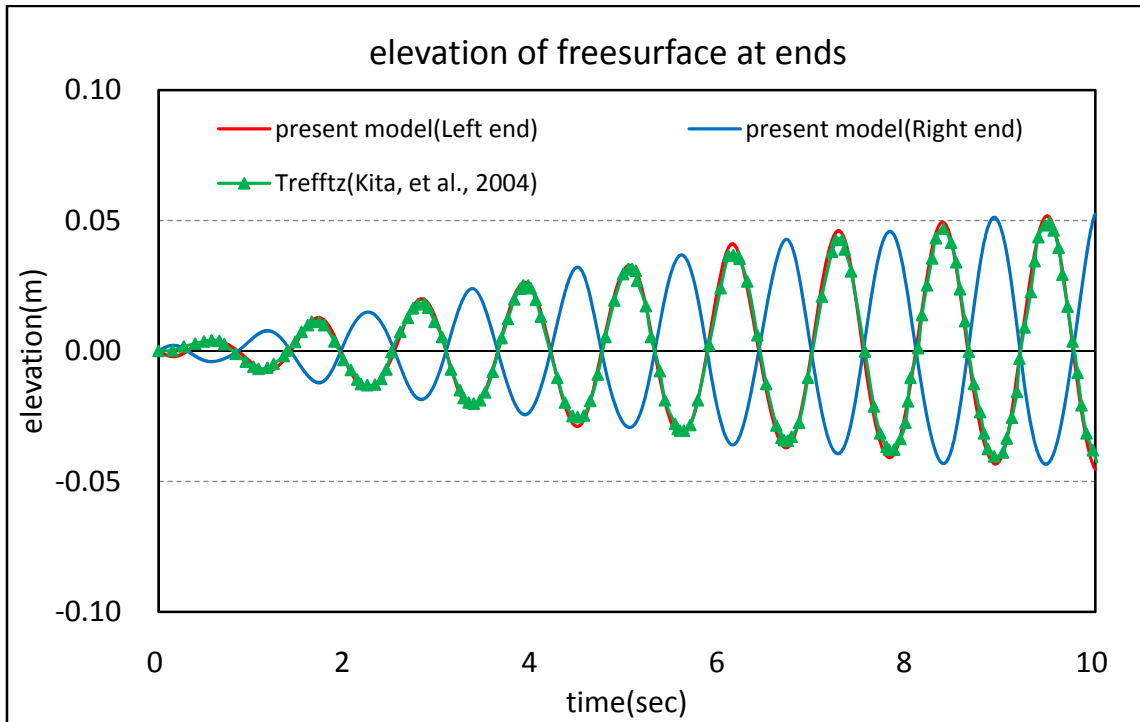


圖 4.1 端點水位圖

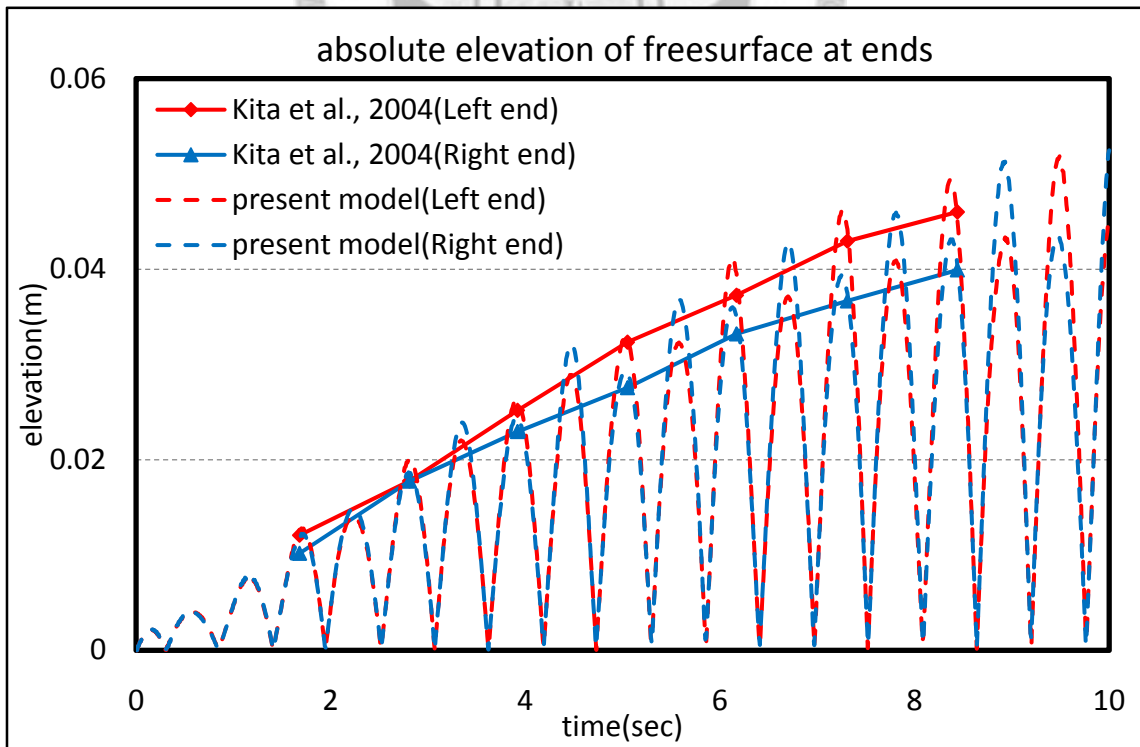


圖 4.2 端點絕對值水位圖

4.2 不同加速度

設計本節計算之動機在於觀察底床以不同之加速度產生位移對於水面之影響。由於本節所使用之加速度皆為以時間為變數之餘弦函數，故其加速度將隨著時間而由最大值逐時衰減，在此所設計之加速度函數皆讓速度由零增加，再減少至零而停止運動。其運動機制如下所示：

$$\begin{cases} A(x,t) = a_0 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) ; \text{for } 0 < t \leq t_c ; \text{for } 17 \leq x \leq 23 \\ A(t) = 0 ; \text{for } t > t_c \end{cases} \quad (29)$$

式中 $A(t)$ ：垂向加速度，為時間之函數，單位為 m/sec^2

a_0 ：初始加速度， m/sec^2

p ：週期， sec

t_c ：停止時間，為週期之一半， sec

由於流體是被動地受底床推擠而產生流動，因此底床的運動狀態需要經過一段時間才會影響到較遠處之流體；換句話說，當底床停止運動時，其自由液面處之垂向流速仍然存在，而基於連續體與質量守恆之觀念，其附近的流體勢必會受影響而開始流動。以底床隆起而言，當底部停止運動之瞬間，其上方之流體必定有垂直之正向流速，而此時水面將如何反應便是本節欲觀察之現象。

基於這個構想，本節設計四種不同初始加速度，分別為 0.5 g 、 1.0 g 、 1.5 g 與 2.0 g ；抬升高度則做為其運動之根據，在此設定造波邊界抬升垂直距離與水深之比值控制在 10 的負三次方，其詳細資料列於表 4.1。而運動狀態之歷線圖則繪於圖 4.3~圖 4.5。本數值計算之物理域是建立於長寬高各自為 60.0 m 、 5.0 m 及 1.5 m 之三維水槽，固定水深為 1 m 。而造波邊界位於縱軸中央位置，為長 6.0 m ，寬 5.0 m 之矩形，其示意圖呈現於圖 4.6。

在計算域布點方面，設定 $dx = dy = 1.0\text{ m}$ ， $dz = 0.5\text{ m}$ 。中心點與計算點相隔 1.5 倍 dx ，高斯形狀參數使用 2.0 倍 dx 。各邊界交接處則如同前述之方式，各邊界

在其互相交接之邊緣皆各自平移 0.25 倍 dx 。在時間域之部分，除了初始加速度 0.5 g 使用 0.005 sec 之外，其餘皆設定 $dt = 0.002$ sec，模擬至接觸兩端直立壁為止。之所以給定不同之 dt ，是考慮到各計算案例是否能夠收斂之緣故。計算域之建立如圖 4.7~圖 4.9 所示。

計算結果則呈現於圖 4.10，該圖僅呈現初始加速度 0.5g 之逐時波形。由圖可看出波浪生成之後向外傳遞約 10 m 之後，波高邊趨於穩定。而波形前端是一個主要的波峰，其後有一個振幅較小之波谷。圖 4.11 可以較清楚地看出，波谷連線在造波處 10 m 之外亦趨於穩定。

另外，圖 4.12 則是不同設計加速度之包絡線比較，在造波處除了黑線所代表之 $a_0 = 0.5$ g 其最高點略低之外，其餘三種初始加速度皆具有相近之峰值；而在造波處之外，其波峰與波谷之連線皆互相接近，代表四者在此區域之波高與波谷皆各自相近。而這可以進一步帶出一個結論：在此種造波機制之下，振幅大小可以由造波邊界之位移量所控制；換言之，振幅為垂向造波邊界位移之函數。此推論之理由在於，考慮到各種可能影響振幅之因素為初始加速度與垂向造波位移量，然而圖 4.12 否定了初始加速度之可能。因此，剩下之因素便是後者，也就是位移量影響此種造波機制的振幅。而這推論也符合物理現象，因為底床單純地產生垂向位移，自由液面便合該有相對應同等體積的波浪，這便是遵守質量守恆定律。

此外，包絡線能夠保持近乎水平而不致於有明顯的起伏，代表其能量在傳遞過程之中無消散；換句話說，此四個不同初始加速度之計算案例在能量守恆方面皆表現良好。其餘不同設計加速度之詳細計算結果，包含質量守恆、自由液面流速與自由液面速度勢計算列於附錄三。

表 4.1 不同加速度之設定

初始 加速度	p (sec)	t _c (sec)	最大加速度 (m/sec ²)	最大速度 (m/sec)	最大位移 (m)
0.5 g	0.170	0.085	4.883	0.133	0.0072
1.0 g	0.120	0.060	9.804	0.187	0.0072
1.5 g	0.100	0.050	14.703	0.234	0.0074
2.0 g	0.086	0.043	19.601	0.268	0.0074

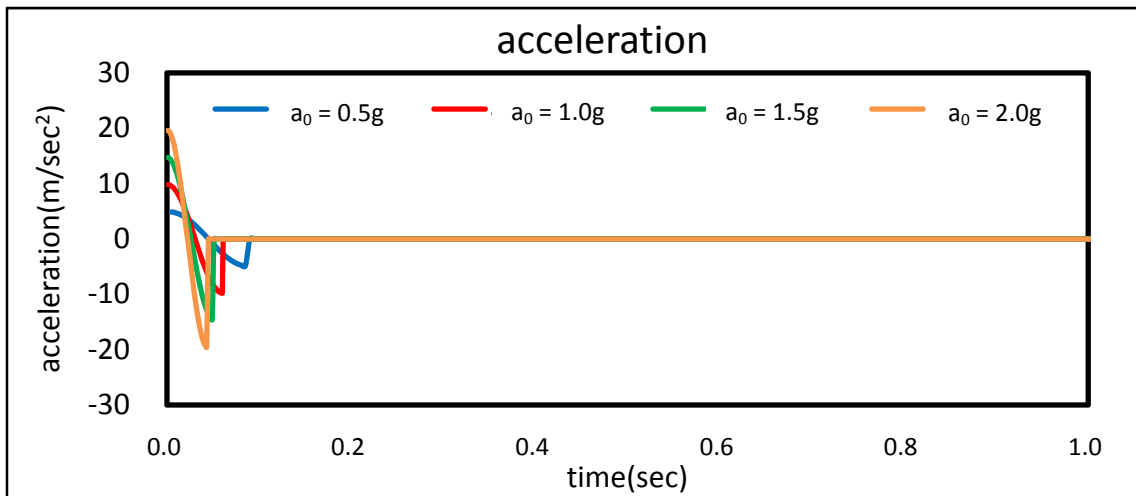


圖 4.3 不同加速度之加速度歷線圖

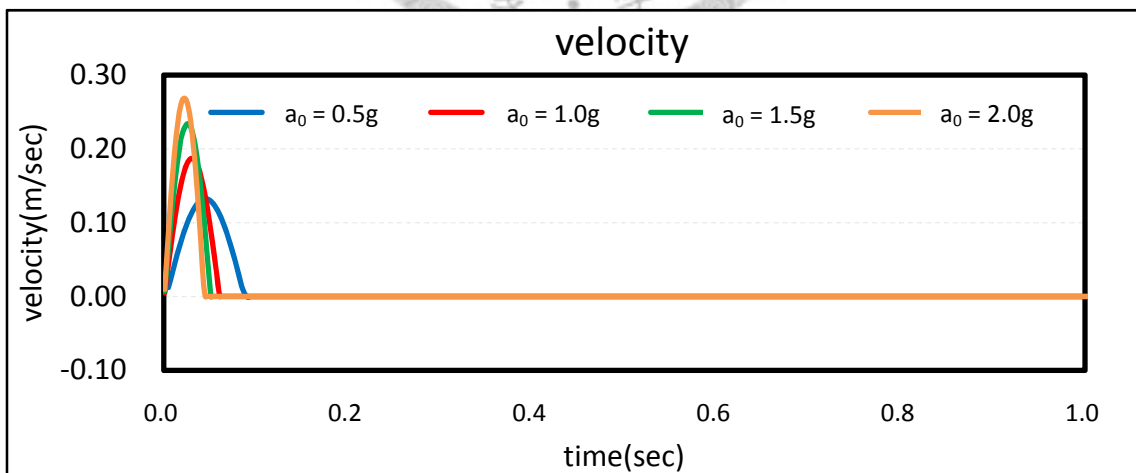


圖 4.4 不同加速度之速度歷線圖

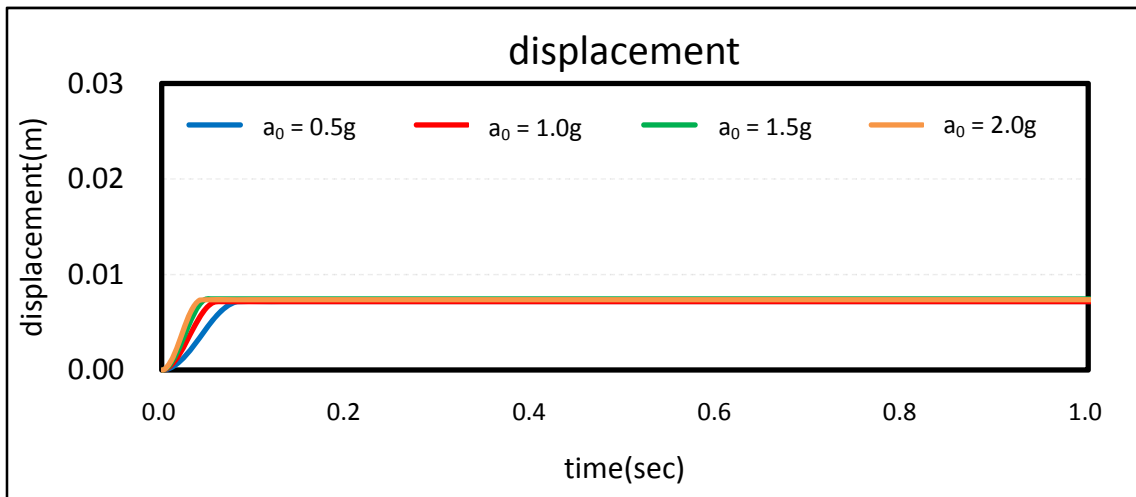


圖 4.5 不同加速度之位移歷線圖

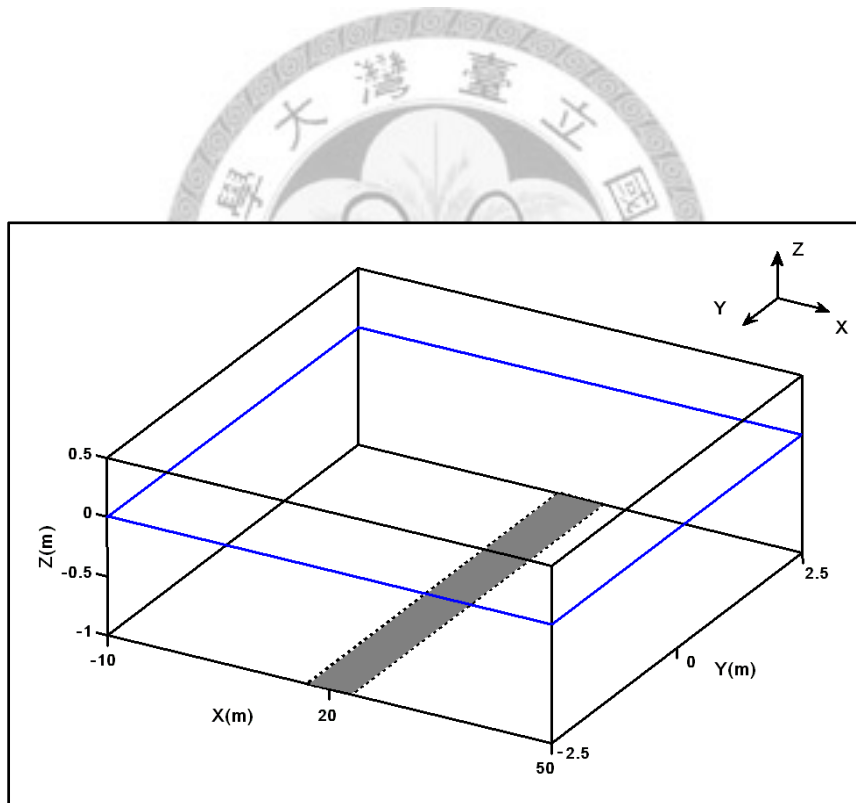


圖 4.6 不同加速度之三維水槽示意圖

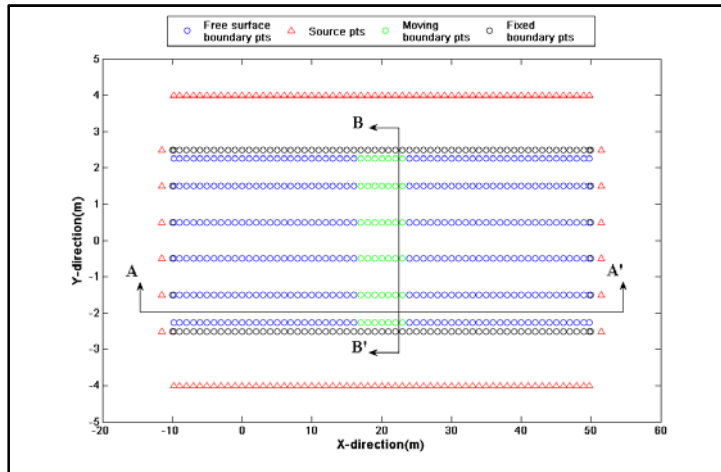


圖 4.7 不同加速度邊界布設俯視圖

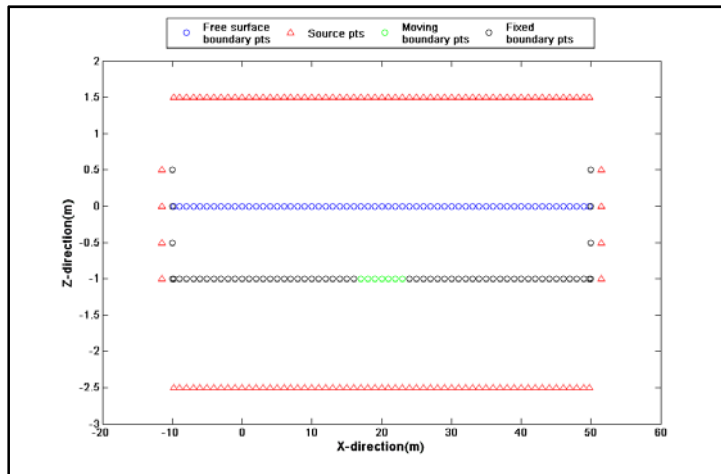


圖 4.8 不同加速度邊界布設 AA' 截面圖

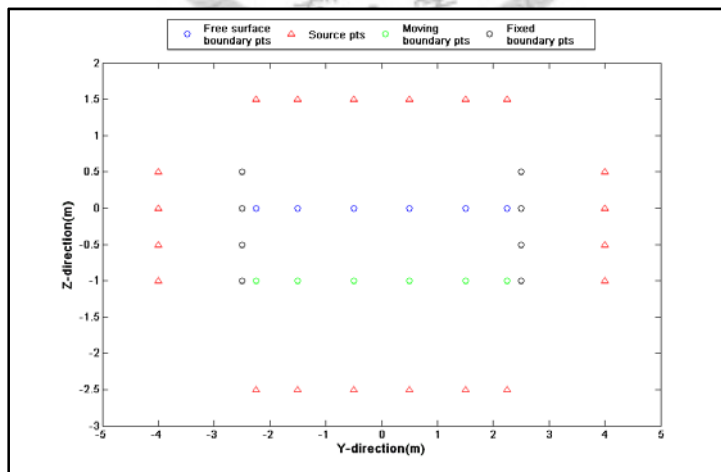
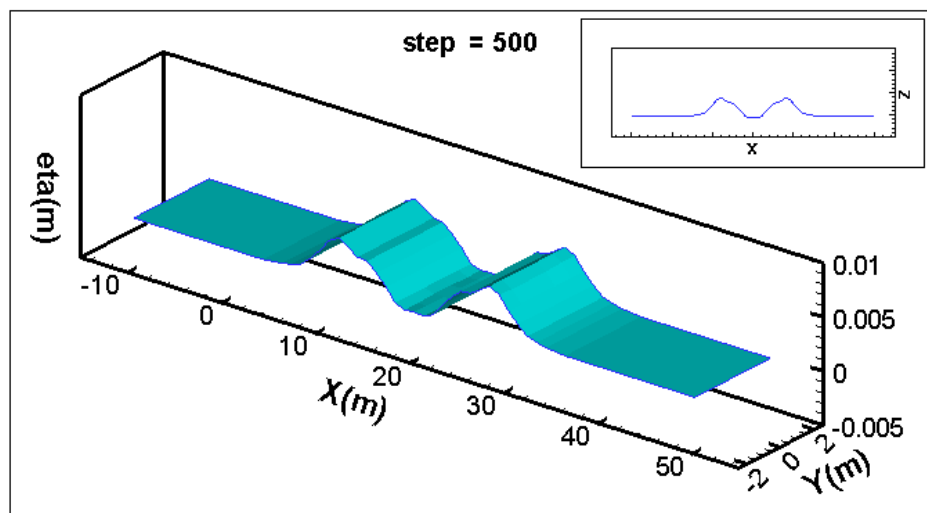
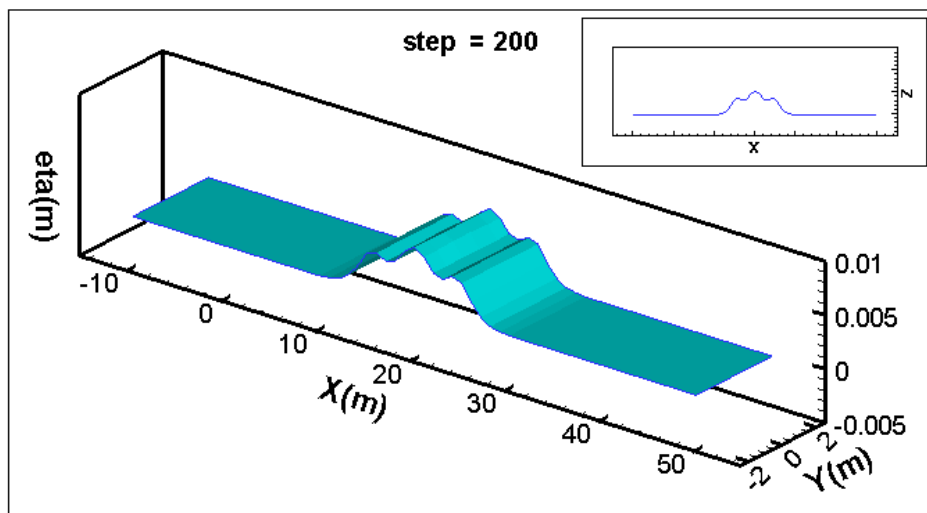
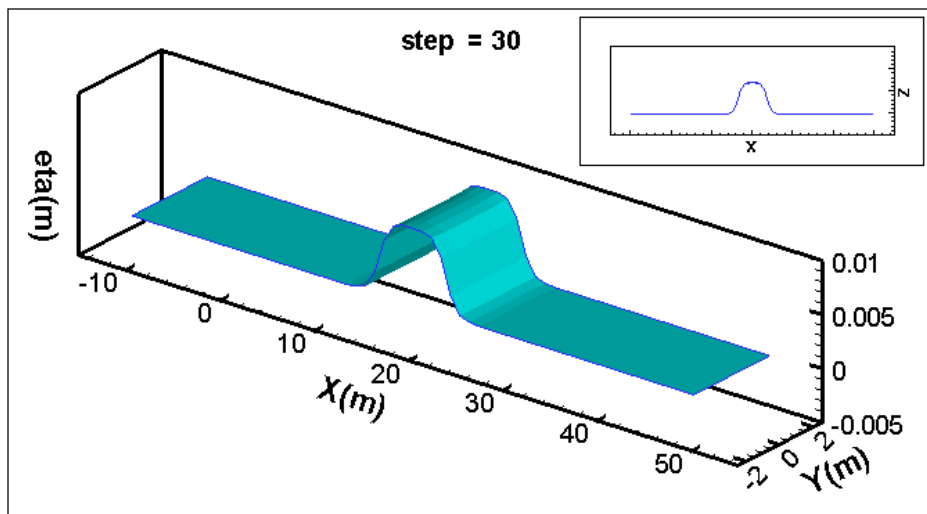


圖 4.9 不同加速度邊界布設 BB' 截面圖



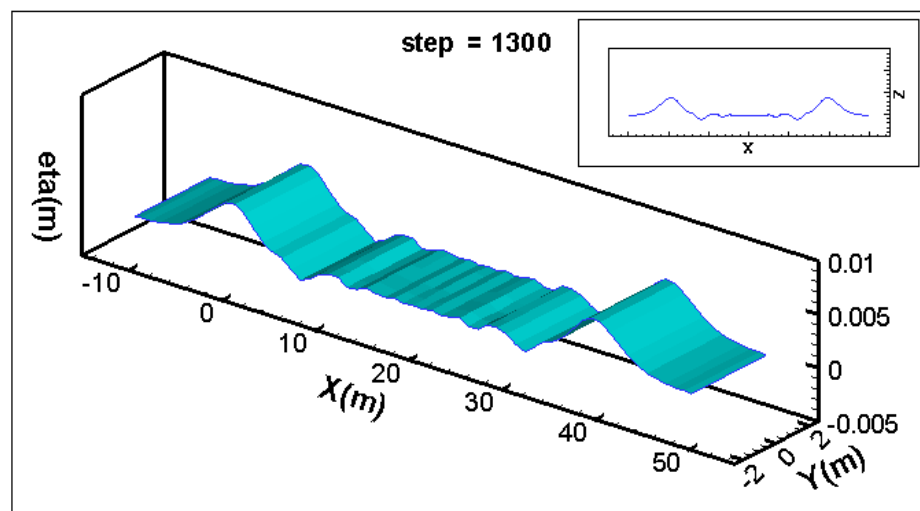
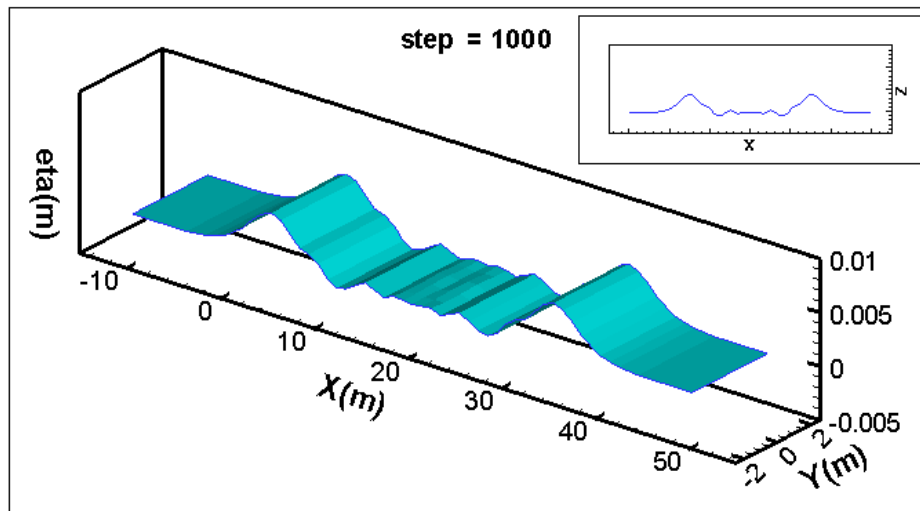
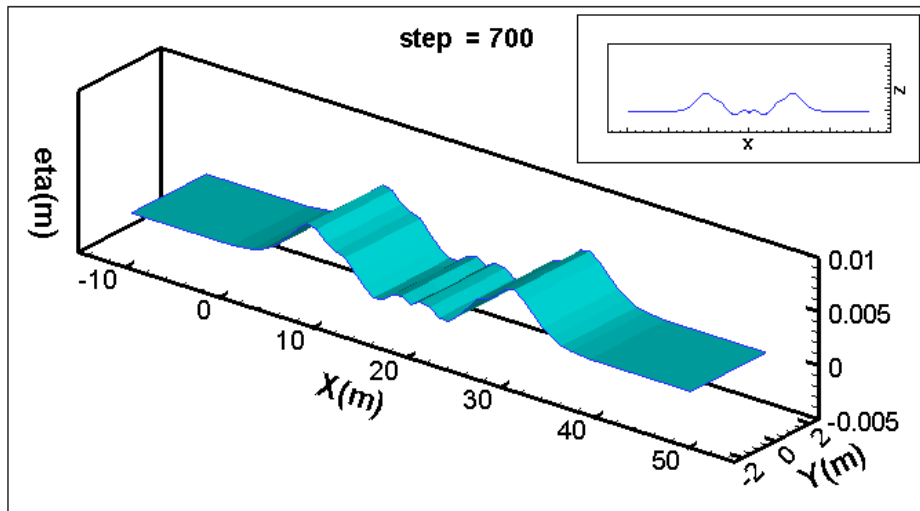


圖 4.10 初始加速度 0.5g 逐時波形

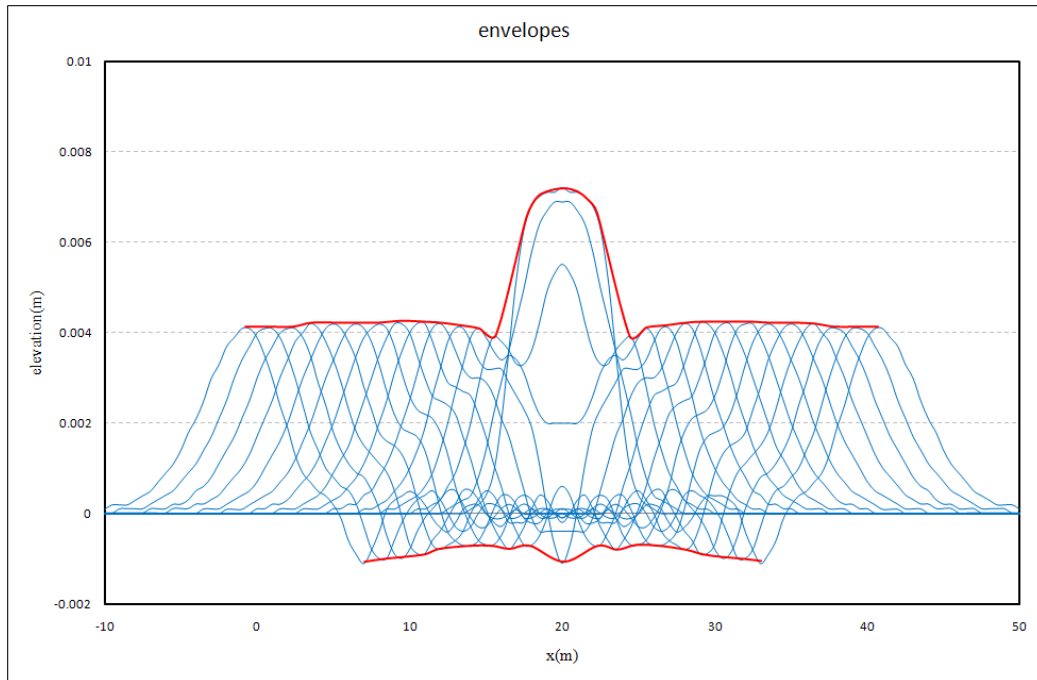


圖 4.11 初始加速度 0.5g 之包絡線

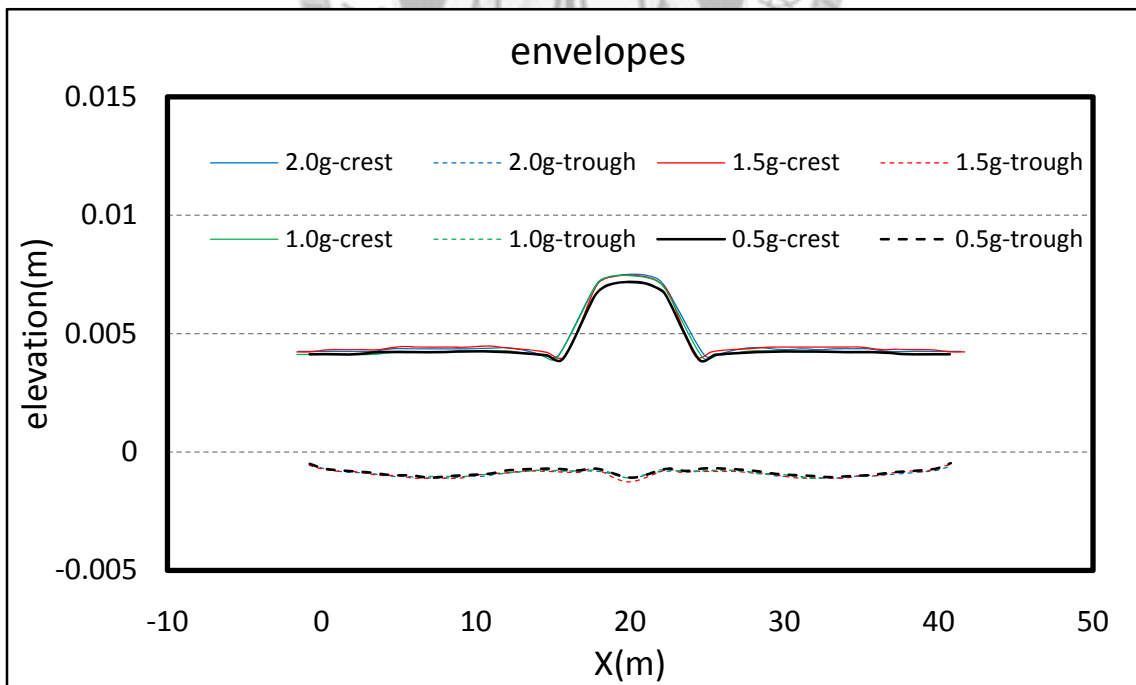


圖 4.12 不同初始加速度之包絡線比較

4.3 底床垂向造波於斜坡之溯昇

本節之下又分為兩個子節，其一為底床隆起，其二為底床下陷。設計此節之目的在於觀察由此兩種造波機制所產生之波浪，由生成至溯昇於斜坡之一連串變化過程。

此部分的物理域為長寬高分別是 70.0 m、5.0 m 與 1.5 m 之數值水槽，水深由 1.0 m 變化至 0.1 m，其底床淺化部份為 1 比 20 之斜坡，此斜坡之前緣位於距離水槽前端 42 m 處，而斜坡之後緣則是在距離水槽前端 60 m 之處，此斜坡之水平投影距離為 18.0 m。垂向造波段為 6.0 m 長，其前端位置落於水槽前端算起 16.0 m 之處。而水槽首端預留此 16.0 m 之目的在於使數值計算能夠更加地符合實際物理現象，因為現實之斷層皆發生於四周圍幾近是無限域之海底，因而將造波段由水槽之首端向內移了 16 m。至於水槽之末端，在水深變化至 0.1 m 時亦預留了一段長 10.0 m 之均一水深區域，其目的在於避免反射波干擾。其數值水槽示意圖展示於圖 4.13。

在數值計算方面， $dx = dy = 1.0 \text{ m}$ ， $dz = 0.5 \text{ m}$ 。中心點與計算點相隔 1.5 倍 dx ；高斯形狀參數給定為 2.0 倍 dx ，其布設如圖 4.14 與圖 4.15 所示。時間間隔則是 0.005sec，計算由開始至波浪通過斜坡為止。其造波段之運動機制如下所列：

$$\begin{cases} A(x,t) = \pm 0.5g \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) ; \text{for } 0 < t \leq 0.05 \text{ sec} ; \text{for } 16 \leq x \leq 22 \\ A(t) = 0 ; \text{for } t > 0.05 \text{ sec} \end{cases} \quad (30)$$

式中 p ：週期，在此給定為 0.17 sec

初始加速度 0.5g 為底床隆起，而 -0.5g 則代表底床下陷。其詳細之參數設定，包含週期、停止運動時間、最大加速度、最大速度與最大位移(不考慮正負號)一併列於表 4.2：

表 4.2 底床造波溯昇詳細參數設定

初始 加速度	p (sec)	t _c (sec)	最大加速度 (m/sec ²)	最大速度 (m/sec)	最大位移 (m)
+0.5 g	0.170	0.085	4.883	0.133	0.0072
-0.5 g	0.170	0.085	-4.883	-0.133	-0.0072

數值計算結果則各自呈現於 4.3.1 節與 4.3.2 節。另有自由液面之速度勢與流速計算結果，詳見附錄四。

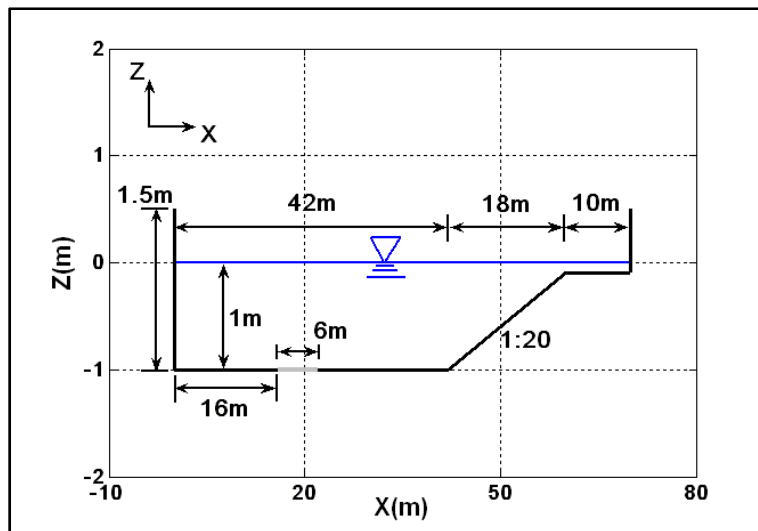


圖 4.13 變水深斜坡水槽示意圖

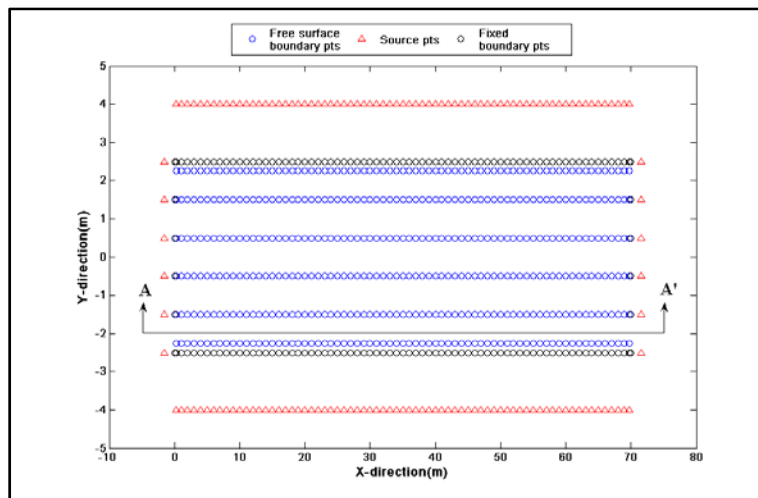


圖 4.14 變水深斜坡水槽邊界布設俯視圖

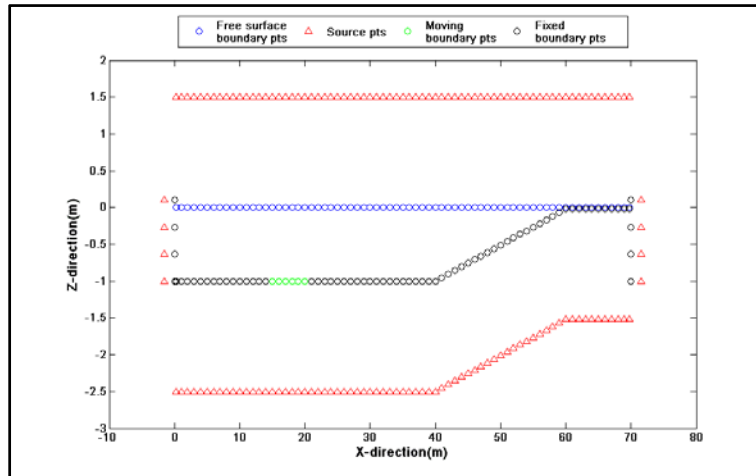


圖 4.15 變水深斜坡水槽邊界布設 AA' 截面圖

4.3.1 底床隆起造波溯昇於斜坡

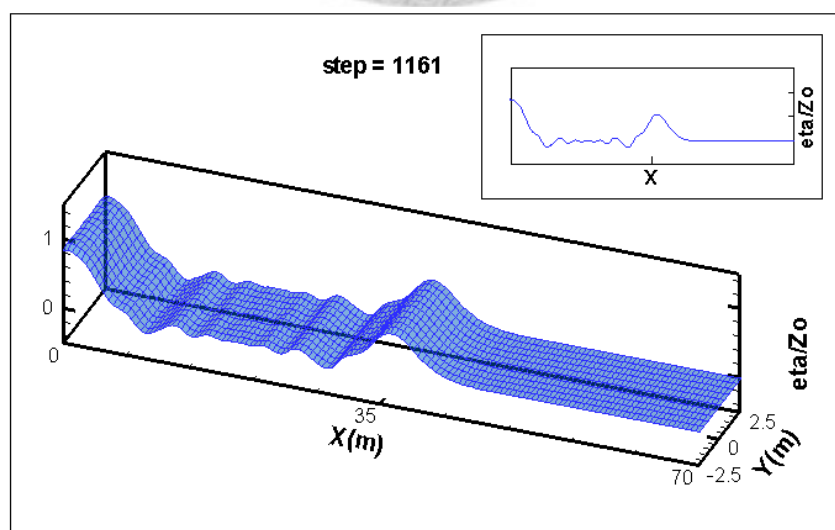
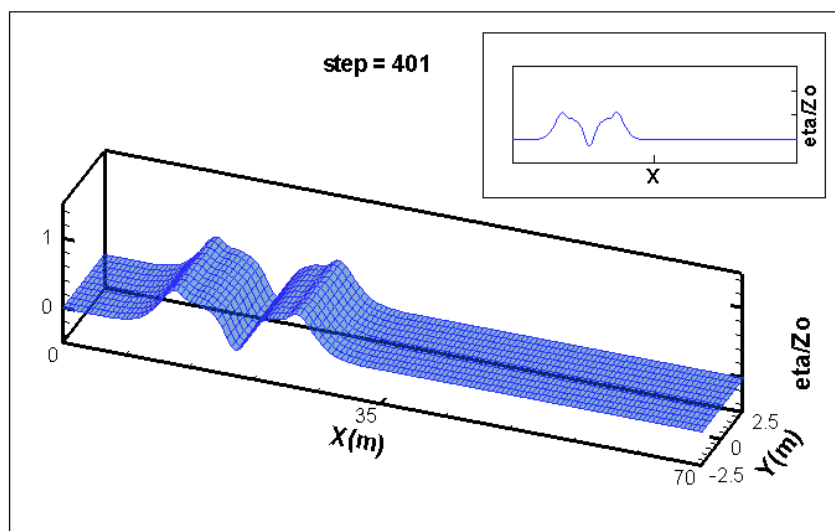
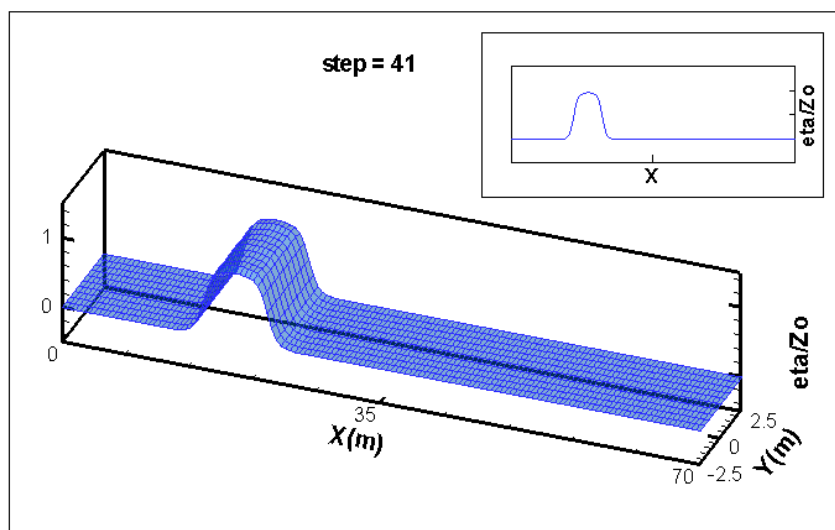
首先，圖 4.16 概略地呈現數值計算結果，該圖之垂直軸為波高除以底床最大位移，也就是量化後之波高，並且使用兩種視角以利觀察其水波通過斜坡之變化。水波在造波處生成之後向外傳遞，其波形在於 x 方向 30~40 m 之處逐漸穩定；然後在 40~60 m 之斜坡上開始變形，其波長縮小而波高增加，並且漸漸形成貌似孤立波之波形；接著，波形在通過斜坡之後便再度趨於固定。在圖 4.17 中可以約略地看出其連續變化，其波形由厚而鈍逐漸轉變為尖銳、波長較短之水面波。附帶一提，圖 4.17 之縱軸亦為經過量化之波高。

圖 4.17 展示了本節計算結果之包絡線（以紅色虛線表示），圖中各條藍色實線皆相間隔 200 步，亦即各自相距 1 秒。該圖可以看出兩件事：一為波峰與波谷連線之變化，波峰之連線在 x 軸 30 m~40 m 處皆能大略保持水平，此現象代表水波在這段距離之傳遞過程中，其能量守恆表現良好。而波浪通過斜坡之後，其波形的改變不但使得波長縮短與波峰增加，其後原本振幅較小之波谷亦受斜坡影響而加深，並且在 x 方向 60 m 之後其波形不再大幅改變；另一件事為波速之減緩，不論是淺水波（shallow water waves）或者是中間水深（intermediate depth waves）之波速計算，皆具有水深越深則波速越快，反之水深愈淺則波速愈緩慢的特點。而這個現象可以在圖 4.17 中明顯地看出，因為在 x 方向 40 m 之後其波形趨於密

集，尤其是在 60 m 後其密集程度更加地顯著，這代表在單位時間內波浪移動的距離減少，換言之，就是因為水深減少而造成波速的減緩。

此外，波長由長而短即代表水波由原本相對的低頻轉為相對高頻，而這便是淺化現象 (shoaling)。而形成此現象之原因是在於波速之差異，因為波速不等而造成波高之重疊與波長之變化。





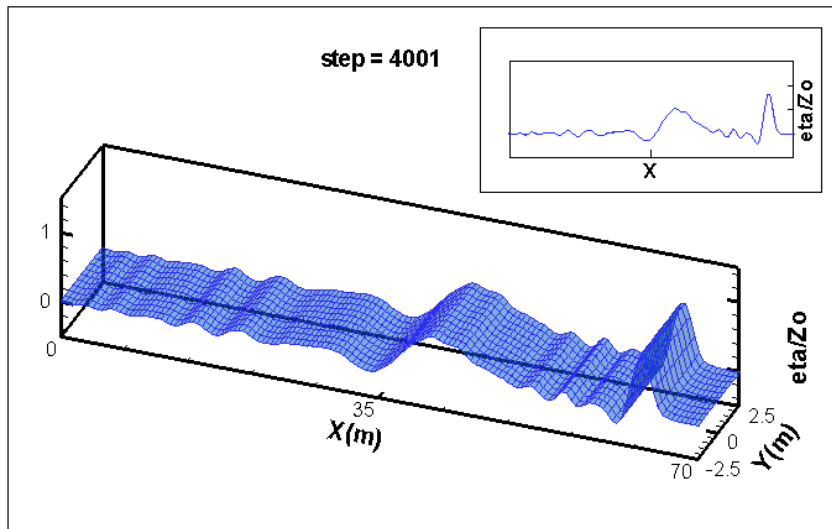
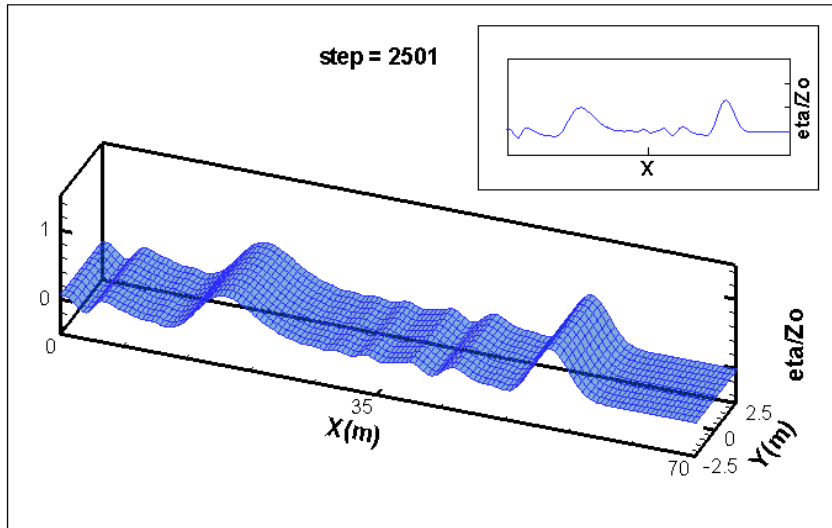
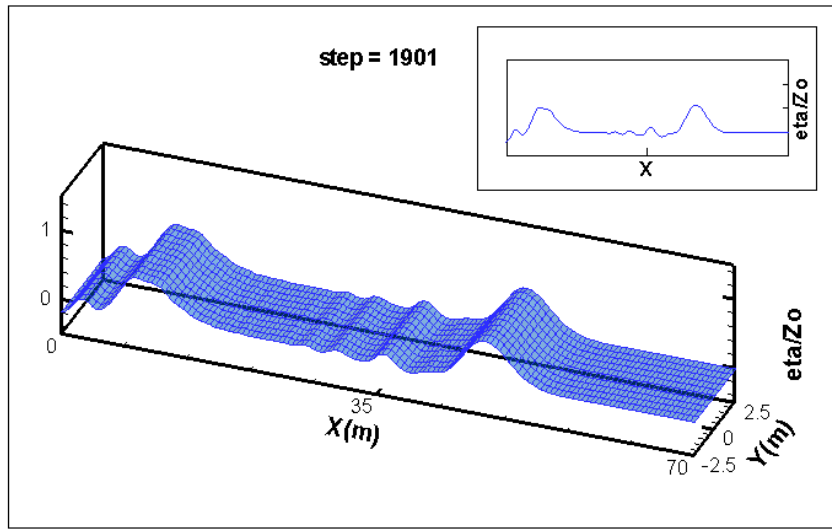


圖 4.16 底床隆起溯昇逐時波形

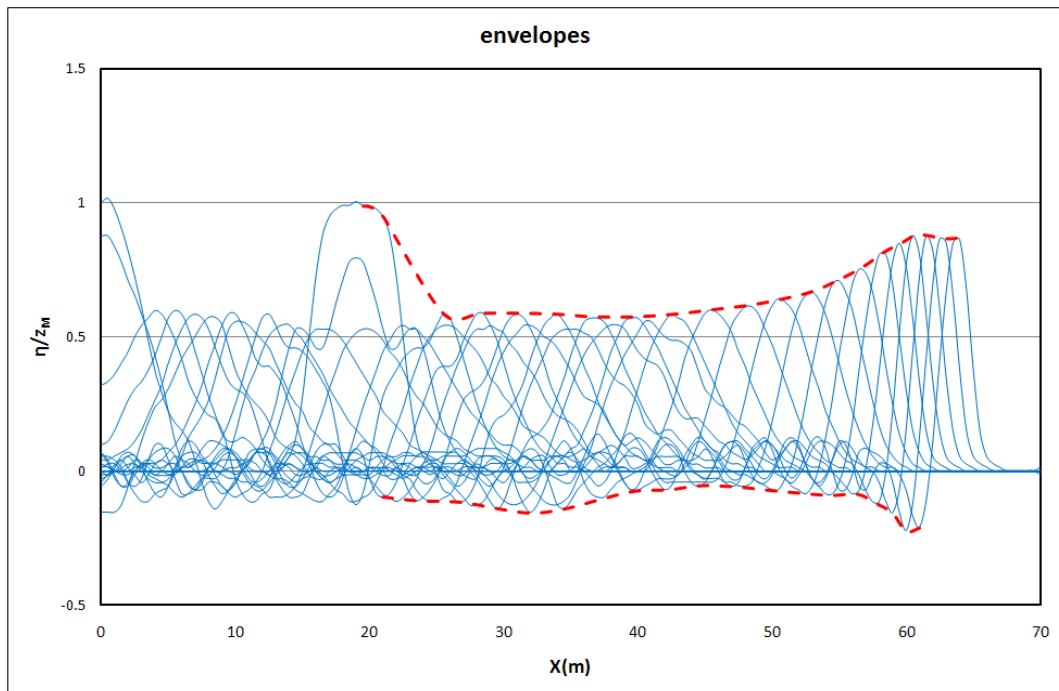


圖 4.17 底床隆起溯昇包絡線

4.3.2 底床下陷造波溯昇於斜坡

本小節之計算結果如圖 4.18 所呈現，該圖大略地展示各階段之波形。由圖可以看出，單以順著 x 軸之方向而言，較穩定之波形在造波處外圍約 10 m 處，亦即 x 方向 30 m 左右之處形成；而前進波在 x 向 40~60 m 區段內逐漸淺化，波長縮減且波谷加深，最後趨於通過 x 向 60 m 以後之波形。

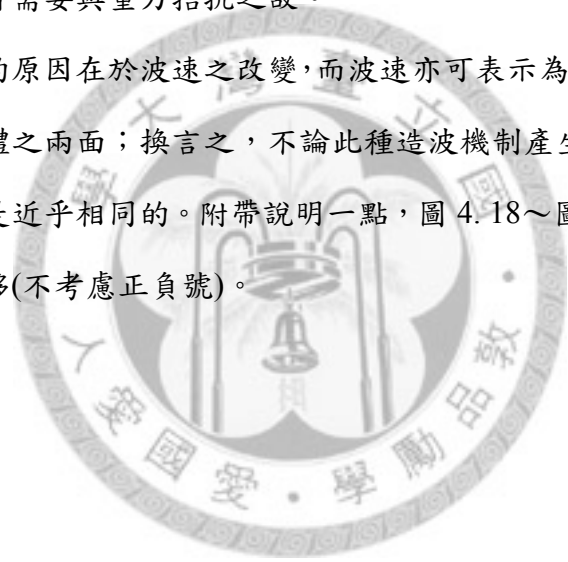
而圖 4.19 為此計算案例之包絡線，由紅色虛線可清楚地瞭解其波谷在 x 軸 30m 後便趨於穩定之水平。在 x 軸介於 40 m 與 60 m 之中，不但波谷之連線逐步降低，此範圍內之逐時波形亦趨向密集，直到水波通過 x 軸 60 m 後方開始穩定。此時之波形有一明顯波谷，其後之波峰不但較小，也不符合對稱性，這代表水波之非線性效應受到斜坡之影響而放大。而此非線性效應受到放大之現象亦有出現於 4.3.1 節之計算結果。

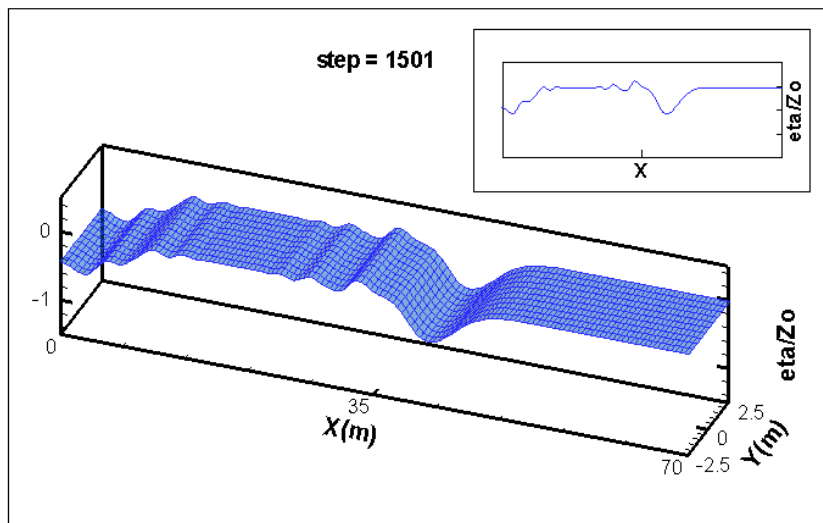
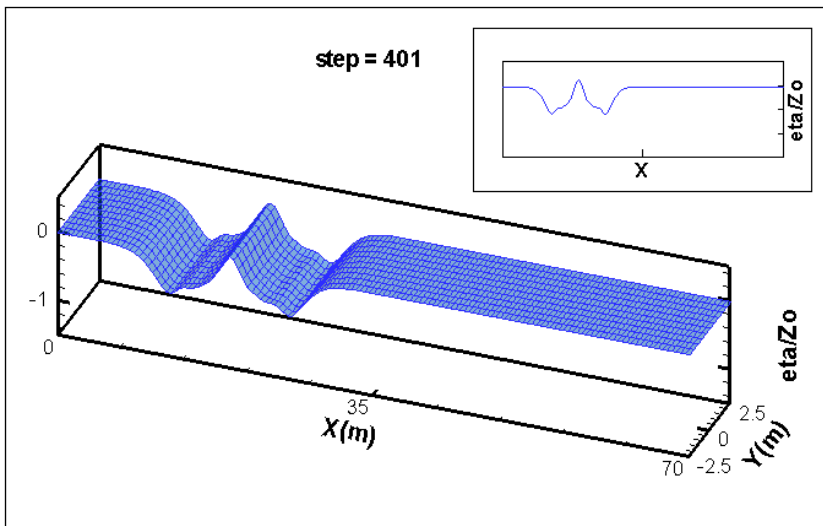
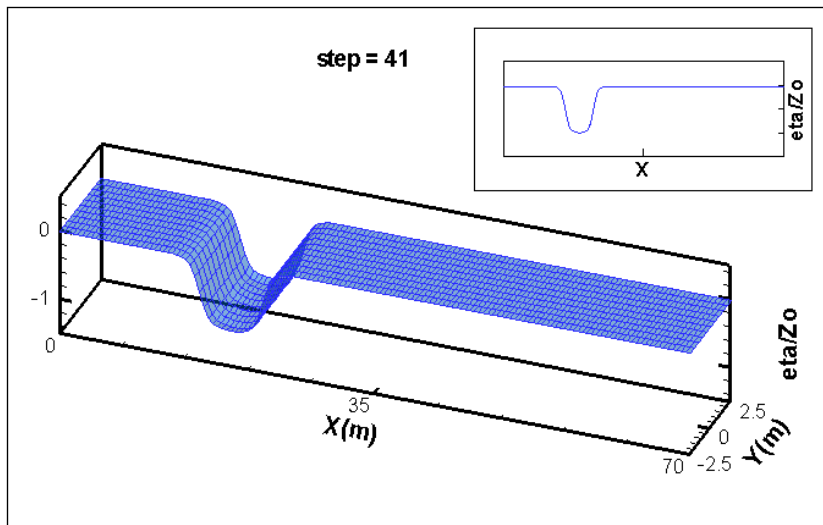
由於圖 4.19 各波形為互相間距 200 個時間步之計算結果，故此密集趨勢代表

波速在水平方向 40 m 之後減緩，而此現象於前一小節之成果相同。因此，綜合振幅與波長之變化，可以瞭解此計算案例同樣有類似在 4.3.1 節所產生之淺化現象，唯在此是形成波谷之淺化。

圖 4.20 是將圖 4.19 之包絡線縱軸乘上負號之後，再與前一節圖 4.17 包絡線比較之結果。可以由此圖看出兩者幾近一致，直到斜坡後段方開始產生差異。這代表不論造波段是隆起或下陷，其產生之水波在通過斜坡時具有幾乎相同之淺化方式。針對兩者波形不同之比較，圖 4.20 中可以看出兩者之差異僅出現於造波段與斜坡後段兩處。在此兩處，底床隆起案例之波高皆略低於另一者，推測是因水波生成與變化時皆需要與重力拮抗之故。

由於造成淺化的原因在於波速之改變，而波速亦可表示為斜坡或水深之函數，又水深與斜坡為一體之兩面；換言之，不論此種造波機制產生之波峰或波谷，其淺化時之波形變化是近乎相同的。附帶說明一點，圖 4.18~圖 4.20 之縱軸皆為波高除以最大底床位移(不考慮正負號)。





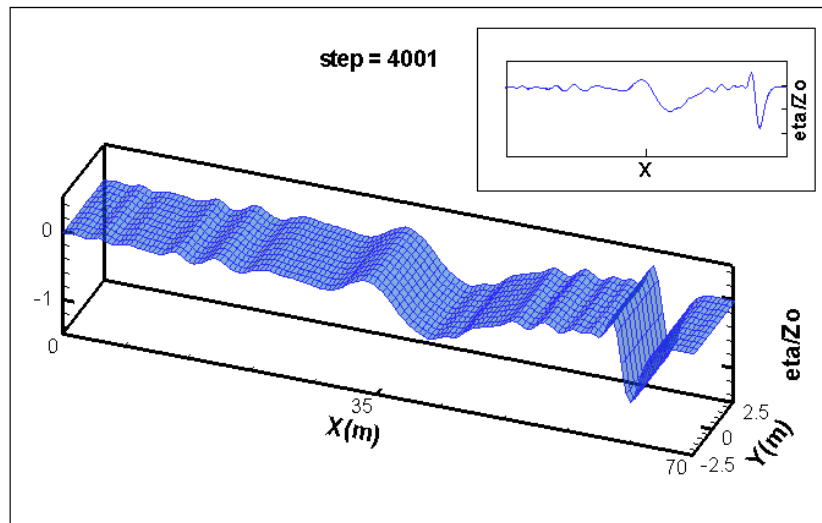
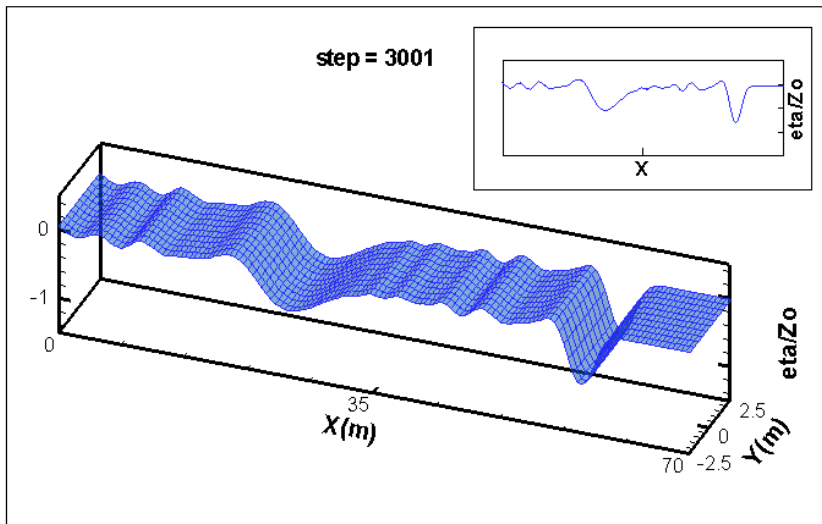
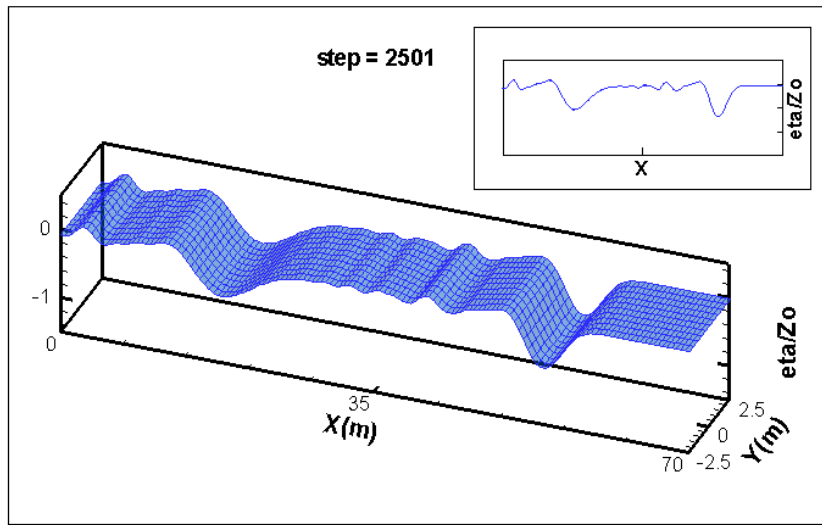


圖 4.18 底床下陷溯昇逐時波形

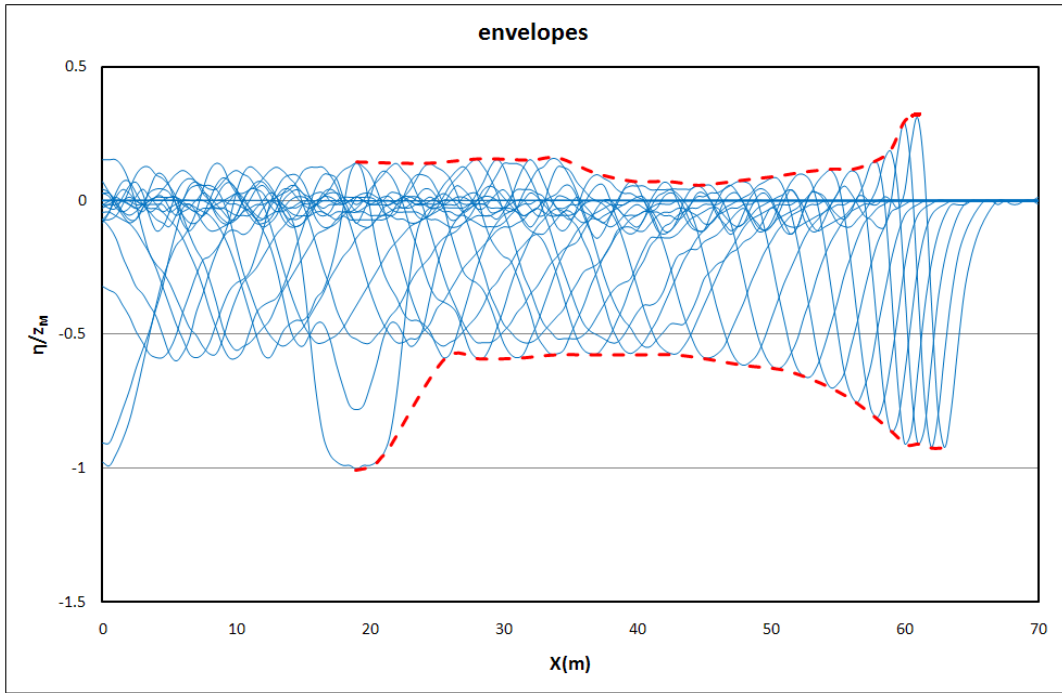


圖 4.19 底床下陷溯昇包絡線

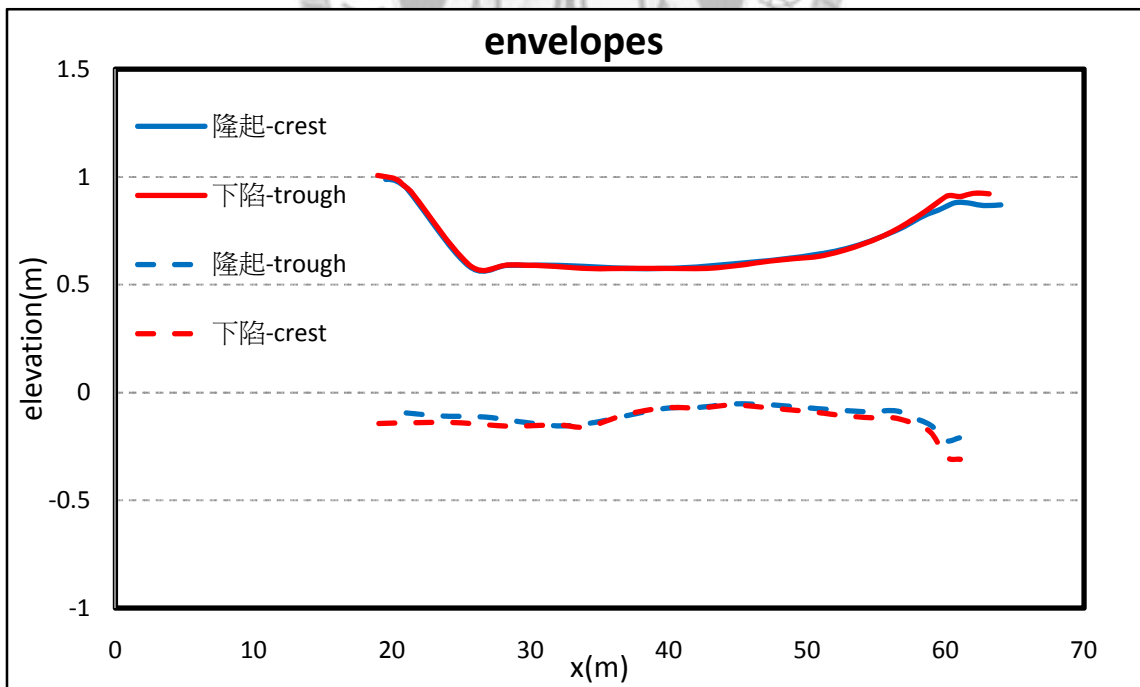


圖 4.20 底床隆起與下陷包絡線之比較

第五章 結論與建議

5.1 結論

整合前面各篇章節，以下就簡單地以邊界水平移動造波、邊界垂向移動造波以及數值處理之技巧，三個方面扼要地整理出本研究之結論：

1. 在邊界水平位移造波方面，根據 3.3.1 節之驗證以及 4.1 節之相關討論，包含質量守恆驗證與逐時波形之對照 (Kita, et al., 2004)，其結果顯示以吳 (2008) 所建構之完全非線性無網格數值模式數值模擬自由振盪問題，能夠準確地模擬自由液面之運動，並表現其非線性之效應；此外，亦能夠以不經由內插之方式計算自由液面之流速與速度勢。而在高斯形狀參數之選用上，吳 (2008) 所選用之 1.0~3.0 倍之格點間距適用於長波問題。然而，在計算此類短波問題時則建議使用 2.5~3.0 倍之計算點間距做為高斯形狀參數之設定。否則自由液面將因為過度擬合 (over-fitting) 所產生嚴重之不對稱現象而導致發散。另外，在計算自由液面梯度求解反矩陣時，則改以高斯消去法取代鬆弛迭代法以解決發散之問題。
2. 至於邊界垂向位移造波，根據本數值模式在 3.3.2 節、4.2 節與 4.3 節之計算結果與其討論可以綜合得到以下幾點結論。第一，底床隆起所造成之波形，其傳出之順序是先波峰而後是一個較小之波谷，而且此結果與初始加速度之大小無關。第二，經由包絡線之比較而得知振幅不為為初始加速度之函數；換言之，振幅是由造波段之垂向位移量所控制。第三，由底床垂向位移所造成之水面波淺化現象，不論是波峰或波谷通過一段斜坡，其水波之變形方式皆同。第四，由 3.3.3 節與 4.3 節之結果可以歸納出，底床隆起造成波峰先往外圍傳遞；反之，底床下陷則產生波谷於

最外圈傳播出去。

3. 在數值計算方面，由於本研究設計之各計算案例，其中大多數皆具有相當大之初始加速度，而給定此種運動機制之邊界條件在 dt 過大時會不容易收斂而導致固定點水面高程隨時間呈鋸齒狀振盪現象。然而給定較小之 dt 雖然能夠確保收斂，卻會耗費大量計算時間。因此建議在造波邊界仍在運動期間使用二分之一倍 dt ，待其造波結束後再轉換為原設定之 dt 。另一方面，在進行自由振盪問題解矩陣之計算時，為求誤差之控制，建議使用直接解（direct solver），例如高斯消去法；反之，若是使用迭代解（iterative solver）則須確保該時間步之收斂方能穩定控制誤差。

5.2 建議

在處理自由振盪之類似問題時，由前列各章節之敘述可知本數值方法能夠相當準確地進行數值模擬，相信有其應用至工程實用層面之潛力，例如建築物上水塔之抗震設計。然而，其計算自由液面所需之高斯形狀參數需要反覆測試出最適合之範圍，除非參考相關文獻之建議以外，否則將會耗去不少時間與研究心神。更甚者，每每遇到不同類型之計算案例時，原有之參數範圍亦不見得百分之百適用，故需要針對個案分別進行參數細調之工作。

因此，針對此高斯形狀參數的敏感問題，後續之研究可以嘗試以自動率定之方式尋找出適合特定計算問題之最佳化參數。此外，在自由液面之計算上，亦可思考另一個可能的方向，以不同之方式處理自由液面，並朝著碎波計算之方向研究，如此一來便可數值模擬共振問題，更可以增加模式之應用層面。

而在嘗試模擬海嘯之計算方面，可以朝著多層流體之假設方向去研究，因為在波浪力學相關之研究裡，亦有許多現象是屬於這個領域之內的問題，例如內波

(internal waves) 之計算便是其一。

此外，就數值處理層面而言，改進解矩陣之計算也是一個可能的後續研究方向。雖然第 3.2.1 節與 3.2.3 節所選用之兩組幅狀基底函數皆能夠使得係數矩陣近似於稀疏矩陣 (sparse matrix)，進而降低求解矩陣所花費之計算時間。然而，一旦遇上不易收斂之計算問題，為求能夠良好地控制誤差，不論是選用迭代解而提高迴圈次數，或是選擇直接解，都會失去稀疏矩陣原有之優勢。有鑑於此，如何建立一個具有強健性、能廣泛應用各類計算問題，並且擁有高效率計算能力之解矩陣方法，實有其必要性。



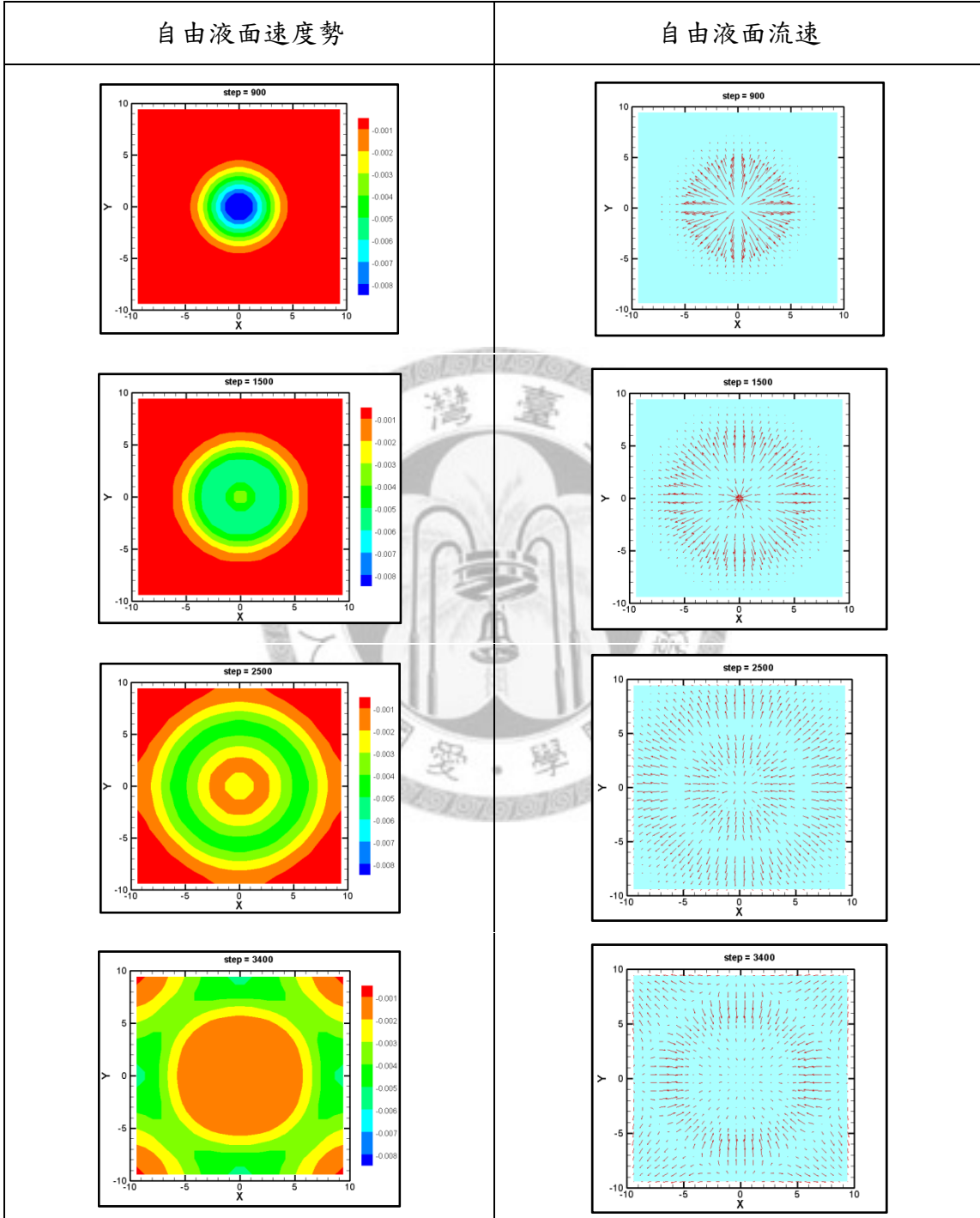
參考文獻

- [1] Mobley C. D. and Stewart R. J. (1980), "On the Numerical Generation of Boundary-Fitted Orthogonal Curvilinear Coordinate Systems", *Journal of Computational Physics*, 34; pp.124-135.
- [2] Kita E. and Kasturagwa J. and Kamiya N. (2004), "Application of Trefftz boundary element method to simulation of two-dimensional sloshing phenomenon", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28;677-683
- [3] Haussling H. J. and Coleman R. M. (1981), "A Method for Generation of Orthogonal and Nearly Orthogonal Boundary-Fitted Coordinate Systems", *Journal of Computational Physics*, 43; pp.373-381
- [4] http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- [5] Liu, P. L.-F. (2005), "Tsunami simulations and numerical models. The Bridge, National Academy of Engineering", 35(2); pp.14-20.
- [6] Wu N.-J. and Tsay T.-K. (2009), "Applicability of the method of fundamental solution to 3-D wave-body interaction with fully nonlinear free surface", *Journal of Engineering Mathematics*; 63; pp.61-78
- [7] Wu N.-J. and Tsay T.-K. and Young D.-L. (2006), "Meshless numerical simulation for nonlinear water waves", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*; 50; pp.219-234
- [8] Wu N.-J. and Tsay T.-K. and Young D.-L. (2008), "Computation of Nonlinear Free-Surface Flows by a Meshless Numerical Method", *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, pp.97-103
- [9] Chantasiriwan S. (2009), "Modal analysis of free vibration of liquid in rigid container by the method of fundamental solutions", *Engineering Analysis*

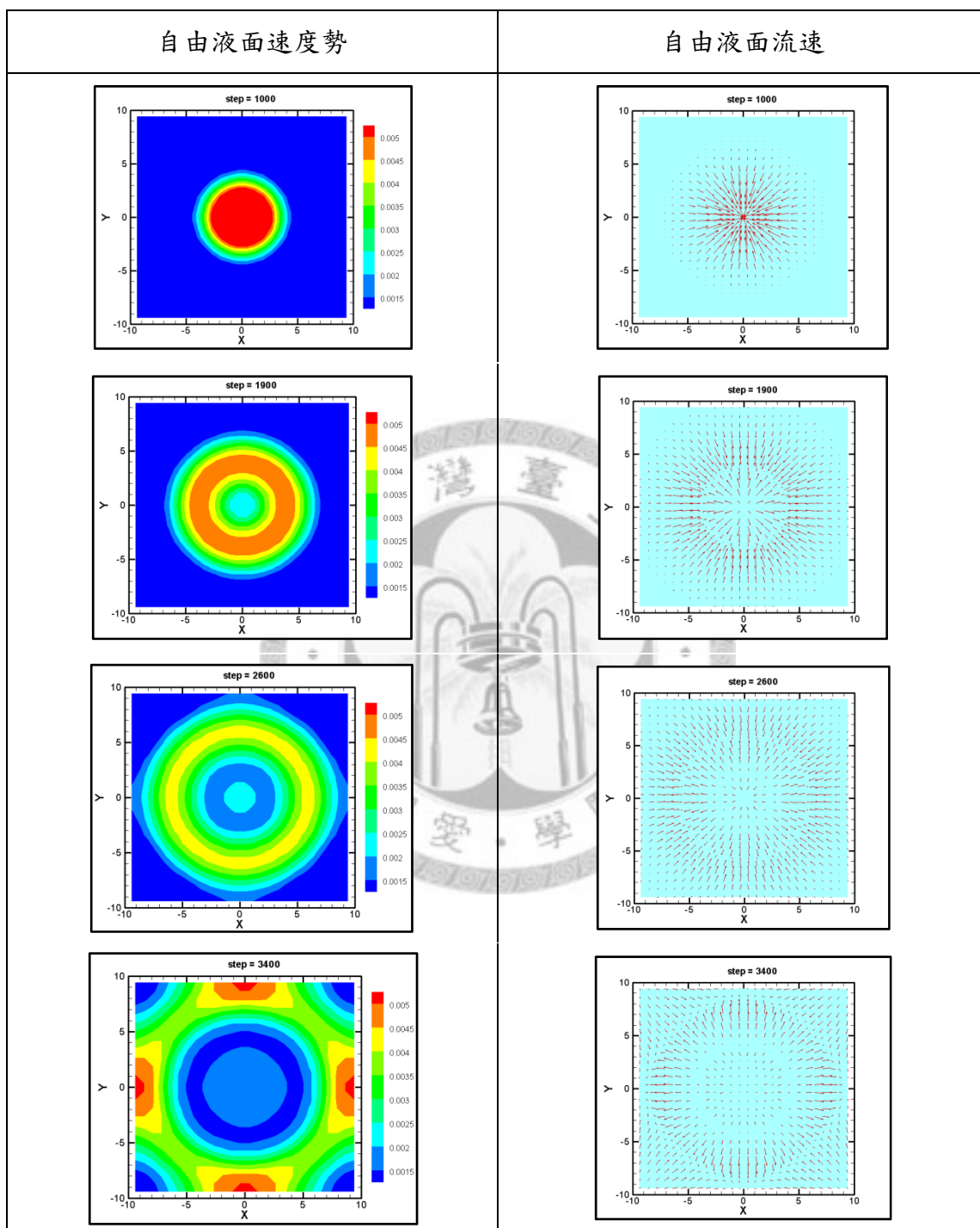
with Boundary Elements, 33; pp.726-730

- [10] Wang, X. and Liu, P. L.-F. (2005), "A Numerical investigation of Boumerdes-Zemmouri (Algeria) Earthquake and Tsunami", Computer Modeling in Engineering and Sciences, 10(2); pp.171-184.
- [11] Wang, X. and Liu, P. L.-F. (2006), "An analysis of 2004 Sumatra earthquake fault plane mechanisms and Indian Ocean tsunami", Journal of Hydraulic Research, 44(2); pp.147-154
- [12] Young D.-L. and Wu N.-J. and Tsay T.-K. (2009), "Method of Fundamental Solutions for Fully Nonlinear Water Waves", in Advances in Numerical Simulation of Nonlinear Water Waves (Edited by Ma Q.), World Scientific Publication, Singapore.
- [13] 王鄭翰，"應用邊界元素法產生邊界符合保角網格系統及相關奇異性問題研析"，國立臺灣大學土木工程學研究所博士論文，2004。
- [14] 吳南靖，"以高斯幅狀基底函數之無網格方法數值模擬完全非線性水面波"，國立臺灣大學土木工程學研究所博士論文，2008。
- [15] 胡淑評，"以基本解法求解赫姆霍茲、擴散及柏格斯方程式"，國立臺灣大學土木工程學研究所碩士論文，2005。
- [16] 黃迪僑，"以無網格數值方法探討電磁學及流體力學之簡易問題"，國立臺灣大學土木工程學研究所碩士論文，2003。

附錄一 垂向造波其他計算結果

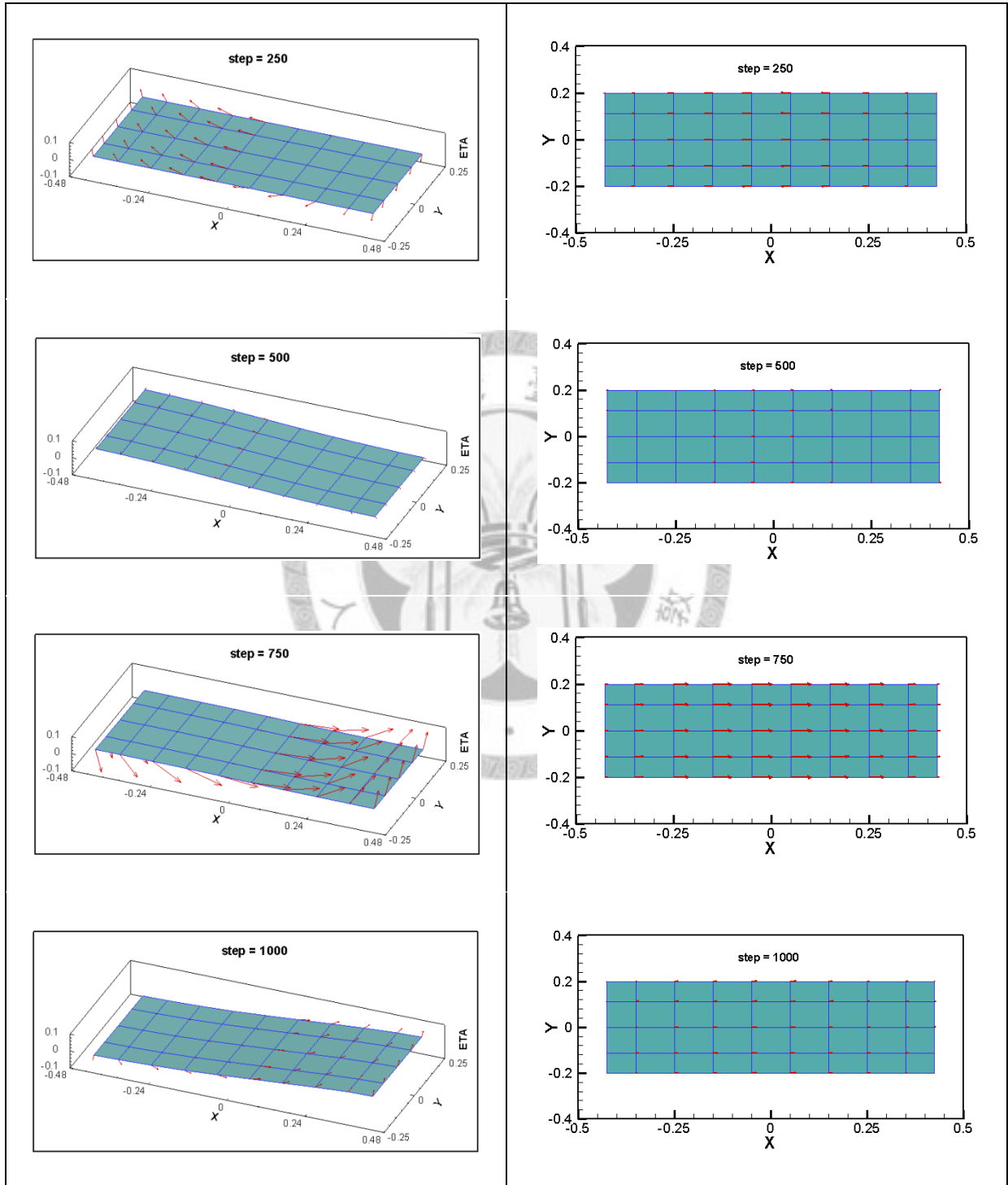


附錄-圖. 1 $a_0 = +0.5g$ 之自由液面速度勢與流速

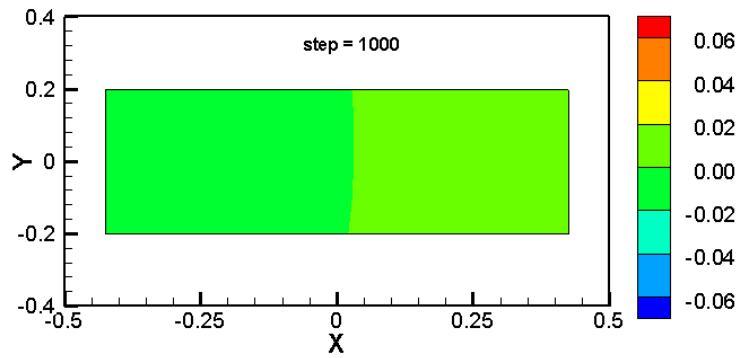
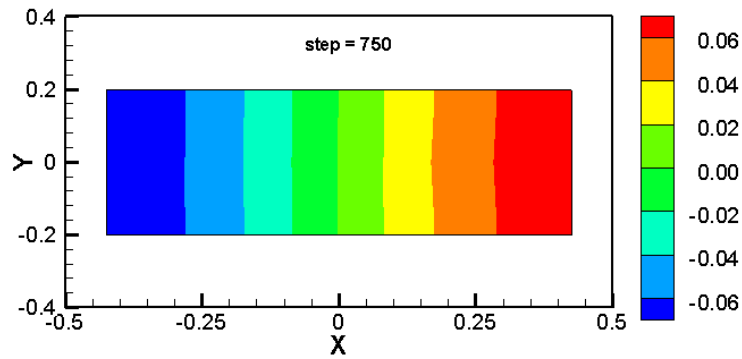
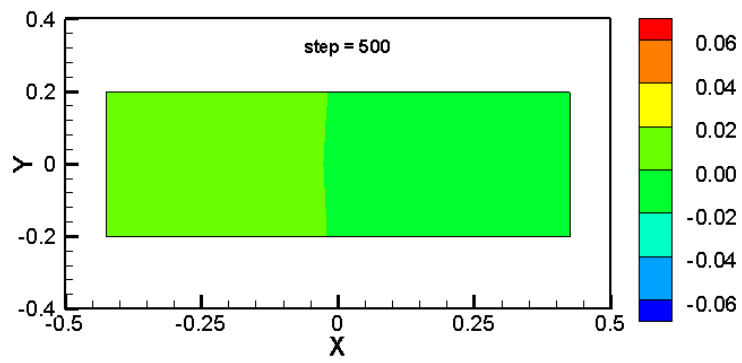
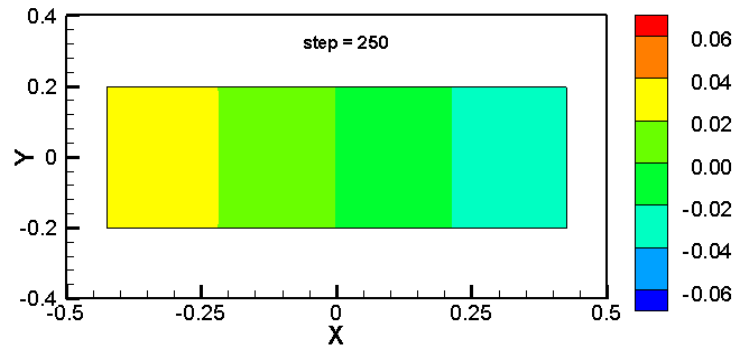


附錄-圖. 2 $a_0 = -0.5g$ 之自由液面速度勢與流速

附錄二 自由振盪其他計算結果

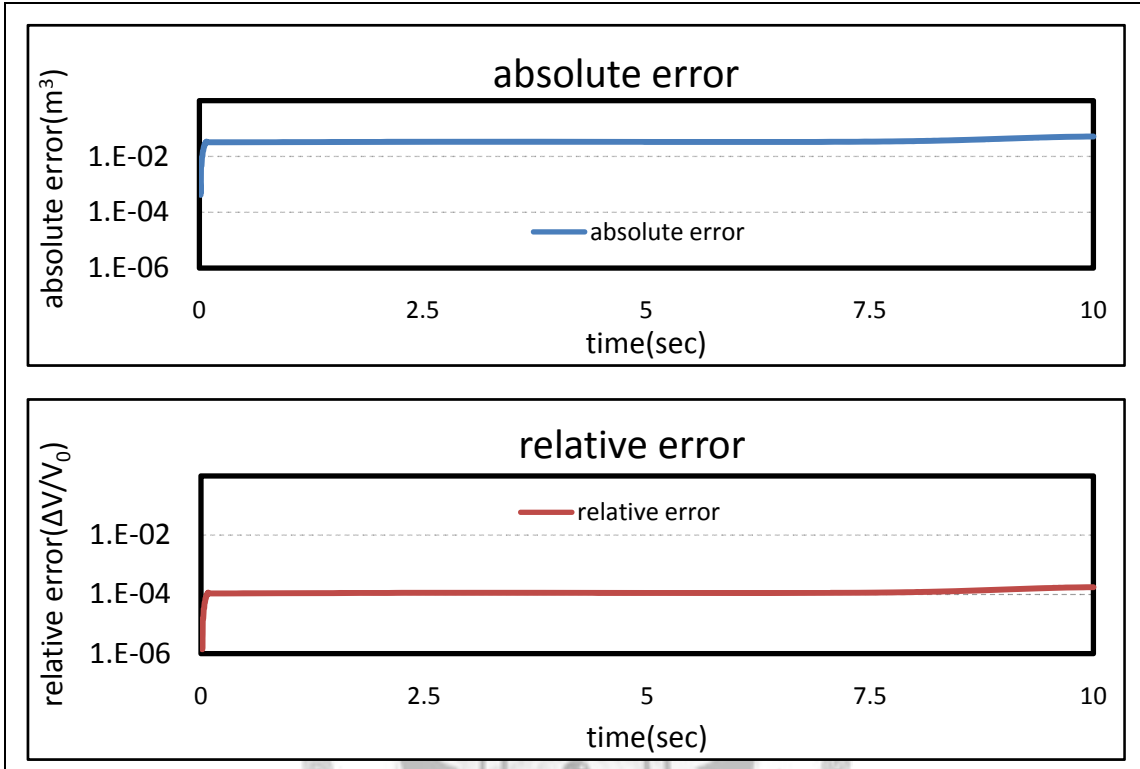


附錄-圖. 3 自由振盪液面流速

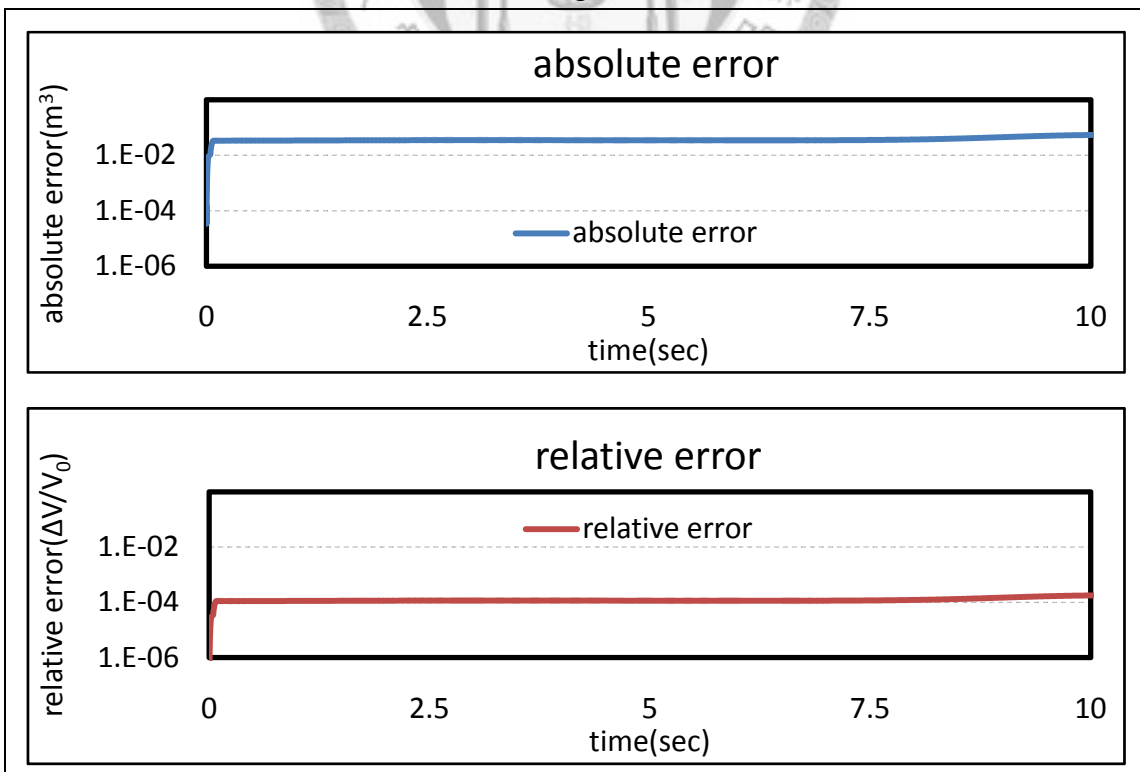


附錄-圖. 4 自由振盪液面速度勢

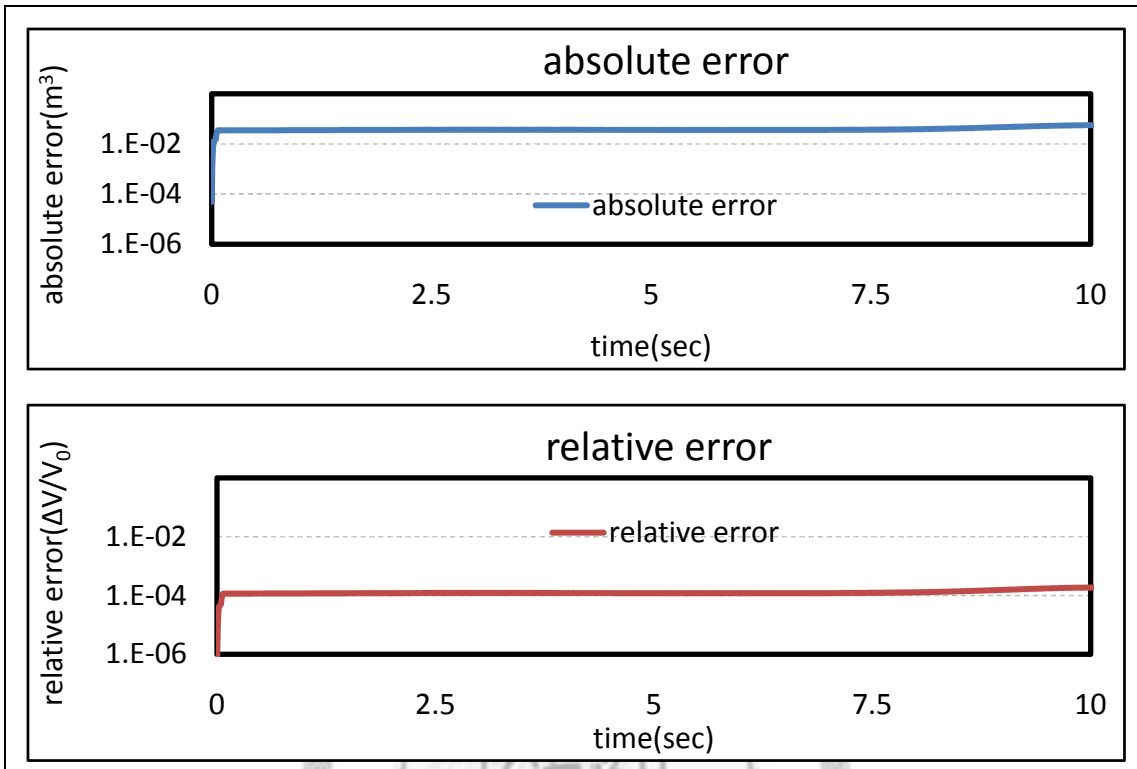
附錄三 不同加速度其他計算結果



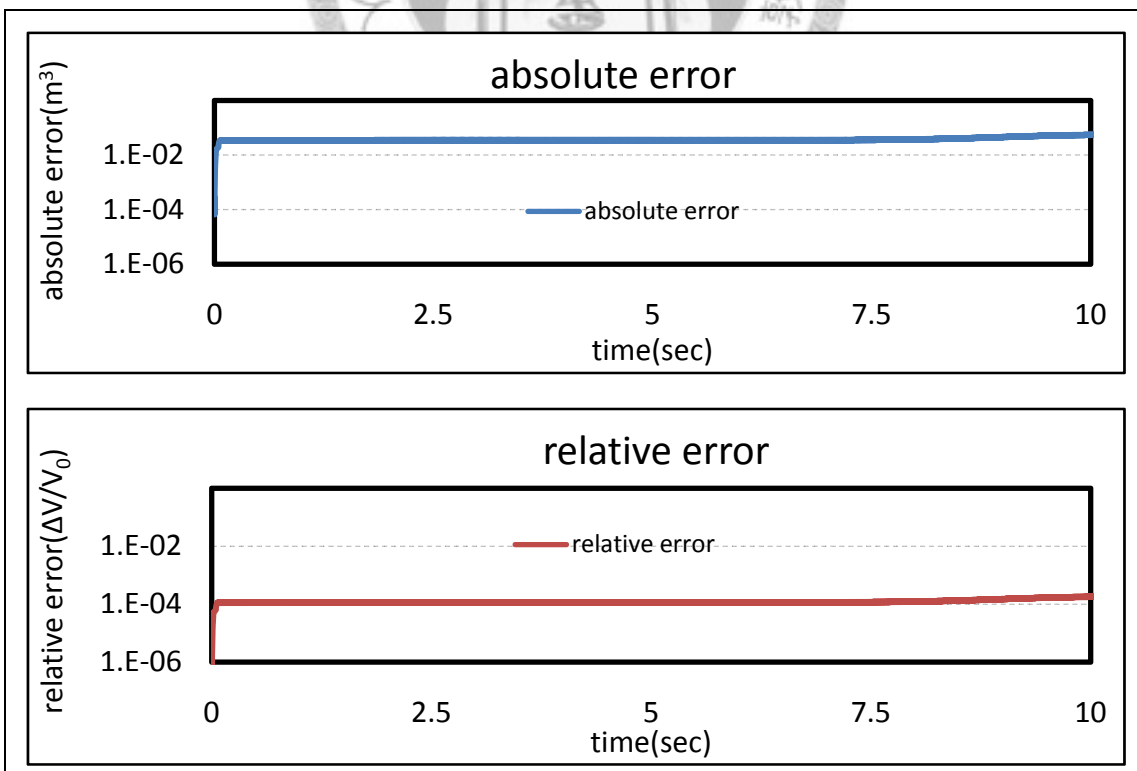
附錄-圖. 5 $a_0 = 0.5g$ 之質量守恆檢驗



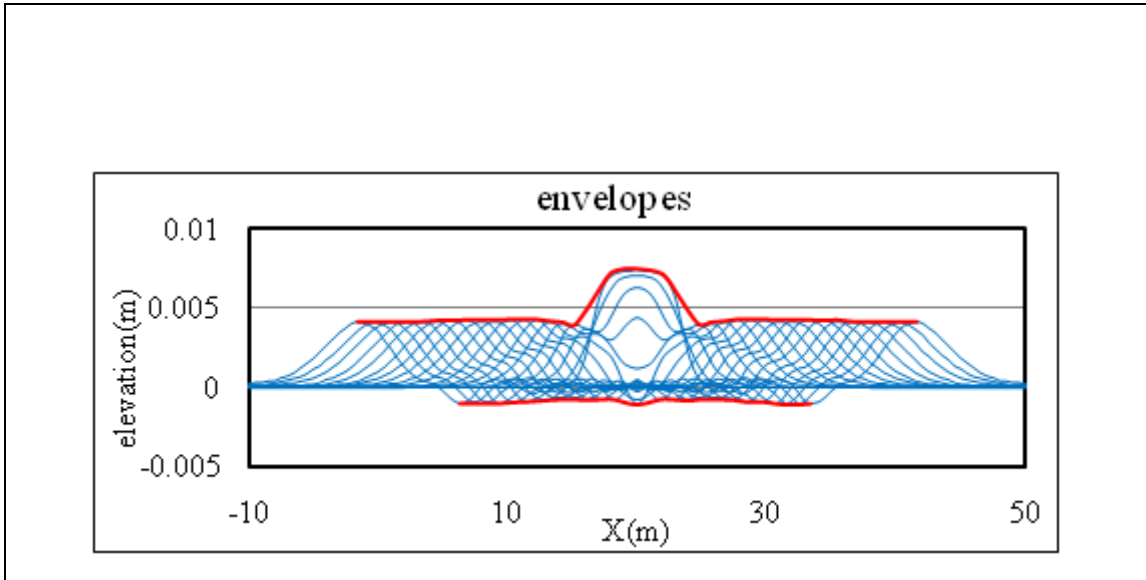
附錄-圖. 6 $a_0 = 1.0g$ 之質量守恆檢驗



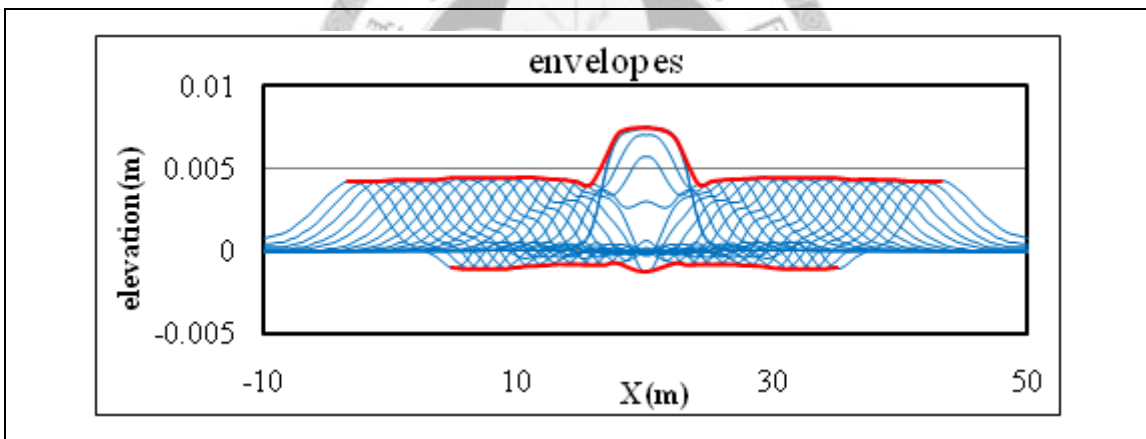
附錄-圖. 7 $a_0 = 1.5g$ 之質量守恆檢驗



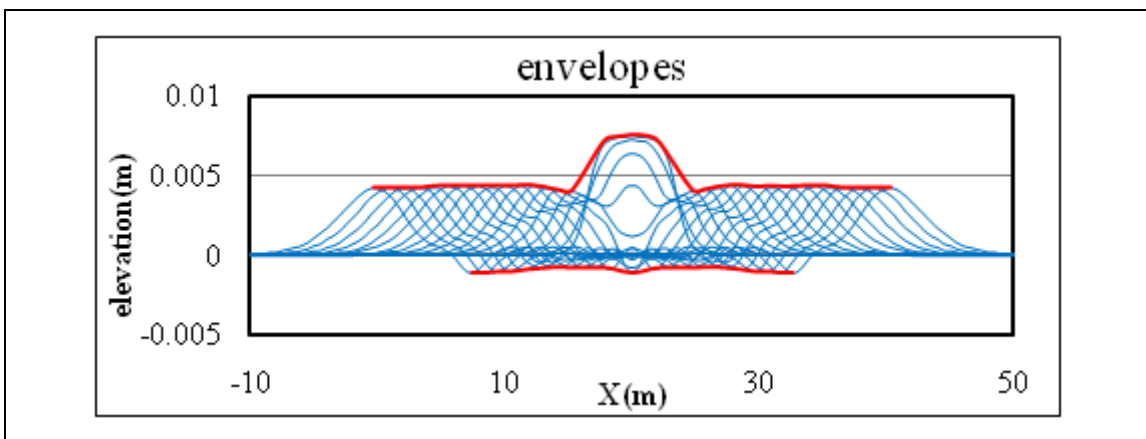
附錄-圖. 8 $a_0 = 2.0g$ 之質量守恆檢驗



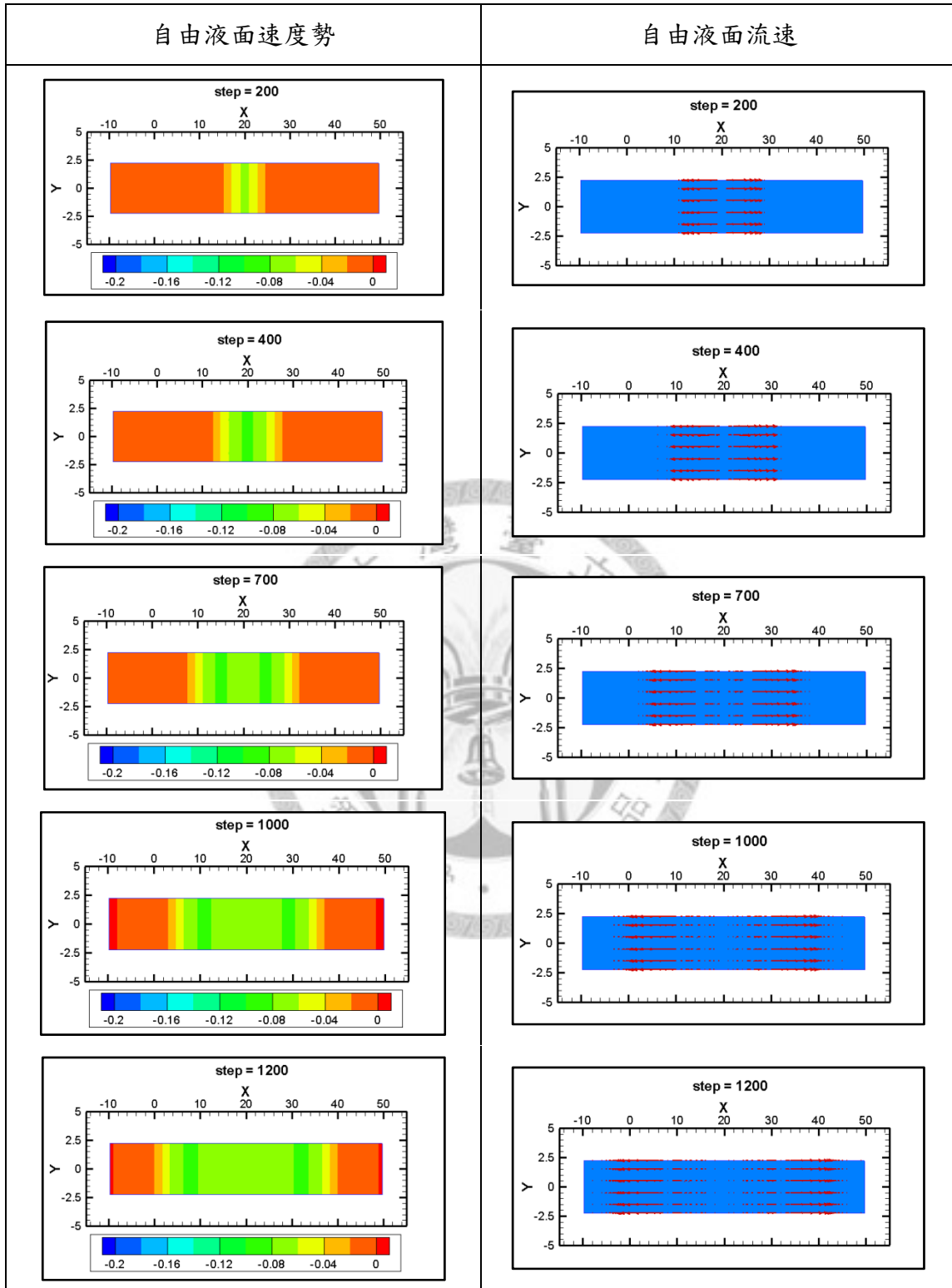
附錄-圖. 9 $a_0 = 1.0g$ 之包絡線



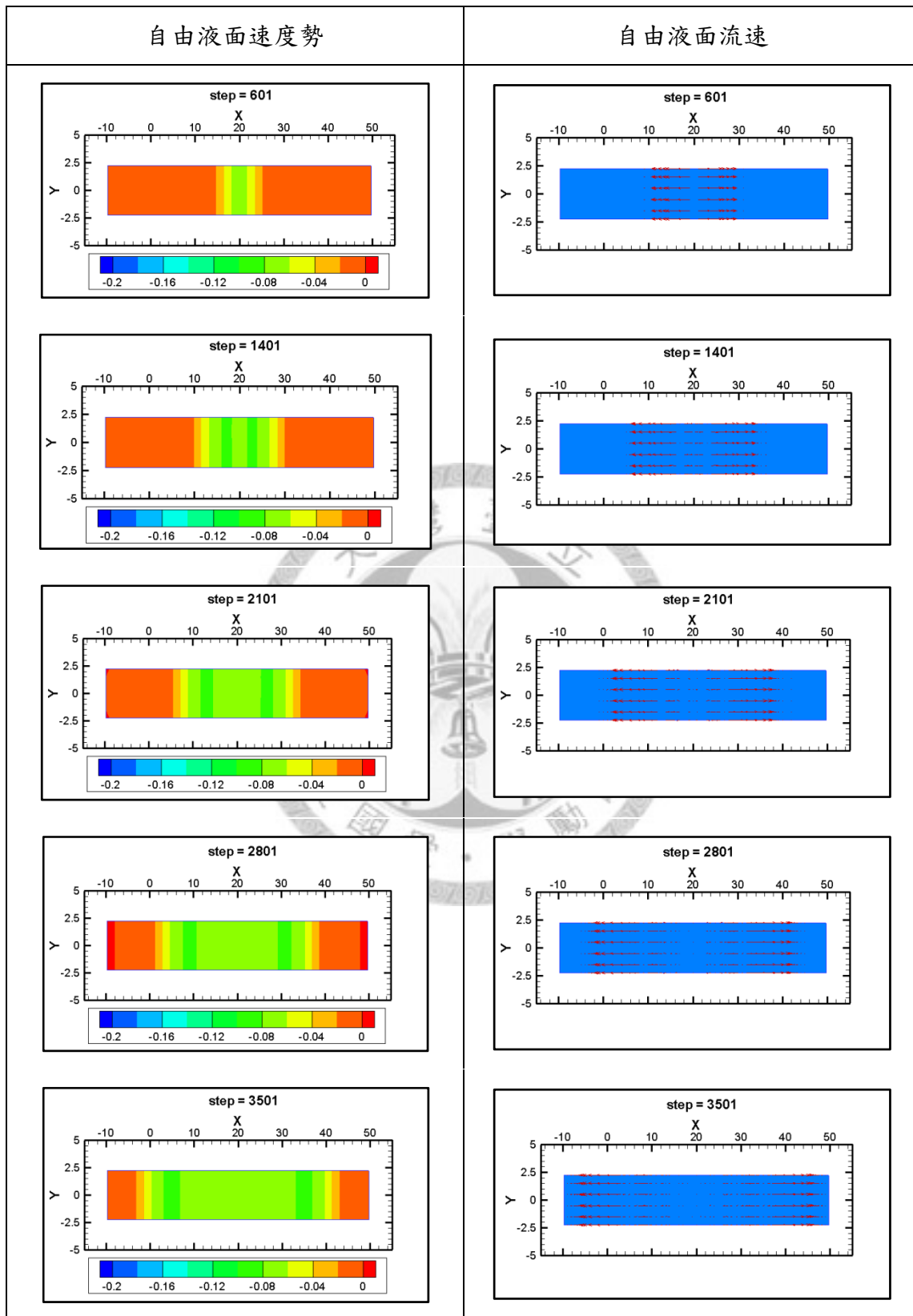
附錄-圖. 10 $a_0 = 1.5g$ 之包絡線



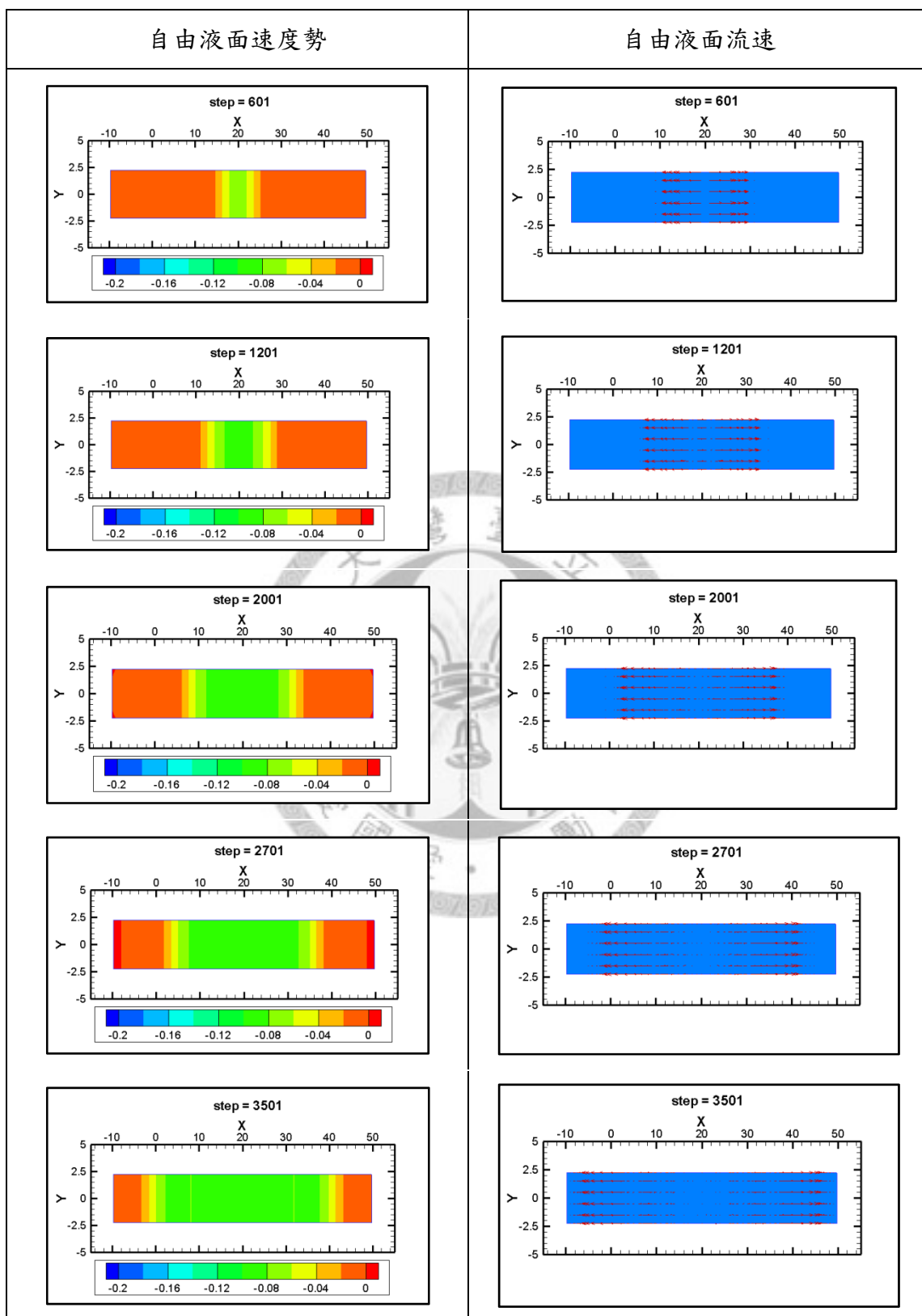
附錄-圖. 11 $a_0 = 2.0g$ 之包絡線



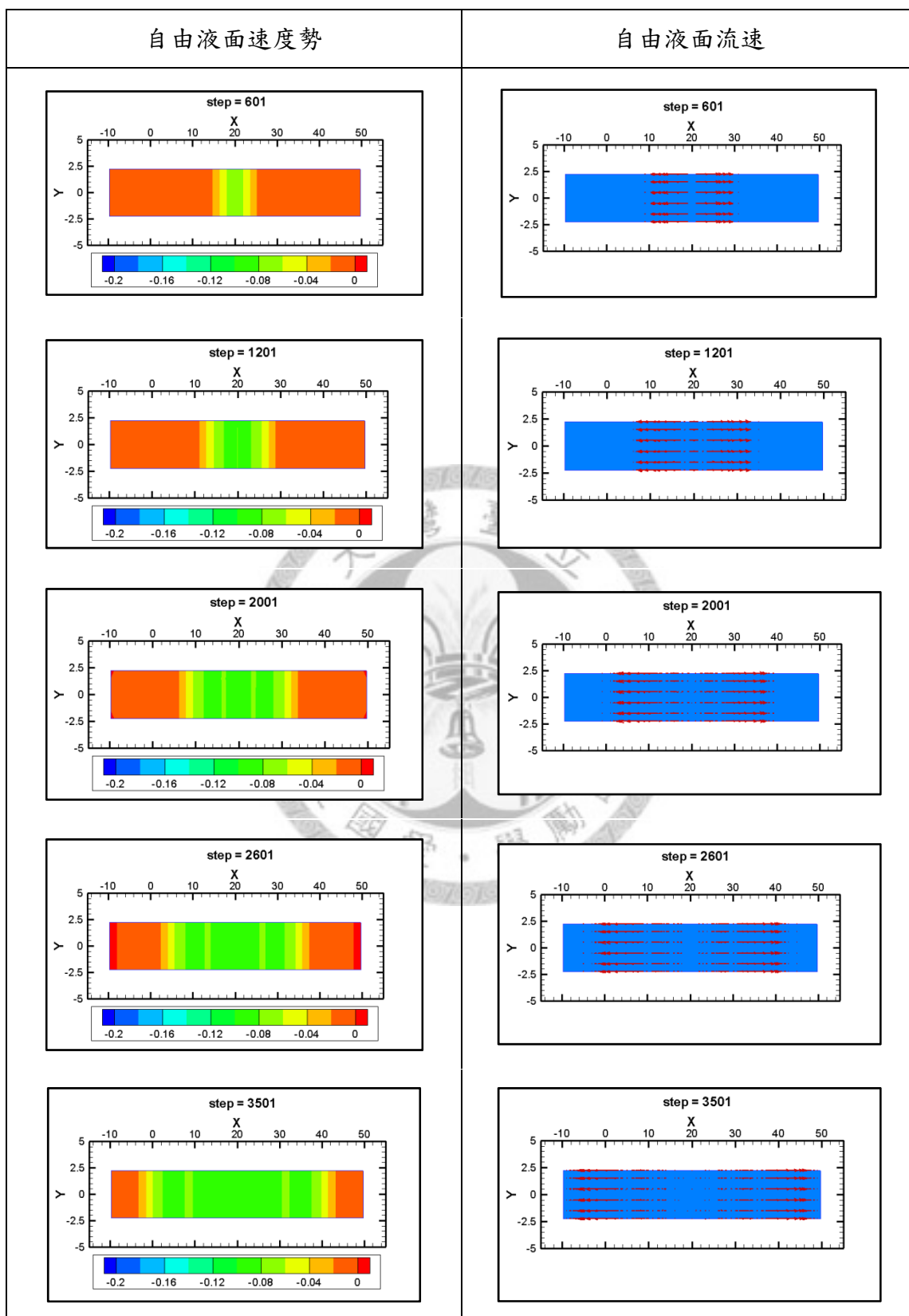
附錄-圖. 12 $a_0 = 0.5g$ 自由液面速度勢與流速



附錄-圖. 13 $a_0 = 1.0g$ 自由液面速度勢與流速

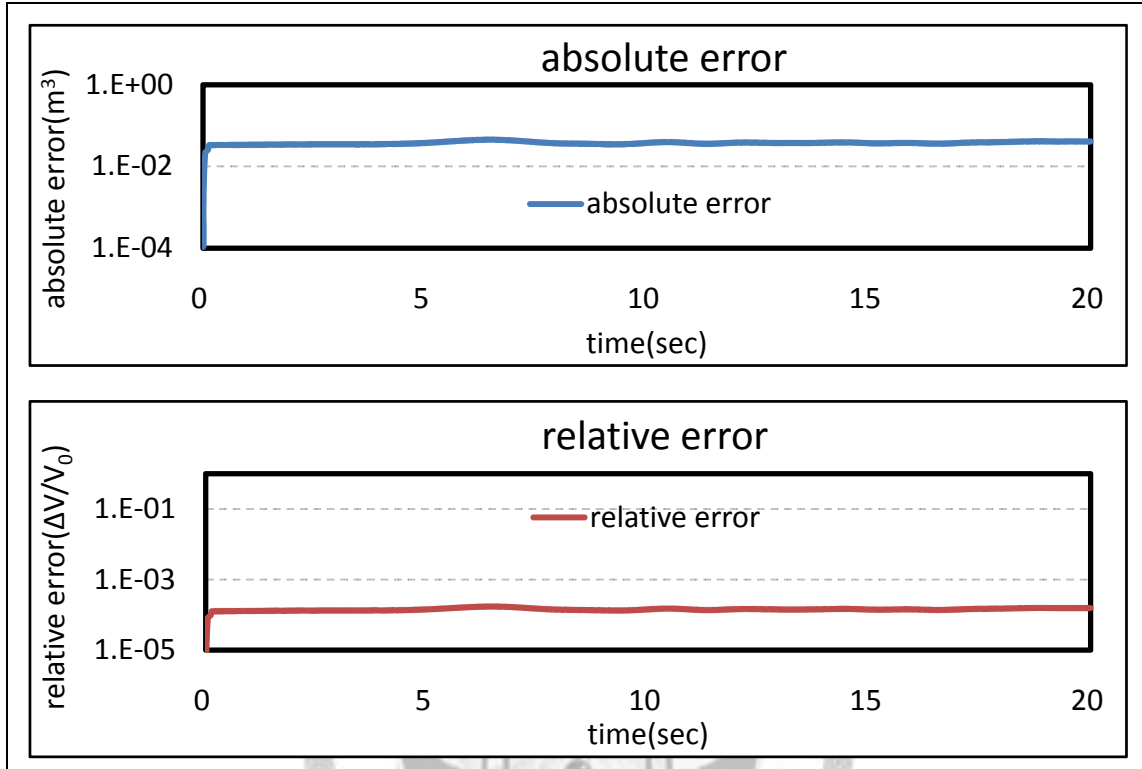


附錄-圖. 14 $a_0 = 1.5g$ 自由液面速度勢與流速

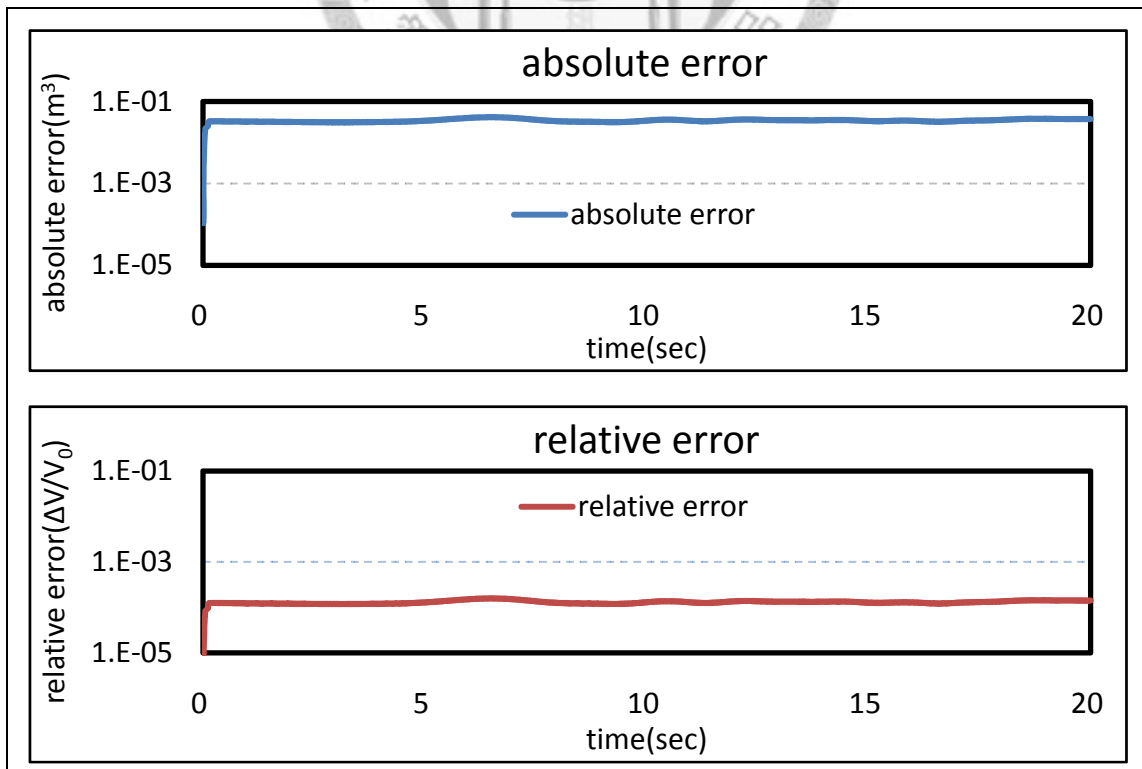


附錄-圖. 15 $a_0 = 2.0g$ 自由液面速度勢與流速

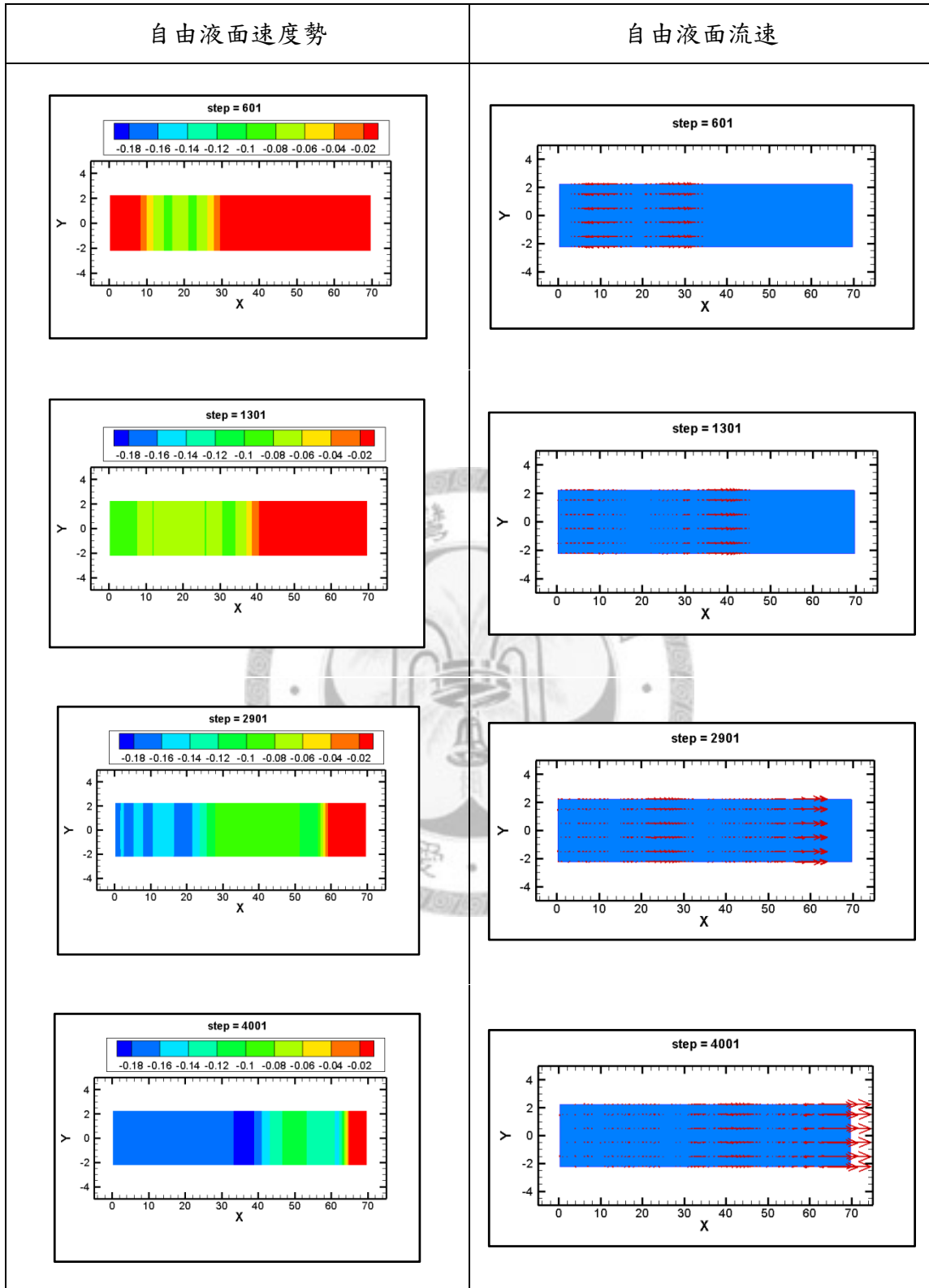
附錄四 垂向造波溯昇於斜坡其他計算結果



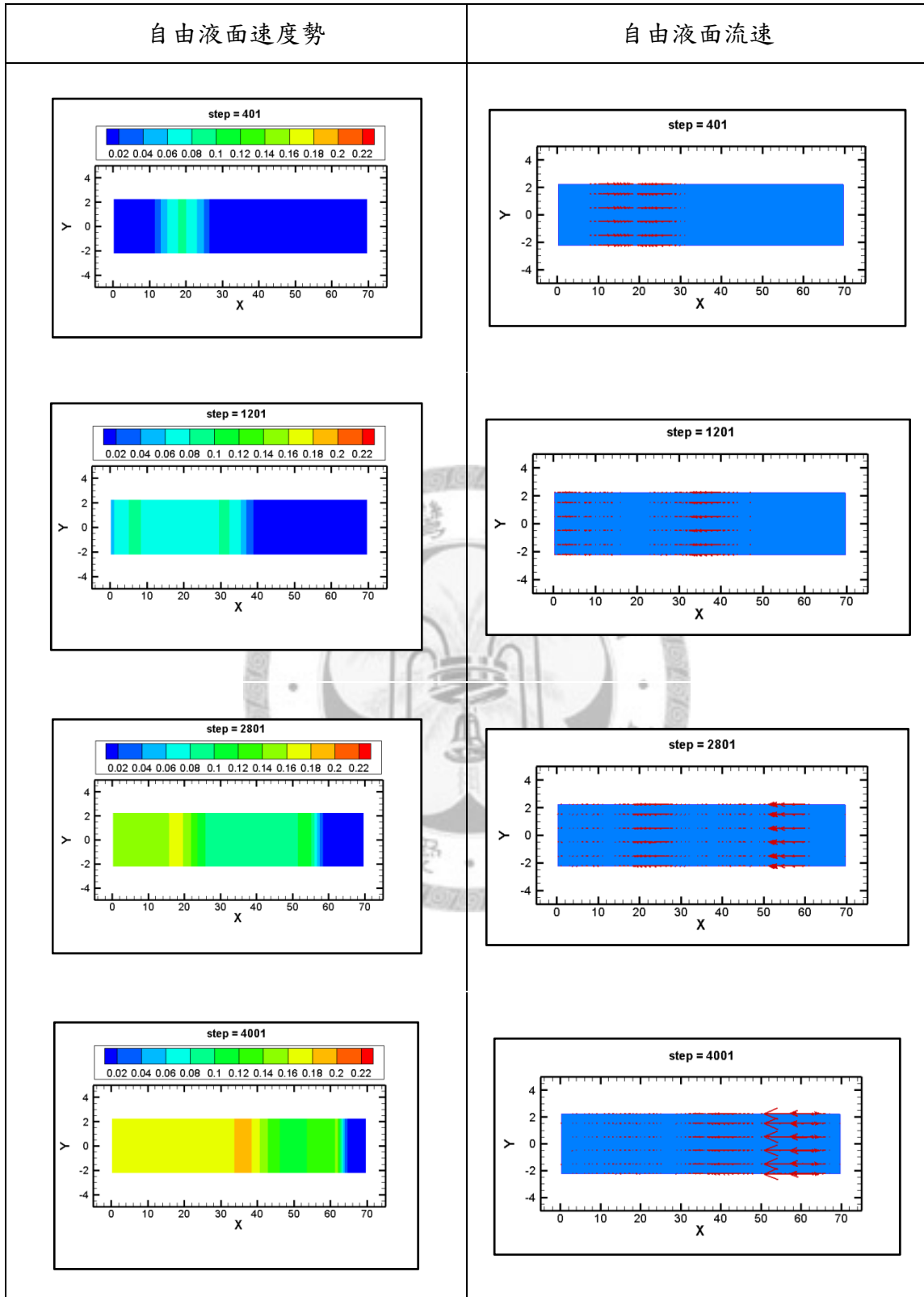
附錄-圖. 16 底床隆起溯昇之質量守恆檢驗



附錄-圖. 17 底床下陷溯昇之質量守恆檢驗

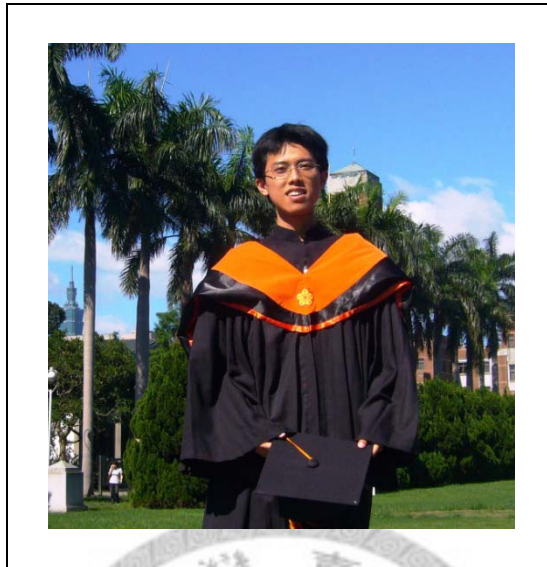


附錄-圖. 18 底床隆起溯昇之自由液面速度勢與流速



附錄-圖. 19 底床下陷淤昇之自由液面速度勢與流速

簡 歷



姓 名：楊琛澧

出生日期：1985/04/27

籍 貫：臺中市

學 歷：國立台中第一高級中學（2003）

國立中興大學水土保持學系（2007）

國立台灣大學土木工程學研究所水利組（2009）