

國立臺灣大學工學院機械工程學系

博士論文

Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Taiwan University

Doctoral Dissertation

彈性波於多層域均質與非均質材料之暫態波傳理論解

析與數值計算

Theoretical Analysis and Numerical Simulation of
Transient Wave in Homogeneous and Nonhomogeneous
Multilayered Media

林宜賢

Yi-Hsien Lin

指導教授：馬劍清 博士

Advisor: Chien-Ching Ma, Ph.D.

中華民國 100 年 7 月

July, 2011

國立臺灣大學博士學位論文
口試委員會審定書

彈性波於多層域均質與非均質材料之暫態波傳
理論解析與數值計算

Theoretical Analysis and Numerical Simulation of
Transient Wave in Homogeneous and
Nonhomogeneous Multilayered Media

本論文係林宜賢君（學號：D94522024）在國立臺灣大
學機械工程學系完成之博士學位論文，於民國 100 年 7 月 27
日承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明

口試委員：

馬劍清（指導教授）

馬劍清

（簽名）

趙振綱

趙振綱

楊旭光

楊旭光

劉紹文

劉紹文

應宜雄

應宜雄

系主任

張所鎡

張所鎡

（簽名）

誌謝

得之於人者太多，出之於己者太少，本論文得以完成，絕非一己之功勞，在此要感謝週遭所有師長的提攜及朋友的幫忙。首先感謝指導教授馬劍清老師，其嚴謹的治學態度和待人處世實為學生之標竿。另外，承蒙淡江大學應宜雄老師長期照顧，讓學生內心深以淡江人為榮，中山大學楊旭光老師奠定學生波傳實驗的基石，亦萬分感激。此外台灣科技大學趙振綱老師和亞太創意學院劉紹文校長對研究的不吝指正，使本論文得以趨於完備。

從淡江、中山到台大，在人生最黃金的時刻選擇直攻博士學位，實有許多感觸。如果沒有父母和妻子美君的體諒和援助，要獨力完成博士學位十分困難，感謝你們能讓我無後顧之憂地做我喜歡的研究。感謝破壞實驗室曾經相處的學長姐和學弟妹，不論相處時間是長是短，相逢自是有緣。學長熙洪、瑞木、國志、育熙，學姊采如，學弟志明、柏睿、耀中、敬源、正言、偉勝、椿億、恆增、政緯、康哲、展誼、亦莊、兆祥、鈞凱、榮樺、鴻嶽、奇儒、俊耀、國舜，學妹依姿、善盈、于琪、宇欣、雅方，是學長、同學，也是學弟的世皓不知如何稱呼較好？灑墨於此，又徒增許多感慨。

而立之年有捨有得，取得博士學位正是學術研究的開始，對於許多師長的提攜，學生永銘於心。

林宜賢 謹誌

中華民國一〇〇年七月

摘要

當一均佈動力載荷施加於均質或非均質層狀介質的表面時，本文以拉普拉斯轉換技巧，分析其域內的一維暫態波傳問題。對於均質多層域的暫態響應，採用三種不同的分析及數值計算方式：廣義射線法，Durbin 數值拉普拉斯逆轉換以及有限元素法。由矩陣形式 Bromwich 展開所組成的廣義射線解為一精確解，展開後級數的每一項代表經過界面相同次數的穿透或反射波。若不執行級數展開，將轉換域下的矩陣解直接採用 Durbin 數值逆轉換，所得之結果為一混合解析與數值解，適合計算層狀介質的長時間暫態響應。有限元素解則為一純數值解，可以多點計算並快速分析複雜結構物的暫態響應，但對於高頻或是急遽變化的響應則會出現震盪形式的數值誤差，三種數值計算的結果皆有良好的驗證。

而關於非均質材料的暫態問題，則是使用拉普拉斯轉換技巧配合數值逆轉換的混合解析與數值解，首先探討多項式函數形式的功能性梯度單層域，在雙邊自由與單邊固定的邊界條件，於表面受動力載荷下的應力波傳分析，而與多層均質材料模擬單層功能性梯度板的暫態響應，亦有良好的一致性。本文進一步分析層狀功能性梯度材料，討論其域內的暫態彈性波傳，在數值計算上，則以三層功能性梯度材料為例，將其退化為廣泛應用的雙層相異質材料夾功能性梯度材料之暫態問題，並研究其單邊與雙邊的不連續情況對於暫態響應之影響。

隨機、週期與連續分佈型三種類型的多層均質材料在本文亦有深入研究。文中並以複合材料力學的等效材料方式進行化簡，分析多層域暫態響應並探討等效材料在暫態波傳分析的適用性。

關鍵字：功能性梯度材料、廣義射線法、Durbin、FEM、暫態響應、多層域

Abstract

In this study, one-dimensional transient wave-propagation in homogeneously and inhomogeneously multilayered media are analyzed by Laplace transform technique. The numerical calculations for homogeneously multilayered media are performed by three methods: generalized ray method, numerical Laplace inversion method (Durbin's formula), and finite element method (FEM). The analytical result of generalized ray solution for multilayered structures is composed of matrix-form Bromwich expansion in the transform domain. Every term represents a group of waves which is transmitted or reflected through the interface. The numerical inversion of Laplace transform by Durbin's formula is also used to calculate the transient responses. This numerical Laplace inversion technique has the advantage of calculating the long-time transient responses for complicated multilayered structures. FEM result also agrees well with the calculations by generalized ray method and numerical Laplace inversion.

For the transient-wave problem of inhomogeneously multilayered media, we use Laplace transform technique and the numerical Laplace inversion (Durbin's formula) to calculate the dynamic behavior of the polynomial FGM (functionally graded material) slab. In addition, the FGM slab is approximated as a multilayered medium with homogeneous material in each layer. The transient responses of FGM formulation and multilayered solution are discussed in detail. Furthermore, transient-wave in inhomogeneously multilayered media is analyzed. In the numerical calculation, three-layered functionally graded media is used for analysis and the degenerative problem of an FGM bounded to two elastic homogeneous materials is discussed.

Finally, the numerical calculations of the transient responses for randomly distributed, periodically distributed, and continuously distributed multilayered media are performed to investigate if the effective material concept is suitable for dynamic analysis.

Key Words: FGM, generalized ray, Durbin, FEM, transient response, multilayered media

目錄

摘要.....	I
Abstract.....	II
目錄.....	III
圖目錄.....	V
表目錄.....	XI
第一章 緒論.....	1
1-1 研究動機.....	1
1-2 文獻回顧.....	1
1-3 本文研究方法與主要內容.....	5
第二章 廣義射線理論.....	7
2-1 雙層相異質材料的廣義射線理論.....	7
2-2 雙層相異質材料的數值計算與結果討論.....	16
2-2-1 波的退化與群組.....	16
2-2-2 黃銅-鋁雙層材料於不同組合下之暫態響應分析.....	18
第三章 均佈動力載荷施載於多層域等向性均質材料的暫態波傳解析.....	28
3-1 廣義射線解.....	28
3-2 數值拉普拉斯逆轉換.....	35
3-3 有限元素解.....	40
3-4 三種方法的數值結果與討論.....	41
3-4-1 三層結構物於均佈載荷下的暫態響應.....	41
3-4-2 十層結構物於均佈載荷下的暫態響應.....	43
3-4-3 二十層結構物於均佈載荷下的長時間響應.....	45
第四章 多層域等向性非均質材料的暫態波傳解析與數值計算.....	59
4-1 單層功能性梯度材料.....	59
4-1-1 拉普拉斯轉換法分析單層功能梯度材料受均佈動力載荷下的暫態響應.....	59
4-1-2 以多層等向性均質材料來模擬單層功能性梯度板的暫態波傳行為.....	67
4-2 多層域功能性梯度材料.....	70
4-2-1 三層功能性梯度材料的暫態波傳行為.....	75
4-2-2 雙層相異質材料夾功能性梯度材料的暫態波傳行為.....	77
4-2-3 三層功能性梯度材料退化為雙層相異質材料夾功能性梯度材料.....	79
4-2-4 雙層相異質材料夾功能性梯度材料的連續性探討.....	81
第五章 等效材料在多層域暫態波傳的適用性分析.....	109

5-1 多層隨機分佈型材料中的彈性波傳分析	110
5-2 多層週期分佈型材料中的彈性波傳分析	111
5-3 多層連續分佈型材料中的彈性波傳分析	113
第六章 結論與展望	133
6-1 本文成果	133
6-2 未來展望	134
參考文獻.....	135
附錄 A.....	139
附錄 B.....	140



圖目錄

圖 2-1 當一均佈動力載荷施加於雙層相異質材料上表面的結構示意圖。.....	22
圖 2-2 廣義射線法計算在 $x = -5cm$ 時，黃銅-鋁雙層材料的應力暫態響應。	22
圖 2-3 (a)~(f) 當 $i = 1$ 到 $i = 6$ 中所有可能的射線路徑。	23
圖 2-4 在無因次化時間 $t/S_L^{(1)}h_1 = 6$ 內，分解為六個群組($\mathbf{R}^0 \sim \mathbf{R}^5$)的暫態響應。	23
圖 2-5 在雙層相異質材料中經過多次穿透反射後的射線和群組數目。	24
圖 2-6 雙層相異質材料的射線群組關係圖。	24
圖 2-7 當厚度皆為 $10cm$ 的黃銅-鋁雙層相異質材料，第 1 層(黃銅)中點的應力響應圖。	25
圖 2-8 當厚度皆為 $10cm$ 的鋁-黃銅雙層相異質材料，第 1 層(鋁)中點的應力響應圖。	25
圖 2-9 當厚度皆為 $10cm$ 的黃銅-鋁雙層相異質材料，觀測點各為 $-2cm$ ， $-4cm$ 時的應力響應圖。	26
圖 2-10 第 1 層材料為 $10cm$ 黃銅，第 2 層材料為 $100cm$ 鋁，當觀測點位在第 1 層(黃銅)中點的應力響應圖。	26
圖 2-11 第 1 層材料為 $10cm$ 黃銅，第 2 層材料為 $100cm$ 鋁，當觀測點位在第 2 層中點的應力響應圖。	27
圖 2-12 第 1 層材料為 $10cm$ 黃銅，第 2 層材料為 $50cm$ 鋁，當觀測點位在 1、2 層交界處($x = -10cm$)，第 1 層響應(藍色實線)與第 2 層響應(紅色虛線)計算的結果。	27
圖 3-1 當一均佈動力載荷施加於 n 層結構物上表面的座標及結構示意圖。	47
圖 3-2 廣義射線法計算三層結構物(黃銅 $10cm$ ，鋁 $10cm$ ，黃銅 $10cm$)，當觀測點位在第 1 層材料(黃銅)中點的暫態響應圖。	47
圖 3-3 Durbin 數值逆轉換計算三層結構物(黃銅 $10cm$ ，鋁 $10cm$ ，黃銅 $10cm$)，當觀測點位在第 1 層材料(黃銅)中點的暫態響應圖。	48
圖 3-4 有限元素法計算三層結構物(黃銅 $10cm$ ，鋁 $10cm$ ，黃銅 $10cm$)，當觀測點位在第 1 層材料(黃銅)中點的暫態響應圖。	48
圖 3-5 廣義射線法計算三層結構物(黃銅 $10cm$ ，鋼 $20cm$ ，鋁 $5cm$)，當觀測點位在 $x = -2cm$ 的暫態響應圖。	49
圖 3-6 Durbin 數值逆轉換計算三層結構物(黃銅 $10cm$ ，鋼 $20cm$ ，鋁 $5cm$)，當觀測點位在 $x = -2cm$ 的暫態響應圖。	49
圖 3-7 有限元素法計算三層結構物(黃銅 $10cm$ ，鋼 $20cm$ ，鋁 $5cm$)，當觀測點位	

在 $x = -2\text{cm}$ 的暫態響應圖。.....	50
圖 3-8 廣義射線法計算三層結構物(黃銅 10cm, 鋼 20cm, 鋁 5cm), 當觀測點位在 $x = -8\text{cm}$ 的暫態響應圖。.....	50
圖 3-9 Durbin 數值逆轉換計算三層結構物(黃銅 10cm, 鋼 20cm, 鋁 5cm), 當觀測點位在 $x = -8\text{cm}$ 的暫態響應圖。.....	51
圖 3-10 有限元素法計算三層結構物(黃銅 10cm, 鋼 20cm, 鋁 5cm), 當觀測點位在 $x = -8\text{cm}$ 的暫態響應圖。.....	51
圖 3-11 廣義射線法計算三層結構物(黃銅 10cm, 鋼 5cm, 鋁 20cm), 當觀測點位在第 1 層材料(黃銅)中點的暫態響應圖。.....	52
圖 3-12 Durbin 數值逆轉換計算三層結構物(黃銅 10cm, 鋼 5cm, 鋁 20cm), 當觀測點位在第 1 層材料(黃銅)中點的暫態響應圖。.....	52
圖 3-13 有限元素法計算三層結構物(黃銅 10cm, 鋼 5cm, 鋁 20cm), 當觀測點位在第 1 層材料(黃銅)中點的暫態響應圖。.....	53
圖 3-14 廣義射線法計算三層結構物(鋁 10cm, 黃銅 5cm, 鋼 10cm), 當觀測點位在第 1 層材料(鋁)中點的暫態響應圖。.....	53
圖 3-15 Durbin 數值逆轉換計算三層結構物(鋁 10cm, 黃銅 5cm, 鋼 10cm), 當觀測點位在第 1 層材料(鋁)中點的暫態響應圖。.....	54
圖 3-16 有限元素法計算三層結構物(鋁 10cm, 黃銅 5cm, 鋼 10cm), 當觀測點位在第 1 層材料(鋁)中點的暫態響應圖。.....	54
圖 3-17 廣義射線法、Durbin 逆轉換法以及有限元素法解得 10 層介質中, 第 1 層中點的暫態響應圖。.....	55
圖 3-18 廣義射線法、Durbin 逆轉換法以及有限元素法解得 10 層介質中, 第 2 層中點的暫態響應圖。.....	55
圖 3-19 廣義射線法、Durbin 逆轉換法以及有限元素法解得 10 層介質中, 第 5 層中點的暫態響應圖。.....	56
圖 3-20 廣義射線法、Durbin 逆轉換法以及有限元素法解得 10 層介質中, 第 9 層中點的暫態響應圖。.....	56
圖 3-21 使用 Durbin 逆轉換法和 FEM, 計算 20 層材料中第 1 層材料中點的長時間響應。.....	57
圖 3-22 使用 Durbin 逆轉換法和 FEM, 計算 20 層材料中第 10 層材料中點的長時間響應。.....	57
圖 3-23 使用 Durbin 逆轉換法和 FEM, 計算 20 層材料中第 15、16 層界面處的長時間響應。.....	58
圖 3-24 使用 Durbin 逆轉換法和 FEM, 計算 20 層材料中第 19、20 層界面處的	

長時間響應。.....	58
圖 4-1 功能性梯度板的幾何結構與其邊界條件示意圖：(a)自由邊界；(b)固定邊界。.....	87
圖 4-2 Ni/ZrO ₂ 功能性梯度材料的彈性常數、密度、縱波波速、機械阻抗分佈圖。.....	87
圖 4-3 SiC/Al 功能性梯度材料的彈性常數、密度、縱波波速、機械阻抗分佈圖。.....	88
圖 4-4 在 $x=l/50$ 處，Ni/ZrO ₂ 功能性梯度材料於自由邊界下的應力響應圖 ($l=5\text{ mm}$, $t_0=0.2\ \mu\text{s}$)。.....	88
圖 4-5 在 $x=l/2$ 處，Ni/ZrO ₂ 功能性梯度材料於自由邊界下的應力響應圖 ($l=5\text{ mm}$, $t_0=0.2\ \mu\text{s}$)。.....	89
圖 4-6 在 $x=l/2$ 處，ZrO ₂ /Ni 功能性梯度材料於自由邊界下的應力響應圖 ($l=5\text{ mm}$, $t_0=0.2\ \mu\text{s}$)。.....	89
圖 4-7 在 $x=0$ 處，Ni/ZrO ₂ 功能性梯度材料於固定邊界下的應力響應圖 ($l=5\text{ mm}$, $t_0=0.2\ \mu\text{s}$)。.....	90
圖 4-8 在 $x=l/2$ 處，Ni/ZrO ₂ 功能性梯度材料於固定邊界下的應力響應圖 ($l=5\text{ mm}$, $t_0=0.2\ \mu\text{s}$)。.....	90
圖 4-9 在 $x=0$ 處，ZrO ₂ /Ni 功能性梯度材料於固定邊界下的應力響應圖 ($l=5\text{ mm}$, $t_0=0.2\ \mu\text{s}$)。.....	91
圖 4-10 在 $x=l/2$ 處，ZrO ₂ /Ni 功能性梯度材料於固定邊界下的應力響應圖 ($l=5\text{ mm}$, $t_0=0.2\ \mu\text{s}$)。.....	91
圖 4-11 在 $x=0$ 自由邊界下，觀測點位在 $x=l/2$ 時，Ni/ZrO ₂ 功能性梯度板的長時間應力響應圖。.....	92
圖 4-12 在 $x=0$ 固定邊界下，觀測點位在固定端 ($x=0$)，Ni/ZrO ₂ 功能性梯度板的長時間應力響應圖。.....	92
圖 4-13 在 $x=0$ 固定邊界下，觀測點位在 $x=l/2$ 時，Ni/ZrO ₂ 功能性梯度板的長時間應力響應圖。.....	93
圖 4-14 在 $x=0$ 自由邊界下，觀測點位在 $x=l/2$ 時，Ni/ZrO ₂ 功能性梯度板與 10 層介質模擬的應力響應圖。.....	93
圖 4-15 在 $x=0$ 固定邊界下，觀測點位在 $x=l/2$ 時，Ni/ZrO ₂ 功能性梯度板與 10 層介質模擬的應力響應圖。.....	94
圖 4-16 在 $x=0$ 固定邊界下，觀測點位在 $x=0$ 時，ZrO ₂ /Ni 功能性梯度板與 10 層介質模擬的應力響應圖。.....	94

圖 4-17	在 $x=0$ 自由邊界下，觀測點位在 $x=l/2$ 時，SiC/Al 功能性梯度板與 10 層介質模擬的應力響應圖。	95
圖 4-18	在 $x=0$ 固定邊界下，觀測點位在 $x=0$ 時，SiC/Al 功能性梯度板與 10 層介質模擬的應力響應圖。	95
圖 4-19	在 $x=0$ 自由邊界下，觀測點位在 $x=l/2$ 時，Al/SiC 功能性梯度板與 10 層介質模擬的應力響應圖。	96
圖 4-20	在 $x=0$ 固定邊界下，觀測點位在 $x=l/2$ 時，10 層介質(Ni/ZrO ₂)模擬的應力響應圖。	96
圖 4-21	在 $x=0$ 固定邊界下，觀測點位在 $x=l/2$ 時，20 層介質(Ni/ZrO ₂)模擬的應力響應圖。	97
圖 4-22	在 $x=0$ 固定邊界下，觀測點位在 $x=0$ 時，10 層介質(SiC/Al)模擬的應力響應圖。	97
圖 4-23	在 $x=0$ 固定邊界下，觀測點位在 $x=0$ 時，20 層介質(SiC/Al)模擬的應力響應圖。	98
圖 4-24	n 層功能性梯度材料的結構示意圖。	98
圖 4-25	雙層相異質材料夾功能性梯度材料的結構示意圖。	99
圖 4-26	當 3 層 FGM 材料退化為雙層相異質材料(氧化鋁、鎳)夾 FGM 材料時，第 1 層材料中點的應力響應圖。	99
圖 4-27	雙層相異質材料(氧化鋁、鎳)夾 FGM 材料，第 1 層材料中點的應力響應圖。	100
圖 4-28	當 3 層 FGM 材料退化為雙層相異質材料(氧化鋁、鎳)夾 FGM 材料時，第 2 層(FGM 層)中點的應力響應圖。	100
圖 4-29	雙層相異質材料(氧化鋁、鎳)夾 FGM 材料，第 2 層(FGM 層)中點的應力響應圖。	101
圖 4-30	當 3 層 FGM 材料退化為雙層相異質材料(氧化鋁、鎳)夾 FGM 材料時，第 3 層材料中點的應力響應圖。	101
圖 4-31	雙層相異質材料(氧化鋁、鎳)夾 FGM 材料，第 3 層材料中點的應力響應圖。	102
圖 4-32	當斜率參數為 $a=-0.07048$ ，第 3 層材料(ZrO ₂)單邊不連續情況下的(a)密度與(b)彈性常數分佈圖。	103
圖 4-33	當 $a=-0.07048$ 時，第 3 層材料(ZrO ₂)單邊不連續情況下，第 1 層(Ni)中點的暫態響應圖。	104
圖 4-34	當斜率參數為 $a=-0.28192$ ，第 3 層材料(ZrO ₂)單邊不連續情況下的(a)密度與(b)彈性常數分佈圖。	105

圖 4-35 當 $a = -0.28192$ 時，第 3 層材料(ZrO_2)單邊不連續情況下，第 1 層(Ni)中點的暫態響應圖。	106
圖 4-36 當斜率參數為 $a = -0.07048$ ，第 1 層(Ni)與第 3 層(ZrO_2)材料雙邊不連續情況下的(a)密度與(b)彈性常數分佈圖。	107
圖 4-37 當斜率參數為 $a = -0.07048$ ，第 1 層(Ni)與第 3 層(ZrO_2)材料雙邊不連續情況下，第 1 層(Ni)中點的暫態響應圖。	108
圖 5-1 三種不同類型的多層材料：(a)隨機分佈型材料；(b)週期分佈型材料；(c)連續分佈型材料。	122
圖 5-2 (a) 20 層隨機分佈型材料的結構示意圖；(b)以 11 層等效材料來簡化 20 層隨機分佈型材料的結構示意圖。	122
圖 5-3 以 20 層隨機分佈型材料(紅線)和 11 層等效材料(藍線)，在脈衝時間 $1 \times 10^{-7}(s)$ 下，第 1 層材料中點的應力響應。	123
圖 5-4 以 20 層隨機分佈型材料(紅線)和 11 層等效材料(藍線)，在脈衝時間 $1 \times 10^{-6}(s)$ 下，第 1 層材料中點的應力響應。	123
圖 5-5 以 20 層隨機分佈型材料(紅線)和 11 層等效材料(藍線)，在脈衝時間 $1 \times 10^{-5}(s)$ 下，整體結構物中點的應力響應。	124
圖 5-6 (a) 20 層週期分佈型材料的結構示意圖；(b) 以 3 層等效材料來簡化 20 層週期分佈型材料的結構示意圖。	124
圖 5-7 以 20 層週期分佈型材料(紅線)和 3 層等效材料(藍線)，在脈衝時間 $1 \times 10^{-7}(s)$ 下，整體結構物中點的應力響應。	125
圖 5-8 以 20 層週期分佈型材料(紅線)和 3 層等效材料(藍線)，在脈衝時間 $1 \times 10^{-6}(s)$ 下，第 1 層材料中點的應力響應。	125
圖 5-9 以 20 層週期分佈型材料(紅線)和 3 層等效材料(藍線)，在脈衝時間 $1 \times 10^{-6}(s)$ 下，整體結構物中點的應力響應。	126
圖 5-10 以 20 層週期分佈型材料(紅線)和 3 層等效材料(藍線)，在脈衝時間 $1 \times 10^{-5}(s)$ 下，第 1 層材料中點的應力響應。	126
圖 5-11 以 20 層週期分佈型材料(紅線)和 3 層等效材料(藍線)，在脈衝時間 $1 \times 10^{-5}(s)$ 下，整體結構物中點的應力響應。	127
圖 5-12 (a) 20 層連續分佈型材料的結構示意圖；(b) 以 11 層等效材料來簡化 20 層連續分佈型材料的結構示意圖；(c) 以 8 層等效材料來簡化 20 層連續分佈型材料的結構示意圖；(d) 以 4 層等效材料來簡化 20 層連續分佈型材料的結構示意圖。	128
圖 5-13 以 20 層連續分佈型材料，以及 11 層、8 層、4 層等效材料計算當脈衝時間 $1 \times 10^{-6}(s)$ 下，第 1 層材料中點的應力響應。	129

- 圖 5-14 以 20 層連續分佈型材料，以及 11 層、8 層、4 層等效材料計算當脈衝時間 $1 \times 10^{-6}(s)$ 下，整體結構物中點的應力響應。..... 129
- 圖 5-15 以 20 層連續分佈型材料，以及 11 層、8 層、4 層等效材料計算當脈衝時間 $1 \times 10^{-7}(s)$ 下，第 1 層材料中點的應力響應。..... 130
- 圖 5-16 以 20 層連續分佈型材料，以及 11 層、8 層、4 層等效材料計算當脈衝時間 $1 \times 10^{-7}(s)$ 下，整體結構物中點的應力響應。..... 130
- 圖 5-17 單層功能性梯度材料的自由邊界條件與幾何結構示意圖。..... 131
- 圖 5-18 在脈衝時間 $1 \times 10^{-7}(s)$ 下，20 層連續分佈型材料(紅色實線)和功能性梯度材料解(藍色虛線)的第 1 層中點應力響應。..... 131
- 圖 5-19 在脈衝時間 $1 \times 10^{-7}(s)$ 下，20 層連續分佈型材料(紅色實線)和功能性梯度材料解(藍色虛線)的整體結構物中點應力響應。..... 132
- 圖 5-20 在脈衝時間 $1 \times 10^{-7}(s)$ 下，20 層連續分佈型材料(紅色實線)和功能性梯度材料解(藍色虛線)的最底層中點應力響應。..... 132



表目錄

表 2-1 本節與第三節所採用三種不同等向性均質材料的相關材料參數	21
表 4-1 功能性梯度材料的相關材料常數	83
表 4-2 以十層均質材料來模擬單層功能性梯度板 Ni/ZrO ₂ 之相關材料常數	83
表 4-3 以二十層均質材料來模擬單層功能性梯度板 Ni/ZrO ₂ 之相關材料常數 ..	84
表 4-4 以十層均質材料來模擬單層功能性梯度板 SiC/Al 之相關材料常數	85
表 4-5 以二十層均質材料來模擬單層功能性梯度板 SiC/Al 之相關材料常數	86
表 5-1 二十層隨機分佈型材料的二十種材料常數	116
表 5-2 以九層等效層模擬二十層隨機分佈型材料的等效材料常數	117
表 5-3 用於二十層週期分佈型材料的三種材料常數	118
表 5-4 使用單一等效層來模擬二十層週期分佈型材料的等效材料常數	118
表 5-5 二十層連續分佈型材料模擬 Ni/ZrO ₂ 功能性梯度材料的相關材料常數	119
表 5-6 使用九層等效層來模擬二十層連續分佈型材料的等效材料常數	120
表 5-7 使用六層等效層來模擬二十層連續分佈型材料的等效材料常數	121
表 5-8 使用二層等效層來模擬二十層連續分佈型材料的等效材料常數	121

第一章 緒論

1-1 研究動機

多層材料的應力波傳問題長期以來一直是重要的研究課題，在航太、電子、機械、海洋工程，甚至於地震的相關研究，皆是其討論的範疇。舉例來說，在構件表面以高溫方式鍍上一層極薄的薄膜來防止磨耗及腐蝕，或是在積體電路的表面鍍上一層封裝層來保護電路避免氧化，這些屬於層狀結構的薄膜，其力學分析在機械或是半導體工業都具有相當高的應用價值。

目前應力波的研究成果在多方面都有實際的應用，例如可輔助地層內部的結構分析以及石油的探勘，以超音波為基礎的非破壞檢測來偵測複合材料中的脫層與裂痕。許多地震工程的相關研究則是關心暫態響應的計算，當一動力載荷突然施加在多層域的表面或是內部時，分析其暫態波傳的響應。

早期對層狀介質的研究主要著墨在頻散方程與穩態響應，對於層狀介質中暫態彈性波傳的理論解析則以廣義射線理論為主。廣義射線理論係將層狀固體中的動態反應依觀測時限而以波傳射線的形式表達，若用於計算初期的動態反應，極為正確而快速；然而隨著時間的增加，由於應力波在界面間交互產生的透射與反射波，波的數目急劇增加，使得射線理論在長時間的計算上產生分析的困難。因此，所有的分析方式僅能計算一層半無窮域的問題，或是較少層數的短時間暫態響應。為克服層狀固體在長時間波傳計算上的困難，並且保有高水準的精確度和計算效率，本文採用混合解析及數值的分析方式，利用矩陣解分析層狀介質的優越性，再搭配拉普拉斯數值逆轉換，可以處理任意層數的均質或非均質問題長時間暫態波傳計算。

1-2 文獻回顧

當結構體受動力衝擊載荷時，其內部的質點將有劇烈的運動而產生應力波的傳遞。而應力波的傳遞需要時間，當動力加載所產生的暫態波尚未遇到界面或障

礙物時，波如同在無窮域傳播一般。Lamb 為研究雷利波(Rayleigh, 1887)而求解半無窮域表面上受一點或線簡諧載荷其域內的應力波傳解析，研究中亦提及受衝擊載荷時的暫態解，原則上可透過整個頻譜上穩態波疊加而得，Lamb 開啟了與半無窮域受載荷相關的研究先河並對此問題有相當重大的貢獻，因此，半無窮域受動力載荷問題亦被稱為 Lamb 問題。

彈性波在層狀介質的理論和分析，在 Ewing (1957)及 Brekhovskikh (1980)的書目中有詳細的探討。Thomson (1950)提出並由 Haskell (1953)加以改進的一種傳輸矩陣法，是藉由多層材料界面的連續條件來求解待定係數。在地球物理學和地震工程領域，此種矩陣法也被廣範地用以探討在層狀半無窮域表面波的頻散關係。

廣義射線理論從 1939 開始發展，當時 Cagniard 發展了一套分析暫態彈性波在兩完美接合半無窮域中傳遞的解析方法。Cagniard 將拉普拉斯轉換域中的解，透過積分路徑變換方法得到形式上與正向拉普拉斯轉換公式一樣的積分，而直接得到在時域中每一個射線的解。Pao 及 Gajewski (1977) 也針對廣義射線法撰寫了一篇回顧性論文。Pekeris 等人(1965) 提出一層半無窮域彈性體的暫態波的解，以一系列的級數來表示暫態波波傳，每一項都代表了彈性體內的一個波的傳遞。對單層板來說，級數的擴展需要計算 4×4 的行列式，雙層介質則需計算 6×6 的行列式。Spencer (1960) 為避免直接求解多層介質的邊界值問題，在分析個別的波在傳遞時，遇到界面產生反射與透射的行為，提出一套解析方法，將多層介質中的波有系統的排序，且每個波均可藉由反射與透射係數的操作而求得其數學上的形式，並引進廣義射線路徑的概念來化簡分析上的困難。

Ma 及 Huang (1996)推導每一層響應的轉換關係作為一般表示式，取代位移-曳引力向量，進而求解多層介質的暫態波傳行為。接著，對於一個在面內負載下的層狀介質暫態響應的理論，數值，與實驗分析，由 Ma 及 Lee (2000)所提出。Ma 等人(2001)則研究在一層狀介質中施加反平面負載的動態響應。

除了解析解之外，還有兩種不同的分析方式，一種是數值的拉普拉斯逆轉

換，另一種是有限元素法(FEM)。Narayanan 及 Beskos (1982)有系統地針對精確度和計算時間，將八種數值拉普拉斯逆轉換的演算法相互比較；於其研究中，發現 Durbin (1974)所提出的方法最為精確，但卻需要更多的計算時間。Manolis 及 Beskos (1981)比較 Durbin (1974)和 Papoulis (1957)所提出的兩種數值拉普拉斯逆轉換的演算法，他們發現 Durbin 演算法和 Papoulis 相比更加耗時，但對於長時間的計算，則具有相當高的精確度。Beskos, Manolis, 及 Narayanan (1980-1983) 等人發表更多關於 Durbin 演算法的細節，以及應用於樑的動態響應的相關研究。

有限元素法提供一個純數值計算，用以分析彈性動力學的問題。舉例來說，三維有限元素法用於層狀板施加衝擊負載的動態分析(Lee *et al.*, 1984; Sun 及 Chen, 1985)。在 1960 年代，隨著電腦的快速發展，有限元素法很快地在固體力學和結構力學佔有十分重要的地位。雖說如此，數學解析方法(例如傳輸矩陣法、傅立葉轉換法、拉普拉斯轉換法...等)卻因為具有極佳的精確度，近年來又再度被學者所重視。

另一方面，對於非均質材料而言，一種材料特性隨位置作連續改變的材料，稱之為功能性梯度材料(Functionally Graded Material, FGM)，其基本構想是在原有陶瓷與金屬材料之間嵌入一過渡層材料，該材料的嵌入使得原有兩種物理性質完全不同的材料得以用一個連續變化的材料性質作連接。近十年來，不論是引擎的燃燒室或是核子反應爐這類型的工程問題，功能性梯度材料都吸引相當廣泛的注意，這類型的材料能夠減少應力集中或是避免界面脫層的現象。功能性梯度材料為一種熱或是機械性質呈連續變化的特殊複合材料，能夠提升在不同材料界面處接合的強度。以金屬陶瓷複合材料為例，陶瓷材料可承受極高溫的環境，而金屬則可提供較高的韌性，但兩者之間卻存在著極大的材料特性不匹配的問題，因此功能性梯度材料被廣泛使用於接合處用以消除在界面上容易存在的熱殘留應力。

大部分學者分析功能性梯度材料的組成函數，常以下面三種形式來表示，分別為冪次、多項式和指數函數形式。這三種形式都提供了方便的理論解析過程因

而被廣泛的使用在各種問題的分析。以冪次函數為主的機能梯度材料文獻中，Jabbari 等人(2002)提出了一個用以分析冪次功能性梯度材料構成的厚空心圓柱，探討其穩態熱應力的解析解。Jin 及 Paulino (2001)發表了一種以漸進分析(asymptotic analysis)的方式，處理一含邊緣裂紋的冪次形式功能性梯度材料，在熱暫態負載下的溫度場。第二種功能性梯度材料，為 Chiu 及 Erdogan (1999), Abu-Alshaikh 及 Köklüce (2006)等人所研究的多項式形式功能性梯度材料。Chiu 及 Erdogan (1999)假設一功能性梯度板的密度與勁度是以任意形式多項式作連續變化，當施加一個矩形形式的壓力脈衝，在鎳-氧化鋁、鋁-矽介質配合雙邊自由與單邊固定的邊界條件，皆有詳細的分析。Abu-Alshaikh 及 Köklüce (2006)使用特徵線法(method of characteristics)去求解以多項式形式連續變化的多層功能性梯度材料，並將其計算的應力響應和一些文獻做比較(Han 及 Liu (2002), Han *et al.*(2000), Chiu 及 Erdogan (1999), 以及 Santare *et al.* (2003))。對於第三種指數函數形式的功能性梯度材料也被許多作者廣泛使用。Erdogan 及 Wu (1995) 研究一指數型功能性梯度材料，內部或是表面包含裂紋狀況下的熱應力問題。對於一個具有邊緣裂紋的功能性梯度板，當裂紋表面突然冷卻時，Jin 及 Batra (1996)分析其熱應力和應力強度因子。他們假設材料的剪力模數從表面處開始以雙曲線形式減少，而熱導係數則是呈指數型的變化。

Delale 及 Erdogan (1983)、Erdogan 及 Wu (1996)、Cai 及 Bao (1998)和 Jin 及 Paulino (2001)等人對功能性梯度材料在破壞力學相關的研究皆有相當的貢獻。在靜力問題中，Ma 及 Lee (2009, 2010)和 Lee 及 Ma (2009)對二維的雙異質和單層半無窮域(layered half-space)的功能性梯度的磁電彈材料推導出解析的全場解。近十年來，機能梯度材料被廣泛運用於很多領域，特別是在複合材料中要避免脫層的力學問題，因此，不僅在機能梯度材料，就連傳統多層材料的動態波傳問題都扮演著極為重要的角色。在一維波傳的問題中，平面波波傳方向垂直入射於層域介質時，Sun 等人(1968)提出連續理論取代等效模數理論(effective modulus theory)來探討頻散關係。Black 等人(1960)提出特徵線法處理雙層介質的波傳問題。

Lundergan 及 Drumheller (1971)利用數值方法來模擬一不同厚度的層域系統響應，其與實驗作對照後，發現具有優異的一致性。Stern 等人(1971)，Hegemier 及 Nayfeh (1973)研究了簡谐波在等向性多層複材內的波傳行為。Ting 及 Mukunoki (1979, 1980)和 Tang 及 Ting (1985)研究了週期性層狀彈性材料的暫態平面波波傳。Chen 等人(2004)使用 Floquet's 理論，處理在層域異質材料系統中，板衝擊問題的解析解，並比較實驗與解析的結果。Liu 等人(1999)研究沿厚度方向線性變化的功能性梯度板，當施載一平面壓力小波(plane pressure wavelet)時，其一維的彈性波傳行為。Han 及 Liu (2002)使用傅立葉轉換技巧分析功能性梯度材料中的一維橫向偏振波傳(SH wave)，在其研究中所假設的材料特徵，為沿厚度方向作二次函數變化。

1-3 本文研究方法與主要內容

本文主要探討一維層狀介質的表面受到動力衝擊時，其暫態波傳問題的解析與數值計算，文中利用矩陣形式的 Bromwich 展開，來計算多層域的短時間暫態響應，而式中的每一項都有其物理意義。其雖為一精確解，但在層數增加時或是較長時間的計算存在射線追蹤的困難。為克服此問題，本文將矩陣形式的解在執行級數展開前，直接採用數值拉普拉斯逆轉換求解時域下的解。此法所得的結果為混合解析及數值解，不僅可以處理傳統的等向性均質材料問題，對於非均質的功能性梯度材料，亦能精確的計算其長時間的暫態響應。

關於本文的內容編排，分為以下六個章節作討論：

第一章介紹研究動機、相關研究的文獻回顧以及本文的研究方法與主要內容。

第二章介紹廣義射線理論。以雙層異質材料為例，採理論解析的方式求解每一層材料的位移及應力響應，其所得結果為一精確解。在數值計算上，分析黃銅、鋁所組成的雙層材料，並探討其暫態波傳行為。

第三章介紹一均佈動力載荷施載於多層域等向性均質材料時的暫態波傳分析。本章採用三種分析方式：廣義射線法，數值拉普拉斯逆轉換，以及有限元素法。其中，矩陣 Bromwich 展開的廣義射線解為一精確解，採用 Durbin 演算法的數值拉普拉斯逆轉換則為一混合解析及數值的分析方式，最後輔以純數值計算的有限元素解加以驗證與比對。

第四章介紹以多項式函數構成的單層與多層功能性梯度材料，採拉普拉斯轉換技巧分析其動態響應。在精確度與計算效率的考量下，本章以 Durbin 演算法來執行數值拉普拉斯逆轉換。在數值計算上，以三層功能性梯度材料為例，並將其退化為廣泛應用的雙層相異質材料夾功能性梯度材料之暫態問題。

第五章分析各種類型的多層材料，包含隨機分佈型、週期分佈型、連續分佈型材料三大類別。當一正弦脈衝形式的均佈動力載荷施載於多層材料的表面時，以混合解析及數值的分析方式，討論其域內的暫態彈性波傳，並以複合材料力學中等效材料的簡化方式，於本章中分析多層域暫態響應並探討等效材料的適用性。

第六章總結本文多層域暫態波傳解析的結果，並扼要敘述未來展望。

第二章 廣義射線理論

當動力載荷衝擊結構體時，將會產生應力波的傳遞。波傳需要時間，動力加載所產生的暫態波尚未遇到界面或障礙物時，波如同在無窮域中傳播一般，此時動力載荷對結構體的影響，僅侷限於波前所涵蓋的範圍之內，除此範圍之外的物體均感受不到載荷的存在。隨著時間的增加，暫態波遇到界面或障礙物時，會產生反射、折射、繞射或散射各種不同的現象。當由動力加載所產生的應力波入射於一由兩半無窮域接合而成的平面界面時，會產生反射波與透射波。在數學上，由入射波與界面作用產生的反射波與透射波之關係可透過轉移函數的概念來建立(Spencer, 1960)，這些轉移函數，即後來廣義射線理論中所謂的廣義反射係數與透射係數。而由不同動力衝擊所產生的入射波，並不會影響這些廣義反射與透射係數(轉移函數)。入射波、反射波與透射波的加總，即構成完美接合的兩半無窮域所構成物體的暫態波場。

本章的主旨在於瞭解這些波傳現象後，將其應用至雙層相異質材料中。根據入射波與反射、透射波的關係，寫出反射矩陣與透射矩陣，並以矩陣形式的廣義射線理論分析雙層相異質材料。另外，將進一步分析矩陣的計算方式，歸納出展開矩陣後的精確解。本章的內容編排，首先於第一節介紹雙層相異質材料其精確解的分析方式；第二節是雙層相異質材料的數值計算與結果討論。

2-1 雙層相異質材料的廣義射線理論

當一均佈動力載荷施加於雙層相異質材料的上表面時，其結構示意圖如圖 2-1 所示，所有有關於第 i 層介質的量均冠以上標或下標 (i) 來表示。其中，第 0 層表示上半無窮域，第 3 層表示下半無窮域(此二層設為空氣)，假設第 1 層與第 2 層是彈性材料，且為等向性均質材料，第 1 層與第 2 層的厚度分別為 h_1 與 h_2 ，材料密度為 $\rho^{(1)}$ 與 $\rho^{(2)}$ ，縱波慢度為 $S_L^{(1)}$ 與 $S_L^{(2)}$ 。

今考慮一往 x 方向的平面波傳，而縱向位移場 $u(x,t)$ 與 y 、 z 方向無關，因此此在雙層材料中的一維波動方程式可以表示如下：

$$\frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial x^2} = S_L^{(i)2} \frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial t^2}, \quad \text{for } i=1, 2 \quad (2-1)$$

其中

$$S_L^{(i)} = 1/C_L^{(i)} = \sqrt{\rho^{(i)} / (\lambda^{(i)} + 2\mu^{(i)})}, \quad \text{for } i=1, 2 \quad (2-2)$$

λ 和 μ 分別為拉梅常數和剪力模數，而唯一存在的應力分量必須滿足 Hooke's Law：

$$\sigma_x^{(i)} = (\lambda^{(i)} + 2\mu^{(i)}) \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x}, \quad \text{for } i=1, 2 \quad (2-3)$$

在雙層材料的上表面施加一動態壓應力形式的均佈載荷，下表面為零曳引力 (traction-free) 的邊界條件可以表示如下：

$$\sigma_x^{(1)}(0, t) = -\sigma_0 \cdot H(t) \quad (2-4)$$

$$\sigma_x^{(2)}(-h_1 - h_2, t) = 0 \quad (2-5)$$

其中 σ_0 為壓應力的大小， $H(t)$ 為 Heaviside 步階函數，而第 1 層與第 2 層材料間的界面必須滿足位移和應力連續，因此界面連續條件可以表示如下：

$$u^{(1)}(-h_1, t) = u^{(2)}(-h_1, t) \quad (2-6)$$

$$\sigma_x^{(1)}(-h_1, t) = \sigma_x^{(2)}(-h_1, t) \quad (2-7)$$

再藉由拉普拉斯轉換將複雜的偏微分方程轉換成簡單的常微分方程，其中時間變數 t 轉換成變數 p

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \quad (2-8)$$

將波動方程式(2-1)做一次單邊拉普拉斯轉換後，可求得通解 $\hat{u}^{(i)}(x; p)$ 為：

$$\hat{u}^{(i)}(x; p) = u_-^{(i)}(p) e^{+pS_L^{(i)}x} + u_+^{(i)}(p) e^{-pS_L^{(i)}x}, \quad \text{for } i=1, 2 \quad (2-9)$$

其中， $u_-^{(i)}$ 和 $u_+^{(i)}$ 為第 i 層材料的待定係數，而代入式(2-3)中，可得通解 $\hat{\sigma}_x^{(i)}(x; p)$

為

$$\hat{\sigma}_x^{(i)}(x; p) = \rho^{(i)} C_L^{(i)} p u_-^{(i)}(p) e^{+pS_L^{(i)}x} - \rho^{(i)} C_L^{(i)} p u_+^{(i)}(p) e^{-pS_L^{(i)}x}, \quad \text{for } i=1, 2 \quad (2-10)$$

進一步將轉換域下的位移場及應力場重新排列，並以下面的矩陣架構來表達：

$$\begin{pmatrix} \hat{u}(x; p) \\ \hat{\sigma}_x(x; p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}(x; p) & M_{12}(x; p) \\ M_{21}(x; p) & M_{22}(x; p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_-(p) \\ u_+(p) \end{pmatrix} \quad (2-11)$$

其中

$$M_{11}(x; p) = e^{+pS_L x} \quad (2-12)$$

$$M_{12}(x; p) = e^{-pS_L x} \quad (2-13)$$

$$M_{21}(x; p) = \rho C_L p e^{+pS_L x} \quad (2-14)$$

$$M_{22}(x; p) = -\rho C_L p e^{-pS_L x} \quad (2-15)$$

上面四式 M_{11} 、 M_{12} 、 M_{21} 、 M_{22} 組成式(2-11)中與相位相關的接收矩陣，而 u_- 及 u_+ 待定係數所組成的向量則稱之為場向量。接著，將邊界條件和界面連續條件式(2-4)~式(2-7)配合式(2-9)、(2-10)，再以矩陣形式表示可得：

$$\begin{bmatrix} M_{21}^{(1)}(0) & M_{22}^{(1)}(0) & 0 & 0 \\ M_{11}^{(1)}(-h_1) & M_{12}^{(1)}(-h_1) & -M_{11}^{(2)}(-h_1) & -M_{12}^{(2)}(-h_1) \\ M_{21}^{(1)}(-h_1) & M_{22}^{(1)}(-h_1) & -M_{21}^{(2)}(-h_1) & -M_{22}^{(2)}(-h_1) \\ 0 & 0 & M_{21}^{(2)}(-(h_1+h_2)) & M_{22}^{(2)}(-(h_1+h_2)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_-^{(1)} \\ u_+^{(1)} \\ u_-^{(2)} \\ u_+^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sigma_0}{p} \\ p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

式(2-16)可以一更簡潔的形式來表示：

$$\mathbf{M}\mathbf{c} = \hat{\mathbf{t}} \quad (2-17)$$

其中場向量 \mathbf{c} 為

$$\mathbf{c}(p) = \left(u_-^{(1)} \quad u_+^{(1)} \quad u_-^{(2)} \quad u_+^{(2)} \right)^T \quad (2-18)$$

而全域加載位移-曳力組合向量 $\hat{\mathbf{t}}$ (global field coefficient vector) 為

$$\hat{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma_0}{p} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \quad (2-19)$$

值得一提的是矩陣 \mathbf{M} 的行列式即為此多層域系統的頻散方程式：

$$\begin{aligned} \Delta &= \det(\mathbf{M}) \\ &= \rho^{(1)} \rho^{(2)} C_L^{(1)} C_L^{(2)} p^3 e^{-p(S_L^{(1)} h_1 + S_L^{(2)} h_2)} \left[\rho^{(1)} C_L^{(1)} (-1 + e^{2pS_L^{(1)} h_1}) \cdot (1 + e^{2pS_L^{(2)} h_2}) \right. \\ &\quad \left. - \rho^{(2)} C_L^{(2)} (1 + e^{2pS_L^{(1)} h_1}) \cdot (-1 + e^{2pS_L^{(2)} h_2}) \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2-20)$$

為了利用矩陣型態的 Bromwich 展開法，將轉換域解展開成射線形式，於此先把相位相關的接收矩陣 \mathbf{M} 看作由三個塊狀矩陣 \mathbf{D} 、 \mathbf{U} 、 \mathbf{L} 所組成，分別代表其對角線、上三角與下三角部分。

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_0 & \mathbf{U}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_1 & \mathbf{D}_1 & \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_2 & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

對角線塊狀矩陣 \mathbf{D} ，其非零元素可以表示如下：

$$\mathbf{D}_0 = M_{21}^{(1)}(0) \quad (2-22)$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} M_{12}^{(1)}(-h_1) & -M_{11}^{(2)}(-h_1) \\ M_{22}^{(1)}(-h_1) & -M_{21}^{(2)}(-h_1) \end{bmatrix} \quad (2-23)$$

$$\mathbf{D}_2 = M_{22}^{(2)}(-(h_1 + h_2)) \quad (2-24)$$

上三角塊狀矩陣 \mathbf{U} 之非零元素為：

$$\mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} M_{22}^{(1)}(0) & 0 \end{bmatrix} \quad (2-25)$$

$$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} -M_{12}^{(2)}(-h_1) \\ -M_{22}^{(2)}(-h_1) \end{bmatrix} \quad (2-26)$$

而下三角矩陣 \mathbf{L} 之非零元素為：

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} M_{11}^{(1)}(-h_1) \\ M_{21}^{(1)}(-h_1) \end{bmatrix} \quad (2-27)$$

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 & M_{21}^{(2)}(-(h_1 + h_2)) \end{bmatrix} \quad (2-28)$$

需注意對角塊狀矩陣 \mathbf{D} 為一非奇異性矩陣，其逆矩陣 \mathbf{D}^{-1} 存在。把對角線矩陣 \mathbf{D} 從 \mathbf{M} 矩陣中提出：

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{R}) \quad (2-29)$$

其中 \mathbf{R} 矩陣為

$$\mathbf{R} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) \quad (2-30)$$

或表示為

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{D}_0^{-1}\mathbf{U}_0 & 0 \\ -\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{L}_1 & \mathbf{0}_{2 \times 2} & -\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{U}_1 \\ 0 & -\mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{L}_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-31)$$

由式(2-17)、(2-29)、(2-30)可將場向量 \mathbf{c} 改寫為：

$$\mathbf{c} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{s} \quad (2-32)$$

其中 \mathbf{s} 為波源向量(source vector)

$$\mathbf{s} = \mathbf{D}^{-1} \hat{\mathbf{t}} \quad (2-33)$$

\mathbf{s} 若以向量分量的形式表示，則為

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -\mathbf{D}_0^{-1} \frac{\sigma_0}{p} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \quad (2-34)$$

接著，全域反應向量 \mathbf{b} (response vector) 與全域場向量係數 \mathbf{c} 之關係可寫為：

$$\mathbf{b}(x; p) = \mathbf{R}_{cv}(x; p)(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{s} \quad (2-35)$$

其中全域接收矩陣 \mathbf{R}_{cv} 為一對角線塊狀矩陣

$$\mathbf{R}_{cv}(x; p) = \begin{bmatrix} M_{11}^{(1)}(x) & M_{12}^{(1)}(x) & 0 & 0 \\ M_{21}^{(1)}(x) & M_{22}^{(1)}(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{11}^{(2)}(x) & M_{12}^{(2)}(x) \\ 0 & 0 & M_{21}^{(2)}(x) & M_{22}^{(2)}(x) \end{bmatrix} \quad (2-36)$$

利用矩陣形式的 Bromwich 展開式

$$(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{R}^i \quad (2-37)$$

可將式(2-35)改寫為

$$\mathbf{b}(x) = \mathbf{R}_{cv} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{R}^i \mathbf{s} \quad (2-38)$$

此式即為波傳射線的轉換域解。矩陣 \mathbf{R} 的物理意義，可以透過觀察(2-31)式而得知。矩陣 \mathbf{R} 中的非零元素主要有 $-\mathbf{D}_i^{-1} \mathbf{L}_i$ 和 $-\mathbf{D}_i^{-1} \mathbf{U}_i$ 兩種形式，其分別代表著入射波在介質(i)和介質($i+1$)間的界面產生反射與透射波，故名之為全域反射與透射矩陣，並可改寫成下列的形式來表示之：

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & R_{1/0} & 0 & 0 \\ R_{1/2} & 0 & 0 & T_{1/2} \\ T_{2/1} & 0 & 0 & R_{2/1} \\ 0 & 0 & R_{2/3} & 0 \end{bmatrix} \quad (2-39)$$

其中， $R_{1/0}$ 元素表示射線從第 1 層到第 0 層的反射； $R_{1/2}$ 元素表示射線從第 1 層到第 2 層的反射； $R_{2/1}$ 元素表示射線從第 2 層到第 1 層的反射； $R_{2/3}$ 元素表示射線從第 2 層到第 3 層的反射； $T_{1/2}$ 元素表示射線從第 1 層到第 2 層的透射； $T_{2/1}$ 元素表示射線從第 2 層到第 1 層的透射。而這些元素可以表示如下：

$$R_{1/0} = r_{1/0} \quad (2-40)$$

$$R_{2/1} = r_{2/1} \cdot e^{+2pS_L^{(2)}h_1} \quad (2-41)$$

$$R_{1/2} = r_{1/2} \cdot e^{-2pS_L^{(1)}h_1} \quad (2-42)$$

$$R_{2/3} = r_{2/3} \cdot e^{-2pS_L^{(2)}(h_1+h_2)} \quad (2-43)$$

$$T_{1/2} = t_{1/2} e^{-p(S_L^{(1)} - S_L^{(2)})h_1} \quad (2-44)$$

$$T_{2/1} = t_{2/1} e^{-p(S_L^{(1)} - S_L^{(2)})h_1} \quad (2-45)$$

在式(2-40)~式(2-45)中，可以清楚看出透射和反射的元素，其實是控制射線振幅大小的穿透和反射係數，以及控制波傳時間的指數函數所組成的。其中穿透和反射係數可以表示如下：

$$r_{1/0} = 1 \quad (2-46)$$

$$r_{2/1} = \frac{\rho^{(2)}C_L^{(2)} - \rho^{(1)}C_L^{(1)}}{\rho^{(1)}C_L^{(1)} + \rho^{(2)}C_L^{(2)}} \quad (2-47)$$

$$r_{1/2} = \frac{\rho^{(1)}C_L^{(1)} - \rho^{(2)}C_L^{(2)}}{\rho^{(1)}C_L^{(1)} + \rho^{(2)}C_L^{(2)}} \quad (2-48)$$

$$r_{2/3} = 1 \quad (2-49)$$

$$t_{1/2} = \frac{2\rho^{(2)}C_L^{(2)}}{\rho^{(1)}C_L^{(1)} + \rho^{(2)}C_L^{(2)}} \quad (2-50)$$

$$t_{2/1} = \frac{2\rho^{(1)}C_L^{(1)}}{\rho^{(1)}C_L^{(1)} + \rho^{(2)}C_L^{(2)}} \quad (2-51)$$

將式(2-39)的穿透反射矩陣 \mathbf{R} 逐次相乘，並尋找其中的計算邏輯可以發現以下的關係：

$$(\mathbf{R}^i)_{11} = (\mathbf{R}^{i-1})_{21} \cdot R_{1/0} \quad (2-52)$$

$$(\mathbf{R}^i)_{21} = (\mathbf{R}^{i-1})_{11} \cdot R_{1/2} + (\mathbf{R}^{i-1})_{41} \cdot T_{2/1} \quad (2-53)$$

$$(\mathbf{R}^i)_{31} = (\mathbf{R}^{i-1})_{11} \cdot T_{1/2} + (\mathbf{R}^{i-1})_{41} \cdot R_{2/1} \quad (2-54)$$

$$(\mathbf{R}^i)_{41} = (\mathbf{R}^{i-1})_{31} \cdot R_{2/3} \quad (2-55)$$

在計算第 i 次的穿透反射矩陣 \mathbf{R}^i 時，其和第 $(i-1)$ 次 \mathbf{R}^{i-1} 矩陣有些邏輯關係存在。例如當 $i=2$ 時，表示穿透反射矩陣 \mathbf{R} 相乘兩次的結果，在式(2-52)中，若從數學的角度來說， $(\mathbf{R}^2)_{11}$ 表示矩陣 \mathbf{R} 相乘兩次後的第一行第一列元素，其實是來自於 \mathbf{R}^1 中第一行第二列的元素和反射元素 $R_{1/0}$ 相乘的結果。而從物理意義的角度來看，正好說明了第 1 層材料中的下行波傳，是來自於同層內的上行波傳在自由邊界(第 0 層與第 1 層的交界面)的全反射。在式(2-55)中， $(\mathbf{R}^2)_{41}$ 表示矩陣 \mathbf{R} 相乘兩次後的第一行第四列元素，是來自於 \mathbf{R}^1 中第一行第三列的元素和反射元素 $R_{2/3}$ 相乘的結果。在物理上代表著第 2 層材料的上行波傳，唯一來自於 2、3 層界面全反射($R_{2/3}$)的結果。 $i=3$ 表示穿透反射矩陣 \mathbf{R} 相乘三次，如果同樣以數學

的角度來看， $(\mathbf{R}^3)_{21}$ 為相乘三次後矩陣的第一行第二列元素，和相乘兩次的矩陣元素 $(\mathbf{R}^2)_{11}$ 及 $(\mathbf{R}^2)_{41}$ 相關，即式(2-53)所示；在物理意義上，代表著第 1 層材料中的上行波傳，是來自於同層內的下行波傳在 1、2 層界面反射($R_{1/2}$)的結果，以及第 2 層材料的上行波傳穿透 1、2 層界面($T_{2/1}$)的結果。在式(2-54)中， $(\mathbf{R}^3)_{31}$ 為相乘三次後矩陣的第一行第三列元素，亦和相乘兩次的矩陣元素 $(\mathbf{R}^2)_{11}$ 及 $(\mathbf{R}^2)_{41}$ 相關，物理上則敘述著第 2 層材料中的下行波傳，是來自於同層內的上行波傳在 1、2 層界面反射($R_{2/1}$)的結果，以及第 1 層材料的下行波傳穿透 1、2 層界面($T_{1/2}$)的結果。

因此，以級數形式來表示的響應函數，正代表著同一種 i 的射線組合，經過特定觀察時限下計算所需的數量。換句話說，以級數形式展開的廣義射線必須要清楚的知道所有波傳可能的路徑，在固定時限下計算一定數量的射線便可得到響應圖。如果漏算或是溢算射線，響應即會出現誤差，且會隨著觀察時間日趨嚴重。欲分析雙層相異質材料的所有射線，在層域內經過多少次的穿透及反射皆須考量，在轉換域中第 1 層的應力波可表示如下：

$$\hat{\sigma}_x^{(1)}(x, p) = \sum_{i=0}^{\infty} (-\sigma_0) \cdot (r_{1/2})^{m_1} (r_{1/0})^{m_2} (r_{2/1})^{m_3} (r_{2/3})^{m_4} (t_{1/2})^{m_5} (t_{2/1})^{m_6} \cdot \frac{1}{p} e^{(-S_L^{(1)} h_1 (m_1 + m_2 + m_5 + \text{rem}(i, 2)) - S_L^{(2)} h_2 (m_3 + m_4 + m_6) + (-1)^i S_L^{(1)} x) p} \quad (2-56)$$

並由拉普拉斯逆轉換的公式

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-pa}}{p} \right\} = H(t-a) \quad (2-57)$$

可知式(2-56)中每一項皆可由(2-57)的公式逆轉換，故在時域下第 1 層材料應力的精確解為：

$$\sigma_x^{(1)}(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} (-\sigma_0) \cdot (r_{1/2})^{m_1} (r_{1/0})^{m_2} (r_{2/1})^{m_3} (r_{2/3})^{m_4} (t_{1/2})^{m_5} (t_{2/1})^{m_6} \cdot H\left(t - S_L^{(1)} h_1 (m_1 + m_2 + m_5 + \text{rem}(i, 2)) - S_L^{(2)} h_2 (m_3 + m_4 + m_6) + (-1)^i S_L^{(1)} x\right),$$

(2-57)

在轉換域中第 2 層的應力波可以表示如下：

$$\hat{\sigma}_x^{(2)}(x, p) = \sum_{i=0}^{\infty} (-\sigma_0) \cdot (r_{1/2})^{m_1} (r_{1/0})^{m_2} (r_{2/1})^{m_3} (r_{2/3})^{m_4} (t_{1/2})^{m_5} (t_{2/1})^{m_6} \cdot \frac{1}{p} e^{\left(-S_L^{(1)} h_1 (m_1 + m_2 + m_5) - S_L^{(2)} h_2 (m_3 + m_4 + m_6 + (\text{rem}(i, 2) - 1)^i) + (-1)^{i-1} \frac{S_L^{(2)}}{S_L^{(1)}} \left(\frac{x+h_1}{h_1} \right) \right)} \cdot p \quad (2-58)$$

在時域下的精確解則為

$$\sigma_x^{(2)}(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} (-\sigma_0) \cdot (r_{1/2})^{m_1} (r_{1/0})^{m_2} (r_{2/1})^{m_3} (r_{2/3})^{m_4} (t_{1/2})^{m_5} (t_{2/1})^{m_6} \cdot H \left(t - S_L^{(1)} h_1 (m_1 + m_2 + m_5) - S_L^{(2)} h_2 (m_3 + m_4 + m_6 + (\text{rem}(i, 2) - 1)^i) + (-1)^{i-1} \frac{S_L^{(2)}}{S_L^{(1)}} \left(\frac{x+h_1}{h_1} \right) \right) \quad (2-59)$$

其中， $m_1 \sim m_6$ 表示在雙層材料中所有在邊界發生穿透和反射的數目，且式(2-56)、(2-57)中的 $i = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$ ，表示計算第 i 次的穿透反射矩陣時，等同需知道每一層內計算了多少次的穿透和反射。舉例來說， m_1 為 $r_{1/2}$ 的冪次，同時也說明應力波從第 1 層到第 2 層發生反射的次數； m_2 為 $r_{1/0}$ 的冪次，為應力波從第 1 層到第 0 層發生反射的次數； m_3 為 $r_{2/1}$ 的冪次，為應力波從第 2 層到第 1 層發生反射的次數； m_4 為 $r_{2/3}$ 的冪次，為應力波從第 2 層到第 3 層發生反射的次數； m_5 為 $t_{1/2}$ 的冪次，為應力波從第 1 層到第 2 層發生穿透的次數； m_6 為 $t_{2/1}$ 的冪次，為應力波從第 2 層到第 1 層發生穿透的次數。在廣義射線理論中，每一個射線都必須清楚的知道其發生多少次的穿透和反射，而在固定的觀測時限下，式(2-57)中級數解的第 i 次穿透或反射則變為有限項的疊加。此精確解大致可以分成兩個部份，其一為控制響應振幅的部份，為各層穿透反射係數的連乘所組成；另一部分則為步階函數，此函數顯示了波傳的抵達時間，決定第一層材料波傳時間的 m_1 、 m_2 、 m_5 與第二層材料波傳時間的 m_3 、 m_4 、 m_6 。而式(2-56)、(2-57)中 $\text{rem}(i, 2)$ 表示 i 除以 2 後的餘數，其值為 0 或 1，為波源至觀測點間的波傳時間與穿透反射次數關係的統計結果。

2-2 雙層相異質材料的數值計算與結果討論

2-2-1 波的退化與群組

今考慮厚度各為 10cm 厚的黃銅和鋁組成一完美接合的雙層材料，第 1 層為黃銅，而第 2 層為鋁(相關的材料常數列於表 2-1 中)。當一均佈動力載荷施加於此雙層材料的上表面($x=0$)時，以廣義射線法計算第 1 層中點($x=-5\text{cm}$)的應力響應圖繪於圖 2-2 中。其中值得注意的是圖中的水平軸表示為無因次化的時間 $t/S_L^{(1)}h_1$ ，縱軸表示為無因次化的應力 σ/σ_0 。在圖 2-2 中，可以觀察到源波抵達觀測點的時間為 $t/S_L^{(1)}h_1=0.5$ ，而第一個來自 1、2 層界面的反射波於時間 $t/S_L^{(1)}h_1=1.5$ 抵達(其射線路徑表示於圖 2-3(a))。第三個射線抵達時間為 $t/S_L^{(1)}h_1=2.5$ (其射線路徑表示於圖 2-3(b))，第四個射線抵達時間為 $t/S_L^{(1)}h_1=2.932$ (其射線路徑表示於圖 2-3(c))。為了更清楚瞭解廣義射線法的解析方式，於此將個別討論於 $t/S_L^{(1)}h_1=6$ 無因次化時間內 $\mathbf{R}^0 \sim \mathbf{R}^5$ 的暫態響應，並將其繪製於圖 2-4 中。根據 \mathbf{R}^i 中的指數 i 來做群組分類，指數 i 同時也意味著在界面或是表面發生穿透和反射的總個數，舉例來說， \mathbf{R}^0 代表源波，同時也說明穿透或反射波經過界面的次數為零次。同樣地， \mathbf{R}^1 代表應力波經由界面穿透或反射的次數僅一次。如果把 $\mathbf{R}^0 \sim \mathbf{R}^5$ 在第 1 層中點的響應做疊加，便可得到圖 2-2 時間 $t/S_L^{(1)}h_1=6$ 以內的初期暫態響應。

在接下來的討論中，將具有相同 i 的所有射線依據波傳時間來進行分組，亦即同一 i 中有相同波傳時間的設為同一群組。應力波從波源最快抵達觀測點的一個群組，在圖 2-5 中以紅色圓形實點來表示，而最慢抵達觀測點的一個群組，則以藍色實體三角形來表示。當 $i=1$ 或 2 時，其射線路徑皆只有一種可能，如圖 2-3(a)、圖 2-3(b)所示，因此將一個射線路徑安置於一組(或表示為(groups, rays)=(1, 1))。當 $i=3$ 或 4 時，如圖 2-3(c)、圖 2-3(d)所示，波源到觀測點有兩種可能的射

線路徑，然而這兩種射線的波傳時間是不相同的。根據不同波傳時間可將射線分成兩組，每一組包含一個射線(或表示為(groups, rays)=(2, 2))。另一個情況 $i=5$ 或 6 ，擁有四種可能的射線路徑顯示於圖 2-3(e)、圖 2-3(f)，根據波傳時間可以分為三組(或表示為(groups, rays)=(3, 4))。在圖 2-3(e)、圖 2-3(f)中可以發現四種可能的射線路徑中，有兩種具有相同的波傳時間(第 2、第 3 種射線路徑)，這兩種波是完全相同，因此將其歸類為同一組，這樣分組的作法稱之為『波的退化』(degeneration of rays)。隨著計算 i 的數目增加，波的退化情況會越來越嚴重。舉例來說，當 $i=19$ 時，512 種射線路徑將退化為 26 組，而當 $i=40$ 時，524288 種射線路徑可以退化為 101 組。圖 2-5 有一些值得注意的訊息：當 $i=6$ 時，最快與最慢抵達觀測點的群組分別為 $t/S_L^{(1)}h_1 = 5.34$ 和 $t/S_L^{(1)}h_1 = 6.5$ ；當 $i=12$ 時，最快與最慢抵達觀測點的群組分別為 $t/S_L^{(1)}h_1 = 9.6$ 和 $t/S_L^{(1)}h_1 = 12.5$ ；當 $i=18$ 時，最快與最慢抵達觀測點的群組分別為 $t/S_L^{(1)}h_1 = 13.86$ 和 $t/S_L^{(1)}h_1 = 18.5$ 。上面的訊息也反映了最快與最慢群組抵達觀測點的時間差會隨著 i 的增加而逐漸擴大。另外，此圖也清楚地說明當 $i=12$ ，最快抵達群組為 $t/S_L^{(1)}h_1 = 9.6$ ，全部 32 種射線路徑可以退化成 10 個群組，而當 $i=12$ 時，最慢抵達群組大於 10(約為 $t/S_L^{(1)}h_1 = 10.02$)。因此，若要計算無因次化時間 $t/S_L^{(1)}h_1 = 10$ 以內的暫態響應，在方程式(2-38)中至少要計算 $i=0 \sim 12$ 以確保不會漏算任何一個射線。為了瞭解射線路徑和群組的關係，進一步繪製射線群組關係圖於圖 2-6。圖 2-6 顯示著當群組的數目線性增加時，射線路徑的數目卻是以指數形式增加，也由於這個原因，以廣義射線理論來處理多層域的問題時，長時間的暫態響應將會變得複雜而難以計算，而如果採用波的退化的觀念來計算，將會大量地降低數值計算的時間。

在廣義射線理論中，不同種類的波而卻有相同表示式的情況，稱之為波的退化。一旦考慮在界面處所發生多次穿透反射的情形，便立即遭遇到波的退化問題。由於退化的射線是相同的，對於分析多層材料的複雜問題有極為重要的物理

意義。此外，波的退化情況會隨著多層域的層數增加而越趨嚴重。從數值計算的角度來看，使用波的退化觀念是最佳的計算分析方式，否則，計算每個射線的射線追蹤法會變得十分沒有效率。在級數內部的穿透反射矩陣 \mathbf{R} 中，挑選具有相同次數的穿透反射係數並予以執行波的退化處理，則原先的矩陣形式便可轉換成另一個符號運算的形式，以利數值計算的處理。

廣義射線法的主要優點在於，如果能夠計算所有從波源到觀測點的射線，所得到的暫態響應即為沒有誤差的精確解，因此統計所有的射線並將之有系統地分組與排列是非常重要的。根據 \mathbf{R}^i 的冪次 i ，其代表著層域系統中所有界面的穿透反射數目，而且 i 對於建立數值程式來說，極有助益。在廣義射線解中的每一項都擁有它自身的物理意義，且其另一個特色是可以避免求解邊界值的問題，雖說如此，對於處理長時間或複雜的二維及三維的數值計算，廣義射線法在執行上就變得笨拙且難以應用。

2-2-2 黃銅-鋁雙層材料於不同組合下之暫態響應分析

首先，考慮一厚度皆為 10cm 的黃銅-鋁雙層相異質材料，第 1 層為黃銅，第 2 層為鋁。今若施加一拉應力於其結構上表面處，以廣義射線法繪出第 1 層(黃銅)中點的應力響應圖，如圖 2-7 所示。在觀測時間 $t/S_L^{(1)}h_1 = 10$ 之內，恰和圖 2-2 應力響應相反，這是由於上表面施予拉應力的結果，和圖 2-2 施予壓應力的情況相反。若將兩層材料位置交換，第 1 層材料改為鋁，第 2 層材料為黃銅，此時第 1 層(鋁)中點的應力響應圖繪於圖 2-8 中。在圖 2-7 與圖 2-8 中，雖然第 1 層材料並不相同(一為黃銅，一為鋁)，但由於觀測點皆設在第 1 層之中點的緣故，源波自上表面抵達觀測點的時間同為 $t/S_L^{(1)}h_1 = 0.5$ 。第二個抵達觀測點的波則來自 1、2 層界面的反射，應力波抵達的時間同為 $t/S_L^{(1)}h_1 = 1.5$ ，然而應力的大小在此時開始不同。應力波由阻抗值較大的一層傳遞至較小的一層，於界面反射時，會產生

反向的應力波。而由阻抗較小的一層傳遞至較大的一層時，於界面反射時則會產生同向的應力波。因此，當第 1 層為黃銅(阻抗為 38158200)，第 2 層為鋁(阻抗為 16731900)的時候，反射波的大小為 0.6，反之，反射波的大小則為 1.4。第三個抵達觀測點的應力波，為自由邊界的上表面全反射所貢獻，不論第 1 層為黃銅亦或鋁，皆於時間 $t/S_L^{(1)}h_1 = 2.5$ 抵達觀測點。

在同樣為 10cm 厚的黃銅-鋁雙層結構，觀測點設在第 1 層不同位置處 ($x = -2cm$ ， $x = -4cm$) 的應力響應圖繪於圖 2-9 中。其中，藍色實線和紅色虛線個別表示 $x = -2cm$ 和 $x = -4cm$ 的計算結果。圖中可以清楚的發現，較接近上表面自由邊界的位置 $x = -2cm$ ，源波較 $x = -4cm$ 早抵達觀測點，且第一個來自界面的反射波會較晚抵達。隨著觀測時間的增長，兩個不同位置的應力響應會有越大的差異。

接著，若第 1 層材料保持為 10cm 的黃銅，而將第 2 層材料鋁的厚度增加為 100cm 厚，並將其應力響應繪於圖 2-10 中。在觀測時間 $t/S_L^{(1)}h_1 = 30$ 之內，應力暫態響應不論是抵達時間或是應力大小，皆呈現有規律的變化。源波於 $t/S_L^{(1)}h_1 = 0.5$ 抵達第 1 層(黃銅)中點後，接著來自 1、2 層界面與上表面自由邊界的反射波陸續於 $t/S_L^{(1)}h_1 = 1.5, 2.5, 3.5, 4.5, \dots$ 時間抵達，而這些應力波純粹為第 1 層材料中不斷來回反射的結果。和第 2 層材料相關，來自雙層結構下表面的全反射於 $t/S_L^{(1)}h_1 = 15.82$ 時間抵達，而後繼續在第 1 層材料間不斷反射。如果觀測點設在第 2 層(鋁)中點，其應力響應的計算結果繪於圖 2-11 中。源波於 $t/S_L^{(1)}h_1 = 4.58$ 第一次抵達第 2 層材料的中點，接著，在第 1 層中反射的波陸續抵達 ($t/S_L^{(1)}h_1 = 4.58, 6.58, 8.58, 10.58$)，下表面自由邊界的全反射波則於 $t/S_L^{(1)}h_1 = 11.74$ 抵達觀測點。

若第 1 層材料為 10cm 黃銅，第 2 層材料為 50cm 鋁，進一步將觀測點設在

兩材料的交界處。第 1 層材料與第 2 層材料的應力響應繪於圖 2-12 中。其中，藍色實線表示第 1 層響應的計算結果，而紅色虛線則表示第 2 層響應的計算結果。雖然 1、2 層材料的解析解形式不同，但是在交界處的界面位置，兩數值結果應為相同，也表示雙層材料的應力響應在此處確實為連續的，也同時驗證了雙層相異質材料的應力波傳分析是正確無誤。



表 2-1 本節與第三節所採用三種不同等向性均質材料的相關材料參數

Material	Density (kg / m^3)	Longitudinal Wave Velocity (m / s)	Impedance ($kg / m^2 s$)
Aluminum	2700	6197	16731900
Brass	8600	4437	38158200
Steel	7850	5878	46142300

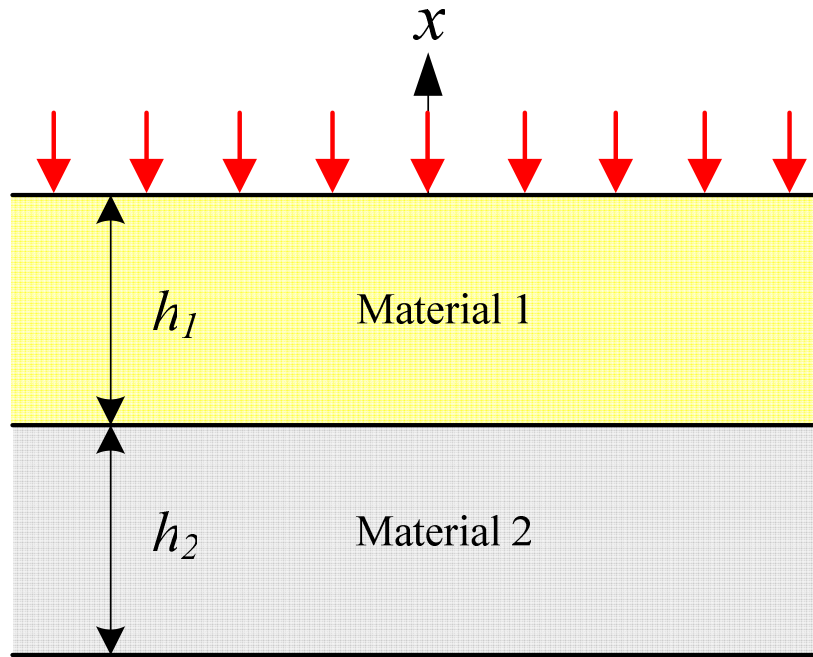


圖 2-1 當一均佈動力載荷施加於雙層相異質材料上表面的結構示意圖。

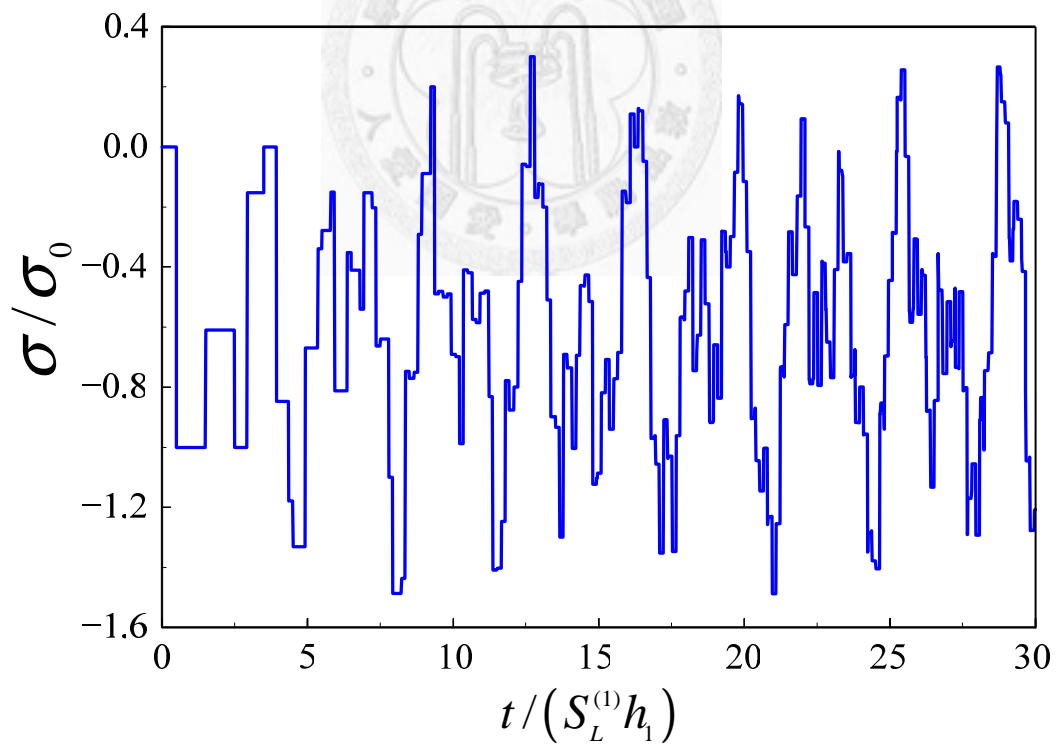


圖 2-2 廣義射線法計算在 $x = -5\text{cm}$ 時，黃銅-鋁雙層材料的應力暫態響應。

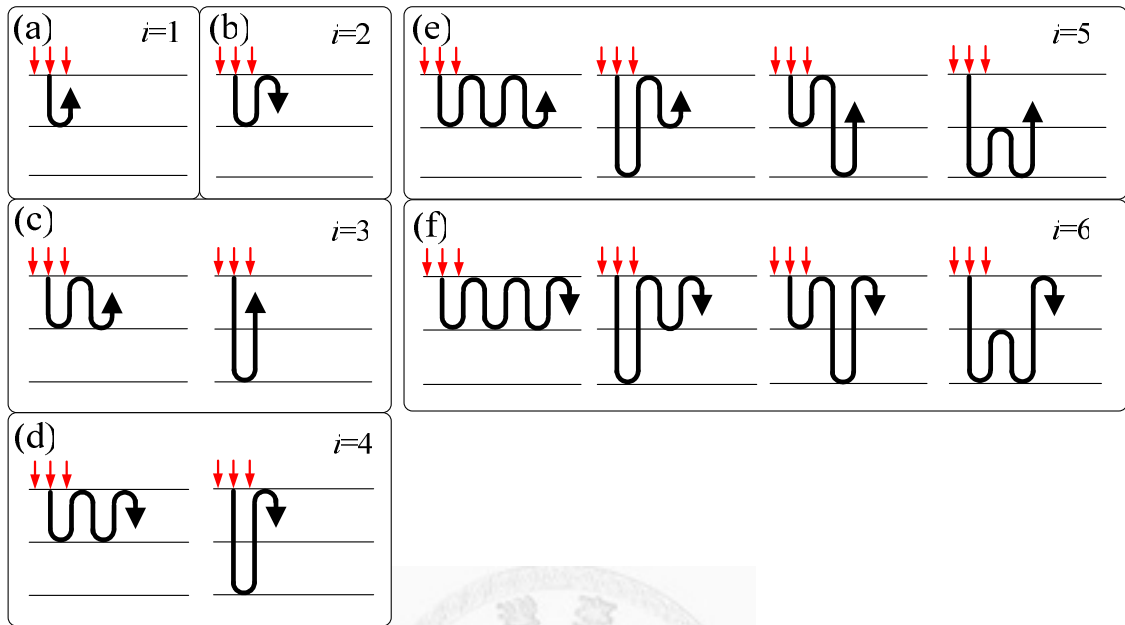


圖 2-3 (a)~(f) 當 $i = 1$ 到 $i = 6$ 中所有可能的射線路徑。

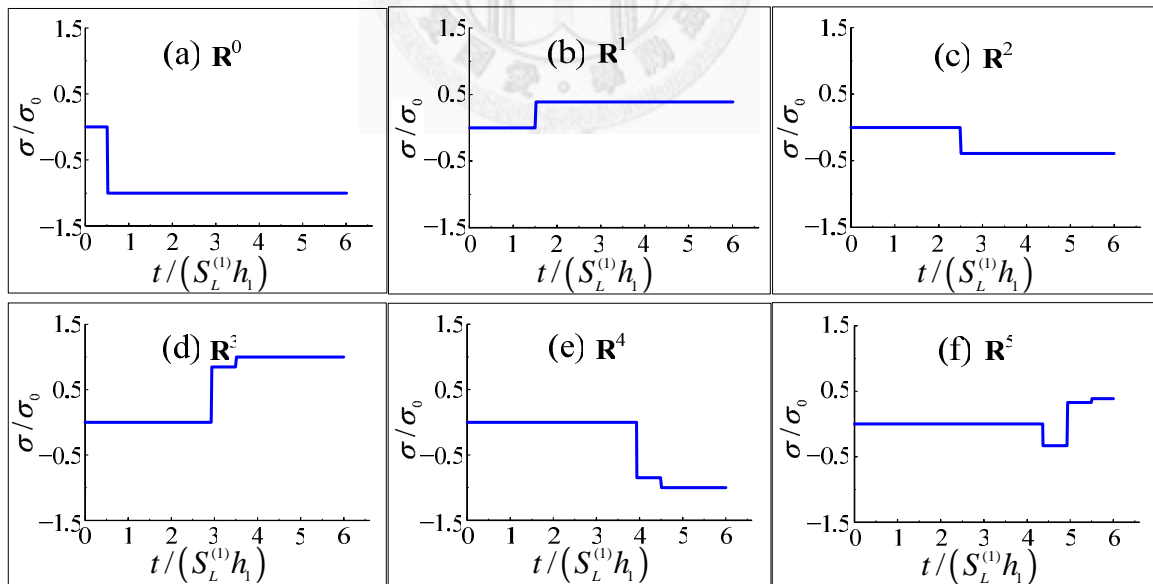


圖 2-4 在無因次化時間 $t/S_L^{(1)}h_1 = 6$ 內，分解為六個群組($\mathbf{R}^0 \sim \mathbf{R}^5$)的暫態響應。

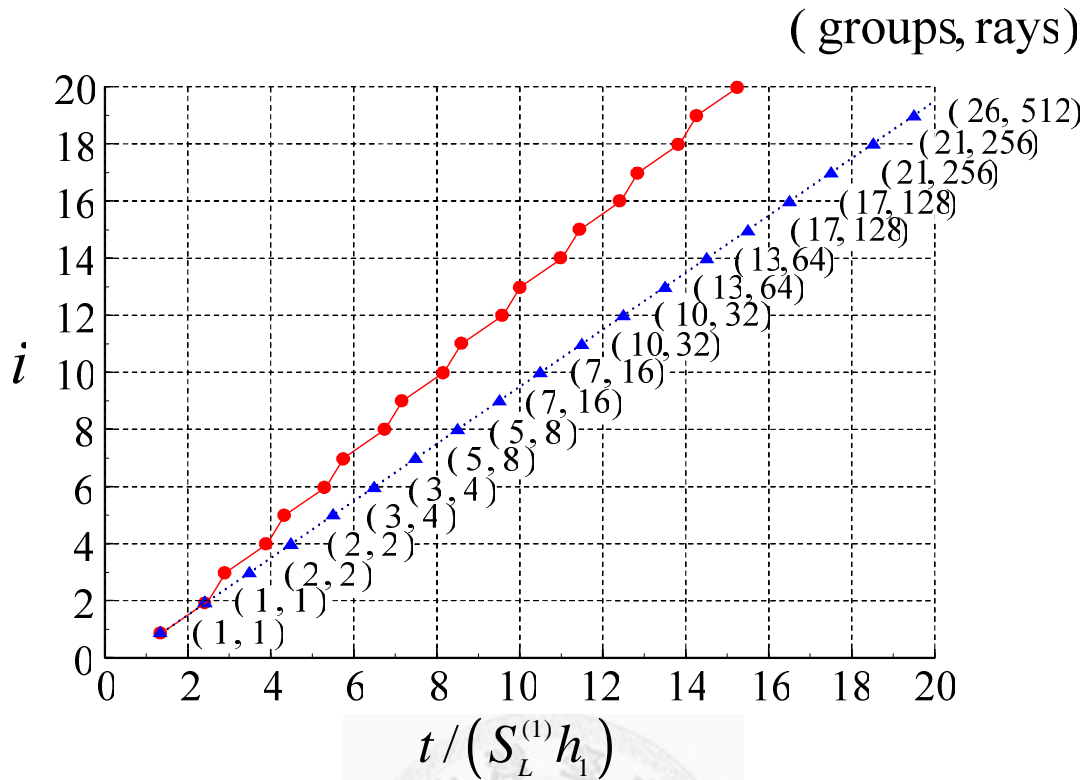


圖 2-5 在雙層相異質材料中經過多次穿透反射後的射線和群組數目。

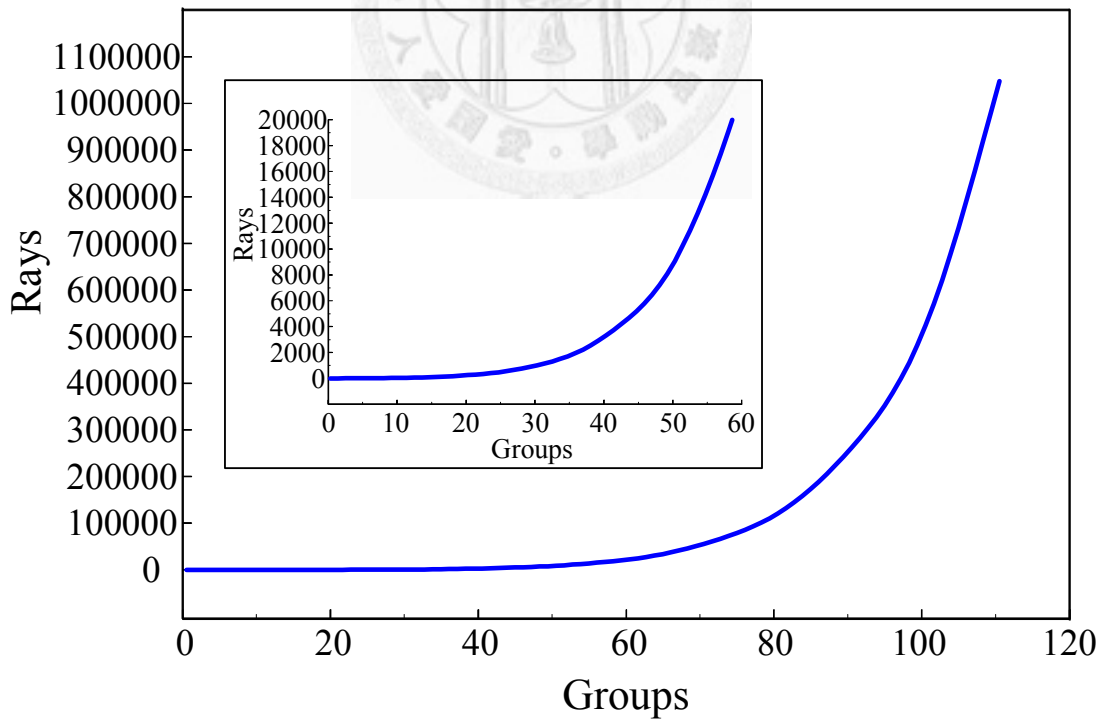


圖 2-6 雙層相異質材料的射線群組關係圖。

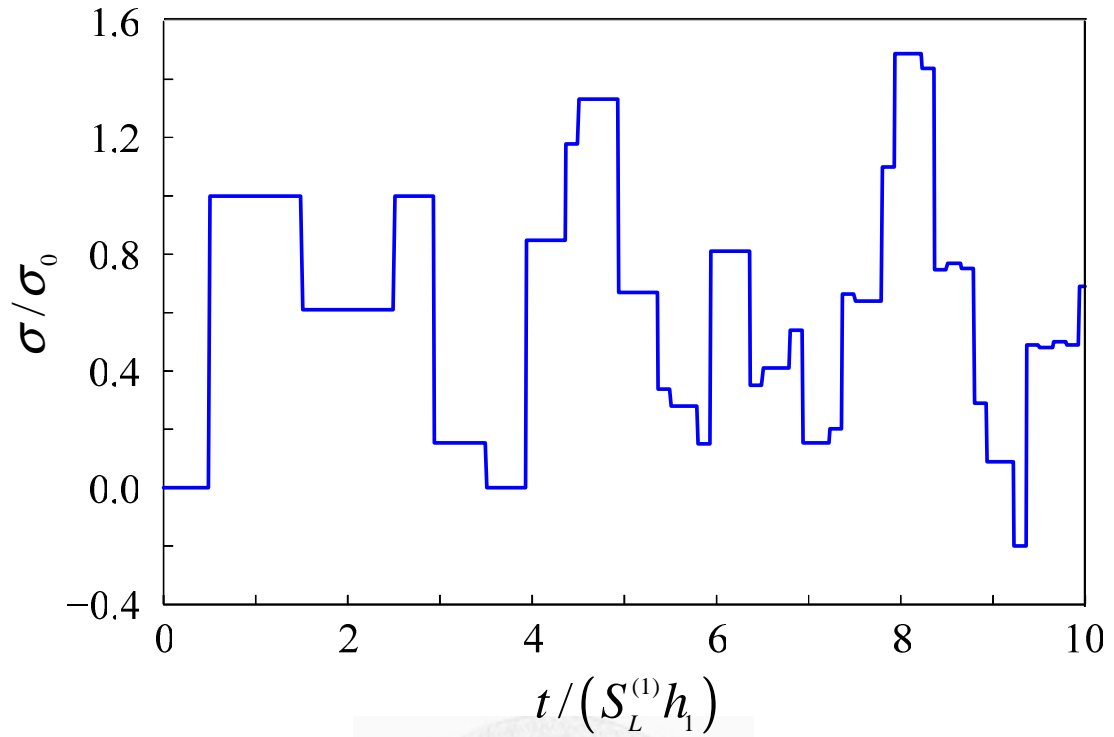


圖 2-7 當厚度皆為 10cm 的黃銅-鋁雙層相異質材料，第 1 層(黃銅)中點的應力響應圖。

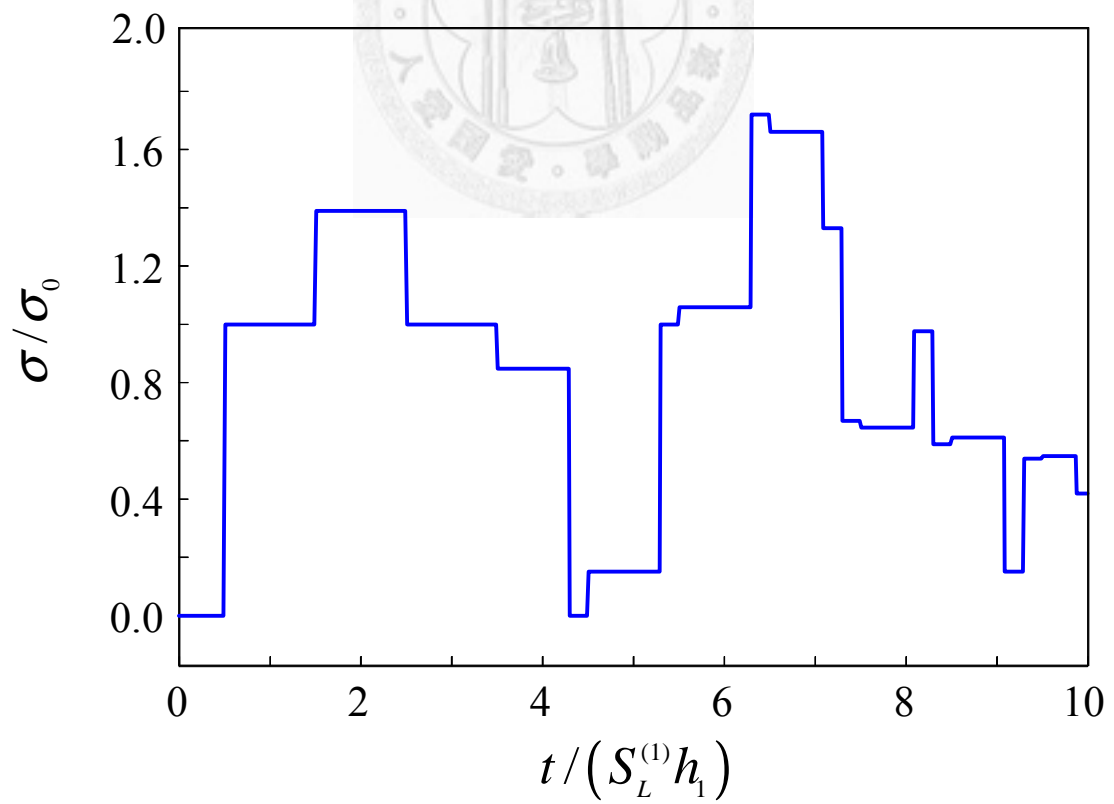


圖 2-8 當厚度皆為 10cm 的鋁-黃銅雙層相異質材料，第 1 層(鋁)中點的應力響應圖。

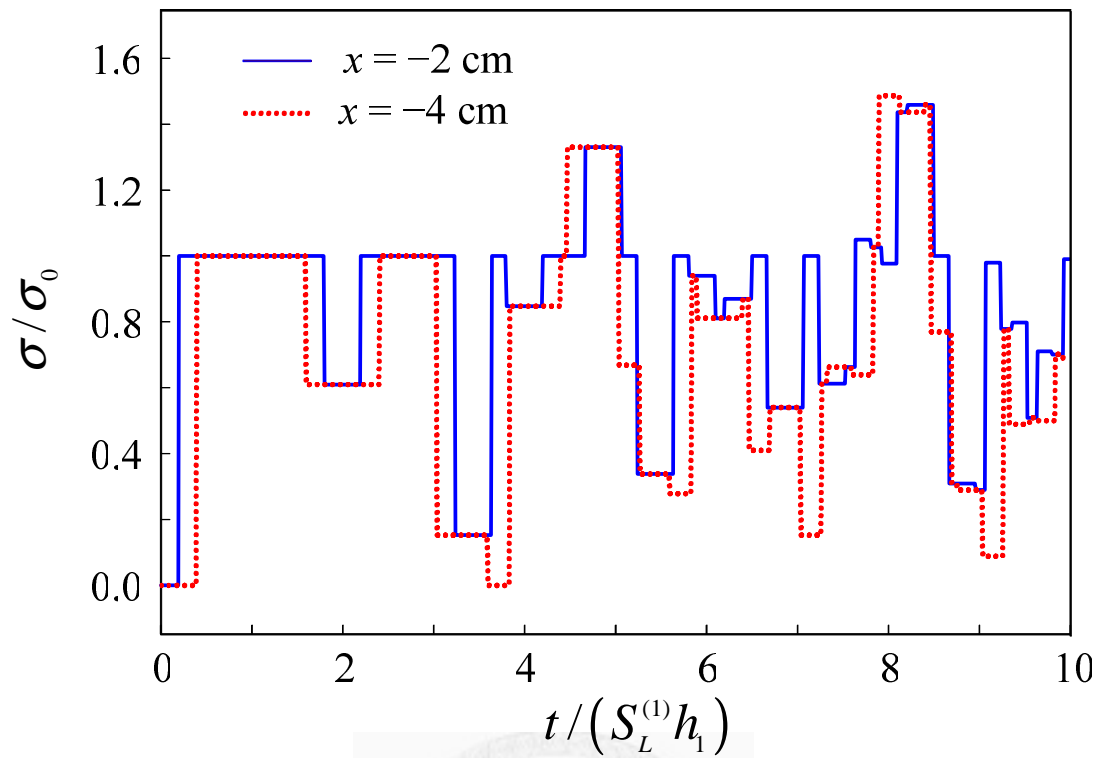


圖 2-9 當厚度皆為 10cm 的黃銅-鋁雙層相異質材料，觀測點各為 -2cm，-4cm 時的應力響應圖。

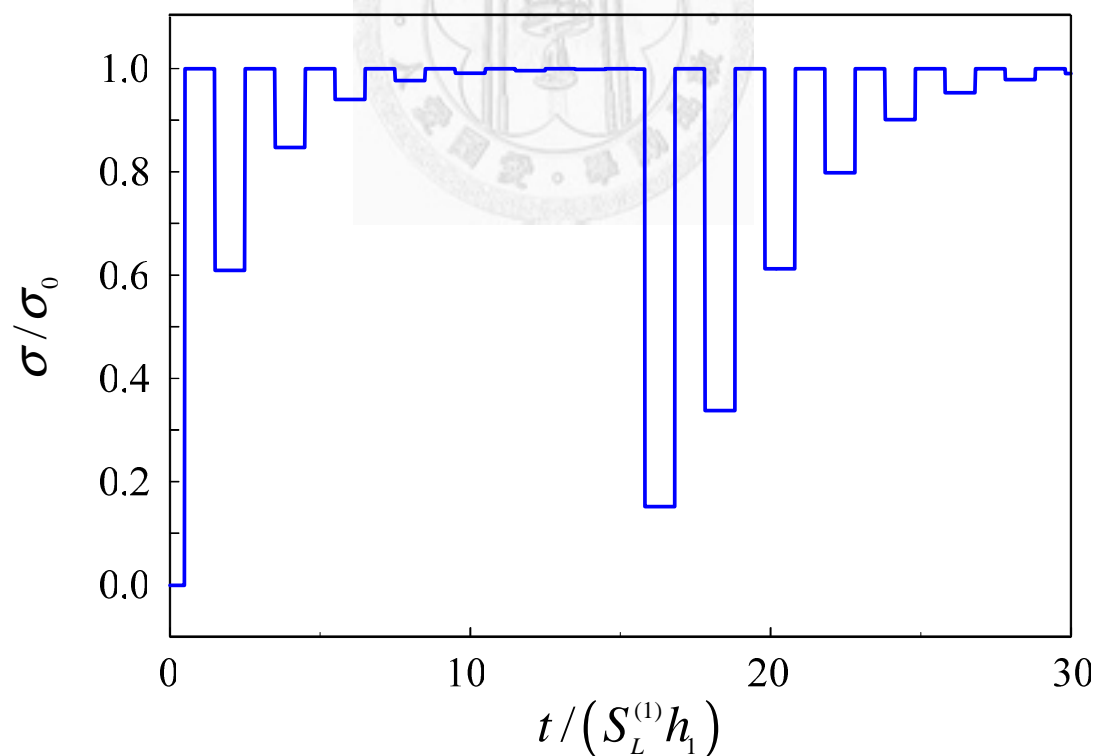


圖 2-10 第 1 層材料為 10cm 黃銅，第 2 層材料為 100cm 鋁，當觀測點位在第 1 層(黃銅)中點的應力響應圖。

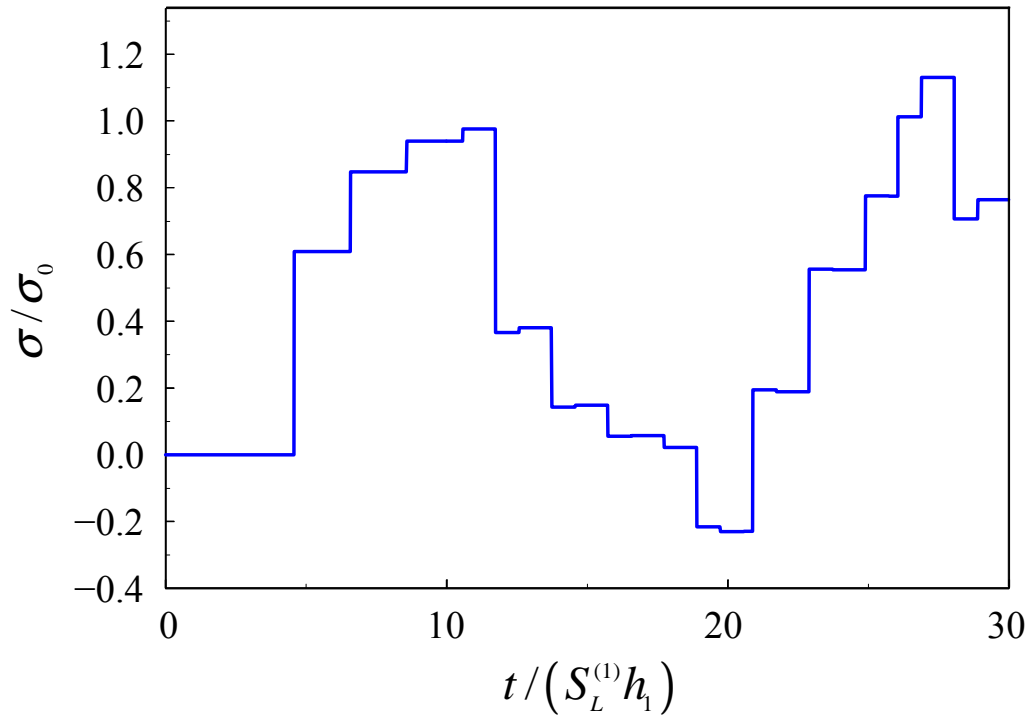


圖 2-11 第 1 層材料為 10cm 黃銅，第 2 層材料為 100cm 鋁，當觀測點位在第 2 層中點的應力響應圖。

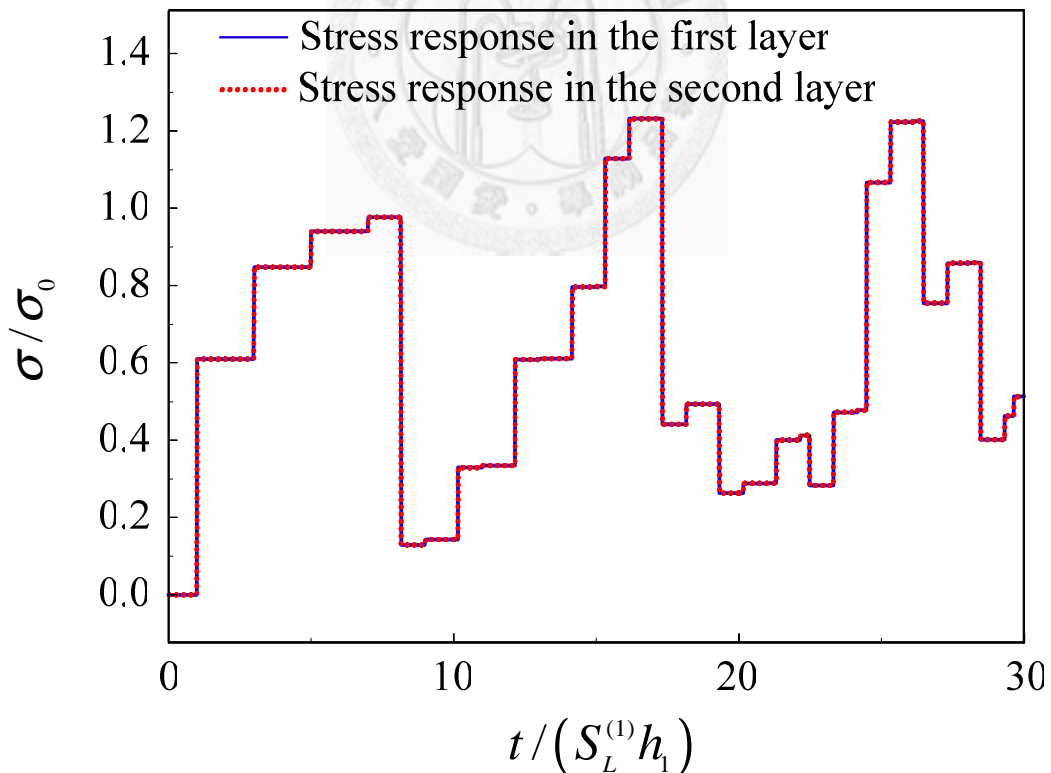


圖 2-12 第 1 層材料為 10cm 黃銅，第 2 層材料為 50cm 鋁，當觀測點位在 1、2 層交界處($x=-10\text{cm}$)，第 1 層響應(藍色實線)與第 2 層響應(紅色虛線)計算的結果。

第三章 均佈動力載荷施載於多層域等向性均質材料 的暫態波傳解析

解析多層域的彈性波的暫態波傳，不論是一維、二維還是三維的問題，皆有諸多學者深入探討，也提出各種不同的解析方法。但是，由於多層域的層數和觀測時間長度的侷限，卻鮮少發展多層域和長時間計算的分析方式。本研究所提出的方法，和傳統的廣義射線法相比，並不需要分析所有可能的射線路徑，因為隨著波的反射數目增加，所要考慮波的退化問題將會越加嚴重，精確的計算也越加困難。在本章中所求得的結果，將無須計算廣義射線法中波的退化問題，而且，在精確度和計算時間的考量下，可以很容易的計算多層域長時間的暫態波傳。

本章將介紹三種不同的方法來分析多層域的暫態波傳問題：即廣義射線法，數值拉普拉斯逆轉換，以及有限元素法。將多層域波動方程式的通解排列成矩陣形式，並將邊界條件和界面連續條件代入，以求得待定係數矩陣，便可得到在轉換域下每一層材料的位移場及應力場。接著，還必須使用解析或是數值的方式來計算拉普拉斯逆轉換，以解析方式計算拉普拉斯逆轉換而求得的位移、應力響應稱之為廣義射線法，其結果為一精確解。另一種方式則以數值方法來計算拉普拉斯逆轉換，本文採用 Durbin 法，此法所得的結果為混合解析及數值解。最後，使用有限元素法軟體 ABAQUS 的純數值計算來驗證並比對前面兩種分析方式的結果。

3-1 廣義射線解

首先考慮一開始不受擾動的 n 層異質材料，其結構示意圖如圖 3-1 所示。假設每一層材料均為等向性均質的彈性材料，層與層之間則是完美接合。任意第 i 層的物理量，輔以下標(i)來做區分，而 n 層相異質材料包含上下半無窮域的話，則共有 $n+2$ 種介質。換句話說，(0)代表上半無窮域，($n+1$)代表下半無窮域。

當一均佈動力載荷施加於 n 層結構物上表面時，若僅考慮 x 方向的平面波

傳，其第 i 層的一維波動方程式可以表示如下：

$$\frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial x^2} = S_L^{(i)2} \frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial t^2} \quad (3-1)$$

其中 $u^{(i)}$ 表示縱向位移， $S_L^{(i)}$ 表示縱波慢度

$$S_L^{(i)} = 1/C_L^{(i)} = \sqrt{\rho^{(i)} / (\lambda^{(i)} + 2\mu^{(i)})} \quad (3-2)$$

上式內的 $C_L^{(i)}$ 、 $\rho^{(i)}$ 、 $\lambda^{(i)}$ 和 $\mu^{(i)}$ 個別表示第 i 層的縱波波速、密度、Lamé 常數與剪力模數。多層相異質材料的上下表面邊界條件如下所示：

$$\sigma_x^{(1)}(0, t) = -\sigma_0 \cdot H(t) \quad (3-3)$$

$$\sigma_x^{(n)}\left(-\sum_{k=1}^n h_k, t\right) = 0 \quad (3-4)$$

層與層間的位移及應力界面連續條件為

$$u^{(i)}\left(-\sum_{k=1}^i h_k, t\right) = u^{(i+1)}\left(-\sum_{k=1}^i h_k, t\right), \quad \text{for } i = 1, 2, 3, \dots, n-1 \quad (3-5)$$

$$\sigma_x^{(i)}\left(-\sum_{k=1}^i h_k, t\right) = \sigma_x^{(i+1)}\left(-\sum_{k=1}^i h_k, t\right), \quad \text{for } i = 1, 2, 3, \dots, n-1 \quad (3-6)$$

其中括號內的 i 表示第 i 層內的物理量。舉例來說， $\bullet^{(i)}$ 和 $\bullet^{(i+1)}$ 個別代表著第 i 層和第 $(i+1)$ 層的位移或應力場。前述的邊界值和連續條件可藉由拉普拉斯轉換，將時域變數 t 轉換為變數 p 。函數 $f(x, t)$ 的拉普拉斯轉換對表示如下：

$$\hat{f}(x; p) = \int_0^{\infty} f(x, t) e^{-pt} dt \quad (3-7)$$

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(x; p) e^{pt} dp \quad (3-8)$$

藉由拉普拉斯轉換的技巧，位移場的通解可由控制方程式(3-1)求得：

$$\hat{u}(x; p) = u_-(p) e^{+pS_L x} + u_+(p) e^{-pS_L x} \quad (3-9)$$

而應力由虎克定律(Hooke's law)，可得：

$$\hat{\sigma}_x(x; p) = \rho C_L p u_-(p) e^{+pS_L x} - \rho C_L p u_+(p) e^{-pS_L x} \quad (3-10)$$

接著，可以重新表示這些轉換域下的物理量，將其排列成位移-應力矩陣：

$$\begin{bmatrix} \hat{u}(x; p) \\ \hat{\sigma}_x(x; p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(x; p) & M_{12}(x; p) \\ M_{21}(x; p) & M_{22}(x; p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_-(p) \\ u_+(p) \end{bmatrix} \quad (3-11)$$

其中

$$M_{11}(x; p) = e^{+pS_L x} \quad (3-12)$$

$$M_{12}(x; p) = e^{-pS_L x} \quad (3-13)$$

$$M_{21}(x; p) = \rho C_L p e^{+pS_L x} \quad (3-14)$$

$$M_{22}(x; p) = -\rho C_L p e^{-pS_L x} \quad (3-15)$$

式(3-12)~(3-15)為相位相關接收矩陣的元素。為了避免繁雜的數學計算，邊界及界面連續條件可以表示如下：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & M_{21}^{(1)}(0) & M_{22}^{(1)}(0) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ M_{11}^{(1)}(-h_1) & M_{12}^{(1)}(-h_1) & -M_{11}^{(2)}(-h_1) & -M_{12}^{(2)}(-h_1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ M_{21}^{(1)}(-h_1) & M_{22}^{(1)}(-h_1) & -M_{21}^{(2)}(-h_1) & -M_{22}^{(2)}(-h_1) & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & M_{11}^{(n-1)}\left(-\sum_{k=1}^{n-1} h_k\right) & M_{12}^{(n-1)}\left(-\sum_{k=1}^{n-1} h_k\right) & -M_{11}^{(n)}\left(-\sum_{k=1}^{n-1} h_k\right) & -M_{12}^{(n)}\left(-\sum_{k=1}^{n-1} h_k\right) & 0 & 0 \\ 0 & \dots & M_{21}^{(n-1)}\left(-\sum_{k=1}^{n-1} h_k\right) & M_{22}^{(n-1)}\left(-\sum_{k=1}^{n-1} h_k\right) & -M_{21}^{(n)}\left(-\sum_{k=1}^{n-1} h_k\right) & -M_{22}^{(n)}\left(-\sum_{k=1}^{n-1} h_k\right) & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -M_{21}^{(n)}\left(-\sum_{k=1}^n h_k\right) & -M_{22}^{(n)}\left(-\sum_{k=1}^n h_k\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_-^{(1)} \\ u_+^{(1)} \\ u_-^{(2)} \\ u_+^{(2)} \\ \vdots \\ u_-^{(n)} \\ u_+^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sigma_0}{p} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

前述方程式若以簡潔的形式來表示即為：

$$\mathbf{M}\mathbf{c} = \hat{\mathbf{t}} \quad (3-17)$$

其中場向量 \mathbf{c} 為

$$\mathbf{c} = \left(u_-^{(1)} \quad u_+^{(1)} \quad u_-^{(2)} \quad u_+^{(2)} \quad \dots \quad u_-^{(n)} \quad u_+^{(n)} \right)^T \quad (3-18)$$

全域加載位移-曳力組合向量為

$$\hat{\mathbf{t}} = \left(-\frac{\sigma_0}{p} \quad 0 \quad \dots \quad \dots \quad 0 \right)^T \quad (3-19)$$

而係數矩陣 \mathbf{M} 是一個 $2n \times 2n$ 的矩陣，給定如下：

其中下標 l 為 1 到 $2n$ 的任一整數，代表著每一層中的位移和應力場分量(例如： b_1 、 b_2 和 b_3 個別表示第一層的位移場、第一層的應力場以及第二層的位移場)。在式(3-47)中的符號 $(R^i)_{rq}$ ，表示冪次矩陣 \mathbf{R}^i 中的 (r,q) 元，而且對於有限觀察時間下的暫態響應，累加符號中的 i 並非是無窮的數值，而是一個固定的數。這樣的方程式也說明必須要清楚知道在觀測時限內，從波源到觀測點之間有多少射線，及經過多少次界面的穿透和反射。一旦分析多層域的層數增加，或是較長的觀測時間，以射線追蹤為基礎的廣義射線法就顯得十分笨拙且不適用。

3-2 數值拉普拉斯逆轉換

Dubner 和 Abat(1968)率先提出一種以傅立葉餘弦級數展開的方式，求解拉普拉斯逆轉換，但由於其誤差會隨著時間呈指數型發散的緣故，Durbin(1974)便提出一種改良方式，搭配另外一次的傅立葉正弦級數展開，即可將隨時間發散的誤差項消除。假設 $f(t)$ 是一個變數為 t 的實數函數，且當 $t < 0$ 時 $f(t) = 0$ 。拉普拉斯轉換對可以表示如下：

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (3-48)$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{pt} F(p) dp \quad (3-49)$$

其中

$$p = \alpha + i\omega$$

α 為大於零的任意實數，但要確保大於 $F(p)$ 所有奇異點的實部。將式(3-48)展開可得如下：

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) \cos \omega t dt - i \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) \sin \omega t dt \quad (3-50)$$

$$F(p) = \text{Re}[F(\alpha + i\omega)] + i \text{Im}[F(\alpha + i\omega)] \quad (3-51)$$

下一步展開式(3-49)並將 $dp = i d\omega$ 代入整理可得：

$$f(t) = \frac{e^{\alpha t}}{\pi} \int_0^{\infty} \{ \operatorname{Re}[F(p)] \cos \omega t - \operatorname{Im}[F(p)] \sin \omega t \} d\omega \quad (3-52)$$

對於 $t < 0$ 時， $f(t) = 0$ ，可得

$$\int_0^{\infty} \{ \operatorname{Re}[F(p)] \cos \omega t + \operatorname{Im}[F(p)] \sin \omega t \} d\omega = 0 \quad (3-53)$$

最後可以得到下面三條拉普拉斯逆轉換的方程式：

$$f(t) = \frac{2e^{\alpha t}}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}[F(p)] \cos \omega t d\omega \quad (3-54)$$

$$f(t) = \frac{-2e^{\alpha t}}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im}[F(p)] \sin \omega t d\omega \quad (3-55)$$

$$f(t) = \frac{e^{\alpha t}}{\pi} \int_0^{\infty} \{ \operatorname{Re}[F(p)] \cos \omega t - \operatorname{Im}[F(p)] \sin \omega t \} d\omega \quad (3-56)$$

在 Dubner 和 Abat 的方法中，假設 $h(t)$ 是一個變數為 t 的實數函數，且當 $t < 0$ 時

$h(t) = 0$ 。接著，為了建構一個以 $2T$ 為週期函數 $g_n(t)$ 的無窮集合，令

$$g_n(t) = \begin{cases} h(nT-t) & -T \leq t \leq 0 \\ h(nT+t) & 0 \leq t \leq T, \\ h((n+2)T-t) & T \leq t \leq 2T \end{cases} \quad n=0, 2, 4, \dots \quad (3-57)$$

$$g_n(t) = \begin{cases} h((n+1)T+t) & -T \leq t \leq 0 \\ h((n+1)T-t) & 0 \leq t \leq T, \\ h((n-1)T+t) & T \leq t \leq 2T \end{cases} \quad n=1, 3, 5, \dots \quad (3-58)$$

將 $g_n(t)$ 表示成傅立葉餘弦級數，則可得到

$$g_n(t) = \frac{A_{n,0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{n,k} \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) \quad (3-59)$$

其中，計算傅立葉餘弦級數的係數

$$A_{n,k} = \frac{2}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} h(t) \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) dt \quad (3-60)$$

亦可以將 $h(t)$ 函數改寫如下

$$h(t) = e^{-\alpha t} f(t) \quad (3-61)$$

或是

$$f(t) = e^{\alpha t} h(t) \quad (3-62)$$

接著將所有 $A_{n,k}$ 函數加總可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{n,k} = \frac{2}{T} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(t) \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \operatorname{Re} \left[F\left(\alpha + i \frac{k\pi}{T}\right) \right] \quad (3-63)$$

利用式(3-59)、(3-63)，將所有 $g_n(t)$ 加總並乘以 $e^{\alpha t}$ 可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha t} g_n(t) = \frac{2e^{\alpha t}}{T} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{Re} [F(\alpha)] + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left[F\left(\alpha + i \frac{k\pi}{T}\right) \right] \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) \right\} \quad (3-64)$$

利用式(3-57)、(3-58)、(3-61)可得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha t} g_n(t) &= f(t) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\alpha kT} [f(2kT+t) + e^{2\alpha t} f(2kT-t)] \\ &= f(t) + \text{ERROR1}(\alpha, t, T) \end{aligned} \quad (3-65)$$

對於任一組時間 $0 \leq t \leq 2T$ 來說，可將上式重新表示如下

$$f(t) + \text{ERROR1}(\alpha, t, T) = \frac{2e^{\alpha t}}{T} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{Re} [F(\alpha)] + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left[F\left(\alpha + i \frac{k\pi}{T}\right) \right] \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) \right\} \quad (3-66)$$

上式即為 Dubner 和 Abat 所推導的公式，其中 ERROR1 和 α, t, T 有關。在 ERROR1

中可以清楚的看出誤差最大的來源是來自於 $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\alpha kT} f(2kT-t)e^{2\alpha t}$ ，一旦計算時

間 t 增長，誤差將會呈指數增加，因此在 Dubner 和 Abat 的公式中計算時間最好

選在 $t \leq \frac{T}{2}$ 。Durbin 參考 Dubner 和 Abat 的方法，一樣考慮 $h(t)$ 在 $(nT, (n+1)T)$ 區

間中，但改用 $k_n(t)$ 建構一個以 $2T$ 為週期的奇函數無窮集合，令

$$k_n(t) = \begin{cases} -h(nT-t) & -T \leq t \leq 0 \\ h(nT+t) & 0 \leq t \leq T \\ -h((n+2)T-t) & T \leq t \leq 2T \end{cases}, \quad n=0, 2, 4, \dots \quad (3-67)$$

$$k_n(t) = \begin{cases} h((n+1)T+t) & -T \leq t \leq 0 \\ -h((n+1)T-t) & 0 \leq t \leq T, \\ h((n-1)T+t) & T \leq t \leq 2T \end{cases} \quad n=1, 3, 5, \dots \quad (3-68)$$

針對每一個奇函數 $k_n(t)$ ，將其表示成傅立葉正弦級數，則可得到

$$k_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{n,k} \sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right) \quad (3-69)$$

其中，計算傅立葉正弦級數的係數

$$B_{n,k} = \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-\alpha t} f(t) \sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right) dt \quad (3-70)$$

接著，把所有係數加總起來可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,k} = \frac{2}{T} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(t) \sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right) dt = -\frac{2}{T} \operatorname{Im} \left[F\left(\alpha + i \frac{k\pi}{T}\right) \right] \quad (3-71)$$

再將式(3-69)中所有 $k_n(t)$ 加總並乘以 $e^{\alpha t}$ 可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha t} k_n(t) = -\frac{2e^{\alpha t}}{T} \left\{ \operatorname{Im} \left[F\left(\alpha + i \frac{k\pi}{T}\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right) \right\} \quad (3-72)$$

同樣地，利用式(3-61)、(3-67)、(3-68)可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha t} k_n(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\alpha kT} \left[f(2kT+t) - e^{2\alpha t} f(2kT-t) \right] \quad (3-73)$$

仍可將上式重新表示如下

$$f(t) + \operatorname{ERROR2}(\alpha, t, T) = -\frac{2e^{\alpha t}}{T} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Im} \left[F\left(\alpha + i \frac{k\pi}{T}\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right) \right\} \quad (3-74)$$

於此將相類似的兩式(3-66)和(3-74)重寫於下方，並討論兩者可能的誤差來源，

$$\begin{aligned} f(t) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\alpha kT} \left[f(2kT+t) + e^{2\alpha t} f(2kT-t) \right] \\ = \frac{2e^{\alpha t}}{T} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{Re} [F(\alpha)] + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left[F\left(\alpha + i \frac{k\pi}{T}\right) \right] \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) \right\} \end{aligned} \quad (3-75)$$

$$\begin{aligned}
f(t) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\alpha kT} [f(2kT+t) - e^{2\alpha} f(2kT-t)] \\
= -\frac{2e^{\alpha}}{T} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \text{Im} \left[F \left(\alpha + i \frac{k\pi}{T} \right) \right] \sin \left(\frac{k\pi t}{T} \right) \right\} \quad (3-76)
\end{aligned}$$

從上面兩式可以清楚的看出，不論是式(3-75)還是式(3-76)中的誤差項，都會隨著時間 t 呈指數發散，然而這兩項卻有著一加一減不同的運算符號。為了要消除隨時間呈指數變化的誤差項，特別把式(3-75)和式(3-76)兩式相加除以 2，便可得到下式：

$$\begin{aligned}
f(t) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\alpha kT} f(2kT+t) &= f(t) + \text{ERROR3}(\alpha, t, T) \\
&= \frac{e^{\alpha}}{T} \left\{ \frac{1}{2} \text{Re} [F(\alpha)] + \sum_{k=1}^{\infty} \text{Re} \left[F \left(\alpha + i \frac{k\pi}{T} \right) \right] \cos \left(\frac{k\pi t}{T} \right) - \sum_{k=0}^{\infty} \text{Im} \left[F \left(\alpha + i \frac{k\pi}{T} \right) \right] \sin \left(\frac{k\pi t}{T} \right) \right\} \quad (3-77)
\end{aligned}$$

上式即為 Durbin 修正 Dubner 和 Abat 公式後的拉普拉斯逆轉換數值解。若忽略 $\text{ERROR3}(\alpha, t, T)$ 此項，便可以輕易的計算出時域下 $f(t)$ 的結果。但從另外一個角度來看，Durbin 公式中數值的誤差來源其實來自於式(3-77)中的 $\text{ERROR3}(\alpha, t, T)$ ，現在變成只和 αT 有關，為一個固定值，並不像 ERROR1 和 ERROR2 會隨時間呈指數成長。另外，式(3-77)需注意到級數中疊加的項數，在數值計算中並非為無窮大，而是有限項數 N 個疊加。

在 3-1 節中，矩陣形式的多層域響應(式(3-42))為一轉換域下的解，若在執行級數展開前，直接採用 Durbin 數值逆轉換(式(3-77))，便可求得每一層時域下的位移與應力響應。矩陣解配合數值逆轉換的技巧，這對於處理複雜結構物的長時間計算，將扮演極為重要的角色。

3-3 有限元素解

一般靜力問題是模擬結構物承受載荷後的長期響應，如果加載時間很短，或是載荷本身的性質是動態的，此時就必須採取動態分析。ABAQUS 中的動態分析包括兩大類基本方法：適用於求解線性動態問題的模態疊加法(modal superposition)與求解非線性動態問題的直接解法(direct-solution dynamic analysis)。如果欲分析的結構物為線性材料系統，且無接觸行為，而對於響應只受相對較少的頻率所支配時，就適用模態疊加法。對於分析撞擊或是碰撞的問題，模態疊加法的效率將會降低而且精確度不足。

本文採用的是直接解法中的顯式動態分析 ABAQUS/Explicit，其對於捕捉動態響應，精確地追蹤結構物內的應力波是非常重要的。當一迅速施加的動力載荷加載於結構物中，會使得結構物的響應變化非常快，而應力波往往與高階頻率有關，因此為了得到精確的解答，需要許多時間增量。ABAQUS/Explicit 應用中央差分法對運動方程式進行顯式的時間積分，利用一個增量步的動態條件計算下一個增量步的動態條件。在增量步開始時，用節點質量矩陣乘以節點加速度等於節點的合力，來求解動態平衡方程式。因為不必求解聯立方程組，所以使用顯式方法節點計算的時間成本相對較低，而大部分的時間是消耗在元素的計算上。

此處將大致簡介使用 ABAQUS/ Explicit 來計算多層域暫態響應的基本流程。包含：定義幾何模型，定義材料特性，定義分析步，設置輸出要求，定義邊界與界面連續條件，定義載荷時間歷程，建立網格與元素。在定義幾何模型中，先建立一個三維的可變形物體，以可拉伸實體之方式，將多層材料建構出。接著，定義材料的種類及材料常數(包括密度、楊氏係數、浦松比)，並且指定每一層結構物為何種材料。在定義分析步中，先建立一個動態顯示分析步，依據欲觀察的時間範圍於此處作一設定。接著設置輸出要求，設定觀測點在結構物上，並指定欲分析的物理量(應力、應變、位移、...等)及觀測時間的增量 Δt 。定義邊界與界面連續條件中，需特別注意一點，在 ABAQUS 中原為三維可變形之物體，為模

擬一維面外方向的應力波傳，必須將面內的兩個方向在邊界處做約束，層與層之間還需設定連續條件。接著定義載荷時間歷程，施予一個均勻分佈且為步階函數形式的壓應力於表面處，並設定壓應力施予的持續時間。最後，依據欲分析的精度切割網格元素，選擇 8 節點三維元素(C3D8R)作為分析的元素類型。

3-4 三種方法的數值結果與討論

本節將詳細討論廣義射線法、Durbin 數值逆轉換、有限元素法等三種方法在各種不同數值算例中的計算結果。在有限元素法軟體 ABAQUS 中，採用 C3D8R 的降積分法(reduced integration)來分析多層域的暫態波傳行為。一般來說，降積分法能提供較高的精確度和較少的計算時間。而對於 Durbin's method，在方程式(3-77)中所設定的計算條件 $\alpha T = 10$ 以及疊加項數 $N=100000$ ，將用來執行拉普拉斯數值逆轉換。首先分析 3 層結構物的應力波傳行為，接著使用廣義射線法和 Durbin 拉普拉斯逆轉換，計算 10 層結構物暫態響應，和有限元素法加以比較並詳細討論。之後，對於 20 層結構物的長時間暫態響應，則是採用 Durbin 拉普拉斯逆轉換和有限元素法來分析其波傳行為。

3-4-1 三層結構物於均佈載荷下的暫態響應

為驗證三種分析方法是否適用於多層域的問題，此處先以簡單的 3 層結構物進行數值計算。假設 3 層結構物是以各為 10cm 的黃銅-鋁-黃銅所組成(相關材料常數列於表 2-1 中)，當一 Heaviside 步階函數形式的均佈動力載荷施加於上表面處，對於廣義射線法來說，式(3-46)中的響應向量 \mathbf{b} 為大小 6×1 的向量。相位相關接收矩陣 \mathbf{R}_{cv} 的大小為 6×6 ，穿透反射係數矩陣 \mathbf{R} 為 6×6 ，而波源向量 \mathbf{s} 則為 6×1 。

第 1 層材料中點的應力響應，以廣義射線法計算的結果繪於圖 3-2 中。波源抵達第 1 層中點的時間為 $t/S_L^{(1)}h_1 = 0.5$ ，振幅大小為 $\sigma/\sigma_0 = -0.61$ 的一次反射 $r_{1/2}$ 於

$t/S_L^{(1)}h_1 = 1.5$ 時抵達。接著，來自上表面處、振幅大小為 $\sigma/\sigma_0 = -1$ 的二次反射 $r_{1/2}$ 、 $r_{1/0}$ 於 $t/S_L^{(1)}h_1 = 2.5$ 時抵達。當 $t/S_L^{(1)}h_1 = 2.93$ 時，應力波來自於第 2、3 層界面間的反射，其射線路徑包含了兩次穿透 ($t_{1/2}$ 、 $t_{2/1}$) 與一次反射 ($r_{2/3}$)，隨著觀測時間的增加，越來越多次數的穿透反射都必須考量。採用 Durbin 數值逆轉換(式(3-77))的暫態響應則顯示於圖 3-3 中，可以發現在觀測時間 $t/S_L^{(1)}h_1 = 20$ 之內，其數值計算的結果和圖 3-2 完全吻合，即使是步階函數的應力波剛抵達觀測點時，所造成不連續的跳躍現象，或是時間後期的多處轉折，在 Durbin 疊代項數 $N=100000$ 的分析之下，數值結果有很好的收斂性。圖 3-4 是 FEM 計算的結果，採用 1000 個元素來分析黃銅-鋁-黃銅組成的三層結構物，除了一開始的響應，前幾個抵達觀測點的應力波較為精準外，隨著時間的增加，層域內經過多次反射後抵達觀測點的波，FEM 的計算結果便無法精確的描述其細部轉折。儘管如此，整體響應的輪廓(波包)還是能夠應用 FEM 作有效的模擬計算。

若考慮一個三層不相同的結構物，第 1 層為 10cm 黃銅，第 2 層為 20cm 鋼，第 3 層為 5cm 鋁，當觀測點位於第一層 $x = -2cm$ 處的位置，廣義射線法，Durbin 數值逆轉換，以及 FEM 解的計算結果個別繪置於圖 3-5~圖 3-7 中。而觀測點位於第一層 $x = -8cm$ 處的位置，三種方法的計算結果個別繪於圖 3-8~圖 3-10 中。在 $x = -2cm$ 處，前五個應力波於 $t/S_L^{(1)}h_1 = 0.2, 1.8, 2.2, 3.8, 4.2$ 抵達。第一個為源波，第二個為一次反射 ($r_{1/2}$)，第三個為二次反射 ($r_{1/2}$ 、 $r_{1/0}$)，第四個為三次反射 ($r_{1/2}$ 、 $r_{1/0}$ 、 $r_{1/2}$)，第五個為四次反射 ($r_{1/2}$ 、 $r_{1/0}$ 、 $r_{1/2}$ 、 $r_{1/0}$)，皆為應力波在第 1 層材料來回反射的結果。直到 $t/S_L^{(1)}h_1 = 4.82$ 時，來自 2、3 層界面的反射波 ($r_{2/3}$) 第一次抵達觀測點，其應力大小值為 $\sigma/\sigma_0 = -0.536$ 。在 $x = -8cm$ 處，前五個應力波抵達的時間變為 $t/S_L^{(1)}h_1 = 0.8, 1.2, 2.8, 3.2, 及 4.22$ ，亦皆為應力波在第 1 層材料來回反射的結果。在較靠近載荷端的觀測點 $x = -2cm$ ，大部分的應力響應約略在 $\sigma/\sigma_0 = -1$ 的附近震盪，而隨著觀測點遠離載荷端 ($x = -8cm$)，在 $\sigma/\sigma_0 = -1$ 處

震盪的現象便明顯的減少，取而代之的是 $\sigma/\sigma_0=0$ 和 -1 之間波包形式的週期震盪。

再考慮一個同樣為黃銅、鋁、鋼所構成的三層結構物，第1層為10cm黃銅，第2層為5cm鋼，第3層為20cm鋁。第1層材料(黃銅)中點以廣義射線法、Durbin數值逆轉換、FEM計算的結果個別繪於圖3-11~圖3-13中，而前五個應力波抵達的時間為 $t/S_L^{(1)}h_1=0.5, 1.5, 2.25, 2.5, \text{及} 3$ 。若將此三種均質材料重新排列位置與厚度，第1層為10cm鋁，第2層為5cm黃銅，第3層為10cm鋼。第1層材料(鋁)中點以廣義射線法、Durbin數值逆轉換、FEM計算的結果顯示於圖3-14，圖3-15，與圖3-16中，此時前五個應力波於 $t/S_L^{(1)}h_1=0.5, 1.5, 2.5, 2.9, \text{及} 3.5$ 時間抵達觀測點。

在本節三層結構物的分析中，是採用黃銅、鋁、鋼三種材料，依據不同厚度與排列方式，計算觀測點位在第1層內的應力響應。廣義射線法所計算出的結果，為一無誤差的精確解。利用邊界及界面連續條件求解待定係數，進而採用Durbin數值逆轉換的方式，稱之為半解析半數值解。若Durbin數值參數 αT 和項數 N 調控得宜，亦能得到不錯的收斂性，與精確解的結果幾乎一致。唯在FEM解的部份，當切割的元素為1000個時，一旦計算時間增長，隨著應力波在域內不斷來回反射與穿透的結果，響應圖中細微的轉折部份，並無法完整且精確的呈現。

3-4-2 十層結構物於均佈載荷下的暫態響應

當一Heaviside步階函數形式的均佈載荷施加於一10層結構物上，在本節中將詳細研究其暫態響應。假設此10層結構物是由A-B-C-A-B-C-A-B-C-A材料所組成(A、B、C材料為A：黃銅，10cm，B：鋼，20cm，C：鋁，5cm，而相關的材料常數則列於表2-1中)。 $\sigma_0 H(t)$ 動力載荷施載於上表面 $x=0$ (此處 $H(t)$ 為Heaviside步階時間函數)。當觀測點設在第1層、第2層、第5層、第9層中點

時，廣義射線法、Durbin 數值逆轉換和有限元素法等三種分析方式用來計算暫態響應，並且進一步比較這些數值結果。

圖 3-17~圖 3-20 個別顯示當觀測點位在第 1 層、第 2 層、第 5 層、第 9 層中點時，10 層結構物的暫態響應。暫態響應的應力波傳行為採用三種計算方式：廣義射線法(紅色線)，Durbin 法(藍色線)，以及有限元素法(綠色線)。其中，廣義射線法和 Durbin 法得到的數值結果極為一致，然而有限元素法計算的結果，存在著截斷誤差所造成的 Gibbs 現象。這現象只出現在響應不連續處的周圍，產生不具物理意義的震盪。在圖 3-17~圖 3-20 中，波源第一次抵達第 1 層、第 2 層、第 5 層、第 9 層中點的時間個別為 $t/S_L^{(1)}h_1 = 0.5, 1.77, 4.57, \text{及 } 8.43$ 。在圖 3-17 中，在無因次化時間 $t/S_L^{(1)}h_1 = 16$ 內，總計使用了 2252 個射線路徑來繪製暫態響應，而在方程式(3-46)中選取 $i = 14$ 以確保所有的射線路徑都有被考慮到。圖 3-17 顯示源波抵達第一層中點的時間為 $t/S_L^{(1)}h_1 = 0.5$ ，振幅大小為 $\sigma/\sigma_0 = -1.09$ 的一次反射 $r_{1/2}$ 於 $t/S_L^{(1)}h_1 = 1.5$ 時抵達，而振幅大小為 $\sigma/\sigma_0 = -1$ 的兩次反射 $r_{1/2}$ 、 $r_{1/0}$ 於 $t/S_L^{(1)}h_1 = 2.5$ 時抵達。在後期的觀測時間中，應該要考慮到應力波更多次數的穿透反射。

當 $i = 14$ 時，由 2054 個射線路徑所繪製的暫態響應(圖 3-18)，源波從上表面直接穿透抵達至第 2 層中點的觀測點，其應力響應的大小跳至 $\sigma/\sigma_0 = -1.09$ 。第二個波的振幅大小 $\sigma/\sigma_0 = -0.58$ ，而抵達第 2 層中點的時間為 $t/S_L^{(1)}h_1 = 3.25$ ，是由於應力波於第 2、3 層界面的反射，其射線路徑包含了一次穿透 $t_{1/2}$ 及一次反射 $r_{2/3}$ 。第 5 層和第 9 層的暫態響應分別繪製於圖 3-19、圖 3-20。當 $i = 14$ ，使用 1950 個射線來計算圖 3-19 的響應，而對於圖 3-20($i = 11$)，只需 12 個射線和 5 個群組來繪製暫態響應。

隨著觀測時間的增加，所要考慮的射線路徑也會變多，廣義射線法將會變得十分複雜以致於難以計算多層域的暫態響應。基於這個理由，接著將使用

Durbin's 數值拉普拉斯逆轉換和有限元素法來分析 20 層結構物的長時間響應。

3-4-3 二十層結構物於均佈載荷下的長時間響應

假設 20 層結構物中包含三種不同的材料，以 A-B-C-A-B-C-A-B-C-A-B-C-A-B-C-A-B-C-A-B 的順序來排列，並且在結構的上表面處代入一 Heaviside 函數形式的均佈載荷。在位置 $x = -5\text{cm}$ (第 1 層中點) 處，以 Durbin 數值逆轉換和有限元素法繪製的 20 層結構物長時間響應，顯示於圖 3-21 中。在無因次化時間 40 之內，有限元素解(紅色線)和 Durbin 的數值結果(藍色線)極為一致。而當觀測時間逐漸增長至 100 時，由每一層交界面所引發出來的穿透和反射波將急遽增加，也因如此，響應震盪程度亦跟著變大。當時間增加時，有限元素解和 Durbin 的數值結果會有些微不同，而且，在圖 3-21 中可以發現一個有趣的現象：無因次化的應力在 $\sigma/\sigma_0 = -1$ 附近震盪，也代表在觀測時間內皆為壓應力。

如果將 10 層結構和 20 層結構的暫態響應相比較，由於兩者皆為 A、B、C 三種材料所組成，當觀測點設在第 1 層中點，圖 3-17 的暫態響應和圖 3-21 的初期(時間 $t/S_L^{(1)}h_1 = 16$ 內)暫態響應是相同的。這現象意味著來自於後面十層的應力波尚未抵達第 1 層觀測點。由 Durbin 數值逆轉換和有限元素法計算的第 10 層中點的長時間響應繪製於圖 3-22。兩種方法的數值結果皆顯示來自上表面的源波抵達觀測點的時間約為 $t/S_L^{(1)}h_1 = 10$ ，而應力大小在 $\sigma/\sigma_0 = -1$ 附近開始震盪，直到來自底面的反射波在時間 $t/S_L^{(1)}h_1 = 30$ 抵達，應力大小又歸赴為 0 附近震盪。等到上表面的反射波又再次抵達觀測點時，再次造成附近 $\sigma/\sigma_0 = -1$ 震盪的現象。從長時間響應的角度來看，有一個 $\sigma/\sigma_0 = 0$ 和 $\sigma/\sigma_0 = -1$ 間的波包存在於響應的趨勢中。這也意味著如果觀測點是設在結構物中點的時候，可以把一個 20 層的週期性結構想像成一個等效層。圖 3-23 和圖 3-24 個別表示觀測點位在 15-16 層界

面和 19-20 層界面的長時間響應，紅色線為有限元素法的計算結果，藍色線則為 Durbin 數值逆轉換的結果。在圖 3-23 的波傳現象和圖 3-22 有些相似，而圖 3-24 有個值得注意的現象：長時間的響應總是在 $\sigma/\sigma_0 = 0$ 附近震盪，這是因為觀測點設在比較靠近自由邊界的緣故。雖然應力波是以壓應力的方式施於上表面，但在多層域的最後一層的界面卻會出現較大的張應力情況，這也說明了為何多層複合材料常會在最後一層出現脫層的現象。



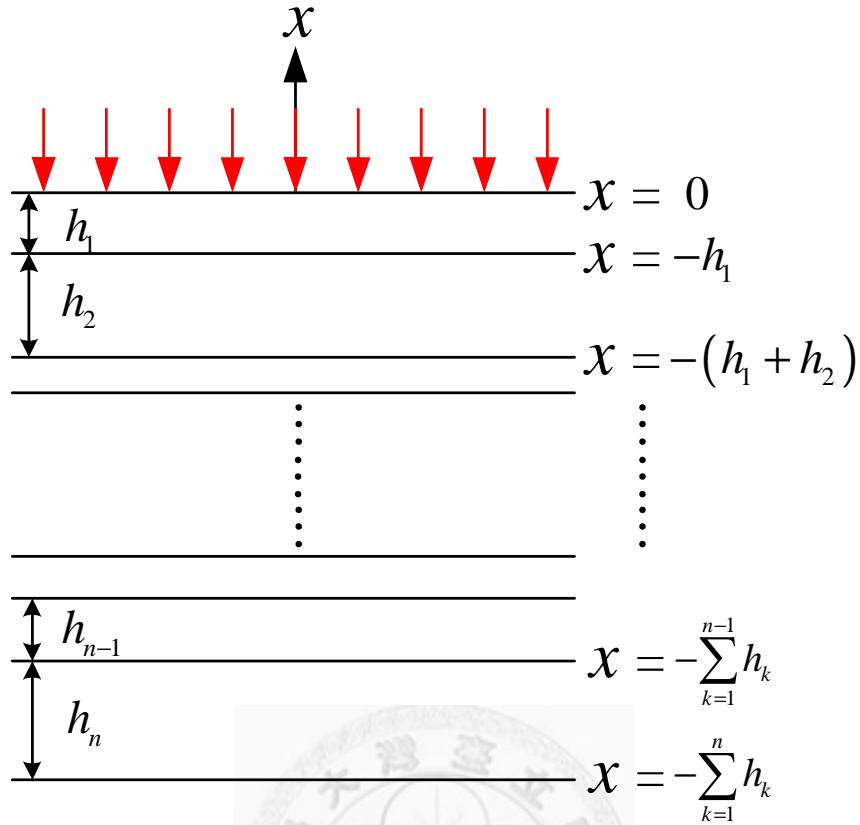


圖 3-1 當一均佈動力載荷施加於 n 層結構物上表面的座標及結構示意圖。

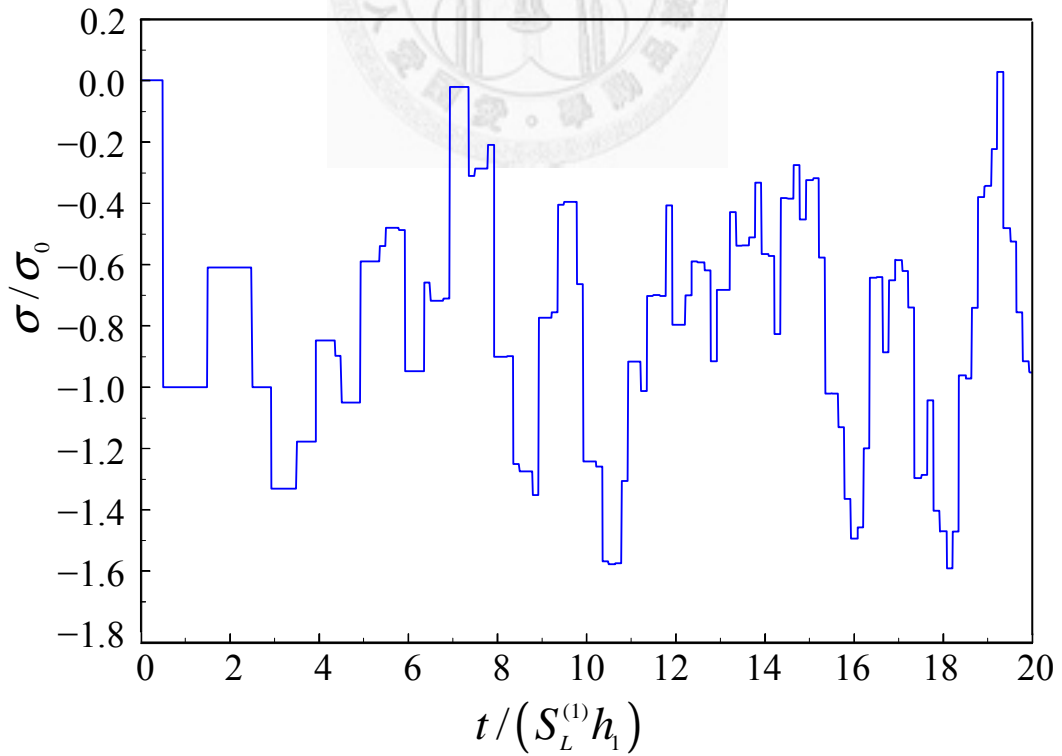


圖 3-2 廣義射線法計算三層結構物(黃銅 10cm, 鋁 10cm, 黃銅 10cm), 當觀測點位在第 1 層材料(黃銅)中點的暫態響應圖。

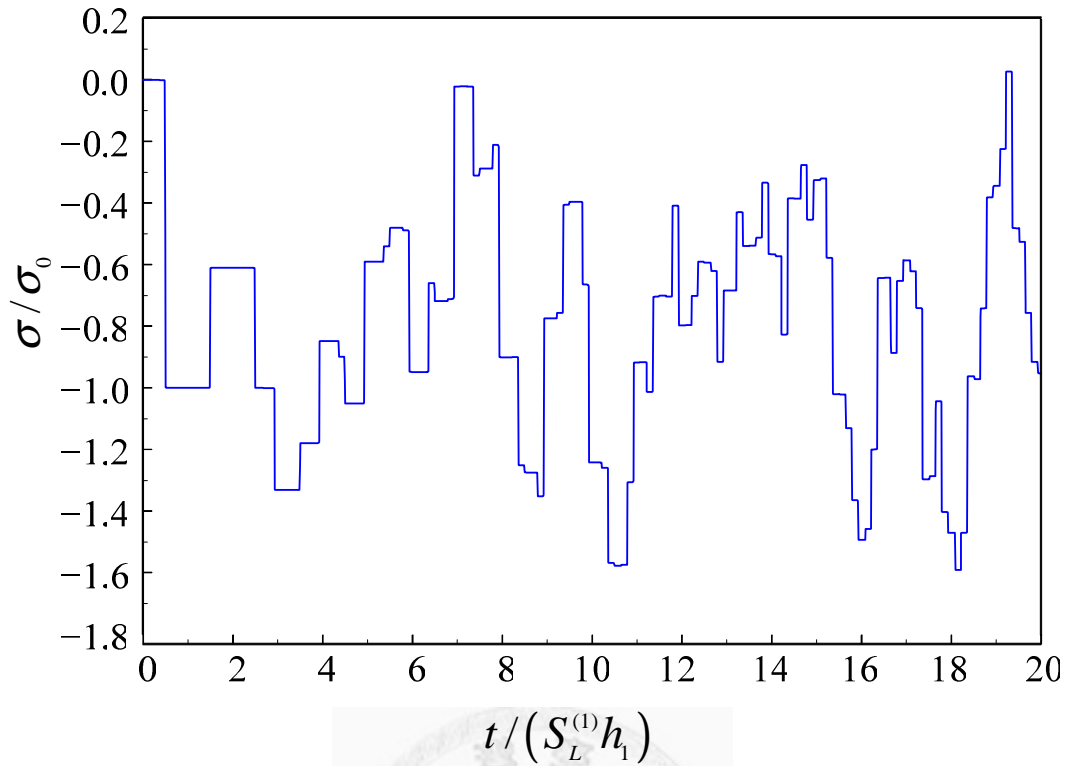


圖 3-3 Durbin 數值逆轉換計算三層結構物(黃銅 10cm，鋁 10cm，黃銅 10cm)，當觀測點位在第 1 層材料(黃銅)中點的暫態響應圖。

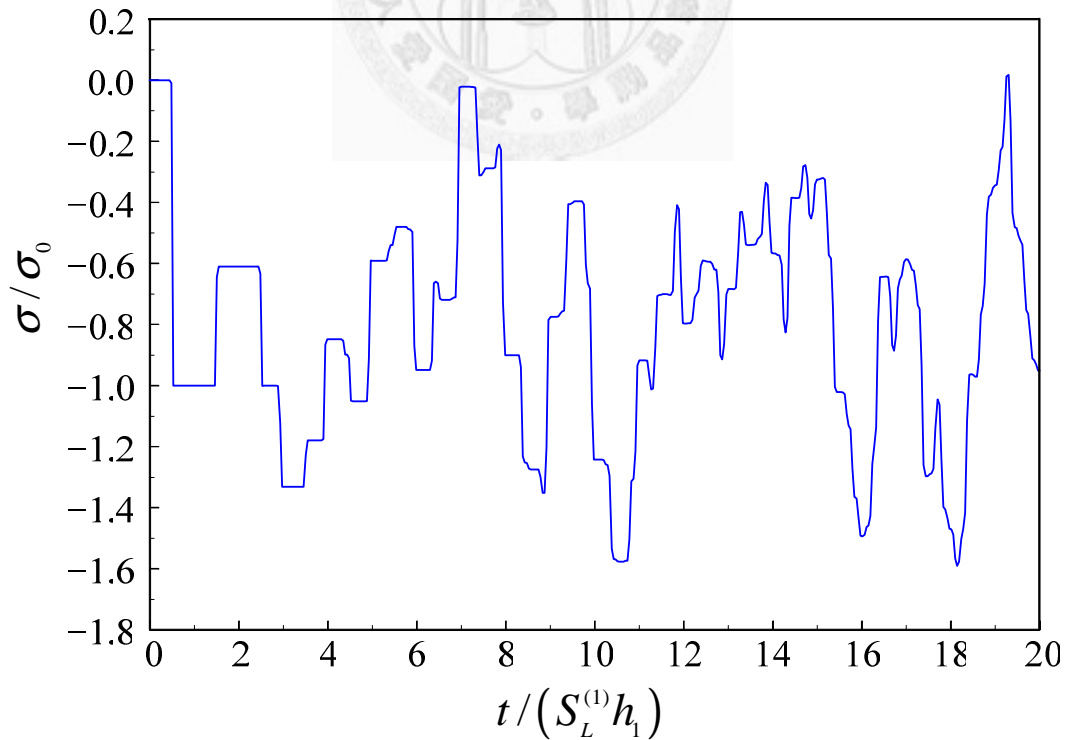


圖 3-4 有限元素法計算三層結構物(黃銅 10cm，鋁 10cm，黃銅 10cm)，當觀測點位在第 1 層材料(黃銅)中點的暫態響應圖。

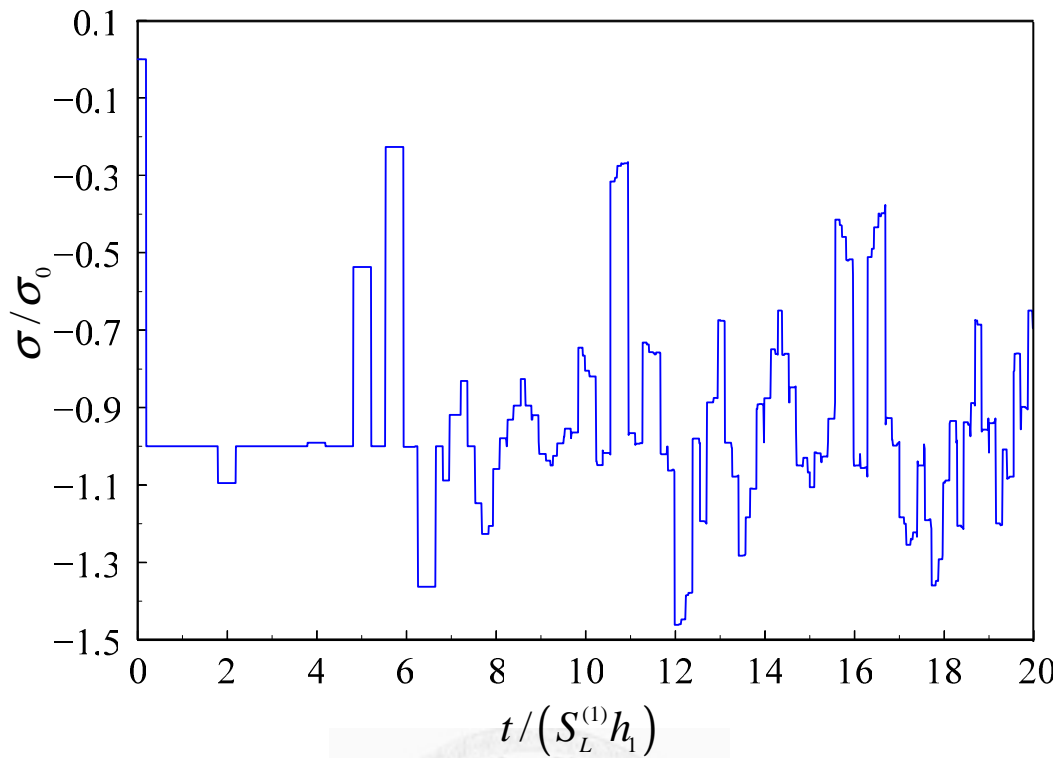


圖 3-5 廣義射線法計算三層結構物(黃銅 10cm，鋼 20cm，鋁 5cm)，當觀測點位在 $x = -2\text{cm}$ 的暫態響應圖。

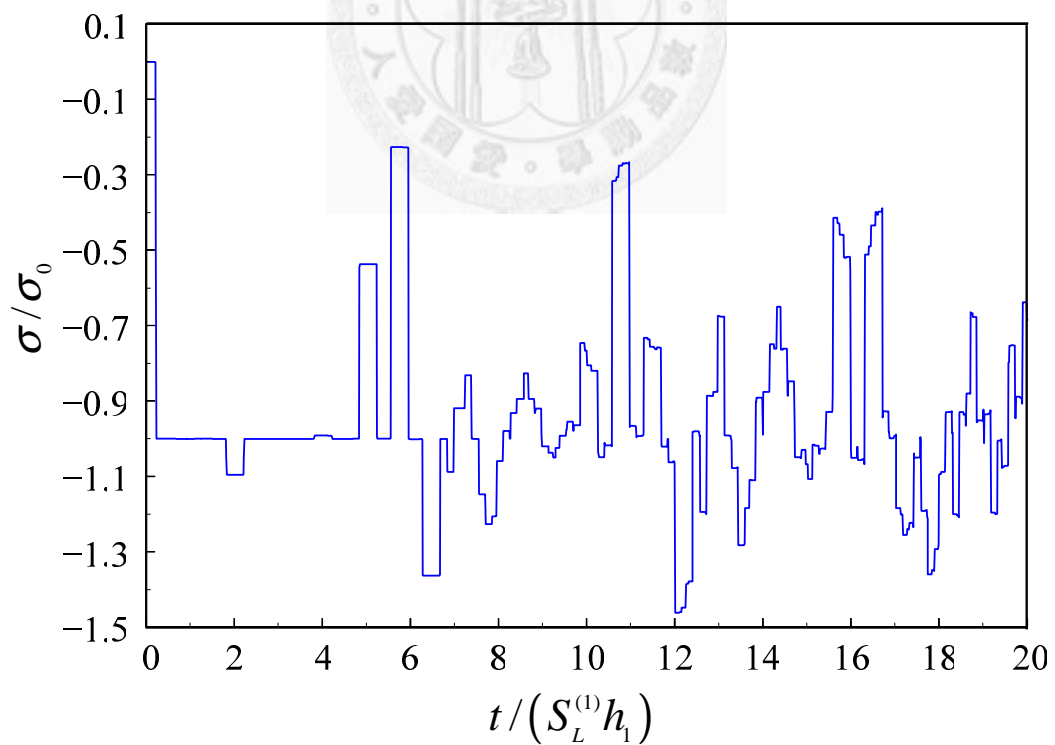


圖 3-6 Durbin 數值逆轉換計算三層結構物(黃銅 10cm，鋼 20cm，鋁 5cm)，當觀測點位在 $x = -2\text{cm}$ 的暫態響應圖。

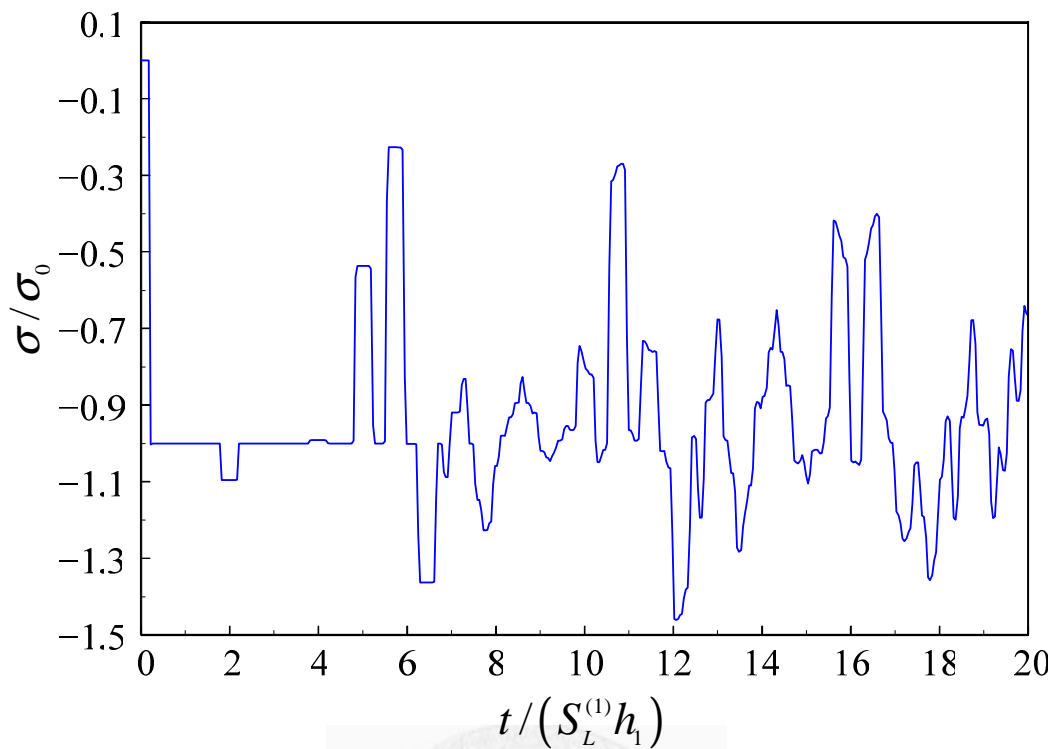


圖 3-7 有限元素法計算三層結構物(黃銅 10cm，鋼 20cm，鋁 5cm)，當觀測點位在 $x = -2cm$ 的暫態響應圖。

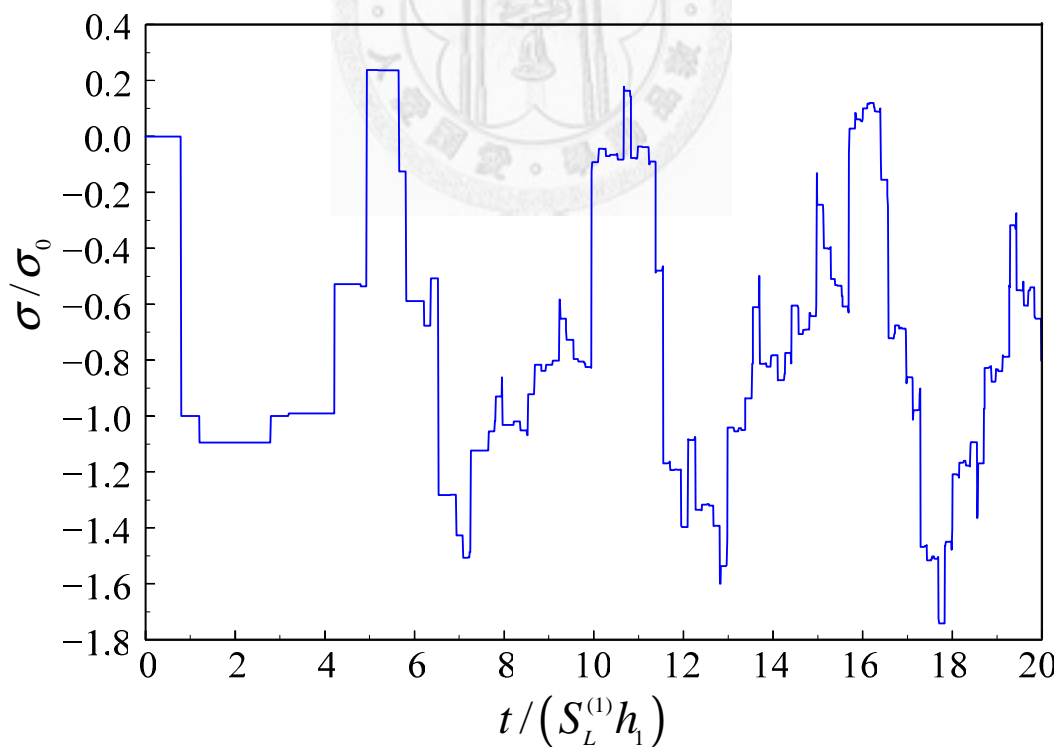


圖 3-8 廣義射線法計算三層結構物(黃銅 10cm，鋼 20cm，鋁 5cm)，當觀測點位在 $x = -8cm$ 的暫態響應圖。

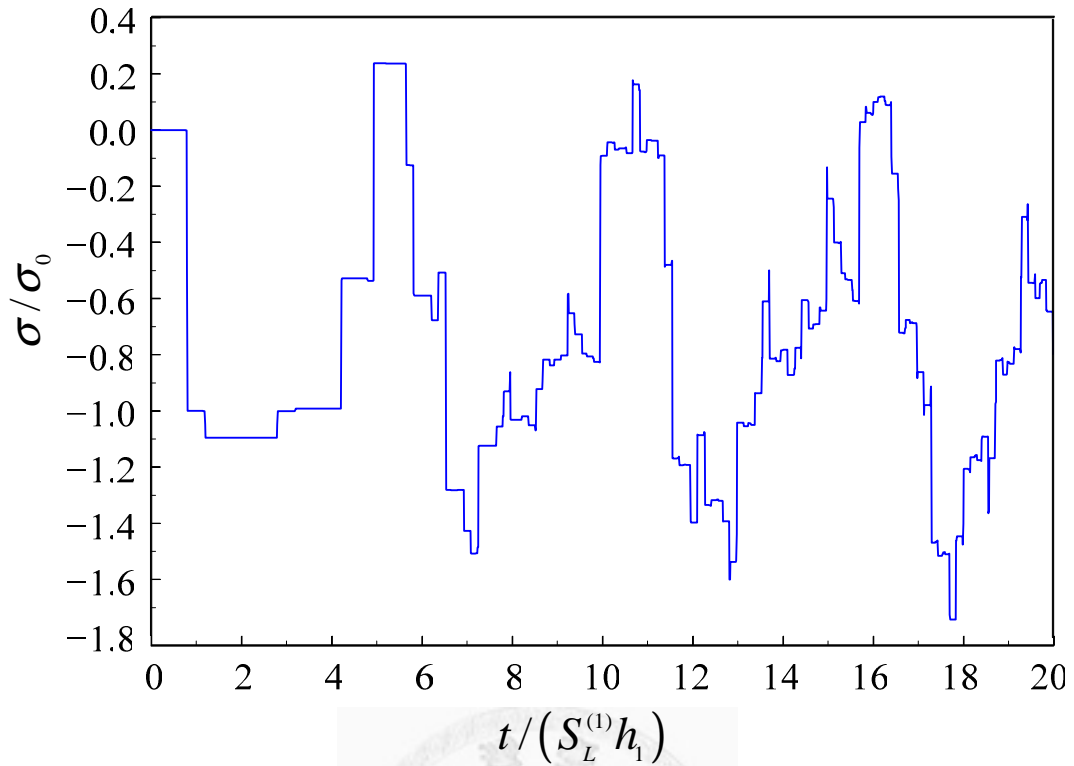


圖 3-9 Durbin 數值逆轉換計算三層結構物(黃銅 10cm，鋼 20cm，鋁 5cm)，當觀測點位在 $x = -8cm$ 的暫態響應圖。

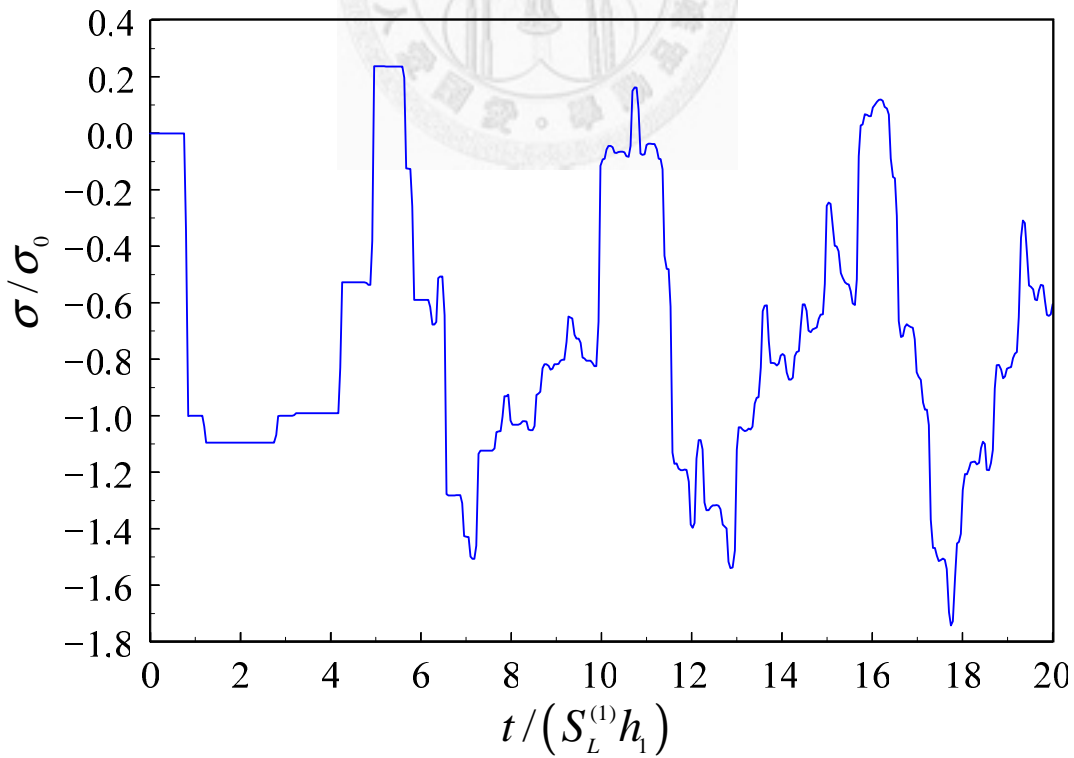


圖 3-10 有限元素法計算三層結構物(黃銅 10cm，鋼 20cm，鋁 5cm)，當觀測點位在 $x = -8cm$ 的暫態響應圖。

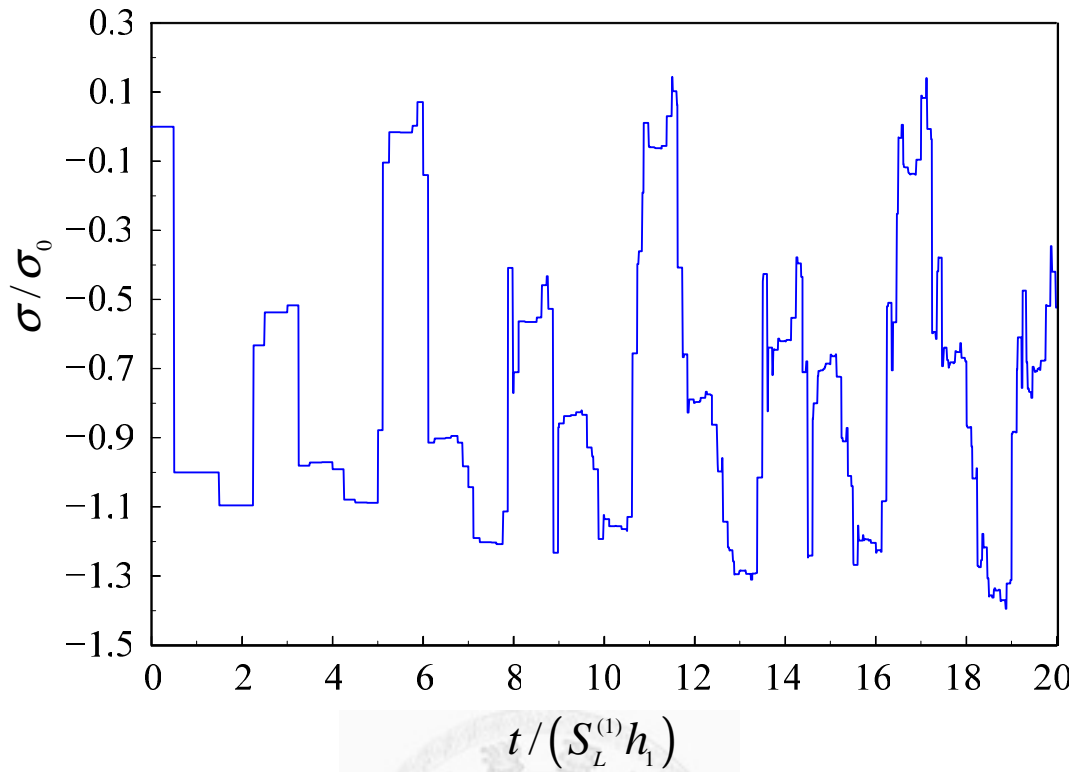


圖 3-11 廣義射線法計算三層結構物(黃銅 10cm，鋼 5cm，鋁 20cm)，當觀測點位
在第 1 層材料(黃銅)中點的暫態響應圖。

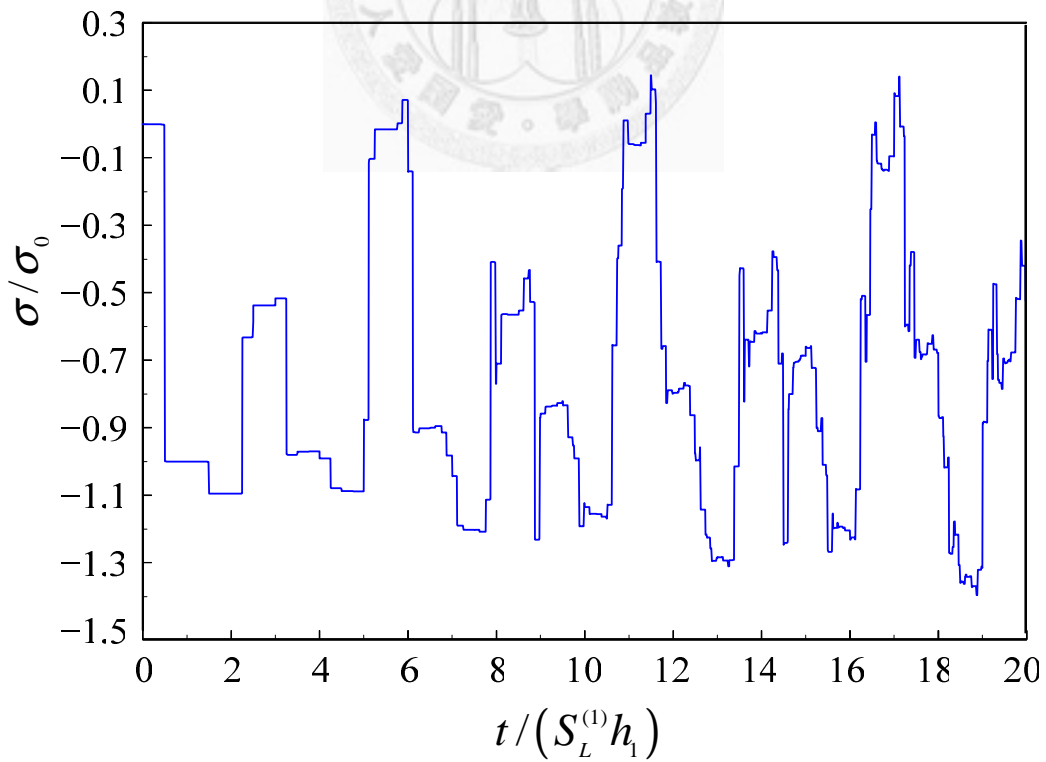


圖 3-12 Durbin 數值逆轉換計算三層結構物(黃銅 10cm，鋼 5cm，鋁 20cm)，當
觀測點位在第 1 層材料(黃銅)中點的暫態響應圖。

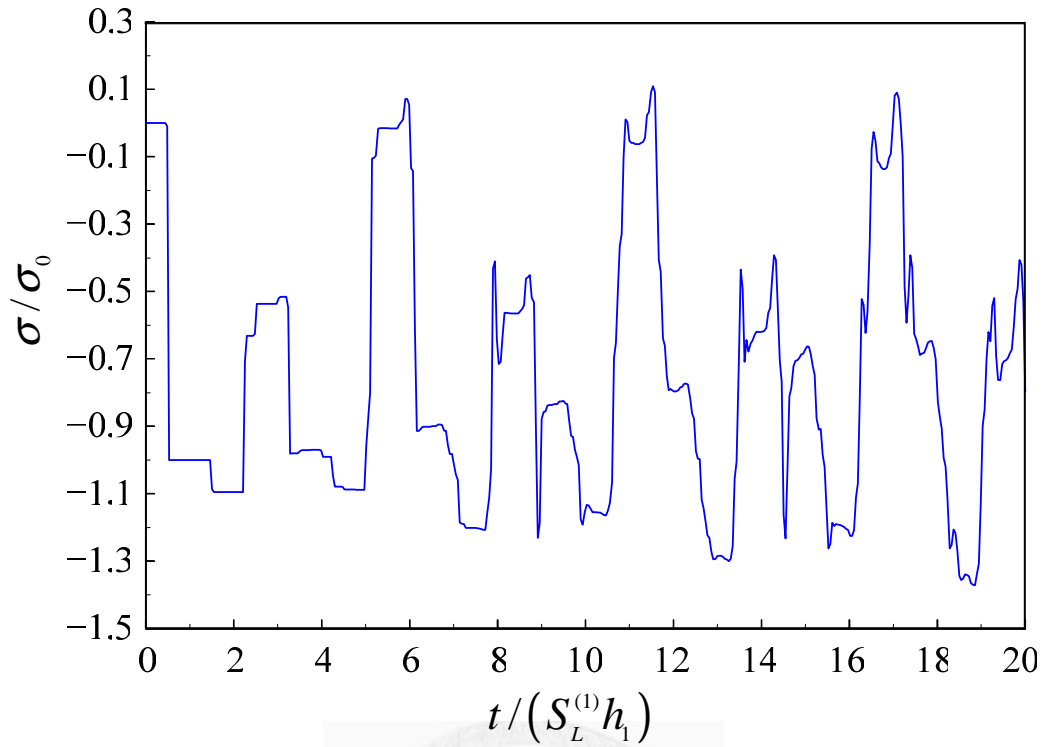


圖 3-13 有限元素法計算三層結構物(黃銅 10cm，鋼 5cm，鋁 20cm)，當觀測點位
在第 1 層材料(黃銅)中點的暫態響應圖。

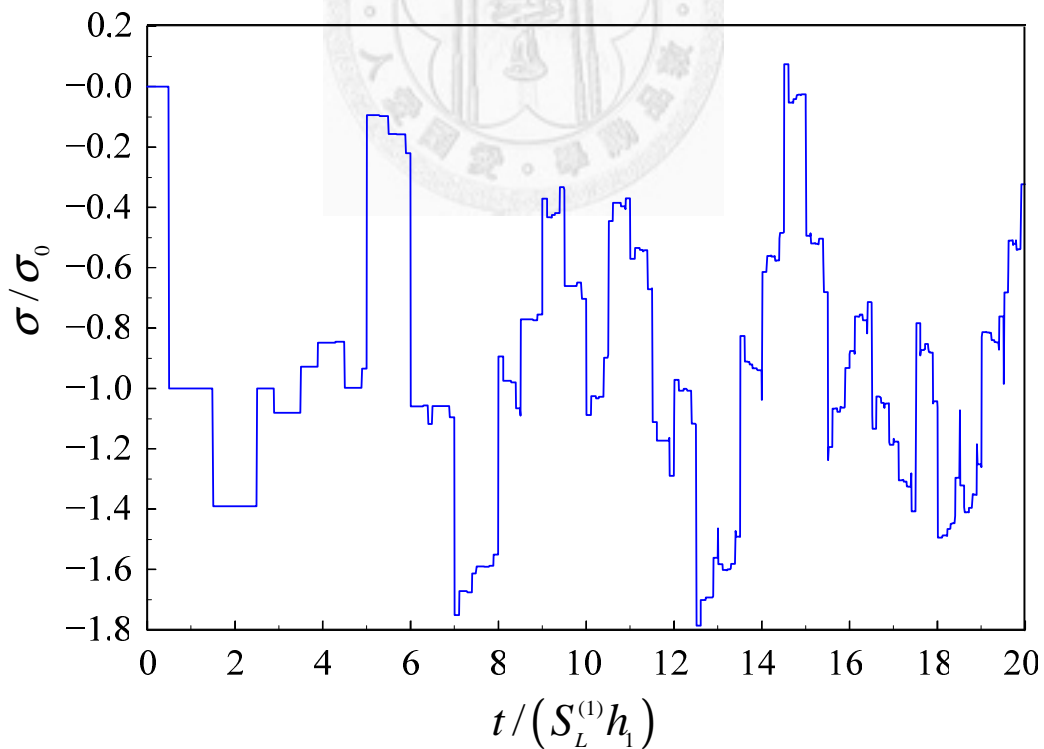


圖 3-14 廣義射線法計算三層結構物(鋁 10cm，黃銅 5cm，鋼 10cm)，當觀測點位
在第 1 層材料(鋁)中點的暫態響應圖。

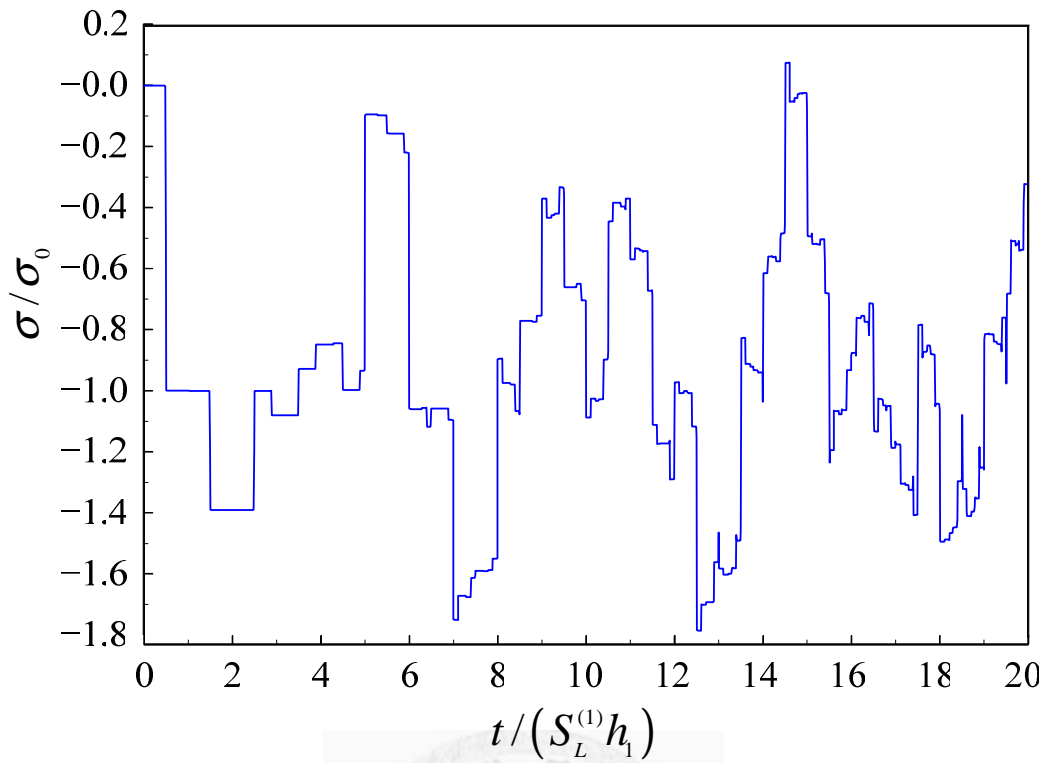


圖 3-15 Durbin 數值逆轉換計算三層結構物(鋁 10cm，黃銅 5cm，鋼 10cm)，當觀測點位在第 1 層材料(鋁)中點的暫態響應圖。

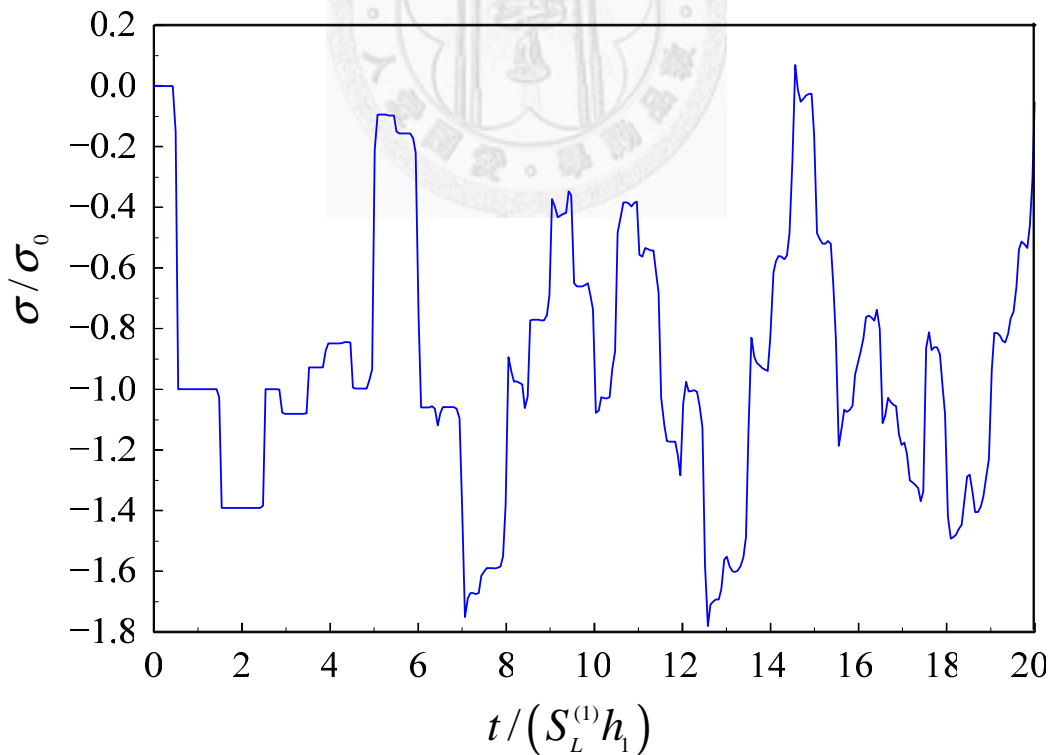


圖 3-16 有限元素法計算三層結構物(鋁 10cm，黃銅 5cm，鋼 10cm)，當觀測點位在第 1 層材料(鋁)中點的暫態響應圖。

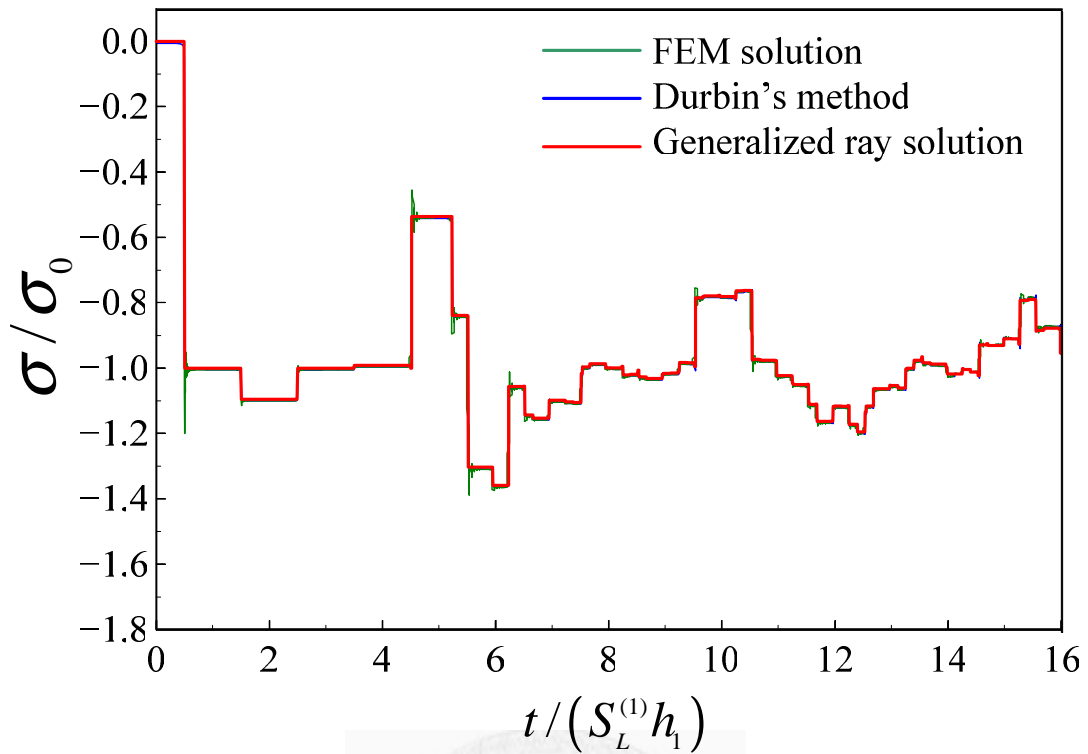


圖 3-17 廣義射線法、Durbin 逆轉換法以及有限元素法解得 10 層介質中，第 1 層中點的暫態響應圖。

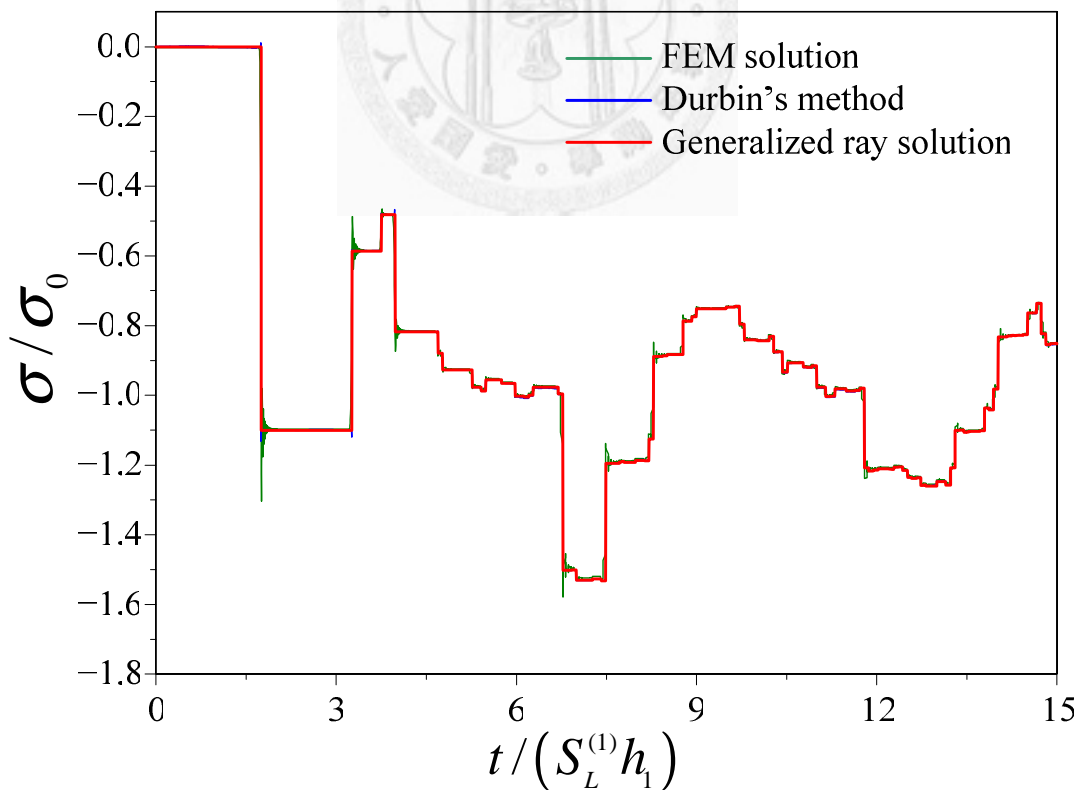


圖 3-18 廣義射線法、Durbin 逆轉換法以及有限元素法解得 10 層介質中，第 2 層中點的暫態響應圖。

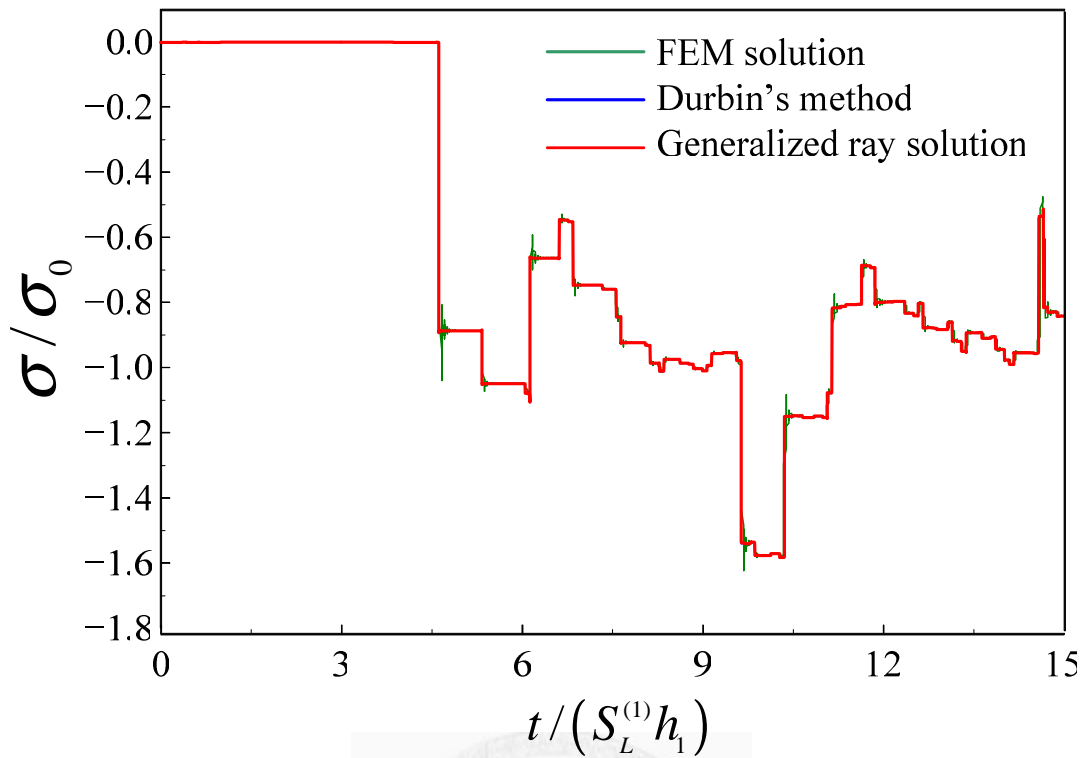


圖 3-19 廣義射線法、Durbin 逆轉換法以及有限元素法解得 10 層介質中，第 5 層中點的暫態響應圖。

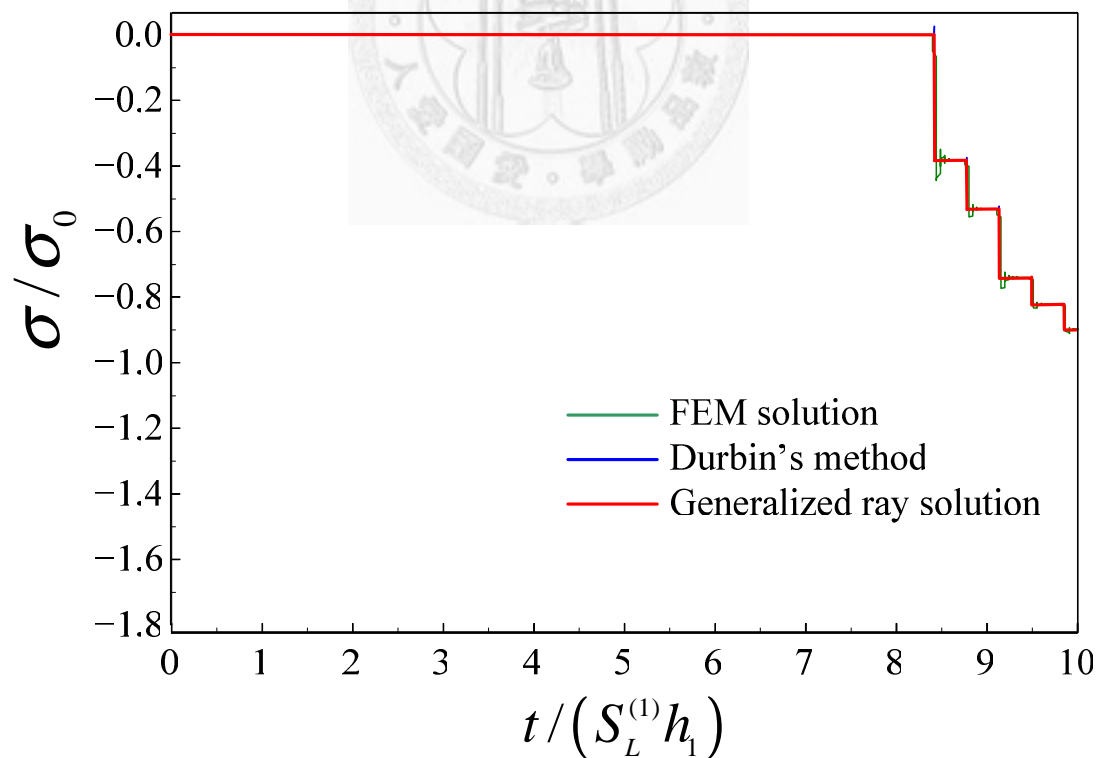


圖 3-20 廣義射線法、Durbin 逆轉換法以及有限元素法解得 10 層介質中，第 9 層中點的暫態響應圖。

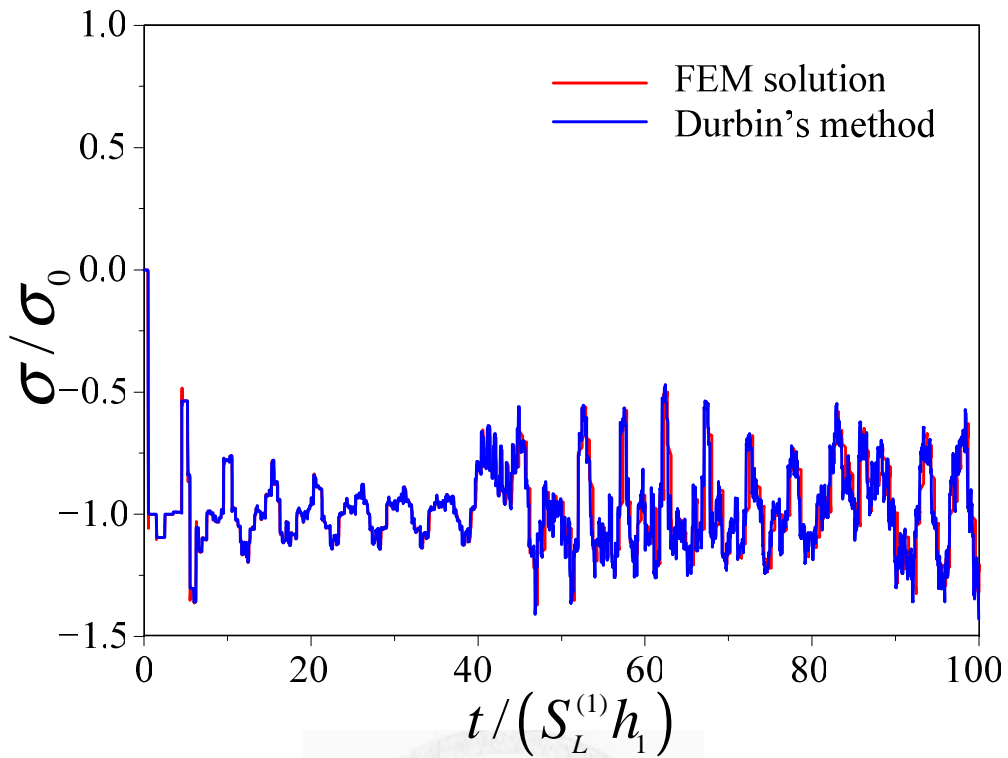


圖 3-21 使用 Durbin 逆轉換法和 FEM，計算 20 層材料中第 1 層材料中點的長時間響應。

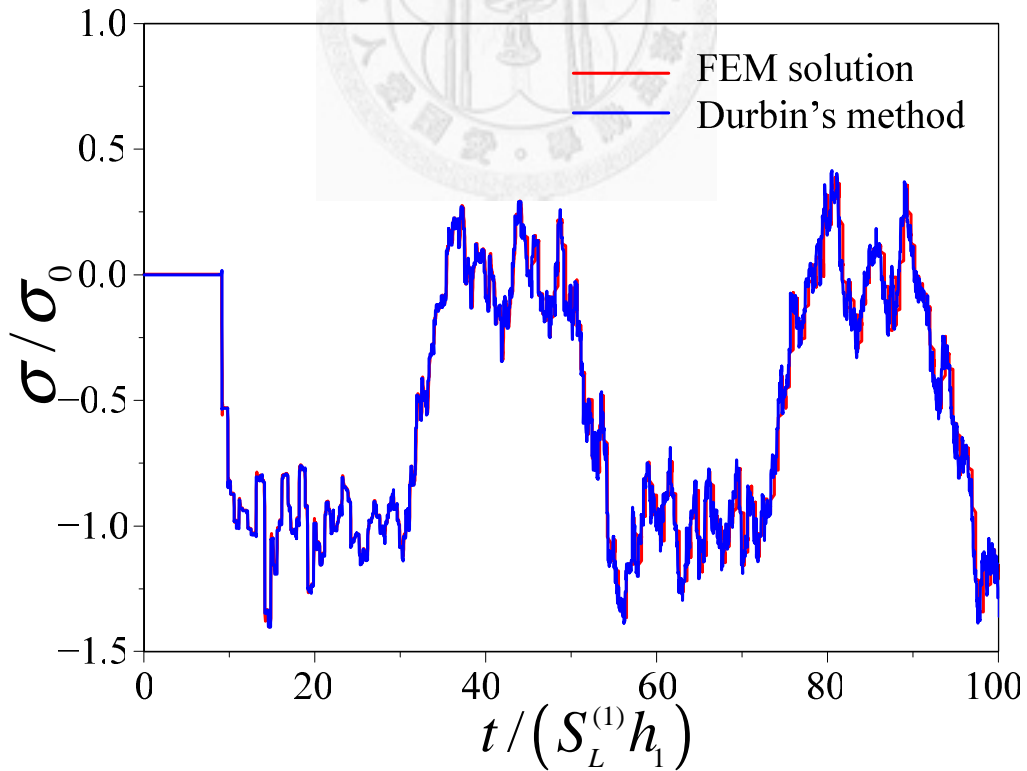


圖 3-22 使用 Durbin 逆轉換法和 FEM，計算 20 層材料中第 10 層材料中點的長時間響應。

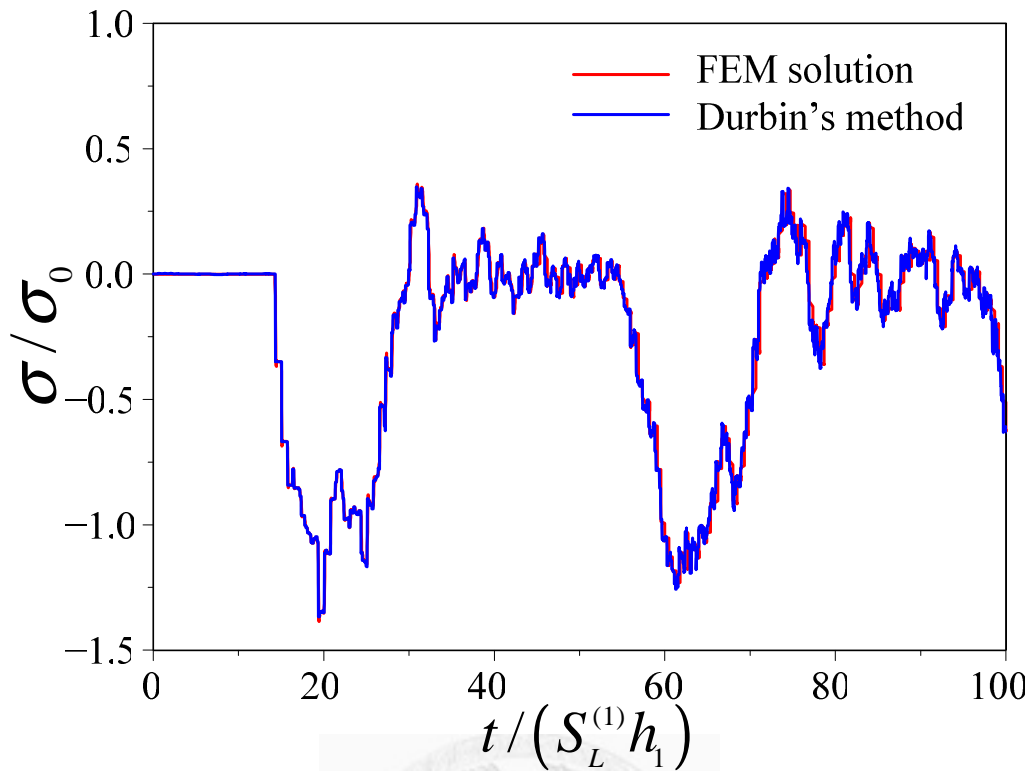


圖 3-23 使用 Durbin 逆轉換法和 FEM，計算 20 層材料中第 15、16 層界面處的長時間響應。

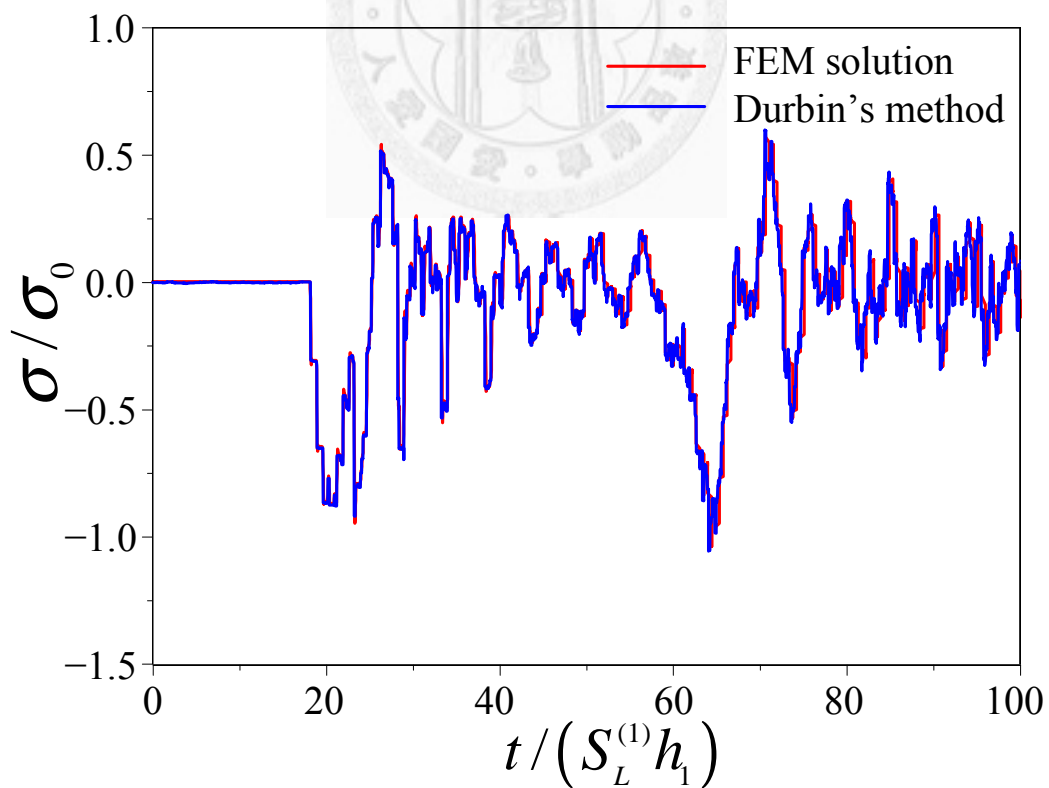


圖 3-24 使用 Durbin 逆轉換法和 FEM，計算 20 層材料中第 19、20 層界面處的長時間響應。

第四章 多層域等向性非均質材料的暫態波傳解析與 數值計算

本章利用拉普拉斯轉換技巧分析材料係數為多項式變化的功能梯度材料的暫態響應，並以 Chiu 及 Erdogan (1999) 的理論為基礎得到轉換域下的解析解，進而使用 Durbin (1974) 演算法來執行數值拉普拉斯逆轉換，建構出一套半解析半數值的分析方式，來求解功能性梯度材料的暫態響應。本章在精確度和計算效率的考量下，以有限的傅立葉正弦函數和餘弦函數所組成的 Durbin 數值逆轉換法，取代 Chiu 及 Erdogan 所使用 Abel-Tauber 的漸近理論，並發現 Durbin 演算法更適合計算長時間的暫態響應。本章也將採用多層的均質材料來模擬單層的功能梯度板，分析當施加一均佈動力載荷時，材料內部的暫態響應。由數值計算的結果可以得知，如果以十層以上的均質材料來模擬功能梯度材料，多層均質材料的動態響應能夠反應功能性梯度材料暫態響應的趨勢。另外，由多層材料阻抗不匹配所造成的不連續現象，於本章亦有詳細討論。

關於本章內容的編排，首先於第一節介紹單層功能性梯度材料的解析過程，並以多層均質材料的方式來模擬其暫態波傳行為；第二節為多層域功能性梯度材料的解析過程，進一步計算三層功能性梯度材料，雙層相異質材料內含功能性梯度材料，以及材料連續性的問題作深入的討論。

4-1 單層功能性梯度材料

4-1-1 拉普拉斯轉換法分析單層功能梯度材料受均佈動力載荷下的暫態響應

功能性梯度材料的一維暫態波傳問題 Chiu 及 Erdogan (1999) 已有詳細的數學分析。下面將簡短的介紹 Chiu 及 Erdogan (1999) 所得到在拉普拉斯轉換域下的解。今考慮一個未受擾動的功能性梯度板如圖 4-1 所示，並假設功能性梯度板的

材料特徵沿厚度方向依照下式的多項式函數作連續性變化：

$$E'(x) = E'_0 \left(a \frac{x}{l} + 1 \right)^m \quad (4-1)$$

$$\rho(x) = \rho_0 \left(a \frac{x}{l} + 1 \right)^n \quad (4-2)$$

其中 a ， m ，及 n 為功能性梯度板的梯度常數； E' ， ρ ，及 l 分別為彈性常數、質量密度以及厚度； E'_0 和 ρ_0 為位置 $x=0$ 處的彈性常數和密度。對於 y 、 z 方向無需討論的一維平面應變問題來說，彈性常數可以表示為楊氏模數和蒲松比的函數

$$E'(x) = \frac{E(x)(1-\nu(x))}{(1+\nu(x))(1-2\nu(x))} \quad (4-3)$$

其中 E 和 ν 為 x 的函數。唯一存在的 x 方向位移 u 和正向應力 σ_{xx} 之關係表示如下：

$$\sigma_{xx} = E' \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4-4)$$

非均質材料的波動方程式可以表示成

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(E'(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4-5)$$

而對於一開始未受擾動的功能性梯度板的初始條件為

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = 0 \quad (4-6)$$

接著，使用無因次化的物理量來分析方程式(4-1)、(4-2)、(4-5)、(4-6)

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[(aX+1)^m \frac{\partial U}{\partial X} \right] = (aX+1)^n \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} \quad (4-7)$$

$$U(X,0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial T} U(X,0) = 0 \quad (4-8)$$

此處無因次化的物理量表示如下：

$$X = \frac{x}{l}, \quad U = \frac{u}{l}, \quad T = \frac{c_0 t}{l}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E'_0}{\rho_0}} \quad (4-9)$$

藉由拉普拉斯轉換將無因次化時間 T 轉換為參數 p ，而拉普拉斯轉換對可以表示如下：

$$\hat{U}(X, p) = \int_0^{\infty} U(X, T) e^{-pT} dT \quad (4-10)$$

$$U(X, T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{U}(X, p) e^{pT} dp \quad (4-11)$$

由式(4-7)、(4-8)可獲得 \hat{U} 的常微分方程(Chiu 及 Erdogan (1999))：

$$\eta^2 \frac{d^2 \hat{U}}{d\eta^2} + m\eta \frac{d\hat{U}}{d\eta} - \frac{p^2}{a^2} \eta^{n-m+2} \hat{U} = 0 \quad (4-12)$$

其中

$$\eta = (aX + 1) \quad (4-13)$$

如果 $m = n + 2$ ，式(4-12)為尤拉方程(Euler equation)，而在轉換域下位移場的解可以表示為：

$$\hat{U}(X, p) = C_1 (aX + 1)^{s_1} + C_2 (aX + 1)^{s_2} \quad (4-14)$$

其中

$$s_1, s_2 = -\frac{n+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{a}\right)^2} \quad (4-15)$$

然而，如果 $m \neq n + 2$ ，位移場的解即變成另一種形式：

$$\hat{U}(X, p) = (aX + 1)^{\frac{1-m}{2}} \left[C_3 \cdot I_{\left|\frac{1-m}{n-m+2}\right|} \left(\left| \frac{2p}{(n-m+2)a} \right| (aX + 1)^{\frac{n-m+2}{2}} \right) + C_4 \cdot K_{\left|\frac{1-m}{n-m+2}\right|} \left(\left| \frac{2p}{(n-m+2)a} \right| (aX + 1)^{\frac{n-m+2}{2}} \right) \right] \quad (4-16)$$

其中 I 和 K 分別為第一類和第二類的修正型貝索函數(Bessel functions)。 $C_1 \sim C_4$ 為待定係數，可由 $x=0$ 和 $x=l$ 的邊界條件代入求得。對於在底面處 $x=0$ 為自由邊界的情況顯示於圖 4-1(a)中，而在轉換域中的邊界條件可以表示如下：

$$E' \frac{d}{dX} \hat{U}(0, p) = 0, \quad \text{at } X = 0 \quad (4-17)$$

$$E' \frac{d}{dX} \hat{U}(1, p) = \sigma_0 \hat{f}(p), \quad \text{at } X = 1 \quad (4-18)$$

其中，常數 σ_0 為動力載荷的大小，而 \hat{f} 則為在轉換域下的曳引力函數。方程式(4-14)、(4-16)中的係數 $C_1 \sim C_4$ 可以利用式(4-17)、(4-18)求解。因此，轉換域下的應力場在自由邊界下的解為(Chiu 和 Erdogan (1999))：

$$\frac{\hat{\sigma}_{xx}}{\sigma_0} = \hat{f}(p) \left(\frac{aX+1}{a+1} \right)^{\frac{n+1}{2}} \left\{ \frac{e^{-\delta[\ln(a+1)-\ln(aX+1)]} - e^{-\delta[\ln(a+1)+\ln(aX+1)]}}{1 - e^{-2\delta \ln(a+1)}} \right\} \quad \text{for } m = n+2 \quad (4-19)$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{xx}}{\sigma_0} = \hat{f}(p) \left(\frac{aX+1}{a+1} \right)^{\frac{m+n}{4}} \left[\frac{W_{1x} e^{(z_0 - z_x)} - W_{2x} e^{-(z_0 - z_x)}}{W_{1l} e^{(z_0 - z_l)} - W_{2l} e^{-(z_0 - z_l)}} \right] \quad \text{for } m \neq n+2 \quad (4-20)$$

其中

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{a} \right)^2} \quad (4-21)$$

$$z_x = \left| \frac{2p}{(n-m+2)a} \right| (aX+1)^{\frac{n-m+2}{2}} \quad (4-22)$$

$$z_l = \left| \frac{2p}{(n-m+2)a} \right| (a+1)^{\frac{n-m+2}{2}} \quad (4-23)$$

$$z_o = \left| \frac{2p}{(n-m+2)a} \right| \quad (4-24)$$

而相關函數 W_{1x} 、 W_{2x} 、 W_{1l} 、 W_{2l} 表示如下：

$$\begin{aligned} W_{1x} = & \left[\frac{\sqrt{2\pi z_o}}{e^{z_o}} I_{\nu-1}(z_o) + \frac{\sqrt{2\pi z_o}}{e^{z_o}} I_{\nu+1}(z_o) \right] \left[\sqrt{\frac{2z_x}{\pi}} e^{z_x} K_{\nu-1}(z_x) + \sqrt{\frac{2z_x}{\pi}} e^{z_x} K_{\nu+1}(z_x) \right] \\ & + \frac{2}{z_o} \left(\frac{m-1}{n-m+2} \right) \left(\frac{\sqrt{2\pi z_o}}{e^{z_o}} I_{\nu-1}(z_o) \right) \cdot \left[\sqrt{\frac{2z_x}{\pi}} e^{z_x} K_{\nu-1}(z_x) + \sqrt{\frac{2z_x}{\pi}} e^{z_x} K_{\nu+1}(z_x) \right] \\ & - \frac{2}{z_o} \left(\frac{m-1}{n-m+2} \right) (aX+1)^{\frac{m-n-2}{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{2z_x}{\pi}} e^{z_x} K_{\nu}(z_x) \right) \cdot \left[\frac{\sqrt{2\pi z_o}}{e^{z_o}} I_{\nu-1}(z_o) + \frac{\sqrt{2\pi z_o}}{e^{z_o}} I_{\nu+1}(z_o) \right] \\ & - \frac{4}{z_o^2} \left(\frac{m-1}{n-m+2} \right)^2 (aX+1)^{\frac{m-n-2}{2}} \left(\frac{\sqrt{2\pi z_o}}{e^{z_o}} I_{\nu}(z_o) \right) \left(\sqrt{\frac{2z_x}{\pi}} e^{z_x} K_{\nu}(z_x) \right) \end{aligned} \quad (4-25)$$

$$\begin{aligned}
W_{2x} = & \left[\frac{\sqrt{2\pi z_x}}{e^{z_x}} I_{\nu-1}(z_x) + \frac{\sqrt{2\pi z_x}}{e^{z_x}} I_{\nu+1}(z_x) \right] \left[\sqrt{\frac{2z_o}{\pi}} e^{z_o} K_{\nu-1}(z_o) + \sqrt{\frac{2z_o}{\pi}} e^{z_o} K_{\nu+1}(z_o) \right] \\
& + \frac{2}{z_o} \left(\frac{m-1}{n-m+2} \right) \left(\frac{\sqrt{2\pi z_x}}{e^{z_x}} I_{\nu-1}(z_x) \right) \cdot \left[\sqrt{\frac{2z_o}{\pi}} e^{z_o} K_{\nu-1}(z_o) + \sqrt{\frac{2z_o}{\pi}} e^{z_o} K_{\nu+1}(z_o) \right] \\
& - \frac{2}{z_o} \left(\frac{m-1}{n-m+2} \right) (aX+1)^{\frac{m-n-2}{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{2z_o}{\pi}} e^{z_o} K_{\nu}(z_o) \right) \cdot \left[\frac{\sqrt{2\pi z_x}}{e^{z_x}} I_{\nu-1}(z_x) + \frac{\sqrt{2\pi z_x}}{e^{z_x}} I_{\nu+1}(z_x) \right] \\
& - \frac{4}{z_o^2} \left(\frac{m-1}{n-m+2} \right)^2 (aX+1)^{\frac{m-n-2}{2}} \left(\frac{\sqrt{2\pi z_x}}{e^{z_x}} I_{\nu}(z_x) \right) \left(\sqrt{\frac{2z_o}{\pi}} e^{z_o} K_{\nu}(z_o) \right)
\end{aligned} \tag{4-26}$$

$$\begin{aligned}
W_{1l} = & \left[\frac{\sqrt{2\pi z_o}}{e^{z_o}} I_{\nu-1}(z_o) + \frac{\sqrt{2\pi z_o}}{e^{z_o}} I_{\nu+1}(z_o) \right] \left[\sqrt{\frac{2z_l}{\pi}} e^{z_l} K_{\nu-1}(z_l) + \sqrt{\frac{2z_l}{\pi}} e^{z_l} K_{\nu+1}(z_l) \right] \\
& + \frac{2}{z_o} \left(\frac{m-1}{n-m+2} \right) \left(\frac{\sqrt{2\pi z_o}}{e^{z_o}} I_{\nu-1}(z_o) \right) \cdot \left[\sqrt{\frac{2z_l}{\pi}} e^{z_l} K_{\nu-1}(z_l) + \sqrt{\frac{2z_l}{\pi}} e^{z_l} K_{\nu+1}(z_l) \right] \\
& - \frac{2}{z_o} \left(\frac{m-1}{n-m+2} \right) (a+1)^{\frac{m-n-2}{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{2z_l}{\pi}} e^{z_l} K_{\nu}(z_l) \right) \cdot \left[\frac{\sqrt{2\pi z_o}}{e^{z_o}} I_{\nu-1}(z_o) + \frac{\sqrt{2\pi z_o}}{e^{z_o}} I_{\nu+1}(z_o) \right] \\
& - \frac{4}{z_o^2} \left(\frac{m-1}{n-m+2} \right)^2 (a+1)^{\frac{m-n-2}{2}} \left(\frac{\sqrt{2\pi z_o}}{e^{z_o}} I_{\nu}(z_o) \right) \left(\sqrt{\frac{2z_l}{\pi}} e^{z_l} K_{\nu}(z_l) \right)
\end{aligned} \tag{4-27}$$

$$\begin{aligned}
W_{2l} = & \left[\frac{\sqrt{2\pi z_l}}{e^{z_l}} I_{\nu-1}(z_l) + \frac{\sqrt{2\pi z_l}}{e^{z_l}} I_{\nu+1}(z_l) \right] \left[\sqrt{\frac{2z_o}{\pi}} e^{z_o} K_{\nu-1}(z_o) + \sqrt{\frac{2z_o}{\pi}} e^{z_o} K_{\nu+1}(z_o) \right] \\
& + \frac{2}{z_o} \left(\frac{m-1}{n-m+2} \right) \left(\frac{\sqrt{2\pi z_l}}{e^{z_l}} I_{\nu-1}(z_l) \right) \cdot \left[\sqrt{\frac{2z_o}{\pi}} e^{z_o} K_{\nu-1}(z_o) + \sqrt{\frac{2z_o}{\pi}} e^{z_o} K_{\nu+1}(z_o) \right] \\
& - \frac{2}{z_o} \left(\frac{m-1}{n-m+2} \right) (a+1)^{\frac{m-n-2}{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{2z_o}{\pi}} e^{z_o} K_{\nu}(z_o) \right) \cdot \left[\frac{\sqrt{2\pi z_l}}{e^{z_l}} I_{\nu-1}(z_l) + \frac{\sqrt{2\pi z_l}}{e^{z_l}} I_{\nu+1}(z_l) \right] \\
& - \frac{4}{z_o^2} \left(\frac{m-1}{n-m+2} \right)^2 (a+1)^{\frac{m-n-2}{2}} \left(\frac{\sqrt{2\pi z_l}}{e^{z_l}} I_{\nu}(z_l) \right) \left(\sqrt{\frac{2z_o}{\pi}} e^{z_o} K_{\nu}(z_o) \right)
\end{aligned} \tag{4-28}$$

對於在底面處 $x=0$ 為固定邊界的情況顯示於圖 4-1(b) 中，可得

$$\hat{U}(0, p) = 0, \quad \text{at } X = 0 \tag{4-29}$$

$$E' \frac{d}{dX} \hat{U}(1, p) = \sigma_0 \hat{f}(p), \quad \text{at } X=1 \quad (4-30)$$

在固定邊界情況，轉換域下的應力場可表示為(Chiu 及 Erdogan (1999))：

$$\frac{\hat{\sigma}_{xx}}{\sigma_0} = \hat{f}(p) \left(\frac{aX+1}{a+1} \right)^{\frac{n+1}{2}} \left\{ \frac{[-(n+1)+2\delta](aX+1)^\delta - [-(n+1)-2\delta](aX+1)^{-\delta}}{[-(n+1)+2\delta](a+1)^\delta - [-(n+1)-2\delta](a+1)^{-\delta}} \right\} \quad \text{for } m=n+2 \quad (4-31)$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{xx}}{\sigma_0} = \hat{f}(p) \left(\frac{aX+1}{a+1} \right)^{\frac{m+n}{4}} \left[\frac{W_{3x} e^{(z_o-z_x)} + W_{4x} e^{-(z_o-z_x)}}{W_{3l} e^{(z_o-z_l)} + W_{4l} e^{-(z_o-z_l)}} \right] \quad \text{for } m \neq n+2 \quad (4-32)$$

此處的 δ 、 z_x 、 z_o ，及 z_l 即為式(4-21)~(4-24)。而函數 W_{3x} 、 W_{4x} 、 W_{3l} ，及 W_{4l} 給定如下：

$$W_{3x} = \left(\frac{\sqrt{2\pi z_o}}{e^{z_o}} I_\nu(z_o) \right) \left[\sqrt{\frac{2z_x}{\pi}} e^{z_x} K_{\nu-1}(z_x) + \sqrt{\frac{2z_x}{\pi}} e^{z_x} K_{\nu+1}(z_x) \right] - \frac{2}{z_o} \left(\frac{m-1}{n-m+2} \right) (aX+1)^{\frac{m-n-2}{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2\pi z_o}}{e^{z_o}} I_\nu(z_o) \right) \left(\sqrt{\frac{2z_x}{\pi}} e^{z_x} K_\nu(z_x) \right) \quad (4-33)$$

$$W_{4x} = \left(\sqrt{\frac{2z_o}{\pi}} e^{z_o} K_\nu(z_o) \right) \left[\frac{\sqrt{2z_x}}{e^{z_x}} I_{\nu-1}(z_x) + \frac{\sqrt{2\pi z_x}}{e^{z_x}} I_{\nu+1}(z_x) \right] - \frac{2}{z_o} \left(\frac{m-1}{n-m+2} \right) (aX+1)^{\frac{m-n-2}{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2\pi z_x}}{e^{z_x}} I_\nu(z_o) \right) \left(\sqrt{\frac{2z_o}{\pi}} e^{z_o} K_\nu(z_o) \right) \quad (4-34)$$

$$W_{3l} = \left(\frac{\sqrt{2\pi z_o}}{e^{z_o}} I_\nu(z_o) \right) \left[\sqrt{\frac{2z_l}{\pi}} e^{z_l} K_{\nu-1}(z_l) + \sqrt{\frac{2z_l}{\pi}} e^{z_l} K_{\nu+1}(z_l) \right] - \frac{2}{z_o} \left(\frac{m-1}{n-m+2} \right) (a+1)^{\frac{m-n-2}{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2\pi z_o}}{e^{z_o}} I_\nu(z_o) \right) \left(\sqrt{\frac{2z_l}{\pi}} e^{z_l} K_\nu(z_l) \right) \quad (4-35)$$

$$W_{4l} = \left(\sqrt{\frac{2z_o}{\pi}} e^{z_o} K_\nu(z_o) \right) \left[\frac{\sqrt{2\pi z_l}}{e^{z_l}} I_{\nu-1}(z_l) + \frac{\sqrt{2\pi z_l}}{e^{z_l}} I_{\nu+1}(z_l) \right] - \frac{2}{z_o} \left(\frac{m-1}{n-m+2} \right) (a+1)^{\frac{m-n-2}{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2\pi z_l}}{e^{z_l}} I_\nu(z_l) \right) \left(\sqrt{\frac{2z_o}{\pi}} e^{z_o} K_\nu(z_o) \right) \quad (4-36)$$

值得注意的是在式(4-19)、(4-20)、(4-31)、(4-32)中的解析解均為拉普拉斯轉換域下的解，必須進一步採用 3-2 節中，式(3-77)的 Durbin 數值逆轉換來求解時域下的應力響應。由 Chiu 及 Erdogan (1999)所提出的單層功能性梯度材料的暫態響

應，其 Heaviside 步階函數形式的初始脈衝施加於上表面處 $x=l$ (如圖 4-1 所示)，而壓力脈衝表示為如下的形式：

$$\sigma_{xx}(l,t) = \sigma_0 f(t) = -\sigma_0 [H(t) - H(t-t_0)] \quad (4-37)$$

在轉換域下可表示為

$$\hat{f}(p) = -\left[\frac{1}{p} - \frac{e^{-pt_0}}{p} \right] \quad (4-38)$$

其中 $H(t)$ 為 Heaviside 步階函數，而脈衝時間為 $t_0 = 0.2\mu s$ 。今考慮一個厚度為 $l = 5mm$ 的功能性梯度板，用來進行數值計算的兩種材料常數(Ni/ZrO₂ 和 Al/SiC) 則列於表 4-1 中。Ni/ZrO₂ 表示功能性梯度板是由鎳和氧化鋯所組成，純鎳位於下表面，而上表面為純氧化鋯。同樣地，對於 Al/SiC 功能性梯度材料來說，鋁和碳化矽個別位在下表面和上表面處。圖 4-2 顯示 Ni/ZrO₂ 功能性梯度材料沿厚度方向變化的材料組成，包含彈性常數、密度、縱波波速以及機械阻抗，而圖 4-3 則是顯示這些物理量在 SiC/Al 功能性梯度材料的分布情況。當 $m = n + 2$ ，應力於轉換域下的解析解(式(4-19)、(4-31))配合 Durbin 數值逆轉換(式(3-77))的方式，稱之為半解析半數值解，而其結果繪於圖 4-4~圖 4-10。

圖 4-4 和圖 4-5 中的數值結果顯示，當功能性梯度材料為自由邊界，而脈衝施載於剛性較低的一側 (ZrO₂) 時，脈衝的持續時間依舊保持不變 ($\Delta t = t_0 = 0.2\mu s$)，而脈衝的形狀卻會隨觀測時間的增加逐漸扭曲。在任何一個觀測位置上，脈衝抵達觀測點時會產生不連續的跳躍情形($\Delta\sigma$)，圖中的脈衝前緣與後緣始終保持著固定的變化量($\Delta\sigma$)，然而，應力脈衝的絕對大小卻和位置 x 息息相關。當 $x=l$ 時， $\Delta\sigma = \sigma_0$ ，而 $0 < x < l$ 時， $\Delta\sigma > \sigma_0$ 。而且隨著 x 減小的時候， $\Delta\sigma$ 會略為增加。當脈衝經過觀測點之後，其應力值並不會回歸至零，而這些不為零的過衝(overshoot)現象似乎會隨時間擴增。相類似的現象亦顯示於圖 4-6 中，此為一自由邊界下，ZrO₂/Ni 功能性梯度材料的暫態響應圖。雖然在 $x=l$ 處， $\Delta\sigma = \sigma_0$ ，但是隨著位置 x 在減小的時候(或者說剛性在減小)， $\Delta\sigma$ 卻會單調地減

小。這也說明不連續跳躍值 $\Delta\sigma$ 為位置 x 函數，但在固定位置 x 下， $\Delta\sigma$ 卻和時間 t 無關。另外，可以發現在固定邊界條件下(圖 4-7、圖 4-8)的應力偏差量，比起自由邊界(圖 4-4~圖 4-6)來說要大許多。

在圖 4-7、圖 4-9 中，應力脈衝的振幅大約為其他應力響應圖的兩倍，這是因為在固定邊界位置 $x=0$ 所接受到脈衝反射波的緣故。另外，如果固定邊界 $x=0$ 為單層功能性梯度板(Ni/ZrO₂)較硬的一端，反射脈衝不連續的跳躍情況($2\Delta\sigma$)會比 $2\sigma_0$ 還來的大(圖 4-7)。但如果 $x=0$ 為梯度材料(ZrO₂/Ni)較軟的一端時， $2\Delta\sigma < 2\sigma_0$ (圖 4-9)。比較圖 4-8 和圖 4-10，當觀測點位在梯度材料的中點，由於梯度材料 Ni/ZrO₂ 和 ZrO₂/Ni 的斜率相反，因此兩者所計算出響應的應力偏差，其方向並不一致。

本研究和 Chiu 及 Erdogan (1999)所採用 Abel-Tauber 漸進理論最大的不同之處，係所使用的 Durbin 數值拉普拉斯逆轉換能夠長時間計算精確的暫態響應。而 Abel-Tauber 理論是假設轉換域參數 p 很大時的漸近分析，亦即表示其解適合計算極短時間的暫態響應。由 Durbin 數值逆轉換法計算的長時間暫態響應顯示於圖 4-11~圖 4-13。觀測點位於單層 Ni/ZrO₂ 功能性梯度板的中點($x=l/2$)，且 $x=0$ 為自由邊界的長時間暫態響應顯示於圖 4-11，當 $x=0$ 為固定邊界時，單層 Ni/ZrO₂ 功能性梯度板的固定端長($x=0$)時間暫態響應顯示於圖 4-12，觀測點位於單層 Ni/ZrO₂ 功能性梯度板的中點($x=l/2$)，而 $x=0$ 為固定邊界的長時間暫態響應顯示於圖 4-13。當應力響應計算到 $24\mu s$ 時，前 $12\mu s$ 的響應個別和圖 4-5、圖 4-7，及圖 4-8 相同。由圖 4-12 和圖 4-13 顯示，隨著壓力脈衝在單層功能性梯度板的上下表面多次的反射後，原先為步階形式的脈衝會被扭曲成針狀，當觀測時間增加，脈衝形狀扭曲的越加嚴重，以致於到最後功能性梯度材料的暫態響應就變得和均質材料完全不相同。

4-1-2 以多層等向性均質材料來模擬單層功能性梯度板的暫態波傳

行為

單層功能性梯度板可以用 n 層的分層介質來進行模擬(如圖 3-1 所示)。每一層材料假設為彈性、等向性、均質與交界面完美接合的情況。如同章節 3-1，均佈動力載荷施載於一多層域表面的分析方式，將多層域的邊界條件和界面連續條件組成一矩陣形式：

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & M_{21}^{(1)}(0) & M_{22}^{(1)}(0) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
 M_{11}^{(1)}(-h_1) & M_{12}^{(1)}(-h_1) & -M_{11}^{(2)}(-h_1) & -M_{12}^{(2)}(-h_1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
 M_{21}^{(1)}(-h_1) & M_{22}^{(1)}(-h_1) & -M_{21}^{(2)}(-h_1) & -M_{22}^{(2)}(-h_1) & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 0 & \cdots & M_{11}^{(n-1)}\left(-\sum_{k=1}^{n-1} h_k\right) & M_{12}^{(n-1)}\left(-\sum_{k=1}^{n-1} h_k\right) & -M_{11}^{(n)}\left(-\sum_{k=1}^{n-1} h_k\right) & -M_{12}^{(n)}\left(-\sum_{k=1}^{n-1} h_k\right) & 0 & 0 \\
 0 & \cdots & M_{21}^{(n-1)}\left(-\sum_{k=1}^{n-1} h_k\right) & M_{22}^{(n-1)}\left(-\sum_{k=1}^{n-1} h_k\right) & -M_{21}^{(n)}\left(-\sum_{k=1}^{n-1} h_k\right) & -M_{22}^{(n)}\left(-\sum_{k=1}^{n-1} h_k\right) & 0 & 0 \\
 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -M_{21}^{(n)}\left(-\sum_{k=1}^n h_k\right) & -M_{22}^{(n)}\left(-\sum_{k=1}^n h_k\right)
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_-^{(1)} \\
 u_+^{(1)} \\
 u_-^{(2)} \\
 u_+^{(2)} \\
 \vdots \\
 u_-^{(n)} \\
 u_+^{(n)}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \sigma_0 \hat{f}(p) \\
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \quad (4-39)$$

前式實際上可以看作更為簡潔的形式

$$\mathbf{M}\mathbf{c} = \hat{\mathbf{t}} \quad (4-40)$$

其中由待定係數組成的全場向量為

$$\mathbf{c} = \left(u_-^{(1)} \quad u_+^{(1)} \quad u_-^{(2)} \quad u_+^{(2)} \quad \cdots \quad u_-^{(n)} \quad u_+^{(n)} \right)^T \quad (4-41)$$

而全域加載的曳引力組合向量為

$$\hat{\mathbf{t}} = \left(\sigma_0 \hat{f}(p) \quad 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad 0 \right)^T \quad (4-42)$$

其中 $\hat{f}(p)$ 為曳引力函數。式(4-38)中的 \mathbf{M} 矩陣為一大小 $2n \times 2n$ 的矩陣，並可直接採用反矩陣的方式求得全場向量：

$$\mathbf{c} = \mathbf{M}^{-1} \hat{\mathbf{t}} \quad (4-43)$$

一旦解得全場向量 \mathbf{c} ，將可得到每一層材料的位移應力響應：

$$\mathbf{b}(x; p) = \mathbf{R}_{cv}(x; p) \cdot \mathbf{c} \quad (4-44)$$

與層之間的材料常數不同，而其阻抗不匹配的程度較小之緣故。換言之，在上下表面處材料與空氣阻抗的差異值頗大，而造成 $\Delta\sigma$ 較大的情況。另外，亦可看出10層均質材料的暫態響應會在功能性梯度材料的解附近震盪，當越來越多應力波抵達觀測點，因阻抗不匹配所產生的震盪現象也會跟著加劇。

對於相同的Ni/ZrO₂功能性梯度材料來說，邊界條件為圖4-1(b)情況下的功能性梯度板中點的暫態響應，及10層介質計算的結果顯示於圖4-15。在Ni/ZrO₂功能性梯度材料的位置 $x=0$ ，而邊界條件為圖4-1(b)情況下的暫態響應則顯示於圖4-16中。圖4-15和圖4-16顯示步階形式的脈衝在固定邊界下，扭曲的程度會比自由邊界情況來的嚴重。除了一些震盪的現象以外，10層介質數值計算的結果其實和單層功能性梯度板的結果十分相近。對於 $m \neq n+2$ (例如：SiC/Al和Al/SiC)暫態應力場的計算結果顯示於圖4-17~圖4-19。這些圖也清楚的說明10層介質能被用來模擬功能性梯度材料的動態問題。

接著，比較由10層和20層介質的計算結果所構成的圖4-20和圖4-21。圖4-20中 $12\mu s$ 內的暫態響應，為位置 $x=l/2$ 而邊界條件為圖4-1(b)，以10層介質模擬Ni/ZrO₂功能性梯度材料的結果。若使用20層介質(相關的材料常數列於表4-3)來模擬Ni/ZrO₂功能性梯度材料，顯示於圖4-21的數值結果更接近單層功能性梯度材料計算的結果。對於另一種梯度材料SiC/Al，由10層與20層介質所得到的數值結果顯示於圖4-22、圖4-23。圖4-22中 $6\mu s$ 內的暫態響應，為位置 $x=0$ 而邊界條件為圖4-1(b)，以10層介質模擬SiC/Al功能性梯度材料的結果。相同的SiC/Al功能性梯度材料進一步分割為20層(相關的材料常數列於表4-5)，而其計算結果繪於圖4-23中。可發現在圖4-21(圖4-23)中的震盪幅度比起圖4-20(圖4-22)要小許多，這現象是因為較多的層數可以降低阻抗不匹配的程度，也因此更為接近功能性梯度材料的結果。

4-2 多層域功能性梯度材料

今考慮一開始不受擾動的 n 層功能性梯度材料，其結構示意圖如圖 4-24 所示，並假設每一層梯度材料之間是完美接合。當座標原點設在多層功能性梯度材料的上表面，沿厚度方向則依照下式的多項式函數作連續性變化，第 1 層梯度材料的密度及彈性常數為：

$$\rho^{(1)}(x) = \rho_0^{(1)} \left(a_1 \frac{x}{h_1} + 1 \right)^{n_1} \quad (4-46)$$

$$E^{(1)}(x) = E_0^{(1)} \left(a_1 \frac{x}{h_1} + 1 \right)^{m_1} \quad (4-47)$$

第 2, 3, 4, ..., n 層梯度材料的密度及彈性常數則可表示為：

$$\rho^{(i)}(x) = \rho_0^{(i)} \left(a_i \frac{x + \sum_{k=1}^{i-1} h_k}{h_1} + 1 \right)^{n_i} \quad \text{for } i \geq 2 \quad (4-48)$$

$$E^{(i)}(x) = E_0^{(i)} \left(a_i \frac{x + \sum_{k=1}^{i-1} h_k}{h_1} + 1 \right)^{m_i} \quad \text{for } i \geq 2 \quad (4-49)$$

在第 2 層梯度材料以後，因為局部座標的考量，和第 1 層材料的表示並不相同。其中 a_i , m_i , n_i 為第 i 層材料的梯度常數，而 $E^{(i)}$, $\rho^{(i)}$ 和 h_i 各別為第 i 層材料的彈性常數、質量密度以及厚度。而當施加一張應力形式的動力載荷於 n 層功能性梯度材料上表面時，其上下表面的邊界條件為：

$$\sigma_{xx}^{(1)}(0, t) = \sigma_0 \cdot H(t) \quad (4-50)$$

$$\sigma_{xx}^{(n)} \left(-\sum_{k=1}^n h_k, t \right) = 0 \quad (4-51)$$

層與層之間必須滿足位移和應力連續條件：

$$u^{(i)} \left(-\sum_{k=1}^i h_k, t \right) = u^{(i+1)} \left(-\sum_{k=1}^i h_k, t \right) \quad (4-52)$$

$$\sigma_x^{(i)}\left(-\sum_{k=1}^i h_k, t\right) = \sigma_x^{(i+1)}\left(-\sum_{k=1}^i h_k, t\right) \quad (4-53)$$

若僅考慮 x 方向的平面波傳，其第 i 層梯度材料的一維波動方程式可以表示如下：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(E^{(i)}(x)\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x}\right) = \rho^{(i)}(x)\frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial t^2} \quad (4-54)$$

每一層梯度材料必須滿足一開始未受擾動的初始條件

$$u^{(i)}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}u^{(i)}(x, 0) = 0 \quad (4-55)$$

接著，使用位置、位移，及時間等無因次化的物理量來進行分析

$$X = x/h_1, \quad U = u/h_1, \quad T = c_0^{(1)}t/h_1, \quad c_0^{(1)} = \sqrt{E_0^{(1)}/\rho_0^{(1)}} \quad (4-56)$$

上式中 $c_0^{(1)}$ 為第一層梯度材料的縱波波速。將式(4-56)代入式(4-46)~(4-49)，以及式(4-54)可得

$$\frac{\partial}{\partial X}\left\{(a_1 X + 1)^{m_1} \frac{\partial U}{\partial X}\right\} = (a_1 X + 1)^{n_1} \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} \quad (4-57)$$

$$\left(\frac{c_0^{(i)}}{c_0^{(1)}}\right)^2 \frac{\partial}{\partial X}\left\{a_i \left[X + \frac{\sum_{k=1}^{i-1} h_k}{h_1}\right] + 1 \frac{\partial U}{\partial X}\right\} = \left[a_i \left[X + \frac{\sum_{k=1}^{i-1} h_k}{h_1}\right] + 1\right] \frac{\partial^2 U}{\partial T^2}$$

$$\text{for } n = 2, 3, \dots, n \quad (4-58)$$

初始條件無因次化後變為

$$U^{(i)}(X, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial T}U^{(i)}(X, 0) = 0 \quad (4-59)$$

藉由拉普拉斯轉換將無因次化參數 T 轉換成參數 p ，而拉普拉斯轉換對可表示如下：

$$\hat{U}(X, p) = \int_0^\infty U(X, T) e^{-pT} dT \quad (4-60)$$

$$U(X, T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{U}(X, p) e^{pT} dp \quad (4-61)$$

將偏微分方程式(4-57)、式(4-58)作拉普拉斯轉換，並代入初始條件式(4-59)，可得下列常微分方程式：

$$\eta_i^2 \frac{d^2 \hat{U}^{(i)}}{d\eta_i^2} + m_i \eta_i \frac{d\hat{U}^{(i)}}{d\eta_i} - \frac{p^2}{\left(\frac{c_0^{(i)}}{c_0^{(1)}} a_i \right)^2} \eta^{n_i - m_i + 2} \hat{U}^{(i)} = 0 \quad (4-62)$$

其中

$$\eta_1 = a_1 X + 1 \quad (4-63)$$

$$\eta_i = a_i \left(X + \frac{\sum_{k=1}^{i-1} h_k}{h_1} \right) + 1 \quad \text{for } n = 2, 3, \dots, n \quad (4-64)$$

如果 $m_i = n_i + 2$ ，式(4-62)即變成尤拉方程，可以得到在轉換域下的位移通解：

$$\hat{U}^{(i)} = C_+^{(i)} \eta_i^{s_+^{(i)}} + C_-^{(i)} \eta_i^{s_-^{(i)}} \quad (4-65)$$

配合 Hooke's law 的應力位移關係式，可得轉換域下的應力場：

$$\hat{\sigma}_{xx}^{(i)} = C_+^{(i)} E_0^{(i)} s_+^{(i)} a_i \eta_i^{m_i + s_+^{(i)} - 1} + C_-^{(i)} E_0^{(i)} s_-^{(i)} a_i \eta_i^{m_i + s_-^{(i)} - 1} \quad (4-66)$$

其中

$$s_{\pm}^{(1)} = -\frac{n_1 + 1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n_1 + 1}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{a_1} \right)^2} \quad (4-67)$$

$$s_{\pm}^{(i)} = -\frac{n_i + 1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n_i + 1}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{\frac{c_0^{(i)}}{c_0^{(1)}} \cdot a_i} \right)^2} \quad (4-68)$$

在式(4-65)和式(4-66)中，每一層梯度材料中的待定係數 $C_+^{(i)}$ 和 $C_-^{(i)}$ 必須由邊界條件和界面連續條件求得。轉換域下的邊界條件和界面連續條件由式(4-50)~(4-53)可以重新表示如下：

$$\hat{\sigma}_{xx}^{(1)}(0, p) = \frac{\sigma_0}{p} \quad (4-69)$$

$$\hat{\sigma}_{xx}^{(n)} \left(\frac{-\sum_{k=1}^n h_k}{h_1}, p \right) = 0 \quad (4-70)$$

$$\hat{U}^{(i)} \left(\frac{-\sum_{k=1}^i h_k}{h_1}, p \right) = \hat{U}^{(i+1)} \left(\frac{-\sum_{k=1}^i h_k}{h_1}, p \right) \quad (4-71)$$

$$\hat{\sigma}_{xx}^{(i)} \left(\frac{-\sum_{k=1}^i h_k}{h_1}, p \right) = \hat{\sigma}_{xx}^{(i+1)} \left(\frac{-\sum_{k=1}^i h_k}{h_1}, p \right) \quad (4-72)$$

將這些轉換域下的物理量排列成位移-應力矩陣：

$$\begin{bmatrix} \hat{U}(X; p) \\ \hat{\sigma}_{xx}(X; p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(X; p) & M_{12}(X; p) \\ M_{21}(X; p) & M_{22}(X; p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_+(p) \\ C_-(p) \end{bmatrix} \quad (4-73)$$

其中

$$M_{11}(X; p) = \eta^{s_+} \quad (4-74)$$

$$M_{12}(X; p) = \eta^{s_-} \quad (4-75)$$

$$M_{21}(X; p) = E_0 s_+ a \eta^{m+s_+-1} \quad (4-76)$$

$$M_{22}(X; p) = E_0 s_- a \eta^{m+s_-1} \quad (4-77)$$

為避免繁雜的計算過程，邊界及界面連續條件可以表示如下：

$$\begin{bmatrix} M_{21}^{(1)}(0) & M_{22}^{(1)}(0) & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ M_{11}^{(1)}(-1) & M_{12}^{(1)}(-1) & -M_{11}^{(2)}(-1) & -M_{12}^{(2)}(-1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ M_{21}^{(1)}(-1) & M_{22}^{(1)}(-1) & -M_{21}^{(2)}(-1) & -M_{22}^{(2)}(-1) & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & M_{11}^{(n-1)} \left(\frac{-\sum_{k=1}^{n-1} h_k}{h_1} \right) & M_{12}^{(n-1)} \left(\frac{-\sum_{k=1}^{n-1} h_k}{h_1} \right) & -M_{11}^{(n)} \left(\frac{-\sum_{k=1}^{n-1} h_k}{h_1} \right) & -M_{12}^{(n)} \left(\frac{-\sum_{k=1}^{n-1} h_k}{h_1} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \dots & M_{21}^{(n-1)} \left(\frac{-\sum_{k=1}^{n-1} h_k}{h_1} \right) & M_{22}^{(n-1)} \left(\frac{-\sum_{k=1}^{n-1} h_k}{h_1} \right) & -M_{21}^{(n)} \left(\frac{-\sum_{k=1}^{n-1} h_k}{h_1} \right) & -M_{22}^{(n)} \left(\frac{-\sum_{k=1}^{n-1} h_k}{h_1} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -M_{21}^{(n)} \left(\frac{-\sum_{k=1}^n h_k}{h_1} \right) & -M_{22}^{(n)} \left(\frac{-\sum_{k=1}^n h_k}{h_1} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_+^{(1)} \\ C_-^{(1)} \\ C_+^{(2)} \\ C_-^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ C_+^{(n)} \\ C_-^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ p \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-78)$$

4-2-1 三層功能性梯度材料的暫態波傳行為

為驗證多層域功能性梯度材料的解析過程，以三層互不相同但完美接合的功能性梯度材料為例。假設每一層功能性梯度材料的材料特徵皆以多項式函數形式作連續變化，然而此三層的厚度與梯度係數彼此不相同。在 $m_i = n_i + 2$ 的條件下，可將式(4-65)與(4-66)重新表示如下，其中第 1 層梯度材料在轉換域下的位移及應力通解：

$$\hat{U}^{(1)}(X, p) = C_+^{(1)}(a_1 X + 1)^{s_+^{(1)}} + C_-^{(1)}(a_1 X + 1)^{s_-^{(1)}} \quad (4-85)$$

$$\hat{\sigma}_{xx}^{(1)}(X, p) = C_+^{(1)} E_0^{(1)} s_+^{(1)} a_1 (a_1 X + 1)^{m_1 + s_+^{(1)} - 1} + C_-^{(1)} E_0^{(1)} s_-^{(1)} a_1 (a_1 X + 1)^{m_1 + s_-^{(1)} - 1} \quad (4-86)$$

第 2 層梯度材料在轉換域下的位移及應力通解：

$$\hat{U}^{(2)}(X, p) = C_+^{(2)} [a_2 (X + 1) + 1]^{s_+^{(2)}} + C_-^{(2)} [a_2 (X + 1) + 1]^{s_-^{(2)}} \quad (4-87)$$

$$\hat{\sigma}_{xx}^{(2)}(X, p) = C_+^{(2)} E_0^{(2)} s_+^{(2)} a_2 (a_2 (X + 1) + 1)^{m_2 + s_+^{(2)} - 1} + C_-^{(2)} E_0^{(2)} s_-^{(2)} a_2 (a_2 (X + 1) + 1)^{m_2 + s_-^{(2)} - 1} \quad (4-88)$$

第 3 層梯度材料在轉換域下的位移及應力通解：

$$\hat{U}^{(3)}(X, p) = C_+^{(3)} \left[a_3 \left(X + 1 + \frac{h_2}{h_1} \right) + 1 \right]^{s_+^{(3)}} + C_-^{(3)} \left[a_3 \left(X + 1 + \frac{h_2}{h_1} \right) + 1 \right]^{s_-^{(3)}} \quad (4-89)$$

$$\hat{\sigma}_{xx}^{(3)}(X, p) = C_+^{(3)} E_0^{(3)} s_+^{(3)} a_3 \left[a_3 \left(X + 1 + \frac{h_2}{h_1} \right) + 1 \right]^{m_3 + s_+^{(3)} - 1} + C_-^{(3)} E_0^{(3)} s_-^{(3)} a_3 \left[a_3 \left(X + 1 + \frac{h_2}{h_1} \right) + 1 \right]^{m_3 + s_-^{(3)} - 1} \quad (4-90)$$

在式(4-85)~(4-90)中， $C_+^{(1)}$ 、 $C_-^{(1)}$ 、 $C_+^{(2)}$ 、 $C_-^{(2)}$ 、 $C_+^{(3)}$ 、 $C_-^{(3)}$ 為六個待定係數，必須由邊界條件和界面連續條件所組成的六個方程式求出。因此可得如下的六個係數的顯式表示式為：

$$C_+^{(1)} = \frac{-\sigma_0 \left[(\alpha_4 \alpha_7 - \alpha_2 \alpha_8) s_+^{(3)} \left(-\frac{h_3}{h_1} a_3 + 1 \right)^{s_+^{(3)}} + (\alpha_2 \alpha_6 - \alpha_4 \alpha_5) s_-^{(3)} \left(-\frac{h_3}{h_1} a_3 + 1 \right)^{s_-^{(3)}} \right]}{p E_0^{(1)} s_-^{(1)} a_1 \beta}$$

(4-91)

$$C_-^{(1)} = \frac{\sigma_0}{pE_0^{(1)}s_-^{(1)}a_1} - C_+^{(1)}\frac{s_+^{(1)}}{s_-^{(1)}} \quad (4-92)$$

$$C_+^{(2)} = \frac{C_+^{(1)}\left(\alpha_3 - \frac{s_+^{(1)}}{s_-^{(1)}}\alpha_4\right) + \frac{\sigma_0}{pE_0^{(1)}s_-^{(1)}a_1}\alpha_4}{E_0^{(2)}s_-^{(2)}a_2 - E_0^{(2)}s_+^{(2)}a_2} \quad (4-93)$$

$$C_-^{(2)} = \frac{C_+^{(1)}\left(\alpha_1 - \frac{s_+^{(1)}}{s_-^{(1)}}\alpha_2\right) + \frac{\sigma_0}{pE_0^{(1)}s_-^{(1)}a_1}\alpha_2}{E_0^{(2)}s_+^{(2)}a_2 - E_0^{(2)}s_-^{(2)}a_2} \quad (4-94)$$

$$C_+^{(3)} = \frac{C_+^{(1)}\left[\left(\alpha_3 - \frac{s_+^{(1)}}{s_-^{(1)}}\alpha_4\right)\alpha_7 - \left(\alpha_1 - \frac{s_+^{(1)}}{s_-^{(1)}}\alpha_2\right)\alpha_8\right] + \frac{\sigma_0(\alpha_4\alpha_7 - \alpha_2\alpha_8)}{pE_0^{(1)}s_-^{(1)}a_1}}{(E_0^{(2)}s_-^{(2)}a_2 - E_0^{(2)}s_+^{(2)}a_2)(E_0^{(3)}s_-^{(3)}a_3 - E_0^{(3)}s_+^{(3)}a_3)} \quad (4-95)$$

$$C_-^{(3)} = \frac{C_+^{(1)}\left[\left(\alpha_3 - \frac{s_+^{(1)}}{s_-^{(1)}}\alpha_4\right)\alpha_5 - \left(\alpha_1 - \frac{s_+^{(1)}}{s_-^{(1)}}\alpha_2\right)\alpha_6\right] + \frac{\sigma_0(\alpha_4\alpha_5 - \alpha_2\alpha_6)}{pE_0^{(1)}s_-^{(1)}a_1}}{(E_0^{(2)}s_-^{(2)}a_2 - E_0^{(2)}s_+^{(2)}a_2)(E_0^{(3)}s_+^{(3)}a_3 - E_0^{(3)}s_-^{(3)}a_3)} \quad (4-96)$$

其中，在式(4-91)~(4-96)的參數 $\alpha_1 \sim \alpha_8$ 和 β 列於附錄 A 中。而參數 $s_{\pm}^{(1)}$ 、 $s_{\pm}^{(2)}$ 、 $s_{\pm}^{(3)}$

表示如下：

$$s_{\pm}^{(1)} = -\frac{n_1+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n_1+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{a_1}\right)^2} \quad (4-97)$$

$$s_{\pm}^{(2)} = -\frac{n_2+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n_2+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{\frac{c_0^{(2)}}{c_0^{(1)}} \cdot a_2}\right)^2} \quad (4-98)$$

$$s_{\pm}^{(3)} = -\frac{n_3+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n_3+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{\frac{c_0^{(3)}}{c_0^{(1)}} \cdot a_3}\right)^2} \quad (4-99)$$

觀察這些求得的係數(式(4-91)~(4-96))，其皆為轉換域參數 p 的函數，若將式(4-91)~(4-96)代入式(4-85)~(4-90)中，便可得到三層不相同的功能性梯度材料在轉換域下的位移場和應力場。接著，配合式(3-77)的數值拉普拉斯逆轉換，可進一

步求得在時域下每一層梯度材料的位移響應和應力響應。

4-2-2 雙層相異質材料夾功能性梯度材料的暫態波傳行為

功能性梯度材料的存在，是為了消除原本兩個相異均質材料之間的不連續性，避免產生脫層現象而設計出一種過渡材料。在本節中，將分析此三明治結構的暫態波傳行為。假設兩層不相同的均質材料中間夾著一層功能性梯度材料，而結構示意圖如圖 4-25 所示。在相同的無因次化($t/S_L^{(1)}h_1$)考量下，由傳統常微分方程解得第 1 層均質材料，在轉換域下位移和應力的通解可以表示如下：

$$\hat{U}^{(1)}(X, p) = \bar{C}_+^{(1)} e^{-pX} + \bar{C}_-^{(1)} e^{+pX} \quad (4-100)$$

$$\hat{\sigma}_{xx}^{(1)}(X, p) = -\bar{C}_+^{(1)} E^{(1)} p e^{-pX} + \bar{C}_-^{(1)} E^{(1)} p e^{+pX} \quad (4-101)$$

第 2 層材料為多項式函數形式的功能性梯度材料：

$$\hat{U}^{(2)}(X, p) = \bar{C}_+^{(2)} [a_2(X+1)+1]^{s_+^{(2)}} + \bar{C}_-^{(2)} [a_2(X+1)+1]^{s_-^{(2)}} \quad (4-102)$$

$$\hat{\sigma}_{xx}^{(2)}(X, p) = C_+^{(2)} E_0^{(2)} s_+^{(2)} a_2 (a_2(X+1)+1)^{m_2+s_+^{(2)}-1} + C_-^{(2)} E_0^{(2)} s_-^{(2)} a_2 (a_2(X+1)+1)^{m_2+s_-^{(2)}-1} \quad (4-103)$$

第 3 層均質材料則為：

$$\hat{U}^{(3)}(X, p) = \bar{C}_+^{(3)} e^{-p \frac{c^{(1)}}{c^{(3)}} X} + \bar{C}_-^{(3)} e^{+p \frac{c^{(1)}}{c^{(3)}} X} \quad (4-104)$$

$$\hat{\sigma}_{xx}^{(3)}(X, p) = -\bar{C}_+^{(3)} E^{(3)} \frac{c^{(1)}}{c^{(3)}} p e^{-p \frac{c^{(1)}}{c^{(3)}} X} + \bar{C}_-^{(3)} E^{(3)} \frac{c^{(1)}}{c^{(3)}} p e^{+p \frac{c^{(1)}}{c^{(3)}} X} \quad (4-105)$$

同樣地，新的六個待定係數 $\bar{C}_+^{(1)}$ 、 $\bar{C}_-^{(1)}$ 、 $\bar{C}_+^{(2)}$ 、 $\bar{C}_-^{(2)}$ 、 $\bar{C}_+^{(3)}$ ，及 $\bar{C}_-^{(3)}$ 必須滿足上表面受拉應力，下表面為自由邊界的邊界條件：

$$\hat{\sigma}_{xx}^{(1)}(0, p) = \frac{\sigma_0}{p} \quad (4-106)$$

$$\hat{\sigma}_{xx}^{(3)}\left(-\left(1 + \frac{h_2}{h_1} + \frac{h_3}{h_1}\right), p\right) = 0 \quad (4-107)$$

以及層與層間位移和應力必須連續的界面連續條件：

$$\hat{U}^{(1)}(-1, p) = \hat{U}^{(2)}(-1, p) \quad (4-108)$$

$$\hat{\sigma}_{xx}^{(1)}(-1, p) = \hat{\sigma}_{xx}^{(2)}(-1, p) \quad (4-109)$$

$$\hat{U}^{(2)}\left(-\left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right), p\right) = \hat{U}^{(3)}\left(-\left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right), p\right) \quad (4-110)$$

$$\hat{\sigma}_{xx}^{(2)}\left(-\left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right), p\right) = \hat{\sigma}_{xx}^{(3)}\left(-\left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right), p\right) \quad (4-111)$$

將式(4-100)~(4-105)代入式(4-106)~(4-111)之後，求得的待定係數可表示如下：

$$\bar{C}_+^{(1)} = \frac{\sigma_0}{E^{(1)} p^2} \cdot \frac{\beta_2^*}{\beta_1^*} \quad (4-112)$$

$$\bar{C}_-^{(1)} = \bar{C}_+^{(1)} + \frac{\sigma_0}{E^{(1)} p^2} \quad (4-113)$$

$$\bar{C}_+^{(2)} = -\bar{C}_+^{(1)} \left(\frac{\alpha_4^* + \alpha_5^*}{\alpha_3^*} \right) - \frac{\sigma_0}{E^{(1)} p^2} \cdot \frac{\alpha_5^*}{\alpha_3^*} \quad (4-114)$$

$$\bar{C}_-^{(2)} = \bar{C}_+^{(1)} \left(\frac{\alpha_1^* + \alpha_2^*}{\alpha_3^*} \right) + \frac{\sigma_0}{E^{(1)} p^2} \cdot \frac{\alpha_2^*}{\alpha_3^*} \quad (4-115)$$

$$\bar{C}_+^{(3)} = \frac{\bar{C}_+^{(1)}}{2E^{(3)} p} \cdot \frac{c^{(3)}}{c^{(1)}} \cdot \left[\frac{(\alpha_1^* + \alpha_2^*) \cdot \alpha_9^* - (\alpha_4^* + \alpha_5^*) \cdot \alpha_8^*}{\alpha_3^*} \right] \cdot e^{-p \frac{c^{(1)}}{c^{(3)}} \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right)} \quad (4-116)$$

$$+ \frac{\sigma_0}{2E^{(1)} E^{(3)} p^3} \cdot \frac{c^{(3)}}{c^{(1)}} \cdot \left(\frac{\alpha_2^* \alpha_9^* - \alpha_5^* \alpha_8^*}{\alpha_3^*} \right) \cdot e^{-p \frac{c^{(1)}}{c^{(3)}} \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right)}$$

$$\bar{C}_-^{(3)} = \frac{\bar{C}_+^{(1)}}{2E^{(3)} p} \cdot \frac{c^{(3)}}{c^{(1)}} \cdot \left[\frac{(\alpha_1^* + \alpha_2^*) \cdot \alpha_7^* - (\alpha_4^* + \alpha_5^*) \cdot \alpha_6^*}{\alpha_3^*} \right] \cdot e^{+p \frac{c^{(1)}}{c^{(3)}} \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right)} \quad (4-117)$$

$$+ \frac{\sigma_0}{2E^{(1)} E^{(3)} p^3} \cdot \frac{c^{(3)}}{c^{(1)}} \cdot \left(\frac{\alpha_2^* \alpha_7^* - \alpha_5^* \alpha_6^*}{\alpha_3^*} \right) \cdot e^{+p \frac{c^{(1)}}{c^{(3)}} \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right)}$$

其中，在式(4-112)~(4-117)的參數 $\alpha_1^* \sim \alpha_9^*$ 和 β_1^* 、 β_2^* 列於附錄 B 中。將這些已求得的待定係數代入式(4-100)~(4-105)中，第 1 層至第 3 層材料的位移或應力響應便可得到。

4-2-3 三層功能性梯度材料退化為雙層相異質材料夾功能性梯度材料

為分析功能性梯度材料退化為均質材料的適用性，將 4-2-1 節與 4-2-2 節中，第 1 層材料轉換域下的應力場(式(4-86)、(4-101))再次表示於下方：

$$\hat{\sigma}_{xx}^{(1)}(X, p) = C_+^{(1)} E_0^{(1)} s_+^{(1)} a_1 (a_1 X + 1)^{m_1 + s_+^{(1)} - 1} + C_-^{(1)} E_0^{(1)} s_-^{(1)} a_1 (a_1 X + 1)^{m_1 + s_-^{(1)} - 1} \quad (4-86)$$

$$\hat{\sigma}_{xx}^{(1)}(X, p) = -\bar{C}_+^{(1)} E^{(1)} p e^{-pX} + \bar{C}_-^{(1)} E^{(1)} p e^{+pX} \quad (4-101)$$

當第 1 層材料為功能性梯度材料時，應力場通解為式(4-86)，而第 1 層材料為一般的均質材料時，應力場則為式(4-101)。可以明顯地觀察出兩式各由不同的函數所組成，一為多項式，一為指數函數。對於第 3 層材料轉換域下的應力場，同樣可以看出梯度材料(式(4-90))和均質材料(式(4-105))的差異：

$$\hat{\sigma}_{xx}^{(3)}(X, p) = C_+^{(3)} E_0^{(3)} s_+^{(3)} a_3 \left[a_3 \left(X + 1 + \frac{h_2}{h_1} \right) + 1 \right]^{m_3 + s_+^{(3)} - 1} + C_-^{(3)} E_0^{(3)} s_-^{(3)} a_3 \left[a_3 \left(X + 1 + \frac{h_2}{h_1} \right) + 1 \right]^{m_3 + s_-^{(3)} - 1} \quad (4-90)$$

$$\hat{\sigma}_{xx}^{(3)}(X, p) = -\bar{C}_+^{(3)} E^{(3)} \frac{c^{(1)}}{c^{(3)}} p e^{-p \frac{c^{(1)}}{c^{(3)}} X} + \bar{C}_-^{(3)} E^{(3)} \frac{c^{(1)}}{c^{(3)}} p e^{+p \frac{c^{(1)}}{c^{(3)}} X} \quad (4-105)$$

除了第 1 層和第 3 層材料在 4-2-1 節和 4-2-2 節有著很大的不同外，對於第 2 層功能性梯度材料的通解，不論是位移場或是應力場皆為相同形式(亦即式(4-87)、(4-88)和式(4-102)、(4-103)相似)，雖說如此，但仍要注意待定係數 $C_+^{(2)}$ 、 $C_-^{(2)}$ 、 $\bar{C}_+^{(2)}$ 、 $\bar{C}_-^{(2)}$ 與第 1 層、第 3 層材料緊密相關。如果將式(4-46)、(4-47)中的 a_1 趨近於零，可以發現第 1 層梯度材料的密度和彈性常數與位置 x 無關，也意味著非均質材料在 $a_1 = 0$ 的情況下，將退化為均質材料。同樣地，在式(4-48)、(4-49)中，當第 3 層材料係數 $a_3 = 0$ 時，第 3 層梯度材料亦將退化為均質材料。原先三層皆不相同的 FGMs，在 $a_1 = 0$ ， $a_3 = 0$ 的條件下，並且保持第 2 層 FGM 層相同，便可得到雙層相異質材料夾 FGM 的三明治結構。

以陶瓷汽缸中常見的複材結構為例，氧化鋯作為耐磨耗、耐熱層，金屬鎳提供高延展性達到抗震的目的。但由於兩者的材料特性差異頗大，往往在界面處會發生脫層的現象。若在兩材料間加入一層功能性梯度材料，便可降低兩材料間的相異性。此處將第 1 層材料設定為 1cm 厚的氧化鋯均質材料，第 2 層材料為 1cm 厚的 Ni/ZrO₂ FGM，第 3 層材料為 1cm 厚的金屬鎳均質材料。接著，利用式(4-86)第 1 層材料的應力場配合 Durbin 數值逆轉換($\alpha T = 7.5$ ， $N=10000$)，將原本的三層 FGMs 退化為氧化鋯、鎳雙層均質材料夾 FGM，其計算結果繪於圖 4-26 中。步階函數形式的波源於 $t/S_L^{(1)}h_1 = 0.5$ 時第一次抵達第 1 層(氧化鋯)中點，在 1 單位的無因次化時間後($t/S_L^{(1)}h_1 = 1.5$)，應力波經過 FGM 時會反應出傾斜漸變(斜率為負)但連續的一段響應($t/S_L^{(1)}h_1 = 1.5 \sim 2.5$)。當應力波自上表面自由邊界處全反射，再次抵達觀測點時($t/S_L^{(1)}h_1 = 2.5$)，其響應則又歸赴水平。而後，應力波在 FGM 層內的影響，經過上表面的反射後也逐漸抵達觀測點(斜率為正)。其中值得注意的是，圖 4-26 中應力不連續的現象是來自於阻抗不匹配的因素，在自由邊界處產生全反射的情況下，在時間 $t/S_L^{(1)}h_1 = 0.5, 5.13, 6.135, 10.755, 11.76, 16.38, 17.385, \dots$ ，出現接近 $\Delta\sigma/\sigma_0 = 1$ 不連續的跳躍。長時間進行觀察，上下表面為自由邊界時，應力波不斷來回全反射，形成有規律性的波包在圖 4-26 中，而當越來越多的應力波抵達觀測點，動態響應被扭曲的現象亦逐漸加大。

改用式(4-101)第 1 層材料的應力場配合 Durbin 逆轉換($\alpha T = 7.5$ ， $N=10000$)，不用退化而直接分析氧化鋯、鎳雙層均質材料夾 FGM 的情況，其計算結果繪於圖 4-27 中。和圖 4-26 相比較，兩者的數值結果幾乎完全相同，唯一的不同發生在劇烈變化的轉折處，這是由於 Durbin 數值逆轉換所造成的計算誤差。對於兩個不相同的函數(式(4-86)和式(4-101))，雖在同樣的 Durbin 計算條件下，出現誤差之處卻不盡相同。

當觀測點設在 FGM 中點(亦即表示第 2 層梯度材料的中點)時，以式(4-88)和式(4-103)的計算結果各別繪於圖 4-28 和圖 4-29 中。發現以 3 層 FGMs 退化的方式計算，和直接計算氧化鋁、鎳雙層均質材料夾 FGM 能有很好的的一致性。兩圖皆顯示源波於 $t/S_L^{(1)}h_1 = 1.05$ 時初次抵達觀測點，產生不連續的跳躍。因為觀測點設在 FGM 中點的緣故，時間 1.05 後隨即產生應力衰減的現象，隨著觀測時間的增加，應力波被扭曲的情況遠比第 1 層中點的數值結果還要嚴重。3 層 FGMs 以退化方式計算以及直接計算氧化鋁、鎳雙層均質材料夾 FGM，第 3 層材料中點的暫態響應分別顯示於圖 4-30 和圖 4-31 中。應力大小 $\sigma/\sigma_0 = 0.82$ 的源波初次抵達時間為 $t/S_L^{(1)}h_1 = 2.385$ ，而來自下表面自由邊界的一次全反射在 $t/S_L^{(1)}h_1 = 3.255$ 時再次抵達觀測點。在 $t/S_L^{(1)}h_1 = 2.385 \sim 3.255$ 時間內的響應，因應力波已通過中間 FGM 層而抵達第 3 層中點，因此並非為一條水平線，且其斜率會隨著應力波在 FGM 中多次的穿透反射，而越變傾斜。

雖然，在不同位置所觀測到的應力響應並不相同，但由圖 4-26~圖 4-31 中可以得到幾個重要的資訊：以三層 FGMs 退化方式和直接分析雙層相異質材料夾 FGM 互相比較與驗證，可以證實多層域的 FGMs 暫態波傳分析為正確。再者，圖中發生不連續的跳躍現象，必定代表著層與層間有阻抗不連續產生，亦即表示在上下表面處有全反射現象。當觀測時間增加時，因 FGM 層造成應力波扭曲的現象將會越加嚴重。

4-2-4 雙層相異質材料夾功能性梯度材料的連續性探討

在前一節中，FGM 層以連續的方式銜接雙層相異質材料，但在真實情況下，材料常數要達到完美連續接合有其困難，多少會有些微不連續情形產生。在本節中將細部討論可能發生的不連續現象，包含單邊不連續與雙邊不連續。

當斜率參數 $a = -0.07048$ 時，約為連續銜接時的參數($a = -0.14096$)一半，而

其計算出的密度與彈性常數分布圖，分別繪於圖 4-32(a)、(b)中。圖中顯示第 1 層材料和 FGM 連續，而不連續一端的密度和彈性常數分別為 6830 kg/m^3 和 252.33 GPa ，比第 3 層均質材料來得硬，並將其計算結果繪於圖 4-33 中。由圖中的應力響應可以知道，因不連續分佈所產生的跳躍現象比起連續時更多且更明顯。

若斜率參數改為 $a = -0.28192$ 時，約為連續時的參數($a = -0.14096$)兩倍，其密度、彈性常數分布圖繪於圖 4-34。不連續一端的密度與彈性常數個別為 3390 kg/m^3 與 179.59 GPa ，比第 3 層均質材料來得軟。將其計算結果繪於圖 4-35 中，並和圖 4-33 參照比較，可以發現應力波通過 FGM 時，所造成傾斜的斜率並不相同，而不連續端較第 3 層均質材料硬或是軟的結果差異頗大。

接著討論雙邊不連續的情況，假設控制斜率的參數 $a = -0.07048$ ，並且增加 FGM 層於氧化鋁、鎳之間的兩個界面密度和彈性常數皆不連續的情況，其密度、彈性常數的位置分布圖如圖 4-36 所示。第 1 層材料和 FGM 層存在一個 $\Delta\rho = 714\text{ kg/m}^3$ 和 $\Delta E = 12.64\text{ GPa}$ 的間隙，而第 3 層和 FGM 則存在 $\Delta\rho = 951\text{ kg/m}^3$ 和 $\Delta E = 17.48\text{ GPa}$ 的間隙。換言之，第 2 層 FGM 的密度起始值與終點值個別為 8186 kg/m^3 、 6282 kg/m^3 ，彈性常數的起始值與終點值各為 274.28 GPa 、 241.21 GPa 。

接著將 FGM 與氧化鋁、鎳間雙邊不連續的數值計算結果繪於圖 4-37 中。這些不連續現象，在圖中也是可見清楚的跳躍變化。當材料密度和彈性常數彼此間存在的間隙(不連續)愈大，不論是單邊或是雙邊不連續，其暫態響應產生的跳躍情形也會愈明顯。應力響應圖中所有的垂直線(跳躍)皆是肇因於阻抗不匹配，一般來說，較短的垂直跳躍發生在層與層的交界處，較長的垂直跳躍則發生在上下表面的自由邊界處。而其他傾斜非垂直的部分，是來自功能性梯度材料的影響。

表 4-1 功能性梯度材料的相關材料常數

	Ni/ZrO ₂	ZrO ₂ /Ni	SiC/Al	Al/SiC
E'_0 (GPa)	286.922	223.728	225.719	105.197
ρ_0 (kg / m ³)	8900	5331	3100	2710
c_0 (m / s)	5678	6478	8533	6230
a	0.14096	-0.12354	-0.53395	1.14568
m	-1.8866	-1.8866	1	1
n	-3.8866	-3.8866	0.17611	0.17611

表 4-2 以十層均質材料來模擬單層功能性梯度板 Ni/ZrO₂ 之相關材料常數

No.	E (GPa)	ρ (kg / m ³)	C_L (m / s)	Impedance (kg / m ² s)	h (mm)
1	226.36	5461	6438	35158325	0.5
2	231.76	5733	6358	36451059	0.5
3	237.37	6022	6278	37808617	0.5
4	243.18	6330	6198	39235138	0.5
5	249.22	6658	6118	40735086	0.5
6	255.49	7008	6038	42313275	0.5
7	262.00	7381	5958	43974906	0.5
8	268.77	7779	5878	45725604	0.5
9	275.82	8205	5798	47571454	0.5
10	283.15	8660	5718	49519050	0.5

表 4-3 以二十層均質材料來模擬單層功能性梯度板 Ni/ZrO₂ 之相關材料常數

No.	$E(GPa)$	$\rho (kg / m^3)$	$C_L (m / s)$	Impedance ($kg / m^2 s$)	$h (mm)$
1	225.04	5395	6458	34844813	0.25
2	227.69	5527	6418	35475646	0.25
3	230.39	5663	6378	36121954	0.25
4	233.15	5804	6338	36784215	0.25
5	235.95	5948	6298	37462930	0.25
6	238.80	6097	6258	38158614	0.25
7	241.71	6251	6218	38871805	0.25
8	244.67	6410	6178	39603060	0.25
9	247.69	6574	6138	40352958	0.25
10	250.77	6744	6098	41122101	0.25
11	253.90	6918	6058	41911115	0.25
12	257.09	7099	6018	42720648	0.25
13	260.35	7285	5978	43551376	0.25
14	263.67	7478	5938	44404001	0.25
15	267.06	7677	5898	45279255	0.25
16	270.51	7883	5858	46177897	0.25
17	274.03	8096	5818	47100719	0.25
18	277.62	8316	5778	48048545	0.25
19	281.29	8544	5738	49022231	0.25
20	285.02	8779	5698	50022672	0.25

表 4-4 以十層均質材料來模擬單層功能性梯度板 SiC/Al 之相關材料常數

No.	$E(GPa)$	$\rho (kg / m^3)$	$C_L (m / s)$	Impedance (kg / m^2s)	$h (mm)$
1	111.22	2737	6375	17446614	0.5
2	123.27	2787	6651	18534735	0.5
3	135.33	2833	6912	19579820	0.5
4	147.38	2876	7159	20587200	0.5
5	159.43	2916	7394	21561164	0.5
6	171.48	2954	7620	22505231	0.5
7	183.54	2989	7836	23422331	0.5
8	195.59	3023	8044	24314933	0.5
9	207.64	3055	8245	25185146	0.5
10	219.69	3085	8438	26034785	0.5

表 4-5 以二十層均質材料來模擬單層功能性梯度板 SiC/Al 之相關材料常數

No.	$E(GPa)$	$\rho (kg / m^3)$	$C_L (m / s)$	Impedance ($kg / m^2 s$)	$h (mm)$
1	108.21	2724	6303	17167107	0.25
2	114.24	2750	6446	17723019	0.25
3	120.26	2775	6584	18266975	0.25
4	126.29	2799	6718	18799811	0.25
5	132.31	2822	6848	19322272	0.25
6	138.34	2844	6975	19835017	0.25
7	144.37	2865	7098	20338640	0.25
8	150.39	2886	7219	20833674	0.25
9	156.42	2906	7337	21320602	0.25
10	162.44	2926	7452	21799860	0.25
11	168.47	2944	7564	22271848	0.25
12	174.50	2963	7675	22736931	0.25
13	180.52	2980	7783	23195442	0.25
14	186.55	2998	7889	23647690	0.25
15	192.58	3015	7993	24093959	0.25
16	198.60	3031	8095	24534510	0.25
17	204.63	3047	8195	24969588	0.25
18	210.65	3063	8294	25399419	0.25
19	216.68	3078	8391	25824214	0.25
20	222.71	3093	8486	26244169	0.25

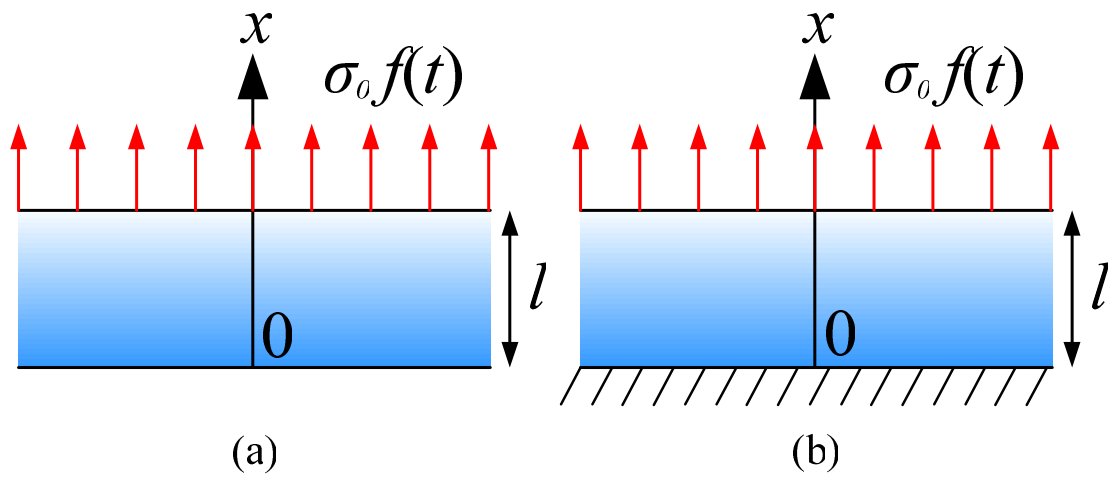


圖 4-1 功能性梯度板的幾何結構與其邊界條件示意圖：(a)自由邊界；(b)固定邊界。

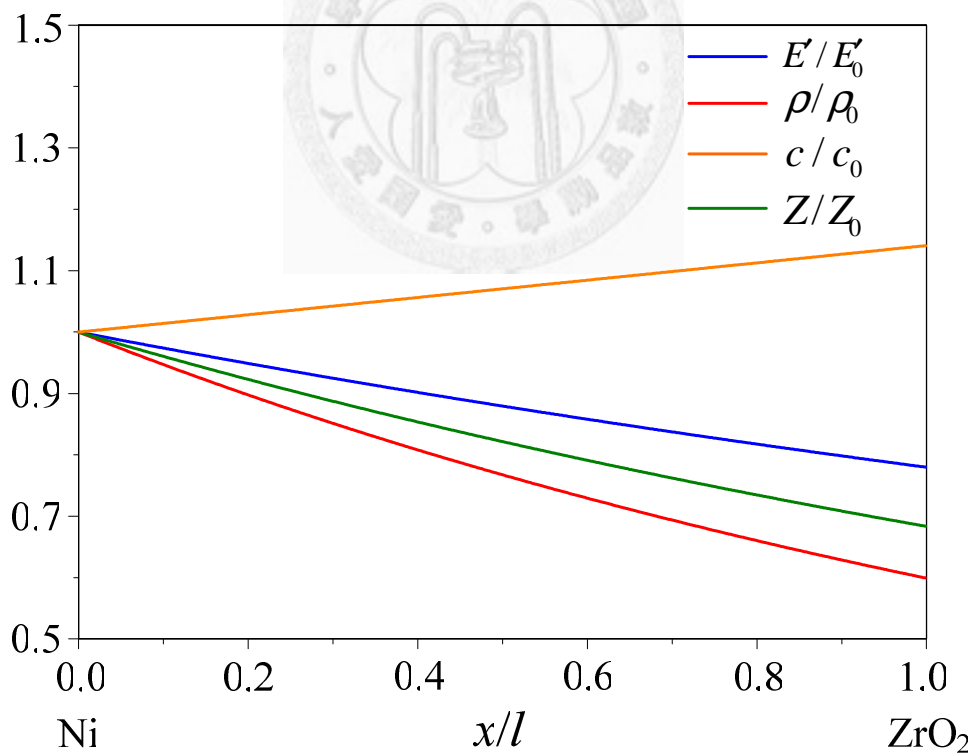


圖 4-2 Ni/ZrO₂ 功能性梯度材料的彈性常數、密度、縱波波速、機械阻抗分佈圖。

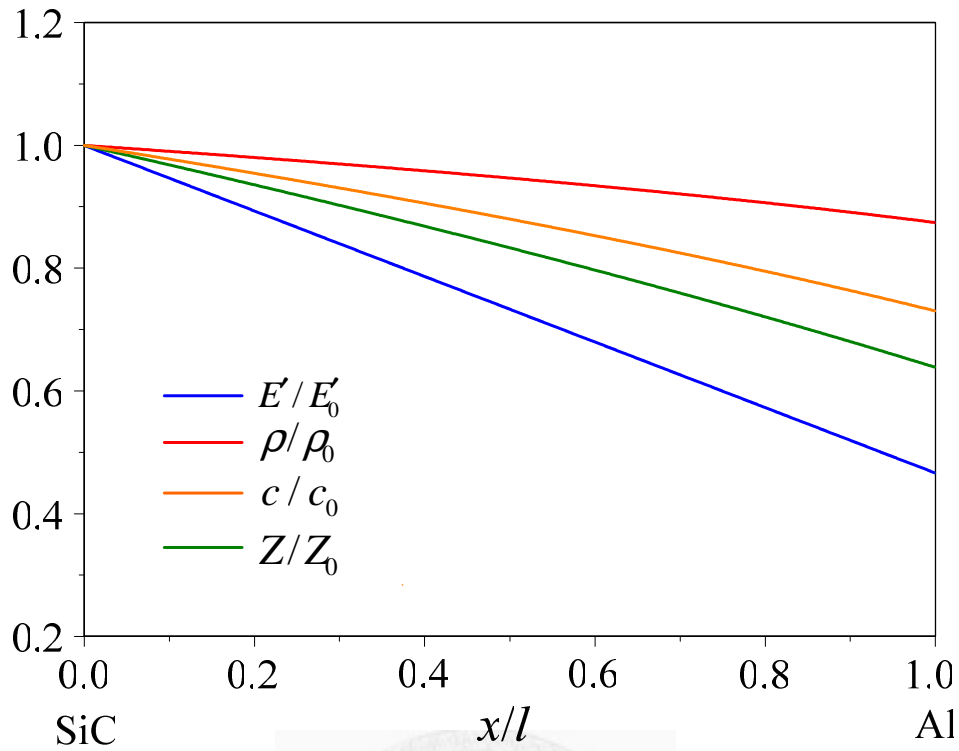


圖 4-3 SiC/Al 功能性梯度材料的彈性常數、密度、縱波波速、機械阻抗分佈圖。

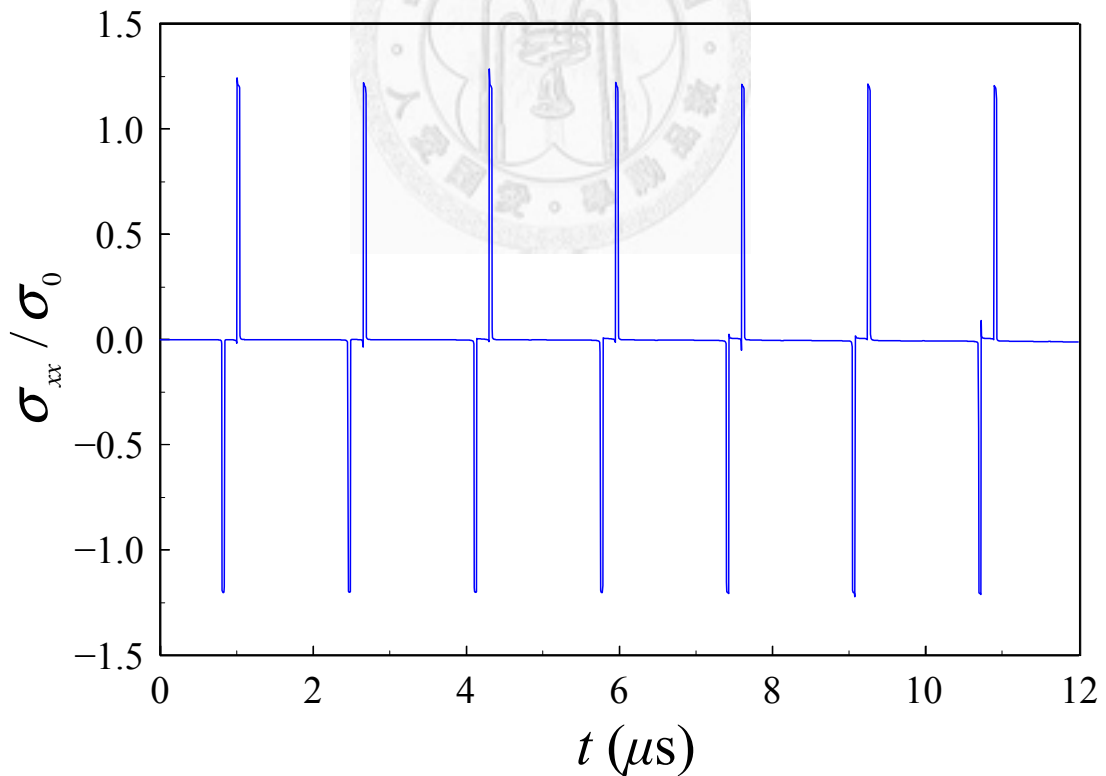


圖 4-4 在 $x=l/50$ 處，Ni/ZrO₂ 功能性梯度材料於自由邊界下的應力響應圖 ($l=5\text{ mm}$, $t_0=0.2\ \mu\text{s}$)。

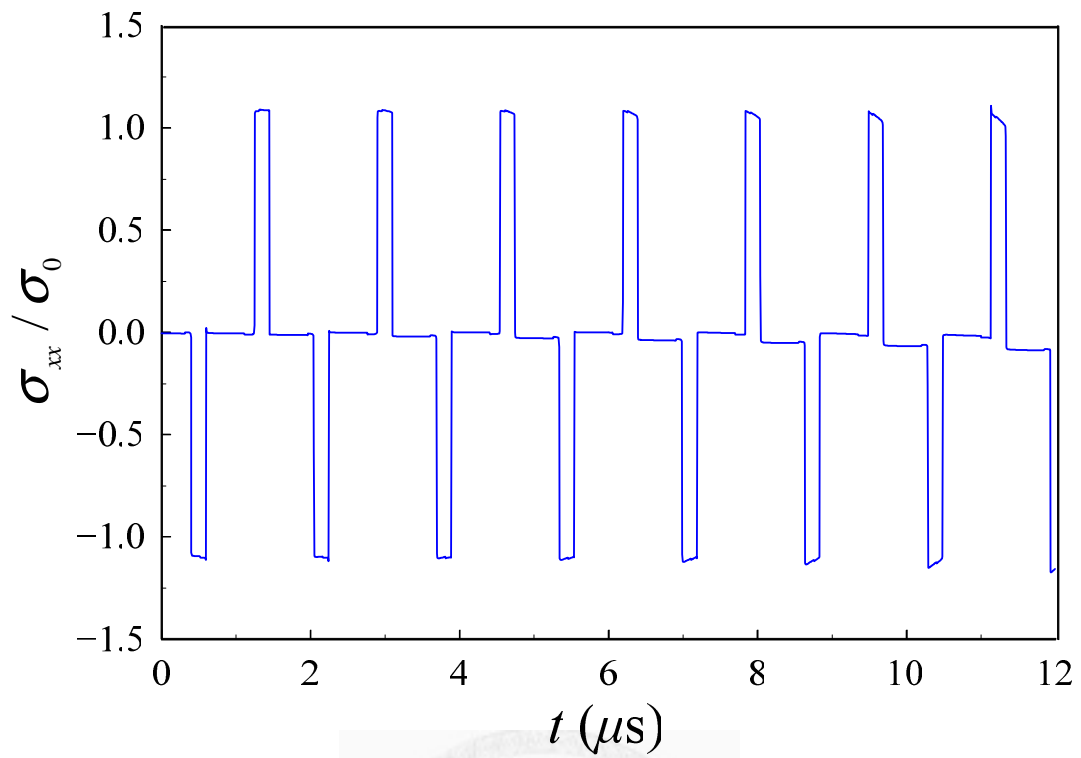


圖 4-5 在 $x=l/2$ 處，Ni/ZrO₂ 功能性梯度材料於自由邊界下的應力響應圖
($l=5\text{ mm}$, $t_0=0.2\ \mu\text{s}$)。

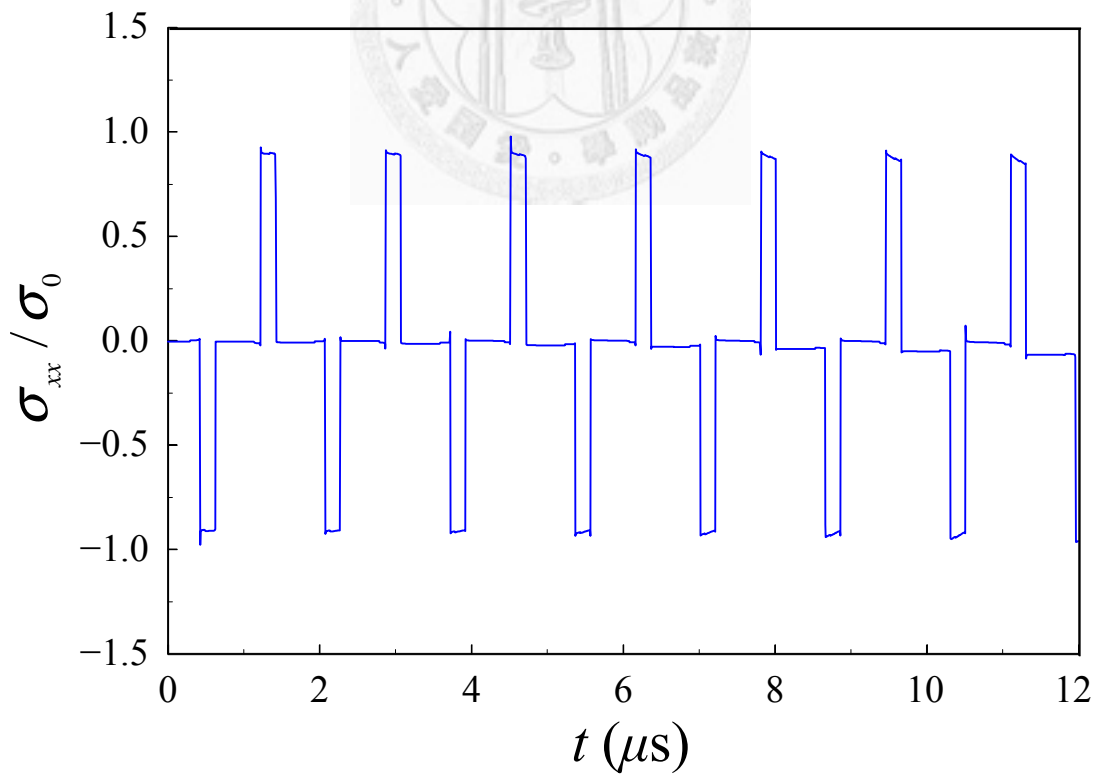


圖 4-6 在 $x=l/2$ 處，ZrO₂/Ni 功能性梯度材料於自由邊界下的應力響應圖
($l=5\text{ mm}$, $t_0=0.2\ \mu\text{s}$)。

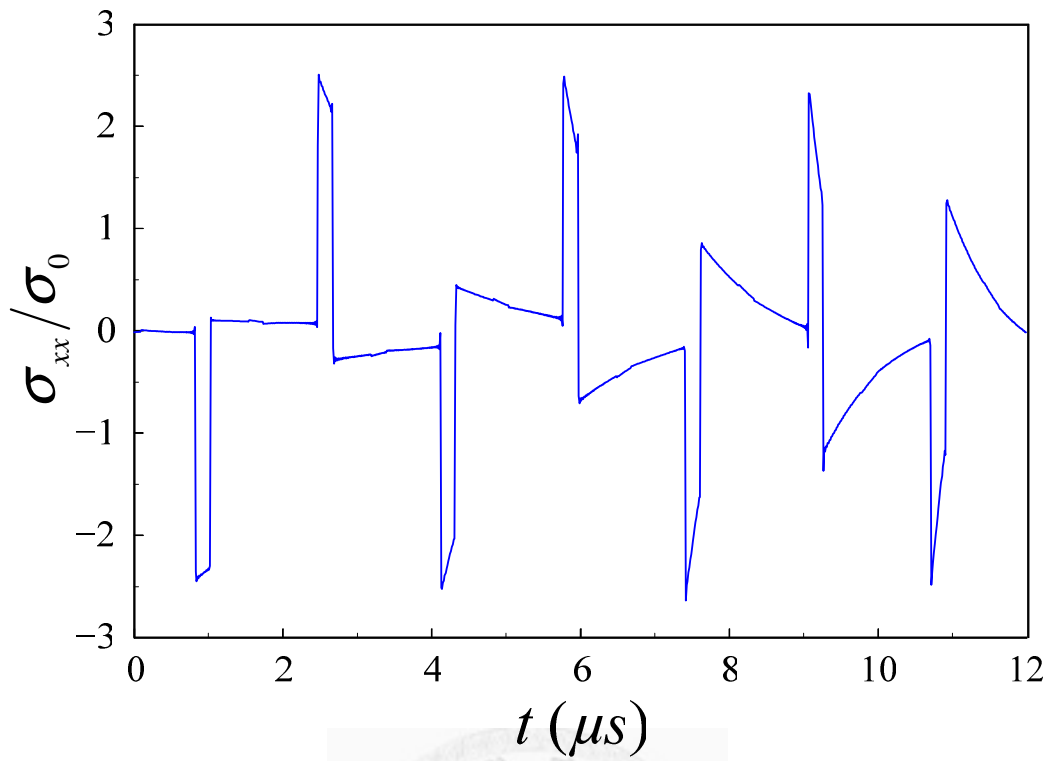


圖 4-7 在 $x=0$ 處，Ni/ZrO₂ 功能性梯度材料於固定邊界下的應力響應圖
($l=5\text{ mm}$, $t_0=0.2\ \mu s$)。

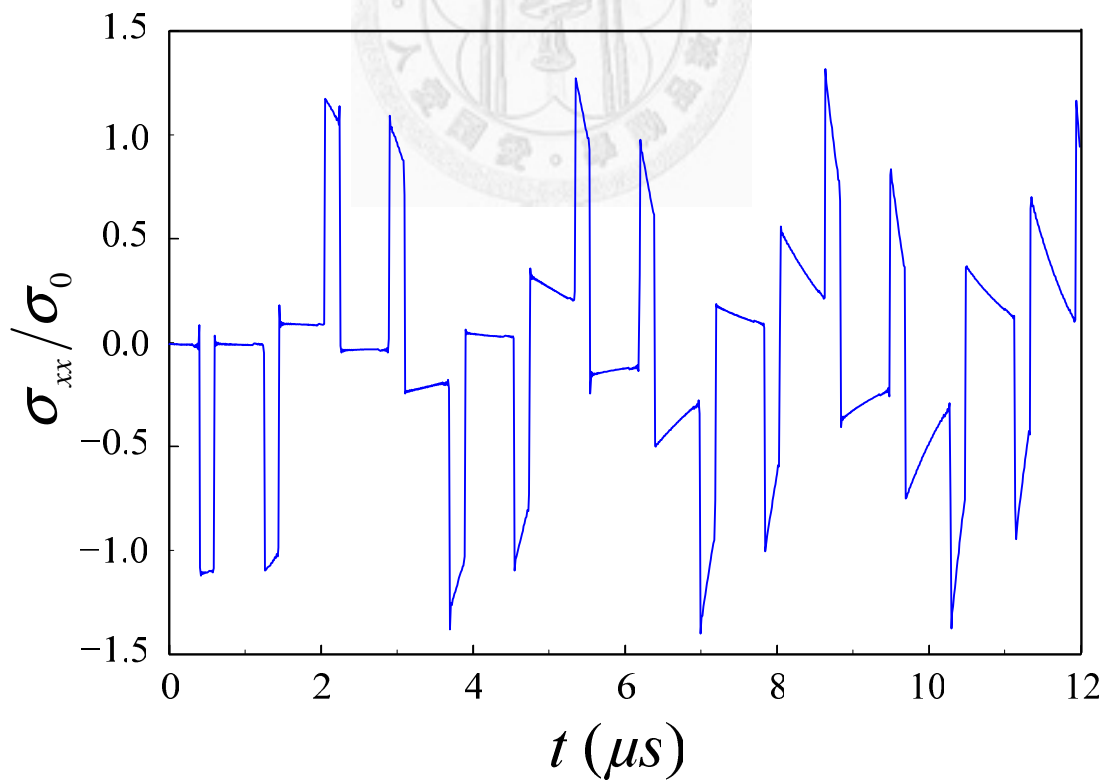


圖 4-8 在 $x=l/2$ 處，Ni/ZrO₂ 功能性梯度材料於固定邊界下的應力響應圖
($l=5\text{ mm}$, $t_0=0.2\ \mu s$)。

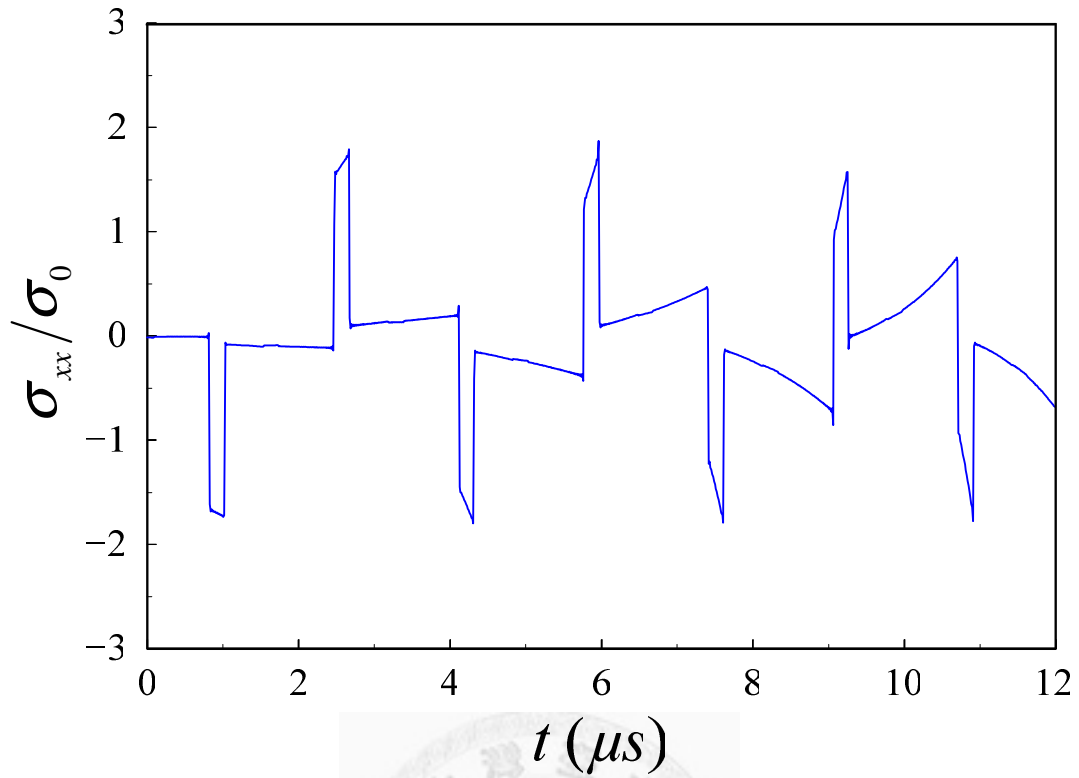


圖 4-9 在 $x=0$ 處， ZrO_2/Ni 功能性梯度材料於固定邊界下的應力響應圖
 ($l=5 \text{ mm}$, $t_0=0.2 \mu\text{s}$)。

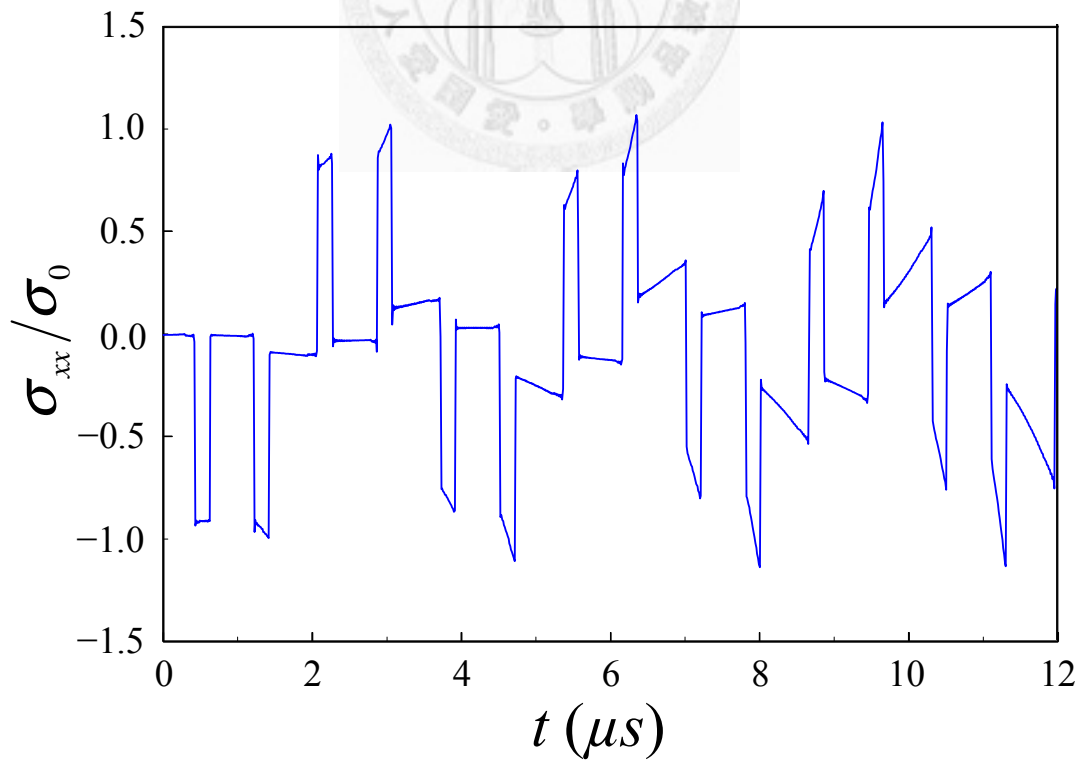


圖 4-10 在 $x=l/2$ 處， ZrO_2/Ni 功能性梯度材料於固定邊界下的應力響應圖
 ($l=5 \text{ mm}$, $t_0=0.2 \mu\text{s}$)。

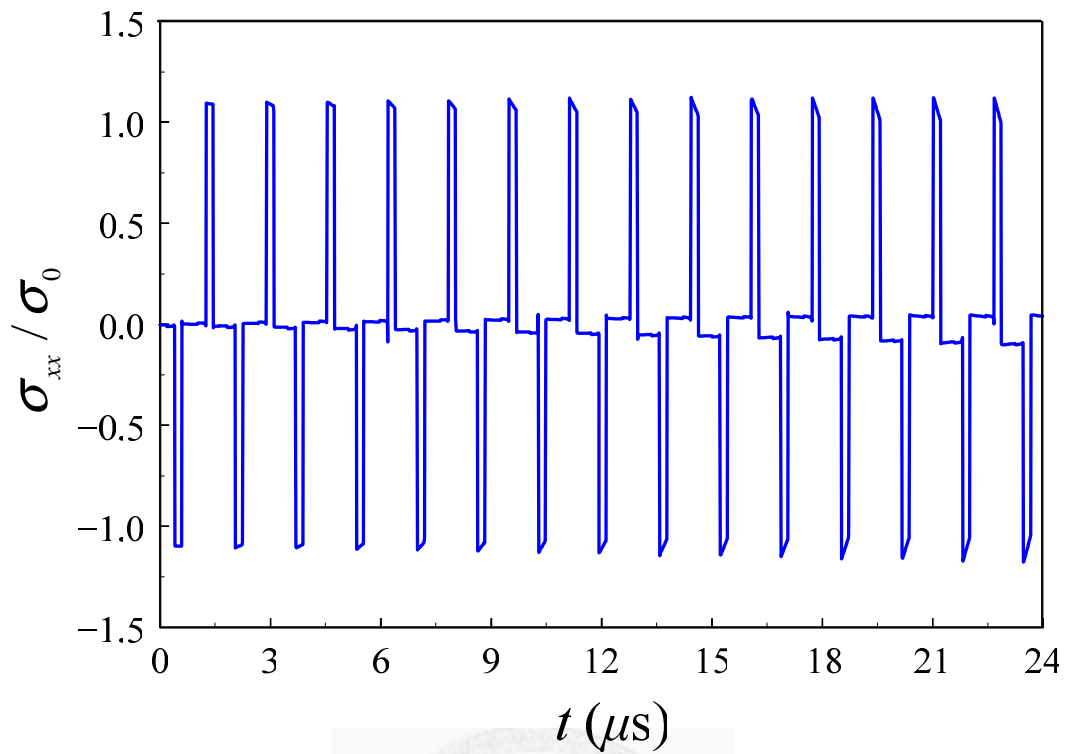


圖 4-11 在 $x=0$ 自由邊界下，觀測點位在 $x=l/2$ 時，Ni/ZrO₂ 功能性梯度板的長時間應力響應圖。

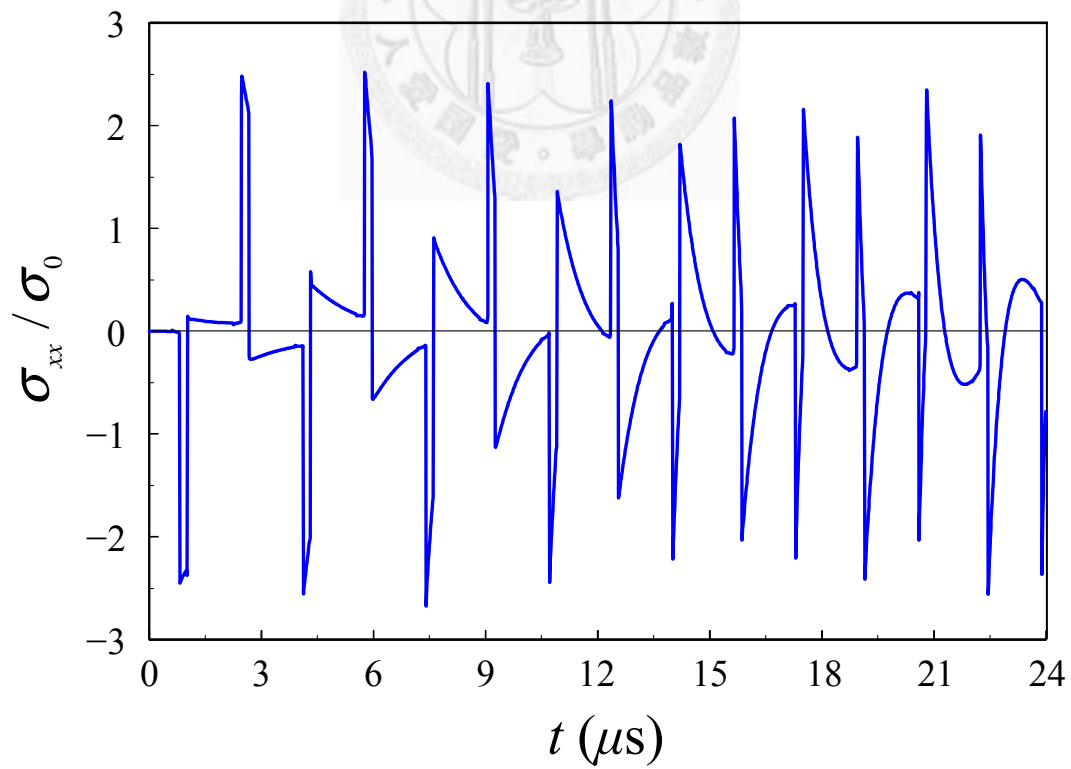


圖 4-12 在 $x=0$ 固定邊界下，觀測點位在固定端 ($x=0$)，Ni/ZrO₂ 功能性梯度板的長時間應力響應圖。

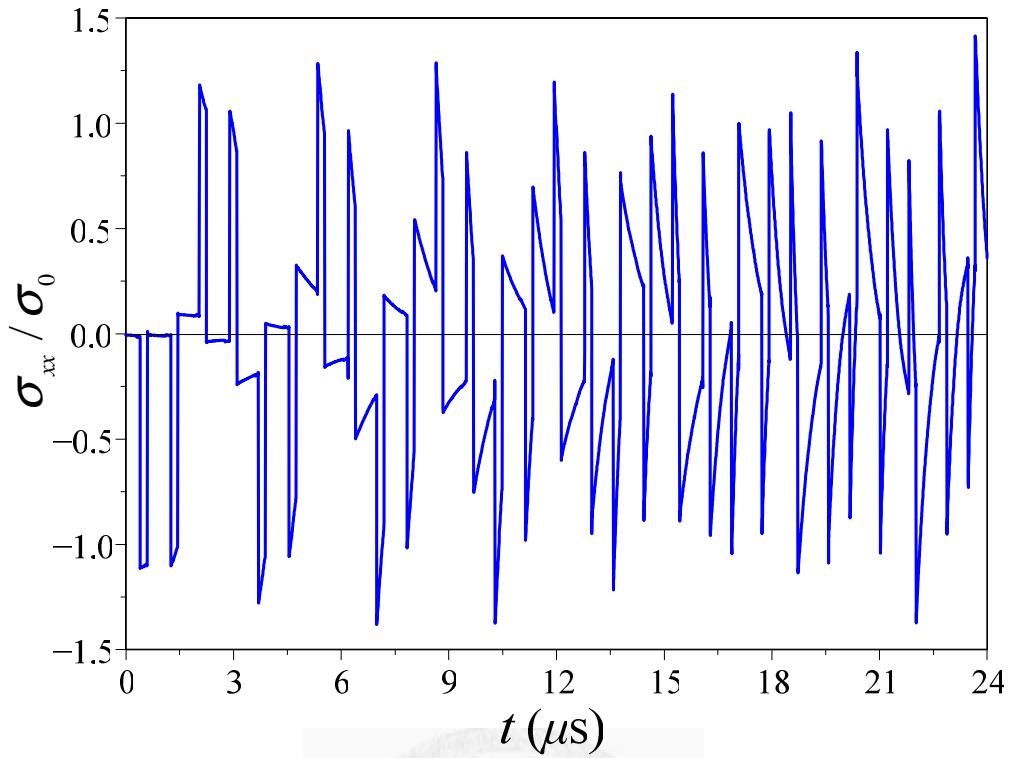


圖 4-13 在 $x=0$ 固定邊界下，觀測點位在 $x=l/2$ 時，Ni/ZrO₂ 功能性梯度板的長時間應力響應圖。

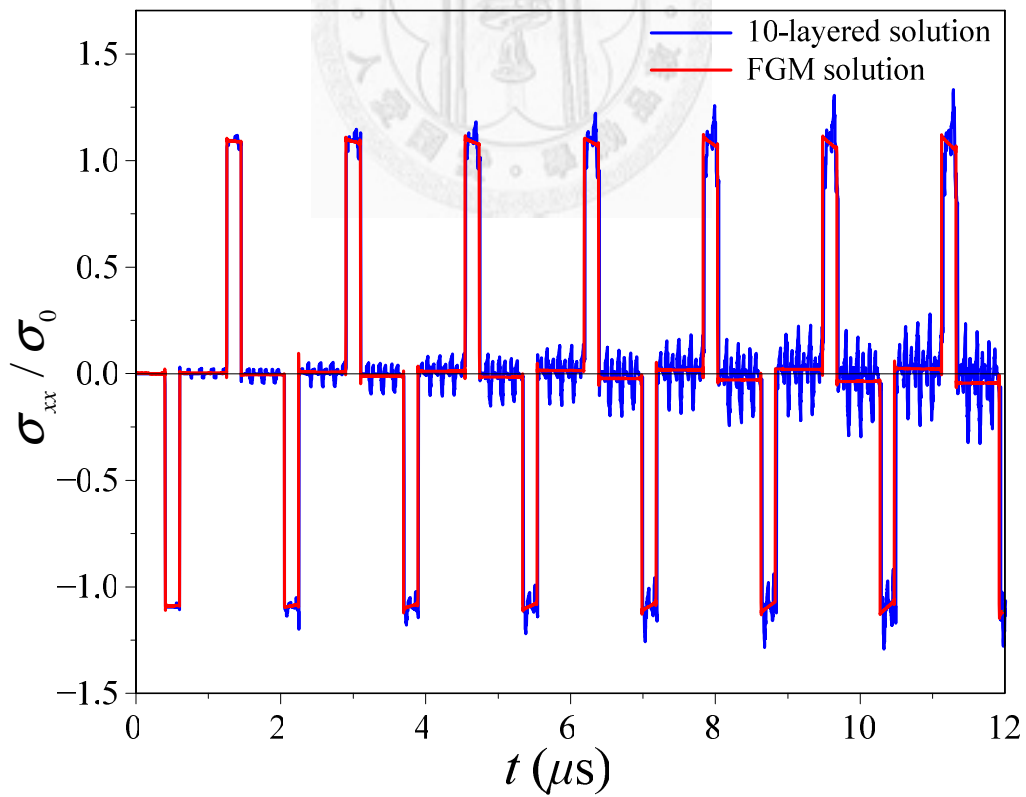


圖 4-14 在 $x=0$ 自由邊界下，觀測點位在 $x=l/2$ 時，Ni/ZrO₂ 功能性梯度板與 10 層介質模擬的應力響應圖。

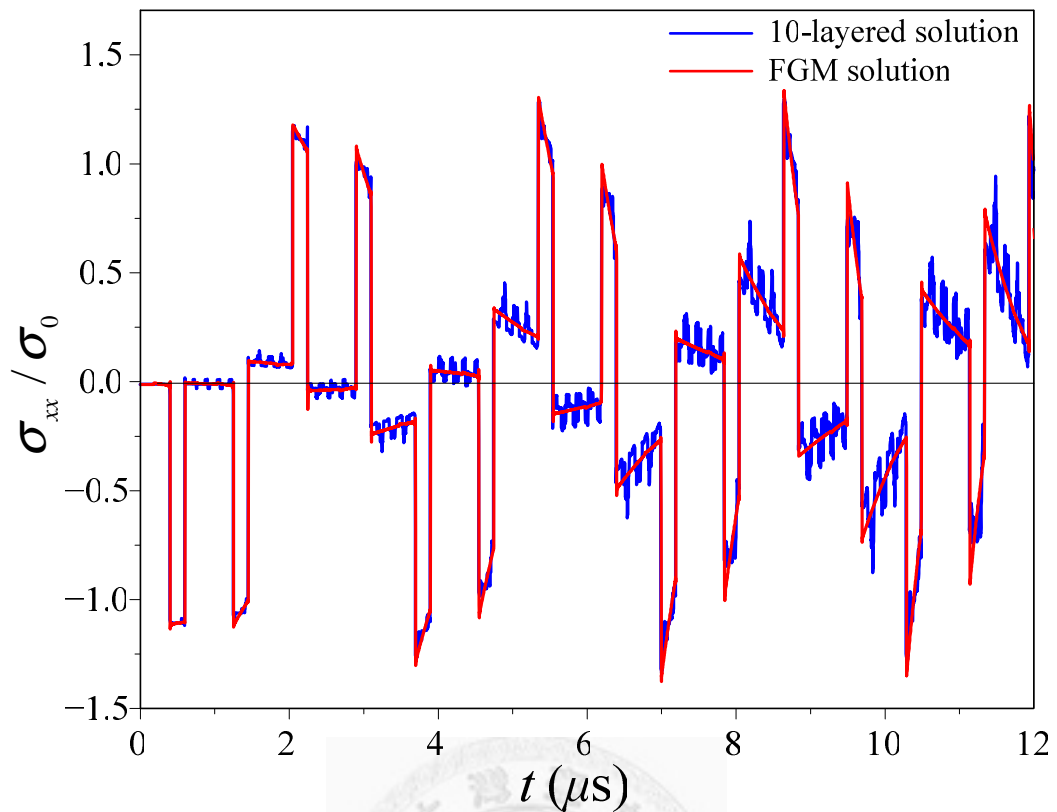


圖 4-15 在 $x=0$ 固定邊界下，觀測點位在 $x=l/2$ 時，Ni/ZrO₂ 功能性梯度板與 10 層介質模擬的應力響應圖。

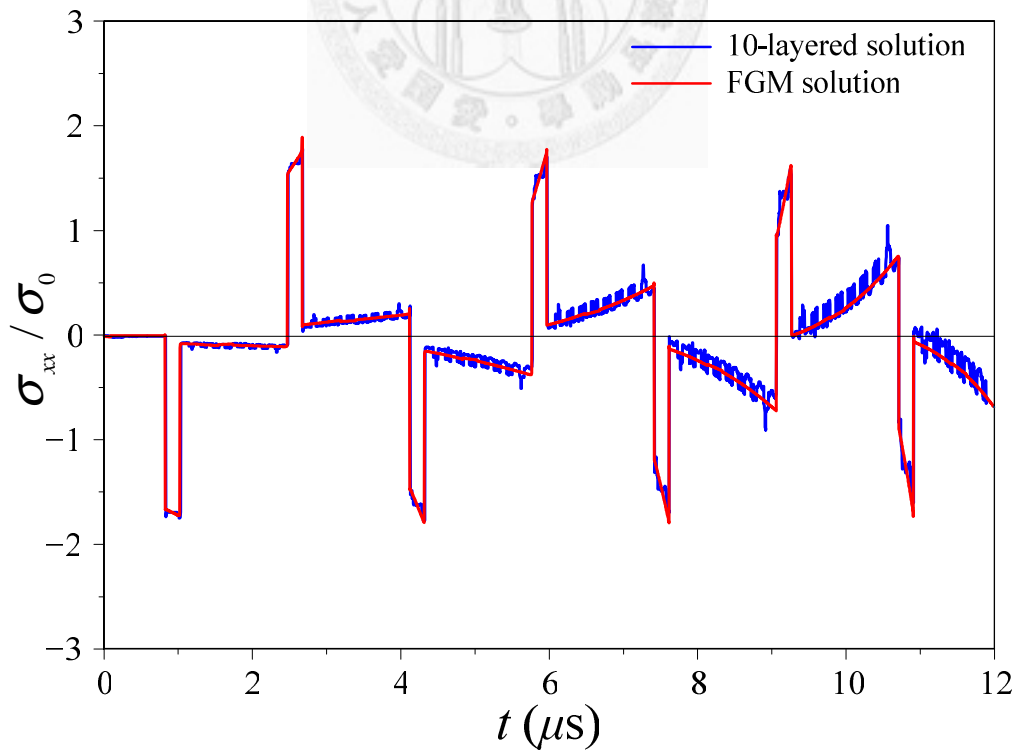


圖 4-16 在 $x=0$ 固定邊界下，觀測點位在 $x=0$ 時，ZrO₂/Ni 功能性梯度板與 10 層介質模擬的應力響應圖。

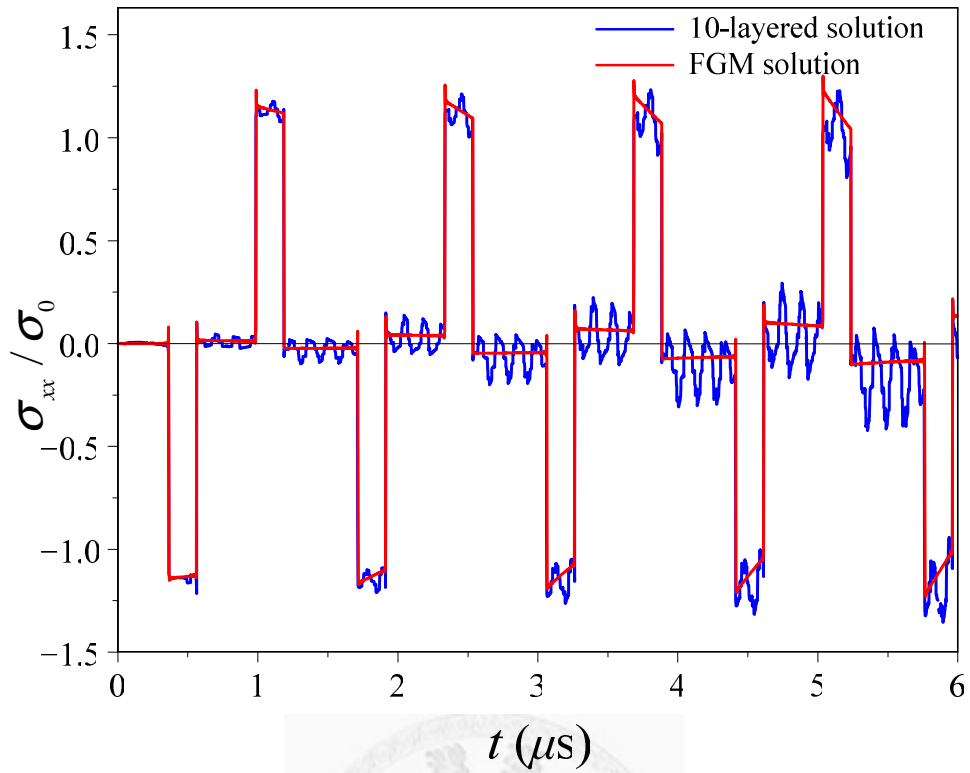


圖 4-17 在 $x=0$ 自由邊界下，觀測點位在 $x=l/2$ 時，SiC/Al 功能性梯度板與 10 層介質模擬的應力響應圖。

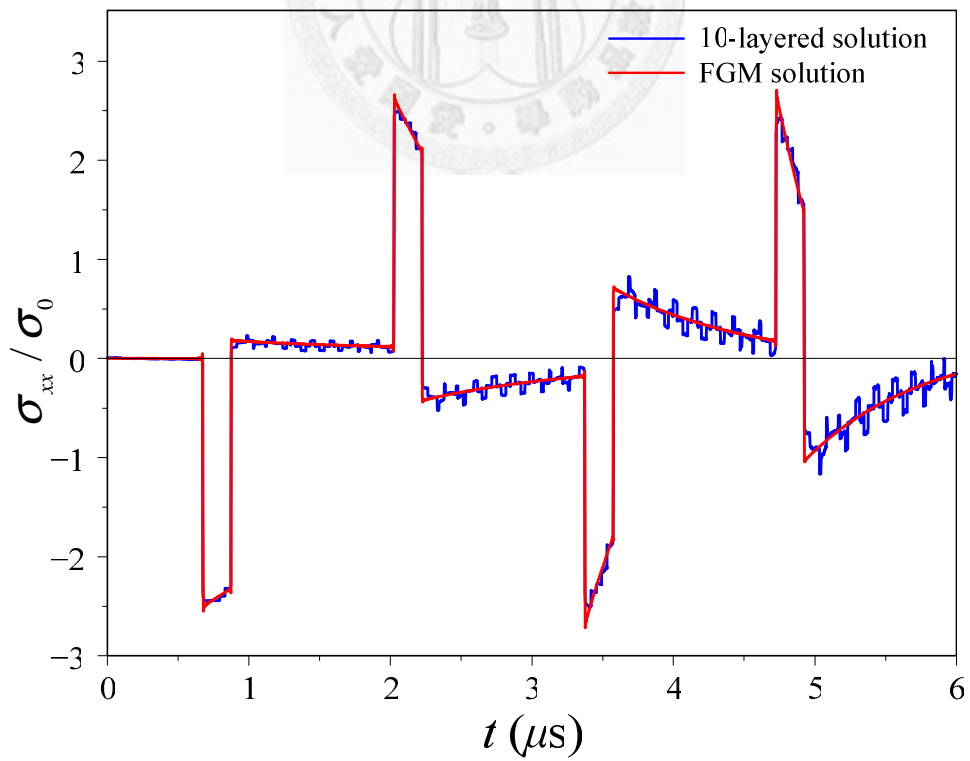


圖 4-18 在 $x=0$ 固定邊界下，觀測點位在 $x=0$ 時，SiC/Al 功能性梯度板與 10 層介質模擬的應力響應圖。

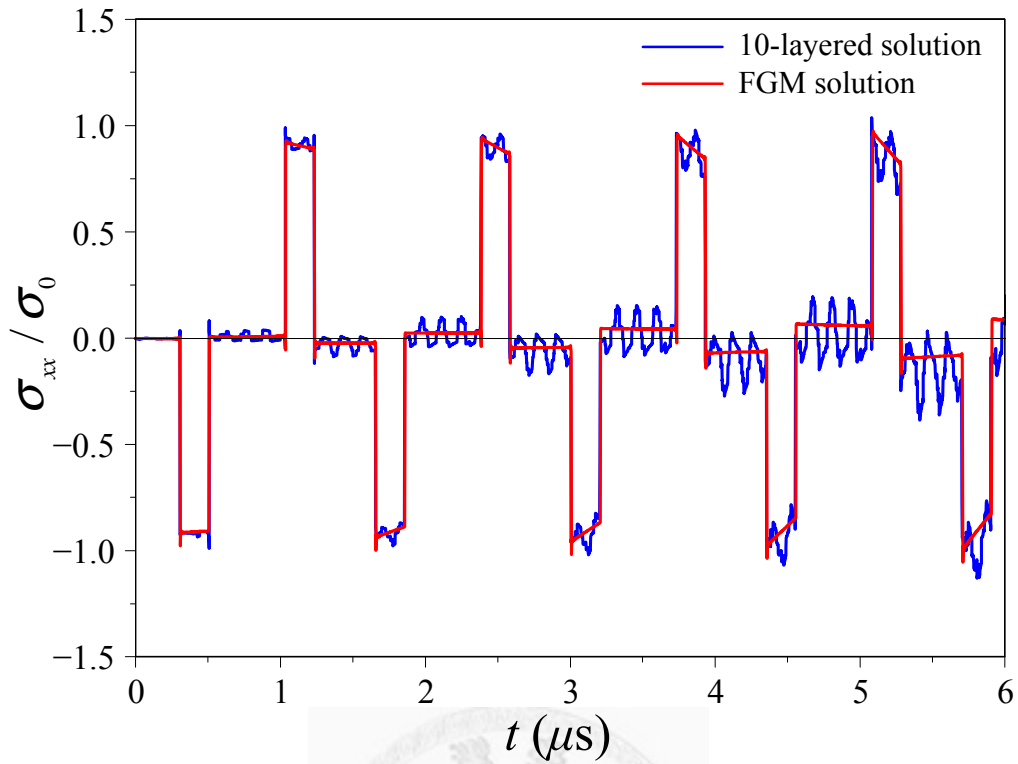


圖 4-19 在 $x=0$ 自由邊界下，觀測點位在 $x=l/2$ 時，Al/SiC 功能性梯度板與 10 層介質模擬的應力響應圖。

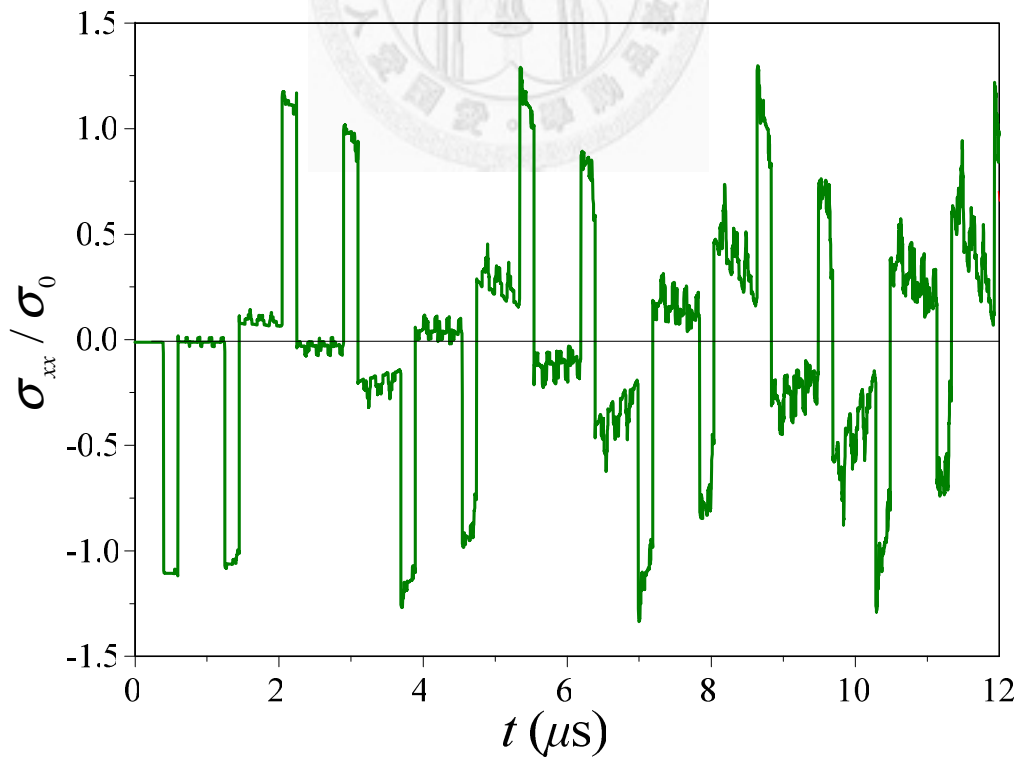


圖 4-20 在 $x=0$ 固定邊界下，觀測點位在 $x=l/2$ 時，10 層介質(Ni/ZrO₂)模擬的應力響應圖。

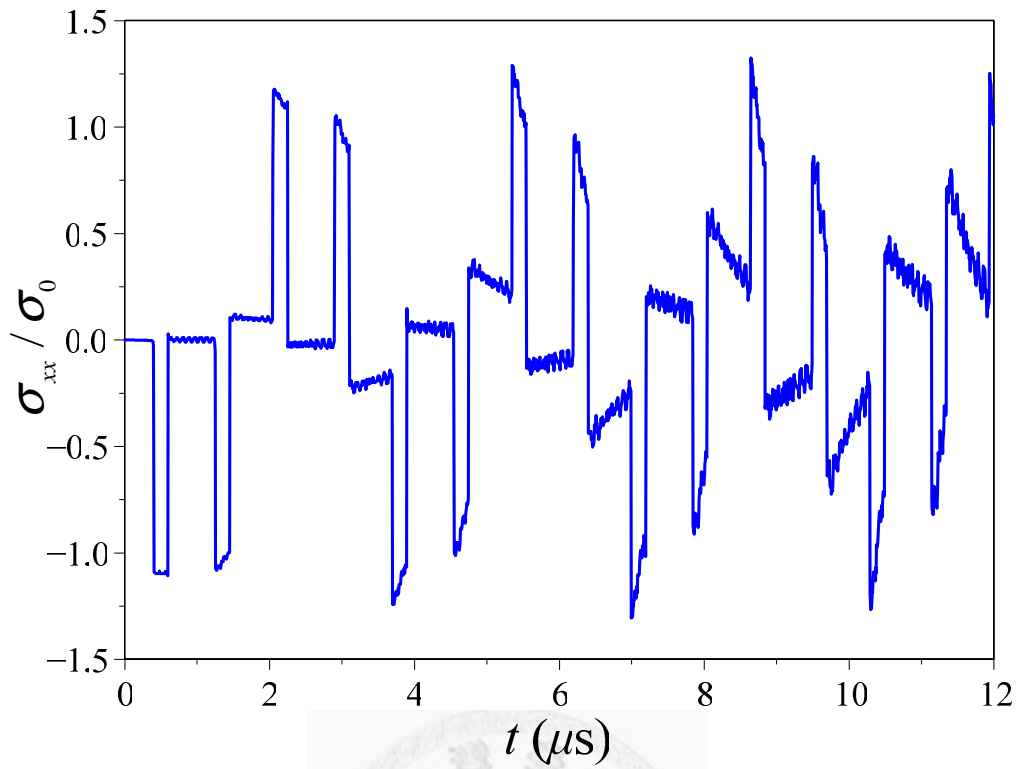


圖 4-21 在 $x=0$ 固定邊界下，觀測點位在 $x=l/2$ 時，20 層介質(Ni/ZrO₂)模擬的應力響應圖。

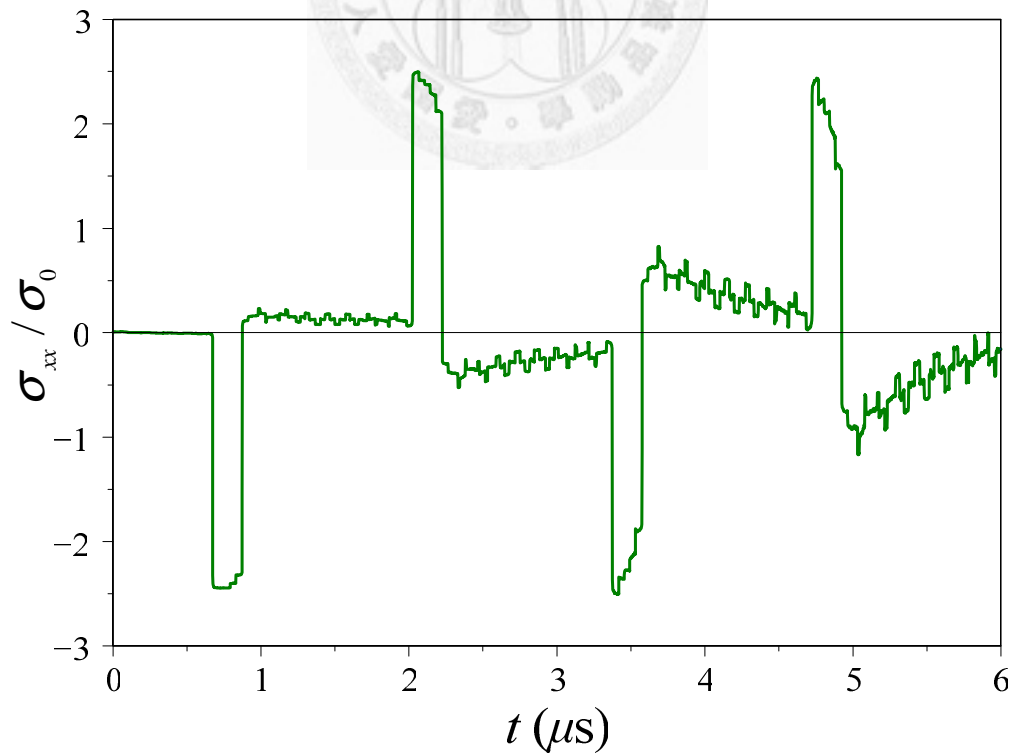


圖 4-22 在 $x=0$ 固定邊界下，觀測點位在 $x=0$ 時，10 層介質(SiC/Al)模擬的應力響應圖。

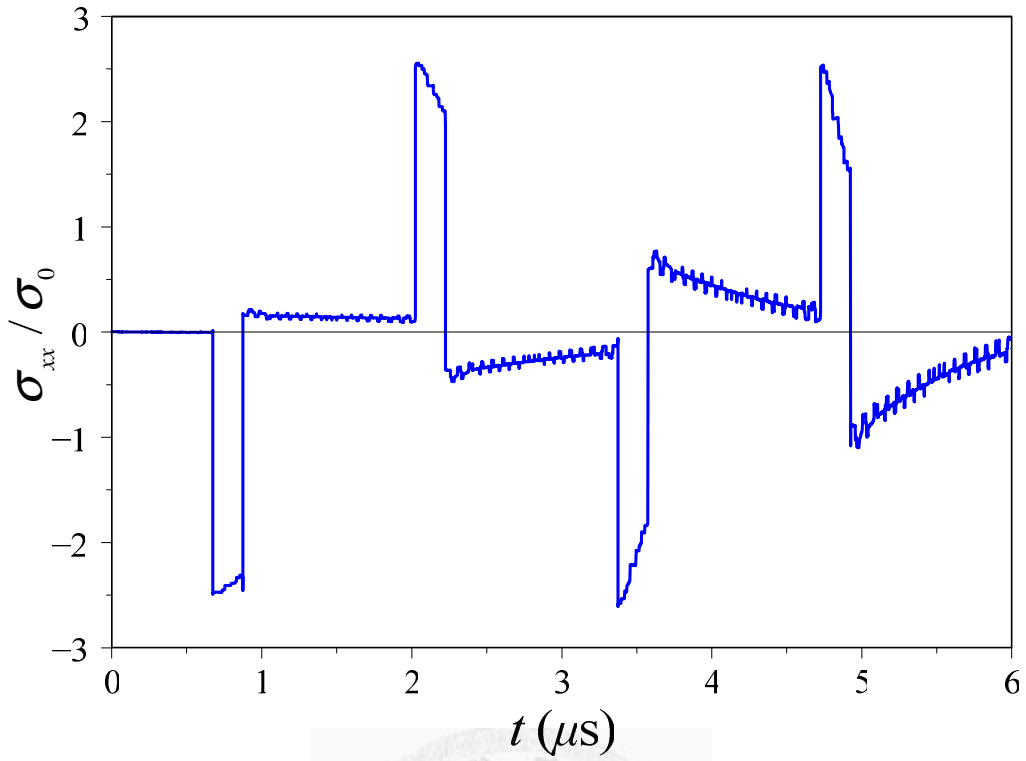


圖 4-23 在 $x=0$ 固定邊界下，觀測點位在 $x=0$ 時，20 層介質(SiC/Al)模擬的應力響應圖。

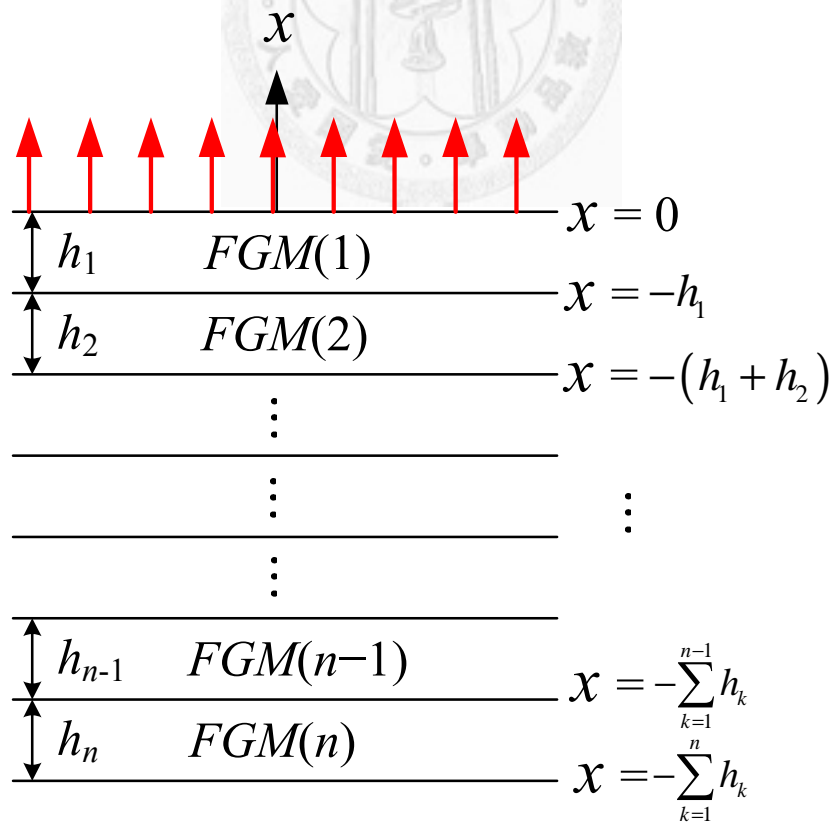


圖 4-24 n 層功能性梯度材料的結構示意圖。

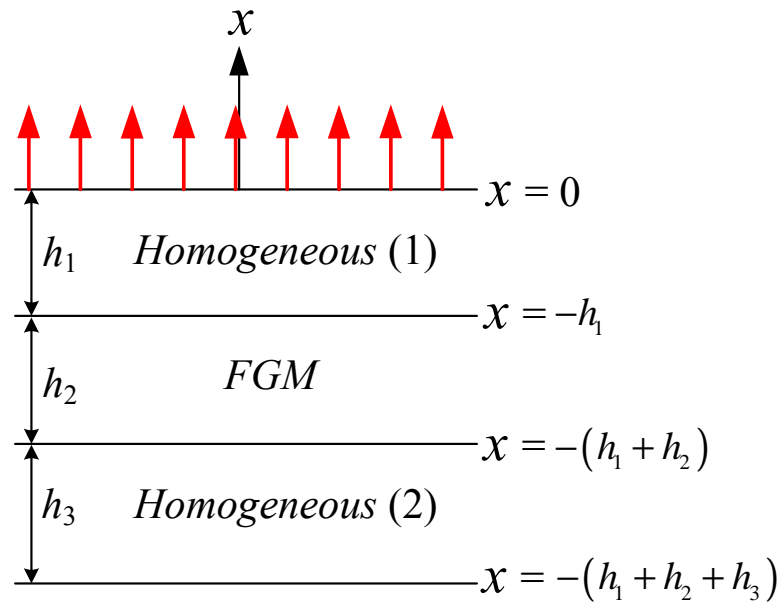


圖 4-25 雙層相異質材料夾功能性梯度材料的結構示意圖。

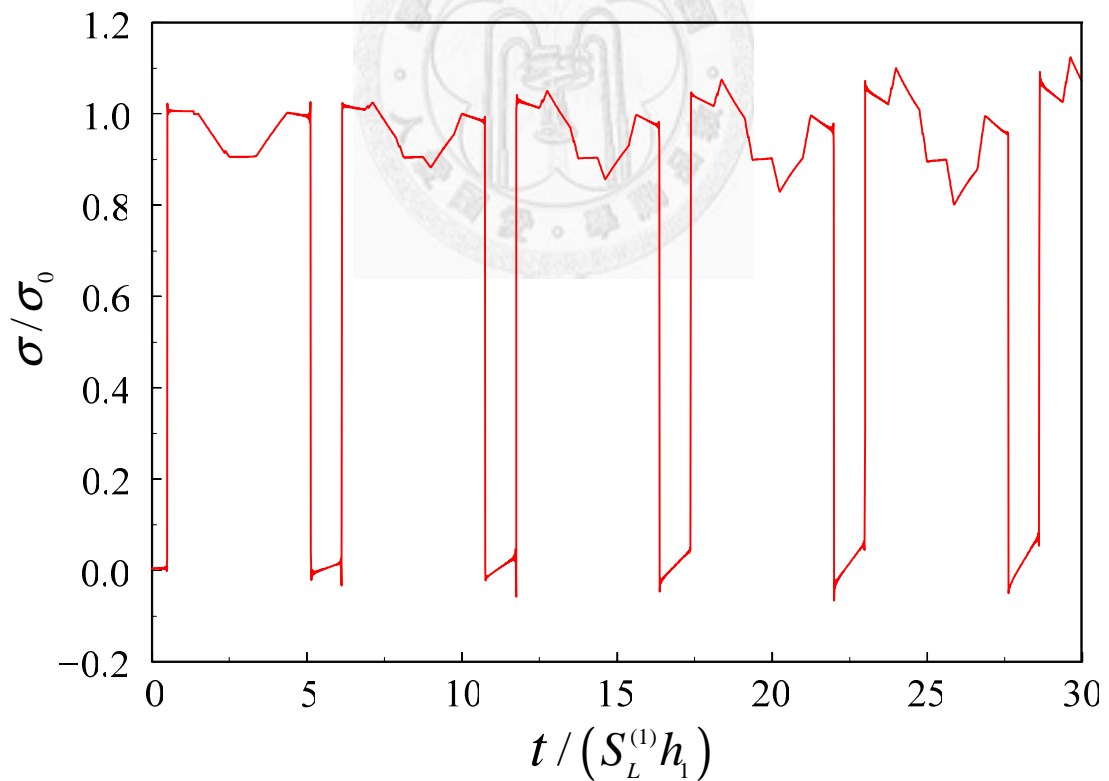


圖 4-26 當 3 層 FGM 材料退化為雙層相異質材料(氧化鋯、鎳)夾 FGM 材料時，第 1 層材料中點的應力響應圖。

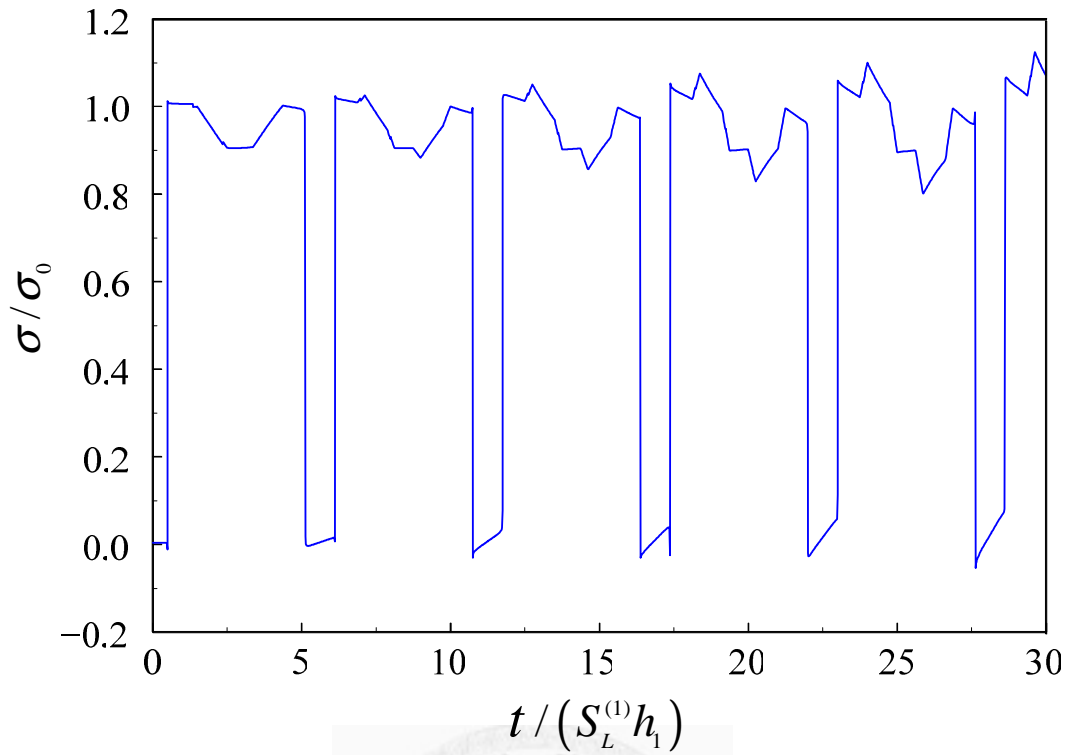


圖 4-27 雙層相異質材料(氧化鋁、鎳)夾 FGM 材料，第 1 層材料中點的應力響應圖。

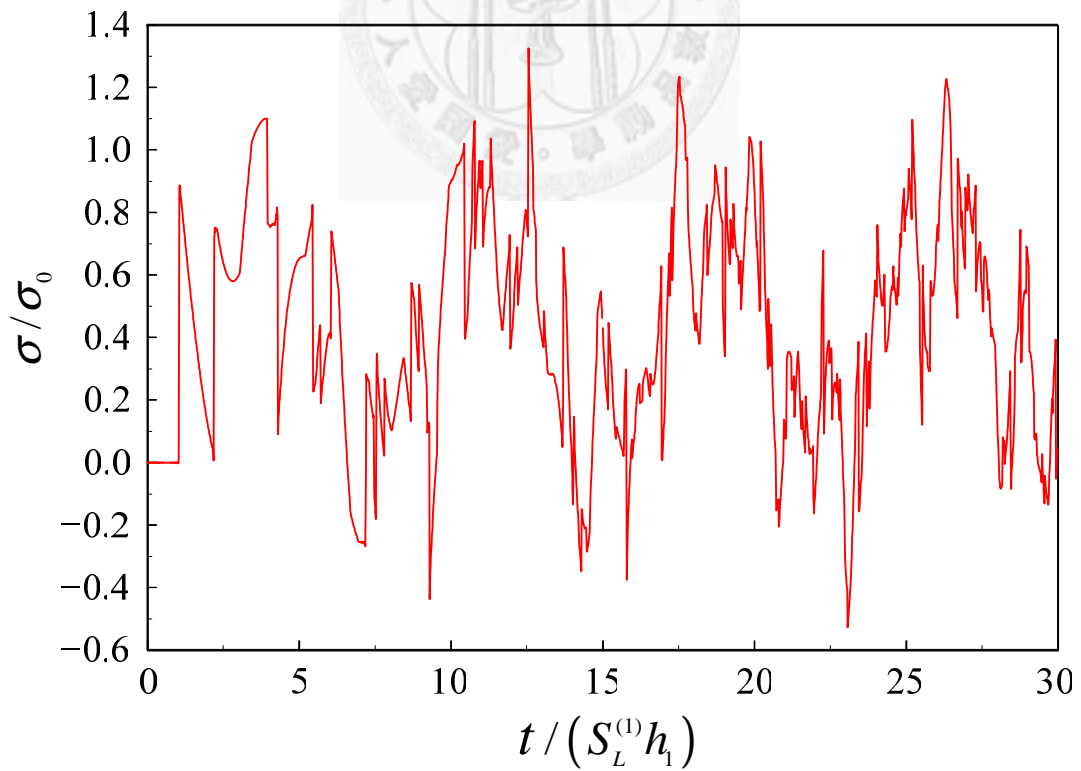


圖 4-28 當 3 層 FGM 材料退化為雙層相異質材料(氧化鋁、鎳)夾 FGM 材料時，第 2 層(FGM 層)中點的應力響應圖。

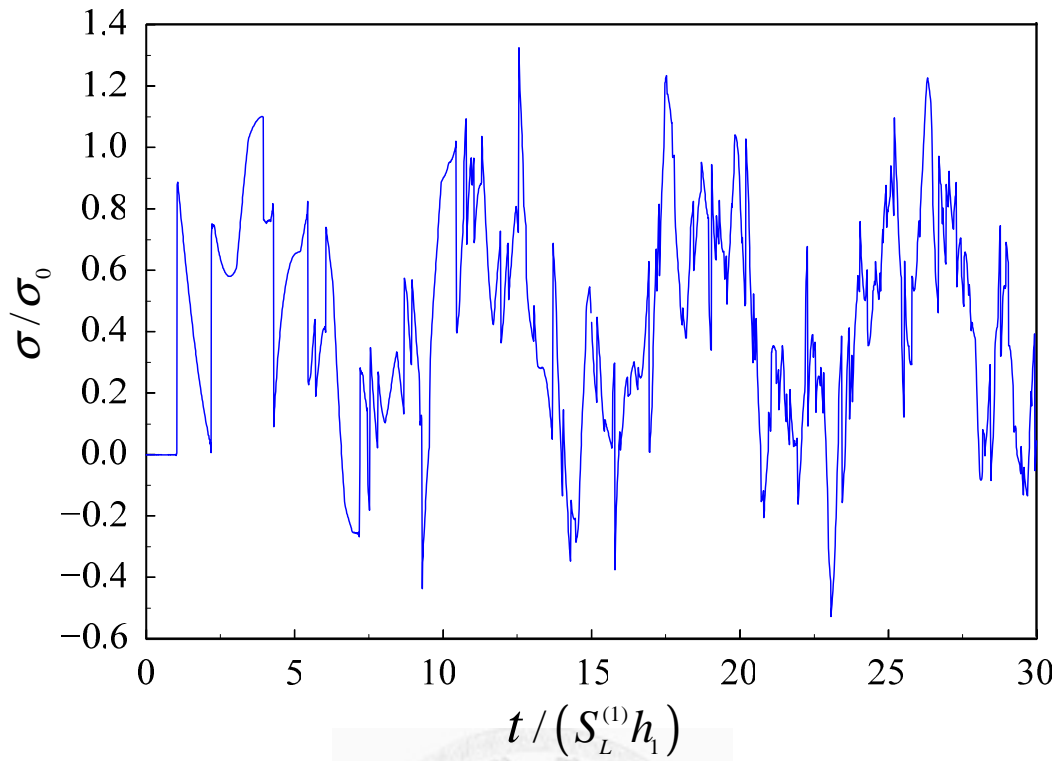


圖 4-29 雙層相異質材料(氧化鋁、鎳)夾 FGM 材料，第 2 層(FGM 層)中點的應力響應圖。

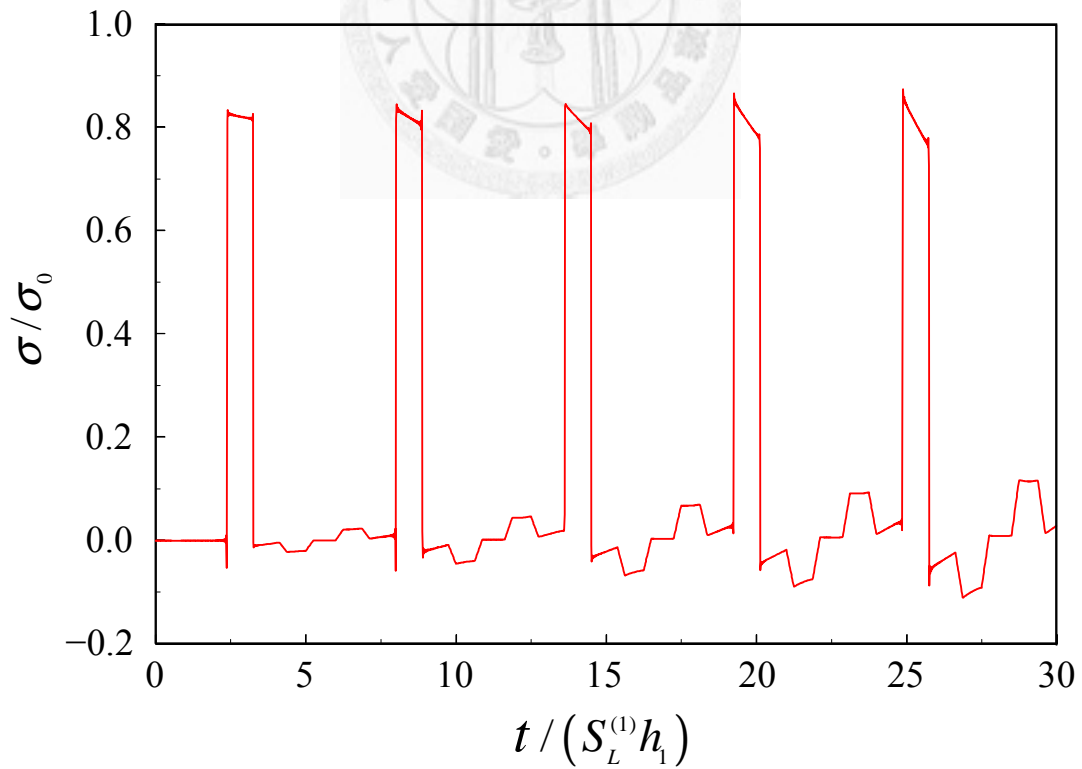


圖 4-30 當 3 層 FGM 材料退化為雙層相異質材料(氧化鋁、鎳)夾 FGM 材料時，第 3 層材料中點的應力響應圖。

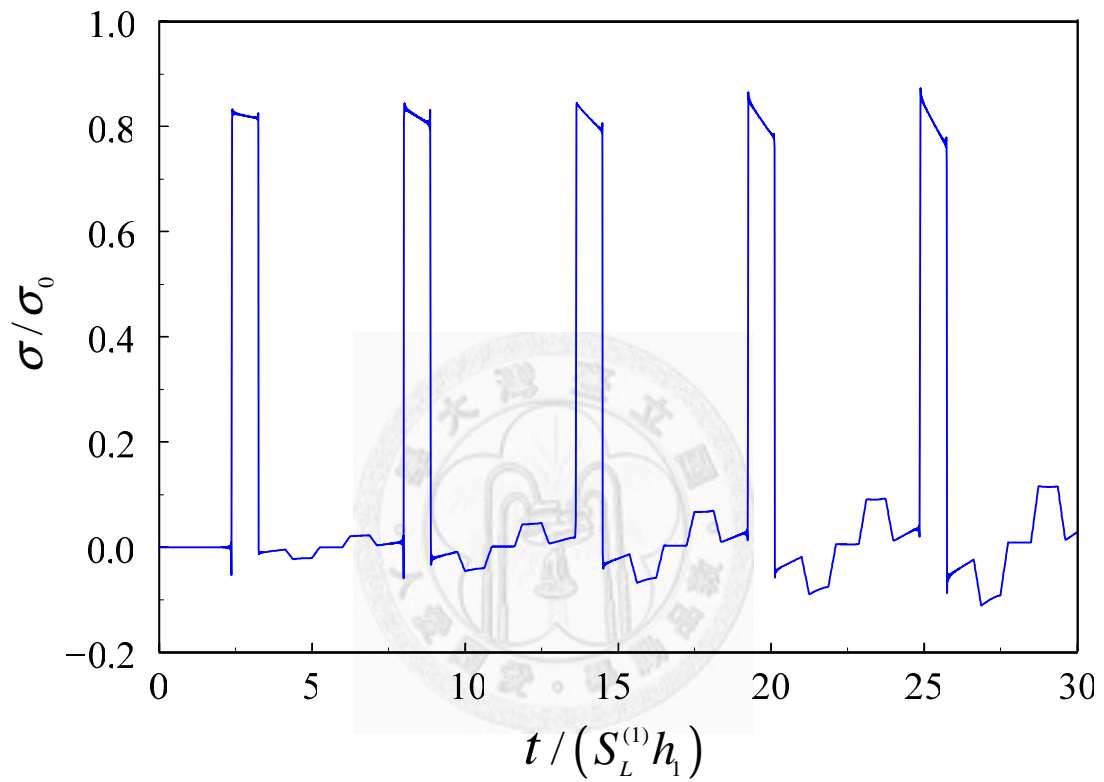
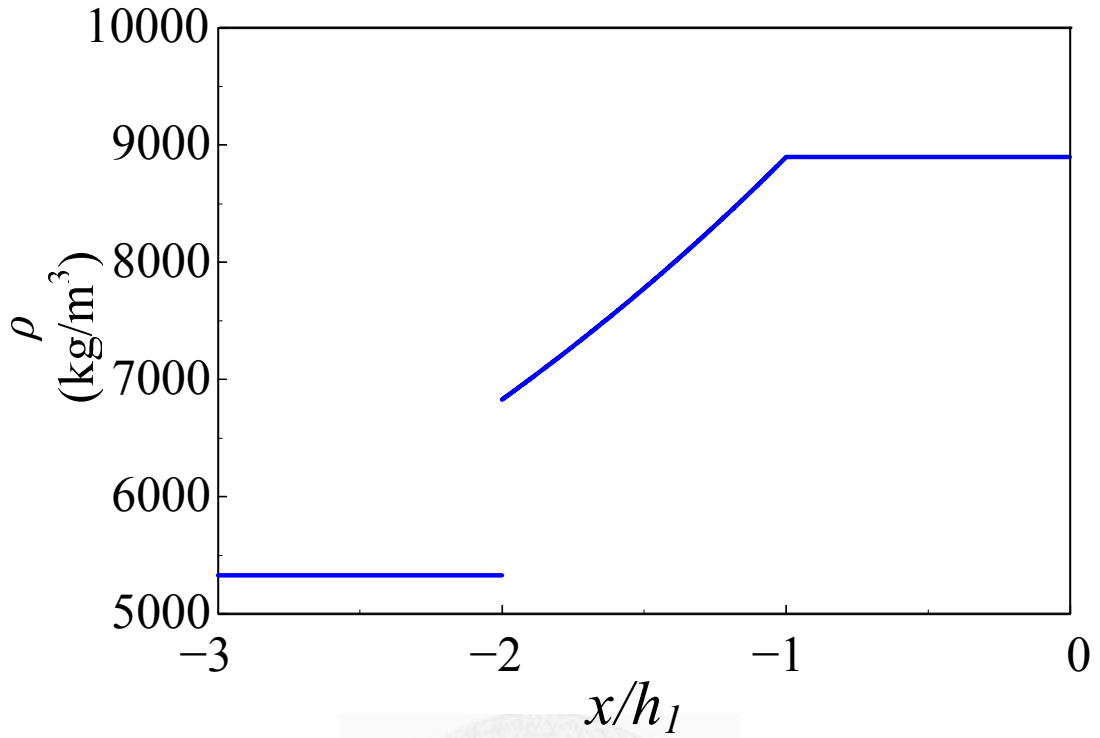
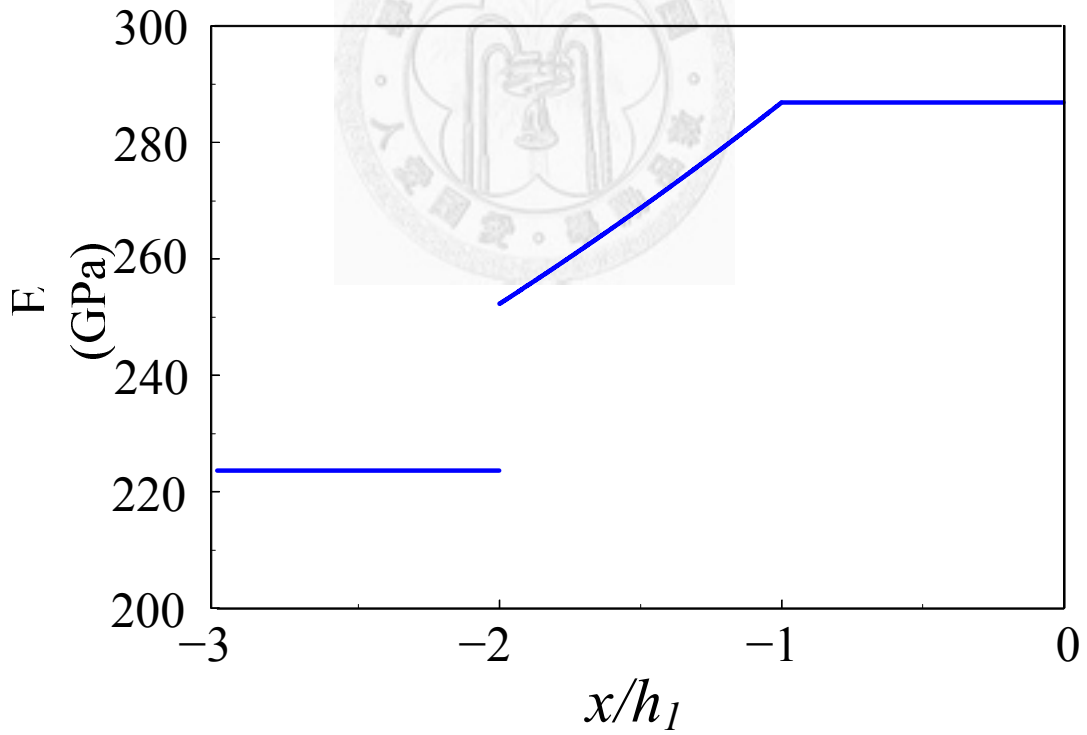


圖 4-31 雙層相異質材料(氧化鋁、鎳)夾 FGM 材料，第 3 層材料中點的應力響應圖。



(a)



(b)

圖 4-32 當斜率參數為 $a = -0.07048$ ，第 3 層材料(ZrO_2)單邊不連續情況下的(a)密度與(b)彈性常數分佈圖。

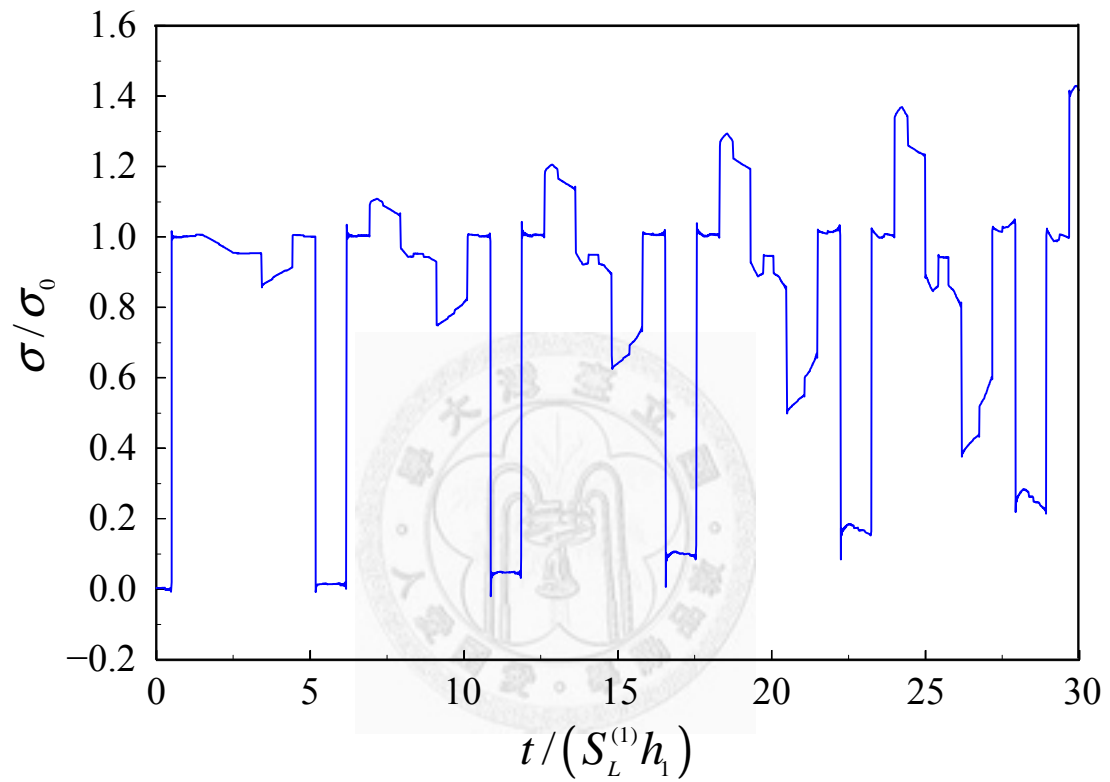
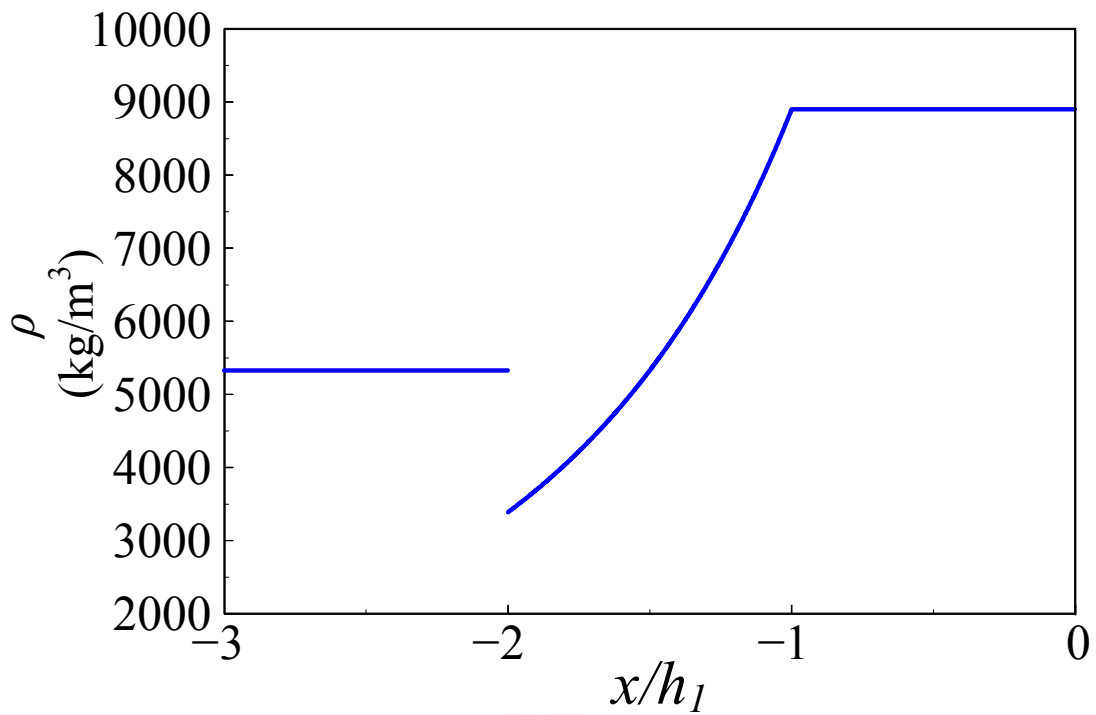
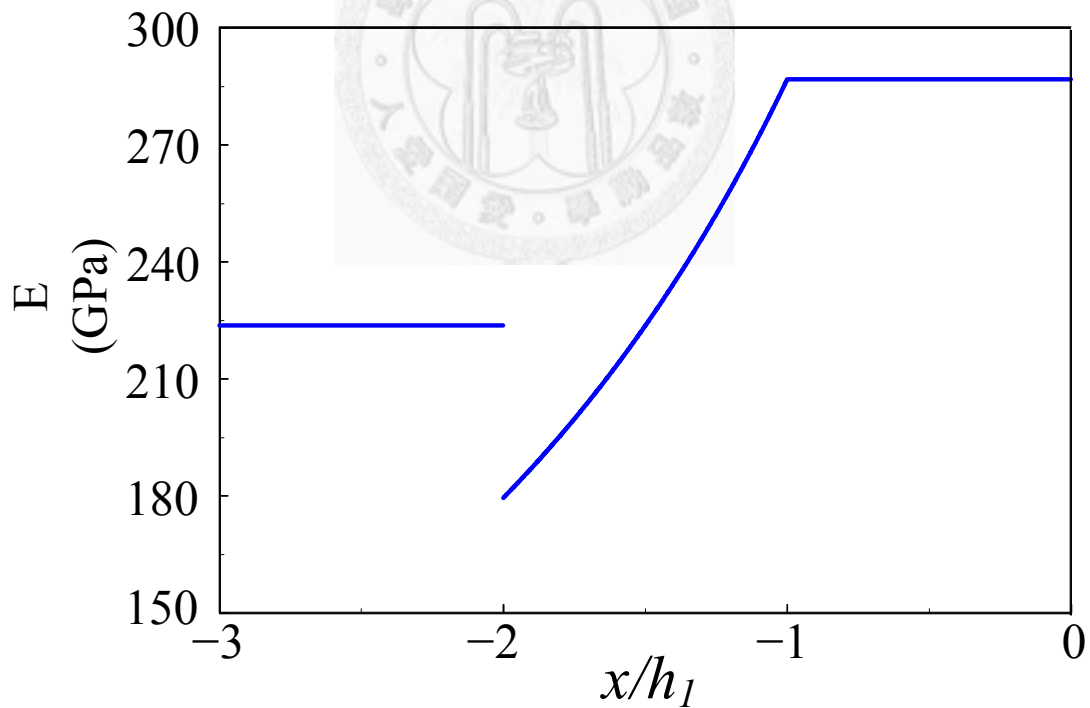


圖 4-33 當 $a = -0.07048$ 時，第 3 層材料(ZrO_2)單邊不連續情況下，第 1 層(Ni)中點的暫態響應圖。



(a)



(b)

圖 4-34 當斜率參數為 $a = -0.28192$ ，第 3 層材料(ZrO_2)單邊不連續情況下的(a)密度與(b)彈性常數分佈圖。

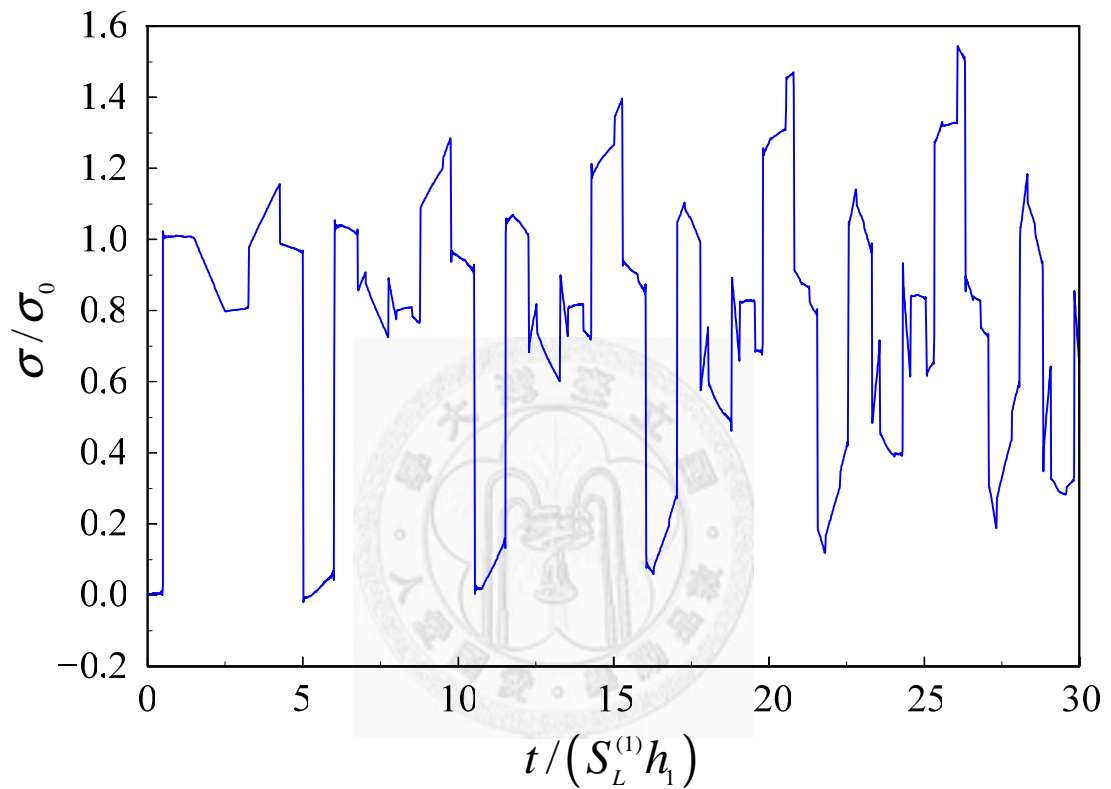
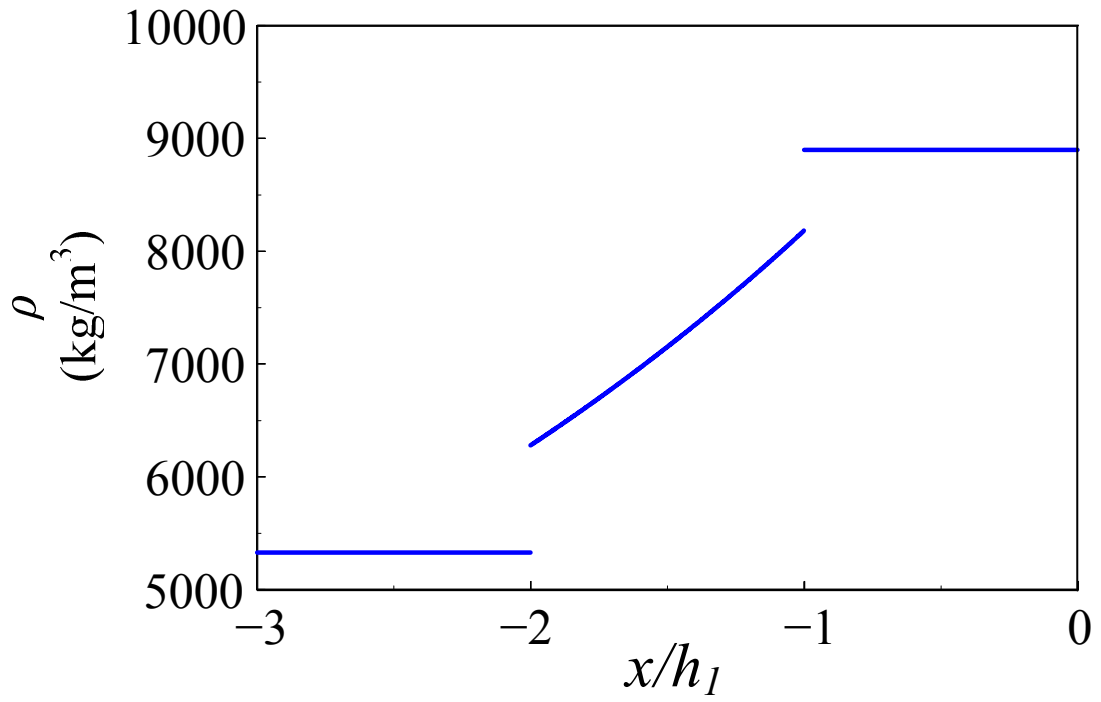
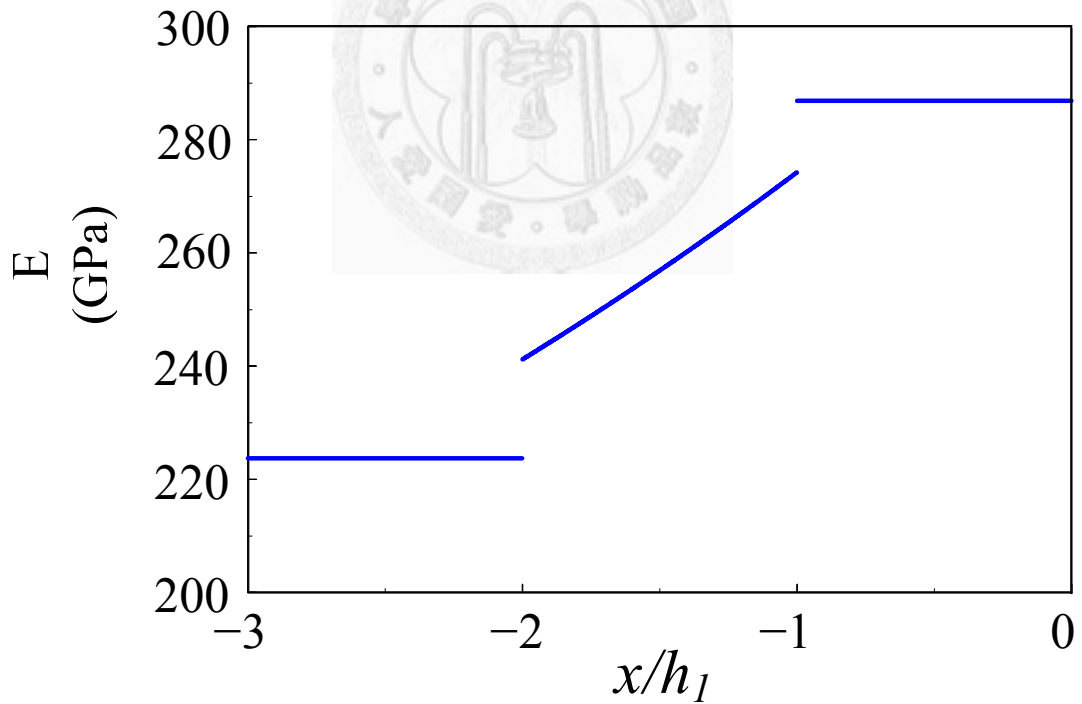


圖 4-35 當 $a = -0.28192$ 時，第 3 層材料(ZrO_2)單邊不連續情況下，第 1 層(Ni)中點的暫態響應圖。



(a)



(b)

圖 4-36 當斜率參數為 $a = -0.07048$ ，第 1 層(Ni)與第 3 層(ZrO_2)材料雙邊不連續情況下的(a)密度與(b)彈性常數分佈圖。

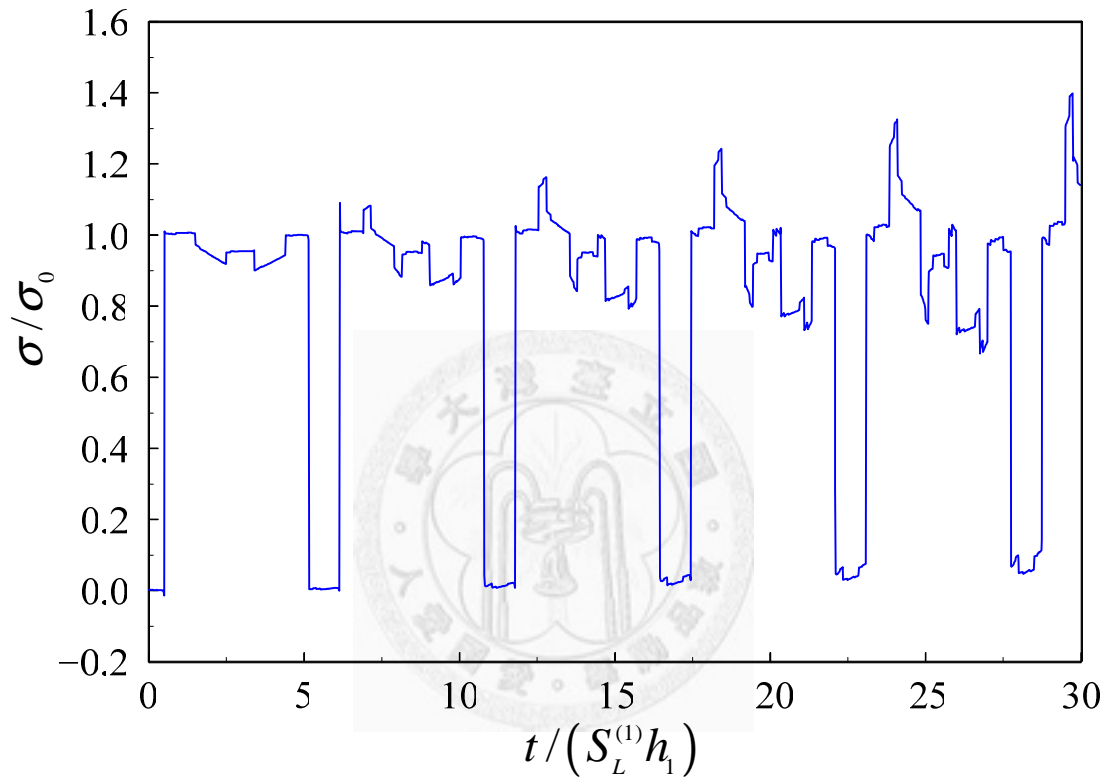


圖 4-37 當斜率參數為 $a = -0.07048$ ，第 1 層(Ni)與第 3 層(ZrO_2)材料雙邊不連續情況下，第 1 層(Ni)中點的暫態響應圖。

第五章 等效材料在多層域暫態波傳的適用性分析

多層材料應用的層面很廣，在電子元件中，為了提高電路配線密度的封裝技術，所因應而生的多層陶瓷載板；或是在光通訊元件中，為達到控制頻寬而設計出具有高度秩序排列的光學多層膜，甚至於是用來連接不相同兩種材料的功能梯度材料，其為提高界面強度並減少殘餘應力而設計出的一種梯度漸變的多層材料。而這些多層材料的組合不盡相同，大致來說，可以將多層材料區分為較常見的幾個類別：隨機分佈型(Randomly Distributed, RD)，週期分佈型(Periodically Distributed, PD)與連續變化型(Continuously Distributed, CD)，以下將分為三種不同類型的多層材料，來討論受均佈動力載荷下的暫態波傳行為。將 20 種不同的均質材料隨機排列如圖 5-1(a)所示，並將之命名為隨機分佈型材料。而週期性分佈型材料(圖 5-1(b))，顧名思義，材料分佈方式是以有規律的週期方式排列，在本章中是採黃銅、鋼、鋁 3 種均質材料週期排列成 20 層。另外一種連續變化型材料(圖 5-1(c))，是以 20 層逐漸變化的均質材料來模擬 Ni/ZrO₂ 功能梯度材料。應用撞擊測試中常使用的正弦脈衝形式的動力載荷，施載於多層材料的上表面，此正弦脈衝在時域下和在轉換域下的表示式列於下方：

$$f(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi t}{b}\right) & 0 < t < b \\ 0 & b < t \end{cases} \quad (5-1)$$

$$\hat{f}(p) = \frac{\pi b(1 + e^{-bp})}{b^2 p^2 + \pi^2} \quad (5-2)$$

其中， b 為脈衝寬度的參數。將上式中的外力函數代入 4-1-2 節的式(4-42)中，並且採用 Durbin 數值拉普拉斯逆轉換來計算其暫態響應。由於外力是正弦脈衝，不像步階函數有較嚴重的不連續情形，因此 Durbin 相關參數可調整為 $\alpha T = 7.5$ ， $N = 3000$ 。另外，這三種類型的多層材料，以複合材料力學中等效材料的方式，快速計算多層材料並分析其暫態響應進而討論等效材料的適用性。

5-1 多層隨機分佈型材料中的彈性波傳分析

隨機分佈型材料如圖 5-2(a)所示，其沿厚度 x 方向安置 20 種不同的均質材料(相關材料常數由第 1 層到第 20 層依序列於表 5-1 中)而形成層域問題，但每一層的厚度皆為 1mm ，而 y 、 z 方向則視為無窮域。當一個持續時間為 $1 \times 10^{-7}(\text{s})$ 的正弦脈衝形式的動力載荷，均佈施載於隨機分佈型材料的上表面($x=0$)時，第一層材料(鋁)中點的應力波暫態響應如圖 5-3 中的紅色線所示，其中值得注意的是此處採第一層材料(鋁)的相關常數作為無因次化的依據。正弦脈衝波源在時間 $t/(S_L^{(1)}h_1)=0.5$ 第一次抵達第一層中點，脈衝持續時間 $1 \times 10^{-7}(\text{s})$ 經無因次化後約為 $t/(S_L^{(1)}h_1)=0.62$ ，第二次抵達的脈衝波($t/(S_L^{(1)}h_1)=1.5$)則是來自於 1、2 層界面的反射波。一開始的暫態波傳行為因為只有數次的穿透與反射，響應較為單純，但是隨著觀測時間的增加，越來越多的脈衝波抵達觀測點，不斷疊加的結果讓原先的脈衝波扭曲而不易解讀。

接著將這 20 層隨機分佈型材料中的第一層與最後一層維持不變，而中間的 18 層依照複合材料力學中的體積分率(volume fraction)，每 2 層做一次等效計算，原本 20 層材料因此可以簡化成 11 層等效材料(如圖 5-2(b))。依照體積分率，每一層的彈性係數、密度都可以使用下式來計算：

$$E_{effect} = V_f E_f + V_m E_m \quad (5-3)$$

$$\rho_{effect} = V_f \rho_f + V_m \rho_m \quad (5-4)$$

其中，子材的體積分率 V_f 與母材的體積分率 V_m 可以表示如下：

$$V_f = \frac{v_f}{v} \quad (5-5)$$

$$V_m = \frac{v_m}{v} \quad (5-6)$$

v_f 為子材的體積， v_m 為母材的體積， v 為母材加子材的總體積。而簡化後等效 11 層的相關材料常數則列於表 5-2。

圖 5-3 中的藍色線表示觀測點在第一層材料(鋁)中點時，簡化成 11 層等效材料的應力暫態響應圖。在圖 5-3 中，可以看出 20 層(紅色線)和等效 11 層(藍色線)的暫態響應除了第一個抵達的正弦脈衝波是相同的之外，第二個脈衝以後的結果都不相同。就第二個脈衝波來說，應力波經過 1、2 層界面的反射時，原先第二層的材料(黃銅)和等效後第二層的材料，不論是密度、彈性常數或是阻抗，彼此間的材料特性並不相同，因而造成圖 5-3 第一個脈衝相同而其餘的暫態響應不相同的現象。

進一步討論脈衝持續時間對 20 層隨機分佈型材料及等效 11 層材料的影響。如果將脈衝持續時間增長 10 倍或是 100 倍，第一層中點和整體結構物中點的暫態響應分別顯示在圖 5-4 和圖 5-5 中。第一層中點的暫態響應(圖 5-4)，在脈衝持續時間 $1 \times 10^{-6} (s)$ ($t / (S_L^{(1)} h_1) = 6.2$) 下，20 層材料和其等效的暫態響應的結果差異依舊甚大。20 層材料和其等效材料的第一層皆為鋁，而從第二層材料開始，兩者的材料特性就變得完全不相同。正弦脈衝初始抵達的時間雖然同為 $t / (S_L^{(1)} h_1) = 0.5$ ，而自此以後脈衝響應便有逐漸明顯的差異。當脈衝持續時間為更長的 $1 \times 10^{-5} (s)$ ($t / (S_L^{(1)} h_1) = 61.97$) 時，對於整體結構物中點的暫態響應(圖 5-5)來說，20 層材料和其等效的結果，連第一次抵達的脈衝波源時間和大小都不相同。這些現象清楚地顯示隨機分佈型材料若以等效材料的方式做簡化，等效後的結果變得如同另一種材料，不論觀測點是在哪一層，亦或是任意持續時間的正弦脈衝波，等效的概念並不適用於隨機分佈型多層材料。

5-2 多層週期分佈型材料中的彈性波傳分析

本文使用類似聲子晶體的概念，將黃銅、鋼、鋁 3 種均質材料週期排列成 20 層的週期分佈型材料(採用的三種材料常數列於表 5-3 中)，其中每一層的厚度皆為 $1mm$ 。如圖 5-6(a)所示。第一層與最後一層材料分別設定為黃銅和鋼，同樣

地，為了在相同的無因次化條件考量下，把第一層材料和最後一層材料維持不變，而將中間週期性的 18 層等效化簡為一層(圖 5-6(b))，可將其視為等效 3 層材料，而相關的材料常數列於表 5-4。當一個均佈且為正弦脈衝形式的動力載荷施載於週期分佈型材料的上表面時，各個位置在不同的脈衝持續時間下的暫態響應如圖 5-7~圖 5-11 所示。

圖 5-7 顯示當脈衝持續時間在 $1 \times 10^{-7}(s)$ ($t/(S_L^{(1)}h_1) = 0.4437$) 時，以整體結構物中點為觀測點時的暫態響應，其中紅色線表示 20 層週期分佈型材料的計算結果，藍色線表示簡化的等效 3 層材料的計算結果。在 20 層週期分佈型材料中，第一個脈衝波抵達整體結構物中點的時間大約為 $1.896 \times 10^{-6}(s)$ ($t/(S_L^{(1)}h_1) = 8.41$)，而後在中點附近穿透及反射的波陸續抵達觀測點形成更為複雜的響應。在簡化的等效 3 層材料中，第一個脈衝波抵達的時間為 $1.86 \times 10^{-6}(s)$ ($t/(S_L^{(1)}h_1) = 8.255$)，和 20 層週期分佈型材料相比，脈衝抵達時間和大小並不相同，第二個抵達的脈衝波則是來自於與最底層(鋼)界面產生的反射波，其抵達時間為 $2.32 \times 10^{-6}(s)$ ($t/(S_L^{(1)}h_1) = 10.29$)。值得注意的是圖中脈衝振幅較大且為交替出現的脈衝波，實際上是來自於整體結構物自由端的全反射 ($t/(S_L^{(1)}h_1) = 24.28, 40.71, 56.73 \dots$)，這些全反射的現象在 20 層材料的暫態響應圖很難察覺到。

當正弦脈衝的持續時間增為 $1 \times 10^{-6}(s)$ ($t/(S_L^{(1)}h_1) = 4.437$) 時，第一層和整體結構物中點的暫態響應顯示於圖 5-8 及圖 5-9 中。而持續時間增為 $1 \times 10^{-5}(s)$ ($t/(S_L^{(1)}h_1) = 44.37$) 時，第一層和整體結構物中點的暫態響應顯示於圖 5-10 及圖 5-11 中。可發現圖 5-8 與圖 5-9 中 20 層材料與 3 層等效材料的暫態響應差異頗大，和觀測點位置並無直接關聯。在圖 5-10 中， $1 \times 10^{-5}(s)$ 的脈衝歷時約第一層波傳時間的 44 倍，且觀測點和波源位置非常接近，20 層週期分佈型材

料(紅色線)和其等效 3 層材料(藍色線)的暫態響應相比，兩者的計算結果十分相似。然而觀測點在整體結構物中點時(圖 5-11)，脈衝在結構物中長時間穿透反射的結果，又使得 20 層材料和其等效簡化後的響應差異越來越大。對於層狀週期分佈型材料來說，並不適合使用簡化等效的方式來計算其應力暫態響應。

5-3 多層連續分佈型材料中的彈性波傳分析

單層功能性梯度材料的應力波傳問題，以及採用多層材料模擬的分析方式，在 4-1 節中有詳細的討論。在這裡更進一步將多層材料以等效材料的簡化方式，來判斷連續分佈型材料是否適合使用等效材料來模擬暫態響應。本章節先使用 20 層的連續分佈型材料來模擬 5mm 厚的 Ni/ZrO₂ 功能梯度材料(20 層均質材料所構成的連續分佈型材料如圖 5-12 所示，相關的材料常數列於表 5-5 中)，接著，在相同的無因次化條件考量下，將第一層材料和最後一層材料維持不變，而中間的 18 層材料分別 2 層一組，3 層一組以及 9 層一組，可以得到簡化後的等效材料 11 層(圖 5-12(b))，8 層(圖 5-12(c))與 4 層(圖 5-12(d))，相關的材料常數列於表 5-6~表 5-8。當一個正弦脈衝形式的均佈動力載荷施載於等效材料的上表面時，在不同的觀測點與不同的脈衝持續時間下，等效材料的應力暫態響應如圖 5-13~圖 5-16 所示。

當脈衝時間為 $1 \times 10^{-6} (s)$ ($t / (S_L^{(1)} h_1) = 25.83$)，20 層連續分佈型材料和其三種等效材料的第一層中點暫態響應顯示於圖 5-13，其中紅色實線表示 20 層材料的計算結果，紫色實線則是等效 11 層，綠色虛線則是等效 8 層，藍色虛線則是等效 4 層。在時間 $t / (S_L^{(1)} h_1) = 100$ 之內，這四種方式模擬功能梯度材料的暫態響應都有十分相近的數值結果。不論是波源的大小和形狀，或是在自由端全反射所造成的不連續現象，這四種方式並無太大差異。而 $t / (S_L^{(1)} h_1) = 100$ 之後，暫態響應的差異會隨著時間逐漸擴大，特別是脈衝在層與層之間穿透及反射所造成震盪的

情形。其中有一個有趣的現象，如果模擬功能梯度材料的層數越少，震盪的現象就越明顯，推究這些細微震盪產生的原因，是來自於層與層之間的阻抗不匹配，20 層連續分佈型材料由於層數最多，阻抗不匹配程度最小，其震盪幅度最小。而等效 4 層的層數最少，阻抗不匹配程度最大，因此其震盪幅度最大。

當觀測點設置在整體結構物的中點時，受到同為 $1 \times 10^{-6}(s)$ 的脈衝持續時間下，來自四種模擬功能梯度材料方式的暫態響應顯示於圖 5-14。由於脈衝時間的長短大於波從多層結構物的上表面傳遞至下表面所需的時間，暫態響應便為簡諧波的形式出現，仔細觀察響應的細部，隨著觀測時間的增加，各個響應中波峰或波谷的差異其實有逐漸擴大的趨勢。脈衝持續時間為 $1 \times 10^{-7}(s)$ ($t/(S_L^{(1)}h_1) = 2.58$) 時，第一層中點的暫態響應以四種模擬方式繪製的響應顯示於圖 5-15。可發現 20 層連續分佈型材料的計算結果震盪幅度最小，也最近似功能梯度材料的結果，而當使用等效材料進一步模擬 20 層介質時，以等效 4 層的數值結果差異最大，特別是在較長的觀測時間下。在圖 5-16 中，脈衝持續時間為 $1 \times 10^{-7}(s)$ ($t/(S_L^{(1)}h_1) = 2.58$) 時，由四種模擬方式繪製的整體結構物中點的暫態響應繪於圖中。在這四種模擬中，以 20 層連續分佈型材料的結果最近似功能性梯度材料，類似 delta 函數的應力脈衝則交替出現在圖 5-15 和圖 5-16 中，此現象是鑿因於自由邊界的全反射。

為了更清楚瞭解 20 層連續分佈型材料的暫態響應，和真實的功能梯度材料的差異，此處必須重新定義無因次化的標準以利比較。將整體結構假設為最底層 ($x=0$) 的材料作為無因次化標準，即表示無因次化的時間為 $t/(S_0l)$ 。其中， S_0 為功能性梯度材料底面 ($x=0$) 的慢度， l 則為梯度材料的厚度。功能性梯度材料的材料特性，假設沿厚度方向是以下面函數作連續變化

$$E'(x) = E_0' \left(a \frac{x}{l} + 1 \right)^m, \quad (5-7)$$

$$\rho(x) = \rho_0 \left(a \frac{x}{l} + 1 \right)^n, \quad (5-8)$$

其中 a , m , n 為功能性梯度板的梯度常數。在轉換域下，功能梯度材料的應力場可以表示如下 (Chiu 和 Erdogan, 1999)：

$$\frac{\hat{\sigma}_{xx}}{\sigma_0} = \hat{f}(p) \left(\frac{aX+1}{a+1} \right)^{\frac{n+1}{2}} \left\{ \frac{e^{-\delta[\ln(a+1)-\ln(aX+1)]} - e^{-\delta[\ln(a+1)+\ln(aX+1)]}}{1 - e^{-2\delta \ln(a+1)}} \right\} \quad \text{for } m = n + 2 \quad (5-9)$$

X 為無因次化後的位置， $\hat{f}(p)$ 為轉換域下的外力函數， p 為轉換域下的變數，而 δ 可表示如下

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{a} \right)^2} \quad (5-10)$$

當正弦脈衝持續時間為 1×10^{-7} (s) 時，在 $x = 0.125 \text{ mm}$, 2.5 mm , 4.875 mm 三個位置處，來自式(5-9)的計算結果(藍色虛線)個別顯示於圖 5-18~圖 5-20。和 20 層連續分佈型材料的結果(紅色實線)相比較，兩者的結果其實並不相同，不論在位置 $x = 0.125 \text{ mm}$ (圖 5-18)或是 4.875 mm 處(圖 5-20)，脈衝大小或是抵達時間都有些微的差距，這是因為真實功能梯度材料採用 20 層材料來計算時，位置 $x = 0.125 \text{ mm}$ 的材料常數並無法完全相同的緣故。然而，在圖 5-19 中， $x = 2.5 \text{ mm}$ 表示整體結構物的中點，此位置以 20 層材料計算的暫態響應和真實功能梯度材料的結果為一致的。這是因為觀測點設在整體結構物的中點時，功能梯度材料在此位置的材料常數和 20 層模擬時的材料常數恰好一致。當使用 20 層連續分佈型材料來模擬功能性梯度材料時，圖 5-18~圖 5-20 中存在一些微小的震盪現象，而導致這些震盪的因素，是由於多層材料無法完全模擬功能梯度材料，層與層之間由於阻抗不匹配還是會出現一些不連續的特性。如果模擬的層數越多，將會大幅改善震盪的現象。不論是用 20 層連續分佈型材料來模擬功能梯度材料，或者是進一步採用等效材料化簡的方式來計算暫態響應，都有不錯的一致性。

表 5-1 二十層隨機分佈型材料的二十種材料常數

Material	Density (kg / m^3)	Longitudinal Wave Velocity (m / s)	Impedance (kg / m^2s)	Thickness (mm)
Aluminum	2700	6197	16731900	1
Brass	8600	4437	38158200	1
Copper (Annealed)	8930	4637	41408410	1
Calcium (Annealed)	1550	4229	6554950	1
Cadmium	8640	3077	26585280	1
Cobalt	8800	5858	51550400	1
Gold	19320	3194	61708080	1
Iron	7870	5778	45472860	1
Lead	11350	1775	20146250	1
Magnesium (Annealed)	1740	6371	11085540	1
Manganese	7875	5711	44974125	1
Nickel	8880	5684	50473920	1
Platinum (Annealed)	21450	3988	85542600	1
Steel	7850	5878	46142300	1
Silver (Annealed)	10491	3580	37557780	1
Silicon	2329	7855	18294295	1
Scandium	3000	5624	16872000	1
Titanium	4500	6299	28345500	1
Tungsten	19300	5147	99337100	1
Tin	6450	3084	19891800	1

表 5-2 以九層等效層模擬二十層隨機分佈型材料的等效材料常數

Material	Density (kg / m^3)	Longitudinal Wave Velocity (m / s)	Impedance ($kg / m^2 s$)	Thickness (mm)
Aluminum	2700	6197	16731900	1
Effective Layer 1	8765	4537	39766805	2
Effective Layer 2	5095	3653	18612035	2
Effective Layer 3	14060	4526	63635560	2
Effective Layer 4	9610	3777	36296970	2
Effective Layer 5	4808	6041	29045128	2
Effective Layer 6	15165	4836	73337940	2
Effective Layer 7	9171	4729	43369659	2
Effective Layer 8	2665	6740	17962100	2
Effective Layer 9	11900	5723	68103700	2
Tin	6450	3084	19891800	1

表 5-3 用於二十層週期分佈型材料的三種材料常數

Material	Density (kg / m^3)	Longitudinal Wave Velocity (m / s)	Impedance (kg / m^2s)	Thickness in Each Layer (mm)
Brass	8600	4437	38158200	1
Steel	7850	5878	46142300	1
Aluminum	2700	6197	16731900	1

表 5-4 使用單一等效層來模擬二十層週期分佈型材料的等效材料常數

Material	Density (kg / m^3)	Longitudinal Wave Velocity (m / s)	Impedance (kg / m^2s)	Thickness (mm)
Brass	8600	4437	38158200	1
Effective Layer	6383	5504	35132032	18
Steel	7850	5878	46142300	1

表 5-5 二十層連續分佈型材料模擬 Ni/ZrO₂ 功能性梯度材料的相關材料常數

Material No.	Density (kg / m³)	Longitudinal Wave Velocity (m / s)	Impedance (kg / m²s)	Thickness (mm)
1	5395	6458	34844813	0.25
2	5527	6418	35475646	0.25
3	5663	6378	36121954	0.25
4	5804	6338	36784215	0.25
5	5948	6298	37462930	0.25
6	6097	6258	38158614	0.25
7	6251	6218	38871805	0.25
8	6410	6178	39603060	0.25
9	6574	6138	40352958	0.25
10	6744	6098	41122101	0.25
11	6918	6058	41911115	0.25
12	7099	6018	42720648	0.25
13	7285	5978	43551376	0.25
14	7478	5938	44404001	0.25
15	7677	5898	45279255	0.25
16	7883	5858	46177897	0.25
17	8096	5818	47100719	0.25
18	8316	5778	48048545	0.25
19	8544	5738	49022231	0.25
20	8779	5698	50022672	0.25

表 5-6 使用九層等效層來模擬二十層連續分佈型材料的等效材料常數

Material No.	Density (kg / m^3)	Longitudinal Wave Velocity (m / s)	Impedance (kg / m^2s)	Thickness (mm)
1	5395	6458	34844813	0.25
Effective Layer 1	5595	6398	35796810	0.5
Effective Layer 2	5876	6318	37124568	0.5
Effective Layer 3	6174	6238	38513412	0.5
Effective Layer 4	6492	6158	39977736	0.5
Effective Layer 5	6831	6078	41518818	0.5
Effective Layer 6	7192	5998	43137616	0.5
Effective Layer 7	7578	5918	44846604	0.5
Effective Layer 8	7990	5838	46645620	0.5
Effective Layer 9	8430	5758	48539940	0.5
20	8779	5698	50022672	0.25

表 5-7 使用六層等效層來模擬二十層連續分佈型材料的等效材料常數

Material No.	Density (kg / m^3)	Longitudinal Wave Velocity (m / s)	Impedance (kg / m^2s)	Thickness (mm)
1	5395	6458	34844813	0.25
Effective Layer 1	5665	6378	36131370	0.75
Effective Layer 2	6099	6258	38167542	0.75
Effective Layer 3	6576	6138	40363488	0.75
Effective Layer 4	7101	6018	42733818	0.75
Effective Layer 5	7679	5898	45290742	0.75
Effective Layer 6	8319	5778	48067182	0.75
20	8779	5698	50022672	0.25

表 5-8 使用二層等效層來模擬二十層連續分佈型材料的等效材料常數

Material No.	Density (kg / m^3)	Longitudinal Wave Velocity (m / s)	Impedance (kg / m^2s)	Thickness (mm)
1	5395	6458	34844813	0.25
Effective Layer 1	6113	6258	38255154	2.25
Effective Layer 2	7700	5898	45414600	2.25
20	8779	5698	50022672	0.25

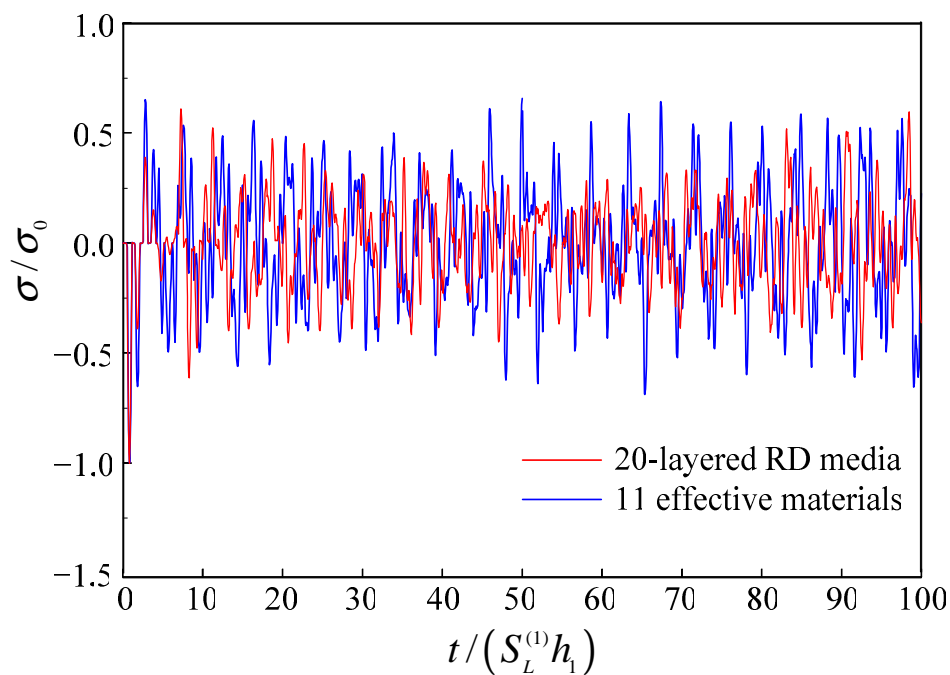


圖 5-3 以 20 層隨機分佈型材料(紅線)和 11 層等效材料(藍線)，在脈衝時間 $1 \times 10^{-7}(s)$ 下，第 1 層材料中點的應力響應。

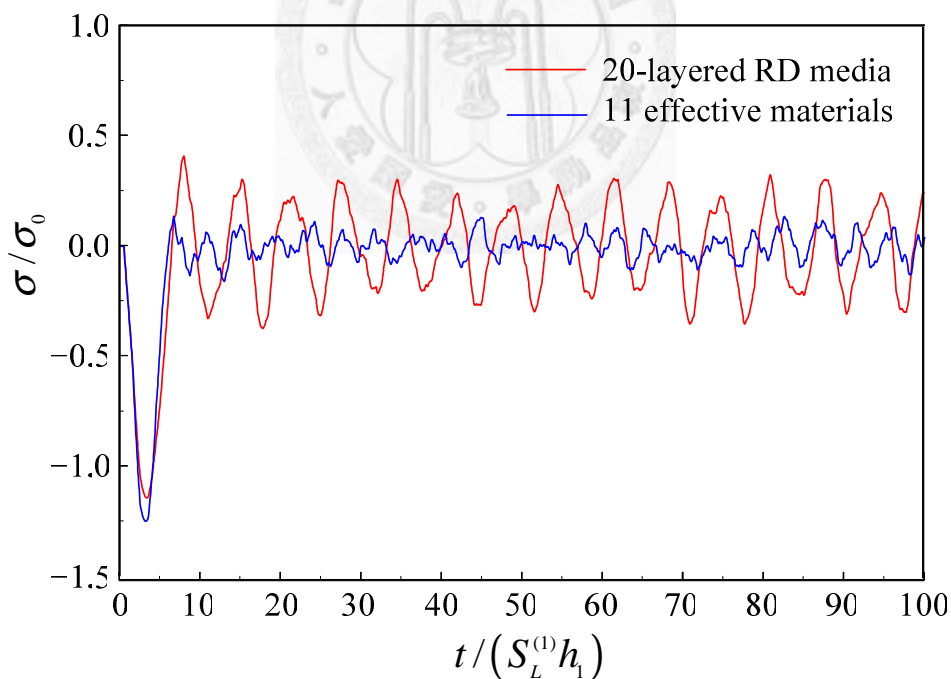


圖 5-4 以 20 層隨機分佈型材料(紅線)和 11 層等效材料(藍線)，在脈衝時間 $1 \times 10^{-6}(s)$ 下，第 1 層材料中點的應力響應。

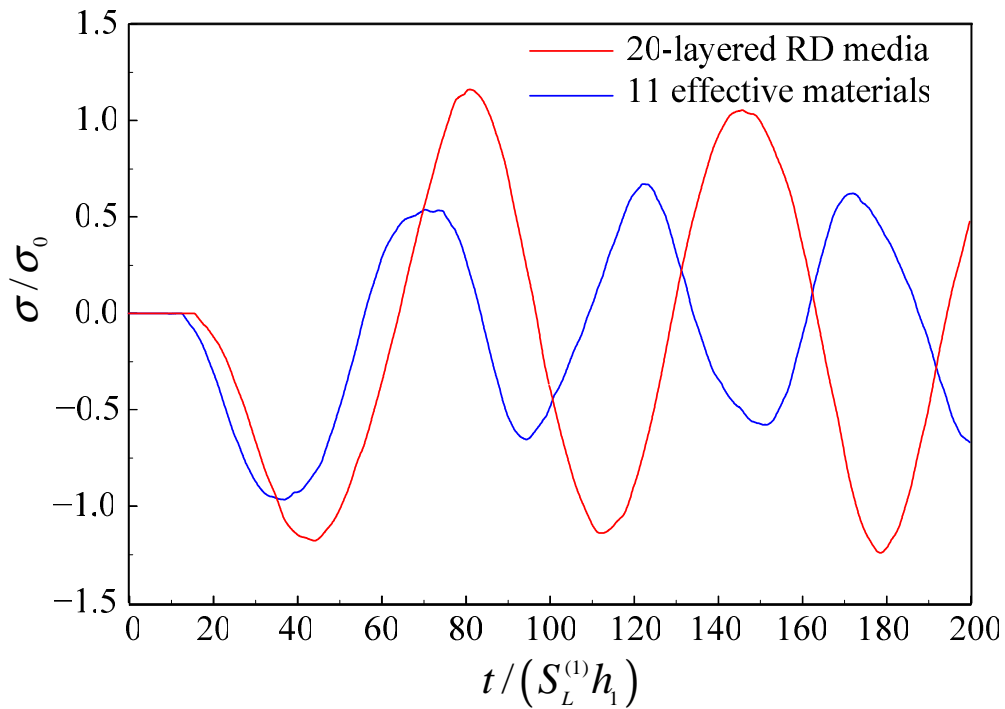


圖 5-5 以 20 層隨機分佈型材料(紅線)和 11 層等效材料(藍線)，在脈衝時間 $1 \times 10^{-5}(s)$ 下，整體結構物中點的應力響應。

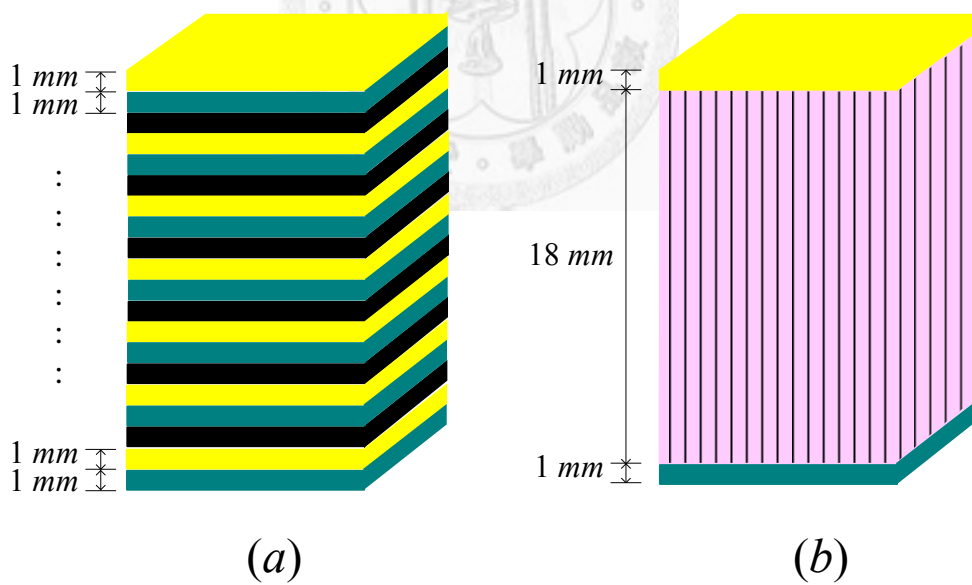


圖 5-6 (a) 20 層週期分佈型材料的結構示意圖; (b) 以 3 層等效材料來簡化 20 層週期分佈型材料的結構示意圖。

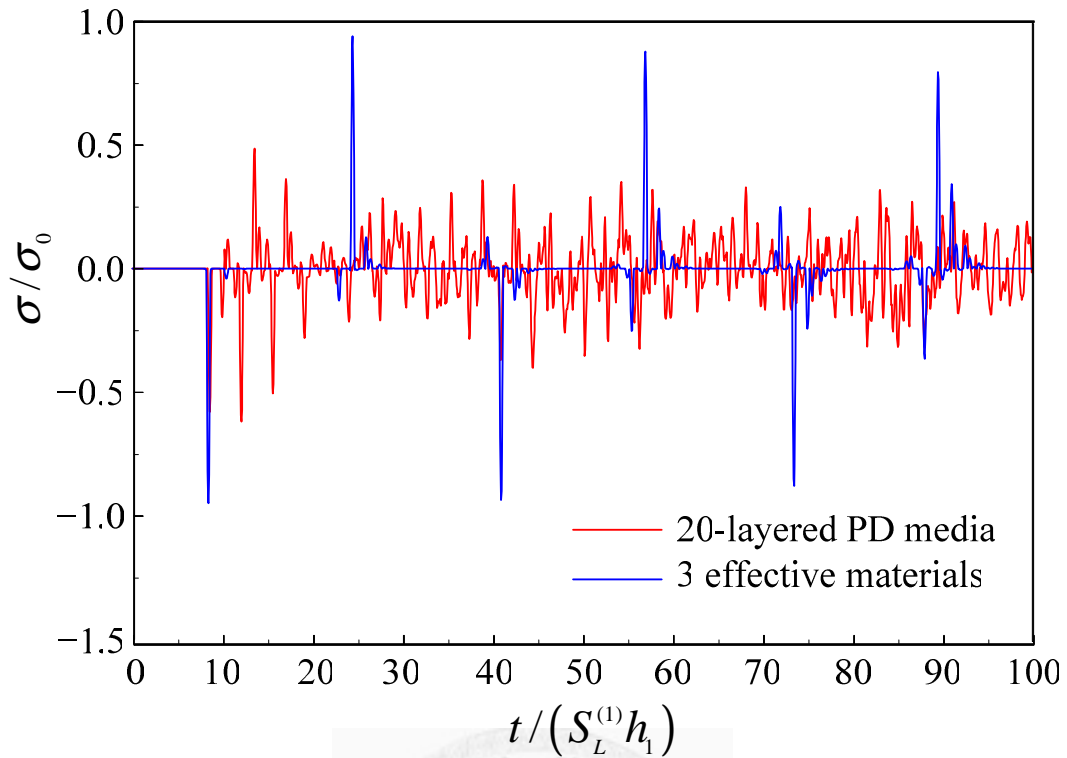


圖 5-7 以 20 層週期分佈型材料(紅線)和 3 層等效材料(藍線)，在脈衝時間 $1 \times 10^{-7}(s)$ 下，整體結構物中點的應力響應。

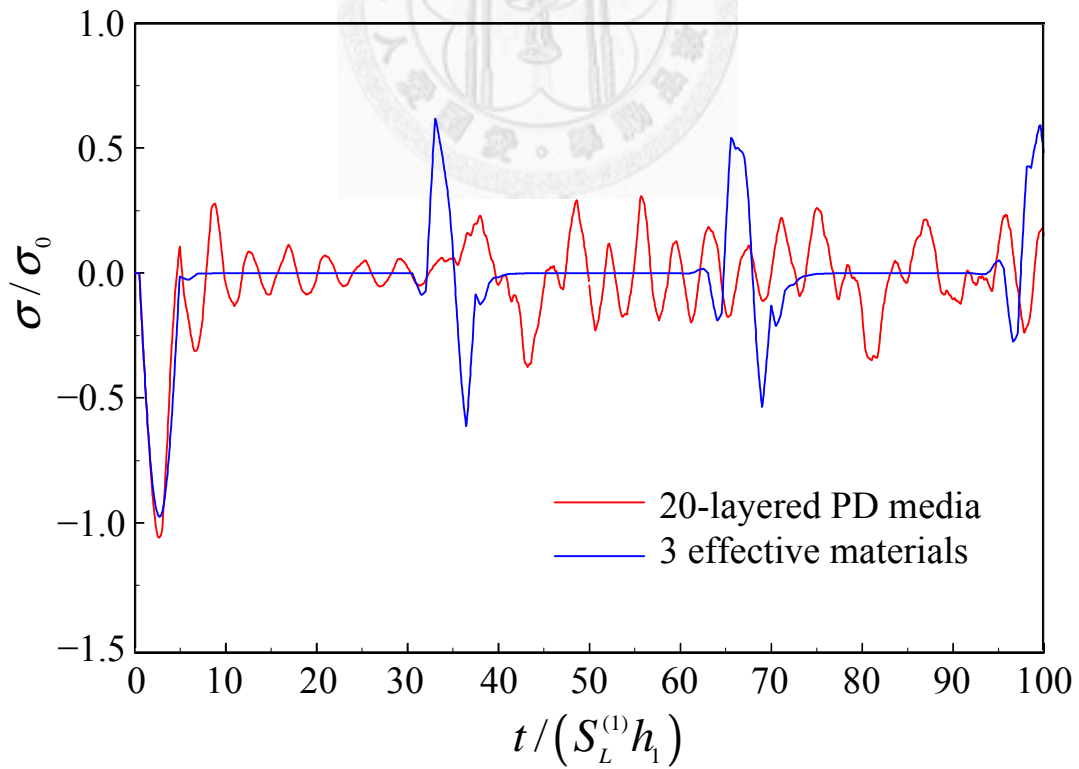


圖 5-8 以 20 層週期分佈型材料(紅線)和 3 層等效材料(藍線)，在脈衝時間 $1 \times 10^{-6}(s)$ 下，第 1 層材料中點的應力響應。

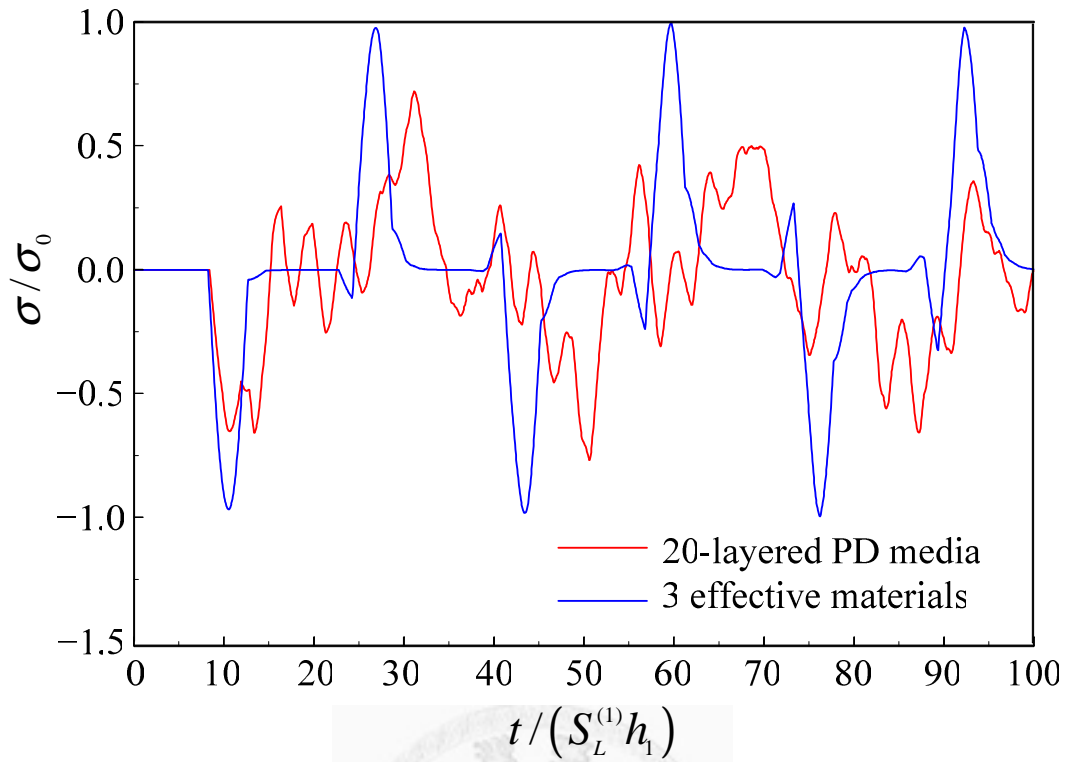


圖 5-9 以 20 層週期分佈型材料(紅線)和 3 層等效材料(藍線)，在脈衝時間 $1 \times 10^{-6}(s)$ 下，整體結構物中點的應力響應。

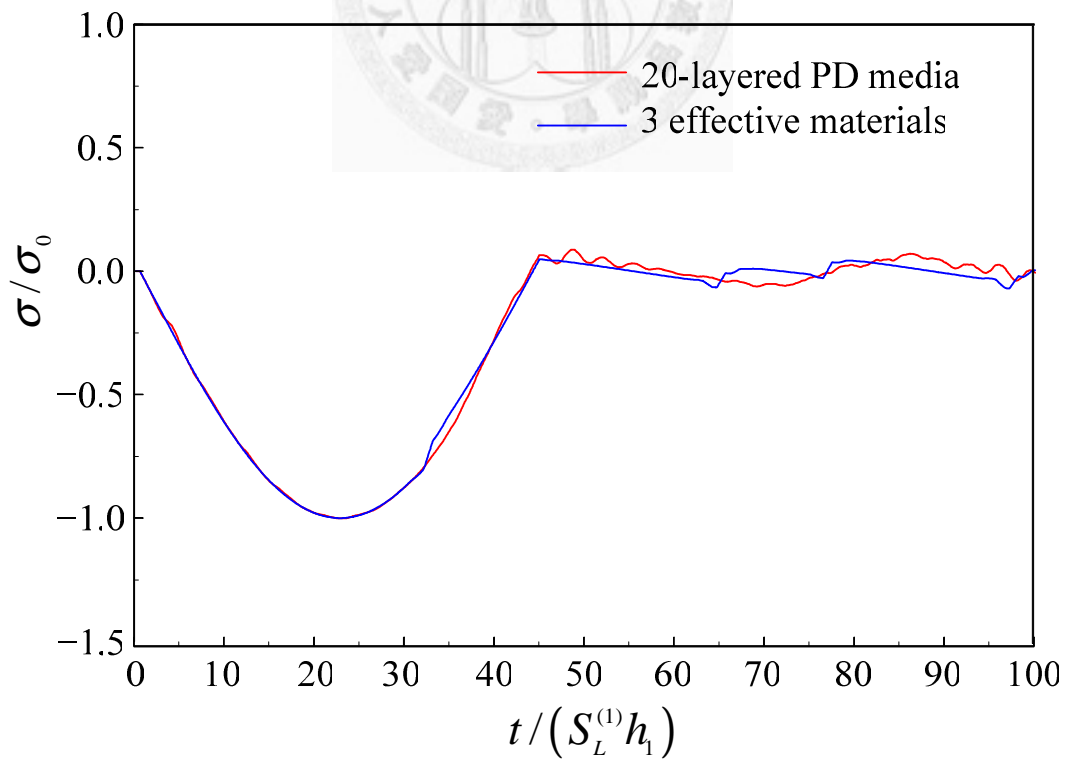


圖 5-10 以 20 層週期分佈型材料(紅線)和 3 層等效材料(藍線)，在脈衝時間 $1 \times 10^{-5}(s)$ 下，第 1 層材料中點的應力響應。

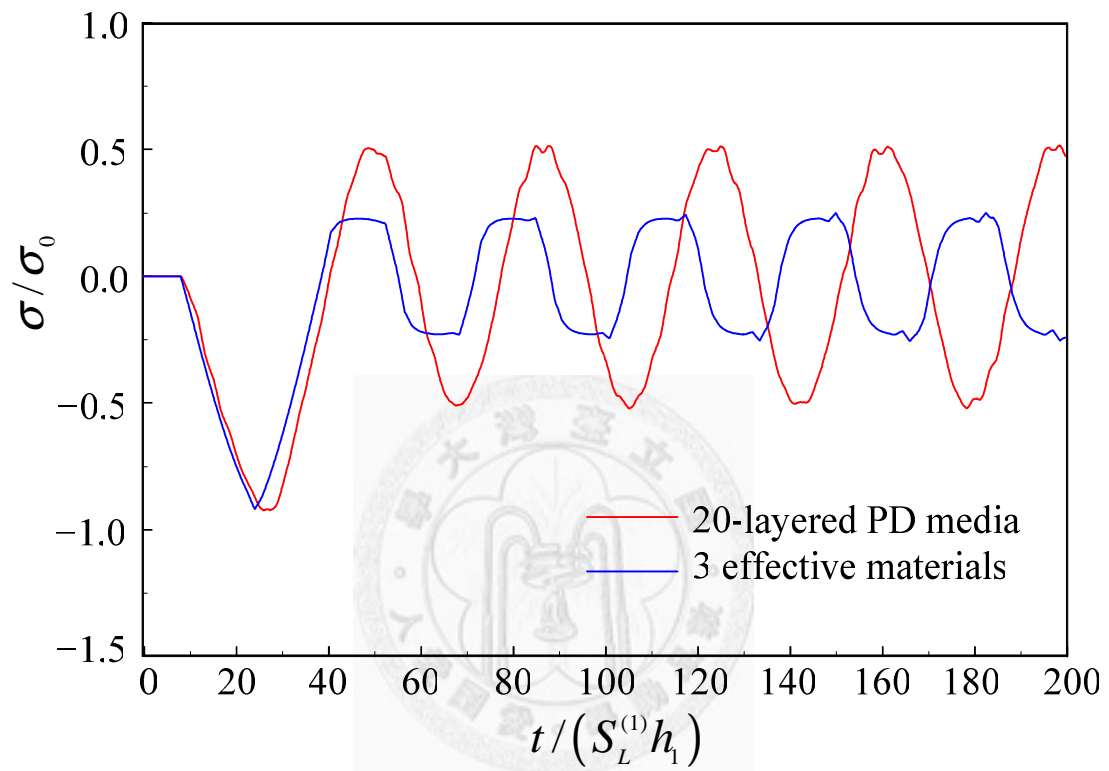


圖 5-11 以 20 層週期分佈型材料(紅線)和 3 層等效材料(藍線)，在脈衝時間 $1 \times 10^{-5}(s)$ 下，整體結構物中點的應力響應。

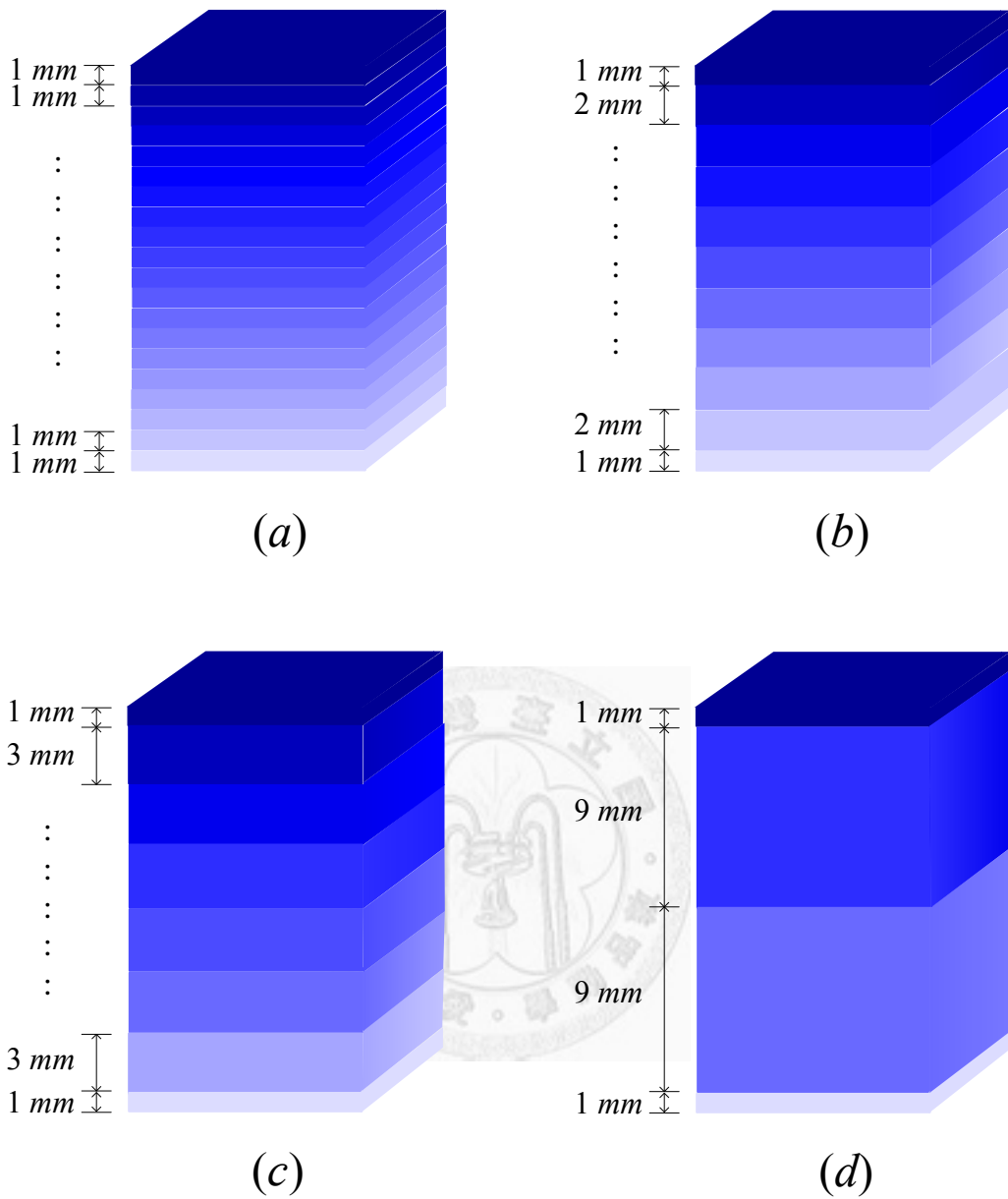


圖 5-12 (a) 20 層連續分佈型材料的結構示意圖; (b) 以 11 層等效材料來簡化 20 層連續分佈型材料的結構示意圖; (c) 以 8 層等效材料來簡化 20 層連續分佈型材料的結構示意圖; (d) 以 4 層等效材料來簡化 20 層連續分佈型材料的結構示意圖。

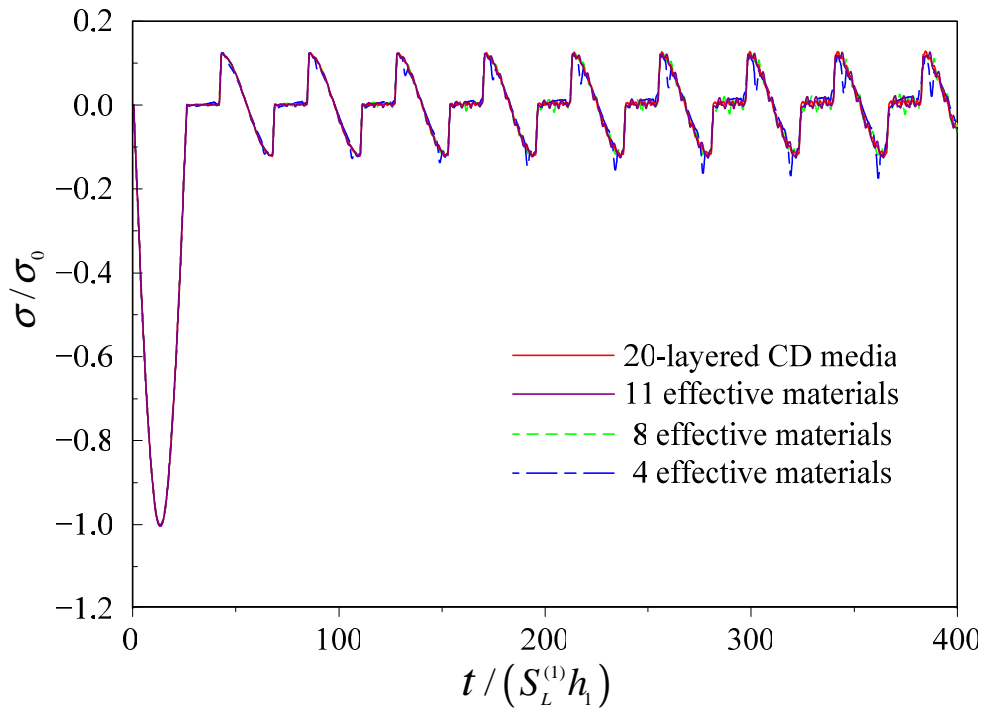


圖 5-13 以 20 層連續分佈型材料，以及 11 層、8 層、4 層等效材料計算當脈衝時間 $1 \times 10^{-6}(s)$ 下，第 1 層材料中點的應力響應。

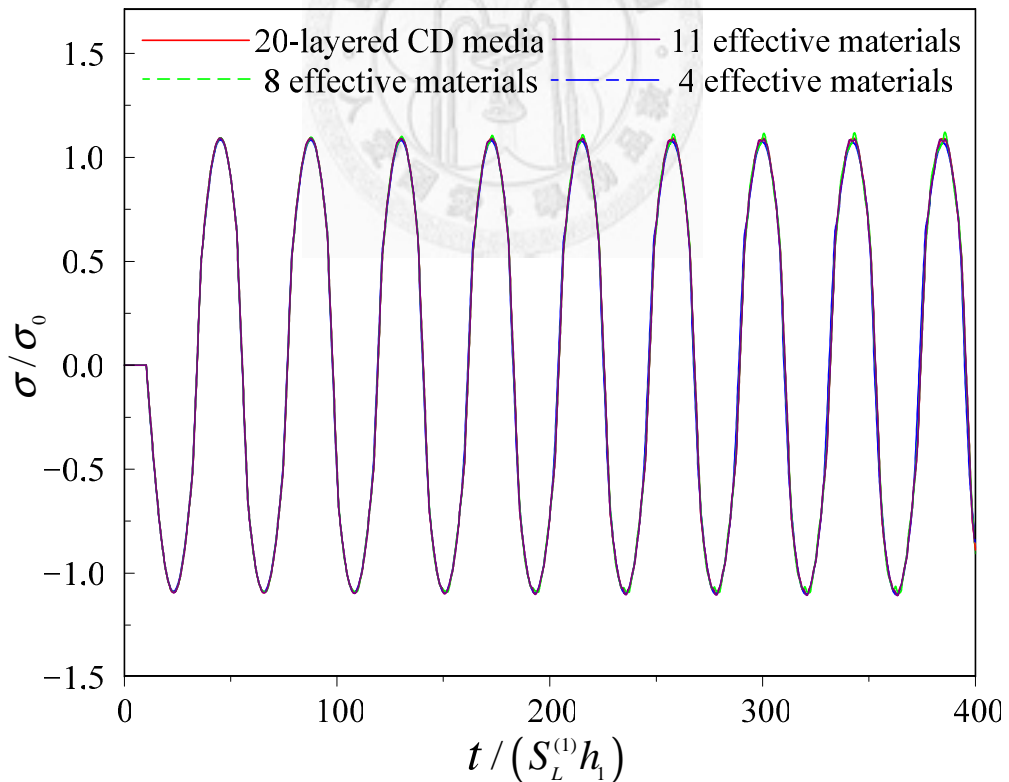


圖 5-14 以 20 層連續分佈型材料，以及 11 層、8 層、4 層等效材料計算當脈衝時間 $1 \times 10^{-6}(s)$ 下，整體結構物中點的應力響應。

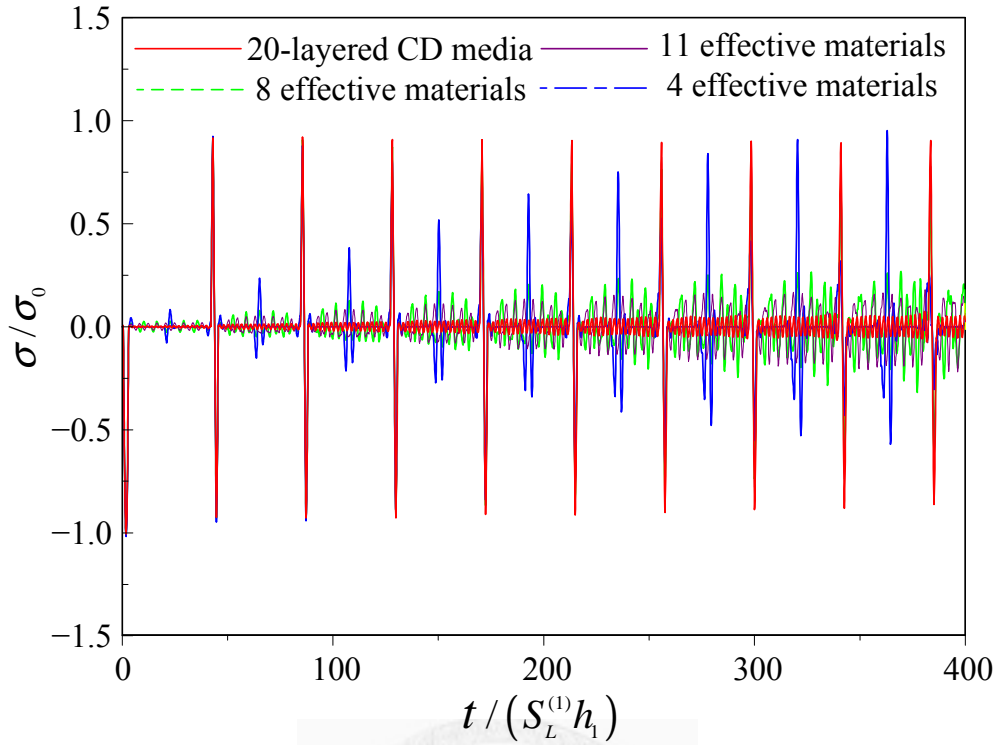


圖 5-15 以 20 層連續分佈型材料，以及 11 層、8 層、4 層等效材料計算當脈衝時間 $1 \times 10^{-7}(s)$ 下，第 1 層材料中點的應力響應。

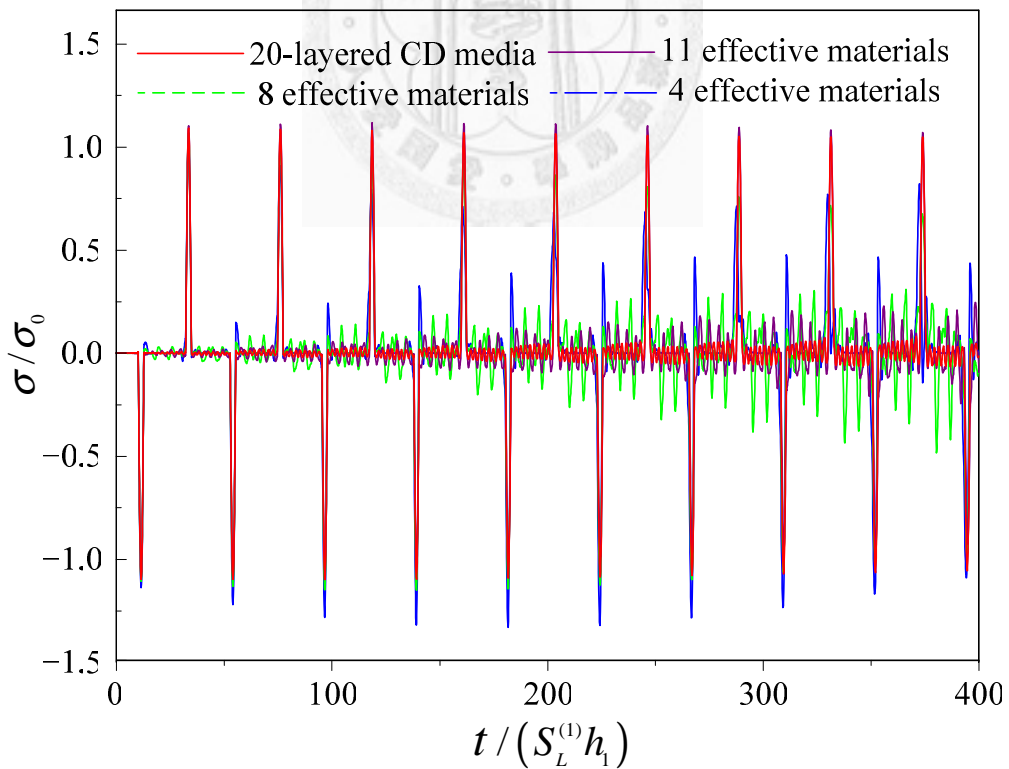


圖 5-16 以 20 層連續分佈型材料，以及 11 層、8 層、4 層等效材料計算當脈衝時間 $1 \times 10^{-7}(s)$ 下，整體結構物中點的應力響應。

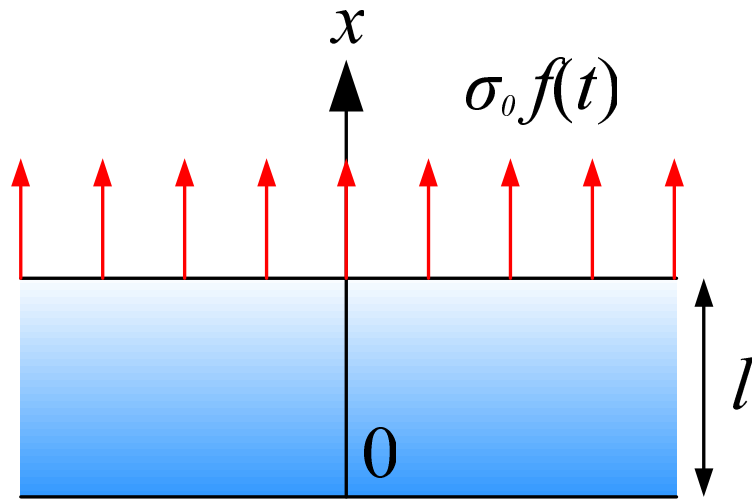


圖 5-17 單層功能性梯度材料的自由邊界條件與幾何結構示意圖。

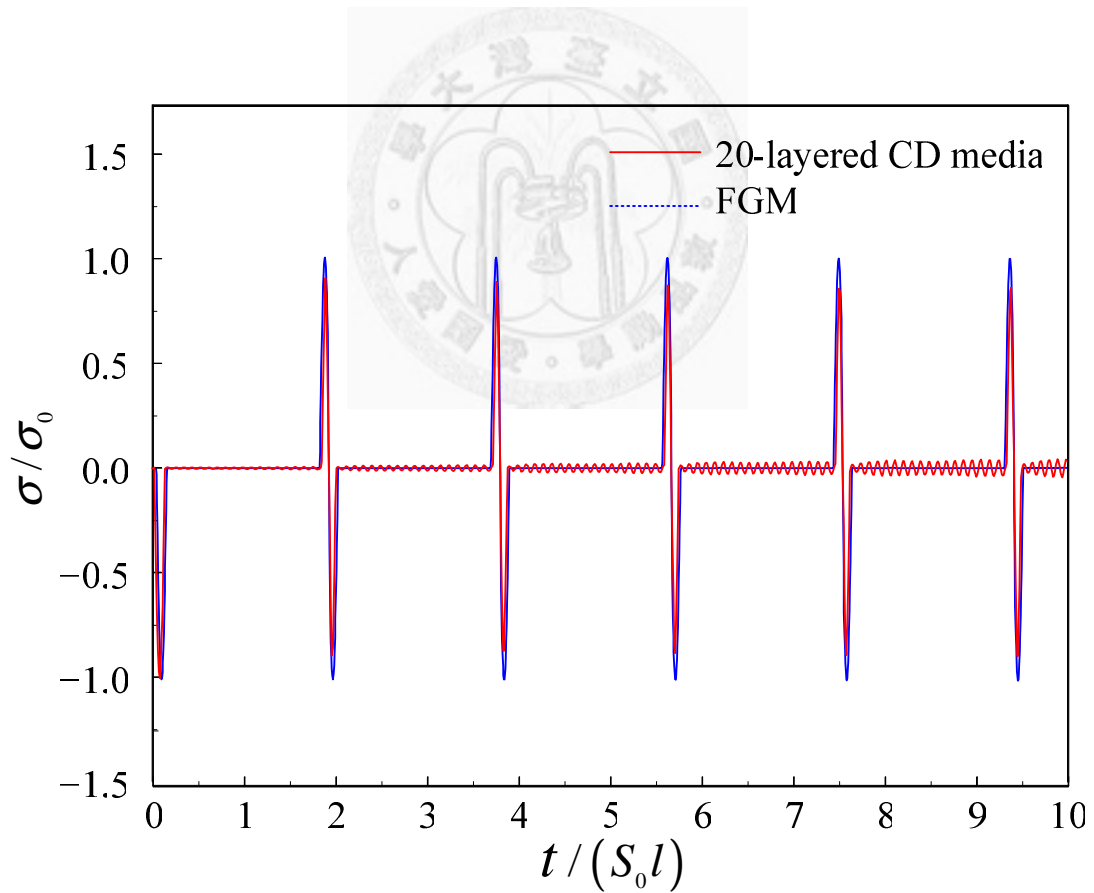


圖 5-18 在脈衝時間 $1 \times 10^{-7}(s)$ 下，20層連續分佈型材料(紅色實線)和功能性梯度材料解(藍色虛線)的第1層中點應力響應。

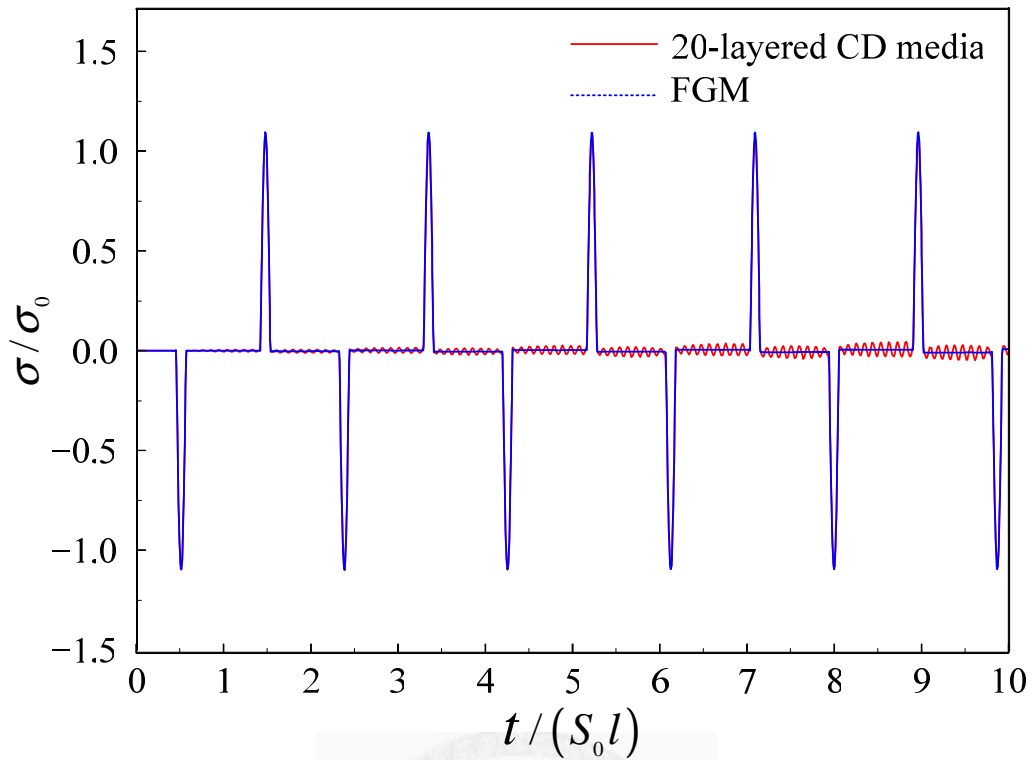


圖 5-19 在脈衝時間 $1 \times 10^{-7}(s)$ 下，20層連續分佈型材料(紅色實線)和功能性梯度材料解(藍色虛線)的整體結構物中點應力響應。

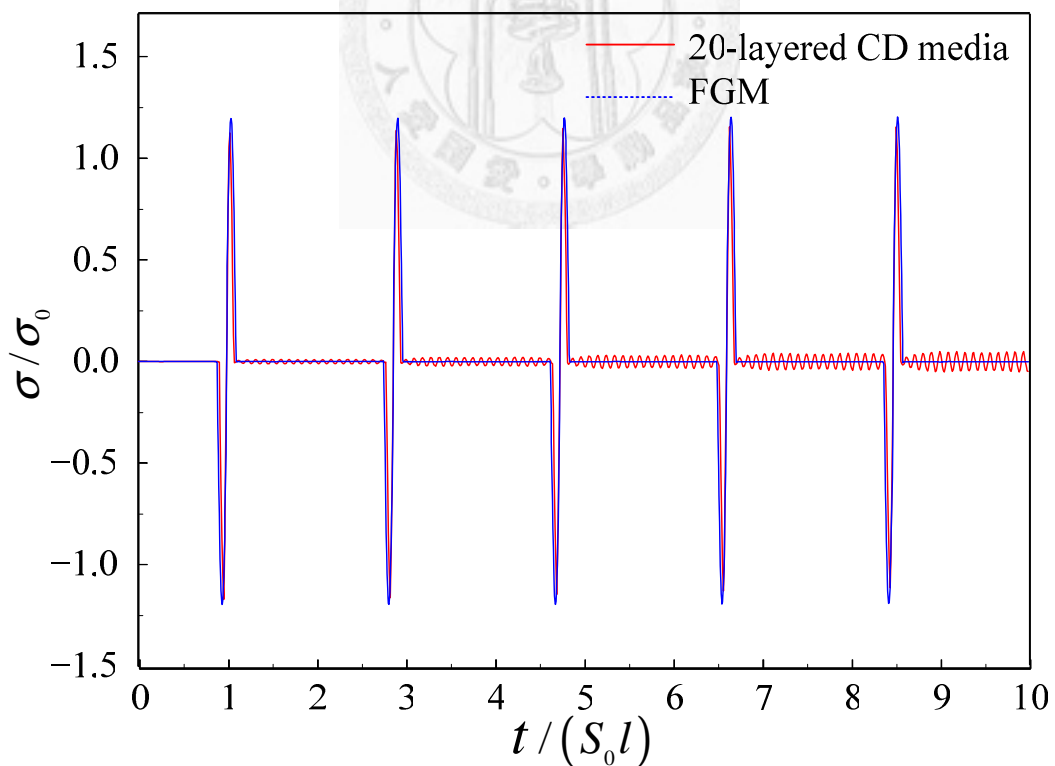


圖 5-20 在脈衝時間 $1 \times 10^{-7}(s)$ 下，20層連續分佈型材料(紅色實線)和功能性梯度材料解(藍色虛線)的最底層中點應力響應。

第六章 結論與展望

6-1 本文成果

當一均佈動力載荷施加在多層域的表面時，不論是均質或是非均質材料，本文詳細分析其域內的暫態彈性波傳理論解析及數值計算。為克服層狀介質在長時間波傳計算上的困難，並且保有高水準的精確度和計算效率，本文也採用混合解析及數值的分析方式，利用矩陣解分析層狀介質的優越性，再搭配拉普拉斯數值逆轉換，可以處理任意層數的長時間暫態波傳計算。綜觀本文之成果，可有以下的結論：

1. 本文提出矩陣形式的廣義射線法為一精確解，將一維層狀介質受動力載荷的問題在轉換域中的波動射線解，以較簡潔矩陣形式的無窮級數來呈現。級數的每一項是由波源向量、界面間的反射與透射係數矩陣乘積、接收矩陣連乘而成，並代表著經過界面相同次數的穿透或反射波同為一組。配合波的次數群組圖，在固定觀測時間下僅需計算有限項數的射線解，即可快速求得暫態響應，在數值計算上有極大的助益。
2. 不執行級數展開，而將轉換域下的矩陣形式解直接採用 Durbin 數值拉普拉斯逆轉換，所得之結果為一混合解析與數值解。其同樣保有波源向量、反射及透射矩陣與接收矩陣組成的物理意義，對於計算任意數目層狀介質的長時間暫態響應，極為適合。唯此法對於響應中的彈性波個數並無從得知。
3. 有限元素解為一純數值解，可以多點計算並快速分析複雜結構物的暫態響應，對於高頻或是急遽變化的響應則會出現數值誤差。當增加切割元素時，可提升其精確度。
4. 本文利用拉普拉斯轉換技巧與 Durbin 數值逆轉換，分析多項式形式的單層功能性梯度材料的一維暫態波傳問題，並將其衍伸至層狀功能性梯度材料。在精確度及計算效率的考量下，此分析方法亦適合計算層狀非均質材料的長時間暫態響應。

5. 將功能性梯度材料類比於連續分佈的層狀均質材料，兩者的數值結果極為近似。層狀均質材料的計算結果，因阻抗不匹配的緣故，會出現震盪的現象，可以藉由模擬層數之增加來改善這些震盪現象。
6. 本文成功地分析三種類型層狀介質的暫態響應：隨機、週期與連續分佈型，並以複合材料力學中的等效材料的簡化方式討論暫態問題的適用性。隨機與週期分佈型，不若連續分佈型的層狀介質適合以等效材料來計算暫態響應。

6-2 未來展望

本文雖提出矩陣形式解配合數值拉普拉斯逆轉換，使得任意數目的層狀介質長時間動態響應的數值計算變的可行，但目前僅限於一維的彈性波傳問題，對於二維與三維的問題未來必須採用二次甚至於三次數值逆轉換來分析。另外，對於層狀功能性梯度材料，僅針對 $m = n + 2$ 時的尤拉方程進行解析， $m \neq n + 2$ 的情況仍需進一步分析與研究。

本文所提出的混合解析與數值的分析方式，亦可應用於不同函數形式的功能性梯度材料，將來亦可採用有限元素法計算多層域的暫態響應來進行模擬。由於數值拉普拉斯逆轉換可以精確計算與時間相關的暫態問題，除本文的應力波傳之外，亦可分析熱傳、聲光波動等相關的研究。

參考文獻

- Abu-Alshaikh, I., Köklüce, B., 2006. One-dimensional transient dynamic response in functionally graded layered media. *J. Eng. Math.* **54**, 17-30.
- Black, M.C., Carpenter, E.W., Spencer, A.J.M., 1960. On the solution of one dimensional elastic wave propagation problems in stratified media by the method of characteristics. *Geophysical Prospecting*. **VIII**, 218-230.
- Brekhovskikh, L.M., 1980. *Waves in layered media*. Academic Press, New York.
- Cai, H., Bao, G., 1998. Crack bridging in functionally graded coatings. *Int. J. Solids Struct.* **35**, 701-717.
- Chiu, T.C., Erdogan, F., 1999. One-dimensional wave propagation in a functionally graded elastic medium. *J. Sound Vibr.* **222**, 453-487.
- Chi, S.H., Chung, Y.L., 2006. Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load-part i: analysis. *Int. J. Solids Struct.* **43**, 3657-3674.
- Cagniard, L., 1939. *Reflexion et Refraction des ondes Seismiques Progressives*, Cauthiers-Villars, Paris; Translated into English and revised by E.A. Flinn and C.H. Dix, 1962. *Reflection and Refraction of Progressive Seismic Waves*, McGraw-Hill, New York.
- Chen, X., Chandra, N., Rajendran, A.M., 2004. Analytical solution to the plate impact problem of layered heterogeneous material systems. *Int. J. Solids Struct.* **41**, 4635-4659.
- Delale, F., Erdogan, F., 1983. The crack problem for a nonhomogeneous plane. *J. Appl. Mech. (Trans. ASME)* **50**, 609-614.
- Durbin, F., 1974. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method. *Computer J.* **17**, 371-376.
- Dubner, R., Abate, J., 1968. Numerical inversion of Laplace transforms by relating them to the finite Fourier cosine transform. *J. Assoc. Comp. Mach.* **15**, 115-123.
- Ewing, W.M., Jardetzky, W.S., Press, F., 1957. *Elastic waves in layered media*. McGraw-Hill, New York.
- Erdogan, F., Wu, B.H., 1995. Crack problems in FGM layers under thermal stresses. *J. Therm. Stresses* **19**, 237-265.

- Haskell, N., 1953. The dispersion of surface waves on multilayered media. *Bull. Seism. Soc. Am.* **43**, 17-34.
- Han, X., Liu, G.R., 2002. Effects of SH waves in functionally graded plate. *Mech. Res. Comm.* **29**, 327-338.
- Han, X., Liu, G.R., Lam, K.Y., 2000. A quadratic layer element for analyzing stress waves in functionally gradient materials and its application in material characterization. *J. Sound Vibr.* **236**, 307-321.
- Hegemier, G.A., Nayfeh, A.H., 1973. A continuum theory for wave propagation in laminated composites. Case 1: propagation normal to the laminates. *ASME J. Appl. Mech.* **40**, 503-510.
- Jabbari, M., Sohrabpour, S., Eslami, M.R., 2002. Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads. *Int. J. Pres. Ves. Pip.* **79**, 493-497.
- Jin, Z.H., Paulino, G.H., 2001. Transient thermal stress analysis of an edge crack in a functionally graded material. *Int. J. Fracture* **107**, 73-98.
- Jin, Z.H., Batra, R.C., 1996. Stresses intensity relaxation at the tip of an edge crack in a functionally graded material subjected to a thermal shock. *J. Therm. Stresses* **19**, 317-339.
- Lamb, H., 1904. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **203**, 1-42.
- Lee, J.M., Ma, C.C., 2010. "Analytical Solutions for an Antiplane Problem of Two Dissimilar Functionally Graded Magnetoelastic Half-planes", *Acta Mechanica*. **212**, 21-38.
- Lee, G.S., Ma, C.C., 1999. Transient elastic waves propagating in a multi-layered medium subjected to in-plane dynamic loadings I. theory. *Proc. R. Soc. London A* **456**, 1355-1374.
- Lee, J.D., Du, S., Liebowitz, H., 1984. Three-dimensional finite element and dynamic analysis of composite laminate subjected to impact. *Comput. Struct.* **19**, 807-813.
- Liu, G.R., Han, X., Lam, K.Y., 1999. Stress waves in functionally gradient materials and its use for material characterization. *Compos. B: Eng.* **30**, 383-394.
- Lundergan, C.D., Drumheller, D.S., 1971. Propagation of stress waves in a laminated plate composite. *J. Appl. Phys.* **42 (2)**, 669-675.
- Ma, C.C., Lee, G.S., 1999. Transient elastic waves propagating in a multi-layered

- medium subjected to in-plane dynamic loadings II. Numerical calculation and experimental measurement. *Proc. R. Soc. London A* **456**, 1375-1396.
- Ma, C.C., Huang, K.C., 1996. Analytical transient analysis of layered composite medium subjected to dynamic inplane impact loadings. *Int. J. Solids Struct.* **33**, 4223-4238.
- Ma, C.C., Liu, S.W., Lee, G.S., 2001. Dynamic response of a layered medium subjected to anti-plane loadings. *Int. J. Solids Struct.* **38**, 9295-9312.
- Ma, C.C., Lee, G.S., 2006. General three-dimensional analysis of transient elastic waves in a multilayered medium. *ASME J. Appl. Mech.* **73**, 490-504.
- Ma, C.C., Lee, J.M., 2009. "Theoretical Analysis of In-plane Problem in Functionally Graded Nonhomogeneous Magnetoelastic Bimaterials", *Int. J. Solids Struct.* **46**, 4208-4220.
- Ma, C.C., Lee, J.M., 2009. "Full-field Analysis of a Functionally Graded Magnetoelastic Nonhomogeneous Layered Half-plane", *CMES-Comp. Model. Eng.* **54**, 87-120.
- Manolis, G.D., Beskos, D.E., 1981. Dynamic stress concentration studies by boundary integrals and Laplace transform. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **17**, 573-599.
- Manolis, G.D., Beskos, D.E., 1980. Thermally induced vibrations of beam structures. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng* **21**, 337-355.
- Mukunoki, I., Ting, T.C.T., 1980. Transient wave propagation normal to the layering of a finite layered medium. *Int. J. Solids Struct.* **16**, 239-251.
- Narayanan, G.V., Beskos, D.E., 1982. Numerical operational methods for time-dependent linear problems. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **18**, 1829-1854.
- Papoulis, A., 1957. A new method of inversion of the Laplace transform. *Quart. Appl. Math.* **14**, 405-414.
- Pao, Y.H., Gajewski, R., 1977. The generalized ray theory and transient responses of layered elastic solids. in: Mason, W.P. (Ed.), *Physical Acoustics*, **13**. Academic Press, New York (Chapter 6).
- Pekeris, C.L., Alterman, Z., Abramovici, F., Jarosh, H., 1965. Propagation of a compressional pulse in a layered solid. *Rev. Geophys.* **3**, 25-47.

- Santare, M.H., Thamburaj, P., Gazoans, G.A., 2003. The use of graded finite elements in the study of elastic wave propagation in continuously non-homogeneous materials. *Int. J. Solids Structs.* **40**, 5621-5634.
- Su, X.Y., Tian, J.Y., Pao, Y.H., 2002. Application of the reverberation-ray matrix to the propagation of elastic waves in a layered solid. *Int. J. Solids Struct.* **39**, 5447-5463.
- Sun, C.T., Achenbach, J.D., Herrmann, G., 1968. Time-harmonic waves in a stratified medium propagating in the direction of the layering. *ASME J. Appl. Mech.* **35**, 408-411.
- Sun, C.T., Achenbach, J.D., Herrmann, G., 1968. Continuum theory for a laminated medium. *ASME J. Appl. Mech.* **35**, 467-475.
- Sun, C.T., Chen, J.K., 1985. On the impact of initially stressed composite laminates. *J. Compos. Mater.* **19**, 490-504.
- Spencer, T.W., 1960. The method of generalized reflection and transmission coefficients. *Geophysics* **25**, 625-641.
- Stern, M., Bedford, A., Yew, C.H., 1971. Wave propagation in viscoelastic laminates. *ASME J. Appl. Mech.* **38**, 448-454.
- Tang, Z., Ting, T.C.T., 1985. Transient waves in a layered anisotropic elastic medium. *Proc. R. Soc. Lond.* **A397**, 67-85.
- Thomson, W.T., 1950. Transmission of elastic waves through a stratified solid medium. *J. Appl. Phys.* **21**, 89-93.
- Ting, T.C.T., Mukunoki, I., 1979. A theory of viscoelastic analogy for wave propagation normal to the layering of a layered medium. *ASME J. Appl. Mech.* **46**, 329-336.
- 李艮生，1998，”三維層狀介質暫態彈性波傳的理論解析、計算及實驗”，國立台灣大學機械工程研究所博士論文。
- 廖雪吟，2007，”應用數值拉普拉斯逆轉換法於壓電材料動力破壞之研究”，淡江大學航空太空工程學系碩士班碩士論文。

附錄 A

式(4-91)~(4-96)中的相關參數表示如下：

$$\alpha_1 = E_0^{(2)} s_+^{(2)} a_2 (-a_1 + 1)^{s_+^{(1)}} - E_0^{(1)} s_+^{(1)} a_1 (-a_1 + 1)^{m_1 + s_+^{(1)} - 1} \quad (\text{A1})$$

$$\alpha_2 = E_0^{(2)} s_+^{(2)} a_2 (-a_1 + 1)^{s_+^{(1)}} - E_0^{(1)} s_-^{(1)} a_1 (-a_1 + 1)^{m_1 + s_-^{(1)} - 1} \quad (\text{A2})$$

$$\alpha_3 = E_0^{(2)} s_-^{(2)} a_2 (-a_1 + 1)^{s_+^{(1)}} - E_0^{(1)} s_+^{(1)} a_1 (-a_1 + 1)^{m_1 + s_+^{(1)} - 1} \quad (\text{A3})$$

$$\alpha_4 = E_0^{(2)} s_-^{(2)} a_2 (-a_1 + 1)^{s_+^{(1)}} - E_0^{(1)} s_-^{(1)} a_1 (-a_1 + 1)^{m_1 + s_-^{(1)} - 1} \quad (\text{A4})$$

$$\alpha_5 = E_0^{(3)} s_+^{(3)} a_3 \left(-\frac{h_2}{h_1} a_2 + 1 \right)^{s_+^{(2)}} - E_0^{(2)} s_+^{(2)} a_2 \left(-\frac{h_2}{h_1} a_2 + 1 \right)^{m_2 + s_+^{(2)} - 1} \quad (\text{A5})$$

$$\alpha_6 = E_0^{(3)} s_+^{(3)} a_3 \left(-\frac{h_2}{h_1} a_2 + 1 \right)^{s_-^{(2)}} - E_0^{(2)} s_-^{(2)} a_2 \left(-\frac{h_2}{h_1} a_2 + 1 \right)^{m_2 + s_-^{(2)} - 1} \quad (\text{A6})$$

$$\alpha_7 = E_0^{(3)} s_-^{(3)} a_3 \left(-\frac{h_2}{h_1} a_2 + 1 \right)^{s_+^{(2)}} - E_0^{(2)} s_+^{(2)} a_2 \left(-\frac{h_2}{h_1} a_2 + 1 \right)^{m_2 + s_+^{(2)} - 1} \quad (\text{A7})$$

$$\alpha_8 = E_0^{(3)} s_-^{(3)} a_3 \left(-\frac{h_2}{h_1} a_2 + 1 \right)^{s_-^{(2)}} - E_0^{(2)} s_-^{(2)} a_2 \left(-\frac{h_2}{h_1} a_2 + 1 \right)^{m_2 + s_-^{(2)} - 1} \quad (\text{A8})$$

$$\begin{aligned} \beta = & \left[\left(\alpha_3 - \frac{s_+^{(1)}}{s_-^{(1)}} \alpha_4 \right) \alpha_7 - \left(\alpha_1 - \frac{s_+^{(1)}}{s_-^{(1)}} \alpha_2 \right) \alpha_8 \right] s_+^{(3)} \left(-\frac{h_3}{h_1} a_3 + 1 \right)^{s_+^{(3)}} \\ & + \left[\left(\alpha_1 - \frac{s_+^{(1)}}{s_-^{(1)}} \alpha_2 \right) \alpha_6 - \left(\alpha_3 - \frac{s_+^{(1)}}{s_-^{(1)}} \alpha_4 \right) \alpha_5 \right] s_-^{(3)} \left(-\frac{h_3}{h_1} a_3 + 1 \right)^{s_-^{(3)}} \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

附錄 B

式(4-112)~(4-117)中的相關參數表示如下：

$$\alpha_1^* = E_0^{(2)} s_+^{(2)} a_2 e^{+p} + E^{(1)} p e^{+p} \quad (\text{B1})$$

$$\alpha_2^* = E_0^{(2)} s_+^{(2)} a_2 e^{-p} - E^{(1)} p e^{-p} \quad (\text{B2})$$

$$\alpha_3^* = E_0^{(2)} s_+^{(2)} a_2 - E_0^{(2)} s_-^{(2)} a_2 \quad (\text{B3})$$

$$\alpha_4^* = E_0^{(2)} s_-^{(2)} a_2 e^{+p} + E^{(1)} p e^{+p} \quad (\text{B4})$$

$$\alpha_5^* = E_0^{(2)} s_-^{(2)} a_2 e^{-p} - E^{(1)} p e^{-p} \quad (\text{B5})$$

$$\alpha_6^* = E^{(3)} p \frac{c^{(1)}}{c^{(3)}} \left(-\frac{h_2}{h_1} a_2 + 1 \right)^{s_+^{(2)}} + E_0^{(2)} s_+^{(2)} a_2 \left(-\frac{h_2}{h_1} a_2 + 1 \right)^{m_2 + s_+^{(2)} - 1} \quad (\text{B6})$$

$$\alpha_7^* = E^{(3)} p \frac{c^{(1)}}{c^{(3)}} \left(-\frac{h_2}{h_1} a_2 + 1 \right)^{s_-^{(2)}} + E_0^{(2)} s_-^{(2)} a_2 \left(-\frac{h_2}{h_1} a_2 + 1 \right)^{m_2 + s_-^{(2)} - 1} \quad (\text{B7})$$

$$\alpha_8^* = E^{(3)} p \frac{c^{(1)}}{c^{(3)}} \left(-\frac{h_2}{h_1} a_2 + 1 \right)^{s_+^{(2)}} - E_0^{(2)} s_+^{(2)} a_2 \left(-\frac{h_2}{h_1} a_2 + 1 \right)^{m_2 + s_+^{(2)} - 1} \quad (\text{B8})$$

$$\alpha_9^* = E^{(3)} p \frac{c^{(1)}}{c^{(3)}} \left(-\frac{h_2}{h_1} a_2 + 1 \right)^{s_-^{(2)}} - E_0^{(2)} s_-^{(2)} a_2 \left(-\frac{h_2}{h_1} a_2 + 1 \right)^{m_2 + s_-^{(2)} - 1} \quad (\text{B9})$$

$$\beta_1^* = \left\{ \left[(\alpha_1^* + \alpha_2^*) \alpha_9^* - (\alpha_4^* + \alpha_5^*) \alpha_8^* \right] e^{+p \frac{c^{(1)} h_3}{c^{(3)} h_1}} - \left[(\alpha_1^* + \alpha_2^*) \alpha_7^* - (\alpha_4^* + \alpha_5^*) \alpha_6^* \right] e^{-p \frac{c^{(1)} h_3}{c^{(3)} h_1}} \right\} \quad (\text{B10})$$

$$\beta_2^* = \left\{ (\alpha_2^* \alpha_7^* - \alpha_5^* \alpha_6^*) e^{-p \frac{c^{(1)} h_3}{c^{(3)} h_1}} - (\alpha_2^* \alpha_9^* - \alpha_5^* \alpha_8^*) e^{+p \frac{c^{(1)} h_3}{c^{(3)} h_1}} \right\} \quad (\text{B11})$$