

國立臺灣大學工學院機械工程學研究所

碩士論文

Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis



壓電平板以磁力變換軸向剛性之

流體致振變頻能量擷取系統

Magnetic force modulating axial rigidity of  
piezoelectric plate to develop variable-frequency function  
in a fluid-induced vibration energy harvester

李明杰

Ming-Chieh Lee

指導教授：黃育熙 博士

Advisor: Yu-Hsi Huang, Ph.D.

中華民國 112 年 7 月

July, 2023

國立臺灣大學碩士學位論文  
口試委員會審定書

壓電平板以磁力變換軸向剛性之  
流體致振變頻能量擷取系統

Magnetic force modulating axial rigidity of  
piezoelectric plate to develop variable-frequency function  
in a fluid-induced vibration energy harvester

本論文係李明杰君（R10522525）在國立臺灣大學機械工程學系  
完成之碩士學位論文，於民國 112 年 7 月 25 日承下列考試委員審查  
通過及口試及格，特此證明。

口試委員：

黃育熙

（指導教授）

施川傑

劉建豪

系主任/所長：林許祥

## 致謝



感謝黃育熙指導教授這兩年對我的建議與指導，老師在研究上給予了我高度的自由，使我可以朝著自己感興趣的領域去深入研究，並與實驗室的專業知識與技術進行結合，朝著多元的方向進行研究，同時在我遭遇瓶頸時也積極給我鼓勵與協助，使我可以順利解決種種難題，順利完成本論文，這兩年碩士班生活真的令我收穫滿滿，再次感謝老師對我的指導，期許未來實驗室的發展日益蓬勃。

感謝本論文的口試委員們：劉建豪教授與廖川傑教授，在口試上給予我專業的建議，使本論文的內容能夠更加豐富且完整。感謝劉建豪教授在大學專題時給予我的指導，奠定日後進行研究的基礎，並在口試上提供我電磁領域的建議，使我的壓電變頻能量擷取系統更加完善。感謝廖川傑教授在數值方法上給予我的建議，讓我注意到關於 LBM 模型選擇上的缺漏，並提供我模型的驗證技巧，使我 LBM 的流場模擬能更加完善。

感謝實驗室的所有成員，首先感謝建佑學長，在實驗上提供我諸多協助，同時也樂於與我們分享生活大小事，讓大家在實驗室度過非常歡樂且自在的時光。感謝已經前往美國留學的胤瑄學長，在大學專題給我許多研究上的建議，並提供我一些日後研究上的規劃與建議，令我收穫良多。感謝新承學長在最開始的提點與經驗分享，並不厭其煩的回答我研究上的種種問題，使我在承接研究題目時能更快步上軌道並少走許多彎路。感謝上一屆學長姐國勛、秀宜、御宸與浩安，對於剛進實驗室的我們給予我們許多研究上的建議。感謝同屆的揚開、振原、家雋與奕安，在你們的陪伴下這兩年過得相當精彩，在研究上我們互相幫助彼此學習，共同解決種種難題，在日常生活中也一起吃飯、聊天與出遊，創造許多美好的回憶。感謝碩一的柏宇、景順、絃廷、淳期，你們的加入為實驗室注入新的活力並增添許多歡樂，祝福你們未來研究順利且收穫滿滿。感謝助理 Mandy 自大學專題以來的關照，您總是樂於與我們分享生活中的種種，為枯燥的研究日常添加了許多歡笑時光。

最後感謝我的父母與家人們，在你們的照顧與栽培下我得以健康的成長至今，

並在你們的支持下使我能無後顧之憂的在台灣大學完成學業，此外在生活中也時時給予我關心與鼓勵，我感到非常的幸運，也感謝過去至今所遇到的所有人事物，因為與你們的相遇造就了現在的我，使我更加成長茁壯，謝謝大家。



## 中文摘要



本論文使用平板疊加法理論與晶格波茲曼法的流場模擬，探討壓電陶瓷雙晶片於單邊固定邊界且受軸向預應力作用下，在渦流激振下的面外振動特性，搭配有限元素法與實驗量測進行驗證，利用平板受軸向預應力作用會改變剛性之特性，變化壓電片的共振頻率以與渦街的振動頻率相互對應。理論解析先以壓電本構方程式結合克希荷夫薄板理論，將壓電雙晶片的三層結構等效成單層矩形平板，再透過力與力矩平衡關係式，得出受軸向預應力作用下的壓電平板之統御方程式，接著使用疊加法將平板拆分成多個結構塊進行求解，每個結構塊會皆會滿足原平板的部分邊界條件與統御方程，將各結構塊的解疊加後再滿足剩下的邊界條件，透過正交函數展開以求得壓電平板在單邊固定邊界以及軸向預應力作用下的共振頻率與模態振型，並與有限元素法模擬結果相互比較，兩者結果有著良好的對應性。

實驗量測部分使用磁力作為壓電平板的軸向預應力來源，根據磁力理論計算磁鐵在不同距離下的磁力大小，搭配雷射都卜勒測振儀來量測受不同大小磁力作用下壓電平板的振動頻率變化，並結合電子斑點干涉術以量測壓電平板的面外模態振型，部分實驗量測結果雖與理論模型無法完美擬合，但隨著作用力的增加確實能夠增減壓電片第一共振頻率的變化。風洞實驗先使用熱線風速計量測不同流速下圓柱繞流模型之渦街現象，並與二維、三維晶格波茲曼法以及計算流體力學結果進行比較，隨著流速增加，實驗量測結果與三維晶格波茲曼法具有良好對應性。接著量測圓柱複合壓電平板模型下，不同流速的渦流現象，搭配示波器同時量測壓電平板的電壓響應，驗證圓柱繞流所產生的渦街能激振壓電平板，並且當激振頻率與壓電平板的第一共振頻率相互匹配時，壓電平板的能量擷取效率會大幅提升且有較高的電壓輸出。最後架設磁力變換軸向剛性機構於風洞中，量測在不同流速且受不同量值軸向力作用下壓電平板的電壓響應，在相同的流速範圍下利用磁力變化壓電平板軸向剛性的電壓響應，相較於未作變頻設計有著更寬的頻寬顯示具有更

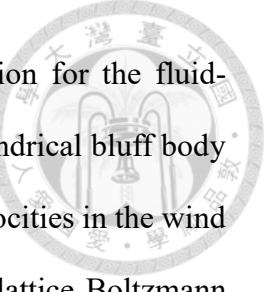
好的效率。

**關鍵字：**壓電平板、磁力、軸向預應力、疊加法、有限元素法、能量擷取系統、晶格波茲曼法、計算流體力學、渦流致振、風洞



## Abstract

This research investigated the vibration characteristics of a piezoelectric plate subjected to pre-stress axial load using the superposition theory and applied to the vortex-induced vibration excitation by lattice Boltzmann method for flow field. The study is complemented by theoretical analysis, finite element method (FEM), and experimental measurements. The stiffness effect of pre-stress axial load on a piezoelectric plate is analyzed and leads to change in the resonant frequency of the piezoelectric energy harvester to correspond with the vortex shedding frequency. The theoretical analysis combines the piezoelectric constitutive equations by Kirchhoff's plate theory to equivalently represent the three-layer structure as a single-layer rectangular plate. The governing equation for the piezoelectric plate subjected to pre-stress axial load is obtained through force and moment balance equations. The superposition method is then employed to divide the plate into multiple structural blocks for the solution, where each block satisfies partial boundary conditions and the governing equation of the original plate. The solutions of individual blocks are superposed to satisfy the remaining boundary conditions. The resonance frequencies and mode shapes of the piezoelectric cantilevered plate under a pre-stress axial load are obtained through orthogonal function expansion and show good agreement with the results in FEM. In experimental measurements, magnetic force applied pre-stress axial load to the piezoelectric plate. Various magnetic forces are provided by the change in distance and analyzed by magnetic theory. Under different magnitudes of magnetic force, a laser Doppler vibrometer is employed to measure the variation of frequency spectrum for the piezoelectric plate. Electronic speckle pattern interferometry is also used to measure the resonant frequencies and their corresponding out-of-plane mode shapes of the piezoelectric plate. At least the first mode in the experiment can fit the theoretical model to change the natural frequency by pre-



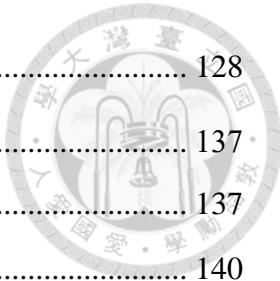
stress axial load, being used to design the variable-frequency function for the fluid-induced vibration energy harvester. The vortex shedding around a cylindrical bluff body is initially measured using a hot wire anemometer at different flow velocities in the wind tunnel experiments. The vortex frequency results in the 2D and 3D lattice Boltzmann method are compared with CFD results, showing better agreement with the 3D lattice Boltzmann method as the flow-rate changes. Subsequently, the vortex-induced vibration of a piezoelectric plate compound with a cylinder is measured, and the generated voltage of the piezoelectric plate is simultaneously recorded using an oscilloscope. The vortex shedding is intended to excite the first resonant frequency of a piezoelectric plate, as well as the vortex frequency, the efficiency in piezoelectric energy harvesting system increases significantly, resulting in higher voltage output. Finally, an axial force provides different axial stiffness for the piezoelectric plate by modulating magnitudes of magnetic force, to measure the highest voltage of the piezoelectric energy harvester in the wind tunnel, under different flow velocities. Compared to previous cases within the same flow velocity, the piezoelectric plate exhibits a wider bandwidth of voltage response.

**Keywords:** piezoelectric plate, magnetic force, pre-stress axial load, superposition method, finite element method, energy harvesting system, lattice Boltzmann method, computational fluid dynamics, vortex-induced vibration, wind tunnel.

# 目錄



中文摘要 .....	I
Abstract .....	III
目錄 .....	V
圖目錄 .....	VII
表目錄 .....	XV
第一章 緒論 .....	1
1.1 研究動機與目的 .....	1
1.2 文獻回顧 .....	2
1.3 論文內容簡介 .....	7
第二章 實驗原理與架設 .....	9
2.1 電子斑點干涉術 .....	9
2.2 雷射都卜勒測振儀 .....	17
2.3 風洞 .....	19
2.4 皮托管 .....	23
2.5 熱線風速計 .....	25
第三章 壓電矩形薄板理論 .....	27
3.1 壓電陶瓷雙晶片 .....	27
3.1.1 壓電本構方程式 .....	28
3.1.2 薄板力學假設 .....	33
3.1.3 壓電材料電學假設 .....	35
3.1.4 壓電薄板受軸向力作用下之統御方程式推導 .....	38
3.2 矩形薄板受軸向力作用之疊加法理論推導 .....	46
3.2.1 單邊懸臂邊界之疊加法理論推導 .....	46
3.2.2 理論解析與有限元素分析結果比較 .....	81
3.2.3 質量效應下之單邊懸臂邊界疊加法理論推導 .....	94



3.2.4 理論解析與有限元素分析結果比較.....	128
3.3 磁力計算模型 .....	137
3.3.1 理論解析.....	137
3.2.2 磁力量測實驗.....	140
3.2.3 結果討論.....	143
3.4 壓電陶瓷雙晶片之共振頻率量測 .....	145
3.4.1 實驗架設.....	145
3.4.2 結果討論.....	149
第四章 晶格波茲曼法.....	167
4.1 基本理論 .....	167
4.1.1 波茲曼方程式.....	167
4.1.2 離散波茲曼方程式.....	170
4.1.3 大渦流模擬(Large Eddy Simulation, LES) .....	173
4.2 數值模擬 .....	175
4.2.1 LBM 模擬流程 .....	175
4.2.2 邊界條件設定.....	177
4.2.3 流體作用力計算.....	178
4.3 結果討論 .....	179
4.3.1 圓柱繞流模型.....	179
4.3.2 圓柱夾持試片模型 .....	201
第五章 壓電能量擷取實驗.....	214
5.1 無受力下壓電能量擷取實驗 .....	214
5.2 受預應力作用下壓電能量擷取實驗 .....	235
第六章 結論與未來展望.....	253
6.1 結論 .....	253
6.2 未來展望 .....	255
參考文獻 .....	257

## 圖目錄



圖 2-1 ESPI 面外光路架設系統圖 .....	14
圖 2-2 ESPI 水平面外架設圖 .....	15
圖 2-3 ESPI 垂直面外架設圖 .....	16
圖 2-4 LDV-OFV505 .....	18
圖 2-5 聲光調製器基本構造 .....	18
圖 2-6 LDV 內部光路圖 .....	19
圖 2-7 風洞尺寸示意圖 (mm) .....	20
圖 2-8 風洞實體圖 .....	20
圖 2-9 蜂巢板 .....	21
圖 2-10 網目 .....	21
圖 2-11 直結式風機 .....	22
圖 2-12 Yaskawa V1000 變頻器 .....	22
圖 2-13 皮托管 .....	24
圖 2-14 壓差計 .....	24
圖 2-15 熱線探針尺寸圖 .....	25
圖 2-16 熱線探針 .....	26
圖 2-17 熱線風速計 HW-101 .....	26
圖 3-1 並聯型壓電雙晶片以並聯電極連接方式(PBP) .....	32
圖 3-2 並聯型壓電雙晶片以串聯電極連接方式(PBS) .....	32
圖 3-3 串聯型壓電雙晶片以並聯電極連接方式(SBP) .....	32
圖 3-4 串聯型壓電雙晶片以串聯電極連接方式(SBS) .....	32
圖 3-5 中面示意圖 .....	35
圖 3-6 電位差示意圖 .....	38
圖 3-7 中間平面所受彎矩 .....	45



圖 3-8 中間平面所受剪切力 .....	46
圖 3-9 平板所受面內力 .....	46
圖 3-10 平板結構塊示意圖 .....	80
圖 3-11 平板未受力下之疊加法收斂性分析 .....	91
圖 3-12 平板受拉應力下之疊加法收斂性分析 .....	91
圖 3-13 平板受壓應力下之疊加法收斂性分析 .....	91
圖 3-14 預應力對平板各模態的影響 .....	92
圖 3-15 壓力對第一模態共振頻率關係 .....	92
圖 3-16 壓力小於臨界負載的 $\det(A)$ .....	93
圖 3-17 壓力大於臨界負載的 $\det(A)$ .....	93
圖 3-18 質量效應下疊加法分解圖 .....	127
圖 3-19 多個質量點分解成數個單個質量點圖 .....	127
圖 3-20 單個質量點結構塊的水平切割圖 .....	128
圖 3-21 單個質量點結構塊的鉛直切割圖 .....	128
圖 3-22 具質量效應之平板疊加法收斂性分析 .....	136
圖 3-23 具質量效應且受拉應力作用之平板疊加法收斂性分析 .....	136
圖 3-24 具質量效應且受壓應力作用之平板疊加法收斂性分析 .....	137
圖 3-25 磁鐵相對位置圖 .....	139
圖 3-26 磁力量測實驗示意圖 .....	141
圖 3-27 磁力量測實驗實驗架設圖 .....	141
圖 3-28 彈簧秤 .....	142
圖 3-29 镍鐵硼磁鐵 $10 \times 5 \times 5 \text{ (mm}^3\text{)}$ .....	142
圖 3-30 镍鐵硼磁鐵 $30 \times 20 \times 10 \text{ (mm}^3\text{)}$ .....	142
圖 3-31 磁力理論與實驗比較 .....	145



圖 3-32 壓電陶瓷雙晶片附加磁鐵模型示意圖 .....	147
圖 3-33 壓電陶瓷雙晶片附加磁鐵之實體試片 .....	147
圖 3-34 LDV 實驗示意圖 .....	148
圖 3-35 LDV 實驗架設圖 .....	148
圖 3-36 試片處放大圖 .....	149
圖 3-37 ESPI 實驗架設圖 .....	149
圖 3-38 有限元素分析模型示意圖 .....	160
圖 3-39 疊加法多點質量分布 .....	160
圖 3-40 無受力下壓電試片之頻率響應 .....	160
圖 3-41 受拉力 0.52 (N)下的頻率響應 .....	161
圖 3-42 受拉力 1.03 (N)下的頻率響應 .....	161
圖 3-43 受拉力 1.52 (N)下的頻率響應 .....	162
圖 3-44 受拉力 2.01 (N)下的頻率響應 .....	162
圖 3-45 受拉力 2.79 (N)下的頻率響應 .....	163
圖 3-46 受壓力 0.52 (N)下的頻率響應 .....	163
圖 3-47 受壓力 1.03 (N)下的頻率響應 .....	164
圖 3-48 受壓力 1.52 (N)下的頻率響應 .....	164
圖 3-49 受壓力 2.01 (N)下的頻率響應 .....	165
圖 3-50 受壓力 2.79 (N)下的頻率響應 .....	165
圖 3-51 受不同力下的第一模態共振頻率比較 .....	166
圖 4-1 D2Q9 模型的晶格速度向量 .....	173
圖 4-2 D3Q19 模型的晶格速度向量 .....	173
圖 4-3 LBM 模擬流程圖 .....	176
圖 4-4 粒子流動示意圖 .....	177
圖 4-5 反彈邊界流程圖 .....	178



圖 4-6 二維圓柱繞流模型 .....	186
圖 4-7 三維圓柱繞流模型圖 .....	187
圖 4-8 二維 LBM 之升力係數收斂性分析圖 .....	187
圖 4-9 二維 LBM 之 $St$ 收斂性分析圖 .....	188
圖 4-10 三維 LBM 之升力係數收斂性分析圖 .....	188
圖 4-11 三維 LBM 之 $St$ 收斂性分析圖 .....	189
圖 4-12 流場網格圖 .....	189
圖 4-13 圓柱邊界層設定 .....	189
圖 4-14 LS-DYNA 之升力係數收斂性分析圖 .....	190
圖 4-15 LS-DYNA 之 $St$ 收斂性分析圖 .....	190
圖 4-16 圓柱繞流模型實驗架設 .....	191
圖 4-17 變頻器頻率對風速圖 .....	192
圖 4-18 熱線電壓對風速圖 .....	192
圖 4-19 變頻器 10 Hz (流速 0.97 m/s) 熱線量測結果 .....	193
圖 4-20 變頻器 10 Hz (流速 0.97 m/s) 傳立葉轉換結果 .....	193
圖 4-21 變頻器 12.5 Hz (流速 1.46 m/s) 熱線量測結果 .....	194
圖 4-22 變頻器 12.5 Hz (流速 1.46 m/s) 傳立葉轉換結果 .....	194
圖 4-23 變頻器 15 Hz (流速 1.95 m/s) 熱線量測結果 .....	195
圖 4-24 變頻器 15 Hz (流速 1.95 m/s) 傳立葉轉換結果 .....	195
圖 4-25 變頻器 17.5 Hz (流速 2.49 m/s) 熱線量測結果 .....	196
圖 4-26 變頻器 17.5 Hz (流速 2.49 m/s) 傳立葉轉換結果 .....	196
圖 4-27 變頻器 20 Hz (流速 3.04 m/s) 熱線量測結果 .....	197
圖 4-28 變頻器 20 Hz (流速 3.04 m/s) 傳立葉轉換結果 .....	197
圖 4-29 變頻器 22.5 Hz (流速 3.6 m/s) 熱線量測結果 .....	198
圖 4-30 變頻器 22.5 Hz (流速 3.6 m/s) 傳立葉轉換結果 .....	198



圖 4- 31 變頻器 25 Hz (流速 4.19 m/s) 热線量測結果 .....	199
圖 4- 32 變頻器 25 Hz (流速 4.19 m/s) 傳立葉轉換結果 .....	199
圖 4- 33 LBM、LS-DYNA 與實驗量測的渦街頻率比較 .....	200
圖 4- 34 LBM、LS-DYNA 與實驗量測的 $St$ 比較 .....	200
圖 4- 35 $St$ 與雷諾數關係圖[45] .....	201
圖 4- 36 $St$ 與雷諾數關係圖[46] .....	201
圖 4- 37 圓柱夾持平板模型的實驗架設圖 .....	204
圖 4- 38 圓柱夾持試片圖 .....	205
圖 4- 39 热線量測點示意圖 .....	205
圖 4- 40 量測點 A 热線數據的傳立葉轉換圖 .....	206
圖 4- 41 量測點 B 热線數據的傳立葉轉換圖 .....	206
圖 4- 42 量測點 C 热線數據的傳立葉轉換圖 .....	207
圖 4- 43 量測點 D 热線數據的傳立葉轉換圖 .....	207
圖 4- 44 量測點 E 热線數據的傳立葉轉換圖 .....	208
圖 4- 45 變頻器 20 Hz (流速 3.04 m/s) 傳立葉轉換結果 .....	208
圖 4- 46 變頻器 21 Hz (流速 3.34 m/s) 傳立葉轉換結果 .....	209
圖 4- 47 變頻器 22 Hz (流速 3.5 m/s) 傳立葉轉換結果 .....	209
圖 4- 48 變頻器 23 Hz (流速 3.78 m/s) 傳立葉轉換結果 .....	210
圖 4- 49 變頻器 24 Hz (流速 4.01 m/s) 傳立葉轉換結果 .....	210
圖 4- 50 變頻器 25 Hz (流速 4.19 m/s) 傳立葉轉換結果 .....	211
圖 4- 51 變頻器 26 Hz (流速 4.46 m/s) 傳立葉轉換結果 .....	211
圖 4- 52 變頻器 27 Hz (流速 4.71 m/s) 傳立葉轉換結果 .....	212
圖 4- 53 變頻器 28 Hz (流速 4.91 m/s) 傳立葉轉換結果 .....	212
圖 4- 54 LBM、LS-DYNA 與實驗量測的渦街頻率比較 .....	213
圖 4- 55 LBM、LS-DYNA 與實驗量測的 $St$ 比較 .....	213



圖 5-1	壓電能量擷取實驗示意圖 .....	217
圖 5-2	壓電能量擷取實驗架設圖 .....	217
圖 5-3	變頻器 25 Hz (流速 4.19 m/s)試片能量擷取電壓 .....	218
圖 5-4	變頻器 25 Hz (流速 4.19 m/s)試片電壓傳立葉轉換結果 .....	218
圖 5-5	變頻器 26 Hz (流速 4.46 m/s)試片能量擷取電壓 .....	219
圖 5-6	變頻器 26 Hz (流速 4.46 m/s)試片電壓傳立葉轉換結果 .....	219
圖 5-7	變頻器 27 Hz (流速 4.71 m/s)試片能量擷取電壓 .....	220
圖 5-8	變頻器 27 Hz (流速 4.71 m/s)試片電壓傳立葉轉換結果 .....	220
圖 5-9	變頻器 28 Hz (流速 4.91 m/s)試片能量擷取電壓 .....	221
圖 5-10	變頻器 28 Hz (流速 4.91 m/s)試片電壓傳立葉轉換結果 .....	221
圖 5-11	變頻器 29 Hz (流速 5.22 m/s)試片能量擷取電壓 .....	222
圖 5-12	變頻器 29 Hz (流速 5.22 m/s)試片電壓傳立葉轉換結果 .....	222
圖 5-13	變頻器 30 Hz (流速 5.46 m/s)試片能量擷取電壓 .....	223
圖 5-14	變頻器 30 Hz (流速 5.46 m/s)試片電壓傳立葉轉換結果 .....	223
圖 5-15	變頻器 31 Hz (流速 5.67 m/s)試片能量擷取電壓 .....	224
圖 5-16	變頻器 31 Hz (流速 5.67 m/s)試片電壓傳立葉轉換結果 .....	224
圖 5-17	變頻器 32 Hz (流速 5.91 m/s)試片能量擷取電壓 .....	225
圖 5-18	變頻器 32 Hz (流速 5.91 m/s)試片電壓傳立葉轉換結果 .....	225
圖 5-19	變頻器 33 Hz (流速 6.19 m/s)試片能量擷取電壓 .....	226
圖 5-20	變頻器 33 Hz (流速 6.19 m/s)試片電壓傳立葉轉換結果 .....	226
圖 5-21	變頻器 34 Hz (流速 6.40 m/s)試片能量擷取電壓 .....	227
圖 5-22	變頻器 34 Hz (流速 6.40 m/s)試片電壓傳立葉轉換結果 .....	227
圖 5-23	變頻器 35 Hz (流速 6.64 m/s)試片能量擷取電壓 .....	228
圖 5-24	變頻器 35 Hz (流速 6.64 m/s)試片電壓傳立葉轉換結果 .....	228
圖 5-25	變頻器 36 Hz (流速 6.89 m/s)試片能量擷取電壓 .....	229



圖 5-26 變頻器 36 Hz (流速 6.89 m/s)試片電壓傳立葉轉換結果 .....	229
圖 5-27 變頻器 37 Hz (流速 7.08 m/s)試片能量擷取電壓 .....	230
圖 5-28 變頻器 37 Hz (流速 7.08 m/s)試片電壓傳立葉轉換結果 .....	230
圖 5-29 變頻器 38 Hz (流速 7.31 m/s)試片能量擷取電壓 .....	231
圖 5-30 變頻器 38 Hz (流速 7.31 m/s)試片電壓傳立葉轉換結果 .....	231
圖 5-31 變頻器 39 Hz (流速 7.54 m/s)試片能量擷取電壓 .....	232
圖 5-32 變頻器 39 Hz (流速 7.54 m/s)試片電壓傳立葉轉換結果 .....	232
圖 5-33 變頻器 40 Hz (流速 7.76 m/s)試片能量擷取電壓 .....	233
圖 5-34 變頻器 40 Hz (流速 7.76 m/s)試片電壓傳立葉轉換結果 .....	233
圖 5-35 不同入口流速下的壓電試片電壓響應 .....	234
圖 5-36 不同入口流速下的壓電試片輸出功率 .....	234
圖 5-37 試片受預應力下壓電能量擷取實驗示意圖 .....	242
圖 5-38 試片受預應力下壓電能量擷取實驗架設圖 .....	242
圖 5-39 磁力變換軸向剛性機構示意圖 .....	243
圖 5-40 磁力變換軸向剛性機構實際模型 .....	243
圖 5-41 受拉力 0.83 (N)下壓電試片電壓響應 .....	244
圖 5-42 受拉力 0.83 (N)下壓電試片輸出功率 .....	244
圖 5-43 受拉力 1.37 (N)下壓電試片電壓響應 .....	245
圖 5-44 受拉力 1.37 (N)下壓電試片輸出功率 .....	245
圖 5-45 受拉力 2.3 (N)下壓電試片電壓響應 .....	246
圖 5-46 受拉力 2.3 (N)下壓電試片輸出功率 .....	246
圖 5-47 受壓力 0.83 (N)下壓電試片電壓響應 .....	247
圖 5-48 受壓力 0.83 (N)下壓電試片輸出功率 .....	247
圖 5-49 受壓力 1.37 (N)下壓電試片電壓響應 .....	248
圖 5-50 受壓力 1.37 (N)下壓電試片輸出功率 .....	248



圖 5-51 受壓力 2.3 (N)下壓電試片電壓響應 .....	249
圖 5-52 受壓力 2.3 (N)下壓電試片輸出功率 .....	249
圖 5-53 不同受力下的壓電試片共振頻率比較 .....	250
圖 5-54 不同受力下的壓電試片電壓響應比較 .....	250
圖 5-55 不同受力下的壓電試片輸出功率比較 .....	251
圖 5-56 加入磁力變換軸向機構後試片方均根電壓的比較 .....	251
圖 5-57 加入磁力變換軸向機構後試片輸出功率的比較 .....	252

# 表目錄



表 3-1	壓電陶瓷材料常數.....	31
表 3-2	黃銅材料常數.....	31
表 3-3	理論與模擬對未受力平板之共振頻率分析比較.....	85
表 3-4	理論與模擬對受預拉應力平板之共振頻率分析比較.....	87
表 3-5	理論與模擬對受預壓應力平板之共振頻率分析比較.....	89
表 3-6	具質量效應下疊加法與有限元素模擬比較.....	130
表 3-7	具質量效應且受拉應力下疊加法與有限元素模擬比較.....	132
表 3-8	具質量效應且受壓應力下疊加法與有限元素模擬比較.....	134
表 3-9	磁力理論參數設定.....	140
表 3-10	磁力量測實驗結果.....	144
表 3-11	壓克力與欽鐵硼磁鐵的材料常數.....	154
表 3-12	無受力下試片之模態振型比較.....	155
表 3-13	受拉應力下的試片模態比較.....	156
表 3-14	受壓應力下的試片模態比較.....	157
表 3-15	受拉應力下的理論、FEM 與 LDV 之比較 .....	158
表 3-16	受壓應力下的理論、FEM 與 LDV 之比較 .....	159
表 4-1	二維 LBM 網格收斂性分析表 .....	183
表 4-2	三維 LBM 網格收斂性分析表 .....	184
表 4-3	LS-DYNA 網格收斂性分析表 .....	184
表 4-4	熱線風速計校正結果.....	185
表 4-5	圓柱繞流模型之流速對渦街頻率表 .....	185
表 4-6	圓柱繞流模型之流速對 Strouhal Number 表 .....	186
表 4-7	圓柱夾持試片模行之流速對渦街頻率表 .....	203
表 4-8	圓柱夾持試片模行之流速對 Strouhal Number 表 .....	204



表 5-1 涡街頻率與激振頻率之比較表 .....	216
表 5-2 各流速下壓電試片激振頻率與方均根電壓表 .....	216
表 5-3 受拉力 0.83 (N)下壓電試片之方均根電壓表 .....	238
表 5-4 受拉力 1.37 (N)下壓電試片之方均根電壓表 .....	238
表 5-5 受拉力 2.3 (N)下壓電試片之方均根電壓表 .....	239
表 5-6 受壓力 0.83 (N)下壓電試片之方均根電壓表 .....	239
表 5-7 受壓力 1.37 (N)下壓電試片之方均根電壓表 .....	240
表 5-8 受壓力 2.3 (N)下壓電試片之方均根電壓表 .....	240
表 5-9 理論、有限元素分析與能量擷取實驗的共振頻率比較表 .....	241

# 第一章 緒論



## 1.1 研究動機與目的

隨著現今社會科技發展，人類的生活已經與電能息息相關，諸如個人電子產品手機、電腦等，抑或是生活用品冰箱、冷氣等皆脫離不了電能，然而在這高度仰賴電能的生活中，也衍生出一些相當嚴重的問題，譬如近年來使用核能發電的國家所發生的核災：福島核災、車諾比核災等，或者是使用火力發電所造成的環境汙染，以及用於發電的石化燃料逐漸減少等，為解決上述問題，各國將能源政策著眼於永續經營上，積極發展各種再生能源發電，像是水力、風力、太陽能發電等。

本研究所使用的壓電能量擷取技術(Energy Harvesting Technologies)為透過壓電材料的正壓電效應，將環境所蘊含的機械能轉換成電能進行利用，壓電材料具有優秀的機電轉換效率，因此被廣泛地運用於工業和民用設施當中，譬如無線傳感測器、穿戴式電子設備、聲學元件與能量擷取器等。此外隨著物聯網時代的來臨，壓電能量擷取技術亦能應用於感測器上，使其具備自供電的功能，便能將感測器技術運用於能源缺乏的地區或是不易更換能源設備的惡劣環境當中。壓電材料主要分為單晶類(如石英)、薄膜類(如氧化鋅)、聚合物(如聚偏氟乙烯)、和陶瓷類(如鋯鈦酸鉛，即 PZT)，其中因陶瓷類材料具有較高的機電偶和係數、耐高溫、耐加工、成本低、材料特性穩定等優點而被廣泛應用，因此本研究選擇壓電陶瓷作為壓電能量擷取系統的試片。

壓電材料雖然能將環境振動所蘊含的機械能轉換成電能進行使用，但並非所有頻段的振動皆能有效的被壓電材料轉換成電能，只有當環境振動頻率與壓電材料的共振頻率相同時才會具有較大的發電效率，而影響共振頻率的因素有材料的幾何尺寸、材料常數、邊界條件等，其中又以改變邊界條件最為即時，因此本研究以改變邊界條件的方式，對壓電片施加軸向預應力，使試片的軸向剛性發生變化，期望改變試片的共振頻率並與環境共振頻率相互對應，提升壓電片的輸出電壓以

及發電頻寬。本論文首先利用疊加法(Superposition method)探討壓電平板於單邊固定邊界以及受軸向預應力作用下之面外振動特性，並與商用有限元素軟體(Finite Element Method, FEM)以及實驗量測結果進行相互比較並驗證其準確性。接著結合晶格波茲曼法(Lattice Boltzmann Method, LBM)計算圓柱障礙物於空氣流場中所產生的渦街現象(Vortex Street)，作為提供致振壓電平板的機械能。最後導入磁力變換軸向剛性機構，確認壓電平板在受軸向力作用下的共振頻率與電壓輸出的變化。

## 1.2 文獻回顧

壓電材料的相關理論與應用發展至今以百年有餘，其優秀的機電轉換特性使其廣泛被應用於檢測儀器上。壓電能量擷取技術主要利用壓電材料的正壓電效應，當受到環境外力作用而發生形變時，壓力材料會產生相應的電位差，因此對壓電材料反覆施加外力使其不斷發生變形，壓電材料便會因正壓電效應而產生週期性的電壓變化輸出，再藉由外加的整流電路、阻抗匹配與升降壓模組，便可將壓電材料應用於發電上，並提供電能給感測器等元件上。

壓電陶瓷雙晶片為一個三層結構材料，在金屬或複合材料的上下表面加上一層壓電陶瓷，由於中間層結構具有較好機械性值，能夠補強壓電陶瓷本身質地較脆、容易損壞的特形，使得雙晶片與單層壓電陶瓷相比有著更好的剛性，此外上下層壓電陶瓷的極化方向可隨需求進行調整，可以使雙晶片在輸入電場後上下層的壓電陶瓷產生一伸一縮的特性，與單層壓電陶瓷相比有著更大的彎曲變形，並在彎曲模態上有著更高的發電效益，因此選用壓電陶瓷雙晶片作為能量擷取實驗的試片。Wang[1]等人於 2004 年利用有限元素法建立簡支邊界下的並聯型壓電陶瓷雙晶片之靜態與動態模型，Ma[2]等人於 2007 年以有線元素法建構並聯型壓電陶瓷雙晶片在不同電極連接下的三維振動特性，並使用雷射都卜勒測振儀、全域式電子斑點干涉術與阻抗分析法進行比較，分析雙晶片的共振頻率與模態，並以 LDV 量測多點振動位移來驗證 AF-ESPI 的準確性。Eturk[3]等人於 2009 年將一維樑理論應用壓電陶瓷雙晶片的分析上，獲得雙晶片在串聯連接與並聯連接下的解析解與



電壓頻率響應，並搭配實驗進行驗證，Huang[4]等人於 2009 年透過數值分析與實驗探討壓電陶瓷雙晶片在串聯與並聯兩種連接型式下的三維振動特性，並分析不同連接型式下激發各個模態所需要的輸入電壓。

在壓電能量擷取技術上，各學者紛紛想改善能量擷取的輸出功率，主要可分為兩大類，其一為優化後端介面電路與阻抗匹配，另一個為改善前端壓電材料的致振源。於介面電路部分，Shu[5]等人於 2007 年對利用同步電桿開關採集(SSHI)介面電路的能量擷取系統進行分析以及性能上的評估，Ramadass[6]於 2009 年以開關電路對壓電材料的寄生電容現象進行優化，對比使用標準介面電路的能量擷取系統，前者有著更高的輸出功率，Lin[7]於 2013 年對在連接不同形式 SSHI 介面電路下的串聯陣列式壓電懸臂樑進行性能分析，並從中發現連接並聯式 SSHI 介面電路的懸臂樑陣列系統有著較高的輸出功率，而連接串聯式 SSHI 介面電路的系統則有著更寬的頻寬。在前端壓電材料的部分，因為在共振頻率下壓電材料會因發生共振而有著較高的電能輸出功率，因此如何改變壓電片的共振頻率使其能與環境激振頻率相互匹配成為重要課題。Leland[8]等人於 2006 年讓壓電陶瓷雙晶片承受軸向預應力，改變其軸向剛性以此降低其共振頻率，Xue[9]於 2008 年在固定邊界上連接不同長寬比的壓電試片，以提高在非共振頻率下的整個系統的輸出功率並達到寬頻之目的，Zhu[10]等人於同年將磁鐵放置於壓電懸臂樑的末端，藉由改變第二顆磁鐵與壓電懸臂樑的位置來調整壓電樑承受的預應力大小，並搭配微處理器以建構可調變共振頻率的系統，Lin[11]等人於 2010 年使用電磁耦合效應來改善壓電懸臂樑的電壓輸出，鄭雅倫[12]於 2016 年針對特定的扭轉模態，配合其模態振型進行電極設計以提升輸出功率，上述文獻中多以單邊固定邊界下的壓電樑進行研究，且環境的激振頻率多以低頻為主，因此周聖倫[13]於 2017 年以線性彈簧配合微量的扭轉彈簧作為壓電樑之邊界，以一維壓電樑理論求解彈簧邊界下壓電雙晶片的降頻效果，陳新承[14]於 2021 年使用非線性的錐形彈簧作為邊界，搭配二維平板疊加法，解析壓電平板於錐形彈簧邊界下的變頻效果。本研究以 Zhu 的預應力變頻

壓電樑模型為出發點，在壓電陶瓷雙晶片末端附著磁鐵，對雙晶片施加磁力以達變頻效果，將雙晶片固定於圓柱上並置於流場中，透過流體流經圓柱產生的卡門渦街作為環境激振源，開發流體致振能量擷取系統。在預應力造成變頻現象的議題上，Francis J.[15]於 1975 年分析了自由、簡支、固定邊界下一維樑模型受預應力的變頻現象，並求得各邊界受預應力下共振頻率的解析解，Zhu[10]於 2008 年提出的由微處理器建構的磁力變頻系統，在壓電雙晶片共振頻率的理論解析上也是以一維樑理論進行分析，因此本研究希望將預應力造成變頻效果的理論解析從一維樑理論的拓展展至二維平板理論，以完善預應力變頻的理論解析。

平板振動理論發展至今以百年有餘，Leissa[16]將雙向樑函數組合為基底函數，以此解析複雜邊界下的薄板振動問題，藉由簡易的分析流程來獲得薄板面外位移場的近似解，Gorman[17]使用疊加法求解在單邊固邊界以及全自由邊界下的等向性薄板振動問題，Kim 等人[18]於 1990 年探討在平面內力、集中質量、點與線彈簧支撐作用下的矩形平板彎曲振動問題，Gorman[19]於 2000 年以疊加法求解在扭轉彈簧支撐邊界且受平面內力作用下的薄板振動問題，吳亦莊[20]於 2009 年將壓電陶瓷矩形薄板以等效方式帶入等向性矩形平板計算，透過疊加法求解在全自由邊界下與單邊固定邊界下的壓電矩形平板的面外位移解。本研究將以上文獻作為基礎，透過疊加法推導受平面內力作用之單邊固定邊界的壓電薄板的振動特性，探討面內力對其共振頻率的影響，透過磁鐵對平板施加面內力並記錄其共振頻率的變化，以驗證理論之準確性。

晶格波茲曼法(Lattice Boltzmann Method, LBM)為一種用於求解流體模型的計算流體力學方法，從介觀角度出發計算晶格上流體粒子的分布函數以獲取流場的巨觀物理量，相比於傳統流場模擬所使用的 Navier Stokes Equation (NSE)，因為方程式本身非線性的關係，需耗費大量時間於矩陣的求解上，而晶格波茲曼法則是使用波茲曼方程式(Boltzmann Equation)，僅需進行迭代計算即可求解流場的運動，因此 LBM 比 NSE 具有更高的計算效率，且與 NSE 的計算結果也有著良好的對應性

[21]。此外由於晶格離散的特性，晶格波茲曼法可以結合圖形處理器(Graphics Processing Unit, GPU)以進行平行運算[22]，進一步提升計算效率，同時也因晶格波茲曼法的高計算效率，在不同型態的流場模擬中皆有其一席之地，Aharnov 等人[23]於 1993 年以 LBM 模型為基礎進行延伸，引入新的微觀模型用以模擬非牛頓流體，並發現在多孔介質中非牛頓流體流量與力量間的關係。He 等人[24]於 1997 年使用 ISLBE(Interpolation-Supplemented Lattice Boltzmann Method)進行圓柱繞流中渦漩脫落(Vortex Sheding)的數值模擬，在極座標系統下進行網格切格與後續數值計算，其模擬結果與實驗量測、傳統計算流體力學模擬有良好的對應性。He 等人[25]於 1999 年提出新的 LBM 方法用以模擬在接近不可壓縮極現下的多相流，在瑞利-泰勒不穩定性(Rayleigh – Taylor Instability)的模擬中具有良好的表現，除上述應用外，LBM 也被用於紊流、多成分流、懸浮液流結合複雜邊界條件等研究中[26][27][28]，而本研究主要以晶格波茲曼法計算圓柱繞流與圓柱夾持平板所構成的障礙物流場，並導入 Bhatnagar-Gross-Krook(BGK)碰撞模型，以紊流理論進行流場數值計算。

在進行紊流的模擬時，晶格波茲曼法主要可分為三類來進行處理，分別為直接數值模擬(Direct Numerical Simulation, DNS)、大渦流模擬(Large Eddy Simulation, LES)、雷諾平均納維-斯托克斯法(Reynolds-Averaged Navier-Stokes, RANS)[29]，DNS 方法為直接求解紊流現象，其網格切割非常細緻，因此可以求出所有尺度下的紊流運動並具有最精準的模擬結果，故不須對最小尺度的渦漩結構進行簡化或假設，但為計算所有尺度的流體運動，過程中會耗費大量時間以及電腦計算資源。LES 方法為建立濾波器以篩選流場中的渦漩尺寸，大尺度的渦漩直接進行求解，而小尺度的渦漩則會被忽略，因此 LES 的網格尺寸可以比 DNS 的還要大，能夠節省部分計算機資源，而小尺度渦漩所造成的影响仍不能被忽略，因此會考慮小渦漩產生的能量消散現象以更還原實際紊流運動行為。RANS 方法為求解流體平均流動的統御方程，它將流場中的各個物理量表示為一個時間平均量與脈動量的總和，將其帶入統御方程式進行處理後可得到流體平均流動的統御方程式，即雷諾平均納

維－斯托克斯方程式(Reynolds-Averaged Navier – Stokes equations)，由於該方程式經過了統計平均，使其無需考慮所有尺度的流體運動，僅需求解流體運動的平均值，因此比起 LES 方法，其對網格尺寸的需求又更低，而相對地 RANS 方法僅能求得紊流現象的平均資訊，而且因為未考慮小渦流，因此會與實際紊流運動有所落差。其中因為 LES 方法於計算過程中所使用的網格數少於 DNS，且具有較為直觀的物理意義以及良好的準確度，因此許多學者皆使用該方法，Lu 等人[30]於 2002 年使用 LBM 結合 LES 以模擬攪拌槽中的流動現象，透過切割非均勻網格的方式，節省模擬所需時間並與實驗、過去模擬結果有良好的對應性，Malaspinas 等人[31]於 2014 年以結合 LES 方法的 LBM 為基礎，提出一種新的壁模型(Wall-Model)，在模擬雷諾數(Reynolds Number, Re)高達 20000 的平面通道流(Plane Channel Flow)中有著良好的準確性，Jacob 等人[32]於 2018 年藉由修改引入 BGK 的 LBM 模型並導入超黏性項，提出了應用於弱可壓縮流中結合 LES 的 LBM 模型，在模擬  $Re = 3900$  下圓柱繞流的流體行為時有著非常準確的成果。本研究採用 LES 搭配 LBM，以二維、三維模型分析圓柱繞流與圓柱夾持平板模型的渦街生成現象，以作為流體致振能量擷取系統的外界激振源，計算障礙物所受到的升力係數並經快速傅立葉轉換後求得渦街頻率，探討在渦街頻率大小與壓電平板能量擷取關係，並透過調整磁鐵距離以影響壓電平板所受預應力大小，進而改變壓電平板的共振頻率，改善其能量擷取效率並提升其輸出功率。



### 1.3 論文內容簡介

本論文主旨為透過平板疊加法解析受預應力作用下的單邊固定壓電平板的面外振動解析，並搭配晶格波茲曼法求解圓柱夾持平板模型下的渦街頻率，以探討透過渦街激振下的受預應力下壓電平板輸出電壓響應，並透過預應力改變壓電平板共振頻率，提升壓電能量擷取的效果。首先會計算壓電陶瓷雙晶片在薄板假設下的等效參數，並透過疊加法求解受預應力下的壓電平板統御方程，以獲得壓電平板的共振頻率與面外模態振型，並使用雷射都卜勒測振儀與電子斑點干涉術進行實驗驗證。接著透過晶格波茲曼法計算圓柱繞流模型下的流場變化，並利用其生成渦街現象對壓電平板進行激振，透過數值計算求得渦街頻率，並與風洞實驗量測數據進行驗證。最後壓電平板置於風洞中並進行能量擷取實驗，首先量測在未施加預應力情況下壓電平板的電壓響應，探討不同渦街頻率激振下壓電平板的電壓輸出變化，接著導入磁力變換軸向機構，量測在預應力作用下壓電平板的電壓響應，並與未受預應力的實驗結果進行比較。以下說明本論文各章節之主要研究內容：

第一章敘述研究動機與文獻回顧，並簡單敘述本論文各章節之概要。

第二章為介紹本研究中所使用到的實驗儀其設備及其原理，首先介紹電子斑點干涉術，可用於量測壓電平板之共振頻率與模態振型，接著介紹雷射都卜勒測振儀，可進行單點的面外位移量測並獲得壓電平板之共振頻率，接著介紹實驗室的風洞設備，用以進行渦街量測實驗與流體致振能量擷取實驗，最後介紹皮托管與熱線風速計，兩者皆用於量測流場中的流速。

第三章為介紹單邊固定壓電平板受預應力作用下的面外振動解析，首先簡介壓電陶瓷雙晶片，並透過本構方程式、薄板假設與電極連接方式求得等效之參數，將其帶入至疊加法中以求解壓電平板的振動特性，並根據實驗模型的情況將質量效應也納入考慮中，並與商用有限元素軟體進行比較。接著導入磁力計算模型，計算磁鐵所造成的磁力大小並搭配實驗量測進行驗證，最後透過雷射都卜勒測振儀與電子斑點干涉術量測受磁力作用下壓電平板的共振頻率與模態振型，並與理論



解析、商用有限元素分析軟體進行比較。

第四章為介紹晶格波茲曼法的數值計算流程，推導在時間與空間離散化下的波茲曼方程式，方程式中的碰撞項則導入單鬆弛時間時間的近似解。在數值計算過程中，使用反彈邊界來處理流體與固體障礙物、牆壁間的交互關係，並透過動量交換法計算流體與固體在交互作用，流體施加於固體上的作用力，並以此計算圓柱繞流模型與圓柱夾持平板模型的升力係數，再經快速傅立葉轉換求得渦街頻率，並與商用模擬軟體以及風洞實驗進行比較與驗證。

第五章為介紹壓電能量擷取實驗，首先進行未受預應力下的平板流體致振能量擷取實驗，藉由示波器量測壓電平板的電壓輸出，以探討不同渦街頻率下壓電平板的能量擷取效果，接著導入磁力變換軸向機構並進行受預應力下的平板流體致振能量擷取實驗，探討受不同預應力且不同渦街頻率下平板能量擷取效果的變化，並與未受預應力作用的實驗結果進行比較。

第六章為敘述本論文的研究成果，並提供未來可持續進行研究與改進的方向。

## 第二章 實驗原理與架設

本章介紹本研究中所使用的實驗儀器基本原理以及架設方式，電子斑點干涉術(ESPI)是利用光學原理進行全域式的非接觸量測，可偵測物體振動的模態形狀。

雷射都卜勒測振儀(LDV)利用都卜勒效應，以掃頻的方式進行單點非接觸式量測，並藉由快速傅立葉轉換(FFT)得到試片的面外振動頻率響應，由峰值位置即可得知共振頻率。風洞為透過風機將氣流引入管道內，並於管道內進行實驗以研究流體與固體間的交互作用關係。皮托管為一種物理式量測的儀器，透過測量壓力差並利用伯努利定律，即可量測流體的速度。熱線儀為一種電子式量測儀器，透過氣體經過探針造成的電阻值變化，利用回授電壓訊號來求得流體速度。

### 2.1 電子斑點干涉術

電子斑點干涉術 (Electronic Speckle Pattern Interferometry, ESPI) 由全相術 (Holography) 發展而來，該技術是利用影像感測元件 (Charge-Coupled Device, CCD) 與電子處理技術記錄低空間頻率 (Low Spatial Frequency) 全場成像圖形，可用來量測物體表面靜態及動態變形。量測原理為利用兩道同調光源射向待測物及參考平面，當待測物表面發生變形時，在待測物表面上光點會產生微小的位移變化，造成與參考面之光點有光程差，形成干涉條紋，並藉由兩道光之光程差的變化得到待測物的變形資料，可即時的在電腦螢幕上獲得待測物的變形量，大幅降低了全相術照片沖洗與重建的繁瑣步驟與時間。ESPI 有著非接觸式全域量測、以及量測的即時性等優點，可由簡單的架設及校正動作來進行實驗量測。干涉後影像強度的調制項就能將因待測物表面變形而產生的相變化包含在內，由於調制項中是以光波長作為量測基準，因此精度可達到光波長的等級約為次微米，因此 ESPI 要求光源的同調性，本論文採用同調性較佳的氦氖雷射。ESPI 量測振動時常用的方法為均時法 (Time-Averaging Method)，特點是在 CCD 的曝光時間內擷取振動中物體在不同時間的影像，在圖形中干涉影像最亮的部分為節線區 (nodal line)，代表位移為零，而亮暗相間的條紋為等位移線的分佈，故可由全場干涉圖形直接獲得振動位移的

分佈情形，若以數學關係式表示，均時法所得的條紋都是以零階貝索函數（zero-order Bessel Function）所組成。ESPI 的光學架設因量測的位移方向不同，量測三維變形的光路架設可以分為以下兩種：待測物表面的垂直位移之面外光路架設、平行位移的面內光路架設。將面外及面內所得到的實驗量測資訊結合即為待測物完整的三維變形。本論文中只考慮在面外方向之振動量測，在 ESPI 的面外量測架設尚須配合待測物的大小、擺設來改面光路徑。

由於本論文量測的物體為壓電材料，因此可利用逆壓電效應激振試片，由函數產生器輸出穩態且單一頻率的正弦訊號給壓電片，使其產生振動；另一種激振方式為利用函數產生器對振動器輸入訊號，振動器直接對裝著試片的機構本身進行激振。首先固定輸入電壓改變正弦訊號的頻率，當達到試片的共振頻率時，ESPI 量測系統可觀察出最密集的干涉條紋，此時再固定頻率將電壓降低，防止電壓過大干涉條紋過於密集不易觀察。

以下針對面外振動量測系統進行詳細的理論介紹及系統架設與量測方法，面外振動可分為水平式架設、垂直式架設，如圖 2-2、圖 2-3 所示，紅線為雷射所產生的光路徑，雷射光束首先經過空間濾波器(Spatial Filter)再經由擴束鏡擴大光束，再利用了分光元件(Beam Splitter)分出兩道光束，其中一道光束投射向待測物表面，這道光束為物體表面上的物光；另一道光束則擴散至參考平面(reference plane)在參考平面上漫射造成一種光斑式的參考光(Speckled Reference Beam)，此道光束接著會反射在與 CCD 相機同軸的分光元件，這種漫射至平面再投射於分光元件的方式可避免鏡面光產生光暈現象以增強干涉影像的品質。這道參考光會與投影在待測物體的物光同軸入射並聚焦於 CCD 相機的感光平面上，產生干涉影像資訊，訊號進入電腦後經過即時影像相減的軟體進行處理，即可快速的在電腦螢幕上顯示出干涉條紋的圖形。

接著說明 ESPI 量測的基本理論, 假設待測物振動前在成像平面(Image Plane)上的某點之光強度為：

$$I_1 = I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} \cos \phi_0 \quad (2-1)$$



其中  $I_O$  是物體光之光強度,  $I_R$  是參考光之光強度,  $\phi_0$  為物體光與參考光的相位差。待測物開始振動後, 該點散射的物光假設有一相位角差  $\Delta\phi$  變化量, 若物體此時振幅為  $A$ , 且  $\theta_0$  為物體光與觀測方向(垂直於物體表面之方向)之夾角, 振動的角頻率為  $\omega$ , 則此相位差可表示為：

$$\phi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} (1 + \cos \theta_0) A \cos \omega t = \Gamma A \cos \omega t \quad (2-2)$$

令

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda} (1 + \cos \theta_0) \quad (2-3)$$

為 ESPI 面外量測靈敏度, 其與系統架設息息相關, 架設的角度  $\theta_0$  愈接近  $0^\circ$  時靈敏度愈大, 其中  $\lambda$  為雷射光的光波波長。

由於 CCD 在取像時間內, 會不斷累積該物體在不同時刻的振動影像, 均時法的概念可視為直接對影像累加後再對時間平均, 因此當待測物處於振動狀態時, 取像時間週期的平均值即為 CCD 影像所擷取之光強度  $I_2$ ：

$$I_2 = I_O + I_R + \frac{2}{\tau} \sqrt{I_O I_R} \int_0^\tau \cos(\phi_0 + \Gamma A \cos \omega t) dt \quad (2-4)$$

對(2-4)式進行簡化可得到：

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \cos(\phi_0 + \Gamma A \cos \omega t) dt &= \operatorname{Re} \left[ \int_0^\tau \exp(i\phi_0 + i\Gamma A \cos \omega t) dt \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ e^{i\phi_0} \int_0^\tau \exp(i\Gamma A \cos \omega t) dt \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ e^{i\phi_0} \int_0^\tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\Gamma A) e^{in(\frac{\pi}{2} - \omega t)} dt \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ e^{i\phi_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\Gamma A) e^{in(\frac{\pi}{2} - \omega t)} \frac{e^{-in\omega\tau} - 1}{-in\omega} \right] \end{aligned} \quad (2-5)$$



其中  $\tau$  為 CCD 擷取影像時間，若  $\tau = \frac{2k\pi}{\omega}$  或  $\tau > \frac{2k\pi}{\omega}$ ，否則其值不可能為零，除非  $n = 0$ ，故可將簡化式子改寫：

$$\int_0^\tau \cos(\phi_0 + \Gamma A \cos \omega t) dt = \tau J_0(\Gamma A) \cos \phi_0 \quad (2-6)$$

因此，光強度  $I_2$  為：

$$I_2 = I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} \cos \phi \times J_0(\Gamma A) \quad (2-7)$$

其中  $J_0(\Gamma A)$  為零階貝索函數(Bessel Function)，由(2-6)可知貝索函數中包含了振幅  $A$ ，但因前面兩項為直流項：物光光強  $I_O$  與參考光強  $I_R$  相對較大，使調節項貝索函數所包含的振幅在量測結果中較不明顯，為了解決直流項之影響，電子斑點干涉術的量測採用微動裝置，來變更參考光的光行程，可使(2-6)式中的  $\cos \phi$  變成  $\cos(\phi + \pi)$ ，再利用影像加減法將兩張振動影像光場  $I_1$ 、 $I_2$  進行相減，即能消除直流項並使調節項  $J_0(\Gamma A)$  較易呈現其特徵，但必須在光程控制上非常精準，控制光程的微動裝置也相對昂貴。因此振動變動電子斑點干涉術(Amplitude-Fluctuation Electronic Speckle Pattern Interferometry, AF-ESPI) 於 1996 年被提出，利用兩張具有適當變化之振動影像相減，即可得到穩態之全場位移干涉圖形，改良了設備成本與實驗的複雜性。

AF-ESPI 的面外光學架設方式與 ESPI 的差別在於是將具有適當變化之影像進行影像相減處理。假設試片振動時第一張已有振動振幅影像光強為：

$$I_1 = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left\{ I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} \cos \left[ \phi_0 + \frac{2\pi}{\lambda} (1 + \cos \theta_0) A \cos \omega t \right] \right\} dt \quad (2-8)$$

令靈敏度  $\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda} (1 + \cos \theta_0)$ ，參照影像相減法推導，則(2-7)式的光強度  $I_1$ ：

$$I_1 = I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} (\cos \phi_0) J_0(\Gamma A) \quad (2-9)$$

在待側物振動中取第二張影像，與之前擷取的  $I_1$  影像相比，振幅產生微量的變化，



將第二張影像的光強度表示為：

$$I_2 = \frac{1}{\tau} \left\{ \int_0^\tau I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} \cos [\phi_O + \Gamma(A + \Delta A) \cos \omega t] dt \right\} \quad (2-10)$$

其中

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \cos [\phi_O + \Gamma(A + \Delta A) \cos \omega t] dt \\ &= \operatorname{Re} \left\{ e^{i\phi_O} \int_0^\tau \exp[i\Gamma(A + \Delta A) \cos \omega t] dt \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ e^{i\phi_O} \int_0^\tau \exp(i\Gamma A \cos \omega t) \exp(i\Gamma \Delta A \cos \omega t) dt \right\} \end{aligned} \quad (2-11)$$

對  $\exp[i\Gamma \Delta A \cos \omega t]$  進行泰勒展開，假設忽略三次以上之高次項，並將其代入進行積分得到：

$$\int_0^\tau \cos [\phi_O + \Gamma(A + \Delta A) \cos \omega t] dt = \tau \left[ 1 - \frac{1}{4} \Gamma^2 (\Delta A)^2 \right] J_0(\Gamma A) \quad (2-12)$$

(2-9)式中的第二張影像光強度則可改寫為：

$$I_2 = I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} (\cos \phi_O) \left[ 1 - \frac{1}{4} \Gamma^2 (\Delta A)^2 \right] J_0(\Gamma A) \quad (2-13)$$

將第二張影像與第一張影像相減消去直流項，即(2-11)減去(2-8)式，並經整流後顯示在螢幕上，相減後的影像光強度  $I$  為：

$$I = 2\sqrt{I_O I_R} \left| \frac{1}{4} \Gamma^2 (\Delta A)^2 J_0(\Gamma A) \cos \phi_O \right| = \frac{\sqrt{I_O I_R}}{2} \left| \Gamma^2 (\Delta A)^2 J_0(\Gamma A) \cos \phi_O \right| \quad (2-14)$$

由(2-12)得知振動振福為  $|J_0(\Gamma A)|$  所控制，並利用零階貝索函數的特性，當振福  $A = 0$  時， $|J_0(\Gamma A)|$  有最大值，實驗上可對應量測物體振動時零位移的節線區域，且為影像最亮的區域。

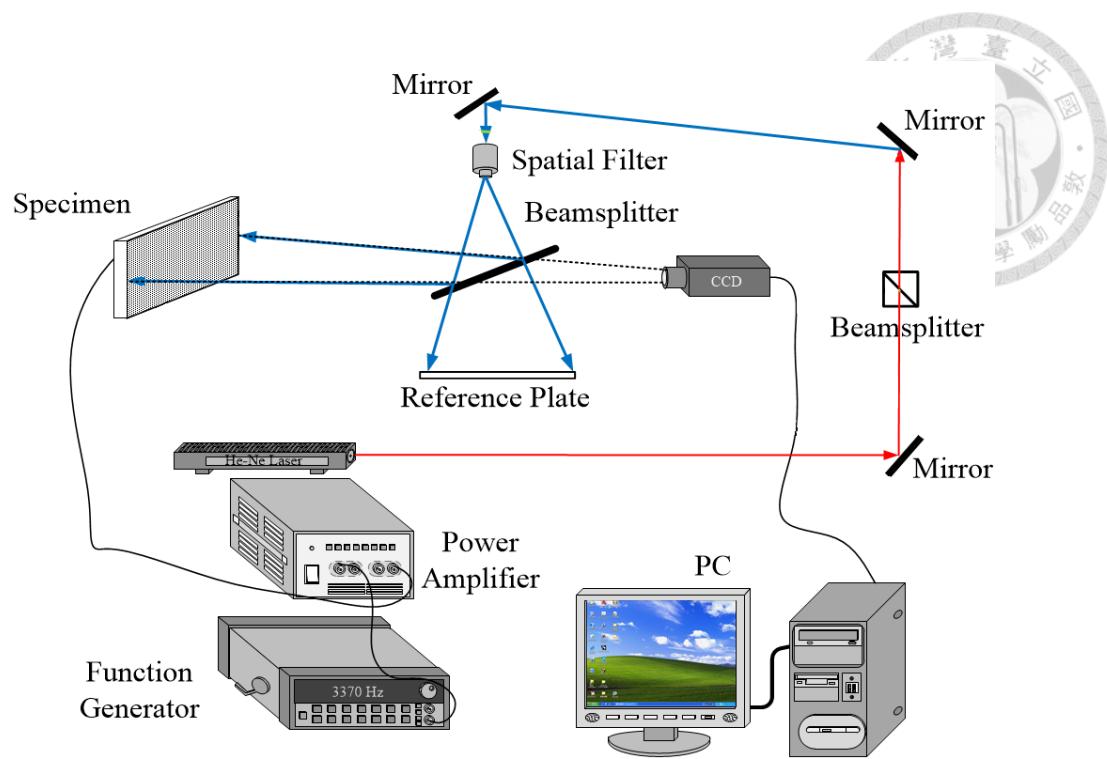


圖 2-1 ESPI 面外光路架設系統圖

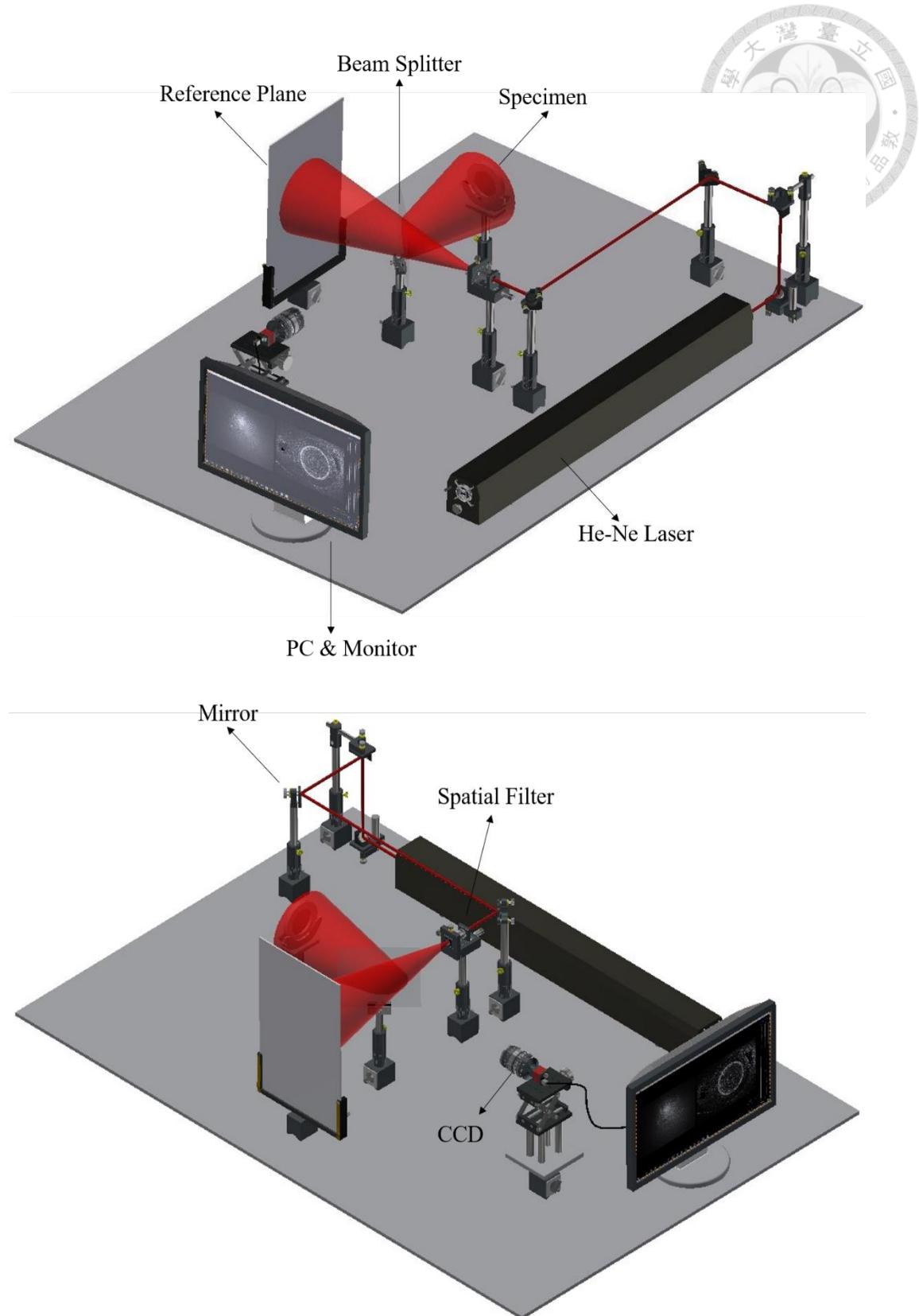


圖 2-2 ESPI 水平面外架設圖

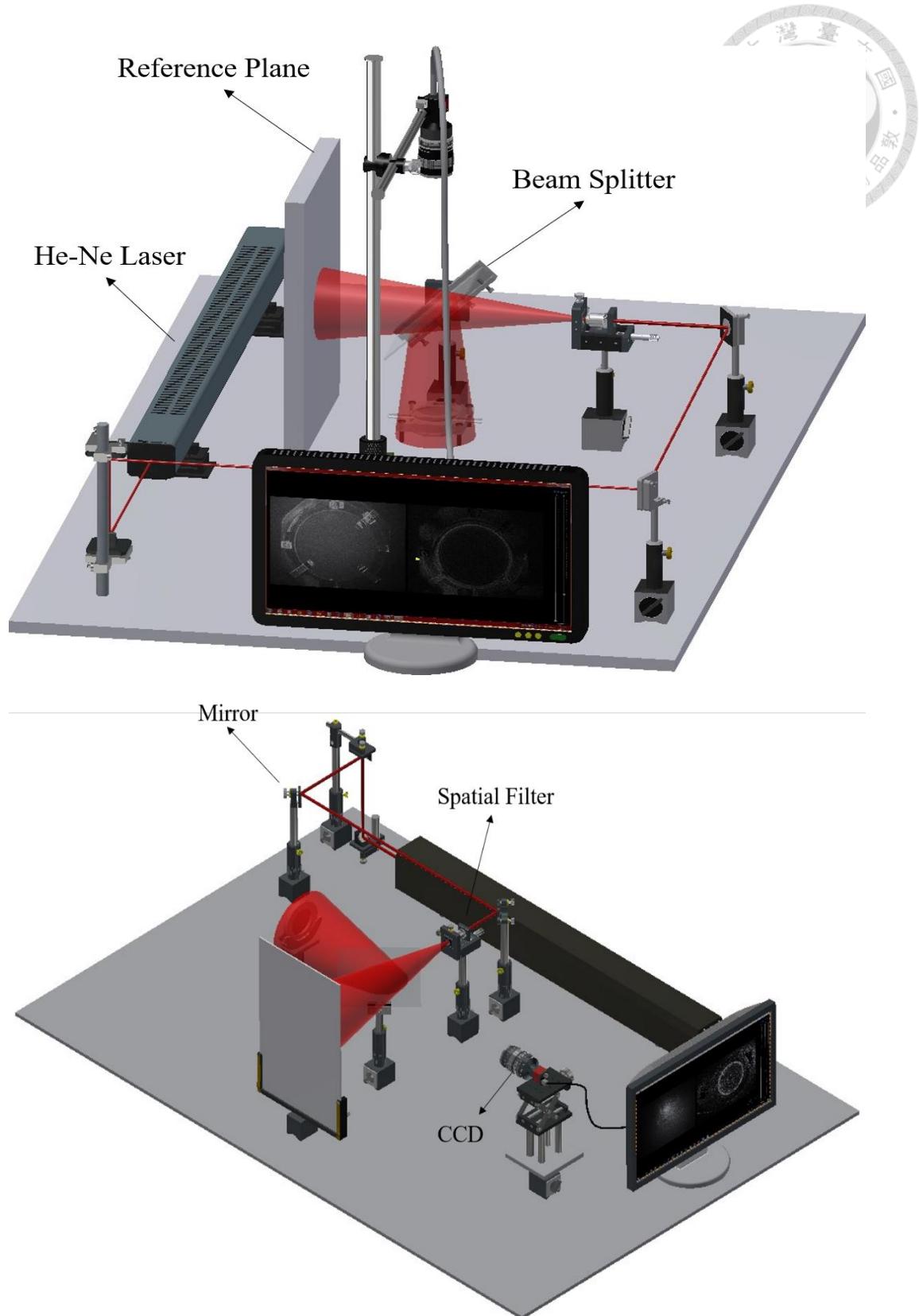


圖 2-3 ESPI 垂直面外架設圖



## 2.2 雷射都卜勒測振儀

雷射都卜勒振動儀(Laser Doppler Vibrometer, LDV)使用都卜勒效應(Doppler effect)，當雷射光照射在靜止物體表面上，其反射與入射光波頻率會相同，但當物體產生運動時，其反射與入射光波頻率會有所差異，且其頻率之變化值正比於物體之運動速度，因此可量測物體振動之面外速度，再根據數值方法計算出位移與加速度，是一種非接觸式光學的單點量測系統，可用於極小之位移與速度量測。

本論文所使用之 LDV 為 Polytec 公司所生產，其型號為 OFV-505，如圖 2-4 所示，主要使用聲光調製器(Acousto-Optic Modulator, AOM)系統或稱為布拉格盒(Bragg Cell)進行量測，其原理為聲波在晶體材料裡傳遞，晶體材料之折射率受到聲波傳遞的影響產生變化，進一步的影響到光的行為，此稱為聲光效應，如圖 2-5 所示，在晶體材料的兩端，連接一個轉換器與減振器，由轉換器產生聲波，在晶體材料內傳遞，最後傳遞至減振器吸收聲波，當雷射光穿透此晶體材料時，便可調整聲波之頻率來調整光波的繞射角度，以這樣的幾何形狀傳遞聲波可以調製數兆赫茲的頻寬。

假設轉換器所產生之聲波的頻率為  $f_a$ ，而聲波在材料中的傳遞速率為  $V_a$ ，則晶體材料中折射率改變的週期為：

$$T = \frac{V_a}{f_a} \quad (2-15)$$

假設入射光的波長為  $\lambda_0$ ，晶體材料折射率為  $n$ ，則入射光在晶體材料裡傳遞時其波長變為：

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad (2-16)$$

一般而言繞射角之角度都很小，便可以假設  $\sin \theta_B = \theta_B$ ，在使用布拉格繞射公式求得繞射角：

$$\theta_B = \frac{\lambda}{2T} = \lambda \frac{f_a}{2V_a} \quad (2-17)$$

具體光路如圖 2-6 所示，首先雷射藉由分光鏡分為兩道光，其中一道入射光經由 Bragg Cell 調整出適當之頻率，最後傳導至檢測器(Detector)，另外一道光傳至待測物(Sample)，當物體在振動時，其反射光頻率會與入射光頻率不同，並且反射光透過分光鏡傳導至探測器(Detector)，便可獲得兩道光的頻率差異進而量測出速度。



圖 2-4 LDV-OFV505

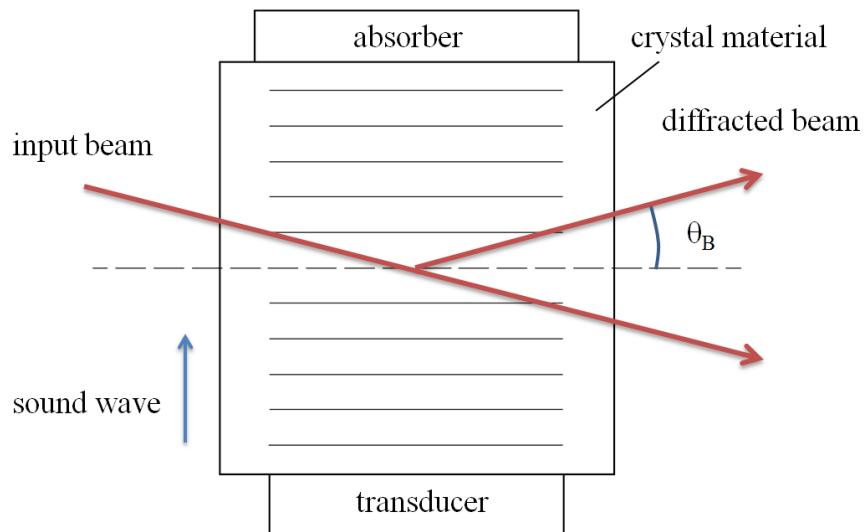


圖 2-5 聲光調製器基本構造

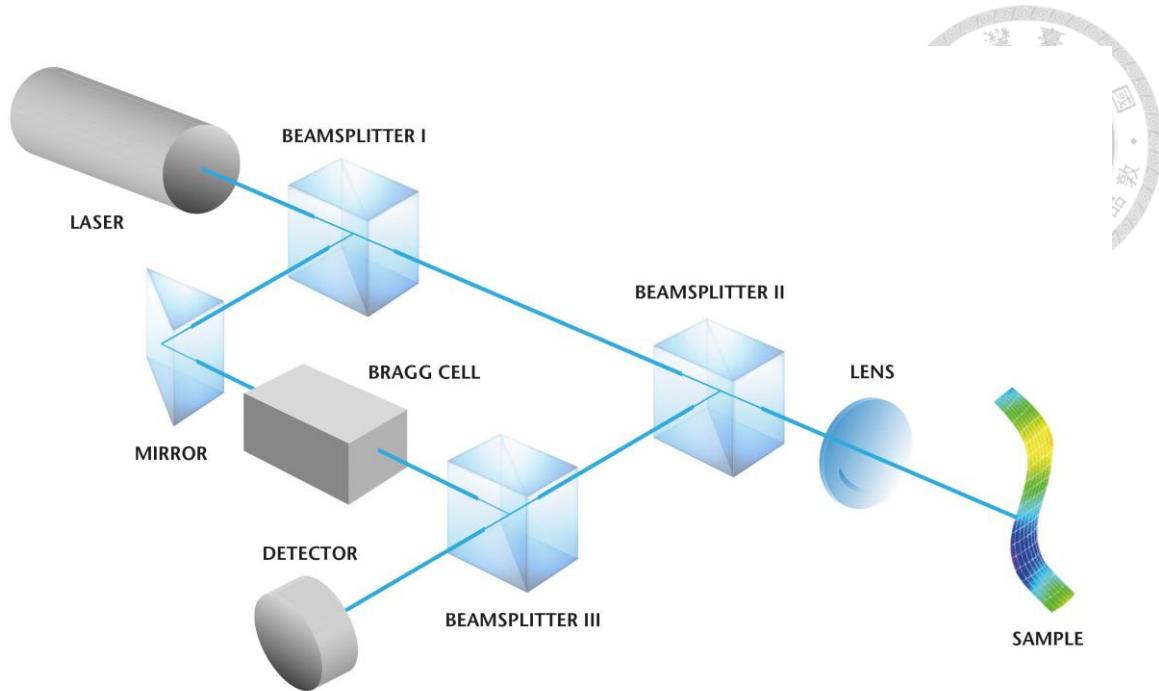


圖 2-6 LDV 內部光路圖

### 2.3 風洞

風洞(Wind Tunnel)為一種生成人造氣流的管道，用以研究流體與物體間的交互作用關係，風洞之截面尺寸為  $300 \times 300 (mm^2)$ ，總長度為 1850 (mm)其中測試段的長度為 1000 (mm)，管壁皆為 15 (mm)厚的壓克力所製成，尺寸如圖 2-7 所示，風洞實際構造圖如圖 2-8 所示。風洞整體可分為三個部分，分別為最前端的整流段、中間的測試段(Test Section)與末端的沉澱段(Settling Chamber)，最後連接離心風扇以抽取風洞內的空氣。

整流段由蜂巢板加上三面不同孔隙的網目組成，蜂巢板如圖 2-9 所示，每個蜂巢孔徑為 5 (mm)、厚度為 4 (mm)，其功用為引導外界空氣流入風洞內，並在過程中消除大尺度結構的渦旋以達整流目的，網目為不鏽鋼細絲垂直編織而成，如圖 2-10 所示，從靠近蜂巢板至接近測試段的網目其規格分別為 120 目、200 目、300 目，恰為由疏到密，其功能為依序消除更小尺度結構的渦旋，使流入測試段的氣流具有足夠的穩定性與均勻性。測試段為主要進行實驗的區域，包含風速量測、渦街量測等。沉澱段則是用於防止風機周圍的不穩定氣流影響測試段的實驗。

風洞所使用之風機如圖 2-11 所示，其馬達為 TECO AEHF 系列中馬力 7.5(HP)、220(V)、頻率 60(Hz)，並搭配 YASKAWA V1000 系列的馬達馬力更換變頻器進行風機的轉速控制，其解析度為 0.01(Hz)，實體圖如圖 2-12 所示。



圖 2-7 風洞尺寸示意圖 (mm)



圖 2-8 風洞實體圖



圖 2-9 蜂巢板



圖 2-10 網目



圖 2-11 直結式風機



圖 2-12 Yaskawa V1000 變頻器



## 2.4 皮托管

皮托管(Pitot Tube)為用於測量流體流速的儀器，使用時將其置於流場中並將端口對準氣流方向，並將尾端的滯壓孔與靜壓孔與壓差計相連，便可量測指定位置的流速，為一種物理式量測方式。假設氣體為不可壓縮的，並且忽略重力對氣體的影響，根據伯努利定律(Bernoulli's Law)，氣體壓力與流速關係可寫為下式：

$$\frac{P_i}{\rho} + \frac{V_i^2}{2} = \text{const.} \quad (2-18)$$

其中  $P$  為氣體壓力、 $V$  為流速、 $\rho$  為氣體密度，在皮托管的量測中，可根據靜壓孔與滯壓孔兩者的物理量搭配(2-18)式去求得量測點的流速。

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} \quad (2-19)$$

其中下標 1 代表滯壓孔的物理量、下標 2 代表靜壓孔的物理量，將(2-19)式進行移項可得：

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho} = \frac{\Delta P}{\rho} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} \quad (2-20)$$

因為滯壓孔的流速為零，即  $V_1 = 0$ ，因此便可透過量測壓力差以求得流場速度

$$V_2 = V = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}} \quad (2-21)$$

本研究所使用的皮托管為 DWYER 公司生產型號 Dwy-160 之皮托管，實體圖如圖 2-13，與其搭配的是型號 DWY-MS-121-LCD 之壓差計，實體圖如圖 2-14，其最大量測的壓力差為 100 (Pa)，準確度為 0.1%。



圖 2-13 皮托管



圖 2-14 壓差計



## 2.5 热線風速計

熱線風速計(Hot-Wire Anemometry)為一種用於量測流速的儀器，其原理為當流體經過熱線時會造成熱線的溫度下降，同時會改變其電阻值，而熱線本身的設計為會加熱至固定溫度，因此熱線降溫後儀器會提供更高的電壓以加熱熱線至原來的溫度，隨著流體流速增加，熱線也會降溫越多，相應的儀器會提供更高的電壓，便可透過紀錄的電壓大小求得流體速度。由於熱線為電子式量測儀器，因此在使用前須經過物理式量測儀器進行校正。根據根據恆溫狀態下的 King's Law 热平衡方程式為[33]:

$$e^2 = a + bv^n \quad (2-22)$$

其中  $e$  為儀器的電壓輸出、 $a$  為熱線的零點輸出、 $b$  為儀器的靈敏度、 $v$  為流體速度， $n$  為常數，在流速小於 50(m/s)時通常為 0.5，因此透過皮托管量測流速大小並記錄對應的熱線電壓值，即可求出熱線的電壓與流速間的四次曲線關係並完成校正。本研究使用的是 TSI 公司製造之 MODEL1201 系列的熱線探針，探針尺寸如圖 2-15 所示，實體圖如圖 2-16 所示，並連接安都企業所製造之熱線儀其型號為 HW-101，實體圖如圖 2-17 所示，該儀器可以加熱探針並接收電壓訊號，再將其轉換為數位訊號並輸出給其他電子量測儀器如示波器等。

**Model 1210 General Purpose Probe**

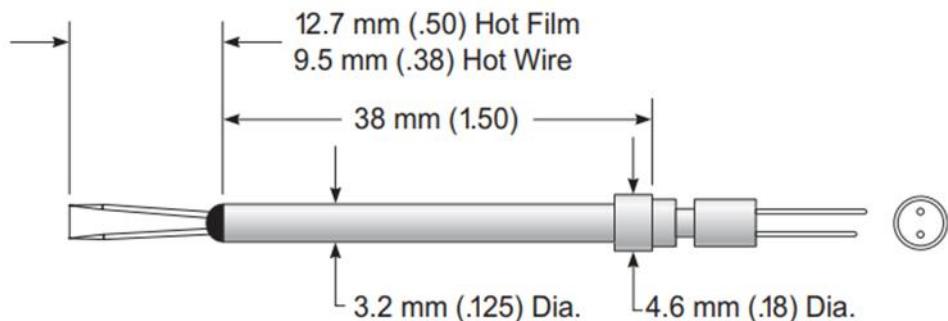


圖 2-15 热線探針尺寸圖



圖 2-16 热線探針



圖 2-17 热線風速計 HW-101

### 第三章 壓電矩形薄板理論



本章節探討壓電陶瓷雙晶片於軸向力作用下的面外振動特性，其中包含理論解析、有限元素分析與實驗量測。理論解析首先從壓電材料的本構方程式出發，套用薄板力學假設與壓電材料電學假設，推導出受軸向力作用下之壓電統御方程式，並配合疊加法求解，探討壓電平板在單邊固定邊界下的共振頻率與面外振動模態變化。實驗量測使用磁力作為軸向力來源，首先建立磁力計算模型，並搭配龍門平台、彈簧秤進行磁力量測實驗以進行模型驗證。接著藉由磁鐵施加軸向力於壓電平板上，量測壓電平板在受不同大小軸向力作用下的共振頻率與模態振型變化，並與先前推導之疊加法理論以及有限元素分析結果進行比較。

#### 3.1 壓電陶瓷雙晶片

壓電陶瓷雙晶片由三層結構所構成，上下層材料為壓電陶瓷，並在其上下表面皆塗上電極使電荷導通。中間層材料為黃銅，可有效增強元件的結構強度，改善壓電陶瓷易碎的特性。因為壓電陶瓷具有極化方向，因此可以根據上下層材料的極化方向分為兩種形式：當上下層材料的極化方向相同時稱之為並聯型，當上下層材料極化方向相反時則稱之為串聯型；此外根據電極的連接方式，可再分為並聯電極連接與串聯電極連接，綜合上述兩種分類方式，可以得出以下四種分類：並聯型壓電雙晶片以並聯電極連接方式(PBP)、並聯型壓電雙晶片以串聯電極連接方式(PBS)、串聯型壓電雙晶片以並聯電極連接方式(SBP)、串聯型壓電雙晶片以串聯電極連接方式(SBS)，各別取並聯型或串聯型的第一個字母、雙晶片的第一個字母與並聯電極連接或串聯電極連接的第一個字母，並將其組合以作為上述分類方式的縮寫，簡稱為 PBP、PBS、SBP、SBS，四種分類模式如圖 3-1 至圖 3-4 所示。

本研究所使用的壓電陶瓷雙晶片由美國 Piezo System Inc. 公司出產，其型號為 PSI-5A4E 的鋯鈦酸鉛(PZT)壓電陶瓷，材料常數如表 3-1 所示，中間層的部分由於廠商僅說明材料為黃銅，並未提供其材料常數，故本研究參考[1]的著作中型號為 C86100 的銅材料常數以進行後續理論計算與有限元素分析，其材料常數如表



3-2 所示。在幾何尺寸上，壓電陶瓷層與黃銅層的長跟寬皆相同，僅在厚度有所差異，實際尺寸如圖 3-1 所示。表 3-1 為原廠所提供的壓電陶瓷雙晶片材料常數，在進行後續理論計算、有限元素分析前，須先進行材料常數轉換。

$$\begin{aligned}
 c_{pq}^E s_{qp}^E &= 1, \quad c_{pq}^D s_{qp}^D = 1 \\
 s_{pq}^D &= s_{pq}^E - d_{ip} g_{pk} \\
 d_{ip} &= e_{iq} s_{qp}^E \\
 \varepsilon_{ik}^S &= \varepsilon_{ik}^T - d_{ip} e_{pk}
 \end{aligned} \tag{3-1}$$

固定電場下的楊氏模數可搭配普松比轉換為三個柔性常數，可表示為：

$$s_{11}^E = \frac{1}{Y_{11}^E}, \quad s_{33}^E = \frac{1}{Y_{33}^E}, \quad s_{12}^E = -\nu s_{11}^E, \quad s_{66}^E = 2(s_{11}^E - s_{12}^E) \tag{3-2}$$

壓電材料常數與機電耦合係數的關係：

$$d_{ij}^2 = k_{ij}^2 \varepsilon_{ii}^T s_{jj}^E \tag{3-3}$$

固定電場與固定電位移的柔性常數關係：

$$s_{13}^E = s_{13}^D (1 - k_{31}^2) + k_{31} k_{33} \sqrt{s_{11}^E s_{33}^E} \tag{3-4}$$

根據上述轉換之關係式，便可獲得壓電本構方程式中所需的 10 個壓電材料常數。

### 3.1.1 壓電本構方程式

基於線性壓電理論，壓電陶瓷的本構方程式(e-form)可寫為以下形式：

$$\begin{cases} T_{ij} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k \\ D_i = e_{ikl} S_{kl} + \varepsilon_{ij}^S E_j \end{cases} \tag{3-5}$$

其中  $c_{ijkl}^E$  為固定電場下的彈性常數(Elastic Coefficient)、 $\varepsilon_{ij}^S$  為固定應變下的介電常數

(Dielectric Coefficient)、 $e_{kij}$  為壓電應力常數(Piezoelectric Stress Coefficient)、 $T$  為應力、 $S$  為應變、 $E$  為電場、 $D$  為電位移。將張量表示法改為矩陣表示法(Voigt Notation)

$$T_{ij} = T_p, \quad c_{ijkl}^E = c_{pq}^E, \quad e_{kij} = e_{iq} \tag{3-6}$$

其中下標  $p, q$  為 1~6，分別對應 11, 22, 33, 23, 13, 12，且當  $q=1, 2, 3$  時  $S_{kl} = S_q$ ，



q=4, 5, 6 時  $S_{kl} = S_q$ 。本研究使用的壓電材料為橫向等向性材料(Transversely Isotropic)，極化方向為 3 方向，套入此材料特性後將(3-5)式以矩陣形式表示壓電陶瓷的本構方程式：

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ \hline D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ \hline E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

其中  $c_{66}^E = \frac{c_{11}^E - c_{12}^E}{2}$ 。

壓電陶瓷雙晶片由上下兩層的壓電陶瓷與中間層的黃銅所構成，以下兩組方程式分別代表上下層的壓電本構方程式，其中上標  $(u)$  代表為上層壓電陶瓷，上標  $(l)$  則代表為下層壓電陶瓷。

$$\begin{cases} T_{ij}^{(u)} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij}^{(u)} E_k^{(u)} \\ D_i^{(u)} = e_{ikl}^{(u)} S_{kl} + \varepsilon_{ij}^S E_j^{(u)} \end{cases} \quad (3-8)$$

$$\begin{cases} T_{ij}^{(l)} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij}^{(l)} E_k^{(l)} \\ D_i^{(l)} = e_{ikl}^{(l)} S_{kl} + \varepsilon_{ij}^S E_j^{(l)} \end{cases} \quad (3-9)$$

使用全域座標系表示，若極化方向相反，則機電耦合係數必須加上負號。

黃銅的本構方程式如下所示，其中上標  $(c)$  代表中間層的黃銅：

$$T_{ij}^{(c)} = c_{ijkl}^{(c)} S_{kl} \quad (3-10)$$

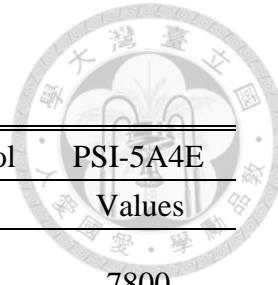
因為黃銅為等向性材料，可將(3-10)式以矩陣形式表示：

$$\begin{bmatrix} T_1^{(c)} \\ T_2^{(c)} \\ T_3^{(c)} \\ T_4^{(c)} \\ T_5^{(c)} \\ T_6^{(c)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^{(c)} & c_{12}^{(c)} & c_{12}^{(c)} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^{(c)} & c_{11}^{(c)} & c_{12}^{(c)} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^{(c)} & c_{12}^{(c)} & c_{11}^{(c)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{66}^{(c)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^{(c)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^{(c)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix}$$

其中  $c_{66}^{(c)} = \frac{c_{11}^{(c)} - c_{12}^{(c)}}{2}$  。



表 3-1 壓電陶瓷材料常數



Material Property	Symbol	PSI-5A4E Values
<b>Mechanical</b>		
Density ( $kg/m^3$ )	$\rho_p$	7800
Elastic Modulus ( $N/m^2$ )	$s_{11}^E$	$1.515 \times 10^{-11}$
	$s_{33}^E$	$1.923 \times 10^{-11}$
Poisson's Ratio	$\nu_p$	0.31
<b>Dielectric</b>		
Relative Dielectric Constants(@ 1kHz)	$\epsilon_{33}^T / \epsilon_0$	1800
	$\epsilon_{33}^T / \epsilon_0$	1800
Dielectric Constant in Vacuum ( $F/m$ )	$\epsilon_0$	$8.854 \times 10^{-12}$
<b>Piezoelectric</b>		
Piezoelectric strain coefficients ( $m/Volt$ )	$d_{31}$	$-1.9 \times 10^{-10}$
	$d_{33}$	$3.9 \times 10^{-10}$
	$d_{15}$	$\approx 5.5 \times 10^{-10}$
Coupling Coefficients	$k_{31}$	0.32
	$k_{33}$	0.72
	$k_{15}$	$\approx 0.55$

表 3-2 黃銅材料常數

Material Property	Symbol	Brass (Bronze C86100)
Density ( $kg/m^3$ )	$\rho_c$	8830
Young's Modulus ( $N/m^2$ )	$E$	$1.03 \times 10^{11}$
Poisson's Ratio	$\nu_c$	0.34

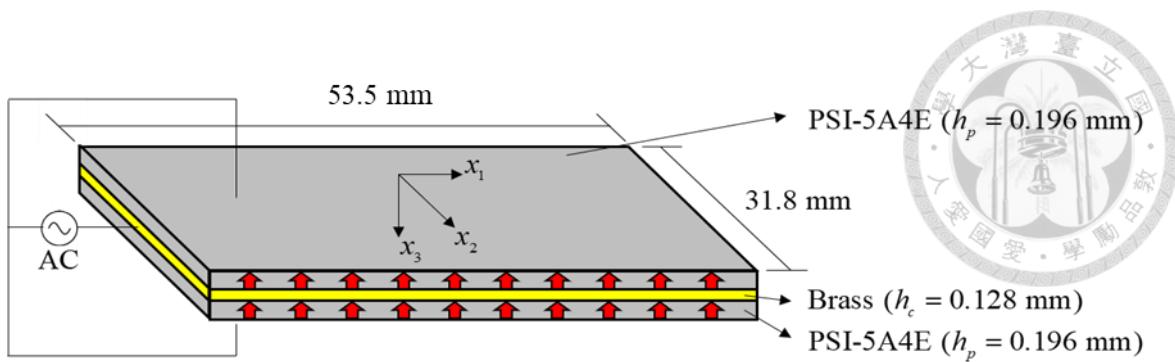


圖 3-1 並聯型壓電雙晶片以並聯電極連接方式(PBP)

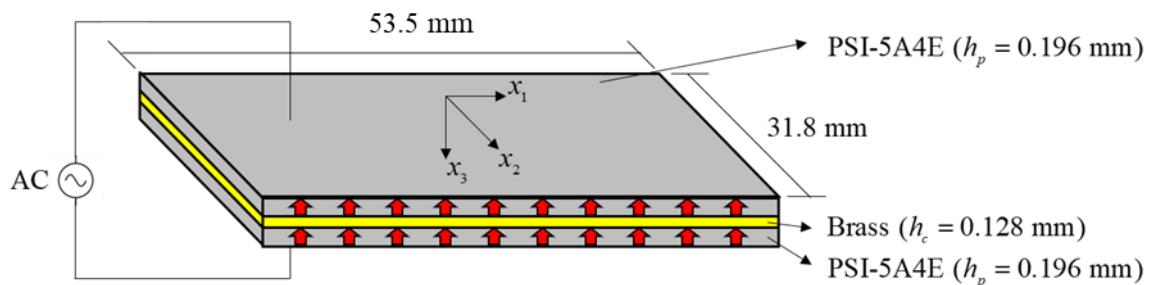


圖 3-2 並聯型壓電雙晶片以串聯電極連接方式(PBS)

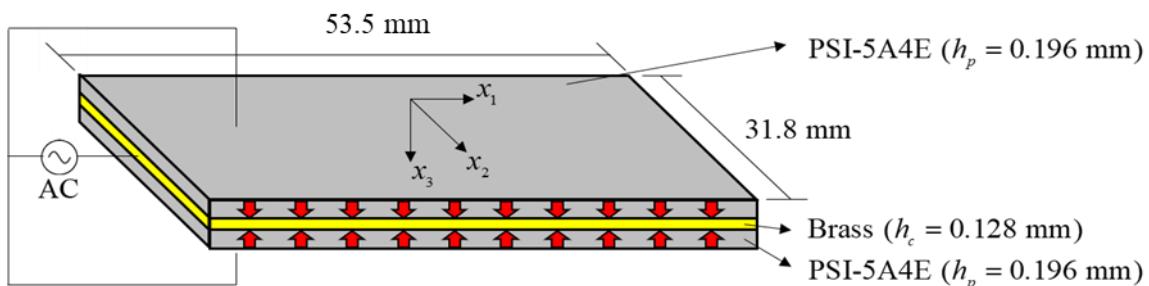


圖 3-3 串聯型壓電雙晶片以並聯電極連接方式(SBP)

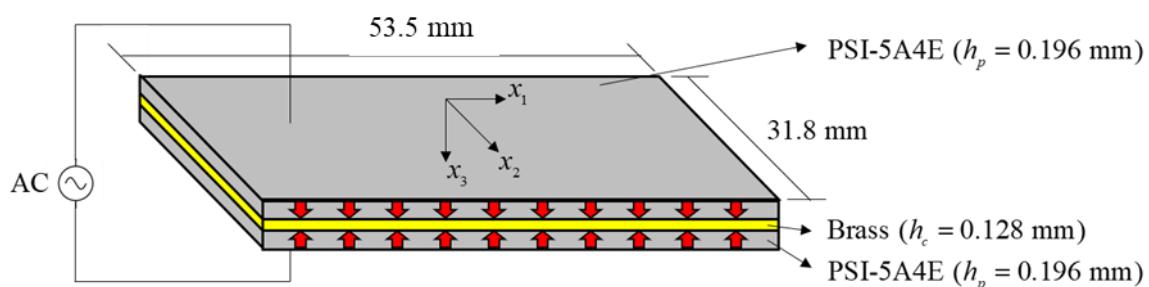


圖 3-4 串聯型壓電雙晶片以串聯電極連接方式(SBS)



### 3.1.2 薄板力學假設

本研究所使用的壓電陶瓷雙晶片因為總厚度  $2h_p + h_c$  遠小於長度  $a$  和寬度  $b$ ，因此可以視為薄板並套用 Kirchhoff 薄板理論的假設，將三維問題簡化為二維中面與厚度方向的問題，如圖 3-5 所示。Kirchhoff 薄板理論的假設如下：

1. 垂直於平板中面的直線於變形後仍為直線，並與中面保持垂直，不考慮厚度方向之剪應變

$$S_4 = S_5 = 0 \quad (3-12)$$

2. 垂直於中面方向的正向應力遠小於平行於中面方向的剪應力

$$T_3 = 0 \quad (3-13)$$

3. 薄板發生面外變形時中面不受拉伸作用，並無面內方向的變形
4. 忽略轉動慣性力矩

根據上述假設，可將三維位移場  $U$  以二維中面位移場  $u$  表示

$$\begin{aligned} U_1(x_1, x_2, x_3) &= u_1(x_1, x_2) - x_3 u_{3,1}(x_1, x_2) \\ U_2(x_1, x_2, x_3) &= u_2(x_1, x_2) - x_3 u_{3,2}(x_1, x_2) \\ U_3(x_1, x_2, x_3) &= u_3(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (3-14)$$

應變與位移關係式：

$$S_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}) \quad (3-15)$$

將(3-14)式帶入(3-15)式可得應變以中面位移場表示式：

$$\begin{aligned} S_1 &= S_{11} = u_{1,1} - x_3 u_{3,11} \\ S_2 &= S_{22} = u_{2,2} - x_3 u_{3,22} \\ S_3 &= S_{33} = u_{3,3} \\ S_6 &= 2S_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} - 2x_3 u_{3,12} \end{aligned} \quad (3-16)$$

從(3-14)式可得知  $u_3$  並非厚度方向的函數，因此在對厚度方向微分後為零，然而並

不能忽略  $S_3$  的影響，以上層壓電陶瓷為例，將薄板假設第二點，即(3-13)式帶入本



構方程式(3-8)式後可得：

$$S_3 = -\frac{c_{13}^E}{c_{33}^E} (S_1 + S_2) + \frac{e_{33}^E}{c_{33}^E} E_3^{(u)}$$

並將(3-17)式帶回本構方程式(3-8)式後可推得薄板假設下的壓電本構方程式：

$$\left[ \begin{array}{c} T_1^{(u)} \\ T_2^{(u)} \\ T_4^{(u)} \\ T_5^{(u)} \\ T_6^{(u)} \\ D_1^{(u)} \\ D_2^{(u)} \\ D_3^{(u)} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccccc|ccc} \bar{c}_{11}^E & \bar{c}_{12}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{e}_{31} \\ \bar{c}_{12}^E & \bar{c}_{11}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ \bar{e}_{31} & \bar{e}_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\varepsilon}_{33}^S \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ E_1^{(u)} \\ E_2^{(u)} \\ E_3^{(u)} \end{array} \right] \quad (3-18)$$

其中的等效壓電材料參數為：

$$\begin{aligned} \bar{c}_{11}^E &= c_{11}^E - \frac{(c_{13}^E)^2}{c_{33}^E}, \quad \bar{c}_{12}^E = c_{12}^E - \frac{(c_{13}^E)^2}{c_{33}^E} \\ \bar{e}_{31} &= e_{31} - e_{33} \frac{c_{13}^E}{c_{33}^E}, \quad \bar{\varepsilon}_{33}^S = \varepsilon_{33}^S + \frac{(e_{33}^S)^2}{c_{33}^E} \end{aligned} \quad (3-19)$$

將(3-18)式的矩陣展開後可得

上層壓電陶瓷：

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1^{(u)} = \bar{c}_{11}^E (u_{1,1} - x_3 u_{3,11}) + \bar{c}_{12}^E (u_{2,2} - x_3 u_{3,22}) - \bar{e}_{31}^{(u)} E_3^{(u)} \\ T_2^{(u)} = \bar{c}_{12}^E (u_{1,1} - x_3 u_{3,11}) + \bar{c}_{11}^E (u_{2,2} - x_3 u_{3,22}) - \bar{e}_{31}^{(u)} E_3^{(u)} \\ T_4^{(u)} = e_{15}^{(u)} \tilde{E}_1^{(u)} \\ T_5^{(u)} = e_{15}^{(u)} \tilde{E}_2^{(u)} \\ T_6^{(u)} = c_{66}^E (u_{1,2} - u_{2,1} - 2x_3 u_{3,12}) \\ D_1^{(u)} = \varepsilon_{11}^S \tilde{E}_1^{(u)} \\ D_2^{(u)} = \varepsilon_{11}^S \tilde{E}_2^{(u)} \\ D_3^{(u)} = \bar{e}_{31}^{(u)} (u_{1,1} - x_3 u_{3,11}) + \bar{e}_{31}^{(u)} (u_{2,2} - x_3 u_{3,22}) + \varepsilon_{33}^S E_3^{(u)} \end{array} \right. \quad (3-20)$$

下層壓電陶瓷：



$$\begin{cases} T_1^{(l)} = \bar{c}_{11}^E (u_{1,1} - x_3 u_{3,11}) + \bar{c}_{12}^E (u_{2,2} - x_3 u_{3,22}) - \bar{e}_{31}^{(l)} E_3^{(l)} \\ T_2^{(l)} = \bar{c}_{12}^E (u_{1,1} - x_3 u_{3,11}) + \bar{c}_{11}^E (u_{2,2} - x_3 u_{3,22}) - \bar{e}_{31}^{(l)} E_3^{(l)} \\ T_4^{(l)} = e_{15}^{(l)} \tilde{E}_1^{(l)} \\ T_5^{(l)} = e_{15}^{(l)} \tilde{E}_2^{(l)} \\ T_6^{(l)} = c_{66}^E (u_{1,2} - u_{2,1} - 2x_3 u_{3,12}) \\ D_1^{(l)} = \varepsilon_{11}^S \tilde{E}_1^{(l)} \\ D_2^{(l)} = \varepsilon_{11}^S \tilde{E}_2^{(l)} \\ D_3^{(l)} = \bar{e}_{31}^{(l)} (u_{1,1} - x_3 u_{3,11}) + \bar{e}_{31}^{(l)} (u_{2,2} - x_3 u_{3,22}) + \varepsilon_{33}^S E_3^{(l)} \end{cases} \quad (3-21)$$

將黃銅的本構方程式(3-10)式展開後可推得黃銅層之應力以位移場表示式：

$$T_1^{(c)} = c_{11}^{(c)} (u_{1,1} - x_3 u_{3,11}) + c_{12}^{(c)} (u_{2,2} - x_3 u_{3,22}) \quad (3-22)$$

$$T_2^{(c)} = c_{12}^{(c)} (u_{1,1} - x_3 u_{3,11}) + c_{11}^{(c)} (u_{2,2} - x_3 u_{3,22}) \quad (3-23)$$

$$T_6^{(c)} = c_{66}^{(c)} (u_{1,2} + u_{2,1} - 2x_3 u_{3,12}) \quad (3-24)$$

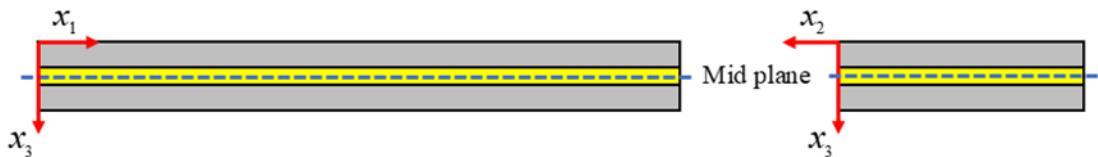


圖 3-5 中面示意圖

### 3.1.3 壓電材料電學假設

將上述已套用薄板假設的壓電材料，帶入下列電學假設：

- 由於壓電材料為介電材料，假設壓電材料內部無自由電荷，因此在靜電學中套用高斯定律後可得：

$$D_{i,i}^{(u)} = D_{i,i}^{(l)} = 0 \quad (3-25)$$

- 由於壓電陶瓷雙晶片的總厚度  $2h_p + h_c$  遠小於其長度  $a$  和寬度  $b$ ，主要極化方向在  $x_3$  方向：



$$E_1^{(u)} = E_1^{(l)} = E_2^{(u)} = E_2^{(l)} = 0 \quad (3-26)$$

3. 假設上下層電位函數在厚度方向呈二次函數變化：

$$\begin{aligned} \phi_0^{(u)} &= \left[ \phi_0^{(u)} + x_3 \phi_1^{(u)} + x_3^2 \phi_2^{(u)} \right], \quad \left( \frac{h_c}{2} \right) < x_3 < \left( h_p + \frac{h_c}{2} \right) \\ \phi_0^{(l)} &= \left[ \phi_0^{(l)} + x_3 \phi_1^{(l)} + x_3^2 \phi_2^{(l)} \right], \quad -\left( h_p + \frac{h_c}{2} \right) < x_3 < -\left( \frac{h_c}{2} \right) \end{aligned} \quad (3-27)$$

電場與電位關係式：

$$E_i^{(u)} = -\phi_{,i}^{(u)}, \quad E_i^{(l)} = -\phi_{,i}^{(l)} \quad (3-28)$$

將(3-28)式帶入(3-20)、(3-21)式可得：

$$D_1^{(u)} = D_1^{(l)} = D_2^{(u)} = D_2^{(l)} = 0 \quad (3-29)$$

將(3-29)式帶入(3-25)式可得：

$$\frac{\partial D_3^{(u)}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial D_3^{(l)}}{\partial x_3} = 0 \quad (3-30)$$

從(3-30)式可以得知  $D_3^{(u)}$ 、 $D_3^{(l)}$  並非厚度方向的函數，將(3-20)、(3-21)式對厚度方向

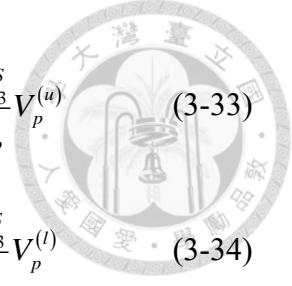
積分：

$$\begin{aligned} h_p D_3^{(u)} &= h_p \bar{e}_{31}^{(u)} (u_{1,1} + u_{2,2}) - \frac{1}{2} \bar{e}_{31}^{(u)} \left[ \left( h_p + \frac{h_c}{2} \right)^2 - \left( \frac{h_c}{2} \right)^2 \right] (u_{3,11} + u_{3,22}) \\ &\quad + \bar{\epsilon}_{33}^S \left[ \left( -\phi^u \Big|_{x_3=h_p+\frac{h_c}{2}} \right) - \left( -\phi^u \Big|_{x_3=\frac{h_c}{2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (3-31)$$

$$\begin{aligned} h_p D_3^{(l)} &= h_p \bar{e}_{31}^{(l)} (u_{1,1} + u_{2,2}) - \frac{1}{2} \bar{e}_{31}^{(l)} \left[ \left( -h_p - \frac{h_c}{2} \right)^2 - \left( -h_p - \frac{h_c}{2} \right)^2 \right] (u_{3,11} + u_{3,22}) \\ &\quad + \bar{\epsilon}_{33}^S \left[ \left( -\phi^l \Big|_{x_3=-\frac{h_c}{2}} \right) - \left( -\phi^l \Big|_{x_3=-h_p-\frac{h_c}{2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (3-32)$$

假設上下層壓電陶瓷的電位差為  $V_p^{(u)}$ 、 $V_p^{(l)}$ ，如圖 3-6 所示，將(3-31)、(3-32)簡化

可得：



$$D_3^{(u)} = \bar{e}_{31}^{(u)} (u_{1,1} + u_{2,2}) - \frac{1}{2} \bar{e}_{31}^{(u)} (h_p + h_c) (u_{3,11} + u_{3,22}) - \frac{\bar{\epsilon}_{33}^S}{h_p} V_p^{(u)} \quad (3-33)$$

$$D_3^{(l)} = \bar{e}_{31}^{(l)} (u_{1,1} + u_{2,2}) + \frac{1}{2} \bar{e}_{31}^{(l)} (h_p + h_c) (u_{3,11} + u_{3,22}) - \frac{\bar{\epsilon}_{33}^S}{h_p} V_p^{(l)} \quad (3-34)$$

將(3-33)式與壓電本構方程式(3-20)式比對，將(3-34)式與(3-21)式比對，便可推得電場以位移場與電位差的表示式：

$$E_3^{(u)} = \frac{\bar{e}_{31}^{(u)}}{\bar{\epsilon}_{33}^S} (u_{3,11} + u_{3,22}) x_3 - \frac{1}{2} \frac{\bar{e}_{31}^{(u)}}{\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p + h_c) (u_{3,11} + u_{3,22}) - \frac{1}{h_p} V_p^{(u)} \quad (3-35)$$

$$E_3^{(l)} = \frac{\bar{e}_{31}^{(l)}}{\bar{\epsilon}_{33}^S} (u_{3,11} + u_{3,22}) x_3 + \frac{1}{2} \frac{\bar{e}_{31}^{(l)}}{\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p + h_c) (u_{3,11} + u_{3,22}) - \frac{1}{h_p} V_p^{(l)} \quad (3-36)$$

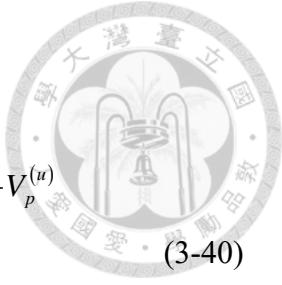
將(3-35)與(3-36)式帶回壓電本構方程式(3-20)與(3-21)式便可得到於薄板理論假設下的壓電陶瓷之應力場以位移場與電壓表式的關係式：

上層壓電：

$$T_1^{(u)} = \bar{c}_{11}^E u_{1,1} + \bar{c}_{12}^E u_{2,2} + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{2 \bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p + h_c) (u_{3,11} + u_{3,22}) + \frac{\bar{e}_{31}^{(u)}}{h_p} V_p^{(u)} \\ - x_3 \left[ \left( \bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,11} + \left( \bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,22} \right] \quad (3-37)$$

$$T_2^{(u)} = \bar{c}_{12}^E u_{1,1} + \bar{c}_{11}^E u_{2,2} + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{2 \bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p + h_c) (u_{3,11} + u_{3,22}) + \frac{\bar{e}_{31}^{(u)}}{h_p} V_p^{(u)} \\ - x_3 \left[ \left( \bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,11} + \left( \bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,22} \right] \quad (3-38)$$

$$T_6^{(u)} = c_{66}^E (u_{1,2} + u_{2,1} - 2x_3 u_{3,12}) \quad (3-39)$$



下層壓電:

$$T_1^{(l)} = \bar{c}_{11}^E u_{1,1} + \bar{c}_{12}^E u_{2,2} + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{2\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p + h_c) (u_{3,11} + u_{3,22}) - \frac{\bar{e}_{31}^{(l)}}{h_p} V_p^{(u)} \\ - x_3 \left[ \left( \bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,11} + \left( \bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,22} \right] \quad (3-40)$$

$$T_2^{(l)} = \bar{c}_{12}^E u_{1,1} + \bar{c}_{11}^E u_{2,2} + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{2\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p + h_c) (u_{3,11} + u_{3,22}) - \frac{\bar{e}_{31}^{(l)}}{h_p} V_p^{(u)} \\ - x_3 \left[ \left( \bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,11} + \left( \bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,22} \right] \quad (3-41)$$

$$T_6^{(l)} = c_{66}^E (u_{1,2} + u_{2,1} - 2x_3 u_{3,12}) \quad (3-42)$$

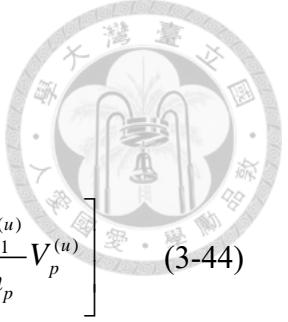


圖 3-6 電位差示意圖

### 3.1.4 壓電薄板受軸向力作用下之統御方程式推導

將(3-37)~(3-39)式對厚度積分，便可推得上層壓電陶瓷之彎矩以位移場與電位差的表示式:

$$M_{11}^{(u)} = \int_{\frac{h_c}{2}}^{h_p + \frac{h_c}{2}} T_1^{(u)} x_3 dx_3 \\ = \frac{1}{2} (h_p^2 + h_c h_p) \left[ \bar{c}_{11}^E u_{1,1} + \bar{c}_{12}^E u_{2,2} + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{2\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p + h_c) (u_{3,11} + u_{3,22}) + \frac{\bar{e}_{31}^{(u)}}{h_p} V_p^{(u)} \right] \\ - \frac{1}{3} \left[ \left( h_p + \frac{h_c}{2} \right)^3 - \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 \right] \left[ \left( \bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,11} + \left( \bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,22} \right] \quad (3-43)$$



$$\begin{aligned}
M_{22}^{(u)} &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{h_p + \frac{h_c}{2}} T_2^{(u)} x_3 dx_3 \\
&= \frac{1}{2} (h_p^2 + h_c h_p) \left[ \bar{c}_{12}^E u_{1,1} + \bar{c}_{11}^E u_{2,2} + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{2 \bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p + h_c) (u_{3,11} + u_{3,22}) + \frac{\bar{e}_{31}^{(u)}}{h_p} V_p^{(u)} \right] \\
&\quad - \frac{1}{3} \left[ \left( h_p + \frac{h_c}{2} \right)^3 - \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 \right] \left[ \left( \bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,11} + \left( \bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,22} \right] \quad (3-44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{12}^{(u)} &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{h_p + \frac{h_c}{2}} T_6^{(u)} x_3 dx_3 \\
&= \frac{1}{2} c_{66}^E (h_p^2 + h_c h_p) (u_{1,2} + u_{2,1}) - \frac{2}{3} c_{66}^E \left[ \left( h_p + \frac{h_c}{2} \right)^3 - \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 \right] u_{3,12} \quad (3-45)
\end{aligned}$$

將(3-40)~(3-42)式對厚度積分，便可推得下層壓電陶瓷之彎矩以位移場與電位差的表示式：

$$\begin{aligned}
M_{11}^{(l)} &= \int_{-h_p - \frac{h_c}{2}}^{-\frac{h_c}{2}} T_1^{(l)} x_3 dx_3 \\
&= \frac{1}{2} (-h_p^2 - h_c h_p) \left[ \bar{c}_{11}^E u_{1,1} + \bar{c}_{12}^E u_{2,2} + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{2 \bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p + h_c) (u_{3,11} + u_{3,22}) - \frac{\bar{e}_{31}^{(l)}}{h_p} V_p^{(l)} \right] \\
&\quad - \frac{1}{3} \left[ \left( -h_p - \frac{h_c}{2} \right)^3 - \left( -\frac{h_c}{2} \right)^3 \right] \left[ \left( \bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,11} + \left( \bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,22} \right] \quad (3-46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{22}^{(l)} &= \int_{-h_p - \frac{h_c}{2}}^{-\frac{h_c}{2}} T_2^{(l)} x_3 dx_3 \\
&= \frac{1}{2} (-h_p^2 - h_c h_p) \left[ \bar{c}_{12}^E u_{1,1} + \bar{c}_{11}^E u_{2,2} + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{2 \bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p + h_c) (u_{3,11} + u_{3,22}) - \frac{\bar{e}_{31}^{(l)}}{h_p} V_p^{(l)} \right] \\
&\quad - \frac{1}{3} \left[ \left( -h_p - \frac{h_c}{2} \right)^3 - \left( -\frac{h_c}{2} \right)^3 \right] \left[ \left( \bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,11} + \left( \bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(l)})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) u_{3,22} \right] \quad (3-47)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
M_{12}^{(l)} &= \int_{-h_p - \frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} T_6^{(l)} x_3 dx_3 \\
&= \frac{1}{2} c_{66}^E \left( -h_p^2 - h_c h_p \right) (u_{1,2} + u_{2,1}) - \frac{2}{3} c_{66}^E \left[ \left( -h_p - \frac{h_c}{2} \right)^3 - \left( -\frac{h_c}{2} \right)^3 \right] u_{3,12}
\end{aligned} \tag{3-48}$$

將(3-22)~(3-24)式對厚度積分，便可推得黃銅層之彎矩以位移場的表示式：

$$M_{11}^{(c)} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} T_1^{(c)} x_3 dx_3 = -\frac{2}{3} \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 \left( c_{11}^{(c)} u_{3,11} + c_{12}^{(c)} u_{3,22} \right) \tag{3-49}$$

$$M_{22}^{(c)} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} T_2^{(c)} x_3 dx_3 = -\frac{2}{3} \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 \left( c_{12}^{(c)} u_{3,11} + c_{11}^{(c)} u_{3,22} \right) \tag{3-50}$$

$$M_{12}^{(c)} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} T_6^{(c)} x_3 dx_3 = -\frac{4}{3} \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 c_{66}^{(c)} u_{3,12} \tag{3-51}$$

將上述上下層壓電陶瓷與黃銅層的彎矩場相加便可得到薄板的等效彎矩：

$$\begin{aligned}
M_{11}^{(eq)} &= \frac{1}{2} \left( h_p^2 + h_c h_p \right) \left[ \frac{\left( \bar{e}_{31}^{(u)} \right)^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p + h_c) (u_{3,11} + u_{3,22}) + \frac{\bar{e}_{31}^{(u)} V_p^{(u)} - \bar{e}_{31}^{(l)} V_p^{(l)}}{h_p} \right] \\
&\quad - \frac{2}{3} \left[ \left( h_p + \frac{h_c}{2} \right)^3 - \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 \right] \left\{ \left[ \bar{c}_{11}^E + \frac{\left( \bar{e}_{31}^{(u)} \right)^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,11} + \left[ \bar{c}_{12}^E + \frac{\left( \bar{e}_{31}^{(u)} \right)^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,22} \right\} \\
&\quad - \frac{2}{3} \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 \left( c_{11}^{(c)} u_{3,11} + c_{12}^{(c)} u_{3,22} \right)
\end{aligned} \tag{3-52}$$

$$\begin{aligned}
M_{22}^{(eq)} &= \frac{1}{2} \left( h_p^2 + h_c h_p \right) \left[ \frac{\left( \bar{e}_{31}^{(u)} \right)^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p + h_c) (u_{3,11} + u_{3,22}) + \frac{\bar{e}_{31}^{(u)} V_p^{(u)} - \bar{e}_{31}^{(l)} V_p^{(l)}}{h_p} \right] \\
&\quad - \frac{2}{3} \left[ \left( h_p + \frac{h_c}{2} \right)^3 - \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 \right] \left\{ \left[ \bar{c}_{12}^E + \frac{\left( \bar{e}_{31}^{(u)} \right)^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,11} + \left[ \bar{c}_{11}^E + \frac{\left( \bar{e}_{31}^{(u)} \right)^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,22} \right\} \\
&\quad - \frac{2}{3} \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 \left( c_{12}^{(c)} u_{3,11} + c_{11}^{(c)} u_{3,22} \right)
\end{aligned} \tag{3-53}$$

$$M_{12}^{(eq)} = -\frac{4}{3} c_{66}^E \left[ \left( h_p + \frac{h_c}{2} \right)^3 - \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 \right] u_{3,12} - \frac{4}{3} \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 c_{66}^{(c)} u_{3,12} \tag{3-54}$$



從上述式子可得知彎矩與  $\bar{e}_{31}^{(u)}V_p^{(u)} - \bar{e}_{31}^{(l)}V_p^{(l)}$  相關，代表壓電材料與電壓兩者的耦合關係，其中若壓電陶瓷雙晶片為並聯形，代表上下層的壓電陶瓷其極化方向相同，所以  $\bar{e}_{31}^{(u)} = \bar{e}_{31}^{(l)}$ ；若為串聯型，則上下層的壓電陶瓷其極化方向相反，所以  $\bar{e}_{31}^{(u)} = -\bar{e}_{31}^{(l)}$ 。根據不同的電極連接方式，若為串聯連接型則  $V_p^{(u)} = V_p^{(l)}$ ；若為並聯連接型則  $V_p^{(u)} = -V_p^{(l)}$ 。參考圖 3-1~3-4，壓電雙晶片若為 SBS 或 PBP 型式，在施加電壓後會獲得更大的彎矩場，而若為 SBP 或 PBS 型式，在施加電壓後彎矩場彼此間會相互抵銷，因此不會獲得額外的彎矩場。

根據負載的連接型式，若為短路連接狀態，則上下層壓電陶瓷的電壓皆為零，即  $V_p^{(u)} = V_p^{(l)} = 0$ ，因此可將短路等效彎矩寫為：

$$M_{11(short)}^{(eq)} = \frac{1}{2} \left( h_p^2 + h_c h_p \right) \left[ \frac{\left( \bar{e}_{31}^{(u)} \right)^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p + h_c)(u_{3,11} + u_{3,22}) \right. \\ \left. - \frac{2}{3} \left[ \left( h_p + \frac{h_c}{2} \right)^3 - \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 \right] \left\{ \left[ \bar{c}_{11}^E + \frac{\left( \bar{e}_{31}^{(u)} \right)^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,11} + \left[ \bar{c}_{12}^E + \frac{\left( \bar{e}_{31}^{(u)} \right)^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,22} \right\} \right] \quad (3-55)$$

$$- \frac{2}{3} \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 (c_{11}^{(c)} u_{3,11} + c_{12}^{(c)} u_{3,22})$$

$$M_{22(short)}^{(eq)} = \frac{1}{2} \left( h_p^2 + h_c h_p \right) \left[ \frac{\left( \bar{e}_{31}^{(u)} \right)^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} (h_p + h_c)(u_{3,11} + u_{3,22}) \right. \\ \left. - \frac{2}{3} \left[ \left( h_p + \frac{h_c}{2} \right)^3 - \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 \right] \left\{ \left[ \bar{c}_{12}^E + \frac{\left( \bar{e}_{31}^{(u)} \right)^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,11} + \left[ \bar{c}_{11}^E + \frac{\left( \bar{e}_{31}^{(u)} \right)^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right] u_{3,22} \right\} \right] \quad (3-56)$$

$$- \frac{2}{3} \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 (c_{12}^{(c)} u_{3,11} + c_{11}^{(c)} u_{3,22})$$

當連接的負載趨近於無限大時，則視為開路連接狀態，代表流入負載的電流為零，因此在初始條件電荷為零的情況下，並假設壓電陶瓷表面沒有鋪上任何的電極，可以推得壓電陶瓷上每個點的電荷皆為零，故可令  $D_3^{(u)}$ 、 $D_3^{(l)}$  為零，並假設面外運動時中面不會變形，帶入(3-33)和(3-34)式後可得：



$$V_p^{(u)} = -\frac{\bar{e}_{31}^{(u)}}{2\bar{\varepsilon}_{33}^S} (h_p^2 + h_c h_p) (u_{3,11} + u_{3,22}) \quad (3-57)$$

$$V_p^{(l)} = -\frac{\bar{e}_{31}^{(l)}}{2\bar{\varepsilon}_{33}^S} (h_p^2 + h_c h_p) (u_{3,11} + u_{3,22}) \quad (3-58)$$

以 SBS 為例， $\bar{e}_{31}^{(u)} = -\bar{e}_{31}^{(l)}$ ，將(3-57)、(3-58)式帶入(3-52)、(3-53)式可得：

$$M_{11(open)}^{(eq)} = -\frac{2}{3} \left[ \left( h_p + \frac{h_c}{2} \right)^3 - \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 \right] \left\{ \left[ \bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\varepsilon}_{33}^S} \right] u_{3,11} + \left[ \bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\varepsilon}_{33}^S} \right] u_{3,22} \right\} \\ - \frac{2}{3} \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 (c_{11}^{(c)} u_{3,11} + c_{12}^{(c)} u_{3,22}) \quad (3-59)$$

$$M_{22(open)}^{(eq)} = -\frac{2}{3} \left[ \left( h_p + \frac{h_c}{2} \right)^3 - \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 \right] \left\{ \left[ \bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\varepsilon}_{33}^S} \right] u_{3,11} + \left[ \bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31}^{(u)})^2}{\bar{\varepsilon}_{33}^S} \right] u_{3,22} \right\} \\ - \frac{2}{3} \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 (c_{12}^{(c)} u_{3,11} + c_{11}^{(c)} u_{3,22}) \quad (3-60)$$

基於薄板假設，並根據本構方程式可以得知側向剪應力  $T_{13}$ 、 $T_{23}$  遠小於其他分量，故其造成的變形量可以忽略不計，但還必須維持平衡。因此從平板中取一自由體並分析在平板有軸向力作用下的受力情形，自由體中間平面所受彎矩如圖 3-7 所示，所受簡切力如圖 3-8 所示，考慮到自有體中間平面所受的總力矩為零，因此沿  $x_1$  軸與  $x_2$  軸上的所有力矩總和必須為零，首先計算沿  $x_1$  軸上的所有力矩並可推得下式：

$$\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} - Q_{22} = 0 \quad (3-61)$$

接著計算沿  $x_2$  軸上的所有力矩並推得下式：

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} - Q_{11} = 0 \quad (3-62)$$

此外自由體中間平面所受的所有剪切力也須達力平衡，首先分析沿  $x_1$  軸方向上的



力平衡情形，並考慮自由體沿  $x_1$  軸方向發生小變形，故將所有力拆分成水平分量與鉛直分量進行計算，其中下標  $H$  代表力的水平分量， $V$  代表力的鉛直分量：

$$\sum F_H = \left( \frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \quad (3-63)$$

$$\sum F_V = \left( N_{11} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + N_{22} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \quad (3-64)$$

依照相同方式分析沿  $x_2$  軸方向上的力平衡情形，並考慮自由體沿  $x_2$  軸方向發生小變形：

$$\sum F_H = \left( \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2 \quad (3-65)$$

$$\sum F_V = \left( N_{22} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + N_{11} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \quad (3-66)$$

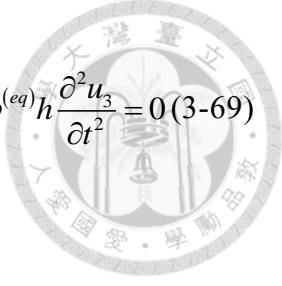
其中水平分量的合力(3-63)式與(3-65)式由於靜力平衡的關係會等於零，因此水平方向的所有力已達力平衡。接著考慮鉛直方向的力平衡，將剪應力、沿  $x_1$  軸與  $x_2$  軸之力的鉛質分量與外力進行相加並使其為零：

$$\frac{\partial V_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial V_{22}}{\partial x_2} + q + N_{12} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + 2N_{12} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} + N_{22} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = 0 \quad (3-67)$$

將(3-61)與(3-62)式帶入：

$$\frac{\partial^2 M_{11}^{(eq)}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}^{(eq)}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_{22}^{(eq)}}{\partial x_2^2} + q + N_{11} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + 2N_{12} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} + N_{22} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = 0 \quad (3-68)$$

因為薄板在自由振動時，並無受面外負載作用，因此(3-68)式中的  $q$  必須為零，並補上動態條件下產生的慣性力項，如此便可推得受軸向力作用下薄板在動態條件下的統御方程式：



$$\frac{\partial^2 M_{11}^{(eq)}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}^{(eq)}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_{22}^{(eq)}}{\partial x_2^2} + N_{11} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + 2N_{12} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} + N_{22} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} - \rho^{(eq)} h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = 0 \quad (3-69)$$

其中  $\rho^{(eq)}$  代表壓電陶瓷雙晶片的等效密度:

$$\rho^{eq} = \frac{2h_p \rho_p + h_c \rho_c}{2h_p + h_c} \quad (3-70)$$

根據[34]所提出的彎矩和扭矩以位移的表示式，並將其帶入統御方程式中，便可獲得以位移解表示的統御方程式:

$$M_{11} = - \left( D_{11} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right) \quad (3-71)$$

$$M_{22} = - \left( D_{12} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + D_{22} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right) \quad (3-72)$$

$$M_{12} = -2 \left( D_{66} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \quad (3-73)$$

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^4} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_2^4} \\ - N_{11} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - 2N_{12} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} - N_{22} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \rho^{(eq)} h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (3-74)$$

其中  $D_{11}$  為等效彎矩剛性(Equivalent bending stiffness)， $D_{12}$  為等效扭矩剛性，兩者在不同的負載連接情況下須帶入不同的參數:

$$D_{66} = \frac{2}{3} \left[ \left( h_p + \frac{h_c}{2} \right)^3 - \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 \right] c_{66}^E + \frac{2}{3} \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 c_{66}^{(c)} \quad (3-75)$$

開路等效剛性:

$$D_{11}^{(open)} = D_{22}^{(open)} = \frac{2}{3} \left[ \left( h_p + \frac{h_c}{2} \right)^3 - \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 \right] \left( \bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) + \frac{2}{3} \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 c_{11}^{(c)} \quad (3-76)$$

$$D_{12}^{(open)} = \frac{2}{3} \left[ \left( h_p + \frac{h_c}{2} \right)^3 - \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 \right] \left( \bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31})^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \right) + \frac{2}{3} \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 c_{12}^{(c)} \quad (3-77)$$



$$D_{11}^{(open)} = D_{12}^{(open)} + D_{66}$$

(3-78)

開路等效普松比:

$$\nu^{(open)} = \frac{D_{12}^{(open)}}{D_{11}^{(open)}} \quad (3-79)$$

短路等效剛性:

$$\begin{aligned} D_{11}^{(short)} = D_{22}^{(short)} = & -\frac{1}{2} h_p \frac{(\bar{e}_{31})^2}{\bar{\varepsilon}_{33}^S} (h_p + h_c)^2 + \frac{2}{3} \left[ \left( h_p + \frac{h_c}{2} \right)^3 - \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 \right] \left( \bar{c}_{11}^E + \frac{(\bar{e}_{31})^2}{\bar{\varepsilon}_{33}^S} \right) \\ & + \frac{2}{3} \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 c_{11}^{(c)} \end{aligned} \quad (3-80)$$

$$\begin{aligned} D_{12}^{(short)} = & -\frac{1}{2} h_p \frac{(\bar{e}_{31})^2}{\bar{\varepsilon}_{33}^S} (h_p + h_c)^2 + \frac{2}{3} \left[ \left( h_p + \frac{h_c}{2} \right)^3 - \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 \right] \left( \bar{c}_{12}^E + \frac{(\bar{e}_{31})^2}{\bar{\varepsilon}_{33}^S} \right) \\ & + \frac{2}{3} \left( \frac{h_c}{2} \right)^3 c_{12}^{(c)} \end{aligned} \quad (3-81)$$

$$D_{11}^{(short)} = D_{12}^{(short)} + D_{66} \quad (3-82)$$

短路等效普松比:

$$\nu^{(short)} = \frac{D_{12}^{(short)}}{D_{11}^{(short)}} \quad (3-83)$$

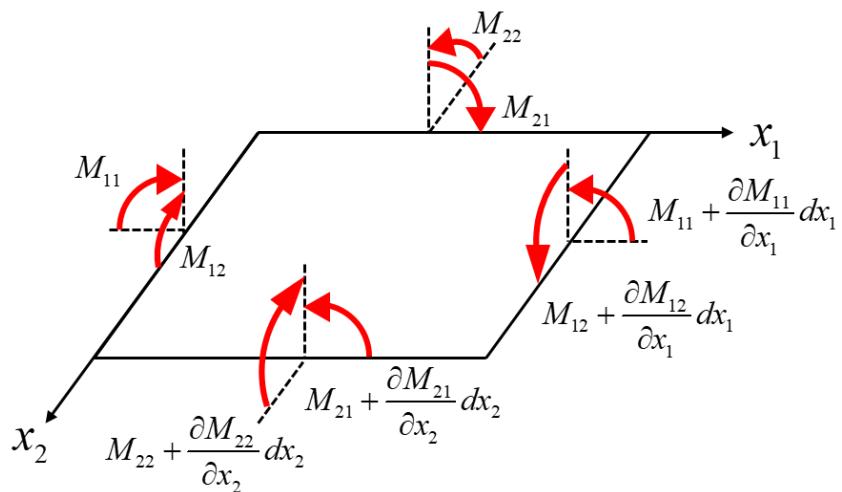


圖 3-7 中間平面所受彎矩

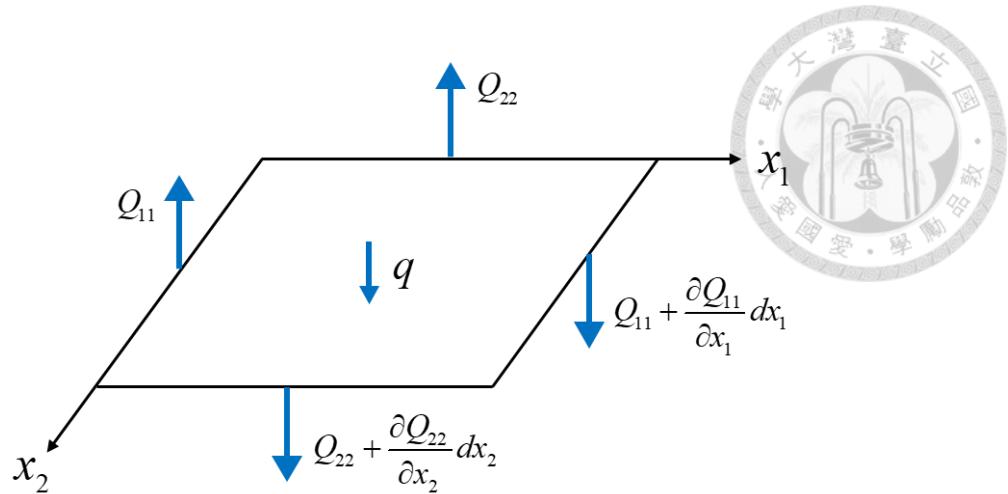


圖 3-8 中間平面所受剪切力

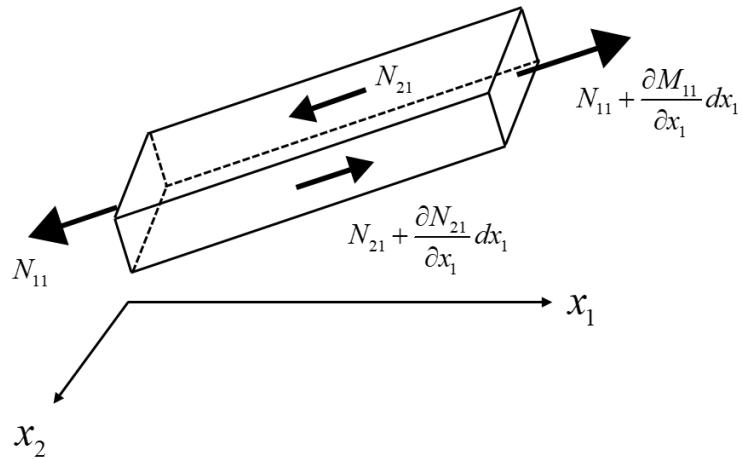


圖 3-9 平板所受面內力

### 3.2 矩形薄板受軸向力作用之疊加法理論推導

使用上一小節所推導的受軸向力作用下壓電薄板統御方程式進行其面外位移的求解，然而板的邊界條件較為複雜，要直接求出滿足所有邊界條件的解析解是非常困難的，因此根據 Gorman[17]所提出的疊加法(Superposition Method)理論，將原本的矩形薄板拆分成數個結構塊(Building Block)個別求解，再將各結構塊的解析解疊加以獲得原本矩形薄板的共振頻率與模態振型。

#### 3.2.1 單邊懸臂邊界之疊加法理論推導

首先對統御方程式中的面外位移解  $u_3$  使用分離係數法，分離時間項與空間項：

$$u_3(x_1, x_2, t) = W(x_1, x_2) e^{j\omega t} \quad (3-84)$$



其中  $j = \sqrt{-1}$ ， $\omega$  為角頻率( $rad/s$ )。將(3-84)式帶入(3-74)式，考慮受軸向力作用但不受面外力作用的平板面外自由振動統御方程式可寫為：

$$W_{,1111} + 2W_{,1122} + W_{,2222} - N_{11}W_{,11} - 2N_{12}W_{,12} - N_{22}W_{,22} - \frac{\rho^{(eq)}h\omega^2}{D_{11}}W = 0 \quad (3-85)$$

因為本研究所討論之壓電薄板僅受沿長邊  $x_1$  方向的軸向力作用，因此  $N_{12}$  與  $N_{22}$  皆為零，且當  $N_{11}$  為正值時，代表壓電薄板受拉伸力作用，當  $N_{11}$  為負值時，則代表壓電薄板受壓縮力作用。接著定義本研究之壓電平板與疊加法中結構塊會使用的邊界條件。

### 1. 自由邊界

自由邊界代表薄板於此處所受的剪切力、彎矩與扭矩皆須為零，但從(3-85)式中可以觀察到統御方程式為四階偏微分方程式，其最多滿足八個邊界條件，因此薄板各個邊界須滿足兩個邊界條件，與自有邊界所定義的三個邊界條件於數量上是相互衝突的，因此導入 Kelvin Kirchhoff 的等效合力邊界來重新描述自由邊界，可將扭矩的效應等效成側向剪切力  $\frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} dx_2$  或  $\frac{\partial M_{21}}{\partial x_1} dx_1$ ，並與原本的剪切力項  $Q$  一同定義為等效剪力：

$$V_{11} = Q_{11} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} dx_2 \quad (3-86)$$

$$V_{22} = Q_{22} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1} dx_1 \quad (3-87)$$

經由上述的等效後，自由邊界所需的三個條件可用兩個條件進行取代，即使用等效剪力與彎矩為零來描述側向剪力、彎矩與扭矩為零的狀況，可寫為：

$x_1$  方向：

$$M_{11} = 0, V_{11} = Q_{11} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} = 0 \quad (3-88)$$



$x_2$  方向:

$$M_{22} = 0, V_{22} = Q_{22} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1} = 0 \quad (3-89)$$

## 2. 簡支邊界

簡支邊界代表薄板於此處的面外位移與所受彎矩皆須為零，可寫為：

$x_1$  方向:

$$W = 0, M_{11} = 0 \quad (3-90)$$

$x_2$  方向:

$$W = 0, M_{22} = 0 \quad (3-91)$$

## 3. 固定邊界

固定邊界代表薄板於此處的面外位移與斜率皆須為零，可寫為：

$x_1$  方向:

$$W = 0, \frac{\partial W}{\partial x_1} = 0 \quad (3-92)$$

$x_2$  方向:

$$W = 0, \frac{\partial W}{\partial x_2} = 0 \quad (3-93)$$

將統御方程式(3-85)式與彎矩  $M_{11}$  與  $M_{22}$  以及等效剪力  $V_{11}$  與  $V_{22}$  等物理量進行無因次化，以利後續進行程式計算。無因次化後的結果如下所示：

$$\frac{\partial^4 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 W(\xi, \eta)}{\phi^2 \partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 W(\xi, \eta)}{\phi^4 \partial \eta^2} - \frac{P_\xi}{\phi^2} \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} - \lambda^4 W(\xi, \eta) = 0 \quad (3-94)$$

$$\frac{M_{11}a}{D_{11}} = - \left[ \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\nu}{\phi^2} \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right] \quad (3-95)$$

$$\frac{M_{22}b^2}{aD_{11}} = - \left[ \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + \nu \phi^2 \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \right] \quad (3-96)$$



$$\frac{V_{11}a^2}{D_{11}} = - \left[ \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^3} + \nu^* \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta^2} - \frac{P_\xi}{\phi^2} \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right] \quad (3-97)$$

$$\frac{V_{11}b^2}{D_{11}} = - \left[ \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right] \quad (3-98)$$

其中  $\xi = \frac{x}{a}$  、  $\eta = \frac{y}{b}$  、  $\lambda^4 = \frac{\rho^{(eq)} h a^4 \omega^2}{D_{11}}$  、  $\nu^* = 2 - \nu$  、  $\phi = \frac{b}{a}$  、  $W(\xi, \eta) = \frac{W(x_1, x_2)}{a}$  、

$P_\xi = \frac{N_{11}b}{D_{11}}$ 。此外側向剪力(3-97)式的無因次化中考慮了軸向力的效應，若薄板並未

受軸向力作用，即  $N_{11}$  為零的話， $P_\xi$  會消失此時側向剪力的無因次化項就會與不受力的自由振動薄板之側向剪力項相同。

因為平板的邊界條件較為複雜，不易直接求出滿足所有邊界條件的解析解，因此使用疊加法進行求解，疊加法的原理為將原本的平板拆分成數個結構塊，各結構塊的部分邊界條件會與原先平板的邊界條件相同，且每個結構塊因為其全部的邊界條件較為單純，與原先的平板相比是較容易求出解析解的，因此求解出各結構塊的解析解後再進行疊加，並滿足原先平板尚未滿足的邊界條件，以此求出原先平板的共振頻率與模態振型。本研究所使用的單邊固定且受軸向力作用的壓電平板模型其邊界條件可寫為以下形式：

$$W|_{\xi=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial W}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0 \quad (3-99)$$

$$\left. - \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\nu}{\phi^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right] \right|_{\xi=1} = 0, \quad \left. - \left[ \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + \nu^* \frac{\partial^3 W}{\partial \xi \partial \eta^2} - \frac{P_\xi}{\phi^2} \frac{\partial W}{\partial \xi} \right] \right|_{\xi=1} = 0 \quad (3-100)$$

$$\left. - \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \nu \phi^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right] \right|_{\eta=0} = 0, \quad \left. - \left[ \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right] \right|_{\eta=0} = 0 \quad (3-101)$$

$$\left. - \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \nu \phi^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right] \right|_{\eta=1} = 0, \quad \left. - \left[ \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right] \right|_{\eta=1} = 0 \quad (3-102)$$



透過疊加法將此平板拆分成四個結構塊  $W_1$ 、 $W_2$ 、 $W_3$ 、 $W_4$ ，如圖 3-10 所示，其中

圓圈符號為剪動邊界(Slip-Shear)，代表斜率及側向剪力皆為零；藍色彎箭頭代表施加一假想力矩，其彎矩為一定值，側向剪力為零；紫色線條為簡支邊界，代表位移及彎矩皆為零。

### 1. 第一個結構塊 $W_1$

於  $\xi=0$  處為簡支邊界，於  $\eta=1$  處施加一假想力矩，其餘邊界皆為剪動邊界，可寫為：

$$W_1|_{\xi=0} = 0, \quad -\left[ \frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2} + \frac{\nu}{\phi^2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \eta^2} \right]_{\xi=0} = 0 \quad (3-103)$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial \xi}|_{\xi=1} = 0, \quad -\left[ \frac{\partial^3 W_1}{\partial \xi^3} + \frac{\nu^*}{\phi^2} \frac{\partial^3 W_1}{\partial \xi \partial \eta^2} - \frac{P_\xi}{\phi^2} \frac{\partial W_1}{\partial \xi} \right]_{\xi=1} = 0 \quad (3-104)$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial \eta}|_{\eta=0} = 0, \quad -\left[ \frac{\partial^3 W_1}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W_1}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right]_{\eta=0} = 0 \quad (3-105)$$

$$-\left[ \frac{\partial^2 W_1}{\partial \eta^2} + \nu \phi^2 \frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2} \right]_{\eta=1} = \frac{M_1 b}{a D}, \quad -\left[ \frac{\partial^3 W_1}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W_1}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right]_{\eta=1} = 0 \quad (3-106)$$

根據法國數學家 Levy 提出的級數解形式，藉由邊界條件(3-103)與(3-104)式，可以假設  $W_1$  的解為三角函數的級數展開式並如下所示：

$$W_1(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(\eta) \sin\left(\frac{2m-1}{2} \pi \xi\right) \quad (3-107)$$

將(3-107)式帶回統御方程式(3-94)式以確保第一個結構塊的位移解  $W_1$  能滿足統御方程式，整理化簡後可得：

$$Y_m^{(4)} - 2\left(\frac{2m-1}{2} \phi \pi\right) Y_m'' + \left[ \left(\frac{2m-1}{2} \phi \pi\right)^4 - (\lambda \phi)^4 + P_\xi \left(\frac{2m-1}{2} \phi \pi\right)^2 \right] Y_m = 0 \quad (3-108)$$

假設  $\delta_m = \left(\frac{2m-1}{2} \pi\right)^2$ 、 $\Delta_m = \left(\frac{2m-1}{2} \pi\right)^4 - \lambda^4 + P_\xi \left(\frac{2m-1}{2} \phi \pi\right)^2$  對(3-108)式進行代換以



(3-109)

利後續推導，令  $Y_m(\eta) = e^{\alpha\eta}$  帶入(3-108)式並進行計算：

$$\alpha^4 - 2\phi^2\delta_m\alpha^2 + \phi^4\Delta_m = 0$$

從(3-109)式可以得知  $\delta_m$  與  $\Delta_m$  的大小關係會影響求解的過程，使  $Y_m(\eta)$  具有三種可能的解，因此以下針對不同解的形式進行分段討論：

**Case 1:**  $\delta_m^2 < \Delta_m$

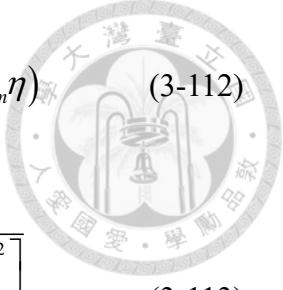
$$Y_m(\eta) = A_m \sinh(\beta_{1m}\eta) \sin(\gamma_{1m}\eta) + B_m \sinh(\beta_{1m}\eta) \cos(\gamma_{1m}\eta) + C_m \cosh(\beta_{1m}\eta) \sin(\gamma_{1m}\eta) + D_m \cosh(\beta_{1m}\eta) \cos(\gamma_{1m}\eta) \quad (3-110)$$

其中  $\beta_{1m} = \phi \sqrt{\frac{\sqrt{\Delta_m} + \delta_m}{2}}$  、  $\gamma_{1m} = \phi \sqrt{\frac{\sqrt{\Delta_m} - \delta_m}{2}}$ ，而  $A_m$  、  $B_m$  、  $C_m$  、  $D_m$  為待定係數，

將(3-110)式帶入邊界條件(3-105)式中可求得  $B_m = C_m = 0$ ，帶入邊界條件(3-106)式中可再求解剩餘的  $A_m$  與  $D_m$ ，其中為避免於數值計算中出現假根，因此將施加的假想力矩等效成斜率的級數函數並如下所示：

$$\left. \frac{\partial W_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = \sum_{m=1}^{\infty} E_{1m} \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi\xi\right) \quad (3-111)$$

其中  $E_{1m}$  為待定係數，將(3-110)式帶入(3-111)式與(3-106)式中側向剪力為零的條件，因為未知係數數量大於方程式的數量，故僅能求得  $A_m$  、  $D_m$  與  $E_{1m}$  三者的關係，並將  $Y_m$  的解以  $E_{1m}$  進行表示：



$$Y_m = E_{1m} (\theta_{11m} \sinh \beta_{1m} \eta \sin \gamma_{1m} \eta + \theta_{14m} \cosh \beta_{1m} \eta \cos \gamma_{1m} \eta) \quad (3-112)$$

$$\begin{cases} \theta_{11m} = \frac{\nu^* \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 (Y_{1m} - Y_{2m}) - Y_{3m} + Y_{4m}}{2\beta_{1m} \gamma_{1m} (\beta_{1m}^2 + \gamma_{1m}^2) \left[ (\sinh \beta_{1m})^2 + (\cosh \gamma_{1m})^2 \right]} \\ \theta_{14m} = \frac{-\nu^* \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 (X_{1m} + X_{2m}) + X_{3m} + X_{4m}}{2\beta_{1m} \gamma_{1m} (\beta_{1m}^2 + \gamma_{1m}^2) \left[ (\sinh \beta_{1m})^2 + (\cosh \gamma_{1m})^2 \right]} \end{cases} \quad (3-113)$$

$$\begin{cases} X_{1m} = \beta_{1m} \cosh \beta_{1m} \sin \gamma_{1m} \\ X_{2m} = \gamma_{1m} \sinh \beta_{1m} \cos \gamma_{1m} \\ X_{3m} = \beta_{1m} (\beta_{1m}^2 - 3\gamma_{1m}^2) \cosh \beta_{1m} \sin \gamma_{1m} \\ X_{4m} = \gamma_{1m} (3\beta_{1m}^2 - \gamma_{1m}^2) \sinh \beta_{1m} \cos \gamma_{1m} \end{cases} \quad (3-114)$$

$$\begin{cases} Y_{1m} = \beta_{1m} \sinh \beta_{1m} \cos \gamma_{1m} \\ Y_{2m} = \gamma_{1m} \cosh \beta_{1m} \sin \gamma_{1m} \\ Y_{3m} = \beta_{1m} (\beta_{1m}^2 - 3\gamma_{1m}^2) \sinh \beta_{1m} \cos \gamma_{1m} \\ Y_{4m} = \gamma_{1m} (3\beta_{1m}^2 - \gamma_{1m}^2) \cosh \beta_{1m} \sin \gamma_{1m} \end{cases} \quad (3-115)$$

**Case 2:**  $\delta_m^2 > \Delta_m$ ,  $\Delta_m < 0$

$$Y_m(\eta) = A_m \sinh(\beta_{2m} \eta) + B_m \cosh(\beta_{2m} \eta) + C_m \sin(\gamma_{2m} \eta) + D_m \cos(\gamma_{2m} \eta) \quad (3-116)$$

其中  $\beta_{2m} = \phi \sqrt{\sqrt{\delta_m^2 - \Delta_m} + \delta_m}$  、  $\gamma_{2m} = \phi \sqrt{\sqrt{\delta_m^2 - \Delta_m} - \delta_m}$ ，而  $A_m$ 、 $B_m$ 、 $C_m$ 、 $D_m$  為待

定係數，將(3-116)式帶入邊界條件(3-105)式中可求得  $A_m = C_m = 0$ ，再帶入(3-111)式

與(3-106)式中側向剪力為零的條件以求得  $B_m$ 、 $D_m$  與  $E_{1m}$  三者的關係，並求解  $Y_m$ ：

$$Y_m = E_{1m} (\theta_{22m} \cosh \beta_{2m} \eta + \theta_{24} \cos \gamma_{2m} \eta) \quad (3-117)$$

$$\begin{cases} \theta_{22m} = \frac{\nu^* \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 + \gamma_{2m}^2}{\beta_{2m} \sinh \beta_{2m} (\beta_{2m}^2 + \gamma_{2m}^2)} \\ \theta_{24} = \frac{\nu^* \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 - \beta_{2m}^2}{\gamma_{2m} \sin \gamma_{2m} (\beta_{2m}^2 + \gamma_{2m}^2)} \end{cases} \quad (3-118)$$



**Case 3:**  $\delta_m^2 > \Delta_m$ ,  $\Delta_m > 0$

$$Y_m = A_m \sinh(\beta_{3m}\eta) + B_m \cosh(\beta_{3m}\eta) + C_m \sinh(\gamma_{3m}\eta) + D_m \cosh(\gamma_{3m}\eta) \quad (3-119)$$

其中  $\beta_{3m} = \phi \sqrt{\delta_m + \sqrt{\delta_m^2 - \Delta_m}}$  、  $\gamma_{3m} = \phi \sqrt{\delta_m - \sqrt{\delta_m^2 - \Delta_m}}$ ，而  $A_m$ 、 $B_m$ 、 $C_m$ 、 $D_m$  為待

定係數，將(3-119)式帶入邊界條件(3-105)式中可求得  $A_m = C_m = 0$ ，再帶入(3-111)式

與(3-106)式中側向剪力為零的條件以求得  $B_m$ 、 $D_m$  與  $E_{1m}$  三者的關係，並求解  $Y_m$ ：

$$Y_m = E_{1m} (\theta_{32m} \cosh \beta_{3m}\eta + \theta_{34m} \cosh \gamma_{3m}\eta) \quad (3-120)$$

$$\begin{cases} \theta_{32m} = \frac{\nu^* \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 - \gamma_{3m}^2}{\beta_{3m} \sinh \beta_{3m} \left( \beta_{3m}^2 - \gamma_{3m}^2 \right)} \\ \theta_{34m} = \frac{\beta_{3m}^2 - \nu^* \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2}{\gamma_{3m} \sinh \gamma_{3m} \left( \beta_{3m}^2 - \gamma_{3m}^2 \right)} \end{cases} \quad (3-121)$$

將(3-112)式、(3-117)式與(3-120)式帶回(3-107)式並獲得第一塊結構塊的位移解  $W_1$

$$\begin{aligned} W_1(\xi, \eta) = & \sum E_{1m} (\theta_{11m} \sinh \beta_{1m}\eta \sin \gamma_{1m}\eta + \theta_{14m} \cosh \beta_{1m}\eta \cos \gamma_{1m}\eta) \sin \left( \frac{2m-1}{2} \pi \xi \right) \\ & + \sum E_{1m} (\theta_{22m} \cosh \beta_{2m}\eta + \theta_{24m} \cos \gamma_{2m}\eta) \sin \left( \frac{2m-1}{2} \pi \xi \right) \\ & + \sum E_{1m} (\theta_{32m} \cosh \beta_{3m}\eta + \theta_{34m} \cosh \gamma_{3m}\eta) \sin \left( \frac{2m-1}{2} \pi \xi \right) \end{aligned} \quad (3-122)$$

## 2. 第二個結構塊 $W_2$ ：

於  $\xi=0$  處為簡支邊界，於  $\xi=1$  處施加一假想力矩，並將此力矩等效為斜率的級數函數，其餘邊界皆為剪動邊界，可寫為：

$$W_2|_{\xi=0} = 0, \quad - \left[ \frac{\partial^2 W_2}{\partial \xi^2} + \frac{\nu}{\phi^2} \frac{\partial^2 W_2}{\partial \eta^2} \right]_{\xi=0} = 0 \quad (3-123)$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n} \cos(n\pi\eta), \quad - \left[ \frac{\partial^3 W_2}{\partial \xi^3} + \frac{\nu^*}{\phi^2} \frac{\partial^3 W_2}{\partial \xi \partial \eta^2} - \frac{P_\xi}{\phi^2} \frac{\partial W_2}{\partial \xi} \right]_{\xi=1} = 0 \quad (3-124)$$



(3-125)

(3-126)

$$\frac{\partial W_2}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0, \quad -\left[ \frac{\partial^3 W_2}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W_2}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right]_{\eta=0} = 0$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} = 0, \quad -\left[ \frac{\partial^3 W_2}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W_2}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right]_{\eta=1} = 0$$

藉由邊界條件(3-125)與(3-126)式，可以假設  $W_2$  的解如下：

$$W_2(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\xi) \cos(n\pi\eta) \quad (3-127)$$

將(3-127)式帶回統御方程式(3-94)式以確保第二個結構塊的位移解  $W_2$  能滿足統御方程式，整理化簡後可得：

$$Y_n^{(4)} - \frac{2}{\phi^2} \left[ (n\pi)^2 + \frac{P_\xi}{2} \right] Y_n'' + \frac{1}{\phi^4} \left[ (n\pi)^4 - (\lambda\phi)^4 \right] Y_n = 0 \quad (3-128)$$

假設  $\delta_n = (n\pi)^2 + \frac{P_\xi}{2}$  、  $\Delta_n = (n\pi)^4 - (\lambda\phi)^4$  對(3-128)式進行代換以利後續推導，令

$Y_n(\xi) = e^{\alpha\xi}$  帶入(3-128)式並進行計算：

$$\phi^4 \alpha^4 - 2\phi^2 \delta_n \alpha^2 + \Delta_n = 0 \quad (3-129)$$

從(3-129)式可以得知  $\delta_n$  與  $\Delta_n$  的大小關係會影響求解的過程，使  $Y_n(\xi)$  具有四種可能的解，因此以下針對不同解的形式進行分段討論：

**Case 1:**  $\delta_n^2 < \Delta_n$

$$Y_n(\xi) = A_n \sinh(\beta_{1n}\xi) \sin(\gamma_{1n}\xi) + B_n \sinh(\beta_{1n}\xi) \cos(\gamma_{1n}\xi) + C_n \cosh(\beta_{1n}\xi) \sin(\gamma_{1n}\xi) + D_n \cosh(\beta_{1n}\xi) \cos(\gamma_{1n}\xi) \quad (3-130)$$

其中  $\beta_{1n} = \frac{1}{\phi} \sqrt{\frac{\sqrt{\Delta_n} + \delta_n}{2}}$  、  $\gamma_{1n} = \frac{1}{\phi} \sqrt{\frac{\sqrt{\Delta_n} - \delta_n}{2}}$ ，而  $A_n$  、  $B_n$  、  $C_n$  、  $D_n$  為待定係數，將

(3-130)式帶入邊界條件(3-123)式中可求得  $A_n = D_n = 0$ ，再帶入(3-124)式以求得  $B_n$  、

$C_n$  與  $E_{2n}$  三者的關係，並求解  $Y_n$ ：

$$Y_n = E_{2n} (\theta_{12n} \sinh \beta_{1n} \xi \cos \gamma_{1n} \xi + \theta_{13n} \cosh \beta_{1n} \xi \sin \gamma_{1n} \xi) \quad (3-131)$$

$$\begin{cases} \theta_{12n} = \frac{\phi^2 (Y_{3n} + Y_{4n}) - [\nu^* (n\pi)^2 + P_\xi] (Y_{1n} + Y_{2n})}{2\phi^2 \beta_{1n} \gamma_{1n} (\beta_{1n}^2 + \gamma_{1n}^2) [\cosh^2 \beta_{1n} - \sin^2 \gamma_{1n} + 1]} \\ \theta_{14n} = \frac{[\nu^* (n\pi)^2 + P_\xi] (X_{1n} - X_{2n}) - \phi^2 (X_{3n} - X_{4n})}{2\phi^2 \beta_{1n} \gamma_{1n} (\beta_{1n}^2 + \gamma_{1n}^2) [\cosh^2 \beta_{1n} - \sin^2 \gamma_{1n} + 1]} \end{cases} \quad (3-132)$$

$$\begin{cases} X_{1n} = \beta_{1n} \cosh \beta_{1n} \cos \gamma_{1n} \\ X_{2n} = \gamma_{1n} \sinh \beta_{1n} \sin \gamma_{1n} \\ X_{3n} = \beta_{1n} (\beta_{1n}^2 - 3\gamma_{1n}^2) \cosh \beta_{1n} \cos \gamma_{1n} \\ X_{4n} = \gamma_{1n} (3\beta_{1n}^2 - \gamma_{1n}^2) \sinh \beta_{1n} \sin \gamma_{1n} \end{cases} \quad (3-133)$$

$$\begin{cases} Y_{1n} = \beta_{1n} \sinh \beta_{1n} \sin \gamma_{1n} \\ Y_{2n} = \gamma_{1n} \cosh \beta_{1n} \cos \gamma_{1n} \\ Y_{3n} = \beta_{1n} (\beta_{1n}^2 - 3\gamma_{1n}^2) \sinh \beta_{1n} \sin \gamma_{1n} \\ Y_{4n} = \gamma_{1n} (3\beta_{1n}^2 - \gamma_{1n}^2) \cosh \beta_{1n} \cos \gamma_{1n} \end{cases} \quad (3-134)$$

**Case 2:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\Delta_n < 0$

$$Y_n(\xi) = A_n \sinh(\beta_{2n} \xi) + B_n \cosh(\beta_{2n} \xi) + C_n \sin(\gamma_{2n} \xi) + D_n \cos(\gamma_{2n} \xi) \quad (3-135)$$

其中  $\beta_{2n} = \frac{1}{\phi} \sqrt{\sqrt{\delta_n^2 - \Delta_n} + \delta_n}$  、  $\gamma_{2n} = \frac{1}{\phi} \sqrt{\sqrt{\delta_n^2 - \Delta_n} - \delta_n}$  ，而  $A_n$ 、 $B_n$ 、 $C_n$ 、 $D_n$  為待定

係數，將(3-135)式帶入邊界條件(3-123)式中可求得  $B_n = D_n = 0$ ，再帶入(3-124)式以

求得  $A_n$ 、 $C_n$  與  $E_{2n}$  三者的關係，並求解  $Y_n$ ：

$$Y_n = E_{2n} (\theta_{21n} \sinh \beta_{2n} \xi + \theta_{23n} \sin \gamma_{2n} \xi) \quad (3-136)$$

$$\begin{cases} \theta_{21n} = \frac{\phi^2 \gamma_{2n}^2 + \nu^* (n\pi)^2 + P_\xi}{\phi^2 \beta_{2n} \cosh \beta_{2n} (\beta_{2n}^2 + \gamma_{2n}^2)} \\ \theta_{23n} = \frac{\phi^2 \beta_{2n}^2 - \nu^* (n\pi)^2 - P_\xi}{\phi^2 \gamma_{2n} \cos \gamma_{2n} (\beta_{2n}^2 + \gamma_{2n}^2)} \end{cases} \quad (3-137)$$



**Case 3:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\delta_n > 0$ ,  $\Delta_n > 0$

$$Y_n = A_n \sinh \beta_{3n} \xi + B_n \cosh \beta_{3n} \xi + C_n \sinh \gamma_{3n} \xi + D_n \cosh \gamma_{3n} \xi \quad (3-138)$$

其中  $\beta_{3n} = \frac{1}{\phi} \sqrt{\delta_n + \sqrt{\delta_n^2 - \Delta_n}}$  、  $\gamma_{3n} = \frac{1}{\phi} \sqrt{\delta_n - \sqrt{\delta_n^2 - \Delta_n}}$  , 而  $A_n$  、  $B_n$  、  $C_n$  、  $D_n$  為待定

係數，將(3-138)式帶入邊界條件(3-123)式中可求得  $B_n = D_n = 0$ ，再帶入(3-124)式以

求得  $A_n$  、  $C_n$  與  $E_{2n}$  三者的關係，並求解  $Y_n$ ：

$$Y_n = E_{2n} (\theta_{31n} \sinh \beta_{3n} \xi + \theta_{33n} \sinh \gamma_{3n} \xi) \quad (3-139)$$

$$\begin{cases} \theta_{31n} = \frac{\nu^* (n\pi)^2 + P_\xi - \phi^2 \gamma_{3n}^2}{\phi^2 \beta_{3n} \cosh \beta_{3n} (\beta_{3n}^2 - \gamma_{3n}^2)} \\ \theta_{33n} = \frac{\phi^2 \beta_{3n}^2 - \nu^* (n\pi)^2 - P_\xi}{\phi^2 \gamma_{3n} \cosh \gamma_{3n} (\beta_{3n}^2 - \gamma_{3n}^2)} \end{cases} \quad (3-140)$$

**Case 4:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\delta_n < 0$ ,  $\Delta_n > 0$

$$Y_n = A_n \sin \beta_{4n} \xi + B_n \cos \beta_{4n} \xi + C_n \sin \gamma_{4n} \xi + D_n \cos \gamma_{4n} \xi \quad (3-141)$$

其中  $\beta_{4n} = \frac{1}{\phi} \sqrt{-\sqrt{\delta_n^2 - \Delta_n} - \delta_n}$  、  $\gamma_{4n} = \frac{1}{\phi} \sqrt{\sqrt{\delta_n^2 - \Delta_n} - \delta_n}$  , 而  $A_n$  、  $B_n$  、  $C_n$  、  $D_n$  為待定

係數，將(3-141)式帶入邊界條件(3-123)式中可求得  $B_n = D_n = 0$ ，再帶入(3-124)式以

求得  $A_n$  、  $C_n$  與  $E_{2n}$  三者的關係，並求解  $Y_n$ ：

$$Y_n = E_{2n} (\theta_{41n} \sin \beta_{4n} \xi + \theta_{43n} \sin \gamma_{4n} \xi) \quad (3-142)$$

$$\begin{cases} \theta_{41n} = \frac{-P_\xi - \phi^2 \gamma_{4n}^2 - \nu^* (n\pi)^2}{\phi^2 \beta_{4n} \cos \beta_{4n} (\beta_{4n}^2 - \gamma_{4n}^2)} \\ \theta_{43n} = \frac{P_\xi + \phi^2 \beta_{4n}^2 + \nu^* (n\pi)^2}{\phi^2 \gamma_{4n} \cos \gamma_{4n} (\beta_{4n}^2 - \gamma_{4n}^2)} \end{cases} \quad (3-143)$$

將(3-131)式、(3-136)式、(3-139)式與(3-142)式帶回(3-127)式並獲得第二塊結構塊的位移解  $W_2$



$$\begin{aligned}
 W_2(\xi, \eta) = & \sum E_{2n} (\theta_{12n} \sinh \beta_{1n} \xi \cos \gamma_{1n} \xi + \theta_{13n} \cosh \beta_{1n} \xi \sin \gamma_{1n} \xi) \cos n\pi\eta \\
 & + \sum E_{2n} (\theta_{21n} \sinh \beta_{2n} \xi + \theta_{23n} \sin \gamma_{2n} \xi) \cos n\pi\eta \\
 & + \sum E_{2n} (\theta_{31n} \sinh \beta_{3n} \xi + \theta_{33n} \sin \gamma_{3n} \xi) \cos n\pi\eta \\
 & + \sum E_{2n} (\theta_{41n} \sin \beta_{4n} \xi + \theta_{43n} \sin \gamma_{4n} \xi) \cos n\pi\eta
 \end{aligned} \tag{3-144}$$

### 3. 第三個結構塊 $W_3$ :

於  $\xi=0$  處為簡支邊界，於  $\eta=0$  處施加一假想力矩，並將此力矩等效為斜率的級數函數，其餘邊界皆為剪動邊界，可寫為

$$W_3|_{\xi=0} = 0, \quad -\left[ \frac{\partial^2 W_3}{\partial \xi^2} + \frac{\nu}{\phi^2} \frac{\partial^2 W_3}{\partial \eta^2} \right]_{\xi=0} = 0 \tag{3-145}$$

$$\frac{\partial W_3}{\partial \xi}|_{\xi=1} = 0, \quad -\left[ \frac{\partial^3 W_3}{\partial \xi^3} + \frac{\nu^*}{\phi^2} \frac{\partial^3 W_3}{\partial \xi \partial \eta^2} - \frac{P_\xi}{\phi^2} \frac{\partial W_3}{\partial \xi} \right]_{\xi=1} = 0 \tag{3-146}$$

$$\frac{\partial W_3}{\partial \eta}|_{\eta=0} = \sum_{p=1}^{\infty} E_{3p} \sin\left(\frac{2p-1}{2}\pi\xi\right), \quad -\left[ \frac{\partial^3 W_3}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W_3}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right]_{\eta=0} = 0 \tag{3-147}$$

$$\frac{\partial W_3}{\partial \eta}|_{\eta=1} = 0, \quad -\left[ \frac{\partial^3 W_3}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W_3}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right]_{\eta=1} = 0 \tag{3-148}$$

藉由邊界條件(3-145)與(3-146)式，可以假設  $W_3$  的解如下：

$$W_3(\xi, \eta) = \sum_{p=1}^{\infty} Y_p(1-\eta) \sin\left(\frac{2p-1}{2}\pi\xi\right) \tag{3-149}$$

將(3-149)式帶回統御方程式(3-94)式以確保第三個結構塊的位移解  $W_3$  能滿足統御方程式，整理化簡後可得：

$$Y_p^{(4)} - 2\left(\frac{2p-1}{2}\phi\pi\right)^2 Y_p'' + \left[ \left(\frac{2p-1}{2}\phi\pi\right)^4 - (\lambda\phi)^4 + P_\xi \left(\frac{2p-1}{2}\phi\pi\right)^2 \right] Y_p = 0 \tag{3-150}$$

假設  $\delta_p = \left(\frac{2p-1}{2}\pi\right)^2$ 、 $\Delta_p = \left(\frac{2p-1}{2}\pi\right)^4 - \lambda^4 + P_\xi \left(\frac{2p-1}{2}\pi\right)^2$  對(3-150)式進行代換以

利後續推導，令  $Y_p(1-\eta) = e^{\alpha(1-\eta)}$  帶入(3-150)式並進行計算：



$$\alpha^4 - 2\phi^2\delta_p\alpha^2 + \phi^4\Delta_p = 0$$

(3-151)

觀察(3-109)與(3-151)式可以得知兩條方程式在形式上是相同的， $\delta_m$  與  $\delta_p$  跟  $\Delta_m$  與  $\Delta_p$  也都是相同的，而  $m$  與  $p$  代表的都是  $\sum$  展開項的序數，且兩者都是從 1 開始，因此綜合上述可以推得第一塊結構塊與第三塊結構塊在  $\alpha$  的解會有相同的形式，即會有相同的判斷標準與同樣都會有三種可能的解， $\beta_{1m}$ 、 $\beta_{2m}$ 、 $\beta_{3m}$ 、 $\gamma_{1m}$ 、 $\gamma_{2m}$ 、 $\gamma_{3m}$  與  $\beta_{1p}$ 、 $\beta_{2p}$ 、 $\beta_{3p}$ 、 $\gamma_{1p}$ 、 $\gamma_{2p}$ 、 $\gamma_{3p}$  也都會相同，所以這兩個結構塊位移解的下標皆可以用  $m$  進行表示，故為求方便將第三塊結構塊位移解方程式的下標改為  $m$ ，同時將  $1-\eta$  寫為  $\bar{\eta}$  以簡化式子，即  $Y_m(\bar{\eta}) = e^{\alpha\bar{\eta}}$ 。以下針對  $Y_m(\bar{\eta})$  的解進行分段討論：

**Case 1:**  $\delta_m^2 < \Delta_m$

$$Y_m(\bar{\eta}) = A_m \sinh(\beta_{1m}\bar{\eta}) \sin(\gamma_{1m}\bar{\eta}) + B_m \sinh(\beta_{1m}\bar{\eta}) \cos(\gamma_{1m}\bar{\eta}) + C_m \cosh(\beta_{1m}\bar{\eta}) \sin(\gamma_{1m}\bar{\eta}) + D_m \cosh(\beta_{1m}\bar{\eta}) \cos(\gamma_{1m}\bar{\eta}) \quad (3-152)$$

將(3-152)式帶入邊界條件(3-148)式中可求得  $B_m = C_m = 0$ ，再帶入(3-147)式以求得  $A_m$ 、 $D_m$  與  $E_{3m}$  三者的關係，並求解  $Y_m$ ：

$$Y_m = E_{3m} (\psi_{11m} \sinh \beta_{1m}\bar{\eta} \sin \gamma_{1m}\bar{\eta} + \psi_{14m} \cosh \beta_{1m}\bar{\eta} \cos \gamma_{1m}\bar{\eta}) \quad (3-153)$$

$$\begin{cases} \psi_{11m} = \frac{Q_{3m} - Q_{4m} - \nu^* \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 (Q_{1m} - Q_{2m})}{2\beta_{1m}\gamma_{1m} (\beta_{1m}^2 + \gamma_{1m}^2) \left[ (\sinh \beta_{1m})^2 + (\sin \gamma_{1m})^2 \right]} \\ \psi_{14m} = \frac{\nu^* \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 (P_{1m} + P_{2m}) - P_{3m} - P_{4m}}{2\beta_{1m}\gamma_{1m} (\beta_{1m}^2 + \gamma_{1m}^2) \left[ (\sinh \beta_{1m})^2 + (\sin \gamma_{1m})^2 \right]} \end{cases} \quad (3-154)$$

$$\begin{cases} P_{1m} = \beta_{1m} \cosh \beta_{1m} \sin \gamma_{1m} \\ P_{2m} = \gamma_{1m} \sinh \beta_{1m} \cos \gamma_{1m} \\ P_{3m} = \beta_{1m} (\beta_{1m}^2 - 3\gamma_{1m}^2) \cosh \beta_{1m} \sin \gamma_{1m} \\ P_{4m} = \gamma_{1m} (3\beta_{1m}^2 - \gamma_{1m}^2) \sinh \beta_{1m} \cos \gamma_{1m} \end{cases} \quad (3-155)$$

$$\begin{cases} Q_{1m} = \beta_{1m} \sinh \beta_{1m} \cos \gamma_{1m} \\ Q_{2m} = \gamma_{1m} \cosh \beta_{1m} \sin \gamma_{1m} \\ Q_{3m} = \beta_{1m} (\beta_{1m}^2 - 3\gamma_{1m}^2) \sinh \beta_{1m} \cos \gamma_{1m} \\ Q_{4m} = \gamma_{1m} (3\beta_{1m}^2 - \gamma_{1m}^2) \cosh \beta_{1m} \sin \gamma_{1m} \end{cases}$$



**Case 2:**  $\delta_m^2 > \Delta_m$ ,  $\Delta_m < 0$

$$Y_m(\bar{\eta}) = A_m \sinh(\beta_{2m} \bar{\eta}) + B_m \cosh(\beta_{2m} \bar{\eta}) + C_m \sin(\gamma_{2m} \bar{\eta}) + D_m \cos(\gamma_{2m} \bar{\eta}) \quad (3-157)$$

將(3-157)式帶入邊界條件(3-148)式中可求得  $A_m = C_m = 0$ ，再帶入(3-147)式以求得

$B_m$ 、 $D_m$  與  $E_{3m}$  三者的關係，並求解  $Y_m$ ：

$$Y_m = E_{3m} (\psi_{22m} \cosh \beta_{2m} \bar{\eta} + \psi_{24m} \cos \gamma_{2m} \bar{\eta}) \quad (3-158)$$

$$\begin{cases} \psi_{22m} = \frac{-\gamma_{2m}^2 - \nu^* \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2}{\beta_{2m} \sinh \beta_{2m} (\beta_{2m}^2 + \gamma_{2m}^2)} \\ \psi_{24m} = \frac{\beta_{2m}^2 - \nu^* \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2}{\gamma_{2m} \sin \gamma_{2m} (\beta_{2m}^2 + \gamma_{2m}^2)} \end{cases} \quad (3-159)$$

**Case 3:**  $\delta_m^2 > \Delta_m$ ,  $\Delta_m > 0$

$$Y_m = A_m \sinh(\beta_{3m} \bar{\eta}) + B_m \cosh(\beta_{3m} \bar{\eta}) + C_m \sinh(\gamma_{3m} \bar{\eta}) + D_m \cosh(\gamma_{3m} \bar{\eta}) \quad (3-160)$$

將(3-160)式帶入邊界條件(3-148)式中可求得  $A_m = C_m = 0$ ，再帶入(3-147)式以求得

$B_m$ 、 $D_m$  與  $E_{3m}$  三者的關係，並求解  $Y_m$ ：



$$Y_m = E_{3m} (\psi_{32m} \cosh \beta_{2m} \bar{\eta} + \psi_{34m} \cosh \gamma_{2m} \bar{\eta}) \quad (3-161)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{32m} = \frac{\gamma_{3m}^2 - \nu^* \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2}{\beta_{3m} \sinh \beta_{3m} \left( \beta_{3m}^2 - \gamma_{3m}^2 \right)} \\ \psi_{34m} = \frac{\nu^* \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 - \beta_{3m}^2}{\gamma_{3m} \sinh \gamma_{3m} \left( \beta_{3m}^2 - \gamma_{3m}^2 \right)} \end{array} \right. \quad (3-162)$$

將(3-153)式、(3-158)式、與(3-161)式帶回(3-149)式並獲得第三塊結構塊的位移解  $W_3$

$$\begin{aligned} W_3 = & \sum E_{3m} (\psi_{11m} \sinh \beta_{1m} \bar{\eta} \sin \gamma_{1m} \bar{\eta} + \psi_{14m} \cosh \beta_{1m} \bar{\eta} \cos \gamma_{1m} \bar{\eta}) \sin \left( \frac{2m-1}{2} \pi \xi \right) \\ & + \sum E_{3m} (\psi_{22m} \cosh \beta_{2m} \bar{\eta} + \psi_{24m} \cos \gamma_{2m} \bar{\eta}) \sin \left( \frac{2m-1}{2} \pi \xi \right) \\ & + \sum E_{3m} (\psi_{32m} \cosh \beta_{2m} \bar{\eta} + \psi_{34m} \cosh \gamma_{2m} \bar{\eta}) \sin \left( \frac{2m-1}{2} \pi \xi \right) \end{aligned} \quad (3-163)$$

#### 4. 第四個結構塊 $W_4$ :

於  $\xi=0$  處位移為零並施加一假想力矩，並將此力矩等效為斜率的級數函數，其餘邊界皆為剪動邊界，可寫為

$$W_4|_{\xi=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial W_4}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \sum_{q=0}^{\infty} E_{4q} \cos(q\pi\eta) \quad (3-164)$$

$$\left. \frac{\partial W_4}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = 0, \quad - \left[ \frac{\partial^3 W_4}{\partial \xi^3} + \frac{\nu^*}{\phi^2} \frac{\partial^3 W_4}{\partial \xi \partial \eta^2} - \frac{P_\xi}{\phi^2} \frac{\partial W_4}{\partial \xi} \right]_{\xi=1} = 0 \quad (3-165)$$

$$\left. \frac{\partial W_4}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad - \left[ \frac{\partial^3 W_4}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W_4}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right]_{\eta=0} = 0 \quad (3-166)$$

$$\left. \frac{\partial W_4}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = 0, \quad - \left[ \frac{\partial^3 W_4}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W_4}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right]_{\eta=1} = 0 \quad (3-167)$$

藉由邊界條件(3-166)與(3-167)式，可以假設  $W_4$  的解如下：

$$W_4(\xi, \eta) = \sum_{q=0}^{\infty} Y_q(1-\xi) \cos(q\pi\eta) \quad (3-168)$$



將(3-168)式帶回統御方程式(3-94)式以確保第四個結構塊的位移解  $W_4$  能滿足統御方程式，整理化簡後可得：

$$Y_q^{(4)} - \frac{2}{\phi^2} \left[ (q\pi)^2 + \frac{P_\xi}{2} \right] Y_q'' + \frac{1}{\phi^4} \left[ (q\pi)^4 - (\lambda\phi)^4 \right] Y_q = 0 \quad (3-169)$$

假設  $\delta_q = (q\pi)^2 + \frac{P_\xi}{2}$  、  $\Delta_q = (q\pi)^4 - (\lambda\phi)^4$  對(3-169)式進行代換以利後續推導，令

$Y_q(1-\xi) = e^{\alpha(1-\xi)}$  帶入(3-169)式並進行計算：

$$\phi^4 \alpha^4 - 2\phi^2 \delta_q \alpha^2 + \Delta_q = 0 \quad (3-170)$$

觀察(3-129)與(3-170)式可以得知兩條方程式在形式上是相同的， $\delta_n$  與  $\delta_q$  跟  $\Delta_n$  與

$\Delta_q$  也都是相同的，而  $n$  與  $q$  代表的都是  $\sum$  展開項的序數，且兩者都是從 0 開始，

因此綜合上述可以推得第二塊結構塊與第四塊結構塊在  $\alpha$  的解會有相同的形式，

即會有相同的判斷標準與同樣都會有四種可能的解， $\beta_{1n}$ 、 $\beta_{2n}$ 、 $\beta_{3n}$ 、 $\beta_{4n}$ 、 $\gamma_{1n}$ 、

$\gamma_{2n}$ 、 $\gamma_{3n}$ 、 $\gamma_{4n}$  與  $\beta_{1q}$ 、 $\beta_{2q}$ 、 $\beta_{3q}$ 、 $\beta_{4q}$ 、 $\gamma_{1q}$ 、 $\gamma_{2q}$ 、 $\gamma_{3q}$ 、 $\gamma_{4q}$  也都會相同，所以這

兩個結構塊位移解的下標皆可以用  $n$  進行表示，故為求方便將第四塊結構塊位移解

方程式的下標改為  $n$ ，同時將  $1-\xi$  寫為  $\bar{\xi}$  以簡化式子，即  $Y_n(\bar{\xi}) = e^{\alpha\bar{\xi}}$ 。以下針對

$Y_n(\bar{\xi})$  的解進行分段討論：

**Case 1:**  $\delta_n^2 < \Delta_n$

$$Y_n(\xi) = A_n \sinh(\beta_{1n}\bar{\xi}) \sin(\gamma_{1n}\bar{\xi}) + B_n \sinh(\beta_{1n}\bar{\xi}) \cos(\gamma_{1n}\bar{\xi}) + C_n \cosh(\beta_{1n}\bar{\xi}) \sin(\gamma_{1n}\bar{\xi}) + D_n \cosh(\beta_{1n}\bar{\xi}) \cos(\gamma_{1n}\bar{\xi}) \quad (3-171)$$

將(3-171)式帶入邊界條件(3-165)式中可求得  $B_n = C_n = 0$ ，再帶入(3-164)式以求得

$A_n$ 、 $D_n$  與  $E_{4n}$  三者的關係，並求解  $Y_n$ ：

$$Y_n = E_{4n} \left( \psi_{11n} \sinh \beta_{1n} \bar{\xi} \sin \gamma_{1n} \bar{\xi} + \psi_{14n} \cosh \beta_{1n} \bar{\xi} \cos \gamma_{1n} \bar{\xi} \right) \quad (3-172)$$



$$\begin{cases} \psi_{11n} = \frac{-2 \cosh \beta_{1n} \cos \gamma_{1n}}{\beta_{1n} \sin(2\gamma_{1n}) + \gamma_{1n} \sinh(2\beta_{1n})} \\ \psi_{14n} = \frac{2 \sinh \beta_{1n} \sin \gamma_{1n}}{\beta_{1n} \sin(2\gamma_{1n}) + \gamma_{1n} \sinh(2\beta_{1n})} \end{cases} \quad (3-173)$$

**Case 2:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\Delta_n < 0$

$$Y_n(\bar{\xi}) = A_n \sinh(\beta_{2n}\bar{\xi}) + B_n \cosh(\beta_{2n}\bar{\xi}) + C_n \sin(\gamma_{2n}\bar{\xi}) + D_n \cos(\gamma_{2n}\bar{\xi}) \quad (3-174)$$

將(3-174)式帶入邊界條件(3-165)式中可求得  $A_n = C_n = 0$ ，再帶入(3-164)式以求得

$B_n$ 、 $D_n$  與  $E_{4n}$  三者的關係，並求解  $Y_n$ ：

$$Y_n = E_{4n} (\psi_{22n} \cosh \beta_{2n}\bar{\xi} + \psi_{24n} \cos \gamma_{2n}\bar{\xi}) \quad (3-175)$$

$$\begin{cases} \psi_{22n} = \frac{-\cos \gamma_{2n}}{\beta_{2n} \sinh \beta_{2n} \cos \gamma_{2n} + \gamma_{2n} \cosh \beta_{2n} \sin \gamma_{2n}} \\ \psi_{24n} = \frac{\cosh \beta_{2n}}{\beta_{2n} \sinh \beta_{2n} \cos \gamma_{2n} + \gamma_{2n} \cosh \beta_{2n} \sin \gamma_{2n}} \end{cases} \quad (3-176)$$

**Case 3:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\delta_n > 0$ ,  $\Delta_n > 0$

$$Y_n = A_n \sinh \beta_{3n}\bar{\xi} + B_n \cosh \beta_{3n}\bar{\xi} + C_n \sinh \gamma_{3n}\bar{\xi} + D_n \cosh \gamma_{3n}\bar{\xi} \quad (3-177)$$

將(3-177)式帶入邊界條件(3-165)式中可求得  $A_n = C_n = 0$ ，再帶入(3-164)式以求得

$B_n$ 、 $D_n$  與  $E_{4n}$  三者的關係，並求解  $Y_n$ ：

$$Y_n = E_{4n} (\psi_{32n} \cosh \beta_{3n}\bar{\xi} + \psi_{34n} \cosh \gamma_{3n}\bar{\xi}) \quad (3-178)$$

$$\begin{cases} \psi_{32n} = \frac{-\cosh \gamma_{3n}}{\beta_{3n} \sinh \beta_{3n} \cosh \gamma_{3n} - \gamma_{3n} \cosh \beta_{3n} \sinh \gamma_{3n}} \\ \psi_{34n} = \frac{\cosh \beta_{3n}}{\beta_{3n} \sinh \beta_{3n} \cosh \gamma_{3n} - \gamma_{3n} \cosh \beta_{3n} \sinh \gamma_{3n}} \end{cases} \quad (3-179)$$

**Case 4:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\delta_n < 0$ ,  $\Delta_n > 0$

$$Y_n = A_n \sin \beta_{4n}\bar{\xi} + B_n \cos \beta_{4n}\bar{\xi} + C_n \sin \gamma_{4n}\bar{\xi} + D_n \cos \gamma_{4n}\bar{\xi} \quad (3-180)$$



將(3-180)式帶入邊界條件(3-165)式中可求得  $A_n = C_n = 0$ ，再帶入(3-164)式以求得

$B_n$ 、 $D_n$ 與  $E_{4n}$ 三者的關係，並求解  $Y_n$ ：

$$Y_n = E_{4n} \left( \psi_{42n} \cos \beta_{4n} \bar{\xi} + \psi_{44n} \cos \gamma_{4n} \bar{\xi} \right) \quad (3-181)$$

$$\begin{cases} \psi_{42n} = \frac{\cos \gamma_{4n}}{\beta_{4n} \sin \beta_{4n} \cos \gamma_{4n} + \gamma_{4n} \cos \beta_{4n} \sin \gamma_{4n}} \\ \psi_{44n} = \frac{-\cos \beta_{4n}}{\beta_{4n} \sin \beta_{4n} \cos \gamma_{4n} + \gamma_{4n} \cos \beta_{4n} \sin \gamma_{4n}} \end{cases} \quad (3-182)$$

將(3-172)式、(3-175)式、(3-178)式與(3-181)式帶回(3-168)式並獲得第四塊結構塊的位移解  $W_4$

$$\begin{aligned} W_4(\xi, \eta) = & \sum E_{4n} \left( \psi_{11n} \sinh \beta_{1n} \bar{\xi} \sin \gamma_{1n} \bar{\xi} + \psi_{14n} \cosh \beta_{1n} \bar{\xi} \cos \gamma_{1n} \bar{\xi} \right) \cos n\pi\eta \\ & + \sum E_{4n} \left( \psi_{22n} \cosh \beta_{2n} \bar{\xi} + \psi_{24n} \cos \gamma_{2n} \bar{\xi} \right) \cos n\pi\eta \\ & + \sum E_{4n} \left( \psi_{32n} \cosh \beta_{3n} \bar{\xi} + \psi_{34n} \cosh \gamma_{3n} \bar{\xi} \right) \cos n\pi\eta \\ & + \sum E_{4n} \left( \psi_{42n} \cos \beta_{4n} \bar{\xi} + \psi_{44n} \cos \gamma_{4n} \bar{\xi} \right) \cos n\pi\eta \end{aligned} \quad (3-183)$$

將上述所推導各結構塊的位移解進行相加後便可獲得原本平板的面外位移解  $W$



$$\begin{aligned}
W &= W_1 + W_2 + W_3 + W_4 \\
&= \sum E_{1m} (\theta_{11m} \sinh \beta_{1m} \eta \sin \gamma_{1m} \eta + \theta_{14m} \cosh \beta_{1m} \eta \cos \gamma_{1m} \eta) \sin\left(\frac{2m-1}{2} \pi \xi\right) \\
&\quad + \sum E_{1m} (\theta_{22m} \cosh \beta_{2m} \eta + \theta_{24m} \cos \gamma_{2m} \eta) \sin\left(\frac{2m-1}{2} \pi \xi\right) \\
&\quad + \sum E_{1m} (\theta_{32m} \cosh \beta_{3m} \eta + \theta_{34m} \cosh \gamma_{3m} \eta) \sin\left(\frac{2m-1}{2} \pi \xi\right) \\
&\quad + \sum E_{2n} (\theta_{12n} \sinh \beta_{1n} \xi \cos \gamma_{1n} \xi + \theta_{13n} \cosh \beta_{1n} \xi \sin \gamma_{1n} \xi) \cos n \pi \eta \\
&\quad + \sum E_{2n} (\theta_{21n} \sinh \beta_{2n} \xi + \theta_{23n} \sin \gamma_{2n} \xi) \cos n \pi \eta \\
&\quad + \sum E_{2n} (\theta_{31n} \sinh \beta_{3n} \xi + \theta_{33n} \sinh \gamma_{3n} \xi) \cos n \pi \eta \\
&\quad + \sum E_{2n} (\theta_{41n} \sin \beta_{4n} \xi + \theta_{43n} \sin \gamma_{4n} \xi) \cos n \pi \eta \\
&\quad + \sum E_{3m} (\psi_{11m} \sinh \beta_{1m} \bar{\eta} \sin \gamma_{1m} \bar{\eta} + \psi_{14m} \cosh \beta_{1m} \bar{\eta} \cos \gamma_{1m} \bar{\eta}) \sin\left(\frac{2m-1}{2} \pi \xi\right) \\
&\quad + \sum E_{3m} (\psi_{22m} \cosh \beta_{2m} \bar{\eta} + \psi_{24m} \cos \gamma_{2m} \bar{\eta}) \sin\left(\frac{2m-1}{2} \pi \xi\right) \\
&\quad + \sum E_{3m} (\psi_{32m} \cosh \beta_{3m} \bar{\eta} + \psi_{34m} \cosh \gamma_{3m} \bar{\eta}) \sin\left(\frac{2m-1}{2} \pi \xi\right) \\
&\quad + \sum E_{4n} (\psi_{11n} \sinh \beta_{1n} \bar{\xi} \sin \gamma_{1n} \bar{\xi} + \psi_{14n} \cosh \beta_{1n} \bar{\xi} \cos \gamma_{1n} \bar{\xi}) \cos n \pi \eta \quad (3-184) \\
&\quad + \sum E_{4n} (\psi_{22n} \cosh \beta_{2n} \bar{\xi} + \psi_{24n} \cos \gamma_{2n} \bar{\xi}) \cos n \pi \eta \\
&\quad + \sum E_{4n} (\psi_{32n} \cosh \beta_{3n} \bar{\xi} + \psi_{34n} \cosh \gamma_{3n} \bar{\xi}) \cos n \pi \eta \\
&\quad + \sum E_{4n} (\psi_{42n} \cos \beta_{4n} \bar{\xi} + \psi_{44n} \cos \gamma_{4n} \bar{\xi}) \cos n \pi \eta
\end{aligned}$$

原先平板的八個邊界條件中，有四個邊界條件因為與各結構塊各自的邊界條件重複，已經在結構塊位移解的求解過程中被滿足了，因此疊加後的位移解也會自動滿足這四個邊界條件，這些已經被滿足的邊界條件如下所示：

$$W|_{\xi=0} = 0, \quad -\left[ \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + \frac{\nu^*}{\phi^2} \frac{\partial^3 W}{\partial \xi \partial \eta^2} - \frac{P_\xi}{\phi^2} \frac{\partial W}{\partial \xi} \right]_{\xi=1} = 0 \quad (3-185)$$

$$-\left[ \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right]_{\eta=0} = 0, \quad -\left[ \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right]_{\eta=1} = 0 \quad (3-186)$$

而尚未滿足的邊界條件如下所示：

$$\left. \frac{\partial W}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0 \quad (3-187)$$



$$-\left[ \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\nu}{\phi^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right]_{\xi=1} = 0 \quad (3-188)$$

$$-\left[ \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \nu \phi^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right]_{\eta=0} = 0 \quad (3-189)$$

$$-\left[ \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \nu \phi^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right]_{\eta=1} = 0 \quad (3-190)$$

因此將面外位移解(3-184)式帶入(3-187)~(3-190)式中以滿足剩餘的邊界條件，帶入  
 $\xi=0,1$ 的邊界條件時於等式兩側同乘  $\cos(c\pi\eta)$ ，帶入  $\eta=0,1$ 的邊界條件實則於等  
式兩側同乘  $\sin\left(\frac{2c-1}{2}\pi\xi\right)$ ，之後對方程式進行積分並透過積化和差與三角函數正  
交性，將所得之方程式整合為矩陣形式：

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{1m} \\ E_{2n} \\ E_{3m} \\ E_{4n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-191)$$

其中  $A_{11} \sim A_{44}$  為子矩陣，其矩陣大小取決於位移解的展開項數，並將由  $A_{11} \sim A_{44}$  子  
矩陣組合起來的矩陣稱作特徵矩陣  $[A]$ ，而矩陣  $[E]$  則為位移解中的待定係數。此  
外  $[A]$  的行代表對應的結構塊位移解，而列則代表所帶入的邊界條件，以  $A_{11} \sim A_{14}$   
為例，將(3-184)式帶入邊界條件(3-190)式並同乘對應的三角函數與積分後， $A_{11}$  即  
為經上述運算後第一塊結構塊位移解的結果， $A_{12}$  則對應第二塊結構塊位移解的結  
果， $A_{13}$  對應第三塊結構塊， $A_{14}$  對應第四塊結構塊，以此類推將(3-184)式帶入(3-188)  
式並進行運算後， $A_{21} \sim A_{24}$  則分別對應第一塊至第四塊結構塊位移解的結果，將  
(3-184)式帶入(3-189)式後對應到  $A_{31} \sim A_{34}$ ，將(3-184)式帶入(3-187)式後對應到



$A_{41} \sim A_{44}$ ，特徵矩陣的詳細內容如下所示：

## 1. $A_{11}(c, m)$ 的矩陣元素

**Case 1:**  $\delta_m^2 < \Delta_m$

$$\delta_{mc} \left[ (\theta_{11m} X_{111} - \theta_{14m} X_{112}) \sinh \beta_{1m} \sin \gamma_{1m} + (\theta_{11m} X_{112} + \theta_{14m} X_{111}) \cosh \beta_{1m} \cos \gamma_{1m} \right] \quad (3-192)$$

$$\begin{cases} X_{111} = \beta_{1m}^2 - \gamma_{1m}^2 - \nu \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \\ X_{112} = 2 \beta_{1m} \gamma_{1m} \end{cases} \quad (3-193)$$

**Case 2:**  $\delta_m^2 > \Delta_m, \Delta_m < 0$

$$\delta_{mc} \left\{ \theta_{22m} \cosh \beta_{2m} \left[ \beta_{2m}^2 - \nu \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \right] - \theta_{24m} \cos \gamma_{2m} \left[ \gamma_{2m}^2 + \nu \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \right] \right\} \quad (3-194)$$

**Case 3:**  $\delta_m^2 > \Delta_m, \Delta_m > 0$

$$\delta_{mc} \left\{ \theta_{32m} \cosh \beta_{3m} \left[ \beta_{3m}^2 - \nu \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \right] + \theta_{34m} \cosh \gamma_{3m} \left[ \gamma_{3m}^2 - \nu \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \right] \right\} \quad (3-195)$$

## 2. $A_{12}(c, n)$ 的矩陣元素

**Case 1:**  $\delta_n^2 < \Delta_n$

$$\frac{1}{2} \cos(n\pi) \left[ (\theta_{12n} X_{121} + \theta_{13n} X_{122})(Y_{121} - Y_{122}) + (\theta_{12n} X_{122} - \theta_{13n} X_{121})(Y_{123} - Y_{124}) \right] \quad (3-196)$$

$$\begin{cases} X_{121} = \nu \phi^2 (\beta_{1n}^2 - \gamma_{1n}^2) - (n\pi)^2 \\ X_{122} = 2 \nu \phi^2 \beta_{1n} \gamma_{1n} \end{cases} \quad (3-197)$$

$$\left\{
\begin{aligned}
Y_{121} &= \frac{\beta_{1n} \cosh \beta_{1n} \sin\left(\gamma_{1n} + \frac{2c-1}{2}\pi\right) - \left(\gamma_{1n} + \frac{2c-1}{2}\pi\right) \sinh \beta_{1n} \cos\left(\gamma_{1n} + \frac{2c-1}{2}\pi\right)}{\beta_{1n}^2 + \left(\gamma_{1n} + \frac{2c-1}{2}\pi\right)^2} \\
Y_{122} &= \frac{\beta_{1n} \cosh \beta_{1n} \sin\left(\gamma_{1n} - \frac{2c-1}{2}\pi\right) - \left(\gamma_{1n} - \frac{2c-1}{2}\pi\right) \sinh \beta_{1n} \cos\left(\gamma_{1n} - \frac{2c-1}{2}\pi\right)}{\beta_{1n}^2 + \left(\gamma_{1n} - \frac{2c-1}{2}\pi\right)^2} \\
Y_{123} &= \frac{\beta_{1n} \sinh \beta_{1n} \cos\left(\gamma_{1n} + \frac{2c-1}{2}\pi\right) + \left(\gamma_{1n} + \frac{2c-1}{2}\pi\right) \cosh \beta_{1n} \cos\left(\gamma_{1n} + \frac{2c-1}{2}\pi\right)}{\beta_{1n}^2 + \left(\gamma_{1n} + \frac{2c-1}{2}\pi\right)^2} \\
Y_{124} &= \frac{\beta_{1n} \sinh \beta_{1n} \cos\left(\gamma_{1n} - \frac{2c-1}{2}\pi\right) + \left(\gamma_{1n} - \frac{2c-1}{2}\pi\right) \cosh \beta_{1n} \sin\left(\gamma_{1n} - \frac{2c-1}{2}\pi\right)}{\beta_{1n}^2 + \left(\gamma_{1n} - \frac{2c-1}{2}\pi\right)^2}
\end{aligned}
\right.$$

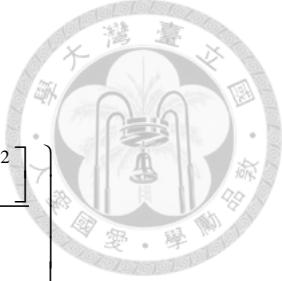
(3-198)

**Case 2:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\Delta_n < 0$

$$\cos(n\pi) \sin\left(\frac{2c-1}{2}\pi\right) \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\theta_{21n} \beta_{2n} \cosh \beta_{2n} \left[ v\phi^2 \beta_{2n}^2 - (n\pi)^2 \right]}{\beta_{2n}^2 + \left(\frac{2c-1}{2}\pi\right)^2} \\
&+ \frac{\theta_{23n} \gamma_{2n} \cos \gamma_{2n} \left[ v\phi^2 \gamma_{2n}^2 + (n\pi)^2 \right]}{\gamma_{2n}^2 - \left(\frac{2c-1}{2}\pi\right)^2}
\end{aligned}
\right\} \quad (3-199)$$

**Case 3:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\delta_n > 0$ ,  $\Delta_n > 0$

$$\cos(n\pi) \sin\left(\frac{2c-1}{2}\pi\right) \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\theta_{31n} \beta_{3n} \cosh \beta_{3n} \left[ v\phi^2 \beta_{3n}^2 - (n\pi)^2 \right]}{\beta_{3n}^2 + \left(\frac{2c-1}{2}\pi\right)^2} \\
&+ \frac{\theta_{33n} \gamma_{3n} \cosh \gamma_{3n} \left[ v\phi^2 \gamma_{3n}^2 - (n\pi)^2 \right]}{\gamma_{3n}^2 + \left(\frac{2c-1}{2}\pi\right)^2}
\end{aligned}
\right\} \quad (3-200)$$



**Case 4:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\delta_n < 0$ ,  $\Delta_n > 0$

$$\cos(n\pi) \sin\left(\frac{2c-1}{2}\pi\right) \left\{ \frac{\theta_{41n}\beta_{4n} \cosh \beta_{4n} \left[ \nu\phi^2 \beta_{4n}^2 + (n\pi)^2 \right]}{\beta_{4n}^2 - \left( \frac{2c-1}{2}\pi \right)^2} \right. \\ \left. + \frac{\theta_{43n}\gamma_{4n} \cosh \gamma_{4n} \left[ \nu\phi^2 \gamma_{4n}^2 + (n\pi)^2 \right]}{\gamma_{4n}^2 - \left( \frac{2c-1}{2}\pi \right)^2} \right\} \quad (3-201)$$

### 3. $A_{13}(c, m)$ 的矩阵元素

**Case 1:**  $\delta_m^2 < \Delta_m$

$$\delta_{mc} \left\{ 2\psi_{11m}\beta_{1m}\gamma_{1m} + \psi_{14m} \left[ \beta_{1m}^2 - \gamma_{1m}^2 - \nu\phi^2 \left( \frac{2m-1}{2}\pi \right)^2 \right] \right\} \quad (3-202)$$

**Case 2:**  $\delta_m^2 > \Delta_m$ ,  $\Delta_m < 0$

$$\delta_{mc} \left\{ \psi_{22m} \left[ \beta_{2m}^2 - \nu\phi^2 \left( \frac{2m-1}{2}\pi \right)^2 \right] - \psi_{24m} \left[ \gamma_{2m}^2 + \nu\phi^2 \left( \frac{2m-1}{2}\pi \right)^2 \right] \right\} \quad (3-203)$$

**Case 3:**  $\delta_m^2 > \Delta_m$ ,  $\Delta_m > 0$

$$\delta_{mc} \left\{ \psi_{32m} \left[ \beta_{3m}^2 - \nu\phi^2 \left( \frac{2m-1}{2}\pi \right)^2 \right] + \psi_{34m} \left[ \gamma_{3m}^2 - \nu\phi^2 \left( \frac{2m-1}{2}\pi \right)^2 \right] \right\} \quad (3-204)$$

### 4. $A_{14}(c, n)$ 的矩阵元素

**Case 1:**  $\delta_n^2 < \Delta_n$

$$\frac{1}{2} \cos(n\pi) \left[ (\psi_{11n}X_{141} - \psi_{14n}X_{142})(Y_{141} - Y_{142}) + (\psi_{11n}X_{142} + \psi_{14n}X_{141})(Y_{143} - Y_{144}) \right] \quad (3-205)$$

$$\begin{cases} X_{141} = \nu\phi^2 \left( \beta_{1n}^2 - \gamma_{1n}^2 \right) - (n\pi)^2 \\ X_{142} = 2\nu\phi^2 \beta_{1n} \gamma_{1n} \end{cases} \quad (3-206)$$



$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{141} = \frac{\beta_{1n} \cosh \beta_{1n} \cos \gamma_{1n} + \left( \frac{2c-1}{2} \pi + \gamma_{1n} \right) \sinh \beta_{1n} \sin \gamma_{1n}}{\beta_{1n}^2 + \left( \frac{2c-1}{2} \pi + \gamma_{1n} \right)^2} \\ Y_{142} = \frac{\beta_{1n} \cosh \beta_{1n} \cos \gamma_{1n} - \left( \frac{2c-1}{2} \pi - \gamma_{1n} \right) \sinh \beta_{1n} \sin \gamma_{1n}}{\beta_{1n}^2 + \left( \frac{2c-1}{2} \pi - \gamma_{1n} \right)^2} \\ Y_{143} = \frac{\beta_{1n} \sinh \beta_{1n} \sin \gamma_{1n} + \left( \frac{2c-1}{2} \pi - \gamma_{1n} \right) \cosh \beta_{1n} \cos \gamma_{1n}}{\beta_{1n}^2 + \left( \frac{2c-1}{2} \pi - \gamma_{1n} \right)^2} \\ Y_{144} = \frac{\beta_{1n} \sinh \beta_{1n} \sin \gamma_{1n} - \left( \frac{2c-1}{2} \pi + \gamma_{1n} \right) \cosh \beta_{1n} \cos \gamma_{1n}}{\beta_{1n}^2 + \left( \frac{2c-1}{2} \pi + \gamma_{1n} \right)^2} \end{array} \right. \quad (3-207)$$

**Case 2:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\Delta_n < 0$

$$\cos(n\pi) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\psi_{22n} \cosh \beta_{2n} \left( \frac{2c-1}{2} \pi \right) \left[ v\phi^2 \beta_{2n}^2 - (n\pi)^2 \right]}{\beta_{2n}^2 + \left( \frac{2c-1}{2} \pi \right)^2} \\ + \frac{\psi_{24n} \cos \gamma_{2n} \left( \frac{2c-1}{2} \pi \right) \left[ v\phi^2 \gamma_{2n}^2 + (n\pi)^2 \right]}{\gamma_{2n}^2 - \left( \frac{2c-1}{2} \pi \right)^2} \end{array} \right\} \quad (3-208)$$

**Case 3:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\delta_n > 0$ ,  $\Delta_n > 0$

$$\cos(n\pi) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\psi_{32n} \cosh \beta_{3n} \left( \frac{2c-1}{2} \pi \right) \left[ v\phi^2 \beta_{3n}^2 - (n\pi)^2 \right]}{\beta_{3n}^2 + \left( \frac{2c-1}{2} \pi \right)^2} \\ + \frac{\psi_{34n} \cosh \gamma_{3n} \left( \frac{2c-1}{2} \pi \right) \left[ v\phi^2 \gamma_{3n}^2 - (n\pi)^2 \right]}{\gamma_{3n}^2 + \left( \frac{2c-1}{2} \pi \right)^2} \end{array} \right\} \quad (3-209)$$



(3-210)

$$\cos(n\pi) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\psi_{42n} \cos \beta_{4n} \left( \frac{2c-1}{2} \pi \right) \left[ \nu \phi^2 \beta_{4n}^2 + (n\pi)^2 \right]}{\beta_{4n}^2 - \left( \frac{2c-1}{2} \pi \right)^2} \\ + \frac{\psi_{44n} \cos \gamma_{4n} \left( \frac{2c-1}{2} \pi \right) \left[ \nu \phi^2 \gamma_{4n}^2 + (n\pi)^2 \right]}{\gamma_{4n}^2 - \left( \frac{2c-1}{2} \pi \right)^2} \end{array} \right\}$$

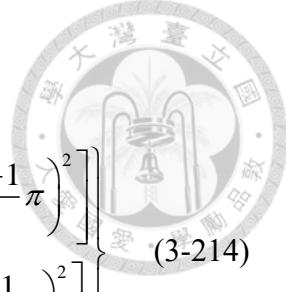
## 5. $A_{21}(c, m)$ 的矩阵元素

**Case 1:**  $\delta_m^2 < \Delta_m$

$$\frac{1}{2} \sin \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right) \left[ (\theta_{11m} X_{211} - \theta_{14m} X_{212}) (Y_{211} + Y_{212}) + (\theta_{11m} X_{212} + \theta_{14m} X_{211}) (Y_{213} + Y_{214}) \right] \quad (3-211)$$

$$\begin{cases} X_{211} = \frac{\nu}{\phi^2} \left( \beta_{1m}^2 - \gamma_{1m}^2 \right) - \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \\ X_{212} = \frac{2\nu \beta_{1m} \gamma_{1m}}{\phi^2} \end{cases} \quad (3-212)$$

$$\begin{cases} Y_{211} = \frac{\beta_{1m} \cosh \beta_{1m} \sin(\gamma_{1m} + c\pi) - (\gamma_{1m} + c\pi) \sinh \beta_{1m} \cos(\gamma_{1m} + c\pi)}{\beta_{1m}^2 + (\gamma_{1m} + c\pi)^2} \\ Y_{212} = \frac{\beta_{1m} \cosh \beta_{1m} \sin(\gamma_{1m} - c\pi) - (\gamma_{1m} - c\pi) \sinh \beta_{1m} \cos(\gamma_{1m} - c\pi)}{\beta_{1m}^2 + (\gamma_{1m} - c\pi)^2} \\ Y_{213} = \frac{\beta_{1m} \sinh \beta_{1m} \cos(\gamma_{1m} + c\pi) + (\gamma_{1m} + c\pi) \cosh \beta_{1m} \sin(\gamma_{1m} + c\pi)}{\beta_{1m}^2 + (\gamma_{1m} + c\pi)^2} \\ Y_{214} = \frac{\beta_{1m} \sinh \beta_{1m} \cos(\gamma_{1m} - c\pi) + (\gamma_{1m} - c\pi) \cosh \beta_{1m} \sin(\gamma_{1m} - c\pi)}{\beta_{1m}^2 + (\gamma_{1m} - c\pi)^2} \end{cases} \quad (3-213)$$



**Case 2:**  $\delta_m^2 > \Delta_m$ ,  $\Delta_m < 0$

$$\cos(c\pi) \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi\right) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\theta_{22m}\beta_{2m} \sinh \beta_{2m}}{\beta_{2m}^2 + (c\pi)^2} \left[ \frac{\nu}{\phi^2} \beta_{2m}^2 - \left( \frac{2m-1}{2}\pi \right)^2 \right] \\ - \frac{\theta_{24m}\gamma_{2m} \sin \gamma_{2m}}{\gamma_{2m}^2 - (c\pi)^2} \left[ \frac{\nu}{\phi^2} \gamma_{2m}^2 + \left( \frac{2m-1}{2}\pi \right)^2 \right] \end{array} \right\} \quad (3-214)$$

**Case 3:**  $\delta_m^2 > \Delta_m$ ,  $\Delta_m > 0$

$$\cos(c\pi) \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi\right) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\theta_{32m}\beta_{3m} \sinh \beta_{3m}}{\beta_{3m}^2 + (c\pi)^2} \left[ \frac{\nu}{\phi^2} \beta_{3m}^2 - \left( \frac{2m-1}{2}\pi \right)^2 \right] \\ + \frac{\theta_{34m}\gamma_{3m} \sinh \gamma_{3m}}{\gamma_{3m}^2 + (c\pi)^2} \left[ \frac{\nu}{\phi^2} \gamma_{3m}^2 - \left( \frac{2m-1}{2}\pi \right)^2 \right] \end{array} \right\} \quad (3-215)$$

## 6. $A_{22}(c, n)$ 的矩阵元素

**Case 1:**  $\delta_n^2 < \Delta_n$

$$\delta_{nc} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \theta_{12n} \left( \beta_{1n}^2 - \gamma_{1n}^2 - \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right) + 2\theta_{13n} \beta_{1n} \gamma_{1n} \right] \sinh \beta_{1n} \cos \gamma_{1n} \\ + \left[ \theta_{13n} \left( \beta_{1n}^2 - \gamma_{1n}^2 - \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right) - 2\theta_{12n} \beta_{1n} \gamma_{1n} \right] \cosh \beta_{1n} \sin \gamma_{1n} \end{array} \right\} \quad (3-216)$$

**Case 2:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\Delta_n < 0$

$$\delta_{nc} \left\{ \theta_{21n} \left[ \beta_{2n}^2 - \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] \sinh \beta_{2n} - \theta_{23n} \left[ \gamma_{2n}^2 + \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] \sin \gamma_{2n} \right\} \quad (3-217)$$

**Case 3:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\delta_n > 0$ ,  $\Delta_n > 0$

$$\delta_{nc} \left\{ \theta_{31n} \left[ \beta_{3n}^2 - \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] \sinh \beta_{3n} + \theta_{33n} \left[ \gamma_{3n}^2 - \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] \sinh \gamma_{3n} \right\} \quad (3-218)$$

**Case 4:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\delta_n < 0$ ,  $\Delta_n > 0$

$$-\delta_{nc} \left\{ \theta_{41n} \left[ \beta_{4n}^2 + \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] \sin \beta_{4n} + \theta_{43n} \left[ \gamma_{4n}^2 + \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] \sin \gamma_{4n} \right\} \quad (3-219)$$



## 7. $A_{23}(c, m)$ 的矩阵元素

**Case 1:**  $\delta_m^2 < \Delta_m$

$$\frac{1}{2} \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi\right) \left[ (\psi_{11m}X_{231} - \psi_{14m}X_{232})(Y_{231} + Y_{232}) + (\psi_{11m}X_{232} + \psi_{14m}X_{231})(Y_{233} + Y_{234}) \right] \quad (3-220)$$

$$\begin{cases} X_{231} = \frac{\nu}{\phi^2} \left( \beta_{1m}^2 - \gamma_{1m}^2 \right) - \left( \frac{2m-1}{2}\pi \right)^2 \\ X_{232} = \frac{2\nu\beta_{1m}\gamma_{1m}}{\phi^2} \end{cases} \quad (3-221)$$

$$\begin{cases} Y_{231} = \frac{\beta_{1m} \cosh \beta_{1m} \sin \gamma_{1m} + (c\pi - \gamma_{1m}) \sinh \beta_{1m} \cos \gamma_{1m}}{\beta_{1m}^2 + (c\pi - \gamma_{1m})^2} \\ Y_{232} = \frac{\beta_{1m} \cosh \beta_{1m} \sin \gamma_{1m} - (c\pi + \gamma_{1m}) \sinh \beta_{1m} \cos \gamma_{1m}}{\beta_{1m}^2 + (c\pi + \gamma_{1m})^2} \\ Y_{233} = \frac{\beta_{1m} \sinh \beta_{1m} \cos \gamma_{1m} - (c\pi - \gamma_{1m}) \cosh \beta_{1m} \sin \gamma_{1m}}{\beta_{1m}^2 + (c\pi - \gamma_{1m})^2} \\ Y_{234} = \frac{\beta_{1m} \sinh \beta_{1m} \cos \gamma_{1m} + (c\pi + \gamma_{1m}) \cosh \beta_{1m} \sin \gamma_{1m}}{\beta_{1m}^2 + (c\pi + \gamma_{1m})^2} \end{cases} \quad (3-222)$$

**Case 2:**  $\delta_m^2 > \Delta_m, \Delta_m < 0$

$$\sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi\right) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\psi_{22m}\beta_{2m} \sinh \beta_{2m}}{\beta_{2m}^2 + (c\pi)^2} \left[ \frac{\nu}{\phi^2} \beta_{2m}^2 - \left( \frac{2m-1}{2}\pi \right)^2 \right] \\ - \frac{\psi_{24m}\gamma_{2m} \sin \gamma_{2m}}{\gamma_{2m}^2 - (c\pi)^2} \left[ \frac{\nu}{\phi^2} \gamma_{2m}^2 + \left( \frac{2m-1}{2}\pi \right)^2 \right] \end{array} \right\} \quad (3-223)$$

**Case 3:**  $\delta_m^2 > \Delta_m, \Delta_m > 0$

$$\sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi\right) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\psi_{32m}\beta_{3m} \sinh \beta_{3m}}{\beta_{3m}^2 + (c\pi)^2} \left[ \frac{\nu}{\phi^2} \beta_{3m}^2 - \left( \frac{2m-1}{2}\pi \right)^2 \right] \\ + \frac{\psi_{34m}\gamma_{3m} \sinh \gamma_{3m}}{\gamma_{3m}^2 + (c\pi)^2} \left[ \frac{\nu}{\phi^2} \gamma_{3m}^2 - \left( \frac{2m-1}{2}\pi \right)^2 \right] \end{array} \right\} \quad (3-224)$$



## 8. $A_{24}(c, n)$ 的矩阵元素

**Case 1:**  $\delta_n^2 < \Delta_n$

$$\delta_{nc} \left\{ 2\psi_{11n}\beta_{1n}\gamma_{1n} + \psi_{14n} \left[ \beta_{1n}^2 - \gamma_{1n}^2 - \frac{\nu}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] \right\} \quad (3-225)$$

**Case 2:**  $\delta_n^2 > \Delta_n, \Delta_n < 0$

$$\delta_{nc} \left\{ \psi_{22n} \left[ \beta_{2n}^2 - \frac{\nu(n\pi)^2}{\phi^2} \right] - \psi_{24n} \left[ \gamma_{2n}^2 + \frac{\nu(n\pi)^2}{\phi^2} \right] \right\} \quad (3-226)$$

**Case 3:**  $\delta_n^2 > \Delta_n, \delta_n > 0, \Delta_n > 0$

$$\delta_{nc} \left\{ \psi_{32n} \left[ \beta_{3n}^2 - \frac{\nu(n\pi)^2}{\phi^2} \right] + \psi_{34n} \left[ \gamma_{3n}^2 - \frac{\nu(n\pi)^2}{\phi^2} \right] \right\} \quad (3-227)$$

**Case 4:**  $\delta_n^2 > \Delta_n, \delta_n < 0, \Delta_n > 0$

$$-\delta_{nc} \left\{ \psi_{42n} \left[ \beta_{4n}^2 + \frac{\nu(n\pi)^2}{\phi^2} \right] + \psi_{44n} \left[ \gamma_{4n}^2 + \frac{\nu(n\pi)^2}{\phi^2} \right] \right\} \quad (3-228)$$

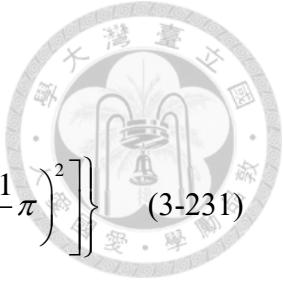
## 9. $A_{31}(c, m)$ 的矩阵元素

**Case 1:**  $\delta_m^2 < \Delta_m$

$$\delta_{mc} \left\{ 2\theta_{11m}\beta_{1m}\gamma_{1m} + \theta_{14m} \left[ \beta_{1m}^2 - \gamma_{1m}^2 - \nu\phi^2 \left( \frac{2m-1}{2}\pi \right)^2 \right] \right\} \quad (3-229)$$

**Case 2:**  $\delta_m^2 > \Delta_m, \Delta_m < 0$

$$\delta_{mc} \left\{ \theta_{22m} \left[ \beta_{2m}^2 - \nu\phi^2 \left( \frac{2m-1}{2}\pi \right)^2 \right] - \theta_{24m} \left[ \gamma_{2m}^2 + \nu\phi^2 \left( \frac{2m-1}{2}\pi \right)^2 \right] \right\} \quad (3-230)$$



**Case 3:**  $\delta_m^2 > \Delta_m$ ,  $\Delta_m > 0$

$$\delta_{mc} \left\{ \theta_{32m} \left[ \beta_{3m}^2 - \nu \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \right] + \theta_{34m} \left[ \gamma_{3m}^2 - \nu \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \right] \right\} \quad (3-231)$$

## 10. $A_{32}(c, n)$ 的矩阵元素

**Case 1:**  $\delta_n^2 < \Delta_n$

$$\frac{1}{2} \left[ (\theta_{12n} X_{321} + \theta_{13n} X_{322}) (Y_{321} - Y_{322}) + (\theta_{12n} X_{322} - \theta_{13n} X_{321}) (Y_{323} - Y_{324}) \right] \quad (3-232)$$

$$\begin{cases} X_{321} = \nu \phi^2 \left( \beta_{1n}^2 - \gamma_{1n}^2 \right) - (n\pi)^2 \\ X_{322} = 2\nu \phi^2 \beta_{1n} \gamma_{1n} \end{cases} \quad (3-233)$$

$$\begin{cases} Y_{321} = \frac{\beta_{1n} \cosh \beta_{1n} \sin \left( \gamma_{1n} + \frac{2c-1}{2} \pi \right) - \left( \gamma_{1n} + \frac{2c-1}{2} \pi \right) \sinh \beta_{1n} \cos \left( \gamma_{1n} + \frac{2c-1}{2} \pi \right)}{\beta_{1n}^2 + \left( \gamma_{1n} + \frac{2c-1}{2} \pi \right)^2} \\ Y_{322} = \frac{\beta_{1n} \cosh \beta_{1n} \sin \left( \gamma_{1n} - \frac{2c-1}{2} \pi \right) - \left( \gamma_{1n} - \frac{2c-1}{2} \pi \right) \sinh \beta_{1n} \cos \left( \gamma_{1n} - \frac{2c-1}{2} \pi \right)}{\beta_{1n}^2 + \left( \gamma_{1n} - \frac{2c-1}{2} \pi \right)^2} \\ Y_{323} = \frac{\beta_{1n} \sinh \beta_{1n} \cos \left( \gamma_{1n} + \frac{2c-1}{2} \pi \right) + \left( \gamma_{1n} + \frac{2c-1}{2} \pi \right) \cosh \beta_{1n} \sin \left( \gamma_{1n} + \frac{2c-1}{2} \pi \right)}{\beta_{1n}^2 + \left( \gamma_{1n} + \frac{2c-1}{2} \pi \right)^2} \\ Y_{324} = \frac{\beta_{1n} \sinh \beta_{1n} \cos \left( \gamma_{1n} - \frac{2c-1}{2} \pi \right) + \left( \gamma_{1n} - \frac{2c-1}{2} \pi \right) \cosh \beta_{1n} \sin \left( \gamma_{1n} - \frac{2c-1}{2} \pi \right)}{\beta_{1n}^2 + \left( \gamma_{1n} - \frac{2c-1}{2} \pi \right)^2} \end{cases} \quad (3-234)$$



**Case 2:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\Delta_n < 0$

$$\sin\left(\frac{2c-1}{2}\pi\right) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\theta_{21n}\beta_{2n} \cosh \beta_{2n} [\nu\phi^2\beta_{2n}^2 - (n\pi)^2]}{\beta_{2n}^2 + \left(\frac{2c-1}{2}\pi\right)^2} \\ + \frac{\theta_{23n}\gamma_{2n} \cos \gamma_{2n} [\nu\phi^2\gamma_{2n}^2 + (n\pi)^2]}{\gamma_{2n}^2 - \left(\frac{2c-1}{2}\pi\right)^2} \end{array} \right\} \quad (3-235)$$

**Case 3:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\delta_n > 0$ ,  $\Delta_n > 0$

$$\sin\left(\frac{2c-1}{2}\pi\right) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\theta_{31n}\beta_{3n} \cosh \beta_{3n} [\nu\phi^2\beta_{3n}^2 - (n\pi)^2]}{\beta_{3n}^2 + \left(\frac{2c-1}{2}\pi\right)^2} \\ + \frac{\theta_{33n}\gamma_{3n} \cosh \gamma_{2n} [\nu\phi^2\gamma_{3n}^2 - (n\pi)^2]}{\gamma_{3n}^2 + \left(\frac{2c-1}{2}\pi\right)^2} \end{array} \right\} \quad (3-236)$$

**Case 4:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\delta_n < 0$ ,  $\Delta_n > 0$

$$\sin\left(\frac{2c-1}{2}\pi\right) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\theta_{41n}\beta_{4n} \cos \beta_{4n} [\nu\phi^2\beta_{4n}^2 + (n\pi)^2]}{\beta_{4n}^2 - \left(\frac{2c-1}{2}\pi\right)^2} \\ + \frac{\theta_{43n}\gamma_{4n} \cos \gamma_{4n} [\nu\phi^2\gamma_{4n}^2 + (n\pi)^2]}{\gamma_{4n}^2 - \left(\frac{2c-1}{2}\pi\right)^2} \end{array} \right\} \quad (3-237)$$

## 11. $A_{33}(c, m)$ 的矩阵元素

**Case 1:**  $\delta_m^2 < \Delta_m$

$$\delta_{mc} \left[ (\psi_{11m}X_{331} - \psi_{14m}X_{332}) \sinh \beta_{1m} \sin \gamma_{1m} + (\psi_{11m}X_{332} + \psi_{14m}X_{331}) \cosh \beta_{1m} \cos \gamma_{1m} \right] \quad (3-238)$$

$$\begin{cases} X_{331} = \beta_{1m}^2 - \gamma_{1m}^2 - \nu\phi^2 \left(\frac{2m-1}{2}\pi\right)^2 \\ X_{332} = 2\beta_{1m}\gamma_{1m} \end{cases} \quad (3-239)$$



**Case 2:**  $\delta_m^2 > \Delta_m$ ,  $\Delta_m < 0$

$$\delta_{mc} \left\{ \begin{array}{l} \psi_{22m} \cosh \beta_{2m} \left[ \beta_{2m}^2 - \nu \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \right] \\ -\psi_{24m} \cos \gamma_{2m} \left[ \gamma_{2m}^2 + \nu \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \right] \end{array} \right\} \quad (3-240)$$

**Case 3:**  $\delta_m^2 > \Delta_m$ ,  $\Delta_m > 0$

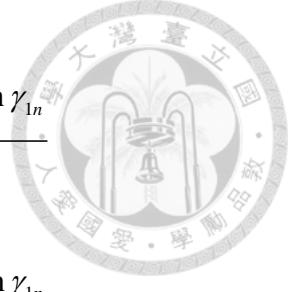
$$\delta_{mc} \left\{ \begin{array}{l} \psi_{32m} \cosh \beta_{3m} \left[ \beta_{3m}^2 - \nu \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \right] \\ +\psi_{34m} \cosh \gamma_{3m} \left[ \gamma_{3m}^2 - \nu \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \right] \end{array} \right\} \quad (3-241)$$

## 12. $A_{34}(c, n)$ 的矩阵元素

**Case 1:**  $\delta_n^2 < \Delta_n$

$$\frac{1}{2} \left[ (\psi_{11n} X_{341} - \psi_{14n} X_{342}) (Y_{341} - Y_{342}) + (\psi_{11n} X_{342} + \psi_{14n} X_{341}) (Y_{343} - Y_{344}) \right] \quad (3-242)$$

$$\begin{cases} X_{341} = \nu \phi^2 (\beta_{1n}^2 - \gamma_{1n}^2) - (n\pi)^2 \\ X_{342} = 2\nu \phi^2 \beta_{1n} \gamma_{1n} \end{cases} \quad (3-243)$$



$$\left\{
 \begin{aligned}
 Y_{341} &= \frac{\beta_{1n} \cosh \beta_{1n} \cos \gamma_{1n} + \left(\frac{2c-1}{2}\pi + \gamma_{1n}\right) \sinh \beta_{1n} \sin \gamma_{1n}}{\beta_{1n}^2 + \left(\frac{2c-1}{2}\pi + \gamma_{1n}\right)^2} \\
 Y_{342} &= \frac{\beta_{1n} \cosh \beta_{1n} \cos \gamma_{1n} - \left(\frac{2c-1}{2}\pi - \gamma_{1n}\right) \sinh \beta_{1n} \sin \gamma_{1n}}{\beta_{1n}^2 + \left(\frac{2c-1}{2}\pi - \gamma_{1n}\right)^2} \\
 Y_{343} &= \frac{\beta_{1n} \sinh \beta_{1n} \sin \gamma_{1n} + \left(\frac{2c-1}{2}\pi - \gamma_{1n}\right) \cosh \beta_{1n} \cos \gamma_{1n}}{\beta_{1n}^2 + \left(\frac{2c-1}{2}\pi - \gamma_{1n}\right)^2} \\
 Y_{344} &= \frac{\beta_{1n} \sinh \beta_{1n} \sin \gamma_{1n} - \left(\frac{2c-1}{2}\pi + \gamma_{1n}\right) \cosh \beta_{1n} \cos \gamma_{1n}}{\beta_{1n}^2 + \left(\frac{2c-1}{2}\pi + \gamma_{1n}\right)^2}
 \end{aligned}
 \right. \quad (3-244)$$

**Case 2:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\Delta_n < 0$

$$\frac{\psi_{22n} \cosh \beta_{2n} \left( \frac{2c-1}{2}\pi \right) \left[ v\phi^2 \beta_{2n}^2 - (n\pi)^2 \right]}{\beta_{2n}^2 + \left( \frac{2c-1}{2}\pi \right)^2} + \frac{\psi_{24n} \cos \gamma_{2n} \left( \frac{2c-1}{2}\pi \right) \left[ v\phi^2 \gamma_{2n}^2 + (n\pi)^2 \right]}{\gamma_{2n}^2 - \left( \frac{2c-1}{2}\pi \right)^2} \quad (3-245)$$

**Case 3:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\delta_n > 0$ ,  $\Delta_n > 0$

$$\frac{\psi_{32n} \cosh \beta_{3n} \left( \frac{2c-1}{2}\pi \right) \left[ v\phi^2 \beta_{3n}^2 - (n\pi)^2 \right]}{\beta_{3n}^2 + \left( \frac{2c-1}{2}\pi \right)^2} + \frac{\psi_{34n} \cosh \gamma_{3n} \left( \frac{2c-1}{2}\pi \right) \left[ v\phi^2 \gamma_{3n}^2 - (n\pi)^2 \right]}{\gamma_{3n}^2 + \left( \frac{2c-1}{2}\pi \right)^2} \quad (3-246)$$

**Case 4:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\delta_n < 0$ ,  $\Delta_n > 0$

$$\frac{\psi_{42n} \cos \beta_{4n} \left( \frac{2c-1}{2}\pi \right) \left[ v\phi^2 \beta_{4n}^2 + (n\pi)^2 \right]}{\beta_{2n}^2 - \left( \frac{2c-1}{2}\pi \right)^2} + \frac{\psi_{44n} \cos \gamma_{4n} \left( \frac{2c-1}{2}\pi \right) \left[ v\phi^2 \gamma_{4n}^2 + (n\pi)^2 \right]}{\gamma_{4n}^2 - \left( \frac{2c-1}{2}\pi \right)^2} \quad (3-247)$$



### 13. $A_{41}(c, m)$ 的矩阵元素

**Case 1:**  $\delta_m^2 < \Delta_m$

$$\frac{(2m-1)\pi}{4} [\theta_{11m}(Y_{411} + Y_{412}) + \theta_{14m}(Y_{413} + Y_{414})] \quad (3-248)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{411} = \frac{\beta_{1m} \cosh \beta_{1m} \sin(\gamma_{1m} + c\pi) - (\gamma_{1m} + c\pi) \sinh \beta_{1m} \cos(\gamma_{1m} + c\pi)}{\beta_{1m}^2 + (\gamma_{1m} + c\pi)^2} \\ Y_{412} = \frac{\beta_{1m} \cosh \beta_{1m} \sin(\gamma_{1m} - c\pi) - (\gamma_{1m} - c\pi) \sinh \beta_{1m} \cos(\gamma_{1m} - c\pi)}{\beta_{1m}^2 + (\gamma_{1m} - c\pi)^2} \\ Y_{413} = \frac{\beta_{1m} \sinh \beta_{1m} \cos(\gamma_{1m} + c\pi) + (\gamma_{1m} + c\pi) \cosh \beta_{1m} \sin(\gamma_{1m} + c\pi)}{\beta_{1m}^2 + (\gamma_{1m} + c\pi)^2} \\ Y_{414} = \frac{\beta_{1m} \sinh \beta_{1m} \cos(\gamma_{1m} - c\pi) + (\gamma_{1m} - c\pi) \cosh \beta_{1m} \sin(\gamma_{1m} - c\pi)}{\beta_{1m}^2 + (\gamma_{1m} - c\pi)^2} \end{array} \right. \quad (3-249)$$

**Case 2:**  $\delta_m^2 > \Delta_m, \Delta_m < 0$

$$\cos(c\pi) \left( \frac{2c-1}{2} \pi \right) \left[ \frac{\theta_{22m} \beta_{2m} \sinh \beta_{2m}}{\beta_{2m}^2 + (c\pi)^2} + \frac{\theta_{24m} \gamma_{2m} \sin \gamma_{2m}}{\gamma_{2m}^2 - (c\pi)^2} \right] \quad (3-250)$$

**Case 3:**  $\delta_m^2 > \Delta_m, \Delta_m > 0$

$$\cos(c\pi) \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right) \left[ \frac{\theta_{32m} \beta_{3m} \sinh \beta_{3m}}{\beta_{3m}^2 + (c\pi)^2} + \frac{\theta_{34m} \gamma_{3m} \sinh \gamma_{3m}}{\gamma_{3m}^2 + (c\pi)^2} \right] \quad (3-251)$$

### 14. $A_{42}(c, n)$ 的矩阵元素

**Case 1:**  $\delta_n^2 < \Delta_n$

$$\delta_{nc} (\psi_{12n} \beta_{1n} + \psi_{13n} \gamma_{1n}) \quad (3-252)$$

**Case 2:**  $\delta_n^2 > \Delta_n, \Delta_n < 0$

$$\delta_{nc} (\psi_{21n} \beta_{2n} + \psi_{23n} \gamma_{2n}) \quad (3-253)$$



**Case 3:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\delta_n > 0$ ,  $\Delta_n > 0$

$$\delta_{nc} (\psi_{31n} \beta_{3n} + \psi_{33n} \gamma_{3n}) \quad (3-254)$$

**Case 4:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\delta_n < 0$ ,  $\Delta_n > 0$

$$\delta_{nc} (\psi_{41n} \beta_{4n} + \psi_{43n} \gamma_{4n}) \quad (3-255)$$

## 15. $A_{43}(c, m)$ 的矩阵元素

**Case 1:**  $\delta_m^2 < \Delta_m$

$$\frac{(2m-1)\pi}{4} [\psi_{11m} (Y_{431} + Y_{432}) + \psi_{14m} (Y_{433} + Y_{434})] \quad (3-256)$$

$$\begin{cases} Y_{431} = \frac{\beta_{1m} \cosh \beta_{1m} \sin \gamma_{1m} + (c\pi - \gamma_{1m}) \sinh \beta_{1m} \cos \gamma_{1m}}{\beta_{1m}^2 + (c\pi - \gamma_{1m})^2} \\ Y_{432} = \frac{\beta_{1m} \cosh \beta_{1m} \sin \gamma_{1m} - (c\pi + \gamma_{1m}) \sinh \beta_{1m} \cos \gamma_{1m}}{\beta_{1m}^2 + (c\pi + \gamma_{1m})^2} \\ Y_{433} = \frac{\beta_{1m} \sinh \beta_{1m} \cos \gamma_{1m} - (c\pi - \gamma_{1m}) \cosh \beta_{1m} \sin \gamma_{1m}}{\beta_{1m}^2 + (c\pi - \gamma_{1m})^2} \\ Y_{434} = \frac{\beta_{1m} \sinh \beta_{1m} \cos \gamma_{1m} + (c\pi + \gamma_{1m}) \cosh \beta_{1m} \sin \gamma_{1m}}{\beta_{1m}^2 + (c\pi + \gamma_{1m})^2} \end{cases} \quad (3-257)$$

**Case 2:**  $\delta_m^2 > \Delta_m$ ,  $\Delta_m < 0$

$$\left( \frac{2m-1}{2} \pi \right) \left[ \frac{\psi_{22m} \beta_{2m} \sinh \beta_{2m}}{\beta_{2m}^2 + (c\pi)^2} + \frac{\psi_{24m} \gamma_{2m} \sin \gamma_{2m}}{\gamma_{2m}^2 - (c\pi)^2} \right] \quad (3-258)$$

**Case 3:**  $\delta_m^2 > \Delta_m$ ,  $\Delta_m > 0$

$$\left( \frac{2m-1}{2} \pi \right) \left[ \frac{\psi_{32m} \beta_{3m} \sinh \beta_{3m}}{\beta_{3m}^2 + (c\pi)^2} + \frac{\psi_{34m} \gamma_{3m} \sinh \gamma_{3m}}{\gamma_{3m}^2 + (c\pi)^2} \right] \quad (3-259)$$



## 16. $A_{44}(c, n)$ 的矩陣元素

**Case 1:**  $\delta_n^2 < \Delta_n$

$$-\delta_{nc} \left[ \begin{aligned} & \psi_{11n} (\beta_{1n} \cosh \beta_{1n} \sin \gamma_{1n} + \gamma_{1n} \sinh \beta_{1n} \cos \gamma_{1n}) \\ & + \psi_{14n} (\beta_{1n} \sinh \beta_{1n} \cos \gamma_{1n} - \gamma_{1n} \cosh \beta_{1n} \sin \gamma_{1n}) \end{aligned} \right] \quad (3-260)$$

**Case 2:**  $\delta_n^2 > \Delta_n, \Delta_n < 0$

$$-\delta_{nc} (\psi_{22n} \beta_{2n} \sinh \beta_{2n} - \psi_{24n} \gamma_{2n} \sin \gamma_{2n}) \quad (3-261)$$

**Case 3:**  $\delta_n^2 > \Delta_n, \delta_n > 0, \Delta_n > 0$

$$-\delta_{nc} (\psi_{32n} \beta_{3n} \sinh \beta_{3n} + \psi_{34n} \gamma_{3n} \sinh \gamma_{3n}) \quad (3-262)$$

**Case 4:**  $\delta_n^2 > \Delta_n, \delta_n < 0, \Delta_n > 0$

$$\delta_{nc} (\psi_{42n} \beta_{4n} \sin \beta_{4n} + \psi_{44n} \gamma_{4n} \sin \gamma_{4n}) \quad (3-263)$$

根據(3-191)式可以得知其為齊次方程組，若要求出非零解，則  $\det(A)$  必須為零，

且特徵矩陣  $[A]$  與頻率有關，因此當  $\det(A)$  為零時，此時所對應的頻率即為平板的共振頻率，再透過此時的特徵矩陣  $[A]$  去反算特徵向量  $[E]$ ，並根據特徵向量  $[E]$  計算平板共振時的模態振型。

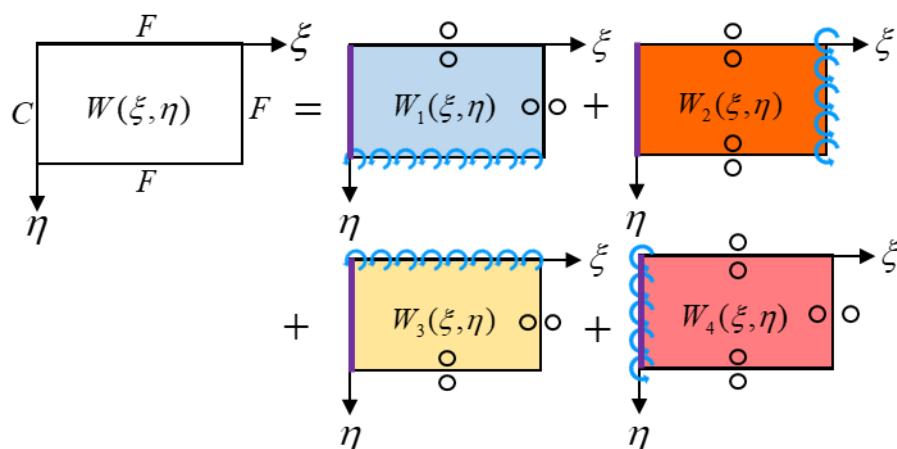


圖 3-10 平板結構塊示意圖



### 3.2.2 理論解析與有限元素分析結果比較

根據(3-184)式可以得知利用疊加法所求得的壓電平板面外位移解為多項級數展開的結果，然而實際計算時不可能展開至無限多項，因此須先進行展開項係數的收斂性分析，再與有限元素分析軟體的結果進行比較。首先討論未施加軸向力的情況，將  $P_\xi$  設定為零，橫軸為級數展開項數從 1 項至 30 項，縱軸為展開項數  $N$  項與  $N+1$  項之共振頻率的比值，此處定義展開項數  $N+1$  的共振頻率比展開  $N$  項更為精準，因此將展開項數  $N+1$  的共振頻率至於分母，並討論兩者共振頻率的差距，若其比值等於 1，表示頻率不隨展開項數增加而變化並達到收斂。圖 3-11 為平板未受力情況下的收斂性分析，圖 3-12 為平板受拉力的收斂性分析，圖 3-13 為平板受壓力的收斂性分析，兩者力量大小皆為  $10(N)$ ，可以發現在展開項數達到十項時，不論是未受力、受拉力或壓力的情況，前十個模態的共振頻率的比值皆趨近於 1，為求較佳的準確性，將疊加法的展開項數設定為 20 項。

為驗證疊加法理論解析的準確性，使用商用有限元素分析軟體 ABAQUS 2019 進行模擬分析。材料常數設定部分，理論與模擬皆使用表 3-1 與表 3-2 的材料參數並經過換算的結果，由於本論文所使用的試片為 SBS 試片，將上下兩層壓電陶瓷的極化方向設定反向後，在組件合成(Assembly)中將兩層壓電陶瓷與黃銅組合在一起，並於交互關係(Intersection)中將壓電陶瓷與黃銅設定為緊密連接(Tie)。在求解步驟(Step)中設定兩個步驟進行分析，第一個步驟選用 Static, General 以進行平板應力分析，同時將幾何非線性(Non-linear geometry, Nlgeom)的開關打開，第二步驟選用 Frequency 進行共振頻率分析，若未開啟幾何非線性的話，在進行共振頻率分析時並不會將前一步驟所得之應力結果作為初始條件來進行模擬，只會求得未受預應力下的平板共振頻率。在負載(Load)中設定平板的邊界條件，首先在初始條件(Initial)的步驟中將平板的一端設定為全固定(Encastre)條件，並在第一個求解步驟(Step 1)中將另一端設定有外力作用，外力選用面積荷載(Surface traction)，將其設定為任意方向的力(General)並定義一向量來描述力的方向，且因為面積載荷定義

為單位面積上力的大小，所以將參考面積選擇為所選平面未變形前的面積(Undeformed area)，並取消勾選跟隨轉動(Follow rotation)，使力的方向不隨作用平面發生轉動而跟著變化，即力始終沿先前所定義的向量方向，在電位邊界條件設定上，因理論分析使用短路模型，兩層壓電陶瓷的上下表面之電位差皆為零，故在初始條件的步驟中將壓電陶瓷上下表面設定為 0。在分割網格(Mesh)中，網格尺寸設定為 0.8 (mm)，故長度劃成 67 格、寬度劃成 40 格，並在厚度額外設定劃成 4 格，在網格種類方面，壓電陶瓷使用三維 20 節點壓電減積分元素(C3D20RE)，黃銅使用三維 20 節點應力減積分元素(C3D20R)。

表 3-3 為疊加法理論與有限元素模擬在平板未受預應力下的共振頻率與模態振型的比較，其中 CFFF 代表平板之邊界，C 代表平板的一邊為固定邊界，三個 F 代表平板的另外三邊為自由邊界，疊加法的展開項數為 20 項。從表中可以發現理論與模擬兩者不管在共振頻率或者是模態振型上皆有著良好的對應性，且兩者在共振頻率上的誤差皆在 1% 以內。表 3-4 為疊加法理論與有限元素模擬在平板受預拉應力下的共振頻率與模態振型的比較，紅線箭頭代表力的方向，力量大小為 10 (N)，疊加法的展開項數為 20 項。從表中可以發現理論與模擬有著良好的對應性，兩者在共振頻率上的誤差皆在 1% 以內，並且可以發現對平板施加拉力後，平板所有模態的共振頻率皆有增加的現象，其中以第一模態的共振頻率增加最多，以疊加法求得的頻率為例，從 88.96 (Hz) 增加至 104.75 (Hz)。表 3-5 為疊加法理論與有限元素模擬在平板受預壓應力下的共振頻率與模態振型的比較，紅色箭頭的含義、力量大小與疊加法展開項數皆同表 3-4，唯一差別在力的方向從拉力變為壓力。從表中可以發現理論與模擬有著良好的對應性，兩者在共振頻率上的誤差皆在 1% 以內，並且可以發現對平板施加壓力後，平板所有模態的共振頻率皆有降低的現象，其中以第一模態的共振頻率降低最多，以疊加法求得的頻率為例，從 88.96 (Hz) 降低至 68.35 (Hz)。

接著討論預應力對平板各模態共振頻率的影響，考慮平板的第一模態至第六

模態並以疊加法理論計算結果為準，分析受不同預應力大小下六個模態的共振頻率變化，並定義力量值為正時，代表平板受拉力作用，反之力量值為負時，代表平板受壓力作用，計算結果如圖 3-14 所示，橫軸為力量大小，縱軸為頻率的差值，為施加預應力後的共振頻率扣除同一模態且未施力的共振頻率。從圖中可以發現第一、第三及第五模態的共振頻率變化量大於另外三個模態，主要因為預應力造成的剛性變化對有相同方向的模態形狀有著較顯著的影響，第一、第三與第五模態皆是沿長邊方向的彎曲模態，而施力方向也恰為沿長邊方向，因此預應力所造成的頻率變化才會較大，而第二、第四模態為扭轉模態，第六模態為沿短邊方向的彎曲模態，預應力所造成的剛性變化對其模態形狀產生的影響不多，因此其頻率變化量才會相對較少，其中第四模態共振頻率的變化量又比第二和第六模態來的多，若將第四模態的模態形狀沿長邊方向切成一半，可以發現其上半與下半的振型式近似於沿長邊的彎曲模態，因此其受預應力的影響較多、頻率變化也較多，同理第二模態的頻率變化也略大於第六模態的頻率變化，可透過相同手法發現第二模態的振型也部分近似於沿長邊彎曲模態，所以第二模態的頻率變化才大於沿短邊彎曲模態的第六模態。

根據先前討論可以歸納出施加拉力時會使平板的共振頻率發生升頻現象，施加壓力則會發生降頻現象，但共振頻率不可能無限制降低，最終僅能降低至零，因此透過調整施加的壓力大小，利用疊加法計算平板第一模態共振頻率的變化，並探討頻率降低至零後，平板整體結構特性的變化。圖 3-15 為不同壓力大小對平板第一共振頻率的變化，從圖中可以發現當施加的壓力量值還小時，力量與共振頻率的變化是呈現線性關係，但隨著力量不段增加，兩者便開始呈現非線性關係，且頻率的變化也愈加劇烈，因為當施力越大時，平板整體結構的剛性會趨於不穩定，在共振頻率降低至接近零時更為明顯，所以才會呈現出非線性關係，而當頻率降低至零時代表該模態已經消失，同時平板也發生了挫曲(Buckle)，以圖 3-15 為例，當施加的壓力達到 23.29 (N)時，平板第一模態的共振頻率便已降低至零，此時可以定



義該力量大小為平板的臨界負載(Critical load)。圖 3-16 為施力小於臨界負載時平板其特徵矩陣的行列式值，圖 3-17 則為施力大於臨界負載的情況，圖中曲線出現低谷時，其低谷處所對應的頻率值即平板的共振頻率。圖 3-16 中可以觀察有三個低谷，分別對應平板的前三個模態，模態振型如圖所示，此時施加的壓力為  $23\text{ (N)}$ ，接著將施加的壓力調整至  $24\text{ (N)}$  使其超過臨界負載，結果如圖 3-17 所示，可以發現此時低谷僅剩兩個，繪製出這兩個低谷所對應的模態振型，分別為平板的第二模態與第三模態，而第一模態則不存在，說明施力超過臨界負載時會使平板的第一模態消失。

表 3-3 (a) 理論與模擬對未受力平板之共振頻率分析比較

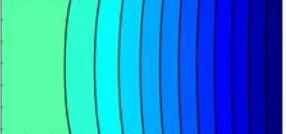
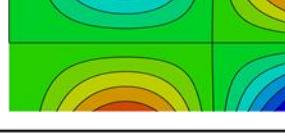
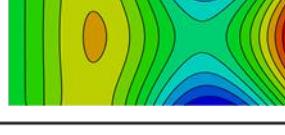
CFFF			
 PZT-bimorph		Length: 53.5 (mm) Width: 31.8 (mm) Preload: 0 (N)	
Mode		FEM	Theory
1	W		
	Frequency (Hz)	88.65	88.96 (0.35%)
2	W		
	Frequency (Hz)	320.82	322.75 (0.6%)
3	W		
	Frequency (Hz)	549.96	552.04 (0.38%)
4	W		
	Frequency (Hz)	1069.9	1077.5 (0.71%)
5	W		
	Frequency (Hz)	1519.4	1526.4 (0.46%)

表 3-3 (b) 理論與模擬對未受力平板之共振頻率分析比較

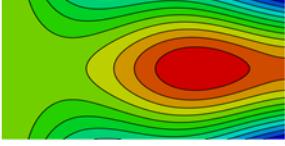
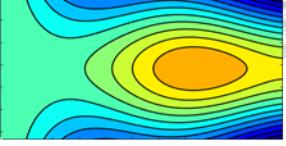
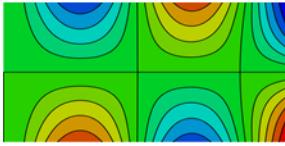
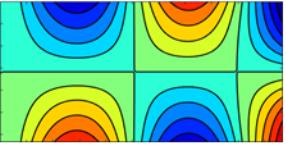
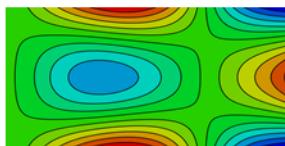
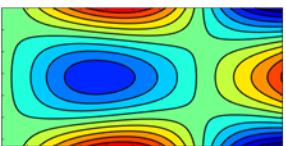
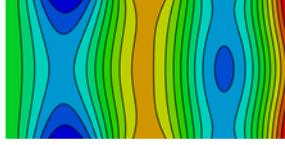
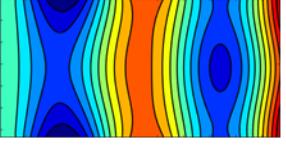
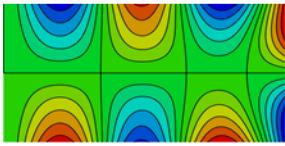
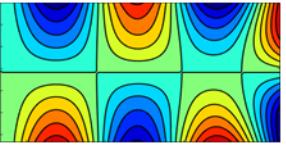
Mode		FEM	Theory
6	W		
	Frequency (Hz)	1761.7	1772.7 (0.62%)
7	W		
	Frequency (Hz)	2138.6	2156 (0.81%)
8	W		
	Frequency (Hz)	2505.4	2528.2 (0.91%)
9	W		
	Frequency (Hz)	3077.9	3099.4 (0.7%)
10	W		
	Frequency (Hz)	3640.3	3673.6 (0.91%)

表 3-4 (a) 理論與模擬對受預拉應力平板之共振頻率分析比較

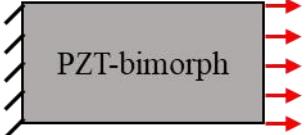
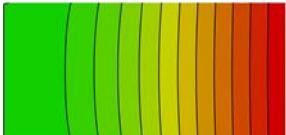
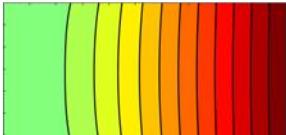
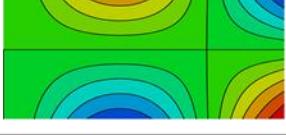
CFFF			
		Length: 53.5 (mm)	Width: 31.8 (mm)
		Preload: 10 (N)	
Mode		FEM	Theory
1	W		
	Frequency (Hz)	104.47	104.75 (0.27%)
2	W		
	Frequency (Hz)	323.74	325.69 (0.6%)
3	W		
	Frequency (Hz)	569.34	571.39 (0.36%)
4	W		
	Frequency (Hz)	1078.3	1085.9 (0.7%)
5	W		
	Frequency (Hz)	1533.9	1540.9 (0.4%)

表 3-4 (b) 理論與模擬對受預拉應力平板之共振頻率分析比較

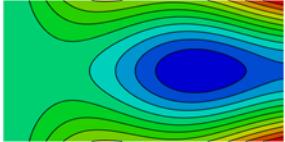
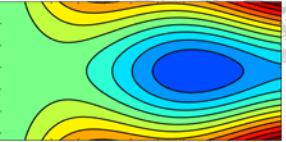
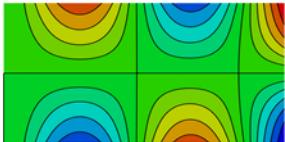
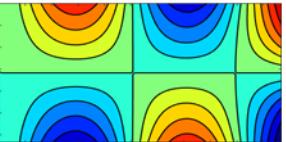
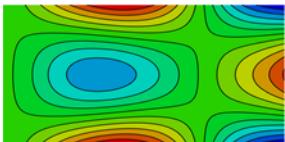
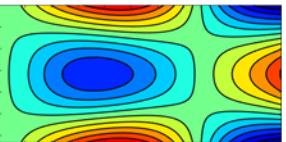
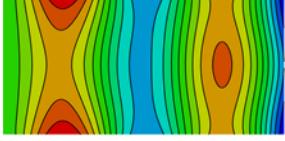
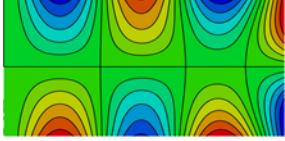
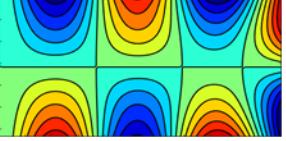
Mode		FEM	Theory
6	W		
	Frequency (Hz)	1764.3	1775.3 (0.62%)
7	W		
	Frequency (Hz)	2150.2	2167.5 (0.8%)
8	W		
	Frequency (Hz)	2509	2531.7 (0.9%)
9	W		
	Frequency (Hz)	3092.9	3114.4 (0.7%)
10	W		
	Frequency (Hz)	3653	3686.3 (0.91%)

表 3-5 (a) 理論與模擬對受預壓應力平板之共振頻率分析比較

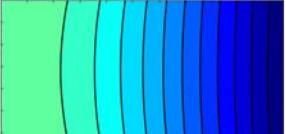
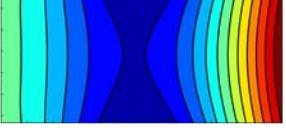
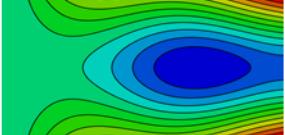
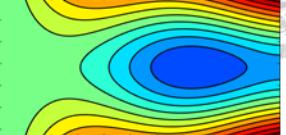
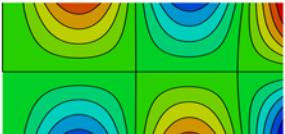
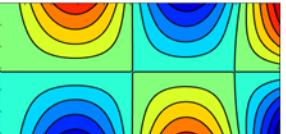
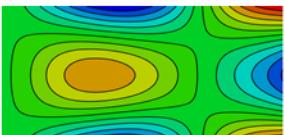
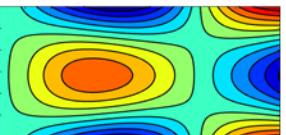
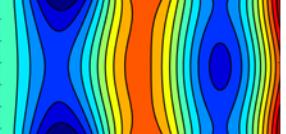
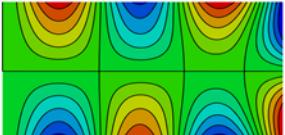
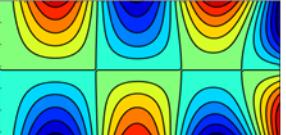
CFFF			
		Length: 53.5 (mm)	Width: 31.8 (mm)
		Preload: 10 (N)	
Mode		FEM	Theory
1	W		
	Frequency (Hz)	67.96	68.35 (0.57%)
2	W		
	Frequency (Hz)	317.86	319.74 (0.59%)
3	W		
	Frequency (Hz)	529.78	531.89 (0.4%)
4	W		
	Frequency (Hz)	1061.5	1069.1 (0.72%)
5	W		
	Frequency (Hz)	1504.5	1511.6 (0.47%)

表 3-5 (b) 理論與模擬對受預壓應力平板之共振頻率分析比較

Mode		FEM	Theory
6	W		
	Frequency (Hz)	1759.3	1770.2 (0.62%)
7	W		
	Frequency (Hz)	2127	2144.4 (0.82%)
8	W		
	Frequency (Hz)	2501.8	2524.6 (0.91%)
9	W		
	Frequency (Hz)	3062.8	3084.4 (0.71%)
10	W		
	Frequency (Hz)	3627.5	3660.8 (0.92%)

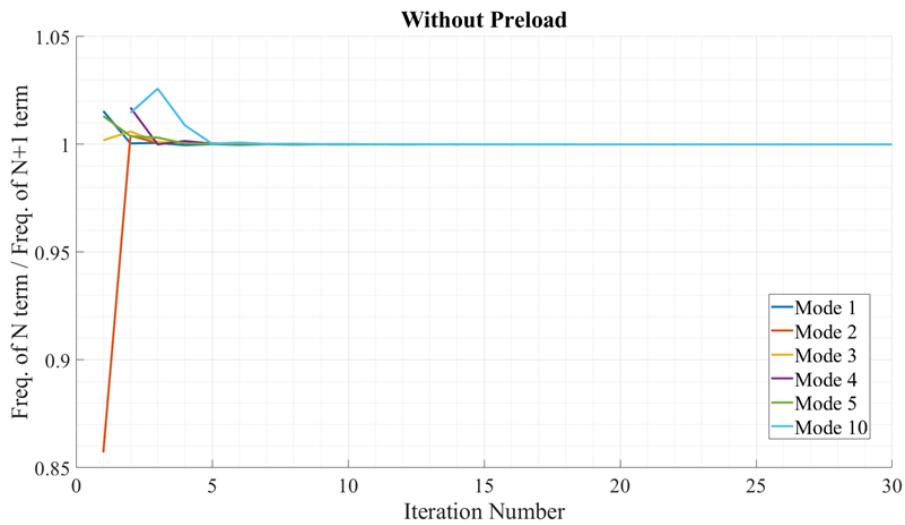


圖 3-11 平板未受力下之疊加法收斂性分析

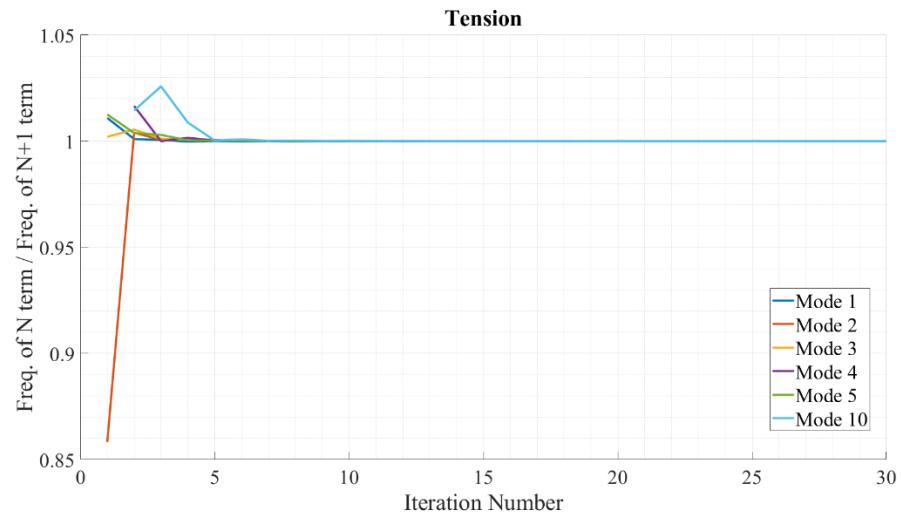


圖 3-12 平板受拉應力下之疊加法收斂性分析

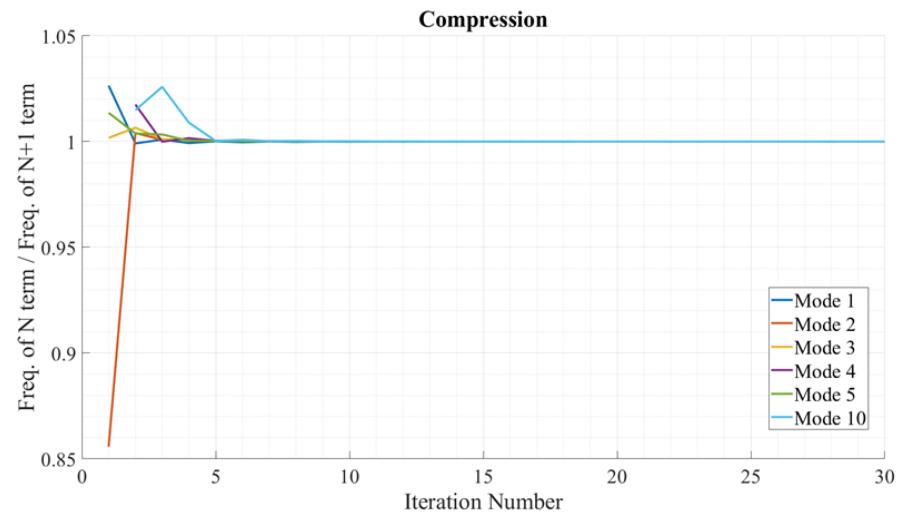


圖 3-13 平板受壓應力下之疊加法收斂性分析

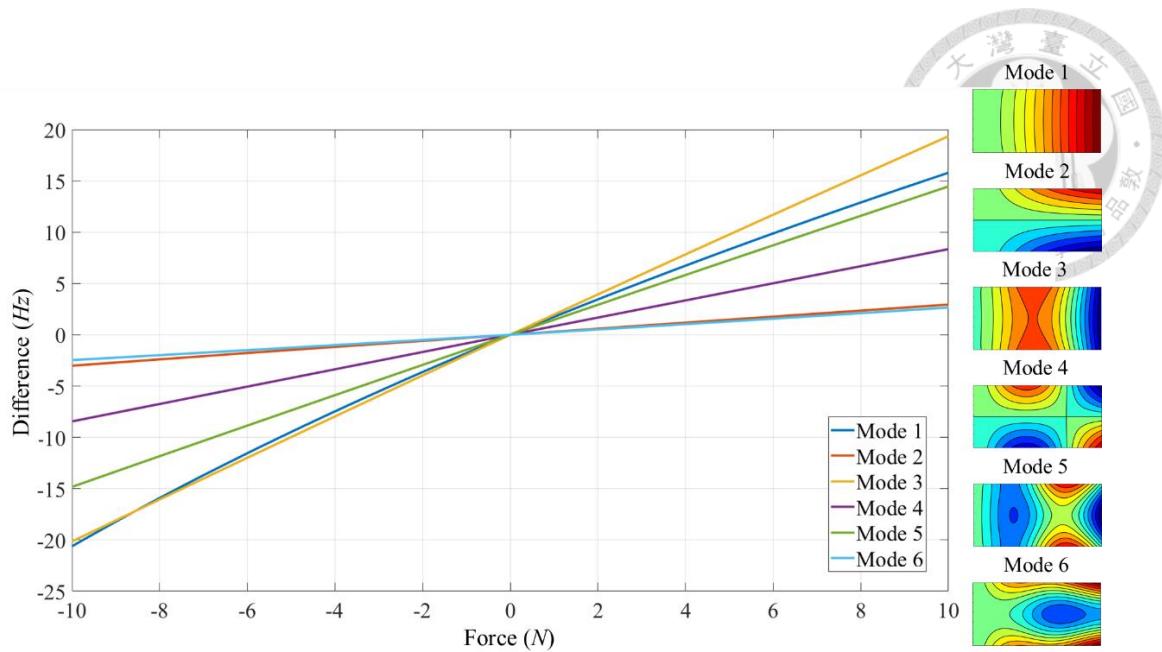


圖 3-14 預應力對平板各模態的影響

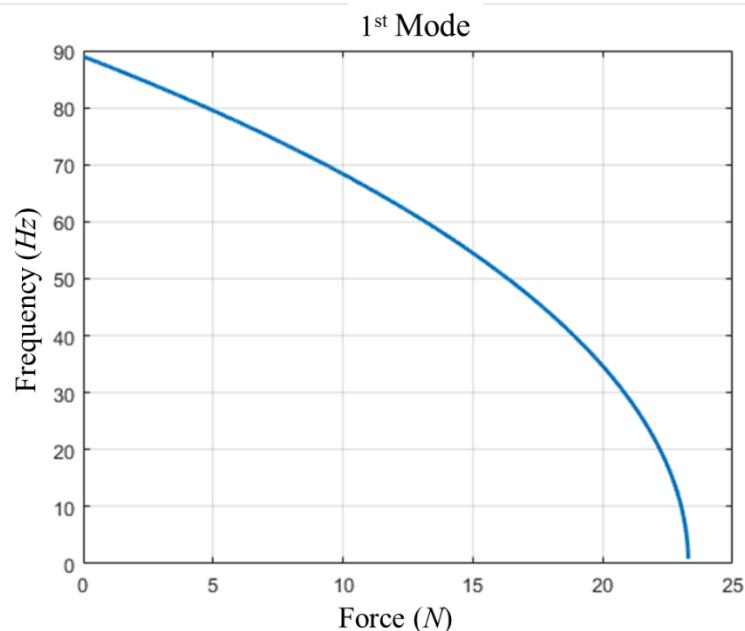


圖 3-15 壓力對第一模態共振頻率關係

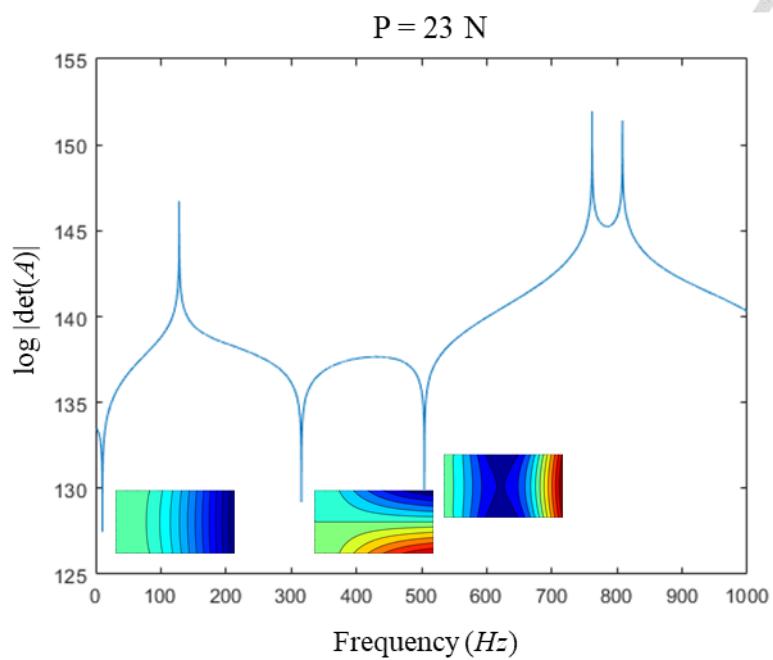


圖 3-16 壓力小於臨界負載的  $\det(A)$

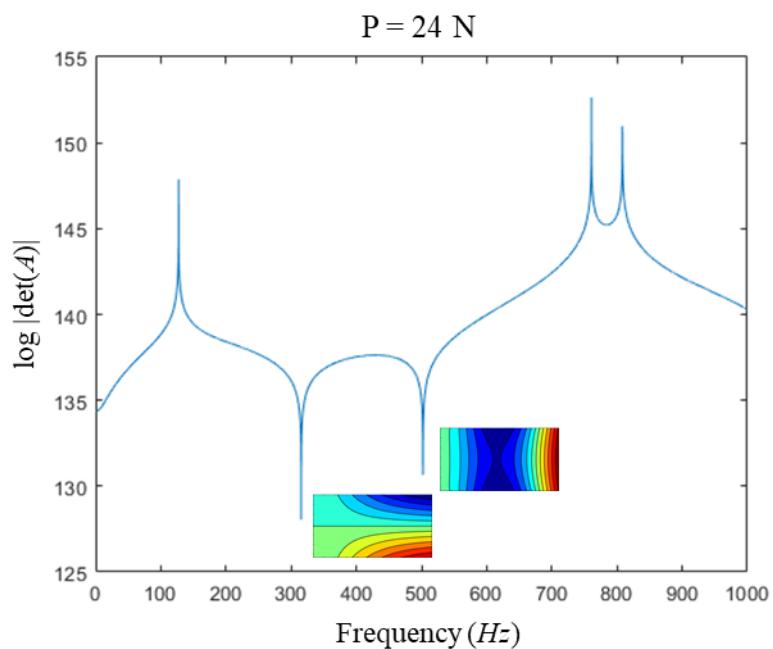


圖 3-17 壓力大於臨界負載的  $\det(A)$



### 3.2.3 質量效應下之單邊懸臂邊界疊加法理論推導

本研究透過對壓電平板施加預應力來改變其共振頻率，並選擇使用磁力以非接觸的方式來對平板施加張力或壓力，避免因接觸平板而影響其振動特性，同時也更容易縮小體積並置入風洞內進行流體致振，考量到真實情況，若要使用磁力則需在壓電平板上附著磁鐵，磁鐵造成的質量效應有可能改變原本平板的振動特性，因此本節基於 3.2.2 節所推導的疊加法理論進行延伸，將質量效應對平板振動特性的影響一併考慮，推導出質量效應下受預應力作用之懸臂薄板疊加法理論。

假設平板上存在數個質量點並將其表示為  $m_j$ ，將質量效應以下式表示：

$$\bar{P}_j = m_j \omega^2 W(x_j, y_j) \quad (3-264)$$

其中  $j$  為質量點的序數、 $m_j$  為第  $j$  個質量點的質量， $(x_j, y_j)$  為第  $j$  個質量點的位置， $\bar{P}_j$  為第  $j$  個質量點所造成的力量。含質量點的平板其邊界條件與原先一樣，同 (3-99)~(3-102) 式，透過疊加法將原先的平板拆成五個結構塊  $W_1$ 、 $W_2$ 、 $W_3$ 、 $W_4$ 、 $W_5$ ，如圖 3-18 所示，其中  $W_5$  為所有質量點的結構塊位移解相加，含第  $j$  個質量點的結構塊位移解表示為  $W_5^{(j)}$ ，其中前四塊結構塊  $W_1 \sim W_4$  與在 3.2.2 節推導的結構塊完全相同，因此能將先前所求得的結果直接套用進來。

第五塊結構塊為分析質量點所造成的質量效應，首先將含所有質量點的結構塊拆解為多個含單個質量點的結構塊，如圖 3-19 所示，並在質量點處進行分割，而根據切割方式的不同，可分為水平切割與鉛直切割，如圖 3-19 與圖 3-20 所示，並以上標進行區別，上標為  $I$  代表為水平切割，結構塊位移解表示為  $W_5^{I(j)}$ ， $II$  則代表為鉛直切割，結構塊位移解表示為  $W_5^{II(j)}$ 。首先討論水平切割的情況，切割後可得到  $\eta \leq v_j$  的上半結構塊  $W_{51}^{I(j)}$  與  $\eta \geq v_j$  的下半結構塊  $W_{52}^{I(j)}$ ，如圖 3-20 所示，其外圍三邊的邊界條件如下所示。



$W_{51}^{I(j)}$  的邊界條件:

$$\begin{aligned} W_{51}^{I(j)} \Big|_{\xi=0} &= 0, & -\left[ \frac{\partial^2 W_{51}^{I(j)}}{\partial \xi^2} + \frac{\nu}{\phi^2} \frac{\partial^2 W_{51}^{I(j)}}{\partial \eta^2} \right]_{\xi=0} &= 0 \quad (3-265) \\ \frac{\partial W_{51}^{I(j)}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} &= 0, & -\left[ \frac{\partial^3 W_{51}^{I(j)}}{\partial \xi^3} + \frac{\nu^*}{\phi^2} \frac{\partial^3 W_{51}^{I(j)}}{\partial \xi \partial \eta^2} + \frac{P_\xi}{\phi^2} \frac{\partial W_{51}^{I(j)}}{\partial \xi} \right]_{\xi=1} &= 0 \quad (3-266) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial W_{51}^{I(j)}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0, \quad -\left[ \frac{\partial^3 W_{51}^{I(j)}}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W_{51}^{I(j)}}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right]_{\eta=0} = 0 \quad (3-267)$$

$W_{52}^{I(j)}$  的邊界條件:

$$\begin{aligned} W_{52}^{I(j)} \Big|_{\xi=0} &= 0, & -\left[ \frac{\partial^2 W_{52}^{I(j)}}{\partial \xi^2} + \frac{\nu}{\phi^2} \frac{\partial^2 W_{52}^{I(j)}}{\partial \eta^2} \right]_{\xi=0} &= 0 \quad (3-268) \\ \frac{\partial W_{52}^{I(j)}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} &= 0, & -\left[ \frac{\partial^3 W_{52}^{I(j)}}{\partial \xi^3} + \frac{\nu^*}{\phi^2} \frac{\partial^3 W_{52}^{I(j)}}{\partial \xi \partial \eta^2} + \frac{P_\xi}{\phi^2} \frac{\partial W_{52}^{I(j)}}{\partial \xi} \right]_{\xi=1} &= 0 \quad (3-269) \\ \frac{\partial W_{52}^{I(j)}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} &= 0, & -\left[ \frac{\partial^3 W_{52}^{I(j)}}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W_{52}^{I(j)}}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right]_{\eta=1} &= 0 \quad (3-270) \end{aligned}$$

在  $\eta = \nu_j$  的邊界上，兩個結構塊的物理量必須是連續的，因此兩者的位移、斜率以及彎矩必須相同，並且在質量點處  $(x_j, y_j)$  存在個剪力差值  $\bar{P}_j$ ，即質量點的質量效應，將邊界上的剪力差函數以級數展開法與 Dirac delta 函數表示:

$$P_j^I(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \left[ \frac{(2m-1)\pi x}{2a} \right] = \bar{P}_j \delta(x - x_j) \quad (3-271)$$

透過傅立葉級數求解待定係數  $A_m$ :

$$A_m = \frac{2}{a} \int_0^a P_j^I \sin \left[ \frac{(2m-1)\pi x}{2a} \right] dx = \frac{2}{a} \bar{P}_j \sin \left( \frac{2m-1}{2} \pi u_j \right) \quad (3-272)$$

將(3-272)式帶入(3-271)式進行代換:



$$P_j^I(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{a} \bar{P}_j \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi u_j\right) \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi \xi\right) \quad (3-273)$$

將(3-273)式進行無因次化：

$$P_j^{*I}(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{P}_j^* \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi u_j\right) \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi \xi\right) \quad (3-274)$$

其中  $\bar{P}_j^* = \frac{-2b^3}{a^2 D_{11}} \bar{P}_j$ 。 $W_{51}^{I(j)}$  與  $W_{52}^{I(j)}$  的連續邊界條件如下所示：

$$W_{51}^{I(j)} \Big|_{\eta=v_j^-} = W_{52}^{I(j)} \Big|_{\eta=v_j^+} \quad (3-275)$$

$$\frac{\partial W_{51}^{I(j)}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=v_j^-} = \frac{\partial W_{52}^{I(j)}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=v_j^+} \quad (3-276)$$

$$-\left[ \frac{\partial^2 W_{51}^{I(j)}}{\partial \eta^2} + \nu \phi^2 \frac{\partial^2 W_{51}^{I(j)}}{\partial \xi^2} \right]_{\eta=v_j^-} = -\left[ \frac{\partial^2 W_{52}^{I(j)}}{\partial \eta^2} + \nu \phi^2 \frac{\partial^2 W_{52}^{I(j)}}{\partial \xi^2} \right]_{\eta=v_j^+} \quad (3-277)$$

$$-\left[ \frac{\partial^3 W_{51}^{I(j)}}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W_{51}^{I(j)}}{\partial \eta \partial \xi^2} \right]_{\eta=v_j^-} + \left[ \frac{\partial^3 W_{52}^{I(j)}}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W_{52}^{I(j)}}{\partial \eta \partial \xi^2} \right]_{\eta=v_j^+} = P_j^{*I}(\xi) \quad (3-278)$$

藉由邊界條件(3-265)與(3-266)式，可以假設  $W_{51}^{I(j)}$  的解如下：

$$W_{51}^{I(j)}(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_{51m}^{I(j)}(\eta) \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi \xi\right) \quad (3-279)$$

同 3.2.1 節的推導手法，將(3-279)式帶回統御方程式(3-94)式並求解四階微分方程式，根據不同的條件會有三種可能的解，每種解都會有四個待定係數，將其帶入(3-267)式可求解其中兩個系數，剩餘兩個待定係數則需在之後代入連續邊界條件才能求得。

**Case 1:**  $\delta_m^2 < \Delta_m$

$$Y_{51m}^{I(j)} = A_{1m}^{I(j)} \sinh \beta_{1m} \eta \sin \gamma_{1m} \eta + B_{1m}^{I(j)} \cosh \beta_{1m} \eta \cos \gamma_{1m} \eta \quad (3-280)$$

$$\text{其中 } \beta_{1m} = \phi \sqrt{\frac{\sqrt{\Delta_m} + \delta_m}{2}} \quad , \quad \gamma_{1m} = \phi \sqrt{\frac{\sqrt{\Delta_m} - \delta_m}{2}}$$



**Case 2:**  $\delta_m^2 > \Delta_m$ ,  $\Delta_m < 0$

$$Y_{51m}^{I(j)} = A_{2m}^{I(j)} \cosh \beta_{2m} \eta + B_{2m}^{I(j)} \cos \gamma_{2m} \eta \quad (3-281)$$

其中  $\beta_{2m} = \phi \sqrt{\sqrt{\delta_m^2 - \Delta_m} + \delta_m}$  、  $\gamma_{2m} = \phi \sqrt{\sqrt{\delta_m^2 - \Delta_m} - \delta_m}$

**Case 3:**  $\delta_m^2 > \Delta_m$ ,  $\Delta_m > 0$

$$Y_{51m}^{I(j)} = A_{3m}^{I(j)} \cosh \beta_{3m} \eta + B_{3m}^{I(j)} \cosh \gamma_{3m} \eta \quad (3-282)$$

其中  $\beta_{3m} = \phi \sqrt{\delta_m + \sqrt{\delta_m^2 - \Delta_m}}$  、  $\gamma_{3m} = \phi \sqrt{\delta_m - \sqrt{\delta_m^2 - \Delta_m}}$

在(3-280)~(3-282)式中， $\delta_m = \left(\frac{2m-1}{2}\pi\right)^2$  、  $\Delta_m = \left(\frac{2m-1}{2}\pi\right)^4 - \lambda^4 + \frac{P_\xi}{\phi^2} \left(\frac{2m-1}{2}\pi\right)^2$ ，

$A_{1m}^{I(j)}$  、  $B_{1m}^{I(j)}$  、  $A_{2m}^{I(j)}$  、  $B_{2m}^{I(j)}$  、  $A_{3m}^{I(j)}$  、  $B_{3m}^{I(j)}$  皆為待定係數。

藉由邊界條件(3-268)與(3-269)式，可以假設  $W_{52}^{I(j)}$  的解如下：

$$W_{52}^{I(j)}(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_{52m}^{I(j)}(1-\eta) \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi\xi\right) \quad (3-283)$$

同 3.2.1 節的推導手法，將(3-283)式帶回統御方程式(3-94)式並求解四階微分方程式，根據不同的條件會有三種可能的解，每種解都會有四個待定係數，將其帶入(3-270)式可求解其中兩個系數，剩餘兩個待定係數則需在之後代入連續邊界條件才能求得。

**Case 1:**  $\delta_m^2 < \Delta_m$

$$Y_{52m}^{I(j)} = C_{1m}^{I(j)} \sinh \beta_{1m} (1-\eta) \sin \gamma_{1m} (1-\eta) + D_{1m}^{I(j)} \cosh \beta_{1m} (1-\eta) \cos \gamma_{1m} (1-\eta) \quad (3-284)$$

其中  $\beta_{1m} = \phi \sqrt{\frac{\sqrt{\Delta_m} + \delta_m}{2}}$  、  $\gamma_{1m} = \phi \sqrt{\frac{\sqrt{\Delta_m} - \delta_m}{2}}$ ，同  $Y_{51m}^{I(j)}$  裡的  $\beta_{1m}$  、  $\gamma_{1m}$

**Case 2:**  $\delta_m^2 > \Delta_m$ ,  $\Delta_m < 0$

$$Y_{52m}^{I(j)} = C_{2m}^{I(j)} \cosh \beta_{2m} (1-\eta) + D_{2m}^{I(j)} \cos \gamma_{2m} (1-\eta) \quad (3-285)$$

其中  $\beta_{2m} = \phi \sqrt{\sqrt{\delta_m^2 - \Delta_m} + \delta_m}$  、  $\gamma_{2m} = \phi \sqrt{\sqrt{\delta_m^2 - \Delta_m} - \delta_m}$  ，同  $Y_{51m}^{I(j)}$  裡的  $\beta_{2m}$  、  $\gamma_{2m}$

**Case 3:**  $\delta_m^2 > \Delta_m$  ,  $\Delta_m > 0$

$$Y_{52m}^{I(j)} = C_{3m}^{I(j)} \cosh \beta_{3m} (1-\eta) + D_{3m}^{I(j)} \cosh \gamma_{3m} (1-\eta) \quad (3-286)$$

其中  $\beta_{3m} = \phi \sqrt{\delta_m + \sqrt{\delta_m^2 - \Delta_m}}$  、  $\gamma_{3m} = \phi \sqrt{\delta_m - \sqrt{\delta_m^2 - \Delta_m}}$  ，同  $Y_{51m}^{I(j)}$  裡的  $\beta_{3m}$  、  $\gamma_{3m}$

在(3-284)~(3-286)式中， $\delta_m = \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2$  、 $\Delta_m = \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^4 - \lambda^4 + \frac{P_\xi}{\phi^2} \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2$ ，

與在  $W_{51}^{I(j)}$  中推導的相同， $C_{1m}^{I(j)}$  、 $D_{1m}^{I(j)}$  、 $C_{2m}^{I(j)}$  、 $D_{2m}^{I(j)}$  、 $C_{3m}^{I(j)}$  、 $D_{3m}^{I(j)}$  皆為待定係數。

將所求得的  $W_{51}^{I(j)}$  、 $W_{52}^{I(j)}$  位移解帶入連續邊界條件以求解剩餘的待定係數，由於有

五個未知係數  $A_m^{I(j)}$  、 $B_m^{I(j)}$  、 $C_m^{I(j)}$  、 $D_m^{I(j)}$  、 $\bar{P}_j^*$ ，但僅有四條連續邊界的方程式，只

能求解出五個係數間的關係式，故將  $A_m^{I(j)}$  、 $B_m^{I(j)}$  、 $C_m^{I(j)}$  、 $D_m^{I(j)}$  四個係數皆以  $\bar{P}_j^*$  表

示，因為求解過程較為複雜，因此根據不同情況進行分段討論。

**Case 1:**  $\delta_m^2 < \Delta_m$

將(3-280)與(3-284)式帶入(3-275)式可以得到

$$\begin{aligned} & A_{1m}^{I(j)} \sinh \beta_{1m} v_j \sin \gamma_{1m} v_j + B_{1m}^{I(j)} \cosh \beta_{1m} v_j \cos \gamma_{1m} v_j \\ & - C_{1m}^{I(j)} \sinh \beta_{1m} \bar{v}_j \sin \gamma_{1m} \bar{v}_j - D_{1m}^{I(j)} \cosh \beta_{1m} \bar{v}_j \cos \gamma_{1m} \bar{v}_j = 0 \end{aligned} \quad (3-287)$$

其中  $\bar{v}_j = 1 - v_j$ ，並令(3-287)式中  $A_{1m}^{I(j)}$  的係數為  $a_{11m}^{I(j)}$  、 $B_{1m}^{I(j)}$  的係數為  $b_{11m}^{I(j)}$  、 $C_{1m}^{I(j)}$  的係

數為  $c_{11m}^{I(j)}$  、 $D_{1m}^{I(j)}$  的係數為  $d_{11m}^{I(j)}$  以簡化方程式。將(3-280)與(3-284)式帶入(3-276)式可  
以得到

$$\begin{aligned}
& A_{1m}^{I(j)} \left( \beta_{1m} \cosh \beta_{1m} v_j \sin \gamma_{1m} v_j + \gamma_{1m} \sinh \beta_{1m} v_j \cos \gamma_{1m} v_j \right) \\
& + B_{1m}^{I(j)} \left( \beta_{1m} \sinh \beta_{1m} v_j \cos \gamma_{1m} v_j - \gamma_{1m} \cosh \beta_{1m} v_j \sin \gamma_{1m} v_j \right) \\
& + C_{1m}^{I(j)} \left( \beta_{1m} \cosh \beta_{1m} \bar{v}_j \sin \gamma_{1m} \bar{v}_j + \gamma_{1m} \sinh \beta_{1m} \bar{v}_j \cos \gamma_{1m} \bar{v}_j \right) \\
& + D_{1m}^{I(j)} \left( \beta_{1m} \sinh \beta_{1m} \bar{v}_j \cos \gamma_{1m} \bar{v}_j - \gamma_{1m} \cosh \beta_{1m} \bar{v}_j \sin \gamma_{1m} \bar{v}_j \right) = 0
\end{aligned} \tag{3-288}$$

令(3-288)式中  $A_{1m}^{I(j)}$  的係數為  $a_{21m}^{I(j)}$ ， $B_{1m}^{I(j)}$  的係數為  $b_{21m}^{I(j)}$ ， $C_{1m}^{I(j)}$  的係數為  $c_{21m}^{I(j)}$ ， $D_{1m}^{I(j)}$  的係數為  $d_{21m}^{I(j)}$ 。將(3-280)與(3-284)式帶入(3-277)式並透過(3-275)式可以得到

$$\begin{aligned}
& A_{1m}^{I(j)} \left( \beta_{1m}^2 \sinh \beta_{1m} v_j \sin \gamma_{1m} v_j + 2\beta_{1m} \gamma_{1m} \cosh \beta_{1m} v_j \cos \gamma_{1m} v_j - \gamma_{1m}^2 \sinh \beta_{1m} v_j \sin \gamma_{1m} v_j \right) \\
& + B_{1m}^{I(j)} \left( \beta_{1m}^2 \cosh \beta_{1m} v_j \cos \gamma_{1m} v_j - 2\beta_{1m} \gamma_{1m} \sinh \beta_{1m} v_j \sin \gamma_{1m} v_j - \gamma_{1m}^2 \cosh \beta_{1m} v_j \cos \gamma_{1m} v_j \right) \\
& - C_{1m}^{I(j)} \left( \beta_{1m}^2 \sinh \beta_{1m} \bar{v}_j \sin \gamma_{1m} \bar{v}_j + 2\beta_{1m} \gamma_{1m} \cosh \beta_{1m} \bar{v}_j \cos \gamma_{1m} \bar{v}_j - \gamma_{1m}^2 \sinh \beta_{1m} \bar{v}_j \sin \gamma_{1m} \bar{v}_j \right) \\
& - D_{1m}^{I(j)} \left( \beta_{1m}^2 \cosh \beta_{1m} \bar{v}_j \cos \gamma_{1m} \bar{v}_j - 2\beta_{1m} \gamma_{1m} \sinh \beta_{1m} \bar{v}_j \sin \gamma_{1m} \bar{v}_j - \gamma_{1m}^2 \cosh \beta_{1m} \bar{v}_j \cos \gamma_{1m} \bar{v}_j \right) = 0
\end{aligned} \tag{3-289}$$

令(3-289)式中  $A_{1m}^{I(j)}$  的係數為  $a_{31m}^{I(j)}$ ， $B_{1m}^{I(j)}$  的係數為  $b_{31m}^{I(j)}$ ， $C_{1m}^{I(j)}$  的係數為  $c_{31m}^{I(j)}$ ， $D_{1m}^{I(j)}$  的係數為  $d_{31m}^{I(j)}$ 。將(3-280)與(3-284)式帶入(3-278)式並透過(3-276)式可以得到

$$\begin{aligned}
& A_{1m}^{I(j)} \left( \beta_{1m}^3 \cosh \beta_{1m} v_j \sin \gamma_{1m} v_j + 3\beta_{1m}^2 \gamma_{1m} \sinh \beta_{1m} v_j \cos \gamma_{1m} v_j \right. \\
& \quad \left. - 3\beta_{1m} \gamma_{1m}^2 \cosh \beta_{1m} v_j \sin \gamma_{1m} v_j - \gamma_{1m}^3 \sinh \beta_{1m} v_j \cos \gamma_{1m} v_j \right) \\
& + B_{1m}^{I(j)} \left( \beta_{1m}^3 \sinh \beta_{1m} v_j \cos \gamma_{1m} v_j - 3\beta_{1m}^2 \gamma_{1m} \cosh \beta_{1m} v_j \sin \gamma_{1m} v_j \right. \\
& \quad \left. - 3\beta_{1m} \gamma_{1m}^2 \sinh \beta_{1m} v_j \cos \gamma_{1m} v_j + \gamma_{1m}^3 \cosh \beta_{1m} v_j \sin \gamma_{1m} v_j \right) \\
& + C_{1m}^{I(j)} \left( \beta_{1m}^3 \cosh \beta_{1m} \bar{v}_j \sin \gamma_{1m} \bar{v}_j + 3\beta_{1m}^2 \gamma_{1m} \sinh \beta_{1m} \bar{v}_j \cos \gamma_{1m} \bar{v}_j \right. \\
& \quad \left. - 3\beta_{1m} \gamma_{1m}^2 \cosh \beta_{1m} \bar{v}_j \sin \gamma_{1m} \bar{v}_j - \gamma_{1m}^3 \sinh \beta_{1m} \bar{v}_j \cos \gamma_{1m} \bar{v}_j \right) \\
& + D_{1m}^{I(j)} \left( \beta_{1m}^3 \sinh \beta_{1m} \bar{v}_j \cos \gamma_{1m} \bar{v}_j - 3\beta_{1m}^2 \gamma_{1m} \cosh \beta_{1m} \bar{v}_j \sin \gamma_{1m} \bar{v}_j \right. \\
& \quad \left. - 3\beta_{1m} \gamma_{1m}^2 \sinh \beta_{1m} \bar{v}_j \cos \gamma_{1m} \bar{v}_j + \gamma_{1m}^3 \cosh \beta_{1m} \bar{v}_j \sin \gamma_{1m} \bar{v}_j \right) = \bar{P}_j^* \sin \left( \frac{2m-1}{2} \pi u_j \right)
\end{aligned} \tag{3-290}$$

令(3-290)式中  $A_{1m}^{I(j)}$  的係數為  $a_{41m}^{I(j)}$ ， $B_{1m}^{I(j)}$  的係數為  $b_{41m}^{I(j)}$ ， $C_{1m}^{I(j)}$  的係數為  $c_{41m}^{I(j)}$ ， $D_{1m}^{I(j)}$  的係數為  $d_{41m}^{I(j)}$ 。接著透過克拉瑪公式(Crammer's rule)來求解(3-287)~(3-290)式的聯立



方程組，並求得四個係數  $A_{1m}^{I(j)}$ 、 $B_{1m}^{I(j)}$ 、 $C_{1m}^{I(j)}$ 、 $D_{1m}^{I(j)}$  與  $\bar{P}_j^*$  的關係。

$$A_{1m}^{I(j)} = \frac{\Delta_a}{\Delta} \bar{P}_j^* = \theta_{5m11}^{I(j)} \bar{P}_j^* \quad (3-291)$$

$$B_{1m}^{I(j)} = \frac{\Delta_b}{\Delta} \bar{P}_j^* = \theta_{5m12}^{I(j)} \bar{P}_j^* \quad (3-292)$$

$$C_{1m}^{I(j)} = \frac{\Delta_c}{\Delta} \bar{P}_j^* = \psi_{5m11}^{I(j)} \bar{P}_j^* \quad (3-293)$$

$$D_{1m}^{I(j)} = \frac{\Delta_d}{\Delta} \bar{P}_j^* = \psi_{5m12}^{I(j)} \bar{P}_j^* \quad (3-294)$$

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{11m}^{I(j)} & b_{11m}^{I(j)} & c_{11m}^{I(j)} & d_{11m}^{I(j)} \\ a_{21m}^{I(j)} & b_{21m}^{I(j)} & c_{21m}^{I(j)} & d_{21m}^{I(j)} \\ a_{31m}^{I(j)} & b_{31m}^{I(j)} & c_{31m}^{I(j)} & d_{31m}^{I(j)} \\ a_{41m}^{I(j)} & b_{41m}^{I(j)} & c_{41m}^{I(j)} & d_{41m}^{I(j)} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \quad (3-295)$$

$$\Delta_a = \det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b_{11m}^{I(j)} & c_{11m}^{I(j)} & d_{11m}^{I(j)} \\ 0 & b_{21m}^{I(j)} & c_{21m}^{I(j)} & d_{21m}^{I(j)} \\ 0 & b_{31m}^{I(j)} & c_{31m}^{I(j)} & d_{31m}^{I(j)} \\ \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi u_j\right) & b_{41m}^{I(j)} & c_{41m}^{I(j)} & d_{41m}^{I(j)} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \quad (3-296)$$

$$\Delta_b = \det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{11m}^{I(j)} & 0 & c_{11m}^{I(j)} & d_{11m}^{I(j)} \\ a_{21m}^{I(j)} & 0 & c_{21m}^{I(j)} & d_{21m}^{I(j)} \\ a_{31m}^{I(j)} & 0 & c_{31m}^{I(j)} & d_{31m}^{I(j)} \\ a_{41m}^{I(j)} & \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi u_j\right) & c_{41m}^{I(j)} & d_{41m}^{I(j)} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \quad (3-297)$$

$$\Delta_c = \det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{11m}^{I(j)} & b_{11m}^{I(j)} & 0 & d_{11m}^{I(j)} \\ a_{21m}^{I(j)} & b_{21m}^{I(j)} & 0 & d_{21m}^{I(j)} \\ a_{31m}^{I(j)} & b_{31m}^{I(j)} & 0 & d_{31m}^{I(j)} \\ a_{41m}^{I(j)} & b_{41m}^{I(j)} & \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi u_j\right) & d_{41m}^{I(j)} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \quad (3-298)$$



$$\Delta_d = \det \begin{pmatrix} a_{11m}^{I(j)} & b_{11m}^{I(j)} & c_{11m}^{I(j)} & 0 \\ a_{21m}^{I(j)} & b_{21m}^{I(j)} & c_{21m}^{I(j)} & 0 \\ a_{31m}^{I(j)} & b_{31m}^{I(j)} & c_{31m}^{I(j)} & 0 \\ a_{41m}^{I(j)} & b_{41m}^{I(j)} & c_{41m}^{I(j)} & \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi u_j\right) \end{pmatrix} \quad (3-299)$$

**Case 2:**  $\delta_m^2 > \Delta_m$ ,  $\Delta_m < 0$

將(3-281)與(3-285)式帶入(3-275)式可以得到

$$\begin{aligned} A_{2m}^{I(j)} \cosh \beta_{2m} v_j + B_{2m}^{I(j)} \cos \gamma_{2m} v_j \\ - C_{2m}^{I(j)} \cosh \beta_{2m} \bar{v}_j - D_{2m}^{I(j)} \cos \gamma_{2m} \bar{v}_j = 0 \end{aligned} \quad (3-300)$$

令(3-300)式中  $A_{2m}^{I(j)}$  的係數為  $a_{12m}^{I(j)}$ 、 $B_{2m}^{I(j)}$  的係數為  $b_{12m}^{I(j)}$ 、 $C_{2m}^{I(j)}$  的係數為  $c_{12m}^{I(j)}$ 、 $D_{2m}^{I(j)}$  的

係數為  $d_{12m}^{I(j)}$ 。將(3-281)與(3-285)式帶入(3-276)式可以得到

$$\begin{aligned} A_{2m}^{I(j)} \beta_{2m} \sinh \beta_{2m} v_j - B_{2m}^{I(j)} \gamma_{2m} \sin \gamma_{2m} v_j \\ + C_{2m}^{I(j)} \beta_{2m} \sinh \beta_{2m} \bar{v}_j - D_{2m}^{I(j)} \gamma_{2m} \sin \gamma_{2m} \bar{v}_j = 0 \end{aligned} \quad (3-301)$$

令(3-301)式中  $A_{2m}^{I(j)}$  的係數為  $a_{22m}^{I(j)}$ 、 $B_{2m}^{I(j)}$  的係數為  $b_{22m}^{I(j)}$ 、 $C_{2m}^{I(j)}$  的係數為  $c_{22m}^{I(j)}$ 、 $D_{2m}^{I(j)}$  的

係數為  $d_{22m}^{I(j)}$ 。將(3-281)與(3-285)式帶入(3-277)式並透過(3-275)式可以得到

$$\begin{aligned} A_{2m}^{I(j)} \beta_{2m}^2 \cosh \beta_{2m} v_j - B_{2m}^{I(j)} \gamma_{2m}^2 \cos \gamma_{2m} v_j \\ - C_{2m}^{I(j)} \beta_{2m}^2 \cosh \beta_{2m} \bar{v}_j + D_{2m}^{I(j)} \gamma_{2m}^2 \cos \gamma_{2m} \bar{v}_j = 0 \end{aligned} \quad (3-302)$$

令(3-302)式中  $A_{2m}^{I(j)}$  的係數為  $a_{32m}^{I(j)}$ 、 $B_{2m}^{I(j)}$  的係數為  $b_{32m}^{I(j)}$ 、 $C_{2m}^{I(j)}$  的係數為  $c_{32m}^{I(j)}$ 、 $D_{2m}^{I(j)}$  的

係數為  $d_{32m}^{I(j)}$ 。將(3-281)與(3-285)式帶入(3-278)式並透過(3-276)式可以得到

$$\begin{aligned} A_{2m}^{I(j)} \beta_{2m}^3 \sinh \beta_{2m} v_j + B_{2m}^{I(j)} \gamma_{2m}^3 \sin \gamma_{2m} v_j \\ + C_{2m}^{I(j)} \beta_{2m}^3 \sinh \beta_{2m} \bar{v}_j + D_{2m}^{I(j)} \gamma_{2m}^3 \sin \gamma_{2m} \bar{v}_j = \bar{P}_j^* \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi u_j\right) \end{aligned} \quad (3-303)$$

令(3-303)式中  $A_{2m}^{I(j)}$  的係數為  $a_{42m}^{I(j)}$ 、 $B_{2m}^{I(j)}$  的係數為  $b_{42m}^{I(j)}$ 、 $C_{2m}^{I(j)}$  的係數為  $c_{42m}^{I(j)}$ 、 $D_{2m}^{I(j)}$  的

係數為  $d_{42m}^{I(j)}$ 。接著透過克拉瑪公式來求解(3-300)~(3-303)式的聯立方程組，並求得



四個係數  $A_{2m}^{I(j)}$  、  $B_{2m}^{I(j)}$  、  $C_{2m}^{I(j)}$  、  $D_{2m}^{I(j)}$  與  $\bar{P}_j^*$  的關係。

$$A_{2m}^{I(j)} = \frac{\Delta_a}{\Delta} \bar{P}_j^* = \theta_{5m21}^{I(j)} \bar{P}_j^*$$

$$B_{2m}^{I(j)} = \frac{\Delta_b}{\Delta} \bar{P}_j^* = \theta_{5m22}^{I(j)} \bar{P}_j^* \quad (3-305)$$

$$C_{2m}^{I(j)} = \frac{\Delta_c}{\Delta} \bar{P}_j^* = \psi_{5m21}^{I(j)} \bar{P}_j^* \quad (3-306)$$

$$D_{2m}^{I(j)} = \frac{\Delta_d}{\Delta} \bar{P}_j^* = \psi_{5m22}^{I(j)} \bar{P}_j^* \quad (3-307)$$

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a_{12m}^{I(j)} & b_{12m}^{I(j)} & c_{12m}^{I(j)} & d_{12m}^{I(j)} \\ a_{22m}^{I(j)} & b_{22m}^{I(j)} & c_{22m}^{I(j)} & d_{22m}^{I(j)} \\ a_{32m}^{I(j)} & b_{32m}^{I(j)} & c_{32m}^{I(j)} & d_{32m}^{I(j)} \\ a_{42m}^{I(j)} & b_{42m}^{I(j)} & c_{42m}^{I(j)} & d_{42m}^{I(j)} \end{pmatrix} \quad (3-308)$$

$$\Delta_a = \det \begin{pmatrix} 0 & b_{12m}^{I(j)} & c_{12m}^{I(j)} & d_{12m}^{I(j)} \\ 0 & b_{22m}^{I(j)} & c_{22m}^{I(j)} & d_{22m}^{I(j)} \\ 0 & b_{32m}^{I(j)} & c_{32m}^{I(j)} & d_{32m}^{I(j)} \\ \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi u_j\right) & b_{42m}^{I(j)} & c_{42m}^{I(j)} & d_{42m}^{I(j)} \end{pmatrix} \quad (3-309)$$

$$\Delta_b = \det \begin{pmatrix} a_{12m}^{I(j)} & 0 & c_{12m}^{I(j)} & d_{12m}^{I(j)} \\ a_{22m}^{I(j)} & 0 & c_{22m}^{I(j)} & d_{22m}^{I(j)} \\ a_{32m}^{I(j)} & 0 & c_{32m}^{I(j)} & d_{32m}^{I(j)} \\ a_{42m}^{I(j)} & \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi u_j\right) & c_{42m}^{I(j)} & d_{42m}^{I(j)} \end{pmatrix} \quad (3-310)$$

$$\Delta_c = \det \begin{pmatrix} a_{12m}^{I(j)} & b_{12m}^{I(j)} & 0 & d_{12m}^{I(j)} \\ a_{22m}^{I(j)} & b_{22m}^{I(j)} & 0 & d_{22m}^{I(j)} \\ a_{32m}^{I(j)} & b_{32m}^{I(j)} & 0 & d_{32m}^{I(j)} \\ a_{42m}^{I(j)} & b_{42m}^{I(j)} & \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi u_j\right) & d_{42m}^{I(j)} \end{pmatrix} \quad (3-311)$$



$$\Delta_d = \det \begin{bmatrix} a_{12m}^{I(j)} & b_{12m}^{I(j)} & c_{12m}^{I(j)} & 0 \\ a_{22m}^{I(j)} & b_{22m}^{I(j)} & c_{22m}^{I(j)} & 0 \\ a_{32m}^{I(j)} & b_{32m}^{I(j)} & c_{32m}^{I(j)} & 0 \\ a_{42m}^{I(j)} & b_{42m}^{I(j)} & c_{42m}^{I(j)} & \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi u_j\right) \end{bmatrix}$$

**Case 3:**  $\delta_m^2 > \Delta_m$ ,  $\Delta_m > 0$

將(3-282)與(3-286)式帶入(3-275)式可以得到

$$\begin{aligned} & A_{3m}^{I(j)} \cosh \beta_{3m} v_j + B_{3m}^{I(j)} \cosh \gamma_{3m} v_j \\ & - C_{3m}^{I(j)} \cosh \beta_{3m} \bar{v}_j - D_{3m}^{I(j)} \cosh \gamma_{3m} \bar{v}_j = 0 \end{aligned} \quad (3-313)$$

令(3-313)式中  $A_{3m}^{I(j)}$  的係數為  $a_{13m}^{I(j)}$ 、 $B_{3m}^{I(j)}$  的係數為  $b_{13m}^{I(j)}$ 、 $C_{3m}^{I(j)}$  的係數為  $c_{13m}^{I(j)}$ 、 $D_{3m}^{I(j)}$  的

係數為  $d_{13m}^{I(j)}$ 。將(3-282)與(3-286)式帶入(3-276)式可以得到

$$\begin{aligned} & A_{3m}^{I(j)} \beta_{3m} \sinh \beta_{3m} v_j + B_{3m}^{I(j)} \gamma_{3m} \sinh \gamma_{3m} v_j \\ & + C_{3m}^{I(j)} \beta_{3m} \sinh \beta_{3m} \bar{v}_j + D_{3m}^{I(j)} \gamma_{3m} \sinh \gamma_{3m} \bar{v}_j = 0 \end{aligned} \quad (3-314)$$

令(3-314)式中  $A_{3m}^{I(j)}$  的係數為  $a_{23m}^{I(j)}$ 、 $B_{3m}^{I(j)}$  的係數為  $b_{23m}^{I(j)}$ 、 $C_{3m}^{I(j)}$  的係數為  $c_{23m}^{I(j)}$ 、 $D_{3m}^{I(j)}$  的

係數為  $d_{23m}^{I(j)}$ 。將(3-282)與(3-286)式帶入(3-277)式並透過(3-275)式可以得到

$$\begin{aligned} & A_{3m}^{I(j)} \beta_{3m}^2 \cosh \beta_{3m} v_j + B_{3m}^{I(j)} \gamma_{3m}^2 \cosh \gamma_{3m} v_j \\ & - C_{3m}^{I(j)} \beta_{3m}^2 \cosh \beta_{3m} \bar{v}_j - D_{3m}^{I(j)} \gamma_{3m}^2 \cosh \gamma_{3m} \bar{v}_j = 0 \end{aligned} \quad (3-315)$$

令(3-315)式中  $A_{3m}^{I(j)}$  的係數為  $a_{33m}^{I(j)}$ 、 $B_{3m}^{I(j)}$  的係數為  $b_{33m}^{I(j)}$ 、 $C_{3m}^{I(j)}$  的係數為  $c_{33m}^{I(j)}$ 、 $D_{3m}^{I(j)}$  的

係數為  $d_{33m}^{I(j)}$ 。將(3-282)與(3-286)式帶入(3-278)式並透過(3-276)式可以得到

$$\begin{aligned} & A_{3m}^{I(j)} \beta_{3m}^3 \sinh \beta_{3m} v_j + B_{3m}^{I(j)} \gamma_{3m}^3 \sinh \gamma_{3m} v_j \\ & + C_{3m}^{I(j)} \beta_{3m}^3 \sinh \beta_{3m} \bar{v}_j + D_{3m}^{I(j)} \gamma_{3m}^3 \sinh \gamma_{3m} \bar{v}_j = \bar{P}_j^* \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi u_j\right) \end{aligned} \quad (3-316)$$

令(3-316)式中  $A_{3m}^{I(j)}$  的係數為  $a_{43m}^{I(j)}$ 、 $B_{3m}^{I(j)}$  的係數為  $b_{43m}^{I(j)}$ 、 $C_{3m}^{I(j)}$  的係數為  $c_{43m}^{I(j)}$ 、 $D_{3m}^{I(j)}$  的

係數為  $d_{43m}^{I(j)}$ 。接著透過克拉瑪公式來求解(3-313)~(3-316)式的聯立方程組，並求得



(3-317)

四個係數  $A_{3m}^{I(j)}$  、  $B_{3m}^{I(j)}$  、  $C_{3m}^{I(j)}$  、  $D_{3m}^{I(j)}$  與  $\bar{P}_j^*$  的關係。

$$A_{3m}^{I(j)} = \frac{\Delta_a}{\Delta} \bar{P}_j^* = \theta_{5m31}^{I(j)} \bar{P}_j^*$$

$$B_{3m}^{I(j)} = \frac{\Delta_b}{\Delta} \bar{P}_j^* = \theta_{5m32}^{I(j)} \bar{P}_j^* \quad (3-318)$$

$$C_{3m}^{I(j)} = \frac{\Delta_c}{\Delta} \bar{P}_j^* = \psi_{5m31}^{I(j)} \bar{P}_j^* \quad (3-319)$$

$$D_{3m}^{I(j)} = \frac{\Delta_d}{\Delta} \bar{P}_j^* = \psi_{5m32}^{I(j)} \bar{P}_j^* \quad (3-320)$$

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a_{13m}^{I(j)} & b_{13m}^{I(j)} & c_{13m}^{I(j)} & d_{13m}^{I(j)} \\ a_{23m}^{I(j)} & b_{23m}^{I(j)} & c_{23m}^{I(j)} & d_{23m}^{I(j)} \\ a_{33m}^{I(j)} & b_{33m}^{I(j)} & c_{33m}^{I(j)} & d_{33m}^{I(j)} \\ a_{43m}^{I(j)} & b_{43m}^{I(j)} & c_{43m}^{I(j)} & d_{43m}^{I(j)} \end{pmatrix} \quad (3-321)$$

$$\Delta_a = \det \begin{pmatrix} 0 & b_{13m}^{I(j)} & c_{13m}^{I(j)} & d_{13m}^{I(j)} \\ 0 & b_{23m}^{I(j)} & c_{23m}^{I(j)} & d_{23m}^{I(j)} \\ 0 & b_{33m}^{I(j)} & c_{33m}^{I(j)} & d_{33m}^{I(j)} \\ \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi u_j\right) & b_{43m}^{I(j)} & c_{43m}^{I(j)} & d_{43m}^{I(j)} \end{pmatrix} \quad (3-322)$$

$$\Delta_b = \det \begin{pmatrix} a_{13m}^{I(j)} & 0 & c_{13m}^{I(j)} & d_{13m}^{I(j)} \\ a_{23m}^{I(j)} & 0 & c_{23m}^{I(j)} & d_{23m}^{I(j)} \\ a_{33m}^{I(j)} & 0 & c_{33m}^{I(j)} & d_{33m}^{I(j)} \\ a_{43m}^{I(j)} & \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi u_j\right) & c_{43m}^{I(j)} & d_{43m}^{I(j)} \end{pmatrix} \quad (3-323)$$

$$\Delta_c = \det \begin{pmatrix} a_{13m}^{I(j)} & b_{13m}^{I(j)} & 0 & d_{13m}^{I(j)} \\ a_{23m}^{I(j)} & b_{23m}^{I(j)} & 0 & d_{23m}^{I(j)} \\ a_{33m}^{I(j)} & b_{33m}^{I(j)} & 0 & d_{33m}^{I(j)} \\ a_{43m}^{I(j)} & b_{43m}^{I(j)} & \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi u_j\right) & d_{43m}^{I(j)} \end{pmatrix} \quad (3-324)$$



$$\Delta_d = \det \begin{pmatrix} a_{13m}^{I(j)} & b_{13m}^{I(j)} & c_{13m}^{I(j)} & 0 \\ a_{23m}^{I(j)} & b_{23m}^{I(j)} & c_{23m}^{I(j)} & 0 \\ a_{33m}^{I(j)} & b_{33m}^{I(j)} & c_{33m}^{I(j)} & 0 \\ a_{43m}^{I(j)} & b_{43m}^{I(j)} & c_{43m}^{I(j)} & \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi u_j\right) \end{pmatrix}$$

將(3-280)~(3-282)式帶回(3-279)式以及(3-284)~(3-286)式帶回(3-283)式，並將兩者的結果相加便可得到在水平切割下第五塊結構塊的位移解，其中  $J$  代表質量點的總數。

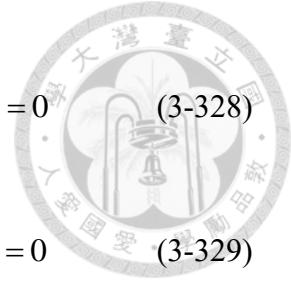
$$W_5^I = \sum_{j=1}^J W_{51}^{I(j)} + W_{52}^{I(j)}$$

$$= \sum_{j=1}^J \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \sum \bar{P}_j^* \left[ \begin{array}{l} \theta_{5m11}^{I(j)} \sinh \beta_{1m} \eta \sin \gamma_{1m} \eta \\ + \theta_{5m12}^{I(j)} \cosh \beta_{1m} \eta \cos \gamma_{1m} \eta \end{array} \right] \sin \left( \frac{2m-1}{2} \pi \xi \right) \\ + \sum \bar{P}_j^* \left[ \begin{array}{l} \theta_{5m21}^{I(j)} \cosh \beta_{2m} \eta + \theta_{5m22}^{I(j)} \cos \gamma_{2m} \eta \end{array} \right] \sin \left( \frac{2m-1}{2} \pi \xi \right) \\ + \sum \bar{P}_j^* \left[ \begin{array}{l} \theta_{5m31}^{I(j)} \cosh \beta_{3m} \eta + \theta_{5m32}^{I(j)} \cosh \gamma_{3m} \eta \end{array} \right] \sin \left( \frac{2m-1}{2} \pi \xi \right) \end{array} \right] \text{when } \eta < v_j \\ \left[ \begin{array}{l} \sum \bar{P}_j^* \left[ \begin{array}{l} \psi_{5m11}^{I(j)} \sinh \beta_{1m} \bar{\eta} \sin \gamma_{1m} \bar{\eta} \\ + \psi_{5m12}^{I(j)} \cosh \beta_{1m} \bar{\eta} \cos \gamma_{1m} \bar{\eta} \end{array} \right] \sin \left( \frac{2m-1}{2} \pi \xi \right) \\ + \sum \bar{P}_j^* \left[ \begin{array}{l} \psi_{5m21}^{I(j)} \cosh \beta_{2m} \bar{\eta} + \psi_{5m22}^{I(j)} \cos \gamma_{2m} \bar{\eta} \end{array} \right] \sin \left( \frac{2m-1}{2} \pi \xi \right) \\ + \sum \bar{P}_j^* \left[ \begin{array}{l} \psi_{5m31}^{I(j)} \cosh \beta_{3m} \bar{\eta} + \psi_{5m32}^{I(j)} \cosh \gamma_{3m} \bar{\eta} \end{array} \right] \sin \left( \frac{2m-1}{2} \pi \xi \right) \end{array} \right] \text{when } \eta > v_j \end{array} \right\} \quad (3-326)$$

接著討論鉛直切割的情況，切割後可得到  $\xi \leq u_j$  的左半結構塊  $W_{51}^{II(j)}$  與  $\xi \geq u_j$  的右半結構塊  $W_{52}^{II(j)}$ ，如圖 3-21 所示，其外圍三邊的邊界條件如下所示。

$W_{51}^{II(j)}$  的邊界條件：

$$W_{51}^{II(j)} \Big|_{\xi=0} = 0, \quad - \left[ \frac{\partial^2 W_{51}^{II(j)}}{\partial \xi^2} + \frac{\nu}{\phi^2} \frac{\partial^2 W_{51}^{II(j)}}{\partial \eta^2} \right] \Big|_{\xi=0} = 0 \quad (3-327)$$



$$\left. \frac{\partial W_{51}^{II(j)}}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad - \left[ \frac{\partial^3 W_{51}^{II(j)}}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W_{51}^{II(j)}}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right]_{\eta=0} = 0 \quad (3-328)$$

$$\left. \frac{\partial W_{51}^{II(j)}}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = 0, \quad - \left[ \frac{\partial^3 W_{51}^{II(j)}}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W_{51}^{II(j)}}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right]_{\eta=1} = 0 \quad (3-329)$$

$W_{52}^{II(j)}$  的邊界條件:

$$\left. \frac{\partial W_{52}^{II(j)}}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = 0, \quad - \left[ \frac{\partial^3 W_{52}^{II(j)}}{\partial \xi^3} + \frac{\nu^*}{\phi^2} \frac{\partial^3 W_{52}^{II(j)}}{\partial \xi \partial \phi^2} - \frac{P_\xi}{\phi^2} \frac{\partial W_{52}^{II(j)}}{\partial \xi} \right]_{\xi=1} = 0 \quad (3-330)$$

$$\left. \frac{\partial W_{52}^{II(j)}}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad - \left[ \frac{\partial^3 W_{52}^{II(j)}}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W_{52}^{II(j)}}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right]_{\eta=0} = 0 \quad (3-331)$$

$$\left. \frac{\partial W_{52}^{II(j)}}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = 0, \quad - \left[ \frac{\partial^3 W_{52}^{II(j)}}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W_{52}^{II(j)}}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right]_{\eta=1} = 0 \quad (3-332)$$

在  $\xi = u_j$  的邊界上，兩個結構塊的物理量必須是連續的，因此兩者的位移、斜率以及彎矩必須相同，並且在質量點處  $(x_j, y_j)$  存在個剪力差值  $\bar{P}_j$ ，即質量點的質量效應，將邊界上的剪力差函數以級數展開法與 Dirac delta 函數表示:

$$P_j^{II}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = \bar{P}_j \delta(y - y_j) \quad (3-333)$$

透過傅立葉級數求解待定係數  $A_n$ :

$$A_n = \frac{2}{b\delta} \int_0^b P_j^{II}(y) \cos \frac{n\pi y}{b} dy = \frac{2\bar{P}_j}{b\delta} \cos(n\pi v_j) \quad (3-334)$$

其中當  $n=0$  時， $\delta_n = 2$ ，當  $n \geq 1$  時， $\delta_n = 1$ 。將(3-334)式帶入(3-333)式進行代換:

$$P_j^{II}(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\bar{P}_j}{b\delta} \cos(n\pi v_j) \cos(n\pi\eta) \quad (3-335)$$

將(3-335)式進行無因次化:

$$P_j^{II}(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}_j^* \frac{1}{\phi^4 \delta} \cos n\pi v_j \cos n\pi\eta \quad (3-336)$$



其中  $\bar{P}_j^* = \frac{-2b^3}{a^2 D_{11}} \bar{P}_j$ 。 $W_{51}^{II(j)}$  與  $W_{52}^{II(j)}$  的連續邊界條件如下所示：

$$W_{51}^{II(j)} \Big|_{\xi=u_j^-} = W_{52}^{II(j)} \Big|_{\xi=u_j^+} \quad (3-337)$$

$$\frac{\partial W_{51}^{II(j)}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=u_j^-} = \frac{\partial W_{52}^{II(j)}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=u_j^+} \quad (3-338)$$

$$-\left[ \frac{\partial^2 W_{51}^{II(j)}}{\partial \xi^2} + \frac{\nu}{\phi^2} \frac{\partial^2 W_{51}^{II(j)}}{\partial \eta^2} \right]_{\xi=u_j^-} = -\left[ \frac{\partial^2 W_{52}^{II(j)}}{\partial \xi^2} + \frac{\nu}{\phi^2} \frac{\partial^2 W_{52}^{II(j)}}{\partial \eta^2} \right]_{\xi=u_j^+} \quad (3-339)$$

$$\begin{aligned} & -\left[ \frac{\partial^3 W_{51}^{II(j)}}{\partial \xi^3} + \frac{\nu^*}{\phi^2} \frac{\partial^3 W_{51}^{II(j)}}{\partial \xi \partial \eta^2} - \frac{P_\xi}{\phi^2} \frac{\partial W_{51}^{II(j)}}{\partial \xi} \right]_{\xi=u_j^-} \\ & + \left[ \frac{\partial^3 W_{52}^{II(j)}}{\partial \xi^3} + \frac{\nu^*}{\phi^2} \frac{\partial^3 W_{52}^{II(j)}}{\partial \xi \partial \eta^2} - \frac{P_\xi}{\phi^2} \frac{\partial W_{52}^{II(j)}}{\partial \xi} \right]_{\xi=u_j^+} = P_j^{*II}(\eta) \end{aligned} \quad (3-340)$$

藉由邊界條件(3-328)與(3-329)式，可以假設  $W_{51}^{II(j)}$  的解如下：

$$W_{51}^{II(j)}(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_{51n}^{II(j)}(\xi) \cos(n\pi\eta) \quad (3-341)$$

同 3.2.1 節的推導手法，將(3-341)式帶回統御方程式(3-94)式並求解四階微分方程式，根據不同的條件會有四種可能的解，每種解都會有四個待定係數，將其帶入(3-327)式可求解其中兩個系數，剩餘兩個待定係數則需在之後代入連續邊界條件才能求得。

**Case 1:**  $\delta_n^2 < \Delta_n$

$$Y_{51n}^{II(j)} = A_{1n}^{II(j)} \sinh \beta_{1n} \xi \cos \gamma_{1n} \xi + B_{1n}^{II(j)} \cosh \beta_{1n} \xi \sin \gamma_{1n} \xi \quad (3-342)$$

$$\text{其中 } \beta_{1n} = \frac{1}{\phi} \sqrt{\frac{\sqrt{\Delta_n} + \delta_n}{2}} \quad , \quad \gamma_{1m} = \frac{1}{\phi} \sqrt{\frac{\sqrt{\Delta_n} - \delta_n}{2}}$$

**Case 2:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$  ,  $\Delta_n < 0$

$$Y_{51n}^{II(j)} = A_{2n}^{II(j)} \sinh \beta_{2n} \xi + B_{2n}^{II(j)} \sin \gamma_{2n} \xi \quad (3-343)$$



其中  $\beta_{2n} = \frac{1}{\phi} \sqrt{\sqrt{\delta_n^2 - \Delta_n} + \delta_n}$  、  $\gamma_{2n} = \frac{1}{\phi} \sqrt{\sqrt{\delta_n^2 - \Delta_n} - \delta_n}$

**Case 3:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$  ,  $\Delta_n > 0$  ,  $\delta_n > 0$

$$Y_{51n}^{II(j)} = A_{3n}^{II(j)} \sinh \beta_{3n} \xi + B_{3n}^{II(j)} \sinh \gamma_{3n} \xi \quad (3-344)$$

其中  $\beta_{3n} = \frac{1}{\phi} \sqrt{\delta_n + \sqrt{\delta_n^2 - \Delta_n}}$  、  $\gamma_{3n} = \frac{1}{\phi} \sqrt{\delta_n - \sqrt{\delta_n^2 - \Delta_n}}$

**Case 4:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$  ,  $\Delta_n > 0$  ,  $\delta_n < 0$

$$Y_{51n}^{II(j)} = A_{4n}^{II(j)} \sin \beta_{4n} \xi + B_{4n}^{II(j)} \sin \gamma_{4n} \xi \quad (3-345)$$

其中  $\beta_{4n} = \frac{1}{\phi} \sqrt{-\sqrt{\delta_n^2 - \Delta_n} - \delta_n}$  、  $\gamma_{4n} = \frac{1}{\phi} \sqrt{\sqrt{\delta_n^2 - \Delta_n} - \delta_n}$

在(3-342)~(3-345)式中， $\delta_n = (n\pi)^2 - \frac{P_\xi}{2}$  、  $\Delta_n = (n\pi)^4 - (\lambda\phi)^4$  ,  $A_{1n}^{II(j)}$  、  $B_{1n}^{II(j)}$  、  $A_{2n}^{II(j)}$  、

$B_{2n}^{II(j)}$  、  $A_{3n}^{II(j)}$  、  $B_{3n}^{II(j)}$  、  $A_{4n}^{II(j)}$  、  $B_{4n}^{II(j)}$  皆為待定係數。

藉由邊界條件(3-331)與(3-332)式，可以假設  $W_{52}^{II(j)}$  的解如下：

$$W_{52}^{II(j)}(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_{52n}^{II(j)} (1-\xi) \cos(n\pi\eta) \quad (3-346)$$

同 3.2.1 節的推導手法，將(3-346)式帶回統御方程式(3-94)式並求解四階微分方程式，根據不同的條件會有四種可能的解，每種解都會有四個待定係數，將其帶入(3-330)式可求解其中兩個系數，剩餘兩個待定係數則需在之後代入連續邊界條件才能求得。

**Case 1:**  $\delta_n^2 < \Delta_n$

$$Y_{52n}^{II(j)} = C_{1n}^{II(j)} \sinh \beta_{1n} (1-\xi) \sin \gamma_{1n} (1-\xi) + D_{1n}^{II(j)} \cosh \beta_{1n} (1-\xi) \cos \gamma_{1n} (1-\xi) \quad (3-347)$$

其中  $\beta_{1n} = \frac{1}{\phi} \sqrt{\frac{\sqrt{\Delta_n} + \delta_n}{2}}$  、  $\gamma_{1n} = \frac{1}{\phi} \sqrt{\frac{\sqrt{\Delta_n} - \delta_n}{2}}$  , 同  $Y_{51n}^{II(j)}$  裡的  $\beta_{1n}$  、  $\gamma_{1n}$



**Case 2:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\Delta_n < 0$

$$Y_{52n}^{II(j)} = C_{2n}^{II(j)} \cosh \beta_{2n} (1 - \xi) + D_{2n}^{II(j)} \cos \gamma_{2n} (1 - \xi) \quad (3-348)$$

其中  $\beta_{2n} = \frac{1}{\phi} \sqrt{\sqrt{\delta_n^2 - \Delta_n} + \delta_n}$  、  $\gamma_{2n} = \frac{1}{\phi} \sqrt{\sqrt{\delta_n^2 - \Delta_n} - \delta_n}$  , 同  $Y_{51n}^{II(j)}$  裡的  $\beta_{2n}$  、  $\gamma_{2n}$

**Case 3:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\Delta_n > 0$ ,  $\delta_n > 0$

$$Y_{52n}^{II(j)} = C_{3n}^{II(j)} \cosh \beta_{3n} (1 - \xi) + D_{3n}^{II(j)} \cosh \gamma_{3n} (1 - \xi) \quad (3-349)$$

其中  $\beta_{3n} = \frac{1}{\phi} \sqrt{\delta_n + \sqrt{\delta_n^2 - \Delta_n}}$  、  $\gamma_{3n} = \frac{1}{\phi} \sqrt{\delta_n - \sqrt{\delta_n^2 - \Delta_n}}$  , 同  $Y_{51n}^{II(j)}$  裡的  $\beta_{3n}$  、  $\gamma_{3n}$

**Case 4:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\Delta_n > 0$ ,  $\delta_n < 0$

$$Y_{52n}^{II(j)} = C_{4n}^{II(j)} \cos \beta_{4n} (1 - \xi) + D_{4n}^{II(j)} \cos \gamma_{4n} (1 - \xi) \quad (3-350)$$

其中  $\beta_{4n} = \frac{1}{\phi} \sqrt{-\sqrt{\delta_n^2 - \Delta_n} - \delta_n}$  、  $\gamma_{4n} = \frac{1}{\phi} \sqrt{\sqrt{\delta_n^2 - \Delta_n} - \delta_n}$  , 同  $Y_{51n}^{II(j)}$  裡的  $\beta_{4n}$  、  $\gamma_{4n}$

在(3-347)~(3-350)式中,  $\delta_n = (n\pi)^2 - \frac{P_\xi}{2}$  、  $\Delta_n = (n\pi)^4 - (\lambda\phi)^4$  , 與在  $W_{51}^{II(j)}$  中推導的

相同,  $C_{1n}^{II(j)}$  、  $D_{1n}^{II(j)}$  、  $C_{2n}^{II(j)}$  、  $D_{2n}^{II(j)}$  、  $C_{3n}^{II(j)}$  、  $D_{3n}^{II(j)}$  、  $C_{4n}^{II(j)}$  、  $D_{4n}^{II(j)}$  皆為待定係數。

將所求得的  $W_{51}^{II(j)}$  、  $W_{52}^{II(j)}$  位移解帶入連續邊界條件以求解剩餘的待定係數, 由於有

五個未知係數  $A_n^{II(j)}$  、  $B_n^{II(j)}$  、  $C_n^{II(j)}$  、  $D_n^{II(j)}$  、  $\bar{P}_j^*$  , 但僅有四條連續邊界的方程式 ,

只能求解出五個係數間的關係式, 故將  $A_n^{II(j)}$  、  $B_n^{II(j)}$  、  $C_n^{II(j)}$  、  $D_n^{II(j)}$  四個係數皆以

$\bar{P}_j^*$  表示, 因為求解過程較為複雜, 因此根據不同情況進行分段討論。

**Case 1:**  $\delta_n^2 < \Delta_n$

將(3-342)與(3-347)式帶入(3-337)式可以得到

$$\begin{aligned} & A_{1n}^{II(j)} \sinh \beta_{1n} u_j \cos \gamma_{1n} u_j + B_{1n}^{II(j)} \cosh \beta_{1n} u_j \sin \gamma_{1n} u_j \\ & - C_{1n}^{II(j)} \sinh \beta_{1n} \bar{u}_j \sin \gamma_{1n} \bar{u}_j - D_{1n}^{II(j)} \cosh \beta_{1n} \bar{u}_j \cos \gamma_{1n} \bar{u}_j = 0 \end{aligned} \quad (3-351)$$

其中  $\bar{u}_j = 1 - u_j$  , 並令(3-351)式中  $A_{1n}^{II(j)}$  的係數為  $a_{11n}^{II(j)}$  、  $B_{1n}^{II(j)}$  的係數為  $b_{11n}^{II(j)}$  、  $C_{1n}^{II(j)}$



的係數為  $c_{11n}^{II(j)}$ 、 $D_{1n}^{II(j)}$  的係數為  $d_{11n}^{II(j)}$ 。將(3-342)與(3-347)式帶入(3-338)式可以得到

$$\begin{aligned}
 & A_{1n}^{II(j)} \left( \beta_{1n} \cosh \beta_{1n} u_j \cos \gamma_{1n} u_j - \gamma_{1n} \sinh \beta_{1n} u_j \sin \gamma_{1n} u_j \right) \\
 & + B_{1n}^{II(j)} \left( \beta_{1n} \sinh \beta_{1n} u_j \sin \gamma_{1n} u_j + \gamma_{1n} \cosh \beta_{1n} u_j \cos \gamma_{1n} u_j \right) \\
 & + C_{1n}^{II(j)} \left( \beta_{1n} \cosh \beta_{1n} \bar{u}_j \sin \gamma_{1n} \bar{u}_j + \gamma_{1n} \sinh \beta_{1n} \bar{u}_j \cos \gamma_{1n} \bar{u}_j \right) \\
 & + D_{1n}^{II(j)} \left( \beta_{1n} \sinh \beta_{1n} \bar{u}_j \cos \gamma_{1n} \bar{u}_j - \gamma_{1n} \cosh \beta_{1n} \bar{u}_j \sin \gamma_{1n} \bar{u}_j \right) = 0
 \end{aligned} \tag{3-352}$$

令(3-352)式中  $A_{1n}^{II(j)}$  的係數為  $a_{21n}^{II(j)}$ 、 $B_{1n}^{II(j)}$  的係數為  $b_{21n}^{II(j)}$ 、 $C_{1n}^{II(j)}$  的係數為  $c_{21n}^{II(j)}$ 、 $D_{1n}^{II(j)}$

的係數為  $d_{21n}^{II(j)}$ 。將(3-342)與(3-347)式帶入(3-339)式並透過(3-337)式可以得到

$$\begin{aligned}
 & A_{1n}^{II(j)} \left( \beta_{1n}^2 \sinh \beta_{1n} u_j \cos \gamma_{1n} u_j - 2\beta_{1n} \gamma_{1n} \cosh \beta_{1n} u_j \sin \gamma_{1n} u_j - \gamma_{1n}^2 \sinh \beta_{1n} u_j \cos \gamma_{1n} u_j \right) \\
 & + B_{1n}^{II(j)} \left( \beta_{1n}^2 \cosh \beta_{1n} u_j \sin \gamma_{1n} u_j + 2\beta_{1n} \gamma_{1n} \sinh \beta_{1n} u_j \cos \gamma_{1n} u_j - \gamma_{1n}^2 \cosh \beta_{1n} u_j \sin \gamma_{1n} u_j \right) \\
 & - C_{1n}^{II(j)} \left( \beta_{1n}^2 \sinh \beta_{1n} \bar{u}_j \sin \gamma_{1n} \bar{u}_j + 2\beta_{1n} \gamma_{1n} \cosh \beta_{1n} \bar{u}_j \cos \gamma_{1n} \bar{u}_j - \gamma_{1n}^2 \sinh \beta_{1n} \bar{u}_j \sin \gamma_{1n} \bar{u}_j \right) \\
 & - D_{1n}^{II(j)} \left( \beta_{1n}^2 \cosh \beta_{1n} \bar{u}_j \cos \gamma_{1n} \bar{u}_j - 2\beta_{1n} \gamma_{1n} \sinh \beta_{1n} \bar{u}_j \sin \gamma_{1n} \bar{u}_j - \gamma_{1n}^2 \cosh \beta_{1n} \bar{u}_j \cos \gamma_{1n} \bar{u}_j \right) = 0
 \end{aligned} \tag{3-353}$$

令(3-353)式中  $A_{1n}^{II(j)}$  的係數為  $a_{31n}^{II(j)}$ 、 $B_{1n}^{II(j)}$  的係數為  $b_{31n}^{II(j)}$ 、 $C_{1n}^{II(j)}$  的係數為  $c_{31n}^{II(j)}$ 、 $D_{1n}^{II(j)}$

的係數為  $d_{31n}^{II(j)}$ 。將(3-342)與(3-347)式帶入(3-340)式並透過(3-338)式可以得到

$$\begin{aligned}
 & A_{1n}^{II(j)} \left( \beta_{1n}^3 \cosh \beta_{1n} u_j \cos \gamma_{1n} u_j - 3\beta_{1n}^2 \gamma_{1n} \sinh \beta_{1n} u_j \sin \gamma_{1n} u_j \right. \\
 & \quad \left. - 3\beta_{1n} \gamma_{1n}^2 \cosh \beta_{1n} u_j \cos \gamma_{1n} u_j + \gamma_{1n}^3 \sinh \beta_{1n} u_j \sin \gamma_{1n} u_j \right) \\
 & + B_{1n}^{II(j)} \left( \beta_{1n}^3 \sinh \beta_{1n} u_j \sin \gamma_{1n} u_j + 3\beta_{1n}^2 \gamma_{1n} \cosh \beta_{1n} u_j \cos \gamma_{1n} u_j \right. \\
 & \quad \left. - 3\beta_{1n} \gamma_{1n}^2 \sinh \beta_{1n} u_j \sin \gamma_{1n} u_j - \gamma_{1n}^3 \cosh \beta_{1n} u_j \cos \gamma_{1n} u_j \right) \\
 & + C_{1n}^{II(j)} \left( \beta_{1n}^3 \cosh \beta_{1n} \bar{u}_j \sin \gamma_{1n} \bar{u}_j + 3\beta_{1n}^2 \gamma_{1n} \sinh \beta_{1n} \bar{u}_j \cos \gamma_{1n} \bar{u}_j \right. \\
 & \quad \left. - 3\beta_{1n} \gamma_{1n}^2 \cosh \beta_{1n} \bar{u}_j \sin \gamma_{1n} \bar{u}_j - \gamma_{1n}^3 \sinh \beta_{1n} \bar{u}_j \cos \gamma_{1n} \bar{u}_j \right) \\
 & + D_{1n}^{II(j)} \left( \beta_{1n}^3 \sinh \beta_{1n} \bar{u}_j \cos \gamma_{1n} \bar{u}_j - 3\beta_{1n}^2 \gamma_{1n} \cosh \beta_{1n} \bar{u}_j \sin \gamma_{1n} \bar{u}_j \right. \\
 & \quad \left. - 3\beta_{1n} \gamma_{1n}^2 \sinh \beta_{1n} \bar{u}_j \cos \gamma_{1n} \bar{u}_j + \gamma_{1n}^3 \cosh \beta_{1n} \bar{u}_j \sin \gamma_{1n} \bar{u}_j \right) = \frac{\bar{P}_j^*}{\phi^4 \delta} \cos n \pi v_j
 \end{aligned} \tag{3-354}$$

令(3-354)式中  $A_{1n}^{II(j)}$  的係數為  $a_{41n}^{II(j)}$ 、 $B_{1n}^{II(j)}$  的係數為  $b_{41n}^{II(j)}$ 、 $C_{1n}^{II(j)}$  的係數為  $c_{41n}^{II(j)}$ 、 $D_{1n}^{II(j)}$



的係數為  $d_{41n}^{II(j)}$ 。接著透過克拉瑪公式來求解(3-351)~(3-354)式的聯立方程組，並求

得四個係數  $A_{1n}^{II(j)}$ 、 $B_{1n}^{II(j)}$ 、 $C_{1n}^{II(j)}$ 、 $D_{1n}^{II(j)}$  與  $\bar{P}_j^*$  的關係。

$$A_{1n}^{II(j)} = \frac{\Delta_a}{\Delta} \bar{P}_j^* = \theta_{5n11}^{II(j)} \bar{P}_j^* \quad (3-355)$$

$$B_{1n}^{II(j)} = \frac{\Delta_b}{\Delta} \bar{P}_j^* = \theta_{5n12}^{II(j)} \bar{P}_j^* \quad (3-356)$$

$$C_{1n}^{II(j)} = \frac{\Delta_c}{\Delta} \bar{P}_j^* = \psi_{5n11}^{II(j)} \bar{P}_j^* \quad (3-357)$$

$$D_{1n}^{II(j)} = \frac{\Delta_d}{\Delta} \bar{P}_j^* = \psi_{5n12}^{II(j)} \bar{P}_j^* \quad (3-358)$$

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} a_{11n}^{II(j)} & b_{11n}^{II(j)} & c_{11n}^{II(j)} & d_{11n}^{II(j)} \\ a_{21n}^{II(j)} & b_{21n}^{II(j)} & c_{21n}^{II(j)} & d_{21n}^{II(j)} \\ a_{31n}^{II(j)} & b_{31n}^{II(j)} & c_{31n}^{II(j)} & d_{31n}^{II(j)} \\ a_{41n}^{II(j)} & b_{41n}^{II(j)} & c_{41n}^{II(j)} & d_{41n}^{II(j)} \end{bmatrix} \quad (3-359)$$

$$\Delta_a = \det \begin{bmatrix} 0 & b_{11n}^{II(j)} & c_{11n}^{II(j)} & d_{11n}^{II(j)} \\ 0 & b_{21n}^{II(j)} & c_{21n}^{II(j)} & d_{21n}^{II(j)} \\ 0 & b_{31n}^{II(j)} & c_{31n}^{II(j)} & d_{31n}^{II(j)} \\ \frac{\cos n\pi\nu_j}{\phi^4\delta} & b_{41n}^{II(j)} & c_{41n}^{II(j)} & d_{41n}^{II(j)} \end{bmatrix} \quad (3-360)$$

$$\Delta_b = \det \begin{bmatrix} a_{11n}^{II(j)} & 0 & c_{11n}^{II(j)} & d_{11n}^{II(j)} \\ a_{21n}^{II(j)} & 0 & c_{21n}^{II(j)} & d_{21n}^{II(j)} \\ a_{31n}^{II(j)} & 0 & c_{31n}^{II(j)} & d_{31n}^{II(j)} \\ a_{41n}^{II(j)} & \frac{\cos n\pi\nu_j}{\phi^4\delta} & c_{41n}^{II(j)} & d_{41n}^{II(j)} \end{bmatrix} \quad (3-361)$$

$$\Delta_c = \det \begin{bmatrix} a_{11n}^{II(j)} & b_{11n}^{II(j)} & 0 & d_{11n}^{II(j)} \\ a_{21n}^{II(j)} & b_{21n}^{II(j)} & 0 & d_{21n}^{II(j)} \\ a_{31n}^{II(j)} & b_{31n}^{II(j)} & 0 & d_{31n}^{II(j)} \\ a_{41n}^{II(j)} & b_{41n}^{II(j)} & \frac{\cos n\pi\nu_j}{\phi^4\delta} & d_{41n}^{II(j)} \end{bmatrix} \quad (3-362)$$



$$\Delta_d = \det \begin{bmatrix} a_{11n}^{II(j)} & b_{11n}^{II(j)} & c_{11n}^{II(j)} & 0 \\ a_{21n}^{II(j)} & b_{21n}^{II(j)} & c_{21n}^{II(j)} & 0 \\ a_{31n}^{II(j)} & b_{31n}^{II(j)} & c_{31n}^{II(j)} & 0 \\ a_{41n}^{II(j)} & b_{41n}^{II(j)} & c_{41n}^{II(j)} & \frac{\cos n\pi\nu_j}{\phi^4\delta} \end{bmatrix}$$

**Case 2:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\Delta_n < 0$

將(3-343)與(3-348)式帶入(3-337)式可以得到

$$\begin{aligned} A_{2n}^{II(j)} \sinh \beta_{2n} u_j + B_{2n}^{II(j)} \sin \gamma_{2n} u_j \\ - C_{2n}^{II(j)} \cosh \beta_{2n} \bar{u}_j - D_{2n}^{II(j)} \cos \gamma_{2n} \bar{u}_j = 0 \end{aligned} \quad (3-364)$$

令(3-364)式中  $A_{2n}^{II(j)}$  的係數為  $a_{12n}^{II(j)}$ 、 $B_{2n}^{II(j)}$  的係數為  $b_{12n}^{II(j)}$ 、 $C_{2n}^{II(j)}$  的係數為  $c_{12n}^{II(j)}$ 、 $D_{2n}^{II(j)}$

的係數為  $d_{12n}^{II(j)}$ 。將(3-343)與(3-348)式帶入(3-338)式可以得到

$$\begin{aligned} A_{2n}^{II(j)} \beta_{2n} \cosh \beta_{2n} u_j + B_{2n}^{II(j)} \gamma_{2n} \cos \gamma_{2n} u_j \\ + C_{2n}^{II(j)} \beta_{2n} \sinh \beta_{2n} \bar{u}_j - D_{2n}^{II(j)} \gamma_{2n} \sin \gamma_{2n} \bar{u}_j = 0 \end{aligned} \quad (3-365)$$

令(3-365)式中  $A_{2n}^{II(j)}$  的係數為  $a_{22n}^{II(j)}$ 、 $B_{2n}^{II(j)}$  的係數為  $b_{22n}^{II(j)}$ 、 $C_{2n}^{II(j)}$  的係數為  $c_{22n}^{II(j)}$ 、 $D_{2n}^{II(j)}$

的係數為  $d_{22n}^{II(j)}$ 。將(3-343)與(3-348)式帶入(3-339)式並透過(3-337)式可以得到

$$\begin{aligned} A_{2n}^{II(j)} \beta_{2n}^2 \sinh \beta_{2n} u_j - B_{2n}^{II(j)} \gamma_{2n}^2 \sin \gamma_{2n} u_j \\ - C_{2n}^{II(j)} \beta_{2n}^2 \cosh \beta_{2n} \bar{u}_j + D_{2n}^{II(j)} \gamma_{2n}^2 \cos \gamma_{2n} \bar{u}_j = 0 \end{aligned} \quad (3-366)$$

令(3-366)式中  $A_{2n}^{II(j)}$  的係數為  $a_{32n}^{II(j)}$ 、 $B_{2n}^{II(j)}$  的係數為  $b_{32n}^{II(j)}$ 、 $C_{2n}^{II(j)}$  的係數為  $c_{32n}^{II(j)}$ 、 $D_{2n}^{II(j)}$

的係數為  $d_{32n}^{II(j)}$ 。將(3-343)與(3-348)式帶入(3-340)式並透過(3-338)式可以得到

$$\begin{aligned} A_{2n}^{II(j)} \beta_{2n}^3 \cosh \beta_{2n} u_j - B_{2n}^{II(j)} \gamma_{2n}^3 \cos \gamma_{2n} u_j \\ + C_{2n}^{II(j)} \beta_{2n}^3 \sinh \beta_{2n} \bar{u}_j + D_{2n}^{II(j)} \gamma_{2n}^3 \sin \gamma_{2n} \bar{u}_j = \frac{\bar{P}_j^*}{\phi^4\delta} \cos n\pi\nu_j \end{aligned} \quad (3-367)$$

令(3-367)式中  $A_{2n}^{II(j)}$  的係數為  $a_{42n}^{II(j)}$ 、 $B_{2n}^{II(j)}$  的係數為  $b_{42n}^{II(j)}$ 、 $C_{2n}^{II(j)}$  的係數為  $c_{42n}^{II(j)}$ 、 $D_{2n}^{II(j)}$

的係數為  $d_{42n}^{II(j)}$ 。接著透過克拉瑪公式來求解(3-364)~(3-367)式的聯立方程組，並求



得四個係數  $A_{2n}^{II(j)}$ 、 $B_{2n}^{II(j)}$ 、 $C_{2n}^{II(j)}$ 、 $D_{2n}^{II(j)}$  與  $\bar{P}_j^*$  的關係。

$$A_{2n}^{II(j)} = \frac{\Delta_a}{\Delta} \bar{P}_j^* = \theta_{5n21}^{II(j)} \bar{P}_j^* \quad (3-368)$$

$$B_{2n}^{II(j)} = \frac{\Delta_b}{\Delta} \bar{P}_j^* = \theta_{5n22}^{II(j)} \bar{P}_j^* \quad (3-369)$$

$$C_{2n}^{II(j)} = \frac{\Delta_c}{\Delta} \bar{P}_j^* = \psi_{5n21}^{II(j)} \bar{P}_j^* \quad (3-370)$$

$$D_{2n}^{II(j)} = \frac{\Delta_d}{\Delta} \bar{P}_j^* = \psi_{5n22}^{II(j)} \bar{P}_j^* \quad (3-371)$$

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} a_{12n}^{II(j)} & b_{12n}^{II(j)} & c_{12n}^{II(j)} & d_{12n}^{II(j)} \\ a_{22n}^{II(j)} & b_{22n}^{II(j)} & c_{22n}^{II(j)} & d_{22n}^{II(j)} \\ a_{32n}^{II(j)} & b_{32n}^{II(j)} & c_{32n}^{II(j)} & d_{32n}^{II(j)} \\ a_{42n}^{II(j)} & b_{42n}^{II(j)} & c_{42n}^{II(j)} & d_{42n}^{II(j)} \end{bmatrix} \quad (3-372)$$

$$\Delta_a = \det \begin{bmatrix} 0 & b_{12n}^{II(j)} & c_{12n}^{II(j)} & d_{12n}^{II(j)} \\ 0 & b_{22n}^{II(j)} & c_{22n}^{II(j)} & d_{22n}^{II(j)} \\ 0 & b_{32n}^{II(j)} & c_{32n}^{II(j)} & d_{32n}^{II(j)} \\ \frac{\cos n\pi\nu_j}{\phi^4\delta} & b_{42n}^{II(j)} & c_{42n}^{II(j)} & d_{42n}^{II(j)} \end{bmatrix} \quad (3-373)$$

$$\Delta_b = \det \begin{bmatrix} a_{12n}^{II(j)} & 0 & c_{12n}^{II(j)} & d_{12n}^{II(j)} \\ a_{22n}^{II(j)} & 0 & c_{22n}^{II(j)} & d_{22n}^{II(j)} \\ a_{32n}^{II(j)} & 0 & c_{32n}^{II(j)} & d_{32n}^{II(j)} \\ a_{42n}^{II(j)} & \frac{\cos n\pi\nu_j}{\phi^4\delta} & c_{42n}^{II(j)} & d_{42n}^{II(j)} \end{bmatrix} \quad (3-374)$$

$$\Delta_c = \det \begin{bmatrix} a_{12n}^{II(j)} & b_{12n}^{II(j)} & 0 & d_{12n}^{II(j)} \\ a_{22n}^{II(j)} & b_{22n}^{II(j)} & 0 & d_{22n}^{II(j)} \\ a_{32n}^{II(j)} & b_{32n}^{II(j)} & 0 & d_{32n}^{II(j)} \\ a_{42n}^{II(j)} & b_{42n}^{II(j)} & \frac{\cos n\pi\nu_j}{\phi^4\delta} & d_{42n}^{II(j)} \end{bmatrix} \quad (3-375)$$



$$\Delta_d = \det \begin{bmatrix} a_{12n}^{II(j)} & b_{12n}^{II(j)} & c_{12n}^{II(j)} & 0 \\ a_{22n}^{II(j)} & b_{22n}^{II(j)} & c_{22n}^{II(j)} & 0 \\ a_{32n}^{II(j)} & b_{32n}^{II(j)} & c_{32n}^{II(j)} & 0 \\ a_{42n}^{II(j)} & b_{42n}^{II(j)} & c_{42n}^{II(j)} & \frac{\cos n\pi\nu_j}{\phi^4\delta} \end{bmatrix}$$

**Case 3:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\Delta_n > 0$ ,  $\delta_n > 0$

將(3-344)與(3-349)式帶入(3-337)式可以得到

$$\begin{aligned} & A_{3n}^{II(j)} \sinh \beta_{3n} u_j + B_{3n}^{II(j)} \sinh \gamma_{3n} u_j \\ & - C_{3n}^{II(j)} \cosh \beta_{3n} \bar{u}_j - D_{3n}^{II(j)} \cosh \gamma_{3n} \bar{u}_j = 0 \end{aligned} \quad (3-377)$$

令(3-377)式中  $A_{3n}^{II(j)}$  的係數為  $a_{13n}^{II(j)}$ 、 $B_{3n}^{II(j)}$  的係數為  $b_{13n}^{II(j)}$ 、 $C_{3n}^{II(j)}$  的係數為  $c_{13n}^{II(j)}$ 、 $D_{3n}^{II(j)}$

的係數為  $d_{13n}^{II(j)}$ 。將(3-344)與(3-349)式帶入(3-338)式可以得到

$$\begin{aligned} & A_{3n}^{II(j)} \beta_{3n} \cosh \beta_{3n} u_j + B_{3n}^{II(j)} \gamma_{3n} \cosh \gamma_{3n} u_j \\ & + C_{3n}^{II(j)} \beta_{3n} \sinh \beta_{3n} \bar{u}_j + D_{3n}^{II(j)} \gamma_{3n} \sinh \gamma_{3n} \bar{u}_j = 0 \end{aligned} \quad (3-378)$$

令(3-378)式中  $A_{3n}^{II(j)}$  的係數為  $a_{23n}^{II(j)}$ 、 $B_{3n}^{II(j)}$  的係數為  $b_{23n}^{II(j)}$ 、 $C_{3n}^{II(j)}$  的係數為  $c_{23n}^{II(j)}$ 、 $D_{3n}^{II(j)}$

的係數為  $d_{23n}^{II(j)}$ 。將(3-344)與(3-349)式帶入(3-339)式並透過(3-337)式可以得到

$$\begin{aligned} & A_{3n}^{II(j)} \beta_{3n}^2 \sinh \beta_{3n} u_j + B_{3n}^{II(j)} \gamma_{3n}^2 \sinh \gamma_{3n} u_j \\ & - C_{3n}^{II(j)} \beta_{3n}^2 \cosh \beta_{3n} \bar{u}_j - D_{3n}^{II(j)} \gamma_{3n}^2 \cosh \gamma_{3n} \bar{u}_j = 0 \end{aligned} \quad (3-379)$$

令(3-379)式中  $A_{3n}^{II(j)}$  的係數為  $a_{33n}^{II(j)}$ 、 $B_{3n}^{II(j)}$  的係數為  $b_{33n}^{II(j)}$ 、 $C_{3n}^{II(j)}$  的係數為  $c_{33n}^{II(j)}$ 、 $D_{3n}^{II(j)}$

的係數為  $d_{33n}^{II(j)}$ 。將(3-344)與(3-349)式帶入(3-340)式並透過(3-338)式可以得到

$$\begin{aligned} & A_{3n}^{II(j)} \beta_{3n}^3 \cosh \beta_{3n} u_j + B_{3n}^{II(j)} \gamma_{3n}^3 \cosh \gamma_{3n} u_j \\ & + C_{3n}^{II(j)} \beta_{3n}^3 \sinh \beta_{3n} \bar{u}_j + D_{3n}^{II(j)} \gamma_{3n}^3 \sinh \gamma_{3n} \bar{u}_j = \frac{\bar{P}_j^*}{\phi^4\delta} \cos n\pi\nu_j \end{aligned} \quad (3-380)$$

令(3-380)式中  $A_{3n}^{II(j)}$  的係數為  $a_{43n}^{II(j)}$ 、 $B_{3n}^{II(j)}$  的係數為  $b_{43n}^{II(j)}$ 、 $C_{3n}^{II(j)}$  的係數為  $c_{43n}^{II(j)}$ 、 $D_{3n}^{II(j)}$

的係數為  $d_{43n}^{II(j)}$ 。接著透過克拉瑪公式來求解(3-377)~(3-381)式的聯立方程組，並求



得四個係數  $A_{3n}^{II(j)}$ 、 $B_{3n}^{II(j)}$ 、 $C_{3n}^{II(j)}$ 、 $D_{3n}^{II(j)}$  與  $\bar{P}_j^*$  的關係。

$$A_{3n}^{II(j)} = \frac{\Delta_a}{\Delta} \bar{P}_j^* = \theta_{5n31}^{II(j)} \bar{P}_j^* \quad (3-382)$$

$$B_{3n}^{II(j)} = \frac{\Delta_b}{\Delta} \bar{P}_j^* = \theta_{5n32}^{II(j)} \bar{P}_j^* \quad (3-383)$$

$$C_{3n}^{II(j)} = \frac{\Delta_c}{\Delta} \bar{P}_j^* = \psi_{5n31}^{II(j)} \bar{P}_j^* \quad (3-384)$$

$$D_{3n}^{II(j)} = \frac{\Delta_d}{\Delta} \bar{P}_j^* = \psi_{5n32}^{II(j)} \bar{P}_j^* \quad (3-385)$$

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} a_{13n}^{II(j)} & b_{13n}^{II(j)} & c_{13n}^{II(j)} & d_{13n}^{II(j)} \\ a_{23n}^{II(j)} & b_{23n}^{II(j)} & c_{23n}^{II(j)} & d_{23n}^{II(j)} \\ a_{33n}^{II(j)} & b_{33n}^{II(j)} & c_{33n}^{II(j)} & d_{33n}^{II(j)} \\ a_{43n}^{II(j)} & b_{43n}^{II(j)} & c_{43n}^{II(j)} & d_{43n}^{II(j)} \end{bmatrix} \quad (3-386)$$

$$\Delta_a = \det \begin{bmatrix} 0 & b_{13n}^{II(j)} & c_{13n}^{II(j)} & d_{13n}^{II(j)} \\ 0 & b_{23n}^{II(j)} & c_{23n}^{II(j)} & d_{23n}^{II(j)} \\ 0 & b_{33n}^{II(j)} & c_{33n}^{II(j)} & d_{33n}^{II(j)} \\ \frac{\cos n\pi\nu_j}{\phi^4\delta} & b_{43n}^{II(j)} & c_{43n}^{II(j)} & d_{43n}^{II(j)} \end{bmatrix} \quad (3-387)$$

$$\Delta_b = \det \begin{bmatrix} a_{13n}^{II(j)} & 0 & c_{13n}^{II(j)} & d_{13n}^{II(j)} \\ a_{23n}^{II(j)} & 0 & c_{23n}^{II(j)} & d_{23n}^{II(j)} \\ a_{33n}^{II(j)} & 0 & c_{33n}^{II(j)} & d_{33n}^{II(j)} \\ a_{43n}^{II(j)} & \frac{\cos n\pi\nu_j}{\phi^4\delta} & c_{43n}^{II(j)} & d_{43n}^{II(j)} \end{bmatrix} \quad (3-388)$$

$$\Delta_c = \det \begin{bmatrix} a_{13n}^{II(j)} & b_{13n}^{II(j)} & 0 & d_{13n}^{II(j)} \\ a_{23n}^{II(j)} & b_{23n}^{II(j)} & 0 & d_{23n}^{II(j)} \\ a_{33n}^{II(j)} & b_{33n}^{II(j)} & 0 & d_{33n}^{II(j)} \\ a_{43n}^{II(j)} & b_{43n}^{II(j)} & \frac{\cos n\pi\nu_j}{\phi^4\delta} & d_{43n}^{II(j)} \end{bmatrix} \quad (3-389)$$

$$\Delta_d = \det \begin{bmatrix} a_{13n}^{II(j)} & b_{13n}^{II(j)} & c_{13n}^{II(j)} & 0 \\ a_{23n}^{II(j)} & b_{23n}^{II(j)} & c_{23n}^{II(j)} & 0 \\ a_{33n}^{II(j)} & b_{33n}^{II(j)} & c_{33n}^{II(j)} & 0 \\ a_{43n}^{II(j)} & b_{43n}^{II(j)} & c_{43n}^{II(j)} & \frac{\cos n\pi\nu_j}{\phi^4\delta} \end{bmatrix}$$



**Case 4:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\Delta_n > 0$ ,  $\delta_n < 0$

將(3-345)與(3-350)式帶入(3-337)式可以得到

$$\begin{aligned} A_{4n}^{II(j)} \sin \beta_{4n} u_j + B_{4n}^{II(j)} \sin \gamma_{4n} u_j \\ - C_{4n}^{II(j)} \cos \beta_{4n} \bar{u}_j - D_{4n}^{II(j)} \cos \gamma_{4n} \bar{u}_j = 0 \end{aligned} \quad (3-391)$$

令(3-391)式中  $A_{4n}^{II(j)}$  的係數為  $a_{14n}^{II(j)}$ 、 $B_{4n}^{II(j)}$  的係數為  $b_{14n}^{II(j)}$ 、 $C_{4n}^{II(j)}$  的係數為  $c_{14n}^{II(j)}$ 、 $D_{4n}^{II(j)}$

的係數為  $d_{14n}^{II(j)}$ 。將(3-345)與(3-350)式帶入(3-338)式可以得到

$$\begin{aligned} A_{4n}^{II(j)} \beta_{4n} \cos \beta_{4n} u_j + B_{4n}^{II(j)} \gamma_{4n} \cos \gamma_{4n} u_j \\ - C_{4n}^{II(j)} \beta_{4n} \sin \beta_{4n} \bar{u}_j - D_{4n}^{II(j)} \gamma_{4n} \sin \gamma_{4n} \bar{u}_j = 0 \end{aligned} \quad (3-392)$$

令(3-392)式中  $A_{4n}^{II(j)}$  的係數為  $a_{24n}^{II(j)}$ 、 $B_{4n}^{II(j)}$  的係數為  $b_{24n}^{II(j)}$ 、 $C_{4n}^{II(j)}$  的係數為  $c_{24n}^{II(j)}$ 、 $D_{4n}^{II(j)}$

的係數為  $d_{24n}^{II(j)}$ 。將(3-345)與(3-350)式帶入(3-339)式並透過(3-337)式可以得到

$$\begin{aligned} -A_{4n}^{II(j)} \beta_{4n}^2 \sin \beta_{4n} u_j - B_{4n}^{II(j)} \gamma_{4n}^2 \sin \gamma_{4n} u_j \\ + C_{4n}^{II(j)} \beta_{4n}^2 \cos \beta_{4n} \bar{u}_j + D_{4n}^{II(j)} \gamma_{4n}^2 \cos \gamma_{4n} \bar{u}_j = 0 \end{aligned} \quad (3-393)$$

令(3-393)式中  $A_{4n}^{II(j)}$  的係數為  $a_{34n}^{II(j)}$ 、 $B_{4n}^{II(j)}$  的係數為  $b_{34n}^{II(j)}$ 、 $C_{4n}^{II(j)}$  的係數為  $c_{34n}^{II(j)}$ 、 $D_{4n}^{II(j)}$

的係數為  $d_{34n}^{II(j)}$ 。將(3-345)與(3-350)式帶入(3-340)式並透過(3-338)式可以得到

$$\begin{aligned} -A_{4n}^{II(j)} \beta_{4n}^3 \cos \beta_{4n} u_j - B_{4n}^{II(j)} \gamma_{4n}^3 \cos \gamma_{4n} u_j \\ + C_{4n}^{II(j)} \beta_{4n}^3 \sin \beta_{4n} \bar{u}_j + D_{4n}^{II(j)} \gamma_{4n}^3 \sin \gamma_{4n} \bar{u}_j = \frac{\bar{P}_j^*}{\phi^4 \delta} \cos n\pi\nu_j \end{aligned} \quad (3-394)$$

令(3-394)式中  $A_{4n}^{II(j)}$  的係數為  $a_{44n}^{II(j)}$ 、 $B_{4n}^{II(j)}$  的係數為  $b_{44n}^{II(j)}$ 、 $C_{4n}^{II(j)}$  的係數為  $c_{44n}^{II(j)}$ 、 $D_{4n}^{II(j)}$

的係數為  $d_{44n}^{II(j)}$ 。接著透過克拉瑪公式來求解(3-391)~(3-394)式的聯立方程組，並求



得四個係數  $A_{4n}^{II(j)}$ 、 $B_{4n}^{II(j)}$ 、 $C_{4n}^{II(j)}$ 、 $D_{4n}^{II(j)}$  與  $\bar{P}_j^*$  的關係。

$$A_{4n}^{II(j)} = \frac{\Delta_a}{\Delta} \bar{P}_j^* = \theta_{5n41}^{II(j)} \bar{P}_j^* \quad (3-395)$$

$$B_{4n}^{II(j)} = \frac{\Delta_b}{\Delta} \bar{P}_j^* = \theta_{5n42}^{II(j)} \bar{P}_j^* \quad (3-396)$$

$$C_{4n}^{II(j)} = \frac{\Delta_c}{\Delta} \bar{P}_j^* = \psi_{5n41}^{II(j)} \bar{P}_j^* \quad (3-397)$$

$$D_{4n}^{II(j)} = \frac{\Delta_d}{\Delta} \bar{P}_j^* = \psi_{5n42}^{II(j)} \bar{P}_j^* \quad (3-398)$$

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} a_{14n}^{II(j)} & b_{14n}^{II(j)} & c_{14n}^{II(j)} & d_{14n}^{II(j)} \\ a_{24n}^{II(j)} & b_{24n}^{II(j)} & c_{24n}^{II(j)} & d_{24n}^{II(j)} \\ a_{34n}^{II(j)} & b_{34n}^{II(j)} & c_{34n}^{II(j)} & d_{34n}^{II(j)} \\ a_{44n}^{II(j)} & b_{44n}^{II(j)} & c_{44n}^{II(j)} & d_{44n}^{II(j)} \end{bmatrix} \quad (3-399)$$

$$\Delta_a = \det \begin{bmatrix} 0 & b_{14n}^{II(j)} & c_{14n}^{II(j)} & d_{14n}^{II(j)} \\ 0 & b_{24n}^{II(j)} & c_{24n}^{II(j)} & d_{24n}^{II(j)} \\ 0 & b_{34n}^{II(j)} & c_{34n}^{II(j)} & d_{34n}^{II(j)} \\ \frac{\cos n\pi\nu_j}{\phi^4\delta} & b_{44n}^{II(j)} & c_{44n}^{II(j)} & d_{44n}^{II(j)} \end{bmatrix} \quad (3-400)$$

$$\Delta_b = \det \begin{bmatrix} a_{14n}^{II(j)} & 0 & c_{14n}^{II(j)} & d_{14n}^{II(j)} \\ a_{24n}^{II(j)} & 0 & c_{24n}^{II(j)} & d_{24n}^{II(j)} \\ a_{34n}^{II(j)} & 0 & c_{34n}^{II(j)} & d_{34n}^{II(j)} \\ a_{44n}^{II(j)} & \frac{\cos n\pi\nu_j}{\phi^4\delta} & c_{44n}^{II(j)} & d_{44n}^{II(j)} \end{bmatrix} \quad (3-401)$$

$$\Delta_c = \det \begin{bmatrix} a_{14n}^{II(j)} & b_{14n}^{II(j)} & 0 & d_{14n}^{II(j)} \\ a_{24n}^{II(j)} & b_{24n}^{II(j)} & 0 & d_{24n}^{II(j)} \\ a_{34n}^{II(j)} & b_{34n}^{II(j)} & 0 & d_{34n}^{II(j)} \\ a_{44n}^{II(j)} & b_{44n}^{II(j)} & \frac{\cos n\pi\nu_j}{\phi^4\delta} & d_{44n}^{II(j)} \end{bmatrix} \quad (3-402)$$

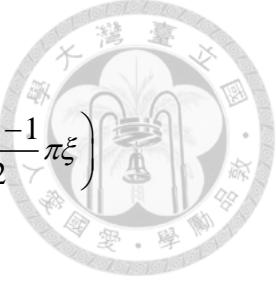


$$\Delta_d = \det \begin{pmatrix} a_{14n}^{II(j)} & b_{14n}^{II(j)} & c_{14n}^{II(j)} & 0 \\ a_{24n}^{II(j)} & b_{24n}^{II(j)} & c_{24n}^{II(j)} & 0 \\ a_{34n}^{II(j)} & b_{34n}^{II(j)} & c_{34n}^{II(j)} & 0 \\ a_{44n}^{II(j)} & b_{44n}^{II(j)} & c_{44n}^{II(j)} & \frac{\cos n\pi v_j}{\phi^4 \delta} \end{pmatrix}$$

將(3-342)~(3-345)式帶回(3-341)式以及(3-347)~(3-350)式帶回(3-346)式，並將兩者的結果相加便可得到在鉛直切割下第五塊結構塊的位移解，其中  $J$  代表質量點的總數。

$$W_5^{II} = \sum_{j=1}^J W_{51}^{II(j)} + W_{52}^{II(j)} = \sum_{j=1}^J \left\{ \begin{array}{l} \sum \bar{P}_j^* \left[ \begin{array}{l} \theta_{5n11}^{II(j)} \sinh \beta_{1n} \xi \cos \gamma_{1n} \xi \\ + \theta_{5n12}^{II(j)} \cosh \beta_{1n} \xi \sin \gamma_{1n} \xi \end{array} \right] \cos(n\pi\eta) \\ + \sum \bar{P}_j^* \left[ \theta_{5n21}^{II(j)} \sinh \beta_{2n} \xi + \theta_{5n22}^{II(j)} \sin \gamma_{2n} \xi \right] \cos(n\pi\eta) \\ + \sum \bar{P}_j^* \left[ \theta_{5n31}^{II(j)} \sinh \beta_{3n} \xi + \theta_{5n32}^{II(j)} \sin \gamma_{3n} \xi \right] \cos(n\pi\eta) \\ + \sum \bar{P}_j^* \left[ \theta_{5n41}^{II(j)} \sin \beta_{4n} \xi + \theta_{5n42}^{II(j)} \sin \gamma_{4n} \xi \right] \cos(n\pi\eta) \\ \\ \sum \bar{P}_j^* \left[ \begin{array}{l} \psi_{5n11}^{II(j)} \sinh \beta_{1n} \bar{\xi} \sin \gamma_{1n} \bar{\xi} \\ + \psi_{5n12}^{II(j)} \cosh \beta_{1n} \bar{\xi} \cos \gamma_{1n} \bar{\xi} \end{array} \right] \cos(n\pi\eta) \\ + \sum \bar{P}_j^* \left[ \psi_{5n21}^{II(j)} \cosh \beta_{2n} \bar{\xi} + \psi_{5n22}^{II(j)} \cos \gamma_{2n} \bar{\xi} \right] \cos(n\pi\eta) \\ + \sum \bar{P}_j^* \left[ \psi_{5n31}^{II(j)} \cosh \beta_{3n} \bar{\xi} + \psi_{5n32}^{II(j)} \cosh \gamma_{3n} \bar{\xi} \right] \cos(n\pi\eta) \\ + \sum \bar{P}_j^* \left[ \psi_{5n41}^{II(j)} \cos \beta_{4n} \bar{\xi} + \psi_{5n42}^{II(j)} \cos \gamma_{4n} \bar{\xi} \right] \cos(n\pi\eta) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{when } \xi < u_j \\ \text{when } \xi > u_j \end{array} \quad (3-404)$$

將 3.2.2 節所推導的前四塊結構塊與本小節所推導的第五塊結構塊位移解進行相加，便可得到質量效應下受預應力作用的平板位移解，此外第五塊結構塊的位移解有兩種形式，可以根據後續所帶入的邊界條件，選擇使用水平切割的位移解  $W_5^I$  或鉛直切割的位移解  $W_5^{II}$  以簡化推導的過程。



$$\begin{aligned}
W &= W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + (W_5^I \text{ or } W_5^{II}) \\
&= \sum E_{1m} (\theta_{11m} \sinh \beta_{1m} \eta \sin \gamma_{1m} \eta + \theta_{14m} \cosh \beta_{1m} \eta \cos \gamma_{1m} \eta) \sin\left(\frac{2m-1}{2} \pi \xi\right) \\
&\quad + \sum E_{1m} (\theta_{22m} \cosh \beta_{2m} \eta + \theta_{24m} \cos \gamma_{2m} \eta) \sin\left(\frac{2m-1}{2} \pi \xi\right) \\
&\quad + \sum E_{1m} (\theta_{32m} \cosh \beta_{3m} \eta + \theta_{34m} \cosh \gamma_{3m} \eta) \sin\left(\frac{2m-1}{2} \pi \xi\right) \\
&\quad + \sum E_{2n} (\theta_{12n} \sinh \beta_{1n} \xi \cos \gamma_{1n} \xi + \theta_{13n} \cosh \beta_{1n} \xi \sin \gamma_{1n} \xi) \cos n \pi \eta \\
&\quad + \sum E_{2n} (\theta_{21n} \sinh \beta_{2n} \xi + \theta_{23n} \sin \gamma_{2n} \xi) \cos n \pi \eta \\
&\quad + \sum E_{2n} (\theta_{31n} \sinh \beta_{3n} \xi + \theta_{33n} \sinh \gamma_{3n} \xi) \cos n \pi \eta \\
&\quad + \sum E_{2n} (\theta_{41n} \sin \beta_{4n} \xi + \theta_{43n} \sin \gamma_{4n} \xi) \cos n \pi \eta \\
&\quad + \sum E_{3m} (\psi_{11m} \sinh \beta_{1m} \bar{\eta} \sin \gamma_{1m} \bar{\eta} + \psi_{14m} \cosh \beta_{1m} \bar{\eta} \cos \gamma_{1m} \bar{\eta}) \sin\left(\frac{2m-1}{2} \pi \xi\right) \\
&\quad + \sum E_{3m} (\psi_{22m} \cosh \beta_{2m} \bar{\eta} + \psi_{24m} \cos \gamma_{2m} \bar{\eta}) \sin\left(\frac{2m-1}{2} \pi \xi\right) \\
&\quad + \sum E_{3m} (\psi_{32m} \cosh \beta_{3m} \bar{\eta} + \psi_{34m} \cosh \gamma_{3m} \bar{\eta}) \sin\left(\frac{2m-1}{2} \pi \xi\right) \\
&\quad + \sum E_{4n} (\psi_{11n} \sinh \beta_{1n} \bar{\xi} \sin \gamma_{1n} \bar{\xi} + \psi_{14n} \cosh \beta_{1n} \bar{\xi} \cos \gamma_{1n} \bar{\xi}) \cos n \pi \eta \\
&\quad + \sum E_{4n} (\psi_{22n} \cosh \beta_{2n} \bar{\xi} + \psi_{24n} \cos \gamma_{2n} \bar{\xi}) \cos n \pi \eta \\
&\quad + \sum E_{4n} (\psi_{32n} \cosh \beta_{3n} \bar{\xi} + \psi_{34n} \cosh \gamma_{3n} \bar{\xi}) \cos n \pi \eta \\
&\quad + \sum E_{4n} (\psi_{42n} \cos \beta_{4n} \bar{\xi} + \psi_{44n} \cos \gamma_{4n} \bar{\xi}) \cos n \pi \eta \\
&+ \sum_{j=1}^J \left\{ \begin{array}{l} \sum \bar{P}_j^* \left[ \begin{array}{l} \theta_{5m11}^{I(j)} \sinh \beta_{1m} \eta \sin \gamma_{1m} \eta \\ + \theta_{5m12}^{I(j)} \cosh \beta_{1m} \eta \cos \gamma_{1m} \eta \end{array} \right] \sin\left(\frac{2m-1}{2} \pi \xi\right) \\ + \sum \bar{P}_j^* \left[ \begin{array}{l} \theta_{5m21}^{I(j)} \cosh \beta_{2m} \eta + \theta_{5m22}^{I(j)} \cos \gamma_{2m} \eta \end{array} \right] \sin\left(\frac{2m-1}{2} \pi \xi\right) \\ + \sum \bar{P}_j^* \left[ \begin{array}{l} \theta_{5m31}^{I(j)} \cosh \beta_{3m} \eta + \theta_{5m32}^{I(j)} \cosh \gamma_{3m} \eta \end{array} \right] \sin\left(\frac{2m-1}{2} \pi \xi\right) \end{array} \right\} \text{ when } \eta < v_j \\
&+ \sum_{j=1}^J \left\{ \begin{array}{l} \sum \bar{P}_j^* \left[ \begin{array}{l} \psi_{5m11}^{I(j)} \sinh \beta_{1m} \bar{\eta} \sin \gamma_{1m} \bar{\eta} \\ + \psi_{5m12}^{I(j)} \cosh \beta_{1m} \bar{\eta} \cos \gamma_{1m} \bar{\eta} \end{array} \right] \sin\left(\frac{2m-1}{2} \pi \xi\right) \\ + \sum \bar{P}_j^* \left[ \begin{array}{l} \psi_{5m21}^{I(j)} \cosh \beta_{2m} \bar{\eta} + \psi_{5m22}^{I(j)} \cos \gamma_{2m} \bar{\eta} \end{array} \right] \sin\left(\frac{2m-1}{2} \pi \xi\right) \\ + \sum \bar{P}_j^* \left[ \begin{array}{l} \psi_{5m31}^{I(j)} \cosh \beta_{3m} \bar{\eta} + \psi_{5m32}^{I(j)} \cosh \gamma_{3m} \bar{\eta} \end{array} \right] \sin\left(\frac{2m-1}{2} \pi \xi\right) \end{array} \right\} \text{ when } \eta > v_j
\end{aligned}$$

(3-405)

or

$$\left. \begin{aligned}
 & \sum \bar{P}_j^* \left[ \begin{aligned}
 & \theta_{5n11}^{II(j)} \sinh \beta_{1n} \xi \cos \gamma_{1n} \xi \\
 & + \theta_{5n12}^{II(j)} \cosh \beta_{1n} \xi \sin \gamma_{1n} \xi
 \end{aligned} \right] \cos(n\pi\eta) \\
 & + \sum \bar{P}_j^* \left[ \begin{aligned}
 & \theta_{5n21}^{II(j)} \sinh \beta_{2n} \xi + \theta_{5n22}^{II(j)} \sin \gamma_{2n} \xi \\
 & + \theta_{5n31}^{II(j)} \sinh \beta_{3n} \xi + \theta_{5n32}^{II(j)} \sinh \gamma_{3n} \xi
 \end{aligned} \right] \cos(n\pi\eta) \\
 & + \sum_{j=1}^J \left[ \begin{aligned}
 & + \sum \bar{P}_j^* \left[ \begin{aligned}
 & \theta_{5n41}^{II(j)} \sin \beta_{4n} \xi + \theta_{5n42}^{II(j)} \sin \gamma_{4n} \xi \\
 & + \psi_{5n11}^{II(j)} \sinh \beta_{1n} \bar{\xi} \sin \gamma_{1n} \bar{\xi} \\
 & + \psi_{5n12}^{II(j)} \cosh \beta_{1n} \bar{\xi} \cos \gamma_{1n} \bar{\xi}
 \end{aligned} \right] \cos(n\pi\eta) \\
 & + \sum \bar{P}_j^* \left[ \begin{aligned}
 & \psi_{5n21}^{II(j)} \cosh \beta_{2n} \bar{\xi} + \psi_{5n22}^{II(j)} \cos \gamma_{2n} \bar{\xi} \\
 & + \psi_{5n31}^{II(j)} \cosh \beta_{3n} \bar{\xi} + \psi_{5n32}^{II(j)} \cosh \gamma_{3n} \bar{\xi}
 \end{aligned} \right] \cos(n\pi\eta) \\
 & + \sum \bar{P}_j^* \left[ \begin{aligned}
 & \psi_{5n41}^{II(j)} \cos \beta_{4n} \bar{\xi} + \psi_{5n42}^{II(j)} \cos \gamma_{4n} \bar{\xi}
 \end{aligned} \right] \cos(n\pi\eta)
 \end{aligned} \right] \quad \left. \begin{aligned}
 & \text{when } \xi < u_j \\
 & \text{when } \xi > u_j
 \end{aligned} \right\} \quad (3-405)
 \end{aligned}$$

接著將位移解(3-405)式帶入尚未滿足的邊界條件並使其成立，其中未滿足的邊界條件同 3.2.1 節，即(3-187)~(3-190)式，再加上質量效應的邊界(3-264)式，將位移解帶入後透過乘上對應的三角函數並利用函數正交性關係，將所得之方程式整合為矩陣形式：

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{1m} \\ E_{2n} \\ E_{3m} \\ E_{4n} \\ \bar{P}_j^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-406)$$

首先處理質量效應的邊界，將(3-264)式進行無因次化

$$\bar{P}_j^* = \frac{-2m_j \omega^2 b^3}{D_{11} a} W(u_j, v_j) \quad (3-407)$$

將角頻率  $\omega = \frac{\lambda^4 D_{11}}{a^4 \rho^{eq} h}$  進行代換並對方程式進行移項

$$W(u_j, v_j) + \frac{\bar{P}_j^*}{2\phi^4 \lambda^4 M_R^{(j)}} = 0 \quad (3-408)$$

其中  $M_R^{(j)}$  為第  $j$  個質量點的質量  $m_j$  與壓電陶瓷雙晶片質量  $m_{struc}$  的比值



$$M_R^{(j)} = \frac{m_j}{m_{struc}}$$

$$m_{struc} = \rho^{eq} abh$$

(3-409)

(3-410)

將(3-408)式中的位移解展開

$$W_1(u_j, v_j) + W_2(u_j, v_j) + W_3(u_j, v_j) + W_4(u_j, v_j) + \sum_{j=1}^J \left( \frac{W_5(u_j, v_j)}{\bar{P}_j^*} + \frac{1}{2\phi^4 \lambda^4 M_R^{(j)}} \right) \bar{P}_j^* = 0$$

(3-411)

將(3-411)式整理成  $J \times (4+J)$  大小的矩陣，便可得到特徵矩陣中  $A_{51} \sim A_{55}$  的元素

1.  $A_{51}(j, m)$  的矩陣元素

**Case 1:**  $\delta_m^2 < \Delta_m$

$$\left( \theta_{1m11} \sinh \beta_{1m} v_j \sin \gamma_{1m} v_j + \theta_{1m12} \cosh \beta_{1m} v_j \cos \gamma_{1m} v_j \right) \sin \left( \frac{2m-1}{2} \pi u_j \right)$$

(3-412)

**Case 2:**  $\delta_m^2 > \Delta_m$ ,  $\Delta_m < 0$

$$\left( \theta_{1m21} \cosh \beta_{2m} v_j + \theta_{1m22} \cos \gamma_{2m} v_j \right) \sin \left( \frac{2m-1}{2} \pi u_j \right)$$

(3-413)

**Case 3:**  $\delta_m^2 > \Delta_m$ ,  $\Delta_m > 0$

$$\left( \theta_{1m31} \cosh \beta_{3m} v_j + \theta_{1m32} \cosh \gamma_{3m} v_j \right) \sin \left( \frac{2m-1}{2} \pi u_j \right)$$

(3-414)

2.  $A_{52}(j, n)$  的矩陣元素

**Case 1:**  $\delta_n^2 < \Delta_n$

$$\left( \theta_{2n11} \sinh \beta_{1n} u_j \cos \gamma_{1n} u_j + \theta_{2n12} \cosh \beta_{1n} u_j \sin \gamma_{1n} u_j \right) \cos n\pi v_j$$

(3-415)

**Case 2:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\Delta_n < 0$

$$\left( \theta_{2n21} \sinh \beta_{2n} u_j + \theta_{2n22} \sin \gamma_{2n} u_j \right) \cos n\pi v_j$$

(3-416)



**Case 3:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\Delta_n > 0$ ,  $\delta_n > 0$

$$(\theta_{2n31} \sinh \beta_{3n} u_j + \theta_{2n32} \sin \gamma_{3n} u_j) \cos n\pi v_j \quad (3-417)$$

**Case 4:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\Delta_n > 0$ ,  $\delta_n < 0$

$$(\theta_{2n41} \sin \beta_{4n} u_j + \theta_{2n42} \sin \gamma_{4n} u_j) \cos n\pi v_j \quad (3-418)$$

3.  $A_{53}(j, m)$  的矩阵元素

**Case 1:**  $\delta_m^2 < \Delta_m$

$$(\theta_{3m11} \sinh \beta_{1m} \bar{v}_j \sin \gamma_{1m} \bar{v}_j + \theta_{3m12} \cosh \beta_{1m} \bar{v}_j \cos \gamma_{1m} \bar{v}_j) \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi u_j\right) \quad (3-419)$$

**Case 2:**  $\delta_m^2 > \Delta_m$ ,  $\Delta_m < 0$

$$(\theta_{3m21} \cosh \beta_{2m} \bar{v}_j + \theta_{3m22} \cos \gamma_{2m} \bar{v}_j) \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi u_j\right) \quad (3-420)$$

**Case 3:**  $\delta_m^2 > \Delta_m$ ,  $\Delta_m > 0$

$$(\theta_{3m31} \cosh \beta_{3m} \bar{v}_j + \theta_{3m32} \cosh \gamma_{3m} \bar{v}_j) \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi u_j\right) \quad (3-421)$$

4.  $A_{54}(j, n)$  的矩阵元素

**Case 1:**  $\delta_n^2 < \Delta_n$

$$(\theta_{4n11} \sinh \beta_{1n} \bar{u}_j \sin \gamma_{1n} \bar{u}_j + \theta_{4n12} \cosh \beta_{1n} \bar{u}_j \cos \gamma_{1n} \bar{u}_j) \cos n\pi v_j \quad (3-422)$$

**Case 2:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\Delta_n < 0$

$$(\theta_{4n21} \cosh \beta_{2n} \bar{u}_j + \theta_{4n22} \cos \gamma_{2n} \bar{u}_j) \cos n\pi v_j \quad (3-423)$$

**Case 3:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\Delta_n > 0$ ,  $\delta_n > 0$

$$(\theta_{4n31} \cosh \beta_{3n} \bar{u}_j + \theta_{4n32} \cosh \gamma_{3n} \bar{u}_j) \cos n\pi v_j \quad (3-424)$$



**Case 4:**  $\delta_n^2 > \Delta_n$ ,  $\Delta_n > 0$ ,  $\delta_n < 0$

$$\left( \theta_{4n41} \cos \beta_{4n} \bar{u}_j + \theta_{4n42} \cos \gamma_{4n} \bar{u}_j \right) \cos n\pi v_j$$

5.  $A_{55}(j, i)$  的矩阵元素

**Case 1:**  $\delta_m^2 < \Delta_m$

**Case 1-1:**  $i = j$

$$\sum_m \left( \theta_{5m11}^{I(i)} \sinh \beta_{1m} v_j \sin \gamma_{1m} v_j + \theta_{5m12}^{I(i)} \cosh \beta_{1m} v_j \cos \gamma_{1m} v_j \right) \sin \left( \frac{2m-1}{2} \pi u_j \right) + \frac{1}{2\phi^4 \lambda^4 M_R^{(j)}}$$

(3-426)

**Case 1-2:**  $v_i > v_j$ ,  $i \neq j$

$$\sum_m \left( \theta_{5m11}^{I(i)} \sinh \beta_{1m} v_j \sin \gamma_{1m} v_j + \theta_{5m12}^{I(i)} \cosh \beta_{1m} v_j \cos \gamma_{1m} v_j \right) \sin \left( \frac{2m-1}{2} \pi u_j \right)$$

(3-427)

**Case 1-3:**  $v_i < v_j$ ,  $i \neq j$

$$\sum_m \left( \psi_{5m11}^{I(i)} \sinh \beta_{1m} \bar{v}_j \sin \gamma_{1m} \bar{v}_j + \psi_{5m12}^{I(i)} \cosh \beta_{1m} \bar{v}_j \cos \gamma_{1m} \bar{v}_j \right) \sin \left( \frac{2m-1}{2} \pi u_j \right)$$

(3-428)

**Case 2:**  $\delta_m^2 > \Delta_m$ ,  $\Delta_m < 0$

**Case 2-1:**  $i = j$

$$\sum_m \left( \theta_{5m21}^{I(i)} \cosh \beta_{2m} v_j + \theta_{5m22}^{I(i)} \cos \gamma_{2m} v_j \right) \sin \left( \frac{2m-1}{2} \pi u_j \right) + \frac{1}{2\phi^4 \lambda^4 M_R^{(j)}} \quad (3-429)$$

**Case 2-2:**  $v_i > v_j$ ,  $i \neq j$

$$\sum_m \left( \theta_{5m21}^{I(i)} \cosh \beta_{2m} v_j + \theta_{5m22}^{I(i)} \cos \gamma_{2m} v_j \right) \sin \left( \frac{2m-1}{2} \pi u_j \right) \quad (3-430)$$



**Case 2-3:**  $v_i < v_j$ ,  $i \neq j$

$$\sum_m \left( \psi_{5m21}^{I(i)} \cosh \beta_{2m} \bar{v}_j + \psi_{5m22}^{I(i)} \cos \gamma_{2m} \bar{v}_j \right) \sin \left( \frac{2m-1}{2} \pi u_j \right) \quad (3-431)$$

**Case 3:**  $\delta_m^2 > \Delta_m$ ,  $\Delta_m > 0$

**Case 3-1:**  $i = j$

$$\sum_m \left( \theta_{5m31}^{I(i)} \cosh \beta_{3m} v_j + \theta_{5m32}^{I(i)} \cosh \gamma_{3m} v_j \right) \sin \left( \frac{2m-1}{2} \pi u_j \right) + \frac{1}{2\phi^4 \lambda^4 M_R^{(j)}} \quad (3-432)$$

**Case 3-2:**  $v_i > v_j$ ,  $i \neq j$

$$\sum_m \left( \theta_{5m31}^{I(i)} \cosh \beta_{3m} v_j + \theta_{5m32}^{I(i)} \cosh \gamma_{3m} v_j \right) \sin \left( \frac{2m-1}{2} \pi u_j \right) \quad (3-433)$$

**Case 3-3:**  $v_i < v_j$ ,  $i \neq j$

$$\sum_m \left( \psi_{5m31}^{I(i)} \cosh \beta_{3m} \bar{v}_j + \psi_{5m32}^{I(i)} \cosh \gamma_{3m} \bar{v}_j \right) \sin \left( \frac{2m-1}{2} \pi u_j \right) \quad (3-434)$$

接著處理邊界條件(3-187)~(3-190)式，將位移解(3-405)帶入並使其成立，其中因為前四塊結構塊的位移解與所帶入的邊界條件皆與 3.2.1 節推導的相同，所以矩陣中  $A_{11} \sim A_{44}$  也會與 3.2.1 節的結果相同，故不再重複推導。 $A_{15} \sim A_{45}$  為將第五塊結構塊的位移解帶入(3-190)~(3-187)式後的計算結果，而在帶入邊界條件的過程中，會發現其矩陣元素存在三個變數  $(m, c, j)$  或  $(n, c, j)$ ，為了要使特徵矩陣是一個方陣，必須限制  $A_{15} \sim A_{45}$  的大小為  $(4+J) \times J$ ，在計算  $A_{15} \sim A_{45}$  時會利用函數的正交性關係，因此會出現  $\delta_{mc}$  或  $\delta_{nc}$ ，代表僅當  $m = c$  或  $n = c$  時才會有數值，否則都會是零，因此可以透過其關係將原本  $c \times m$  或  $c \times n$  大小的矩陣進行壓縮，將數值為零的元素全部捨棄，最終將其變成  $c \times 1$  大小的矩陣，如此便可控制  $A_{15} \sim A_{45}$  矩陣的大小為  $(4+J) \times J$ ，而在計算  $A_{15}$  與  $A_{35}$  時，為了利用三角函數正交性關係，因此第五塊結構塊選擇使用水平切割下的位移解，可以大幅簡化計算過程，同理在計算  $A_{25}$  與  $A_{45}$  時，第五塊結構塊則使用鉛直切割下的位移解。



## 6. $A_{15}(c, j)$ 的矩陣元素

**Case 1:**  $\delta_c^2 < \Delta_c$

$$\frac{1}{2} \left\{ 2\psi_{5c11}^{I(j)} \beta_{1c} \gamma_{1c} + \psi_{5c12}^{I(j)} \left[ \beta_{1c}^2 - \gamma_{1c}^2 - \nu \phi^2 \left( \frac{2c-1}{2} \pi \right)^2 \right] \right\} \quad (3-435)$$

**Case 2:**  $\delta_c^2 > \Delta_c$ ,  $\Delta_c < 0$

$$\frac{1}{2} \left\{ \psi_{5c21}^{I(j)} \left[ \beta_{2c}^2 - \nu \phi^2 \left( \frac{2c-1}{2} \pi \right)^2 \right] - \psi_{5c22}^{I(j)} \left[ \gamma_{2c}^2 + \nu \phi^2 \left( \frac{2c-1}{2} \pi \right)^2 \right] \right\} \quad (3-436)$$

**Case 3:**  $\delta_c^2 > \Delta_c$ ,  $\Delta_c > 0$

$$\frac{1}{2} \left\{ \psi_{5c31}^{I(j)} \left[ \beta_{3c}^2 - \nu \phi^2 \left( \frac{2c-1}{2} \pi \right)^2 \right] + \psi_{5c32}^{I(j)} \left[ \gamma_{3c}^2 - \nu \phi^2 \left( \frac{2c-1}{2} \pi \right)^2 \right] \right\} \quad (3-437)$$

## 7. $A_{25}(c, j)$ 的矩陣元素

**Case 1:**  $\delta_c^2 < \Delta_c$

$$\delta \left\{ 2\psi_{5c11}^{II(j)} \beta_{1c} \gamma_{1c} + \psi_{5c12}^{II(j)} \left[ \beta_{1c}^2 - \gamma_{1c}^2 - \frac{\nu}{\phi^2} (c\pi)^2 \right] \right\} \quad (3-438)$$

其中當  $c = 0$  時,  $\delta = 1$ , 其餘情況  $\delta = 0.5$

**Case 2:**  $\delta_c^2 > \Delta_c$ ,  $\Delta_c < 0$

$$\delta \left\{ \psi_{5c21}^{II(j)} \left[ \beta_{2c}^2 - \frac{\nu}{\phi^2} (c\pi)^2 \right] - \psi_{5c22}^{II(j)} \left[ \gamma_{2c}^2 + \frac{\nu}{\phi^2} (c\pi)^2 \right] \right\} \quad (3-439)$$

**Case 3:**  $\delta_c^2 > \Delta_c$ ,  $\Delta_c > 0$ ,  $\delta_c > 0$

$$\delta \left\{ \psi_{5c31}^{II(j)} \left[ \beta_{3c}^2 - \frac{\nu}{\phi^2} (c\pi)^2 \right] + \psi_{5c32}^{II(j)} \left[ \gamma_{3c}^2 - \frac{\nu}{\phi^2} (c\pi)^2 \right] \right\} \quad (3-440)$$

**Case 4:**  $\delta_c^2 > \Delta_c$ ,  $\Delta_c > 0$ ,  $\delta_c < 0$



$$-\delta_c \left\{ \psi_{5c41}^{II(j)} \left[ \beta_{4c}^2 + \frac{\nu}{\phi^2} (c\pi)^2 \right] + \psi_{5c42}^{II(j)} \left[ \gamma_{4c}^2 + \frac{\nu}{\phi^2} (c\pi)^2 \right] \right\} \quad (3-441)$$

8.  $A_{35}(c, j)$  的矩阵元素

**Case 1:**  $\delta_c^2 < \Delta_c$

$$\frac{1}{2} \left\{ 2\theta_{5c11}^{I(j)} \beta_{1c} \gamma_{1c} + \theta_{5c12}^{I(j)} \left[ \beta_{1c}^2 - \gamma_{1c}^2 - \nu \phi^2 \left( \frac{2c-1}{2} \pi \right)^2 \right] \right\} \quad (3-442)$$

**Case 2:**  $\delta_c^2 > \Delta_c$ ,  $\Delta_c < 0$

$$\frac{1}{2} \left\{ \theta_{5c21}^{I(j)} \left[ \beta_{2c}^2 - \nu \phi^2 \left( \frac{2c-1}{2} \pi \right)^2 \right] - \theta_{5c22}^{I(j)} \left[ \gamma_{2c}^2 + \nu \phi^2 \left( \frac{2c-1}{2} \pi \right)^2 \right] \right\} \quad (3-443)$$

**Case 3:**  $\delta_c^2 > \Delta_c$ ,  $\Delta_c > 0$

$$\frac{1}{2} \left\{ \theta_{5c31}^{I(j)} \left[ \beta_{3c}^2 - \nu \phi^2 \left( \frac{2c-1}{2} \pi \right)^2 \right] + \theta_{5c32}^{I(j)} \left[ \gamma_{3c}^2 - \nu \phi^2 \left( \frac{2c-1}{2} \pi \right)^2 \right] \right\} \quad (3-444)$$

9.  $A_{45}(c, j)$  的矩阵元素

**Case 1:**  $\delta_c^2 < \Delta_c$

$$\delta \left\{ \theta_{5c11}^{II(j)} \beta_{1c} + \theta_{5c12}^{II(j)} \gamma_{1c} \right\} \quad (3-445)$$

**Case 2:**  $\delta_c^2 > \Delta_c$ ,  $\Delta_c < 0$

$$\delta \left\{ \theta_{5c21}^{II(j)} \beta_{2c} + \theta_{5c22}^{II(j)} \gamma_{2c} \right\} \quad (3-446)$$

**Case 3:**  $\delta_c^2 > \Delta_c$ ,  $\Delta_c > 0$ ,  $\delta_c > 0$

$$\delta \left\{ \theta_{5c31}^{II(j)} \beta_{3c} + \theta_{5c32}^{II(j)} \gamma_{3c} \right\} \quad (3-447)$$



**Case 4:**  $\delta_c^2 > \Delta_c$ ,  $\Delta_c > 0$ ,  $\delta_c < 0$

$$\delta \left\{ \theta_{5c41}^{II(j)} \beta_{4c} + \theta_{5c42}^{II(j)} \gamma_{4c} \right\}$$

根據(3-406)式可得知其為齊次方程組，若要求出非零解，則特徵矩陣  $[A]$  的行列式

值必須為零，此時對應到的頻率即為平板的共振頻率，再根據此刻的特徵矩陣反算特徵向量，即可計算平板的模態振型。

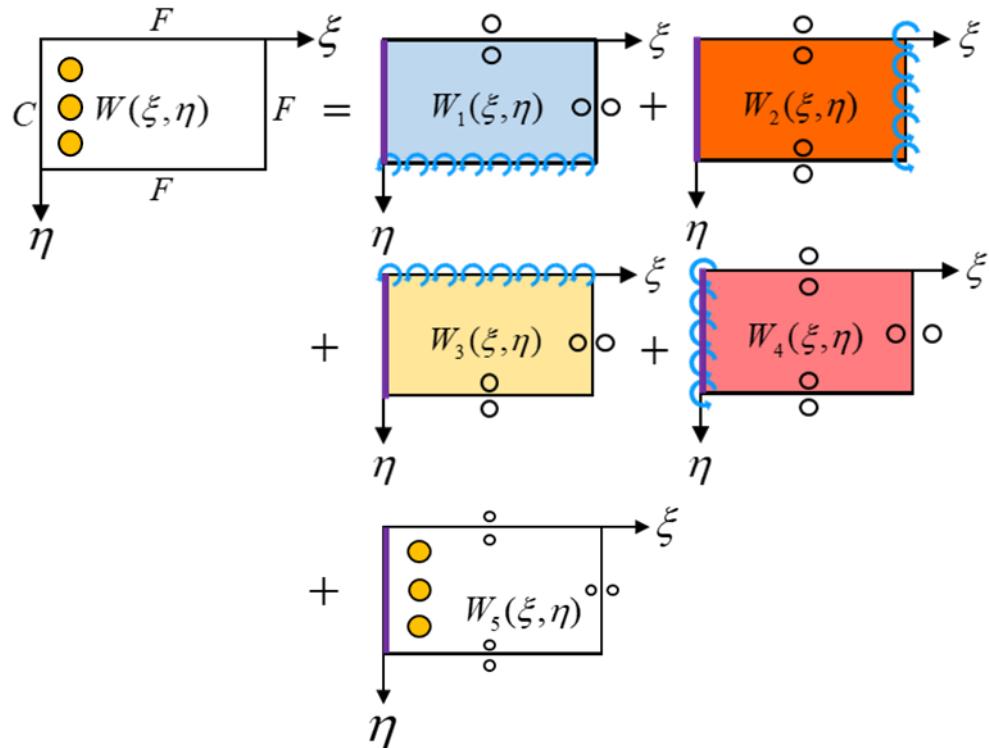


圖 3-18 質量效應下疊加法分解圖

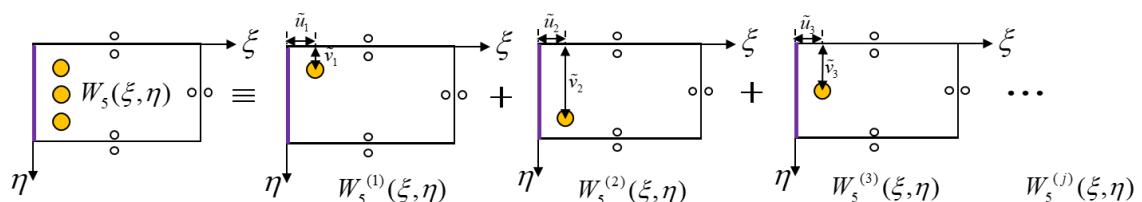


圖 3-19 多個質量點分解成數個單個質量點圖

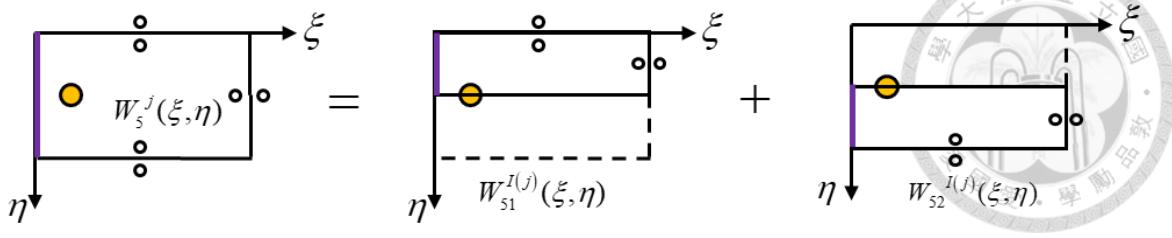


圖 3-20 單個質量點結構塊的水平切割圖

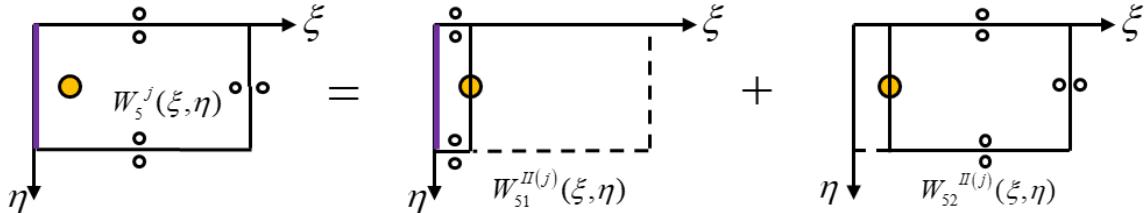


圖 3-21 單個質量點結構塊的鉛直切割圖

### 3.2.4 理論解析與有限元素分析結果比較

因為疊加法所求得的平板位移解為一個無窮級數項，因此同樣先進行展開項數的收斂性分析，同 3.2.2 節，橫軸為展開項數、縱軸為展開項數  $N$  與  $N+1$  之共振頻率的比值，質量點分布於  $(1,0.25)$ 、 $(1,0.5)$ 、 $(1,0.75)$  處，即平板末端邊上的中央以及  $\frac{1}{4}$  與  $\frac{3}{4}$  處，且質量大小皆為 1 (g)，圖 3-22 為平板未受任何預應力作用的情況，圖 3-23 為平板受拉應力作用的情況，圖 3-24 為平板受壓應力作用的情況，可以發現在展開項數達到 20 項時，頻率的比值已經趨近於一，模型已達到收斂，因此在之後與有線元素分析比較時，疊加法的展開項數設定為 20 項。

為驗證具質量效應下疊加法理論的準確性，使用使用商用有限元素分析軟體 ABAQUS 2019 進行模擬分析。在材料常數、組件合成、交互關係、求解步驟、分割網格等設定皆與 3.2.2 節的設定相同。除了上述的設定外，還需額外進行質量點的設定，在交互關係中點選 Special 並選擇慣量( Inertia )，因為疊加法裡的質量效應是透過質量點的形式進行處理，因此配合疊加法，此處選擇點質量( Point mass/inertia )進行設定，質量點的位置與質量大小同疊加法的設定。

表 3-6 為具質量效應下疊加法理論解析與有限元素分析的比較，其中平板上的橘點代表質量點，從表中可以發現疊加法與有限元素模擬具有良好的對應性，兩



者在共振頻率上的誤差均控制在 2% 以內，在模態振型上也有著良好的對應性，且與表 3-3 相比可以發現在加入質量點後，不論是疊加法或是有限元素模擬，其所計算得到的共振頻率皆有下降的趨勢，以疊加法計算得到的第一共振頻率為例，從原本的 88.96 (Hz) 降至 53.72 (Hz)，符合普遍認為的質量效應會造成降頻的效果。表 3-7 為具質量效應且平板受拉應力下的比較，紅色箭頭代表施力的方向，力的大小為 10 (N)，可以發現疊加法與有限元素模擬具有良好的對應性，兩者在共振頻率上的誤差均控制在 2% 以內，且在模態振型上也有著良好的對應性，此外在質量效應影響下，對平板施加拉應力仍能提高其共振頻率，以疊加法計算的第一共振頻率為例，具質量效應下平板的共振頻率從 53.72 (Hz) 提升至 63.84 (Hz)。表 3-8 為具質量效應且平板受壓應力下的比較，紅色箭頭的含義與力的大小皆同表 3-7，可以發現疊加法與有限元素模擬具有良好的對應性，兩者在共振頻率上的誤差均控制在 2% 以內，且在模態振型上也有著良好的對應性，此外在質量效應影響下，對平板施加壓應力仍能降低其共振頻率，以疊加法計算的第一共振頻率為例，具質量效應下平板的共振頻率從 53.72 (Hz) 降低至 40.85 (Hz)。

表 3-6 (a) 具質量效應下疊加法與有限元素模擬比較

CFFF

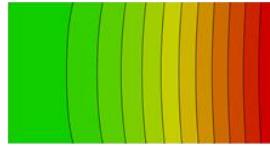
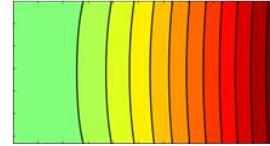
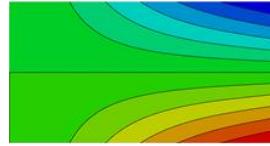
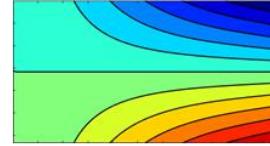
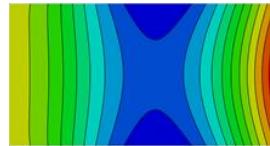
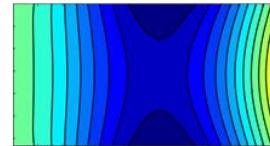
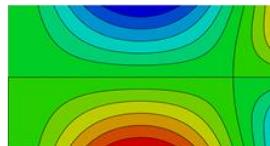
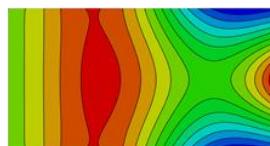
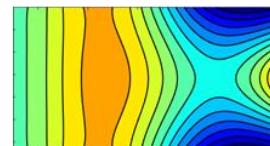
	Length: 53.5 (mm)	
	Width: 31.8 (mm)	
	Preload: 0 (N)	
	Position : (1,0.25) 、 (1,0.5) 、 (1,0.75)	
	Mass: 1 (g) per point	
Mode	FEM	Theory
1 W		
Frequency (Hz)	53.54	53.72 (0.34%)
2 W		
Frequency (Hz)	252.92	254.53 (0.64%)
3 W		
Frequency (Hz)	421.83	423.38 (0.37%)
4 W		
Frequency (Hz)	810.86	818.13 (0.9%)
5 W		
Frequency (Hz)	1171.7	1181.5 (0.84%)

表 3-6 (b) 具質量效應下疊加法與有限元素模擬比較

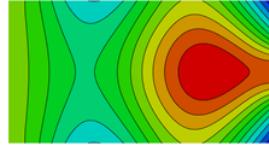
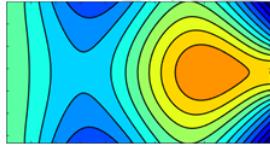
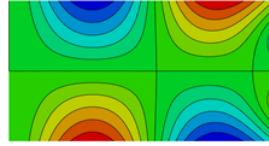
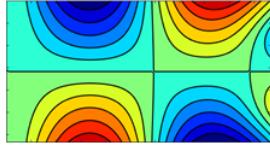
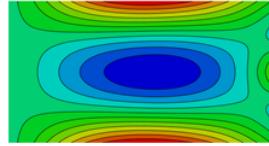
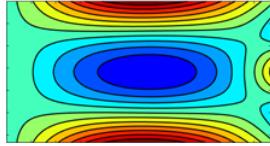
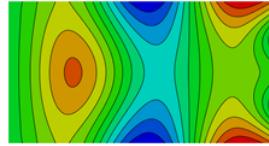
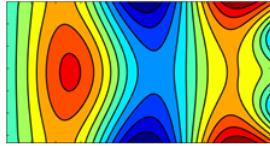
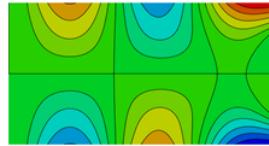
Mode		FEM	Theory
6	W		
	Frequency (Hz)	1446.8	1466.9 (1.39%)
7	W		
	Frequency (Hz)	1662.7	1680.6 (1.08%)
8	W		
	Frequency (Hz)	2071.1	2100 (1.4%)
9	W		
	Frequency (Hz)	2579.2	2613.5 (1.33%)
10	W		
	Frequency (Hz)	2825.9	2863.2 (1.32%)

表 3-7 (a) 具質量效應且受拉應力下疊加法與有限元素模擬比較

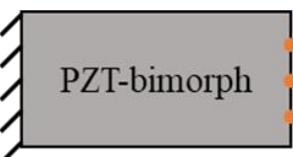
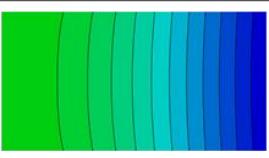
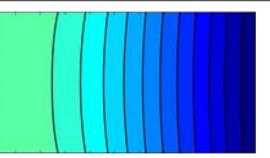
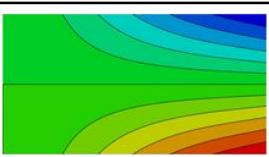
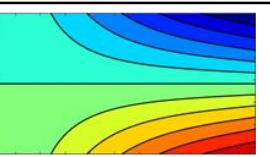
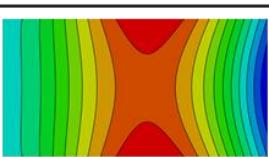
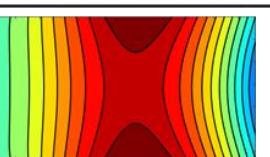
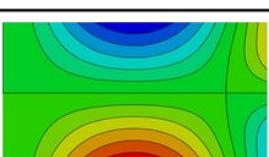
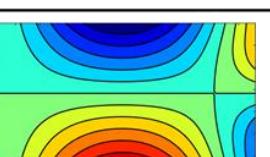
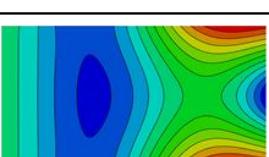
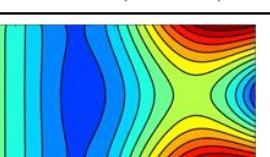
CFFF			
 PZT-bimorph		Length: 53.5 (mm)	
		Width: 31.8 (mm)	
		Preload: 10 (N)	
		Position : (1,0.25)、(1,0.5)、(1,0.75)	
		Mass: 1 (g) per point	
Mode		FEM	Theory
1	W		
	Frequency (Hz)	63.67	63.84 (0.27%)
2	W		
	Frequency (Hz)	255.39	257 (0.63%)
3	W		
	Frequency (Hz)	433.72	435.25 (0.35%)
4	W		
	Frequency (Hz)	817.35	824.62 (0.89%)
5	W		
	Frequency (Hz)	1178.1	1188.1 (0.85%)

表 3-7 (b) 具質量效應且受拉應力下疊加法與有限元素模擬比較

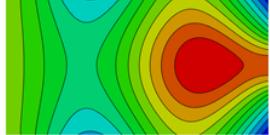
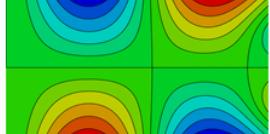
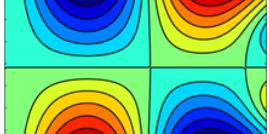
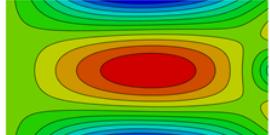
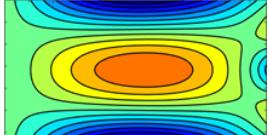
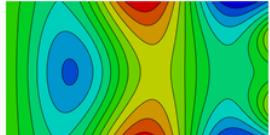
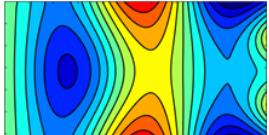
Mode		FEM	Theory
6	W		
	Frequency (Hz)	1453.6	1473.5 (1.37%)
7	W		
	Frequency (Hz)	1670.3	1688.3 (1.08%)
8	W		
	Frequency (Hz)	2072.9	2101.9 (1.4%)
9	W		
	Frequency (Hz)	2588.4	2623.1 (1.34%)
10	W		
	Frequency (Hz)	2833.4	2870.7 (1.32%)

表 3-8 (a) 具質量效應且受壓應力下疊加法與有限元素模擬比較

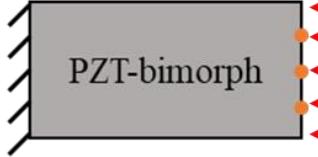
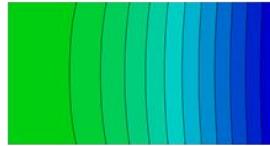
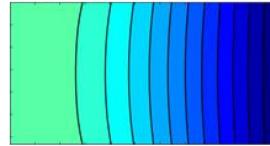
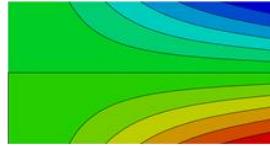
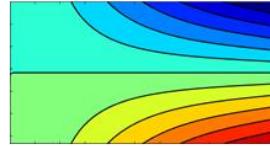
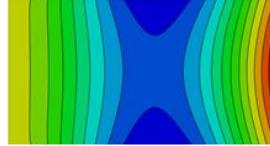
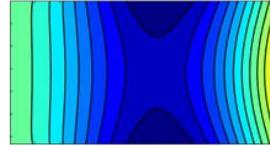
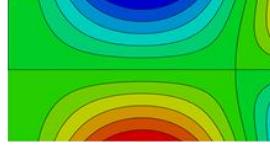
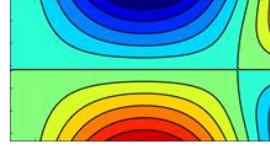
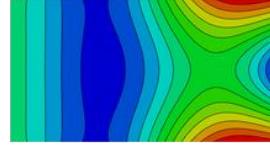
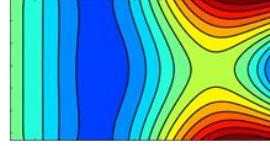
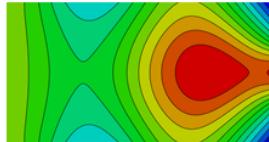
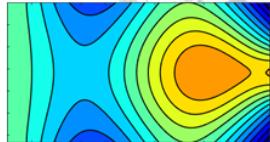
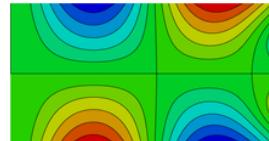
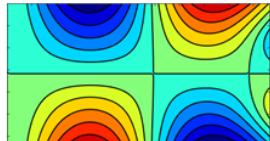
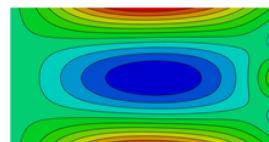
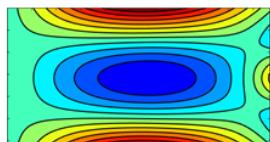
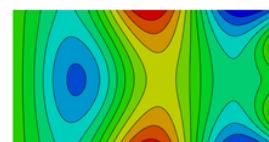
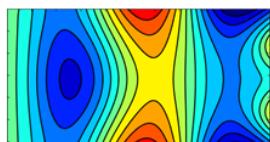
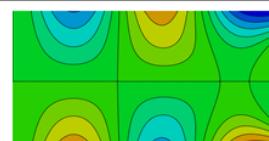
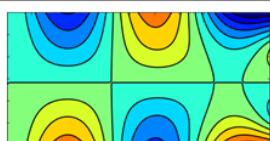
CFFF			
		Length: 53.5 (mm)	
		Width: 31.8 (mm)	
		Preload: 10 (N)	
		Position : (1,0.25)、(1,0.5)、(1,0.75)	
		Mass: 1 (g) per point	
Mode		FEM	Theory
1	W		
	Frequency (Hz)	40.62	40.85 (0.57%)
2	W		
	Frequency (Hz)	250.43	251.87 (0.58%)
3	W		
	Frequency (Hz)	409.59	411.2 (0.39%)
4	W		
	Frequency (Hz)	804.32	811.55 (0.9%)
5	W		
	Frequency (Hz)	1165	1174.6 (0.82%)

表 3-8 (b) 具質量效應且受壓應力下疊加法與有限元素模擬比較

Mode		FEM	Theory
6	W		
	Frequency (Hz)	1440.1	1460.3 (1.4%)
7	W		
	Frequency (Hz)	1655.1	1672.8 (1.07%)
8	W		
	Frequency (Hz)	2069.3	2098 (1.39%)
9	W		
	Frequency (Hz)	2569.9	2603.7 (1.32%)
10	W		
	Frequency (Hz)	2818.4	2855.6 (1.32%)

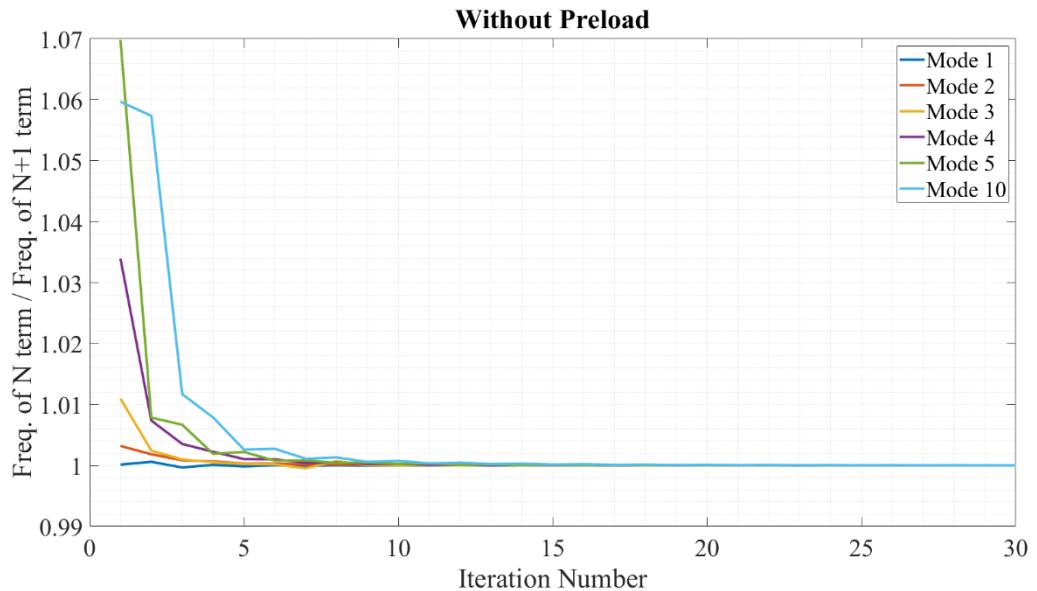


圖 3-22 具質量效應之平板疊加法收斂性分析

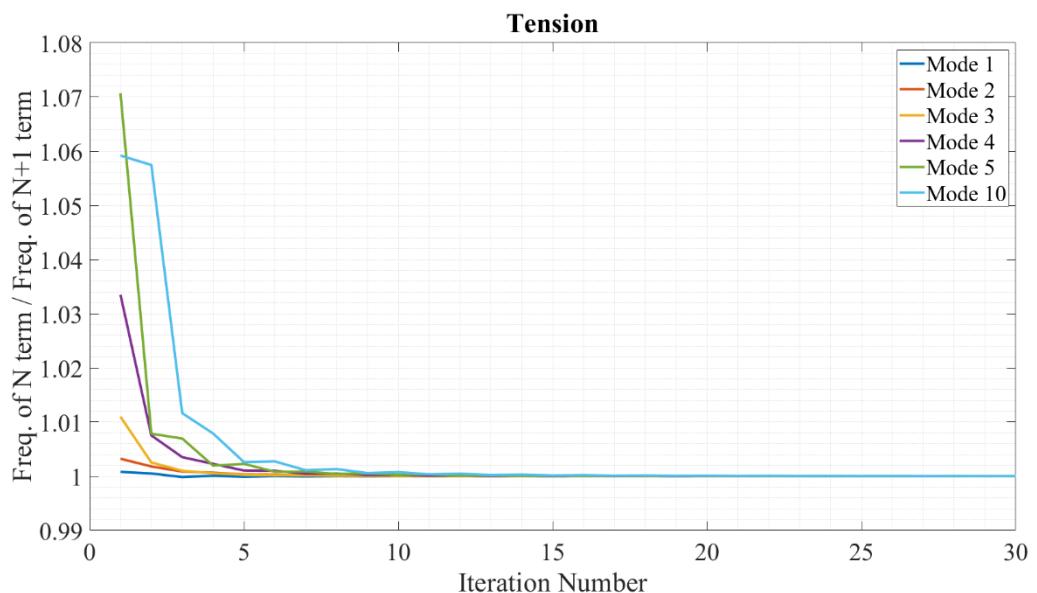


圖 3-23 具質量效應且受拉應力作用之平板疊加法收斂性分析

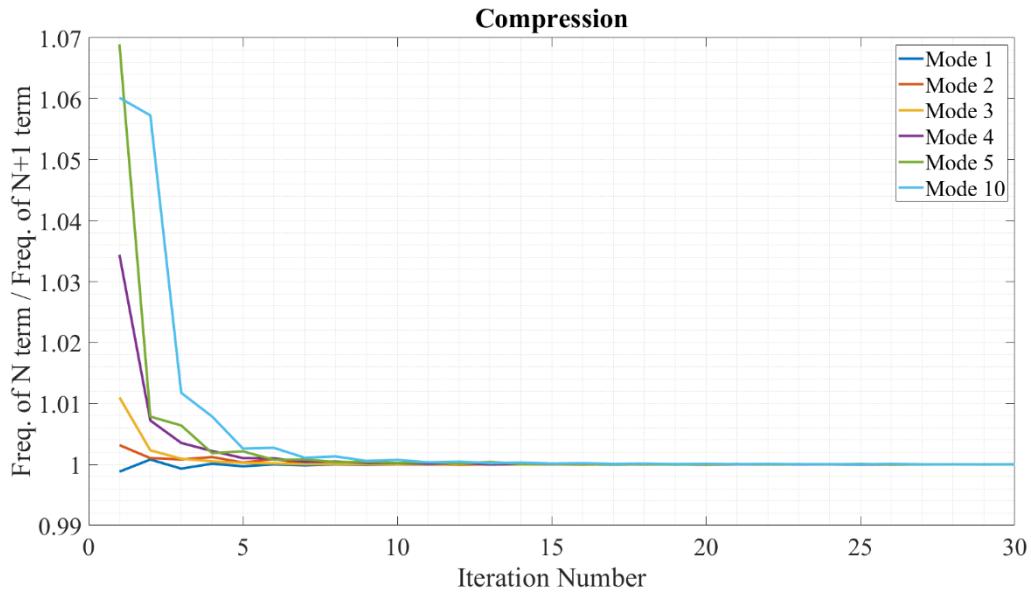


圖 3-24 具質量效應且受壓應力作用之平板疊加法收斂性分析

### 3.3 磁力計算模型

本研究將磁鐵附著於壓電雙晶片上，藉由磁鐵的吸力或斥力來來改變平板的軸向剛性以對平板的共振頻率進行升頻或降頻，本節針對磁鐵的磁力特性進行討論，導入 Akoun 等人所提出的矩形磁鐵磁力模型[35]，根據磁鐵間的距離去計算其對應的磁力大小，進而得知壓電片的受力量值，並基於上一節所推導的疊加法理論計算對應的共振頻率變化。

#### 3.3.1 理論解析

假設空間中存在兩個矩形磁鐵，並於兩個磁鐵中心位置各自建立其三維坐標系統，其中一個為  $xyz$  坐標系，而該磁鐵的於三個方向下的長度分別為  $2a$ 、 $2b$ 、 $2c$ ，其磁化強度為  $J$ ，另一個為  $XYZ$  坐標系，而該磁鐵的於三個方向下的長度分別為  $2A$ 、 $2B$ 、 $2C$ ，其磁化強度為  $J'$ 。而兩磁鐵中心的相對距離為  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ ，如圖 3-25 所示。首先定義磁鐵的表面磁荷密度為：

$$\sigma = \vec{J} \cdot \vec{n} \quad (3-449)$$

其中  $\vec{n}$  為平面之法向量。接著考慮兩磁鐵在  $2a \times 2b$  與  $2A \times 2B$  兩個平行平面上的位



能，並可寫為下式：

$$U = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \int_{-A}^A \int_{-B}^B \frac{\sigma\sigma'}{4\pi\mu_0 r} dYdXdYdx \quad (3-450)$$

其中  $\mu_0$  為真空磁導率， $r$  為  $2a \times 2b$  平面上任一點與  $2A \times 2B$  平面上任意點間的距離，並可寫為：

$$r = \sqrt{(\alpha + X - x)^2 + (\beta + Y - y)^2 + \gamma^2} \quad (3-451)$$

由於兩個磁鐵的磁化強度  $J$  與  $J'$  其方向是垂直於  $2a \times 2b$  與  $2A \times 2B$  平面的，因此根據(3-449)式可將兩個磁鐵的表面電荷密度整理為：

$$\sigma = |\vec{J}|, \sigma' = |\vec{J}'| \quad (3-452)$$

將(3-452)式帶回(3-450)式進行代換，同時將(3-450)式中的四重積分展開並表示成：

$$U = \frac{JJ'}{4\pi\mu_0} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{m=0}^1 \sum_{n=0}^1 (-1)^{i+j+k+l+m+n} \varphi(u_{ij}, v_{kl}, w_{mn}, d) \quad (3-453)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{x,y,z}(u_{ij}, v_{kl}, w_{mn}, d) = & \frac{1}{2} u_{ij} (v_{kl}^2 - w_{mn}^2) \ln(d - u_{ij}) + \frac{1}{2} v_{kl} (u_{ij}^2 - w_{mn}^2) \ln(d - v_{kl}) \\ & + u_{ij} v_{kl} w_{mn} \arctan\left(\frac{u_{ij} v_{kl}}{d w_{mn}}\right) + \frac{d}{6} (u_{ij}^2 + v_{kl}^2 - 2w_{mn}^2) \end{aligned} \quad (3-454)$$

$$\begin{cases} u_{ij} = \alpha + (-1)^j A - (-1)^i a \\ v_{kl} = \beta + (-1)^l B - (-1)^k b \\ w_{mn} = \gamma + (-1)^n C - (-1)^m c \\ d = \sqrt{u_{ij}^2 + v_{kl}^2 + w_{mn}^2} \end{cases} \quad (3-455)$$

接著將位能取梯度(Gradient)並加上負號，其各分量即為兩個磁鐵在三個方向上所擁有的磁力大小。

$$\vec{F} = -\nabla U \quad (3-456)$$

其中磁鐵間的吸力或斥力算法皆相同，差別僅在於磁化方向，若兩磁鐵具有相同的磁化方向會求得吸力，相反方向則會求得斥力。

$$F = \frac{JJ'}{4\pi\mu_0} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \sum_{m=0}^1 \sum_{n=0}^1 (-1)^{i+j+k+l+m+n} \phi(u_{ij}, v_{kl}, w_{mn}, d) \quad (3-457)$$



For  $F_x$

$$\begin{aligned}\phi_x(u_{ij}, v_{kl}, w_{mn}, d) = & \frac{1}{2} (v_{kl}^2 - w_{mn}^2) \ln(r - u_{ij}) + u_{ij} v_{kl} \ln(r - v_{kl}) \\ & + v_{kl} w_{mn} \arctan\left(\frac{u_{ij} v_{kl}}{d w_{mn}}\right) + \frac{1}{2} d u_{ij}\end{aligned}\quad (3-458)$$

For  $F_y$

$$\begin{aligned}\phi_y(u_{ij}, v_{kl}, w_{mn}, d) = & \frac{1}{2} (u_{ij}^2 - w_{mn}^2) \ln(r - v_{kl}) + u_{ij} v_{kl} \ln(r - u_{ij}) \\ & + u_{ij} w_{mn} \arctan\left(\frac{u_{ij} v_{kl}}{d w_{mn}}\right) + \frac{1}{2} d v_{kl}\end{aligned}\quad (3-459)$$

For  $F_z$

$$\begin{aligned}\phi_z(u_{ij}, v_{kl}, w_{mn}, d) = & -u_{ij} w_{mn} \ln(r - u_{ij}) - v_{kl} w_{mn} \ln(r - v_{ij}) \\ & + u_{ij} v_{kl} \arctan\left(\frac{u_{ij} v_{kl}}{d w_{mn}}\right) - d w_{mn}\end{aligned}\quad (3-460)$$

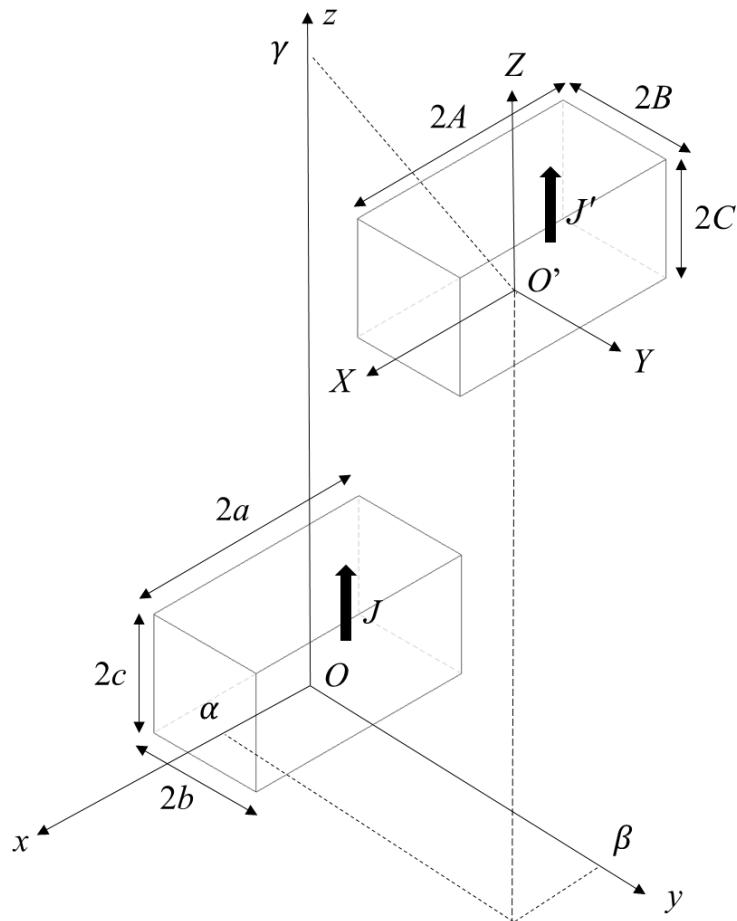


圖 3-25 磁鐵相對位置圖



### 3.2.2 磁力量測實驗

基於上一小節引入的矩形磁鐵磁力計算模型，本小節將進行磁鐵的磁力量測以驗證磁力計算模型的準確性。實驗部分使用彈簧秤量測兩個不同尺寸磁鐵間平行磁化方向的磁力量值，即圖 3-25 中  $z$  方向的力量大小。圖 3-26 為磁力量測實驗示意圖，圖 3-27 為實驗架設圖，將尺寸較小的磁鐵附著在 S 型掛鉤上，並將其掛在彈簧秤上，最後將彈簧秤固定於鐵管上並置於龍門平台的外框上，而尺寸較大的磁鐵則固定於龍門平台的移動平台上，並於實驗過程中調整平台的高度藉此控制兩磁鐵的相對距離，同時記錄於該距離下的彈簧秤讀數。所使用的彈簧秤如圖 3-28 所示，為 Jin Yuan Instrument Factory 所製造，實驗中總共使用三種彈簧秤，其所能量測到的最大力量分別為 500 (g)、1000 (g)、3000 (g)，其最小刻度為分別為 10 (g)、20 (g)、50 (g)，在實驗初期使用精度較高、量測上限較低的彈簧秤，隨著磁力不斷增加，則陸續替換成量測上限較高的彈簧秤。使用的磁鐵為釤鐵硼強力磁鐵，共有兩種尺寸，分別為  $10 \times 5 \times 5$  ( $mm^3$ ) 與  $30 \times 20 \times 10$  ( $mm^3$ )，如圖 3-29、圖 3-30 所示。

表 3-9 磁力理論參數設定

Material Property	Symbol	Neodymium magnet (NdFeB)
Remanent magnetization ( $T$ )	$J$	1.2
Length of large magnet ( $mm$ )	$A$	15
Width of large magnet ( $mm$ )	$B$	10
Height of large magnet ( $mm$ )	$C$	5
Length of small magnet ( $mm$ )	$a$	5
Width of small magnet ( $mm$ )	$b$	2.5
Height of small magnet ( $mm$ )	$c$	2.5

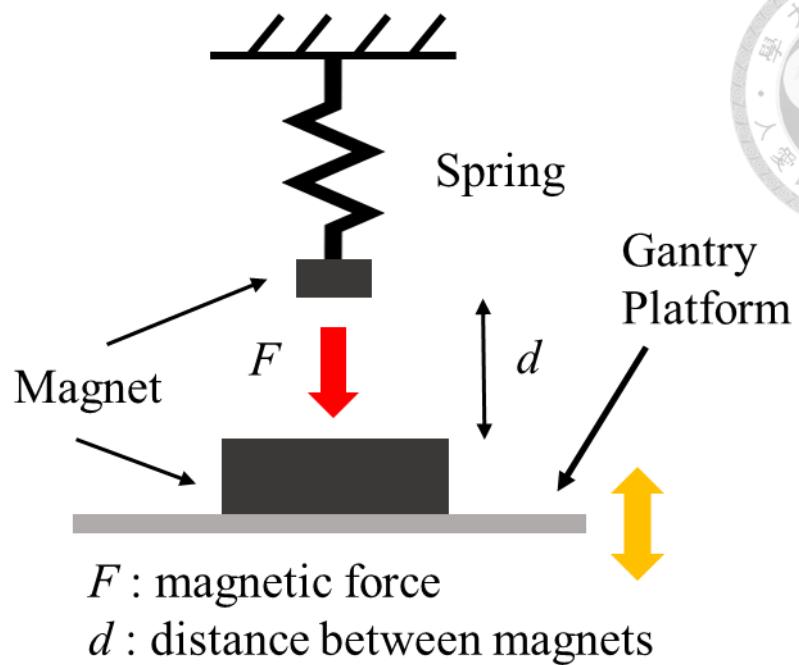


圖 3-26 磁力量測實驗示意圖

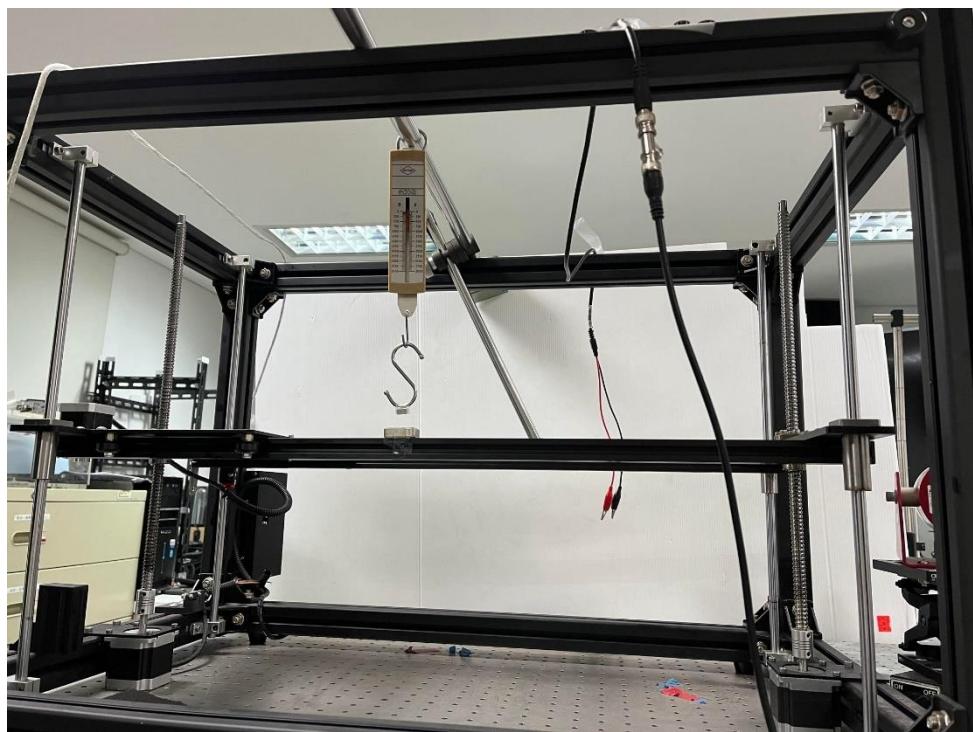


圖 3-27 磁力量測實驗實驗架設圖



圖 3-28 彈簧秤



圖 3-29 鈦鐵硼磁鐵  $10 \times 5 \times 5$  ( $mm^3$ )



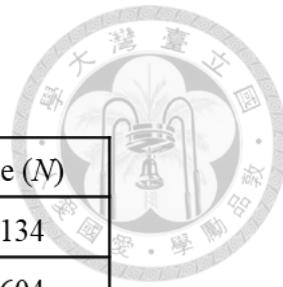
圖 3-30 鈦鐵硼磁鐵  $30 \times 20 \times 10$  ( $mm^3$ )



### 3.2.3 結果討論

在實驗一開始會先透過電子秤量測附有小磁鐵的 S 型掛勾的重量，並於之後實驗中將彈簧秤所記錄到的數值扣除該重量，以獲得確切磁力量值。表 3-10 為實驗量測結果，表格中的距離代表兩磁鐵的中心距，此外表格中的力量大小已先扣除小磁鐵與掛鉤的重量，即  $12.41\text{ (g)}$ ，並進行單位換算所得到的結果。圖 3-31 為將實驗所量測到的結果與磁力理論進行比較，其中藍色曲線代表理論數據，橘色點為實驗數據，理論計算上兩磁鐵的中心位置在  $x$ 、 $y$  坐標上是相同的，僅在  $z$  方向上有變化。從圖 3-31 中可以發現當兩磁鐵的表面距離大於  $20\text{ (mm)}$  時，理論與實驗有著良好的對應性，但隨著表面距離不斷縮小，兩者的誤差逐漸增加，推測主要由於距離的量測誤差所導致，由於磁鐵本身的性質影響，在量測磁鐵間面到面的距離時若使用游標卡尺則會受磁力吸引，造成量測上的不變，因此在實驗過程中是使用市售塑膠尺進行量測，故在距離上的量測會存在部分誤差，此外從圖中可以發現不管是理論計算或是實驗量測，磁力在中心距變小時，其變化量會越大，因此上述所提到在距離量測產生的誤差，當距離越小時其反應在磁力上的誤差則越為劇烈，特別當中心距小於  $10\text{ (mm)}$  時誤差會較為明顯，其磁力最大誤差會來到約略  $1\text{ (N)}$ ，不過當中心距大於  $10\text{ (mm)}$  時，理論與實驗的誤差相較之下則沒那麼明顯，兩者依舊有不錯的對應性。

表 3-10 磁力量測實驗結果



Distance (mm)	Force (N)	Distance (mm)	Force (N)
44	0.0842	21	0.6134
43	0.0940	19	0.7604
42	0.0989	17	0.8584
41	0.1038	15	1.1524
40	0.1087	14	1.2504
39	0.1234	12	1.5444
38	0.1332	10	1.9364
36	0.1528	9	2.2304
35	0.1724	8.5	2.4264
34	0.1920	8	2.5244
33	0.2116	7.5	2.7204
32	0.2214	7	2.9164
31	0.2508	6.5	3.1124
29	0.2704	6	3.3084
27	0.3194	5.5	3.5044
26	0.3684	5	3.7004
23	0.5154	4.5	3.8964
22	0.5644	4	4.0924

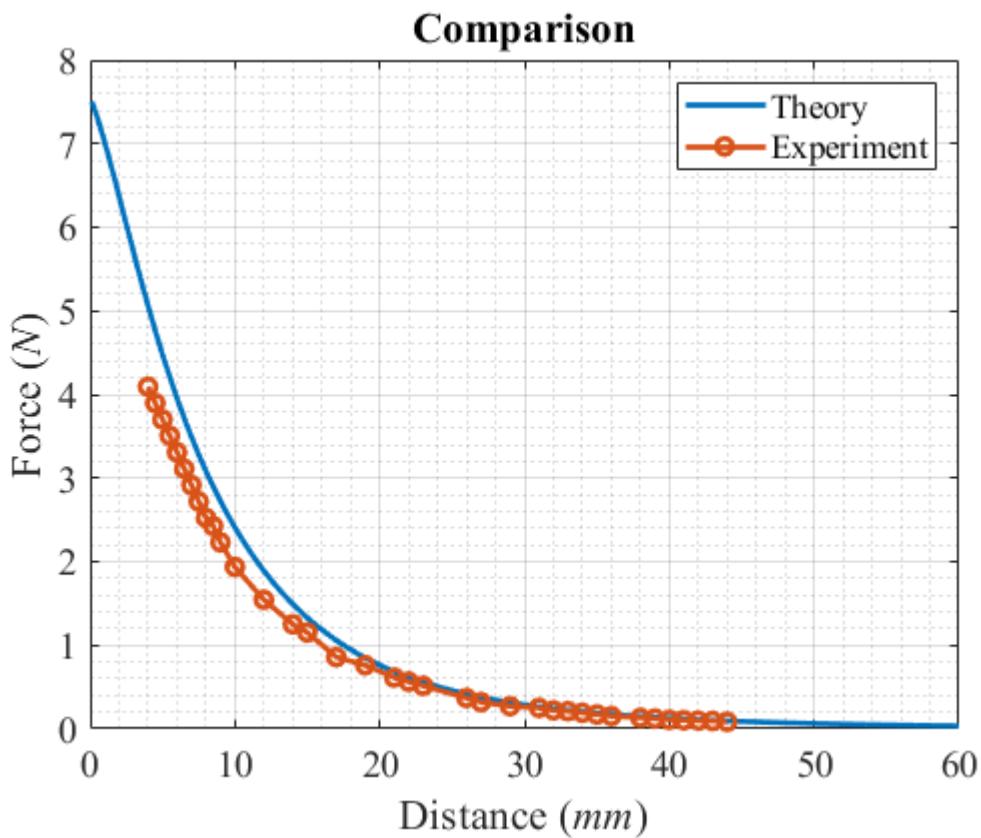


圖 3-31 磁力理論與實驗比較

### 3.4 壓電陶瓷雙晶片之共振頻率量測

本節基於先前所推導的平板疊加法理論，搭配實驗驗證平板受預應力下共振頻率的變頻效果，透過於壓電陶瓷雙晶片末端附加磁鐵來施以拉應力或壓應力，並給予壓電片上下表面一電位差來進行激振，藉由雷射督卜勒測振移(LDV)與電子斑點干涉術來量測壓電片的共振頻率與模態振型，與理論進行比較以驗證其準確性。

#### 3.4.1 實驗架設

圖 3-32 為本研究所使用的壓電試片模型，淺灰色薄板代表壓電陶瓷雙晶片(SBS)，並於最右端施加單邊固定邊界，橘色部分為壓克力，用以銜接壓電片與磁鐵，同時也確保磁鐵所受到的磁力能均勻地施加給壓電片，其在xyz三軸上的尺寸分別為 $12 \times 35 \times 17.5 \text{ (mm}^3\text{)}$ ，並在中央挖一個 $31.8 \text{ (mm)} \times 0.52 \text{ (mm)}$ 、深 $5 \text{ (mm)}$ 的槽供壓電片插入並固定，灰色長方體為釤鐵硼強力磁鐵，作為壓電片所受的預應力

來源，使用兩個磁鐵是為了避免壓電片在受壓應力的過程中，因受力不平衡導致發生 $z$ 軸方向的變形，因此在試片的設計上使用兩個磁鐵來避免不平衡的情況並將磁鐵置於壓克力結構的中央，磁鐵在三軸上的尺寸分別為 $5 \times 10 \times 5 (mm^3)$ ，且兩磁鐵的磁化方向為同向且平行 $x$ 軸，在壓電片、壓克力與磁鐵的組合上使用市售的AB膠進行黏著固定，試片實體圖如圖 3-33 所示，壓電片固定端的處理方式為利用兩片壓克力搭配螺絲進行固定，並在兩片壓克力與壓電片的接觸面上抹上 AB 膠進行確保其能緊密貼合，以此形成固定邊界。

圖 3-34 為使用 LDV 量測試片共振頻率實驗的示意圖，圖 3-35 為實驗實體架設圖，將大磁鐵( $30 \times 20 \times 10 mm^3$ )固定於龍門平台上，藉由控制龍門平台的移動距離來調整大磁鐵與試片的距離，如圖 3-36 所示，進而影響壓電片所受的拉力或壓力的量值，並利用壓電片的逆壓電效應，藉由 LDV 量測系統輸入掃頻電訊號來對壓電片進行激振，透過 LDV 量測其振動響應，再經由快速傅立葉轉換(Fast Fourier Transform, FFT)，將量測到的時域訊號轉為頻域訊號，以此獲得試片受不同大小且不同方向預應力下的共振頻率，其中 LDV 的量測點為靠近固定邊界的試片邊緣處，該位置可避開試片前幾個模態的節線處，同時也不會有太多雜訊，可得到一個良好的量測效果。圖 3-37 為 ESPI 實驗架設圖，先藉由 LDV 量測實驗得到試片的共振頻率，再透過函數產生器(Function Generator)給予試片定頻正弦波訊號進行激振，接著將氦氖雷射射向試片與參考平面，最後再使用相機拍下所產生的干涉條紋以獲得試片共振下的模態振型。

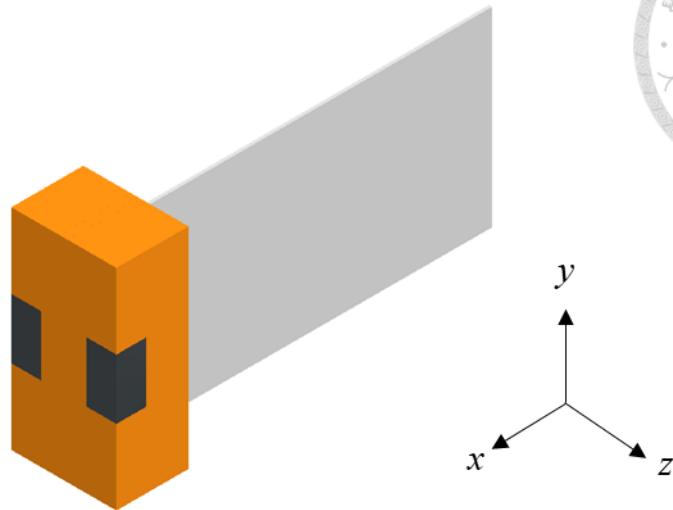


圖 3-32 壓電陶瓷雙晶片附加磁鐵模型示意圖



圖 3-33 壓電陶瓷雙晶片附加磁鐵之實體試片

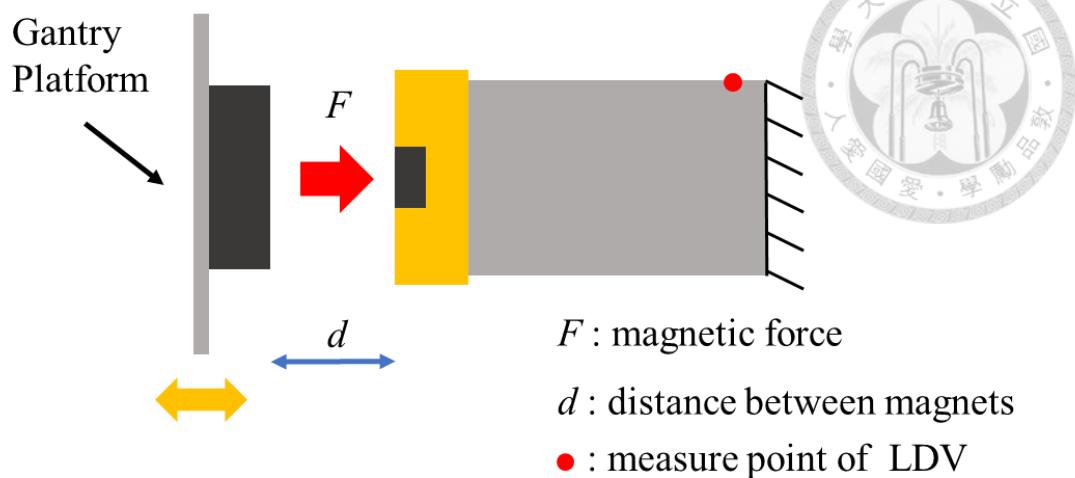


圖 3-34 LDV 實驗示意圖

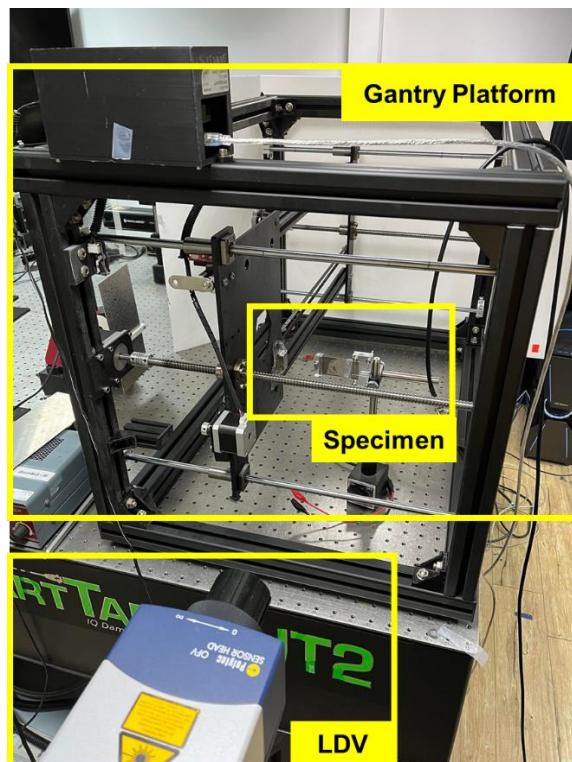


圖 3-35 LDV 實驗架設圖

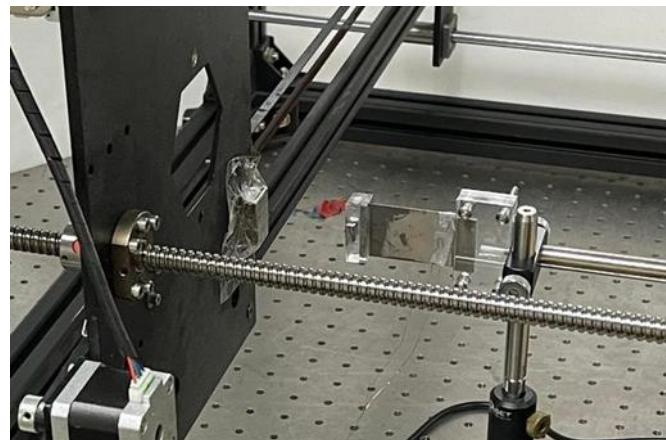


圖 3-36 試片處放大圖

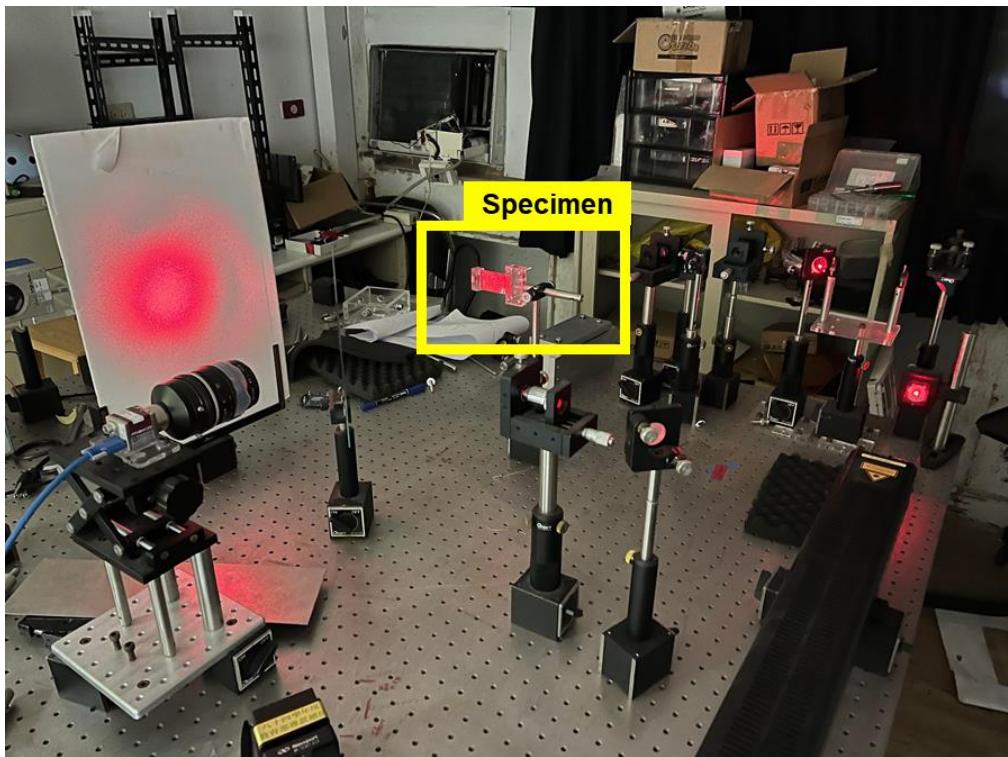


圖 3-37 ESPI 實驗架設圖

### 3.4.2 結果討論

首先說明疊加法的參數設定，將疊加法的展開項數設定為 20 項，平板模型使用先前的壓電平板的幾何尺寸，未將之後加入的壓克力結構與釹鐵硼磁鐵的幾何尺寸納入考慮，但會將兩者所造成的質量效應納入疊加法計算中，將試片中壓克力與磁鐵的總質量等效為五個質量點，並將這五個質量置於平板的末端並均勻排列，

其中由於試片末端的中央附加了兩個磁鐵，考慮磁鐵的重量大於壓克力，因此將中間質量點的質量設定為兩個磁鐵的重量，其餘壓克力的重量則分布在另外四個質量點上，並且最兩側的質量點因為位在角落，其所能等效的質量應該會少於靠近中央的兩個質量點，因此將角落與靠近中央的質量點以1:3的比例分配剩餘的壓克力質量，質量點的位置分布與質量大小如圖 3-40 所示，其中單個磁鐵的重量為 1.875 (g)，壓克力的總重為 7.92 (g)，平板受力的量值則是參考表 3- 10，根據大磁鐵與試片上小磁鐵的距離去求得磁鐵的受力，且因為試片上有兩個磁鐵，因此還會將從所求得的力量大小乘以二再作為疊加法理論的輸入。

接著說明有限元素分析的設定，使用商用有限元素分析軟體 ABAQUS 2019 進行模擬分析，大部分的設定皆與 3.2.2 節的設定相同，若無特別提及則沿用 3.2.2 節中所使用的設定，與疊加法的模型不同，有限元素分析的模型則是使用真實試片的模型進行模擬，除了質量效應外，也會將壓克力與磁鐵的幾何尺寸納入模擬之中以貼近真實實驗情況，模型如圖 3-38 所示，壓克力與磁鐵的材料常數如表 3-11 所示。在交互設定的部分，將所有壓電片、壓克力與磁鐵有接觸到的部分設定為緊密連接，而在負載設定中，原先力量是直接作用於平板上，但實際情況為磁鐵受到磁力作用，並將力傳遞給壓克力與壓電片，因此變更面積荷載的作用對象並將其作用於兩個磁鐵上，力量大小部分則參考疊加法參數設定中使用的方法，且由於面積荷載的單位為壓力，因此會再將力量除以兩個磁鐵於  $x$  軸上的截面積。網格切割部分，由於壓克力結構是從電腦輔助設計 (Computer Aided Design, CAD) 軟體 Inventor 事先繪製好並匯入，並非出自 ABAQUS 內建的繪圖系統，因此在網格切割上不太能使用六面體網格，因此壓克力結構部分是使用三維 10 節點應力元素(C3D10)，網格尺寸為 1.75 (mm)，而磁鐵使用的是三維 20 節點應力減積分元素(C3D20R)。

接著進行理論、有限元素分析與實驗的比較，圖 3- 39 為 LDV 所量測在無受力下試片的頻率響應，峰值所對應到的頻率即為試片的共振頻率，從圖中可以發現 LDV 的量測結果僅能得知試片的共振頻率量值，不能判斷試片的模態振型，若有

相近的共振頻率存在時，可能會在後續與理論或有限元素模擬比較時，使用到不同的模態進行共振頻率準確性的比較而得到無意義的結果，因此經由 LDV 量測獲得試片的共振頻率後，接著使用 ESPI 進行全域模態振型量測，確認共振頻率所對應的模態後再進行共振頻率量值得比較。

表 3-12 為在試片未受力情況下的試片模態振型比較，此部分主要著重於試片模態振型的討論，共振頻率的誤差則會於之後再做討論。從表中可以發現在彎曲模態上，即試片的第一、第三模態在理論、有限元素分析與 ESPI 三者的模態形狀有著良好的對應性，而第五模態疊加法無法跑出解析結果，推測與平板模型有關，疊加法使用的是平板模型加上質量點，並沒有考慮壓克力與磁鐵的幾何結構，與有限元素模擬跟 ESPI 拍攝的模型在有所落差，導致疊加法並沒有第五模態的解析結果。在扭轉模態上可以發現 ESPI 無法拍攝到試片的第二模態，而從理論與有限元素分析的模態判斷其為第一扭轉模態，主要因為所使用的壓電片為 SBS 型式，在該型式下給與壓電片電訊號時，上層壓電陶瓷與下層壓電陶瓷會有一伸一縮的現象，容易產生彎曲模態，扭轉模態會因為上下的變形相互抵銷而難以量測，所以無法拍攝到試片的第二模態，而第六模態雖然能拍攝到，但可以發現其模態形狀也較不完整，主要也跟 SBS 型式有關，但依舊能判斷其為扭轉模態並與有限元素分析的結果有良好對應，而疊加法的第六模態形狀中可以發前試片左端的振型與其他兩者有著明顯落差，主要也是因為並未考慮壓克力與磁鐵的幾何結構，該處為壓電片與壓克力緊密接觸的地方，因此共振時壓電片此處的變形會受到壓克力的抑制，所以其振型會出不來，可以在有限元素分析與 ESPI 的結果中看到，而疊加法解析中該處的振型並無幾何結構上的限制，所以才會與另外兩者有落差，但在試片中間到右側的部分，三者是有相互對應的。第四模態雖也是扭轉模態，但可以發現有限元素分析並沒有計算出這個模態，疊加法解析卻有這個模態，且兩者的振型是有相互對應，不過疊加法解析由於先前說的左側未受幾何結構限制，所以其振型的條紋比 ESPI 的還要再長一點，但基本上可以確定兩者應該是同個模態，此處值得討論的點在於

有限元素分析的模型比疊加法的模型更加貼近真實模型，但疊加法卻解析出有限元素分析得不到的結果，從表中可以發現 ESPI 拍攝下的第四與第六模態是極為相似的，對比疊加法的結果可以發現這兩個模態在模型的最左側有較明顯的差異，在第四模態中最左側並沒有明顯振型，第六模態則有明顯振型，從先前討論中得知與幾何結構的限制有關，那第四模態的情況可能與該情形類似，推測真實試片在第四模態的頻率共振時，其整體結構應該是接近於疊加法的模型，即壓克力結構在共振時並未對壓電片造成過多影響，純粹只有質量效應的影響，而在有限元素分析中壓克力結構與壓電片是設定為緊密接觸，兩者於接觸面上的任意方向位移必須是一樣的，因此時時受壓克力結構影響，但真實試片在製作上可能無法達到壓克力與壓電片完美的緊密貼合，過程中難免會有一些瑕疵，所以才會出現有限元素分析中不存在但疊加法能求解的模態。表 3-13 為試片受拉力下的模態振型比較，表 3-14 則為試片受壓力下的比較，可以發現試片的模態與未受力下的模態是相似，模態的對應性也與未受力下情況相同，第一、第三模態與理論、有限元素分析有良好對應性，第六模態與有限元素分析有良好對應，與理論則在無壓克力結構部分有不錯的對應，第四模態與理論能對應上，第五模態則與有限元素分析能良好對應，最後在圖 3-40 還有一個峰值頻率未被討論到，即  $240.6\text{ (Hz)}$ ，經由 ESPI 發現在該頻率下無法找到一個規則的模態振型，且於疊加法解析與有限元素分析中皆未出現，因此推測這個峰值應該是因為試片本身結構上的瑕疵所耦合出來的共振現象，所以才跟理論與有限元素分析無法對應，而在後續共振頻率的討論則會把這個頻率剔除在外，不對該頻率進行比較。

以下討論理論、有限元素分析與 LDV 量測三者在共振頻率上的差異，圖 3-41 至圖 3-45 為 LDV 所量測的受拉力下試片的頻率響應，並將其數據整理成表 3-15 以進行共振頻率的比較，從表中可以發現試片的第二、第四、第五與第六模態的共振頻率與疊加法、有限元素分析的誤差皆落在 5% 附近，此處誤差來源應與試片本身結構上的誤差有關，因為試片本身的結構較為複雜，因此試片的加工過程中可能

有些許瑕疵，所以導致實驗量測與疊加法解析、有限元素分析的結果有誤差，但仍具有一定的參考性。在第一模態上可以發現隨著試片所受到的力逐漸增加，實驗量測與理論、有限元素分析的誤差會越來越大，此處應為先前磁力量測實驗的誤差所導致，因為理論、有限元素分析裡力量的輸入皆參考實驗結果，而從 3.3.3 節中的討論可以得知隨著磁力增大，量測結果會有較大的誤差，而再將其作為疊加法與有限元素分析的輸入可能使誤差累積，所以才導致隨著力量增加、誤差越來越大。在第三模態上實驗量測與理論、有限元素分析有著較大的誤差，特別是與疊加法的部分，主要是因為試片末端受壓克力的幾何結構影響，抑制了壓電片的位移而在此處形成類似固定邊界或彈性支撐邊界，因此造成的降頻現象較為明顯，而疊加法並未考慮壓克力幾何剛性的影響，所以才會與實驗量測有較大的誤差，而第一模態並未出現此現象，推測可能與模態形狀有關使得受壓克力幾何剛性的影響不多，所以並無此現象，而有限元素分析與實驗量測的誤差來源可能來自於試片本身結構的誤差，才導致兩者有較大的誤差。接著分析實驗量測中拉力所造成的共振頻率變化，可以發現在第二到第六模態中，共振頻率的變化並不明顯，此處應為施加的力量過小，且這些模態有較為高頻，所以共振頻率並無顯著變化，而第一模態則有明顯的增幅，在受 2.79 (N)的拉力作用後，共振頻率從原本的 30.6 (Hz)增加到 39.06 (Hz)。

圖 3- 46 至圖 3- 50 為 LDV 所量測的受壓力下試片的頻率響應，並將其數據整理成表 3- 16 以進行共振頻率的比較，在試片的第二、第四、第五與第六模態的共振頻率與疊加法、有限元素分析結果有約略 5 %的誤差，但整體依舊有一定的參考性。第一模態的表現與表 3- 15 的結果類似，隨著所受壓力增加，三者於共振頻率上的誤差也會逐漸增加，主要為磁力量測的誤差所導致。在第三模態上疊加法所求得的共振頻率與另外兩者差距較大，為疊加法的平板模型中並未考慮壓克力的幾何結構造成的降頻效果，才會產生較大的誤差，而有限元素分析與 LDV 實驗量測的誤差則推測為試片本身結構上的瑕疵所導致。接著討論實驗量測中壓力對試片共振頻率的影響，同表 3- 15 的結果，因為施加的力量偏小因此其對高頻模態的

影響並不明顯，而在第一模態上則有較為顯著的效果，在施加 2.79 (N)的壓力後，試片第一模態的共振頻率從原本的 30.6 (Hz)降至 21.56 (Hz)。

最後將理論、有限元素分析與 LDV 的第一模態共振頻率結果繪製成圖進行比較，如圖 3-51 所示，其中橫軸代表試片所受的力量大小，正值代表試片受拉力、負值代表受壓力，縱軸為頻率，藍色線段代表疊加法的結果，橘色線段代表有限元素分析的結果，黑色圓點為 LDV 量測結果並將其連成線段以判斷其趨勢。從圖中可以發現疊加法與有限元素分析兩者的斜率是相近的，而與實驗數據的斜率則明顯有落差，主要為磁力量測的誤差所導致，且從斜率判斷可以發現 LDV 量測到的試片變頻效果是比疊加法、有限元素分析的結果還要好，代表試片實際所受的力量是大於疊加法與有限元素分析所輸入的力量，與 3.3.3 節中的磁力量測結果相互呼應，驗證所量測到的磁力量值小於理論值，也小於試片實際所受到的磁力大小，使得理論與有限元素分析低估了實際的變頻效果。

表 3-11 壓克力與欽鐵硼磁鐵的材料常數

Material Property	Symbol	Value
<b>Arcylic</b>		
Density ( $kg/m^3$ )	$\rho$	1180
Young's Modulus ( $N/m^2$ )	$E$	$3.2 \times 10^9$
Poisson's ratio	$\nu$	0.35
<b>Neodymium magnet</b>		
Density ( $kg/m^3$ )	$\rho$	7500
Young's Modulus ( $N/m^2$ )	$E$	$1.6 \times 10^{11}$
Poisson's ratio	$\nu$	0.24

表 3-12 無受力下試片之模態振型比較



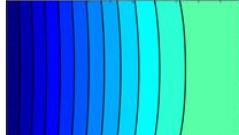
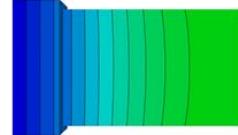
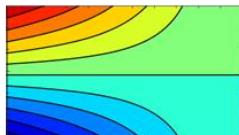
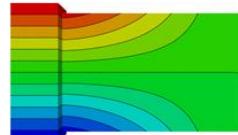
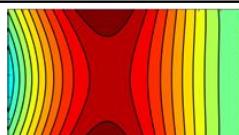
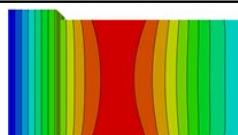
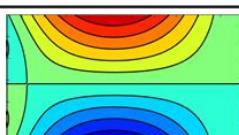
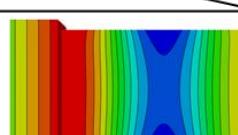
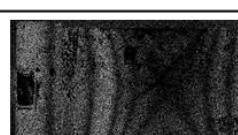
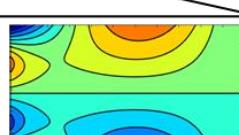
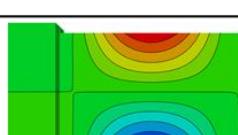
Mode		Theory	FEM	ESPI
1	W			
	Frequency (Hz)	31.84	29.9	31 (10 mVpp)
	Error (%)	2.7	-3.55	-
2	W			
	Frequency (Hz)	140.17	137.25	
	Error (%)	-	-	
3	W			
	Frequency (Hz)	394.1	282.40	322 (0.2 Vpp)
	Error (%)	22.39	-12.3	-
4	W			
	Frequency (Hz)	713.66		724 (0.5 Vpp)
	Error (%)	-1.43		-
5	W			
	Frequency (Hz)		856.73	824 (0.5 Vpp)
	Error (%)		3.97	-
6	W			
	Frequency (Hz)	959.65	968.07	1011 (1 Vpp)
	Error (%)	-5.08	-4.25	-

表 3-13 受拉應力下的試片模態比較

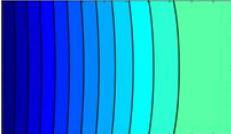
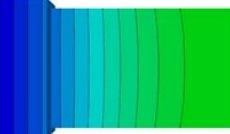
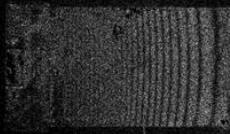
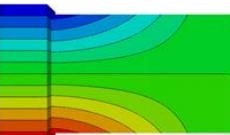
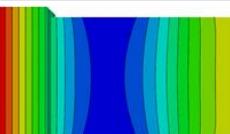
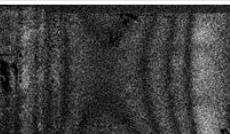
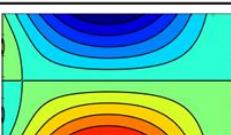
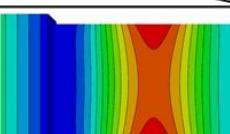
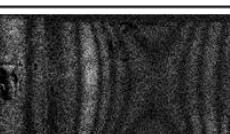
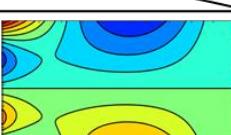
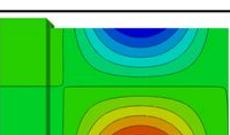
Mode		Theory	FEM	ESPI
1	W			
	Frequency (Hz)	33.34	31.66	34.8 (10 mVpp)
	Error (%)	-4.2	-9.02	-
2	W			
	Frequency (Hz)	140.5	137.53	
	Error (%)	-	-	
3	W			
	Frequency (Hz)	396.41	284.65	325 (0.2 Vpp)
	Error (%)	21.97	-12.42	-
4	W			
	Frequency (Hz)	714.91		735 (0.6 Vpp)
	Error (%)	-2.73		-
5	W			
	Frequency (Hz)		858.47	830 (0.5 Vpp)
	Error (%)		3.43	-
6	W			
	Frequency (Hz)	959.88	969.04	1013 (0.5 Vpp)
	Error (%)	-5.24	-4.34	-

表 3-14 受壓應力下的試片模態比較

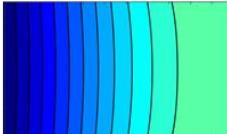
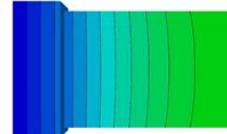
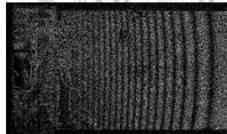
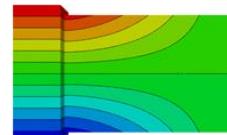
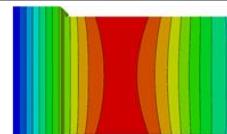
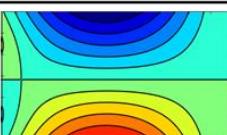
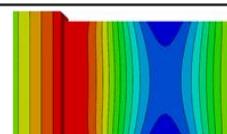
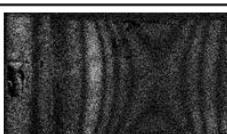
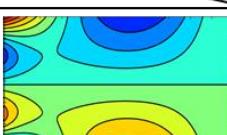
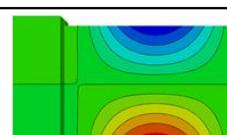
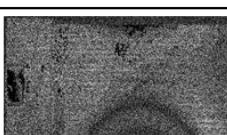
Mode		Theory	FEM	ESPI
1	W			
	Frequency (Hz)	30.25	28.01	25.9 (10 mVpp)
	Error (%)	16.8	8.15	-
2	W			
	Frequency (Hz)	139.73	136.98	
	Error (%)	-	-	
3	W			
	Frequency (Hz)	391.79	280.13	324 (0.2 Vpp)
	Error (%)	20.92	-13.54	-
4	W			
	Frequency (Hz)	712.39		720 (0.5 Vpp)
	Error (%)	-1.06		-
5	W			
	Frequency (Hz)		855.01	825 (0.5 Vpp)
	Error (%)		3.64	-
6	W			
	Frequency (Hz)	959.36	967.03	1010 (0.5 Vpp)
	Error (%)	-5.01	-4.25	-

表 3-15 受拉應力下的理論、FEM 與 LDV 之比較

Force (N)	Mode	1	2	3	4	5	6
0	Theory (Hz) (Error %)	31.84 (4.05)	140.17 (-2.05)	394.1 (26.58)	713.66 (-7.15)		959.65 (-5.98)
	Abaqus (Hz) (Error %)	29.9 (-2.3)	137.25 (-4.09)	282.4 (-9.31)		856.73 (-0.03)	968.07 (-5.1)
	LDV (Hz)	30.6	143.1	311.4	768.6	857	1020.1
0.52	Theory (Hz) (Error %)	32.18 (0.48)	140.24 (-2.44)	394.62 (26.85)	713.95 (-4.97)		959.7 (-5.75)
	Abaqus (Hz) (Error %)	30.31 (-5.37)	137.32 (-4.47)	282.91 (-9.06)		857.12 (1.66)	968.3 (-4.91)
	LDV (Hz)	32.03	143.75	311.09	751.25	843.13	1018.28
1.03	Theory (Hz) (Error %)	32.52 (-2.29)	140.32 (-2.39)	395.14 (27.02)	714.22 (-4.93)		959.75 (-5.75)
	Abaqus (Hz) (Error %)	30.7 (-7.75)	137.38 (-4.43)	283.41 (-8.9)		857.51 (1.71)	968.51 (-4.89)
	LDV (Hz)	33.28	143.75	311.09	751.25	843.13	1018.28
1.52	Theory (Hz) (Error %)	32.84 (-5.33)	140.39 (-2.34)	395.63 (27.18)	714.49 (-4.91)		959.8 (-5.93)
	Abaqus (Hz) (Error %)	31.07 (-10.44)	137.44 (-4.39)	283.89 (-8.74)		857.87 (1.75)	968.72 (-5.06)
	LDV (Hz)	34.69	143.75	311.09	751.41	843.13	1020.31
2.01	Theory (Hz) (Error %)	33.16 (-8.54)	140.46 (-2.29)	396.12 (27.33)	714.76 (-4.96)		959.85 (-6.1)
	Abaqus (Hz) (Error %)	31.44 (-13.27)	137.5 (-4.35)	284.36 (-8.59)		858.24 (1.53)	968.92 (-5.21)
	LDV (Hz)	36.25	143.75	311.09	752.03	845.31	1022.19
2.79	Theory (Hz) (Error %)	33.66 (-13.82)	140.57 (-2.21)	396.9 (27.58)	715.18 (-5.12)		959.93 (-6.25)
	Abaqus (Hz) (Error %)	32.02 (-18.02)	137.59 (-4.29)	285.12 (-8.35)		858.84 (1.34)	969.25 (-5.34)
	LDV (Hz)	39.06	143.75	311.09	753.75	847.5	1023.91

表 3-16 受壓應力下的理論、FEM 與 LDV 之比較

Force (N)	Mode	1	2	3	4	5	6
0	Theory (Hz) (Error %)	31.84 (4.05)	140.17 (-2.05)	394.1 (26.58)	713.66 (-7.15)		959.65 (-5.98)
	Abaqus (Hz) (Error %)	29.9 (-2.3)	137.25 (-4.09)	282.4 (-9.31)		856.73 (-0.03)	968.07 (-5.1)
	LDV (Hz)	30.6	143.1	311.4	768.6	857	1020.1
0.52	Theory (Hz) (Error %)	31.49 (7.77)	140.06 (-2.25)	393.57 (26.57)	713.38 (-3.43)		959.6 (-5.82)
	Abaqus (Hz) (Error %)	29.48 (0.89)	137.19 (-4.25)	281.89 (-9.34)		856.34 (1.02)	967.85 (-5.01)
	LDV (Hz)	29.22	143.28	310.94	738.75	847.66	1018.91
1.03	Theory (Hz) (Error %)	31.14 (11.97)	139.97 (-2.31)	393.06 (26.41)	713.09 (-3.47)		959.55 (-5.83)
	Abaqus (Hz) (Error %)	29.07 (4.53)	137.13 (-4.29)	281.39 (-9.5)		855.96 (0.98)	967.62 (-5.03)
	LDV (Hz)	27.81	143.28	310.94	738.75	847.66	1018.91
1.52	Theory (Hz) (Error %)	30.8 (16.62)	139.88 (-2.37)	392.57 (26.89)	712.83 (-3.51)		959.49 (-5.83)
	Abaqus (Hz) (Error %)	28.67 (8.56)	137.07 (-4.33)	280.91 (-9.2)		855.59 (1.2)	967.4 (-5.06)
	LDV (Hz)	26.41	143.28	309.38	738.75	845.47	1018.91
2.01	Theory (Hz) (Error %)	30.46 (23.37)	139.79 (-2.44)	392.08 (26.73)	712.55 (-3.22)		959.41 (-5.67)
	Abaqus (Hz) (Error %)	28.26 (14.46)	137.01 (-4.38)	280.42 (-9.36)		855.23 (1.44)	967.17 (-4.9)
	LDV (Hz)	24.69	143.28	309.38	736.25	843.13	1017.03
2.79	Theory (Hz) (Error %)	29.9 (38.68)	139.65 (-2.53)	391.3 (25.84)	712.14 (-3.27)		959.295 (-5.68)
	Abaqus (Hz) (Error %)	27.6 (28.01)	136.92 (-4.44)	279.65 (-10.06)		854.65 (1.37)	966.79 (-4.94)
	LDV (Hz)	21.56	143.28	310.94	736.25	843.13	1017.03

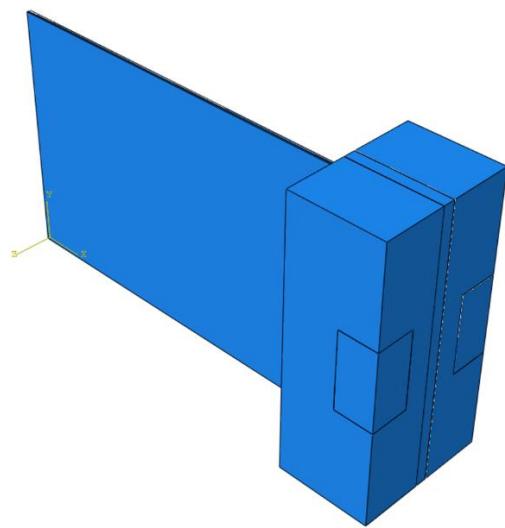


圖 3-38 有限元素分析模型示意圖

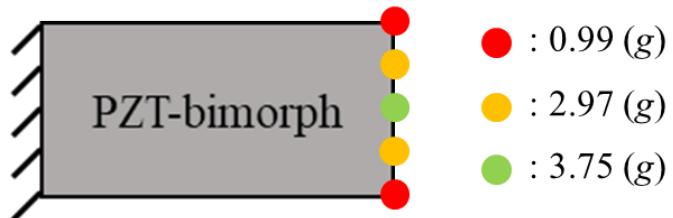


圖 3-39 疊加法多點質量分布

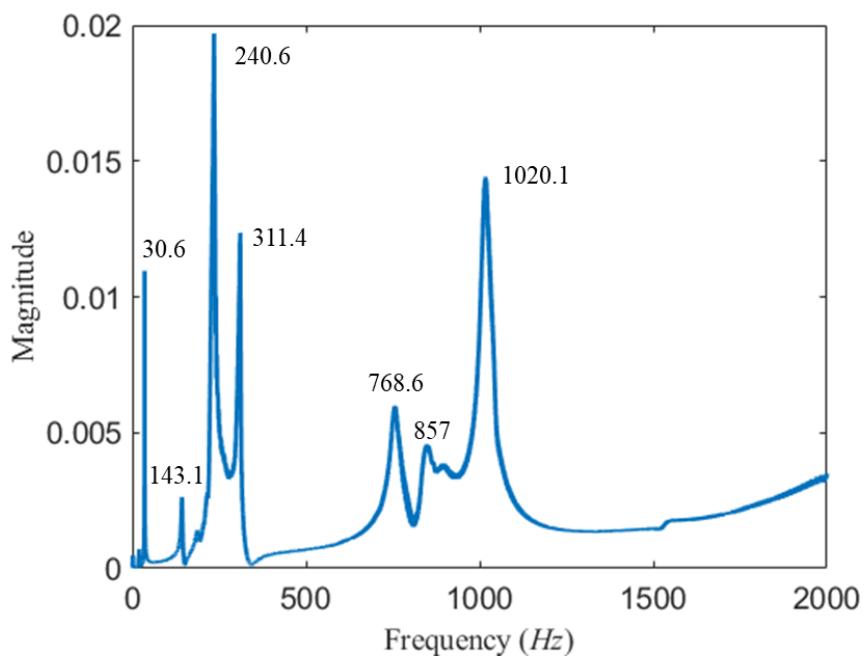


圖 3-40 無受力下壓電試片之頻率響應

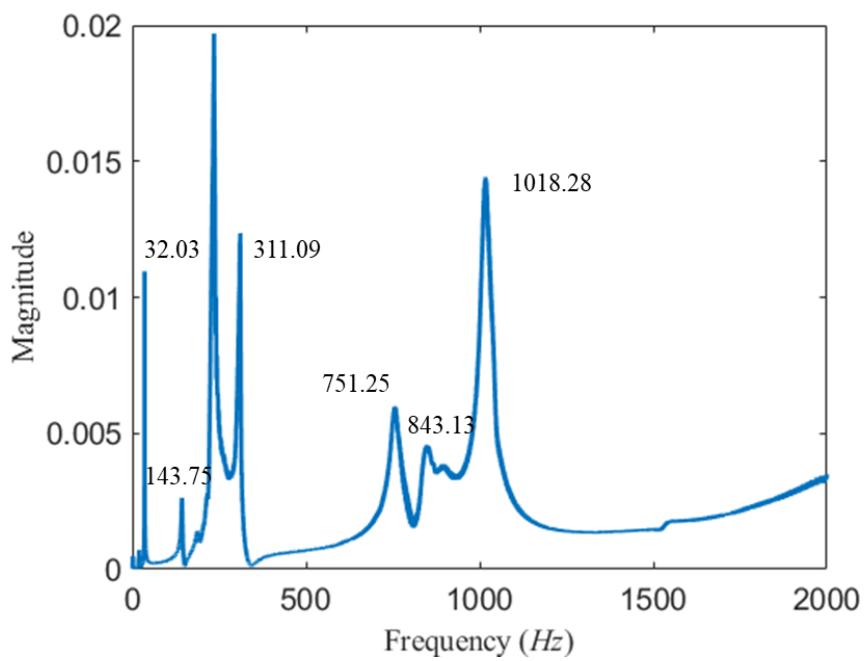
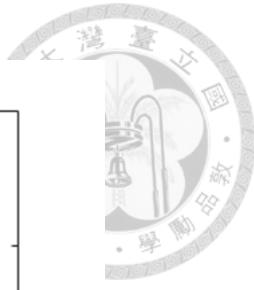


圖 3-41 受拉力  $0.52\text{ (N)}$ 下的頻率響應

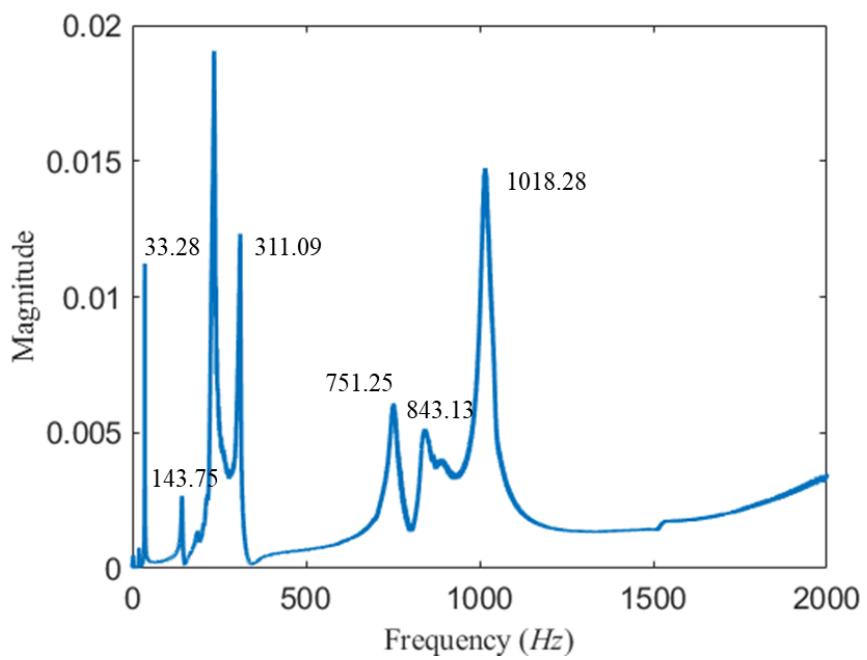


圖 3-42 受拉力  $1.03\text{ (N)}$ 下的頻率響應

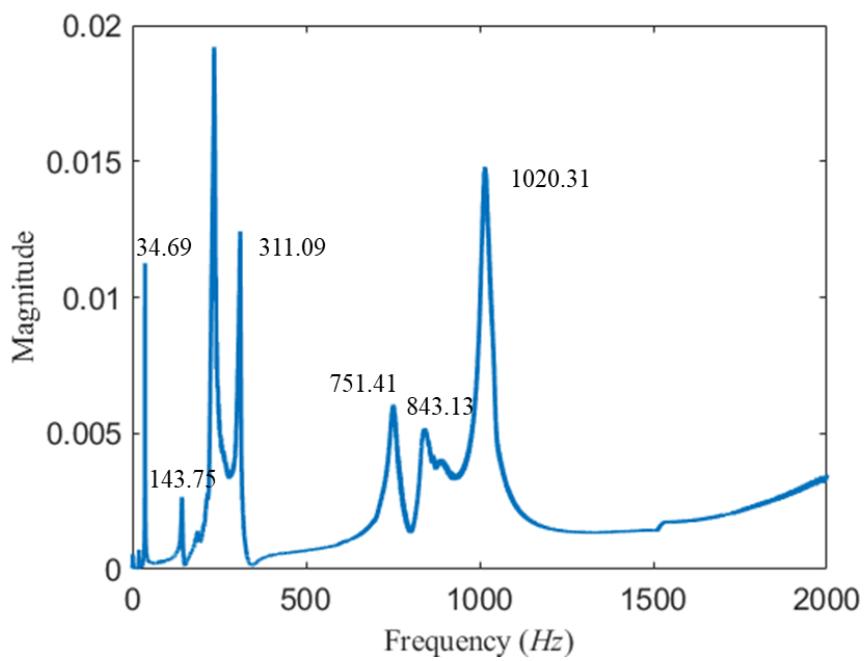
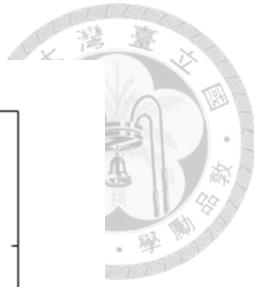


圖 3-43 受拉力  $1.52\text{ (N)}$  下的頻率響應

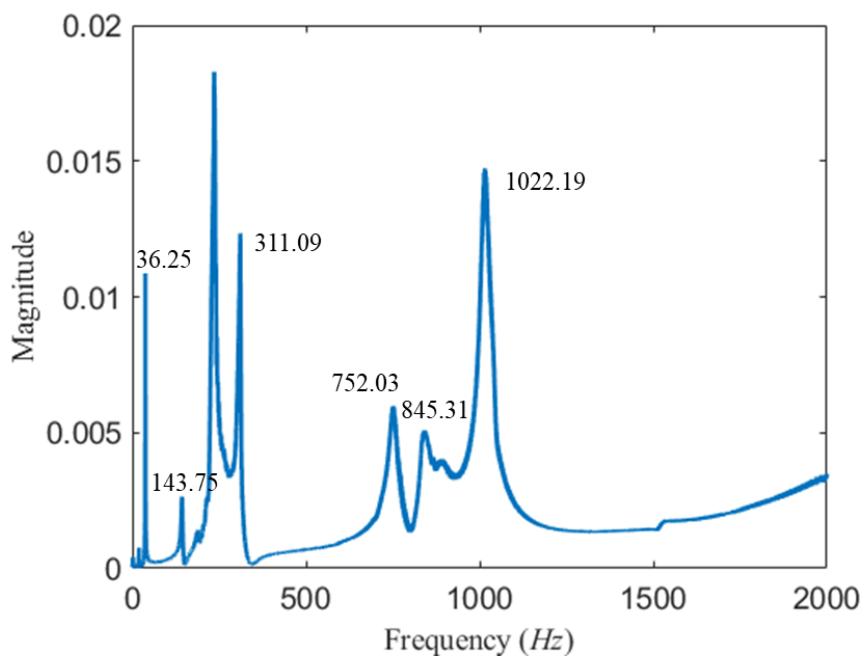


圖 3-44 受拉力  $2.01\text{ (N)}$  下的頻率響應

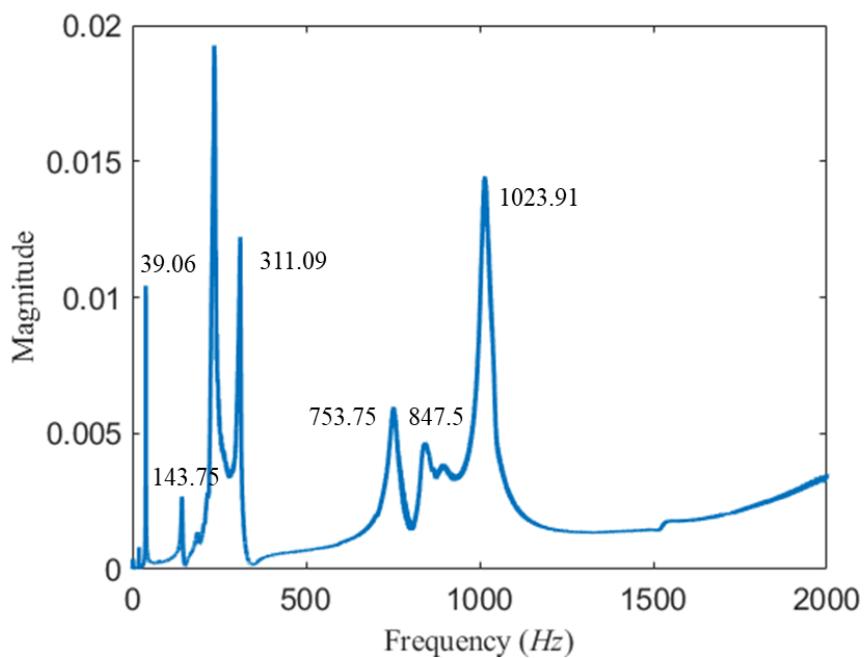


圖 3-45 受拉力 2.79 (N)下的頻率響應

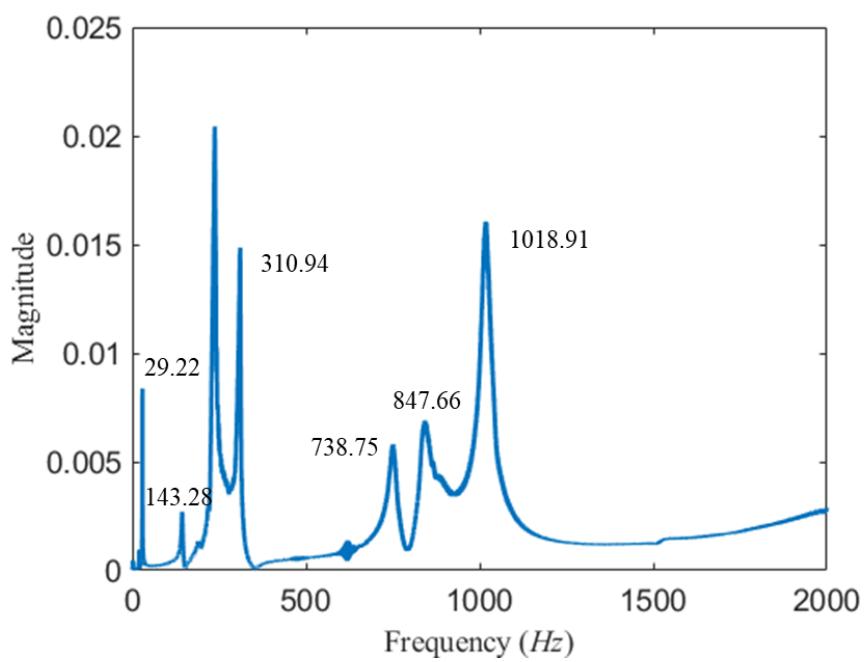


圖 3-46 受壓力 0.52 (N)下的頻率響應

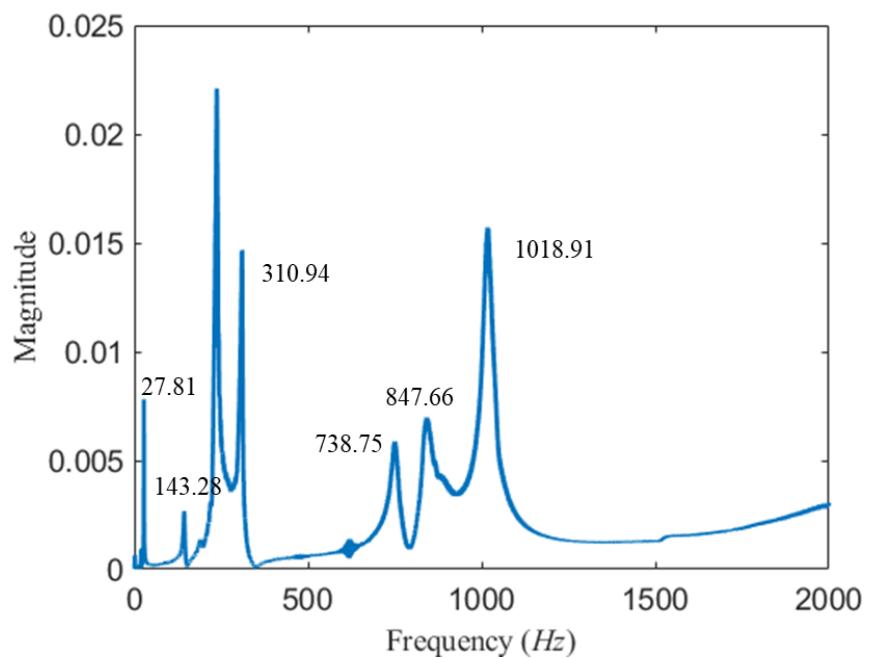


圖 3-47 受壓力 1.03 (N)下的頻率響應

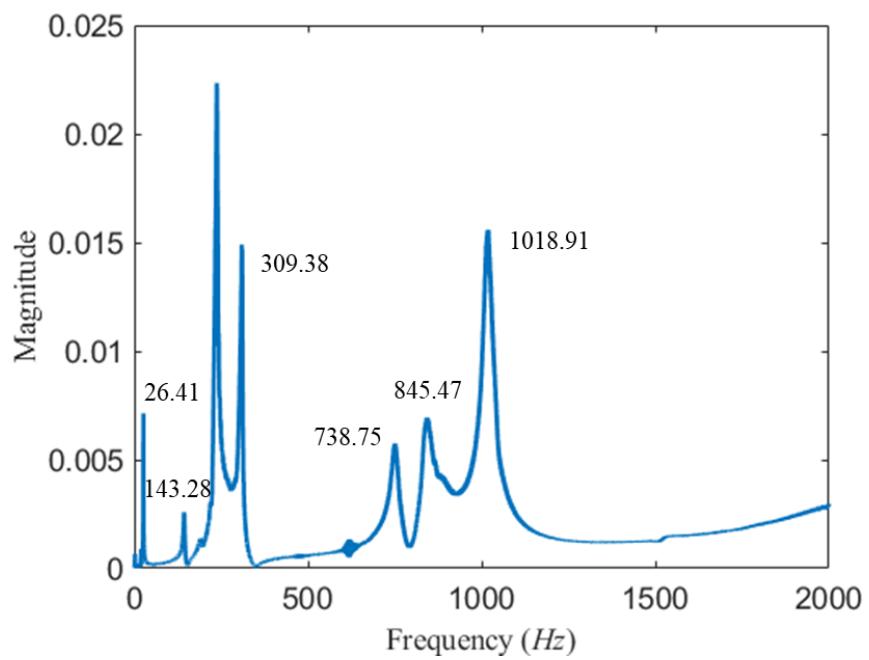


圖 3-48 受壓力 1.52 (N)下的頻率響應

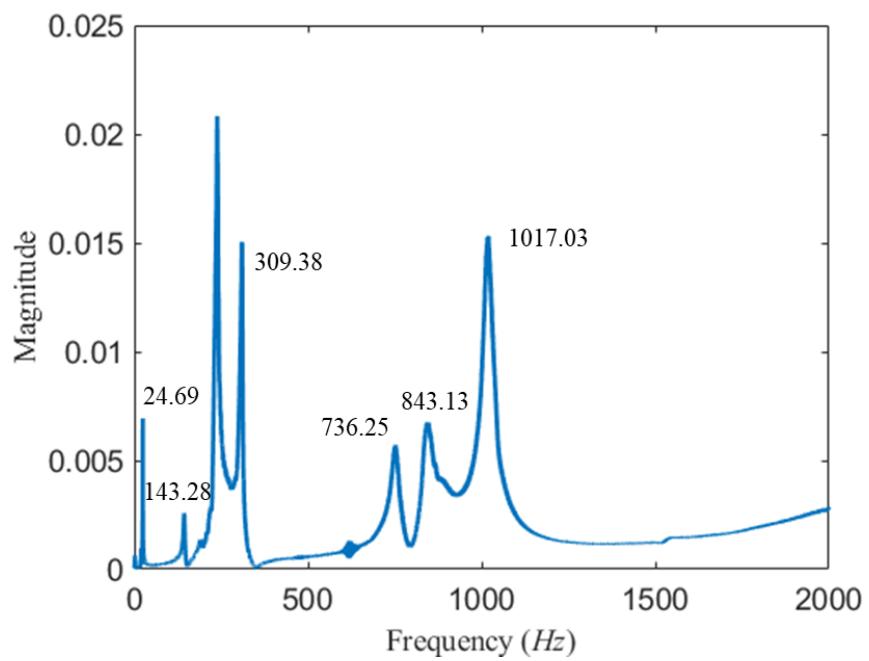


圖 3-49 受壓力 2.01 (N)下的頻率響應

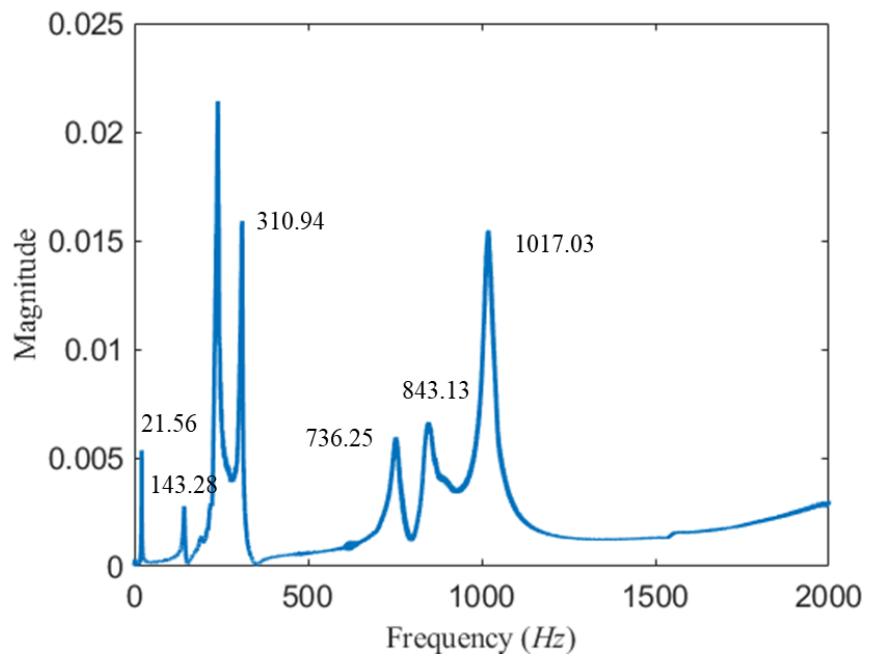


圖 3-50 受壓力 2.79 (N)下的頻率響應

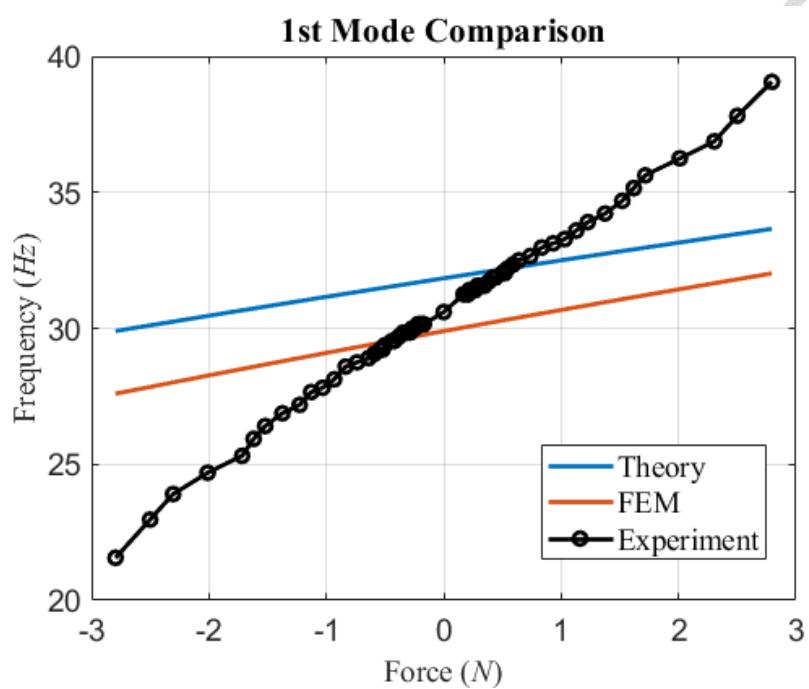


圖 3-51 受不同力下的第一模態共振頻率比較

## 第四章 晶格波茲曼法

本章節使用晶格波曼法(Lattice Boltzmann Method, LBM)進行圓柱繞流(Flow Past A Cylinder)所產生卡門渦街(Kármán vortex street)的數值模擬，透過粒子於晶格上的分布函數以計算流體的巨觀物理量，並搭配風洞實驗進行驗證，使用純圓柱與圓柱夾持試片兩種模型並量測圓柱後方的渦街頻率，與 LBM 的計算結果、計算流體力學軟體的結果進行比較。

### 4.1 基本理論

傳統的計算流體力學(Computational Fluid Dynamics, CFD)透過求解 Navier-Stokes Equation 以獲得流體的巨觀物理量，在計算壓力時往往花費大量時間於求解波松方程式(Poisson Equation)[36]，而晶格波茲曼法有別於前者，經由波茲曼方程從介觀角度計算每個晶格上流體粒子的分佈函數，再將其換算成巨觀物理量，由於晶格離散的特性，流體粒子的參數非常適合使用使用圖形處理器(Graphics Processing Unit, GPU)進行平行運算並節省大量計算時間。

#### 4.1.1 波茲曼方程式

晶格波茲曼法為一種數值方法，將時間與空間尺度離散化以計算流體粒子間的運動行為，而過程中所求解的波茲曼方程式如下所示：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{e} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \vec{a} \frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \Omega \quad (4-1)$$

其中  $f$  為粒子的分佈函數(Distribution Function)、 $t$  為時間、 $\vec{x}$  為空間向量、 $\vec{e}$  為單位速度向量、 $\vec{a}$  為外力、 $\Omega$  為碰撞運算子(Collision Operator)，用以描述粒子間碰撞行為與分佈函數的關係，而  $f$  、 $\Omega$  又可寫為：

$$f = f(\vec{x}, \vec{e}, t) \quad (4-2)$$

$$\Omega = \Omega(f) \quad (4-3)$$

當粒子間並無外力作用時，可把外力項忽略並將(4-1)改寫為：



$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{e} \cdot \nabla f = \Omega \quad (4-4)$$

從(4-3)式可以得知  $\Omega$  為  $f$  的函數，其為一個複雜的積分函式，因此有許多學者提出各種近似方式，如單鬆弛時間(Single Relaxation Time, SRT)近似、多鬆弛時間(Multi-Relaxation Time, MRT)近似等，最為常見的單鬆弛時間近似方式為 Bhatnagar 等人 [37] 提出的 Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) 模型，它將氣體假設為完全彈性的圓球體 (Elastic-Perfect Spheres)，並為理想氣體(Ideal Gas)狀態，因此可以將碰撞運算子表示為：

$$\Omega(f) = -\frac{1}{\lambda} (f - f^{(eq)}) \quad (4-5)$$

其中  $\lambda$  為鬆弛時間(Relaxation Time)， $f^{(eq)}$  為平衡分佈函數(Equilibrium Distribution Function)，除了常見 BGK 模型外，Lallemand 等人[38]提出了 MRT 模型，以解決在高雷諾數與複雜幾何邊界下進行流體模擬時，使用 BGK 模型會產生數值不穩定的情形，此處以 LBM 的 D2Q9 模型進行舉例，後續將說明 D2Q9 模型之意義，在 MRT 模型下可將碰撞運算子表示為：

$$\Omega_i = \left( -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{M} \left[ f - f^{(eq)} \right] \right)_i \quad (4-6)$$

其中  $\mathbf{M}$  代表轉換矩陣(Transformation Matrix)，會將晶格上的分佈函數轉換至矩陣空間(Moment Space)， $\mathbf{S}$  代表鬆弛矩陣(Relaxation Matrix)，會將矩陣空間的物理量進行鬆弛(Relax)計算，但因為需進行矩陣運算，相比單鬆弛時間近似會耗費更多的計算資源。而本研究主要使用晶格波茲曼法進行圓柱繞流、圓柱夾持試片模型的數值計算，流場的幾何形狀較為單純，且為生成較低頻的渦街以對應環境振動頻率，所設定的入口流速也相對較低，因此對應的雷諾數也較低，因此使用 BGK 模型即可獲得穩定的模擬結果，故本研究使用 BGK 模型以進行單鬆弛時間近似，將(4-5)式帶回(4-4)式並改寫為：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{e} \cdot \nabla f = -\frac{1}{\lambda} (f - f^{(eq)}) \quad (4-7)$$



$f^{(eq)}$  的定義為：

$$f^{(eq)} = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{\frac{D}{2}}} \exp\left[-\frac{(\vec{e} - \vec{u})^2}{2RT}\right] \quad (4-8)$$

$\rho$  為流體巨觀下的密度、 $\vec{u}$  為流體巨觀下的速度、 $T$  為流體巨觀下的溫度、 $D$  為空間維度、 $R$  為理想氣體常數。(4-7)式中使用的 BGK 模型代表系統內粒子的分佈情形會以鬆弛時間  $\lambda$  趨近於平衡分佈的狀態，並可透過  $f$  獲得當下流體的巨觀物理量

$$\rho = \int f d\vec{e} \quad (4-9)$$

$$\rho\vec{u} = \int \vec{e} f d\vec{e} \quad (4-10)$$

$$\rho\varepsilon = \frac{1}{2} \rho D_0 RT = \frac{1}{2} \int (\vec{e} - \vec{u})^2 f d\vec{e} \quad (4-11)$$

其中  $\varepsilon$  為內能

$$\varepsilon = \frac{1}{2} D_0 RT \quad (4-12)$$

在 BGK 模型中，欲使模型滿足不可壓縮(Imcompressible)下的 Navier-Stokes Equation，則在數值計算上需留意粒子的特徵速度  $\vec{U}_c$  (Characteristic Velocity)與聲速  $C_s$  (Sound Speed)兩者需滿足低馬赫數近似(Low-Mach-Number Approximation)，其中馬赫數  $Ma$  的定義為：

$$Ma \equiv \frac{|\vec{U}_c|}{C_s} \quad (4-13)$$

在低馬赫數近似下， $Ma$  需小於 0.15 以避免氣體產生可壓縮性，進而產生數值上的問題。透過低馬赫數近似可將原本較為複雜的平衡分佈函數(4-8)改寫為：



$$\begin{aligned}
 f^{(eq)} &= \frac{\rho}{(2\pi RT)^{\frac{D}{2}}} \exp\left[-\frac{(\vec{e} - \vec{u})^2}{2RT}\right] \\
 &= \frac{\rho}{(2\pi RT)^{\frac{D}{2}}} \exp\left[-\frac{(\vec{e} \cdot \vec{e} - 2\vec{e} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{u})}{2RT}\right] \\
 &= \frac{\rho}{(2\pi RT)^{\frac{D}{2}}} \exp\left[-\frac{(\vec{e} \cdot \vec{e})}{2RT}\right] \exp\left[\frac{(\vec{e} \cdot \vec{u})}{RT} - \frac{(\vec{u} \cdot \vec{u})}{2RT}\right]
 \end{aligned} \tag{4-14}$$

將(4-14)式中的最後一項進行泰勒級數展開(Taylor Series Expansion)

$$\exp\left[\frac{(\vec{e} \cdot \vec{u})}{RT} - \frac{(\vec{u} \cdot \vec{u})}{2RT}\right] = 1 + \frac{(\vec{e} \cdot \vec{u})}{RT} - \frac{(\vec{u} \cdot \vec{u})}{2RT} + \frac{1}{2}\left[\frac{(\vec{e} \cdot \vec{u})}{RT}\right]^2 + O(Ma^3) \tag{4-15}$$

其中在低馬赫數近似下，可將高次項進行忽略，因此可將(4-14)式近似為：

$$f^{(eq)} \approx \frac{\rho}{(2\pi RT)^{\frac{D}{2}}} \exp\left[-\frac{(\vec{e} \cdot \vec{e})}{2RT}\right] \left\{ 1 + \frac{(\vec{e} \cdot \vec{u})}{RT} - \frac{(\vec{u} \cdot \vec{u})}{2RT} + \frac{1}{2}\left[\frac{(\vec{e} \cdot \vec{u})}{RT}\right]^2 \right\} \tag{4-16}$$

從(4-16)式中得知  $f^{(eq)}$  可透過巨觀物理量如密度  $\rho$  與速度  $\vec{u}$  計算而得。

### 4.1.2 離散波茲曼方程式

使用 BGK 模型近似並將時間尺度離散化，可將(4-7)式改寫為

$$\frac{df}{dt} + \frac{1}{\lambda} f = \frac{1}{\lambda} f^{(eq)} \tag{4-17}$$

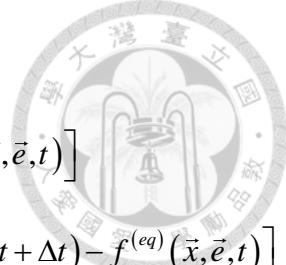
$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{e} \cdot \nabla) \tag{4-18}$$

(4-18)式為分佈函數對時間的微分，接著將(4-17)式對單位時間步長  $\Delta t$  進行積分

$$\begin{aligned}
 f(\vec{x} + \vec{e}\Delta t, \vec{e}, t + \Delta t) &= \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda}\right) \int_0^{\Delta t} \exp\left(-\frac{t'}{\lambda}\right) f^{(eq)}(\vec{x} + \vec{e}t', \vec{e}, t + t') dt' \\
 &\quad + \exp\left(\frac{\Delta t}{\lambda}\right) f(\vec{x}, \vec{e}, t)
 \end{aligned} \tag{4-19}$$

假設  $f^{(eq)}$  在時間  $t$  足夠平滑且  $\Delta t$  很小的情況下，將下一時刻的  $f^{(eq)}$  近似為

$$\begin{aligned}
 f^{(eq)}(\vec{x} + \vec{e}t', \vec{e}, t + t') &= \left(1 - \frac{t'}{\Delta t}\right) f^{(eq)}(\vec{x}, \vec{e}, t) + \frac{t'}{\Delta t} f^{(eq)}(\vec{x} + \vec{e}\Delta t, \vec{e}, t + \Delta t) + O(\Delta t^2) \\
 0 \leq \Delta t' &\leq \Delta t
 \end{aligned} \tag{4-20}$$



將(4-20)式帶入(4-19)式

$$\begin{aligned}
 f(\vec{x} + \vec{e}\Delta t, \vec{e}, t + \Delta t) &= f(\vec{x}, \vec{e}, t) + \exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda}\right) \left[ f(\vec{x}, \vec{e}, t) - f^{(eq)}(\vec{x}, \vec{e}, t) \right] \\
 &\quad + \left[ 1 + \frac{\lambda}{\Delta t} \exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda} - 1\right) \right] \times \left[ f^{(eq)}(\vec{x} + \vec{e}\Delta t, \vec{e}, t + \Delta t) - f^{(eq)}(\vec{x}, \vec{e}, t) \right]
 \end{aligned} \tag{4-21}$$

將  $\exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda}\right)$  進行泰勒級數展開，並對  $O(\Delta t^2)$  以上的高次項進行忽略，將(4-21)式改寫為

$$f(\vec{x} + \vec{e}\Delta t, \vec{e}, t + \Delta t) = f(\vec{x}, \vec{e}, t) - \frac{1}{\tau} \left[ f(\vec{x}, \vec{e}, t) - f^{(eq)}(\vec{x}, \vec{e}, t) \right] \tag{4-22}$$

其中  $\tau = \frac{\lambda}{\Delta t}$ ，代表無因次化後的鬆弛時間，從(4-22)式中可得知藉由當下的  $f$  與

$f^{(eq)}$  可以求得下一時刻的  $f$ ，因此在迭代每個時間步長時，首先會計算巨觀物理量  $\rho$  與  $\vec{u}$  以獲得  $f^{(eq)}$ ，而在計算時已知  $\rho$  與  $\vec{u}$  和離散空間的  $f$  有關，因此將(4-22)式進行空間上的離散化並可寫為：

$$f_i(\vec{x} + \vec{e}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\tau} \left[ f_i(\vec{x}, t) - f_i^{(eq)}(\vec{x}, t) \right] \tag{4-23}$$

在空間離散化後，可將(4-9)與(4-10)式改寫為

$$\rho = \sum_{i=0}^n f_i \tag{4-24}$$

$$\rho \vec{u} = \sum_{i=0}^n \vec{e}_i f_i \tag{4-25}$$

其中  $n$  為模型中晶格所具有的方向數量，數值大小取決於空間維度，一般常見的模型有 D2Q9、D3Q15、D3Q19、D3Q27，D2 表示為二維空間，Q9 代表有 9 個方向，因此在 D2Q19 模型中  $n=9$ ，D3Q15、D3Q19 與 D3Q27 的意義與  $n$  值大小以此類推，在求得  $\rho$  與  $\vec{u}$  後即可求解離散的平衡分佈函數：

$$f_i^{(eq)} = \rho w_i \left[ 1 + \frac{3}{c^2} (\vec{e}_i \cdot \vec{u}) + \frac{9}{2c^4} (\vec{e}_i \cdot \vec{u})^2 - \frac{3}{2c^2} (\vec{u} \cdot \vec{u}) \right] \tag{4-26}$$

其中  $w_i$  為權重係數，根據所選擇的模型而有所不同， $c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$  為單位晶格速度、 $\Delta x$  為晶格長度(Lattice Space)、 $\Delta t$  為時間步長(Time Step)。本研究在數值計算上二維模型使用 D2Q9，三維模型則根據 Mei 等人[39]在上述三種三維模型上所做的綜合比較來進行選擇，他們以模型的收斂性、穩定性與計算效率作為指標，並使用四種流場模型進行測試與評估，發現 D3Q15 容易產生數值不穩定的情況，而 D3Q27 則會耗費大量的計算資源，D3Q19 則是在兩者間取得一個絕佳的平衡，其數值結果具有良好的穩定性同時也不需消耗過多的計算資源，故本研究的三維模型選擇使用 D3Q19，兩種模型的示意圖如圖 4-1 與圖 4-2 所示，以下為兩種模型所對應的權重係數  $w_i$  與晶格速度向量  $\vec{e}_i$ 。

### (1) D2Q9 Model

$$w_i = \begin{cases} \frac{4}{9} & \text{when } i = 0 \\ \frac{1}{9} & \text{when } i = 1 \sim 4 \\ \frac{1}{36} & \text{when } i = 5 \sim 8 \end{cases} \quad (4-27)$$

$$\vec{e}_i = \begin{cases} (0,0) & \text{when } i = 0 \\ (\pm 1,0), (0,\pm 1) & \text{when } i = 1 \sim 4 \\ (\pm 1,\pm 1) & \text{when } i = 5 \sim 8 \end{cases} \quad (4-28)$$

### (2) D3Q19 Model

$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{when } i = 0 \\ \frac{1}{18} & \text{when } i = 1 \sim 6 \\ \frac{1}{36} & \text{when } i = 7 \sim 18 \end{cases} \quad (4-29)$$

$$\vec{e}_i = \begin{cases} (0,0,0) & \text{when } i = 0 \\ (\pm 1,0,0), (0,\pm 1,0), (0,0,\pm 1) & \text{when } i = 1 \sim 6 \\ (\pm 1,\pm 1,0), (\pm 1,0,\pm 1), (0,\pm 1,\pm 1) & \text{when } i = 7 \sim 18 \end{cases} \quad (4-30)$$

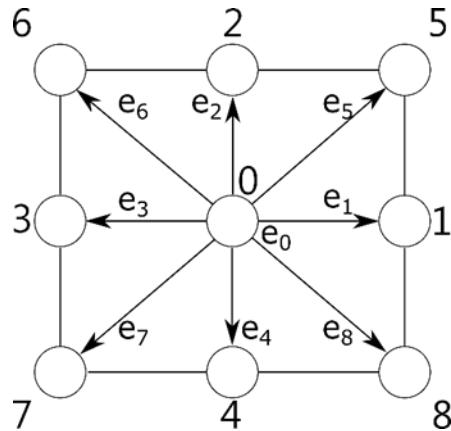


圖 4-1 D2Q9 模型的晶格速度向量

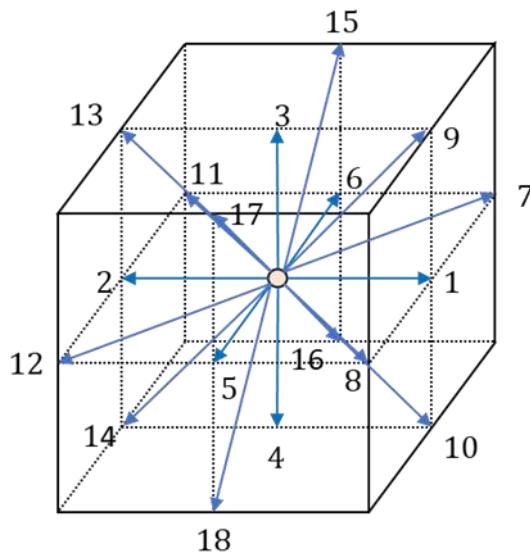


圖 4-2 D3Q19 模型的晶格速度向量

#### 4.1.3 大渦流模擬(Large Eddy Simulation, LES)

LBM 在模擬紊流問題時，大尺度結構漩渦可由網格的長度單位進行模擬，但當大漩渦隨著時間發展會逐漸分裂為小漩渦，但礙於網格尺寸的限制，更小尺度結構的漩渦無法被模擬，因此導入大渦流模擬方法下的次網格尺度(Subgrid-Scale, SGS)模型，基於 LBM 的架構，額外加入紊流黏度(Turbulent Viscosity)以模擬在網格尺寸下因渦流產生的能量耗散現象。此方法可以調整流場中不同位置的鬆弛時間，使紊流發生的區域能模擬出更貼切現實情況的流體運動行為，在數值計算中假設鬆弛時間如下[40]:



$$\tau^* = \tau + \tau_t = 3\upsilon^* + \frac{1}{2} = 3(\upsilon + \upsilon_t) \quad (4-31)$$

其中  $\upsilon^*$  為總動黏度、 $\upsilon$  為流體動黏度、 $\upsilon_t$  為紊流動黏度、 $\tau$  為對應黏度的鬆弛時間，

並可將其改寫為

$$\tau_{ij}^t - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk}^t = -2\upsilon_t S_{ij} \quad (4-32)$$

$S_{ij}$  為應變率張量(Strain-Rate Tensor)，並將其寫為：

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} u_j + \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \right) \quad (4-33)$$

$\upsilon_t$  與應變率的關係可寫為

$$\upsilon_t = (C\Delta)^2 |S| \quad (4-34)$$

其中  $C$  為 Smagorinsky Constant，是經驗常數且通常取 0.1， $\Delta$  為過濾尺寸(Filter Size)，

與網格尺寸  $\Delta x$  大小相同， $|S|$  為應變率大小並可寫為：

$$|S| = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \quad (4-35)$$

在 LBM 裡，可透過分佈函數求得  $S_{ij}$

$$S_{ij} = \frac{1}{2\rho c_s^2 \tau^*} \Pi_{ij} \quad (4-36)$$

$$\Pi_{ij} = \sum_{\alpha} e_{\alpha i} e_{\alpha j} (f_{\alpha} - f_{\alpha}^{(eq)}) \quad (4-37)$$

最後求解紊流鬆弛時間  $\tau_t$

$$\tau_t = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\tau^2 + \frac{2(C\Delta)^2 |\Pi|}{\rho c_s^4}} - \tau \right) \quad (4-38)$$

其中  $|\Pi| = \sqrt{2\Pi_{ij}\Pi_{ij}}$ ，從(4-38)式中可以發現當流體應變率增加時，鬆弛時間也會隨之上升，表示紊流現象所產生的能量消耗，而該結果會影響下一時刻的分佈函數，進而改變流體巨觀的物理量以及流體對固體產生的作用力等，能夠更加真實的模擬流場的行為。



## 4.2 數值模擬

本研究進行 LBM 數值計算的程式架構以洪國勛[41]開發的數值模型為基礎，並導入本研究所使用的壓電試片進行流場分析，使用 D2Q9 與 D3Q19 的 BGK 模型，並加入 LES 中的 SGS 紊流模擬的方法，分別以二維與三維的模型分析圓柱繞流所產生的卡門渦街現象。

### 4.2.1 LBM 模擬流程

LBM 在進行數值模擬時主要有兩個步驟，分別為碰撞(Collision)與流動(Streaming)，碰撞的步驟可寫為：

$$f_i^*(\vec{x}, t) = f_i(\vec{x}, t) - \frac{1}{\tau^*} [f_i(\vec{x}, t) - f_i^{(eq)}(\vec{x}, t)] \quad (4-39)$$

$f_i^*(\vec{x}, t)$  為碰撞後的分佈函數，總鬆弛時間為  $\tau^*$ ，包含對應黏度的鬆弛時間與紊流鬆弛時間， $f_i^{(eq)}(\vec{x}, t)$  如(4-26)所示，根據使用的模型代入相應的權重係數與晶格速度向量。流動的步驟可寫為：

$$f_i(\vec{x} + \vec{e}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i^*(\vec{x}, t) \quad (4-40)$$

代表碰撞後的分佈函數會在下一時刻朝  $i$  方向流動到下一個格點上，並成為該格點朝  $i$  方向的分佈函數，如圖 4-4 所示。在流體粒子進行碰撞步驟時，流體粒子會對固體邊界造成作用力，此部分本研究使用反彈(Bounce-back)邊界進行模擬。而在進行流動的步驟時，於出入口邊界處會發生格點上的分佈函數流出模型外的狀況，也會有未知的分佈函數流入格點的狀況，此時必須根據模型中對邊界條件的假設來進行處理，其方法將於下一小節進行說明。

接著說明 LBM 的模擬流程，在進行模擬前會先計算碰撞步驟的平衡分佈函數  $f_i^{(eq)}(\vec{x}, t)$ ，可透過流體的密度  $\rho$  與巨觀的速度  $\vec{u}$  計算而得，其中本研究所使用的流體為空氣，速度則是透過模型入口處的流速大小來對整體的流場速度進行初始化，接著便進入碰撞與流動的步驟。當流動步驟結束後，便可透過的密度與巨觀速度計

算下一時刻的平衡分佈函數，而密度與巨觀速度可由分佈函數計算而得，如(4-24)、(4-25)式所示，最後根據是否達到設定的模擬步數作為中止條件的判斷依據，LBM 整體的流程圖如圖 4-3 所示。

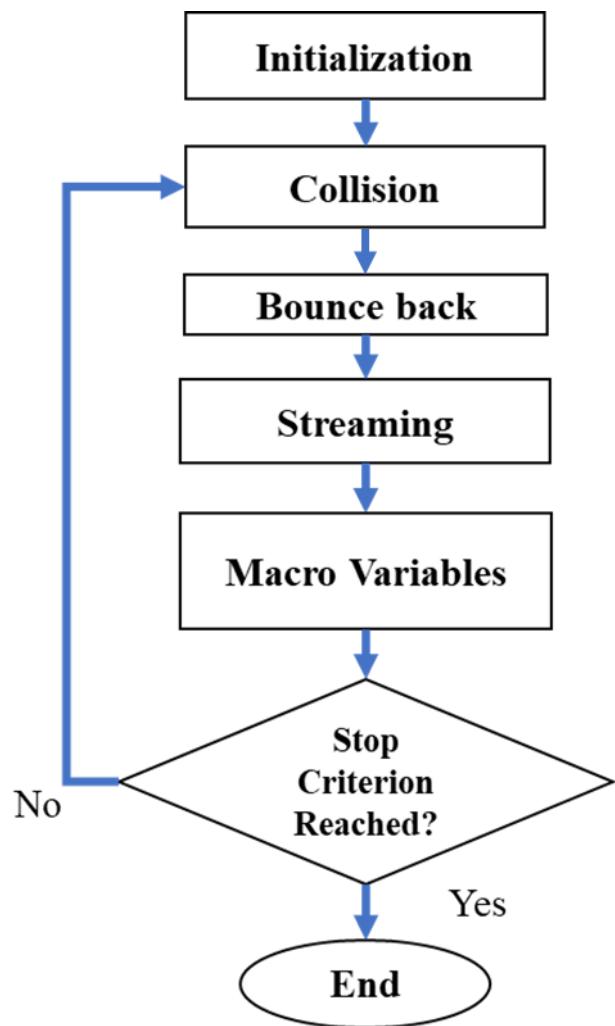


圖 4-3 LBM 模擬流程圖

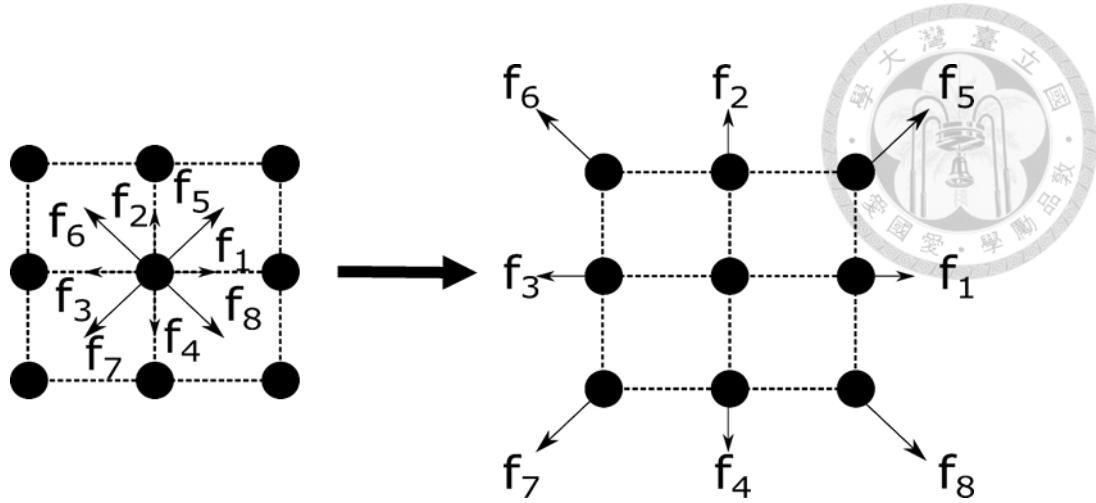


圖 4-4 粒子流動示意圖

#### 4.2.2 邊界條件設定

LBM 模型中的邊界條件有兩種，分別為入口邊界與固體邊界，前者包含對稱、週期、入口、出口和無窮邊界，後者則是壁面、障礙物等。由於邊界條件是以巨觀角度下進行描述，對於介觀角度下的 LBM 則是透過改變粒子的分佈函數以此符合對巨觀的邊界條件描述，對於入口邊界的設定，本研究參考 Zou 和 He[42]提出的入口邊界需以非平衡項分佈函數 Bounce-back 為基礎出發，

此處入口邊界位於網格點上，假設使用 D2Q9 的模型進行計算，入口邊界位於  $x_A$  處，考慮流體為從左流到右，則左邊的分佈函數  $f_0$ 、 $f_2$ 、 $f_3$ 、 $f_4$ 、 $f_6$ 、 $f_7$  皆為已知，便可透過這些已知的分佈函數計算流入右方的分佈函數  $f_1$ 、 $f_5$ 、 $f_8$ 。

$$\begin{cases} \rho(x_A) = \frac{1}{1-u_x(x_A)} [f_0 + f_2 + f_4 + 2(f_3 + f_6 + f_7)] \\ f_1 = f_3 + \frac{2}{3} \rho(x_A) u_x(x_A) \\ f_5 = f_7 - \frac{1}{2} (f_2 - f_4) + \frac{1}{6} \rho(x_A) u_x(x_A) + \frac{1}{2} \rho(x_A) u_y(x_A) \\ f_8 = f_6 + \frac{1}{2} (f_2 - f_4) + \frac{1}{6} \rho(x_A) u_x(x_A) - \frac{1}{2} \rho(x_A) u_y(x_A) \end{cases} \quad (4-41)$$

固體邊界部分，在邊界上需符合無滑移條件(No Slip Condition)與流體不能穿越固體區域的無穿越條件(No Penetration)，其中最常使用反彈邊界(Bounce-back)來滿足上述兩個條件，在此方法下當流體粒子撞擊到固體邊界時，其會沿著入射方向進行

反彈以達到巨觀速度為零，如圖 4-5 所示，其中因為  $f_1$ 、 $f_5$ 、 $f_8$  接觸到了牆壁邊界，因此其為未知，透過反彈邊界可以求得  $f_1 = f_3$ 、 $f_5 = f_7$ 、 $f_8 = f_6$ 。本研究選用此方法處理流體粒子碰撞到牆壁邊界或流場內固體障礙物的情況，並進一步計算流體施加於障礙物上的作用力大小以進行後續分析，而流場中的障礙物其形狀為圓柱，本研究流場模型使用四邊形網格或六面體網格進行切割，雖在外圍處無法形成平滑的曲面邊界，但若將網格尺寸縮小則整體形狀可以近似為圓形，而邊界處即可使用上述提及的反彈邊界進行處理並計算流體作用於圓柱上的力量大小。

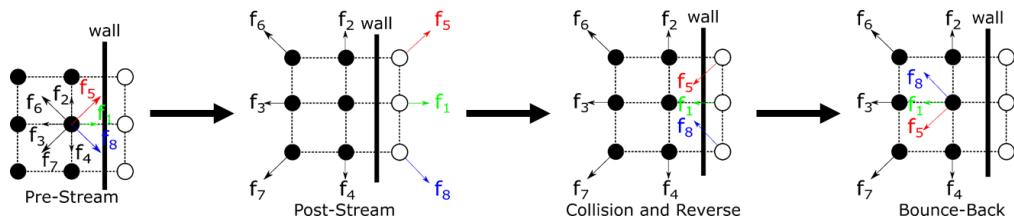


圖 4-5 反彈邊界流程圖

#### 4.2.3 流體作用力計算

在分析流場模型的準確性時，除了探討流場的速度外，也需討論流場中固體的受力情形，在 LBM 的模擬中，流體與固體間的作用力計算是透過動量交換法 (Momentum Exchange)[43]進行處理，其核心為當固定邊界使用反彈邊界時，流體粒子的分佈函數在碰撞到固體邊界時，會先流入固體的晶格上並發生反彈，接著從固體格點上流出沿相反方向的分佈函數，此時便可透過流入固體與從固體流出的兩個分佈函數計算其產生的動量變化，進而得到流體施加於固體上的作用力量值，將該作用力  $\vec{F}$  以分佈函數的形式進行表示：

$$\vec{F} = \sum_{all \vec{x}_b} \sum_{\alpha \neq 0} \vec{e}_\alpha \left[ f_\alpha(\vec{x}_b, t) + f_{\bar{\alpha}}(\vec{x}_b + \vec{e}_{\bar{\alpha}} \Delta t, t) \right] \times \left[ 1 - m(\vec{x}_b + \vec{e}_{\bar{\alpha}} \Delta t) \right] \quad (4-42)$$

$$m(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & if \vec{x} \in \vec{x}_b \\ 0 & if \vec{x} \in \vec{x}_f \end{cases} \quad (4-43)$$

由(4-42)式可以得知流體作用於固體上的力是透過固體格點與附近流體格點的分佈函數計算而得，其且進行動量交換的分佈函數其方向必定相反，因此才會發生碰

撞並產生作用力。此外(4-42)式中的最後一項 $\left[1-m(\vec{x}_b + \vec{e}_\alpha \Delta t)\right]$ 用於確認發生碰撞的分佈函數必須源自流體格點，判斷標準如(4-43)式所示，若 $\vec{x}$ 屬於固體格點 $\vec{x}_b$ 則 $m(\vec{x})=1$ ，判斷式會等於零且不會算出 $\vec{F}$ 的量值，代表固體與固體間的碰撞不會發生作用力，如此便能算出純粹由流體對固體產生的作用力。在分析圓柱繞流現象時，常用的參考標準有阻力係數 $C_d$ (Drag Coefficient)、升力係數 $C_L$ (Lift Coefficient)、斯特勞哈爾數 $St$ (Strouhal Number)，三者定義如下：

$$C_d = \frac{2|F_{x_1}|}{\rho U^2 d} \quad (4-44)$$

$$C_L = \frac{2|F_{x_3}|}{\rho U^2 d} \quad (4-45)$$

$$St = \frac{fd}{U} \quad (4-46)$$

其中 $F_{x_1}$ 為圓柱所受平行於流場方向的作用力、 $F_{x_3}$ 為圓柱所受垂直於流場方向的作用力， $U$ 為流場的入口流速、 $d$ 為圓柱直徑。因為本研究主要探討流體流經圓柱所產生的渦街現象，以及利用渦街激振圓柱後方的壓電試片以進行能量擷取，其中渦街激振壓電試片的作用力為 $x_3$ 方向，且渦街本身為一個週期性震盪現象，因此本研究主要觀測 $C_L$ 與 $St$ 以進行圓柱繞流的分析。

## 4.3 結果討論

本節基於前一節所說明的 LBM 模擬流程，使用 D2Q9 與 D3Q19 兩種維度的模型，搭配計算流體力學軟體 LS-DYNA 進行模擬與使用風洞進行圓柱繞流實驗，將三者結果進行比較以驗證 LBM 數值計算的準確性。

### 4.3.1 圓柱繞流模型

首先說明使用 D2Q9 模型搭配 LES 中的 SGS 模型進行流場的數值計算，流場尺寸為 $800 \times 300$  ( $mm^2$ ) 的長方形，流場內部有一圓柱障礙物，其中心距離牆壁



150 (mm)、距離入口端 200 (mm)、距離出口端 600 (mm)，圓柱直徑為 20 (mm)，整體示意圖如圖 4-6 所示，邊界設定上圓柱與牆壁等所有障礙物均使用反彈邊界，入口端設定為均勻流(Uniform Flow)，使用(4-41)式的 Zou-He 邊界並設定入口流速，出口端考慮為已穩定的流場，因此將其設定為定壓條件(Constant Pressure)，流體選用空氣，其密度為  $\rho = 1.225 \text{ (kg/m}^3)$ ，黏滯係數為  $\mu = 1.7894 \times 10^{-5} \text{ (Pa}\cdot\text{s)}$ ，輸出結果部分根據本研究欲探討渦街生成的頻率，將圓柱周圍所受流體的作用力取  $x_3$  方向之分量，並依據(4-45)式計算升力係數，並將計算結果進行快速傅立葉轉換，其轉換後所得最大的峰值頻率即為在入口流速下產生的渦街頻率，將該頻率代入(4-46)式後即可求得  $St$ 。接著對二維 LBM 進行網格的收斂性分析，分析的總時長為 2 秒，入口流速設定為 2.848 (m/s)，其對應的雷諾數  $Re$  (Reynolds Number)為 3900，結果如表 4-1 與圖 4-8、圖 4-9 所示，表 4-1 中  $C_L$  與  $St$  的誤差為與下一個更小尺度網格所計算數值之間的相對差值，從表中可以發現當網格尺寸為 0.1 (mm) 時，對應網格數量為  $2.4 \times 10^7$  時， $C_L$  與  $St$  已經趨近於收斂，與網格尺寸為 0.08 (mm) 在  $C_L$  上僅相差 0.44%，在  $St$  上僅相差 -1.12%，且根據 Moin 在  $Re$  為 3900 時所做的二維 LBM 於圓柱繞流模型下的數值分析中[44]，其所得到  $St$  的收斂數值為 0.263，與網格尺寸為 0.1 (mm) 時得到的  $St$  數值 0.249 已相當接近，驗證本研究所使用的二維 LBM 的準確性，在之後的 2 維 LBM 計算中，網格尺寸皆使用 0.1 (mm)。

接著說明 D3Q19 模型搭配 LES 中的 SGS 模型進行流場的數值計算，模型與二維下模型相同並在增加高度方向尺寸 300 (mm)，整體尺寸為  $800 \times 300 \times 300 \text{ (mm}^3)$ ，整體示意圖如圖 4-7。各邊界上與流體的設定與 2 維 LBM 皆相同，升力係數與  $St$  的求得方法也相同。再來進行三維 LBM 的收斂性分析，分

析總時長與入口流速皆與二維 LBM 的收斂性分析設定相同，結果如表 4-2 與圖 4-10、圖 4-11 所示，其中誤差的定義與二維 LBM 的網格收斂性分析相同，從表中可以發現當網格尺寸為  $1\text{ (mm)}$  時， $C_L$  與  $St$  已經趨近於收斂，不過由於在該網格尺寸下進行模擬時，因為網格數量太多需要耗費太多計算資源，因此退而選擇  $2\text{ (mm)}$  作為後續進行三維 LBM 模擬的網格尺寸，除了能夠節省計算時間外，可以發現在  $St$  上的收斂性效果也不錯， $2\text{ (mm)}$  網格下的  $St$  僅與  $1\text{ (mm)}$  網格下的  $St$  相差  $1.06\%$ ，而在升力係數上雖然有略高的誤差  $9.64\%$ ，但由於本研究在進行能量擷取實驗時，主要關注於渦街頻率與壓電試片共振頻率的關係，因此與渦街頻率有關的  $St$  其重要性是大於升力係數的重要性，因此對於存在較高誤差的升力係數是在可接受的範圍內，因此後續三維 LBM 的計算，網格尺寸皆使用  $0.2\text{ (mm)}$ 。

接著說明計算流體力學軟體的對流場分析，本研究使用商用套裝軟體 LS-DYNA 並搭配其第十二代 MPP(Massive Parallel Processing)雙精度(Double)求解器進行二維不可壓縮流的計算流體力學(Imcompressible Computational Fluid Dynamics, ICFD)分析，流場模型的幾何尺寸與二維 LBM 的模型相同，網格切割上由於 LS-DYNA 能產生非均勻的網格分佈，故在切割網格時設定兩種尺寸，牆壁邊界由於距離圓柱，即渦街產生處較遠因此使用較粗的網格尺寸  $0.01\text{ (m)}$ ，而圓柱邊界周圍則使用較細網格，尺寸大小於後續收斂性分析討論，網格形狀為三角形，如圖 4-12 所示。邊界設定上，入口處設定為均勻流並給予固定的初始流速，出口處設定為定壓條件並固定壓力值為零，在圓柱與牆壁上設定為無滑移邊界，此外在圓柱上設定邊界層，使圓柱上的網格進行加密，如圖 4-13 所示，能夠更準確計算圓柱上的流場變化，流體選用空氣，密度、黏滯係數皆與 LBM 的設定相同。由於渦街生成屬於紊流的範疇，因此開啟紊流模組已符合更真實物理現象，紊流模組選用 SST  $k-\omega$  (Shear Stress Transport)，該模組結合了遠場自由流中的  $k-\varepsilon$  與近壁區域的  $k-\omega$  的優點，可以較完整的模擬圓柱繞流模型的渦街現象。輸出設定上，LS-DYNA

能直接輸出圓柱所受的流體作用力大小，將其取  $x_3$  方向的分量並計算升力係數，將升力係數取快速傅立葉轉換以求得渦街頻率並計算  $St$ 。接著對 LS-DYNA 進行網格收斂性分析，入口流速設定為 2.848 (m/s)，對應的雷諾數為 3900，分析總時長為 2 秒，結果如表 4-3 與圖 4-14、圖 4-15 所示，其中誤差的定義與二維 LBM 的網格收斂性分析相同，從表中可以發現當圓柱周圍網格，即最小網格尺寸為 0.2 (mm) 時， $C_L$  與  $St$  已經趨近於收斂，與最小網格尺寸為 0.1 (mm) 在  $C_L$  上相差 -3.48%，在  $St$  上僅相差 -0.38%，雖然  $C_L$  還有些許誤差，但因為本研究著重於渦街頻率上，因此  $St$  已達收斂即可， $C_L$  的些許誤差在可容許範圍，故於後續的 LS-DYNA 分析中，圓柱的網格尺寸皆設定為 0.2 (mm)。

圖 4-16 為渦街量測的實驗架設圖，將熱線風速計置於圓柱後方 7 (cm) 處以量測空氣流經圓柱產生的渦街現象，在實驗開始前會透過皮托管量測風機風速與變頻器頻率間的關係，結果如圖 4-17 所示，接著將皮托管的量測結果用於校正熱線風速計，結果如表 4-4 與圖 4-18 所示，其中電壓與風速間的四次曲線關係如下：

$$v = 0.2091e^4 - 2.2865e^3 + 9.8324e^2 - 17.601e + 11.895 \quad (4-47)$$

其中  $v$  為流速、 $e$  為熱線電壓。圖 4-19~圖 4-32 為熱線的量測結果，並將其進行快速傅立葉轉換以獲得渦街頻率，同時在二維、三維 LBM 與 LS-DYNA 設定相同的入口流速並計算求得圓柱繞流模型下的渦街頻率，並進行實驗與模擬結果的比較，如表 4-5 與圖 4-33 所示，其中藍色曲線為熱線量測數據、橘色曲線為二維 LBM 的數據、黃色曲線為三維 LBM 的數據、紫色數據為 LS-DYNA 的數據，從圖中可以發現渦街頻率與入口流速兩者呈現線性關係，在四筆數據上皆能觀察到此現象，而在較低流速的情況下，二維 LBM 的結果與實驗數據較為接近，但隨著流速的增加，兩者的誤差也隨之增加，主要是因為模型維度的差異，因為真實情況下並不存在二維流場，所以其結果必然存在誤差，隨著流速增加其誤差也隨之增加，而三維 LBM 則較為貼近實驗模型，雖然在數值上有些許誤差，但其趨勢發展與實

驗結果相近，在渦街頻率與流速的線性關係上有較為良好的對應性。LS-DYNA 的模擬結果與實驗量測結果較為接近，在趨勢發展上也與實驗量測結果相符，雖然其本身模型也是二維模型，與實驗模型有一定落差，但從結果上能看出在圓柱繞流模型上仍有一定的參考性。

接著利用入口流速與渦街頻率透過(4-46)式計算  $St$  並進行比較，如表 4- 6 與圖 4- 34 所示，其中各色曲線代表的數據皆與圖 4- 33 相同，從圖中可以發現二維、三維 LBM 與 LS-DYNA 的結果接近一定值，不隨入口流速增加而有顯著變化，而實驗數據的  $St$  隨著流速增加而逐漸下降，在低流速情況下，實驗數據的  $St$  是較為接近二維 LBM 的結果，但隨著流速增加，實驗數據的  $St$  則會逐漸下降並接近三維 LBM 與 LS-DYNA 的結果，主要可能是在流速上的量測誤差所導致，在低流速下皮托管的量測效果較不穩定，易受其他擾動干擾，隨著流速增加則量測效果會較為穩定，因此在高流速下其  $St$  才較為接近三維 LBM 與 LS-DYNA 的結果，而與其他學者於圓柱繞流的實驗數據[45][46]的比較中，如圖 4- 35、圖 4- 36，三維 LBM、LS-DYNA 與實驗量測的結果有一定的對應性，實驗量測的流速為 0.97~4.19 (m/s)，換算成雷諾數為 1328~5737，對應參考資料的  $St$  為 0.2 左右，而 3 維 LBM、LS-DYNA 與實驗量測的結果也落在 0.2 上下，呈現良好的對應性。

表 4- 1 二維 LBM 網格收斂性分析表

Grid Size (mm)	Total Nodes (million)	Frequency (Hz)	Time (μs)	$C_L$ (Error %)	$St$ (Error %)
0.5	0.96	31.688	10	1.413 (-9.1)	0.222 (-2.84)
0.4	1.5	32.614	8	1.554 (-7.51)	0.229 (-3.86)
0.25	3.84	33.922	5	1.681 (-3.29)	0.238 (-1.14)
0.2	6	34.315	4	1.738 (-3.18)	0.241 (-3.27)
0.1	24	35.473	2	1.795 (0.44)	0.249 (-1.12)
0.08	37.5	35.873	1.6	1.787 -	0.252 -

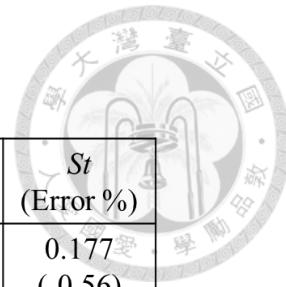


表 4-2 三維 LBM 網格收斂性分析表

Grid Size (mm)	Total Nodes (million)	Frequency (Hz)	Time (μs)	$C_L$ (Error %)	$St$ (Error %)
5	0.576	25.235	50	2.165 (540)	0.177 (-0.56)
2.5	4.608	253297	25	0.338 (56.48)	0.178 (-6.81)
2	9	27.263	20	0.216 (9.64)	0.191 (1.06)
1	72	26.915	10	0.197 -	0.189 -

表 4-3 LS-DYNA 網格收斂性分析表

Maximum Size (mm)	Minimum Size (mm)	Frequency (Hz)	Time (μs)	$C_L$ (Error %)	$St$ (Error %)
10	1	33.205	10	0.673 (-33.78)	0.233 (-1.13)
10	0.5	33.585	8	1.017 (-6.57)	0.236 (1.63)
10	0.4	33.045	5	1.088 (-9.07)	0.232 (-2.05)
10	0.2	33.735	4	1.197 (-3.48)	0.237 (-0.38)
10	0.1	33.865	2	1.24 -	0.238 -

表 4-4 热線風速計校正結果



變頻器頻率 (Hz)	流速 (m/s)	熱線風速計電壓 (V)
10	0.97	1.87
12.5	1.46	2.30
15	1.95	2.61
17.5	2.49	2.84
20	3.04	3.10
22.5	3.6	3.34
25	4.19	3.55
27.5	4.84	3.70
30	5.46	3.90
32.5	6.07	4.01
35	6.64	4.11
37.5	7.20	4.22
40	7.76	4.31

表 4-5 圓柱繞流模型之流速對渦街頻率表

Inlet Velocity (m/s)	Vortex Frequency (Hz)			
	Experiment (Hot-Wire)	LBM (D2Q9)	LBM (D3Q19)	LS-DYNA (2D)
0.97	13.3	12.6	9.3	10.5
1.46	18.3	18.7	14.0	15.5
1.95	23.5	24.8	18.8	20.5
2.4	28.5	31.6	24.0	25.5
3.04	33.9	38.4	29.4	31.5
3.6	39.1	45.4	34.8	36.5
4.19	44.1	52.8	40.5	42.5

表 4-6 圓柱繞流模型之流速對 Strouhal Number 表

Inlet Velocity (m/s)	Strouhal Number			
	Experiment (Hot-Wire)	LBM (D2Q9)	LBM (D3Q19)	LS-DYNA (2D)
0.97	0.274	0.259	0.192	0.216
1.46	0.251	0.256	0.192	0.212
1.95	0.241	0.254	0.193	0.210
2.4	0.229	0.254	0.193	0.205
3.04	0.223	0.253	0.193	0.207
3.6	0.217	0.252	0.193	0.203
4.19	0.211	0.252	0.193	0.203

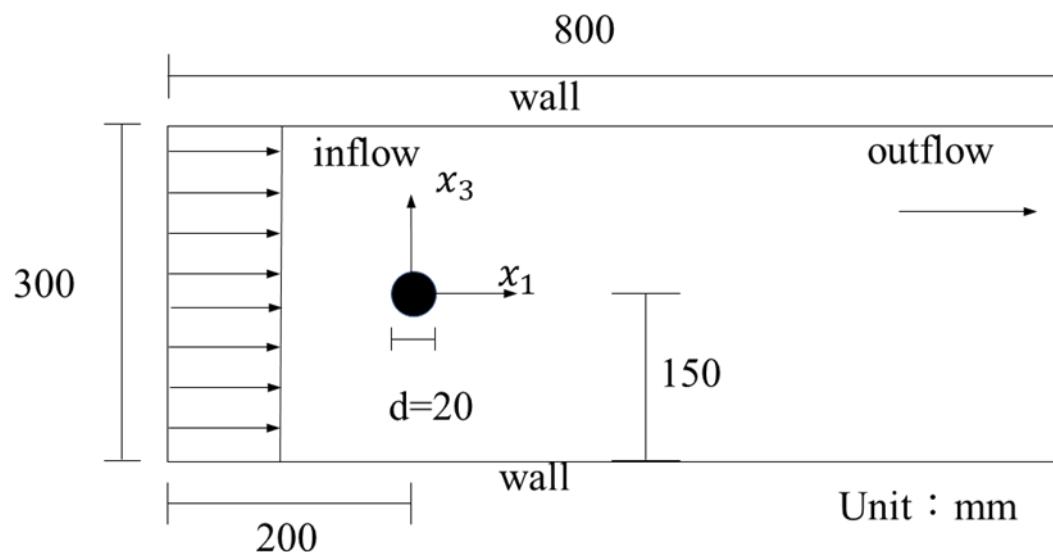


圖 4-6 二維圓柱繞流模型

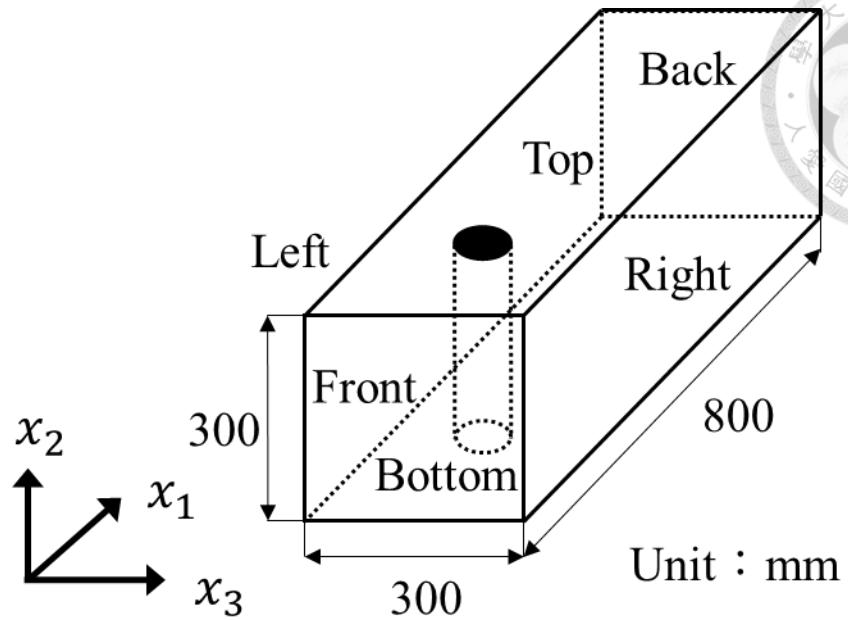


圖 4-7 三維圓柱繞流模型圖

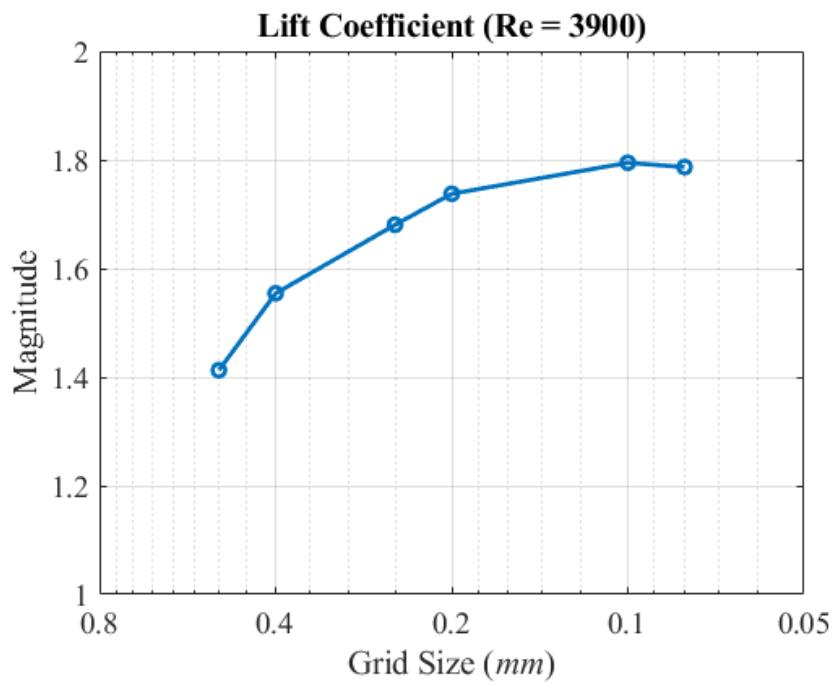


圖 4-8 二維 LBM 之升力係數收斂性分析圖

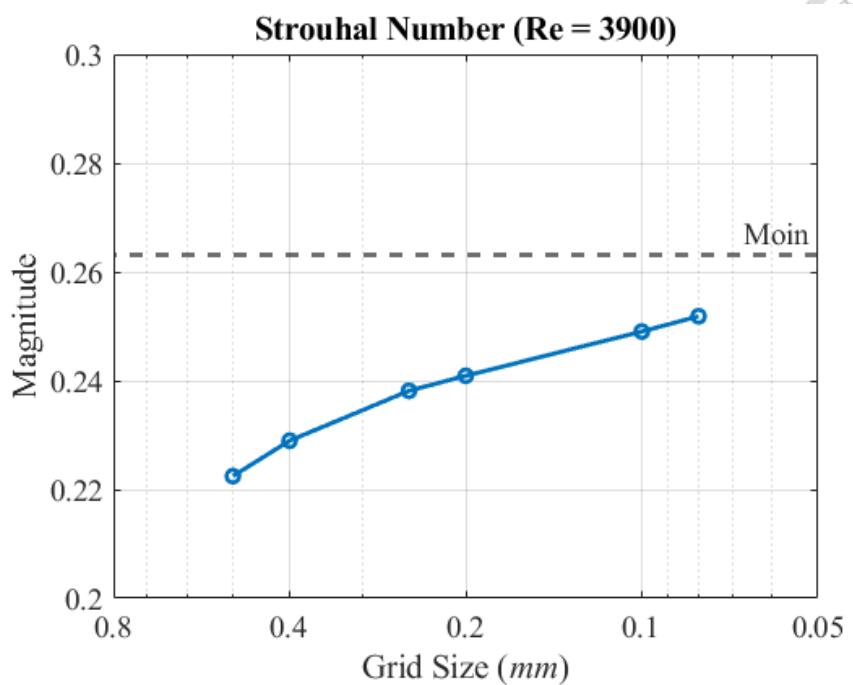


圖 4-9 二維 LBM 之  $St$  收斂性分析圖

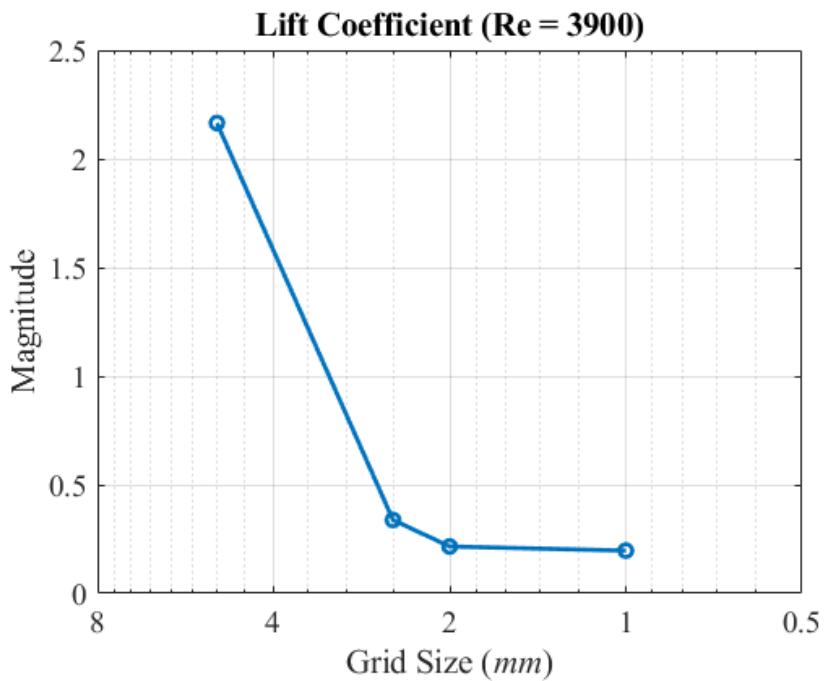


圖 4-10 三維 LBM 之升力係數收斂性分析圖

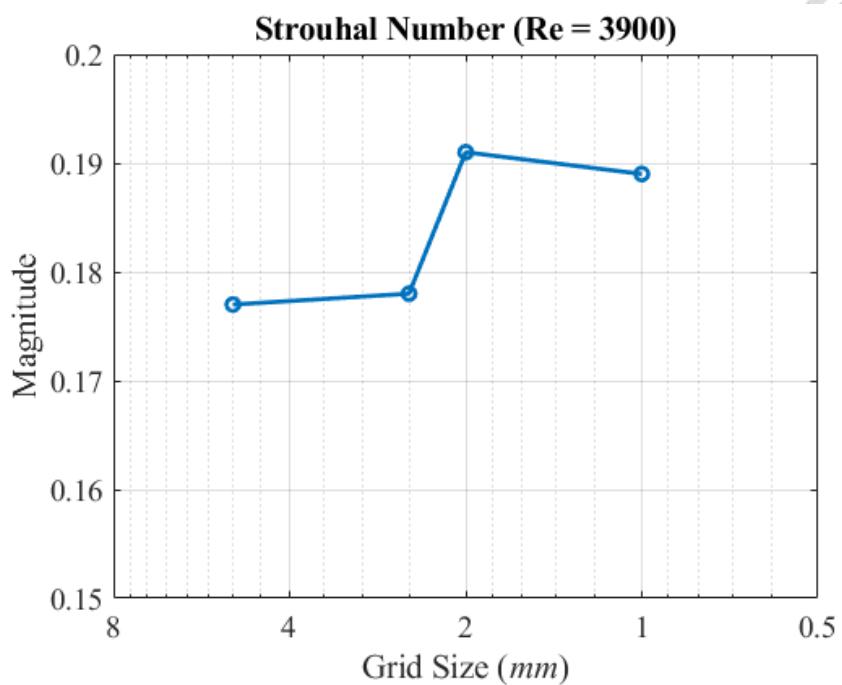


圖 4-11 三維 LBM 之  $St$  收斂性分析圖

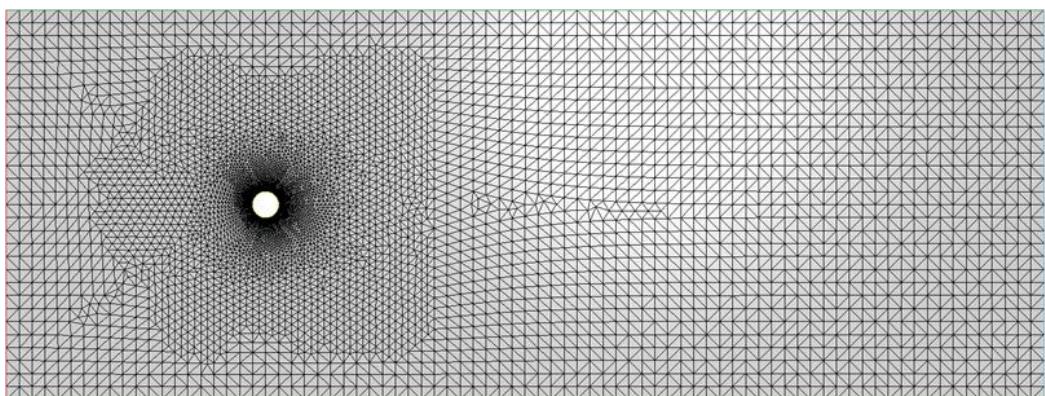


圖 4-12 流場網格圖

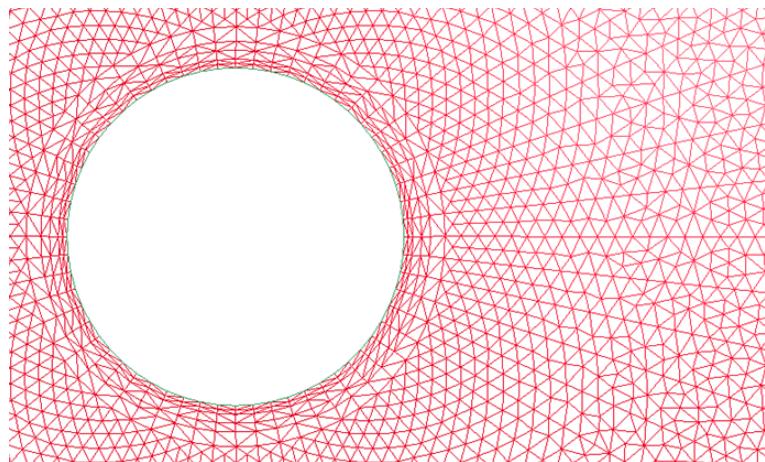


圖 4-13 圓柱邊界層設定

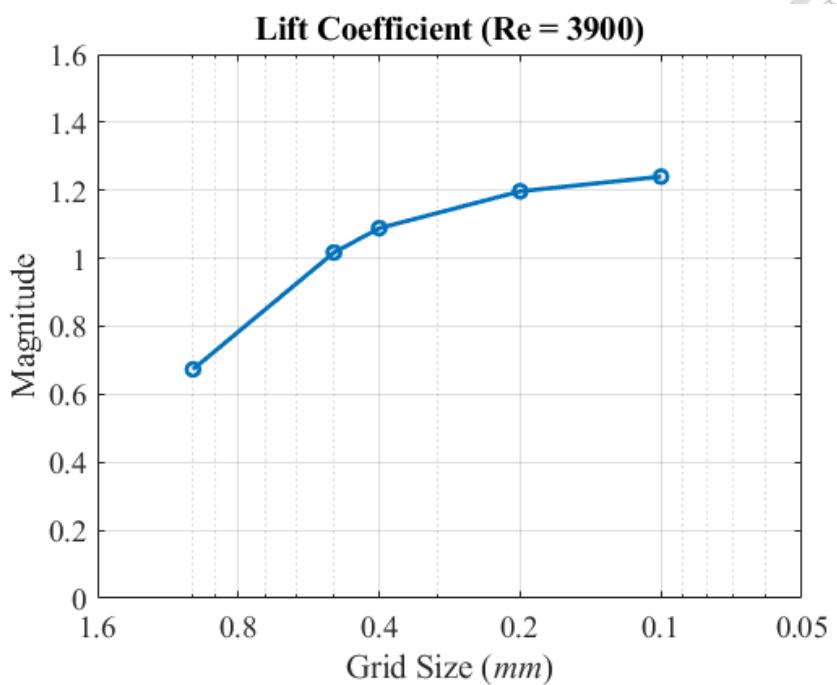


圖 4-14 LS-DYNA 之升力係數收斂性分析圖

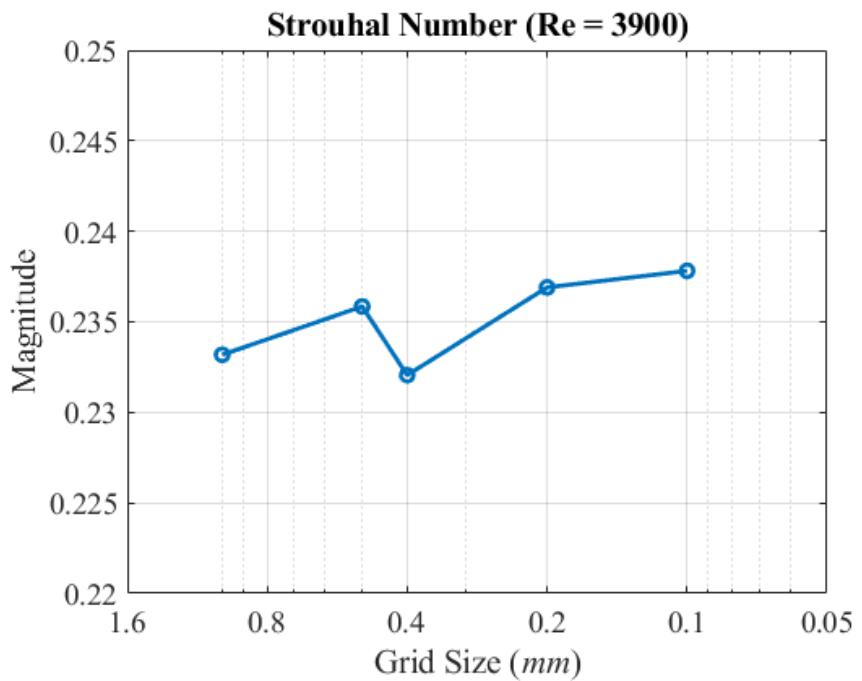


圖 4-15 LS-DYNA 之  $St$  收斂性分析圖

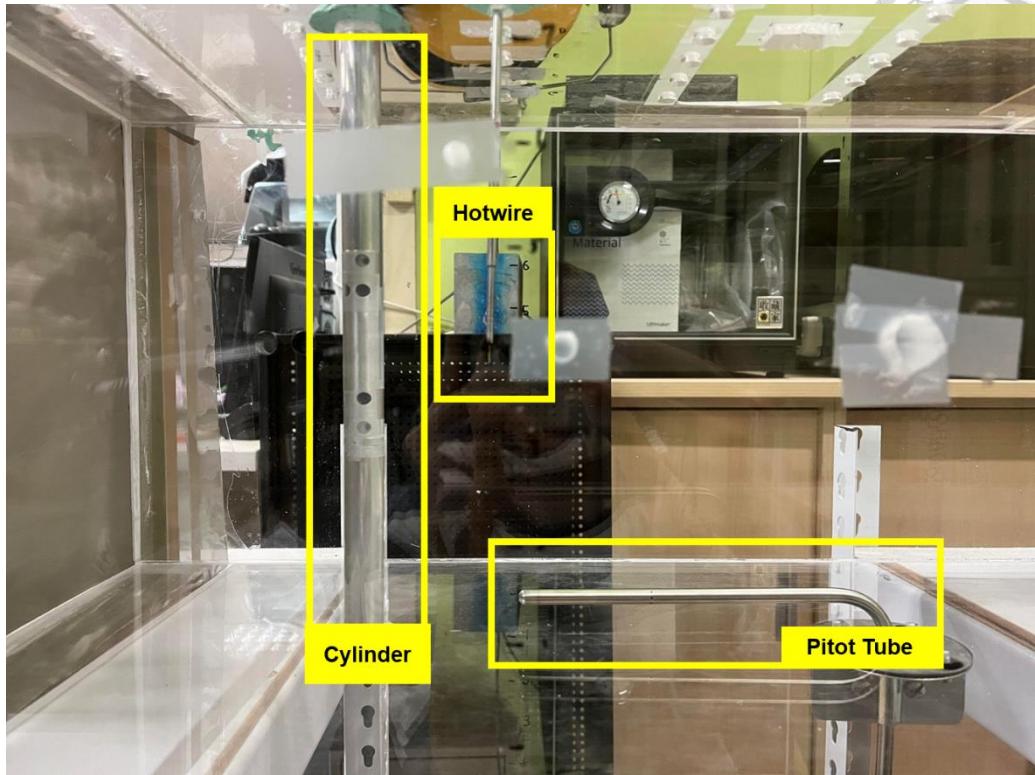


圖 4-16 圓柱繞流模型實驗架設

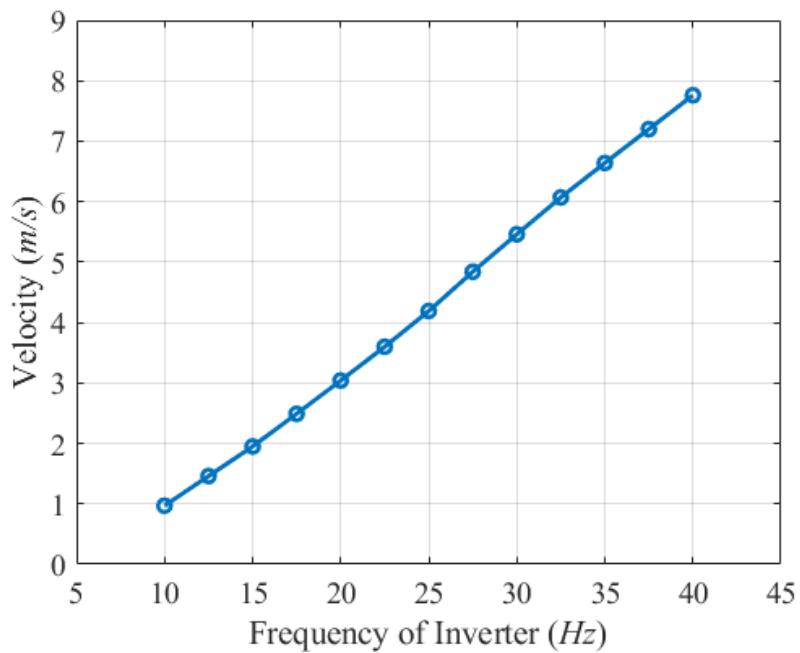
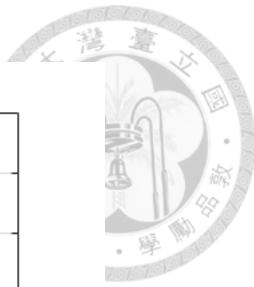


圖 4-17 變頻器頻率對風速圖

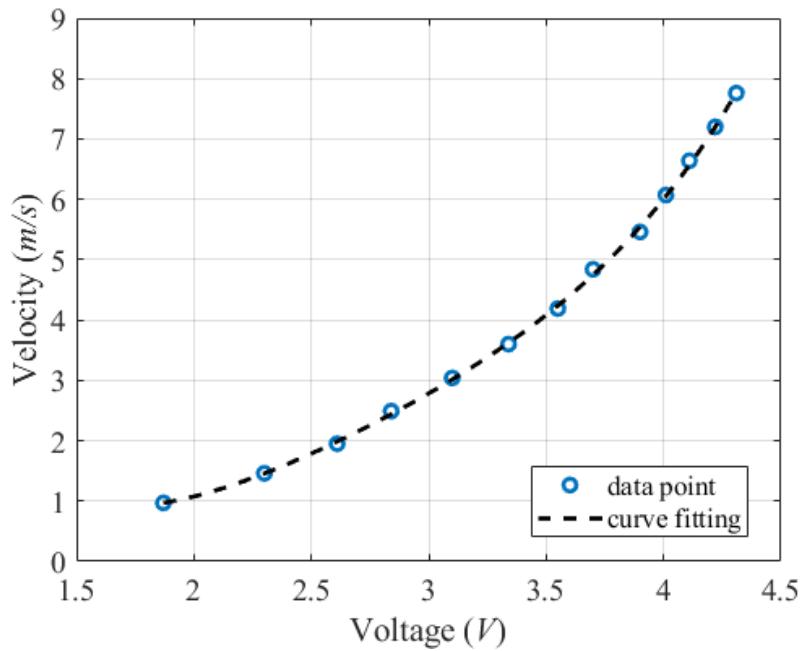


圖 4-18 熱線電壓對風速圖

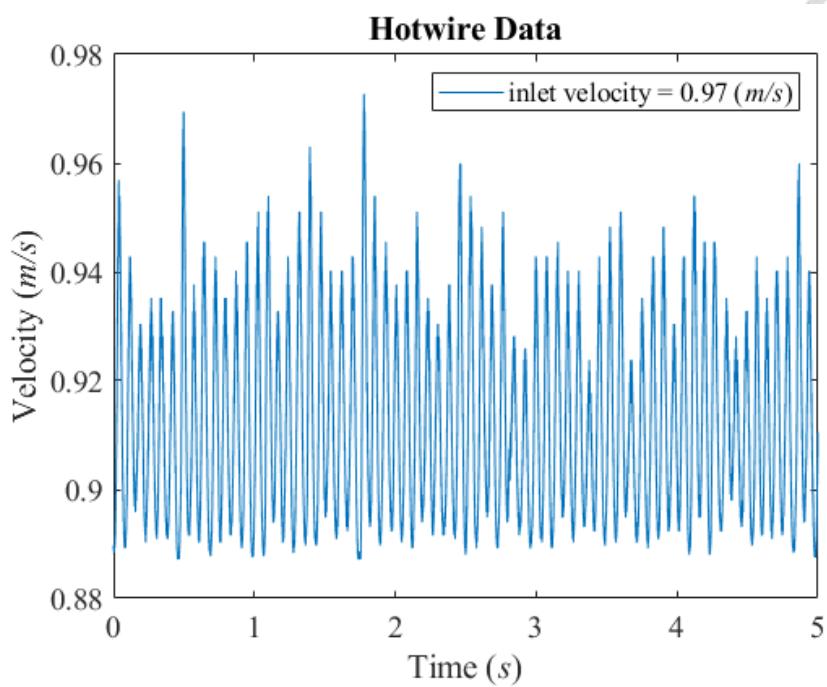


圖 4-19 變頻器 10 Hz (流速 0.97 m/s) 热線量測結果

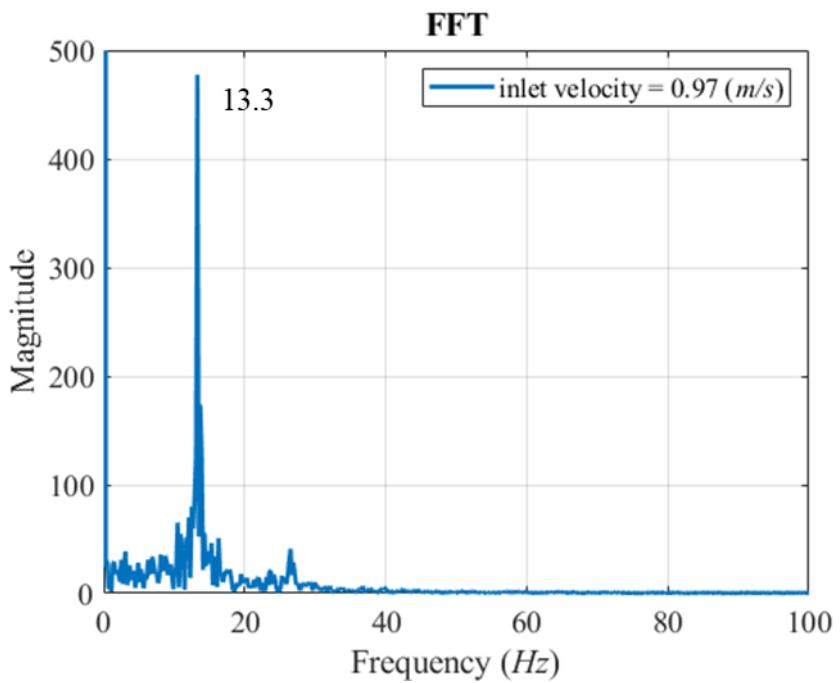


圖 4-20 變頻器 10 Hz (流速 0.97 m/s) 傳立葉轉換結果

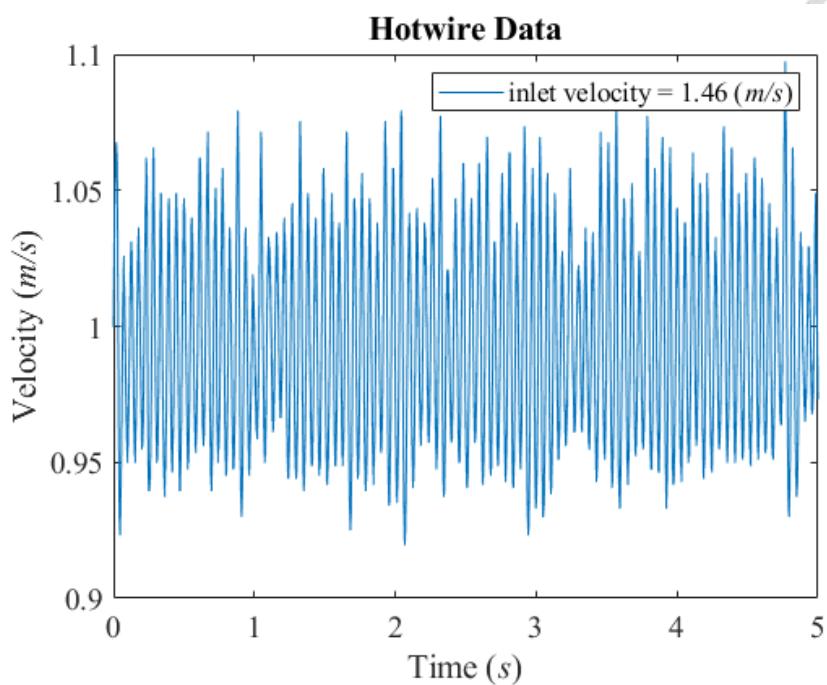


圖 4-21 變頻器 12.5 Hz (流速 1.46 m/s) 热線量測結果

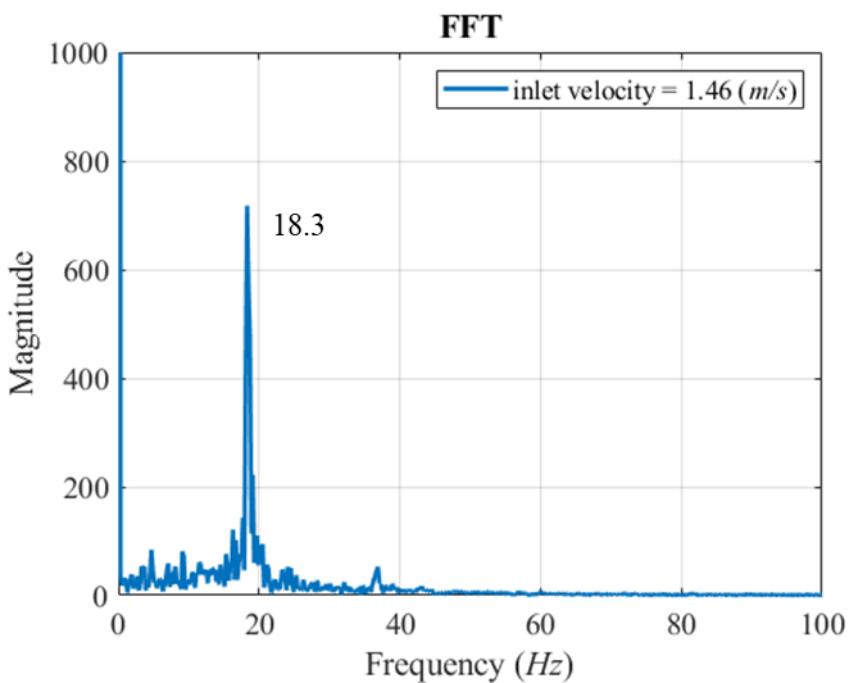


圖 4-22 變頻器 12.5 Hz (流速 1.46 m/s) 傳立葉轉換結果

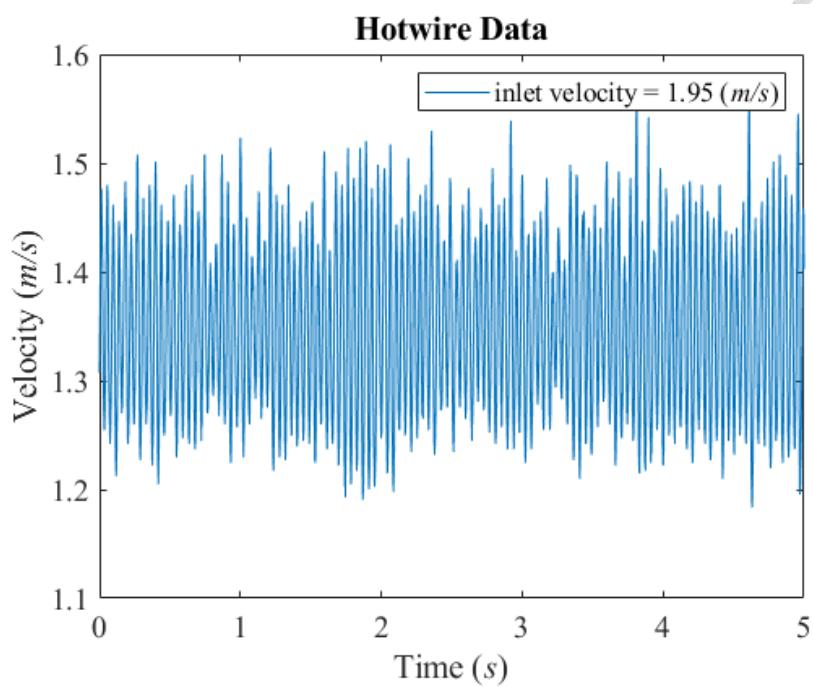


圖 4-23 變頻器 15 Hz (流速 1.95 m/s) 热線量測結果

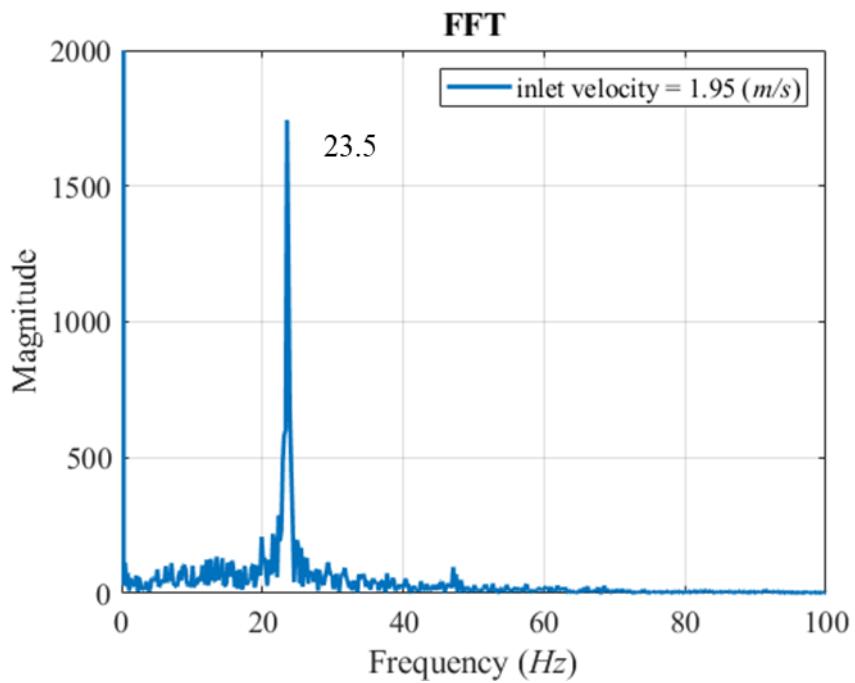


圖 4-24 變頻器 15 Hz (流速 1.95 m/s) 傳立葉轉換結果

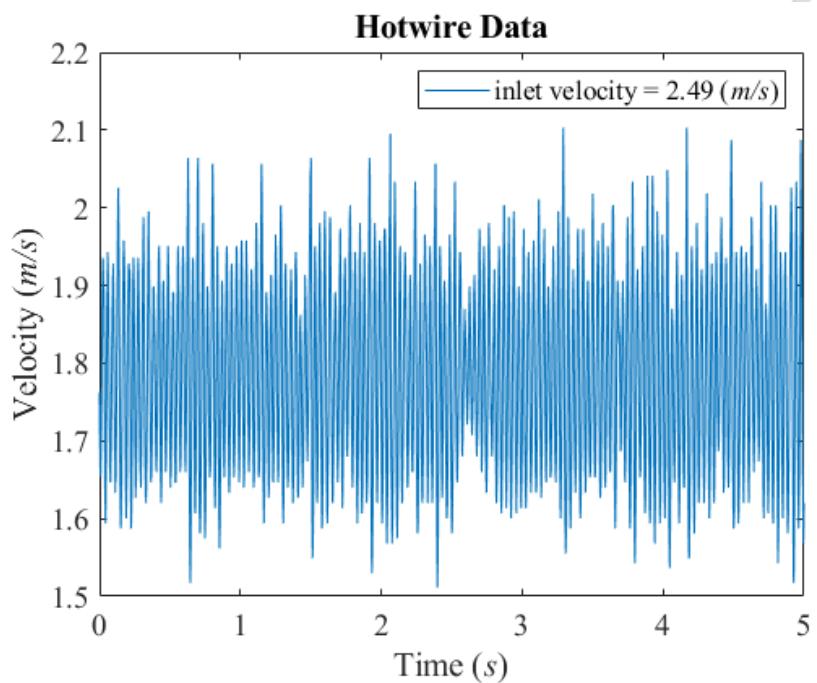


圖 4-25 變頻器 17.5 Hz (流速 2.49 m/s) 热線量測結果

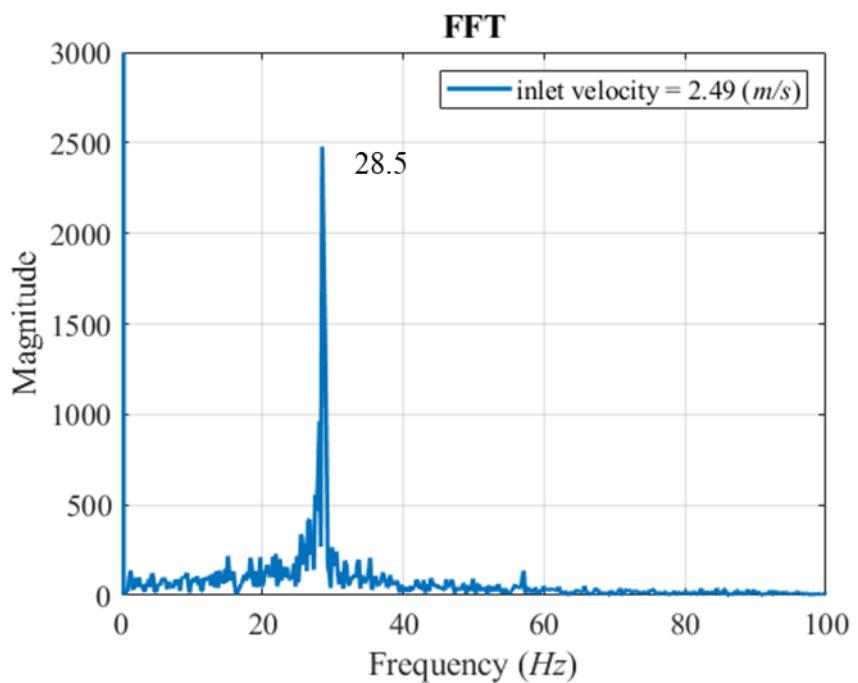


圖 4-26 變頻器 17.5 Hz (流速 2.49 m/s) 傳立葉轉換結果

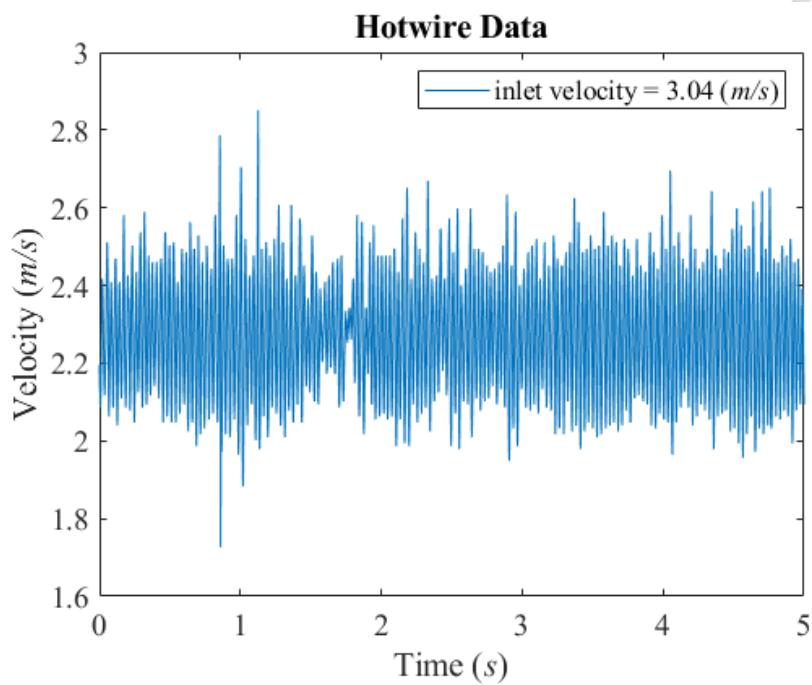


圖 4-27 變頻器 20 Hz (流速 3.04 m/s) 热線量測結果

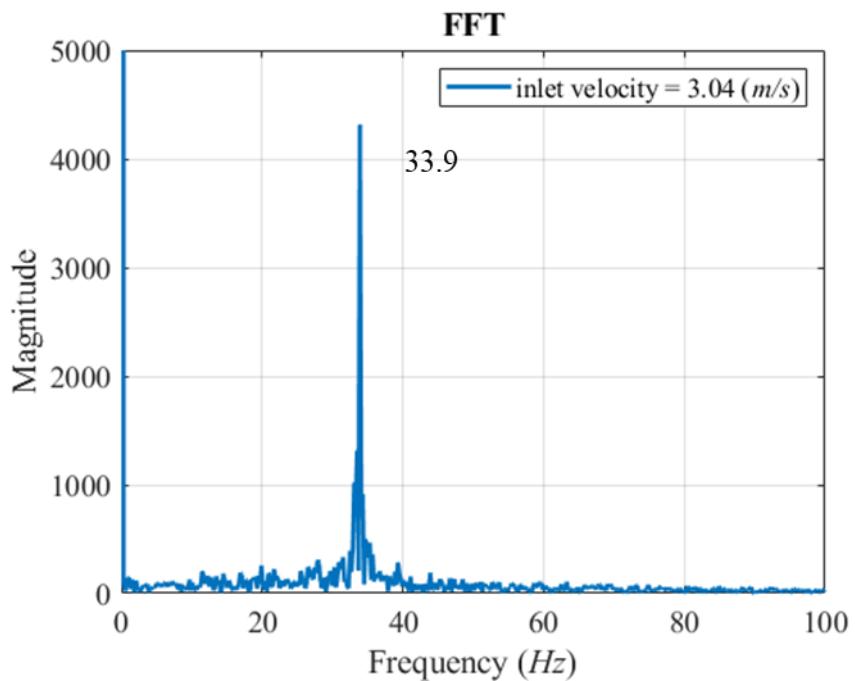


圖 4-28 變頻器 20 Hz (流速 3.04 m/s) 傳立葉轉換結果

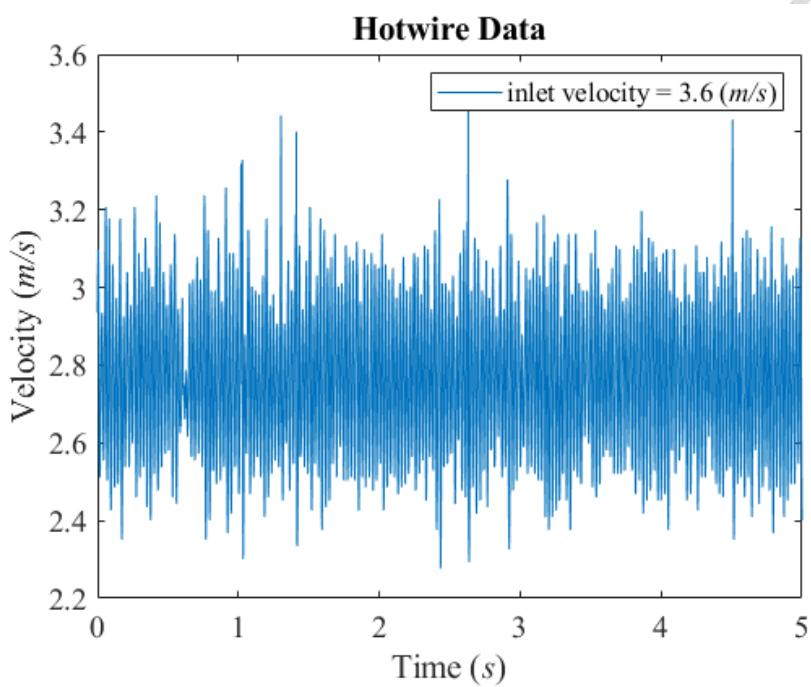


圖 4-29 變頻器  $22.5\text{ Hz}$  (流速  $3.6\text{ m/s}$ ) 热線量測結果

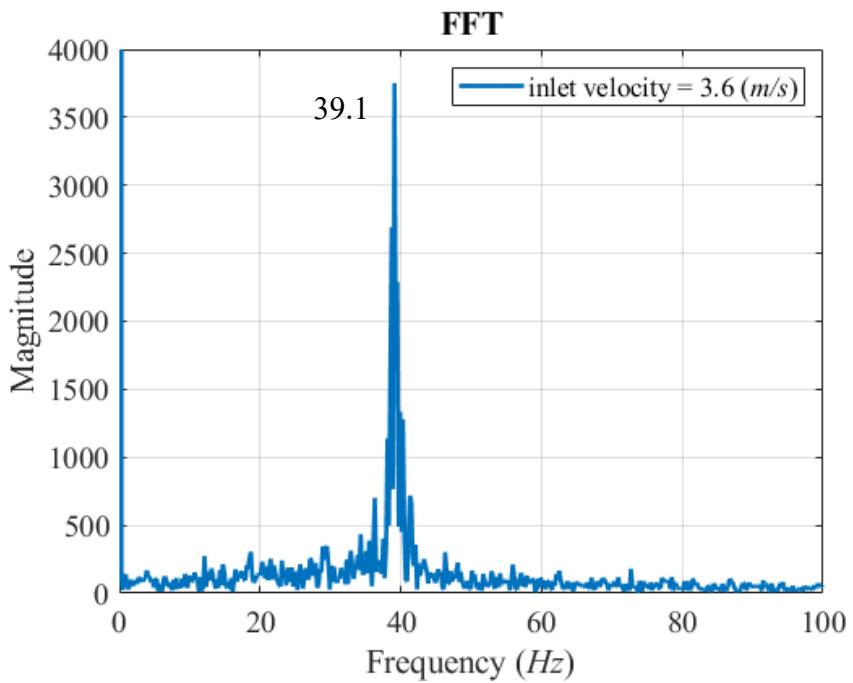


圖 4-30 變頻器  $22.5\text{ Hz}$  (流速  $3.6\text{ m/s}$ ) 傳立葉轉換結果

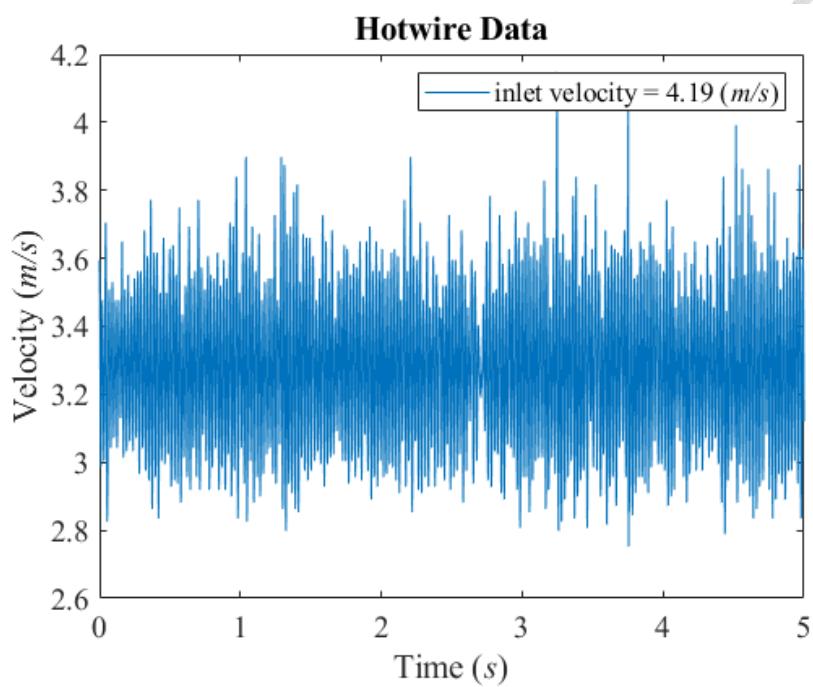


圖 4-31 變頻器 25 Hz (流速 4.19 m/s) 热線量測結果

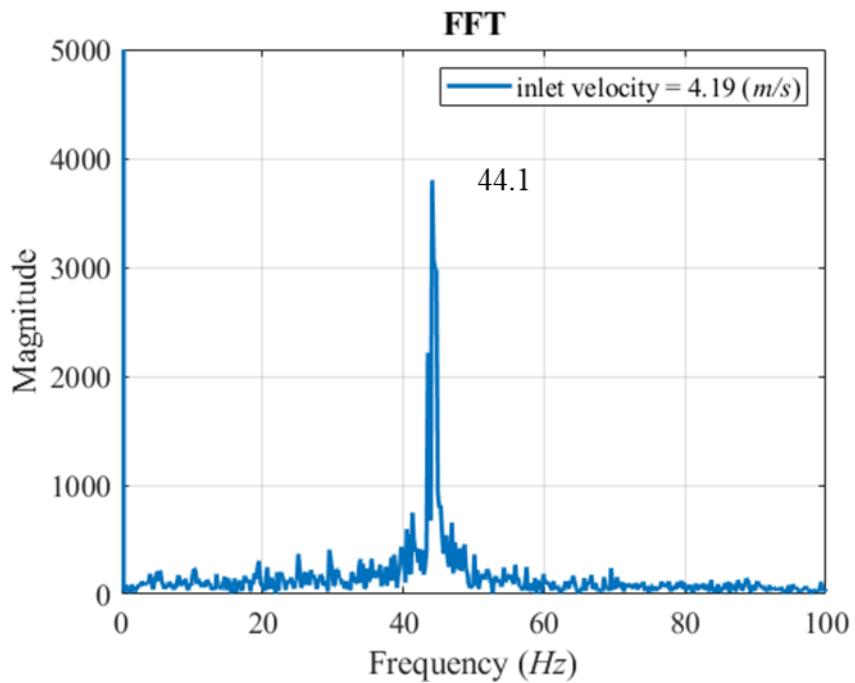


圖 4-32 變頻器 25 Hz (流速 4.19 m/s) 傳立葉轉換結果

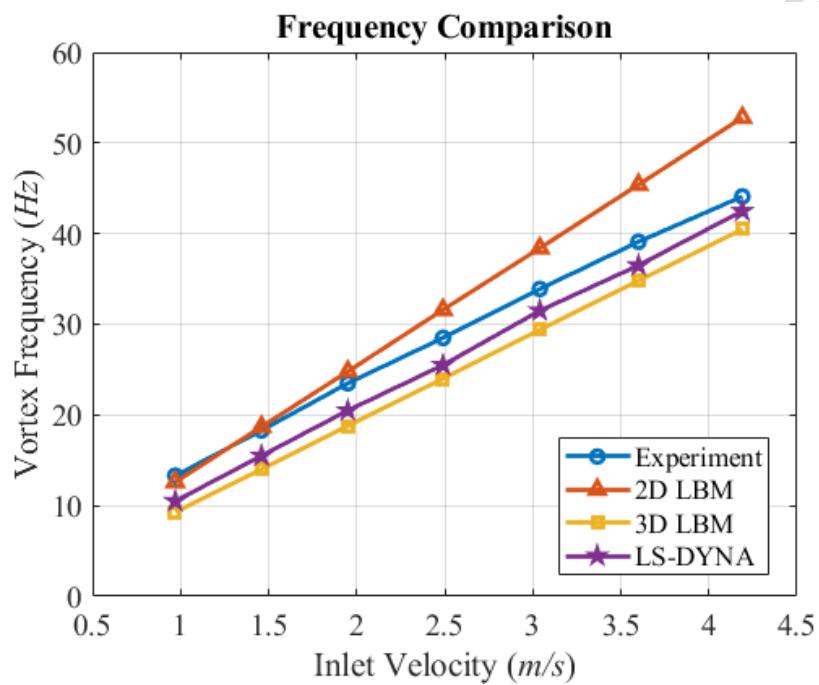


圖 4-33 LBM、LS-DYNA 與實驗量測的渦街頻率比較

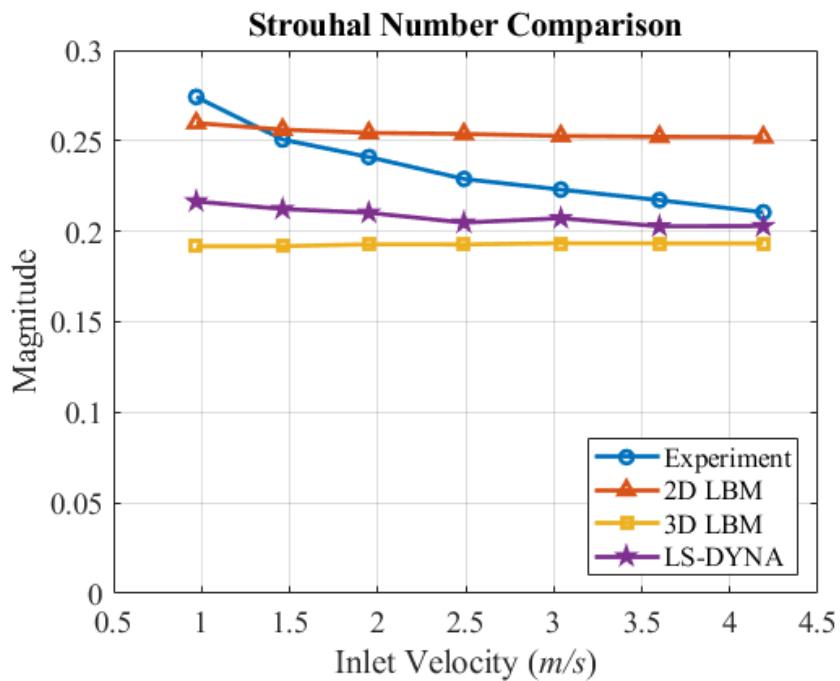


圖 4-34 LBM、LS-DYNA 與實驗量測的  $St$  比較

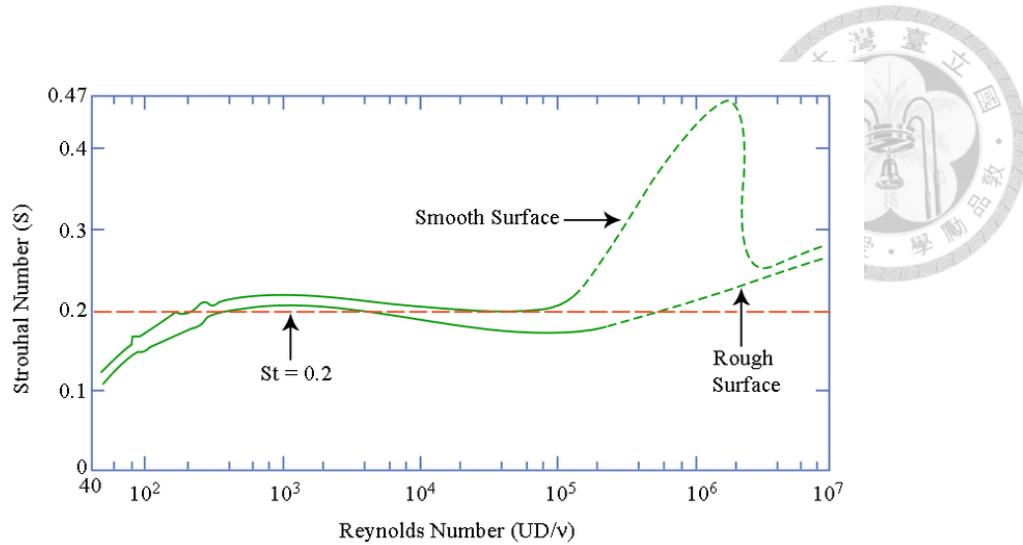


圖 4-35  $St$  與雷諾數關係圖[45]

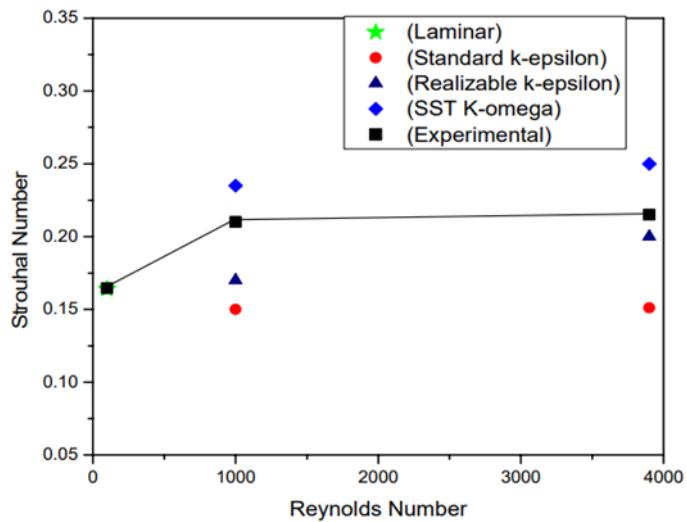


圖 4-36  $St$  與雷諾數關係圖[46]

### 4.3.2 圓柱夾持試片模型

圖 4-37 涡街量測實驗的架設圖，與上一小節不同處在於將加入本研究所使用的壓電平板附著壓克力與磁鐵結構的試片，並將其置於圓柱後方，圓柱夾持試片實際圖如圖 4-38，此外使用熱線量測試片周圍不同位置以分析加入試片後的渦街生成現象，熱線量測點的示意圖如圖 4-39，其中紅色點為實際量測點，藍色點為將熱線量測點投影至試片上，量測點 A 位於試片末端的側邊，距離試片 3 (cm)，量測點 B 位於試片中間處的側邊，同樣距離試片 3 (cm)，量測點 C 位於試片固定端的側邊，同樣距離試片 3 (cm)，量測點 D 位於試片中央上方 3 (cm)處，量測點 E 位

於試片末端後方 10 (cm)處。首先固定變頻器頻率為 20 (Hz)，換算入口流速為 3.04(m/s)，量測不同位置的渦街產生情形，將量測結果進行快速傅立葉轉換以獲得渦街頻率，各量測的結果如圖 4- 40~圖 4- 44 所示，可以發現量測點 A 的結果中有較為明顯的峰值，其對應頻率即為渦街頻率，代表在 A 點這個位置有渦街經過並可量測其對流場的影響。量測點 B 的結果中也有個峰值，相較於 A 點則稍微沒那麼明顯，代表 B 點處應該也有渦街經過，但可能渦街並不完整或量測的位置在渦街的邊緣處，導致其頻率峰值沒點 A 較為明顯。量測點 C 的結果中存在兩個峰值，代表可能有兩個渦街存在，因為 C 點位置靠近圓柱，推測其中一峰值為流體流經圓柱所產生的渦街，另一個則為生成的渦街與平板交互作用後的產物，因為受平板結構影響改變了頻率，所以才會有兩個峰值存在，而在量測點 A 與 B 並沒有這個現象可能是因為距離圓柱較遠，圓柱生成的渦街皆在流動過程中與平板發生交互作用而改變了頻率，所以在量測時僅剩下一個峰值。量測點 D 與量測點 E 的結果中並無明顯峰值存在，可能是因為該位置沒有生成渦街或是有生成渦街但於過程中已消散所以才量測不到。

根據五個點的量測結果，因為 A 點能較為明顯的量測到渦街的現象並求得其頻率，因此選用 A 點作為熱線量測點以量測在不同入口流速下圓柱夾持試片模型的渦街頻率變化。圖 4- 45 至圖 4- 53 為熱線的量測結果並已進行快速傅立葉轉換，其中在圖 4- 50、圖 4- 51 中，雖存在其他更高的峰值，但觀察圖形的整體趨勢可判斷最高的那個峰值應該並非渦街頻率，而是其他擾動所導致，所以選擇第二高的峰值作為渦街頻率。表 4- 7 與圖 4- 54 為將實驗結果與二維、三維 LBM、LS-DYNA 的模擬結果進行比較，其中藍色曲線代表熱線量測數據、橘色曲線為二維 LBM 的結果、黃色曲線為三維 LBM 的結果、紫色曲線為 LS-DYNA 的結果，從圖中可以發現實驗結果與二維 LBM、LS-DYNA 的結果相差甚遠，主要是因為模型維度的差異，後兩者皆為二維模型，由於將試片加入到了流場模型當中，模型的複雜度上升使得維度差異所帶來的影響加遽，因此其數值上的誤差更加顯著，相較之

下三維 LBM 因為所使用的模型與實驗較為相近，其結果與實驗量測有著較好的對應性。接著利用入口流速與渦街頻率透過(4-46)式計算  $St$  並進行比較，結果如表 4-8 與圖 4-55 所示，各色曲線代表的數值同圖 4-54，從圖中可以發現實驗結果與三維 LBM 的結果較為相近，而因為是透過渦街頻率計算而得，因此在渦街頻率上有較大誤差的二維 LBM 與 LS-DYNA 的結果也同樣與實驗結果有著較大落差。綜上所述，在較為複雜的圓柱夾持平板的流場模擬中，使用二維模型的 LBM 與 LS-DYNA 其結果會有較大的誤差，需使用三維模型的 LBM 才具有較好的準確性。

表 4-7 圓柱夾持試片模行之流速對渦街頻率表

Inlet Velocity (m/s)	Vortex Frequency (Hz)			
	Experiment (Hot-Wire)	LBM (D2Q9)	LBM (D3Q19)	LS-DYNA (2D)
3.04	26.9	48.39	28.43	17.15
3.34	30.9	53.18	31.18	18.69
3.50	31.3	55.84	32.71	19.55
3.78	32.9	60.46	35.36	21.03
4.01	35.3	64.10	37.45	22.20
4.19	35.7	67.03	39.13	23.15
4.46	37.3	71.38	41.63	24.55
4.71	38.7	75.46	43.97	25.86
4.91	40.7	78.67	45.81	26.89

表 4-8 圓柱夾持試片模行之流速對 Strouhal Number 表

Inlet Velocity (m/s)	Strouhal Number			
	Experiment (Hot-Wire)	LBM (D2Q9)	LBM (D3Q19)	LS-DYNA (2D)
3.04	0.177	0.318	0.187	0.113
3.34	0.185	0.319	0.187	0.112
3.50	0.179	0.319	0.187	0.112
3.78	0.174	0.319	0.187	0.111
4.01	0.176	0.320	0.187	0.111
4.19	0.170	0.320	0.187	0.110
4.46	0.167	0.320	0.187	0.110
4.71	0.164	0.320	0.187	0.110
4.91	0.166	0.321	0.187	0.110

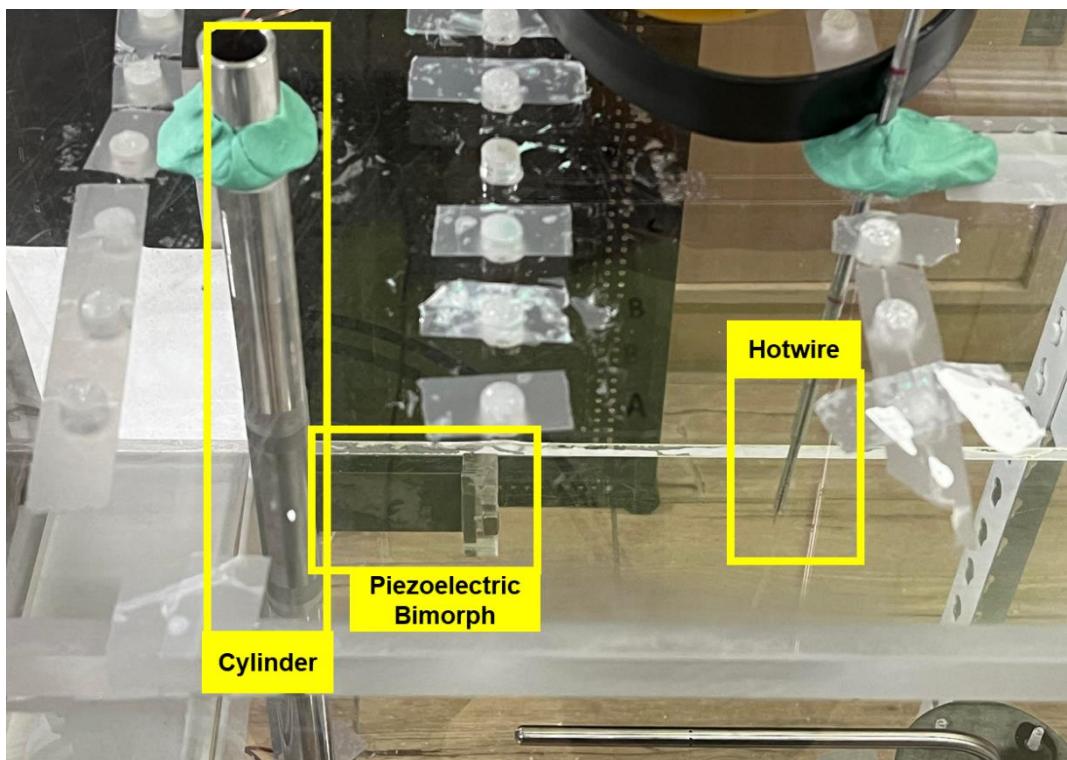


圖 4-37 圓柱夾持平板模型的實驗架設圖



圖 4-38 圓柱夾持試片圖

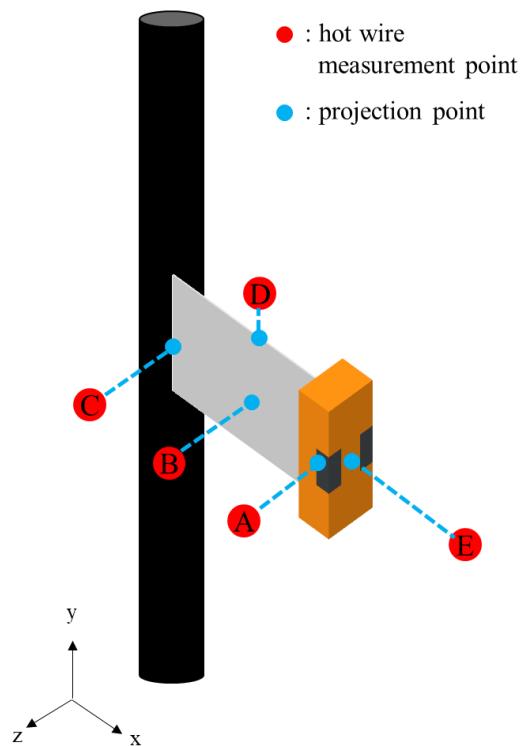


圖 4-39 热線量測點示意圖

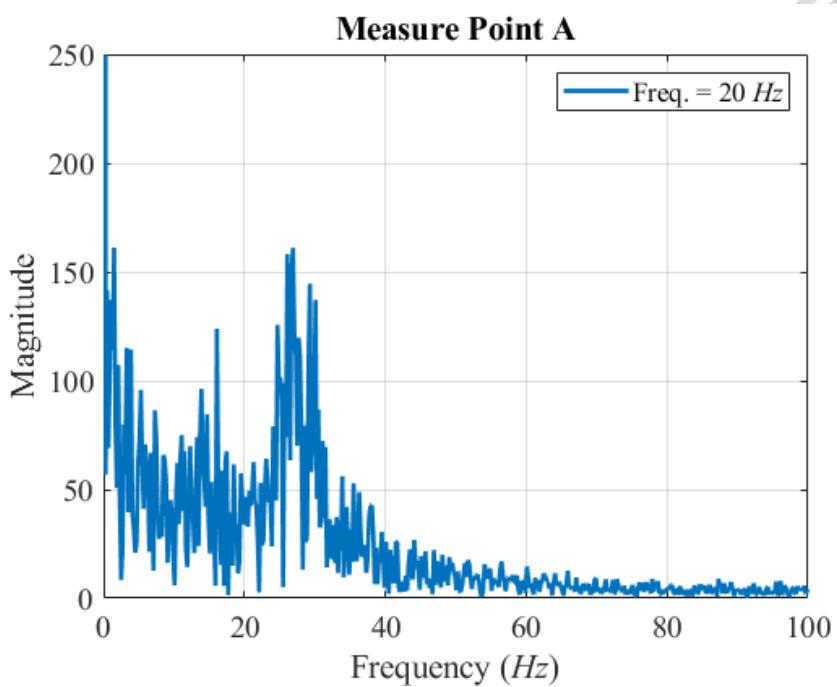


圖 4-40 量測點 A 热線數據的傅立葉轉換圖

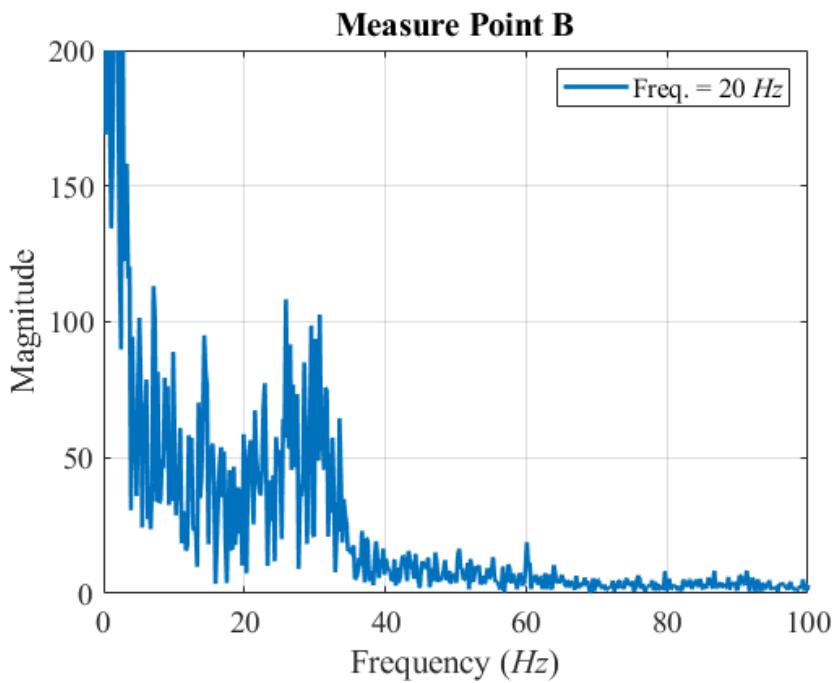


圖 4-41 量測點 B 热線數據的傅立葉轉換圖

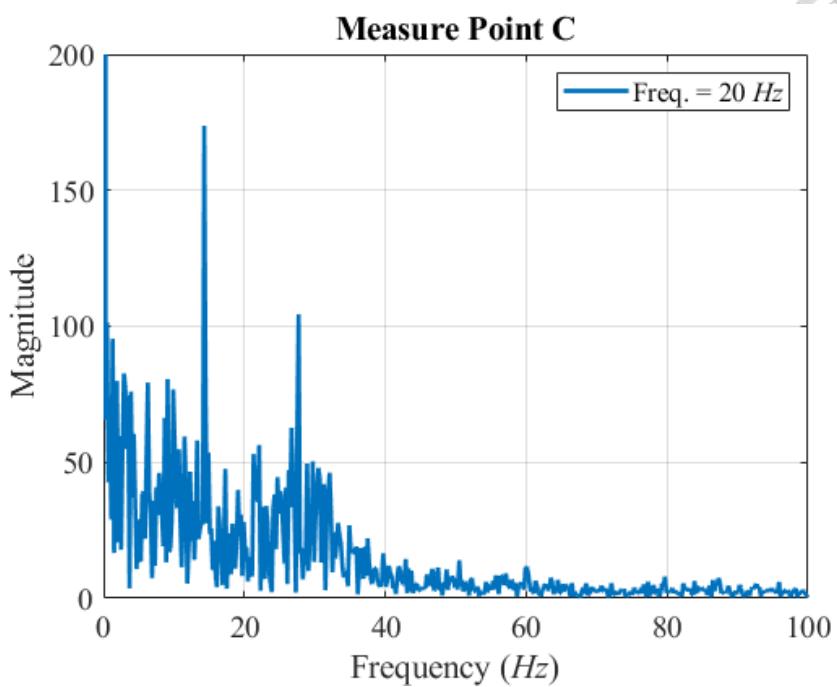


圖 4-42 量測點 C 热線數據的傅立葉轉換圖

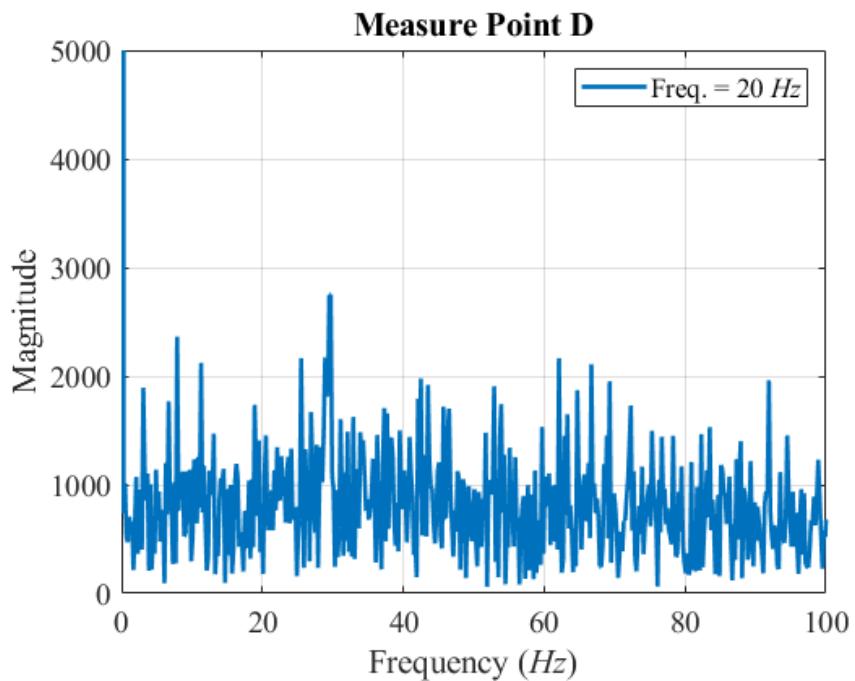


圖 4-43 量測點 D 热線數據的傅立葉轉換圖

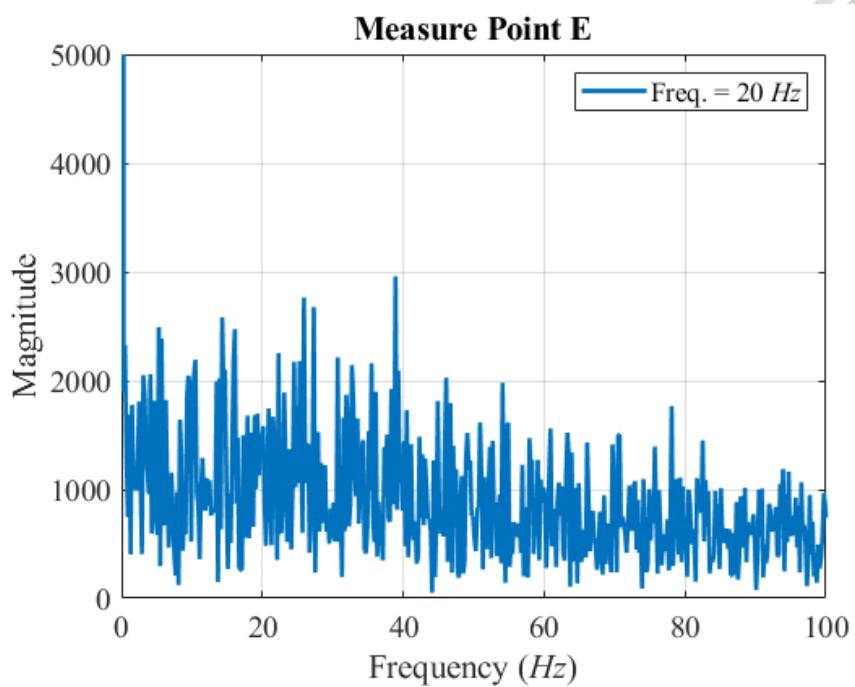


圖 4-44 量測點 E 热線數據的傅立葉轉換圖

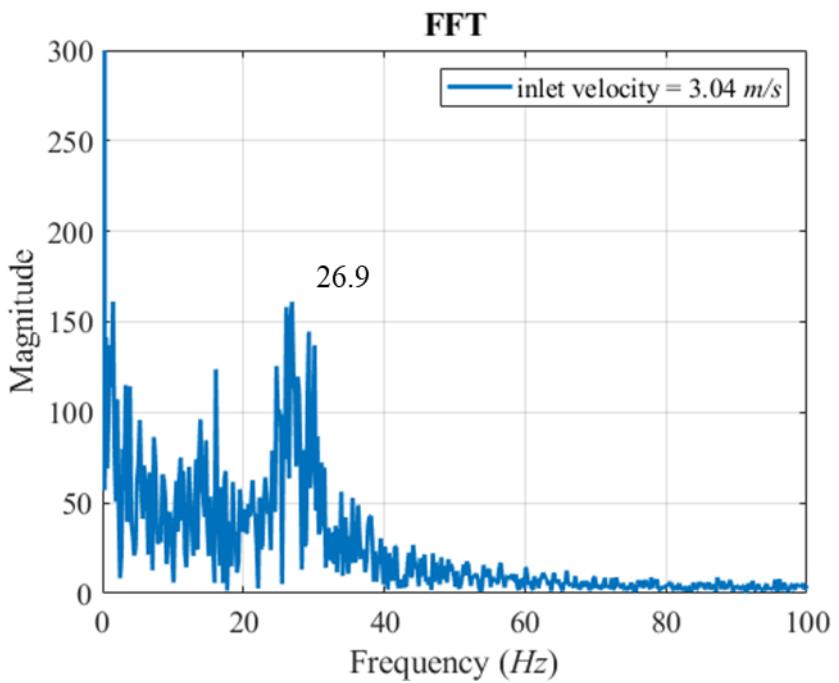


圖 4-45 變頻器 20 Hz (流速 3.04 m/s) 傅立葉轉換結果

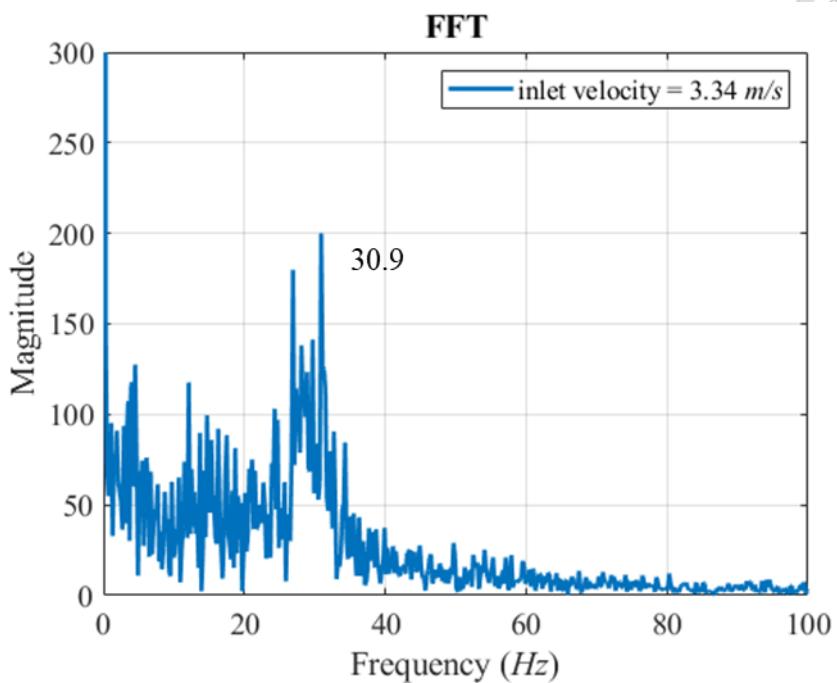


圖 4-46 變頻器 21 Hz (流速  $3.34 \text{ m/s}$ ) 傳立葉轉換結果

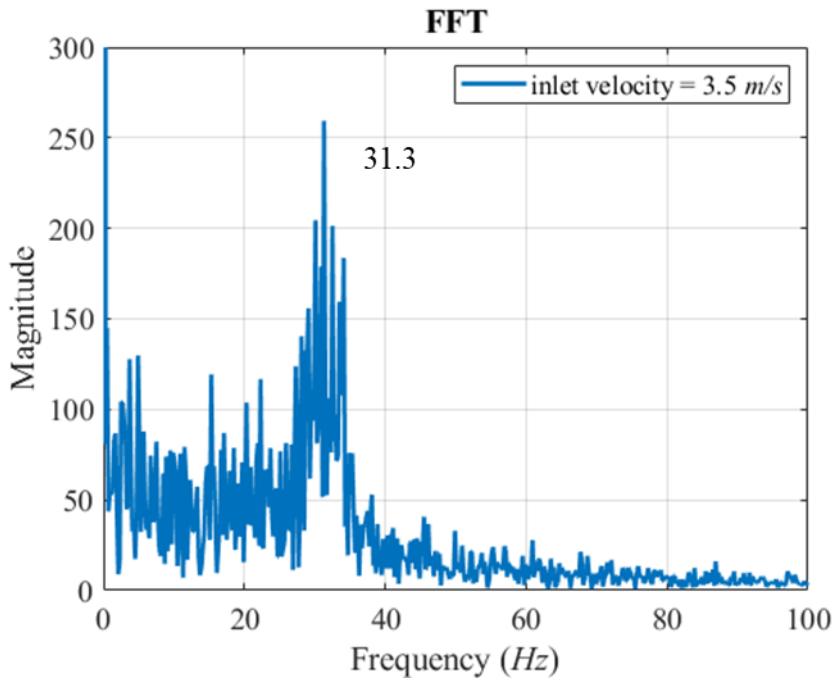


圖 4-47 變頻器 22 Hz (流速  $3.5 \text{ m/s}$ ) 傳立葉轉換結果

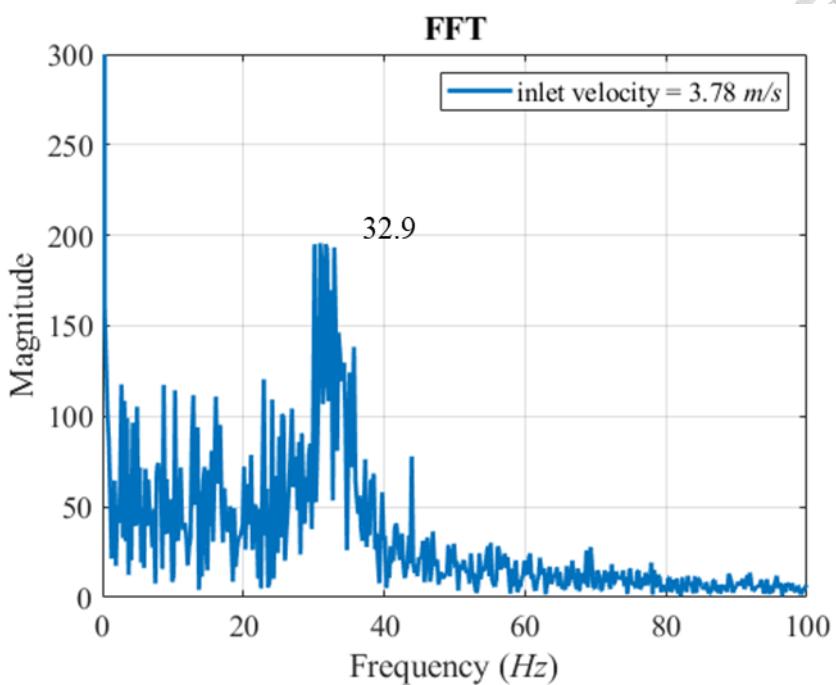


圖 4-48 變頻器 23 Hz (流速  $3.78 \text{ m/s}$ ) 傳立葉轉換結果

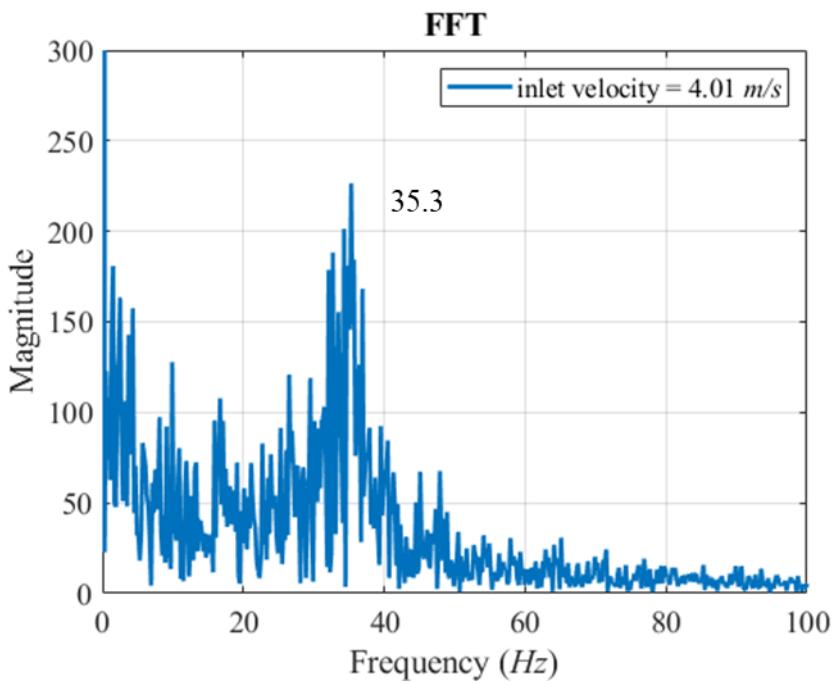


圖 4-49 變頻器 24 Hz (流速  $4.01 \text{ m/s}$ ) 傳立葉轉換結果

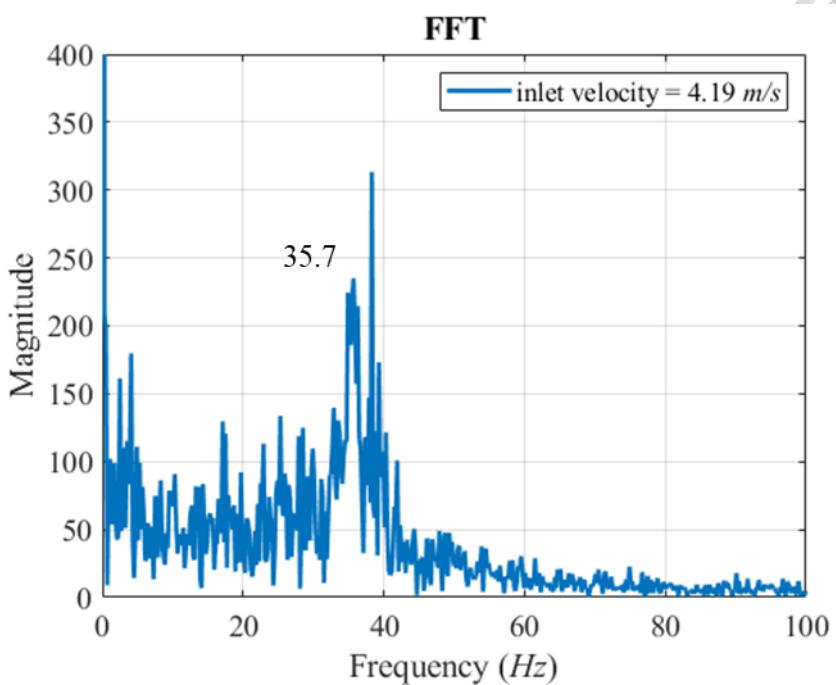


圖 4-50 變頻器 25 Hz (流速  $4.19 \text{ m/s}$ ) 傳立葉轉換結果

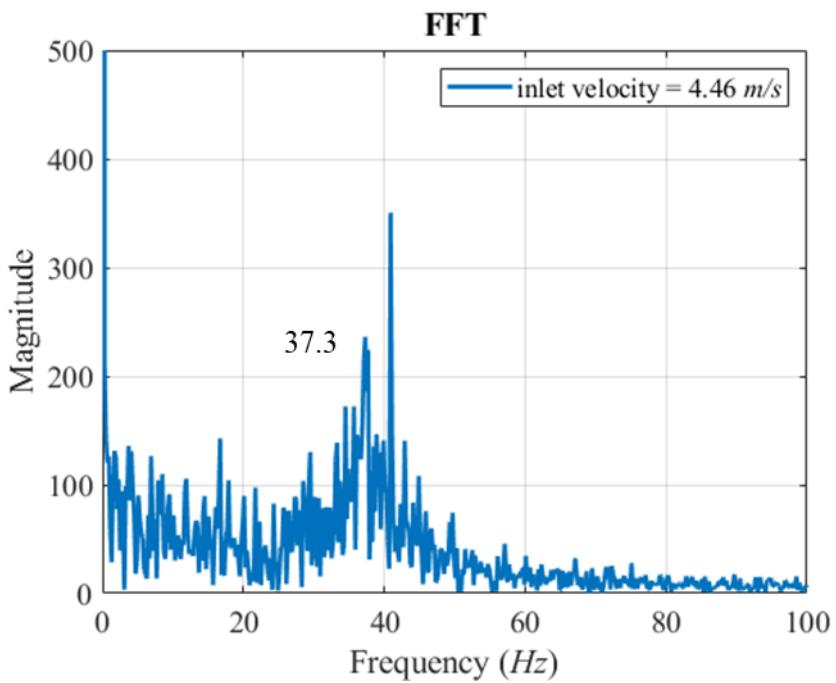


圖 4-51 變頻器 26 Hz (流速  $4.46 \text{ m/s}$ ) 傳立葉轉換結果

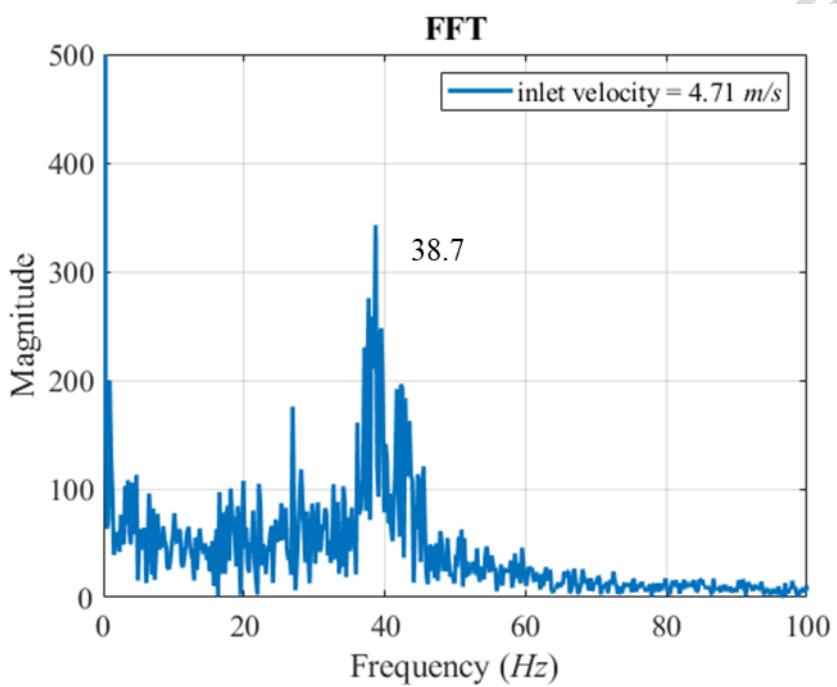


圖 4-52 變頻器 27 Hz (流速  $4.71 \text{ m/s}$ ) 傳立葉轉換結果

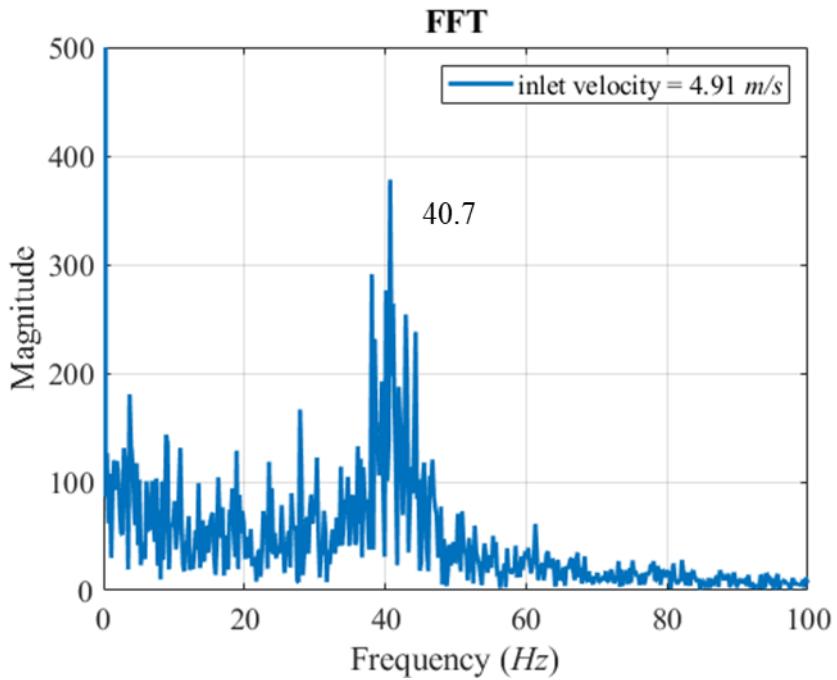


圖 4-53 變頻器 28 Hz (流速  $4.91 \text{ m/s}$ ) 傳立葉轉換結果

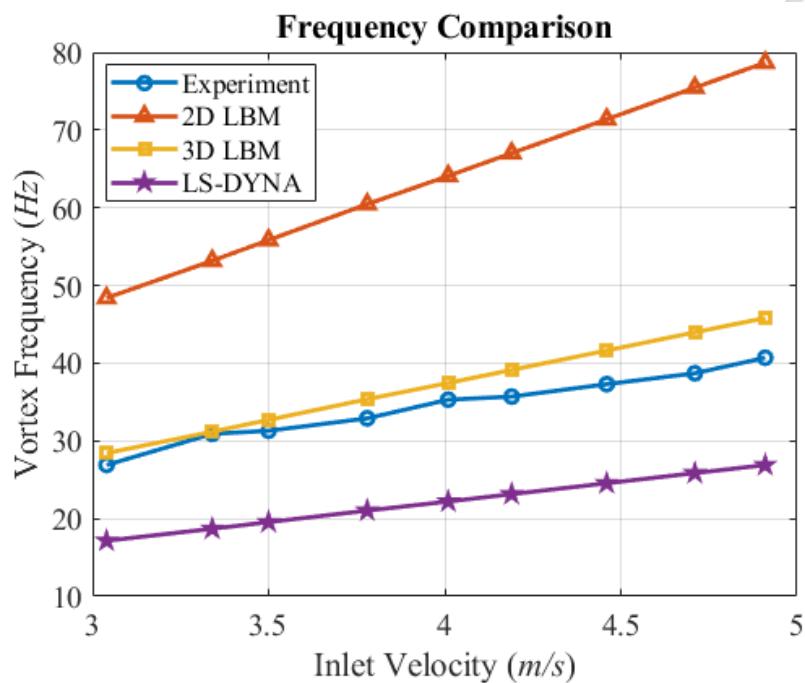


圖 4-54 LBM、LS-DYNA 與實驗量測的渦街頻率比較

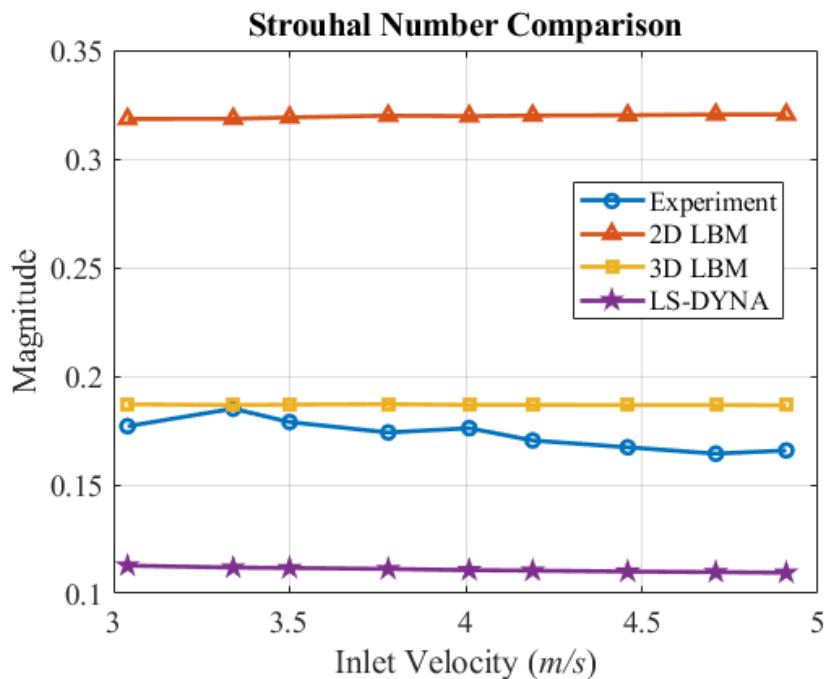


圖 4-55 LBM、LS-DYNA 與實驗量測的  $St$  比較

## 第五章 壓電能量擷取實驗



本章節將所設計之壓電試片置於圓柱後方，並將其放入風洞內透過流體經過圓柱產生的渦街對試片進行激振，搭配示波器擷取試片的表面電壓，首先分析試片在不受任何其他外在因素的影響下，探討其在不同流速下的能量擷取效益。接著加入變換軸向力機構，在試片受預應力下進行能量擷取實驗，探討施加軸向力所產生的變頻效果對能量擷取頻寬的改善。

### 5.1 無受力下壓電能量擷取實驗

圖 5-1 為壓電能量擷取實驗的示意圖，圖 5-2 為實驗架設圖，藉由流體流經圓柱障礙物產生的渦街對壓電試片進行激振，接著透過示波器量測壓電試片的表面電壓訊號，此處透過示波器量測到的電壓皆為交流訊號，為比較其輸出電壓大小，會將量測到的訊號轉換成方均根電壓，以探討在不同流速下壓電試片的電壓響應，變頻器的工作範圍定為  $25 \sim 40$  (Hz)，對應的流速為  $4.19 \sim 7.76$  (m/s)，實驗結果如圖 5-3 至圖 5-34 所示，其中包含示波器量測到的電壓時域訊號以及快速傅立葉轉換的頻域圖，從頻域圖可以發現存在兩個明顯峰值，其中一個約 32 (Hz)的峰值即為壓電片的第一共振頻率，雖有些許偏差但與 3.4.2 節中由 LDV 量測到的第一共振頻率 30.6 (Hz)有相互對應，而另一個峰值為動態響應下的振動頻率，即為渦街激振試片的頻率，取變頻器工作頻率  $25 \sim 28$  (Hz)所量測到的結果與表 4-7 中變頻器相同工作頻率下熱線量測到的結果進行比較並整理成表 5-1，從表中可以發現在相同流速下，熱線量測到的渦街頻率與壓電試片激振頻率是有一定落差的，試片的激振頻率全都小於渦街頻率，此處推測由於本研究的壓電試片結構較為複雜，且表面有 AB 膠的殘膠附著，因此試片本身存在阻尼，根據廖展誼[47]所提出的等向性矩形平板受動態外力負載下的動態響應，平板在受外力負載下的面外位移統御方程式可寫為：

$$D_{11} \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^4} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_2^4} + \rho^{eq} h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = p(x_1, x_2, t) \quad (5-1)$$



根據 3.1 節中所討論的壓電陶瓷與黃銅的材料特性，將(5-1)式簡化為

$$D_{11} \left( \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_2^4} \right) + \rho^{eq} h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = p(x_1, x_2, t) \quad (5-2)$$

其中(5-2)式為未考慮阻尼效應的情況下，將阻尼效應的影響納入考慮可將統御方程式改寫為

$$D_{11} \nabla^2 \nabla^2 u_3 + c_1 \nabla^2 \nabla^2 \frac{\partial u_3}{\partial t} + c_2 \frac{\partial u_3}{\partial t} + \rho^{eq} h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = p(x_1, x_2, t) \quad (5-3)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \quad (5-4)$$

其中  $c_1$  為平板內部的阻尼比、 $c_2$  為外界環境對平板的阻尼比，比較(5-2)式與(5-3)式可以發現後者的統御方程式多了兩個阻尼項，因此其求解後得到的位移響應也會有所不同，進而壓電平板的電壓響應也會有所變化，所以從壓電試片的電壓響應快速傅立葉轉換後所得的激振頻率才會與預期的外力頻率不同，且因阻尼會消耗能量的特性，激振頻率會低於外力頻率，即低於渦街頻率，因此在表 5-1 中才會出現渦街頻率大於試片激振頻率的現象，而為探討試片的能量擷取現象，因為真正激振試片的並非為渦街頻率，因此後續討論以快速傅立葉轉換後所得的激振頻率為主。表 5-2 為將圖 5-3 至圖 5-34 的結果與示波器量測到的方均根電壓彙整而成，其中在圖 5-16 到圖 5-18 中，由於激振頻率與共振頻率的峰值過於接近甚至重合，無法判斷兩者個別的頻率，因此將激振頻率與共振頻率記為同一量值，圖 5-35 為示片方均根電壓與流速的關係，從圖中可以發現壓電試片在流速為 5.91 (m/s) 時會有最大的方均根電壓輸出，其量值為 595.3 (mV)，此時所對應的激振頻率為 31.9 (Hz)，恰為試片的第一共振頻率，故因為試片發生共振所以才有較高的電壓輸出，根據電能輸出功率計算公式來評估試片的能量擷取效益，其公式如下：

$$P = \frac{V_{rms}^2}{R} \quad (5-5)$$

其中  $P$  為功率、 $V_{rms}$  為試片的方均根電壓、 $R$  為示波器之阻抗，本實驗使用的示波器電阻為  $2M\Omega$ ，根據上式並帶入試片的方均根電壓便可求得試片能量擷取之輸出



功率，結果如圖 5-36 所示，當激振頻率與試片的共振頻率匹配到時，試片會有最大的輸出功率  $0.177(\mu W)$ 。

表 5-1 涡街頻率與激振頻率之比較表

變頻器頻率 (Hz)	流速 (m/s)	渦街頻率 (Hz)	激振頻率 (Hz)
25	4.19	35.7	24.9
26	4.46	37.3	25.9
27	4.71	38.7	26.9
28	4.91	40.7	27.9

表 5-2 各流速下壓電試片激振頻率與方均根電壓表

變頻器頻率 (Hz)	流速 (m/s)	激振頻率 (Hz)	壓電試片方均根電壓 (mV)
25	4.19	24.9	150.14
26	4.46	25.9	112.31
27	4.71	26.9	122.86
28	4.91	27.9	120.67
29	5.22	28.9	169.81
30	5.46	29.9	294.7
31	5.67	30.9	478.1
32	5.91	31.9	595.3
33	6.19	32.9	352.7
34	6.40	33.7	284.6
35	6.64	34.7	271.2
36	6.89	35.7	249.1
37	7.08	36.7	243.2
38	7.31	37.7	240.4
39	7.54	38.7	262.8
40	7.76	39.7	330.6

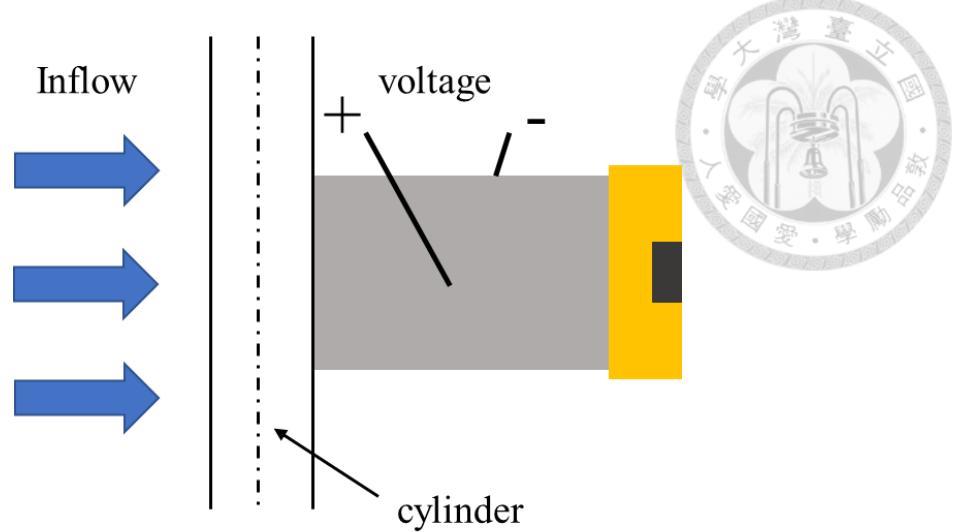


圖 5-1 壓電能量擷取實驗示意圖

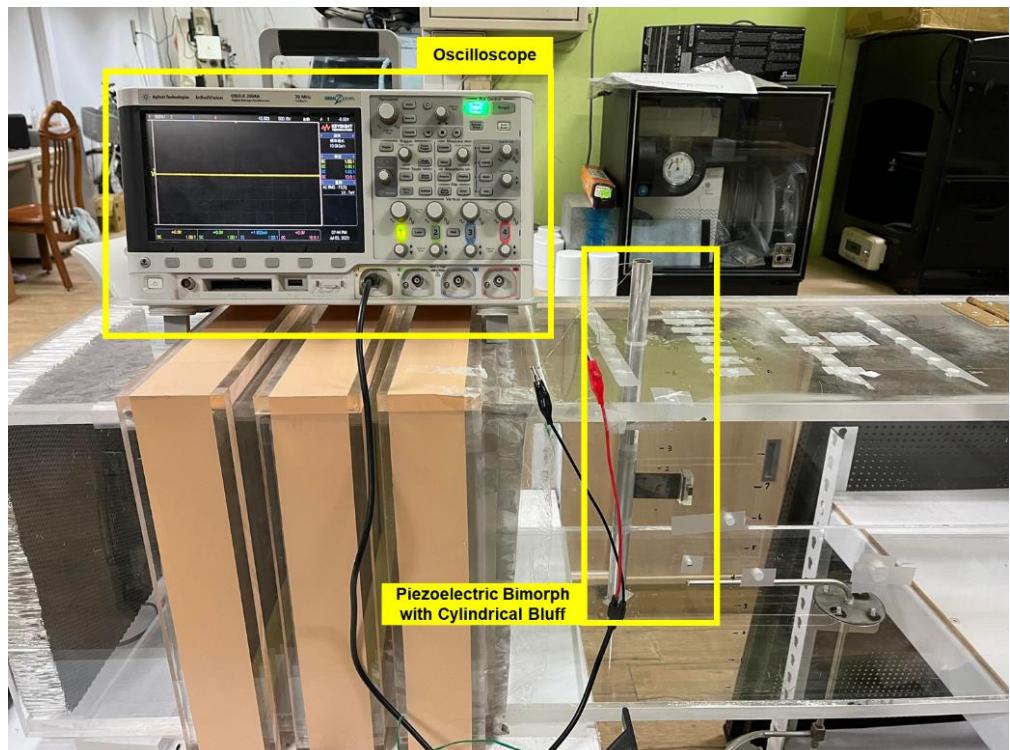


圖 5-2 壓電能量擷取實驗架設圖

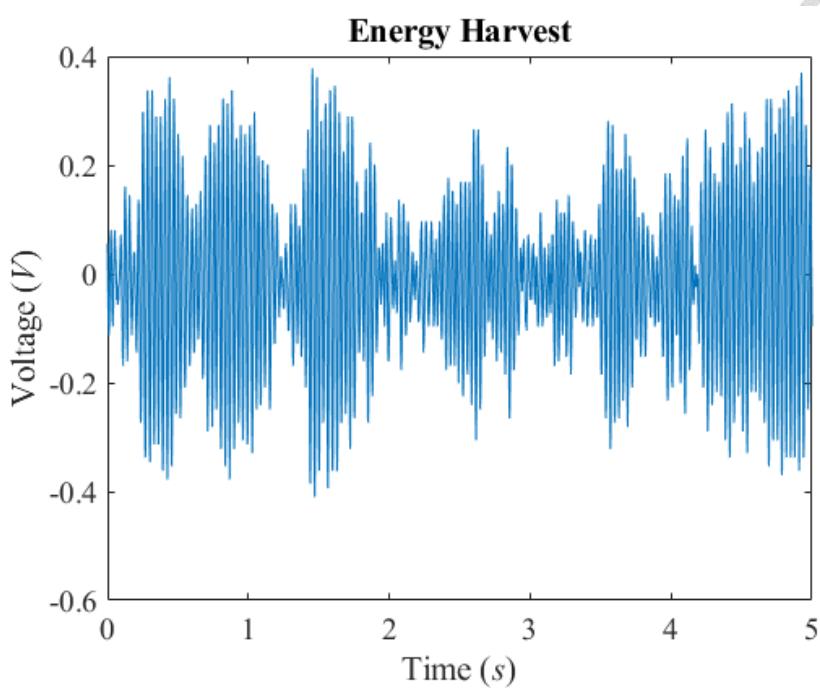


圖 5-3 變頻器 25 Hz (流速 4.19 m/s)試片能量擷取電壓

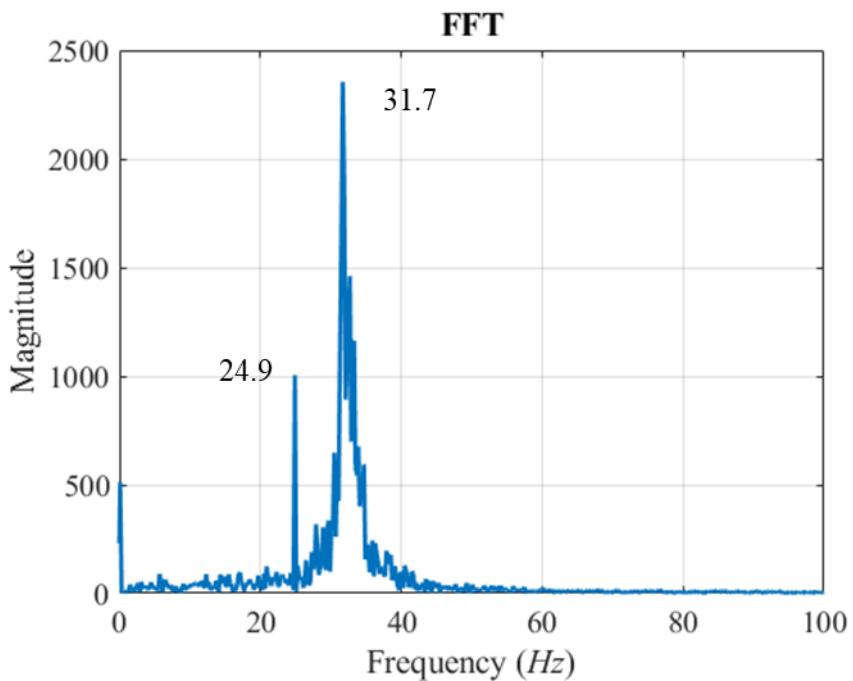


圖 5-4 變頻器 25 Hz (流速 4.19 m/s)試片電壓傳立葉轉換結果

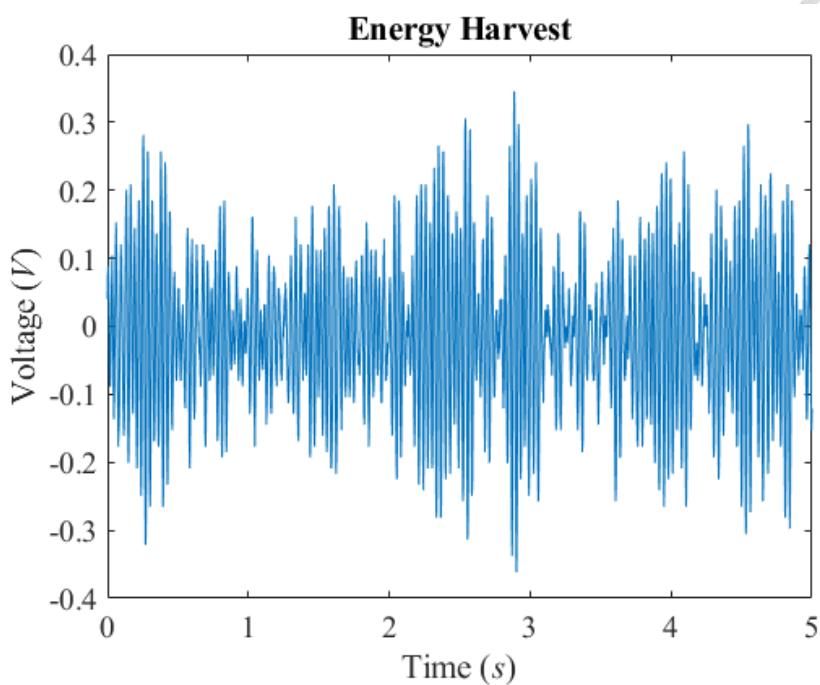


圖 5-5 變頻器 26 Hz (流速 4.46 m/s)試片能量擷取電壓

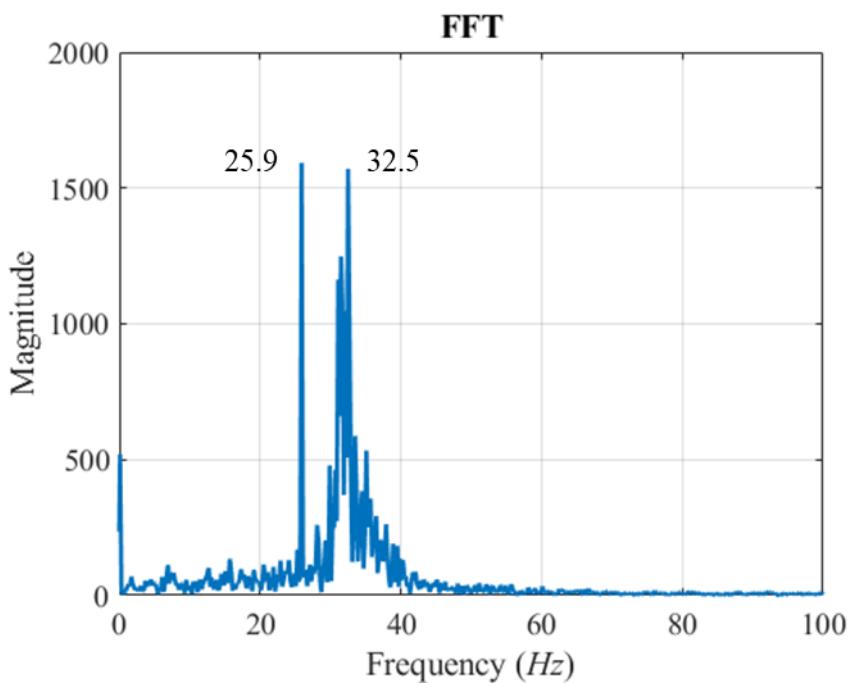


圖 5-6 變頻器 26 Hz (流速 4.46 m/s)試片電壓傳立葉轉換結果

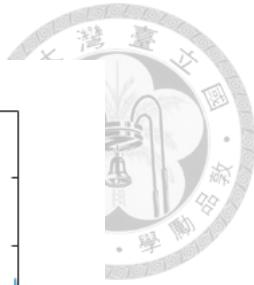
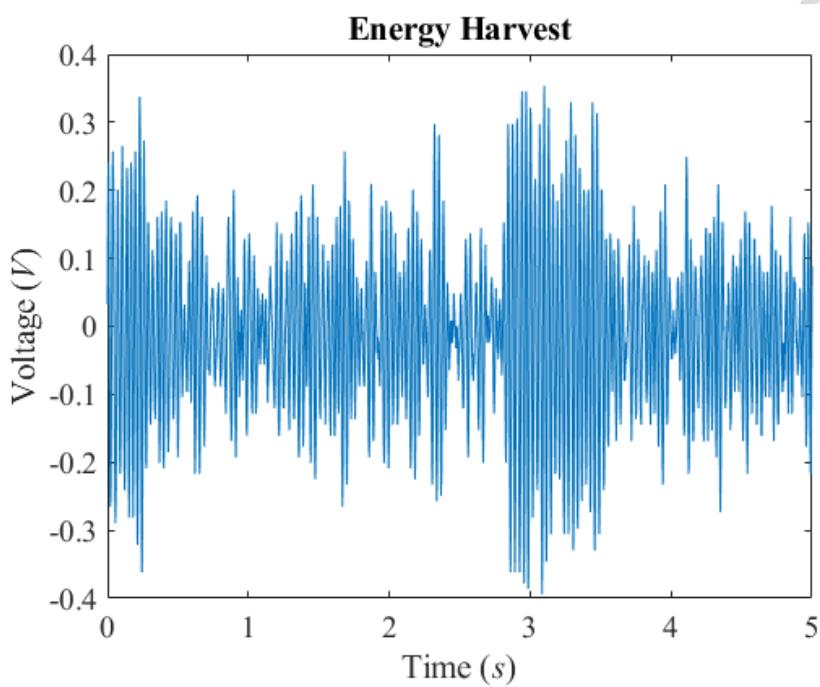


圖 5-7 變頻器 27 Hz (流速 4.71 m/s)試片能量擷取電壓

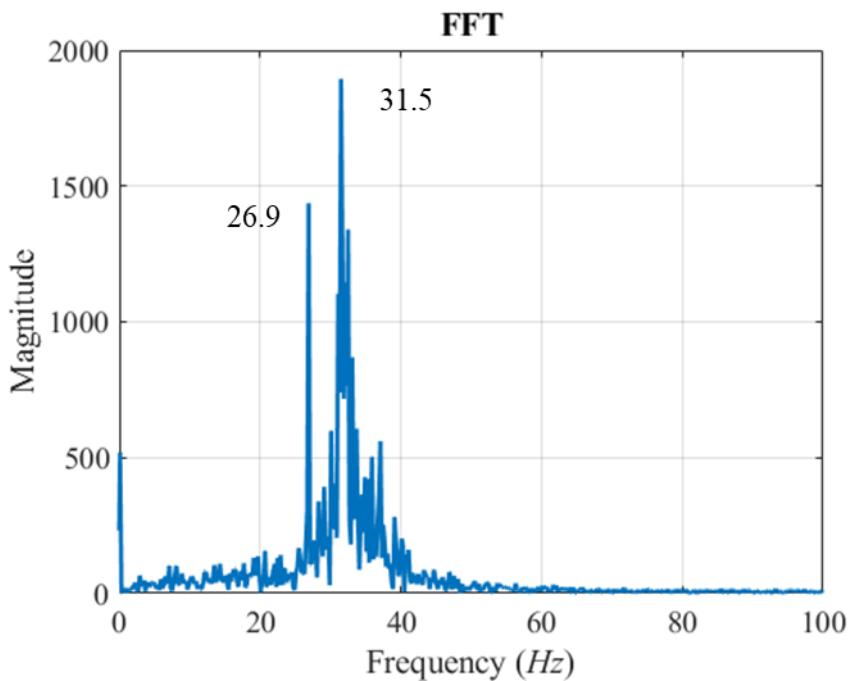


圖 5-8 變頻器 27 Hz (流速 4.71 m/s)試片電壓傳立葉轉換結果

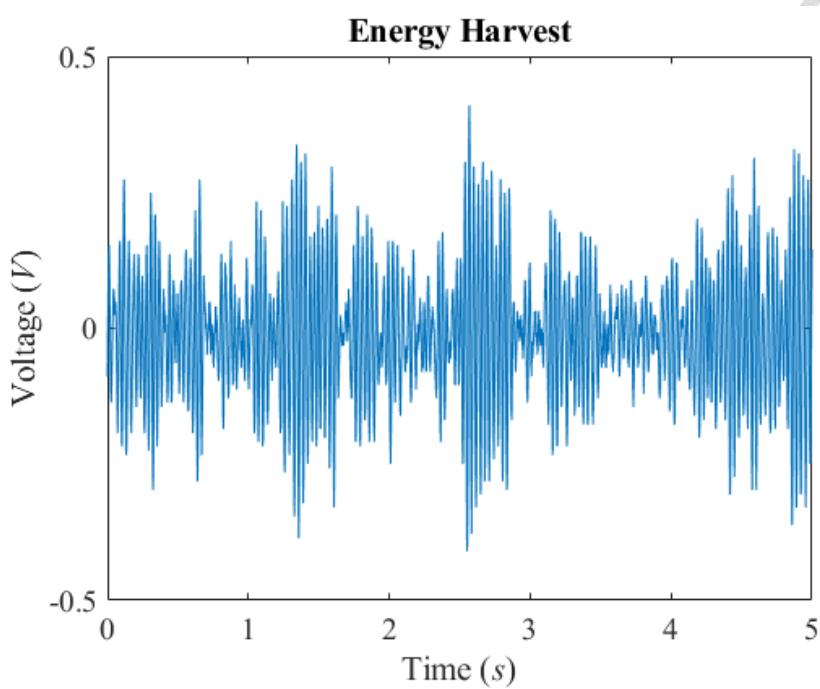


圖 5-9 變頻器 28 Hz (流速 4.91 m/s)試片能量擷取電壓

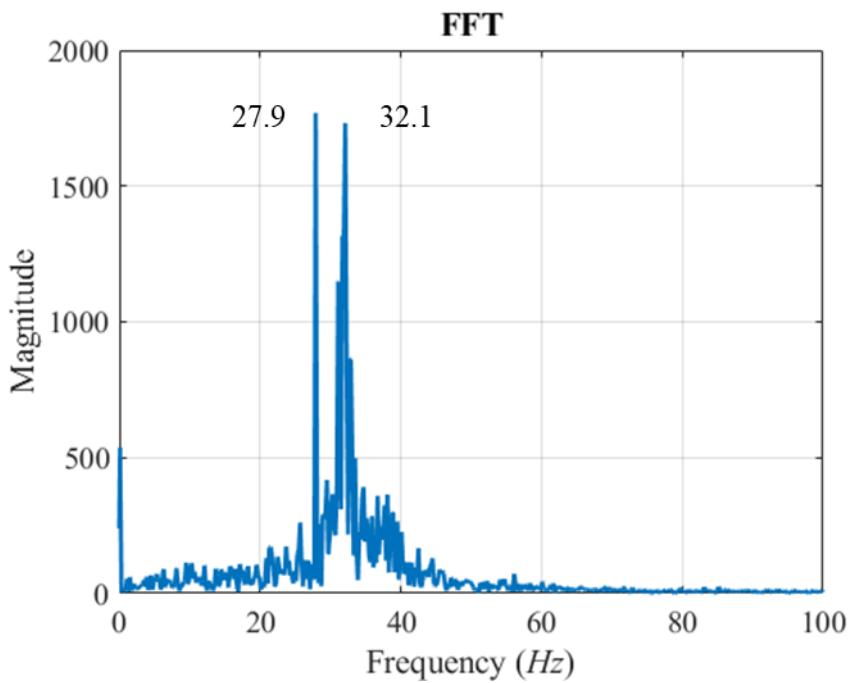


圖 5-10 變頻器 28 Hz (流速 4.91 m/s)試片電壓傅立葉轉換結果

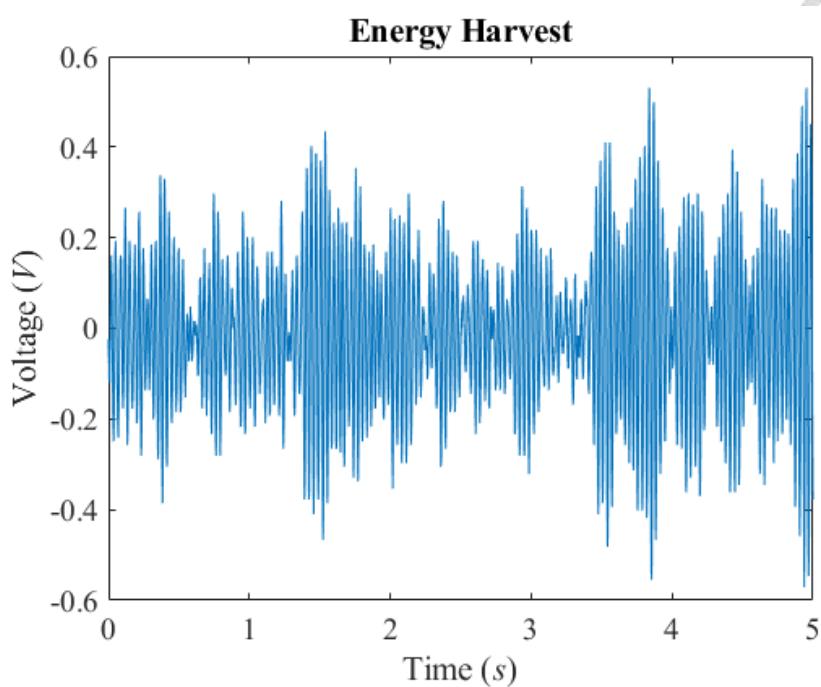


圖 5-11 變頻器 29 Hz (流速 5.22 m/s)試片能量擷取電壓

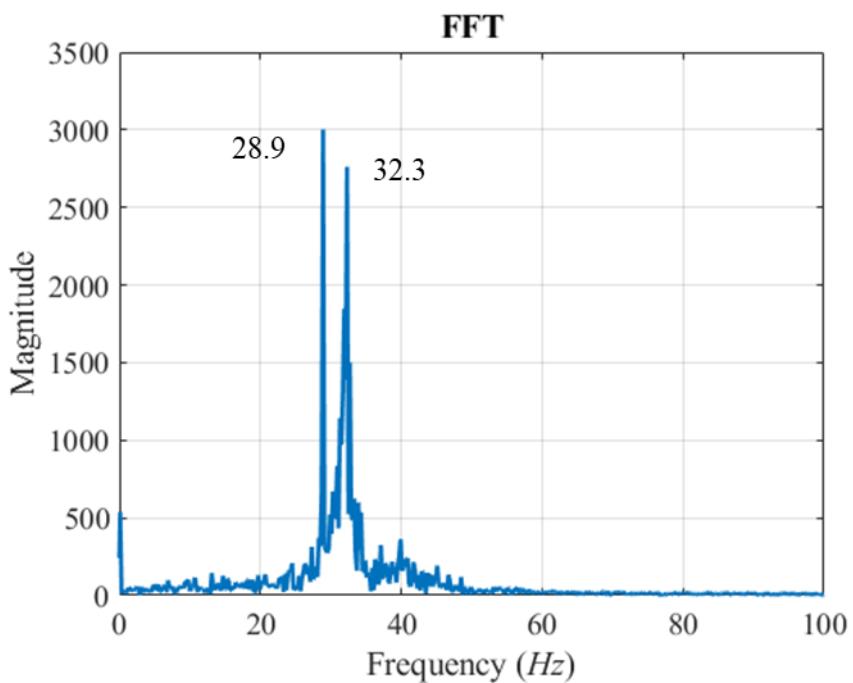


圖 5-12 變頻器 29 Hz (流速 5.22 m/s)試片電壓傅立葉轉換結果

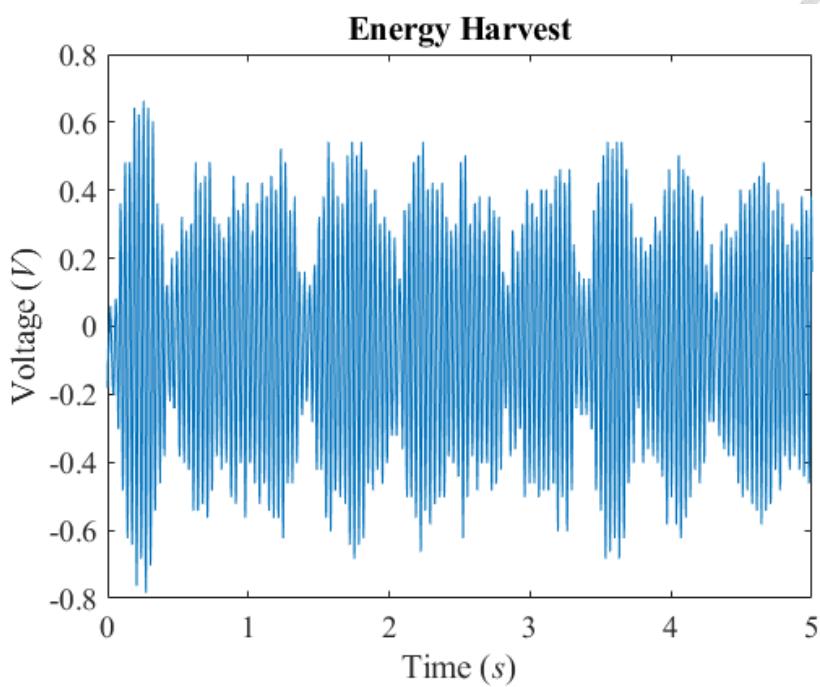


圖 5-13 變頻器 30 Hz (流速 5.46 m/s)試片能量擷取電壓

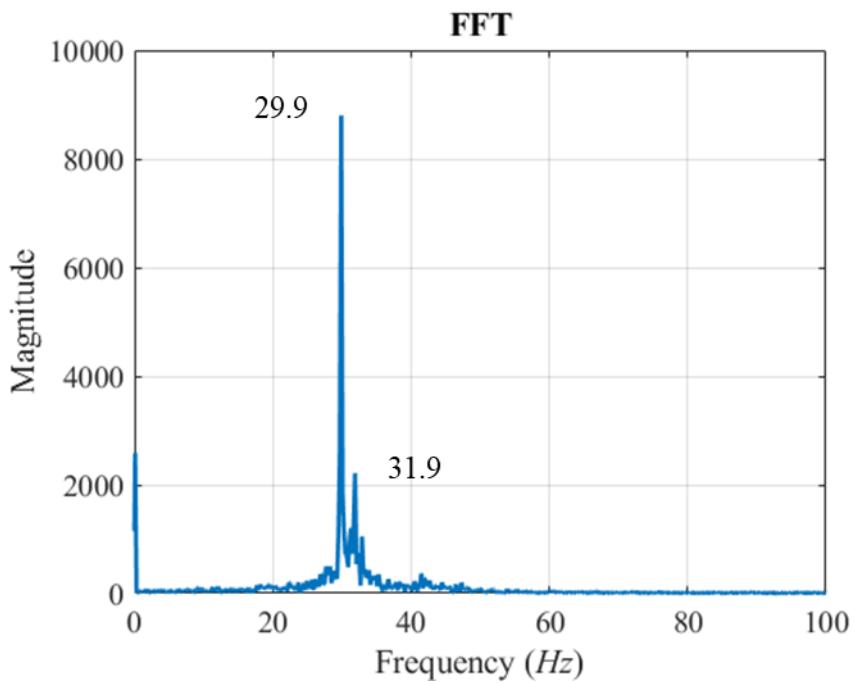


圖 5-14 變頻器 30 Hz (流速 5.46 m/s)試片電壓傅立葉轉換結果

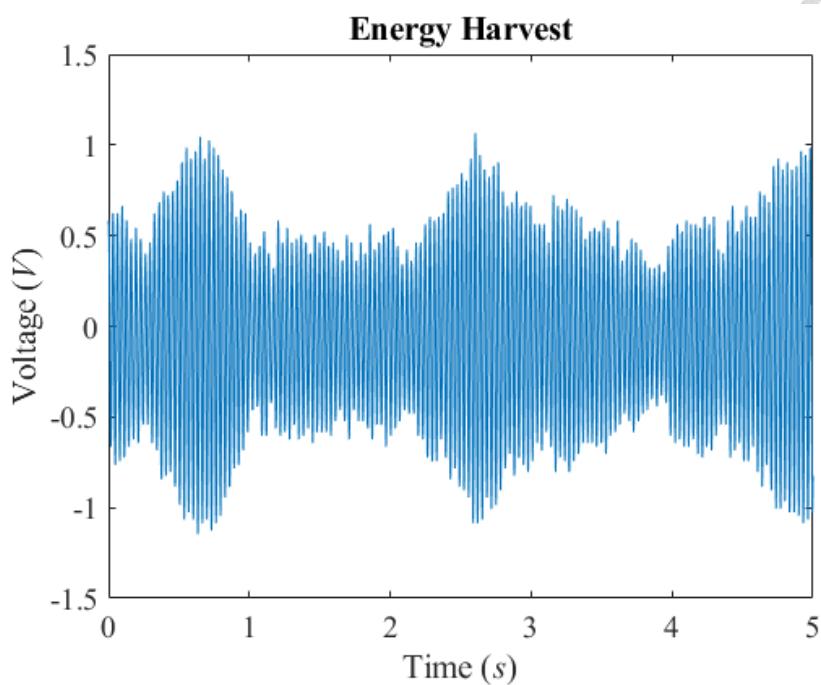


圖 5-15 變頻器 31 Hz (流速 5.67 m/s)試片能量擷取電壓

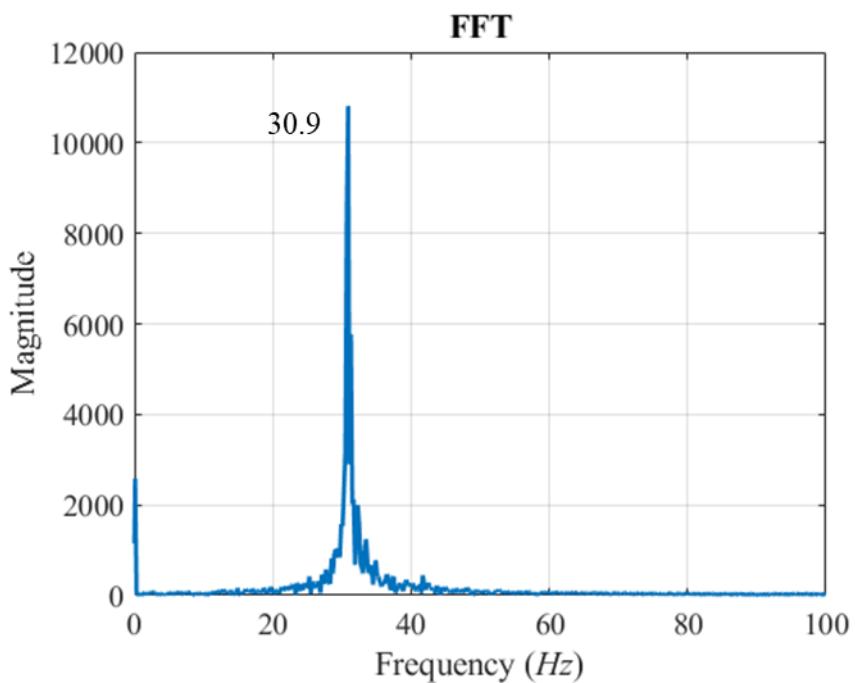


圖 5-16 變頻器 31 Hz (流速 5.67 m/s)試片電壓傅立葉轉換結果

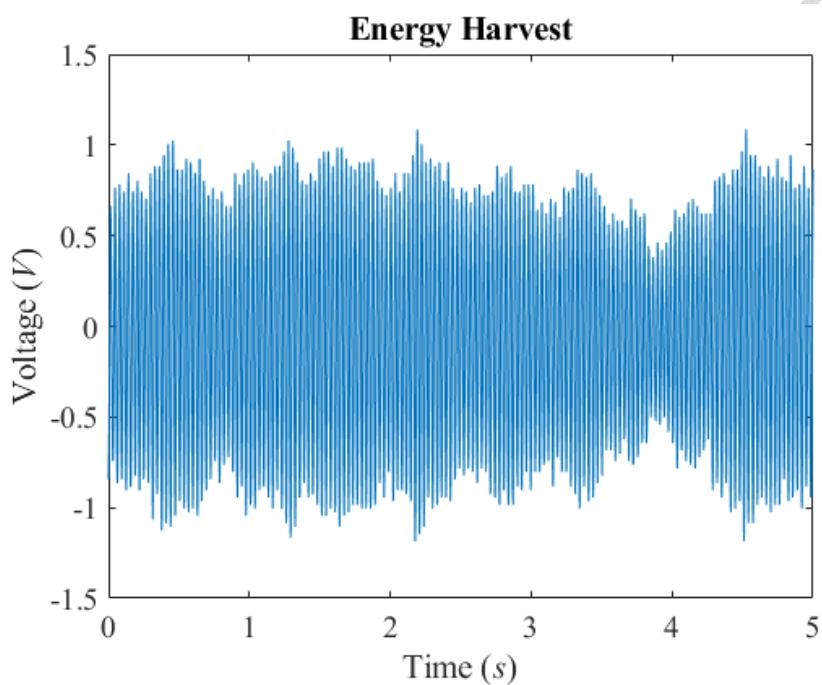


圖 5-17 變頻器 32 Hz (流速 5.91 m/s)試片能量擷取電壓

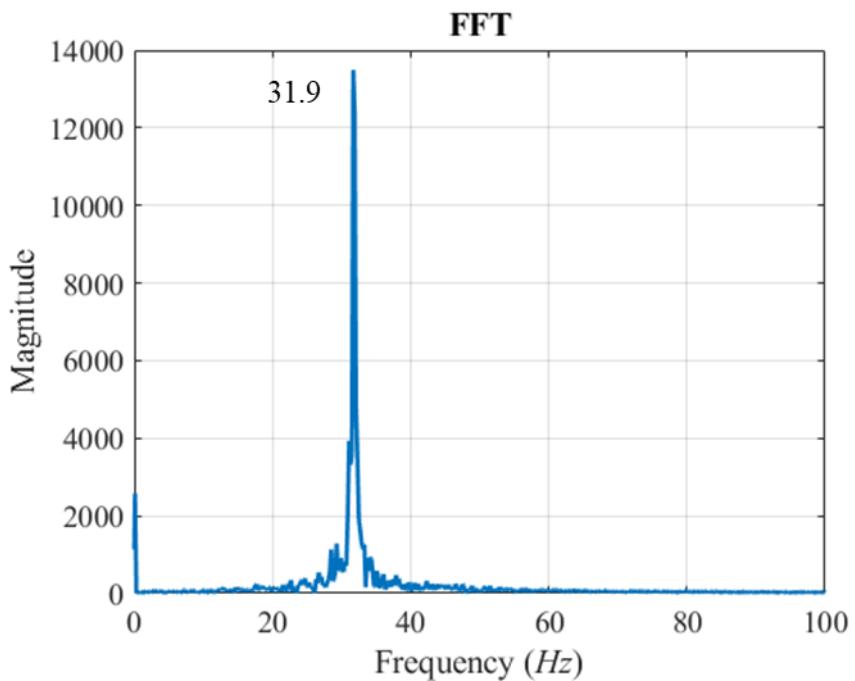


圖 5-18 變頻器 32 Hz (流速 5.91 m/s)試片電壓傅立葉轉換結果

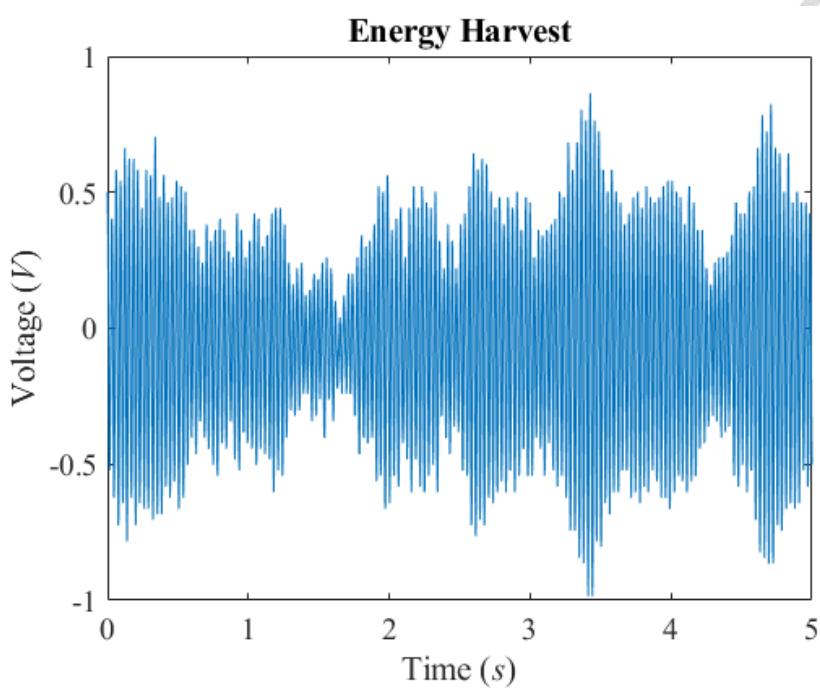


圖 5-19 變頻器 33 Hz (流速 6.19 m/s)試片能量擷取電壓

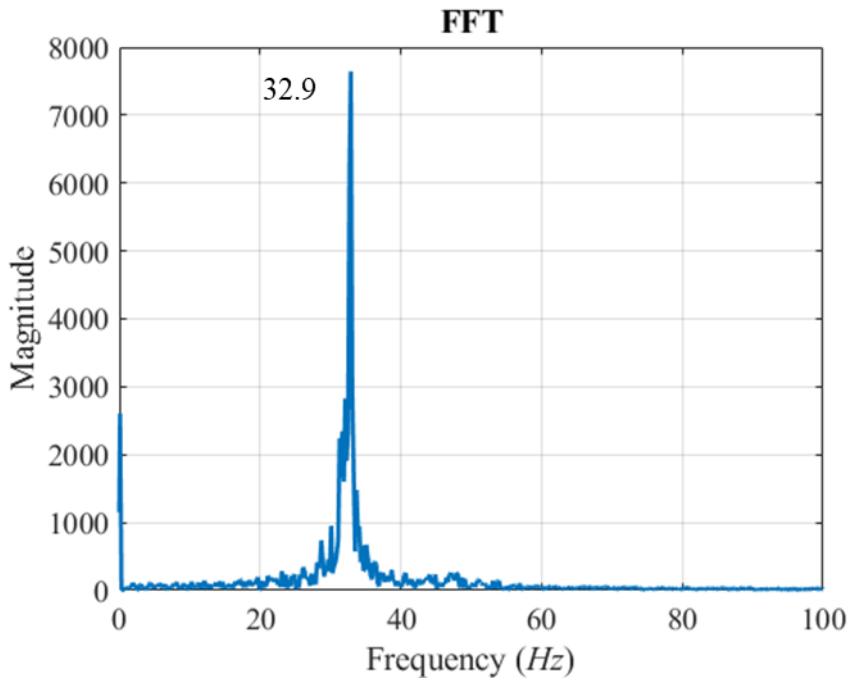


圖 5-20 變頻器 33 Hz (流速 6.19 m/s)試片電壓傅立葉轉換結果

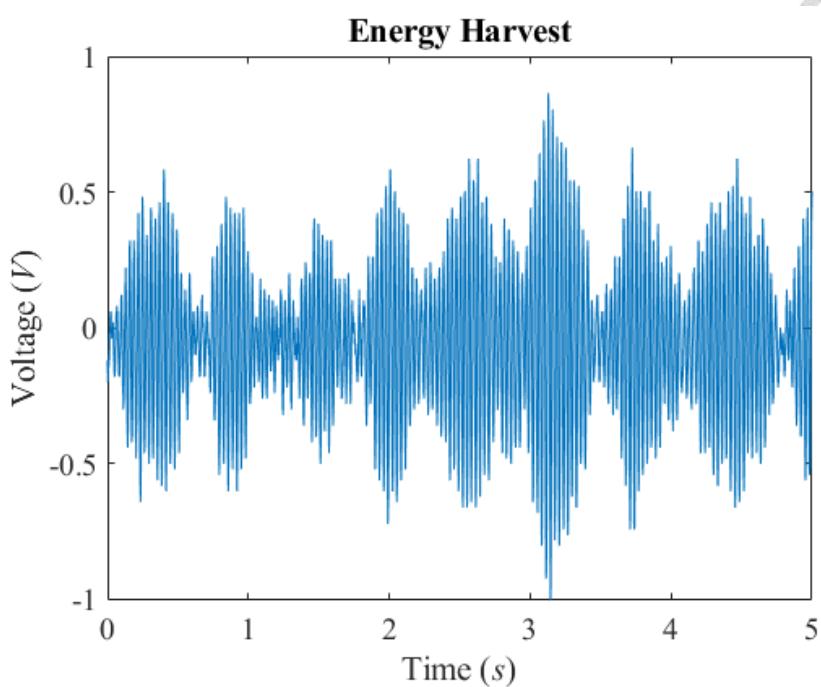


圖 5-21 變頻器 34 Hz (流速 6.40 m/s)試片能量擷取電壓

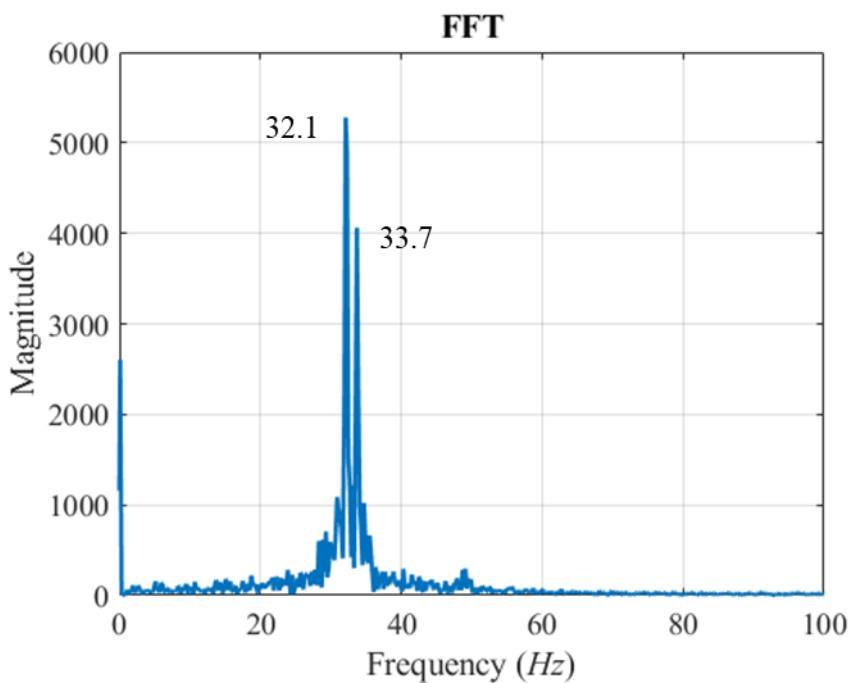


圖 5-22 變頻器 34 Hz (流速 6.40 m/s)試片電壓傅立葉轉換結果

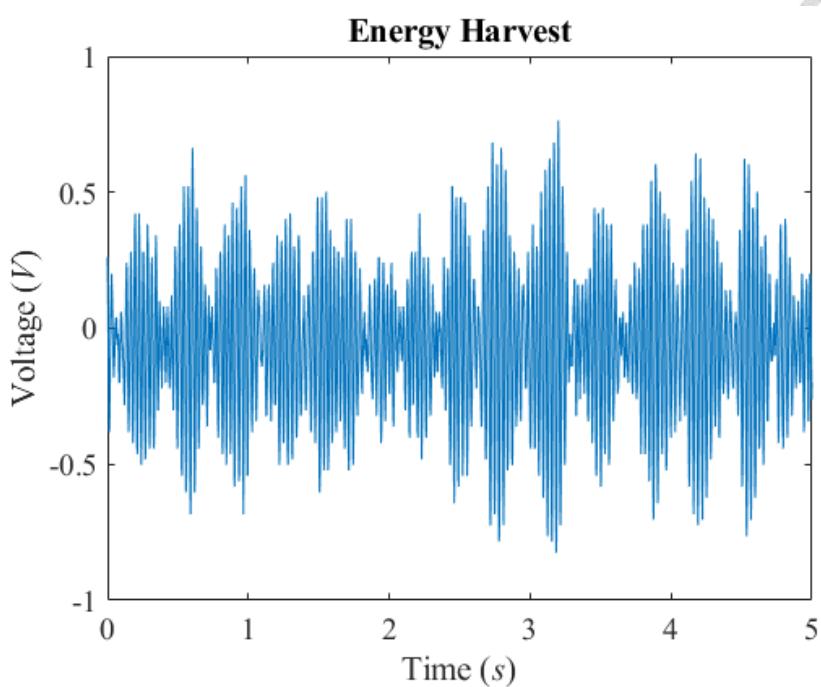


圖 5-23 變頻器 35 Hz (流速 6.64 m/s)試片能量擷取電壓

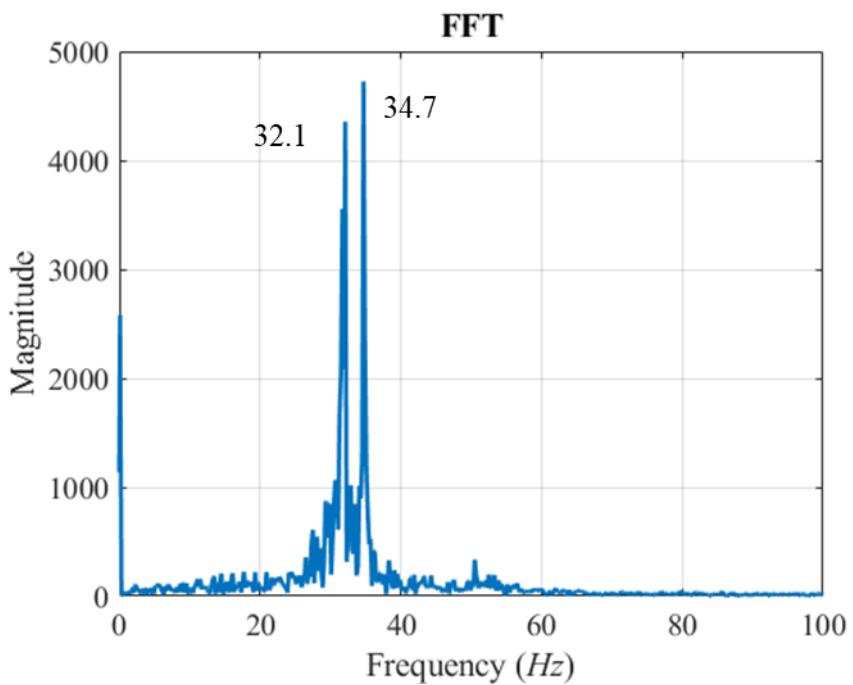


圖 5-24 變頻器 35 Hz (流速 6.64 m/s)試片電壓傅立葉轉換結果

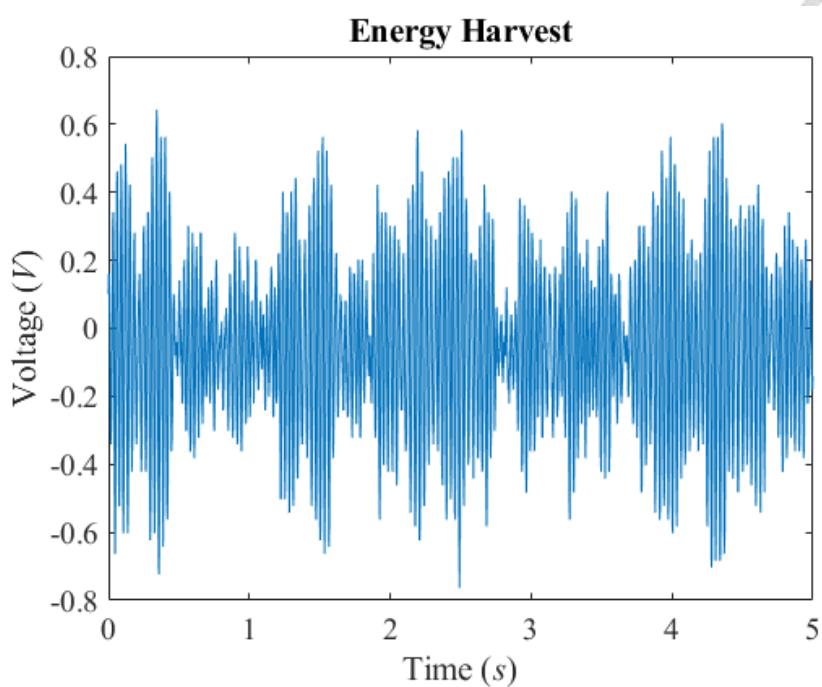


圖 5-25 變頻器 36 Hz (流速 6.89 m/s)試片能量擷取電壓

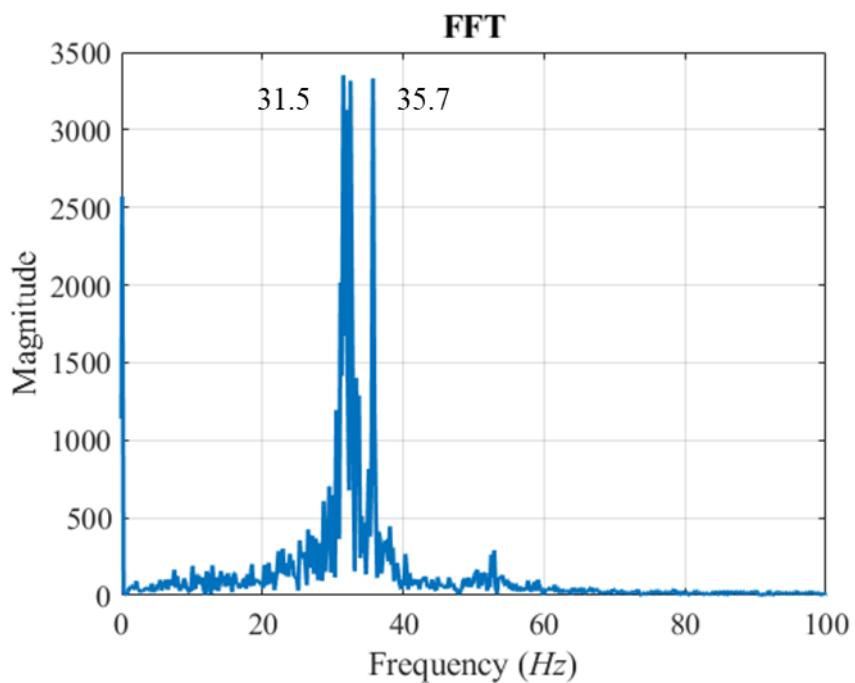


圖 5-26 變頻器 36 Hz (流速 6.89 m/s)試片電壓傅立葉轉換結果

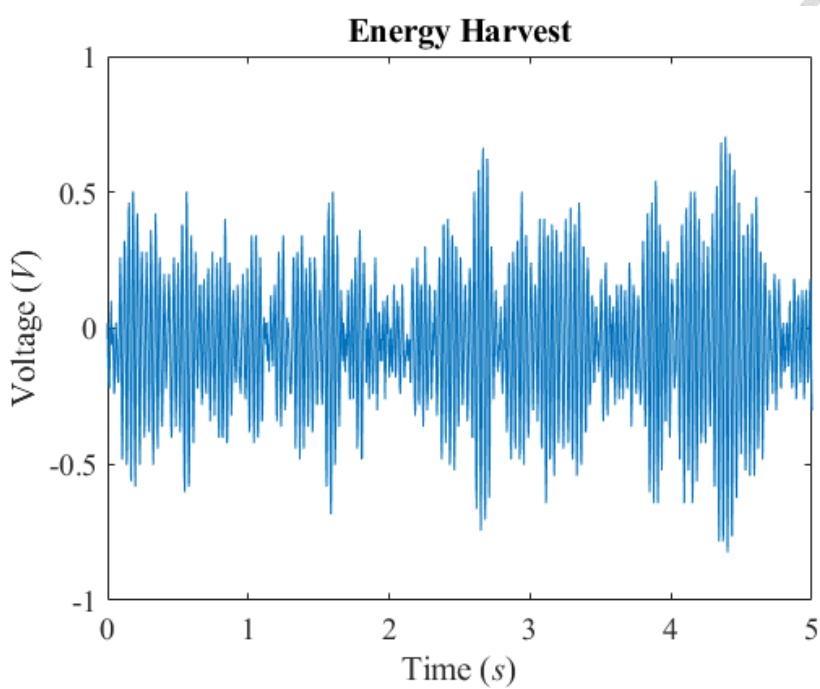


圖 5-27 變頻器  $37\text{ Hz}$  (流速  $7.08\text{ m/s}$ )試片能量擷取電壓

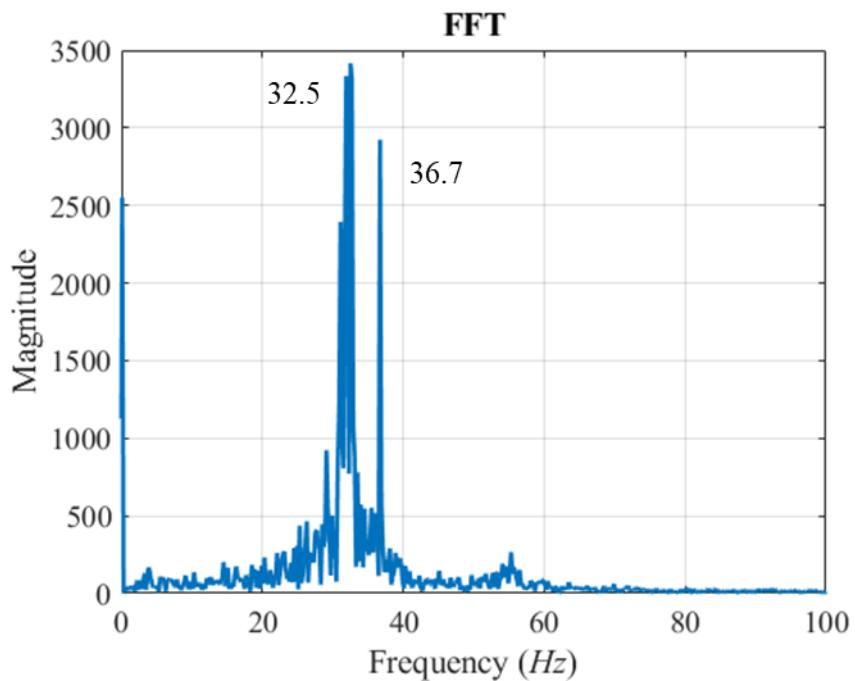


圖 5-28 變頻器  $37\text{ Hz}$  (流速  $7.08\text{ m/s}$ )試片電壓傅立葉轉換結果

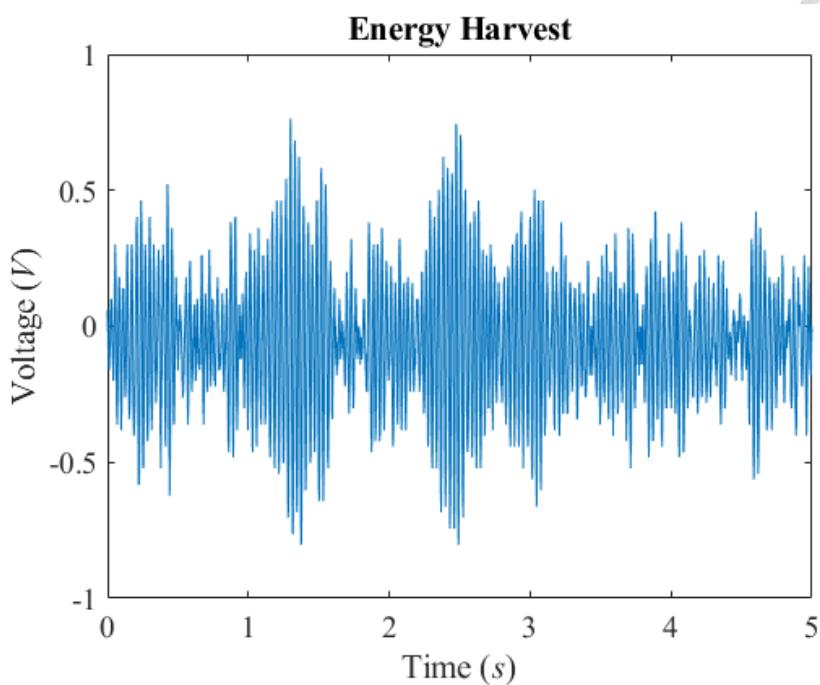


圖 5-29 變頻器 38 Hz (流速 7.31 m/s) 試片能量擷取電壓

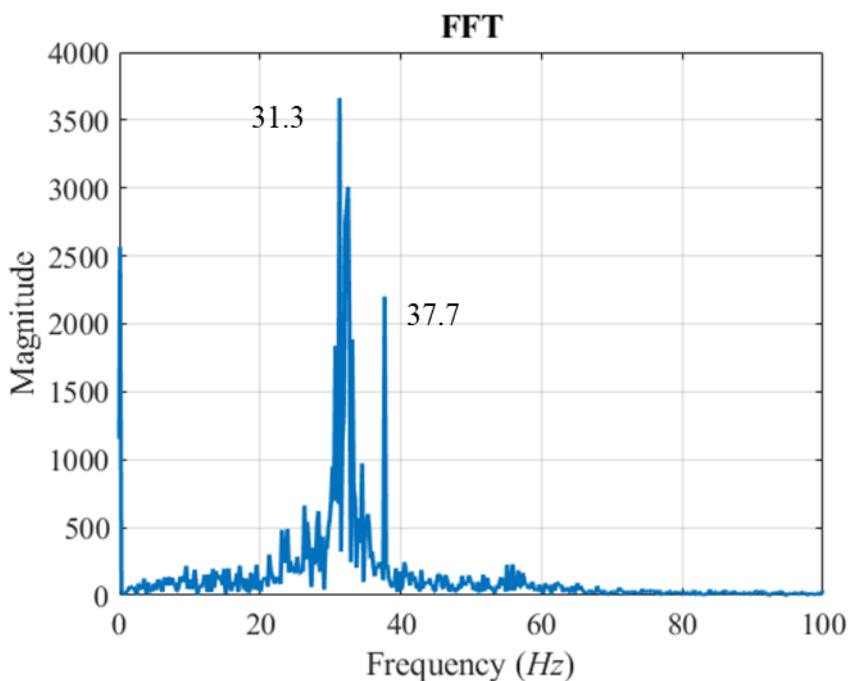


圖 5-30 變頻器 38 Hz (流速 7.31 m/s) 試片電壓傅立葉轉換結果

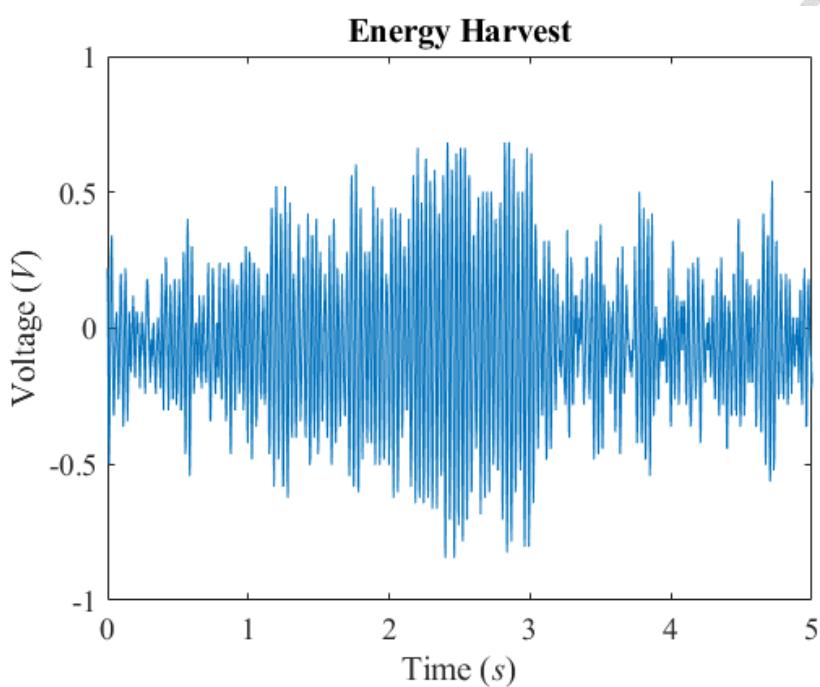


圖 5-31 變頻器 39 Hz (流速 7.54 m/s)試片能量擷取電壓

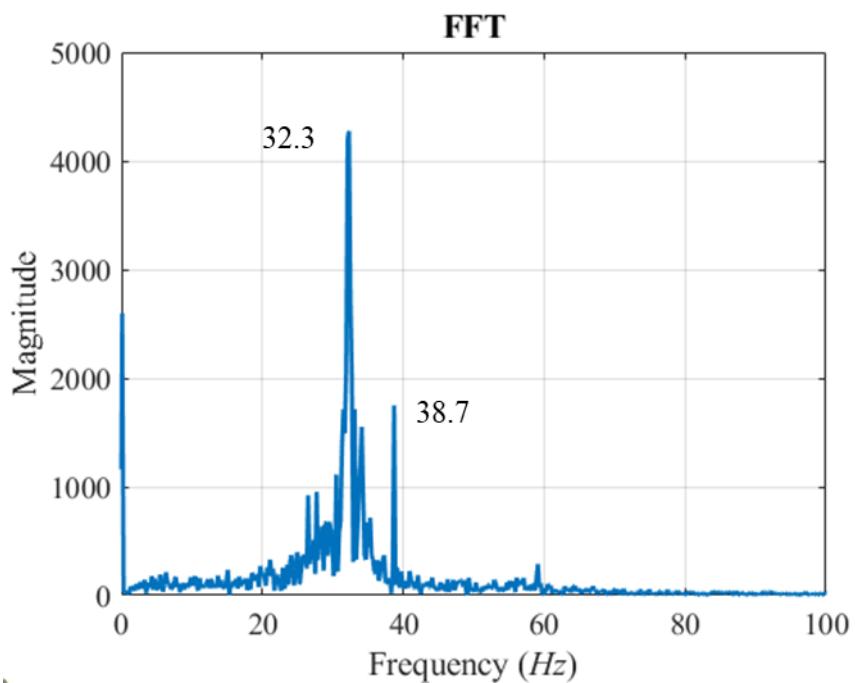


圖 5-32 變頻器 39 Hz (流速 7.54 m/s)試片電壓傅立葉轉換結果

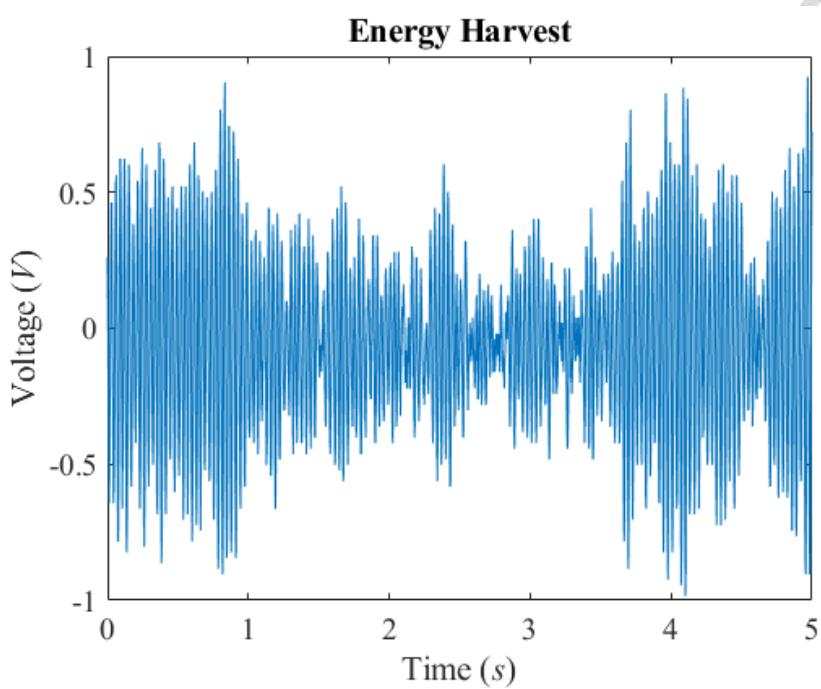


圖 5-33 變頻器 40 Hz (流速 7.76 m/s)試片能量擷取電壓

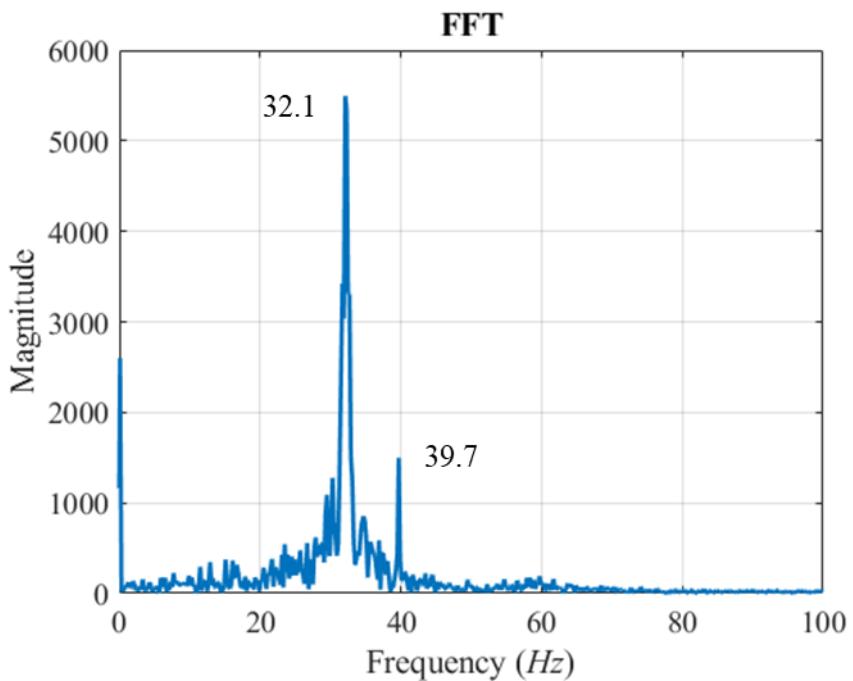


圖 5-34 變頻器 40 Hz (流速 7.76 m/s)試片電壓傅立葉轉換結果

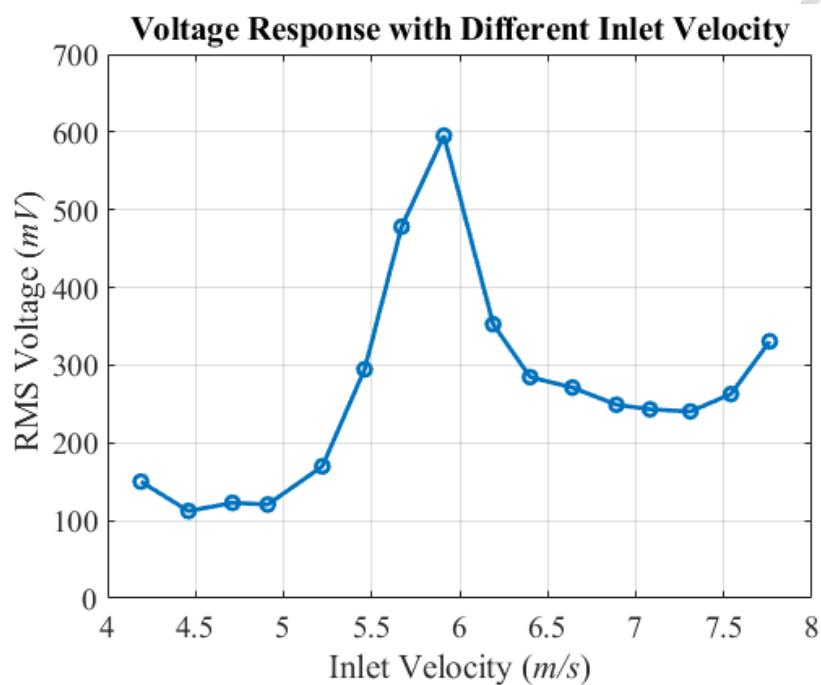
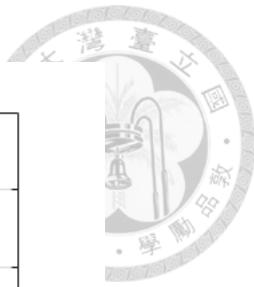


圖 5-35 不同入口流速下的壓電試片電壓響應

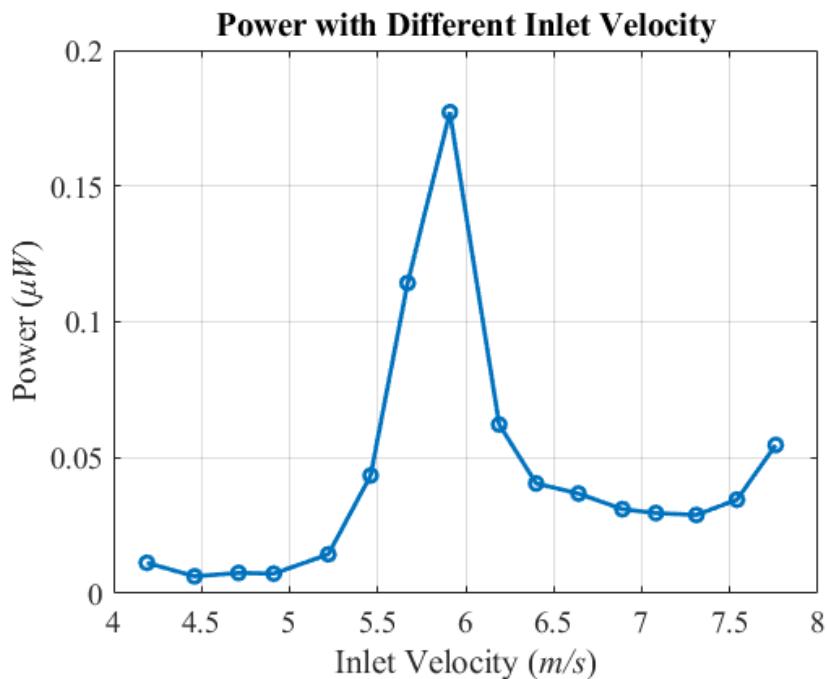


圖 5-36 不同入口流速下的壓電試片輸出功率



## 5.2 受預應力作用下壓電能量擷取實驗

圖 5-37 為加入磁力變換軸向剛性機構後的實驗示意圖，圖 5-38 為實驗架設圖，從 4.3.2 節的渦街量測實驗中，可以得知試片後方處並無渦街生成，因此將機構置於試片後方以施加磁力於試片上的磁鐵，同時不會影響渦街激振試片，磁力變換軸向機構示意圖如圖 5-39 所示，實體圖如圖 5-40 所示，所有零件皆由壓克力製造而成，將大磁鐵黏著於壓克力橫條的末端，橫條能夠自由移動以調整磁鐵與試片的相對距離，並使用螺絲進行固定，在固定好磁鐵與試片的相對距離後便可開始能量擷取實驗，實驗流程如下，先調整好試片與磁鐵的距離以控制試片所承受的預應力，接著開啟風洞並使用示波器量測試片的表面電壓，變頻器的工作範圍固定為  $25 \sim 40$  (Hz)，量測完後便可調整磁鐵與試片的距離，改變試片所受預應力量值並再進行下一組實驗，總共進行六組實驗，其中受拉力情況三組、受壓力情況三組，拉力與壓力的量值皆相同，三組實驗中磁鐵與試片的相對距離為 2.5 (mm)、2 (mm)、1.5 (mm)，根據 3.3.3 節中磁力量測實驗的結果，其對應的磁力大小為 0.83 (N)、1.37 (N)、2.3 (N)。所量測到壓電試片的方均根電壓如表 5-3 到表 5-8 所示，將所得的方均根電壓大小透過(5-5)式計算壓電試片的輸出功率，流速對方均根電壓與對輸出功率的關係如圖 5-41 至圖 5-52 所示，在所有圖中皆可以發現試片僅在特定流速下會有較高的方均根電壓與輸出功率，該流速下所對應的激振頻率恰好與試片的第一共振頻率相同，因此在共振頻率下才會有較高的能量擷取效益。

將六組實驗的實驗結果加上前一小節所做原始的能量擷取實驗結果進行比較，討論預應力變頻效果對能量擷取實驗的影響，首先討論預應力產生的變頻效果，結果如圖 5-53 所示，其中試片共振頻率的量值皆從電壓訊號的快速傅立葉轉換而得，圖中的藍色線段代表原始的能量擷取實驗、橘色線段為試片受 0.83 (N) 的拉力、黃色線段為受 1.37 (N) 的拉力、紫色線段為受 2.3 (N) 的拉力、綠色線段為受 0.83 (N) 的壓力、淺藍色線段為受 1.37 (N) 的壓力、深紅色線段為受 2.3 (N) 的拉力，從圖中可以發現在對試片施加拉力後試片的共振頻率有增加的現象，施加壓力則會降低



共振頻率，符合 3.4.2 節中所討論的預應力對共振頻率之影響，將不同流速下求得的共振頻率進行平均並與理論、有限元素分析的結果進行比較，如表 5-9 所示，其中力量的負值代表施加壓力、正值代表施加拉力，從表中可以發現在施加的磁力量值較小時，理論與實驗量測結果有著較好的對應性，但隨著力量的增加，兩者與實驗的誤差皆越來越大，主要原因因為磁力量測實驗中的結果小於實際試片承受量值，因此使用其結果做為輸入的理論計算會低估變頻效果，而有限元素分析的結果整體上皆有較大的誤差，可能是真實模型不如模擬的模型完美，在邊界處裡上以及壓克力結構、磁鐵的黏著有瑕疵，再加上磁力量測的誤差影響，導致與有限元素分析的結果與實驗結果落差較大。綜上所述雖然在承受較大的力量下，理論、有限元素分析與實驗量測結果存在誤差，但依舊可看見預應力所造成的變頻效果，在施加預應力後試片的共振頻率從原本的 32.01 (Hz) 最高增加至 35.37 (Hz)、最低減少至 29.24 (Hz)。

接著討論預應力對壓電片方均根電壓的影響，結果如圖 5-53 所示，各色線段所對應的實驗皆與圖 5-53 相同，從圖中可以發現在加入磁力後，方均根電壓的峰值有偏移的現象，三組施加拉力的實驗其峰值皆往右偏，且隨著施加的力量越多、偏移量也越多，而三組施加壓力的實驗其峰值也皆往左偏，同樣隨著施加的力量越多、偏移量也越多，但其中例外的為施加 2.3 (N) 的實驗結果，其峰值頻率與施加 1.37 (N) 的相同，此處可能為實驗誤差所導致，因為壓力為靠磁鐵間的斥力所施加，而在較大的斥力下可能會使試片與機構上的磁鐵發生錯動，導致力量產生分量而減少了產生的預應力量值，進而降低了變頻的效果，因此此處雖然施加的壓力大小較大，但變頻結果卻沒那麼明顯，不過從共振頻率的比較，即圖 5-53 中依然能看出壓電試片的共振頻率有比施加 1.37 (N) 下的頻率還要低。預應力對試片輸出功率的影響與對方均根電壓的影響是相同的，結果如圖 5-55 所示，各色線段代表的實驗與圖 5-53 相同，在施加拉力的三組實驗其功率的峰值頻率皆有增加的現象，隨著施加的拉力越多，峰值頻率也增加越多，而在施加壓力的三組實驗中也能看到峰



值頻率皆降低，且隨著壓力越大，降低量也增加。

最後對加入磁力變換軸向剛性機構後的壓電能量擷取實驗與原始的壓電能量擷取實驗進行比較，將六組實驗數據加上原始實驗數據共七組數據，在每個流速下取七組數據中最大的方均根電壓值，整合為加入磁力變換軸向剛性機構所能得到的方均根電壓，並於原始的壓電能量擷取實驗數據進行比較，結果如圖 5-56 所示，其中藍色線段代表原始壓電能量擷取實驗，橘色線段為使用磁力變換軸向剛性的壓電能量擷取實驗數據，可以發現在使用機構後試片整體的能量擷取效果有明顯改善，原本的峰值較為狹窄，而在導入預應力的變頻效果後原本適合壓電試片進行能量擷取的工作頻寬則有增加的現象，此處定義半能點(Half-Power point)，代表輸出功率降低至最大值一半的點，並將兩個半能點的頻率差定義為半能頻寬(Half-Power bandwith)，以此評估壓電能量擷取的有效發電頻寬，以方均根電壓為例，從(5-5)式中可以得知功率與電壓為平方關係，因此當功率降低至最大值的一半時，電壓則會降低至最大值的  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  倍，因此便可計算出方均根電壓的半能點，並計算其半能頻寬，如圖 5-56 所示，黑色虛線的量值即為方均根電壓的半能點，從圖中可以發現原始壓電能量擷取實驗的半能頻寬約從 30.5 (Hz) 到 32.5 (Hz)，共 2.5 (Hz)，但在加入磁力變換軸向機構後，壓電能量擷取實驗的半能頻寬約從 29 (Hz) 到 36 (Hz)，共 7 (Hz)，試片的有效工作頻寬有了顯著的增加，而在功率比較上也能看到此現象，結果如圖 5-57 所示，其中藍色線段與橘色線段代表的實驗與圖 5-56 相同，此處的半能點即為最大功率值的一半，可以發現加入磁力變換軸向剛性機構後試片的半能頻寬有增加的跡象，能夠在更寬的頻率範圍下有著較好的能量擷取效果。



表 5-3 受拉力 0.83 (N)下壓電試片之方均根電壓表

變頻器頻率 (Hz)	流速 (m/s)	激振頻率 (Hz)	方均根電壓 (mV)
25	4.19	24.9	165.8
26	4.46	25.9	160.5
27	4.71	26.9	146.5
28	4.91	27.9	144.4
29	5.22	28.9	151.5
30	5.46	29.9	248.8
31	5.67	30.9	263.7
32	5.91	31.9	397.6
33	6.19	32.7	501.2
34	6.40	33.7	246.4
35	6.64	34.7	246.9
36	6.89	35.7	266.2
37	7.08	36.7	271.3
38	7.31	37.7	238.6
39	7.54	38.7	218.5
40	7.76	39.7	231.8

表 5-4 受拉力 1.37 (N)下壓電試片之方均根電壓表

變頻器頻率 (Hz)	流速 (m/s)	激振頻率 (Hz)	方均根電壓 (mV)
25	4.19	24.9	147.0
26	4.46	25.9	203.1
27	4.71	26.9	179.3
28	4.91	27.9	154.9
29	5.22	28.9	154.4
30	5.46	29.9	233.2
31	5.67	30.9	228.3
32	5.91	31.9	236.7
33	6.19	32.7	245.5
34	6.40	33.7	392.9
35	6.64	34.7	468.9
36	6.89	35.7	324.3
37	7.08	36.7	280.4
38	7.31	37.7	242.5
39	7.54	38.7	235.0
40	7.76	39.7	226.3



表 5-5 受拉力 2.3 (N)下壓電試片之方均根電壓表

變頻器頻率 (Hz)	流速 (m/s)	激振頻率 (Hz)	方均根電壓 (mV)
25	4.19	24.9	138.1
26	4.46	25.9	185.7
27	4.71	26.9	153.4
28	4.91	27.9	179.4
29	5.22	28.9	202.3
30	5.46	29.9	230.5
31	5.67	30.9	256.2
32	5.91	31.9	250.1
33	6.19	32.7	253.8
34	6.40	33.7	260.6
35	6.64	34.7	421.1
36	6.89	35.7	420.4
37	7.08	36.7	229.9
38	7.31	37.7	218.3
39	7.54	38.7	225.7
40	7.76	39.7	235.5

表 5-6 受壓力 0.83 (N)下壓電試片之方均根電壓表

變頻器頻率 (Hz)	流速 (m/s)	激振頻率 (Hz)	方均根電壓 (mV)
25	4.19	24.9	150.8
26	4.46	25.9	130.5
27	4.71	26.9	134.9
28	4.91	27.9	158.8
29	5.22	28.9	186.5
30	5.46	29.9	340.6
31	5.67	30.9	584.0
32	5.91	31.9	271.7
33	6.19	32.7	202.0
34	6.40	33.7	230.1
35	6.64	34.7	221.0
36	6.89	35.7	278.4
37	7.08	36.7	261.2
38	7.31	37.7	264.5
39	7.54	38.7	290.4
40	7.76	39.7	271.9



表 5-7 受壓力 1.37 (N)下壓電試片之方均根電壓表

變頻器頻率 (Hz)	流速 (m/s)	激振頻率 (Hz)	方均根電壓 (mV)
25	4.19	24.9	138.6
26	4.46	25.9	139.4
27	4.71	26.9	140.0
28	4.91	27.9	170.2
29	5.22	28.9	257.7
30	5.46	29.9	595.0
31	5.67	30.9	267.9
32	5.91	31.9	261.0
33	6.19	32.7	230.5
34	6.40	33.7	250.3
35	6.64	34.7	248.7
36	6.89	35.7	263.9
37	7.08	36.7	235.4
38	7.31	37.7	247.5
39	7.54	38.7	278.3
40	7.76	39.7	241.8

表 5-8 受壓力 2.3 (N)下壓電試片之方均根電壓表

變頻器頻率 (Hz)	流速 (m/s)	激振頻率 (Hz)	方均根電壓 (mV)
25	4.19	24.9	223.0
26	4.46	25.9	243.2
27	4.71	26.9	289.2
28	4.91	27.9	341.6
29	5.22	28.9	410.2
30	5.46	29.9	548.3
31	5.67	30.9	393.6
32	5.91	31.9	273.7
33	6.19	32.7	194.3
34	6.40	33.7	237.5
35	6.64	34.7	212.7
36	6.89	35.7	219.2
37	7.08	36.7	197.1
38	7.31	37.7	203.4
39	7.54	38.7	246.0
40	7.76	39.7	245.5

表 5-9 理論、有限元素分析與能量擷取實驗的共振頻率比較表

Force (N)	Mode 1		
	Theory (Hz) (Error %)	FEM (Hz) (Error)	Voltage FFT (Hz)
-2.3	30.25 (3.45)	28.02 (-4.17)	29.24
-1.37	30.90 (3.94)	28.79 (-3.16)	29.73
-0.83	31.27 (1.43)	29.23 (-5.19)	30.83
0	31.84 (-0.53)	29.9 (-6.59)	32.01
0.83	32.38 (-0.94)	30.54 (-6.58)	32.69
1.37	32.74 (-4.27)	30.96 (-9.47)	34.20
2.3	33.34 (-5.74)	31.66 (-10.49)	35.37

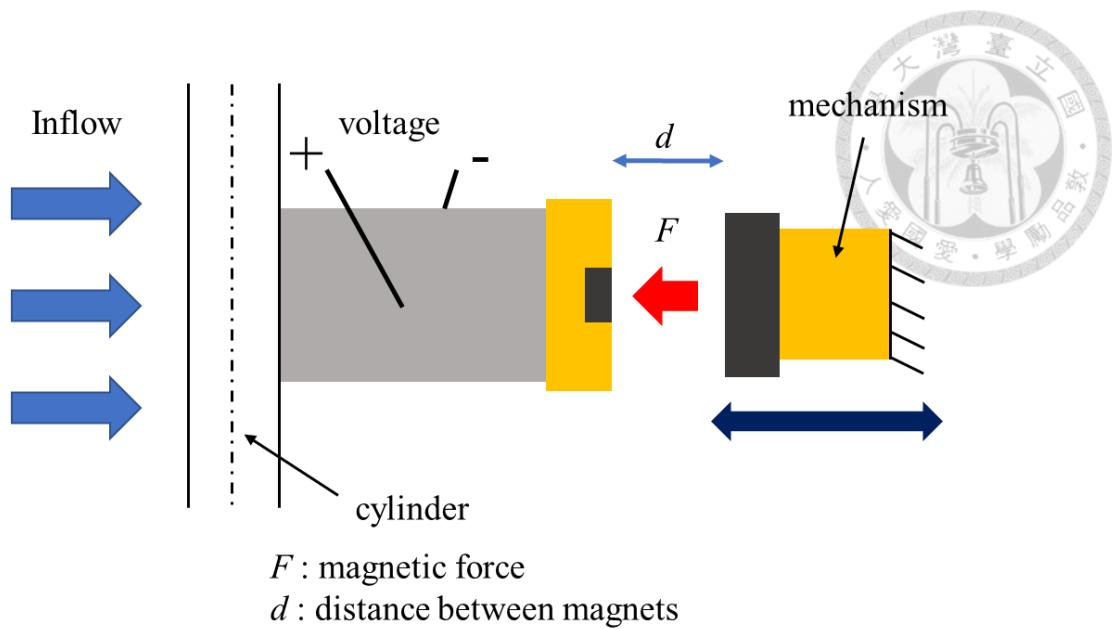


圖 5-37 試片受預應力下壓電能量擷取實驗示意圖

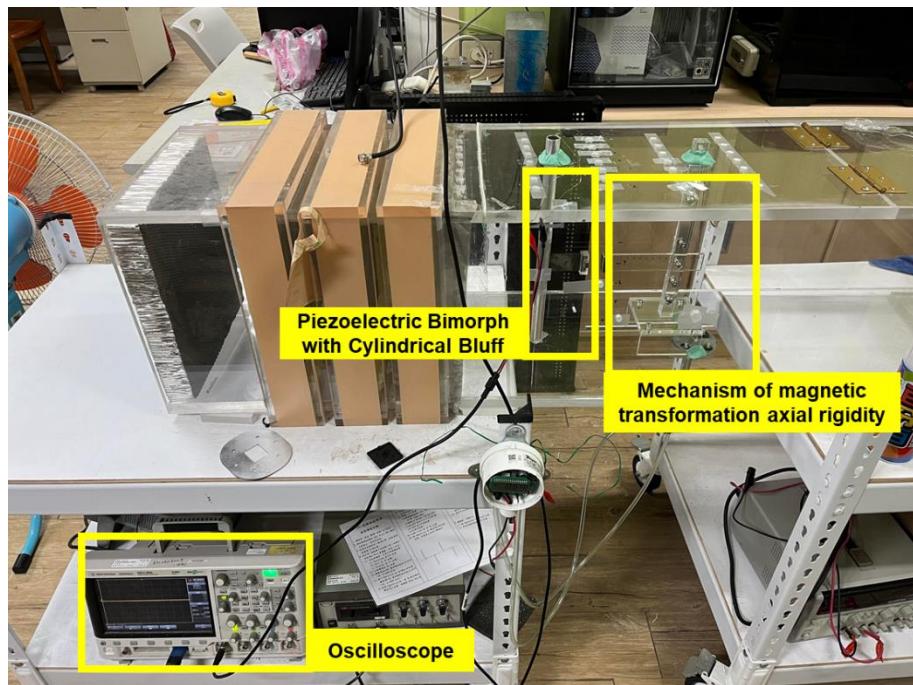


圖 5-38 試片受預應力下壓電能量擷取實驗架設圖

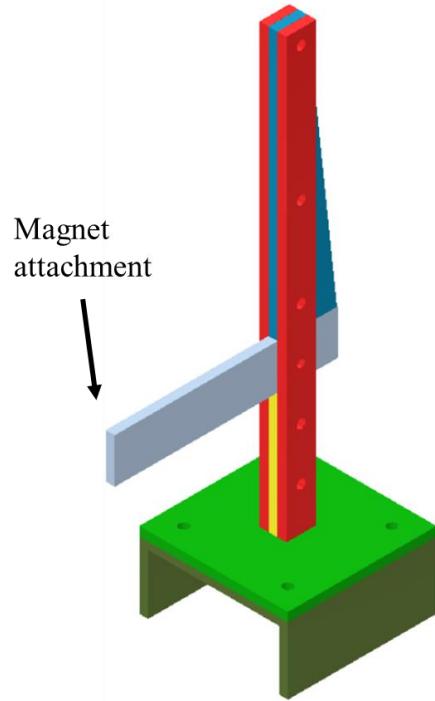


圖 5-39 磁力變換軸向剛性機構示意圖

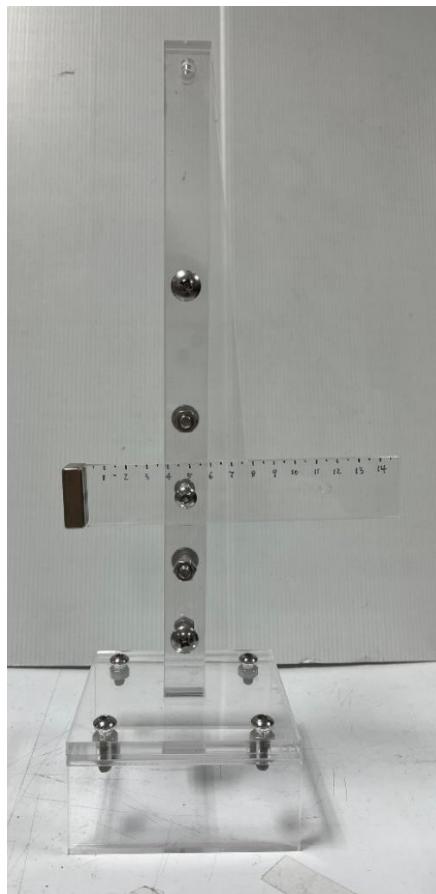


圖 5-40 磁力變換軸向剛性機構實際模型

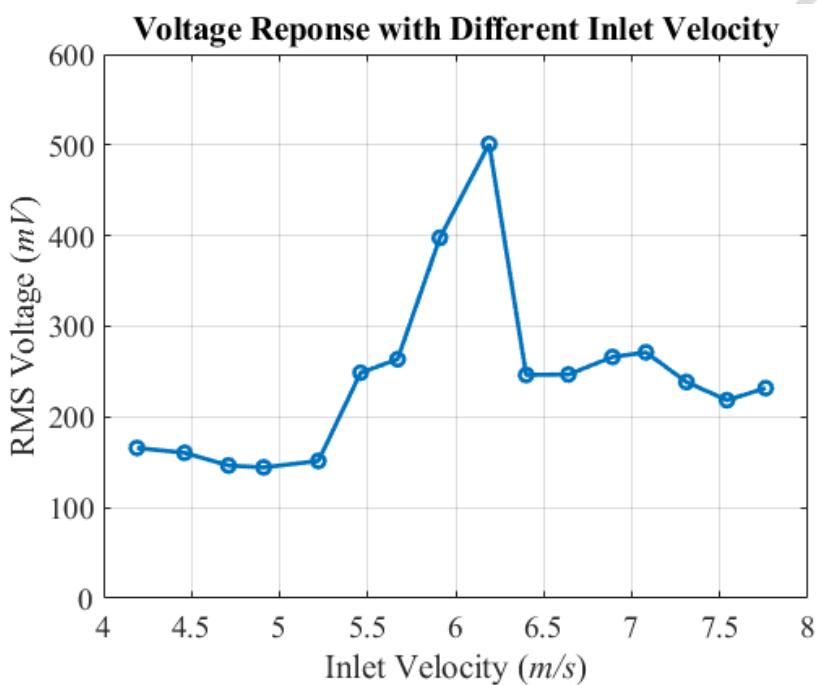


圖 5-41 受拉力 0.83 (N)下壓電試片電壓響應

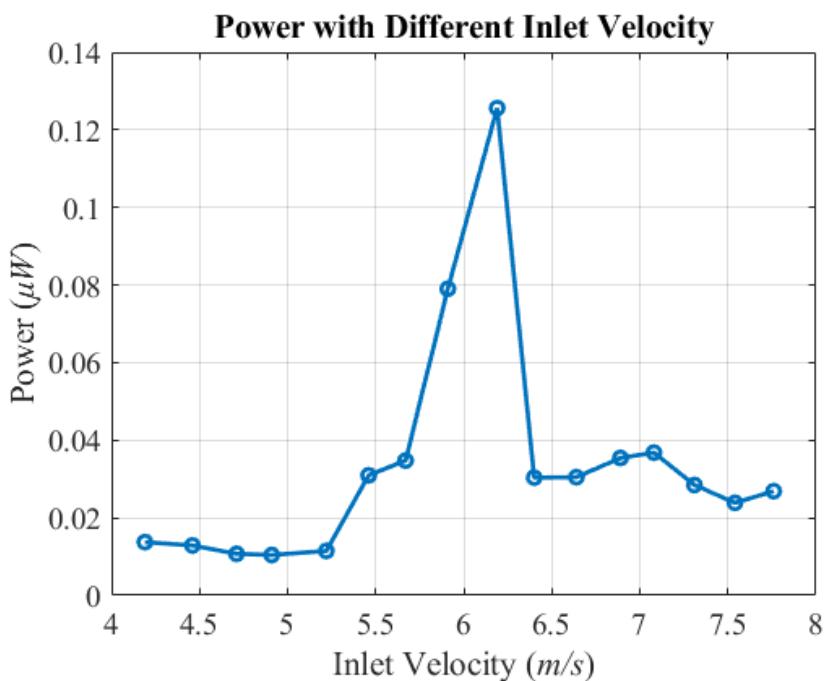


圖 5-42 受拉力 0.83 (N)下壓電試片輸出功率

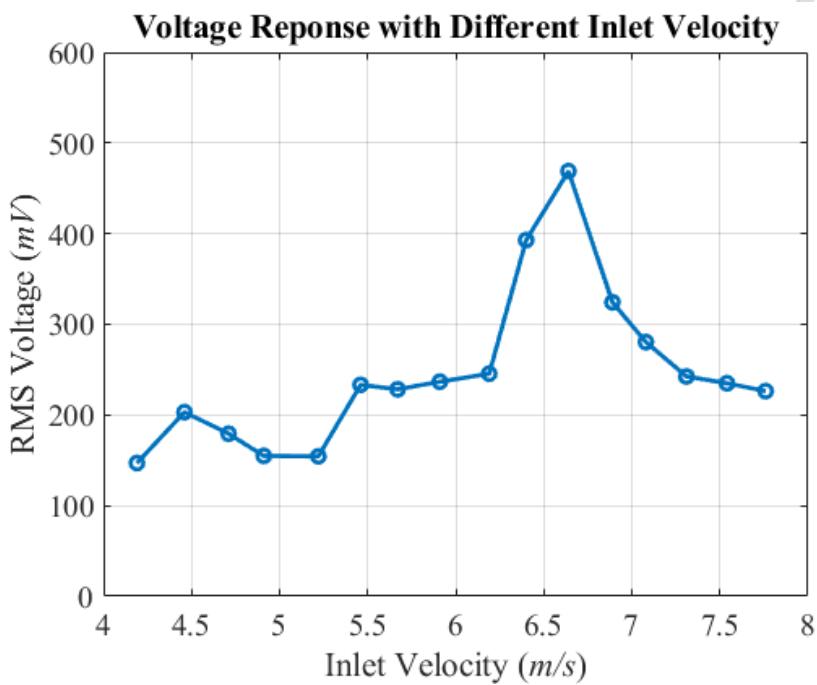


圖 5-43 受拉力 1.37 (N)下壓電試片電壓響應

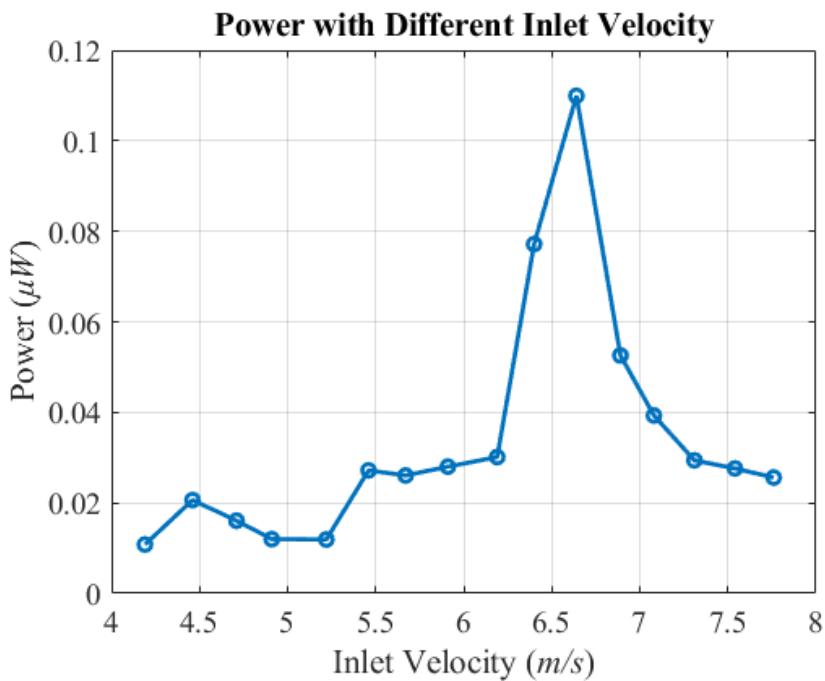


圖 5-44 受拉力 1.37 (N)下壓電試片輸出功率

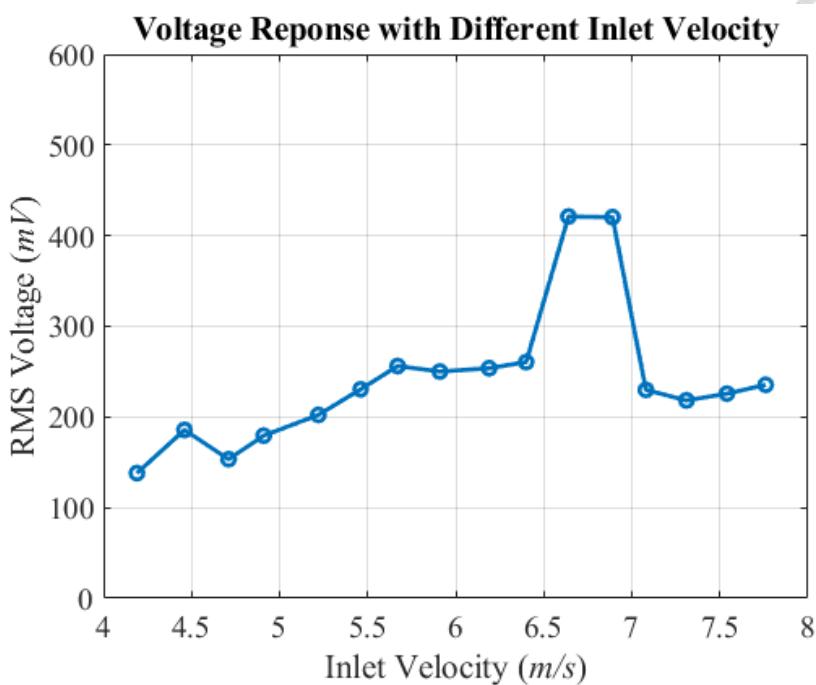


圖 5-45 受拉力 2.3 (N)下壓電試片電壓響應

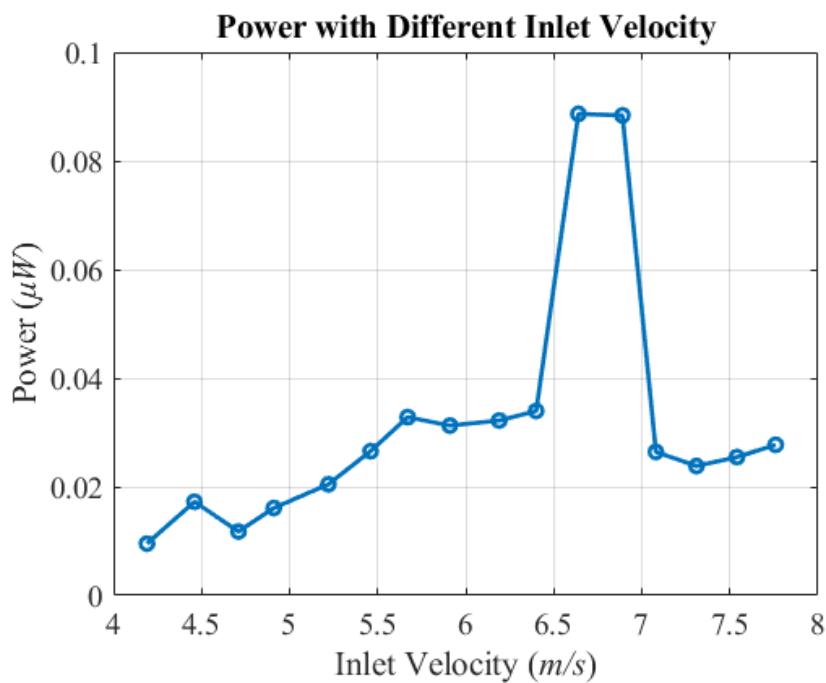


圖 5-46 受拉力 2.3 (N)下壓電試片輸出功率

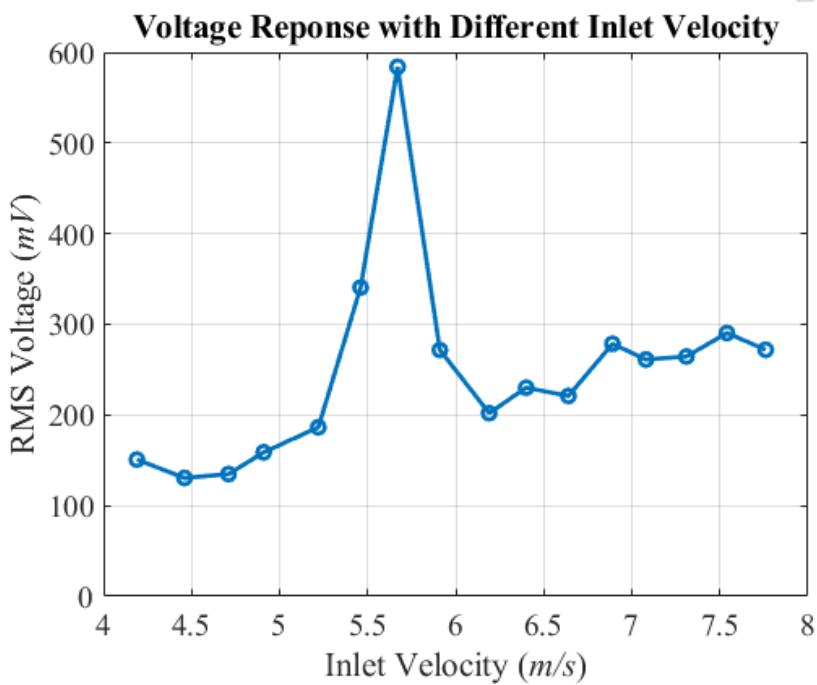


圖 5-47 受壓力 0.83 (N)下壓電試片電壓響應

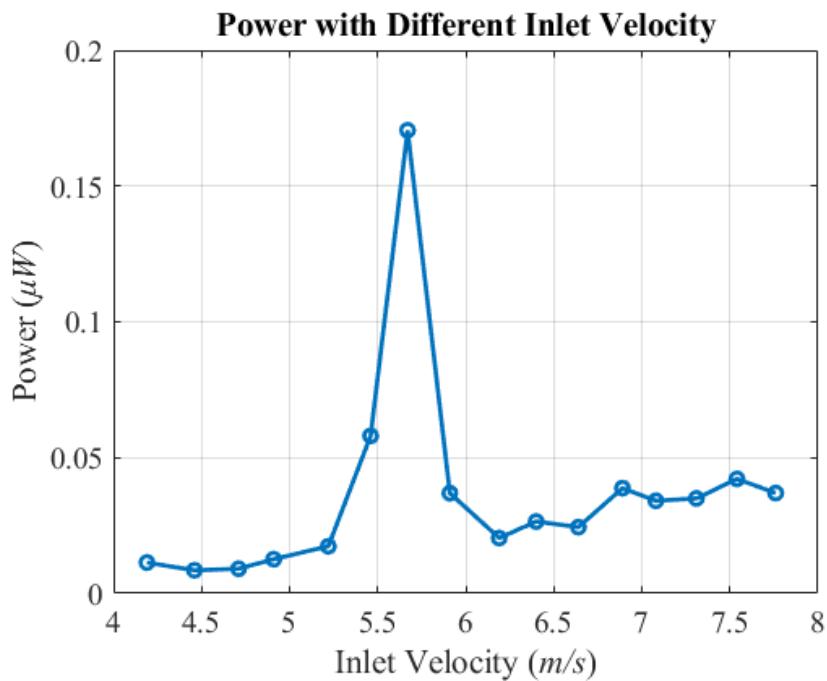


圖 5-48 受壓力 0.83 (N)下壓電試片輸出功率

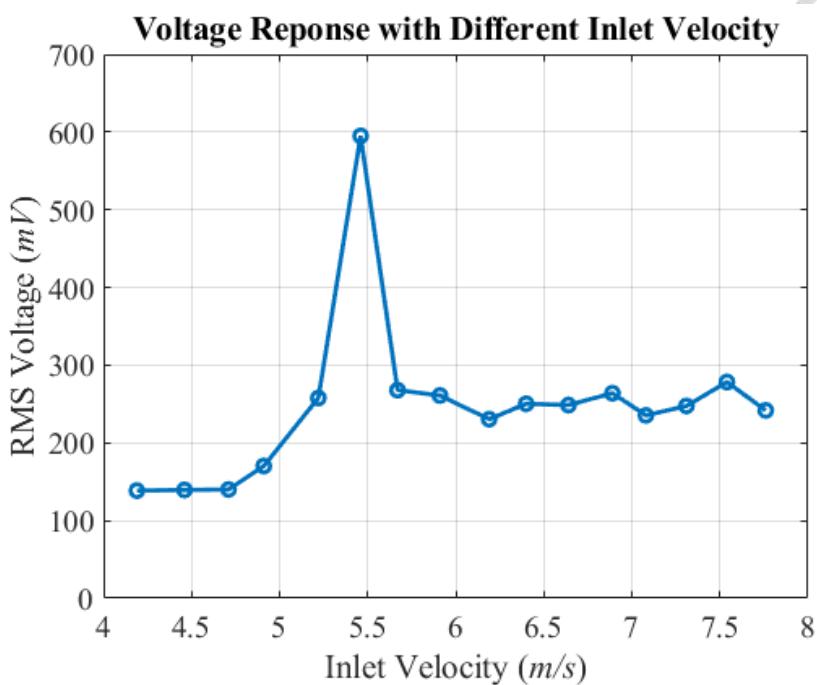
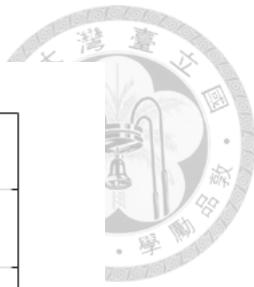


圖 5-49 受壓力 1.37 (N)下壓電試片電壓響應

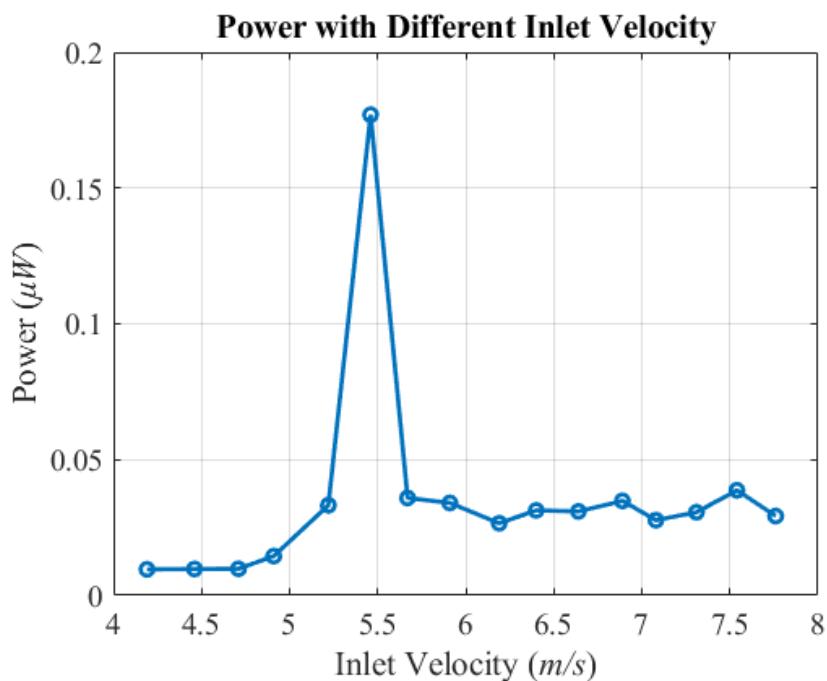


圖 5-50 受壓力 1.37 (N)下壓電試片輸出功率

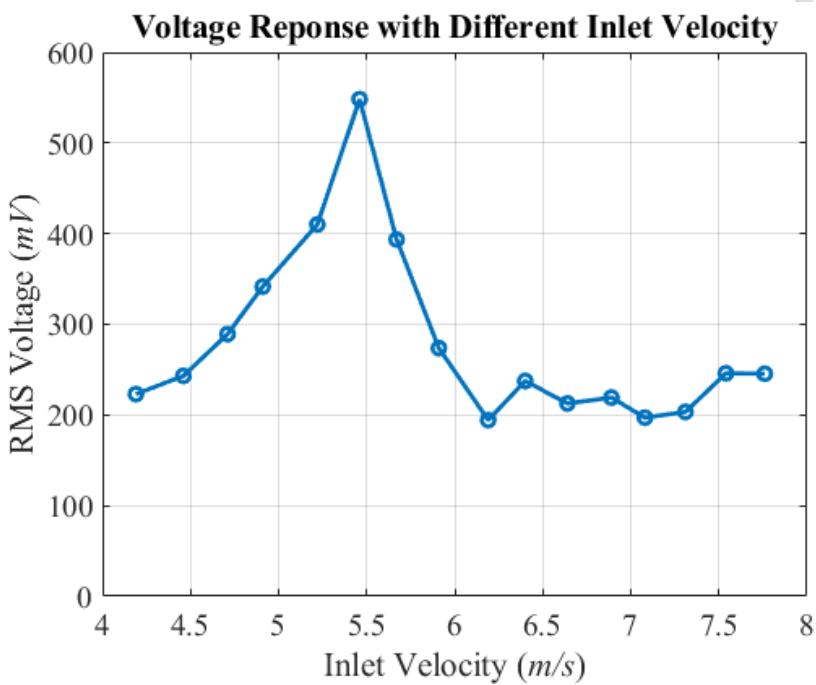


圖 5-51 受壓力 2.3 (N)下壓電試片電壓響應

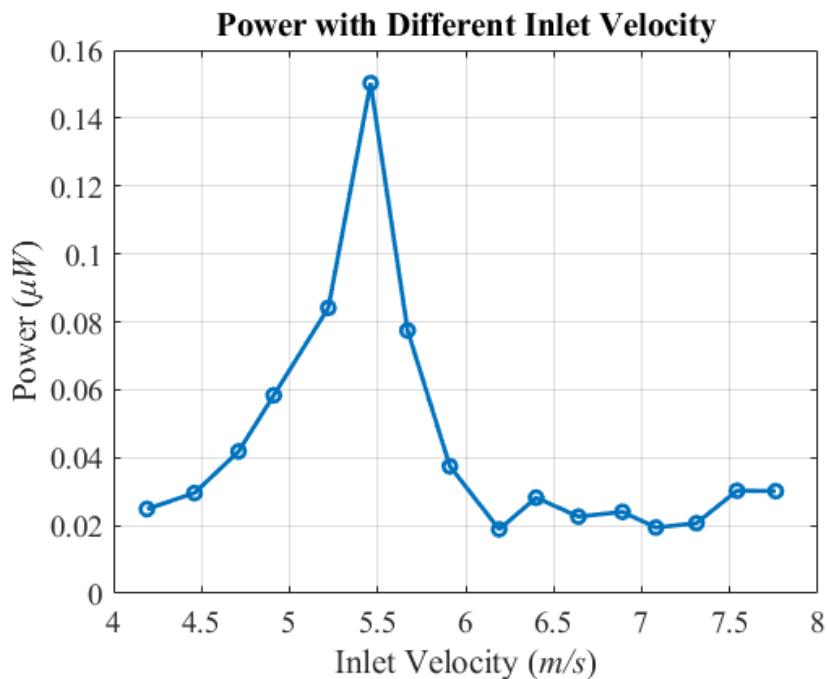


圖 5-52 受壓力 2.3 (N)下壓電試片輸出功率

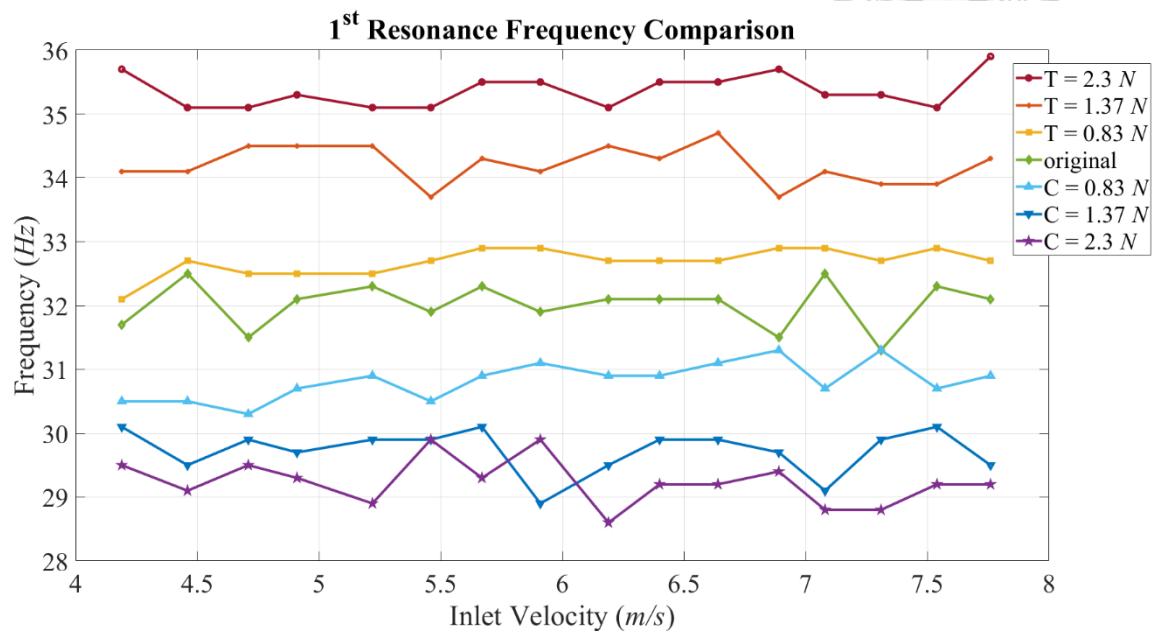


圖 5-53 不同受力下的壓電試片共振頻率比較

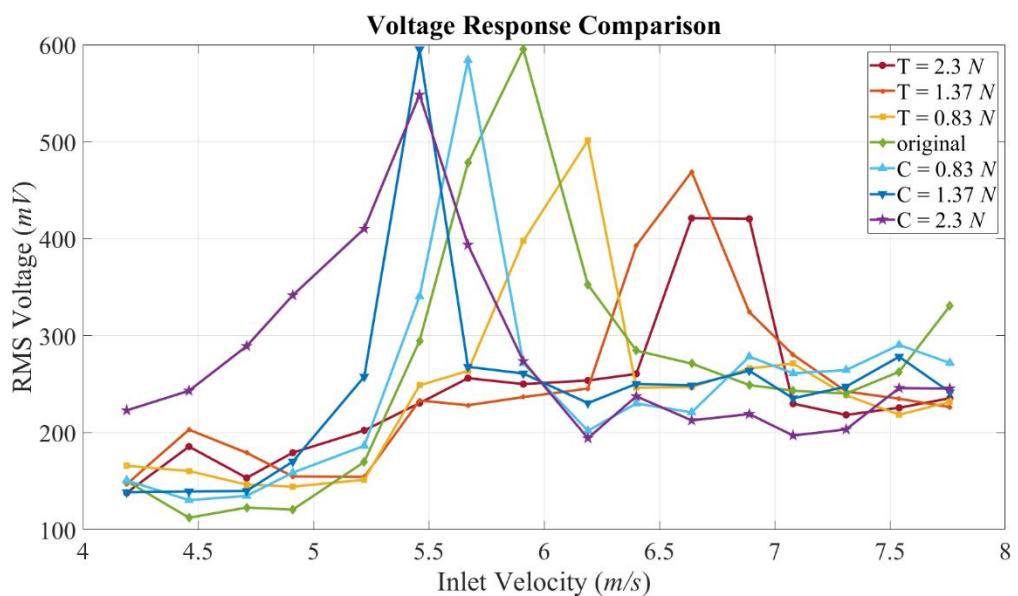


圖 5-54 不同受力下的壓電試片電壓響應比較

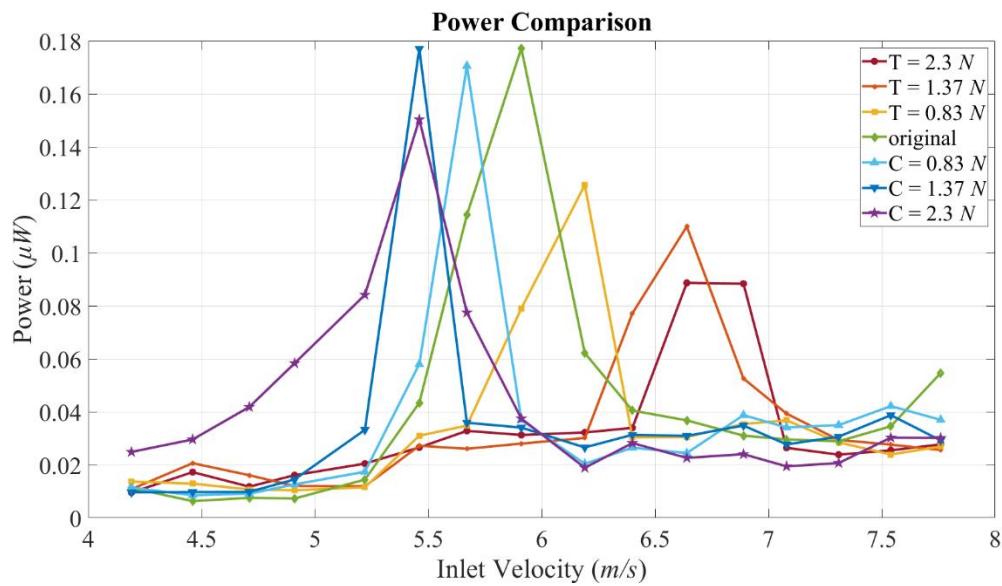


圖 5-55 不同受力下的壓電試片輸出功率比較

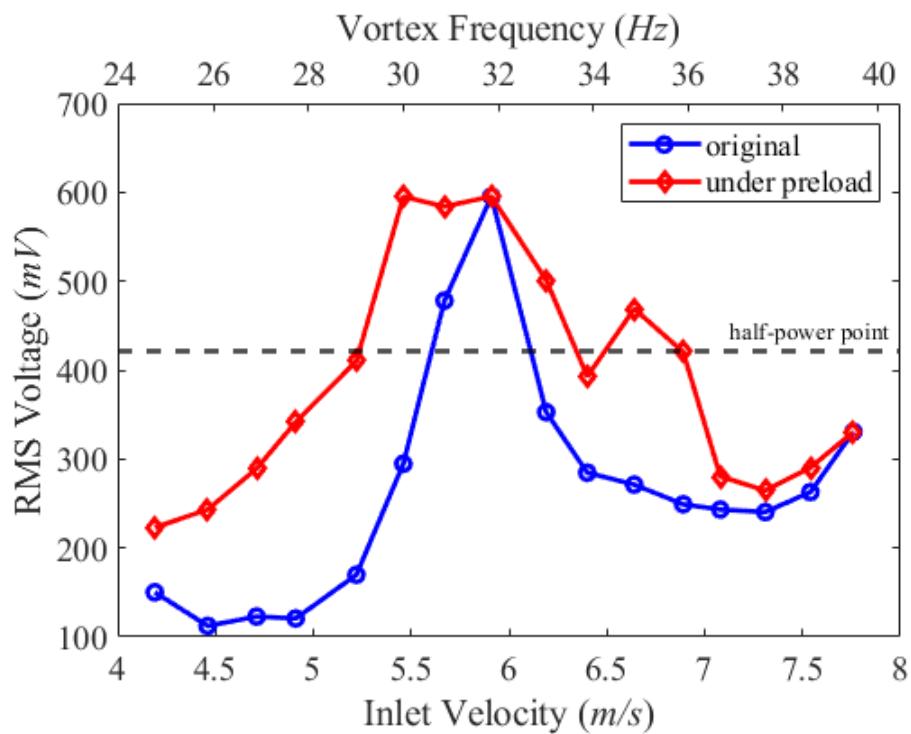


圖 5-56 加入磁力變換軸向機構後試片方均根電壓的比較

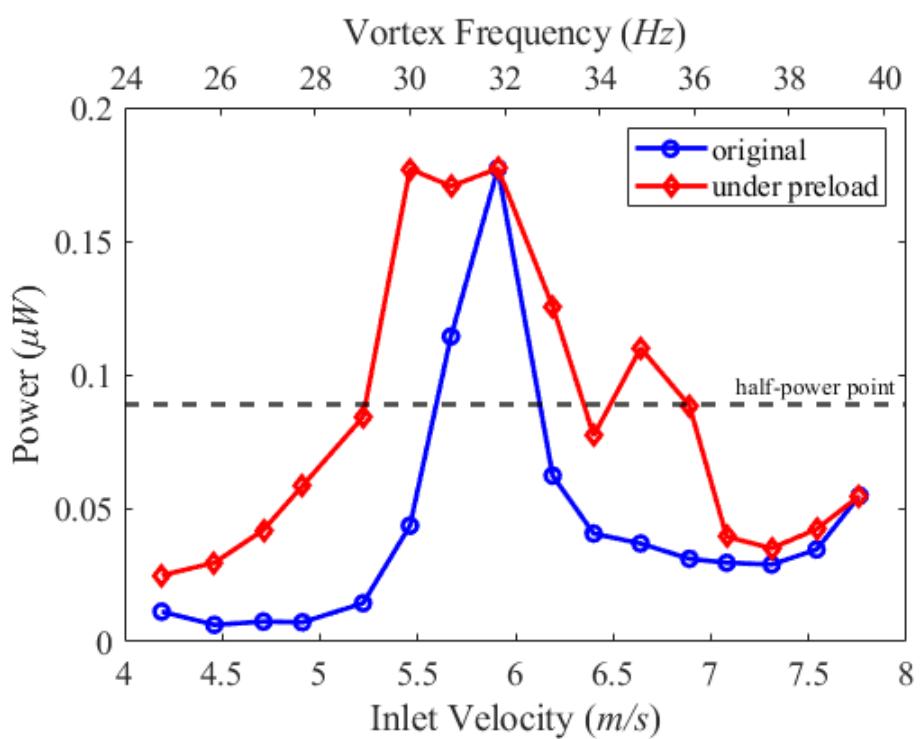


圖 5-57 加入磁力變換軸向機構後試片輸出功率的比較

## 第六章 結論與未來展望



### 6.1 結論

本論文結合理論解析、數值計算、有限元素模擬與實驗量測，針對壓電陶瓷雙晶片於受預應力情況下的面外振動特性進行詳細研究，並將其應用於流體致振壓電能量擷取實驗，開發出具有較寬工作頻寬的能量擷取系統。理論解析透過克希荷夫薄板理論結合平板疊加法，計算壓電陶瓷雙晶片受預應力下的自然共振頻率與面外模態振型，探討預應力對不同種類模態的共振頻率之影響，並與有限元素模擬(ABAQUS)進行比較。實驗量測使用 LDV、ESPI，透過壓電陶瓷雙晶片的逆壓電效應，量測試片的共振頻率與模態振型，並結合釹鐵硼強力磁鐵，將預應力產生的變頻效果應用至實驗模型上，使試片能隨承受的預應力大小不同而自由變換共振頻率。數值計算使用晶格波茲曼法計算圓柱繞流現象下的卡門渦街頻率，並搭配風洞實驗進行驗證，量測圓柱模型與圓柱夾持試片模型的渦街頻率，並與計算流體力學(LS-DYNA)結果進行比較。最後於風洞內架設磁力變換軸向剛性機構，量測壓電試片的電壓響應，並探討在加入預應力變頻效果後對試片能量擷取效果的影響。以下對本研究的所有成果進行討論：

1. 使用薄板理論結合疊加法解析單邊固定邊界下且受預應力作用下壓電平板的自然共振頻率與面外位移模態，在與有限元素分析的結果中具有良好的對應性，並且可以觀察到預應力能有效地改變平板的共振頻率，施加拉力下會使共振頻率增加，施加壓力則會使共振頻率下降。
2. 在受相同預應力作用下各模態產生的頻率變化也不盡相同，彎曲模態(Bending Mode)因平行預應力的方向而有較好的變頻效果，扭轉模態(Torsion Mode)及側向模態(Lateral Mode)則因模態振型與預應力方向不一致，預應力造成的變頻效果則較少。
3. 當對平板施加較大的壓力量值時，頻率較低的模態會因為結構剛性的不穩定，

使得其變頻效果變的非線性，而當施加的外力超過臨界載荷(Critical Load)時，會使平板的第一模態消失，同時平板會發生挫曲(Buckle)現象。

4. 基於先前推導的單邊固定邊界且受預應力作用的疊加法理論，加入質量效應的因素以貼近真實模型，具質量效應下的疊加法理論在平板的共振頻率與面外模態振型解析與有限元素分析結果有著良好的對應性。
5. 使用釤鐵硼強力磁鐵以實作能受預應力作用的壓電試片，並使用 LDV、ESPI 進行共振頻率與面外模態振型的量測，實驗量測的模態振型大多與理論解析、有限元素分析有著良好的對應性，少數幾個模態因為實驗模型與理論模型、有限元素模擬模型有所差異，導致理論與有限元素分析中特定模態無法求解。共振頻率上的量測上雖然整體誤差偏大，但大多皆有不錯的對應性，而因為施加的磁力量值偏低，因此在高頻模態的變頻效果較不明顯，在低頻模態上由於磁力量測實驗的結果可能低於真實磁力量值，因此理論與有限元素分析的結果低估了變頻效果，因此與實驗第一共振頻率的量測結果在較大的磁力作用下會有較大的誤差。
6. 在共振頻率量測實驗中，施加 2.79 (N)的拉力後，試片第一模態的共振頻率從原本 30.6 (Hz)增加到 39.06 (Hz)，而在施加 2.79 (N)的壓力後，試片第一模態的共振頻率從原本 30.6 (Hz)降至 21.56 (Hz)，在磁力的作用下試片有明顯的變頻效果。
7. 在風洞中量測圓柱繞流模型的渦街頻率，其結果與三維 LBM、LS-DYNA 的結果有著較好的對應性；在量測圓柱夾持平板模型的渦街頻率時，二維 LBM 與 LS-DYNA 因使用的流場模型為二為模型，因此在較為複雜的流場模型中會有顯著的誤差，而使用三維流場模型的三維 LBM 則與實驗量測結果有良好的對應性。
8. 在風洞實驗中量測試片表面的方均根電壓，當流速為 5.91 (m/s)，對應的激振頻率為 31.9 (Hz)時，壓電片會有最大的方均根電壓與輸出功率，表示渦流產

生的激振頻率與壓電試片的第一共振頻率重合而發生共振。

9. 加入磁力變換軸向機構後試片的能量擷取效果獲得改善，在原本的壓電能量擷取實驗中，試片的半能頻寬從  $30.5\text{ (Hz)}$  到  $32.5\text{ (Hz)}$ ，共  $2.5\text{ (Hz)}$ ，而在加入預應力變頻效果後，試片的半能頻寬從  $29\text{ (Hz)}$  到  $36\text{ (Hz)}$ ，共  $7\text{ (Hz)}$ ，其有效工作頻寬有顯著的提升，與原本相比提升 2.8 倍。

## 6.2 未來展望

1. 在本研究中質量效應是以 Dirac delta function 進行解析，在模型中以離散的點質量進行表示，但在實際模型中所使用的壓克力為一個連續含質量的結構，兩者在模型上有所落差，因此造成理論解析與實驗量測在部分模態有較大的誤差，未來在質量效應的處理上可使用 Step function 進行解析，以更貼近實驗模型。
2. 提升試片所能承受的預應力量值，在本研究中對試片僅施加至多  $2.79\text{ (N)}$  的壓力，將試片的第一模態共振頻率降低至  $21.56\text{ (Hz)}$ ，離頻率歸零還有一段距離，因此可以再提高施加的外力量值來進行降頻，但在增加壓力時試片有可能會發生形變，使得試片受損而無法繼續實驗，因此未來可以改善試片的受力形式以降低試片在受壓力情況下發生變形的機率，提高其所能承受的壓力量值並造成更多的降頻效果。
3. 將本文所使用的壓電試片附合磁鐵模型進行優化，將試片末端的壓克力、磁鐵進行幾何結構上的簡化，降低其所占的體積比，以降低於風洞實驗中固體邊界對渦街結構的影響，同時也降低模型的複雜度，有利於後續進行流場模擬以及渦街頻率量測。
4. 壓電能量擷取實驗中試片渦街激振時的位移、電壓響應為動態響應結果，因此未來可推導受預應力下單邊固定邊界壓電平板強迫振動的暫態位移響應，並與 LBM 進行結合，透過 LBM 計算出平板的受力大小再帶入暫態響應的面外位移式，以求解平板的面外位移與電壓量值，並與實驗量測、CFD 的流固

耦合分析進行驗證，並且考慮試片本身的阻尼效應，以探討 5.1 節中觀察到的壓電片激振頻率與渦街頻率不相符的現象。

5. 將磁力變換軸向機構加入磁鐵翻轉功能，現有的磁力變換軸向機構其磁鐵與壓克力橫條為透過 AB 膠進行固定，因此需準備兩組磁鐵與橫條以進行拉力與壓力的實驗，若能使磁鐵自由翻轉則只需使用一組磁鐵與橫條即可完成拉力與壓力的實驗，增加實驗的便利性。
6. 開發自動化變換軸向機構系統，使其可以自動調整試片與磁鐵的距離，使試片能根據外在環境振動頻率，自動調整所承受的預應力大小，即時改變第一共振頻率的量值以與外界激振頻率相互匹配，獲得更好的能量擷取效率。
7. 開發壓電能量擷取系統的後端介面電路，將壓電片輸出的交流電壓轉為直流電壓，可直接提供給感測器元件進行使用，也可搭配能量儲存裝置如電容、電池等，將壓電片輸出的能量進行儲存以利需要之時再作使用。

## 參考文獻



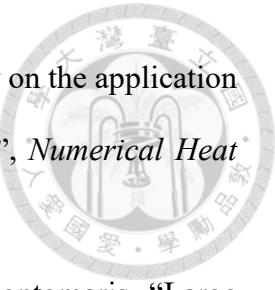
- [1] S. Y. Wang, "A finite element model for the static and dynamic analysis of a piezoelectric bimorph.", *International Journal of Solids and Structures*, 41(15), pp. 4075-4096, 2004
- [2] C. C. Ma, Y. C. Lin, Y. H. Huang, and H. Y. Lin, "Experimental measurement and numerical analysis on resonant characteristics of cantilever plates for piezoceramic bimorphs.", *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 54(2), pp. 227-239, 2007.
- [3] A. Erturk, D. J. Inman, "An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations.", *Smart Materials and Structures*, 18(2), 025009, 2009.
- [4] Y. H. Huang, C. C. Ma, "Experimental and numerical investigations of vibration characteristics for parallel-type and series-type triple-layered piezoceramic bimorphs.", *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 56(12), pp. 2598-2611, 2009.
- [5] Y. C. Shu, I. C. Lien, W. J. Wu, "An improved analysis of the SSHI interface in piezoelectric energy harvesting.", *Smart Materials and Structures*, 16(6), 2253, 2007
- [6] Y. K. Ramadass, A. P. Chandrakasan, "An efficient piezoelectric energy harvesting interface circuit using a bias-flip rectifier and shared inductor.", *IEEE journal of solid-state circuits*, 45(1), pp. 189-204, 2009
- [7] H. C. Lin, P. H. Wu, I. C. Lien, Y. C. Shu, "Analysis of an array of piezoelectric energy harvesters connected in series.", *Smart Materials and Structures*, 22(9), 094026, 2013.
- [8] E. S. Leland, P. K. Wright, "Resonance tuning of piezoelectric vibration energy scavenging generators using compressive axial preload.", *Smart Materials and*

*Structures*, 15(5), 1413, 2006.

- [9] H. Xue, Y. Hu, Q. M. Wang, "Broadband piezoelectric energy harvesting devices using multiple bimorphs with different operating frequencies.", *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 55(9), pp. 2104-2108, 2008.
- [10] D. Zhu, S. Roberts, J. Tudor, S. Beeby, "Closed loop frequency tuning of a vibration-based micro-generator.", 2008.
- [11] J. T. Lin, B. Lee, B. Alphenaar, "The magnetic coupling of a piezoelectric cantilever for enhanced energy harvesting efficiency.", *Smart Materials and Structures*, 19(4), 045012, 2010.
- [12] 鄭雅倫，趙振綱，黃育熙，「串聯型三層壓電雙晶片於電極設計搭配模態振形之能量截取效率提升」，國立台灣科技大學機械工程學系碩士論文，2016。
- [13] 周聖倫，黃育熙，「壓電能量擷取系統以邊界設計方法降低共振頻率之研究」，國立臺灣科技大學機械工程所碩士論文，2017。
- [14] 陳新承，黃育熙，「可變剛性邊界應用於壓電平板理論之能量擷取系統」，國立臺灣大學機械工程所碩士論文，2021
- [15] F.J. Shaker, "Effects of axial load on mode shapes and frequencies of beams", *NASA Lewis Research Centre Report NASA-TN-8109*, pp. 1-25, 1975
- [16] A. W. Leissa, "Vibration of plates, NASA SP-160.", *National Aeronautics and Space Administration, Washington DC*, 1969
- [17] D. J. Gorman, "Free vibration analysis of the completely free rectangular plate by the method of superposition.", *Journal of Sound and Vibration*, 57(3), pp. 437-447, 1978.
- [18] C. S. Kim, P. G. Young, S. M. Dickinson, "On the flexural vibration of rectangular plates approached by using simple polynomials in the Rayleigh-Ritz method.", *Journal of Sound and Vibration*, 143(3), pp. 379-394, 1990.



- [19] D. J. Gorman, "Free vibration and buckling of in-plane loaded plates with rotational elastic edge support.", *Journal of Sound and Vibration*, 229(4), pp. 755-773, 2000.
- [20] 吳亦莊, 馬劍清, 「理論解析與實驗量測壓電平板的面外振動及特性探討」, 國立臺灣大學機械工程所碩士論文, 2009。
- [21] X. He, G. D. Doolen, T. Clark, "Comparison of the lattice Boltzmann method and the artificial compressibility method for Navier–Stokes equations.", *Journal of Computational Physics*, 179(2), pp. 439-451, 2002
- [22] H. Zhou, G. Mo, F. Wu, J. Zhao, M. Rui, K. Cen, "GPU implementation of lattice Boltzmann method for flows with curved boundaries.", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 225, pp. 65-73, 2012.
- [23] E. Aharonov, D. H. Rothman, "Non-Newtonian flow (through porous media): A lattice-Boltzmann method.", *Geophysical Research Letters*, 20(8), pp. 679-682, 1993
- [24] X. He, G. D. Doolen, "Lattice Boltzmann method on a curvilinear coordinate system: Vortex shedding behind a circular cylinder.", *Physical Review E*, 56(1), 434, 1997
- [25] X. He, S. Chen, R. Zhang, "A lattice Boltzmann scheme for incompressible multiphase flow and its application in simulation of Rayleigh–Taylor instability.", *Journal of Computational Physics*, 152(2), pp. 642-663, 1999
- [26] S. Chen and G. D. Doolen, "Lattice Boltzmann method for fluid flows.", *Annual review of fluid mechanics*, 30(1), pp. 329-364, 1998
- [27] D. Raabe, "Overview of the lattice Boltzmann method for nano- and microscale fluid dynamics in materials science and engineering.", *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 12(6), R13, 2004
- [28] C. K. Aidun, J. R. Clausen, "Lattice-Boltzmann Method for Complex Flows.", *Annual review of fluid mechanics*, 42, pp. 439-472, 2010



- [29] L. Jahanshaloo, E. Pouryazdanpanah, N. A. Che Sidik, “A review on the application of the lattice Boltzmann method for turbulent flow simulation.”, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 64(11), pp. 938-953, 2013
- [30] Z. Lu, Y. Liao, D. Qian, J. B. McLaughlin, J. J. Derksen, K. Kontomaris, “Large eddy simulations of a stirred tank using the lattice Boltzmann method on a nonuniform grid.”, *Journal of Computational Physics*, 181(2), pp. 675-704, 2002
- [31] O. Malaspinas, P. Sagaut, “Wall model for large-eddy simulation based on the lattice Boltzmann method.”, *Journal of Computational Physics*, 275, pp. 25-40, 2014
- [32] J. Jacob, O. Malaspinas, P. Sagaut, “A new hybrid recursive regularised Bhatnagar–Gross–Krook collision model for lattice Boltzmann method-based large eddy simulation.”, *Journal of Turbulence*, 19(11-12), pp. 1051-1076, 2018
- [33] K. D. Jensen, “Flow Measurement.”, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 26(4), pp. 400-419, 2004
- [34] R. P. Shimpi, H. G. Patel, “A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis.” *International Journal of Solids and Structures*, 43(22-23), pp. 6783-6799, 2006
- [35] G. Akoun, J. P. Yonnet, “3D analytical calculation of the forces exerted between two cuboidal magnets.”, *IEEE Transactions and Magnetics*, 20(5), pp. 1962-1964, 1984.
- [36] D. V. Patil, K. N. Lakshmisha, B. Rogg, “Lattice Boltzmann simulation of lid-driven flow in deep cavities.”, *Computers & Fluids*, 35(10), pp. 1116-1125, 2016
- [37] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, M. Krook, “A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems.”, *Physical Review*, 94 (3), pp. 511–525, 1954
- [38] P. Lallemand, L. S. Luo, “Theory of the lattice Boltzmann method: Dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance, and stability.”, *Physical Review E*, 61(6),



- [39] R. Mei, W. Shyy, D. Yu, L. S. Luo, "Lattice Boltzmann method for 3-D flows with curved boundary.", *Journal of Computational Physics*, 161(2), pp. 680-699, 2000
- [40] S. K. Kang, Y. A. Hassan, "The effect of lattice models within the lattice Boltzmann method in the simulation of wall-bounded turbulent flows.", *Journal of Computational Physics*, 232(1), pp. 100-117, 2013
- [41] 洪國勛, 黃育熙, 「流體致振壓電能量擷取系統之數值開發與風洞實驗」, 國立臺灣大學機械工程所碩士論文, 2022。
- [42] Q. Zou, X. He, "On pressure and velocity flow boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model.", *Physics of fluids*, 9(6), pp. 1591-1598, 1997
- [43] R. Mei, D. Yu, W. Shyy, L. S. Luo, " Force evaluation in the lattice Boltzmann method involving curved geometry.", *Physical Review E*, 65(4), 041203, 2002.
- [44] A. G. Kravchenko, P. Moin, "Numerical studies of flow over a circular cylinder at  $Re D= 3900$ .", *Physics of fluids*, 12(2), pp. 403-417, 2000
- [45] M. A. Miguel, M. Di Nardo, "Running FineOpen43 simulations at VKI: A tutorial and a collection of scripts.", 2017
- [46] M. M. Rahman, M. M. Karim, M. A. Alim, "Numerical investigation of unsteady flow past a circular cylinder using 2-D Finite volume method.", *Journal of Naval Architecture and Marine Engineering*, 4(1), pp. 27–42, 2007
- [47] 廖展誼, 馬劍清, 「矩形平板於流固耦合問題的振動特性與暫態波傳之理論分析、數值計算與實驗量測」, 國立臺灣大學機械工程所博士論文, 2018。