



國立臺灣大學工學院機械工程學研究所

碩士論文

Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Master Thesis

利用板殼振動理論搭配機器學習與遺傳演算法

反算積層製造結構之正交性彈性常數

Inverse Calculation for Orthotropic Material Constants of Additive  
Manufacturing Structure Based on Timoshenko Beam and Kirchhoff Plate in  
Superposition Method by Using Genetic Algorithm and Machine Learning

簡揚開

Yang-Kai Jain

指導教授：黃育熙 博士

Advisor: Yu-Hsi Huang, Ph.D.

中華民國112年6月

June, 2023

國立臺灣大學碩士學位論文  
口試委員會審定書  
MASTER'S THESIS ACCEPTANCE CERTIFICATE  
NATIONAL TAIWAN UNIVERSITY

利用板殼振動理論搭配機器學習與遺傳演算法  
反算積層製造結構之正交性彈性常數  
Inverse Calculation for Orthotropic Material Constants of  
Additive Manufacturing Structure Based on Timoshenko Beam  
and Kirchhoff Plate in Superposition Method  
by Using Genetic Algorithm and Machine Learning

本論文係簡揚開君（學號 r10522512）在國立臺灣大學機械工程學系  
完成之碩士學位論文，於民國 112 年 6 月 28 日承下列考試委員審查  
通過及口試及格，特此證明。

口試委員 Oral examination committee:

黃育熙

（指導教授 Advisor）

王心

李建宏

系主任/所長 Director:

林祥群

## 致謝



在研究所的兩年當中首要感謝的還是我的指導教授育熙老師，從升大四的暑假就開始找老師做專題，一開始還懵懵懂懂的跟著學長做實驗，在慢慢找到研究方向之後，很謝謝老師常常包容我在內容上有比較多自己的想法，但又適當地在研究與報告的呈現上給我很多很好的提點，也謝謝老師在我們的題目走向上抱持較開放的態度，讓我順利搭上 AI 列車，能夠邊做研究邊學習自己有興趣的內容真的是很幸福的事情，也特別感謝老師在實驗室給予我們最大的自由，讓我們更能互相激勵彼此。

也要感謝實驗室的夥伴們，忍受我每天的垃圾話。建佑學長，不管是實驗架設、採購還是實驗室的各種雜事，就問學長就對了，學長常常要忙大大小小的事情，但還是都非常照顧我們、給我們很多幫忙，甚至在生活或是未來的規劃上也都會給我很多很寶貴的建議，祝福學長在未來畢業與工作上都能很順利。浩安學長，沒有什麼不能聊的話題，雖然平常也是垃圾話滿滿，但不管在研究、找工作或生涯規劃上總是能夠給我很多很好的意見，就算現在已經在工作，依然也都會給我很多的幫助，祈禱浩安未來在工作上飛黃騰達，帶我飛。秀宜學姊，作為實驗室第一位從事人工智慧相關的研究想必非常辛苦，謝謝學姊那時候耐心與細心的交接，给了我很大的啟發，讓我在相關的研究題目繼續延伸與應用。也謝謝國勛與御宸學長，帶給實驗室很多的歡樂。明杰一直是好戰友，一起在實驗室度過無數的周末，尤其在課業或研究上給我很多的幫助，解決了很多我在學術上遇到的困難，也常常聽我抱怨很多事情，是我心情的接收者，希望你在未來的人生中能夠更加自信與快樂。家雋幾乎每天晚上回家前都會小聊一下，也是什麼話題都可以聊，不管是生活、工作、研究、時事或是臭人，都會交換一些意見，感謝你常常要接受我講話的很直接，我以後會盡量把飯吃完，預祝你工作順利、出門不會下雨。振原我們大一就認識了，可能是種緣分吧，希望我們都能更珍惜之間的友情，期盼你能夠更加了解自己。也謝謝羿安一起修課、準備 meeting，共同度過兩年的研究生活。景順因為是直屬的關係我



大二就認識了，雖然我平常講話可能言辭犀利，但我一直覺得你是很好的人，記得多給自己一些信心，希望你的研究之後能有很好的結果，在未來的人生道路也能順利。淳期是個很有趣的人，謝謝我們平常一起互相包容彼此的言論，也感謝你願意認真跟我聊一些事情，也謝謝你常常一起打球，祝福你不管在研究或未來都能找到很好的方向。謝謝柏宇常常在實驗室電腦出問題的時候進行救援，不只有想法也有能力，只能祝你有很好的運氣，例如不要再跳電。感謝紘廷常常幫忙實驗室活動的準備，期待你能夠達成你的夢想。也謝謝以信很常一起吃飯、聊天與分享有趣的事情，研究的路還很長，期望你能夠樂在其中。也感謝 Mandy 經常與我們分享行政的流程、生活經驗與道理以及時常帶特產給我們。

很開心能夠在實驗力學實驗室度過充實、有回憶的時光，實驗室能有歡樂、和諧的氣氛不是一兩個人能決定的，是大家共同努力的結果，能夠實驗室一起出遊、跟畢業的學長姊們一起聚餐都是很可貴的記憶，祝福實驗室的大家在未來都能前程似錦、一帆風順。

最後也要感謝我的家人，在我的求學階段皆給我最大的自主，讓我能夠自己選擇未來的方向，也給我很多心靈上的支持，願你們都能萬事如意、身體健康。也謝謝其他兩位口試委員王怡仁與王建凱老師給予我在論文的内容與編寫上很多寶貴的意見。特感謝所有在研究所階段任何部分幫助過我的人。



## 中文摘要

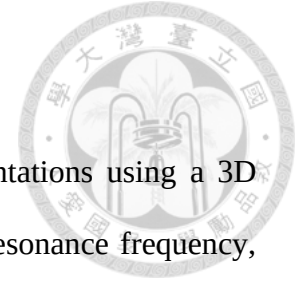
本研究首先透過熱熔堆疊(FDM)的 3D 列印機列印出不同堆疊方向的試片，進行共振頻率的量測，藉由歐拉-伯努力梁理論(Euler-Bernoulli Beam Theory)，反算 3 個方向的材料常數。接著利用 3D 列印容易改變尺寸的特性，改變試片的寬厚比、長厚比與長寬比，比對實驗與理論以及模擬與理論之間的誤差，探討原理論尺寸比例的適用範圍。

在長厚梁的情況下導入鐵木辛柯梁理論(Timoshenko-Ehrenfest Beam Theory)，並利用有限元素軟體比較模擬與理論之間共振頻率的對應性，選用梁理論中的切變係數(Shear Coefficient,  $\kappa$ )，由於此梁理論不易直接反算求得材料參數，因此導入基因遺傳演算法(Genetic Algorithm, GA)搭配梁理論，以共振頻率的實驗反算 6 個方向試片的材料常數。而在薄板的結構則利用疊加法(Superposition Method)的方式求得正交性平板的共振頻率，將其結合於基因遺傳演算法中，實驗上除了量測共振頻率之外，亦透過黏貼壓電纖維於試片的方式量測模態形狀，反算 3 個方向的材料常數，並比對模態的一致性。

最後透過機器學習(Machine Learning, ML)與深度學習(Deep Learning, DL)方法，以有限元素軟體生成隨機材料常數的共振頻率，先進行特徵選擇(Feature Selection)篩選出特定方向可以進行反算的材料參數，接著利用集群演算法自分群並標注模態類別，將模態資訊與共振頻率輸入至遞迴神經網路(Recurrent Neural Networks, RNN)，建立高度擬合之正交性材料常數反算模型，以利用共振頻率預測材料參數。最後透過卷積神經網路(Convolutional Neural Networks, CNN)，結合有限元素軟體生成的模態圖與集群演算法所標注之類別，建立以模態影像進行模態分類的模型。

**關鍵字：**積層製造、正交性材料、基因遺傳演算法、疊加法、機器學習、深度學習、特徵選擇、集群演算法、遞迴神經網路、卷積神經網路

# ABSTRACT



This study fabricated specimens with different stacking orientations using a 3D printer through fused deposition modeling (FDM), measured the resonance frequency, and calculated the material constants in orthogonal directions using the Euler-Bernoulli beam theory. Taking advantage of the easy dimensional variation characteristic of 3D printing, the aspect ratios of the specimens, including width-thickness ratio, length-thickness ratio, and length-width ratio, are modified to compare discrepancies between the experimental and theoretical values, and to explore the suitable range for size ratios in theory.

For the cases of length-thickness beams, the Timoshenko-Ehrenfest Beam theory is introduced, and a shear coefficient in beam theory is considered. The correspondence of resonant frequency in the theoretical analysis is compared through the finite element method. Since the beam theory is hard to calculate inversely material constants, a genetic algorithm (GA) is proposed, in conjunction with beam theory, to obtain the material constants of test pieces in 6 directions by using an experimental resonant frequency. For the orthotropic structure of thin plates, the resonant frequency is calculated using the superposition method and integrated into the genetic algorithm. In addition to measuring resonant frequency, the mode shape is excited by mounting piezoelectric fibers to the specimen. The experimental results are also verified in the consistency of the results in the numerical calculation, which used material constants in orthogonal directions by inverse calculation.

In the final part, machine learning (ML) and deep learning (DL) methods are developed to generate the orthotropic material constants once time. That finite element method inputs optional material constants calculate the resonant frequency. Feature selection is initially performed to filter out the material constants that can be inversely

calculated in a specific direction. Then, a clustering algorithm is used to self-cluster and label types by mode shape. The mode shape and resonant frequency are input into a Recurrent Neural Network (RNN) to establish a highly fitting inverse calculation model of orthotropic material constants. Finally, a Convolutional Neural Network (CNN) is used, combining images from the mode shape generated by the finite element method and categories labeled by the clustering algorithm to establish a model for mode types classification.

**Keywords:** Additive Manufacturing, Orthotropic Materials, Genetic Algorithm, Superposition Method, Machine Learning, Deep Learning, Feature Selection, Clustering Algorithm, Recurrent Neural Networks, Convolutional Neural Networks

# 目錄



|                      |     |
|----------------------|-----|
| 論文口試委員審定書 .....      | I   |
| 致謝 .....             | II  |
| 中文摘要 .....           | IV  |
| ABSTRACT .....       | V   |
| 目錄 .....             | VII |
| 圖目錄 .....            | X   |
| 表目錄 .....            | XV  |
| 第一章 緒論 .....         | 1   |
| 1.1 研究背景、動機與目的 ..... | 1   |
| 1.2 文獻回顧 .....       | 3   |
| 1.3 內容介紹 .....       | 7   |
| 第二章 實驗儀器、原理與架設 ..... | 9   |
| 2.1 3D 列印機 .....     | 9   |
| 2.2 雷射都卜勒振動儀 .....   | 11  |
| 2.3 全域振動量測系統 .....   | 14  |
| 2.4 電子斑點干涉術 .....    | 18  |
| 第三章 材料常數量測 .....     | 22  |
| 3.1 彈性力學理論 .....     | 22  |
| 3.1.1 異向性材料 .....    | 22  |
| 3.1.2 正交性材料 .....    | 23  |
| 3.1.3 等向性材料 .....    | 25  |
| 3.2 懸臂梁振動理論 .....    | 28  |
| 3.2.1 彎曲模態 .....     | 28  |
| 3.2.2 扭轉模態 .....     | 30  |
| 3.3 鋼珠落擊實驗 .....     | 32  |
| 3.3.1 實驗說明 .....     | 32  |

|                          |           |
|--------------------------|-----------|
| 3.3.2 量測結果.....          | 34        |
| 3.4 尺寸比例適用範圍 .....       | 41        |
| 3.4.1 寬厚比.....           | 41        |
| 3.4.2 長厚比.....           | 47        |
| 3.4.3 長寬比.....           | 48        |
| 3.5 小結 .....             | 53        |
| <b>第四章 基因遺傳演算法 .....</b> | <b>54</b> |
| 4.1 簡介 .....             | 54        |
| 4.2 演算法機制 .....          | 56        |
| 4.2.1 選擇.....            | 57        |
| 4.2.2 交叉.....            | 59        |
| 4.2.3 突變.....            | 61        |
| 4.3 長厚梁結構材料常數反算 .....    | 63        |
| 4.3.1 鐵木辛柯梁理論.....       | 63        |
| 4.3.2 切變係數.....          | 64        |
| 4.3.3 演算法參數選用 .....      | 70        |
| 4.3.4 實驗流程與結果.....       | 73        |
| 4.4 正交性矩形板振動分析 .....     | 81        |
| 4.4.1 薄板理論假設.....        | 81        |
| 4.4.2 統御方程式與邊界條件.....    | 82        |
| 4.4.3 懸臂板面外振動位移解析.....   | 83        |
| 4.4.4 理論分析與有限元素結果比較..... | 99        |
| 4.5 薄板結構材料常數反算 .....     | 104       |
| 4.5.1 演算法參數選用 .....      | 104       |
| 4.5.2 實驗說明.....          | 106       |
| 4.5.3 實驗流程與結果.....       | 107       |
| 4.6 小結 .....             | 120       |

|                            |            |
|----------------------------|------------|
| <b>第五章 機器學習與深度學習 .....</b> | <b>121</b> |
| 5.1 簡介 .....               | 121        |
| 5.2 資料蒐集 .....             | 126        |
| 5.2.1 生成共振頻率 .....         | 126        |
| 5.2.2 模態分群 .....           | 126        |
| 5.3 資料預處理 .....            | 131        |
| 5.3.1 特徵選擇 .....           | 131        |
| 5.3.2 獨熱編碼與特徵縮放 .....      | 138        |
| 5.3.3 數據分割 .....           | 140        |
| 5.4 學習演算法 .....            | 142        |
| 5.4.1 遞迴神經網路 .....         | 142        |
| 5.4.2 訓練、驗證與測試結果 .....     | 146        |
| 5.5 模態辨識 .....             | 157        |
| 5.5.1 資料蒐集 .....           | 157        |
| 5.5.2 卷積神經網路架構 .....       | 157        |
| 5.5.3 訓練、驗證與測試結果 .....     | 160        |
| 5.6 小結 .....               | 165        |
| 5.7 與基因遺傳演算法之比較 .....      | 166        |
| <b>第六章 結論與未來展望 .....</b>   | <b>168</b> |
| 6.1 本文成果 .....             | 168        |
| 6.2 未來展望 .....             | 171        |
| <b>參考文獻 .....</b>          | <b>172</b> |
| <b>附錄 .....</b>            | <b>178</b> |
| A. 3D 列印機詳細規格 .....        | 178        |

## 圖目錄



|        |                                         |    |
|--------|-----------------------------------------|----|
| 圖 2-1  | 熱融堆疊之 3D 列印機.....                       | 10 |
| 圖 2-2  | LDV-OFV505.....                         | 12 |
| 圖 2-3  | 聲光調製器基本構造.....                          | 12 |
| 圖 2-4  | LDV 內部光路圖.....                          | 13 |
| 圖 2-5  | NI-9234 資料擷取系統.....                     | 14 |
| 圖 2-6  | Agilent-33210A 訊號產生器.....               | 14 |
| 圖 2-7  | 微動振鏡系統.....                             | 15 |
| 圖 2-8  | 全域振動量測系統實驗流程圖.....                      | 15 |
| 圖 2-9  | 全域振動量測系統實驗架設圖.....                      | 16 |
| 圖 2-10 | ESPI 水平面外架設.....                        | 21 |
| 圖 3-1  | 懸臂梁沿長度 $dx$ 受彎曲之自由體圖.....               | 29 |
| 圖 3-2  | 懸臂梁沿長度 $dx$ 受扭轉之自由體圖.....               | 31 |
| 圖 3-3  | 3D 列印(線堆積)放大示意圖.....                    | 32 |
| 圖 3-4  | 懸臂梁敲擊位置示意圖.....                         | 33 |
| 圖 3-5  | 鋼珠落擊實驗架設圖.....                          | 33 |
| 圖 3-6  | 3D 列印試片各排向示意圖.....                      | 35 |
| 圖 3-7  | 「 $xy$ 平面- $x$ 方向」試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號..... | 36 |
| 圖 3-8  | 「 $xy$ 平面- $x$ 方向」試片敲擊 B 點之時域與頻域訊號..... | 36 |
| 圖 3-9  | 「 $xz$ 平面- $z$ 方向」試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號..... | 37 |
| 圖 3-10 | 「 $xz$ 平面- $z$ 方向」試片敲擊 B 點之時域與頻域訊號..... | 37 |
| 圖 3-11 | 「 $yz$ 平面- $y$ 方向」試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號..... | 38 |
| 圖 3-12 | 「 $yz$ 平面- $y$ 方向」試片敲擊 B 點之時域與頻域訊號..... | 38 |
| 圖 3-13 | 不同厚度之 3D 列印試片.....                      | 42 |
| 圖 3-14 | 試片 2 ( $b/h=8$ )的試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號.....  | 42 |

|        |                                         |    |
|--------|-----------------------------------------|----|
| 圖 3-15 | 試片 2 ( $b/h=8$ )的試片敲擊 B 點之時域與頻域訊號 ..... | 43 |
| 圖 3-16 | 試片 3 ( $b/h=5$ )的試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號 ..... | 43 |
| 圖 3-17 | 試片 3 ( $b/h=5$ )的試片敲擊 B 點之時域與頻域訊號 ..... | 44 |
| 圖 3-18 | 試片 4 ( $b/h=4$ )的試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號 ..... | 44 |
| 圖 3-19 | 試片 4 ( $b/h=4$ )的試片敲擊 B 點之時域與頻域訊號 ..... | 45 |
| 圖 3-20 | 不同寬厚比理論與實驗彎曲模態誤差 .....                  | 45 |
| 圖 3-21 | 不同寬厚比理論與實驗扭轉模態誤差 .....                  | 46 |
| 圖 3-22 | 不同長度之 3D 列印試片 .....                     | 48 |
| 圖 3-23 | 試片 6 ( $L/b=8$ )的試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號 ..... | 49 |
| 圖 3-24 | 試片 6 ( $L/b=8$ )的試片敲擊 B 點之時域與頻域訊號 ..... | 49 |
| 圖 3-25 | 試片 7 ( $L/b=6$ )的試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號 ..... | 50 |
| 圖 3-26 | 試片 7 ( $L/b=6$ )的試片敲擊 B 點之時域與頻域訊號 ..... | 50 |
| 圖 3-27 | 試片 8 ( $L/b=4$ )的試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號 ..... | 51 |
| 圖 3-28 | 試片 8 ( $L/b=4$ )的試片敲擊 B 點之時域與頻域訊號 ..... | 51 |
| 圖 3-29 | 不同長寬比理論與實驗彎曲模態誤差 .....                  | 52 |
| 圖 3-30 | 不同長寬比理論與實驗扭轉模態誤差 .....                  | 52 |
| 圖 4-1  | SGA 演算法流程圖 .....                        | 56 |
| 圖 4-2  | RW 選擇示意圖 .....                          | 58 |
| 圖 4-3  | 競技選擇(取後不放回)示意圖 .....                    | 58 |
| 圖 4-4  | 兩點交叉 .....                              | 60 |
| 圖 4-5  | 三點交叉 .....                              | 60 |
| 圖 4-6  | 均勻交叉 .....                              | 60 |
| 圖 4-7  | 不同交叉機制之位置與分佈偏誤 .....                    | 61 |
| 圖 4-8  | Mutation Clock 示意圖 .....                | 62 |
| 圖 4-9  | 切變係數推導之座標系統 .....                       | 68 |



|        |                                   |     |
|--------|-----------------------------------|-----|
| 圖 4-10 | 切變係數無窮級數項收斂性分析.....               | 68  |
| 圖 4-11 | 切變係數與蒲松比之關係.....                  | 69  |
| 圖 4-12 | 理論自生成 GA 收斂測試.....                | 73  |
| 圖 4-13 | 長厚梁結構材料常數反算流程.....                | 75  |
| 圖 4-14 | 「xy 平面-x 方向」試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號..... | 75  |
| 圖 4-15 | 「xy 平面-y 方向」試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號..... | 76  |
| 圖 4-16 | 「xz 平面-x 方向」試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號..... | 76  |
| 圖 4-17 | 「xz 平面-z 方向」試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號..... | 77  |
| 圖 4-18 | 「yz 平面-y 方向」試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號..... | 77  |
| 圖 4-19 | 「yz 平面-z 方向」試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號..... | 78  |
| 圖 4-20 | 實驗結果 GA 收斂狀況.....                 | 78  |
| 圖 4-21 | 單邊固定全域平板之等效圖.....                 | 99  |
| 圖 4-22 | 第 1 模態之展開項數收斂性分析.....             | 100 |
| 圖 4-23 | 第 15 模態之展開項數收斂性分析.....            | 100 |
| 圖 4-24 | 不同厚度之懸臂板理論與模擬間誤差( $K=5$ ).....    | 104 |
| 圖 4-25 | 理論自生成 GA 收斂測試.....                | 105 |
| 圖 4-26 | 懸臂板敲擊位置示意圖.....                   | 106 |
| 圖 4-27 | 壓電纖維黏貼示意圖.....                    | 107 |
| 圖 4-28 | 薄板結構材料常數反算流程.....                 | 109 |
| 圖 4-29 | 「xy 平面-x 方向」試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號..... | 109 |
| 圖 4-30 | 「xz 平面-z 方向」試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號..... | 110 |
| 圖 4-31 | 「yz 平面-y 方向」試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號..... | 110 |
| 圖 4-32 | 實驗結果 GA 收斂狀況.....                 | 111 |
| 圖 5-1  | 機器學習流程圖.....                      | 124 |
| 圖 5-2  | MLP 示意圖.....                      | 124 |

|        |                           |     |
|--------|---------------------------|-----|
| 圖 5-3  | 反傳遞演算法概念圖 .....           | 125 |
| 圖 5-4  | 轉折圖 .....                 | 129 |
| 圖 5-5  | 輪廓係數圖 .....               | 130 |
| 圖 5-6  | 決策樹示意圖 .....              | 133 |
| 圖 5-7  | 第一模態頻率之重要性分析 .....        | 133 |
| 圖 5-8  | 第二模態頻率之重要性分析 .....        | 134 |
| 圖 5-9  | 第三模態頻率之重要性分析 .....        | 134 |
| 圖 5-10 | 第四模態頻率之重要性分析 .....        | 134 |
| 圖 5-11 | 第五模態頻率之重要性分析 .....        | 135 |
| 圖 5-12 | 第六模態頻率之重要性分析 .....        | 135 |
| 圖 5-13 | 第七模態頻率之重要性分析 .....        | 135 |
| 圖 5-14 | 第八模態頻率之重要性分析 .....        | 136 |
| 圖 5-15 | 第九模態頻率之重要性分析 .....        | 136 |
| 圖 5-16 | 第十模態頻率之重要性分析 .....        | 136 |
| 圖 5-17 | 第一至第十模態頻率之重要性分析平均 .....   | 137 |
| 圖 5-18 | 第一至第十模態頻率之重要性分析 .....     | 137 |
| 圖 5-19 | 模態類型進行獨熱編碼 .....          | 139 |
| 圖 5-20 | 共振頻率進行特徵縮放示意圖 .....       | 139 |
| 圖 5-21 | 材料常數進行特徵縮放示意圖 .....       | 140 |
| 圖 5-22 | 保留法示意圖 .....              | 141 |
| 圖 5-23 | 時間序列數據 .....              | 145 |
| 圖 5-24 | 不同類型之 RNN 模型 .....        | 145 |
| 圖 5-25 | 單層 RNN 之展開圖 .....         | 146 |
| 圖 5-26 | LSTM 單元展開圖 .....          | 146 |
| 圖 5-27 | LSTM-RNN 模型輸入與輸出示意圖 ..... | 149 |

|        |                                                              |     |
|--------|--------------------------------------------------------------|-----|
| 圖 5-28 | LSTM-RNN 模型訓練之學習曲線 .....                                     | 150 |
| 圖 5-29 | LSTM-RNN 模型訓練時驗證數據 $R^2$ 收斂結果 .....                          | 150 |
| 圖 5-30 | 只保留 $E_2 / E_1 > 3.5$ 的樣本之重要性分析 .....                        | 151 |
| 圖 5-31 | LSTM-RNN 模型(移除 $E_2 / E_1 > 3.5$ 樣本)訓練之學習曲線 .....            | 151 |
| 圖 5-32 | LSTM-RNN 模型(移除 $E_2 / E_1 > 3.5$ 樣本)訓練時驗證數據 $R^2$ 收斂結果 ..... | 152 |
| 圖 5-33 | 模態振型圖大小進行壓縮示意圖 .....                                         | 157 |
| 圖 5-34 | 模態類型分類之 CNN 模型架構 .....                                       | 160 |
| 圖 5-35 | 匯總(Pooling)示意圖 .....                                         | 160 |
| 圖 5-36 | CNN 架構模型各層加權參數數量 .....                                       | 162 |
| 圖 5-37 | CNN 模型訓練之學習曲線 .....                                          | 162 |
| 圖 5-38 | CNN 模型訓練時驗證數據 $ACC$ 收斂結果 .....                               | 163 |
| 圖 5-39 | CNN 模型前 10 個測試數據預測結果 .....                                   | 163 |
| 圖 5-40 | NFL 定理 .....                                                 | 167 |

## 表目錄



|        |                            |     |
|--------|----------------------------|-----|
| 表 2-1  | 3D 列印重要列印參數.....           | 10  |
| 表 2-2  | LDV 規格.....                | 13  |
| 表 2-3  | NI-DAQ 規格.....             | 16  |
| 表 2-4  | 微動振鏡規格.....                | 17  |
| 表 3-1  | 「xy 平面-x 方向」試片之共振頻率.....   | 39  |
| 表 3-2  | 「xz 平面-z 方向」試片之共振頻率.....   | 39  |
| 表 3-3  | 「yz 平面-y 方向」試片之共振頻率.....   | 40  |
| 表 3-4  | 正交性材料所有常數反算之結果.....        | 40  |
| 表 3-5  | 不同厚度試片(實驗)之共振頻率.....       | 46  |
| 表 3-6  | 不同厚度試片(模擬)之共振頻率.....       | 46  |
| 表 3-7  | 不同厚度試片(模擬)之共振頻率.....       | 47  |
| 表 3-8  | 不同長度試片(實驗)之共振頻率.....       | 52  |
| 表 3-9  | 不同長度試片(模擬)之共振頻率.....       | 53  |
| 表 4-1  | 各選擇機制之比較.....              | 59  |
| 表 4-2  | 鐵木辛柯梁理論與模擬之比較.....         | 69  |
| 表 4-3  | 歐拉-伯努力梁、鐵木辛柯梁理論與模擬之比較..... | 70  |
| 表 4-4  | 理論自生成 GA 收斂之最佳參數組合.....    | 73  |
| 表 4-5  | 各試片排向 GA 的收斂結果.....        | 79  |
| 表 4-6  | 各試片排向 GA 的收斂結果(續).....     | 79  |
| 表 4-7  | 正交性材料所有常數反算之結果.....        | 80  |
| 表 4-8  | 理論與模擬比較之材料常數設定.....        | 101 |
| 表 4-9  | 懸臂板面外理論與模擬分析結果.....        | 101 |
| 表 4-10 | 理論自生成 GA 收斂之最佳參數組合.....    | 106 |
| 表 4-11 | 壓電纖維規格.....                | 107 |

|        |                                                        |     |
|--------|--------------------------------------------------------|-----|
| 表 4-12 | 「xy 平面-x 方向」試片實驗、理論與模擬結果 .....                         | 112 |
| 表 4-13 | 「xz 平面-z 方向」試片實驗、理論與模擬結果 .....                         | 114 |
| 表 4-14 | 「yz 平面-y 方向」試片實驗、理論與模擬結果 .....                         | 116 |
| 表 4-15 | 「xy 平面-x 方向」試片理論、DPM 與 ESPI 結果 .....                   | 118 |
| 表 4-16 | 正交性材料所有常數反算之結果 .....                                   | 120 |
| 表 5-1  | 常見之啟動函數 .....                                          | 125 |
| 表 5-2  | 生成模型參數設定 .....                                         | 126 |
| 表 5-3  | 訊息檔之參與因子 .....                                         | 130 |
| 表 5-4  | 各模態類型示意圖 .....                                         | 130 |
| 表 5-5  | 各模態頻率之重要性分析結果 .....                                    | 138 |
| 表 5-6  | LSTM-RNN 模型之超參數設定 .....                                | 152 |
| 表 5-7  | LSTM-RNN 模型前 10 個測試數據結果 .....                          | 153 |
| 表 5-8  | LSTM-RNN 模型所有測試數據統計結果 .....                            | 154 |
| 表 5-9  | LSTM-RNN 模型(移除 $E_2 / E_I > 3.5$ 樣本)前 10 個測試數據結果 ..... | 155 |
| 表 5-10 | LSTM-RNN 模型(移除 $E_2 / E_I > 3.5$ 樣本)所有測試數據統計結果 .....   | 156 |
| 表 5-11 | CNN 架構模型參數設定 .....                                     | 164 |



# 第一章 緒論

## 1.1 研究背景、動機與目的

在大部分之材料與力學的問題當中，不管是要透過理論求解或是以有限元素法進行解析，楊氏模量、剪切模量與蒲松比...等材料常數經常需要作為計算的輸入條件，而對於未知的材料，如何求得材料之機械性質是一個很大也很重要的問題。在傳統上，材料常數的量測常透過拉伸與扭矩試驗這種破壞性的實驗方式，然而試片可能是很珍貴的，也未必容易取得，又或者試片需進行下一步的使用，因此於本研究當中，嘗試以非破壞性的實驗量測方式，結合不同理論與模擬的方法，進行材料常數的反算。

3D 列印為近代新興的工業技術之一，相較於傳統加工成形的技術，其可以有較低的時間與程序，製作出較為複雜的模型，能夠快速進行客製化與少量生產，為工業 4.0 的發展趨勢，被應用於各種領域，例如醫療、土木建築與汽車工業...等，而透過 FDM 所列印線堆積之 3D 列印物件，其具有正交性材料的性質，而正交性材料的應用也非常廣泛，其應用於結構工程、木材產品、纖維增強塑料 (FRP) 與生物組織工程...等，因此本研究將探討正交性材料的性質，以及專注於正交性材料常數的反算，並透過 3D 列印容易改變試片尺寸的特性，探討不同方法在各尺寸比例結構下的適用範圍。

雲端、物聯網、大數據、機器學習與人工智慧...等詞彙於近代充滿在各個媒體與生活當中，尤其人工智慧儼然已成為各大企業與學術的研究與應用技術，其已被廣應用於醫療保健、自駕車、零售和電子商務、語言處理、製造業與金融業...等，因此本研究也嘗試將人工智慧技術應用於固體力學領域當中，其中包含基因遺傳演算法、機器學習與深度學習方法，結合實驗、理論與模擬方法，建構強勁之正交性材料常數反算架構。



共振頻率的量測在工業上具有相當重要與廣泛的應用，可以用來進行機器診斷、健康監控與產品設計，如機器或產品的運作頻率接近或達到其共振頻率，則可能導致結構的損壞或嚴重故障。共振頻率也能用來進行材料分析、測試與品質控制，相異的材料或相同材料但有不同的加工過程皆可能導致其共振頻率不同，因此透過共振頻率的量測，可以確定材料的結構穩定性和可能的弱點，亦能夠檢查產品是否符合設計規範，並確保其品質。因此本論文將透過共振頻率的方式進行材料常數的反算，然此方式對於多參數需要進行反算的材料，例如本研究之正交性材料，從過去的文獻資料大多只適用於特定狀況的單一方法，鮮少較全面性的探討，本論文之主要目標在於將對工程常見的結構如長梁、厚梁與薄板，結合理論或與基因遺傳演算法，皆提出正交性材料常數反算的可行方法。並在最後透過模擬結果結合機器學習與深度學習方法，提出以共振資訊作為輸入之材料常數反算的全新模式，以適用於任意結構、邊界與狀態條件的問題。



## 1.2 文獻回顧

3D 列印之 FDM 形式以線堆積成型的試片具正交性材料的性質。Martinez[1]於 2013 年將不同列印方向的試片，進行拉伸試驗求得 9 個材料常數，並透過 ABAQUS 的複合層板結構模擬 3D 列印試片在各方向拉伸時的受力情況。Domingo-Espin[2]在 2015 年一樣透過拉伸試驗得到正交性材料試片的 9 個常數，觀察每個試片的降伏強度，並設計一 PC(Polycarbonate)零件，對其施加不同大小的彎矩與扭矩，結果顯示如零件之列印排向與拉伸應力相同，則其有更好的強度。同年實驗室學長黃榮泰[3]透過動態-懸臂梁共振頻率的量測以及靜態-簡支梁撓度實驗，對 3D 列印試片進行正交性材料常數的反算。2021 年，Yao[4]觀察電子顯微鏡的結果，定義三種材料方向說明 3D 列印試片的正交性，接著列印了 27 種不同的試片進行靜態實驗的量測，其發現不同排向試片的楊氏模量結果差異很大，並建立了不同列印方向與不同層高試片的有限元素模擬模型，模擬試片振動的自然共振頻率，其與實驗的結果有很好的對應性。同年實驗室學長林均憶[5]以非破壞共振頻率實驗的方式，反算 3D 列印試片的 9 個正交性材料常數，並透過實驗與模擬驗證 3D 列印的正交性質，且進一步討論列印參數對材料常數的影響。本研究將依循共振頻率實驗的方法，透過 3D 列印容易改變試片尺寸的特性，探討原方法的尺寸限制與其優劣勢，並進一步提出在不同情況下適用之正交性材料常數反算方法。

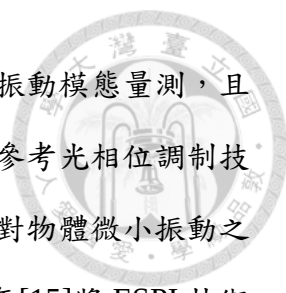
在工程應用上的平板理論大多為薄板假設，其基礎由 Kirchhoff-Love 所提出之平板位移假設進行推導，假設板內垂直於中性面的法線在變形後仍垂直於中性面。Leissa[6]於 1969 年透過薄板假設推導圓形、圓環、橢圓與矩形板的統御方程式，而圓形與圓環為軸對稱結構，能夠推導出相對應之共振頻率理論解析解，矩形板則需滿足較多的邊界條件，只能解析簡支的邊界條件，因此於 1973 年[7]將雙向梁函數作為基底函數，用以解析較為複雜之邊界條件，進而得到薄板面外位移的振動近似解。Gorman[8]則在 1976 年提出以疊加法求解單邊固定與全自由薄板的振動問題，能更精確處理較複雜之邊界條件問題，其將原來的板解構為多塊不同邊界條件



的結構塊，得到每個結構塊之位移解後，將所有的結果疊加並代入尚未滿足之邊界條件，進而求得薄板之模態振形與共振頻率。1978 年，Dickinson[9]透過 Rayleigh's method 探討正交性層板的振動行為。吳亦莊於 2009 年[10]，以薄板假設搭配疊加法完整推導等向性矩形平板自由邊界與單邊固定之位移解析，並透過實驗驗證理論推導的正確性。本論文將以薄板假設透過疊加法的方式，推導單邊固定正交性矩形平板的位移解析，求得正交板振動的模態振形與共振頻率。

由於板的共振模態振形較為複雜，單從共振頻率實驗不易將模態進行分類，因此全域式的振動量測技術將予以導入。雷射都卜勒振動儀（Laser Doppler Vibrometer, LDV），為利用都卜勒效應（Doppler effect）之非接觸式光學振動量測技術，其原理為當一個波接觸到處於運動狀態下的物體表面時，反射後的頻率會與原先的入射波頻率有所差異，頻率差異與物體移動速度成正比，因此這項量測技術可以精確量測質點之位移、速度或加速度。2006年Ma et al.[11]於複合材料中埋入壓電陶瓷材料並探討其動態特性，除了使用AF-ESPI實驗量測技術搭配有限元素法數值計算研究其振動特性外，同時使用LDV驗證試片共振頻率的準確性。LDV的缺點是其一次只能量測單個點，而在2015年黃至偉[12]利用程式架構將示波器、訊號產生器、3D列印機的移動平台與LDV整合為「雷射都卜勒自動化陣列式量測模組」，對壓電陶瓷試片進行全域式的量測，其控制訊號產生器輸出電訊號以激發壓電片致振，利用LDV量測單點訊號並傳回示波器，示波器再將訊號傳至電腦程式，利用程式控制移動平台進行逐點的量測，以達到自動化全域的陣列式量測方法。本研究之全域振動量測系統(DPM)將參考此方法進行架設，透過微動振鏡系統將雷射反射至待測物的各個位置，以LabVIEW系統進行自動化的控制，達到自動化全域式的振動量測。

另一個全域式的振動量測系統為電子斑點干涉術（Electronic Speckle Pattern Interferometry, ESPI），此光學量測方法是由全相術（Holography）演變而來，其有即時、非接觸與全域式量測的特性，並可同時量測試片振動時的共振頻率與模態振



形。1971 年 Butters 與 Leendertz[13]首先將 ESPI 應用於圓盤的振動模態量測，且得到清楚的模態振形影像。1976 年 Hogmoen 與 Lokberg[14]將參考光相位調制技術（Reference Beam Modulation）導入於 ESPI 量測系統，提高對物體微小振動之振幅與相位的量測能力，以及提升影像解析度。Wykes 於 1982 年[15]將 ESPI 技術應用於物體表面振動的靜態與動態量測上。1996 年，王偉中教授[16]提出振幅變動電子斑點干涉術（Amplitude-Fluctuation Electronic Speckle Pattern Interferometry, AF-ESPI）改良原系統於動態量測的影像處理技術，且與影像訊號相減法（Video-Signal-Subtraction Method）和影像訊號相加法（Video-Signal-Addition Method），進行三種運算處理方法的比較，並在文中推導 AF-ESPI 之基本理論，其原理與影像訊號相減法相似，只是參考影像為在動態中抓取，可簡化量測的步驟與複雜性，並將 AF-ESPI 應用於面外振動量測單邊固定複合材料平板來比較三種影像處理法，認為 AF-ESPI 不只降低了設備成本與實驗複雜度，動態即時相減技術也大幅提升了條紋清晰度與解析度。2003 年黃育熙和馬劍清[17]以 AF-ESPI 配合 LDV 量測石英壓電材料在不同切面所造成的頻率響應以及振動特性。本論文以全域式實驗量測方法對單邊固定之正交性懸臂板進行，透過 AF-ESPI 技術驗證 DPM 的量測結果。

基因遺傳演算法(Genetic Algorithm, GA)是一種啟發式搜索與優化方法，其概念最早由 John Holland 所提出，為模仿生物之遺傳與進化機制的最佳化演算法，並於 1975 年出版第一本系統性論述 GA 機制的著作[18]，GA 已被應用於許多不同的領域，包括材料科學、工程、商業、科學與計算生物學...等等。對於材料常數反算，於 2001 年 Holland[19]透過 GA 來校正機械測試中的彈簧常數。在 2002 年，Liu[20]透過動態位移響應搭配 GA 來確定複合層板的材料常數，對於具有不同複合材料、層方向、層數與厚度的層壓板進行數值模擬，驗證方法的有效性。Roseiro 於 2006 年[21]利用成對壓電傳感器放置在複合層壓板表面上所量測之電位差作為依據，先透過神經網路選擇值得計算適應函數的染色體，再透過 GA 計算出機械性質，以此



來提高 GA 尋找壓電傳感器最佳位置的效率。而於 2016 年，Panda[22]以 GA 來估算熱彈性學中的材料常數。Gao 等人於 2020 年[23]應用 GA 來反推多孔材料中的材料常數。於本研究將應用 GA 在不易直接進行反求解的理論進行材料常數組合的最佳化，以得到正交性材料的所有常數。

人工智慧(Artificial Intelligence, AI)近年快速發展，機器學習(Machine Learning, ML)與深度學習(Deep Learning, DL)方法也被廣泛應用在各個領域當中，包含材料科學。2016 年 Xue[24]使用機器學習的自適應設計來加速尋找具有目標屬性的材料，其展示了如何使用機器學習技術來有效地尋找新的具有目標屬性的材料。Liu[25]在 2018 年利用深度學習方法進行光譜擬合，以檢測未知材料的物理特性。而在 2019 年 Roslyakova[26]使用機器學習來預測納米粒子蛋白質冠的功能組成和細胞識別，其使用了機器學習來預測納米粒子在生物環境中的行為，也是一種形式的材料特性反推。同年 Zhang[27]採用深度學習方法來數位著色視神經頭的光學相干斷層掃描影像，進而提取出材料的物理特性。2020 年，Rajan[28]以機器學習導向的搜索來尋找超壓縮和超硬材料，其使用機器學習作為一種尋找具有特定物理特性新材料的工具。同年 Jha[29]基於深度學習的反設計模型進行材料發現，提供了一種快速且準確的方法來找出具有特定屬性的新材料。而在材料常數反算的問題上，大多使用實驗的結果進行模型的訓練，然而需要取得大量已知材料常數的試片並不是件容易的事情，且在本研究當中主要探討以共振頻率進行材料常數的反算，因此本論文將應用機器學習與深度學習方法，嘗試以模擬的結果作為訓練數據，建構共振頻率反算正交性材料常數的深度學習模型。



## 1.3 內容介紹

本論文主要探討正交性材料常數反算的方法，利用 3D 列印容易改變尺寸結構的特性，歸納不同理論的適用範圍，並提出不同類型結構可行的反求解模式，包含直接用理論求解、理論搭配基因遺傳演算法或有限元素法搭配機器學習與深度學習方法，而理論涵蓋歐拉-伯努力梁理論、鐵木辛柯梁理論與薄板理論(疊加法)，並以共振頻率實驗比較不同理論方法反算結果的一致性。

以下將說明本論文各章節的主要內容：

### 第一章

敘述本研究的背景、動機與目的，接著回顧 3D 列印試片的正交性質、梁板結構與切變係數的相關理論以及基因遺傳演算法、機器學習與深度學習的相關文獻。

### 第二章

介紹本論文研究有使用到的設備以及實驗系統的儀器、原理與架設，其中包含測量共振頻率的雷射都卜勒振動儀、模態形狀的全域振動量測系統與電子斑點干涉術。

### 第三章

探討直接以歐拉-伯努力梁理論進行材料常數反算的方法。首先推導彈性力學理論正交性材料矩陣，取得所有需要進行反算的材料參數，接著導入懸臂梁振動理論搭配鋼珠落擊實驗，透過量測共振頻率的方式進行材料常數反算，並將實驗、理論與模擬三者相對應，檢視實驗的準確性。最後改變試片的寬厚比、長厚比與長寬比，觀察應用此理論試片尺寸比例下的適用範圍，並提出此方法的優勢與缺陷所在。

### 第四章

結合理論與基因遺傳演算法，建立長厚梁與薄板結構反算材料常數的流程架構。起初簡介基因遺傳演算法的流程、原理與應用，並詳細說明與比較不同的演算法機制，接著導入鐵木辛柯梁彎曲模態理論，並利用理論與有限元素法模擬的對應性選擇梁理論中的切變係數，將理論做為基因遺傳演算法中適應函數的參考，以

理論生成的數據進行演算法中參數的調教，最後利用實際實驗共振頻率的量測結果進行常數的反算，並與第三章的結果進行比對。

在板結構下首先利用薄板理論假設，結合疊加法推導單邊固定正交板的面外振動位移解析，計算特徵矩陣取得共振頻率與模態形狀，探討展開項數的收斂情況，將結果與有限元素模擬進行比較，確立推導結果的正確性並探討理論厚度方向的適用範圍。將理論做為基因遺傳演算法中適應函數的參考，以疊加法生成的數據進行演算法中參數的調整，在實驗上除了進行共振頻率的量測，亦取得試片振動的模態形狀，將實驗結果做為遺傳算法的輸入反算材料常數，比對實驗、理論與模擬的結果，確保參數反算的準確性，並與第三章與本章前部分的結果進行比較。

## 第五章

透過有限元素模擬的結果，應用機器學習與深度學習方法，建構以共振頻率進行材料常數反算的模型。首先簡介機器學習與深度學習的類型與流程架構，說明前饋式神經網路與反傳遞演算法的相關概念與理論，接著介紹如何進行資料的生成與蒐集，並藉由集群演算法進行模態分群與類別標注。在將數據輸入至模型訓練之前，會進行特徵選擇觀察可以進行反算的參數與資料預處理，最後利用遞迴神經網路訓練模型，透過驗證資料與測試資料檢驗模型的準確性，並試著以有限元素模擬生成的模態圖與集群演算法所標注之類別，利用卷積神經網路建構以面外振動影像進行模態分類的模型。最後則與第四章基因遺傳演算法架構的方法進行討論與比較。

## 第六章

總結本論文的研究成果，並提出未來在內容上可精進之處以及可以繼續探討之相關題目與方向。

## 第二章 實驗儀器、原理與架設



本論文所使用的儀器對應的功能包括：3D 列印機，列印不同尺寸結構的聚乳酸(Polylactide, PLA)試片；雷射都卜勒振動儀 (Laser Doppler Vibrometer, LDV)，以掃頻的方式進行單點量測，並透過快速傅立葉轉換(FFT)將時域訊號轉為頻域，進一步求得試片的共振頻率；全域振動量測系統，以雷射都卜勒振動儀為主，透過 LabVIEW 系統控制鏡組反射，並利用 NIDAQ 進行資料擷取，量測全域的共振頻率與模態形狀；電子斑點干涉術 (Electronic Speckle Pattern Interferometry, ESPI)，利用光學的原理量測全域模態振形的非接觸式光學技術，本研究主要用於量測試片面外方向的共振頻率與模態形狀。本章將詳述本研究所使用到的實驗儀器、原理與架設方式。

### 2.1 3D 列印機

本論文中所使用的為熱融堆疊(Fused Deposition Modeling, FDM) 3D 列印機，為市面上最常使用的 3D 列印技術之一，其他還有光固化(Stereolithography, SLA)、雷射粉末燒結(Selective Laser Sintering, SLS)、多射流熔融(Multi Jet Fusion, MJF)與彩色噴墨(PolyJet)...等。FDM 的原理透過加熱噴頭使線材成為熔融狀態，以步進馬達進料與擠出，隨著滑桿的移動將線材像是擠牙膏的方式附著於列印平台上，冷卻並固化成型，其優點為易於操作、維護以及材料多元且相對便宜，缺點則是表面常有堆疊紋路。

本研究所使用的 3D 列印機如圖 2-1 所示，為 Ultimaker 公司所生產，型號為 2+ Connect，最大列印體積為  $223 \times 220 \times 205 \text{ mm}^3$ ，線材直徑為 2.85 mm，噴頭直徑為 0.4 mm，XYZ 的分辨率分別為 12.5、12.5 與  $5 \mu\text{m}$ ，可列印材料有 PLA、PETG、ABS、CPE、Nylon、PC、TPU 與 PP。其詳細規格附於附錄 A。

實際列印流程首先建立 3D CAD 檔，匯入至 Ultimaker Cura(5.1.0)設定列印參數並進行切片，由於不同的列印參數將影響試片的機械性質[30]，為了能在不同章

節驗證材料常數反算的一致性，因此固定重要的列印參數如下表 2-1，最後再將切片後的 UFP 檔傳送至 3D 列印機，即可進行列印。



圖 2-1 熱融堆疊之 3D 列印機

表 2-1 3D 列印重要列印參數

| Print settings               |       |
|------------------------------|-------|
| Infill Density (%)           | 100   |
| Layer Height (mm)            | 0.16  |
| Line Width (mm)              | 0.4   |
| Infill Pattern               | Lines |
| Printing Temperature (°C)    | 225   |
| Build Plate Temperature (°C) | 60    |
| Flow (%)                     | 100   |



## 2.2 雷射都卜勒振動儀

雷射都卜勒振動儀 (Laser Doppler Vibrometer, LDV) 為利用都卜勒效應 (Doppler Effect) 之非接觸式的光學量測系統，當雷射光波傳遞至處於運動狀態的物體表面時，其反射後會與入射波的頻率有所差異，且物體移動的速度與頻率的變化成正比。利用邁可森干涉儀(Michelson Interferometer)的架設原理，採用兩組正交的都卜勒訊號，可避免物體振動方向的不可辨性，提高量測頻寬與精度，此 LDV 測量技術可以精確量測出目標點之位移、速度或加速度。

本研究使用 Polytec 公司所生產之 LDV，型號為 OFV-505，如圖 2-2 所示，其規格如表 2-2，主要使用聲光調製器 (Acousto-Optic Modulator, AOM) 系統或稱為布拉格盒 (Bragg Cell) 系統進行量測。其原理為聲波在晶體材料內傳遞，晶體材料之折射率受到聲波傳遞的影響產生變化，進一步影響到光的行為，稱為聲光效應，如圖 2-3 所示，在晶體材料的兩端連接一個轉換器與減振器，由轉換器產生聲波，在晶體材料內傳遞，最後傳遞至減振器吸收聲波，當雷射光穿透此晶體材料時，便可調整聲波之頻率來改變光波的繞射角度，以這樣的幾何形狀傳遞聲波可以調至數兆赫茲的頻寬。

假設轉換器所產生之聲波頻率為  $f_a$ ，而聲波在材料中的傳遞速率為  $V_a$ ，則晶體材料中折射率改變的週期：

$$T = \frac{V_a}{f_a} \quad (2-1)$$

假設入射光的波長為  $\lambda_0$ ，晶體材料的折射率為  $n$ ，則入射光在晶體材料內傳遞時，其波長變為：

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad (2-2)$$

一般而言繞射角的角度都很小，便可以假設  $\sin \theta_B = \theta_B$ ，再使用布拉格繞射公式求得繞射角：



$$\theta_B = \frac{\lambda}{2T} = \lambda \frac{f_a}{2V_a} \quad (2-3)$$

雷射光藉由分光鏡分為兩道光，其中一道經由布拉格盒調整出適當的頻率，最後傳導至檢測器，另一道則傳至待測試片，系統如圖 2-4 所示，當物體在振動時，其反射光頻率會與入射光頻率不同，並且反射光透過分光鏡傳導至檢測器，便可獲得兩道光的頻率差異進而測量出速度。



圖 2-2 LDV-OFV505

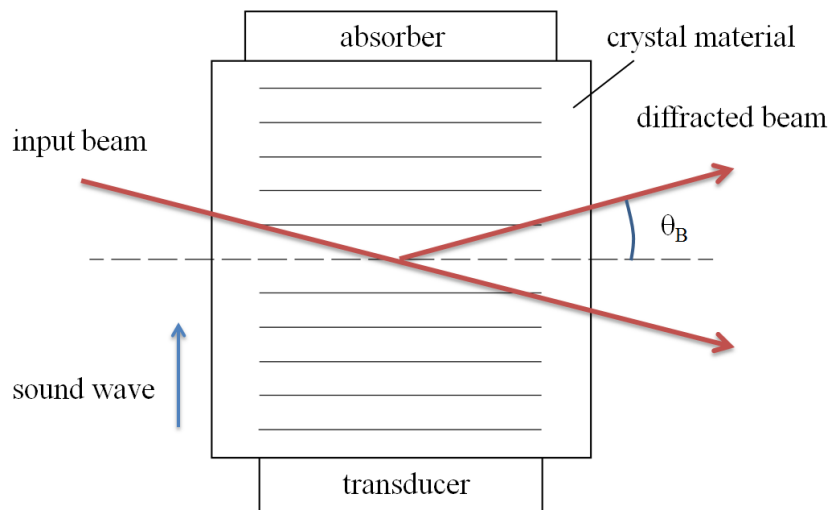


圖 2-3 聲光調製器基本構造

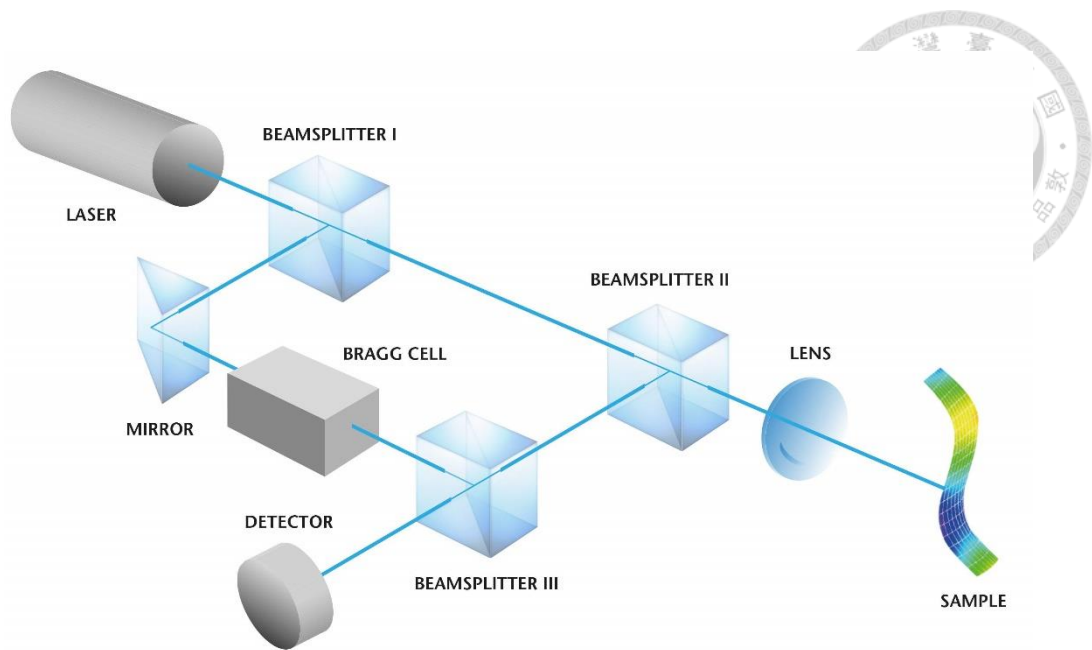


圖 2-4 LDV 內部光路圖

表 2-2 LDV 規格

| Specifications             |                                                                            |
|----------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| Operating temperature      | 5°C - 40°C (41°F - 104°F)                                                  |
| Relative humidity          | Max. 80%, non-condensing                                                   |
| Weight                     | 7.5 lb. (3.4kg)                                                            |
| Dimensions [W x H x L]     | 4.7 in x 3.1 in x 13.6 in (3247.12951 cm)                                  |
| Visibility maxima          | 234 mm + n · 204 mm<br>n = 0, 1, 2, 3, ... measured from the focusing ring |
| Maximum stand-off distance | Up to 300 m (with OFV-SLR, surface dependent)                              |
| Laser class                | Class 2, < 1 mW (eye-safe)                                                 |
| Laser wavelength           | 633 nm, visible red laser beam                                             |



## 2.3 全域振動量測系統

全域振動量測系統(DPM)其中包含 LDV、微動振鏡組、資料擷取系統(NI-DAQ)與訊號產生器。在此所選用之資料擷取系統為 NI-9234, 如圖 2-5, 其規格如表 2-3; 訊號產生器為 Agilent 33210A, 如圖 2-6; 微動振鏡則如圖 2-7, 規格如表 2-4, 其包含兩面反射鏡, 並分別以一步進馬達進行控制, 將微動振鏡固定於 LDV 雷射出口處正前方, 控制馬達轉動的角度, 一面反射鏡使得反射後的雷射光朝水平方向移動, 另一面則朝垂直方向移動, 因此可以將雷射入射於待測物上的任意點。

實驗量測的流程如圖 2-8, 首先利用 LabVIEW 系統傳送振鏡轉動函式至鏡組, 使得鏡組反射雷射至指定的待測點, 接著發送指令至 LDV 使其進行自動對焦, 隨後控制訊號產生器生成特定之穩態頻率與電壓訊號以激振待測物(本研究當中為壓電纖維), 最後將 LDV 所量測到的速度由資料擷取系統進行記錄整理後回傳至 LabVIEW 中, 此即完成一個點的量測, 藉由重複以上步驟即可達到在所設範圍內之全域速度量測, 實際的實驗量測架設如圖 2-9。由於量測的為穩態的振動模態, 有輸入頻率的資訊可以將速度轉換為位移, 再透過正負相位的判斷, 即可求得試片振動之全域模態振形。



圖 2-5 NI-9234 資料擷取系統



圖 2-6 Agilent-33210A 訊號產生器



圖 2-7 微動振鏡系統

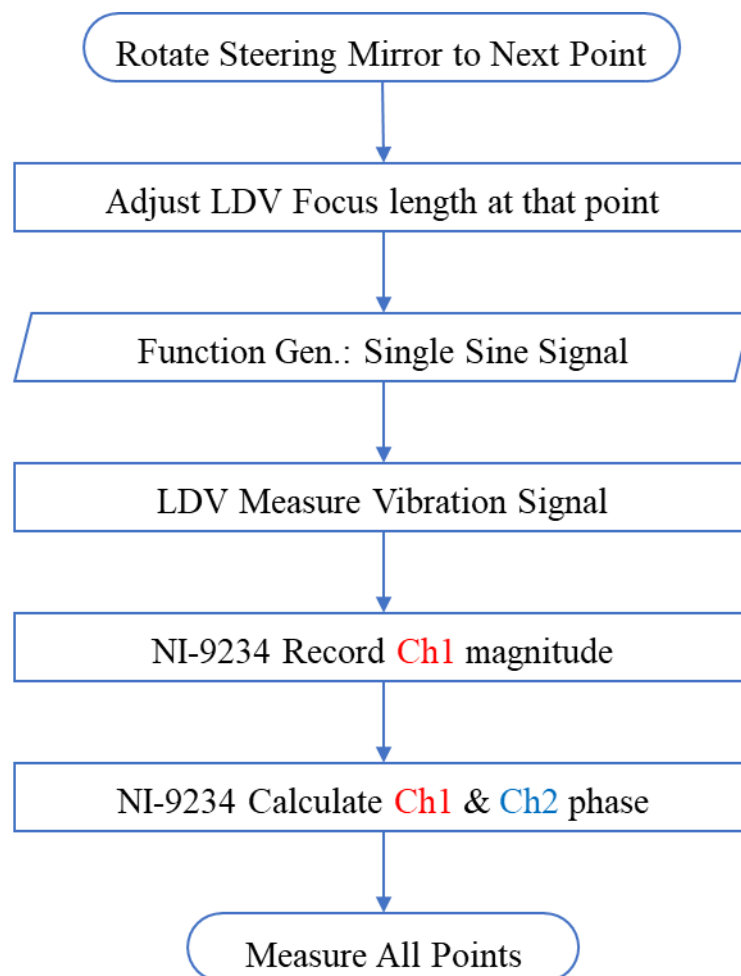


圖 2-8 全域振動量測系統實驗流程圖

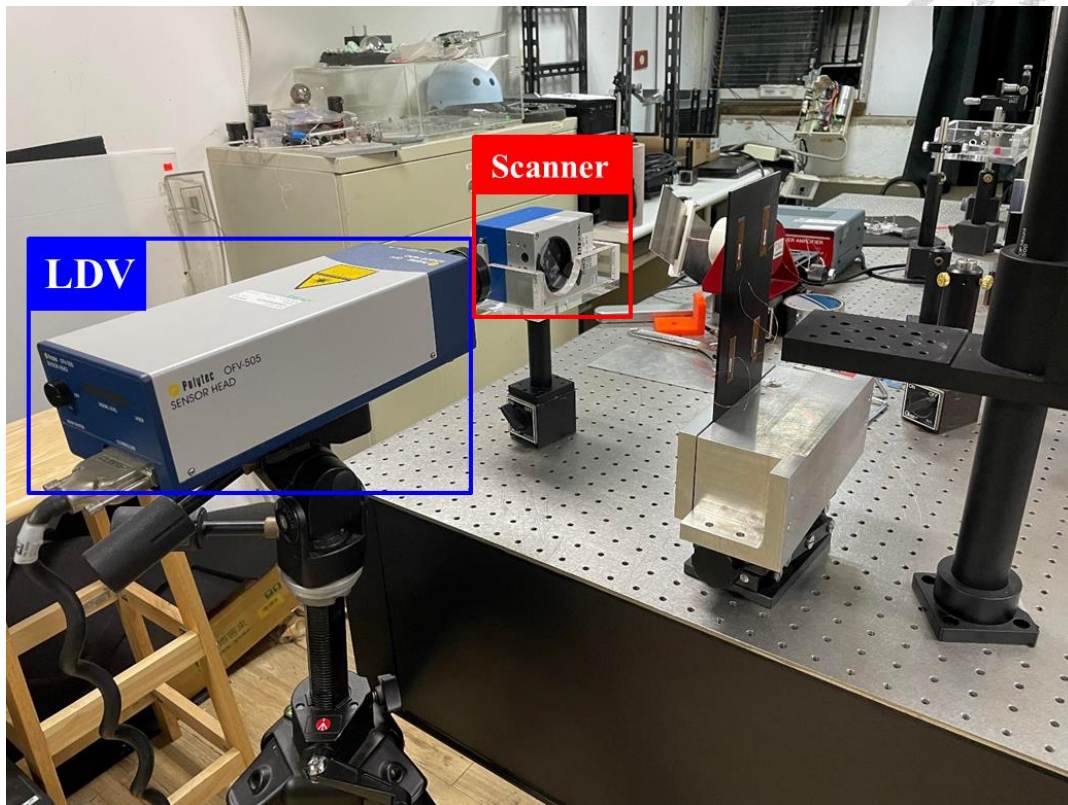


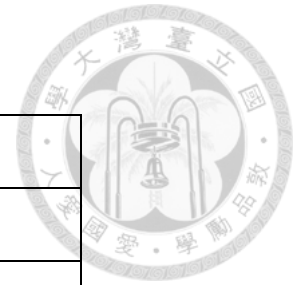
圖 2-9 全域振動量測系統實驗架設圖

表 2-3 NI-DAQ 規格

|                               |                   |
|-------------------------------|-------------------|
|                               | <b>NI-9234</b>    |
| <b>Voltage</b>                | $\pm 5 \text{ V}$ |
| <b>Max Sampling Frequency</b> | 51200 Hz          |
| <b>Max Sampling Frequency</b> | 65536 points      |
| <b>Resolution</b>             | 24 bits           |
| <b>Channels</b>               | 4                 |

表 2-4 微動振鏡規格

| <b>Specifications</b> |                                        |
|-----------------------|----------------------------------------|
| Max rotate angle      | $\pm 22.53^{\circ}$                    |
| Resolution            | $0.000687^{\circ}$                     |
| Rotate Speed          | 85 rad/sec                             |
| Mirror Wavelength     | 1064 nm                                |
| Firmware              | Marking_2.7A<br>ActiveX Control (.ocx) |





## 2.4 電子斑點干涉術

電子斑點干涉術 (Electronic Speckle Pattern Interferometry, ESPI) 係由全相術 (Holography) 演變而來，該技術透過影像感測元件 (Charge-Coupled Device, CCD) 與電子處理技術記錄低空間頻率全場成像圖形，可用來量測物體表面的變形，為非接觸式的全域量測系統。其原理是利用兩道同調的光源入射待測物與參考面，當物體表面變形時，面上的光點會產生微小的位移變化，使其與參考面上的光點有光程差進而產生干涉條紋，並藉由兩道光之光程差的變化得到待測物的變形資料。干涉後影像強度的調制項能將因待測物表面變形而產生的相變化包含在內，由於調制項中是以光波長作為量測基準，因此精度可達到光波長次微米的等級，而 ESPI 需有較好的光源同調性，故本論文採用同調性較佳的氦-氖雷射。

在此 ESPI 量測振動時的方法為均時法 (Time-Averaging Method)，特點是在 CCD 的曝光時間內擷取振動中物體在不同時間的影像，以零階貝索函數 (Zero-Order Bessel Function) 調制干涉條紋，在圖形中干涉影像最亮的部分為節線區，即位移為零，而亮暗相間的條紋則為等位移線的分佈，故可由全場干涉圖形直接獲得振動位移的分佈情形。ESPI 量測三維變形，根據光學架設不同可以量測到兩個方向的位移，分別為與待測物表面垂直位移的面外架設以及與待測物表面平行位移的面內架設，將兩個方向所得到的量測資訊結合即為待測物完整的三維變形。

本研究以薄板理論假設透過疊加法推導板結構的面外振動位移解析，因此以面外振動量測為主，以下將針對面外振動量測系統進行詳細的理論介紹、系統架設與量測方法。如圖 2-10 所示，紅線為 ESPI 雷射所產生的光路徑，雷射光首先經過空間濾波器再經由擴束鏡擴大光束，接著利用可調式的分光元件分出兩道光束，其中一道光束投射向待測物表面，這道光束為物體表面上的物光；另一道光束則擴散至參考平面，在參考平面上的漫射造成光斑式的參考光，此道光束接著會反射在與 CCD 相機同軸的分光元件，這種漫射至平面再投射於分光元件的方式可避免鏡面光產生光暈現象以增強干涉影像的品質。這道參考光會與投射



在待測物表面的物光同軸入射並聚焦於 CCD 相機的感光平面上，產生干涉影像資訊，訊號進入電腦後再經由即時影像相減的軟體進行處理，即可及時在電腦螢幕上顯示出干涉條紋的圖形。

接著說明 ESPI 量測的基本理論，由 Wykes(1982)與 Jones(1989)所提出[15]，假設待測物振動前在成像平面上某點的光強度為：

$$I_1 = I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} \cos \phi_0 \quad (2-4)$$

其中  $I_O$  是物體光的光強度， $I_R$  是參考光的光強度， $\phi_0$  為物體光與參考光的相位差。當物體開始振動後，散射的物光假設有一相位角差  $\Delta\phi$  的變化量，若物體此時的振幅為  $A$ ，且  $\theta_0$  為物光與觀測方向（垂直於物體表面之方向）的夾角，振動的角頻率為  $\omega$ ，則此相位差可表示為：

$$\phi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} (1 + \cos \theta_0) A \cos \omega t = \Gamma A \cos \omega t \quad (2-5)$$

令  $\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda} (1 + \cos \theta_0)$  為靈敏度參數，其值與系統架設相關，當架設的角度  $\theta_0$  愈接近  $0^\circ$  時靈敏度愈大，其中  $\lambda$  為雷射光的光波波長。

由於 CCD 在取像時間內，會不斷累積物體在不同時刻的振動影像，而均時法的概念可視為直接對影像累加後，再對時間平均，因此當物體處於振動狀態時，CCD 影像所擷取之光強度  $I_2$  為取像時間週期的平均值：

$$I_2 = I_O + I_R + \frac{2}{\tau} \sqrt{I_O I_R} \int_0^\tau \cos(\phi_0 + \Gamma A \cos \omega t) dt \quad (2-6)$$

對(2-6)式進行積分簡化後可得到：

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \cos(\phi_0 + \Gamma A \cos \omega t) dt &= \text{Re} \left[ \int_0^\tau \exp(i\phi_0 + i\Gamma A \cos \omega t) dt \right] \\ &= \text{Re} \left[ e^{i\phi_0} \int_0^\tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\Gamma A) e^{in(\frac{\pi}{2} - \omega t)} dt \right] \\ &= \text{Re} \left[ e^{i\phi_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\Gamma A) e^{in(\frac{\pi}{2} - \omega t)} \frac{e^{-in\omega\tau} - 1}{-in\omega} \right] \end{aligned} \quad (2-7)$$

其中  $\tau$  為 CCD 擷取影像時間，若  $\tau = \frac{2k\pi}{\omega}$  或  $\tau \gg \frac{2k\pi}{\omega}$ ，除非  $n = 0$ ，否則其值為





0，故可將(2-7)式簡化改寫為：

$$\int_0^\tau \cos(\phi_0 + \Gamma A \cos \omega t) dt = \tau J_0(\Gamma A) \cos \phi_0 \quad (2-8)$$

因此，光強度  $I_2$  為：

$$I_2 = I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} (\cos \phi_0) J_0(\Gamma A) \quad (2-9)$$

其中  $J_0(\Gamma A)$  為零階貝索函數，可以發現貝索函數中包含了振幅  $A$ ，但因前面兩項為直流項，物光光強  $I_O$  與參考光強  $I_R$  相對較大，使後方調節項貝索函數所包含的振幅在量測結果中較不易顯現，為了降低直流項之影響，ESPI 的量測採用微動裝置，來變更參考光的光程，可使(2-8)式中的  $\cos \phi_0$  轉為  $\cos(\phi_0 + \pi)$ ，再利用影像加減法將兩張振動影像光場  $I_1$ 、 $I_2$  進行相減，即能消除直流項並使調節項  $J_0(\Gamma A)$  較易呈現其特徵，但必須在光程控制上非常精準，控制光程的微動裝置也相對昂貴。因此 1996 年，清華大學王偉中教授[16]提出振動變動電子斑點干涉術(Amplitude-Fluctuation Electronic Speckle Pattern Interferometry, AF-ESPI)，利用兩張具有適當變化之振動影像相減，即可得到穩態之全場位移干涉圖形，改良了設備成本與實驗的複雜度。

AF-ESPI 的面外光學架設方式與 ESPI 的差別在於其是將具有適當變化的影像進行影像相減處理。假設試片振動時第一張已有振動振幅的影像光強為：

$$I_1 = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left\{ I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} \cos \left[ \phi_0 + \frac{2\pi}{\lambda} (1 + \cos \theta_0) A \cos \omega t \right] \right\} dt \quad (2-10)$$

令靈敏度  $\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda} (1 + \cos \theta_0)$ ，參照影像相減法的推導，(2-10)式的光強度  $I_1$  為：

$$I_1 = I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} (\cos \phi_0) J_0(\Gamma A) \quad (2-11)$$

在待測物振動中擷取第二張影像，與之前擷取的  $I_1$  影像相比，振幅產生  $\Delta A$  的微量變化，將第二張影像的光強度表示為：

$$I_2 = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left\{ I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} \cos [\phi_0 + \Gamma (A + \Delta A) \cos \omega t] \right\} dt \quad (2-12)$$

其中



$$\begin{aligned}
 & \int_0^\tau \cos[\phi_0 + \Gamma(A + \Delta A) \cos \omega t] dt \\
 &= \text{Re} \left\{ e^{i\phi_0} \int_0^\tau \exp[i\Gamma(A + \Delta A) \cos \omega t] dt \right\} \\
 &= \text{Re} \left\{ e^{i\phi_0} \int_0^\tau \exp(i\Gamma A \cos \omega t) \exp(i\Gamma \Delta A \cos \omega t) dt \right\}
 \end{aligned} \quad (2-13)$$

對  $\exp[i\Gamma \Delta A \cos \omega t]$  進行泰勒級數(Taylor Series)展開，假設忽略三次以上高次項的影響，並將其代入進行積分得到：

$$\int_0^\tau \cos[\phi_0 + \Gamma(A + \Delta A) \cos \omega t] dt = \tau \left[ 1 - \frac{1}{4} \Gamma^2 (\Delta A)^2 \right] J_0(\Gamma A) \quad (2-14)$$

而(2-12)式的第二張影像光強度則可改寫成：

$$I_2 = I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} (\cos \phi_0) \left[ 1 - \frac{1}{4} \Gamma^2 (\Delta A)^2 \right] J_0(\Gamma A) \quad (2-15)$$

將第二張影像與第一張影像相減消去直流項，即(2-15)式減(2-11)式，並經過整流後顯示於螢幕上，相減後的影像光強度為：

$$I = 2\sqrt{I_O I_R} \left| \frac{1}{4} \Gamma^2 (\Delta A)^2 J_0(\Gamma A) \cos \phi_0 \right| = \frac{\sqrt{I_O I_R}}{2} \left| \Gamma^2 (\Delta A)^2 J_0(\Gamma A) \cos \phi_0 \right| \quad (2-16)$$

由(2-16)式得知振動振幅為  $|J_0(\Gamma A)|$  所控制，並由零階貝索函數的特性得到當振幅

$A=0$  時， $|J_0(\Gamma A)|$  有最大值，因此實驗上可對應量測物體振動時位移為零的節線即

為影像最亮的區域。

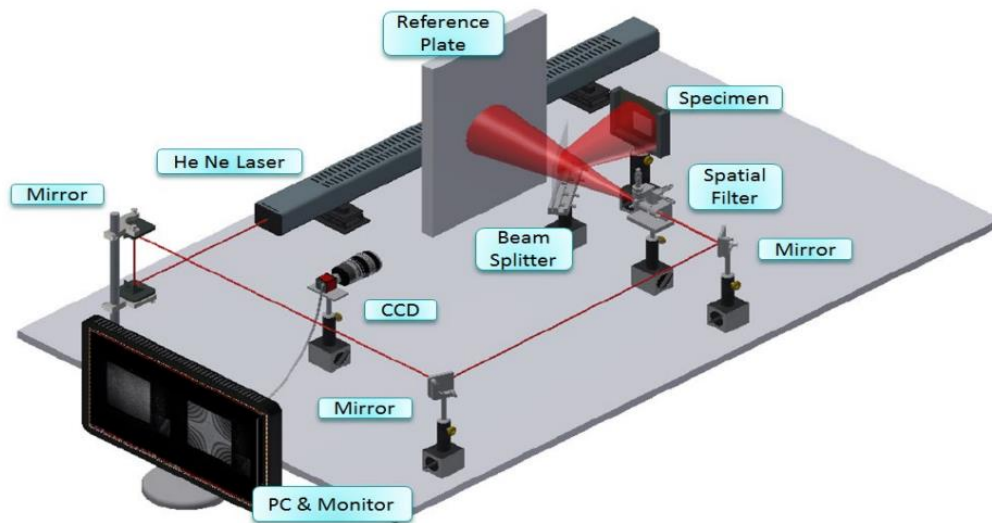


圖 2-10 ESPI 水平面外架設

## 第三章 材料常數量測



本章主要探討正交性材料的性質以及利用長梁理論進行材料常數反算的方法，並進一步分析此方法的特點與限制。

### 3.1 彈性力學理論

描述材料性質的方程式稱為該材料的本構方程(Constitutive Equation)，在彈力學中，應力與應變的本構方程會滿足虎克定律(Hooke's Law)，一般寫成：

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3-1)$$

其中  $C_{ijkl}$  為彈性係數(Elastic Coefficient)。

如果材料在物體上與位置無關有相同的屬性，則該物體為均質材料(Homogeneous)，本研究所列印之 3D 列印試片在不同位置皆為相同的列印屬性，因此視為均質材料。本節將依序推導異向性(Anisotropic)、正交性(Orthotropic)與等向性(Isotropic)材料應力-應變之關係矩陣[31]。

#### 3.1.1 異向性材料

當一物體在不同方向的性質有所差異時，稱為異向性材料，透過應力、應變的對稱性與應變能守恆，其應力-應變關係矩陣可由(3-1)式簡化為：

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

將座標系統依以下方式進行轉換：

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \rightarrow \sigma_1, \sigma_{22} \rightarrow \sigma_2, \sigma_{33} \rightarrow \sigma_3, \sigma_{23} \rightarrow \sigma_4, \sigma_{13} \rightarrow \sigma_5, \sigma_{12} \rightarrow \sigma_6 \\ \varepsilon_{11} \rightarrow \varepsilon_1, \varepsilon_{22} \rightarrow \varepsilon_2, \varepsilon_{33} \rightarrow \varepsilon_3, 2\varepsilon_{23} \rightarrow \varepsilon_4, 2\varepsilon_{13} \rightarrow \varepsilon_5, 2\varepsilon_{12} \rightarrow \varepsilon_6 \end{aligned} \quad (3-3)$$

可將(3-2)式改寫為：



$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

### 3.1.2 正交性材料

當物體的性質對稱於三個正交的平面時，稱為正交性材料，總共會有 9 個獨立的柔性常數，其應力-應變關係推導如下：

假設材料首先對稱於  $x_1-x_2$  平面，意即  $x'_1 = x_1$ ,  $x'_2 = x_2$ ,  $x'_3 = -x_3$ ，將以下經座標系統轉換後的特性代入(3-4)式：

$$\begin{aligned} \sigma'_1 &= \sigma_1, \sigma'_2 = \sigma_2, \sigma'_3 = \sigma_3, \sigma'_4 = -\sigma_4, \sigma'_5 = -\sigma_5, \sigma'_6 = \sigma_6 \\ \varepsilon'_1 &= \varepsilon_1, \varepsilon'_2 = \varepsilon_2, \varepsilon'_3 = \varepsilon_3, \varepsilon'_4 = -\varepsilon_4, \varepsilon'_5 = -\varepsilon_5, \varepsilon'_6 = \varepsilon_6 \end{aligned} \quad (3-5)$$

可得  $C_{14} = C_{15} = C_{24} = C_{25} = C_{34} = C_{35} = C_{46} = C_{56} = 0$ ，因此可將(3-4)式改寫為：

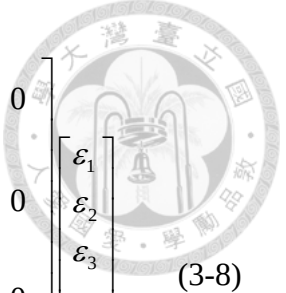
$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

此稱為單斜材料(Monoclinic Material)。如材料進一步對稱於  $x_2-x_3$  或  $x_1-x_3$  平

面，與前面相同的做法可再得  $C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{45} = 0$ ，(3-6)式將變為：

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

此即為正交性材料之應力-應變關係矩陣。其所對應的工程材料常數如下：



$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu_{yz}\nu_{zy}}{E_y E_z \Delta} & \frac{\nu_{yx}+\nu_{zx}\nu_{yz}}{E_y E_z \Delta} & \frac{\nu_{zx}+\nu_{yx}\nu_{zy}}{E_y E_z \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{xy}+\nu_{xz}\nu_{zy}}{E_z E_x \Delta} & \frac{1-\nu_{zx}\nu_{xz}}{E_z E_x \Delta} & \frac{\nu_{zy}+\nu_{zx}\nu_{xy}}{E_z E_x \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{xz}+\nu_{xy}\nu_{yz}}{E_x E_y \Delta} & \frac{\nu_{yz}+\nu_{xz}\nu_{yx}}{E_x E_y \Delta} & \frac{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}{E_x E_y \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{yz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{zx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

其中  $\Delta = \frac{1-\nu_{xy}\nu_{yx}-\nu_{yz}\nu_{zy}-\nu_{zx}\nu_{xz}-2\nu_{xy}\nu_{yz}\nu_{zx}}{E_x E_y E_z}$

由於材料的對稱性，可得：

$$\begin{cases} \frac{\nu_{yx}+\nu_{zx}\nu_{yz}}{E_y E_z \Delta} = \frac{\nu_{xy}+\nu_{xz}\nu_{zy}}{E_z E_x \Delta} \\ \frac{\nu_{zx}+\nu_{yx}\nu_{zy}}{E_y E_z \Delta} = \frac{\nu_{xz}+\nu_{xy}\nu_{yz}}{E_x E_y \Delta} \\ \frac{\nu_{zy}+\nu_{zx}\nu_{xy}}{E_z E_x \Delta} = \frac{\nu_{yz}+\nu_{xz}\nu_{yx}}{E_x E_y \Delta} \end{cases} \quad (3-9)$$

將(3-7)式之應力-應變關係改寫為應變-應力關係，可得柔性矩陣  $a_{ij}(=C_{ij}^{-1})$ ：

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

其所對應的工程材料常數如下：



$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xx}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zx}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (3-11)$$

由材料的對稱性可得：

$$\frac{\nu_{yz}}{E_y} = \frac{\nu_{zy}}{E_z}, \frac{\nu_{zx}}{E_z} = \frac{\nu_{xz}}{E_x}, \frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{\nu_{yx}}{E_y} \quad (3-12)$$

### 3.1.3 等向性材料

當物體的性質在任意方向皆相同時，稱為等向性材料，將只有 2 個獨立的柔性常數，其應力-應變關係可再簡化的推導如下：

假設材料沿著  $x_3$  軸旋轉 90 度，意即  $x_1' = x_2$ ,  $x_2' = -x_1$ ,  $x_3' = x_3$ ，將以下經座標系統轉換後的特性代入(3-7)式：

$$\begin{aligned} \sigma_1' &= \sigma_2, \sigma_2' = \sigma_1, \sigma_3' = \sigma_3, \sigma_4' = -\sigma_5, \sigma_5' = \sigma_4, \sigma_6' = -\sigma_6 \\ \varepsilon_1' &= \varepsilon_2, \varepsilon_2' = \varepsilon_1, \varepsilon_3' = \varepsilon_3, \varepsilon_4' = -\varepsilon_5, \varepsilon_5' = \varepsilon_4, \varepsilon_6' = -\varepsilon_6 \end{aligned} \quad (3-13)$$

可得  $C_{11} = C_{22}$ ,  $C_{13} = C_{23}$ ,  $C_{44} = C_{55}$ ，因此可將(3-7)式簡化為：

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (3-14)$$



如材料進一步沿著  $x_1$  或  $x_2$  軸旋轉 90 度，與前面相同的做法將得

$C_{11} = C_{22} = C_{33}$ ,  $C_{12} = C_{13} = C_{23}$ ,  $C_{44} = C_{55} = C_{66}$ ，(3-14)式則變為：

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

此稱為立方材料(Cubic Material)。

接著再將材料沿著任意軸旋轉任意角度(以沿著  $x_3$  軸旋轉 45 度為例)，意即

$x'_1 = \omega x_1 + \omega x_2$ ,  $x'_2 = -\omega x_1 + \omega x_2$ ,  $x'_3 = x_3$ ，其中  $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，將經座標系統轉換後的特

性代入(3-15)式，最後可得到  $C_{44} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$ ，因此可將(3-15)式改寫為：

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

此即為等向性材料之應力-應變關係矩陣。其所對應的工程材料常數如下：

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

將(3-16)式之應力-應變關係改寫為應變-應力關係，即可得柔性矩陣  $a_{ij}$ ：

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{12} & a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (3-18)$$



其所對應的工程材料常數如下：

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (3-19)$$





## 3.2 懸臂梁振動理論

本節將根據歐拉-伯努力梁(Euler-Bernoulli Beam)理論假設，從統御方程式(Governing Equation)推導彎曲(Bending)與扭轉(Torsional)模態的共振頻率。

### 3.2.1 彎曲模態

歐拉-伯努力梁理論假設忽略剪切所造成的效應，意即在變形前法向量為中性軸的平面截面，在梁受力彎曲後，其依然維持為平面並且與中性軸垂直。根據此理論假設，懸臂梁(Cantilever Beam)的曲率與剪力可表示為：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{M}{EI}, \quad V = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (3-20)$$

其中  $y$  為撓度(Deflection)、 $M$  為彎矩、 $E$  為楊氏模量(Young's Modulus)、 $V$  為剪力、 $I$  為轉動慣量(Moment of Inertia)，而長方體的轉動慣量為：

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (3-21)$$

其中  $b$  為梁截面之寬度， $h$  為梁截面之高(厚)度。

將懸臂梁放大一小段來看，沿長度  $dx$  之自由體圖如圖 3-1 所示，其力平衡方程式為：

$$\left( V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) - V + qdx = \rho A dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (3-22)$$

其中  $q$  為均佈負載、 $\rho$  為密度、 $A$  為截面積。

將(3-20)式代入(3-22)式可得：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (3-23)$$

忽略均佈負載，即可得統御方程式：

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (3-24)$$

其中

$$a^2 = \frac{EI}{\rho A} \quad (3-25)$$



使用分離變數法(Separation of Variables)，令：

$$y(x,t) = Y(x)T(t) \quad (3-26)$$

將(3-26)式代入(3-24)式，可得：

$$\frac{a^2}{Y(x)} \frac{d^4 Y(x)}{dx^4} = -\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \omega^2 \quad (3-27)$$

並將(3-27)式改寫為：

$$\frac{d^4 Y(x)}{dx^4} - \beta^4 Y(x) = 0 \quad (3-28)$$

其中

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{a^2} = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (3-29)$$

由(3-28)式可解得其位移通解為：

$$Y(x) = D_1(\cos \beta x + \cosh \beta x) + D_2(\cos \beta x - \cosh \beta x) \\ + D_3(\sin \beta x + \sinh \beta x) + D_4(\sin \beta x - \sinh \beta x) \quad (3-30)$$

其中  $D_1$ 、 $D_2$ 、 $D_3$  與  $D_4$  為 4 個待定係數。

接著再代入懸臂梁邊界條件(B.C.)：

$$Y(0) = Y'(0) = Y''(l) = Y'''(l) = 0 \quad (3-31)$$

可求得  $D_1 = D_3 = 0$  以及特徵方程式(Characteristic Equation)：

$$\cos \beta l \cosh \beta l = -1 \quad (3-32)$$

利用數值方法可計算出前 6 個解為：

$$\beta_1 l = 1.875 \quad \beta_2 l = 4.694 \quad \beta_3 l = 7.855 \quad \beta_4 l = 10.996 \quad \beta_5 l = 14.137 \quad \beta_6 l = 17.279 \quad (3-33)$$

透過(3-29)式與(3-33)式，即可求得懸臂梁彎曲模態之共振頻率。

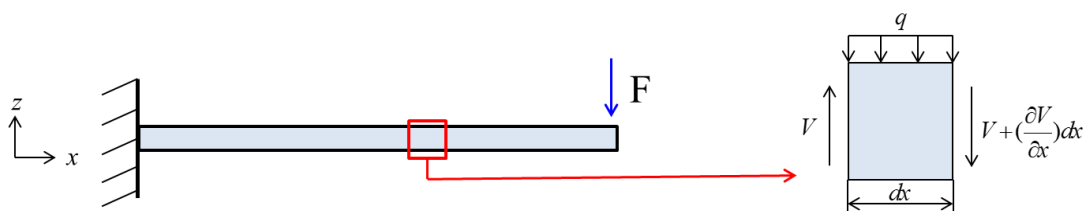


圖 3-1 懸臂梁沿長度  $dx$  受彎曲之自由體圖



### 3.2.2 扭轉模態

由懸臂梁放大一小段來看，沿長度  $dx$  之自由體圖如圖 3-2 所示，其扭轉平衡方程式為：

$$-T + \left( T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) = \rho J dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (3-34)$$

整理可得：

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (3-35)$$

其中  $J$  為極慣性矩(Polar Moment of Inertia)，對於截面寬度、高度為  $b$  與  $h$  且  $b \gg h$  之長方體，其極慣性矩為：

$$J = \frac{b^3 h}{12} \quad (3-36)$$

當物體受扭矩時，其扭轉角度  $\theta$  與扭矩  $T$  之關係式為：

$$T = C_T \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (3-37)$$

其中  $C_T$  為扭矩剛性(Torsional Rigidity)，對於截面寬度、高度為  $b$  與  $h$  且  $b \gg h$  之長方體，其扭矩剛性為：

$$C_T = \frac{bh^3}{3} G \quad (3-38)$$

其中  $G$  為剪切模量(Shear Modulus)。

將(3-37)式代入(3-35)式可得：

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (3-39)$$

其中

$$c_s = \sqrt{\frac{C_T}{\rho J}} = \frac{2h}{b} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (3-40)$$

令徑度函數為

$$\theta(x, t) = \Theta(x) e^{i\omega t} \quad (3-41)$$

將(3-41)式代入(3-39)式可得：



$$\Theta'' + \frac{w_n^2}{c_s^2} \Theta = 0 \quad (3-42)$$

可解得其通解為：

$$\Theta(x) = C_1 \sin k_n x + C_2 \cos k_n x \quad (3-43)$$

其中

$$k_n = \frac{w_n}{c_s} \quad (3-44)$$

代入以下懸臂梁扭轉邊界條件至(3-43)式：

$$\theta(x, t)|_{x=0} = 0, \quad C_T \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \bigg|_{x=l} = 0 \quad (3-45)$$

可得：

$$C_2 = 0, \quad \cos k_n l = 0 \quad (3-46)$$

由(3-44)與(3-46)式可得：

$$w_n = \frac{2n-1}{2l} \pi c_s = \frac{2n-1}{2l} \pi \frac{2h}{b} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad n=1, 2, 3... \quad (3-47)$$

進一步可求得扭轉模態之共振頻率：

$$f_n = \frac{w_n}{2\pi} = \frac{(2n-1)}{2l} \frac{h}{b} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad n=1, 2, 3... \quad (3-48)$$

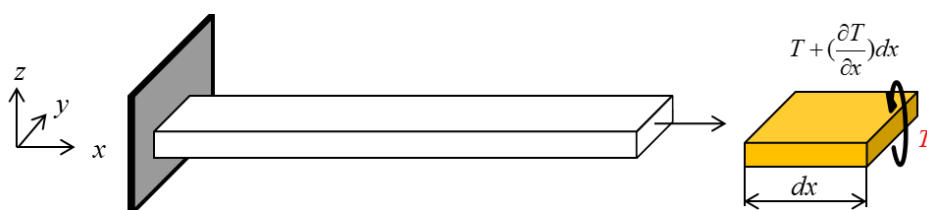


圖 3-2 懸臂梁沿長度  $dx$  受扭轉之自由體圖



### 3.3 鋼珠落擊實驗

當 FDM 以線堆積的形式成型，從複合材料力學的角度來看，其具有異向性的性質，再由放大的示意圖來看，如圖 3-3，其應為正交性材料結構，根據 3.1.2 小節的推導，共有 9 個材料常數需進行反算。常見的共振頻率量測實驗可以透過致振器(Shaker)或暫態的方式激振，而致振器激振系統要精確的控制以確保提供穩定和一致的激振力並不容易，且容易造成單點的質量效應，而本論文所量測之 3D 列印試片多為較輕薄的結構，因此透過暫態的方式進行激振，以避免增加材料常數反算的誤差。本節將以鋼珠落擊實驗[32]搭配 3.2 節所推導之理論結果，進行材料常數的反算。

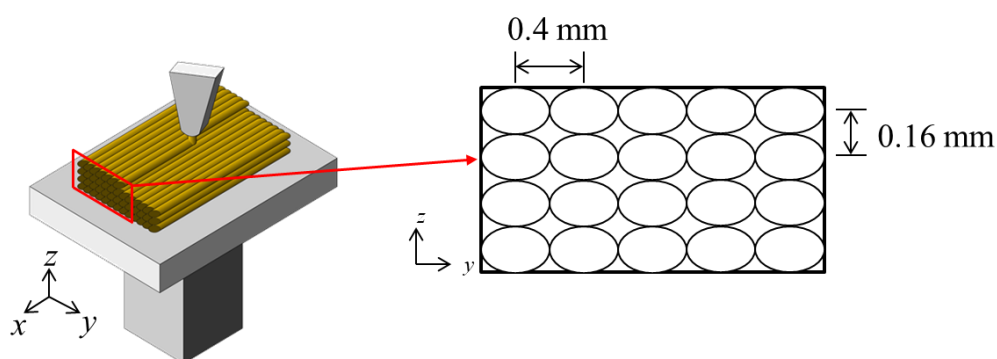


圖 3-3 3D 列印(線堆積)放大示意圖

#### 3.3.1 實驗說明

將列印完成的 3D 列印試片一端以金屬治具夾持固定，形成懸臂梁的形式，接著透過電源供應器(Power Supply)控制鋼珠小球落下，敲擊試片的 A 點與 B 點，如圖 3-4 所示，其中敲擊 A 點將激發彎曲模態，敲擊 B 點則可以同時激發彎曲與扭轉模態。在試片靠近夾持端處貼上反光膠帶，並利用 LDV 量測試片振動的時域訊號，再經由快速傅立葉轉化(Fast Fourier Transform, FFT)，即可得到共振頻率，整體的實驗架設圖如圖 3-5。

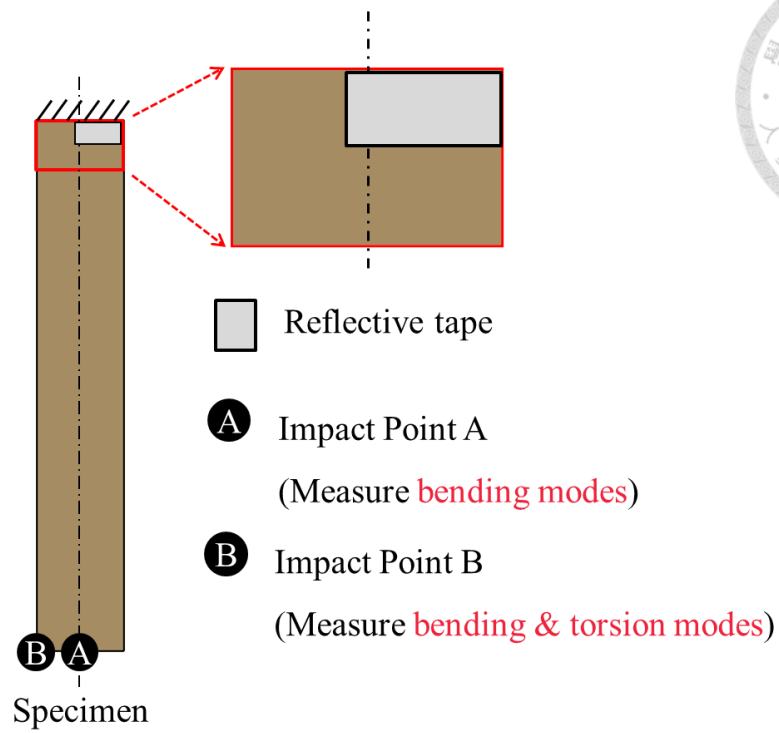


圖 3-4 懸臂梁敲擊位置示意圖

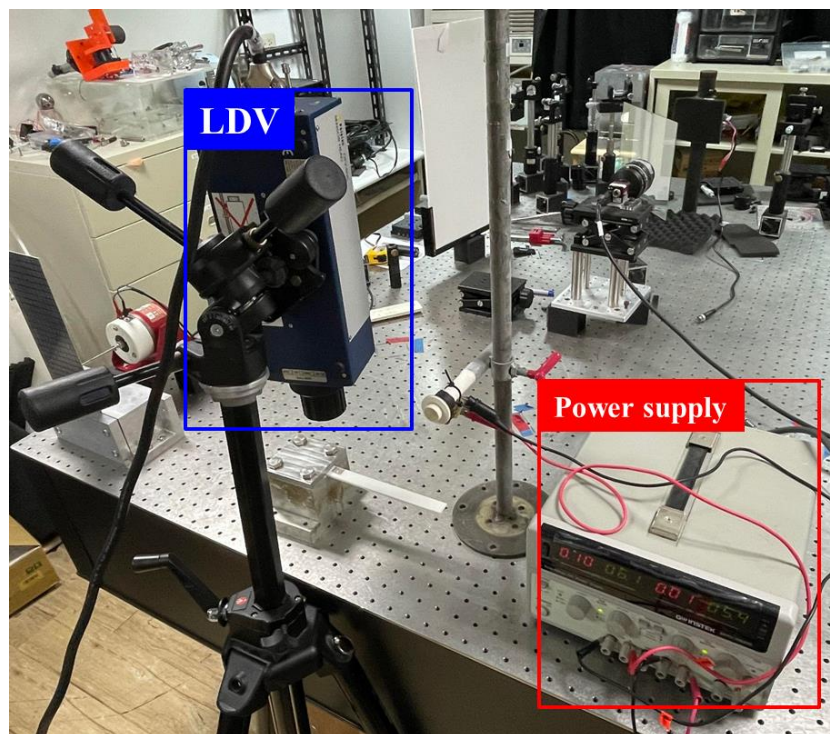


圖 3-5 鋼珠落擊實驗架設圖



### 3.3.2 量測結果

將試片所有可能的排列方向列出，總共有 6 種可能，如圖 3-6，平面排向可以求得剪切模量，主軸方向則可以得到楊氏模量，以「xy 平面-x 方向」為例，可以求得楊氏模量  $E_x$  與剪切模量  $G_{xy}$ ，因此只需量測 3 個方向的試片即可求得所有的材料常數，在實驗上將列印「xy 平面-x 方向」、「xz 平面-z 方向」與「yz 平面-y 方向」的試片，進行材料常數的反算。

首先以「xy 平面-x 方向」試片為例，扣除固定端夾持的部分，試片尺寸為  $160 \times 15.52 \times 1.58 \text{ mm}^3$ ，敲擊 A 點之時域與頻域訊號如圖 3-7，敲擊 B 點則如圖 3-8，比對兩者頻域圖即可區分彎曲或扭轉頻率，將量測結果整理於表 3-1，表格當中 Mode: 1\_B~6\_B 代表第 1 至第 6 彎曲頻率，1\_T~3\_T 則為第 1 至第 3 扭轉頻率，將彎曲與扭轉的第一個頻率分別代入(3-33)式與(3-48)式，可以求得楊氏模量  $E_x = 2.86 \text{ GPa}$  與剪切模量  $G_{xy} = 1.02 \text{ GPa}$ ，再將材料常數代回理論，即可計算彎曲與扭轉第二個之後的共振頻率理論值。從表中觀察，實驗、理論與模擬間都有很好的對應性，誤差皆不超過 2%，其中模擬(FEM)的值是如何得到會在後再做詳細的說明。

接著將「xz 平面-z 方向」與「yz 平面-y 方向」的試片進行相同的步驟，「xz 平面-z 方向」的試片尺寸為  $160 \times 16.05 \times 2.05 \text{ mm}^3$ ，「yz 平面-y 方向」為  $144 \times 24.11 \times 3.64 \text{ mm}^3$ ，其中「yz 平面-y 方向」由於試片列印時其底面為梁截面，列印至高層時試片容易造成晃動，因此將寬度與厚度加大，於下一節中會探討此試片尺寸從寬厚比或長寬比的角度來看皆符合理論的適用範圍。實驗敲擊 A 點與 B 點所得之時域及頻域圖如圖 3-9~圖 3-12，並將量測結果分別整理於表 3-2 與表 3-3，從結果來看實驗、理論與模擬間也都有很好的對應性，最大誤差皆不超過 3%。

最後將 3 個方向的試片反算的材料常數整理於表 3-4，其中蒲松比(Poisson's Ratio)的計算是將單一試片排向等效為等向性材料，因此透過  $\nu_{ij} = \frac{E_i}{2G_{ij}} - 1$  求出。表



3-1~表 3-3 中 FEM 即是將此 9 個材料常數輸入至有限元素軟體 ABAQUS 中(其中  $\nu_{xz}$  透過(3-12)式正交性材料性值求得)，並設定材料方向(Material Orientation)，網格類型為 C3D20R，即可得到各排向試片的共振頻率。

至此，透過歐拉-伯努力梁理論搭配鋼珠落擊實驗進行正交性材料常數反算的方式，能夠得到準確的結果，並且此方法簡單直接，不需過於複雜的實驗或計算流程，但也同時延伸出 2 個問題需要進一步探討：

1. 歐拉-伯努力梁理論為長梁假設，此理論應有尺寸限制，而其尺寸比例的極限為何？因此在下一節當中，將從不同尺寸比例的角度觀察使用此理論進行材料常數反算的適用範圍。
2. 根據 3.1.2 小節的推導，正交性材料有 9 個獨立的柔性常數，因此蒲松比應獨立求得，而在前由於僅於 FEM 當中使用到蒲松比，簡化等效為等向性材料進行計算，然而本研究將進一步探討是否也能夠利用非破壞性的方式，也可以量測到相對準確或至少可以評估蒲松比量值的方法，因此在後兩章將進行此方法的研究與討論。

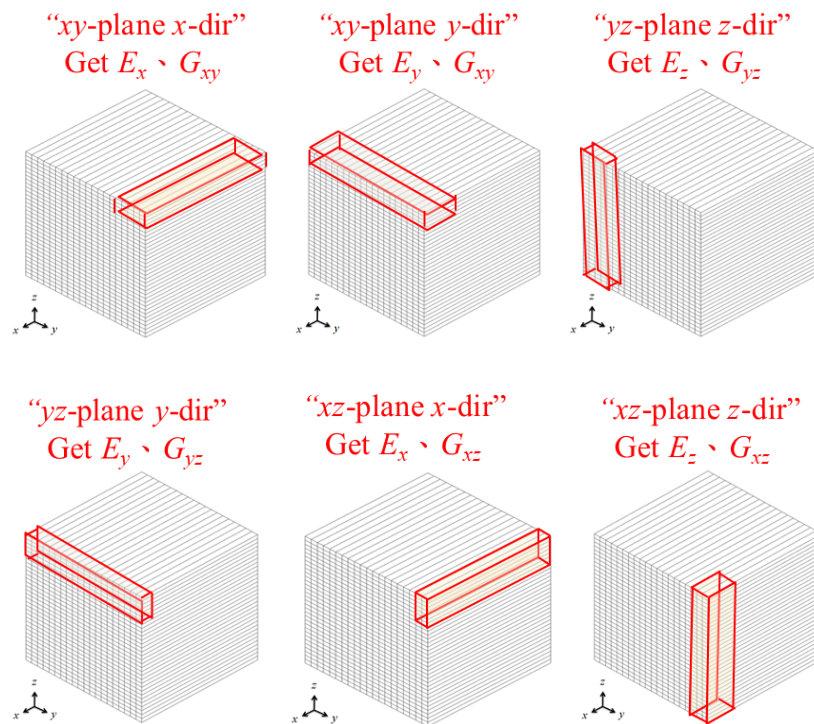


圖 3-6 3D 列印試片各排向示意圖



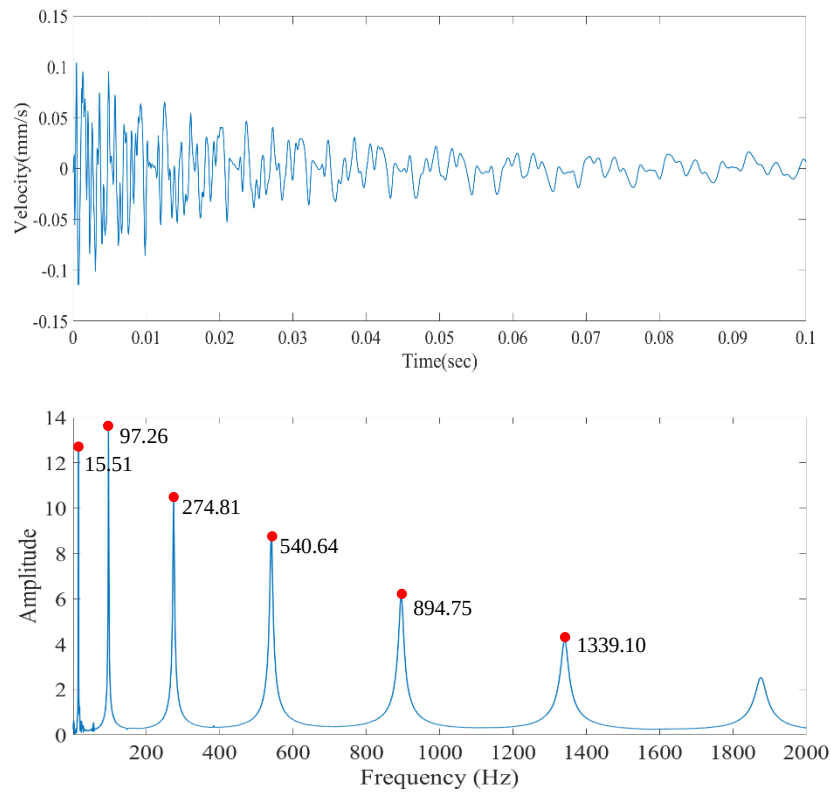
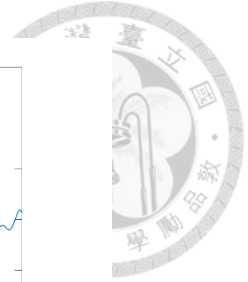


圖 3-7 「xy 平面-x 方向」試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號

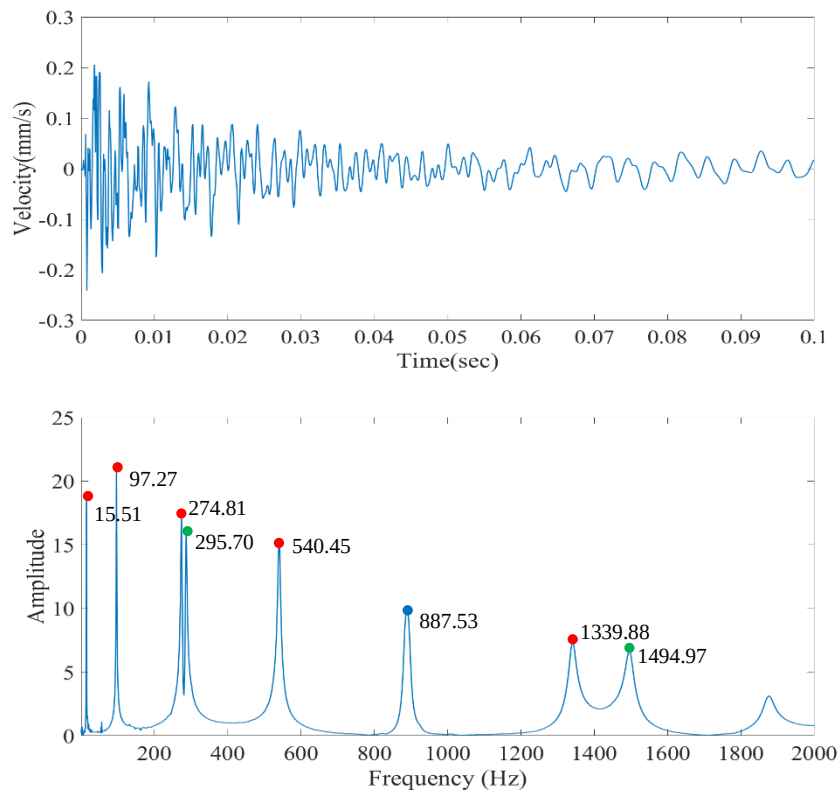


圖 3-8 「xy 平面-x 方向」試片敲擊 B 點之時域與頻域訊號

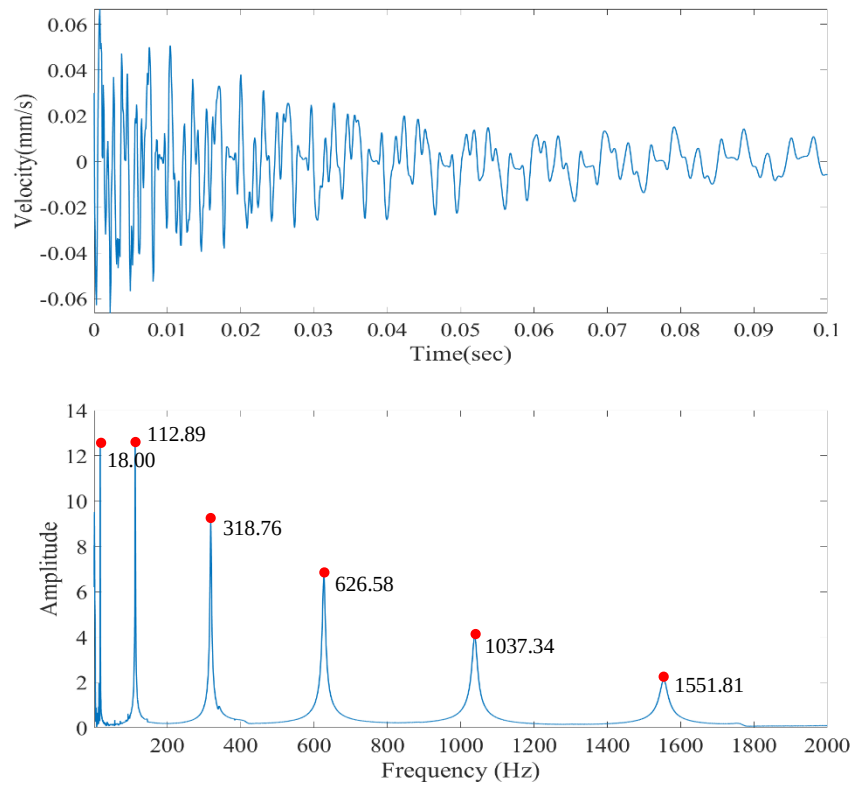
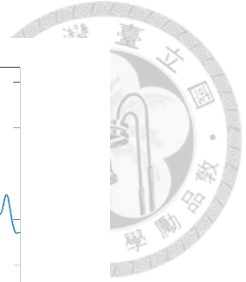


圖 3-9 「xz 平面-z 方向」試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號

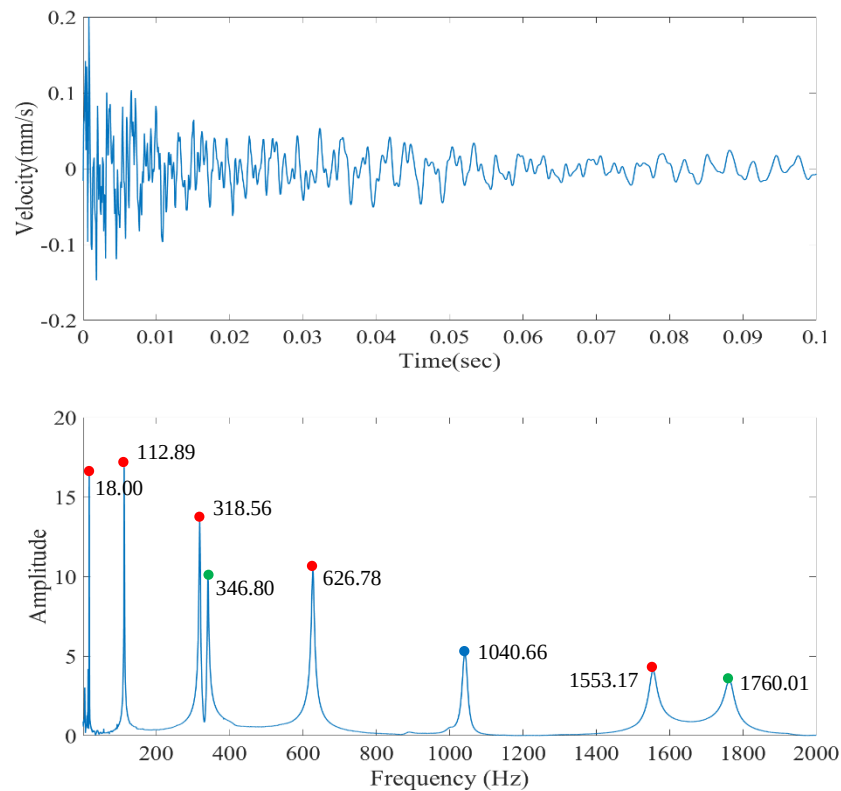


圖 3-10 「xz 平面-z 方向」試片敲擊 B 點之時域與頻域訊號

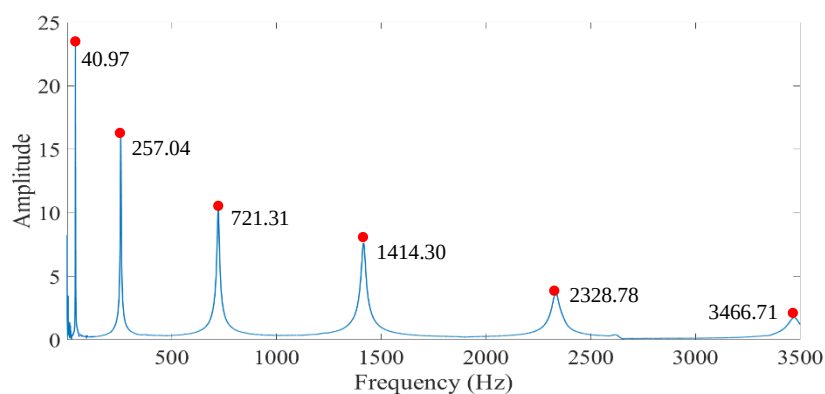
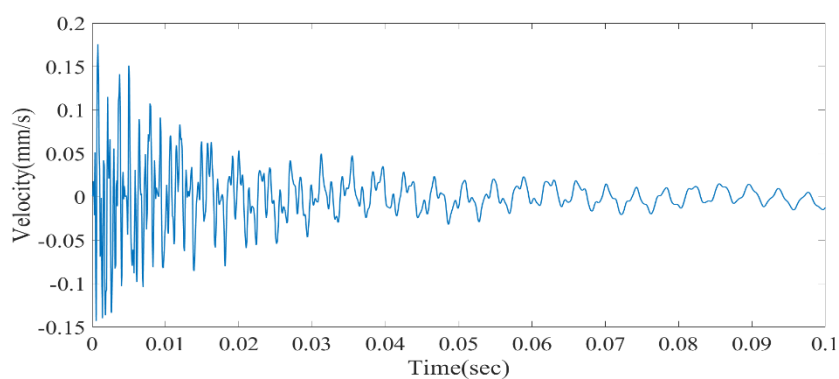


圖 3-11 「yz 平面-y 方向」試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號

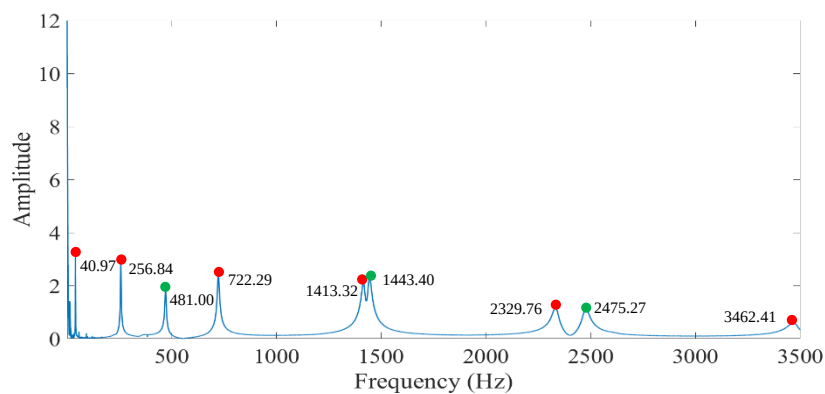
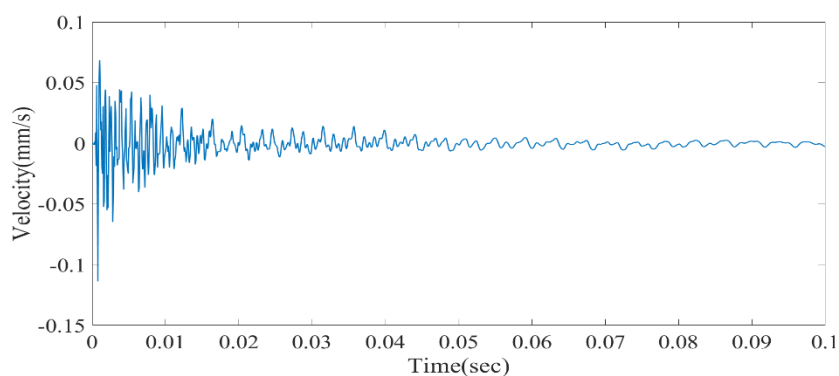


圖 3-12 「yz 平面-y 方向」試片敲擊 B 點之時域與頻域訊號

表 3-1 「xy 平面-x 方向」試片之共振頻率

| Mode | Theory  | Impact Point A |           | Impact Point B |           | FEM    | Error (%)<br>(Exp.) |
|------|---------|----------------|-----------|----------------|-----------|--------|---------------------|
|      |         | Exp.           | Error (%) | Exp.           | Error (%) |        |                     |
| 1_B  | 15.51   | 15.51          | 0.00      | 15.51          | 0.00      | 15.67  | -1.02               |
| 2_B  | 97.21   | 97.26          | 0.06      | 97.27          | 0.07      | 98.10  | -0.85               |
| 3_B  | 272.21  | 274.81         | 0.96      | 274.81         | 0.96      | 274.73 | 0.03                |
| 4_B  | 533.43  | 540.64         | 1.35      | 540.45         | 1.32      | 538.77 | 0.31                |
| 5_B  | 881.71  | 894.75         | 1.48      | 887.53         | 0.66      | 891.57 | -0.45               |
| 6_B  | 1317.18 | 1339.10        | 1.66      | 1339.88        | 1.72      | 1333.2 | 0.50                |
| 1_T  | 295.70  |                |           | 295.70         | 0.00      | 291.49 | 1.44                |
| 2_T  | 887.10  |                |           | 887.53         | 0.05      | 879.23 | 0.94                |
| 3_T  | 1478.50 |                |           | 1494.97        | 1.11      | 1481.0 | 0.94                |

B : Bending mode, T : Torsion mode

Unit : Hz

表 3-2 「xz 平面-z 方向」試片之共振頻率

| Mode | Theory  | Impact Point A |           | Impact Point B |           | FEM    | Error (%)<br>(Exp.) |
|------|---------|----------------|-----------|----------------|-----------|--------|---------------------|
|      |         | Exp.           | Error (%) | Exp.           | Error (%) |        |                     |
| 1_B  | 18.00   | 18.00          | 0.00      | 18.00          | 0.00      | 18.12  | -0.66               |
| 2_B  | 112.81  | 112.89         | 0.07      | 112.89         | 0.07      | 113.43 | -0.48               |
| 3_B  | 315.91  | 318.76         | 0.90      | 318.56         | 0.84      | 317.40 | 0.37                |
| 4_B  | 619.07  | 626.58         | 1.21      | 626.78         | 1.25      | 621.61 | 0.83                |
| 5_B  | 1023.26 | 1037.34        | 1.38      | 1040.66        | 1.70      | 1026.8 | 1.35                |
| 6_B  | 1528.65 | 1551.81        | 1.52      | 1553.17        | 1.60      | 1532.4 | 1.36                |
| 1_T  | 346.80  |                |           | 346.80         | 0.00      | 338.31 | 2.51                |
| 2_T  | 1040.40 |                |           | 1040.66        | 0.02      | 1020.0 | 2.03                |
| 3_T  | 1734.00 |                |           | 1760.01        | 1.50      | 1716.8 | 2.52                |

B : Bending mode, T : Torsion mode

Unit : Hz

表 3-3 「yz 平面-y 方向」試片之共振頻率

| Mode | Theory  | Impact Point A |           | Impact Point B |           | FEM    | Error (%)<br>(Exp.) |
|------|---------|----------------|-----------|----------------|-----------|--------|---------------------|
|      |         | Exp.           | Error (%) | Exp.           | Error (%) |        |                     |
| 1_B  | 40.97   | 40.97          | 0.00      | 40.97          | 0.00      | 41.21  | -0.58               |
| 2_B  | 254.64  | 257.04         | 0.94      | 256.84         | 0.86      | 257.46 | -0.24               |
| 3_B  | 713.08  | 721.31         | 1.15      | 722.29         | 1.29      | 718.30 | 0.56                |
| 4_B  | 1397.38 | 1414.30        | 1.21      | 1413.32        | 1.14      | 1400.6 | 0.91                |
| 5_B  | 2309.72 | 2328.78        | 0.83      | 2329.76        | 0.87      | 2300.0 | 1.29                |
| 6_B  | 3450.50 | 3466.71        | 0.47      | 3462.41        | 0.35      | 3406.9 | 1.63                |
| 1_T  | 481.00  |                |           | 481.00         | 0.00      | 470.63 | 2.20                |
| 2_T  | 1443.00 |                |           | 1443.40        | 0.03      | 1428.3 | 1.06                |
| 3_T  | 2405.00 |                |           | 2475.27        | 2.92      | 2433.3 | 1.72                |

B : Bending mode, T : Torsion mode

Unit : Hz

表 3-4 正交性材料所有常數反算之結果

| plane | direction | $E$ (GPa) |      | $G$ (GPa) |       | $\nu$      |      |
|-------|-----------|-----------|------|-----------|-------|------------|------|
| $xy$  | $x$       | $E_x$     | 2.86 | $G_{xy}$  | 1.020 | $\nu_{xy}$ | 0.40 |
| $xz$  | $z$       | $E_z$     | 2.42 | $G_{zx}$  | 0.942 | $\nu_{zx}$ | 0.28 |
| $yz$  | $y$       | $E_y$     | 2.47 | $G_{yz}$  | 0.996 | $\nu_{yz}$ | 0.24 |



### 3.4 尺寸比例適用範圍

此節將探討前一節當中以歐拉-伯努力梁理論進行材料常數反算方法在各尺寸比例下的適用範圍，透過改變「xy平面-x方向」試片的尺寸，比較理論與實驗以及理論與模擬間的一致性。

#### 3.4.1 寬厚比

本小節將以  $160 \times 16 \times 1.6 \text{ mm}^3$  的試片尺寸為基準，固定長度與寬度並改變厚度，這麼做會影響的有寬厚比與長厚比，而在下一小節會觀察到長厚比對於長扁梁的結構(長>寬>高)影響較不顯著，因此在此主要探討寬厚比的影響，在實驗上將比較 4 個試片，如圖 3-13，寬厚比從 10~4。

其中試片 1 為前一節進行材料常數反算的「xy平面-x方向」試片，試片 2~4 的列印尺寸(扣除固定端夾持的部分)依序為： $160 \times 16 \times 2 \text{ mm}^3$ 、 $160 \times 16 \times 3.2 \text{ mm}^3$  與  $160 \times 16 \times 4 \text{ mm}^3$ ，實驗敲擊 A 點與 B 點所得之時域及頻域圖如圖 3-14 ~圖 3-19，並將敲擊 B 點之量測結果整理於表 3-5，其中理論與實驗的方法皆與前一節相同。從表中可以觀察出當寬厚比降至 4 時，彎曲模態理論與實驗間的誤差將超過 3%，扭轉則超過 5%，將誤差繪製成圖 3-20 與圖 3-21，可以更清楚地觀察到此結果。

接著比較理論與模擬間的差異，由於主要觀察理論的適用性，因此在模擬當中假設為等向性材料，其餘設定皆與前一節相同，在此固定理論的頻率值，改變模型的厚度與密度，將結果整理於表 3-6，從表中可以觀察出當寬厚比為 4 時，彎曲模態理論與模擬間的誤差接近 3%，扭轉則接近 10%，與實驗的結果吻合。

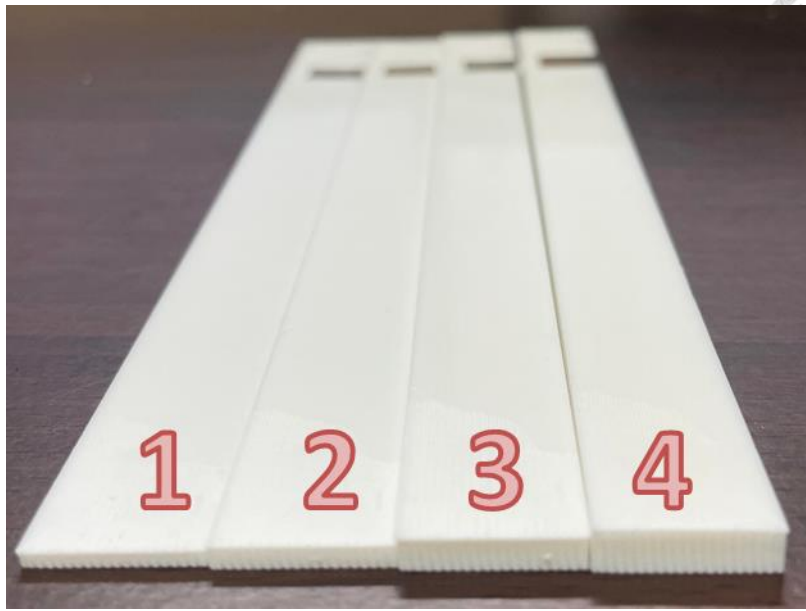


圖 3-13 不同厚度之 3D 列印試片

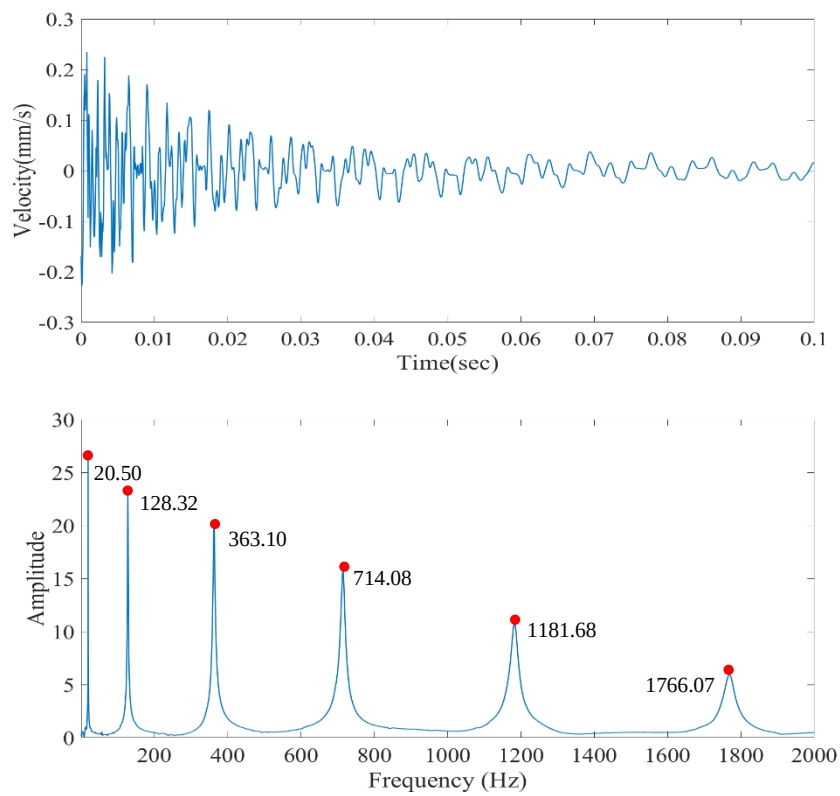


圖 3-14 試片 2 ( $b/h=8$ )的試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號

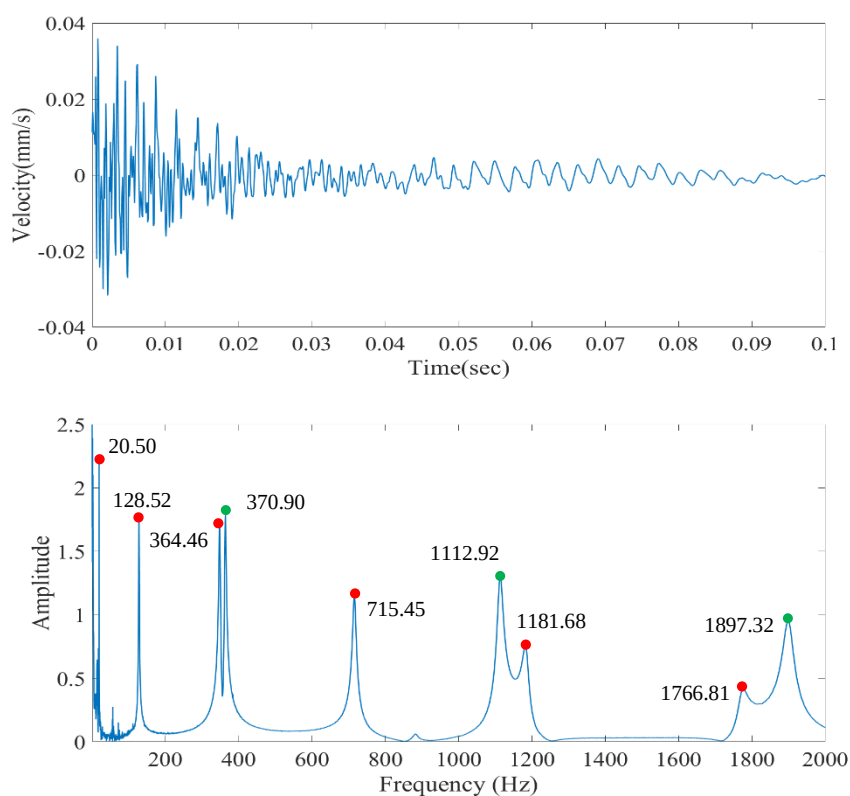


圖 3-15 試片 2 ( $b/h=8$ )的試片敲擊 B 點之時域與頻域訊號

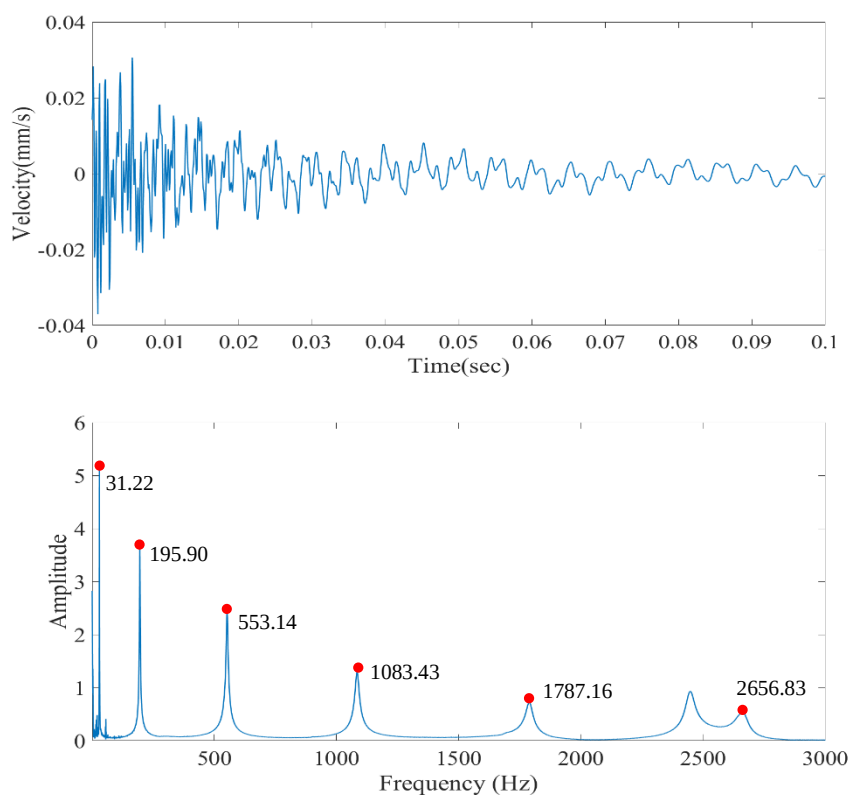


圖 3-16 試片 3 ( $b/h=5$ )的試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號



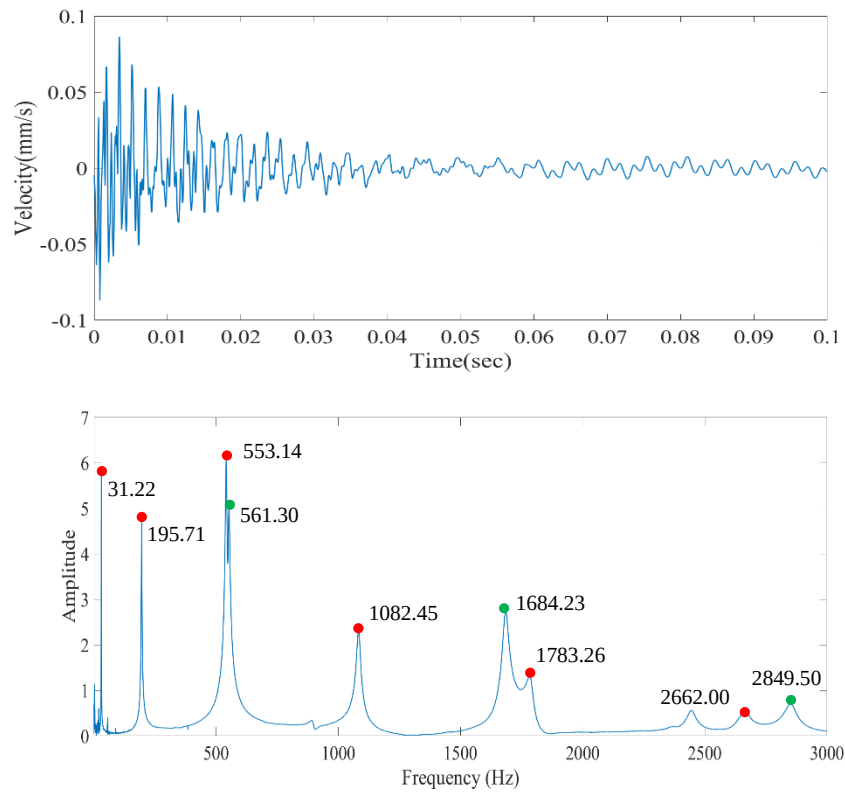
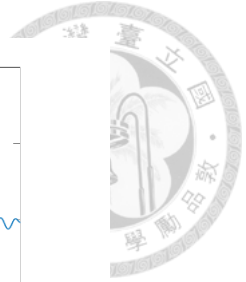


圖 3-17 試片 3 ( $b/h=5$ )的試片敲擊 B 點之時域與頻域訊號

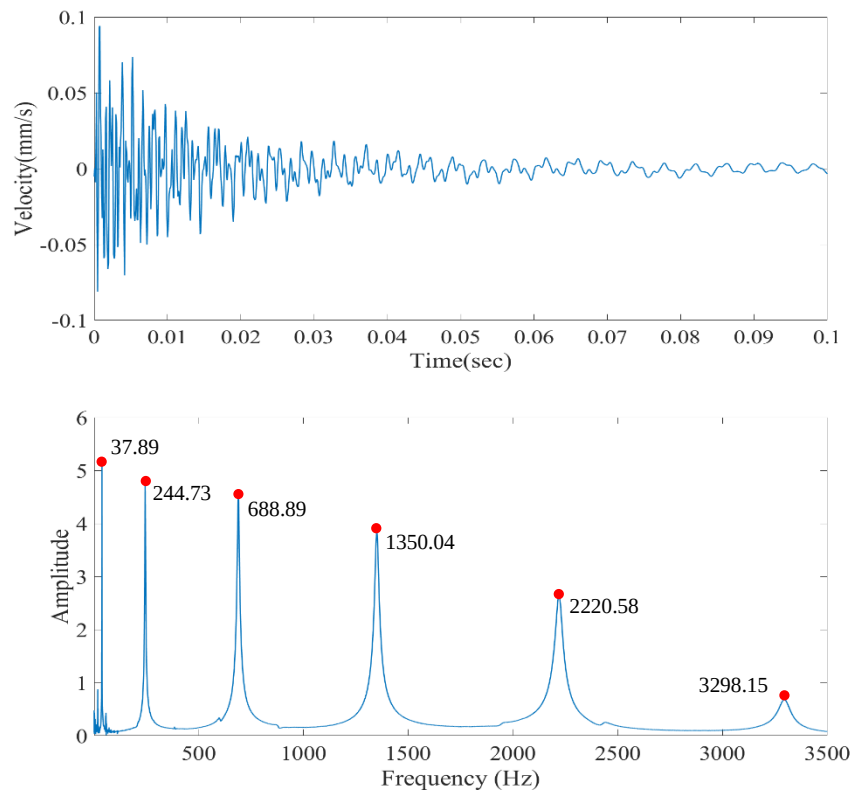


圖 3-18 試片 4 ( $b/h=4$ )的試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號

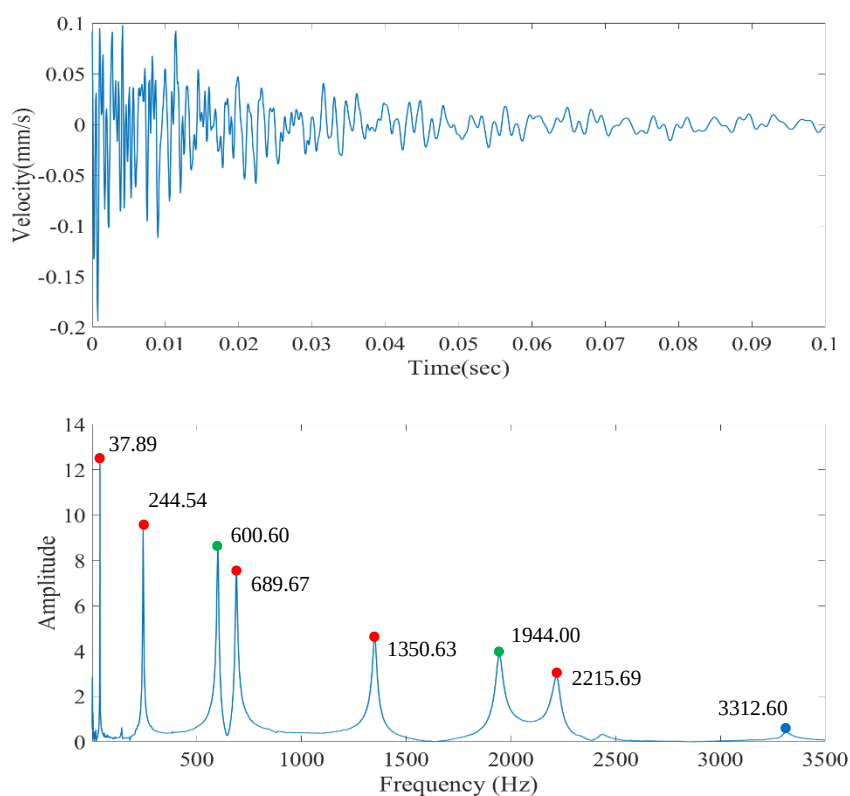


圖 3-19 試片 4 ( $b/h=4$ )的試片敲擊 B 點之時域與頻域訊號

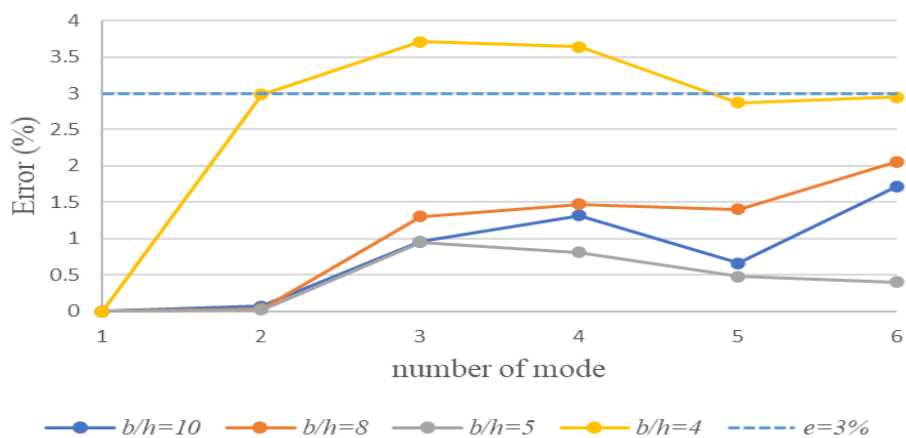


圖 3-20 不同寬厚比理論與實驗彎曲模態誤差

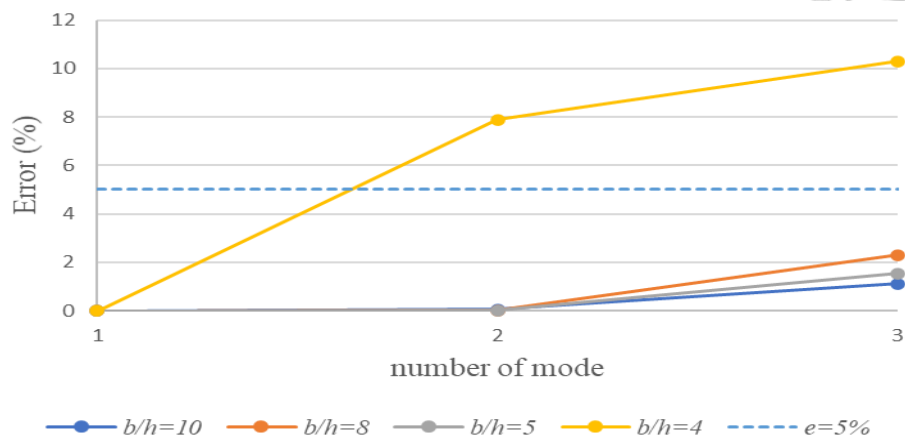


圖 3-21 不同寬厚比理論與實驗扭轉模態誤差

表 3-5 不同厚度試片(實驗)之共振頻率

|      | Specimen 1<br>$b/h = 10$ |         |         | Specimen 2<br>$b/h = 8$ |         |         | Specimen 3<br>$b/h = 5$ |         |         | Specimen 4<br>$b/h = 4$ |         |         |
|------|--------------------------|---------|---------|-------------------------|---------|---------|-------------------------|---------|---------|-------------------------|---------|---------|
| Mode | Theory                   | Exp.    | Err.(%) | Theory                  | Exp.    | Err.(%) | Theory                  | Exp.    | Err.(%) | Theory                  | Exp.    | Err.(%) |
| 1_B  | 15.51                    | 15.51   | 0.00    | 20.50                   | 20.50   | 0.00    | 31.22                   | 31.22   | 0.00    | 37.89                   | 37.89   | 0.00    |
| 2_B  | 97.21                    | 97.27   | 0.07    | 128.48                  | 128.52  | 0.03    | 195.67                  | 195.71  | 0.02    | 237.47                  | 244.54  | 2.98    |
| 3_B  | 272.21                   | 274.81  | 0.96    | 359.79                  | 364.46  | 1.30    | 547.93                  | 553.14  | 0.95    | 664.99                  | 689.67  | 3.71    |
| 4_B  | 533.43                   | 540.45  | 1.32    | 705.05                  | 715.45  | 1.47    | 1073.74                 | 1082.45 | 0.81    | 1303.14                 | 1350.63 | 3.64    |
| 5_B  | 881.71                   | 887.53  | 0.66    | 1165.38                 | 1181.68 | 1.40    | 1774.78                 | 1783.26 | 0.48    | 2153.95                 | 2215.69 | 2.87    |
| 6_B  | 1317.18                  | 1339.88 | 1.72    | 1740.96                 | 1776.81 | 2.06    | 2651.35                 | 2662.00 | 0.40    | 3217.80                 | 3312.60 | 2.95    |
| 1_T  | 295.70                   | 295.70  | 0.00    | 370.90                  | 370.90  | 0.00    | 561.30                  | 561.30  | 0.00    | 600.60                  | 600.60  | 0.00    |
| 2_T  | 887.10                   | 887.53  | 0.05    | 1112.70                 | 1112.92 | 0.02    | 1683.90                 | 1684.23 | 0.02    | 1801.80                 | 1944.00 | 7.89    |
| 3_T  | 1478.50                  | 1494.97 | 1.11    | 1854.50                 | 1897.32 | 2.31    | 2806.50                 | 2849.50 | 1.53    | 3003.00                 | 3312.60 | 10.31   |

B : Bending mode, T : Torsion mode

Unit : Hz

表 3-6 不同厚度試片(模擬)之共振頻率

|      | Test 1<br>$b/h = 10$ |        |          | Test 2<br>$b/h = 8$ |        |          | Test 3<br>$b/h = 5$ |        |          | Test 4<br>$b/h = 4$ |        |          | Test 5<br>$b/h = 2$ |        |          |
|------|----------------------|--------|----------|---------------------|--------|----------|---------------------|--------|----------|---------------------|--------|----------|---------------------|--------|----------|
| Mode | Theory               | FEM    | Err. (%) | Theory              | FEM    | Err. (%) | Theory              | FEM    | Err. (%) | Theory              | FEM    | Err. (%) | Theory              | FEM    | Err. (%) |
| 1_B  | 15.00                | 15.06  | 0.40     | 15.00               | 15.06  | 0.40     | 15.00               | 15.02  | 0.13     | 15.00               | 15.01  | 0.07     | 15.00               | 15.02  | 0.13     |
| 2_B  | 94.01                | 94.31  | 0.32     | 94.01               | 94.32  | 0.33     | 94.01               | 93.97  | -0.04    | 94.01               | 93.83  | -0.19    | 94.01               | 93.09  | -0.98    |
| 3_B  | 263.26               | 263.95 | 0.26     | 263.26              | 263.87 | 0.23     | 263.26              | 262.46 | -0.30    | 263.26              | 261.63 | -0.62    | 263.26              | 256.31 | -2.64    |
| 4_B  | 515.89               | 517.02 | 0.22     | 515.89              | 516.56 | 0.13     | 515.89              | 512.48 | -0.66    | 515.89              | 509.69 | -1.20    | 515.89              | 490.76 | -4.87    |
| 5_B  | 852.71               | 854.22 | 0.18     | 852.71              | 852.79 | 0.01     | 852.71              | 843.29 | -1.11    | 852.71              | 836.29 | -1.93    | 852.71              | 788.74 | -7.50    |
| 6_B  | 1273.87              | 1275.1 | 0.10     | 1273.87             | 1271.8 | -0.16    | 1273.87             | 1252.7 | -1.66    | 1273.87             | 1238.0 | -2.82    | 1273.87             | 1141.1 | -10.42   |
| 1_T  | 300.00               | 295.70 | -1.43    | 300.00              | 292.40 | -2.53    | 300.00              | 280.31 | -6.56    | 300.00              | 271.76 | -9.41    | 300.00              | 224.45 | -25.18   |
| 2_T  | 900.00               | 891.13 | -0.99    | 900.00              | 881.08 | -2.10    | 900.00              | 844.13 | -6.21    | 900.00              | 817.96 | -9.12    | 900.00              | 674.01 | -25.11   |
| 3_T  | 1500.00              | 1498.5 | -0.10    | 1500.00             | 1481.2 | -1.25    | 1500.00             | 1417.4 | -5.51    | 1500.00             | 1372.1 | -8.53    | 1500.00             | 1125.5 | -24.97   |

B : Bending mode, T : Torsion mode

Unit : Hz



### 3.4.2 長厚比

我們認為長度與第二長的邊之間的影響應該較大，也就是長寬比的影響較長厚比更多，因此在此小節將只比較理論與模擬間的一致性，而長寬比的影響會在下一小節討論。一開始還是先假設長厚比會有所影響，建立 3 個測試模型，尺寸分別為  $150 \times 24 \times 5 \text{ mm}^3$ 、 $150 \times 24 \times 7.5 \text{ mm}^3$  與  $150 \times 24 \times 15 \text{ mm}^3$ ，長厚比從 30 至 10，固定密度與材料常數分別代入理論與模擬進行計算，將結果整理於表 3-7。將表 3-7 與表 3-6 相互比較，從長厚比的角度來看，測試 6 與測試 3 的誤差分布相近，但測試 6 的長厚比為 30，測試 3 則為 50，兩者並沒有對上，再從誤差很大的測試 7 與測試 4 比較，測試 7 的長厚比為 20，而測試 4 為 40，依然沒有吻合；但從寬厚比的角度來看，測試 6 為 4.8、測試 3 為 5，兩者相當接近，而測試 7 為 3.2、測試 4 為 4，由於測試 7 的寬厚比較小，因此誤差也較大，結果也相當吻合。因此在此可以間接證明在長扁梁的結構，長厚比的影響相對較小。

表 3-7 不同厚度試片(模擬)之共振頻率

|      | Test 6 $L/h = 30$<br>( $b/h = 4.8$ ) |        |         | Test 7 $L/h = 20$<br>( $b/h = 3.2$ ) |        |         | Test 8 $L/h = 10$<br>( $b/h = 1.6$ ) |        |         |
|------|--------------------------------------|--------|---------|--------------------------------------|--------|---------|--------------------------------------|--------|---------|
| Mode | Theory                               | FEM    | Err.(%) | Theory                               | FEM    | Err.(%) | Theory                               | FEM    | Err.(%) |
| 1_B  | 50.76                                | 50.73  | -0.06   | 76.14                                | 76.026 | -0.15   | 152.28                               | 151.31 | -0.64   |
| 2_B  | 318.14                               | 316.54 | -0.50   | 477.21                               | 471.86 | -1.12   | 954.42                               | 913.74 | -4.26   |
| 3_B  | 890.89                               | 880.24 | -1.20   | 1336.34                              | 1301.4 | -2.61   | 2672.67                              | 2426.5 | -9.21   |
| 4_B  | 1745.83                              | 1708   | -2.17   | 2618.74                              | 2497   | -4.65   | 5237.48                              | 4448.3 | -15.07  |
| 1_T  | 694.44                               | 652.52 | -6.04   | 1041.67                              | 912.69 | -12.38  | 2083.33                              | 1393.1 | -33.13  |
| 2_T  | 2083.33                              | 1970.1 | -5.44   | 3125.00                              | 2749.6 | -12.01  | 6250.00                              | 4179.5 | -33.13  |
| 3_T  | 3472.22                              | 3324.6 | -4.25   | 5208.33                              | 4620   | -11.30  | 10416.67                             | 6966.8 | -33.12  |

B : Bending mode, T : Torsion mode

Unit : Hz



### 3.4.3 長寬比

本小節與 3.4.1 小節相同，但固定寬度與厚度並改變長度，這麼做會影響的有長寬比與長厚比，而在前一小節已觀察到長厚比的影響較不顯著，因此在此主要探討長寬比的影響，在實驗上將比較 4 個試片，如圖 3-22，長寬比從 10~4。

其中試片 5 與試片 1 相同，試片 6~8 的列印尺寸(扣除固定端夾持的部分)依序為： $128 \times 16 \times 1.6 \text{ mm}^3$ 、 $96 \times 16 \times 1.6 \text{ mm}^3$  與  $64 \times 16 \times 1.6 \text{ mm}^3$ ，實驗敲擊 A 點與 B 點所得之時域及頻域圖如圖 3-23~圖 3-28，並將敲擊 B 點之量測結果整理於表 3-8，表中斜線部分是由於短梁透過鋼珠落擊實驗能量消滅較快，因此試片 8 彎曲模態超過 5000 Hz 不易從頻域圖觀察。從表中可以觀察出當長寬比降至 4 時，扭轉模態理論與實驗間的誤差將超過 5%，而彎曲則皆不超過 3%，將誤差繪製成圖 3-29 與圖 3-30，可以更清楚地觀察到此結果。

接著比較理論與模擬間的差異，設定皆與 3.4.1 小節相同，改變模型的長度與密度，將結果整理於表 3-9，其中由於原本的扭轉模態頻率值在長寬比較小時所反算的蒲松比會超過 0.5，因此隨著長寬比的下降改變扭轉模態的頻率值，從表中可以觀察出當寬厚比為 4 時，扭轉模態理論與模擬間的誤差超過 5%，彎曲則皆不到 3%，與實驗的結果相當吻合。



圖 3-22 不同長度之 3D 列印試片

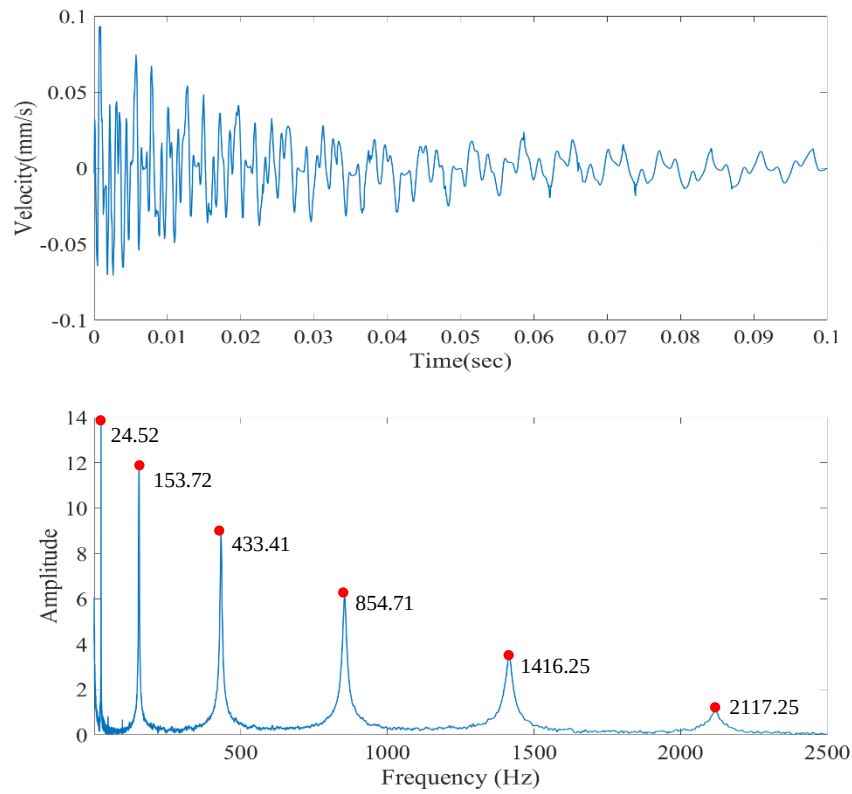
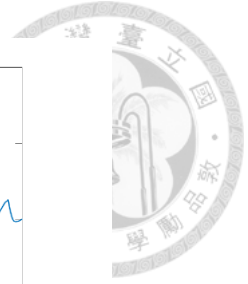


圖 3-23 試片 6 ( $L/b=8$ )的試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號

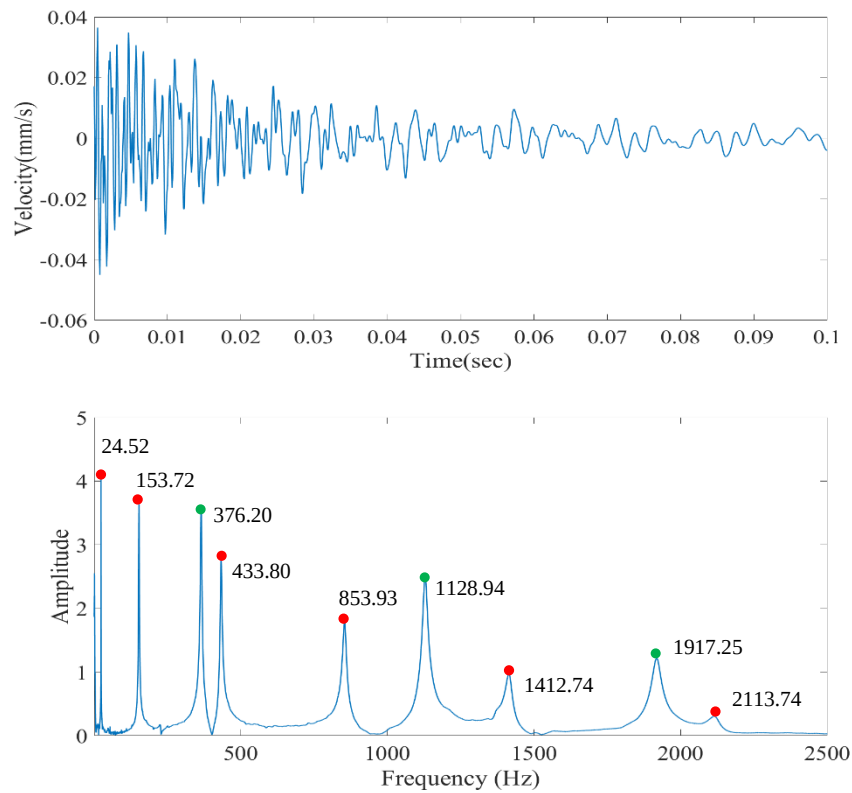


圖 3-24 試片 6 ( $L/b=8$ )的試片敲擊 B 點之時域與頻域訊號

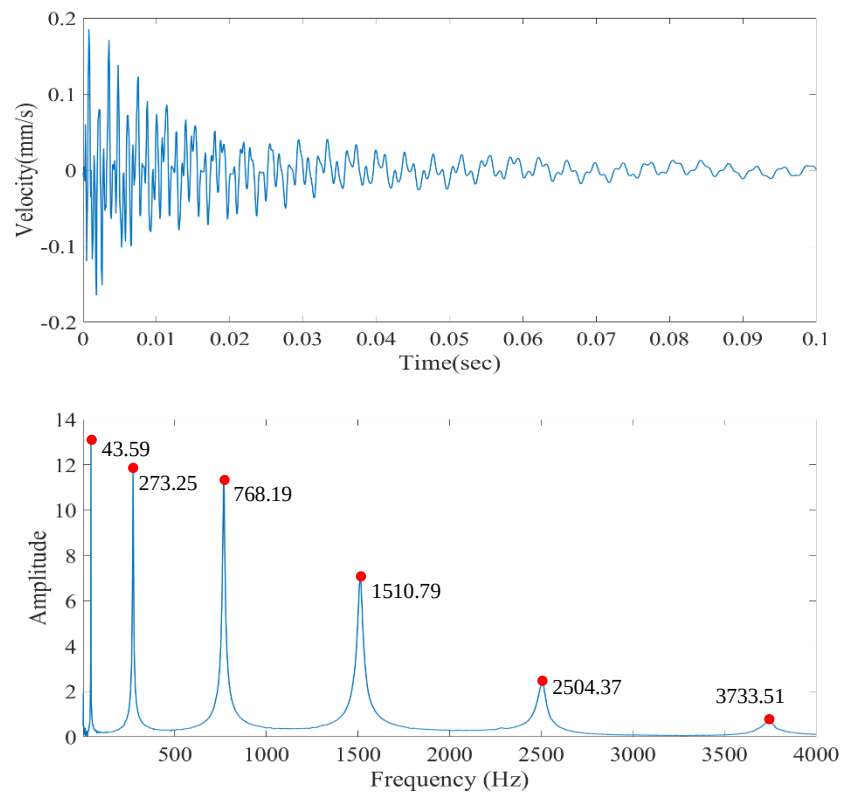
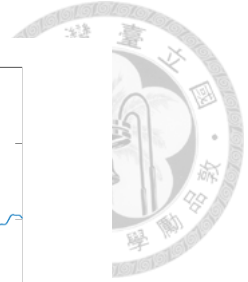


圖 3-25 試片 7 ( $L/b=6$ )的試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號

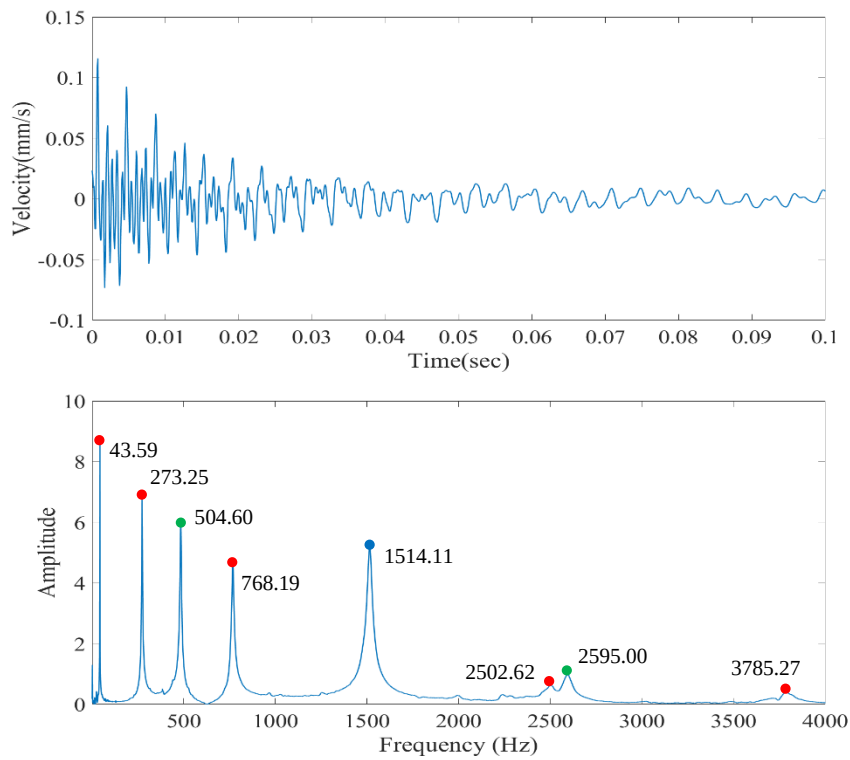


圖 3-26 試片 7 ( $L/b=6$ )的試片敲擊 B 點之時域與頻域訊號

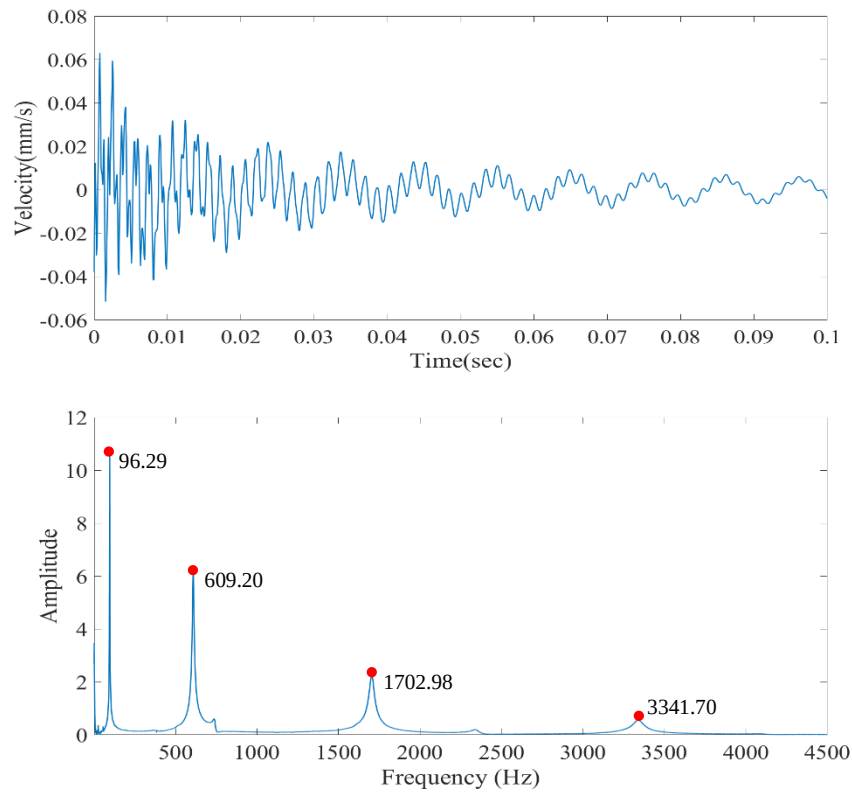
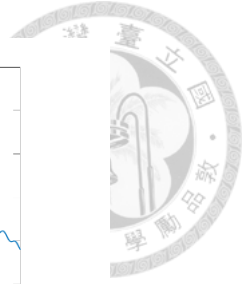


圖 3-27 試片 8 ( $L/b=4$ )的試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號

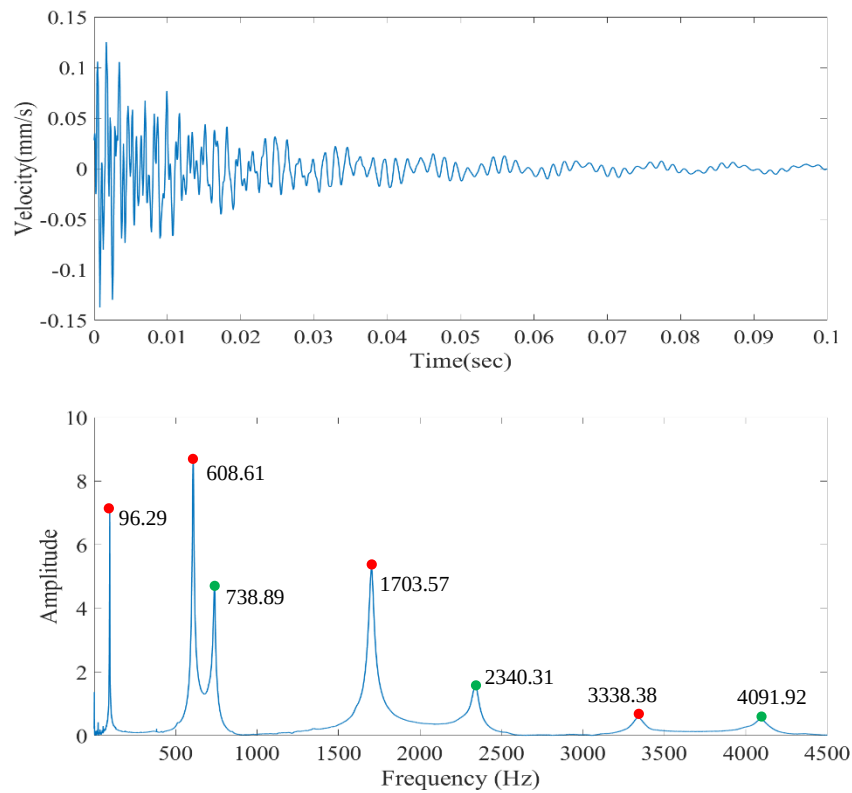


圖 3-28 試片 8 ( $L/b=4$ )的試片敲擊 B 點之時域與頻域訊號



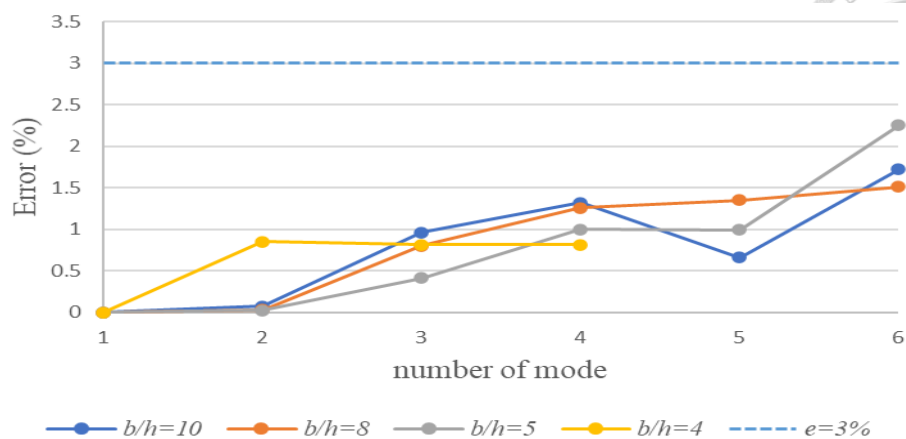


圖 3-29 不同長寬比理論與實驗彎曲模態誤差

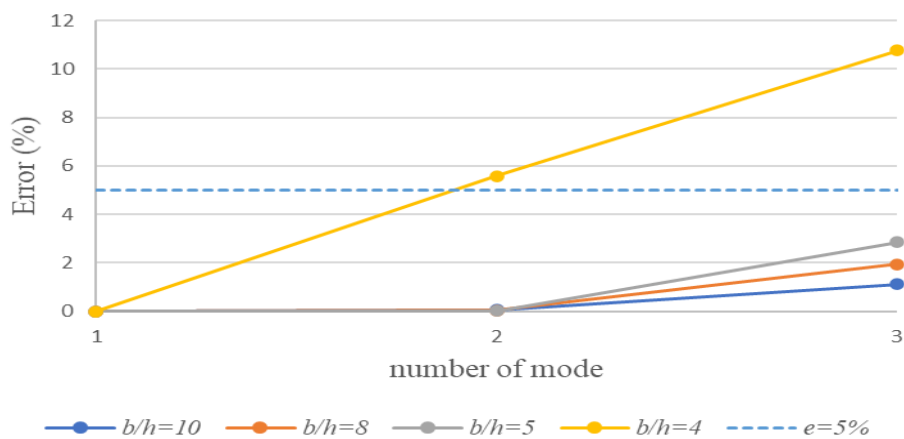


圖 3-30 不同長寬比理論與實驗扭轉模態誤差

表 3-8 不同長度試片(實驗)之共振頻率

| Mode | Specimen 5<br>$L/b = 10$ |         |         | Specimen 6<br>$L/b = 8$ |         |         | Specimen 7<br>$L/b = 6$ |         |         | Specimen 8<br>$L/b = 4$ |         |         |
|------|--------------------------|---------|---------|-------------------------|---------|---------|-------------------------|---------|---------|-------------------------|---------|---------|
|      | Theory                   | Exp.    | Err.(%) | Theory                  | Exp.    | Err.(%) | Theory                  | Exp.    | Err.(%) | Theory                  | Exp.    | Err.(%) |
| 1_B  | 15.51                    | 15.51   | 0.00    | 24.52                   | 24.52   | 0.00    | 43.59                   | 43.59   | 0.00    | 96.29                   | 96.29   | 0.00    |
| 2_B  | 97.21                    | 97.27   | 0.07    | 153.68                  | 153.72  | 0.03    | 273.19                  | 273.25  | 0.02    | 603.48                  | 608.61  | 0.85    |
| 3_B  | 272.21                   | 274.81  | 0.96    | 430.34                  | 433.80  | 0.80    | 765.03                  | 768.19  | 0.41    | 1689.94                 | 1703.57 | 0.81    |
| 4_B  | 533.43                   | 540.45  | 1.32    | 843.31                  | 853.93  | 1.26    | 1499.18                 | 1514.11 | 1.00    | 3311.68                 | 3338.38 | 0.81    |
| 5_B  | 881.71                   | 887.53  | 0.66    | 1393.90                 | 1412.74 | 1.35    | 2477.99                 | 2502.62 | 0.99    | 5473.85                 |         |         |
| 6_B  | 1317.18                  | 1339.88 | 1.72    | 2082.36                 | 2113.74 | 1.51    | 3701.87                 | 3785.27 | 2.25    | 8177.41                 |         |         |
| 1_T  | 295.70                   | 295.70  | 0.00    | 376.20                  | 376.20  | 0.00    | 504.60                  | 504.60  | 0.00    | 738.89                  | 738.89  | 0.00    |
| 2_T  | 887.10                   | 887.53  | 0.05    | 1128.60                 | 1128.94 | 0.03    | 1513.80                 | 1514.11 | 0.02    | 2216.67                 | 2340.31 | 5.58    |
| 3_T  | 1478.50                  | 1494.97 | 1.11    | 1881.00                 | 1917.25 | 1.93    | 2523.00                 | 2595.00 | 2.85    | 3694.45                 | 4091.92 | 10.76   |

B : Bending mode, T : Torsion mode

Unit : Hz

表 3-9 不同長度試片(模擬)之共振頻率

|      | Test 9<br>$L/b = 10$ |        |         | Test 10<br>$L/b = 8$ |        |         | Test 11<br>$L/b = 6$ |        |         | Test 12<br>$L/b = 4$ |        |         |
|------|----------------------|--------|---------|----------------------|--------|---------|----------------------|--------|---------|----------------------|--------|---------|
| Mode | Theory               | FEM    | Err.(%) | Theory               | FEM    | Err.(%) | Theory               | FEM    | Err.(%) | Theory               | FEM    | Err.(%) |
| 1_B  | 15.00                | 15.06  | 0.40    | 15.00                | 14.99  | -0.07   | 15.00                | 15.12  | 0.80    | 15.00                | 15.00  | 0.00    |
| 2_B  | 94.01                | 94.31  | 0.32    | 94.01                | 93.89  | -0.13   | 94.01                | 94.61  | 0.64    | 94.01                | 93.71  | -0.32   |
| 3_B  | 263.26               | 263.95 | 0.26    | 263.26               | 262.64 | -0.23   | 263.26               | 264.67 | 0.54    | 263.26               | 261.39 | -0.71   |
| 4_B  | 515.89               | 517.02 | 0.22    | 515.89               | 514.00 | -0.37   | 515.89               | 518.16 | 0.44    | 515.89               | 509.35 | -1.27   |
| 5_B  | 852.71               | 854.22 | 0.18    | 852.71               | 848.24 | -0.52   | 852.71               | 855.18 | 0.29    | 852.71               | 835.84 | -1.98   |
| 6_B  | 1273.87              | 1275.1 | 0.10    | 1273.87              | 1264.4 | -0.74   | 1273.87              | 1274.1 | 0.02    | 1273.87              | 1237.2 | -2.88   |
| 1_T  | 300.00               | 295.70 | -1.43   | 250.00               | 247.54 | -0.98   | 175.00               | 175.49 | 0.28    | 125.00               | 127.41 | 1.93    |
| 2_T  | 900.00               | 891.13 | -0.99   | 750.00               | 747.04 | -0.39   | 525.00               | 533.33 | 1.59    | 375.00               | 390.27 | 4.07    |
| 3_T  | 1500.00              | 1498.5 | -0.10   | 1250.00              | 1259.7 | 0.78    | 875.00               | 911.06 | 4.12    | 625.00               | 676.33 | 8.21    |

B : Bending mode, T : Torsion mode

Unit : Hz

### 3.5 小結

本章首先推導正交性材料矩陣，共有 9 個常數需進行反算，接著推導歐拉-伯努力梁彎曲與扭轉共振頻率，以鋼珠落擊實驗進行 3 個方向試片的量測，能夠準確反算楊氏模量與剪切模量，但無法直接求得蒲松比，本章以等效為等向性材料的方式進行計算。

最後探討原理論的尺寸比例限制，從實驗與模擬的結果來看長扁梁的結構，寬厚比的下限大約為 4，超過此極限將影響彎曲與扭轉模態的誤差；長寬比的下界也大約為 4，超過此比例則影響扭轉模態理論的適用性；而長厚比的影響相對較不顯著，也就是說以原本的方式，無法對短梁、厚梁進行材料常數的反算。此外，厚梁與短梁共振頻率較高，以鋼珠落擊實驗的方式也不易觀察頻率峰值。

下一章將探討在長厚梁與薄板的結構，也能夠進行材料常數反算的方法，並且導入能夠評估蒲松比的理論，搭配基因遺傳演算法，直接求得所有的材料參數。

## 第四章 基因遺傳演算法



對於反向最佳化求解的問題，常見的方法有梯度下降(Gradient Descent)、牛頓法(Newton's Method)、模擬退火法(Simulated Annealing)、差分演化(Differential Evolution, DE)、粒子群優化(Particle Swarm Optimization, PSO)與基因遺傳演算法(Genetic Algorithm, GA)...等等。而其中 GA 是一種全域性最佳化搜索演算法，對於大範圍、多峰與非線性的搜索空間，其性能表現出色，並且透過改變適應函數可以適用於各種不同類型和複雜程度的問題，常用於排程問題與參數優化，在工程領域上建築設計、電路設計、控制系統優化、空氣動力學形狀優化與供應鏈管理...等等都能看到應用 GA 的實際案例。而本章將對多參數之梁板結構進行材料常數反算，因此選用 GA 做為最佳化演算法。

本章首先將簡單介紹 GA 之發展與概念，接著探討其中重要機制各方法的比較與選用，最後推導厚梁與薄板理論，結合 GA 進行材料常數反算。

### 4.1 簡介

GA 的概念源自於 1959 年由 John H. Holland 所提出，其模仿達爾文的自然選擇理論來解決優化問題，屬於人工智慧領域中的演化論學派，接著 Kenneth A. DeJong 於 1975 年[33]以測試函數分析與評估 GA 的機制和性能，而在 1983 年 David E. Goldberg[34]使用模擬二進制基因(Gene)的演算法，開啟了 GA 開始實踐應用的里程碑，已在多個領域中成為解決最佳化問題的重要工具。GA 的基本概念包含個體(Individual)：或稱為染色體組(Chromosomes)，通常表示一個可能的解，並且每個個體都有一個或多個由數字或符號組成的基因序列編碼來表示其特性或特徵；族群(Population)：一群個體所組成，每一次迭代或者說每一世代(Generation)中，都會有一個族群存在，族群中的個體可以通過演算法機制來產生新的個體；適應函數(Fitness Function)：用於評估個體的好壞，即評估個體解決問題的能力，在演算法中，適應值表現越好的個體被選為產生下一代的機率越高。整體流程首先初

始化一個族群，然後進行選擇、交叉和突變...等操作來產生新的族群，再根據適應函數評估新族群，然後繼續以上的操作直到達到終止條件，例如達到最大迭代次數或找到足夠好的解。本章所使用的 GA 架構係參考 Holland 所提出的原始概念，或稱為 Simple/Canonical GA(SGA)。



## 4.2 演算法機制

SGA 的基本流程如圖 4-1 所示，以下詳細說明其步驟：

1. 初始化：首先創建一個含有隨機解的個體集合，稱為初始族群，族群的個體數量為族群大小(Population Size)。
2. 評估：每個個體皆代入適應函數進行計算和評估。
3. 選擇(Selection)：依據評估的結果，從當前族群中選擇較優質的個體進行接下來的遺傳操作，適應值較高的個體會被複製到演化池的機率較大。
4. 交叉(Crossover)：選定的個體被配對並交換他們染色體的基因片段，以產生新的個體，這些新的個體被稱為子代。
5. 突變(Mutation)：在子代中，隨機選擇一些基因進行突變，以增加族群的多樣性和適應性，形成最終子代。
6. 取代：最後利用最終子代(部分)替換掉當前族群中的某些個體，形成新的族群。
7. 終止條件：當滿足終止條件則停止演算法運作，常見的終止條件為最大世代數或結果小於設定的誤差門檻。

後面的小節將針對選擇、交叉與突變做更詳細不同方法的探討與選用。

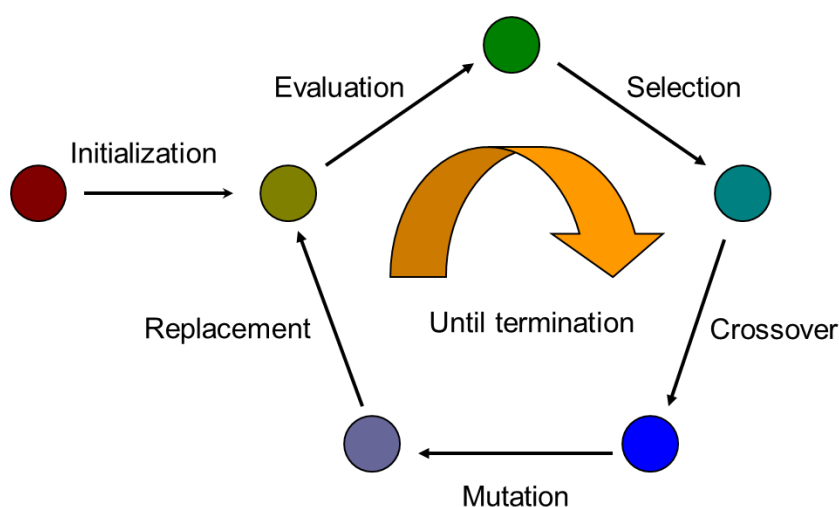


圖 4-1 SGA 演算法流程圖



### 4.2.1 選擇

常見的選擇機制包含輪盤(Roulette-Wheel, RW)、隨機餘數(Stochastic Remainder Selection, SRS)、隨機廣布(Stochastic Universal Selection, SUS)、排序(Ranking Selection)、截斷(Truncation Selection)、後代產生(Mu-lambda Selection)與競技(Tournament Selection)...等，其中可以將選擇機制分成兩大類，一類是由適應函數直接決定，以 RW 為例，假設我們有 4 個個體，將他們皆代入適應函數進行計算，適應值分別為  $f_1=10$ ,  $f_2=4$ ,  $f_3=6$ ,  $f_4=20$ ，定義適應值越大有越高的機率會被選擇，因此可以透過  $p_i = \frac{f_i}{\sum_j f_j}$  計算個體被選擇的機率，將結果繪製如圖 4-2，

概念上將隨機拋射飛鏢，落至於哪個區域即選擇哪個個體，然而這種方式有一限制，其收斂速度完全由適應函數所決定，且速度是我們不易進行控制的；另一類則是直接或間接引入排序的概念，先將個體的適應值進行排序，這樣的作法收斂速度是較容易控制的，可以用不同的機制去控制要選擇排名較前的多少比例。

在 GA 的選擇機制當中還有兩個問題是希望可以避免的，雜訊(Noisy)與偏差(Bias)，前者指我們不希望有太高的機率選擇到表現太差的個體，並且是不可控制的，以前面 RW 的結果為例，我們有可能每次都選擇到  $p_2$  這個區域，而且我們沒有辦法去控制這個結果；後者則指當我們將適應函數進行平移之後，其結果會改變，再以前述 RW 的說明為例，當我們將 4 個個體的適應值皆加 1，其所計算的機率結果分布將不同。將常見的選擇機制其演算法步數(Running Time)與避免雜訊的程度整理於表 4-1，本研究將使用競技選擇的形式作為選擇機制，由於其屬於排序類的演算法，因此不會有偏差的問題，而其在運行時間與去雜訊的能力也表現得相當好，因此選擇使用此機制，也是在 SGA 當中最常被使用的方法。

競技選擇又可分為取後放回(w/replacement)與取後不放回(w/o replacement)的模式，而取後不放回的方式能有更低的雜訊，因為可以降低重複選擇到表現不好的個體機率，而其中最重要的參數為競爭大小(Tournament Size, s)，其意義為從族群

當中選擇多少個體進行競爭，其值越小收斂速度越慢，通常設定為 2，在不進行額外操作時有最慢的收斂速度，通常能收斂到較好的結果，能應用於較廣泛的問題，如  $s = 2$  收斂速度依然過快則可給定一定的機率選擇表現較差的個體。假設族群大小為 100、 $s = 4$ ，此選擇機制的示意圖如圖 4-3，格中的數值為適應值(定義適應值越大表現越好)，隨機選擇 4 個個體進行競技，並只留下表現最好的個體，而在實作上通常控制選擇後的族群大小與選擇前相同，由於是取後不放回的形式，重複  $n/s$  次的競技後原族群即空，因此總共需進行  $s$  次的選擇機制，方可使選擇後的大小填補至原始族群大小，且最佳的個體將出現在選擇後的族群  $s$  次。

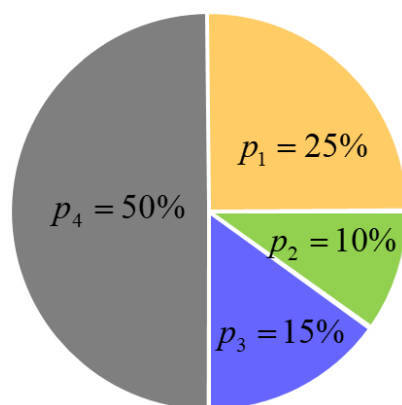


圖 4-2 RW 選擇示意圖

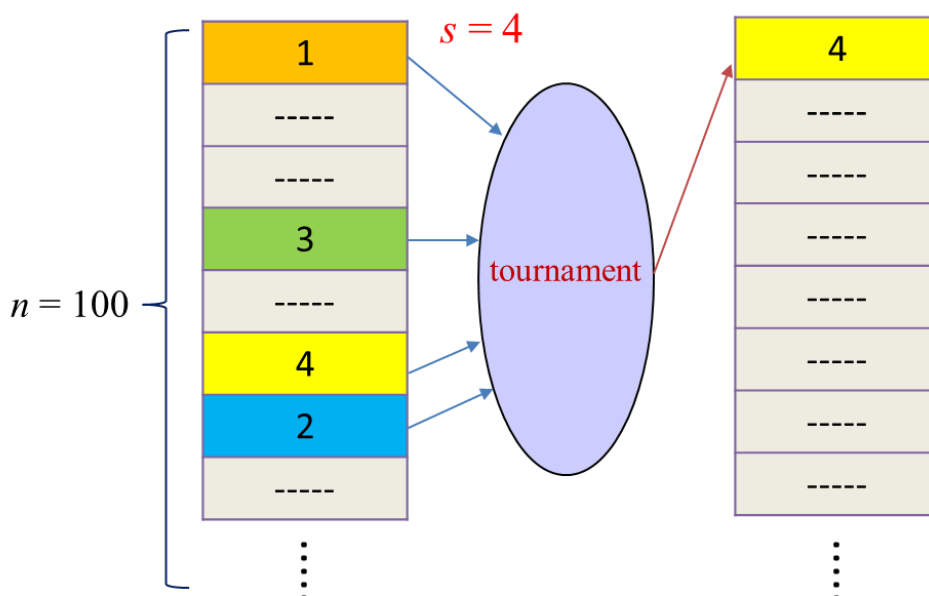


圖 4-3 競技選擇(取後不放回)示意圖

表 4-1 各選擇機制之比較

| Selection                     | Running Time                  | Not Noisy |
|-------------------------------|-------------------------------|-----------|
| Roulette wheel                | $O(n^2)$ or $O(n \log n)^*$   | ★☆☆☆☆     |
| SRS                           | $O(n^2)$ or $O(n \log n)^*$   | ★☆☆☆☆     |
| SUS                           | $O(n \log n)$ or $O(n)^{**}$  | ★☆☆☆☆     |
| Truncation                    | $O(n \log n)$ or $O(n)^{***}$ | ★☆☆☆☆     |
| Mu-lambda                     | $O(n \log n)$ or $O(n)^{***}$ | ★☆☆☆☆     |
| Ranking                       | $O(n \log n)$                 | ★☆☆☆☆     |
| Tournament w/<br>replacement  | $O(n)$                        | ★☆☆☆☆     |
| Tournament w/o<br>replacement | $O(n)$                        | ★☆☆☆☆     |

\* When binary search is adopted. \*\* When SUS without sorting first. \*\*\* When  $O(n)$  finding-median algorithms is adopted.

## 4.2.2 交叉

交叉機制可以分為多點交叉 (M-Points Crossover) 與均勻交叉 (Uniform Crossover)，其中多點交叉又可分為偶數或奇數點的交叉，偶數點的交叉進行基因序列交後之後，子代的基因序列最前段與最後段一定皆來自父代或皆來自母代，因此其類似於環狀切割，如圖 4-4，而奇數點的交叉則反之，子代的基因序列最前段如來自父代則最後段一定來自母代，為列表式的切割，如圖 4-5；均勻交叉則是子代的每個基因皆有相同的機率來自父代或母代，如圖 4-6。根據 1989 年 Eshelman, Caruana 與 Schaffer[35] 的研究，如圖 4-7，其中橫軸為分布偏誤 (Distributional Bias)，指子代的基因序列來自同一個父母的比例，從圖中可以觀察當均勻交叉的機率越大或越小時，子代的基因序列將更集中來自父代或母代，因此分布偏誤會越大；縱軸則為位置偏誤 (Positional Bias)，意指子代的基因序列來自同一父母的機率與位置的相關性，從圖中可以發現均勻交叉較多點交叉來的低，由於均勻交叉是以機率進行基因序列的交換，因此與位置無關，而偶數點的交叉又較奇數點的交叉來的低，則是因為偶數點的交叉由前面討論的特性，其類似於環狀切割，其分割的位置較為連續。從研究指出越小的兩個偏誤會有更穩定的結果，因此實務上通常選用 2 點





交叉或1/2均勻交叉，如最佳化的分布趨式較為明顯可選用 2 點交叉，反之則可選用1/2均勻交叉。

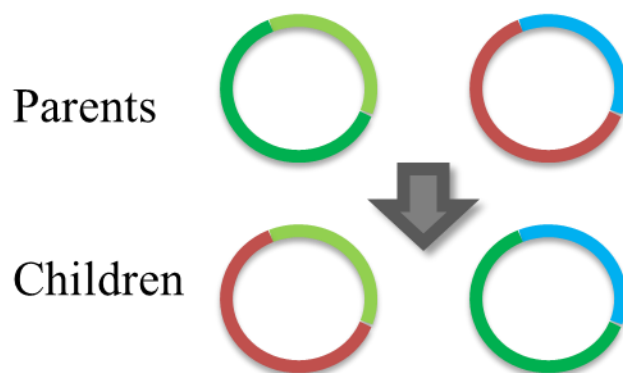


圖 4-4 兩點交叉

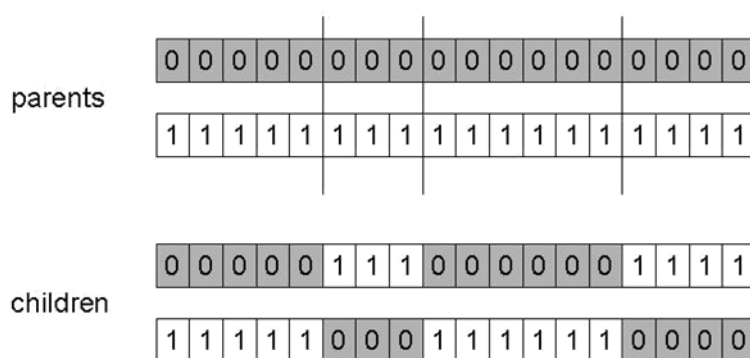


圖 4-5 三點交叉

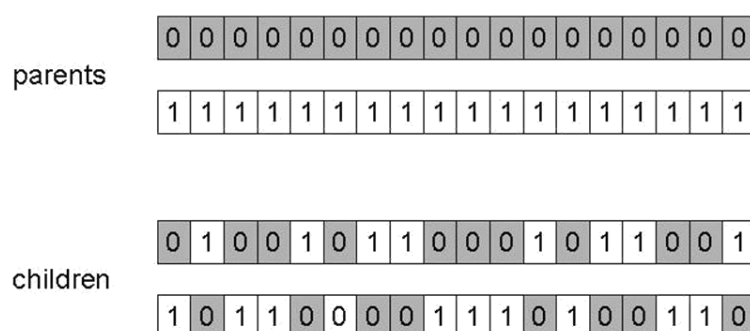


圖 4-6 均勻交叉

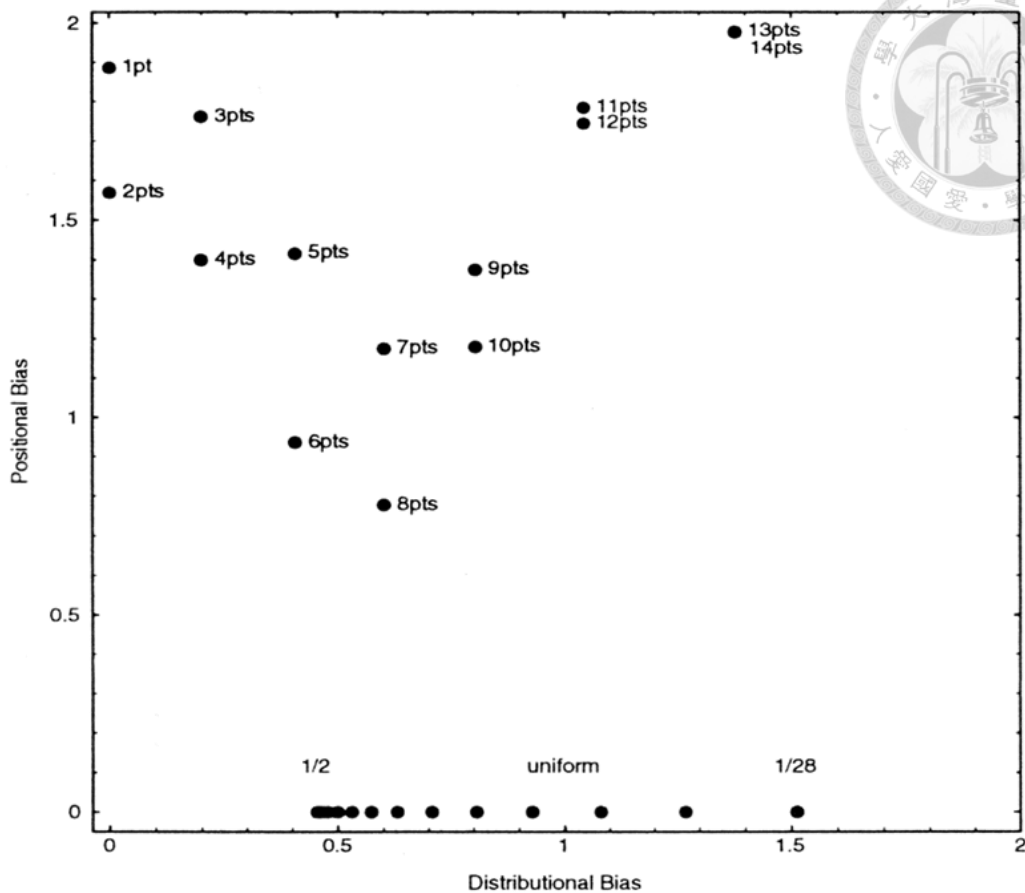


圖 4-7 不同交叉機制之位置與分佈偏誤

### 4.2.3 突變

本研究並沒有使用較特殊的突變方法，但在演算法中以突變計數(Mutation Clock)的方式進行加速，假設我們有  $n$  個個體(染色體)，每個個體有  $l$  個基因，如圖 4-8 所示，給定突變率為  $p_m$  則第一個突變的基因在第一個位置的機率為  $p_m$ ，在第 2 個位置的機率為  $(1-p_m)p_m$ ，以此類推在第  $t$  個位置為  $(1-p_m)^{t-1}p_m$ ，將各位置的機率進行累積分布(級數)可得：

$$\Pr(i \leq t) = 1 - (1 - p_m)^{t-1} \quad (4-1)$$

經過整理可得：

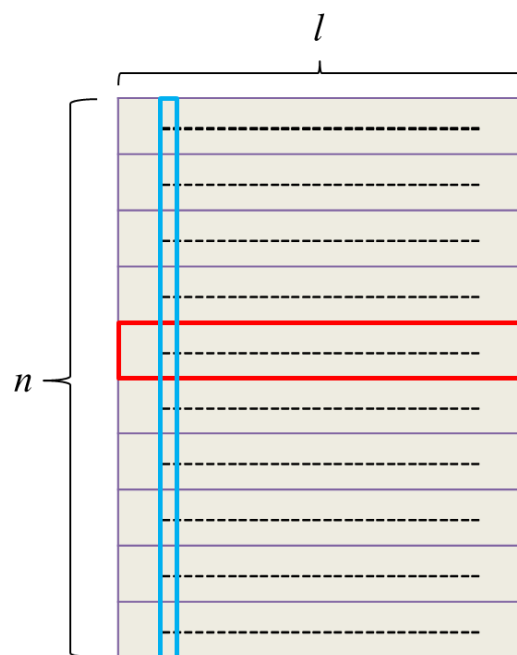
$$1 - \Pr = (1 - p_m)^{t-1} \quad (4-2)$$



將兩邊取對數即可得：

$$t = \frac{\ln(1 - Pr)}{\ln(1 - p_m)} + 1 \quad (4-3)$$

因此只要隨機給定界於 0 至 1 之間的  $Pr$ ，即可計算出下一個要進行突變的基因與前一個突變基因的間隔  $t$ ，不用每個基因都以  $p_m$  的機率掃過，可以將原來的演算法步數由  $O(nl)$  下降至  $O(p_m \times nl)$ ，而  $p_m$  通常很小，因此此方法有滿高的效益。



$n$  : the number of chromosomes  
 $l$  : length of chromosome

圖 4-8 Mutation Clock 示意圖



### 4.3 長厚梁結構材料常數反算

本節首先將推導鐵木辛柯梁理論(Timoshenko-Ehrenfest Beam Theory)彎曲模態共振頻率[36]，接著以模擬驗證梁理論當中切變係數(Shear Coefficient,  $\kappa$ )的選用，最後以實際實驗結合 GA 進行材料常數的反算。

#### 4.3.1 鐵木辛柯梁理論

根據鐵木辛柯的假設[37]，與歐拉-伯努力梁的差異主要多考慮旋轉慣性和剪切變形的影響，梁撓度(Deflection,  $y$ )與彎曲斜率(Bending Slope,  $\psi$ )的耦合關係為：

$$EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \kappa \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) AG - I \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (4-4)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \kappa \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) AG = 0 \quad (4-5)$$

其中  $E$  為楊氏模量、 $G$  為剪切模量、 $I$  為轉動慣量、 $A$  為截面積、 $\rho$  為密度、 $\kappa$  為切變係數。

令  $y = Y e^{i\omega t}$ 、 $\psi = \Psi e^{i\omega t}$  可將(4-4)式與(4-5)式改寫為：

$$Y^{iv} + b^2(r^2 + s^2)Y'' - b^2(1 - b^2 r^2 s^2)Y = 0 \quad (4-6)$$

$$\Psi^{iv} + b^2(r^2 + s^2)\Psi'' - b^2(1 - b^2 r^2 s^2)\Psi = 0 \quad (4-7)$$

其中  $b^2 = \frac{1}{EI} \rho A L^4 \omega^2$ 、 $s^2 = \frac{EI}{\kappa A G L^2}$ 、 $r^2 = \frac{I}{A L^2}$ 、 $\xi = x / L$ 。

(4-6)與(4-7)式可解得當  $\left[ (r^2 - s^2)^2 + 4 / b^2 \right]^{1/2} \geq (r^2 + s^2)$  時(Case 1)：

$$Y = C_1 \cosh b\alpha\xi + C_2 \sinh b\alpha\xi + C_3 \cos b\beta\xi + C_4 \sin b\beta\xi \quad (4-8)$$

$$\Psi = C_1' \sinh b\alpha\xi + C_2' \cosh b\alpha\xi + C_3' \sin b\beta\xi + C_4' \cos b\beta\xi \quad (4-9)$$

其中

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \mp(r^2 + s^2) + \left[ (r^2 - s^2)^2 + 4 / b^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (4-10)$$

當  $\left[ (r^2 - s^2)^2 + 4 / b^2 \right]^{1/2} < (r^2 + s^2)$  時(Case 2)：

$$Y = C_1 \cos b\alpha'\xi + iC_2 \sin b\alpha'\xi + C_3 \cos b\beta\xi + C_4 \sin b\beta\xi \quad (4-11)$$



$$\Psi = iC_1' \sin b\alpha'\xi + C_2' \cos b\alpha'\xi + C_3' \sin b\beta\xi + C_4' \cos b\beta\xi \quad (4-12)$$

其中  $\alpha' = \frac{1}{i}\alpha$ 。

代入懸臂梁固定端與自由端的邊界條件：

$$\begin{array}{ll} \text{Clamped end :} & \text{Free end :} \\ Y = 0 & \Psi' = 0 \\ \Psi = 0 & \frac{1}{L}Y' - \Psi = 0 \end{array} \quad (4-13)$$

可得特徵方程(Case 1)：

$$2 + [b^2(r^2 - s^2) + 2] \cosh b\alpha \cos b\beta - \frac{b(r^2 + s^2)}{(1 - b^2r^2s^2)^{1/2}} \sinh b\alpha \sin b\beta = 0 \quad (4-14)$$

(Case 2)：

$$2 + [b^2(r^2 - s^2) + 2] \cos b\alpha' \cos b\beta - \frac{b(r^2 + s^2)}{(b^2r^2s^2 - 1)^{1/2}} \sin b\alpha' \sin b\beta = 0 \quad (4-15)$$

將(4-14)與(4-15)式等式左邊取對數並進行掃頻，圖中低點即為懸臂梁彎曲模態的共振頻率。

在使用此理論前，理論當中還有一參數 $\kappa$ 需進行選用，因此下一小節將討論選用的 $\kappa$ 其特性以及代入梁理論後，其頻率的結果是否與模擬相對應，確保實際應用的可行性。

### 4.3.2 切變係數

對於切變係數有很多樣性的討論，有不同的假設將得到不同的結果，對於長方體結構，最早於 1940 年 S. P. Timoshenko[38]提出 $\kappa$ 應為 0.667，而後 L. E. Goodman[39]與 R. D. Mindlin[40]分別於 1951 與 1953 年基於高頻的振動模態提出 $\kappa$ 分別為 0.870( $\nu=1/3$ )和 0.822，R. J. Roark 則考慮靜態位移變形於 1954 年認為 $\kappa$ 為 0.833。在 1966 年 G. R. Cowper[41]提出了以蒲松比為變量的理論 $\kappa = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu}$ ，但其認為此結果在靜態與低頻的振動問題結果較為準確，於 1975 年 T. Kaneko[42]也以滿足平面應力的結果提出了 $\kappa = \frac{5+5\nu}{6+5\nu}$ 。而於 2001 年 J. R. Hutchinson[43]提出

除了與蒲松比之外也與寬厚比例相關的理論結果，在文中也提到其在動態問題有不錯的表現，因此本研究將參考此切變係數的推導，將其代入鐵木辛柯梁理論，觀察其是否具材料常數反算的適用性。以下將詳細推論此理論：

位移與應力場的假設如下(座標系統如圖 4-9 所示)：

$$u = -y\psi(x, t) \quad (4-16)$$

$$v = \varphi(x, t) + \frac{\nu}{2}y^2\psi' - \frac{\nu}{2}z^2\psi' \quad (4-17)$$

$$w = \nu yz\psi' \quad (4-18)$$

$$\sigma_x = -E y \psi' \quad (4-19)$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0 \quad (4-20)$$

$$\tau_{xy} = \frac{V}{I_z} f_1(y, z) \quad (4-21)$$

$$\tau_{xz} = \frac{V}{I_z} f_2(y, z) \quad (4-22)$$

其中位移場、軸向應力與剪切應力  $\tau_{yz}$  的假設根據截面變形之後仍維持為平面，而

$\tau_{xy}$  與  $\tau_{xz}$  則考慮尾端受力的懸臂梁，由 A. E. H. Love[44]所提出：

$$f_2 = -\frac{1}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial \chi}{\partial z} + (2+\nu)yz \right) \quad (4-23)$$

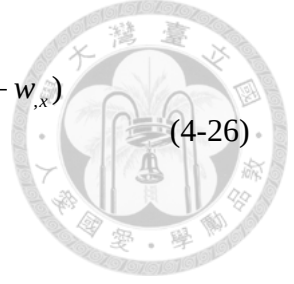
$$f_1 = -\frac{1}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\nu y^2}{2} + \frac{(2-\nu)z^2}{2} \right) \quad (4-24)$$

其中  $\chi(y, z)$  為調和函數(Harmonic Function)，其除了要滿足邊界條件之外，也與截面形狀有關：

$$\frac{\partial \chi}{\partial n} = -n_y \left( \frac{\nu y^2}{2} + \frac{(2-\nu)z^2}{2} \right) - n_z (2+\nu)yz \quad (4-25)$$

根據海靈格定理(Hellinger-Reissner Principle)，其動態型式可寫為：

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{Vol} \left\{ \sigma_x u_{,x} - \sigma_x^2 / 2E + \tau_{xy} (u_{,y} + v_{,x}) - \tau_{xy}^2 / 2G + \tau_{xz} (u_{,z} + w_{,x}) - \tau_{xz}^2 / 2G - \frac{1}{2} \rho u_{,t}^2 - \frac{1}{2} \rho v_{,t}^2 - \frac{1}{2} \rho w_{,t}^2 \right\} dV dt = 0 \quad (4-26)$$



將(4-16)至(4-22)式代入(4-26)式並透過以下性質：

$$\int_A f_2(y, z) dA = 0 \quad (4-27)$$

$$\int_A f_1(y, z) dA = I_z \quad (4-28)$$

$$V = I_z (\rho \ddot{\psi} - E \psi'') \quad (4-29)$$

以截面積積分可得：

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_L \left\{ \frac{1}{2} E I_z \psi'^2 + E I_z \psi'' \psi - E I_z \psi'' \phi' - \rho I_z \dot{\psi} \psi + \rho I_z \dot{\psi} \phi' - \frac{\nu E}{2} C_1 \psi''^2 - \frac{E^2}{2G} C_2 \psi''^2 - \frac{1}{2} \rho I_z \dot{\psi}^2 - \frac{1}{2} \rho A \dot{\phi}^2 - \frac{\nu \rho}{2} (I_z - I_y) \dot{\phi} \dot{\psi}' \right\} dL dt = 0 \quad (4-30)$$

其中

$$A = \int_A dA \quad I_z = \int_A y^2 dA \quad I_y = \int_A z^2 dA \quad (4-31)$$

$$C_1 = \int_A (f_1 y^2 - f_1 z^2 + 2 f_2 yz) dA \quad (4-32)$$

$$C_2 = \int_A (f_1^2 + f_2^2) dA \quad (4-33)$$

$$C_3 = \int_A (y^4 + z^4 + 2y^2 z^2) dA \quad (4-34)$$

透過分離變數法可改寫為：

$$\psi'' - \phi''' + \frac{\rho}{E} \ddot{\phi}' + \frac{C_4}{I_z} \psi'''' - \frac{\rho}{E} \ddot{\psi} - \frac{\nu \rho}{2E} \left(1 - \frac{I_y}{I_z}\right) \ddot{\phi}' = 0 \quad (4-35)$$

$$\psi''' - \frac{\rho}{E} \ddot{\psi}' + \frac{\rho A}{E I_z} \ddot{\phi} + \frac{\nu \rho}{2E} \left(1 - \frac{I_y}{I_z}\right) \ddot{\psi}' = 0 \quad (4-36)$$

其中  $C_4 = -\nu C_1 - \frac{E}{G} C_2$

將解得之特徵方程式與原鐵木辛柯梁的結果比較，即可求得：



$$\kappa = -\frac{2(1+\nu)}{\left[ \frac{A}{I_z^2} C_4 + \nu \left( 1 - \frac{I_y}{I_z} \right) \right]} \quad (4-37)$$

對於長方形截面(梁之厚度為  $2a$ ，寬度為  $2b$ )：

$$\kappa = -\frac{2(1+\nu)}{\left[ \frac{9}{4a^5b} C_4 + \nu \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \right]} \quad (4-38)$$

其中

$$C_4 = \frac{4}{45} a^3 b (-12a^2 - 15\nu a^2 + 5\nu b^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16\nu^2 b^5 (n\pi a - b \tanh(\frac{n\pi a}{b}))}{(n\pi)^5 (1+\nu)} \quad (4-39)$$

從(4-39)式可知參數  $C_4$  具無窮級數項，因此首先探討展開項數的收斂性，假設尺寸比例接近與後小節要進行反算的試片尺寸，並將蒲松比設為 0.5，將(4-39)式的級數項部分隨著展開項的大小進行繪圖，如圖 4-10，可以發現大約展開 10 項( $n=10$ )，級數即收斂，而在實際進行計算時將取  $n=20$ 。接著將切變係數對蒲松比作圖，如圖 4-11，可以觀察隨著蒲松比的增大，切變係數可能的區間為正值→正無窮大、負無窮大→負值，從(4-6)與(4-7)式的結果鐵木辛柯梁理論使用到切變係數的位置在分母，因此其值至無限大是合理的。

將切變係數代入鐵木辛柯梁理論，假設楊氏模量與剪切模量為 1 GPa，懸臂梁的長寬高分別為 100、10 與 1 mm，密度為 1000 kg/m<sup>3</sup>，設定不同的蒲松比，將理論與模擬的結果比較於表 4-2，其中模擬定為「xy 平面-x 方向」的試片，在模擬當中改變  $E_x$ 、 $G_{xy}$  與  $\nu_{xy}$  之外的材料常數，只要數量級沒有過大的差異，對共振頻的影響不大，因此設定  $E_x = E_y = E_z = G_{xy} = G_{xz} = G_{yz} = 1$  GPa、 $\nu = \nu_{xy}$  以及  $\nu_{xz} = \nu_{yz} = 0$ ，從表中可以觀察到隨著蒲松比的增加，理論與模擬間的誤差會越大，然而大部分材料的蒲松比落於 0.3 左右，表中蒲松比為 0.25 時誤差皆不超過 1%，這個結果對於我們要進行材料常數反算是可以接受的。

鐵木辛柯梁理論一般認為在厚梁的表現較歐拉-伯努力梁理論來的好，因此最後也要確保在超過 3.4.1 小節所討論之尺寸極限時，鐵木辛柯梁理論確實有較高的



適用性，假設楊氏模量為 1 GPa，剪切模量  $= \frac{E}{2(1+\nu)}$ ，懸臂梁的長寬為 160 與 18 mm，密度為 1000 kg/m<sup>3</sup>，在此理論與模擬皆設定為等向性材料且蒲松比為 0，原因在歐拉-伯努力梁理論當中並沒有蒲松比項，3.4.1 小節所討論之寬厚比極限大約為 4，在此更極端地比較寬厚比為 3 與 2，觀察歐拉-伯努力梁、鐵木辛柯梁理論與模擬之間的對應性，將結果整理於表 4-3，從表中可以觀察歐拉-伯努力梁與模擬的誤差在寬厚比為 3 時已超過 5%，在寬厚比為 2 則超過 10%，但鐵木辛柯梁理論的結果幾乎與模擬相同，可以確定在長厚梁的結構下，鐵木辛柯梁理論確實有較好的適用性。

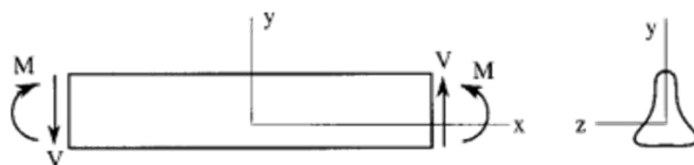


圖 4-9 切變係數推導之座標系統

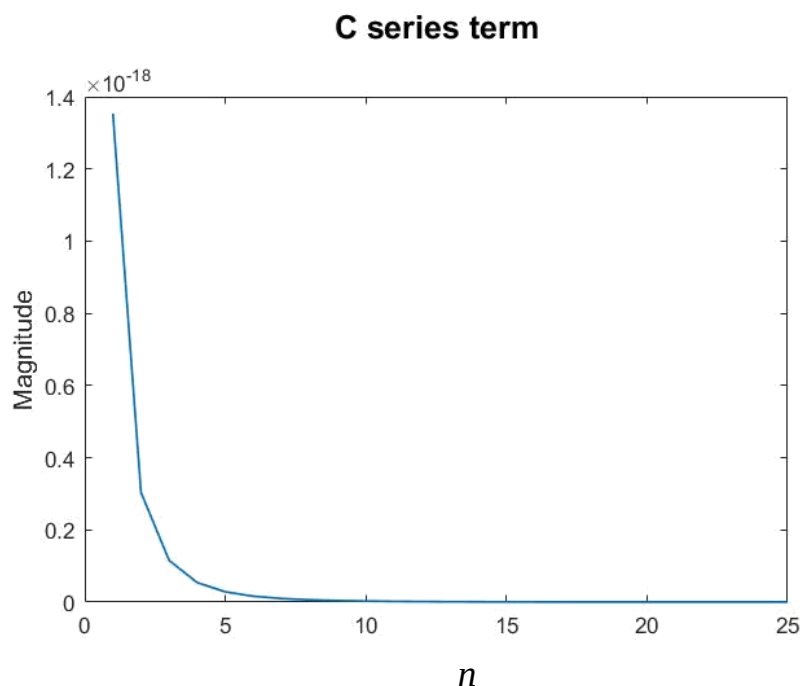


圖 4-10 切變係數無窮級數項收斂性分析

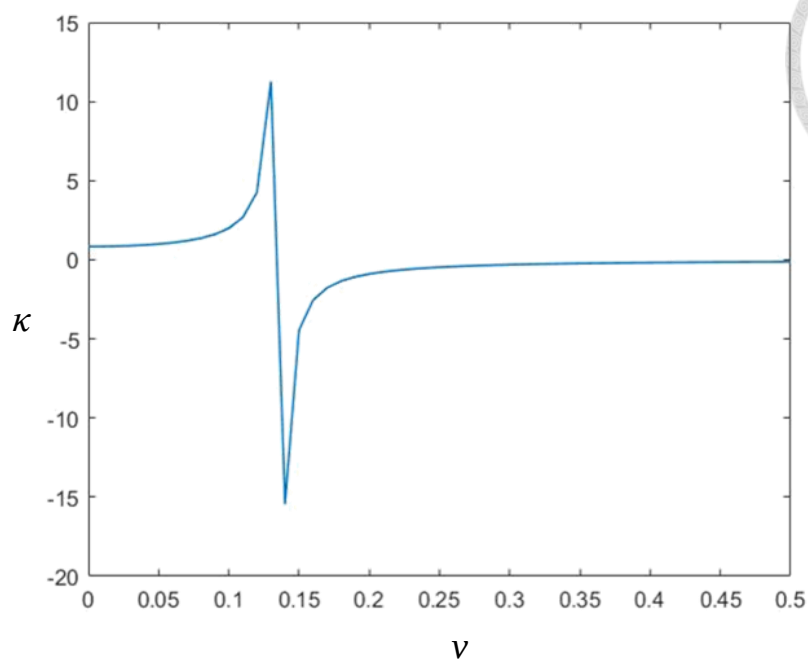


圖 4-11 切變係數與蒲松比之關係

表 4-2 鐵木辛柯梁理論與模擬之比較

|      | $\nu = 0$ |        |         | $\nu = 0.25$ |        |         | $\nu = 0.5$ |        |         |
|------|-----------|--------|---------|--------------|--------|---------|-------------|--------|---------|
| Mode | Theory    | FEM    | Err.(%) | Theory       | FEM    | Err.(%) | Theory      | FEM    | Err.(%) |
| 1_B  | 16.15     | 16.15  | 0.00    | 16.16        | 16.25  | -0.55   | 16.16       | 16.55  | -2.36   |
| 2_B  | 101.21    | 101.21 | 0.00    | 101.28       | 101.78 | -0.49   | 101.44      | 103.69 | -2.17   |
| 3_B  | 283.26    | 283.26 | 0.00    | 283.76       | 285.20 | -0.50   | 284.84      | 291.60 | -2.32   |
| 4_B  | 554.75    | 554.75 | 0.00    | 556.55       | 559.60 | -0.55   | 560.50      | 575.55 | -2.61   |
| 5_B  | 916.32    | 916.33 | 0.00    | 921.09       | 926.28 | -0.56   | 931.60      | 959.09 | -2.87   |
| 6_B  | 1367.52   | 1367.5 | 0.00    | 1377.91      | 1385.2 | -0.53   | 1401.10     | 1443.7 | -2.95   |
| 7_B  | 1907.85   | 1907.9 | 0.00    | 1927.79      | 1936.0 | -0.42   | 1972.92     | 2029.9 | -2.81   |
| 8_B  | 2536.72   | 2536.8 | 0.00    | 2571.65      | 2578.1 | -0.25   | 2651.94     | 2717.4 | -2.41   |

表 4-3 歐拉-伯努力梁(E)、鐵木辛柯梁理論(T)與模擬之比較

| Mode | $h = 6 \text{ (mm)}$<br>$(b/h = 3)$ |        |        |                |                | $h = 9 \text{ (mm)}$<br>$(b/h = 2)$ |        |        |                |                |
|------|-------------------------------------|--------|--------|----------------|----------------|-------------------------------------|--------|--------|----------------|----------------|
|      | E                                   | T      | FEM    | Err.(%)<br>(E) | Err.(%)<br>(T) | E                                   | T      | FEM    | Err.(%)<br>(E) | Err.(%)<br>(T) |
| 1_B  | 37.86                               | 37.83  | 37.83  | 0.07           | 0.00           | 56.79                               | 56.67  | 56.67  | 0.20           | 0.00           |
| 2_B  | 237.26                              | 235.75 | 235.76 | 0.64           | 0.00           | 355.89                              | 350.85 | 350.86 | 1.43           | 0.00           |
| 3_B  | 664.41                              | 654.40 | 654.42 | 1.53           | 0.00           | 996.61                              | 963.98 | 964.04 | 3.38           | -0.01          |
| 4_B  | 1302.0                              | 1266.6 | 1266.7 | 2.79           | -0.01          | 1953.0                              | 1840.3 | 1840.6 | 6.11           | -0.01          |
| 5_B  | 2152.1                              | 2061.6 | 2061.8 | 4.38           | -0.01          | 3228.1                              | 2948.1 | 2948.7 | 9.48           | -0.02          |
| 6_B  | 3215.0                              | 3024.1 | 3024.4 | 6.30           | -0.01          | 4822.5                              | 4250.6 | 4251.8 | 13.42          | -0.03          |

### 4.3.3 演算法參數選用

本論文以 MATLAB R2021b 實作 GA 進行材料常數的反算，以下詳細說明演算法編程上的設定：

#### ● 個體染色體設計

由 4.3.1 小節的結果，以鐵木辛柯梁理論彎曲模態的共振頻率進行反算，一次只能反算兩個材料參數： $E$  與  $\kappa G$ ，意即在演算法當中要最佳化這兩個參數的組合，因此一個個體包含兩個參數的資訊，如(4-40)式所示，而一個參數由一條染色體代表，在編碼上採用二進位的形式，每條染色體的串列長度為 10 (bits)，如(4-41)式所示，串列長度越長生成的參數精度越高，而長度為 10 大約可以生程範圍千分之一的精度，對本研究來說是足夠的。

$$X_i = [E_i, (\kappa G)_i] \quad (4-40)$$

$$X_i = [\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}, \boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}] \quad (4-41)$$

接著透過(4-42)式進行二進位編碼的解碼：

$$X_{ij} = X_j^{\min} + M_j \frac{X_j^{\max} - X_j^{\min}}{2^{L_j} - 1} \quad (4-42)$$



其中  $X_{ij}$  為第  $i$  個個體的第  $j$  條染色體、 $X_j^{\min}$  為第  $j$  條染色體(參數)的下界、 $X_j^{\max}$  為第  $j$  條染色體(參數)的上限、 $M_j$  為第  $j$  條染色體串列的十進位數值而  $L_j$  為第  $j$  條染色體的串列長度。

在隨機生成材料常數時必須考量參數的範圍，這是必要的動作，以日本新幹線 N700 列車為例[45]，其火車頭的形狀應用 GA 做流場中的結構最佳化，如沒有設定車頭長寬高的範圍，最後最佳化的結果可能會像針一樣，因此參考第三章的結果設定各參數的上下界。其中  $E$  與  $\kappa G$  的上下界皆設定為第三章最小結果的 0.5 倍至最大結果的 2 倍，意即：

$$E = 0.5 \times E_{\min} \sim 2 \times E_{\max} \quad (4-43)$$

$$\kappa G = 0.5 \times (\kappa G)_{\min} \sim 2 \times (\kappa G)_{\max} \quad (4-44)$$

其中  $E_{\min}$  與  $E_{\max}$  為 3.3 節中楊氏模量之量測最小值與最大值， $(\kappa G)_{\min}$  與  $(\kappa G)_{\max}$  則為試片尺寸結構所計算之  $\kappa$  與 3.3 節的剪切模量相乘的最小值與最大值。

(演算法終止後必須檢查最佳化的結果是否落在所設定的上下界，如卡在邊界則需重新設定參數範圍)

#### ● 適應函數設定

本節使用鐵木辛柯梁理論彎曲模態共振頻率結合 GA 最佳化梁參數，也就是說經過世代的演變，GA 從一開始隨機生成的材料參數組合會慢慢收斂至一組材料參數，其代入理論計算的共振頻率會與實際實驗所量測的結果之間誤差最小，因此使用標準化的平均絕對誤差(Mean Absolute Error, MAE)作為適應函數，來評斷個體的好壞：

$$\Phi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{f_i - f_i^*}{f_i^*} \right| \times 100(\%) \quad (4-45)$$

其中  $n$  為選用的共振頻率數量、 $f_i$  為 GA 生成之材料常數代入理論第  $i$  個模態的共振頻率、 $f_i^*$  為實驗第  $i$  個模態的共振頻率。

為驗證演算法參數設定的可行性，將  $E = 1 \text{ GPa}$  與  $\kappa G = 0.833 \text{ GPa}$ ，代入鐵木辛柯



梁彎曲模態理論取得前 4 個共振頻率作為實驗值，當 GA 機制收斂後其表現最好的個體(材料參數組合)應該要很接近代入至梁理論的材料常數，設定 GA 的機制與參數如下：

1. 初始化：族群大小為 100(整個 GA 流程皆固定)，意即有 100 個個體(參數組合)。
2. 評估：將每個個體代入(4-45)式之適應函數進行計算。
3. 選擇：取後不放回競技選擇， $s = 2$ 。
4. 交叉：兩點交叉，個別參數的染色體進行基因序列交換。
5. 突變：突變率為 0.05。
6. 取代：將最終子代前 50%表現好的個體取代上一代表現較差的 50%。

進行連續 3 次的測試，將每個世代表現最佳的個體代入適應函數計算誤差，所繪製 GA 的收斂圖如圖 4-12，從圖中可以發現大約至 20 世代，結果即達成收斂，並將最終收斂的最佳參數組合結果整理於表 4-4，連續 3 次測試所得到的最佳參數組合皆相同，並且都非常接近一開始輸入至理論計算的參數，因此可以確定演算法的參數設定於梁材料常數反算是沒有問題的。參考收斂的結果，實際透過實驗搭配 GA 進行反算時，所設的終止條件如下：

- (1) 達到 50 個世代。
- (2) 每個世代族群當中表現最好的個體代入適應函數的誤差小於 0.01 %。
- (3) 世代中表現最好的個體與表現最差的個體完全相同(即失去基因多樣性)。

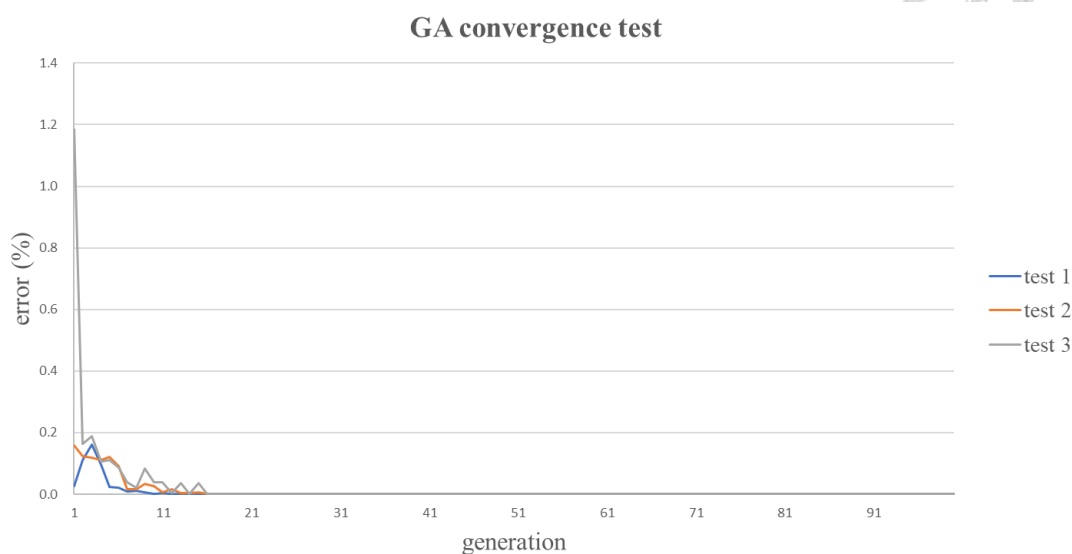


圖 4-12 理論自生成 GA 收斂測試

表 4-4 理論自生成 GA 收斂之最佳參數組合

|            | Test 1     | Test 2     | Test 3     |
|------------|------------|------------|------------|
| $E$        | 1 GPa      | 1 GPa      | 1 GPa      |
| $\kappa G$ | 0.8328 GPa | 0.8328 GPa | 0.8328 GPa |
| Error (%)  | 0.00027    | 0.00027    | 0.00027    |

#### 4.3.4 實驗流程與結果

鐵木辛柯梁理論並沒有厚度方向的限制，但如果剪切效應不夠明顯，或甚至小於實驗可能的誤差，將無法很好的反算參數  $\kappa G$ ，參考表 4-3 的結果，懸臂梁列印尺寸(扣除固定端夾持的部分)定為  $160 \times 18 \times 6 \text{ mm}^3$ ，寬厚比為 3。實驗進行所有材料常數反算的步驟如圖 4-13，首先透過與第三章相同的鋼珠落擊實驗方法取得試片的前 6 個共振頻率，並將前 4 個頻率代入 GA 演算法中的適應函數，當 GA 的流程結束，將收斂至一組材料參數組合，使得其代入理論所計算的共振頻率與實驗間有最小的誤差，然而我們只有彎曲模態的頻率理論，因此需要量測 6 個方向的試片才能得到所有的材料常數，假設相同平面試片的剪切模量相同，再透過(3-12)式正

交性材料性質以及(4-38)式 $\kappa$ 與 $\nu$ 的關係，即可計算出各排向試片的剪切模量與蒲松比。

6 個方向試片最終成型尺寸分別為「xy 平面-x 方向」： $160 \times 17.77 \times 6.09 \text{ mm}^3$ 、  
「xy 平面-y 方向」： $160 \times 18.15 \times 6.13 \text{ mm}^3$ 、「xz 平面-x 方向」： $160 \times 18 \times 6 \text{ mm}^3$ 、  
「xz 平面-z 方向」： $160 \times 18.12 \times 6.2 \text{ mm}^3$ 、「yz 平面-y 方向」： $160 \times 18.02 \times 6.2 \text{ mm}^3$ 、  
「yz 平面-z 方向」： $160 \times 18.3 \times 6.3 \text{ mm}^3$ ，敲擊 A 點之時域與頻域訊號如圖 4-14 ~  
圖 4-19，將 6 個方向頻率的結果代入 GA 流程，所繪製 GA 的收斂圖如圖 4-20，  
可以觀察到結果皆已收斂，並且平均誤差都不到 1%，將各試片的結果整理於表 4-  
5 與表 4-6。接著更詳細說明如何得到各排向試片的材料常數，以表 4-6「yz 平面  
-y 方向」與「yz 平面-z 方向」的結果為例，以"y"代表前者、"z"代表後者，我們  
可以直接求得 $E_x$ 、 $E_y$ 、 $(\kappa G)_y$ 與 $(\kappa G)_z$ ，由於兩者為相同平面(yz)，因此假設兩者的  
G 相同，進而可以得到 $\kappa_y$ 與 $\kappa_z$ 的關係，而從 4.3.2 小節的結果， $\kappa$ 與試片的尺寸與  
蒲松比相關，尺寸為已知並將其中之一的蒲松比由(3-12)式正交性材料性質替換掉，  
即可求得蒲松比，再代回切變係數的理論，最終可以得到剪切模量。

將所有的結果整理於表 4-7，由於假設相同平面的剪切模量相同，因此只有 3  
個欄位，而從楊氏模量的結果來看，也再驗證了 3D 列印試片的正交性質，也就是  
同個排向的楊氏模量接近，而把結果與第三章的結果(表 3-4)進行比較，可以發現  
兩個方法所得到之楊氏模量皆很接近，而剪切模量雖然略低一些，但畢竟在此只有  
使用彎曲模態的結果進行反算，因此也還算有滿不錯的結果，而第三章蒲松比等效  
為等向性材料進行計算，所以較沒有比較參考的意義。

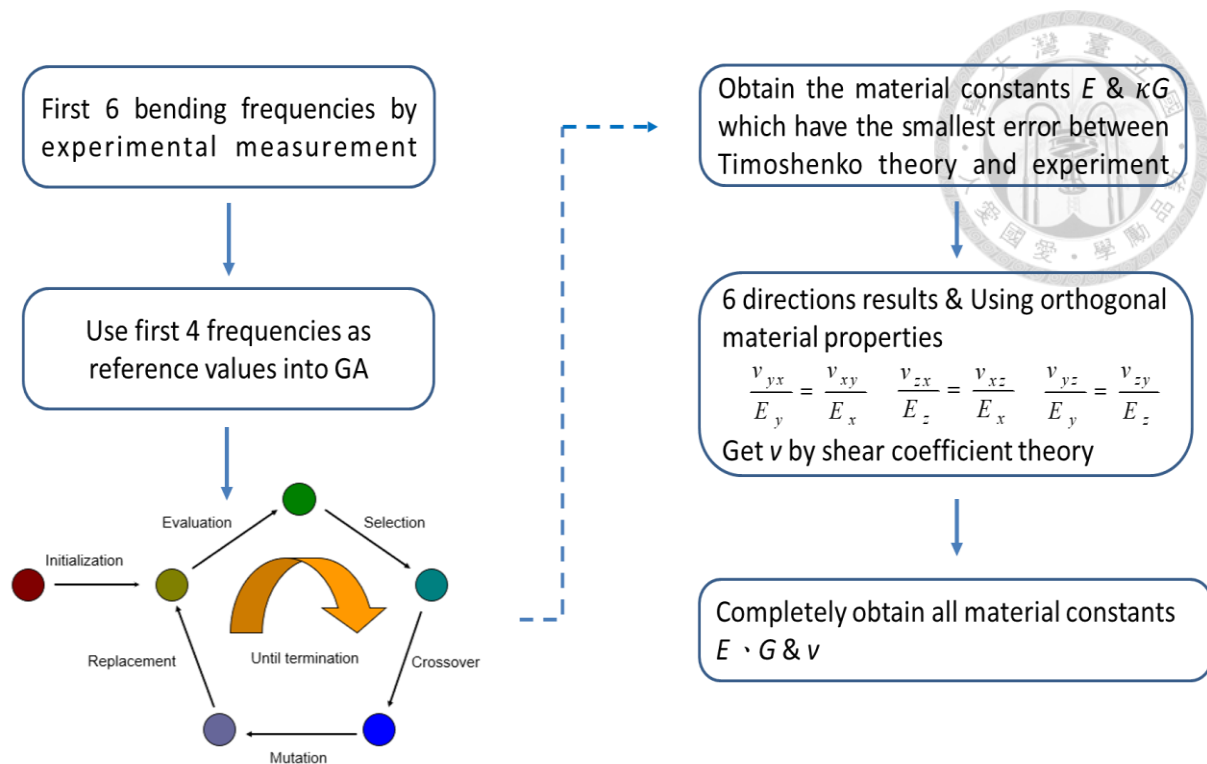


圖 4-13 長厚梁結構材料常數反算流程

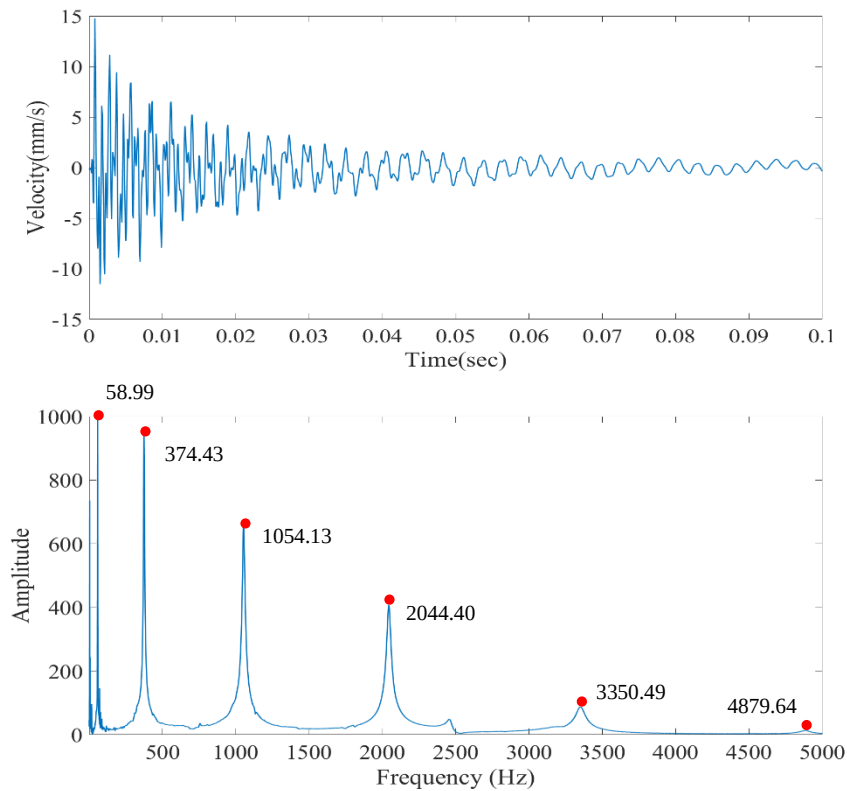


圖 4-14 「xy 平面-x 方向」試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號



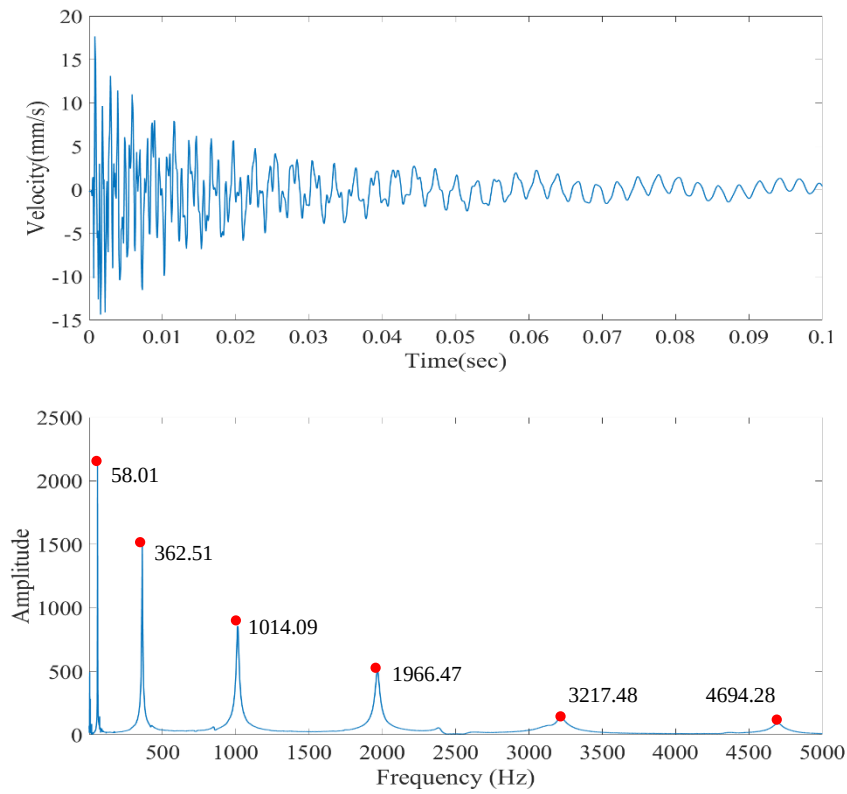
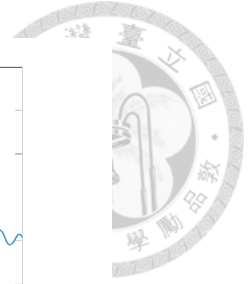


圖 4-15 「 $xy$  平面- $y$  方向」試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號

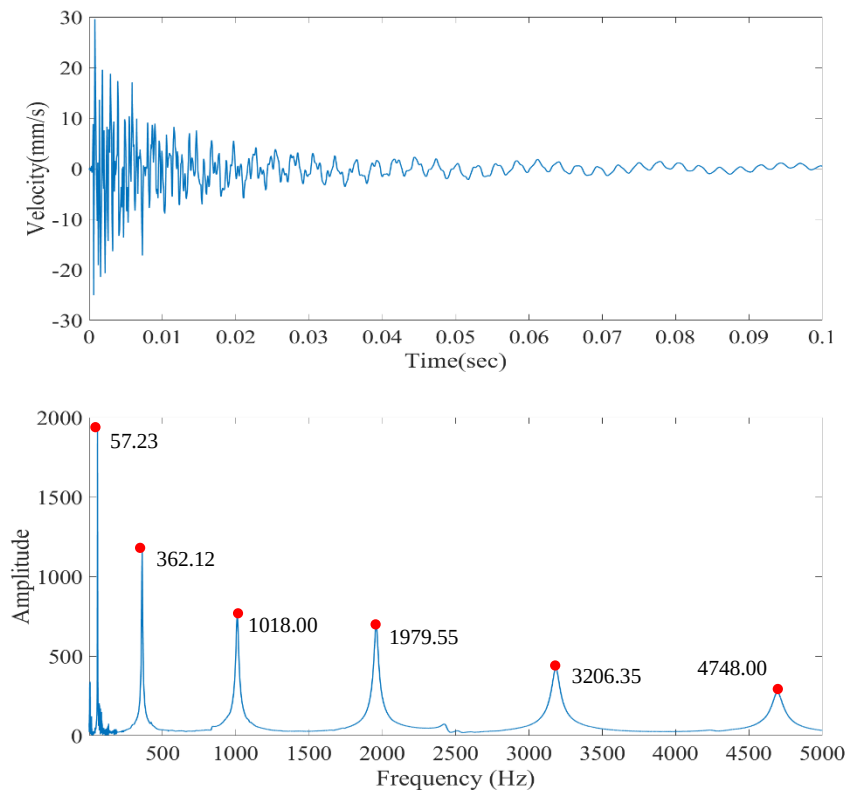


圖 4-16 「 $xz$  平面- $x$  方向」試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號

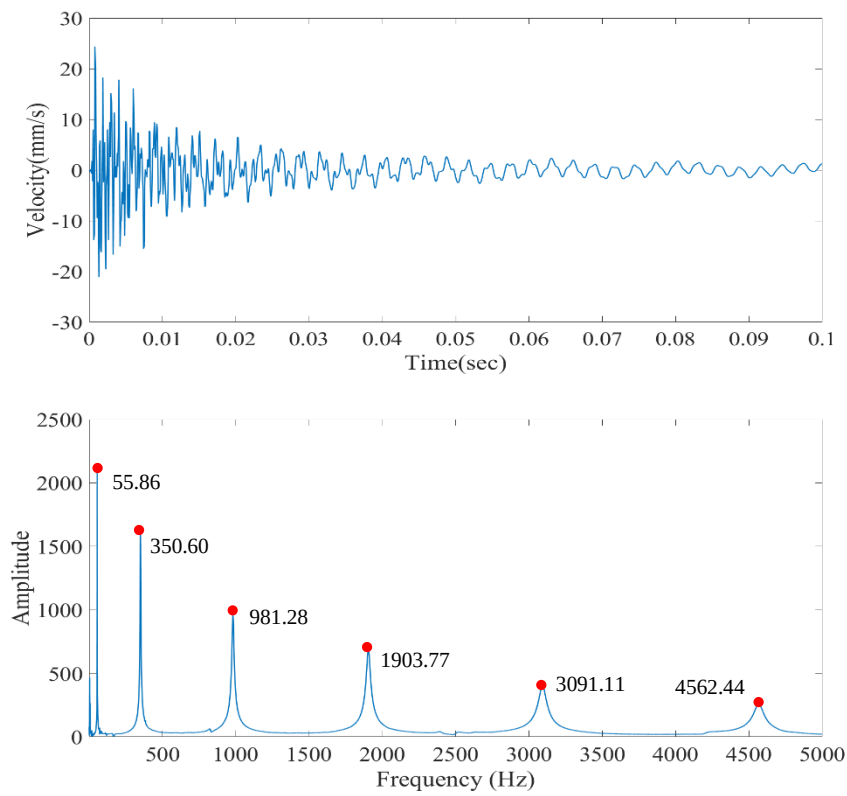
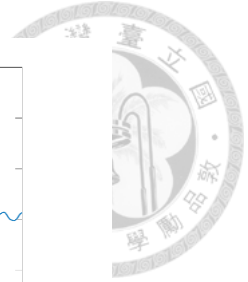


圖 4-17 「 $xz$  平面- $z$  方向」試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號

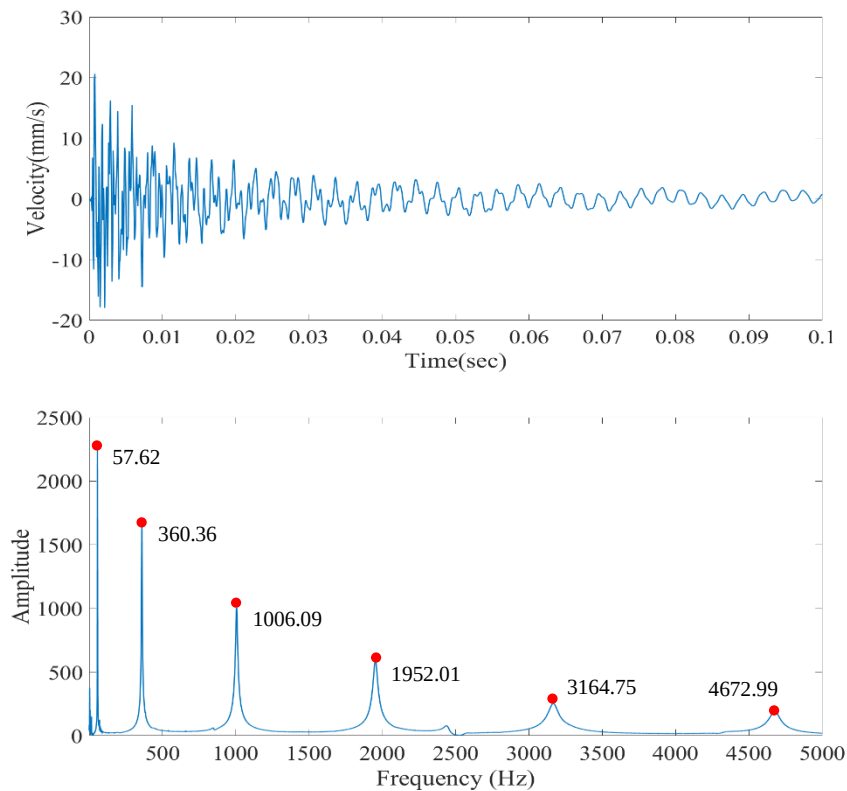


圖 4-18 「 $yz$  平面- $y$  方向」試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號

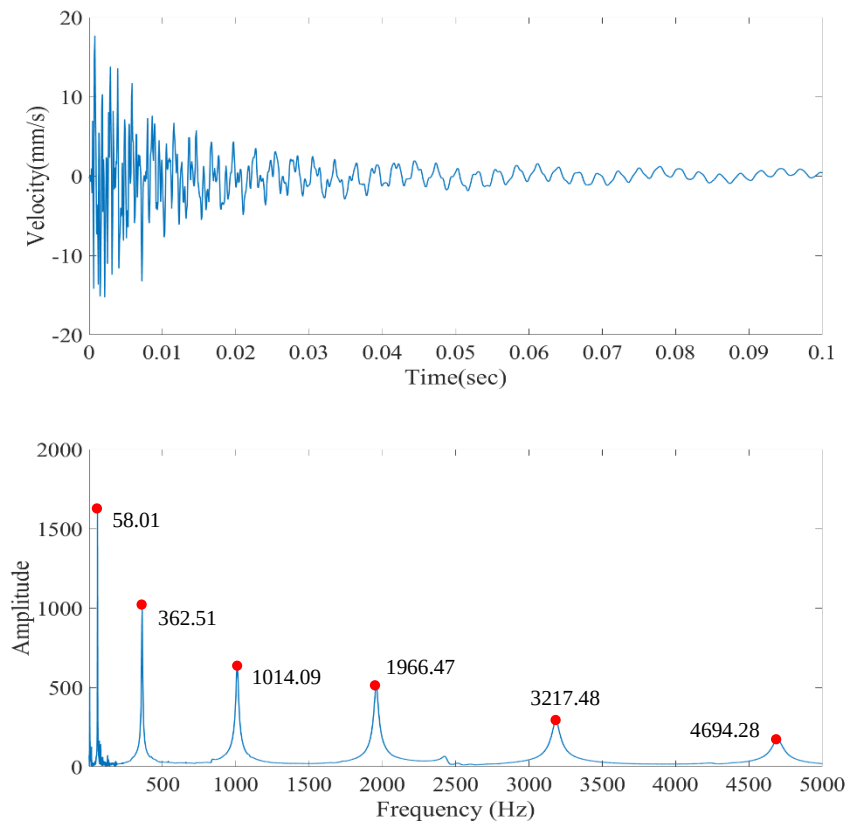
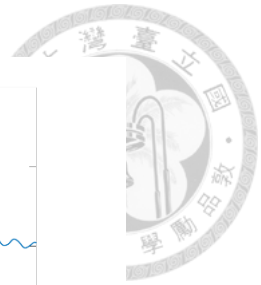


圖 4-19 「yz 平面-z 方向」試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號

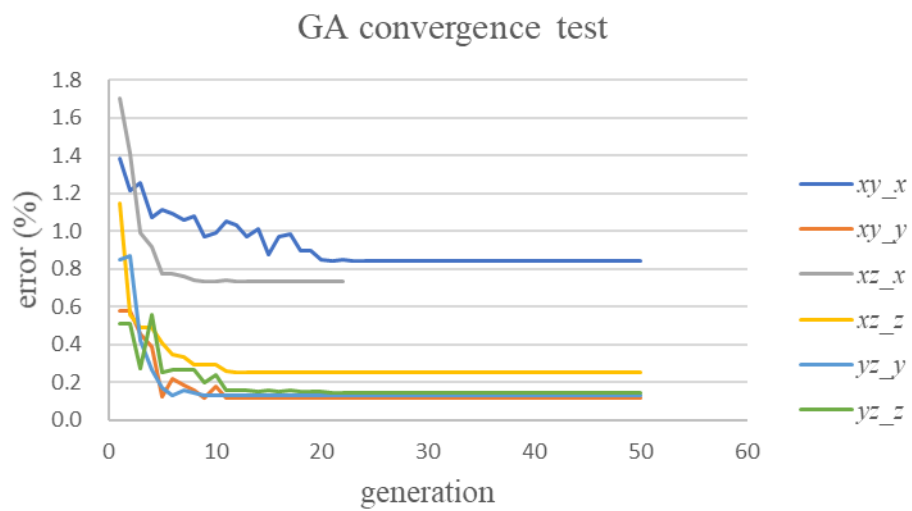


圖 4-20 實驗結果 GA 收斂狀況

表 4-5 各試片排向 GA 的收斂結果

|            | $xy-x$    |         |          | $xy-y$    |         |          | $xz-z$    |         |          | $xz-x$    |         |          |
|------------|-----------|---------|----------|-----------|---------|----------|-----------|---------|----------|-----------|---------|----------|
| Mode       | Theory    | Exp.    | Err. (%) | Theory    | Exp.    | Err. (%) | Theory    | Exp.    | Err. (%) | Theory    | Exp.    | Err. (%) |
| 1_B        | 60.04     | 58.99   | 1.79     | 58.05     | 58.01   | 0.07     | 56.13     | 55.86   | 0.48     | 58.40     | 57.23   | 2.05     |
| 2_B        | 375.11    | 374.43  | 0.18     | 362.67    | 362.51  | 0.04     | 350.73    | 350.60  | 0.04     | 364.91    | 362.12  | 0.77     |
| 3_B        | 1045.13   | 1054.13 | 0.85     | 1010.56   | 1014.09 | 0.35     | 977.37    | 981.28  | 0.40     | 1016.93   | 1018.00 | 0.11     |
| 4_B        | 2033.46   | 2044.40 | 0.54     | 1966.54   | 1966.47 | 0.00     | 1902.17   | 1903.77 | 0.08     | 1979.21   | 1979.55 | 0.02     |
| average    |           |         | 0.84     |           |         | 0.12     |           |         | 0.25     |           |         | 0.74     |
| 5_B        | 3331.11   | 3350.49 | 0.58     | 3222.16   | 3217.48 | -0.15    | 3117.12   | 3091.11 | -0.83    | 3243.50   | 3206.35 | -1.15    |
| 6_B        | 4922.38   | 4879.64 | -0.87    | 4762.54   | 4694.28 | -1.43    | 4608.04   | 4562.44 | -0.99    | 4795.10   | 4748.00 | -0.98    |
| $E$        | 2.85 Gpa  |         |          | 2.60 Gpa  |         |          | 2.40 Gpa  |         |          | 2.91 Gpa  |         |          |
| $\kappa G$ | 0.824 Gpa |         |          | 0.818 Gpa |         |          | 0.827 Gpa |         |          | 0.872 Gpa |         |          |

表 4-6 各試片排向 GA 的收斂結果(續)

|            | $yz-y$    |         |          | $yz-z$    |         |          |
|------------|-----------|---------|----------|-----------|---------|----------|
| Mode       | Theory    | Exp.    | Err. (%) | Theory    | Exp.    | Err. (%) |
| 1_B        | 57.68     | 57.62   | 0.11     | 58.05     | 58.01   | 0.00     |
| 2_B        | 360.39    | 360.36  | 0.01     | 362.67    | 362.51  | 0.25     |
| 3_B        | 1004.15   | 1006.09 | 0.19     | 1010.56   | 1014.09 | 0.10     |
| 4_B        | 1953.88   | 1952.01 | 0.10     | 1966.54   | 1966.47 | 0.34     |
| average    |           |         | 0.13     |           |         | 0.15     |
| 5_B        | 3201.05   | 3164.75 | -1.13    | 3222.16   | 3217.48 | 1.16     |
| 6_B        | 4730.71   | 4672.99 | -1.22    | 4762.54   | 4694.28 | 1.40     |
| $E$        | 2.55 Gpa  |         |          | 2.41 Gpa  |         |          |
| $\kappa G$ | 0.818 Gpa |         |          | 0.817 Gpa |         |          |

表 4-7 正交性材料所有常數反算之結果

| plane | direction | $E$ (GPa) |      | $G$ (GPa) |       | $\nu$      |      |
|-------|-----------|-----------|------|-----------|-------|------------|------|
| $xy$  | $x$       | $E_x$     | 2.85 | $G_{xy}$  | 0.939 | $\nu_{xy}$ | 0.15 |
| $xy$  | $y$       | $E_y$     | 2.60 |           |       | $\nu_{yx}$ | 0.14 |
| $xz$  | $x$       | $E_x$     | 2.91 | $G_{xz}$  | 0.880 | $\nu_{xz}$ | 0.23 |
| $xz$  | $z$       | $E_z$     | 2.40 |           |       | $\nu_{zx}$ | 0.19 |
| $yz$  | $y$       | $E_y$     | 2.55 | $G_{yz}$  | 0.919 | $\nu_{yz}$ | 0.14 |
| $yz$  | $z$       | $E_z$     | 2.41 |           |       | $\nu_{zy}$ | 0.13 |





## 4.4 正交性矩形板振動分析

本節將討論正交性薄板的理論假設，推導其統御方程式，並利用疊加法 (Superposition Method)[8][10]求得單邊固定邊界條件的面外位移解析，最後以有限元素法驗證理論的適用性。

### 4.4.1 薄板理論假設

根據正交性彈性力學理論，其應力-應變的關係可以表示為：

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \frac{1}{E_1} T_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_2} T_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_3} T_{33} \\
 S_{22} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} T_{11} + \frac{1}{E_2} T_{22} - \frac{\nu_{32}}{E_3} T_{33} \\
 S_{33} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} T_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_2} T_{22} + \frac{1}{E_3} T_{33} \\
 S_{12} &= \frac{T_{12}}{2G_{12}} \\
 S_{13} &= \frac{T_{13}}{2G_{31}} \\
 S_{23} &= \frac{T_{23}}{2G_{23}}
 \end{aligned} \tag{4-46}$$

其中  $S_{ij}$  為應變張量、 $T_{ij}$  為應力張量、 $E_i$  為楊氏模量、 $\nu_{ij}$  為蒲松比、 $G_{ij}$  為剪切模量。

應變與位移的關係式為：

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}) \tag{4-47}$$

其中對於薄板的振動問題， $U_1 = u_1 - x_3 u_{3,1}$ 、 $U_2 = u_2 - x_3 u_{3,2}$ 、 $U_3 = u_3$ ，而薄板理論假設：

$$S_{33} = S_{13} = S_{23} = T_{33} = 0 \tag{4-48}$$

因此應變與位移關係可寫為：

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= u_{1,1} - x_3 u_{3,11} \\
 S_{22} &= u_{2,2} - x_3 u_{3,22} \\
 S_{12} &= \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1} - 2x_3 u_{3,12})
 \end{aligned} \tag{4-49}$$



最後可以得到應力與位移的關係如下：

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \left[ u_{1,1} - \nu_{12}u_{3,11} + \nu_{21}(u_{2,2} - \nu_{12}u_{3,22}) \right] \\ T_{22} &= \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \left[ u_{2,2} - \nu_{12}u_{3,22} + \nu_{21}(u_{1,1} - \nu_{12}u_{3,11}) \right] \\ T_{12} &= G_{12}(u_{1,2} + u_{2,1} - 2\nu_{12}u_{3,12}) \end{aligned} \quad (4-50)$$

下小節將以此為基準，推導統御方程式與邊界條件。

#### 4.4.2 統御方程式與邊界條件

可以將彎矩場表示為：

$$\begin{aligned} M_{11} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T_{11} x_3 dx_3 \\ M_{22} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T_{22} x_3 dx_3 \\ M_{12} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T_{12} x_3 dx_3 \end{aligned} \quad (4-51)$$

將(4-51)式代入(4-50)式並對  $x_3$  積分，可得到彎矩與位移的關係：

$$M_{11} = -(D_{11}u_{3,11} + D_{12}u_{3,22}) \quad (4-52)$$

$$M_{22} = -(D_{22}u_{3,22} + D_{12}u_{3,11}) \quad (4-53)$$

$$M_{12} = -2D_{66}u_{3,12} \quad (4-54)$$

其中  $D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}$ 、 $D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}$ 、 $D_{12} = D_{11}\nu_{21}$  or  $D_{22}\nu_{12}$ 、 $D_{66} = \frac{G_{12}h^3}{12}$ ， $h$  為

薄板厚度。由平板力矩平衡式可得：

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} - Q_{11} = 0 \quad (4-55)$$

$$\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} - Q_{22} = 0 \quad (4-56)$$

其中  $M_{21} = -M_{12}$ ， $Q$  為側向剪力。而由力平衡方程式可得：

$$\frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1} + q = 0 \quad (4-57)$$

其中  $q$  為外力。將(4-52)~(4-54)式代入(4-55)與(4-56)式，再透過(4-57)式並假設  $q = 0$



以及加入慣性力，可得統御方程式：

$$D_{11}u_{3,1111} + D_{22}u_{3,2222} + 2D_{12}u_{3,1122} + 4D_{66}u_{3,1122} + \rho h \frac{\partial u_3}{\partial t^2} = 0 \quad (4-58)$$

透過分離變數法假設  $u_3(x_1, x_2, t) = \bar{w}(x_1, x_2)e^{i\omega t}$ ，可以將統御方程改寫為：

$$D_{11}\bar{w}_{,1111} + D_{22}\bar{w}_{,2222} + 2(D_{12} + 2D_{66})\bar{w}_{,1122} - \rho h \omega^2 \bar{w} = 0 \quad (4-59)$$

$$\text{令 } x_1 = x, x_2 = y, \xi = x/a, \eta = y/b, W(\xi, \eta) = \frac{\bar{w}(x, y)}{a}, \lambda^4 = \frac{\rho h a^4 \omega^2}{D_{11}}, \phi = \frac{b}{a},$$

$H = D_{12} + 2D_{66}$ ，進行無因次化可再改寫為：

$$\frac{\partial^4 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^4} + \frac{2H}{D_{11}} \frac{\partial^4 W(\xi, \eta)}{\phi^2 \partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{D_{22}}{D_{11}} \frac{\partial^4 W(\xi, \eta)}{\phi^4 \partial \eta^4} - \lambda^4 W(\xi, \eta) = 0 \quad (4-60)$$

透果相同的方法將無因次化的彎矩與剪力表示如下：

$$\begin{aligned} \frac{M_{11}a}{D_{11}} &= - \left[ \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{v_{21}}{\phi^2} \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right] \\ \frac{M_{22}b^2}{D_{22}a} &= - \left[ \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + v_{12}\phi^2 \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \right] \\ \frac{V_{11}a^2}{D_{11}} &= - \left[ \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^3} + \frac{v_2^*}{\phi^2} \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta^2} \right] \\ \frac{V_{22}b^3}{D_{22}a} &= - \left[ \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^3} + v_1^* \phi^2 \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \eta \partial \xi^2} \right] \end{aligned} \quad (4-61)$$

$$\text{其中 } v_1^* = \frac{2H}{D_{22}} - v_{12}, v_2^* = \frac{2H}{D_{11}} - v_{21}。$$

#### 4.4.3 懸臂板面外振動位移解析

透過疊加法的概念，可以將單邊固定全域平板等效為四個結構塊，如圖 4-21，將各部分的結果相加並滿足邊界條件，即可得到全域之共振頻率與模態。首先  $W_1(\xi, \eta)$  的邊界條件為：





$$\begin{aligned}
 W_1(\xi, \eta)|_{\xi=0} &= 0, \quad M_{11}|_{\xi=0} = 0 \\
 \frac{\partial W_1}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} &= 0, \quad V_{11}|_{\xi=1} = 0 \\
 \frac{\partial W_1}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} &= 0, \quad V_{22}|_{\eta=0} = 0 \\
 V_{22}|_{\eta=1} &= 0, \quad \frac{\partial W_1}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi\xi\right)
 \end{aligned} \tag{4-62}$$

透過邊界條件假設  $W_1(\xi, \eta)$  的級數解為：

$$W_1(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(\eta) \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi\xi\right) \tag{4-63}$$

將(4-63)式代入統御方程式可解得  $Y_m(\eta)$  為：

Case 1 :  $z \geq 0$  &  $\sqrt{z} + \alpha_1 \geq 0$

$$Y_m(\eta) = A_m \sinh \beta_m \eta + B_m \cosh \beta_m \eta + C_m \sin \gamma_m \eta + D_m \cos \gamma_m \eta \tag{4-64}$$

Case 2 :  $z \geq 0$  &  $\sqrt{z} + \alpha_1 < 0$

$$Y_m(\eta) = A_m \sinh \beta_m \eta + B_m \cosh \beta_m \eta + C_m \sinh \gamma_m \eta + D_m \cosh \gamma_m \eta \tag{4-65}$$

Case 3 :  $z < 0$

$$\begin{aligned}
 Y_m(\eta) &= A_m \sin R_m \eta \sinh S_m \eta + B_m \sin R_m \eta \cosh S_m \eta \\
 &\quad + C_m \cos R_m \eta \sinh S_m \eta + D_m \cos R_m \eta \cosh S_m \eta
 \end{aligned} \tag{4-66}$$

$$\text{其中 } z = \alpha_1^2 - 4\alpha_2, \quad \alpha_1 = \frac{-2H\phi^2}{D_{22}} \left(\frac{2m-1}{2}\pi\right)^2, \quad \alpha_2 = \frac{D_{11}\phi^4}{D_{22}} \left[ \left(\frac{2m-1}{2}\pi\right)^4 - \lambda^4 \right],$$

$$\beta_m^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{z} - \alpha_1), \quad \gamma_m^2 = \pm \frac{1}{2}(\sqrt{z} + \alpha_1), \quad R_m = z_4 \sin \frac{z_3}{2}, \quad S_m = z_4 \cos \frac{z_3}{2}, \quad z_4 = (z_1^2 + z_2^2)^{\frac{1}{4}},$$

$$z_3 = \tan^{-1}\left(\frac{z_2}{z_1}\right), \quad z_2 = \frac{\sqrt{-z}}{2}, \quad z_1 = \frac{-\alpha_1}{2}.$$

將(4-64)~(4-66)式代入(4-62)式之邊界條件可解得  $Y_m(\eta)$  為：

Case 1 :

$$Y_m(\eta) = E_m (\theta_{11m} \cosh \beta_m \eta + \theta_{13m} \cos \gamma_m \eta) \tag{4-67}$$

Case 2 :

$$Y_m(\eta) = E_m (\theta_{22m} \cosh \beta_m \eta + \theta_{23m} \cosh \gamma_m \eta) \tag{4-68}$$

Case 3 :

$$Y_m(\eta) = E_m (\theta_{z1m} \sin R_m \eta \sinh S_m \eta + \theta_{z2m} \cos R_m \eta \cosh S_m \eta) \quad (4-69)$$

$$\text{其中 } \theta_{11m} = \frac{1}{(\beta_m - \frac{ZZ1}{ZZ2} \gamma_m) \sinh \beta_m} \quad , \quad \theta_{13m} = \frac{ZZ1}{ZZ2(\beta_m - \frac{ZZ1}{ZZ2} \gamma_m) \sin \gamma_m} \quad ,$$

$$\theta_{22m} = \frac{1}{(\beta_m + \frac{ZZ1}{ZZ2} \gamma_m) \sinh \beta_m} \quad , \quad \theta_{23m} = \frac{ZZ1}{ZZ2(\beta_m + \frac{ZZ1}{ZZ2} \gamma_m) \sinh \gamma_m} \quad ,$$

$$ZZ1 = -\beta_m \left[ \beta_m^2 - v_1^* \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \right] \quad , \quad ZZ2 = \gamma_m \left[ \gamma_m^2 \pm v_1^* \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \right] \quad ,$$

$$\theta_{z1m} = \frac{1}{(R_m + \theta_{zm} S_m) \cos R_m \sinh S_m + (S_m - \theta_{zm} R_m) \sin R_m \cosh S_m} \quad , \quad \theta_{z2m} = \theta_{z1m} \theta_{zm} \quad ,$$

$$\theta_{zm} = \frac{R_m \cos R_m \sinh S_m (R_m^2 - 3S_m^2 + v_1^* \phi^2 k_m^2) - S_m \cosh S_m \sin R_m (S_m^2 - 3R_m^2 - v_1^* \phi^2 k_m^2)}{R_m \sin R_m \cosh S_m (R_m^2 - 3S_m^2 + v_1^* \phi^2 k_m^2) + S_m \sinh S_m \cos R_m (S_m^2 - 3R_m^2 - v_1^* \phi^2 k_m^2)} \quad ,$$

$$k_m = \left( \frac{2m-1}{2} \right) \pi \quad .$$

將(4-67)~(4-69)式代回(4-63)式可以將 $W_1(\xi, \eta)$ 表示為：

$$\begin{aligned} W_1(\xi, \eta) = & \sum^{case1} E_m (\theta_{11m} \cosh \beta_m \eta + \theta_{13m} \cos \gamma_m \eta) \sin \left( \frac{2m-1}{2} \right) \pi \xi \\ & + \sum^{case2} E_m (\theta_{22m} \cosh \beta_m \eta + \theta_{23m} \cosh \gamma_m \eta) \sin \left( \frac{2m-1}{2} \right) \pi \xi \\ & + \sum^{case3} E_m (\theta_{z1m} \sin R_m \eta \sinh S_m \eta + \theta_{z2m} \cos R_m \eta \cosh S_m \eta) \sin \left( \frac{2m-1}{2} \right) \pi \xi \end{aligned} \quad (4-70)$$

$W_2(\xi, \eta)$ 的邊界條件為：

$$\begin{aligned} W_2(\xi, \eta) \Big|_{\xi=0} &= 0 \quad , \quad M_{11} \Big|_{\xi=0} = 0 \\ V_{11} \Big|_{\xi=1} &= 0 \quad , \quad \frac{\partial W_2}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = \sum_{n=0}^{\infty} E'_n \cos n\pi \eta \\ \frac{\partial W_2}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} &= 0 \quad , \quad V_{22} \Big|_{\eta=0} = 0 \\ V_{22} \Big|_{\eta=1} &= 0 \quad , \quad \frac{\partial W_2}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} = 0 \end{aligned} \quad (4-71)$$

透過邊界條件假設 $W_2(\xi, \eta)$ 的級數解為：



$$W_2(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\xi) \cos n\pi\eta \quad (4-72)$$

將(4-72)式代入統御方程式與邊界條件可解得  $Y_n(\xi)$  為：

Case 1 :  $z \geq 0$  &  $\sqrt{z} + \alpha_1 \geq 0$

$$Y_n(\xi) = E'_n(\theta'_{11n} \sinh \beta'_n \xi + \theta'_{13n} \sin \gamma'_n \xi) \quad (4-73)$$

Case 2 :  $z \geq 0$  &  $\sqrt{z} + \alpha_1 < 0$

$$Y_n(\xi) = E'_n(\theta'_{22n} \sinh \beta'_n \xi + \theta'_{23n} \sinh \gamma'_n \xi) \quad (4-74)$$

Case 3 :  $z < 0$

$$Y_n(\xi) = E'_n(\theta'_{z1n} \sin R'_n \xi \cosh S'_n \xi + \theta'_{z2n} \cos R'_n \xi \sinh S'_n \xi) \quad (4-75)$$

$$\text{其中 } \alpha_1 = \frac{-2H}{D_{11}\phi^2} (n\pi)^2, \quad \alpha_2 = \frac{D_{22}}{D_{11}\phi^4} (n\pi)^4 - \lambda^4, \quad \theta'_{11n} = \frac{1}{(\beta'_n + \frac{ZZ1'}{ZZ2'} \gamma'_n) \cosh \beta'_n},$$

$$\theta'_{13n} = \frac{ZZ1'}{ZZ2'(\beta'_n + \frac{ZZ1'}{ZZ2'} \gamma'_n) \cos \gamma'_n}, \quad \theta'_{22n} = \frac{1}{(\beta'_n + \frac{ZZ1'}{ZZ2'} \gamma'_n) \cosh \beta'_n},$$

$$\theta'_{23n} = \frac{ZZ1'}{ZZ2'(\beta'_n + \frac{ZZ1'}{ZZ2'} \gamma'_n) \cosh \gamma'_n}, \quad ZZ1' = -\beta'_n \left[ \beta_n'^2 - \frac{v_2^*}{\phi^2} (n\pi)^2 \right],$$

$$ZZ2' = \gamma'_n \left[ \pm \gamma_n'^2 + \frac{v_2^*}{\phi^2} (n\pi)^2 \right],$$

$$\theta'_{z1n} = \frac{1}{(S'_n - \theta'_{zn} R'_n) \sin R'_n \sinh S'_n + (R'_n + \theta'_{zn} S'_n) \cos R'_n \cosh S'_n}, \quad \theta'_{z2n} = \theta'_{z1n} \theta'_{zn},$$

$$\theta'_{zn} = \frac{R'_n \cosh S'_n \cos R'_n (R_n'^2 - 3S_n'^2 + \frac{v_2^*}{\phi^2} k_n^2) - S'_n \sinh S'_n \sin R'_n (S_n'^2 - 3R_n'^2 - \frac{v_2^*}{\phi^2} k_n^2)}{S'_n \cos R'_n \cosh S'_n (S_n'^2 - 3R_n'^2 - \frac{v_2^*}{\phi^2} k_n^2) + R'_n \sinh S'_n \sin R'_n (R_n'^2 - 3S_n'^2 + \frac{v_2^*}{\phi^2} k_n^2)},$$

$$k_n = n\pi.$$

將(4-73)~(4-75)式代回(4-72)式可以將  $W_2(\xi, \eta)$  表示為：



$$\begin{aligned}
W_2(\xi, \eta) = & \sum^{case1} E'_n(\theta'_{11n} \sinh \beta'_n \xi + \theta'_{13n} \sin \gamma'_n \xi) \cos n\pi\eta \\
& + \sum^{case2} E'_n(\theta'_{22n} \sinh \beta'_n \xi + \theta'_{23n} \sinh \gamma'_n \xi) \cos n\pi\eta \\
& + \sum^{case3} E'_n(\theta'_{z1n} \sin R'_n \xi \cosh S'_n \xi + \theta'_{z2n} \cos R'_n \xi \sinh S'_n \xi) \cos n\pi\eta
\end{aligned} \quad (4-76)$$

-----  
 $W_3(\xi, \eta)$  的邊界條件為：

$$\begin{aligned}
W_3(\xi, \eta) \Big|_{\xi=0} &= 0, \quad M_{11} \Big|_{\xi=0} = 0 \\
V_{11} \Big|_{\xi=1} &= 0, \quad \frac{\partial W_3}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = 0 \\
\frac{\partial W_3}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} &= \sum_{p=1}^{\infty} F_p \sin\left(\frac{2p-1}{2}\pi\xi\right), \quad V_{22} \Big|_{\eta=0} = 0 \\
V_{22} \Big|_{\eta=1} &= 0, \quad \frac{\partial W_3}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} = 0
\end{aligned} \quad (4-77)$$

透過邊界條件假設  $W_3(\xi, \eta)$  的級數解為：

$$W_3(\xi, \eta) = \sum_{p=1}^{\infty} Y_p(\eta) \sin\left(\frac{2p-1}{2}\pi\xi\right) \quad (4-78)$$

將(4-78)式代入統御方程式與邊界條件可解得  $Y_p(\eta)$  為：

Case 1 :  $z \geq 0$  &  $\sqrt{z} + \alpha_1 \geq 0$

$$Y_p(\eta) = F_p \left[ \psi_{11p} \cosh \beta_p(1-\eta) + \psi_{13p} \cos \gamma_p(1-\eta) \right] \quad (4-79)$$

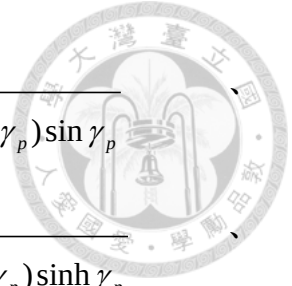
Case 2 :  $z \geq 0$  &  $\sqrt{z} + \alpha_1 < 0$

$$Y_p(\eta) = F_p \left[ \psi_{22p} \cosh \beta_p(1-\eta) + \psi_{23p} \cosh \gamma_p(1-\eta) \right] \quad (4-80)$$

Case 3 :  $z < 0$

$$Y_p(\eta) = F_p \left[ \begin{aligned} & \psi_{z1p} \sin R_p(1-\eta) \sinh S_p(1-\eta) \\ & + \psi_{z2p} \cos R_p(1-\eta) \cosh S_p(1-\eta) \end{aligned} \right] \quad (4-81)$$

$$\text{其 中 } \alpha_1 = \frac{-2H\phi^2}{D_{22}} \left( \frac{2p-1}{2}\pi \right)^2, \quad \alpha_2 = \frac{D_{11}\phi^4}{D_{22}} \left[ \left( \frac{2p-1}{2}\pi \right)^4 - \lambda^4 \right],$$



$$\begin{aligned}
\psi_{11p} &= \frac{-1}{(\beta_p - \frac{ZZ1}{ZZ2} \gamma_p) \sinh \beta_p} \quad , \quad \psi_{13p} = \frac{-ZZ1}{ZZ2(\beta_p - \frac{ZZ1}{ZZ2} \gamma_p) \sin \gamma_p} \\
\psi_{22p} &= \frac{-1}{(\beta_p + \frac{ZZ1}{ZZ2} \gamma_p) \sinh \beta_p} \quad , \quad \psi_{23p} = \frac{-ZZ1}{ZZ2(\beta_p + \frac{ZZ1}{ZZ2} \gamma_p) \sinh \gamma_p} \\
ZZ1 &= \beta_p \left[ -\beta_p^2 + v_1^* \phi^2 \left( \frac{2p-1}{2} \pi \right)^2 \right] \quad , \quad ZZ2 = \gamma_p \left[ \gamma_p^2 \pm v_1^* \phi^2 \left( \frac{2p-1}{2} \pi \right)^2 \right] \quad , \\
\psi_{z1p} &= \frac{-1}{(R_p + \psi_{zp} S_p) \cos R_p \sinh S_p + (S_p - \psi_{zp} R_p) \sin R_p \cosh S_p} \quad , \quad \psi_{z2p} = \psi_{z1p} \psi_{zp} \quad , \\
\psi_{zp} &= \frac{R_p \sinh S_p \cos R_p (R_p^2 - 3S_p^2 + v_1^* \phi^2 k_p^2) - S_p \cosh S_p \sin R_p (S_p^2 - 3R_p^2 - v_1^* \phi^2 k_p^2)}{S_p \cos R_p \sinh S_p (S_p^2 - 3R_p^2 - v_1^* \phi^2 k_p^2) + R_p \cosh S_p \sin R_p (R_p^2 - 3S_p^2 + v_1^* \phi^2 k_p^2)} \quad , \\
k_p &= \left( \frac{2p-1}{2} \right) \pi \quad .
\end{aligned}$$

將(4-79)~(4-81)式代回(4-78)式可以將  $W_3(\xi, \eta)$  表示為：

$$\begin{aligned}
W_3(\xi, \eta) &= \sum^{case1} F_p \left[ \psi_{11p} \cosh \beta_p (1-\eta) + \psi_{13p} \cos \gamma_p (1-\eta) \right] \sin \left( \frac{2p-1}{2} \right) \pi \xi \\
&+ \sum^{case2} F_p \left[ \psi_{22p} \cosh \beta_p (1-\eta) + \psi_{23p} \cosh \gamma_p (1-\eta) \right] \sin \left( \frac{2p-1}{2} \right) \pi \xi \quad (4-82) \\
&+ \sum^{case3} F_p \left[ \frac{\psi_{z1p} \sin R_p (1-\eta) \sinh S_p (1-\eta) + \psi_{z2p} \cos R_p (1-\eta) \cosh S_p (1-\eta)}{\psi_{z1p} \sin R_p (1-\eta) \sinh S_p (1-\eta) + \psi_{z2p} \cos R_p (1-\eta) \cosh S_p (1-\eta)} \right] \sin \left( \frac{2p-1}{2} \right) \pi \xi
\end{aligned}$$

-----  
 $W_4(\xi, \eta)$  的邊界條件為：

$$\begin{aligned}
W_4(\xi, \eta) \Big|_{\xi=0} &= 0 \quad , \quad \frac{\partial W_4}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \sum_{q=0}^{\infty} F'_q \cos q \pi \eta \\
V_{11} \Big|_{\xi=1} &= 0 \quad , \quad \frac{\partial W_4}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = 0 \\
\frac{\partial W_4}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} &= 0 \quad , \quad V_{22} \Big|_{\eta=0} = 0 \\
V_{22} \Big|_{\eta=1} &= 0 \quad , \quad \frac{\partial W_4}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} = 0
\end{aligned} \quad (4-83)$$

透過邊界條件假設  $W_4(\xi, \eta)$  的級數解為：



$$W_4(\xi, \eta) = \sum_{q=0}^{\infty} Y_q(\xi) \cos q\pi\eta \quad (4-84)$$

將(4-84)式代入統御方程式與邊界條件可解得 $Y_q(\xi)$ 為：

Case 1 :  $z \geq 0$  &  $\sqrt{z} + \alpha_1 \geq 0$

$$Y_q(\xi) = F'_q \left[ \psi'_{11q} \cosh \beta'_q (1-\xi) + \psi'_{13q} \cos \gamma'_q (1-\xi) \right] \quad (4-85)$$

Case 2 :  $z \geq 0$  &  $\sqrt{z} + \alpha_1 < 0$

$$Y_q(\xi) = F'_q \left[ \psi'_{22q} \cosh \beta'_q (1-\xi) + \psi'_{23q} \cosh \gamma'_q (1-\xi) \right] \quad (4-86)$$

Case 3 :  $z < 0$

$$Y_q(\xi) = F'_q \left[ \begin{aligned} &\psi'_{z1q} \sin R'_q (1-\xi) \sinh S'_q (1-\xi) \\ &+ \psi'_{z2q} \cos R'_q (1-\xi) \cosh S'_q (1-\xi) \end{aligned} \right] \quad (4-87)$$

其中  $\alpha_1 = \frac{-2H}{D_{11}\phi^2} (q\pi)^2$ 、 $\alpha_2 = \frac{D_{22}}{D_{11}\phi^4} (q\pi)^4 - \lambda^4$ 、 $\psi'_{11q} = \frac{-1}{\beta'_q \sinh \beta'_q + \gamma'_q \cosh \beta'_q \tan \gamma'_q}$ 、

$\psi'_{13q} = \psi'_{11q} \frac{-\cosh \beta'_q}{\cos \gamma'_q}$ 、 $\psi'_{22q} = \frac{-1}{\beta'_q \sinh \beta'_q - \gamma'_q \cosh \beta'_q \tanh \gamma'_q}$ 、 $\psi'_{23q} = \psi'_{22q} \frac{-\cosh \beta'_q}{\cosh \gamma'_q}$ 、

$\psi'_{z1q} = \frac{-1}{(R'_q + \psi'_{zq} S'_q) \cos R'_q \sinh S'_q + (S'_q - \psi'_{zq} R'_q) \sin R'_q \cosh S'_q}$ 、 $\psi'_{z2q} = \psi'_{z1q} \psi'_{zq}$ 、

$\psi'_{zq} = \frac{-\sin R'_q \sinh S'_q}{\cos R'_q \cosh S'_q}$ 。

將(4-85)~(4-87)式代回(4-84)式可以將 $W_4(\xi, \eta)$ 表示為：

$$\begin{aligned} W_4(\xi, \eta) = & \sum^{case1} F'_q \left[ \psi'_{11q} \cosh \beta'_q (1-\xi) + \psi'_{13q} \cos \gamma'_q (1-\xi) \right] \cos q\pi\eta \\ & + \sum^{case2} F'_q \left[ \psi'_{22q} \cosh \beta'_q (1-\xi) + \psi'_{23q} \cosh \gamma'_q (1-\xi) \right] \cos q\pi\eta \\ & + \sum^{case3} F'_q \left[ \begin{aligned} &\psi'_{z1q} \sin R'_q (1-\xi) \sinh S'_q (1-\xi) + \\ &\psi'_{z2q} \cos R'_q (1-\xi) \cosh S'_q (1-\xi) \end{aligned} \right] \cos q\pi\eta \end{aligned} \quad (4-88)$$

最後將 4 個結構塊的位移結果合併，可以得到全域之 $W(\xi, \eta)$ 為：



$$\begin{aligned}
W(\xi, \eta) = & \sum_{case1} E_m (\theta_{11m} \cosh \beta_m \eta + \theta_{13m} \cos \gamma_m \eta) \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi\xi\right) \\
& + \sum_{case2} E_m (\theta_{22m} \cosh \beta_m \eta + \theta_{23m} \cosh \gamma_m \eta) \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi\xi\right) \\
& + \sum_{case3} E_m (\theta_{z1m} \sin R_m \eta \sinh S_m \eta + \theta_{z2m} \cos R_m \eta \cosh S_m \eta) \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi\xi\right) \\
& + \sum_{case1} E'_n (\theta'_{11n} \sinh \beta'_n \xi + \theta'_{13n} \sin \gamma'_n \xi) \cos n\pi\eta \\
& + \sum_{case2} E'_n (\theta'_{22n} \sinh \beta'_n \xi + \theta'_{23n} \sinh \gamma'_n \xi) \cos n\pi\eta \\
& + \sum_{case3} E'_n (\theta'_{z1n} \sin R'_n \xi \cosh S'_n \xi + \theta'_{z2n} \cos R'_n \xi \sinh S'_n \xi) \cos n\pi\eta \\
& + \sum_{case1} F_p \left[ \psi_{11p} \cosh \beta_p (1-\eta) + \psi_{13p} \cos \gamma_p (1-\eta) \right] \sin\left(\frac{2p-1}{2}\pi\xi\right) \\
& + \sum_{case2} F_p \left[ \psi_{22p} \cosh \beta_p (1-\eta) + \psi_{23p} \cosh \gamma_p (1-\eta) \right] \sin\left(\frac{2p-1}{2}\pi\xi\right) \\
& + \sum_{case3} F_p \left[ \psi_{z1p} \sin R_p (1-\eta) \sinh S_p (1-\eta) + \right. \\
& \quad \left. \psi_{z2p} \cos R_p (1-\eta) \cosh S_p (1-\eta) \right] \sin\left(\frac{2p-1}{2}\pi\xi\right) \\
& + \sum_{case1} F'_q \left[ \psi'_{11q} \cosh \beta'_q (1-\xi) + \psi'_{13q} \cos \gamma'_q (1-\xi) \right] \cos q\pi\eta \\
& + \sum_{case2} F'_q \left[ \psi'_{22q} \cosh \beta'_q (1-\xi) + \psi'_{23q} \cosh \gamma'_q (1-\xi) \right] \cos q\pi\eta \\
& + \sum_{case3} F'_q \left[ \psi'_{z1q} \sin R'_q (1-\xi) \sinh S'_q (1-\xi) + \right. \\
& \quad \left. \psi'_{z2q} \cos R'_q (1-\xi) \cosh S'_q (1-\xi) \right] \cos q\pi\eta
\end{aligned} \tag{4-89}$$

將(4-89)式代入以下還未滿足的邊界條件：

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial W}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} &= 0 \quad , \quad \left. M_{11} \right|_{\xi=1} = 0 \\
\left. M_{22} \right|_{\eta=0} &= 0 \quad , \quad \left. M_{22} \right|_{\eta=1} = 0
\end{aligned} \tag{4-90}$$

透過積分、三角函數積化和差與正交性，可得以下矩陣關係式：

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_m \\ E'_n \\ F_p \\ F'_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4-91}$$

其中  $A$  矩陣為特徵矩陣，各元素的大小由展開項數決定，且  $A_{11}$ 、 $A_{31}$ 、 $A_{22}$ 、 $A_{42}$ 、



$A_{31}$ 、 $A_{33}$ 、 $A_{24}$  與  $A_{44}$  為對角矩陣，當  $A$  矩陣為 0 時可求出懸臂薄板的共振頻率，進一步可以計算位移的振幅係數，得到共振的面外位移模態形狀。將矩陣元素詳細表示如下：

當  $m = 1, 2, 3, \dots$ ， $A_{11}$ ：

Case 1：

$$\theta_{11m} \left[ v_{12} \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2 - \beta_m^2 \right] \cosh \beta_m + \theta_{13m} \left[ v_{12} \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2 + \gamma_m^2 \right] \cos \gamma_m$$

Case 2：

$$\theta_{22m} \left[ v_{12} \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2 - \beta_m^2 \right] \cosh \beta_m + \theta_{23m} \left[ v_{12} \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2 - \gamma_m^2 \right] \cosh \gamma_m$$

Case 3：

$$-\left\{ \begin{aligned} & \left[ \theta_{z1m} S_m^2 - \theta_{z1m} R_m^2 - 2\theta_{z2m} R_m S_m - \theta_{z1m} v_{12} \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \right] \sinh S_m \sin R_m + \\ & \left[ \theta_{z2m} S_m^2 - \theta_{z2m} R_m^2 + 2\theta_{z1m} R_m S_m - \theta_{z2m} v_{12} \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \right] \cosh S_m \cos R_m \end{aligned} \right\}$$

當  $m = 1, 2, 3, \dots$ ， $n = 0, 1, 2, \dots$ ， $A_{21}$ ：

Case 1：

$$\frac{2 \cos n\pi}{\Delta_n} \sin \left( \frac{2m-1}{2} \right) \pi \{ P_1^{(1)} \beta_m \sinh \beta_m + P_2^{(1)} \gamma_m \sin \gamma_m \}$$

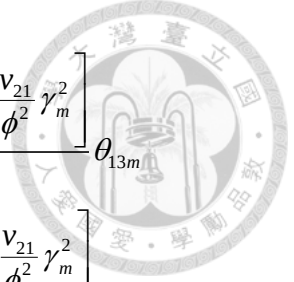
Case 2：

$$\frac{2 \cos n\pi}{\Delta_n} \sin \left( \frac{2m-1}{2} \right) \pi \{ P_3^{(1)} \beta_m \sinh \beta_m + P_4^{(1)} \gamma_m \sinh \gamma_m \}$$

Case 3：

$$\frac{-2}{\Delta_n} \sin \left( \frac{2m-1}{2} \right) \pi \left\{ \begin{aligned} & P_5^{(1)} \left[ -\theta_{z1m} \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 + \frac{v_{21}}{\phi^2} (\theta_{z1m} S_m^2 - \theta_{z1m} R_m^2 - 2\theta_{z2m} R_m S_m) \right] + \\ & P_6^{(1)} \left[ -\theta_{z2m} \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 + \frac{v_{21}}{\phi^2} (\theta_{z2m} S_m^2 - \theta_{z2m} R_m^2 + 2\theta_{z1m} R_m S_m) \right] \end{aligned} \right\}$$





$$\begin{aligned}
P_1^{(1)} &= \frac{\left[ \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2 - \frac{v_{21}}{\phi^2} \beta_m^2 \right]}{\beta_m^2 + (n\pi)^2} \theta_{11m} \quad , \quad P_2^{(1)} = \frac{\left[ \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2 + \frac{v_{21}}{\phi^2} \gamma_m^2 \right]}{\gamma_m^2 - (n\pi)^2} \theta_{13m} \\
P_3^{(1)} &= \frac{\left[ \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2 - \frac{v_{21}}{\phi^2} \beta_m^2 \right]}{\beta_m^2 + (n\pi)^2} \theta_{22m} \quad , \quad P_4^{(1)} = \frac{\left[ \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2 - \frac{v_{21}}{\phi^2} \gamma_m^2 \right]}{\gamma_m^2 + (n\pi)^2} \theta_{23m} \\
P_5^{(1)} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{S_m \sin(R_m + n\pi) \cosh S_m - (R_m + n\pi) \cos(R_m + n\pi) \sinh S_m}{S_m^2 + (R_m + n\pi)^2} + \right. \\
&\quad \left. \frac{S_m \sin(R_m - n\pi) \cosh S_m - (R_m - n\pi) \cos(R_m - n\pi) \sinh S_m}{S_m^2 + (R_m - n\pi)^2} \right] \\
P_6^{(1)} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{S_m \cos(R_m + n\pi) \sinh S_m + (R_m + n\pi) \sin(R_m + n\pi) \cosh S_m}{S_m^2 + (R_m + n\pi)^2} + \right. \\
&\quad \left. \frac{S_m \cos(R_m - n\pi) \sinh S_m + (R_m - n\pi) \sin(R_m - n\pi) \cosh S_m}{S_m^2 + (R_m - n\pi)^2} \right] \\
&\text{when } n=0 \Delta_n = 2, \text{ when } n \neq 0 \Delta_n = 1
\end{aligned}$$

當  $m = 1, 2, 3, \dots$  ,  $A_{31}$  :

Case 1 :

$$\theta_{11m} \left[ v_{12} \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2 - \beta_m^2 \right] + \theta_{13m} \left[ v_{12} \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2 + \gamma_m^2 \right]$$

Case 2 :

$$\theta_{22m} \left[ v_{12} \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2 - \beta_m^2 \right] + \theta_{23m} \left[ v_{12} \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2 - \gamma_m^2 \right]$$

Case 3 :

$$- \left[ \theta_{z2m} S_m^2 - \theta_{z2m} R_m^2 + 2\theta_{z1m} R_m S_m - v_{12} \phi^2 \theta_{z2m} \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \right]$$

當  $m = 1, 2, 3, \dots$  ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  ,  $A_{41}$  :

Case 1 :

$$\frac{(2m-1)\pi}{\Delta_n} \cos n\pi \left\{ \frac{\theta_{11m} \beta_m \sinh \beta_m}{\beta_m^2 + (n\pi)^2} + \frac{\theta_{13m} \gamma_m \sin \gamma_m}{\gamma_m^2 - (n\pi)^2} \right\}$$

Case 2 :



$$\frac{(2m-1)\pi}{\Delta_n} \cos n\pi \left\{ \frac{\theta_{22m} \beta_m \sinh \beta_m}{\beta_m^2 + (n\pi)^2} + \frac{\theta_{23m} \gamma_m \sinh \gamma_m}{\gamma_m^2 + (n\pi)^2} \right\}$$

Case 3 :

$$\frac{2}{\Delta_n} \left( \frac{2m-1}{2} \right) \pi \left( P_5^{(1)} \theta_{z1m} + P_6^{(1)} \theta_{z2m} \right)$$

當  $m = 1, 2, 3, \dots$  ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  ,  $A_{12}$  :

Case 1 :

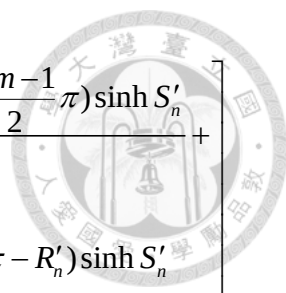
$$2 \cos n\pi \sin \left( \frac{2m-1}{2} \right) \pi \left\{ Q_1^{(1)} \beta'_n \cosh \beta'_n - Q_2^{(1)} \gamma'_n \cos \gamma'_n \right\}$$

Case 2 :

$$2 \cos n\pi \sin \left( \frac{2m-1}{2} \right) \pi \left\{ Q_3^{(1)} \beta'_n \cosh \beta'_n + Q_4^{(1)} \gamma'_n \cosh \gamma'_n \right\}$$

Case 3 :

$$\begin{aligned} & -2 \cos n\pi \left\{ Q_5^{(1)} \left[ -\theta'_{z1n} (n\pi)^2 + v_{12} \phi^2 \left( \theta'_{z1n} S_n'^2 - \theta'_{z1n} R_n'^2 - 2\theta'_{z2n} R'_n S'_n \right) \right] + \right. \\ & \left. Q_6^{(1)} \left[ -\theta'_{z2n} (n\pi)^2 + v_{12} \phi^2 \left( \theta'_{z2n} S_n'^2 - \theta'_{z2n} R_n'^2 + 2\theta'_{z1n} R'_n S'_n \right) \right] \right\} \\ & Q_1^{(1)} = \frac{\left[ (n\pi)^2 - v_{12} \phi^2 \beta_n'^2 \right]}{\beta_n'^2 + \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2} \theta'_{11n} \quad , \quad Q_2^{(1)} = \frac{\left[ (n\pi)^2 + v_{12} \phi^2 \gamma_n'^2 \right]}{\gamma_n'^2 - \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2} \theta'_{13n} \\ & Q_3^{(1)} = \frac{\left[ (n\pi)^2 - v_{12} \phi^2 \beta_n'^2 \right]}{\beta_n'^2 + \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2} \theta'_{22n} \quad , \quad Q_4^{(1)} = \frac{\left[ (n\pi)^2 - v_{12} \phi^2 \gamma_n'^2 \right]}{\gamma_n'^2 + \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2} \theta'_{23n} \\ & Q_5^{(1)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{S'_n \cos \left( R'_n - \frac{2m-1}{2} \pi \right) \sinh S'_n + \left( R'_n - \frac{2m-1}{2} \pi \right) \sin \left( R'_n - \frac{2m-1}{2} \pi \right) \cosh S'_n}{S_n'^2 + \left( R'_n - \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2} \right. \\ & \left. \frac{S'_n \cos \left( R'_n + \frac{2m-1}{2} \pi \right) \sinh S'_n + \left( R'_n + \frac{2m-1}{2} \pi \right) \sin \left( R'_n + \frac{2m-1}{2} \pi \right) \cosh S'_n}{S_n'^2 + \left( R'_n + \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2} \right] \end{aligned}$$



$$Q_6^{(1)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{S'_n \sin(R'_n + \frac{2m-1}{2}\pi) \cosh S'_n - (R'_n + \frac{2m-1}{2}\pi) \cos(R'_n + \frac{2m-1}{2}\pi) \sinh S'_n}{S_n'^2 + (R'_n + \frac{2m-1}{2}\pi)^2} + \frac{S'_n \sin(\frac{2m-1}{2}\pi - R'_n) \cosh S'_n - (\frac{2m-1}{2}\pi - R'_n) \cos(\frac{2m-1}{2}\pi - R'_n) \sinh S'_n}{S_n'^2 + (\frac{2m-1}{2}\pi - R'_n)^2} \right]$$

當  $n = 0, 1, 2, \dots$  ,  $A_{22}$  :

Case 1 :

$$\theta'_{11n} \left[ v_{21} \left( \frac{n\pi}{\phi} \right)^2 - \beta_n'^2 \right] \sinh \beta'_n + \theta'_{13n} \left[ v_{21} \left( \frac{n\pi}{\phi} \right)^2 + \gamma_n'^2 \right] \sin \gamma'_n$$

Case 2 :

$$\theta'_{22n} \left[ v_{21} \left( \frac{n\pi}{\phi} \right)^2 - \beta_n'^2 \right] \sinh \beta'_n + \theta'_{23n} \left[ v_{21} \left( \frac{n\pi}{\phi} \right)^2 - \gamma_n'^2 \right] \sinh \gamma'_n$$

Case 3 :

$$- \left\{ \left[ \theta'_{z2n} S_n'^2 - \theta'_{z2n} R_n'^2 + 2\theta'_{z1n} R'_n S'_n - \theta'_{z2n} \frac{v_{21}}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] \sinh S'_n \sin R'_n + \left[ \theta'_{z1n} S_n'^2 - \theta'_{z1n} R_n'^2 - 2\theta'_{z2n} R'_n S'_n - \theta'_{z1n} \frac{v_{21}}{\phi^2} (n\pi)^2 \right] \cosh S'_n \cos R'_n \right\}$$

當  $m = 1, 2, 3, \dots$  ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  ,  $A_{32}$  :

Case 1 :

$$2 \sin \left( \frac{2m-1}{2} \right) \pi \{ Q_1^{(1)} \beta'_n \cosh \beta'_n - Q_2^{(1)} \gamma'_n \cos \gamma'_n \}$$

Case 2 :

$$2 \sin \left( \frac{2m-1}{2} \right) \pi \{ Q_3^{(1)} \beta'_n \cosh \beta'_n + Q_4^{(1)} \gamma'_n \cosh \gamma'_n \}$$

Case 3 :

$$-2 \left\{ Q_5^{(1)} \left[ -\theta'_{z1n} (n\pi)^2 + v_{12} \phi^2 (\theta'_{z1n} S_n'^2 - \theta'_{z1n} R_n'^2 - 2\theta'_{z2n} R'_n S'_n) \right] + Q_6^{(1)} \left[ -\theta'_{z2n} (n\pi)^2 + v_{12} \phi^2 (\theta'_{z2n} S_n'^2 - \theta'_{z2n} R_n'^2 + 2\theta'_{z1n} R'_n S'_n) \right] \right\}$$

當  $n = 0, 1, 2, \dots$  ,  $A_{42}$  :



Case 1 :

$$\theta'_{11n}\beta'_n + \theta'_{13n}\gamma'_n$$

Case 2 :

$$\theta'_{22n}\beta'_n + \theta'_{23n}\gamma'_n$$

Case 3 :

$$\theta'_{z1n}R'_n + \theta'_{z2n}S'_n$$

當  $m = 1, 2, 3, \dots$  ,  $A_{13}$  :

Case 1 :

$$\psi_{11m} \left[ v_{12} \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2 - \beta_m^2 \right] + \psi_{13m} \left[ v_{12} \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2 + \gamma_m^2 \right]$$

Case 2 :

$$\psi_{22m} \left[ v_{12} \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2 - \beta_m^2 \right] + \psi_{23m} \left[ v_{12} \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2 - \gamma_m^2 \right]$$

Case 3 :

$$- \left[ \psi_{z2m} S_m^2 - \psi_{z2m} R_m^2 + 2\psi_{z1m} R_m S_m - v_{12} \phi^2 \psi_{z2m} \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \right]$$

當  $m = 1, 2, 3, \dots$  ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  ,  $A_{23}$  :

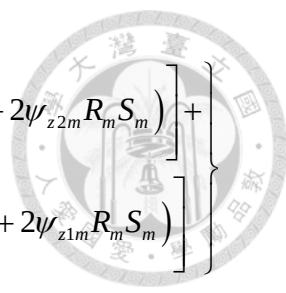
Case 1 :

$$\frac{2}{\Delta_n} \sin \left( \frac{2m-1}{2} \right) \pi \{ P_1^{(2)} \beta_m \sinh \beta_m + P_2^{(2)} \gamma_m \sin \gamma_m \}$$

Case 2 :

$$\frac{2}{\Delta_n} \sin \left( \frac{2m-1}{2} \right) \pi \{ P_3^{(2)} \beta_m \sinh \beta_m + P_4^{(2)} \gamma_m \sinh \gamma_m \}$$

Case 3 :



$$\frac{-2}{\Delta_n} \sin\left(\frac{2m-1}{2}\right) \pi \left\{ \begin{aligned} &P_5^{(2)} \left[ -\psi_{z1m} \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 + \frac{v_{21}}{\phi^2} (\psi_{z1m} S_m^2 - \psi_{z1m} R_m^2 - 2\psi_{z2m} R_m S_m) \right] + \\ &P_6^{(2)} \left[ -\psi_{z2m} \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 + \frac{v_{21}}{\phi^2} (\psi_{z2m} S_m^2 - \psi_{z2m} R_m^2 + 2\psi_{z1m} R_m S_m) \right] \end{aligned} \right\}$$

$$P_1^{(2)} = \frac{\left[ \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2 - \frac{v_{21}}{\phi^2} \beta_m^2 \right]}{\beta_m^2 + (n\pi)^2} \psi_{11m}, \quad P_2^{(2)} = \frac{\left[ \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2 + \frac{v_{21}}{\phi^2} \gamma_m^2 \right]}{\gamma_m^2 - (n\pi)^2} \psi_{13m}$$

$$P_3^{(2)} = \frac{\left[ \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2 - \frac{v_{21}}{\phi^2} \beta_m^2 \right]}{\beta_m^2 + (n\pi)^2} \psi_{22m}, \quad P_4^{(2)} = \frac{\left[ \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2 - \frac{v_{21}}{\phi^2} \gamma_m^2 \right]}{\gamma_m^2 + (n\pi)^2} \psi_{23m}$$

$$P_5^{(2)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{S_m \sin R_m \cosh S_m + (n\pi - R_m) \cos R_m \sinh S_m}{S_m^2 + (n\pi - R_m)^2} + \frac{S_m \sin R_m \cosh S_m - (R_m + n\pi) \cos R_m \sinh S_m}{S_m^2 + (R_m + n\pi)^2} \right]$$

$$P_6^{(2)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{S_m \cos R_m \sinh S_m + (R_m + n\pi) \sin R_m \cosh S_m}{S_m^2 + (R_m + n\pi)^2} + \frac{S_m \cos R_m \sinh S_m + (R_m - n\pi) \sin R_m \cosh S_m}{S_m^2 + (R_m - n\pi)^2} \right]$$

當  $m = 1, 2, 3, \dots$  ,  $A_{33}$  :

Case 1 :

$$\psi_{11m} \left[ v_{12} \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2 - \beta_m^2 \right] \cosh \beta_m + \psi_{13m} \left[ v_{12} \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2 + \gamma_m^2 \right] \cos \gamma_m$$

Case 2 :

$$\psi_{22m} \left[ v_{12} \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2 - \beta_m^2 \right] \cosh \beta_m + \psi_{23m} \left[ v_{12} \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2 - \gamma_m^2 \right] \cosh \gamma_m$$

Case 3 :

$$- \left\{ \begin{aligned} &\left[ \psi_{z1m} S_m^2 - \psi_{z1m} R_m^2 - 2\psi_{z2m} R_m S_m - \psi_{z1m} v_{12} \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \right] \sinh S_m \sin R_m + \\ &\left[ \psi_{z2m} S_m^2 - \psi_{z2m} R_m^2 + 2\psi_{z1m} R_m S_m - \psi_{z2m} v_{12} \phi^2 \left( \frac{2m-1}{2} \pi \right)^2 \right] \cosh S_m \cos R_m \end{aligned} \right\}$$

當  $m = 1, 2, 3, \dots$  ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  ,  $A_{43}$  :



Case 1 :

$$\frac{(2m-1)\pi}{\Delta_n} \left\{ \frac{\psi_{11m}\beta_m \sinh \beta_m}{\beta_m^2 + (n\pi)^2} + \frac{\psi_{13m}\gamma_m \sin \gamma_m}{\gamma_m^2 - (n\pi)^2} \right\}$$

Case 2 :

$$\frac{(2m-1)\pi}{\Delta_n} \left\{ \frac{\psi_{22m}\beta_m \sinh \beta_m}{\beta_m^2 + (n\pi)^2} + \frac{\theta_{23m}\gamma_m \sinh \gamma_m}{\gamma_m^2 + (n\pi)^2} \right\}$$

Case 3 :

$$\frac{2}{\Delta_n} \left( \frac{2m-1}{2} \right) \pi \left( P_5^{(2)} \psi_{z1m} + P_6^{(2)} \psi_{z2m} \right)$$

當  $m = 1, 2, 3, \dots$  ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  ,  $A_{14}$  :

Case 1 :

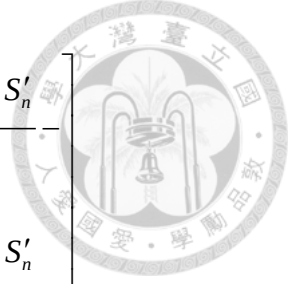
$$(2m-1)\pi \cdot \cos n\pi \left\{ Q_1^{(2)} \cosh \beta'_n - Q_2^{(2)} \cos \gamma'_n \right\}$$

Case 2 :

$$(2m-1)\pi \cdot \cos n\pi \left\{ Q_3^{(2)} \cosh \beta'_n + Q_4^{(2)} \cosh \gamma'_n \right\}$$

Case 3 :

$$\begin{aligned} & -2 \cos n\pi \left\{ Q_5^{(2)} \left[ -\psi'_{z1n} (n\pi)^2 + v_{12} \phi^2 \left( \psi'_{z1n} S_n'^2 - \psi'_{z1n} R_n'^2 - 2\psi'_{z2n} R_n' S_n' \right) \right] + \right. \\ & \left. Q_6^{(2)} \left[ -\psi'_{z2n} (n\pi)^2 + v_{12} \phi^2 \left( \psi'_{z2n} S_n'^2 - \psi'_{z2n} R_n'^2 + 2\psi'_{z1n} R_n' S_n' \right) \right] \right\} \\ & Q_1^{(2)} = \frac{\left[ (n\pi)^2 - v_{12} \phi^2 \beta_n'^2 \right]}{\beta_n'^2 + \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2} \psi'_{11n} , \quad Q_2^{(2)} = \frac{\left[ (n\pi)^2 + v_{12} \phi^2 \gamma_n'^2 \right]}{\gamma_n'^2 - \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2} \psi'_{13n} \\ & Q_3^{(2)} = \frac{\left[ (n\pi)^2 - v_{12} \phi^2 \beta_n'^2 \right]}{\beta_n'^2 + \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2} \psi'_{22n} , \quad Q_4^{(2)} = \frac{\left[ (n\pi)^2 - v_{12} \phi^2 \gamma_n'^2 \right]}{\gamma_n'^2 + \left( \frac{2m-1}{2} \right)^2 \pi^2} \psi'_{23n} \end{aligned}$$



$$Q_5^{(2)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{-S'_n \cos R'_n \cosh S'_n - (R'_n - \frac{2m-1}{2}\pi) \sin R'_n \sinh S'_n}{S_n'^2 + (R'_n - \frac{2m-1}{2}\pi)^2} - \frac{-S'_n \cos R'_n \cosh S'_n - (R'_n + \frac{2m-1}{2}\pi) \sin R'_n \sinh S'_n}{S_n'^2 + (R'_n + \frac{2m-1}{2}\pi)^2} \right]$$

$$Q_6^{(2)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{-S'_n \sin R'_n \sinh S'_n + (R'_n + \frac{2m-1}{2}\pi) \cos R'_n \cosh S'_n}{S_n'^2 + (R'_n + \frac{2m-1}{2}\pi)^2} + \frac{S'_n \sin R'_n \sinh S'_n + (\frac{2m-1}{2}\pi - R'_n) \cos R'_n \cosh S'_n}{S_n'^2 + (\frac{2m-1}{2}\pi - R'_n)^2} \right]$$

當  $n = 0, 1, 2, \dots$  ,  $A_{24}$  :

Case 1 :

$$\psi'_{11n} \left[ v_{21} \left( \frac{n\pi}{\phi} \right)^2 - \beta_n'^2 \right] + \psi'_{13n} \left[ v_{21} \left( \frac{n\pi}{\phi} \right)^2 + \gamma_n'^2 \right]$$

Case 2 :

$$\psi'_{22n} \left[ v_{21} \left( \frac{n\pi}{\phi} \right)^2 - \beta_n'^2 \right] + \psi'_{23n} \left[ v_{21} \left( \frac{n\pi}{\phi} \right)^2 - \gamma_n'^2 \right]$$

Case 3 :

$$- \left[ \psi'_{z2n} S_n'^2 - \psi'_{z2n} R_n'^2 + 2\psi'_{z1n} R'_n S'_n - \frac{v_{21}}{\phi^2} \psi'_{z2n} (n\pi)^2 \right]$$

當  $m = 1, 2, 3, \dots$  ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  ,  $A_{34}$  :

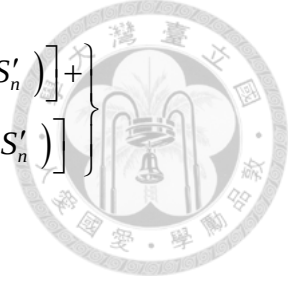
Case 1 :

$$(2m-1)\pi \left\{ Q_1^{(2)} \cosh \beta'_n - Q_2^{(2)} \cos \gamma'_n \right\}$$

Case 2 :

$$(2m-1)\pi \left\{ Q_3^{(2)} \cosh \beta'_n + Q_4^{(2)} \cosh \gamma'_n \right\}$$

Case 3 :



$$-2 \left\{ Q_5^{(2)} \left[ -\psi'_{z1n} (n\pi)^2 + v_{12} \phi^2 (\psi'_{z1n} S_n'^2 - \psi'_{z1n} R_n'^2 - 2\psi'_{z2n} R_n' S_n') \right] + \right. \\ \left. Q_6^{(2)} \left[ -\psi'_{z2n} (n\pi)^2 + v_{12} \phi^2 (\psi'_{z2n} S_n'^2 - \psi'_{z2n} R_n'^2 + 2\psi'_{z1n} R_n' S_n') \right] \right\}$$

當  $n = 0, 1, 2, \dots$  ,  $A_{44}$  :

Case 1 :

$$-\psi'_{11n} \beta_n' \sinh \beta_n' + \psi'_{13n} \gamma_n' \sin \gamma_n'$$

Case 2 :

$$-\psi'_{22n} \beta_n' \sinh \beta_n' - \psi'_{23n} \gamma_n' \sinh \gamma_n'$$

Case 3 :

$$(-\psi'_{z1n} R_n' - \psi'_{z2n} S_n') \sinh S_n' \cos R_n' + (\psi'_{z2n} R_n' - \psi'_{z1n} S_n') \cosh S_n' \sin R_n'$$

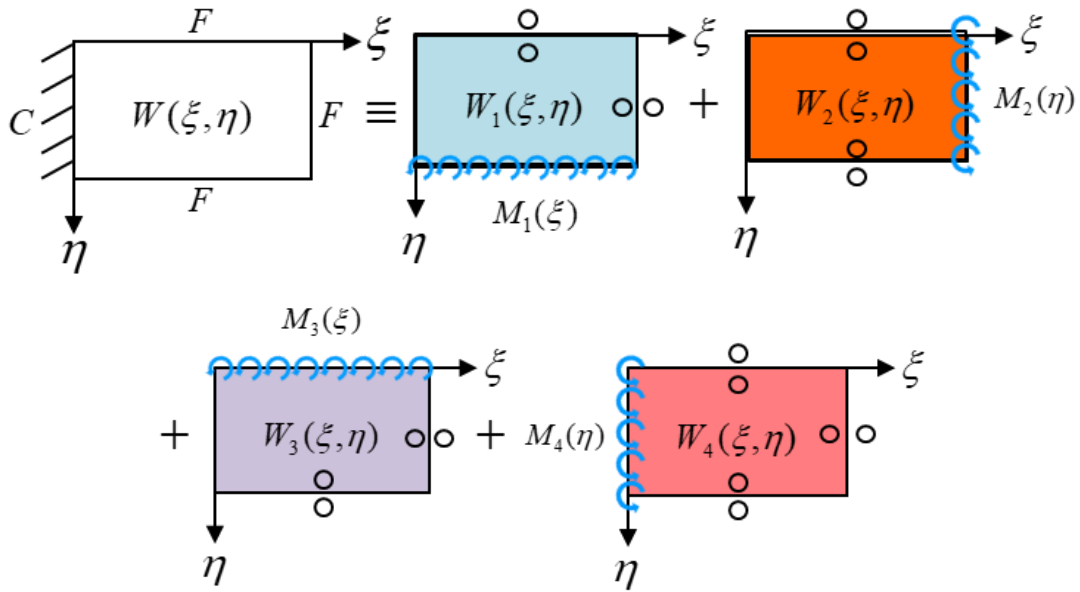


圖 4-21 單邊固定全域平板之等效圖

#### 4.4.4 理論分析與有限元素結果比較

為了驗證理論推導的正確性與適用性，本小節將與有限元素軟體 ABAQUS 的結果進行比較，在理論當中首先以  $K=5$  的展開項計算共振頻率，以  $K=20$  繪製模態圖，其中所設定的試片尺寸與材料參數列於表 4-8，並設定為「xy 平面-x 方向」的試片，在理論當中只需輸入 4 個材料常數，而在模擬當中則需要設定 9



個材料常數，與第三章的方法相同，網格類型為 C3D20R。在理論當中與 4.3.1 小節的做法相同，將 A 矩陣的行列式值取對數並進行掃頻，圖中低點即為懸臂薄板的共振頻率，將理論與模擬前 15 個共振頻率的結果整理於表 4-9，可以發現不管是頻率值或是模態形狀都有很好的對應性。

接著探討展開項數的收斂性，以第 1 個模態的頻率為基準、增加迭代次數，結果如圖 4-22，可以觀察到展開項數為 5 時，頻率值之小數點後第三位即不再變動，而以第 15 個模態的頻率為基準、增加迭代次數，結果如圖 4-23，如以小數點後三位完全相同為標準，此模態則要展開至第 25 項才完整收斂。

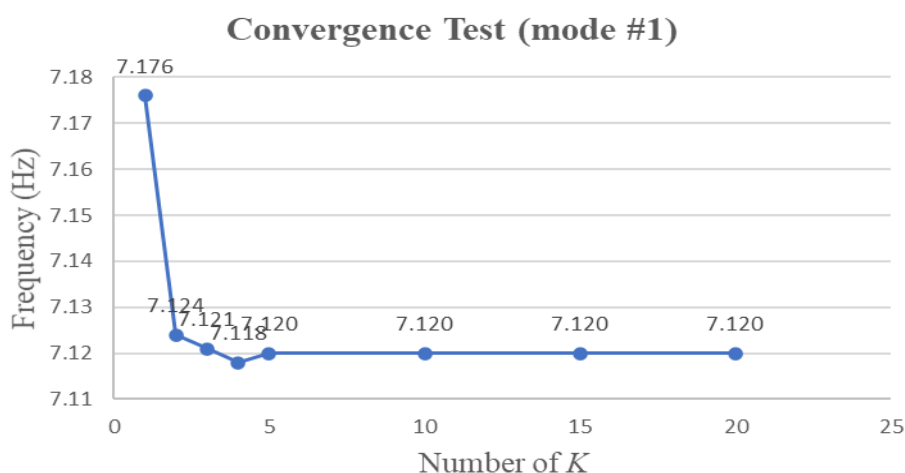


圖 4-22 第 1 模態之展開項數收斂性分析

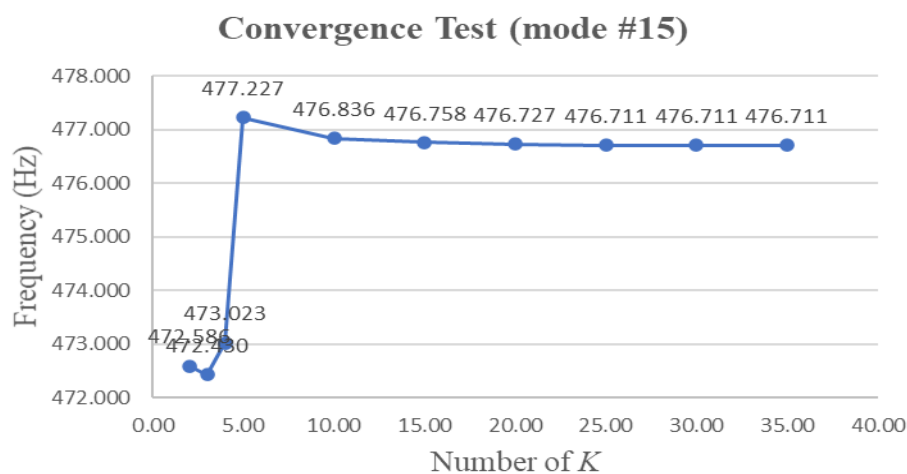


圖 4-23 第 15 模態之展開項數收斂性分析

表 4-8 理論與模擬比較之材料常數設定

| Symbol                        | value | Symbol                    | value |
|-------------------------------|-------|---------------------------|-------|
| Iteration Number (Frequency)  | 5     | $E_1$ (GPa)               | 3     |
| Iteration Number (Mode Shape) | 20    | $E_2$ (GPa)               | 2     |
| $a$ (mm)                      | 200   | $G_{12}$ (GPa)            | 1     |
| $b$ (mm)                      | 100   | $\nu_{12}$                | 0.3   |
| $h$ (mm)                      | 1     | $E_3$ (GPa)               | 2     |
| Density ( $\text{kg/m}^3$ )   | 1000  | $G_{13}$ 、 $G_{23}$ (GPa) | 1     |
|                               |       | $\nu_{13}$ 、 $\nu_{23}$   | 0.3   |

表 4-9 懸臂板面外理論與模擬分析結果

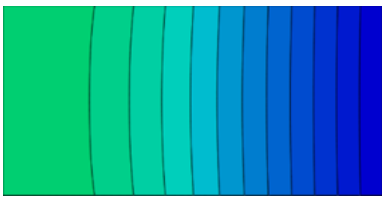
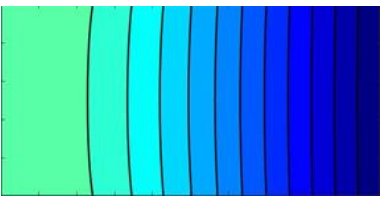
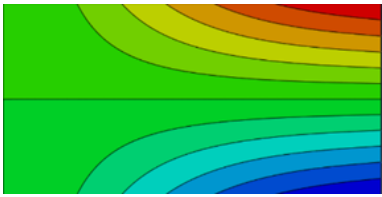
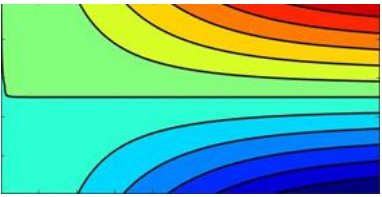
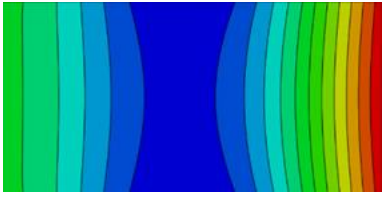
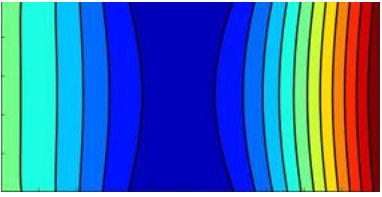
| Mode |                | ABAQUS                                                                              | Theory                                                                               |
|------|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 1    | Mode Shape     |  |  |
|      | Frequency (Hz) | 7.12                                                                                | 7.12 (0.00%)                                                                         |
| 2    | Mode Shape     |  |  |
|      | Frequency (Hz) | 28.90                                                                               | 29.00 (0.36%)                                                                        |
| 3    | Mode Shape     |  |  |
|      | Frequency (Hz) | 44.43                                                                               | 44.45 (0.05%)                                                                        |

表 4-9 懸臂板面外理論與模擬分析結果(續)

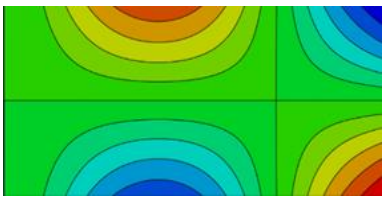
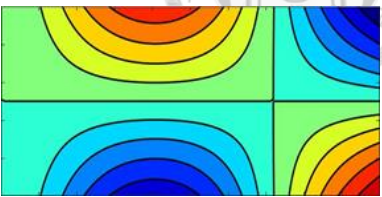
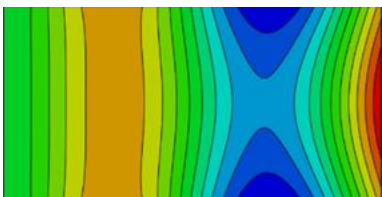
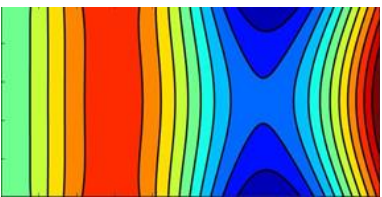
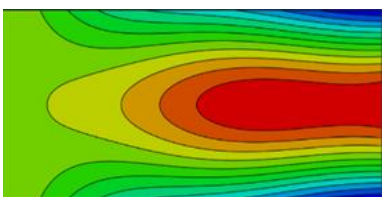
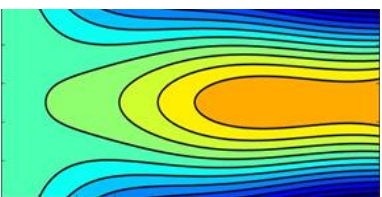
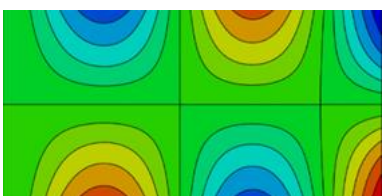
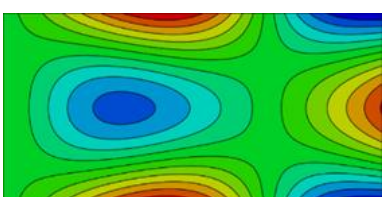
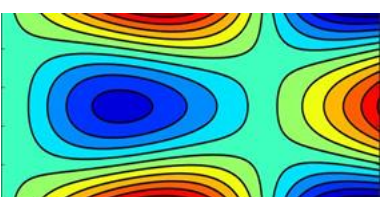
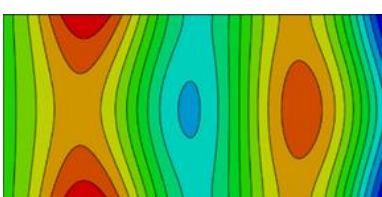
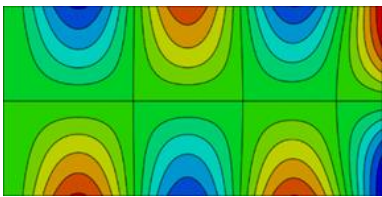
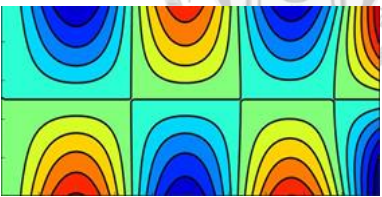
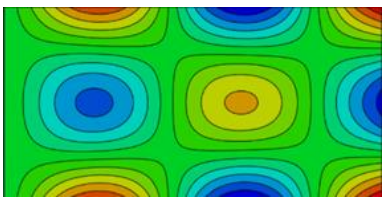
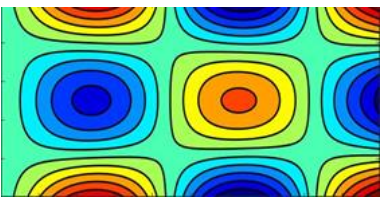
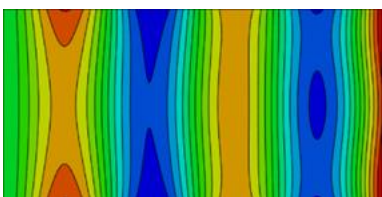
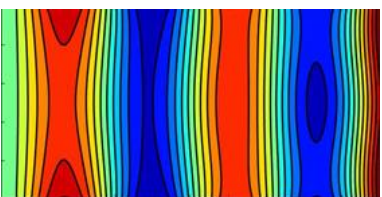
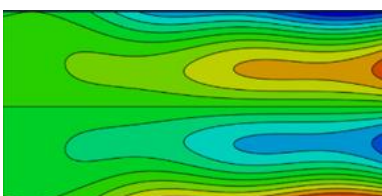
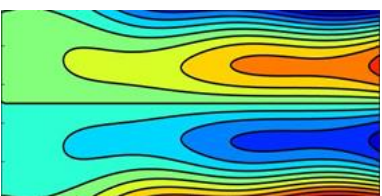
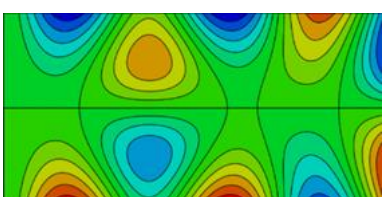
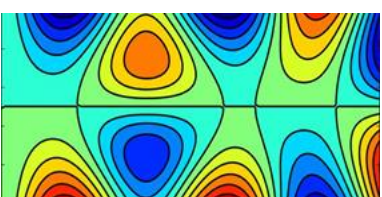
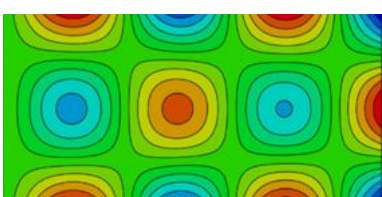
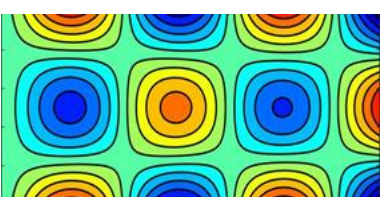
| Mode |                | ABAQUS                                                                              | Theory                                                                               |
|------|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 4    | Mode Shape     |    |    |
|      | Frequency (Hz) | 94.55                                                                               | 94.87 (0.34%)                                                                        |
| 5    | Mode Shape     |    |    |
|      | Frequency (Hz) | 124.31                                                                              | 124.42 (0.09%)                                                                       |
| 6    | Mode Shape     |   |   |
|      | Frequency (Hz) | 159.44                                                                              | 159.63 (0.12%)                                                                       |
| 7    | Mode Shape     |  |  |
|      | Frequency (Hz) | 183.65                                                                              | 184.34 (0.37%)                                                                       |
| 8    | Mode Shape     |  |  |
|      | Frequency (Hz) | 226.34                                                                              | 227.06 (0.32%)                                                                       |
| 9    | Mode Shape     |  |  |
|      | Frequency (Hz) | 246.93                                                                              | 247.34 (0.16%)                                                                       |

表 4-9 懸臂板面外理論與模擬分析結果(續)

| Mode |                | ABAQUS                                                                              | Theory                                                                               |
|------|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 10   | Mode Shape     |    |    |
|      | Frequency (Hz) | 306.48                                                                              | 307.54 (0.35%)                                                                       |
| 11   | Mode Shape     |    |    |
|      | Frequency (Hz) | 335.34                                                                              | 336.92 (0.47%)                                                                       |
| 12   | Mode Shape     |   |   |
|      | Frequency (Hz) | 407.07                                                                              | 408.32 (0.31%)                                                                       |
| 13   | Mode Shape     |  |  |
|      | Frequency (Hz) | 418.58                                                                              | 419.12 (0.13%)                                                                       |
| 14   | Mode Shape     |  |  |
|      | Frequency (Hz) | 466.44                                                                              | 469.63 (0.68%)                                                                       |
| 15   | Mode Shape     |  |  |
|      | Frequency (Hz) | 474.85                                                                              | 477.23 (0.50%)                                                                       |





## 4.5 薄板結構材料常數反算

本節將根據前一節所推導之懸臂板共振頻率做為 GA 中適應函數的計算，以進行正交性材料常數的反算。從圖 4-22 可以觀察到展開項數為 5 時第 1 個共振頻率值即完整收斂，而由圖 4-23，第 15 個共振頻率值則是展開 25 項時才完整收斂，但在展開項數為 5 時其值即接近完整收斂的結果，在 GA 當中如選用較大的展開項數，將會相當消耗時間成本，且實際透過實驗進行材料參數的反算只會使用到前 6 個共振頻率的結果，因此展開項數為 5 是可以接受的迭代次數。由於疊加法推導懸臂板共振頻率是基於薄板假設，因此需考慮厚度方向的適用範圍，因此嘗試改變模型的寬厚比，觀察理論與模擬間的誤差，結果如圖 4-24，從圖中可以觀察大約在寬厚比為 20 時，前 15 個模態之共振頻率，理論與模擬間的誤差將超過 3%，而在後以實驗進行材料常數反算的模型將採用寬厚比為 50 的試片。

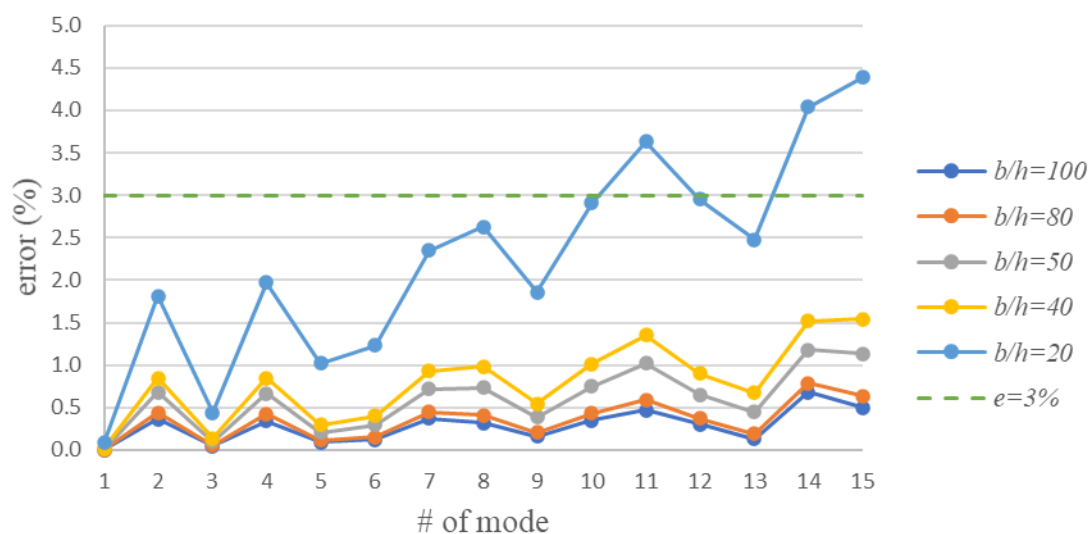


圖 4-24 不同厚度之懸臂板理論與模擬間誤差(K=5)

### 4.5.1 演算法參數選用

從(4-60)式本構方程式可以觀察到獨立的等效常數為  $D_{11}$ 、 $D_{22}$  與  $H$ ，但由於邊界條件與蒲松比相關，因此總共可以求得 3 個等效常數加上蒲松比，進一步可以計算出 2 個方向的楊氏模量與 1 個平面方向的剪切模量，為驗證演算法參數設定的可行性，將  $D_{11} = 0.2660$ 、 $D_{22} = 0.1773$ 、 $H = 0.2199$  與  $\nu_{12} = 0.30$ ，代入疊加法懸臂板共

振頻率理論取得前 6 個共振頻率作為實驗值，當 GA 機制收斂後其表現最好的個體(材料參數組合)應該要很接近代入至梁理論的材料常數，設定 GA 的機制與參數皆與 4.3.3 小節相同，其中由於有 4 個材料參數形成一個組合，因此一個個體將有 4 個染色體(基因序列)組成。進行連續 3 次的測試，並設定終止條件如下：

- (1) 達到 100 個世代。
- (2) 每個世代族群當中表現最好的個體代入適應函數的誤差小於 0.01 %。
- (3) 世代中表現最好的個體與表現最差的個體完全相同(即失去基因多樣性)。

將每個世代表現最佳的個體代入適應函數計算誤差，所繪製 GA 的收斂圖如圖 4-25，從圖中可以發現大約至 70 世代，結果即達成收斂，並將最終收斂的最佳參數組合結果整理於表 4-10，連續 3 次測試所得到的最佳參數組合皆近似相同，並且都非常接近一開始輸入至理論計算的參數，因此可以確定演算法的參數設定於薄板進行材料常數反算也是沒有問題的。

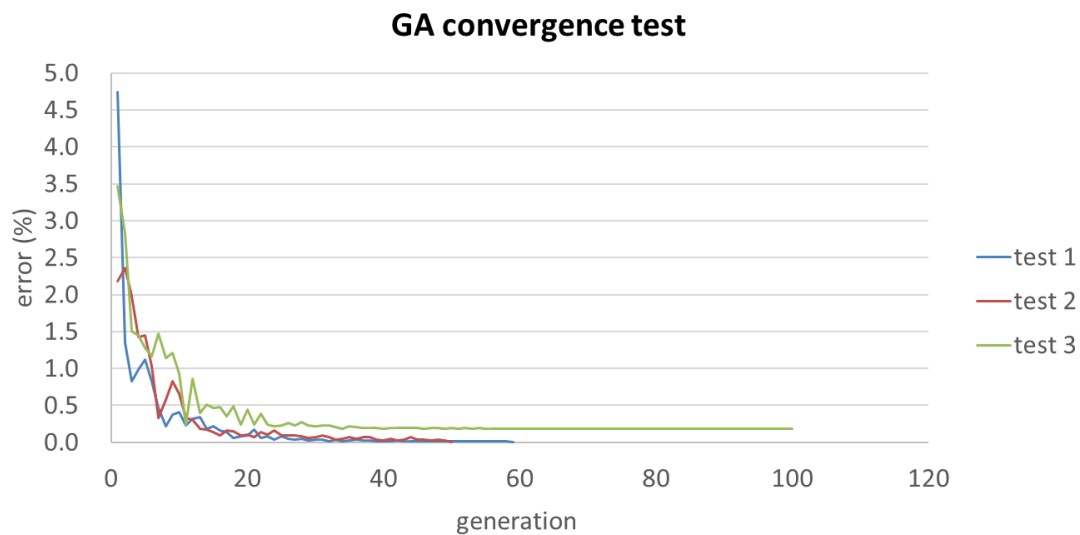


圖 4-25 理論自生成 GA 收斂測試

表 4-10 理論自生成 GA 收斂之最佳參數組合

|            | Test 1 | Test 2 | Test 3 |
|------------|--------|--------|--------|
| $D_{11}$   | 0.2660 | 0.2660 | 0.2660 |
| $D_{22}$   | 0.1774 | 0.1774 | 0.1774 |
| $H$        | 0.2199 | 0.2199 | 0.2202 |
| $\nu_{12}$ | 0.30   | 0.30   | 0.30   |
| Error (%)  | 0.0049 | 0.0049 | 0.0070 |

#### 4.5.2 實驗說明

實驗上主要進行兩個步驟，第一是與第三章相同的鋼珠落擊實驗，敲擊試片的 A 點與 B 點，如圖 4-26，敲擊 B 點是為了得到較準確  $y$  方向的彎曲模態。而由於板的模態組成較梁複雜，因此尚需進行第二步全域的振動量測(DPM)，得到試片振動的模態形狀，試片的列印尺寸為  $180 \times 100 \times 2 \text{ mm}^3$ ，於試片的一側貼上 4 片 P2 型式( $d_{31}$  效應)的壓電纖維，為 SMART MATERIAL 公司所生產，型號為 M2807-P2，給予電壓將造成拉伸方向的變形，其規格如表 4-11，透過訊號產生器(Function Generator)輸入不同頻率的電訊號以及改變正負極方向即可激發出各種模態形狀，壓電纖維黏貼位置如圖 4-27，透過 2.3 節的方法進行模態形狀的量測，給定壓電纖維 10V 的電壓，並量測  $25 \times 10$  個點，由於列印的為薄板結構且 3D 列印材料相對來說較不堅硬，為了避免黏貼壓電纖維影響頻率的準確性，因此第二步主要觀察模態形狀，頻率值則只用於參考比對用。

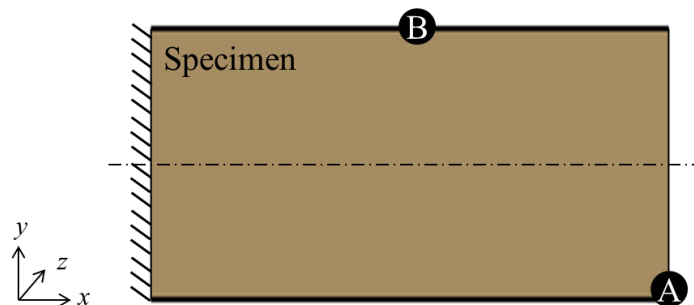


圖 4-26 懸臂板敲擊位置示意圖

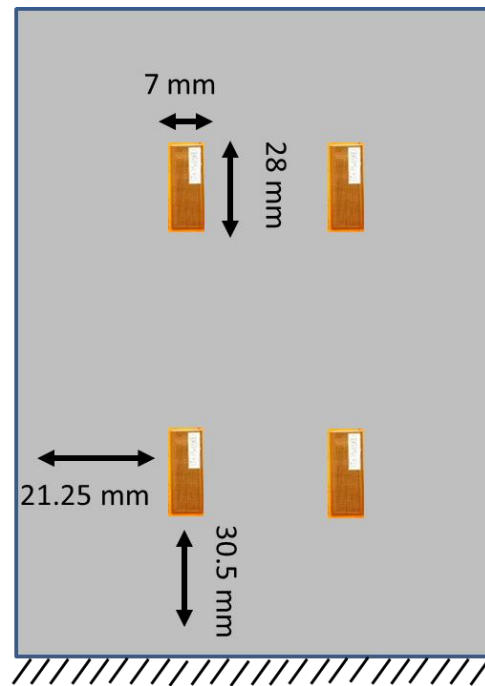


圖 4-27 壓電纖維黏貼示意圖

表 4-11 壓電纖維規格

| Specifications(M2807-P2) |              |                                |      |
|--------------------------|--------------|--------------------------------|------|
| Operating voltage        | -60V to 360V | Overall width (mm)             | 10   |
| Active length (mm)       | 28           | Capacitance in nF $\pm 20\%$   | 21.5 |
| Active width (mm)        | 7            | free strain in ppm $\pm 10\%$  | -600 |
| Overall length (mm)      | 37           | blocking force in N $\pm 10\%$ | -35  |

### 4.5.3 實驗流程與結果

實驗進行所有材料常數反算的步驟如圖 4-28，首先透過鋼珠落擊實驗與全域振動量測取得試片的前 10 個共振頻率與模態形狀，並將前 6 個頻率代入 GA 演算法中的適應函數，當 GA 的流程結束，將收斂至一組材料參數組合，使得其代入疊加法理論所計算的共振頻率與實驗間有最小的誤差，一個方向的試片能夠得到 4 個材料常數，因此只需要量測 3 個方向的試片即可得到所有的材料常數，然而在流程當中並沒有判斷模態種類的機制，因此在流程結束後必須檢驗得到的材料常數組合代回理論所生成的模態形狀，是否與實驗量測到的結果相同，如不相同則需增





添一些條件至演算法當中，例如  $E_1$  必須大於  $E_2$ 。

3 個方向試片最終成型尺寸(扣除固定端夾持的部分)分別為「xy 平面-x 方向」： $181 \times 99.62 \times 2.1 \text{ mm}^3$ 、「xz 平面-z 方向」： $179 \times 100 \times 1.93 \text{ mm}^3$  與「yz 平面-y 方向」： $180 \times 100.08 \times 2.0 \text{ mm}^3$ ，敲擊 A 點之時域與頻域訊號如圖 4-29 ~圖 4-31，將 3 個方向頻率的結果代入 GA 流程，所繪製 GA 的收斂圖如圖 4-32，可以觀察到結果皆已收斂，並且平均誤差都不到 1%，將各試片的結果整理於表 4-12 至表 4-14，其中實驗的頻率值為鋼珠落擊實驗的數據，括號為 DPM 量測時訊號產生器給予的激發頻率，兩者之所以有所差異除了激振方式不同之外，於鋼珠落擊實驗試片並未黏貼壓電纖維，壓電纖維雖然輕薄，但可能還是會造成一定的質量效應，且其同時為激振源，也可能會影響試片的振動特性。模態圖則為 DPM 的結果，將反算的材料常數代回理論與模擬，進行三者的比對，而模擬的參數是如何設定的會在後做更詳細的說明。從表中可以觀察到，實驗、理論與模擬間都有不錯的對應性，而由於壓電纖維黏貼的方向為平行薄板長度方向，不易激振較純之寬度方向位移變化的振動模態，因此第 6 模態沒有量測出模態形狀。為了雙重驗證 DPM 的量測結果，在此也對「xy 平面-x 方向」的試片進行 2.4 節 ESPI 的量測，頻率微調至小數點後 1 位，盡可能的使亮、暗紋越多越明顯，電壓則在 10V 內調至整數位，將量測結果整理於表 4-15，可以發現理論、DPM 與 ESPI 的結果也都有很好的對應性，由於 DPM 與 ESPI 實驗試片激振的方式相同，因此給定的穩態頻率也很接近，確保了在量測上的結果是準確的。

將所有反算的材料常數結果整理於表 4-16，由於一個方向的試片只能求得 4 個材料常數，而在模擬當中需要輸入 9 個材料參數，以「xy 平面-x 方向」的試片為例，在模擬當中  $E_x$ 、 $E_y$ 、 $G_{xy}$  與  $\nu_{xy}$  輸入 GA 流程直接進行反算的結果，其他參數則是輸入另外兩個方向試片反算結果的平均。將結果與 3.3 節與 4.3 節的結果進行比較，楊氏模量與剪切模量都有很好的對應性，由於是薄板的結構，「xz 平面-z 方向」與「yz 平面-y 方向」的試片在列印過程當中，為了避免造成試片的晃動，

有將冷卻風扇關閉，可能是造成蒲松比較 4.3 節的結果大上許多的原因。在此除了確立了 3D 列印機列印試片的穩定性，也驗證了不同尺寸比例結構所使用之材料常數反算方法的可行性。

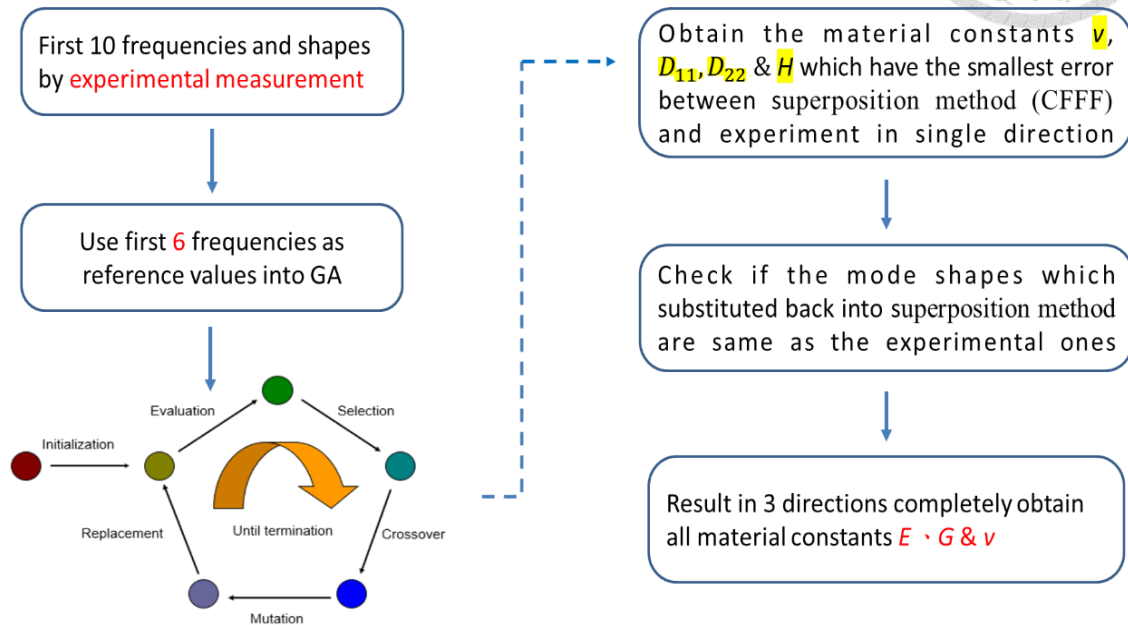


圖 4-28 薄板結構材料常數反算流程

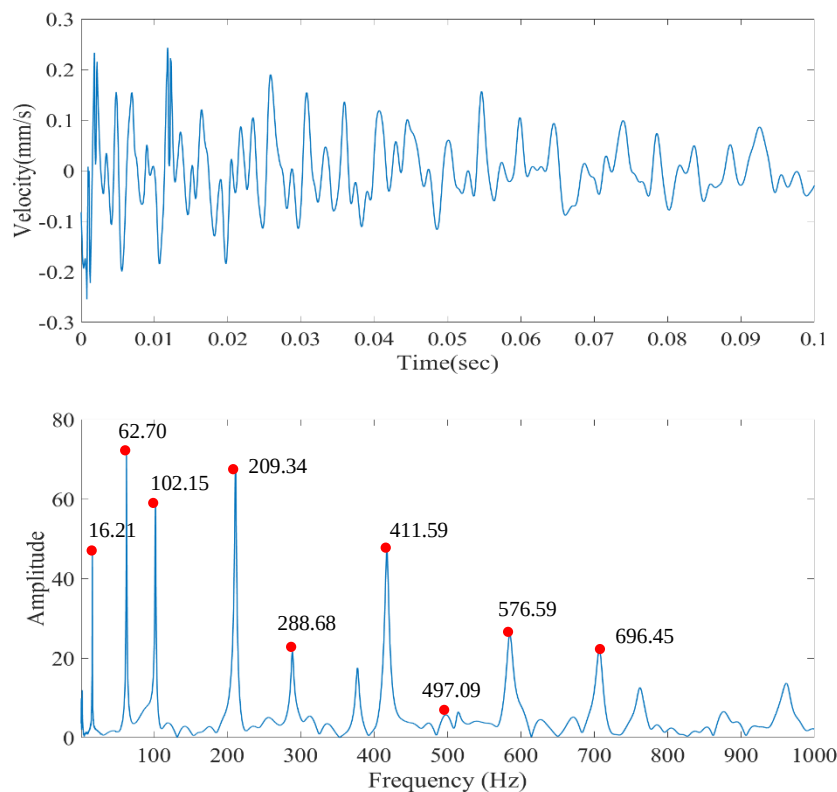


圖 4-29 「xy 平面-x 方向」試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號

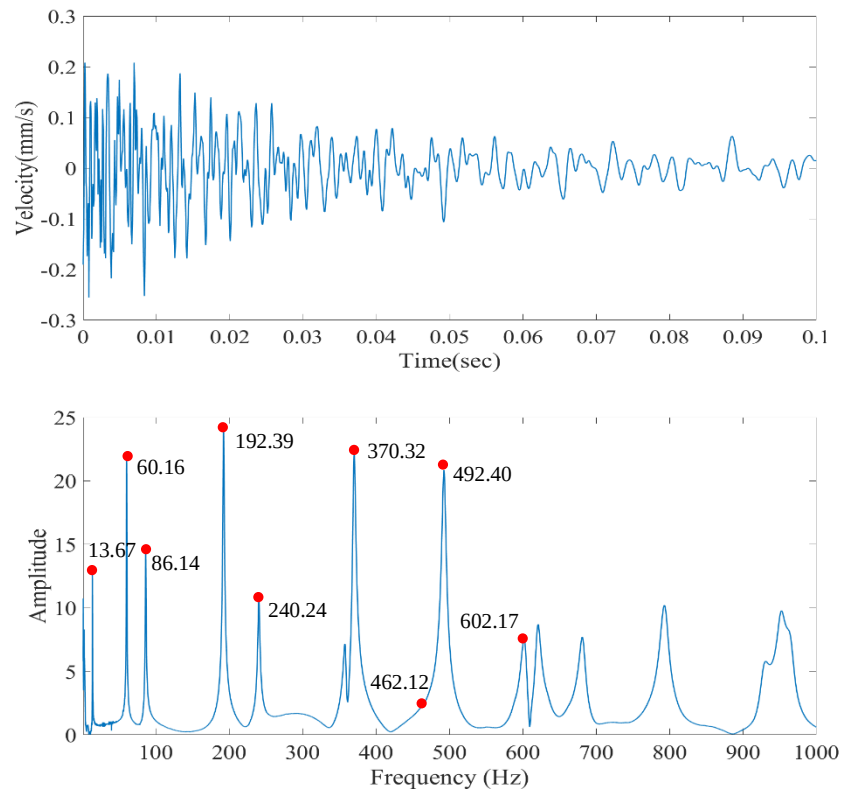
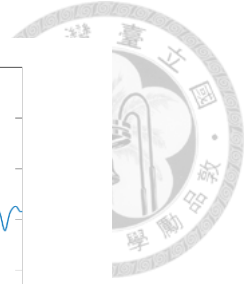


圖 4-30 「xz 平面-z 方向」試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號

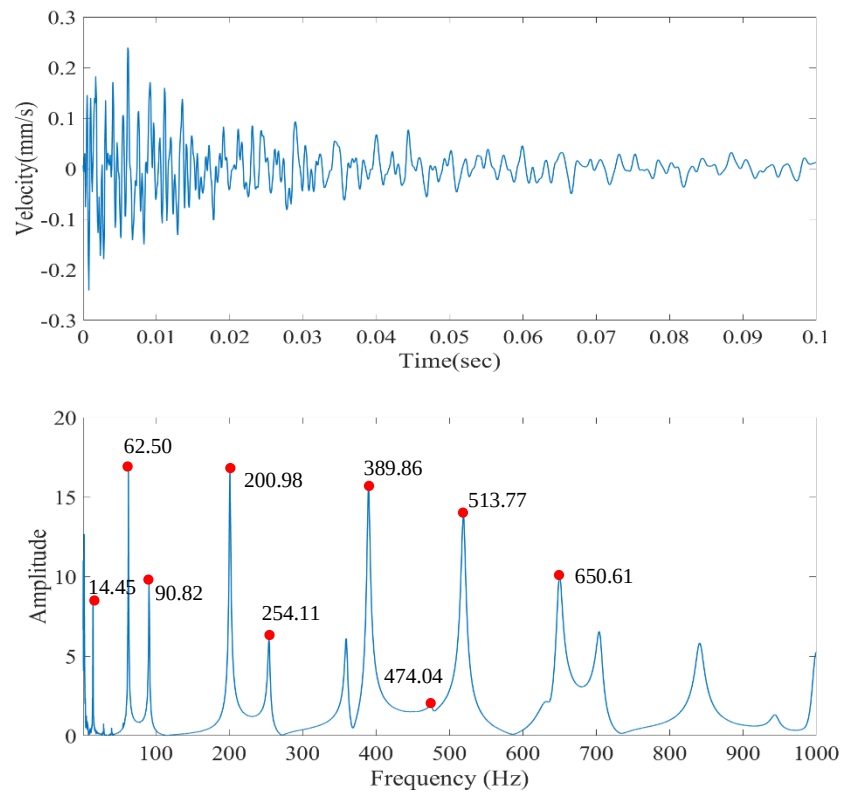


圖 4-31 「yz 平面-y 方向」試片敲擊 A 點之時域與頻域訊號

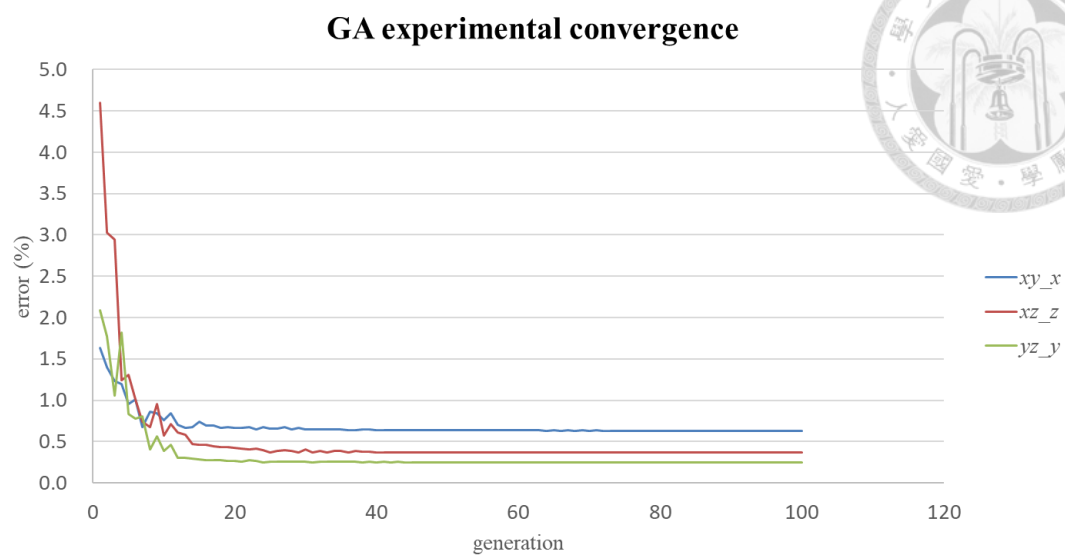


圖 4-32 實驗結果 GA 收斂狀況

表 4-12 「xy 平面-x 方向」試片實驗、理論與模擬結果

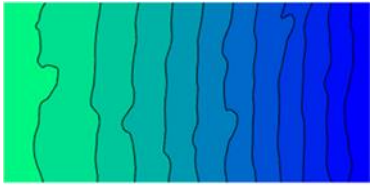
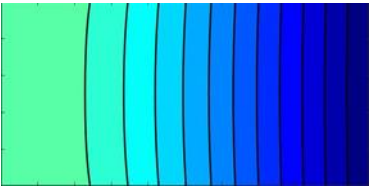
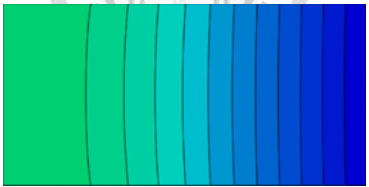
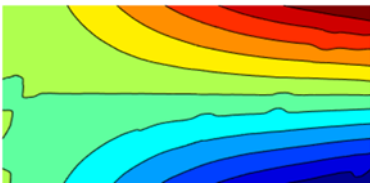
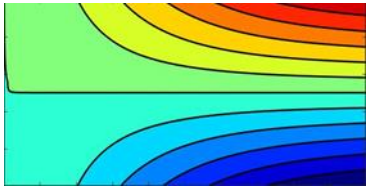
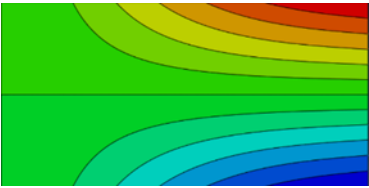
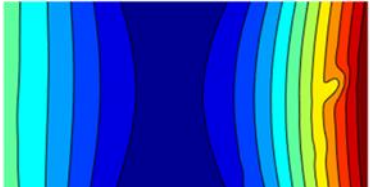
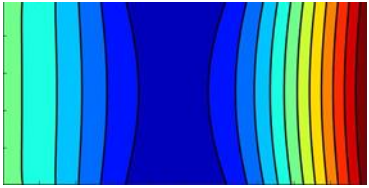
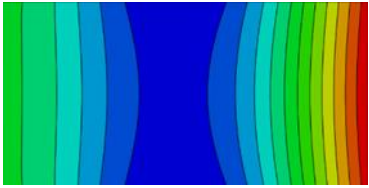
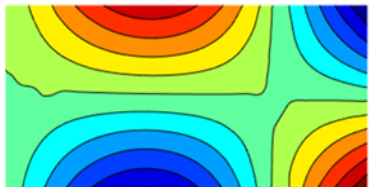
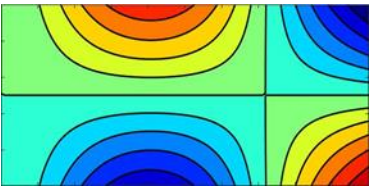
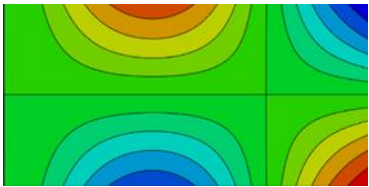
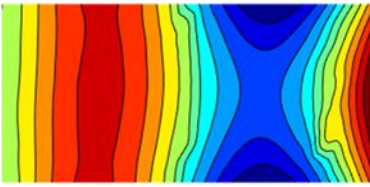
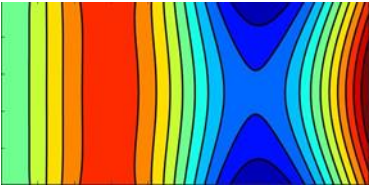
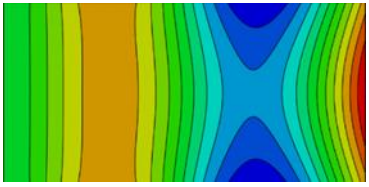
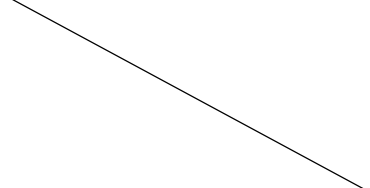
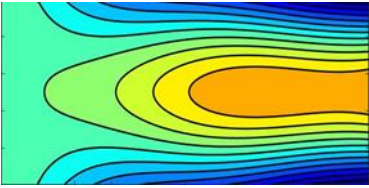
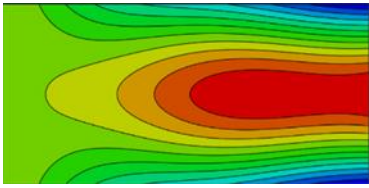
| Mode | Exp.                                                                                | Theory                                                                               | FEM                                                                                   |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 1    |    |    |    |
|      | 16.21 Hz (15)                                                                       | 16.32 Hz (-0.66%)                                                                    | 16.32 Hz (-0.67%)                                                                     |
| 2    |    |    |    |
|      | 62.70 Hz (62)                                                                       | 62.71 Hz (-0.01%)                                                                    | 62.37 Hz (0.52%)                                                                      |
| 3    |   |   |   |
|      | 102.15 Hz (101)                                                                     | 102.13 Hz (0.02%)                                                                    | 102 Hz (0.15%)                                                                        |
| 4    |  |  |  |
|      | 209.34 Hz (209)                                                                     | 206.66 Hz (1.29%)                                                                    | 205.47 Hz (1.88%)                                                                     |
| 5    |  |  |  |
|      | 288.68 Hz (284)                                                                     | 285.76 Hz (1.02%)                                                                    | 285.02 Hz (1.28%)                                                                     |
| 6    |  |  |  |
|      | 349.21 Hz                                                                           | 346.52 Hz (0.78%)                                                                    | 345.29 Hz (1.13%)                                                                     |

表 4-12 「 $xy$  平面- $x$  方向」試片實驗、理論與模擬結果(續)

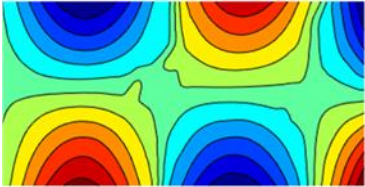
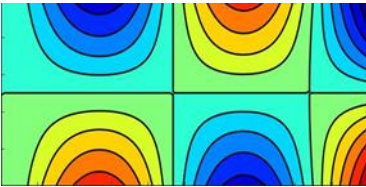
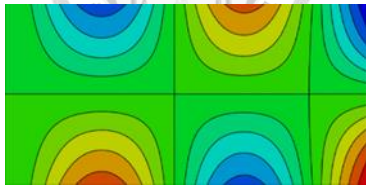
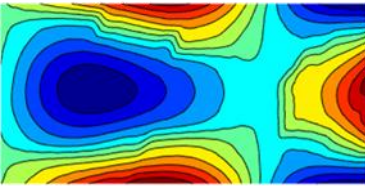
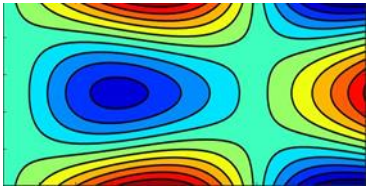
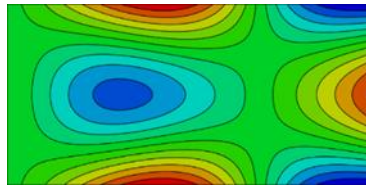
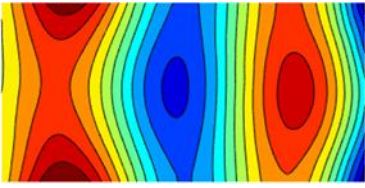
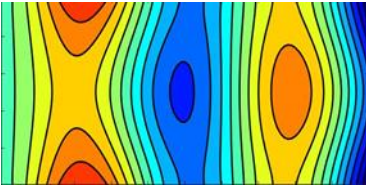
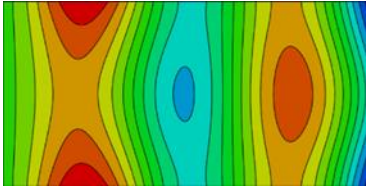
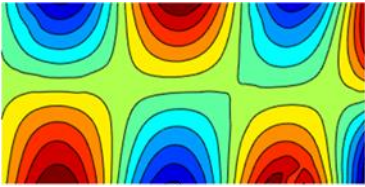
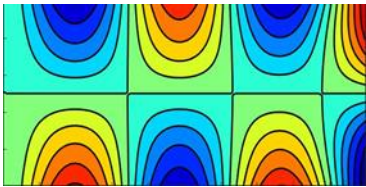
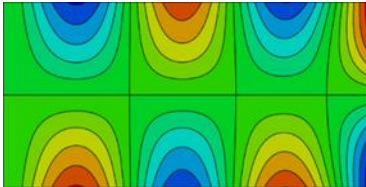
| Mode | Exp.                                                                                | Theory                                                                               | FEM                                                                                   |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 7    |    |    |    |
|      | 411.59 Hz (411)                                                                     | 406.81 Hz (1.18%)                                                                    | 404.00 Hz (1.88%)                                                                     |
| 8    |    |    |    |
|      | 497.09 Hz (511)                                                                     | 491.03 Hz (1.23%)                                                                    | 487.10 Hz (2.05%)                                                                     |
| 9    |   |   |   |
|      | 576.59 Hz (586)                                                                     | 563.37 Hz (2.35%)                                                                    | 560.88 Hz (2.80%)                                                                     |
| 10   |  |  |  |
|      | 696.45 Hz (706)                                                                     | 686.21 Hz (1.49%)                                                                    | 681.03 Hz (2.26%)                                                                     |



表 4-13 「xz 平面-z 方向」試片實驗、理論與模擬結果

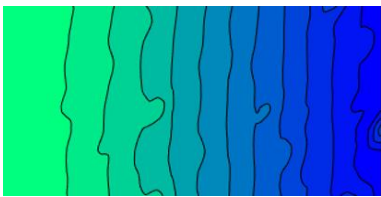
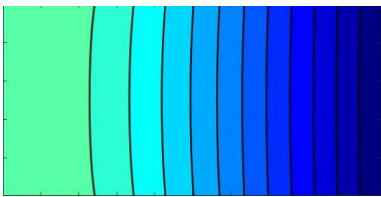
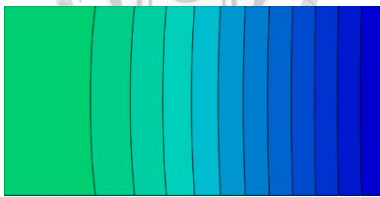
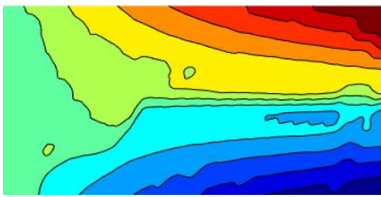
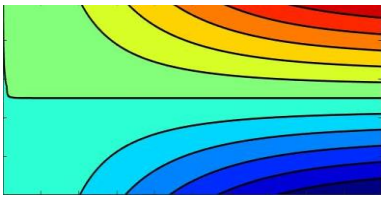
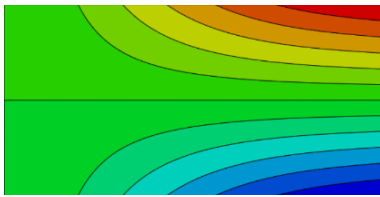
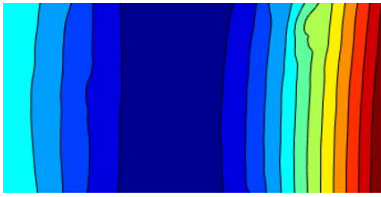
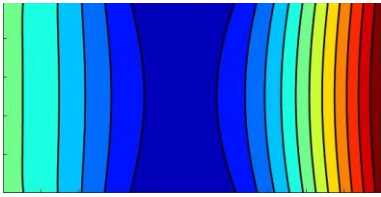
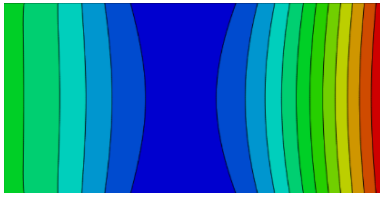
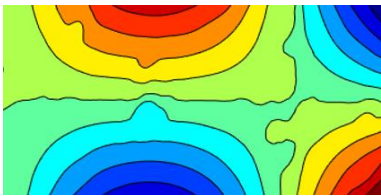
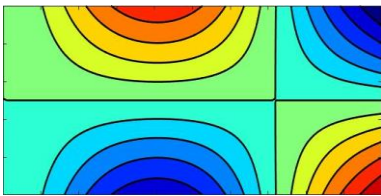
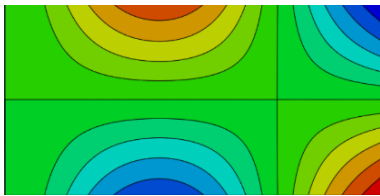
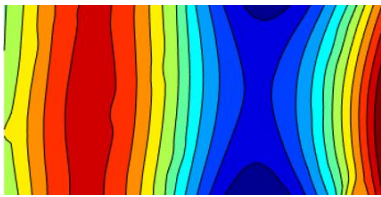
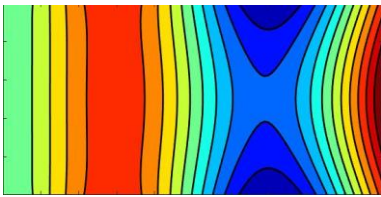
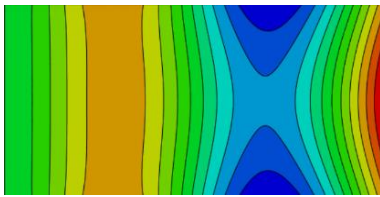
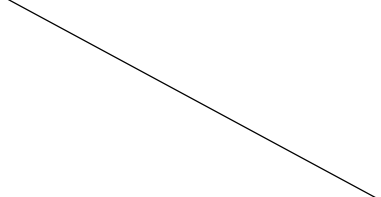
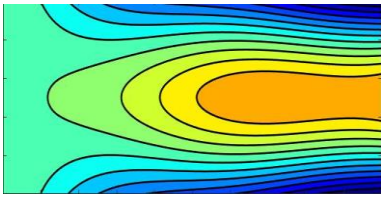
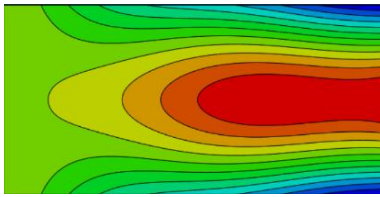
| Mode | Exp.                                                                                | Theory                                                                               | FEM                                                                                   |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 1    |    |    |    |
|      | 13.67 Hz (14)                                                                       | 13.73 Hz (-0.43%)                                                                    | 13.71 Hz (-0.27%)                                                                     |
| 2    |    |    |    |
|      | 60.16 Hz (61)                                                                       | 60.06 Hz (0.17%)                                                                     | 59.63 Hz (0.89%)                                                                      |
| 3    |   |   |   |
|      | 86.14 Hz (88)                                                                       | 85.72 Hz (0.49%)                                                                     | 85.47 Hz (0.78%)                                                                      |
| 4    |  |  |  |
|      | 192.39 Hz (194)                                                                     | 194.48 Hz (-1.08%)                                                                   | 193.02 Hz (-0.33%)                                                                    |
| 5    |  |  |  |
|      | 240.24 Hz (248)                                                                     | 240.24 Hz (0.00%)                                                                    | 239.29 Hz (0.40%)                                                                     |
| 6    |  |  |  |
|      | 322.60 Hz                                                                           | 322.57 Hz (0.01%)                                                                    | 320.89 Hz (0.53%)                                                                     |

表 4-13 「xz 平面-z 方向」試片實驗、理論與模擬結果(續)

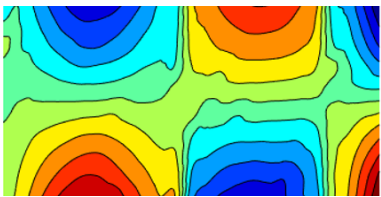
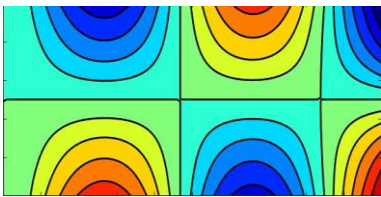
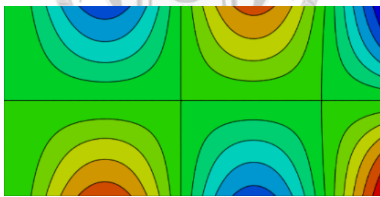
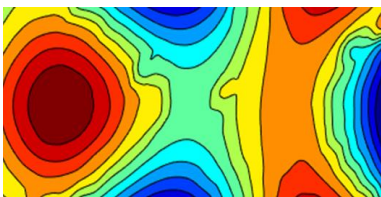
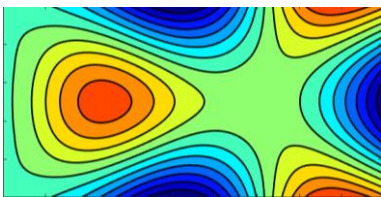
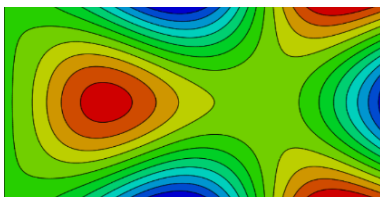
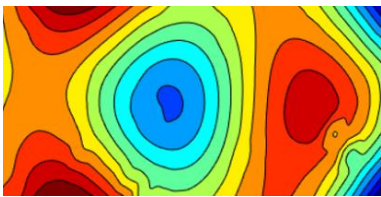
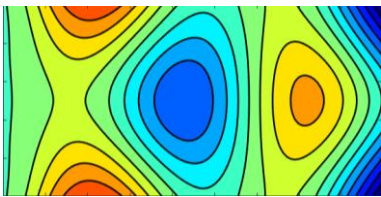
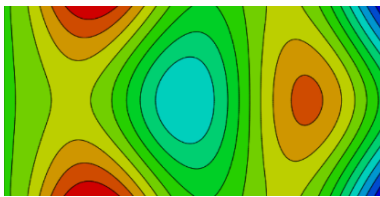
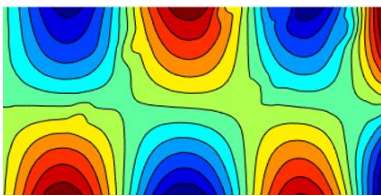
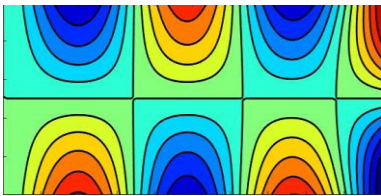
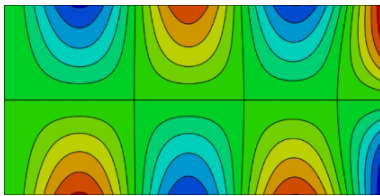
| Mode | Exp.                                                                                | Theory                                                                               | FEM                                                                                   |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 7    |    |    |    |
|      | 370.32 Hz (375)                                                                     | 372.17 Hz (-0.50%)                                                                   | 368.77 Hz (0.42%)                                                                     |
| 8    |    |    |    |
|      | 462.12 Hz (449)                                                                     | 461.74 Hz (0.08%)                                                                    | 457.95 Hz (0.91%)                                                                     |
| 9    |   |   |   |
|      | 492.40 Hz (510)                                                                     | 481.87 Hz (2.19%)                                                                    | 478.35 Hz (2.94%)                                                                     |
| 10   |  |  |  |
|      | 602.17 Hz (627)                                                                     | 612.67 Hz (1.71%)                                                                    | 606.68 Hz (-0.74%)                                                                    |



表 4-14 「yz 平面-y 方向」試片實驗、理論與模擬結果

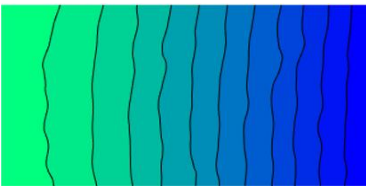
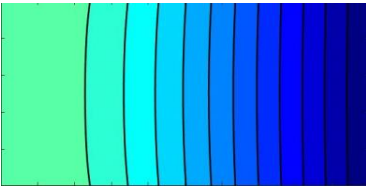
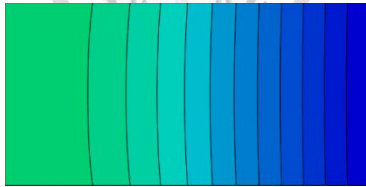
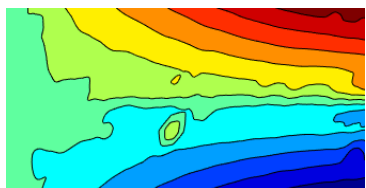
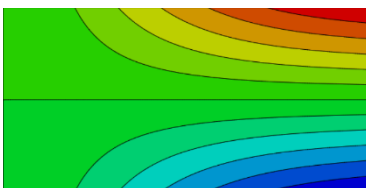
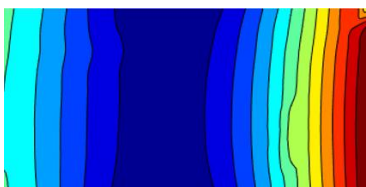
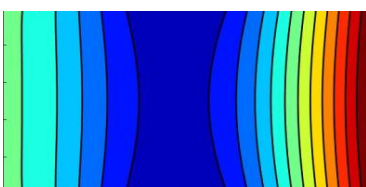
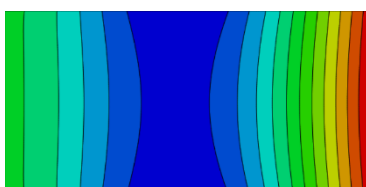
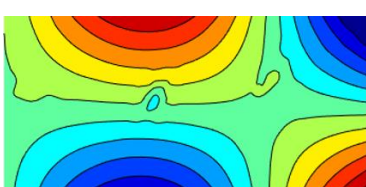
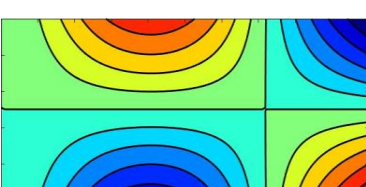
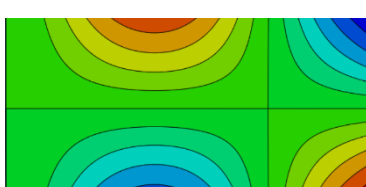
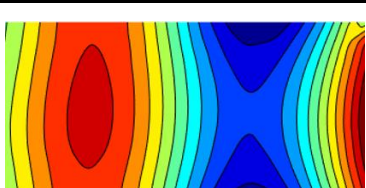
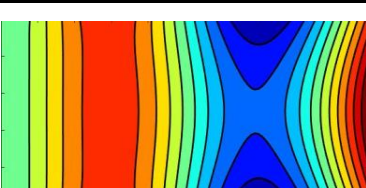
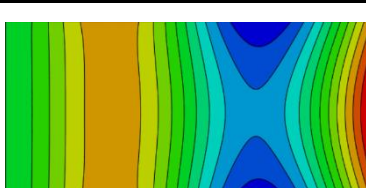
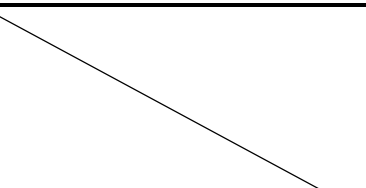
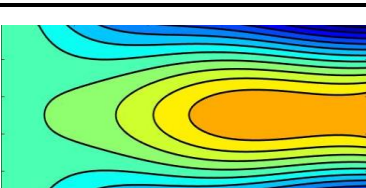
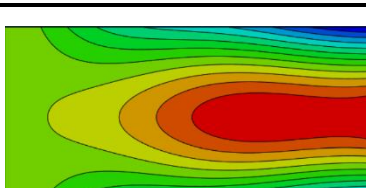
| Mode | Exp.                                                                                | Theory                                                                               | FEM                                                                                   |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 1    |    |    |    |
|      | 14.45 Hz (15)                                                                       | 14.54 Hz (-0.62%)                                                                    | 14.53 Hz (-0.53%)                                                                     |
| 2    |    |    |    |
|      | 62.50 Hz (62)                                                                       | 62.49 Hz (0.01%)                                                                     | 62.04 Hz (0.74%)                                                                      |
| 3    |   |   |   |
|      | 90.82 Hz (94)                                                                       | 90.81 Hz (0.02%)                                                                     | 90.63 Hz (0.21%)                                                                      |
| 4    |  |  |  |
|      | 200.98 Hz (204)                                                                     | 202.57 Hz (-0.78%)                                                                   | 201.09 Hz (-0.05%)                                                                    |
| 5    |  |  |  |
|      | 254.11 Hz (261)                                                                     | 254.17 Hz (-0.02%)                                                                   | 253.40 Hz (0.28%)                                                                     |
| 6    |  |  |  |
|      | 319.39 Hz                                                                           | 319.43 Hz (-0.01%)                                                                   | 317.98 Hz (0.44%)                                                                     |

表 4-14 「yz 平面-y 方向」試片實驗、理論與模擬結果(續)

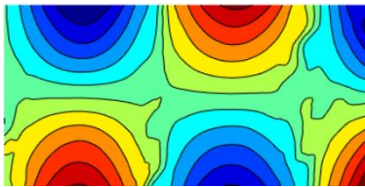
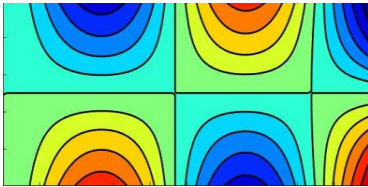
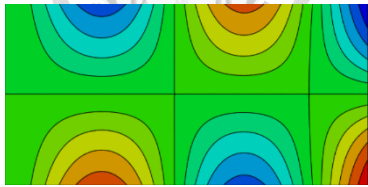
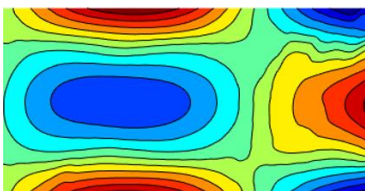
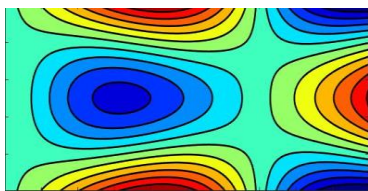
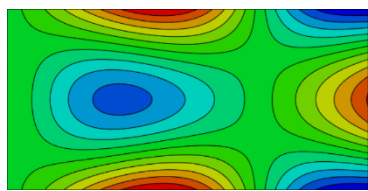
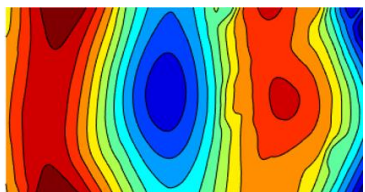
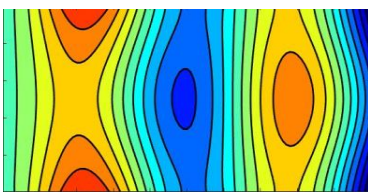
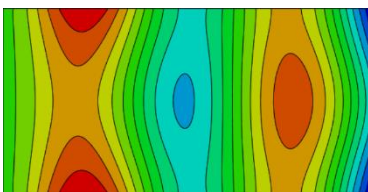
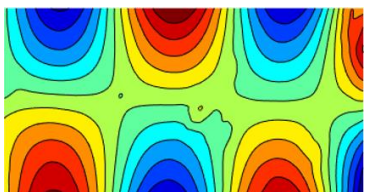
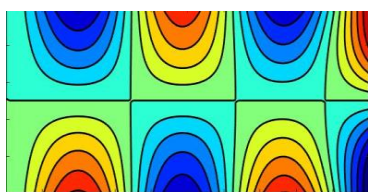
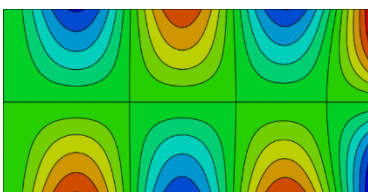
| Mode | Exp.                                                                                | Theory                                                                               | FEM                                                                                   |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 7    |    |    |    |
|      | 389.86 Hz (395)                                                                     | 389.14 Hz (0.18%)                                                                    | 385.54 Hz (1.12%)                                                                     |
| 8    |    |    |    |
|      | 474.04 Hz (475)                                                                     | 471.92 Hz (0.45%)                                                                    | 467.33 Hz (1.44%)                                                                     |
| 9    |   |   |   |
|      | 513.77 Hz (495)                                                                     | 505.74 Hz (1.59%)                                                                    | 502.95 Hz (2.15%)                                                                     |
| 10   |  |  |  |
|      | 650.61 Hz (668)                                                                     | 642.61 Hz (1.24%)                                                                    | 636.38 Hz (2.24%)                                                                     |



表 4-15 「 $xy$  平面- $x$  方向」試片理論、DPM 與 ESPI 結果

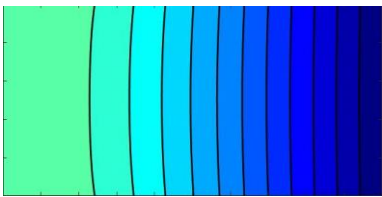
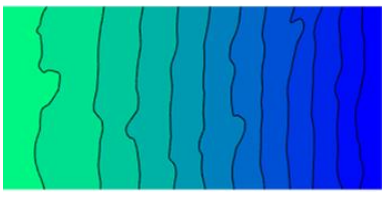
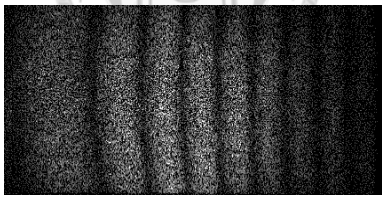
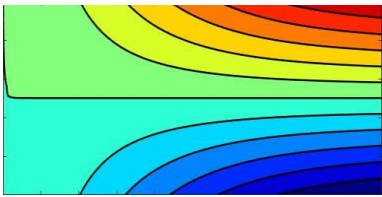
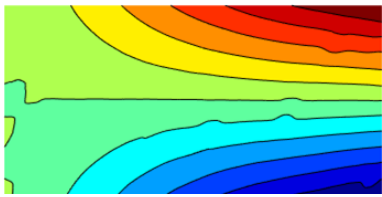
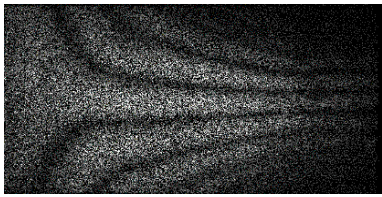
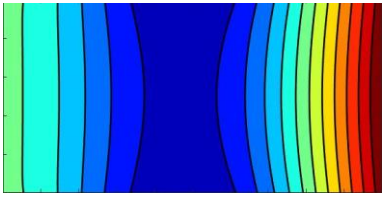
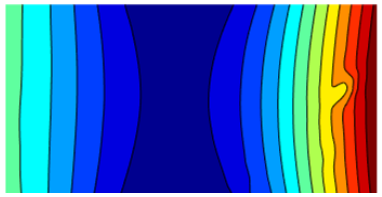
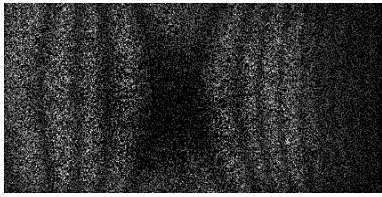
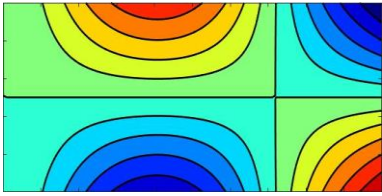
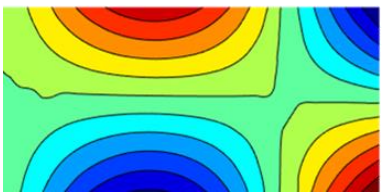
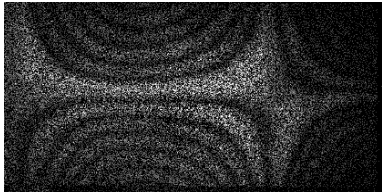
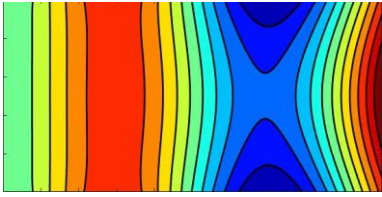
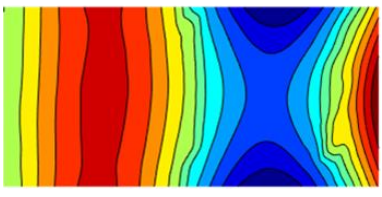
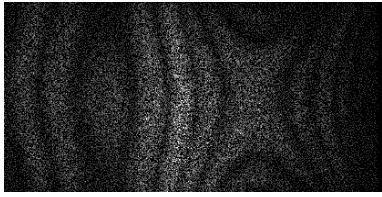
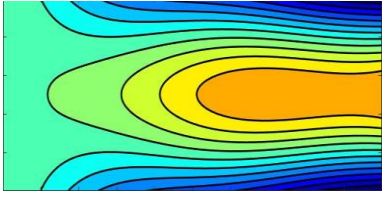
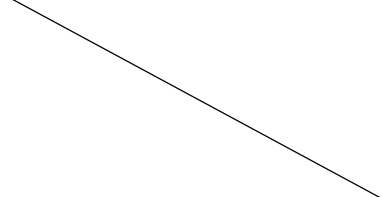
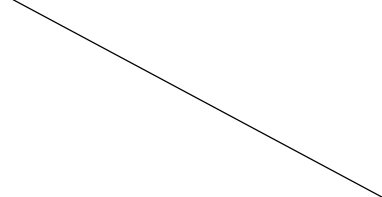
| Mode | Theory                                                                              | DPM                                                                                  | ESPI                                                                                  |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 1    |    |    |    |
|      | 16.32 Hz                                                                            | 15 Hz (10V)                                                                          | 15.2 Hz (1V)                                                                          |
| 2    |    |    |    |
|      | 62.71 Hz                                                                            | 62 Hz (10V)                                                                          | 62.1 Hz (10V)                                                                         |
| 3    |   |   |   |
|      | 102.13 Hz                                                                           | 101 Hz (10V)                                                                         | 100.9 Hz (1V)                                                                         |
| 4    |  |  |  |
|      | 206.66 Hz                                                                           | 209 Hz (10V)                                                                         | 209.0 Hz (6V)                                                                         |
| 5    |  |  |  |
|      | 285.76 Hz                                                                           | 284 Hz (10V)                                                                         | 283.3 Hz (5V)                                                                         |
| 6    |  |  |  |
|      | 346.52 Hz                                                                           |                                                                                      |                                                                                       |

表 4-15 「 $xy$  平面- $x$  方向」試片理論、DPM 與 ESPI 結果(續)

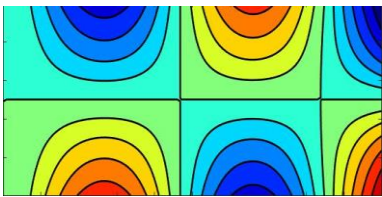
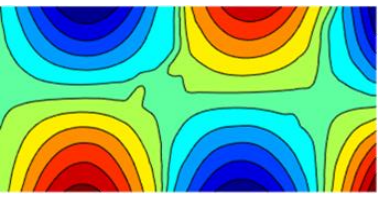
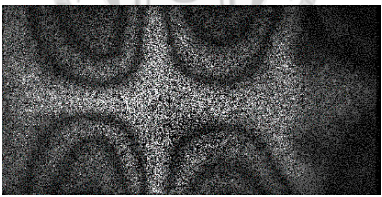
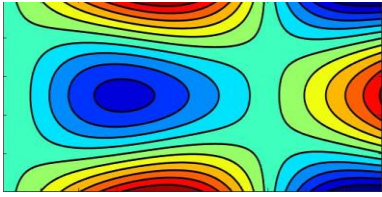
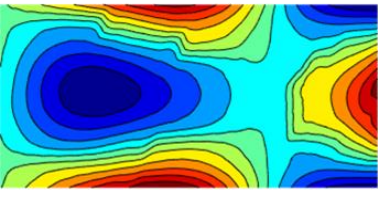
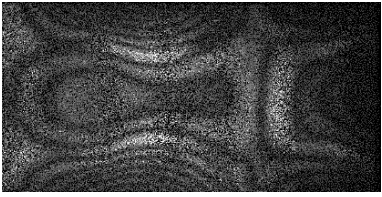
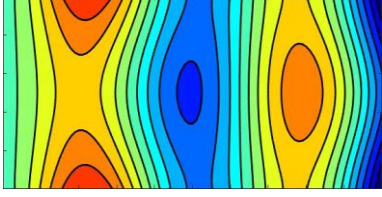
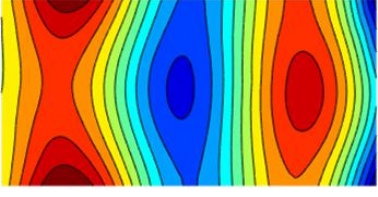
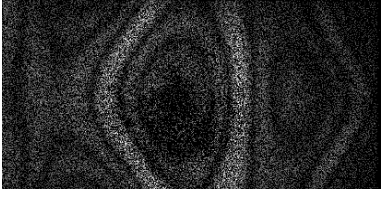
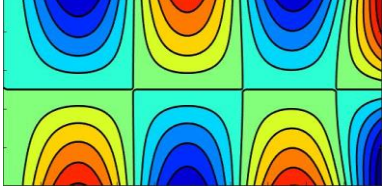
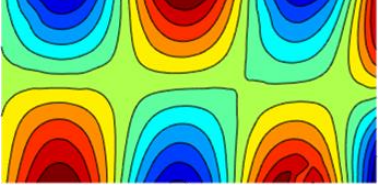
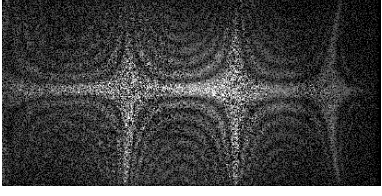
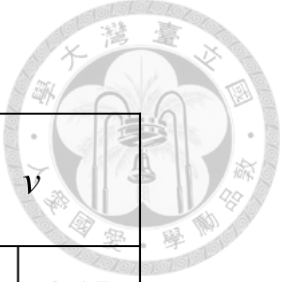
| Mode | Theory                                                                              | DPM                                                                                  | ESPI                                                                                  |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 7    |    |    |    |
|      | 406.81 Hz                                                                           | 411 Hz (10V)                                                                         | 410.3 Hz (10V)                                                                        |
| 8    |    |    |    |
|      | 491.03 Hz                                                                           | 511 Hz (10V)                                                                         | 511.8 Hz (10V)                                                                        |
| 9    |   |   |   |
|      | 563.37 Hz                                                                           | 586 Hz (10V)                                                                         | 586.4 Hz (2V)                                                                         |
| 10   |  |  |  |
|      | 686.21 Hz                                                                           | 706 Hz (10V)                                                                         | 707.0 Hz (5V)                                                                         |

表 4-16 正交性材料所有常數反算之結果



| plane | direction | $E$ (GPa) |      | $G$ (GPa) |       | $\nu$      |      |
|-------|-----------|-----------|------|-----------|-------|------------|------|
| xy    | x         | $E_x$     | 2.83 | $G_{xy}$  | 0.978 | $\nu_{xy}$ | 0.17 |
|       |           | $E_y$     | 2.52 |           |       | $\nu_{yx}$ | 0.15 |
| xz    | z         | $E_x$     | 2.75 | $G_{xz}$  | 0.936 | $\nu_{xz}$ | 0.28 |
|       |           | $E_z$     | 2.44 |           |       | $\nu_{zx}$ | 0.25 |
| yz    | y         | $E_y$     | 2.47 | $G_{yz}$  | 1.001 | $\nu_{yz}$ | 0.25 |
|       |           | $E_z$     | 2.36 |           |       | $\nu_{zy}$ | 0.24 |

## 4.6 小結

本章首先介紹 GA 的概念與機制選用，接著推導鐵木辛柯梁理論並結合 GA 進行正交性材料常數反算，在此導入了與蒲松比相關的理論，能夠去評估蒲松比的量值，再者，在長厚梁的結構下，使用原第三章的方法是無法進行材料常數反算的，並且只使用 6 個方向彎曲模態的共振頻率，即可求得準確的楊氏模量與接近的剪切模量，而從楊氏模量的角度來看，也再次驗證了 3D 列印試片的正交性質。

再來，在薄板理論的假設下，透過疊加法推導懸臂薄板的振動解析並結合 GA 進行正交性材料常數反算，在此只需進行 3 個方向試片的量測，即可得到所有的材料常數，而目前透過 GA 進行材料常數反算的流程，演算法本身無法判斷模態，需將反算得到的常數代入理論生成模態圖，與實驗所量測的模態進行比對確認，才能確定是否有常數錯位的情況發生。

至此，不管在第三章或是第四章進行材料常數反算時，都是以理論為基準，然而根據理論推導的假設條件通常有較多的侷限性，下一章將導入有限元素模擬的方法，一樣以共振頻率的方式，探討與機器學習或深度學習方法結合的可行性。



## 第五章 機器學習與深度學習



本章首先簡單介紹機器學習(Machine Learning, ML)與深度學習(Deep Learning, DL)方法，接著透過 Python 腳本以有限元素軟體 ABAQUS 生成模型的共振頻率，並嘗試以集群演算法(Clustering)進行模態分群，將特徵經過預處理過後，輸入至遞迴神經網路(Recurrent Neural Networks, RNN)，建構以共振頻率與模態類型進行正交性材料常數反算的模型，最後利用有限元素軟體輸出模態圖，結合模態分群的结果與模態形狀，應用卷積神經網路(Convolutional Neural Networks, CNN)，進行模態辨識。本章於機器學習與前處理主要使用 Python(3.11.1)之 Scikit-Learn 套件(1.2.1)，深度學習則為 PyTorch 套件(2.0.0)。

### 5.1 簡介

人工智慧(Artificial Intelligence, AI)一詞源自於 1956 年達特茅斯會議，至 1970 年代著重於建立模擬人類智能的符號系統，是以邏輯規則為基礎的系統，但由於特定算法只能解決狹隘領域的問題，因此首波發展並未取得重大成功。而在 1980 年代語音辨識、機器翻譯、專家系統與類神經網路(Neural Networks)...等概念被相繼提出，尤其專注於專家系統，嘗試將所有知識寫入電腦，而由於當時的技術無法超越大眾對 AI 的高度預期，因此第二波發展也並未成功。1990 之後，陸續出現傳統機器學習模型，將特徵輸入至電腦，讓電腦自行歸納規則，而在 2010 年左右隨著數據量與硬體品質爆炸性的增長，類神經網路再次被看重，深度學習即為多層的類神經網路，在影像辨識、自然語言處理、生成網路...等等領域都有重大突破，其能力甚至已超越人類，至今仍持續蓬勃發展。在前一章所使用的 GA 屬於 AI 領域中的演化論學派，屬於計算智慧領域，機器學習與深度學習則為類比推理與類神經網路學派的延伸，此小節將針對機器學習與深度學習進行更詳細的介紹。

機器學習又可以分為監督式(Supervised)、非監督式(Unsupervised)與強化學習(Reinforcement Learning)，監督式學習是從被標記的訓練數據集學習模型，並透過

模型對未來新的、未標記的數據進行預測，其中又可分為分類(Classification)與迴歸(Regression)問題，分類常見的演算法如邏輯斯迴歸(Logistic Regression)、支援向量機(Support Vector Machine, SVM)、隨機森林(Random Forest)與 k 最近鄰分類器(k-nearest Neighbor Classifier, KNN)...等，迴歸則有 RANSAC(Random Sample Consensus)、正規化方法、多項式迴歸、隨機森林、SVM...等；反之在非監督式學習中，處理的為未標記類別的數據，探索數據的結構，進而取得更多資訊，常見的方法有集群與降維...等；而強化學習則需透過與環境互動來取得獎勵回報，最大化行動的總獎勵，著名的例子如訓練 AlphaGo 在圍棋上打敗人類。大致的流程如圖 5-1，首先需要先取得數據(Raw Data)，接著進行資料的清理與預處理，並將其輸入至選擇的學習演算中進行訓練，以驗證數據集評估模型，決定是否需要進行模型的優化，如加入正規化(Regularization)改善過擬合(Overfitting)的問題或調整超參數(Hyperparameter)...等。

深度學習可以被理解為機器學習的子領域，一般多層前饋式類神經網路或稱為多層感知器(Multilayer Perceptron, MLP)如圖 5-2，圖為一三層的全連接網路，由一輸入層、隱藏層與輸出層組成，每層皆由多個神經元組構，其中輸入層與輸出層的神經元個數與輸入特徵及輸出結果的維度相關，而 MLP 可以有任意神經元數量的隱藏層，多個隱藏層的 MLP 又稱為深度類神經網路。除了輸出層外的層通常含一偏誤單元(Bias Unit)，透過向前傳遞法求得輸出結果，以前述之 3 層 MLP 為例，在不同神經元數目層之間的傳遞可以想像為在不同空間維度下進行轉換，如訓練數據中有  $n$  個樣本，一般化公式可寫為：

$$Z^{(h)}_{n \times d} = A^{(in)}_{n \times m} W^{(h)}_{m \times d} \quad (5-1)$$

其中  $m$  為輸入特徵加上偏誤單元的維度(個數)、 $d$  為隱藏層神經元加上偏誤單元的維度、 $W^{(h)}$  為至隱藏層的加權矩陣、 $Z^{(h)}$  為隱藏層的淨輸入矩陣，接著對淨輸入套用啟動函數(Activation Function)  $\phi(\cdot)$  增加非線性，做為下一層的輸入：

$$A^{(h)}_{n \times d} = \phi(Z^{(h)}) \quad (5-2)$$



因此輸出層的啟動函數可寫為：

$$Z^{(out)}_{n \times t} = A^{(h)} W^{(out)}_{d \times t} \quad (5-3)$$

其中  $t$  為輸出的維度，最終經過啟動函數的輸出為：

$$A^{(out)}_{n \times t} = \phi(Z^{(out)}) \quad (5-4)$$

常見的啟動函數如表 5-1。神經網路透過更新加權矩陣來達到損失函數(Loss Function)的最佳化，常見的損失函數如交叉熵(Cross-Entropy)與均方誤差(Mean Squared Error, MSE)，利用反傳遞演算法(Backpropagation Algorithm)[46]更新加權，為反向模式的自動微分，如使用向前模式進行計算，神經網路的每一層都需做大型矩陣的相乘(Jacobians 矩陣)，進行連鎖規則(Chain Rule)是非常消耗資源的，而透過反向模式，將會是矩陣和向量的相乘，在資源上經濟許多，其流程如圖 5-3。首先透過(5-4)式以向前傳遞求得單一樣本輸出，將結果扣除真實標籤得到誤差向量：

$$\delta^{(out)} = a^{(out)} - y \quad (5-5)$$

接著計算成本函數的導數：

$$\frac{\partial}{\partial W^{(out)}_{i,j}} J(W) = a^{(h)}_j \delta^{(out)}_i \quad (5-6)$$

對訓練數據集的每個樣本計算偏導數，以向量化方式可寫為：

$$\Delta^{(out)} = (A^{(h)})^T \delta^{(out)} \quad (5-7)$$

進一步計算隱藏層的錯誤項：

$$\delta^{(h)} = \delta^{(out)} (W^{(out)})^T \odot \frac{\partial \phi(z^{(h)})}{\partial z^{(h)}} \quad (5-8)$$

其中  $\odot$  為逐元相乘。再來計算成本函數的導數：

$$\Delta^{(h)} = (A^{(in)})^T \delta^{(h)} \quad (5-9)$$

最後可以朝著梯度的相反方向對每一層( $l$ )更新加權：

$$W^{(l)} := W^{(l)} - \eta \Delta^{(l)} \quad (5-10)$$

其中  $\eta$  為學習率(Learning Rate)。



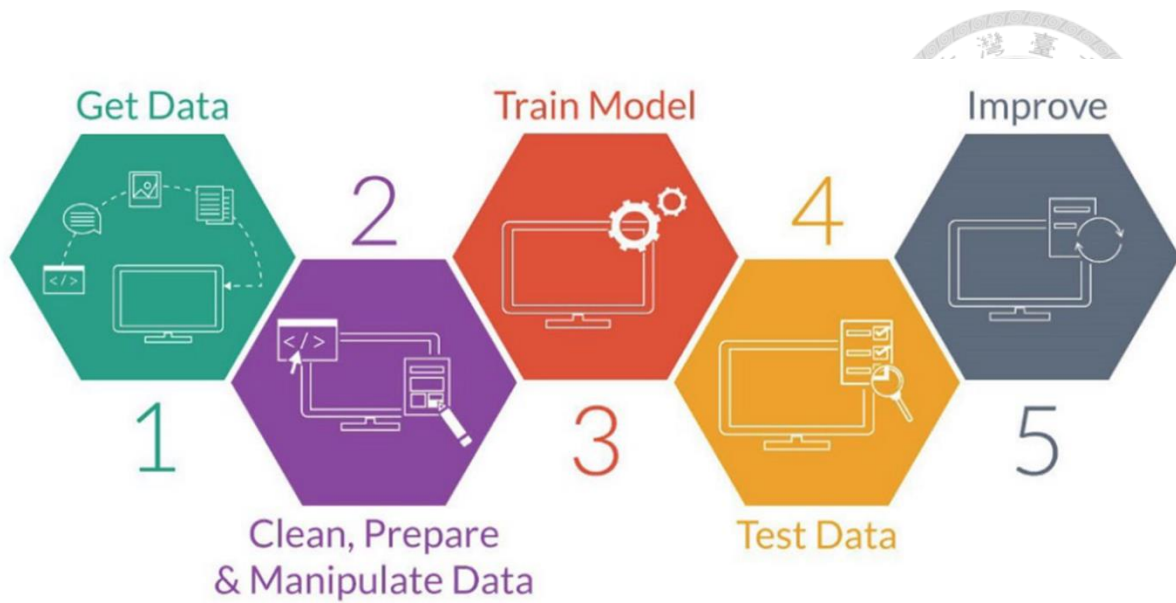


圖 5-1 機器學習流程圖

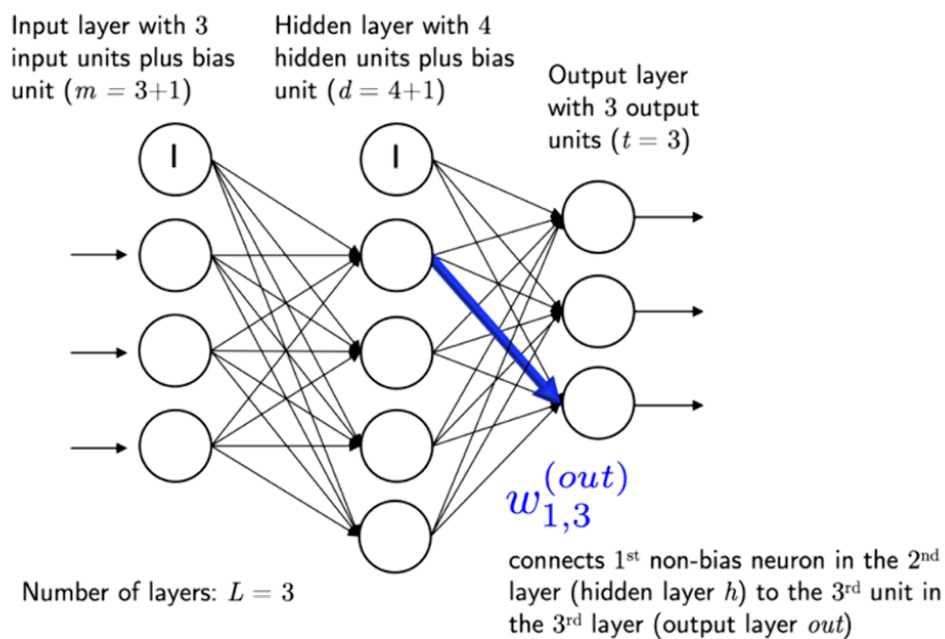


圖 5-2 MLP 示意圖

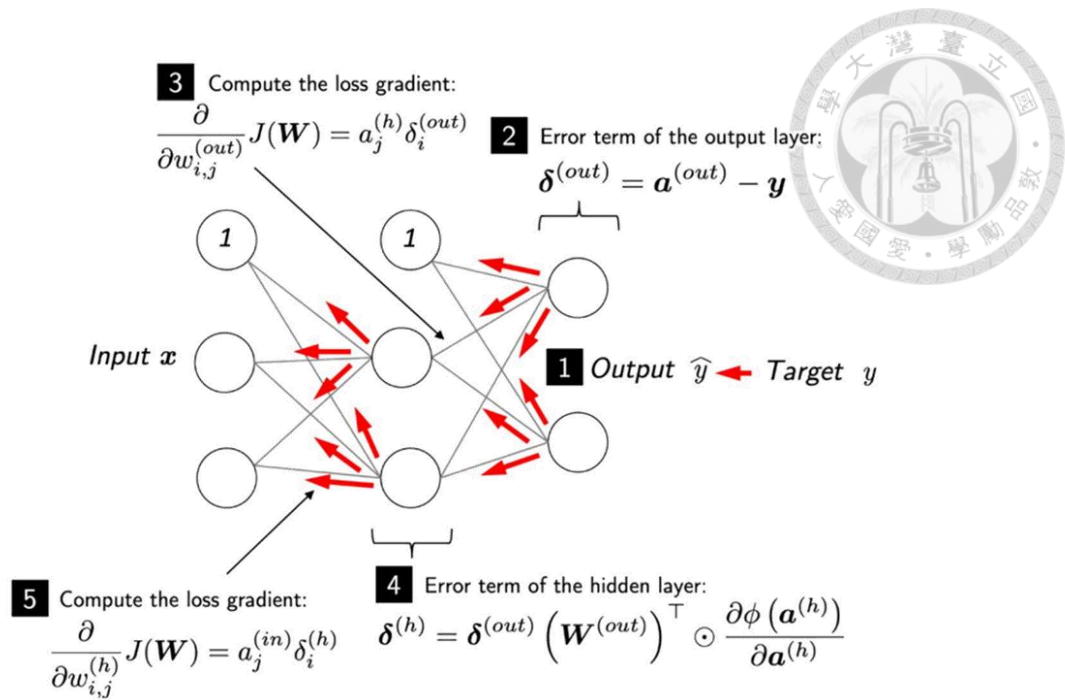


圖 5-3 反傳遞演算法概念圖

表 5-1 常見之啟動函數

| Activation function            | Equation                                                                                                  | Example                            | 1D graph |
|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|----------|
| Linear                         | $\phi(z) = z$                                                                                             | Adaline, linear regression         |          |
| Unit step (Heaviside function) | $\phi(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 0.5 & z = 0 \\ 1 & z > 0 \end{cases}$                               | Perceptron variant                 |          |
| Sign (signum)                  | $\phi(z) = \begin{cases} -1 & z < 0 \\ 0 & z = 0 \\ 1 & z > 0 \end{cases}$                                | Perceptron variant                 |          |
| Piece-wise linear              | $\phi(z) = \begin{cases} 0 & z \leq -1/2 \\ z + 1/2 & -1/2 \leq z \leq 1/2 \\ 1 & z \geq 1/2 \end{cases}$ | Support vector machine             |          |
| Logistic (sigmoid)             | $\phi(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$                                                                          | Logistic regression, multilayer NN |          |
| Hyperbolic tangent (tanh)      | $\phi(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$                                                             | Multilayer NN, RNNs                |          |
| ReLU                           | $\phi(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ z & z > 0 \end{cases}$                                              | Multilayer NN, CNNs                |          |



## 5.2 資料蒐集

### 5.2.1 生成共振頻率

首先隨機生成一萬組正交性材料 9 個參數的隨機組合，利用有限元素軟體 ABAQUS 的 Python 腳本，生成一萬組「12 平面-1 方向」懸臂板模型的前 10 個共振頻率，模型設定的參數如表 5-2，由於本研究的目的為材料常數反算，且試片的尺寸與密度通常為已知條件，因此設為定值，只改變材料常數於所設定的範圍。

透過讀取一萬個工作(Job)的訊息檔(.dat)即可取得一萬組懸臂板模型的前 10 個共振頻率，然而如果只將共振頻率做為深度學習模型的輸入，可能無法進行較準確之材料常數反算，尤其於低頻的模態，特定模態類型通常由特定的材料常數所主導，例如彎曲模態主要受楊氏模量影響，沒有模態資訊將使演算法要把頻率歸功於哪個材料常數變得較為困難，因此在下一小節將討論在預設的條件下，盡可能地收集可以做為深度學習模型輸入的模態資訊。

表 5-2 生成模型參數設定

| Symbol                      | value      | Symbol                      | value    |
|-----------------------------|------------|-----------------------------|----------|
| Sample                      | 10,000     | $a$ (mm)                    | 180      |
| numEigen                    | 10         | $b$ (mm)                    | 90       |
| ElemType                    | C3D20R     | $h$ (mm)                    | 10       |
| Density ( $\text{kg/m}^3$ ) | 1000       | $E1, E2, E3, G12, G13, G23$ | 1~10 GPa |
| B.C. Type                   | Cantilever | $Nu12, Nu13, Nu23$          | 0~0.5    |

### 5.2.2 模態分群

在訊息檔中有一參與因子(Participation Factors)的表格，其中紀錄了各模態主要作用的自由度，如表 5-3，以第一模態為例，其主要作用於 z 方向，而透過觀察

部分模擬結果檔(.odb)各模態的振形與其參與因子表，可以發現於前 10 個模態大致可以判斷 4 種模態，以 C、R 分別代替 COMPONENT 與 ROTATION，如為彎曲模態(Bending Mode)：Z-C >> X-C, Y-C、側向模態(Lateral Mode)：Y-C >> X-C, Z-C、扭轉模態(Torsional Mode)：X-R >> Y-R, Z-R 以及拉伸模態(Longitudinal Mode)：X-C >> Y-C, Z-C，將各個模態類型第一個出現的振形整理於表 5-4，而由於總共有一萬筆資料，每筆有 10 個共振模態，其中又有 6 個因子參數，只觀察部分的結果檔與其參與因子表，不易歸納完美的判別式進行分類，因此嘗試透過集群演算法進行自分群以及進行模態類型的標注。

常用的集群演算法如 k-means、階層集群(Hierarchical Clustering)、密度為基礎的空間集群法(Density-based Spatial Clustering of Applications with Noise, DBSCAN)與光譜集群(Spectral Clustering)...等，由於透過觀察即可大致判斷模態類型，因此本小節將透過以原型為基礎的 k-means 演算法進行模態自分群，其演算法步驟為：

1. 從樣本點中隨機挑選 k 個，作為初始集群中心(質心)。
2. 將每個樣本點分配到離它最近的質心。
3. 重新計算新集群的中心作為新的質心。
4. 重複步驟 2.與 3.直至集群分配不再改變，或達終止條件(實際於演算法中設定最大迭代次數為 300、可容許誤差為 0.0001)。

而由於集群演算法並沒有真實標籤，因此透過歐氏距離平方(Squared Euclidean Distance)計算集群內誤差平方和(Within-Cluster Sum of Squared Errors, SSE)，也被稱為集群惰性(Cluster Inertia)，簡化為一最佳化問題：

$$SSE = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k w^{(i,j)} \|x^{(i)} - \mu^{(j)}\|_2^2 \quad (5-11)$$

其中  $\mu^{(j)}$  為集群 j 的質心，若  $x^{(i)}$  在集群 j 之中  $w^{(i,j)}$  為 1，反之則為 0。

而在 2017 年 k-means++[47]方法被提出，以更好的策略改善 k-means 步驟 1 中隨機挑選質心的方式，在選取質心時盡可能地使它們彼此遠離，其初始化過程為：

1. 初始化一個空集合 M 來儲存被選取的 k 個質心。



2. 從樣本點中隨機選取第一個質心放入集合  $M$ 。
3. 對每一個不在集合  $M$  的樣本點  $x^{(i)}$  計算對集合  $M$  中儲存質心的最小距離平方。
4. 使用加權機率分配隨機選取下一個質心。
5. 重複步驟 2.與 3.直至選取  $k$  個質心。

k-means 演算法雖然被廣為使用，但其仍有一些缺陷，例如必須事先指定集群數目 ( $k$ )、集群結果不會重疊也不具階層性以及每個集群中至少要有一個樣本，而對於本論文要探討之模態類型分群，這些缺陷不是太大的問題。

k-means 演算法是以距離為基礎，因此其為球狀結構的分群，將一萬筆資料的每個模態做為一組輸入，故此將有十萬組輸入且每組輸入有 6 個特徵(參與因子)，在機器學習當中以距離為基礎的演算法通常都需將特徵進行縮放，如不同特徵之間的數量級差距過大，不同特徵之影響性將可能會有所不同，而由於因子的正負號只影響方向，不影響模態類型，且在不同模態之間的值是沒有比較意義的，因而在此將每個模態的 6 個因子皆取絕對值後壓縮於 0~1 之間。雖然透過觀察可以推測分成 4 群可能是最佳的結果，然而在選擇最佳的集群數目時，可以透過轉折判斷法，對於不同的  $k$  值計算分群後的 SSE 誤差，找到明顯收斂的  $k$  值，對特徵縮放後的十萬組輸入繪製轉折圖如圖 5-4，可以發現在  $k$  為 4 時發生了轉折，再次確認 4 群的確是很好的集群數目。

最後選擇  $k=4$  以輪廓圖分析評估最終的集群品質，對每個樣本計算輪廓係數 (Silhouette Coefficient)，其步驟如下：

1. 對所有樣本點計算集群內聚性  $a^{(i)}$ ，即該樣本點與同集群之其它樣本點之間的平均距離。
2. 對所有樣本點計算其與最相近集群的集群分離性  $b^{(i)}$ ，即該樣本點與最相近集群中的所有樣本點之間的平均距離。
3. 計算輪廓係數  $s^{(i)}$ ，即集群分離性減集群內聚性並除以兩者中較大的值：

$$s^{(i)} = \frac{b^{(i)} - a^{(i)}}{\max\{b^{(i)}, a^{(i)}\}} \quad (5-12)$$

其中輪廓係數介於 -1 至 1，越理想的分群其值將越接近 1。將結果繪製為輪廓係數圖，如圖 5-5，從圖中可以看到由於演算法只會呈現哪些樣本屬於同一群，並不會告訴我們它是哪一類，因此需從資料之結果檔觀察各個集群分別代表哪一類，集群 1 至 4 分別為：拉伸模態、彎曲模態、扭轉模態與側向模態，有此即可對每個樣本進行模態種類的標注。從圖中可以快速觀察不同模態種類出現的數量，且輪廓係數都接近 1，而其中於彎曲模態(集群 2)中有部分輪廓係數較低的樣本，觀察這些樣本之模態振型皆為混和模態，由於其在參與因子上的分布較接近彎曲模態，因此在此仍將其歸類為彎曲模態，而特性相對來說比較沒有那麼明顯，因而有較低的輪廓係數。

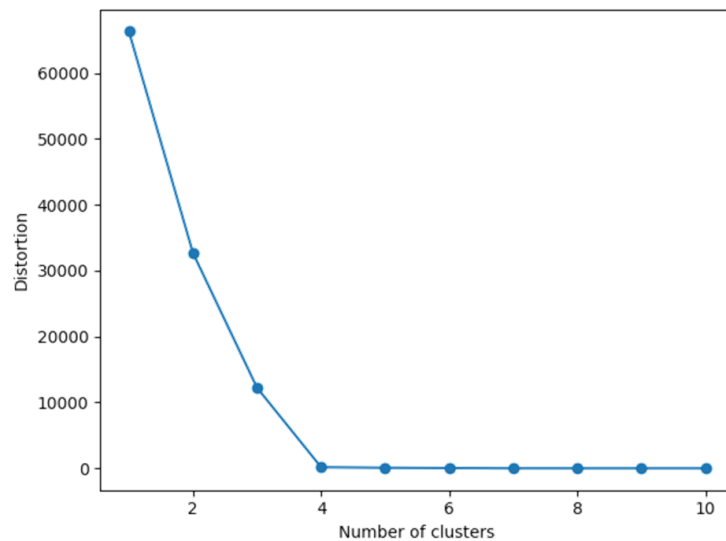


圖 5-4 轉折圖

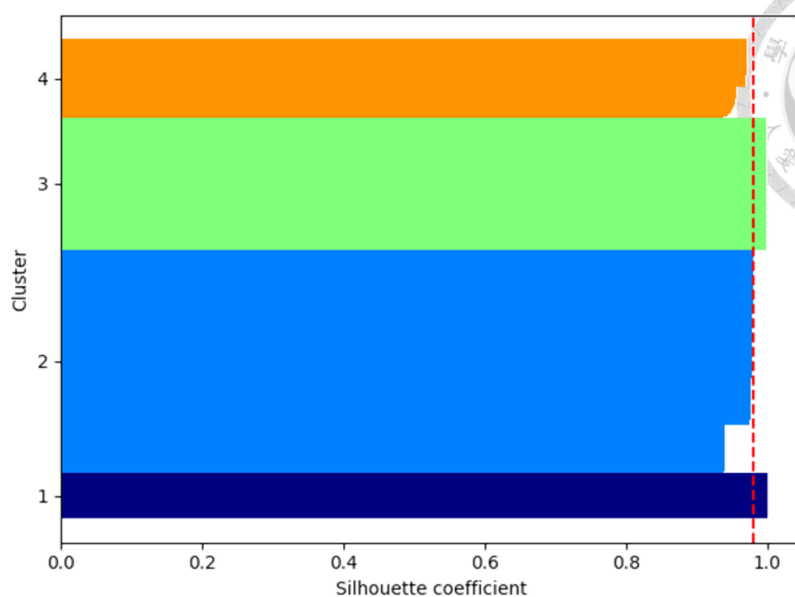
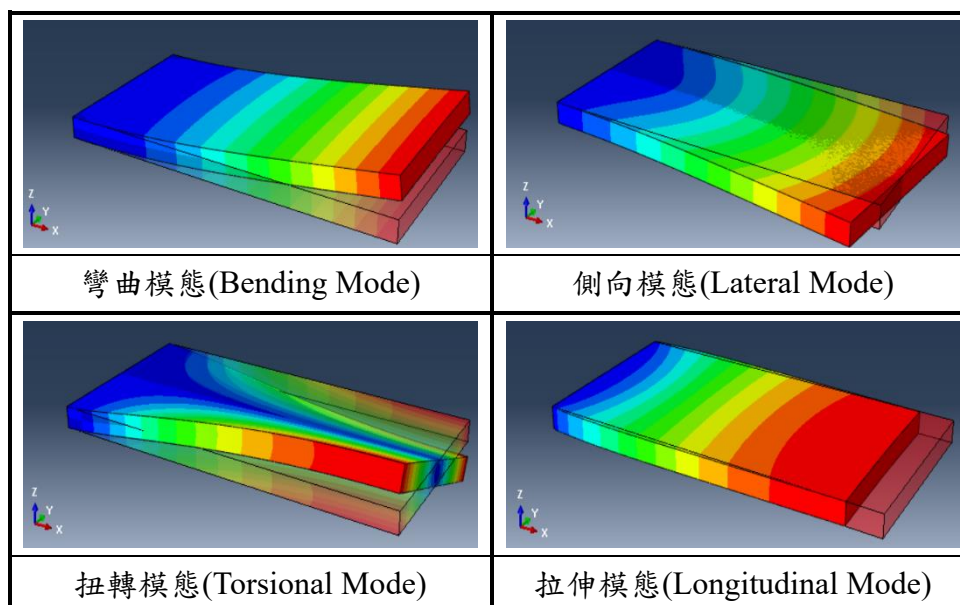


圖 5-5 輪廓係數圖

表 5-3 訊息檔之參與因子

| PARTICIPATION FACTORS |              |              |              |              |              |              |
|-----------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| MODE NO               | X-COMPONENT  | Y-COMPONENT  | Z-COMPONENT  | X-ROTATION   | Y-ROTATION   | Z-ROTATION   |
| 1                     | 1.80457E-13  | -6.93282E-14 | 0.31194      | 1.40373E-02  | -4.11075E-02 | -1.78561E-14 |
| 2                     | -1.44803E-12 | -2.69784E-14 | -0.17713     | -7.97106E-03 | 7.19923E-03  | 6.14855E-14  |
| 3                     | -6.92118E-11 | -0.30298     | -6.08974E-14 | 1.51490E-03  | -3.37072E-13 | -4.22667E-02 |
| 4                     | -3.31010E-15 | -9.38683E-11 | -3.03704E-11 | -9.25514E-03 | 1.77254E-12  | -1.31500E-11 |
| 5                     | 6.46674E-12  | -2.11160E-14 | 0.10559      | 4.75148E-03  | -2.54758E-03 | -2.93541E-13 |
| 6                     | -1.92095E-14 | -1.29830E-12 | 4.20493E-12  | 3.16946E-03  | -4.85501E-13 | 8.61468E-14  |
| 7                     | -0.35711     | -8.23493E-11 | -8.52852E-13 | 3.73775E-13  | -1.78557E-03 | 1.60701E-02  |
| 8                     | 7.35626E-12  | 7.01310E-14  | -7.37602E-02 | -3.31921E-03 | 1.26468E-03  | -3.10626E-13 |
| 9                     | 1.96135E-10  | -0.18271     | 1.46016E-11  | 9.13551E-04  | 8.86349E-13  | -7.49257E-03 |
| 10                    | 4.72362E-10  | -1.03804E-10 | -4.56546E-12 | -1.98758E-03 | 2.70971E-12  | -2.11765E-11 |

表 5-4 各模態類型示意圖





## 5.3 資料預處理

本節首先透過特徵選擇(Feature Selection)觀察單一方向試片可能可以進行反算的材料常數，接著進行數據上的預處理，並將數據集分為訓練、驗證與測試用。

### 5.3.1 特徵選擇

探討特徵重要性有許多方法，而在本小節將透過隨機森林演算法建構以材料常數預測共振頻率的模型，從中觀察每個特徵(材料常數)的重要性，在此是以正向的方式進行探討，也就是材料常數為輸入、共振頻率為輸出，分析不同參數影響不同頻率的相關性，這與下一節透過共振頻率反向求得材料常數的模式是相反的。

在說明隨機森林前，需先介紹何謂決策樹(Decision Tree)，顧名思義其概念為樹狀結構，透過不斷分割節點的方式直至包含單純的一類，其特點為有很好的可解釋性，如圖 5-6，此圖為實際利用生成的數據，輸入為 9 個材料常數，建立去預測第一個共振頻率的二元決策樹模型，而由於模擬的資訊檔有 4 筆遺失，因此最終的樣本數為 9996，從圖中可以觀察其會從樹的根節點開始，根據特徵值將數據進行分割，並在子節點中重複這種分割過程，直至樹葉節點，而在迴歸問題通常為又大又深的決策樹，在此為了示意僅呈現至第二層。

每個節點在選擇要以哪個特徵與值進行分割是透過最大化資訊增益(Information Gain, IG)的方式，其定義如下：

$$IG(D_p, x_i) = I(D_p) - \frac{N_{left}}{N_p} I(D_{left}) - \frac{N_{right}}{N_p} I(D_{right}) \quad (5-13)$$

其中  $D_p$  為訓練樣本在父節點的樣本子集、 $x_i$  為要值行分割的特徵、 $I$  為不純度(Impurity)函數、 $N_p$  為父節點的樣本數、 $N_{left}$  與  $N_{right}$  為分割後左與右子節點的樣本數、 $D_{left}$  與  $D_{right}$  為分割後左與右子節點訓練樣本子集合。與其說最大化 IG，不如說是最大化降低子節點的不純度，而在迴歸問題不純度通常定義為均方誤差(Mean Squared Error, MSE)：

$$I(t) = MSE(t) = \frac{1}{N_t} \sum_{i \in D_t} (y^{(i)} - \hat{y}_t)^2 \quad (5-14)$$



其中  $N_t$  為節點  $t$  的樣本個數、 $D_t$  為節點  $t$  的樣本子集合、 $y^{(i)}$  為真實目標值、 $\hat{y}_t$  為預測的目標值(樣本均值)： $\hat{y}_t = \frac{1}{N_t} \sum_{i \in D_t} y^{(i)}$ 。在此 MSE 也被稱為節點內變異數，因此

分割準則也可以想像為降低變異數，而由於決策數一次只分析一個特徵，所以特徵並不需要先進行縮放，且越重要的特徵會出現在越上層，從圖 5-6 可以觀察到，由於第一個頻率的模態皆為長度方向的彎曲模態，主要由  $E_1$  所主導，因此前幾層幾乎都由  $E_1$  進行分割。

隨機森林為結合多棵決策樹的整體方法(Ensemble Methods)，透過平均的方式降低一般化誤差，其流程如下：

1. 從訓練樣本集中以放回式隨機選擇  $n$  個樣本。
2. 從樣本中導出決策樹，並對每一節點：
  - A. 以不放回式隨機選擇  $d$  個特徵。
  - B. 以最大化資訊增益使用特徵分割各節點。
3. 重複  $k$  次步驟 1 與 2。
4. 以平均的方式匯總所有決策樹的預測。

其中  $k$  為決策樹的數量，實際使用設定為 500、 $d$  設定為  $\sqrt{m}$ ， $m$  為所有特徵的總數(即= 9)。一般決策樹為了預防過度擬合，通常限定樹的高度避免決策樹成長過深，而在此的目的為觀察各材料常數的影響性，並非建立精確預測共振頻率的模型，因此並未設限樹深度，並將所有的樣本皆作為訓練數據集。

透過計算隨機森林中所有決策樹的平均不純度，以此來決定各特徵的重要性，將所有材料常數組合分別對第一至第十模態進行共振頻率預測的建模，並計算各特徵的重要性，經過常態化(加總為 1)與排序，將結果繪製如圖 5-7 至圖 5-16，圖中右上角所標示之數量為各個模態類型出現的次數，以圖 5-8 為例，所有材料參數組合所生成之共振頻率第 2 個出現的模態，有 4763 個彎曲模態、6 個側向模態、5227 個扭轉模態以及 0 個拉伸模態，並將所有的結果整理於表 5-5 中 mode 1 ~ mode 10 (%)，以第一模態為例，由於全部都是主軸方向的彎曲模態，因此主要由

$E_1$  主導，而如果輸入材料常數並不能很好地預測共振頻率，探討特徵重要性則並無意義，因此也為預測模型進行評估(score)，其最大值為 1。再將前述 10 個結果的平均繪製於圖 5-17、表中 Avg.，以及將所有材料常數組合直接對 10 個模態頻率進行預測的建模，其重要性結果如圖 5-18、表中 all，可以發現兩者的結果分布接近，如定義可進行反算之材料常數至少需有 1% 左右以上的重要性佔比，則一個方向的試片至多只能反算 4 個材料常數： $E_1$ 、 $G_{12}$ 、 $E_2$  與  $\nu_{12}$ ，因此於下一節當中將嘗試透過共振頻率與模態類型進行 4 個材料常數的反算。

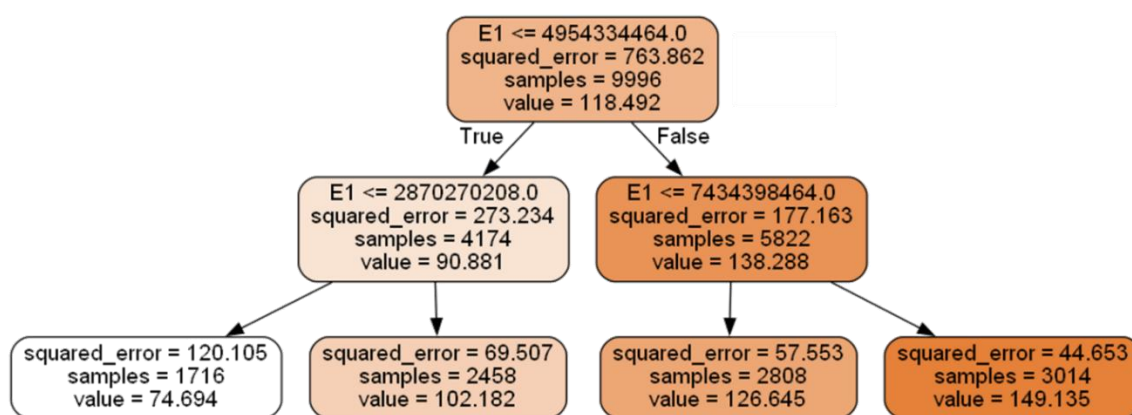


圖 5-6 決策樹示意圖

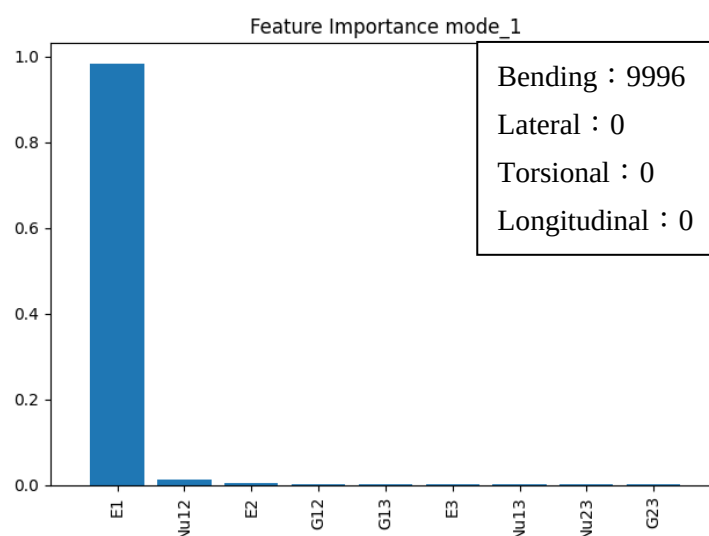


圖 5-7 第一模態頻率之重要性分析

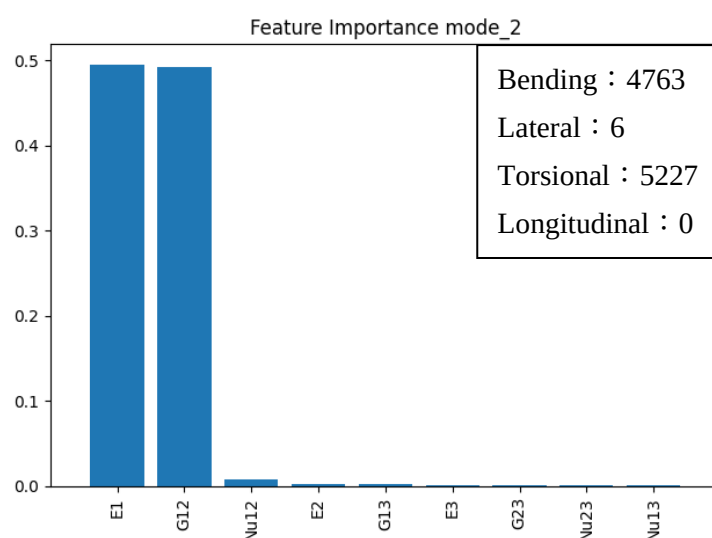


圖 5-8 第二模態頻率之重要性分析

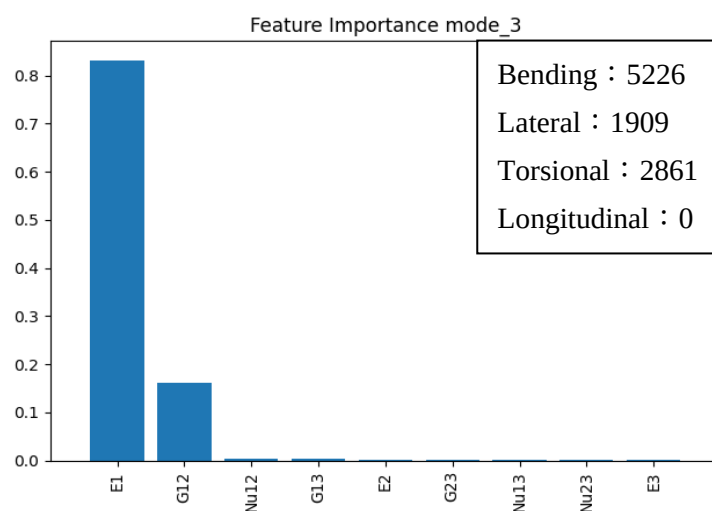


圖 5-9 第三模態頻率之重要性分析

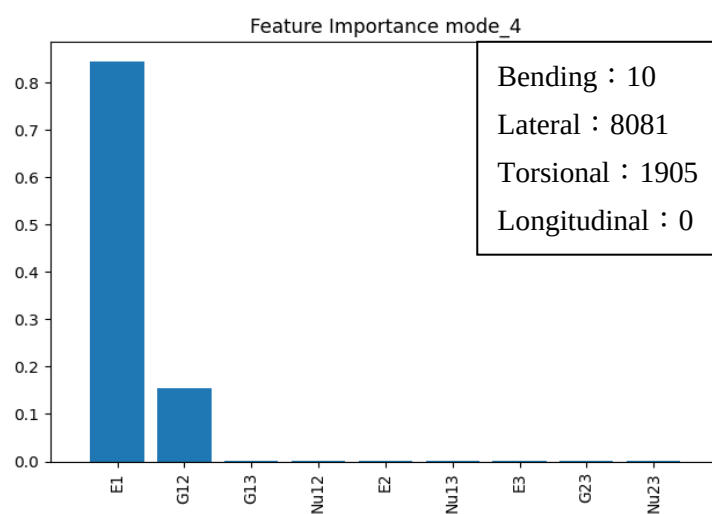


圖 5-10 第四模態頻率之重要性分析

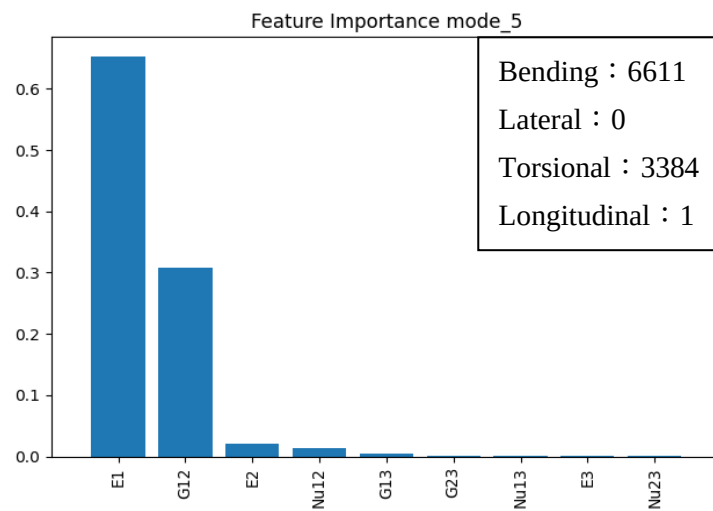


圖 5-11 第五模態頻率之重要性分析

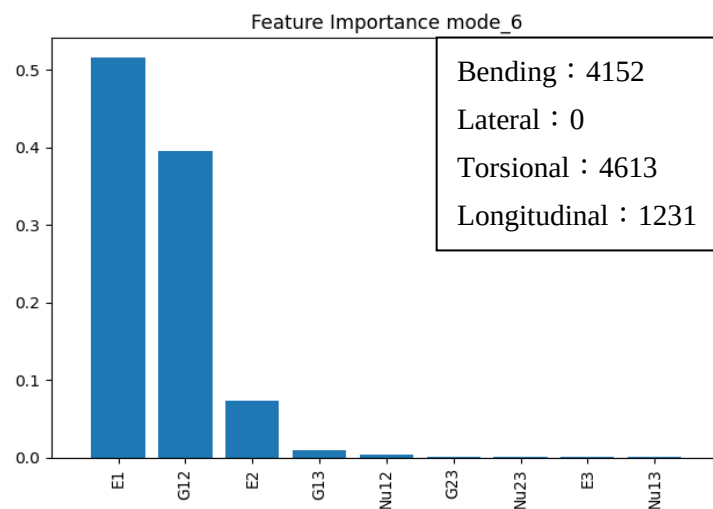


圖 5-12 第六模態頻率之重要性分析

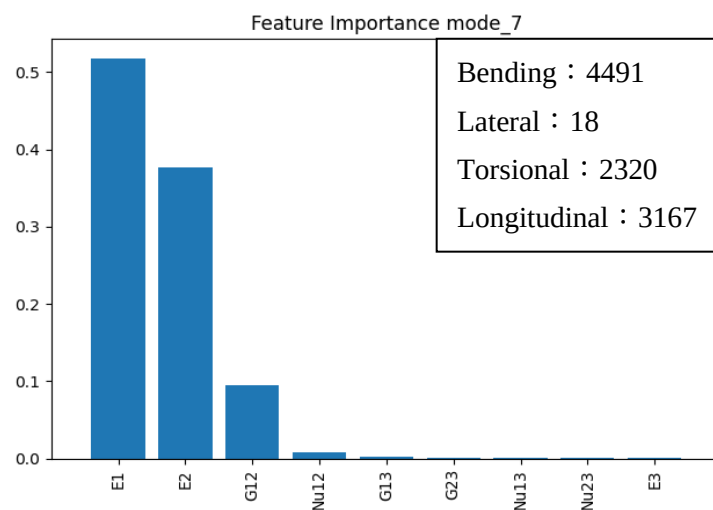


圖 5-13 第七模態頻率之重要性分析

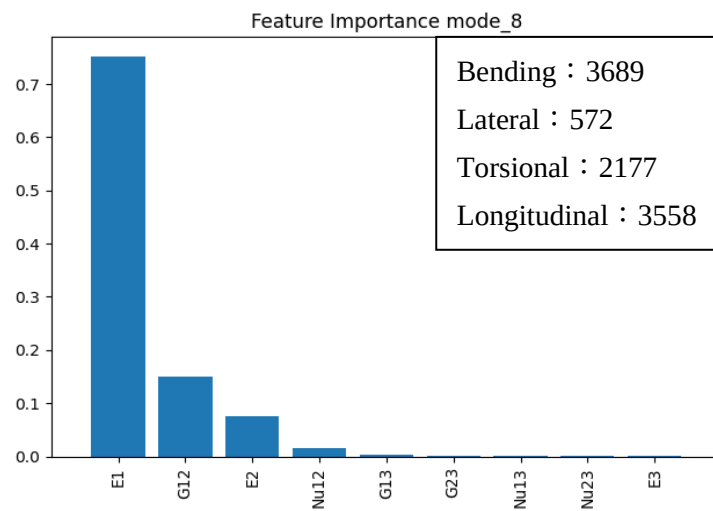


圖 5-14 第八模態頻率之重要性分析

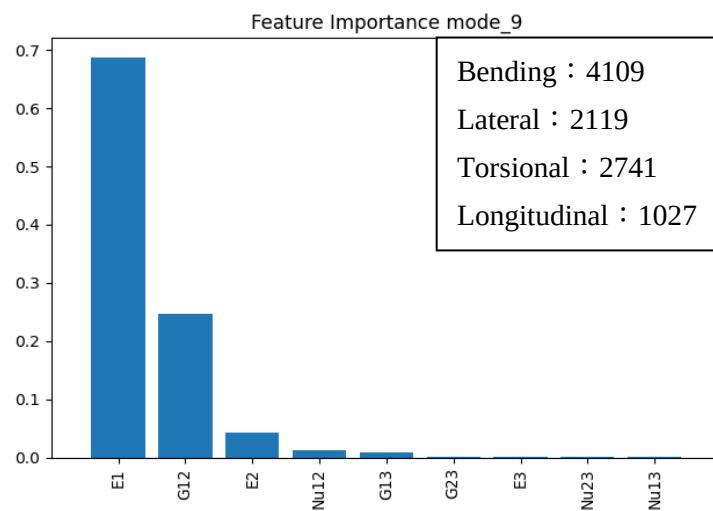


圖 5-15 第九模態頻率之重要性分析

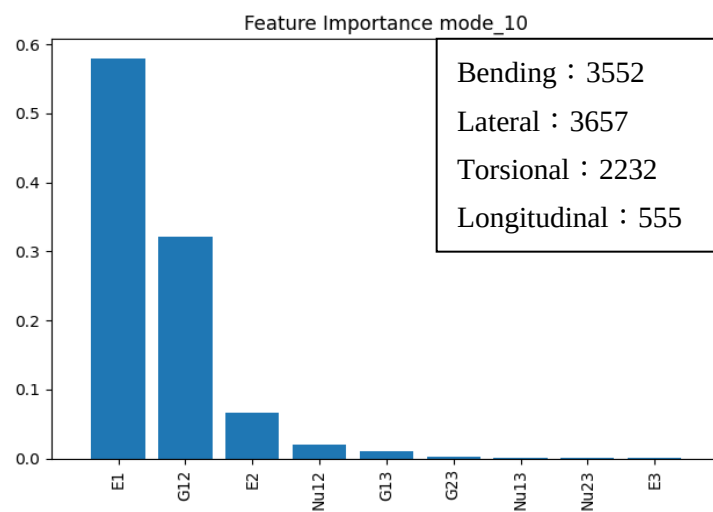


圖 5-16 第十模態頻率之重要性分析

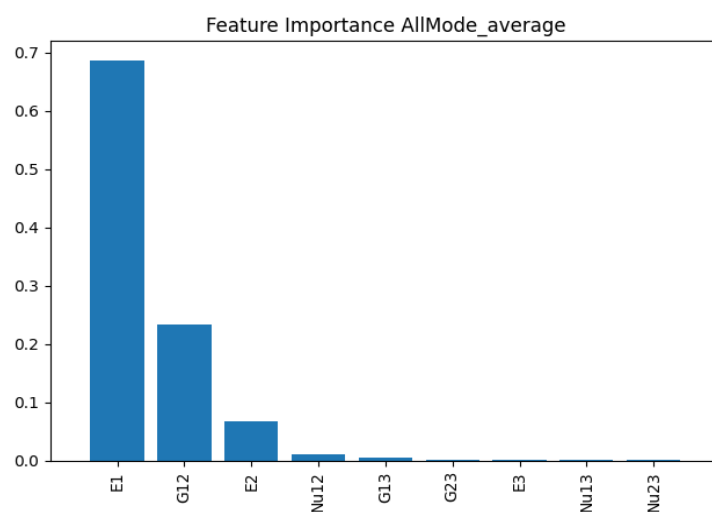


圖 5-17 第一至第十模態頻率之重要性分析平均

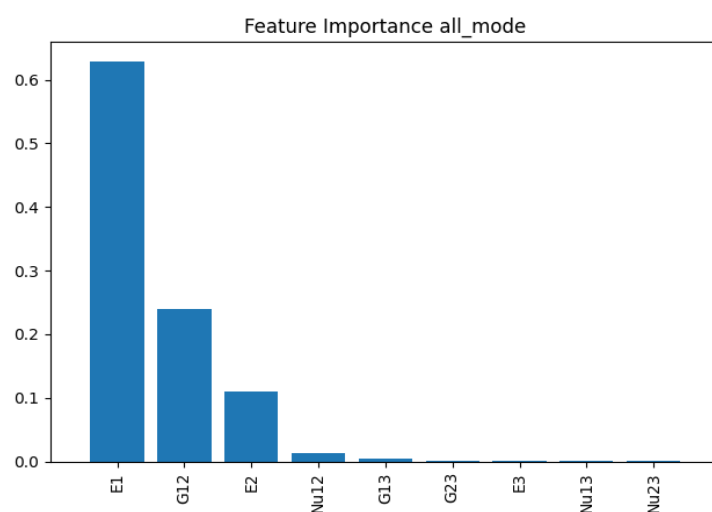


圖 5-18 第一至第十模態頻率之重要性分析

表 5-5 各模態頻率之重要性分析結果

| mode | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ | $\nu_{12}$ | $\nu_{13}$ | $\nu_{23}$ | $G_{12}$ | $G_{13}$ | $G_{23}$ | score  |
|------|-------|-------|-------|------------|------------|------------|----------|----------|----------|--------|
| 1    | 98.24 | 0.42  | 0.01  | 1.26       | 0.01       | 0.01       | 0.02     | 0.01     | 0.01     | 0.9999 |
| 2    | 49.45 | 0.26  | 0.02  | 0.76       | 0.02       | 0.02       | 49.20    | 0.26     | 0.02     | 0.9998 |
| 3    | 82.99 | 0.12  | 0.02  | 0.43       | 0.02       | 0.02       | 16.01    | 0.37     | 0.02     | 0.9998 |
| 4    | 84.33 | 0.02  | 0.01  | 0.05       | 0.01       | 0.01       | 15.43    | 0.13     | 0.01     | 0.9999 |
| 5    | 65.21 | 2.04  | 0.04  | 1.40       | 0.04       | 0.03       | 30.81    | 0.40     | 0.04     | 0.9995 |
| 6    | 51.56 | 7.28  | 0.05  | 0.42       | 0.04       | 0.05       | 39.62    | 0.89     | 0.09     | 0.9994 |
| 7    | 51.71 | 37.60 | 0.04  | 0.72       | 0.05       | 0.05       | 9.52     | 0.23     | 0.08     | 0.9994 |
| 8    | 75.07 | 7.64  | 0.06  | 1.66       | 0.06       | 0.06       | 15.07    | 0.29     | 0.08     | 0.9992 |
| 9    | 68.63 | 4.31  | 0.08  | 1.24       | 0.07       | 0.07       | 24.66    | 0.81     | 0.13     | 0.9990 |
| 10   | 57.85 | 6.64  | 0.09  | 1.95       | 0.09       | 0.09       | 32.13    | 0.99     | 0.17     | 0.9989 |
| Avg. | 68.50 | 6.63  | 0.04  | 0.99       | 0.04       | 0.04       | 23.25    | 0.44     | 0.06     |        |
| all  | 62.80 | 10.97 | 0.12  | 1.31       | 0.12       | 0.12       | 23.90    | 0.52     | 0.14     | 0.9987 |

(%)

### 5.3.2 獨熱編碼與特徵縮放

在透過共振資訊反算材料常數的模型當中，特徵可以分為輸入特徵與輸出特徵，輸入特徵包含模態類別以及共振頻率值，如果模態類別透過圖 5-19 上方的表格進行編碼，由於數字是有大小性的，演算法當中會認為拉伸(Longitudinal)>扭轉(Torsional)>側向(Lateral)>彎曲(Bending)，這樣是不合理的，因此將模態類別進行獨熱編碼(One-Hot Encoding)，如圖 5-19 所示，一個通道代表一種類別的啟用，因此有多少個類別即有多少個維度，如因此造成維度爆炸，則可以透過內嵌(Embedding)向量的方式取代。共振頻率則透過常態化(Normalization)的方式將各模態頻率值壓縮於 0~1 間：

$$x_{norm}^{(i)} = \frac{x^{(i)} - x_{min}}{x_{max} - x_{min}} \quad (5-15)$$

其中  $x^{(i)}$  為特定的樣本、 $x_{min}$  與  $x_{max}$  分別為特徵行中最小與最大的值，其示意圖如圖 5-20。

輸出特徵為各材料常數的值，如不同材料常數的尺度差異過大的話，將造成每個材料常數的收斂速度不同，而蒲松比在隨機生成時設定在 0 至 0.5 的範圍，因此將其它 3 個材料常數透過常態化的方式壓縮至 0~0.5，示意圖如圖 5-21。

| id | mode         |
|----|--------------|
| 1  | Bending      |
| 2  | Lateral      |
| 3  | Torsional    |
| 4  | Longitudinal |



one-hot encoding

| id | Bending | Lateral | Torsional | Longitudinal |
|----|---------|---------|-----------|--------------|
| 1  | 1       | 0       | 0         | 0            |
| 2  | 0       | 1       | 0         | 0            |
| 3  | 0       | 0       | 1         | 0            |
| 4  | 0       | 0       | 0         | 1            |

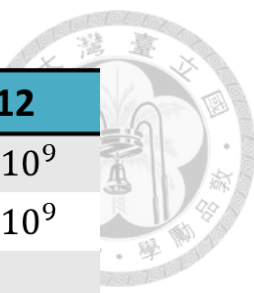
圖 5-19 模態類型進行獨熱編碼

| n \ f | mode_1 | mode_2 | ..... | mode_10 |
|-------|--------|--------|-------|---------|
| 1     | 10     | 75     |       | 3000    |
| 2     | 20     | 60     |       | 2750    |
| ⋮     |        |        |       |         |
| 9996  | 15     | 90     |       | 3125    |

0~1

圖 5-20 共振頻率進行特徵縮放示意圖





|      | E1              | E2              | v12  | G12             |
|------|-----------------|-----------------|------|-----------------|
| 1    | $5 \times 10^9$ | $2 \times 10^9$ | 0.30 | $3 \times 10^9$ |
| 2    | $4 \times 10^9$ | $6 \times 10^9$ | 0.15 | $7 \times 10^9$ |
| ⋮    |                 |                 |      |                 |
| 9996 | $7 \times 10^9$ | $8 \times 10^9$ | 0.43 | $9 \times 10^9$ |

0~0.5

圖 5-21 材料常數進行特徵縮放示意圖

### 5.3.3 數據分割

在模型建構的過程，通常會將數據集分為訓練數據集(Training Dataset)、驗證數據集(Validation Dataset)與測試數據集(Test Dataset)，而在機器學習評估模型的效能則常用保留交叉驗證法(Holdout Cross-Validation)與 k 折交叉驗證法(k-Fold Cross-Validation)，來評估模型的一般化效能。保留法如圖 5-22 所示，其中訓練集用於最佳化模型參數；驗證集則用來進行模型選擇，診斷訓練過程當中的效能，以調教超參數；最後以模型從未看過的數據(測試集)進行最終的評估。k 折交叉驗證法使用 k 個訓練數據的子集合，可以想像為重複 k 次的保留法並進行平均，以降低特定驗證集位置所造成之偏誤。

在訓練深度學習網路，通常需較高的時間成本，加上一萬筆左右的數據量不算少，利用後者的效益較不顯著，因此在本研究將使用保留法對模型進行評估，最終將 9996 筆樣本中的 9000 筆作為訓練樣本、500 筆作為驗證樣本、496 筆作為測試樣本，訓練樣本集每次在輸入至模型前皆會進行隨機攪亂(Shuffle)，以避免特定訓練數據的順序規律性所造成的偏誤。

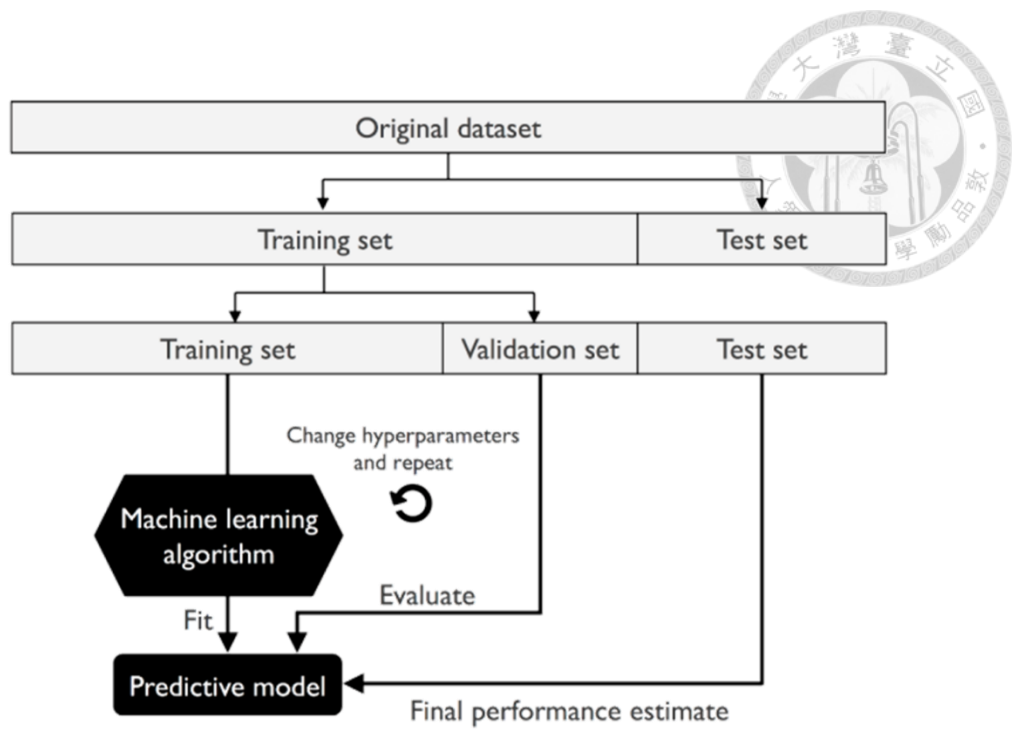


圖 5-22 保留法示意圖



## 5.4 學習演算法

在鋼珠落擊實驗時將時域訊號透過 FFT 轉換為頻域訊號，共振頻率的出現是有順序性的，因此本節將嘗試透過遞迴神經網路(Recurrent Neural Networks, RNN)對循序數據進行建模。

### 5.4.1 遞迴神經網路

典型的機器學習演算法與本章一開始所簡介之前饋式神經網路，其常假設輸入數據為相互獨立且具有相同分佈，而循序數據序列中的元素是以一定順序出現的，因此彼此並非獨立，循序數據可以是時序數據，例如股票價格或語音資料，如圖 5-23 所示，也可以是沒有時間維度的，例如文本數據或本研究之共振頻率。

RNN 的建模根據輸入與輸出數據間的關係，如圖 5-24 可以分為以下四種類別[48]：

1. 多對一(Many-to-One)：輸入為一序列，但輸出為一向量或純量。例如文本的情緒分析，輸入為電影影評，輸出為評論人是否喜歡該電影。
2. 一對多(One-to-Many)：輸入為標準格式之數據，輸出為一序列。例如影像字幕生成，輸入為一張圖片，輸出為一段語句。
3. 多對多(Many-to-Many)：輸入與輸出皆為序列且同步。例如影片分類，影片中的每幀影像皆會被標注。
4. 延遲多對多(Delayed Many-to-Many)：輸入與輸出皆為序列但不同步。例如翻譯，需將中文句子整句讀完才能將其翻成英文。

而本節進行材料常數反算為多對一的類型，輸入為共振頻率與模態類別之序列，輸出為一組材料常數。

單層 RNN 的展開架構如圖 5-25，在相同時步(垂直方向)為前饋式神經網路，但在相鄰時步的隱藏層間，透過資訊流的溝通使得網路能夠記得過去的事件，而遞迴也可以在輸出層與隱藏層或輸出層間連接，並且 RNN 可以包含多個隱藏層，稱為多層 RNN，在本研究中將以單層、在隱藏層間遞迴的 RNN 架構進行材料常數

的反算，因此在此以單層的架構說明標準 RNN 是如何計算啟動的，擷取時間  $t$  的網路來看，總共有 3 種不同的數據流：輸入層( $x^{(t)}$ )至隱藏層( $h^{(t)}$ )、隱藏層( $h^{(t-1)}$ )至隱藏層( $h^{(t)}$ )以及隱藏層( $h^{(t)}$ )至輸出層( $o^{(t)}$ )，因此將有 3 個加權矩陣。對於隱藏層，淨輸入可以計算為：

$$z_h^{(t)} = W_{xh}x^{(t)} + W_{hh}h^{(t-1)} + b_h \quad (5-16)$$

其中  $W_{xh}$  為輸入層與隱藏層間的加權矩陣、 $W_{hh}$  為隱藏層間的加權矩陣、 $b_h$  為偏誤單元。因此可以計算最終隱藏單元的啟動：

$$h^{(t)} = \phi_h(z_h^{(t)}) \quad (5-17)$$

其中  $\phi_h(\cdot)$  為啟動函數。輸出單元則可透過以下進行計算：

$$o^{(t)} = \phi_o(W_{ho}h^{(t)} + b_o) \quad (5-18)$$

其中  $W_{ho}$  為隱藏層與輸出層間的加權矩陣、 $b_o$  為偏誤單元、 $\phi_o(\cdot)$  為啟動函數。接著透過 BPTT 演算法(Backpropagation Through Time)計算梯度[49]，總損失為所有時步損失函數的總合：

$$L = \sum_{t=1}^T L^{(t)} \quad (5-19)$$

而在時間  $t$  下的損失計算仰賴於所有在時間  $t$  以前之隱藏單元，其梯度計算如下：

$$\frac{\partial L^{(t)}}{\partial W_{hh}} = \frac{\partial L^{(t)}}{\partial o^{(t)}} \times \frac{\partial o^{(t)}}{\partial h^{(t)}} \times \left( \sum_{k=1}^t \frac{\partial h^{(t)}}{\partial h^{(k)}} \times \frac{\partial h^{(k)}}{\partial W_{hh}} \right) \quad (5-20)$$

其中  $\frac{\partial h^{(t)}}{\partial h^{(k)}}$  為相鄰時步之乘積：

$$\frac{\partial h^{(t)}}{\partial h^{(k)}} = \prod_{i=k+1}^t \frac{\partial h^{(i)}}{\partial h^{(i-1)}} \quad (5-21)$$

然而觀察(5-21)式可以發現，其將進行  $t-k$  次的相乘，如  $|w| < 1$  且  $t-k$  很大時，將可能造成梯度消失(Vanishing Gradients)的問題，反之如  $|w| > 1$  時，則可能造成梯度爆炸(Exploding Gradients)[50]，在實務上常使用以下 4 種解決方法：

1. 梯度裁剪(Gradient Clipping)：為梯度設定一個截斷值與門檻值，當超過門檻值時，以設定的截斷值作為梯度。
2. 以時間截斷反傳遞(Truncated Backpropagation Through Time, TBPTT)：限制前

饋可以進行反傳遞的時步數量，例如序列總共有 100 個時步，而在演算法當中只反傳遞最近的 10 個時步。

3. 長短期記憶單元(Long Short-Term Memory, LSTM)[51]：加入記憶單元，使得大範圍相依性問題的建模能夠記憶的更長久。
4. 閘控遞迴單元(Gated Recurrent Unit, GRU)[52]：為 LSTM 的簡化版，具更簡單的結構與較少的模型參數，在處理特定問題時有更好的效率。

其中 LSTM 與 GRU 為較通用之方法，而 LSTM 較 GRU 多一個門控單元，有更長時間的記憶能力，且未來在研究上如需輸入更多的時步資訊，LSTM 有更好的靈活與擴展性，因此本研究將透過 LSTM 的方式強化模型，以記憶單元取代原標準 RNN 中的隱藏層。

一個 LSTM 單元展開之結構如圖 5-26，其中有三種不同類型的閘，分別為遺忘閘(Forget Gate)、輸入閘(Input Gate)與輸出閘(Output Gate)，即圖中透過邏輯斯啟動函數( $\sigma$ )的窗格，以下將詳細說明各單元的功用與其計算方式：

- 遺忘閘( $f_t$ )

使記憶單元可以重設單元狀態，決定資訊流中哪些通過、哪些被遺忘，此閘並未出現在原始 LSTM 中，為後用以優化模型而[53]，其計算方式為：

$$f_t = \sigma(W_{xf}x^{(t)} + W_{hf}h^{(t-1)} + b_f) \quad (5-22)$$

- 輸入閘( $i_t$ )與備選值(Candidate Value,  $\tilde{C}_t$ )

以時間  $t$  的資訊更新單元狀態，其計算方式分別為：

$$i_t = \sigma(W_{xi}x^{(t)} + W_{hi}h^{(t-1)} + b_i) \quad (5-23)$$

$$\tilde{C}_t = \tanh(W_{xc}x^{(t)} + W_{hc}h^{(t-1)} + b_c) \quad (5-24)$$

因此在時間  $t$  時之單元狀態為：

$$C^{(t)} = (C^{(t-1)} \odot f_t) \oplus (i_t \odot \tilde{C}_t) \quad (5-25)$$

其中  $\odot$  為元素乘積、 $\oplus$  為元素總合。



- 輸出閘( $o_t$ )

決定如何直接更新隱藏單元的值：

$$o_t = \sigma(W_{xo}x^{(t)} + W_{ho}h^{(t-1)} + b_o) \quad (5-26)$$

最終時間  $t$  時步之隱藏單元為：

$$h^{(t)} = o_t \odot \tanh(C^{(t)}) \quad (5-27)$$

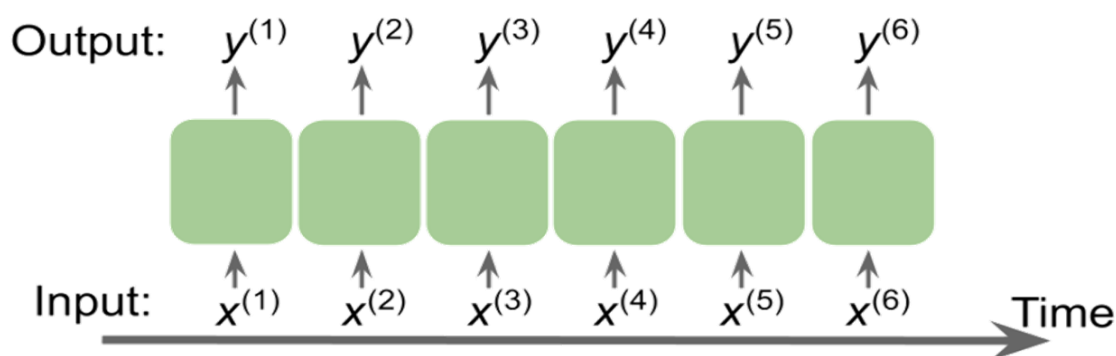


圖 5-23 時間序列數據

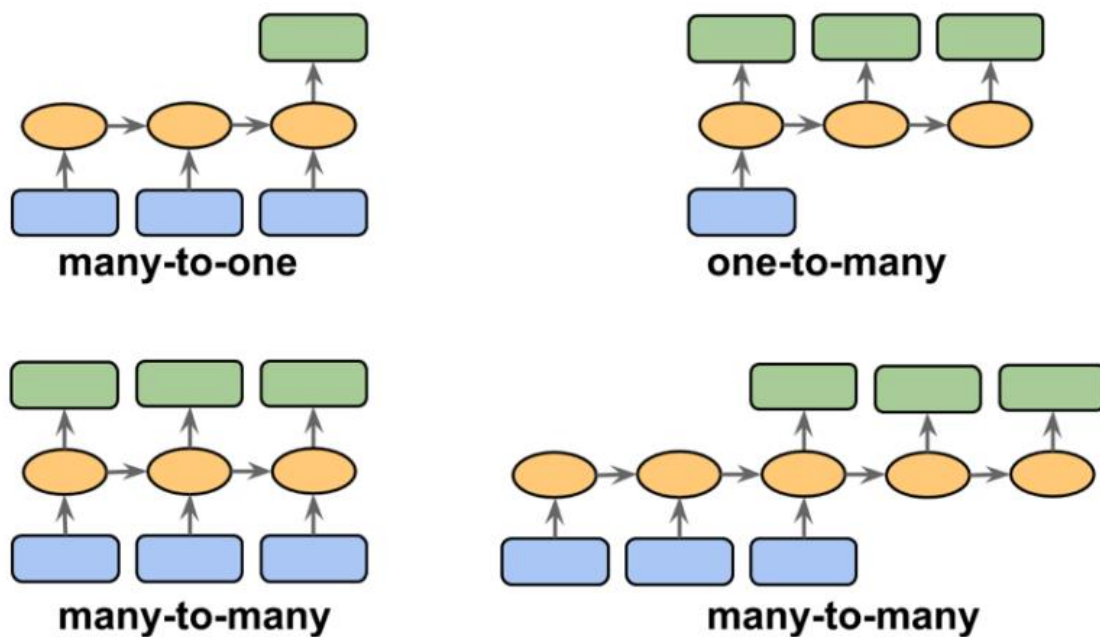


圖 5-24 不同類型之 RNN 模型

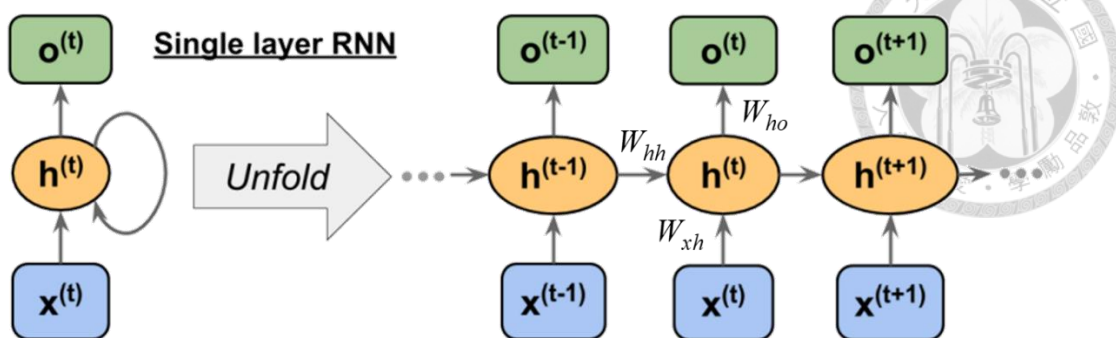


圖 5-25 單層 RNN 之展開圖

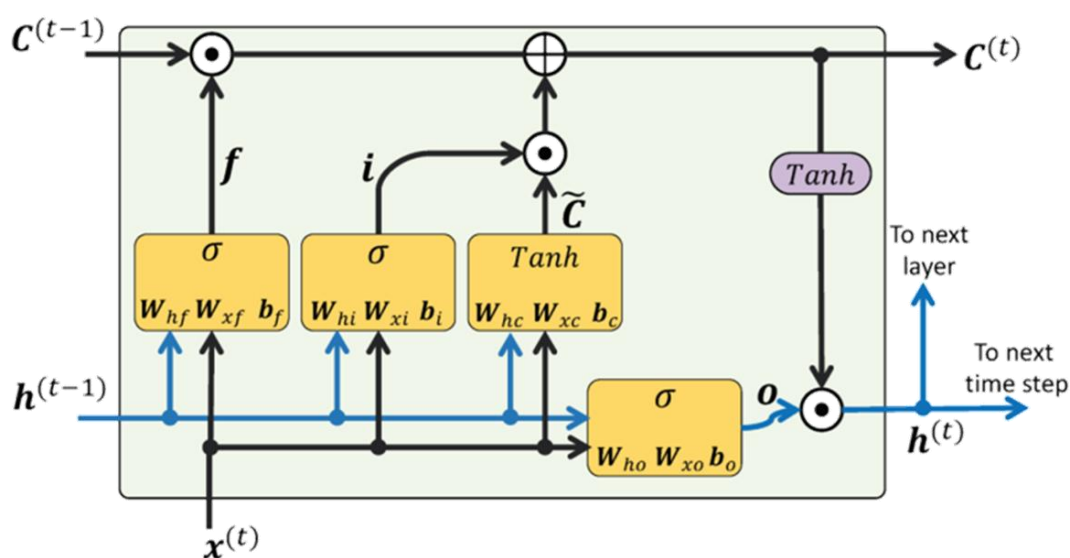


圖 5-26 LSTM 單元展開圖

#### 5.4.2 訓練、驗證與測試結果

在機器學習中常透過驗證曲線(Validation Curve)，橫軸為單一超參數、縱軸為模型損失，選擇特定參數之最佳設定值，探討最佳之參數組合則可使用網格搜尋法(Grid Search)進行選擇，或以自動化機器學習(AutoML)自動調教超參數與演算法之組合，而在深度模型當中可進行調整的參數較多，且考慮時間成本的問題，在此以手動的方式調整模型的各超參數，最終模型設定的超參數如表 5-6，其中 Epoch 為輪，即演算法看過所有訓練數據的次數；從圖 5-27 可以觀察到由於一個時步要輸入共振頻率值與模態類型，因此輸入大小(Input Size)為 5 個維度(頻率 1+獨熱編碼形式之模態類型 4)，總共輸入 10 個共振頻率，因此時間步長(Time Step)為 10，輸

出大小則為 4 個維度(材料常數)；在透過梯度下降演算法進行最佳化求解時，學習率通常隨著迭代次數下降，在此將其分為三段進行簡化，如表中所示；優化器使用 Adam(Adaptive Moment Estimation)[54][55]，為加入動量(Momentum)概念的 RMSprop，並且考慮偏差校正，其結合了 Adagrad、RMSprop 與 Momentum 的優點，對內存的資源消耗低，是較通用型的優化器；而如以均勻隨機或常態隨機初始化神經網路的加權，通常會得到較差的結果，因此以 Xavier(or Glorot)方法進行初始化[56]，其目的為大致平衡不同層中的梯度變異數，本研究透過常態分佈的方式來初始化加權，計算標準差如：

$$\sigma = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n_{in} + n_{out}}} \quad (5-28)$$

其中  $n_{in}$  為輸入神經元的數目、 $n_{out}$  為輸入至下一層之輸出神經元數目。

LSTM-RNN 模型最終在一個時步的架構為，輸入層(5)→LSTM 單元之隱藏層(30)→全連接層(30)→輸出層(4)，考慮偏誤單元且 LSTM 總共有 4 個閘(加權矩陣)，因此總加權參數數目可透過以下進行計算：

$$[(x_{in} + 1) \times h_{LSTM} + (h_{LSTM} + 1) \times h_l] \times 4 + (h_l + 1) \times 4 \quad (5-29)$$

其中  $x_{in}$  為輸入大小、 $h_{LSTM}$  為 LSTM 單元隱藏層維度、 $h_l$  為全連接隱藏層維度，經過計算總共的加權參數為 4564 個。

透過 5.3.3 小節數據集分割的方式，模型的損失函數為 MSE，訓練過程的學習曲線(Learning Curve)如圖 5-28，可以觀察到訓練數據與驗證數據的結果很接近，沒有明顯過擬合或低度擬合(Underfitting)的問題，最終訓練數據的 MSE 誤差為 0.0003，驗證集則為 0.0005，然而 MSE 越低越好，但其值並沒有特別的參考意義，會受數據的尺度影響，因此也計算驗證數據在訓練過程的決定係數(Coefficient of Determination,  $R^2$ )，其類似於標準化的 MSE，定義如下：

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y^{(i)} - \hat{y}^{(i)})^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y^{(i)} - \mu_y)^2} = 1 - \frac{MSE}{Var(y)} \quad (5-30)$$

其中 SST 為總平方和。 $R^2$  通常介於 0 至 1 間，越接近 1 代表有較佳的訓練結果，



如為負值則代表模型的效能比隨機猜測還差，當  $R^2=1$  即表示模型完美適合數據，相對應的 MSE 將為 0，驗證數據決定係數的收斂狀況如圖 5-29，最終收斂之  $R^2$  值為 0.974，意即模型能解釋數據中 97.4 % 的變異性，具相當不錯的預測能力。

最後以模型從未看過的數據(測試數據)，檢驗模型最終的效能，測試樣本總數為 496，在此截取前 10 個樣本預測與真實的結果，並計算兩者之誤差整理於表 5-7，並將所有測試樣本之統計數據整理於表 5-8，從表 5-7 中可以發現，除了第 3 個樣本之  $E_2$  之誤差較大外，其它都有還不錯的預測結果，而實際觀察所有測試樣本，誤差會很大的情況，只有類似於表中第 3 個的狀況，也就是當  $E_2/E_1$  很大時， $E_2$  的預測會較不準確，從這些樣本的模擬結果檔進行觀察，由於在所設之邊界與尺寸條件下， $E_2$  在低頻主要受 2 方向(寬度方向)的彎曲模態所主導，而當  $E_2/E_1$  之比例大到一鄰界值將使前 10 個共振頻率不會出現 2 方向的彎曲模態，使得在  $E_2$  的預測上變得相當困難。因此從表 5-8 可以觀察到， $E_2$  相對於其它 3 個材料常數有較大的平均誤差，但即便如此整體測試樣本所有材料常數的平均誤差仍不到 3%， $R^2$  為 0.98(在實際模型的訓練上，如未固定亂數種，每次訓練的結果會稍有不同，測試數據集的  $R^2$  大約介於 0.975 至 0.985 之間)，而 MSE 誤差與訓練和測試集接近，為 0.00038。

如要改善前述的問題，最直接的方法為選用更多的共振資訊數量作為模型輸入，例如改為輸入至第 15 或 20 個共振頻率，確保對於每個材料常數之代表性模態皆有出現，而為了驗證前述的現象，以 5.3.1 小節的方式從只保留  $E_2/E_1 > 8$  的樣本、 $E_2/E_1 > 7.5$  的樣本...倍率以 0.5 為區間進行變化，觀察排序過後的特徵重要性圖，參考圖 5-17 與圖 5-18 的結果，選擇倍率的策略為  $E_2$  的重要性至少排到前 4，且與排名第 5 材料常數之重要性能明顯區隔，因此最終選擇  $E_2/E_1 = 3.5$  作為過濾掉  $E_2$  影響性過低的樣本之標準，只保留  $E_2/E_1 > 3.5$  的樣本之重要性分析如圖 5-30。因此接著刪除  $E_2/E_1 > 3.5$  的樣本，並以前述相同參數訓練 LSTM-RNN 模型，而實際上只移除了 508 筆資料，在此盡可能地固定驗證與測試數據集的樣

本數量，一樣以保留法進行數據集的分割，最終訓練、驗證與測試數據集的大小分別為 8500、500 與 488，新模型的學習曲線如圖 5-31，可以觀察到訓練數據與驗證數據的結果很接近，也沒有明顯過擬合或低度擬合的問題，最終訓練數據的 MSE 誤差為 0.0002，驗證集則為 0.0004，驗證數據  $R^2$  的收斂狀況則如圖 5-29 LSTM-RNN 模型訓練時驗證數據  $R^2$  收斂結果，最終收斂之  $R^2$  值為 0.981。

最後一樣以測試數據檢驗模型最終的效能，測試樣本總數為 488，在此截取前 10 個樣本預測與真實的結果，並計算兩者之誤差整理於表 5-9，並將所有測試樣本之統計數據整理於表 5-10，實際觀察所有測試樣本，在前個模型結果  $E_2$  預測誤差會很大的情況不再出現，並且從表 5-10 可以觀察到， $E_2$  的平均誤差與整體誤差皆有明顯的改善，整體測試樣本所有材料常數的平均誤差下降至不到 2.5%， $R^2$  則略為提升至 0.985(在實際模型的訓練上，如未固定亂數種，每次訓練的結果會稍有不同，測試數據集的  $R^2$  大約介於 0.980 至 0.990 之間)，而 MSE 誤差與訓練和測試集接近，為 0.00029。由於只移除了 500 筆左右的資料，模型效能算是有很明顯的提升，驗證了前述  $E_2$  重要性過低可能造成的問題。

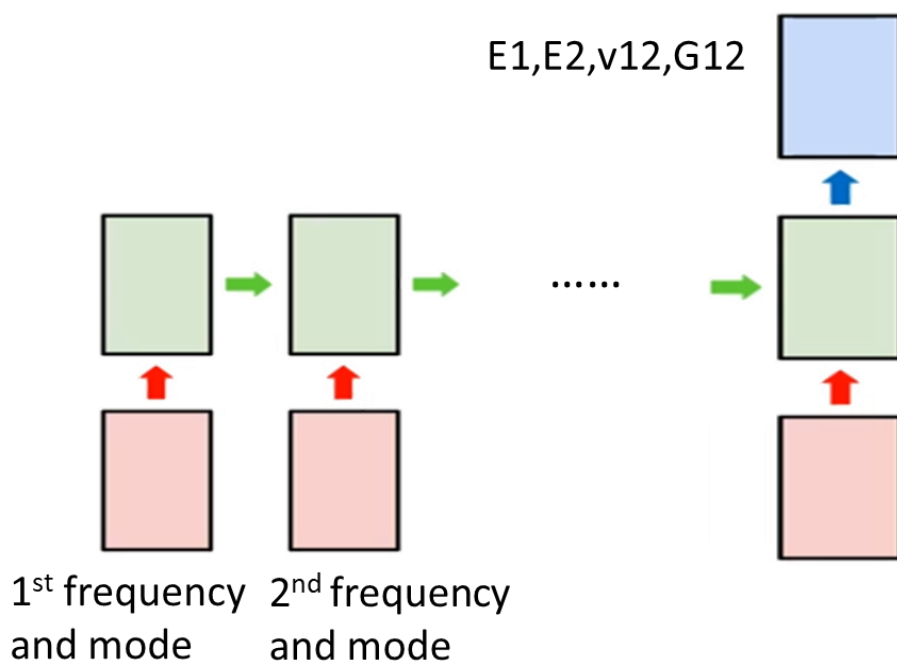


圖 5-27 LSTM-RNN 模型輸入與輸出示意圖

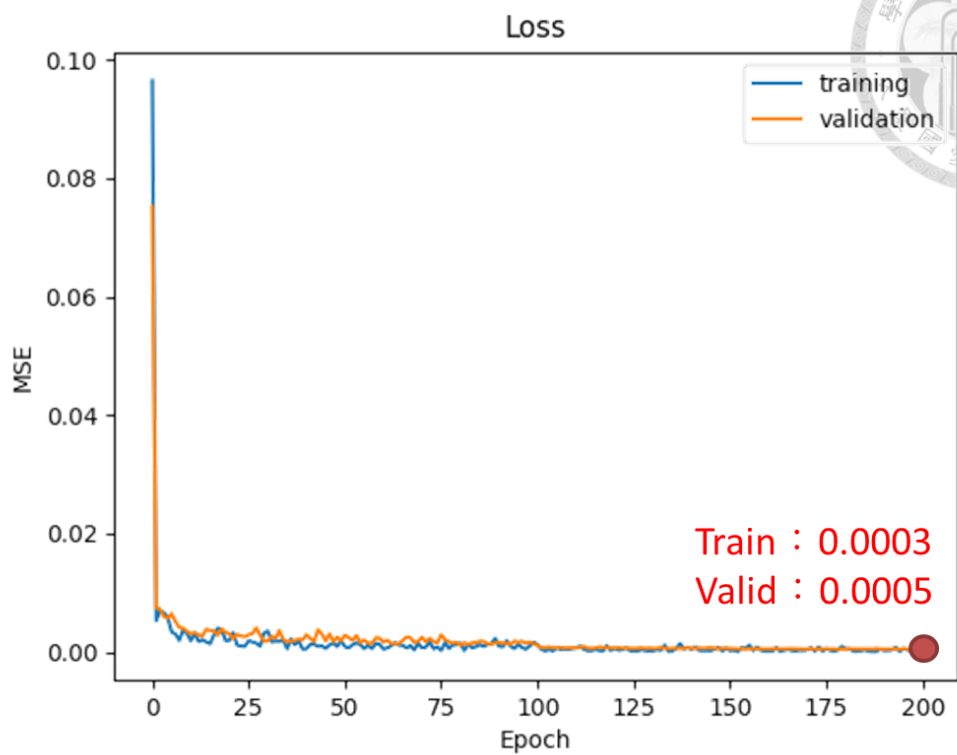


圖 5-28 LSTM-RNN 模型訓練之學習曲線

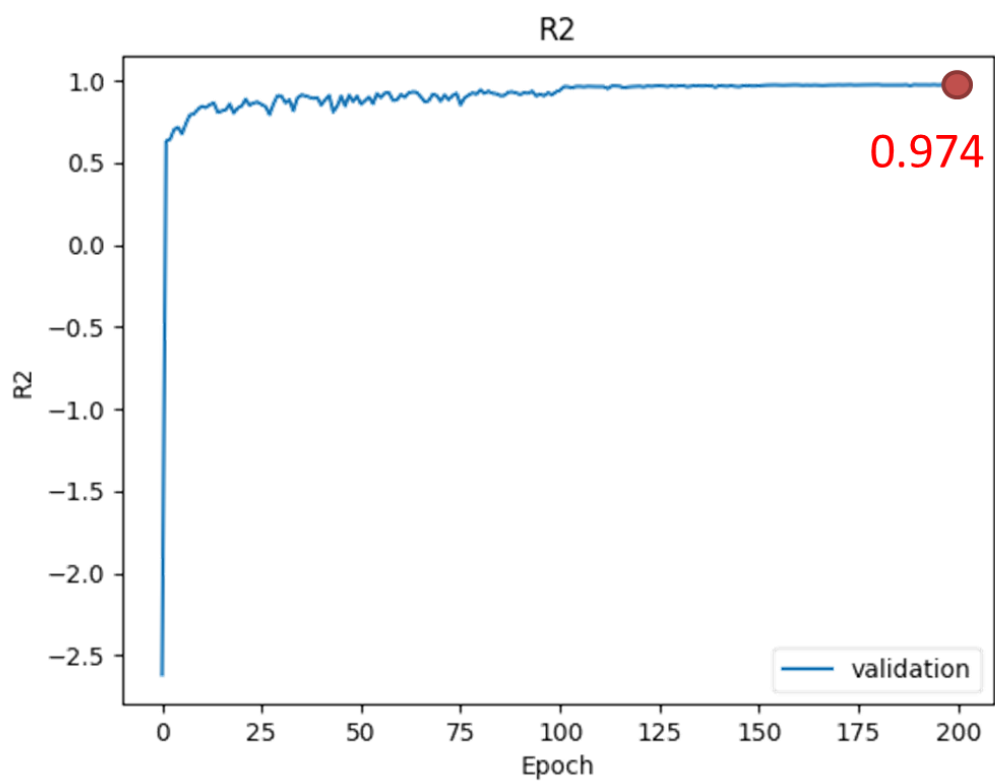


圖 5-29 LSTM-RNN 模型訓練時驗證數據  $R^2$  收斂結果

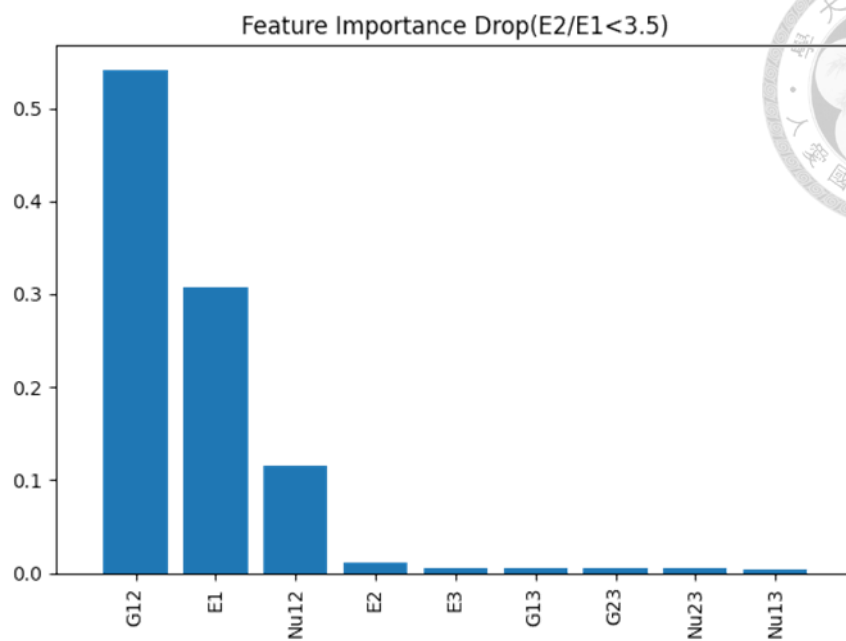


圖 5-30 只保留  $E_2 / E_1 > 3.5$  的樣本之重要性分析

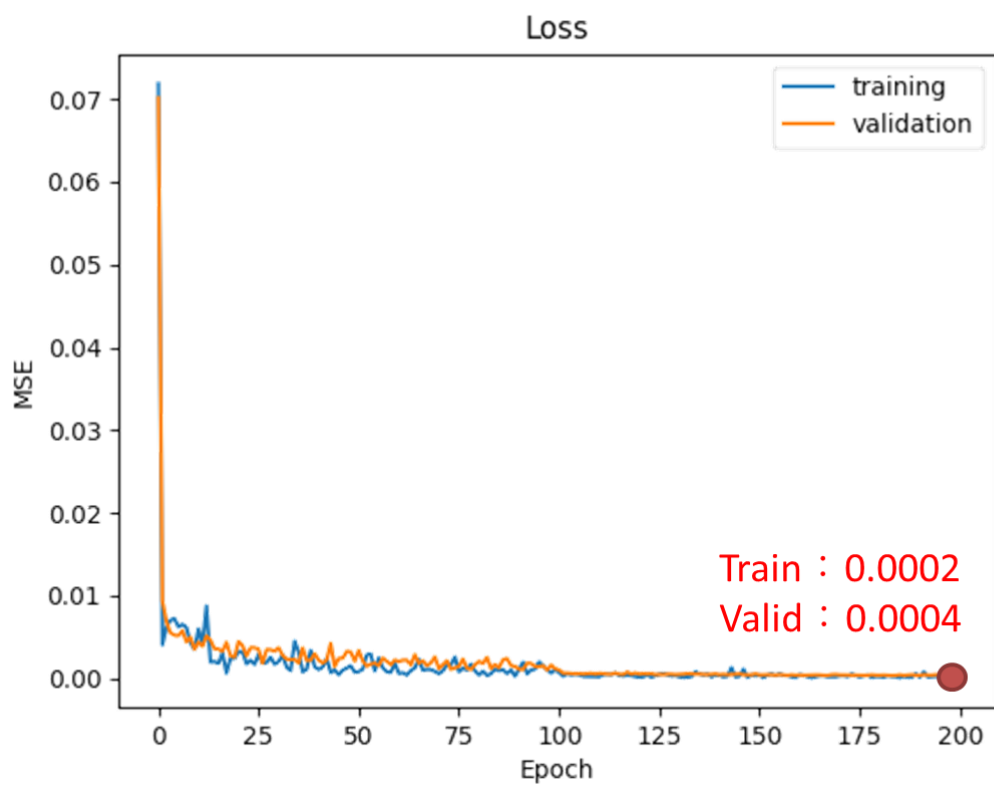


圖 5-31 LSTM-RNN 模型(移除  $E_2 / E_1 > 3.5$  樣本)訓練之學習曲線

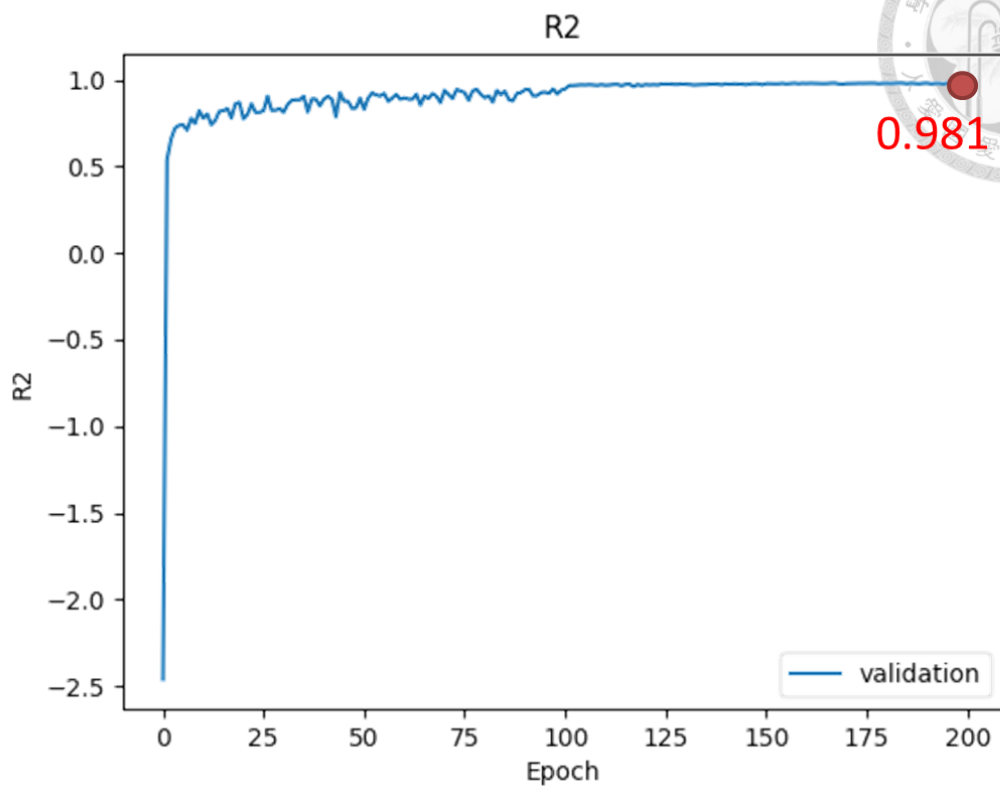


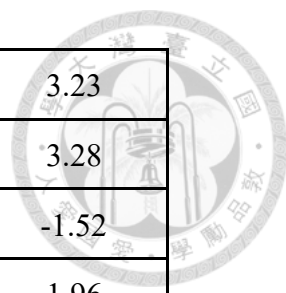
圖 5-32 LSTM-RNN 模型(移除  $E_2 / E_1 > 3.5$  樣本)訓練時驗證數據  $R^2$  收斂結果

表 5-6 LSTM-RNN 模型之超參數設定

| Symbol        | value                                                                                                 | Symbol                   | value                     |
|---------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|---------------------------|
| EPOCH         | 200                                                                                                   | hidden_size              | 30                        |
| BATCH_SIZE    | 10                                                                                                    | num_layers               | 1                         |
| INPUT_SIZE    | 5                                                                                                     | optimizer                | Adam                      |
| TIME_STEP     | 10                                                                                                    | parameter initialization | Xavier (Glorot)<br>normal |
| learning rate | 0.005 (epoch $\leq$ 100) 、<br>0.001 ( $\leq$ epoch $\leq$ 150) 、<br>0.0005 ( $\leq$ epoch $\leq$ 200) |                          |                           |

表 5-7 LSTM-RNN 模型前 10 個測試數據結果

| Sample |           | $E_1$ (GPa) | $E_2$ (Gpa) | $\nu_{12}$ | $G_{12}$ (GPa) |
|--------|-----------|-------------|-------------|------------|----------------|
| 1      | Predict   | 5.74        | 3.96        | 0.438      | 2.48           |
|        | True      | 5.72        | 3.77        | 0.433      | 2.48           |
|        | Error (%) | 0.35        | 5.04        | 1.15       | 0.00           |
| 2      | Predict   | 9.14        | 3.92        | 0.319      | 9.15           |
|        | True      | 9.05        | 3.73        | 0.327      | 9.15           |
|        | Error (%) | 0.99        | 5.09        | -2.45      | 0.00           |
| 3      | Predict   | 1.00        | 4.68        | 0.0347     | 1.18           |
|        | True      | 1.04        | 7.44        | 0.0338     | 1.17           |
|        | Error (%) | -3.85       | -37.10      | 2.66       | 0.85           |
| 4      | Predict   | 2.87        | 2.15        | 0.0639     | 2.11           |
|        | True      | 2.92        | 1.94        | 0.0614     | 2.34           |
|        | Error (%) | -1.71       | 10.82       | 4.07       | -9.83          |
| 5      | Predict   | 7.40        | 7.12        | 0.447      | 5.70           |
|        | True      | 7.52        | 7.08        | 0.435      | 5.62           |
|        | Error (%) | -1.60       | 0.56        | 2.76       | 1.42           |
| 6      | Predict   | 3.71        | 7.62        | 0.0998     | 7.44           |
|        | True      | 3.69        | 7.50        | 0.111      | 7.41           |
|        | Error (%) | 0.54        | 1.60        | -10.09     | 0.40           |
| 7      | Predict   | 9.74        | 8.99        | 0.357      | 9.12           |
|        | True      | 9.71        | 8.87        | 0.358      | 9.29           |
|        | Error (%) | 0.31        | 1.35        | -0.28      | -1.83          |
| 8      | Predict   | 6.07        | 5.86        | 0.503      | 1.92           |
|        | True      | 5.94        | 5.39        | 0.489      | 2.09           |
|        | Error (%) | 2.19        | 8.72        | 2.86       | -8.13          |



|           |           |      |      |       |       |
|-----------|-----------|------|------|-------|-------|
| <b>9</b>  | Predict   | 3.59 | 2.48 | 0.302 | 3.23  |
|           | True      | 3.49 | 2.30 | 0.309 | 3.28  |
|           | Error (%) | 2.87 | 7.83 | -2.27 | -1.52 |
| <b>10</b> | Predict   | 8.36 | 9.23 | 0.467 | 1.96  |
|           | True      | 8.35 | 9.12 | 0.451 | 1.87  |
|           | Error (%) | 0.12 | 1.21 | 3.55  | 4.81  |

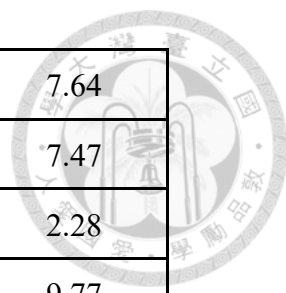
表 5-8 LSTM-RNN 模型所有測試數據統計結果

| All sample<br>( $n = 496$ )               | $E_1$  | $E_2$  | $v_1$         | $G_{12}$      |
|-------------------------------------------|--------|--------|---------------|---------------|
| Mean_error                                | 1.18 % | 4.69 % | 2.45 %        | 2.11 %        |
| All material constant error mean : 2.61 % |        |        | MSE : 0.00038 | $R^2$ : 0.980 |

表 5-9 LSTM-RNN 模型(移除  $E_2 / E_1 > 3.5$  樣本)前 10 個測試數據結果

| Sample |           | $E_1$ (GPa) | $E_2$ (Gpa) | $\nu_{12}$ | $G_{12}$ (GPa) |
|--------|-----------|-------------|-------------|------------|----------------|
| 1      | Predict   | 4.11        | 3.11        | 0.447      | 6.10           |
|        | True      | 4.11        | 3.20        | 0.457      | 6.00           |
|        | Error (%) | 0.00        | -2.81       | -2.19      | 1.67           |
| 2      | Predict   | 5.85        | 5.10        | 0.218      | 2.16           |
|        | True      | 5.78        | 5.04        | 0.233      | 2.17           |
|        | Error (%) | 1.21        | 1.19        | -6.44      | -0.46          |
| 3      | Predict   | 4.49        | 9.36        | 0.349      | 9.40           |
|        | True      | 4.57        | 9.83        | 0.338      | 9.52           |
|        | Error (%) | -1.75       | -4.78       | 3.25       | -1.26          |
| 4      | Predict   | 5.20        | 8.38        | 0.279      | 8.70           |
|        | True      | 5.21        | 8.41        | 0.286      | 8.95           |
|        | Error (%) | -0.19       | -0.36       | -2.45      | -2.79          |
| 5      | Predict   | 2.34        | 5.85        | 0.292      | 4.86           |
|        | True      | 2.18        | 5.76        | 0.293      | 4.94           |
|        | Error (%) | 7.34        | 1.56        | -0.34      | -1.62          |
| 6      | Predict   | 4.42        | 3.95        | 0.300      | 4.17           |
|        | True      | 4.48        | 3.98        | 0.303      | 4.33           |
|        | Error (%) | -1.34       | -0.75       | -0.99      | -3.70          |
| 7      | Predict   | 9.14        | 7.42        | 0.181      | 3.33           |
|        | True      | 9.03        | 7.36        | 0.218      | 3.27           |
|        | Error (%) | 1.22        | 0.82        | -16.97     | 1.83           |
| 8      | Predict   | 8.86        | 6.54        | 0.106      | 3.12           |
|        | True      | 8.79        | 7.01        | 0.152      | 3.06           |
|        | Error (%) | 0.80        | -6.70       | -30.26     | 1.96           |





|           |           |      |       |        |       |
|-----------|-----------|------|-------|--------|-------|
| <b>9</b>  | Predict   | 3.34 | 4.58  | 0.193  | 7.64  |
|           | True      | 3.31 | 4.68  | 0.215  | 7.47  |
|           | Error (%) | 0.91 | -2.14 | -10.23 | 2.28  |
| <b>10</b> | Predict   | 7.34 | 2.55  | 0.293  | 9.77  |
|           | True      | 7.20 | 2.71  | 0.312  | 9.88  |
|           | Error (%) | 1.94 | -5.90 | -6.09  | -1.11 |

表 5-10 LSTM-RNN 模型(移除  $E_2 / E_1 > 3.5$  樣本)所有測試數據統計結果

| All sample<br>( $n = 488$ )               | $E_1$  | $E_2$  | $v_1$         | $G_{12}$      |
|-------------------------------------------|--------|--------|---------------|---------------|
| Mean_error                                | 1.04 % | 2.26 % | 4.00 %        | 1.67 %        |
| All material constant error mean : 2.24 % |        |        | MSE : 0.00029 | $R^2$ : 0.985 |



## 5.5 模態辨識

本節將透過卷積神經網路(Convolutional Neural Networks, CNN)結合 5.2.2 小節之模態分群結果，嘗試以模態影像建構類別分類的模型。

### 5.5.1 資料蒐集

利用 ABAQUS 的 Python 腳本開啟各工作的模擬結果檔，將各模態之懸臂板試片調整至 x-y 平面視角，移除網格邊線、文字說明...等不必要的資訊，並將位移大小設定為 U3(面外)方向，將各模態形狀進行截圖輸出，而原始輸出的影像大小約為 400×800 個像素(Pixel)，為彩色影像因此有 3 個通道，如果以原始影像大小進行 CNN 的訓練，將造成過多不必要的加權參數，於是在此將影像解析度壓縮至 40×80×3，也是唯一進行的影像前處理步驟，如圖 5-33 所示，最後將 5.2.2 小節之模態分群結果標注於各模態振型圖，即完成所有輸入與輸出數據的準備。

由於總共有 9996 個工作檔(材料常數組合)，而每筆資料又有 10 個共振模態，因此所有的模態影像樣本為 99960 張，透過以 5.3.3 小節之保留法並以相同比例進行數據集的分割，最終訓練、驗證與數據集的大小分別為：90000、5000 與 4960。

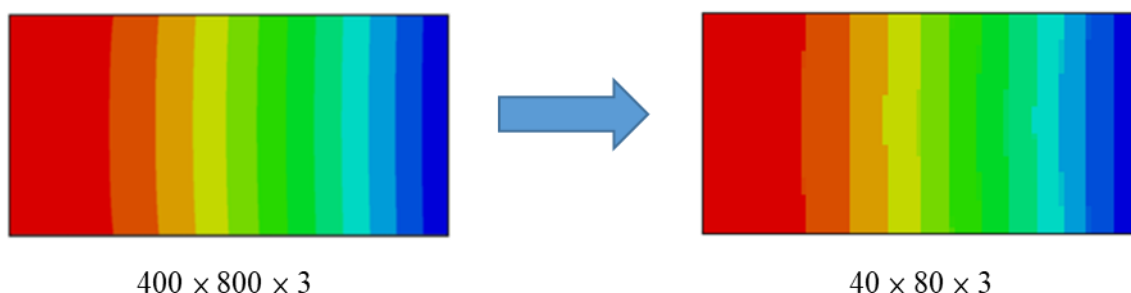


圖 5-33 模態振型圖大小進行壓縮示意圖

### 5.5.2 卷積神經網路架構

CNN 之構想來自於人類大腦的視覺皮層在辨識物體時的運作方式，其發展最早可以追溯至 1990 年代，由 Yann LeCun 等人所提出，CNN 之所以在處理影像問題有很好的表現主要基於其兩個特性：稀疏連通性(Sparse Connectivity)與參數共享(Parameter-Sharing)，前者意即特徵圖(Feature Maps)中的單一元素只會連接至原始

影像的一小塊區域之像素，而不會與整個影像相連接，因此可以處理較佳的局部連續性；後者則指輸入影像的不同區塊會使用相通的加權，加權參數的數量會大幅降低，有更好的能力取得顯著特徵。

本節進行模態類型分類的 CNN 模型架構如圖 5-34，輸入影像經過兩個卷積層(Convolutional)與子採樣層(Subsampling Layer)後，將數據平坦化(Flattened)後連接至兩個全連接層(Fully Connected, FC)，最後輸出 4 個維度(模態類型)。以下將詳細說明各步驟：

### ● 卷積層

由於影像為 2D 的圖像，因此使用二維的離散卷積，其數學定義為：

$$Y = X_{n_1 \times n_2} * W_{m_1 \times m_2} \rightarrow Y[i, j] = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} X[i-k_1, j-k_2] W[k_1, k_2] \quad (5-31)$$

其中\*為卷積符號、 $X$  與  $W$  分別為輸入與濾波(內核)矩陣( $m_1 \leq n_1$  &  $m_2 \leq n_2$ )。在此以圖 5-34 第一個卷積層為例，輸入影像大小為 40x80，厚度(資訊通道)為 3，卷積層大小為 5x5x32，意即內核大小為 5x5[57]，步幅設定為 1，進行一次卷積可以想像為有一 5x5 的濾波器將輸入影像從頭一次移動一格掃描至最後，提取圖像中的顯著特徵。卷積層大小的最後一個維度為所設定之輸出特徵圖的數量，給定樣本  $X_{n_1 \times n_2 \times C_{in}}$ 、內核矩陣  $W_{m_1 \times m_2 \times C_{in} \times C_{out}}$  與偏誤  $b_{C_{out}}$ ，輸出特徵圖的啟動可以透過以下進行計算：

$$\begin{aligned} Z^{Conv}[:, :, k] &= \sum_{c=1}^{C_{in}} W[:, :, c, k] * X[:, :, c] \\ Z[:, :, k] &= Z^{Conv}[:, :, k] + b[k] \\ A[:, :, k] &= \phi(z[:, :, k]) \end{aligned} \quad (5-32)$$

其中  $C_{in}$  為輸入通道數量、 $C_{out}$  為輸出特徵圖數量、 $\phi$  為 ReLU 啟動函數。

如未經過任何處理，卷積後的影像大小將會縮小，如此除了不易設計系統架構之外，也可能使得影像邊界的重要信息遺失，因此通常在執行卷積前先進行零填補(Zero-Padding)，採用相同模式，卷積後的影像大小將與輸入相同，因此輸出之特徵圖大小為 40x80x32。



## ● 子採樣層

通常採用兩種匯總形式：最大匯總(Max-Pooling)與平均匯總(Mean-Pooling)，以  $P_{n_1 \times n_2}$  表示，其中  $n_1 \times n_2$  為匯總大小，以圖 5-35 為例，匯總大小為  $3 \times 3$ ，也就是說在這個大小的區域內進行平均或取最大值，而步幅(Stride)為匯總窗格每次移動的步數。使用最大匯總有兩個主要的優點：

1. 最大值的附近產生微小的變化並不會改變匯總的結果，能夠提升抗雜訊能力，有較佳的區域不變性。
2. 能夠大幅減少特徵數量、增加效率，也能預防過度擬合的問題。

因此最終採用  $P_{2 \times 2}$ 、步幅為 2 之最大匯總於模型的兩個子採樣層，此層並沒有任何加權參數。

## ● 全連接層

第一個 FC 的神經元數目為 1024，啟動函數為 ReLU 函數，並在此層加入退出(Dropout)之正規化機制[58]，退出之機率設定為 0.5，意即在每次訓練的過程當中，隨機丟棄 50% 的神經元，使得網路無法由特定的神經元主導，能夠提升一般化效能，而退出機制僅出現在訓練過程，於評估階段所有的神經元皆應被啟動。最後連接至第二個 FC(輸出層)，並以 Softmax 函數輸出各類別成員的機率，其計算方式如下：

$$\phi(z) = \frac{e^{z_i}}{\sum_{j=1}^M e^{z_j}} \quad (5-33)$$

其中  $z$  為淨輸入，屬於第  $i$  類的機率透過所有加權線性函數的指數總和進行正規化。

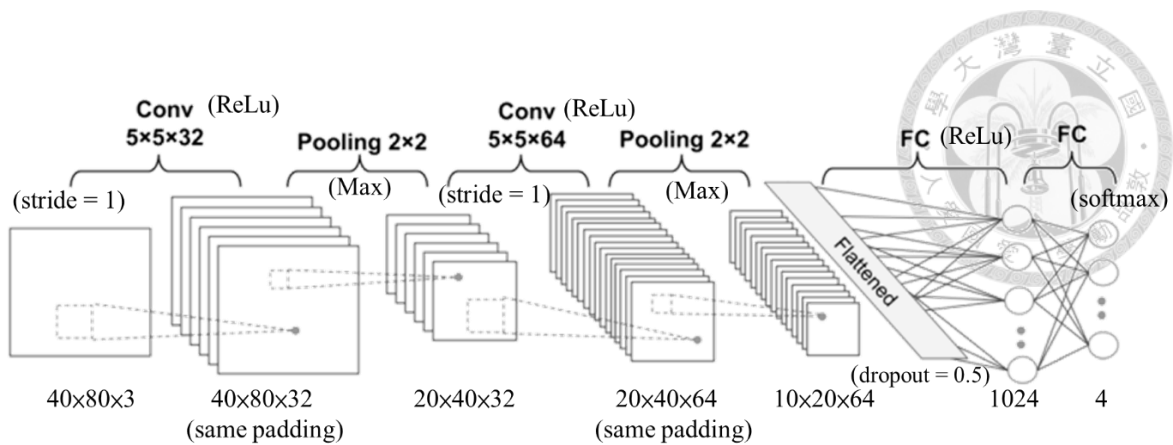


圖 5-34 模態類型分類之 CNN 模型架構

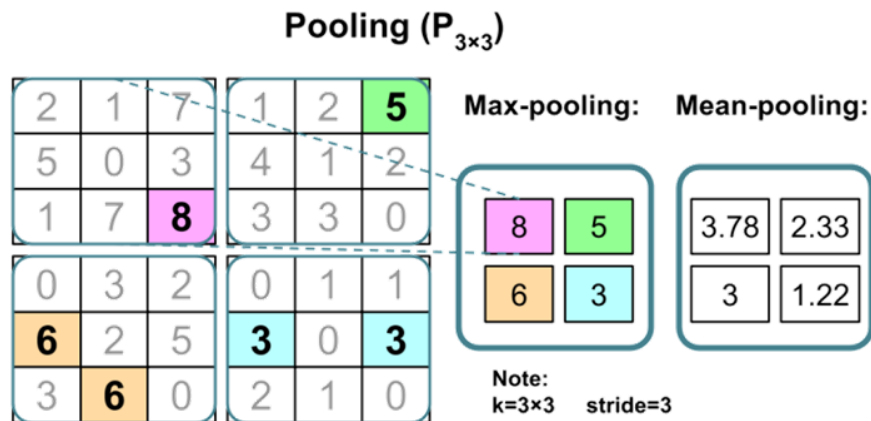


圖 5-35 匯總(Pooling)示意圖

### 5.5.3 訓練、驗證與測試結果

整體 CNN 架構之模型參數如表 5-11 所示，總共的加權參數大約為一千三百萬(13,166,020)個，各層之加權參數如圖 5-36，從圖中可以觀察大部分的參數皆落在第 1 個全連接層，參數的量看似很龐大，然而實際透過 GPU(Graphics Processing Unit)進行計算(RTX 2060)，一輪的計算時間大約只需要 1 分鐘左右。

透過 5.5.1 小節數據集分割的方式，模型的損失函數為 CrossEntropy，訓練過程的學習曲線(Learning Curve)如圖 5-37，可以觀察到訓練數據與驗證數據的結果很接近，沒有明顯過擬合或低度擬合的問題，最終訓練數據的 CrossEntropy 損失趨近於 0，驗證集則為  $1.04 \times 10^{-8}$ ，然而損失越低越好，但其值並沒有特別的參考意義，因此也計算驗證數據在訓練過程的正確率(Accuracy, ACC)，也就是完全預測正確



的機率，其可由混淆矩陣(Confusion Matrix)之斜對角相加除以所有元素的總和進行計算(以二元分類為例)：

|              |   | Predicted class      |                      |
|--------------|---|----------------------|----------------------|
|              |   | P                    | N                    |
| Actual Class | P | True Positives (TP)  | False Negatives (FN) |
|              | N | False Positives (FP) | True Negatives (TN)  |

$$ACC = \frac{TP + TN}{TP + TN + FP + FN} \quad (5-34)$$

其中  $P$  與  $N$  分別為正事件與反事件。 $ACC$  越接近 1 代表預測的正確率越高，當  $ACC = 1$  即表示模型完全預測正確，驗證數據  $ACC$  的收斂狀況如圖 5-38，從圖中可以發現在第一輪結束後即達完美預測，由於輸入的訓練樣本數量很多，因此不需很高的輪數，模型即完整收斂。

最後以模型從未看過的數據(測試數據)，檢驗模型最終的效能，測試樣本總數為 4960，所有測試樣本之 CrossEntropy 損失為  $1.87 \times 10^{-8}$ 、 $ACC$  為 1(所有的樣本皆預測正確)，在此截取前 10 個樣本預測與真實的結果，如圖 5-39，圖像為測試數據的樣本，上方之文字為模型預測的模態類型，可以觀察到模型皆預測正確。

然而如編號 1 (Lateral)與 3 (Longitudinal)這種面內模態，觀察  $U_3$  方向的面外位移振形實際的應用效益可能不大，以 DPM 的實驗量測方式，可能只能分辨彎曲或扭轉模態，目前較大的價值除非在有大量面外模態需進行分類的情況，而在本研究當中更重要的目的為提供一個可以透過模擬軟體進行深度學習模型訓練的方法。

| Layer (type)          | Output Shape       | Param #  |
|-----------------------|--------------------|----------|
| conv_1 (Conv2D)       | (None, 40, 80, 32) | 2432     |
| pool_1 (MaxPooling2D) | (None, 20, 40, 32) | 0        |
| conv_2 (Conv2D)       | (None, 20, 40, 64) | 51264    |
| pool_2 (MaxPooling2D) | (None, 10, 20, 64) | 0        |
| flatten (Flatten)     | (None, 12800)      | 0        |
| fc_1 (Dense)          | (None, 1024)       | 13108224 |
| dropout (Dropout)     | (None, 1024)       | 0        |
| fc_2 (Dense)          | (None, 4)          | 4100     |

=====  
 Total params: 13,166,020  
 Trainable params: 13,166,020  
 Non-trainable params: 0

圖 5-36 CNN 架構模型各層加權參數數量

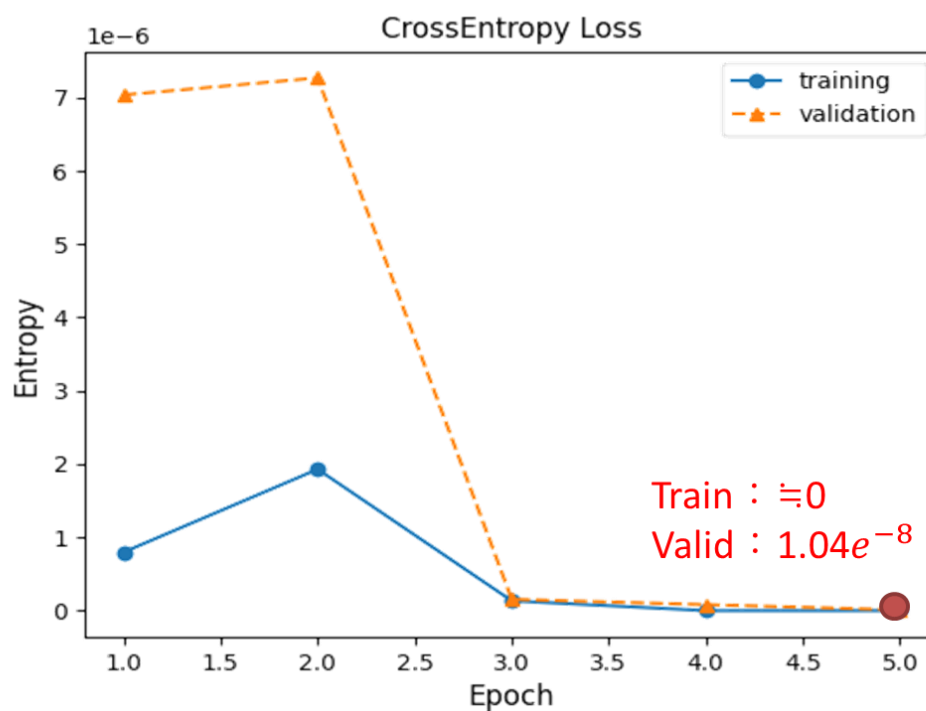


圖 5-37 CNN 模型訓練之學習曲線

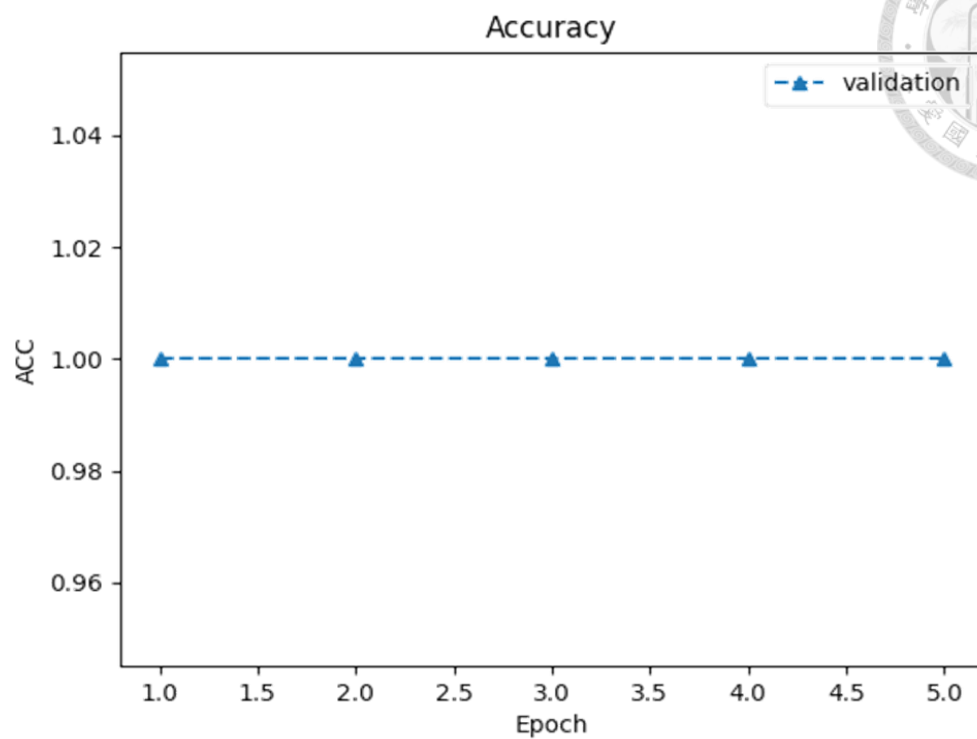
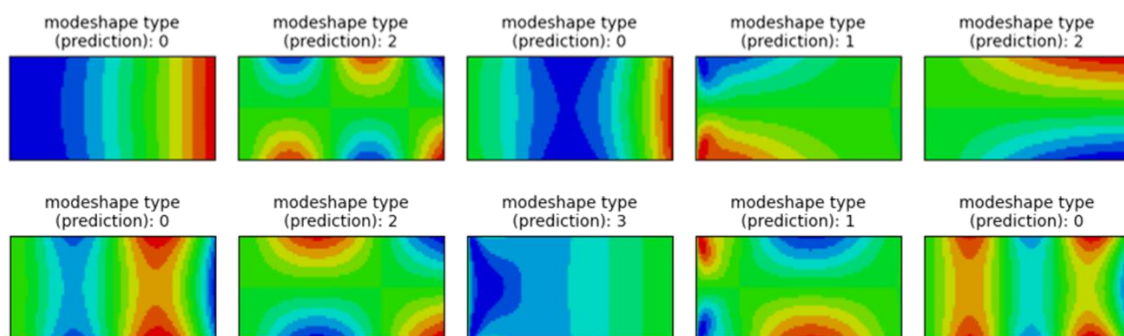


圖 5-38 CNN 模型訓練時驗證數據 ACC 收斂結果



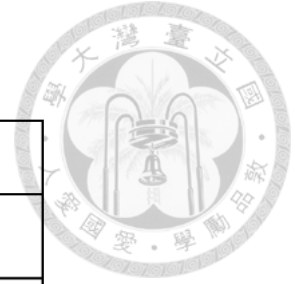
0 : Bending 1 : Lateral 2 Torsional 3 : Longitudinal

圖 5-39 CNN 模型前 10 個測試數據預測結果



表 5-11 CNN 架構模型參數設定

| <b>Symbol</b> | <b>value</b> |
|---------------|--------------|
| BATCH_SIZE    | 64           |
| Optimizer     | Adam         |
| learning_rate | 0.0001       |
| loss_function | CrossEntropy |





## 5.6 小結

本章首先介紹機器學習與深度學習之概念和機制，接著透過 ABAQUS 的 Python 腳本生成共振頻率，並利用集群演算法(k-means)嘗試進行模態類型的分群與標注類別，透過預設的參與因子輸出，可以將模態類型分為 4 群。再來進行資料的預處理，並以隨機森林演算法透過特徵重要性的分析進行特徵選擇，篩選出一個方向的試片至多能夠反算 4 個材料常數。

將模態類型與共振頻率作為輸入，利用遞迴神經網路進行訓練，能夠得到高度擬合反算材料常數的模型( $R^2=0.98$ )，接著本章透過移除掉  $E_2/E_1$  比例較高之樣本，驗證了當特定材料參數之主導模態如未出現，將使這個材料參數的影響性過低，進而無法很好的反算該常數，然而目前只有使用訊息檔中的預設資訊，能夠判斷其為彎曲模態，但無法判斷其作用在哪個方向，要避免掉前述的問題或改善模型效能，除了選用更多的共振資訊之外，在模態分群與標注上如能探討的更詳細，例如能夠判斷為第幾個彎曲模態、哪個方向的彎曲模態...等，模型的效能理當會有所提升。值得一提的是，這邊材料常數(例如  $E_1$ )的下標 1 指的是沿著長度方向，2 指的是沿著寬度方向，12 則為平面方向，其並沒有限定是哪個特定的方向(例如 x 方向-xy 平面)，因此在理想上有 3 個方向試片的共振資訊，只需要訓練一個模型，即可反算所有的材料常數，但目前在實務上較不可行，由於在生成共振頻率的設定上為固定試片的尺寸與密度，3D 列印試片的尺寸是可以控制的、密度可能也差不多，還在可接受的範圍然而我們無法保證每個要進行材料常數反算的試片，其尺寸與密度皆相同。

最後以卷積神經網路架構，一樣透過 ABAQUS 的 Python 腳本得到各模態的面外振形圖，並結合模態類型分群與標注類別的結果，能夠建構可以完美分類 4 種模態的模態影像分類模型。



## 5.7 與基因遺傳演算法之比較

就相同超參數之演算法的角度來看，GA 能夠涵蓋的問題範圍較廣，通常只需調整族群大小以及變更適應函數，其尋求的是更廣泛性問題的通解，根據 NFL 定理(No Free Lunch Theorems)[59][60]，所有演算法在處理任何問題之最佳程度是相同的，如圖 5-40 所示，縱軸為演算法最佳的程度(包含時間與結果的最佳)，橫軸為所有要解決的問題，某些演算法在解決特定的問題上能夠又快又好，然而相對地其在解決大部分的問題時會表現的很差，而 GA 較類似於圖中綠色的線，對於一些太困難的問題未必能夠得到很好的解，對於太簡單的問題其在運算時間上並沒有優勢，但對於大部分的問題，它都能夠有相對好的表現，而對於 ML 與 DL 來說，雖然較複雜的 DL 模型能夠解決較廣領域的問題，但通常要調整的超參數較多。但就模型的擴展性而言，GA 要解決更困難的問題較不容易改變其複雜度，通常需導入更高階的算法或概念，尤其在 SGA 當中，可以穩定收斂的維度大約在 5 個維度，而在 ML 尤其於 DL，改變神經網路的深度與神經元數量，即可增加模型的複雜度，且透過程式的套件在 GPU 上運行，能夠有很快的演算速度。

GA 在模型收斂的過程是較具邏輯性的，簡單來說其從一開始隨機生成的個體中，透過選擇、交叉與突變的機制慢慢收斂至一組有最佳表現的個體，而在 ML 尤其於 DL，對於模型預測的結果，通常需有較深厚的領域知識，才能有較佳的解釋性。在本研究當中，不管在 GA 或是 DL 的演算法中皆存在模態類型判斷的問題，都能夠進一步再做更深入的探討，在 GA 當中如果出現常數錯位的問題(以全自由的正方形平板振動為例， $E_1$  與  $E_2$  可能會相反)，可以透過設定常數條件解決，例如  $E_1$  必須大於  $E_2$ ，而於 DL 中，以 LSTM-RNN 進行材料常數的反算，如沒有提供模態類型資訊大概只能得到  $R^2=0.92\sim0.95$  的模型效能，提供更多的共振頻率或更詳細的模態類型資訊，方能使模型效能提升。

總結來說，兩種方法皆有其不同的特性以及優缺點，但在正交性材料常數反算的問題當中，GA 結合 Timoshenko 厚梁理論、薄板假設搭配疊加法，以及 LSTM-

RNN 透過模擬的結果作為訓練樣本，都能夠得到很好的材料常數反算結果。

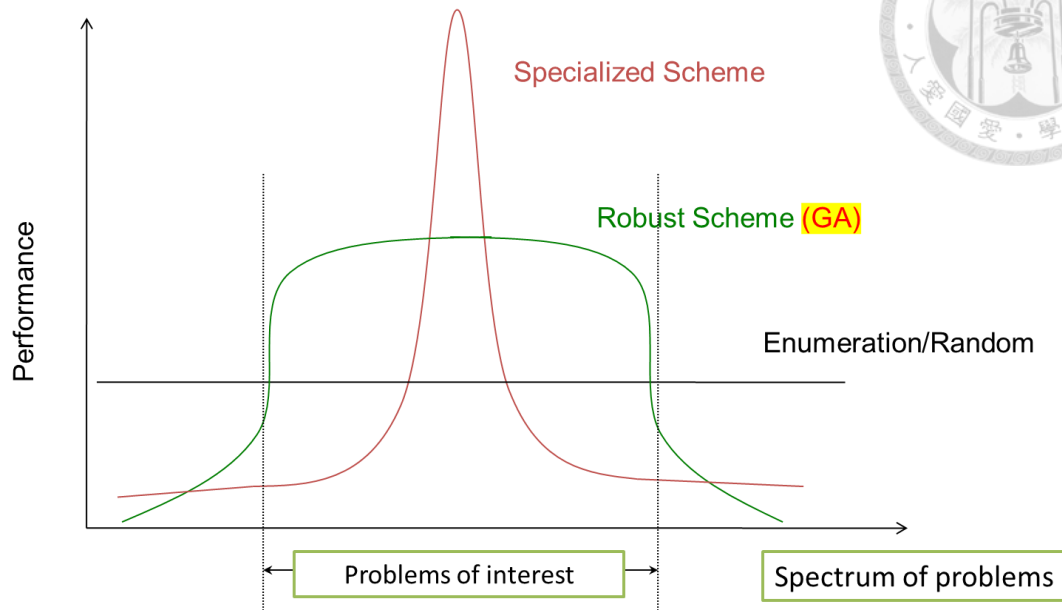


圖 5-40 NFL 定理

## 第六章 結論與未來展望



本論文主要探討正交性材料常數反算之方法，根據試片與假設條件可以分為直接透過理論進行反算、理論結合基因遺傳演算法以及模擬搭配機器學習和深度學習方法進行反算，其中包含理論、實驗、模擬與演算法的內容，於第三章與第四章透過實驗與模擬來探討理論的適用性以及反算結果之準確性，第五章則運用機器學習方法來驗證模型的效能，本章將完整總結與歸納本研究之結果，並提出此研究題目未來可能的方向。

### 6.1 本文成果

依照章節的順序，本研究有以下成果與結論：

1. 對於長梁結構，利用歐拉-白努利梁彎曲與扭轉模態共振頻率理論進行材料常數反算，進行 3 個方向的試片量測，能夠直接準確得到各個方向的楊氏模量與剪切模量，但無法直接得到蒲松比，需透過等效為等向性材料的方式進行計算。在本研究當中確立了透過鋼珠落擊實驗進行正交性材料常數反算以及模擬的方法。
2. 歐拉-白努利梁理論具有尺寸限制，透過共振頻率的實驗，交叉比較理論與實驗以及理論與模擬的結果，寬厚比的下限大約為 4、長寬比的下界也大約在 4 左右，而長厚比在長扁梁的結構下，影響較不顯著。如超過寬厚比的極限，主要影響彎曲與扭轉模態頻率的誤差，而超過長寬比的極限則主要影響扭轉模態理論的適用性。也就是說在超過試片尺寸的臨界比例後，無法很好透過原來的方式進行材料常數的反算。
3. 就鋼珠落擊實驗方法本身，短厚梁的結構尤其於短梁，試片振動的頻率很高、能量消滅快速，不容易量測到夠多的共振頻率以驗證反算的準確性。
4. 本研究導入鐵木辛柯梁彎曲模態共振頻率理論，並透過模擬的方式選用梁理論當中的切變係數，以 2001 年 Hutchinson 等人所提出之結果，在大多之蒲松比



範圍內，理論與模擬間有很好的對應性。

5. 在長厚梁的結構下，將鐵木辛柯梁共振頻率理論代入至基因遺傳演算法(GA)當中做為適應函數的計算，用一組測試用的材料參數並以理論生成實驗數據進行 GA 機制與參數的選用，實際測試 GA 能夠得到與測試用的材料參數近乎相同的結果，確立了以厚梁理論搭配 GA 進行材料常數反算的演算法設定是沒有問題的。實際透過共振頻率實驗進行材料常數的反算，由於一次只能反算 2 個材料常數，因此總共需要進行 6 個方向試片的量測，並假設相同平面之試片有相同的剪切模量，透過正交性材料的對稱性，即可計算出所有的材料常數。以鐵木辛柯梁理論搭配 GA，僅透過彎曲模態的共振頻率，能夠得到與原(歐拉-白努利梁)方法接近的結果，並再次驗證了 3D 列印試片的正交性質。
6. 以正交性薄板假設搭配疊加法，進行單邊固定懸臂板之面外振動位移解析，所求得之模態振形與共振頻率皆與模擬有很好的對應性，確立理論推導的正確性，且透過觀察厚度方向變化的理論與模擬的一致性，薄板假設的寬厚比下限大約為 20。
7. 在薄板的結構下，將疊加法共振頻率的結果代入至基因遺傳演算法(GA)當中做為適應函數的計算，一樣用一組測試用的材料參數並以理論生成實驗數據進行 GA 機制與參數的確立，實際測試 GA 能夠得到與測試用的材料參數近乎相同的結果，因此以疊加法理論搭配 GA 進行材料常數反算的演算法設定也是沒有問題的。實際透過共振頻率實驗進行材料常數的反算，只需進行 3 個方向試片的量測，即可得到所有的材料常數。其中由於演算法中並沒有模態類型判斷的機制，因此須將反算的材料常數代入理論生成模態振形，並與 DPM 或 ESPI 的結果進行比較。而在實驗上實驗、理論與模擬在模態振形與共振頻率都有很好的對應性，因此以疊加法理論搭配 GA，能夠反算出精確的材料常數。
8. 以 ABAQUS 的 Python 腳本，於所設定之懸臂厚板條件所生成共振頻率的資訊檔，利用預設的參與因子表，在低頻的模態透過群集演算法(k-means)可以將模

態分為 4 群，觀察模擬結果檔之模態振形，可以進行標注為彎曲、側向、扭轉與拉伸模態。

9. 利用隨機森林演算法之重要性分析，可以觀察一個方向的試片大約只能反算 4 個材料常數。將前 10 個模態類型與共振頻率經過前處理後作為 LSTM-RNN 模型的輸入，輸出為 4 個材料常數，經過訓練後以測試樣本檢驗模型的效能，大約可以得到  $R^2=0.98$  之高度擬合的材料常數反算模型。而在此部分，本研究之價值在於把模擬的結果輸入至機器學習與深度學習演算法當中去進行訓練，意即輸入、輸出與模型的結構可以是任意條件的，可以說在實務上只要確立兩件事情，即可透過實驗結合機器學習或深度學習方法，進行最佳化的求解：a. 確定實驗跟模擬之間有一定的對應性。b. 確定要進行反算的物理量，必須要能反應在輸入的物理量當中，以本研究進行材料常數反算的問題為例，正交性材料總共有 9 個常數，但一個特定方向在一定的頻率範圍內可能只有 4 個材料常數會大部分的影響共振頻率，因此一次至多只能反算 4 個材料常數；又或者在選定之頻率範圍內，如未出現特定材料常數之代表性模態，例如  $E_2 \rightarrow 2$  方向的彎曲模態，則將不易進行該常數之反算。
10. 將模擬結果之模態振形圖作為輸入，結合群集演算法分群後進行標注之結果作為輸出，以 CNN 模型架構進行訓練，可以建立能夠完全預測正確之影像模態分類模型。

綜合以上，以探討不同結構適用之材料常數反算方法為目的，於長扁梁的結構，可以直接透過歐拉-白努利梁彎曲與扭轉理論進行反算，如為長厚梁或薄板結構，則可以利用基因遺傳演算法結合厚梁或薄板理論進行反算，而如為任意外形或條件，則可透過模擬的結果結合機器學習或深度學習方法，進行最佳化的求解。



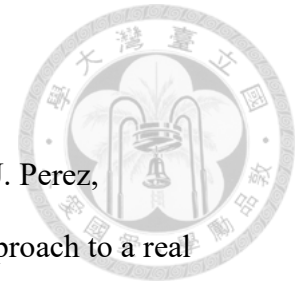
## 6.2 未來展望

綜合本研究之結果與過程當中所遇之可能的問題，在此提供可改進的可能性以及本研究題目之未來方向：

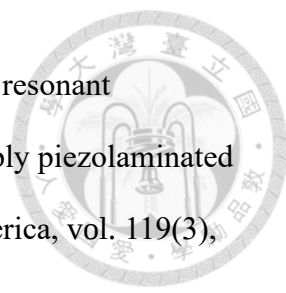
1. 在本研究當中所使用之共振頻率量測方法，不易對短梁進行材料常數的反算，未來可能可以透過梁之靜態位移理論搭配數位影像相關法 (Digital Image Correlation, DIC) 之相關實驗，能夠在短梁的結構也能進行材料常數的反算，並直接求得蒲松比，或在長梁結構補足直接利用歐拉-白努利梁理論進行材料常數反算無法求得蒲松比的缺陷。
2. 推導厚板理論並結合基因遺傳演算法，使得在厚板的結構下，也能進行材料常數的反算。
3. 將模擬的結果作為機器學習或深度學習模型的樣本時，在模擬上可能可以輸出更多的資訊或可以作為判斷模態類型的物理量以增加材料常數反算模型的效能。也可以導入影像分群技術，透過 CNN 的架構結合集群演算法，達成更細緻的模態分群與類別標注，例如能夠分辨為第幾個彎曲模態或作用在哪個方向的彎曲模態...等，除了能夠優化材料常數反算模型之外，也能找出不適用進行反算的樣本(例如缺少 2 方向的彎曲模態)，又或者結合建構影像分類的神經網路搭配即時量測系統，即時得到模態類型，以進一步進行不同的操作。
4. 實際以共振頻率實驗的方式驗證本研究之機器學習與深度學習正交性材料常數反算的可行性。

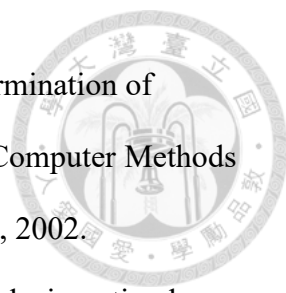


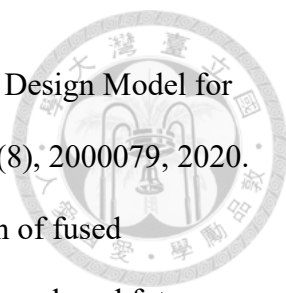
## 參考文獻

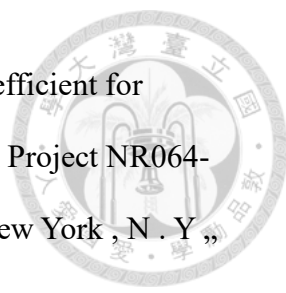


- [1] Martinez, J., J. Dieguez, E. Ares, A. Pereira, P. Hernandez, and J. Perez, Comparative between FEM models for FDM parts and their approach to a real mechanical behaviour. *Procedia Engineering*, 2013. 63: p. 878-884.
- [2] Domingo-Espin, M., J.M. Puigoriol-Forcada, A.-A. Garcia-Granada, J. Luma, S. Borros, and G. Reyes, Mechanical property characterization and simulation of fused deposition modeling Polycarbonate parts. *Materials & Design*, 2015. 83: p. 670-677.
- [3] 黃榮泰，積層製造材料與噴頭壓電陶瓷之異向性力學材料常數量測。國立臺灣科技大學機械工程系碩士論文，104 年 6 月。
- [4] Yao, T., H. Ouyang, S. Dai, Z. Deng, and K. Zhang, Effects of manufacturing micro-structure on vibration of FFF 3D printing plates: material characterization, numerical analysis and experimental study. *Composite Structures*, 2021: p. 113970.
- [5] 林均憶，積層製造之材料量測應用於功能性梯度材料與埋入式感測。國立臺灣大學工學院機械工程所碩士論文，110 年 6 月。
- [6] Leissa A. W., *Vibration of plates*, NASA SP-160, 1969.
- [7] Leissa A. W., The free vibration of rectangular plates, *Journal of Sound and Vibration*, 31(3), pp. 257-293, 1973.
- [8] Gorman D. J., Free vibration analysis of cantilever plates by the method of superposition, *Journal of Sound and Vibration*, 49(4), pp. 453-467, 1976.
- [9] Dickinson, S. M., The buckling and frequency of flexural vibration of rectangular isotropic and orthotropic plates using Rayleigh's method, *Journal of Sound and Vibration*, 61(1), pp. 1-8, 1978.
- [10] 吳亦莊，「理論解析與實驗量測壓電平板的面外振動及特性探討」，國立臺灣大學工學院機械工程所碩士論文，98 年 7 月。

- 
- [11] C. C. Ma, et al., “Experimental and numerical investigations on resonant characteristics of a single-layer piezoceramic plate and a cross-ply piezolaminated composite plate.”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 119(3), pp. 1476-1486, 2006.
- [12] 黃至偉, 「壓電陶瓷雙晶片於雙邊固定邊界之能量擷取及雷射都卜勒自動化陣列式量測模組」, 國立臺灣科技大學機械工程所碩士論文, 2014。
- [13] J. Butters, J. Leendertz, “Speckle pattern and holographic techniques in engineering metrology.”, *Optics Laser Technology*, vol. 3(1), pp. 26-30, 1971.
- [14] O. Lokberg, K. Hogmoen, “Use of modulated reference wave in electronic speckle pattern interferometry.”, *Journal of Physics E: Scientific Instruments*, vol. 9(10) pp. 847, 1976.
- [15] C. Wykes, “Use of electronic speckle pattern interferometry (ESPI) in the measurement of static and dynamic surface displacements.”, *Optical Engineering*, 21(3), pp. 213400, 1982.
- [16] W. C. Wang, C. H. Hwang, S. Y. Lin, “Vibration measurement by the time-averaged electronic speckle pattern interferometry methods.”, *Applied optics*, vol. 35(22), pp. 4502-4509. 1996.
- [17] 黃育熙, 「壓電石英晶體之平板結構的動態特性研究」, 國立台灣大學機械工程研究所博士論文, 2013。
- [18] Holland, J. H., *Adaptation in natural and artificial systems: An introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*, U Michigan Press, Ann Arbor, 1975.
- [19] Holland, M.A., Liu, Z.K. (2001). *Calibrating Spring Constants in Mechanical Tests via Genetic Algorithms*. *Acta Materialia*, 49(10), 1867-1876.

- 
- [20] Liu G. R., Ma X.B. and Haan X., An inverse procedure for determination of material constants of composite laminates using elastic waves, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(33), pp. 3543-3554, 2002.
- [21] Roseiro L. and Urbano R., Genetic algorithms and neural networks in optimal location of piezoelectric actuators and identification of mechanical properties, *WSEAS Transactions on System*, 5(12), pp. 2911-2916, 2006.
- [22] Panda, S., Sahoo, N.C., Biswal, B.B.. Estimation of Material Constants in Thermoelasticity using Genetic Algorithms. *Journal of Thermoelasticity*, 4(1), 1-8, 2016.
- [23] Gao, Y., Liu, Y., Zhang, Y.. Inverse Determination of Material Constants in Porous Materials using Genetic Algorithms. *Materials & Design*, 185, 108218, 2020.
- [24] Xue, D., et al. . Accelerated search for materials with targeted properties by adaptive design. *Nature Communications*, 7, 11241, 2016.
- [25] Liu, R., Jiang, C., et al.. A Deep Learning Approach for Detecting Unknown Materials through Optimal Spectrum Fitting. *Scientific Reports*, 8, 14542, 2018.
- [26] Roslyakova, I., et al.. Machine Learning Predicts the Functional Composition of the Protein Corona and the Cellular Recognition of Nanoparticles. *ACS nano*, 13(2), 2229-2237, 2019.
- [27] Zhang, Y., Ling, C., et al.. A Deep Learning Approach to Digitally Stain Optical Coherence Tomography Images of the Optic Nerve Head. *Investigative Ophthalmology & Visual Science*, 60(2), 524-533, 2019.
- [28] Rajan, A. C., et al.. Machine learning directed search for ultraincompressible, superhard materials. *Journal of the American Chemical Society*, 142(31), 13573-13581, 2020.

- 
- [29] Jha, D., Varschney, A., Liang, T.. Deep Learning–Based Inverse Design Model for Intelligent Material Discovery. *Advanced Intelligent Systems*, 2(8), 2000079, 2020.
- [30] Mohamed, O.A., S.H. Masood, and J.L. Bhowmik, Optimization of fused deposition modeling process parameters: a review of current research and future prospects. *Advances in Manufacturing*, 2015. 3(1): p. 42-53.
- [31] Herbert Reismann and Peter S. Pawlik, *Elasticity: Theory and Applications*, John Wiley & Sons.
- [32] Ma, C. C., Y. H. Huang and S. Y. Pan, Investiation of the transient behavior of a cantilever beam using PVDF sensors. *Sensors*, 2012. 12(2): p. 2088-2117.
- [33] Kenneth A. DeJong, *An Analysis of the Behavior of a Class of Genetic Adaptive Systems*, 1975.
- [34] David E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, 1989.
- [35] Eshelman, Caruana, & Schaffer (1989). Biases in the crossover landscape.
- [36] T. C. HUANG, The Effect of Rotatory Inertia and of Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams With Simple End Conditions, *Journal of Applied Mechanics*, p. 579-584, 1961.
- [37] S. P. Timoshenko, "Vibration Problems in Engineering," third edition, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, N. Y., 1955, pp. 329-331.
- [38] S. P. Timoshenko, *Strength of Materials—Part 1*, second edition, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, N. Y., 1940, pp. 170-171.
- [39] L. E. Goodman and J. G. Sutherland, discussion of paper, "Natural Frequencies of Continuous Beams of Uniform Span Length," by R. S. Ayre and L. S. Jacobsen, *JOURNAL OF APPLIED MECHANICS*, vol. 18, *TRANS. ASME*, vol. 73, 1951, pp. 217-218.

- 
- [40] R . D . Mindlin and H . Deresiewicz , "Timoshenko' s Shear Coefficient for Flexural Vibrations of Beams," Technical Report No . 10, ON R Project NR064-388 , Department of Civil Engineering, Columbia University, New York , N . Y ,, 1953.
- [41] G. R. COWPER, The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory, Journal of Applied Mechanics, p.335-340, 1966.
- [42] Kaneko, T., 1975, “On Timoshenko’s Correction for Shear in Vibrating Beams,” J. Phys. D 8, pp. 1927–1936.
- [43] J. R. Hutchinson, Shear Coefficients for Timoshenko Beam Theory, Journal of Applied Mechanics, Vol. 68, p. 87-92, 2001.
- [44] Love, A. E. H., 1944, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover, New York.
- [45] "N700 series Shinkansen." Wikipedia, The Free Encyclopedia. 24 May 2023. Accessed 13 June 2023. [https://en.wikipedia.org/wiki/N700\\_Series\\_Shinkansen](https://en.wikipedia.org/wiki/N700_Series_Shinkansen)
- [46] D. E. Rumelhart, G. E. Hinton, and R. J. Williams, Learning representations by back-propagating errors, Nature, 323: 6088, p. 533-536, 1986.
- [47] D. Arthur and S. Vassilvitskii, k-means++: The Advantages of Careful Seeding, ACM-SIAM, p.1027-1035, 2007.
- [48] Andrej Karpathy, The Unreasonable Effectiveness of Recurrent Neural Networks, 2015.
- [49] Paul Werbos, Backpropagation Through Time: What It Does and How to Do It, Proceedings of IEEE, 78(10): 1550-1560, 1990.
- [50] R. Pascanu, T. Mikolov, Y. Bengio, On the difficulty of training recurrent neural networks, 2012.
- [51] S. Hochreiter and J. Schmidhuber, “Long Short-Term Memory,” Neural

- Computation, 9(8): 1735-1780, 1997.
- [52] Junyoung Chung, “Expirical Evaluation of Gated Recurrent Neural Networks on Sequence Modeling,”, 2014.
- [53] F. Gers, J. Schmidhuber and F. Cummins, “Learning to Forget: Continual Prediction with LSTM,” Neural Computation, 12: 2451-2471, 2000.
- [54] Allen Tzeng. (2019). Adagrad、RMSprop、Momentum and Adam-特殊的學習率調整方式. <https://hackmd.io/@allen108108/H114zqtp4>
- [55] Diederik P. Kingma, and Jimmy Lei Ba, Adam: A Method for Stochastic Optimization, 2014.
- [56] Xavier Glorot and Yoshua Benghio, Understanding the difficulty of deep feedforward neural networks, 2010.
- [57] Andrew Lavin, and Scott Gray, Fast Algorithms for Convolutional Neural Networks, 2015.
- [58] N. Srivastava, G. Hinton, A. Krizhevsky, I Sutskever, and R. Salakhutdinov, Dropout: a simple way to prevent neural networks from overfitting, Journal of Machine Learning Research 15.1, p. 1929-1958, 2014.
- [59] D.H. Wolpert, The Lack of A Priori Distinctions Between Learning Algorithms, 1996.
- [60] D.H. Wolpert and W.G. Macready, No Free Lunch Theorems for Optimization, 1997.



## 附錄



### A. 3D 列印機詳細規格

|                                |                                                |                                                        |
|--------------------------------|------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| <b>Properties</b>              | Technology                                     | Fused filament fabrication (FFF)                       |
|                                | Print head                                     | Single extrusion print head with swappable nozzles     |
|                                | Build volume (XYZ)                             | 223 x 220 x 205 mm (8.7 x 8.6 x 8 in)                  |
|                                | Nozzle diameter                                | 0.4 mm (included)                                      |
|                                |                                                | 0.25 mm, 0.6 mm, 0.8 mm (sold separately)              |
|                                | Layer resolution                               | 0.25 mm nozzle: 150 - 60 micron                        |
|                                |                                                | 0.4 mm nozzle: 200 - 20 micron                         |
|                                |                                                | 0.6 mm nozzle: 300 - 20 micron                         |
|                                |                                                | 0.8 mm nozzle: 600 - 20 micron                         |
|                                | XYZ resolution                                 | 12.5, 12.5, 2.5 micron                                 |
|                                | Nozzle temperature                             | 180 - 260 °C (350 - 500 °F)                            |
|                                | Build speed                                    | < 24 mm <sup>3</sup> /s                                |
|                                | Build plate                                    | Heated glass build plate                               |
|                                | Build plate temperature                        | 20 - 110 °C (60 - 230 °F)                              |
|                                | Operating sound                                | < 50 dBA                                               |
|                                | Connectivity                                   | Wi-Fi, Ethernet, USB port                              |
| <b>Physical dimensions</b>     | Dimensions (with Bowden tube and spool holder) | 342 x 460 x 580 (13.5 x 18.1 x 22.8 in)                |
|                                | Net weight                                     | 10.3 kg (22.7 lbs)                                     |
| <b>Ambient conditions</b>      | Operating ambient temperature                  | 15 - 32 °C (32 - 90 °F)                                |
|                                | Non - operating (storage) temperature          | 0 - 32 °C (32 - 90 °F)                                 |
|                                | Relative humidity                              | 10 - 90% RH non-condensing                             |
| <b>Air Manager</b>             | Filter technology                              | EPA filter                                             |
|                                | Filter efficiency                              | Up to 95% of UFPs                                      |
|                                | Filter replacement                             | Recommended every 1,500 print hours (approx. 1 year)   |
|                                | Front enclosure                                | Separate front enclosure included with the Air Manager |
| <b>Electrical requirements</b> | Voltage                                        | 100 - 240 V AC                                         |
|                                | Frequency                                      | 50 - 60 Hz                                             |
|                                | Power                                          | Max. 221 W                                             |
| <b>Software</b>                | Ultimaker Cura                                 | Our free print preparation software                    |
|                                | Ultimaker Digital Factory                      | Our online printer and print job management solution   |
|                                | Supported OS                                   | Windows, MacOS, Linux                                  |
| <b>Warranty</b>                | Warranty period                                | 12 months                                              |